HAL
open science

Brisure d'Isospin et Corrections Radiatives au processus Kl4

Vesna Cuplov

To cite this version:

Vesna Cuplov. Brisure d'Isospin et Corrections Radiatives au processus Kl4. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2004. Français. NNT : . tel-00201477

HAL Id: tel-00201477

https://theses.hal.science/tel-00201477v1

Submitted on 22 Jun 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de la Méditerranée
Faculté des Sciences de Luminy
Centre de Physique Théorique

THÈSE de DOCTORAT

Brisure d'isospin et Corrections radiatives au processus $K_{\ell 4}$

présentée et soutenue publiquement le

30 avril 2004

par

Vesna Cuplov

pour l'obtention du

Doctorat de l'Université de la Méditerranée

devant la Commission d'Examen

Michel Perrottet	Président du jury
Marc Knecht	Directeur de Thèse
Brigitte Bloch-Devaux	Rapporteur
Hagop Sazdjian	Rapporteur
Gérard Marel	

Centre de Physique Théorique, Centre National pour la Recherche Scientifique, Luminy Case 907, 13288 Marseille Cedex 09, France.
- Unité Mixte de Recherche 6207 associée au CNRS -

A mes parents, Denise et Raif
A René Turlay

Table des matières

Introduction **ix**

1 De la chromo-dynamique quantique à la théorie chirale **1**

1.1 La constante de couplage fort 1

1.2 La symétrie de la couleur: $SU(3)_c$ 3

1.3 La symétrie de la saveur ou *Eightfold way* 3

1.4 Le lagrangien de QCD 5

1.5 Les symétries de QCD dans la limite chirale 6

1.6 Les courants et les charges associés à la symétrie chirale 9

2 Le lagrangien chiral **11**

2.1 La théorie effective 11

2.2 Le formalisme de CCWZ appliqué à la QCD 12

2.3 Le lagrangien chiral et la brisure d'isospin 13

2.4 Les propriétés du lagrangien chiral 15

2.5 La matrice des champs de mésons 16

2.6 Effet de la brisure d'isospin 18

3 Amplitude de désintégration faible **21**

3.1 L'interaction faible 22

3.2 Transformations de Lorentz et de parité 23

3.3 Le courant hadronique $K_{\ell 2}$ 24

3.4 Le courant hadronique $K_{\ell 3}$ 26

3.5 Le courant hadronique $K_{\ell 4}$ 27

5.1 Facteur de forme tensoriel 29

3.6 Résumé 29

4 Le cadre de travail de $K_{\ell 4}$ **31**

4.1 La cinématique de $K_{\ell 4}$ 32

4.2 L'élément de matrice 34

4.3 Le taux de désintégration 36

4.4 Le déphasage pion-pion 39

5 $K_{\ell 4}$ à l'ordre le plus bas 43

5.1 Le canal chargé $K^+ \to \pi^+ \, \pi^- \, \ell^+ \, \nu_\ell$ 44

5.2 Le canal neutre $K^+ \to \pi^o \, \pi^o \, \ell^+ \, \nu_\ell$ 47

5.3 Le canal mixte $K^o \to \pi^o \, \pi^- \, \ell^+ \, \nu_\ell$ 48

5.4 Résumé et numérique 50

4.1 Statut expérimental 51

6 Corrections à une boucle électromagnétiques 55

6.1 Motivations 55

6.2 Résultats à une boucle de photon 57

2.1 Facteur de forme tensoriel T 57

2.2 Facteurs de forme F et G 58

7 Les corrections d'interaction forte 73

7.1 Diagramme tadpole 73

7.2 Diagrammes contribuants aux corrections d'unitarité 75

8 Les divergences ultra-violettes 81

8.1 Calcul des contre termes 81

1.1 Contributions aux facteurs de forme F, G et R 84

8.2 Renormalisation 85

2.1 Renormalisation du champ et de la masse 85

2.2 Masse et renormalisation du pion chargé 87

2.3 Masse et renormalisation du kaon chargé 91

2.4 Masse et renormalisation du lepton 95

8.3 Contre termes et renormalisation des champs 96

3.1 Annulation des divergences ultra-violettes 97

9 Les divergences infra-rouges 99

9.1 Emission de photons mous 99

9.2 Amplitude $K_{\ell 4}$ radiatif 100

9.3 Le taux de désintégration $K_{\ell 4}$ radiatif 101

3.1 Intégration du photon 102

9.4 La divergence infra-rouge dans $d\Gamma_{K_{\ell 4}}$ 104

10 Analyse numérique 107

10.1 Motivations et résultats obtenus 107

10.2 Outils pour le numérique 108

10.3 Taux à la limite d'isospin 110

3.1 A l'ordre le plus bas . . . 110
3.2 A l'ordre d'une boucle . . . 111
10.4 Brisure d'isospin et corrections électromagnétiques . . . 112
10.5 Les facteurs de forme F et G . . . 113
5.1 Comportement en fonction de s_π . . . 114
5.2 Comportement en fonction de s_ℓ . . . 115

Conclusions et perspectives **117**

11 Formulaire **119**
11.1 Gammalogie . . . 119
11.2 Intégrale à D dimensions . . . 119
11.3 La fonction Gamma . . . 119
11.4 Paramétrisation de Feynman . . . 120
11.5 Formulaire d'intégrales - intégration par parties . . . 120

A Les constantes de structure de $SU(3)$ **123**

B La cinématique **125**

C Les fonctions **129**
C.1 La fonction à un point . . . 129
C.2 La fonction à deux points . . . 130
2.1 La fonction scalaire . . . 130
2.2 Structure analytique de la fonction scalaire . . . 131
2.3 L'intégrale vectorielle . . . 135
2.4 L'intégrale tensorielle . . . 135
C.3 La fonction à trois points . . . 136
3.1 L'intégrale scalaire . . . 136
3.2 Comportement infra-rouge . . . 136
3.3 Calcul de la partie infra-rouge . . . 137
3.4 L'intégrale vectorielle . . . 138
3.5 L'intégrale tensorielle . . . 139
C.4 La fonction à quatre points . . . 139
4.1 L'intégrale scalaire . . . 139
4.2 Les décompositions vectorielle et tensorielle . . . 146

Bibliographie **147**

Index **153**

Introduction

La théorie de l'interaction forte [1, 2] est une théorie de jauge où les acteurs (degrés de liberté) sont les quarks et les gluons. Cette théorie est la chromo-dynamique quantique[1] (QCD). A haute énergie (respectivement courte distance) une approche perturbative en fonction de l'intensité de l'interaction (ou constante de couplage fort) reproduit un grand nombre de résultats expérimentaux. Ce régime perturbatif est valide pour des distances de l'ordre du dixième de femtomètre ou moins. A basse énergie (respectivement longue distance) il est difficile d'extraire les informations expérimentales de QCD.

Le lagrangien de QCD s'appuie sur le groupe de symétrie locale de couleur $SU(3)_{\mathrm{c}}$ généré par les matrices de Gell-Mann. Les quarks [3] sont dans la représentation fondamentale de ce groupe, les gluons dans la représentation adjointe. Dans l'espace des saveurs (u, d, s ... t), ce lagrangien possède une symétrie globale qui est décrite par le groupe

$$G_{\mathrm{saveur}} = U(1)_{\mathrm{u}} \times U(1)_{\mathrm{d}} \times \ldots \times U(1)_{\mathrm{t}}.$$

Si les trois saveurs légères sont dégénérées, c'est-à-dire que les masses des quarks u, d et s ont des valeurs égales, alors au niveau du lagrangien de QCD il apparaît la symétrie $SU(3)_{\mathrm{v}}$. Si de plus, nous nous plaçons dans la limite où les masses des quarks légers u, d et s sont nulles (limite chirale) alors le lagrangien de QCD est invariant sous le groupe de symétrie chiral $G = SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}} \times U(1)_{\mathrm{v}}$, chaque saveur de quarks possédant une symétrie globale de phase $U(1)_{\mathrm{v}}$. A la limite chirale les secteurs légers gauche et droit se découplent. L'état fondamental (le vide) n'est pas invariant sous G et la symétrie chirale n'est alors pas apparente dans le spectre des particules. Dans ce spectre, on constate que les mésons peuvent être groupés en multiplets quasiment dégénérés en masse, par exemple des multiplets d'isospin comme (π^-, π^o, π^+). Ces multiplets se regroupent de même en octets (π, K, η) ou décuplets $(\Delta, \Sigma, \Xi, \Omega)$. On remarque que la symétrie $SU(3)_{\mathrm{v}}$ a des représentations irréductibles octets et décuplets. Comme le spectre hadronique ne reflète pas la symétrie chirale du lagrangien de QCD, le vide de QCD dans la limite chirale n'est pas invariant sous les transformations engendrées par les charges axiales: [4, 5, 6]

$$Q^b_{\mathrm{A}}|0\rangle \neq 0 \qquad b = 1, \ldots 8$$

et la symétrie chirale $SU(3)_{\mathrm{L}} \times SU(3)_{\mathrm{R}}$ est brisée spontanément vers le sous groupe $SU(3)_{\mathrm{v}}$ engendré par les charges vectorielles: [7, 8]

$$Q^b_{\mathrm{V}}|0\rangle = 0 \qquad b = 0, \ldots 8.$$

D'après le théorème de Goldstone [9, 10], pour chaque charge conservée associée à une symétrie globale continue ne laissant pas le vide invariant, il apparaît dans le spectre de la théorie une particule de masse nulle ayant les mêmes nombres quantiques que la charge en question. On aura 8 bosons de Goldstone $|\pi^b(p)\rangle$ qui formeront un octet selon le groupe de symétrie résiduel $SU(3)_{\mathrm{v}}$ qui correspond à la symétrie non brisée, puisque les charges vectorielles annihilent le vide. De plus, ces bosons se couplent aux courants axiaux par la relation:

$$\langle 0|A^a_\mu(x)|\pi^b(p)\rangle = i\delta^{ab} F_o p_\mu e^{ip\cdot x},$$

[1] nom donné par Gell-Mann en 1973

où F_o , appelé paramètre d'ordre, est la valeur à la limite chirale de la constante de désintégration F_π du pion mesurée dans le processus $\pi \to \mu\nu$:

$$F_o = F_\pi|_{m_u,m_d,m_s\to 0}.$$

Les paramètres d'ordre chiraux permettent d'étudier la brisure spontanée de la symétrie chirale. Les deux paramètres d'ordre les plus intéressants sont F_o et le condensat de quarks $\langle\overline{q}q\rangle$. La non nullité de F_o est une condition nécessaire et suffisante pour la brisure spontanée de la symétrie chirale [11], alors que la non nullité des autres paramètres d'ordre ne fournit qu'une condition suffisante. F_o signale sans ambiguïté la brisure de la symétrie chirale et sa restauration. Le condensat de quarks est présent dans l'expression de toutes les observables au travers des masses des mésons

$$F_\pi{}^2 M_\pi^2 = -(m_u + m_d)\langle\overline{q}q\rangle^{(2)} + \mathcal{O}(m_q^2), \tag{1}$$

où $\langle\overline{q}q\rangle^{(2)}$ est le condensat de quarks dans la limite $m_u, m_d \to 0$ et m_s fixé. Cette formule relie un effet observable de la *brisure explicite* de la symétrie chirale, la masse des mésons pseudo-scalaires[2], au condensat de quarks qui témoigne de la *brisure spontanée* de celle-ci.

Pour étudier le mécanisme de la brisure spontanée de la symétrie chirale, il existe des expériences de basse énergie et de haute précision reliées à la diffusion $\pi\pi$ [12] via les désintégrations $K_{\ell 4}$. Il s'agit des expériences E865 [13, 14], DaΦne [15], Na48/2 [16] et KTeV [17]. L'expérience DIRAC elle s'intéresse à la durée de vie de l'atome pionique $\pi^+ - \pi^-$.

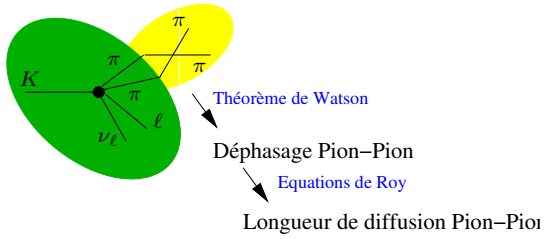
Afin d'analyser les résultats expérimentaux, nous utiliserons une théorie effective [18, 19, 20, 21]. La théorie des Perturbations Chirales (ChPT) [22, 23, 24, 25] est la théorie effective qui prend en compte les propriétés de QCD à basse énergie. Elle est basée sur le développement des fonctions de Green en puissance des moments externes p et des masses de quarks légers m_q. Cette théorie décrit les corrélateurs correspondants aux processus mis en jeu à basse énergie comme des séries en puissance des impulsions et des masses des quarks avec pour coefficients des combinaisons de paramètres d'ordre chiraux.
Nous avons isolé les degrés de liberté de notre théorie à basse énergie et déterminé les symétries qui la régissent. Il nous faut maintenant construire le lagrangien le plus général possible correspondant. Nous allons construire les termes de ce lagrangien comme un développement selon une puissance $(\frac{p}{\Lambda_H})^k$ avec Λ_H une échelle d'énergie hadronique de l'ordre du GeV. Plus le niveau de précision requis augmentera et plus il faudra de termes au lagrangien. Le lagrangien effectif contient un nombre infini de termes

$$\mathcal{L}_{\text{effectif}} = \mathcal{L}_{k=2} + \mathcal{L}_{k=4} + \mathcal{L}_{k=6} + \dots$$

Le premier terme du lagrangien sera $\mathcal{L}_2$ et à l'ordre le plus bas p^2 il correspond aux processus en arbre. L'ordre suivant p^4 correspond aux processus avec une boucle. Ces processus doivent être inclus et vont donner lieu à des divergences qu'il faudra renormaliser. On utilisera pour cela une régularisation qui respecte la symétrie chirale comme la régularisation dimensionnelle [26, 27, 28, 29, 30, 31] et un schéma de soustraction indépendant de masse comme le schéma de soustraction minimale [32]. La renormalisation des boucles nécessitera des contre termes donnés par le calcul de diagrammes en arbre dont les vertex sont déterminés par le terme $\mathcal{L}_4$ du lagrangien effectif [24, 33]. On peut donc absorber les divergences engendrées par des boucles grâce aux contre termes déjà présents dans le lagrangien effectif $\mathcal{L}_{\text{effectif}}$.

[2] C'est le terme de masses légères dans le lagrangien de QCD qui mélange les chiralités

Dans ma thèse, je me suis intéressée aux désintégrations semi-leptoniques du kaon en quatre corps, dont la nomenclature est $K_{\ell 4}$. Ces désintégrations possèdent des particularités mises en évidence dès 1957 [34, 35]. Ce type de désintégrations est une source importante de production



de paires de pions. A chaque désintégration $K_{\ell 4}$, il se produit dans l'état final une diffusion $\pi - \pi$. L'étude de ces désintégrations nous permet d'accéder à des informations sur l'interaction forte pion-pion à basse énergie comme le déphasage pion-pion par application du théorème de Watson [36] ou les longueurs de diffusion pion-pion en utilisant les équations de Roy [37].

Le mode de désintégration $K^+ \to \pi^+\pi^-e^+\nu_e$ a été observé expérimentalement en 1962 [38] auprès du Bevatron au Lawrence Radiation Laboratory. Lors de cette expérience, 30 000 kaons chargés ont été examinés et un événement K_{e4}, schématisé dans la FIGURE 1, a été observé. Les premières expériences K_{e4} dans les années 60 n'avaient observé chacunes que quelques centaines d'événements [39, 40, 41, 42, 43] et avaient mesuré le taux de désintégration K_{e4} avec une erreur systématique importante, comme le montre la TABLE 1. Il a fallu attendre 1977 lorsque la

Référence	nombre d'événements	taux de désintégration (s^{-1})
Birge et al.	69	$(2.9 \pm 0.6)\ 10^3$
Ely et al.	269	$(2.6 \pm 0.3)\ 10^3$
Schweinberger et al.	115	$(3.2 \pm 0.4)\ 10^3$
Bourquin et al.	1609	$(3.32 \pm 0.31)\ 10^3$
Beier et al.	8141	

TABLE 1: Taux de désintégration K_{e4} mesurés dans les premières expériences.

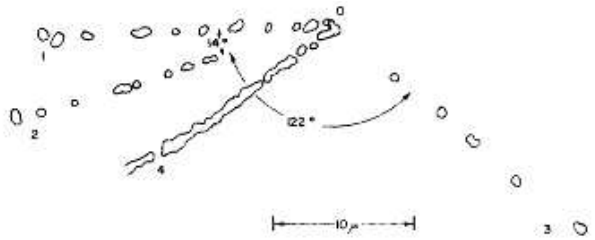


FIGURE 1: Evenement $K_{\ell 4}$ observé en 1962 auprès du Bevatron du Lawrence Radiation Laboratory. Cette figure provient de l'article *Evidence for* $K^+ \to \pi^+\pi^-e^+\nu$ *decay mode* de Koller, Taylor, Huetter et Stamer [38]. La trace 4 est le méson K^+ qui se désintègre au repos en 0, la trace 3 est identifiée comme un électron et les traces 1 et 2 sont des pions chargés.

collaboration Genève-Saclay [44, 45] a mesuré le rapport de branchement de K_{e4} avec un lot de 30000 événements. Rosselet *et al.* ont obtenu un taux de désintégration

$$\Gamma_{K_{e4}} \quad = \quad (3.26 \pm 0.15)\ 10^3 \mathrm{s}^{-1}.$$

Depuis, il n'y a pas eu de nouvelles données accessibles jusqu'à l'expérience E865 à Brookhaven en 2001 où 400000 événements K_{e4} ont été collectés [13, 14]. Le taux de désintégration est

$$\Gamma_{K_{e4}} \quad = \quad (3.321 \pm 0.089)\ 10^3 \mathrm{s}^{-1}.$$

D'après les valeurs des temps de vie du kaon chargé et neutre, la TABLE 2 résume les valeurs des rapports de branchements et des taux de désintégrations $K_{\ell 4}$ du *Particle Data Group* [46]. Cette

Canal $K_{\ell 4}$	rapport de branchement (10^{-5})	taux de désintégration (s^{-1})
$K^+ \to \pi^+\pi^- e^+\nu_e$	4.08 ± 0.09	3294
$K^+ \to \pi^+\pi^- \mu^+\nu_\mu$	1.4 ± 0.9	1130
$K^+ \to \pi^o\pi^o e^+\nu_e$	2.1 ± 0.4	1710
$K^+ \to \pi^o\pi^o \mu^+\nu_\mu$	-	-
$K^o \to \pi^o\pi^- e^+\nu_e$	5.18 ± 0.29	1001
$K^o \to \pi^o\pi^- \mu^+\nu_\mu$	-	-

TABLE 2: Valeurs expérimentales des rapports de branchement et des taux de désintégration $K_{\ell 4}$.

augmentation de la précision due à un accroissement de la statistique nous amène naturellement à améliorer les précision théoriques sur les désintégrations $K_{\ell 4}$. Ceci peut être fait en évaluant les effets de la brisure d'isospin et en contrôlant de manière quantitative les effets *indésirables* parmi eux les corrections radiatives .

Mon travail de thèse est organisé de la manière suivante:

Dans un premier chapitre, nous expliciterons les symétries de la chromo-dynamique quantique qui est la théorie fondamentale des interactions fortes. Nous mettrons en évidence le besoin d'une théorie effective pour traiter le domaine de basse énergie. Cela nous amènera à étudier la chromo-dynamique quantique dans la limite chirale, où les masses des quarks les plus légers sont considérées comme petites par rapport à une énergie caractéristique de l'ordre du GeV.
Dans un second chapitre, nous travaillerons sur les désintégrations semi-leptoniques du kaon et nous donnerons les propriétés des facteurs de forme associés à ces désintégrations grâce aux transformations de Lorentz et de parité. Nous discuterons de la présence d'un facteur de forme tensoriel.
Dans le chapitre 3, nous détaillerons le cadre dans lequel les désintégrations $K_{\ell 4}$ évoluent. Nous y rappellerons les diverses propriétés de la cinématique engendrées par ce type de désintégrations. Nous trouverons notamment dans ce chapitre une expression complètement générale de l'élément de matrice pour les désintégrations $K_{\ell 4}$. Une partie sera consacrée au déphasage pion-pion, qui est accessible via la mesure du taux de désintégration $K_{\ell 4}$.
Le chapitre 4 traite du lagrangien effectif qui sera utilisé pour notre travail. Nous détaillerons l'inclusion de la brisure d'isospin dans celui-ci.
Le chapitre 5 est consacré au calcul des effets de la brisure d'isospin à l'ordre le plus bas pour les trois canaux de désintégration (chargé, neutre et mixte) associés à $K_{\ell 4}$. Nous y trouverons

notamment une étude numérique de ces effets.
Dans les chapitres 6 et 7, nous avons calculé les contributions à l'ordre d'une boucle (boucle de photon et boucle de méson préservant l'unitarité) aux facteurs de forme F et G.
Le chapitre 8 est consacré à l'étude des divergences ultra-violettes et au calcul des contre termes nécessaires à la renormalisation de ces divergences. On y traite la renormalisation de la masse et du champ des particules présentes dans la désintégration $K_{\ell 4}$ chargé.
Le chapitre 9 traite des divergences infra-rouges provenant des diagrammes avec boucle de photon. Ces divergences infra-rouges s'annulent au niveau des taux différentiels de désintégration lorsque l'on ajoute la contribution du taux de désintégration du processus avec émission de photon réel, $K_{\ell 4\gamma}$ ($K_{\ell 4}$ radiatif).
Finalement, le chapitre 10 donne une étude numérique des effets de la violation d'isospin et des corrections électromagnétiques au processus $K_{\ell 4}$. Enfin, nous conclurons ce travail de thèse et discuterons des perspectives.

Chapitre 1

De la chromo-dynamique quantique à la théorie chirale

Sommaire

1.1	**La constante de couplage fort**	**1**
1.2	**La symétrie de la couleur: $SU(3)_c$**	**3**
1.3	**La symétrie de la saveur ou *Eightfold way***	**3**
1.4	**Le lagrangien de QCD**	**5**
1.5	**Les symétries de QCD dans la limite chirale**	**6**
1.6	**Les courants et les charges associés à la symétrie chirale**	**9**

1.1 La constante de couplage fort

La QCD est la théorie fondamentale des interactions fortes. L'élément clé de QCD est la variabilité de la constante de couplage et le concept de liberté asymptotique. A grande distance, le couplage est fort et confine les quarks dans les hadrons. A petite distance, cette même constante de couplage devient plus faible de sorte que les quarks se comportent comme des particules quasi-libres.

Lorsque dans le cadre de la théorie des champs on calcule une observable physique R comme une série perturbative des puissances de la constante de couplage, il apparaît des termes divergents dans l'expression de R. Ces divergences sont éliminées en renormalisant la série. Cette renormalisation introduit une échelle en énergie μ, le point à partir duquel la soustraction qui enlève les divergences est effectuée. Si l'observable R dépend de l'échelle en énergie Q, le résultat de cette renormalisation est que R dépend en fait de $\frac{Q^2}{\mu^2}$. Cependant μ est un paramètre arbitraire et n'est pas un élément de la théorie. La dépendance de R peut être prise en compte en définissant une constante de couplage mobile (*running coupling constant* en anglais), $\alpha_s(Q^2)$, qui dépend de l'échelle. Cette variation est déterminée par la théorie au travers d'une équation appelée équation du groupe de renormalisation [47]:

$$Q^2 \frac{\partial \alpha_s(Q^2)}{\partial Q^2} = \beta[\alpha_s(Q^2)]. \tag{1.1}$$

La fonction β est calculée par un développement perturbatif en puissance du couplage fort , α_s:

$$\beta[\alpha_s(Q^2)] = -b\alpha_s\big(1 + b'\alpha_s + b''{\alpha_s}^2 + \dots\big)$$

avec les définitions suivantes :

$$\begin{aligned} b &= \frac{33-2n_s}{12\pi} \\ b' &= \frac{153-19n_s}{2\pi(33-2n_s)} \\ b'' &= \frac{77139-15099n_s+325{n_s}^2}{288\pi^2(33-2n_s)} \end{aligned}$$

où n_s est le nombre de saveurs de quarks actifs. La solution de l'équation (1.1) à l'ordre le plus bas est égale à :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1+\alpha_s(\mu^2)\frac{33-2n_s}{12\pi}\ln\frac{Q^2}{\mu^2}} \tag{1.2}$$

Dans cette expression, la constante de couplage décroît lentement vers zéro lorsque $Q^2 \gg \mu^2$, c'est-à-dire justement la liberté asymptotique . La constante de couplage diverge pour les petites valeurs de $Q^2 < \mu^2$. En d'autres termes, l'application du traitement perturbatif pour le calcul des observables physiques n'est plus valable. A partir de la théorie perturbative de QCD, il est uniquement possible de déterminer la façon dont varie le couplage fort et non sa valeur absolue. Cette dernière doit être déterminée expérimentalement. On choisira généralement comme référence la valeur du couplage mesurée à une énergie suffisamment grande (pour garantir la validité de l'approche perturbative), par exemple à la masse du Z ($M_Z = 91,1882(22)\mathrm{GeV/c^2}$) [46]

$$\alpha_s(M_Z) = 0,1185(20).$$

Il est intéressant de réécrire (1.2) en terme d'un paramètre Λ qui représente l'échelle à partir de laquelle l'évolution de la valeur du couplage divergerait si elle était extrapolée en-dehors du domaine perturbatif. La valeur de Λ, déterminée expérimentalement, est de l'ordre de 200 MeV. Ainsi, pour des échelles de l'ordre du GeV (masse du nucléon), la valeur du couplage est assez importante pour que la théorie perturbative ne soit plus applicable.

A l'ordre dominant et en introduisant le paramètre Λ

$$\Lambda^2 = \mu^2 e^{-4\pi/b\alpha(\mu^2)},$$

la valeur du couplage à l'échelle Q^2 est :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{1}{\frac{33-2n_s}{12\pi}\ln\frac{Q^2}{\Lambda^2}} \tag{1.3}$$

Cette constante de couplage croît lorsque les énergies mises en jeu sont petites comparées à une échelle hadronique de l'ordre du GeV. Si on utilise la formule (1.3) pour les basses énergies, par exemple 500 MeV (masse du kaon), nous obtenons

$$\alpha_s(500\mathrm{MeV}) \sim 1.$$

Le développement perturbatif en puissance de α_s n'est donc pas possible.

1.2 La symétrie de la couleur: $SU(3)_c$

La QCD est une théorie de jauge[3] non abélienne basée sur la couleur[4]. Les charges de couleur sont portées par trois états de quarks formant une base pour le groupe de jauge $SU(3)_c$ [3]. Comme toute théorie de jauge, la QCD est fondée sur un postulat d'invariance. Dans le cas présent, elle est invariante sous une transformation locale de la couleur ; la transformation est locale, car elle dépend de l'espace-temps. En QCD, on a des champs représentant les quarks de chacune des trois couleurs (r, b, j). Ceux-ci peuvent s'écrire sous la forme de vecteurs colonnes

$$\begin{pmatrix} q^r \\ q^b \\ q^j \end{pmatrix}.$$

La transformation U sous laquelle la théorie doit être invariante est

$$\begin{pmatrix} q^r \\ q^b \\ q^j \end{pmatrix}' = U \begin{pmatrix} q^r \\ q^b \\ q^j \end{pmatrix}.$$

Le vecteur colonne indicé avec $'$ représente le vecteur transformé et U est une matrice 3×3 unitaire, afin de préserver les densités de probabilité de présence du champ représentant les quarks. On doit donc avoir

$$\left.\begin{array}{rcl} U^\dagger U & = & 1 \\ |\det U| & = & 1 \end{array}\right\} \quad U(3) = SU(3) \times U(1)$$

Si det U = 1, alors on travaille avec le groupe spécial $SU(3)$.

1.3 La symétrie de la saveur ou *Eightfold way*

Dans l'espace des saveurs (u, d, s ... t), le lagrangien de QCD $\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}}$ possède une symétrie globale qui est décrite par le groupe

$$G_{\mathrm{global}} = U(1)_{\mathrm{u}} \times U(1)_{\mathrm{d}} \times \ldots \times U(1)_{\mathrm{t}}.$$

Ce groupe décrit la conservation de chacune des saveurs. Si plusieurs saveurs de quarks sont dégénérées, alors l'ordre du groupe G_{global} augmente. La symétrie $SU(3)_{\mathrm{v}}$ apparaît dans la limite où les masses des saveurs les plus légères, les quarks u, d et s, ont des valeurs égales.
Les représentations associées au groupe $SU(3)_{\mathrm{v}}$, $\{3\}$ et $\{\overline{3}\}$ représentent respectivement les 3 quarks et les 3 anti-quarks de saveurs différentes. En combinant un quark avec un anti-quark, nous obtenons un octet de dimension $\{8\}$ et un singulet $\{1\}$. Un octet de $SU(3)_{\mathrm{v}}$ est constitué de deux doublets d'isospin, d'un triplet d'isospin et d'un singulet d'isospin. Si nous associons trois quarks, nous obtenons un singulet, deux octets et un décuplet. La TABLE 1.1 résume les différentes états obtenus avec les quarks u, d et s et leurs anti-quarks, ainsi que leurs nombres quantiques d'isospin (I, I_3), d'étrangeté S et leur masse.

La faible différence de masse entre les membres d'un même multiplet peut être expliquée par l'invariance sous le groupe $SU(2)_{\mathrm{v}}$ des transformations d'isospin car

$$m_u - m_d \sim \text{quelques MeV}.$$

[3]Une théorie est dite de jauge lorsqu'elle possède la propriété d'invariance locale, c'est-à-dire que les propriétés du lagrangien restent valables quand le système considéré est modifié indépendamment en chaque point de l'espace et du temps.

[4]Le nombre quantique de couleur a été introduit la première fois dans les années 60 par Han et Nambu.

	I	I_3	S			masse
SU(3)octet	1	1	0	π^+	$u\overline{d}$	140
	1	-1	0	π^-	$d\overline{u}$	140
	1	0	0	π^o	$(d\overline{d}-u\overline{u})/\sqrt{2}$	135
	1/2	1/2	+1	K^+	$u\overline{s}$	494
	1/2	$-1/2$	+1	K^o	$d\overline{s}$	498
	1/2	$-1/2$	-1	K^-	$\overline{u}s$	494
	1/2	1/2	-1	$\overline{K}^o$	$\overline{u}s$	498
	0	0	0	η_8	$(d\overline{d}+u\overline{u}-2s\overline{s})/\sqrt{6}$	549
SU(3)singlet	0	0	0	η_o	$(d\overline{d}+u\overline{u}+s\overline{s})/\sqrt{6}$	958

TABLE 1.1: Mésons appartenant à l'octet des particules pseudo-scalaires. A chaque méson sont associés ses nombres quantiques d'isospin et d'étrangeté.

Cette symétrie d'isospin est presque parfaite puisque les écarts des masses par rapport à la masse moyenne à l'intérieur d'un même multiplet sont de l'ordre de 3 %. La progression en masse parmi les membres d'un même multiplet lorsque le nombre quantique d'étrangeté augmente est due au fait que la différence de masse entre le quark s et les quarks u et d est plus importante

$$m_s - m_{u,d} \sim 150 \text{ MeV}.$$

Les symétries observées dans le spectre des mésons et des baryons légers ont suggéré à Gell-Mann et Ne'eman [48, 49] que les hadrons étaient des particules composites dont les constituants, les trois saveurs de quarks (u, d, s) sont la manifestation physique d'un groupe de symétrie de saveur de type $SU(3)_{\rm v}$. Cette symétrie de la saveur (*Eightfold Way*[5]) est moins exacte que la

[5] Ce nom fut donné en 1961 par Gell-Mann et Ne'eman par analogie avec "l'octuple sentier" du Bouddhisme qui comporte huit conduites propres à développer l'attention et la connaissance.

	Δm(MeV/c^2)	$m_{\rm moyenne}$(MeV/c^2)	$10^3\Delta$m/m	
$n-p$	1.3	939	1.4	
$\Sigma^o-\Sigma^+$	3.1	1190	2.6	
$\Sigma^--\Sigma^o$	4.9	1195	4.1	
$\Xi^--\Xi^o$	6.5	1318	4.9	octet de baryons de spin 1/2
$K^o-K^\pm$	4.0	495	8.1	
$\pi^\pm-\pi^o$	4.6	140	33	octet de mésons de spin 0

TABLE 1.2: Différences de masses parmi les membres d'un même multiplet d'isospin.

symétrie d'isospin, puisque la différence de masses entre différents multiplets est de l'ordre de $\frac{\Delta M}{M} \simeq 20 - 30\%$ (TABLE 1.1 et TABLE 1.2).

1.4 Le lagrangien de QCD

La QCD est une théorie de jauge non-abélienne basée sur une invariance locale par rapport aux transformations du groupe de couleur $SU(3)_c$. Le lagrangien qui décrit les interactions fortes est de la forme [50]:

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{gluons}} + \mathcal{L}_{\text{quarks}} + \mathcal{L}_{\text{fixation de jauge}} + \mathcal{L}_{\text{Faddeev-Popov}} .$$

Le terme $\mathcal{L}_{\text{gluons}}$ décrit les gluons seuls, c'est à dire que ce terme est un lagrangien de type Yang-Mills sans fermions où les gluons ont notamment la possibilité d'interagir avec eux-mêmes

$$\mathcal{L}_{\text{gluons}} = -\frac{1}{4} G^a{}_{\mu\nu}\, G^{\mu\nu}{}_a .$$

Le tenseur de force est

$$G^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu ,$$

où les indices $a, b, c = 1, ...8$ sont les indices de couleur dans la représentation adjointe de $SU(3)_c$. G_μ sont les champs de gluon et g est la constante de couplage universelle du groupe $SU(3)_c$. Les constantes de structure f^{abc} sont antisymétriques par rapport à une permutation quelconque de deux indices[6].

Le terme $\mathcal{L}_{\text{quarks}}$ peut être décomposé comme:

$$\mathcal{L}_{\text{quarks}} = \mathcal{L}^0_{\text{quarks}} + \mathcal{L}_{\text{masses}} ,$$

avec

$$\mathcal{L}^0_{\text{quarks}} = \overbrace{\sum_{Q=c,b,t} \overline{Q}\big[i\gamma^\mu D_\mu - M_Q\big] Q}^{\text{quarks lourds}} + \overbrace{\sum_{q=u,d,s} \overline{q}\, i\gamma^\mu D_\mu\, q}^{\text{quarks légers}} \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}_{\text{masses}} = -\sum_{q=u,d,s} m_q\, \overline{q}\, q \ . \tag{1.5}$$

L'interaction des quarks avec les gluons apparaît dans la dérivée covariante de la représentation fondamentale de $SU(3)_c$

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\, G^a_\mu\, T^a ,$$

où les matrices hermitiennes de trace nulle T^a sont les générateurs de $SU(3)_c$ dans la représentation fondamentale. Les champs de quark Q appartiennent à la représentation fondamentale de $SU(3)_c$. Le terme qui fixe la jauge est donné par

$$\mathcal{L}_{\text{fixation de jauge}} = -\frac{1}{2\lambda} (\partial^\mu G^a_\mu)^2$$

et le terme traîtant des fantômes [51] est

$$\mathcal{L}_{\text{Faddeev-Popov}} = (\partial^\mu \overline{\chi}^a) D^{ab}_\mu \chi^b ,$$

[6] Appendice A

où χ est un champ scalaire non physique avec des propriétés fermioniques et

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab}\partial_\mu - gf^{abc}G_\mu^c$$

représente la dérivée covariante dans la représentation adjointe de $SU(3)_\mathrm{c}$. On note que

$$(T^a)_{bc} = -if^{abc}$$

La forme du lagrangien est élégante et la théorie est renormalisable [52, 53]. L'algèbre des matrices T^a est donnée par les relations de commutation

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \tag{1.6}$$

où f^{abc} représente la constante de structure du groupe. La représentation la plus courante des T^a se fait en fonction des matrices λ^a de Gell-Mann, selon la relation

$$T^a = \frac{1}{2}\lambda^a$$

Les matrices de Gell-Mann, de trace nulle et hermitiques, sont normalisées par les relations[7]

$$\begin{aligned} \langle\lambda^a\lambda^b\rangle &= 2\delta^{ab} \\ [\lambda^a, \lambda^b] &= 2if^{abc}\lambda^c \\ \{\lambda^a, \lambda^b\} &= \frac{4}{3}\delta^{ab} + 2d^{abc}\lambda^c. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Les constantes f^{abc} et d^{abc} sont les constantes de structure respectivement totalement anti-symétriques et totalement symétriques de SU(3) dont les valeurs sont données en appendice.

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Les trois générateurs T^1, T^2 et T^3 sont les matrices de Pauli, qui sont les générateurs de l'algèbre de Lie du groupe de symétrie $SU(2)_\mathrm{v}$ qui décrit l'isospin.
Seules les deux matrices λ^3 et λ^8 commutent entre elles, car elles sont diagonales. Ce sont à ces deux générateurs que correspondent la troisième composante de l'isospin I_3 et l'hypercharge Y. Ceci conduit naturellement à construire des diagrammes dans le plan, où les valeurs propres associées aux générateurs précédents, sont portées sur deux axes indépendants (FIGURE 1.1).

1.5 Les symétries de QCD dans la limite chirale

Les mésons et les baryons possèdent des masses de l'ordre du GeV, alors que le pion a une masse d'environ 140 MeV. On peut expliquer ce fait par l'existence d'une symétrie approchée sous laquelle les interactions fortes sont invariantes. Cette symétrie, engendrée par les courants

[7] La notation $\langle\ \rangle$ représente la trace

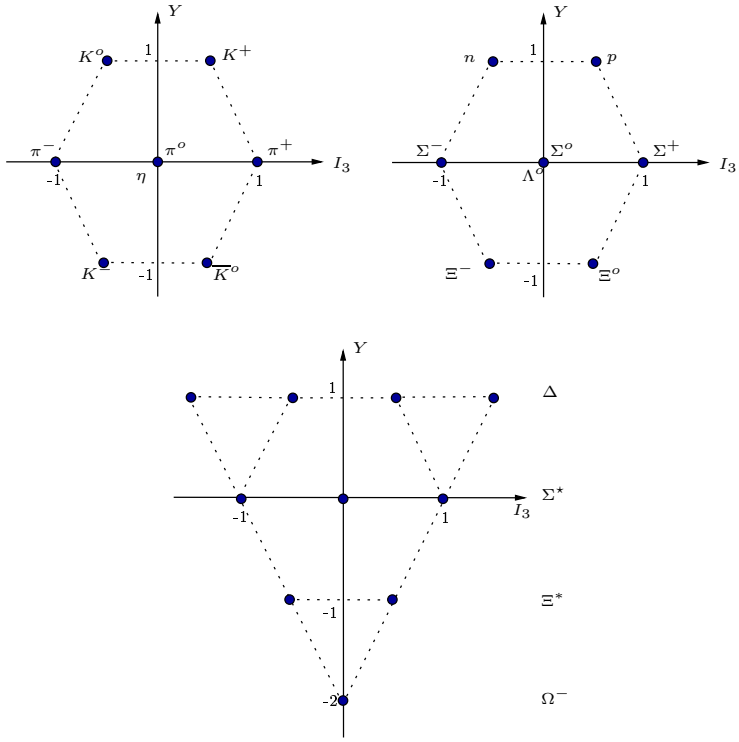


FIGURE 1.1: Octet des mésons pseudo-scalaires, octet de baryons de spin 1/2 et de parité positive et décuplet de baryons. On reconnaît le doublet d'isospin du proton et du neutron. Les particules appartenant à un même multiplet d'isospin sont rangées sur des segments horizontaux.

vectoriels et axiaux , n'est pas observée dans le spectre. La brisure spontanée[8] de cette symétrie produit une particule légère, le pion.

Nous savons que la description des particules de masse nulle s'appuie sur la notion d'hélicité. Une des principales propriétés des particules est leur spin, qui représente la rotation de la particule sur elle-même. Si la projection de ce spin sur la vitesse de la particule est orientée dans le sens du mouvement de la particule, on dit que la particule est d'hélicité droite. Dans le cas contraire, la particule est d'hélicite gauche. Par contre, un objet est chiral s'il n'est pas superposable à son image dans un miroir. On distingue les objets chiraux gauches et les objets chiraux droits. Cette distinction peut être basée sur le sens de rotation du plan de polarisation d'un faisceau lumineux traversant la substance que l'on teste.
L'exemple du neutrino illustre bien les notions d'hélicité et de chiralité. L'interaction faible a la particularité de ne produire que des neutrinos d'hélicité gauche. Théoriquement, un neutrino de masse nulle est toujours d'hélicité gauche. Par contre, un neutrino peut être indifféremment de chiralité droite ou gauche. Mais le neutrino de masse nulle sera de chiralité gauche. Dans la limite d'un neutrino de masse nulle, la chiralité gauche ou droite correspond à l'hélicité gauche ou droite.
Il sera utile de définir les projections des quarks légers

$$q_{\substack{R\\L}} \equiv \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)q,$$

[8]Théorème de Goldstone: A chaque générateur d'une symétrie globale spontanément brisée correspond une particule scalaire de masse nulle.

appelées, respectivement, chiralités droite et gauche. On peut toujours écrire un champ ψ comme une combinaison d'un champ *gauche* et d'un champ *droit* :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\psi(x) + \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\psi(x) \\ &= \psi_R(x) + \psi_L(x) \ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Si l'on suppose des masses de quarks u, d et s petites par rapport à une échelle hadronique Λ_H typique de l'ordre du GeV, le terme $\mathcal{L}_{masses}$ (1.5) sera considéré comme une perturbation. Le lagrangien de QCD s'écrit alors:

$$\mathcal{L}_{QCD} \ = \ \mathcal{L}^0_{QCD} \ + \ \mathcal{L}_{masses} \quad \text{où} \quad \mathcal{L}^0_{QCD} \ = \ \mathcal{L}_{QCD}|_{m_u=m_d=m_s=0}$$

La partie du lagrangien traitant les quarks légers devient

$$\begin{aligned} \sum_{q=u,d,s} \overline{q} i \not{D} q &= \sum_{q=u,d,s} \overline{q}_L \ i \not{D} q_L \ + \ \sum_{q=u,d,s} \overline{q}_R \ i \not{D} q_R \\ \mathcal{L}_{masses} &= \underbrace{- \sum_{q=u,d,s} m_q(\overline{q}_L q_R + \overline{q}_R q_L)}_{\text{mélange les projections } \textit{gauche} \text{ et } \textit{droite}} \end{aligned} \tag{1.10}$$

Les chiralités gauche et droite sont donc indépendantes dans la limite chirale

$$m_u = m_d = m_s = 0.$$

Si nous regroupons u, d et s dans un triplet

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix},$$

$$\text{alors} \quad \sum_{q=u,d,s} \overline{q} i \not{D} q \ = \ \overline{\psi}_L \ i \not{D} \psi_L \ + \ \overline{\psi}_R \ i \not{D} \psi_R. \tag{1.11}$$

Dans la théorie de masse nulle ($m_u = m_d = m_s = 0$), on redéfinit séparément les triplets de chiralités gauche et droite

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &\rightarrow V_L \ \psi_L(x), \\ \psi_R(x) &\rightarrow V_R \ \psi_R(x), \end{aligned}$$

où V_L et V_R sont des matrices unitaires 3×3 qui mélangent les différentes saveurs u, d et s de même chiralité.

Ainsi (1.11) est invariant sous le groupe de symétrie chirale $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Cette symétrie est approximative, puisque le terme de masse (1.10) introduit un couplage entre les chiralités. Il s'agit néanmoins d'une bonne approximation, puisque les masses des quarks légers sont faibles devant une échelle typique de la théorie, l'échelle hadronique $\Lambda_H \sim 1$ GeV .

1.6 Les courants et les charges associés à la symétrie chirale

Les interactions électromagnétiques et faibles sont décrites en terme d'opérateurs de courants. Dans ce contexte, les courants peuvent être vus comme des observables dans le sens où certains éléments de matrice de courants sont intimement liés à des quantités mesurables comme les amplitudes de désintégrations ou les sections efficaces de diffusion. D'autre part, les courants sont connectés avec les groupes de symétrie. Le théorème de Noether montre que si le lagrangien est invariant sous l'action d'un groupe de symétrie continu et global, généré par un ensemble d'opérateurs I_1, I_2, ..., alors il existe un ensemble de courants conservés $j_1^\mu(x)$, $j_2^\mu(x)$, ... tels que les générateurs de la symétrie sont donnés par

$$I_i = \int d^3x \; j_i^0(x) \qquad\qquad i = 1, 2, ...$$

Les relations $[I_i, I_k] = i \; C_{ikl} \; I_l$ caractérisent le groupe de symétrie et imposent d'importantes conditions sur les courants conservés associés à la symétrie. Les coefficients C_{ikl} sont les constantes de structure du groupe de symétrie.
Cependant, même si le lagrangien n'est pas invariant sous l'action d'un groupe de transformations, le théorème de Noether permet quand même de construire un ensemble de courants associés aux générateurs de ces transformations. Dans ce cas, les courants ne sont pas conservés et les générateurs dépendent du temps. Malgré cela, nous pouvons construire des relations qui caractérisent la structure du groupe de transformation.
Un exemple bien connu de courant qui représente une observable et qui en même temps implique l'existence d'une charge qui génère un groupe de symétrie exacte est le courant électromagnétique. Un second exemple est la partie vectorielle du courant hadronique faible qui conserve l'étrangeté. La charge vectorielle associée est intimement liée aux générateurs du groupe d'isospin .

A la symétrie $SU(3)_L \times SU(3)_R$, nous associons des courants conservés

$$\begin{aligned} J^a_{R,\,\mu} &= \overline{\psi_R}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2}\psi_R \\ J^a_{L,\,\mu} &= \overline{\psi_L}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2}\psi_L \; . \end{aligned}$$

Les charges associées à ces courants satisfont les relations de commutation de l'algèbre du groupe chiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$

$$\begin{aligned} [Q^a{}_L, Q^b{}_L] &= i \; f_{abc} \; Q^c{}_L \; , \\ [Q^a{}_R, Q^b{}_R] &= i \; f_{abc} \; Q^c{}_R \; , \\ [Q^a{}_L, Q^b{}_R] &= 0 \; . \end{aligned} \tag{1.12}$$

Ainsi les projections de chiralité gauche et droite mènent bien des existences séparées à la limite chirale. En utilisant la définition (1.9), nous introduisons des courants vectoriels et axiaux définis comme

$$V^a_\mu = J^a_{R,\,\mu} + J^a_{L,\,\mu} = \overline{\psi}\gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2}\psi \; , \tag{1.13}$$

$$A^a_\mu = J^a_{R,\,\mu} - J^a_{L,\,\mu} = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma^5 \frac{\lambda^a}{2}\psi \; . \tag{1.14}$$

avec $a, b = 1, \ldots 8$. Ces courants sont naturellement conservés: $\partial^\mu V^a_\mu = 0, \; \partial^\mu A^a_\mu = 0$.

Un quark ne peut apparaître ou disparaître qu'associé à un antiquark. Cela s'exprime par la

conservation du nombre baryonique ou symétrie $U(1)_{\rm v}$ et il existe un courant vectoriel associé à cette conservation

$$V_\mu \;=\; \overline{\psi}\gamma_\mu\psi, \tag{1.15}$$

pour lequel, d'après les équations de Dirac pour les quarks, nous obtenons $\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$. Ce courant vectoriel est conservé, mais ne correspond à aucun des courants V^a_μ avec $a = 1, \ldots 8$. Ainsi, pour l'incorporer à la notation (1.13), on peut étendre le domaine de variation de l'indice a en rajoutant la valeur $a = 0$. Le courant (1.15) sera le courant V^0_μ avec

$$\lambda_0 \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Toutes les propriétés (1.7) sur les matrices de Gell-Mann restent valables, mais il faut rajouter

$$f^{0ab} = f^{a0b} = f^{ab0} = 0 \quad d^{0ab} = d^{a0b} = d^{ab0} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\delta^{ab} \quad a, b = 0, \ldots, 8$$

Dans le cas des charges et courants axiaux, les indices a et b ne varient que de 1 à 8, car le courant $A_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$ n'est pas conservé. D'après le théorème de Noether , à tout courant conservé est associée une charge. Les charges vectorielles et axiales sont définies comme

$$Q^a_V \;\equiv\; Q^a_R + Q^a_L \quad \text{et} \quad Q^b_A \equiv Q^b_R - Q^b_L \quad \text{avec} \quad a = 0, \ldots 8, \qquad b = 1, \ldots 8$$

et satisfont les relations de commutation suivantes

$$\begin{aligned} [Q^a_V, Q^b_V] &= i\, f^{abc}\, Q^c_V \qquad a, b = 0, \ldots 8 \\ [Q^a_V, Q^b_A] &= i\, f^{abc}\, Q^c_A \qquad a = 0, \ldots 8, \qquad b = 1, \ldots 8 \\ [Q^a_A, Q^b_A] &= i\, f^{abc}\, Q^c_V \qquad a = b = 1, \ldots 8 \end{aligned} \tag{1.16}$$

Nous reconnaissons dans (1.16) l'algèbre des matrices de $SU(3)_{\rm v}$ (1.6), la symétrie de Gell-Mann et Ne'eman ou *Eightfold way* qui est observée dans la nature. Les charges vectorielles forment une sous-algèbre au sein de l'algèbre de la symétrie chirale (1.12). Les générateurs de cette algèbre peuvent être identifiés avec des charges faibles ou électromagnétiques de $SU(3)_{\rm v}$, comme l'isospin et l'hypercharge Y

$$I^+ \;=\; Q^1 + iQ^2, \qquad I^- = Q^1 - iQ^2, \qquad I_3 = Q^3, \;\; \text{et} \;\; Y = \frac{2}{\sqrt{3}}Q^8.$$

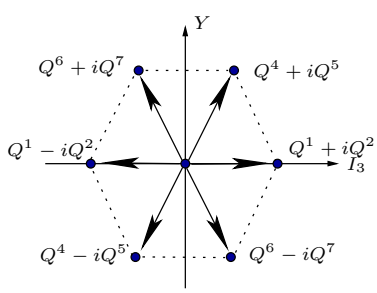


FIGURE 1.2: Les générateurs de la symétrie $SU(3)_{\rm v}$ sont dessinés dans un diagramme de Cartan où I_3, la troisième composante de l'isospin, et Y, l'hypercharge, sont les axes de coordonnées.

Chapitre 2

Le lagrangien chiral

Sommaire

2.1 La théorie effective 11
2.2 Le formalisme de CCWZ appliqué à la QCD 12
2.3 Le lagrangien chiral et la brisure d'isospin 13
2.4 Les propriétés du lagrangien chiral 15
2.5 La matrice des champs de mésons 16
2.6 Effet de la brisure d'isospin 18

2.1 La théorie effective

La théorie effective [18, 54] a pour idée de base que la dynamique à basse énergie (grande distance) ne dépend pas des détails de la dynamique à haute énergie (petite distance). Les seuls effets de la théorie à haute énergie sont de modifier les constantes de couplage dans la théorie à basse énergie ou d'imposer des contraintes de symétrie à cette théorie.

La physique à basse énergie peut être décrite à l'aide d'un lagrangien effectif qui ne contient que quelques degrés de liberté, ignorant ceux présents à des énergies plus élevées.

Cette théorie effective est écrite en termes de paramètres de basse énergie qui peuvent être calculés en fonction des paramètres provenant d'une théorie plus fondamentale à haute énergie lorsque celle-ci est faiblement couplée (théorie de Fermi de l'interaction faible). Si la théorie à haute énergie est fortement couplée, comme en QCD, les paramètres à basse énergie sont traités comme des paramètres libres et sont déduits de l'expérience. La théorie des perturbations chirale (TPCh) est la théorie effective qui décrit les interactions entre les hadrons en dessous de 1 GeV. Cette théorie a été fondée il y a longtemps par les travaux de Weinberg [22] et Gasser et Leutwyler [23, 55, 24] et correspond à un développement en puissance des moments externes p et des masses des quarks légers m_q. Une introduction à la théorie des perturbations chirale dans le secteur mésonique peut être trouvé dans [56, 57]. Pour les développements récents en théorie des perturbations chirale [58] est une bonne référence.

Un lagrangien d'une théorie effective contient une infinité de termes

$$\mathcal{L}_{\text{EFT}} = \mathcal{L}_{\leq D} + \mathcal{L}_{D+1} + \mathcal{L}_{D+2} + \cdots + \mathcal{L}_{D+r} + \ldots, \tag{2.1}$$

D étant la dimension de l'espace-temps. Comme la théorie effective est construite afin de reproduire correctement les effets à basse énergie de la théorie complète à un ordre donné, le lagrangien effectif contient plus de termes lorsque l'on développe à des ordres supérieurs.
En théorie quantique des champs, il n'est pas suffisant de connaître le lagrangien pour calculer des quantités physiques. Nous devons en outre spécifier comment obtenir des résultats finis et non-ambigus. En théorie des perturbations, ceci correspond à un choix de schéma de renormalisation qui régularise les intégrales et soustrait les infinis.

Le schéma de renormalisation doit être choisi prudemment lorsque l'on a à calculer des diagrammes avec boucle. En effet, si l'on introduit un schéma de soustraction dépendant de la masse, tel qu'une coupure Λ_p dans l'espace des impulsions, alors tous les ordres de la théorie effective auront la même importance, puisque le régulateur Λ_p apparaîtra sous la forme d'une puissance. Comme la théorie effective est valide jusqu'à des énergies de l'ordre de M_W, nous aurons alors

$$\frac{{\Lambda_p}^2}{M_W^2} \sim \frac{{\Lambda_p}^4}{M_W^4} \ \cdots \sim \mathcal{O}(1).$$

Ce problème de renormalisation disparaît lorsque l'on utilise un schéma indépendant de masse, tel que la régularisation dimensionnelle où le paramètre de la régularisation μ apparaît cette fois dans un logarithme sous la forme

$$\frac{m^2}{M_W^2}\log\mu, \frac{m^4}{M_W^4}\log\mu \ \ldots$$

avec m un paramètre qui n'est pas l'échelle de renormalisation. Il s'agit d'une autre échelle comme une masse de quark ou un moment externe. Les intégrales ne sont plus d'ordre $\mathcal{O}(1)$, mais sont plus petites à condition que $m \ll M_W$.

2.2 Le formalisme de CCWZ appliqué à la QCD

La plupart du temps, on peut construire un lagrangien effectif en partant de la théorie complète et en faisant un développement perturbatif systématique. Mais on peut aussi appliquer les idées de la théorie effective à des situations où le lagrangien effectif ne provient pas directement de la théorie complète. Un formalisme général des lagrangiens effectifs pour des théories où l'on rencontre des symétries brisées spontanément a été mis au point par Callan, Coleman, Wess et Zumino [59, 60] dans les années 70.

Ce formalisme (CCWZ) a été appliqué à la QCD. Dans la limite où les masses des quarks légers sont négligées, le lagrangien de QCD possède une symétrie chirale

$$G \ = \ SU(3)_L \times SU(3)_R.$$

Ce groupe de symétrie est brisé spontanément vers le sous-groupe vectoriel, non brisé

$$H \ = \ SU(3)_{\mathrm{v}}.$$

Les bosons de Goldstone de la symétrie spontanément brisée vivent dans l'espace quotient

$$G/H \ = \ SU(3)_L \times SU(3)_R/SU(3)_{\mathrm{v}},$$

qui est, dans ce cas particulier, isomorphe au groupe de Lie $SU(3)$. Pour étudier la dynamique de ces bosons, il faut paramétrer l'espace quotient. La prescription de CCWZ nous dit que

$$\Xi(x) \ = \ e^{iX\cdot\pi(x)},$$

où X représente les générateurs brisés de G. La paramétrisation *exponentielle* est choisie. L'action d'une transformation globale $g \in G$ sur la matrice Ξ donne

$$\Xi(x) \to g\ \Xi(x)\ h^{-1}(g, \Xi(x)), \tag{2.2}$$

où

$$g = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} \tilde{h} & 0 \\ 0 & \tilde{h} \end{pmatrix} \qquad \tilde{h} = L = R \ \ (h \text{ appartient au groupe non-brisé})$$

L'équation (2.2) définit une transformation non-linéaire des états de Goldstone sous G. Si on prend comme base, pour les générateurs brisés, les générateurs de $SU(3)_L$, nous aurons

$$\Xi(x) = \begin{pmatrix} e^{iT\cdot\pi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et la loi de transformation est

$$U(x) \to L\ U(x)\ R^{\dagger}. \tag{2.3}$$

Le lagrangien effectif à basse énergie de QCD, le lagrangien chiral , est le plus général qui soit compatible avec la brisure spontanée de la symétrie chirale. Il n'est pas possible de déterminer ce lagrangien effectif directement à partir du lagrangien de QCD, car la connexion entre ces deux théories est non-perturbative. Par contre, il est facile de construire un lagrangien invariant sous la loi de transformation (2.3). Par exemple, à l'ordre le plus bas de la théorie, le seul terme invariant sous les transformations chirale (2.3) et de Lorentz doit contenir deux dérivées[9]. Il s'agit du terme[10]

$$\mathcal{L}_2 \ = \ \frac{F_o^2}{4}\langle \partial_\mu U(x) \partial^\mu U(x)^\dagger \rangle. \tag{2.4}$$

Ce terme est le premier terme d'une série infinie. A l'ordre suivant, la démarche à suivre [23, 24, 61] consiste à faire la liste de tous les termes d'ordre p^4 invariants sous la transformation chirale (2.3) et d'utiliser les équations du mouvement provenant du lagrangien (2.15).

2.3 Le lagrangien chiral et la brisure d'isospin

Dans le secteur de l'interaction forte le lagrangien effectif de QCD est connu jusqu'à l'ordre p^6 [61]. Les effets de la brisure d'isospin générés par la différence de masse entre les quarks légers $m_u - m_d \neq 0$ sont contenus dans la partie purement QCD du lagrangien chiral. Par contre, pour traiter la violation d'isospin d'origine électromagnétique il est nécessaire d'introduire le photon et les leptons légers comme degrés de libertés supplémentaires en plus des particules de Goldstone qui constituent le spectre de la théorie des perturbations chirales .

Le lagrangien effectif pour traiter les effets électromagnétiques dans les désintégrations semi-leptoniques est de la forme [62]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F_o^2}{4}\langle u_\mu u^\mu + \chi_+ \rangle + e^2 F_o^4 Z_o \langle \mathcal{Q}_L^{\text{em}} \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \rangle - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ + \sum_\ell [\overline{\ell}(i\ \not\partial + e\ \not{A} - m_\ell)\ell + \overline{\nu_{\ell_L}} i\ \not\partial \nu_{\ell_L}]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

[9] Les bosons de Goldstone se couplent avec un couplage dérivatif.

[10] $\langle\ \rangle$ est la notation pour la trace.

Le champ du photon A_μ et ceux des leptons ℓ, ν_ℓ ($\ell = e, \mu$) sont contenus dans

$$u_\mu = i[u_R^\dagger(x)(\partial_\mu - ir_\mu)u_R(x) - u_L^\dagger(x)(\partial_\mu - il_\mu)u_L(x)] \tag{2.6}$$

où les variables $u_R(x)$ et $u_L(x)$ appartiennent au sous groupe $SU(3)_L \times SU(3)_R/SU(3)_{\rm v}$. Les différents termes dans cette expression sont donnés par

$$l_\mu = v_\mu - a_\mu - e\mathcal{Q}_L^{\rm em} A_\mu + \sum_\ell (\overline{\ell}\gamma_\mu \nu_{\ell_L} \mathcal{Q}_L^{\rm w} + \overline{\nu_{\ell_L}}\gamma_\mu \ell \mathcal{Q}_L^{\rm w\dagger}), \tag{2.7}$$

$$r_\mu = v_\mu + a_\mu - e\mathcal{Q}_R^{\rm em} A_\mu. \tag{2.8}$$

Les quantités a_μ et v_μ sont les sources vectorielle et axiale externes usuelles. De plus, on définit

$$\mathcal{Q}_L^{\rm em,\,w} = u_L^\dagger Q_L^{\rm em,\,w} u_L \quad \text{et} \quad \mathcal{Q}_R^{\rm em} = u_R^\dagger Q_R^{\rm em} u_R. \tag{2.9}$$

Les matrices $\mathcal{Q}_{L,R}^{\rm em}$ sont identifiées avec la matrice de charge

$$Q_{L,R}^{\rm em} = Q^{\rm em} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

et

$$Q_L^{\rm w} = -2\sqrt{2}G_F \begin{pmatrix} 0 & V_{ud} & V_{us} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

La brisure de symétrie chirale est contenue dans le terme de masse décrit par

$$\chi_+ = 2B_o\{u_R^\dagger(x)Mu_L(x) + u_L^\dagger(x)M^\dagger u_R(x)\}$$

où le facteur B_o est relié au condensat de quark dans la limite chirale par la relation

$$< 0|\overline{q}q|0 >= -F_o^2 B_o.$$

La matrice de masse M est

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

La constante de couplage Z_o est déterminée par la différence de masse entre les pions chargés et neutres,

$$M_{\pi^+}^2 - M_{\pi^o}^2 = 2e^2 Z_o F_o^2.$$

Avec le choix

$$u_R(x) = u_L^\dagger(x) = u(x),$$

la relation (2.6) devient

$$u_\mu = i[u^\dagger(x)(\partial_\mu - ir_\mu)u(x) - u(x)(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger(x)]. \tag{2.13}$$

Au lieu de travailler avec $u(x)$, nous utiliserons $U(x)$ définie par

$$\begin{aligned} U(x) &= u_R\, u_L^\dagger \;=\; u(x)^2 \\ U(x) &= e^{i\frac{\phi(x)}{F_o}}, \end{aligned}$$

où $\phi(x)$ est une matrice 3×3 qui contient les champs pseudo-scalaires $\pi^a(x)$

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^{8} \pi^a(x)\lambda^a. \tag{2.14}$$

Le lagrangien (2.6) prend la forme suivante qui sera utilisée dans les programmes *Mathematica*© de calcul des vertex d'interactions.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{F_o^2}{4}\langle(\partial_\mu U)(\partial^\mu U)^\dagger + 2i(\partial_\mu U)U^\dagger r^\mu - 2iU^\dagger(\partial_\mu U)l^\mu - 2Ul_\mu U^\dagger r^\mu \\ &\quad + r_\mu r^\mu + l_\mu l^\mu\rangle + B_o\frac{F_o^2}{2}\langle U^\dagger\; M + U\; M^\dagger\rangle \\ &\quad + e^2F_o^4 Z_o\langle U\; Q^{em}\; U^\dagger\; Q^{em}\rangle - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_l[\bar{l}\;(i\;\;\partial\!\!\!/ + eA - m_l)\;l + \overline{\nu_{l_L}}\;i\;\;\partial\!\!\!/\;\nu_{l_L}] \\ &= \frac{F_o^2}{4}\langle D_\mu U D^\mu U^\dagger + \chi\; U^\dagger + \chi^\dagger\; U\rangle \\ &\quad + e^2F_o^4 Z_o\langle U\; Q^{em}\; U^\dagger\; Q^{em}\rangle - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \sum_l[\bar{l}\;(i\;\;\partial\!\!\!/ + eA - m_l)\;l + \overline{\nu_{l_L}}\;i\;\;\partial\!\!\!/\;\nu_{l_L}] \end{aligned} \tag{2.15}$$

où

$$D_\mu U \;=\; \partial_\mu U - ir_\mu U + iUl_\mu.$$

2.4 Les propriétés du lagrangien chiral

Le lagrangien chiral de QCD est un développement en dérivée (ou impulsion) de la forme $\frac{p}{\Lambda}$, où Λ représente l'échelle d'énergie en dessous de laquelle la théorie décrit la physique. Plus précisément, les degrés de libertés de la théorie étant les mésons, Λ correspondrait à la masse seuil au-dessus de laquelle on produirait des particules plus lourdes que celles présentes dans la théorie. Le lagrangien chiral est de la forme

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_k \mathcal{L}_k = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \ldots,$$

où l'indice k représente le nombre de dérivées. Une analyse dimensionnelle [63] permet de quantifier le paramètre Λ du développement du lagrangien effectif

$$\Lambda = 4\pi F_o \sim 1\text{GeV},$$

c'est-à-dire que ce paramètre est suffisamment grand pour que l'on puisse appliquer ce lagrangien effectif à des processus de basse énergie qui concernent les pions et les kaons.

Si l'on considère un diagramme avec n_k vertex d'interaction $\mathcal{L}_k$, B boucles et I lignes internes, l'amplitude de ce processus sera de la forme

$$\mathcal{A} \;=\; \int (d^4p)^B \frac{1}{(p^2)^I}\prod_k (p^k)^{n_k} \quad\sim\; p^D,$$

avec

$$D = 4B - 2I + \sum_k k\ n_k. \tag{2.16}$$

Or pour chaque graphe de Feynman, on montre que

$$V - I + B = 1 \quad \text{où } V \text{ est le nombre de vertex.} \tag{2.17}$$

Si nous combinons (2.16) et (2.17), nous trouvons que

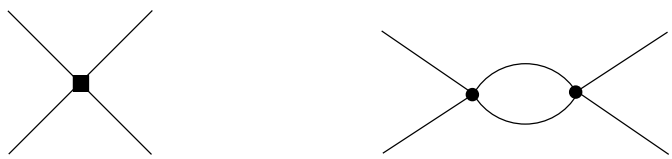
$$D \;=\; 2 + 2B + \sum_k (k-2) n_k.$$

Le lagrangien chiral à l'ordre le plus bas p^2 comporte deux dérivées, alors $k \geq 2$. Tous les termes dans l'expression de D sont positifs. On remarque qu'un nombre fini de termes dans le lagrangien effectif sont nécessaires pour un calcul à un ordre en $\frac{p}{\Lambda}$. Si on veut calculer des amplitudes de diffusion à l'ordre p^4, alors

$$4 \;=\; 2 + 2B + \sum_k (k-2) n_k.$$

Les solutions sont

$$\big(B = 0 \quad n_4 = 1 \quad n_{k>4} = 0\big) \qquad\qquad \big(B = 1 \quad n_{k>2} = 0\big)$$



Il suffit de garder les termes $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_4$ dans le lagrangien effectif pour obtenir toutes les amplitudes de diffusion à l'ordre p^4. Les termes en arbre de $\mathcal{L}_4$ sont connus comme les constantes de basse énergie ou contre termes. Il y a deux parties dans $\mathcal{L}_4$:

- la partie infinie qui compense les divergences des diagrammes à boucles utilisant des vertex de $\mathcal{L}_2$,

- la partie finie qui affecte des quantités mesurables, appelée les contre termes.

Une approche systématique a été faite par Gasser et Leutwyler [24], qui ont écrit le lagrangien le plus général à l'ordre p^4. Ce lagrangien $\mathcal{L}_4$ contient 10 nouvelles constantes de couplage de basse énergie L_i qui sont divergentes pour la plupart. Ces constantes, qui apparaissent dans le calcul des contre termes, absorbent les divergences des graphes à une boucle. Le lagrangien effectif $\mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4$ est invariant sous les transformations de $SU(3)_L \times SU(3)_R$, mais des anomalies apparaissent. Wess, Zumino et Witten ont écrit le lagrangien qui reproduit l'anomalie chirale [64, 65, 66].

2.5 La matrice des champs de mésons

La matrice $\phi(x)$ dans (2.14) s'écrit comme

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \pi^3 + \frac{\pi^8}{\sqrt{3}} & \pi^1 - i\pi^2 & \pi^4 - i\pi^5 \\ \pi^1 + i\pi^2 & -\pi^3 + \frac{\pi^8}{\sqrt{3}} & \pi^6 - i\pi^7 \\ \pi^4 + i\pi^5 & \pi^6 + i\pi^7 & \frac{-2}{\sqrt{3}}\pi^8 \end{pmatrix}(x), \tag{2.18}$$

Nous pouvons identifier les éléments de cette matrice aux 8 mésons pseudo-scalaires du modèle de l'octet de Gell-Mann et Ne'eman. Pour cela nous allons déterminer les différentes charges associées à ces champs pseudo-scalaires, comme la charge électrique ou la charge d'étrangeté. Nous utiliserons la matrice de charge électrique Q_e des quarks légers

$$Q_e = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (T^3 + \frac{T^8}{\sqrt{3}}),$$

la matrice de charge Q_s qui donne l'étrangeté

$$Q_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et celles des charges d'isospin données par les 3 premières matrices de Gell-Mann

$$\mathrm{I}^+ = T^1 + iT^2, \qquad \mathrm{I}^- = T^1 - iT^2 \qquad \text{et} \quad \mathrm{I}^3 = T^3.$$

La (TABLE 2.1) résume les résultats obtenus pour l'action des opérateurs de charges (électrique, d'étrangeté et d'isospin) sur les champs des particules pseudo-scalaires contenues dans $\phi(x)$. Nous associerons à chaque composante de cette matrice une charge électrique e, une charge d'étrangeté s, un isospin (I, I_3) et une hypercharge Y.

