



**HAL**  
open science

# La transition de "Jamming" dans un milieu granulaire bidimensionnel : Statique et dynamique d'un système athermique modèle

Frederic Lechenault

## ► To cite this version:

Frederic Lechenault. La transition de "Jamming" dans un milieu granulaire bidimensionnel : Statique et dynamique d'un système athermique modèle. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT : . tel-00200902

**HAL Id: tel-00200902**

**<https://theses.hal.science/tel-00200902>**

Submitted on 21 Dec 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

*Université Paris-Sud XI*  
*U.F.R Scientifique d'Orsay*



**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI**

présentée par

**Frédéric LECHENAULT**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI**

Spécialité: PHYSIQUE

*École Doctorale « Constituants élémentaires - Systèmes complexes »*

**La transition de "Jamming"**  
**dans un milieu granulaire bidimensionnel :**  
**Statique et dynamique d'un système athermique modèle**

Devant la Commission

Mme. Elisabeth Charlaix	Examineur
M. Luca Cipelletti	Rapporteur
Mme. Leticia Cugliandolo	Rapporteur
M. Olivier Dauchot	Directeur de thèse
M. Philippe Gondret	Examineur
M. Martin van Hecke	Examineur



# Résumé

La transition de Jamming est un phénomène générique qui se produit lorsqu'une assemblée d'objets cesse brusquement d'évoluer. Cette thèse propose une caractérisation des propriétés statistiques d'un système athermique modèle au voisinage de cette transition. Le système, une couche bidimensionnelle de 8500 cylindres métalliques, est étudié dans deux situations expérimentales. La première consiste à examiner le volume interstitiel piégé dans des empilements verticaux de ces grains. Nous montrons que dans cette situation statique, le système exhibe des corrélations à longue portée et un défaut d'extensivité. La seconde situation consiste à vibrer cette assemblée dans le plan horizontal à différentes densités. Nous identifions la transition de Jamming sur le signal de force à la paroi. Nous étudions les propriétés de diffusion et la relaxation du champ de densité, et montrons qu'une unique longueur caractéristique pilote ces deux quantités. Nous étudions ensuite l'hétérogénéité spatiale de la dynamique au moyen d'une fonction de corrélation à quatre points. Cette fonction vérifie une relation de scaling critique. A la transition, la longueur de corrélation ainsi qu'un temps de relaxation associé au phénomène marginal de super diffusion sont maximum. Nous en concluons que le blocage est une transition de phase dynamique, qui se distingue cependant de la transition vitreuse. Enfin, notre système sature une inégalité de fluctuation dissipation, ce qui nous permet de montrer que l'amplitude des fluctuations spontanées de la dynamique est bien reproduite par sa réponse à une variation de densité, et de conclure que cette dernière pilote les propriétés macroscopiques du système.

**Mots-clés :** Jamming, athermique, hors d'équilibre, empilements granulaires, statique, expérimental, transition de phase, critique, susceptibilité dynamique, verre.





# Abstract

The Jamming transition is a generic phenomenon that occurs when an assembly abruptly ceases to evolve. This thesis proposes a characterization of the statistical properties of a model athermal system in the vicinity of this transition. The system, a bidimensional layer of 8500 metal cylinders, is studied in two experimental situations. The first one consists in examining the interstitial volume trapped in vertical packings of these grains. We show that in this static situation, the system exhibits long range correlations and a lack of extensivity. The second situation consists in vibrating such an assembly in the horizontal plane at various densities. We identify the Jamming transition on the force signal at the boundary. We study the diffusion properties together with the density field relaxation, and show that they both are governed by the same length scale. We then study the spatial heterogeneity of the dynamics by means of a four-point correlation function, which is found to verify critical scaling. The correlation length and a relaxation time scale associated with marginal super diffusion are maximum across the transition. We conclude that Jamming is a dynamical phase transition that nevertheless differs from the glass transition. Finally, our system is found to saturate a fluctuation dissipation inequality, which shows that the amplitude of spontaneous fluctuations of the dynamics is reproduced by its response to a change in density. We conclude that the latter governs the macroscopic properties of the system.

**Key-words :** Jamming, athermal, out of equilibrium, granular packings, statistical, experimental, critical, dynamical susceptibility, glass.



# Remerciements







# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Problématique</b>	<b>5</b>
1.1 La transition de Jamming . . . . .	5
1.1.1 Présentation générale . . . . .	5
1.1.2 Le cas des milieux granulaires . . . . .	7
1.2 Spécificité de la matière granulaire . . . . .	10
1.2.1 Définition . . . . .	10
1.2.2 Description mécanique, description statistique . . . . .	12
1.2.3 Physique statistique dans les systèmes athermiques . . . . .	14
1.3 Le point de vue du déblocage . . . . .	16
1.3.1 Rigidité dans les solides amorphes . . . . .	17
1.3.2 Modes mous . . . . .	19
1.3.3 Rôle de la friction . . . . .	20
1.3.4 Quelques résultats . . . . .	21
1.4 Le point de vue du blocage : analogie avec les verres . . . . .	26
1.4.1 Éléments de phénoménologie des verres . . . . .	26
1.4.2 Analogie macroscopique . . . . .	32
1.4.3 Analogie microscopique . . . . .	34
1.5 Problématique . . . . .	38



TABLE DES MATIÈRES

1.5.1	Existence d'une description thermodynamique ? . . . . .	38
1.5.2	Quels sont les paramètres intensifs pertinents ? . . . . .	39
1.5.3	Quelle est la nature de la transition de blocage ? . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Cas statique : Statistique du volume libre dans les empilements</b>	<b>43</b>
2.1	Motivation et contexte . . . . .	44
2.1.1	Motivation . . . . .	44
2.1.2	Contexte théorique . . . . .	46
2.2	Dispositif expérimental et Résultats . . . . .	51
2.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	51
2.2.2	Résultats . . . . .	54
2.3	Discussion . . . . .	65
2.3.1	Origine physique d'écart à l'extensivité . . . . .	65
2.3.2	Interprétation des paramètres $\chi_e$ et $\eta_e$ . . . . .	68
2.3.3	Conséquences pour le formalisme thermodynamique . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Cas dynamique : A la traversée de la transition de blocage</b>	<b>73</b>
3.1	Dispositif et phénoménologie . . . . .	74
3.1.1	Dispositif expérimental . . . . .	74
3.1.2	Phénoménologie . . . . .	92
3.2	Relaxation : Diffusion et corrélations temporelles . . . . .	111
3.2.1	Propriétés de diffusion . . . . .	111
3.2.2	Corrélation temporelle du champ de densité . . . . .	126
3.3	Relaxation : Hétérogénéités spatiales . . . . .	139
3.3.1	Hétérogénéités dynamiques . . . . .	139
3.3.2	Relation de fluctuation dynamique . . . . .	159
3.4	Discussion . . . . .	172
3.4.1	Résultats . . . . .	172

TABLE DES MATIÈRES

3.4.2	Interprétation . . . . .	179
3.4.3	Perspectives . . . . .	187
	<b>Conclusion</b>	<b>191</b>
	<b>Annexe</b>	<b>195</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>199</b>

## TABLE DES MATIÈRES

# Introduction

*To see a world in a grain of sand, and a heaven in a wild flower.*

William Blake, *Auguries of Innocence*

Quand on verse un verre de sucre en poudre sur une table, le sucre s'écoule, puis se bloque pour former un tas. Quand la densité de véhicule devient trop élevée sur un axe routier, le trafic se bloque et il se forme un embouteillage. Quand on refroidit rapidement un liquide, celui-ci se bloque pour former un verre. Ces situations, apparemment très différentes, font pourtant toutes les trois appel à la notion de blocage, ou "Jamming". Cette transition entre un état "mou" et un état "rigide" s'accompagne dans ces trois situations d'une chute violente de la mobilité des constituants et d'une variation de densité. Ces caractéristiques communes suggèrent que le phénomène de blocage est très générique et piloté par des mécanismes microscopiques semblables, malgré la diversité des situations dans lesquelles il a lieu.

Dans le cas des liquides thermiques, le blocage mécanique est associé à la transition vitreuse, qui se traduit par une augmentation spectaculaire de la viscosité sur une petite plage de température. A la traversée de cette transition, un liquide devient un solide amorphe, c'est à dire non cristallin. En fait, une grande majorité des objets solides qui nous entourent sont amorphes : le verre dont sont faites les vitres et les récipients, mais

## INTRODUCTION

aussi tous les plastiques, l'essentiel des pierres, et une grande variété de métaux, en particulier l'acier trempé. Pourtant, malgré les enjeux industriels énormes qu'ils suscitent, la compréhension de ces solides désordonnés est à ce jour encore très incomplète, et l'activité de recherche visant à élucider leur propriétés et la nature de la transition qui les amène dans l'état solide est extrêmement abondante. Ces questions font partie des zones d'ombre de la physique moderne.

Un autre sujet de recherche, lui aussi très vivace, est l'étude des matériaux granulaires. Ces matériaux sont très répandus dans la nature, puisqu'il recouvrent de vastes régions de notre planète sous forme de sable. Ils sont d'autre part utilisés systématiquement dans l'industrie, puisqu'ils se prêtent bien au transport, au stockage et au conditionnement d'une grande variété de matériaux. Les industries agro-alimentaires, pharmaceutiques et la construction en font largement usage. Cependant, la compréhension du comportement mécanique de ces systèmes d'un point de vue microscopique, bien qu'essentielle dans de nombreuses problématiques industrielles, est elle aussi très lacunaire. Une des lacunes les plus sérieuses concerne les conditions d'existence et la stabilité des états liquides et solides, ainsi que les mécanismes qui pilotent la transition entre ces états.

Une des difficultés provient du fait que ces systèmes sont dits *athermiques* puisque leurs constituants élémentaires ne sont pas soumis à l'agitation thermique. Cette propriété implique que les outils d'usage pour appréhender les systèmes constitués d'un grand nombre d'objets en interaction, comme les liquides ou les solides habituels, ne permettent pas *a priori* de les décrire convenablement. Elle impose par ailleurs que toute dynamique de ces systèmes soit hors d'équilibre thermodynamique, puisque il faut leur communiquer de l'énergie sous forme mécanique pour provoquer leur évolution. Il existe de nombreux systèmes dont la description est rendue difficile par leur caractère athermique. La turbulence, un banc de poissons, ou un réseau de neurones en sont des exemples. L'élaboration d'outils statistiques adaptés à une telle description constitue donc un enjeu scientifique de premier ordre pour appréhender la complexité de ces phénomènes.

## INTRODUCTION

Enfin, il a récemment été mis à jour une profonde analogie entre les matériaux granulaires denses et les liquides thermiques au voisinage de leur transition vitreuse. Cette analogie est remarquable, puisqu'en plus de reproduire les comportements macroscopiques spécifiques aux verres, les matériaux granulaires denses sont sujets à des processus microscopiques de relaxation extrêmement semblables à ceux qui ont pu être observés dans les liquides au voisinage de leur transition. Cette analogie suggère d'une part que les comportements des systèmes thermiques et athermiques ne sont pas si éloignés, et qu'on peut espérer s'inspirer des outils de la physique statistique pour les décrire, et d'autre part qu'ils constituent un système modèle de premier choix pour élucider les mécanismes responsables de la transition de blocage. Cette thèse consiste donc à explorer ces deux suggestions.

Ce manuscrit s'organise donc en trois chapitres. Dans le premier, nous détaillons les spécificités des matériaux granulaires, et nous rappelons un ensemble de résultats concernant leur transition solide/liquide. Du point de vue du déblocage, nous discutons de la rigidité dans les solides amorphes et du rôle de la friction, et nous présentons quelques résultats existants. Du point de vue du blocage nous précisons l'analogie avec les verres thermiques. Dans le second chapitre, nous présentons une étude expérimentale des propriétés statistiques du volume interstitiel piégé dans un empilement granulaire modèle. Nous explicitons nos motivations, puis nous présentons nos résultats expérimentaux, et enfin nous discutons ces résultats. Le troisième chapitre est celui auquel nous avons consacré le plus d'énergie. Nous y présentons les résultats que nous avons obtenus dans un second dispositif expérimental, et qui nous a permis d'étudier la naissance de la rigidité dans le même milieu granulaire modèle. Après avoir expliqué le dispositif, nous présentons les propriétés de relaxation de l'assemblée de grains en fonction de sa densité, puis nous étudions les corrélations spatiales de leur dynamique. Enfin, nous tentons d'élaborer une description de l'ensemble de nos résultats dans le cadre général des problèmes de satisfaction de contraintes.

## INTRODUCTION

# Chapitre 1

## Problématique

### 1.1 La transition de Jamming

#### 1.1.1 Présentation générale

L'objet de ce travail est l'étude d'un matériau granulaire modèle au voisinage de sa transition de "Jamming", ou transition de blocage.

Cette transition est un phénomène très générique qui se manifeste par le "gel" du système. Par exemple, si on verse un volume donné de sable sur une table, l'écoulement s'arrête spontanément et on obtient un tas mécaniquement stable. De même, une assemblée colloïdale [1, 2, 3] est sujette à une telle transition lorsque la fraction volumique de colloïdes devient grande. Le système passe alors d'un état liquide à un état pâteux.

De nombreuses autres situations présentent une telle transition. Par exemple, les mousses coulent quand elles subissent un cisaillement suffisant, et cessent de s'écouler quand le cisaillement appliqué tombe en deçà d'une contrainte seuil [4]. De même, une émulsion comporte un régime, à basse concentration, où les gouttelettes interagissent peu et où la réponse mécanique du matériau est pilotée par la matrice. Lorsque la concentration des gouttes devient grande, ce système transite vers une situations dans laquelle les effets



## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

stériques entre gouttes prennent le relai de la réponse mécanique et en changeant dramatiquement les propriétés [5]. Bien sûr, à peu près n'importe quel liquide thermique, s'il est refroidit suffisamment vite, se gèle dans un état désordonné qui n'est pas son minimum d'énergie cristallin. Cette transition, appelée transition vitreuse, est elle aussi extrêmement générique et présente de nombreuses similarités avec la transition de blocage. Nous développerons ce point dans la suite. Il faut cependant remarquer que les verres peuvent avoir des compositions très variées. Un simple liquide de sphères dures, ou des systèmes plus élaborés comme les pâtes [6] et les polymères [7], exhibent cette transition.

D'autres systèmes plus éloignés de la physique proprement dite sont sujets à un tel blocage. Un exemple dont nous avons tous fait l'expérience est celui des embouteillages. Lorsque la concentration en véhicules devient trop élevée sur un axe routier, il y a formation d'agrégats qui ralentissent considérablement le débit sur cet axe. Le mot embouteillage se traduit d'ailleurs en anglais par "traffic jam" [8, 9]. Un autre exemple, apparemment encore plus éloigné des situations qui nous intéressent ici mais dont la phénoménologie est en fait très semblable, est celui des problèmes de satisfaction de contraintes et d'optimisation sous contrainte. Ces situations, comme le repliement des protéines [10], kSAT [11] ou encore les problèmes de coloriage de graphes [12], présentent d'un point de vue formel une analogie frappante avec les systèmes physiques qui se bloquent, et les outils qui ont été développés pour les étudier confirment la pertinence de cette analogie [13, 14].

Le blocage se traduit par un ralentissement très abrupt de la dynamique du système, voir son arrêt complet. Ce ralentissement s'accompagne généralement de l'apparition d'une certaine forme de rigidité. Cependant, il n'existe pas de définition générale de cette transition. Même dans le cas très étudié des verres thermiques, la définition couramment admise de transition vitreuse est purement phénoménologique. La température de transition vitreuse  $T_g$  d'un liquide est en effet définie comme la température à laquelle sa viscosité atteint  $10^{13}$  Poises, ou de manière tout aussi *ad hoc* la température à laquelle le

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

temps de relaxation de sa structure atteint  $100s$ . On aimerait donc disposer d'une caractérisation plus générique de cette transition qui soit justifiée théoriquement, comme dans le cas des transitions thermodynamiques usuelles, et c'est à cette caractérisation que se propose de contribuer notre travail.

La transition de blocage se manifeste dans un système granulaire par l'apparition d'un module élastique de cisaillement, et donc d'une contrainte seuil au delà de laquelle le comportement du matériau devient plastique, c'est à dire que sa déformation devient irréversible [15]. Ce critère permet de caractériser de manière macroscopique et mécanique la transition liquide/solide dans de nombreux systèmes. Il souffre malheureusement de quelques problèmes. En effet, il est difficile à étendre à toutes les situations évoquées plus haut. D'une part, la définition d'une rigidité au voisinage de la transition vitreuse est ambiguë, parce que la viscosité d'un tel système, comme nous allons le voir, augmente de plusieurs ordres de grandeur pour une petite variation de température, et que sa réponse dépend de l'échelle de temps à laquelle on la mesure [16]. D'autre part, les situations plus abstraites comme les problèmes de satisfaction de contraintes sont a priori hors d'atteinte d'un tel critère mécanique.

Ainsi, une définition générique de la transition de blocage reste à trouver. Pour cela, il est nécessaire de mieux comprendre les mécanismes à l'origine de l'universalité qui se dégage de la phénoménologie de cette transition dans les diverses situations où elle se manifeste.

### **1.1.2 Le cas des milieux granulaires**

Nous avons choisi d'étudier cette transition dans un système granulaire. Avant de détailler les spécificités de ces matériaux et ce qu'on sait de leur transition de blocage, nous aimerions souligner les enjeux associés à leur compréhension sur les plans industriel et scientifique.

**Enjeux industriels** La matière granulaire sèche, au delà de sa présence naturelle extrêmement abondante sous forme de sable, offre de nombreux avantages industriels, en particulier du point de vue de la production, du stockage et du transport, ce qui rend son usage systématique et lui confère la seconde place en termes de volumes transportés par l'homme, juste après l'eau. On pense en particulier aux industries agro-alimentaire, pharmaceutique, ou encore à la construction. Nous allons illustrer les problèmes associés à la rigidité de ces matériaux aux travers de deux exemples.

Le premier concerne le stockage des grains. Lorsqu'un silo dont la hauteur est grande devant sa largeur typique est rempli de grains, le poids apparent mesuré au fond sous-estime largement le poids total de grains qu'il contient. C'est l'effet Janssen [17], aujourd'hui bien compris [18]. Il est dû à l'apparition de voûtes dans le réseau des forces qui s'établissent dans le matériau lors de sa création. Ces voûtes transforment la quasi totalité du poids des grains en forces sur les parois latérales, et le poids mesuré au fond correspond à celui des grains sur une hauteur équivalente de l'ordre de l'extension horizontale typique du silo. Cet effet, déterminant en particulier dans les problématiques de dimensionnement de contenants pour les matériaux granulaires, a des contreparties dynamiques [19] qui sont encore mal comprises.

Le deuxième exemple est celui de la fragilité des assemblées granulaires en général. Ce type de matériau est largement utilisé dans la construction de nombreux ouvrages comme les digues ou les remblais. Le compromis entre porosité et rigidité est très subtil et lui aussi très mal compris. Cette compréhension est pourtant déterminante pour parvenir à des prescriptions réalistes sur le dimensionnement de ces ouvrages. Bien sûr, les ingénieurs n'ont pas attendus les physiciens pour parvenir à de telles prescriptions, mais les mécanismes microscopiques qui pilotent l'apparition d'une rigidité dans une assemblée de grains ne sont pas compris. Nous reviendrons longuement sur cette question puisqu'elle est au coeur de la seconde partie de notre travail.

Il y a donc une vraie demande de solutions du coté de l'industrie, demande qui est

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

comme nous allons le voir relayée par une recherche scientifique abondante et vivace.

**Enjeux scientifiques** Malgré quelques précurseurs de génie comme Coulomb ou Reynolds, les physiciens ne se sont appropriés les problématiques liées aux matériaux granulaires qu'après guerre, notamment avec les travaux de Bagnolds sur les écoulements [20]. L'engouement des physiciens pour le sujet a révélé une grande richesse phénoménologique et a mis à jour une vaste gamme de problèmes de physique difficiles. Le plus frappant de ces problèmes est celui de l'angle de talus. Il n'existe pas à ce jour de théorie qui prédise l'angle de repos d'un tas de grains sur une surface plane à partir des caractéristiques élémentaires des grains ! Une autre problématique scientifique à laquelle a été dévouée beaucoup d'énergie ces vingt dernières années est celle des avalanches. Là encore, la compréhension de ce phénomène, largement répandu dans la nature et qui pose des problèmes pratiques réels, est loin d'être complète. Ces deux problèmes sont liés à la transition solide/liquide de ces systèmes que nous nous proposons d'étudier.

Le défi scientifique posé par les milieux granulaires est de taille, et s'avère en fait au coeur de questions plus générales de physique classique. Nous allons pour préciser ce point évoquer deux situations dont la matière granulaire constitue un paradigme.

La première est celle des systèmes athermiques. Ces systèmes sont par définition décrits par un nombre macroscopique de degrés de liberté qui ne se couplent pas au bain thermique. La turbulence, ou encore une colonie de bactéries, en sont des exemples. Une assemblée macroscopique de grains secs est un système athermique *a priori* très simple, et constitue donc un bon système modèle pour aborder l'élaboration d'une description systématique de la physique dont ces systèmes sont le siège.

La seconde classe de système à laquelle appartient la matière granulaire est celle des systèmes désordonnés. L'influence du désordre est relativement bien comprise dans le cas d'un désordre gelé, comme dans les verres de spin, pour lesquels la méthode des répliques permet d'explicitier le diagramme de phase et de comprendre la nature des transitions

pilotées par la présence de ce désordre [21, 22]. Au contraire, lorsque le désordre évolue dynamiquement et de manière endogène, comme dans les liquides, sa prise en compte est plus difficile et l'origine des propriétés notamment de rigidité mais aussi de relaxation des solides obtenus au delà de la transition vitreuse, appelés verres structuraux, est sujette à d'intenses débats dans la communauté [23]. Là encore, la matière granulaire contient ce type de désordre et constitue une réalisation expérimentale de système désordonné particulièrement accessible à l'observation.

On comprend donc qu'au delà des questions spécifiques à tel ou tel système granulaire particulier, ce type de matériau se situe à la convergence de problématiques scientifiques d'actualité dont la portée dépasse de loin la simple mécanique, et qui interrogent en particulier les fondements de la physique statistique. Il constitue de ce point de vue un système modèle bien adapté pour aborder ces problématiques.

## 1.2 Spécificité de la matière granulaire

Nous allons maintenant préciser ce que nous entendons par matériau granulaire. Nous détaillerons les descriptions existantes de ces systèmes, en soulignant la nécessité d'une approche statistique à la compréhension unifiée de leur phénoménologie. Nous présenterons enfin différentes approches permettant d'envisager une telle description.

### 1.2.1 Définition

Les matériaux granulaires sont caractérisés par trois propriétés principales. D'abord, ils sont composés d'un très grand nombre de constituants élémentaires macroscopiques, les grains. Dès l'antiquité, un tel nombre impressionnait les plus grands esprits. Archimède, dans "L'Arénaire", invente un système moderne de numération suffisamment général pour pouvoir envisager un tel décompte. "Certains hommes estiment, roi Gélon, que le nombre de grains de sable est infiniment grand, et j'entends non seulement le

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

sable de Syracuse et du reste de la Sicile, mais encore celui qui est répandu dans toute la terre, habitée ou inculte. D'autres, tout en ne considérant pas ce nombre comme infiniment grand, pensent qu'il n'existe pas de nombre exprimable assez grand pour dépasser la quantité des grains de sable". Pour se donner une idée de ce qu'on entend par "grand" ici, on peut évaluer l'ordre de grandeur du nombre de grains contenus dans un litre de sable de plage. Un grain typique a un rayon  $r = 100\mu m$ , soit un volume  $V_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx 4.10^{-12}m^3$ . Si on remplit naïvement notre bouteille, la fraction volumique occupée par les grains est typiquement de l'ordre de  $\phi \approx 60\%$ . On obtient donc  $N = 0.6 * 10^{-3}/4.10^{-12} \approx 10^8$  grains. Ensuite, ces systèmes ne sont pas soumis à l'agitation thermique. Ce sont des systèmes *athermiques*. En effet, à température ambiante  $T = 20^\circ C = 293.15^\circ K$ , l'énergie thermique élémentaire par degré de liberté vaut  $E_T = k_B T = 1,38.10^{-23} * 293.15 \approx 4.10^{-21}$  Joules. Or l'énergie caractéristique d'un grain au repos peut être évaluée par  $E_g = \rho V_g g r = 2.10^3 * 4.10^{-12} * 9.81 * 10^{-4} \approx 4.10^{-10}$  Joules. Plus de dix ordres de grandeur séparent ces énergies, et on comprend que l'agitation thermique n'est pas suffisante pour mettre en mouvement un grain individuel. Enfin, ces systèmes présentent dans les situations courantes différentes sources de désordre. D'abord, contrairement aux atomes d'un solide, les grains d'une assemblée granulaire typique sont tous *géométriquement* différents. Ensuite, ils peuvent avoir des *tailles* très variées. Enfin, même dans une situation idéalisée où les grains sont des sphères d'une seule taille, la friction statique déterminante dans la stabilité des empilements est une force à seuil qui peut prendre différentes valeurs pour une même configuration géométrique des grains. On comprends donc que d'une part, un empilement granulaire est génériquement amorphe, et que d'autre part, la simple donnée des positions des grains ne suffit pas à le décrire.

### 1.2.2 Description mécanique, description statistique

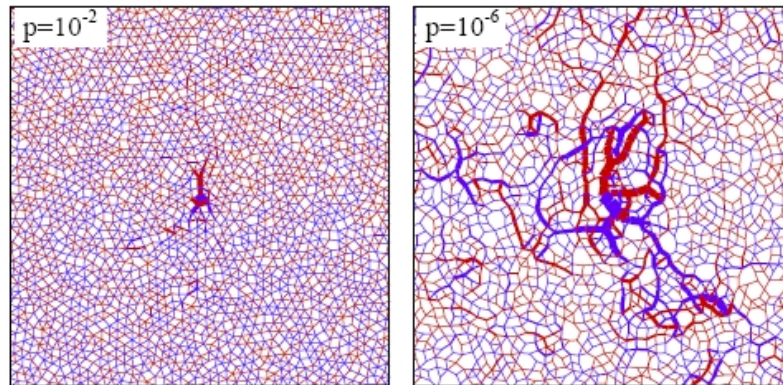
Un milieu granulaire se présente naturellement sous différents états macroscopiques : un tas de sable est un solide, mais le sable peut s'écouler et s'apparente alors à l'état liquide. S'il est peu dense et fortement agité - par exemple en suspension dans un écoulement d'air - il se trouve dans un état macroscopique qui s'apparente à un gaz. Une description mécanique de ces matériaux distingue naturellement ces différents états. Dans l'état gazeux, cette approche mécanique, qui donne lieu à une hydrodynamique, peut être dérivée d'une théorie statistique basée sur l'équation de Boltzmann, appelée théorie cinétique [24, 25, 26]. Dans ces situations, la notion de température cinétique est bien adaptée à la caractérisation macroscopique des propriétés du système ainsi qu'à leur fluctuations. Au contraire, dans l'état liquide, la rhéologie de ces systèmes se situe à un niveau de compréhension phénoménologique qui manque de fondements statistiques ; de même, la mécanique de l'état solide peut être décrite par des approches du type milieu effectif qu'on ne sait pas clairement relier aux propriétés microscopiques des grains. C'est donc à ces aspects statistiques de la description des états solides et liquides que nous allons nous intéresser dans ce travail.

Comme nous l'avons dit, la première situation qui a reçu l'attention des physiciens est celle dans laquelle un matériau granulaire se trouve en écoulement. L'écoulement peut être intermittent, gouverné par des avalanches successives [27, 28, 29], ou continu. De nombreux travaux ont été dévoués à la caractérisation des écoulements continus, mais il a fallu attendre 2004 pour qu'émerge un début de compréhension unifiée des données disponibles. Cette compréhension résulte d'un effort collectif et s'est traduite par l'identification d'une loi rhéologique pour un fluide granulaire dense en écoulement stationnaire [30]. Cette rhéologie fait cependant intervenir une longueur caractéristique de cohérence, qui doit être extraite des données, et dont l'origine statistique n'est pas déterminée. Nous reviendrons sur ce point dans la conclusion de ce travail.

Du point de vue de la mécanique, la phase solide d'un système granulaire se com-

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

porte de manière élastique aux grandes échelles de longueur et aux petites échelles de temps. Bien entendu, l'élasticité en question n'est pas linéaire, et la forme précise de la relation contrainte/déplacement est un sujet de recherche actif [31]. Cependant, il a été montré numériquement [32, 33] que la réponse du réseau des forces entre particules à une augmentation locale de pression est hétérogène en deçà d'une certaine échelle de longueur. Cette longueur dépend de la pression de confinement de l'assemblée. Ce phénomène est illustré par la figure 1.1. L'approche mécanique échoue donc pour décrire le comportement microscopique du solide granulaire.



**FIG. 1.1:** Variation de l'intensité des forces normales à la suite d'un chargement ponctuel pour deux pressions différentes dans un système bidimensionnel de disques non frottants en contact de Hertz. Les lignes bleues (rouges) indiquent un changement négatif (positif) des forces, et leur épaisseur indique l'intensité du changement [32, 33]. On remarque que l'hétérogénéité de la réponse est d'autant plus grande que la pression est petite.

Cette description mécanique des matériaux granulaire, au delà de sa difficulté, ne propose malheureusement pas de cadre conceptuel général qui permette une compréhension unifiée des états liquide et solide, et de la transition entre ces états. Il est tentant de s'inspirer des outils de la physique statistique pour obtenir une telle compréhension. En effet, l'analogie avec les systèmes thermiques est frappante, au moins du point de vue de l'exis-



tence d'états macroscopiques différents sélectionnés par un petit nombre de paramètres de contrôle, et on sait avec quel succès la physique statistique de l'équilibre a permis de traiter la question des transitions de phase. Cependant, bien que l'approche cinétique décrive bien l'état gazeux, elle échoue dans le régime liquide [34], plus dense, où les interactions deviennent plus complexes et mettent notamment en jeu les effets stériques et le frottement. Pourtant, des résultats très généraux sur les systèmes dynamiques [35] laissent espérer que dans leurs états stationnaires, les propriétés de ces systèmes puissent être décrites par des moyennes d'ensemble pour une certaine mesure. Différentes propositions ont été faites concernant la bonne paramétrisation de cette mesure en termes de variables microscopiques de description. La première, introduite par Edwards [36], et à laquelle est dévolue la première partie de ce travail, consiste à considérer la statistique du volume, en négligeant tout autre quantité macroscopique comme l'énergie ou les forces. D'autres approches incluent au contraire une description des forces dans le matériau [37]. Quoiqu'il en soit, ces propositions récentes sont loin d'avoir fait leurs preuves, et une étude expérimentale des propriétés statistiques de ces systèmes s'impose.

### **1.2.3 Physique statistique dans les systèmes athermiques**

Un système athermique est en général un système dont les degrés de liberté ne sont pas conservatifs, au sens où le choix de description d'un tel système n'assure plus la conservation de son énergie. Par exemple, dans le cas d'un système granulaire agité, l'énergie est injectée dans les degrés de liberté de translation et de rotation des grains eux-mêmes, et, via les mécanismes de dissipation que sont le frottement et l'inélasticité, elle se transforme en excitations des degrés de liberté internes des grains et sort ainsi de la description.

L'existence d'une mesure dans l'espace des phases défini par les degrés de liberté retenus dans la description qui permette d'obtenir les moments de quantités macroscopiques n'est pas évidente. Les travaux de Sinai, Ruelle et Bowen dans les années 70 ont montré que si la dynamique d'un tel système est "suffisamment chaotique", c'est à dire uniformé-

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

ment hyperbolique [35], il existe un ensemble de mesures bien définies, appelées mesures SRB, qui sont laissées invariantes par la dynamique et qui permettent de décrire les états stationnaires du système.

Plusieurs types de question apparaissent alors si on cherche à mettre en oeuvre une description statistique de la dynamique stationnaire des systèmes granulaires. D'abord, puisque l'énergie n'est pas conservée dans ces systèmes, l'hypothèse d'uniformité de la mesure sur les configurations d'énergie donnée, extrêmement fertile pour les systèmes à l'équilibre, semble beaucoup moins légitime. Ensuite, puisque l'énergie ne joue plus de rôle particulier dans la description, le choix des variables microscopiques est soumis à un certain arbitraire, et peut s'avérer plus ou moins judicieux selon la situation, en terme de complication de la densité d'états associée. Nous précisons ce point dans la première partie de ce travail. Enfin, dans les systèmes thermiques au voisinage de l'équilibre, les fluctuations pilotent la réponse du système. Le rôle qu'elles jouent dans les systèmes athermiques reste encore largement à établir.

Dans la construction canonique classique, l'existence de quantités conservées par la dynamique mène à la définition de paramètres intensifs qui caractérisent l'état et les fluctuations d'un système contenant un nombre macroscopique de particules, mais petit devant les réservoirs avec lesquels il est en contact. Ce résultat peut être généralisé aux situations athermiques stationnaires sous l'hypothèse essentielle de factorisation de la fonction de partition microcanonique entre sous-systèmes [38, 39, 40]. Cette propriété intervient dans la construction lorsqu'on utilise l'additivité de la quantité conservée et son indépendance statistique entre sous-systèmes. Les paramètres ainsi définis caractérisent la statistique de la quantité en question. Ils interviennent dans une fonctionnelle génératrice des moments qui permet de tenir compte d'une éventuelle non uniformité de la mesure construite dynamiquement, mais qui est formellement très semblable à la fonction de partition obtenue dans le cas thermique. Une des questions ouvertes de cette approche est celle de la genericité des paramètres ainsi définis, en particulier vis à vis de leur équi-

bration entre systèmes.

Un autre type d'approche, qui vise cette fois à qualifier directement la statistique des fluctuations, consiste à faire appel à la théorie des grandes déviations. Cette théorie, qui généralise le théorème de la limite centrale, s'énonce dans le cas le plus simple de la manière suivante. Soient  $\{X_k\}_{k=1..N}$   $N$  variable aléatoires indépendantes, de même loi, et d'espérance  $\bar{X}$ . La variable  $S_n = \frac{1}{N} \sum X_i$  vérifie un principe de grandes déviations si il existe une fonction  $I$  positive telle que

$$\Pr(|\bar{X} - S_n| \geq x) \sim_{n \rightarrow \infty} e^{-nI(x)} \quad (1.1)$$

Il a été montré que dans certaines situations stationnaires loin de l'équilibre, cette fonction décrit de manière complète les fluctuations du problème et ses propriétés d'analyticité caractérisent la présence de transitions de phase hors d'équilibre [41]. Nous verrons dans la première partie de ce travail comment l'étude de la distribution des fluctuations canoniques d'une grandeur conservée permet dans un empilement granulaire d'extraire une fonction de grandes déviations et les paramètres intensifs qui en découlent.

### 1.3 Le point de vue du déblocage

Nous allons maintenant présenter les résultats qui nous semblent les plus importants concernant la transition de blocage. Ces résultats s'organisent naturellement en deux classes. La première concerne les systèmes bloqués au voisinage de leur déblocage, et s'appuie sur une analyse de leur rigidité. La seconde concerne les systèmes dans leur état liquide au voisinage du blocage. Nous verrons que ce dernier point de vue révèle une profonde analogie entre les matériaux granulaires denses et les systèmes vitreux.

### 1.3.1 Rigidité dans les solides amorphes

Pour mieux comprendre la notion de rigidité dans un solide granulaire, on peut suivre le raisonnement de Maxwell [42]. Supposons qu'un système de  $N$  particules ponctuelles soient reliées par  $N_c$  ressorts de raideurs unitaires dans un espace de dimension  $d$ . La variation d'énergie associée aux déplacements  $\left\{ \delta \vec{R}_i \right\}_{i=1..N}$  s'écrit

$$\delta E = \frac{1}{2} \sum_{\langle ij \rangle} \left[ \left( \delta \vec{R}_j - \delta \vec{R}_i \right) \cdot \vec{n}_{ij} \right]^2 \quad (1.2)$$

où la somme est comprise sur toutes les particules en contact  $\langle ij \rangle$ ,  $\vec{n}_{ij}$  est le vecteur unitaire allant de  $i$  vers  $j$  et  $\delta \vec{R}_i$  est le déplacement de la particule  $i$ . On peut exprimer cette relation sous forme algébrique en définissant le vecteur  $|\delta \mathbf{R}\rangle$  à  $d \times N$  composantes. La forme quadratique 1.2 se met alors sous la forme

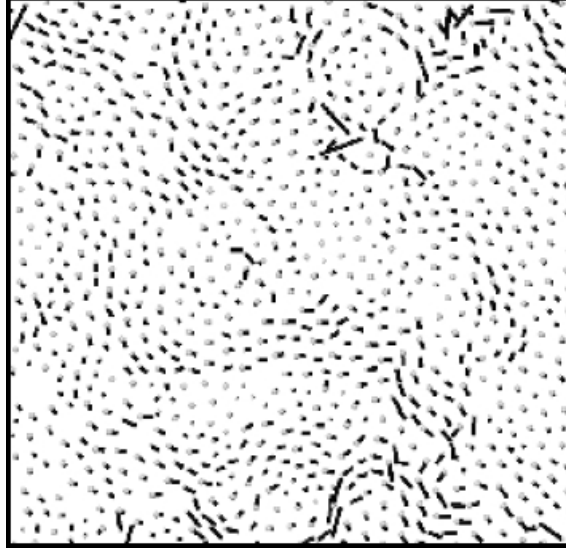
$$\delta E = \langle \delta \mathbf{R} | \mathcal{M} | \delta \mathbf{R} \rangle \quad (1.3)$$

La matrice  $\mathcal{M}$  est appelée matrice dynamique du problème. Ses vecteurs propres sont les modes de vibration du système de particules et les valeurs propres leurs fréquences au carré. Un système élastique est alors rigide s'il n'a pas de *mode mou*, c'est à dire de mode de fréquence nulle. Un tel mode, obtenu numériquement dans un système bidimensionnel désordonné de 1000 disques harmoniques monodisperses [43, 44, 45], a été représenté sur la figure 1.2

Puisque l'équation 1.2 est une somme de termes positifs, ces modes mous satisfont

$$\forall \langle ij \rangle, \left( \delta \vec{R}_j - \delta \vec{R}_i \right) \cdot \vec{n}_{ij} = 0 \quad (1.4)$$

Cette équation linéaire définit l'espace vectoriel des déplacements qui conservent les distances au premier ordre. Il faut remarquer qu'elle est purement géométrique, et ne dépend pas du potentiel d'interaction dans les cas où l'énergie du système admet l'expression 1.2 à l'ordre quadratique dans le champ de déplacement. Maxwell a remarqué que cette



**FIG. 1.2:** Exemple de mode mou dans un système bidimensionnel désordonné de 1000 disques harmoniques monodisperses. Les déplacements relatifs sont représentés par des segments. Le mode a été généré à partir d’une configuration isostatique en coupant des contacts. [43, 44, 45]

condition implique  $N_c$  contraintes et  $Nd - d(d + 1) / 2$  degrés de liberté en soustrayant les rotations et translations globales de l’assemblée. Un système rigide doit avoir au moins autant de contraintes indépendantes que de degrés de liberté. Cela implique que dans un solide, la coordination moyenne  $z \equiv \frac{2N_c}{N}$  doit dans la limite des grands systèmes vérifier le critère de Maxwell

$$z \geq 2d \tag{1.5}$$

Il est important de remarquer qu’il s’agit d’un critère global, puisque les modes dont il traite correspondent à des déplacements collectifs des particules. Un système saturant l’inégalité 1.5 est dit *isostatique*. On peut donc mesurer la distance à l’isostaticité au moyen de l’excès de coordination  $\delta z \equiv z - 2d$ . Il a été montré [43, 44] que quand un tel système se rapproche de l’isostaticité, la pression qu’il exerce sur les parois, liée aux

déformations des ressorts ou des contacts qu'ils représentent, devient petite.

### 1.3.2 Modes mous

L'analyse théorique faite par M. Wyart à partir de la théorie de Maxwell [43, 44] prédit la divergence d'une longueur caractéristique  $l^*$  associée aux modes de vibration de plus basse fréquence dans un tel système au voisinage de la transition associée à la perte de rigidité. Cette longueur caractérise l'extension typique des sous-systèmes possédant des modes mous, ou encore le plus grand sous-système isostatique. Cette divergence est de la forme

$$l^* \propto \frac{1}{\delta z} \quad (1.6)$$

où  $\delta z \equiv z - z_c$ ,  $z$  est le nombre de contacts moyen par particule et  $z_c = 2d$  le nombre de contact critique correspondant au critère de Maxwell. Cette théorie prédit par ailleurs comment disparaissent la pression et les modules élastiques du système. Dans le cas où le potentiel d'interaction entre particules est harmonique, on obtient les relations :

$$p \propto \delta\phi \quad (1.7a)$$

$$\delta z \propto p^{\frac{1}{2}} \quad (1.7b)$$

$$B \propto \delta z^0 \quad (1.7c)$$

$$G \propto \delta z \quad (1.7d)$$

où  $p$  est la pression dans le système,  $\delta\phi \equiv \phi - \phi_c$  est la distance à la densité critique  $\phi_c$  à laquelle disparaît la rigidité,  $B$  le module élastique de compression et  $G$  le module élastique de cisaillement. Les exposants qui apparaissent dans ces relations ne dépendent pas de la dimension d'espace, mais dépendent de la forme du potentiel d'interaction.

Ces dépendances ont été observées dans des simulations numériques. Les résultats de O'Hern, Silbert, Liu, et Nagel [15, 46, 45] ont été obtenus dans un système de sphères

molles à température nulle pour différents potentiels, où le protocole consiste en une descente de gradient dans le paysage d'énergie à partir d'une configuration préparée à température infinie. Les résultats de Ellenbroek, Somfai, Van Hecke et Van Saarloos [33] concernent des sphères en interaction de Hertz à température nulle, et le système est préparé en faisant gonfler les sphères tout en refroidissant doucement le système. Ces données corroborent les dépendances indiquées ci-dessus, bien que différentes manières d'extraire une échelle de longueur associée aux propriétés de vibrations d'un système bloqué mènent à des exposants différents [45]. D'autre part, la longueur caractéristique associée à l'hétérogénéité de la réponse à une force ponctuelle d'une assemblée de disques de Hertz à température nulle, que nous avons montré plus haut sur la figure 1.1, est hétérogène en espace, et l'extension de cette hétérogénéité semble diverger au voisinage de la densité critique à la manière de  $l^*$  [32, 33].

### 1.3.3 Rôle de la friction

Un système granulaire réel est en général constitué de grains frottants. La friction est un problème difficile, et l'étude de ce problème, la tribologie, est un sujet actif de recherche. Les caractéristiques principales de ce phénomène sont les suivantes. D'abord, la force de frottement entre deux objets est une force à seuil : dans le cas du frottement de Coulomb, le glissement d'un contact se déclenche quand la force tangentielle au contact devient plus grande que la force normale multipliée par le coefficient de frottement statique. Une des conséquences de l'existence de ce seuil est l'indétermination des forces tangentielles aux contacts dans une configuration d'équilibre mécanique. D'autre part, c'est une force "hystérétique" : le rapport de forces normales et tangentielles pendant le glissement, appelé coefficient de frottement dynamique, est en général plus petit que le coefficient de frottement statique. Cette propriété a pour conséquence la dépendance de l'état du système à son histoire : pour un ensemble de forces extérieures particulier, le système peut se trouver en mouvement ou non. Malgré cette complication, on peut adapter la

théorie présentée ci-dessus pour prendre en compte le frottement statique entre grains, qui a un rôle stabilisateur sur les empilements et modifie le critère de rigidité de Maxwell. En effet, les moments des forces appliquées aux grains doivent alors être inclus dans la description. Le comptage des contraintes est donc modifié de la manière suivante. A chaque contact  $ij$ , il y a une force de compression  $f_{ij}$  et une force tangentielle  $f_{ij}^\perp$ . Le système est donc à l'équilibre quand les forces et les moments s'équilibrent sur chaque particule

$$\sum_j f_{ij} \vec{n}_{ij} + f_{ij}^\perp \vec{n}_{ij}^\perp = \vec{F}_i \quad \forall i \quad (1.8)$$

$$\sum_j f_{ij}^\perp = \mathcal{M}_i \quad \forall i \quad (1.9)$$

où les  $\mathcal{M}_i$  sont les moments extérieurs appliqués à la particule  $i$ . Ce système d'équations linéaires possède en deux dimensions d'espace  $2N_c$  degrés de liberté et  $3N - 3$  contraintes. Pour que l'assemblée puisse supporter un champ de contrainte générique, on doit dans ce cas avoir  $2N_c > 3N - 3$ . L'isostaticité est donc atteinte quand

$$z_c = 2N_c/N \rightarrow 3 \quad (1.10)$$

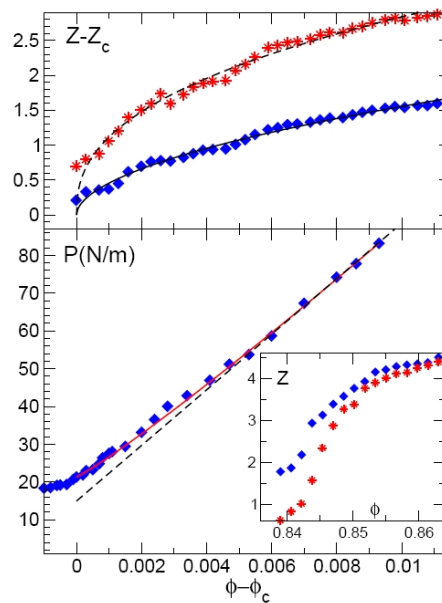
On obtient donc un critère de rigidité moins contraignant que dans le cas sans friction. Selon la préparation du système, l'assemblée peut en particulier atteindre une coordination moyenne  $3 < z < 4$  sans interpénétration. Ainsi, la pression peut s'annuler à des valeurs de la coordination moyenne plus élevées que la valeur isostatique  $z = 3$ . Cependant, dans le cadre de cette théorie, la dépendance des modules élastiques 1.7c et 1.7d reste valable [43, 44].

### 1.3.4 Quelques résultats

Nous allons d'abord présenter les résultats expérimentaux récents obtenus par T.S. Majmudar, M. Sperl, S. Luding and R.P. Behringer [47]. Les auteurs ont étudié un système bidisperse de 3000 cylindres photoélastiques de tailles centimétriques à température



nulle. Les grains ont un coefficient de frottement statique de 0.85 et un module d'Young de  $4MPa$ , et sont confinés dans une cellule de compression horizontale. Les contacts entre grains sont repérés grâce à une caméra CCD en tirant parti de la photoélasticité. La cellule est contrôlée en volume en déplaçant les parois latérales avec une précision micrométrique. Les auteurs reportent l'apparition d'un saut de coordination à la transition de Jamming, ainsi qu'une dépendance de  $\delta z$  en  $\delta\phi^{0.5}$  comme prévu par M.Wyart [43, 44]. La pression dans le système a par ailleurs une dépendance du type  $p \propto \delta\phi^\psi$  avec  $\psi = 1.1$ , ce qui est encore une fois consistant avec la théorie [43, 44]. Ces résultats sont représentés sur la figure 1.3. A noter que la valeur de  $\phi_c$  qu'ils obtiennent est 0.8422.



**FIG. 1.3:** Pression et nombre de contacts moyen à la transition de Jamming dans le système étudié par T.S. Majmudar, M. Sperl, S. Luding and R.P. Behringer [47]. Les étoiles rouges correspondent aux données brutes où les "rattlers" sont présents, et les losanges bleus ont été obtenus en retirant les "rattlers", où les "rattlers" sont des grains qui possèdent moins de deux contacts et ne contribuent pas à la rigidité de l'assemblée.

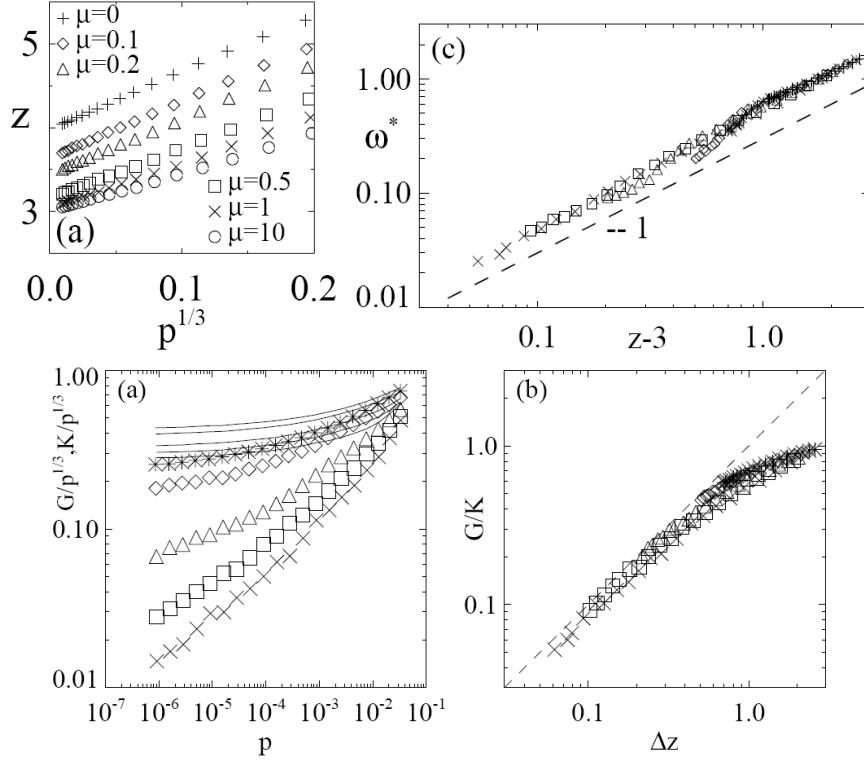
Nous aimerions maintenant présenter les résultats numériques obtenus par E.Somfai,

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

M. Van Hecke, W.G. Ellenbroek, K. Shundyak, and W. Van Saarloos [48]. Le système étudié est une assemblée polydisperse de 1000 disques interagissant via un potentiel de Hertz-Mindlin et le frottement de Coulomb, confinée dans une cellule carrée aux conditions périodiques. Les empilements sont préparés en refroidissant doucement le système et en faisant gonfler les diamètres des grains jusqu'à obtenir une valeur prescrite de la pression. Les résultats présentés sont obtenus à température nulle. Les deux résultats principaux de ce travail sont les suivants. D'abord, pour une valeur finie  $\mu$  du coefficient de frottement statique entre les grains, la pression dans le système disparaît comme  $(z - z_J(\mu))^{\frac{1}{3}}$  où l'exposant  $\frac{1}{3}$  est celui prédit par la théorie de Wyart pour le potentiel considéré et  $z_J(\mu)$  est la coordination moyenne de l'empilement sélectionnée par le coefficient de frottement au blocage. Au contraire, la fréquence de coupure  $\omega^*$  associée aux modes de vibration anormaux qui apparaissent en deçà de la longueur  $l^*$  introduite plus haut se comporte comme  $\Delta z \equiv z - z_{ISO}$  pour toutes les valeurs de  $\mu$ , où  $z_{ISO} = 3$  est la coordination moyenne isostatique. De même, les modules élastiques de l'assemblée scalent avec  $\Delta z$ . Ces résultats sont reportés sur la figure 1.4. On comprend donc que les propriétés du système sont pilotées par la proximité d'un point critique défini par  $z = z_{ISO}$ , et que dans le cas où le frottement est fini, la pression n'est pas reliée de manière simple à  $\Delta z$ .

Il existe donc des quantités dans la structure qui se comportent de manière critique au voisinage de la transition de blocage. Certaines d'entre elles, comme la coordination  $z$  ou le module de compression  $B$ , exhibent un saut. D'autres, comme les longueurs associées à l'hétérogénéité des forces ou aux modes de vibration anormaux, semblent exhiber une singularité. Cette image confuse ne permet pas de conclure sur la nature de la transition, et il n'existe pas à notre connaissance de résultat clair concernant le caractère singulier d'une longueur de corrélation à la traversée de la transition accompagnée de la divergence d'un temps de relaxation. De plus, il est difficile d'un point de vue expérimental d'accéder à des mesures microscopiques des forces entre grains. Enfin, pour la plupart, les résultats précédents concernent ce qu'il est devenu d'usage d'appeler le "point J" malgré la connotation

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

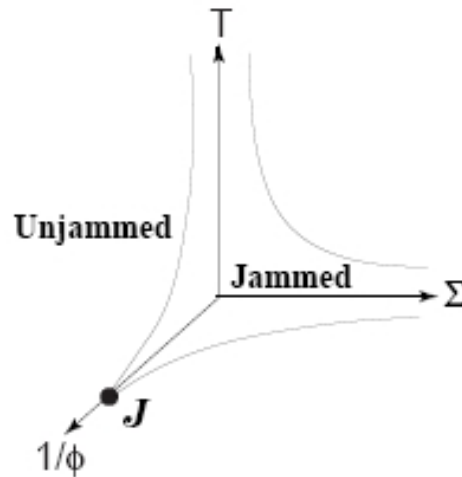


**FIG. 1.4:** En haut à gauche, coordination moyenne  $z$  en fonction de la pression pour différentes valeurs du coefficient de frottement  $\mu$ . En haut à droite, fréquence caractéristique des modes anormaux  $\omega^*$  en fonction de l'écart à l'isostaticité  $\Delta z$  pour différentes valeurs de  $\mu$ . En bas, dépendance des modules élastiques de cisaillement  $G$  et de compression  $K$  à la pression et à  $\Delta z$  [48].

douteuse de cette dénomination. Ce point de l'espace de phase des systèmes désordonnés exhibant une transition de blocage est schématiquement représenté sur la figure 1.5. Il est défini par C.S.O'Hern, L.E.Silbert, A.J.Liu, and S.R.Nagel [15] comme le point de température et de contrainte imposée nulles, contrôlé en densité, auquel la rigidité de ces systèmes apparaît, dans la limite thermodynamique des grands systèmes. Ce point n'est défini par les auteurs que pour des particules interagissant de manière répulsive avec un potentiel de portée finie et sans frottement. De ce point de vue, la notion de longueur de corrélation dynamique [49, 50, 51], que nous définirons plus précisément dans la suite,

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

permet d'explorer les propriétés critiques de toute la surface de blocage, notamment dans les régimes où la notion de transition vitreuse, a priori mal définie, interfère avec celle de blocage. Notre objectif est donc de caractériser la transition de blocage d'un point de vue microscopique en étudiant les fluctuations intrinsèques de la dynamique d'un système granulaire dense à la traversée de cette transition.



**FIG. 1.5:** Diagramme de phase du blocage, tel que proposé par [15].  $\Sigma$  représente la contrainte imposée,  $\phi$  la densité, et  $T$  la température. Les lignes figurent les intersections de la surface de blocage avec les trois plans définis par les axes, et celles impliquant la densité se rejoignent au point  $J$ .

## 1.4 Le point de vue du blocage : analogie avec les verres

Dans ce chapitre, nous allons préciser l'analogie qui existe entre les systèmes granulaires denses et les systèmes vitreux. Après avoir rappelé quelques caractéristiques de la transition vitreuse, nous montrerons qu'un système granulaire dense exhibe quand il s'approche du blocage depuis sa phase liquide un comportement très semblable à celui des verres structuraux au voisinage de leur transition, tant d'un point de vue macroscopique que du point de vue de la dynamique individuelle des constituants. Ces résultats illustrent l'universalité du phénomène de blocage et sont le point de départ de la seconde partie de ce travail.

### 1.4.1 Éléments de phénoménologie des verres

**Définition et exemples** Nous avons donné une définition mécanique de la transition de blocage dans des assemblées amorphes, thermiques ou non. De ce point de vue, elle se distingue de la transition vitreuse, qui concerne la dynamique du système. En effet, un liquide qu'on refroidit très vite peut être amené à une température se situant en deçà de sa température de solidification sans qu'il n'y ait nucléation d'ordre cristallin. Dans cet état métastable, le liquide conserve ses propriétés d'équilibre. Si on continue à abaisser la température à une vitesse donnée, sa viscosité augmente brutalement de plusieurs ordres de grandeur. Très vite, il ne relaxe plus sur l'échelle de temps d'observation et se retrouve hors d'équilibre thermodynamique dans un état "solide", le verre. La température  $T_g$  au voisinage de laquelle cette transition se produit dépend de la vitesse de refroidissement. Pour s'affranchir de cette dépendance, on définit  $T_g$  comme la température à laquelle le temps qu'il faut pour que les particules aient bougé en moyenne d'une distance comparable à leur diamètre typique, appelé temps de relaxation de la structure du liquide, vaut  $100s$ . D'un point de vue thermodynamique, le diagramme de phase d'un liquide vitrifiable à l'allure représentée sur la figure 1.6.

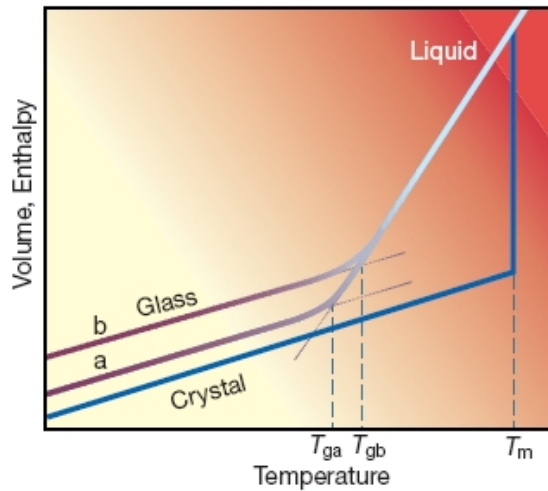


FIG. 1.6: Diagramme de phases schématisant de la transition vitreuse [52].

**Phénoménologie** Les verres peuvent-être considérés du point de vue de leur structure comme des liquides qui ne coulent pas. Le temps de relaxation de ces systèmes, c'est à dire le temps qu'il leur faut pour atteindre l'équilibre thermodynamique, devient considérablement grand aux températures inférieures à leur température de transition vitreuse ; ce sont donc des systèmes hors d'équilibre. Ils contiennent en particulier un excès d'énergie emprisonnée dans leur structure sous forme de frustration qui peut se traduire par la présence de contraintes mécaniques internes. Pourtant, sur des périodes de temps très longues, certains systèmes vitreux peuvent s'écouler sous l'action par exemple de leur propre poids. Un exemple célèbre de ce phénomène est la "Pitch Drop Experiment" commencée en 1927 par Thomas Parnell, professeur de physique à l'université de Queensland et titulaire du prix Ig-Nobel depuis 2005 pour cette raison. L'expérience consiste à placer un morceau d'asphalte dur vitreux dans un entonnoir et ... à attendre. La première goutte est tombée en 1938. Des images de l'expériences sont reportées sur la figure 1.7

La viscosité de ce solide a été évaluée à  $10^8 Pa.s$ . La viscosité des verres est plutôt de l'ordre de  $10^{13} Pa.s$ , ce qui porte le temps d'apparition d'une telle goutte à environ  $10^6$  ans. On observe cependant de vieilles vitres exhibant des irrégularités rappelant des motifs

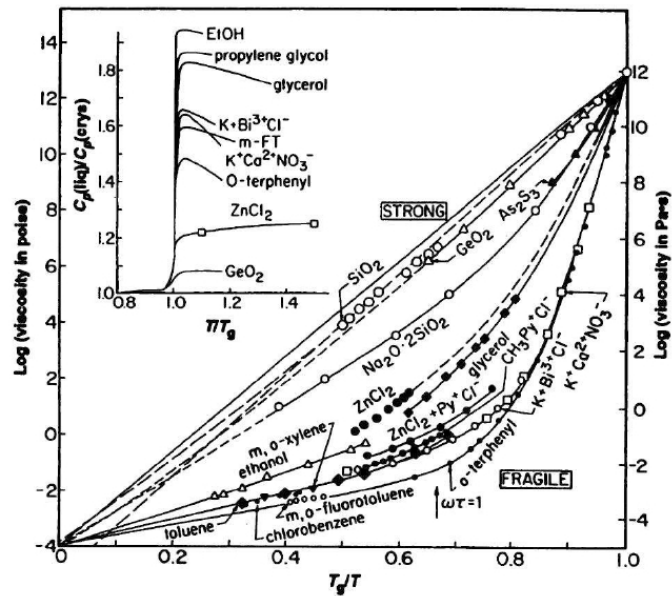


**FIG. 1.7:** A gauche, dispositif expérimental de la "Pitch Drop Experiment" de Thomas Parnell. On voit clairement le matériau couler. A droite, le matériau dont est rempli l'entonnoir de gauche, avant et après impact. Il est donc cassant.

d'instabilités, qui pourraient résulter d'un léger fluage au cours du temps sous l'action de leur propre poids. Cette question est cependant sujette à controverse et nous n'entrerons pas dans ce débat. [53]

D'un point de vue thermodynamique, on distingue deux types de verres, selon le comportement de leur viscosité en fonction de la température. Les verres forts ont une viscosité qui suit une loi d'Arrhénius,  $\eta \sim \exp -\frac{E_0}{kT}$ , ce qui suggère que les mécanismes de relaxation structuraux sont pilotés par des processus d'activation thermique. Le comportement des verres fragiles est plus spectaculaire, puisque la dépendance en température de leur viscosité est bien reproduit par la loi de Vogel-Fulcher-Tammann  $\eta \sim \exp D \frac{T_0}{k(T-T_0)}$ , qui suggère que cette viscosité diverge de manière brutale à l'approche d'une température finie  $T_0 < T_g$ . Le paramètre  $D$  caractérise la fragilité du verre [54]. Nous avons représenté sur la figure 1.8 la viscosité de quelques verres courants en fonction de  $T_g/T$  [55].

