



HAL
open science

Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique

Viviane Durand-Guerrier

► **To cite this version:**

Viviane Durand-Guerrier. Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2005. tel-00201626

HAL Id: tel-00201626

<https://theses.hal.science/tel-00201626>

Submitted on 1 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES
EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES**

Université Claude Bernard Lyon 1

**RECHERCHES SUR L'ARTICULATION
ENTRE LA LOGIQUE ET LE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE
DANS UNE PERSPECTIVE DIDACTIQUE**

*Un cas exemplaire de l'interaction
entre analyses épistémologique et didactique*

**Apports de la théorie élémentaire des modèles
pour une analyse didactique du raisonnement mathématique**

Viviane DURAND-GUERRIER

IUFM¹ de Lyon & LIRDHIST², Université Claude Bernard, Lyon 1

Note de synthèse

Soutenue le 16 juin 2005, devant le jury composé de

Michèle ARTIGUE, Université Paris 7 (France), rapporteur

Thierry FACK, Université Lyon 1 (France), examinateur

Jacques MAZOYER, Institut Universitaire de Formation des Maîtres de Lyon (France), rapporteur

Mélika OUELBANI, Université de Tunis (Tunisie), examinateur.

Daniel PARROCHIA, Université Lyon 3 (France), examinateur

Marc ROGALSKI, Université Lille (France), examinateur

Carl WINSLOW, Université de Copenhague (Danemark), examinateur

Invité

Gilbert ARSAC, Professeur en retraite de l'Université Lyon 1 (France)

¹ Institut Universitaire de Formation des Maîtres

² Laboratoire Interdisciplinaire de recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et des Techniques, E.A.
n°1658

SOMMAIRE

I.	Introduction	5
II.	La théorie élémentaire des modèles comme référence épistémologique	6
	<i>Preliminaire</i> : sur la place de l'analyse épistémologique en didactique des mathématiques	7
	II.1 Sur la nécessité d'une théorie de la quantification pour analyser les énoncés mathématiques	10
	II.2 Sur l'intérêt d'une théorie sémantique de la vérité pour analyser le raisonnement mathématique	12
	II.3 Sur la pertinence de la théorie élémentaire des modèles pour penser la question de la nécessité et de la certitude en mathématiques	32
	II.4 Conclusion	44
III.	Les connecteurs logiques au-delà des tables de vérité	46
	III.1 Quelle implication pour faire des mathématiques ?	46
	III.2 Négation et contraire	72
	III.3 Conclusion	79
IV.	Des pratiques mathématiques en question	81
	IV.1 La quantification implicite des énoncés conditionnels	81
	IV.2 La quantification bornée	91
	IV.3 L'absence de conclusion dans les démonstrations	93
	IV.4 L'utilisation de règles non valides	97
	IV.5 L'instabilité du statut des lettres dans les démonstrations	102

IV.6 Commentaires	110
V. L'interprétation des énoncés mathématiques	113
V.1 Syntaxe, sémantique et pragmatique	113
V.2 La résolution géniale d'une contradiction	116
V.3 Explicitation sur un exemple de la dimension pragmatique d'une loi logique	119
V.4 Le tiers exclu en question dans la classe de mathématiques	124
V.5 Un exemple de règle pragmatique : la règle de dépendance des Variables	139
V.6 Commentaires	147
VI. Conclusion et perspectives scientifiques	149
VI.1 Articulation entre la logique et le raisonnement mathématique à l'université	150
VI.2 Analyse du discours dans la classe de mathématiques	151
Références	154

I. Introduction

Poser la question de l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique n'est pas aussi naïf qu'il y paraît à première lecture. En effet, si, depuis les travaux de Frege, cette question a été au cœur des études d'un certain nombre de fondateurs de la logique classique contemporaine, ceux-ci ont, d'une certaine manière, reçu une fin de non-recevoir de la part d'un mathématicien aussi prestigieux que Dieudonné (1987) qui considère que la logique n'aide en rien les mathématiciens à résoudre les problèmes dont ils s'occupent (p.247). Ce n'est cependant pas l'avis d'une philosophe comme Sinaceur (1991) qui montre de façon magistrale que cette affirmation doit être reconsidérée, en proposant une histoire croisée de la logique et de l'algèbre. Du côté de l'enseignement des mathématiques, il est tout à fait clair que l'expérience malheureuse de la réforme dite « des mathématiques modernes » dans les années mille neuf cent soixante-dix continue de peser lourdement sur la place que peuvent occuper les questions de logique dans l'enseignement, et ceci jusqu'à l'université. Pratiquement absente aujourd'hui des curricula français, la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique est également le plus souvent absente du discours du professeur. Pour autant, les objets dont s'occupe la logique, tels que les connecteurs, la quantité, les règles d'inférences, la vérité et la validité sont autant d'outils de l'activité mathématique, utilisés le plus souvent de façon naturalisée, non problématisée et sans théorie de référence.

Du côté des recherches en didactique des mathématiques, bien que l'on puisse apercevoir que, dans les années mille neuf cent soixante-dix et mille neuf cent quatre-vingts, les questions de logique préoccupaient les chercheurs tels Brousseau ou Vergnaud, les références explicites à la logique comme théorie contribuant à l'explication des phénomènes didactiques apparaît assez peu, même chez des auteurs mettant au cœur de leur travail la question du Vrai et du Faux comme Margolinas (1989) ou Legrand (1993). On trouve cependant des travaux prenant explicitement en compte les questions de logique dans la lignée des travaux de Brousseau pour l'école élémentaire à Bordeaux (Maudet, 1982, Orus Baguena, 1992, Gibel 2004), à Genève (Conne 1986), et pour le lycée et l'Université à Strasbourg (Radford 1985, El Faqui 1991, Ben Bachir 2001) à Toulouse (Antibi, 1988) et à Grenoble (Rolland, 1999, Deloustal, 2002, 2004). L'originalité de notre travail de thèse (Durand-Guerrier, 1996) réside d'une part dans le travail d'enquête épistémologique qui nous a permis de mettre à jour la complexité de la notion d'implication et, par là, d'éclairer les difficultés liées à l'utilisation de ce connecteur,

difficultés repérées aussi bien dans les travaux de psychologie cognitive que de didactique ; d'autre part, dans l'usage que nous faisons des outils logiques pour analyser les raisonnements mathématiques et poser la question de la relation dialectique entre logique et mathématique dans la structuration des connaissances. Après notre thèse, nous avons étendu notre étude à d'autres connecteurs logiques, en particulier la négation, et mis à l'épreuve nos outils d'analyse sur des raisonnements plus complexes, comme ceux qui apparaissent en analyse ou en topologie, et sur des raisonnements élaborés en langue naturelle à l'école élémentaire ou au collège. Depuis quelques années, l'ensemble de nos travaux fait apparaître la nécessité, pour l'interprétation des énoncés mathématiques en situation d'enseignement et d'apprentissage, d'une prise en compte simultanée des aspects syntaxique, sémantique et pragmatique au sens de Morris (1938).

Dans cette note de synthèse, nous nous proposons de montrer que la théorie élémentaire des modèles offre un cadre de référence pertinent permettant une relecture de notre travail de thèse, un développement de nos travaux concernant le niveau universitaire et une ouverture vers les travaux de sémantique formelle en sciences du langage pour l'analyse du discours dans la classe de mathématique.

II. La théorie élémentaire des modèles comme référence épistémologique

Préliminaire : Sur la place de l'analyse épistémologique en didactique des mathématiques

Dès les débuts de la didactique des mathématiques en tant que champ scientifique constitué, les chercheurs font l'hypothèse que le problème de la genèse historique de l'apparition d'une notion peut éclairer celui de son enseignement ; ceci s'appuie principalement sur les travaux d'épistémologie historique (Bachelard 1938) et d'épistémologie génétique (Piaget *et al.*, 1983). Cependant les études conduites montrent que les travaux des historiens n'apportent pas toujours de réponse aux didacticiens, et ceci pour une raison très simple : les problématiques d'étude des textes historiques ne sont pas les mêmes dans l'un ou l'autre champ. Dans un article intitulé *Essai d'épistémologie didactique*, Arsac (1987) se propose d'étudier la genèse historique de la démonstration au V^{ème} siècle avant Jésus Christ en Grèce en utilisant les travaux historiques existants à la lumière de la question de savoir si l'apparition de la démonstration est liée à un problème interne aux mathématiques ou à l'influence de la société grecque. Pour conduire son étude, l'auteur s'appuie sur les concepts et méthodes de la didactique des mathématiques et sur les travaux de Balacheff (1988). Il montre ainsi de façon convaincante que certains concepts élaborés par la didactique des mathématiques peuvent apporter un point de vue nouveau sur les problèmes historiques, préciser les questions et même suggérer certaines réponses. À l'issue de cette étude, il conclut que l'apparition de la démonstration est liée à la résolution d'une contradiction interne aux mathématiques (l'incommensurabilité de la diagonale du carré), mais que la solution retenue est liée à l'influence de la société grecque. Ce résultat est ensuite réinvesti dans les travaux de recherches en didactique sur la démonstration. Cet article montre ainsi la possibilité « d'engager un dialogue entre historien et didacticien dans lequel ce dernier ne soit pas un simple client » (Arsac, 1987, p. 270). D'autres chercheurs travaillent dans cette voie, en particulier Dorier dont les travaux sur l'algèbre linéaire (Dorier, 1991, 1996, 1997) sont exemplaires de ces interactions fécondes entre didactique, épistémologie et histoire des sciences. En effet, si son travail de didacticien s'est nourri fortement des travaux conduits en histoire des sciences, les questions didactiques qu'il a traitées concernant la notion de rang lui ont permis de renouveler le regard porté par les historiens sur les travaux de Grassman. Les perspectives sur les interactions entre les recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire font l'objet de son mémoire d'habilitation à diriger des

recherches, soutenu à l'université Grenoble 1 en 1997 et publié dans Dorier (2000). Après une revue non exhaustive de différents courants, il propose une définition large et ouverte de l'adjectif *épistémologique* à savoir : « *qui est relatif à l'évolution des savoirs ou des connaissances* » (p. 13) ; le choix « minimaliste » assumé par l'auteur « *a le mérite de mettre l'accent sur l'aspect dynamique et pluraliste des savoirs et des connaissances* » et de « *s'appliquer partout où des savoirs et des connaissances mathématiques sont en cours de constitution, d'acquisition, d'évolution, d'application ou de transformation.* » (p. 14) ; il permet de mettre en évidence le fait que « *l'épistémologie apparaît comme le terme médiateur qui fait le lien entre le travail historique et le travail didactique.* » (p. 7). Ce n'est cependant pas la seule fonction de l'analyse épistémologique comme l'écrit Artigue (1991) dans un article intitulé *Epistémologie et didactique* :

« En résumé, on a vu l'analyse épistémologique aider la didactique à se déprendre de l'illusion de transparence des objets qu'elle manipule au niveau du savoir et aider le didacticien à se dégager des représentations épistémologiques erronées que tend à induire sa pratique d'enseignant³ » (Artigue, 1991, p. 245)

L'auteur développe ensuite deux aspects des relations entre épistémologie et didactique, le premier concerne les obstacles épistémologiques, en référence à Bachelard, et le second la notion de conception. Nous ne développerons pas ces points ici car c'est dans une direction assez différente que s'oriente notre travail. Ce que nous retenons surtout, c'est cette *illusion de transparence des objets de savoir* et la nécessité d'une *vigilance épistémologique*, ces deux aspects étant mis en exergue également dans les travaux de Chevallard sur la transposition didactique (Chevallard 1991). Dans cet ouvrage, l'auteur classe les concepts logiques que nous étudions parmi les notions para-mathématiques ; « ce sont des *notions outils* de l'*activité mathématique* » elles ne sont pas, « normalement », des objets d'études pour le mathématicien⁴ ; « elles ne sont pas en général objet d'enseignement » (*ibid.* p. 50). Elles sont cependant manipulées par l'enseignant, et sont donc, de ce fait, des objets de la pratique enseignante. Pour ces notions aussi doit donc s'exercer, selon nous, pour le didacticien, la vigilance épistémologique qui consiste à se poser « *la question de l'adéquation : n'y a-t-il pas*

³ Cette dernière remarque s'explique par le fait que les premiers travaux de didactique des mathématiques ont été conduits par des chercheurs qui avaient déjà une activité d'enseignant, que ce soit au primaire, dans le secondaire ou à l'université. Ce n'est que récemment que l'on voit s'engager en thèse des étudiants en poursuite d'études, les enseignants en reprise d'étude restant toutefois proportionnellement encore assez nombreux.

⁴ Il précise que ces notions para-mathématiques sont cependant « objets d'étude en logique mathématique » et « qu'il faut donc toujours se référer à une pratique d'enseignement précise ».

conversion d'objet et alors laquelle ?» (*ibid.* p. 43). En d'autres termes, on pourrait parler de *naturalisation des objets* en tenant compte du fait que, concernant les concepts logiques, cette naturalisation peut se faire dans la pratique de l'enseignant de mathématique d'une part et dans la pratique du mathématicien d'autre part. Or, ce deuxième point nous intéresse également puisque, dans l'enseignement universitaire à tout le moins, l'enseignant de mathématique est aussi, voire même d'abord, mathématicien. Dans notre travail de thèse, pour pouvoir exercer cette *vigilance épistémologique*, nous avons conduit ce que nous choisissons d'appeler une *enquête épistémologique*. Son premier objectif était de questionner la pertinence, pour notre travail de recherche en didactique, de la logique classique comme outil d'analyse de la nature des difficultés de raisonnement, dans l'activité mathématique, des étudiants de premier cycle universitaire, en limitant dans un premier temps notre étude à l'implication. Le retour à quelques textes fondateurs, d'Aristote à Quine en passant par Frege et Russell, nous a permis de voir la logique émerger comme une tentative d'élucidation et d'éclaircissement de deux concepts fondamentaux : la vérité et la validité. Ceci nous a permis de clarifier, pour nous-même, les différentes notions d'implication en jeu dans l'activité mathématique. Les résultats obtenus ont nourri sans relâche notre travail didactique et nous ont amené à conclure à *la pertinence du calcul des prédicats comme théorie logique de référence pour l'analyse des difficultés liées au maniement de l'implication*. Nous employons ici le terme d'*enquête* pour mettre en évidence le fait que, lorsque nous voulons étudier une question didactique dans notre champ de recherche, nous nous mettons tout d'abord en quête des logiciens et/ou des philosophes dont les travaux sont susceptibles de nous éclairer, puis nous choisissons quelques textes que nous étudions plus spécifiquement. De la sorte, notre travail d'enquête épistémologique ne prétend en aucune manière à l'exhaustivité, puisque nous avons volontairement écarté de nombreuses pistes croisées. Nos choix sont guidés par notre problématique didactique, et contribuent à accroître nos connaissances, ceci afin de mieux cerner les concepts étudiés. À l'issue de notre travail de thèse, il était clair pour nous que certains auteurs fondamentaux pour notre perspective avaient été oubliés. C'était en particulier le cas de Tarski, dont nous avons seulement pressenti que la théorie sémantique de la vérité était clairement à l'origine des outils que nous avons utilisés ou élaborés. Nous avons donc approfondi notre enquête par l'étude de quelques textes de Tarski (1936a, 1936b, 1944, 1960) tout en l'étendant à d'autres notions. C'est ainsi que la théorie élémentaire des modèles nous est apparue comme un cadre de référence particulièrement pertinent pour notre objet d'étude. Dans ce cadre, nous développons une méthodologie d'analyse des phénomènes didactiques mettant en jeu l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique, ce

qui est un autre aspect des interactions entre épistémologie et didactique. Cet aspect est mis en œuvre dans les travaux de thèses de Chellougui (2004) sur la quantification et de Ben Kilani (en cours) sur la négation.

II.1. Sur la nécessité d'une théorie de la quantification pour analyser les énoncés mathématiques

Un certain nombre de travaux menés tant en psychologie cognitive (Wason & Johnson-Laird 1977, Politzer 1981, Johnson-Laird 1986) qu'en didactique des mathématiques (Radford 1985, Legrand 1993, Arsac et al. 1989, Hanna 2000, Hoyles-Kücheman 2003) insistent sur la distance entre la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique et la logique de sens commun mobilisée prioritairement par les élèves, y compris au lycée et à l'université. Ceci semble être en contradiction avec l'idée, défendue par Piaget, d'un développement progressif des structures logico-mathématiques achevé à la fin de l'adolescence (Inhelder & Piaget 1970). Il faut noter cependant que, dans ces travaux, la logique de référence est le plus souvent le calcul des propositions, ce qu'un auteur comme Granger (1994) appelle la logique *stricto sensu*. Or Piaget (1972) soutient également l'idée que la logique des propositions permet à elle seule de rendre compte de toute la logique classique, rendant inutile une théorie de la quantification⁵. À l'instar d'autres auteurs (Blanché 1970, Hottois 1989), nous avons montré (Durand-Guerrier 1996) que cette position n'était pas tenable, et que la logique d'Aristote elle-même, pour limitée qu'elle soit, rend nécessaire le recours à une théorie de la quantification.

Concernant les mathématiques enseignées au collège et au lycée, certains auteurs, et parmi eux principalement Duval (1995), considèrent que, pour la géométrie du moins, l'unité d'analyse des raisonnements est la proposition, et qu'un raisonnement est une suite de pas de déduction prenant comme prémisses soit les données du problème, soit les conclusions intermédiaires recyclées, soit encore des éléments introduits en cours de résolution comme les constructions auxiliaires et utilisant les théorèmes universels disponibles qui constituent en quelque sorte une « boîte à outils ». La prédominance en géométrie des énoncés universels et la pratique généralisée de la quantification universelle implicite supportent aisément une telle position, de nombreux raisonnements, en contexte scolaire, pouvant s'analyser suivant ce

⁵ Anna Sierpiska nous signale cependant que Piaget est revenu sur cette position dans des travaux ultérieurs (Piaget & Garcia, 1987)

modèle. En effet, le problème type de géométrie au collège consiste à prouver qu'un objet générique vérifiant certaines propriétés et représenté le plus souvent par une figure, vérifie nécessairement une autre propriété. Comme dans le curriculum secondaire français, le lieu d'apprentissage de la démonstration est par excellence la géométrie, avec implicitement l'idée qu'en algèbre ou en analyse, « comme on fait des calculs, on ne raisonne pas », on pourrait avoir l'illusion, qu'en effet, il n'est nul besoin d'une théorie de la quantification, qui d'ailleurs « *est beaucoup trop difficile pour être introduite dans le cadre de la formation des maîtres* » (Glaeser 1973).

On peut opposer à ceci plusieurs objections majeures. Tout d'abord, en ce qui concerne la géométrie, se limiter aux énoncés universels conduirait à évacuer de l'enseignement de la géométrie toutes les situations questionnant l'existence d'un objet solution d'un problème donné (comme, par exemple, la question de savoir si on peut construire un quadrilatère ayant exactement trois angles droits, ou s'il est possible de construire un polyèdre régulier convexe dont les faces sont des hexagones), ou la possibilité de déterminer la nature d'un objet remplissant certaines conditions (comme, par exemple, la question de savoir si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange), ou encore tous les problèmes de lieux géométriques. D'autre part, tant en algèbre qu'en analyse, bien que les calculs soient, à ces niveaux d'enseignement, prédominants il n'en demeure pas moins que le choix d'un calcul, ou l'interprétation du résultat d'un calcul en situation de résolution de problème nécessite de produire des raisonnements qui ne relèvent pas nécessairement d'un pas de déduction standard. En outre, le raisonnement par récurrence ne peut pas être ramené à un raisonnement propositionnel. Enfin, il va sans dire que l'enseignement de l'analyse, de l'algèbre, de l'algèbre linéaire à l'Université ne saurait se passer, aujourd'hui, du langage symbolique fourni par le calcul des prédicats du premier ordre.

On voit donc clairement que nous ne pourrions pas nous contenter, pour les questions didactiques qui nous occupent, de nous référer au seul calcul des propositions, et que nous devons bien faire face à une théorie de la quantification, même si celle-ci est par essence nécessairement plus complexe. Suivant en cela Quine (1950, 1990), nous avons opté dans notre travail pour le calcul des prédicats du premier ordre. Nous avons montré sur plusieurs exemples que la formalisation des énoncés mathématiques dans le langage du calcul des prédicats permettait de débusquer des quantifications cachées et, par la même, de mettre à jour la complexité de la structure de certains énoncés, ceci conduisant éventuellement à distinguer deux énoncés qui, analysés en termes de propositions, seraient considérés comme logiquement isomorphes (Durand-Guerrier 1994). Ceci permet de prévoir des différences de

traitement sur le plan cognitif, et par là même, dans certains cas, d'enrichir l'analyse *a priori* des situations proposées aux élèves ou aux étudiants. Considérons par exemple l'énoncé suivant : « si une suite u définie par récurrence à partir d'une fonction continue f converge, alors sa limite est un point fixe de f ». Nous pouvons rendre compte de la structure de la phrase de deux manières différentes. La première méthode consiste à introduire une lettre pour désigner le réel limite éventuelle de la suite et, dans ce cas, il apparaît que cette lettre doit être une lettre de variable quantifiée universellement sur l'ensemble de l'implication et non pas existentiellement au sein de l'antécédent, comme on aurait pu s'y attendre. Ceci correspond à la paraphrase : ' Pour tout réel L , si la suite u converge vers L , alors L est un point fixe de la fonction f ». La seconde méthode consiste à introduire dans le conséquent un quantificateur existentiel comme le montre la paraphrase suivante : « si une suite u , définie par récurrence à partir d'une fonction continue f , converge, alors il existe un réel tel que ce réel est la limite de la suite u et est un point fixe de f ». Sur cet exemple, nous avons mis en évidence des difficultés de traitement chez les étudiants arrivant à l'université dans le cas où la fonction f a plusieurs points fixes (Durand-Guerrier 1996, 2003).

Enfin, en accord avec les analyses de Gardies (1994), un certain nombre de nos résultats expérimentaux⁶ montrent que l'analyse des raisonnements dans le cadre du calcul des prédicats permet de réduire la distance supposée entre logique de sens commun et la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique.

II.2. Sur l'intérêt d'une théorie sémantique de la vérité pour analyser le raisonnement mathématique

II.2.1 La question de la vérité, quelques jalons

La question de savoir si la vérité relève plutôt du domaine des mathématiques ou du domaine de la logique est une question déjà ancienne, que les logiciens contemporains ont résolue en distinguant deux notions. La première concerne l'établissement des vérités à l'intérieur d'une théorie mathématique donnée, tandis que la deuxième, la validité logique, concerne les moyens de contrôler que la vérité est préservée, ce qui est l'objet de la logique dans sa dimension de *théorie de l'inférence valide* (Quine 1950, 1972, p.49). Cette dimension de la logique s'applique dans de nombreux domaines, bien qu'elle entretienne des relations privilégiées avec les mathématiques (Cori & Lascar 1993). Il faut noter que cette distinction est déjà présente chez Aristote, qui distingue les vérités *de facto* (*dire de l'être qu'il est et dire*

⁶ Voir plus loin, au paragraphe IV.1, l'exemple du « Labyrinthe ».

du non-être qu'il n'est pas, c'est le vrai (Métaphysique, \square ,7,111b) et les vérités nécessaires obtenues comme conclusion d'un syllogisme concluant à des prémisses vraies ; ce sont naturellement les secondes qui sont l'objet de la logique. En effet, l'établissement de la vérité des prémisses d'un syllogisme concluant ne relève pas de la théorie du syllogisme formel. L'objet de cette théorie est de trier entre les syllogismes concluants - soit qu'ils soient posés comme tels *a priori*, soit qu'ils soient déduits par des règles de conversion de ces syllogismes valides *a priori* - d'une part, et les syllogismes non concluants - pour lesquels on peut trouver un contre-exemple - d'autre part. Cette distinction est tout à fait essentielle car, pour contrôler la validité d'un raisonnement, il faut non seulement s'assurer que la loi logique est valide, mais également contrôler la vérité des prémisses. De la sorte, il est tout à fait clair que la logique ne peut, à elle seule, permettre d'établir la vérité dans un domaine de réalité ou dans un domaine scientifique donné.

Cependant, au dix-neuvième siècle et au début du vingtième siècle, le courant logiciste a tenté de prouver que toutes les mathématiques pouvaient se construire à partir de la logique. On sait que ce projet a échoué, mais les auteurs qui l'ont porté ont fait faire des progrès décisifs à la logique. C'est en particulier le cas de Frege (1879) dont le projet était de proposer une idéographie (une écriture des concepts) « *dont le premier objectif est de fournir le critère le plus sûr de la validité d'une chaîne d'inférences et de nous permettre de remonter à la source de tout ce qui y restait implicite* » (cité in Blanché 1970, p. 311). Ceci est à mettre en relation avec un certain nombre de problèmes apparus en analyse en particulier dans le traitement de l'infini (Bolzano 1993). Frege considère que l'on ne peut pas toujours se fier à l'intuition pour trancher entre le vrai et le faux et il assigne à la logique l'étude du passage du vrai au vrai. Autrement dit, pour Frege, seule l'inférence est l'objet de la logique. Comme le fait à peu près à la même époque Russell (1903, 1910), pour établir ces lois de passage du vrai au vrai, Frege choisit un certain nombre d'axiomes logiques d'où se déduiront les théorèmes de logique permettant de valider les inférences, autrement dit, les formules démontrées dans le système formel. C'est également le point de vue adopté par Hilbert, la méthode axiomatique renvoyant en particulier aux éléments d'Euclide (Blanché 1970). Cette méthode axiomatique s'étend d'ailleurs aux théories mathématiques que l'on souhaite formaliser, comme l'arithmétique. Dans un tel système axiomatique, on examine si un énoncé est démontrable ou non, mais ce n'est pas la question de la vérité qui est en jeu. Nous sommes là dans un point de vue qui correspond à ce que l'on appelle aujourd'hui « théorie de la démonstration ». Or, selon Imbert (1970), ni Frege, ni Russell n'avaient vraiment aperçu cette question et leurs systèmes souffrent de ce qu'ils ne distinguent pas explicitement entre vérité dans un domaine donné et

« vérité » dans un système formel qu'ils confondent avec démontrabilité. Ce n'est pas le cas de Wittgenstein (1921) qui construit le calcul des propositions sans introduire d'axiomes. À la place des axiomes, il introduit dans le système formel deux valeurs de vérité le Vrai et le Faux et donne une place centrale aux fonctions de vérité ; c'est le principe d'extensionnalité selon lequel la valeur de vérité d'une proposition complexe dépend uniquement des propositions élémentaires (*i. e.* inanalysables) qui la composent. Les connecteurs logiques sont alors définis dans le système de manière combinatoire, sans référence *a priori* à leur signification dans l'usage courant, par leur table de vérité, qui devient un outil pour étudier les possibilités de vérité des énoncés complexes. Ceci conduit Wittgenstein à distinguer deux catégories extrêmes de propositions complexes : celles qui sont vraies pour toutes les distributions de valeurs de vérité des propositions élémentaires - qu'il appelle tautologies - et celles qui sont fausses pour toutes les distributions de valeurs de vérité des propositions élémentaires, qu'il appelle contradictions. Il écrit alors que la valeur de vérité d'une proposition (non extrême) est *possible*, celle d'une *tautologie* est *certaine*, celle d'une contradiction est *impossible* (Wittgenstein 1921,1961, p. 63). Ceci lui permet d'affirmer que pour reconnaître si la vérité d'une proposition résulte de la vérité d'autres propositions, cela se voit par les relations entre ces propositions et que donc « *des lois de conclusion lesquelles – comme chez Frege et Russell – doivent justifier les conclusions, sont dénuées de sens et seraient superflues.* » (*ibid.* 5.1.3.2., p. 67). Le point de vue adopté par Wittgenstein est un point de vue sémantique, au sens logique du terme, puisqu'il met au cœur de son système la valeur de vérité d'une proposition. Pour autant, sauf pour les tautologies ou les contradictions, ce n'est pas au système que revient la tâche de déterminer la valeur de vérité d'une proposition : étant donné un fragment de discours analysé, c'est la valeur de vérité des propositions élémentaires considérées dans ce fragment de discours qui permettra d'attribuer une valeur de vérité à l'énoncé complexe. La réponse apportée dépasse donc le cadre des inférences valides puisqu'elle permet d'établir une valeur de vérité pour une proposition complexe dès lors que l'on sait analyser la proposition et que l'on connaît la valeur de vérité des propositions élémentaires. On voit déjà apparaître ici deux notions tout à fait centrales pour une théorie sémantique de la vérité ; la notion de *validité générale logique*, par opposition à celle de *validité générale accidentelle*, par exemple celle de la proposition « tous les hommes sont mortels » (pp 93-94), et la notion d'interprétation dans un domaine de réalité donné. En outre, dans le calcul des propositions, par le biais des tables de vérité, on dispose d'une procédure de décision pour la validité, si bien qu'en droit, sinon en fait, on peut pour chaque énoncé complexe se prononcer sur sa validité logique. Ce n'est pas tout à fait le cas dans un système

axiomatique, car si, pour un énoncé donné, vous ne trouvez pas de démonstration, cela ne signifie pas nécessairement qu'il n'y en a pas. À ce propos, Quine (1950) écrit :

«(..) un système d'axiomes pour la logique est nécessairement fondateur, et je voudrais encore remarquer pour conclure que sa valeur est douteuse, particulièrement dans la logique des fonctions de vérité. Après tout, celle-ci possède le luxe d'une procédure de décision pour la validité. Ainsi comblés, nous serions mal avisés de faire usage en ce domaine de la méthode axiomatique. Elle est inférieure car elle ne fournit aucune voie générale pour obtenir un verdict de non validité. L'échec à découvrir une preuve pour un schéma peut signifier soit la non validité, soit simplement l'absence de chance.» (op. cité, 1972, pp. 84-85)

En revanche, et bien que Wittgenstein (1921) aborde l'analyse des propositions en fonctions et arguments, le point de vue sur la vérité, développé dans cet ouvrage, prend comme élément inanalysable la proposition élémentaire qui « *affirme l'existence d'un état de choses* » (1921, p. 57)⁷. Or, d'une part, comme nous l'avons dit plus haut, on ne peut pas se contenter pour les mathématiques du seul calcul propositionnel, et d'autre part les systèmes axiomatiques pour le calcul des prédicats sont d'un maniement délicat et assez éloignés des modes habituels de raisonnement mathématique. C'est à Tarski (1936a) qu'il reviendra de développer une théorie permettant d'étendre les avancées de Wittgenstein à tous les systèmes formels. Il faut cependant noter que, si Tarski dit explicitement que « *la méthode de construction élaborée dans le présent travail peut donc être considérée en un certain sens comme une généralisation de la méthode des matrices*⁸ connue grâce aux recherches sur le calcul des propositions » (1936a, p. 221), il ne se réfère pas explicitement aux travaux de Wittgenstein.

II.2.2. La conception sémantique de la vérité introduite par Tarski

Préliminaire : Pour présenter les éléments de cette théorie, nous nous appuyons sur la version française de trois articles de Tarski publiée en 1972 dans un recueil en deux volumes intitulé : *Logique, sémantique, métamathématique*, sous la direction de Gilles Gaston Granger, qui

⁷ Pour le traitement de la généralité dans le Tractatus, voir par exemple Gandon (2002) qui écrit, que Wittgenstein développe dans le Tractatus une critique de l'introduction des quantificateurs comme « nouvelle idée primitive » et ajoute : « Rien dans le concept de fonction de vérité, ne justifie, pour Wittgenstein, une distinction entre fonction de vérité à nombre fini et fonction de vérité à nombre infini d'arguments.

⁸ Autrement dit des tables de vérité

souligne le caractère fondamentalement novateur des orientations apportées par l'œuvre de Tarski en ce qui concerne la sémantique et la métamathématique. Le premier, « *Le concept de vérité dans les langages formalisés* » (Tarski, 1936a), est l'article fondateur de la théorie ; c'est le chapitre VIII. Le deuxième (Tarski 1944) est l'article intitulé « *La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique* » ; il s'agit du chapitre XX1. Dans cet article, moins technique que le premier, il revient sur les intentions du projet, énonce les résultats établis et répond à un certain nombre d'objections. Le troisième, (Tarski 1936b), est l'article intitulé « *Sur le concept de conséquence logique* » ; il s'agit du chapitre XVI. Les pages indiquées sont celles de Tarski, 1972, pour lesquelles nous précisons VIII, XX1 ou XVI.

II.2.2.1. Le problème de la définition de la vérité

Tarski énonce son projet dès les premières lignes de Tarski, 1936a, en ces termes :

«Le présent travail est presque exclusivement consacré à un seul problème, *au problème de la définition de la vérité*. Il s'agit en effet – compte tenu de tel ou tel langage – de construire une définition de l'expression «*proposition vraie*», définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte.» (VIII, p. 159)

Mathématicien et logicien, Tarski s'attaque ici à un problème philosophique difficile ainsi qu'il l'écrit lui-même :

«La solution de ce problème, l'un des problèmes classiques de la philosophie, rencontre des difficultés particulières : bien que la signification courante [«*donnée au départ*»] de l'expression en question paraisse nette et transparente, toutes les tentatives pour la préciser se sont soldées jusqu'ici par un échec et maintes recherches, où cette expression figure fondée sur des prémisses apparemment intuitives [évidentes] ont abouti à des paradoxes ou antinomies (qu'on réussissait du reste à résoudre de manière plus ou moins satisfaisante).» (VIII, p. 159)

Un peu plus loin il précise en quel sens il faut entendre « matériellement adéquate » :

« Dans cette étude, je ne cherche qu'à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite «*classique*» de vérité, c'est-à-dire par cette conception selon laquelle

«*vraiment*» signifie la même chose que «*conformément à la réalité*». (par opposition à la conception «*utilitariste*», d'après laquelle «*vrai*» signifie utile sous tel ou tel rapport).» (VIII, p. 160)

Dans Tarski (1944), il revient sur le sens du terme « vrai » dans son travail ; il se réclame alors des intuitions de la conception aristotélicienne classique de la vérité qui s'exprime sous forme moderne par « *la vérité d'une proposition consiste en son accord (ou sa correspondance) avec la réalité, ou encore « une proposition est vraie si elle désigne un état de choses existant »*. (XXI, pp. 270-271).⁹ C'est ce que l'on appelle communément la *Théorie de la vérité correspondance* ; elle correspond à l'exigence formulée par Tarski « *d'une vérité matériellement adéquate* ». On dira que :

*la proposition « la neige est blanche » est vraie si et seulement si la neige est blanche.*¹⁰

Tarski fait remarquer que, dans cette définition, les propositions sont traitées comme des entités linguistiques et qu'il convient de tenir les noms entre guillemets pour des noms singuliers d'expression, faute de quoi cette définition pourrait donner l'apparence de l'erreur (VIII, note 5, p. 163). Cette distinction essentielle sur laquelle insiste Tarski est reprise par Quine (1950), et concerne la différence entre *énoncer* et *mentionner*. C'est ceci qui rend nécessaire un métalangage, ou une métathéorie, pour pouvoir parler des énoncés du langage ou de la théorie dans laquelle on travaille. Une conséquence de ce qui précède est que le projet de Tarski n'est pas de proposer une définition unique universelle. En effet « *la vérité d'une proposition dépend essentiellement du langage, objet des investigations* », et « le problème se scindera en une série de problèmes relatifs chacun à un langage concret » (VIII, p.160). Il ne s'intéressera donc pas aux langages et aux sciences « formels » dont les signes et expressions ne se voient attribuer aucun sens intuitif car, dit-il, pour ces sciences, le problème posé perd sa raison d'être. Après avoir examiné le cas du langage quotidien, il conclut que :

« (...) la possibilité même d'employer avec cohérence et en accord tant avec les principes de la logique qu'avec l'esprit du langage quotidien l'expression

⁹ Tarski dit en note ne pas savoir d'où vient cette formulation ; comme nous l'avons dit plus haut, elle apparaît dans Wittgenstein, 1921.