Le commutateur (2.19) indique la valeur de la charge pour chaque composante de $\phi(x)$. Le commutateur (2.20) donne la valeur de l'étrangeté afin de distinguer les champs des kaons de ceux des pions. Le commutateur (2.21) donne les informations concernant la troisième composante de l'isospin et nous permet de conclure sur la position des différents champs physiques $\pi^a(x)$ dans la matrice $\phi(x)$. Après normalisation de ces champs, nous obtenons

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \pi^0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta(x) & -\sqrt{2}\pi^+(x) & -\sqrt{2}K^+(x) \\ \sqrt{2}\pi^-(x) & -\pi^0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta(x) & -\sqrt{2}K^0(x) \\ \sqrt{2}K^-(x) & -\sqrt{2}\,\overline{K^0}(x) & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta(x) \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

$$[Q_e, \phi(x)] = \begin{pmatrix} 0 & \pi^1 - i\pi^2 & \pi^4 - i\pi^5 \\ -(\pi^1 + i\pi^2) & 0 & 0 \\ -(\pi^4 + i\pi^5) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

$$[Q_s, \phi(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi^4 - i\pi^5 \\ 0 & 0 & \pi^6 - i\pi^7 \\ -(\pi^4 + i\pi^5) & -(\pi^6 + i\pi^7) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

$$[\mathrm{I}^3, \phi(x)] = \begin{pmatrix} 0 & \pi^1 - i\pi^2 & \frac{1}{2}(\pi^4 - i\pi^5) \\ -(\pi^1 + i\pi^2) & 0 & -\frac{1}{2}(\pi^6 - i\pi^7) \\ -\frac{1}{2}(\pi^4 + i\pi^5) & \frac{1}{2}(\pi^6 + i\pi^7) & 0 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

TABLE 2.1: Action des opérateurs de charges sur la matrice des particules pseudo-scalaires.

2.6 Effet de la brisure d'isospin

Dans le cas de la brisure d'isospin ($m_u \neq m_d$), les états π^3 et π^8 se mélangent pour former les états physiques π^o et η. Nous noterons ϵ_1 et ϵ_2 les paramètres de ce mélange:

$$\begin{aligned} \pi^o &= \pi^3 + \epsilon_1 \pi^8 \\ \eta &= \pi^8 - \epsilon_2 \pi^3 \end{aligned}$$

Nous extrayons π^3 et π^8 de ces deux relations et nous réinjectons le résultat dans la matrice (2.18) en se restreignant à l'ordre 1 en ϵ_1 et ϵ_2 (i.e ordre 1 en brisure d'isospin).

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \pi^o(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\epsilon_2) + \eta(\frac{1}{\sqrt{3}} - \epsilon_1) & -\sqrt{2}\pi^+ & -\sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^o(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\epsilon_2) + \eta(\frac{1}{\sqrt{3}} + \epsilon_1) & -\sqrt{2}K^o \\ \sqrt{2}K^- & -\sqrt{2}\,\overline{K}^o & \frac{-2}{\sqrt{3}}(\eta + \epsilon_2 \pi^o) \end{pmatrix}.$$

Nous allons chercher les contraintes sur ϵ_1 et ϵ_2. Lorsqu'on ne considère pas la brisure d'isospin, les termes quadratiques en champs pseudo-scalaires du lagrangien chiral (2.15) ne contiennent pas de contributions non diagonales. Le mélange $\pi^o - \eta$ fait apparaître les termes

$$\partial\pi^o\partial\pi^o + \partial\eta\partial\eta - 2(\partial\pi^+\partial\pi^- + \partial K^+\partial K^- - \partial K^o\partial\overline{K}^o) + \epsilon_1^2\partial\eta\partial\eta + \epsilon_2^2\partial\pi^o\partial\pi^o - 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)\partial\pi^o\partial\eta$$

et

$$\begin{aligned} &-\frac{B_o}{2}\Big[(\pi^o\pi^o + \epsilon_1^2\eta\eta - 2\epsilon_1\pi^o\eta)(m_u + m_d) + \frac{1}{3}(\eta\eta + \epsilon_2^2\pi^o\pi^o + 2\epsilon_2\eta\pi^o)(m_u + m_d + 4m_s) \\ &+\frac{2}{\sqrt{3}}(\eta\pi^o - \epsilon_1\eta\eta + \epsilon_2\pi^o\pi^o)(m_u - m_d)\Big]. \end{aligned}$$

La nullité des parties non diagonales fournit les contraintes à l'ordre le plus bas

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{m_u - m_d}{m_u + m_d - 2m_s} = \frac{\sqrt{3}}{4R}. \tag{2.23}$$

Nous avons introduit la quantité

$$\frac{1}{R} = \frac{m_d - m_u}{m_s - \hat{m}} \quad \text{avec} \quad \hat{m} = \frac{1}{2}(m_u + m_d),$$

qui représente la contribution de la brisure d'isospin due à la différence de masse entre les quarks u et d. Dans la suite de notre étude, nous ne considérons pas les termes en $(1/R)^n$ avec n supérieur à 1, car nous nous intéressons à la contribution de la brisure d'isospin au premier ordre. Les valeurs de R [46] se situent entre 30 et 50, ainsi

$$8.6\ 10^{-3} \ < \ \epsilon \ < \ 14.4\ 10^{-3}$$

Avec cette quantité, la matrice de masse des quarks (2.12) s'exprime comme

$$M = \begin{pmatrix} \hat{m} - \frac{m_s - \hat{m}}{2R} & & \\ & \hat{m} + \frac{m_s - \hat{m}}{2R} & \\ & & m_s \end{pmatrix}.$$

Finalement, les masses des mésons pseudo-scalaires à l'ordre le plus bas sont

$$\begin{aligned}
M^2_{\pi^o} &= 2B_o\hat{m} = B_o(m_u + m_d) = M^2_\pi \\
M^2_{\pi^\pm} &= 2B_o\hat{m} + 2e^2F_o^2Z_o \\
&= M^2_\pi + \Delta_\pi \\
M^2_{K^o} &= B_o\hat{m}(1 - \frac{1}{2R}) + B_o m_s(1 + \frac{1}{2R}) \\
&= B_o(\hat{m} + m_s) + \frac{1}{2R}B_o(m_s - \hat{m}) \\
&= M^2_K + \frac{1}{2R}(M^2_K - M^2_\pi) \\
M^2_{K^\pm} &= B_o\hat{m}(1 + \frac{1}{2R}) + B_o m_s(1 - \frac{1}{2R}) + 2e^2F_o^2Z_o \\
&= M^2_K - \frac{1}{2R}(m_s - \hat{m}) + 2e^2F_o^2Z_o \\
&= M^2_K - \frac{1}{2R}(M^2_K - M^2_\pi) + \Delta_\pi \\
M^2_\eta &= \frac{2}{3}B_o(\hat{m} + 2m_s) = \frac{1}{3}(4M^2_K - M^2_\pi)
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Les contributions de la forme Δ_π sont dues à la différence de masses entre les mésons chargés et neutres. Ce terme purement électromagnétique est inclu dans le lagrangien chiral (2.15). On rappelle que les formules ci-dessus ne sont valable qu'à l'ordre le plus bas de la théorie chirale. Les corrections d'ordre supérieur seront données dans le chapitre 8. Les masses notées M_π et M_K représentent les masses à la limite d'isospin où on pose $m_u = m_d$ et $e = 0$.

D'après les formules à l'ordre le plus bas des masses des mésons (2.24), nous constatons que lorsque l'on passe à la limite d'isospin ($\Delta_\pi = 0$ et $\frac{1}{R} = 0$) nous obtenons deux possibilités pour les quantités M_π et M_K. Pour le canal chargé $K_{\ell 4}$ (4.1), nous choisirons par pure convention d'utiliser les masses chargées comme masses à la limite d'isospin c'est-à-dire

$$M_\pi = M_{\pi^\pm} = 139.6 \text{ MeV} \quad et \quad M_K = M_{K^\pm} = 493.6 \text{ MeV}. \tag{2.25}$$

De plus, dans [67] et [68] où les résultats présentés sur $K_{\ell 4}$ sont à la limite d'isospin, les masses utilisées pour les mésons sont (M_π, M_K)=(139.6,493.6) MeV, (135,493.6) MeV et (137,497.7) MeV pour les désintégrations (4.1), (4.2) et (4.3) respectivement.

Nous avons vu que la théorie des perturbations chirale est un développement en puissance des moments externes p et des masses des quarks légers m_q. Si nous nous intéressons aux effets de la brisure d'isospin, ce développement devient insuffisant. Il faut faire une développement supplémentaire en puissance des paramètres de la brisure d'isospin, qui sont en l'occurence

$$m_u - m_d \quad \text{et} \quad e^2 \ .$$

Dans ce travail de thèse nous nous intéresserons aux effets au premier ordre de ce développement

$$\mathcal{O}(m_u - m_d) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}(e^2) \ . \tag{2.26}$$

En faisant le choix du schéma de comptage chiral suivant

$$\mathcal{O}(m_u - m_d) = \mathcal{O}(e^2) = \mathcal{O}(m_q) = \mathcal{O}(p^2) \ , \tag{2.27}$$

nous obtenons les résultats suivants. Pour les calculs en arbre (qui correspondent à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations chirale), p^2, nous aurons à calculer tous les graphes de Feynman d'ordre

$$\mathcal{O}(m_q) \quad \mathcal{O}(p^2) \quad \mathcal{O}(m_u - m_d) \quad \mathcal{O}(e^2) \ . \tag{2.28}$$

Pour les calculs à l'ordre d'une boucle (qui correspondent à l'ordre suivant de la théorie des perturbations chirale), p^4, nous aurons à calculer tous les graphes de Feynman d'ordre

$$\mathcal{O}({m_q}^2) \quad \mathcal{O}(p^4) \quad \mathcal{O}(m_q\ p^2)$$

$$\mathcal{O}\big(p^2\ (m_u - m_d)\big) \quad \mathcal{O}\big(m_q\ (m_u - m_d)\big) \quad \mathcal{O}(e^2\ p^2) \quad \mathcal{O}(m_q\ e^2) \tag{2.29}$$

Chapitre 3

Amplitude de désintégration faible

Sommaire

3.1 L'interaction faible **22**

3.2 Transformations de Lorentz et de parité **23**

3.3 Le courant hadronique $K_{\ell 2}$ **24**

3.4 Le courant hadronique $K_{\ell 3}$ **26**

3.5 Le courant hadronique $K_{\ell 4}$ **27**

5.1 Facteur de forme tensoriel 29

3.6 Résumé **29**

Dans cette section, nous étudierons quelques amplitudes de désintégration associées au kaon et au pion. Le kaon est le hadron le plus léger [46] possédant un nombre quantique d'étrangeté non nul. La table suivante résume les valeurs expérimentales du rapport $\frac{\Gamma}{\Gamma_{\mathrm{tot}}}$ pour quelques désintégrations leptoniques ou semi-leptoniques, dont certaines seront étudiées dans la suite.

		$(\frac{\Gamma}{\Gamma_{tot}})_{l=e}$	$(\frac{\Gamma}{\Gamma_{tot}})_{l=\mu}$
$\pi^+ \to l^+ \nu_l$	$(\pi_{\ell 2})$	1.23×10^{-4}	99.98×10^{-2}
$K^+ \to l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 2})$	1.55×10^{-5}	63.51×10^{-2}
$\pi^+ \to \pi^0 l^+ \nu_l$	(désintégration β du pion)	1.025×10^{-8}	–
$K^+ \to \pi^0 l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 3})$	4.87×10^{-2}	3.27×10^{-2}
$K_L^0 \to \pi^- l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 3})$	38.79×10^{-2}	27.18×10^{-2}
$K^+ \to \pi^+\pi^- l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 4})$	4.08×10^{-5}	1.4×10^{-5}
$K^+ \to \pi^0\pi^0 l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 4})$	2.1×10^{-5}	–
$K^0 \to \pi^0\pi^- l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 4})$	5.18×10^{-5}	–

		$(\frac{\Gamma}{\Gamma_{tot}})_{l=e}$
$K^+ \to \pi^+\pi^-\pi^0 l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 5})$	3×10^{-12}
$K^+ \to \pi^0\pi^0\pi^0 l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 5})$	2.5×10^{-12}
$K^0 \to \pi^0\pi^0\pi^- l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 5})$	12×10^{-12}
$K^0 \to \pi^+\pi^-\pi^- l^+ \nu_l$	$(K_{\ell 5})$	33×10^{-12}

Pour les désintégrations $K_{\ell 5}$, les valeurs mentionnées correspondent aux valeurs obtenues à l'ordre le plus bas de la théorie des perturbations chirales [67]. Pour la désintégration $K^+ \to \pi^o\pi^o\pi^o e^+\nu_e$ la valeur dans [46] est $< 3.510^{-6}$. L'un des premiers historiques (1972) sur les désintégrations semi-leptoniques du kaon est faite dans [69].

3.1 L'interaction faible

L'interaction faible a été mise en évidence en premier dans les désintégrations β des nucléons. En 1934, Fermi décrivit la désintégration β du neutron,

$$n \rightarrow p + e^- + \overline{\nu}_e$$

avec la réaction inverse

$$\nu_e + n \rightarrow p + e^-,$$

comme une interaction de contact à quatre fermions avec un couplage G_F, la constante de Fermi. Le neutron est transformé en proton alors que le neutrino devient un électron. L'idée de Fermi fut alors de comparer l'interaction à quatre fermions à l'interaction de deux courants. L'élément de matrice de la désintégration β serait alors de la forme

$$\mathcal{M} \equiv J_\mu^{hadron} \, J^{lepton^\mu}.$$

Fermi introduisit ainsi le courant faible qui se décompose en une partie hadronique et une partie leptonique. Les interactions courant-courant peuvent être visualisées en terme d'échange de bosons (chargés $W^\pm$ ou neutres Z^o). Cette interaction change la saveur des quarks. Dans la théorie de Dirac, nous pouvons fabriquer cinq formes de courants, Ψ étant un champs de Dirac

Scalaire	S	$\equiv$	$\overline{\Psi}\Psi$
Pseudo-scalaire	P	$\equiv$	$\overline{\Psi}\gamma_5\Psi$
Vecteur	V^μ	$\equiv$	$\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$
Axial-vecteur	A^μ	$\equiv$	$\overline{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi$
Tensoriel	$T^{\mu\nu}$	$\equiv$	$\overline{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$

Fermi, dans sa théorie, n'utilisa que l'interaction de type vecteur. De 1933 à 1958, de nombreux travaux [70] furent effectués pour conclure que la forme mathématique de l'interaction faible est V-A. La structure du lagrangien d'interaction faible qui fait intervenir le couplage des bosons de gauge chargés avec les fermions est de la forme

$$\mathcal{L} = ... + \frac{g}{2\sqrt{2}} \left(W_\rho^+ J^\rho + W_\rho^- J^{\rho\dagger}\right) \tag{3.1}$$

où apparaît le terme d'interaction entre le courant J^ρ et les champs de jauge $W_\rho^\pm$. La constante de couplage faible g est reliée à la constante de Fermi décrite ci-dessus par

$$\frac{g^2}{8M_W^2} = \frac{G_F}{\sqrt{2}},$$

M_W étant la masse du boson de gauge $W^\pm$ qui véhicule l'interaction. Le courant qui intervient, écrit en faisant intervenir les générations de fermions du Modèle Standard est

$$J^\rho = \begin{pmatrix} \overline{\nu}_e & \overline{\nu}_\mu & \overline{\nu}_\tau \end{pmatrix}_L \gamma^\rho \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}_L + \begin{pmatrix} \overline{u} & \overline{c} & \overline{t} \end{pmatrix}_L \gamma^\rho \, V_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L, \tag{3.2}$$

avec la matrice de Cabibbo, Kobayashi et Maskawa

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Dans le Modèle Standard, les quarks et les leptons sont des doublets gauches (d'où l'indice L dans la formule du courant 3.2), par exemple $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$, $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$ et des singlets droits (R), par exemple u_R, $d_R \cdots$ D'après la forme du lagrangien faible (3.1), on en déduit que le quark s du kaon peut se transformer en un quark u. Comme l'interaction faible ne conserve pas l'étrangeté, le kaon est instable et se désintègre vers des états d'étrangeté nulle contenant des pions, photons, leptons. Le fait que le quark s peut se transformer en un quark u va nous permettre de donner la liste des modes de désintégration du kaon pour les configurations de type $K_{\ell n}$, avec $n = 2, 3, 4$. Cette nomenclature nous dit que le kaon se désintègre en n particules avec parmi celles-ci des leptons.

3.2 Transformations de Lorentz et de parité

Transformations de Lorentz

Les transformations de Poincaré sont formées d'une transformation de Lorentz combinée à une translation. Une représentation unitaire de ce groupe est décrite par $U(\Lambda, a)$, où a décrit le quadri-vecteur de la translation et Λ une transformation de Lorentz. Les éléments de matrice des courants hadroniques sont des quantités covariantes de Lorentz[11].

Application

En appliquant (3.4), (3.5) et (3.6) aux courants hadroniques qui changent l'étrangeté, nous obtenons (nous n'écrirons pas explicitement les indices de Dirac)

$$U(\Lambda,0)\ \overline{s}(x)\ \gamma^\mu\ u(x)\ U^\dagger(\Lambda,0) = \overline{s}(\Lambda x)\ \underbrace{S(\Lambda)\ \gamma^\mu\ S(\Lambda^{-1})}_{(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu}\ u(\Lambda x)\ . \tag{3.7}$$

$$U(\Lambda,0)\ \overline{s}\ \gamma^\mu\gamma^5\ u(x)\ U^\dagger(\Lambda,0) = \overline{s}(\Lambda x)\ \underbrace{S(\Lambda)\ \gamma^\mu\gamma^5\ S(\Lambda^{-1})}_{(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \gamma^\nu\ \gamma^5}\ u(\Lambda x)\ . \tag{3.8}$$

Pour cette dernière relation, nous avons utilisé la formule $\gamma^5 = \frac{i}{4!}\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\ \gamma^\mu\ \gamma^\nu\ \gamma^\rho\ \gamma^\sigma$, où

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si permutation paire des indices (0123)} \\ -1 & \text{si permutation impaire des indices (0123)} \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases} \tag{3.9}$$

[11] On rappelle comment se transforment les spineurs et les matrices de Dirac sous une transformation de Lorentz:

Soit $\Psi_\alpha(x)$ un spineur de Dirac. L'action des transformations de Lorentz $U(\Lambda, 0)$ est donnée par

$$\Psi'(x') = S(\Lambda)\ \Psi(x) \quad \text{avec} \quad x' = \Lambda x \tag{3.4}$$

$$\overline{\Psi'}(x') = \overline{\Psi}(x)\ S^{-1}(\Lambda) \tag{3.5}$$

avec $S(\Lambda)$ une représentation des transformations de Lorentz.
Afin de respecter la covariance de l'équation de Dirac, il faut que les matrices de Dirac γ^μ se transforment comme

$$S(\Lambda)\ \gamma^\mu\ S^{-1}(\Lambda)\ =\ (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu\ \gamma^\nu\ . \tag{3.6}$$

est le tenseur totalement anti-symétrique de Levi-Civita . Pour le courant hadronique de type tensoriel, nous avons

$$U(\Lambda,0)\ \overline{s}(x)\ \sigma^{\mu\nu}\ u(x)\ U^{\dagger}(\Lambda,0) = \overline{s}(\Lambda x)\ \underbrace{S(\Lambda)\ \sigma^{\mu\nu}\ S(\Lambda^{-1})}_{(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\rho}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\eta}\sigma^{\rho\eta}}\ u(\Lambda x)\ , \tag{3.10}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}] \\ [\sigma^{\mu\nu},\gamma_5] &= 0, \\ \{\gamma^{\mu},\gamma_5\} &= 0. \end{aligned}$$

La symétrie discrète de parité

Nous utiliserons l'action de la parité sur les éléments de matrice du courant hadronique, pour avoir des informations sur la décomposition de ces éléments de matrice en fonction des facteurs de forme hadroniques. Il nous faut pour cela connaître la transformation des champs spinoriels sous parité qui est donné par les relations

$$\begin{aligned} P\ \Psi(x)\ P^{-1} &= \eta_p\ \gamma^0\ \Psi(\Pi x), \\ P\ \overline{\Psi}(x)\ P^{-1} &= \eta_p\ \overline{\Psi}(\Pi x)\ \gamma^0, \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

η_p étant le nombre quantique de parité associé à la fonction d'onde $\Psi(x)$. Les quarks ont une parité $\eta_p = +1$.

D'après (3.11) et (3.4)

$$S(\Pi) = \gamma^0.$$

En utilisant (3.6), nous trouvons

$$\gamma^0\ \gamma^{\mu}\ \gamma^0 = \Pi^{\mu}{}_{\mu'}\ \gamma^{\mu'} \tag{3.12}$$

$$\gamma^0\ \gamma^{\mu}\ \gamma^5\ \gamma^0 = -\Pi^{\mu}{}_{\mu'}\ \gamma^{\mu'}\ \gamma^5 \tag{3.13}$$

$$\gamma^0\ \sigma^{\mu\nu}\ \gamma^0 = \Pi^{\mu}{}_{\mu'}\ \Pi^{\nu}{}_{\nu'}\ \sigma^{\mu'\nu'} \tag{3.14}$$

$$\gamma^0\ \sigma^{\mu\nu}\gamma_5\ \gamma^0 = \Pi^{\mu}{}_{\mu'}\ \Pi^{\nu}{}_{\nu'}\ \sigma^{\mu'\nu'}\gamma_5$$

Dans la suite, nous utiliserons l'action des transformations de Lorentz ainsi que de parité pour paramétriser la partie hadronique des éléments de matrice des désintégrations $K_{\ell 4}$.

3.3 Le courant hadronique $K_{\ell 2}$

Les désintégrations $K_{\ell 2}$ englobent les désintégrations semi-leptoniques d'un kaon (impulsion k) en un lepton ℓ (impulsion p_ℓ) et un neutrino ν_ℓ (impulsion p_ν). Le kaon de l'état initial ne peut être qu'un kaon chargé.

$$K^{\pm} \rightarrow \ell^{\pm}\nu_{\ell}(\overline{\nu}_{\ell})$$

Action de Lorentz

L'élément de matrice des désintégrations $K_{\ell 2}$ est de la forme

$$ {}^{in}\langle p_\nu, p_l|S|k\rangle^{in} \quad \equiv \quad i\ V_{us}^* \frac{G_F}{\sqrt{2}} \overline{u}(p_\nu)\ \gamma_\mu(1-\gamma^5)\ v(p_l)\ \langle 0|J^\mu_{\text{hadronique}}|k\rangle $$

L'angle de Cabibbo, θ_c apparaît dans

$$ V_{us} \quad = \quad \sin\ \theta_c \simeq 0.22 $$

Le courant hadronique ne dépend que de l'indice de Lorentz μ et de la seule impulsion disponible, celle de la particule initiale, le kaon. Il est évident que la seule quantité invariante de Lorentz que nous pouvons fabriquer nous mène aux relations

$$ \langle 0|J^\mu_{\text{vectoriel}}|k\rangle = k^\mu V(k) \qquad \text{et} \qquad \langle 0|J^\mu_{\text{axial}}|k\rangle = k^\mu A(k)\ . \tag{3.15} $$

Les fonctions $V(k)$ et $A(k)$ sont appelées facteurs de forme. Ces fonctions sont a priori différentes pour la partie axiale et vectorielle du courant. L'action des transformations de Lorentz avec l'aide des résultats (3.7) et (3.8) sur ces éléments de matrice s'écrit

$$ \langle 0|J^\mu_{\text{hadronique}}|k\rangle = \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_{\mu'}\ \langle 0|J^{\mu'}_{\text{hadronique}}|\Lambda k\rangle\ . \tag{3.16} $$

En injectant les définitions (3.15) dans (3.16), nous trouvons que

$$ V(k) = V(\Lambda k) \quad \text{et} \quad A(k) = A(\Lambda k). $$

Pour satisfaire à ces relations, il faut que les fonctions $V(k)$ et $A(k)$ soient invariantes de Lorentz et $k^2 = M^2_{K^\pm}$ est le seul invariant de Lorentz que l'on puisse construire avec une seule impulsion. L'invariance sous transformation de Lorentz montre que les facteurs de forme $V(k)$ et $A(k)$ sont des constantes.

Action de la parité

Les mésons pseudo-scalaires ont une parité -1. En appliquant les résultats (3.13) et (3.12), nous trouvons

$$ \begin{aligned} \langle 0|J^\mu_{\text{vectoriel}}|k\rangle &= (-1)\Pi^\mu_{\mu'}\ \langle 0|J^{\mu'}_{\text{vectoriel}}|\Pi k\rangle \\ \langle 0|J^\mu_{\text{axial}}|k\rangle &= \Pi^\mu_{\mu'}\langle 0|J^{\mu'}_{\text{axial}}|\Pi k\rangle\ . \end{aligned} \tag{3.17} $$

En injectant les relations (3.15) dans les résultats précédents, nous obtenons

$$ V(k^2) \quad = \quad -V(k^2) \qquad \text{et} \qquad A(k^2) = A(k^2) $$

L'action de la parité montre que dans le cas des désintégrations $K_{\ell 2}$ seul le facteur de forme axial existe.

$$ K_{\ell 2}: \qquad \langle 0|J^\mu_{\text{axial}}|K^\pm(k)\rangle = k^\mu A(M^2_{K^\pm}) \tag{3.18} $$

3.4 Le courant hadronique $K_{\ell 3}$

Les désintégrations $K_{\ell 3}$ englobent les désintégrations semi-leptoniques d'un kaon (impulsion k) en un pion (impulsion p), un lepton ℓ (impulsion p_ℓ) et un neutrino ν_ℓ (impulsion p_ν). Le kaon de l'état initial peut être un kaon chargé ou neutre.

$$\begin{aligned} K^\pm &\rightarrow \pi^o \ell^\pm \nu_\ell(\overline{\nu}_\ell) \\ K^o &\rightarrow \pi^- \ell^+ \nu_\ell \\ \overline{K}^o &\rightarrow \pi^+ \ell^- \overline{\nu}_\ell \end{aligned}$$

L'élément de matrice des désintégrations $K_{\ell 3}$ est de la forme

$$^{in}\langle p_\nu, p_l, p|S|k\rangle^{in} \quad \equiv \quad i\ V_{us}^* \frac{G_F}{\sqrt{2}}\ \overline{u}(p_\nu)\ \gamma_\mu(1-\gamma^5)\ v(p_l)\ \langle p|J^\mu_{\text{hadronique}}|k\rangle.$$

Le courant hadronique peut s'écrire comme une composante vectorielle et une composante axiale.

Action de Lorentz

Nous avons à notre disposition deux impulsions afin de construire un objet invariant de Lorentz,

$$\langle p|J^\mu_{\text{vectoriel}}|k\rangle = V_-(k,p)(p-k)^\mu + V_+(k,p)(p+k)^\mu\ , \tag{3.19}$$

$$\langle p|J^\mu_{\text{axial}}|k\rangle = A_-(k,p)(p-k)^\mu + A_+(k,p)(p+k)^\mu\ , \tag{3.20}$$

L'action des transformations de Lorentz (3.7) et (3.8) sur ces éléments de matrice donne les relations

$$\begin{aligned} \langle p|J^\mu_{\text{vectoriel}}|k\rangle &= \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_{\mu'}\ \langle \Lambda p|J^{\mu'}_{\text{vectoriel}}|\Lambda k\rangle\ , \\ \langle p|J^\mu_{\text{axial}}|k\rangle &= \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_{\mu'}\ \langle \Lambda p|J^{\mu'}_{\text{axial}}|\Lambda k\rangle\ . \end{aligned}$$

D'après la forme de ces éléments de matrice donnée en (3.19) et (3.20), nous trouvons les relations

$$\begin{aligned} X_-(k,p)\ (p-k)^\mu + X_+(k,p)\ (p+k)^\mu &= \left(\Lambda^{-1}\right)^\mu{}_{\mu'}\ \{X_-(\Lambda k,\Lambda p)\ (\Lambda p-\Lambda k)^{\mu'} \\ &+ X_+(\Lambda k,\Lambda p)\ (\Lambda p+\Lambda k)^{\mu'}\} \qquad \text{avec}\ \ X=A\ \ \text{ou}\ \ V \end{aligned}$$

La seule façon de satisfaire à ces relations est d'avoir des facteurs de forme invariants de Lorentz. Avec les deux impulsions en présence les seuls invariants que l'on puisse construire sont $p^2 = M^2_{\pi^\pm \text{ou} \pi^o}$, $k^2 = M^2_{K^\pm \text{ou} K^o}$ et $k.p$, c'est à dire que les facteurs de forme ne dépendent que de la variable $t = (k-p)^2$, le carré du transfert d'impulsion.

Action de la parité

Etudions à présent l'action de la parité sur ces éléments de matrice. A nouveau, nous obtenons des relations qui vont nous informer sur l'existence ou non des contributions venant des courants vectoriels ou axiaux

$$\begin{aligned} \langle p|J^\mu_{\text{vectoriel}}|k\rangle &= \Pi^\mu_{\mu'}\langle \Pi p|J^{\mu'}_{\text{vectoriel}}|\Pi k\rangle\ , \\ \langle p|J^\mu_{\text{axial}}|k\rangle &= -\ \Pi^\mu_{\mu'}\langle \Pi p|J^{\mu'}_{\text{axial}}|\Pi k\rangle\ . \end{aligned}$$

En injectant les relations (3.19) et (3.20) dans les résultats précédents, nous trouvons que pour les désintégrations de type $K_{\ell 3}$, seul le facteur de forme vectoriel existe.

Les analyses des désintégrations $K_{\ell 3}$ au début des années 70 avaient considéré une partie tensorielle pour l'amplitude de ce processus [71]. Une analyse du graphe de Dalitz pour la désintégration $K^+ \to \pi^o e^+ \nu$ a montré que la présence d'un terme tensoriel ne pouvait pas être exclu [72].

3.5 Le courant hadronique $K_{\ell 4}$

Les désintégrations $K_{\ell 4}$ regroupent les désintégrations semi-leptoniques d'un kaon (impulsion k) en deux pions (impulsions p_1 et p_2), un lepton ℓ (impulsion p_ℓ) et un neutrino ν_ℓ (impulsion p_ν). Le kaon de l'état initial peut être un kaon chargé ou neutre.

$$\begin{aligned} K^\pm &\to \pi^+\pi^-\ell^\pm\nu_\ell(\overline{\nu}_\ell) \\ K^\pm &\to \pi^o\pi^o\ell^\pm\nu_\ell(\overline{\nu}_\ell) \\ K^o &\to \pi^o\pi^-\ell^+\nu_\ell \\ \overline{K}^o &\to \pi^o\pi^+\ell^-\overline{\nu}_\ell \end{aligned}$$

L'élément de matrice des désintégrations $K_{\ell 4}$ s'écrit comme

$$^{in}\langle p_1, p_2, p_\nu, p_l|S|k\rangle^{in} \quad \equiv \quad i\ V_{us}^* \ \frac{G_F}{\sqrt{2}}\ \overline{u}(p_\nu)\ \gamma_\mu(1-\gamma^5)\ v(p_l)\ \langle p_1, p_2|J^\mu_{\text{hadronique}}|k\rangle.$$

Nous utiliserons pour cet ensemble de désintégrations, les variables P, Q et L définies dans [15]

$$P \ = \ p_1 + p_2 \quad Q \ = \ p_1 - p_2 \quad L \ = \ p_l + p_\nu \ = \ k - p_1 - p_2. \tag{3.21}$$

A nouveau, d'après la forme des éléments de matrice hadronique, il nous faut construire un objet invariant de Lorentz comportant l'indice de Lorentz μ. Nous avons à notre disposition les impulsions p_1, p_2 et k.

La seule possibilité est d'écrire des combinaisons linéaires de la forme

$$\begin{aligned} \langle p_1, p_2|J^\mu_{\text{vectoriel}}|k\rangle &= P^\mu\ F_{\text{v}}(X)\ +\ Q^\mu\ G_{\text{v}}(X)\ +\ L^\mu\ R_{\text{v}}(X)\ +\epsilon^{\mu\nu\omega\sigma}L_\nu\ P_\omega\ Q_\sigma\ H_{\text{v}}(X), \\ \langle p_1, p_2|J^\mu_{\text{axial}}|k\rangle &= P^\mu\ F_{\text{a}}(X)\ +\ Q^\mu\ G_{\text{a}}(X)\ +\ L^\mu\ R_{\text{a}}(X)\ +\ \epsilon^{\mu\nu\omega\sigma}L_\nu\ P_\omega\ Q_\sigma\ H_{\text{a}}(X). \end{aligned} \tag{3.22}$$

A la différence des désintégrations $K_{\ell 2}$ et $K_{\ell 3}$, nous avons ici la possibilité de fabriquer un terme comportant le tenseur totalement anti-symétrique de Levi-Civita qui est défini dans (3.9). $F(X)$, $G(X)$, $R(X)$ et $H(X)$ sont des fonctions qui dépendent d'un ensemble de variables, noté pour le moment X, qui sera précisée dans la suite.

Action de Lorentz

L'action des transformations de Lorentz nous donne une première indication sur les éléments de matrice du courant hadronique qu'il soit vectoriel ou axial:

$$\langle p_1, p_2|J^\rho_{\text{i}}|k\rangle \quad = \quad \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu\ \langle \Lambda p_1, \Lambda p_2|J^\mu_{\text{i}}|\Lambda k\rangle \quad i = \text{vectoriel ou axial.}$$

D'après les formules (3.22), nous trouvons l'égalité suivante, où $i = \text{v}, \text{a}$:

$$\begin{aligned} P^\rho\ F_i(X)\ +\ Q^\rho\ G_i(X)\ +\ L^\rho\ R_i(X)\ +\ \epsilon^{\rho\nu\omega\sigma}L_\nu\ P_\omega\ Q_\sigma\ H_i(X) \ &= \left(\Lambda^{-1}\right)^\rho{}_\mu\big[(\Lambda P)^\mu\ F_i(\Lambda X)\ + \\ (\Lambda Q)^\mu\ G_i(\Lambda X)\ +\ (\Lambda L)^\mu\ R_i(\Lambda X)\ +\ \epsilon^{\mu\nu\omega\sigma}\ \Lambda L_\nu\ \Lambda P_\omega\ \Lambda Q_\sigma\ H_i(\Lambda X)\big]\ , \end{aligned}$$

Pour satisfaire à ces égalités, tous les facteurs de forme doivent être invariants de Lorentz. Les seuls invariants non triviaux que l'on peut construire, à partir des impulsions mises en jeu, sont

$$s = (p_1 + p_2)^2 \quad , \; t = (k - p_1)^2 \quad \text{et} \quad u = (k - p_2)^2 \; .$$

Ces variables satisfont à la relation

$$s + t + u = M_K^2 + 2M_\pi^2 + s_l$$

où

$$s_l = (k - p_1 - p_2)^2 = (p_l + p_{\nu_l})^2$$

est la masse invariante du di-lepton.

Action de la parité

L'action des transformations de parité sur les éléments de matrice du courant vectoriel est

$$\langle p_1, p_2 | J^\mu_{\text{vectoriel}} | k \rangle = (-1)^3 \; \Pi^\mu_{\mu'} \langle \Pi p_1, \Pi p_2 | J^{\mu'}_{\text{vectoriel}} | \Pi k \rangle \; . \tag{3.23}$$

D'après la décomposition (3.22), nous obtenons la relation suivante

$$\begin{aligned} P^\rho \; F_{\text{v}}(s,t,u) \; + \; Q^\rho \; G_{\text{v}}(s,t,u) \; + \; L^\rho \; R_{\text{v}}(s,t,u) \; + \; \epsilon^{\rho\nu\omega\sigma} \; L^\nu \; P^\omega \; Q^\sigma \; H_{\text{v}}(s,t,u) \; &= \\ (-1)^3 \; \Pi^\rho_{\;\mu} \Big[(\Pi P)^\mu \; F_{\text{v}}(s,t,u) \; + \; (\Pi Q)^\mu \; G_{\text{v}}(s,t,u) \; + \; (\Pi L)^\mu \; R_{\text{v}}(s,t,u) \\ + \; \epsilon^{\mu\nu\omega\sigma} (\Pi L)_\nu \; (\Pi P)_\omega \; (\Pi Q)_\sigma \; H_{\text{v}}(s,t,u) \Big] \; . \end{aligned} \tag{3.24}$$

Nous montrons que $F_{\text{v}}(s,t,u)$, $G_{\text{v}}(s,t,u)$ et $R_{\text{v}}(s,t,u)$ sont nuls. Pour cela, il suffit de regarder comment se transforment respectivement les parties temporelles et spatiales dans (3.24):

$$X_{\text{v}}(s,t,u) \;\; = \;\; -X_{\text{v}}(s,t,u) \quad \text{et } X = F, G \text{ et } R.$$

De la même manière $H_{\text{v}}(s,t,u)$ est non nul. Ceci est dû au fait que les parties temporelles et spatiales du tenseur de Levi-Civita se transforment comme

$$\begin{aligned} \Pi^0_{\;0} \; \epsilon^{0\nu\omega\sigma} \;\; &= \;\; \epsilon^{0\nu\omega\sigma} \\ \Pi^a_{\;a} \; \epsilon^{a\nu\omega\sigma} \;\; &= \;\; -\; \epsilon^{a\nu\omega\sigma} \qquad a \in [1,3] \end{aligned}$$

L'action des transformations sous parité des éléments de matrice du courant hadronique vectoriel nous fournit le résultat

$$\langle p_1 \; p_2 | J^\rho_{\text{vectoriel}} | k \rangle \;\; = \;\; \epsilon^{\rho\nu\omega\sigma} L_\nu \; P_\omega \; Q_\sigma \; H_{\text{v}}(s,t,u) \; . \tag{3.25}$$

A l'aide de (3.13), la transformation de parité sur les éléments de matrice du courant axial est

$$\langle p_1, p_2 | J^\rho_{\text{axial}} | k \rangle = (-1)^3 \; \big(\; - \; \Pi^\rho_{\;\mu} \; \big) \langle \Pi p_1, \Pi p_2 | J^\mu_{\text{axial}} | \Pi k \rangle .$$

En suivant la même méthode que pour le courant hadronique vectoriel, nous montrons que, dans le cas du courant hadronique axial, seuls les facteurs de forme F_{a}, G_{a} et R_{a} sont présents.

Finalement les éléments de matrice du courant axial sont de la forme

$$\langle p_1, p_2 | J^\rho_{axial} | k \rangle \;\; = \;\; P^\rho \; F_{\text{a}}(s,t,u) \; + \; Q^\rho \; G_{\text{a}}(s,t,u) \; + \; L^\rho \; R_{\text{a}}(s,t,u).$$

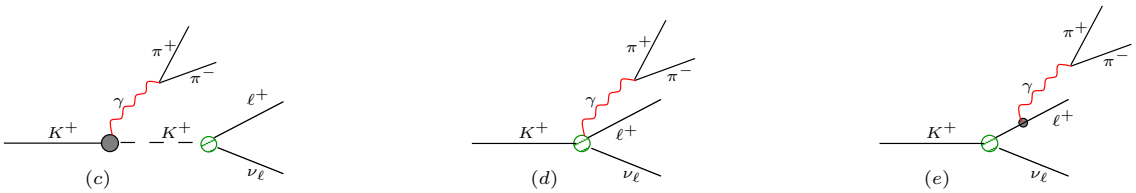


FIGURE 3.1: Diagrammes de Feynman avec photon contribuant à l'ordre le plus bas au canal $K^+ \to \pi^+\pi^-\ell^+\ \nu_\ell$.

5.1 Facteur de forme tensoriel

Nous verrons, dans le chapitre 5, que parmi les diagrammes de Feynman en arbre avec photon (FIGURE 3.1), le diagramme (e) fait apparaître une contribution de type tensorielle à l'amplitude du processus. Après le triomphe de la théorie électrofaible (théorie V-A[12]), il serait déraisonnable d'introduire directement dans cette théorie un courant tensoriel. Un courant de type tensoriel pourraît s'écrire sous la forme $\sigma^{\mu\nu}$ ou $\sigma^{\mu\nu}\ \gamma^5$. On ne peut pas faire d'hypothèse sur la forme du courant tensoriel pour le moment, car on ne connaît pas sa parité. On pourraît supposer une parité η et à l'aide des transformations sous parité de $\sigma^{\mu\nu}$ et $\sigma^{\mu\nu}\ \gamma^5$ trouver la valeur que devrait avoir η pour que ce courant tensoriel existe au-delà du Modèle Standard.

3.6 Résumé

Ce chapitre nous a permis de discuter de la forme des éléments de matrice de quelques désintégrations semi-leptoniques de mésons pseudo-scalaires, comme le pion ou le kaon.
L'action des symétries d'espace-temps et de parité, nous a permis de décomposer les éléments de matrice des courants hadroniques vectoriels et axiaux associés en facteurs de forme. La table ci-dessous résume les résultats obtenus.

$$K_{\ell 2}: \quad J^\mu{}_{\text{axial}} = k^\mu A(M_K^2)$$

$$K_{\ell 3}: \quad J^\mu{}_{\text{vectoriel}} = V_+(t)(p+k)^\mu + V_-(t)(p-k)^\mu$$

avec $t = (k-p)^2$, le carré du transfert d'impulsion.

$$K_{\ell 4}: \quad J^\mu{}_{\text{vectoriel}} = \epsilon^{\rho\nu\omega\sigma} L_\nu P_\omega Q_\sigma H_v(s,t,u)$$

$$J^\mu{}_{\text{axial}} = P^\rho F_a(s,t,u) + Q^\rho G_a(s,t,u) + L^\rho R_a(s,t,u)$$

avec $s = (p_1+p_2)^2$, $t = (k-p_1)^2$ et $u = (k-p_2)^2$

vérifiant $s + t + u = M_K^2 + 2M_\pi^2 + s_l$

avec $s_l = (k - p_1 - p_2)^2 = (p_l + p_{\nu_l})^2$ la masse invariante du di-lepton.

[12] Ce ne fut que par les papiers [73] de E. G. C. Sudarshan et R. E. Marshak, d'une part, et de R. P. Feynman et M. Gell-Mann, d'autre part - et aussi de J. Sakurai - que la forme de l'interaction faible fut découverte comme une combinaison des formes vectorielle V et axiale A, à savoir, V-A.

Chapitre 4

Le cadre de travail de $K_{\ell 4}$

Sommaire

4.1 La cinématique de $K_{\ell 4}$ 32

4.2 L'élément de matrice 34

4.3 Le taux de désintégration 36

4.4 Le déphasage pion-pion 39

Les désintégrations semi-leptoniques K_{e4} [74, 75] ont été parmi les premières applications de la théorie des perturbations chirale [23, 55, 24] à l'ordre d'une boucle. Dans ce chapitre nous introduisons le cadre de travail pour l'étude des désintégrations $K_{\ell 4}$, dont la nomenclature signifie qu'un kaon se désintègre en 4 corps de façon semi-leptonique. D'après la loi empirique reproduite par le Modèle Standard $\Delta S = \Delta Q$, avec S le nombre quantique d'étrangeté et Q la charge électrique, les désintégrations $K_{\ell 4}$ sont

$$K^+(k) \rightarrow \pi^+(p_1)\ \pi^-(p_2)\ \ell^+(p_\ell)\ \nu_\ell(p_\nu) \tag{4.1}$$

$$K^+(k) \rightarrow \pi^0(p_1)\ \pi^0(p_2)\ \ell^+(p_\ell)\ \nu_\ell(p_\nu) \tag{4.2}$$

$$K^0(k) \rightarrow \pi^0(p_1)\ \pi^-(p_2)\ \ell^+(p_\ell)\ \nu_\ell(p_\nu) \tag{4.3}$$

et leur modes conjugués de charge. La lettre ℓ désignera soit l'électron e, soit le muon μ. Nous considérons les contributions de la violation d'isospin, c'est-à-dire $m_u \neq m_d$, ainsi que les contributions électromagnétiques, $e \neq 0$.

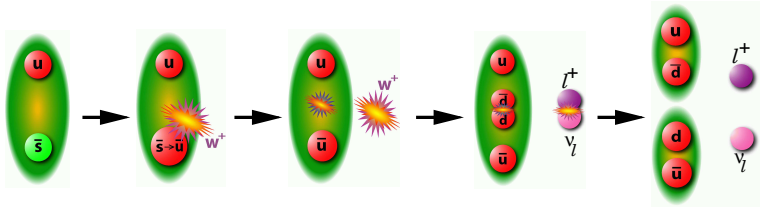


FIGURE 4.1: Cette illustration montre les étapes de la désintégration d'un K^+ $(u\,\overline{s})$ en un pion π^+ $(u\,\overline{d})$, un pion π^- $(d\,\overline{u})$ et une paire de leptons $(\ell^+,\ \nu_\ell)$. L'interaction faible est véhiculée par un boson de jauge W^+ et c'est elle qui change l'étrangeté du quark dans l'étape 2.

4.1 La cinématique de $K_{\ell 4}$

La cinématique de ce processus nécessite l'utilisation de *cinq variables*. Nous considérerons celles introduites par Cabibbo et Maksymowicz [76]. Il sera judicieux d'utiliser *trois référentiels*, le référentiel de repos du K qui se désintègre (Σ_K), le système du centre de masse des deux pions de l'état final ($\Sigma_{2\pi}$) et le système du centre de masse du couple lepton-neutrino de l'état final ($\Sigma_{\ell\nu}$). Ainsi, les variables nécessaires à la description des désintégrations $K_{\ell 4}$ sont

1. s_π, le carré de la masse effective du système di-pion,
2. s_ℓ, le carré de la masse effective du système di-lepton,
3. θ_π, l'angle du π^+ dans $\Sigma_{2\pi}$ par rapport à la ligne de vol du di-pion dans Σ_K,
4. θ_ℓ, l'angle du l^+ dans $\Sigma_{\ell\nu}$ par rapport à la ligne de vol du di-lepton dans Σ_K,
5. ϕ, l'angle entre le plan formé par les pions dans Σ_K et celui des leptons.

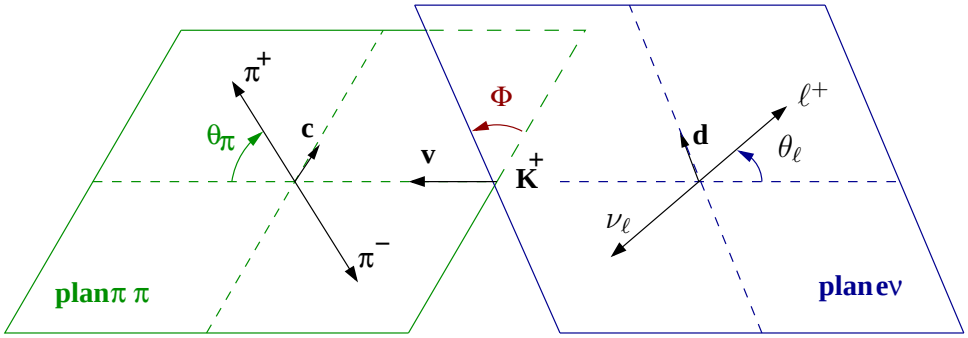


FIGURE 4.2: Variables cinématiques pour les désintégrations $K_{\ell 4}$. L'angle θ_π est défini dans $\Sigma_{2\pi}, \theta_l$ dans $\Sigma_{\ell\nu}$ et ϕ dans Σ_K.

Soit $\vec{p}_1$ l'impulsion du π^+ dans $\Sigma_{2\pi}$ et $\vec{p}_\ell$ l'impulsion du ℓ^+ dans $\Sigma_{\ell\nu}$. Soit $\vec{v}$ un vecteur unitaire le long de la direction de vol du système des deux pions dans Σ_K, et $\vec{c}(\vec{d})$ un vecteur unitaire le long de la projection de $\vec{p}_1(\vec{p}_\ell)$ perpendiculairement à $\vec{v}(-\vec{v})$,

$$\begin{aligned} \vec{c} &= \frac{\vec{p}_1 - \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{p}_1)}{[\vec{p}_1^{\,2} - (\vec{p}_1\cdot\vec{v})^2]^{1/2}} \\ \vec{d} &= \frac{\vec{p}_\ell - \vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{p}_\ell)}{[\vec{p}_\ell^{\,2} - (\vec{p}_\ell\cdot\vec{v})^2]^{1/2}} \quad . \end{aligned}$$

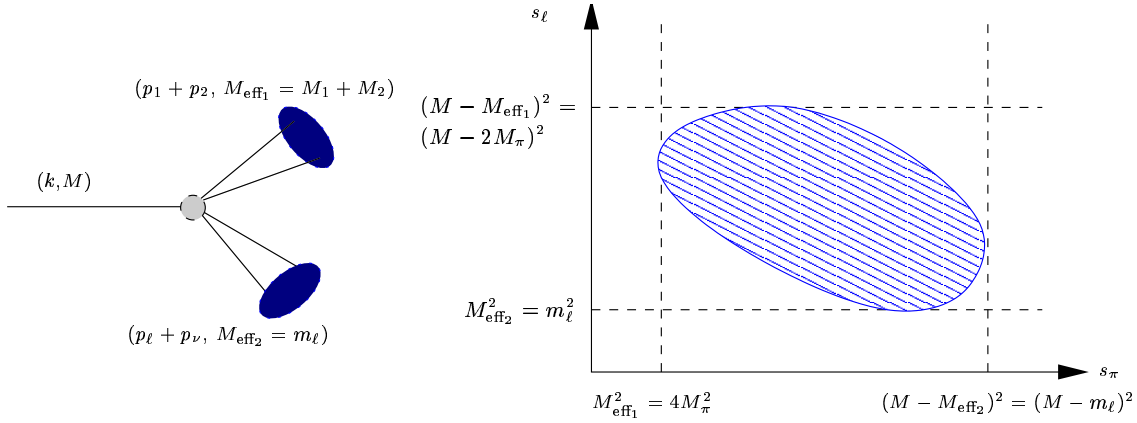
Les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{c}$ et $\vec{d}$ sont représentés dans la FIGURE 4.2. Nous obtenons ainsi,

$$\begin{aligned} s_\pi &= (p_1+p_2)^2 \quad , \quad s_l = (p_\ell + p_\nu)^2 \\ \cos\theta_\pi &= \frac{\vec{v}\cdot\vec{p}_1}{|\,\vec{p}_1\,|}, \quad \cos\theta_\ell = -\frac{\vec{v}\cdot\vec{p}_\ell}{|\,\vec{p}_\ell\,|} \\ \cos\phi &= \vec{c}\cdot\vec{d}, \quad \sin\phi = (\vec{c}\times\vec{v})\cdot\vec{d}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Les variables sont définies dans les intervalles suivants

$$\begin{aligned} (M_1+M_2)^2 &\leq s_\pi \leq (M-m_\ell)^2 \\ m_\ell^2 &\leq s_\ell \leq (M-\sqrt{s_\pi})^2 \\ 0 &\leq \theta_\pi, \theta_\ell \leq \pi \\ 0 &\leq \phi \leq 2\pi. \end{aligned} \tag{4.5}$$

La masse du kaon qui se désintègre sera notée M. Les inégalités sur les variables s_π et s_ℓ sont données par un graphe de Dalitz. La partie hachurée du diagramme de Dalitz correspond à la région des événements $K_{\ell 4}$ possibles et est donnée par la conservation de la quadri-impulsion.



La première étape dans l'étude des désintégrations $K_{\ell 4}$ est la détermination de la cinématique du problème. Dans le cas de la brisure d'isospin, les masses des mésons chargés sont différentes des masses des mésons neutres (2.24). Nous introduisons les combinaisons suivantes de quadri-vecteurs

$$P = p_1 + p_2, \quad Q = p_1 - p_2\ , \ L = p_\ell + p_\nu\ , \ N = p_\ell - p_\nu \tag{4.6}$$

avec les produits scalaires invariants de Lorentz correspondants [13]

$$\begin{aligned}
P^2 &= s_\pi, \quad Q^2 = \frac{(P\cdot Q)^2}{s_\pi} - s_\pi Y^2, \quad L^2 = s_\ell, \quad N^2 = 2m_\ell^2 - s_\ell, \\
P\cdot Q &= M_1^2 - M_2^2, \\
P\cdot L &= \frac{1}{2}(M^2 - s_\pi - s_\ell), \\
P\cdot N &= z_\ell(P\cdot L) + (1-z_\ell)X\cos\theta_\ell, \\
Q\cdot L &= \frac{(P\cdot L)(P\cdot Q)}{s_\pi} + X\ Y\cos\theta_\pi, \\
Q\cdot N &= (P\cdot Q)\cos\theta_\ell(1-z_\ell)\frac{1}{s_\pi}\ X + \frac{m_l^2}{s_\ell s_\pi}(P\cdot Q)(P\cdot L) + \frac{m_l^2}{s_l}X\ Y\cos\theta_\pi \\
&+ (1-z_\ell)Y[(P\cdot L)\cos\theta_\pi\cos\theta_\ell - (s_\pi s_\ell)^{1/2}\sin\theta_\pi\sin\theta_\ell\cos\phi] \\
L\cdot N &= m_\ell^2 \\
< LNPQ > &\equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}L^\mu N^\nu P^\rho Q^\sigma \\
&= -(s_\pi s_\ell)^{1/2}(1-z_\ell)X\ Y\sin\theta_\pi\sin\theta_\ell\sin\phi
\end{aligned} \tag{4.7}$$

avec

$$\begin{aligned}
z_\ell &= m_\ell^2/s_\ell \\
X &= ((P\cdot L)^2 - s_\pi s_\ell)^{1/2} = \frac{1}{2}\lambda^{1/2}(M^2, s_\pi, s_\ell) \\
Y &= \frac{1}{s_\pi}\lambda^{1/2}(s_\pi, M_1^2, M_2^2)
\end{aligned}$$

[13] Voir les détails dans l'appendice A.

La présence du terme $P \cdot Q = M_1^2 - M_2^2$ est dû à la brisure d'isospin. La fonction $\lambda(a,b,c)$ est la fonction de Källén[14]. Nous utiliserons dans la suite les variables supplémentaires

$$\begin{array}{llll} t_\pi = k - p_1)^2 & t_\ell = (k - p_\ell)^2 & t_{1\ell} = (p_1 - p_\ell)^2 & s_{1\ell} = (p_1 + p_\ell)^2 \\ u_\pi = (k - p_2)^2 & u_\ell = (k - p_\nu)^2 & t_{2\ell} = (p_2 - p_\ell)^2 & s_{2\ell} = (p_2 + p_\ell)^2, \end{array}$$

qui sont reliées à s_π, s_ℓ et θ_π par

$$\begin{aligned} t_\pi + u_\pi &= M_1^2 + M_2^2 + M^2 - s_\pi + s_\ell \\ t_\pi - u_\pi &= (P \cdot Q) - \frac{1}{s_\pi}[\ (P \cdot Q)(M^2 + s_\pi - s_\ell) + 2 s_\pi X\ Y \cos\theta_\pi\ ] \\ t_\ell + u_\ell &= m_\ell^2 + M^2 - s_\ell + s_\pi \\ t_\ell - u_\ell &= m_\ell^2 - z_\ell(M^2 - s_\pi + s_\ell) - 2X(1 - z_\ell)\cos\theta_\ell \\ t_{1\ell} + t_{2\ell} &= M_1^2 + M_2^2 + 2m_\ell^2 - P \cdot L - P \cdot N \\ t_{1\ell} - t_{2\ell} &= P \cdot Q - L \cdot Q - N \cdot Q \\ s_{1\ell} + s_{2\ell} &= M_1^2 + M_2^2 + 2m_\ell^2 + P \cdot L + P \cdot N \\ s_{1\ell} - s_{2\ell} &= P \cdot Q + L \cdot Q + N \cdot Q\ . \end{aligned}$$

4.2 L'élément de matrice

Les désintégrations $K(k) \to \pi(p_1)\pi(p_2)\ell^+(p_\ell)\nu_\ell(p_\nu)$ sont décrites via l'élément de matrice $\mathcal{T}$. En l'absence de corrections électromagnétiques, l'amplitude de transition $K_{\ell 4}$ est décrite par la structure $V - A$ du Modèle Standard

$$\mathcal{T}_o = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^*\ \bar{u}(p_\nu)\gamma_\mu(1 - \gamma_5)v(p_\ell)(V^\mu - A^\mu)$$

avec

$$I_\mu = < \pi(p_1)\pi(p_2) \mid I_\mu^{4-i5}(0) \mid K(k) >;\ I = V, A.$$

Les corrections électromagnétiques modifient en général la structure $V-A$ décrite précédemment. Il en résulte, en utilisant les équations de Dirac pour les spineurs $\bar{u}(p_\nu)$ et $v(p_\ell)$, que la forme générale pour l'amplitude implique une structure tensorielle additionnelle [77]

$$\mathcal{T} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^\star\ [\ \bar{u}(p_\nu)\gamma_\mu(1 - \gamma_5)v(p_\ell)(V^\mu - A^\mu) + \bar{u}(p_\nu)\sigma_{\mu\nu}(1 + \gamma_5)v(p_\ell)T^{\mu\nu}\ ]. \tag{4.8}$$

Dans l'équation précédente, V_{us}^* est le complexe conjugué de l'élément de la matrice de mélange des saveurs de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa, tandis que G_F est la constante de couplage de Fermi. Etant donné que les états K^+ et $\pi^+\pi^-$ ont des parités intrinsèques opposées et d'après la décomposition de Lorentz et des transformations sous parité des courants axial et vectoriel, nous avons

$$V_\mu = -\frac{H}{M^3}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} L^\nu P^\rho Q^\sigma \tag{4.9}$$

$$A_\mu = -i\frac{1}{M}\,[P_\mu F + Q_\mu G + L_\mu R] \tag{4.10}$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{M^2} T p_{1\mu} p_{2\nu} \tag{4.11}$$

[14] $\lambda(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2a.b - 2a.c - 2b.c$

avec $\epsilon_{0123} = 1$.
Les facteurs de forme F, G, R, H et T sont des fonctions analytiques complexes des trois variables $p_1.p_2$, $p_1.k$ et $p_2.k$. Nous utiliserons dans la suite les variables $\{s_\pi, s_\ell, \theta_\pi\}$ ou $\{s_\pi, t_\pi, u_\pi\}$. H est le facteur de forme de l'anomalie et est défini selon la notation utilisée par Pais et Treiman [78] et par Rosselet et al.[44]. Les facteurs de forme sont sans dimension par l'insertion de la normalisation M_K, dans (4.9) et (4.10).

La décomposition utilisée pour la partie tensorielle (4.11) dans l'amplitude (4.8) est due à la particularité des désintégrations $K_{\ell 4}$ pour lesquelles seule la combinaison des impulsions des deux pions peut donner un terme de nature tensorielle. Toutes les autres combinaisons avec les impulsions disponibles dans ces désintégrations ne forment que des objets qui se ramènent aux autres facteurs de forme(TABLE 4.1). On fait l'hypothèse que le neutrino est purement gauche.

$$
\begin{aligned}
\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_{l\mu}p_{\nu\rho}\sigma^{\mu\rho})\,\ell &= \frac{i}{2}\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,(\not p_\ell\,\not p_\nu - \not p_\nu\,\not p_l)\,\ell = i\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_l.p_\nu)\,\ell \\
&= i\,\frac{s_l}{2}\,(1-z_l)\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,\ell \\
&= -i\,\frac{s_l}{2m_l}\,(1-z_l)\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,\gamma^\mu\,\ell\,(k-p_1-p_2)_\mu \\
&\Rightarrow R \\
\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_{l\mu}p_{1\rho}\sigma^{\mu\rho})\,\ell &= \frac{i}{2}\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,(\not p_\ell\,\not p_1 - \not p_1\,\not p_l)\,\ell = im_l\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,\not p_1\ell + i\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_1.p_l)\ell \\
&= \frac{im_l}{2}\,(\overline{\nu_{\ell_L}}\,\gamma^\mu\,\ell)[(p_1+p_2)+(p_1-p_2)]_\mu \\
&\quad -\frac{i}{4m_l}\,(P\cdot L + P\cdot N + Q\cdot L + Q\cdot N)\,(\overline{\nu_{\ell_L}}\,\gamma^\mu\,\ell)\,(k-p_1-p_2)_\mu \\
&\Rightarrow F, G, R \\
\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_{l\mu}p_{2\rho}\sigma^{\mu\rho})\,\ell &= \frac{i}{2}\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,(\not p_\ell\,\not p_2 - \not p_1\,\not p_2)\,\ell = im_l\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,\not p_2\ell + i\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_2.p_l)\ell \\
&= \frac{im_l}{2}\,(\overline{\nu_{\ell_L}}\,\gamma^\mu\,\ell)[(p_1+p_2)-(p_1-p_2)]_\mu \\
&\quad -\frac{i}{4m_l}\,(P\cdot L + P\cdot N - Q\cdot L - Q\cdot N)\,(\overline{\nu_{\ell_L}}\,\gamma^\mu\,\ell)\,(k-p_1-p_2)_\mu \\
&\Rightarrow F, G, R \\
\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_{\nu_\mu}p_{1\rho}\sigma^{\mu\rho})\,\ell &= -i\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_1.p_\nu)\,\ell \\
&= \frac{i}{4m_l}\,(P\cdot L - P\cdot N + Q\cdot L - Q\cdot N)\,(\overline{\nu_{\ell_L}}\,\gamma^\mu\,\ell)\,(k-p_1-p_2)_\mu \\
&\Rightarrow R \\
\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_{\nu_\mu}p_{2\rho}\sigma^{\mu\rho})\,\ell &= -i\,\overline{\nu_{\ell_L}}\,(p_2.p_\nu)\,\ell \\
&= \frac{i}{4m_l}\,(P\cdot L - P\cdot N - Q\cdot L + Q\cdot N)\,(\overline{\nu_{\ell_L}}\,\gamma^\mu\,\ell)\,(k-p_1-p_2)_\mu \\
&\Rightarrow R
\end{aligned}
$$

TABLE 4.1: Le courant hadronique de type tensoriel ne comporte pas de termes autres que $p_{1\mu}p_{2\nu}\sigma^{\mu\nu}$. Les autres combinaisons nous ramènent aux facteurs de forme F,G et R.