Ces systèmes exhibent de plus un saut de chaleur spécifique à pression constante à la température de transition vitreuse, comme illustré en insert de la figure 1.8. Ce comportement est propre à la vitrification, puisque si il y avait cristallisation, ce saut se produirait à la température thermodynamique de transition.

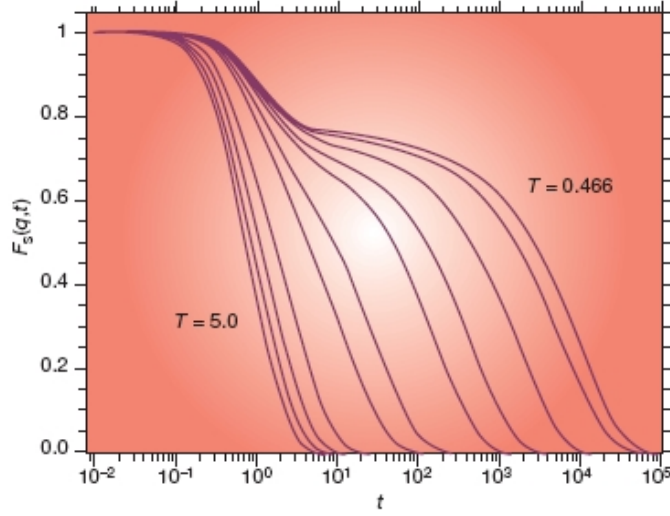


**FIG. 1.8:** Logarithme de la viscosité en fonction de  $T_g/T$  pour un ensemble de verres structuraux. Cette représentation permet de caractériser la fragilité des verres. La ligne droite correspond aux verres forts, suivant une loi d'Arrhénius [55]. En insert, saut de chaleur spécifique pour différents verres.

Du point de vue de la dynamique, le ralentissement que subit un liquide lorsqu'on l'amène dans sa phase surfondue se traduit par l'apparition de deux temps caractéristiques dans la fonction de corrélation temporelle de la densité, ainsi que d'un plateau, comme illustré sur la figure 1.9

Lorsque ces systèmes se trouvent dans leur phase vitreuse, en deçà de  $T_g$ , leur structure relaxe de plus en plus lentement, et la constante de temps associée à cette relaxation est une fonction croissante de leur âge [56]. Nous allons illustrer cet effet par un exemple tiré de [57]. Le système est une concentration de sphères de PMMA d'un diamètre moyen de  $140\text{nm}$  et d'une polydispersité de 10% dans une solution d'indice adapté, centrifugé à  $1000g$  pendant 24h de manière à obtenir une fraction volumique  $\phi \approx 0.67$ , puis diluée à la fraction volumique voulue. Les échantillons sont ensuite thermalisés et illuminés au la-





**FIG. 1.9:** "Self-intermediate scattering function", ou corrélation temporelle du champ de densité, obtenue numériquement pour un liquide surfondu de "Lennard-Jones" et pour différentes valeurs de la température  $T = 5, 4, 3, 2, 1, 0.8, 0.6, 0.55, 0.5, 0.475,$  et  $0.466$  en unités adimensionnées, telles que reportées par P.G. Debenedetti et F.H. Stillinger [52]. L'apparition d'une décroissance non-exponentielle et d'un plateau quand la température diminue est caractéristique de l'approche de la transition vitreuse.

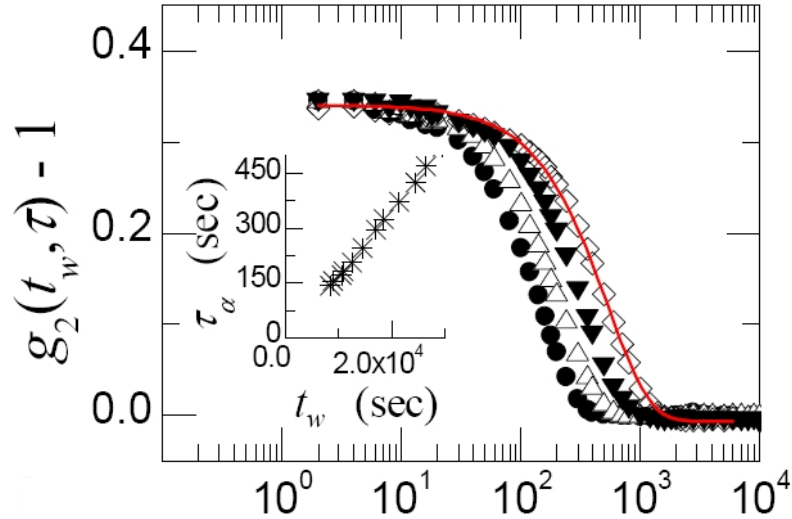
ser. L'intensité diffusée est enregistrée par une caméra et les intensités obtenues corrélées au moyen de la fonction

$$c_I(t, \tau) = \frac{\langle I_p(t) I_p(t + \tau) \rangle_p}{\langle I_p(t) \rangle_p \langle I_p(t + \tau) \rangle_p} - 1 \quad (1.11)$$

où  $I_p(t)$  est la valeur instantanée de l'intensité diffusée par  $1\text{mm}^3$  de suspension reçue par le pixel  $p$ . Cette fonction est obtenue pour différents âges  $t_w$  des échantillons, et on extrait la fonction à deux points

$$g_2(t_w, \tau) - 1 = \langle c_I(t, \tau) \rangle_t \quad (1.12)$$

où la moyenne est calculée sur une courte période de temps. Ces fonctions sont représentées sur la figure 1.10



**FIG. 1.10:** Décroissance temporelle de la fonction  $g_2(t_w, \tau) - 1$  pour  $t_w = 8400, 12400, 18400, 29400s$  de gauche à droite. Leur forme est bien décrite par une exponentielle "compressée" comme indiqué par l'ajustement en rouge. En insert, dépendance du temps de relaxation  $\tau_\alpha$  à  $t_w$ , typique du vieillissement.

On observe clairement un ralentissement de la dynamique avec l'âge  $t_w$  du système. De plus, les fonctions de relaxation sont bien modélisées par des exponentielles "compressées" de la forme

$$g_2(t_w, \tau) - 1 = a \exp(-(\tau/\tau_\alpha)^p) \quad (1.13)$$

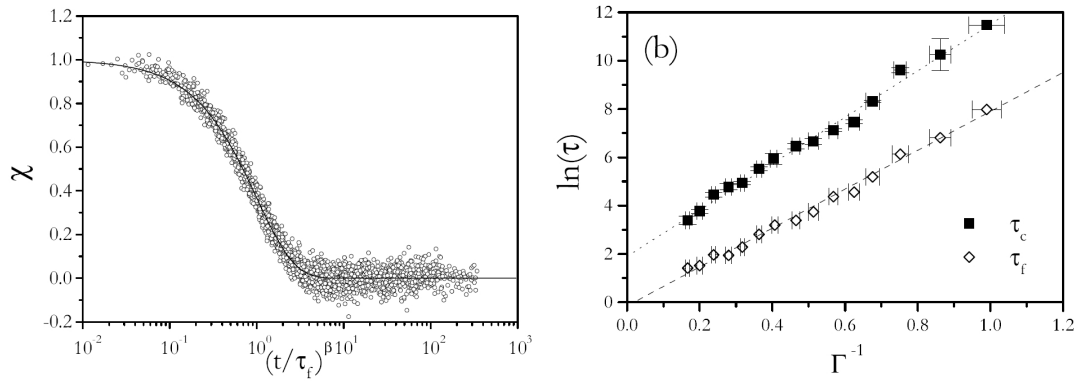
avec  $p \approx 1.3$ , en contraste avec les valeurs  $p < 1$  obtenues dans les liquides surfondus [58] où ces fonctions sont des exponentielles "étirées", mais semblable à une grande variété de systèmes de matière molle vitreuse [57].

**Problématique** La compréhension de l'ensemble de ces phénomènes est aujourd'hui encore très incomplète. Néanmoins, la transition vitreuse a été étudiée extensivement durant ces dernières décennies et un grand nombre de modèles et de propositions théoriques ont vu le jour pour proposer une vision unifiée des différentes caractéristiques de cette transition. On peut notamment citer les approches de la "théorie de couplage de mode" , ou MCT [59], la théorie d'Adam-Gibbs [60], les approches dites "à contraintes cinétiques" [61], ou encore celles étudiant directement le paysage d'énergie libre [62, 63, 64]. Il s'agit donc d'un cadre conceptuel favorable à la compréhension de la transition de blocage de manière plus générale. Réciproquement, pour distinguer entre ces propositions, le besoin en résultats expérimentaux est pressant et s'avère crucial pour discriminer les mécanismes physiques à l'origine de la phénoménologie observée. Une des questions centrales dans cette compréhension est celle de l'existence de coopération dans la dynamique des particules. L'extension spatiale de cette coopération pourrait en effet être à l'origine des temps de relaxation anormalement grands des liquides surfondus [60, 65, 58].

### 1.4.2 Analogie macroscopique

**Relaxation vers un état stationnaire** Comme nous l'avons dit, les systèmes granulaires denses exhibent des caractéristiques remarquablement semblable à celles d'une liquide surfondu au voisinage de sa transition vitreuse d'un point de vue macroscopique. La première de ces caractéristiques est le phénomène de relaxation lente obtenu dans un grand nombre d'expériences de compaction de matière granulaire sous vibration verticale. Il a en particulier été observé par Philippe et Bideau [66], en étudiant la hauteur normalisée de grains vibrés  $\chi(t) \equiv \frac{X(\infty) - X(t)}{X(\infty) - X(0)}$  que la relaxation de la densité d'un tel système vers un état stationnaire n'est pas exponentielle, mais exponentielle étirée de la forme  $\chi(t) = \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau_f(\Gamma)}\right)^{\beta(\Gamma)}\right)$ , et que le temps de relaxation associé dépend de manière activée de l'intensité de vibration  $\Gamma \equiv a_{\max}/g$  où  $a_{\max}$  est l'accélération maximale du fond de la colonne pendant un tap. Ce comportement est réminiscent de celui d'un verre

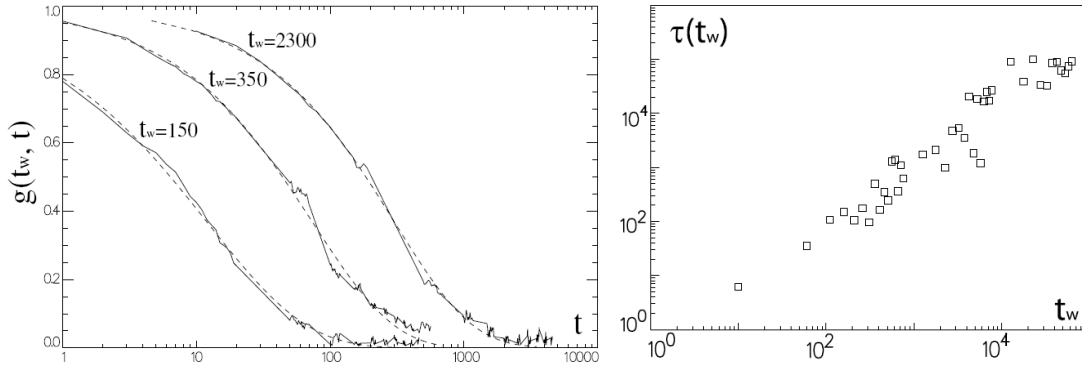
fort. Ces résultats sont reportés sur la figure 1.11.



**FIG. 1.11:** A gauche, hauteur normalisée  $\chi$  de grains en fonction de  $(t/\tau_f)^\beta$ . A droite, temps de relaxation  $\tau_f$  en fonction de l'intensité  $\Gamma$  des taps, dans l'expérience [66].

Il faut signaler d'autres résultats [67, 68] qui semblent mieux décrits par une loi du type Vogel-Fulcher elle aussi couramment utilisée dans le contexte des verres thermiques [69] et caractéristique des verres fragiles.

**Vieillessement** Une autre caractéristique de ces matériaux qui les rapproche des verres est leur caractère vieillissant. L'expérience de Kabla et Debrégas [70] illustre cet effet. Les auteurs préparent un échantillon de sable fin de billes de verre en le vibrant verticalement à une amplitude donnée jusqu'à atteindre une certaine densité, puis ils observent la dynamique microscopique des grains lorsque l'échantillon est soumis à une très légère vibration à partir du temps  $t_w = 0$  qui leur confère de l'énergie sans faire évoluer la densité. La dynamique est sondée par diffusion multiple de la lumière. Des fonctions du type de 1.12 mesurées dans leur système sont représentées sur la figure 1.12 en fonction du temps, ainsi que l'évolution de leur temps caractéristique en fonction de leur âge. Le comportement observé est très similaire au vieillissement obtenu dans les verres structuraux présenté plus haut. On observe en particulier que le temps de relaxation est linéairement croissant avec l'âge du système, à comparer à la figure 1.10.

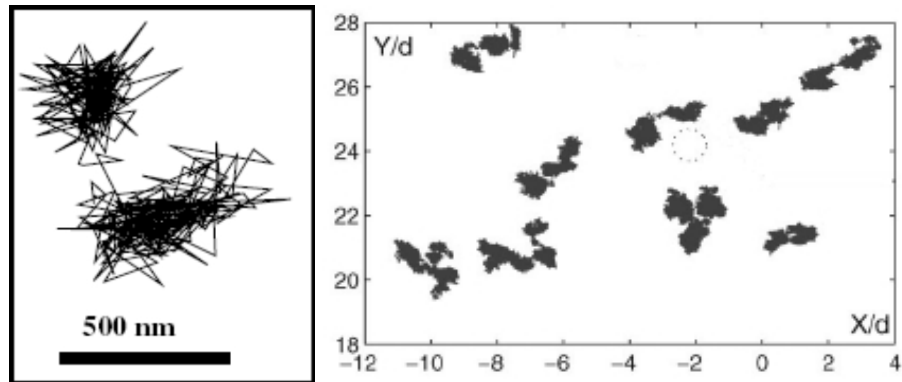


**FIG. 1.12:** A gauche, fonction de corrélation temporelle de la densité en fonction du temps dans l'expérience [70] pour trois âges. A droite, temps de corrélation en fonction de l'âge du système.

### 1.4.3 Analogie microscopique

**Dynamique individuelle : Sous-diffusion et "Effet de cage"** Il est remarquable que cette analogie se prolonge au niveau microscopique. En effet, les caractéristiques des trajectoires des particules dans une suspension colloïdale au voisinage de sa transition vitreuse et dans un matériau granulaire dense sont très semblables. Elle ont en particulier une caractéristique commune, appelé "effet de cage", qui se traduit par une structure en chapelets. Cette structure correspond au fait qu'aux courtes échelles de temps, les particules sont bloquées par leurs voisins et sont ainsi forcées à explorer une zone réduite de l'espace. Nous reportons sur la figure 1.13 des trajectoires typiques de particules de PMMA dans une suspension dense, telles que rapportées par Weeks et Weitz [3], en regard desquelles nous avons fait figurer les trajectoires des grains dans l'expérience de cisaillement cyclique réalisée par Guillaume Marty [71].

Pour quantifier cet effet, on peut étudier la statistique des déplacements des particules, et caractériser ainsi leur propriétés de diffusion. Nous avons représenté sur la figure 1.14 les caractéristiques statistiques de ces déplacements dans l'expérience granulaire de Marty, ainsi que le déplacement carré moyen obtenu par Weeks et Weitz dans leur sus-



**FIG. 1.13:** A gauche, trajectoire obtenue par Weeks et Weitz dans un verre colloïdale. Les particules ont dans cette expérience un diamètre de  $1.18\mu m$ . A droite, trajectoires typiques obtenues dans l'expérience en cisaillement de Guillaume Marty. Le cercle pointillé indique la taille d'une particule. On distingue nettement les "cages" successives sur une trajectoire particulière.

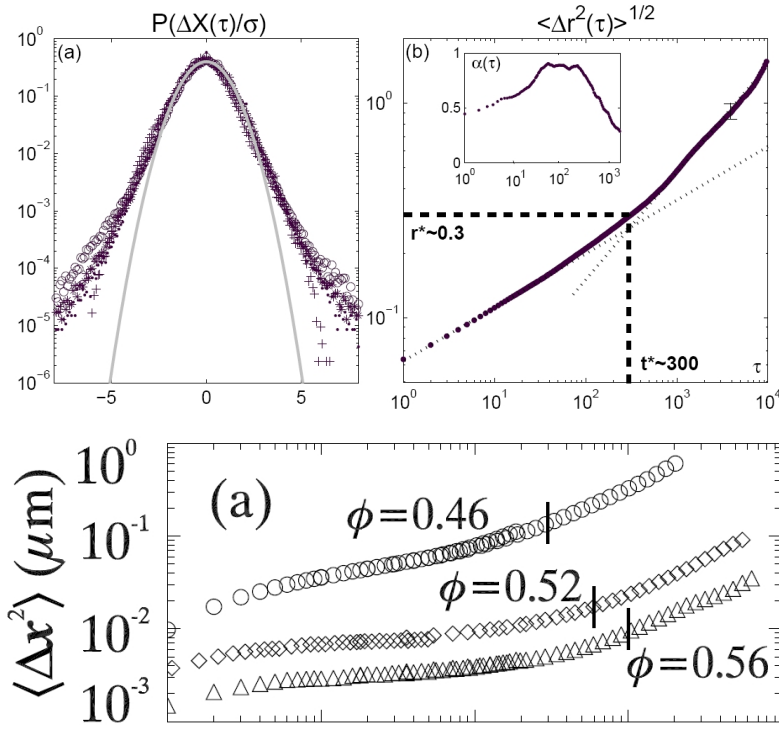
pension colloïdale.

La distribution des déplacements obtenue par Marty révèle des queues anormalement larges, comme il est couramment observé au voisinage de la transition vitreuse d'une suspension colloïdale [3]. De plus, le paramètre de non-gaussianité

$$\alpha = \frac{\langle \Delta X(\tau)^4 \rangle}{3 \langle \Delta X(\tau)^2 \rangle^2} - 1 \quad (1.14)$$

qui mesure ce caractère anormal en fonction du retard  $\tau$  a lui aussi un comportement typique, exhibant un maximum à un temps caractéristique intermédiaire, comme observé par Weeks et Weitz par exemple. Enfin, les propriétés de diffusion sont semblables dans les deux expériences, exhibant un régime sous-diffusif aux petite valeurs du retard  $\tau$  caractéristique de l'effet de cage, et d'une diffusion normale aux grands  $\tau$ .

On voit donc que dans le système étudié par Marty, les caractéristiques microscopiques individuelles des mouvements des grains sont en tout point semblables à celles observées dans des systèmes de sphères dures colloïdales au voisinage de leur transition



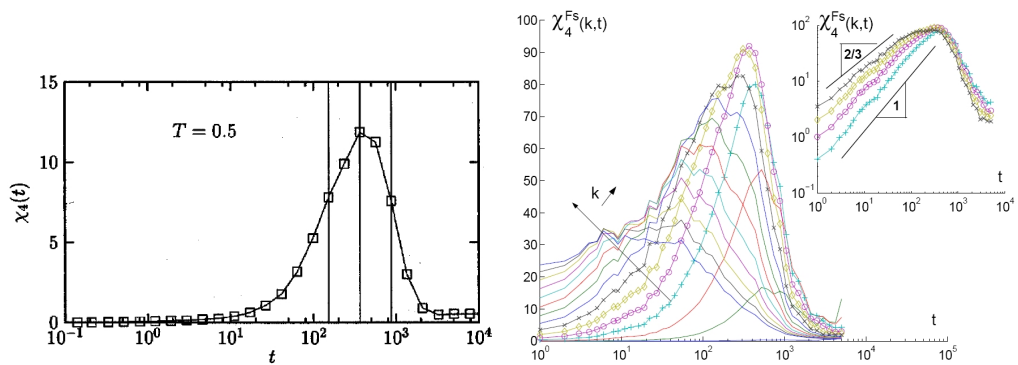
**FIG. 1.14:** En haut, de gauche à droite, distributions des déplacements pour différentes valeurs du retard  $\tau$ , et racine du déplacement carré moyen dans l'expérience granulaire de Marty. Les échelles de temps et de longueur caractéristiques ont été repérées par des lignes pointillées. En insert, paramètre de non-gaussianité. En bas, racine du déplacement carré moyen mesuré dans l'expérience de Weeks et Weitz. Les barres verticales repèrent les maxima du paramètre de non-gaussianité.

vitreuse, et ce malgré la différence d'excitation, mécanique dans un cas, thermique dans l'autre.

**Hétérogénéités dynamiques** On peut enfin caractériser les propriétés collectives des mouvements des particules dans ces systèmes, de manière à mesurer l'hétérogénéité spatiale de leur dynamique. On peut pour cela introduire une susceptibilité dynamique  $\chi_4(k, \tau)$  qui mesure un volume de corrélation dynamique dans le système. La valeur de cette fonc-

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

tion peut être vue comme le nombre typique de particules qui se réarrangent collectivement aux échelles de temps et d'espace auxquelles elle est évaluée. Nous définirons précisément cette notion dans la seconde partie de ce travail. Cette quantité, difficile d'accès expérimentalement, peut cependant être évaluée dans des simulations numériques. C'est ce qui a été fait dans [72, 73, 74, 75]. Elle a aussi été mesurée par Marty dans un système de grains dense soumis à un cisaillement cyclique [76]. Nous avons reporté ces deux types de mesure sur la figure 1.15.



**FIG. 1.15:** Susceptibilités dynamiques obtenues dans un mélange de Lennard-Jones par Toninelli *et al.* [75] à  $T=0.5$  et  $k=4.21$  à gauche, et dans le système granulaire de Marty [76] pour différentes valeurs de  $k$  à droite, en fonction du retard  $\tau$ .

On observe dans les deux cas l'apparition d'un volume de corrélation non trivial, indiquant la présence d'une longueur de corrélation dynamique grande devant la taille de particules et d'une dynamique de réarrangement collective étendue en espace. Cette remarque est un des éléments qui a motivé notre travail, dont une partie significative est consacrée à la caractérisation de ces corrélations dynamiques et de leur dépendance à la densité du système.



## 1.5 Problématique

A la lumière des remarques qui précèdent, nous allons maintenant préciser les questions que ce travail se propose d'aborder, en insistant sur l'importance d'une approche expérimentale à ces questions, et en discutant de la pertinence des deux dispositifs que nous avons choisis d'étudier.

### 1.5.1 Existence d'une description thermodynamique ?

La première question que nous aborderons est celle de la possibilité d'une description thermodynamique des systèmes granulaires denses. Cela nous permettra de préciser les conditions d'une telle description et ses limites.

Les systèmes granulaires denses, comme nous l'avons vu plus haut, se trouvent naturellement à l'état d'empilement. Or le volume d'une assemblée granulaire, étant donné un protocole de préparation et les propriétés typiques des grains, est une bonne variable thermodynamique, au sens où les fluctuations autour de sa valeur moyenne deviennent petites dans la limite thermodynamique des grands systèmes. De plus, il est possible expérimentalement d'accéder aux fluctuations microscopiques de cette variable dans des empilements modèles, comme nous allons le voir, contrairement aux forces présentes dans de tels systèmes par exemple, ce qui est essentiel si on veut contraindre les propositions théoriques existantes. Enfin, dans les situations où le système évolue dynamiquement, l'énergie ne joue pas de rôle particulier puisqu'elle n'est pas conservée, alors que la variable volume peut être considérée comme dynamiquement conservée [36] et semble de ce point de vue la mieux adaptée à une première tentative de caractérisation statistique des empilements.

Nous avons donc décidé d'étudier systématiquement les propriétés statistiques de cette variable dans une situation modèle où nous réalisons un grand nombre d'empilements statistiquement indépendants. Cette étude expérimentale fait l'objet de la première partie

de ce travail.

### 1.5.2 Quels sont les paramètres intensifs pertinents ?

Bien sûr, cette situation statique est très restrictive, puisqu'elle s'appuie sur une exploration complètement artificielle de l'espace des configurations du système. En effet, son état à l'instant  $N$ , c'est à dire la  $N^{ime}$  réalisation de l'empilement que nous étudions, ne dépend que très peu de la réalisation précédente comme nous verrons dans la suite. Ainsi, les fluctuations des quantités microscopiques ne sont pas induites par une évolution dynamique naturelle, et elles ne sondent pas pleinement les interactions entre constituants. Plus précisément, on permet au système d'explorer des configurations qui ne sont pas forcément dynamiquement connectées, et les questions associées à une transition dynamique sont en ce sens hors d'atteinte d'une telle approche. La dynamique stationnaire ainsi construite est donc très spécifique au protocole. Une situation moins artificielle, qui s'apparente plus à celle d'un liquide, est celle dans laquelle un système de grains secs est forcé à explorer *de manière continue* l'espace de ses états microscopiques par une source d'énergie mécanique. Nous aimerions dans ce travail préciser les paramètres intensifs qui caractérisent les états macroscopiques atteints par une assemblée de grains secs désordonnée dans une situation stationnaire où ses états microscopiques sont visités dynamiquement.

De nombreux travaux [77, 78, 79] se sont concentrés sur la définition d'une "température effective" granulaire, et du lien d'une telle température avec celle qui apparaît dans les systèmes vitreux comme mesure de la violation de la relation de fluctuation/dissipation associée à l'apparition de non-ergodicité [80, 81, 82, 83, 84, 85] à la transition. Les résultats dans ce sens sont contrastés [86, 87], et la signification de ce type de paramètre est une direction de recherche active, même dans les situations thermiques [88]. Compte tenu de ces difficultés, nous allons adopter une approche essentiellement transverse et nous concentrer sur le rôle de la densité. Ce choix peut d'autre part être motivé par le fait que

la quantité conjuguée est la pression et que les forces semblent jouer un rôle important dans ces systèmes.

La situation expérimentale que nous avons choisie, et qui fait l'objet de la seconde partie de cette étude, consiste donc naturellement en un système granulaire modèle dont on peut faire varier très précisément le volume total et donc la densité, et dans lequel on injecte de l'énergie. Nous avons choisi une géométrie horizontale, de manière à nous affranchir des effets de la gravité, et bidimensionnelle pour avoir accès aux informations microscopiques de l'assemblée. L'injection se fait en communiquant de l'impulsion aux grains dans leur plan, donc en les faisant vibrer horizontalement.

### **1.5.3 Quelle est la nature de la transition de blocage ?**

Cette situation expérimentale est en particulier bien adaptée à l'étude de la transition de blocage, puisqu'à vibration donnée, on peut réduire le volume de la cellule jusqu'à bloquer complètement les grains. La question de la nature de cette transition de rigidité est donc au coeur de la problématique à laquelle nous nous intéressons.

Comme nous l'avons dit, les matériaux granulaires denses ont une phénoménologie remarquablement semblable aux systèmes vitreux. Nous allons donc apporter des éléments de compréhension concernant les liens qui existent entre la transition de blocage et cette phénoménologie dans notre système. Nous espérons en particulier que notre travail contribue à élucider les mécanismes responsables de cette transition dans d'autres situations expérimentales comme celle des verres colloïdaux par exemple, en validant certains outils d'analyse et en proposant des méthodes d'extraction d'échelles caractéristiques pertinentes à leur étude.

Les caractéristiques de cette transition ont été jusqu'ici étudiées dans des systèmes permettant de s'en approcher depuis la phase liquide ou depuis la phase solide, mais rarement dans des situations où la variation d'un paramètre de contrôle permette de la traverser [89]. L'expérience que nous avons choisie permet une telle exploration, et est

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

donc particulièrement adaptée à la caractérisation des propriétés du systèmes au voisinage de sa transition de blocage.

L'approche dynamique que nous adopterons requiert une statistique extensive pour obtenir des informations sur les fluctuations pertinentes dans ce système, comme la susceptibilité dynamique  $\chi_4$  évoquée plus haut. Or notre système est très proche dans ses caractéristiques de celui étudié par Guillaume Marty [71, 76]. Ce dernier a montré qu'un tel système permettait d'avoir accès à ces fluctuations spontanées. Cette mesure a en particulier été réalisée pour la première fois dans son expérience. Notre expérience ainsi que son instrumentation ont été dimensionnées pour étudier de telles quantités en différentes densités, en enregistrant la dynamique microscopique du système sur de longues périodes de temps, ce qui comme nous allons le voir est à divers titres inaccessible aux simulations numériques.

## CHAPITRE 1: PROBLÉMATIQUE

## **Chapitre 2**

### **Cas statique : Statistique du volume libre dans les empilements**

## 2.1 Motivation et contexte

### 2.1.1 Motivation

**La proposition de Edwards** Deux expériences clés ont révélé dans les milieux granulaires l'existence d'états thermodynamiques. La première, réalisée par E.R.Nowak, J.B.Knight, E.Ben-Naim, H.M.Jaeger, et S.R.Nagel [90] consiste à vibrer verticalement une colonne de grains secs. Dans cette expérience, les auteurs ont montré qu'il était possible d'obtenir une relation univoque et réversible entre le volume total du système et l'intensité de vibration. La deuxième expérience, réalisée par M.Schröter, D.I.Goldman et H.L.Swinney [91], consiste à fluidiser un système de grains en faisant circuler un flux d'eau de manière périodique au travers du système. Dans cette situation, les auteurs ont eux aussi reporté l'existence d'états réversibles et stationnaires des empilements ainsi construits en terme de volume total, et ils ont obtenu une relation entre le volume total et ses fluctuations. Les états stationnaires des systèmes granulaires denses, dans ces deux situations, sont définis d'un point de vue macroscopique par le volume total de l'assemblée, et le paramètre qui contrôle cet état est lié à l'injection d'énergie. Edwards *et al.* [36, 92] ont proposé une hypothèse qui permet de réaliser une construction statistique dans ce cadre. Selon cette hypothèse, la dynamique microscopique du système est pilotée par les configurations mécaniquement stables du système, et l'ensemble de ces configurations qui occupent un volume total donné sont équiprobables. Cette théorie suppose que les grains sont sujets à des manipulations extensives ; on peut par exemple les faire vibrer, ou couler, ou les cisailer. Cette hypothèse mène directement à la définition d'une entropie configurationnelle  $S(V) = \log \Omega(V)$  où  $\Omega(V)$  est le nombre de configurations mécaniquement stables de l'assemblée occupant un volume total  $V$ . La variable d'état  $X$  associée, appelée "compactivité" par les auteurs, est naturellement définie par la relation  $\frac{1}{X} \equiv \frac{\partial S}{\partial V}$ , par analogie avec la définition canonique de la température dans les systèmes à l'équilibre thermodynamique. Il découle en particulier de cette approche que le paramètre

$X$  est une caractérisation macroscopique de l'état de compaction du système.

Cependant, l'hypothèse d'équiprobabilité sur laquelle repose cette théorie est difficile à tester en pratique, comme nous allons le voir. Jusqu'ici, ce test n'a été mis en oeuvre avec succès que dans des simulations numériques de systèmes simples dans différents contextes physiques, comme des modèles schématiques à contraintes cinétiques en dimension finie [93], des verres de spin avec un forçage non thermique entre états métastables [94], et dans quelques cas un peu plus réalistes comme des modèles de déposition de particules [77], ou des simulations par dynamique moléculaire d'un matériaux granulaire soumis à un cisaillement. Il a aussi été montré que dans certaines situations, comme dans un système de spins d'Ising ferromagnétiques à température nulle dont la dynamique consiste à renverser un spin à la fois [95, 96], cette hypothèse est en défaut.

D'un point de vue expérimental, la mesure de ce paramètre  $X$  n'est en soi pas évidente. Deux approches ont été tentées jusqu'ici. La première, mise en oeuvre dans les expériences [90, 91], consiste à exploiter le fait que dans les états stationnaires observés, dont les auteurs ont montré qu'ils étaient indépendants de l'histoire du système, il existe une relation entre les fluctuations de la fraction volumique du système et sa moyenne pour différentes intensités de l'agitation. En faisant l'hypothèse que les propriétés thermodynamiques habituelles sont valables, comme dans la théorie de Edwards introduite plus haut, cette relation permet de déduire une mesure de la compacité  $X$ . La seconde approche proposée consiste à extraire ce paramètre de la décroissance exponentielle de la distribution des volumes individuels associés aux grains d'une assemblée [97, 98]. Nous allons discuter dans la suite de la pertinence de ces approches.

**Question et limites** Malgré ces résultats plutôt encourageant, la proposition faite par Edwards *et al.* nécessite d'être clarifiée à plusieurs égards. D'abord, la théorie ne donne pas de prescription concernant les variables microscopiques dont il faut tenir compte pour décrire une configuration [99]. Les versions les plus naïves de l'approche de Edwards



suggèrent de ne considérer que les volumes individuels attachés aux grains. Cependant, dans le cas réaliste de grains frottant, la dégénérescence des forces de contact, au sens où plusieurs configurations du réseau de force peuvent correspondre à la même configuration spatiale, donne lieu à des contributions supplémentaires à l'entropie dont l'importance reste à comprendre. Il existe une version de l'approche de Edwards qui tient compte des forces [37] et qui décrit leur statistique avec succès. Dans tous les cas, le calcul de la densité d'état associée à un choix particulier de variables microscopiques pour construire la physique statistique du problème est une question ouverte [100]. Ensuite, cette construction peut être fortement affectée par la présence de corrélations spatiales dans le système. Il a notamment été observé que des corrélations à longue portée peuvent se développer dans de nombreuses situations physiques similaires, comme les systèmes granulaires bloqués [101, 102], les milieux poreux [103], ou encore les structures cellulaires de type Voronoï [104]. De plus, des travaux théoriques récents suggèrent que les systèmes amorphes denses se trouvent à proximité d'un point critique associé à leur transition de blocage [105, 15, 43, 44], ce qui peut donner lieu à des corrélations étendues sur des distances comparables à la taille du système. Ces différentes questions et possibles limitations de la théorie nécessitent d'être clarifiées, et les bases de l'approches de Edwards doivent être soumises à l'épreuve expérimentale.

### 2.1.2 Contexte théorique

**Généralisation** Pour pouvoir proposer une procédure qui nous permette d'extraire expérimentalement les propriétés statistiques des empilements granulaires, nous allons d'abord discuter avec un peu plus de détails les bases théoriques de l'approche de Edwards. Bien que la définition de la compactivité  $X$  repose apparemment sur l'équiprobabilité des configurations compatibles avec un volume total donné, on peut en fait définir un tel paramètre dans un contexte plus général. Considérons une assemblée granulaire dense dont les configurations microscopiques seront notées  $\mathcal{C}$ . Dans l'esprit de la théorie présentée

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

plus haut, nous supposons que le volume total du système est une quantité conservée par la dynamique. Cela correspond d'un point de vue expérimental à confiner les grains dans une cellule macroscopique de volume fixé, mais on peut avoir une vision plus locale de cette contrainte en considérant les réarrangements compatibles avec une configuration des grains aux bords du système considéré. D'une manière très générale, en tenant compte de cette contrainte de conservation, on peut écrire la probabilité stationnaire  $P(\mathcal{C})$  d'une configuration de ce système

$$P(\mathcal{C}) = \frac{f(\mathcal{C})}{Z(V)} \delta(V(\mathcal{C}) - V) \quad (2.1)$$

Cette formule définit la pondération  $f(\mathcal{C})$  et le facteur  $Z(V)$  assure la normalisation. On suppose qu'aux grandes échelles de longueur, la seule source de corrélation des différentes régions du système provient de la contrainte de conservation du volume total. On entend par là le fait que si on scinde le système total  $\mathcal{S}$  en deux sous-systèmes  $\mathcal{S}_{1,2}$ , le facteur de normalisation  $Z(V)$  se factorise sous la forme  $Z(V) \approx Z_1(V_1) Z_2(V - V_1)$ , où le caractère approximatif de l'égalité ne provient que de possible contributions de l'interface entre les deux sous-systèmes dont on s'attend à ce qu'elles disparaissent dans la limite thermodynamique. Cette propriété de factorisation est en particulier vérifiée si les pondérations  $f(\mathcal{C})$  qui apparaissent dans l'équation 2.1 se factorisent elles-mêmes sous la forme

$$f(\mathcal{C}) = f_1(\mathcal{C}_1) f_2(\mathcal{C}_2) \quad (2.2)$$

où  $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ . Sous ces hypothèses, on peut définir un "paramètre thermodynamique intensif"  $X$  pour le système hors d'équilibre en question [39]

$$\frac{1}{X} = \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \quad (2.3)$$

Il faut remarquer à ce stade qu'on retrouve la définition de Edwards en choisissant les pondérations  $f(\mathcal{C})$  de manière à ce qu'elles soient uniformes sur les états mécanique-

ment stables de l'assemblée, et nulles ailleurs. Cette reformulation met en lumière le fait que l'hypothèse d'équiprobabilité des configurations bloquées n'est pas nécessaire à la définition d'une compacité.

**Construction canonique** Une situation expérimentale pertinente dans ce contexte consiste à considérer une petite sous-partie d'un empilement macroscopique. Dans cette situation, on peut tenir compte de l'effet du reste du système vu comme un réservoir en résumant cet effet à la valeur de la compacité de ce réservoir. En effet, si on intègre de manière classique les degrés de liberté du réservoir dans l'équation 2.1, on obtient la distribution de probabilité "canonique" des configurations du sous-système

$$P_c(\mathcal{C}) = \frac{f(\mathcal{C})}{Z_c(X)} e^{-V(\mathcal{C})/X} \quad (2.4)$$

On remarque que du fait de la présence du facteur exponentiel dans la distribution 2.4, les relations thermodynamiques usuelles, comme

$$\langle \delta V^2 \rangle = X^2 \frac{\partial V}{\partial X} \quad (2.5)$$

sont encore valables, indépendamment de la forme spécifique des poids  $f(\mathcal{C})$ , à condition que la condition de factorisation 2.2 soit vérifiée. Une telle relation offre la possibilité de mesurer la compacité d'un empilement, comme il a été fait dans [91].

**Discussion** On peut obtenir beaucoup d'information sur les propriétés statistiques du système en mesurant la probabilité pour qu'un sous-système de  $N$  particules occupe un volume  $V$ . D'un point de vue formel, on obtient cette distribution en sommant la distribution canonique 2.4 sur les configurations de volume fixé  $V$

$$\Phi_N(V) = \int d\mathcal{C} P_c(\mathcal{C}) \delta(V(\mathcal{C}) - V) = \frac{Z_N(V)}{Z_c(X)} e^{-V/X} = \frac{1}{Z_c(X)} e^{S_N(V) - V/X} \quad (2.6)$$

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

L'information statistique sur la complication du système est entièrement contenue dans la fonction  $Z_N(V)$ , dont le logarithme est l'entropie généralisée  $S_N(V) = \ln Z_N(V)$ . Le calcul de la fonction  $S_N(V)$ , qui dépend de manière compliquée des poids  $f(\mathcal{C})$  a priori inconnus, est une tâche ardue, hors d'atteinte des théories existantes. Il est donc d'une importance primordiale pour la compréhension statistique de ces systèmes d'obtenir des informations quantitatives sur la fonction  $S_N(V)$ , en particulier sur sa dépendance dans la taille  $N$  du sous-système considéré, d'un point de vue expérimental. Une telle approche permettrait en particulier de répondre à la question de l'existence d'une propriété de grandes déviations pour les variables considérées. Dans ce but, il nous faut d'abord choisir un ensemble de variables physiques qui soit à la fois expérimentalement accessible et adapté à la description des configurations microscopiques du système. Cependant, ces variables peuvent ne pas entièrement définir la configuration courante, au sens où plusieurs configurations peuvent mener à la même valeur de ces variables. Le choix le plus simple est de considérer les volumes  $v_i$  des cellules associées aux grains par une tessellation de l'espace [100], en laissant de côté la description des forces entre les grains. Dans le cas des systèmes polydisperses, un choix alternatif qui permet une description homogène du système consiste à considérer les volumes libres  $v_i^f$  obtenus en soustrayant aux volumes des cellules élémentaires le volume des grains qui leur sont associés. Nous allons considérer dans la suite les deux types d'approche, en insistant cependant sur la description en termes de volumes libres. Par ailleurs, nous allons nous concentrer sur le cas des systèmes contraints à évoluer dynamiquement d'un état mécaniquement stable à un autre, comme c'est le cas dans le dispositif expérimental que nous allons étudier. De tels systèmes peuvent ainsi être décrits par une densité d'états  $\rho(\{v_i^f\})$  qui correspond au nombre d'états bloqués associés aux volumes libres  $v_i^f$ . Si on introduit le volume libre total de l'assemblée  $V^f = V - V_g$  où  $V_g$  est le volume total occupé par les grains, la fonction  $Z_N(V^f)$  s'écrit alors

$$Z_N(V^f) = \int \prod_i dv_i^f \rho(\{v_i^f\}) f(\{v_i^f\}) \delta\left(\sum_i v_i^f - V^f\right) \quad (2.7)$$

Cette formule révèle les difficultés inhérentes à la construction proposée par Edwards que nous avons détaillées plus haut, et se prête à quelques commentaires. D’abord, comme nous l’avons dit, la fonction  $\rho(\{v_i^f\})$  est la densité statique d’états, qui correspond à un simple comptage des états bloqués compatibles avec les contraintes pour une configuration donnée. Elle encode en particulier cette condition de compatibilité pour les variables qui ne sont pas prises en compte dans la description microscopique que nous avons choisie, comme par exemple les forces, et constitue de fait une mesure de la dégénérescence de la configuration en question. Ensuite, la fonction  $f(\{v_i^f\})$  rend compte de la population dynamique des états accessibles au système, et peut dépendre en particulier du mécanisme d’injection d’énergie ou plus généralement de ce qui permet au système d’explorer son espace des phases. Ce facteur est une mesure de l’écart à l’équiprobabilité et donc au cas thermique. Ainsi, ces deux termes ont des origines physiques différentes. Pourtant, seul leur produit apparaît dans l’équation 2.7, ce qui rend impossible la détermination des poids dynamiques  $f(\{v_i^f\})$  sans avoir une connaissance indépendante de la densité d’état  $\rho(\{v_i^f\})$ . Comme la détermination de cette dernière est en général hors d’atteinte dans une situation expérimentale réaliste, il s’en suit que l’hypothèse de Edwards concernant l’équiprobabilité des états ne peut pas être testée expérimentalement. Seuls les systèmes modèles simplistes où cette densité d’état peut être déterminée analytiquement permettent de tester l’hypothèse d’uniformité de la mesure construite dynamiquement. Cependant, comme nous l’avons vu, cette hypothèse n’est pas nécessaire à l’implémentation de la formulation statistique introduite ci-dessus qui motive la détermination expérimentale de l’entropie généralisée  $S_N(V)$  et de la compactivité qui lui est associée.

## 2.2 Dispositif expérimental et Résultats

### 2.2.1 Dispositif expérimental

Dans cette partie, nous allons décrire l'expérience que nous avons menée pour examiner les propriétés de la fonction de partition  $Z_N(V^f)$ . Ces résultats ainsi que la discussion qui précède ont été publiés dans [106].

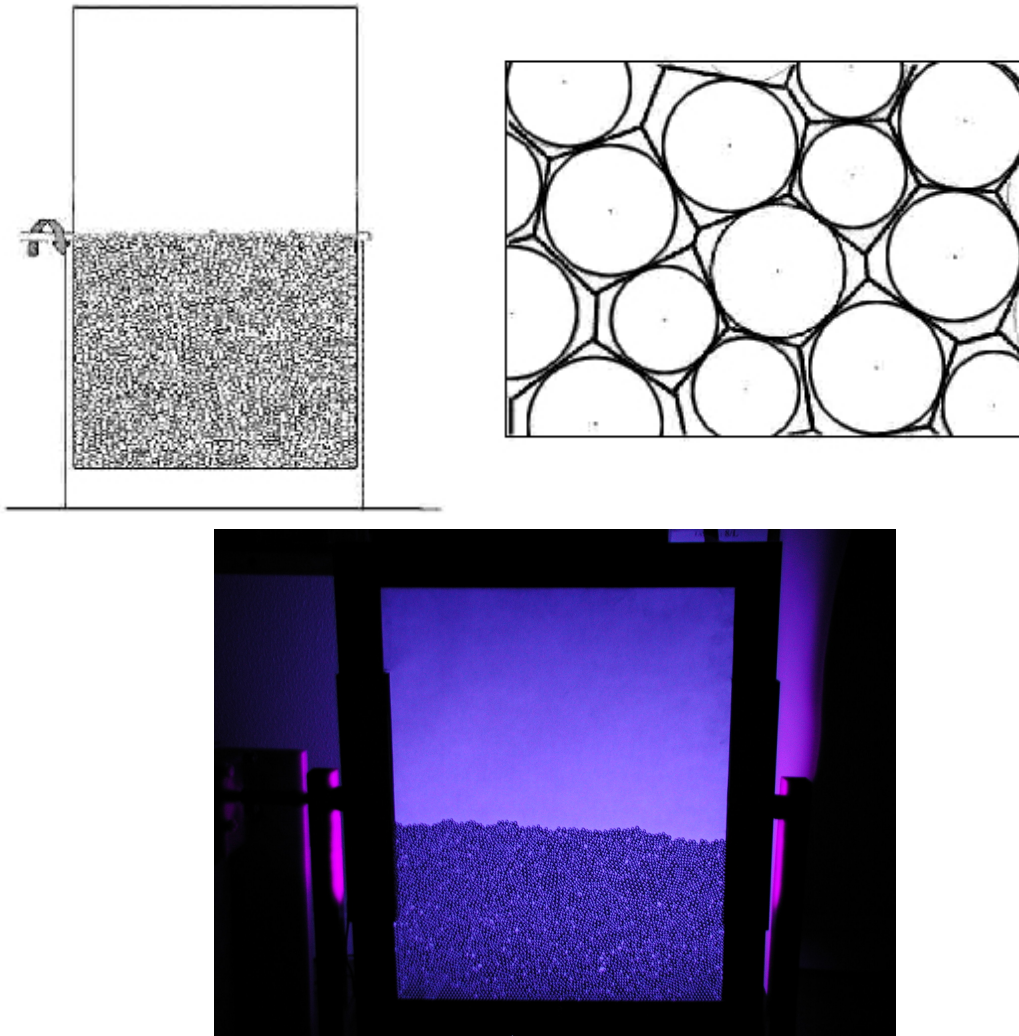
**Dispositif** Nous avons choisi pour cette étude un système granulaire qui consiste en un récipient dans lequel on verse un grand nombre de fois une assemblée granulaire modèle. Notre récipient est en fait une cellule de Hele-Shaw constituée de deux plaques de verre rectangulaires larges de 50 cm et hautes de 60 cm, séparées par un interstice uniforme de 3,5 mm. Cette cellule bidimensionnelle est remplie d'une unique couche constituée de 5000 cylindres de laiton de deux tailles différentes et en nombres égaux, ce qui permet d'obtenir, quand la cellule est verticale, un empilement homogène et désordonné. Les cylindres - que nous appellerons les "grains" dans la suite - sont percés en leur centre. Ce sont en fait des entretoises du commerce. Ils occupent approximativement la moitié du volume total de la cellule. Les deux types de grains utilisés ont une épaisseur de 3mm, mais des diamètres respectifs  $d_s = 4mm$  pour les petits et  $d_l = 5mm$  pour les gros. Nous choisissons  $d_s$  comme unité de longueur dans toute la suite. Les aires respectives des grains sont donc dans ces unités  $v_s^0 = \frac{\pi}{4} \simeq 0.78$  pour les petits et  $v_l^0 = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d_l}{d_s}\right)^2 \simeq 1.23$  pour les gros. Nous avons d'autre part utilisé deux familles de grains, dont les tailles sont les mêmes, mais qui possèdent des propriétés de surface différentes. La première famille consiste en des cylindres métalliques entièrement lisses, et dont le coefficient de frottement statique vaut approximativement  $\mu = 0.35$ . La seconde famille est constituée de cylindres métalliques dont la surface périphérique est crénelée. Ces créneaux s'étendent parallèlement à la génératrice des cylindres, ont un profil approximativement carré, et ont une largeur typique de l'ordre de 0.1. Cet état de surface porte le nom de moletage dans

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

l'industrie, puisque l'objet final est une petite molette. Nos différentes mesures du coefficient de frottement statique pour ces grains indiquent  $\mu \simeq 0.5$ . Enfin, le bord inférieur de la cellule est muni d'un dispositif coulissant sur une amplitude de l'ordre du centimètre qui est en contact avec les grains sur toute la largeur du système. Lorsque la cellule est en position verticale, un système s'apparentant à un marteau peut venir frapper cette partie mobile, ce qui nous permet de compacter légèrement le système, et d'explorer ainsi différentes valeurs de la densité. Un schéma accompagné d'une photographie de notre dispositif sont représentés sur la figure 2.1.

**Protocole** Le but de l'expérience est de générer un grand nombre de configurations statiques aléatoires différentes de cette assemblée de grains, puis d'extraire la statistique de ces configurations en analysant des images. Notre protocole a été choisi de façon à explorer de la manière la plus aléatoire possible l'espace des configurations accessibles à notre système, bien qu'une caractérisation quantitative de ce caractère aléatoire est expérimentalement difficile. Nous avons cependant vérifié que la répartition spatiale des volumes interstitiels est très différente d'une image à l'autre. Une série de données correspond à 5000 cycles définis de la manière suivante. Au début du cycle, la cellule est en position verticale. Elle est ensuite entraînée par un moteur de manière à faire un tour complet autour de son axe à une vitesse constante de  $6^\circ/s$ . Pendant ce cycle élémentaire, les grains tombent de l'autre côté de la cellule, puis retombent du côté où ils se trouvaient au début du cycle. On laisse ensuite l'empilement relaxer pendant quelques secondes, de manière à ce qu'il se stabilise dans un état mécaniquement stable, puis on prend une image dans une région située au cœur de cet empilement sur laquelle figurent environ 1000 grains. Une fois cette image acquise, on fait vibrer le fond du système pendant dix secondes à une fréquence de 10 Hz et avec une amplitude de 5mm, de manière à produire des réarrangements et une légère compaction du système. On prend alors une deuxième image de la même région du système. Il faut bien noter que la vibration n'est pas destinée

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS



**FIG. 2.1:** En haut à gauche, dispositif expérimental. En haut à droite, schéma de la tessellation de Laguerre. En bas, photographie de l'expérience.

ici à étudier la dynamique de compaction de l'empilement, mais seulement à générer un autre état de l'empilement de densité différente.

**Traitement** La traitement des images ainsi obtenues est ensuite réalisé en deux étapes. La première consiste à repérer le centre des grains dans les images, ainsi que leur diamètre. Pour cela, on utilise une bibliothèque de traitement proposant des outils de haut

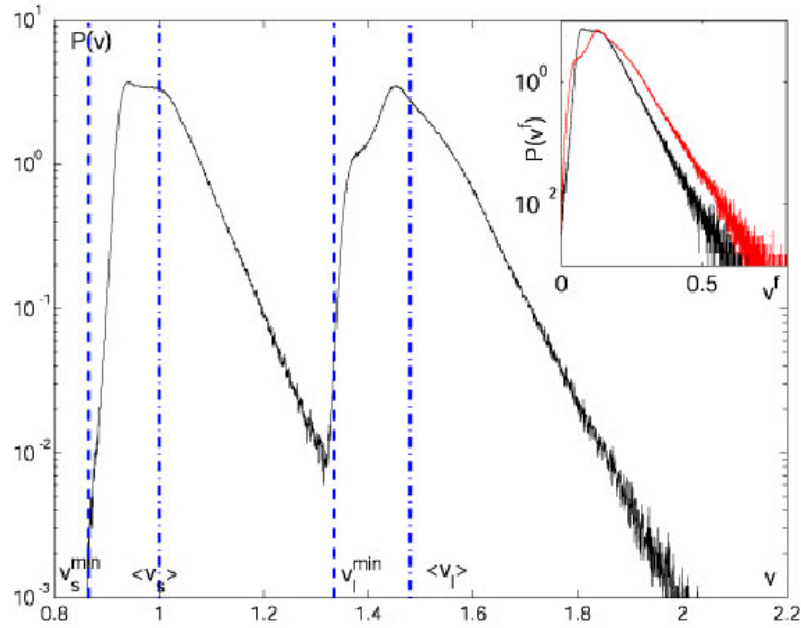


niveau qui sont assemblés grâce au logiciel LabView et appliqués à la série d'images. La première étape dans cette séquence de filtres est une simple binarisation, dont l'intensité de coupure est choisie de manière à isoler les trous qui sont percés dans les grains. Suivent ensuite des étapes de nettoyage de l'image, comme la suppression des petits objets, ou l'érosion des zones actives. On repère ensuite les objets circulaires en utilisant le critère de circularité de Heywood, défini comme le périmètre de la zone active ramené au périmètre du cercle ayant la même aire. La mesure obtenue nous donne les positions des grains présents dans l'image ainsi que leurs aires, dont on déduit leurs diamètres en séparant les gros des petits. La seconde étape consiste à construire la tessellation de Laguerre des centres des grains pondérés par leurs diamètres. La tessellation de Laguerre est une généralisation de la tessellation de Voronoï qui permet d'obtenir des arrêtes qui ne coupent pas les grains [107]. Un exemple d'une telle tessellation est schématisé sur la figure 2.1. Les définitions de ces notions géométriques sont données en annexe. Une fois les cellules de Laguerre calculées, on calcule leurs aires et on enregistre celles-ci ainsi que les positions et types des grains. On a de cette manière obtenu trois séries de données, qui correspondent respectivement aux grains lisses non vibrés, aux grains lisses vibrés, et aux grains moletés non vibrés.

### 2.2.2 Résultats

**Distributions à un grain** Concentrons nous d'abord sur la série de données correspondant aux grains lisses non vibrés. La distribution des aires des cellules individuelles de Laguerre est représentée sur la figure 2.2.

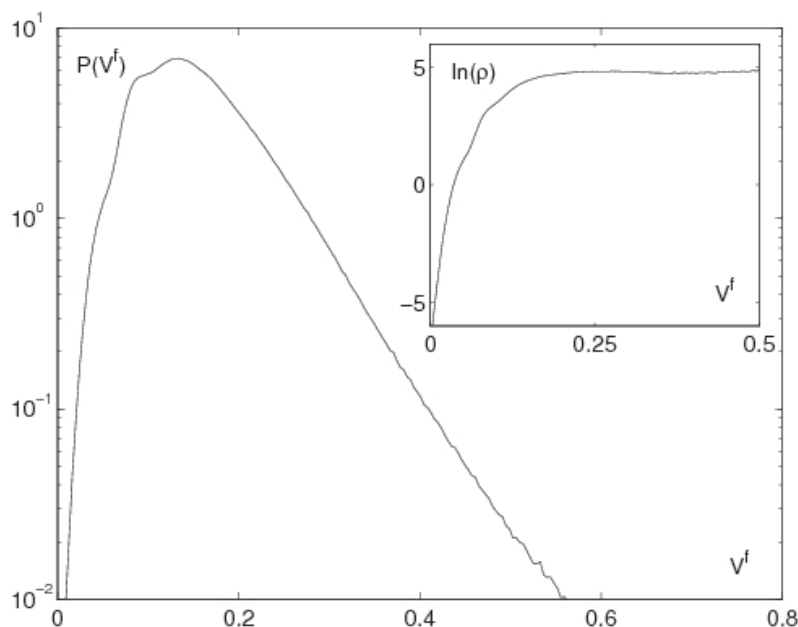
Cette distribution exhibe deux pics centrés en  $\langle v_s \rangle = 1.00$  et en  $\langle v_l \rangle = 1.49$ , qui correspondent aux moyennes des aires des cellules associées respectivement aux petits et aux gros grains calculées par ailleurs et représentés en pointillés pointés sur la figure 2.2. Nous avons aussi reporté en pointillés les valeurs les plus petites possibles des cellules associées aux petits et aux gros grains, qui sont les hexagones réguliers circonscrits. Ces



**FIG. 2.2:** Distribution des aires des cellules de Laguerre pour la série correspondant aux grains lisses non vibrés. Les lignes pointillées verticales correspondent aux aires des cellules minimales. Les pointillés pointés correspondent aux moyennes conditionnelles des aires des cellules. En insert, distributions des volumes libres conditionnés à la taille des grains ; les petits grains sont représentés en noir et les gros en rouge.

valeurs sont respectivement  $v_s^{min} = \frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0.866$  et  $v_l^{min} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{d_l}{d_s}\right)^2 \simeq 1.35$ . Chaque pic présente une décroissance exponentielle bien définie. On peut extraire cette dépendance en examinant les distributions conditionnelles des volumes libres des grains qui sont représentées en insert de la figure 2.2, où nous définissons ici le volume libre associé à un grain comme l'aire de la cellule de Laguerre qui lui est associé à laquelle on retranche l'aire minimale qu'elle peut atteindre, telle que définie ci-dessus. Les aires caractéristiques associées à ces décroissances exponentielles sont respectivement  $v_s^{f*} = 0.055$  pour les petits grains, et  $v_l^{f*} = 0.060$  pour les gros. On remarque que le rapport de ces aires caractéristiques est beaucoup plus proche de 1 que le rapport des aires des grains eux-

mêmes. Cela est dû au fait que le volume libre typique associé à un grain ne dépend pas seulement de son aire, mais aussi de son entourage qui est le plus souvent composé d'un mélange de tailles. Nous avons représenté sur la figure 2.3 la distribution du volume libre sans la conditionner à la taille des grains.

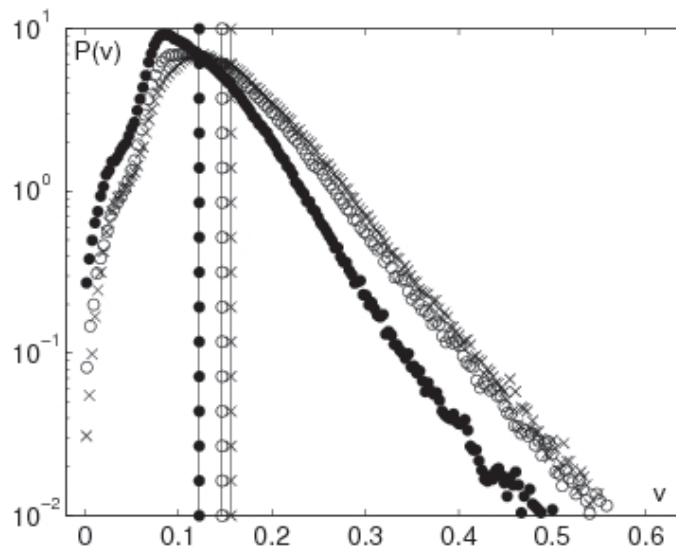


**FIG. 2.3:** Distribution du volume libre pour la série correspondant aux grains lisses non vibrés sans conditionnement. En insert, densité d'états associée à un grain disposant d'un volume libre  $v^f$

On observe encore une décroissance exponentielle, dont l'aire caractéristique est  $v^{f*} = 0.058$ . Dans l'esprit de la description de Edwards, on pourrait être tenté d'assimiler cette aire caractéristique à une compactivité. Il s'agirait cependant d'une interprétation trop rapide de nos données, et il faudrait au moins vérifier que la dépendance des distributions à cette compactivité est complètement encodée dans cette décroissance exponentielle. Nous avons malgré tout représenté en insert de la figure 2.3 la quantité  $\log \rho(v^f) \equiv \log(P(v^f)) + v^f/v^{f*}$ , qui correspond à la densité d'états associée à un grain entouré d'un volume libre  $v^f$ . Cette fonction sature aux grands volumes libres, après une crois-

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

sance rapide aux petits volumes libres. Nous allons maintenant caractériser la dépendance de la distribution du volume libre introduite ci-dessus à l'état de surface des grains et à l'histoire de l'empilement. Les distributions de volume libre obtenues pour les séries correspondant aux grains lisses et rugueux sans vibration, ainsi qu'aux grains lisses vibrés, ont été reportées sur la figure 2.4.



**FIG. 2.4:** Distributions du volume libre associées aux séries correspondant aux grains lisses non vibrés ( $\circ$ ), rugueux non vibrés ( $\times$ ), et lisses vibrés ( $\bullet$ ). Les lignes verticales indiquent les valeurs moyennes.