¹⁰ C'est ce que l'on appelle communément *la convention T*. (voir par exemple Davidson 1993, pp. 107-121).

« proposition vraie », et partant la possibilité de construire une définition correcte de cette expression semble fortement mise en question.¹¹ » (VIII, p. 171)

Il choisit, par conséquent, de limiter son étude « *aux seuls langages actuellement connus qui soient construits à l'aide d'une méthode scientifique, c'est-à-dire aux langages des sciences déductives formalisées...* » (VIII, p. 160). Ces langages formalisés sont caractérisés par le fait qu'ils sont « *artificiellement construits de telle sorte que le sens de chaque expression est univoquement déterminé par sa forme* », qu'on peut attribuer « *une signification tout à fait concrète et intelligible* » aux signes extra logiques, et pour lesquelles « *les propositions prises comme axiomes nous semblent intuitivement vraies.* » (VIII, p. 172). Il ajoute (XX1, p. 276) que « *le problème de la définition de la vérité n'obtient un sens précis et ne peut être résolu d'une manière rigoureuse que pour les langages dont la structure a été rigoureusement spécifiée, autrement dit « les divers systèmes de la logique déductive éventuellement enrichis de termes non logiques »* » (XX1, p. 275). Du fait que dans ces langages formalisés, contrairement au cas du langage quotidien, ne se trouve en général aucun terme des sciences du langage, il est alors nécessaire pour mener à bien le projet que s'est donné Tarski de construire un méta-langage associé au langage étudié qui devient de ce fait le langage-objet.

« Le méta-langage est le langage dans lequel nous parlons du langage-objet, et avec lequel nous voulons construire la définition de la vérité [pour ce dernier]. » (XX1, p. 277)

Tarski affirme ceci comme une nécessité car les langages sémantiquement clos (i.e. qui contiennent leurs expressions, le nom de leurs expressions ainsi que les termes sémantiques comme « vrai ») sont nécessairement inconsistants (contiennent des propositions contradictoires du type « *s* » est vraie si et seulement si « *s* » n'est pas vraie, ceci en lien avec l'antinomie du menteur). (XX1, p. 277)

II.2.2.2. La méthode de construction d'une théorie de la vérité

Tarski choisit de présenter sa méthode de construction d'une théorie de la vérité pour un langage donné sur l'exemple de l'algèbre des classes, ceci afin « d'initier le lecteur à cette méthode ». Il considère en effet « *qu'une définition générale abstraite de cette méthode et des langages auxquels elle s'applique serait obscure et pénible.* ». C'est à cette occasion qu'il introduit le concept, tout à fait fondamental, de *satisfaction d'une fonction propositionnelle*

¹¹ Rappelons que Montague (1974) construira sa Grammaire Universelle pour résoudre précisément ce problème ; ses travaux seront à l'origine des développements de la sémantique formelle dont nous parlerons dans la partie VI.

par tels ou tels objets, constatant que « les propositions complexes ne sont pas des agrégats » de propositions plus simples » mais « (...) sont obtenues à partir de fonctions propositionnelles dont elles constituent des cas particuliers »¹², il écrit :

« Aussi ne voit-on pas de méthode permettant, dans ce contexte, de définir le concept examiné directement par la voie récursive. Il se révèle, par contre, possible d'introduire un concept de nature plus générale, concept applicable à des fonctions propositionnelles quelconques et qui se laisse définir récursivement. Appliqué aux propositions, il conduit indirectement au concept de vérité ; c'est le concept de satisfaction d'une fonction propositionnelle par tels et tels objets (...) » (VIII, p. 193).

Tarski illustre ensuite cette définition dans le cas le plus simple d'une fonction propositionnelle ne contenant qu'une variable libre¹³ de la manière suivante :

Pour tout a, a satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc » si et seulement si a est blanc.

De cela, on peut inférer que la neige satisfait la fonction propositionnelle « x est blanc ». Tarski met cette définition de la satisfaction en rapport avec les constructions mathématiques dans l'algèbre scolaire concernant « *les fonctions propositionnelles d'un type particulier dites équations et où l'on appelle racines des équations les nombres qui satisfont ces fonctions* » (VIII, p.193). Cet exemple montre bien selon nous, que Tarski, qui est un mathématicien, inclut les mathématiques dans les sciences déductives dont il s'occupe¹⁴, et ce bien qu'il ne soit pas habituel de considérer que la vérité en mathématique doive être « matériellement adéquate ».

Dans la suite de l'article, Tarski examine la question de savoir pour quels langages formalisés la construction, faite pour la logique des classes, est possible. Nous n'entrons pas ici dans cette discussion. Il nous suffit en effet de savoir que cette construction est possible pour les langages formalisés pour lesquels l'appareillage logique n'excède pas le calcul des prédicats

¹² Nous en verrons de nombreux exemples plus loin.

¹³ Dans un système formalisé contenant des variables et des quantificateurs, une variable est libre si elle n'est dans le champ d'aucun quantificateur, sinon elle est liée ; ceci peut être défini de manière récursive à partir des formules atomique ne comportant qu'un symbole de fonction propositionnelle.

¹⁴ En fait comme nous le verrons plus loin, il identifie les sciences déductives et les mathématiques.

du premier ordre¹⁵, obtenu comme une extension du calcul des propositions en introduisant des variables et les deux quantificateurs, universel et existentiel. Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, le concept de satisfaction proposé par Tarski fournit une méthode précieuse et efficace pour établir la vérité de propositions obtenues à partir de fonctions propositionnelles, soit comme instance d'une telle fonction propositionnelle, soit en liant toutes les variables libres par des quantificateurs. En outre par sa proximité avec la notion de vérité du sens commun, elle offre un appareillage technique que le mathématicien peut, *a priori*, s'approprier sans difficulté. Pourtant, en dehors des spécialistes de la théorie des modèles et de certains philosophes de la logique, il ne semble pas que cette théorie ait eu la diffusion à laquelle elle aurait pu prétendre. Nous en voulons pour preuve l'importance de la place occupée dans de nombreux travaux par la théorie des fonctions de vérité du calcul des propositions comme théorie logique de référence. On peut penser que cette volonté de Tarski de ne pas choisir entre adéquation matérielle et correction formelle explique en partie que cette théorie reste relativement peu utilisée, à notre connaissance, dans les sciences humaines. Dans la deuxième partie de Tarski (1944), l'auteur répond de façon « polémique » à un certain nombre d'objections concernant en particulier d'éventuelles implications philosophiques « indésirables ». À ce sujet, il affirme que :

« En fait, la définition sémantique de la vérité n'implique rien concernant les conditions sous lesquelles une proposition telle que (1) □

(1) *La neige est blanche*

peut être affirmée. Elle implique seulement que lorsque nous admettons ou rejetons cette proposition, nous devons être prêts à affirmer ou à rejeter la proposition corrélatrice (2) □

(2) *La proposition « [la neige est blanche] est vraie.*

Aussi pouvons-nous accepter la conception sémantique de la vérité sans abandonner nos positions épistémologiques quelles qu'elles soient. Nous pouvons demeurer naïfs, réalistes critiques ou idéalistes, empiristes ou métaphysiciens □ comme nous l'étions avant. La conception sémantique de la vérité est entièrement neutre par rapport à toutes ces attitudes » (XX1, p. 295).¹⁶

¹⁵ Sur lequel on ne s'autorise des quantifications que sur les variables d'objets.

¹⁶ Il est tout à fait intéressant de noter ici que, dans cette citation, le locuteur a fait irruption, ce qui d'une certaine manière met en évidence le fait que la conception sémantique de la vérité ouvre (nécessairement ?) sur la dimension pragmatique dans la quête de la vérité. Ce point sera développé au paragraphe V.

Sinaceur (1998) dit que « Tarski définit ainsi le profil du « working-logician », expert *a priori* non engagé dans les débats sur le statut ou le fondement des concepts mathématiques de base », qui « ne saurait penser que (...) ses croyances ou ses opinions philosophiques ont un impact sur le contenu *intrinsèque* des résultats qu'il obtient » (p. 131).

II.2.2.3. La conception sémantique de la vérité

Dans la première partie de Tarski (1944), l'auteur reprend son sujet pour qu'il soit mieux connu, en particulier des philosophes. Dans ce texte, il replace son travail au sein de la discipline appelée sémantique qui « traite de certaines relations entre les expressions d'un langage et les objets (ou « états de choses ») auxquels se réfèrent ces expressions ». Il cite comme exemples typiques de concepts sémantiques la *désignation*, la *satisfaction* et la *définissabilité*, et propose d'appeler « Conception sémantique de la vérité » la conception qu'il a discutée (XXI, p. 273), conception de la vérité qu'il compte parmi les concepts sémantiques. Il pense avoir, par sa méthode, assuré la possibilité d'un emploi consistant des concepts sémantiques. Il examine ensuite quelques conséquences de sa définition de la vérité, parmi lesquelles nous retiendrons surtout le fait que, pour une classe très riche de disciplines mathématiques, le concept de vérité ne coïncide jamais avec celui de démontrabilité. Il en résulte que chaque discipline de ce genre est consistante, mais incomplète, ce qui est à mettre en relation avec le théorème de Gödel et ceci bien que la notion de vérité n'apparaisse pas explicitement dans la preuve fournie par Gödel (XXI, p. 285). Cela montre la puissance de cette théorie pour la métamathématique et partant pour la mathématique elle-même. Arrivée à ce point de notre présentation du projet de Tarski, nous n'avons pas encore abordé la question, centrale en logique, de la notion de conséquence valide. C'est naturellement un des points cruciaux pour toute théorie logique et c'est à cette occasion que Tarski introduit la notion de modèle.

II.2.2.4 Le concept de conséquence logique

Le concept de conséquence logique est au cœur du travail de Tarski qui en donne une définition sémantique, par opposition aux définitions syntaxiques qui renvoient plutôt à la notion d'inférence valide. Dans Tarski (1936b), il cherche à donner du concept de conséquence logique une définition aussi proche que possible de l'usage quotidien, ce qui en fait en quelque sorte un « concept primitif » dans son travail. Il reconnaît cependant que « toute définition précise de ce concept présente un caractère arbitraire à un degré plus ou moins élevé. » (XVI, p. 143). Par l'exemple de l'induction, il illustre le fait que le concept de

conséquence logique formalisé dans les théories déductives à partir des règles structurales, telles la règle du détachement (Modus Ponens) ou la règle de substitution, ne permet pas de rendre compte de l'usage quotidien de ce concept. En effet, dans une théorie qui possède des propositions $A_0 : 0 \text{ possède la propriété donnée } P$; $A_1 : 1 \text{ possède la propriété donnée } P$ et en général toutes les propriétés de la forme $A_n : n \text{ possède la propriété } P$, où n désigne un nombre naturel quelconque dans un système (par exemple décimal) de nombres donnés, la proposition $A : \text{Tout nombre naturel possède la propriété } P$ ne peut être démontrée à partir de cette théorie avec les règles usuelles d'inférence. C'est ce résultat qui explique la présence du schéma d'axiomes d'induction (ou un axiome équivalent) dans la définition axiomatique de l'arithmétique que l'on doit à Peano. Le fait que la nécessité d'un tel axiome soit en désaccord avec l'intuition est attesté, selon nous, par la définition du principe d'induction que donne Pascal, dans le traité du triangle arithmétique¹⁷ et est à rapprocher de ce qu'en dit Poincaré dans la science et l'hypothèse. Hofstadter (1979) présente aussi ce point de vue dans le chapitre intitulé : *La TNT, une théorie explosive*¹⁸. Pour essayer de rester au plus près de l'intuition du concept de conséquence logique, Tarski va en donner une définition sémantique. Il introduit tout d'abord le concept de modèle d'une classe de propositions de la manière suivante : il considère un langage dans lequel on dispose de suffisamment de variables pour remplacer toutes les constantes extra-logiques par des variables, de sorte que chaque proposition devient une fonction propositionnelle. À une classe de propositions L , on associe de la sorte une classe L' de fonctions propositionnelles. Un modèle de L est une suite d'objets qui satisfait toutes les fonctions propositionnelles de L' . Il définit alors la notion de conséquence logique de la manière suivante : *la proposition X suit logiquement de la classe K si et seulement si tout modèle de K est un modèle de X* . Il met cette définition en rapport avec celle de Carnap (1934) qui affirme que « *la proposition X suit logiquement des propositions de la classe K si la classe composée de toutes les propositions de K et de la négation de X est contradictoire* ». On reconnaît dans cette dernière la définition donnée par Chrysippe en réponse à la définition vériconditionnelle¹⁹ de Philon de Mégare (Blanché, 1970). Tarski

¹⁷ Parlant de la propriété qu'il se propose de prouver, il écrit : « Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes. Le premier, qui est évident de soi-même, que cette proposition se rencontre dans la seconde base. Le second que si cette proposition se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante. D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme ; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini. Il faut donc seulement démontrer le second lemme en cette sorte. »

¹⁸ Nous avons discuté brièvement ces questions dans Durand-Guerrier *et al.*, 2000.

¹⁹ La valeur de vérité d'une proposition complexe ne dépend que de la valeur de vérité des propositions élémentaires qui la compose.

indique qu'il suffit d'appeler *contradictoire* toute classe qui n'a pas de modèle pour que les deux définitions coïncident. Il indique aussi que les propositions analytiques au sens de Carnap correspondent aux propositions satisfaites par toute suite d'objets. Il ne faut cependant pas oublier que, pour Tarski, ceci ne prend sens que dans un langage-objet spécifié et ne prétend en aucun cas à l'universalisme. En outre, Tarski écrit qu'il ne pense pas avoir complètement résolu le problème d'une définition matériellement adéquate du concept de conséquence logique, en particulier parce que la distinction entre termes logiques et termes extra-logiques d'un langage ne lui paraît pas reposer sur une base complètement objective (XVI, p. 151). On trouve chez Quine (1950) une présentation très claire de cette notion de conséquence logique. Tout d'abord dans le calcul des propositions pour lequel ce qui est proposé ici se trouve être dans le prolongement de ce que Wittgenstein met en place dans le *Tractatus* : en effet, une tautologie est un énoncé du calcul des propositions qui est vrai dans toute interprétation, tandis qu'une contradiction est un énoncé qui n'est vrai d'aucune interprétation. Et la notion de conséquence logique se traduit structurellement par le fait que l'implication entre antécédent et conséquent est une tautologie, ce que la structure logique *montre*. Quine (1950) insiste sur l'importance de cette notion à laquelle il propose de réserver le nom d'implication et, à l'instar de Wittgenstein, montre que les règles classiques d'inférence entre propositions sont associées à de telles tautologies. Il présente ensuite son extension au calcul des prédicats, en s'inscrivant dans la théorie sémantique de la vérité de Tarski pour le calcul des prédicats avec les notions centrales de phrase ouverte et de satisfaction d'une phrase ouverte par une suite d'objets. Il introduit pour un énoncé du calcul des prédicats, la notion d'énoncé universellement valide : *un énoncé est universellement valide s'il donne lieu à un énoncé vrai pour toute interprétation de ses lettres dans tout univers non vide*. (Quine, 1950, 1972, p. 141). On reconnaît ici une autre façon d'exprimer le fait qu'un énoncé est universellement valide si et seulement si toute structure interprétative adéquate de cet énoncé en est un modèle. Les énoncés universellement valides proviennent pour partie des tautologies du calcul des propositions dans lesquelles on substitue aux lettres de variables propositionnelles des formules atomiques obtenues à partir de fonctions propositionnelles saturées par des lettres de variables²⁰ ; il en est ainsi de l'énoncé

$$\ll (P(x) \supset (P(x) \supset Q(x)) \supset Q(x)) \gg.$$

Mais, bien évidemment, de nombreux énoncés faisant intervenir des quantificateurs sont irréductibles aux énoncés propositionnels. C'est le cas, par exemple, des énoncés

²⁰ Par exemple, si R est une lettre de prédicat à trois places, on pourra substituer à une variable propositionnelle, la formule atomique $R(x,y,z)$, où x,y et z sont des lettres de variables.

« $(\forall x P(x)) \rightarrow P(y)$ » et « $P(x) \rightarrow \forall y P(y)$ »

Comme dans le calcul propositionnel, ces énoncés, et parmi eux principalement les énoncés implicatifs, jouent un rôle central dans la mesure où ils sont associés à la plupart des modes de raisonnements valides, en accord avec le fait qu'un raisonnement est valide s'il préserve la vérité : autrement dit, dès que les prémisses sont vraies, la condition l'est *nécessairement* et non pas *accidentellement*.

La supériorité du point de vue sémantique de la vérité pour manipuler les énoncés quantifiés par rapport à des procédures purement syntaxiques est assez clair dans la mesure où l'on désire rester au plus près du discours quotidien et des modes de raisonnement ordinaires. Ceci s'inscrit dans une filiation historique qui remonte à la logique aristotélicienne. Dans les Premiers Analytiques, Aristote se propose en effet de trier entre les raisonnements corrects et les raisonnements incorrects ; pour cela il définit ce qu'est un syllogisme concluant : c'est un énoncé universellement valide, une loi logique, qui donne lieu à un énoncé vrai pour tout remplacement des lettres par un terme général, par exemple : *si tout A est B et si tout B est C, alors tout A est C*. Il pose comme valides *a priori* quatre syllogismes de la première figure et donne deux règles de conversion ; les autres syllogismes sont, soit non concluants, ce qu'il prouve avec un contre-exemple, soit concluants ce qu'il établit en les ramenant, grâce aux règles de conversion, à un syllogisme concluant de la première figure. On voit ici qu'Aristote utilise ce que l'on appelle aujourd'hui la dérivabilité formelle, autrement dit une procédure de type syntaxique pour établir une loi logique et une procédure de type sémantique pour établir qu'un énoncé n'est pas une loi logique. Largeault (1972) écrit que les travaux contemporains, ceux de Beth (1955) en particulier, permettent de « rendre justice à la lucidité géniale d'Aristote qui recourait déjà suivant les types de problèmes à ces deux genres d'approches » (p. 56). Mais cette supériorité a son prix, car il est tout aussi clair que nous ne disposons pas, pour le calcul des prédicats, d'un système de preuve aussi confortable que les tables de vérité du calcul propositionnel. Différentes méthodes ont été élaborées, en particulier la méthode de *skolémisation des variables* qui consiste à transformer une formule en une formule équivalente pour laquelle tous les quantificateurs sont en tête de formule, moyennant quoi l'on peut mettre en œuvre des procédures syntaxiques. L'inconvénient de cette méthode, pour les questions didactiques qui nous intéressent, est de s'éloigner considérablement de la signification des énoncés manipulés, empêchant d'une certaine manière le contrôle du sens par celui qui établit la preuve. D'autres méthodes ont été développées, dans le but de rester au plus près de la rationalité discursive naturelle. C'est le cas de la déduction naturelle de Copi

que nous présentons ci-dessous, en raison de son intérêt pour analyser le raisonnement mathématique dans une perspective didactique.

II.2.3. La déduction naturelle de Copi : un outil pour analyser les raisonnements mathématiques

II.2.3.1. La construction récursive de la vérité pour le calcul des prédicats du premier ordre

Pour faciliter la lecture de la suite du texte, nous présentons succinctement une méthode classique²¹ de définition de la vérité à partir de la notion de satisfaction dans des langages formalisés pour lesquels l'appareil logique utilisé n'excède pas le calcul des prédicats du premier ordre. L'alphabet du calcul des prédicats du premier ordre comprend des lettres de variables, des symboles de constantes, les connecteurs propositionnels et les deux quantificateurs, des lettres de fonctions²² et des lettres de prédicats (propriétés et relations). Les ensembles formés respectivement des lettres de variables, des symboles de constantes, des lettres de fonctions et des lettres de prédicats sont infinis et dénombrables ; autrement dit, pour interpréter un langage spécifié donné, on peut en choisir un nombre fini aussi grand que l'on veut. Les expressions bien formées se construisent de manière récursive. Les constituants élémentaires sont les termes qui sont interprétés dans un langage donné par des noms d'objets. Les atomes sont obtenus à partir d'une lettre de prédicat saturée par autant de termes que nécessaire. Les atomes sont des formules, appelés formules atomiques ; si F est une formule $\Box F$ est une formule ; si F et G sont deux formules, $F \wedge G$, $F \vee G$ sont des formules, si F est une formule et x une lettre de variable, $\Box xF$ et $\exists xF$ sont des formules ; rien d'autre n'est une formule. Une lettre de variable est libre dans une formule si elle n'est dans le champ d'aucun quantificateur, elle est liée sinon ; ceci peut également se définir manière récursive. Si une formule F contient exactement une variable libre x , on peut définir sa clôture universelle, $\Box xF(x)$ et sa clôture existentielle, $\exists xF(x)$.

Étant donné un langage spécifié, ou un fragment de discours, on choisit un domaine d'objets non vide et un nombre fini de lettres de prédicats qui sont interprétés par des propriétés ou des relations. Les formules contenant une variable libre sont interprétées par des fonctions propositionnelles, c'est-à-dire des phrases ouvertes. Lorsque l'on assigne une suite d'objets aux variables libres d'une telle phrase ouverte, on obtient une proposition. Si cette proposition

²¹ Voir par exemple Cori et Lascar (1993)

²² Nous suivons en cela Cori & Lascar (1993), en effet lorsque l'on travaille dans les théories mathématiques, on introduit le plus souvent des symboles de fonctions mais il s'agit d'une commodité, une fonction pouvant toujours être exprimée à l'aide de relations (Quine, 1950).

est vraie dans l'interprétation considérée, la suite d'objets *satisfait* la fonction propositionnelle ; si la proposition est fausse, la suite d'objets ne satisfait pas la fonction propositionnelle. Si dans l'interprétation considérée, toutes les suites d'objets satisfont une fonction propositionnelle donnée, l'interprétation de la clôture universelle associée est une proposition vraie ; si au moins une suite d'objets ne la satisfait pas, l'interprétation de la clôture universelle associée est fausse ; si au moins une suite d'objets la satisfait, l'interprétation de la clôture existentielle est une formule vraie, sinon elle est fausse. Dans le point de vue adopté par Tarski, il est clair qu'une proposition est soit vraie, soit fausse mais pas les deux à la fois. En outre cette définition de la vérité pour les propositions quantifiées reste très près de l'usage commun, ce qui est un souci constant de Tarski lorsqu'il élabore sa définition sémantique de la vérité.

II.2.3.2 La déduction naturelle de Copi

Une fois reconnue la nécessité de prendre comme théorie logique de référence le calcul des prédicats pour l'analyse des raisonnements mathématiques, on se trouve confronté à la complexité que représente la formalisation d'une preuve mathématique dans ce système. En effet, les preuves complètement formalisées s'éloignent irrémédiablement de la forme que revêtent les démonstrations mathématiques correspondantes et ne rendent pas compte des preuves par élément générique. En revanche, comme l'écrivent Cori et Lascar (1993), elles se prêtent bien à un traitement automatisé. D'une manière générale, la complexité de la formalisation des preuves mathématiques dans le langage des prédicats conduit de nombreux auteurs à estimer que ceci, quoique possible en droit, ne peut pratiquement jamais être réalisé en fait, ce qui, dans sa version extrême, conduit à penser que l'on ne peut pas contrôler logiquement la validité de la plupart des preuves mathématiques. S'il en était ainsi, ceci ruinerait, en quelque sorte, le projet de Frege et retirerait à la logique sa prétention à être une théorie de l'inférence valide. Comme c'est bien souvent le cas, cette position extrême ne rend pas justice à la réalité. De fait, de nombreux logiciens se sont préoccupés de cette possibilité de proposer des systèmes restant au plus près des modes habituels de raisonnement mathématique et plusieurs tentatives ont été faites en ce sens. C'est ce que fait Lewis (1930) qui introduit l'implication stricte. D'une certaine manière, les logiques trivalentes ou multivalentes (Kleene 1967 ; Lukasiewicz 1934) rentrent aussi dans ce cadre, puisque leur objectif est de contourner la difficulté liée à l'aspect peu naturel de la définition classique de l'implication matérielle dans le calcul des propositions. Ce sont cependant les systèmes de déduction naturelle qui remplissent le mieux ce programme. L'un des premiers systèmes de

déduction naturelle est dû à Gentzen (1934)²³. Il présente un système de règles sur l'introduction et l'élimination des connecteurs propositionnels permettant de démontrer des théorèmes de logique dans le calcul des propositions, ainsi que des règles sur l'élimination et l'introduction des quantificateurs. Contrairement aux deux exemples cités, qui jouent sur la définition de l'implication en termes de valeur de vérité, le système de déduction naturelle de Gentzen est une tentative réussie de manipuler de manière satisfaisante, du point de vue de l'usage commun, l'implication et les autres connecteurs propositionnels, sans avoir à se prononcer sur leurs conditions de vérité. La règle « d'élimination de la flèche », qui appartient au système formel, correspond exactement à la règle d'inférence du Modus Ponens, utilisée tant dans l'usage quotidien, que dans l'usage mathématique. La règle « d'introduction de la flèche » n'a pas vraiment d'équivalent dans la langue naturelle ; en revanche, en mathématique, elle correspond à l'affirmation qu'on a démontré un certain théorème conditionnel, et se trouve donc au cœur de tout raisonnement hypothético-déductif : si vous démontrez B sous l'hypothèse A , vous avez démontré l'énoncé conditionnel « si A , alors B ». Frege (1970) insiste sur l'importance de distinguer entre la démonstration de B et la démonstration de « si A , alors B » et il écrit que « *plus d'un mathématicien s'exprime comme si l'on pouvait tirer des conséquences d'une pensée dont la vérité est encore douteuse* » (p. 228). L'intérêt du système proposé par Gentzen est très grand et il joue un rôle important dans nombre de domaines d'application de la logique, et plus particulièrement en informatique²⁴. Concernant les énoncés quantifiés, nous avons retenu pour notre travail les systèmes que Copi (1954) et Quine (1950) ont développés dans lesquels le fonctionnement des règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs permettent de modéliser la démonstration par exemple générique. Voici comment Hottois (1989) présente le système de Copi :

«Ce système offre l'intérêt de proposer des démonstrations qui restent au plus près de l'aspect familier des syllogismes. Cette présentation correspond à la volonté de formaliser et d'axiomatiser en ne rompant pas avec la rationalité discursive naturelle. » (p. 100)

Un tel système peut en particulier être utilisé pour contrôler localement la validité de preuves mathématiques, sans recourir à une formalisation complète dans le calcul des prédicats, et

²³ Pour une présentation, voir Gochet & Gribomont, 1990, pp.134-153.

²⁴ où les méthodes logiques de preuve jouent un rôle important attesté par le nombre d'ouvrages et de manuels traitant de ces questions.

propose de ce fait un moyen terme entre une position formaliste extrême s'appuyant sur la théorie de la démonstration de Hilbert, inaccessible de fait, et la position inverse qui consiste à dire que les démonstrations mathématiques n'obéissent à aucune règle. Il se fixe donc un but qui n'est pas sans rapport avec l'objet de nos recherches.

Les quatre règles de manipulation des énoncés quantifiés du système sont données sous la forme suivante (*ibid.*, pp. 101-102) :

“ 1) I.U.²⁵ Instantiation Universelle

$$\frac{(x)fx}{fa}$$

a constante individuelle quelconque substituée à x²⁶

2) G.U. Généralisation Universelle

$$\frac{fa}{(x)fx}$$

avec a, constante d'objet absolument quelconque choisie dans le domaine (de x), c'est-à-dire considérée uniquement du point de vue de son appartenance à ce domaine (...)

3) G.E. Généralisation Existentielle

$$\frac{fa}{\exists xfx}$$

a constante quelconque

4) I.E. Instantiation existentielle

$$\frac{\exists xfx}{fw}$$

Attention à l'interprétation de w : il s'agit d'une constante d'objet, mais dont on retient seulement qu'elle est le nom de l'un des objets qui, par hypothèse, doivent, (ou doit s'il n'y a qu'un objet de ce type) vérifier $\exists xfx$. Le plus souvent, on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on ignore l'identité

²⁵ L'auteur utilise l'abréviation UI ; nous préférons respecter l'ordre des mots en français.

²⁶ (x) traduit une quantification universelle, ce qu'en mathématiques nous noterions $\forall x$

précise de cet objet. c'est pour cela qu'il faut veiller à ce que le signe introduit (ici w) soit sans occurrences antérieures qui précisément le détermineraient (l'identifieraient) de façon abusive. ”

Parmi les règles de restriction, se trouve naturellement le respect de l'ordre d'introduction des lettres : si une instantiation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante. Essayons maintenant d'explicitier en quoi le système de Copi est, selon nous, à mettre en relation avec la définition sémantique de la vérité. Il est tout à fait clair que les règles d'introduction et d'élimination des quantificateurs à la manière de Copi relèvent de la dimension sémantique. En effet, on introduit des noms d'objets, ce qui revient en quelque sorte à se placer fictivement dans une interprétation (et en particulier un domaine d'objets), dans laquelle affirmer un énoncé universel, c'est affirmer chacune de ses instances (ou encore : ce qui vaut pour tous vaut pour n'importe qui), et affirmer une instance d'un énoncé ouvert permet d'affirmer la clôture existentielle de cet énoncé. Pour les deux autres règles, on voit apparaître la nécessité d'un contrôle par celui qui conduit la démonstration : en effet, affirmer un énoncé existentiel permet d'affirmer une instance de l'énoncé ouvert, mais le plus souvent sans donner aucune information sur cet objet ; il faudra donc *prendre des précautions* pour ne pas réutiliser la lettre pour désigner un autre objet. De même, pour pouvoir à partir d'une instance d'un énoncé ouvert affirmer sa clôture universelle, il faudra *vérifier que la lettre choisie n'a pas été spécifiée par ailleurs* (on reconnaît ici la démonstration par élément générique extrêmement fréquente en mathématique (Durand-Guerrier & Arzac, 2003). Ces restrictions sont rendues nécessaires par le fait que ces règles, contrairement aux deux précédentes, ne s'appuient pas sur des énoncés universellement valides ; ce ne sont donc pas des règles d'inférence correctes ; pour autant, elles sont utilisées au quotidien par les mathématiciens. Nous verrons plus loin que le contrôle de la validité de leur utilisation est le plus souvent exercé *via* les connaissances mathématiques de l'utilisateur qui, une nouvelle fois, apparaît comme un acteur du processus de preuve. D'autre part, nous pensons que le système de Copi renvoie à l'exigence de Tarski sur la nécessité d'adéquation matérielle de la vérité pour les propositions, ce qui conduit, pour les propositions quantifiées, à considérer les instances des phrases ouvertes correspondantes et leurs interprétations. Il est important de noter également que, dans une preuve à la manière de Copi, les premières lignes de la preuve ont pour fonction d'éliminer la totalité des différents quantificateurs afin de pouvoir travailler *comme si l'on était dans le calcul des propositions*. Pour terminer la preuve, il s'agit alors de

restituer les quantificateurs, en tenant compte de l'ordre dans lequel ils avaient été éliminés et des règles d'introduction des quantificateurs et des connecteurs propositionnels. Si l'on examine les démonstrations d'Euclide, on voit que celui-ci se place directement au niveau d'un objet générique avec lequel il travaille, ce qui explique l'absence de quantification dans les textes euclidiens. Et comme la géométrie euclidienne est le prototype de la preuve en mathématiques (Gardies 1994), ceci peut expliquer la prédominance de la référence propositionnelle dans de nombreux travaux sur la preuve en mathématiques.

II.2.3.3 Le système de Quine (1950)

Le système dû à Copi est très près de la pratique mathématique en particulier parce qu'en introduisant les constantes d'objets, il permet de modéliser la démonstration par élément générique ; son intérêt principal, de notre point de vue, réside dans le fait de rendre explicites les règles de manipulation des variables (Arsac et Durand-Guerrier, 2003). Il est donc intermédiaire entre la pratique usuelle et un système entièrement formalisé et fournit de ce fait un outil de contrôle des démonstrations mettant en jeu des énoncés quantifiés complexes ; nous en donnerons quelques exemples par la suite. Cependant, ce système présente l'inconvénient de faire appel à des métarègles traduisant les contrôles que celui qui réalise la preuve doit exercer, ce qui pourrait laisser peser un soupçon sur la validité des preuves ainsi construites. La méthode de déduction naturelle due à Quine, bien qu'utilisant des règles analogues, diffère de celle de Copi dans le sens où elle ne fait pas appel aux constantes d'objets. Elle utilise uniquement des lettres de variables, libres ou liées, et introduit le contrôle de la validité en imposant des restrictions sur l'ordre alphabétique des variables utilisées²⁷. C'est donc un système formalisé dans lequel les règles de contrôle sont syntaxiques. Parmi les quatre règles introduites par Quine, deux correspondent à des schémas conditionnels universellement valides du calcul des prédicats. Ce sont :

$$\text{I.U., associée à} \quad \text{“ } (\forall x Fx) \supset Fy \text{ ” (1)}$$

$$\text{G.E. associée à} \quad \text{“ } Fx \supset (\forall y Fy) \text{ ” (3)}$$

Les deux autres règles

$$\text{G.U. associée à} \quad \text{“ } Fy \supset (\forall x Fx) \text{ ” (2)}$$

$$\text{I.E. associée à} \quad \text{“ } (\forall x Fx) \supset Fy \text{ ” (4)}$$

ne sont pas associées à des schémas valides. Il est en effet trivial de trouver des contre-exemples à (2) et (4). Le fait que ces deux règles soient associées à des schémas non valides

²⁷ Nous empruntons la présentation de cette méthode à Gochet & Gribomont, 1990, pp.221-231

impose d'édicter des restrictions dans leur usage, restrictions que Quine (1950) formule de la manière suivante (p. 218) :

“Les variables d'instantiation de I.E. et de G.U. doivent être différentes lors de chaque application, et la variable d'instantiation lors de chaque application doit être alphabétiquement postérieure à toutes les variables libres de la ligne générique²⁸ de l'application en question”

Pour faciliter le contrôle du respect de cette règle, Quine introduit un procédé de signalisation : pour chaque application de I.E. et de G.U. on mentionne sur la ligne déduite le nom de la variable instantiée, ce qui conduit à une nouvelle formulation des restrictions :

“Aucune variable ne peut être deux fois l'objet d'une signalisation et la variable signalée doit être alphabétiquement postérieure à toutes les variables libres de la ligne générique.”(ibid. p. 219)

Il y a également des métarègles dans ce système, mais Quine (1950) démontre dans son propre système que toute application correcte des métarègles introduites peut être remplacée par une preuve algorithmique dans le calcul des prédicats. Ainsi, ces deux règles apparaissent comme des artifices pour abrégé les démonstrations, tout en garantissant la validité de la déduction complète (Gochet & Gribomont, 1990, p. 227). Cependant, comme certaines des déductions ne sont pas logiquement valides dans le calcul des prédicats²⁹, le contrôle pas à pas de la preuve ne suffit pas ici : il faut un contrôle global, contrairement à ce que l'on fait en Géométrie (cf. Duval & al., 1993). Du point de vue épistémologique, les considérations précédentes montrent qu'il suffit de savoir transcrire une démonstration mathématique en déduction naturelle dans le système de Quine pour être assuré de l'existence d'une transcription formalisée dans le cadre théorique du calcul des prédicats. Autrement dit, la distance entre démonstration pratique et démonstration formalisée n'est peut-être pas aussi infranchissable qu'on l'affirme parfois (cf. par exemple Hersh, 1997, p. 50)³⁰.