4.3 Le taux de désintégration

Le taux partiel de désintégration est donné par

$$d\Gamma = \frac{1}{2M(2\pi)^8} \sum_{spins} \mid \mathcal{T} \mid^2 d(k; p_\ell, p_\nu, p_1, p_2). \tag{4.12}$$

La quantité $\sum_{spins} \mid \mathcal{T} \mid^2$ est une forme quadratique invariante de Lorentz dépendante de F, G, R et H. Le terme noté $d(k; p_\ell, p_\nu, p_1, p_2)$ représente l'élément d'intégration. Il est proportionnel à l'espace des phases de la désintégration. Nous pouvons remarquer que tous les produits scalaires peuvent être exprimés en fonction des cinq variables indépendantes $s_\pi, s_\ell, \theta_\pi, \theta_\ell$ et ϕ, tels que

$$\sum_{spins} \mid \mathcal{T} \mid^2 = 2G_F^2 \mid V_{us} \mid^2 M^{-2} J_5(s_\pi, s_\ell, \theta_\pi, \theta_\ell, \phi) \tag{4.13}$$

L'intégration selon les $4 \cdot 3 - 5 = 7$ variables restantes dans (4.12) donne [76]

$$d\Gamma_5 = G_F^2 \mid V_{us} \mid^2 N(s_\pi, s_l) J_5(s_\pi, s_l, \theta_\pi, \theta_l, \phi) ds_\pi ds_l d(\cos\theta_\pi) d(\cos\theta_l) d\phi \tag{4.14}$$

où la forme explicite de J_5 est

$$\begin{aligned}
J_5 &= |F|^2 \left[(P\cdot L)^2 - (P\cdot N)^2 - s_\pi s_\ell + m_\ell^2 s_\pi\right] \\
&+ |G|^2 \left[(Q\cdot L)^2 - (Q\cdot N)^2 - Q^2 s_\ell + m_\ell^2 Q^2\right] \\
&+ |R|^2 m_\ell^2 \left[s_\ell - m_\ell^2\right] \\
&+ \frac{1}{M^4}|H|^2 \left[(m_\ell^2 - s_\ell)\left[Q^2X^2 + s_\pi(Q\cdot L)^2 + s_\ell(P\cdot Q)^2 - 2(P\cdot Q)(Q\cdot L)(P\cdot L)\right] - < LNPQ >^2\right] \\
&+ (F^*G + FG^*)\left[(P\cdot L)(Q\cdot L) - (P\cdot N)(Q\cdot N) - (P\cdot Q)(s_\ell - m_l^2)\right] \\
&+ (F^*R + FR^*)\, m_l^2 \left[(P\cdot L) - (P\cdot N)\right] \\
&+ \frac{1}{M^2}(F^*H + FH^*)\, [(Q\cdot N)(P\cdot L)^2 - (Q\cdot L)(P\cdot L)(P\cdot N) - s_\pi s_\ell (Q\cdot N) + m_l^2 s_\pi (Q\cdot L) \\
&- m_l^2 (P\cdot Q)(P\cdot L) + s_\ell (P\cdot Q)(P\cdot N)] \\
&+ (G^*R + GR^*)\, m_\ell^2 \left[(Q\cdot L) - (Q\cdot N)\right] \\
&+ \frac{1}{M^2}(G^*H + GH^*)[(P\cdot L)(Q\cdot L)(Q\cdot N) - (P\cdot N)(Q\cdot L)^2 + s_\ell (P\cdot N)Q^2 - m_l^2 (P\cdot L)Q^2 \\
&+ m_l^2 (Q\cdot L)(P\cdot Q) - s_\ell (Q\cdot N)(P\cdot Q)] \\
&+ \frac{i}{M^2} < LNPQ > [-(F^*G - FG^*)M^2 + (F^*H - FH^*)(P\cdot N) \\
&+ (G^*H - GH^*)(Q\cdot N) + (R^*H - RH^*)m_\ell^2]
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{m_\ell}{2M}(FT^* + TF^*)[s_\pi(Q\cdot N) - s_\pi(Q\cdot L) + (P\cdot Q)(P\cdot L) - (P\cdot Q)(P\cdot N)] \\
&+ \frac{m_l}{2M}(GT^* + TG^*)[-Q^2(P\cdot N) + Q^2(P\cdot L) - (P\cdot Q)(Q\cdot L) + (P\cdot Q)(Q\cdot N)] \\
&+ \frac{m_\ell}{2M}(RT^* + TR^*)[-(Q\cdot L)(P\cdot N) + (P\cdot L)(Q\cdot N)] + \frac{im_\ell}{2M}(RT^* - TR^*) < LNPQ > \\
&+ \frac{m_\ell}{2M^3}(HT^* + TH^*)[-2(P\cdot L)(P\cdot Q)(Q\cdot L) + (P\cdot L)(P\cdot Q)(Q\cdot N) + Q^2(P\cdot L)^2 \\
&- Q^2(P\cdot L)(P\cdot N) + s_\pi(Q\cdot L)^2 - s_\pi(Q\cdot L)(Q\cdot N) + (Q\cdot L)(P\cdot Q)(P\cdot N) + s_\ell(P\cdot Q)^2 \\
&- (N\cdot L)(P\cdot Q)^2 - s_\ell s_\pi Q^2 + Q^2 s_\pi(N\cdot L)] \\
&+ \frac{1}{8M^2}|T|^2\ [s_\ell s_\pi Q^2 - s_\ell(P\cdot Q)^2 - 2(P\cdot L)^2Q^2 + 4(P\cdot L)(Q\cdot L)(P\cdot Q) - 2s_\pi(Q\cdot L)^2 - s_\pi N^2Q^2 \\
&+ N^2(P\cdot Q)^2 + 2(P\cdot N)^2Q^2 - 4(P\cdot N)(Q\cdot N)(P\cdot Q) + 2s_\pi(Q\cdot N)^2]\ .
\end{aligned}
$$

Cette formule a été généralisée pour un élément de matrice (4.8) comportant les facteurs de forme vectoriel, axial, scalaire et tensoriel. A la limite d'isospin ($P\cdot Q = 0$) et sans présence d'un facteur de forme tensoriel ($T = 0$) nous retrouvons la formule connue dans [67]. L'espace des phases de $K_{\ell 4}$ est modifié. Il est donné par le calcul de l'élément

$$
d\Phi \;=\; (2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_\ell + p_\nu - k) \times \frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\,\frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}\,\frac{d^3\boldsymbol{p}_l}{(2\pi)^3 2E_\ell}\,\frac{d^3\boldsymbol{p}_\nu}{(2\pi)^3 2|\boldsymbol{p}_\nu|}\,,
$$

avec les énergies des particules

$$
E_i \;=\; \sqrt{p_i^2 + \boldsymbol{p}_i^2}\,.
$$

Cet élément peut s'écrire comme [76]

$$
\begin{aligned}
d\Phi \;=\; & \int d^4P \int d^4L\,(2\pi)^4\delta^{(4)}(P + L - k) \times \frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\,\frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - P) \times \\
& \frac{d^3\boldsymbol{p}_l}{(2\pi)^3 2E_\ell}\,\frac{d^3\boldsymbol{p}_\nu}{(2\pi)^3 2|\boldsymbol{p}_\nu|}\delta^{(4)}(p_\ell + p_\nu - L)\,.
\end{aligned}
$$

On utilise la relation

$$
\int d^4P \int d^4L \;=\; \int s_\pi \int s_\ell \int d^4P \int d^4L\delta^4(s_\pi - P^2)\delta^4(s_\ell - L^2)
$$

et les formules

$$
\begin{aligned}
\delta[f(x)] \;&=\; \sum_{x_o} \frac{\delta(x - x_o)}{|f'(x_o)|}, \qquad \text{avec } x_o \text{ les zéros de f(x)}, \\
\int d^4P\delta^{(4)}(P^2 - M^2) \;&=\; \int \frac{1}{2E_P} d^3\boldsymbol{P} \qquad E_P \;=\; \sqrt{P^2 + \boldsymbol{P}^2}.
\end{aligned}
$$

Les intégrations successives par rapport aux fonctions δ donnent le résultat

$$
\int d\Phi \;=\; \frac{1}{4M^2}\,(2\pi)^5 \int ds_\pi \int ds_l\,\lambda^{1/2}(M^2, s_\pi, s_l)\,\Phi_{\pi\pi}\,\Phi_{l\nu_l}\,,
$$

avec l'espace des phases du système du di-pion

$$
\begin{aligned}
\Phi_{\pi\pi} \;&=\; \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1}{(2\pi)^3 2E_1}\,\frac{d^3\boldsymbol{p}_2}{(2\pi)^3 2E_2}\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - P) \\
&=\; \frac{1}{(2\pi)^5}\,\frac{1}{8s_\pi}\,\lambda^{1/2}(s_\pi, M_1^2, M_2^2) \int d(\cos\theta_\pi)\,, \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

et l'espace des phases du système du di-lepton,

$$\begin{aligned}\Phi_{l\nu_l} &= \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_l}{(2\pi)^3 2E_\ell}\frac{d^3\boldsymbol{p}_\nu}{(2\pi)^3 2|\boldsymbol{p}_\nu|}\delta^{(4)}(p_\ell + p_\nu - L) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6}\frac{1}{8}(1-z_l)\int d\phi \int d(\cos\theta_l)\,. \end{aligned} \tag{4.17}$$

D'après (4.12) et (4.13), l'espace des phases de $K_{\ell 4}$ est

$$d^5\Phi = M^3 N(s_\pi, s_l) ds_\pi ds_l d(\cos\theta_\pi) d(\cos\theta_l) d\phi\,,$$

avec,

$$N(s_\pi, s_l) = \frac{(1-z_l)YX}{2^{13}\pi^6 M^5}\ .$$

Il sera intéressant pour l'intégration de J_5 de faire apparaître les contributions angulaires dans la formule précédente. La forme explicite des produits scalaires donnée par les relations (4.7) permet la décomposition suivante

$$\begin{aligned} J_5 &= 2(1-z_\ell)\Big[I_1 + I_2\cos 2\theta_\ell + I_3\sin^2\theta_\ell\cdot\cos 2\Phi + I_4\sin 2\theta_\ell\cdot\cos\Phi + I_5\sin\theta_\ell\cdot\cos\Phi \\ &\quad + I_6\cos\theta_\ell + I_7\sin\theta_\ell\cdot\sin\Phi + I_8\sin 2\theta_\ell\cdot\sin\Phi + I_9\sin^2\theta_\ell\cdot\sin 2\Phi\Big]\,. \end{aligned} \tag{4.18}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{4}\Big\{(1+z_\ell)|F_1|^2 + \frac{1}{2}(3+z_\ell)\big(|F_2|^2+|F_3|^2\big)\sin^2\theta_\pi + 2z_\ell|F_4|^2\Big\} + \frac{1}{32}z_\ell\Big\{2s_\pi s_\ell(1+z_\ell) \\ &\quad + \sin^2\theta_\pi\big[2X^2(1+3z_\ell) - s_\pi s_\ell(1-z_\ell)\big]\Big\}|F_5|^2 - \frac{1}{2}z_\ell(P\cdot L)\sin^2\theta_\pi \mathrm{Re}(F_2F_5^*) \\ &\quad - \frac{1}{2}z_\ell X\sin^2\theta_\pi\mathrm{Re}(F_3F_5^*) - \frac{1}{2}z_\ell\cos\theta_\pi\sqrt{s_\pi s_\ell}\mathrm{Re}(F_1F_5^*)\ , \\ I_2 &= -\frac{1}{4}(1-z_\ell)\Big\{|F_1|^2 - \frac{1}{2}\big(|F_2|^2+|F_3|^2\big)\sin^2\theta_\pi\Big\} - \frac{1}{32}z_\ell(1-z_\ell)\Big\{-2s_\pi s_\ell\cos^2\theta_\pi \\ &\quad + (2X^2 + s_\pi s_\ell)\sin^2\theta_\pi\Big\}|F_5|^2\ , \\ I_3 &= -\frac{1}{4}(1-z_\ell)\big(|F_2|^2-|F_3|^2\big)\sin^2\theta_\pi + \frac{1}{16}s_\pi s_\ell z_\ell(1-z_\ell)\sin^2\theta_\pi|F_5|^2\ , \\ I_4 &= \frac{1}{2}(1-z_\ell)\mathrm{Re}(F_1^*F_2)\sin\theta_\pi - \frac{1}{8}(1-z_\ell)z_\ell(P\cdot L)\sqrt{s_\pi s_\ell}\cos\theta_\pi\sin\theta_\pi|F_5|^2\ , \\ I_5 &= -\Big\{\mathrm{Re}(F_1^*F_3) + z_\ell\mathrm{Re}(F_4^*F_2)\Big\}\sin\theta_\pi + \frac{1}{2}z_\ell\Big\{(P\cdot L)\mathrm{Re}(F_4F_5^*) + \sqrt{s_\pi s_\ell}\cos\theta_\pi\mathrm{Re}(F_3F_5^*) \\ &\quad + X\mathrm{Re}(F_1F_5^*)\Big\}\sin\theta_\pi - \frac{1}{4}z_\ell^2 X\sqrt{s_\pi s_\ell}\cos\theta_\pi\sin\theta_\pi|F_5|^2\ , \\ I_6 &= -\Big\{\mathrm{Re}(F_2^*F_3)\sin^2\theta_\pi - z_\ell\mathrm{Re}(F_1^*F_4)\Big\} + \frac{1}{2}z_\ell\Big\{X\sin^2\theta_\pi\mathrm{Re}(F_2F_5^*) + (P\cdot L)\sin^2\theta_\pi\mathrm{Re}(F_3F_5^*) \\ &\quad - \sqrt{s_\pi s_\ell}\cos\theta_\pi\mathrm{Re}(F_4F_5^*)\Big\} - \frac{1}{4}z_\ell^2 X(P\cdot L)\sin^2\theta_\pi|F_5|^2\ , \\ I_7 &= -\Big\{\mathrm{Im}(F_1^*F_2) + z_\ell\mathrm{Im}(F_4^*F_3)\Big\}\sin\theta_\pi - \frac{1}{2}z_\ell\sin\theta_\pi\Big\{X\mathrm{Im}(F_4F_5^*) + (P\cdot L)\mathrm{Im}(F_1F_5^*) \\ &\quad - \sqrt{s_\pi s_\ell}\cos\theta_\pi\mathrm{Im}(F_2F_5^*)\Big\}\ , \\ I_8 &= \frac{1}{2}(1-z_\ell)\mathrm{Im}(F_1^*F_3)\sin\theta_\pi\ , \\ I_9 &= -\frac{1}{2}(1-z_\ell)\mathrm{Im}(F_2^*F_3)\sin^2\theta_\pi\ . \end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
F_1 &= XF + Y(P\cdot L)\cos\theta_\pi G + \frac{X}{s_\pi}(P\cdot Q)G \ , \\
F_2 &= Y\sqrt{s_\pi s_\ell}\ G \ , \\
F_3 &= XY\sqrt{s_\pi s_\ell}\frac{H}{M^2} \ , \qquad (4.19) \\
F_4 &= -(P\cdot L)F - s_\ell R - XY\cos\theta_\pi G - (P\cdot L)(P\cdot Q)\frac{1}{s_\pi}G \ , \\
F_5 &= \frac{Y\sqrt{s_\pi s_\ell}}{m_\ell}\frac{T}{M} \ . \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

A nouveau, les fonctions I_i de la décomposition angulaire de J_5 sont modifiées par la présence du terme non-nul $P\cdot Q$ (brisure d'isospin) et du facteur de forme tensoriel dans l'élément de matrice des désintégrations $K_{\ell 4}$. Par rapport à la décomposition connue à la limite d'isospin et sans facteur de forme tensoriel [67], nous avons introduit la quantité F_5 (4.20) qui nous permet de tenir compte du facteur de forme tensoriel dans la décomposition angulaire de J_5.

4.4 Le déphasage pion-pion

L'amplitude de désintégration $K_{\ell 4}$ est une fonction de facteurs de forme. Ces désintégrations sont décrites par deux variables cinématiques et trois angles introduits par Cabibbo et Maksymowicz [76]. La dépendance en θ_π[15]des facteurs de forme peut être écrite explicitement en faisant un développement en ondes partielles [79]. Ce développement peut être restreint aux ondes s ($\ell = 0$) et p ($\ell = 1$). Le théorème de Fermi-Watson [36, 80] implique que les phases dans le développement en ondes partielles sont les déphasages de la diffusion élastique pion-pion. Ce que l'on peut extraire de $K_{\ell 4}$, c'est la différence entre les déphasages pion-pion $\delta = \delta_0^0 - \delta_1^1$, avec δ_ℓ^I le déphasage de l'état quantique du di-pion (ℓ, I) où I représente l'isospin total du système et ℓ le moment angulaire orbital.

L'utilisation des équations de Roy [37] permet de déterminer la différence $a_0^0 - a_0^2$, où a_ℓ^I représente la longueur de diffusion pion-pion de l'onde ℓ dans le canal de désintégration d'isospin total I.

Une des difficultés de l'étude théorique de la diffusion méson-méson réside dans le fait que cette réaction est inaccessible à une observation expérimentale directe, car la réalisation de cibles de pions ou kaons est rendue impossible par l'instabilité de ces particules. Il faut donc passer par des expériences indirectes comme la désintégration faible du méson K. Malgré son rapport de branchement faible, de l'ordre de 10^{-5} [81], les désintégrations $K_{\ell 4}$ font partie des processus proposés pour étudier l'interaction pion-pion à basse énergie. L'interaction s'effectue entre deux pions qui sont les seuls hadrons de l'état final. Pour toutes les autres réactions utilisées pour étudier l'interaction $\pi - \pi$ il y a toujours au moins un hadron supplémentaire présent.

L'isospin du pion étant égal à 1, les états quantiques du système du di-pion auront pour isospin les valeurs $\mathrm{I} = 0, 1, 2$ (Table 4.2). Si nous supposons que le courant faible satisfait la règle

$$\Delta \mathrm{I} = \frac{1}{2}, \qquad (4.21)$$

alors les états de di-pion $\mathrm{I} = 2$ sont supprimés. Le théorème spin-statistique de Pauli (1940) connecte la statistique à laquelle doit obéir une particule avec la valeur de son spin. Les particules

[15] θ_π est l'angle du π^+ dans le système du centre de masse des deux pions de l'état final par rapport à la ligne de vol du di-pion dans le référentiel de repos du K^+ qui se désintègre.

possédant un spin entier obéissent à la statistique de Bose-Einstein. La symétrie de Bose-Einstein exige que la fonction d'onde totale du di-pion soit symétrique. Soit Ψ La fonction du di-pion

$$\Psi = \alpha(\text{espace})\ \beta(\text{spin})\ \gamma(\text{charge ou isospin}).$$

La partie spatiale est décrite à l'aide d'une harmonique sphérique $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ et l'échange des coordonnées spatiales des deux pions introduit un facteur multiplicatif $(-1)^\ell$ devant α. L'indice ℓ est le moment angulaire orbital du système. Ainsi la fonction α est symétrique (anti-symétrique) lorsque ℓ est pair (impair). La fonction de spin β peut être symétrique (spins parallèles) ou anti-symétrique (spins anti-parallèles), mais dans le cas des pions qui sont de spin nul, cette fonction n'apparaît pas. Par contre, il apparaît la fonction γ car les pions ont un nombre quantique d'isospin égal à 1. L'échange des coordonnées spatiales des deux pions dans la Table (4.2) introduit un facteur multiplicatif $(-1)^{\mathrm{I}}$ devant α. Les états quantiques d'isospin du di-pion sont symétriques pour $\mathrm{I} = 0, 2$ et anti-symétrique pour $\mathrm{I} = 1$.

D'après (4.21) et sachant que la symétrie de Bose-Einstein exige que la fonction d'onde totale du di-pion soit symétrique, nous obtenons les possibilités suivantes pour le système du di-pion

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I}=0 & \ell = 0,2,4\ldots & \text{onde s, d}\ldots \\ \mathrm{I}=1 & \ell = 1,3,5\ldots & \text{ondes p}\ldots \end{array}$$

Nous pouvons écrire la dépendance explicite des facteurs de forme par rapport à la variable θ_π en faisant un développement en ondes partielles en terme du moment angulaire du di-pion. Les premiers termes dans le développement en ondes partielles des différents facteurs de forme sont [78, 82]

$$\begin{aligned} F &= f_s e^{i\delta_s} + f_p e^{i\delta_p}\cos\theta_\pi + \ldots \\ G &= g_p e^{i\delta_p} + \ldots \\ R &= r_s e^{i\delta_s} + r_p e^{i\delta_p}\cos\theta_\pi + \ldots \\ H &= h_p e^{i\delta_p} + \ldots \end{aligned}$$

Nous nous restreignons aux ondes s et p, donc les seuls états quantiques du di-pion qui contribuent à cette désintégration sont $(\ell = 0, I = 0)$ et $(\ell = 1, I = 1)$. Les quantités f_s, f_p, ... sont des fonctions réelles dépendantes des variables s_π et s_ℓ. Les phases sont des fonctions de s_π. Le théorème de Fermi-Watson [36] implique que, dans ce développement en ondes partielles des

$$\begin{array}{lll} & |2-2\rangle = |\pi^-\pi^-\rangle & \\ & |2-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^-\pi^o\rangle + |\pi^o\pi^-\rangle) & \\ \mathrm{I}=2 & |20\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}(|\pi^+\pi^-\rangle + 2|\pi^o\pi^o\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle) & \text{symétrique par échange des 2 pions} \\ & |21\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\pi^o\rangle + |\pi^o\pi^+\rangle) & \\ & |22\rangle = |\pi^+\pi^+\rangle & \\ & & \\ & |1-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^o\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^o\rangle) & \\ \mathrm{I}=1 & |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^-\pi^+\rangle) & \text{anti-symétrique} \\ & |11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\pi^+\pi^o\rangle - |\pi^o\pi^+\rangle) & \\ & & \\ \mathrm{I}=0 & |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\pi^+\pi^-\rangle - |\pi^o\pi^o\rangle + |\pi^-\pi^+\rangle) & \text{symétrique} \end{array}$$

TABLE 4.2: Etats quantiques d'isospin du système du di-pion

facteurs de forme et en supposant l'invariance sous renversement du temps, une amplitude en ondes partielles de moment angulaire ℓ et d'isospin I définis, doit avoir la phase δ_I^ℓ de l'amplitude de diffusion pion-pion correspondante. Les phases de la diffusion pion-pion sont évaluées à la masse invariante du di-pion $\sqrt{s_\pi}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \delta_s &= \delta_0^0 \\ \delta_p &= \delta_1^1. \end{aligned}$$

D'après les relations (4.19), les fonctions F_1, F_2, F_3 et F_4 deviennent[16]

$$\begin{aligned} F_1 &= X[f_s e^{i\delta_0^0} + \frac{P\cdot Q}{s_\pi} g_p e^{i\delta_1^1}] + \cos\theta_\pi [X f_p + Y(P\cdot L) g_p] e^{i\delta_1^1} + \cdots \\ F_2 &= Y\sqrt{s_\pi s_\ell} g_p e^{i\delta_1^1} + \cdots \\ F_3 &= XY\frac{\sqrt{s_\pi s_\ell}}{M^2} h_p e^{i\delta_1^1} + \cdots \\ F_4 &= [-(P\cdot L) f_s e^{i\delta_0^0} - s_\ell r_s e^{i\delta_0^0} - (P\cdot L)(P\cdot Q)\frac{1}{s_\pi} g_p e^{i\delta_1^1}] \\ &\qquad - \cos\theta_\pi [(P\cdot L) f_p + s_\ell r_p + XY g_p] e^{i\delta_1^1} + \cdots \end{aligned}$$

Après une rotation d'angle de phase δ_1^1 et avec la notation $\delta = \delta_0^0 - \delta_1^1$, nous obtenons dans le cas du canal chargé[17]

$$\begin{aligned} F_1 &= X f_s e^{i\delta} + \cos\theta_\pi [X f_p + Y(P\cdot L) g_p] + \cdots \\ F_2 &= Y\sqrt{s_\pi s_\ell} g_p + \cdots \\ F_3 &= XY\frac{\sqrt{s_\pi s_\ell}}{M^2} h_p + \cdots \\ F_4 &= -[(P\cdot L) f_s + s_\ell r_s] e^{i\delta} - \cos\theta_\pi [(P\cdot L) f_p + s_\ell r_p + XY g_p] + \cdots . \end{aligned} \tag{4.22}$$

La détermination expérimentale de f_p et g_p est difficile, car f_p, combiné à g_p, contribue au taux de désintégration uniquement au travers de la quantité F_1 (4.22). Nous introduisons un nouveau facteur de forme

$$g_p{}' = g_p + \frac{X}{Y(P\cdot L)} f_p,$$

ainsi f_p sera proportionnel à la différence entre g_p et $g_p{}'$. Pais et Treiman [78] proposèrent, en 1968, une méthode pour extraire la différence de phase δ. Pour cela, ils ont intégré $d\Gamma_5$ (4.14) selon les variables s_π, s_ℓ et $\cos\theta_\pi$ et ont comparé le résultat à la distribution des événements $K_{\ell 4}$ dans le plan $(\cos\theta_\ell, \phi)$ en utilisant les coefficients

$$\langle I_i \rangle = \int\int\int I_i \; ds_\pi ds_\ell d\cos\theta_\pi$$

comme paramètres libres. Le déphasage pion-pion peut être extrait des fonctions F_1 et F_4 uniquement. D'après la décomposition (4.18), les seules fonctions I_i qui font apparaître explicitement

[16] Nous ne considérons pas le facteur de forme tensoriel.
[17] Dans le canal chargé, $P\cdot Q = 0$ puisque les pions de l'état final sont de la même nature.

le déphasage δ sont I_4, I_5, I_7 et I_8 et les intégrales associées sont

$$\begin{aligned}
\langle I_4 \rangle &= \int\int \cos\delta (1-z_\ell) XY \sqrt{s_\pi s_\ell} f_s g_p \; ds_\pi ds_\ell \\
\langle I_7 \rangle &= 2\int\int \sin\delta \big[XY\sqrt{s_\pi s_\ell} f_s g_p - XY \frac{\sqrt{s_\pi s_\ell}}{M^2} h_p (P\cdot L f_s + s_\ell r_s) \big] \; ds_\pi ds_\ell \\
\langle I_5 \rangle &= -2\int\int \cos\delta \big[X^2 Y \frac{\sqrt{s_\pi s_\ell}}{M^2} f_s h_p - z_\ell Y \sqrt{s_\pi s_\ell} (P\cdot L f_s + s_\ell r_s) g_p \big] \; ds_\pi ds_\ell \\
\langle I_8 \rangle &= -\int\int \sin\delta (1-z_\ell) X^2 Y \frac{\sqrt{s_\pi s_\ell}}{M^2} f_s h_p \; ds_\pi ds_\ell .
\end{aligned}$$

Dans l'approximation où l'on pose la masse m_ℓ du lepton égale à zéro (valable pour les désintégrations K_{e4}), nous voyons que le déphasage pion-pion peut être déterminé de deux manières différentes

$$\begin{aligned}
\tan\delta &= \frac{1}{2}\frac{\langle I_7 \rangle}{\langle I_4 \rangle}, \\
\tan\delta &= 2\,\frac{\langle I_8 \rangle}{\langle I_5 \rangle}.
\end{aligned}$$

La collaboration Genève-Saclay a pu extraire des désintégrations $K_{\ell 4}$ des informations sur l'interaction pion-pion à basse énergie [44].

Chapitre 5

$K_{\ell 4}$ à l'ordre le plus bas

Sommaire

5.1 Le canal chargé $K^+ \to \pi^+ \ \pi^- \ \ell^+ \ \nu_\ell$ 44

5.2 Le canal neutre $K^+ \to \pi^o \ \pi^o \ \ell^+ \ \nu_\ell$ 47

5.3 Le canal mixte $K^o \to \pi^o \ \pi^- \ \ell^+ \ \nu_\ell$ 48

5.4 Résumé et numérique 50

4.1 Statut expérimental 51

Le canal chargé 52

Dans cette section, nous présentons les facteurs de forme associés aux désintégrations $K_{\ell 4}$ à l'ordre le plus bas. Nous avons inclus un facteur de forme tensoriel, dont la contribution en arbre apparaît dans la correction électromagnétique à la désintégration du kaon chargé en deux pions chargés. La contribution de la violation d'isospin sera donnée par les quantités $1/R \sim m_d - m_u$ et le produit scalaire $P \cdot Q$ relatif à la différence de masse entre les deux pions de l'état final. Les facteurs de forme notés $\tilde{X}$ correspondent aux facteurs de forme sans contribution d'isospin. Dans ce chapitre, nous ne considérons pas le facteur de forme H, dû à l'anomalie chirale [64, 65, 83], puisqu'il n'apparaît qu'à l'ordre p^4. Il a été calculé par Wess et Zumino [64].

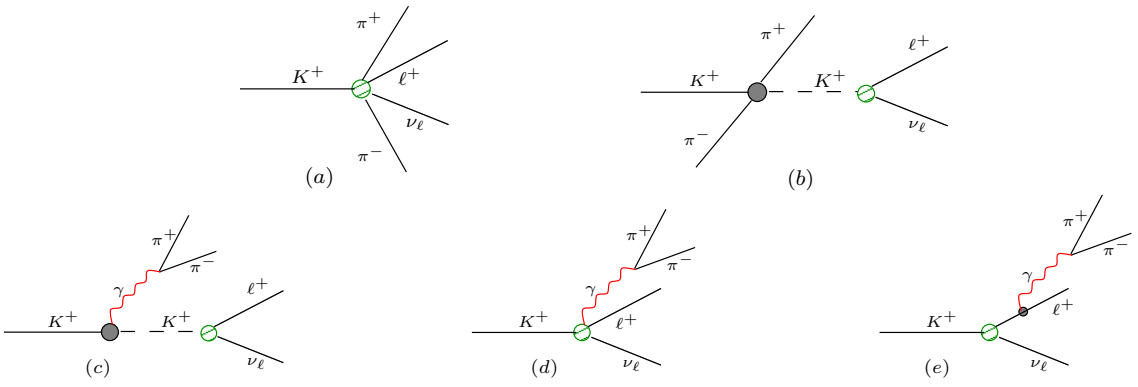


FIGURE 5.1: $K^+ \to \pi^+ \pi^- \ell^+ \ \nu_\ell$

5.1 Le canal chargé $K^+ \to \pi^+ \ \pi^- \ \ell^+ \ \nu_\ell$

Pour les différents diagrammes de la FIGURE 5.1, les lagrangiens contribuants respectifs sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(a)} &= ... + \frac{2G_F V_{us}^*}{3F_o} \ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu \ \ell) \ (\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+ - 2K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- + K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+) \\
\mathcal{L}^{(b)} &= ... + \frac{1}{6F_o^2}\big(- \pi^-\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu K^+ + 2K^+\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^- - K^-\pi^+\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^- - K^+\pi^-\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^+ \\
&+ \ 2K^-\pi^-\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^+ - K^-K^+\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+\big) + \big\{\frac{B_o\hat{m}}{2F_o^2}(1+\frac{1}{6R}) + \frac{B_o m_s}{6F_o^2}(1-\frac{1}{2R}) \\
&+ \ \frac{8}{3}e^2 Z_o\big\}K^-K^+\pi^+\pi^- + 2 \ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu \ \ell) \ F_o G_F V_{us}^*\partial^\mu K^+ \\
\mathcal{L}^{(c)} &= ... + ieA_\mu(K^-\partial^\mu K^+ - K^+\partial^\mu K^-) + ieA_\mu(\pi^-\partial^\mu\pi^+ - \pi^+\partial^\mu\pi^-) + 2F_o G_F V_{us}^* \ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu \ \ell) \ \partial^\mu K^+ \\
\mathcal{L}^{(d)} &= ... + 2ieA_\mu \ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu \ \ell) \ F_o G_F V_{us}^* K^+ + ieA_\mu(\pi^-\partial^\mu\pi^+ - \pi^+\partial^\mu\pi^-) \\
\mathcal{L}^{(e)} &= ... + 2F_o G_F V_{us}^* \ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu \ \ell) \ \partial^\mu K^+ + ieA_\mu(\pi^-\partial^\mu\pi^+ - \pi^+\partial^\mu\pi^-) + e \ A_\mu\overline{\ell}\gamma^\mu\ell
\end{aligned}$$

Diagramme (a)

L'application des règles de Feynman et l'utilisation des relations (4.6), nous donne le résultat

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(a)} &= (-i)\frac{G_F V_{us}^* \ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5) \ v(p_\ell)}{3F_o}\{k + 2p_+ - p_-\}_\mu \\
&= (-i)\frac{G_F V_{us}^* \ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5) \ v(p_\ell)}{3F_o}\big(\frac{3}{2}P_\mu + \frac{3}{2}Q_\mu + L_\mu\big) \ . \qquad (5.1)
\end{aligned}$$

On remarquera que la brisure d'isospin n'influe pas sur ce diagramme.

Diagramme (b)

Pour l'élément de matrice (b), nous calculons d'abord le vertex à quatre champs scalaires (deux pions chargés et deux kaons chargés) dont le résultat vaut

$$i\big\{\frac{1}{6F_o^2}(2u_\pi - t_\pi - s_\pi) - \frac{B_o\hat{m}}{2F_o^2}(1+\frac{1}{6R}) - \frac{B_o m_s}{6F_o^2}(1-\frac{1}{2R}) - \frac{8}{3}e^2 Z_o\big\}. \qquad (5.2)$$

A l'aide des formules sur les masses des mésons (2.24), nous trouvons la relation suivante

$$\frac{B_o\hat{m}}{2}(1+\frac{1}{6R}) + \frac{B_o m_s}{6}(1-\frac{1}{2R}) + \frac{8}{3}e^2 Z_o = \frac{1}{6}(M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2 + 6\Delta_\pi). \qquad (5.3)$$

Dans le diagramme (b) intervient aussi le vertex entre le kaon chargé et le courant leptonique dont le résultat vaut

$$iF_o G_F V_{us}^* \ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5) \ v(p_\ell) \ (k - p_+ - p_-)_\mu. \qquad (5.4)$$

Finalement, à l'aide des résultats (5.2), (5.3) et (5.4), le diagramme (b) s'écrit

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(b)} &= (-i)\frac{G_F V_{us}^* \ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5) \ v(p_\ell)}{3F_o}L_\mu \\
&\times\Big\{ - \frac{1}{2}\frac{1}{s_\ell - M_{K^\pm}^2}\big[2u_\pi - t_\pi - s_\pi - M_{K^\pm}^2 - M_{\pi^\pm}^2 - 6\Delta_\pi\big]\Big\} \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

On remarquera que ce diagramme ne contribue qu'au facteur de forme R_{+-} et que la brisure d'isospin intervient via la quantité $\Delta_\pi = M^2_{\pi^\pm} - M^2_{\pi^o}$.

Diagrammes (c), (d) et (e)

Les diagrammes (c) et (d) ont pour expression

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}^{(c)}_{fi} &= (-i)e^2 \frac{G_F V^*_{us}\ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell)}{3F_o} \times 3F_o^2 \frac{u_\pi - t_\pi}{s_\pi(s_\ell - M^2_{K^\pm})} L_\mu \\
-i\mathcal{M}^{(d)}_{fi} &= (i)e^2 \frac{G_F V^*_{us}\ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell)}{3F_o} \times 3F_o^2 \frac{1}{s_\pi} Q_\mu
\end{aligned}$$

Pour le diagramme (e), nous obtenons le résultat intermédiaire,

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}^{(e)}_{fi} &= ie^2 F_o G_F V^*_{us}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu[(\not{p}_\ell + \not{p}_+ + \not{p}_-) - m_\ell]\gamma^\nu\ v(p_\ell) \\
&\quad \times k_\mu(p_- - p_+)_\nu \frac{1}{s_\pi} \frac{1}{(p_\ell + p_+ + p_-)^2 - m_\ell^2}
\end{aligned}$$

Le numérateur se simplifie comme

$$\begin{aligned}
&\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\ \not{k}[(\not{p}_\ell + \not{p}_+ + \not{p}_-) - m_\ell](\not{p}_- - \not{p}_+)\ v(p_\ell) \quad = \\
&\quad \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\left\{ -[s_\pi + P\cdot L + P\cdot N]\ \not{Q} - [Q\cdot L + Q\cdot N]\ \not{L} + 2im_\ell \sigma_{\mu\nu} p_+^\mu p_-^\nu \right\} v(p_\ell)\ .
\end{aligned}$$

On voit pour ce diagramme qu'une partie tensorielle est présente dans le numérateur. Le dénominateur peut s'écrire comme

$$(p_\ell + p_+ + p_-)^2 - m_\ell^2 = s_\pi + L\cdot P + N\cdot P\ .$$

Ainsi, nous trouvons pour le diagramme (e)

$$-i\mathcal{M}^{(e)}_{fi} = ie^2 F_o G_F V^*_{us}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\frac{1}{s_\pi}\left\{ -\not{Q} - \frac{Q\cdot L + Q\cdot N}{s_\pi + P\cdot L + P\cdot N}\ \not{L} + \frac{2im_\ell \sigma_{\mu\nu} p_+^\mu p_-^\nu}{s_\pi + P\cdot L + P\cdot N} \right\}\ .$$

Aucun de ces trois diagrammes ne contribue au facteur de forme F_{+-}.

Facteurs de forme F_{+-} et G_{+-}

A l'ordre le plus bas, nous remplaçons la constante de désintégration du pion à la limite des masses des quarks légers nulles F_o par F_π qui est la quantité mesurable. D'après les définitions (4.8) et (4.10), les facteurs de forme F_{+-} et G_{+-} valent

$$\begin{aligned}
F_{+-} &= \tilde{F}_{+-} = \frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi} \\
G_{+-} &= \tilde{G}_{+-} = \frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}
\end{aligned}$$

Nous remarquons que les contributions au facteur de forme G_{+-} provenant des diagrammes (d) et (e) se compensent. De plus, nous notons que la violation d'isospin n'affecte pas ces deux facteurs de forme.

Facteur de forme $\tilde{R}_{+-}$

Deux diagrammes contribuent au facteur de forme R à l'ordre le plus bas sans effet dû à la brisure d'isospin, autre que l'apparition, dans le pôle, de la masse chargée $M_{K^\pm}$. Il s'agit des diagrammes (a) et (b) dont la partie proportionnelle au facteur de forme $\tilde{R}_{+-}$ est donnée par

$$-i\mathcal{M}_{fi} = (-i)\frac{G_F V_{us}^* \; \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\; v(p_\ell)}{3F_o}\{1+\frac{1}{2}\frac{s_\pi+t_\pi-2u_\pi}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}\}L_\mu.$$

Ainsi pour le facteur de forme $\tilde{R}_{+-}$, nous trouvons

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{+-} &= \sqrt{2}\frac{M_{K^\pm}}{3F_\pi}\times(1+\frac{1}{2}\frac{s_\pi+t_\pi-2u_\pi}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}) \\ &= \frac{M_{K^\pm}}{2\sqrt{2}F_\pi}(\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\frac{s_\pi+t_\pi-2u_\pi}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}) \\ &= \frac{M_{K^\pm}}{2\sqrt{2}F_\pi}(1+\frac{s_\pi+\nu}{s_\ell-M_{K^\pm}^2})\end{aligned}$$

avec $\nu = t_\pi - u_\pi$. Les scalaires t_π et u_π expriment l'échange d'énergie entre le kaon et les deux pions.

Facteur de forme R_{+-}: brisure d'isospin

On peut remarquer que la brisure d'isospin n'affecte que le facteur de forme R_{+-} à l'ordre le plus bas. Les autres facteurs de forme restent inchangés. La somme de toutes les contributions à R_{+-} donne

$$\begin{aligned}R_{+-} &= \frac{M_K\sqrt{2}}{3F_\pi}\Big\{1-\frac{1}{2}\frac{1}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}\Big[2u_\pi-t_\pi-s_\pi-M_{K^\pm}^2-M_{\pi^\pm}^2-6\Delta_\pi\Big] \\ &\quad +\frac{3e^2F_\pi^2}{s_\pi}\Big[\frac{u_\pi-t_\pi}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}-\frac{t_{2\ell}-t_{1\ell}}{u_\ell-m_\ell^2}\Big]\Big\}.\end{aligned}$$

On cherche à réécrire ce facteur de forme en faisant apparaître la contribution $\tilde{R}_{+-}$ décrite précédemment.

$$\begin{aligned}R_{+-} &= \frac{M_{K^\pm}}{2\sqrt{2}F_\pi}\Big\{1+\frac{s_\pi+\nu}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}+4\Delta_\pi\frac{1}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}-\frac{4e^2F_\pi^2}{s_\pi}\Big[\frac{\nu}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}+\frac{t_{2\ell}-t_{1\ell}}{u_\ell-m_\ell^2}\Big]\Big\} \\ &= \tilde{R}_{+-}+\frac{M_{K^\pm}}{2\sqrt{2}F_\pi}\Big\{4\Delta_\pi\frac{1}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}-\frac{4e^2F_\pi^2}{s_\pi}\Big[\frac{\nu}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}+\frac{t_{2\ell}-t_{1\ell}}{u_\ell-m_\ell^2}\Big]\Big\} \qquad (5.6)\end{aligned}$$

On voit que le deuxième terme de cette somme comporte une contribution Δ_π de brisure d'isospin ainsi qu'une contribution purement électromagnétique due à la présence du photon.

Facteur de forme tensoriel

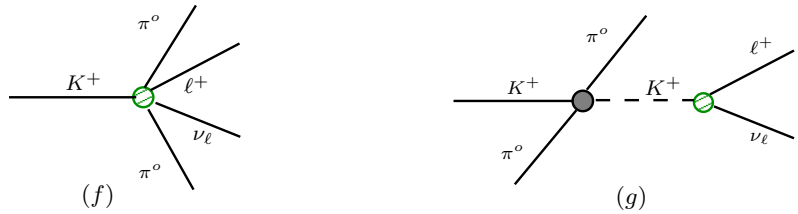
La présence du photon modifie l'amplitude du processus $K_{\ell 4}$ chargé par l'apparition d'un facteur de forme de type tensoriel. D'après la définition de ce facteur de forme dans l'amplitude (4.8), nous obtenons

$$T_{+-} = 4e^2F_\pi^2\frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\frac{m_\ell M_{K^\pm}}{s_\pi}\frac{1}{u_\ell-m_\ell^2} \qquad (5.7)$$

Ce facteur de forme est purement électromagnétique et provient uniquement du diagramme (e) de la FIGURE 5.1.

5.2 Le canal neutre $K^+ \to \pi^o\ \pi^o\ \ell^+\ \nu_\ell$

Ce canal de désintégration est moins accessible expérimentalement, car les pions dans l'état final sont neutres. A l'ordre le plus bas, ce canal ne comporte que deux diagrammes (f) et (g).



Pour ces différents diagrammes, les lagrangiens contribuants respectifs sont

$$\mathcal{L}^{(f)} = ... + G_F V_{us}^* \ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ \frac{1}{F_o}\big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2R}\big)\big(K^+\pi^o\partial^\mu\pi^o - \pi^o\pi^o\partial^\mu K^+\big)\ ,$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(g)} &= ... + \frac{1}{2F_o^2}\ \Big\{\big(\frac{1}{6}+\frac{1}{4R}\big)\Big[\pi^o\pi^o\partial^\mu K^-\partial_\mu K^+ - K^+\pi^o\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^o - K^-\pi^o\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^o + K^-K^+\partial^\mu\pi^o\partial_\mu\pi^o\Big] \\ &\quad -B_o\hat{m}\big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3R}\big)K^-K^+\pi^o\pi^o - B_o m_s\big(\frac{1}{6}-\frac{1}{3R}\big)K^-K^+\pi^o\pi^o \\ &\quad -e^2F_o^2Z_o\big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2R}\big)K^-K^+\pi^o\pi^o\Big\} + 2F_oG_FV_{us}^*\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ \partial^\mu K^+\ .\end{aligned}$$

Le diagramme (f) s'écrit simplement comme

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(f)} = (i)\frac{G_FV_{us}^*\ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell)}{3F_o}\times\big(\frac{1}{2}+\frac{3}{4R}\big)\big\{3P_\mu+2L_\mu\big\}\ .$$

Le diagramme (g) fait intervenir le vertex à quatre mésons, deux pions neutres et deux kaons chargés dont la valeur est

$$\frac{i}{2F_o^2}\Big\{\big(\frac{1}{6}+\frac{1}{4R}\big)\Big[3s_\pi - s_\ell - M_{K^\pm}^2 - 2M_{\pi^o}^2\Big] + 2B_o\hat{m}\big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3R}\big) + 2B_om_s\big(\frac{1}{6}-\frac{1}{3R}\big) + 2e^2F_o^2Z_o\big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2R}\big)\Big\}$$

On utilise à nouveau les relations entre les masses des mésons et les quantités B_o, $\hat{m}$, m_s (2.24) pour obtenir

$$\frac{i}{6F_o^2}\Big\{\big(\frac{1}{2}+\frac{3}{4R}\big)\Big[3s_\pi - s_\ell - M_{K^\pm}^2 - 2M_{\pi^o}^2\Big] + M_{\pi^\pm}^2 + M_{K^\pm}^2 - \Delta_\pi + \frac{3}{2R}(M_\pi^2 - M_K^2)\Big\}$$

Les quantités M_π et M_K sont les masses du pion et du kaon à la limite d'isospin (2.25), car elles sont multipliées par une quantité $1/R$ qui représente la brisure d'isospin. Ainsi, le diagramme (g) vaut

$$\begin{aligned}-i\mathcal{M}_{fi}^{(g)} &= (i)\frac{G_FV_{us}^*\ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell)}{F_o}\frac{1}{s_\ell - M_{K^\pm}^2}\ L_\mu \\ &\quad\times\Big\{\big(\frac{1}{12}+\frac{1}{8R}\big)\big(3s_\pi - s_\ell - M_{K^\pm}^2 - 2M_{\pi^o}^2\big) + \frac{1}{6}\big(M_{\pi^\pm}^2 + M_{K^\pm}^2\big) + \frac{1}{4R}(M_\pi^2 - M_K^2) - \frac{1}{6}\Delta_\pi\Big\}\ .\end{aligned}$$

Facteurs de forme F_{oo} et G_{oo}

D'après les définitions (4.8) et (4.10), les facteurs de forme F_{oo} et G_{oo} valent

$$\begin{aligned}F_{oo} &= -\frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\big(1+\frac{3}{2R}\big) \\ &= \tilde{F}_{oo} - \frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\frac{3}{2R} \\ G_{oo} &= \tilde{G}_{oo} = 0\end{aligned}$$

Nous remarquons que le facteur de forme G n'existe pas à l'ordre le plus bas avec ou sans brisure d'isospin.

Facteur de forme $\tilde{R}_{oo}$

Les deux diagrammes (f) et (g) contribuent à ce facteur de forme. En négligeant les termes proportionnels à R et Δ_π et d'après la définition (4.10), nous avons

$$\tilde{R}_{oo} \;=\; -\frac{\sqrt{2}M_{K^\pm}}{3F_\pi}\Big\{1+\frac{1}{4}\frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}}\big[3s_\pi - s_\ell + M^2_{K^\pm}\big]\Big\}.$$

Finalement, ce résultat se met sous la forme

$$\tilde{R}_{oo} \;=\; -\frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\Big\{1+\frac{1}{2}\frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}}\big[s_\pi - s_\ell + M^2_{K^\pm}\big]\Big\}.$$

Facteur de forme R_{oo}: brisure d'isospin

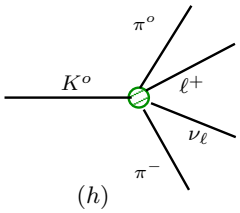
On somme toutes les contributions à R_{oo} et on fait apparaître $\tilde{R}_{oo}$ calculé précédemment. On obtient le résultat final

$$\begin{aligned} R_{oo} &= -\frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\Big\{1+\frac{1}{2}\frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}}\big(s_\pi - s_\ell + M^2_{K^\pm}\big) + \frac{1}{4R}\big[1+\frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}}\big(3s_\pi + 2s_\ell - 6M^2_K\big)\big]\Big\} \\ &= \tilde{R}_{oo} - \frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\frac{1}{4R}\big[1+\frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}}\big(3s_\pi + 2s_\ell - 6M^2_K\big)\big]. \end{aligned}$$

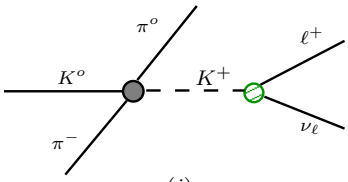
Pour ce canal, les corrections aux facteurs de forme sont, à l'ordre le plus bas, proportionnelles à $\frac{1}{R} \sim m_u - m_d$. Les corrections sont dues à la violation d'isospin.

5.3 Le canal mixte $K^o \to \pi^o\ \pi^-\ \ell^+\ \nu_\ell$

A l'ordre le plus bas, ce canal ne comporte que deux diagrammes (h) et (i).



(h)



(i)

Les lagrangiens contribuants respectifs sont

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(h)} &= \ldots + \frac{1}{F_o}\,(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\,\ell)\,G_F V^*_{us}\Big\{\sqrt{2}\big(K^o\pi^+\partial^\mu\pi^o - K^o\pi^o\partial^\mu\pi^+\big) + \frac{1}{2\sqrt{2}R}\big(2\pi^o\pi^+\partial^\mu K^o - K^o\pi^+\partial^\mu\pi^o \\ &\quad -K^o\pi^o\partial^\mu\pi^+\big)\Big\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(i)} &= \ldots + \frac{1}{8\sqrt{2}F_o^2}\Big\{4K^-\pi^+\partial^\mu K^o\partial_\mu\pi^o - 4K^o\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^o - 4K^-\pi^o\partial^\mu K^o\partial_\mu\pi^+ + 4K^o\pi^o\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^+ \\ &\quad -8F_o^2e^2Z_oK^oK^-\pi^o\pi^+ + \frac{1}{R}\Big[K^-\pi^+\partial^\mu K^o\partial_\mu\pi^o - 2\pi^o\pi^+\partial^\mu K^o\partial_\mu K^- + K^o\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^o \\ &\quad +K^-\pi^o\partial^\mu K^o\partial_\mu\pi^+ + K^o\pi^o\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^+ - 2K^oK^-\partial^\mu\pi^o\partial_\mu\pi^+ + 2B_o(\hat{m}-m_s)K^oK^-\pi^o\pi^+ \\ &\quad -2F_o^2e^2Z_oK^oK^-\pi^o\pi^+\Big]\Big\} + 2F_oG_FV^*_{us}\,(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\,\ell)\,\partial^\mu K^+\,. \end{aligned}$$

Ainsi, le diagramme (h) s'écrit

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(h)} = (i)\frac{G_F V_{us}^* \ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell)}{2F_o}\{\frac{3}{2\sqrt{2}R}P_\mu - \sqrt{2}Q_\mu + \frac{1}{\sqrt{2}R}L_\mu\} \ .$$

Le diagramme (i) fait intervenir le vertex à quatre mésons, un pion neutre, un pion chargé, un kaon neutre et un kaon chargé dont la valeur est

$$\frac{i}{8\sqrt{2}F_o^2}\Big\{4(u_\pi - t_\pi) + \frac{1}{R}\big(2s_\pi - u_\pi - t_\pi\big) + \frac{2B_o}{R}(\hat{m} - m_s) - 8F_o^2 e^2 Z_o\Big\}.$$

En utilisant les relations (2.24), nous obtenons pour ce vertex

$$\frac{i}{8\sqrt{2}F_o^2}\Big\{4(u_\pi - t_\pi) + \frac{1}{R}\big(2s_\pi - u_\pi - t_\pi\big) + \frac{2}{R}(M_\pi^2 - M_K^2) - 4\Delta_\pi\Big\} \ .$$

Ainsi, le diagramme (i) s'exprime comme

$$\begin{aligned}-i\mathcal{M}_{fi}^{(i)} &= (i)\frac{G_F V_{us}^* \ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell)}{3F_o}\frac{1}{s_\ell - M_{K^\pm}^2}\ L_\mu \\ &\quad \times\Big\{\frac{3}{2\sqrt{2}}(u_\pi - t_\pi - \Delta_\pi) + \frac{3}{8\sqrt{2}R}\Big(2s_\pi - u_\pi - t_\pi - 2M_K^2 + 2M_\pi^2\Big)\Big\} \ .\end{aligned}$$

Facteurs de forme F_{o-} et G_{o-}

D'après les définitions (4.8) et (4.10), les facteurs de forme F_{o-} et G_{o-} valent

$$\begin{aligned}F_{o-} &= -\frac{3M_{K^o}}{4F_\pi R} \\ G_{o-} &= \tilde{G}_{o-} = \frac{M_{K^o}}{F_\pi}\end{aligned}$$

Nous remarquons que le facteur de forme F n'existe pas à la limite d'isospin et que la brisure d'isospin n'affecte pas le facteur de forme G.

Facteur de forme $\tilde{R}_{o-}$

Les deux diagrammes (h) et (i) contribuent à ce facteur de forme. En négligeant les termes proportionnels à R et Δ_π et d'après la définition (4.10), nous avons

$$\tilde{R}_{o-} = -\frac{M_{K^o}}{2F_\pi}\frac{1}{s_\ell - M_{K^\pm}^2}(u_\pi - t_\pi).$$

Facteur de forme R_{o-}: brisure d'isospin

On somme toutes les contributions à R_{o-} et on fait apparaître $\tilde{R}_{o-}$ calculé précédemment. On obtient le résultat final

$$\begin{aligned}R_{o-} &= -\frac{M_{K^o}}{2F_\pi}\Big\{\frac{1}{s_\ell - M_{K^\pm}^2}(u_\pi - t_\pi) - \frac{\Delta_\pi}{s_\ell - M_{K^\pm}^2} + \frac{1}{4R}\Big(1 + \frac{1}{s_\ell - M_{K^\pm}^2}\big[3s_\pi + 2s_\ell - 6M_K^2\big]\Big)\Big\} \\ &= \tilde{R}_{o-} + \frac{M_{K^o}}{2F_\pi}\Big\{\frac{\Delta_\pi}{s_\ell - M_{K^\pm}^2} - \frac{1}{4R}\Big(1 + \frac{1}{s_\ell - M_{K^\pm}^2}\big[3s_\pi + 2s_\ell - 6M_K^2\big]\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

Ce facteur de forme est sensible à la brisure d'isospin via le terme proportionnel à $\frac{1}{R} \sim m_u - m_d$ et aux effets purement électromagnétiques de la différence de masses entre les pions chargés et neutres Δ_π.

5.4 Résumé et numérique

Les TABLE 5.1, TABLE 5.2 et TABLE 5.3 résument les résultats obtenus sur les facteurs de forme pour les trois désintégrations $K_{\ell 4}$ (4.1), (4.2) et (4.3).

$$
\begin{aligned}
F_{+-} &= G_{+-} = \frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi} \\
R_{+-} &= \frac{M_{K^\pm}}{F_\pi 2\sqrt{2}}\Big\{1 + \frac{s_\pi + \nu}{s_\ell - M^2_{K^\pm}} + 4\Delta_\pi \frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}} - \frac{4e^2F_\pi^2}{s_\pi}\Big[\frac{\nu}{s_\ell - M^2_{K^\pm}} + \frac{t_{2\ell} - t_{1\ell}}{u_\ell - m_\ell^2}\Big]\Big\} \\
T_{+-} &= 4e^2F_\pi^2 \frac{M^2_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\frac{m_\ell}{s_\pi}\frac{1}{u_\ell - m_\ell^2}
\end{aligned}
$$

TABLE 5.1: Corrections à l'ordre le plus bas dues à la violation d'isospin sur les facteurs de forme associés au canal $K^+ \to \pi^+\ \pi^-\ \ell^+\ \nu_\ell$

$$
\begin{aligned}
F_{oo} &= -\frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\big(1 + \frac{3}{2R}\big) \qquad G_{oo} = 0 \\
R_{oo} &= -\frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\Big\{1 + \frac{1}{2}\frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}}\big(s_\pi - s_\ell + M^2_{K^\pm}\big) + \frac{1}{4R}\big[1 + \frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}}\big(3s_\pi + 2s_\ell - 6M_K^2\big)\big]\Big\}
\end{aligned}
$$

TABLE 5.2: Corrections à l'ordre le plus bas dues à la violation d'isospin sur les facteurs de forme associés au canal $K^+ \to \pi^o\ \pi^o\ \ell^+\ \nu_\ell$

$$
\begin{aligned}
F_{o-} &= -\frac{3M_{K^o}}{4F_\pi R} \qquad G_{o-} = \frac{M_{K^o}}{F_\pi} \\
R_{o-} &= -\frac{M_{K^o}}{2F_\pi}\Big\{\frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}}\big(u_\pi - t_\pi\big) - \frac{\Delta_\pi}{s_\ell - M^2_{K^\pm}} + \frac{1}{4R}\Big(1 + \frac{1}{s_\ell - M^2_{K^\pm}}\big[3s_\pi + 2s_\ell - 6M_K^2\big]\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

TABLE 5.3: Corrections à l'ordre le plus bas dues à la violation d'isospin sur les facteurs de forme associés au canal $K^o \to \pi^o\ \pi^-\ \ell^+\ \nu_\ell$

Après avoir obtenu les formules analytiques des facteurs de forme à l'ordre le plus bas pour les trois canaux $K_{\ell 4}$ (4.1), (4.2) et (4.3), nous pouvons maintenant extraire des informations numériques afin de quantifier l'effet de la brisure d'isospin. Nous avons la possibilité de donner les valeurs numériques théoriques des taux de désintégration en utilisant la formule générale (4.14) du taux de désintégration déterminée dans le chapitre 4 et la décomposition angulaire de J_5 (4.18) que nous rappelons ci-dessous

$$
d\Gamma_5 \;=\; G_F^2 \mid V_{us} \mid^2 N(s_\pi, s_l) J_5(s_\pi, s_l, \theta_\pi, \theta_l, \phi) ds_\pi ds_l d(\cos\theta_\pi) d(\cos\theta_l) d\phi
$$

où

$$
N(s_\pi, s_l) \;=\; \frac{(1 - z_l)YX}{2^{13}\pi^6 M^5_{K^\pm}} \;. \tag{5.8}
$$

et

$$J_5 = 2(1-z_\ell)\Big[I_1 + I_2\cos 2\theta_\ell + I_3\sin^2\theta_\ell\cdot\cos 2\Phi + I_4\sin 2\theta_\ell\cdot\cos\Phi + I_5\sin\theta_\ell\cdot\cos\Phi$$
$$+I_6\cos\theta_\ell + I_7\sin\theta_\ell\cdot\sin\Phi + I_8\sin 2\theta_\ell\cdot\sin\Phi + I_9\sin^2\theta_\ell\cdot\sin 2\Phi\Big]\,. \quad (5.9)$$

4.1 Statut expérimental

Les premières expériences K_{e4} [39, 40, 41, 42, 43] n'ont observé chacunes que quelques centaines d'événements comme le montre la TABLE 5.4.

Référence	nombre d'événements	taux de désintégration (s^{-1})
Birge et al.	69	$(2.9 \pm 0.6)\ 10^3$
Ely et al.	269	$(2.6 \pm 0.3)\ 10^3$
Schweinberger et al.	115	$(3.2 \pm 0.4)\ 10^3$
Bourquin et al.	1609	$(3.32 \pm 0.31)\ 10^3$
Beier et al.	8141	

TABLE 5.4: Taux de désintégration K_{e4} mesurés dans les premières expériences.

Il a fallu attendre 1977 lorsque la collaboration Genève-Saclay [44, 45] a mesuré le rapport de branchement de K_{e4} avec un lot de 30000 événements. Rosselet *et al.* ont obtenu un taux de désintégration (le deuxième chiffre est l'erreur systématique)

$$\Gamma_{K_{e4}} = (3.26 \pm 0.15)\ 10^3 s^{-1}.$$

Depuis, il n'y a pas eu de nouvelles données accessibles jusqu'à l'expérience E865 à Brookhaven en 2001 où 400000 événements K_{e4} ont été collectés [13, 14]. Le taux de désintégration est (le deuxième chiffre est l'erreur systématique)

$$\Gamma_{K_{e4}} = (3.321 \pm 0.089)\ 10^3 s^{-1}.$$

D'après les valeurs des temps de vie du kaon chargé et neutre, la TABLE 5.5 résume les valeurs des rapports de branchements et des taux de désintégrations $K_{\ell 4}$ du *Particle Data Group* [46].

Canal $K_{\ell 4}$	rapport de branchement (10^{-5})	taux de désintégration (s^{-1})
$K^+ \to \pi^+\pi^- e^+\nu_e$	4.08 ± 0.09	3294
$K^+ \to \pi^+\pi^- \mu^+\nu_\mu$	1.4 ± 0.9	1130
$K^+ \to \pi^o\pi^o e^+\nu_e$	2.1 ± 0.4	1710
$K^+ \to \pi^o\pi^o \mu^+\nu_\mu$	-	-
$K^o \to \pi^o\pi^- e^+\nu_e$	5.18 ± 0.29	1001
$K^o \to \pi^o\pi^- \mu^+\nu_\mu$	-	-

TABLE 5.5: Valeurs expérimentales des rapports de branchement et des taux de désintégration $K_{\ell 4}$ [46].

Les canaux neutre et mixte

A ce niveau, les facteurs de forme pour les canaux neutre et mixte ne dépendent pas des variables cinématiques ϕ et θ_ℓ et nous pouvons alors intégrer la formule (5.9) selon ces deux variables

$$J_3 \quad = \quad \int d\phi d(\cos\theta_\ell) J_5 = 8\pi(1 - z_\ell)\big[I_1 - \frac{1}{3} I_2\big]. \tag{5.10}$$

Nous avons utilisé une programmation FORTRAN et les ressources des librairies de programmation du CERN *MathLib* pour effectuer cette triple intégrale[18] La TABLE 5.6 résume les valeurs numériques obtenues pour les taux de désintégration en s^{-1}. Pour le canal neutre, l'espace des phases doit être divisé par deux, puisque l'état final comporte deux particules identiques, les deux pions neutres.

D'après les résultats de la TABLE 5.6 et dans le cas où nous ne considérons pas la violation d'isospin, notre routine reproduit les résultats de Bijnens et al. à 0.3 % près.
La quantité entre parenthèses dans la TABLE 5.6 nous donne une indication sur le comportement de l'espace des phases et de la cinématique par rapport à la brisure d'isospin. Si cette quantité est faiblement modifiée par rapport au taux de désintégration total, alors ce sont les facteurs de forme qui sont sensibles à la brisure d'isospin. Dans le cas du canal neutre, nous remarquons que l'espace des phases ne varie pas lorsque l'on passe de la limite d'isospin à la configuration de la brisure d'isospin. L'effet de la brisure d'isospin sur le taux de désintégration pour le canal neutre est de l'ordre de 7.3% pour le mode électronique et 8.9% pour le mode muonique. Dans le cas du mode de désintégration mixte, la situation est différente. En effet, l'espace des phases est modifie de -1.17% pour le mode électronique et -2.2% pour le mode muonique. Le taux de désintégration est quant à lui modifié de -1.6% pour le mode électronique et -2.2% pour le mode muonique. On en déduit que pour le canal mixte, la violation d'isospin est du à l'espace des phases.

Le canal chargé

D'après les résultats sur les facteurs de forme associés à ce canal de désintégration, nous voyons que les facteurs de forme R_{+-} et tensoriel T_{+-} dépendent des cinq variables d'intégration via les termes u_ℓ, $t_{1\ell}$ et $t_{1\ell}$ dans les formules (5.6) et (5.7). On doit intégrer le taux différentiel en utilisant la formule générale J_5, donnée par (4.15).

---

[18] La fonction double précision DGMLTk(FSUBk,Ak,Bk,NIk,NGk,X) calcule la valeur d'une intégrale multiple de dimension k avec $1 \leq k \leq 6$. La méthode utilisée dans ces intégrations multiples est la méthode de Gauss. Cette fonction fait appel à une routine auxiliaire *FSUBk*. Ak,Bk sont les points extrêmes de l'intervalle d'intégration pour la variable X, qui est un tableau de dimension supérieure ou égale à 1. NIk est le nombre de sous-intervalles égaux qui composent l'intervalle (Ak,Bk). NGk est le nombre de points de quadrature de Gauss qui sera utilisé dans chacun des NIk sous-intervalles (par défaut NGk vaut 6).
La routine *FSUBk* est de la forme SUBROUTINE FSUBk (M,Uk,Fk,X), avec Uk, Fk et X de type Double Précision et M un entier, fixé par DGMLTk. Uk est un tableau à une dimension qui doit être déclaré de dimension (*). Le contenu de ce tableau est fixé par DGMLTk. Fk est un tableau à une dimension dont le contenu doit être rempli par FSUBk et X est un tableau à une dimension qui doit être le même que celui qui apparaît comme argument de DGMLTk.
On écrit une première routine FSUB1(M,U1,F1,X) dans laquelle X est un tableau de trois variables qui sont les trois variables d'intégration, s_π, s_ℓ et $\cos\theta_\pi$. On programme dans cette routine tous les objets de notre calcul I_1, I_2, les facteurs de forme ...L'argument F_1 de cette routine est égal à l'expression du taux différentiel de désintégration que l'on cherche à intégrer. F_1 est donc écrit comme une fonction de trois variables X(1), X(2) et X(3).
On utilise une deuxième routine FSUB2(M,U2,F2,X) dans laquelle F2 n'est autre que le résultat de l'intégration selon $\cos\theta_\pi$ (par exemple) à l'aide de F2 = DGMLT1(FSUB1, ...).
A nouveau, nous écrivons une nouvelle routine FSUB3(M,U3,F3,X) dans laquelle F3 représente le résultat d'une deuxième intégration selon s_π (par exemple) avec F3 = DGMLT2(FSUB1, ...).
Il ne reste plus qu'à appeler une dernière fois la fonction d'intégration DGMLT3(FSUB3, ...) pour intégrer selon la dernière variable s_ℓ. Le résultat final est le taux de désintégration $K_{\ell 4}$.

Mode de désintégration	$(M_\pi, M_K)^\dagger$ [84]	$(M_\pi, M_K)^\dagger$ $m_u = m_d$ $e = 0$	masses physiques‡ $m_u \neq m_d$ $e \neq 0$	valeur expérimentale [46]
$\pi^o\pi^o e^+\nu_e$	683	681 (2.17×10^{-9})	731 (2.17×10^{-9})	1710
$\pi^o\pi^o \mu^+\nu_\mu$	102	101 (3.25×10^{-10})	110 (3.25×10^{-10})	-
$\pi^o\pi^- e^+\nu_e$	561	561 (4.25×10^{-9})	552 (4.20×10^{-9})	1001
$\pi^o\pi^- \mu^+\nu_\mu$	55	55 (6.36×10^{-10})	53.8 (6.22×10^{-10})	-

$^\dagger(M_\pi, M_K) = (135, 493.6)MeV$ et $(137, 497.7)MeV$ pour les désintégrations $K_{\ell 4}$ neutre et mixte respectivement [84].
‡ Les mésons ont leur masses physiques mais les masses à la limite d'isospin restent à leurs valeurs $(M_\pi, M_K)^\dagger$.

TABLE 5.6: Valeurs numériques des taux de désintégration en s^{-1} pour les canaux neutre et mixte de $K_{\ell 4}$. La troisième ligne de ce tableau représente la configuration où l'on considère les effets de la brisure d'isospin $m_u \neq m_d$ et les effets électromagnétiques $e \neq 0$. Pour ces deux canaux, il n'y a pas de contribution du facteur de forme tensoriel. Les chiffres entre parenthèses représentent le taux de désintégration lorsque tous les facteurs de forme non-nuls sont mis à 1.

Mode de désintégration	$(M_\pi, M_K)^\dagger$ [84]	$(M_\pi, M_K)^\dagger$ $m_u = m_d$ $e = 0$	masses physiques‡ $m_u \neq m_d$ $e \neq 0$	valeur expérimentale [46]
$\pi^+\pi^- e^+\nu_e$	1297	1292 (4.7×10^{-8})	1292 (4.7×10^{-8})	3294
$\pi^+\pi^- \mu^+\nu_\mu$	155	154.3 (6.1×10^{-9})	153.2 (6.1×10^{-9})	1130

$^\dagger(M_\pi, M_K) = (139.6, 493.6)$ MeV pour les désintégrations $K_{\ell 4}$ chargé [84].
‡ Les mésons ont leur masses physiques mais les masses à la limite d'isospin restent à leurs valeurs $(M_\pi, M_K)^\dagger$.

TABLE 5.7: Valeurs numériques des taux de désintégration en s^{-1} pour le canal chargé de $K_{\ell 4}$. La troisième colonne de ce tableau représente la configuration où l'on considère les effets de la brisure d'isospin $m_u \neq m_d$ et les effets électromagnétiques $e \neq 0$.

Le canal $\pi^+\pi^-$ est le seul qui implique l'existence d'un facteur de forme tensoriel du à la présence du photon. Ce facteur de forme est une contributions purement électromagnétique. A l'ordre le plus bas, les effets de la brisure d'isospin et l'existence du facteur de forme tensoriel sont numériquement négligeables dans ce canal.

Les différents résultats de ce chapitre ont été présentés oralement à la conférence *Hadatom 01* à Berne (Suisse) et ont fait l'objet d'un compte-rendu [77]. La TABLE 5.8 illustre la contribution de l'approximation en arbre au taux de désintégration en % par rapport à la valeur expérimentale résumée dans la TABLE 5.5. D'après les différents résultats présentés dans ce chapitre, la

	$\pi^+\pi^-e^+\nu_e$	$\pi^+\pi^-\mu^+\nu_\mu$	$\pi^o\pi^oe^+\nu_e$	$\pi^o\pi^-e^+\nu_e$
limite d'isospin	39.2 %	13.6 %	39.8 %	56 %
$m_u \neq m_d$ et $e \neq 0$	39.2 %	13.5 %	42.7 %	55 %

TABLE 5.8: Contribution de l'approximation en arbre au taux de désintégration $K_{\ell 4}$ et effet de la brisure d'isospin.

brisure d'isospin et les effets électromagnétiques n'affectent que les facteurs de forme du canal de désintégration neutre et l'espace des phases du canal de désintégration mixte. Les effets sont respectivement de l'ordre de 8 % et -2 % pour les modes neutre et mixte (les pourcentages représentent la moyenne pour les modes électronique et muonique). Le canal chargé n'est pas affecté par la brisure d'isospin, ni par les effets électromagnétiques. Pour les canaux chargé, neutre et mixte respectivement, l'approximation en arbre ne représente que 39.2%, 42.7% et 55% du taux de désintégration mesuré expérimentalement (pour le mode électronique). Pour le mode muonique, la seule valeur expérimentale disponible est celle du canal chargé. L'approximation en arbre pour ce mode ne représente que 13.5% du taux de désintégration mesuré expérimentalement.

Le calcul en arbre n'est pas suffisant pour expliquer les mesures expérimentales. Nous devons calculer les contributions à l'ordre d'une boucle en incluant les effets des corrections radiatives (échange de photon virtuel) ainsi que les effets de la brisure d'isospin. Ceci est le but des chapitres suivants.

Chapitre 6

Corrections à une boucle électromagnétiques

Dans ce chapitre, nous expliciterons les calculs des corrections radiatives au processus K_{e4} chargé (4.1) provenant des diagrammes avec échange d'un photon virtuel (FIGURE 6.1).

6.1 Motivations

Pour mesurer le déphasage pion-pion, il faut évidement mesurer des interférences entre deux facteurs de forme. Dans le canal $K_{\ell 4}$ chargé (4.1) les facteurs de forme F et G sont non nuls. Ceci est déjà une première motivation pour étudier le canal chargé.
Lorsque l'on mesure le rapport des taux de désintégration pour les modes électroniques et muoniques, nous obtenons

$$\frac{\Gamma_{K^+_{e4}}}{\Gamma_{K^+_{\mu 4}}} \sim 3.$$

Le mode électronique est ainsi expérimentalement privilégié. Nous étudierons donc le canal K^+_{e4}, où nous négligerons le facteur de forme R, car celui ci apparaît multiplié par la masse de l'électron.

Le facteur de forme de l'anomalie H apparaît à l'ordre p^4 de la théorie des perturbations chirales, ainsi d'après (2.26-2.29), les effets de la brisure d'isospin et des corrections électromagnétiques seront d'ordre

$$\mathcal{O}\big(p^4(m_u - m_d)\big) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}\big(p^4 e^2\big),$$

ce qui est supérieur aux ordres recherchés (2.29). Ainsi, le facteur de forme H sera remplacé dans la suite par sa valeur à la limite d'isospin calculée par Wess et Zumino [64]

$$H \quad = \quad -\frac{\sqrt{2} M_K^3}{8\pi^2 {F_\pi}^2}.$$

Nous privilégierons une notation uniforme pour l'ensemble des diagrammes. Il s'agira d'écrire les résultats des facteurs de forme en faisant apparaître uniquement les fonctions à un, deux, trois et quatre points. Néanmoins, avec l'aide de l'appendice sur ces différentes fonctions, nous pouvons obtenir une formulation plus détaillée de ces résultats où les contributions logarithmiques apparaissent explicitement.

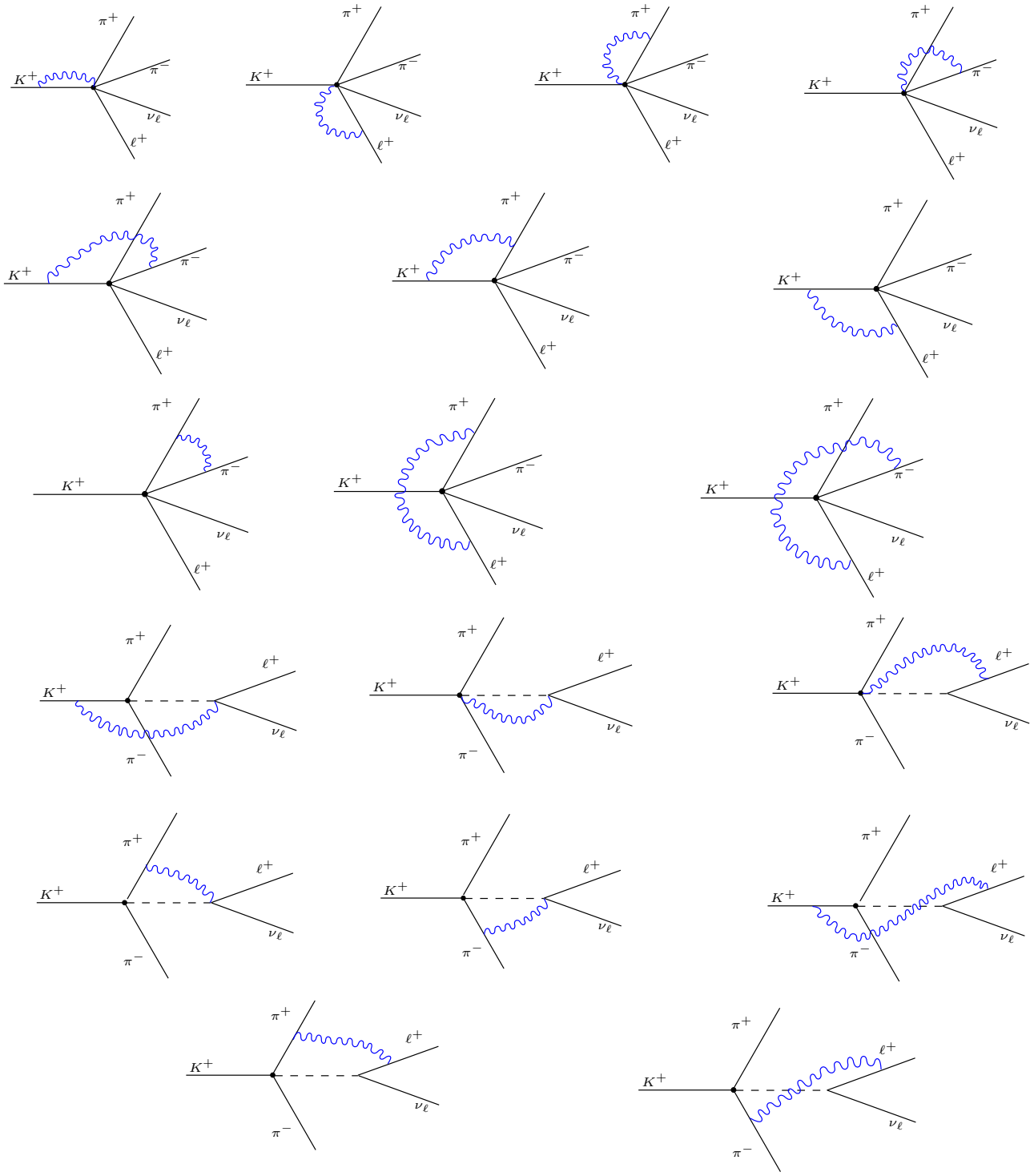


FIGURE 6.1: Liste des diagrammes à une boucle purement électromagnétique contribuants aux facteurs de forme F, G et R.