Les valeurs des moyennes et des aires caractéristiques extraites de ces distributions ont été reportées dans la table 2.1. On observe que le volume libre moyen décroît quand on vibre le système, ce qui signifie que la vibration a permis à ce dernier de se compacter. On remarque aussi que cette valeur moyenne est plus faible pour les grains lisses que pour les grains rugueux lorsqu'ils sont préparés de la même manière. On peut comprendre cela en invoquant le fait qu'une rugosité plus élevée permet la stabilité d'arches plus lâches, ce qui se traduit par un surcroît de volume interstitiel. Enfin, le volume libre caractéristique est plus petit dans le système vibré, plus compact, comme il est suggéré dans [97, 98],

CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

	○	●	×
$v_{\infty}^f$	.145	0.120	0.154
$v^{f*}$	$0.059 \pm 0.001$	$0.046 \pm 0.001$	$0.061 \pm 0.001$
$\chi_e$	$0.048 \pm 0.0015$	$0.032 \pm 0.0015$	$0.040 \pm 0.0015$
$\eta_e$	$3.0 \pm 0.1$	$3.7 \pm 0.1$	$3.9 \pm 0.1$
$\alpha$	$0.85 \pm 0.02$	$0.80 \pm 0.02$	$0.77 \pm 0.02$

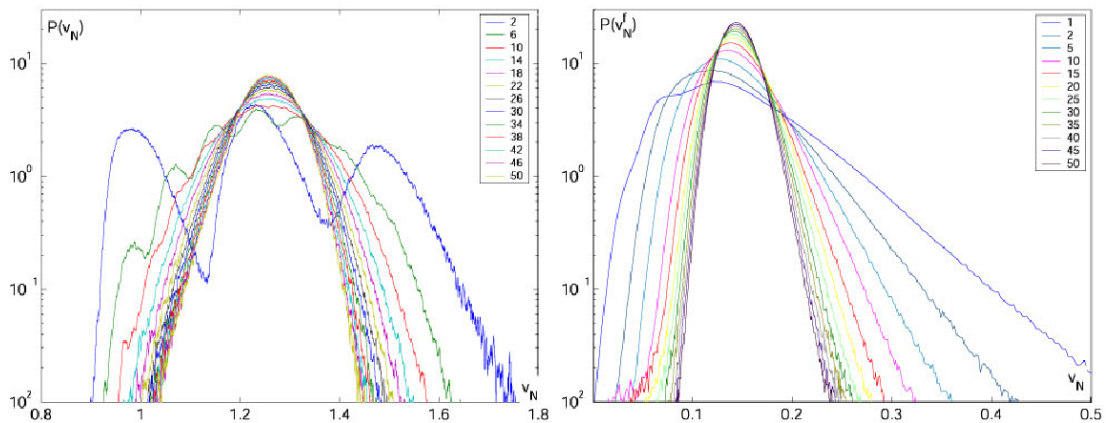
**TAB. 2.1:** Résumé des différents paramètres extraits des distributions de volume libre dans les trois types de systèmes étudiés. (les symboles sont les même que ceux utilisés dans la figure 2.4).

alors qu'il semble peu sensible à l'état de surface des grains.

**Distributions dans les sous-systèmes de N voisins** Comme nous l'avons expliqué plus haut, le but de cette étude expérimentale est de tester la cohérence de la construction statistique proposée par Edwards pour les milieux granulaires. Pour ce faire, il nous faut non seulement étudier les quantités à un grain comme nous venons de le faire, mais surtout les propriétés statistiques de sous-systèmes en fonction de leur taille. De plus, les distributions de quantités globales caractérisant le système, comme le volume libre, contiennent a priori plus d'information que leur simple moyenne. Elles se sont par ailleurs avérées être des outils utiles dans l'étude des systèmes hors d'équilibre, à la fois expérimentalement [108, 109] et numériquement [110, 111]. Enfin, il faut remarquer que dans un milieu granulaire, on ne s'attend pas à ce que la distribution de probabilité à N corps du volume occupé par un sous-système de N grains s'écrive comme le produit des distributions à un grain, du fait de la présence probable de corrélations entre volumes individuels voisins. En particulier, des propriétés intéressantes et non triviales peuvent émerger de la statistique du volume dans des sous-systèmes de  $N \gg 1$  grains. Pour ce faire, il nous faut d'abord définir les sous-systèmes sur lesquels nous allons réaliser cette analyse. Comme les empi-

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

lements sont désordonnés, il n'y a pas de manière évidente de les définir, au moyen d'une frontière géométrique par exemple, ce qui serait l'approche naturelle si les grains étaient aux noeuds d'un réseau régulier. Pour surmonter cette difficulté, on définit des clusters de  $N$  grains en choisissant un grain arbitraire dans l'assemblée et en repérant ses  $N - 1$  plus proches voisins, c'est à dire les  $N - 1$  grains qui sont les plus proches de son centre. Les clusters sont alors constitués du grains original et de ses  $N - 1$  plus proches voisins. Maintenant que nous avons défini les sous-systèmes dont nous avons besoin, nous pouvons procéder à l'analyse de leur propriétés statistiques. A ce stade, il est important de noter que dans le cadre de cette analyse, le volume et le volume libre ne sont plus des notions équivalentes, puisque les clusters sont composés d'un mélange de petits et de gros grains. Nous avons représenté sur la figure 2.5 les distributions de volume par grain  $v_N = N^{-1}\sum_{i=1}^N v_i$  et de volume libre par grain  $v_N^f = N^{-1}\sum_{i=1}^N v_i^f$  dans les clusters de  $N$  grains voisins.



**FIG. 2.5:** Distributions du volume par grain, à gauche, et du volume libre par grain, à droite, au sein des clusters de taille  $N$  pour différentes valeurs de  $N$ . Plus  $N$  est grand, plus la distribution est étroite.

On observe que les distributions de volume libre par grain  $v_N^f$  convergent plus rapidement vers une forme de distribution bien définie que les distributions des volumes par grains  $v_N$ . En particulier, il est clair sur la figure 2.5 que dans le cas du volume par grain,

quand  $N$  varie de 1 à 10, les effets combinatoires dûs à la bidispersité donnent naissance à une série de pics qui compliquent la distribution. En effet, pour  $N = 2$ , on observe les trois pics associés aux trois configurations possibles de deux grains dans un cluster, à savoir deux petits, deux gros, et un de chaque type. De la même façon, la distribution pour  $N = 4$ , qui n'est pas montrée ici, exhibe quatre pics à cause du même type d'effet. Ces effets sont absents de la distribution des volumes libres. Enfin, une description directe de la distribution du volume par grain nécessite de connaître le volume minimal accessible à un grain dans un cluster, et cette quantité n'est pas simple puisque les clusters sont composés arbitrairement des deux espèces de grains. Là encore, le volume libre est mieux adapté à la description de cette statistique puisqu'il évite ce problème par construction.

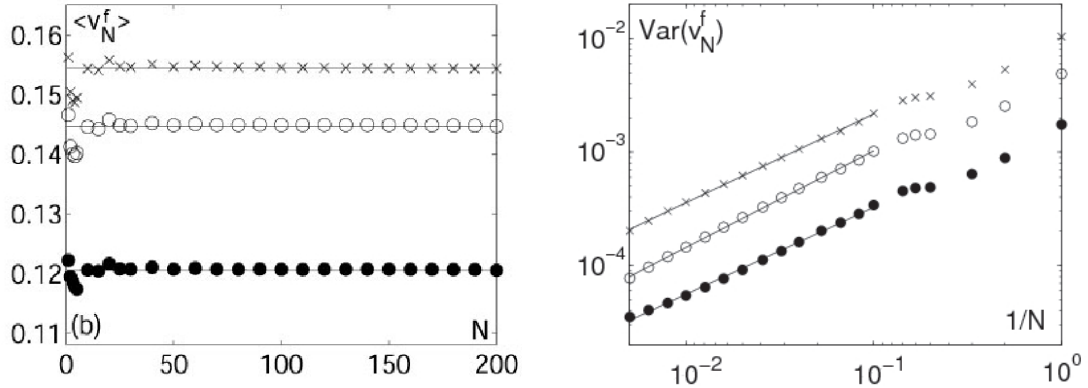
**Dépendance en N** Nous allons maintenant proposer une description des données qui nous permettra d'en extraire les paramètres pertinents et de mener l'analyse que nous avons proposée ci-dessus. Les distributions de volume libre que nous obtenons ont, comme nous l'avons dit, une décroissance exponentielle aux grands volumes, au moins aux plus petites valeurs de  $N$ . De plus, les volumes libres peuvent prendre n'importe quelle valeur positive. Un candidat naturel pour décrire de telles distributions est la loi Gamma. Il a par ailleurs été montré [112] que la statistique des aires des cellules de Poisson-Voronoi obtenue dans des simulations numériques est bien reproduite par cette forme. Nous proposons donc de décrire les distributions obtenues par la forme

$$P(v_N^f) = \frac{1}{\chi_N^{\eta_N} \Gamma(\eta_N)} (v_N^f)^{\eta_N - 1} e^{-v_N^f / \chi_N} \quad (2.8)$$

Cette distribution dépend de deux paramètres :  $\eta_N$  est classiquement appelé le facteur de forme, et  $\chi_N$  le facteur d'échelle. Il est cependant important à ce stade de notre analyse de ne pas anticiper de lien entre ce dernier paramètre  $\chi_N$  et la compactivité telle que définie par l'équation 2.3. Une manière simple d'extraire les paramètres  $\eta_N$  et  $\chi_N$  de nos données consiste à ajuster leurs valeurs de manière à ce que les deux premiers moments

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

du volume libre coïncident avec les moments calculés à partir de la forme 2.8. Ce calcul donne  $\langle v_N^f \rangle = \eta_N \chi_N$  et  $\text{Var}(v_N^f) = \eta_N \chi_N^2$ , dont on déduit  $\chi_N = \text{Var}(v_N^f) / \langle v_N^f \rangle$  et  $\eta_N = \langle v_N^f \rangle / \chi_N$ . Nous avons représenté sur la figure 2.6 la moyenne du volume libre  $\langle v_N^f \rangle$  et sa variance  $\text{Var}(v_N^f)$  pour des tailles de cluster allant jusqu'à  $N = 200$ .



**FIG. 2.6:** Dépendance en  $N$  du volume libre moyen  $\langle v_N^f \rangle$ , à gauche, et de sa variance  $\text{Var}(v_N^f)$ , à droite, pour les trois séries de données dont nous disposons. Les symboles sont les mêmes que dans la figure 2.4. Les courbes de la figure de droite ont été décalées pour plus de clarté.

On observe que le volume libre moyen converge rapidement vers une constante  $v_\infty^f$ , le volume libre moyen de l'empilement. Le comportement de la variance  $\text{Var}(v_N^f)$ , représentée en fonction de  $\frac{1}{N}$ , est plus surprenant. Si les volumes libres individuels associés à chaque grain étaient des variables aléatoires indépendantes, la variance du volume libre total dans les clusters devrait être linéaire dans leur taille  $N$ , en vertu du théorème de la limite centrale, et le volume libre par grain devrait en conséquence être proportionnel à  $\frac{1}{N}$ . Au contraire, sur la gamme de taille sur laquelle nous avons réalisé nos mesures, nous obtenons un comportement de la forme

$$\text{Var}(v_N^f) \approx \nu N^{-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (2.9)$$

Ce comportement des deux premiers moments de la distribution des volumes libres donne



CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

donc pour les paramètres de la loi Gamma une dépendance de la forme  $\chi_N = \chi_e N^{-\alpha}$  et  $\eta_N = \eta_e N^\alpha$ , où  $\chi_e = \nu/v_\infty^f$  et  $\eta_e = v_\infty^{f2}/\nu$ . Les valeurs des différents paramètres ainsi extraits des données sont reportées dans la table 2.1. On peut donc récrire la distribution 2.8 en introduisant les dépendances en N que nous venons de mettre à jour

$$P(v_N^f) = \frac{N}{Z_c(\chi_e, \eta_e, N)} \exp \left[ N^\alpha \left( \eta_e \ln v_N^f - \frac{v_N^f}{\chi_e} \right) \right], \quad (2.10)$$

où le facteur de normalisation  $Z_c(\chi_e, \eta_e, N)$  est donné par

$$Z_c = \exp \left[ N^\alpha \eta_e \left( \ln \frac{\chi_e}{\eta_e} - 1 \right) \right]. \quad (2.11)$$

Ainsi, une dépendance non-extensive apparaît sur la gamme des tailles de clusters étudiés pour  $\ln P(v_N^f)$ . Nous avons reporté sur la figure 2.7 la fonction de scaling  $\Phi(v_N^f) = N^{-\alpha} \ln[P(v_N^f) \exp(N^\alpha v_N^f / \chi_e)]$ .

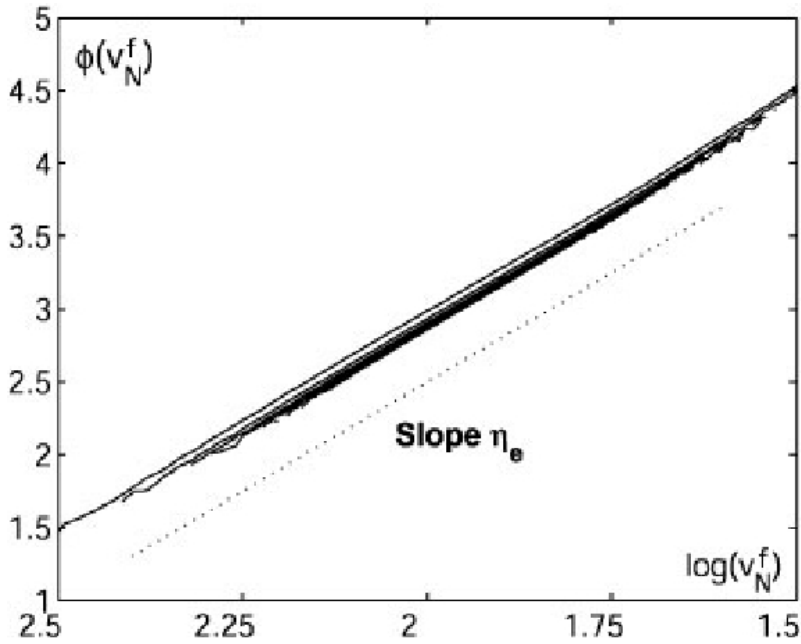


FIG. 2.7: Fonction de scaling  $\Phi(v_N^f)$  en fonction de  $\ln v_N^f$ , pour  $N = 10, 30, 50 \dots 190$  pour les grains lisses non-vibrés.

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

Le fait que les points expérimentaux se superposent sur cette courbe, ainsi que sa linéarité, confirment l'analyse précédente et nous permet d'écrire la distribution  $\Phi_N(V^f)$  du volume libre  $V^f = Nv_N^f$  dans un sous-système de  $N$  grains sous la forme

$$\Phi_N(V^f) = \frac{1}{Z_c(\chi_e, \eta_e, N)} \exp \left[ N^\alpha \eta_e \ln \left( \frac{V^f}{N} \right) - \frac{V^f}{N^{1-\alpha} \chi_e} \right]. \quad (2.12)$$

Dans le cas extensif correspondant à ( $\alpha = 1$ ), la statistique du volume libre respecterait la forme générale donnée par l'équation 2.6, ce qui nous permettrait d'identifier formellement le paramètre  $\chi_e$  avec la compacité  $X$  de l'empilement. Ce n'est pas possible dans notre système, et la formule 2.3 donne une compacité qui dépend de la taille du système. On peut cependant définir une densité d'entropie généralisée  $s(v_N^f)$  et la densité d'"énergie libre"  $f(v_N^f)$  associée en posant

$$s(v_N^f) = \eta_e \ln v_N^f \quad \text{et} \quad f(v_N^f) = v_N^f - \chi_e s(v_N^f) \quad (2.13)$$

ce qui permet de récrire  $P(v_N^f)$  sous la forme

$$P(v_N^f) = \frac{N}{Z_c} e^{-N^\alpha f(v_N^f)/\chi_e} \quad (2.14)$$

Cette forme est semblable à celle obtenue à l'équilibre, à part l'exposant  $\alpha \neq 1$ . Avec ces définitions, le calcul de point col à partir de l'équation (2.10), qui s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial v_N^f} \left( \eta_e \ln v_N^f - \frac{v_N^f}{\chi_e} \right) = 0 \quad (2.15)$$

donne la relation  $\chi_e^{-1} = \partial s / \partial v^f |_{\langle v^f \rangle}$  qui généralise la relation thermodynamique usuelle dans le cas extensif et suggère que le paramètre  $\chi_e$  s'interprète comme la compacité de l'empilement. Il faut remarquer ici que l'analyse canonique qui précède suppose implicitement que le volume total de l'empilement est constant, de manière à ce que quand nous considérons des sous-systèmes de  $N$  grains, le reste de l'empilement joue le rôle d'un réservoir. Comme notre système est fini, nous avons estimé les fluctuations du volume

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

total et trouvé des valeurs voisines de 1.7% et 0.8% en étendant ou non la dépendance sous-extensive à l'ensemble du système. Cela correspond environ à une variation d'une demi couche de grain à la surface de l'empilement.

## 2.3 Discussion

### 2.3.1 Origine physique d'écart à l'extensivité

**Écart à l'extensivité et corrélations** Comme nous l'avons expliqué plus haut, le résultat principal de cette série d'expériences est l'observation d'une dépendance anormale, sous-extensive, de la variance du volume libre dans les sous-systèmes de taille  $N$  considérés dans notre analyse. Nous allons montrer ici que l'origine de cette sous-extensivité est la présence de corrélations entre les volumes libres individuels de grains adjacents. En l'absence de corrélations, le théorème de la limite centrale donnerait  $\text{Var}(v_N^f) \propto 1/N$ . Pour comprendre plus quantitativement comment la présence de corrélations dans notre système se traduit par l'écart au scaling  $\text{Var}(v_N^f) \propto 1/N$ , nous allons faire quelques hypothèses simplificatrices. On suppose donc que (i) les clusters que nous considérons sont des disques de rayon  $R$ , (ii) la densité de grains au sein de ces clusters est homogène, (iii) en introduisant  $\delta v_i^f \equiv v_i^f - \bar{v}^f$ , où  $\bar{v}^f$  est le volume libre moyen par grain, la corrélation  $\langle \delta v_i^f \delta v_j^f \rangle$  des volumes libres associés aux grains  $i$  et  $j$  ne dépend que de la distance  $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  entre ces grains, et pas des positions des grains  $i$  et  $j$  par rapport au centre du cluster par exemple. Nous noterons cette corrélation  $C(r)$  dans la suite. En développant l'expression de la variance, on obtient que

$$\text{Var}(v_N^f) = \text{Var} \left( \frac{1}{N} \sum_i v_i^f \right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j} \langle \delta v_i^f \delta v_j^f \rangle \quad (2.16)$$

En tirant parti des hypothèses introduites plus haut, on obtient

$$\text{Var} \left( \frac{1}{N} \sum_i v_i^f \right) = \left( \frac{\rho}{N} \right)^2 \int_{|\mathbf{r}_1| < R} d\mathbf{r}_1 \int_{|\mathbf{r}_2| < R} d\mathbf{r}_2 C(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) \quad (2.17)$$

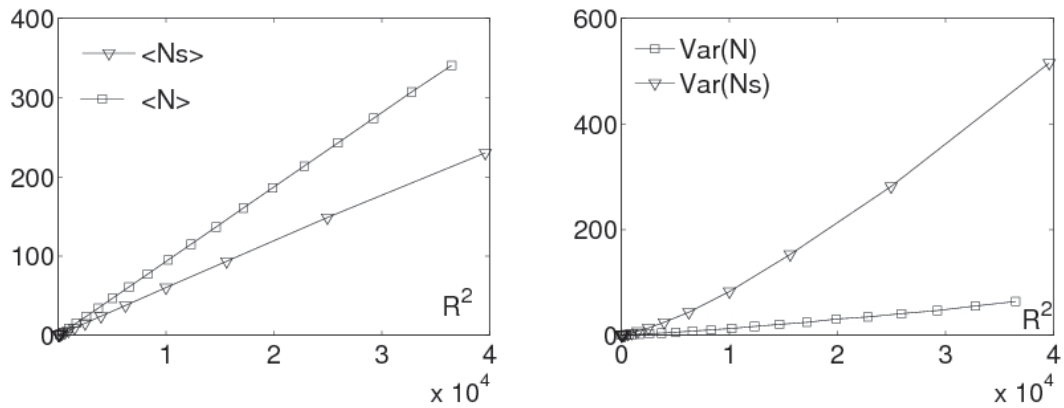
Supposons alors que la fonction de corrélation  $C(r)$  se comporte aux grandes valeurs de l'argument comme  $r^{-\gamma}$ . On peut alors calculer le comportement en  $R$  de l'intégrale qui apparaît dans l'équation 2.17, et on obtient que  $\text{Var}(v_N^f) \sim N^{-\gamma/2}$ . Pour obtenir ce

résultat, il faut passer en coordonnées polaires, puis intégrer sur les vecteurs position  $\mathbf{r}_1$  et  $\mathbf{r}_2$ . En fait, la partie angulaire de l'intégrale apparaît seulement dans le préfacteur de la loi de puissance  $N^{-\gamma/2}$ . Cela suggère que la forme précise des clusters ne joue qu'un rôle secondaire, et n'affecte pas le comportement en  $N$ . Dans notre cas, et dans le cadre de ces hypothèses, on peut inférer l'existence de corrélations dont la décroissance spatiale se comporte comme  $r^{-\gamma}$  avec  $\gamma \approx 1.6$  sur la gamme de distances accessible expérimentalement.

**Sources de corrélations** D'un point de vue physique, ces corrélations sont reliées à la présence de fluctuations anormales du nombre de particules au sein des clusters. Plus précisément, on peut penser soit à des fluctuations anormales de la densité elle-même [101], soit à des fluctuations de la fraction de petits et de gros grains présents dans les clusters. Nous avons représenté sur la partie gauche de la figure 2.8 le nombre moyen  $\langle N \rangle$  de grains et le nombre moyen  $\langle N_s \rangle$  de petits grains présents dans les disque de rayon  $R$  en fonction de  $R^2$ . A noter que cette procédure est différente que celle que nous avons utilisée précédemment, où nous considérons des clusters de proches voisins. Comme on s'y attend, on obtient une relation linéaire de ces valeurs moyennes en  $R^2$ , ce qui ne fait que confirmer le caractère compact des empilements considérés. Cependant, nous avons représenté sur la partie droite de la figure 2.8 la variance  $\text{Var}(N)$  du nombre de grains et la variance  $\text{Var}(N_s)$  du nombre de petits grains présents dans les disques de rayon  $R$ .

On observe cette fois que ces deux quantités ne dépendent pas linéairement de  $R^2$ , et ne sont donc pas linéaires respectivement en  $N$  et  $N_s$ . De plus, ces fluctuations anormales sont beaucoup plus fortes pour les petits grains que pour la densité elle-même. Le fait que la densité se comporte précisément comme  $R^2$  montre d'autre part que les corrections triviales associées au caractère discret de l'assemblée sont négligeables sur la gamme de tailles étudiées. Cela confirme que l'écart à l'extensivité de la variance du volume libre est un effet physique et n'est pas simplement dû à des effets génériques de taille finie qui

CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS



**FIG. 2.8:** A gauche, valeur moyenne, et à droite, variance, du nombre de grains  $N$  et de petits grains  $N_s$  dans les clusters de rayon  $R$  en fonction de  $R^2$ .

affecteraient toutes les observables. On peut cependant se demander si ces dépendances anormales ne trouvent pas leur origine dans le caractère bidimensionnel de notre système, et si les exposants obtenus seraient les mêmes dans un système tridimensionnel. Nous avons obtenu un élément de réponse à cette question. Pour cela, nous avons réalisé des simulations de tessellations de Poisson-Voronoi en deux dimensions, correspondant simplement aux cellules de Voronoi associées à 2000 points jetés de manière aléatoires dans une région carrée du plan, et nous avons menée notre analyse en taille sur ces données. Nous avons reporté sur la figure 2.9 la variance du volume des cellules ainsi construites dans des clusters de taille  $N$  définis selon la procédure présentée plus haut en fonction de  $1/N$ .

L'ajustement linéaire de la variance, tracé en rouge, donne une pente valant 0.97, ce qui est très proche du cas extensif. Cette analyse ne révèle donc aucune dépendance anormale, contrairement à ce que nous avons observé dans notre système. Ce résultat souligne le rôle de l'extension finie des grains dans nos observations, et le fait que nos résultats ne sont pas un artefact dimensionnel.

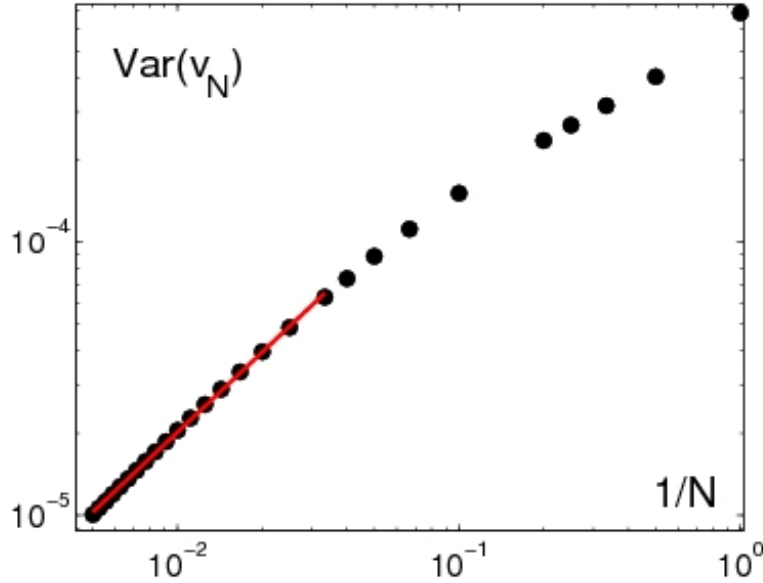


FIG. 2.9: Variance du volume moyen d'une cellule de Voronoï au sein d'un cluster de taille  $N$  en fonction de  $1/N$  pour des points jetés de manière aléatoire dans un carré du plan. L'ajustement linéaire, en rouge, donne une pente de 0.97.

### 2.3.2 Interprétation des paramètres $\chi_e$ et $\eta_e$

**Statut de  $\chi_e$**  Bien que l'extensivité soit en défaut, l'étude expérimentale que nous venons de mener aboutit à une description statistique cohérente. En particulier, la relation  $\chi_e^{-1} = \partial s / \partial v^f |_{\langle v^f \rangle}$ , qui généralise la relation valable à l'équilibre dans le cas extensif usuel, peut être obtenue dans le cadre de notre description par le calcul de la méthode du col présenté ci-dessus. Ce résultat confère une légitimité à l'interprétation de  $\chi_e$  comme la compactivité de l'empilement. Elle est de plus consistante avec la définition de paramètres intensifs proposée dans le contexte des systèmes à l'équilibre avec interactions à longue portée [113]. Dans ce cas, ces paramètres sont normalisés par un nombre effectif de degrés de liberté qui dépend de la taille du système, de manière à ce qu'ils restent finis dans la limite thermodynamique. On remarque enfin que le comportement qualitatif du paramètre  $\chi_e$  correspond à ce à quoi on s'attend physiquement. Par exemple, quand le

système est vibré, son volume libre diminue, ce qui s'accompagne par une diminution de  $\chi_e$ , de manière similaire à ce qui se passe dans un système à l'équilibre où la température décroît quand l'énergie du système diminue.

**Interprétation de  $\eta_e$**  Le second paramètre qui intervient dans notre description statistique de l'empilement,  $\eta_e$ , entre directement dans la définition 2.13 de l'entropie du système et la caractérise. D'un point de vue plus physique,  $\eta_e N^\alpha$  peut être vu comme un nombre d'objets statistiquement indépendants - et collectifs - du point de vue du volume libre, dans un cluster de  $N$  grains. On peut comprendre cet argument dans le cas le plus simple des cellules de Poisson-Voronoi en une dimension d'espace [112]. Dans ce cas, des points sont jetés au hasard sur une droite, et la longueur des cellules associées est la demi-somme des deux segments adjacents à chaque point. Comme les longueurs de ces deux segments sont des variables aléatoires indépendantes, on peut penser à une cellule de Voronoi comme ayant deux degrés de liberté internes dans ce cas, ce qui suggère  $\eta = 2$ . Ce raisonnement simple est confirmé par le calcul exact [112]. Pour revenir à notre situation expérimentale, cela suggère que la présence de corrélation mène à la présence d'objets effectifs complexes, de forme éventuellement fractale, dont le nombre croît de manière non extensive avec la taille du cluster.

### 2.3.3 Conséquences pour le formalisme thermodynamique

**Proximité d'un point critique ?** Les résultats exposés ci-dessus ont des conséquences importantes en ce qui concerne la mesure des propriétés statistiques des systèmes granulaires. D'une part, ils montrent l'importance de vérifier le caractère extensif de la quantité étudiée quand on cherche à extraire le paramètre intensif associé au moyen d'une relation thermodynamique usuelle. On s'attend à ce que la dépendance non-extensive que nous avons trouvée soit présente jusqu'à ce que la taille des clusters dépasse la longueur de corrélation du volume libre dans l'empilement. Or il a récemment été proposé que



les matériaux amorphes soient génériquement à distance finie d'un point critique associé à leur transition de blocage [114, 15, 43, 44]. Ainsi, il est possible que la longueur de corrélation en question soit génériquement relativement grande dans les empilements granulaires désordonnés.

**Spécificité de la description.** Une autre conséquence requiert une attention particulière. La valeur du paramètre  $\eta_e$  qui apparaît dans l'expression de l'entropie est modifiée de même que celle de  $\chi_e$  quand on change la manière de préparer le système. Ceci est une signature de la nature hors d'équilibre du système. En effet, dans une situation d'équilibre, une modification des conditions de préparation du système peut changer la valeur de certains paramètres comme l'énergie ou la température, mais ne peut pas modifier la forme fonctionnelle de l'entropie. Seules ses valeurs peuvent changer. Ici, la valeur de  $\eta_e$  est déterminée par la dynamique microscopique, et une variation de ce paramètre suggère que la manière dont sont visitées les configurations lors du processus de préparation change de manière drastique quand la densité varie. Non seulement les volumes typiquement explorés changent, mais aussi la manière dont les états de volume donné sont explorés.

**Lien avec l'approche de Edwards** Il est bon de rappeler qu'une telle situation peut formellement avoir lieu dans le cadre de l'approche de Edwards. En particulier, comme l'hypothèse d'équiprobabilité de Edwards est restreinte aux états mécaniquement stables accessibles à la dynamique, la densité de ces états dépend a priori de cette dynamique. De ce point de vue, le formalisme général proposé plus haut permet de tenir compte des écarts à l'équiprobabilité des micro-états, en particulier quand cet écart ne se manifeste que par la sélection dynamique des états mécaniquement stables. L'inconvénient est alors que les pondérations  $f(\mathcal{C})$  sont inconnues, mais l'information macroscopique pertinente peut être encodée dans le paramètre  $\eta_e$  qui est expérimentalement accessible.

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

**Précautions de mesure.** On remarque enfin que la présence de corrélations "renormalise" d'une certaine manière la compacité  $\chi_e$ , puisque celle-ci ne correspond pas à la valeur du volume caractéristique extraite de la décroissance exponentielle de la distribution du volume libre à un grain. Bien qu'on s'attende à ce que l'extensivité soit recouverte lorsque la taille du sous-système considéré est plus grande qu'une certaine extension typique liée à la longueur de corrélation, il n'y a aucune raison de penser que la compacité à grande échelle qu'on obtiendrait alors soit égale à  $v^{f*}$ . Ce volume caractéristique n'est donc pas une mesure pertinente de la compacité de l'empilement.

## CHAPITRE 2: CAS STATIQUE : STATISTIQUE DU VOLUME LIBRE DANS LES EMPILEMENTS

## **Chapitre 3**

### **Cas dynamique : A la traversée de la transition de blocage**

## 3.1 Dispositif et phénoménologie

### 3.1.1 Dispositif expérimental

Ce chapitre est consacré à la présentation détaillée du dispositif expérimental qui nous a permis d'étudier la transition de blocage dans un milieu granulaire modèle. Après avoir décrit son principe général, nous détaillerons ses différents éléments structuraux, et nous finirons par une présentation complète de la chaîne d'acquisition et de traitement des données.

#### *Principe*

**Choix du système.** L'objectif de cette expérience est de préciser les mécanismes microscopiques responsables du ralentissement de la dynamique et de l'apparition d'un module de cisaillement fini au sein d'une assemblée amorphe de grains secs quand la densité de l'assemblée devient grande. Pour ce faire, il est crucial de pouvoir mesurer les quantités microscopiques associées, à savoir la position d'un grand nombre de grains à tous les instants de la dynamique. Une manière simple de réaliser un tel projet consiste à considérer un système bidimensionnel. Pour assurer le caractère amorphe de l'assemblée, on peut choisir judicieusement la taille des grains de manière à ce qu'ils ne soient pas sujet à cristallisation. Dans notre cas, la géométrie naturelle pour des grains en deux dimensions d'espace est le disque, et le choix de travailler avec deux tailles de disque est le plus simple qui permette d'éviter l'apparition d'un ordre cristallin. Pour ne pas tomber dans un cas marginal comme les disques apolloniens et se prémunir des phénomènes de ségrégation pouvant apparaître aux long temps, à cause par exemple des effets de volume exclu, la littérature [115] suggère dans le cas bidisperse un rapport de diamètres typique de 1.2-1.3. Notre choix s'est donc porté vers des disques métalliques de laiton de diamètres 4 et 5mm identiques dans leur géométrie à ceux utilisés dans l'expérience précédente.

**Géométrie et injection.** Comme nous l'avons rappelé en introduction, la matière granulaire soumise à son propre poids peut se compacter de manière lente, quand on la vibre doucement par exemple. Or nous aimerions pouvoir évaluer des moyennes d'ensemble en moyennant sur le temps, ce qui nécessite que la dynamique du système soit stationnaire au sens de sa densité moyenne par exemple. Les grains sont donc disposés dans le plan horizontal, pour s'affranchir des effets de la gravité. L'ensemble des prescriptions qui précèdent ont été largement inspirées par le travail de Guillaume Marty [71, 76]. Bien sûr, l'existence d'une dynamique requiert un certain mécanisme d'injection d'énergie. Là encore, de nombreux systèmes analogues ont été étudiés où l'injection est effectuée par un bord [78, 87]. Nous aimerions, pour pouvoir effectuer des moyennes spatiales, que notre système soit homogène, au sens où ils n'exhibent pas naturellement de gradient d'agitation ou de densité. Nous devons donc injecter l'énergie de la manière la plus uniforme possible. Pour cela, nous avons décidé de disposer les grains sur un plateau vibré horizontalement dans son plan selon une direction fixée et de manière approximativement harmonique. Lors d'un cycle, si l'accélération devient plus grande que le produit du coefficient de frottement relatif de la plaque et des grains et de l'accélération de la pesanteur, un grain posé sur la plaque acquiert une vitesse relative et son énergie moyenne dans le référentiel de la plaque devient non nulle si cela arrive à chaque cycle.

**Confinement** Enfin, nous aimerions pouvoir ajuster la densité du système. Pour ce faire, nous allons travailler avec un nombre fixé de particules, et les confiner dans une cellule rectangulaire de surface variable. En outre, cette cellule de confinement est fixée dans le référentiel du laboratoire. En effet, lors d'études préliminaires, nous avons constaté qu'une cellule fixée dans le référentiel de la plaque, et donc entraînée par son mouvement oscillant, produit d'importantes inhomogénéités dans l'injection d'énergie. Les bord, en tapant contre les grains, contribuent à l'injection et produisent une agitation plus importante dans leur voisinage. Enfin, les grains doivent être recouverts d'un couvercle. En

## CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

effet, s'ils ne sont pas contraints dans la direction verticale, il arrive que certains d'entre eux se retournent sur leur tranche plutôt que de reposer sur leur base.

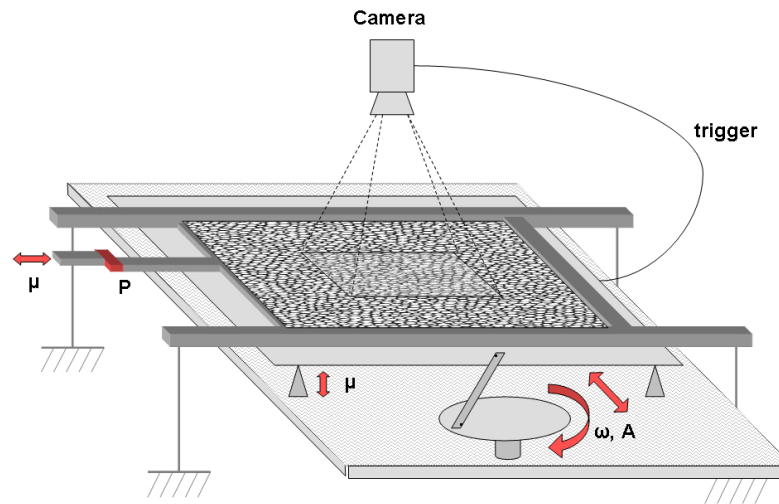
**Mesures** Dans le cadre de ces choix, il est possible d'obtenir les informations microscopiques que nous souhaitons en filmant le système avec une résolution qui nous permette de suivre le mouvement des grains présents dans les images. Cependant, comme l'énergie est injectée en vibrant à une certaine fréquence, on s'attend à ce que leurs mouvements individuels gardent une trace très marquée de cette fréquence. En particulier, dans la limite des faibles accélérations du plateau, il n'y a plus de mouvement des grains dans le référentiel mobile, et leur mouvement dans le laboratoire est harmonique. Nous désirons nous affranchir de cette composante triviale du mouvement. Pour cela, et en suivant une fois encore les travaux de Guillaume Marty, nous avons fait le choix de stroboscooper la dynamique à la fréquence d'injection. Nous aimerions enfin obtenir une caractérisation globale des contraintes exercées par le système sur les bords, puisque la transition que nous nous proposons d'étudier admet une définition mécanique en termes de forces. Il est commode dans ce dispositif de mesurer la contrainte normale exercée par le système à la paroi mobile. Nous allons dans ce qui suit présenter l'implémentation du dispositif de principe que nous venons de décrire.

### *Table vibrante*

Les parties mécaniques constitutives de la table vibrante s'organisent naturellement en quatre blocs structuraux : le portique de support, le plateau, son système d'entraînement, et enfin la cellule de confinement. Un schéma de principe est reporté sur la figure 3.1

**Le portique** Conscients des problèmes que peut poser le contrôle des vibrations, notamment leur propagation intempestive au système d'acquisition, nous avons pris soin dans la conception de découpler au maximum les parties en mouvement des éléments

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.1:** Schéma de principe de l'expérience.

qu'on souhaiterait idéalement immobiles dans le laboratoire. La table vibrante et son système d'entraînement sont donc installés sur un portique métallique, assemblé au moyen de poutres et d'éléments de liaison X95 de la marque MICROCONTROLE, qui est constitué de quatre pieds verticaux de 1m de hauteur reposant sur des silent-blocs en caoutchouc et d'une structure rectangulaire de 1,20m de longueur par 0,7m de largeur. A noter ici que les silent-blocs sont fixés aux pieds au moyen de vis à deux pas munies de contre écrous, dont la simple rotation permet d'ajuster la longueur totale des pieds. Ceci nous procure un réglage primaire de l'horizontalité de la structure. Les poutres constitutives ont un diamètre typique de 95mm, ce qui leur confère une rigidité importante. Les premiers essais réalisés en vibration avec cette structure se sont avérés désastreux. Pour illustrer le problème, imaginons que nous nous trouvions debout sur une barque au milieu d'un lac, et que nous décidons de sauter à l'eau. Au moment du saut, nous désirons acquérir une impulsion horizontale de manière à retomber dans l'eau et non sur la barque. Il est clair qu'alors, la barque va elle aussi acquérir une impulsion horizontale dans le sens opposé à la notre,



### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

et éventuellement dériver plus ou moins loin, conformément à la troisième loi de Newton. Plus notre embarcation est légère, plus le phénomène est important. Pour quantifier précisément ce phénomène, auquel on associe parfois les mots mystérieux "masse active, masse passive", et dimensionner notre dispositif, on peut faire le raisonnement suivant. Considérons un système isolé de deux masses  $M$  et  $m$ , que nous appellerons respectivement active et passive, liées entre elles par une barre droite et sans masse dont la longueur  $L$  évolue au cours du temps comme  $L(t) = L_0 + dL \cos(\omega t)$ , et respectivement situées en  $A(t)$  et  $B(t)$  dans le référentiel du centre de masse  $G$ . On a donc  $L(t) = \left\| A(t)\vec{B}(t) \right\|$ . Comme le système est isolé, ce référentiel est Galiléen. Nous aimerions connaître la trajectoire de ces masses. Par définition, on a  $M\vec{G}A + m\vec{G}B = 0$ . Donc  $\vec{G}A(t) = -\frac{m}{m+M}\vec{A}B$  et  $\vec{G}B(t) = \frac{M}{m+M}\vec{A}B$ . Dans la limite  $\frac{m}{M} \ll 1$ , l'amplitude du mouvement  $\frac{m}{m+M}dL$  de la masse active  $M$  s'annule. Cependant, cette amplitude ne décroît que comme  $\frac{1}{M}$ . Il faut donc une masse active très grande pour que le mouvement imposé soit principalement transmis à la masse passive. En conséquence de quoi notre première structure, trop légère, se promenait allègrement dans la pièce. La masse passive, dans notre cas constituée du plateau et des grains, a une masse typique de 5kg. Nous avons donc abondamment lesté notre structure. Le premier ensemble de lestes consiste en un caisson fixé sur la partie supérieure de la structure, à son extrémité et dans le sens de la largeur, et rempli de 14 briquettes de plomb de 11kg chacune. Le second ensemble de leste consiste en deux barreaux de laiton de 35kg chacun fixés à l'intérieur des poutres horizontales les plus longues. De manière à limiter encore les mouvements résiduels du portique, il a été fixé au mur par l'intermédiaire de ces barreaux au moyen de tiges traversantes via un système de silent-blocs constitué de matériaux absorbants les vibrations.

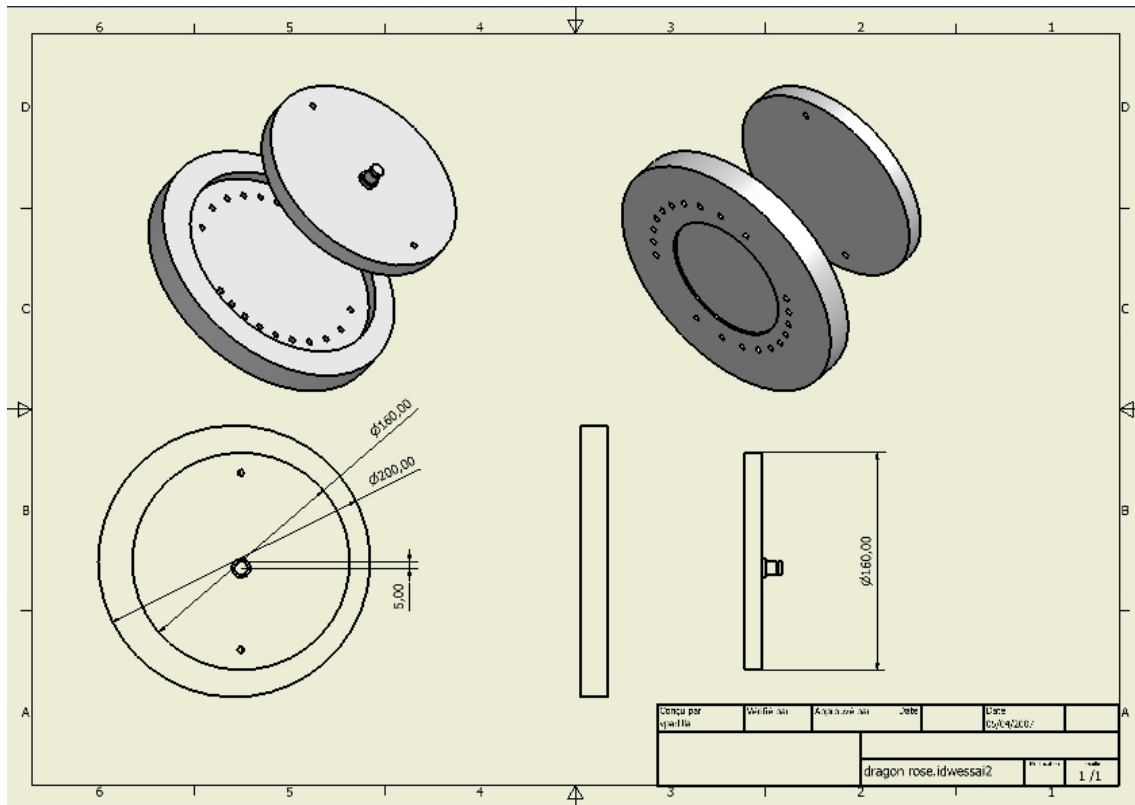
**L'entraînement** Les contraintes qui ont motivées nos choix concernant le système d'entraînement des parties oscillantes étaient les suivantes. Ne sachant pas a priori dans quelle gamme de fréquence et d'amplitude de vibration nous allions travailler, nous avons di-

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

mensionné ce système pour pouvoir entraîner une masse de quelques kilogrammes à une fréquence maximale de 50Hz et avec une amplitude de l'ordre du centimètre. Le point crucial ici est l'importance de nos possibilités de réglage de ces paramètres. Ainsi, la question du choix des parties de transmission a été au cœur de la réflexion sur le design de la table vibrante. En effet, il n'est pas mécaniquement évident de transmettre des forces de l'ordre de  $F = \text{Max}(m\ddot{x}) = mA\omega^2 = 1kg * 0.01m * (2\pi * 50Hz)^2 \approx 10^3N$ , où A est l'amplitude de l'oscillation et  $\omega$  sa pulsation, au moyen d'une pièce dont on aimerait savoir ajuster la position au millimètre et ce de manière simple. Après avoir envisagé différentes possibilités, nous avons opté pour une solution inspirée de l'industrie automobile, et plus précisément des pièces de réglage d'arbre à cames de chez Porsche. Il s'agit d'un rotor cylindrique, entraîné via une courroie par un moteur électrique, et possédant une gorge excentrique dans laquelle vient se loger un rotor cylindrique secondaire sur lequel s'attache la bielle de transmission reliée aux parties mobiles. L'axe auquel est fixé cette bielle, solidaire du rotor secondaire, est lui même excentré, de manière à ce que les axes des deux rotors coïncident dans la configuration de référence. Ainsi, une rotation relative des deux rotors permet de décaler les axes de manière très fine, et d'ajuster ainsi l'amplitude de l'oscillation tout en conservant une grande robustesse mécanique. Ces rotors, en alliage de DURAL, peuvent être vissés l'un dans l'autre à différents angles relatifs correspondant à 20 amplitudes linéairement réparties entre 0 et 2cm. Le plan de notre système de rotors excentriques est reporté sur la figure 3.2. Le moteur, de la marque OMRON, délivre un couple nominal de 4.77 N.m. Le tout est fixé sur le portique dans l'épaisseur des poutres constituant sa partie supérieure. Une photographie du système d'entraînement tel qu'il est installé sur l'expérience est représentée sur la figure 3.3

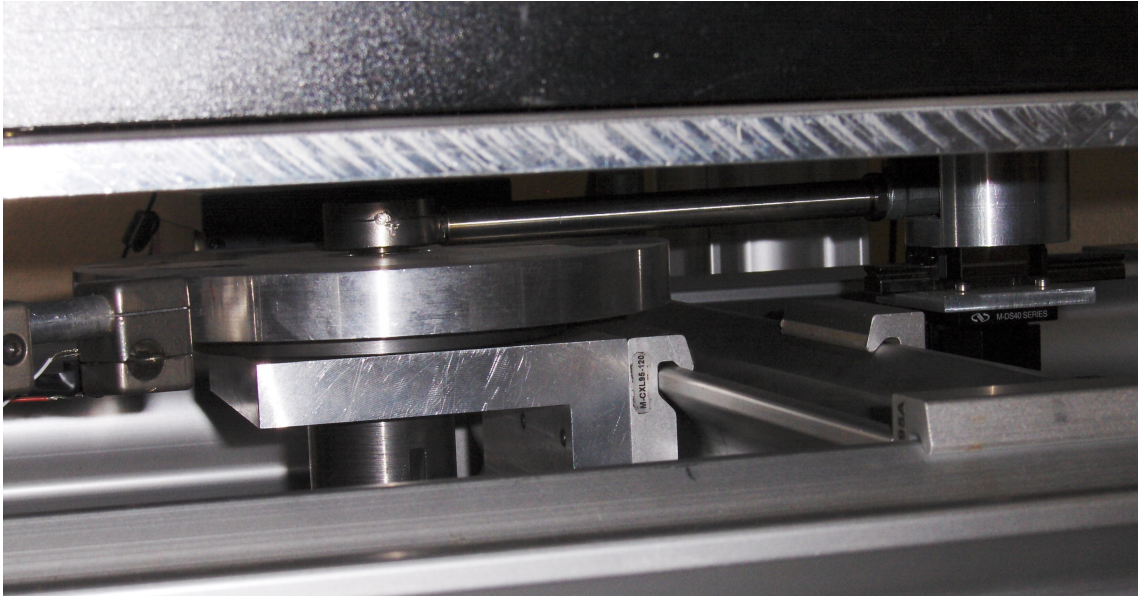
**La plaque** Les parties mobiles sont entraînées dans l'axe longitudinal du portique par le système présenté ci-dessus. Les quatre contraintes essentielles ici sont la direction du mouvement, l'horizontalité, la planéité et le poids. Nous avons, pour assurer le caractère

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.2:** Schéma du système de rotors excentriques. La pièce de plus gros diamètre est entraînée par le moteur. La pièce de petit diamètre vient se loger dans la précédente, et y est fixée par deux vis. Les trous correspondent aux différentes positions possibles de fixation.

rectiligne et unidirectionnel du mouvement imposé, fixé la plaque sur trois glissières à billes couissant sur des rails en acier. Ces rails sont montées sur des petites platines de translation verticale en queue d’aronde, micro-contrôlées, et solidaires du portique. Ces dernières nous permettent de régler le niveau de la plaque de manière extrêmement fine, puisque leur amplitude totale de déplacement vertical est de 5mm et qu’elles se trouvent aux sommets d’un triangle de 40cm de coté, et viennent en complément des vis à deux pas permettant un réglage grossier au niveau du portique. Enfin, ce que nous avons appelé jusqu’ici la plaque est en fait un assemblage de métal, de caoutchouc et



**FIG. 3.3:** Photographie du système d'entraînement. On distingue le système de rotors, la bielle, et la platine de fixation sur la plaque, ainsi qu'une platine de translation verticale.

de verre. En effet, nous avons besoin d'une structure très rigide où fixer la bielle. Nous avons donc fait usiner une plaque de DURAL de 600\*600\*10mm de manière à évider le maximum de volume de métal tout en conservant la rigidité. Des essais préliminaires réalisés directement sur cette plaque - qui était initialement rectifiée au centième de mm - nous avaient par ailleurs montré que le mouvement d'un grain est sensible aux directions d'usinage de la plaque, et donc à son état de surface, malgré sa rectification. Nous avons donc opté pour une surface en verre, dont les qualités de planéité locale sont nettement meilleures. La plaque de métal comporte donc une gorge ménagée dans son épaisseur où vient se loger une plaque de verre de dimensions légèrement inférieures. Entre le fond métallique et le verre, nous avons disposé une fine couche de caoutchouc qui permet de le rendre noir et opaque, et d'éviter le contact métal verre qui pourrait s'avérer destructif. La liaison mécanique périphérique entre le verre et le métal est elle aussi assurée par une bande de caoutchouc qui interdit les chocs et permet une transmission confortable du

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

mouvement. A noter que la plaque de verre est simplement posée sur le fond, mais dans les conditions d'utilisation que nous avons explorées, cette liaison s'est avérée suffisante. La bielle est reliée à ce système via une pièce intermédiaire reposant sur une glissière et possédant elle aussi un réglage vertical, comme on peut le voir sur la figure 3.3.

**La cellule de confinement** Lors d'essais préliminaires, nous avons essayé de confiner les grains de la manière la plus simple possible, à savoir dans une simple boîte de Pétri collée sur la plaque. Nous nous sommes vite aperçu qu'en vibration, l'agitation des grains était sujette à une forte inhomogénéité. En effet, à chaque cycle, ceux d'entre eux dont la distance aux bords était comparable à l'amplitude de l'oscillation recevaient des chocs de la part de ces derniers. Cette injection d'énergie aux bords avait un effet à une distance significative à l'intérieur du système en terme de mobilité des grains. Pour limiter cet effet des bords, nous avons décidé de travailler avec une cellule fixe dans le référentiel du laboratoire. Notre choix s'est donc orienté vers une cellule de confinement rectangulaire, de manière à respecter la symétrie du mouvement du plateau, et complètement indépendante des parties mobiles. La cellule est constituée de quatre barres de section carrée de 1cm, en DURAL, vissées entre elles et fixées au moyen de barres verticales à une banc d'optique. La géométrie résultante permet d'ajuster verticalement la position de la cellule de manière à ce qu'elle se trouve juste au dessus de la plaque de verre, à une distance typique de 1mm, de manière à ce que les grains ne puissent pas s'en échapper. De plus, un couvercle de PLEXIGLAS vient affleurer les grains en se posant sur ce cadre métallique, ce qui leur évite de se retourner et de se retrouver sur leur génératrice. Comme nous l'avons mentionné plus haut, le paramètre de contrôle de notre expérience est la densité de grains dans la cellule. Comme nous travaillons avec un nombre de grains constant, nous désirions pouvoir faire varier son volume, et ce de manière bien contrôlée. Pour cela, nous avons confectionné un piston qui vient se glisser sans contact entre la plaque de verre, le couvercle et les bords de la cellule, et qui est actionné par une platine motorisée de

## CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

marque MICROCONTROLE avec une précision micrométrique. La translation de ce piston est contrainte à la direction perpendiculaire à celle du mouvement du plateau par une glissière en acier dont le frottement statique est extrêmement faible.

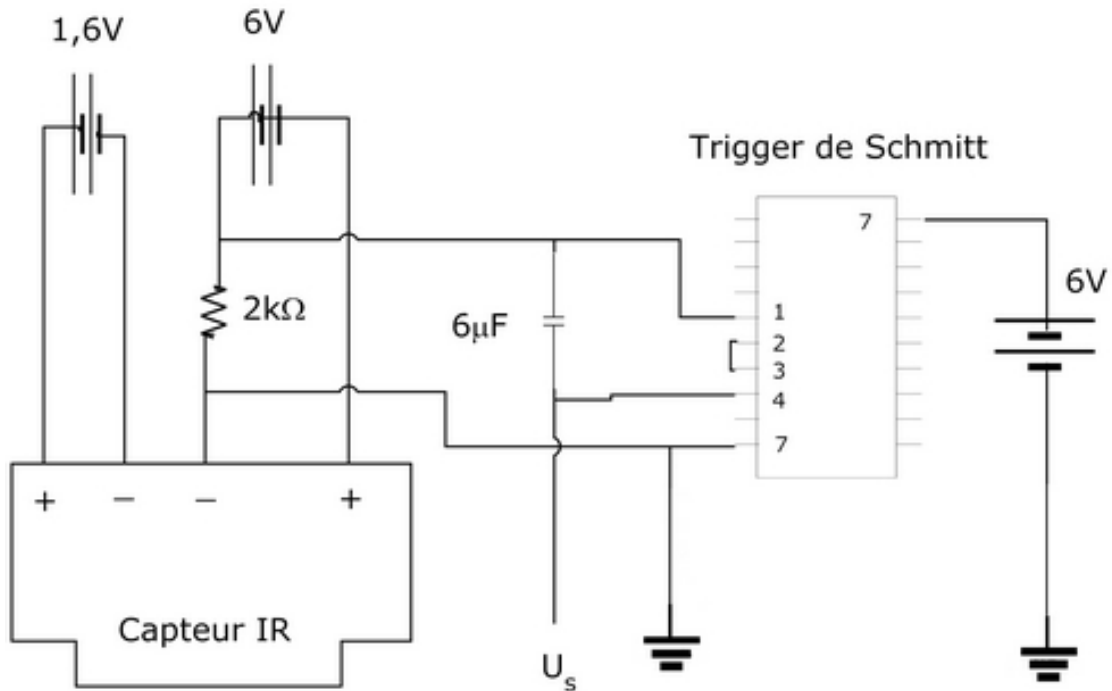
### *Instrumentation et acquisition*

**Mesure de force à la paroi** Nous désirions disposer d'une mesure macroscopique de l'état de notre système. Dans le cas d'un système thermodynamique, la variable naturelle associée à un paramètre de contrôle est celle qui lui est énergétiquement conjuguée : si on impose le volume, il est naturel de mesurer la pression, qui se traduit par une force à la paroi. Bien que ces idées ne se transposent pas a priori à notre situation expérimentale - le fait que notre système soit maintenu loin de l'équilibre ne nous permet pas de définir la notion de pression - une mesure de force à la paroi nous semble cependant une caractérisation macroscopique naturelle. Par ailleurs, nous cherchons à étudier une transition qui se traduit à l'échelle du système par l'apparition d'une rigidité. On s'attend donc à observer une signature de cette transition dans un tel signal. Pour réaliser cette mesure, nous avons récupéré un capteur de force provenant d'une balance de cuisine, que nous avons câblé à un amplificateur de gain réglable, puis calibré au moyen d'une série de poids variant de quelques grammes à quelques kilogrammes. La calibration nous assure que dans ces régimes de contraintes, la réponse du capteur est linéaire et réversible. Ce capteur est constitué d'une pièce métallique munie d'un pont de jauges, fonctionnant dans son régime de déformations élastiques. L'amplitude de ces déformations est dans ces régimes de contraintes plusieurs ordres de grandeur plus petite que tous les déplacements imposés au piston. La sortie du capteur est reliée à une carte d'acquisition qui nous permet d'enregistrer le signal de sortie à une fréquence de 100Hz. Le capteur a été disposé entre le piston permettant d'ajuster le volume de la cellule et la platine motorisée à laquelle il est asservi. De la sorte, nous mesurons bien la force qu'exerce l'assemblée de grains sur la paroi latérale.

**Prise d'images** Cependant, l'intérêt d'un tel dispositif, en particulier vis à vis d'autres systèmes exhibant une telle transition, comme les suspensions colloïdales [57, 3], est que nous sommes capables d'obtenir des mesures microscopiques extensives. En particulier nous aimerions suivre la dynamique individuelle d'un grand nombre de grains au cours du temps. Pour cela, nous avons mis en place un système de prise d'images, dont l'élément central est une caméra haute résolution Redlake Megaplus  $2000 \times 2000$  pixels 12 bits. La contrainte ici consiste à pouvoir repérer et suivre les grains au cours du temps en traitant correctement les photos de l'assemblée. Or imaginons qu'un grain soit collé sur la plaque oscillante ; si nous prenons des images de ce grain avec notre caméra fixée dans le laboratoire à une fréquence et avec un temps de pause quelconque, nous allons typiquement obtenir des images représentant une traînée blanche centrée sur une position variable dans le temps. Pourtant, un tel grain, puisqu'il n'a pas de mouvement relatif par rapport à la plaque, se trouve dans son état de référence, au sens où son agitation est nulle. Nous aimerions donc le voir bien net et immobile sur les images. Par ailleurs, si l'assemblée était filmée de cette manière, nous perdriions vite la trace des identités des grains du fait de l'amplitude des mouvement individuels à chaque image. On pourrait envisager de filmer le système à une fréquence beaucoup plus élevée que la fréquence de forçage, mais ceci est impraticable techniquement pour des raisons de taux de transfert et de stockage. Nous avons donc mis en place un système électronique qui synchronise la prise d'images sur le mouvement du plateau. Plus précisément, un capteur de présence optique fonctionnant dans l'infrarouge est fixé dans le laboratoire et détecte le passage d'un réflecteur collé sur le rotor principal. A chaque passage du réflecteur, le capteur envoie un signal qui, via de l'électronique TTL dont le schéma est représenté sur la figure 3.4, déclenche la prise d'une image par la caméra.

Ainsi, nous obtenons des images de la dynamique stroboscopée à la fréquence d'injection. Comme nous le verrons plus tard, notre protocole implique de nombreuses heures de prise d'images. Nous ne pouvons donc pas faire appel à des fichiers tampons pour

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.4:** Schéma électrique du dispositif de déclenchement. Le trigger de Schmitt permet l'adaptation d'impédance, et la capacité réduit le niveau de bruit du signal d'entrée. Le signal de sortie est, en fonctionnement, un créneau à la fréquence d'excitation du capteur, donc à celle de la plaque.

stocker les photos qui doivent être transférées et enregistrées au fur et à mesure sur le disque dur d'un PC. Pour gérer une telle fréquence d'acquisition, nous avons fait appel à la technologie CameraLink, qui permet d'atteindre une fréquence de 15Hz pour une telle taille d'image. Enfin, pour que nos images soient nettes, nous avons après quelques essais conclu que le temps de pause adapté à la vitesse d'un grain de référence était 5ms. Compte tenu de la sensibilité du capteur, un tel temps de pause requiert, pour obtenir un contraste suffisant, une grande quantité de lumière. De plus, à ces fréquences, le clignotement que produiraient des néons alimentés en courant 50Hz du secteur serait très visible. Pour obtenir l'éclairage le plus stationnaire possible, nous avons donc choisi d'utiliser des ampoules à incandescence, puisque celles-ci sont relativement insensibles aux inversions



### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

du courant du fait de leur inertie thermique. Une puissance totale de 1200W a été nécessaire à la prise d'images, répartie en douze ampoules de 100W disposées à la périphérie de la caméra. Il faut mentionner ici que toutes les parties dont nous avons dit qu'elles étaient fixes dans le laboratoire sont fixés sur un banc optique de 300kg disposé sous le portique, comme on peut le voir sur la figure 3.5. Ceci assure un bon découplage entre les parties mobiles et l'acquisition. En particulier, la caméra est fixée sur une armature mécanique posée sur des coussins de mousse et se situe à une trentaine de centimètres à la verticale de l'assemblée. Différentes vues de l'expérience ont été reportées sur la figure 3.5.