²⁸ Lors de l'application de l'une de ces règles, la ligne générique est celle qui contient un quantificateur de plus que l'autre, appelée ligne instantiée. Pour I.E. et I.U., la ligne générique précède la ligne instantiée ; pour G.E. et G.U., c'est le contraire.

²⁹ Puisque certains pas de la démonstration peuvent s'appuyer sur les énoncés (2) et (4) qui ne sont pas universellement valides.

³⁰ Largeault (1972) écrit à ce propos : “ Du point de vue théorique, l'avantage des systèmes de déduction naturelle sur les systèmes de type hilbertien réside dans le fait que les démonstrations y sont plus directes (...).

II.2.3.4 La déduction naturelle de Copi comme outil didactique

Dans notre travail de chercheur en didactique des mathématiques, nous utilisons depuis plusieurs années la démonstration naturelle de Copi comme outil pour analyser les preuves mathématiques, en particulier pour mettre en évidence le jeu nécessaire sur l'introduction et l'élimination des quantificateurs qui reste fréquemment implicite dans les démonstrations produites, que ce soit dans les manuels, dans les productions d'étudiants ou dans certaines preuves historiques, pour établir la validité ou la non-validité de raisonnements non classiques (nous en verrons des exemples dans les parties IV et V de cette note), ou pour montrer qu'un énoncé est universellement valide (nous en verrons un exemple au paragraphe II.3.2.2). Chellougui (2004) illustre également l'intérêt de cet outil pour l'analyse *a priori* des preuves dans une perspective didactique.

Notre choix du système de Copi par rapport à celui de Gentzen ou de Quine est à la fois conjoncturel - c'est le premier que nous avons rencontré -, pragmatique – il est d'un maniement facile et son appropriation se fait rapidement - et, comme nous l'avons développé au paragraphe II.2.5.5.2, théorique – il marie explicitement les aspects syntaxique et sémantique.

II.3. Sur la pertinence de la théorie élémentaire des modèles pour penser la question de la nécessité et de la certitude en mathématiques

II.3.1. Éléments succincts de théorie élémentaire des modèles

Comme nous l'avons vu plus haut, c'est pour donner une définition sémantique de la notion de conséquence logique que Tarski introduit la définition du concept de modèle à partir de la notion de satisfaction. Comme le fait remarquer Sinaceur (1996) « *le terme et l'idée de modèle existait déjà, mais c'est Tarski qui en donne en 1936 une définition précise* »³¹ (p. 120). Elle indique que ce n'est qu'à partir de 1955 que Tarski appelle « Théorie des modèles » la nouvelle discipline dont il a jeté les bases en introduisant les concepts sémantiques de satisfaction d'une formule, de conséquence logique, de définissabilité. Rappelons à ce propos que, au cœur de ce travail d'élaboration, on trouve les notions de fonction propositionnelle³²,

Enfin ces systèmes correspondent mieux à l'emploi qu'on fait de la logique dans les mathématiques courantes : car on n'y utilise pas la logique sous forme d'axiomes logiques, mais sous forme de règles d'inférences. ” (p. 57)

³¹ Dans *Les fondements de la géométrie* (Hilbert, 1899), Hilbert avait déjà fait un usage important de la notion de modèles mais toujours en relation avec un *système d'axiomes* (pour une présentation de l'axiomatique d'Hilbert et ses liens avec l'enseignement de la géométrie au collège voir Arsac, 1998). La notion de modèle introduite par Tarski est plus générale.

³² Il emprunte cette notion à Russell (1903).

que nous appelons aujourd'hui prédicat, et la notion d'interprétation d'une fonction propositionnelle d'un langage donné dans un « domaine de réalité ». Pour Sinaceur (1996), « *la théorie des modèles est « une des trois branches principales de la métamathématique, les deux autres étant constituées par la théorie de la démonstration et celle de la récursivité »* (p. 120). Elle est en outre particulièrement bien profilée pour les mathématiques, puisqu'en effet :

« La théorie des modèles (de Tarski) est spécifiquement la théorie du rapport Formalismus-Inhalt, puisqu'elle étudie les relations mutuelles entre énoncés de théories formalisées et systèmes mathématiques vérifiant ces énoncés. □ (...). Le travail modèle-théorique doit tirer parti de l'examen de la forme et des contenus simultanément. Il se fait dans le va-et-vient entre ces deux pôles. La métamathématique de Tarski œuvre au point de jonction entre propriétés syntaxiques des ensembles d'énoncés et propriétés mathématiques des structures qui les satisfont. ▢ (pp. 120-121)

Nous allons préciser un peu ce qu'il faut entendre par là. Dans un ouvrage d'histoire et de philosophie des sciences, Sinaceur (1991a) a montré de façon magistrale toute la fécondité de cette nouvelle discipline pour le développement de l'algèbre réelle dans les années cinquante, ce qui, selon elle, rend justice à l'ambition de Tarski qui était de jeter un pont entre les disciplines mathématiques et la métamathématique. En ce qui nous concerne, l'usage que nous faisons de la théorie des modèles dans notre travail est beaucoup plus modeste, mais il est soutenu par le projet général de Tarski, que Sinaceur (1991a) présente dans le chapitre intitulé « *Origine métamathématique de la méthode de Tarski*³³ ». Comme on l'a vu plus haut, la préoccupation constante de Tarski est d'établir un rapport entre forme et contenu « *où il n'est pas plus question de renoncer aux avantages de la formalisation et de l'analyse syntaxique permise par cette dernière qu'à l'exigence d'en réinvestir les résultats au niveau des contenus mathématiques, à leur donner une interprétation mathématique concrète* » (p. 313). Ainsi il établit une méthode générale que Sinaceur appelle le « va et vient » entre les axes syntaxique et sémantique, et on retrouve partout dans son travail une bipolarité entre la théorie (logique) et les modèles (mathématiques). D'une manière plus générale, la « théorie des modèles » est le nouveau nom donné par Tarski à ce qu'il appelle « *Méthodologie des sciences déductives* » ou « *Méthodologie des mathématiques* », ce qui pour lui est la même

³³ Il s'agit de la méthode d'élimination des quantificateurs.

chose³⁴ si l'on se base sur les articles des années 1930 et l'ouvrage didactique « Introduction à la logique ». Ce dernier a été publié pour la première fois en Pologne en 1936 ; l'édition française date de 1960 et est établie d'après l'édition anglaise de 1941, donc avant que Tarski n'ait introduit le terme de théorie des modèles. Dans la préface à l'édition polonaise, destinée à un *large public cultivé*, il écrit :

« J'ai voulu montrer que les concepts de la logique pénètrent l'ensemble des mathématiques, qu'ils admettent tous les concepts mathématiques comme cas particuliers et que les lois logiques sont – consciemment ou non – toujours appliquées dans les raisonnements mathématiques. Enfin, j'ai essayé de présenter les principes les plus importants dans la construction des théories mathématiques, principes qui constituent la matière d'une autre discipline, la méthodologie des mathématiques, et de montrer comment on utilise ces principes dans la pratique » (Tarski, 1960, p. IX).

Dans la préface de l'édition augmentée, Tarski indique que des améliorations ont été apportées afin de faire de ce livre *un manuel pour un cours élémentaire de logique à l'université*. Dans le chapitre VI intitulé « La méthode déductive », après une présentation classique des constituants fondamentaux d'une théorie déductive (termes primitifs et termes définis, axiomes et théorèmes), il introduit la notion de modèle et d'interprétation d'une théorie sur l'exemple très simple de la congruence de deux segments. Il construit ce qu'il appelle une mini-théorie déductive, d'où il dérive divers théorèmes, puis il choisit de remplacer dans les axiomes les termes définis (ensemble de tous les segments, et relation de congruence) par des variables : K étant une variable de classe substituée à l'ensemble des segments et R un symbole de relation substitué au symbole de congruence. Il obtient ainsi des fonctions propositionnelles. Ceci permet de construire un système axiomatique pour lequel on pourra considérer des réalisations ou modèles, c'est-à-dire des domaines d'objets dans lesquels les interprétations des axiomes sont vraies. Un modèle est naturellement constitué par les objets dénotés par les termes primitifs de la première théorie (ici les segments et la relation de congruence) ; on dira dans ce cas-là que la première théorie déductive est réinterprétée dans la seconde. Les théorèmes démontrés dans la première théorie sont des théorèmes de la seconde après substitution des termes définis. Cependant, une fois le système axiomatique construit, le modèle de la théorie initiale ne joue aucun rôle particulier ; ce n'est qu'un modèle

³⁴ En effet pour Tarski, la logique déductive est une branche des mathématiques.

parmi d'autres. On peut voir dans cette méthode un processus analogue à celui de l'algèbrisation de l'arithmétique, qui correspondrait dans ce cadre à l'interprétation de l'arithmétique dans l'algèbre ; ceci va dans le sens de Sinaceur (1991) qui dit que Tarski a importé dans la métamathématique les méthodes classiques du mathématicien (le *working-mathematician*), lequel articule dans son travail ordinaire forme et contenu. De ce fait, on pourrait envisager dans une perspective didactique, d'étudier l'articulation entre les méthodes algébriques et les méthodes arithmétiques à la lumière de la théorie des modèles.

Les conséquences pour la déduction de ce que Tarski met en place sont tout à fait fondamentales. En effet, :

« Chaque théorème d'une théorie déductive donnée est satisfait par tout modèle du système axiomatique de cette théorie et de plus à chaque théorème correspond un énoncé général qui peut se formuler et se prouver dans le cadre de la logique et qui établit le fait que le théorème en question est satisfait par n'importe quel modèle de ce genre » (Tarski 1960, p. 112)³⁵

Ce résultat appelé « Théorème de la déduction » a été également établi indépendamment par Herbrand. Une conséquence immédiate en est que :

« Tous les théorèmes prouvés à partir d'un système axiomatique donné demeurent valides pour toute interprétation du système » (*ibid.*, p. 112).

Le théorème de la déduction est également le fondement de toutes les méthodes de preuve par construction d'un modèle appelées aussi preuves par interprétation : pour prouver qu'un énoncé donné de la théorie n'est pas conséquence logique des axiomes, on cherche un modèle du système axiomatique correspondant qui ne soit pas un modèle de la fonction propositionnelle associée à cet énoncé. Mais, bien sûr, si l'on excepte les cas où la négation de l'énoncé considéré est conséquence logique des axiomes, il existe aussi des modèles dans lesquels cet énoncé est vrai. Tarski remarque que dans son travail, il ne s'intéresse pas aux systèmes axiomatiques qui n'auraient aucun modèle, ce qui n'est jamais le cas si le système axiomatique provient d'une théorie déductive « concrète ». Mais on pourrait aussi proposer d'abord un système axiomatique, en d'autres termes une théorie axiomatique, et chercher à savoir si elle admet ou non des modèles. Une telle théorie est consistante si elle admet au

³⁵ Nous verrons au paragraphe II.3.2.2. une illustration de la deuxième partie de cette citation.

moins un modèle, autrement dit, si « de deux propositions contradictoires, l'une au moins ne peut être prouvée ». Une théorie consistante est complète si de deux énoncés contradictoires, l'un au moins peut être prouvé, ce qui se traduit par le fait que deux modèles quelconques de cette théorie sont élémentairement équivalents (c'est-à-dire vérifient les mêmes formules closes du calcul des prédicats du premier ordre). Tarski a montré que la géométrie élémentaire (dans laquelle ne figure pas le concept général de figure comme ensemble de points) est consistante et complète. Le théorème de Gödel (1931) montre en revanche « *qu'il ne sera jamais possible de construire une théorie axiomatique consistante et complète contenant toutes les propositions vraies de l'arithmétique ou de la géométrie avancée* » (p. 120).

Dans notre propre travail, nous considérons uniquement les énoncés mathématiques dont la formalisation peut être accomplie dans le calcul des prédicats du premier ordre et des systèmes axiomatiques « locaux » pour lesquels ne se posent pas, *a priori*, les questions théoriques mentionnées ci-dessus. En revanche, nous nous servons abondamment des résultats concernant le théorème de la déduction et des méthodes qui en découlent, qui permettent de marier les méthodes syntaxiques et sémantiques pour élaborer et analyser les démonstrations.

II.3.2 Un exemple de l'utilisation de la théorie élémentaire des modèles pour résoudre un problème de « certitude »³⁶

L'exemple que nous proposons ci-dessous a déjà été analysé dans notre thèse, mais sans faire appel explicitement à la théorie des modèles. L'expérience montre que lorsque nous présentons cette analyse à des professeurs de mathématiques en formation continue ou initiale, il est difficile d'explicitement ce qui est en jeu. Nous en sommes donc arrivés à la conclusion qu'il fallait inscrire cette analyse dans un cadre mieux établi, ce que nous offre la théorie des modèles. Cet exemple est à la frontière des mathématiques, mais il a été proposé dans le cadre de la session de 1994 destinée aux classes de quatrième/troisième du « Kangourou des mathématiques ». Il s'agit d'un concours proposé chaque année aux enseignants de mathématiques volontaires qui le proposent aux élèves de leurs classes. Il y a ensuite des classements départementaux, régionaux et nationaux.

II.3.2.1 Présentation de la question et premiers commentaires

³⁶ Cette analyse est présentée dans Durand-Guerrier, 2005-a, à paraître.

Il s'agit de l'item 30 du questionnaire proposé aux élèves, l'un des tout derniers, et l'un des rares dont le contenu ne soit pas explicitement mathématique. Il est donné aux élèves sous la forme suivante :

Les gens malins répondront tous juste à cette question ; ceux qui répondent au hasard ne sont pas malins. Alors il est certain que :

- A. Tous ceux qui répondent au hasard répondent faux.*
- B. Ceux qui sont malins répondent au hasard.*
- C. Ceux qui répondent juste sont malins*
- D. Ceux qui s'abstiennent à cette question sont malins*
- E. Les réponses A, B, C et D sont fausses.*

Notons tout de suite quelques caractéristiques de cet item qui justifient qu'on s'y intéresse dans le contexte de notre étude. Tout d'abord, la question est posée sous la forme « il est certain que », ce qui renvoie à la notion de certitude, mais à une certitude *objective* plutôt que *subjective*, comme ce serait le cas si la question avait été « êtes-vous certain que ? ». Bien sûr, cette distinction n'est pas aussi radicale qu'il y paraît, mais la formulation de la question induit, nous semble-t-il, la nécessité de chercher la réponse à l'intérieur du cadre proposé sans faire appel à des arguments liés au vécu ou aux croyances personnelles de l'élève comme, par exemple, « chaque fois qu'on répond au hasard, on se trompe ». Le deuxième point c'est que l'on peut considérer que cette question est posée dans une mini-théorie déductive au sens de Tarski que nous désignerons par la suite par la lettre \square et dont les axiomes sont fournis par la première phrase du texte. Suivant la méthode présentée ci-dessus, nous pouvons associer à cette mini-théorie un système axiomatique, ce que nous allons faire ci-dessous (ceci nous permettra en outre d'illustrer les considérations théoriques du passage précédent). Le troisième point tient au fait que, dans cet exercice, nous sommes plus ou moins en situation d'autoréférence. En effet, d'une part, celui qui répond à la question contribue à la définition de la population de référence, et donc éventuellement à la vérité des phrases A, B, C, D une fois l'épreuve terminée ; d'autre part la dernière question n'est pas de la même nature que les quatre autres puisque la phrase E dit « quelque chose à propos des quatre autres phrases ». De ce fait, elle ne pourra pas s'exprimer dans la « théorie axiomatique » que nous allons construire, mais seulement dans le métalangage associé au langage objet. On a vu plus haut que, si le langage naturel contient le nom des expressions et les prédicats de vérité, ce n'est

pas le cas dans un langage formalisé, ce qui permet précisément de traiter les questions d'autoréférence.³⁷

Précisons enfin que les élèves doivent choisir exactement une réponse parmi les propositions et que les auteurs de ce questionnaire ont indiqué comme solution : « La réponse est E parce que nous sommes malins »³⁸. Or la phrase : « Il est certain que les réponses A, B, C et D sont fausses » est ambiguë du fait que l'on ne sait pas très bien ce qu'il faut entendre par réponses. Une première interprétation, celle qui nous est venue naturellement à l'esprit, c'est que le terme « réponses » est ici mis pour « phrases ». Nous verrons que si tel est le cas, alors la phrase ci-dessus est fautive. Une autre interprétation serait que « réponses » a son sens habituel et que la phrase E signifie, non pas « il est certain que les quatre phrases sont fausses », mais « Il est certain qu'il est faux de donner l'une des quatre réponses A, B, C ou D », ce qui cette fois serait correct, puisqu'en effet nous allons voir qu'aucune de ces quatre réponses ne convient³⁹.

II.3.2.2 Construction d'un système axiomatique pour notre mini-théorie \square

Il nous faut tout d'abord choisir les variables pour remplacer les termes primitifs :

1. La population des élèves qui répondent au questionnaire sera dénotée par la lettre de variable U .
2. Les propriétés: « être malin », « répondre juste », « répondre faux », « s'abstenir » et « répondre au hasard » seront dénotées respectivement par les lettres de prédicats m , j , f , s et h .

Nous avons donc un langage-objet qui, outre la logique des prédicats du premier ordre, contient cinq lettres de prédicats, et rien d'autre. Nous pouvons, maintenant, substituer les lettres de variables dans les axiomes de notre mini théorie.

Le premier axiome du système est obtenu en formalisant l'énoncé « les gens malins répondront tous juste à cette question », et le second en formalisant l'énoncé « ceux qui répondent au hasard ne sont pas malins », que nous considérerons comme étant quantifié

³⁷ Voir plus haut II.2.2.

³⁸ La question et la solution ont été relevées sur le minitel.

³⁹ En d'autres termes, faut-il considérer que la phrase E *dit quelque chose* sur les quatre autres phrases, ou sur les réponses que doivent donner les élèves ?

universellement. Nous utilisons la formalisation classique des énoncés du type « tout P est Q » en « $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ », où la quantification porte sur l'univers du discours U ⁴⁰.

$$A_1 : \forall x (m(x) \rightarrow j(x))$$

$$A_2 : \forall x (h(x) \rightarrow \neg m(x))$$

Compte tenu des implicites habituels du fonctionnement de la langue, il nous faut rechercher d'autres axiomes qui expriment d'une part les relations entre certains termes primitifs - en effet pour rester au plus près du discours en langue naturelle, nous n'avons pas pris le système minimal de termes primitifs (« s'abstenir » pourrait se définir à partir de « répondre juste » et « répondre faux ») -, et d'autre part le fait que, très vraisemblablement, pour les auteurs, il va de soi que chacune des propriétés mentionnées est d'extension non vide. Nous obtenons de la sorte neuf axiomes supplémentaires :

$$A_3 : \forall x (j(x) \rightarrow f(x) \rightarrow s(x))$$

$$A_4 : \forall x \neg (j(x) \rightarrow f(x))$$

$$A_5 : \forall x \neg (j(x) \rightarrow s(x))$$

$$A_6 : \forall x \neg (s(x) \rightarrow f(x))$$

$$A_7 : \forall x j(x) \quad A_8 : \forall x f(x) \quad A_9 : \forall x s(x) \quad A_{10} : \forall x m(x) \quad A_{11} : \forall x h(x)$$

La théorie axiomatique que nous avons construite comporte donc les onze axiomes notés de A_1 à A_{11} ; nous la noterons désormais \mathbf{T} ; elle admet comme réalisation particulière la mini théorie dont nous sommes partie. Nous allons examiner maintenant ce que l'on peut dire des deux affirmations : « il est certain que A » (P_1) ; « il est certain que B » (P_2), dans la population de référence U sachant que A dénote la proposition « tous ceux qui répondent au hasard répondent faux » et que B dénote la proposition « tous ceux qui sont malins répondent au hasard ». Dans ce qui suit, \square dénote la proposition de \mathbf{T} interprétée par A et \square dénote la proposition de \mathbf{T} interprétée par B . Ainsi \square est le nom de l'énoncé « $\forall x (h(x) \rightarrow f(x))$ » et \square est le nom de l'énoncé « $\forall x (m(x) \rightarrow h(x))$ ». Comme nous ne connaissons au moment de répondre ni la population de référence, ni *a fortiori* l'extension des prédicats « être malin », « répondre juste », « répondre faux », « s'abstenir », et « répondre au hasard », nous ne savons pas quel modèle de \mathbf{T} va advenir à l'issue de l'épreuve. Compte tenu du système axiomatique choisi, tous les cas de figures sont *a priori* possibles. Nous avons donc besoin pour nous prononcer sur P_1 (respectivement P_2) de savoir si la proposition \square , ou sa négation (respectivement \square , ou sa négation) est

⁴⁰ Ce point sera repris au paragraphe III.1 consacré à l'implication.

conséquence logique, ou non, des axiomes de la théorie \mathbf{T} , ou encore, ce qui est équivalent, si tout modèle de la théorie \mathbf{T} est un modèle de \square , ou de sa négation (respectivement de $\neg\square$, ou de sa négation). En effet, affirmer (*nier*) P_1 (respectivement P_2), c'est affirmer (*nier*) que, quel que soit le modèle de \mathbf{T} advenu à l'issue de l'épreuve, la valeur de vérité de la proposition A (respectivement de la proposition B) sera « vrai », (« faux »). Autrement dit, la possibilité de la certitude du point de vue du sujet est indissolublement liée dans ce cas à la nécessité : « le sujet peut être certain que A (respectivement $\neg A$) » si et seulement « il est nécessaire que A (respectivement $\neg A$) », et il est nécessaire que A (respectivement $\neg A$) si et seulement si \square (respectivement $\neg\square$) est conséquence logique de \mathbf{T} .

Nous voyons bien ici qu'il s'agit d'une nécessité locale, qui généralise le point de vue d'Aristote qui, rappelons-le, posait que les vérités nécessaires sont celles qui sont obtenues à partir d'un syllogisme concluant à prémisses vraies.

Il est intuitivement assez clair que \square n'est pas une conséquence logique de \mathbf{T} , en particulier parce qu'on ne voit pas comment déduire \square des axiomes. Mais, évidemment, ceci ne constitue pas une preuve. Nous allons utiliser ici la méthode de preuve par construction d'un modèle, en construisant un modèle fini satisfaisant les axiomes de \mathbf{T} et ne satisfaisant pas \square . Un tel modèle doit nécessairement contenir au moins trois éléments pour satisfaire les axiomes A_4 à A_9 ; pour satisfaire A_1 , il faut et il suffit que l'extension de \mathbf{m} soit incluse dans celle de \mathbf{j} , et pour satisfaire A_2 , il faut et il suffit que les extensions de \mathbf{h} et de \mathbf{m} soient disjointes ; pour satisfaire A_9 et A_{10} , il faut et il suffit que les extensions de \mathbf{h} et de \mathbf{m} soient non vides. Enfin, pour que l'interprétation de \square soit une proposition fautive, il suffit que l'extension de \mathbf{h} ne soit pas incluse dans l'extension de \mathbf{f} .

Nous considérons un ensemble à trois éléments $K = \{\square, \neg\square, \square\}$. Étant donnée une propriété r du langage objet de \mathbf{T} , on note R^* son extension dans le modèle que nous sommes en train de construire. Il est clair que définir l'extension, c'est définir l'interprétation. Pour que le modèle satisfasse les axiomes, on pose

$$J^* = \{\square\} \quad F^* = \{\square\} \quad S^* = \{\square\} \quad M^* = J^* = \{\square\} \quad H^* = S^* = \{\square\}$$

La structure $\square = \langle K, M^*, J^*, F^*, S^*, H^* \rangle$ est un modèle de la théorie \mathbf{T} . Dans ce modèle, l'interprétation de \square est une proposition fautive. En effet, on a $H(\square)$ et $\neg F(\square)$, ce qui constitue un contre exemple à la proposition « Tous les H sont des F ».

Ceci prouve que \square n'est pas une conséquence logique de \mathbf{T} , et que donc on ne peut pas « être certain que A ». Il est facile de montrer par la même méthode qu'il existe des

modèles de \mathbf{T} qui sont aussi modèles de \square . Il suffit pour cela de modifier la définition de H^* en posant $H^* = F^* = \{\square\}$, sans modifier les autres définitions. Ce modèle est un modèle de \mathbf{T} et de \square . Ceci nous montre qu'on ne peut pas non plus « être certain que *non A* ». En d'autres termes, si l'on avait demandé aux élèves de donner la valeur de vérité de la proposition A , ils n'auraient pu que répondre « on ne peut pas savoir » ; nous disons dans ce cas que l'énoncé est contingent⁴¹ pour l'élève au moment où il doit répondre ; par suite, on ne peut donc pas affirmer dans la métathéorie de notre mini théorie la proposition « il est certain que A est fausse ». Ceci montre que notre théorie \mathbf{T} n'est pas complète, puisque nous avons deux modèles de \mathbf{T} non élémentairement équivalents. Ceci illustre également le fait que lorsqu'un énoncé n'est ni un théorème ni la négation d'un théorème d'une théorie axiomatique donnée non complète, il est nécessaire, pour décider de la valeur de vérité de son interprétation dans une « théorie concrète donnée », de prendre en compte l'interprétation de tous les termes définis, sans oublier bien sûr le domaine de quantification. Si nous revenons à notre point de vue intuitif, on voit qu'il suffit d'avoir une population dans laquelle quelqu'un répond au hasard et ne répond pas faux ; mais encore faut-il s'assurer que ceci est compatible avec les contraintes de la situation. C'est là un des rôles fondamentaux de la logique appliquée aux raisonnements.

Revenons maintenant à la proposition B et à la proposition \square qui la dénote dans \mathbf{T} . Il est clair que \square n'est pas un modèle de \square , puisque l'extension de \mathbf{h} n'est pas incluse dans celle de \mathbf{m} . Considérons \square' obtenue en conservant la définition de tous les termes primitifs de \square sauf la définition de \mathbf{h} , dont l'extension est $H^* = \{\square, \square'\}$. Cette fois, \square' est bien un modèle de \square , mais, en revanche, ce n'est plus un modèle de \mathbf{T} car elle ne satisfait pas l'axiome A_2 . On pressent à ce stade que cela ne sera sans doute pas possible de trouver un modèle de \mathbf{T} qui soit aussi modèle de \square . En effet, \square semble bien incompatible avec A_2 . Ou encore, la négation de \square semble bien être une conséquence logique de \mathbf{T} . C'est en effet le cas, comme on peut le montrer, par exemple, à la manière de Copi ; pour cela, il est impératif de disposer de l'axiome A_{10} . Nous allons, en fait, prouver que $\square\square$ est conséquence logique de A_2 et A_{10} . Pour cela, nous allons utiliser comme prémisses de la démonstration la contraposée de l'axiome A_2 et l'axiome A_{10} .

$$\square x (\mathbf{m}(x) \square \neg \mathbf{h}(x)) \quad (1) \quad \text{Prémisse}$$

⁴¹ La notion d'énoncé contingent fait l'objet du chapitre V de notre thèse. Nous disons qu'un énoncé est contingent pour un sujet donné à un instant donné si ce sujet n'a pas les moyens de se prononcer sur la vérité de cet énoncé, soit que la valeur de vérité de l'énoncé ne soit pas contrainte par la situation, soit que le sujet ne dispose pas des informations nécessaires pour se prononcer.

$\forall x m(x)$	(2)	Prémisse
$m(w)$	(3)	I.E. sur (2)
$m(w) \wedge \neg h(w)$	(4)	I.U. sur (1) avec w
$\neg h(w)$	(5)	M.P. sur (3) et (4)
$(m(w)) \wedge (\neg h(w))$	(6)	conjonction sur (3) et (5)
$\forall x ((m(x)) \wedge (\neg h(x)))$	(7)	G.E. sur (6)

Ceci prouve que l'énoncé

$$[(\forall x (m(x) \wedge \neg h(x))) \wedge (\forall x m(x))] \wedge [\forall x ((m(x)) \wedge (\neg h(x)))]$$

est universellement valide.⁴² Comme (1) et (7) sont logiquement équivalent respectivement à l'axiome A_2 et à la négation de \square , on en déduit que la négation de \square est conséquence logique de A_2 et A_{10} , et donc de \mathbf{T} . Comme \mathbf{T} est consistante, elle a des modèles et tout modèle de \mathbf{T} est modèle de $\square\square$. Par suite, la proposition B qui interprète \square dans \square est nécessairement fausse, puisque sa négation y est nécessairement vraie. Cette fois, on peut affirmer dans la métathéorie de \square que « il est certain que la phrase B est fausse ». Nous pouvons noter que cette démonstration à la manière de Copi revient en quelque sorte à se placer dans un modèle générique de \mathbf{T} .

II.3.2.3. Un modèle mathématique de la théorie axiomatique \mathbf{T}

Afin de revenir sur l'articulation entre forme et contenu en mathématique, nous allons considérer un modèle mathématique très simple de \mathbf{T} , noté \square . Pour construire \square , nous avons besoin cependant d'enrichir le langage objet avec le langage de la théorie de l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels comme corps ordonné. Le domaine d'objets qui interprète \mathbf{K} est l'ensemble des trinômes du second degré.

m est interprété par la propriété « avoir un discriminant positif strictement »

j est interprété par « avoir deux racines réelles exactement »

f est interprété par « avoir une racine réelle exactement »

s est interprété par « ne pas avoir de racine réelle »

h est interprété par « être positif strictement sur \mathbf{R} »

⁴² Ceci illustre la deuxième partie de la citation de Tarski (1960, p. 112), que nous avons donnée au paragraphe II.3.1.

L'axiome A_1 est interprété par la proposition : « tout trinôme dont le discriminant est positif strictement a exactement deux racines réelles ». Ceci est un énoncé vrai dans la structure considérée qui satisfait donc A_1 . L'axiome A_2 est interprété par la proposition « Aucun trinôme positif strictement sur \mathbf{R} n'a un discriminant strictement positif », qui est également un énoncé vrai de \mathbf{K} . les autres axiomes de \mathbf{T} sont également vérifiés ; en effet, les cinq prédicats sont d'extension non vide, et étant donné un trinôme, soit il a exactement deux racines réelles, soit il a exactement une racine réelle soit il n'a pas de racine réelle et les cas s'excluent mutuellement deux à deux. Par conséquent, nous avons bien construit un modèle de \mathbf{T} .

Dans ce modèle, \square et \square sont interprétées respectivement par « tout trinôme strictement positif sur \mathbf{R} a exactement une racine réelle », et « tout trinôme ayant un discriminant positif est strictement positif sur \mathbf{R} . » Puisque $\square \square$ est conséquence logique de \mathbf{T} , ce dernier énoncé est nécessairement faux ; il n'est pas nécessaire de faire appel ici aux connaissances mathématiques pour se prononcer ; on dit parfois qu'un tel énoncé est faux en raison de sa forme, mais ici cette notion est locale au sens où elle est relative à la théorie \mathbf{T} . C'est en rapprochant cette proposition de l'axiome « aucun trinôme positif strictement sur \mathbf{R} n'a un discriminant strictement positif », que l'on peut « voir » la contradiction, indépendamment de la signification des termes. Il n'en va pas de même pour le premier énoncé. En effet, comme on l'a vu, dans certains modèles de \mathbf{T} l'interprétation de \square est un énoncé vrai, dans d'autres un énoncé faux. Il faut donc étudier, dans le modèle, ce qu'il en est de la valeur de vérité de la proposition : « tout trinôme strictement positif sur \mathbf{R} a exactement une racine réelle ». Pour se prononcer sur la valeur de vérité de cette proposition, qui est fautive, on peut soit proposer un contre-exemple, soit faire appel aux résultats concernant le signe du trinôme en relation avec ses racines éventuelles, ce qui nous a déjà permis d'affirmer que les axiomes A_1 et A_2 étaient satisfaits. Ceci montre que si \square est bien un modèle de \mathbf{T} , la mini théorie déductive naturelle des trinômes du second degré ne peut pas s'interpréter dans \mathbf{T} , autrement dit, \mathbf{T} n'est pas une théorie axiomatique pour \square , puisque comme on l'a vu au paragraphe précédent, la négation de \square , dont l'interprétation dans \square est une proposition vraie, n'est pas un théorème de \mathbf{T} .

II.3.2.4 Commentaires

Nous avons développé longuement cet exemple, et l'on peut penser peut-être que l'appareillage logique mobilisé est un peu lourd au regard des enjeux de connaissances. Cependant, nous en défendons la pertinence dans la mesure où il doit permettre, du moins

nous l'espérons, de mieux apercevoir ce que signifie, au niveau élémentaire qui nous intéresse, le projet de Tarski ; en quoi, pour reprendre une expression de Quine, il contribue à la clarification conceptuelle des concepts de vérité, de validité, de nécessité et de certitude, et comment il nous aide à débusquer et à interpréter des phénomènes que nous qualifions de didactiques. Les enseignants avec qui nous avons eu l'occasion de travailler, tant en formation initiale et continue, que dans le cadre de notre travail de recherche, sont en général, très démunis devant ce type de situations et, à l'instar des auteurs de cet exercice du Kangourou, ne semblent même pas imaginer que la résolution d'une telle tâche pourrait être problématique. Or, il arrive parfois que les élèves mettent le doigt sur des difficultés non prévues par leurs professeurs. Nous en verrons quelques exemples dans les paragraphes suivants ; d'autres sont décrits dans différentes publications.