Les expressions des facteurs de forme F et G seront données sous la forme

$$F(\text{ou } G) \quad = \quad \frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_o}\Big\{1+\delta F(\text{ou } G)\Big\},$$

avec $\delta F(\text{ou } G)$ les corrections dues à la brisure d'isospin et aux effets électromagnétiques. Pour le moment, nous laisserons la quantité F_o dans nos formules, mais dans le chapitre consacré à l'étude numérique des résultats, nous remplacerons la constante de désintégration du pion à la limite chirale, F_o, par son expression corrigée à l'ordre d'une boucle F_π donnée par [24]

$$F_\pi \quad = \quad F_o\Big\{1-2\frac{M_\pi^2}{32\pi^2F_o^2}\ln\frac{M_\pi^2}{\mu^2}-\frac{M_K^2}{32\pi^2F_o^2}\ln\frac{M_K^2}{\mu^2}+\frac{4}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_4(\mu)+M_\pi^2L_5(\mu)\big]\Big\}.$$

Les facteurs de forme F et G seront alors de la forme

$$\begin{aligned} F(\text{ou } G) \quad = \quad & \frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\Big\{1-2\frac{M_\pi^2}{32\pi^2F_\pi^2}\ln\frac{M_\pi^2}{\mu^2}-\frac{M_K^2}{32\pi^2F_\pi^2}\ln\frac{M_K^2}{\mu^2}+\frac{4}{F_\pi^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_4(\mu)+M_\pi^2L_5(\mu)\big] \\ & +\delta F(\text{ou } G)^{\text{boucles}}+\delta F(\text{ou } G)^{\text{contre termes}}\Big\}. \end{aligned}$$

6.2 Résultats à une boucle de photon

2.1 Facteur de forme tensoriel T

Parmi tous les diagrammes à une boucle de photon, seuls les quatre diagrammes de la FIGURE 6.2 contribuent au facteur de forme tensoriel. Dans l'élément de matrice de ces différents

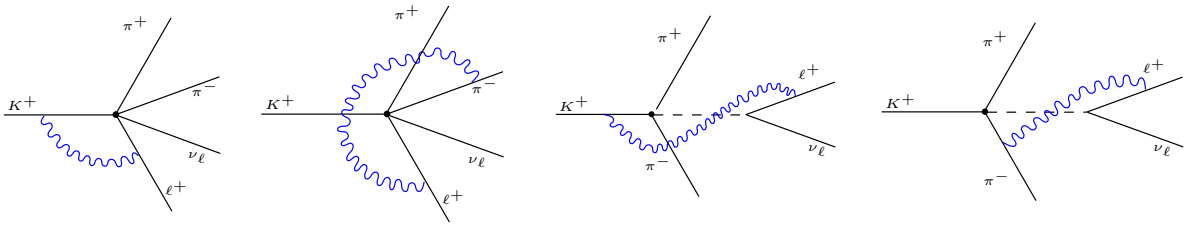


FIGURE 6.2: Liste des diagrammes à une boucle purement électromagnétique contribuants au facteur de forme T.

diagrammes, il apparaît des produits de la forme $\not{a}\ \not{b}$. A l'aide des formules standards sur les produits des matrices de Dirac et les équations de Dirac sur les spineurs, nous pouvons ramener ces termes à des contributions aux facteurs de forme F, G et R, si a et b ne sont pas les quadri-impulsions des pions de l'état final (Voir la TABLE 4.1). Par contre, $\not{p}_+\ \not{p}_-$ se réécrit comme $p_+\cdot p_- - i\sigma_{\mu\nu}p_+{}^\mu p_-{}^\nu$. Le premier terme de cette somme contribue au facteur de forme R tandis que le second terme ne contribue qu'au facteur de forme tensoriel T.

D'après la définition de ce facteur de forme dans l'amplitude (4.8) et son résultat à l'ordre le plus bas (5.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} T_{+-} \quad &= \quad T_{+-}^{\text{ordre le plus bas}}+\delta T_{+-} \\ &= \quad T_{+-}^{\text{ordre le plus bas}}+2e^2\frac{m_\ell M_{K^\pm}^2}{\sqrt{2}F_\pi}\ \Big\{-C_1(p_\ell,k;m_\gamma,m_\ell,M_K)+C_1(-p_\ell,p_-;m_\gamma,m_\ell,M_\pi) \\ & \quad -D_{00}(-p_-,p_\ell,L;m_\gamma,M_\pi,m_\ell,M_K)+D_{00}(k,p_\ell,L;m_\gamma,M_K,m_\ell,M_K)\Big\} \end{aligned}$$

2.2 Facteurs de forme F et G

Les lagrangiens associés aux diagrammes de la FIGURE 6.3 sont respectivement

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\mathrm{a})} &= \ldots + 8ieA_\mu \frac{G_F V_{us}^*}{3F_o} \left(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\, \ell\right) K^+\pi^-\pi^+ + ieA_\mu \left(K^-\partial^\mu K^+ - K^+\partial^\mu K^-\right) \\
\mathcal{L}^{(\mathrm{b})} &= \ldots + 8ieA_\mu \frac{G_F V_{us}^*}{3F_o} \left(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\, \ell\right) K^+\pi^-\pi^+ + e\,\overline{\ell}\gamma^\mu\ell\, A_\mu \\
\mathcal{L}^{(\mathrm{c})} &= \ldots + 8ieA_\mu \frac{G_F V_{us}^*}{3F_o} \left(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\, \ell\right) K^+\pi^-\pi^+ + ieA_\mu \left(\pi^-\partial^\mu \pi^+ - \pi^+\partial^\mu\pi^-\right) \\
\mathcal{L}^{(\mathrm{d})} &= \ldots + 8ieA_\mu \frac{G_F V_{us}^*}{3F_o} \left(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\, \ell\right) K^+\pi^-\pi^+ + ieA_\mu \left(\pi^-\partial^\mu \pi^+ - \pi^+\partial^\mu\pi^-\right)
\end{aligned}
$$

L'élément de matrice et les corrections aux facteurs de forme F et G pour le diagramme (a) sont

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{a})} &= (-i)(ie^2)\frac{4G_F V_{us}^*}{3F_o}\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\, \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\, v(p_\ell)\, \frac{\left(2k-q\right)_\mu}{(q^2-m_\gamma^2)[(k-q)^2-M_K^2]} \\
&= (ie^2)\frac{4G_F V_{us}^*}{3F_o}\, \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\, v(p_\ell)\, \left\{2k_\mu B(k;m_\gamma,M_K) - B_\mu(k;m_\gamma,M_K)\right\}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{a})} &= -\frac{8e^2}{3}\left\{2B(k;m_\gamma,M_K) - B_1(k;m_\gamma,M_K)\right\} \\
\delta G^{(\mathrm{a})} &= 0
\end{aligned}
$$

L'élément de matrice et les corrections aux facteurs de forme F et G pour le diagramme (b) sont

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{b})} &= (-i)(ie^2)\frac{4G_F V_{us}^*}{3F_o}\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\, \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\frac{\gamma^\mu[\not{p}_\ell - \not{q} - m_\ell]\gamma_\mu}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_\ell-q)^2-m_\ell^2]}\, v(p_\ell) \\
&= (-i)(ie^2)\frac{4G_F V_{us}^*}{3F_o}\, \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\, v(p_\ell)\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{(2-D)\left(\not{p}_\ell - \not{q}\right) - Dm_\ell}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_\ell-q)^2-m_\ell^2]} \\
&= -(ie^2)\frac{4G_F V_{us}^*}{3F_o}\, \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\, v(p_\ell)\Big\{2m_\ell B(p_\ell;m_\gamma,m_\ell) + (2-D)\gamma^\mu B_\mu(p_\ell;m_\gamma,m_\ell)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\delta F^{(\mathrm{b})} = \delta G^{(\mathrm{b})} = 0
$$

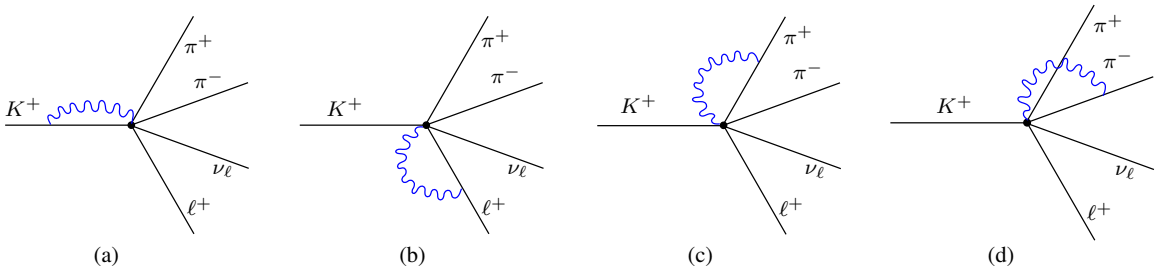


FIGURE 6.3: Les figures (a), (b), (c) et (d) représentent les diagrammes à une boucle de photon entre le vertex d'interaction pions-leptons et les particules chargées K^+, ℓ^+, π^+ et π^-.

L'élément de matrice et les corrections aux facteurs de forme F et G pour le diagramme (c) sont

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{c})} &= (-i)(ie^2)\frac{4G_F V_{us}^*}{3F_o}\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\, v(p_\ell)\;\times\frac{\left(2p_+-q\right)_\mu}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_+-q)^2-M_\pi^2]}\\
&= (ie^2)\frac{4G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\, v(p_\ell)\;\times\;\left\{2p_{+\mu}B(p_+;m_\gamma,M_\pi)-B_\mu(p_+;m_\gamma,M_\pi)\right\}
\end{aligned}
$$

et

$$
\delta F^{(\mathrm{c})} \;=\; \delta G^{(\mathrm{c})} = -\frac{4e^2}{3}\left\{2B(p_+;m_\gamma,M_\pi)-B_1(p_+;m_\gamma,M_\pi)\right\}
$$

L'élément de matrice et les corrections aux facteurs de forme F et G pour le diagramme (d) sont

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{d})} &= (-i)(-ie^2)\frac{4G_F V_{us}^*}{3F_o}\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\, v(p_\ell)\;\times\frac{\left(2p_--q\right)_\mu}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_--q)^2-M_\pi^2]}\\
&= (-ie^2)\frac{4G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\, v(p_\ell)\;\times\left\{2p_{-\mu}B(p_-;m_\gamma,M_\pi)-B_\mu(p_-;m_\gamma,M_\pi)\right\}
\end{aligned}
$$

et

$$
\delta F^{(\mathrm{d})} \;=\; -\delta G^{(\mathrm{d})} = \frac{4e^2}{3}\left\{2B(p_-;m_\gamma,M_\pi)-B_1(p_-;m_\gamma,M_\pi)\right\}.
$$

Les lagrangiens associés aux diagrammes de la FIGURE 6.4 sont respectivement

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\mathrm{e})} &= \ldots+\frac{2G_F V_{us}^*}{3F_o}\,(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\,\ell)\,(\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+-2K^+\pi^+\partial^\mu\pi^-+K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+)-ieA_\mu(\pi^+\partial^\mu\pi^--\pi^-\partial^\mu\pi^+)\\
&\quad -ieA_\mu(K^+\partial^\mu K^--K^-\partial^\mu K^+)\\
\mathcal{L}^{(\mathrm{f})} &= \ldots+\frac{2G_F V_{us}^*}{3F_o}\,(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\,\ell)\,(\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+-2K^+\pi^+\partial^\mu\pi^-+K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+)-ieA_\mu(\pi^+\partial^\mu\pi^--\pi^-\partial^\mu\pi^+)\\
&\quad -ieA_\mu(K^+\partial^\mu K^--K^-\partial^\mu K^+)\\
\mathcal{L}^{(\mathrm{g})} &= \ldots+\frac{2G_F V_{us}^*}{3F_o}\,(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\,\ell)\,(\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+-2K^+\pi^+\partial^\mu\pi^-+K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+)\\
&\quad -ieA_\mu(K^+\partial^\mu K^--K^-\partial^\mu K^+)+e\,\overline{\ell}\gamma^\mu\ell\;A_\mu
\end{aligned}
$$

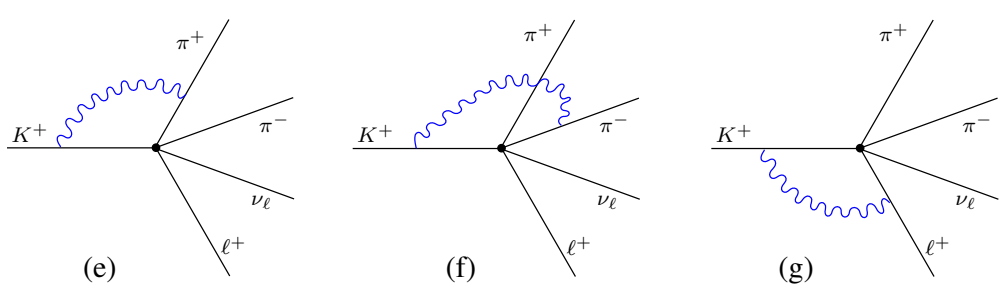


FIGURE 6.4: Les figures (e), (f) et (g) représentent les diagrammes à une boucle de photon entre le kaon chargé qui se désintègre et les particules chargées π^- π^+ et ℓ^+.

L'élément de matrice pour le diagramme (e) est de la forme

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{e})} = (-i)(-ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\,v(p_\ell)\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{(k+2p_+-p_--3q)_\mu(2k-q).(2p_+-q)}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_+-q)^2-M_\pi^2][(k-q)^2-M_K^2]}.$$

Le numérateur s'écrit

$$(\frac{3}{2}P+\frac{3}{2}Q+L-3q)_\mu\Big[-2(t_\pi-M_K^2-M_\pi^2)+[(k-q)^2-M_K^2]+[(p_+-q)^2-M_\pi^2]-(q^2-m_\gamma^2)\Big]$$

et les corrections aux facteurs de forme F et G pour le diagramme (e) sont

$$\begin{aligned}\delta F^{(\mathrm{e})} &= e^2\Big\{-2(t_\pi-\Sigma_{\pi K})[C(p_+,k;m_\gamma,M_\pi,M_K)-C_1(p_+,k;m_\gamma,M_\pi,M_K)\\ &\quad -2C_2(p_+,k;m_\gamma,M_\pi,M_K)]+B(p_+;m_\gamma,M_\pi)+B(k;m_\gamma,M_K)-B_1(p_+;m_\gamma,M_\pi)\\ &\quad -2B_1(k;m_\gamma,M_K)+B_1(k-p_+;M_\pi,M_K)\Big\}\\ \delta G^{(\mathrm{e})} &= e^2\Big\{-2(t_\pi-\Sigma_{\pi K})[C(p_+,k;m_\gamma,M_\pi,M_K)-C_1(p_+,k;m_\gamma,M_\pi,M_K)]\\ &\quad +B(p_+;m_\gamma,M_\pi)+B(k;m_\gamma,M_K)-B_1(p_+;m_\gamma,M_\pi)-B_1(k-p_+;M_\pi,M_K)\Big\}\end{aligned}$$

L'élément de matrice pour le diagramme (f) est de la forme

$$\begin{aligned}-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{f})} &= (-i)(ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\,v(p_\ell)\\ &\quad\times\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{(k+2p_+-p_-)_\mu(2k-q).(2p_--q)}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_--q)^2-M_\pi^2][(k-q)^2-M_K^2]}.\end{aligned}$$

Le numérateur se réécrit comme

$$(\frac{3}{2}P+\frac{3}{2}Q+L)\Big\{2(M_K^2+M_\pi^2-u_\pi)+[(k-q)^2-M_K^2]+[(p_--q)^2-M_\pi^2]-(q^2-m_\gamma^2)\Big\}.$$

Les corrections aux facteurs de forme F et G pour le diagramme (f) sont

$$\begin{aligned}\delta F^{(\mathrm{f})}=\delta G^{(\mathrm{f})} &= -e^2\Big\{2(\Sigma_{\pi K}-u_\pi)C(p_-,k,m_\gamma;M_\pi,M_K)+B(p_-;m_\gamma,M_\pi)+B(k;m_\gamma,M_K)\\ &\quad -B(k-p_-;M_\pi,M_K)\Big\}\end{aligned}$$

L'élément de matrice pour le diagramme (g) est de la forme

$$\begin{aligned}-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{g})} &= (-i)(-ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu[(\not p_\ell-\not q)-m_\ell]\gamma^\nu\,v(p_\ell)\\ &\quad\times\frac{(2p_+-p_-+k-q)_\mu(2k-q)_\nu}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_\ell-q)^2-m_\ell^2][(k-q)^2-M_K^2]}.\end{aligned}$$

Le numérateur doit être développé pour faire apparaître les contributions aux différents facteurs de forme. On utilise les formules sur les matrices de Dirac et les équations de Dirac sur les spineurs. et nous faisons apparaître les propagateurs impliqués dans ce diagramme. Il reste

$$
\begin{aligned}
&(2s_\ell + 3s_\pi + 6P\cdot L + 3\,\not{Q}\,\not{P} - 4k\cdot p_\ell + m_\ell\,\not{P} - 2p_\ell\cdot P + 3m_\ell\,\not{Q} - 6p_\ell\cdot Q + 6Q\cdot L)\,\not{q} \\
&+2k\cdot p_\ell(2\,\not{L} + 3\,\not{P} + 3\,\not{Q}) - [(p_\ell - q)^2 - m_\ell^2]\,\not{q} + \not{L}\{[(p_\ell - q)^2 - m_\ell^2] + 2[(k-q)^2 - M_K^2]\} \\
&+\frac{1}{2}\,\not{P}\{[(p_\ell - q)^2 - m_\ell^2] + 6[(k-q)^2 - M_K^2]\} - \frac{3}{2}\,\not{Q}\{[(p_\ell - q)^2 - m_\ell^2] - 2[(k-q)^2 - M_K^2]\}
\end{aligned}
$$

Nous obtenons pour les corrections aux facteurs de forme F et G,

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{g})} &= \frac{e^2}{3}\{6(M_K^2 + m_\ell^2 - t_\ell)C(p_\ell, k; m_\gamma, m_\ell, M_K) - 2m_\ell^2 C_1(p_\ell, k; m_\gamma, m_\ell, M_K) \\
&\quad +6(t_\ell - m_\ell^2)C_2(p_\ell, k; m_\gamma, m_\ell, M_K) + B(k; m_\gamma, M_K) + 6B(p_\ell; m_\gamma, m_\ell) \\
&\quad -2B_1(k; m_\gamma, M_K)\} \\
\delta G^{(\mathrm{g})} &= \frac{e^2}{3}\{6(M_K^2 + m_\ell^2 - t_\ell)C(p_\ell, k; m_\gamma, m_\ell, M_K) - 6m_\ell^2 C_1(p_\ell, k; m_\gamma, m_\ell, M_K) \\
&\quad +6(t_\ell - m_\ell^2)C_2(p_\ell, k; m_\gamma, m_\ell, M_K) - 3B(k; m_\gamma, M_K) + 6B(p_\ell; m_\gamma, m_\ell)
\end{aligned}
$$

Il existe une contribution tensorielle dans ce diagramme. D'après la définition de ce facteur de forme dans l'amplitude (4.8), nous obtenons,

$$
T^{(\mathrm{g})} = -e^2 M_{K^\pm}^2 \frac{\sqrt{2}}{F_o}\, m_\ell \left[C_1(p_\ell, k; m_\gamma, m_\ell, M_K) + C_2(p_\ell, k; m_\gamma, m_\ell, M_K)\right]
$$

Les trois diagrammes de la FIGURE 6.5 sont décrits par les lagrangiens

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\mathrm{h})} &= \ldots + \frac{2G_F V_{us}^*}{3F_o}\,(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\,\ell)\,(\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+ - 2K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- + K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+) - ieA_\mu(\pi^+\partial^\mu\pi^- - \pi^-\partial^\mu\pi^+) \\
\mathcal{L}^{(\mathrm{i,\,j})} &= \mathcal{L}^{(\mathrm{h})} + e\,\overline{\ell}\gamma^\mu\ell\,A_\mu
\end{aligned}
$$

L'élément de matrice pour le diagramme (h) est de la forme

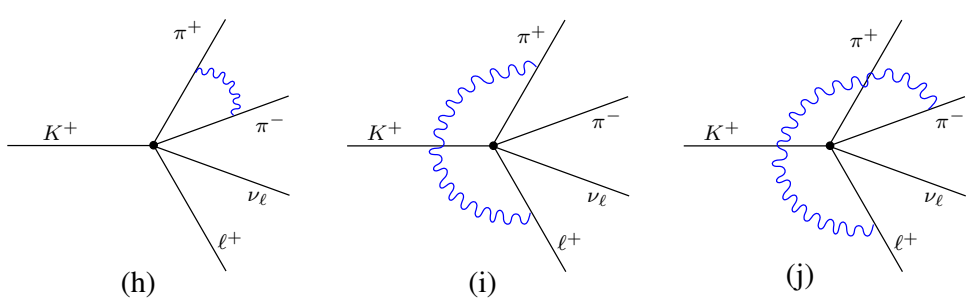


FIGURE 6.5: Les figures (h), (i) et (j) représentent les diagrammes à une boucle de photon entre les deux pions chargés et entre le lepton chargé et chaque pion chargé.

$$-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{h})} = (-i)(ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\;v(p_\ell)\;\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{(L+\frac{3}{2}P+\frac{3}{2}Q+3q)_\mu(2p_+ + q).(2p_- - q)}{(q^2-m_\gamma^2)[(\underline{-p_+}-q)^2-M_\pi^2][(p_- - q)^2 - M_\pi^2]}\;.$$

Le numérateur se réduit en faisant apparaître les propagateurs

$$(L+\frac{3}{2}P+\frac{3}{2}Q+3q)_\mu\Big[2(s_\pi - 2M_{\pi^\pm}^2) - [(p_+ + q)^2 - M_{\pi^\pm}^2] - [(p_- - q)^2 - M_{\pi^\pm}^2] + (q^2 - m_\gamma^2)\Big]\;.$$

Alors

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{h})} \;=\;& ie^2\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\;v(p_\ell)\;\Big\{2(s_\pi - 2M_\pi^2)\Big[\big(L+\frac{3}{2}P+\frac{3}{2}Q\big)_\mu C(-p_+,p_-;m_\gamma,M_\pi,M_\pi)\\
&-\frac{3}{2}(P+Q)_\mu C_1(-p_+,p_-;m_\gamma,M_\pi,M_\pi)+\frac{3}{2}(P-Q)_\mu C_2(-p_+,p_-;m_\gamma,M_\pi,M_\pi)\Big]\\
&-\big(L+\frac{3}{2}P+\frac{3}{2}Q\big)_\mu\Big[B(p_-,m_\gamma,M_\pi)+B(-p_+,m_\gamma,M_\pi)\Big]-\frac{3}{2}(P-Q)_\mu B_1(p_-,m_\gamma,M_\pi)\\
&+\frac{3}{2}(P+Q)_\mu B_1(-p_+,m_\gamma,M_\pi)+L_\mu B(p_+ + p_-,M_{\pi^\pm},M_{\pi^\pm})+3P_\mu B_1(p_+ + p_-,M_\pi,M_\pi)\Big\}
\end{aligned}$$

D'après (**??**) les valeurs des contributions aux facteurs de forme sont

$$\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{h})} \;=\;& -e^2\Big\{2(s_\pi - 2M_\pi^2)\Big[C(-p_+,p_-;m_\gamma,M_\pi,M_\pi)-C_1(-p_+,p_-;m_\gamma,M_\pi,M_\pi)\\
&+C_2(-p_+,p_-;m_\gamma,M_\pi,M_\pi)\Big]-B(p_-,m_\gamma,M_\pi)-B_1(p_-;m_\gamma,M_\pi)\\
&-B(-p_+,m_\gamma,M_\pi)+B_1(-p_+;m_\gamma,M_\pi)+2B_1(p_+ + p_-;M_\pi,M_\pi)\Big\}\\
\delta G^{(\mathrm{h})} \;=\;& -e^2\Big\{2(s_\pi - 2M_\pi)\Big[C(-p_+,p_-;m_\gamma,M_\pi,M_\pi)-C_1(-p_+,p_-;m_\gamma,M_\pi,M_\pi)\\
&-C_2(-p_+,p_-;m_\gamma,M_\pi,M_\pi)\Big]-B(p_-,m_\gamma,M_\pi)+B_1(p_-,m_\gamma,M_\pi)\\
&-B(-p_+,m_\gamma,M_\pi)+B_1(-p_+,m_\gamma,M_\pi)\Big\}
\end{aligned}$$

L'élément de matrice associé au diagramme (i) est

$$\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{i})} \;=\;& (-i)(-ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu[(\not p_\ell + \not q)-m_\ell]\gamma^\nu\;v(p_\ell)\\
&\frac{(2p_+ - p_- + k - 2q)_\mu(2p_+ - q)_\nu}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_\ell+q)^2-m_\ell^2][(p_+ - q)^2 - M_\pi^2]}.
\end{aligned}$$

Les seules contributions aux facteurs de forme F et G sont données par les termes

$$\begin{aligned}
&(\not P + \not Q)\big\{6p_\ell\cdot p_+ - \frac{1}{2}[(p_\ell+q)^2-m_\ell^2]-3[(p_+-q)^2-M_\pi^2]\big\}+\big\{m_\ell(\not P+\not Q)+2[(p_\ell+q)^2-m_\ell^2]\\
&-\frac{3}{2}s_\pi-\frac{3}{2}Q^2-12p_\ell\cdot p_+\big\}\;\not q
\end{aligned}$$

On trouve ainsi les corrections suivantes

$$\begin{aligned}\delta F^{(\mathrm{i})} = \delta G^{(\mathrm{i})} &= \frac{e^2}{3}\Big\{6(M_\pi^2+m_\ell^2-t_{1\ell})C(-p_\ell,p^+;m_\gamma,m_\ell,M_\pi)+2m_\ell^2C_1(-p_\ell,p^+;m_\gamma,m_\ell,M_\pi)\\ &\quad -6(2M_\pi^2+m_\ell^2-t_{1\ell})C_2(-p_\ell,p^+;m_\gamma,m_\ell,M_\pi)-B(p_+;m_\gamma,M_\pi)\\ &\quad -6B(-p_\ell;m_\gamma,m_\ell)+2B_1(p_+;m_\gamma,M_\pi)\Big\}\end{aligned}$$

L'élément de matrice associé au diagramme (j) vaut

$$\begin{aligned}-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{j})} &= (-i)(ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu[(\not p_\ell+\not q)-m_\ell]\gamma^\nu\,v(p_\ell)\\ &\quad \frac{(k+2p_+-p_-+q)_\mu(2p_--q)_\nu}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_\ell+q)^2-m_\ell^2][(p_--q)^2-M_\pi^2]}\end{aligned}$$

Les contributions à F et G sont données par

$$\begin{aligned}&\not P\big\{6p_\ell\cdot p^- - \frac{1}{2}[(p_\ell+q)^2-m_\ell^2]-3[(p^--q)^2-M_{\pi^\pm}^2]+3q^2\big\}+\not Q\big\{6p_\ell\cdot p^- - \frac{5}{2}[(p_\ell+q)^2-m_\ell^2]\\ &-3[(p^--q)^2-M_{\pi^\pm}^2]+3q^2\big\}+\big\{m_\ell(\not P-\not Q)+3\not P\not Q-[(p_\ell+q)^2-m_\ell^2]-3(s_\pi-2M_\pi^2)\big\}\not q\end{aligned}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned}\delta F^{(\mathrm{j})} &= -\frac{e^2}{3}\Big\{6(M_\pi^2+m_\ell^2-t_{2\ell})C(-p_\ell,p^-;m_\gamma,m_\ell,M_\pi)+2m_\ell^2C_1(-p_\ell,p^-;m_\gamma,m_\ell,M_\pi)\\ &\quad -6M_\pi^2C_2(-p_\ell,p^-;m_\gamma,m_\ell,M_\pi)-B(p_-;m_\gamma,M_\pi)-6B(-p_\ell;m_\gamma,m_\ell)\\ &\quad -B_1(p_-;m_\gamma,M_\pi)+6B(p_\ell+p_-;m_\ell,M_\pi)\Big\}\\ \delta G^{(\mathrm{j})} &= -\frac{e^2}{3}\Big\{6(M_\pi^2+m_\ell^2-t_{2\ell})C(-p_\ell,p^-;m_\gamma,m_\ell,M_\pi)-2m_\ell^2C_1(-p_\ell,p^-;m_\gamma,m_\ell,M_\pi)\\ &\quad -6M_\pi^2C_2(-p_\ell,p^-;m_\gamma,m_\ell,M_\pi)-5B(p_-;m_\gamma,M_\pi)-6B(-p_\ell;m_\gamma,m_\ell)\\ &\quad +B_1(p_-;m_\gamma,M_\pi)+6B(p_\ell+p_-;m_\ell,M_\pi)\Big\}.\end{aligned}$$

Les lagrangiens associés aux diagrammes de la FIGURE 6.6 sont respectivement

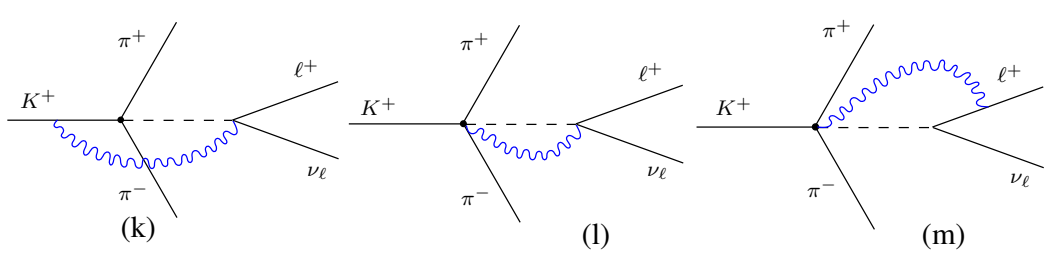


FIGURE 6.6: Les figures (k), (l) et (m) représentent les diagrammes avec un état intermédiaire (kaon), où la boucle de photon relie le K^+ au vertex leptonique, les deux vertex ou le lepton chargé au vertex à quatre mésons.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\mathrm{k})} &= ... + \frac{1}{6F_o^2}\big(- \pi^-\pi^+\partial^\mu K^-\partial^\mu K^+ + 2K^+\pi^+\partial^\mu K^-\partial^\mu\pi^- - K^-\pi^+\partial^\mu K^+\partial^\mu\pi^- \\
&\quad -K^+\pi^-\partial^\mu K^-\partial^\mu\pi^+ + 2K^-\pi^-\partial^\mu K^+\partial^\mu\pi^+ - K^-K^+\partial^\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+\big) \\
&\quad +\{\frac{B_o\hat{m}}{2F_o^2}(1+\frac{1}{6R}) + \frac{B_o m_s}{6F_o^2}(1-\frac{1}{2R}) + \frac{8}{3}e^2 Z_o\}K^-K^+\pi^+\pi^- \\
&\quad +2ie\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ F_oG_FV_{us}^*A^\mu K^+ + ieA_\mu(K^-\partial^\mu K^+ - K^+\partial^\mu K^-) \\
\mathcal{L}^{(\mathrm{l})} &= ... + \frac{2ieA_\mu}{3F_o^2}\Big(- K^+\pi^-\pi^+\partial^\mu K^- + K^-\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+ - K^-K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- + K^-K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+\Big) \\
&\quad +2ie\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ F_oG_FV_{us}^*A^\mu K^+ \\
\mathcal{L}^{(\mathrm{m})} &= ... + \frac{2ieA_\mu}{3F_o^2}(-K^+\pi^-\pi^+\partial^\mu K^- + K^-\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+ - K^-K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- + K^-K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+) \\
&\quad +2\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ F_oG_FV_{us}^*\partial^\mu K^+ + e\ \overline{\ell}\gamma^\mu\ell\ A_\mu
\end{aligned}
$$

Sachant que $\frac{B_o\hat{m}}{2F_o^2}(1+\frac{1}{6R}) + \frac{B_o m_s}{6F_o^2}(1-\frac{1}{2R}) + \frac{8}{3}e^2 Z_o = \frac{1}{6F_o^2}(M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2 + 6\Delta_\pi)$, l'élément de matrice associé au diagramme (k) s'écrit, avec $\nu_\pi = t_\pi - u_\pi$

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{k})} &= (-i)(ie^2)\frac{G_FV_{us}^*}{12F_o}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\ v(p_\ell)\ (2k-q)_\mu \\
&\quad \frac{-[(k-q)^2-M_K^2]-[(L-q)^2-M_K^2]+6q\cdot Q+3(s_\pi+\nu_\pi)]}{(q^2-m_\gamma^2)[(k-q)^2-M_K^2][(k-p_+-p_--q)^2-M_K^2]}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{k})} &= ie^2\frac{G_FV_{us}^*}{6F_o}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\ v(p_\ell) \\
&\quad \Big\{\frac{3}{2}(s_\pi+\nu_\pi)\big[2(\not{L}+\not{P})C(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) - (\not{L}+\not{P})C_1(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) \\
&\quad -\not{L}C_2(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)\big] - \frac{1}{2}\big[2(\not{L}+\not{P})B(p_\ell+p_\nu;m_\gamma,M_K) - \not{L}B_1(p_\ell+p_\nu;m_\gamma,M_K)\big] \\
&\quad -\frac{1}{2}(\not{L}+\not{P})\big[2B(M_K;m_\gamma,M_K) - B_1(M_K;m_\gamma,M_K)\big] \\
&\quad +3Q^\rho\Big\{2(\not{L}+\not{P})\big[k_\rho C_1(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) + L_\rho C_2(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)\big] \\
&\quad -k_\rho(\not{L}+\not{P})C_{11}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) - L_\rho\ \not{L}C_{22}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) \\
&\quad -\big[k_\rho\ \not{L} + L_\rho(\not{L}+\not{P})\big]C_{12}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) + \eta^{\mu\rho}\gamma_\mu C_{00}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)\Big\}\Big\}
\end{aligned}
$$

En utilisant la décomposition (C.30), les corrections sur les facteurs de forme associés à ce diagramme deviennent

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{k})} &= -\frac{e^2}{6}\Big\{6(s_\pi+\nu_\pi)C(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) - 3(s_\pi+3\nu_\pi)C_1(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) \\
&\quad -6\nu_\pi C_2(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) + 3\nu_\pi C_{11}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) \\
&\quad +3\nu_\pi C_{12}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K) - 2B(L;m_\gamma,M_K) - 2B(k;m_\gamma,M_K) + B_1(k;m_\gamma,M_K)\Big\} \\
\delta G^{(\mathrm{k})} &= e^2C_{00}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)
\end{aligned}
$$

L'élément de matrice associé au diagramme (l) vaut

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{l})} &= (-i)(i2e^2)\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\ v(p_\ell)\ \frac{(2k-2p_- - q)_\mu}{(q^2-m_\gamma^2)[(k-p_+-p_- - q)^2 - M_K^2]} \\
&= (i2e^2)\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\ v(p_\ell)\Big[2(\not{k}-\not{p}_-)B(L;m_\gamma,M_K) - \not{L}B_1(L;m_\gamma,M_K)\Big]
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Avec,

$$
B_1(L;m_\gamma,M_K) = \frac{1}{2}\Big(\frac{A(M_K^2)}{M_K^2}+\frac{1}{16\pi^2}\Big) - \frac{1}{16\pi^2}\frac{M_K^2}{2s_\ell} + \frac{1}{32\pi^2}\big(1-\frac{M_K^2}{s_\ell}\big)^2\ \ln\big(\frac{M_K^2}{M_K^2-s_\ell}\big)
$$

Les corrections aux facteurs de forme sont

$$
\delta F^{(\mathrm{l})} = \delta G^{(\mathrm{l})} = -\frac{4e^2}{3}B(L;m_\gamma,M_K)
$$

L'élément de matrice associé au diagramme (m) est

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{m})} &= (-i)(-ie^2)\frac{2G_F V_{us}^*}{3F_o}\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu[\not{p}_\ell - \not{q} - m_\ell]\gamma^\nu\ v(p_\ell) \\
&\quad \frac{(k-p_+-p_- - q)_\mu(2k-2p_- - q)_\nu}{(q^2-m_\gamma^2)[(k-p_+-p_- - q)^2 - M_K^2][(p_\ell - q)^2 - m_\ell^2]}
\end{aligned}
$$

Nous obtenons pour les corrections aux facteurs de forme F et G

$$
\delta F^{(\mathrm{m})} = \delta G^{(\mathrm{m})} = \frac{4e^2}{3}\Big\{m_\ell^2 C_1(L,p_\ell;m_\gamma,M_K,m_\ell) + m_\ell^2 C_2(L,p_\ell;m_\gamma,M_K,m_\ell) + B(L;m_\gamma,M_K)\Big\}.
$$

Les lagrangiens associés aux deux diagrammes de la FIGURE 6.7 sont identiques et valent

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\mathrm{n,\ o})} &= \ldots + \frac{1}{6F_o^2}(-\pi^-\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu K^+ + 2K^+\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^- - K^-\pi^+\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^- - K^+\pi^-\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^+ \\
&\quad +2K^-\pi^-\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^+ - K^-K^+\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+) + \Big\{\frac{B_o\hat{m}}{2F_o^2}(1+\frac{1}{6R}) + \frac{B_o m_s}{6F_o^2}(1-\frac{1}{2R}) \\
&\quad +\frac{8}{3}e^2 Z_o\Big\}K^-K^+\pi^+\pi^- + 2ie\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ F_o G_F V_{us}^* A^\mu K^+ + ieA_\mu(\pi^-\partial^\mu\pi^+ - \pi^+\partial^\mu\pi^-)
\end{aligned}
$$

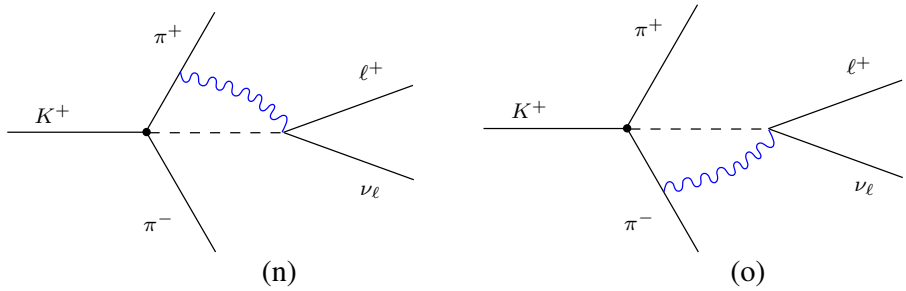


FIGURE 6.7: Les figures (n) et (o) représentent les diagrammes avec un état intermédiaire (kaon), où la boucle de photon relie un des pions chargés au courant leptonique.

L'élément de matrice associé au diagramme (n) est

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{n})} &= (-i)(-ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{6F_o}\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\ v(p_\ell)\ (2p_+ + q)_\mu \\
&\quad \frac{3(M_\pi^2 - s_\pi + s_\ell - t_\pi) - \left[(p_+ + q)^2 - M_\pi^2\right] - \left[(k - p_+ - p_- - q)^2 - M_K^2\right]}{(q^2 - m_\gamma^2)[(p_+ + q)^2 - M_\pi^2][(k - p_+ - p_- - q)^2 - M_K^2]}
\end{aligned}
$$

La forme du numérateur simplifie le calcul et nous trouvons

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi} &= (-ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{6F_o}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\ v(p_\ell) \\
&\quad \times\Big\{6p_\mu^+(M_\pi^2 - s_\pi + s_\ell - t_\pi)\ C(-p_+, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
&\quad +3(M_\pi^2 - s_\pi + s_\ell - t_\pi)\ C_\mu(-p_+, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) - 2p_\mu^+\big[B(L; m_\gamma, M_K) \\
&+ \quad B(-p_+; m_\gamma, M_\pi)\big] - B_\mu(L; m_\gamma, M_K) - B_\mu(-p^+; m_\gamma, M_\pi)\Big\}
\end{aligned}
$$

Les contributions aux facteurs de forme s'écrivent

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{n})} = \delta G^{(\mathrm{n})} &= \frac{e^2}{6}\Big\{6(M_\pi^2 - s_\pi + s_\ell - t_\pi)\ C(-p_+, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
&\quad -3(M_\pi^2 - s_\pi + s_\ell - t_\pi)\ C_1(-p_+, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) - 2B(L; m_\gamma, M_K) \\
&\quad -2B(-p_+; m_\gamma, M_\pi) + B_1(-p_+; m_\gamma, M_\pi)\Big\}
\end{aligned}
$$

L'élément de matrice associé au diagramme (o) est

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{o})} &= (-i)(ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{6F_o}\int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\ v(p_\ell)\ (2p_- + q)_\mu \\
&\times\frac{\frac{3}{2}(s_\ell - s_\pi - M_K^2 - \nu_\pi) - \left[(k - p_+ - p_- - q)^2 - M_K^2\right] + 2\left[(p_- + q)^2 - M_\pi^2\right] - 6q\cdot k}{(q^2 - m_\gamma^2)[(p_- + q)^2 - M_\pi^2][(k - p_+ - p_- - q)^2 - M_K^2]}
\end{aligned}
$$

Les contributions aux facteurs de forme s'écrivent ainsi:

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{o})} &= \frac{e^2}{6}\Big\{3(\nu_\pi + s_\pi + M_K^2 - s_\ell)\ C(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) \\
&\quad -9(M_K^2 + M_\pi^2 - u_\pi)C_1(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) + 6(M_K^2 - s_\pi + s_\ell)C_2(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) \\
&\quad +3(M_K^2 + M_\pi^2 - u_\pi)C_{11}(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) - 3(M_K^2 - s_\pi + s_\ell)C_{12}(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) \\
&\quad +12C_{00}(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) - 4B(L; m_\gamma, M_K) + 2B(-p_-; m_\gamma, M_\pi) - B_1(-p_-; m_\gamma, M_\pi)\Big\} \\
\delta G^{(\mathrm{o})} &= -\frac{e^2}{6}\Big\{3(\nu_\pi + s_\pi + M_K^2 - s_\ell)\ C(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) \\
&\quad -9(M_K^2 + M_{\pi^\pm}^2 - u_\pi)C_1(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) + 6(M_K^2 - s_\pi + s_\ell)C_2(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) \\
&\quad +3(M_K^2 + M_{\pi^\pm}^2 - u_\pi)C_{11}(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) - 3(M_K^2 - s_\pi + s_\ell)C_{12}(-p_-, L, 0; M_\pi, M_K) \\
&\quad -4B(L; m_\gamma, M_K) + 2B(-p_-; m_\gamma, M_\pi) - B_1(-p_-; m_\gamma, M_\pi)\Big\}
\end{aligned}
$$

Les lagrangiens associés aux diagrammes de la FIGURE 6.8 sont respectivement

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\mathrm{p})} &= \ldots + \frac{1}{6F_o^2}(-\pi^-\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu K^+ + 2K^+\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^- - K^-\pi^+\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^- - K^+\pi^-\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^+ \\
&\quad +2K^-\pi^-\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^+ - K^-K^+\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+) + \{\frac{B_o\hat{m}}{2F_o^2}(1+\frac{1}{6R}) + \frac{B_o m_s}{6F_o^2}(1-\frac{1}{2R}) \\
&\quad +\frac{8}{3}e^2 Z_o\}K^-K^+\pi^+\pi^- + ieA_\mu(K^-\partial^\mu K^+ - K^+\partial^\mu K^-) + 2\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ F_oG_FV_{us}^*\partial^\mu K^+ + e\ \overline{\ell}\gamma^\mu\ell\ A_\mu \\
&= \cdots + \mathcal{L}^{\text{vertex à 4 mésons}} + ieA_\mu(K^-\partial^\mu K^+ - K^+\partial^\mu K^-) + 2\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ F_oG_FV_{us}^*\partial^\mu K^+ + e\ \overline{\ell}\gamma^\mu\ell\ A_\mu \\
\mathcal{L}^{(\mathrm{q})} &= \cdots + \mathcal{L}^{\text{vertex à 4 mésons}} + ieA_\mu(\pi^-\partial^\mu\pi^+ - \pi^+\partial^\mu\pi^-) + 2\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ F_oG_FV_{us}^*\partial^\mu K^+ + e\ \overline{\ell}\gamma^\mu\ell\ A_\mu \\
\mathcal{L}^{(\mathrm{r})} &= \cdots + \mathcal{L}^{\text{vertex à 4 mésons}} + ieA_\mu(\pi^-\partial^\mu\pi^+ - \pi^+\partial^\mu\pi^-) + 2\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ F_oG_FV_{us}^*\partial^\mu K^+ + e\ \overline{\ell}\gamma^\mu\ell\ A_\mu\ .
\end{aligned}
$$

L'élément de matrice associé au diagramme (p) est

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{p})} &= (-i)(-ie^2)\frac{G_FV_{us}^*}{12F_o}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\ v(p_\ell) \\
&\quad \left\{3(s_\pi+\nu_\pi) - \left[(k-q)^2 - M_K^2\right] - \left[(k-p_+-p_--q)^2 - M_K^2\right] + 6q\cdot Q\right\} \\
&\quad \times\frac{(\not{L}-\not{q})(\not{p}_\ell-\not{q}-m_\ell)(2\not{k}-\not{q})}{(q^2-m_\gamma^2)[(k-q)^2-M_K^2][(p_\ell-q)^2-m_\ell^2][(k-p_+-p_--q)^2-M_K^2]}
\end{aligned}
$$

Le calcul est plus compliqué que précédemment, car les expressions sont longues. Le numérateur se simplifie et devient

$$
\begin{aligned}
&\big(-2m_\ell^2 - [(p_\ell-q)^2 - m_\ell^2]\big)\ \not{q} - 2m_\ell\ \not{P}\ \not{q} + 2[(p_\ell-q)^2 - m_\ell^2]\ \not{P} + \big(4p_\ell\cdot k + [(p_\ell-q)^2 - m_\ell^2] \\
&+2[(k-q)^2 - M_K^2]\big)\ \not{L}.
\end{aligned}
$$

L'amplitude cherchée fait apparaître les intégrales D_μ et $D_{\mu\nu}$, dont les décompositions (C.54) et (C.55) sont données en appendice. Les contributions aux facteurs de forme s'écrivent ainsi

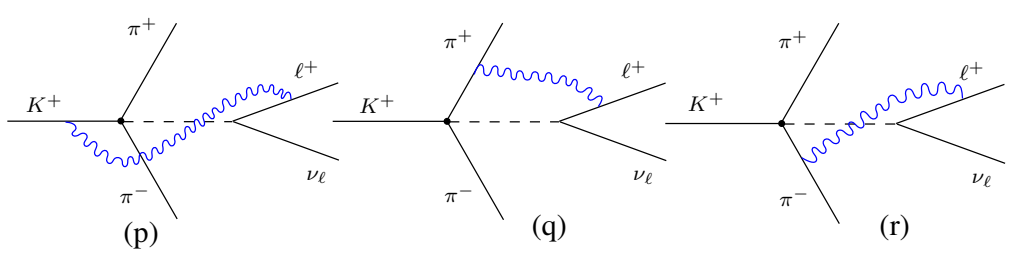


FIGURE 6.8: Les figures (p), (q) et (r) représentent les diagrammes avec un état intermédiaire (kaon), où la boucle de photon relie un des mésons chargés au lepton.

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{p})} &= \frac{e^2}{6}\Big\{6(s_\pi+\nu_\pi)C(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)-3(s_\pi+3\nu_\pi)C_1(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)\\
&-6\nu_\pi C_2(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)+6m_\ell^2(s_\pi+\nu_\pi)D_2(k,p_\ell,L;m_\gamma,M_K,m_\ell,M_K)\\
&+6m_\ell^2(s_\pi+\nu_\pi)D_3(k,p_\ell,L;m_\gamma,M_K,m_\ell,M_K)-2m_\ell^2C_1(p_\ell,L;m_\gamma,m_\ell,M_K)\\
&-2m_\ell^2C_2(p_\ell,L;m_\gamma,m_\ell,M_K)-2m_\ell^2C_2(k,p_\ell;m_\gamma,M_K,m_\ell)+3\nu_\pi C_{11}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)\\
&+3\nu_\pi C_{12}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)+6m_\ell^2(t_{2\ell}-t_{1\ell})D_{22}(k,p_\ell,L;m_\gamma,M_K,m_\ell,M_K)\\
&-6m_\ell^2\nu_\pi D_{33}(k,p_\ell,L;m_\gamma,M_K,m_\ell,M_K)-6m_\ell^2\nu_\pi D_{12}(k,p_\ell,L;m_\gamma,M_K,m_\ell,M_K)\\
&-6m_\ell^2\nu_\pi D_{13}(k,p_\ell,L;m_\gamma,M_K,m_\ell,M_K)+6m_\ell^2(t_{2\ell}-t_{1\ell}-\nu_\pi)D_{23}(k,p_\ell,L;m_\gamma,M_K,m_\ell,M_K)\\
&-2B(L;m_\gamma,M_K)-2B(k;m_\gamma,M_K)+B_1(k;m_\gamma,M_K)\Big\}\\
\delta G^{(\mathrm{p})} &= -e^2\Big\{2m_\ell^2D_{00}(k,p_\ell,L;m_\gamma,M_K,m_\ell,M_K)+C_{00}(k,L;m_\gamma,M_K,M_K)\Big\}
\end{aligned}
$$

L'élément de matrice associé au diagramme (q) est

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{q})} &= (-i)(ie^2)\frac{G_FV_{us}^*}{6F_o}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\,v(p_\ell)\\
&\Big\{3(u_\pi-M_\pi^2-M_K^2)-\big[(p_++q)^2-M_\pi^2\big]-\big[(k-p_+-p_--q)^2-M_K^2\big]\Big\}\\
&\times\frac{(\not{L}-\not{q})(\not{p}_\ell-\not{q}-m_\ell)(\not{P}+\not{Q}+q)}{(q^2-m_\gamma^2)[(p_++q)^2-M_\pi^2][(p_\ell-q)^2-m_\ell^2][(k-p_+-p_--q)^2-M_K^2]}
\end{aligned}
$$

Le numérateur de simplifie et vaut

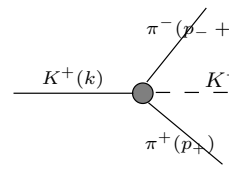
$$
-m_\ell(\not{P}+\not{Q})\,\not{q}+[(p_\ell-q)^2-m_\ell^2](\not{q}+\not{P}+\not{Q})+\big(2q^2+4p_\ell\cdot p_+-[(p_\ell-q)^2-m_\ell^2]-2[(p_++q)^2-M_\pi^2]\big)\,\not{L}.
$$

Les contributions aux facteurs de forme s'écrivent,

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{q})} &= \delta G^{(\mathrm{q})}=-\frac{e^2}{6}\Big\{3\Big(u_\pi-M_{\pi^\pm}^2-M_{K^\pm}^2\Big)\Big[2\,C(-p_+,L;m_\gamma,M_\pi,M_K)\\
&-C_1(-p_+,L;m_\gamma,M_\pi,M_K)\Big]\\
&-2m_\ell^2\Big[\,C_1(p_\ell,L;m_\gamma,m_\ell,M_K)+\,C_2(p_\ell,L;m_\gamma,m_\ell,M_K)\\
&+\,C_2(-p_+,p_\ell;m_\gamma,M_\pi,m_\ell)\Big]\\
&+6m_\ell^2\Big(u_\pi-M_{\pi^\pm}^2-M_{K^\pm}^2\Big)\Big[\,D_2(-p_+,p_\ell,L;m_\gamma,M_\pi,m_\ell,M_K)\\
&+\,D_3(-p_+,p_\ell,L;m_\gamma,M_\pi,m_\ell,M_K)\Big]\\
&+B_1(-p_+;m_\gamma,M_\pi)-2B(-p_+;m_\gamma,M_\pi)-2B(L;m_\gamma,M_K)\Big\}
\end{aligned}
$$

L'élément de matrice associé au diagramme (r) est

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{r})} &= (-i)(-e^2)G_F V_{us}^* F_o \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\, \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\rho \big[\, \not{p}_\ell - \not{q} - m_\ell \big]\gamma^\mu\, v(p_\ell) \\
&\times \Bigg\{ \quad \Bigg\} \\
&\times \frac{\big(k - p_+ - p_- - q\big)_\rho \big(2p_- + q\big)_\mu}{(q^2 - m_\gamma^2)[(p_- + q)^2 - M_{\pi^\pm}^2][(p_\ell - q)^2 - m_\ell^2][(k - p_+ - p_- - q)^2 - M_{K^\pm}^2]}
\end{aligned}
$$



Pour le vertex à quatre champs, il existe plusieurs formulations équivalentes. La meilleure formulation est celle qui ne comporte pas de terme en q^2 ainsi nous évitons l'utilisation des fonctions $C(p_1, p_2, p_3; M_1, M_2, M_3)$. La formulation qui sera utilisée pour ce vertex est la suivante

$$
\frac{i}{6F_o^2}\big\{3u_\pi - 3M_{\pi^\pm}^2 - 3s_\ell + 2[(L-q)^2 - M_{K^\pm}^2] - [(p_- + q)^2 - M_{\pi^\pm}^2] - 6p_+ \cdot q\big\}
$$

Après simplification du numérateur, nous obtenons

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi}^{(\mathrm{r})} &= (-i)(-ie^2)\frac{G_F V_{us}^*}{6F_o}\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\, v(p_\ell) \\
&\quad \big\{3(u_\pi - M_\pi^2 - s_\ell) + 2[(L-q)^2 - M_{K^\pm}^2] - [(p_- + q)^2 - M_{\pi^\pm}^2] - 6p_+ \cdot q\big\} \\
&\quad \times \frac{[(p_\ell - q)^2 - m_\ell^2]\big(\not{P} - \not{Q} + \not{q}\big) - m_\ell\big(\not{P} - \not{Q}\big)\not{q}}{(q^2 - m_\gamma^2)[(p_- + q)^2 - M_{\pi^\pm}^2][(p_\ell - q)^2 - m_\ell^2][(k - p_+ - p_- - q)^2 - M_{K^\pm}^2]}
\end{aligned}
$$

Les contributions aux facteurs de forme s'écrivent,

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{r})} &= \frac{e^2}{6}\Big\{6(u_\pi - s_\ell - M_\pi^2)C(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
&\quad -3(u_\pi - s_\ell + 3M_\pi^2 - 2s_\pi)C_1(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) - 6(M_\pi^2 + M_K^2 - s_\pi - t_\pi)C_2(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
&\quad +4m_\ell^2 C_2(-p_-, p_\ell; m_\gamma, M_\pi, m_\ell) - 2m_\ell^2\Big[C_1(p_\ell, L; m_\gamma, m_\ell, M_K) + C_2(p_\ell, L; m_\gamma, m_\ell, M_K)\Big] \\
&\quad -3(s_\pi - 2M_\pi^2)C_{11}(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) + 3(M_\pi^2 + M_K^2 - s_\pi - t_\pi)C_{12}(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
&\quad -6C_{00}(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
&\quad +6(u_\pi - s_\ell - M_\pi^2)m_\ell^2\Big[D_2(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) + D_3(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K)\Big] \\
&\quad +6m_\ell^2(s_\pi - 2M_\pi^2)\Big[D_{12}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) + D_{13}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K)\Big] \\
&\quad -6m_\ell^2(s_{1\ell} - M_\pi^2 - m_\ell^2)D_{22}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) \\
&\quad -6m_\ell^2(M_K^2 - s_\pi - t_\pi + s_{1\ell} - m_\ell^2)D_{23}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) \\
&\quad -6m_\ell^2(M_\pi^2 + M_K^2 - s_\pi - t_\pi)D_{33}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) \\
&\quad -2B_1(-p_-; m_\gamma, M_\pi) + 4B(-p_-; m_\gamma, M_\pi) - 2B(L; m_\gamma, M_K)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta G^{(\mathrm{r})} \;=\; & -\frac{e^2}{6}\Big\{6(u_\pi - s_\ell - M_\pi^2)C(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
& -3(u_\pi - s_\ell + 3M_\pi^2 - 2s_\pi)C_1(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) - 6(M_\pi^2 + M_K^2 - s_\pi - t_\pi)C_2(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
& +4m_\ell^2 C_2(-p_-, p_\ell; m_\gamma, M_\pi, m_\ell) - 2m_\ell^2\Big[C_1(p_\ell, L; m_\gamma, m_\ell, M_K) + C_2(p_\ell, L; m_\gamma, m_\ell, M_K)\Big] \\
& -3(s_\pi - 2M_\pi^2)C_{11}(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) + 3(M_\pi^2 + M_K^2 - s_\pi - t_\pi)C_{12}(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
& +6C_{00}(-p_-, L; m_\gamma, M_\pi, M_K) \\
& +6(u_\pi - s_\ell - M_\pi^2)m_\ell^2\Big[D_2(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) + D_3(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K)\Big] \\
& +6m_\ell^2(s_\pi - 2M_\pi^2)\Big[D_{12}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) + D_{13}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K)\Big] \\
& -6m_\ell^2(s_{1\ell} - M_\pi^2 - m_\ell^2)D_{22}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) \\
& -6m_\ell^2(M_K^2 - s_\pi - t_\pi + s_{1\ell} - m_\ell^2)D_{23}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) \\
& -6m_\ell^2(M_\pi^2 + M_K^2 - s_\pi - t_\pi)D_{33}(-p_-, p_\ell, L; m_\gamma, M_\pi, m_\ell, M_K) \\
& -2B_1(-p_-; m_\gamma, M_\pi) + 4B(-p_-; m_\gamma, M_\pi) - 2B(L; m_\gamma, M_K)
\end{aligned}
$$

Dans ce chapitre, nous avons traîté les diagrammes de Feynman contenant un photon virtuel, c'est-à-dire une boucle de photon. Les corrections aux facteurs de forme F et G ont été calculées pour chacune des topologies (FIGURE 6.1). Nous remarquons que les résultats comportent des divergences ultra-violettes et infra-rouges. Les divergences ultra-violettes apparaîssent sous la forme de la fonction à un point $A(M^2)$ (C.3) où

$$
\begin{aligned}
A(M^2) &= -2M^2\lambda - \mu_M \\
\mu_M &= \frac{M^2}{16\pi^2}\ln\frac{M^2}{\mu^2} \\
\lambda &= \frac{1}{16\pi^2}\Big\{\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2}\big[\ln(4\pi) + 1 - \gamma_E\big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Parmi toutes les fonctions décrites dans l'appendice D de cette thèse, seules les fonctions à deux points scalaire (C.11), vectorielle (C.17) ainsi que l'une des fonctions tensorielles de la fonction à trois points (C.31) contiennent une divergente ultra-violette. De plus pour chacune de ces fonctions la divergence est

$$
\begin{aligned}
A(M^2): &\quad -2M^2\,\lambda \\
B(p^2; M_1^2, M_2^2): &\quad -2\,\lambda \\
B_1(p^2; M_1^2, M_2^2): &\quad -\lambda \\
C_{00}(p_1, p_2, 0; M_1^2, M_2^2, m^2): &\quad -\frac{1}{2}\,\lambda.
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

Dans le chapitre 8, nous traiterons en détail ce comportement ultra-violet et nous montrerons comment ces divergences s'annulent.

Les corrections de type photon virtuel génèrent aussi des divergences infra-rouges. Les divergences infra-rouges sont dues à des petites valeurs de l'impulsion du photon et de ce fait à une masse du photon nulle, $m_\gamma = 0$. Ces divergences proviennent exclusivement des fonctions

scalaires à trois et quatre points, dans des configurations bien précises (C.24) et (C.33).
Nous verrons, dans le chapitre 10, que ces divergences peuvent être régularisées en donnant au photon une masse infinitésimale. Ces divergences peuvent apparaître lors des processus à photon virtuel et/ou lors de processus mettant en jeu des photons réels. Lorsque l'on somme ces deux contributions pour obtenir le taux de transition total, mesuré dans les expériences, les divergences infra-rouges disparaîssent et le paramètre de régularisation (m_γ) peut être mis à 0. Ce résultat est connu comme le théorème de *Kinoshita - Lee - Nauenberg* [85] et [86].

Chapitre 7

Les corrections d'interaction forte

Sommaire

7.1 Diagramme tadpole **73**

Le facteur topologique ou de symétrie 74

7.2 Diagrammes contribuants aux corrections d'unitarité **75**

Après avoir évalué tous les diagrammes à une boucle de photon contribuant aux facteurs de forme F et G, il faut à présent évaluer tous les autres diagrammes du même ordre dans la théorie des perturbations chirales. Les diagrammes avec boucle de photon, calculés avec le lagrangien à l'ordre le plus bas, sont d'ordre p^2e^2. Sachant que $e^2 \sim p^2$, nous devons considérer les diagrammes avec boucles de mésons qui sont d'ordre p^4, mais aussi les diagrammes en arbre utilisant le lagrangien d'ordre p^4 de Gasser et Leutwyler [24]. Cette dernière étape sera effectuée dans le chapitre suivant. Il s'agira de calculer les contre termes liés au processus $K_{\ell 4}$. Pour le moment, contentons-nous de calculer les diagrammes avec boucle de mésons. Il existe deux type de contributions: le diagramme tadpole et les diagrammes des corrections d'unitarité.

7.1 Diagramme tadpole

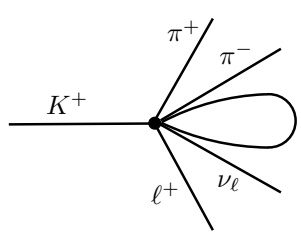


FIGURE 7.1: Diagramme tadpole

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\;& ... + \frac{G_F V_{us}^*}{F_o^3}\,(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\,\ell)\,\Big\{\frac{1}{18}\Big(7K^+\pi^-\pi^+\eta\partial^\mu\eta - 10\eta\eta\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+ \\
&+ 8\eta\eta K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- - \eta\eta K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+ - 6K^o\overline{K}^o\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+ \\
&+ 6K^o\overline{K}^o K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- + 6K^o\overline{K}^o K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+ + 6K^+\pi^-\pi^+K^o\partial^\mu\overline{K}^o \\
&+ 6K^+\pi^-\pi^+\overline{K}^o\partial^\mu K^o + 6\pi^o\pi^o K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- - 3\pi^o\pi^o K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+ \\
&+ 3K^+\pi^-\pi^+\pi^o\partial^\mu\pi^o\Big) \\
&- \frac{1}{12R}\Big(4K^+\pi^-\pi^+\eta\partial^\mu\eta - \eta\eta\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+ - \eta\eta K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- \\
&- \eta\eta K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+ + \pi^o\pi^o\pi^+\pi^-\partial^\mu K^+ + \pi^o\pi^o K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- \\
&+ \pi^o\pi^o K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+ - 4K^+\pi^-\pi^+\pi^o\partial^\mu\pi^o\Big)\Big\}
\end{aligned}
$$

Nous calculons les différentes contributions à ce diagramme. La conservation de la charge implique que le méson dans la boucle peut être n'importe quel méson de l'octet des particules pseudo-scalaires.

Les diagrammes de type tadpole font intervenir un facteur topologique (S), qui est défini comme

$$\mathrm{S} = \frac{\text{nombre de diagrammes topologiquement identiques}}{\text{nombre de schémas de Wick ammenant à cette topologie}}$$

Le facteur topologique sera normalisé à 1 lorsque toutes les particules d'une topologie sont externes. Ceci explique la présence du dénominateur dans la formule de S. On vérifie que dans le cas de la topologie avec quatre particules externes, le nombre de diagrammes topologiquement identiques est 4! et le nombre de schémas de Wick amenant à cette topologie est 4! aussi, ce qui donne bien $S = 1$.

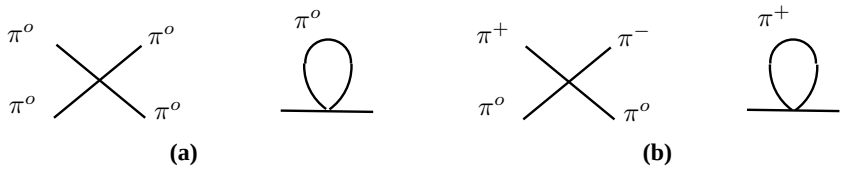


FIGURE 7.2: Exemples de diagrammes de type tadpole (T).

Dans le vertex (a) de la FIGURE 7.2, il y a quatre champs π^o. Cette particule est sa propre anti-particule. Il existera donc $4 \times 3 \times 1$ possibilités pour créer la topologie (T). Du point de vue des contractions de Wick, nous pouvons illustrer cette topologie par $\pi^o\pi^o\pi^o\pi^o\pi^o\pi^o\pi^o\pi^o$. Il existe donc $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ différents schémas de contractions de Wick pour arriver à la topologie (T).

Dans le cas du vertex (b), c'est différent. Cette fois, on distingue une particule de son anti-particule. Il existe donc moins de choix possibles pour créer la topologie (T) avec une boucle de pions chargés $\pi^{\pm}$. Il n'existe que $2 \times 1 \times 1$ possibilités. Les contractions de Wick qui créent cette topologie sont par exemple de la forme $\pi^+\pi^-\pi^o\pi^o \quad \pi^+\pi^-\pi^o\pi^o$. Il y a donc $1 \times 1 \times 2 \times 1 = 2$ schémas de contractions de Wick possibles pour reproduire le résultat (b).

Si dans la boucle de topologie (T), la particule est sa propre anti-particule, alors $S = \frac{1}{2}$, sinon $S = 1$.