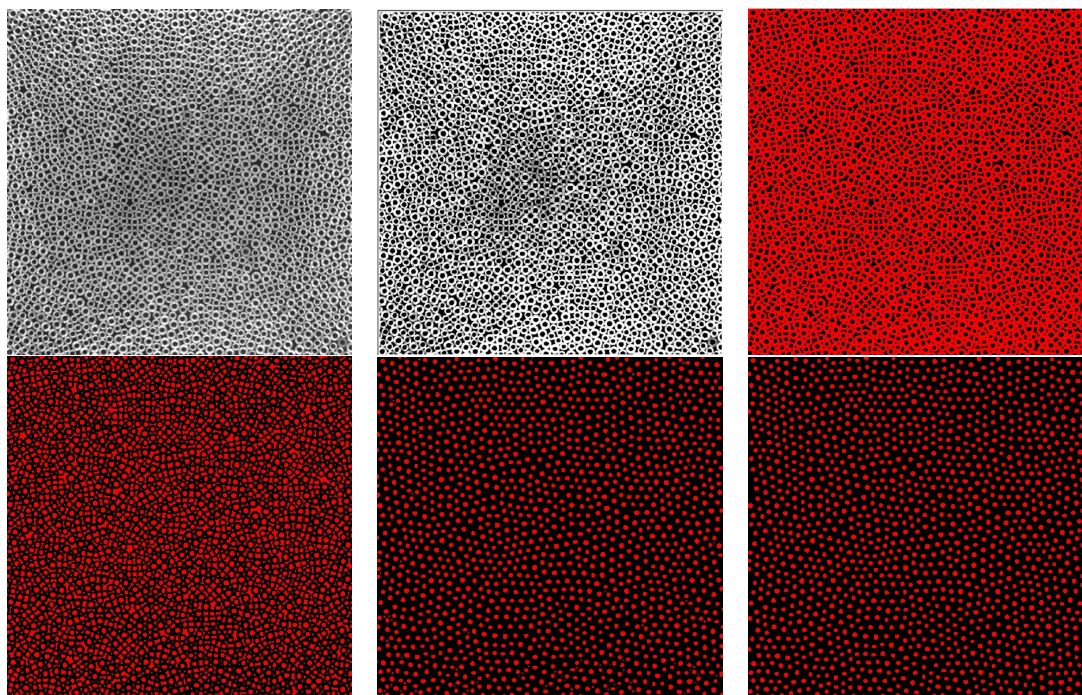
**Chaîne de traitement** A ce stade, nous disposons d'un dispositif mécanique robuste doté d'un paramètre de contrôle, le volume. Nous disposons encore d'un système d'acquisition qui nous permet d'enregistrer le comportement dynamique de ce système pour produire des données brutes sous forme d'images et de signal numérique. Afin de pouvoir procéder à l'analyse proprement dite de ces données, et en particulier pour produire la matière de départ de cette analyse que constituent les positions des grains à chaque instant d'un certain protocole ainsi qu'un signal calibré de force en fonction du temps, nous devons compléter cette construction par une chaîne de traitement. Pour cela, nous disposons de deux ordinateurs de bureau disposant chacun de 3Go de mémoire RAM, montés en réseau, et munis d'une collection de disques durs internes et externes. Ces deux PC fonctionnent indifféremment pour l'acquisition et le traitement. Ils sont tous les deux équipés des logiciels LabView, de chez National Instrument, et Matlab, qui sont les outils que nous avons choisis pour élaborer cette chaîne de traitement. Le premier d'entre eux enregistre le signal émis par le capteur de pression. Le second écrit les images en temps réel sur un disque interne de 250 Go. Ces images sont ensuite transférées vers un disque de 1To, et c'est là que commence le traitement. Celui se décompose en deux étapes principales. La première consiste à extraire des images les informations qui nous intéressent,

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.5:** En haut à gauche, vue générale de l'expérience. On distingue la caissette contenant la masse active de plomb. En haut à droite, vue de la platine de translation, du capteur de force et du piston. En bas à gauche, vue de la cellule de confinement. On distingue ses barres de fixation verticale ainsi que ses platines de réglage. En bas à droite, vue du système de transmission et du capteur de déclenchement.

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.6:** Résultats successifs de l'application des filtres LabView pour le repérage des grains. En haut, de gauche à droite, image originale, correction du contraste, et résultat de la binarisation. En bas, de gauche à droite, résultat de l'inversion, premier repérage des objets grâce au critère de circularité, et repérage final, où on a retiré les petits objets.

à savoir la position des disques qui y figurent, ainsi que leur type. Pour cela, nous avons utilisé une bibliothèque d'outils de traitement d'images proposée par le logiciel LabView appelée Vision Assistant. Grâce à une interface simple, nous avons assemblé un filtre qui binarise l'image, repère les cercles et en détecte les centres et les aires. Quelques étapes intermédiaires de débruitage, comme la suppression de petits objets ou la construction des enveloppes convexes sont nécessaires pour obtenir un résultat convaincant. Cette séquence est illustrée sur la figure 3.6

Cette interface permet d'ajouter à cette séquence une analyse de mire qui permet de calibrer les images dans les unités physiques. Ce filtre est ensuite intégré à un pro-

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

gramme de gestion d'ouverture/fermeture/écriture pour former le programme LabView complet de repérage. Le résultat est un ensemble de fichiers correspondant aux instants de la dynamique. Chacun comporte une ligne par grain repéré où figurent son abscisse, son ordonnée, son aire dans un système d'axes préalablement calibrés au moyen de la mire, ainsi que l'instant courant. Vient alors la seconde étape de cette chaîne de traitement. En effet, nous savons à ce stade quelles sont les caractéristiques des grains présents dans chaque image, mais nous ne connaissons pas leur identité. Il faut donc procéder au suivi des grains dans le temps, c'est à dire attribuer un label à chaque grain de manière à savoir où il se trouve dans chaque image. Cette étape a été réalisée sous Matlab, grâce à une fonction écrite par une équipe de Harvard [116]. La méthode consiste à chercher dans le voisinage à l'instant  $t+1$  des grains repérés à l'instant  $t$ , en minimisant les carrés des distances parcourues. Le programme gère très bien les grains qui disparaissent des images et possède une mémoire qui permet de ne pas oublier un grain qui a disparu pendant quelques instants. En sortie de cette chaîne de traitement, nous disposons donc de la position de chaque grain en fonction du temps, avec moins d'un grain perdu par image en moyenne.

**Calibrations** A toutes fins pratiques, la précision obtenue sur notre mesure de force à la paroi est excellent. En effet, nous sommes capables d'ajuster le gain et le zéro de notre ampli de manière à éliminer toute erreur systématique du signal obtenu. De plus la sensibilité du capteur s'est avérée excellent, puisque nous sommes capables, après calibration, de mesurer des poids de l'ordre du gramme. Dans le protocole que nous présenterons plus loin, les forces typiques sont de l'ordre du kilogramme. Une évaluation grossière mais largement suffisante de notre résolution est donc  $\epsilon_F \equiv \frac{\delta F}{F} < 10^{-3}$ . La calibration du repérage des centres des disques, malgré la difficulté associée au caractère stroboscopique de la dynamique, s'avère elle aussi remarquablement bonne. Pour évaluer l'erreur commise sur la position d'un grain, nous avons enregistré la position d'un grain de référence, c'est

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

à dire d'un disque blanc collé sur la plaque de verre et de la taille d'un petit grain, isolé de l'assemblée par une coupelle de plastique ménageant une cavité au sein du système. Si le déclenchement de la caméra et le repérage du disque étaient parfaits, et si la caméra était rigoureusement fixe dans le laboratoire, la position de référence extraite de ces images devrait être rigoureusement constante. Notre mesure, dont les fluctuations sont représentatives de l'ensemble des erreurs commises dans ce repérage, nous fournit donc une manière naturelle de les caractériser. L'écart type de la distribution des positions repérées au cours du temps vaut  $2.10^{-3}$  diamètres de petit grain. Étonnamment, l'effet dominant qui limite notre précision provient du couplage résiduel du dispositif d'acquisition avec les parties vibrantes, qui se fait via le sol, et des interactions de l'assemblée avec la cellule via les bords. En effet, l'analyse en fréquence du signal de position du grain de référence révèle la présence de la fréquence d'injection, et une amélioration significative de notre résolution a été obtenue en affinant ce découplage. En particulier, l'armature métallique qui porte la caméra était initialement vissée à la table optique. Or cette liaison rigide conduit très bien les vibrations. Nous avons donc remplacé cette liaison par d'épaisses bandes de mousse synthétique et simplement posé le cadre sur ces dernières. C'est dans cette configuration que la meilleure résolution a été obtenue.

L'ensemble des phénomènes observés et décrits dans la suite de ce travail ont été obtenus avec une fréquence d'oscillation de 10Hz et une amplitude de 1cm. Le paramètre qui contrôle l'état du système est la densité de grains. Comme nous travaillons avec une mixture de deux types de disques de rayons différents, nous préférons dans la suite utiliser la notion de fraction surfacique  $\phi \equiv \frac{N_s a_s + N_b a_b}{A_{TOT}} \equiv \frac{A_s + A_b}{A_{TOT}}$  où  $N_{s,b}$  sont les nombres de petits et de gros grains,  $a_{s,b}$  leurs aires respectives,  $A_{s,b}$  leur aires respectives totales, et  $A_{TOT}$  l'aire totale accessible aux grains qui constitue notre paramètre de contrôle. Toutes les quantités seront mesurées dans les unités naturelles du problème : les longueurs sont exprimées en diamètres des petits grains  $d_s = 4mm$ , les temps en nombre de cycles  $t_o = \frac{1}{10}s$  et les masses en unités de masse totale des grains  $M = m_s N_s + m_b N_b$ . La

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

force à la paroi sera mesurée en unités de  $F_0 = Mg$ . On a dans toute la suite  $m_s = 0.22 \pm 10^{-4}g$ ,  $m_b = 0.36 \pm 10^{-4}g$ ,  $N_s = 4582$ ,  $N_b = 3663$ , soit  $M = 2326.7g$ . De plus,  $a_s = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \approx 0.7854$  et  $a_b = \pi \left(\frac{5}{4} * \frac{1}{2}\right)^2 \approx 1.2272$ , ce qui donne une aire totale occupée par les grains  $A_g \equiv A_s + A_b = 8093.9$  et  $\frac{A_s}{A_g} = 0.445$ . La largeur fixe de la cellule dans ces unités vaut  $l \approx 100$  et sa longueur varie au voisinage de  $L \approx 100$ , ce qui donne une fraction surfacique typique de  $\phi \approx 0.8$ . A noter que la position du piston est contrôlée à  $\pm 5\mu m = \pm 2.10^{-4}d_s$ . Or  $\frac{d\phi}{\phi} = -\frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial A_{TOT}} dA_{TOT} = -\frac{1}{\phi} \frac{A_g}{A_{TOT}^2} dA_{TOT} = -\frac{1}{\phi} \frac{A_g}{A_{TOT}^2} L dl \approx \frac{8000 * 100 * 2.10^{-4}}{0.8 * 10000^2} \approx 2.5 * 10^{-6}$ . Nous disposons donc a priori de cinq chiffres significatifs après la virgule sur nos valeurs de  $\phi$ .

### 3.1.2 Phénoménologie

Ce chapitre est une présentation de la démarche qui nous a amené à identifier la gamme de densité correspondant à la perte de rigidité du système que nous étudierons de manière détaillée dans les chapitres suivants. Dans un premier temps, nous donnerons un panorama des différents régimes accessibles dans notre expérience de manière très qualitative. Cela nous permettra dans un second temps d'introduire notre protocole expérimental, et d'illustrer la phénoménologie du système en s'appuyant sur le signal de force à la paroi. Enfin, nous discuterons des propriétés des états atteints par le système, et le problème des "rattlers".

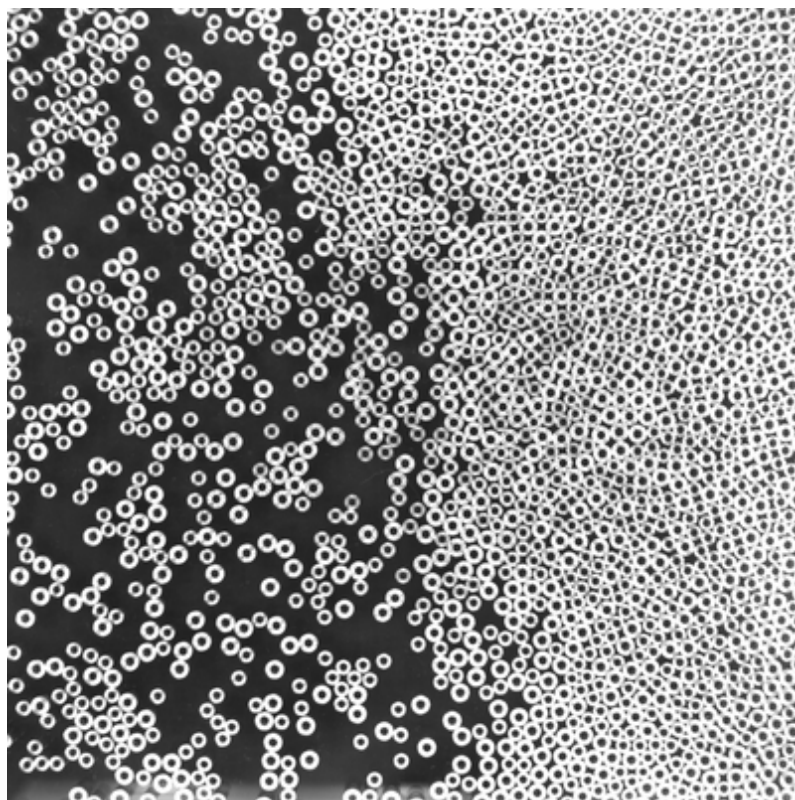
#### *Zoologie qualitative des régimes observés*

**Basses densités.** Quand la fraction surfacique du système est inférieure à  $\phi = 0.8$ , l'assemblée est extrêmement sensible au réglage du niveau. La moindre pente fait glisser les grains vers le point le plus bas du système, et rien ne se passe de très intéressant. Le moyen le meilleur que nous ayons trouvé pour réaliser ce réglage de manière convaincante consiste donc à se placer à basse densité et à s'assurer, en attendant suffisamment longtemps, qu'il n'y a pas de dérive systématique des grains dans une direction donnée. C'est un réglage beaucoup plus fin que celui qu'on obtiendrait en utilisant un niveau à bulle de précision par exemple. Quand le niveau est bien réglé, deux phases coexistent dans le système. Une fraction des grains forme un cluster condensé, c'est à dire que les distances entre voisins au sein de cet amas sont de l'ordre de la fraction de diamètre. Ce condensat s'apparente à une phase liquide au sens où les grains au sein du cluster restent mobiles les uns par rapport aux autres sur des échelles de temps de l'ordre de la seconde. Les autres grains forment une phase beaucoup moins dense, où ils sont beaucoup plus mobiles, tout en interagissant fortement pour former des clusters très intermittents et dans une grande gamme de tailles, de quelques grains à quelques centaines de grains. Cette phase s'apparente du point de vue de la mobilité de ses constituants à une phase gazeuse.



### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

La phase condensée est mobile dans l'espace et ne reste pas nécessairement connexe. L'interface entre ces deux phases semble avoir des propriétés de rugosité intéressantes. Si on augmente le volume de la cellule, la fraction des grains qui se trouvent dans la phase condensée diminue. La phénoménologie de notre système dans ce régime est fortement réminiscente de ce qui se passe dans un système thermique, et il serait certainement très instructif d'en mener une étude quantitative. Il convient de remarquer que la dynamique individuelle est fortement anisotrope, et que la mobilité des grains est accrue dans la direction de l'oscillation. Une image d'un tel état a été reportée sur la figure 3.7.



**FIG. 3.7:** Image du système aux basses densités. On observe la coexistence de phases. L'alignement de l'interface avec une direction de l'image est fortuit.



**Densités intermédiaires.** Quand on augmente la fraction surfacique de manière à faire disparaître la coexistence, un phénomène inattendu se produit au voisinage de  $\phi = 0.82$ . De manière très brusque, les mouvements des grains se couplent fortement et la force moyenne ressentie à la paroi augmente très significativement. Le système devient par ailleurs très bruyant, et on entend distinctement l'ensemble des grains taper de part et d'autre de la cellule. L'énergie communiquée par les grains aux bords devient redoutablement grande, à tel point que quand nous avons observé cet effet pour la première fois, nous avons bien cru que tout allait casser, et nous avons dû en conséquence renforcer les fixations de la cellule. Ce phénomène, en particulier le bruit qu'il génère, s'amplifie quand on accroît la fraction surfacique jusqu'à une valeur voisine de  $\phi = 0.835$  puis s'atténue jusqu'à disparaître quand  $\phi \approx 0.84$ . Sur la plage de densité pendant laquelle le bruit s'amplifie, un phénomène d'intermittence apparaît. En effet, le couplage bruyant cesse et reprend spontanément et le système oscille entre un état non couplé, gazeux et un état couplé, liquide, et ce de manière apparemment erratique. Le temps passé dans l'état couplé est d'autant plus grand qu'on approche du maximum de bruit. Dans la plage de densité où le bruit décroît, le système reste dans son état couplé. Pendant tout ce régime, et indépendamment du sens de parcours du paramètre de contrôle, il a été observé après extraction des trajectoires des grains une cellule de convection géante dans le système. Plus précisément, l'assemblée effectue un mouvement proche de la rotation solide, à une vitesse qui n'est pas observable à l'oeil nu. A noter que tout chose étant égales par ailleurs, le sens de cette rotation change d'un essai à l'autre, et peut même s'inverser au cours du temps. Cette brisure de symétrie n'est donc pas induite par une asymétrie de notre dispositif, mais semble plutôt être une vraie instabilité dynamique de notre système. Cette phase sera dénommée dans la suite la phase liquide.

**Haute densité.** La densité à laquelle l'effet précédent disparaît, typiquement  $\phi = 0.84$ , correspond au moment où le système se bloque. Plus précisément, dans la phase liquide,

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

les grains sont entraînés par les oscillations de la plaque de verre. Leurs mouvements typiques dans le référentiel du laboratoire deviennent de plus en plus petits à mesure que la fraction surfacique augmente, mais ils continuent à glisser sur les bords latéraux de la cellule. Au delà de la densité de blocage, les grains cessent de glisser sur les bords, tant ils sont serrés par le piston. Il faut bien noter ici qu'à l'oeil, les deux phases sont difficilement discernables, au sens où mis à part un léger glissement sur les bords, l'amplitude des mouvements instantanés des grains est si petite qu'un observateur attentif est incapable de distinguer de mouvements relatifs. En particulier dans la phase liquide, l'appréhension visuelle du système est complètement écrantée par les oscillations des disques à la fréquence d'injection. Les premiers signes de l'existence d'une dynamique microscopique intéressante au voisinage de la transition, avant l'implémentation du dispositif de déclenchement des photos sur l'oscillation du plateau, ont été obtenus en éclairant les grains au moyen d'un stroboscope réglé à la fréquence d'injection. Cet éclairage permet de retrancher l'agitation typique de l'assemblée et révèle les mouvements relatifs de ses constituants. En fixant son regard sur une région du système dans ces conditions d'éclairage, on s'aperçoit que le système se réarrange de manière lente et que ces réarrangements impliquent de nombreux grains dans des mouvements qu'il est difficile de décrire simplement. Nos premières observations de ce phénomène ont été des moments de grande excitation tant le caractère collectif de cette dynamique et les motifs qu'elle dessine sont fascinant à voir. Cette observation a fortement piqué notre curiosité, en particulier l'existence d'une longueur de corrélation des mouvement observable à l'oeil, puisque de nombreux travaux [3, 117, 75] ont tenté de détecter l'existence et l'évolution d'une telle longueur au voisinage de la transition de blocage. C'est donc sur ces valeurs typiques du paramètre de contrôle que nous avons décidé de focaliser notre attention. Cependant, dans cette gamme de densités, le système se trouve dans un état génériquement non stationnaire. En effet, si on attend une dizaine de minutes après avoir bloqué le système, celui-ci finit par se débloquer et le bruit caractéristique associé à la phase liquide réapparaît. Si on filme les grains

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

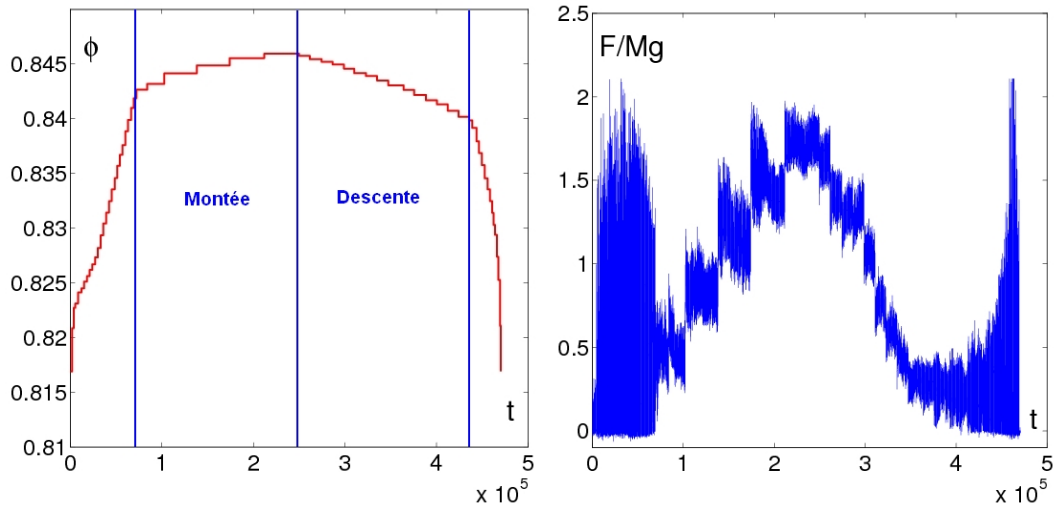
dans cet état, ils apparaissent essentiellement immobiles pendant le temps où le bruit est absent, et se remettent brutalement à bouger au moment où le bruit réapparaît. Le système est donc capable de transiter d'une phase gelée, dans laquelle les grains bougent très peu et que nous appellerons solide par la suite, à une phase liquide, et ce de manière spontanée sans variation d'aucun paramètre extérieur.

#### *Protocole et mesures de pression*

**Préparation du système** Comme nous venons de le voir, le phénomène que nous désirons caractériser, à savoir l'existence d'une dynamique microscopique fortement corrélée des grains au voisinage du blocage de l'assemblée, se produit à la transition entre un régime essentiellement stationnaire, liquide, et un régime solide non stationnaire, où le solide obtenu peut se liquéfier sur une échelle de temps macroscopique, quelques milliers de cycles pour un quench naïf. Les travaux antérieurs [67] qui ont en partie motivé ce travail ne sont pas parvenu à caractériser de manière satisfaisante la dynamique microscopique du système granulaire étudié, malgré la richesse phénoménologique qui y apparaissait, à cause de son caractère non stationnaire. Dans notre cas, il est évident que si le système est en train d'évoluer d'un point de vue macroscopique, les trajectoires de grains doivent s'en ressentir et échapper à une description en termes de processus stationnaire. De plus, comme nous l'avons dit plus haut, la phase liquide est elle aussi pathologique puisqu'il apparaît dans le système une cellule de convection masquant complètement les fluctuations locales des positions. C'est alors que nous avons fait une découverte centrale pour la suite de ce travail. Après avoir réalisé le quench naïf que nous décrivons plus haut, et après avoir attendu une dizaine de minutes que le système revienne dans son état liquide, nous nous sommes aperçu d'une part que nous étions capable d'augmenter la densité du système d'une fraction non négligeable avant de revenir au niveau de force instantané imposé au départ, et d'autre part que la relaxation de cette force était plus lente qu'à la première étape. Si on itère cette procédure, on parvient après quelques incréments de den-

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

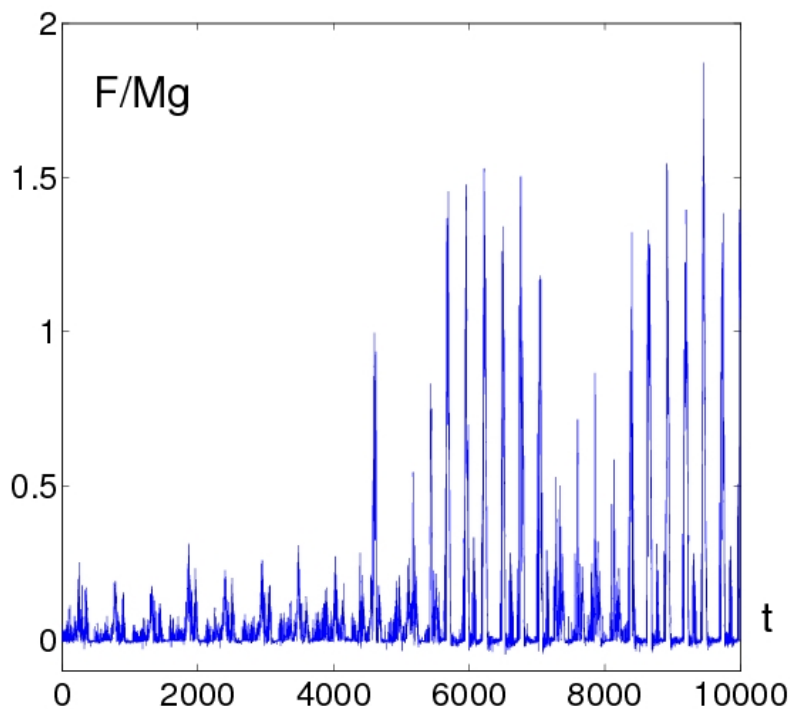
sité à atteindre un état très dense dans lequel la force à la paroi évolue sur des échelles de temps très grandes, de l'ordre de plusieurs heures. Une prise d'images dans cet état ne révèle aucune dynamique. Par contre, si à partir de cet état, on réalise un petit incrément de surface, on obtient un signal de force à la paroi qui est cette fois stationnaire à l'échelle de temps d'observation. De plus, il n'y a plus de convection dans la cellule, et les fluctuations de position révèlent ce qu'on peut appeler qualitativement des cages, pour reprendre le vocabulaire consacré, et semblent corrélées sur une distance de l'ordre de quelques grains. Cette première observation, fortement réminiscente de la phénoménologie des verres colloïdaux [3] et des matériaux granulaires bloqués [67, 71], nous a convaincu de l'importance de la longue phase de préparation du système pour obtenir une caractérisation reproductible de ce régime de haute densité. Nous avons donc élaboré un protocole où l'ensemble des mesures quantitatives sont réalisées en diminuant la fraction surfacique de grains après préparation.



**FIG. 3.8:** A gauche : Fraction surfacique en fonction du temps pendant le protocole étudié ; A droite : Force à la paroi en fonction du temps

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

**Protocole** Nous avons reporté sur la figure 3.8 les mesures de force à la paroi en fonction du temps pendant tout le protocole que nous allons décrire maintenant. En regard de cette mesure, nous avons reporté les valeurs de fraction surfacique parcourues. Au début de l'acquisition du signal de pression, le système est dans l'état liquide, et la valeur typique de la force est de l'ordre de quelques centièmes de  $Mg$ , où  $M$  est la masse totale de grains. Quand on augmente la densité, le système entre dans son état liquide. Le couplage mentionné plus haut apparaît sur la partie gauche du signal comme de fortes fluctuations.

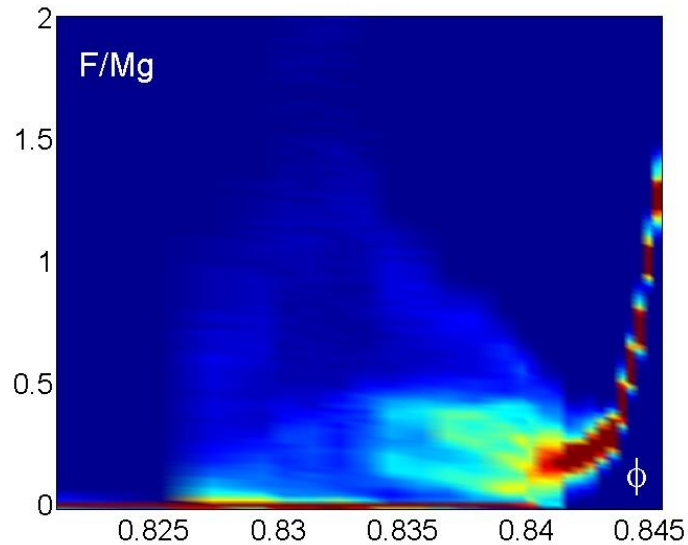


**FIG. 3.9:** Zoom sur les 10000 premiers cycles du protocole, soit environ 15 minutes d'acquisition.

On a reporté sur la figure 3.9 le premier quart d'heure du protocole, correspondant aux densités où l'état du système est intermittent. On voit apparaître les grandes fluctuations correspondant à l'état couplé qui naissent, puis s'éteignent, pour apparaître à nouveau. On entre ensuite rapidement dans le régime complètement résonant, et l'amplitude des

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

fluctuations géantes décroît. Dans ce régime, la valeur la plus probable de la force est zéro, et les pics atteignent typiquement  $1.5Mg$ , comme on peut le voir sur la figure 3.10 où nous avons fait figurer la distribution des valeurs de force mesurées en fonction de la fraction surfacique.



**FIG. 3.10:** Distributions des valeur de force mesurées en fonction de la fraction surfacique obtenues pendant la seconde partie du protocole que nous avons appelé la descente. Le code couleur représente la probabilité. Les couleurs sont d'autant plus chaudes que la probabilité est élevée. Les distributions sont juxtaposées, chacune étant évaluée à une valeur fixée de la fraction surfacique.

A la fin de ce régime, à l'endroit où le protocole en  $\phi$  change nettement de pente sur la figure 3.8, on commence à bloquer le système. Les fluctuations de force deviennent de l'ordre de  $0.5Mg$  et la valeur la plus probable du signal devient non nulle. La période qui suit correspond à la préparation du système. Cette préparation consiste à réaliser des incréments de densité, et à chaque valeur de la densité, nous laissons le système relaxer pendant un temps d'autant plus long que la densité est élevée. On voit clairement sur le signal de la figure 3.8 les augmentations brutales de la force correspondant aux paliers

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

de densité et les relaxations successives. Une fois atteinte la densité la plus haute, la préparation se termine par un petit incrément de surface. La force à la paroi diminue alors brutalement. Cette préparation sera dans la suite appelée *la montée*. A partir de cet instant, nous commençons l'acquisition des images, et réalisons de petits incréments successifs de surface. Enfin, quand le bruit correspondant à la résonance est réapparu, les incréments de surface que nous réalisons sont plus grands. Cela correspond sur la figure à la densité à laquelle la pente de  $\phi(t)$  devient plus négative. Nous arrêtons à ce moment la prise d'images. Cette période d'acquisition sera dans la suite appelée *la descente*.

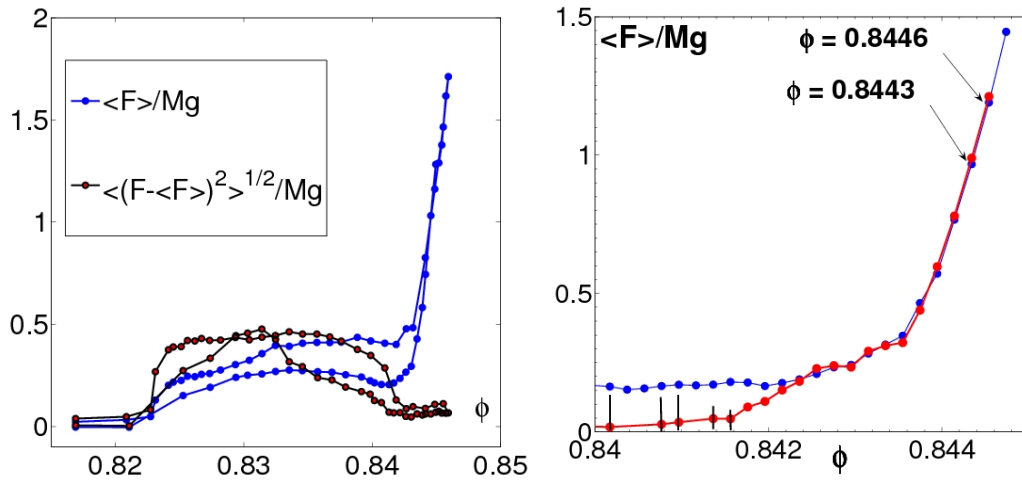
Ce que nous entendons par protocole consiste donc en une réalisation de la montée à partir des très basses densités jusqu'à un état où le système ne relaxe plus sur l'échelle de temps expérimentale, complétée par une réalisation particulière de la séquence des densités à la descente, là où nous prenons les images. Il faut bien réaliser que toute la difficulté consiste à parcourir la descente avec des incréments de surface suffisamment petits et en un nombre tel que nous soyons capable de capturer les caractéristiques marquantes de la transition. Comme nous le verrons, il s'agit d'une transition très abrupte au sens où tout se passe sur un intervalle très petit de notre paramètre de contrôle. Il nous a donc fallu réaliser notre protocole plusieurs fois avant d'obtenir une série dont la densité de points au voisinage de la transition soit satisfaisante. Pour cette série particulière, qui est représentative de nos différents essais mais sur laquelle nous nous concentrerons dans la suite, l'expérience a commencé à 10h du matin, et nous avons augmenté incrémentalement la densité jusqu'à obtenir notre système dans son état de référence de haute densité à 17h. La séquence de densités figurant sur la figure 3.8 correspond à cette série. Le dernier point de force à la paroi a été enregistré à 23h13, soit une durée totale d'environ 13 heures. Cette longueur typique explique en partie pourquoi il est difficile de réaliser des moyennes sur les réalisations de ce protocole. Voici donc comment s'enchaînent les événements dans le laboratoire un jour d'expérience. Après avoir préparé sur les ordinateurs les dossiers où seront stockés les images et les valeurs enregistrées de la force à la

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

paroi, nous mélangeons soigneusement le système. Nous plaçons le piston à une position correspondant à une densité légèrement plus petite que celle à laquelle le système résonne, et nous lançons l'acquisition de la force. Nous parcourons ensuite le protocole de la figure 3.8 jusqu'à atteindre le point de plus haute densité, tout en consignant les valeurs parcourues et la tension aux bornes du capteur de force telle que lues sur un voltmètre dans un cahier. Ensuite, quand nous faisons le premier pas vers les basses densités, nous attendons quelques secondes - une dizaine - puis nous lançons l'acquisition synchronisée des images. Après 20 minutes, nous interrompons l'acquisition, procédons à l'incrément de surface suivant, patientons quelques secondes, et lançons l'acquisition suivante. Cette séquence se répète ensuite jusqu'à ce que nous détectons - à l'oreille et à l'oeil - l'entrée dans la phase liquide. Nous cessons alors l'acquisition d'images, mais continuons les incréments de surface jusqu'à sortir complètement de la résonance et revenir au point de départ. Le signal de force est enregistré pendant tout le protocole. Pendant cette journée, nous avons en réalité pris des images à la montée, mais elles restent à ce jour inexploitées. Nous obtenons ainsi 15 points utiles en densité au voisinage du déblocage, chacun comportant 10000 images d'environ 700 Ko chacune, soit un total utile d'environ 100 Go. Le volume de données total est en réalité environ deux fois plus grand. La chaîne de traitement et l'analyse génèrent environ 30 Go de données supplémentaires. A titre indicatif, le volume total de données manipulées au cours de ce travail pour obtenir les résultats présentés dans la suite est de l'ordre du To.

**Pression moyenne et pression statique résiduelle** Nous avons reporté sur la partie gauche de la figure 3.11 la moyenne et l'écart type du signal de pression pour chaque palier de fraction surfacique du protocole. Il est remarquable que la force moyenne à la paroi ne soit pas une fonction croissante du paramètre de contrôle. Elle est maximum quand le bruit est maximum, et atteint un minimum local à la densité à laquelle le système se bloque. On peut cependant comprendre ce phénomène en invoquant une compétition





**FIG. 3.11:** A gauche : Moyenne et écart type du signal de force à la paroi pendant tout le protocole en fonction de la fraction surfacique. Les valeurs à la descente sont systématiquement plus faibles que celles obtenues à la montée. A droite : Force moyenne (en bleu) et force statique résiduelle (en rouge) en fonction de la fraction surfacique au voisinage de la transition de blocage. Les barres noires verticales représentent l'amplitude typique des fluctuations de la force statique.

entre les fluctuations du signal et sa valeur moyenne. En effet, dans la région de fraction surfacique où la force moyenne décroît, les fluctuations gouvernent complètement le signal, mais leur amplitude décroît fortement avec un petit incrément du paramètre de contrôle. Quand la valeur la plus probable du signal devient non nulle, les fluctuations deviennent petite et la force moyenne redevient une fonction croissante de  $\phi$ . Nous avons voulu mieux comprendre ce qui se passe au voisinage de ce cross-over à la descente, et pour cela nous avons réalisé des mesures de force en arrêtant la vibration du plateau. Un exemple de la procédure est visible sur la figure 3.12. Ces mesures, ainsi que les valeurs de force moyenne, sont reportées sur la figure 3.11. On observe que la force moyenne mesurée sans vibration est très proche de celle mesurée en vibration pour les grands  $\phi$ . Pourtant, au voisinage d'une certaine valeur de  $\phi$  proche du moment où le système se

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

débloque au sens où nous l'avons expliqué qualitativement plus haut, ces deux grandeurs ne se suivent plus et la force résiduelle tombe quasiment à zéro. Cela indique que le système à cet endroit est en train de perdre sa rigidité et n'est plus capable de stocker de l'énergie de manière statique. La fraction surfacique à laquelle se produit cette transition de rigidité, que nous identifions à la transition de blocage évoquée en introduction, sera appelée dans la suite  $\phi_J \equiv 0.8419$ . Aux plus basses densités, cette force résiduelle est sujette à d'importantes fluctuations, dont nous avons vérifié qu'elles correspondent à la mobilisation de la friction des grains sur le fond quand le plateau s'arrête dans sa course. En effet, si le cycle de vibration s'arrête en position centrale, la mesure donne une valeur très proche de zéro, et l'éloignement à cette position donne des valeurs plus élevées. Le dernier point que nous aimerions aborder ici est la valeur typique de la force moyenne au voisinage du blocage. A cet endroit, il n'y a plus vraiment de chocs de grains sur les parois, et celles-ci ne ressentent plus que le poids des grains entraîné contre elles. La valeur obtenue est de l'ordre de  $\mu Mg$  où  $\mu \approx 0.2$  est le coefficient de frottement dynamique du laiton sur le verre, ce qui confirme cette idée. C'est cet argument qui nous a guidé dans notre choix d'adimensionnement de la force. Ainsi, on comprend que quand le système transite de son état bloqué à son état liquide, la force mesurée à la paroi change de nature. Elle est aux hautes fractions surfaciques gouvernée par des forces statiques portées éventuellement par le réseau des chaînes de force dans le système [118], et quand la fraction surfacique décroît, le contribution cinétique prend le relais et finit par piloter le signal dans la phase liquide.

#### ***Reproductibilité et réversibilité***

**Reproductibilité, échelles de temps, et conditions initiales** Comme dans le cas des verres où le paramètre de contrôle est la température, la dynamique de notre système, et en particulier la densité à laquelle celle-ci commence à ressentir le prodigieux ralentissement qui caractérise la transition de blocage, dépend crucialement de la vitesse à

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

laquelle on varie ce paramètre de contrôle, dans notre cas la densité. De plus, les phénomènes non stationnaires qui ont lieu à la montée dépendent eux aussi de la préparation de l'"échantillon". Cependant, dans notre cas, les phénomènes qui apparaissent quand on fait décroître la densité après préparation, en particulier le déblocage, sont remarquablement reproductibles du point de vue des forces mesurées à la paroi. C'est d'ailleurs ce signal de force qui nous a servi de repère dans toutes les expériences que nous avons menées, puisque les valeurs de la densité dépendent de la préparation. Nous aimerions cependant dire ici quelques mots à propos des échelles de temps caractéristiques du problème. Comme nous l'avons dit, la durée d'acquisition à une valeur fixée de la densité est de 20 minutes. On nous a souvent demandé si nos signaux étaient effectivement stationnaires pendant ces phases d'acquisition. Cette question est difficile, et nous n'avons obtenu des éléments de réponse que plus tardivement qui nous ont permis de quantifier la légère évolution résiduelle des variables dynamiques. Nous évoquerons plus loin le comportement de fonctions de corrélation à deux temps du champ de densité. Notre démarche était alors la suivante. A la montée, lors de la préparation, nous nous efforçons de laisser s'écouler un temps supérieur au temps caractéristique de relaxation de la force à la paroi, bien que cela devienne finalement impraticable au moment où on atteint le point de plus haute densité. Nous espérons ainsi, lors de la descente, retrouver le système dans un état de relaxation proche de celui auquel on l'a amené à la montée à la même densité, et donc proche de la stationnarité. Le temps de préparation est de l'ordre de plusieurs heures, avec des paliers de deux heures pour les densités les plus hautes. Notre temps d'acquisition est donc petit devant les temps que nous laissons au système pour relaxer. Enfin, c'est d'abord le caractère frappant de la stationnarité des signaux de force à la descente, en contraste fort avec ce qui se passe à la montée, qui nous a convaincu de l'intérêt de faire nos mesures après préparation. Un dernier point qu'il convient de mentionner ici est l'état initial du système. Nous nous sommes efforcés d'appliquer une procédure systématique pour initialiser l'état de l'assemblée avant de lancer un protocole. Une manière

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

simple et qui nous semble raisonnablement efficace pour effacer toute mémoire d'évolution antérieure a consisté à mélanger l'assemblée au moyen d'une pointe métallique - comme une clé BTR - en passant plusieurs fois dans chaque région de la cellule et en faisant des boucles de tailles très variables de manière à casser d'éventuelles structures. Malheureusement, nous ne disposons pas de méthode pour disposer les grains d'une manière prédéterminée et dans une configuration typique, ce qui nous permettrait de toujours travailler avec la même condition initiale. Nous ne sommes pas non plus en mesure de réaliser des moyennes sur le désordre initial. Il faudrait pour cela réaliser un grand nombre de fois le protocole, ce qui est impraticable pour des raisons de stockage de donnée et de durée du protocole. Cependant, les différentes acquisitions révèlent le même comportement typique en densité et la dynamique ne semble pas garder de manière déterminante la mémoire de la configuration initiale.

**Réversibilité** Une des caractéristiques essentielles de l'état du système après préparation, outre sa stationnarité, est son caractère réversible. En effet, comme nous l'avons fait remarquer dans la première partie, il a été rapporté dans la littérature [119] qu'un système granulaire sous vibration pouvait dans certaines conditions et après une phase de préparation atteindre un état réversible au sens où la fraction volumique du système devient une fonction univoque de l'intensité de la vibration. Nous avons vérifié dans notre système le caractère univoque de la relation entre la fraction surfacique et la force à la paroi. Pour ce faire, nous avons préparé le système, et à la descente, nous avons cyclé entre deux valeurs typiques de fraction surfacique - pointées sur la figure 3.11 - en enregistrant le signal de force à la paroi. Ce signal est reporté sur la figure 3.12.

Les valeurs moyennes et l'amplitude des fluctuations du signal de force sont remarquablement semblables au cours des cycles, et nous pouvons conclure qu'au moins du point de vue de cette mesure macroscopique, notre système a bien atteint un état réversible.

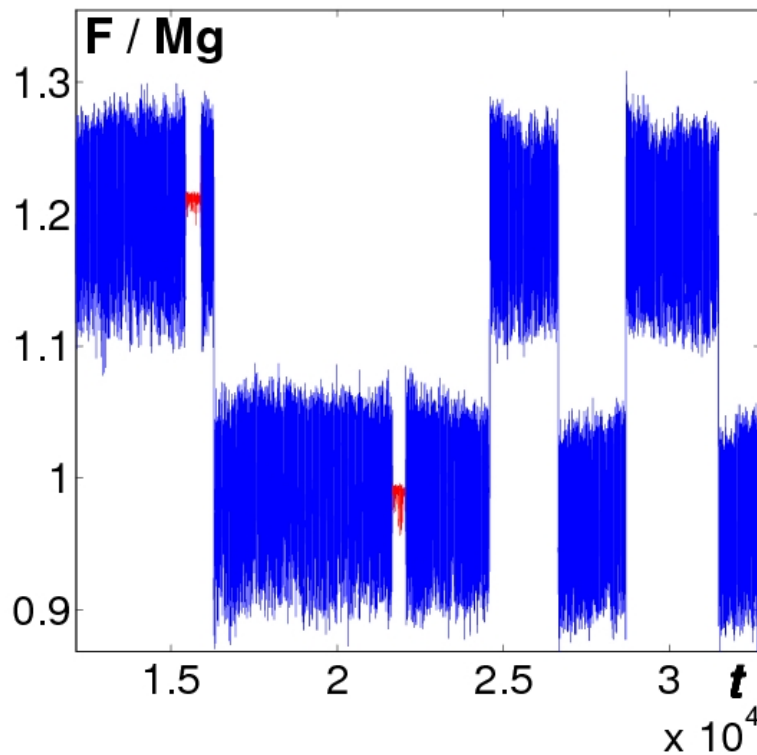


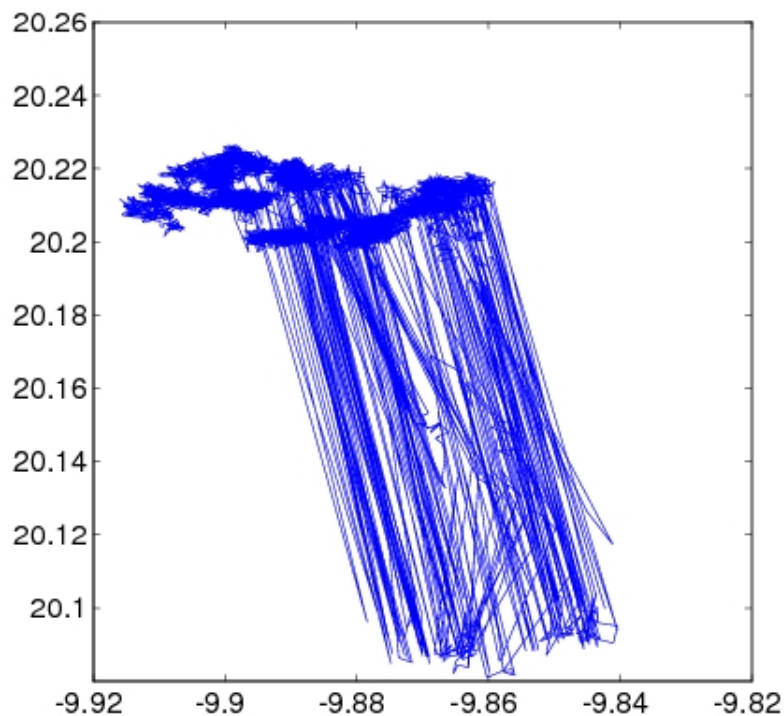
FIG. 3.12: Signal de force à la paroi en fonction du temps quand on fait cycloer la valeur de la fraction surfacique entre deux valeurs typiques *après* préparation du système. Les points portés en rouge correspondent au signal mesuré quand on arrête la vibration.

### *Le problème des "rattlers"*

Avant de caractériser précisément la dynamique des grains aux différentes densités étudiées, nous aimerions discuter de l'isotropie de leur mouvement individuel. En regardant un film d'une série temporelle à densité fixée, on s'aperçoit en effet qu'il existe une petite proportion de grains qui bougent beaucoup plus que les autres. Prenons pour simplifier une série d'images à haute densité, dans l'état bloqué du système. On observe typiquement une dizaine de grains, qui restent à peu près les mêmes pendant les 20 minutes d'acquisition, et qui sautent relativement souvent d'une position à une autre, alors

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

que les autres grains sont très peu mobiles. Si on regarde non plus le film stroboscopé mais le système lui-même, on observe que les grains en question sont en fait libres de se déplacer dans l'enceinte formée par leurs voisins et sont entraînés par les mouvements oscillant du plateau alors que la plupart des grains sont, à l'échelle de temps d'un cycle, fixes dans le laboratoire. Comme les évènements que ces grains génèrent sont très singuliers, il semble naturel de les éliminer de la statistique. La trajectoire d'un de ces grains est représentée sur la figure 3.13.



**FIG. 3.13:** Trajectoire typique d'un grain qui a subi des évènements de "rattling"

Cependant, si on y regarde de plus près, la situation est en fait beaucoup plus intriquée que l'image que nous venons de donner. En fait, à toutes les densités, le système se réarrange et les identités des grains qui construisent ces évènements changent avec le temps. De plus, comme nous observons la dynamique stroboscopée du système, des grains oscillant à la fréquence de la plaque devraient apparaître immobiles. Ces évènements

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

ments correspondent donc à des anomalies dans le mouvement de "rattling" réel de ces grains, et apparaissent de manière irrégulière.

**Traitement du problème** Pour les densités les plus basses, si nous enlevons les particules qui ont subi des événements de "rattling", il n'en reste plus. De plus, de tels événements se produisent de plus en plus souvent à mesure que la densité décroît.

Pour tenir compte des changements d'identités des grains qui exhibent ces mouvements anormaux, on décide de définir comme rattler à un instant  $t$  un grain qui a bougé de plus de  $dr_0$  entre  $t$  et  $t + 1$ , pour une valeur bien choisie de  $dr_0$ . Toute la difficulté consiste à bien choisir le seuil  $dr_0$ . Nous avons choisi un seuil indépendant de la densité, en nous appuyant sur les événements anormaux des distribution des déplacements instantanés. Nous avons ensuite étudié la population identifiée en fonction de petites variations de ce seuil, en particulier en vérifiant sur les séries d'images la pertinence de notre identification. Nous avons finalement choisi  $dr_0 = 0.01$ . Pour illustrer les propriétés statistiques de ces événements, on peut les représenter sur un graphe au cours du temps. Plus précisément, pour une série d'images, on peut dessiner un événement comme un point dont l'ordonnée correspond à l'indice du grain et dont l'abscisse est l'instant auquel il a eu lieu. Nous appellerons le graphe de tous les événements pour une densité le "rattlogramme" à cette densité. Nous avons représenté sur la figure 3.14 les "rattlogrammes" de quelques densités. On observe qu'aux hautes densités, les "rattlers" ont une identité bien définie, car les événements forment des lignes horizontales correspondant à l'indice d'un grain. En revanche, aux plus basses densités, on obtient des lignes faiblement peuplées, correspondant à des grains qui ont rarement connus des événements anormaux, mais le nombre de grains concernés est plus grand.

Pour quantifier cet effet, nous avons représenté sur partie gauche de la figure 3.15 la fraction des grains qui ont connu pendant les 20 minutes d'acquisition au moins un événement de "rattling" tel que défini ci-dessus en fonction de la fraction surfacique. On

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

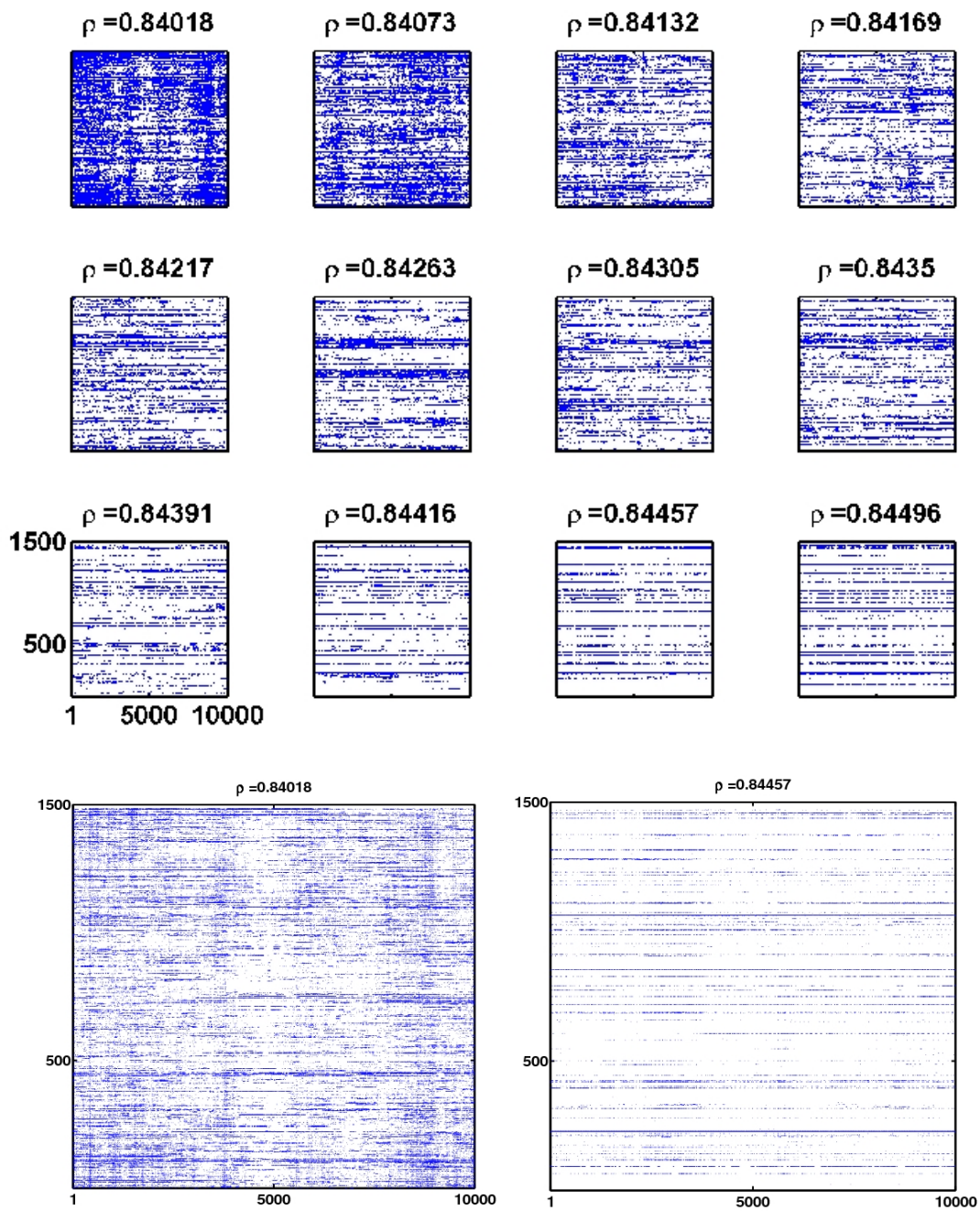
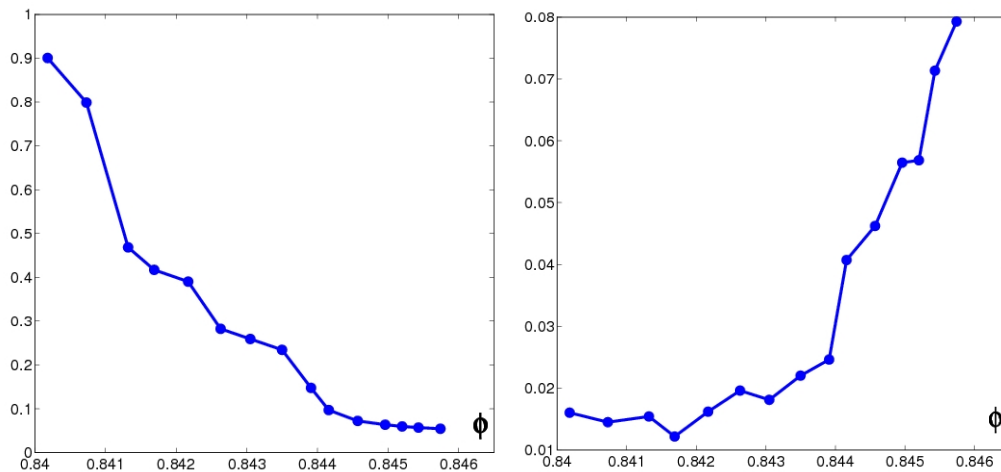


FIG. 3.14: En haut, "rattlogrammes" pour différentes densités. En bas, zoom sur deux densités typiques.



### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOPAGE

observe qu'à basse densité, presque tous les grains ont été sujet à au moins un mouvement anormal, alors qu'aux hautes densités, cela concerne une fraction inférieure à 10% des grains. Sur la partie droite de la figure 3.15, nous avons représenté la fraction moyenne d'évènements anormaux, c'est à dire la fraction de temps passée à être "rattler", pour les grains qui ont connu au moins un évènement anormal. On observe qu'aux densités les plus fortes, cette fraction est significativement plus élevée qu'aux basses densités. Cela confirme ce qui était visible sur la figure 3.14, à savoir que les "rattlers" sont plus persistants aux fortes densités, alors que leur identité change plus fréquemment aux basses densités. Tous les résultats dans la suite seront obtenus en faisant des moyennes dont nous auront retiré ces évènements anormaux.



**FIG. 3.15:** A gauche : fraction des grains qui ont connu le long de leur trajectoire au moins un évènement de "rattling", en fonction de la fraction surfacique. A droite : fraction moyenne de temps représentée par les évènements anormaux sur la trajectoire d'un grain qui a subi au moins un de ces évènements.

## 3.2 Relaxation : Diffusion et corrélations temporelles

### 3.2.1 Propriétés de diffusion

Dans cette partie, nous présentons nos résultats concernant la statistique des déplacements des grains. Nous passerons en particulier du temps à discuter les propriétés de diffusion de notre système, puisque celles-ci révèlent des échelles de temps et d'espace qui ont un comportement singulier au voisinage de la densité  $\phi_J$  à laquelle se produit la transition de rigidité. Ces résultats ainsi que ceux présentés au chapitre suivant ont été soumis pour publication [120].

#### *Distributions des déplacements individuels*

**Contexte** Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, ce travail de thèse s'inscrit dans une démarche expérimentale qui vise d'une part à préciser l'analogie qui existe d'un point de vue macroscopique entre les systèmes vitreux et la matière granulaire dense, et d'autre part à élucider la nature de la transition de blocage. Quand nous avons commencé ce travail, la thèse de Guillaume Marty, qui était presque achevée, a constitué une base de travail très utile puisque ses résultats montrent de manière spectaculaire que l'analogie évoquée ci-dessus peut être poussée jusqu'aux caractéristiques microscopiques de la dynamique de ces systèmes [71, 76]. L'expérience de Guillaume consistait à cisailier de manière quasi statique un système de grains très semblable à celui étudié ici. Il a notamment trouvé, à la suite des travaux d'O.Pouliquen [67], que ses grains exhibaient des propriétés de diffusion anormales aux temps courts, reflétant ce qu'il est coutume d'appeler un effet de cage. Cela correspond au fait que les trajectoires forment des chapelets de petites pelotes. Des trajectoires typiques extraites de son expérience qui illustrent cet effet sont représentées sur la figure 3.16. Cette forme caractéristique, qui illustre l'intermittence de la dynamique au sens où les particules restent longtemps bloquées dans une région de l'espace puis s'en échappent de manière relativement brusque, a été observée dans des

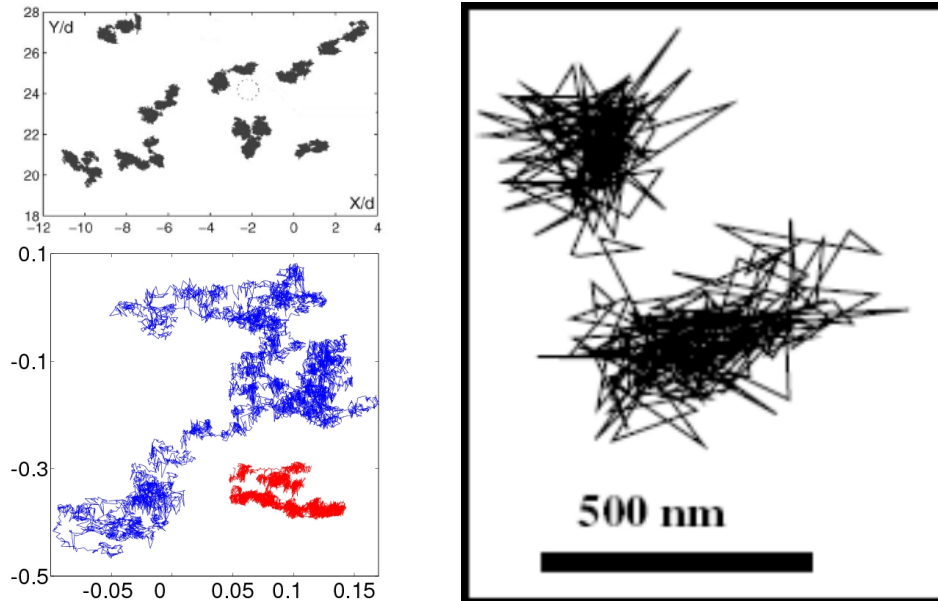
verres colloïdaux [3] et des simulations numériques de liquides surfondus [121, 122]. Ce résultat a établi de manière définitive la profonde similarité qui existe entre les systèmes vitreux thermiques et les systèmes granulaires denses, puisqu'au delà de l'analogie macroscopique, les trajectoires mêmes des particules sont semblables. Nous avons représenté sur la figure 3.16 des trajectoires extraites de notre expérience pour des densités se situant de part et d'autre de la transition. On observe que l'espace exploré est d'autant plus restreint que la densité est grande, et que la trajectoire de haute densité présente la structure en chapelet évoquée ci-dessus. Nous nous trouvons donc dans les régimes qui ont été précédemment identifiés comme pertinents du point de vue de l'analogie avec les verres structuraux.