II.4. Conclusion

Pour terminer cette partie, nous souhaitons redonner la parole à Sinaceur qui écrit :

« Ainsi contrairement à la *Beweistheorie* de Hilbert, la théorie des modèles donne une grande importance à l'interprétation sémantique des ensembles d'énoncés, c'est-à-dire aux structures mathématiques où les énoncés formels reçoivent un sens concret. L'étude structurale se fait au niveau des modèles autant qu'à celui des axiomes. Par là, elle noue des liens étroits avec le travail mathématique ordinaire et reprend à son compte, en lui donnant une réponse exacte, l'une des questions épistémologiques de Hilbert celle relative aux rapports en mathématiques, de la forme et du contenu. » (Sinaceur, 1991a, p. 313)

Cette citation met en évidence que l'analyse logique assume également un rôle épistémologique ; ce que l'auteur explicite par ailleurs, dans un texte en hommage à Desanti :

« La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie. (...) Une part essentielle de l'analyse épistémologique est ainsi ouvertement prise en charge par l'analyse logique (...) En même temps elle apparaît comme une épistémologie *effective* dans la mesure où la réflexion est orientée vers et investie dans l'agir. » (Sinaceur 1991b)

Une telle conclusion ne saurait laisser indifférent le didacticien des mathématiques, puisque, nombre de ses objets d'étude sont confrontés à cette problématique. Il est tout à fait clair que les objets et les théories mathématiques visés par Sinaceur sont au-delà des théories mathématiques avec lesquelles travaillent, en général, les didacticiens des mathématiques. Cependant, comme nous l'avons déjà aperçu au paragraphe II.3 et comme nous allons le montrer dans la section suivante, notre propre travail témoigne de la pertinence de cette analyse logique pour l'analyse didactique du raisonnement mathématique. Si l'on considère en outre que le raisonnement mathématique est au cœur des apprentissages mathématiques, alors il faudra se poser la question de la place de l'analyse logique dans les analyses didactiques⁴³.

⁴³ A notre connaissance, dans les années quatre-vingt s, le DEA de Didactique des Mathématiques de Paris VII comportait un enseignement de logique.

III Les connecteurs logiques au-delà des tables de vérité

Comme nous l'avons explicité dans la partie II, nous plaçons résolument nos analyses dans le point de vue sémantique de la théorie des modèles avec comme système de référence le calcul des prédicats du premier ordre. Ceci nous conduit à reconsidérer les connecteurs logiques que l'on définit classiquement à partir de leurs tables de vérité, comme nous le rappelons ci-dessous :

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$p \wedge q$	$p \vee q$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	V

Ce tableau met en évidence quelques résultats bien connus que nous allons rappeler ici :

1. La négation d'une implication est une conjonction :

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv (p \wedge (\neg q))$$
2. L'implication est équivalente à une disjonction

$$(p \rightarrow q) \equiv ((\neg p) \vee q)$$

Ces résultats, qui montrent que ces connecteurs ne sont pas indépendants, restent vrais dans le calcul des prédicats et donnent de nouveaux énoncés valides par substitution de formules atomiques aux lettres de variables propositionnelles. Mais comme nous l'avons abondamment discuté dans la partie II, le calcul des prédicats n'est pas réductible au calcul des propositions. En particulier, comme nous allons le montrer, il est nécessaire de considérer des extensions des connecteurs propositionnels. Ceci soulève de nouvelles questions que nous aborderons dans la perspective didactique qui est la nôtre, d'une part par une relecture des travaux développés dans notre thèse, d'autre part en utilisant notre cadre théorique pour interroger certaines positions de chercheurs et certaines pratiques ordinaires de l'enseignement des mathématiques. Nous montrerons également comment nous pouvons également envisager ce travail pour la négation.

III.1. Quelle implication pour faire des mathématiques ?

Préliminaire : L'implication une notion polysémique

La question « Quelle implication pour faire des mathématiques ? » était en quelque sorte la question initiale de notre travail de thèse et reprenait une question que se sont posés de nombreux auteurs comme nous l'avons rappelé dans la section II. Dans un ouvrage intitulé *Méthode de logique*⁴⁴, Quine, philosophe et logicien qui a consacré toute sa vie « à la

⁴⁴ Quine, 1950, 1972 pour la traduction française.

poursuite de la vérité⁴⁵ » entreprend de clarifier les différentes notions associées à l'expression « si..., alors ». Il propose pour cela de distinguer au moins quatre notions. La première est le *conditionnel courant*, pour lequel, dit-il, on ne considère généralement que les cas qui vérifient l'antécédent. Ceci est en accord avec les travaux de psychologie cognitive comme, par exemple, ceux de Politzer (1981) qui montrent que, si vous demandez à des sujets adultes dans quels cas on peut dire sans mentir « si je mets ma veste alors je mets ma cravate », ils répondent prioritairement en donnant comme seule réponse la co-occurrence des deux événements. Tous cependant reconnaissent qu'ils mentiraient s'ils mettaient une veste mais pas de cravate ! Si un tel résultat ne nous surprend guère, il n'en va peut-être pas de même de l'exemple suivant. En 1993, dans une séance ordinaire de travaux dirigés de mathématiques qui a eu lieu en début d'année en première année d'université, nous avons proposé à quatre-vingt-dix étudiants (répartis dans trois groupes de trente) un exercice consistant à déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 vérifiant l'énoncé : « si ééééé est pair, alors son successeur est premier ⁴⁶ ». Les réponses ont été recueillies oralement. Quarante-sept étudiants ont donné comme réponse les nombres 2, 4, 6, 10, 12, 16 et 18 ; seuls trois d'entre eux ont rajouté les impairs. Les principaux arguments avancés sont que « pour les impairs, l'énoncé n'est ni vrai, ni faux », ou encore que « l'énoncé ne concerne pas les impairs ». L'argument consistant à dire que « les seuls contre-exemples étant les nombres pairs dont le successeur est premier, les nombres impairs répondaient donc à la question » a été jugé non convaincant par la plupart de ces étudiants⁴⁷. Et, ce qui peut paraître encore plus surprenant, c'est que, tant en formation initiale que continue, de nombreux enseignants répondent comme les étudiants, à ceci près qu'ils changent immédiatement leur réponse lorsque les nombres impairs sont évoqués.

La seconde notion est le *conditionnel matériel*, autrement dit le connecteur propositionnel souvent appelé *implication matérielle*, qui relie deux variables propositionnelles (dans le calcul des propositions) ou deux propositions (dans une interprétation donnée). Comme Frege, Quine assume le choix conventionnel contraire à l'usage courant, mais non arbitraire, d'attribuer la valeur de vérité « vrai » au conditionnel matériel « $p \supset q$ », lorsque l'antécédent est faux⁴⁸. On a vu cette définition apparaître dès l'Antiquité avec Philon de Mégare et susciter aussitôt des controverses ; à en croire Blanché (1970), le poète Callimarque écrit que

⁴⁵ *Pursuit of the truth* est paru en 1990.

⁴⁶ Cet exercice est inspiré d'El Faqhi (1991)

⁴⁷ Notons que ceci renvoie à la notion de « hors-sujet » introduit par Legrand(1993)

⁴⁸ Rappelons que dans la table de vérité de ce connecteur, seul le cas où la valeur attribuée à p est «vrai » et celle attribuée à q est « faux » donne lieu à la valeur « faux ».

« *Les corbeaux croassent sur les toits quelles sont les vraies implications* ». Ce choix n'est pas arbitraire au sens où aucun autre choix possible (pour des raisons de combinatoire, le nombre de choix possibles est fini) ne conduit à une définition satisfaisant tout ce que l'on attend d'une telle notion, en particulier dans l'activité mathématique. En outre, comme Wittgenstein (1921) l'a montré, cette définition permet de définir dans le calcul propositionnel une notion d'implication « structurelle » en considérant les tautologies de la forme « $S \supset S'$ » où « S » et « S' » sont deux énoncés du calcul des propositions. Quine en donne plusieurs exemples classiques et insiste sur le fait que de tels énoncés sont associés à la plupart des règles d'inférence valide, comme c'est le cas pour la tautologie « $(p \supset (p \supset q)) \supset q$ » qui est associée à la règle du Modus Ponens « si A, alors B ; or A ; donc B ». Il propose de réserver le nom d'implication à cette relation entre schémas propositionnels. Nous avons choisi dans nos travaux d'appeler *implication au sens de Quine*⁴⁹ cette troisième notion, car nous n'avons pas rencontré d'autres auteurs mettant en exergue de la sorte ce type de relation. Celle-ci s'exprime dans le métalangage par le verbe *implique* qui « combine non des énoncés pour former des énoncés⁵⁰, mais des noms d'énoncés pour former des énoncés sur des énoncés. » (Quine, 1972, p. 53). On reconnaît là à la fois l'héritage de Wittgenstein et celui de Tarski⁵¹. Russell (1903) quant à lui définit l'implication matérielle « à son corps défendant » parce qu'il en a besoin pour définir la quatrième notion retenue par Quine, à savoir l'*implication formelle* que Quine appelle de façon imagée *faisceau de conditionnels*. Une implication formelle est un énoncé de la forme « $\forall x (P(x) \supset Q(x))$ », où « P » et « Q » sont des fonctions propositionnelles (des prédicats), « qui affirme chaque implication d'une certaine classe » (p. 73). À ce propos, Russell (1903) écrit « *c'est un sujet fort difficile et je n'ai qu'une confiance limitée dans la vérité des théories que je vais soutenir* » (p. 123). Selon lui, les difficultés sont liées aux problèmes concernant la notion de variable, qui chez Russell, comme chez Frege, est « sans restriction ». Nous pouvons rajouter que les difficultés sont également liées d'une part à l'absence d'une théorie de la vérité, et d'autre part et solidairement à l'absence d'une *cinquième notion d'implication*, indispensable pour articuler implication matérielle et implication formelle.

⁴⁹ On pourrait également la nommer « implication concluante » ou « implication inférentielle ».

⁵⁰ Comme le fait le connecteur « si... alors »

⁵¹ Il faudrait aussi mentionner l'héritage de Carnap, mais pour l'instant, nous n'avons pas étudié ses travaux sur la syntaxe et la sémantique ; cette étude fait partie de nos perspectives de recherches.

III.1.1. Une notion d'implication fondamentale presque jamais convoquée

Nous avons vu ci-dessus que la difficulté à laquelle s'affronte Russell est celle de la définition de l'implication formelle en relation avec l'implication matérielle. Pour lui, l'implication formelle est la notion fondamentale, mais il ne peut cependant pas la définir sans passer par l'implication matérielle. Dans le moderne calcul des prédicats, ce problème est résolu, grâce à la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, de la manière suivante. Étant donné une implication formelle « $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ », on lui associe la fonction propositionnelle obtenue en supprimant le quantificateur universel, soit « $P(x) \rightarrow Q(x)$ » que nous noterons \square . Une interprétation de I dans un modèle M est une phrase ouverte ; à chaque assignation a d'un objet du domaine à la variable x est associée une implication matérielle « $P(a) \rightarrow Q(a)$ »⁵². L'interprétation de I est satisfaite dans M par a dans trois cas : $P(a)$ et $Q(a)$ sont deux propositions vraies dans M ; $P(a)$ est fausse et $Q(a)$ est vraie ; $P(a)$ est fausse et $Q(a)$ est fausse ; elle est non satisfaite par a lorsque $P(a)$ est vrai et $Q(a)$ est fausse. Et ceci vaut pour tout modèle dans lequel on peut interpréter I . Nous définissons ainsi « un connecteur du calcul des prédicats » qui est une extension du connecteur propositionnel défini à l'aide des tables de vérité que nous appellerons par la suite *implication ouverte*. Nous verrons dans le paragraphe consacré à la négation que Da Costa (1997) défend une position analogue pour ce qui concerne la négation ce qui montre que cette définition n'est pas « une création didactique ». Cette extension de l'implication matérielle est le chaînon manquant entre « implication formelle » et « implication matérielle » puisque, conformément à la définition objectuelle du quantificateur universel, l'interprétation de l'implication formelle est vraie dans un modèle donné si chacune des instances de l'implication ouverte correspondante est vraie dans le modèle. Cela a plusieurs conséquences dont l'une, tout à fait essentielle quoique rarement explicitée dans les manuels de mathématiques, est que le pas fondamental de la déduction en mathématique se traduit par « $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) ; \text{or } P(a) ; \text{donc } Q(a)$ », où l'on voit bien que l'implication matérielle « $P(a) \rightarrow Q(a)$ » est sous-entendue et que, pour exprimer cette règle, on doit ici encore considérer un modèle générique, autrement dit un point de vue sémantique. Ceci permet de formaliser le syllogisme paradigmatique « tout homme est mortel ; or Socrate est un homme ; donc Socrate est mortel »⁵³, ce qu'il est impossible de faire dans le seul calcul des propositions. De même, c'est ce qui est à l'œuvre

⁵² En toute rigueur, il faudrait changer les lettres P et Q ; conformément à l'usage, nous ne le ferons pas.

⁵³ Rappelons que contrairement à ce que l'on peut lire parfois, ceci n'est pas un syllogisme aristotélicien, car on est dans une interprétation.

lorsque l'on déduit, par exemple, qu'une fonction donnée f de deux variables est différentiable en un point a du fait que ses dérivées partielles sont continues.

Nous pouvons à présent revenir à l'énoncé « si n est pair, alors son successeur est premier ». Cet énoncé est l'interprétation dans un fragment de l'arithmétique de la fonction propositionnelle « $P(x) \rightarrow Q(s(x))$ » où « P » et « Q » sont interprétées respectivement par « pair » et « premier » et « s » par la fonction « successeur ». Il s'agit donc d'une implication ouverte et pour chaque valeur de x compris entre 1 et 20, on obtient une proposition. Le premier tableau montre sur quelques valeurs de n que l'on retrouve la table de vérité de l'implication.

Valeur assignée à x	$P(x) \rightarrow Q(s(x))$	$P(x)$	$Q(x)$	$P(x) \rightarrow Q(s(x))$
1	$P(1) \rightarrow Q(2)$	faux	vrai	vrai
3	$P(3) \rightarrow Q(4)$	faux	faux	vrai
4	$P(4) \rightarrow Q(5)$	vrai	vrai	vrai
8	$P(8) \rightarrow Q(9)$	vrai	faux	faux

Le deuxième tableau illustre l'importance de préciser le domaine de quantification pour pouvoir attribuer une valeur de vérité à un énoncé quantifié dans un modèle donné.

Univers du discours E	Ensemble des éléments satisfaisant l'interprétation de I	Valeur de vérité de $\forall x F(x)$	Valeur de vérité de $\exists x F(x)$
$\{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 20\}$	$E / \{8, 14, 20\}$	Faux	Vrai
$\{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 7\}$	E	Vrai	Vrai
$\{x \in 2\mathbb{N} / 1 \leq x \leq 20\}$	$\{2, 4, 6, 10, 12, 16, 18\}$	Faux	Vrai
$\{8, 14, 20\}$	\emptyset	Faux	Faux

La troisième ligne du tableau montre que la réponse majoritaire des étudiants peut s'interpréter comme le fait de se placer directement dans l'ensemble des entiers pairs pour répondre à la question ; plus généralement ceci reviendrait à considérer que les objets (ou les suites d'objets) d'un modèle pour une implication doivent prioritairement satisfaire l'antécédent. Nous reviendrons au paragraphe III.1.3 sur cette question, mais auparavant nous

allons préciser les relations entre la définition sémantique de l'implication d'une part et les règles (syntaxiques) d'inférence valide d'autre part.

III.1.2. Définition sémantique de l'implication et règles d'inférence

III.1.2.1. Deux points de vue présents dès l'Antiquité

Dans ce qui précède, nous avons déjà vu, à travers l'implication au sens de Quine, que les implications universellement valides du calcul des propositions et du calcul des prédicats sont étroitement associées aux règles d'inférence valide couramment utilisées en mathématiques. Il est clair également, à la lumière des travaux de Tarski, que ces deux points de vue, s'ils ne s'opposent pas complètement, correspondent à une différence sur la place accordée au point de vue sémantique de la vérité développé dans la théorie élémentaire des modèles. Il n'est sans doute pas inutile de rappeler que cette distinction remonte à l'Antiquité. Aristote, dans sa théorie du syllogisme formel, se trouve plutôt du côté des lois logiques et donc du côté de « l'implication *concluante* au sens de Quine » dans le calcul des prédicats monadiques⁵⁴ du premier ordre. Les syllogismes concluants sont des figures pour lesquelles le conditionnel articulant les deux prémisses et la conclusion est vrai pour toute interprétation des lettres ; ces lettres étant des lettres de prédicat. Ainsi le syllogisme de la première figure,

« Si B est affirmé de quelque A et si C est affirmé de tout B , alors C est affirmé de quelque A », peut se formaliser dans le calcul des prédicats par l'énoncé universellement valide

$$\ll [\forall x (A(x) \supset B(x)) \wedge \forall x (B(x) \supset C(x))] \supset \forall x (A(x) \supset C(x)) \gg$$

Ce qui signifie que la conclusion de ce syllogisme formel est conséquence logique, au sens sémantique de Tarski, de la conjonction de deux prémisses. Aristote discute la question de la vérité et de la fausseté des prémisses et insiste sur le fait que l'on peut avoir une conclusion juste et une ou deux prémisses fausses, et que, dans ce cas, la vérité de la conclusion n'est pas nécessaire (Premiers Analytiques, II,2). Autrement dit, dans ce cas, on ne peut pas faire de déduction. À la même époque, les stoïciens développent une logique rivale⁵⁵ fondée sur cinq règles d'inférence valide qui gouvernent le fonctionnement des différents connecteurs logiques, dont l'implication pour laquelle ils donnent deux règles, appelées classiquement « tropes » : le Modus Ponens : « si la première la seconde, or la première, donc la seconde » et le Modus Tollens « si la première la seconde, or pas la seconde, donc pas la première », où « la première » et « la seconde » doivent être interprétées par des propositions. Les exemples

⁵⁴ C'est-à-dire prédicats à une place

⁵⁵ Longtemps sous-estimée, cette logique a été réhabilitée par Lukasciewicz, 1934

qu'ils donnent s'appliquent aux énoncés du discours quotidien. Nous sommes donc ici clairement dans ce que l'on appelle un point de vue syntaxique. On peut faire un parallèle entre le premier trope et la règle d'élimination de la flèche dans la démonstration naturelle de Gentzen.

III.1.2.2. Deux règles d'inférence absentes

Toutefois, il est tout à fait clair que ces deux règles ne gouvernent le fonctionnement de l'implication que parce qu'en creux se dessine l'absence de deux autres règles. Autrement dit l'implication est ce qu'elle est précisément parce que des deux prémisses « $\neg A$ » et « $A \rightarrow B$ », je ne peux rien inférer quant à la vérité ou la fausseté de B et que des deux prémisses « B » et « $A \rightarrow B$ », je ne peux rien inférer quant à la vérité ou la fausseté de A . C'est ce qui distingue l'implication de l'équivalence. Polya (1958) avait bien reconnu toute l'importance de ce fait sur lequel il appuie la notion de raisonnement plausible. Pour lui, lorsque vous faites une conjecture sur A et que vous disposez d'un théorème de la forme « $A \rightarrow B$ », le fait de pouvoir établir la vérité de B permet d'augmenter le degré de vraisemblance, et par suite de confiance, en la conjecture A ; Polya dit que dans ce cas « A est plus croyable ». Nous utilisons, par exemple, ce type de raisonnement lorsque nous cherchons à savoir si une fonction de deux variables est différentiable en un point. En effet, il est souvent plus facile d'étudier la continuité en un point d'une fonction de deux variables que sa différentiabilité en ce point. Or la différentiabilité entraîne la continuité ; par suite, si la fonction n'est pas continue au point considéré, on peut conclure d'emblée que la fonction n'est pas différentiable en ce point, et l'on a économisé un calcul qui peut être assez fastidieux. Par contre, si la fonction est continue au point considéré, on poursuit l'étude en s'intéressant aux deux dérivées partielles. Dans le cas où la fonction n'admet pas en ce point deux dérivées partielles, elle n'est pas différentiable en ce point. En revanche, lorsque les deux dérivées partielles existent, on poursuit l'étude. La fonction a passé avec succès deux tests, on a augmenté notre confiance pour une réponse positive à la question de sa différentiabilité au point considéré. Pour poursuivre l'étude sans recourir encore à la définition, on peut utiliser à ce stade le fait que la continuité des dérivées partielles entraîne la différentiabilité ; par suite, on peut faire l'étude de la continuité en ce point des dérivées partielles et conclure positivement dans le cas où elles sont continues. Par contre, dans le cas où elles ne sont pas continues, on ne peut pas conclure, et il nous faut cette fois revenir à la définition pour terminer l'étude. Ce mode de raisonnement consiste à travailler prioritairement sur les propriétés les plus simples en tirant

parti des cas qui permettent de conclure rapidement, afin de ne mettre en œuvre les calculs plus complexes que lorsque ceci s'avère nécessaire.

C'est aussi ce type de raisonnement qui soutient le critère de la bien mal nommée « preuve par neuf » qui permet de détecter certaines erreurs dans une multiplication. On peut regretter que son enseignement ait disparu des programmes de l'école élémentaire, car, comme la situation précédente et d'autres situations que nous allons rencontrer, elle permet de travailler simultanément sur la notion d'implication et sur les connaissances mathématiques en jeu.

Naturellement, ce qui précède s'étend au calcul des prédicats dans lequel nous trouvons de la même manière deux règles d'inférence et l'absence de deux autres règles. Les deux règles s'expriment, dans un univers du discours donné, sous la forme « $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$, or $P(a)$; donc $Q(a)$ » et « $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$, or $\neg Q(a)$; donc $\neg P(a)$ ». L'absence des deux autres règles signifie que des deux prémisses « $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$ » et « $Q(a)$ », on ne peut rien inférer pour $P(a)$, ce qui ne signifie évidemment pas pour autant que $P(a)$ est faux ; il en est de même pour l'autre cas ; à nouveau, ceci caractérise les implications qui ne sont pas des équivalences.

Notons enfin que, comme nous le verrons plus loin (III.1.4.), une implication formelle du calcul des prédicats, peut être interprétée dans certains modèles par une équivalence, ou encore par une fonction propositionnelle élémentaire, ce qui a naturellement un effet sur les inférences permises.

III.1.3 À propos de la conception commune « vérifier une implication, c'est, en particulier, vérifier son antécédent.

Dans un exemple précédent, nous avons vu que la plupart des étudiants interrogés ne considéraient que les cas qui vérifient l'antécédent de l'implication (II, Préliminaire). On pourrait penser que ceci est lié à la nature de la question posée, tout à fait inhabituelle, et qui donc comporterait en quelque sorte un piège dans lequel il serait facile de faire tomber même des non débutants. D'autres résultats (Hoyles & Küchemann 2003) montrent cependant que cette *conception commune* peut apparaître même dans des situations plus classiques. Nous allons en donner un exemple issu de notre thèse, mais auparavant, nous allons préciser le sens du terme « *conception* » dans notre travail.

III.1.3.1. Le sens du terme «conception» dans notre travail

Le terme de *conception* recouvre de nombreux usages dans les différents champs s'intéressant à l'élaboration des connaissances⁵⁶. En accord avec Margolinas (1993), nous appelons «*conception*» un modèle d'interprétation des réponses que se donne le chercheur et qui lui permet d'expliquer *rationnellement* les réponses fausses obtenues. Par exemple, nous dirons qu'un ensemble de réponses à une question sur une implication qui n'est pas une équivalence correspond à la *conception* «*équivalence*», si les réponses données sont exactement celles qui seraient correctes si l'implication proposée était une équivalence. Nous avons ainsi pu tester cette conception sur l'échantillon concerné par le questionnaire de notre thèse car, pour plusieurs items, nous avons posé les questions sur les quatre cas possibles de valeur de vérité pour antécédent et conséquent.⁵⁷

Cette notion de *conception* est en accord avec ce que l'on appelle en philosophie logique, à la suite de Quine et Davidson, le principe de charité⁵⁸ : *plutôt que de considérer les réponses des sujets dont nous traduisons le langage comme étant illogiques, nous devons parier sur une divergence linguistique*. Ceci est en relation très étroite avec le principe d'indétermination de la traduction défendue par Quine :

«La maxime de traduction qui est à la base de tout ceci, c'est qu'il est plus probable qu'une affirmation manifestement fausse à simple vue fasse jouer des différences de langage (...). La vérité de bon sens qu'il y a derrière cette maxime, c'est que la stupidité de notre interlocuteur, au-delà d'un certain point, est moins probable qu'une mauvaise traduction, — ou, dans le cas domestique, qu'une divergence linguistique.» (Quine 1960, 1999, p. 101)

C'est aussi une position épistémologique pour le chercheur, et nous pouvons à cet effet comparer celle adoptée par Margolinas (1989) :

«Pour nous le mot *conception* décrit un modèle de comportement cognitif du sujet en situation, construit par le chercheur.» (p.87)

et celle soutenue par Engel (1989)

⁵⁶ Pour une discussion de ces différents voir par exemple Artigue, 1991, pp. 265-279.

⁵⁷ Dans notre thèse, parmi notre échantillon, nous avons trouvé seulement trois étudiants dont l'ensemble des réponses pouvait s'interpréter en référence au modèle de la «*conception* équivalence», ce qui est en désaccord avec d'autres travaux semblant mettre en évidence que cette *conception* (dans un sens plus «*réaliste*» que celui que nous avons adopté) est un des obstacles majeurs au maniement de l'implication.

⁵⁸ Voir à ce sujet Delpla, 2001.

« (...) en un sens faible, x accepte une règle de logique au sens où il la suit, c'est-à-dire a un comportement qui peut être décrit en conformité avec la règle. »
(p.102)

Dans une perspective didactique, la mise en œuvre d'un tel principe est évidemment nécessaire, mais encore faut-il se donner des moyens effectifs de reconstruire *a posteriori* la rationalité du sujet, faute de quoi, nul projet didactique ne saurait aboutir. Comme on l'aura déjà pressenti, un des enjeux essentiels de notre travail est précisément d'élaborer des outils d'analyse fondés sur la logique elle-même, et plus précisément sur la théorie élémentaire des modèles, permettant de contribuer à ce projet.

III.1.3.2. « Il est impossible que l'antécédent d'un conditionnel affirmé soit faux »

L'exemple que nous présentons ci-dessous est issu de notre thèse. Il s'agit de la troisième question du questionnaire. Nous donnons tout d'abord la question telle qu'elle a été proposée aux étudiants :

Si un domaine plan D_1 est inclus dans un domaine plan D_2 , alors son aire A_1 est inférieure à l'aire A_2 du domaine D_2 .
Que peut-on dire de D_1 et de D_2 sachant que

- a) $A_1 < A_2$
- b) $A_1 > A_2$

Dans notre corpus, nous avons trouvé neuf copies dans lesquelles apparaît explicitement, pour l'item b, la conception selon laquelle *affirmer un énoncé conditionnel, c'est affirmer son antécédent*. En voici deux exemples⁵⁹:

« C'est impossible puisque D_1 est supposé inclus D_2 . D_1 et D_2 sont à redéfinir. »

« C'est impossible car cela voudrait dire que $D_1 \not\subset D_2$, or la situation présente montre que $D_1 \subset D_2$.

Il est assez difficile de repérer cette *conception*, car de fait, elle correspond à des résultats conformes lorsque l'on travaille avec un antécédent vrai. Nous venons de voir cependant deux méthodes pour tenter de la repérer. La première consiste à demander dans quels cas une

⁵⁹ Tous les exemples trouvés sont présentés et brièvement analysés dans notre thèse, p.192.

implication ouverte est vérifiée, comme nous l'avons fait dans la situation arithmétique ; la deuxième, comme dans ce dernier exemple, à s'appuyer sur le fait que cette conception rend, de fait, impossible la mise en œuvre du Modus Tollens. Ces deux exemples montrent que cette conception, présentée par Quine comme une conception commune dans l'usage quotidien de la langue, est également présente chez des étudiants scientifiques arrivant à l'université auxquels on demande de traiter des questions se situant explicitement dans le champ des mathématiques. Cette conception commune semble donc assez résistante, au sens où elle *résiste* à la pratique et aux savoirs acquis en mathématique, et il est clair que, si notre exemple arithmétique permet de mettre en lumière le rôle que peut jouer la notion d'implication ouverte pour élucider ce qui se joue, il risque fort de ne pas convaincre les étudiants de la pertinence du choix fait pour l'implication matérielle. On peut naturellement mettre en relation le fait de ne pas considérer les cas qui rendent faux l'antécédent avec la pratique scolaire usuelle où l'implication est utilisée essentiellement pour appliquer la règle du détachement, après avoir contrôlé que les hypothèses du théorème sont satisfaites. Le constat que cette conception « n'empêche pas les élèves de réussir en mathématiques » pourrait conduire à retenir une autre définition de l'implication dans le cadre de la classe de mathématiques. C'est ce que proposent Hoyles & Küchemann, (2003) dont nous allons examiner et discuter les arguments au paragraphe III.1.4.1.

III.1.4. Faut-il renoncer à l'implication matérielle pour les mathématiques scolaires?

Nous avons proposé au III.1.1 une extension de la notion d'implication pour le calcul des prédicats s'appuyant sur l'implication matérielle. Ceci ne peut guère servir d'argument pour conserver la définition standard d'implication matérielle, car on pourrait nous rétorquer, à bon droit, que notre argument est circulaire. Les résultats empiriques montrent qu'on pourrait se poser la question de savoir si ce connecteur doit être conservé pour les mathématiques scolaires, ou si l'on peut envisager de s'en passer au profit d'un autre plus adéquat. En faveur de la définition standard, nous avons mentionné un certain nombre d'arguments d'ordre logique, tels le fait de préserver le principe d'extensionnalité, de préserver le tiers exclu et de distinguer l'implication à la fois de l'équivalence et de la conjonction. Au paragraphe III.1.2, nous avons examiné les liens entre validité universelle des schémas implicatifs et inférence valide. En nous inspirant de la méthode de déduction naturelle de Gentzen, nous pourrions cependant nous demander si, pour l'activité mathématique scolaire, il ne suffirait pas de d'enseigner les règles de fonctionnement de l'implication, sans se préoccuper des cas qui

rendent l'antécédent faux. C'est la position défendue par Hoyles & Küchemann (2003). Nous allons présenter et discuter brièvement leurs arguments, puis nous essayerons de montrer, sur un exemple de nouveau tiré de notre thèse pourquoi, selon nous, nous avons besoin de la définition standard pour l'activité mathématique scolaire ordinaire telle qu'elle se pratique par exemple au lycée ou en premier cycle universitaire.

III.1.4.1. L'implication hypothétique : une implication idoine pour la classe de mathématiques ?

Nous avons transformé en question ce que Hoyles & Küchemann (2003) assument pleinement, et que nous contestons. Nous présentons tout d'abord brièvement le cadre de leur recherche.

III.1.4.1.1. Le cadre général de la recherche

Notons tout d'abord que la problématique des auteurs est en relation très étroite avec nos propres travaux sur l'implication ; ils écrivent en effet :

«How students learn to move between mathematical way of proving and those that are rooted in everyday thinking is at the heart of our study.» (p. 194)

Dès le début de leur article, les auteurs précisent qu'en Angleterre, depuis 1980, le curriculum s'est déplacé de la géométrie vers l'arithmétique élémentaire, si bien que les élèves ont moins l'occasion d'engager des procédures de déduction d'une part et sont incapables de proposer des raisonnements basés sur des structures⁶⁰ plutôt que sur des données d'autre part⁶¹. En accord avec nos propres observations, ils mentionnent que les travaux de psychologie cognitive montrent que, généralement, les enfants (et les adultes) éprouvent des difficultés pour comprendre que l'implication inclut la considération des cas où l'antécédent est faux. Ceci les conduit à adopter la position suivante :

«Rather we draw an important distinction made for example by Mitchell (1962), between material implication, represented by $p \rightarrow q$, which is part of propositional logic, and an «hypothetical proposition" represented by «if p , then q » that asserts only what is the case if its antecedent is realised.»

We claim that when studying reasoning in school mathematics, the latter (hypothetical deduction) is a more appropriate interpretation of logical

⁶⁰ Autrement dit sur l'application des règles du calcul propositionnel.

⁶¹ C'est nous qui traduisons.

implication than the former (material implication) since in school mathematics, students have to appreciate the consequence of an implication when the antecedent is taken to be true.» (p. 196)

Cette longue citation nous permet de repérer que la *proposition hypothétique* est associée à ce que Quine appelle *le conditionnel courant*⁶², et que les auteurs posent que cette notion d'implication est mieux adaptée pour les mathématiques scolaires que l'implication matérielle. Nous pouvons remarquer également que, outre les difficultés repérées, l'argument qui fonde ce choix est celui de l'utilisation quasi exclusive, dans les mathématiques scolaires, de l'implication dans le cadre de l'application de la règle du détachement. Une première remarque s'impose immédiatement, c'est qu'adoptant ce point de vue, les auteurs semblent tenir pour acquis que la règle du Modus Tollens n'a pas sa place dans les mathématiques scolaires. De notre point de vue, le fait que cette règle ne soit que rarement mobilisée et encore plus rarement explicitée en tant que telle dans la classe de mathématique ne justifie pas pour autant que l'on en fasse son deuil. En effet, comme nous l'avons montré plus haut, cette règle d'inférence est constitutive, au même titre que le Modus Ponens, de l'articulation entre les définitions syntaxique et sémantique de l'implication. De plus, certains travaux de psychologie cognitive⁶³ montrent que les enfants sont capables d'utiliser cette règle dès l'âge de huit ans. Par ailleurs, une tournure langagière telle que « If I was rich, I won't live in a so small house », qui correspond en français à l'énoncé « si j'étais riche, je n'habiterais pas dans une si petite maison » (ce que l'on appelle en philosophie logique un *conditionnel contrefactuel*) affirme de fait un énoncé conditionnel tout en laissant entendre que son antécédent est faux.

Enfin, il apparaît assez clairement que pour le raisonnement par récurrence une telle définition soulève des difficultés ; en effet, pour une application correcte de ce mode de raisonnement, il faut savoir que le fait d'établir la vérité de « $p(n_0) \square p(n_0+1)$ » ne permet pas d'affirmer $p(n_0)$ ⁶⁴.

Une fois posé le choix de la *proposition hypothétique* pour les mathématiques scolaires, les auteurs analysent un corpus recueilli dans le cadre d'un projet longitudinal d'analyse des compétences des élèves de 8^e et 9^e année (élèves de 13 et 14 ans) en Angleterre. Cette recherche présente la caractéristique de s'appuyer sur un corpus établi à partir d'un

⁶² Ce que les auteurs indiquent dans la note 4.

⁶³ Par exemple Noveck 1991.

⁶⁴ Argaud (1987) a mis en évidence des difficultés liées à cette conception de l'implication chez des futurs instituteurs.

échantillon beaucoup plus important que ceux habituellement rencontrés en didactique des mathématiques (2663 questionnaires analysés pour les élèves de 8^e année et 2548 pour les mêmes élèves en 9^e année l'année suivante), ce qui permet de voir se dessiner des grandes catégories de réponses significatives. Les analyses des auteurs sont guidées par trois questions⁶⁵ : 1. *Comment des élèves à qui n'a pas été enseignée la signification structurelle de l'implication logique déterminent si un énoncé conditionnel est vrai ou faux ?* 2. *Les élèves sont-ils conscients de l'applicabilité générale et de la nécessité logique du conséquent d'un énoncé conditionnel lorsque l'énoncé conditionnel et l'antécédent sont tous les deux vrais ?* 3. *Comment les étudiants conceptualisent la relation entre l'implication et sa réciproque et comment cela évolue-t-il avec le temps ?*

Dans ce qui suit, nous nous intéressons essentiellement à ce qui, dans l'article, relève de la question n°2 et s'appuie sur les réponses obtenues, dans l'échantillon formé des élèves de huitième année, à une question comportant plusieurs items que nous présentons ci-dessous au paragraphe III.1.4.1.2.