Le diagramme tadpole FIGURE 7.1, défini précédemment, s'écrit donc,

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi} &= (i)\frac{G_F V_{us}^* \ \overline{u}(p_\nu)\gamma_\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell)}{6F_o^3}\Big\{-\big(k+p_+ + p_-\big)^\mu \int \frac{d^D q_{K^o}}{(2\pi)^D}\frac{-i}{{q_{K^o}}^2 - M_{K^o}^2} \\
&\Big[(-\frac{5}{3}+\frac{1}{4R})k^\mu - (\frac{4}{3}+\frac{1}{4R})p^{+\mu} + (\frac{1}{6}-\frac{1}{4R})p^{-\mu}\Big]\int \frac{d^D q_\eta}{(2\pi)^D}\frac{-i}{{q_\eta}^2 - M_\eta^2} \\
&+\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2R}k^\mu - \big(2-\frac{1}{2R}\big)p^{+\mu} + \big(1+\frac{1}{2R}\big)p^{-\mu}\Big]\int \frac{d^D q_{\pi^o}}{(2\pi)^D}\frac{-i}{{q_{\pi^o}}^2 - M_{\pi^o}^2} \\
&-2\int \frac{d^D q_{\pi^+}}{(2\pi)^D}\frac{-i\big(2p^+ - p^- + 3q_{\pi^+}\big)^\mu}{{q_{\pi^+}}^2 - M_{\pi^\pm}^2} + 2\int \frac{d^D q_{K^+}}{(2\pi)^D}\frac{-i\big(2p^- - 4p^+ - k - 5q_{K^+}\big)^\mu}{{q_{K^+}}^2 - M_{K^\pm}^2}\Big\} \\
&= (i)\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o^3}\ \overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\gamma^\mu\ v(p_\ell) \\
&\times\Big\{ \not{P}\Big[-\frac{9}{8}A(M_\eta^2) - A(M_{K^o}^2) - \frac{1}{8}A(M_{\pi^o}^2) - \frac{1}{2}A(M_{\pi^\pm}^2) - A(M_{K^\pm}^2)\Big] \\
&\quad + \not{Q}\Big[-\frac{3}{8}A(M_\eta^2) - \frac{3}{8}A(M_{\pi^o}^2) - \frac{3}{2}A(M_{\pi^\pm}^2) - \frac{3}{2}A(M_{K^\pm}^2)\Big] \\
&\quad + \not{L}\Big[(-\frac{5}{6}+\frac{1}{8R})A(M_\eta^2) - \frac{1}{2}A(M_{K^o}^2) - \frac{1}{8R}A(M_{\pi^o}^2) - \frac{1}{2}A(M_{K^\pm}^2)\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Les contributions aux facteurs de forme sont,

$$
\begin{aligned}
\delta F^T &= -\frac{1}{12F_o^2}\frac{1}{16\pi^2}\Big\{9M_\eta^2\ln(\frac{M_\eta^2}{\mu^2}) + 8M_{K^o}^2\ln(\frac{M_{K^o}^2}{\mu^2}) + M_{\pi^o}^2\ln(\frac{M_{\pi^o}^2}{\mu^2}) + 4M_{\pi^\pm}^2\ln(\frac{M_{\pi^\pm}^2}{\mu^2}) \\
&\quad +8M_{K^\pm}^2\ln(\frac{M_{K^\pm}^2}{\mu^2})\Big\} - \frac{1}{3F_o^2}\big(14M_K^2 + M_\pi^2 + 6\Delta_\pi\big)\lambda \\
\delta G^T &= -\frac{1}{4F_o^2}\frac{1}{16\pi^2}\Big\{M_\eta^2\ln(\frac{M_\eta^2}{\mu^2}) + M_{\pi^o}^2\ln(\frac{M_{\pi^o}^2}{\mu^2}) + 4M_{\pi^\pm}^2\ln(\frac{M_{\pi^\pm}^2}{\mu^2}) + 4M_{K^\pm}^2\ln(\frac{M_{K^\pm}^2}{\mu^2})\Big\} \\
&\quad -\frac{1}{6F_o^2}\{16M_K^2 + 14M_\pi^2 + 24\Delta_\pi - \frac{6}{R}(M_K^2 - M_\pi^2)\}\lambda
\end{aligned}
$$

Le terme λ correspond à la divergence ultra-violette définie dans la fonction à un point (C.4) et dont nous rappelons la formulation ci-dessous

$$
\begin{aligned}
A(M^2) &= -2M^2\lambda - \frac{M^2}{16\pi^2}\ln\frac{M^2}{\mu^2} \\
\lambda &= \frac{1}{16\pi^2}\Big\{\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2}\big[\ln(4\pi) + 1 - \gamma_E\big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Dans la suite, nous écrirons tous nos résultats en écrivant explicitement ces termes divergent ultra-violet.

7.2 Diagrammes contribuants aux corrections d'unitarité

Les diagrammes de la FIGURE 7.3 contribuent aux corrections d'unitarité. Il s'agit des diagrammes d'ordre p^4 à une boucle avec deux vertex.

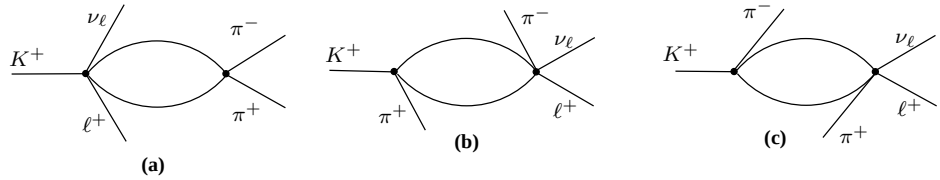


FIGURE 7.3: Diagrammes d'ordre p^4 à une boucle avec deux vertex.

Pour le **diagramme (a)** de la FIGURE 7.3, le lagrangien se décompose en deux parties,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= ... + \frac{G_F V_{us}^*}{F_o}\,(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\,\ell)\,\Big\{(1-\frac{1}{2R})\Big(\eta K^+\partial^\mu\eta - \eta\eta\partial^\mu K^+\Big) + \frac{1}{2R}\Big(K^+\pi^o\partial^\mu\pi^o - \pi^o\pi^o\partial^\mu K^+\Big)\\
&+ \frac{1}{\sqrt{3}}(1+\frac{1}{2R})\Big(K^+\pi^o\partial^\mu\eta - 2\eta\pi^o\partial^\mu K^+ + \eta K^+\partial^\mu\pi^o\Big) + \frac{1}{3}\Big(-2\overline{K}^o K^+\partial^\mu K^o + 4K^o K^+\partial^\mu\overline{K}^o\\
&- 4K^+K^+\partial^\mu K^- - 2K^o\overline{K}^o\partial^\mu K^+ + 4K^-K^+\partial^\mu K^+ - \pi^o\pi^o\partial^\mu K^+ + 2\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+ + K^+\pi^o\partial^\mu\pi^o\\
&- 4K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- + 2K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+\Big)\Big\}\\
\mathcal{L}_2 &= ... + \frac{1}{6F_o^2}\{\pi^-\pi^+\partial^\mu K^o\partial_\mu\overline{K}^o - \pi^-\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu K^+ + 2\pi^-\pi^+\partial^\mu\pi^o\partial_\mu\pi^o - 2\overline{K}^o\pi^+\partial^\mu K^o\partial_\mu\pi^-\\
&+ K^o\pi^+\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu\pi^- + 2K^+\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^- - K^-\pi^+\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^- - 2\pi^o\pi^+\partial^\mu\pi^o\partial_\mu\pi^- + \pi^+\pi^+\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^-\\
&+ \overline{K}^o\pi^-\partial^\mu K^o\partial_\mu\pi^+ - 2K^o\pi^-\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu\pi^+ - K^+\pi^-\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^+ + 2K^-\pi^-\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^+ - 2\pi^o\pi^-\partial^\mu\pi^o\partial_\mu\pi^+\\
&+ K^o\overline{K}^o\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+ - K^-K^+\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+ + 2\pi^o\pi^o\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+ - 2\pi^-\pi^+\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+ + \pi^-\pi^-\partial^\mu\pi^+\partial_\mu\pi^+\}\\
&+ \frac{1}{4\sqrt{3}RF_o^2}\Big\{-2\pi^-\pi^+\partial^\mu\eta\partial_\mu\pi^o + \pi^o\pi^+\partial^\mu\eta\partial_\mu\pi^- + \eta\pi^+\partial^\mu\pi^o\partial_\mu\pi^- + \pi^o\pi^-\partial^\mu\eta\partial_\mu\pi^+ + \eta\pi^-\partial^\mu\pi^o\partial_\mu\pi^+\\
&- 2\eta\pi^o\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+\Big\} - \frac{B_o\hat{m}}{3F_o^2}(\eta\eta\pi^-\pi^+ + \pi^o\pi^o\pi^-\pi^+ - \pi^-\pi^-\pi^+\pi^+) - \frac{B_o\hat{m}}{2F_o^2}(1-\frac{1}{6R})K^o\overline{K}^o\pi^+\pi^-\\
&+ \frac{B_o\hat{m}}{2F_o^2}(1+\frac{1}{6R})K^-K^+\pi^-\pi^+ + \frac{B_o m_s}{6F_o^2}(1-\frac{1}{2R})K^-K^+\pi^-\pi^+\\
&- \frac{1}{3\sqrt{3}F_o^2R}(B_o\hat{m} - B_o m_s)\eta\pi^o\pi^-\pi^+ - \frac{B_o m_s}{6F_o^2}(1+\frac{1}{2R})K^o\overline{K}^o\pi^-\pi^+\\
&+ \frac{e^2 Z_o}{3}\Big\{-K^o\overline{K}^o\pi^-\pi^+ + 8K^-K^+\pi^-\pi^+ - 2\pi^o\pi^o\pi^-\pi^+ + 4\pi^-\pi^-\pi^+\pi^+ + \frac{\sqrt{3}}{R}\eta\pi^o\pi^-\pi^+\Big\}.
\end{aligned}
$$

L'amplitude totale s'écrit alors,

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi} &= (-i)\frac{G_F V_{us}^*}{6F_o^3}\,\overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\,v(p_\ell)\\
&\times\Big\{M_\pi^2\big(1-\frac{1}{2R}\big)\big(2L+3P\big)_\mu\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int\frac{d^Dq_\eta}{(2\pi)^D}\frac{-i}{(q_\eta^2-M_\eta^2)[(q_\eta-p_+-p_-)^2-M_\eta^2]}\\
&-\big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2R}\big)\big(2L+3P\big)_\mu\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\int\frac{d^Dq_{\pi^o}}{(2\pi)^D}\frac{(-i)\big[2q_{\pi^o}^2-2q_{\pi^o}\cdot(p_++p_-)+2M_{\pi^\pm}^2-2s_\pi-M_\pi^2-2\Delta_\pi\big]}{(q_{\pi^o}^2-M_{\pi^o}^2)[(q_{\pi^o}-p_+-p_-)^2-M_{\pi^o}^2]}\\
&-\frac{1}{3}\int\frac{d^Dq_{K^o}}{(2\pi)^D}\frac{(-i)\big[q_{K^o}^2+2q_{K^o}\cdot(p_--2p_+)-s_\pi-M_{K^\pm}^2+\Delta_\pi-\frac{1}{R}(M_K^2-M_\pi^2)\big]}{(q_{K^o}^2-M_{K^o}^2)[(q_{K^o}-p_+-p_-)^2-M_{K^o}^2]}(L+3q_{K^o})_\mu\\
&-\frac{1}{2R}(2L+3P)_\mu\int\frac{d^Dq_{\pi^o}}{(2\pi)^D}\frac{(-i)\big[-q_{\pi^o}^2+q_{\pi^o}\cdot(p_++p_-)+s_\pi-\frac{1}{3}(5M_\pi^2-2M_K^2)\big]}{(q_{\pi^o}^2-M_{\pi^o}^2)[(q_{\pi^o}-p_+-p_-)^2-M_\eta^2]}\\
&+\frac{2}{3}\int\frac{d^Dq_{\pi^+}}{(2\pi)^D}\frac{(-i)\big[-q_{\pi^+}^2+2q_{\pi^+}\cdot(2p_--p_+)+s_\pi+M_{\pi^\pm}^2+6\Delta_\pi\big]}{(q_{\pi^+}^2-M_{\pi^\pm}^2)[(q_{\pi^+}-p_+-p_-)^2-M_{\pi^\pm}^2]}(L+3q_{\pi^+})_\mu\\
&+\frac{2}{3}\int\frac{d^Dq_{K^+}}{(2\pi)^D}\frac{(-i)\big[-q_{K^+}^2+2q_{K^+}\cdot(2p_--p_+)+s_\pi+M_{K^\pm}^2+6\Delta_\pi\big]}{(q_{K^+}^2-M_{K^\pm}^2)[(q_{K^+}-p_+-p_-)^2-M_{K^\pm}^2]}(L+3q_{K^+})_\mu\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & (-i)\frac{G_F V_{us}^*}{6F_o^3}\ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell)\ \Big\{\frac{M_\pi^2}{2}\big(1-\frac{1}{2R}\big)\big(2L+3P\big)_\mu B(p_+ + p_-; M_\eta, M_\eta) \\
& -\frac{1}{2}\big(\frac{1}{3}+\frac{1}{2R}\big)\big(2L+3P\big)_\mu\Big[2A(M_{\pi^o}^2)+(-3s_\pi+3M_{\pi^o}^2)B(p_+ + p_-; M_{\pi^o}, M_{\pi^o})\Big] \\
& -\frac{1}{3}L_\mu\Big[A(M_{K^o}^2)+\Big(-s_\pi - M_{K^\pm}^2+\Delta_\pi+M_{K^o}^2-\frac{1}{R}(M_K^2-M_\pi^2)\Big)B(p_+ + p_-; M_{K^o}, M_{K^o}) \\
& -s_\pi B_1(p_+ + p_-; M_{K^o}, M_{K^o})\Big] - P_\mu A(M_{K^o}^2)+\Big[s_\pi + M_{K^\pm}^2 - \Delta_\pi - M_{K^o}^2 \\
& +\frac{1}{R}(M_K^2-M_\pi^2)\Big]P_\mu B_1(p_+ + p_-; M_{K^o}, M_{K^o}) - 2(p_- - 2p_+)^\nu B_{\nu\mu}(p_+ + p_-; M_{K^o}, M_{K^o}) \\
& -\frac{1}{2R}(2L+3P)_\mu\Big[-\frac{1}{2}A(M_\eta^2)-\frac{1}{2}A(M_{\pi^o}^2)+\big(\frac{3}{2}s_\pi-\frac{1}{2}M_\eta^2-\frac{5}{3}M_\pi^2+\frac{2}{3}M_K^2-\frac{1}{2}M_{\pi^o}^2\big)B(p_+ + p_-; M_{\pi^o}, M_\eta)\Big] \\
& +\frac{2}{3}L_\mu\Big[-A(M_{\pi^\pm}^2)+(s_\pi+6\Delta_\pi)B(p_+ + p_-; M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm})+s_\pi B_1(p_+ + p_-; M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm})\Big] \\
& +2\Big[-A(M_{\pi^\pm}^2)P_\mu+(s_\pi+6\Delta_\pi)P_\mu B_1(p_+ + p_-; M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm})+2(2p_- - p_+)^\nu B_{\nu\mu}(p_+ + p_-; M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm})\Big] \\
& +\frac{2}{3}L_\mu\Big[-A(M_{K^\pm}^2)+(s_\pi+6\Delta_\pi)B(p_+ + p_-; M_{K^\pm}, M_{K^\pm})+s_\pi B_1(p_+ + p_-; M_{K^\pm}, M_{K^\pm})\Big] \\
& +2\Big[-A(M_{K^\pm}^2)P_\mu+(s_\pi+6\Delta_\pi)P_\mu B_1(p_+ + p_-; M_{K^\pm}, M_{K^\pm}) \\
& +2(2p_- - p_+)^\nu B_{\nu\mu}(p_+ + p_-; M_{K^\pm}, M_{K^\pm})\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

D'après la décomposition (C.19), les corrections aux facteurs de forme F et G deviennent

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(a)} \quad = \quad & \frac{1}{6F_o^2}\Big\{-2(1+\frac{3}{4R})A(M_{\pi^o}^2)+\frac{6}{4R}A(M_\eta^2)-4A(M_{\pi^\pm}^2)-4A(M_{K^\pm}^2)-2A(M_{K^o}^2) \\
& +3\big(s_\pi - M_{\pi^o}^2+\frac{3}{2R}(s_\pi - M_\pi^2)\big)B(p_+ + p_-; M_{\pi^o}, M_{\pi^o})+3M_{\pi^o}^2(1-\frac{1}{2R})B(p_+ + p_-; M_\eta, M_\eta) \\
& -\frac{3}{R}(\frac{3}{2}s_\pi - 2M_\pi^2)B(p_+ + p_-; M_\pi, M_\eta)+8(\frac{1}{2}s_\pi+3M_{\pi^\pm}^2-3M_{\pi^o}^2)B_1(p_+ + p_-; M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm}) \\
& +2s_\pi B_1(p_+ + p_-; M_{K^o}, M_{K^o})+8(\frac{1}{2}s_\pi+3M_{\pi^\pm}^2-3M_{\pi^o}^2)B_1(p_+ + p_-; M_{K^\pm}, M_{K^\pm}) \\
& +2s_\pi B_{11}(p_+ + p_-; M_{K^o}, M_{K^o})+2B_{00}(p_+ + p_-; M_{K^o}, M_{K^o})+4s_\pi B_{11}(p_+ + p_-; M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm}) \\
& +4B_{00}(p_+ + p_-; M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm})+4s_\pi B_{11}(p_+ + p_-; M_{K^\pm}, M_{K^\pm})+4B_{00}(p_+ + p_-; M_{K^\pm}, M_{K^\pm})\Big\} \\
\delta G^{(a)} \quad = \quad & \frac{1}{F_o^2}\Big\{B_{00}(p_+ + p_-; M_{K^o}, M_{K^o})-2B_{00}(p_+ + p_-; M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm})-2B_{00}(p_+ + p_-; M_{K^\pm}, M_{K^\pm})\Big\}
\end{aligned}
$$

Pour le **diagramme (b)** de la FIGURE 7.3le lagrangien se décompose en deux parties

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= ... + \frac{G_F V_{us}^*}{F_o}\ (\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\ \ell)\ \Big\{\sqrt{\frac{2}{3}}\big(-K^o\pi^+\partial^\mu\eta + 2\eta\pi^+\partial^\mu K^o - \eta K^o\partial^\mu\pi^+\big) + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{2R}\big(-K^o\pi^+\partial^\mu\eta \\
&+ \eta K^o\partial^\mu\pi^+\big) + \frac{1}{\sqrt{2}R}\pi^o\pi^+\partial^\mu K^o + \frac{2}{3}\big(\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+ - 2K^+\pi^+\partial^\mu\pi^- + K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+\big) \\
&+ \big(\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}R}\big)K^o\pi^+\partial^\mu\pi^o - \big(\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}R}\big)K^o\pi^o\partial^\mu\pi^+\Big\} \\
\mathcal{L}_2 &= ... + \frac{1}{2F_o^2}\ \Big\{\frac{1}{\sqrt{6}}\big(K^+\pi^-\partial^\mu\eta\partial_\mu\overline{K}^o + \overline{K}^o\pi^-\partial^\mu\eta\partial_\mu K^+ - 2\eta\pi^-\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu K^+ + \eta\overline{K}^o\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^- \\
&+ \eta K^+\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu\pi^- - 2\overline{K}^o K^+\partial^\mu\eta\partial_\mu\pi^-\big) + \frac{1}{4R\sqrt{2}}\big(-\sqrt{3}K^+\pi^-\partial^\mu\eta\partial_\mu\overline{K}^o + \sqrt{3}\overline{K}^o\pi^-\partial^\mu\eta\partial_\mu K^+ \\
&- \sqrt{3}\eta\overline{K}^o\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^- + \sqrt{3}\eta K^+\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu\pi^- - 2\pi^o\pi^-\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu K^+ + K^+\pi^-\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu\pi^o \\
&+ \overline{K}^o\pi^-\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^o + K^+\pi^o\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu\pi^- + \overline{K}^o\pi^o\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^- - 2\overline{K}^o K^+\partial^\mu\pi^o\partial_\mu\pi^-\big) \\
&+ \frac{1}{\sqrt{2}}\big(K^+\pi^-\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu\pi^o - \overline{K}^o\pi^-\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^o - K^+\pi^o\partial^\mu\overline{K}^o\partial_\mu\pi^- + \overline{K}^o\pi^o\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^-\big) \\
&- \frac{1}{3}\big(\pi^-\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu K^+ + K^-\pi^+\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^- + K^+\pi^-\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^+ - 2K^-\pi^-\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^+ \\
&+ K^-K^+\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+ - 2K^+\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^-\big)\ \Big\} \\
&+ \frac{B_o\hat{m}}{2F_o^2}\Big\{\frac{2}{3\sqrt{6}}\eta\overline{K}^o K^+\pi^- + \frac{1}{2\sqrt{2}R}\overline{K}^o K^+\pi^o\pi^- + (1 + \frac{1}{6R})K^-K^+\pi^-\pi^+\Big\} \\
&- \frac{B_o m_s}{2F_o^2}\Big\{\frac{2}{3\sqrt{6}}\eta\overline{K}^o K^+\pi^- + \frac{1}{2\sqrt{2}R}\overline{K}^o K^+\pi^o\pi^- - \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2R})K^-K^+\pi^-\pi^+\Big\} \\
&- \frac{1}{\sqrt{2}}e^2 Z_o\Big\{\big(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{4R}\big)\eta\overline{K}^o K^+\pi^- + \big(1 + \frac{1}{4R}\big)\overline{K}^o K^+\pi^o\pi^- - \frac{8\sqrt{2}}{3}K^-K^+\pi^-\pi^+\Big\}
\end{aligned}
$$

L'amplitude s'écrit,

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi} &= (i)\frac{G_F V_{us}^*}{2F_o^3}\ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell) \\
&\times\Big\{\int\frac{d^Dq_{\pi^o}}{(2\pi)^D}\frac{1}{2}\Big[-q_{\pi^o} - p_- + \frac{1}{4R}\Big(3q_{\pi^o} + 2p_+ - 2k - p_-\Big)\Big]_\mu\Big[q_{\pi^o}^2 - 2q_{\pi^o}\cdot k + M_{K^\pm}^2 - t_\pi \\
&-\Delta_\pi + \frac{1}{4R}\big[q_{\pi^o}^2 + 2q_{\pi^o}\cdot(k+2p_+) + 4M_\pi^2 - 3M_K^2 - t_\pi\big]\Big]\frac{(-i)}{(q_{\pi^o}^2 - M_{\pi^o}^2)[(q_{\pi^o} + p_+ - k)^2 - M_{K^o}^2]} \\
&+\int\frac{d^Dq_{\pi^-}}{(2\pi)^D}\frac{1}{9}\frac{(-i)\Big[-q_{\pi^-}^2 + 2q_{\pi^-}\cdot(p_+ + 2k) - M_{K^\pm}^2 + 2M_{\pi^\pm}^2 + t_\pi + 6\Delta_\pi\Big]\Big[-L + 3q_{\pi^-}\Big]_\mu}{(q_{\pi^-}^2 - M_{\pi^\pm}^2)[(q_{\pi^-} + p_+ - k)^2 - M_{K^\pm}^2]} \\
&+\int\frac{d^Dq_\eta}{(2\pi)^D}\frac{1}{6}\Big[q_\eta^2 + 2q_\eta\cdot(k+2p_+) + 2M_{\pi^\pm}^2 - M_{K^\pm}^2 - t_\pi - \Delta_\pi + \frac{2}{3}(M_\pi^2 - M_K^2) \\
&+\frac{3}{4R}\big[-q_\eta^2 + 2q_\eta\cdot k - M_K^2 + t_\pi\big]\Big]\times\Big[2p_+ - 2k - (1 - \frac{3}{4R})p_- + 3(1 + \frac{1}{4R})q_\eta\Big]_\mu \\
&\times\frac{-i}{(q_\eta^2 - M_\eta^2)[(q_\eta + p_+ - k)^2 - M_{K^o}^2]}\Big\}
\end{aligned}
$$

Nous développons ce résultat en faisant apparaître les contributions aux différents facteurs de forme. Nous réduisons les intégrales tensorielles en intégrales scalaires en utilisant les résultats de l'appendice. Les corrections aux facteurs de forme F et G sont

$$
\begin{aligned}
\delta F^{(\mathrm{b})} \;=\; & -\frac{1}{12F_o^2}\Big\{-6\Big[\frac{1}{2}M_{K^\pm}^2-\frac{1}{2}M_{\pi^\pm}^2-\frac{1}{2}t_\pi+M_{\pi^o}^2+\frac{1}{2R}(2M_\pi^2-t_\pi)\Big]B(k-p_+;M_{\pi^o},M_{K^o})\\
& -3\Big[M_{K^\pm}^2-M_{\pi^\pm}^2+3M_{\pi^o}^2-M_\eta^2-t_\pi+\frac{1}{4R}(-4M_K^2-5M_\pi^2+4t_\pi+M_\eta^2)\Big]B(k-p_+;M_\eta,M_{K^o})\\
& -6\Big[M_{\pi^o}^2-t_\pi+\frac{1}{2R}(-\frac{3}{2}M_K^2+\frac{1}{2}M_\pi^2-\frac{1}{2}t_\pi)\Big]B_1(k-p_+;M_{\pi^o},M_{K^o})\\
& +3\Big[-2M_{K^\pm}^2-M_\eta^2+2M_{\pi^\pm}^2+3M_{\pi^o}^2+\frac{1}{R}(\frac{1}{2}M_K^2-\frac{1}{2}M_\pi^2-M_\eta^2-\frac{1}{2}t_\pi)\Big]B_1(k-p_+;M_\eta,M_{K^o})\\
& +4(\frac{7}{2}M_{\pi^\pm}^2-\frac{1}{2}M_{K^\pm}^2-3M_{\pi^o}^2+\frac{1}{2}t_\pi)B_1(k-p_+;M_{\pi^\pm},M_{K^\pm})\\
& +6(2-\frac{5}{2R})B_{00}(k-p_+;M_{\pi^o},M_{K^o})+12(2+\frac{5}{4R})B_{00}(k-p_+;M_\eta,M_{K^o})+20B_{00}(k-p_+;M_{\pi^\pm},M_{K^\pm})\\
& +3\Big[M_{K^\pm}^2-M_{\pi^\pm}^2+t_\pi+\frac{1}{2R}(-3M_K^2+3M_\pi^2-t_\pi)\Big]B_{11}(k-p_+;M_{\pi^o},M_{K^o})\\
& +3\Big[3M_{K^\pm}^2-3M_{\pi^\pm}^2-t_\pi+\frac{1}{2R}(3M_K^2-3M_\pi^2+t_\pi)\Big]B_{11}(k-p_+;M_\eta,M_{K^o})\\
& +2(t_\pi-3M_{\pi^\pm}^2+3M_{K^\pm}^2)B_{11}(k-p_+;M_{\pi^\pm},M_{K^\pm})-6A(M_{K^o}^2)-2A(M_{K^\pm}^2)\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta G^{(\mathrm{b})} \;=\; & \frac{1}{12F_o^2}\Big\{-6\Big[\frac{1}{2}M_{K^\pm}^2-\frac{1}{2}M_{\pi^\pm}^2-\frac{1}{2}t_\pi+M_{\pi^o}^2+\frac{1}{2R}(2M_\pi^2-t_\pi)\Big]B(k-p_+;M_{\pi^o},M_{K^o})\\
& -3\Big[M_{K^\pm}^2-M_{\pi^\pm}^2+3M_{\pi^o}^2-M_\eta^2-t_\pi+\frac{1}{4R}(-4M_K^2-5M_\pi^2+4t_\pi+M_\eta^2)\Big]B(k-p_+;M_\eta,M_{K^o})\\
& -6\Big[M_{\pi^o}^2-t_\pi+\frac{1}{2R}(-\frac{3}{2}M_K^2+\frac{1}{2}M_\pi^2-\frac{1}{2}t_\pi)\Big]B_1(k-p_+;M_{\pi^o},M_{K^o})\\
& +3\Big[-2M_{K^\pm}^2-M_\eta^2+2M_{\pi^\pm}^2+3M_{\pi^o}^2+\frac{1}{R}(\frac{1}{2}M_K^2-\frac{1}{2}M_\pi^2-M_\eta^2-\frac{1}{2}t_\pi)\Big]B_1(k-p_+;M_\eta,M_{K^o})\\
& +4(\frac{7}{2}M_{\pi^\pm}^2-\frac{1}{2}M_{K^\pm}^2-3M_{\pi^o}^2+\frac{1}{2}t_\pi)B_1(k-p_+;M_{\pi^\pm},M_{K^\pm})\\
& +\frac{12}{4R}B_{00}(k-p_+;M_{\pi^o},M_{K^o})-12(1+\frac{1}{4R})B_{00}(k-p_+;M_\eta,M_{K^o})-4B_{00}(k-p_+;M_{\pi^\pm},M_{K^\pm})\\
& +3\Big[M_{K^\pm}^2-M_{\pi^\pm}^2+t_\pi+\frac{1}{2R}(-3M_K^2+3M_\pi^2-t_\pi)\Big]B_{11}(k-p_+;M_{\pi^o},M_{K^o})\\
& +3\Big[3M_{K^\pm}^2-3M_{\pi^\pm}^2-t_\pi+\frac{1}{2R}(3M_K^2-3M_\pi^2+t_\pi)\Big]B_{11}(k-p_+;M_\eta,M_{K^o})\\
& +2(t_\pi-3M_{\pi^\pm}^2+3M_{K^\pm}^2)B_{11}(k-p_+;M_{\pi^\pm},M_{K^\pm})-6A(M_{K^o}^2)-2A(M_{K^\pm}^2)\Big\}
\end{aligned}
$$

Pour le **Diagramme (c)** de la FIGURE 7.3 le lagrangien associé est

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & ...+\frac{2G_FV_{us}^*}{3F_o}\,(\overline{\nu}_{\ell_L}\gamma_\mu\,\ell)\,\Big\{\pi^-\pi^+\partial^\mu K^+-2K^+\pi^+\partial^\mu\pi^-+K^+\pi^-\partial^\mu\pi^+\Big\}\\
+ \;& \frac{1}{6F_o^2}\Big\{-\pi^-\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu K^++2K^+\pi^+\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^--K^-\pi^+\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^-\\
- \;& K^+\pi^-\partial^\mu K^-\partial_\mu\pi^++2K^-\pi^-\partial^\mu K^+\partial_\mu\pi^+-K^-K^+\partial^\mu\pi^-\partial_\mu\pi^+\Big\}\\
+ \;& \frac{1}{F_o^2}\Big\{\frac{B_o\hat{m}}{2}(1+\frac{1}{6R})+\frac{B_om_s}{6}(1-\frac{1}{2R})+\frac{8}{3}e^2F_o^2Z_o\Big\}K^-K^+\pi^-\pi^+
\end{aligned}
$$

L'amplitude s'écrit alors comme

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi} &= (-i)^2 \frac{G_F V_{us}^*}{9F_o^3}\ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell) \\
&\quad \times \int \frac{d^D q_{K^+}}{(2\pi)^D} \frac{\Big[q_{K^+}^2 - q_{K^+}\cdot(k-p_-) + M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2 - u_\pi + 3\Delta_\pi\Big]\Big(2p_+ - p_- + k\Big)_\mu}{(q_{K^+}^2 - M_{K^\pm}^2)[(q_{K^+}+p_- - k)^2 - M_{\pi^\pm}^2]} \\
&= (-i)\frac{G_F V_{us}^*}{9F_o^3}\ \overline{u}(p_\nu)\gamma^\mu(1-\gamma^5)\ v(p_\ell)\ \Big(\frac{3}{2}P + \frac{3}{2}Q + L\Big)_\mu \\
&\quad \Big\{\Big[2M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2 - u_\pi + 3\Delta_\pi\Big]B(k-p_-; M_{K^\pm}, M_{\pi^\pm}) - u_\pi B_1(u_\pi; M_{K^\pm}^2, M_{\pi^\pm}^2) + A(M_{\pi^\pm}^2)\Big\}
\end{aligned}
$$

et les contributions aux facteurs de forme F et G sont,

$$
\delta F = \delta G = \frac{1}{6F_o^2}\Big\{A(M_{\pi^\pm}^2) + A(M_{K^\pm}^2) + 3(3M_{\pi^\pm}^2 - 2M_{\pi^o}^2 + M_{K^\pm}^2 - u_\pi)B(k-p_-; M_{\pi^\pm}, M_{K^\pm})\Big\}
$$

Résumé

Dans ce chapitre, nous avons évalué les corrections aux facteurs de forme F et G provenant des diagrammes à une boucle de mésons. Ces diagrammes possèdent des divergences ultra-violettes qui sont données par les termes proportionnels à λ dans les formules. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que les facteurs de forme F et G provenant des diagrammes avec boucle de photon sont divergents ultra-violets. Ces divergences doivent s'annuler lorsque l'on considère tous les diagrammes possédant le même comptage de puissance. Pour le moment, nous ne pouvons pas vérifier cela car il faut calculer les diagrammes correspondants aux contre termes et qui sont d'ordre p^4 aussi. Cette étape sera effectuée dans le chapitre suivant.

A ce niveau, nous pouvons extraire la contribution totale des parties ultra-violettes des différents diagrammes. Les divergences ultra-violettes, qui apparaîssent dans les fonctions à un et deux points, ne dépendent pas de la région cinématique où est calculée l'intégrale. C'est la partie finie qui en dépend. La partie divergente ultra-violette est proportionnelle à un polynôme en impulsions alors que la partie finie est proportionnelle à un logarithme.

Les seules fonctions qui vont contribuer aux divergences ultra-violettes sont d'après les appendices

$$
\begin{aligned}
A(M^2): &\quad -2M^2\ \lambda \\
B(p^2; M_1^2, M_2^2): &\quad -2\ \lambda \\
B_1(p^2; M_1^2, M_2^2): &\quad -\lambda \\
C_{00}(p_1, p_2, 0; M_1^2, M_2^2, m^2): &\quad -\frac{1}{2}\ \lambda
\end{aligned}
\tag{7.1}
$$

Les divergences ultra-violettes des facteurs de forme F et G peuvent se mettre sous la forme

$$
X_{\text{uv}} = X_{\text{uv}}{}^{\text{boucle de photon}} + X_{\text{uv}}{}^{\text{boucle de méson}} \qquad \text{avec} \quad X = F, G.
$$

En conclusion, nous trouvons que les divergences ultra-violettes pour F et G sont

$$
F_{\text{uv}} = 5e^2\lambda - \frac{\lambda}{2F_o^2}\Big[7s_\pi - 2t_\pi - 2u_\pi + 6M_K^2 + 2M_\pi^2 + 2\Delta_\pi - \frac{3}{R}(M_K^2 - M_\pi^2)\Big] \tag{7.2}
$$

$$
G_{\text{uv}} = 5e^2\lambda - \frac{\lambda}{2F_o^2}\Big[s_\pi + 4t_\pi - 2u_\pi + 10\Delta_\pi\Big] \tag{7.3}
$$

Chapitre 8

Les divergences ultra-violettes

Sommaire

8.1 Calcul des contre termes 81

1.1 Contributions aux facteurs de forme F, G et R 84

Ordre p^4 84

Ordre e^2p^2 84

Contributions leptoniques 84

8.2 Renormalisation 85

2.1 Renormalisation du champ et de la masse 85

2.2 Masse et renormalisation du pion chargé 87

2.3 Masse et renormalisation du kaon chargé 91

2.4 Masse et renormalisation du lepton 95

8.3 Contre termes et renormalisation des champs 96

3.1 Annulation des divergences ultra-violettes 97

8.1 Calcul des contre termes

Nous utiliserons un lagrangien effectif à l'ordre p^4. Il faut tout d'abord construire un lagrangien dont la transformation de jauge chirale reproduit l'anomalie . Ce lagrangien a été construit par Wess et Zumino [64]. On calcule les graphes d'ordre p^4 associés au lagrangien $\mathcal{L}_2$ (2.15). On détermine ensuite le lagrangien effectif le plus général invariant de jauge d'ordre p^4, noté $\mathcal{L}_4$ [24]. Ce lagrangien à l'ordre le plus bas (en arbre) nous fournira les diagrammes de contre termes qui renormalisent les divergences rencontrées dans les graphes à une boucle associés à $\mathcal{L}_2$.

Nous voulons renormaliser les divergences des graphes à une boucle que nous avons calculés précédemment. En l'absence de photons virtuels et de leptons, le lagrangien à l'ordre p^4 est celui généré par Gasser et Leutwyler [24] avec les sources externes généralisées l_μ et r_μ définies dans (2.7) et (2.8) et u_μ définie dans (2.13):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p^4} \quad = \quad & L_1\langle u_\mu u^\mu\rangle^2 + L_2\langle u_\mu u^\nu\rangle\langle u^\mu u_\nu\rangle + L_3\langle u_\mu u^\mu u_\nu u^\nu\rangle + L_4\langle u_\mu u^\mu\rangle\langle\chi_+\rangle + L_5\langle u_\mu u^\mu \chi_+\rangle \\
& + L_6\langle\chi_+\rangle^2 + L_7\langle\chi_-\rangle^2 + \frac{1}{4}(2L_8 + L_{12})\langle\chi_+^2\rangle + \frac{1}{4}(2L_8 - L_{12})\langle\chi_-^2\rangle - iL_9\langle f_+{}^{\mu\nu} u_\mu u_\nu\rangle \\
& + \frac{1}{4}(L_{10} + 2L_{11})\langle f_{+\mu\nu} f_+{}^{\mu\nu}\rangle - \frac{1}{4}(L_{10} - 2L_{11})\langle f_{-\mu\nu} f_-{}^{\mu\nu}\rangle
\end{aligned}$$

avec

$$
\begin{aligned}
\chi_\pm &= u^\dagger \chi u^\dagger \pm u \chi^\dagger u, \\
\chi &= 2B_o M, \quad (B_o \text{ est défini dans } (\mathbf{??})) \\
{f_\pm}^{\mu\nu} &= u F_L^{\mu\nu} u^\dagger \pm u^\dagger F_R^{\mu\nu} u, \\
F_L^{\mu\nu} &= \partial^\mu \ell^\nu - \partial^\nu \ell^\mu - i[\ell^\mu, \ell^\nu], \qquad (8.1) \\
F_R^{\mu\nu} &= \partial^\mu r^\nu - \partial^\nu r^\mu - i[r^\mu, r^\nu], \qquad (8.2)
\end{aligned}
$$

Pour le calcul des contre termes nécessaires à $K_{\ell 4}$ d'ordre p^4, nous n'avons pas besoin de la présence du photon. Ainsi, les formules (2.7), (2.8), (8.1) et (8.2) deviennent simplement

$$
\begin{aligned}
l_\mu &= \sum_\ell \overline{\nu_{\ell_L}} \gamma_\mu \ell Q_L^{\mathrm{w}^\dagger}, \qquad (8.3) \\
r_\mu &= 0 \qquad (8.4) \\
F_L^{\mu\nu} &= \partial^\mu \ell^\nu - \partial^\nu \ell^\mu - i \underbrace{[\ell^\mu, \ell^\nu]}_{\text{ne contribue pas au processus} K_{\ell 4}}, \\
F_R^{\mu\nu} &= 0,
\end{aligned}
$$

Si le photon est considéré comme un degré de liberté, il faut rajouter au lagrangien p^4 un lagrangien e^2p^2 [33, 87, 88], où ${\mathcal{Q}_{L,R}}^{\mathrm{em}}$ et les matrices $Q_{L,R}^{\mathrm{em}}$ sont définis dans (2.9) et (2.10):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{e^2p^2} = \; & e^2 F_o^2 \Big\{ \frac{1}{2} K_1 \langle ({\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}})^2 + ({\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}})^2 \rangle \langle u_\mu u^\mu \rangle + K_2 \langle {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} \rangle \langle u_\mu u^\mu \rangle \\
& + K_3 \Big[\langle {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} u_\mu \rangle \langle {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} u^\mu \rangle + \langle {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} u_\mu \rangle \langle {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} u^\mu \rangle \Big] + K_4 \langle {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} u_\mu \rangle \langle {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} u^\mu \rangle \\
& + K_5 \langle \Big[({\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}})^2 + ({\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}})^2 \Big] u_\mu u^\mu \rangle + K_6 \langle \big({\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} + {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} \big) u_\mu u^\mu \rangle \\
& + \frac{1}{2} K_7 \langle ({\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}})^2 + ({\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}})^2 \rangle \langle \chi_+ \rangle + K_8 \langle {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} \rangle \langle \chi_+ \rangle \\
& + K_9 \langle \Big[({\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}})^2 + ({\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}})^2 \Big] \chi_+ \rangle + K_{10} \langle \big({\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} + {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} \big) \chi_+ \rangle \\
& - K_{11} \langle \big({\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} - {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} \big) \chi_- \rangle - i K_{12} \langle \Big[\big(\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} \big) {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} - {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} \widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} \\
& - \big(\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} \big) {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} + {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} \widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} \Big] u^\mu \rangle \\
& + K_{13} \langle \big(\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} \big) \big(\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} \big) \rangle + K_{14} \langle \big(\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} \big) \big(\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} \big) + \big(\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} \big) \big(\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} \big) \rangle \Big\}
\end{aligned}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} &= \nabla_\mu {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}} + \frac{i}{2} [u_\mu, {\mathcal{Q}_L}^{\mathrm{em}}] \\
\widehat{\nabla}_\mu {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} &= \nabla_\mu {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}} - \frac{i}{2} [u_\mu, {\mathcal{Q}_R}^{\mathrm{em}}]
\end{aligned}
$$

La présence de leptons virtuels dans (8.3) nécessite un lagrangien leptonique [62] où nous ne considérons que les termes quadratiques dans les champs des leptons et au plus linéaires par rapport à la constante de Fermi G_F :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{leptonique}} &= e^2 \sum_{\ell} \Big\{ F_o^2 \Big[X_1 \overline{\ell} \gamma_\mu \nu_{\ell L} \langle u^\mu \{ \mathcal{Q}_R{}^{\text{em}}, \mathcal{Q}_L{}^{\text{w}} \} \rangle + X_2 \overline{\ell} \gamma_\mu \nu_{\ell L} \langle u^\mu [\mathcal{Q}_R{}^{\text{em}}, \mathcal{Q}_L{}^{\text{w}}] \rangle \\
&\quad + X_3 m_\ell \overline{\ell} \nu_{\ell L} \langle \mathcal{Q}_L{}^{\text{w}} \mathcal{Q}_R{}^{\text{em}} \rangle + i X_4 \overline{\ell} \gamma_\mu \nu_{\ell L} \langle \mathcal{Q}_L{}^{\text{w}} \widehat{\nabla}^\mu \mathcal{Q}_L{}^{\text{em}} \rangle \\
&\quad + i X_5 \overline{\ell} \gamma_\mu \nu_{\ell L} \langle \mathcal{Q}_L{}^{\text{w}} \widehat{\nabla}^\mu \mathcal{Q}_R{}^{\text{em}} \rangle + h.c. \Big] + X_6 \overline{\ell} (i \not{\partial} + e \not{A}) \ell + X_7 m_\ell \overline{\ell} \ell \Big\},
\end{aligned}
$$

où $h.c.$ est le terme hermitique conjugué. Les constante de couplage de basse énergie L_i, K_i et X_i sont des quantités divergentes, sauf $L_3, L_7, K_7, K_{13}, K_{14}$ et X_1. Ces quantités absorbent les divergences ultra-violettes provenant des graphes à une boucle via la renormalisation

$$
\begin{aligned}
L_i(\mu) &= L_i^r(\mu) + \Gamma_i \lambda, \qquad i = 1, ..., 12 \\
K_i(\mu) &= K_i^r(\mu) + \Sigma_i \lambda, \qquad i = 1, ..., 14 \\
X_i(\mu) &= X_i^r(\mu) + \Xi_i \lambda, \qquad i = 1, ..., 8
\end{aligned}
$$

$$
\text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{16\pi^2} \Big[\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2} \big[\ln(4\pi) + 1 - \gamma_E \big] \Big]. \tag{8.5}
$$

Les coefficients Γ_i et Σ_i ont été déterminés par Gasser et Leutwyler [24] et Urech [33] respectivement. Les coefficient Ξ_i ont été trouvés par Knecht et al. [62]. Les constantes de couplage de basse énergie dépendent u'une échelle de soustraction μ. Dans ce travail de thèse, l'échelle est prise à la masse du ρ: μ=770 MeV.

$$
\begin{array}{llllll}
\Gamma_1 = \frac{3}{32} & \Gamma_2 = \frac{3}{16} & \Gamma_3 = 0 & \Gamma_4 = \frac{1}{8} & \Gamma_5 = \frac{3}{8} & \Gamma_6 = \frac{11}{144} \\
\Gamma_7 = 0 & \Gamma_8 = \frac{5}{48} & \Gamma_9 = \frac{1}{4} & \Gamma_{10} = -\frac{1}{4} & \Gamma_{11} = -\frac{1}{8} & \Gamma_{12} = \frac{5}{24} \\
 & & & & & \\
\Sigma_1 = \frac{3}{4} & \Sigma_2 = Z_o & \Sigma_3 = -\frac{3}{4} & \Sigma_4 = 2Z_o & \Sigma_5 = -\frac{9}{4} & \Sigma_6 = \frac{3}{2} Z_o \\
\Sigma_7 = 0 & \Sigma_8 = Z_o & \Sigma_9 = -\frac{1}{4} & \Sigma_{10} = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} Z_o & \Sigma_{11} = \frac{1}{8} & \Sigma_{12} = \frac{1}{4} \\
\Sigma_{13} = 0 & \Sigma_{14} = 0 & & & & \\
 & & & & & \\
\Xi_1 = 0 & \Xi_2 = -\frac{3}{4} & \Xi_3 = -3 & \Xi_4 = -\frac{3}{2} & \Xi_5 = \frac{3}{2} & \Xi_6 = -5 \\
\Xi_7 = -1 & \Xi_8 = -\frac{4}{3} & & & &
\end{array} \tag{8.6}
$$

Meiner, Müller et Steininger [89] ont donné les valeurs correctes des constantes $\Sigma_{15,16,17}$.

1.1 Contributions aux facteurs de forme F, G et R

Ordre p^4

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi} &= i\frac{G_F V_{us}^*}{F_o^3}\times\Big\{(\overline{\nu}_{\ell_L}\ \not{P}\ \ell)\Big[-32(s_\pi-2M_{\pi^\pm}^2)L_1-8(2M_{K^\pm}^2+2M_{\pi^\pm}^2-u_\pi-t_\pi)L_2 \\
&\qquad -4(2s_\pi-t_\pi-3M_{\pi^\pm}^2+M_{K^\pm}^2)L_3+\frac{32}{3}(-\frac{15}{4}M_\pi^2-\frac{3}{2}M_K^2)L_4 \\
&\qquad +\frac{4}{3}(-3M_{K^\pm}^2-6M_\pi^2+3\Delta_\pi)L_5-2s_\ell L_9\Big] \\
&\quad +(\overline{\nu}_{\ell_L}\ \not{Q}\ \ell)\Big[-8(t_\pi-u_\pi)L_2+4(M_{K^\pm}^2+M_{\pi^\pm}^2-t_\pi)L_3-8(M_\pi^2+2M_K^2)L_4 \\
&\qquad +4(-M_{K^\pm}^2-2M_\pi^2+\Delta_\pi)L_5-2s_\ell L_9\Big] \\
&\quad +(\overline{\nu}_{\ell_L}\ \not{L}\ \ell)\Big[-32(s_\pi-2M_{\pi^\pm}^2)L_1-8(s_\pi-2M_{\pi^\pm}^2)L_3-\frac{16}{3}(7M_\pi^2+2M_K^2)L_4 \\
&\qquad -\frac{4}{3}(4M_{K^\pm}^2+6M_\pi^2-4\Delta_\pi)L_5+2(M_{K^\pm}^2+M_{\pi^\pm}^2-t_\pi-s_\pi)L_9\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

Ordre e^2p^2

$$
\begin{aligned}
-i\mathcal{M}_{fi} &= ie^2\frac{G_F V_{us}^*}{F_o}\times\Big\{(\overline{\nu}_{\ell_L}\ \not{P}\ \ell)\frac{2}{9}\Big[-12K_1-84K_2-19K_5-37K_6-9K_{12}\Big] \\
&\quad +(\overline{\nu}_{\ell_L}\ \not{Q}\ \ell)\frac{2}{9}\Big[-12K_1-12K_2-36K_3-18K_4-7K_5-25K_6-9K_{12}\Big] \\
&\quad +(\overline{\nu}_{\ell_L}\ \not{L}\ \ell)\frac{4}{27}\Big[-12K_1-120K_2-19K_5-73K_6-9K_{12}\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

Contributions leptoniques

$$
-i\mathcal{M}_{fi} = ie^2\frac{G_F V_{us}^*}{6F_o}\times\Big\{(\overline{\nu}_{\ell_L}\ \not{P}\ \ell)20X_1-(\overline{\nu}_{\ell_L}\ \not{Q}\ \ell)4X_1+(\overline{\nu}_{\ell_L}\ \not{L}\ \ell)8(\frac{5}{3}X_1+2X_2-2X_3)\Big\}
$$

Finalement, la somme de ces contributions pour les différents facteurs de forme est

$$
\begin{aligned}
\delta F &= \frac{2}{F_o^2}\Big\{16(s_\pi-2M_{\pi^\pm}^2)L_1+4(s_\pi-s_\ell+M_{K^\pm}^2)L_2+2(2s_\pi-t_\pi-3M_{\pi^\pm}^2+M_{K^\pm}^2)L_3 \\
&\quad +4(2M_K^2+5M_\pi^2)L_4+2(M_{K^\pm}^2+2M_\pi^2-\Delta_\pi)L_5+s_\ell L_9+\frac{e^2F_o^2}{9}(12K_1+84K_2+19K_5 \\
&\quad +37K_6+9K_{12})-e^2F_o^2\frac{10}{3}X_1\Big\} \\
\delta G &= \frac{2}{F_o^2}\Big\{4(t_\pi-u_\pi)L_2-2(M_{K^\pm}^2+M_{\pi^\pm}^2-t_\pi)L_3+4(M_\pi^2+2M_K^2)L_4 \\
&\quad +2(M_{K^\pm}^2+2M_\pi^2-\Delta_\pi)L_5+s_\ell L_9+\frac{e^2F_o^2}{9}(12K_1+12K_2+36K_3+18K_4+7K_5 \\
&\quad +25K_6+9K_{12})+e^2F_o^2\frac{2}{3}X_1\Big\} \\
\delta R &= \frac{4}{F_o^2}\Big\{16(s_\pi-2M_{\pi^\pm}^2)L_1+4(s_\pi-2M_{\pi^\pm}^2)L_3+\frac{8}{3}(7M_\pi^2+2M_K^2)L_4 \\
&\quad +\frac{2}{3}(4M_{K^\pm}^2+6M_\pi^2-4\Delta_\pi)L_5-(M_{K^\pm}^2+M_{\pi^\pm}^2-t_\pi-s_\pi)L_9+\frac{2e^2F_o^2}{27}(12K_1 \\
&\quad +120K_2+19K_5+73K_6+9K_{12})-\frac{4}{9}e^2F_o^2(5X_1+6X_2-6X_3)\Big\}.
\end{aligned}
$$

On utilise la renormalisation des constantes de couplage de basse énergie (8.6) et nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\delta F &= \frac{2}{F_o^2}\Big\{16(s_\pi - 2M_{\pi^\pm}^2)L_1^r + 4(s_\pi - s_\ell + M_{K^\pm}^2)L_2^r + 2(2s_\pi - t_\pi - 3M_{\pi^\pm}^2 + M_{K^\pm}^2)L_3^r \\
&\quad +4(2M_K^2 + 5M_\pi^2)L_4^r + 2(M_{K^\pm}^2 + 2M_\pi^2 - \Delta_\pi)L_5^r + s_\ell L_9^r + \frac{e^2F_o^2}{9}(12K_1^r + 84K_2^r + 19K_5^r \\
&\quad +37K_6^r + 9K_{12}^r) - e^2F_o^2\frac{10}{3}X_1^r\Big\} \\
&\quad +\frac{1}{2F_o^2}\Big\{6s_\pi - 3(u_\pi + t_\pi) + s_\ell + 10M_{\pi^\pm}^2 + 13M_{K^\pm}^2 + 8\Delta_\pi + \frac{2}{R}(M_K^2 - M_\pi^2) - 14e^2F_o^2\Big\}\lambda \\
\delta G &= \frac{2}{F_o^2}\Big\{4(t_\pi - u_\pi)L_2^r - 2(M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2 - t_\pi)L_3^r + 4(M_\pi^2 + 2M_K^2)L_4^r + 2(M_{K^\pm}^2 + 2M_\pi^2 - \Delta_\pi)L_5^r \\
&\quad +s_\ell L_9^r + \frac{e^2F_o^2}{9}(12K_1^r + 12K_2^r + 36K_3^r + 18K_4^r + 7K_5^r + 25K_6^r + 9K_{12}^r) + e^2F_o^2\frac{2}{3}X_1^r\Big\} \\
&\quad +\frac{1}{2F_o^2}\Big\{3(t_\pi - u_\pi) + s_\ell + 4M_{\pi^\pm}^2 + 7M_{K^\pm}^2 + 4\Delta_\pi + \frac{2}{R}(M_K^2 - M_\pi^2) - 14e^2F_o^2\Big\}\lambda \\
\delta R &= \frac{4}{F_o^2}\Big\{16(s_\pi - 2M_{\pi^\pm}^2)L_1^r + 4(s_\pi - 2M_{\pi^\pm}^2)L_3^r + \frac{8}{3}(7M_\pi^2 + 2M_K^2)L_4^r + \frac{2}{3}(4M_{K^\pm}^2 + 6M_\pi^2 - 4\Delta_\pi)L_5^r \\
&\quad -(M_{K^\pm}^2 + M_{\pi^\pm}^2 - t_\pi - s_\pi)L_9^r + \frac{2e^2F_o^2}{27}(12K_1^r + 120K_2^r + 19K_5^r + 73K_6^r + 9K_{12}^r) \\
&\quad -\frac{4}{9}e^2F_o^2(5X_1^r + 6X_2^r - 6X_3^r)\Big\} + \frac{1}{3F_o^2}\Big\{21s_\pi + 3t_\pi + 7M_{\pi^\pm}^2 + 17M_{K^\pm}^2 + 36\Delta_\pi \\
&\quad +\frac{4}{R}(M_K^2 - M_\pi^2) - 100e^2F_o^2\Big\}\lambda.
\end{aligned}
$$

Ce résultat n'est pas complet. Il faut considérer les contributions provenant de la renormalisation des champs mésonique et leptonique, c'est-à-dire qu'il faut connaître les constantes de renormalisation des champs qui sont des fonctions des L_i, K_i et X_i. Ceci est le but de la section suivante.

8.2 Renormalisation

2.1 Renormalisation du champ et de la masse

Le propagateur libre du méson est défini comme la fonction

$$
g(p^2) = \frac{i}{p^2 - M^{2[0]}} \,. \tag{8.7}
$$

Ce propagateur possède un pôle en $p^2 = M^{2[0]}$. Nous voulons connaître le propagateur complet du méson dont un schéma diagrammatique est donné dans la FIGURE 8.1.

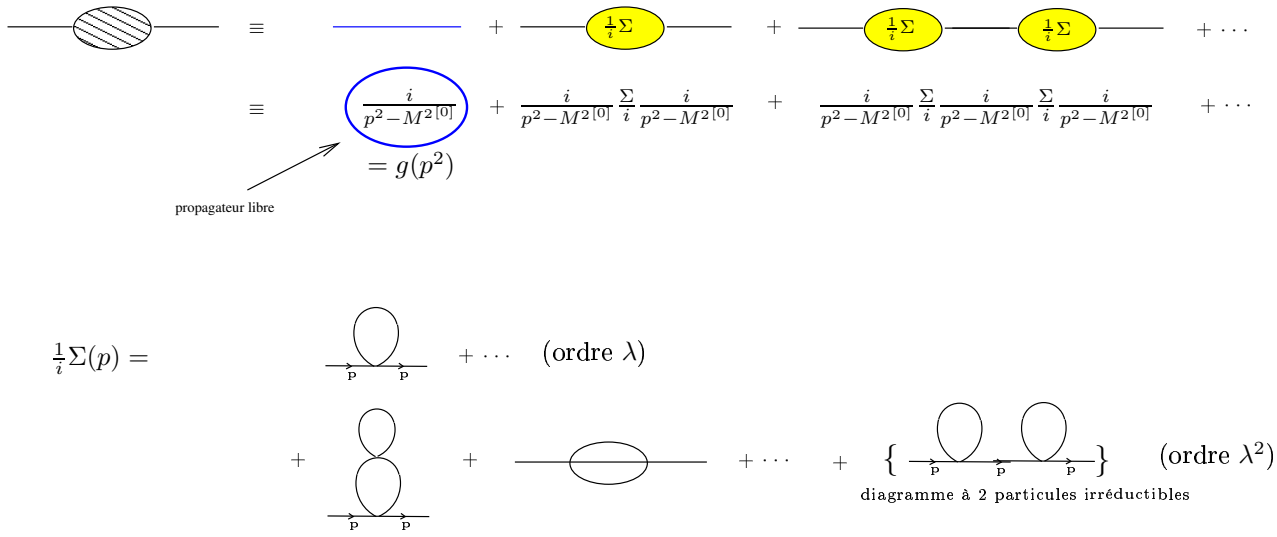


FIGURE 8.1: Schéma diagrammatique montrant le propagateur complet d'un champ de méson. Le terme Σ est l'énergie propre du méson.

Le propagateur complet s'écrit alors

$$\begin{aligned} G(p^2) &= g(p^2) + g(p^2)\frac{\Sigma(p^2)}{i}g(p^2) + g(p^2)\frac{\Sigma(p^2)}{i}g(p^2)\frac{\Sigma(p^2)}{i}g(p^2) + \cdots \\ &= g(p^2)\big[1 + \frac{\Sigma(p^2)}{i}\big(g(p^2) + g(p^2)\frac{\Sigma(p^2)}{i}g(p^2) + g(p^2)\frac{\Sigma(p^2)}{i}g(p^2)\frac{\Sigma(p^2)}{i}g(p^2) + \cdots\big)\big] \\ &= g(p^2) + g(p^2)\frac{\Sigma(p^2)}{i}G(p^2)\ . \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$G^{-1}(p^2) = g^{-1}(p^2) - \frac{\Sigma(p^2)}{i}\ . \tag{8.8}$$

Ainsi, d'après (8.7), nous trouvons

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - M^{2[0]} - \Sigma(p^2)}$$

La masse est définie, en théorie quantique des champs, comme étant la position du pôle dans la fonction de corrélation à deux points. Ainsi, la position du pôle est donnée par la masse physique

$$M^2 = M^{2[0]} + \Sigma(p^2)|_{p^2=M^2}\ . \tag{8.9}$$

Le résidu du pôle dans la fonction de corrélation s'identifie à la normalisation du champ. On développe la fonction $\Sigma(p^2)$ autour du pôle $p^2 = M^2$.

$$\Sigma(p^2) = \Sigma(M^2) + (p^2 - M^2)\frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2} + \frac{1}{2}(p^2 - M^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2} + \cdots\ .$$

Alors, le propagateur (8.8) devient

$$
\begin{aligned}
G(p^2) &= \frac{i}{p^2 - M^{2[0]} - \left[\Sigma(M^2) + (p^2 - M^2)\frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2} + \frac{1}{2}(p^2 - M^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2} + \cdots\right]} \\
&\quad \text{et d'après la relation (8.9)} \\
&= \frac{i}{p^2 - M^2 - (p^2 - M^2)\frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2} - \frac{1}{2}(p^2 - M^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2} - \cdots\Big]} \\
&= \frac{i}{(p^2 - M^2)\left[1 - \frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2}\right] - \frac{1}{2}(p^2 - M^2)^2\frac{d^2}{d(p^2)^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2} - \cdots}
\end{aligned}
$$

Sachant que

$$
\int d^4x\ e^{ip\cdot x} < 0|T\{\Phi(x)\Phi^\dagger(0)\}|0 >= \sqrt{Z}\sqrt{Z}\frac{i}{p^2 - M^2}\ ,
$$

nous obtenons que la constante de renormalisation du champ scalaire est le résidu du pôle en M^2. Nous obtenons

$$
\begin{aligned}
Z^{-1} &= 1 - \frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2}\ , \\
Z &= 1 + \frac{d}{dp^2}\Sigma(p^2)|_{p^2=M^2}\ .
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

Lors des calculs des diagrammes de Feynmann, nous prendrons le pôle du propagateur sur la masse physique définie par (8.9). Le résultat du diagramme sera à multiplier par un facteur $\sqrt{Z}$ (8.10) autant de fois que de pattes externes mésoniques.

2.2 Masse et renormalisation du pion chargé

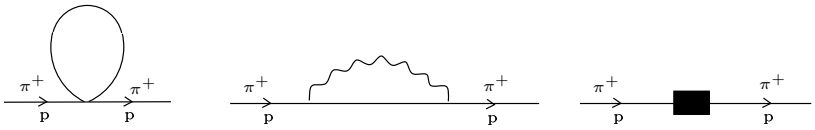
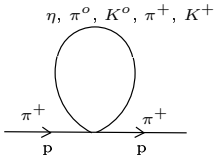


FIGURE 8.2: Liste des diagrammes nécessaires au calcul de la renormalisation de la masse et du champ du pion chargé. Ces diagrammes sont le diagramme tadpole, l'énergie propre du pion et les diagrammes de contre termes.

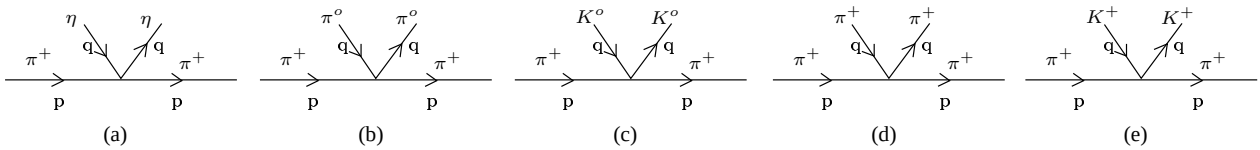
La conservation de la charge électrique et de la charge d'étrangeté n'autorise qu'un certain nombre de possibilités pour le diagramme tadpole. La figure ci-dessous montre les diagrammes autorisés que nous avons à évaluer.



Le lagrangien associé à cette topologie est

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(p^2)} &= ... + \frac{1}{6F_o^2}\Big\{\pi^-\pi^+\partial^\mu K^o\partial^\mu\overline{K}^o \;-\; 2\,\overline{K}^o\pi^+\partial^\mu K^o\partial^\mu\pi^- + K^o\pi^+\partial^\mu\overline{K}^o\partial^\mu\pi^- + \overline{K}^o\pi^-\partial^\mu K^o\partial^\mu\pi^+ \\
&- 2K^o\pi^-\partial^\mu\overline{K}^o\partial^\mu\pi^+ + K^o\overline{K}^o\partial^\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ - \pi^-\pi^+\partial^\mu K^-\partial^\mu K^+ + 2K^+\pi^+\partial^\mu K^-\partial^\mu\pi^- - K^-\pi^+\partial^\mu K^+\partial^\mu\pi^- \\
&- K^+\pi^-\partial^\mu K^-\partial^\mu\pi^+ + 2K^-\pi^-\partial^\mu K^+\partial^\mu\pi^+ - K^-K^+\partial^\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ + 2\pi^-\pi^+\partial^\mu\pi^o\partial^\mu\pi^o - 2\pi^o\pi^-\partial^\mu\pi^o\partial^\mu\pi^- \\
&- 2\pi^o\pi^-\partial^\mu\pi^o\partial^\mu\pi^+ + 2\pi^o\pi^o\partial^\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ + \pi^+\pi^+\partial^\mu\pi^-\partial^\mu\pi^- - 2\pi^-\pi^+\partial^\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+ + \pi^-\pi^-\partial^\mu\pi^+\partial^\mu\pi^+ \\
&- 2B_o\hat{m}\eta\eta\pi^-\pi^+ - [B_o(3\hat{m}+m_s) - \frac{B_o}{2R}(\hat{m}-m_s) + 2e^2F_o^2Z_o]\;K^o\overline{K}^o\pi^-\pi^+ \\
&+ [B_o(3\hat{m}+m_s) \;+\; \frac{B_o}{2R}(\hat{m}-m_s) + 16e^2F_o^2Z_o]\;K^-K^+\pi^-\pi^+ \\
&- [2B_o\hat{m} \;+\; 4e^2F_o^2Z_o]\;\pi^o\pi^o\pi^-\pi^+ + [2B_o\hat{m} \;+\; 8e^2F_o^2Z_o]\;\pi^-\pi^+\pi^-\pi^+\Big\}
\end{aligned}
$$

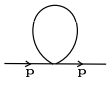
Les cinq vertex contribuant à l'énergie propre du pion chargé sont dessinés ci-dessous



et leur valeur est donnée respectivement par

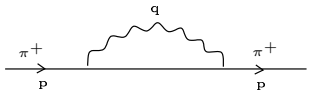
$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}^{(a)} &= \frac{2iB_o\hat{m}}{3F_o^2}, \\
\mathcal{V}^{(b)} &= \frac{i}{3F_o^2}[2B_o\hat{m} \;+\; 4e^2F_o^2Z_o - 2(q^2+p^2)], \\
\mathcal{V}^{(c)} &= \frac{i}{6F_o^2}[B_o(3\hat{m}+m_s) - \frac{B_o}{2R}(\hat{m}-m_s) + 2e^2F_o^2Z_o - p^2 - q^2 + 6p.q], \\
\mathcal{V}^{(d)} &= \frac{i}{6F_o^2}[B_o(3\hat{m}+m_s) + \frac{B_o}{2R}(\hat{m}-m_s) + 16e^2F_o^2Z_o - p^2 - q^2 - 6p.q], \\
\mathcal{V}^{(e)} &= \frac{i}{3F_o^2}[4B_o\hat{m} + 16e^2F_o^2Z_o - p^2 - q^2 - 6p.q].
\end{aligned}
$$

Le facteur topologique intervient dans les diagrammes avec une boucle de méson neutre (η, π^o et K^o). Ainsi, le diagramme à l'ordre p^2 contribuant à l'énergie propre du pion chargé est



$$
\begin{aligned}
&= \frac{ip^2}{6F_o^2}\left[2A(M_{\pi^o}^2) + A(M_{K^o}^2) + A(M_{K^\pm}^2) + 2A(M_{\pi^\pm}^2)\right] - \frac{iM_{\pi^o}^2}{6F_o^2}\left[A(M_\eta^2)\right. \\
&\left. -A(M_{\pi^o}^2) + A(M_{K^o}^2) + A(M_{K^\pm}^2) + 2A(M_{\pi^\pm}^2)\right] - \frac{ie^2Z_o}{3}\left[2A(M_{\pi^o}^2)\right. \\
&\left. +A(M_{K^o}^2) + 7A(M_{K^\pm}^2) + 14A(M_{\pi^\pm}^2)\right]\;.
\end{aligned}
$$

Nous avons à évaluer le diagramme de l'énergie propre du pion chargé donné par le schéma suivant



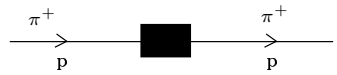
et dont le lagrangien se réduit à

$$\mathcal{L}^{(p^2)} = ... + \big\{ - ie\pi^+\partial^\mu\pi^- + ie\pi^-\partial^\mu\pi^+\big\}.$$

L'évaluation de ce diagramme donne le résultat

$$-ie^2\big\{2(p^2+M^2_{\pi^\pm})B(p^2;m^2_\gamma,M^2_{\pi^\pm}) - A(p,M^2_{\pi^\pm}) + 2A(m^2_\gamma)\big\}\ .$$

Il reste à évaluer les diagrammes à l'ordre p^4 qui représentent les contre termes associés aux divergences de l'énergie propre du pion chargé.



Le lagrangien nécessaire à au calcul de ce diagramme est donné par les termes d'ordre p^4 du lagrangien de Gasser et Leutwyler et les termes d'ordre e^2p^2 du lagrangien d'Urech. Dans notre cas, ces termes sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(p^4)} \quad = \quad & ... - \Big\{\frac{16B_o}{F_o^2}\Big[(2\hat{m}+m_s)L_4+\hat{m}L_5\Big] + \frac{4e^2}{9}\Big[6(K_1+K_2)+5(K_5+K_6)\Big]\Big\}\partial^\mu\pi^+\partial^\mu\pi^- \\
& +\Big\{\frac{64B_o^2\hat{m}}{F_o^2}\Big[(2\hat{m}+m_s)L_6+\hat{m}L_8\Big] + \frac{8e^2B_o}{9}\Big[6\hat{m}K_7+3(3m_s+8\hat{m})K_8+5\hat{m}K_9 \\
& +\frac{3}{2R}(\hat{m}-m_s)K_9+23\hat{m}K_{10}+\frac{3}{2R}(\hat{m}-m_s)K_{10}+18\hat{m}K_{11}\Big] \\
& +\frac{4}{3}e^4F_o^2(2K_{15}+K_{16})\Big\}\pi^+\pi^-
\end{aligned}$$

Ainsi, le diagramme donnant la contribution des contre termes vaut

$$\begin{aligned}
& \frac{8ip^2}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_4+M_\pi^2L_5\big] + \frac{4ie^2p^2}{9}\big[6(K_1+K_2)+5(K_5+K_6)\big] \\
& -\frac{16iM_\pi^2}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_6+M_\pi^2L_8\big] - \frac{4ie^2M_\pi^2}{9}\big[6K_7+15K_8+5K_9+\frac{3}{R}K_9 \\
& +23K_{10}+\frac{3}{R}K_{10}+18K_{11}\big] - \frac{4ie^2M_K^2}{9}\big[18K_8-\frac{3}{R}K_9-\frac{3}{R}K_{10}\big]\ .
\end{aligned}$$

Nous avons tous les éléments nécessaires à l'expression de l'énergie propre à l'ordre d'une boucle pour le pion chargé.