**Distributions des déplacements** Nous allons ici procéder à l'analyse de la statistique des déplacements individuels. Pour cela, nous commençons par examiner la distribution de ces déplacements, construite de la manière suivante. Soit  $\vec{r}_i(t)$  le vecteur position du grain  $i$  à l'instant  $t$  dans le référentiel du centre de masse géométrique des grains. On définit le déplacement du grain  $i$  entre les instants  $t$  et  $t + \tau$  par

$$\Delta\vec{r}_i(t, \tau) \equiv \vec{r}_i(t + \tau) - \vec{r}_i(t) \quad (3.1)$$

La distribution de ces déplacements est construite en considérant les instants  $t$  et les particules  $i$  comme différentes réalisations de ce vecteur déplacement, évalués pour un certain retard  $\tau$ . Nous noterons dans la suite cette variable aléatoire  $\Delta\vec{r}(\tau)$ . On va analyser cette distribution, qui est a priori une fonction scalaire des deux coordonnées d'espace, en projetant les déplacements sur les axes, ce qui nous permet de la représenter comme deux fonctions scalaires d'une variable scalaire, représentant la probabilité des composantes du vecteur déplacement  $P(\Delta X(\tau) \equiv \Delta\vec{r}(\tau) \cdot \vec{e}_x)$  et  $P(\Delta Y(\tau) \equiv \Delta\vec{r}(\tau) \cdot \vec{e}_y)$ , où  $e_y$  correspond à la direction de vibration. De manière à pouvoir comparer la forme de ces distributions entre elles et à la gaussienne, nous les avons représentées sur la figure 3.17

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.16:** En haut à gauche : Trajectoires typiques obtenues dans l'expérience en cisaillement de Guillaume Marty. Le cercle pointillé indique la taille d'une particule. On distingue nettement les "cages" successives sur une trajectoire particulière. En bas à gauche, trajectoires typiques obtenues dans notre expérience. La trajectoire bleue correspond à une densité plus petite que  $\phi_J$  et la trajectoire rouge à une densité plus grande que  $\phi_J$ . A droite, trajectoire obtenue par Weeks et Weitz dans un verre colloïdale. Les particules ont dans cette expérience un diamètre de  $1.18\mu m$ .

dans des axes qui ont été adimensionnés par l'écart-type de la variable aléatoire considérée.

A toutes les densités et à tous les retards, on observe un écart significatif à la gaussienne. Les grandes valeurs de déplacement sont plus probables que dans le cas gaussien. Cette remarque confirme ce qui a été vu dans l'expérience de Guillaume Marty [71] ainsi que dans d'autres travaux sur les verres [123, 3]. Il y a donc un excès d'évènements de grande amplitude, ce qui peut être interprété comme une certaine intermittence spatiale et/ou temporelle de la dynamique au sens où elle présente un excès d'évènements in-

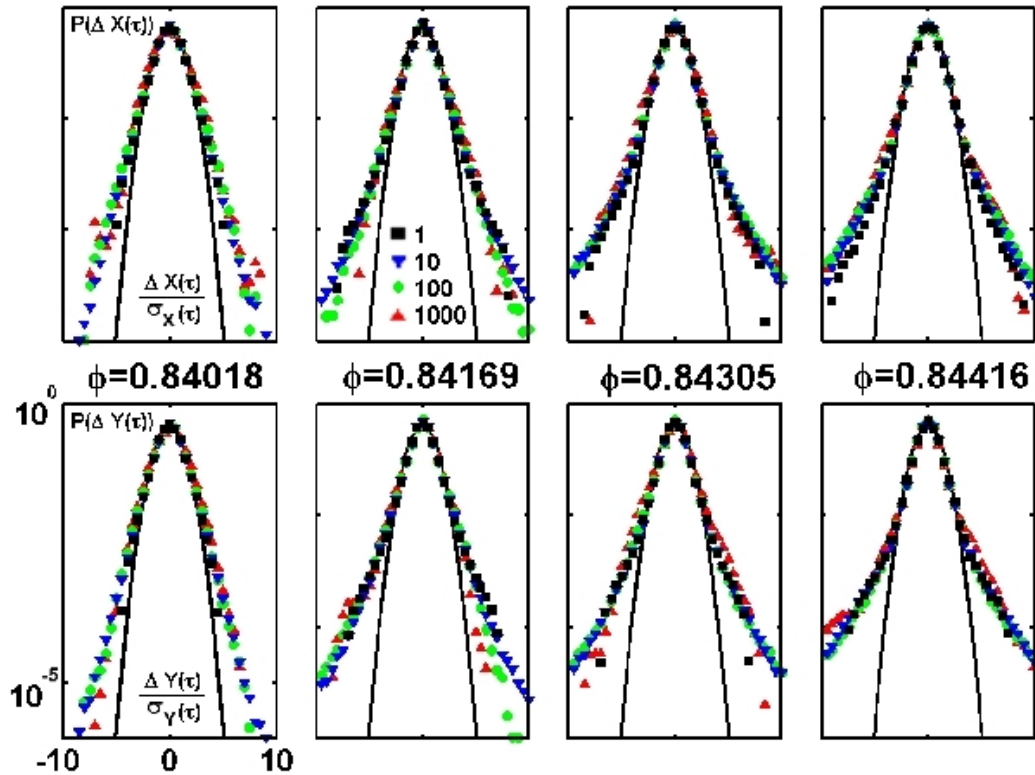


FIG. 3.17: Densités de probabilité des projections du vecteur déplacement selon X (en haut) et Y (en bas) pour différentes densités. Le code couleur correspond aux différentes valeurs du retard  $\tau$ . La courbe noire correspond à la gaussienne centrée réduite.

tenses. D'autre part, à une valeur du retard donnée, la forme de ces distributions semble s'écartier de plus en plus de la gaussienne quand la densité augmente, au sens où les queues de distribution pèsent de plus en plus lourd. Nous allons dans la suite quantifier ces effets.

### *Moments et échelles microscopiques associées*

**Définition et tendances.** Nous allons maintenant examiner les propriétés de diffusion de notre système. D'abord, la dynamique microscopique est essentiellement isotrope. Une bonne mesure de l'isotropie des caractéristiques microscopiques du mouvement consiste

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

à examiner le rapport des écarts-types des distributions des déplacements dans les deux directions de la cellule présentées sur la figure 3.17. Nous avons représenté cette quantité sur la figure 3.18 en fonction du retard  $\tau$  pour différentes densités.

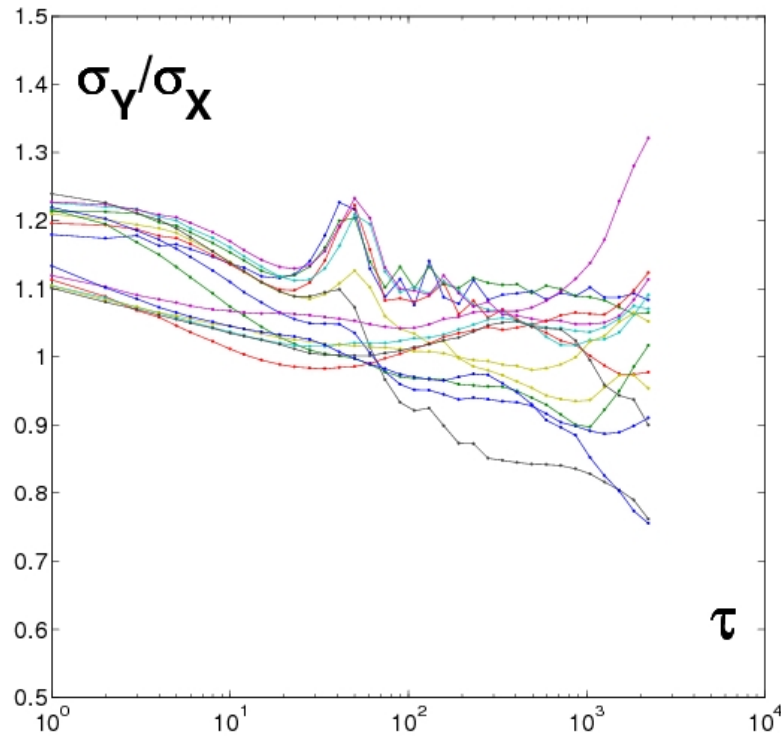
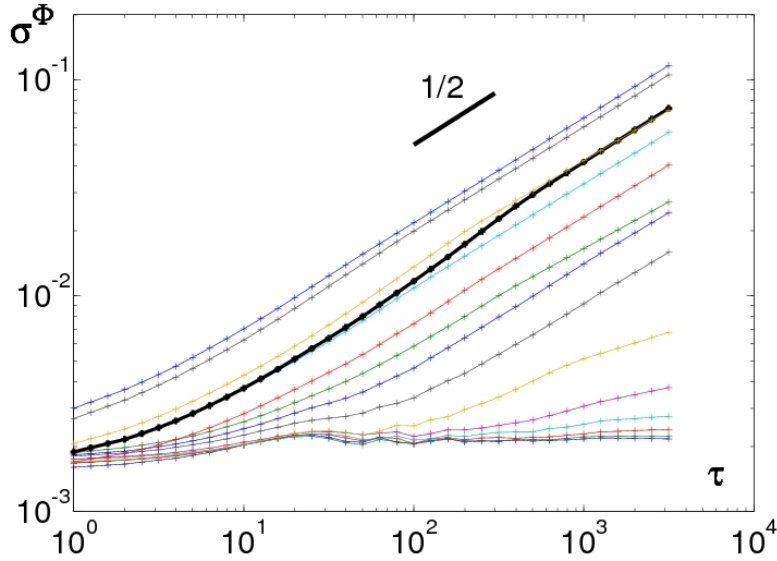


FIG. 3.18: Rapport  $\frac{\sigma_y(\tau)}{\sigma_x(\tau)}$  pour toutes les densités étudiées.

On obtient pour toutes les densités étudiées et à toutes les valeurs du retard  $\tau$  un rapport typiquement compris entre 0.7 et 1.4, ce qui montre que la dynamique est relativement isotrope. On remarque cependant que  $\sigma_Y$  est plus grand que  $\sigma_X$  aux courts retards, ce qui indique que la dynamique garde une trace de l'anisotropie de l'injection à ces échelles de temps, typiquement  $\tau < 10$ . De plus, la dépendance au retard des distributions des déplacements adimensionnés par leurs écarts-types selon les directions de la cellule est petite. Nous pouvons donc caractériser ces propriétés au moyen d'une quantité indépendante de la direction

$$\sigma_\phi(\tau) \equiv (\sigma_X^2(\tau) + \sigma_Y^2(\tau))^{\frac{1}{2}} \quad (3.2)$$

pour chaque valeur de  $\phi$ . Nous avons représenté les courbes correspondantes sur la figure 3.19 en fonction du retard  $\tau$  pour les valeurs de  $\phi$  sélectionnées, dans un diagramme log-log.



**FIG. 3.19:**  $\sigma_\phi(\tau)$  en fonction du retard  $\tau$  dans un diagramme log-log pour toutes les valeurs de  $\phi$  étudiées. La courbe en gras correspond à la densité  $\phi_J$  définie dans le texte.

Ces courbes caractérisent la mobilité moyenne des grains sur les échelles de temps  $\tau$ . Les basses densités correspondent aux courbes explorant les valeurs élevées de  $\sigma_\phi(\tau)$ , et les plus hautes densités correspondent aux courbes exhibant un plateau très long aux faibles valeurs de  $\sigma_\phi(\tau)$ . Si la dynamique était Brownienne, ces courbes seraient des droites de pente  $\frac{1}{2}$  dans ce diagramme logarithmique, puisqu'on aurait dans ce cas  $\sigma_\phi^2(\tau) = 4D\tau$ . Or ce n'est pas ce qu'on observe. Aux densités intermédiaires, on observe typiquement une pente plus faible aux petites valeurs de  $\tau$ , que nous appellerons régime sous-diffusif, et les courbes rejoignent plus ou moins vite, voir jamais pour les densités les

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

plus élevées, ce que nous appellerons dans la suite le régime diffusif correspondant à la pente  $\frac{1}{2}$  qui a été reportée sur la figure pour comparaison. L'existence de ces deux régimes, reportée dans de nombreux travaux [124, 71], est généralement interprétée de la manière suivante. A une densité donnée, aux petites valeurs de  $\tau$ , une particule est gênée dans son mouvement par la "cage" formée par ses plus proches voisins. A chacun de ses mouvements, la probabilité pour qu'elle revienne sur ses pas est donc élevée [71], et cela se traduit par une pente plus petite que  $\frac{1}{2}$  sur les courbes de diffusion. Aux plus grandes valeurs du retard, le système subit des réarrangements indépendants qui permettent aux grains d'effacer la mémoire de leur trajectoire et de recouvrer le caractère diffusif de la dynamique. De ce point de vue là, on observe que pour les basses densités, les particules sont piégées sur des temps très courts et deviennent rapidement diffusives, ce qui indique que le système se réarrange beaucoup. Quand on augmente la densité, on observe que les particules sont piégées de plus en plus longtemps, et finissent par être complètement bloquées sur l'échelle de temps expérimentale à la densité la plus grande. Il convient à ce stade de discuter les ordres de grandeur de ces quantités. L'ordre de grandeur typique de  $\sigma_\phi$  aux densités intermédiaires pour des retards de l'ordre de 100 est  $10^{-2}$  diamètres de grain. Sachant que les grains sont en contact les uns avec les autres, les régimes diffusifs que nous observons ne correspondent pas à l'image naïve qu'on peut se faire de la diffusion, d'une molécule dans un liquide par exemple où celle-ci change de voisinage et oublie sa trajectoire au gré des chocs avec ses voisins en parcourant des distances grandes devant son extension typique. Les longueurs en question ne sont en particulier pas compatibles avec l'image répandue selon laquelle les réarrangements qui aboutissent à l'établissement d'un régime diffusif sont des "sorties de cage" correspondant à un changement significatif de voisins. Comme nous verrons dans la suite, ces réarrangements, malgré leur faible amplitude, impliquent de nombreuses particules, et c'est leur indépendance statistique qui permet d'effacer la mémoire des trajectoires.

Il faut enfin préciser que l'ordonnée à l'origine des courbes de plus hautes densités, qui

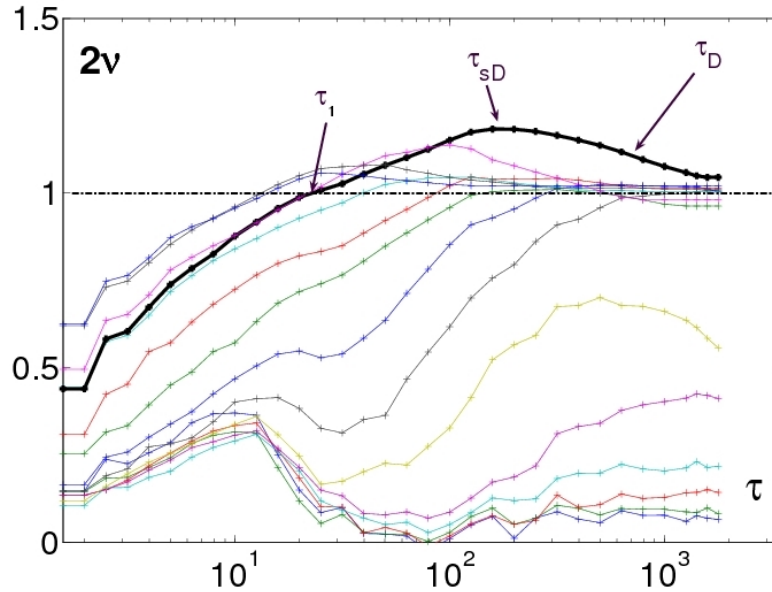


correspond aux plus petits mouvements détectés, est compatible avec la valeur de notre résolution. D'autre part, nous avons choisi pour représenter la longueur de diffusion des axes temporels qui ont été coupés à une valeur inférieure à la longueur total du signal, pour des raisons de convergence de nos estimateurs. En effet, pour un moment d'ordre deux, il est d'usage de ne représenter les fonction d'un retard que jusqu'au cinquième du temps total. Notre axe s'étend donc jusqu'à  $\tau = 2222$ , et cette convention sera la même dans la suite pour toutes les quantité comportant un retard (Pour un moment d'ordre quatre, comme la kurtosis que nous introduirons dans la suite, l'axe doit être encore raccourci, et nous avons pour représenter cette quantité coupé à  $\tau = 1047$ ).

**Échelles de temps** Pour caractériser proprement ces régimes, il est très utile de représenter la pente locale  $\nu$  de ces courbes, définie de la manière suivante :

$$\nu \equiv \frac{\partial \log(\sigma_\phi(\tau))}{\partial \log(\tau)} \quad (3.3)$$

Cette pente locale calculée pour les courbes de la figure 3.19 est représentée sur la figure 3.20. L'examen attentif de ces courbes révèle un comportement plus riche que celui que nous venons d'évoquer. On observe bien qu'aux petites valeurs de  $\tau$ , la pente locale est plus petite que  $\frac{1}{2}$ , et qu'elle rejoint cette valeur aux grands  $\tau$ . Cependant, et c'est là un des points les plus importants de ce travail, on remarque que pour les densités les plus faibles, la pente locale atteint des valeurs plus grandes que  $\frac{1}{2}$ . Il existe donc pour certaines valeurs de la densité un régime intermédiaire où la dynamique du système est super-diffusive. Ce régime existe de plus indépendamment sur les courbes de diffusion associées aux déplacements projetés selon les deux directions, et n'est donc pas un effet dû à l'anisotropie. Pour caractériser ces différents régimes, on décide de définir, pour les valeurs de  $\phi$  où elles existent, les échelles de temps  $\tau_1$ ,  $\tau_{sD}$  et  $\tau_D$  comme suit.  $\tau_1$  est la plus petite valeur de  $\tau$  à laquelle la pente locale  $\nu$  atteint  $\frac{1}{2}$ ,  $\tau_{sD}$  est la valeur de  $\tau$  à laquelle la pente locale atteint un maximum plus grand que  $\frac{1}{2}$ , et  $\tau_D$  est la valeur de  $\tau$  à laquelle la dynamique redevient

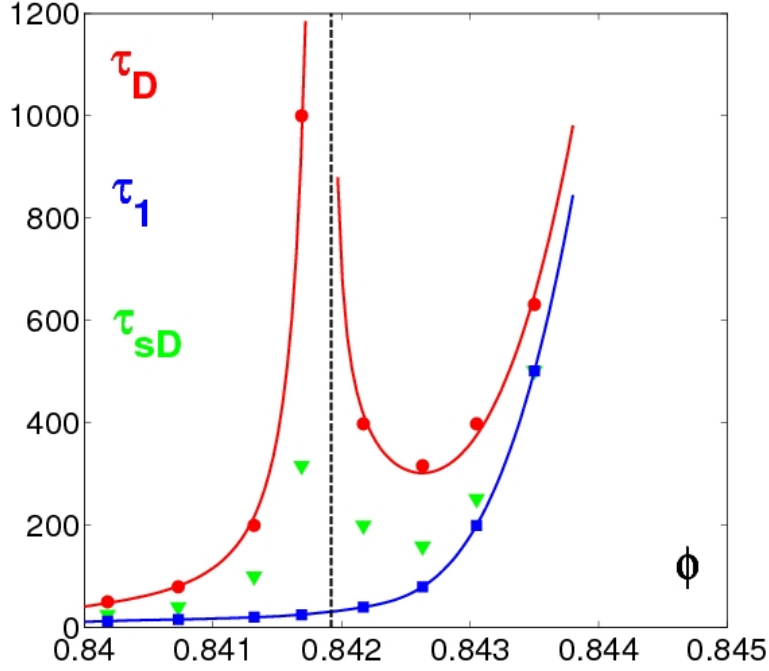


**FIG. 3.20:** Pente locale double des courbes de diffusion en fonction de  $\tau$  pour toutes les valeurs de  $\phi$ . La courbe en gras correspond à  $\phi_J$ .

diffusive, correspondant au point d'inflexion de la pente locale aux  $\tau > \tau_{sD}$ . La définition de ces échelles de temps est visible sur la figure 3.20. Nous avons représenté sur la figure 3.21 les valeurs de ces temps caractéristiques en fonction de la fraction surfacique.

Sur cette figure, on distingue deux types de comportement. D'une part, les temps  $\tau_{sD}$  et  $\tau_D$  sont fortement piqués autour de la fraction surfacique que nous avons appelé  $\phi_J$ , et atteignent des valeurs très grandes. En particulier, le temps  $\tau_D$  atteint à la densité  $\phi = 0.84169$  de l'ordre de 1000 temps microscopiques. D'autre part, le temps  $\tau_1$  croît de manière monotone avec la densité, et correspond au "temps de cage" défini comme le temps caractéristique de la sortie du régime sous-diffusif. Cette échelle de temps ne semble pas sensible à la traversée de  $\phi_J$ , mais plutôt à la force à la paroi, et correspond à un ralentissement de la dynamique globale. Les échelles de longueur  $\sigma_\phi(\tau)$  évaluées à ces temps sont représentées sur la figure 3.22. On observe que leurs variations relatives sont deux ordres de grandeur plus petites que celle des temps. L'échelle de longueur associée à  $\tau_1$  décroît de manière monotone, alors que les deux autres ont un comportement

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.21:** Valeurs des temps caractéristiques  $\tau_1, \tau_{sD}$  et  $\tau_D$  en fonction de la densité. Les lignes de couleur sont des guides pour les yeux. La ligne pointillée noire indique la valeur  $\phi_J$ .

plus compliqué au voisinage de  $\phi_J$ . On voit ici que notre analyse révèle un temps  $\tau_{sD}$  qui traduit la présence de corrélations temporelles positives des déplacements des particules, qui pointe vers une valeur particulière de la densité qu'indiquait déjà notre analyse des forces dans le système. De plus, ce temps est toujours supérieur au temps  $\tau_1$ . Notre détermination de  $\phi_J$  a donc été faite sur cette figure en trouvant le meilleur ajustement de la forme

$$(\tau_D - \tau_1) = |\phi - \phi_J|^{-\eta_{g,d}} \quad (3.4)$$

où  $\eta_{g,d}$  est libre de changer de gauche à droite. Considérant le nombre de points, il est honnêtement difficile de proposer un jeu d'exposants crédibles. Cependant, l'ajustement libre pointe vers des valeurs de  $\eta_{g,d}$  proches de  $\frac{1}{2}$ , et un accord satisfaisant est obtenu avec

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

$\eta_g = \eta_d = \frac{1}{2}$ . C'est cet ajustement qui est représenté en rouge sur la figure 3.21, et qui donne  $\phi_J = 0.8419$ . Cette valeur correspond sur le signal de force à la paroi au moment où la force statique résiduelle devient petite et où ses fluctuations naissent. A cette densité, la composante cinétique de la force mesurée en vibration apparaît.

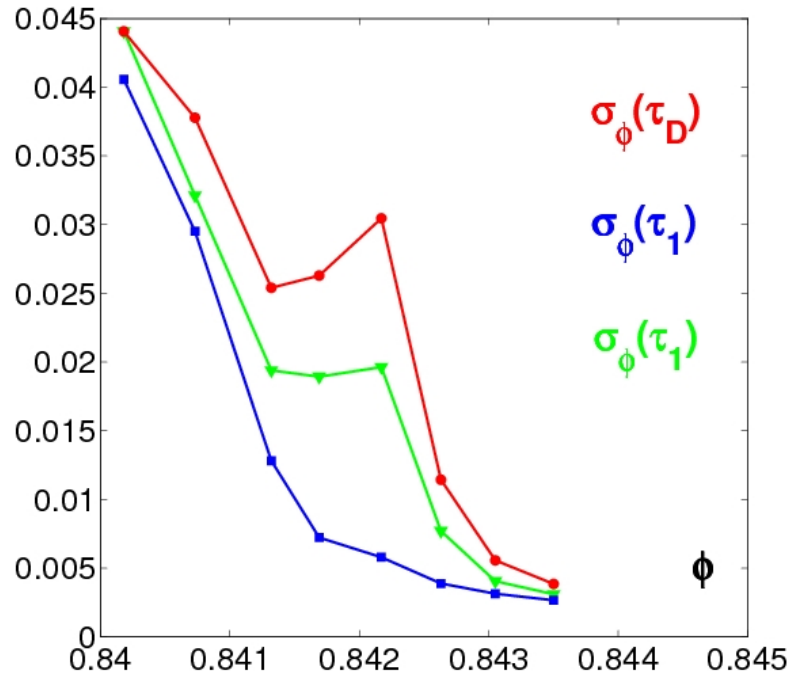
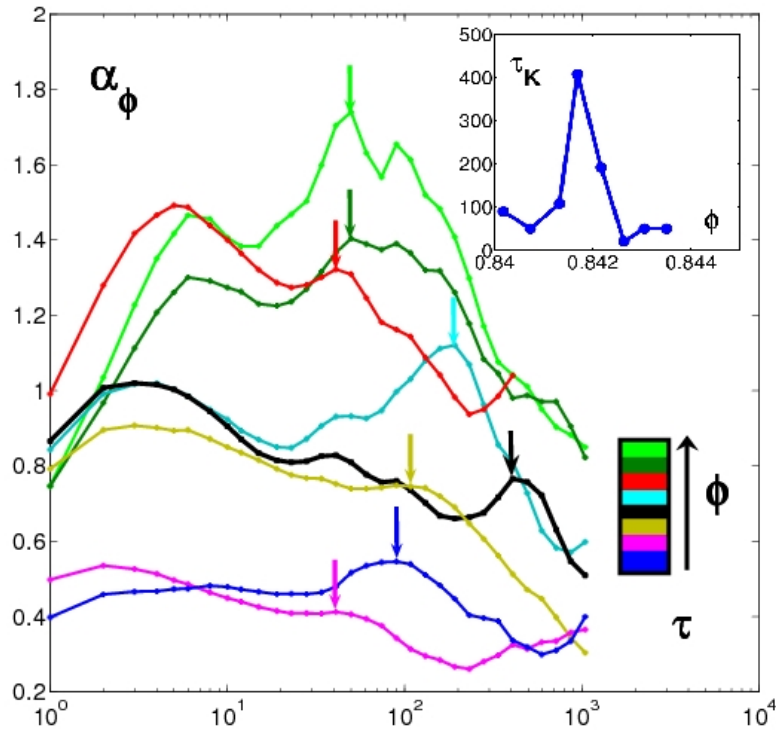


FIG. 3.22: Valeurs de sigma correspondant aux échelles de temps  $\tau_1, \tau_{sD}$  et  $\tau_D$

Enfin, nous avons évalué l'écart à la gaussienne de la distribution des déplacements dans la direction perpendiculaire à la vibration au moyen d'une quantité basée sur son quatrième moment

$$\alpha = \frac{\langle \Delta X(\tau)^4 \rangle}{3 \langle \Delta X(\tau)^2 \rangle^2} - 1 \quad (3.5)$$

Cette quantité, appelée excès de kurtosis normalisé, vaut zéro pour la gaussienne, est positive quand les queues de distribution sont plus épaisses, et négative dans le cas contraire. Nous l'avons représentée sur la figure 3.23 pour les valeurs de  $\phi$  auxquelles nous pouvons



**FIG. 3.23:** Valeur de l'excès de kurtosis en fonction du temps pour différentes densités. Les densité croissantes sont indiquées par le code couleur. En insert, temps caractéristique  $\tau_K$ .

définir les constantes de temps introduites ci-dessus.

On remarque d'abord que cette quantité  $n'$  est pas monotone avec le temps. Pour la plupart des densités, elle croît aux temps courts, et décroît aux temps longs. Le comportement aux temps intermédiaires est moins clair. En effet, il semble y avoir de manière assez générique un maximum local aux temps courts, qui reste toujours de l'ordre de l'unité, puis une dépendance compliquée avec éventuellement un autre maximum local à des temps plus longs. On peut extraire la valeur typique d'un temps caractéristique correspondant à ce deuxième maximum. Nous avons explicité notre repérage sur la figure 3.23 au moyen des flèches de couleur. Les temps extraits sont représentés en insert. Ils ont un comportement en  $\phi$  et des valeurs similaires aux temps  $\tau_{sD}$  correspondant extraits des courbes

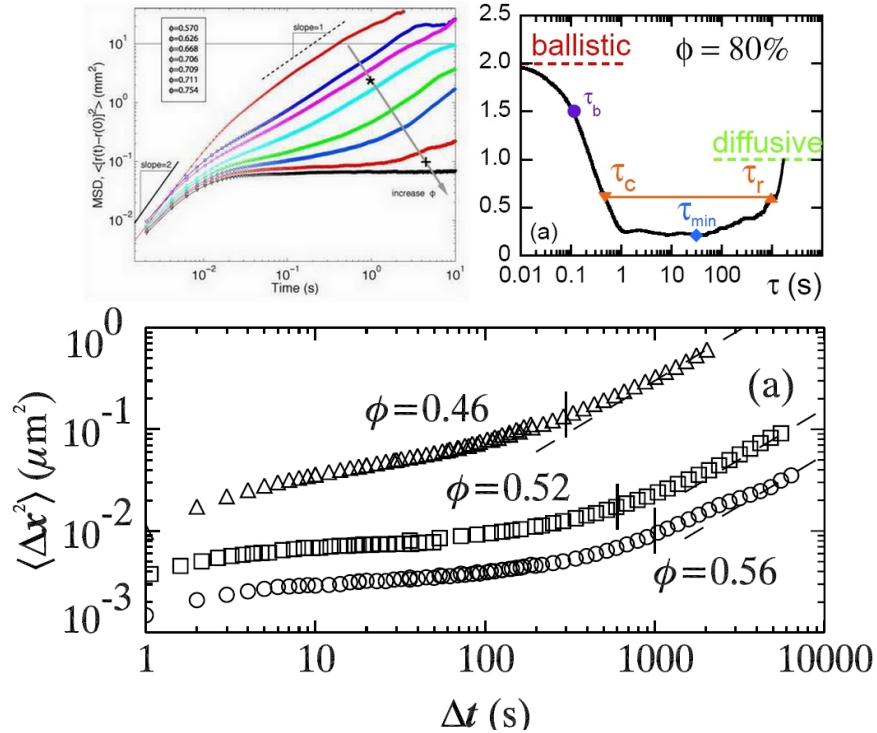
### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

de diffusion. Il y a donc un lien entre le caractère super-diffusif et l'écart à la gaussienne au voisinage de ce temps. On peut comprendre ce lien de la manière suivante. Si tous les grains font un pas microscopique typique, la corrélation positive dans les déplacements microscopiques successifs des grains signifie que ceux-ci se produisent plus souvent dans le même sens, ce qui construit de la super-diffusion aux temps intermédiaires ainsi que des déplacements anormalement grands. Ce sont ces événements que mesure l'excès de kurtosis. Enfin, cette mesure confirme que l'écart à la gaussienne a tendance à augmenter globalement avec la densité.

**Discussion** On peut à ce stade résumer les résultats que nous avons mis à jour en étudiant les propriétés de diffusion de notre système. Aux petites échelles de temps  $\tau < \tau_1$ , les grains sont piégés par leur voisins et leurs déplacements sont fortement anti-corrélés, ce qui se traduit par un régime sous-diffusif aux temps courts. Cependant, au voisinage de la transition de rigidité, les déplacements élémentaires des grains sont corrélés positivement sur des échelles de temps  $\tau_{sD}$  d'autant plus grandes que la fraction surfacique est proche de  $\phi_J$ , et ces corrélations positives dans les mouvements individuels construisent de la super-diffusion et contribuent aux queues de distribution des déplacements. Aux temps plus longs  $\tau > \tau_D$  et pour les densités les plus basses, les déplacements successifs des grains perdent leur corrélation, et la dynamique redevient diffusive, alors qu'aux densités plus élevées, le temps de piégeage devient très grand et la dynamique s'arrête. L'effet important ici est l'apparition d'un temps intermédiaire où la dynamique est super-diffusive.

A titre de comparaison, nous reportons sur la figure 3.24 les courbes de diffusion obtenues dans une expérience quasi bidimensionnelle de grains monodisperses vibrés verticalement [125], l'exposant local  $2\nu$  obtenu dans une expérience bidisperse quasi bidimensionnelle où l'agitation est réalisée en injectant de l'air dans le système [124], et les courbes de diffusion obtenues dans un système colloïdal [126]. Les trois expériences ont

été réalisées au voisinage de la transition de Jamming.



**FIG. 3.24:** En haut, de gauche à droite, courbes de diffusion extraites de [125], exposant local  $2\nu$  extrait des courbes de diffusion de [124]. En bas, courbes de diffusion extraites de [126].

Observons d'abord les courbes de diffusion extraites de [125] en haut à gauche sur la figure. On voit que le comportement en fraction surfacique et en temps est semblable à celui que nous avons observé dans notre système, bien qu'il soit impossible de comparer les valeurs de densité parce que le système utilisé par [125] est quasi bidimensionnel. De plus, la courbe bleue, correspondant à la densité 0.711, semble exhiber aux temps longs une pente légèrement supérieure à 1. Malheureusement, les temps expérimentaux semblent trop courts pour obtenir une confirmation claire de cet effet. Ensuite, sur la figure située en haut à droite, extraite de [124], on observe que l'exposant local  $2\nu$  rejoint la valeur 1 avec une pente très raide. Or si le système redevenait effectivement diffusif

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

à cette échelle de temps, on s'attendrait à une pente très faible. Il semble donc clair que dans ces données, l'exposant local atteint lui aussi des valeurs plus grandes que 1 sur des temps expérimentaux plus grands. A noter que dans ce travail la densité la plus élevée correspond à notre densité la plus basse. Enfin, sur la figure du bas, extraite de [126], on remarque là encore un comportement typique en densité et en temps. Cependant, à la densité la plus élevée  $\phi = 0.56$  dans ce système tridimensionnel, la courbe correspondante semble exhiber un léger épaulement avant d'atteindre un régime diffusif. Il est possible que cela soit un signe de la présence de super-diffusion au voisinage du Jamming dans ce système colloïdal.

A l'issue de cette analyse, nous aimerions comprendre la nature spatiale des objets auxquels sont associés la super-diffusion que nous observons dans la dynamique de notre système. Précisément, nous aimerions mesurer le nombre typique de grains impliqués dans ces phénomènes de relaxation anormaux, savoir si ces derniers ont une cohérence spatiale, et nous allons pour les caractériser étudier l'hétérogénéité de la dynamique. Nous allons d'abord introduire les concepts dont nous avons besoin pour aboutir à cette caractérisation, ce qui nous amène naturellement à étudier la relaxation temporelle du champ de densité.



### 3.2.2 Corrélation temporelle du champ de densité

Nous allons dans ce chapitre étudier la relaxation du champs de densité au cours du temps dans notre système. Pour cela nous allons introduire un outil classique semblable à ceux d'usage en diffusion, de la lumière ou des rayons X, à savoir le facteur de structure dynamique. Nous adopterons cependant une approche originale qui nous permettra de relier les propriétés de cette fonction aux échelles précédemment définies, et d'identifier clairement les échelles de temps et d'espace impliquées dans cette relaxation moyenne. Notre analyse révélera par ailleurs une propriété de scaling qui servira de base à la relation de fluctuation que nous discuterons dans la dernière partie de ce manuscrit.

#### *Définition, contexte, et résultats*

**Définition** Une technique expérimentale classique visant à étudier la structure d'un liquide consiste à envoyer un rayon lumineux de vecteur d'onde  $\vec{q}$  variable au travers du système et à enregistrer l'intensité diffusée. Les rayons lumineux sont diffusés par les constituants élémentaires, nous renseignant ainsi sur sa structure. En particulier, l'intensité lumineuse mesurée, dans le cas de diffusion simple, est directement liée au facteur de structure du liquide. Une caractérisation plus fine, en particulier des échelles de temps le caractérisant, peut-être obtenue en calculant les corrélations temporelles de cette intensité. Le signal obtenu est dans ce cas lié au facteur de structure dynamique  $F(\vec{q}, t)$  défini de la manière suivante :

$$F(\vec{q}, t) \propto \left\langle \sum_{i,j} e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_j(t) - \vec{r}_i(0))} \right\rangle \quad (3.6)$$

ou à sa partie incohérente, ou *self*

$$F_s(\vec{q}, t) \propto \left\langle \sum_i e^{i\vec{q} \cdot (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_i(0))} \right\rangle \quad (3.7)$$

selon les processus de diffusion en jeu.

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

Ces fonction permettent de sonder la dynamique du système aux échelles de longueur associées à la gamme de vecteurs d'onde utilisés. Cependant, quand les déplacements typiques des particules sont petits devant leurs tailles, les seuls termes qui contribuent à la somme dans la première expression sont les termes en  $i = j$ , et les deux fonctions donnent alors les mêmes renseignements.

Dans notre système, comme nous avons accès directement aux  $\vec{r}_j(t)$ , nous pouvons calculer cette fonction à partir des trajectoires des grains. Cependant, comme il a été montré par Guillaume Marty, on peut dans notre cas utiliser un définition alternative qui donne essentiellement la même information mais qui permet aux estimateurs de variance que nous introduirons dans la suite de converger plus rapidement. Ce que nous appellerons facteur de structure dynamique sera donc dans la suite défini par :

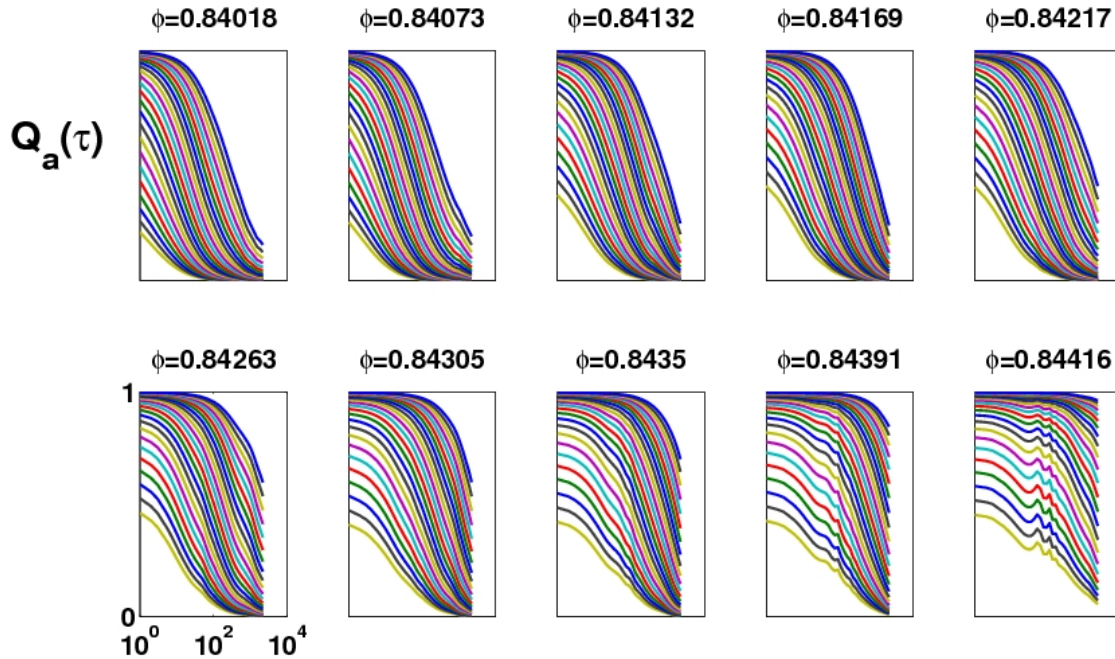
$$Q_a(\tau) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_j e^{-\frac{\|\vec{r}_j(t+\tau) - \vec{r}_j(t)\|^2}{2a^2}} \right\rangle_t \quad (3.8)$$

Le comportement de cette fonction est assez simple à comprendre. Quand les particules bougent en moyenne beaucoup plus que l'échelle de longueur  $a$  à laquelle on sonde la dynamique, elle vaut zéro. Elle vaut un si elles ont bougé beaucoup moins que  $a$ . L'échelle  $a$  doit donc être choisie de l'ordre des déplacements typiques, de l'ordre de  $10^{-2}$  diamètres de grain dans notre système, pour obtenir un signal intéressant. Ceci confirme l'intérêt de nous borner à étudier la partie *self*, puisque les déplacements sont petits devant la taille des grains.

**Résultats** Nous avons représenté sur la figure 3.25 les facteurs de structure dynamiques en fonction du retard  $\tau$  en échelle logarithmique pour différentes densités. Pour une densité donnée, chaque courbe représente une valeur de la sonde  $a$ .

On observe que, à une densité donnée et une valeur de la sonde  $a$ ,  $Q_a$  est une fonction décroissante du retard  $\tau$ . Pour une valeur donnée de  $\tau$ , les courbes vont du bas vers le haut pour les  $a$  croissants. En effet, plus la sonde est grande, plus le temps nécessaire aux

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : À LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.25:** Facteurs de structures dynamiques en fonction du retard  $\tau$  pour différentes valeurs de la fraction surfacique et des valeurs de  $a$  s'étalant de 0,001 à 0,024

particules pour parcourir cette distance typique sera long. Enfin, on observe que quand la densité augmente, les courbes tombent à zéro de plus en plus loin en temps, voir même ne décroissent jamais pour les plus hautes densité et les plus grandes valeurs de la sonde. Cependant, ces fonctions ne sont pas des fonctions exponentielles du temps. A noter ici qu'à la différence de la plupart des systèmes étudiés précédemment [52], on n'observe pas de première décroissance aux temps court. Nous pouvons comprendre cela en invoquant le fait que dans un liquide thermique à température et densité données, il y a une distribution de déplacements thermiques autour d'une position fixe définie par le voisinage, la "cage", qui construisent ce temps court habituellement appelé  $\tau_\beta$ . Ici, nous stroboscopons la dynamique du système à la fréquence d'injection. Ce faisant, nous filtrons les composantes rapides du mouvement correspondant au bruit thermique, et limitons l'amplitude du mouvement au déplacements moyennés sur un cycle. Ceci peut expliquer l'absence

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

de "régime  $\beta$ " dans les facteurs de structure dynamiques. Ces fonctions sont couramment modélisées par des exponentielles étirées de la forme  $Q_a(\tau) = e^{-\left(\frac{t}{\tau a(a)}\right)^{\beta(a)}}$ . En effet, dans ce type de régime, il a été montré [76] que la dynamique du système est hétérogène en espace et en temps, ce que nous nous attacherons à montrer quantitativement dans la suite. Ceci se traduit par l'existence d'un champ fluctuant en espace et en temps des temps de relaxation de la densité. Supposons par exemple que le système exhibe une distribution exponentielle de temps de relaxation de la forme

$$P(\tau) = \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} \quad (3.9)$$

La relaxation globale du système, sensible à la moyenne de ces temps, doit alors suivre une loi de la forme

$$C(t) \propto \int_0^\infty d\tau P(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} \propto \int_0^\infty d\tau e^{-\frac{\tau}{\tau_0} - \frac{t}{\tau}} \quad (3.10)$$

L'intégrale est dominée par l'extremum de l'argument dans l'exponentielle et vaut

$$C(t) \propto e^{-\text{Min}\left(\frac{\tau}{\tau_0} + \frac{t}{\tau}\right)} \propto e^{-2\sqrt{\frac{t}{\tau_0}}} \quad (3.11)$$

On obtient bien dans ce cas particulier une exponentielle étirée. Nous avons cependant adopté une démarche différente pour extraire les échelles caractérisant ces fonctions. En effet, si à une valeur de la sonde donnée, on obtient une distribution de temps dont les caractéristiques pilotent la décroissance du facteur de structure dynamique, de la même façon, à une échelle de temps fixée, l'hétérogénéité dynamique du système doit se traduire par une distribution de déplacements. Puisque nous avons déjà introduit la longueur  $\sigma_\phi(\tau)$  qui nous renseigne sur la distribution des déplacements, nous allons plutôt procéder à l'extraction d'une longueur caractéristique  $\zeta_\phi(\tau)$  de ces fonctions vues comme des fonctions de la sonde  $a$  pour chaque valeur de  $\tau$ , que nous pourrions comparer à  $\sigma_\phi(\tau)$ . De plus, dans le cas où la distribution des déplacements selon les axes est gaussienne, on

dispose d'une prescription pour la forme du facteur de structure dynamique qui identifie ces deux longueurs.

### *Calcul gaussien, ajustement d'Ornstein-Zernike, et scaling*

**Calcul Gaussien** Nous allons mener le calcul classique qui mène à la forme d'ajustement que nous utiliserons par la suite pour analyser les facteurs de structure dynamiques. Supposons que nous travaillons avec une dynamique dans laquelle les déplacements selon les axes sont indépendants et ont une distribution gaussienne. Supposons de plus que la dynamique est isotrope. On peut donc écrire

$$P(\Delta X(\tau)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau)}} e^{-\frac{\Delta X^2}{2\sigma^2(\tau)}} \quad P(\Delta Y(\tau)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau)}} e^{-\frac{\Delta Y^2}{2\sigma^2(\tau)}} \quad (3.12)$$

On a donc

$$\begin{aligned} Q_a(\tau) &= \left\langle \frac{1}{N} \sum_j e^{-\frac{(\bar{r}_j(t+\tau) - \bar{r}_j(t))^2}{2a^2}} \right\rangle_t \\ &= \left\langle e^{-\frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2}{2a^2}} \right\rangle \\ &= \int \int dX dY P(\Delta X(\tau)) P(\Delta Y(\tau)) e^{-\frac{\Delta X^2 + \Delta Y^2}{2a^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2(\tau)} \int \int dX dY e^{-(\Delta X^2 + \Delta Y^2) \left( \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2\sigma^2(\tau)} \right)} \\ &= \frac{1}{\sigma^2(\tau)} \int dr \, r e^{-r^2 \left( \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2\sigma^2(\tau)} \right)} \\ &= \frac{1}{\sigma^2(\tau)} \frac{a^2 \sigma^2(\tau)}{a^2 + \sigma^2(\tau)} \\ &= \frac{1}{1 + \left( \frac{\sigma(\tau)}{a} \right)^2} \end{aligned} \quad (3.13)$$

On obtient donc une forme simple appelée relation d'Ornstein-Zernike pour les facteurs de structure dynamiques, qui ne dépend que d'un seul paramètre correspondant à la longueur de diffusion  $\sigma(\tau)$  dans le cas gaussien. Malgré le caractère non-gaussien des distributions des déplacements que nous avons obtenues, nous avons utilisé cette forme fonctionnelle pour extraire la longueur caractéristique de décroissance  $\zeta(\tau)$  de ces fonctions pour chaque valeur de  $\tau$ .

**Ajustement d'Ornstein-Zernike** Nous avons représenté sur la figure 3.26 l'ajustement d'un facteur de structure dynamique typique au moyen de la forme fonctionnelle proposée, où le seul paramètre libre est une longueur caractéristique  $\zeta(\tau)$  au retard  $\tau$  auquel est évalué  $Q_a(\tau)$ .

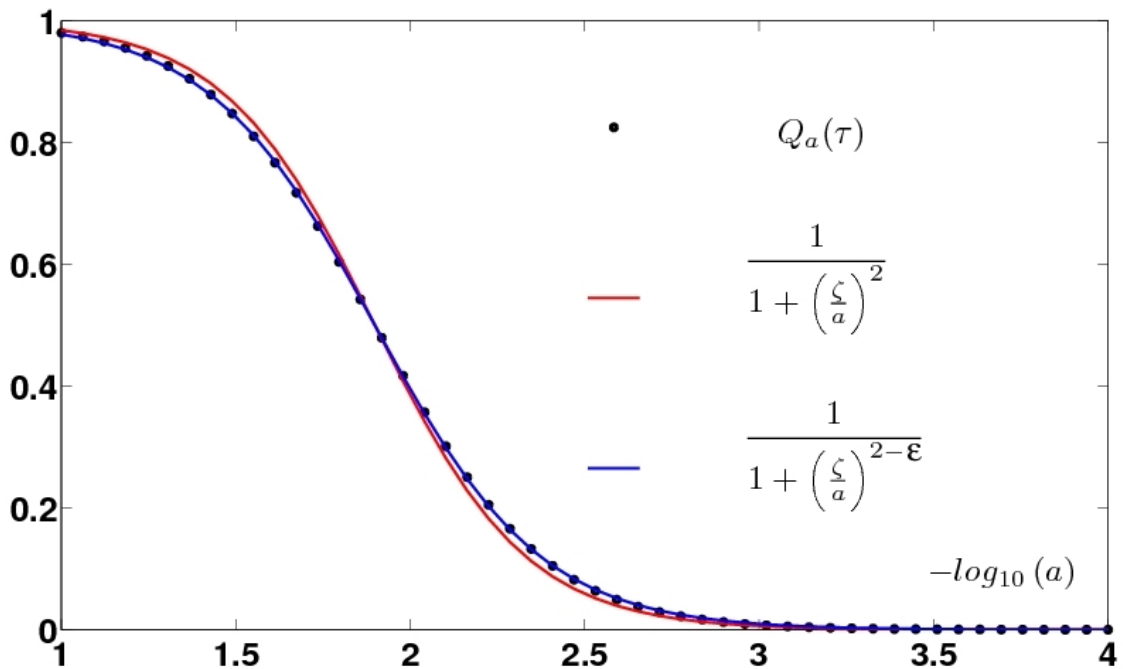
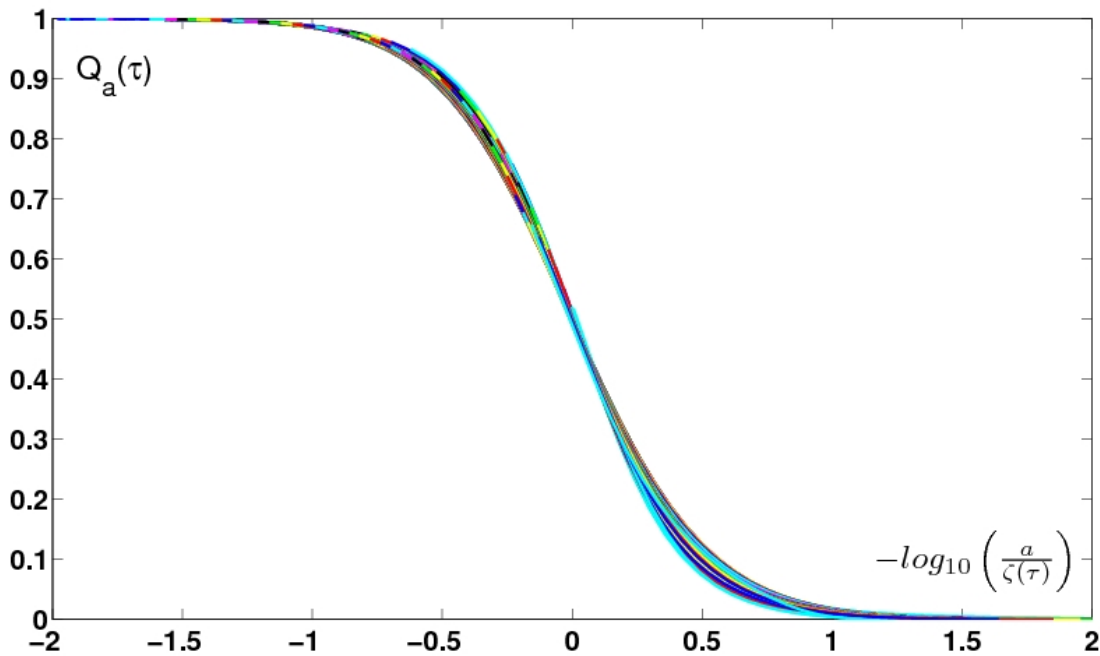


FIG. 3.26: Ajustements du facteur de structure dynamique ; en rouge, par le résultat gaussien, et en bleu par la proposition 3.15.

On observe que l'ajustement est en bon accord avec les données. En particulier, la

valeur  $Q_a = \frac{1}{2}$  est bien reproduite et la longueur  $\zeta(\tau)$  est correctement extraite.

**Scaling** Pour chaque valeur de  $\tau$  et de  $\phi$ , nous avons donc une méthode pour extraire la longueur caractéristique de décroissance  $\zeta_\phi(\tau)$  du facteur de structure dynamique  $Q_a(\tau)$  à cette densité. Il est donc naturel de représenter les facteurs de structure dans un axe adimensionné par cette longueur caractéristique. C'est ce qui est reporté sur la figure 3.27 pour toutes les fractions surfaciques étudiées et toutes les valeurs accessibles de  $\tau$ .



**FIG. 3.27:** Facteurs de structure dynamiques représentés dans l'axe adimensionné  $-\log_{10}\left(\frac{a}{\zeta(\tau)}\right)$  pour toutes les valeurs de  $\phi$  étudiées et toutes les valeurs accessibles de  $\tau$ .

Cette représentation révèle l'existence d'une courbe maîtresse représentant dans une bonne approximation les facteurs de structure dynamiques indépendamment de la fraction surfacique et du retard  $\tau$  auxquels ils sont calculés. On peut donc résumer l'information donnée par ces fonctions de la manière suivante :

$$Q_a^\phi(\tau) = \tilde{Q}\left(\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}\right) \quad (3.14)$$

où la fonction  $\tilde{Q}$  est une fonction de forme indépendante des paramètres du problème. Cette propriété de scaling n'est qu'approximative, comme on peut le voir sur la figure 3.27, puisque le scaling des distributions des déplacements avec  $\sigma(\tau)$  est lui-même approximatif. Cependant, cette propriété est complètement cachée dans une représentation temporelle de ces fonctions.

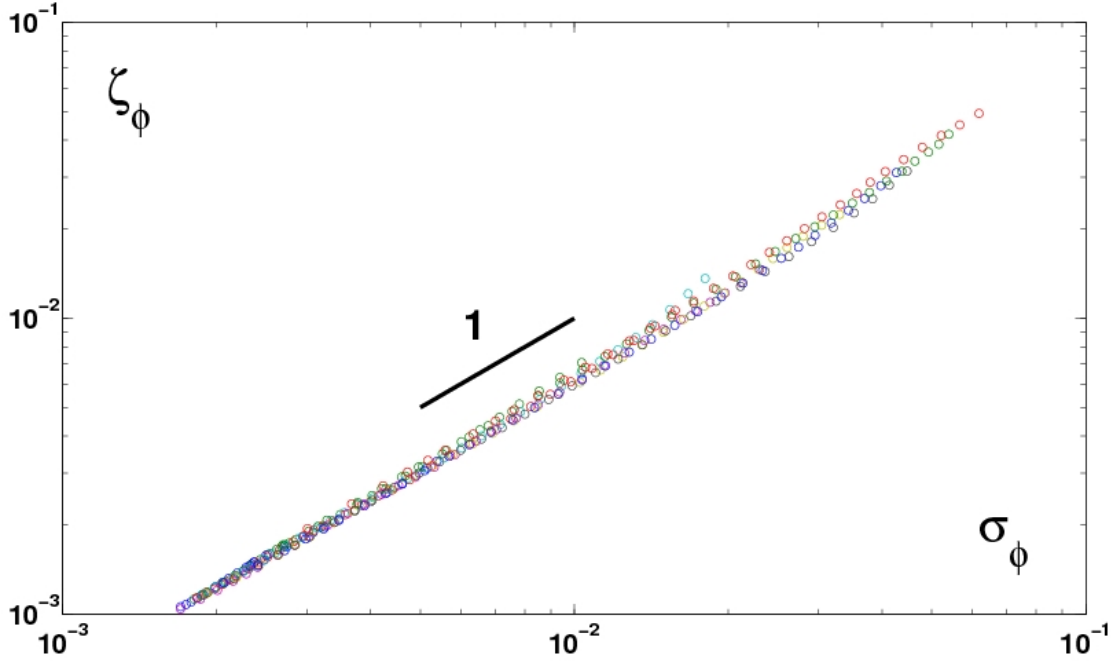
### ***Lien avec les échelles microscopiques de diffusion, écart au cas gaussien***

**Lien avec les échelles microscopiques de diffusion.** Comme nous venons de le voir, l'information contenue par les facteurs de structure dynamiques peut être résumée de manière assez complète par la fonction  $\zeta_\phi(\tau)$ . Cette fonction est une échelle de longueur caractéristique du problème, qu'il s'agit à présent de comparer à la longueur de diffusion présentée plus haut. C'est ce que nous avons fait sur la figure 3.28.

On observe une dépendance linéaire de  $\zeta_\phi$  en la longueur de diffusion  $\sigma_\phi$ . Le meilleur ajustement donne  $\zeta_\phi = 1.62\sigma_\phi$  indépendamment des valeurs de  $\phi$ . La légère déviation à la linéarité visible aux grandes valeurs de  $\sigma_\phi$  est due au fait que cet estimateur commence à être sous-évalué. La fonction  $\zeta_\phi$  comporte de plus les mêmes propriétés caractéristiques que celles que nous avons extraites de  $\sigma_\phi$  au chapitre précédent. Nous avons par conséquent obtenu une caractérisation remarquable des facteurs de structure dynamiques, qui se résument dans cette analyse à une fonction de forme  $\tilde{Q}$  et une seule fonction scalaire de  $\phi$  et de  $\tau$  qui s'avère être la longueur de diffusion  $\sigma_\phi(\tau)$ .

**Écart au cas Gaussien** Malgré la qualité de l'ajustement que nous avons proposé, celui-ci s'écarte systématiquement des facteurs de structures dynamiques calculés dans le cas Gaussien, comme on peut le voir sur la figure 3.26. Cet écart traduit le fait que les distributions de déplacements présentées au chapitre précédent ne sont pas gaussiennes, et se





**FIG. 3.28:**  $\zeta_\phi$  en fonction de  $\sigma_\phi$  pour toutes les densités étudiées et toutes les valeurs accessibles de  $\tau$ , en échelles logarithmiques. Le trait en gras représente la dépendance linéaire.