III.1.4.1.2. Présentation et analyse critique partielle de la tâche proposée aux élèves

La question posée, intitulée L1 dans l'article (p. 199), relève de l'arithmétique élémentaire. Deux élèves fictifs, Joe et Fred, observent que la somme de 3 et 11 est paire, tandis que leur produit est impair. Ces deux élèves fictifs proposent alors chacun une généralisation : Joe affirme que « *si la somme est paire, alors le produit est impair* » (1), tandis que Fred défend l'énoncé réciproque « *si le produit est impair, alors la somme est paire* » (2). Moyennant la quantification universelle implicite, le deuxième énoncé est un énoncé vrai de l'arithmétique, un théorème, tandis que le premier n'est pas un théorème.

Dans la première question, notée L1a, on demande aux élèves si les deux énoncés « disent la même chose ». Il est clair que si l'on s'intéresse au seul cas particulier proposé en entrée, et à leur valeur de vérité des énoncés, on pourrait considérer qu'ils disent la même chose, car le couple (3, 11) est un exemple à la fois de (1) et de (2), et affirmer les deux implications correspondantes, c'est simplement affirmer la co-occurrence des deux propositions élémentaires. C'est, en effet, la généralisation qui introduit la dissymétrie puisque nous n'avons pas affaire à une équivalence. Mais un sujet peut aussi éventuellement considérer que les deux énoncés disent la même chose s'il croit qu'il s'agit d'une équivalence, voire s'il considère que les deux conditionnels expriment simplement la co-occurrence. À cette

⁶⁵ C'est nous qui traduisons.

question qui vise à tester la confusion entre implication et équivalence, 71% des élèves de huitième année répondent « oui ». Ce score nous semble élevé, cependant nous n'avons pas d'éléments pour cerner les arguments des élèves, si bien que nous ne discuterons pas ces résultats.

La deuxième question, notée L1b, nous intéresse plus particulièrement. On considère deux nombres entiers dont le produit est 1271. On demande aux élèves de supposer que « Fred a raison » (« Suppose Fred is right »), puis on leur pose la question suivante « laquelle de ces phrases doit aussi être vraie », en leur indiquant de cocher une des « boîtes » ci-dessous

- Vous pouvez être sûr que la somme des deux nombres est paire
- Vous pouvez être sûr que la somme des deux nombres est impaire
- Vous ne pouvez pas être sûr que (savoir si) la somme des deux nombres est paire ou impaire tant que vous ne connaissez pas les deux nombres »

Aucune justification n'est demandée.

L'objectif de cet item est « de tester si les élèves sont capables de se libérer des méthodes empiriques pour considérer les conséquences d'un énoncé conditionnel à un niveau structurel ». À la lecture de cette question, on voit apparaître la notion de *certitude*, associée à une *supposition*, ce qui n'est pas sans poser quelque problème. On a vu en effet que la notion de *certitude* est associée à celle de *nécessité locale*, qui est étroitement liée à la présence d'une inférence valide, autrement dit d'une loi logique dont l'antécédent est interprété par des prémisses vraies. Dans le cas qui nous intéresse, et contrairement à ce que l'on pourrait penser à première lecture, cette situation ne se laisse pas facilement modéliser par un Modus Ponens puisque cette règle d'inférence réclame que le conditionnel et l'antécédent soient tous les deux affirmés, tandis qu'ici l'un est supposé (le conditionnel), tandis que l'autre est affirmé (l'antécédent). De notre point de vue, ceci signifie que, pour faire une analyse logique de cette situation, il faut chercher un énoncé universellement valide différent de celui qui est associé au Modus Ponens, dont le fait pour un couple d'*avoir un produit impair* puisse intervenir comme antécédent, sans que le conditionnel général supposé apparaisse dans cet antécédent. Nous pouvons mettre ceci en relation avec un résultat classique du calcul des propositions :

« $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ » est *logiquement équivalent* à « $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ »⁶⁶

Considérons en effet une interprétation de chacun de ces deux énoncés : sous la première forme, nous pouvons appliquer le Modus Ponens lorsque nous savons que les deux prémisses sont vraies, et seulement dans ce cas-là, tandis qu'avec la deuxième forme, nous pouvons

⁶⁶ En effet, chacun de ces deux énoncés prend la valeur « faux » dans le seul cas où la distribution de valeurs de vérité pour (p, q, r) est (vrai, vrai, faux).

appliquer le Modus Ponens lorsque nous savons que l'interprétation de p est un énoncé vrai. Nous pouvons alors affirmer l'énoncé conditionnel qui interprète ($p \rightarrow r$). Ainsi, bien que ces deux formes soient syntaxiquement (structurellement) équivalentes, les inférences qu'elles permettent dans une interprétation donnée peuvent différer.

Dans l'exemple qui nous intéresse, la seule prémisse dont la vérité est connue (des élèves) est le fait que le produit des deux nombres considérés est impair. Nous proposons donc de considérer l'énoncé :

$$\langle \langle z \rightarrow t (P(z,t) \rightarrow [(\forall x \rightarrow y (P(x,y) \rightarrow S(x,y))) \rightarrow S(z,t)],) \rangle \rangle \quad (E1)$$

où P sera interprété par « le produit des deux nombres est impair » et S par « la somme des deux nombres est pair ». Nous allons démontrer que cet énoncé est universellement valide, et pour cela, nous allons démontrer « à la manière de Copi » l'énoncé :

$$P(a,b) \rightarrow [(\forall x \rightarrow y (P(x,y) \rightarrow S(x,y))) \rightarrow S(a,b)] \quad (E2)$$

Dans lequel a et b sont des éléments génériques d'un modèle générique.

Démonstration de l'énoncé (E2) dans le calcul des prédicats

$P(a,b)$	(1) Prémisse
$[(\forall x \rightarrow y (P(x,y) \rightarrow S(x,y)))$	(2) Prémisse auxiliaire
$P(a,b) \rightarrow S(a,b)$	(3) I.U. sur 2 pour a et b
$P(a,b)$	(4) report de (1)
$S(a,b)]$	5) Modus Ponens sur (3) et (4)
$(\forall x \rightarrow y (P(x,y) \rightarrow S(x,y))) \rightarrow S(a,b)$	(6) Introduction de la flèche sur (2) et (5)
$P(a,b) \rightarrow [(\forall x \rightarrow y (P(x,y) \rightarrow S(x,y))) \rightarrow S(a,b)]$	(7) Introduction de la flèche sur (1) et (6)

Ceci prouve l'énoncé (E2) dans un modèle générique, avec a et b génériques ; par généralisation universelle, on en déduit que (E1) est un énoncé universellement valide du calcul des prédicats.

Le procédé que nous avons utilisé ici consiste à introduire une prémisse auxiliaire dans le but de produire une dérivation qui permet *d'introduire la flèche*, de sorte que dans cette dérivation, on puisse utiliser les prémisses et les théorèmes du niveau supérieur (ici on utilise $P(a,b)$ qui est une prémisse du niveau supérieur). Hofstadter (1979, 1985), appelle *règle de fantaisie* cette règle du calcul des propositions qui permet de produire de nouveaux théorèmes et indique qu'elle peut être employée récursivement, d'où il vient que :

« On peut avoir des fantaisies à l'intérieur des fantaisies, cela veut dire qu'il existe toute sorte de « niveaux de réalité », comme dans les histoires ou les films emboîtés. (...) quand vous remontez d'une fantaisie à l'intérieur d'une autre fantaisie, vous vous trouvez dans un monde « plus réel » que le précédent, mais vous êtes quand même à un niveau « en dessous de la surface ». (p. 208)

Revenons à présent à notre exemple : l'énoncé (E2) se traduit par l'énoncé suivant en langue vernaculaire, où a et b sont deux éléments quelconques de l'univers du discours :

« Si le couple (a,b) satisfait P , alors, si tout couple qui satisfait P satisfait également S , alors le couple (a,b) satisfait S »

où l'on a une implication « enchâssée » dans une autre. En examinant la démonstration, il apparaît très clairement que c'est seulement à l'intérieur de la fantaisie, c'est-à-dire dans un modèle dans lequel la prémisse auxiliaire est vérifiée que l'on peut être sûr que la somme des nombres a et b est paire⁶⁷. Si l'on sort de la fantaisie pour entrer dans le monde « réel », c'est-à-dire, ici, dans l'arithmétique des entiers, la seule supposition de la vérité de l'énoncé « $(\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow S(x,y)))$ » ne permet pas d'être sûr de la vérité de $S(a,b)$. On peut seulement affirmer que, puisque les deux nombres considérés satisfont P , le conséquent « $(\forall x \forall y (P(x,y) \rightarrow S(x,y))) \rightarrow S(a,b)$ » peut être affirmé. Cependant, dans ce cas, il se trouve que l'énoncé supposé est vrai ; par suite, si le sujet le reconnaît comme tel, alors il peut l'utiliser comme prémisse d'un Modus Ponens, qui cette fois se fait dans le domaine de réalité, c'est-à-dire dans l'arithmétique. Les auteurs reconnaissent que, sans doute, un certain nombre d'élèves ont utilisé ce résultat pour choisir la réponse considérée comme correcte, mais ils ne s'y arrêtent pas. Pourtant, selon nous, si la réponse correcte est bien ici « je suis sûr que la somme des nombres est paire », ce n'est pas parce que l'on suppose que Fred a raison ; c'est parce que, de fait, Fred a raison ; sinon, la seule chose dont on puisse être sûr, c'est que « si Fred a raison, alors la somme des deux nombres est paire ». Par suite le degré de certitude est lié au degré de conviction concernant l'affirmation de Fred.

Pour préciser ce que nous voulons dire par là, nous considérons une variante de la question posée par les auteurs, en quelque sorte symétrique par rapport à cette dernière.

L1b' : la somme de deux nombre entiers est 2484.

Supposez que Joe a raison.

Laquelle de ces phrases doit aussi être juste (cochez la bonne réponse)

⁶⁷ Sous réserve que l'on n'ait pas introduit ainsi de contradiction.

- Vous pouvez être sûr que le produit des deux nombres est impair*
- Vous pouvez être sûr que le produit des deux nombres est pair*
- Vous ne pouvez pas être sûr que (savoir si) le produit est pair ou impair tant que vous ne connaissez pas les deux nombres.*

Dans ce cas, la supposition que « Joe a raison » conduit, *dans la fantaisie*, à affirmer que le produit des deux nombres est impair. Mais bien sûr, ceci n'est plus le cas dans le *monde réel*, c'est-à-dire dans l'arithmétique élémentaire, puisque l'énoncé donné par Joe n'est pas un théorème et que précisément, dans ce cas, on ne peut rien affirmer si l'on ne connaît pas les deux nombres. En revanche, comme dans l'exemple précédent, on peut être sûr que « *si Joe a raison, alors je peux être sûr que le produit est impair* ». L'exploration de quelques couples de valeur répondant à la question conduit assez naturellement à mettre en doute le conséquent, ce qui permet de rejeter l'antécédent. On dira alors, par exemple, que : « *si Joe avait raison, alors je pourrais être sûr que le produit est impair ; or il est possible que le produit soit pair, je ne peux donc pas être sûr qu'il est impair ; par suite je peux affirmer que Joe n'a pas raison* ». On voit ici une forme langagière du Modus Tollens, dans laquelle il est fait un usage non négligeable du vocabulaire des modalités.

Cette analyse montre que la question posée n'appelle pas nécessairement comme réponse correcte celle qui est attendue par les auteurs, réponse dont ils disent qu'elle correspond à une utilisation structurelle de l'implication. C'est la connaissance, ou la reconnaissance, de ce que l'énoncé proposé par Fred est effectivement un théorème qui permet de donner cette réponse. Dans cette situation, si on ne sait pas qu'il s'agit d'un théorème, on ne peut pas avoir de certitude sans connaître les nombres, *à moins de considérer que la question est posée dans le monde fictif*. D'une manière générale, lorsque l'on ne peut pas utiliser, dans une situation donnée, une règle d'inférence valide pour établir la valeur de vérité d'un énoncé, on est amené à mobiliser les connaissances mathématiques dont on dispose, autrement dit à quitter le niveau structurel pour se tourner vers les données empiriques.

Si nous revenons maintenant aux résultats des auteurs, nous constatons que les élèves se répartissent également entre ceux qui donnent une réponse de type « empirique⁶⁸ » - ils sont 1241 soit 47% et ceux qui donnent une réponse de type « déductif⁶⁹ », considérée par les auteurs comme étant la réponse correcte - ils sont 1249, soit également 47%. Les 6% restant donnent une réponse incorrecte ou ne répondent pas. En conclusion de ces résultats, après

⁶⁸ On ne peut pas avoir si on ne connaît pas les nombres

⁶⁹ La somme est paire.

avoir remarqué que certains élèves pouvaient avoir donné la bonne réponse en ayant établi le résultat à partir de l'examen des propriétés des données, les auteurs affirment :

«Nonetheless, it seems safe to assume that roughly half of the sample could play the mathematical game of supposing a statement is true, whether it is or not, and then making a correct deduction on this basis.»⁷⁰ (p. 201)

II.1.4.1.3. Commentaires

Même en admettant que l'on puisse accepter le point de vue (que nous ne partageons pas comme on l'aura compris) selon lequel en mathématiques, on peut faire des déductions à partir d'énoncés dont la vérité n'est pas assurée (ce que Frege, par exemple, refuse), cette dernière affirmation nous semble pour le moins douteuse. En effet, une variable didactique essentielle a ici été négligée, à savoir la valeur de vérité effective, dans la théorie mathématique considérée, de l'énoncé supposé, et la possibilité ou non, pour les élèves d'accéder facilement à cette valeur de vérité. Il y a bien une variable didactique prise en compte de manière explicite, c'est la possibilité ou la non possibilité d'accéder facilement aux valeurs possibles des nombres évoqués, ce qui est cohérent avec le fait de vouloir disqualifier les méthodes empiriques. Dans la discussion des résultats obtenus, les auteurs distinguent plusieurs « patterns » dans les réponses des élèves, ce qui les conduit à revenir sur la question de recherche n°2 concernant *l'appréciation, par les élèves, de la nécessité logique d'une implication*, question qui se trouve être largement étudiée à travers l'item L1b. À ce sujet, ils notent que le nombre d'élèves se situant à ce niveau structurel est très supérieur au nombre d'élèves se situant à ce même niveau pour les items L1c et L1d⁷¹. Pour ces deux items, les élèves de huitième année prenant une décision correcte avec une justification valide de type général sont au nombre de 216 (8%) pour L1c et 242 (soit 9%) pour L1d. En s'appuyant d'une part sur les résultats positifs à la question L1b, qui se révèle en outre, selon eux, être un bon indicateur de réussite à un test sur la preuve et d'autre part sur des résultats antérieurs⁷², les auteurs écrivent que (p. 210) :

⁷⁰ Ceci semble être en désaccord avec des travaux de psychologie concernant « le raisonnement sous hypothèse » (voir par exemple Rogalski 2004)

⁷¹ L1c : « is Joe's statement true ? »; L1d : « is Fred's statement true ? »

⁷² Healy et al. 2000

«It would seem that considering the implication at a purely hypothetical level is an important component of learning to cope with mathematical reasoning.»⁷³

Nous pensons que les éléments d'analyse que nous avons proposés montrent que les auteurs ont raison de mettre ceci au conditionnel. Il nous semble en effet qu'il faille considérer cette position avec beaucoup de prudence. La séparation faite par les auteurs entre le *structurel* et l'*empirique* nous semble recouper la distinction *syntactique/sémantique* faite en logique, le *structurel* relevant plutôt des systèmes logiques formalisés et l'*empirique* des propriétés des objets avec lesquels on travaille dans une théorie mathématique donnée ; ou bien encore le *structurel* correspondrait à *l'application de lois logiques*, tandis que l'*empirique* correspondrait à *l'interprétation dans un modèle*. Il n'apparaît pas clairement que, pour les auteurs, le raisonnement mathématique ait nécessairement à voir avec ces deux points de vue. Il nous semble plutôt que, comme le laisse entendre la citation ci-dessus, il y ait dans l'esprit des auteurs un primat du point de vue structurel au détriment du point de vue empirique considéré comme relevant de procédures utilisées dans la vie de tous les jours et qu'il faudrait dépasser pour entrer *dans le jeu mathématique*⁷⁴. En ce qui nous concerne, nous avons déjà défendu l'intérêt d'un *va et vient* entre les deux points de vue plutôt que d'une séparation. Nous avons également montré au paragraphe III.1.1 que l'implication ouverte définie à partir de l'implication matérielle permettait cette articulation. En outre, comme nous aurons l'occasion de le montrer plus loin dans le texte, on peut réduire la distance supposée entre logique de sens commun et raisonnement mathématique à condition de se placer dans le calcul des prédicats et d'utiliser la théorie sémantique de la vérité. C'est aussi ce qu'affirme Gardies (1994) quand il écrit dans l'avant-propos de son ouvrage intitulé *Les fondements sémantiques du discours naturel* que :

«Ainsi essayerons-nous d'éclairer différentes formes du raisonnement déductif qui s'expriment et se déploient dans les langues vernaculaires, d'explorer les différentes manières dont il nous semble que la raison se construise sémantiquement, en sorte que son exercice se laisse en fin de compte toujours justifié en termes de fonctions de vérité. Ceci nous conduira à nous placer à contre-courant de la vieille tradition qui privilégie habituellement la voie syntaxique, disons pour simplifier le *mos geometricus* (...)» (pp. 7-8).

⁷³ « Il semblerait que le fait de considérer l'implication à un niveau purement hypothétique soit une dimension importante de l'apprentissage pour affronter le raisonnement mathématique » (*c'est nous qui traduisons*).

⁷⁴ Legrand (1993) défend également cette position.

Après avoir essayé d'explicitier pourquoi l'argumentation des auteurs en faveur de « d'une proposition hypothétique » pour la classe de mathématiques ne nous avait pas convaincue, nous allons illustrer, par un exemple tiré de notre thèse, l'intérêt, pour les mathématiques, de la définition standard de l'implication matérielle et de son extension pour les implications ouvertes.

III.1.4.2. Un quadrilatère (A,B,C,D) a ses diagonales perpendiculaires. Est-ce un losange ?

Dans notre thèse, nous avons proposé un questionnaire à deux cent quatre-vingt-trois étudiants arrivant à l'université en première année de DEUG scientifique. La passation a eu lieu lors de la première séance de travaux dirigés avant tout enseignement. Dans ce questionnaire, nous proposons aux étudiants six énoncés conditionnels, dont nous indiquons qu'ils étaient vrais, et nous leur posons un certain nombre de questions afin d'évaluer s'ils reconnaissaient, ou non, les cas où l'on ne pouvait pas faire d'inférence. Nous présentons ci-dessous la première question du questionnaire analysé dans notre thèse.

En préliminaire, nous avons écrit :

Dans cette partie, nous vous proposons six énoncés (écrits en gras) qui sont des affirmations. Vous utiliserez ces résultats pour répondre aux questions posées.

Puis nous avons proposé l'énoncé A1 et la question correspondante :

A1 « <i>Dans un losange, les diagonales sont perpendiculaires</i> »

Question : un quadrilatère (A, B, C, D) a ses diagonales perpendiculaires ; est-ce un losange ? Justifier votre réponse.

Tous les étudiants ont répondu à cette question en justifiant leur réponse. Ceci nous a fourni un riche corpus entièrement transcrit (placé en annexe à notre thèse). Avant de présenter et d'analyser les résultats obtenus, nous allons donner quelques éléments d'analyse logique de cette tâche.

III.1.4.2.1. Eléments d'analyse logique

En préambule, il faut remarquer qu'il s'agit d'une question très élémentaire en ce qui concerne les contenus mathématiques et très simple du point de vue de sa structure logique. Il

faut cependant noter que l'énoncé nous plonge dans l'ensemble des *losanges* tandis que la question nous plonge dans l'ensemble des *quadrilatères*. Par conséquent, si nous cherchons à construire un langage élémentaire pour exprimer la propriété de l'énoncé, la géométrie élémentaire étant présumée, nous devons tenir compte du domaine d'objets dans lequel nous voulons travailler. Si nous nous plaçons dans l'ensemble L des losanges, nous avons besoin d'une seule lettre de prédicat, soit *D* pour « *avoir ses diagonales perpendiculaires* ». Si nous nous plaçons dans l'ensemble P des parallélogrammes, ou dans l'ensemble Q des quadrilatères, nous avons besoin d'une deuxième lettre de prédicat, soit *L* pour « *être un losange* ».

On obtient alors les trois formalisations suivantes du théorème donné ; dans une telle formalisation, nous considérons qu'il est nécessaire de préciser (dans le cas où le domaine d'objets est l'ensemble des quadrilatères) que, dans ce modèle, la réciproque de l'énoncé n'est pas un théorème.

Univers du discours	Formule du calcul des prédicats
L	$\forall x D(x)$
P	$\forall x (L(x) \rightarrow D(x))$
Q	$(\forall x (L(x) \rightarrow D(x))) \wedge \neg (\forall x (D(x) \rightarrow L(x)))$

Pour formaliser l'énoncé dans P ou dans Q comme nous l'avons fait, il faut considérer que l'énoncé ouvert est vrai lorsqu'on assigne à la lettre *x* le nom d'un quadrilatère qui n'est pas un losange. Et ce que montre ce tableau, c'est que si l'on se place dans l'ensemble des objets qui vérifient l'antécédent, alors l'implication *s'évanouit*.

III.1.4.2.2. Les résultats

Nous considérons comme correctes les réponses contingentes du type « *on ne peut pas savoir* », « *pas forcément* », « *pas nécessairement* », « *on ne peut pas affirmer* ».... Il est clair que la réponse « *oui* » ne convient pas ; quant à la réponse « *non* », si l'on adopte un point de vue sémantique, elle n'est pas correcte. En effet, la formule du calcul des prédicats

$$(\neg (\forall x (D(x) \rightarrow L(x))) \rightarrow D(x)) \rightarrow (\neg L(x))$$

n'est évidemment pas universellement valide. Elle est interprétée par une phrase fautive dans toute structure dans laquelle a) l'interprétation de $(\forall x (D(x) \rightarrow L(x)))$ n'est pas un théorème et

b) il y a des éléments qui satisfont à la fois D et L , ce qui est précisément le cas dans l'ensemble des quadrilatères. Par suite, si l'on décide d'accepter la réponse *non*, voire même si on considère que la réponse *non* est la réponse correcte dans ce cas⁷⁵, ce sera nécessairement en s'appuyant sur des considérations pragmatiques, par exemple en considérant que les étudiants répondent en fait à la question « *Peut-on affirmer (ou est on certain) que le quadrilatère (A,B, C, D) est un losange ?* » ce qu'illustrent, comme nous allons le voir, les réponses des étudiants.

Nous avons vu sur un exemple précédent (II, préliminaire) que celui qui répond ne se place pas toujours dans l'ensemble désigné par la question. Ici, si on se place dans l'ensemble \bar{L} des losanges, il n'y a pas d'implication, la question posée n'a pas vraiment de sens et on ne peut que donner la réponse « *oui* ». Si on se place dans l'ensemble P des parallélogrammes, D est une propriété caractéristique ; dès qu'un quadrilatère satisfait D , il satisfait L et la réponse à la question est donc *oui*. Si on se place dans l'ensemble Q des quadrilatères, D n'est pas une propriété caractéristique ; certains quadrilatères satisfont D et L d'autres satisfont D et ne satisfont pas L . Par conséquent, on ne peut pas savoir, avec les informations disponibles, si le quadrilatère considéré est un losange ou non. C'est ce que répond un tiers des étudiants, 40% répondant *non* et plus de 20% répondant *oui*.

III.1.4.2.3. Analyses de quelques réponses positives

Il était, pour nous, tout à fait inattendu qu'un nombre aussi important d'étudiants de notre échantillon répondent « *oui* » à la question posée. Reste à mieux comprendre ce qui les a conduit à produire une telle réponse. Il faut noter tout d'abord que la variété des réponses obtenues illustre les analyses précédentes. En voici quelques exemples :

1. *Oui, c'est la définition propre du losange.*
2. *Oui, tout quadrilatère (A, B, C, D) ayant ses diagonales perpendiculaires est un losange (la propriété de l'énoncé 1 est valable dans les deux sens)*
3. *Oui, car le seul contre-exemple est le carré, et le carré est un losange.*
4. *Oui, car la définition du losange est celle du parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires.*

⁷⁵ Ceci conformément aux habitudes scolaires, dont nous verrons quelques exemples plus loin.

On peut interpréter la réponse n°1 comme le fait de se placer directement dans l'ensemble des losanges ; la réponse n°2 comme affirmant la réciproque de l'énoncé ; la réponse n°3 comme exprimant un contrôle sémantique et la réponse n°4 comme montrant que l'on se place dans l'ensemble des parallélogrammes. Le corpus fait clairement apparaître que pour la majorité des étudiants qui ont répondu *oui*, ce sont les connaissances mathématiques qui sont mises en défaut, en particulier l'incapacité à proposer un contre-exemple autre que le carré, comme on le voit dans la réponse n°3. Une explication qui vient naturellement à l'esprit, c'est que les losanges sont introduits dans les programmes comme des parallélogrammes particuliers ; ce sont, en général, les seuls quadrilatères pour lesquels on s'intéresse à la question de savoir si les diagonales sont perpendiculaires ou non. Autrement dit, les quadrilatères à diagonales perpendiculaires ne sont pas reconnus comme faisant partie d'une classe dont on serait amené à étudier les propriétés en vue d'une classification éventuelle, et ceci, bien sûr, parce que cela ne correspond pas à une évidence perceptive. Ceci viendrait alors en renforcement de la *conception commune* qui consiste à ne s'intéresser qu'aux objets désignés par l'antécédent, ici les losanges.

III.1.4.2.4. Les arguments pour les réponses négatives et pour les réponses contingentes

Notre corpus fait aussi apparaître que la plupart des arguments fournis par les étudiants donnant une réponse négative se retrouvent presque à l'identique chez ceux qui donnent une réponse contingente. Nous allons illustrer ceci par quelques exemples.

Un premier argument consiste à mobiliser un contre-exemple (autre que carré !) ce qui suppose qu'il y en ait un de disponible ou à affirmer qu'il existe des contre-exemples :

5. Non, car il existe des quadrilatères ayant des diagonales perpendiculaires qui ne sont pas des losanges.

6. Pas forcément, il existe des quadrilatères ayant des diagonales perpendiculaires qui ne sont pas des losanges.

À notre grande surprise, un nombre minime d'étudiants *dessinent* un contre-exemple, et lorsqu'il le font, il s'agit dans tous les cas du « *cerf-volant* », pour lequel l'une des diagonales est médiatrice de l'autre.

Un deuxième argument consiste à affirmer (parce qu'on le sait) que la réciproque du théorème n'est pas un théorème ; on trouve très peu de réponses s'appuyant cet argument.

Un troisième argument consiste à dire qu'il manque une propriété. C'est l'argument le plus souvent avancé pour les deux types de réponses (dans de très rares copies, apparaît l'expression « *la condition n'est pas suffisante* ») :

7. *Non car il faut que les diagonales se coupent en leur milieu*

8. *Pas forcément, il faut aussi que les diagonales se coupent en leur milieu pour que ce soit un losange.*

Cette identité des arguments pour ces deux types de réponses renvoie au fait que la question peut être interprétée de différentes manières. Une première interprétation consiste à dire que la question contient implicitement une question de nécessité, autrement dit qu'il y a en quelque sorte une quantification universelle implicite. Ceci est lié, pour le sujet, à la question de la certitude, c'est-à-dire au fait d'être en mesure d'affirmer ou non qu'il s'agit d'un losange. Une autre interprétation, consiste à considérer que l'on parle d'un quadrilatère déterminé, et dans ce cas, les informations disponibles ne permettent pas de répondre dans le domaine des quadrilatères puisqu'il s'agit du cas d'une phrase ouverte qui n'est pas un théorème. Les arguments développés ci-dessus conduisent, sous la première interprétation à une réponse négative, et sous la seconde à une réponse contingente.

Une dernière catégorie de réponses négatives s'appuie sur l'argument selon lequel *si une information nécessaire concernant une propriété pour que le quadrilatère considéré soit un losange n'est pas donnée, c'est qu'elle n'est pas remplie* comme dans les deux réponses ci-dessous :

9. *Non, car dans un losange, les diagonales se coupent en leur milieu, ici ce n'est pas spécifié*

10. *Non, car un losange possède quatre côtés égaux et est un parallélogramme, alors que (A, B, C, D) est un quadrilatère quelconque qui a seulement ses diagonales perpendiculaires.*

Ceci correspond à l'une des règles conversationnelles de Grice selon laquelle le locuteur doit donner toute l'information pertinente dont il dispose ; cette règle est aussi connue sous le nom de principe du maximum d'informations. Il est à noter que, dans la classe de mathématique, pour des raisons didactiques évidentes (Brousseau, 1986), cette règle n'est, en général, pas respectée dans les échanges ayant trait au contenu mathématique lui-même.

L'un des objectifs de notre questionnaire était de tester si les étudiants reconnaissent, ou non, les cas où l'on ne peut pas faire d'inférence. Dans cette question, près d'un tiers d'entre eux le reconnaît et l'explique. Compte tenu des pratiques scolaires habituelles qui conduiraient plutôt à donner une réponse négative, ce résultat n'est pas négligeable. Cependant, l'interprétation de la diversité des réponses obtenues montre que l'on ne peut pas

prétendre ici mesurer des performances « purement logiques », ce qui est confirmé par l'ensemble des résultats obtenus dans la thèse.

III.1.4.3. Retour à la question initiale

Nous avons posé en titre de ce paragraphe la question suivante « faut-il renoncer à l'implication matérielle pour les mathématiques scolaires ? ». Nous avons vu que Hoyles & Küchemann (2003) étaient favorables à ce renoncement en proposant une « proposition hypothétique », pour laquelle on ne considère que les cas qui rendent vrai l'antécédent. En ce qui nous concerne, nous pensons que la réponse à cette question est négative pour plusieurs raisons que nous rappelons ici ;

1. Ne pas prendre en compte les cas qui rendent l'antécédent de l'implication faux revient à se priver de la règle d'inférence du Modus Tollens. Or cette règle est à l'œuvre dans de nombreux raisonnements dès le collège (que l'on pense, par exemple, à l'utilisation du théorème de Pythagore pour montrer qu'un triangle n'est pas rectangle).

2. Pour les énoncés universellement quantifiés, cette position revient à se débarrasser purement et simplement de l'implication ; il est vraisemblable que les mathématiciens ne sont pas prêts à ce renoncement.

3. Ce choix ne permet pas de faire jouer à l'expression « si » de la langue son rôle naturel qui est d'introduire du doute, de l'incertitude. De ce fait, il dénature, selon nous, le raisonnement hypothético-déductif.

4. Une telle définition ne permet pas de distinguer clairement entre *affirmer un énoncé conditionnel* et *appliquer la règle du Modus Ponens*, ce que Frege, et à sa suite de nombreux logiciens, considèrent comme tout à fait fondamental pour l'activité mathématique, et qui, en tous les cas en France, fait l'objet d'un apprentissage spécifique au collège.

5. L'implication matérielle est incontournable pour établir les énoncés universellement valides qui soutiennent la plupart des raisonnements mathématiques. C'est le cas en particulier, de l'équivalence logique entre un énoncé implicatif et l'énoncé contraposé que l'on utilise en France dès la fin du lycée et abondamment à l'université.

Tous ces arguments plaident en faveur du maintien de la définition standard de l'implication matérielle pour les mathématiques scolaires. Il n'en demeure pas moins, comme nous l'avons vu, que cette définition s'oppose à la *conception commune* qui est en accord avec la définition de « proposition hypothétique » donnée par Hoyles et Küchemann, et qui *résiste* à l'apprentissage mathématique. Il est tout à fait clair, enfin, qu'il ne suffit pas de donner la

définition de l'implication matérielle pour que ce concept se construise. En accord avec Vergnaud (1991), nous considérons qu'un concept se construit dans la durée, à travers les situations qui lui donnent du sens et qui permettent d'appréhender ses propriétés opératoires. Nous avons aperçu, dans les exemples déjà traités, que certaines situations mathématiques permettent, mieux que d'autres, de travailler sur la notion d'implication, sous l'une de ses nombreuses formes et en particulier en articulant les points de vue *syntactique* et *sémantique*⁷⁶. Étant donnée que l'implication n'est plus aujourd'hui un objet explicite d'enseignement dans le curriculum français du second degré, ce type de préoccupation ne se retrouve pas dans les pratiques ordinaires de la classe, et nous montrerons tant au paragraphe III.4 que dans la partie V, des exemples de telles situations qui ne sont pas exploitées dans ce sens. Par ailleurs, nous nous interrogerons également sur quelques pratiques usuelles concernant l'usage du symbolisme logique à l'université qui pourraient bien s'opposer à une élaboration idoine du concept d'implication.

III.2 Négation et contraire

Il est assez inhabituel, en mathématiques, de prendre en considération la notion de contraire, à une exception près qui concerne la notion d'événement contraire en probabilité. En logique, on dit que deux propositions sont contraires (contrary) si

« they cannot both be true at the same time, under the same circumstances, or in the same interpretation (although they may both be false) »(Borowski & Borwein, 2002, p.116)

On rencontre cette notion dès l'Antiquité dans l'Organon.

II.2.1 – Deux types d'opposition chez Aristote

Dans le livre 2 de l'Organon, De l'interprétation⁷⁷, Aristote étudie à partir d'un exemple deux types d'opposition pour les énoncés quantifiés qui s'appliquent aux termes généraux, qui peuvent être prédiqués de plusieurs individus ou objets et servent à exprimer des propriétés. Aristote définit tout d'abord quatre types de phrases, qui serviront à la théorie du syllogisme formel, pour lesquelles il assume l'hypothèse implicite de l'existence d'au moins un homme.

- | | |
|------------------------------------|--|
| (1) <i>Tout homme est blanc</i> | (2) <i>Nul homme n'est blanc</i> |
| (3) <i>Quelque homme est blanc</i> | (4) <i>Quelque homme n'est pas blanc</i> |

⁷⁶ Pour d'autres exemples de telles situations, voir Deloustal (2004)

⁷⁷ Traduction française Jean Tricot, édition Vrin.

Les phrases (1) et (4) (*resp.* (2) et (3)) échangent leurs valeurs de vérité. Dans tout contexte où (1) est vrai *nécessairement* (4) est fausse et vice-versa. Aristote appelle cette opposition une *contradiction*, ceci correspond à ce que nous appelons aujourd'hui la *négation*.

Les phrases (1) et (2) peuvent être simultanément fausses ; elles ne peuvent en aucun cas être simultanément vraies. Aristote appelle cette opposition l'opposition de *contrariété*, ceci correspond à une notion sémantique de *contraire* en accord avec la définition ci-dessus.