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\pi^\pm}(p^2) \quad = \quad & -\frac{p^2}{6F_o^2}\big[2A(M^2_{\pi^o})+A(M^2_{K^o})+A(M^2_{K^\pm})+2A(M^2_{\pi^\pm})\big] + \frac{M_\pi^2}{6F_o^2}\big[A(M_\eta^2)-A(M^2_{\pi^o}) \\
& +A(M^2_{K^o})+A(M^2_{K^\pm})+2A(M^2_{\pi^\pm})\big] \\
& +\frac{\Delta_\pi}{6F_o^2}\big[2A(M^2_{\pi^o})+A(M^2_{K^o})+7A(M^2_{K^\pm})+14A(M^2_{\pi^\pm})\big] \qquad (8.11) \\
& +e^2\big[2(p^2+M_\pi^2)B(p^2;m^2_\gamma,M^2_{\pi^\pm})-A(M_\pi^2)\big] - \frac{8p^2}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_4+M_\pi^2L_5\big] \\
& -\frac{4e^2p^2}{9}\big[6(K_1+K_2)+5(K_5+K_6)\big] + \frac{16M_\pi^2}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_6+M_\pi^2L_8\big] \\
& +\frac{4e^2M_\pi^2}{9}\big[6K_7+15K_8+5K_9+23K_{10}+18K_{11}\big] + 8e^2M_K^2K_8
\end{aligned}$$

D'après la relation (8.10), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
Z_{\pi^\pm} &= 1-\frac{1}{6F_o^2}\big[2A(M_{\pi^o}^2)+A(M_{K^o}^2)+A(M_{K^\pm}^2)+2A(M_{\pi^\pm}^2)\big]+e^2\big[2B(M_{\pi^\pm}^2;m_\gamma^2,M_{\pi^\pm}^2)\\
&+4M_{\pi^\pm}^2\frac{\partial B(p^2;m_\gamma^2,M_{\pi^\pm}^2)}{\partial p^2}|_{p^2=M_{\pi^\pm}^2}\big]-\frac{8}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_4+M_\pi^2L_5\big]-\frac{4e^2}{9}\big[6(K_1+K_2)\\
&+5(K_5+K_6)\big]
\end{aligned}
$$

D'après la relation

$$
\frac{\partial B(p^2;m_\gamma^2,M_{\pi^\pm}^2)}{\partial p^2}|_{p^2=M_{\pi^\pm}^2}=-\frac{1}{16\pi^2M_{\pi^\pm}^2}-\frac{1}{32\pi^2M_{\pi^\pm}^2}\ln\frac{m_\gamma^2}{M_{\pi^\pm}^2}\ ,
$$

la constante de renormalisation du champ du pion chargé est

$$
\begin{aligned}
Z_{\pi^\pm} &= 1-\frac{1}{6F_o^2}\big[2A(M_{\pi^o}^2)+A(M_{K^o}^2)+A(M_{K^\pm}^2)+2A(M_{\pi^\pm}^2)\big]+2e^2\big[\frac{A(M_{\pi^\pm}^2)}{M_{\pi^\pm}^2}\\
&-\frac{1}{16\pi^2}(1+\ln\frac{m_\gamma^2}{M_{\pi^\pm}^2})\big]-\frac{8}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_4+M_\pi^2L_5\big]-\frac{4e^2}{9}\big[6(K_1+K_2)\\
&+5(K_5+K_6)\big]\ . \qquad (8.12)
\end{aligned}
$$

La masse renormalisée étant définie comme $M_{\pi^\pm}^{2\,[1]}=M_{\pi^\pm}^{2\,[0]}+\Sigma(M_{\pi^\pm}^{2\,[0]})$

$$
\text{et sachant que}\quad M_{\pi^\pm}^{2\,[0]}\ =\ M_\pi^2+\Delta_\pi \qquad \text{voir}\ \ (2.24),
$$

nous réécrivons la formule de l'énergie propre comme

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\pi^\pm}(p^2) &= -\frac{p^2}{6F_o^2}\big[2A(M_{\pi^o}^2)+A(M_{K^o}^2)+A(M_{K^\pm}^2)+2A(M_{\pi^\pm}^2)\big]\\
&+\frac{M_{\pi^\pm}^{2\,[0]}-\Delta_\pi}{6F_o^2}\big[A(M_\eta^2)-A(M_{\pi^o}^2)+A(M_{K^o}^2)+A(M_{K^\pm}^2)+2A(M_{\pi^\pm}^2)\big]\\
&+\frac{\Delta_\pi}{6F_o^2}\big[2A(M_{\pi^o}^2)+A(M_{K^o}^2)+7A(M_{K^\pm}^2)+14A(M_{\pi^\pm}^2)\big]\\
&+e^2\big[2(p^2+M_\pi^2)B(p^2;m_\gamma^2,M_{\pi^\pm}^2)-A(M_\pi^2)\big]-\frac{8p^2}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_4+M_\pi^2L_5\big]\\
&-\frac{4e^2p^2}{9}\big[6(K_1+K_2)+5(K_5+K_6)\big]+16\frac{M_{\pi^\pm}^{2\,[0]}-\Delta_\pi}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_6+M_\pi^2L_8\big]\\
&+\frac{4e^2M_\pi^2}{9}\big[6K_7+15K_8+5K_9+23K_{10}+18K_{11}\big]+8e^2M_K^2K_8
\end{aligned}
$$

D'après (C.3) nous obtenons le résultat

$$
\begin{aligned}
M^{2\,[1]}_{\pi^\pm} \;=\;& M^{2\,[0]}_{\pi^\pm}\Big\{1+\frac{1}{6F_o^2}\big(6M^2_{\pi^o}\lambda-2M^2_\eta\lambda-\frac{M^2_\eta}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_\eta}{\mu^2}+3\frac{M^2_{\pi^o}}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_{\pi^o}}{\mu^2}\big)\\
&+\frac{8}{F_o^2}\big[(M^2_\pi+2M^2_K)(2L_6-L_4)+M^2_\pi(2L_8-L_5)\big]\\
&+e^2\big[-6\lambda-3\frac{1}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_\pi}{\mu^2}+\frac{1}{4\pi^2}-\frac{4}{9}\big(6K_1+6K_2+5K_5+5K_6-6K_7-15K_8\\
&-5K_9-23K_{10}-18K_{11}\big)\big]\Big\}\\
&+\frac{e^2Z_o}{3}\Big[2M^2_\eta\lambda-6M^2_{\pi^o}\lambda-12M^2_{K^\pm}\lambda-24M^2_{\pi^\pm}\lambda+\frac{M^2_\eta}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_\eta}{\mu^2}-3\frac{M^2_{\pi^o}}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_{\pi^o}}{\mu^2}\\
&-6\frac{M^2_{K^\pm}}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_{K^\pm}}{\mu^2}-12\frac{M^2_{\pi^\pm}}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_{\pi^\pm}}{\mu^2}-96(M^2_\pi+2M^2_K)L_6-96M^2_\pi L_8\Big]+8e^2M^2_KK_8\ .
\end{aligned}
$$

En utilisant les valeurs des constantes L_i et K_i données dans (8.6), la masse renormalisée du pion chargé à l'ordre d'une boucle est finalement

$$
\begin{aligned}
M^{2\,[1]}_{\pi^\pm} \;=\;& M^{2\,[0]}_{\pi^\pm}\Big\{1-\frac{M^2_\eta}{96\pi^2F_o^2}\ln\frac{M^2_\eta}{\mu^2}+\frac{M^2_{\pi^o}}{32\pi^2F_o^2}\ln\frac{M^2_{\pi^o}}{\mu^2}+\frac{8}{F_o^2}\big[(M^2_\pi+2M^2_K)(2L^r_6-L^r_4)\\
&+M^2_\pi(2L^r_8-L^r_5)\big]+e^2\big[\frac{1}{4\pi^2}-\frac{3}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_\pi}{\mu^2}-\frac{4}{9}\big(6K^r_1+6K^r_2+5K^r_5+5K^r_6-6K^r_7\\
&-15K^r_8-5K^r_9-23K^r_{10}-18K^r_{11}\big)\big]\Big\}+8e^2M^2_KK^r_8\\
&+\frac{\Delta_\pi}{F_o^2}\Big\{\frac{M^2_\eta}{96\pi^2}\ln\frac{M^2_\eta}{\mu^2}-5\frac{M^2_\pi}{32\pi^2}\ln\frac{M^2_\pi}{\mu^2}-\frac{M^2_K}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_K}{\mu^2}-16\big[(M^2_\pi+2M^2_K)L^r_6+M^2_\pi L^r_8\big]\Big\}\ .
\end{aligned}
$$

2.3 Masse et renormalisation du kaon chargé

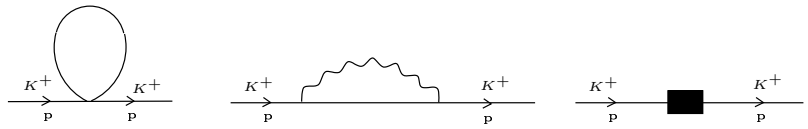


FIGURE 8.3: Liste des diagrammes nécessaires au calcul de la renormalisation de la masse et du champ du kaon chargé.

D'après conservation de la charge électrique et de la charge d'étrangeté, les seuls mésons dans la boucle du diagramme tadpole sont π^o, η, π^+ et K^+. Le lagrangien associé à cette topologie est

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(p^2)} &= ... + \frac{1}{4F_o^2}(1-\frac{1}{2R})(K^-K^+\partial^\mu\eta\partial^\mu\eta + \eta\eta\partial^\mu K^-\partial^\mu K^+) + \frac{1}{12F_o^2}\Big[2K^-K^+\partial^\mu K^o\partial^\mu\overline{K}^o \\
&+ 2\overline{K}^oK^+\partial^\mu K^o\partial^\mu K^- - 4K^oK^+\partial^\mu\overline{K}^o\partial^\mu K^- - 4\overline{K}^oK^-\partial^\mu K^o\partial^\mu K^+ + 2K^oK^-\partial^\mu\overline{K}^o\partial^\mu K^+ \\
&+ 2K^o\overline{K}^o\partial^\mu K^-\partial^\mu K^+ + 2K^+K^+\partial^\mu K^-\partial^\mu K^- - 4K^-K^+\partial^\mu K^-\partial^\mu K^+ + 2K^-K^-\partial^\mu K^+\partial^\mu K^+ \\
&+ \pi^o\pi^o\partial^\mu K^-\partial^\mu K^+ + K^-K^+\partial^\mu\pi^o\partial^\mu\pi^o - 2\pi^-\pi^+\partial^\mu K^-\partial^\mu K^+ + 4K^+\pi^+\partial^\mu K^-\partial^\mu\pi^- \\
&- 2K^-\pi^+\partial^\mu K^+\partial^\mu\pi^- - 2K^+\pi^-\partial^\mu K^-\partial^\mu\pi^+ + 4K^-\pi^-\partial^\mu K^+\partial^\mu\pi^+ - 2K^-K^+\partial^\mu\pi^-\partial^\mu\pi^+\Big] \\
&+ \frac{1}{8F_o^2R}\big(\pi^o\pi^o\partial^\mu K^-\partial^\mu K^+ + K^-K^+\partial^\mu\pi^o\partial^\mu\pi^o\big) - \frac{B_o\hat{m}}{12F_o^2}\Big[\eta\eta K^-K^+ + 4K^o\overline{K}^oK^-K^+ \\
&- 2K^-K^-K^+K^+ + 3K^-K^+\pi^o\pi^o - 6K^-K^+\pi^-\pi^+ - \frac{1}{R}\big(K^-K^-K^+K^+ + 2K^-K^+\pi^o\pi^o \\
&- K^-K^+\pi^-\pi^+\big)\Big] - \frac{B_om_s}{12F_o^2}\Big[3\eta\eta K^-K^+ + 4K^o\overline{K}^oK^-K^+ - 2K^-K^-K^+K^+ + K^-K^+\pi^o\pi^o \\
&- 2K^-K^+\pi^-\pi^+ - \frac{1}{R}\big(K^-K^-K^+K^+ - 2K^-K^+\pi^o\pi^o + K^-K^+\pi^-\pi^+\big)\Big] \\
&- \frac{e^2Z_o}{6}\Big[3\eta\eta K^-K^+ + 2K^o\overline{K}^oK^-K^+ \\
&- 8K^-K^-K^+K^+ + K^-K^+\pi^o\pi^o - 16K^-K^+\pi^-\pi^+ + \frac{3}{2R}\big(K^-K^+\pi^o\pi^o - \eta\eta K^-K^+\big)\Big]
\end{aligned}
$$

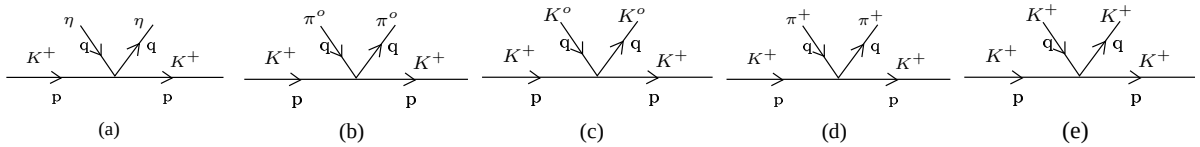
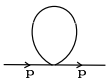


FIGURE 8.4: Les vertex contribuant à l'énergie propre du kaon chargé.

La valeur de chacun de ces vertex est donnée respectivement par

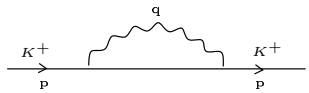
$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}^{(a)} &= -\frac{i}{2F_o^2}\big[(1-\frac{1}{2R})(q^2+p^2) + \frac{M_\pi^2}{3} - M_K^2 - \Delta_\pi\big] \\
\mathcal{V}^{(b)} &= -\frac{i}{2F_o^2}\big[(\frac{1}{3}+\frac{1}{2R})(q^2+p^2) - \frac{M_\pi^2}{3}(1+\frac{2}{R}) - \frac{M_K^2}{3}(1-\frac{2}{R}) - \frac{\Delta_\pi}{3}\big] \\
\mathcal{V}^{(c)} &= -\frac{i}{6F_o^2}\big[q^2+p^2+6q\cdot p - 2M_K^2 - \Delta_\pi\big] \\
\mathcal{V}^{(d)} &= \frac{i}{6F_o^2}\big[-p^2-q^2-6q\cdot p + M_\pi^2(1+\frac{1}{2R}) + M_K^2(1-\frac{1}{2R}) + 8\Delta_\pi\big] \\
\mathcal{V}^{(e)} &= \frac{i}{6F_o^2}\big[-2p^2-2q^2-12q\cdot p + 4M_K^2 + 16\Delta_\pi + \frac{2}{R}(M_\pi^2 - M_K^2)\big]
\end{aligned}
$$

Ainsi, le diagramme à l'ordre p^2 contribuant au diagramme tadpole du kaon chargé est



$$
\begin{aligned}
&= \frac{ip^2}{12F_o^2}\big[3A(M_\eta^2) + A(M_{\pi^o}^2) + 2A(M_{K^o}^2) + 4A(M_{K^\pm}^2) + 2A(M_{\pi^\pm}^2)\big] \\
&+ \frac{iM_{K^\pm}^2}{12F_o^2}\big[A(M_\eta^2) - A(M_{\pi^o}^2) - 2A(M_{K^o}^2) - 4A(M_{K^\pm}^2) - 2A(M_{\pi^\pm}^2)\big] \\
&- \frac{2ie^2Z_o}{3}\big[A(M_\eta^2) + 6A(M_{K^\pm}^2) + 13A(M_{\pi^\pm}^2)\big]\ .
\end{aligned}
$$

Nous avons à évaluer le diagramme de l'énergie propre du kaon chargé donné par le schéma suivant



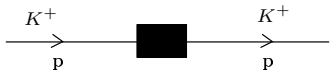
dont le lagrangien se réduit à

$$\mathcal{L}^{(p^2)} = ... + \big\{ - ieK^+\partial^\mu K^- + ieK^-\partial^\mu K^+ \big\}.$$

L'évaluation de ce diagramme donne le résultat

$$-ie^2\big\{2(p^2 + M^2_{K^\pm})B(p^2; m^2_\gamma, M^2_{K^\pm}) - A(p, M^2_{K^\pm}) + 2A(m^2_\gamma)\big\} \ .$$

Il reste à évaluer les diagrammes à l'ordre p^4 qui représentent les contre termes associés aux divergences de l'énergie propre du kaon chargé.



Le lagrangien nécessaire à ce calcul est donné par les termes p^4 du lagrangien de Gasser et Leutwyler et les termes e^2p^2 du lagrangien d'Urech. Dans notre cas, ces termes sont

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(p^4)} \quad = \quad & ... - \Big\{ \frac{16B_o}{F_o^2}(2\hat{m} + m_s)L_4 + \frac{4B_o}{F_o^2}\big[2\hat{m} + 2m_s + \frac{1}{R}(\hat{m} - m_s)\big]L_5 \\
& + \frac{4e^2}{9}\Big[6(K_1 + K_2) + 5(K_5 + K_6)\Big]\Big\}\partial^\mu K^-\partial^\mu K^+ \\
& + \Big\{ \frac{16B_o^2\hat{m}}{F_o^2}\Big[4\hat{m} + 6m_s + \frac{1}{R}(2\hat{m} - m_s)\Big]L_6 + \frac{16B_o^2 m_s}{F_o^2}(2 - \frac{1}{R})m_s L_6 \\
& + \frac{16B_o^2\hat{m}}{F_o^2}\Big[(1 + \frac{1}{R})\hat{m} + 2m_s\Big]L_8 + \frac{16B_o^2 m_s}{F_o^2}(1 - \frac{1}{R})m_s L_8 \\
& + \frac{4e^2B_o}{9}\Big[\big(6\hat{m} + 6m_s + \frac{3}{R}(\hat{m} - m_s)\big)K_7 + \big(42\hat{m} + 24m_s + \frac{3}{R}(\hat{m} - m_s)\big)K_8 \\
& + 2\big(4\hat{m} + m_s + \frac{2}{R}(\hat{m} - m_s)\big)K_9 + \big(26\hat{m} + 20m_s + \frac{13}{R}(\hat{m} - m_s)\big)K_{10} \\
& + 9\big(2\hat{m} + 2m_s + \frac{1}{R}(\hat{m} - m_s)\big)K_{11}\Big\}K^+K^-
\end{aligned}$$

Sachant que $M_K^2 = B_o(\hat{m} + m_s)$, le diagramme donnant la contribution des contre termes vaut

$$\begin{aligned}
& \frac{8ip^2}{F_o^2}\big[(M_\pi^2 + 2M_K^2)L_4 + M_K^2 L_5 - \frac{1}{2R}(M_K^2 - M_\pi^2)L_5\big] + \frac{4ie^2p^2}{9}\big[6(K_1 + K_2) + 5(K_5 + K_6)\big] \\
& - \frac{16iM_K^2}{F_o^2}\big[(M_\pi^2 + 2M_K^2)L_6 + M_K^2 L_8\big] + \frac{16i}{F_o^2}\frac{M_K^2 - M_\pi^2}{2R}\big[(M_\pi^2 + 2M_K^2)L_6 + 2M_K^2 L_8\big] \\
& - \frac{4ie^2M_\pi^2}{3}\big[3K_8 + K_9 + K_{10}\big] - \frac{8ie^2M_K^2}{9}\big[3K_7 + 12K_8 + K_9 + 10K_{10} + 9K_{11}\big]
\end{aligned}$$

Nous sommons les trois contributions pour obtenir l'expression de l'énergie propre à l'ordre d'une boucle pour le kaon chargé. Nous ne gardons que les termes au premier ordre de la brisure d'isospin, c'est-à-dire les termes $(\frac{1}{R})^n$ avec $n = 0, 1$.

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{K^\pm}(p^2) \;=\; & -\frac{1}{12F_o^2}\big[p^2 - M_{K^\pm}^2 + \frac{3}{2R}(p^2+M_K^2)\big]A(M_{\pi^o}^2) \\
& -\frac{1}{12F_o^2}\big[3p^2 + M_{K^\pm}^2 - 8e^2Z_oF_o^2 - \frac{3}{2R}(p^2+M_K^2)\big]A(M_\eta^2) \\
& -\frac{1}{6F_o^2}(p^2 - M_{K^\pm}^2)A(M_{K^o}^2) - \frac{1}{3F_o^2}\big[p^2 - M_{K^\pm}^2 - 12e^2Z_oF_o^2\big]A(M_{K^\pm}^2) \\
& -\frac{1}{6F_o^2}\big[p^2 - M_{K^\pm}^2 - 12e^2Z_oF_o^2\big]A(M_{\pi^\pm}^2) \\
& +e^2\big[2(p^2+M_K^2)B(p^2;0,M_K^2) - A(M_K^2) + 2A(m_\gamma^2)\big] \\
& -\frac{8p^2}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_4 + M_K^2L_5 - \frac{1}{2R}(M_K^2-M_\pi^2)L_5\big] \\
& -\frac{4}{9}e^2p^2\big[6(K_1+K_2)+5(K_5+K_6)\big] + \frac{16}{F_o^2}M_K^2\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_6 + M_K^2L_8\big] \\
& -\frac{16}{F_o^2}\frac{1}{2R}(M_K^2-M_\pi^2)\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_6 + 2M_K^2L_8\big] + \frac{4}{3}e^2M_\pi^2(3K_8+K_9+K_{10}) \\
& +\frac{8}{3}e^2M_K^2(3K_7+12K_8+K_9+10K_{10}+9K_{11})
\end{aligned}
$$

D'après la relation (8.10), nous obtenons pour la constante de renormalisation du champ du kaon chargé

$$
\begin{aligned}
Z_{K^\pm} \;=\; & 1 - \frac{1}{12F_o^2}\big[3A(M_\eta^2) + A(M_{\pi^o}^2) + 2A(M_{K^o}^2) + 4A(M_{K^\pm}^2) + 2A(M_{\pi^\pm}^2)\big] \\
& -\frac{8}{F_o^2}\big[(M_\pi^2+2M_K^2)L_4 + M_K^2L_5\big] + 2e^2\big[\frac{A(M_K^2)}{M_K^2} - \frac{1}{16\pi^2}(1+\ln\frac{m_\gamma^2}{M_K^2})\big] \qquad (8.13) \\
& -\frac{4}{9}e^2\big[6(K_1+K_2)+5(K_5+K_6)\big] + \frac{1}{8R}\frac{1}{F_o^2}\big[A(M_\eta^2) - A(M_\pi^2)\big] + \frac{4}{R}\frac{1}{F_o^2}(M_K^2-M_\pi^2)L_5
\end{aligned}
$$

Nous avons utilisé la relation

$$
\frac{\partial B(p^2;m_\gamma^2,M_K^2)}{\partial p^2}\Big|_{p^2=M_K^2} = -\frac{1}{16\pi^2M_K^2} - \frac{1}{32\pi^2M_K^2}\ln\frac{m_\gamma^2}{M_K^2}\ .
$$

La masse renormalisée est définie comme ${M_{K^\pm}^2}^{[1]} = {M_{K^\pm}^2}^{[0]} + \Sigma({M_{K^\pm}^2}^{[0]})$. D'après (2.24), nous utilisons la relation suivante pour réécrire l'énergie propre du kaon chargé

$$
M_{K^\pm}^2 \equiv {M_{K^\pm}^2}^{[0]} = M_K^2 + \Delta_\pi - \frac{1}{2R}(M_K^2 - M_\pi^2),
$$

c'est-à-dire que nous remplaçons p^2 et M_K^2 dans l'énergie propre par ${M_{K^\pm}^2}^{[0]} - \Delta_\pi + \frac{1}{2R}(M_K^2 - M_\pi^2)$. De plus, on aura

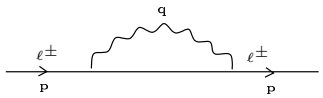
$$
\frac{1}{2R}M_K^2 \;=\; \frac{1}{2R}\big[{M_{K^\pm}^2}^{[0]} \underbrace{-\Delta_\pi + \frac{1}{2R}(M_K^2-M_\pi^2)}_{\hookrightarrow \text{ négligé car contribuerait à l'ordre 2 de la brisure d'isospin}}\big].
$$

Cette opération effectuée, nous utilisons la formule de la fonction à un point (C.3) et les valeurs des constantes de basse énergie (8.6) pour obtenir la masse renormalisée du kaon chargé à l'ordre d'une boucle

$$
\begin{aligned}
M^2_{K^\pm}{}^{[1]} &= M^2_{K^\pm}{}^{[0]}\Big\{1+\frac{M^2_\eta}{48\pi^2F^2_o}\ln\frac{M^2_\eta}{\mu^2}+\frac{8}{F^2_o}\big[(M^2_\pi+2M^2_K)(2L^r_6-L^r_4)+M^2_\pi(2L^r_8-L^r_5)\big] \\
&+e^2\big[\frac{1}{4\pi^2}-\frac{3}{16\pi^2}\ln\frac{M^2_K}{\mu^2}-\frac{4}{9}\big(6K^r_1+6K^r_2+5K^r_5+5K^r_6-6K^r_7-24K^r_8-2K^r_9 \\
&-20K^r_{10}-18K^r_{11}\big)\big]\Big\} \\
&+\frac{1}{2R}M^2_{K^\pm}{}^{[0]}\big[\frac{M^2_\pi}{32\pi^2F^2_o}\ln\frac{M^2_\pi}{\mu^2}-\frac{M^2_\eta}{32\pi^2F^2_o}\ln\frac{M^2_\eta}{\mu^2}+\frac{8}{F^2_o}(M^2_K-M^2_\pi)(L^r_5-2L^r_8)\big] \\
&\Delta_\pi\big\{-\frac{M^2_\eta}{48\pi^2F^2_o}\ln\frac{M^2_\eta}{\mu^2}-\frac{M^2_K}{8\pi^2F^2_o}\ln\frac{M^2_K}{\mu^2}-\frac{M^2_\pi}{16\pi^2F^2_o}\ln\frac{M^2_\pi}{\mu^2} \\
&-\frac{16}{F^2_o}\big[(M^2_\pi+2M^2_K)L^r_6+M^2_KL^r_8\big]\big\}+\frac{4}{3}e^2M^2_\pi(3K^r_8+K^r_9+K^r_{10})
\end{aligned}
$$

2.4 Masse et renormalisation du lepton

Nous avons deux diagrammes à calculer pour la renormalisation du lepton. Il s'agit dans un premier temps du diagramme qui donne l'énergie propre du lepton.



Ce diagramme vaut

$$
\mathcal{M}_{fi} = -ie^2(-i)\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{\gamma_\mu[\not p-\not q+m_\ell]\gamma^\mu}{[(p-q)^2-m^2_\ell](q^2-m^2_\gamma)}
$$

D'après les formules (11.1), nous obtenons

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} &= -e^2(i)\big\{(2-D)\ \not pB(p,m_\gamma,m_\ell)+m_\ell DB(p,m_\gamma,m_\ell) \\
&\quad -\gamma^\mu(-i)\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{(2-D)q_\mu}{[(p-q)^2-m^2_\ell](q^2-m^2_\gamma)}\big\} \\
&= -ie^2\Big\{m^2_\ell D+(2-D)\ \not p\big[1-\frac{1}{2p^2}(p^2-m^2_\ell)\big]\Big\}B(p^2,m^2_\gamma,m^2_\ell)+ie^2(2-D)\ \not p\frac{m^2_\ell}{2p^2}\frac{A(m^2_\ell)}{m^2_\ell}
\end{aligned}
$$

Le deuxième diagramme représente la contribution à l'ordre p^4 et est donnée par le diagramme

Le lagrangien associé vaut $\mathcal{L}=e^2\big\{X_6\overline{\ell}(i\ \not\partial)\ell+X_7m_\ell\overline{\ell}\ell\big\}$. Le diagramme vaut alors $\mathcal{M}_{fi}=ie^2\big\{X_6\ \not p+m_\ell X_7\big\}$.

Nous pouvons maintenant exprimer l'énergie propre du lepton.

$$
\begin{aligned}
\Sigma_{\ell^\pm}(\not p) &= e^2\Big\{m_\ell D+(2-D)\ \not p\big[1-\frac{1}{2p^2}(p^2-m^2_\ell)\big]\Big\}B(p^2,m^2_\gamma,m^2_\ell)+ie^2(2-D)\ \not p\frac{m^2_\ell}{2p^2}\frac{A(m^2_\ell)}{m^2_\ell} \\
&\quad -e^2\big\{X6\ \not p+m_\ell X_7\big\}
\end{aligned}
$$

D'après les relations (8.10), nous avons $Z_{\ell^\pm} = 1 + \frac{d}{d\not{p}}\Sigma_{\ell^\pm}(\not{p})|_{\not{p}=m_\ell}$. De plus, on obtient facilement le résultat suivant

$$\frac{d}{d\not{p}} = \frac{d}{dp^2}\frac{dp^2}{d\not{p}} = 2\not{p}\frac{d}{dp^2}$$

qui nous permet d'écrire l'étape intermédiaire

$$Z_{\ell^\pm} = 1 - \frac{e^2}{8\pi^2}(2 + \ln\frac{m_\gamma^2}{m_\ell^2}) + \frac{e^2}{2}(2-D)\frac{A(m_\ell^2)}{m_\ell^2} - e^2 X_6.$$

On utilise les formule

$$DA(m^2) = 4A(m^2) - m^2\frac{1}{8\pi^2} \tag{8.14}$$

$$(2-D)A(m^2) = -2A(m^2) + m^2\frac{1}{8\pi^2} \tag{8.15}$$

et on trouve

$$Z_{\ell^\pm} = 1 - e^2\frac{A(m_\ell^2)}{m_\ell^2} - e^2 X_6 - \frac{e^2}{8\pi^2}\ln\frac{m_\gamma^2}{m_\ell^2} - \frac{3e^2}{16\pi^2}. \tag{8.16}$$

Nous pouvons maintenant donner la valeur de la masse du lepton à l'ordre d'une boucle. Elle vaut

$${m_\ell}^{[1]} = {m_\ell}^{[0]} + \Sigma({m_\ell}^{[0]})$$

Nous utilisons les formules (C.10), (8.14) et (8.15)

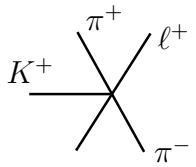
$${m_\ell}^{[1]} = {m_\ell}^{[0]}\Big\{1 + 3e^2\frac{A(m_\ell^2)}{m_\ell^2} + e^2\frac{1}{16\pi^2} - e^2(X_6 + X_7)\Big\}$$

En utilisant (C.3) et les valeurs des constantes X_i ($X_6 = X_6^r - 5\lambda$ et $X_7 = X_7^r - \lambda$), il vient

$${m_\ell}^{[1]} = {m_\ell}^{[0]}\Big\{1 + e^2\big[-\frac{3}{16\pi^2}\ln\frac{m_\ell^2}{\mu^2} + \frac{1}{16\pi^2} - (X_6^r + X_7^r)\big]\Big\}$$

8.3 Contre termes et renormalisation des champs

Après cette section consacrée à la renormalisation des champs mésoniques et leptoniques associés à $K_{\ell 4}$, nous retournons à l'objet de ce chapitre: le calcul des contre termes et l'annulation des divergences ultra-violettes . Nous avons à présent tous les outils pour évaluer le graphe



$$\times Z_{K^\pm}^{1/2} Z_{\pi^\pm} Z_{\ell^+}^{1/2}$$

où le diagramme en arbre $K_{\ell 4}$ est multiplié par la racine carrée des constantes de renormalisation associées à chaque patte externe du graphe. Nous obtenons

$$-i\mathcal{M}_{fi} = \underbrace{-i\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o} \times \Big\{3(\overline{\nu}_{\ell_L} \not{P}\, \ell) + 3(\overline{\nu}_{\ell_L} \not{Q}\, \ell) + 2(\overline{\nu}_{\ell_L} \not{L}\, \ell)\Big\}}_{\text{résultat diagramme en arbre (5.1)}} \times Z_{K^\pm}^{1/2} Z_{\pi^\pm} Z_{\ell^+}^{1/2}$$

Nous reprenons les résultats sur les constante de renormalisation des champs (8.12), (8.13) et (8.16). Nous ne gardons que les termes qui contribuent aux corrections électromagnétiques et d'isospin à un ordre. On remplace toutes les fonctions à un point par leur résultat donné dans (C.3). On remplace les constantes de renormalisation L_i, K_i et X_i par leurs formules données dans (8.6). Le résultat est

$$\begin{aligned}
Z_{K^\pm}^{1/2} Z_{\pi^\pm} Z_{\ell^+}^{1/2} &= 1 - e^2\Big[-2\lambda + \frac{9}{32\pi^2} - \frac{1}{32\pi^2}\ln(\frac{m_\ell^2}{\mu^2}) + \frac{1}{8\pi^2}\ln(\frac{M_\pi^2}{\mu^2}) + \frac{1}{16\pi^2}\ln(\frac{M_K^2}{\mu^2}) \\
&+ \frac{1}{16\pi^2}\ln(\frac{m_\gamma^2}{m_\ell^2}) + \frac{1}{8\pi^2}\ln(\frac{m_\gamma^2}{M_\pi^2}) + \frac{1}{16\pi^2}\ln(\frac{m_\gamma^2}{M_K^2}) + \frac{1}{2}X_6^r + 4(K_1^r + K_2^r) \\
&+ \frac{10}{3}(K_5^r + K_6^r)\Big] - \frac{1}{F_o^2}\Big\{\lambda\Big[3M_\pi^2 + 3M_K^2 + 3\Delta_\pi - \frac{1}{2R}(M_K^2 - M_\pi^2)\Big] - \frac{3}{8}\mu_{\pi^o} \\
&- \frac{1}{4}\mu_{K^o} - \frac{1}{3}\mu_{K^\pm} - \frac{5}{12}\mu_{\pi^\pm} - \frac{1}{8}\mu_\eta + \frac{1}{16R}(\mu_\eta - \mu_{\pi^o}) + 12(M_\pi^2 + 2M_K^2)L_4^r \\
&+ 4\big[2M_\pi^2 + M_K^2 - \frac{1}{2R}(M_K^2 - M_\pi^2)\big]L_5^r\Big\}
\end{aligned}$$

Le diagramme provenant de la renormalisation des champs donne les contributions suivantes aux facteurs de forme F et G.

$$\begin{aligned}
\delta F = \delta G &= -e^2\Big[\frac{9}{32\pi^2} - \frac{1}{32\pi^2}\ln(\frac{m_\ell^2}{\mu^2}) + \frac{1}{8\pi^2}\ln(\frac{M_\pi^2}{\mu^2}) + \frac{1}{16\pi^2}\ln(\frac{M_K^2}{\mu^2}) + \frac{1}{16\pi^2}\ln(\frac{m_\gamma^2}{m_\ell^2}) \\
&\quad + \frac{1}{8\pi^2}\ln(\frac{m_\gamma^2}{M_\pi^2}) + \frac{1}{16\pi^2}\ln(\frac{m_\gamma^2}{M_K^2}) + \frac{1}{2}X_6^r + 4(K_1^r + K_2^r) + \frac{10}{3}(K_5^r + K_6^r)\Big] \\
&\quad - \frac{1}{F_o^2}\Big\{-\frac{3}{8}\mu_{\pi^o} - \frac{1}{4}\mu_{K^o} - \frac{1}{3}\mu_{K^\pm} - \frac{5}{12}\mu_{\pi^\pm} - \frac{1}{8}\mu_\eta + \frac{1}{16R}(\mu_\eta - \mu_{\pi^o}) \\
&\quad + 12(M_\pi^2 + 2M_K^2)L_4^r + 4\big[2M_\pi^2 + M_K^2 - \frac{1}{2R}(M_K^2 - M_\pi^2)\big]L_5^r\Big\} \\
&\quad + \lambda\Big\{2e^2 - \frac{1}{F_o^2}\Big[3M_\pi^2 + 3M_K^2 + 3\Delta_\pi - \frac{1}{2R}(M_K^2 - M_\pi^2)\Big]\Big\}
\end{aligned} \tag{8.17}$$

3.1 Annulation des divergences ultra-violettes

Nous avons calculé tous les contre termes associés au processus étudié. Nous pouvons extraire la partie divergente ultra-violette pour chaque facteur de forme F et G. Nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\delta F_{UV}^{\text{contre termes}} &= -5e^2\lambda + \frac{\lambda}{F_o^2}\Big[\frac{7}{2}s_\pi - u_\pi - t_\pi + M_\pi^2 + 3M_K^2 + 11\Delta_\pi - \frac{3}{2R}(M_K^2 - M_\pi^2)\Big] \\
\delta G_{UV}^{\text{contre termes}} &= -5e^2\lambda - \frac{\lambda}{F_o^2}\Big[-\frac{s_\pi}{2} - 2t_\pi + u_\pi - 5\Delta_\pi\Big].
\end{aligned}$$

Si nous comparons ces résultats à ceux obtenus en (7.2) et (7.3), nous constatons que les contre termes annulent les divergences ultra-violettes des facteurs de forme F et G. Les facteurs de forme F et G, à ce niveau du travail, sont finis ultra violets. Dans le chapitre qui suit, nous allons expliquer comment rendre ces mêmes facteurs de forme finis infra-rouges.

Chapitre 9

Les divergences infra-rouges

Sommaire

9.1 Emission de photons mous **99**

9.2 Amplitude $K_{\ell 4}$ radiatif **100**

9.3 Le taux de désintégration $K_{\ell 4}$ radiatif **101**

3.1 Intégration du photon 102

9.4 La divergence infra-rouge dans $d\Gamma_{K_{\ell 4}}$ **104**

Les divergences infra-rouges sont dues à des petites valeurs de l'impulsion du photon et au fait que le photon a une masse nulle, $m_\gamma = 0$. Nous régularisons ces divergences en donnant au photon une masse infinitésimale. Ces divergences peuvent apparaître lors des processus à photons virtuels (corrections radiatives) et/ou lors de processus mettant en jeu des photons réels. C'est lorsque l'on somme ces deux contributions pour obtenir le taux de transition total, celui mesuré dans les expériences, que les divergences infra-rouges disparaîssent et le paramètre de régularisation (m_γ) peut être mis à 0. Ce résultat est connu comme le théorème de *Kinoshita - Lee - Nauenberg* [85] et [86].
Une autre méthode existe. Comme pour les divergences ultra-violettes, la régularisation dimensionnelle peut servir de substitut pour le schéma $m_\gamma = 0$. Au lieu de donner une masse infinitésimale au photon, la dimension de l'espace-temps D peut servir de paramètre de régularisation pour les divergences infra-rouge. Cette régularisation nous permet une évaluation simple des contributions infra-rouge divergentes.

9.1 Emission de photons mous

Les corrections à l'élément de matrice $K_{\ell 4}$ dues aux boucles de photon virtuel sont divergentes infra-rouge. Cependant, ces processus ne peuvent pas être mesurés expérimentalement sans les contributions qui font intervenir les émissions d'un nombre arbitraire de photons mous. Comme les photons sont sans masse, leur énergie peut être plus petite que la résolution du détecteur. Ainsi dans les processus observés, ces émissions de photons sont incluses. C'est en sommant toutes les sections efficaces des différents processus, photon virtuel et photon émis, que les divergences infra-rouges se compensent. Cette compensation se fait ordre par ordre dans la théorie des perturbations. A l'ordre d'une boucle de photon virtuel, nous ne considérons que les émissions réelles d'un photon unique. Pour l'annulation des divergences infra-rouges , il suffit aussi que le photon émis ait une énergie inférieure à la résolution du détecteur ΔE.

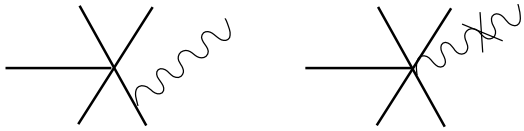


FIGURE 9.1: Diagrammes à l'ordre le plus bas contribuant à l'émission de photon réel

9.2 Amplitude $K_{\ell 4}$ radiatif

Nous devons calculer les diagrammes où un photon (vecteur polarisation ϵ et d'impulsion q) est attaché sur une patte externe du processus $K_{\ell 4}$, comme le montre la FIGURE 9.1. L'amplitude $\mathcal{A}(K_{\ell 4\gamma})$ pour les désintégrations radiatives de $K_{\ell 4}$ peut être développée en puissance de l'impulsion du photon émis

$$\mathcal{A}(K_{\ell 4\gamma}) \quad = \quad \mathcal{A}_{-1}(K_{\ell 4\gamma}) + \mathcal{A}_0(K_{\ell 4\gamma}) + \dots \tag{9.1}$$

La FIGURE 9.1 montre deux types de contributions à l'émission de photon. A gauche, les diagrammes vont donner un terme en $\frac{p\cdot\epsilon}{q\cdot p}$, avec p l'impulsion associée à la ligne considérée. Ce terme produit une singularité lorsque l'impulsion du photon s'annule. On reproduit donc la divergence infra-rouge. A droite, lorsque le photon est attaché au vertex de la désintégration, c'est un terme de la forme $\frac{\not{q}\not{\epsilon}}{q\cdot p}$ qui sera généré. Dans l'approximation de photon mou, l'impulsion du photon émis est négligé partout dans le numérateur, donc ce diagramme ne contribue pas.

Dans le développement (9.1), l'approximation de Low [90] consiste à ne garder que le terme $\mathcal{A}_{-1}(K_{\ell 4\gamma})$. Comme nous ne traîtons que les corrections aux facteurs de forme F et G, nous ne

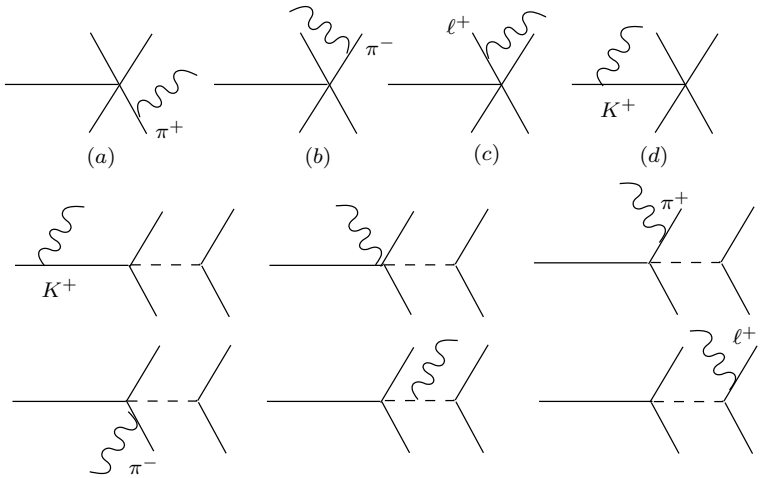


FIGURE 9.2: Diagrammes contribuant au processus $K_{\ell 4\gamma}$. Les quatre premiers diagrammes sont ceux qui concernent les facteurs de forme F et G, car le graphe avec un état intermédiaire ne contribue qu'à R (5.5).

calculons que les contributions des quatre premiers diagrammes avec émission de photon. Les amplitudes respectives valent

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^{(a)} &= e\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\,v(p_\ell)\,(\not{k}+2\,\not{p}_+-\not{p}_-+2\,\not{q})\frac{(2p_+ + q)\cdot\epsilon}{(p_+ + q)^2 - M_{\pi^\pm}^2}\\
\mathcal{A}^{(b)} &= -e\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\,v(p_\ell)\,(\not{k}+2\,\not{p}_+-\not{p}_--\not{q})\frac{(2p_- + q)\cdot\epsilon}{(p_- + q)^2 - M_{\pi^\pm}^2}\\
\mathcal{A}^{(c)} &= e\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\,v(p_\ell)\,(\not{k}+2\,\not{p}_+-\not{p}_-)\frac{(\not{p}_\ell+\not{q})\,\not{\epsilon}-m_\ell\,\not{\epsilon}}{(p_\ell + q)^2 - m_\ell^2}\\
\mathcal{A}^{(d)} &= e\frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\,v(p_\ell)\,(\not{k}+2\,\not{p}_+-\not{p}_--\not{q})\frac{(2k - q)\cdot\epsilon}{(k - q)^2 - M_{K^\pm}^2}
\end{aligned}
$$

Dans l'approximation de photon mou, l'impulsion du photon émis est négligé dans le numérateur. De plus, on peut se placer de telle sorte que la polarisation ϵ du photon soit orthogonale avec son impulsion q. Finalement, dans cette approximation, la contribution totale se met sous la forme

$$
\mathcal{A}^{K_{\ell 4\gamma}} = e\mathcal{A}^{K_{\ell 4}}\Big\{\frac{p_+\cdot\epsilon}{p_+\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2}} - \frac{p_-\cdot\epsilon}{p_-\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2}} + \frac{p_\ell\cdot\epsilon}{p_\ell\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2}} - \frac{k\cdot\epsilon}{k\cdot q-\frac{m_\gamma^2}{2}}\Big\},
$$

avec

$$
\mathcal{A}^{K_{\ell 4}} = \frac{G_F V_{us}^*}{3F_o}\,\overline{u}(p_\nu)(1+\gamma^5)\,v(p_\ell)\,(\not{k}+2\,\not{p}_+-\not{p}_-).
$$

9.3 Le taux de désintégration $K_{\ell 4}$ radiatif

Il faut élever l'élément de matrice au carré et sommer sur la polarisation. La sommation sur les polarisations possibles du photon utilise la relation [91]

$$
\text{Si}\quad q\cdot a = q\cdot b = 0 \quad\text{alors}\quad \sum_\epsilon(\epsilon\cdot a)(\epsilon\cdot b) = -a\cdot b.
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{\text{spin}\\ \text{pola}}}|\mathcal{A}^{K_{\ell 4\gamma}}|^2 = -\,e^2\sum_{\text{spin}}|\mathcal{A}^{K_{\ell 4}}|^2 \;\Big\{ & \frac{M_{\pi^\pm}^2}{(p_+\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})^2} + \frac{M_{\pi^\pm}^2}{(p_-\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})^2} + \frac{m_\ell^2}{(p_\ell\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})^2}\\
& + \frac{M_{K^\pm}^2}{(k\cdot q-\frac{m_\gamma^2}{2})^2} - 2\frac{p_+\cdot p_-}{(p_+\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})(p_-\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})} + 2\frac{p_+\cdot p_\ell}{(p_+\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})(p_\ell\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})}\\
& -2\frac{p_-\cdot p_\ell}{(p_-\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})(p_\ell\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})} - 2\frac{k\cdot p_\ell}{(k\cdot q-\frac{m_\gamma^2}{2})(p_\ell\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})}\\
& -2\frac{p_+\cdot k}{(p_+\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})(k\cdot q-\frac{m_\gamma^2}{2})} + 2\frac{p_-\cdot k}{(p_-\cdot q+\frac{m_\gamma^2}{2})(k\cdot q-\frac{m_\gamma^2}{2})}\;\Big\}
\end{aligned}
\tag{9.2}
$$

Le taux différentiel pour la désintégration $K_{\ell 4\gamma}$ lorsque l'on intègre sur l'espace de phase du photon est donné par

$$
d\Gamma_{K_{\ell 4\gamma}} = \frac{(2\pi)^4}{2M_K}d\Phi_{K_{\ell 4\gamma}}\sum_{\substack{\text{pola}\\ \text{spin}}}|\mathcal{A}^{K_{\ell 4\gamma}}|^2. \tag{9.3}
$$

L'espace des phases de $K_{\ell 4\gamma}$ est donné par

$$d\Phi_{K_{\ell 4\gamma}} = \delta^4(k - p_+ - p_- - p_\ell - p_\nu - q)\ \frac{d^3\vec{p}_+}{(2\pi)^3 2E_{p_+}}\ \frac{d^3\vec{p}_-}{(2\pi)^3 2E_{p_-}}\ \frac{d^3\vec{p}_\ell}{(2\pi)^3 2E_{p_\ell}} \frac{d^3\vec{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_{p_\nu}}\ \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2E_q} \tag{9.4}$$

3.1 Intégration du photon

Contrairement à la méthode employée par Ginsberg [92], où la paire $\nu\ \gamma$ est intégrée. Avec la présence du photon émis, l'espace des phases est plus grand et la cinématique est différente. Par exemple, s_ℓ qui est le carré de la masse effective du système di-lepton est

$$s_\ell \neq (p_\ell + p_\nu)^2 \tag{9.5}$$

en raison de la présence du γ. Pour être rigoureux, il faudrait déterminer toute la nouvelle cinématique associée à $K_{\ell 4\gamma}$. Ceci peut être fait en rajoutant 3 nouvelles variables

1. $s_{\gamma\nu}$, le carré de la masse effective du système photon-neutrino,
2. $\theta_{\gamma\nu}$, l'angle du γ par rapport au ν ,
3. $\phi_{\gamma\nu}$, l'angle entre le plan formé par le système photon-neutrino dans Σ_K et celui des leptons.

Nous nous contenterons ici de n'intégrer que le photon. On laissera explicitement le neutrino. On exprimera ainsi la factorisation des espaces des phases de $K_{\ell 4}$ et $K_{\ell 4\gamma}$, qui est valide à la précision

$$\frac{\Delta E}{M_K}.$$

D'après (9.2), (9.3) et (9.4), le taux différentiel de $K_{\ell 4\gamma}$ intégré sur l'espace des phases du photon vaut

$$\begin{aligned}
d\Gamma_{K_{\ell 4\gamma}} \approx\ & -e^2\ \frac{(2\pi)^4}{2M_K}\delta^4(k - p_+ - p_- - p_\ell - p_\nu - q)\ \frac{d^3\vec{p}_+}{(2\pi)^3 2E_{p_+}}\ \frac{d^3\vec{p}_-}{(2\pi)^3 2E_{p_-}}\ \frac{d^3\vec{p}_\ell}{(2\pi)^3 2E_{p_\ell}} \frac{d^3\vec{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_{p_\nu}} \\
& \int_{m_\gamma}^{\Delta E} \frac{d^3\vec{q}}{(2\pi)^3 2E_q} \sum_{\text{spin}} |\mathcal{A}^{K_{\ell 4}}|^2 \Big\{ \frac{M_{\pi^\pm}^2}{(p_+ \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})^2} + \frac{M_{\pi^\pm}^2}{(p_- \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})^2} + \frac{m_\ell^2}{(p_\ell \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})^2} \\
& + \frac{M_{K^\pm}^2}{(k \cdot q - \frac{m_\gamma^2}{2})^2} - 2\frac{p_+ \cdot p_-}{(p_+ \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})(p_- \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})} + 2\frac{p_+ \cdot p_\ell}{(p_+ \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})(p_\ell \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})} \\
& -2\frac{p_- \cdot p_\ell}{(p_- \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})(p_\ell \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})} - 2\frac{k \cdot p_\ell}{(k \cdot q - \frac{m_\gamma^2}{2})(p_\ell \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})} \\
& -2\frac{p_+ \cdot k}{(p_+ \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})(k \cdot q - \frac{m_\gamma^2}{2})} + 2\frac{p_- \cdot k}{(p_- \cdot q + \frac{m_\gamma^2}{2})(k \cdot q - \frac{m_\gamma^2}{2})} \Big\}
\end{aligned} \tag{9.6}$$

On définit les intégrales

$$I_{ij} = \int_{m_\gamma}^{\Delta E} \frac{d^3\vec{q}}{2E_q} \frac{2p_i \cdot p_j}{(p_i \cdot q)(p_j \cdot q)},$$

qui ont été calculées par 't Hooft et Veltman [93]. Le résultat de ces intégrales est

$$
\begin{aligned}
I_{ij} &= 4\pi \frac{\alpha p_i p_j}{(\alpha p_i)^2 - p_j^2} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{(\alpha p_i)^2}{p_j^2} \ \ln \frac{4\Delta E^2}{m_\gamma^2} \right. \\
&+ \left. \left[\frac{1}{4} \ln^2 \frac{u_o - |u|}{u_o + |u|} + \mathrm{Li}_2\big(1 - \frac{u_o + |u|}{v}\big) + \mathrm{Li}_2\big(1 - \frac{u_o - |u|}{v}\big) \right]_{u=p_j}^{u=\alpha p_i} \right\}, \qquad (9.7)
\end{aligned}
$$

avec

$$
v = \frac{(\alpha p_i)^2 - p_j^2}{2(\alpha p_{io} - p_{jo})}.
$$

La variable α est définie au travers d'une équation du second degré

$$
\alpha^2 p_i^2 - 2\alpha p_i p_j + p_j^2 = 0 \qquad \frac{\alpha p_{io} - p_{jo}}{p_{jo}} > 0. \qquad (9.8)
$$

Les solutions sont

$$
\alpha_\pm = \frac{p_i p_j \pm \sqrt{(p_i p_j)^2 - p_i^2 p_j^2}}{p_i^2}.
$$

Lorsque $p_i = p_j = p$, la formule (9.7) se simplifie [94]

$$
I_{ii} = 2\pi \Big\{ \ln \frac{4\Delta E^2}{m_\gamma^2} + \frac{p_o}{|p|} \ln \frac{p_o - |p|}{p_o + |p|} \Big\}
$$

Lorsque l'on injecte dans la partie infra-rouge de (9.7) l'une des deux valeurs $\alpha_\pm$, le résultat est le même

$$
\begin{aligned}
I_{ij}^{\mathrm{IR}} &= \pi \frac{p_i \cdot p_j}{\sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}} \ln \frac{p_i \cdot p_j - \sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}}{p_i \cdot p_j + \sqrt{(p_i \cdot p_j)^2 - m_i^2 m_j^2}}, \\
&= \pi \ \tau(p_i, p_j, m_i, m_j),
\end{aligned}
$$

On voit apparaître la fonction $\tau(p_i, p_j, m_i, m_j)$ définie dans la partie infra-rouge de la fonction à trois points (C.27).
Avec les expression des fonctions I_{ij}, la partie infra-rouge du taux de désintégration (9.6) devient

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_{K_{\ell 4\gamma}}^{\mathrm{IR}} \approx & -e^2 \frac{(2\pi)^4}{2M_K} \delta^4(k - p_+ - p_- - p_\ell - p_\nu) \frac{d^3\vec{p}_+}{(2\pi)^3 2E_{p_+}} \frac{d^3\vec{p}_-}{(2\pi)^3 2E_{p_-}} \frac{d^3\vec{p}_\ell}{(2\pi)^3 2E_{p_\ell}} \frac{d^3\vec{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_{p_\nu}} \\
& \sum_{\mathrm{spin}} |\mathcal{A}^{K_{\ell 4}}|^2 \frac{1}{8\pi^2} \Big\{ -4 - \tau(p_+, p_-, M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm}) + \tau(p_+, p_\ell, M_{\pi^\pm}, m_\ell) - \tau(p_-, p_\ell, M_{\pi^\pm}, m_\ell) \\
& -\tau(k, p_\ell, M_{K^\pm}, m_\ell) - \tau(p_+, k, M_{\pi^\pm}, M_{K^\pm}) + \tau(p_-, k, M_{\pi^\pm}, M_{K^\pm}) \Big\} \ln m_\gamma^2.
\end{aligned}
$$

Finalement, nous obtenons l'approximation suivante pour le taux différentiel $K_{\ell 4\gamma}$

$$
\begin{aligned}
d\Gamma_{K_{\ell 4\gamma}}^{\mathrm{IR}} \approx & -e^2 \ d\Gamma_{K_{\ell 4}} \ \frac{1}{8\pi^2} \Big\{ -4 - \tau(p_+, p_-, M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm}) + \tau(p_+, p_\ell, M_{\pi^\pm}, m_\ell) - \tau(p_-, p_\ell, M_{\pi^\pm}, m_\ell) \\
& -\tau(k, p_\ell, M_{K^\pm}, m_\ell) - \tau(p_+, k, M_{\pi^\pm}, M_{K^\pm}) + \tau(p_-, k, M_{\pi^\pm}, M_{K^\pm}) \Big\} \ln m_\gamma^2. \qquad (9.9)
\end{aligned}
$$

9.4 La divergence infra-rouge dans $d\Gamma_{K_{\ell 4}}$

Les diagrammes avec boucle de photon virtuel possédant une divergence infra-rouge sont ceux qui possèdent une fonction à trois points de la forme (C.22) avec tous les propagateurs sur couche de masse (C.24) ou une fonction à quatre points de la forme (C.32) avec trois des propagateurs sur couche de masse (C.33). Ces diagrammes sont résumés dans la figure (FIGURE 9.3).

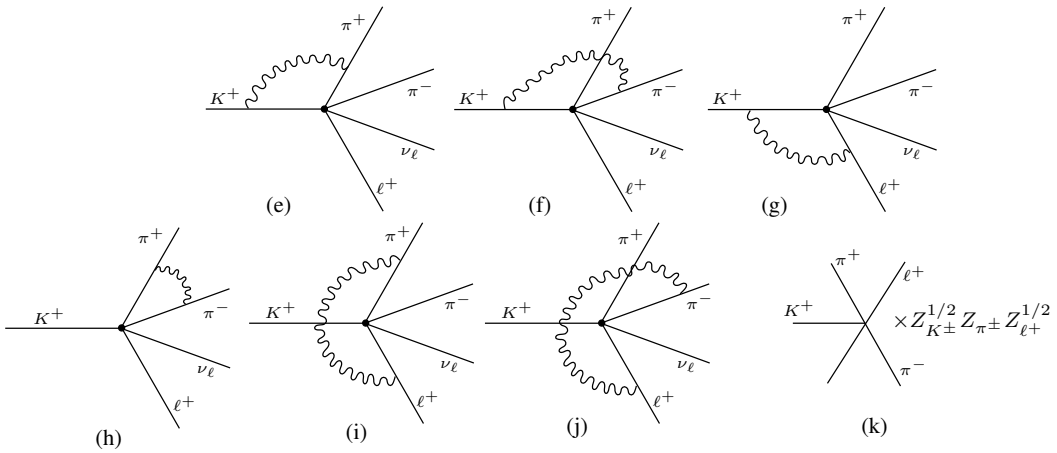


FIGURE 9.3: Liste des diagrammes comportant des divergences infra-rouges.

D'après les résultats (C.26), les valeurs des divergences infra-rouges provenant de ces diagrammes sont (dans l'ordre des diagrammes)

diagramme	$\delta F^{\rm IR} = \delta G^{\rm IR}$
(e)	$\frac{e^2}{16\pi^2}\tau(k, p_-, M_K, M_\pi)\ln m_\gamma^2$
(f)	$-\frac{e^2}{16\pi^2}\tau(k, p_+, M_K, M_\pi)\ln m_\gamma^2$
(g)	$-\frac{e^2}{16\pi^2}\tau(k, p_\ell, M_K, m_\ell)\ln m_\gamma^2$
(h)	$\frac{e^2}{16\pi^2}\tau(p_+, p_-, M_\pi, M_\pi)\ln m_\gamma^2$
(i)	$-\frac{e^2}{16\pi^2}\tau(p_+, p_\ell, M_\pi, m_\ell)\ln m_\gamma^2$
(j)	$\frac{e^2}{16\pi^2}\tau(p_-, p_\ell, M_\pi, m_\ell)\ln m_\gamma^2$
(k)	$-\frac{e^2}{4\pi^2}\ln m_\gamma^2$

avec

$$\tau(p_1, p_2, M_1, M_2) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} \ln\left\{\frac{p_1\cdot p_2 - \sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}{p_1\cdot p_2 + \sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}\right\}.$$

La dernière ligne de ce tableau représente la contribution infra-rouge pour les facteurs de forme F et G provenant de la renormalisation des champs dans le calcul des diagrammes de contre

termes (8.17).

Le taux de désintégration de $K_{\ell 4}$ est donné par

$$d\Gamma_{K_{\ell 4}} = \frac{(2\pi)^4}{2M_K} d\Phi \sum_{\text{spin}} |\mathcal{A}^{K_{\ell 4}}|^2$$

et d'après le résultat (4.13), nous avons

$$d\Gamma_{K_{\ell 4}} = \frac{(2\pi)^4}{2M_K} d\Phi \; 2G_F^2 V_{us}^{*\,2} \frac{1}{M_K^2} J_5(s_\pi, s_\ell, \theta_\pi, \theta_\ell, \phi). \tag{9.10}$$

Soient les facteurs de forme corrigés

$$F = \frac{M_K}{\sqrt{2}F_o}(1+\delta F) \quad \text{et} \quad G = \frac{M_K}{\sqrt{2}F_o}(1+\delta G). \tag{9.11}$$

D'après la formule (4.15), les seuls termes contribuant à la fonction J_5 et contenant les facteurs de forme F ou G sont

$$\begin{aligned} J_5 \equiv\; & |F|^2 \left[PL^2 - PN^2 - s_\pi s_\ell + m_\ell^2 s_\pi\right] + |G|^2 \left[QL^2 - QN^2 - Q^2 s_\ell + m_\ell^2 Q^2\right] \\ & + (F^*G + FG^*) \left[(PL)(QL) - (PN)(QN)\right]. \end{aligned}$$

D'après (9.11), nous avons

$$\begin{aligned} |F|^2 &= \frac{M_K^2}{2F_o^2}(1+2\,\delta F) \\ |G|^2 &= \frac{M_K^2}{2F_o^2}(1+2\,\delta G) \\ F^*G &= FG^* = \frac{M_K^2}{2F_o^2}(1+\delta F+\delta G). \end{aligned}$$

Or, nous avons trouvé que les corrections aux facteurs de forme F et G dans $K_{\ell 4}$ avaient la même partie infra-rouge

$$\delta F^{IR} = \delta G^{IR},$$

donc

$$\begin{aligned} J_5 &= \frac{M_K^2}{2F_o^2}\,(1+2\,\delta F^{IR}) \left\{PL^2 - PN^2 - s_\pi s_\ell + m_\ell^2 s_\pi + QL^2 - QN^2 - Q^2 s_\ell + m_\ell^2 Q^2 \right. \\ & \qquad \left. + (PL)(QL) - (PN)(QN)\right\} \\ &= \frac{M_K^2}{2F_o^2}\,(1+2\,\delta F^{IR}) \left\{16(p_+\cdot p_\ell)(p_+\cdot p_\nu) - 8M_\pi^2 p_\ell\cdot p_\nu\right\} \end{aligned}$$

et la formule (9.10) s'écrit

$$d\Gamma_{K_{\ell 4}} = \frac{(2\pi)^4}{M_K} d\Phi G_F^2 V_{us}^{*\,2} \frac{1}{2F_o^2}\,(1+2\,\delta F^{IR}) \left\{16(p_+\cdot p_\ell)(p_+\cdot p_\nu) - 8M_\pi^2 p_\ell\cdot p_\nu\right\}.$$

La partie divergente infra-rouge du taux de désintégration de $K_{\ell 4}$ est

$$d\Gamma_{K_{\ell 4}}^{\text{IR}} = \frac{(2\pi)^4}{M_K} d\Phi G_F^2 V_{us}^{*\,2} \frac{1}{2F_o^2}\,\left\{16(p_+\cdot p_\ell)(p_+\cdot p_\nu) - 8M_\pi^2 p_\ell\cdot p_\nu\right\}(\mathbf{2}\,\delta F^{IR}),$$

avec

$$\begin{aligned} PL^2 - PN^2 - s_\pi s_\ell &+ m_\ell^2 s_\pi + QL^2 - QN^2 - Q^2 s_\ell + m_\ell^2 Q^2 + 2(PL)(QL) - 2(PN)(QN) \\ &= 16(p_+ \cdot p_\ell)(p_+ \cdot p_\nu) - 8M_\pi^2 p_\ell \cdot p_\nu. \end{aligned}$$

La partie divergente infra-rouge du taux de désintégration de $K_{\ell 4\gamma}$ (9.9) lorsque l'on remplace $d\Gamma_{K_{\ell 4}}$ par sa formule donnée par (9.10) est

$$\begin{aligned} d\Gamma^{\rm IR}_{K_{\ell 4\gamma}} &= -e^2 \frac{(2\pi)^4}{M_K} d\Phi G_F^2 V_{us}^{*\,2} \frac{1}{2F_o^2} \left\{16(p_+ \cdot p_\ell)(p_+ \cdot p_\nu) - 8M_\pi^2 p_\ell \cdot p_\nu\right\} \frac{1}{8\pi^2} \Big\{ -4 \\ &\quad -\tau(p_+, p_-, M_{\pi^\pm}, M_{\pi^\pm}) + \tau(p_+, p_\ell, M_{\pi^\pm}, m_\ell) - \tau(p_-, p_\ell, M_{\pi^\pm}, m_\ell) \\ &\quad -\tau(k, p_\ell, M_{K^\pm}, m_\ell) - \tau(p_+, k, M_{\pi^\pm}, M_{K^\pm}) + \tau(p_-, k, M_{\pi^\pm}, M_{K^\pm}) \Big\} \ln m_\gamma^2. \end{aligned}$$

Nous trouvons finalement

$$d\Gamma^{\rm IR}_{K_{\ell 4}} + d\Gamma^{\rm IR}_{K_{\ell 4\gamma}} = 0.$$

Dans ce chapitre, nous avons calculé le taux différentiel de désintégration pour le processus $K_{\ell 4\gamma}$, car les processus $K_{\ell 4}$ ne peuvent pas être mesurés expérimentalement sans les contributions qui font intervenir les émission d'un nombre arbitraire de photons mous. Etant donné que l'énergie de ces photons peut être plus petite que la résolution du détecteur ΔE, dans les processus observés ces émissions de photons sont incluses.

Les divergences infra-rouges se compensent lorsque l'on somme les taux différentiels de désintégration des des différents processus, photon virtuel et photon émis.

Etant donné que nous serons interessés par la mesure d'observables (facteurs de forme, taux de désintégrations, déphasages $\cdots$) une soustraction des divergences infra-rouges sera nécessaire. Il existe une infinité de choix possibles pour cette soustraction. Nous choisirons le *schéma de soustraction minimale* qui consiste à supprimer de nos expressions analytiques tous les termes de la forme $\ln m_\gamma$.

Chapitre 10

Analyse numérique

Sommaire

10.1 Motivations et résultats obtenus **107**

10.2 Outils pour le numérique **108**

10.3 Taux à la limite d'isospin **110**

3.1 A l'ordre le plus bas 110

3.2 A l'ordre d'une boucle 111

10.4 Brisure d'isospin et corrections électromagnétiques **112**

10.5 Les facteurs de forme F et G **113**

5.1 Comportement en fonction de s_π 114

5.2 Comportement en fonction de s_ℓ 115

10.1 Motivations et résultats obtenus

Dans cette section, nous rappelons les principaux résultats obtenus dans l'étude des désintégrations $K_{\ell 4}$.

Nous avons obtenus les corrections de brisure d'isospin et d'électromagnétisme sur les facteurs de forme à l'ordre le plus bas de la théorie pour les trois désintégrations $K_{\ell 4}$ (4.1), (4.2) et (4.3). Les résultats sont résumés dans les TABLE 5.1, TABLE 5.2 et TABLE 5.3. Puis, nous nous sommes intéressés au canal chargé. Comme nous l'avons précisé dans l'introduction de ce manuscrit de thèse, les désintégrations $K_{\ell 4}$ donnent accès aux propriété des diffusions $\pi - \pi$ à basse énergie comme le déphasage $\pi - \pi$. Afin d'obtenir ce déphasage, des interférences entre les facteurs de forme sont nécessaires. Celles-ci peuvent être accessibles dans le canal chargé des désintégrations $K_{\ell 4}$, où les facteurs de forme F et G sont non nuls en même temps. De plus, le mode électronique du canal chargé $K_{\ell 4}$ est expérimentalement dominant

$$\frac{\Gamma_{K^+_{e4}}}{\Gamma_{K^+_{\mu 4}}} \sim 3.$$

Le facteur de forme R peut être ignoré dans le mode électronique puisque sa contribution est multipliée par la masse du lepton de l'état final. Cette approximation n'est évidemment pas valable dans le cas du mode muonique.

Nous avons calculé les diagrammes de Feynman à l'ordre d'une boucle et obtenu les formules analytiques des facteurs de forme F et G. Les résultats sont de la forme

$$\begin{aligned} X &= \frac{M_{K^\pm}}{\sqrt{2}F_\pi}\Big\{1 - 2\frac{{M_{\pi^\pm}}^2}{32\pi^2 F_\pi^2}\ln\frac{{M_{\pi^\pm}}^2}{\mu^2} - \frac{{M_{K^\pm}}^2}{32\pi^2 F_\pi^2}\ln\frac{{M_{K^\pm}}^2}{\mu^2} + \frac{4}{F_\pi^2}\big[({M_{\pi^\pm}}^2 + 2{M_{K^\pm}}^2)L_4 + {M_{\pi^\pm}}^2 L_5\big] \\ &\quad + \delta X_{e^2p^2} + \frac{1}{F_\pi^2}\,\delta X_{p^4}\Big\}, \end{aligned}$$

où X représente les facteurs de forme F ou G. Les corrections aux facteurs de forme à l'ordre d'une boucle sont données par deux termes: le premier, $\delta X_{e^2p^2}$, correspond à l'échange d'une photon virtuel entre deux particules chargées. Le second terme, δX_{p^4}, possède deux contributions: il contient les diagrammes avec boucle de méson (un ou deux vertex) mais aussi les contre-termes nécessaires à la renormalisation des divergences ultra-violettes provenant des diagrammes avec boucle de photon. Nous avons inclu la violation d'isospin et les effets électromagnétiques dans ces calculs. Nous avons montré comment les divergences ultra-violette et infra-rouge s'annulaient et cela nous a permis d'obtenir des résultats finis pour les facteurs de forme. Nous pouvons à présent donner une estimation des corrections dues à la brisure d'isospin et à l'électromagnétisme.