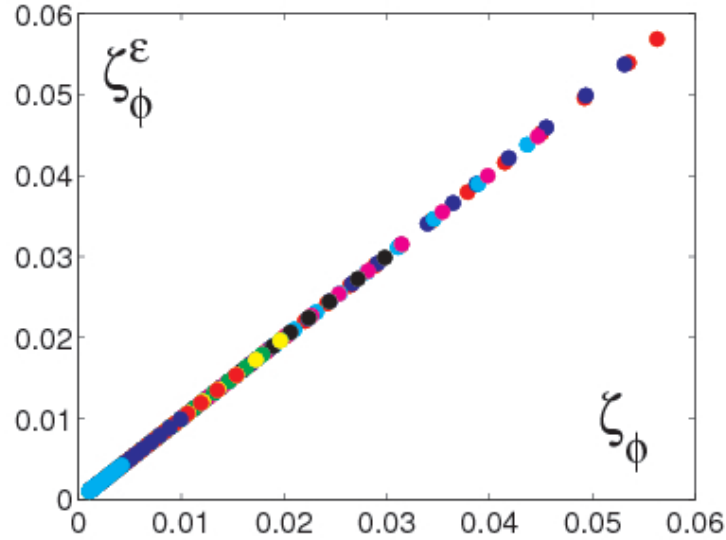
manifeste en particulier par une différence de pente au voisinage de  $Q_a = \frac{1}{2}$ . La qualité de l'ajustement peut être remarquablement améliorée si on introduit un second paramètre qui permet de capturer ces variations de pente. La forme qui nous a semblé la plus naturelle pour généraliser la relation 3.13 est la suivante :

$$Q_a(\tau) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\zeta(\tau)}{a}\right)^{2-\epsilon(\tau)}} \quad (3.15)$$

Cet ajustement est représenté sur la figure 3.26. On arrive en effet à reproduire la pente locale au voisinage de  $Q_a = \frac{1}{2}$ , mais on observe aussi que la qualité générale de l'ajustement est meilleure partout. La longueur  $\zeta_\phi^\epsilon$  extraite de cette manière est rigoureusement la même que celle obtenue avec l'ajustement précédent, comme l'illustre la figure 3.29 où ces longueurs ont été représentées l'une en fonction de l'autre pour toutes les valeurs de

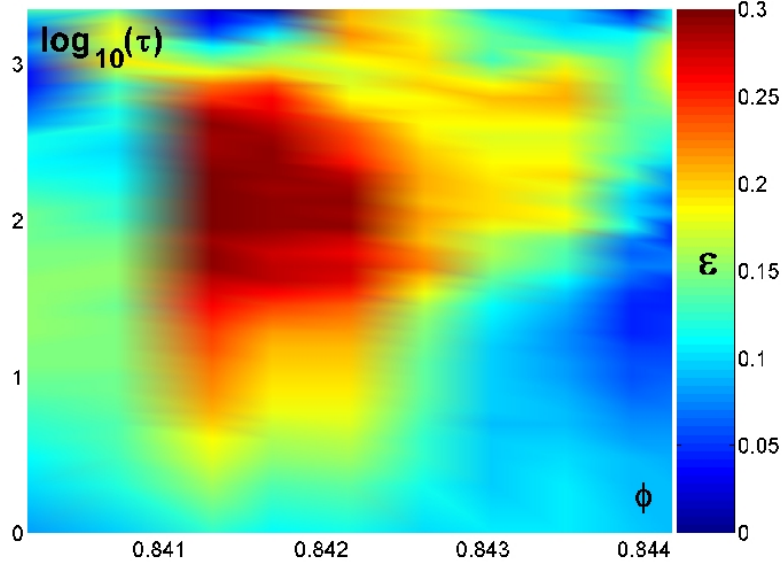
CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

$\phi$  et de  $\tau$  étudiées. Par contre, le paramètre  $\epsilon(\tau)$  est une mesure de l'écart des distribu-



**FIG. 3.29:** Représentation de  $\zeta_\phi^\epsilon$  en fonction de  $\zeta_\phi$  paramétrisée par  $\tau$ . Les couleurs correspondent aux densités étudiées. On observe une parfaite identité entre ces deux longueurs.

tions des déplacements à la gaussienne, a priori plus fine que l'excès de kurtosis introduit plus haut parce qu'on l'extrait d'une quantité à deux points. Ce paramètre est représenté sur la figure 3.30. Malgré les faibles valeurs qu'il atteint, son comportement en  $\tau$  exhibe typiquement trois régimes. Il part d'une valeur proche de zéro pour atteindre un plateau puis retombe à une valeur faible. De ce point de vue, cette caractérisation de l'écart à la gaussienne rappelle le comportement de l'excès de kurtosis reporté dans [127, 126, 71]. La durée et la hauteur du plateau sont par ailleurs maximales à la densité  $\phi_J$ . Pour cette valeur de  $\phi$  ainsi que pour les deux valeurs adjacentes,  $\epsilon$  vaut environ 0.3. Finalement, nous avons proposé une forme d'ajustement des facteurs de structure dynamiques dont la qualité et la facilité de mise en oeuvre sont meilleures qu'une exponentielle étirée, et dont les paramètres admettent une interprétation simple. On peut dériver de manière très naïve une prescription pour les caractéristiques de l'exponentielle étirée en fonction de



**FIG. 3.30:** Paramètre  $\epsilon$  caractérisant l'écart à la gaussienne en fonction du retard  $\tau$  et de la fraction surfacique  $\phi$ .

ces paramètres. Si on fait l'identification

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\zeta(\tau)}{a}\right)^{2-\epsilon(\tau)}} \equiv e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_\alpha(a)}\right)^{\beta(a)}} \quad (3.16)$$

alors, en évaluant les deux membres pour  $\tau = \tau_\alpha$ , on obtient

$$\tau_\alpha^{-1}(\tau) = \frac{\zeta(\tau)}{(e-1)^{\frac{1}{2-\epsilon(\tau)}}} \quad (3.17)$$

De même, pour  $\zeta(\tau) = a$ , on obtient

$$\beta(\zeta(\tau)) = \frac{\log(\log(2))}{\log\left(\frac{\tau}{\tau_\alpha(\zeta(\tau))}\right)} \quad (3.18)$$

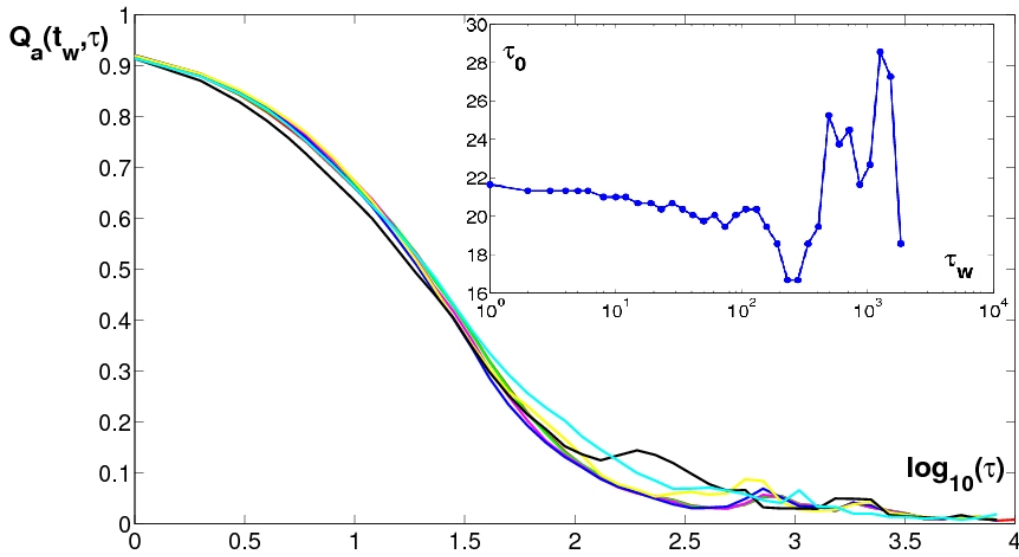
La donnée de  $\zeta(\tau)$  et de  $\epsilon(\tau)$  permet de déduire les fonctions  $\tau_\alpha(a)$  et  $\beta(a)$  pour les valeurs de  $a$  parcourues par  $\zeta(\tau)$ . Cependant, le domaine de validité et la pertinence de ces relation ne sont pas claires. De plus, les paramètres de l'exponentielle étirée sont difficiles voir impossibles à extraire, et nous ne nous risquons pas à cet exercice.

**Facteurs de structure dynamiques à deux temps et vieillissement** Comme nous l'avons mentionné plus haut, les séries temporelles correspondant aux fractions surfaciques auxquelles nous avons travaillé sont essentiellement stationnaires. Cela est visible sur les signaux de force à la paroi de la figure 3.12. Cependant, nous aimerions obtenir une mesure quantitative d'un éventuel écart à la stationnarité ; en particulier, nous aimerions préciser dans quelle mesure notre système est sujet au vieillissement dans les régimes où nous l'avons étudié. Pour cela, nous avons un outil classique [128] qui fait apparaître explicitement l'âge du système, à savoir un facteur de structure dynamique à deux temps, dont voici la définition.

$$Q_a(t_w, \tau) = \left\langle \frac{1}{N} \sum_j e^{-\frac{\|\bar{r}_j(t_w+\tau) - \bar{r}_j(t_w)\|^2}{2a^2}} \right\rangle \quad (3.19)$$

où  $t_w$  est l'âge du système depuis l'instant où il a été préparé à une densité spécifique. La moyenne est réalisée sur 200 instants de la dynamique au voisinage de  $t_w$ . Nous avons représenté sur la figure 3.31 une de ces fonctions pour  $\phi = 0.84018$  et  $a = 0.0079$  pour sept valeurs de  $t_w$  s'étalant de 1 à 2000. On peut définir un temps de relaxation  $\tau_0(t_w)$  comme le temps auquel  $Q_a(t_w, \tau_0) = \frac{1}{2}$ . Ce temps est représenté en insert en fonction de  $t_w$ .

Dans ce cas particulier, qui est représentatif de l'ensemble de nos données, on n'observe pas d'évolution claire de  $\tau_0$  avec  $t_w$ . Il semble y avoir une très légère baisse du temps de relaxation avec l'âge du système, ce qui indiquerait un léger rajeunissement, mais la fenêtre de moyennage étant courte, on n'a que peu de statistique et il est difficile de distinguer un signal des fluctuations naturelles du signal. De plus, la monotonie de cet effet est variable avec la fraction surfacique et n'exhibe pas de dépendance systématique. L'amplitude de variation du temps caractéristique aux courts  $t_w$ , là où le signal semble avoir atteint un niveau de convergence meilleur, et de l'ordre de 5%. Cette valeur peut être considérée comme une borne supérieure pour les effets de vieillissement dans notre système. Cela constitue la meilleure mesure de stationnarité dont nous disposons, et il est



**FIG. 3.31:**  $Q_a(t_w, \tau)$  en fonction de  $\tau$  pour  $\phi = 084018$  et  $a = 0.0079$ , évaluée pour des valeurs de  $t_w$  s'étalant de 1 à 2000. En insert, temps de relaxation  $\tau_0$  en fonction de l'âge  $t_w$  du système.

clair que l'éventuelle dérive des temps de relaxation de la densité au cours du temps dans notre système reste relativement petite. Cette absence de vieillissement peut être comprise de la manière suivante. Notre protocole équilibre les variables rapides, associées aux forces, puisque nous avons montré que la force à la paroi est stationnaire aux densités auxquelles nous avons travaillé. Par contre, le temps associé au vieillissement du champ de densité est bien trop grand pour être observable, parce que le système est très bloqué dans une configuration spécifique. Il est possible d'autre part que des effets subtils dus à la fréquence d'injection préviennent de tels effets [129].

### 3.3 Relaxation : Hétérogénéités spatiales

#### 3.3.1 Hétérogénéités dynamiques

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'hétérogénéité de la dynamique de notre système, et caractériser quantitativement son amplitude et sa dépendance à la fraction surfacique. Pour cela, nous introduirons d'abord un estimateur du volume de corrélation du champs de relaxation de la densité, appelé susceptibilité dynamique, qui nous permettra de mettre en évidence l'existence de mouvements collectifs dans notre système. Nous montrerons ainsi que ce caractère collectif est maximum à la fraction surfacique  $\phi_J$ . Nous discuterons ensuite des propriétés de scaling et de convergence de cet estimateur. Pour finir, nous calculerons une fonction de corrélation dynamique à quatre points, ce qui nous permettra d'extraire une longueur typique associée aux réarrangements collectifs du système. Nous montrerons enfin que cette fonction de corrélation vérifie une relation de scaling critique.

#### *Susceptibilité dynamique : Contexte, définition et résultats*

**Contexte** Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, la nature de la transition de blocage est à ce jour sujette à controverse. La raison principale de cette confusion est l'incompréhension des mécanismes à l'origine du ralentissement spectaculaire de la dynamique observé à son voisinage. A l'inverse des transitions de phase classiques, le système n'exhibe pas de différence structurelle entre sa phase liquide et sa phase bloquée ; il n'y a en particulier pas d'ordre à longue portée qui se développe comme dans la transition liquide/cristal. Plus précisément, on ne parvient pas à détecter la croissance d'une longueur de corrélation spatiale à la traversée de la transition : à son voisinage, une simple photographie du système ne permet pas d'identifier dans quel état il se trouve. En effet, prenons le cas de la transition liquide/gaz au voisinage du point critique. Dans cet état, le système est sujet à de fortes fluctuations de densité, qui se traduisent par son aspect opa-

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

lescent, et dont l'étendue spatiale diverge au point critique. Cette longueur caractéristique est habituellement mesurée par la fonction de corrélation spatiale de ces fluctuations

$$G(\vec{r}) \equiv \int d\vec{r}' \langle \delta\rho(\vec{r} + \vec{r}') \delta\rho(\vec{r}') \rangle \quad (3.20)$$

où  $\langle \bullet \rangle$  est une moyenne thermique,  $\rho(\vec{r}) = \sum_i^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$  est le champ spatial de densité associé aux positions  $\vec{r}_i$  des particules et  $\delta\rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) - \langle \rho \rangle$  le champ spatial de ses fluctuations. Le comportement radial de cette fonction au voisinage du point critique est de la forme

$$G(r) \propto \frac{e^{-\frac{r}{\xi}}}{r^{d-2+\eta}} \quad (3.21)$$

où  $d$  est la dimension de l'espace. En particulier la longueur de corrélation  $\xi$  diverge comme  $|t|^{-\nu}$  quand la température réduite  $t \equiv \frac{(T-T_c)}{T_c}$  devient petite.

Une mesure plus globale de l'étendue de ces corrélations est donnée par la susceptibilité grand-canonique de la densité

$$\chi \equiv \int d\vec{r} G(\vec{r}) \quad (3.22)$$

En injectant dans 3.20, et en remarquant que  $\int d\vec{r} \rho(\vec{r}) = N$ , on obtient que

$$\chi = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle \quad (3.23)$$

D'autre part, le comportement critique 3.21 de  $G(\vec{r})$  injecté dans 3.22 se traduit par

$$\chi \propto |t|^{-(2-\eta)\nu} \quad (3.24)$$

La susceptibilité  $\chi$  peut donc être interprétée comme un nombre de particules corrélées et diverge elle aussi à la transition. De plus, la transition s'accompagne d'un ralentissement critique, au sens où le temps de relaxation de ces fluctuations diverge lui aussi. Il est relié à la longueur de corrélation par la relation

$$\tau \propto \xi^z \quad (3.25)$$

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

où  $z$  est appelé exposant dynamique.

**Définitions** Dans le cas de la transition de blocage, ces corrélations spatiales n'ont aucun comportement particulier, malgré l'existence d'un ralentissement de la dynamique qui s'apparente au ralentissement critique évoqué à l'instant. Pourtant, l'intuition physique ainsi que l'existence de la relation 3.25 suggère qu'à ce ralentissement doit correspondre des objets spatialement étendus. Pour résoudre cet apparent paradoxe, plusieurs auteurs [60, 49, 50] ont suggérés que la longueur de corrélation en question n'est pas structurelle mais *dynamique*. L'idée sous-jacente est qu'à mesure que la densité augmente, les mouvements individuels deviennent de plus en plus difficiles, et les particules doivent coopérer sur des distances de plus en plus grandes pour pouvoir se réarranger. Ces réarrangements collectifs doivent se traduire non plus par l'hétérogénéité du champs de densité comme dans la transition classique évoquée plus haut, mais par l'hétérogénéité de sa dynamique, puisqu'il existe à un instant donné des zones plus mobiles que d'autres. Cette notion de mobilité est capturée par la relaxation locale du champ de densité, dont la fonction  $Q_a$  introduite au chapitre précédent est l'intégrale spatiale. Pour caractériser son hétérogénéité, on peut suivre pas à pas la construction précédente en remplaçant les fluctuations de densité par les fluctuations de cette fonction de relaxation locale. En particulier, si on définit le champ instantané de relaxation local

$$Q_a^t(\vec{r}, \tau) \equiv \frac{1}{N} \sum_i \delta(\vec{r}_i(t) - \vec{r}) \exp\left(-\frac{\|\vec{r}_i(t + \tau) - \vec{r}_i(t)\|^2}{2a^2}\right), \quad (3.26)$$

l'équivalent de la fonction de corrélation statique 3.20 devient une fonction de corrélation dynamique

$$G_{4,a}(\vec{r}, \tau) \equiv \int d\vec{r}' \langle \delta Q_a^t(\vec{r} + \vec{r}', \tau) \delta Q_a^t(\vec{r}', \tau) \rangle_t \quad (3.27)$$

et l'équivalent de la susceptibilité 3.22 devient une susceptibilité dynamique



$$\chi_4(a, \tau) \equiv \int d\vec{r} G_{4,a}(\vec{r}, \tau) \quad (3.28)$$

De plus, on a les relations

$$Q_a(\tau) = \left\langle \int d\vec{r} Q_a^t(\vec{r}, \tau) \right\rangle_t \quad (3.29)$$

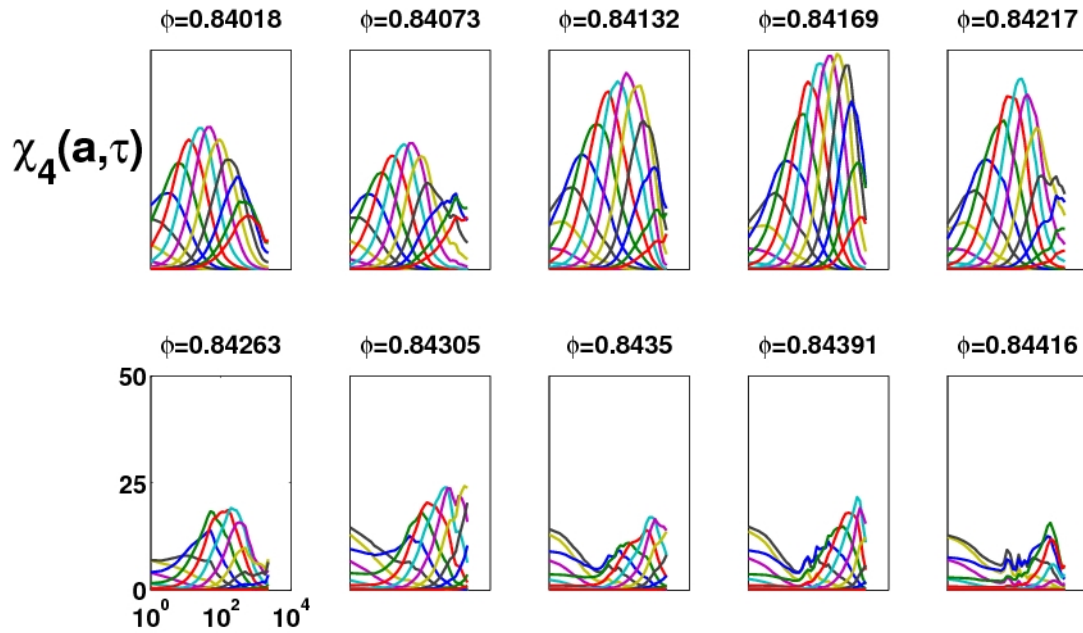
et de manière similaire à 3.23

$$\chi_4(a, \tau) = N \text{Var} \left( \int d\vec{r} Q_a^t(\vec{r}, \tau) \right)_t = N \text{Var} \left( \frac{1}{N} \sum_i e^{-\frac{\|\vec{r}_i(t+\tau) - \vec{r}_i(t)\|^2}{2a^2}} \right)_t \quad (3.30)$$

Dans ce cas, la susceptibilité dynamique peut être interprétée comme un nombre de particules dynamiquement corrélées et constitue une bonne mesure de l'hétérogénéité dynamique du système.

**Résultats** C'est à cette susceptibilité dynamique que nous allons nous intéresser dans un premier temps. Nous l'avons évaluée en utilisant la formule 3.30 pour les valeurs de  $\phi$  que nous avons étudiées. Elle est représentée sur la figure 3.32 pour ces fractions surfaciques en fonction du retard  $\tau$  et de la sonde  $a$ .

Considérons d'abord cette fonction à une valeur de  $\phi$  donnée et pour une valeur particulière de la sonde  $a$ . Comme l'indique la formule 3.30, cette susceptibilité peut être vue comme la variance du champ de relaxation local. Au petit  $\tau$ , aucune particule n'a relaxé, et les valeurs du champ en question sont toutes proches de un. La variance de ce champ est donc proche de zéro. De même, aux grandes valeurs de  $\tau$ , presque toutes les particules ont relaxé, et donc les valeurs du champ sont toutes proches de zéro et sa variance est encore presque nulle. Cette fonction a donc naturellement un maximum pour une certaine valeur intermédiaire  $\tilde{\tau}_\phi^*(a)$ . Le fait plus remarquable est que pour chaque valeur de  $\phi$ , elle présente un maximum global, et que le comportement de ce maximum avec la fraction surfacique n'est pas simple. Nous allons dans la suite exploiter le résultat de scaling obtenu dans le chapitre précédent pour obtenir une prescription sur les échelles adaptées à



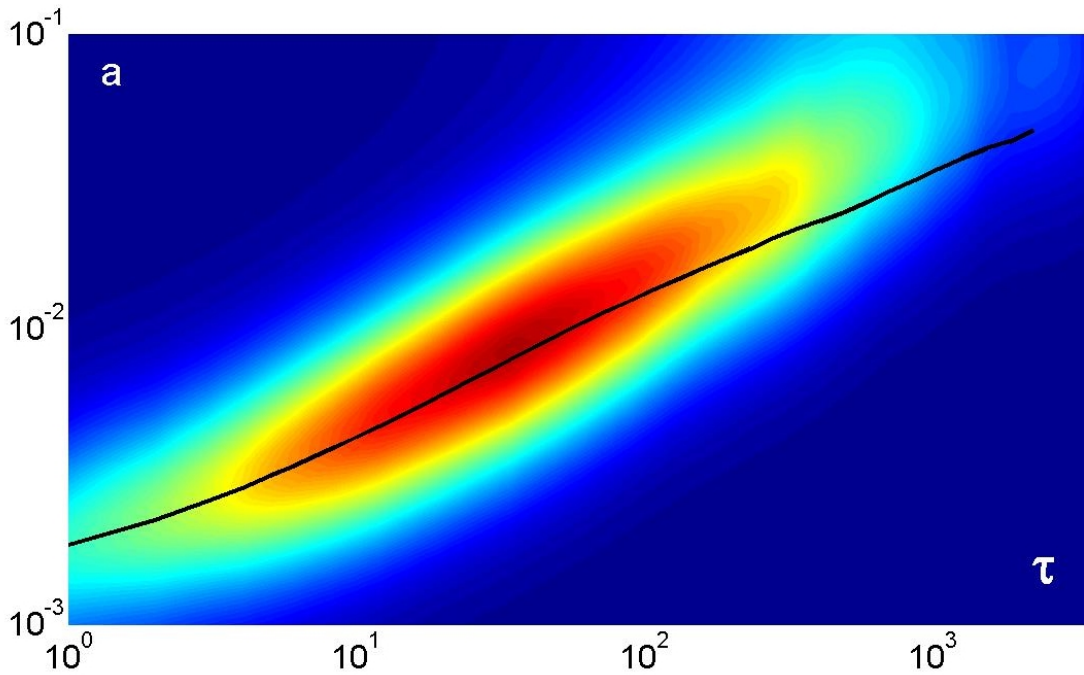
**FIG. 3.32:** Susceptibilité dynamique  $\chi_4(a, \tau)$  en fonction du retard  $\tau$  pour différentes valeurs de la fraction surfacique et des valeurs de  $a$  s'étalant de 0,001 à 0,024. Les maxima de la susceptibilité apparaissent à des temps d'autant plus grand que la valeur de la sonde  $a$  est grande, puisque les temps de corrélation grandissent avec  $a$ .

la description de cette fonction de manière à en extraire les caractéristiques principales.

### *Exploitation du scaling et normalisation*

**Exploitation du scaling** Comme nous l'avons vu, la fonction de corrélation  $Q_a$  est dans une bonne approximation une simple fonction de forme de la variable  $\frac{a}{\zeta_\phi}$ . Or la susceptibilité  $\chi_4$  dépend des mêmes variables. Il est donc naturel de se poser la question de la pertinence de sa représentation dans cet axe adimensionné. Du point de vue de sa dépendance dans la sonde  $a$ , le raisonnement du paragraphe précédent est encore valable et elle admet aussi un maximum dans cet axe pour des valeurs de  $\tau$  et de  $\phi$  données. Cependant,

comme nous l'avons fait remarquer, la valeur de ce maximum a une dépendance compliquée en  $\tau$  et  $\phi$ . On ne s'attend donc pas à pouvoir résumer l'information contenue dans  $\chi_4$  dans une simple fonction de forme. Nous l'avons représenté en fonction de ses deux variables  $a$  et  $\tau$  en code couleur pour  $\phi = 0.84018$  sur la figure 3.33, sur laquelle nous avons reporté la fonction  $\zeta_\phi(\tau)$ .



**FIG. 3.33:** Susceptibilité dynamique en fonction de  $a$  et de  $\tau$  en échelles logarithmiques pour  $\phi = 0.84018$ . La ligne noire correspond à  $\zeta_\phi(\tau)$

On observe que cette fonction reproduit approximativement le lieu de ses maxima. Nous avons donc représenté sur la figure 3.34 la susceptibilité dans l'axe  $\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}$  en la divisant par la valeur  $h_\phi(\tau)$  de son maximum en  $a$ . On observe que cette représentation révèle une fois encore l'existence d'une fonction de forme, qui s'avère ne pas dépendre de la fraction surfacique, et qui permet de simplifier significativement la description de la susceptibilité dynamique. On peut en effet écrire

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

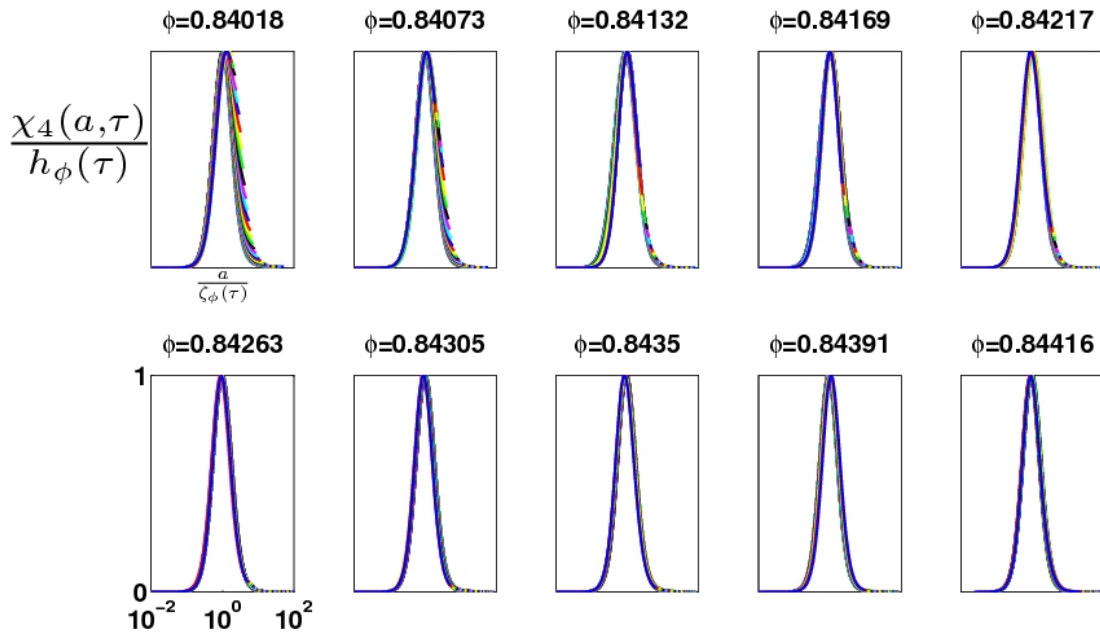
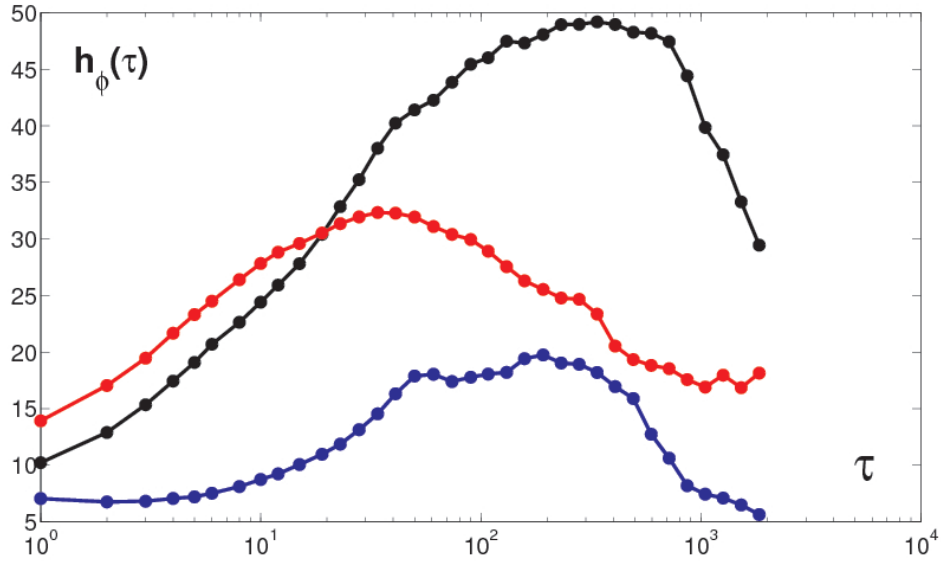


FIG. 3.34: Susceptibilité dynamique normalisée en fonction de la variable  $\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}$  pour toutes les valeurs de  $\tau$  et les fractions surfaciques étudiées.

$$\chi_4(a, \tau) = h_\phi(\tau) \tilde{\chi}_4\left(\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}\right) \quad (3.31)$$

où la fonction  $\tilde{\chi}_4$  ne dépend d'aucun paramètre. Cette propriété remarquable constitue une prescription sur l'échelle de longueur à laquelle sonder les corrélations dynamiques quand on les mesure à l'échelle  $\tau$ . Ainsi toute l'information est contenue dans la fonction  $h_\phi(\tau)$  que nous avons représentée sur la figure 3.35 en fonction de  $\tau$  pour trois valeurs représentatives de  $\phi$ .

D'abord, on observe que l'amplitude  $h_\phi(\tau)$  prend des valeurs significativement différentes de l'unité. Ceci confirme le caractère hétérogène de la dynamique dans notre système. Ensuite, à une valeur de la fraction surfacique donnée, cette amplitude admet un maximum en temps. Ceci nous indique qu'à l'échelle de temps pointée par ce maximum, l'hétérogénéité de la dynamique du système est maximale. Nous avons représenté sur la



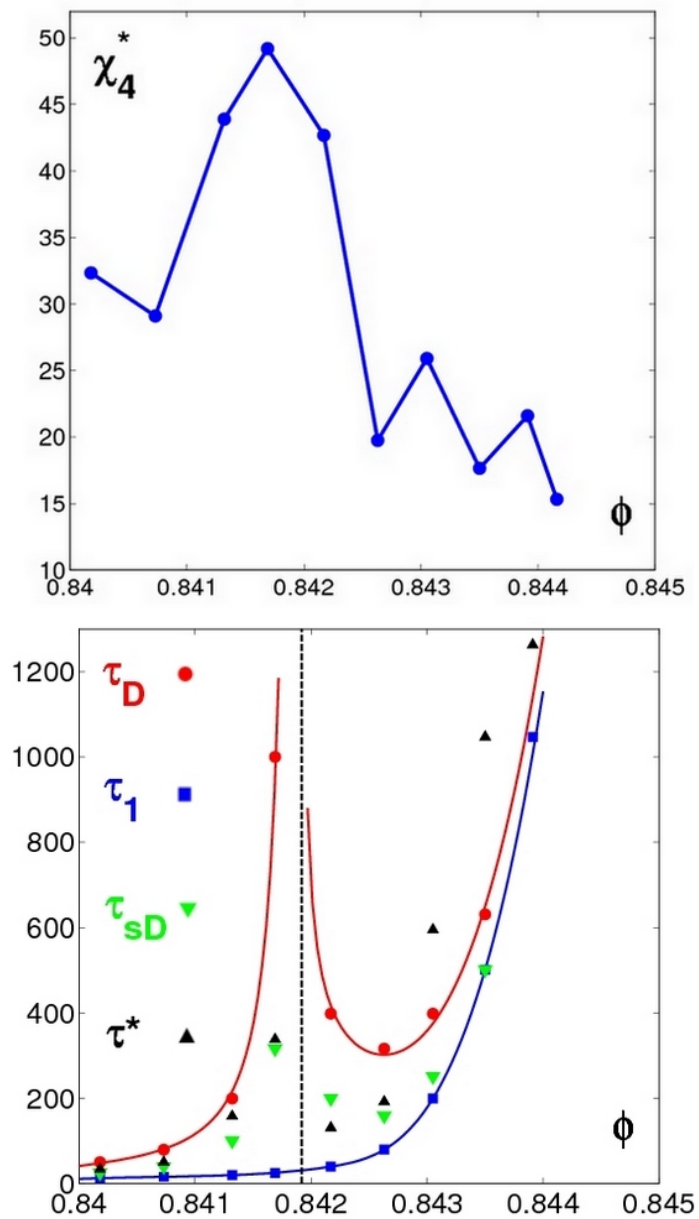
**FIG. 3.35:** Amplitude  $h_\phi(\tau)$  de la susceptibilité dynamique en fonction de  $\tau$  pour trois valeurs de la fraction surfacique :  $\phi = 0.84018 < \phi_J$  en rouge,  $\phi = 0.84169 \approx \phi_J$  en noir, et  $\phi = 0.84263 > \phi_J$  en bleu.

figure 3.36 la valeur  $\chi_4^*(\phi)$  de ce maximum en fonction de la fraction surfacique.

Il est remarquable que la susceptibilité dynamique exhibe un maximum absolu en fraction surfacique à la valeur de  $\phi$  la plus proche de  $\phi_J$ . Ceci semble confirmer l'image selon laquelle la forte augmentation des temps de relaxations  $\tau_{sD}$  et  $\tau_D$  définis plus haut trouve son origine dans la croissance d'une longueur de corrélation dynamique. En particulier, nous avons extrait l'échelle de temps  $\tau^*(\phi)$  à laquelle l'amplitude  $h_\phi(\tau)$  est maximum, et nous avons reporté sur la figure 3.36 toutes les échelles de temps définies jusqu'ici.

On remarque que l'échelle de temps à laquelle la dynamique est la plus hétérogène est très proche, au moins au voisinage de  $\phi_J$ , de l'échelle de temps à laquelle elle est la plus super-diffusive.

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.36:** En haut, valeurs de l'amplitude maximale  $\chi_4^*(\phi)$  de la susceptibilité dynamique en fonction de la fraction surfacique. En bas, échelles de temps caractéristiques de la dynamique en fonction de la fraction surfacique.

*Analyse de convergence de l'estimateur par la méthode du "Jackknife"* Comme nous l'avons dit, nous avons estimé la susceptibilité dynamique de notre système en utilisant la formule 3.30, donc en calculant une variance. Or notre statistique est réalisée sur un échantillon fini de la dynamique du système, et cet estimateur est donc sujet aux biais typiques d'une variance. Il risque en particulier de sous-estimer la susceptibilité asymptotique de la dynamique. Or nous ne connaissons pas les propriétés de corrélation temporelle du signal, et sa richesse en termes d'évènements peut être insuffisante pour obtenir une convergence satisfaisante. La question qui se pose précisément est la suivante. A mesure que la fraction surfacique augmente, la dynamique du système ralentit, comme le témoigne l'analyse des chapitres précédents. On s'attend donc à ce que les évènements qui relaxent la densité soient de plus en plus rares. On aimerait donc s'assurer que le caractère non monotone de  $\chi_4^*$  avec la fraction surfacique n'ait pas pour origine un tel effet statistique. Pour mesurer l'amplitude de ce biais dans nos données, nous avons utilisé la méthode dite du "Jackknife". Cette méthode fut introduite en 1956 par Quenouille [130], et consiste à corriger l'estimateur de la variance en mesurant les fluctuations de la moyenne empirique nécessaire à son calcul. En effet, si on définit, pour une observable  $O$  d'espérance  $\langle O \rangle$  et de variance  $\sigma_O^2$  dont on fait  $N$  observations  $O_i$ , sa moyenne empirique et l'estimateur de sa variance par

$$\bar{O} \equiv \frac{1}{N} \sum_1^N O_i \quad (3.32)$$

$$\hat{\sigma}_O^2 \equiv \frac{1}{N-1} \sum_1^N (O_i - \bar{O})^2 \quad (3.33)$$

On a alors, en suivant [131],

$$\langle \bar{O} \rangle = \langle O \rangle \quad (3.34)$$

$$\bar{O} = \langle O \rangle \pm \sigma_{\bar{O}} \quad (3.35)$$

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

et

$$\sigma_O^2 = \widehat{\sigma}_O^2 + \sigma_{\bar{O}}^2 \quad (3.36)$$

où  $\sigma_{\bar{O}}$  est l'écart-type de la moyenne empirique. Lorsque les observations  $O_i$  sont effectuées séquentiellement dans le temps, cette quantité est sensible à la corrélation temporelle du signal. On peut obtenir une estimation de ce terme en découpant la série temporelle en  $N_b$  tranches de taille  $t_b$ , tel que  $N = t_b N_b$ , et en calculant la moyenne des observations sur chaque tranche. Il suffit ensuite de calculer l'estimateur de l'écart type de cette nouvelle variable moyennée pour estimer  $\sigma_{\bar{O}}$ . Une technique alternative, qui est au coeur de la méthode du "Jackknife", consiste à réaliser ces moyennes partielles non pas sur les blocs eux-mêmes, mais sur leur complémentaire dans la série. On définit les variables moyennées  $\bar{O}_b^J$

$$S_b \equiv \{O_{bt_b+1}, \dots, O_{(b+1)t_b}\}, b = \{0, \dots, N_b - 1\} \quad (3.37)$$

$$\bar{O}_b^J \equiv \frac{1}{N - t_b} \sum_{i \notin S_b} O_i \quad (3.38)$$

et la variance de ces nouvelles variables, appelé le biais Jackknife

$$\sigma_{\bar{O}^J}^2(t_b) \equiv \frac{1}{N_b - 1} \sum_{b=1}^{N_b} (\bar{O}_b^J - \bar{O})^2 \quad (3.39)$$

alors on peut montrer [132, 133] que

$$\sigma_{\bar{O}}^2(t_b) = \frac{(N_b - 1)^2}{N_b} \sigma_{\bar{O}^J}^2(t_b) \quad (3.40)$$

converge vers  $\sigma_O^2$  et que l'estimateur corrigé

$$\sigma_O^2(t_b) = \widehat{\sigma}_O^2 + \sigma_{\bar{O}}^2(t_b) \quad (3.41)$$

converge vers la variance de l'observable  $O$  quand la taille  $t_b$  des blocs est grand devant le temps de corrélation du signal.



CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

Dans le cas qui nous intéresse, l'observable dont nous obtenons des réalisations est la quantité

$$O_t^X(\tau) = \frac{1}{N} \sum_i e^{-\frac{\|\bar{r}_i(t+\tau) - \bar{r}_i(t)\|^2}{2a^2}} \quad (3.42)$$

dont la susceptibilité dynamique constitue la variance. Nous avons étudié la convergence de l'estimateur 3.33 en étudiant la correction 3.40 en fonction de la taille des blocs. Pour simplifier cette analyse, nous avons exploité la relation 3.31 et nous nous sommes limités à l'étude de ces corrections pour des valeurs de  $a$  et de  $\tau$  vérifiant  $a = \zeta_\phi(\tau)$ , c'est à dire pour la fonction  $h_\phi(\tau)$ . On définit donc

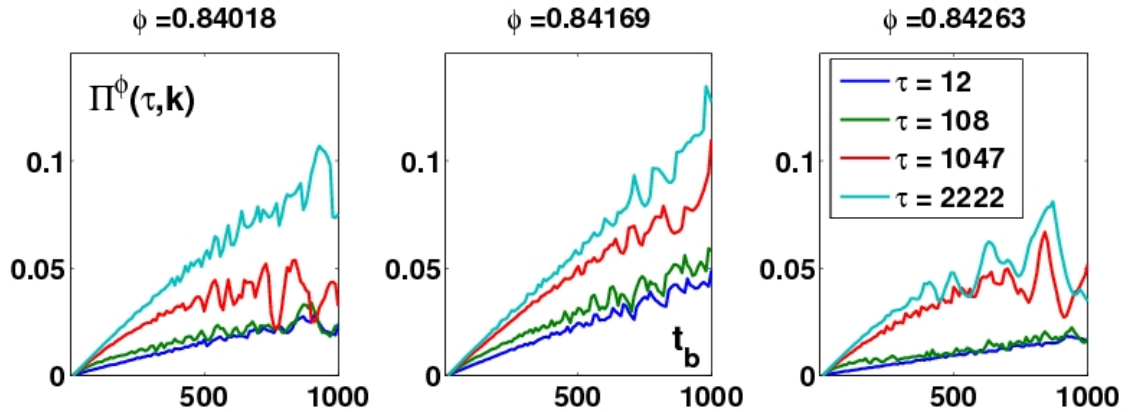
$$h_\phi^J(\tau, t_b) \equiv \sigma_{O^X(\tau)}^2(t_b) = \hat{\sigma}_{O^X(\tau)}^2 + \sigma_{O^X(\tau)}^2(t_b) \quad (3.43)$$

qui est l'estimateur corrigé pour cette fonction. Nous avons reporté sur la figure 3.37 la correction relative

$$\Pi^\phi(\tau, t_b) = \frac{h_\phi^J(\tau, t_b) - h_\phi^J(\tau, 1)}{h_\phi^J(\tau, 1)} \quad (3.44)$$

qui exprime la fraction à ajouter à la correction pour une taille de bloc unitaire quand celle-ci vaut  $t_b$ , pour trois valeurs de  $\phi$  et quatre valeurs de  $\tau$  en fonction de la taille  $t_b$  des blocs.

On observe d'abord qu'à toutes les fractions surfaciques, la correction est d'autant plus grande que  $\tau$  est grand, ce qui se comprend bien puisque plus  $\tau$  est grand, plus les événements sont intégrés et moins ils sont nombreux. Ensuite, pour  $\phi = 0.84018 < \phi_J$ , et les trois valeurs de  $\tau$  les plus petites, la convergence semble atteinte à une valeur intermédiaire de  $t_b$ , malgré le caractère bruité du signal. Pour  $\phi = 0.84263 > \phi_J$ , la convergence semble cette fois atteinte pour toutes les valeurs de  $\tau$  à une valeur intermédiaire de  $t_b$ . Les fluctuations deviennent cependant plus importantes que dans le cas précédent aux grandes valeurs de  $t_b$ . Par contre, à  $\phi = 0.84169 \approx \phi_J$ , la convergence de la correction n'est jamais atteinte sur la gamme de  $t_b$  étudiée quelque soit la valeur de  $\tau$ , et est donc plus lente.



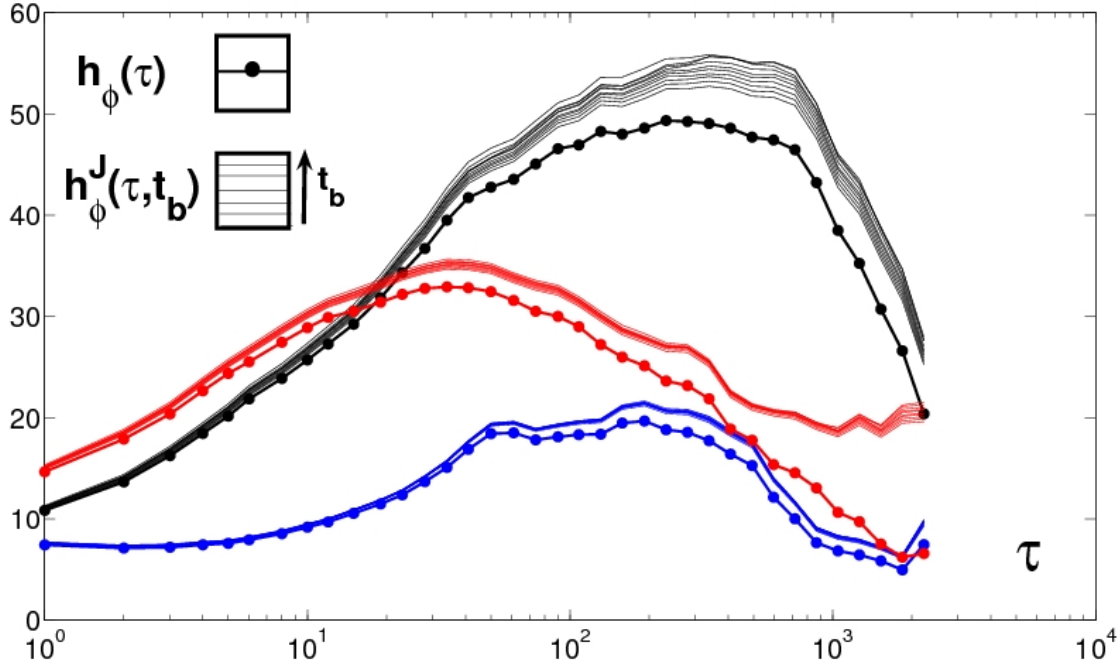
**FIG. 3.37:** Correction relative Jackknife  $\Pi^\phi(\tau, k)$  à la susceptibilité dynamique en fonction de la taille de la boîte  $t_b$  pour trois valeurs de  $\phi$  et quatre valeurs de  $\tau$ .

Ces tendances ont été confirmées par différentes méthodes d'extraction des paramètres de ces courbes à toutes les valeurs de  $\phi$  étudiées. Nous avons représenté sur la figure 3.38 les valeurs de  $h_\phi(\tau)$  et de  $h_\phi^J(\tau, t_b)$  en fonction de  $\tau$  pour des tailles de bloc s'étalant de 1 à 1000 et pour ces trois valeurs de la fraction surfacique.

On observe que les corrections à la fonction  $h_\phi$  sont petites, mais d'autant plus grandes que  $h_\phi$  est grand. Leur amplitude ainsi que l'état de convergence de ces corrections indiquent donc que les petites valeurs du maximum de la susceptibilité dynamique aux grandes fractions surfaciques ne sont pas dues à un effet statistique.

### *Au delà de $\chi_4$ : longueur de corrélation et scaling critique*

**Motivations** La susceptibilité dynamique  $\chi_4$  nous renseigne sur le caractère collectif de la dynamique, et révèle dans notre système l'existence d'un volume de corrélation dynamique qui devient grand au voisinage de la transition de rigidité  $\phi_J$ . Cependant, cette susceptibilité est une quantité intégrée sur l'espace, et elle ne nous donne pas directement accès à une longueur de corrélation. Or il n'y a pas de relation établie entre ce volume et la longueur associée, et cette relation peut être non triviale si la géométrie des objets



**FIG. 3.38:** Valeurs de l'estimateur Jackknife  $h_\phi^J(\tau, t_b)$  en fonction de  $\tau$  dans un axe logarithmique pour dix valeurs de  $t_b$  linéairement réparties entre 1 et 1000 et pour trois valeurs de la fraction surfacique :  $\phi = 0.84018 < \phi_J$  en rouge,  $\phi = 0.84169 \approx \phi_J$  en noir, et  $\phi = 0.84263 > \phi_J$  en bleu. Nous avons reporté pour comparaison les fonctions  $h_\phi$  correspondantes.

qui pilotent la dynamique est compliquée, comme au voisinage d'un point critique. De plus, elle mélange différentes contributions de la fonction de corrélation à quatre points  $G_{4,a}(r, \tau)$ . En particulier, nous aimerions nous assurer que les valeurs obtenues pour  $\chi_4$  ne sont pas dominées par le comportement de  $G_{4,a}(r, \tau)$  en  $r = 0^+$ , qui pourrait peser significativement dans l'intégrale 3.28 sans pour autant refléter de corrélations dynamiques étendues. D'autre part, nous aimerions connaître la forme de la fonction  $G_{4,a}(r, \tau)$ . Plus précisément, nous aimerions comparer sa variation spatiale à la forme 3.21 obtenue dans le cas classique, où celle-ci est encodée dans une fonction de scaling de la variable  $\frac{r}{\xi}$ .

**Résultats** Le calcul de la fonction  $G_{4,a}(r, \tau)$  est très lourd, et l'exploration des paramètres  $a$  et  $\tau$  est impraticable. Nous avons donc choisi de calculer cette fonction en  $\tau = \tau^*(\phi)$  et  $a = \zeta(\tau^*(\phi))$  pour les valeurs de  $\phi$  étudiées. Nous noterons dans la suite

$$G_4^*(r, \phi) \equiv G_{4,\zeta(\tau^*(\phi))}(r, \tau^*(\phi)) \quad (3.45)$$

Nous avons de plus échantillonné la population de grains en ne retenant qu'un tiers d'entre eux pris au hasard dans l'assemblée. Nous avons de plus vérifié en ne retenant qu'un dixième des grains que les résultats obtenus ont les mêmes caractéristiques, et que la taille de l'échantillon, dans cette gamme d'échantillonnage, permet de réduire le niveau de bruit sur le signal obtenu. La fonction  $G_4^*(r, \phi)$  ainsi calculée a été reportée, avec un axe logarithmique, sur la figure 3.39 en fonction de  $r$  pour le trois densités  $\phi = 0.84018 < \phi_J$  en rouge,  $\phi = 0.84169 \approx \phi_J$  en noir, et  $\phi = 0.84263 > \phi_J$  en bleu.

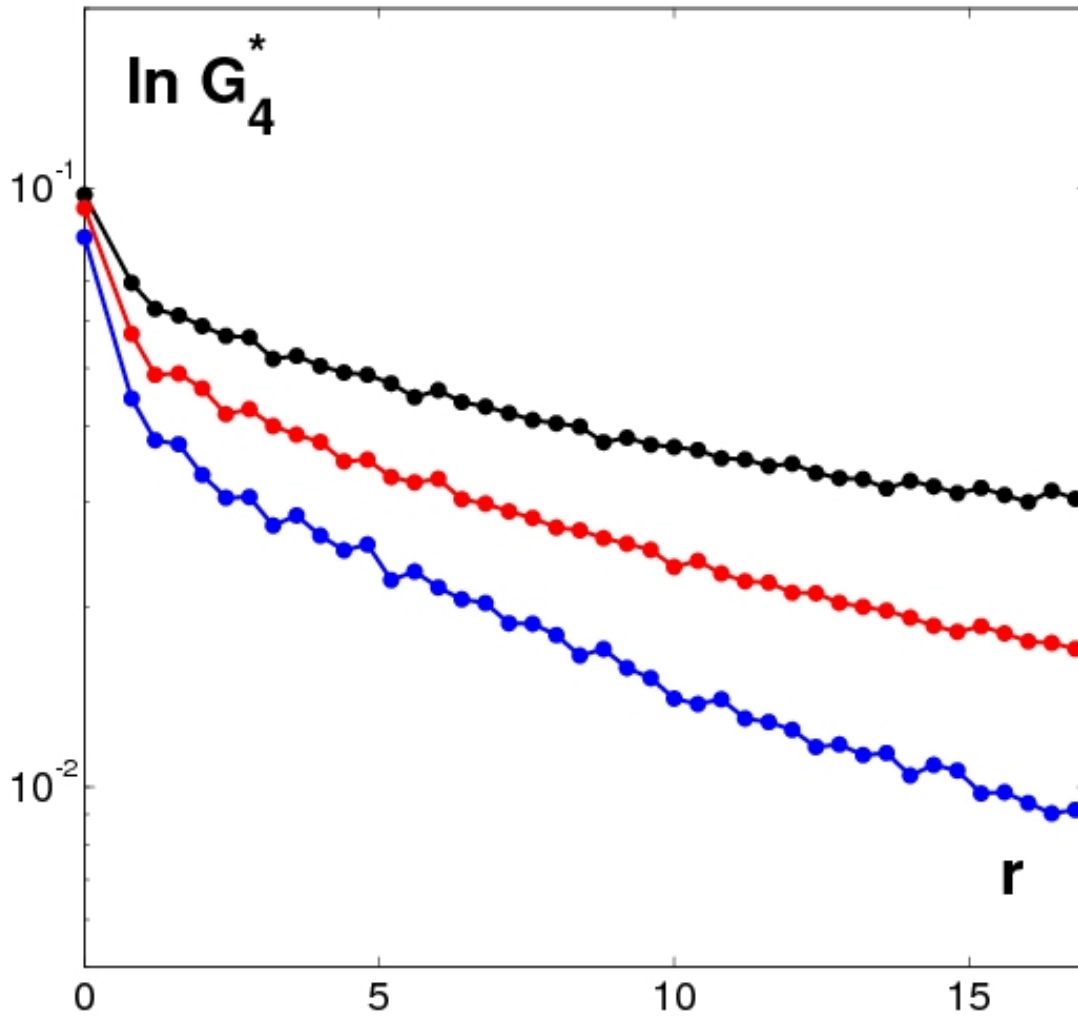
A ce stade, on peut faire deux remarques qualitatives. La première est que les valeurs de  $G_4^*(r, \phi)$  en  $r = 0^+$  varient peu avec  $\phi$  et ne gouvernent manifestement pas la dépendance en  $\phi$  de l'intégrale. La deuxième remarque est que la longueur caractéristique associée à ces courbes est sujette à des variations significatives au sens où à ce stade de l'analyse, elles semblent refléter les variations de la susceptibilité dynamique  $\chi^*$  reportées sur la figure 3.36.

**Analyse** Nous allons maintenant extraire les caractéristiques de ces fonctions de corrélation. Nous avons représenté en échelles logarithmiques  $-\log G_4^*(r, \phi)$  en fonction de  $r$  pour les trois fractions surfaciques précédentes sur la figure 3.40.

On observe que  $\log(-\log G_4^*(r, \phi)) = \eta \log r + K$  avec  $\eta \propto \frac{1}{2}$ . On a donc ajusté les données avec une fonction de la forme

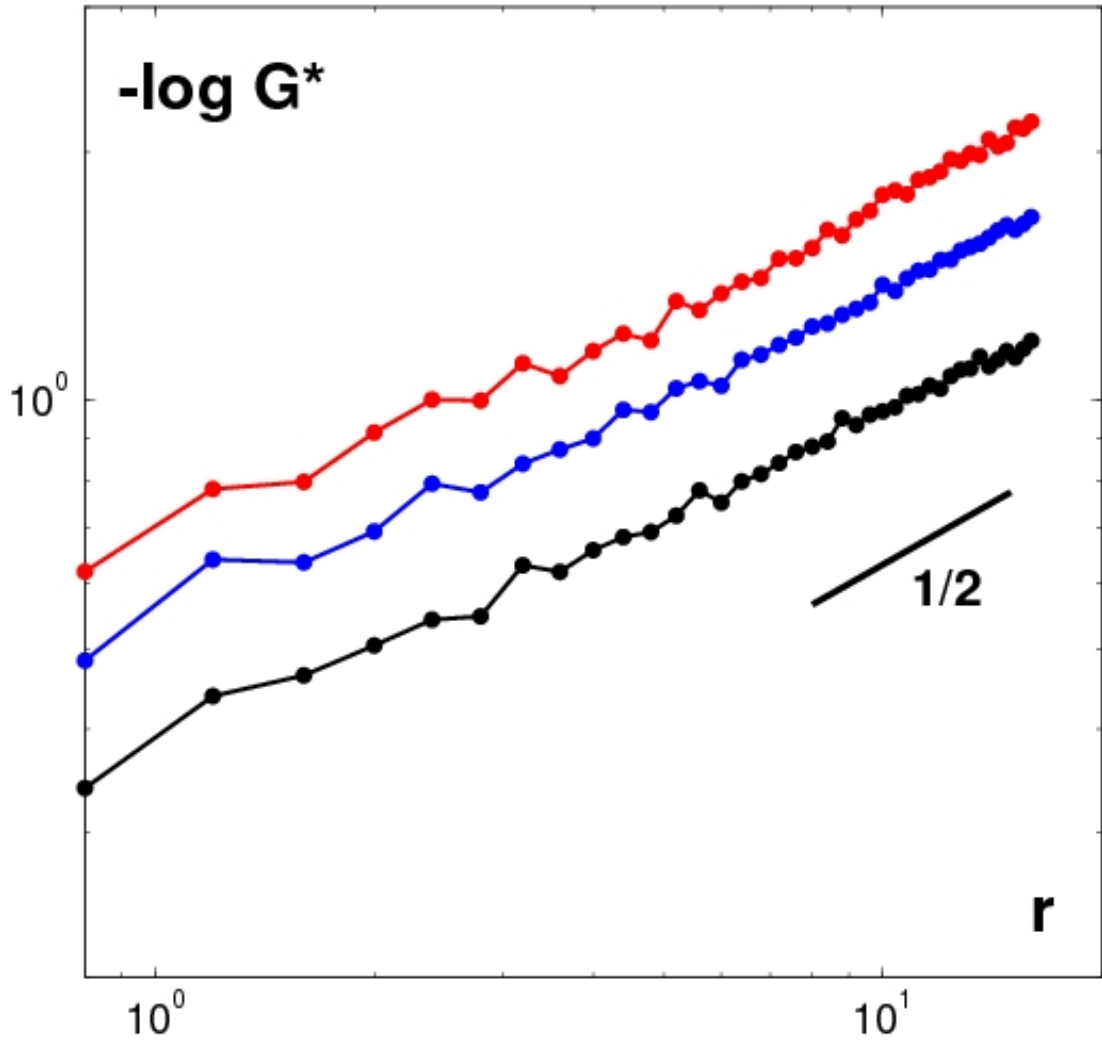
$$g(r) = \lambda_\phi e^{-\left(\frac{r}{\xi_4}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.46)$$

pour chaque densité. Ceci nous a permis d'extraire la longueur caractéristique  $\xi_4(\phi)$  mentionnée plus haut. Cette longueur est représentée sur la figure 3.41.



**FIG. 3.39:** Fonction de corrélation dynamique  $G_4^*(r, \phi)$  dans un axe logarithmique en fonction de  $r$  pour  $\phi = 0.84018 < \phi_J$  en rouge,  $\phi = 0.84169 \approx \phi_J$  en noir, et  $\phi = 0.84263 > \phi_J$  en bleu.

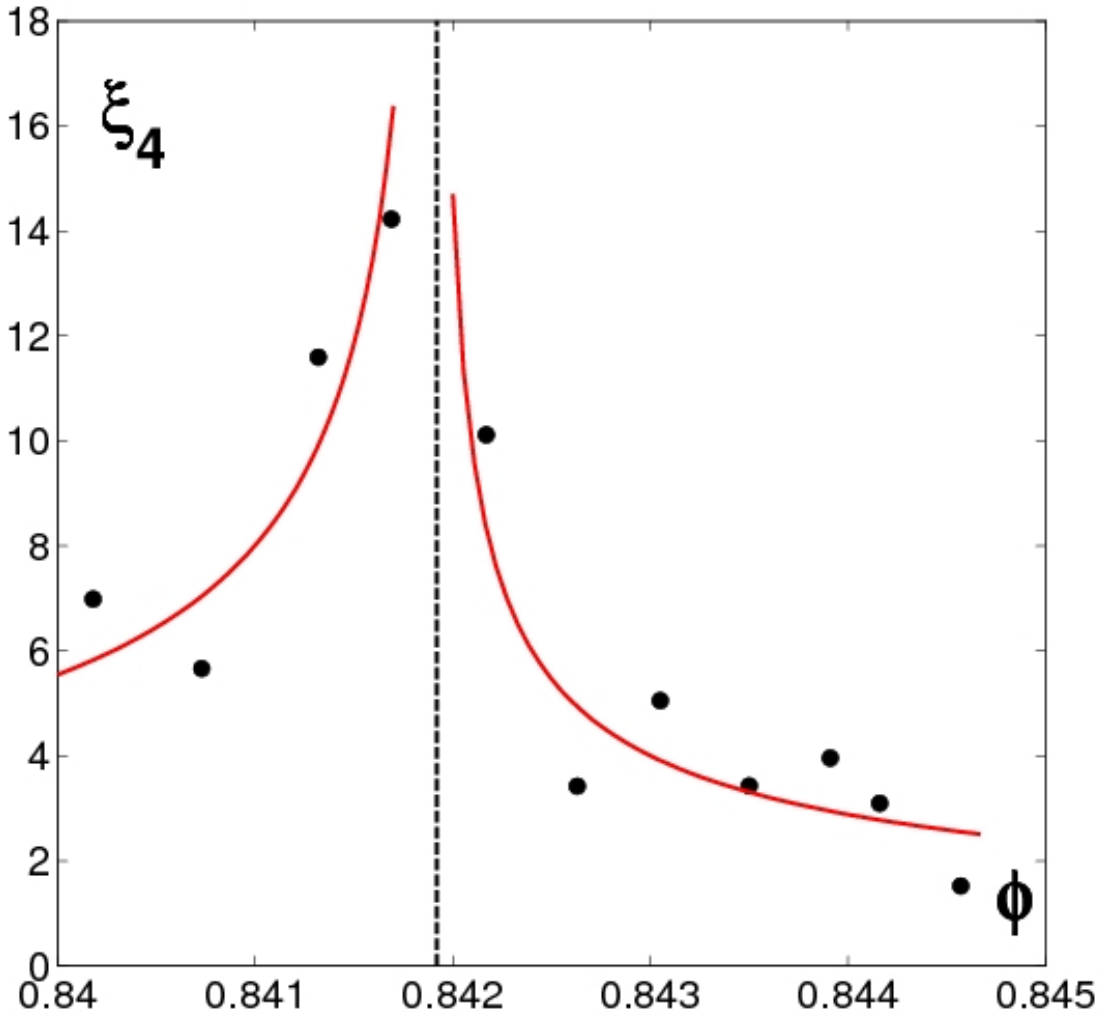
Nous avons reporté sur la figure la valeur de  $\phi_J$  en pointillés noirs. Malgré la faible amplitude de variation de la longueur  $\xi_4(\phi)$ , nous avons essayé d'ajuster cette fonction par une loi de puissance de la forme  $\frac{A\pm}{|\phi-\phi_J|^\mu}$  en laissant l'exposant  $\mu$  libre de changer à gauche et à droite de  $\phi_J$ . Nous avons cependant trouvé des valeurs proches de  $\frac{1}{2}$  de chaque côté. Nous avons donc reporté sur la figure le meilleur ajustement des points avec  $\mu = \frac{1}{2}$ .