Les phrases (3) et (4) peuvent être simultanément vraies ; il n'y a pas d'opposition entre ces deux types de phrases. Dans la théorie du syllogisme, Aristote s'appuie exclusivement sur des phrases quantifiées exprimées sous la forme : « Tout A est B » ; « nul A n'est B » ; « quelque A est B », « quelque A n'est pas B ». ; il reconnaît que « quelque B est A » peut se substituer, sans modifier la valeur de vérité à « quelque A est B » et que « nul B n'est A » peut se substituer à « nul A n'est B » ; la substitution par échange des positions n'est évidemment pas possible avec les phrases (1) et (4).

On voit déjà apparaître ici la spécificité de la négation : *une forme syntaxique* (des règles de construction précises) contrôlée par *un critère sémantique* : l'échange des valeurs de vérité dans tout contexte où il existe au moins un A .

III.2.2 La négation dans le calcul des prédicats,

Dans le calcul des propositions, la négation est un opérateur qui échange le vrai et le faux. C'est la définition sémantique la plus naturelle de cet opérateur. Dans ce système, il y a une seule forme d'opposition pour les propositions, qu'elles soient élémentaires ou complexes. Pour les propositions complexes, la négation se construit récursivement à partir de la négation des différents connecteurs, obtenue en échangeant les valeurs de vérité dans les tables, de sorte que l'opérateur de négation ne porte plus que sur les propositions élémentaires. Ainsi la négation de « $p \wedge q$ » est « $\neg p \vee \neg q$ », la négation de « $p \vee q$ » est « $p \wedge q$ », la négation de « $p \wedge (q \vee r)$ » est « $p \wedge \neg (q \vee r)$ », c'est-à-dire « $p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$ », etc..

Dans le calcul des prédicats, la négation est un opérateur s'appliquant soit à des propositions (des phrases closes), soit à des fonctions propositionnelles (des phrases ouvertes). Comme ces dernières n'ont pas de valeur de vérité, il faut donc considérer *une extension du concept de négation*. C'est ce que soutient par exemple Da Costa (1997) qui, après avoir rappelé la table de vérité de l'opérateur propositionnel de négation, écrit :

« (...) la table [de vérité de la négation] exhibe la signification sémantique que \neg possède lorsqu'on l'applique à des propositions, ou mieux à des énoncés (les

énoncés sont des combinaisons de symboles qui expriment des propositions) mais ne rend pas compte des autres usages essentiels de \neg ⁷⁸. Par exemple, lorsque l'on a une expression telle que « $\neg x$ est mortel », [la table de vérité de la négation], en elle-même, ne confère pas une signification à l'expression « $\neg(\neg x$ est mortel) ». Techniquement parlant, la négation classique ne peut être définie rigoureusement que grâce à la définition de la vérité de Tarski, qui est une procédure sémantique, ou par le moyen d'un système adéquat d'axiome et de règles d'inférence, ce qui constitue une méthode syntaxique. (p. 45)

C'est, en effet, grâce à la notion de satisfaction que l'on peut définir simplement et rigoureusement la négation d'une fonction propositionnelle. *Étant donnée une fonction propositionnelle F , sa négation $\neg F$ est la fonction propositionnelle qui dans toute structure interprétative adéquate est satisfaite exactement par les suites d'objets qui ne satisfont pas F .* Ceci correspond tout à fait à la notion intuitive de négation pour les atomes. Par exemple, dans l'arithmétique des entiers naturels le couple d'opposé « être divisible par 3 / ne pas être divisible par 3 » permet de répartir les entiers en deux classes exactement : l'une formée des entiers multiples de 3 et l'autre formée des entiers qui ne sont pas multiples de 3. Une conséquence immédiate de cette définition, c'est que les deux énoncés suivants « $Fx \vee \neg Fx$ » et « $\neg x (Fx \wedge \neg Fx)$ » sont universellement valides. C'est l'extension du principe du tiers exclus à des énoncés ouverts, sur laquelle nous reviendrons au paragraphe V.2. Une deuxième conséquence, c'est que cela permet de retrouver les deux types d'oppositions définis par Aristote. En effet, étant donné une fonction propositionnelle F à une variable libre (un prédicat monadique) et une structure interprétative \mathcal{I} de F , trois cas sont possibles⁷⁹ :

- 1^{er} cas : « $\neg x F(x)$ » est vraie dans \mathcal{I} , « $\neg F$ » n'est satisfaite par aucun objet de \mathcal{I} ; par suite « $\neg x \neg F(x)$ » est fausse dans \mathcal{I} (a fortiori « $\neg x \neg \neg F(x)$ » est fausse dans \mathcal{I})
- 2^{ème} cas : « $\neg x F(x)$ » est fausse dans \mathcal{I} , et « $\neg x F(x)$ » est vraie dans \mathcal{I} , certain(s) objet(s) satisfont « $\neg F$ » et d'autre(s) non ; par suite « $\neg x \neg F(x)$ » est vraie dans \mathcal{I} et « $\neg x \neg \neg F(x)$ » est fausse dans \mathcal{I} .
- 3^{ème} cas : « $\neg x F(x)$ » est fausse dans \mathcal{I} , aucun objet ne satisfait F , donc tout objet satisfait « $\neg F$ » ; par suite « $\neg x \neg F(x)$ » est vraie dans \mathcal{I} (a fortiori « $\neg x \neg \neg F(x)$ » est vraie dans \mathcal{I}).

⁷⁸ Piaget (1972) défend une position contraire ; en accord avec d'autres auteurs comme Blanché (1970), Hottot (1989) ou Da Costa (1997), nous avons montré, dans notre thèse, que cette position n'est pas tenable.

⁷⁹ Rappelons que nous travaillons toujours dans des univers non vides.

Ce qui précède montre que « $\forall x F(x)$ » et « $\exists x \neg F(x)$ » échangent leurs valeurs de vérité : il en est de même de « $\exists x F(x)$ » et « $\forall x \neg F(x)$ » ; tandis que « $\forall x F(x)$ » et « $\exists x \neg F(x)$ » peuvent être simultanément fausses, alors que « $\exists x F(x)$ » et « $\forall x \neg F(x)$ » peuvent être simultanément vraies. On a donc bien deux formes d'opposition pour les propositions closes quantifiées de ce type : la négation, qui échange le vrai et le faux (ce qu'Aristote appelle la contradiction) et ce que suivant Aristote nous choisissons d'appeler un contraire, qui consiste à quantifier universellement la fonction propositionnelle et sa négation. La nécessité d'insister sur cette distinction est reconnue par Russell (1903) qui écrit : « *C'est une erreur, quoique facile à commettre, que de croire que $[\forall x \neg F(x)]$ est la négation de $[\exists x F(x)]$. » Notons enfin que malgré la présence d'un marqueur de négation dans l'énoncé « $\exists x \neg F(x)$ », il n'y a pas d'opposition avec l'énoncé « $\exists x F(x)$ », puisqu'ils peuvent être vrais en même temps, sous les mêmes circonstances, dans les mêmes interprétations. Une troisième conséquence est que l'on retrouve les deux résultats assurant l'inter définissabilité des deux quantificateurs : « $\forall x F(x) \equiv \neg(\exists x \neg F(x))$ » et « $\exists x F(x) \equiv \neg(\forall x \neg F(x))$ ». Ceci permet de donner une définition syntaxique de la négation dans le calcul des prédicats en accord avec la définition sémantique. On peut alors, comme dans le calcul des propositions, construire de manière récursive la négation d'une fonction propositionnelle complexe de sorte que la négation ne porte que sur des formules atomiques, comme pour l'exemple suivant :*

$$\neg(\forall x ((\exists z F(x,z)) \wedge G(x))) \equiv \exists x \neg((\exists z F(x,z)) \wedge G(x)) \equiv \exists x ((\exists z F(x,z)) \wedge \neg(G(x))).$$

Ceci montre également que l'on n'a pas besoin, en logique, d'introduire des symboles barrés comme on le fait en mathématique ; c'est l'opérateur de négation qui joue ce rôle, et la construction récursive de la négation pour les énoncés complexes offre un moyen opératoire d'accéder à la signification de la négation d'un tel énoncé dans une interprétation donnée. Toutefois, pour pouvoir utiliser de manière efficace ces procédures récursives, il est nécessaire que la syntaxe utilisée pour formaliser les énoncés soit en adéquation avec les règles de formation du calcul des prédicats, en particulier en ce qui concerne les quantificateurs, ce qui est loin d'être toujours le cas dans la pratique mathématique ordinaire.

III.2.3. Négation et contraire dans la langue.

⁸⁰ Ce symbole marque le fait que l'équivalence entre deux expressions du calcul des prédicats est universellement valide.

Comme on l'a vu, la négation est une opération qui répond à un critère sémantique (elle échange le vrai et le faux) et doit respecter des règles syntaxiques (ce n'est pas n'importe quel énoncé faux qui est la négation d'un énoncé vrai donné). En effet, la forme syntaxique d'un énoncé complexe doit assurer l'échange des valeurs de vérité dans tout modèle de cet énoncé, ce que l'on obtient avec la construction récursive mentionnée plus haut. Ceci permet d'associer à chaque énoncé complexe bien formé du calcul des prédicats une négation de façon univoque et non ambiguë. Il n'en est évidemment pas de même dans les langages non formalisés. Comme l'essentiel du discours mathématique est porté par la langue vernaculaire, il est donc nécessaire de regarder ce qu'il en est des formes langagières de la négation et de leur usage dans l'activité mathématique. Cette question a fait l'objet de nombreuses observations naturalistes et est au coeur de la thèse en cours de Ben Kilani⁸¹.

Une première remarque, c'est que l'on rencontre parfois les termes de négation et de contraire utilisés comme synonymes. Par exemple, dans le manuel Transmath, programme 2000, Seconde, on trouve l'encadré ci-dessous :

« Pourquoi le contraire de « f croissante » n'est pas « f décroissante » ?

Parce que si c'était le cas, une fonction non croissante serait décroissante. Or certaines fonctions ne sont ni décroissantes, ni croissantes. » (p. 91)

Il est clair que la remarque ci-dessus signifie que *la négation* de la phrase ouverte « f est croissante » ne s'exprime pas, dans la langue française par la phrase ouverte « f est décroissante », ou encore que la phrase « f n'est pas une fonction croissante » n'est pas synonyme de la phrase « f est une fonction décroissante ». Tout enseignant de mathématiques à l'université sait que cette mise au point reste nécessaire en première année⁸². En fait, le couple « croissante/décroissante⁸³ » fonctionne, dans la langue française, comme un couple d'antonymes, ce qui correspond peu ou prou à la notion de contraire au sens d'Aristote, au sens où l'opposition est précisément beaucoup plus radicale que la simple négation. D'autres

⁸¹ Qui étudie en outre les effets du bilinguisme puisque ses observations se font dans l'enseignement tunisien (voir Durand-Guerrier & Ben Kilani, 2004).

⁸² Voir par exemple Haug, 2000.

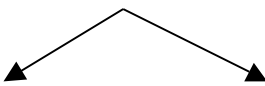
⁸³ Les deux termes étant pris l'un au sens strict, l'autre au sens large.

couples de propriétés en mathématiques soulèvent des problèmes du même ordre. Par exemple, le couple « paire/impair » qui, lorsqu'il est appliqué aux fonctions, correspond plus ou moins à *un contraire*, tandis que le couple « pair/impair » appliqué aux nombres correspond à *la négation*. On voit que c'est l'introduction d'une quantification universelle qui fait ici basculer de *négation* à *contraire*. D'autres couples d'opposés en mathématiques fonctionnent comme des négations ; c'est le cas, par exemple, de « rationnels/irrationnels » pour les nombres, considérés dans l'ensemble des nombres réels, ou « continue/discontinue » pour les fonctions ; mais il n'y a pas de construction systématique de tels couples d'opposés pour les propriétés mathématiques : ainsi on ne parle pas de *nombres irréels*.

III.2.4. Négation et ambiguïtés sémantiques

D'autres difficultés dans la langue sont liées aux ambiguïtés sémantiques (Fuchs, 1996). En ce qui nous concerne, nous avons recueilli à de très nombreuses reprises les réponses ci-dessous de la part de professeurs de mathématiques en formation initiale ou continue.

La négation (le contraire) de la phrase



<i>Toutes les boules sont rouges</i> c'est :	<i>Certaines boules sont rouges</i> c'est :
Toutes les boules ne sont pas rouges Aucune boule n'est rouge Certaines boules ne sont pas rouges Il existe au moins une boule qui n'est pas rouge	Certaines boules ne sont pas rouges Toutes les boules ne sont pas rouges Toutes les boules sont rouges Aucune boule n'est rouge

À la suite de la mise en commun des réponses fournies individuellement, apparaissent régulièrement de très vifs débats d'une part sur le fait de savoir si négation et contraire sont synonymes ou non, d'autre part sur la signification de la phrase « *toutes les boules ne sont pas rouges* » (1), qui pour certains s'interprètent par « *Aucune boule n'est rouge* » (2), et pour d'autres par « *Certaine(s) boule(s) n'est (ne sont) pas rouges* » (3).

Fuchs (1996) reconnaît que si la norme voudrait que (1) soit synonyme de (3), il arrive fréquemment que (1) soit utilisée en lieu et place de (2). Ceci est dû à une ambiguïté sur les priorités respectives de l'opérateur de négation et de l'opérateur de quantification. Dans le

calcul des prédicats, la phrase (3) se traduit par « $\forall x \neg F(x)$ », qui est équivalent à « $\neg \exists x F(x)$ », tandis que la phrase (2) se traduit par « $\exists x \neg F(x)$ ». Considérons maintenant la phrase « tous les élèves sont présents » qui a la même structure syntaxique que la phrase « toutes les boules sont rouges », et la forme négative associée « tous les élèves ne sont pas présents ». Par substitution de « sont absents » à « ne sont pas présents », ce qui est correct puisque « être absent » est la négation de « être présent », nous obtenons la phrase « tous les élèves sont absents », qui est synonyme de « aucun élève n'est présent », ce qui montre que l'ambiguïté de l'expression « tous... ne pas » en français peut difficilement être évitée.

III.2.5. Un exemple dans l'enseignement tunisien

Concernant les élèves tunisiens, les premiers résultats expérimentaux de Ben Kilani⁸⁴ auprès de 72 élèves de l'enseignement secondaire tunisien (6^e année) font apparaître de manière significative, d'une part la prédominance de la confusion entre négation et contraire pour les énoncés universels (que ceux-ci aient ou non un contenu mathématique) et d'autre part le rôle joué par les antonymes dans les réponses des élèves, conduisant à une vision duale des propriétés « *une fonction est soit paire, soit impaire* ». Son étude montre que ceci est à mettre en relation avec le fonctionnement de la négation dans la langue française et avec l'enseignement du Français en Tunisie. En grammaire française, on considère en effet deux sortes de négation : la **négation totale**, qui peut se paraphraser en « *il est faux que* » et la **négation partielle** qui ne porte que sur un constituant de la phrase. Pour les phrases universelles, la négation partielle peut correspondre au contraire, comme dans l'exemple vu ci-dessus : « *tous les élèves sont présents / tous les élèves sont absents* ». En ce qui concerne l'enseignement du français en Tunisie, ce sont les *formes négatives* qui sont enseignées indépendamment des *critères sémantiques*. Et, comme c'est le cas en France, il n'y a pas d'enseignement explicite de la négation en mathématiques. Les expérimentations dans le cadre de la thèse se poursuivent en intégrant la dimension du bilinguisme, puisque l'enseignement des mathématiques se fait d'abord en arabe, puis en français, et qu'en outre la construction de la négation en arabe est différente de ce qu'elle est en français.⁸⁵

III.2.6. Commentaires

⁸⁴ Ben Kilani 2001

⁸⁵ Ceci est développé dans Durand-Guerrier & Ben Kilani 2004.

Comme pour l'implication, nous avons vu apparaître ici la nécessité de considérer une extension de la notion de négation pour les phrases ouvertes, ce qui permet de traiter de manière rigoureuse les interactions avec les opérateurs de quantification, de rendre compte dans le système formel des deux formes d'opposition que sont la négation et le contraire, d'expliciter les ambiguïtés inévitables de la langue vernaculaire. De très nombreux travaux en linguistique portent sur la négation dans différentes langues et en français en particulier. Compte tenu des difficultés repérées dans le maniement de la négation, de son importance pour l'activité mathématique et des différences importantes d'usage suivant les contextes, il nous semble tout à fait nécessaire de développer des travaux de recherche associant des didacticiens des mathématiques et des spécialistes des sciences du langage travaillant dans le champ de la sémantique formelle, champ de recherche qui s'est développée à la suite des travaux de Montague (1974). En effet, outre les ambiguïtés liées aux interactions de la négation avec les quantificateurs, d'autres ambiguïtés sont liées aux interactions de la négation avec les autres connecteurs et, d'une manière plus générale, aux interactions entre les différents connecteurs. On constate, par exemple, dans la langue une instabilité du « et » et du « ou » liée à la présence d'implications cachées.

III.3 Conclusion

Il ressort des analyses présentées dans cette section, qu'il n'est pas possible, en mathématiques, de se contenter de considérer les connecteurs logiques sous le seul point de vue propositionnel, et ceci pour plusieurs raisons. La première, et la plus évidente, est le fait que la plupart des théorèmes de mathématiques sont des énoncés conditionnels généraux, qui se modélisent par une implication universellement quantifiée. La seconde, que nous avons mise en évidence dans notre travail, est la nécessité de considérer, pour l'implication, une extension du connecteur propositionnel sous la forme d'une fonction propositionnelle, s'interprétant par une phrase ouverte, dont chacune des instances, dans un domaine d'interprétation donné, est une implication matérielle. Ceci permet de mettre en relation l'implication matérielle et l'implication formelle et de prendre en compte dans les raisonnements les énoncés qui sont des cas d'une implication ouverte, soit que l'on travaille avec un élément singulier, soit que l'on travaille avec un élément générique. Cette extension de l'implication joue donc un rôle central dans l'articulation entre les points de vue syntaxique et sémantique lors de la conduite et de l'analyse des raisonnements. La troisième tient au fait que la validité des raisonnements mathématiques est indissolublement liée à la validité logique des schémas implicatifs associés ; or, si certains peuvent être établis dans le

seul calcul des propositions, nous verrons plus loin que pour d'autres, il est impératif de se placer dans le calcul des prédicats. Il en résulte que, du point de vue de la théorie élémentaire des modèles, l'implication matérielle et son extension dans le calcul des prédicats permettent d'une part d'étudier la vérité d'énoncés conditionnels dans différents domaines de réalités ou différentes théories mathématiques, et d'autre part de contrôler la validité des raisonnements produits dans ces domaines de réalité ou dans ces théories mathématiques, ceci en lien étroit avec l'extension de la négation au calcul des prédicats. En outre, la prise en compte de l'extension de la négation apparaît comme une nécessité pour lever les ambiguïtés du langage naturel et pour spécifier ce que l'on attend d'une négation dans l'activité mathématique. Il est tout à fait clair que la nécessité de cette extension vaut également pour les autres connecteurs logiques : *et* ; *ou* ; *si et seulement si...*

IV. Des pratiques mathématiques en question

Une spécificité de la logique, lorsqu'on l'étudie d'un point de vue didactique, c'est qu'il y a en quelque sorte un double mouvement de transposition. Tout d'abord, le mathématicien, dans son activité mathématique propre, l'utilise le plus souvent comme une technique, sans référence explicite à une théorie logique, et se sert à sa convenance d'un certain nombre d'ellipses et de raccourcis. Parmi ces usages, l'un des plus répandus, à tel point que pour certains auteurs, il s'agit même d'une règle que l'on peut institutionnaliser⁸⁶, est la quantification implicite des énoncés conditionnels universels ; un deuxième usage est celui qui consiste à utiliser massivement, dans les énoncés complexes, la quantification bornée⁸⁷. Ces pratiques usuelles se transportent tout naturellement dans la classe, *via* la formation universitaire des enseignants pour le second degré, et parce qu'à l'université, les enseignants de mathématiques sont en général également des mathématiciens professionnels. La troisième pratique que nous interrogerons est plus spécifique de l'enseignement des mathématiques dans le second degré et relève plutôt d'un phénomène de transposition didactique. Nous discuterons pour finir un exemple d'utilisation d'une règle de déduction non valide dans un manuel de premier cycle universitaire.

IV.1. La quantification implicite des énoncés conditionnels

La quantification implicite des énoncés conditionnels est une pratique massive tant parmi les mathématiciens que dans la classe de mathématiques, dans le second degré ou à l'université. Ce constat s'appuie sur de nombreuses observations *naturalistes*⁸⁸, ainsi que sur quelques analyses de manuels dans notre thèse, et, pour la Tunisie, sur Chellougui (2000). Cette pratique massive cache la distinction entre *implication entre propositions*, *implication universellement quantifiée* et *implication ouverte*, et fait disparaître l'importance de l'univers du discours pour établir la vérité d'un énoncé général. L'exemple que nous présentons ci-dessous met en évidence le fait que cet implicite n'est pas partagé par de nombreux élèves, et qu'en outre, il peut conduire les enseignants à proposer des réponses inadaptées dans certaines situations. Il est décrit et analysé de manière très détaillée dans Durand-Guerrier (1999) sous le titre : *L'élève, le professeur et le labyrinthe*.

⁸⁶ Par exemple Dehame *et al.* (1995) : « Quand une proposition, notamment une implication ou une équivalence, est donnée sans quantificateur, c'est le quantificateur universel qui est sous-entendu ». (p. 12)

⁸⁷ On parle de quantification bornée lorsque l'on précise sur quelle partie de l'univers du discours porte la quantification (voir paragraphe IV.2., p.91).

⁸⁸ Au sens où ces observations ne sont pas faites dans le cadre d'un dispositif expérimental.

IV.1.1. Présentation de la tâche

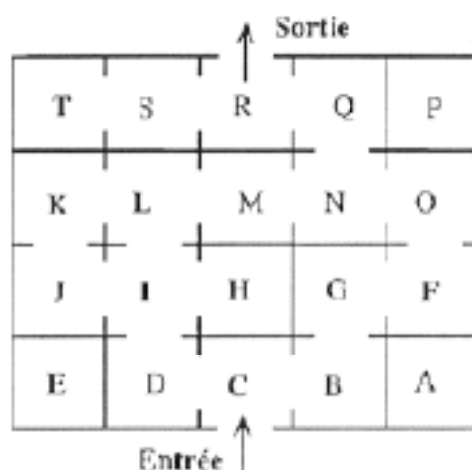
Cette tâche a été proposée dans le cadre d'EVAPM2 91 ; il s'agit d'une évaluation proposée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public à des enseignants volontaires en fin de seconde, dont les résultats sont publiés dans APMEP (1992). *Le labyrinthe* est le premier exercice d'une série de six présentée aux élèves sous la rubrique :

Épreuve portant sur le thème

ARGUMENTATION – RAISONNEMENT - EXPRESSION (Modalité T)

Avant de commencer les exercices, les élèves étaient invités à lire la page d'entrée sur laquelle était indiqué que cette épreuve, d'une durée de deux heures, « *est spécialement destinée à observer votre façon de raisonner et la façon dont vous vous exprimez par écrit.* ». Dans la présentation, les auteurs insistent sur l'importance de la rédaction de la solution, la justification soignée des réponses et préviennent les élèves que « *certaines questions pourront sembler différentes de ce qu'ils ont l'habitude de faire* ». Le contexte général de l'épreuve et son but (l'amélioration des conditions d'enseignement) étaient également indiqués aux élèves. L'exercice 1 se présentait ainsi⁸⁹ :

Exercice 1



⁸⁹ N.B. Nous n'avons pas respecté ici la disposition originale dans laquelle le commentaire est à droite de l'image du labyrinthe.

Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.

Une personne que nous appellerons X a traversé ce labyrinthe, de l'entrée à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte.

Les pièces sont nommées A, B, C... comme il est indiqué sur la figure.

Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).

Par exemple, la phrase « X est passée par C » est une phrase VRAIE.

En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.

Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.

Phrase n°1 : « X est passé par P »

Phrase n°2 : « X est passé par N »

Phrase n°3 : « X est passé par M »

Phrase n°4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F »

Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »

Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

IV.1.2. Résolution de la tâche avec des arguments empiriques

Dans cette situation, la phrase n°1 est nécessairement fausse ; en effet comme P n'a pas de porte, il est impossible que la personne X soit passée par P. Pour la phrase n°2, elle est nécessairement vraie car on ne peut pas sortir sans passer par cette porte, ce que l'on peut contrôler soit en remontant à partir de la sortie, soit en listant tous les trajets possibles (il y en a exactement trois). Pour la phrase n°3, la réponse est « *on ne peut pas savoir* » puisqu'on peut passer par M pour sortir, mais on peut également sortir sans passer par M. La phrase n°4 est vraie puisque O possède exactement deux portes, dont l'une communique avec F

(rappelons que l'on ne peut pas passer deux fois par la même porte) ; la phrase n°5 est vraie pour une raison similaire. Concernant la phrase n°6, comme la pièce L a trois portes, il pourrait y avoir des chemins permettant de sortir en empruntant L et K, mais également de tels chemins empruntant L sans emprunter K, ce que l'on vérifie aisément. Par conséquent, pour cette phrase, comme pour la phrase n°3, un raisonnement *empirique* conduit à répondre « on ne peut pas savoir ».

IV.1.3. Les résultats

Les phrases proposées se répartissent en deux groupes ; les trois premières correspondent à des événements élémentaires, tandis que les trois autres correspondent à des implications, la phrase n°6 étant la réciproque de la phrase n°5.

Pour les trois premières phrases, les taux de réussite des élèves sont assez élevés : Phrase n°1 : 100% - Phrase n°2 : 96% - Phrase n°3 : 85% - Ceci correspond au pourcentage de réussite vis-à-vis des réponses considérées comme exactes par les auteurs, à savoir : Phrase n°1 : FAUSSE - Phrase n°2 : VRAIE - Phrase n°3 : ON NE PEUT PAS SAVOIR

Le taux de réussite, encore très élevé pour la première implication (93%), chute pour la phrase n°5 (69%) et s'effondre pour la phrase n°6 (29%) ; ces taux correspondent aux réponses considérées comme exactes par les auteurs de l'évaluation : Phrase n°4 : VRAIE - Phrase n°5 : VRAIE - PHRASE n°6 : FAUSSE.

La phrase n°6 fait apparaître une divergence forte entre les professeurs et les élèves, ces derniers répondant majoritairement « on ne peut pas savoir », là où les auteurs considèrent que la phrase est fautive. Nous avons indiqué plus haut que, selon nous, cette réponse « *on ne peut pas savoir* » est celle à laquelle conduit un raisonnement de type empirique, qui correspond à ce que l'on appelle parfois la logique de sens commun. Dans leurs analyses pour tenter d'expliquer la réponse « *on ne peut pas savoir* » pour la phrase n°6, les auteurs avancent l'idée selon laquelle, pour la majorité des élèves, l'assertion « Si X est passé par O, alors X est passé par F » se traduit par la question : « sachant que X est passé par O, X est-il passé par F? », ou même « sachant que X est passé par O, X est-il passé par F avant? », ce qui conduirait à cette réponse, erronée de leur point de vue :

« Dans le cas de la phrase n°6 l'interprétation par les questions ci-dessus conduit à répondre ON NE PEUT PAS SAVOIR. C'est exactement ce que font la plupart des élèves. Ils ne sont que 29% à donner la bonne réponse; On lit par exemple :

« La phrase n°6 n'est ni vraie, ni fausse. On ne peut pas savoir. Car X a pu passer par K mais X a aussi pu passer par I, pièce communiquant directement avec I, évitant le passage par K. »

Pour reprendre les termes de Hoyles & Küchemann, les auteurs semblent dire que les élèves ont considéré les implications comme des « propositions hypothétiques ». En fait, ce n'est pas, à elle seule, cette interprétation qui conduit à la réponse « On ne peut pas savoir », comme le montre le fait que certains élèves répondent faux pour la phrase n°6 avec ce même argument. La question de la temporalité peut, elle, conduire à répondre que la phrase n°5 est fausse, ou contingente.

IV.1.4. Premiers éléments d'analyse

Ce qui, selon les auteurs, est troublant dans ces résultats, c'est que ce sont les bons élèves qui répondent « *on ne peut pas savoir* », ce qui étonne les enseignants. Si nous rapprochons cette tâche de la situation du losange étudiée plus haut, nous serons moins étonné puisque en effet, on y retrouve sensiblement les mêmes ingrédients. Une incertitude sur le statut logique de la lettre X, qui conduit à une divergence d'interprétation sur la nature de la question : d'un côté une question de nécessité liée à un quantificateur universel implicite ; de l'autre une question sur un cas particulier dans une situation où la valeur de vérité n'est pas contrainte par la situation. Ainsi la réponse « *on ne peut pas savoir* » était prévisible⁹⁰, ceci d'autant plus qu'elle était proposée et que les mêmes arguments conduisent à la réponse « *on ne peut pas savoir* » dans la phrase n°3. Comme on pouvait s'y attendre, cette nécessité n'est pas attachée à l'énoncé 3, qui est reconnu comme contingent par les auteurs de l'évaluation. D'où l'on voit bien que c'est l'implication qui appelle cette notion de nécessité, ceci étant renforcé par l'utilisation de la lettre X qui plonge cette situation dans un contexte mathématique *a priori* peu pertinent. Nous aurions en effet aussi bien pu appeler cette personne Pierre, Jacques ou Paul, ce qui aurait mis l'accent sur le fait que l'on considère un trajet spécifique. Si nous parlons ici de trajet, c'est parce que c'est bien la variable pertinente, celle qui permet de traduire les informations en vue d'une formalisation de la tâche.

IV.1.5. Formalisation de la tâche dans le calcul des prédicats

⁹⁰ Les auteurs l'avaient d'ailleurs prévue dans leur codage des réponses.

L'analyse de la situation faite ci-dessus montre que la variable pertinente est la variable *trajet*, que l'on peut définir comme une suite de lettres prise parmi les lettres de A à T, et que les phrases proposées peuvent être considérées comme des instances de phrases ouvertes. C'est dans ce modèle que nous allons raisonner. Pour cela nous allons construire une « mini théorie » dont ce modèle peut être une interprétation.⁹¹

Nous considérons pour cela un langage L contenant, outre l'alphabet commun du calcul des prédicats du premier ordre, vingt lettres de prédicats de A à T , de sorte que le prédicat A soit interprété par la phrase ouverte « passe par la pièce A », et nous faisons de même pour les dix-neuf autres lettres.

Dans la situation du labyrinthe, nous dirons qu'un trajet est une suite ordonnée de lettres ; il y a exactement trois trajets qui permettent de traverser le labyrinthe : « $CBGFONQR$ », « $CDILMNQR$ » et « $CDIJKLMNQR$ ». Les questions posées concernent les cas où la traversée du labyrinthe en respectant les consignes a été réussie.

Nous définissons donc un autre prédicat W qui sera interprété par : « permet de traverser le labyrinthe sans passer deux fois par la même porte ».

Nous introduisons trois formules associées de manière évidente aux trois trajets possibles⁹² :

$\square(t)$ la formule

$$(C(t) \square B(t) \square G(t) \square F(t) \square O(t) \square N(t) \square Q(t) \square R(t)) \square \square (A(t) \ D(t) \ E(t) \ H(t) \ I(t) \ J(t) \ K(t) \ L(t) \ M(t) \ P(t) \ S(t) \ T(t))$$

$\square(t)$ la formule

$$(C(t) \square D(t) \square I(t) \square L(t) \square M(t) \square N(t) \square Q(t) \square R(t)) \square \square (A(t) \ B(t) \ E(t) \ F(t) \ G(t) \ H(t) \ J(t) \ K(t) \ O(t) \ P(t) \ S(t) \ T(t))$$

$\square(t)$ la formule

$$(C(t) \square D(t) \square I(t) \square J(t) \square K(t) \square L(t) \square M(t) \square N(t) \square Q(t) \square R(t)) \square \square (A(t) \ B(t) \ E(t) \ F(t) \ G(t) \ H(t) \ O(t) \ P(t) \ S(t) \ T(t))$$

Et nous poserons comme axiomes que :

$$\square t \ \square (t) \square \square t \ \square (t) \square \square t \ \square (t)$$

⁹¹ Ceci constitue une reformulation, à l'aide des outils développés dans la partie II de ce que nous avons développé dans Durand-Guerrier (1999).

⁹² Notons cependant que, contrairement à ce que nous ferions dans la langue ordinaire, nous devons ici indiquer non seulement les pièces qui sont sur le trajet, mais celles qui n'y sont pas pour que la formalisation puisse jouer son rôle.

$\forall t (W(t) \rightarrow (\exists (t) \exists (t) \exists (t)))$

Dans cette « mini théorie », nous pouvons démontrer très facilement les théorèmes suivants qui correspondent aux phrases proposées :

Th0 : $\forall t W(t)$

Th1 : $\forall t (W(t) \rightarrow (\exists P(t)))$

Th2 : $\forall t (W(t) \rightarrow (N(t)))$

Th3 : $\forall t (W(t) \rightarrow M(t)) \rightarrow \forall t (W(t) \rightarrow \neg M(t))$

Th 4 : $\forall t (W(t) \rightarrow (O(t) \rightarrow F(t)))$

Th 5 : $\forall t (W(t) \rightarrow (K(t) \rightarrow L(t)))$

Th 6 : $\forall t (W(t) \rightarrow (L(t) \rightarrow K(t))) \rightarrow \forall t (W(t) \rightarrow \neg (L(t) \rightarrow K(t)))$

Il est clair que nous aurions pu faire d'autres choix ; par exemple le choix minimaliste consistant à donner comme axiome « $\exists (t) (\exists (t) \exists (t) \exists (t))$ » qui admet pour seul modèle des ensembles à trois éléments. Cependant, l'expérience montre que faire la liste des trajets possibles n'est pas le seul mode de raisonnement utilisé, de nombreuses personnes se plaçant dans un cadre plus général⁹³ qui, une fois élaboré, peut se détacher du modèle qui lui a donné naissance⁹⁴. On aurait pu également mettre un axiome indiquant que le prédicat P est d'extension vide. Mais ceci ne modifie pas fondamentalement ce qu'apporte le travail de formalisation proposé ici.

Si nous revenons à notre modèle, obtenu par la formalisation « naïve » de la situation, il est clair qu'il vérifie les axiomes qui ont été construits pour cela. Considérons de nouveau, dans ce modèle, les phrases proposées aux élèves :

Première interprétation (la nôtre) : X est le nom d'une personne, c 'est un nom propre, on peut lui associer son trajet \square , qui est également un élément singulier ; ceci permet de raisonner dans le modèle. Comme X a traversé le labyrinthe, $W(\square)$ est vrai.