10.2 Outils pour le numérique

Les facteurs de forme calculés dans les diagrammes à une boucle de photon sont exprimés sous la forme d'une somme de fonctions à un, deux, trois et quatre points ainsi que des fonctions vectorielles et tensorielles associées. Nous avons besoin d'un *dictionnaire* qui donnera la valeur de ces différentes fonctions pour les régions cinématiques de la désintégration $K_{\ell 4}$. Un tel *dictionnaire* est disponible dans le langage de programmation *Mathematica*. Il s'agit du *package FeynCalc* [95]. Les données d'entrée de *FeynCalc* sont les expressions analytiques des diagrammes de Feynman dans notre cas, mais ce *package* peut aussi utiliser les données de sortie d'un autre *package FeynArts* qui produit les diagrammes associés à un processus. Le *package FeynCalc* est donc utilisé pour les étapes de calculs algébriques en physique des particules élémentaires. Les algorithmes présents dans ce *package* peuvent être trouvés dans [96] et [97]. Dans [97], nous trouvons la structure détaillée de *FeynCalc* ainsi que les définitions et conventions utilisées, comme l'algèbre de Dirac à D dimensions, la définition de la matrice γ_5, les équations de Dirac pour les fermions. Les intégrales scalaires et leurs décompositions vectorielle et tensorielles suivent la méthode de Passarino-Veltman. On note toutefois que la définition de ces intégrales est légèrement différente de celle utilisée dans [98]. Dans cette thèse, nous avons utilisé les mêmes définitions que dans [97] à un facteur $\frac{1}{16\pi^2}$ près, qui sera pris en compte lors de l'analyse numérique.

Le *package LoopTools* [99] évalue numériquement les intégrales scalaires et tensorielles de *FeynCalc*. Les intégrales scalaires proviennent des travaux de 't Hooft et Veltman [93]. Afin d'avoir un résultat cohérent, nous devons utiliser le même schéma pour la régularisation des divergences ultra-violettes et infra-rouges. Dans *LoopTools*, les divergences ultra-violettes sont régularisées dimensionnellement. L'annulation des divergences se vérifie via deux variables Δ et μ. La première variable représente la divergence provenant de la fonction à un point (C.3)

$$\begin{aligned} A(M^2) &= -2M^2\lambda - \mu_M \\ \mu_M &= \frac{M^2}{16\pi^2}\ln\frac{M^2}{\mu^2} && (10.1) \\ \lambda &= \frac{1}{16\pi^2}\Big\{\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2}\big[\ln(4\pi) + 1 - \gamma_E\big]\Big\}. && (10.2) \end{aligned}$$

Dans *LoopTools* cette variable est définie comme

$$\Delta \;=\; -2\Big(\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2}\big[\ln(4\pi) - \gamma_E\big]\Big)$$

et sa valeur initiale dans le programme est $\Delta = 0$, qui est la valeur du schéma de régularisation $\overline{\text{MS}}$. Dans notre travail, nous avons considéré le schéma de régularisation MS. Nous avons considéré dans nos calculs que la divergence ultra-violette était donnée par λ (C.8) ainsi lorsque $\lambda = 0$ cela correspond à $\Delta = -1$. La deuxième variable μ (10.1) correspond à un paramètre dont la dimension est celle d'une masse et joue le rôle d'une échelle de renormalisation qui permet aux intégrales à une boucle de garder la dimension en masse quelque soit la dimension D. La valeur initiale de μ est 1. Un résultat sans divergence ultra-violette ne doit pas dépendre des valeurs de Δ et μ. Afin de vérifier cela il suffit de calculer nos expressions avec deux valeurs pour Δ ou μ (ou les deux) et de vérifier que les résultats restent les mêmes. Comme μ contribue de façon logarithmique, nous devons le faire varier selon une grande échelle, typiquement de 1 à 10^{10}.

Pour les divergences infra-rouges, elles apparaîssent lors de l'échange de photon virtuel (boucle de photon). Ce genre de diagramme est divergent infra-rouge car le photon n'a pas de masse. Si le photon avait une masse m_γ, alors les termes divergents infra-rouge seraient proportionnels à $\ln m_\gamma$. Lorsque dans *LoopTools* une intégrale est divergente infra-rouge, *LoopTools* régularise automatiquement cette divergence avec une masse de photon m_γ mais traîte cette masse comme une quantité infinitésimale, ce qui signifie que les termes d'ordre m_γ^n avec $n \geq 1$ ne sont pas pris en compte. *LoopTools* ne garde que les termes en $\ln m_\gamma$. Dans *LoopTools* cette variable est notée λ (à ne pas confondre avec (C.8) qui décrit notre divergence ultra-violette) et vaut initialement $\lambda = 1$, puisqu'il correspond à la situation où $\ln m_\gamma$ est mis à 0. C'est ce que nous avons fait pour nos facteurs de forme, où les contributions au $\ln m_\gamma$ ont été compensées par le calcul du taux de désintégration de $K_{\ell 4}$ virtuel: $d\Gamma_{K_{\ell 4\gamma}}$. Ainsi dans notre programme nous devons implémenter la partie finie provenant du calcul de $d\Gamma_{K_{\ell 4\gamma}}$ qui est à rajouter au taux de désintégration $d\Gamma_{K_{\ell 4}}$ recherché.

Les constantes de basse énergie $L_i(\mu)$, $K_i(\mu)$ et $X_i(\mu)$ dépendent de la valeur de l'échelle de soustraction μ choisie. Nous utiliserons μ de l'ordre de la masse du méson ρ, c'est-à-dire $\mu = 770$MeV. Les valeurs phénoménologiques et les sources d'extraction des constantes L_i sont détaillées par

K_1	$=$	$-6.4\ 10^{-3}$						
K_2	$=$	$-3.1\ 10^{-3}$	L_1	$=$	$0.4\ 10^{-3}$			
K_3	$=$	$6.4\ 10^{-3}$	L_2	$=$	$1.35\ 10^{-3}$			
K_4	$=$	$-6.4\ 10^{-3}$	L_3	$=$	$-3.5\ 10^{-3}$	X_1	$=$	$6\ 10^{-3}$
K_5	$=$	$19.9\ 10^{-3}$	L_4	$=$	$-0.3\ 10^{-3}$	X_6	$=$	$6\ 10^{-3}$
K_6	$=$	$8.6\ 10^{-3}$	L_5	$=$	$1.4\ 10^{-3}$			
K_{12}	$=$	$-9.2\ 10^{-3}$	L_9	$=$	$6.9\ 10^{-3}$			

TABLE 10.1: Valeurs phénoménologiques pour les constantes à basse énergie.

Bijnens et al. dans [57]. Les valeurs de constantes K_i sont celles de Baur et Urech obtenues par des résonances avec une boucle de photon [100]. Les constantes X_i n'ont pas encore été déterminées, mais une analyse dimensionnelle naïve [101] permet de fixer leur borne $|X_i| \leq \frac{1}{16\ \pi^2}$. Afin d'être en accord avec cet encadrement, nous choisirons $X_1 = X_6 = 6.10^{-3}$.

Nous donnons les valeurs des taux de désintégration $K_{\ell 4}$ en s^{-1} pour différentes configurations. Nous avons posé par commodité $\hbar = c = 1$ et donc pour obtenir un taux en s^{-1} il faut diviser le

résultat par

$$\hbar = 6.582118 \times 10^{-22} \text{ MeV s.}$$

Nous donnons aussi les valeurs associées pour le taux de désintégration $K_{\ell 4\gamma}$. Nous utiliserons la sensibilité du détecteur lié à l'expérience Na48 dans laquelle l'énergie minimum de détection d'un photon dans le calorimètre est supérieure à 300 MeV [102].

Nous donnerons aussi les valeurs des rapports de branchement en %. Soit τ la durée de vie de la désintégration. Le rapport de branchement est défini comme

$$\frac{\Gamma_i}{\Gamma}$$

avec

$$\Gamma = \frac{1}{\tau}.$$

La durée de vie de la désintégration correspond à la durée de vie du méson chargé K^+

$$\tau_{K^+} = 1.2384\ 10^{-8} s.$$

10.3 Taux à la limite d'isospin

Si nous ne considérons pas les effets de la brisure d'isospin

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ m_u &= m_d \end{aligned}$$

Les masses des mésons à la limite d'isospin seront celles utilisées par Bijnens et al. [67, 84], c'est-à-dire par convention les masses chargées des particules

$$\begin{aligned} M_{\pi^\pm} &= M_{\pi^o} = M_\pi = 139.6\text{MeV} \\ M_{K^\pm} &= M_{K^o} = M_K = 493.6\text{MeV} \\ M_\eta &= 547.3\text{MeV} \end{aligned}$$

3.1 A l'ordre le plus bas

Nous considérons les facteurs de forme F, G et R à la limite d'isospin donné par les Table 5.1, Table 5.2 et Table 5.3, avec $\Delta_\pi = 0$, $1/R = 0$ et $e = 0$. A l'ordre le plus bas, le facteur de forme de l'anomalie H est nul. Le facteur de forme tensoriel T est nul car d'après (5.7) ce facteur de forme est d'origine purement électromagnétique. La Table 10.2 résume les valeurs des taux de désintégration $K_{\ell 4}$ ainsi que des rapport de branchement à la limite d'isospin. Dans la formule du taux de désintégration, le facteur de forme R est proportionnel à la masse du lepton m_ℓ. Dans le cas de l'électron ce facteur de forme n'affecte pas le taux de désintégration. Sa contribution ne représente que 4.10^{-2}%, tandis que dans le cas du muon il représente 10.4% de la valeur du taux de désintégration.

Mode i	Γ_i (s^{-1})	$\frac{\Gamma_i}{\Gamma}$	Γ_i [67, 84]	expérience[46]
K_{e4}	1292	1.6 10^{-5}	1297	3294
$K_{\mu 4}$	154.3	1.9 10^{-6}	155	1130

TABLE 10.2: Valeurs des taux de désintégration et des rapports de branchement à l'ordre le plus bas et à la limite d'isospin pour le canal chargé $K_{\ell 4}$. La troisième colonne donne les valeurs obtenues par Bijnens *et al.* [67, 84]. La quatrième colonne rappelle les valeurs expérimentales récentes [46].

3.2 A l'ordre d'une boucle

A l'ordre p^4, à la limite d'isospin, les facteurs de forme F et G proviennent des topologies de la FIGURE 10.1. A l'ordre p^4, le facteur de forme H apparaît. En l'absence de lagrangien traîtant la brisure d'isospin dans le secteur de l'anomalie, le facteur de forme H sera remplacé par sa valeur à la limite d'isospin calculée par Wess et Zumino [64]

$$H = -\frac{\sqrt{2}M_K^3}{8\pi^2 {F_\pi}^2}.$$

Cependant, le lagrangien de Wess et Zumino [64] ne comportant pas de terme de masse, les effets de l'électromagnétisme et de la brisure d'isospin se traduiront sur H par des effets d'ordre p^6 ce qui justifierait le fait de les ignorer à ce niveau du calcul. Le facteur de forme R ne sera pas considéré, car nous nous intéressons au canal électronique de la désintégration $K_{\ell 4}$. Le facteur de forme R est multiplié par la masse du lepton de l'état final. A l'ordre d'une boucle, la TABLE 10.3 donne le taux de désintégration $K_{\ell 4}$ chargé ainsi que le rapport de branchement. La contribution du facteur de forme H est négligeable ainsi que celle du facteur de forme R dans le canal électronique. Le taux de désintégration K_{e4} à l'ordre d'une boucle sans brisure d'isospin ni corrections électromagnétiques représente 73% de la valeur expérimentale. La contribution de l'ordre p^4 est de $1122s^{-1}$. Cette contribution est du même ordre de grandeur que l'approximation en arbre $1293s^{-1}$.

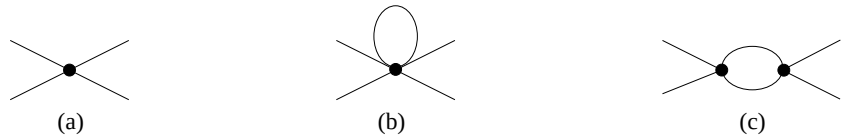


FIGURE 10.1: (a) Diagramme en arbre à une particule irréductible. (b) et (c) Diagrammes à une boucle à une particule irréductible. Les points représentent des vertex forts ou des insertions de courants. les lignes externes sont des mésons ou un courant faible. Les lignes internes sont des mésons.

Mode i	Γ_i (s^{-1})	$\frac{\Gamma_i}{\Gamma}$	Γ_i [67, 84]	expérience[46]
K_{e4}	2415	3 10^{-5}	2447†	3294

† Pour la quatrième colonne, Bijnens *et al.* ont utilisé des relations de dispersion pour obtenir les facteurs de forme F et G [67, 84].

TABLE 10.3: Taux de désintégration et rapport de branchement $K_{\ell 4}$ pour le mode chargé.

10.4 Brisure d'isospin et corrections électromagnétiques

Nous considérons dans cette section les effets de la violation d'isospin ainsi que les effets des corrections électromagnétiques au taux de désintégration K_{e4}. Les masses à la limite d'isospin pour le canal chargé, notées dans nos diagrammes par M_π et M_K, sont les masses des particules chargées $M_{\pi^\pm}$ et $M_{K^\pm}$ afin de garder la même convention que Bijnens *et al.* [67, 84]

$$\begin{aligned} M_\pi &= M_{\pi^\pm} = 139.6\text{MeV} \\ M_K &= M_{K^\pm} = 493.6\text{MeV}. \end{aligned}$$

Les masses des mésons et des leptons sont les masses physiques [46]

$$\begin{aligned} M_{\pi^\pm} &= 139.6\text{MeV} \\ M_{\pi^o} &= 135\text{MeV} \\ M_{K^\pm} &= 493.6\text{MeV} \\ M_{K^o} &= 497.6\text{MeV} \\ M_\eta &= 547.3\text{MeV} \\ m_e &= 0.511\text{MeV} \\ m_\mu &= 105.6\text{MeV}. \end{aligned}$$

Nous utiliserons les valeurs suivantes pour caractériser la brisure d'isospin (2.23)

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1.061 \times 10^{-2} \\ \Delta_\pi &= M^2_{\pi^\pm} - M^2_{\pi^o} = 1263.16\text{MeV}^2, \end{aligned} \tag{10.3}$$

et la charge électrique e définie dans la convention $\hbar = c = 1$ comme

$$e^2 = 4\pi\alpha$$

avec α la constante de structure fine $\alpha = \frac{1}{137}$. La valeur de ϵ utilisée (10.3) correspond à

$$R = 41.$$

La sensibilité du détecteur sera de 1 MeV (expérience Na48) [102]. Comme nous considérons les corrections radiatives dûes à l'échange d'un photon entre les particules chargées mises en jeu dans la désintégration, nous devons tenir compte de l'émission d'un photon réel ou désintégration $K_{e4\gamma}$. Nous avons montré [103] que les divergences infra-rouges s'annulent au niveau des taux différentiels de désintégration lorsque l'on considère l'émission d'un photon mou réel.

Les taux de désintégration K_{e4} et $K_{e4\gamma}$ (pour des photons d'énergie inférieure à 1 MeV) valent (le rapport de branchement sera donné entre parenthèses)

$$\begin{aligned} \Gamma_{K_{e4}+K_{e4\gamma,E_\gamma<1\text{MeV}}} &= 2475\ s^{-1} \quad (\frac{\Gamma_i}{\Gamma} = 3.13\ 10^{-5}) \\ \Gamma_{K_{e4\gamma,E_\gamma<1\text{MeV}}} &= 58\ s^{-1}\ . \end{aligned}$$

Sachant que la valeur expérimentale du taux de désintégration est de 3294 s^{-1}, le calcul à l'ordre d'une boucle représente 75% de la valeur mesurée. La correction à une boucle (1183 s^{-1}) est du même ordre de grandeur que la contribution de l'approximation en arbre (1292 s^{-1}).
Si on néglige uniquement les effets des corrections radiatives, c'est à dire que l'on pose $e = 0$, le taux de désintégration se limite à $2453 s^{-1}$. Les effets des corrections radiatives sont de l'ordre

de 0.9%.
Si on néglige uniquement les effets de la brisure d'isospin, le taux de désintégration se limite à $2436s^{-1}$. Les effets de la brisure d'isospin sont de l'ordre de 1.6%.

A ce niveau, nous pouvons discuter les résultats obtenus pour différentes valeurs des constantes de basse énergie X_1 et X_6 qui apparaîssent dans le lagrangien leptonique d'ordre p^4 [62]. La constante X_1 est présente dans les calculs des contre-termes et est multipliée par la charge électromagnétique, tandis que la constante X_6 provient de la renormalisation du champs leptonique.

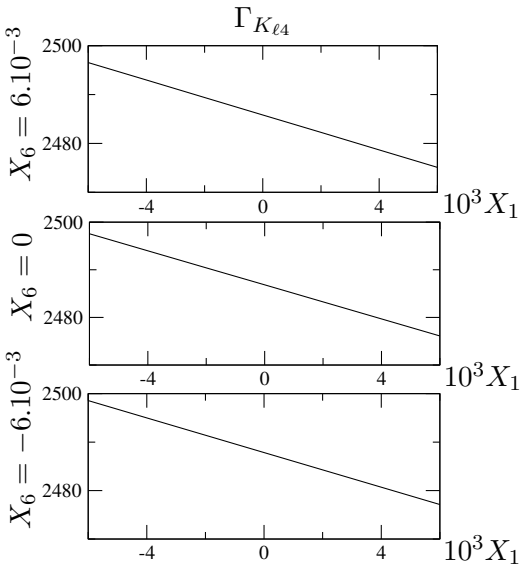


FIGURE 10.2: Taux de désintégration $K_{\ell 4}$ en fonction de la constante de basse énergie X_1 pour les valeurs $X_6 = -6.10^{-3}, 0$ et 6.10^{-3}.

La FIGURE 10.2 montre qu'il existe une faible dépendence du taux de désintégration $K_{\ell 4}$ par rapport à la constante de basse énergie X_1. Nous trouvons aussi que l'influence de X_6 est négligeable. Le taux de désintégration $K_{\ell 4}$ est compris dans l'intervalle

$$2475\text{s}^{-1} < \Gamma_{K_{e4}} < 2498\text{s}^{-1}.$$

10.5 Les facteurs de forme F et G

Nous avons vu (4.5) que les variables cinématiques de la désintégration $K_{\ell 4}$ varient dans les domaines suivants

$$\begin{aligned}
(M_1 + M_2)^2 &\leq s_\pi \leq (M_{K^\pm} - m_\ell)^2 \\
m_\ell^2 &\leq s_\ell \leq (M_{K^\pm} - \sqrt{s_\pi})^2 \\
0 &\leq \theta_\pi, \theta_\ell \leq \pi \\
0 &\leq \phi \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

Nous rappelons que les graphes ne sont dessinés que dans les domaines cinématiques autorisés par les désintégrations $K_{\ell 4}$.

5.1 Comportement en fonction de s_π

Les FIGURE 10.3 et FIGURE 10.4 donnent le comportement des parties réelles des facteurs de forme F et G ainsi que celui de leur modules en fonction de s_π. Nous fixons arbitrairement les variables cinématiques angulaires $\theta_\pi = \theta_l = \frac{\pi}{2}$ et $\phi = \pi$. Nous voyons dans ces différents

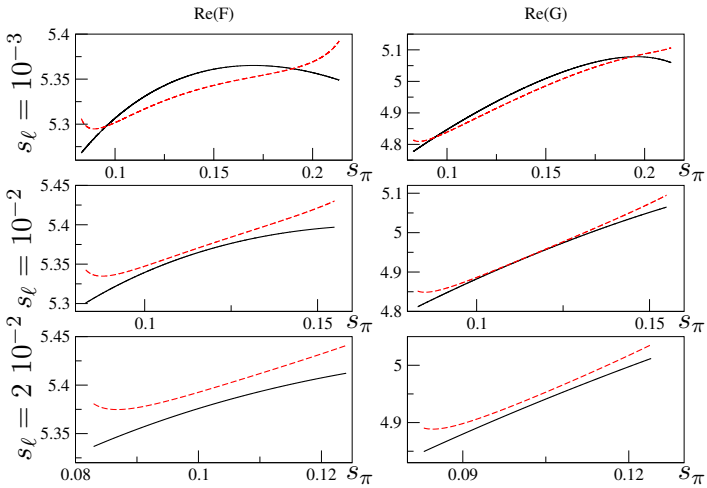


FIGURE 10.3: Parties réelles des facteurs de forme F et G en fonction de s_π pour les valeurs de $s_\ell = 10^{-3}, 10^{-2}$ et $2\ 10^{-2}$ GeV^2. Les lignes solides correspondent aux facteurs de forme F et G sans correction électromagnétique tandis que les lignes en pointillés incluent ces corrections. Les variables s_π et s_ℓ sont en GeV^2.

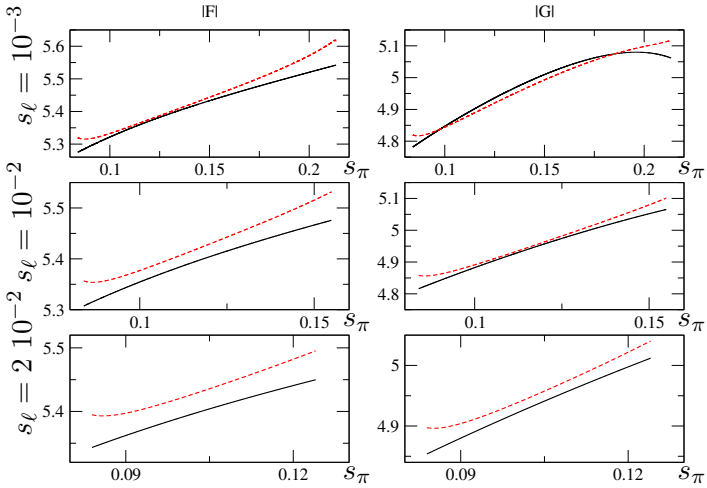


FIGURE 10.4: Modules des facteurs de forme F et G en fonction de s_π pour les valeurs de $s_\ell = 10^{-3}, 10^{-2}$ et $2\ 10^{-2}$ GeV^2. Les lignes solides correspondent aux facteurs de forme F et G sans correction électromagnétique tandis que les lignes en pointillés incluent ces corrections. Les variables s_π et s_ℓ sont en GeV^2.

graphes qu'il existe une courbure pour les deux facteurs de forme lorsque nous ne considérons pas les corrections radiatives. Cette courbure est plus importante pour le facteur de forme F. Les

contributions à F et G provenant des constantes de basse énergie d'ordre p^4 (L_i, K_i et X_i) sont linéaires dans les variables cinématiques donc les courbures présentes sont dues aux diagrammes à une boucle purement QCD. La FIGURE 10.5 montre que le facteur de forme F a l'allure d'un

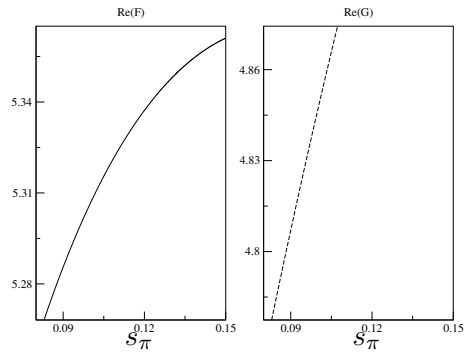


FIGURE 10.5: Les facteurs de forme F et G en fonction de s_π pour la valeur de $s_\ell = 10^{-3}\text{GeV}^2$. F et G sont les facteurs de forme sans correction électromagnétique. La variable s_π est en GeV^2.

polynôme du second degré tandis que le facteur de forme G a l'allure d'une fonction linéaire en s_π.

5.2 Comportement en fonction de s_ℓ

La FIGURE 10.6 donne le comportement des parties réelles des facteurs de forme F et G ainsi que celui de leur modules en fonction de s_ℓ. Nous fixons arbitrairement les variables cinématiques angulaires $\theta_\pi = \theta_l = \frac{\pi}{2}$ et $\phi = \pi$. La dépendence par rapport à la variable s_ℓ est minuscule et toute courbure peut être négligée.

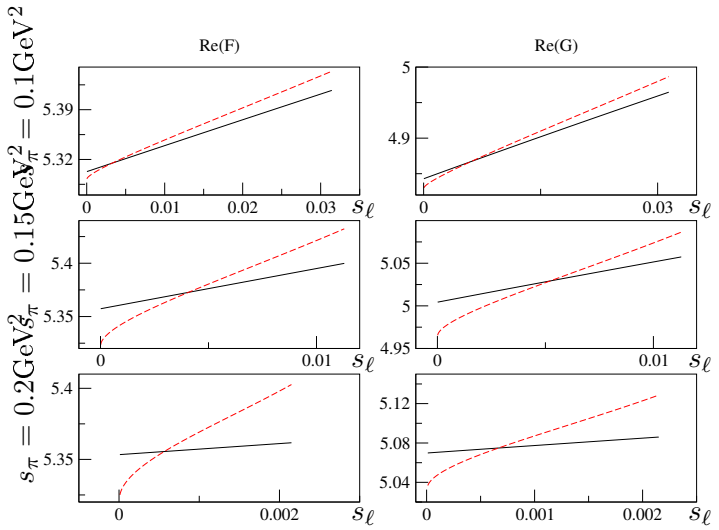


FIGURE 10.6: Les facteurs de forme F et G en fonction de s_ℓ pour les valeurs de $s_\pi = 0.1, 0.15$ et 0.2 GeV^2. Les lignes solides correspondent aux facteurs de forme F et G sans correction électromagnétique tandis que les lignes en pointillés incluent ces corrections. La variable s_ℓ est en GeV^2.

Conclusions et perspectives

Dès 1957 [34, 35], les physiciens ont montré un intérêt particulier pour les désintégrations $K_{\ell 4}$. En effet, l'analyse de ce mode de désintégration donne des informations sur les interactions faible et forte. Le mode de désintégration $K^+ \to \pi^+\pi^-e^+\nu_e$ a été observé expérimentalement en 1962 [38] auprès du Bevatron au Lawrence Radiation Laboratory. Les premières expériences K_{e4} [39, 40, 41, 42, 43] n'ont observé chacunes que quelques centaines d'événements et il a fallu attendre 1977 lorsque la collaboration Genève-Saclay [44] a mesuré le rapport de branchement de K_{e4} avec un lot de 30000 événements. Depuis, il n'y a pas eu de nouvelles données accessibles jusqu'à l'expérience E865 à Brookhaven en 2001 où 400000 événements K_{e4} ont été collectés [13, 14]. L'article de Rosselet *et al.* reste la référence en matière d'analyse expérimentale de $K_{\ell 4}$.

Les désintégrations semi-leptoniques $K_{\ell 4}$ faisant intervenir des mésons légers, elles se situent dans un domaine de basse énergie ($\sim$ GeV). La théorie de l'interaction forte ne peut donc pas être utilisée car une approche perturbative en fonction de la constante de couplage fort n'est pas possible. Il a fallu s'intéresser aux symétrie de la QCD et c'est l'avènement de la théorie des perturbations chirale [22, 23, 24] qui a permis la construction de la théorie effective qui prend en compte les propriétés de QCD à basse énergie. Les pions et les kaons sont actuellement compris comme résultant de la brisure dynamique d'une symétrie approchée de la chromo-dynamique quantique, la symétrie chirale.

De nombreux travaux sur les désintégrations $K_{\ell 4}$ [74, 75, **?**, 84, 67, 68] ont été obtenus en négligeant tous les effets de brisure d'isospin, c'est-à-dire dans la limite $m_u = m_d$ et $e = 0$. Les effets de la brisure d'isospin dûs une différence de masse des quarks légers non-nulle sont contenus dans le lagrangien effectif chiral, mais le traîtement de la violation d'isospin d'origine électromagnétique (différence de masse entre les mésons chargés et neutres) dans les réactions semi-leptoniques nécessite une extension de la théorie des perturbations chirale. Le photon ainsi que les leptons légers doivent être inclus explicitement comme degrés de liberté. Nous avons donc considéré les désintégrations $K_{\ell 4}$ dans le cadre de la théorie des perturbations chirale basée sur un lagrangien effectif dont les degrés de liberté ne sont pas uniquement les mésons pseudo-scalaires mais aussi les leptons légers et le photon [62].

Il existe de nombreuses expériences de basse énergie et de haute précision sur ces désintégrations comme E865 [13, 14], DaΦne [15], Na48/2 [16] et KTeV [17], visant à mesurer ces modes avec une précision jamais atteinte auparavant, grâce à une augmentation considérable de la statistique. L'exploitation de ces données de haute précision rend incontournable la nécessité de contrôler d'une manière quantitative les effets "indésirables", parmi eux les corrections radiatives.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés aux effets des corrections électromagnétiques pour les désintégrations $K_{\ell 4}$. Deux types de contributions électromagnétiques sont à considérer. Le premier type concerne les échanges de photons virtuels. Le second type, qui se traduit par des contre-termes locaux, décrit la partie non-perturbative des interactions entre mésons et photons.

Nous avons aussi considérées les effets de la brisure d'isospin. Ils proviennent de la différence de masses entre les mésons chargés et neutres et génèrent des corrections proportionnelles à la constante de structure fine α et de la différence entre les masses des quarks légers, $m_u - m_d$.

Dans une première partie, nous nous sommes intéressé aux processus $K_{\ell 4}$ à l'ordre le plus bas. Nous avons étudié les effets de la brisure d'isospin et de l'électromagnétisme dans les canaux chargé (4.1), neutre (4.2) et mixte (4.3). Nous avons conclu que ces différents effets n'affectaient que les canaux neutre et mixte de l'ordre de, respectivement, 8 % et -2 %. De plus, par comparaison avec les valeurs expérimentales des taux de désintégration, nous avons trouvé que pour les canaux chargé, neutre et mixte respectivement, l'approximation en arbre ne représente que 39.2%, 42.7% et 55% du taux de désintégration mesuré expérimentalement (pour le mode électronique). Pour le mode muonique, la seule valeur expérimentale disponible étant celle du canal chargé, l'approximation en arbre pour ce mode ne représente que 13.5% du taux de désintégration mesuré expérimentalement. Le calcul en arbre n'étant pas suffisant pour expliquer les mesures expérimentales, nous devons calculer les contributions à l'ordre d'une boucle en incluant les effets des corrections radiatives (échange de photon virtuel) ainsi que les effets de la brisure d'isospin.

Dans une deuxième partie, nous donnons les expressions analytiques ultra-violette finies des facteurs de forme F et G associés à l'amplitude du processus $K_{\ell 4}$ dans le mode chargé (4.1). Les divergences infra-rouge s'annulent au niveau des taux de désintégration lorsque l'on considère le processus $K_{\ell 4\gamma}$ où un photon est émis avec une énergie inférieure à la sensibilité du détecteur, puisque si le photon émis a une énergie inférieure à la résolution du détecteur, les désintégrations radiatives et non-radiatives ne peuvent pas être distinguées expérimentalement. Nous donnons une analyse numérique des effets de la brisure d'isospin et des corrections électromagnétiques. Nous avons trouvé que le calcul à l'ordre d'une boucle représente 75% de la valeur mesurée. La correction à une boucle est du même ordre de grandeur que la contribution de l'approximation en arbre. Les effets des corrections radiatives sont de l'ordre de 0.9% tandis que ceux de la brisure d'isospin sont de l'ordre de 1.6%.

Perspectives

Ce travail de thèse doit être complété par un traîtement complet de la désintégration $K_{e4\gamma}$. Un K_{e4} avec un photon non-détecté n'est pas très différent d'un $K_{e4\gamma}$. Diamant-Berger [45] a estimé que le rapport des événements K_{e4} sur les événements $K_{e4\gamma}$ pour des photons d'énergie supérieure à 30 MeV[19] était de

$$\frac{\Gamma_{K_{e4\gamma}, E_\gamma > 30 MeV}}{\Gamma_{K_{e4}}} \sim 1.0 \pm 0.5\%.$$

Un générateur d'événements qui génère les 0, 1, n photons est l'idéal pour un expérimentateur. Ce générateur peut servir pour étudier les effets possibles sur l'acceptance dans le détecteur ainsi que pour l'analyse des données. Les corrections aux facteurs de forme présentées dans ce travail de thèse sont une indication précieuse sur les effets possibles.

[19] Dans l'expérience de Diamant-Berger, le kaon avait une impulsion de 2.8 GeV. La valeur 30 MeV est calculée dans le centre de masse du kaon.

Chapitre 11

Formulaire

Sommaire

11.1 Gammalogie **119**
11.2 Intégrale à D dimensions **119**
11.3 La fonction Gamma **119**
11.4 Paramétrisation de Feynman **120**
11.5 Formulaire d'intégrales - intégration par parties **120**

11.1 Gammalogie

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= D \\ \gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu &= (2-D)\gamma^\nu \\ \gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu &= 4p\cdot q - (4-D)\not{p}\not{q} \end{aligned} \tag{11.1}$$

11.2 Intégrale à D dimensions

Sachant que

$$\int d^D q = \int_0^\infty d\rho \rho^{D-1} \int_0^\pi d\theta_{D-1} (\sin\theta_{D-1})^{D-2} \ldots \int_0^\pi d\theta_2 \sin\theta_2 \int_0^{2\pi} d\theta_1$$

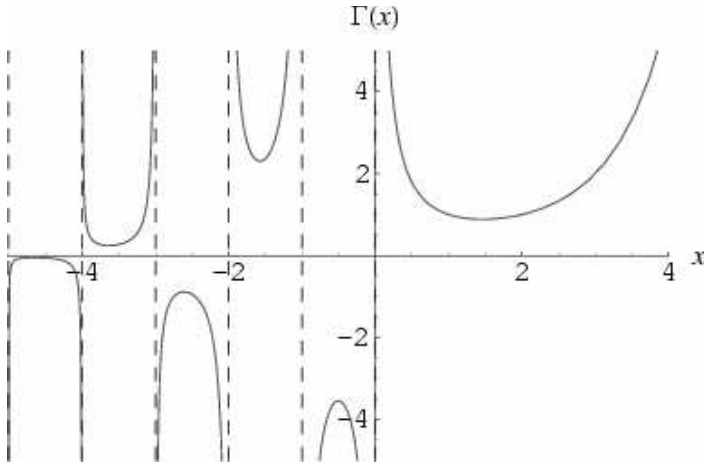
$$\int_0^\pi d\theta (\sin\theta)^m = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(\frac{m+2}{2})}$$

Alors

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^{2r}}{(q^2+M^2)^s} = \frac{1}{(16\pi^2)^{D/4}} (M^2)^{r-s+\frac{D}{2}} \frac{\Gamma(r+\frac{D}{2})\Gamma(s-r-\frac{D}{2})}{\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(s)} \tag{11.2}$$

11.3 La fonction Gamma

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \int_0^\infty dt\ t^{z-1} \exp^{-t} \quad \text{avec} \quad Re(z) > 0 \quad \text{pour la convergence en 0.} \\ z\Gamma(z) &= \Gamma(z+1) \rightarrow \quad \text{prolongement analytique pour} \quad Re(z) < 0. \\ \Gamma(n) &= (n-1)! \quad \text{pour n entier} \end{aligned} \tag{11.3}$$



Une autre formule qui sera utile est

$$\Gamma(-n+\epsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\Big\{\frac{1}{\epsilon}+\Psi(n+1)+\frac{\epsilon}{2}\big[\frac{\pi^2}{3}+\Psi^2(n+1)-\Psi'(n+1)\big]+\mathcal{O}(\epsilon^2)\Big\} \quad (11.4)$$

Avec

$$\begin{aligned}
\Psi(z) &= \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \\
\Psi(n+1) &= 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\gamma_E \\
\Psi'(n+1) &= \frac{\pi^2}{6}-\big(1+frac12^2+\cdots+\frac{1}{n^2}\big) \\
\Psi(1) &= -\gamma_E \approx 0.5772 \quad \text{(constante d'Euler)}
\end{aligned}$$

11.4 Paramétrisation de Feynman

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_1^{\alpha_1}\dots A_n^{\alpha_n}} &= \frac{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_n)}\int_0^1 dx_1\dots\int_0^1 dx_n\delta(1-\sum_{i=1}^n x_i) \\
&\quad \frac{x_1^{\alpha_1-1}\dots x_n^{\alpha_n-1}}{(x_1A_1+\dots x_nA_n)^{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}} \qquad (11.5)
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx\frac{1}{[ax+b(1-x)]^2} \qquad (11.6)$$

$$\frac{1}{abc} = \int_0^1 dx\int_0^1 dy\frac{2y}{\{y[xA+(1-x)B]+(1-y)C\}^3} \qquad (11.7)$$

11.5 Formulaire d'intégrales - intégration par parties

On utilisera les résultats de [104]

$$\int\frac{Ax+B}{ax^2+2bx+c}dx = \frac{A}{2a}\ln C(ax^2+2bx+c)+\frac{aB-bA}{a}\int\frac{dx}{ax^2+2bx+c} \qquad (11.8)$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{ax^2+2bx+c} &= \frac{1}{2\sqrt{b^2-ac}} \ln C_1 \frac{ax+b-\sqrt{b^2-ac}}{ax+b+\sqrt{b^2-ac}} && \text{lorsque} \quad b^2-ac>0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} \arctan \frac{ax+b}{\sqrt{ac-b^2}} + C_2 && \text{lorsque} \quad b^2-ac<0 \\
&= -\frac{1}{ax+b} + C_3 && \text{lorsque} \quad b^2-ac=0
\end{aligned}
$$

Appendice A

Les constantes de structure de $SU(3)$

Les générateurs du groupe de symétrie $SU(3)$ satisfont les relations de commutation suivantes

$$[Q^a, Q^b] = i\ f^{abc}\ Q^c$$

Les constantes de structure f^{abc} sont totalement antisymétriques dans les indices. Les constantes non nulles sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
&f^{123} = 1 \\
&f^{147} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{156} = -f^{367} = \frac{1}{2} \\
&f^{458} = f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Il existe des relations d'anticommutations associées aux matrices de Gell- Mann, qui sont une base de l'algèbre de Lie de $SU(3)$

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3}\delta_{ij} + 2d_{ijk}\lambda_k$$

Il apparaît des facteurs totalement symétriques d_{ijk}, dont les seuls non nuls sont

$$\begin{aligned}
&d_{118} = d_{228} = d_{338} = -d_{888} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
&d_{146} = d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = \frac{1}{2} \\
&d_{448} = d_{558} = d_{668} = d_{778} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Appendice B

La cinématique

Dans le référentiel de repos (Σ_K) du kaon qui se désintègre, nous avons

$$k = (M_K, \vec{0}) \qquad (p_1 + p_2) = (\sqrt{s_\pi + \vec{P}^2}, \vec{P}) \qquad (p_\ell + p_\nu) = (\sqrt{s_\ell + \vec{P}^2}, -\vec{P})$$

avec

$$\begin{aligned} |\vec{P}| &= \frac{\lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)}{2M_K} \\ \vec{P} &= |\vec{P}|(1,0,0) \end{aligned}$$

Dans le référentiel de repos (Σ_π) de la paire de pions de l'état final

$$p_1 = (\sqrt{M_1^2 + \vec{p}^2}, \vec{p}) \qquad p_2 = (\sqrt{M_2^2 + \vec{p}^2}, -\vec{p})$$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= |\vec{p}|(\cos\theta_\pi, \sin\theta_\pi, 0) \\ |\vec{p}| &= \frac{\lambda^{1/2}(s_\pi, M_1^2, M_2^2)}{2\sqrt{s_\pi}} \end{aligned}$$

La transformation de Lorentz de (Σ_π) à (Σ_K): $(\Lambda_{\pi K})^\mu{}_\nu$ doit être telle que

$$(\Lambda_{\pi K}) \begin{pmatrix} \sqrt{s_\pi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_K^2 + s_\pi - s_\ell}{2M_K} \\ \frac{\lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)}{2M_K} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\Lambda_{\pi K} = \begin{pmatrix} \frac{M_K^2 + s_\pi - s_\ell}{2M_K\sqrt{s_\pi}} & \frac{\lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)}{2M_K\sqrt{s_\pi}} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)}{2M_K\sqrt{s_\pi}} & \frac{M_K^2 + s_\pi - s_\ell}{2M_K\sqrt{s_\pi}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans le référentiel de repos (Σ_ℓ) de la paire de leptons de l'état final

$$p_\ell = (\sqrt{m_\ell^2 + \vec{L}^2}, \vec{L}) \qquad p_\nu = (\sqrt{m_\ell^2 + \vec{L}^2}, -\vec{L})$$

$$\begin{aligned} |\vec{L}| &= \frac{s_\ell - m_\ell^2}{2\sqrt{s_\ell}} \\ \vec{L} &= |\vec{L}|(-\cos\theta_\ell, \sin\theta_\ell, 0) \end{aligned}$$

La transformation de Lorentz de (Σ_ℓ) à (Σ_K) : $(\Lambda_{\ell K})^\mu{}_\nu$ doit être un *boost* suivi d'une rotation d'angle $-\phi$ autour de l'axe $0x$, telle que

$$(\Lambda_{\ell K}) \begin{pmatrix} \sqrt{s_\ell} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{M_K^2+s_\ell-s_\pi}{2M_K} \\ -\frac{\lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)}{2M_K} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\Lambda_{\ell K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{M_K^2+s_\ell-s_\pi}{2M_K\sqrt{s_\ell}} & -\frac{\lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)}{2M_K\sqrt{s_\ell}} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)}{2M_K\sqrt{s_\ell}} & \frac{M_K^2+s_\ell-s_\pi}{2M_K\sqrt{s_\ell}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{M_K^2+s_\ell-s_\pi}{2M_K\sqrt{s_\ell}} & -\frac{\lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)}{2M_K\sqrt{s_\ell}} & 0 & 0 \\ -\frac{\lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)}{2M_K\sqrt{s_\ell}} & \frac{M_K^2+s_\ell-s_\pi}{2M_K\sqrt{s_\ell}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Dans le référentiel (Σ_K), toutes les impulsions s'écrivent

$$k^\mu = (M_K, 0, 0, 0)$$

$$p_1^\mu = \tfrac{1}{4M_K s_\pi} \Big((M_K^2+s_\pi-s_\ell)(s_\pi+M_1^2-M_2^2) + \lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)\lambda^{1/2}(s_\pi,M_1^2,M_2^2)\cos\theta_\pi, \\ \lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)(s_\pi+M_1^2-M_2^2) + \lambda^{1/2}(s_\pi,M_1^2,M_2^2)(M_K^2+s_\pi-s_\ell)\cos\theta_\pi, \\ 2M_K\sqrt{s_\pi}\lambda^{1/2}(s_\pi,M_1^2,M_2^2)\sin\theta_\pi, 0 \Big)$$

$$p_2^\mu = \tfrac{1}{4M_K s_\pi} \Big((M_K^2+s_\pi-s_\ell)(s_\pi+M_2^2-M_1^2) - \lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)\lambda^{1/2}(s_\pi,M_1^2,M_2^2)\cos\theta_\pi, \\ \lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)(s_\pi+M_2^2-M_1^2) - \lambda^{1/2}(s_\pi,M_1^2,M_2^2)(M_K^2+s_\pi-s_\ell)\cos\theta_\pi, \\ -2M_K\sqrt{s_\pi}\lambda^{1/2}(s_\pi,M_1^2,M_2^2)\sin\theta_\pi, 0 \Big)$$

Alors nous déduisons les produits scalaires invariants de Lorentz suivant

$$\begin{aligned}
(p_1+p_2)^2 &= s_\pi \quad (\equiv P^2) \\
(p_1-p_2)^2 &= \frac{(M_1^2-M_2^2)^2}{s_\pi} - \frac{\lambda(s_\pi,M_1^2,M_2^2)}{s_\pi} \quad (\equiv Q^2) \\
(p_1+p_2)(p_1-p_2) &= M_1^2-M_2^2 \quad (\equiv PQ) \\
(p_1+p_2)(k-p_1-p_2) &= \frac{1}{2}(M_K^2-s_\pi-s_\ell) \quad (\equiv PL) \\
(p_1-p_2)(k-p_1-p_2) &= \frac{M_1^2-M_2^2}{2s_\pi}(M_K^2-s_\pi-s_\ell) + \frac{\lambda^{1/2}(s_\pi,M_1^2,M_2^2)\lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)}{2s_\pi}\cos\theta_\pi \\
&\quad (\equiv QL)
\end{aligned}$$

De plus, nous obtenons pour les impulsions leptoniques

$$p_\ell^\mu = \tfrac{1}{4M_K s_\ell} \Big((M_K^2+s_\ell-s_\pi)(s_\ell+m_\ell^2) + \lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)(s_\ell-m_\ell^2)\cos\theta_\ell, \\ -\lambda^{1/2}(M_K^2,s_\pi,s_\ell)(s_\ell+m_\ell^2) - (s_\ell-m_\ell^2)(M_K^2+s_\ell-s_\pi)\cos\theta_\ell, \\ 2M_K\sqrt{s_\ell}(s_\ell-m_\ell^2)\cos\phi\sin\theta_\ell, -2M_K\sqrt{s_\ell}(s_\ell-m_\ell^2)\sin\phi\sin\theta_\ell \Big)$$

$$p^\mu_{\nu_\ell} = \frac{1}{4M_K s_\ell} \quad \Big((M_K^2 + s_\ell - s_\pi)(s_\ell - m_\ell^2) - \lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)(s_\ell - m_\ell^2)\cos\theta_\ell,$$
$$-\lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)(s_\ell - m_\ell^2) + (s_\ell - m_\ell^2)(M_K^2 + s_\ell - s_\pi)\cos\theta_\ell,$$
$$-2M_K\sqrt{s_\ell}(s_\ell - m_\ell^2)\cos\phi\sin\theta_\ell,\ 2M_K\sqrt{s_\ell}(s_\ell - m_\ell^2)\sin\phi\sin\theta_\ell\Big)$$

Alors

$$\begin{aligned}
(p_\ell + p_{\nu_\ell})^2 &= s_\ell \quad (\equiv L^2) \\
(p_\ell - p_{\nu_\ell})^2 &= 2m_\ell^2 - s_\ell \quad (\equiv N^2) \\
(p_\ell + p_{\nu_\ell})(p_\ell - p_{\nu_\ell}) &= m_\ell^2 \quad (\equiv LN) \\
(k - p_\ell - p_{\nu_\ell})(p_\ell - p_{\nu_\ell}) &= \frac{m_\ell^2}{2s_\ell}(M_K^2 - s_\pi - s_\ell) + (1 - \frac{m_\ell^2}{s_\ell})\frac{1}{2}\lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)\cos\theta_\ell \quad (\equiv PN) \\
(p_1 - p_2)(p_\ell - p_{\nu_\ell}) &= \frac{m_\ell^2(M_1^2 - M_2^2)}{2s_\pi s_\ell}(M_K^2 - s_\pi - s_\ell) \\
&\quad + \frac{m_\ell^2}{2s_\pi s_\ell}\lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)\lambda^{1/2}(s_\pi, M_1^2, M_2^2)\cos\theta_\pi \\
&\quad + \frac{(M_1^2 - M_2^2)(s_\ell - m_\ell^2)}{2s_\pi s_\ell}\lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)\cos\theta_\ell \\
&\quad + \frac{\lambda^{1/2}(s_\pi, M_1^2, M_2^2)(s_\ell - m_\ell^2)}{2s_\pi s_\ell}\cos\theta_\pi\cos\theta_\ell(M_K^2 - s_\pi - s_\ell) \\
&\quad - \frac{\lambda^{1/2}(s_\pi, M_1^2, M_2^2)(s_\ell - m_\ell^2)}{\sqrt{s_\pi s_\ell}}\sin\theta_\pi\sin\theta_\ell\cos\phi \quad (\equiv QN) \\
\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}L^\mu N^\nu P^\rho Q^\sigma &= \epsilon_{0123}\ [(p_1 + p_2)^0(p_\ell + p_\nu)^1 - (p_1 + p_2)^1(p_\ell + p_\nu)^0] \\
&\quad \times[(p_\ell - p_\nu)^2(p_1 - p_2)^3 - (p_\ell - p_\nu)^3(p_1 - p_2)^2] \\
&= -\frac{\lambda^{1/2}(M_K^2, s_\pi, s_\ell)}{2}\sqrt{s_\pi s_\ell}\frac{\lambda^{1/2}(s_\pi, M_1^2, M_2^2)}{s_\pi}(1 - \frac{m_\ell^2}{s_\ell})\sin\theta_\pi\sin\theta_\ell\sin\phi \\
&\quad (\equiv < LNPQ >)
\end{aligned}$$

Appendice C

Les fonctions

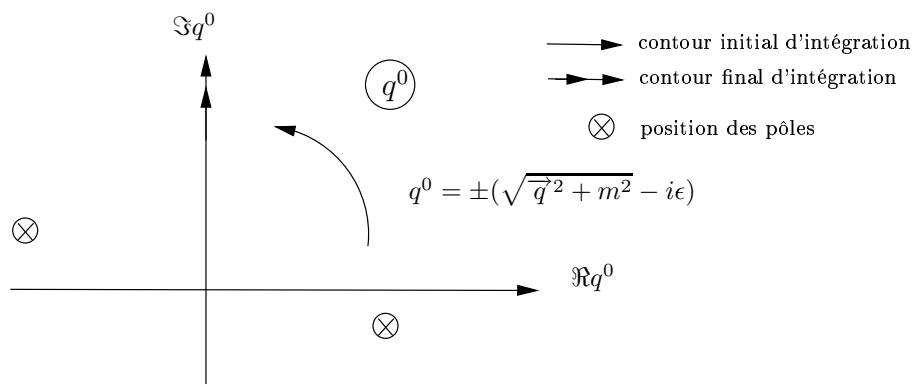
C.1 La fonction à un point

$$\{A, A^\mu, A^{\mu\nu}\}(M^2) = -i\mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{\{1, q^\mu, q^{\mu\nu}\}}{(p-q)^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Cette intégrale se comporte comme $\int dq\ q^{D-1} q^{-2}$ et donc converge si $D < 2$.

On remplace les intégrales en quatre dimensions par des intégrales en dimension $D = 4 - \epsilon$ quelconque. On cherche dans quel domaine de D cette intégrale converge, puis on fait le prolongement analytique vers $D = 4$, D étant une variable continue.

L'intégrale à D dimensions se décompose comme $dq^0 d^{D-1}\overrightarrow{q}$. L'intégrale sur q^0 est de $-\infty$ à $+\infty$. La première étape consiste à faire une rotation de Wick pour remplacer l'intégration sur l'axe réel par l'intégration sur l'axe imaginaire, car on ne rencontre pas de pôle lorsque l'on fait la rotation de Wick. Ainsi, nous obtenons les transformations suivantes



$$\begin{aligned} q^\mu(q^0, q^1, \ldots, q^{D-1}) &\quad \rightarrow \quad \tilde{q}^\mu(\mathbf{iq^0}, \mathbf{q^1}, \ldots, \mathbf{q^{D-1}}) \\ q^2 &\quad \rightarrow \quad -\tilde{q}^2 \\ d^D q &\quad \rightarrow \quad i d^D \tilde{q} \end{aligned} \tag{C.1}$$

La fonction à un point s'écrit à présent (après changement de variable $q - p \rightarrow q$) comme

$$A(M^2) = -\mu^{4-D} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p-q)^2 + M^2}.$$

On utilise la formule (11.2) et on trouve

$$A(M^2) = -\mu^{4-D}\ \frac{(M^2)^{\frac{D}{2}-1}}{(16\pi^2)^{D/4}}\ \Gamma(1 - \frac{D}{2})$$

Sachant que $D = 4 - \epsilon$, nous réécrivons la formule précédente comme

$$A(M^2) = -\frac{M^2}{(4\pi^2)}\Big(\frac{4\pi\mu^2}{M^2}\Big)^{\epsilon/2}\Gamma(\frac{\epsilon}{2} - 1).$$

D'après la relation (11.4), nous trouvons

$$A(M^2) \quad = \quad -\frac{M^2}{16\pi^2}\Big\{-\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma_E - \ln(4\pi) + \ln\frac{M^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon)\Big\}. \tag{C.2}$$

Nous écrirons par la suite la fonction à un point comme

$$\begin{aligned} A(M^2) &= -2M^2\lambda - \mu_M \\ \mu_M &= \frac{M^2}{16\pi^2}\ln\frac{M^2}{\mu^2} \\ \lambda &= \frac{1}{16\pi^2}\Big\{\frac{1}{D-4} - \frac{1}{2}\big[\ln(4\pi) + 1 - \gamma_E\big]\Big\}. \end{aligned} \tag{C.3}$$

Remarque:
La limite suivante sera utilisée dans le calcul de certains diagrammes

$$\lim_{M_1^2 \to M_2^2}\frac{A(M_1^2) - A(M_2^2)}{M_1^2 - M_2^2} \quad = \quad \frac{A(M^2)}{M^2} - \frac{1}{16\pi^2}. \tag{C.4}$$

C.2 La fonction à deux points

2.1 La fonction scalaire

$$B(p; M_1^2, M_2^2) = -i\mu^{4-D}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{1}{(q^2 - M_1^2)[(p-q)^2 - M_2^2]} \tag{C.5}$$

Après paramétrisation de Feynman (11.6), nous obtenons

$$\begin{aligned} B(p; M_1^2, M_2^2) &= -i\mu^{4-D}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\int_0^1 dx_1\int_0^1 dx_2\delta(1 - [x_1 + x_2]) \\ &\quad \times\frac{1}{x_1(q^2 - M_1^2) + x_2[(p-q)^2 - M_2^2]} \\ &= -i\mu^{4-D}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\int_0^1 dx\frac{1}{\big[(q^2 - M_1^2)x + [(p-q)^2 - M_2^2](1-x)\big]} \\ &= -i\mu^{4-D}\int_0^1 dx\int\frac{d^D\tilde{q}}{(2\pi)^D}\frac{1}{(\tilde{q}^2 - R^2)^2} \\ R^2 &= M_2^2(1-x) + M_1^2x - xp^2(1-x) \\ \tilde{q} &= q - p(1-x) \end{aligned} \tag{C.6}$$

Après rotation de Wick (C.1) et utilisation de la formule (11.2), nous obtenons

$$B(p; M_1^2, M_2^2) \quad = \quad \int_0^1 dx\frac{1}{16\pi^2}(4\pi\mu^2)^{\epsilon/2}\Gamma(\frac{\epsilon}{2})\frac{1}{(R^2)^{\epsilon/2}}.$$

L'utilisation de la formule (11.4) donne

$$B(p; M_1^2, M_2^2) \quad = \quad \frac{1}{16\pi^2}\{\frac{2}{\epsilon} + \Gamma'(1) + \ln(4\pi) - \int_0^1 dx\ln\frac{R^2}{\mu^2}\}.$$

Il nous reste à évaluer l'intégrale

$$\int_0^1 dx\ln\frac{M_2^2(1-x) + M_1^2x - xp^2(1-x)}{\mu^2}.$$

L'argument du logarithme possède deux racines

$$x_\pm = \frac{-(M_1^2 - M_2^2 - p^2) \pm \lambda^{1/2}}{2p^2} \tag{C.7}$$

$$\lambda \equiv \lambda(M_1^2, M_2^2, p^2) = M_1^4 + M_2^4 + p^4 - 2M_1^2M_2^2 - 2M_1^2p^2 - 2M_2^2p^2 \tag{C.8}$$

La fonction $\lambda(M_1^2, M_2^2, p^2)$ est la fonction de Källén[20]. Plusieurs cas particuliers sont à noter

$$\begin{aligned} B(0; M_1^2, M_2^2) &= \frac{A(M_1^2) - A(M_2^2)}{M_1^2 - M_2^2} \\ B(0; M^2, M^2) &= \frac{A(M^2)}{M^2} - \frac{1}{16\pi^2} \qquad \text{(C.9)} \\ B(m; m_\gamma^2, m^2) &= \frac{A(m^2)}{m^2} + \frac{1}{16\pi^2} \qquad \text{(C.10)} \\ B(0; 0, m^2) &= B(0; m^2, 0) = \frac{A(m^2)}{m^2} \end{aligned}$$

La fonction à deux points peut être décomposée en une partie finie et le pôle, comme

$$\begin{aligned} B(p; M_1^2, M_2^2) &= \overline{B}(p; M_1^2, M_2^2) + B(0; M_1^2, M_2^2) \\ &= \overline{B}(p; M_1^2, M_2^2) + \frac{A(M_1^2) - A(M_2^2)}{\Delta_{12}}, \end{aligned} \tag{C.11}$$

avec $\Delta_{12} = M_1^2 - M_2^2$.

2.2 Structure analytique de la fonction scalaire

En général, les propriétés analytiques d'une intégrale de Feynman sont trop compliquées pour être étudiées par une intégration explicite. Si une singularité approche le contour d'intégration et si le contour peut être déformé pour l'éviter, alors l'intégrale reste analytique.

La fonction à deux points (C.6) a des singularités. Réécrivons cette intégrale de façon plus générale comme

$$\begin{aligned} B(p^2; M_1^2, M_2^2) &= -i\mu^{4-D} \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \delta(1 - [x_1 + x_2]) \\ &\quad \times \frac{1}{x_1[(p_1 - q)^2 - M_1^2] + x_2[(p_2 - q)^2 - M_2^2]} \qquad \text{(C.12)} \\ &\quad \text{où dans notre cas de figure,} \quad p_1 = 0 \quad \text{et} \quad p_2 = p. \end{aligned}$$

Nous constatons que des singularités apparaîssent lorsque le dénominateur de l'intégrand s'annule, c'est-à-dire

$$(p_i - q)^2 - M_i^2 = 0 \quad \text{ou} \quad x_i = 0 \qquad i = 1, 2.$$

D'autres singularités apparaîssent lorsque le dénominateur de l'intégrand ne dépend pas explicitement de q

$$\frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=1}^{2} x_i[(p_i - q)^2 - M_i^2] = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sum_{i=1}^{2} x_i(p_i - q) = 0$$

Après paramétrisation de Feynman et rotation de Wick, nous avons obtenu la formulation compacte suivante pour la fonction à deux points

$$\begin{aligned} B(p; M_1^2, M_2^2) &= \frac{1}{16\pi^2}\{\frac{2}{\epsilon} + \Gamma'(1) + \ln(4\pi) - \int_0^1 dx \ln \frac{R^2}{\mu^2}\}, \\ R^2 &= M_2^2(1 - x) + M_1^2 x - xp^2(1 - x) \\ \tilde{q} &= q - p(1 - x) \end{aligned}$$

[20] $\lambda(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2a.b - 2a.c - 2b.c$

En terme de R^2, les équations qui déterminent les singularités sont données par les équations de Landau (§ *The Landau equations* dans [105] et § *Landau equations* dans [106])

$$R^2 = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_i = 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} R^2 = 0 \end{cases}$$

En appliquant ces équations à la fonction à deux points nous trouvons la solution

$$x_0 = \frac{1}{2p^2}(p^2 - M_1^2 + M_2^2)$$

Pour trouver les valeurs de p qui sont singulières, nous calculons $R^2(x_0) = 0$. Ce qui donne la relation

$$\text{discriminant de } R^2 \equiv \lambda(M_1^2, M_2^2, p^2) \quad = \quad 0.$$

Les solutions à cette équation donnent les singularités de la fonction à deux points en

$$p_0^2 \quad = \quad (M_1 \pm M_2)^2$$

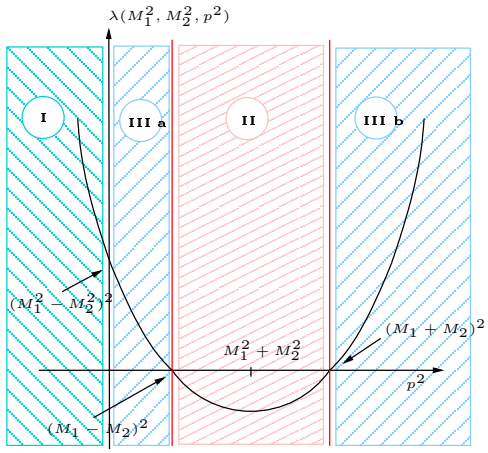


FIGURE C.1: Graphe représentant le discriminant de l'argument R^2 du logarithme dans la fonction à deux points. On voit apparaître trois zones dans lesquelles il va falloir calculer la fonction à deux points.

La région II

Dans cette région, le discriminant de l'argument du logarithme dans la fonction à deux points est négatif donc R^2 n'y possède pas de racines. On peut donc directement intégrer par parties

$$\int_0^1 dx \ln \frac{R^2}{\mu^2} \quad = \quad \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} - 2 + \int_0^1 dx \frac{(M_1^2 - M_2^2 - p^2)x + 2M_2^2}{p^2x^2 + (M_1^2 - M_2^2 - p^2)x + M_2^2}$$

Nous utilisons le résultat (11.8) et le fait que $\arctan(-x) = -\arctan(x)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \ln \frac{R^2}{\mu^2} \quad &= \quad \ln \frac{M_1^2}{\mu^2} - 2 + \frac{M_1^2 - M_2^2 - p^2}{2p^2} \ln(\frac{M_1^2}{\mu^2} \frac{\mu^2}{M_2^2}) \\ &+ \frac{1}{p^2} \sqrt{-\lambda(M_1^2, M_2^2, p^2)} \times \left\{ \arctan \frac{p^2 + M_1^2 - M_2^2}{\sqrt{-\lambda(M_1^2, M_2^2, p^2)}} + \arctan \frac{p^2 - M_1^2 + M_2^2}{\sqrt{-\lambda(M_1^2, M_2^2, p^2)}} \right\} \end{aligned}$$

D'après la formule (C.3), nous remplaçons les expressions

$$-\frac{1}{16\pi^2}\ln\frac{M^2}{\mu^2} \quad = \quad \frac{A(M^2)}{M^2} - \frac{2}{16\pi^2}\{\frac{1}{\epsilon}+\frac{1}{2}[\ln 4\pi + 1 + \Gamma'(1)]\}.$$

Nous trouvons finalement que

$$\begin{aligned} B(p^2, M_1^2, M_2^2)^{\textbf{Zone II}} &= \frac{1}{16\pi^2} + \frac{p^2+M_1^2-M_2^2}{2p^2}\frac{A(M_1^2)}{M_1^2} + \frac{p^2-M_1^2+M_2^2}{2p^2}\frac{A(M_2^2)}{M_2^2} \\ &-\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{p^2}\sqrt{-\lambda(M_1^2,M_2^2,p^2)}\Big\{\arctan\frac{p^2+M_1^2-M_2^2}{\sqrt{-\lambda(M_1^2,M_2^2,p^2)}} + \arctan\frac{p^2-M_1^2+M_2^2}{\sqrt{-\lambda(M_1^2,M_2^2,p^2)}}\Big\}. \end{aligned}$$

Les régions I et III

Dans ces deux régions, le discriminant de l'argument du logarithme dans la fonction à deux points est positif. Cela signifie que l'argument du logarithme possède deux racines (C.7). Il nous faut maintenant connaître la position de ces racines par rapport au domaine d'intégration.