**FIG. 3.40:**  $-\log G_4^*(r, \phi)$  en fonction de  $r$  pour  $\phi = 0.84018 < \phi_J$  en rouge,  $\phi = 0.84169 \approx \phi_J$  en noir, et  $\phi = 0.84263 > \phi_J$  en bleu en échelles logarithmiques.

Enfin, nous avons trouvé que la fonction de corrélation dynamique vérifie une propriété de scaling critique du type

$$G_4^*(\tau, \phi) = \frac{\lambda_\phi \mathcal{G}\left(\frac{r}{\xi_4}\right)}{r^\eta}, \mathcal{G}(u) = e^{-u^{\frac{1}{2}}}, \quad \eta \approx 0 \quad (3.47)$$



**FIG. 3.41:** Longueur caractéristique  $\xi_4$  de décroissance de la fonction de corrélation dynamique  $G_4^*$  en fonction de la fraction surfacique. La ligne pointillée noire marque la valeur  $\phi_J$  précédemment introduite, et les lignes rouges correspondent aux meilleurs ajustements du type  $\frac{A \pm}{|\phi - \phi_J|^2}$

Nous avons reporté sur la figure 3.42 la quantité  $\log \mathcal{G} \left( \frac{r}{\xi_4} \right)$  en fonction de  $\left( \frac{r}{\xi_4} \right)^{\frac{1}{2}}$  pour toutes les densités étudiées.

On observe que les points se disposent tous sur une même droite, ce qui montre la

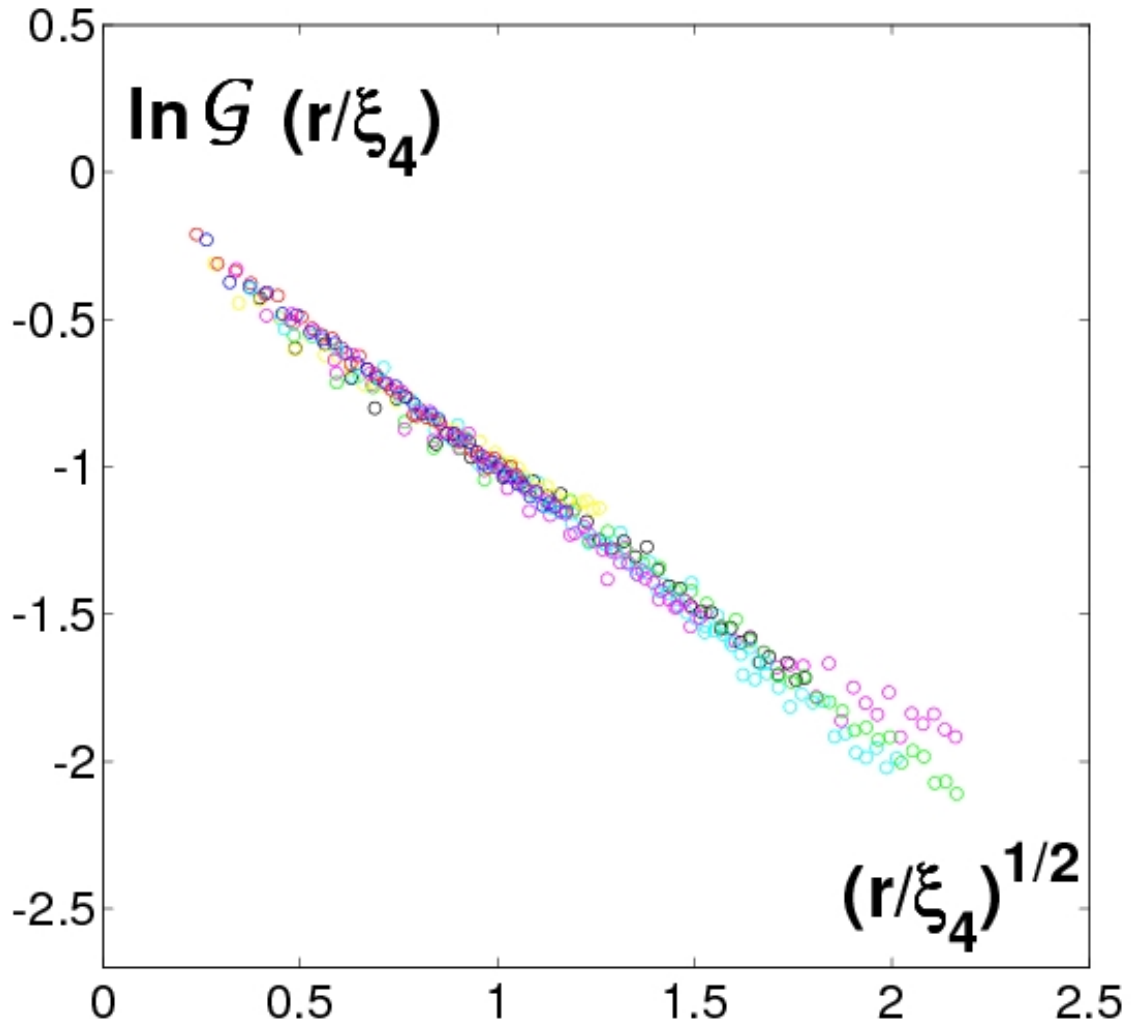


FIG. 3.42:  $\log \mathcal{G} \left( \frac{r}{\xi_4} \right)$  en fonction de  $\left( \frac{r}{\xi_4} \right)^{\frac{1}{2}}$  pour toutes les valeurs de  $\phi$  étudiées.

validité de la relation de scaling 3.47, qui s'apparente à la relation classique 3.21. L'exposant anormal  $\eta$  est trop petit pour pouvoir être mesuré. Cette analyse confirme le fait que la longueur caractéristique de décroissance de la fonction de corrélation dynamique a un comportement qualitativement semblable au maximum de la susceptibilité dynamique dans sa variation en  $\phi$ , exhibant en particulier un maximum au voisinage de la fraction surfacique  $\phi_J$ . Les variations de la susceptibilité dynamique sont donc bien associées aux



### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

variations de cette longueur et non au comportement de  $G_4^*$  au voisinage de zéro.

### 3.3.2 Relation de fluctuation dynamique

Nous allons dans ce chapitre présenter un résultat important de ce travail qui concerne le lien entre les fluctuations spontanées de la dynamique à sa réponse à une variation de densité. Après avoir rappelé l'intérêt d'une telle relation dans le cas des systèmes thermiques, nous la dériverons dans ce cas particulier et discuterons de sa validité a priori dans notre système. Nous confronterons ensuite ses différentes dépendances à leur réalisations expérimentales, ce qui nous permettra de conclure qu'elle permet de préciser le statut des paramètres du problème, et qu'elle renforce la pertinence de notre analyse des temps caractéristiques qui y apparaissent.

#### *Contexte et dérivation de l'inégalité*

**Contexte** Le scénario de la transition de Jamming dont nous avons esquissé les caractéristiques au chapitre précédent, à savoir l'apparition de régions dynamiquement corrélées donnant lieu à la croissance d'une longueur de coopération, a initialement été proposé pour expliquer le ralentissement de la dynamique d'un liquide au voisinage de sa transition vitreuse. Comme nous l'avons vu, le test de ce scénario nécessite de sonder les fluctuations spontanées de la dynamique du système pour en extraire leur taille caractéristique. Dans le cas des verres, la mise en oeuvre de ce test direct est difficile avec les techniques expérimentales actuelles, puisqu'il faudrait pouvoir mesurer les trajectoires d'un nombre extensif de molécules. Les techniques de diffusion couramment utilisées donnent au mieux accès au facteur de structure dynamique, qui est une quantité moyennée sur l'espace et le temps, bien qu'il ait été récemment réalisé [2] des mesures résolues en temps donnant accès à la susceptibilité dynamique dans un gel colloïdal. Pour remédier à ce problème, Berthier et al. [65] ont dérivé une borne inférieure à la susceptibilité dynamique introduite plus haut qui est accessible expérimentalement de manière assez simple. Cette borne est en effet liée à la réponse du facteur de structure dynamique à la variation d'un paramètre, comme la température ou la densité. La mesure d'une borne

inférieure pour le volume de corrélation dynamique a été récemment réalisée dans le glycérol par l'équipe Ladiou et al [134] avec succès, puisqu'il ont observé la croissance de cette borne à l'approche de la transition vitreuse. Plusieurs questions se posent cependant, notamment celle de la qualité de la borne, et sous quelles conditions celle-ci est saturée, ou encore est-ce que les échelles caractéristiques pointées par cette borne sont les mêmes que celles que pointerait la susceptibilité dynamique elle-même. Dans notre système, on a accès aux deux membres de l'inégalité, et on peut envisager d'apporter des éléments de réponse à ces questions. Cependant, il nous faut d'abord comprendre quels sont les ingrédients nécessaires à sa validité, et dans quelle mesure ceux-ci sont réunis dans notre système.

**Dérivation à l'équilibre** Quand un système décrit par un hamiltonien  $\mathcal{H}(q_i, p_i)$ , où les  $q_i$  sont les positions généralisées et les  $p_i$  les impulsions généralisées des degrés de liberté du problème, et qu'il se trouve à l'équilibre thermodynamique à la température  $T$ , ses propriétés statistiques se déduisent de sa fonction de partition

$$Z(\beta) = \sum_{\{p_i, q_i\}} e^{-\beta \mathcal{H}(p_i, q_i)} = \sum_{\mathcal{C}} e^{-\beta E(\mathcal{C})} \quad (3.48)$$

où  $\beta \equiv \frac{1}{k_b T}$ ,  $k_b$  est la constante de Boltzmann, la première somme est entendue sur toutes les valeurs possibles des positions et impulsions, soit plus généralement toutes les configurations  $\mathcal{C}$  accessibles au système. Cette fonction normalise les poids de Boltzmann associés aux configurations du système, au sens où la probabilité d'observer ce système canonique dans une configuration  $\mathcal{C}$  d'énergie  $E(\mathcal{C})$  s'écrit

$$P(\mathcal{C}) = \frac{e^{-\beta E(\mathcal{C})}}{Z(\beta)} \quad (3.49)$$

Mais elle est aussi la fonctionnelle génératrice des moments de l'énergie. On en effet

$$\frac{\partial \log Z(\beta)}{\partial \beta} = \frac{1}{Z} \sum_{\mathcal{C}} E(\mathcal{C}) e^{-\beta E(\mathcal{C})} = -\langle E \rangle \quad (3.50)$$

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \log Z(\beta)}{\partial \beta^2} &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{Z} \sum_{\mathcal{C}} E(\mathcal{C}) e^{-\beta E(\mathcal{C})} \right) \\
 &= -\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{Z} \right) \sum_{\mathcal{C}} E(\mathcal{C}) e^{-\beta E(\mathcal{C})} + \frac{1}{Z(\beta)} \sum_{\mathcal{C}} E^2(\mathcal{C}) e^{-\beta E(\mathcal{C})} \\
 &= \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

où  $\langle \bullet \rangle$  désigne une moyenne thermique. En combinant 3.50 et 3.51, on obtient une relation entre la moyenne et la variance de l'énergie

$$\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = -\frac{\partial \langle E \rangle}{\partial \beta} \tag{3.52}$$

Cette relation est un exemple très simple d'une relation très générale, dite théorème de fluctuation/dissipation, qui relie la corrélation entre une observable  $A$  et une observable  $B$  à la réponse de l'observable  $A$  au paramètre énergétiquement conjugué à  $B$  [135]. Dans l'ensemble canonique, les fluctuations de densité  $\rho = \frac{n}{V}$  où  $n$  est le nombre de particules contenues dans un sous-volume  $\tilde{V}$  d'un système de  $N$  particules occupant le volume  $V$  vérifient dans la limite thermodynamique où  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ ,  $\frac{N}{V} = \text{cste} = \bar{\rho}$  la relation

$$\tilde{V} \langle (\rho - \bar{\rho})^2 \rangle = T \bar{\rho}^2 \chi_T \tag{3.53}$$

où

$$\chi_T \equiv -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \tag{3.54}$$

est la compressibilité isotherme du système. Pour dériver la relation qui nous intéresse, nous allons d'abord invoquer l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour obtenir une inégalité impliquant des fonctions de corrélation, puis nous utiliserons deux fois le théorème de fluctuation dissipation pour relier l'expression obtenue à la réponse de la dynamique à une variation de densité. On se place dans l'ensemble NPT, où la pression du système est imposée. On définit d'abord

$$C_a^t(\tau) = \int d\vec{r} Q_a^t(\vec{r}, \tau) \tag{3.55}$$

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

Cette définition intermédiaire, à comparer à l'équation 3.29, permet d'alléger les notations dans la suite. On a en particulier

$$Q_a(\tau) = \langle C_a^t(\tau) \rangle_t \quad (3.56)$$

On définit encore

$$\Sigma_{CC}^2 \equiv \langle C_a^t(\tau) C_a^t(\tau) \rangle_t^c = \frac{\chi_4}{N} \quad (3.57)$$

où la moyenne est connexe, c'est à dire qu'on a enlevé leur moyennes thermiques aux  $C_a^t(\tau)$  qui figurent entre les crochets. Ensuite, dans le même esprit que la relation 3.53, on définit les fluctuations de volume du système

$$\Sigma_{VV}^2 \equiv \langle V V \rangle_t^c \quad (3.58)$$

et enfin la corrélation entre la dynamique  $C_a^t(\tau)$  et le volume

$$\Sigma_{CV} \equiv \frac{\bar{\rho}}{N} \langle C_a^t(\tau) V \rangle_t^c \quad (3.59)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne pour ces variables

$$\Sigma_{CV}^2 \leq \Sigma_{VV}^2 \Sigma_{CC}^2 \quad (3.60)$$

Ensuite, le théorème de fluctuation dissipation donne

$$N \Sigma_{CV} = -k_b T \frac{\partial \langle C_a^t(\tau) \rangle}{\partial P} = -k_b T \left( \frac{\partial \log \rho}{\partial P} \right) \left( \frac{\partial Q_a(\tau)}{\partial \log \rho} \right) \quad (3.61)$$

ainsi que

$$\Sigma_{VV}^2 = -\frac{k_b T}{\bar{\rho}} \frac{\partial \log \rho}{\partial P} \quad (3.62)$$

En reportant 3.62 dans 3.61, on obtient

$$N \Sigma_{CV} = \bar{\rho} \Sigma_{VV}^2 \left( \frac{\partial Q_a(\tau)}{\partial \log \rho} \right) \quad (3.63)$$

On peut donc récrire 3.60 de manière plus simple

$$\chi_4 = N\Sigma_{CC}^2 \geq \frac{\bar{\rho}^2}{N}\Sigma_{VV}^2 \left( \frac{\partial Q_a(\tau)}{\partial \log \rho} \right)^2 \quad (3.64)$$

Enfin, en combinant 3.53 et 3.62, on remarque que

$$\frac{\bar{\rho}^2}{N}\Sigma_{VV}^2 = \frac{N \langle (\rho - \bar{\rho})^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} \equiv \frac{N \langle \delta \rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} \quad (3.65)$$

On obtient ainsi la relation cherchée

$$\chi_4(a, \tau) \geq \frac{N \langle \delta \rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} \left( \frac{\partial Q_a(\tau)}{\partial \log \rho} \right)^2 \quad (3.66)$$

**Validité de la relation** La dérivation qui précède a été faite dans le cadre de l'équilibre thermodynamique. On remarque cependant que le résultat obtenu ne dépend pas de la température du système, et que les quantités qui y apparaissent sont toutes mesurables dans notre système. On peut donc se poser la question des conditions de validité de cette relation. En fait, comme nous l'avons vu dans la première partie de ce travail, les relations de fluctuation dissipation que nous avons utilisées pour dériver l'inégalité 3.66 restent valables dans un système hors équilibre et stationnaire si la fonction de partition se factorise entre sous-systèmes [40, 39, 38]. Dans ce cas, la probabilité associée à une configuration fait apparaître un poids exponentiel "à la Boltzmann" où figure le paramètre intensif associé à la quantité conservée par la dynamique, et la fonction de partition est encore la fonctionnelle génératrice des moments de cette quantité. Dans le cas qui nous intéresse, le volume total du système est conservé. Il est donc possible que l'inégalité 3.66 associée à la densité soit encore valable, une condition suffisante étant la propriété de factorisation évoquée plus haut.

### ***Confrontation expérimentale : Fonctions de forme***

Comme nous l'avons vu dans les parties précédentes, le facteur de structure dynamique  $Q_a$  vérifie la relation de scaling 3.14, dont on peut tirer parti pour récrire la sus-

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

ceptibilité dynamique  $\chi_4$  sous la forme réduite 3.31. Nous récrivons ces relation ici pour la clarté de l'exposé.

$$Q_a^\phi(\tau) = \tilde{Q}\left(\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}\right) \quad (3.67)$$

$$\chi_4(a, \tau) = h_\phi(\tau) \tilde{\chi}_4\left(\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}\right) \quad (3.68)$$

On va utiliser ces relation pour découpler les dépendances aux différentes variables de l'inégalité 3.66. On peut en particulier écrire

$$\frac{\partial Q_a(\tau)}{\partial \log \rho} = \frac{\partial \tilde{Q}\left(\frac{a}{\zeta(\tau)}\right)}{\partial \log \rho} = -\left(\frac{\partial \log \zeta(\tau)}{\partial \log \rho}\right) \left(\frac{\partial \tilde{Q}\left(\frac{a}{\zeta(\tau)}\right)}{\partial \log \frac{a}{\zeta(\tau)}}\right) \quad (3.69)$$

En reportant cette formule ainsi que la relation 3.68 dans l'inégalité 3.66, on obtient

$$h_\phi(\tau) \tilde{\chi}_4\left(\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}\right) \geq \frac{N \langle \delta \rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{\partial \log \zeta_\phi(\tau)}{\partial \log \rho}\right)^2 \left(\frac{\partial \tilde{Q}\left(\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}\right)}{\partial \log \frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}}\right)^2 \quad (3.70)$$

Les fluctuations de densité correspondant au premier terme du membre de droite de l'inégalité précédente ont été mesurées indépendamment. Les autres termes doivent être exprimés dans notre paramètre de contrôle  $\phi$ , ce qui donne

$$h_\phi(\tau) \tilde{\chi}_4\left(\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}\right) \geq \frac{N \langle \delta \rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{\partial \log \phi}{\partial \log \rho}\right)^2 \left(\frac{\partial \log \zeta_\phi(\tau)}{\partial \log \phi}\right)^2 \left(\frac{\partial \tilde{Q}\left(\frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}\right)}{\partial \log \frac{a}{\zeta_\phi(\tau)}}\right)^2 \quad (3.71)$$

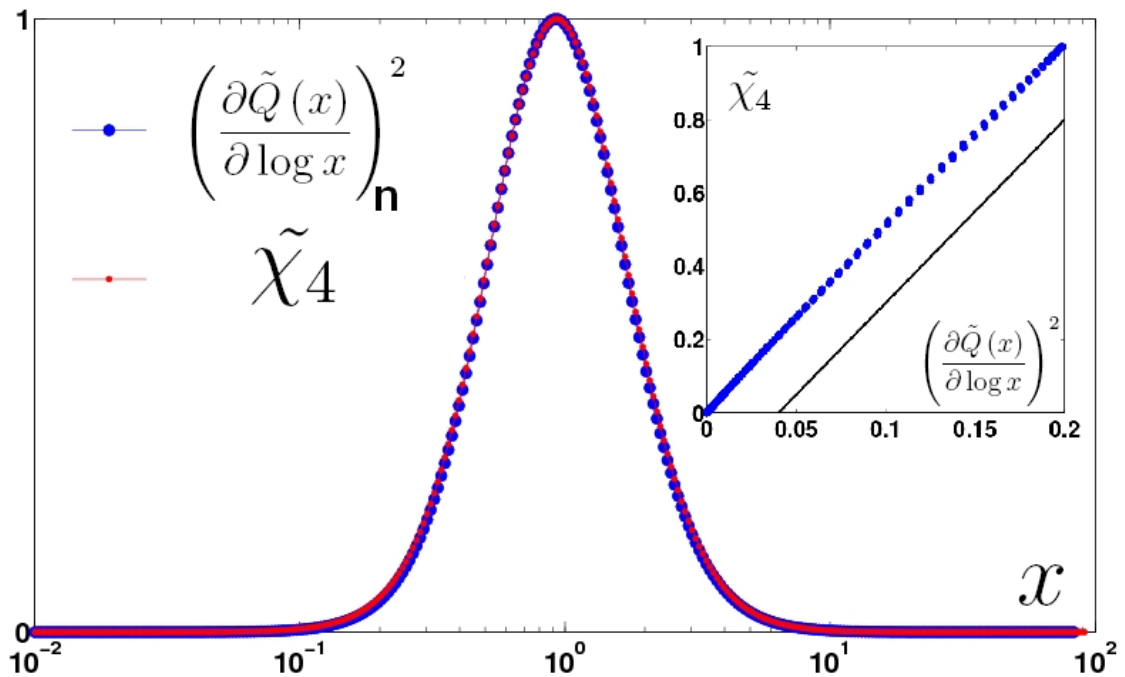
Les fonctions qui apparaissent de part et d'autre de l'inégalité sont des fonctions de trois variables :  $a$ ,  $\tau$ , et  $\phi$ . Cependant, ces dépendances apparaissent de manière factorisées. En effet, les dépendances en  $a$  sont contenues dans les fonctions de forme

$$\tilde{\chi}_4(x) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial \tilde{Q}(x)}{\partial \log x}\right)^2 \quad (3.72)$$

et les dépendances en  $\tau$  sont contenues dans les amplitudes

$$h_\phi(\tau) \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial \log \zeta_\phi(\tau)}{\partial \log \phi} \right)^2 \quad (3.73)$$

il est donc naturel de comparer deux à deux ces termes. Nous avons extrait les fonctions de forme 3.72 en moyennant  $\tilde{\chi}$  et  $\tilde{Q}$  sur les valeurs de  $\tau$  et de  $\phi$  étudiées. Nous les avons représentées sur la figure 3.43 en fonction de la variable spatiale scalée  $x$ . La partie associée à  $\tilde{Q}$  a été divisée par son maximum sur la figure principale, mais le graphe paramétrique de ces deux fonction est réalisé en insert sans normalisation.



**FIG. 3.43:** Fonctions de forme intervenant dans l'inégalité 3.71 en fonction de la variable spatiale. L'indice  $n$  rappelle la normalisation de la fonction par son maximum. En insert, on a représenté l'une en fonction de l'autre dans un graphe paramétrique. La courbe noire est une droite de pente 5.

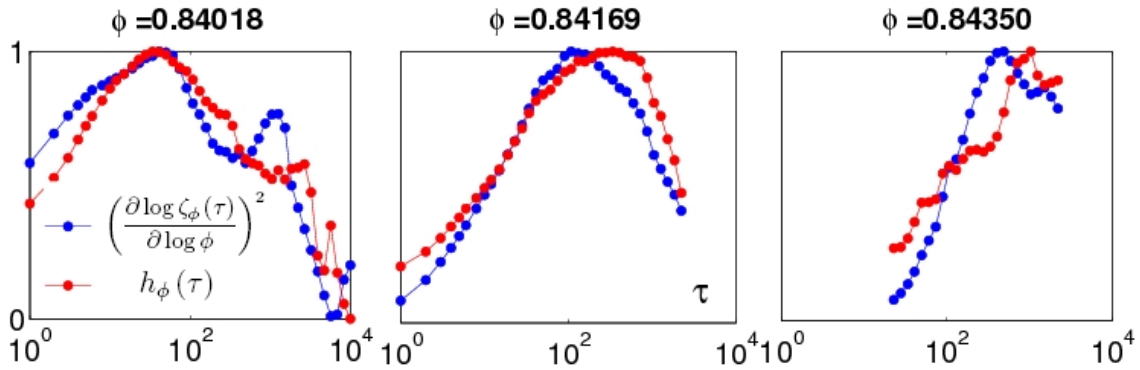
On observe un accord excellent entre ces fonctions de forme encodant la dépendance spatiale de l'inégalité 3.71. La valeur du maximum de la fonction  $\left( \frac{\partial \tilde{Q}(x)}{\partial \log x} \right)^2$  est très proche



de 0.2.

### *Confrontation expérimentale : Dépendance en temps et en densité*

**Dépendance en temps** Le calcul de la fonction  $\left(\frac{\partial \log \zeta_\phi(\tau)}{\partial \log \phi}\right)^2$  qui contient la dépendance temporelle de la borne inférieure dérivée plus haut nécessite quelques précautions. En effet, nous ne travaillons qu'avec dix valeurs de  $\phi$ . Nous avons décidé d'interpoler la fonction  $\zeta_\phi$  dans la direction  $\phi$  après l'avoir légèrement moyennée. Nous avons vérifié que cette procédure diminue le niveau de bruit mais n'altère pas les caractéristiques du signal jusqu'à  $\phi \approx 0.8435$  où la dérivation devient impossible. La figure 3.44 représente les fonctions  $h_\phi(\tau)$  et  $\left(\frac{\partial \log \zeta_\phi(\tau)}{\partial \log \phi}\right)^2$  pour trois valeurs représentatives de la fraction surfacique.



**FIG. 3.44:** Fonctions  $h_\phi(\tau)$  et  $\left(\frac{\partial \log \zeta_\phi(\tau)}{\partial \log \phi}\right)^2$  pour  $\phi = 0.84018$ ,  $\phi = 0.84169$  et  $\phi = 0.84350$ . Nous les avons normalisées par la valeur de leur maximum, de manière à pouvoir les comparer.

La première chose à remarquer est que la fonction  $\left(\frac{\partial \log \zeta_\phi(\tau)}{\partial \log \phi}\right)^2$  présente un maximum global dans la variable  $\tau$ . C'est en cherchant à comprendre l'origine de cette dépendance étonnante que nous avons découvert la présence de super-diffusion dans les courbes de diffusion et l'existence des temps caractéristiques  $\tau_{sD}$  et  $\tau_D$  qui lui sont associés. Ensuite, les maxima de ces deux fonctions sont atteints pour des valeurs de  $\tau$  très voisines. On a

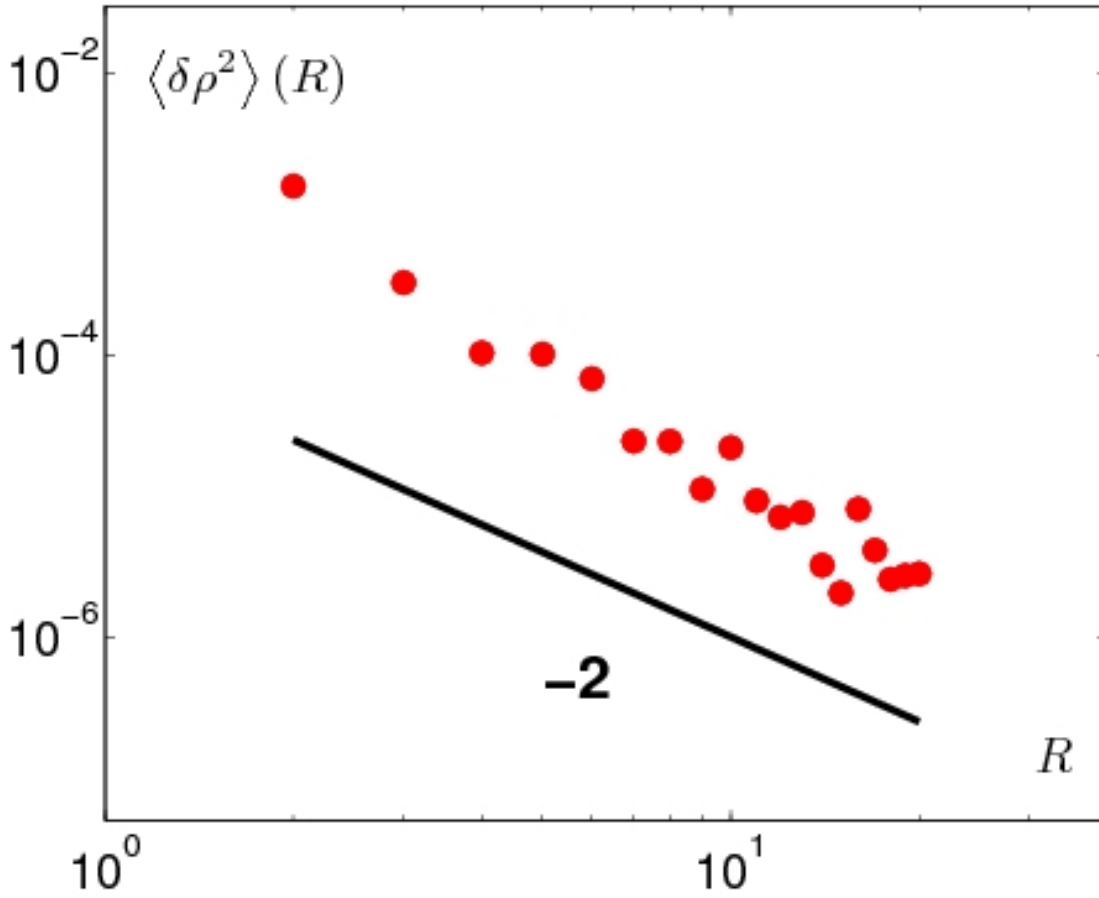
donc à ce stade de notre analyse montré que les deux membres de l'inégalité 3.71 ont dans notre système des dépendances à  $a$  très semblables, et que la présence d'un maximum en  $\tau$  de la fonction  $h_\phi$  est reproduite par la fonction  $\left(\frac{\partial \log \zeta_\phi(\tau)}{\partial \log \phi}\right)^2$  pour un  $\tau$  semblable.

**Dépendances en densité** Bien sûr, nous n'avons rien dit jusque là de la dépendance en densité de l'inégalité 3.71, puisque d'une part elle contient des termes sans dépendance en  $a$  ou en  $\tau$ , et d'autre part les fonctions que nous avons représentées jusqu'ici ont systématiquement été normalisées par leur maxima, masquant ainsi cette dépendance. Cependant, les résultats obtenus au paragraphe précédent nous encouragent à pousser plus loin notre analyse. Pour cela, nous avons considéré, bien que cela constitue une approximation un peu brutale, que les maxima temporels des deux membres de l'inégalité se correspondaient, et nous avons poursuivi notre comparaison pour ces valeurs particulières des fonctions évaluées jusqu'ici. Restent donc deux termes à évaluer. Commençons par le terme correspondant aux fluctuations de densité  $\frac{N \langle \delta \rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2}$ . Il faut d'abord remarquer que dans la limite des fluctuations gaussiennes, ce terme est d'ordre 1, puisque la variance  $\langle \delta \rho^2 \rangle$  va comme  $\frac{1}{N}$ . Comme nous l'avons vu dans la première partie de ce travail, la densité de notre système peut cependant exhiber des corrélations à longue portée qui modifient ce scaling. Nous avons donc réalisé notre mesure en évaluant la densité et ses fluctuations dans des disques de rayons croissant. Nous avons effectué les moyennes sur les disques centrés sur les grains tels que leur bord n'atteigne pas le bord de l'image, ainsi que sur l'évolution temporelle. Nous avons représenté sur la figure 3.45 la variance de la densité calculée sur les disques de rayon  $R$ ,  $\langle \delta \rho^2 \rangle (R)$  avec

$$\rho(R) \equiv \frac{\text{Nombre de grains dans le disque de rayon } R}{\pi R^2}$$

en fonction de  $R$  pour  $\phi = 0.84018$ .

On observe qu'aux grandes valeurs de  $R$ , cette variance tend vers un comportement en  $R^{-2}$ . Ce comportement est le même pour toutes les fractions surfaciques étudiées, et correspond à l'absence de corrélations à longue portée. D'autre part, il est clair et nous



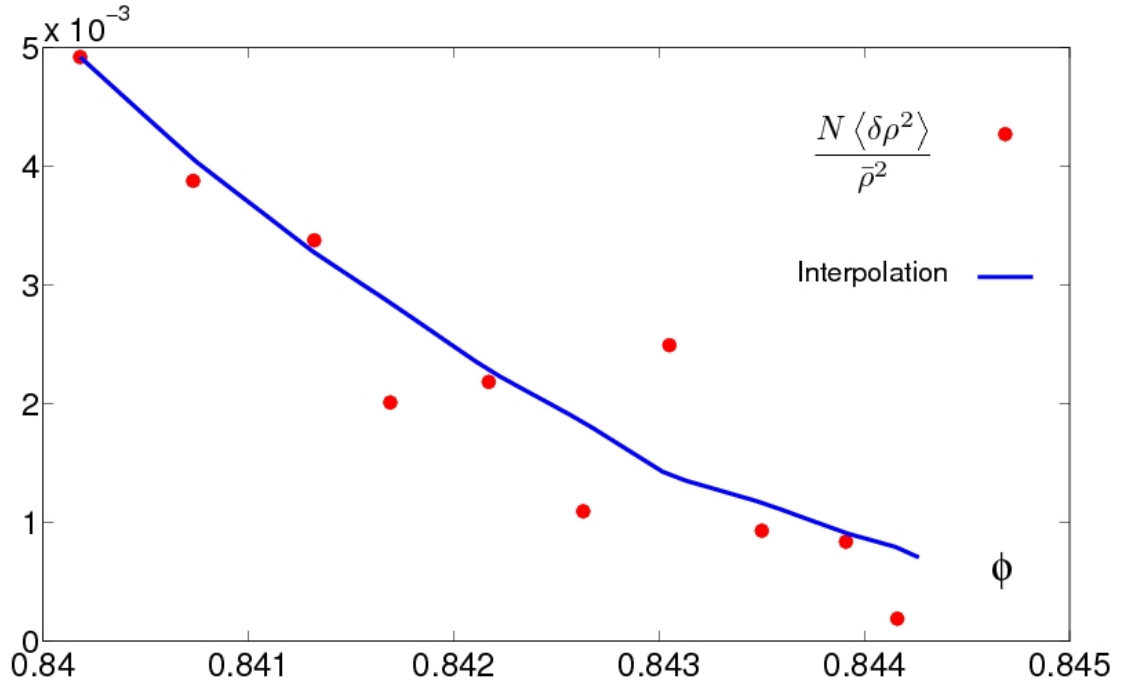
**FIG. 3.45:** Variance de la densité dans les disques de rayon  $R$  en fonction de  $R$  dans des axes logarithmiques pour  $\phi = 0.84018$ . La droite en noir correspond à  $\langle \delta \rho^2 \rangle (R) \propto R^{-2}$ .

avons vérifié par ailleurs que dans cette limite, le nombre de grains moyen dans les disques de rayon  $R$  est donné par  $\bar{N} = \bar{\rho} \pi R^2$ . On obtient donc que  $\langle \delta \rho^2 \rangle (R) \propto \frac{1}{N}$  aux grandes valeurs de  $N$ , ce qui nous permet de mesurer les fluctuations de densité cherchées comme

$$\frac{N \langle \delta \rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} = \frac{\pi R^2 \langle \delta \rho^2 \rangle (R)}{\bar{\rho}} \Big|_{R \text{ grand}}$$

Nous avons réalisé cette évaluation en prenant la moyenne de  $\frac{\pi R^2 \langle \delta \rho^2 \rangle (R)}{\bar{\rho}}$  aux grandes valeurs de  $R$ . Les fluctuations de densité correspondantes  $\frac{N \langle \delta \rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2}$  sont représentées sur la

figure 3.46 en fonction de  $\phi$ . Nous avons aussi représenté l'interpolation de ces points que nous utiliserons dans la suite pour évaluer la dépendance en  $\phi$  de ces fluctuations.



**FIG. 3.46:** Fluctuations de densité  $\frac{N \langle \delta \rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2}$  en fonction de la fraction surfacique. La courbe bleue correspond à une interpolation de ces points après un léger lissage.

On observe que ces fluctuations sont une fonction décroissante de la fraction surfacique. Reste à évaluer le terme  $\left(\frac{\partial \log \phi}{\partial \log \rho}\right)^2$ . Notre mesure de  $\bar{\rho}$  effectuée à l'instant est très fluctuante dans sa variation en  $\phi$ , comme on peut voir sur la figure 3.47. Nous allons donc considérer que la pente locale  $\frac{\partial \log \phi}{\partial \log \rho}$  varie peu avec  $\phi$ . Nous avons représenté sur la figure 3.47 notre mesure de  $\bar{\rho}(\phi)$  dans un diagramme logarithmique ainsi que la régression linéaire que nous avons utilisée pour capturer la tendance de  $\frac{\partial \log \rho}{\partial \log \phi}$ .

On trouve  $\frac{\partial \log \rho}{\partial \log \phi} = 1.91$ . On a donc maintenant évalué toutes les contributions à la borne inférieure figurant dans l'inégalité 3.71 aux couples  $(a, \tau)$  où a été extrait  $\chi^*(\phi)$ . On cherche donc à comparer  $\chi^*(\phi)$  à la borne inférieure évaluée en ces points

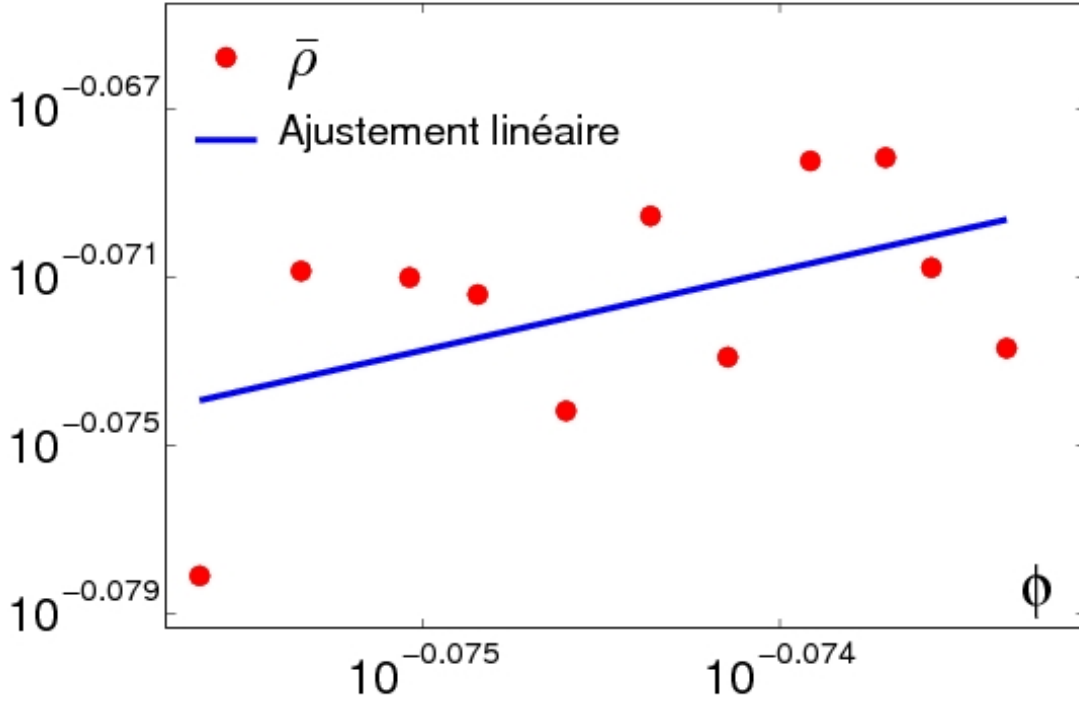


FIG. 3.47: Densité moyenne  $\bar{\rho}$  en fonction de la fraction surfacique. La droite bleue correspond à notre évaluation de la tendance linéaire de ces points.

$$\mathcal{B}(\phi) \equiv \frac{N \langle \delta \rho^2 \rangle}{\bar{\rho}^2} \left( \frac{\partial \log \phi}{\partial \log \rho} \right)^2 \text{Max}_{\tau} \left\{ \left( \frac{\partial \log \zeta_{\phi}(\tau)}{\partial \log \phi} \right)^2 \right\} \text{Max}_{\frac{a}{\zeta_{\phi}(\tau)}} \left\{ \left( \frac{\partial \tilde{Q} \left( \frac{a}{\zeta_{\phi}(\tau)} \right)}{\partial \log \frac{a}{\zeta_{\phi}(\tau)}} \right)^2 \right\} \quad (3.74)$$

Nous avons représenté ces deux quantités en fonction de la fraction surfacique sur la figure 3.48. L'axe des  $\phi$  correspond à l'axe interpolant utilisé pour les dérivations. Les valeurs de  $\mathcal{B}$  ont été tronquées à partir de  $\phi = 0.8435$  pour les raisons évoquées plus tôt.

On observe deux caractéristiques singulières de ces courbes. La première est que la borne inférieure, malgré l'élaboration des opérations qui permettent de l'évaluer, a des valeurs remarquablement proches de celles atteintes par la susceptibilité dynamique  $\chi_{4^*}$ , et que sur presque toute la gamme des  $\phi$  représentés ici, il s'agit bien d'une borne in-

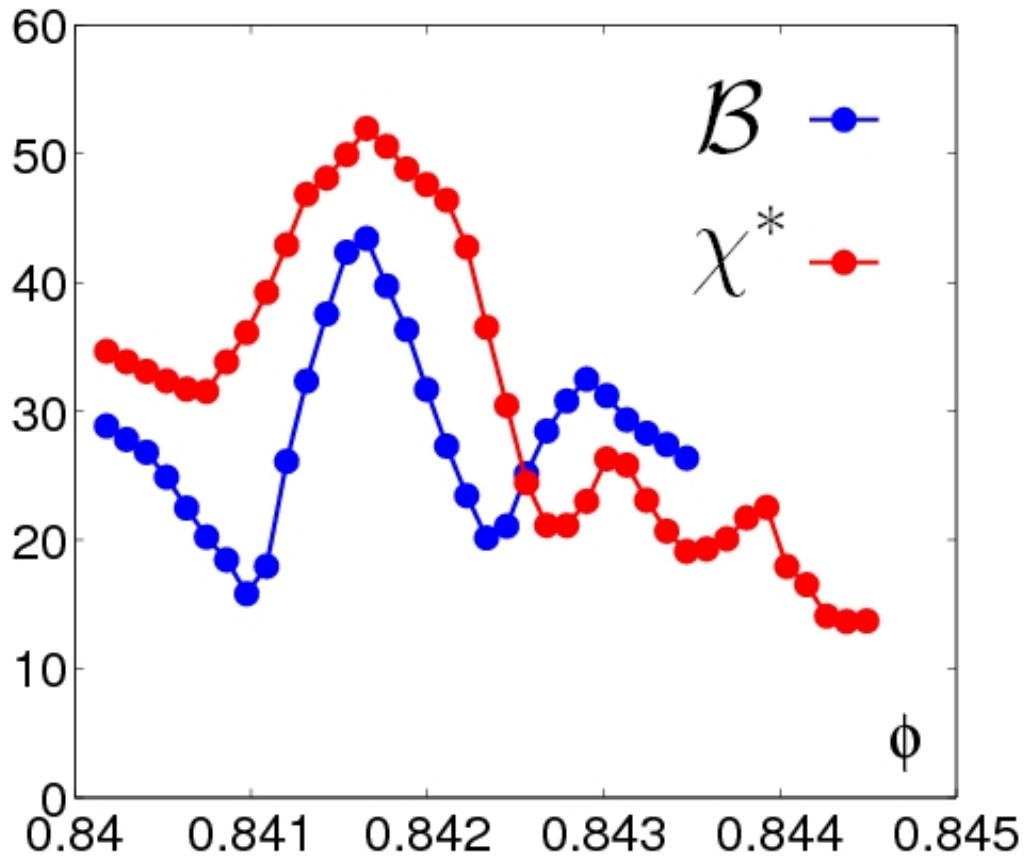


FIG. 3.48: Susceptibilité dynamique  $\chi^*$  et la borne inférieure  $\mathcal{B}$  en fonction de la fraction surfacique.

férieure. La seconde est le fait que le pic de susceptibilité observé au voisinage de  $\phi_J$  est bien reproduit par cette borne. Il s'agit d'un résultat remarquable, puisqu'à la fois, il souligne la validité de l'inégalité 3.66 dans le cas d'un système athermique, et il indique de plus clairement que le champ de densité est le champ conjugué naturel au champ de relaxation temporelle.

## 3.4 Discussion

Nous allons maintenant discuter les résultats que nous avons obtenus dans cette seconde partie. Nous commencerons par rappeler point par point ce que nous avons appris de cette étude expérimentale. Nous positionnerons ensuite notre travail par rapport aux résultats existants. Nous tenterons enfin d'interpréter ces résultats en les replaçant dans le contexte de la transition vitreuse, et nous présenterons les questions et perspectives ouvertes par ce travail.

### 3.4.1 Résultats

**Échelles caractéristiques** L'étude expérimentale du système de disques vibrés que nous venons de présenter révèle les échelles caractéristiques pertinentes du point de vue de sa dynamique. Tout d'abord, nous avons compris que la relaxation du champ de densité telle que mesurée par le facteur de structure dynamique est pilotée par la longueur de diffusion  $\sigma_\phi(\tau)$ , et ce à toutes les valeurs de la densité. On peut comprendre assez simplement cette relation. En effet, le facteur de structure dynamique et la longueur de diffusion sont deux manières d'extraire les caractéristiques principales des distributions de déplacements des grains. Or comme nous l'avons vu, la forme de ces distributions - non-gaussienne - est peu sensible aux échelles de temps et de densité auxquelles elles sont évaluées. De plus, à chaque densité, elles sont dans une bonne approximation rescalées par leur écart-type. Une telle propriété de scaling, si elle était exacte, impliquerait que les moments de ces distributions ne dépendent que de cet écart-type. Or on peut développer l'expression du facteur de structure et l'exprimer en fonction de ces moments. Il est naturel que la longueur correspondante gouverne la décroissance de ces fonctions. Cet argument n'est cependant plus valable pour la susceptibilité dynamique, puisque cette fonction fait intervenir des termes croisés du type  $\langle \Delta \vec{r}_i \bullet \Delta \vec{r}_j \rangle$  et nécessite de connaître les distributions jointes pour ces variables. Or le lieu des maxima de cette fonction dans les variables  $a$

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

et  $\tau$  à une densité donnée se situe sur une courbe  $\zeta(\tau)$  proportionnelle à la longueur de diffusion. Ce résultat constitue une prescription importante concernant les échelles de longueur pertinentes auxquelles mesurer l'hétérogénéité de la dynamique de notre système à une échelle de temps donnée. On comprend en particulier qu'on ne peut rien conclure sur l'amplitude de cette hétérogénéité quand on la sonde à une seule échelle de longueur fixée indépendante de  $\tau$  et de  $\phi$ , puisque le maximum en temps obtenu ainsi a peu de chance de correspondre au maximum global  $\chi^*$  que nous avons extrait de nos données. D'autre part, il est important de remarquer que les valeurs atteintes par la longueur de diffusion sont très petites comparées aux diamètres des grains, même aux densités les plus basses que nous avons étudiées. De ce point de vue, la structure du système ne relaxe pas sur le temps d'observation expérimental, en particulier le voisinage d'un grain défini au sens de Laguerre reste essentiellement inchangés. Les données que nous avons présentées correspondent donc à l'état vitreux de notre système au sens où nous l'avons défini dans l'introduction. Nous n'avons pas clairement identifié la transition vitreuse proprement dite de notre système, mais tout porte à croire qu'elle apparaît en fait à la préparation, à une densité inférieure mais voisine de celle à laquelle apparaissent les effets non stationnaires sur le signal de pression.

Une fois comprise cette relation entre échelles microscopiques de longueur et échelles de temps, il nous reste à interpréter les différentes échelles de temps pointées par la dynamique du système. La première échelle de temps qui ressort de notre analyse est celle à laquelle l'exposant local de diffusion  $\nu$  atteint pour la première fois la valeur  $\frac{1}{2}$ . Ce temps, classiquement appelé temps de sortie de cage, ne correspond certainement pas dans notre système à un changement de voisinage, comme nous venons de le voir. Il s'agit simplement du temps typique qu'il faut aux grains pour subir des mouvements de nature différente que de simples allers et retours autour de leur position courante. En ce sens, cette échelle est triviale et ne reflète en rien la complexité dynamique que nous avons mis à jour. Elle est plutôt reliée à la pression imposée au système et traduit natu-



### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

rellement l'arrêt microscopique quand la contrainte de confinement devient très grande. La seconde échelle de temps, définie au voisinage de la transition et caractéristique de la complexité de la dynamique, est celle à laquelle l'exposant local de diffusion  $\nu$  atteint un maximum plus grand que  $\frac{1}{2}$ . C'est aussi celle à laquelle la susceptibilité dynamique exhibe un maximum global. C'est encore celle à laquelle la mesure de la non-gaussianité de la distribution des déplacements que nous avons extraite de notre analyse des facteurs de structure dynamique a un maximum. C'est enfin l'échelle de temps à laquelle la réponse de la mobilité des grains à une variation de densité est la plus forte. On peut à ce stade donner une image assez précise de ce que signifie cette échelle de temps. La super diffusion provient de corrélations positives dans les déplacements élémentaires successifs des grains. Donc si on observe le mouvement d'un grain typique entre deux instants séparés de ce temps, il se sera déplacé sur une distance anormalement grande comparée à un mouvement brownien. Ces grands déplacements sont comptabilisés dans les distributions des déplacements et construisent l'écart à la gaussienne. Il est difficile d'envisager que les grains puissent se déplacer ainsi de manière indépendante de leur voisins étant données les densités considérées. L'existence d'un maximum de susceptibilité dynamique en temps pour chaque densité confirme ce point et indique qu'une proportion finie des grains ont à chaque instant ce type de mouvement. La fonction de corrélation dynamique précise cette image spatiale en pointant une longueur de corrélation dynamique associée à ces mouvements. La dynamique du système atteint donc son maximum d'hétérogénéité à cette échelle de temps. Les mouvements résultants sont des courants, dont la durée de vie, ou le temps de relaxation, valent au minimum ce temps caractéristique, et qui circulent entre des zones bloquées dont la taille typique est mesurée par la longueur de corrélation dynamique. Le fait que cet effet comporte un maximum global en densité et se traduise par une augmentation de la mobilité relative des grains explique pourquoi la réponse de cette mobilité à la densité est elle aussi maximale à cette échelle de temps.

Nous aimerions faire deux remarques à propos du rôle de la variable densité dans le

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

système que nous avons étudié. D'abord, la plage totale de fraction surfacique sur laquelle le système ressent les effets de la transition de rigidité est remarquablement petite. Nous avons étudié des fractions surfaciques comprises entre  $\phi = 0.84$  et  $\phi = 0.845$ , soit une plage totale de  $\Delta\phi = 0.005$ , et les phénomènes intéressants semblent avoir lieu sur une plage encore plus restreinte. On peut comprendre le caractère très abrupte de cette transition en invoquant le caractère presque singulier du potentiel d'interaction entre les grains. En effet, les grains que nous avons utilisés sont métalliques, et donc très rigide. Sur les plages de contraintes explorées, ces grains peuvent dans une bonne approximation être considérées comme des sphères dures. Ensuite, au voisinage de la transition, la saturation de l'inégalité de fluctuation dynamique 3.66 indique que c'est bien la densité qui contrôle les propriétés macroscopiques de ce système. Du point de vue de notre discussion de la première partie concernant les paramètres intensifs, ce résultat apporte donc une réponse assez claire et indique que la densité est le paramètre de contrôle le plus important dans le comportement macroscopique du système, confirmant ainsi la pertinence de notre approche en termes de statistique du volume.

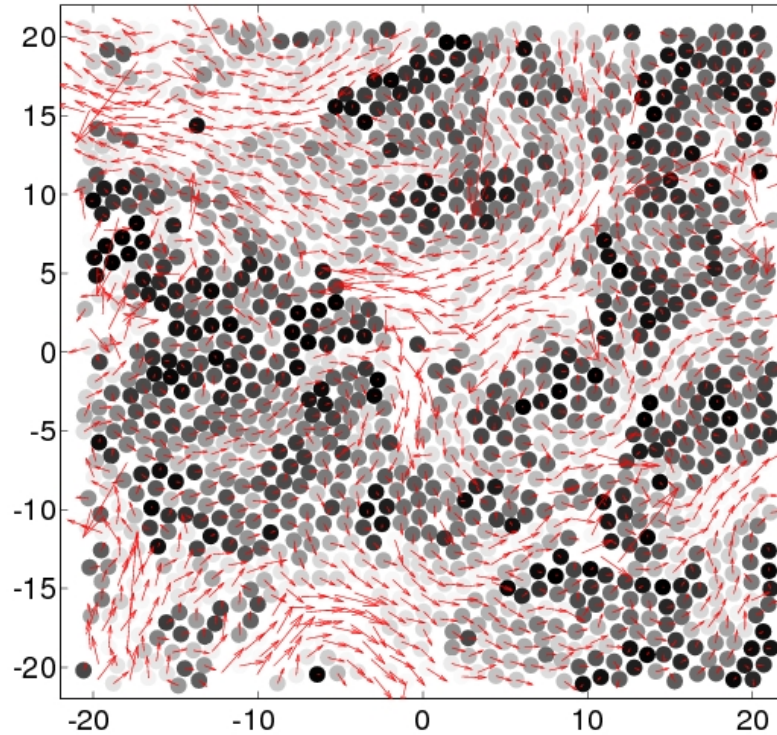
**A la transition** Nous allons maintenant résumer ce que nous avons appris de la transition de blocage dans notre système. Quand on diminue sa densité à partir d'un état très dense préparé de manière à exhiber une dynamique stationnaire, la contrainte statique mesurée à la paroi tombe brutalement à zéro au voisinage d'une densité  $\phi_J$ . Nous avons interprété cette annulation de la contrainte à la paroi comme la disparition du module élastique de compression de l'assemblée. De plus, en ce point, celle-ci se met à glisser sur les parois de la cellule et est entraînée à nouveau par les mouvements oscillants de la plaque de verre, ce qu'on peut interpréter comme la disparition de son module de cisaillement. Cette valeur de la fraction surfacique correspond donc au déblocage de notre système, selon la définition mécanique que nous avons donnée dans l'introduction. Au voisinage de ce point, nous avons observé que la susceptibilité dynamique absolue  $\chi^*$  était maximale,

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOPAGE

ce qui signifie que l'hétérogénéité de la dynamique de l'assemblée est maximale à la densité à laquelle le système se débloque. Nous avons de plus identifié un temps de relaxation  $\tau_{sD}$  associé à cette hétérogénéité, qui est lui aussi maximum au voisinage de cette densité. Enfin, la fonction de corrélation dynamique  $G_4^*$  définit une longueur de corrélation dynamique qui est elle aussi maximale au voisinage de ce point. On peut en conclure que les courants qui dominent la relaxation du système au voisinage de son déblocage sont des phénomènes collectifs étendus en espace dont l'extension caractéristique est maximale à la transition et s'étend sur des distances de l'ordre d'une vingtaine de diamètres de grain. Nous avons représenté sur la figure 3.49 un champ de déplacement évalué entre deux instants de la dynamique séparés de  $\tau^*$  à la densité la plus proche de  $\phi_J$ .

Cette image confirme l'interprétation précédente. Enfin, nous avons montré qu'au voisinage de la transition, la fonction de corrélation dynamique  $G_4^*$  vérifie une propriété de scaling critique 3.47 semblable à la relation 3.21 vérifiée par la fonction de corrélation de la densité au voisinage du point critique. Cette propriété indique la proximité d'un point critique. Ces relations diffèrent néanmoins par l'exposant anormal qui apparaît dans l'exponentiel. Ainsi, l'ensemble des remarques qui précèdent semblent indiquer que la transition de blocage se traduit dans notre système par une transition de phase dynamique au sens où la longueur de corrélation et le temps de corrélation associé caractérisent non pas les fluctuations spatiales de densité mais les fluctuations spatiales de son évolution temporelle.

**Et dans d'autres systèmes ?** Nous aimerions discuter un ensemble de résultats relatifs à un système très similaire à celui que nous avons étudié, qui sont les seuls à notre connaissance qui se comparent directement à ceux que nous avons présentés dans ce travail. Ces résultats, obtenus par Keys, Abate, Glotzer, et Durian [136], concerne un mélange bidisperse de sphères d'acier contraintes à rouler dans une cellule horizontale plane circulaire de diamètre 17.7 cm et agitées par un écoulement d'air vertical de débit constant. Les

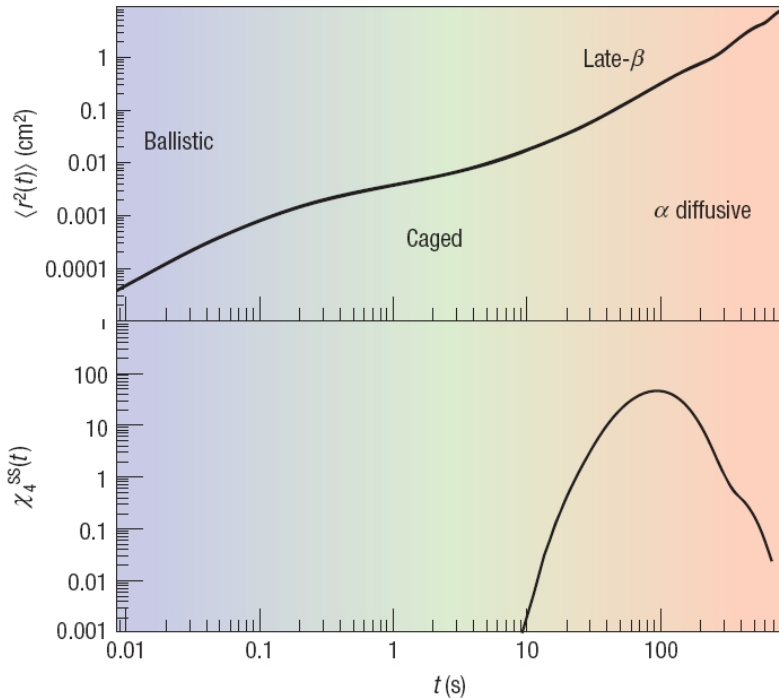


**FIG. 3.49:** Champ de déplacement évalué entre deux instants de la dynamique séparés de  $\tau^*$  à la densité  $\phi = 0.84169 \approx \phi_J$ . Une flèche rouge correspond à cinq fois le déplacement total d'un grain entre ces instants. Les nuances de gris qui apparaissent sur les grains correspondent aux valeurs des corrélations locales  $\frac{-(r_i(t+\tau^*)-r_i(t))^2}{2\zeta(\tau^*)^2}$ . Le noir correspond à la valeur 1, et le blanc à la valeur 0

diamètres des billes sont  $d_s = 0.318cm$  et  $d_l = 0.397cm$ . La densité est modulée en changeant le nombre de billes dans la cellule et varie de  $\phi = 0.597$  à  $\phi = 0.773$ . Les auteurs ont caractérisé les propriétés de diffusion et l'hétérogénéité de la dynamique de leur système à chaque densité sur des périodes d'acquisition de vingt minutes, au moyen respectivement du déplacement carré moyen et de la susceptibilité dynamique. Nous avons reporté ces mesures pour une valeur de la densité en fonction du temps sur la figure 3.50.

On observe que le comportement de la courbe de diffusion est très semblable à celle que nous avons obtenue dans notre système, mais qu'elle atteint des valeurs beaucoup

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

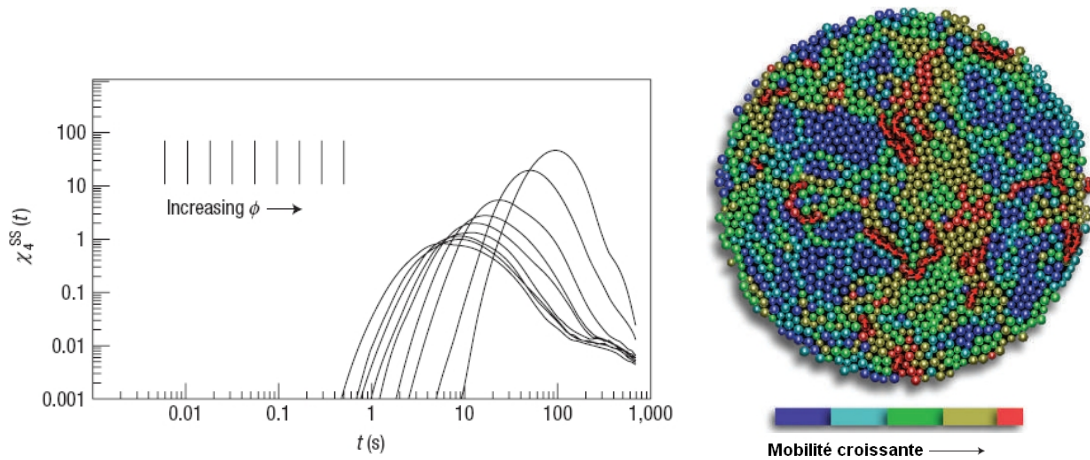


**FIG. 3.50:** Déplacement carré moyen et susceptibilité dynamique en fonction du temps à  $\phi = 0.773$  dans l'expérience de Keys, Abate, Glotzer, et Durian [136].

plus élevées, de l'ordre de plusieurs diamètres de grain. La susceptibilité dynamique elle aussi a un comportement semblable à celle que nous avons mesurée, avec en particulier un maximum temporel. Néanmoins, les auteurs n'ont évalué cette susceptibilité qu'à une valeur de la sonde  $a = 0.5d_s$ , ce qui rend difficilement interprétable la valeur du maximum de susceptibilité qu'ils obtiennent. Pourtant, la courbe de diffusion semble présenter un très léger épaulement là où  $\chi_4(\tau)$  est maximum, ce qui rappelle le comportement dynamique de notre système.