On a donc dans le modèle les prémisses suivantes :

$W(\square)$ (1)

Th1 : $\forall t (W(t) \rightarrow (\exists P(t)))$ (2)

Th2 : $\forall t (W(t) \rightarrow (N(t)))$ (3)

Th3 : $\forall t (W(t) \rightarrow M(t)) \rightarrow \forall t (W(t) \rightarrow \neg M(t))$ (4)

⁹³ Nous proposons régulièrement cette situation en formation d'enseignant et avons de la sorte recueilli beaucoup d'observations de type « naturaliste »

⁹⁴ Nous considérons ici uniquement des langages avec égalité.

$$\text{Th 4 : } \exists t (W(t) \rightarrow (O(t) \rightarrow F(t))) \quad (5)$$

$$\text{Th 5 : } \exists t (W(t) \rightarrow (K(t) \rightarrow L(t))) \quad (6)$$

$$\text{Th 6 : } \exists t (W(t) \rightarrow (L(t) \rightarrow K(t))) \rightarrow \exists t (W(t) \rightarrow ((L(t) \rightarrow K(t)))) \quad (7)$$

Par I.U. sur (2), on obtient

$$W(\square) \rightarrow (\square P(\square)) \quad (8)$$

Et par modus Ponens sur (1) et (8) on obtient

$$(\square P(\square))$$

Un raisonnement analogue permet d'obtenir

$$(N(\square)), (O(\square) \rightarrow F(\square)) \text{ et } (K(\square) \rightarrow L(\square))$$

Ceci permet de retrouver les réponses proposées par les auteurs, nous-mêmes et la majorité des élèves.

Le théorème 3 et le théorème 6, qui ont la même structure logique externe, s'interprètent par le fait que les phrases ouvertes associées dans le modèle ont au moins un exemple et un contre-exemple. Ils sont compatibles avec les deux valeurs de vérité possibles pour les phrases 3 et 6. En d'autres termes, cette valeur de vérité n'est pas contrainte par la situation. Pour pouvoir répondre à la question, il faudrait avoir d'autres informations, par exemple connaître le trajet de X, ou savoir que X « \square pris l'un des plus courts chemins \square » argument proposé par certains élèves pour donner la réponse *non*. Ce que souligne le formalisme proposé, c'est que, pour se prononcer sur la valeur de vérité, il est indispensable de revenir aux données empiriques. Et si l'on n'a pas plus d'informations disponibles, on ne peut que constater que l'on ne peut pas se prononcer. Un premier résultat de notre travail de formalisation est donc de montrer que la réponse majoritaire des élèves est cohérente, et tout à fait pertinente dans cette situation.

Deuxième interprétation: X est une lettre de variable implicitement quantifiée universellement sur les individus qui ont réussi à traverser le labyrinthe sans jamais passer deux fois par la même porte, on associe à X son trajet t, qui est donc une variable implicitement quantifiée universellement.

Comme la quantification sur les trajets qui permettent de traverser le labyrinthe fait disparaître l'antécédent W(t) des implications, les théorèmes de notre mini théorie s'interprètent alors de la manière suivante :

$$\text{Th1 : } \exists t (\square P(t)) \quad (2')$$

$$\text{Th2 : } \exists t (N(t)) \quad (3')$$

$$\text{Th3 : } \neg t M(t) \rightarrow \neg t(\neg M(t)) \quad (4')$$

$$\text{Th 4 : } \neg t ((O(t) \rightarrow F(t))) \quad (5')$$

$$\text{Th 5 : } \neg t ((K(t) \rightarrow L(t))) \quad (6')$$

$$\text{Th 6 : } \neg t ((L(t) \rightarrow K(t)) \rightarrow \neg t(\neg((L(t) \rightarrow K(t)))) \quad (7')$$

On retrouve pour les phrases n°1, 2, 3 et 4 leur valeur de vérité. La phrase 1 est fausse, puisque son contraire est une phrase vraie. Les phrase 2, 4 et 5 sont les interprétations des théorèmes correspondants.

De (4'), on déduit

« $\neg t(\neg M(t))$ » et par suite « $\neg(\neg t M(t))$ ».

Par conséquent la phrase n°3 qui interprète l'énoncé « $(\neg t M(t))$ » est fausse.

Un raisonnement analogue montre que l'on peut déduire de (7') « $\neg(\neg t(L(t) \rightarrow K(t)))$ ».

Par conséquent la phrase n°6 est fausse.

Dans cette interprétation, les phrases 3 et 6 sont donc toutes les deux fausses. Nous n'avons jamais trouvé parmi les réponses proposées spontanément ce cas de figure, mais il arrive que lors des échanges qui suivent la mise en commun des résultats, certains (rares) enseignants fassent cette proposition pour la phrase numéro trois pour des raisons de cohérence.

Troisième interprétation : X est une lettre pour un individu générique ; notons \square le trajet générique associé. Comme dans la première interprétation, on a les prémisses

$$W(\square) \quad (1)$$

$$\text{Th1 : } \square t (W(t) \rightarrow (\square P(t))) \quad (2)$$

$$\text{Th2 : } \square t (W(t) \rightarrow (N(t))) \quad (3)$$

$$\text{Th3 : } \square t (W(t) \rightarrow M(t)) \rightarrow \square t(W(t) \rightarrow \neg M(t)) \quad (4)$$

$$\text{Th 4 : } \square t (W(t) \rightarrow (O(t) \rightarrow F(t))) \quad (5)$$

$$\text{Th 5 : } \square t (W(t) \rightarrow (K(t) \rightarrow L(t))) \quad (6)$$

$$\text{Th 6 : } \square t (W(t) \rightarrow (L(t) \rightarrow K(t)) \rightarrow \square t (W(t) \rightarrow \neg((L(t) \rightarrow K(t)))) \quad (7)$$

Les conclusions sont les mêmes que dans la première interprétation, mais en outre dans ce cas, les énoncés 3 et 6 sont intrinsèquement contingents, puisque ce sont des instances génériques de phrases ouvertes ayant à la fois des exemples et des contre-exemples ; comme dirait Quine, ils sont « dans les limbes ».

Un deuxième résultat de ce travail de formalisation c'est le fait qu'aucune de ces trois interprétations ne produit la totalité des réponses des auteurs ; ceci montre que, nécessairement, les auteurs changent de point de vue sur le statut logique de la lettre X selon

qu'elle apparaît dans la phrase n°3, ou dans la phrase n° 6. Pour conserver le maximum de cohérence, on peut faire l'hypothèse que la réponse donnée pour la phrase n°3 correspond à l'interprétation générique (c'est-à-dire la troisième), et que cette même interprétation conduit à introduire une quantification universelle implicite dans la phrase n°6. Ceci est en accord avec cette remarque concernant les trois dernières phrases :

"S'agit-il d'énoncés mathématiques, qu'il s'agirait d'appréhender de façon globale? Dans ce cas, ce qui importe c'est la qualité d'un lien entre les deux assertions et non la véracité particulière de chacune des assertions."

En effet, ce qu'exprime le fait que l'implication ouverte soit satisfaite par certains éléments et pas par d'autres, c'est bien l'absence d'un lien nécessaire, au sens local, entre antécédent et conséquent. Cette situation du labyrinthe a été reprise par Rogalski & Rogalski (2003) dans le cadre d'une recherche concernant les modes de raisonnement des étudiants préparant le CAPES.⁹⁵ Dans leur échantillon qui comprend 178 étudiants sur deux années, 94 ont donné comme réponse *on ne peut pas savoir* pour la question 6, soit un peu plus de 52%, ce qui corrobore ce que nous avons observé dans nos formations : les étudiants et les professeurs stagiaires sont plus enclins à donner la réponse *on ne peut pas savoir*, que les enseignants chevronnés. Néanmoins, y compris dans les stages de formation continue, cette situation laisse toujours émerger un désaccord sur la valeur de vérité de la phrase n°6.

Si nous avons repris assez longuement ici cette situation, déjà analysée dans notre thèse et développée dans Durand-Guerrier (1999), c'est tout d'abord parce qu'elle est particulièrement révélatrice de ce « divorce » entre une pratique généralisée et considérée par de nombreux enseignants comme constitutive du jeu mathématique et une posture majoritaire chez les élèves et très bien représentée chez les étudiants mêmes avancés consistant à examiner les données empiriques et à assumer que, dans certains cas, l'on n'a pas assez d'éléments pour se prononcer sur la valeur de vérité. Une autre raison tient au fait que là encore, la théorie élémentaire des modèles nous offre un cadre structuré permettant d'envisager les différentes interprétations possibles de la situation du labyrinthe et de mettre en évidence que les

⁹⁵ Nous remercions Marc Rogalski de nous avoir permis d'accéder à son corpus sur cette question. Dans sa propre expérimentation, il a ajouté une question avec une implication dont l'antécédent n'est jamais satisfait ; les résultats obtenus sont présentés et discutés dans Rogalski & Rogalski (2003).

questions posées ne sont pas spécifiques de cette situation, puisqu'elles se poseraient dans tout modèle mathématique de cette mini théorie.

Cette situation montre en outre que la logique de sens commun n'est pas aussi éloignée qu'on le croit souvent de la logique à l'œuvre en mathématiques, illustrant ainsi la citation de Gardies (p. 64 de cette note). L'analyse logique de cette situation met également en évidence le fait que la réponse négative des enseignants à la question n°6 nécessite, pour être justifiée, que l'on recoure à des arguments de type pragmatique, comme c'était déjà le cas dans l'exemple du losange. Ceci servira d'appui aux positions développées dans la partie V.

IV.2. La quantification bornée

On parle de quantification bornée pour décrire une pratique ordinaire du mathématicien lorsqu'il veut donner une définition en langage formalisé. Nous pouvons reprendre l'exemple classique de la définition de la continuité en un point a d'une fonction numérique f :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

Dans la syntaxe du calcul des prédicats, il n'y a pas de quantification bornée ; si on a besoin de spécifier certains objets, on introduit des lettres de propriétés permettant de catégoriser les différents objets. Ici, naturellement, il s'agit de la propriété « être supérieur strictement à 0 » ; et si nous voulons faire disparaître la quantification bornée, il faudra introduire une implication pour le quantificateur universel et une conjonction pour le quantificateur existentiel, ce qui donne l'énoncé :

$$\forall \epsilon (\epsilon > 0 \Rightarrow (\forall x (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon))).$$

Notons que l'on peut faire disparaître toutes les implications de cet énoncé en bornant également la quantification sur la variable x de la manière suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists x \in]a - \delta, a + \delta[(|f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

ce qui nous rapproche de la définition par les intervalles dont la structure logique est très élémentaire. Nous avons déjà vu plus haut, dans le cas du losange, ce jeu de l'apparition / disparition de l'implication. Nous pensons qu'il est constitutif de la compréhension de l'implication logique dans son utilisation en mathématiques. Mais certaines observations que nous avons conduites montrent qu'il n'est pas nécessairement disponible chez les étudiants.

Dans le cadre d'un enseignement optionnel proposé à des étudiants scientifiques de Deug deuxième année, nous avons demandé de formaliser l'énoncé qui fournit une condition suffisante pour que deux réels soient égaux :

« si la distance de deux nombres réels peut être rendue inférieure à tout nombre strictement positif, alors ces deux nombres sont égaux. »

Après avoir stabilisé collectivement le fait que, dans l'ensemble \mathbf{R} des nombres réels muni de ses propriétés de corps ordonné, l'énoncé ouvert « $(\forall \epsilon > 0 \ d(x,y) < \epsilon) \Rightarrow (x = y)$ » est bien la traduction de l'énoncé proposé en langue vernaculaire, et qu'il traduit bien le fait que l'antécédent de l'implication est une condition suffisante de l'égalité de deux réels, nous demandons aux étudiants d'en donner une formalisation n'utilisant pas la quantification bornée. Les étudiants de Deug, ou les étudiants préparant le CAPES proposent régulièrement l'énoncé ci-dessous :

$$(\forall \epsilon > 0 \ \exists d(x,y) < \epsilon) \Rightarrow (x = y) \quad (E)$$

La question qui se pose alors est celle de savoir pourquoi cet énoncé ne convient pas. Comme cette pratique mathématique n'a pas d'équivalent dans la logique des prédicats, la syntaxe ne peut nous être d'aucun secours ; nous sommes donc « condamnés » à revenir au sens de l'expression que nous avons transformée, autrement dit à considérer son interprétation dans le modèle du corps ordonné des réels. Une caractéristique de cet énoncé, qui ne va pas de soi pour des débutants, c'est que la quantification universelle ne porte que sur l'antécédent de l'implication. Autrement dit, l'antécédent de l'implication s'interprète par la phrase ouverte : « Pour tout ϵ , ϵ est positif et la distance de x et y est inférieure strictement à ϵ ». Or, quelles que soient les valeurs assignées aux variables x et y , la proposition obtenue est fautive puisqu'elle affirme que tout réel est positif strictement. Par suite, cet énoncé ne fournit pas une condition suffisante pour l'égalité de deux réels. Cette difficulté nous ramène à l'exemple du losange, où nous avons vu que, pour un énoncé universel, la quantification sur les éléments vérifiant l'antécédent de l'implication avait comme conséquence la disparition de l'implication. Il est clair que la quantification bornée consiste à restreindre le domaine de quantification. D'où il s'en suit que, pour la supprimer, il faut faire le mouvement inverse et donc restituer l'implication. La formalisation correcte de l'énoncé est donc :

$$(\forall \epsilon > 0 \ \exists d(x,y) < \epsilon) \Rightarrow (x = y)$$

En effet, si nous considérons maintenant l'antécédent de l'énoncé conditionnel

$$(\forall \epsilon > 0 \ \exists d(x,y) < \epsilon),$$

les couples de réels qui le satisfont sont exactement ceux qui satisfont dans \mathbf{R} la relation d'égalité. Notons enfin que la négation de cet énoncé est

$$(\exists \epsilon > 0 \ \exists d(x,y) \geq \epsilon),$$

ce qui permet de retrouver le fait que supprimer la quantification bornée pour un énoncé existentiel conduit à introduire une conjonction.

Cet exemple permet de mettre en évidence plusieurs points cruciaux de l'articulation entre logique et raisonnement mathématique dans la perspective didactique qui est la nôtre. Le premier c'est que nous avons ici une illustration supplémentaire de la nécessité de considérer les implications à antécédent faux pour la pratique ordinaire des mathématiques. Le second, c'est que la pratique de la quantification bornée tend à occulter la structure logique profonde des énoncés que l'on manipule ; on peut faire l'hypothèse que, dans ce cas, une explicitation de cette structure logique profonde contribue à la clarification conceptuelle dans la mesure où elle permet de travailler en même temps sur le concept logique d'implication et sur le concept mathématique d'égalité des nombres réels, concept particulièrement difficile à élaborer comme le montrent de nombreux travaux d'épistémologie et de didactique des mathématiques. Le troisième, c'est que, comme le dit Sinaceur, le travail de formalisation se fait dans un mouvement de va et vient entre le modèle dans lequel on travaille, et le langage formalisé dans lequel on traduit les énoncés, ce qui permet d'exercer un contrôle sémantique sur les énoncés formalisés produits ; nous voyons ici à l'œuvre ce mouvement de va et vient.

IV.3. L'absence de conclusion dans les démonstrations

La plupart des démonstrations proposées aux élèves de collège en France sont des démonstrations sous hypothèses, dans le sens suivant : on considère un (ou plusieurs) objet(s) géométrique(s) vérifiant un certain nombre de propriétés et on démontre qu'il(s) vérifie(nt) une (ou plusieurs) autre(s) propriété(s). Ainsi, partant d'une prémisse A (ou d'une conjonction de prémisses $A1 \wedge A2 \wedge \dots \wedge A_n$), on démontre une conclusion B. La question qui se pose alors est celle de savoir ce que l'on a démontré.

IV.3.1. Deux exemples au collège

Considérons tout d'abord l'exercice suivant.

Exercice 1 : Soit (A,B,C,D) un quadrilatère convexe, et I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA]. Quelle est la nature du quadrilatère (I,J,K,L) ?

Réponse : c'est un parallélogramme, ce que l'on montre facilement en utilisant le théorème de Thalès.

Quel résultat de géométrie a-t-on démontré ? Le quadrilatère (A,B,C, D) est-il un objet singulier de la géométrie pour lequel nous avons établi un résultat singulier, comme on prouve

par exemple que le nombre π est transcendant ? Évidemment, non ; il s'agit ici d'une preuve par élément générique et ce que nous avons démontré, c'est le théorème de géométrie plane suivant :

Quel que soit le quadrilatère convexe considéré, les milieux respectifs des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

Exemple 2 : soit un triangle (A,B,C) et D une droite parallèle à la droite (BC) qui coupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement en I et J . tels que $IJ/BC = 1/3$.

Montrer que l'aire du triangle (A,I,J) est égale à $1/9$ de l'aire du triangle (A,B,C) .

Ce résultat est une conséquence du théorème de Thalès, mais naturellement, ce qui nous intéresse ici, ce n'est pas le résultat isolé demandé, mais le résultat général :

Dans tout triangle (A,B,C) , si une parallèle à (BC) coupe les deux autres côtés en deux points I et J tels que $IJ/BC = 1/3$, alors l'aire de (A,I,J) est égale au $1/9$ de l'aire de (A,B,C) .

Il s'agit dans ce cas d'une preuve sous hypothèse qui permet d'introduire l'implication. La plupart des exercices de géométrie travaillés au collège sont de ce type, mais les résultats généraux ne sont presque jamais énoncés, sauf lorsqu'on considère qu'ils fournissent une démonstration d'un théorème qui doit faire partie du répertoire de la classe, et dans ce cas ils sont institutionnalisés dans la classe (par exemple le professeur les fait noter dans le cahier de cours). De ce fait, en dehors de ce dernier cas qui n'est pas si fréquent, les résultats des exercices n'ont aucun statut véritable vis-à-vis de la vérité. Ainsi, la phrase « l'aire de (A,I,J) est égale au $1/9$ de l'aire de (A,B,C) » n'a pas de valeur de vérité en soi dans la théorie géométrique, contrairement à l'énoncé proposé ci-dessus. Outre le fait que cette pratique risque de dénaturer la signification de l'activité de preuve dans la classe de mathématiques, elle tend à occulter les questions de généralisation, ou de réciproque, qui pourraient se poser, ce qui va à l'encontre de ce que l'on souhaite développer chez les élèves. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, ayant observé que $1/9$ est le carré de $1/3$, on peut se demander si cela vaut encore pour d'autres valeurs du rapport et aboutir au résultat plus général suivant :

Dans tout triangle (A,B,C) , si une parallèle à (BC) coupe les deux autres côtés en deux points I et J , le quotient de l'aire de (A,I,J) par l'aire de (A,B,C) est égal au carré du quotient de la longueur du segment $[IJ]$ par la longueur du segment $[BC]$.

Même au lycée, cette pratique reste répandue, alors qu'à l'université, la plupart des démonstrations visent au contraire à établir des théorèmes généraux, et ce dès le début de la première année d'université, ce qui contribue à rendre plus difficile la transition lycée / université. Ici encore, d'une certaine manière, on perd sur les deux tableaux puisque d'une part, on ne problématise pas la signification de l'implication, et d'autre part, on se prive de poser des questions mathématiques permettant d'approfondir les notions en jeu.

IV.3.2. Un exemple dans un manuel pour étudiants en première année post bac

Nous allons montrer sur l'exemple ci-dessous que la pratique, qui consiste à ne pas considérer les résultats généraux, tend à conforter l'idée encore communément répandue selon laquelle « du « Faux », on peut déduire n'importe quoi »,

Nous avons vu, tant chez Aristote que chez Quine, que la possibilité de faire des déductions dans un domaine de réalité donné, ou dans une théorie mathématique donnée, est liée à l'existence d'une loi logique, c'est-à-dire d'un énoncé universellement valide du calcul des prédicats du premier ordre d'une part, et à la possibilité de contrôler la vérité des prémisses d'autre part. Une conséquence immédiate est que l'on ne peut pas faire de déduction à partir d'un énoncé conditionnel dont la ou les prémisses sont fausses. Pichon (1989) affirme pourtant que « LE FAUX ENTRAINE N'IMPORTE QUOI ou bien DU FAUX, ON PEUT DEDUIRE N'IMPORTE QUOI » (p.37). Dans cet ouvrage, destiné aux étudiants scientifiques post-bac (classes préparatoires aux grandes écoles et première année d'université scientifique), l'auteur « aborde de manière assez détaillée des questions relatives à la théorie des ensembles, et à la logique, sans excès » (p. 4).

La citation de la page 37 se trouve au chapitre II intitulé *Un peu de logique*, dans le paragraphe 4 : *Vérité d'une proposition mathématique*. Pour illustrer son affirmation forte⁹⁶ et « paradoxale », il propose aux lecteurs un jeu qui « consiste à se donner une proposition *A* fausse et une proposition *B* quelconque, vraie ou fausse, même sans rapport apparent avec *A*, et à rechercher une démonstration (correcte) de *B* utilisant *A*, mais aucun autre résultat faux. On peut bien sûr utiliser tout résultat vraiment vrai bien connu comme tel. » (p.37). Il montre par exemple que partant de la proposition $A = \langle 1 < 0 \rangle$, on peut démontrer que « $1 = 0$ », puis que « 5 divise 7 » etc⁹⁷. Il nous semble qu'il y a ici une confusion qui n'est pas sans rapport

⁹⁶ En capitales d'imprimerie dans le texte ».

⁹⁷ Ce n'est pas le seul manuel universitaire où l'on trouve ce type de d'argument.

avec les exemples précédents. En effet, ce que l'auteur démontre, ce n'est évidemment pas que « $1 = 0$ » ; il démontre l'énoncé conditionnel : « $(1 < 0) \Rightarrow (1 = 0)$ ». Comme l'antécédent de cet énoncé conditionnel est faux dans l'arithmétique des entiers, on ne peut faire aucune déduction. En effet, comme dit Frege :

« (...) tant que l'on n'a pas reconnu la vérité d'une pensée, on ne peut pas l'employer comme prémisses d'une inférence, on ne peut rien en inférer ni conclure. Y prétendre, c'est confondre la reconnaissance de la vérité d'une proposition hypothétique et une inférence où l'on prend la condition de la proposition composée comme prémisses » (Frege, 1970, p.228).

Gochet & Gribomont (1990) affirment, quant à eux, que « *on ne comprend pas le Modus Ponens si on ne fait pas la distinction de Frege* » (p. 65).

Cette confusion semble corroborée par le commentaire ci-dessous :

« Ce travail aurait dû vous conforter dans l'idée que « partir d'une proposition fautive A, il existe une démonstration correcte de n'importe quelle proposition B, donc que la déduction $A \Rightarrow B$ est correcte » ceci renforce le bien fondé de la table de vérité de $A \Rightarrow B$ (Pichon, *op. citée*, p. 38),

sachant que l'auteur donne (p.36) la définition suivante :

« On dit que B se déduit de A si $A \Rightarrow B$ est vraie » remarquez que cela ne veut pas dire que A soit vraie. »

Nous sommes tentée de dire que l'auteur, dans son texte, ne distingue pas explicitement entre les énoncés universellement valides du calcul des propositions et les énoncés vrais de la théorie mathématique dans laquelle il travaille. En effet, la définition ci-dessus est correcte si on considère que A et B sont des schémas propositionnels et si « vraie » signifie « est une tautologie ». En revanche, il est tout à fait clair qu'un énoncé conditionnel reliant deux propositions élémentaires ne saurait en aucun cas être une tautologie, donc ne permet pas de faire de déduction. Ce qui est proposé dans ce manuel est à mettre en regard avec le choix, assumé par l'auteur, de ne pas faire de cours de logique et de ne donner « *que ce qui est vraiment utile, alors qu'une théorie de logique nécessiterait d'énoncer d'autres règles pour être complète* » (p. 21). On peut cependant légitimement se demander si l'objectif d'utilité est atteint, compte tenu de ce que les choix faits ne contribuent pas, selon nous, loin s'en faut, à la

clarification conceptuelle, dans la mesure où ils ne permettent pas de distinguer entre ce qui relève des aspects syntaxiques et ce qui se joue dans une interprétation donnée.

En conclusion, nous voudrions dire que, alors que le raisonnement hypothético-déductif est le paradigme du raisonnement mathématique, les exemples précédents laissent apercevoir que, lorsque cet aspect hypothético-déductif n'est pas assumé explicitement en tant que tel, le fait de ne pas conclure sur ce qui a été réellement démontré tend à obscurcir la notion de vérité dans une théorie donnée, en déclarant « vrais » des énoncés qui sont de fait *contingents*, c'est-à-dire vrais sous certaines hypothèses, faux sous d'autres hypothèses, ou encore vrais de certains objets, et faux d'autres objets, et ceci à l'intérieur du même modèle, ou de la même théorie.

IV.4. L'utilisation de règles non valides⁹⁸

Comme nous l'avons explicité dans la partie II et illustré dans la partie III, la plupart des modes de raisonnements valides en mathématique sont associés à des formules universellement valides du calcul des prédicats, ce qui fonde la notion sémantique de conséquence logique. Nous présentons un exemple, tiré d'un manuel, de l'utilisation d'une règle d'inférence non valide au sens où, dans certaines interprétations, son utilisation peut conduire à un raisonnement incorrect, et un exemple de l'utilisation de cette même règle dans une démonstration erronée.

IV.4.1. Une démonstration "elliptique"

La démonstration qui nous intéresse ici se trouve dans Houzel, 1996, p.27. Il s'agit de démontrer la proposition suivante :

Soient f et g des fonctions numériques définies dans une partie A de \mathbb{R} et a un élément adhérent à A si $f(t)$ et $g(t)$ ont des limites respectives h et k lorsque t tend vers a en restant dans A , alors $f(t) + g(t)$ tend vers la limite $h + k$.

La démonstration proposée est la suivante :

“ Par hypothèse, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $t \in A$ et $|t - a| < \delta$ impliquent $|f(t) - h| < \epsilon$ et $|g(t) - k| < \epsilon$; on a alors $|f(t) + g(t) - (h + k)| = |f(t) - h + g(t) - k| \leq |f(t) - h| + |g(t) - k| < 2\epsilon$ ”

⁹⁸ Ces deux exemples sont repris de Durand-Guerrier & Arsac 2003.

Le raccourci qui est utilisé et donne lieu à la première affirmation peut s'interpréter comme l'affirmation suivante :

sachant que

“ quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $t \in A$ et $|t - a| < \delta$ impliquent $|f(t) - h| < \epsilon$ ” (1)

et

“ quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $t \in A$ et $|t - a| < \delta$ impliquent $|g(t) - k| < \epsilon$ ” (2),

on déduit :

“ quel que soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $t \in A$ et $|t - a| < \delta$ impliquent $|f(t) - h| < \epsilon$ et $|g(t) - k| < \epsilon$.” (3)

Dans ce cas précis, l'énoncé (3) est vrai ; cependant, ce n'est pas une conséquence logique de (1) et (2). En effet, il est facile de vérifier que l'inférence

"Pour tout x , il existe y , $F(x,y)$ " et "Pour tout x , il existe y , $G(x,y)$ ", donc "Pour tout x , il existe y , $F(x,y)$ et $G(x,y)$ "

n'est pas valide ; autrement dit, que la formule :

“ $((\forall x \exists y F(x,y) \wedge (\forall x \exists y G(x,y) \wedge \exists x \exists y (F(x,y) \wedge G(x,y))))$ ” (4)

n'est pas universellement valide.

Si l'utilisation d'un tel raccourci n'est pas un problème pour un mathématicien professionnel, il n'en va pas de même dans un manuel destiné à des étudiants. En effet, la démonstration erronée du théorème des accroissements finis généralisés que nous présentons au paragraphe IV.4.2. peut s'interpréter comme une application de cette pseudo règle dans un cas où elle n'est pas valide. Pour légitimer l'application qui en est faite ici, on peut faire appel à une formule universellement valide obtenue en rajoutant aux deux prémisses de l'implication (4) ci-dessus, les trois prémisses ci-dessous :

$$\forall x \exists t ((\exists y (F(x,y) \wedge R(t,y)) \wedge F(x,t))$$

$$\forall x \exists t ((\exists y (G(x,y) \wedge R(t,y)) \wedge G(x,t))$$

$$\exists z \exists t (R(t,y) \wedge R(y,t))$$

où R s'interprète, dans le cas étudié, par la relation d'ordre sur l'ensemble des nombres réels.

La validité universelle de cette formule peut se démontrer avec la démonstration naturelle de Copi, en utilisant la *règle de fantaisie* :

$(\forall x \exists y F(x,y) \wedge (\forall x \exists y G(x,y))$ (1)	prémisse
$\forall x \exists t ((\exists y (F(x,y) \wedge R(t,y)) \wedge F(x,t))$ (2)	prémisse
$\forall x \exists t ((\exists y (G(x,y) \wedge R(t,y)) \wedge G(x,t))$ (3)	prémisse
$\exists y \exists t (R(t,y) \wedge R(y,t))$ (4)	prémisse
$(\forall x \exists y F(x,y)$ (5)	<i>séparation sur (1)</i>
$(\forall x \exists y G(x,y)$ (6)	<i>séparation sur (1)</i>
$\exists y F(a,y)$ (7)	<i>I.U. sur (5)</i>
$\exists y G(a,y)$ (8)	<i>I.U. sur (6)</i>
$F(a,u)$ (9)	<i>I.E. sur (7)</i>
$G(a,w)$ (10)	<i>I.E. sur (8)</i>
$R(w,u) \wedge R(u,w)$ (11)	<i>I.U. sur (4) avec u et w</i>
$[R(w,u)]$ (12)	<i>prémisse auxiliaire</i>
$F(a,u) \wedge R(w,u)$ (13)	<i>conjonction sur (9) et (12)</i>
$\exists y (F(a,y) \wedge R(w,y))$ (14)	<i>G.E. sur (13)</i>
$\exists t ((\exists y (F(a,y) \wedge R(t,y)) \wedge F(a,t))$ (15)	<i>I.U. sur (2) avec a</i>
$(\exists y (F(a,y) \wedge R(w,y)) \wedge F(a,w))$ (16)	<i>I.U. sur (15) avec w</i>
$F(a,w)$ (17)	<i>Modus Ponens sur (14) et (16)</i>
$F(a,w) \wedge G(a,w)$ (18)	<i>conjonction sur (10) et (17)</i>
$\exists y (F(a,y) \wedge G(a,y))$ (19)	<i>G.E. sur (18)</i>
$\forall x \exists y (F(x,y) \wedge G(x,y))$ (20)	<i>G.U. sur (19)</i>
$R(w,u) \wedge (\forall x \exists y (F(x,y) \wedge G(x,y)))$ (21)	<i>introduction de \forall</i>
$R(u,w) \wedge (\forall x \exists y (F(x,y) \wedge G(x,y)))$ (22)	démonstration analogue avec introduction de R(u,w) en échangeant les rôles de u et w.
$(R(w,u) \wedge R(u,w) \wedge (R(w,u) \wedge (\forall x \exists y (F(x,y) \wedge G(x,y)))) \wedge (R(u,w) \wedge (\forall x \exists y (F(x,y) \wedge G(x,y))))$ (23)	<i>conjonction sur (11), (21) et (22)</i>
$\forall x \exists y (F(x,y) \wedge G(x,y))$ (24)	raisonnement par disjonction des cas ⁹⁹

⁹⁹ " $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow (q \wedge r)$ " est un énoncé universellement valide du calcul des propositions, donc du calcul des prédicats ; comme (23) est une instance vraie de la prémisse de l'implication, on peut déduire la vérité de l'instance de la conclusion correspondante, c'est-à-dire (24)

Ceci prouve que (24) est une conséquence logique de la conjonction des prémisses (1), (2) (3) et (4).

Dans le cas qui nous intéresse ici, les trois prémisses ci-dessus sont bien vérifiées grâce aux propriétés de la relation d'ordre. Les deux premières formalisent le fait que s'il existe un réel vérifiant la condition, alors tout réel inférieur à celui-ci la vérifie également¹⁰⁰ ; la troisième prémisses s'interprète par le fait que l'ordre considéré est un ordre total. Notons que nous utilisons deux prémisses analogues afin de traduire le fait que le réel \square , dont nous affirmons l'existence, dépend non seulement de \square mais aussi de la fonction considérée. Le nombre et la nature des pas de la démonstration du résultat ci-dessus suggèrent qu'il y a beaucoup de choses cachées dans la démonstration proposée par l'auteur. De fait, les différentes étapes de la démonstration logique correspondent à ce que l'on devrait écrire dans une démonstration mathématique par élément générique qui ne ferait pas l'économie du contrôle de " l'existence d'un \square pour un \square choisi arbitrairement. ". Précisons ici que le recours à la démonstration naturelle de Copi nous sert en quelque sorte de *descripteur* et de *révélateur* de ce qui doit être réalisé par le sujet non expert pour conduire une preuve valide du résultat à établir.

L'utilisation, sans aucun avertissement au lecteur, dans un manuel destiné à des étudiants débutants, d'un tel raccourci dans la démonstration pose naturellement des questions didactiques, et ce d'autant plus que les étudiants vont rencontrer à la même période des exemples, où l'usage non contrôlé de cette règle pourra conduire à un résultat faux, ou bien encore à un résultat juste mais avec une démonstration incorrecte, comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessous.

IV.4.2. Une démonstration erronée

Nous allons examiner maintenant une démonstration erronée d'un énoncé classique que l'on peut proposer en exercice en première année d'université scientifique. Il s'agit de démontrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, le théorème des accroissements finis généralisés, appelé également théorème de Cauchy dans la littérature anglo-saxonne. Nous rappelons ci-dessous l'énoncé des deux théorèmes :

¹⁰⁰ Autrement dit, étant donné un réel t , s'il existe y tel que y vérifie la condition et t est inférieur à y , alors t vérifie la condition.

Théorème des accroissements finis :

Etant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, si f est continue sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a ; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Théorème des accroissement finis généralisé :

Etant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$, si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a ; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a ; b[$, tel que :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Une démonstration, fréquemment rencontrée chez les étudiants en DEUG scientifique première année, consiste à déduire le deuxième théorème du premier, de la façon suivante :

La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a ; b[$, tel que $f'(c)(b - a) = f(b) - f(a)$. De même g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a ; b[$, tel que $g'(c)(b - a) = g(b) - g(a)$. Comme g' ne s'annule pas sur $]a ; b[$, $g'(c) \neq 0$ et donc $g(b) - g(a) \neq 0$. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Ici, naturellement, le mode de raisonnement n'est pas acceptable, car on ne peut pas nécessairement construire un élément commun pour les deux fonctions. On peut se demander comment un étudiant débutant, donc non expert du domaine, peut élaborer, à travers les pratiques ordinaires des mathématiciens experts que sont ses enseignants, les outils qui lui permettront d'exercer les contrôles sémantiques nécessaires pour savoir quand on peut utiliser

en toute sécurité une règle de raisonnement¹⁰¹. En effet, ce sont les connaissances mathématiques du sujet sur le domaine (dimension pragmatique) qui vont déterminer le niveau de rigueur mobilisé par les experts, or précisément ces connaissances mathématiques sont en cours d'élaboration, si bien que l'on se trouve en face d'une sorte de cercle vicieux. Nous verrons un exemple de cette difficulté au paragraphe V.5.

IV.5. L'instabilité du statut des lettres dans les démonstrations

Dans notre analyse de la situation du labyrinthe, nous avons mis en évidence que les réponses proposées par les auteurs supposent que le statut logique de la lettre X change entre la phrase n°3 et la phrase n°6, si bien qu'aucune des trois formalisations logiques que nous avons proposées ne permet de rendre compte de la totalité de ces réponses. Une étude de plusieurs démonstrations mathématiques de fin de lycée ou de premier cycle universitaire montre que cette *instabilité* du statut des lettres est une pratique assez courante dans les manuels. Nous en donnons ici un exemple particulièrement représentatif. Il s'agit d'une démonstration de *l'existence et de l'unicité du barycentre d'un système de points massifs* dans un manuel de Terminale scientifique.