Sachant que

$$R^2(x) \quad = \quad p^2(x-x_+)(x-x_-),$$

nous constatons que le signe de p^2 va être concluant quant à la position des racines x_+ et x_- par rapport aux bornes [0, 1] de l'intégration. Nous remarquons que $R^2(0) = M_2^2$ et $R^2(1) = M_1^2$.

$$\begin{aligned} R^2(x) &= p^2[x^2-(x_++x_-)x+x_+x_-] \\ \frac{\partial R^2(x)}{\partial x} &= 0 \ \text{ pour } \ x_o = \frac{x_++x_-}{2} \\ R^2(x_o) &= -p^2(\frac{x_- - x_-}{2})^2 \end{aligned}$$

Le graphe de $R^2(x)$ et l'utilisation du théorème des valeurs intermédiaires pour les domaines $[0, x_o]$ et $[x_o, 1]$ nous donne les deux cas suivants:

zone I: $p^2 < 0$
Les racines x_+ et x_- sont en dehors du domaine d'intégration. On peut intégrer directement en décomposant le logarithme. Ainsi la fonction à deux points prend la forme

$$\begin{aligned} B(p^2; M_1^2, M_2^2) &= \frac{1}{16\pi^2}\Big\{\frac{2}{\epsilon}+\Gamma'(1)+\ln(4\pi)+2-\ln\frac{p^2(1-x_+)(1-x_-)}{\mu^2} \\ &+x_+\ln(1-\frac{1}{x_+})+x_-\ln(1-\frac{1}{x_-})\Big\} \end{aligned}$$

On remplace les racines par leurs expressions.

$$\begin{aligned} B(p^2; M_1^2, M_2^2) &= \frac{1}{16\pi^2}\Big\{\frac{2}{\epsilon}+\Gamma'(1)+\ln(4\pi)+2-\ln\frac{M_1^2}{\mu^2} \\ &+\frac{-(M_1^2-M_2^2-p^2)+\sqrt{\lambda}}{2p^2}\ \ln\big[\frac{-p^2-M_1^2+M_2^2+\sqrt{\lambda}}{-(M_1^2-M_2^2-p^2)+\sqrt{\lambda}}\big] \\ &+\frac{-(M_1^2-M_2^2-p^2)-\sqrt{\lambda}}{2p^2}\ \ln\big[\frac{p^2+M_1^2-M_2^2+\sqrt{\lambda}}{(M_1^2-M_2^2-p^2)+\sqrt{\lambda}}\big]\ \Big\} \end{aligned}$$

Après simplifications, nous obtenons

$$\begin{aligned} B(p^2; M_1^2, M_2^2) &= \frac{1}{16\pi^2}\Big\{\frac{2}{\epsilon}+\Gamma'(1)+\ln(4\pi)+2-\ln\frac{M_2^2}{\mu^2}-\frac{1}{2}\ln\frac{M_1^2}{M_2^2} \\ &-\frac{1}{2p^2}(M_1^2-M_2^2)\ln\frac{M_1^2}{M_2^2}+\frac{\sqrt{\lambda}}{2p^2}\ln\frac{(p^2-\sqrt{\lambda})^2-(M_1^2-M_2^2)^2}{(p^2+\sqrt{\lambda})^2-(M_1^2-M_2^2)^2}\Big\}. \end{aligned}$$

D'après la relation (C.3), nous pouvons faire apparaître les fonctions à un point dans le résultat de la fonction à deux points

$$\begin{aligned} B(p^2;M_1^2,M_2^2)^{\textbf{Zone I}} &= \frac{1}{16\pi^2}+\frac{A(M_2^2)}{M_2^2}+\frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{M_2^2}{M_1^2}+\frac{1}{32\pi^2}\frac{M_1^2-M_2^2}{p^2}\ln\frac{M_2^2}{M_1^2} \\ &+\frac{1}{16\pi^2}\frac{\sqrt{\lambda}}{2p^2}\ln\Big[\underbrace{\frac{(p^2-\sqrt{\lambda})^2-(M_1^2-M_2^2)^2}{(p^2+\sqrt{\lambda})^2-(M_1^2-M_2^2)^2}}_{\hookrightarrow a(p^2)}\Big] \end{aligned} \tag{C.13}$$

zone III: $p^2>0$
Les racines font partie du domaine d'intégration. Il va falloir faire un développement analytique de la formule (C.13). Soit $a(p^2)$ l'argument du logarithme dans cette formule.

$$\begin{aligned} a(p^2) &= \frac{(p^2-\sqrt{\lambda})^2-(M_1^2-M_2^2)^2}{(p^2+\sqrt{\lambda})^2-(M_1^2-M_2^2)^2}, \\ \lambda &\equiv [p^2-(M_1-M_2)^2][p^2-(M_1+M_2)^2] \end{aligned}$$

Nous devons évaluer $a(p^2+i\epsilon)$. C'est un développement limité.

$$\frac{\partial a(p^2)}{\partial p^2} = -\underbrace{\frac{8M_1^2M_2^2}{(p^2-M_1^2-M_2^2+\sqrt{\lambda})^2\sqrt{\lambda}}}_{\hookrightarrow>0 \text{ dans les régions (I) et (III) où le discriminant est positif.}}.$$

Le signe de cette dérivée nous donne la prescription $\pm i\epsilon$. Ainsi, nous pouvons conclure que

$$a(p^2+i\epsilon) = a(p^2)-\mathbf{i}\epsilon.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \ln\{a(p^2+i\epsilon)\} &= \lim_{\epsilon\to 0}\ \{\ln[a(p^2)-\mathbf{i}\epsilon]\} \\ &= \ln|a(p^2)|+i\pi\Theta[-a(p^2)]\ \mathrm{sg}\ (-\epsilon)+2i\pi\ \Theta[a(p^2)]\ [1-\Theta(-\epsilon)] \end{aligned}$$

Il nous faut le signe de $a(p^2)$ pour conclure. On a déjà trouvé que la dérivée de $a(p^2)$ était strictement négative. Donc $a(p^2)$ décroît. De plus, on trouve facilement que

$$\begin{aligned} \lim_{p^2\to+\infty} a(p^2) &= 0^+ \\ \lim_{p^2\to 0} a(p^2) &= \frac{M_1^2+M_2^2+|M_1^2-M_2^2|}{M_1^2+M_2^2-|M_1^2-M_2^2|} \end{aligned}$$

Alors, il reste

$$\ln\{a(p^2+i\epsilon)\} = \ln a(p^2)+2i\pi$$

La fonction à deux points dans les régions $0<p^2<(M_1-M_2)^2$ et $p^2>(M_1+M_2)^2$ est

$$\begin{aligned} B(p^2;M_1^2,M_2^2)^{\textbf{Zone III}} &= \frac{1}{16\pi^2}+\frac{A(M_2^2)}{M_2^2}+\frac{1}{32\pi^2}\ln\frac{M_2^2}{M_1^2}+\frac{1}{32\pi^2}\frac{M_1^2-M_2^2}{p^2}\ln\frac{M_2^2}{M_1^2} \\ &+\frac{1}{16\pi^2}\frac{\sqrt{\lambda}}{2p^2}\Big\{\ln\Big[\frac{(p^2-\sqrt{\lambda})^2-(M_1^2-M_2^2)^2}{(p^2+\sqrt{\lambda})^2-(M_1^2-M_2^2)^2}\Big]+2i\pi\Big\} \end{aligned}$$

2.3 L'intégrale vectorielle

$$B^\mu(p;M_1^2,M_2^2) = -i\mu^{4-D}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{q^\mu}{(q^2-M_1^2)[(p-q)^2-M_2^2]} \tag{C.14}$$

Par invariance de Lorentz nous obtenons la décomposition suivante

$$B^\mu(p;M_1^2,M_2^2) = p^\mu B_1(p;M_1^2,M_2^2). \tag{C.15}$$

Lorsque l'on contracte (C.15) par p_μ, nous obtenons la relation

$$-2p^2B_1(p;M_1^2,M_2^2) = A(M_1^2)-A(M_2^2)-(p^2+\Delta_{12})B(p;M_1^2,M_2^2). \tag{C.16}$$

D'après (C.11),

$$2B_1(p;M_1^2,M_2^2) = (1+\frac{\Delta_{12}}{p^2})\overline{B}(p;M_1^2,M_2^2)+\frac{A(M_1^2)-A(M_2^2)}{\Delta_{12}}. \tag{C.17}$$

Les cas particuliers suivants peuvent être utiles

$$\begin{aligned} B_1(p;M^2,M^2) &= \frac{1}{2}B(p;M^2,M^2) \\ B_1(M;0,M^2) &= \frac{A(M^2)}{2M^2} \end{aligned}$$

2.4 L'intégrale tensorielle

$$B^{\mu\nu}(p;M_1^2,M_2^2) = -i\mu^{4-D}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{q^\mu q^\nu}{(q^2-M_1^2)[(p-q)^2-M_2^2]} \tag{C.18}$$

Par invariance de Lorentz nous obtenons la décomposition suivante

$$B^{\mu\nu}(p;M_1^2,M_2^2) = p^\mu p^\nu B_{11}(p;M_1^2,M_2^2)+\eta^{\mu\nu}B_{00}(p;M_1^2,M_2^2). \tag{C.19}$$

Cette fois, nous allons contracter (C.19) par $p_\mu p_\nu$ et $\eta_{\mu\nu}$. Nous obtiendrons un système de deux équations à deux inconnues (les fonctions recherchées). Nous utiliserons le résultat

$$\eta_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = D,$$

puisque nous travaillons à D dimensions. En utilisant la relation (C.16), le système à résoudre devient

$$\begin{aligned} (D-1)B_{00} &= [M_1^2-\frac{1}{4p^2}(p^2+\Delta_{12})]B+\frac{1}{4p^2}(p^2+\Delta_{12})A(M_1^2)+[1-\frac{3p^2+\Delta_{12}}{4p^2}]A(M_2^2) \\ (D-1)p^2B_{11} &= [\frac{D}{4p^2}(p^2+\Delta_{12})^2-M_1^2]B-\frac{D}{4p^2}(p^2+\Delta_{12})A(M_1^2)+[-1+\frac{3p^2+\Delta_{12}}{4p^2}]A(M_2^2) \end{aligned}$$

Nous remplaçons B par la formulation (C.11). D'après (C.3) avec $\epsilon = 4-D$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{D-1}A(M^2) &= \frac{1}{3}[A(M^2)+\frac{2}{3}\frac{M^2}{16\pi^2}], \\ \frac{D}{D-1}A(M^2) &= \frac{4}{3}[A(M^2)+\frac{1}{6}\frac{M^2}{16\pi^2}]. \end{aligned}$$

Les résultats sont alors

$$\begin{aligned} 12B_{00}(p;M_1^2,M_2^2) &= -\frac{1}{p^2}\lambda(p^2,M_1^2,M_2^2)\overline{B}(p;M_1^2,M_2^2)-\frac{1}{24\pi^2}(p^2-3\Sigma_{12}) \\ &\quad -(p^2-3M_1^2-M_2^2)\frac{A(M_1^2)}{\Delta_{12}}+(p^2-M_1^2-3M_2^2)\frac{A(M_2^2)}{\Delta_{12}}, \end{aligned} \tag{C.20}$$

$$\begin{aligned} 3p^2B_{11}(p;M_1^2,M_2^2) &= \frac{1}{p^2}[\lambda(p^2,M_1^2,M_2^2)+3p^2M_1^2]\overline{B}(p;M_1^2,M_2^2)+\frac{1}{96\pi^2}(p^2-3\Sigma_{12}) \\ &\quad +(p^2-M_2^2)\frac{A(M_1^2)}{\Delta_{12}}-(p^2-M_1^2)\frac{A(M_2^2)}{\Delta_{12}}, \end{aligned} \tag{C.21}$$

avec $\Sigma_{12} = M_1^2+M_2^2$.

C.3 La fonction à trois points

3.1 L'intégrale scalaire

La fonction à trois points est définie comme

$$C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m_\gamma^2) \quad = \quad \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{-i\mu^{4-D}}{(q^2-m_\gamma^2)\,[(p_1-q)^2-M_1^2]\,[(p_2-q)^2-M_2^2]} \qquad \text{(C.22)}$$

Dans la suite, nous ne donnerons pas de masse au photon $m_\gamma^2 = 0$ et c'est la dimension D qui sera le paramètre de la régularisation [30, 107]

$$D \quad = \quad 4+\epsilon_{ir} \quad \text{avec} \quad \epsilon_{ir} > 0.$$

Avec la paramétrisation de Feynman (11.7) où

$$\begin{aligned} A &= (p_1-q)^2 - M_1^2, \\ B &= (p_2-q)^2 - M_2^2, \\ C &= q^2, \end{aligned}$$

et le changement de variable $q - y[xp_1 + (1-x)p_2] \longrightarrow q$, nous obtenons

$$C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,0) \quad = \quad -i\mu^{4-D}\int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\int_0^1 dx\int_0^1 dy\frac{2y}{(q^2-R^2)^3},$$

avec

$$R^2 \quad = \quad y^2[x^2p_1^2+(1-x)^2p_2^2+2x(1-x)p_1\cdot p_2] - y[x(p_1^2-M_1^2)+(1-x)(p_2^2-M_2^2)].$$

Après rotation de Wick et utilisation de la formule d'intégration à D dimensions (11.2), la fonction à trois points s'écrit en fonction de ϵ_{ir} comme

$$C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,0) \quad = \quad -\frac{1}{(4\pi)^2}(4\pi\mu^2)^{-\frac{\epsilon_{ir}}{2}}\Gamma(1-\frac{\epsilon_{ir}}{2})\int_0^1 dx\int_0^1 dy\frac{y}{(R^2)^{1-\frac{\epsilon_{ir}}{2}}}. \qquad \text{(C.23)}$$

La fonction à trois points a été calculée par 't Hooft et Veltman dans [93].

3.2 Comportement infra-rouge

On peut réécrire R^2 comme un polynôme en y

$$R^2 \quad = \quad f(x)\;y^2 - g(x)\;y,$$

Avec cette notation,

$$\int_0^1 dy\frac{y}{(R^2)^{1-\frac{\epsilon_{ir}}{2}}} = \frac{1}{f(x)^{1-\frac{\epsilon_{ir}}{2}}}\int_0^1 dy\frac{y^{\frac{\epsilon_{ir}}{2}}}{(y-y_o)^{1-\frac{\epsilon_{ir}}{2}}} \qquad \text{où} \qquad y_o = \frac{g(x)}{f(x)}.$$

On remarque que lorsque $p_1^2 = M_1^2$ et $p_2^2 = M_2^2$, alors $y_o = 0$ et donc il reste à évaluer

$$\int_0^1 dy\frac{y^{\frac{\epsilon_{ir}}{2}}}{y^{1-\frac{\epsilon_{ir}}{2}}} \quad = \quad \left[\frac{y^{\epsilon_{ir}}}{\epsilon_{ir}}\right]_0^1.$$

On retrouve le comportement divergent infra-rouge en $\frac{1}{\epsilon_{ir}}$.

3.3 Calcul de la partie infra-rouge

Nous nous intéressons au comportement en $\ln m_\gamma^2$. Pour cela, nous laisserons au photon une masse m_γ. En $q^2 = m_\gamma^2$, il n'y a pas de problème tant qu'on n'est pas sur couche de masse. Les divergences apparaîssent lorsque

$$p_1^2 - M_1^2 = 0 \quad \text{et} \quad p_2^2 - M_2^2 = 0 \tag{C.24}$$

et l'intégrale (C.23) devient lorsque $D = 4$

$$C(p_1, p_2, 0; M_1^2, M_2^2, m_\gamma^2) = -\frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y}{R^2},$$

avec, lorsque $p_1^2 = M_1^2$ et $p_2^2 = M_2^2$,

$$\begin{aligned} R^2 &= y^2[x^2 M_1^2 + (1-x)^2 M_2^2 + 2x(1-x)p_1 \cdot p_2] + (1-y)m_\gamma^2 \\ &= y^2 f(x) + (1-y)m_\gamma^2. \end{aligned}$$

L'intégration selon la variable y donne

$$C(p_1, p_2, 0; M_1^2, M_2^2, m_\gamma^2) = -\frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 dx \Big[\frac{1}{f(x)} \ln \frac{f(x)}{m_\gamma^2} + \frac{m_\gamma^2}{f(x)} \int_0^1 dy \frac{1}{y^2 f(x) + (1-y)m_\gamma^2}\Big].$$

Le premier terme donne les contributions à $\ln m_\gamma^2$, ainsi

$$C^{\mathrm{IR}}(p_1, p_2, 0; M_1^2, M_2^2, m_\gamma^2) = \frac{1}{32\pi^2}\int_0^1 dx \frac{1}{f(x)} \ln m_\gamma^2. \tag{C.25}$$

On a

$$\begin{aligned} f(x) &= p_{21}^2 x^2 - x(p_{21}^2 - \Delta_{12}) + M_2^2 \quad \text{avec} \quad p_{21}^2 = (p_2 - p_1)^2 \\ &= p_{21}^2 (x - x_+)(x - x_-) \end{aligned}$$

avec $x_\pm = \frac{1}{2p_{21}^2}\big[p_{21}^2 - \Delta_{12} \pm \lambda^{1/2}(p_{21}^2, M_1^2, M_2^2)\big]$.

On peut maintenant décomposer l'intégrale (C.25) en éléments simples et nous obtenons

$$C^{\mathrm{IR}}(p_1, p_2, 0; M_1^2, M_2^2, 0) = -\frac{1}{32\pi^2}\frac{1}{\lambda^{1/2}(p_{21}^2, M_1^2, M_2^2)} \ln\Big(\frac{1-x_-}{1-x_+}\Big)\Big(\frac{x_+}{x_-}\Big) \ln m_\gamma^2.$$

En utilisant

$$\begin{aligned} p_{21}^2 &= M_1^2 + M_2^2 - 2p_1 \cdot p_2 \\ \lambda(p_{21}^2, M_1^2, M_2^2) &= 4\big[(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2\big], \end{aligned}$$

on trouve que

$$\Big(\frac{1-x_-}{1-x_+}\Big)\Big(\frac{x_+}{x_-}\Big) = \frac{p_1 \cdot p_2 - \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}{p_1 \cdot p_2 + \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}.$$

Finalement, la contribution infra-rouge à la fonction à trois points se résume à

$$C^{\mathrm{IR}}(p_1, p_2, 0; M_1^2, M_2^2, 0) = -\frac{1}{64\pi^2}\frac{\ln m_\gamma^2}{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} \ln\Big\{\frac{p_1 \cdot p_2 - \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}{p_1 \cdot p_2 + \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}}\Big\}$$

Nous noterons cette contribution de la façon suivante

$$C^{\mathrm{IR}}(p_1, p_2, 0; M_1^2, M_2^2, 0) = -\frac{1}{64\pi^2}\tau(p_1, p_2, M_1, M_2) \ \ln m_\gamma^2, \tag{C.26}$$

avec

$$\tau(p_1,p_2,M_1,M_2) = \frac{1}{\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-M_1^2M_2^2}}\ln\Big\{\frac{p_1\cdot p_2-\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-M_1^2M_2^2}}{p_1\cdot p_2+\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2-M_1^2M_2^2}}\Big\}. \tag{C.27}$$

Remarque:
Nous pouvons retrouver ce résultat en donnant une masse nulle au photon et en travaillant cette fois à $D=4+\epsilon_{ir}$ dimensions, qui sera le paramètre de régularisation. On repart de la formule (C.23) avec $p_1^2=M_1^2$ et $p_2^2=M_2^2$. On intègre sur y et on ne garde que les termes en $\frac{1}{\epsilon_{ir}}$, qui représentent la divergence infra-rouge.

$$C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,0) = -\frac{1}{(4\pi)^2}(4\pi\mu^2)^{-\frac{\epsilon_{ir}}{2}}\Gamma(1-\frac{\epsilon_{ir}}{2})\frac{1}{\epsilon_{ir}}\int_0^1 dx\frac{1}{[f(x)]^{1-\frac{\epsilon_{ir}}{2}}},$$
$$\text{avec}\quad f(x)=x^2M_1^2+(1-x)^2M_2^2+2x(1-x)p_1\cdot p_2$$

Nous allons isoler la partie infra-rouge de cette intégrale.

$$C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,0) = -\frac{1}{(4\pi)^2}[1-\frac{\epsilon_{ir}}{2}\ln(4\pi\mu^2)]\Gamma(1-\frac{\epsilon_{ir}}{2})\frac{1}{\epsilon_{ir}}\int_0^1 dx\frac{1+\frac{\epsilon_{ir}}{2}\ln f(x)}{f(x)}.$$

D'après les formules (11.3) et (11.4), nous avons

$$\Gamma(1-\frac{\epsilon_{ir}}{2}) = 1+\epsilon_{ir}\frac{\gamma_E}{2}+\frac{{\epsilon_{ir}}^2}{8}(\frac{\pi^2}{3}+\cdots)+\cdots$$

La contribution au comportement infra-rouge de la fonction à trois point est alors

$$C^{\mathrm{IR}}(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,0) = -\frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{\epsilon_{ir}}\int_0^1 dx\frac{1}{f(x)}. \tag{C.28}$$

En comparant ce résultat à (C.25), nous trouvons que la contribution à la divergence infra-rouge de la forme $\ln m_\gamma^2$ correspond, dans le schéma de régularisation dimensionnelle, à la contribution infra-rouge $-\frac{2}{\epsilon}$.

3.4 L'intégrale vectorielle

$$\begin{aligned}
C^\mu(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) &= \int\frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{q^\mu}{(q^2-m^2)\,[(p_1-q)^2-M_1^2]\,[(p_2-q)^2-M_2^2]}\\
&= p_1^\mu\,C_1+p_2^\mu\,C_2 \qquad\qquad (C.29)\\
p_{21}^2 &= (p_2-p_1)^2\\
d_1 &= m^2-M_1^2+p_1^2\\
d_2 &= m^2-M_2^2+p_2^2\\
\lambda(p_{21}^2,p_1^2,p_2^2) &= p_{21}^4+p_1^4+p_2^4-2p_{21}^2p_1^2-2p_{21}^2p_2^2-2p_1^2p_2^2
\end{aligned}$$

Lorsque l'on contracte (C.29) par p_1^μ et p_2^μ, on obtient un système qui une fois résolu nous donne les résultats suivants

$$\begin{aligned}
C_1(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) &= \frac{2}{\lambda(p_{21}^2,p_1^2,p_2^2)}\Big\{p_1\cdot p_2\Big[B(p_{21};M_1^2,M_2^2)-B(p_1^2;m^2,M_1^2)\\
&+ d_2C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2)\Big]-p_2^2\Big[B(p_{21};M_1^2,M_2^2)-B(p_2^2;m^2,M_1^2)\\
&+ d_1C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2)\Big]\Big\}\\
C_2(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) &= \frac{2}{\lambda(p_{21}^2,p_1^2,p_2^2)}\Big\{p_1\cdot p_2\Big[B(p_{21};M_1^2,M_2^2)-B(p_2^2;m^2,M_1^2)\\
&+ d_1C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2)\Big]-p_1^2\Big[B(p_{21};M_1^2,M_2^2)-B(p_1^2;m^2,M_1^2)\\
&+ d_2C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2)\Big]\Big\}
\end{aligned}$$

3.5 L'intégrale tensorielle

La fonction tensorielle est obtenue de la même manière que précédemment. Par décomposition de Lorentz, nous décrivons cette fonction à l'aide de quatre fonctions scalaires.

$$\begin{aligned}
C^{\mu\nu}(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) &= \int \frac{d^Dq}{(2\pi)^D}\frac{q^\mu q^\nu}{(q^2-m^2)\ [(p_1-q)^2-M_1^2]\ [(p_2-q)^2-M_2^2]} \\
&= p_1^\mu p_1^\nu\ C_{11} + p_2^\mu p_2^\nu\ C_{22} + (p_1^\mu p_2^\nu + p_2^\mu p_1^\nu)\ C_{12} + \eta^{\mu\nu}\ C_{00} \qquad \text{(C.30)} \\
p_{21}^2 &= (p_2-p_1)^2 \\
d_1 &= m^2 - M_1^2 + p_1^2 \\
d_2 &= m^2 - M_2^2 + p_2^2 \\
\lambda(p_{21}^2,p_1^2,p_2^2) &= p_{21}^4 + p_1^4 + p_2^4 - 2p_{21}^2p_1^2 - 2p_{21}^2p_2^2 - 2p_1^2p_2^2
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\lambda(p_{21}^2,p_1^2,p_2^2)\ C_{11} &= 2m^2p_2^2C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) \\
&+ (2p_1\cdot p_2\ d_2 - 3p_2^2\ d_1)\ C_1(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) \\
&- p_2^2\ d_2\ C_2(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) - 2p_1\cdot p_2\ B_1(p_1^2;m^2,M_1^2) \\
&+ 2(p_2^2 - p_1\cdot p_2)\ B_1(p_{21}^2;M_1^2,M_2^2) - (p_2^2 - 2p_1\cdot p_2)\ B(p_{21}^2;M_1^2,M_2^2) + p_2^2\frac{1}{16\pi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2p_2^2\ \lambda(p_{21}^2,p_1^2,p_2^2)\ C_{22} &= 4m^2p_1^2p_2^2C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) \\
&+ \Big[4p_1^2p_1\cdot p_2\ d_2 - \Big(\lambda(p_{21}^2,p_1^2,p_2^2) + 4p_1^2p_{21}^2 + 6p_1^2p_2^2\Big)d_1\Big]C_1(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) \\
&+ \Big(\lambda(p_{21}^2,p_1^2,p_2^2) - 2p_1^2p_2^2\Big)d_2\ C_2(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) \\
&- 4p_1^2p_1\cdot p_2\ B_1(p_1^2;m^2,M_1^2) - 2\Big(p_1^2(p_2^2+p_{21}^2) - (p_2^2-p_{21}^2)^2\Big)\ B_1(p_{21}^2;M_1^2,M_2^2) \\
&+ \Big(p_1^4 - (p_2^2-p_{21}^2)^2 + 2p_2^2p_1^2\Big)\ B(p_{21}^2;M_1^2,M_2^2) + 2p_2^2p_1^2\frac{1}{16\pi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\lambda(p_{21}^2,p_1^2,p_2^2)\ C_{12} &= -4p_1\cdot p_2m^2C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) \\
&+ \Big(6p_1\cdot p_2d_1 - 4p_1^2d_2\Big)C_1(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) \\
&+ 2p_1\cdot p_2d_2C_2(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) + 2\big(p_1^2 - p_2^2 + p_{21}^2\big)B_1(p_{21}^2;M_1^2,M_2^2) \\
&+ 4p_1^2B_1(p_1^2;m^2,M_1^2) + \big(-3p_1^2 + p_2^2 - p_{21}^2\big)B(p_{21}^2;M_1^2,M_2^2) - 2p_1\cdot p_2\frac{1}{16\pi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4\ C_{00} &= 2m^2C(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) - d_1\ C_1(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) \\
&- d_2\ C_2(p_1,p_2,0;M_1^2,M_2^2,m^2) + B(p_{21}^2;M_1^2,M_2^2) + \frac{1}{16\pi^2} \qquad \text{(C.31)}
\end{aligned}$$

C.4 La fonction à quatre points

4.1 L'intégrale scalaire

La fonction à quatre points scalaire est la plus compliquée des intégrales à une boucle. Wu [35] l'a exprimée sous la forme de 192 dilogarithmes. 't Hooft et Veltman [93] ont donné un résultat contenant seulement 48 dilogarithmes. Denner, Nierste et Scharf [108] ont fait une étude générale de la fonction à quatre points scalaire, où le résultat est donné en fonction de 16 dilogarithmes.

Nous considérons l'intégrale scalaire suivante

$$D \equiv -i\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\{D_0D_1D_2D_3\}^{-1} \qquad \text{(C.32)}$$

Nous avons à calculer trois expressions de la forme (C.32) qui apparaîssent dans nos calculs. Il s'agit de

$$\begin{aligned}
&\{(q^2-m_\gamma^2)\ \ \underline{[(k-q)^2-M_{K^\pm}^2]}\ \ [(p_\ell-q)-m_\ell^2][(k-p_+-p_--q)^2-M_{K^\pm}^2]\}^{-1}\\
&\{(q^2-m_\gamma^2)\ \ \underline{[(p_++q)^2-M_{K^\pm}^2]}\ \ [(p_\ell-q)-m_\ell^2][(k-p_+-p_--q)^2-M_{K^\pm}^2]\}^{-1}\\
&\{(q^2-m_\gamma^2)\ \ \underline{[(p_-+q)^2-M_{K^\pm}^2]}\ \ [(p_\ell-q)-m_\ell^2][(k-p_+-p_--q)^2-M_{K^\pm}^2]\}^{-1}
\end{aligned} \tag{C.33}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
D_0 &= q^2-m_\gamma^2, & D_2 &= (p-q)^2-m^2,\\
D_1 &= (p_\ell-q)-m_\ell^2, & D_3 &= (L-q)^2-M_{K^\pm}^2,
\end{aligned}$$

avec

$p^2=m^2$, les couples (p, m) étant (k,$M_{K^\pm}$), (-p_+,$M_{\pi^\pm}$) ou (-p_-, $M_{\pi^\pm}$)
$p_\ell^2=m_\ell^2$,
$L^2=s_\ell$,
$r^2=(p-p_\ell)^2$ et $Q^2=(p-L)^2$.

nous utiliserons la méthode employée par Beenakker et Denner dans [94], qui nous permet de calculer

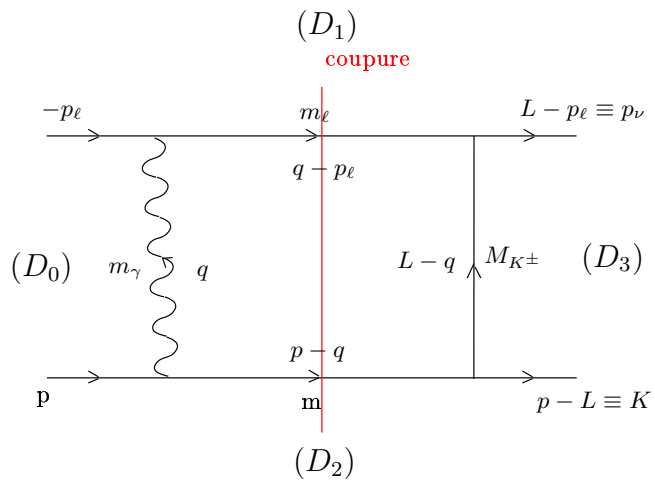


FIGURE C.2: Schéma diagrammatique de l'intégrale scalaire à quatre points.

la partie imaginaire de l'intégrale scalaire par application des règles de Cutkosky [109]. Puis, le résultat complet de l'intégrale est obtenu en utilisant la technique des relations de dispersion [110].
Dans un premier temps, les règles de Cutkosky donnent

$$Im(D)=\frac{1}{8\pi^2}\int d^4q\frac{\Theta(q^0-p_\ell^0)\delta((p_\ell-q)^2-m_\ell^2)\Theta(p^0-q^0)\delta((p-q)^2-m^2)}{(q^2-m_\gamma^2+i\epsilon)[(L-q)^2-M_{K^\pm}^2-i\epsilon]}. \tag{C.34}$$

Nous faisons le changement de variable: $q-p_\ell\to q$

$$Im(D)=\frac{1}{8\pi^2}\int d^4q\frac{\Theta(q^0)\delta(q^2-m_\ell^2)\Theta(p^0-p_\ell^0-q^0)\delta((p-p_\ell-q)^2-m^2)}{[(q+p_\ell)^2-m_\gamma^2+i\epsilon][(p_\nu-q)^2-M_{K^\pm}^2-i\epsilon]} \tag{C.35}$$

On note: $p-p_\ell=r$. Il est intéressant de se placer dans le référentiel de Lorentz tel que

$$r=(r^0,\overrightarrow{r}=\overrightarrow{0}) \tag{C.36}$$

Dans ce cas,

$$\begin{aligned}
\delta[(r-q)^2-m^2] &= \delta[r^2+q^2-2r\cdot q-m^2]\\
&= \delta[r_0^2+q^2-2r^0\cdot q^0-m^2]
\end{aligned}$$

La distribution $\delta(q^2-m_\ell^2)$ implique que $q^2=m_\ell^2$ ou $q_0^2=\overrightarrow{q}^2+m_\ell^2=E_{\overrightarrow{l}}^2$ et ainsi, nous obtenons

$$\delta[(r-q)^2-m^2] = \delta[r_0^2+m_\ell^2-2r^0\cdot q^0-m^2]$$

Alors,

$$Im(D) = \frac{1}{8\pi^2}\int d^4q \frac{\Theta(q^0)\delta(q^2-m_\ell^2)\Theta(r^0-q^0)\delta(r_0^2+m_\ell^2-m^2-2r^0\cdot q^0)}{[(q+p_\ell)^2-m_\gamma^2+i\epsilon][(p_\nu-q)^2-M_{K^\pm}^2-i\epsilon]} \tag{C.37}$$

Nous avons

$$q^2-m_\ell^2 = q_0^2-\overrightarrow{q}^2-m_\ell^2 = q_0^2-E_{\overrightarrow{l}}^2 \ .$$

Donc,

$$\delta(q^2-m_\ell^2) = \delta(q_0^2-E_{\overrightarrow{l}}^2) = \frac{1}{2E_{\overrightarrow{l}}}[\delta(q^0-E_{\overrightarrow{l}})+\delta(q^0+E_{\overrightarrow{l}})] \ .$$

Comme d'après $\Theta(q^0)$, nous avons $q^0>0$ alors

$$\delta(q^2-m_\ell^2) = \frac{1}{2E_{\overrightarrow{l}}}\delta(q^0-E_{\overrightarrow{l}}) \qquad avec \ \ E_{\overrightarrow{l}} = \sqrt{\overrightarrow{q}^2+m_\ell^2} \ .$$

Alors,

$$Im(D) = \frac{1}{8\pi^2}\int d^4q \frac{\delta(q_0^2-E_{\overrightarrow{l}})\Theta(r^0-q^0)\delta(r_0^2+m_\ell^2-m^2-2r^0\cdot q^0)}{2E_{\overrightarrow{l}}[(q+p_\ell)^2-m_\gamma^2+i\epsilon][(p_\nu-q)^2-M_{K^\pm}^2-i\epsilon]} \tag{C.38}$$

L'intégration sur la première distribution δ nous mène à

$$Im(D) = \frac{1}{8\pi^2}\int d^3\overrightarrow{q} \frac{\Theta(r^0-E_{\overrightarrow{l}})\delta(r_0^2+m_\ell^2-m^2-2r^0E_{\overrightarrow{l}})}{2E_{\overrightarrow{l}}[(q+p_\ell)^2-m_\gamma^2+i\epsilon][(p_\nu-q)^2-M_{K^\pm}^2-i\epsilon]} \tag{C.39}$$

avec q_0 dans le dénominateur donné par

$$q_0 = E_{\overrightarrow{l}} = \sqrt{\overrightarrow{q}^2+m_\ell^2} \ . \tag{C.40}$$

La distribution δ restante donne en s'aidant de la relation (C.40)

$$(r_0^2+m_\ell^2-m^2)^2 \quad = \quad 4r_0^2E_{\overrightarrow{l}}^2 = 4r_0^2(\overrightarrow{q}^2+m_\ell^2)$$

On extrait ainsi la valeur de $||\overrightarrow{q}||$,

$$\begin{aligned} ||\overrightarrow{q}|| &= \frac{1}{2r_0}\lambda^{1/2}(r^2,m_\ell^2,m^2) \\ \lambda(r^2,m_\ell^2,m^2) &= [r^2-(m_\ell-m)^2][r^2-(m_\ell+m)^2] \end{aligned} \tag{C.41}$$

On exprime l'élément d'intégration comme

$$d^3\overrightarrow{q} = \overrightarrow{q}^2 d||\overrightarrow{q}||d\Omega \tag{C.42}$$

et avec l'aide des relations (C.40) et (C.41), nous obtenons

$$d^3\overrightarrow{q} = \frac{1}{2r_0}\lambda^{1/2}(r^2,m_\ell^2,m^2)E_{\overrightarrow{l}}dE_{\overrightarrow{l}}d\Omega \tag{C.43}$$

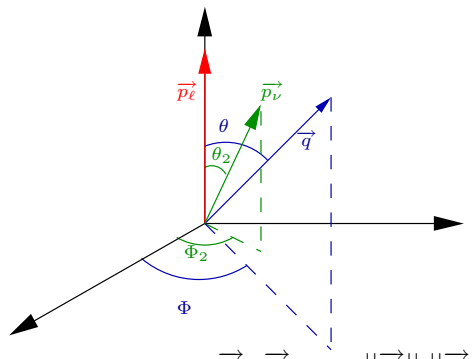
La distribution δ restante s'écrit

$$\begin{aligned} \delta(r^2+m_\ell^2-m^2-2r_0E_{\overrightarrow{l}}) &= \delta\{-2r_0[E_{\overrightarrow{l}}-\frac{1}{2r_0}(r^2+m_\ell^2-m^2)]\} \\ &= \frac{1}{2r_0}\delta[E_{\overrightarrow{l}}-\frac{1}{2r_0}(r^2+m_\ell^2-m^2)] \end{aligned} \tag{C.44}$$

On obtient ainsi, d'après les relations (C.44) et (C.41)

$$\begin{aligned} Im(D) &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{\lambda^{1/2}(r^2,m_\ell^2,m^2)}{r^2}\Theta[r^2-(m_\ell+m)^2] \\ &\quad \times\int d\Omega \frac{1}{[(q+p_\ell)^2-m_\gamma^2+i\epsilon][(p_\nu-q)^2-M_{K^\pm}^2-i\epsilon]} \end{aligned} \tag{C.45}$$

$$
\begin{aligned}
q_0 &= E_{\overrightarrow{l}} = \frac{1}{2r_0}(r^2 + m_\ell^2 - m^2) \\
||\overrightarrow{q}|| &= \frac{1}{2r_0}\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)
\end{aligned}
$$



Dans le dénominateur, il apparaît des produits scalaires à évaluer. Nous utiliserons les coordonnées polaires

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{q} &= \Big(||\overrightarrow{q}||\sin\theta\cos\phi, ||\overrightarrow{q}||\sin\theta\sin\phi, ||\overrightarrow{q}||\cos\theta\Big) \\
\overrightarrow{p_\nu} &= \Big(||\overrightarrow{p_\nu}||\sin\theta_2\cos\phi_2, ||\overrightarrow{p_\nu}||\sin\theta_2\sin\phi_2, ||\overrightarrow{p_\nu}||\cos\theta_2\Big) \\
\overrightarrow{p_\ell} &= \Big(0, 0, ||\overrightarrow{p_\ell}||\Big)
\end{aligned}
$$

On obtient les résultats suivants

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{p_\nu}\cdot\overrightarrow{q} &= ||\overrightarrow{p_\nu}||\ ||\overrightarrow{q}||[\cos\theta\cos\theta_2 + \sin\theta\sin\theta_2\cos(\Phi - \Phi_2)] \\
\overrightarrow{p_\ell}\cdot\overrightarrow{q} &= ||\overrightarrow{p_\ell}||\ ||\overrightarrow{q}||\cos\theta
\end{aligned}
$$

Sachant que $r = p - p_\ell = (r_0, \overrightarrow{0})$, nous avons $r^0 = p^0 - p_\ell^0$ et $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{p} - \overrightarrow{p_\ell}$, alors

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{p_\ell}^2 &= p_\ell^{0\,2} - m_\ell^2 \\
m^2 &= (r^0 + p_\ell^0)^2 - (p_\ell^{0\,2} - m_\ell^2)
\end{aligned}
$$

On en déduit les relations

$$
\begin{aligned}
p_\ell^0 &= -\frac{1}{2r^0}(r^2 + m_\ell^2 - m^2) \\
||\overrightarrow{p_\ell}|| &= \frac{1}{2r^0}\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)
\end{aligned}
$$

Il nous faut aussi les informations sur le neutrino. En utilisant $r = p - p_\ell = Q + p_\nu = (r_0, \overrightarrow{0})$, nous avons

$$
\begin{aligned}
r^0 &= Q^0 + p_\nu^0 \\
\overrightarrow{0} &= \overrightarrow{Q} + \overrightarrow{p_\nu}
\end{aligned}
$$

On en déduit comme précédemment

$$
p_\nu^0 = ||\overrightarrow{p_\nu}|| = \frac{1}{2r^0}(r^2 - Q^2)
$$

Le calcul de la quantité $s_\ell = (p_\ell + p_\nu)^2$, nous donne la relation

$$
-\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)\ \cos\theta_2 = r^2 + m_\ell^2 - m^2 + 2r^2\frac{s_\ell - m_\ell^2}{r^2 - Q^2}
$$

Et les deux propagateurs apparaîssant dans la formule (C.45) s'écrivent à présent

$$
\begin{aligned}
(q + p_\ell)^2 - m_\gamma^2 + i\epsilon &= -\frac{1}{2r^2}\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)(1 + \cos\theta) - m_\gamma^2 + i\epsilon \\
(p_\nu - q)^2 - M_{K^\pm}^2 - i\epsilon &= m_\ell^2 - M_{K^\pm}^2 - i\epsilon - \frac{1}{2r^2}(r^2 - Q^2)(r^2 + m_\ell^2 - m^2) \\
&\quad + \frac{1}{2r^2}(r^2 - Q^2)\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)[\cos\theta\cos\theta_2 + \sin\theta\sin\theta_2\cos(\Phi - \Phi_2)
\end{aligned}
$$

Conclusion: La formule (C.45) devient

$$
\begin{aligned}
Im(D) &= \frac{1}{64\pi^2}\frac{\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)}{r^2}\Theta[r^2 - (m_\ell + m)^2] \times J \\
J &= \int d\Omega\Big\{(a + b\cos\theta)\big(A + B\cos\theta + C\sin\theta\cos(\Phi - \Phi_2)\big)\Big\}
\end{aligned}
$$

Avec la paramétrisation suivante

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{1}{2r^2}\lambda(r^2, m_\ell^2, m^2) - m_\gamma^2 + i\epsilon \\
b &= -\frac{1}{2r^2}\lambda(r^2, m_\ell^2, m^2) \\
A &= -\frac{1}{2r^2}(r^2 - Q^2)(r^2 + m_\ell^2 - m^2) + m_\ell^2 - M_{K^\pm}^2 - i\epsilon \\
B &= \frac{1}{2r^2}(r^2 - Q^2)\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)\cos\theta_2 \\
C &= \frac{1}{2r^2}(r^2 - Q^2)\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)\sin\theta_2 \\
-\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)\ \cos\theta_2 &= r^2 + m_\ell^2 - m^2 + 2r^2\frac{s_\ell - m_\ell^2}{r^2 - Q^2} \\
d\Omega &= d(\cos\theta)d(\Phi - \Phi_2)
\end{aligned}$$

On utilise le résultat général suivant

$$\begin{aligned}
J &= \frac{2\pi}{\sqrt{X}}\ln\left(\frac{aA - bB + \sqrt{X}}{aA - bB - \sqrt{X}}\right) \\
X &= (aA - bB)^2 - (a^2 - b^2)(A^2 - B^2 - C^2)
\end{aligned}$$

Après avoir négligé m_γ tant que cela était possible, nous obtenons la formule évaluée dans ([94])

$$\begin{aligned}
Im(D) &= \frac{1}{16\pi}\frac{1}{s_\ell - M_{K^\pm}^2}\frac{1}{\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)}\Theta[r^2 - (m_\ell + m)^2] \\
&\times\Big\{2\ln\big(\frac{M_{K^\pm}^2 m_\gamma}{M_{K^\pm}^2 - s_\ell}\big) + \sum_{\rho,\sigma=\pm1}\ln(x - x_{\rho,\sigma}) - 2\ln(x-1) - 2\ln(x+1)\Big\}
\end{aligned} \tag{C.46}$$

Avec

$$\begin{aligned}
z &= \frac{1}{K(r^2, m_\ell, m)} = \frac{r^2 - m_\ell^2 - m^2 + \lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)}{2mm_\ell} \\
z_{\rho,\sigma} &= -K^\rho(0, m_\ell, M_{K^\pm})K^\sigma((L-p)^2, m, M_{K^\pm})
\end{aligned} \tag{C.47}$$

et

$$K(x, m, m') \quad \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1-4mm'/[x-(m-m')^2]}}{1-\sqrt{1+4mm'/[x-(m-m')^2]}} & x \neq (m-m')^2 \\ -1 & x = (m-m')^2 \end{cases}$$

Nous remarquons que

$$K(x, m, m') = -\beta(x, m, m') = \Big[\sqrt{\frac{x-(m+m')^2}{x-(m-m')^2}} - 1\Big]\Big[\sqrt{\frac{x-(m+m')^2}{x-(m-m')^2}} + 1\Big] \tag{C.48}$$

On développe l'expression (C.46)

$$\begin{aligned}
Im(D) &= \frac{1}{16\pi}\frac{1}{M_{K^\pm}^2 - s_\ell}\frac{1}{\lambda^{1/2}(r^2, m_\ell^2, m^2)}\Theta[r^2 - (m_\ell + m)^2] \times \Big\{-2\ln\big(\frac{M_{K^\pm}^2 m_\gamma}{M_{K^\pm}^2 - s_\ell}\big) \\
&- \ln(x - x_{1,1}) - \ln(x - x_{1,-1}) - \ln(x - x_{-1,1}) - \ln(x - x_{-1,-1}) \\
&+2\ln(x-1) + 2\ln(x+1)\Big\}
\end{aligned} \tag{C.49}$$

On trouve,

$$\begin{aligned}
-2\ln\big(\frac{M_{K^\pm}^2 m_\gamma}{M_{K^\pm}^2 - s_\ell}\big) &= -\ln\big(\frac{m_\gamma^2}{M_{K^\pm}^2}\big) - 2\ln\big(\frac{M_{K^\pm}^2}{M_{K^\pm}^2 - s_\ell}\big) \\
K(0, m_\ell, M_{K^\pm}) &= -\beta(0, m_\ell, M_{K^\pm}) = -\frac{M_{K^\pm}}{m_\ell} = -\frac{1}{z}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\chi &= -\ln(x-x_{1,1}) - \ln(x-x_{1,-1}) - \ln(x-x_{-1,1}) - \ln(x-x_{-1,-1}) + 2\ln(x-1) \\
&+ 2\ln(x+1) \\
&= -\ln\Big[\frac{1}{\beta(r^2,m_\ell,m)} + \frac{1}{z}\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})\Big] - \ln\Big[-\frac{1}{\beta(r^2,m_\ell,m)} + \frac{1}{z}\frac{1}{\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})}\Big] \\
&\quad -\ln\Big[-\frac{1}{\beta(r^2,m_\ell,m)} + z\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})\Big] - \ln\Big[-\frac{1}{\beta(r^2,m_\ell,m)} + z\frac{1}{\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})}\Big] \\
&\quad +2\ln\Big[-\frac{1}{\beta(r^2,m_\ell,m)} - 1\Big] + 2\ln\Big[-\frac{1}{\beta(r^2,m_\ell,m)} + 1\Big]
\end{aligned}
$$

On trouve alors,

$$
\begin{aligned}
\chi &= -\ln\Big[-z + \beta(r^2,m_\ell,m)\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})\Big] - \ln\Big[z\beta(Q^2,m,M_{K^\pm}) - \beta(r^2,m_\ell,m)\Big] \\
&\quad -\ln\Big[1 - z\beta(r^2,m_\ell,m)\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})\Big] - \ln\Big[z\beta(r^2,m_\ell,m) - \beta(Q^2,m,M_{K^\pm})\Big] \\
&\quad +2\ln\Big[1-\beta(r^2,m_\ell,m)^2\Big] + \ln(z^2) + \ln[\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})^2]
\end{aligned}
$$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
Im(D) &= \frac{1}{16\pi}\frac{1}{M_{K^\pm}^2 - s_\ell}\frac{1}{\lambda^{1/2}(r^2,m_\ell^2,m^2)}\Theta[r^2-(m_\ell+m)^2] \times \Big\{-\ln(\frac{m_\gamma^2}{M_{K^\pm}^2}) \\
&\quad -2\ln\big(\frac{M_{K^\pm}^2}{M_{K^\pm}^2 - s_\ell}\big) + \chi\Big\}
\end{aligned} \tag{C.50}
$$

Nous appliquons maintenant le formalisme de l'intégrale de dispersion à D

$$
D(r) = \frac{1}{\pi}\int_{(m_\ell+m)^2}^{\infty}\frac{dr'}{r'-r}ImD(r') \tag{C.51}
$$

Nous introduisons une nouvelle variable d'intégration

$$
z = K^{-1}(r',m_\ell,m)
$$

D'après (C.47)

$$
dz = \frac{1}{2m_\ell m}\Big(1 + \frac{\partial\lambda^{1/2}(r^2,m_\ell^2,m^2)}{\partial r'}\Big)dr'
$$

et ainsi

$$
\frac{dr'}{\lambda^{1/2}(r^2,m_\ell^2,m^2)} = \frac{dz}{z}
$$

D'après la définition (C.47), nous pouvons extraire une expression pour r'

$$
r' = \frac{1}{z}\big(m_\ell m + m_\ell^2 z + m^2 z + m_\ell m z^2\big)
$$

Si on pose $z_0 = K(r,m_\ell,m)$, alors nous trouvons de la même manière une expression pour r

$$
r = z_0\big(m_\ell m + m_\ell^2 z_0^{-1} + m^2 z_0^{-1} + m_\ell m z_0^{-2}\big).
$$

Toutes ces informations nous permettent de réécrire (C.51)

$$
\begin{aligned}
D(r) &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{s_\ell - M_{K^\pm}^2}\int_1^\infty dz\,\frac{1}{m_\ell m}\big(\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-z_0^{-1}}\big)\frac{z_0}{z_0^2-1} \\
&\quad \times\Big\{2\ln\big(\frac{M_{K^\pm}^2 m_\gamma}{M_{K^\pm}^2 - s_\ell}\big) + \sum_{\rho,\sigma=\pm1}\ln(x-x_{\rho,\sigma}) - 2\ln(x-1) - 2\ln(x+1)\Big\}.
\end{aligned}
$$

Il reste à calculer certaines intégrales

$$\begin{aligned}\int_1^\infty dz\Big(\frac{1}{z-z_0}-\frac{1}{z-z_0^{-1}}\Big) &= -\ln(-z_0)\\ \int_1^t dz\frac{\ln(z-a)}{z-b} &= \Big[Sp\big(\frac{a-b}{z-b}\big)+\frac{1}{2}\ln^2(z-b)\Big]_{z=1}^{z=t},\end{aligned}$$

où la fonction de Spence est définie comme

$$Sp(z) = \int_1^z dt\ \frac{\ln(1+t)}{t}.$$

Nous arrivons au résultat

$$\begin{aligned}D(r) &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}\frac{1}{m_\ell m}\frac{z_0}{z_0^2-1}\\ &\times\Big\{-2\ln(-z_0)\ln\Big(\frac{m_\gamma M_{K^\pm}}{M_{K^\pm}^2-s_\ell}\Big)+\sum_{\rho,\sigma,\tau=\pm1}\tau Sp\Big(\frac{1-z_{\rho,\sigma}z_0^\tau}{1-z_0^\tau}\Big)+2\sum_{\tau=\pm1}\tau Sp\Big(\frac{z_0^\tau+1}{z_0^\tau-1}\Big)\Big\}.\end{aligned}$$

On utilise les formules sur les dilogarithmes [111]

$$\begin{aligned}Sp(x)+Sp(1/x) &= -\frac{1}{6}\pi^2-\frac{1}{2}\ln^2(-x)\\ Sp(x)+Sp(1-x) &= \frac{1}{6}\pi^2-\ln(x)\ln(1-x)\\ Sp(x)+Sp(-x) &= \frac{1}{2}Sp(x^2)\\ -Sp(x)+Sp(y) &= Sp(\frac{y}{x})+Sp(\frac{1-x}{1-y})-Sp(\frac{y}{x}\frac{1-x}{1-y})-\frac{\pi^2}{6}\\ &+\ln(x)\big[\ln(1-x)-\ln(1-y)\big]\\ &+\ln\big(\frac{1-x}{1-y}\big)\Big[\ln\big(\frac{x-y}{1-y}\big)-\ln(x)-\ln\big(\frac{x-y}{x}\big)+\ln(1-y)\Big]\\ &-\ln\Big(\frac{y}{x}\frac{1-x}{1-y}\Big)\Big[\ln\Big(\frac{x-y}{x(1-y)}\Big)-\ln\big(\frac{x-y}{x}\big)+\ln(1-y)\Big]\end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned}D(r) &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{s_\ell-M_{K^\pm}^2}\frac{1}{m_\ell m}\frac{z_0}{z_0^2-1}\\ &\times\Big\{-2\ln(-z_0)\ln\Big(\frac{m_\gamma M_{K^\pm}}{M_{K^\pm}^2-s_\ell}\Big)+\frac{1}{4}\sum_{\rho,\sigma=\pm1}\ln^2(-z_{\rho,\sigma})-Sp(1-z_0^2)\\ &+\sum_{\rho,\sigma=\pm1}Sp(1-z_0z_{\rho,\sigma})\Big\}.\end{aligned}\tag{C.52}$$

Nous allons réécrire cette expression en faisant intervenir (C.48). Nous trouvons tout d'abord que

$$\frac{z_0}{z_0^2-1} = -\frac{mm_\ell}{\lambda^{1/2}(r^2,m_\ell^2,m^2)}$$

Nous trouvons finalement

$$\begin{aligned}ReD &= \frac{1}{16\pi^2}\frac{1}{M_{K^\pm}^2-s_\ell}\lambda^{1/2}(r^2,m_\ell^2,m^2)\\ &\times\Big\{-\ln[\beta(r^2,m_\ell,m)]\Big(\ln\frac{m_\gamma^2}{M_{K^\pm}^2}+2\ln\big(\frac{M_{K^\pm}^2}{M_{K^\pm}^2-s_\ell}\big)\Big)-Sp\big[1-\beta(r^2,m_\ell,m)\big]\\ &+Sp\big[1-z^{-1}\beta(r^2,m_\ell,m)\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})\big]+Sp\big[1-z\frac{\beta(r^2,m_\ell,m)}{\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})}\big]\\ &+Sp\big[1-z^{-1}\frac{\beta(r^2,m_\ell,m)}{\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})}\big]+Sp\big[1-z\beta(r^2,m_\ell,m)\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})\big]\\ &+\frac{1}{2}\ln^2[z^{-1}\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})]+\frac{1}{2}\ln^2[z\beta(Q^2,m,M_{K^\pm})]\Big\}.\end{aligned}\tag{C.53}$$

La fonction D dépend de deux scalaires $r^2 = (p - p_\ell)^2$ et $Q^2 = (p - L)^2$. Il faut distinguer les cas où ces scalaires sont supérieurs ou inférieurs à leur seuils respectifs. Les seuils étant donnés par les singularités de Landau.

4.2 Les décompositions vectorielle et tensorielle

$$\begin{aligned} D_\mu(p_1, p_2, p_3, 0; M_1^2, M_2^2, M_3^2, M^2) &= \\ \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_\mu}{(q^2 - M^2)\ [(p_1 - q)^2 - M_1^2]\ [(p_2 - q)^2 - M_2^2]\ [(p_3 - q)^2 - M_3^2]} \\ &= p_{1\mu} D_1 + p_{2\mu} D_2 + p_{3\mu} D_3 \end{aligned} \tag{C.54}$$

$$\begin{aligned} D_{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3, 0; M_1^2, M_2^2, M_3^2, m) &= \\ \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_\mu q_\nu}{(q^2 - M^2)\ [(p_1 - q)^2 - M_1^2]\ [(p_2 - q)^2 - M_2^2]\ [(p_3 - q)^2 - M_3^2]} \\ &= p_{1\mu} p_{1\nu} D_{11} + p_{2\mu} p_{2\nu} D_{22} + p_{3\mu} p_{3\nu} D_{33} \\ &+ \left[p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}\right] D_{12} + \left[p_{1\mu} p_{3\nu} + p_{3\mu} p_{1\nu}\right] D_{13} \\ &+ \left[p_{2\mu} p_{3\nu} + p_{3\mu} p_{2\nu}\right] D_{23} + \eta_{\mu\nu} D_{00} \end{aligned} \tag{C.55}$$

Bibliographie

[1] D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. D **8**, 3633 (1973)

[2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **31**, 494 (1973)

[3] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973)

[4] G. 't Hooft, *Recent Developements in Gauge theories* édité par G. 't Hooft et al., Plenum, New York (1980)

[5] S. Coleman, B. Grossman, Nucl. Phys. B **203**, 205 (1982)

[6] Y. Frishman, A. Schwimmer, T. Banks, S. Yankielowicz, Nucl. Phys. B **177**, 157 (1981)

[7] C. Vafa, E. Witten, Nucl. Phys. B **234**, 173 (1984)

[8] C. Vafa, E. Witten, Comm. Math. Phys. **95**, 257 (1984)

[9] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19**, 154 (1961)

[10] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962)

[11] J. Stern Workshop on Chiral Dynamics 1997, Mainz Germany (hep-ph/9712438)

[12] G. Colangelo hep-ph/0011024 Chiral Dynamics 2000, Jefferson Lab

[13] S. Pislak et al. [BNL-E865 Collaboration], Phys. Rev. Lett. **87**, 221801 (2001)

[14] S. Pislak et al. [BNL-E865 Collaboration], Phys. Rev. D **67**,072004 (2003)

[15] M. Baillargeon et P. J. Franzini *Accuracies of K_{e4} parameters at DaΦne* The Second DaΦne Physics Handbook Vol. 1 INFN Frascati, eds. L. Maiani, G. Pancheri et N. Paver

[16] R. Wanke *New results on kaon decays from Na48* (hep-ex/0305059)

[17] E. Santos (KTeV Collaboration) *An analysis of $K_L \to \pi^o \pi^\pm e^\pm \nu_e(\overline{\nu}_e)$* APS Meeting 2003, Philadelphia

[18] S. Weinberg, Phys. Lett. B **91**, 51 (1980)

[19] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **18** 188 (1967)

[20] M. Knecht *La chromo-dynamique quantique à basse énergie* - Ecole d'été de Gif 1995

[21] J. Bijnens, U-G. Meiner, A. Wirzba *Effective field theories of QCD* Novembre 2001, Bad Honnef, Allemagne (hep-ph/0201266)

[22] S. Weinberg Physica A **96**, 327 (1979)

[23] J. Gasser, H. Leutwyler Ann. Phys. **158**, 142 (1984)

[24] J. Gasser, H. Leutwyler Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985)

[25] A. Pich *Chiral Perturbation Theory*, Rept. Prog. Phys. **58** 563 (1995)

[26] G. 't Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972)

[27] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, Nuovo Cim. B **12** 20 (1972)

[28] W. J. Marciano, Nucl. Phys. B **84**, 132 (1975)

[29] W. J. Marciano, Phys. Rev. D **12**, 3861 (1975)

[30] W. J. Marciano, A. Sirlin, Nucl. Phys. B **88**, 86 (1975)

[31] R. Gastmans, R. Meuldermans, Nucl. Phys. B **63**, 277 (1973)

[32] M. Le Bellac *Des phénomènes critiques aux champs de jauge: Introduction aux méthodes et aux applications de la théorie quantique des champs* Intereditions-Editions du CNRS

[33] R. Urech, Nucl. Phys. B **433**, 234 (1995)

[34] S. Oneda, Nucl. Phys. **4**, 21 (1957)

[35] A. C. T. Wu, Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **33**, 72 (1961)

[36] K. M. Watson, Phys. Rev. **88**, 1163 (1952)
K. M. Watson, Phys. Rev. **95**, 228 (1954)

[37] S. M. Roy, Phys. Lett. B **36**, 353 (1971)

[38] E. L. Koller, S. Taylor, T. Huetter, P. Stamer, Phys. Rev. Lett. **9**, 328 (1962).

[39] R. W. Birge *et al.*, Phys. Rev. **139**, 1600 (1965)

[40] R. P. Ely *et al.*, Phys. Rev. **180**, 1319 (1969)

[41] W. Schweinberger *et al.*, Phys. Lett. B **36**, 246 (1971)

[42] M. Bourquin *et al.*, Phys. Lett. B **36**, 615 (1971)
P. Basile *et al.*, Phys. Lett. B **36**, 619 (1971)
A. Zylberstein *et al.*, Phys. Lett. B **38**, 457 (1972)

[43] E. W. Beier *et al.*, Phys. Rev. Lett. **29**, 511 (1972); ibid. Phys. Rev. Lett. **30**, 399 (1973)

[44] L. Rosselet et al., Phys. Rev. D **15**, 574 (1977)

[45] A. M. Diamant-Berger, *Étude expérimentale à haute statistique de la désintégration du méson K^+ dans le mode K_{e4} et analyse des paramètres qui gouvernent cette désintégration*, Thèse, Université de Paris - Sud, Orsay; Centre d'Etudes Nucléaires de Saclay, 1976, rapport CEA-N-1918.

[46] The Review of Particle Physics
K. Hagiwara *et al.* Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002)

[47] F. J. Ynduráin, Quantum Chromodynamics - An introduction to the theory of quarks and gluons, Springer-Verlag 1983

[48] Y. Ne'eman, Nucl. Phys. **26**, 222 (1961)

[49] M. Gell-Mann, Y. Ne'eman, The Eightfold Way, New York: W.A. Benjamin, Inc. (1964)

[50] T. Muta, Foundations of Quantum Chromodynamics, 2-nd ed., World Scientific, 1998

[51] L.D. Faddeev, V.N. Popov Phys. Lett. B **25**, 29 (1967)

[52] t'Hooft, Nucl. Phys. B **33**, 173 (1971)

[53] J.C. Taylor, Nucl. Phys. B **33**, 436 (1971)

[54] H. Georgi, *Weak Interactions and Modern Particle Physics* (Benjamin) 1984

[55] J. Gasser, H. Leutwyler Phys. Lett. B **125**, 321 (1984)

[56] G. Colangelo, G. Isidori, *An introduction to ChPT* Lectures given at the **2000 LNF Spring School**, Frascati (Italy) May 2000 (hep-ph/0101264)

[57] J. Bijnens, G. Ecker, J. Gasser - *Chiral Perturbation Theory* - The Second DaΦne Physics Handbook, Vol. 1 (Chapitre 7) - Edité par L. Maiani, G. Pancheri et N. Paver (1995)

[58] U. Meiner, *Effective Field Theories of the Standard Model* (World Scientific, Singapore) 1992

[59] S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969)

[60] C. C. Callan, S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2247 (1969)

[61] J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, Ann. Phys. **280**, 100 (2000)

[62] M. Knecht, H. Neufeld, H. Rupertsberger, P. Talavera, Eur. Phys. J. C **12**, 469 (2000)

[63] A. Manohar, H. Georgi, Nucl. Phys. B **234**, 189 (1984)

[64] J. Wess, B. Zumino, Phys. Lett. B **37**, 95 (1971)

[65] E. Witten, Nucl. Phys. B **223**, 422 (1983)

[66] C. G. Callan, E. Witten, Nucl. Phys. B **239**, 161 (1984)

[67] J. Bijnens, G. Colangelo, G. Ecker, J. Gasser - *Semileptonic Kaon Decays* - The Second DaΦne Physics Handbook, Vol. 1 (Chapitre 7) - Edité par L. Maiani, G. Pancheri et N. Paver (1995)

[68] G. Amorós, J. Bijnens, P. Talavera, Nucl. Phys. B **585**, 293 (2000) Erratum-ibid. B **598**, 665 (2001)

[69] L. Chounet, J. Gaillard, M. K. Gaillard, Phys. Rept. **4**, 199 (1972)

[70] Franklin, Allan, "Experiment in Physics", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Summer 2003 Edition), Edward N. Zalta (ed.), *See Appendix 8 The Articulation of theory: Weak Interactions*
URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2003/entries/physics-experiment/>.

[71] X2 Collaboration, Phys. Lett. B **36**, 521 (1971)

[72] Akimenko et al. Phys. Lett. B **259**, 225 (1991)

[73] E. G. C. Sudarshan, R. E. Marshak, Phys. Rev. **109**, 1860 (1958)
R. P. Feynman, M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958)
J. Sakurai, Nuovo Cimento **7**, 649 (1958)

[74] J. Bijnens, Nucl. Phys. B **337**, 635 (1990)

[75] C. Riggenbach, J. Gasser, J.F. Donoghue, B.R. Holstein , Phys. Rev. D **43**,127 (1991)

[76] N. Cabibbo, A. Maksymovicz, Phys. Rev. B **137** 438 (1965); erratum Phys. Rev. **168** 1926 (1968)

[77] V. Cuplov, *Isospin violation in $K_{\ell 4}$ decays* Workshop on Hadronic Atoms (HadAtom01) - Université de Berne (Suisse) - Octobre 2001 (hep-ph/0112293)

[78] A. Pais, S.B. Treiman, Phys. Rev. **168**, 1858 (1968)

[79] G. Amorós, J. Bijnens, J. Phys. G **25**, 1607 (1999)

[80] E. Fermi, Nuovo Cimento Suppl. **2**, 17 (1955)

[81] L. B. Okun, E. P. Shabalin, Sov. Phys. (JETP) **10**, 1252 (1960) (Zh. Eksp. Teor. Fiz. **37**, 1775 (1959)

[82] F. A. Berends, A. Donnachie, G. C. Oades, Phys. Rev. **171**, 1457 (1968)

[83] N. K. Pak, P. Rossi, Nucl. Phys. B **250**, 279 (1985)

[84] J. Bijnens, G. Colangelo, J. Gasser, Nucl. Phys. B **427**, 427 (1994)

[85] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3**, 650 (1962)

[86] T.D. Lee, M. Nauenberg, Phys. Rev. B **133**, 1549 (1964)

[87] H. Neufeld, H. Rupertsberger, Z. Phys. C **68**, 91 (1995)

[88] H. Neufeld, H. Rupertsberger, Z. Phys. C **71**, 131 (1996)

[89] Ulf-G. Meiner, G. Müller and S. Steininger, Phys. Lett. B **406**, 154 (1997), Erratum-ibid. B **407**, 454 (1997)

[90] F. E. Low, Phys. Rev. **110**, 974 (1958)

[91] J.D. Bjorken, S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, Mac Graw-Hill Book Company

[92] E. S. Ginsberg, Phys. Rev. **142**, 1035 (1966); Phys. Rev. **162**, 1570 (1967); ibid. **187**, 2280(E) (1969); Phys. Rev. **171**, 1675 (1968); ibid. **174**, 2169(E) (1968); ibid. **187**, 2280(E) (1969); Phys. Rev. D **1**, 229 (1970)

[93] G. 'T Hooft, M. Veltman, Nucl. Phys. B **153**, 365 (1979)

[94] W. Beenakker, A. Denner, Nucl. Phys. B **338**, 349 (1990)

[95] R. Mertig *Guide to FeynCalc* - http://www.feyncalc.org/FeynCalcBook/

[96] A. Denner, Fortschr. Phys. **41**, 307 (1993)

[97] R. Mertig, M. Böhm, A. Denner, Comput. Phys. Comm. **64**, 345 (1991)

[98] G. Passarino, M. J. Veltman, Nucl. Phys. B **160**, 151 (1979)

[99] T. Hahn, M. Pérez-Victoria, Comput. Phys. Comm. **118**, 153 (1999) http://www.feynarts.de/looptools/

[100] R. Baur, R. Urech, Nucl. Phys. B **499**, 319 (1997)

[101] A. V. Manohar, *Effective Field Theories*, 1996 Schladming Winter School Lectures (hep-ph/9606222)

[102] B. Bloch-Devaux, G. Marel et B. Vallage *Communication privée*

[103] V. Cuplov, A. Nehme, *Isospin breaking in $K_{\ell 4}$ decays of the charged kaon* (hep-ph/0311274)

[104] W. Gröbner, N. Hofreiter *Integraltafel erster teil unbestimmte integrale* (Springer-Verlag 1975).

[105] R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, J. C. Polkinghorne - Tha analytic S-matrix - Cambridge Univeristy Press (1966)

[106] C. Itzykson, J. B. Zuber, Quantum Field Theory

[107] G. Duplančić, B. Nižić, Eur. Phys. J. C **20**, 357 (2001)

[108] A. Denner, U. Nierste, R. Scharf, Nucl. Phys. B **367**, 637 (1991)

[109] R.E. Cutkosky, J. Math. Phys. **1**, 429 (1960)

[110] J. D. Bjorken et S. D. Drell, Relativistic quantum fields (McGraw-Hill, New York, 1965)

[111] R. Lewin, Polylogarithms and associated functions (North-Holland, Amsterdam, 1981)

Index

Symboles

B_o 14
F_π 57
F_o xii
G_F 22, 34, 82
$K_{\ell 4}$
  expériences xiii
  nomenclature ..... xiii, 23, 27, 31
$SU(3)_L \times SU(3)_R/SU(3)_{\rm v}$ 12, 14
$SU(3)_L \times SU(3)_R$ 8, 9, 12, 16
$SU(3)_{\rm L} \times SU(3)_{\rm R} \times U(1)_{\rm v}$ xi
$SU(3)_{\rm c}$ ..... xi, 3, 5, 6
$SU(3)_{\rm v}$ ..... xi, 3, 4, 10, 12
$U(1)_{\rm v}$ xi
Z_o 14
Running coupling constant 1

A

Angle de Cabibbo 25

B

Bose-Einstein
  statistique de 40
Brisure
  d'isospin .. xiv, 13, 18, 19, 31, 33, 34, 39, 43, 50
  explicite xii
  spontanée ..... xi, xii, 7, 12, 13

C

Champs
  normalisation 17, 86, 87
Charge 10
  axiale ..... xi, 10
  vectorielle ..... xi, 9, 10
Charges 9
Chiral(e)
  anomalie 16, 43, 81
  brisure de symétrie 14
  groupe 9
  lagrangien 13, 15, 16, 19
  limite ..... xi, xii, xiv, 8, 9, 14
  schéma de comptage 19
  symétrie ..... xii, 10, 12, 13
  transformation 13
Chiralité 8, 9
Cinématique 32, 125
  variables de 32
Condensat de quarks ..... xii, 14
Constante
  de basse énergie 16, 83
  de couplage
    faible 22
    fort 1, 2
  de désintégration du pion xii
  de Fermi 22, 34, 82
  de structure 6, 9, 123
Contre terme xii, 16, 73, 81, 82, 89, 93, 96, 98
Correction
  d'unitarité 75
  interaction forte 73
  radiative ..... xiv, 55
Courant 9, 10
  faible 22, 39
  hadronique 9, 23, 25, 26
    axial ..... xi, 7, 9, 10, 27–29
    tensoriel 24
    vectoriel 7, 9, 10, 27–29

D

Dérivée covariante 5
Désintégration radiative 100
Développement
  en ondes partielles 39, 40
Diagramme de Cartan 10
Diffusion
  pion-pion xii
Divergence
  infra-rouge 70, 99, 100, 103–106, 136–138
  ultra-violette 16, 70, 75, 80, 81, 83, 96–98

E

Echelle
  hadronique ..... xii, 2, 8
Energie propre 86, 87

du kaon chargé 92–94
du lepton 95
du pion chargé 88–90
Equations de Roy ..... xiii, 39
Espace des phases 36, 37, 52, 101
Etat quantique 39, 40
Etrangeté 3, 9, 17, 23, 31

F
Facteur
de forme 24–26, 28, 29, 35, 36, 39, 40, 43, 55, 97
de l'anomalie 35, 55
tensoriel 27, 29, 35, 39, 46, 53
topologique 74, 88

G
Goldstone
bosons de 12, 13
Graphe de Dalitz 33

H
Hélicité 7
Hypercharge 6, 10, 17

I
Interaction
de Fermi 22
faible 7, 9, 22, 23
forte ..... xi, xiii, 1, 5, 6, 13
pion-pion 39
Invariance
globale 3
locale 3, 5
Isospin 3, 6, 10, 17, 39
groupe 9
multiplet d' ..... xi, 3
transformations 3

L
Lagrangien
chiral 15
de Faddeev-Popov 6
de QCD ..... xi, 5, 8, 12, 13
de Yang-Mills 5
effectif ..... xii, 11–13, 15, 16, 81
faible 22, 23
Liberté asymptotique 1, 2

M
Mélange $\pi^o - \eta$ 18
Matrice
CKM 22
de Gell-Mann ..... xi, 6, 10, 17
de Pauli 6
Matrice CKM 34
Moment angulaire orbital 39, 40

N
Nombre baryonique 10

O
Octet xi
Opérateurs
de projection 7

P
Paramétrisation de Feynman 120
Parité ..... xiv, 24–26, 28, 29
nombre quantique 24
Photon
mou 99–101, 106
réel 99
virtuel 55, 70, 99, 104
Pion-pion
déphasage ..... xiii, 39, 41, 55
diffusion ..... xiii, 41
interaction 39, 42
longueur de diffusion ..... xiii, 39
Propagateur 85, 86
pôle du 85, 87
résidu du pôle du 86
Pseudo-scalaires
champs 15–17
masses 19

R
Référentiel 32
Régularisation ..... xii, 99
dimensionnelle ..... xii, 12, 99
Règles de Cutkosky 140
Rapport de branchement ..... xiv, 21, 39
Relation de dispersion 140, 144
Renormalisation 1, 6, 83, 85
échelle de 1
équation du groupe de 1
du kaon chargé 91, 94, 95
du lepton 95, 96
du pion chargé 87, 90, 91

S
Saveur ..... xi, 3
Soustraction

point de 1
schéma de xii
Symétrie
chirale ..... xi, 8
de la saveur 4, 10
globale xi
locale xi

T

Taux de désintégration ..... xiv, 36
Tenseur de Levi-Civita 24, 27, 28
Théorème
de Fermi-Watson 39, 40
de Goldstone ..... xi, 7
de Kinoshita-Lee-Nauenberg 99
de Noether 9, 10
de Pauli 39
de Watson xiii
Théorie
de jauge ..... xi, 3
des perturbations chirale .. xii, 11, 13, 19, 31
effective ..... xii, 11, 12
Transformation
de Lorentz ..... xiv, 13, 23–27, 29
locale 3

W

Wick
contraction de 74
rotation de 129, 130