Nous avons reporté sur la figure 3.51 la susceptibilité dynamique pour différentes fractions surfaciques, ainsi que les populations de grains colorés selon leur mobilité entre deux instants séparés de  $\tau = 12s < \tau^*$ . Les valeurs obtenues sont encore une fois comparables à celles que nous avons mesurées. Cependant, les valeurs de densité correspondantes sont significativement plus petites que celles que nous avons étudiées, et s'étendent sur une

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE



**FIG. 3.51:** A gauche, susceptibilité dynamique pour différentes densités. A droite, instantané du champ de déplacement entre deux instants séparés de 12s. La couleur rouge correspond aux 10% de particules les plus rapides.

gamme plus large. Les analogies qui existent entre la phénoménologie de cette expérience et celle exhibée par notre système illustre la profonde similarité des transitions qui ont lieu dans chacun de ces systèmes. Cependant, les différences en terme de densité et d'amplitude des mouvements souligne le fait que, comme nous allons le voir, ces transitions ne sont pas de même nature. Dans l'état actuel de la compréhension que nous avons de ces observations, nous pensons que les résultats ci-dessus caractérisent la transition vitreuse, alors que notre expérience sonde la transition de rigidité.

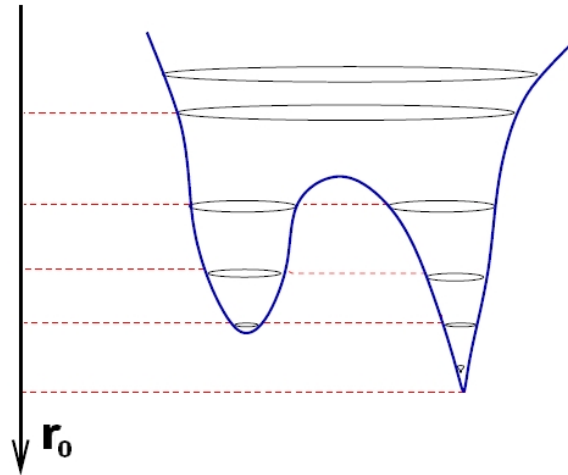
#### 3.4.2 Interprétation

**La perspective des verres** Comme nous l'avons dit dans l'introduction, et comme le souligne les résultats que nous venons de présenter, il existe une profonde analogie entre la dynamique de notre système au voisinage de sa transition de blocage et celle d'un liquide au voisinage de sa transition vitreuse. On peut donc proposer une interprétation de nos résultats dans le cadre conceptuel général associé à la transition vitreuse, de manière

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

à illustrer la portée de nos résultats et à souligner les différences qu'il existe entre ces transitions. Le système que nous avons étudié est très semblable à un problème de satisfaction de contraintes sujet à la transition vitreuse, à savoir le problème des empilements des sphères dures dans un volume donné. Dans ce problème, les contraintes sont purement stériques, et la transition provient de la disparition des configurations des sphères considérées compatibles avec le volume accessible lorsque celui-ci décroît. Une image unifiée de la transition vitreuse en termes de paysage d'énergie, qui inclut naturellement ce problème, a été récemment proposée par J.Kurchan et F.Krzakala [14]. Les auteurs introduisent un paysage de "pseudo-énergie" pour le problème de l'empilement de sphères de la manière suivante. Étant donné un ensemble de sphères de rayon typique  $r_0$  et une enceinte de volume  $V$ , il existe un ensemble de configurations admissibles - c'est à dire sans interpénétration - des sphères dans ce volume. Leur argument tient au fait que si on fait croître légèrement le rayon typique des sphères, les configurations admissibles pour ces sphères dilatées forment un sous-ensemble strict de l'ensemble précédent. On peut donc définir un paysage de "pseudo-énergie", dont nous avons représenté un schéma sur la figure 3.52. Les auteurs montrent que le paysage obtenu a les mêmes propriétés de rugosité que les paysages d'énergie génériquement associés à la transition vitreuse. Ils suggèrent en particulier une représentation de la complexité de ce paysage, dans le cas où les sphères interagissent avec un potentiel à courte portée, dans un diagramme  $(\phi, 1/P)$ . Nous avons reporté sur la figure 3.53 le diagramme original.

La ligne noire épaisse correspond aux états d'équilibre. Les lignes parallèles correspondent aux états métastables dans lesquels le système se piège pour différentes préparations du système. La plus haute de ces lignes correspond à un quench infiniment rapide. La densité  $\phi_{MCT}$  à laquelle le système sort de l'équilibre pour ce protocole particulier s'apparente à la transition dynamique de la théorie de couplage de mode, tandis que la densité atteinte à température nulle dans un tel protocole a été appelée  $\phi_J$  par les auteurs, par analogie avec le point J défini par O'Hern, Silbert, Liu et Nagel dans [15].

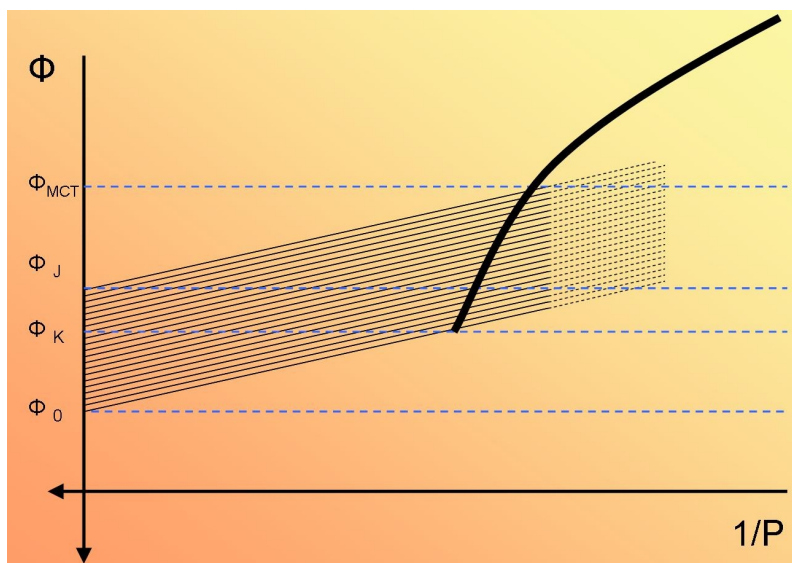


**FIG. 3.52:** Représentation schématique du paysage de "pseudo-énergie" associé au problème d'empilement de sphères, adapté de [14]. Pour chaque valeur du rayon typique, le(s) contour(s) gris représente(nt) l'ensemble des configurations accessibles du système.

Tentons à présent de proposer une lecture de notre protocole sur ce diagramme. Ce qu'il faut comprendre ici, c'est que les contraintes que notre système doit satisfaire **ne sont pas** des contraintes **stériques**, mais des contraintes **d'équilibre local des forces**. En effet, notre procédure piège le système dans une unique configuration associée aux **positions** des grains, puisque ceux-ci ne changent pas de voisinage pendant tout notre protocole. Par contre, nous laissons relaxer les degrés de liberté associés aux **forces de frottement**. Nous avons représenté sur la figure 3.54 l'enchaînement de ces deux transitions.

Nos résultats suggèrent donc qu'une seconde transition dynamique a lieu quand les degrés de liberté associés à ces forces se gèlent, à une densité plus élevée que la densité à laquelle le système se piège dans une configuration. La ligne grise épaisse correspond donc sur notre schéma à l'équilibre de la structure, et la densité de transition dynamique associée  $\phi_D^S$  correspond à  $\phi_{MCT}$  dans le schéma précédent. Les lignes parallèles épaisses





**FIG. 3.53:** Diagramme reflétant la structure du paysage de pseudo-énergie dans un problème d'empilement des sphères "molles" à volume constant, tel que figurant dans [14].

correspondent aux états métastables de la structure, mais à l'équilibre pour les degrés de liberté associés aux forces. Notre schéma correspond donc à un zoom sur la première couche d'états métastables associés à la transition vitreuse **structurelle**, et représente la sous-structure de cette couche associée aux **forces**. Les lignes parallèles fines correspondent à des états métastables pour les degrés de liberté associés. La préparation de notre système correspond aux lignes vertes et rouges. La ligne verte, qui commence sur la ligne d'équilibre de la structure, représente le début de notre préparation, lorsque le système est dans son état liquide. A une certaine densité  $\phi_D^S$  que nous n'avons pas identifié clairement mais qui est plus basse que les densités auxquelles les résultats présentés plus haut ont été extraits, la structure se gèle. La ligne verte sort donc de la ligne d'équilibre grise et suit une ligne noire épaisse. Puis, lorsque la pression devient grande pour la première fois pendant notre protocole, les degrés de liberté associés aux forces se bloquent. Le système sort d'équilibre et est piégé dans une configuration métastable pour ces degrés de

CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

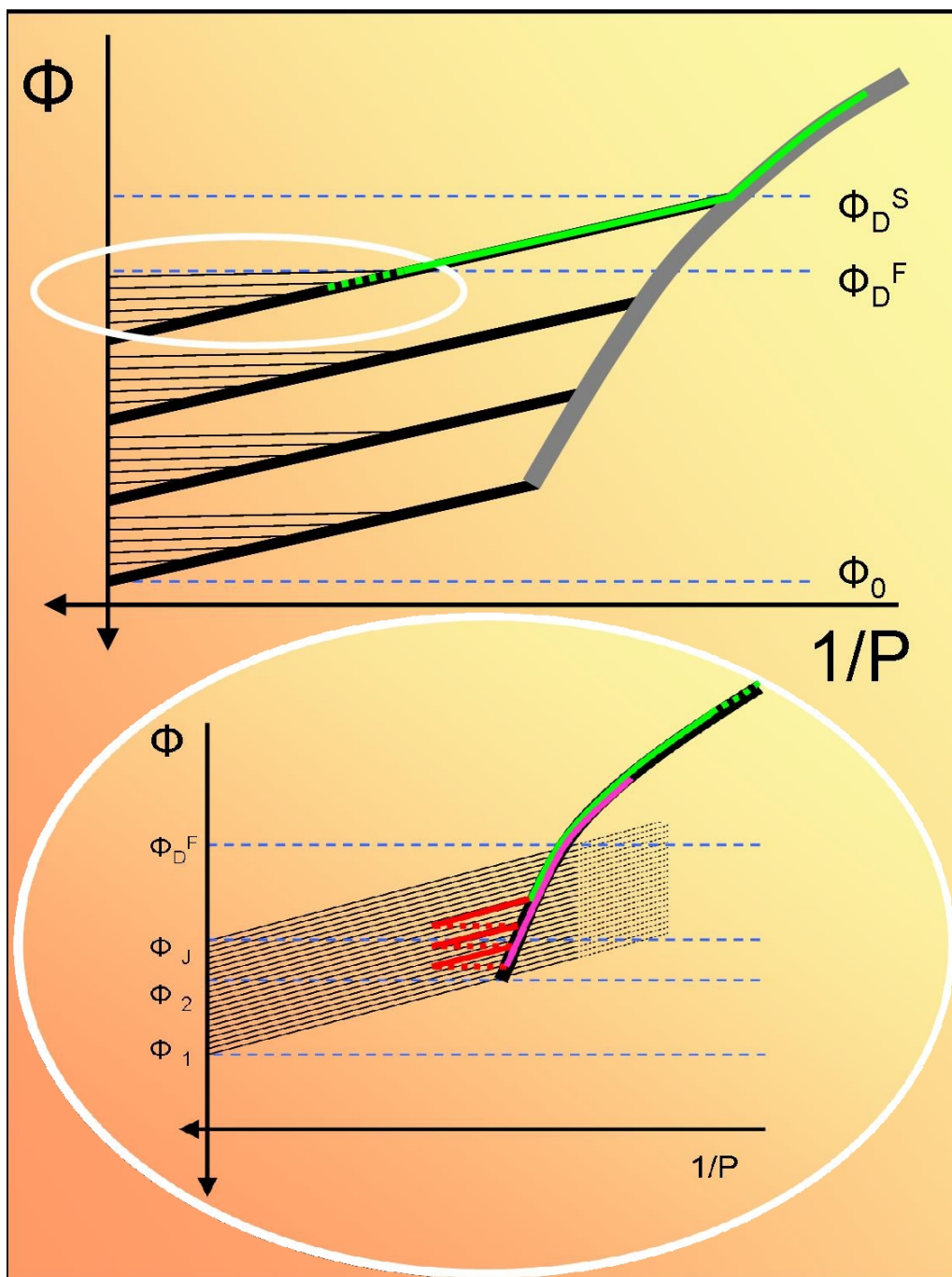


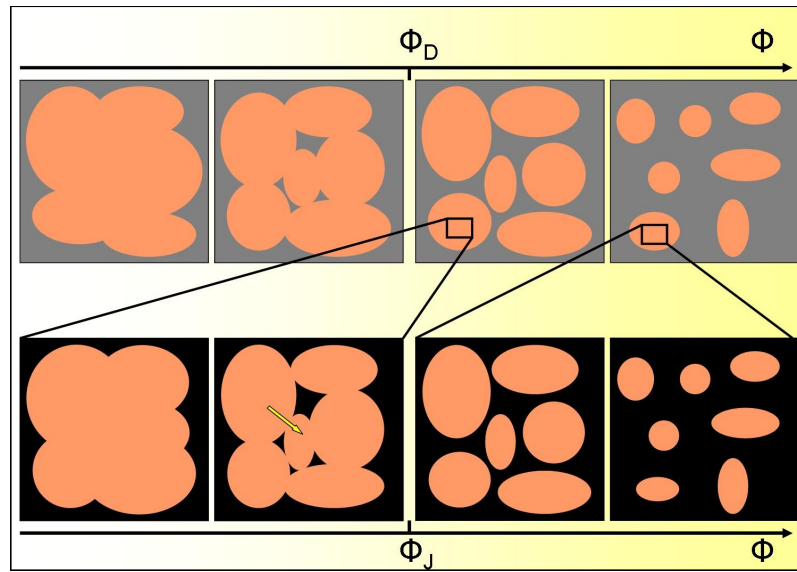
FIG. 3.54: Diagramme reflétant la structure du paysage de pseudo-énergie dans notre système.

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

liberté. Il suit alors la première ligne rouge pleine. Cependant, notre préparation consiste à quencher rapidement le système en imposant une contrainte importante, ce qui permet aux contacts de glisser. Le système peut donc atteindre des états profonds avant de sortir de l'équilibre. La ligne passe donc au travers des états superficiels pour atteindre ces états profonds. Ensuite, on le maintient à densité fixée, et la pression relaxe. C'est ce qui a été figuré par la première ligne pointillée rouge. Puis on répète cette étape de compression/relaxation plusieurs fois. Nous avons fait finir les lignes pointillées correspondant aux relaxations en des points proches de l'équilibre, puisque les valeurs de pression que nous avons mesurées semblent correspondre à des valeurs proches des valeurs asymptotiques. La ligne continue rose correspond aux décompressions successives du système. Nous avons montré que les états correspondant étaient stationnaires et réversibles. Cette ligne suit donc la ligne d'équilibre. Elle croise en particulier la densité correspondant à  $\phi_D^F$  sur le schéma que nous identifions à la transition de déblocage  $\phi_J = 0.8419$  observée dans notre système et qui est en tout point semblable à la transition dynamique  $\phi_D^S$  pour les degrés de liberté associés aux forces de frottement. A noter que notre notation  $\phi_J$  n'est pas compatible avec le point  $\phi_J$  qui figure sur ce schéma et qui correspond au point J de la littérature en présence de friction dans le cadre de cette interprétation. De plus, dans cette interprétation, la valeur de  $\phi_D^F$  dépend de la configuration dans laquelle le système est bloqué.

On peut reformuler cette interprétation en donnant une image de l'espace des phases du système. Nous avons représenté cette image sur la figure 3.55.

Dans ce schéma, les carrés représentent l'espace des phases, et les zones en rose figurent les régions accessibles au système à *pseudo-énergie constante*. Sur la partie supérieure, nous avons schématisé leur évolution en fonction de la densité à la traversée de la transition dynamique correspondant au gel des degrés de liberté de position des grains. Les zones grisées correspondent à des barrières de pseudo-énergie très hautes puisqu'elles concernent les contraintes stériques et la compression des grains. On comprend qu'à l'ap-



**FIG. 3.55:** Représentation schématique de l'espace des phases de notre système en fonction de la densité. Une description détaillée de ce schéma est donnée dans le texte.

proche de  $\phi_g$ , il devient de plus en plus difficile de passer d'une région à une autre car les passages entre régions deviennent de plus en plus fins. A la transition, le système perd son ergodicité car les régions associées à ces variables de position se déconnectent. Cela se traduit dans l'espace réel par le fait que pour changer de voisinage, les grains doivent s'interpénétrer, ce qui coûte de l'énergie. La longueur dynamique associée à cette transition correspond typiquement à la taille de la région spatiale qu'il faut réarranger pour déplacer un grain sur une distance d'un diamètre moyen. Dans le cadre de la théorie de couplage de mode, qui est une théorie de champ moyen, cette longueur diverge à la transition.

La transition de blocage de notre système est distincte de la précédente et se situe à des densités plus élevées. La partie basse de la figure représente un zoom sur une région accessible particulière de l'espace de phase au delà de la transition vitreuse. Les zones en noir correspondent à des barrières de pseudo-énergie associées à la satisfaction des

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

contraintes mécaniques, donc aux forces de frottement. En bas à gauche, il n'y a presque pas de mobilisation de la friction. Quand la densité devient plus grande, les fluctuations spatiales de coordination deviennent sensibles. Les mouvements relatifs des grains se couplent localement et il se forme des "grumeaux" *isostatiques* de plus en plus grands dans le système. Ces groupes de grains se comportent collectivement de manière rigide, et ne peuvent en conséquence plus explorer certaines régions. Les réarrangement doivent donc se faire de manière collective, ce qui rend très étroits les passages entre zones accessibles au système : les barrières entropiques entre régions deviennent grandes. Nous avons représenté par une flèche jaune un tel réarrangement.

Aux densités plus élevées, au delà de la transition, les régions accessibles au système ne sont plus connexes. Le système est piégé mécaniquement dans une petite région de son espace des phases. Dans l'espace réel, cela se traduit par le fait que les contacts qui mobilisent la friction percolent dans le système. Le système acquiert donc un seuil de rupture au cisaillement. Cependant, les fluctuations spatiales de coordination donnent naissance à un nombre anormalement grand de modes de basse fréquence, les *modes mous* discutés par M.Wyart [43, 44], étendus en espace, et qui peuvent se réarranger sous l'effet de l'injection d'énergie dans le système en franchissant une barrière associée aux forces de frottement. Un tel réarrangement modifie la matrice dynamique introduite plus haut et les directions fragiles du système ne sont plus les mêmes. Les zones qui se réarrangent changent donc au cours du temps, et ces réarrangements successifs donnent lieu à l'hétérogénéité de la dynamique observée dans la phase bloquée. En suivant l'argument de M.Wyart, la taille de ces zones devient de plus en plus petite au fur et à mesure que la densité augmente, et les particules participant à la rigidité sont de plus en plus nombreuses.

Cette image, compatible avec la théorie de couplage de mode, et certains modèles à contraintes cinétiques [137, 138, 139] permet de comprendre le comportement non monotone de la susceptibilité dynamique à la traversée de la transition de blocage dans notre système de grains frottants. Elle permet de plus de proposer un mécanisme décrivant

l'apparition de la rigidité à savoir la naissance d'objets "rigides" dans la phase liquide qui percolent à la transition et comportent des objets "mous" de plus en plus petits à mesure que la densité augmente, où la rigidité est pilotée par le frottement solide. On comprend de plus que nous ne soyons pas parvenu à mesurer l'exposant anormal  $\eta$  qui apparaît dans l'expression de la fonction de corrélation classique. En effet, la percolation en deux dimensions d'espace donne  $\eta = 2 - \frac{91}{48} \approx 0.1$ , ce qui serait difficilement détectable expérimentalement. Enfin, les réarrangements collectifs qui pilotent la dynamique ont dans le cadre de cette interprétation des amplitudes compatibles avec les valeurs observées de la longueur de diffusion. On comprend en particulier que le régime diffusif que nous avons mis à jour aux grandes échelles de temps correspond à un renouvellement du réseau des forces de frottement entre les grains. C'est ce renouvellement qui permet de décorréler les mouvements des grains au travers de glissements collectifs des contacts.

### 3.4.3 Perspectives

A la lumière de la compréhension que nous avons obtenue de nos observations expérimentales, on peut faire quelques conjectures sur la dynamique des systèmes sujet à la transition de blocage. D'abord, nous aimerions insister sur le rôle déterminant du seuil de frottement statique dans l'apparition d'un module de cisaillement à fréquence nulle dans notre système. La levée de dégénérescence des différentes transitions qui apparaissent dans notre système grâce à la séparation des échelles associées aux degrés de liberté de configurations et de forces doit être en défaut dans des systèmes ne comportant pas de friction pour lesquels il est probable que le module de cisaillement à temps infini ne puisse en conséquence s'annuler qu'à la valeur de la transition géométrique  $\phi_{RCP}$  dans la limite des grands systèmes. Cependant, nous conjecturons que la nature des mouvements que nous avons observés au voisinage de la transition, qui donne lieu à un exposant local de diffusion plus grand que 1, est générique et devrait pouvoir être observée dans une grande classe de systèmes, en particulier les suspensions colloïdales denses. De plus, nous avons

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOPAGE

présenté un image dans laquelle la longueur de corrélation dynamique est associée dans la phase bloquée au fluage du système selon ses modes anormaux de vibration. On peut comparer visuellement le *mode mou* présenté sur la figure 1.2 et le champ de déplacement 3.49 pour se convaincre de cette analogie. Une investigation systématique de cette propriété est accessible numériquement et permettrait de valider cette image, en clarifiant la relation entre  $l^*$  et  $\xi_4$ . La première partie de ce travail a de plus montré l'existence de corrélations à longue portée du volume interstitiel. Il est probable qu'il existe un lien intime entre la longueur de corrélation associée et les longueur mentionnées plus haut. Notre approche en termes de clusters souffre cependant de problèmes de convergence dans la phase bloquée, et il faudrait pour clarifier ce point réaliser des moyennes d'ensemble. De même, nous avons suggéré l'existence d'un lien entre la longueur de corrélation dynamique et la taille des "grumeaux" rigides qui apparaissent dans la phase liquide au voisinage de la transition. Nous conjecturons qu'il existe une relation directe entre cette taille caractéristique et la longueur qui apparait dans la formulation de la rhéologie proposée par le GDR Midi [30]. Des mesure rhéologiques dans un système semblable à celui que nous avons étudié permettrait de donner une réponse à cette question.

Bien sûr, il reste de nombreux points obscurs dans le comportement de notre système au voisinage de sa transition. Une des question importante est celle de la valeur de la longueur dynamique observée à la transition. Cette valeur est certainement sous-estimée, et il serait bon d'obtenir des informations plus précises sur le comportement de cette longueur dans le voisinage immédiat de la transition. On aimerait en particulier pouvoir extraire précisément les dépendances fonctionnelles de cette longueur et du temps de relaxation associé à la densité, de manière à pouvoir comparer ces dépendances aux modèles existants. Nous avons dans ce but réalisé une expérience très lourde, et obtenus une trentaine de points sur une plage de fraction surfacique de l'ordre de 0.004 au voisinage de la transition. Ces données n'ont pas encore été analysées et ne figurent donc pas dans ce manuscrit. Une question reliée à celle-ci est celle de la dépendance de cette longueur dy-

### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

namique à la taille du système. L'analyse d'une telle dépendance permettrait de confirmer la nature critique de la transition que nous avons observée.

D'autre part, le système que nous avons étudié a révélé une phénoménologie très riche, dont les éléments les plus frappants se situent à des densités plus basses. On pense en particulier aux régimes de coexistence de phase, ou encore au régime d'intermittence donnant naissance au caractère non monotone du signal de pression moyenne. Un des points les plus mystérieux est la nature de cette intermittence et son interprétation dans le cadre que nous avons proposé plus haut. Nous avons commencé à caractériser systématiquement ce régime, mais les résultats obtenus sont encore trop préliminaires pour avoir une place dans ce manuscrit. Nous aimerions comprendre si ces régimes de coexistence spatiale et temporelle d'états dans notre système sont génériques et admettent une interprétation thermodynamique. Nous espérons pouvoir apporter des éléments de réponse à ces questions dans de futurs travaux.



### CHAPITRE 3: CAS DYNAMIQUE : A LA TRAVERSÉE DE LA TRANSITION DE BLOCAGE

# Conclusion

L'objectif de ce travail était double. D'une part, nous désirions savoir dans quelle mesure on peut s'inspirer des outils de la physique statistique pour décrire les propriétés des matériaux granulaires denses. D'autre part nous souhaitions élucider la nature de la transition de blocage dans ces systèmes. Nous avons pour cela étudié deux dispositifs expérimentaux qui nous ont renseigné sur ces questions de manière complémentaire.

Dans la première expérience, nous avons étudié les propriétés statistiques du volume interstitiel d'un empilement granulaire bidimensionnel modèle soumis à la gravité. Nous avons montré qu'il était difficile d'accéder à des quantités thermodynamiques dans ce système, car les empilements obtenus sont proches de l'isostaticité, et que le volume libre, sensible à la proximité de ce point critique, est corrélé sur de grandes distances. Nous avons cependant obtenu une caractérisation complète des propriétés statistiques du volume libre aux échelles de longueur que nous avons investiguées, et défini ainsi les paramètres intensifs pertinents pour cette variable.

Dans la seconde expérience, nous avons étudié les propriétés dynamiques d'une assemblée de grains en fonction de sa densité à la traversée de sa transition de blocage. Cette assemblée est semblable à celle de l'expérience précédente, mais horizontale et soumise à la vibration du support sur lequel elle repose dans son plan. D'abord, nous avons montré qu'au voisinage de cette transition, les déplacements typiques des grains sont très petits, et que la structure de l'assemblée n'évolue presque pas sur l'échelle de temps expérimentale. Nous avons cependant observé que les forces relaxent sur des échelles de temps

## CONCLUSION

beaucoup plus courtes, ce qui signale un découplage entre les degrés de liberté associés à ces deux phénomènes. Nous en avons conclu que la transition vitreuse et la transition de rigidité sont dans notre système des transitions distinctes, n'impliquant pas les mêmes mécanismes microscopiques. Nous conjecturons que ce découplage est dû au frottement statique. La question de l'apparition de la rigidité dans les verres structuraux, qui ne présentent pas de frottement statique, reste donc ouverte.

Nous avons ensuite caractérisé l'hétérogénéité de la dynamique des grains. Nous avons ainsi mis en évidence le fait qu'ils coopèrent dans leur relaxation, et que l'extension de ces réarrangements coopératifs est maximale à la transition de rigidité. Nous avons d'autre part identifié une échelle de temps caractérisant la relaxation de ces objets dans les propriétés de diffusion du système, et nous avons montré que ce temps caractéristique de super-diffusion est lui aussi maximum à la transition. Nous avons interprété ce comportement comme signalant la présence d'une transition de phase dynamique à l'apparition de la rigidité, pilotée par des courants de grains étendus spatialement. Nous avons de plus obtenu une prescription concernant les échelles de longueur auxquelles sonder la dynamique pour caractériser convenablement la longueur de corrélation associée à cette transition en mettant à jour une propriété de scaling vérifiée par la susceptibilité dynamique. Ces observations suggèrent que la longueur de corrélation dynamique est associée aux relaxations collectives des forces de frottement, qui favorisent l'apparition d'objets rigides dans la phase liquide et mous dans la phase solide, avec *percolation* des objets rigides mobilisant la friction à la transition.

Enfin, nous avons montré la validité d'une relation de fluctuation dynamique dans notre système. Cette relation permet de borner inférieurement l'amplitude des fluctuations spontanées de la dynamique par sa réponse à une variation de densité. La validité de cette relation suggère que la pondération des états accessibles au système présente une queue exponentielle dans leur volume. De plus, nous avons montré que la réponse de la dynamique de notre système à une variation de densité reproduit la monotonie de cette

## CONCLUSION

borne. Nous avons relié cette propriété à la réponse de la diffusion à une variation de densité, et établi ainsi un lien entre super-diffusion et hétérogénéités dynamiques. Enfin, cette borne s'avère être approximativement saturée, ce qui établit le rôle prépondérant de la densité dans les propriétés dynamiques du système que nous avons étudié.

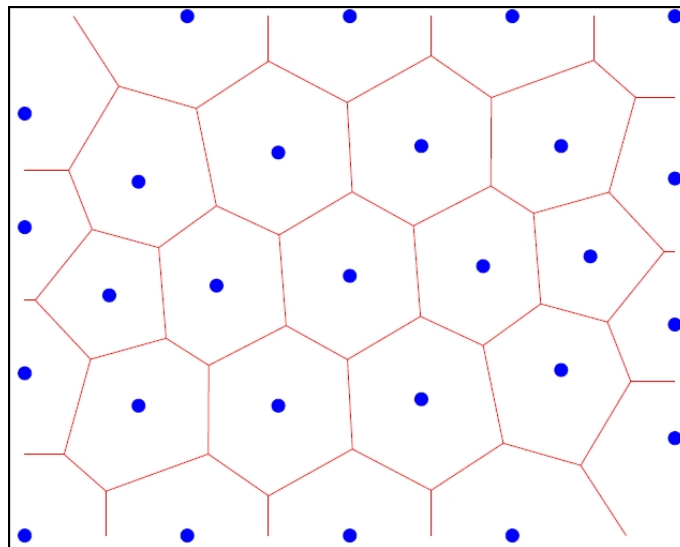
## CONCLUSION

# Annexe

## Cellules de Voronoï, cellules de Laguerre

Nous allons dans cette annexe donner les définitions et quelques exemples des notions géométriques que nous avons introduites au chapitre 2.

### Cellules de Voronoï



**FIG. 3.56:** Cellules de Voronoï (en rouge) associées à un ensemble de points (en bleu) dans le plan Euclidien.

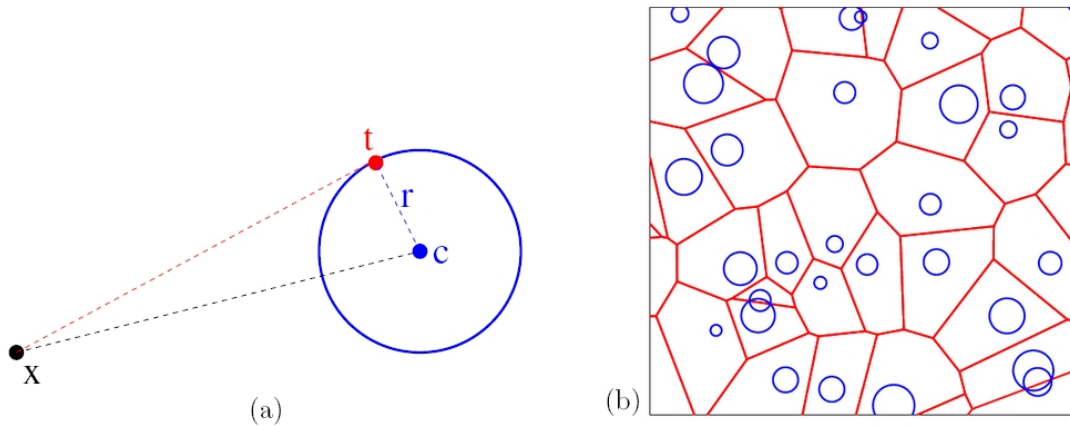
Soient  $\{p_i\}$  un ensemble de points d'un espace Euclidien  $\mathcal{E}$ . La cellule de Voronoï

$V_i$  associée au point  $p_i$  est l'ensemble des points  $x$  de  $\mathcal{E}$  qui sont plus près de  $p_i$  que des autres  $p_j$  au sens de la distance euclidienne.

$$V_i \equiv \{x \in \mathcal{E} | \forall j \neq i, \|x - p_i\| \leq \|x - p_j\|\} \quad (3.75)$$

Les cellules obtenues sont convexes, et leurs frontières sont délimitées par des hyperplans de  $\mathcal{E}$ . La tessellation de Voronoï associée à l'ensemble de points  $\{p_i\}$  est l'ensemble  $\{V_i\}$  des cellules de Voronoï. Elle constitue une partition de  $\mathcal{E}$ . Un exemple de tessellation de Voronoï dans le plan a été reportée sur la figure 3.56.

### Cellules de Laguerre



**FIG. 3.57:** (a) Puissance d'un point par rapport à une sphère, ici un cercle dans le plan euclidien. (b) Cellules de Laguerre associées à un ensemble de cercles.

Lorsque les objets considérés ne sont plus des points mais des sphères de rayons variables, la généralisation naïve de la notion de cellule de Voronoï, i.e. l'ensemble des points qui sont plus proche d'une des sphères que de toutes les autres, possède des frontières qui ne sont plus délimitées par des hyperplans. Le calcul du volume de telles régions étant compliqué, on préfère utiliser dans ce cas la notion de cellule de Laguerre qui restaure cette propriété. Pour cela, il faut introduire une distance non-euclidienne, appelée

## ANNEXE

puissance, d'un point à une sphère. On appelle puissance d'un point  $x$  par rapport à une sphère  $C$  de centre  $c$  et de rayon  $r$  le réel positif défini par

$$\pi_C(x) = \|x - c\|^2 - r^2 = \|x - t\|^2 \quad (3.76)$$

où le point  $t$  est représenté sur la figure 3.57(a). Le diagramme de Laguerre (ou diagramme de puissance) associé à un ensemble de sphères  $\{C_i\}$  de centres  $\{c_i\}$  et de rayons  $\{r_i\}$  est la partition de l'espace euclidien  $\mathcal{E}$  en cellules  $L_i$  associées à chaque sphère, une cellule  $L_i$  contenant l'ensemble des points  $x$  de  $\mathcal{E}$  dont la puissance par rapport à la sphère  $C_i$  est inférieure à la puissance par rapport aux autres sphères :

$$L_i \equiv \{x \in \mathcal{E} \mid \forall j \neq i, \pi_{C_i}(x) \leq \pi_{C_j}(x)\} \quad (3.77)$$

Un exemple de tessellation de Laguerre dans le plan euclidien est représenté sur la figure 3.57(b). Nous renvoyons à [107] pour plus de détails sur les nombreuses propriétés de ces tessellations.



ANNEXE

# Bibliographie

- [1] W. Götze and L. Sjögren.  $\beta$  relaxation at the glass transition of hard-spherical colloids. *Phys. Rev. A*, 43(10) :5442–5448, 1991.
- [2] A.D.L. Cipelletti. Length scale dependence of dynamical heterogeneity in a colloidal fractal gel. *Europhys. Lett*, 76(5) :972, 2006.
- [3] E.R. Weeks, J.C. Crocker, A.C. Levitt, A. Schofield, and D.A. Weitz. Three-Dimensional Direct Imaging of Structural Relaxation Near the Colloidal Glass Transition. *Science*, 287(5453) :627–631, 2000.
- [4] S.A. Khan, C.A. Schnepper, and R.C. Armstrong. Foam Rheology : III. Measurement of Shear Flow Properties. *Journal of Rheology*, 32 :69, 1988.
- [5] J. Brujic, P. Wang, G. Marty, C. Song, C. Briscoe, and H.A. Makse. Measuring the Coordination Number and Entropy of a 3D Jammed Emulsion Packing by Confocal Microscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :248001, 2007.
- [6] M. Cloitre, R. Borrega, and L. Leibler. Toothpaste Is a Glass. *Phys. Rev. Lett.*, 85(4819) :4819, 2000.
- [7] L.S. Young. What Are SRB Measures, and Which Dynamical Systems Have Them ? *Journal of Statistical Physics*, 108(5) :733–754, 2002.
- [8] T. Nagatani. Jamming transition in the traffic-flow model with two-level crossings. *Phys. Rev. E*, 48(5) :3290–3294, 1993.

## BIBLIOGRAPHIE

- [9] B. Eisenblätter, L. Santen, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. Jamming transition in a cellular automaton model for traffic flow. *Phys. Rev. E*, 57(2) :1309–1314, 1998.
- [10] J.N. Onuchic, Z. Luthey-Schulten, and P.G. Wolynes. Theory of protein folding : The Energy Landscape Perspective. *Annual Review of Physical Chemistry*, 48(1) :545–600, 1997.
- [11] M. Mezard, G. Parisi, and R. Zecchina. Analytic and Algorithmic Solution of Random Satisfiability Problems. *Science*, 297(5582) :812–815, 2002.
- [12] R. Mulet, A. Pagnani, M. Weigt, and R. Zecchina. Coloring Random Graphs. *Phys. Rev. Lett.*, 89(26) :268701, Dec 2002.
- [13] M. Mézard, M. Palassini, and O. Rivoire. Landscape of Solutions in Constraint Satisfaction Problems. *Phys. Rev. Lett.*, 95(20) :200202, 2005.
- [14] F. Krzakala and J. Kurchan. A Landscape Analysis of Constraint Satisfaction Problems, 2007.
- [15] C.S. O’Hern, L.E. Silbert, A.J. Liu, and S.R. Nagel. Jamming at zero temperature and zero applied stress : The epitome of disorder. *Phys. Rev. E*, 68(1) :11306, 2003.
- [16] C.A. Angell, K.L. Ngai, G.B. McKenna, P.F. McMillan, and S.W. Martin. Relaxation in glassforming liquids and amorphous solids. *Journal of Applied Physics*, 88 :3113, 2000.
- [17] L. Vanel and E. Clement. Pressure screening and fluctuations at the bottom of a granular column. *Eur. Phys. J. B*, 11 :525–533, 1999.
- [18] P. Claudin and J.P. Bouchaud. Static Avalanches and Giant Stress Fluctuations in Silos. *Phys. Rev. Lett.*, 78(2) :231–234, Jan 1997.
- [19] Y. Bertho, F. Giorgiutti-Dauphiné, and J.P. Hulin. Dynamical Janssen Effect on Granular Packing with Moving Walls. *Phys. Rev. Lett.*, 90(14) :144301, Apr 2003.

## BIBLIOGRAPHIE

- [20] R.A. Bagnold. Experiments on a Gravity-Free Dispersion of Large Solid Spheres in a Newtonian Fluid under Shear. *Royal Society of London Proceedings Series A*, 225 :49–63, August 1954.
- [21] M. Mezard, G. Parisi, and M. Virasoro. *Spin glass theory and beyond : An Introduction to the Replica Method and Its Applications*. World Scientific Lecture Notes in Physics, 1987.
- [22] L.F. Cugliandolo. Dynamics of glassy systems, 2002.
- [23] G. Biroli and J.P. Bouchaud. Diverging length scale and upper critical dimension in the Mode-Coupling Theory of the glass transition. *Europhys. Lett*, 67(1) :21–27, 2004.
- [24] J.T. Jenkins and S.B. Savage. A theory for the rapid flow of identical, smooth, nearly elastic, spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics Digital Archive*, 130 :187–202, 2006.
- [25] C.K.K. Lun and S.B. Savage. A simple kinetic theory for granular flow of rough, inelastic, spherical particles. *Journal of applied mechanics*, 54(1) :47–53, 1987.
- [26] N. Brilliantov and T. Poschel. Kinetic Theory of Granular Gases. *J. Phys. A : Math. Gen*, 38 :10257–10258, 2005.
- [27] D. Bonamy, F. Daviaud, and L. Laurent. Experimental study of granular surface flows via a fast camera : A continuous description. *Physics of fluids(1994)*, 14(5) :1666–1673, 2002.
- [28] H.M. Jaeger, C. Liu, and S.R. Nagel. Relaxation at the Angle of Repose. *Phys. Rev. Lett.*, 62(1) :40–43, 1989.
- [29] S.R. Nagel. Instabilities in a sandpile. *Reviews of Modern Physics*, 64(1) :321–325, 1992.
- [30] GDR MiDi. On dense granular flows. *The European Physical Journal E-Soft Matter*, 14(4) :341–365, 2004.

## BIBLIOGRAPHIE

- [31] H.A. Makse, N. Gland, D.L. Johnson, and L. Schwartz. Granular packings : Non-linear elasticity, sound propagation, and collective relaxation dynamics. *Phys. Rev. E*, 70(6) :61302, 2004.
- [32] W.G. Ellenbroek, E. Somfai, W. van Saarloos, and M. van Hecke. Force Response as a Probe of the Jamming Transition. *Physica A*, 325 :19–25, 2003.
- [33] W.G. Ellenbroek, E. Somfai, M. van Hecke, and W. van Saarloos. Critical Scaling in Linear Response of Frictionless Granular Packings near Jamming. *Phys. Rev. Lett.*, 97(25) :258001, 2006.
- [34] S.R. Dahl, C.M. Hrenya, V. Garzó, and J.W. Dufty. Kinetic temperatures for a granular mixture. *Phys. Rev. E*, 66(4) :041301, Oct 2002.
- [35] J.P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of Modern Physics*, 57(3) :617–656, 1985.
- [36] S.F. Edwards and R.B.S. Oakeshott. Theory of Powders. *Physica A*, 157 :1080–1090, 1989.
- [37] P.T. Metzger. Granular contact force density of states and entropy in a modified Edwards ensemble. *Phys. Rev. E*, 70(5) :51303, 2004.
- [38] E. Bertin, O. Dauchot, and M. Droz. Temperature in Nonequilibrium Systems with Conserved Energy. *Phys. Rev. Lett.*, 93(23) :230601, 2004.
- [39] E. Bertin, O. Dauchot, and M. Droz. Nonequilibrium temperatures in steady-state systems with conserved energy. *Phys. Rev. E*, 71(4) :46140, 2005.
- [40] E. Bertin, O. Dauchot, and M. Droz. Definition and Relevance of Nonequilibrium Intensive Thermodynamic Parameters. *Phys. Rev. Lett.*, 96(12) :120601, 2006.
- [41] B. Derrida, J.L. Lebowitz, and E.R. Speer. Exact Free Energy Functional for a Driven Diffusive Open Stationary Nonequilibrium System. *Phys. Rev. Lett.*, 89(3) :30601, 2002.

## BIBLIOGRAPHIE

- [42] J.C. Maxwell. On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames. *Philosophical Magazine*, 27(294) :598–604, 1864.
- [43] M. Wyart. On the rigidity of amorphous solids. *Ann. Phys. Fr.*, 30(3) :1–96, 2005.
- [44] M. Wyart. On the Rigidity of Amorphous Solids. *eprint arXiv : 0512155v1*, 2005.
- [45] L.E. Silbert, A.J. Liu, and S.R. Nagel. Vibrations and Diverging Length Scales Near the Unjamming Transition. *Phys. Rev. Lett.*, 95(9) :98301, 2005.
- [46] L.E. Silbert, A.J. Liu, and S.R. Nagel. Structural signatures of the unjamming transition at zero temperature. *Phys. Rev. E*, 73(4) :41304, 2006.
- [47] T.S. Majmudar, M. Sperl, S. Luding, and R.P. Behringer. The Jamming Transition in Granular Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :058001, 2007.
- [48] E. Somfai, M. van Hecke, W.G. Ellenbroek, K. Shundyak, and W. van Saarloos. Critical and non-critical jamming of frictional grains. *Phys. Rev. E*, 75(2) :20301, 2007.
- [49] C. Dasgupta, A.V. Indrani, S. Ramaswami, and M.K Phani. Is there a growing correlation length near the glass transition? *Europhys. Lett. D*, 15 :307, 1991.
- [50] C. Donati, S. Franz, S.C. Glotzer, and G. Parisi. Theory of non-linear susceptibility and correlation length in glasses and liquids. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 307 :215–224, 2002.
- [51] S. Franz and G. Parisi. On non-linear susceptibility in supercooled liquids. *J. Phys. : Condens. Matter*, 12(29) :6335–6342, 2000.
- [52] P.G. Debenedetti and F.H. Stillinger. Supercooled liquids and the glass transition. *Nature*, 410(6825) :259–67, 2001.
- [53] E. Dutra Zanutto. Do cathedral glasses flow? *American Journal of Physics*, 66(5) :392–395, 1998.
- [54] V. Lubchenko and P.G. Wolynes. Theory of Structural Glasses and Supercooled Liquids. *Annu. Rev. Phys. Chem.*, 2006.

## BIBLIOGRAPHIE

- [55] C.A. Angell. The Old Problems of Glass and the Glass Transition, and the Many New Twists. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 92(15) :6675–6682, 1995.
- [56] W. Kob and J.L. Barrat. Aging Effects in a Lennard-Jones Glass. *Phys. Rev. Lett.*, 78(24) :4581–4584, Jun 1997.
- [57] D. El Masri, M. Pierno, L. Berthier, and L. Cipelletti. Aging and ultra-slow equilibration in concentrated colloidal hard spheres. *Arxiv Preprint cond-mat/0506527*, 2005.
- [58] M.D. Ediger, C.A. Angell, and S.R. Nagel. Supercooled liquids and glasses. *J. Phys. Chem.*, 100(31) :13200–13212, 1996.
- [59] J.P. Bouchaud, L. F. Cugliandolo, J. Kurchan, and M. Mezard. Mode-Coupling Approximations, Glass Theory and Disordered Systems. *Physica A*, 226 :243, 1996.
- [60] G. Adam and J.H. Gibbs. On the Temperature Dependence of Cooperative Relaxation Properties in Glass-Forming Liquids. *The Journal of Chemical Physics*, 43 :139, 2004.
- [61] F. Ritort and P. Sollich. Glassy dynamics of kinetically constrained models. *Advances in Physics*, 52(4) :219–342, 2003.
- [62] B. Derrida. Random-energy model : An exactly solvable model of disordered systems. *Phys. Rev. B*, 24(5) :2613–2626, 1981.
- [63] S. Sastry. The relationship between fragility, configurational entropy and the potential energy landscape of glass-forming liquids. *Nature*, 409(6817) :164–167, 2001.
- [64] R. Monasson. Structural Glass Transition and the Entropy of the Metastable States. *Phys. Rev. Lett.*, 75(15) :2847–2850, 1995.

## BIBLIOGRAPHIE

- [65] L. Berthier, G. Biroli, J.P. Bouchaud, W. Kob, K. Miyazaki, and D. Reichman. Spontaneous and induced dynamic fluctuations in glass-formers I : General results and dependence on ensemble and dynamics. *J.Chem.Phys.*, 126 :184503, 2007.
- [66] P. Philippe and D. Bideau. Compaction dynamics of a granular medium under vertical tapping. *Europhysics Letters*, 60(5) :677–683, 2002.
- [67] M. Nicolas, P. Duru, and O. Pouliquen. Compaction of a granular material under cyclic shear. *The European Physical Journal E-Soft Matter*, 3(4) :309–314, 2000.
- [68] J.B. Knight, C.G. Fandrich, C.N. Lau, H.M. Jaeger, and S.R. Nagel. Density relaxation in a vibrated granular material. *Phys. Rev. E*, 51(5) :3957–3963, 1995.
- [69] S. Shtrikman and E.P. Wohlfarth. The theory of the Vogel-Fulcher law of spin glasses. *Physics Letters A*, 85(8-9) :467–470, 1981.
- [70] A. Kabla and G. Debrégeas. Contact Dynamics in a Gently Vibrated Granular Pile. *Phys. Rev. Lett.*, 92(3) :35501, 2004.
- [71] G. Marty and O. Dauchot. Subdiffusion and Cage Effect in a Sheared Granular Material. *Phys. Rev. Lett.*, 94(1) :15701, 2005.
- [72] C. Bennemann, C. Donati, J. Baschnagel, and S.C. Glotzer. Growing range of correlated motion in a polymer melt on cooling towards the glass transition. *Nature(London)*, 399(6733) :246–249, 1999.
- [73] B. Doliwa and A. Heuer. Cooperativity and spatial correlations near the glass transition : Computer simulation results for hard spheres and disks. *Phys. Rev. E*, 61(6) :6898–6908, 2000.
- [74] S.C. Glotzer, V.N. Novikov, and T. Schröder. Time-dependent, four-point density correlation function description of dynamical heterogeneity and decoupling in supercooled liquids. *The Journal of Chemical Physics*, 112(2) :509, 2000.



## BIBLIOGRAPHIE

- [75] C. Toninelli, M. Wyart, L. Berthier, G. Biroli, and J.P. Bouchaud. Dynamical susceptibility of glass formers : Contrasting the predictions of theoretical scenarios. *Phys. Rev. E*, 71(4) :41505, 2005.
- [76] O. Dauchot, G. Marty, and G. Biroli. Dynamical Heterogeneity Close to the Jamming Transition in a Sheared Granular Material. *Phys. Rev. Lett.*, 95(26) :265701, 2005.
- [77] H.A. Makse and J. Kurchan. Testing the thermodynamic approach to granular matter with a numerical model of a decisive experiment. *Nature*, 415(6872) :614–7, 2002.
- [78] G. D’Anna and G. Gremaud. The jamming route to the glass state in weakly perturbed granular media. *Nature*, 413(6854) :407–409, 2001.
- [79] P. Mayor, A. Barrat, V. Loreto, and F. Nori. Observing brownian motion in vibration-fluidized granular matter. *Nature*, 424 :909–912, 2003.
- [80] Giorgio Parisi. Off-equilibrium fluctuation-dissipation relation in fragile glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 79(19) :3660–3663, Nov 1997.
- [81] L.F. Cugliandolo, J. Kurchan, and L. Peliti. Energy flow, partial equilibration, and effective temperatures in systems with slow dynamics. *Phys. Rev. E*, 55(4) :3898–3914, 1997.
- [82] L.F. Cugliandolo and J. Kurchan. Aging and Effective Temperatures in the Low Temperature Mode-Coupling Equations. *Progress of Theoretical Physics Supplement*, (126) :407–414, 1997.
- [83] JL Barrat and W. Kob. Fluctuation-dissipation ratio in an aging Lennard-Jones glass. *Europhysics Letters*, 46(5) :637–642, 1999.
- [84] R. Di Leonardo, L. Angelani, G. Parisi, and G. Ruocco. Off-Equilibrium Effective Temperature in Monatomic Lennard-Jones Glass. *Phys. Rev. Lett.*, 84(26) :6054–6057, 2000.

## BIBLIOGRAPHIE

- [85] L. Bellon, S. Ciliberto, and C. Laroche. Violation of the fluctuation-dissipation relation during the formation of a colloidal glass. *Europhysics Letters*, 53(4) :511–517, 2001.
- [86] V. Colizza, A. Barrat, and V. Loreto. Definition of temperature in dense granular media. *Phys. Rev. E*, 65(5) :050301, May 2002.
- [87] K. Feitosa and N. Menon. Fluidized Granular Medium as an Instance of the Fluctuation Theorem. *Phys. Rev. Lett.*, 92(16) :164301, 2004.
- [88] L.F. Cugliandolo, J. Kurchan, and L. Peliti. Energy flow, partial equilibration, and effective temperatures in systems with slow dynamics . *Phys. Rev. E*, 55(4) :3898–3914, Apr 1997.
- [89] D. Howell, R. P. Behringer, and C. Veje. Stress Fluctuations in a 2D Granular Couette Experiment : A Continuous Transition. *Phys. Rev. Lett.*, 82(26) :5241–5244, Jun 1999.
- [90] E.R. Nowak, J.B. Knight, E. Ben-Naim, H.M. Jaeger, and S.R. Nagel. Density fluctuations in vibrated granular materials. *Phys. Rev. E*, 57(2) :1971, 1998.
- [91] M. Schröter, D.I. Goldman, and H.L. Swinney. Stationary state volume fluctuations in a granular medium. *Phys. Rev. E*, 71(3) :30301, 2005.
- [92] A. Mehta and S.F. Edwards. Statistical mechanics of powder mixtures. *Physica A*, 157 :1091–1100, 1989.
- [93] A. Barrat, J. Kurchan, V. Loreto, and M. Sellitto. Edwards Measures for Powders and Glasses. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :5034–5037, 2000.
- [94] D.S. Dean and A. Lefevre. Steady state behavior of mechanically perturbed spin glasses and ferromagnets. *Phys. Rev. E*, 64 :046110, 2001.
- [95] G. DeSmedt, C. Godreche, and J.M. Luck. Jamming, freezing and metastability in one-dimensional spin systems. *Eur. Phys. J. B*, 27 :363–380, 2002.

## BIBLIOGRAPHIE

- [96] C. Godrèche and J.M. Luck. Metastability in zero-temperature dynamics : Statistics of attractors. *J. Phys. Cond. Matt.*, 2005. to appear, condmat/0412077.
- [97] P. Richard, P. Philippe, F. Barbe, S. Bourlès, X. Thibault, and D. Bideau. Analysis by x-ray microtomography of a granular packing undergoing compaction. *Phys. Rev. E*, 68(2) :20301, 2003.
- [98] T. Aste, M. Saadatfar, and T.J. Senden. Geometrical structure of disordered sphere packings. *Physical Review E*, 71(6) :61302, 2005.
- [99] J.P. Bouchaud. Granular media : some ideas from statistical physics. *Preprint*, 2002.
- [100] R. Blumenfeld and SF Edwards. Geometric partition functions of cellular systems : Explicit calculation of the entropy in two and three dimensions. *The European Physical Journal E-Soft Matter*, 19(1) :23–30, 2006.
- [101] A. Donev, F.H. Stillinger, and S. Torquato. Unexpected Density Fluctuations in Jammed Disordered Sphere Packings. *Phys. Rev. Lett.*, 95(9) :90604, 2005.
- [102] E. Somfai, M. van Hecke, W.G. Ellenbroek, and W. van Saarloos. Emergence of a Critical Scale in Jamming of Frictional Grains. *Arxiv preprint cond-mat/0510506*, 2005.
- [103] H.A. Makse, G.W. Davies, S. Havlin, P.C. Ivanov, P.R. King, and H.E. Stanley. Long-range correlations in permeability fluctuations in porous rock. *Phys. Rev. E*, 54(4) :3129–3134, 1996.
- [104] C. Godrèche, I. Kostov, and I. Yekutieli. Topological correlations in cellular structures and planar graph theory. *Phys. Rev. Lett.*, 69(18) :2674–2677, 1992.
- [105] C.S. O’Hern, S.A. Langer, A.J. Liu, and S.R. Nagel. Random Packings of Frictionless Particles. *Phys. Rev. Lett.*, 88(7) :075507, Jan 2002.

## BIBLIOGRAPHIE

- [106] F. Lechenault, F. da Cruz, O. Dauchot, and E. Bertin. Free volume distributions and compactivity measurement in a bidimensional granular packing. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2006.
- [107] A. Okabe, B. Boots, and K. Sugihara.
- [108] S.T. Bramwell, P.C.W. Holdsworth, and J.F. Pinton. Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena. *Nature*, 396(6711) :552, 1998.
- [109] J.F. Pinton, P.C.W. Holdsworth, and R. Labbé. Power fluctuations in a closed turbulent shear flow. *Phys. Rev. E*, 60(3) :2452–2455, 1999.
- [110] S.T. Bramwell, K. Christensen, J.Y. Fortin, P.C.W. Holdsworth, H.J. Jensen, S. Lise, J.M. López, M. Nicodemi, J.F. Pinton, and M. Sellitto. Universal Fluctuations in Correlated Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 84(17) :3744–3747, 2000.
- [111] S. Aumaître, S. Fauve, S. McNamara, and P. Poggi. Power injected in dissipative systems and the fluctuation theorem. *The European Physical Journal B-Condensed Matter*, 19(3) :449–460, 2001.
- [112] F. Jarai-Szabo and Z. Neda. On the size distribution of Poisson Voronoi cells. Arxiv preprint cond-mat/0406116, 2004.
- [113] T. Padmanabhan. Statistical mechanics of gravitating systems. *Physics Reports*, 188(5) :285–362, 1990.
- [114] C.S. O’Hern, S.A. Langer, A.J. Liu, and S.R. Nagel. Random Packings of Frictionless Particles. *Phys. Rev. Lett.*, 88(7) :75507, 2002.
- [115] E. Liniger and R. Raj. Packing and Sintering of Two-Dimensional Structures Made From Bimodal Particle Size Distributions. *J. Am. Ceram. Soc.*, 70(11) :843–849, 1987.
- [116] D. Blair and E. Dufresne. Particule Tracking Code. Harvard, Weitz Lab.

## BIBLIOGRAPHIE

- [117] V. Trappe, E. Pitard, L. Ramos, A. Robert, H. Bissig, and L. Cipelletti. X-Photon Correlation Spectroscopy investigation of q-dependent dynamical heterogeneity in a colloidal gel, 2007.
- [118] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J.P. Bouchaud, and P. Claudin. Jamming, Force Chains, and Fragile Matter. *Phys. Rev. Lett.*, 81(9) :1841–1844, Aug 1998.
- [119] E.R. Nowak, J.B. Knight, M.L. Povinelli, H.M. Jaeger, and S.R. Nagel. Reversibility and irreversibility in the packing of vibrated granular material. *Powder Technology*, 94(1) :79–83, 1997.
- [120] F. Lechenault, O. Dauchot, G. Biroli, and JP Bouchaud. Critical scaling and heterogeneous superdiffusion across the Jamming transition. *eprint arXiv : 0706.1531*, 2007.
- [121] P. Gallo, F. Sciortino, P. Tartaglia, and S.H. Chen. Slow Dynamics of Water Molecules in Supercooled States. *Phys. Rev. Lett.*, 76(15) :2730–2733, Apr 1996.
- [122] B. Doliwa and A. Heuer. Cage Effect, Local Anisotropies, and Dynamic Heterogeneities at the Glass Transition : A Computer Study of Hard Spheres. *Phys. Rev. Lett.*, 80(22) :4915–4918, Jun 1998.
- [123] C. Donati, S.C. Glotzer, P.H. Poole, W. Kob, and S.J. Plimpton. Spatial correlations of mobility and immobility in a glass-forming Lennard-Jones liquid. *Phys. Rev. E*, 60(3) :3107–3119, 1999.
- [124] A.R. Abate and D.J. Durian. Approach to jamming in an air-fluidized granular bed. *Phys. Rev. E*, 74(3), 2006.
- [125] P.M. Reis, R.A. Ingale, and M.D. Shattuck. Caging dynamics in a granular fluid. *Arxiv preprint cond-mat/0610489*, 2006.
- [126] E.R. Weeks and D.A. Weitz. Properties of Cage Rearrangements Observed near the Colloidal Glass Transition. *Phys. Rev. Lett.*, 89(9) :95704, 2002.

## BIBLIOGRAPHIE

- [127] B. Doliwa and A. Heuer. The origin of anomalous diffusion and non-Gaussian effects for hard spheres : analysis of three-time correlations. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 11(10A) :A277–A283, 1999.
- [128] W. Kob and J.L. Barrat. Fluctuations, response and aging dynamics in a simple glass-forming liquid out of equilibrium. *The European Physical Journal B-Condensed Matter*, 13(2) :319–333, 2000.
- [129] L. Berthier, L.F. Cugliandolo, and J.L. Iguain. Glassy systems under time-dependent driving forces : Application to slow granular rheology. *Phys. Rev. E*, 63(5) :51302, 2001.
- [130] M.H. Quenouille. Notes on Bias in Estimation. *Biometrika*, 43(3/4) :353–360, 1956.
- [131] W. Janke. Statistical Analysis of Simulations : Data Correlations and Error Estimation. *Quantum Simulations of Complex Many-Body Systems : from Theory to Algorithms*, pages 423–445.
- [132] R.G. Miller. The jackknife-a review. *Biometrika*, 61(1) :1, 1974.
- [133] B. Efron. Bootstrap Methods : Another Look at the Jackknife. *The Annals of Statistics*, 7(1) :1–26, 1979.
- [134] L. Berthier, G. Biroli, J.P. Bouchaud, L. Cipelletti, D. El Masri, D. L'Hote, F. Ladieu, and M. Pierno. Direct experimental evidence of a growing length scale accompanying the glass transition. *Science(Washington, D. C.)*, 310(5755) :1797–1800, 2005.
- [135] G. Gallavotti. *Statistical Mechanics : A Short Treatise*. Springer, 1999.
- [136] A.S. Keys, A.R. Abate, S.C. Glotzer, and D.J. Durian. Measurement of growing dynamical length scales and prediction of the jamming transition in a granular material. *Nature Physics*, 3(4) :260–264, 2007.

## BIBLIOGRAPHIE

- [137] M. Sellitto, G. Biroli, and C. Toninelli. Facilitated spin models on Bethe lattice : Bootstrap percolation, mode-coupling transition and glassy dynamics. *Europhysics Letters*, 69(4) :496–502, 2005.
- [138] J.M. Schwarz, A.J. Liu, and L.Q. Chayes. The onset of jamming as the sudden emergence of an infinite k-core cluster. *Europhysics Letters*, 73(4) :560–566, 2006.
- [139] C. Toninelli, G. Biroli, and D.S. Fisher. Jamming Percolation and Glass Transitions in Lattice Models. *Phys. Rev. Lett.*, 96(3) :35702, 2006.