IV.5.1. Le texte de la démonstration

Cette démonstration se trouve dans le manuel Dimathème *T.S. programme obligatoire* de 1998, pp.266-267, dans le chapitre 11 intitulé *Barycentre*. La première partie du chapitre est consacrée à la *Fonction vectorielle de Leibniz*, ce qui est assez inhabituel à ce niveau d'enseignement. Le premier paragraphe de cette partie est intitulé : *Réduction de la fonction vectorielle de Leibniz*. Après en avoir donné la définition, les auteurs proposent ce qui suit :

Théorème et définition

Soit un système de points massifs $(A_i; m_i)$, $1 \leq i \leq n$, de masse totale $m = (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$.

• si $m \neq 0$, alors le vecteur $m_1 \overrightarrow{MA_1} + m_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{MA_n}$ est indépendant de M, autrement dit la fonction vectorielle de Leibniz $M \mapsto m_1 \overrightarrow{MA_1} + m_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + m_n \overrightarrow{MA_n}$ est constante.

¹⁰¹ Dans Chellougui (2004), on retrouve dans les réponses des étudiants ce phénomène d'instantiation de deux existentielles analogues par la même lettre pour démontrer l'antisymétrie de la relation binaire : $pRq \Leftrightarrow \exists n (p^n = q)$

- si $m \neq 0$, alors il existe un point G unique tel que, pour tout point M, $\square_1 \overrightarrow{MA_1} + \square_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \square_n \overrightarrow{MA_n} = m \overrightarrow{MG}$
Ce point G est appelé barycentre du système.

Démonstration¹⁰²

$$1. F(M) = \square_1 \overrightarrow{MA_1} + \square_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \square_n \overrightarrow{MA_n} = \sum_{j=1}^{j=n} \overrightarrow{MA_j} \quad (1)$$

2. Pour simplifier l'expression de cette somme on choisit un point A.

3. Alors

$$4. F(A) = \square_1 \overrightarrow{AA_1} + \square_2 \overrightarrow{AA_2} + \dots + \square_n \overrightarrow{AA_n} = \sum_{j=1}^{j=n} \overrightarrow{AA_j} \quad (2)$$

5. En soustrayant membre à membre (1) et (2) on obtient :

$$6. F(M) - F(A) = \square_1 (\overrightarrow{MA_1} - \overrightarrow{AA_1}) + \square_2 (\overrightarrow{MA_2} - \overrightarrow{AA_2}) + \dots + \dots$$

$$7. \square_n (\overrightarrow{MA_n} - \overrightarrow{AA_n}) = \sum_{j=1}^{j=n} (\overrightarrow{MA_j} - \overrightarrow{AA_j})$$

8. D'où

$$9. F(M) - F(A) = \square_1 \overrightarrow{MA} + \square_2 \overrightarrow{MA} + \dots + \square_n \overrightarrow{MA}$$

$$10. (\square_1 + \square_2 + \dots + \square_n) \overrightarrow{MA} = \sum_{j=1}^{j=n} \square_j \overrightarrow{MA}$$

$$11. \text{Posons alors } m = (\square_1 + \square_2 + \dots + \square_n) = \sum_{j=1}^{j=n} \square_j$$

Le nombre m est appelé

12. masse totale du système. La relation précédente peut alors s'écrire :

$$13. F(M) = F(A) + m \overrightarrow{MA}$$

14. Distinguons deux cas :

15. • Si $m = 0$, alors pour tout M $F(M) = F(A)$, autrement dit la fonction est

16. constante.

17. • Si $m \neq 0$, montrons alors que l'équation $F(M) = 0$ admet une solution

¹⁰² Nous avons numéroté les lignes de la démonstration pour faciliter les renvois.

18. unique.

$$19. F(M) = \vec{0} \square F(A) + m\overrightarrow{MA} = \vec{0} \square \overrightarrow{AM} = \frac{1}{m}F(A)$$

20. Cette dernière relation montre que M est l'image de A par la translation de

21. vecteur, $\frac{1}{m}F(A)$ et par suite M est unique. Si on appelle G ce point,

$$22. \text{ on a donc } F(G) = \vec{0} \text{ et pour tout M, } F(M) \square F(G) = F(M) = m\overrightarrow{MG}$$

$$23. \text{ autrement dit } \square_1\overrightarrow{MA_1} + \square_2\overrightarrow{MA_2} + \dots + \square_n\overrightarrow{MA_n} = m\overrightarrow{MG}$$

IV.5.2. Les différents statuts de la lettre M

IV.5.2.1. Les différents statuts de la lettre M dans l'énoncé du théorème

Dans le cas $m=0$, la lettre M apparaît, sans avoir été introduite, avec le statut d'élément générique, puis de lettre de variable fonctionnelle ensuite. Notons que la notion de variable fonctionnelle est indissociable de celle d'assignation de valeur ; en ce sens elle correspond à la notion de variable en logique, ceci bien que d'autres conceptions de la variable cohabitent avec celle-ci en mathématique (voir par exemple Durand-Guerrier & Arzac, 2003)

Dans le cas $m \neq 0$, la lettre M apparaît comme *variable muette* (mathématique) ou *variable liée* (logique) puisqu'elle se trouve dans le champ d'un quantificateur. Elle apparaît en effet dans un énoncé comportant une quantification existentielle suivie d'une quantification universelle écrit en langue vernaculaire (sans symboles logiques).

IV.5.2.2. Les différents statuts de la lettre M dans la démonstration

A la ligne 1, la lettre M apparaît sans avoir été introduite. Suivant l'habitude, on peut considérer qu'elle a ici le statut d'*élément générique*. A la ligne 15, M a le statut de *variable muette* (mathématique) ou encore de *variable liée* (logique). On est en présence de l'application de la règle de *généralisation universelle* : l'affirmation qu'une propriété est vérifiée pour un élément générique d'un domaine de référence donné permet d'affirmer que l'énoncé universellement quantifié correspondant est vrai. Comme on l'a vu précédemment, en logique, on utilise dans ce cas deux lettres différentes : une pour la variable et une autre pour signifier que l'on considère une instance, la lettre désignant alors un objet du domaine de référence. A la ligne 17, M a le statut d'*inconnue* (mathématique) ou de *variable libre* (logique) puisqu'elle intervient dans une équation. Il n'y a pas ici de contradiction, sur le plan du statut, avec ce qui précède ligne 15, puisque les auteurs ont indiqué à la ligne 14 qu'ils vont faire une démonstration par disjonction des cas. Par contre, dans les deux cas, il y a un

glissement par rapport à la ligne 1. À la ligne 19, il y a une incertitude sur le statut de la lettre M qui peut soit désigner un *élément générique*, soit être une *lettre de variable libre* ou *liée* (avec une quantification universelle implicite), ou encore désigner *le point dont on veut prouver l'existence et l'unicité*. On peut même envisager un glissement de statut entre la première expression et la dernière. Aux lignes 20 et 21, M désigne *la solution de l'équation*, dont l'existence n'est pas problématisée. On retrouve ici quelque chose de classique dans la résolution d'équation en algèbre. À la ligne 21, on débaptise ce point pour le rebaptiser G , et rendre à nouveau la lettre M disponible pour jouer le rôle de *variable muette*.

Ce qui précède montre une fluctuation pour le moins importante du statut de la lettre M , fluctuation que l'on retrouve dans de nombreux textes mathématiques mais qui est portée ici à une sorte de paroxysme. Il est naturellement permis de s'interroger sur les conséquences didactiques d'un tel phénomène.

IV.5.3 Le statut de la lettre A dans la démonstration

À la ligne 2 de la démonstration, les auteurs écrivent :

« Pour simplifier l'expression de cette somme, on choisit un point A . »

Le fait de déclarer qu'*on choisit un point A* revient à faire jouer aux lettres M et A des rôles dissymétriques : soit que A joue en quelque sorte le rôle d'un *paramètre* ; soit que A désigne une *origine* ; dans un point de vue cinématique, A peut également désigner un *point fixe* tandis que M désignerait un *point mobile*. La dissymétrie des rôles est confirmée ligne 20 :

« Ceci montre que M est l'image de A par la translation de vecteur $1/m F(A)$ »

La raison invoquée par les auteurs pour introduire ce point n'est, selon nous, pas très convaincante ; on ne voit pas bien, en effet, en quoi cela simplifie l'expression. La suite montre, qu'en fait, on se propose de calculer la différence entre les deux expressions. Or pour cela, il n'est a priori pas pertinent de faire jouer des rôles différents aux deux points. En particulier, ce calcul est utilisé généralement pour prouver l'injectivité de la fonction de Leibniz, et dans ce cas les deux points jouent un rôle symétrique. Dans le déroulement des calculs, c'est seulement à la ligne 13 qu'apparaît clairement le fait que les deux points ne jouent pas le même rôle : le point A semble bien fonctionner, à cette étape de la démonstration, comme un *point origine*. Il est clair que contrairement à la lettre M dont le statut évolue au fil du texte, la lettre A conserve tout au long de la démonstration le même statut, ce qui va dans le sens d'une interprétation comme *point origine*. Il faut noter que ceci relève du niveau pragmatique, c'est le choix de celui qui rédige la démonstration et cela induit une méthode plutôt qu'une autre.

IV.5.4. Retour sur la résolution de l'équation

A la ligne 18, les auteurs annoncent qu'ils se proposent de résoudre l'équation « $\exists(M) = 0$ ». La ligne 19 comporte une suite d'équivalences ; la première est justifiée par une substitution qui préserve la valeur de vérité, la deuxième par l'application d'une règle de transformation conforme des équations (extension aux vecteurs de certaines règles de calcul sur les nombres, propriétés d'espaces vectoriels). Comme il est d'usage dans le traitement des équations, les quantificateurs sont sous-entendus. Si nous considérons que le point A joue le rôle d'un point origine (un point fixe), nous pouvons restituer la quantification comme suit :

$$\exists M(F(M) = \vec{0}) \iff F(A) + m\overrightarrow{MA} = \vec{0} \iff \overrightarrow{AM} = \frac{1}{m}F(A)$$

Moyennant quoi, les deux équations à une inconnue

$$F(M) = \vec{0} \quad (1) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{m}F(A) \quad (2)$$

ont exactement le même ensemble de solution. Aux lignes 20 et 21, les auteurs écrivent :

« Cette dernière relation montre que M est l'image de A par la translation de vecteur $1/mF(A)$, et par suite que M est unique. »

La déduction qui est faite ici est la suivante : de l'égalité $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m}F(A)$, on déduit que M est l'image de A dans la translation de vecteur $1/mF(A)$. L'énoncé tiers (non explicite) étant ici la définition de la translation ; un deuxième pas de déduction conduit à affirmer l'unicité sans énoncé tiers explicite, ni aucun indice permettant de repérer un tel énoncé tiers.

Après avoir rebaptisé G le point trouvé, solution unique de l'équation (2) on passe, sans aucune justification à $F(G) = \vec{0}$. On pourrait voir éventuellement un tour de passe-passe dans cette re-nominalisation. Ne devrait-on pas, en effet, appeler G_A ce point ? On verrait bien alors qu'il est nécessaire de justifier le fait que ce point est indépendant du point A choisi. La question est donc de savoir ce qui permet d'affirmer que la solution trouvée pour l'équation (2), qui a priori *dépend* du point A , est la solution unique de l'équation (1), en remarquant que la question posée menace non seulement l'unicité, mais l'existence même d'une solution, car elle pose la question de *la légitimité de la méthode employée*.

IV.5.5 Cette démonstration est-elle valide?

Il est vraisemblable que pour la plupart des mathématiciens et des enseignants de mathématiques, la question de la validité de cette démonstration ne se pose même pas. C'est

en effet une démonstration classique, bien qu'il soit surprenant de la trouver dans un manuel de terminale. On pourrait cependant imaginer un élève fictif demandant pourquoi le point G trouvé est indépendant du point A . On connaît en effet des exemples¹⁰³ où ne pas prendre en compte le fait qu'un élément dépend d'un autre élément fixé arbitrairement conduit à des démonstrations non valides, ce que ne manquent pas de relever les enseignants lorsque cela se présente.

De notre point de vue, ceci appelle deux questions distinctes□

1) Sur quoi se fonde la conviction des lecteurs experts ?

2) Que répondre à un élève qui poserait cette question ? *ou encore* Comment prouver que ce mode de raisonnement est valide ?

Nous donnons tout d'abord quelques arguments mathématiques¹⁰⁴. Un premier argument consiste à dire que cette méthode de démonstration est classique dans le cadre général des espaces vectoriels associés à un espace affine par le choix d'une origine, cadre dans lequel on *sait* que la méthode est légitime. Un deuxième argument consiste à considérer que l'on peut aisément compléter la démonstration pour se prémunir a priori contre l'objection concernant l'unicité : on commence par démontrer que lorsque m est non nul, la fonction de Leibniz est *injective* ; moyennant quoi, si on trouve une solution, on peut affirmer qu'elle est unique. On considère que la démonstration proposée affirme l'existence d'une solution. Une conséquence en est que le point G_A est indépendant du point A choisi ; effet, sachant que G_A est solution de (2), j'en déduis que $F(G_A) = \vec{0}$; considérons alors un point B différent de A ; on lui associe G_B qui est tel que $F(G_B) = \vec{0}$; comme F est injective, $G_A = G_B$. On obtient ainsi une *validation a posteriori* de la méthode choisie (on peut choisir *une origine arbitraire* pour déterminer le point cherché). La dernière remarque des auteurs vient opportunément rappeler que le point A peut disparaître corps et biens. Il n'a joué qu'un rôle auxiliaire. Notons qu'en fait, on démontrerait sans plus d'efforts que la fonction F est bijective, ce qui rend la démonstration □*clairante*□(pour les lecteurs qui ont certaines connaissances).

¹⁰³ Ici même la démonstration non valide du théorème des accroissements finis généralisés, et au paragraphe V.5 l'analyse d'une démonstration erronée de topologie.

¹⁰⁴ Proposés par Gilbert Arsac et certains participants à un atelier de l'école d'été de didactique des mathématiques 1999 ; le déroulement de l'atelier et nos analyses sont présentés dans Arsac et Durand-Guerrier (2000)

Le troisième argument proposé vise uniquement à répondre à la question « Pourquoi les solutions ne dépendent-elles pas de A ». Pour cela, on revient aux équivalences établies au cours de la démonstration (ligne 19) :

$$F(M) = \vec{0} \iff F(A) + m\overline{MA} = \vec{0} \iff \overline{AM} = \frac{1}{m}F(A)$$

Ceci signifie, par définition de l'équivalence pour les équations que :

$$\left\{ M, F(M) = \vec{0} \right\} = \left\{ M, F(A) + m\overline{MA} = \vec{0} \right\} = \left[\left[M, \overline{AM} = \frac{1}{m}F(A) \right] \right]$$

Le premier ensemble ne dépend pas de A , le troisième est un singleton qui ne dépend donc pas non plus de A . D'ailleurs le fait que cette égalité montre que le premier ensemble est un singleton suffit à établir l'existence et l'unicité de la solution de l'équation « $F(M) = \vec{0}$ ». Ce troisième argument, selon nous, ne s'attaque pas vraiment à la racine du doute ; en effet, dans ce cas, on admet implicitement la validité du mode de raisonnement proposé par les auteurs puisque le statut de la lettre A n'est pas *problématisé*. En toute rigueur, il faudrait, selon nous, résoudre les deux équations dans l'ensemble *des couples de points* : on obtiendrait alors :

$$\left\{ (A, M), F(M) = \vec{0} \right\} = \left\{ (A, M), F(A) + m\overline{MA} = \vec{0} \right\} = \left[\left[(A, M), \overline{AM} = \frac{1}{m}F(A) \right] \right]$$

L'argument consistant à utiliser les singletons pour l'unicité devenant alors caduque. Cette formalisation *montre*, selon nous, que la question de l'élève *fictif* mérite d'être prise au sérieux. Nous sommes donc ramené à la question de la légitimité du mode de démonstration utilisé *ici*. La question que nous posons n'est pas simplement celle de la validité de la démonstration proposée à laquelle les arguments mathématiques ont permis de répondre. La question qui nous intéresse est celle, plus générale, qui concerne le *fondement logique* de ce mode de démonstration. Comme on l'a vu dans la partie III, les inférences valides classiquement utilisées en mathématiques sont associées à des énoncés universellement valides du calcul des prédicats du premier ordre. Comme on l'a vu également dans les exemples précédents, ceci nécessite de bien repérer les prémisses qui permettent d'appliquer de manière rigoureuse un mode de raisonnement donné. Ici, le troisième argument et la dernière formalisation proposée nous invitent à exploiter le fait que la lettre A n'intervient pas dans l'équation « $F(M) = \vec{0}$ » afin de proposer une formalisation logique dont nous montrerons qu'elle est *concluante*.

IV.5.6. Une preuve logique de la validité du mode de raisonnement utilisé

Nous nous intéressons ici à l'équivalence

$$\Box M \Box A(F(M) = \vec{0}) \Box \overrightarrow{AM} = \frac{1}{m} F(A) \quad (1)$$

qui se décompose en deux implications

$$\Box M \Box A(F(M) = \vec{0}) \Box \overrightarrow{AM} = \frac{1}{m} F(A) \quad (2)$$

et

$$\Box M \Box A(\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m} F(A) \Box F(M) = \vec{0}) \quad (3)$$

Dans une première étape, nous nous intéressons à l'énoncé (2) qui est une interprétation dans la géométrie vectorielle élémentaire de la formule du calcul des prédicats

$$\Box x \Box y (P(x) \Box Q(x,y)) \quad (4)$$

obtenue en substituant les lettres de variables M et A respectivement à x et y et en interprétant

$P(x)$ par « $\Box F(M) = \vec{0}$ » et $Q(x,y)$ par « $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m} F(A)$ ». Or la formule du calcul des prédicats

$$\Box x \Box y (P(x) \Box Q(x,y)) \Box \Box x (P(x) \Box \Box y Q(x,y)) \quad (T1)$$

est universellement valide comme on peut le montrer aisément à la manière de Copi

$\Box x \Box y (P(x) \Box Q(x,y))$	(1)	Prémisse
$\Box y (P(a) \Box Q(a,y))$	(2)	Instantiation Universelle sur (1) pour x
$P(a) \Box Q(a,b)$	(3)	Instantiation Universelle sur (2) pour y
$[P(a)$	(4)	Prémisse auxiliaire
$Q(a,b)$	(5)	Modus Ponens sur (3) et (4)
$\Box y Q(a,y)]$	(6)	Généralisation Universelle sur (5)
$P(a) \Box \Box y Q(a,y)$	(7)	Introduction de la flèche sur (4) et (6)
$\Box x (P(x) \Box \Box y Q(x,y))]$	(8)	Généralisation universelle sur (7)

Par introduction de la flèche sur (1) et (8), on obtient une preuve de T1, ce qui montre que cet énoncé est universellement valide. Comme l'énoncé (4) est l'antécédent de T1, tout modèle de (4) est un modèle de son conséquent :

$$\Box x (P(x) \Box \Box y Q(x,y)) \quad (5)$$

Or nous avons vu que, dans la situation que nous étudions, l'interprétation de (4) est un énoncé vrai, on en déduit que, nécessairement, l'énoncé ci-dessous est vrai

$$\Box M \Box A(F(M) = \vec{0}) \Box \Box A(\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m} F(A)) \quad (6)$$

Cet énoncé peut s'interpréter de la manière suivante : *si un point donné est solution de l'équation « $\vec{CF}(M) = \vec{0}$ », alors ce point s'obtient à partir de n'importe quel point A du plan par la translation de vecteur $1/m\vec{F}(A)$. Compte tenu des propriétés de la translation, ceci permet d'affirmer que l'équation « $\vec{CF}(M) = \vec{0}$ » a au plus une solution. Il reste à contrôler que l'énoncé (1) permet d'affirmer l'existence d'une telle solution. Nous utilisons pour cela l'énoncé (3),*

$$\forall M \forall A (\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m} \vec{F}(A) \Rightarrow \vec{CF}(M) = \vec{0}) \quad (3),$$

une propriété de la translation,

$$\forall A \forall M (\overrightarrow{AM} = \frac{1}{m} \vec{F}(A)) \quad (7)$$

et un deuxième théorème de logique :

$$[(\forall x \exists y (Q(x,y) \Rightarrow P(x))) \Rightarrow (\exists y \forall x Q(x,y))] \Rightarrow \forall x P(x) \quad (T2)^{105}$$

La conjonction des énoncés (3) et (7) est une instance de l'antécédent de T2 ; on peut donc affirmer que l'énoncé $(\exists M \vec{CF}(M) = \vec{0})$ (8) est nécessairement vrai. Cet énoncé affirme l'existence d'une solution pour l'équation « $\vec{CF}(M) = \vec{0}$ ». Nous pouvons donc conclure que l'équation « $\vec{CF}(M) = \vec{0}$ » a exactement une solution.

La démonstration que nous avons proposée respecte celle des auteurs du manuel. L'utilisation des deux théorèmes de logique permet de légitimer l'inférence, a priori hâtive, faite à la ligne 20, et par là même de lever le doute quant à la légitimité de la méthode employée. Il est clair en outre que ceci montre d'une manière plus générale la validité de ce type de raisonnement classique en mathématiques. Enfin, cette formalisation logique montre, selon nous, que l'instabilité sur le statut logique des lettres masque, non seulement certaines inférences logiques, mais une partie des résultats mathématiques nécessaires à l'élaboration de la démonstration, ce que nous avons déjà mis en évidence au paragraphe précédent.

IV.6. Commentaires

Nous avons présenté dans cette section quelques pratiques ordinaires dans la classe de mathématiques en lien avec les questions didactiques sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique qui nous occupent ici. Nos analyses mettent en évidence selon nous le fait que dans l'étude des pratiques effectives des enseignants de mathématiques, les questions concernant le niveau de rigueur que se donne le professeur sont tout à fait cruciales.

¹⁰⁵ Que l'on peut démontrer comme T1 à la manière de Copi.

Nos résultats de recherche montrent clairement que la pratique de la quantification implicite des énoncés conditionnels universels non seulement n'est pas partagée par de nombreux élèves et étudiants, mais peut conduire à des positions peu pertinentes au regard des objectifs de l'enseignement des mathématiques. En particulier, elle ne permet pas de problématiser l'implication, ce qui est encore renforcé d'une part par la pratique consistant à ne pas expliciter les conclusions générales que l'on peut tirer à la suite des exercices, et d'autre part par la pratique de la quantification bornée. Le professeur se prive ainsi de la possibilité de travailler sur le rôle que jouent les outils logiques fondamentaux, en particulier implication et quantification, dans l'élaboration des raisonnements mathématiques et cache le fait que, contrairement à une idée largement répandue, les questions de logique ne sont pas indépendantes des contenus mathématiques mais nécessitent de travailler simultanément sur la forme des énoncés et sur le contenu mathématique véhiculé.

Concernant l'utilisation, par le professeur, de règles non valides dans des situations où ce n'est pas "dangereux", en lien avec l'instabilité du statut des lettres, nous faisons l'hypothèse que ceci peut se constituer en obstacle didactique pour les études mathématiques avancées, puisque en effet, ce sont les connaissances mathématiques du domaine qui permettent de savoir dans quel cas il est possible, ou non, de *prendre des libertés* avec la rigueur, et que ceci est parfois constitutif de la connaissance mathématique elle-même, comme dans le cas de la notion de convergence uniforme¹⁰⁶.

D'une manière générale, ceci ouvre des pistes de recherche concernant la formation des maîtres en France. Les travaux existants (Rogalski & Rogalski, 2003, 2004, Deloustal, 2002, 2004) montrent en effet un très grand déficit de connaissances sur les usages de l'implication en lien avec la quantification chez les étudiants préparant le concours pour devenir professeur de mathématiques, ainsi que chez les professeurs stagiaires ayant réussi ce concours. Une voie consiste à proposer des ingénieries spécifiques et à en observer les effets (Deloustral, 2004). Une autre voie, que nous souhaitons explorer dans la suite du travail de thèse de Chellougui (2004) consisterait à faire travailler de futurs professeurs et des professeurs en poste sur l'élaboration et / ou l'analyse de preuves à destination des élèves, ainsi que sur l'analyse de preuves produites par des élèves ou des étudiants et de confronter leurs analyses avec les nôtres.

¹⁰⁶ Pour une étude de cette question, voir Durand-Guerrier et Arsac, à paraître en 2005 in *Educational Studies in Mathematics*.

V. L'interprétation des énoncés mathématiques

Il est habituel de considérer que les énoncés mathématiques sont atemporels, que leur vérité est indépendante des conditions d'énonciation et que, par suite, il importe peu de savoir dans quel contexte ils sont émis. Nous avons déjà vu avec la théorie élémentaire des modèles que cette affirmation doit être relativisée dans la mesure où l'interprétation d'un même énoncé d'une théorie axiomatique peut être vraie dans certains modèles, et fautive dans d'autres, ce que la découverte des géométries non euclidiennes avait déjà mis en évidence. Ce que montrent, plus modestement, les quelques exemples que nous avons donnés dans les parties II, III et IV, c'est que, même pour des énoncés très élémentaires, dans la classe de mathématiques, des divergences d'interprétation peuvent apparaître, qui ne sont pas toujours réductibles à l'*ignorance* des élèves. Nous avons alors indiqué à plusieurs reprises¹⁰⁷ que certaines des réponses proposées par les enseignants ne pouvaient être comprises que comme relevant de considérations *pragmatiques*. Nous nous proposons dans ce qui suit de préciser ce que nous entendons par ce terme de *pragmatique*, en relation avec la *syntaxe* et la *sémantique*, puis d'illustrer l'usage que nous en faisons à partir de deux exemples. Le premier sera pris en dehors du champ des mathématiques ; le deuxième est une relecture à travers cette grille d'une situation mathématique présentée dans Arsac et al. (1992) et déjà analysée dans notre thèse. Nous l'avons choisie pour son caractère tout à fait exemplaire pour illustrer l'usage didactique de cette catégorisation.

V.1. Syntaxe, sémantique et pragmatique

On pourrait s'étonner de voir apparaître, dans un travail consacré à l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique, une référence à la pragmatique. Cependant, bien que seules la syntaxe et la sémantique appartiennent stricto sensu à la logique, nous reconnaissons avec Gardies (1994) que :

«L'analyse de la connaissance ne s'épuise pas dans les considérations syntaxiques ou sémantiques où se confine essentiellement la logique, mais accordons à Frege que la porte ne se trouve pas pour autant ouverte à des conditions proprement psychologiques mais plutôt à ce que nous proposerons d'appeler une pragmatique (p.186)

¹⁰⁷ En particulier pour les deux exemples du *losange* et du *labyrinthe*

Gardies ajoute plus loin qu'il se réfère à Morris, qu'il est conscient que le terme de *pragmatique* est utilisé dans un sens différent par certains auteurs, et qu'il choisit de continuer à désigner par *sémantique* toutes les extensions possibles de référence au contexte pour

(...) laisser le terme de pragmatique disponible pour désigner par exemple la manière ou les manières mêmes dont la vérité peut accéder à la conscience du sujet connaissant (...) (p.188)

Cette difficulté à délimiter le sens du terme *pragmatique* est indéniable. Il nous faut par conséquent essayer d'indiquer le plus précisément possible ce que nous entendons par ce terme, que nous utilisons en un sens beaucoup plus restreint que, par exemple, Reboul & Moeschler (1998), et toujours dans son articulation avec la *syntaxe* et la *sémantique*.

Le point de vue que nous adoptons ici remonte à Morris (1938, 1946) pour qui la *sémiotique* ou *science du langage* se divise en *syntaxe*, *sémantique* et *pragmatique* (Da Costa, 1997, p.40). Eco (1980) présente cette distinction, en indiquant « qu'elle a été largement reçue dans le monde scientifique » et en donne les définitions suivantes :

« *sémantique* le signe est ici conçu dans sa relation à ce qu'il signifie
syntaxique le signe est abordé en ce qu'il peut être inséré dans des séquences d'autres signes selon certaines règles de combinaisons (...)
pragmatique le signe est ici perçu en fonction de ses origines, et des effets qu'il a sur les destinataires, les usages que ceux-ci en font, etc... (p.41)

Jacques (1990), quant à lui, écrit que « (...) la dimension pragmatique concerne la production du sens dans les systèmes de signes. Elle ne regarde la rationalité que pour autant que celle-ci dépend du discours en contexte. Elle déborde donc ses racines pragmatistes. » (p.856). Da Costa (1997) reprend cette distinction entre *pragmatique* et *pragmatiste* : « (...) nous emploierons l'adjectif « pragmatique » seulement selon sa signification sémiotique. Le peu de fois où nous nous référerons à la doctrine de W. James et de ses continuateurs, nous utiliserons l'adjectif « pragmatiste » (p.43n).

C'est en ce sens que nous utiliserons le terme *pragmatique*, et nous nous attacherons précisément à montrer la pertinence didactique de ce point de vue pour aborder la question de la rationalité des élèves. On ne s'étonnera pas que nous choissions comme définitions pour les dimensions *syntaxique* et *sémantique* celles issues de la théorie des modèles de Tarski que nous avons présentée dans la partie II, suivant en cela Jacques (1990) qui écrit que

« Morris (1938) voyait dans la pragmatique la science universelle de l'usage. Son intuition allait être directement corroborée par l'école polonaise qui introduisit la construction des métalangages. Ce devrait être, après la syntaxe et la sémantique la troisième forme d'étude métalogue. Elle étudie les relations entre les systèmes formels et leurs utilisateurs. □ De quelque langage qu'il s'agisse (formel aussi bien) toute expression possède telle propriété syntaxique (est bien ou mal formée) ou sémantique (est vraie ou fausse) uniquement pour les locuteurs virtuels ou actuels de ce langage » (p.857).

Cette longue citation montre que l'auteur inscrit clairement la pragmatique dans une filiation logique, et ceci quoi que naturellement, la pragmatique ne fasse pas partie de la logique. Le point de vue adopté est ce que l'auteur appelle le *contexte référentiel* « où les signes prennent sens par rapport à leurs référents : le monde des objets et des états de choses » et où « l'on passe de la sémantique à la pragmatique dès lors que les agents concrets de la communication et leur localisation spatio-temporelle sont tenus pour des indices du contexte existentiel » (p.858) . De la même manière, Da Costa (1997) fait référence à Tarski et à Carnap pour définir la dimension sémantique d'un langage *L*, composé de symboles écrits, dans laquelle « on s'intéresse aux interrelations existant entre les langages et les objets et les situations auxquels ils se réfèrent » ; il ajoute que « l'investigation sémantique de *L* présuppose son étude syntaxique » (p.40) ; puis se réclame de Morris pour affirmer la nécessité de la prise en compte de la dimension pragmatique, « qui prend en compte l'usage des signes dans la totalité de leur usage » (p.40). Da Costa distingue entre *sémiotique pure*, qui a pour finalité l'étude des langages idéaux, construits axiomatiquement, et *sémiotique appliquée* dans laquelle on considère les langages ordinaires, et il ajoute que contrairement à ce « qu'il pourrait sembler à un lecteur non averti », il pense que « les trois niveaux – syntaxique, sémantique et pragmatique - sont essentiels pour la compréhension parfaite de l'état actuel des disciplines logico-mathématiques » (p.42).

Dans ce qui suit nous nous employons à défendre la thèse suivante :

Dans l'analyse des raisonnements, la prise en compte de la dimension sémantique dans l'analyse des énoncés fait émerger des interprétations possibles qui doivent être examinées sous l'angle pragmatique, en référence au contexte, à la situation d'énonciation et aux connaissances du sujet.

Dans une perspective didactique, ceci permet d'une part d'enrichir l'analyse a priori des situations proposées, d'autre part d'interpréter de manière plus fine les productions langagières des élèves et de prendre en compte de manière rigoureuse leurs connaissances.

V.2. La résolution géniale d'une contradiction

Comme on le sait, les romans d'Agatha Christie sont très élaborés du point de vue de leur construction logique et la place donnée au raisonnement déductif allié à une prise d'indices méticuleuse est toute à fait centrale. Nous allons nous appuyer sur un exemple tiré d'un de ses romans pour illustrer les définitions que nous venons de donner. Dans *Meurtre au Champagne* (Christie, 1995), paru en Angleterre en 1946, on trouve en effet, exposé avec brio par l'un des personnages, Tony, la résolution d'une contradiction qui mobilise, selon nous, explicitement les trois catégories : *syntaxe, sémantique et pragmatique*.

Georges, l'un des personnages principaux du roman a été assassiné au moment où l'on fêtait, autour d'une coupe de champagne, l'anniversaire de sa belle sœur Iris au *Luxembourg*¹⁰⁸. Or tout porte à croire qu'il est *impossible* que Georges ait été assassiné. Tony se propose d'expliquer à Iris ce qui s'est réellement passé et il n'en peut plus d'attendre tant il pense que sa solution témoigne d'une *intelligence fabuleuse*.

V.2.1. Comment la prise en compte d'un argument sémantique ouvre la porte à une solution

Nous citons ci-dessous l'essentiel de la première partie de l'argumentation¹⁰⁹ de Tony que nous analyserons ensuite :

«L'affaire, grosso modo, paraissait¹¹⁰ simple comme bonjour. Ce que j'entends par là, c'est que les relations de cause à effet s'imposaient (...).L'enchaînement logique était évident.

Seulement quelques contradictions évidentes sont presque aussitôt apparues. Telles que □ a)¹¹¹ Georges n'a pas pu être empoisonné – b) Georges a été empoisonné. Et □ a) personne n'a touché à la coupe de Georges – b) Quelqu'un a fourré du poison dans la coupe de Georges.

¹⁰⁸ Un restaurant de grande classe.

¹⁰⁹ Nous utilisons la traduction française parue en 1995 aux Editions Librairie des Champs Elysées.

¹¹⁰ Nous écrivons en italique ce qui est en italique dans le traduction française utilisée.

¹¹¹ Les lettres a) et b) sont dans le texte.

En réalité, je négligeais un élément capital, à savoir les différents degrés d'appartenance. « L'oreille de Georges » est incontestablement l'oreille de Georges (...). Mais par « La montre de Georges », je me borne à désigner la montre que porte Georges (...). Et quand j'en arrive à « La coupe de Georges » (...) j'en arrive à réaliser que l'appartenance évoquée recouvre une réalité des plus vagues » (pp.432-433).

Dans cette première partie de l'argumentation, Tony met en évidence deux contradictions de nature syntaxique. La première (Georges n'a pas pu être empoisonné / Georges a été empoisonné) est de la forme : il est impossible que « p », et « p », d'où il dérive « $p \wedge \neg p$ » (1). La conjonction des deux phrases est fautive en raison de sa structure logique. Cependant, comme tout énoncé de type propositionnel, ceci ne nous dit rien sur ce qui permet d'affirmer les deux énoncés contradictoires. Comme l'écrit Granger (1994), la logique propositionnelle est une logique *sans objet*. La deuxième opposition (Personne n'a touché à la coupe de Georges / Quelqu'un a fourré du poison dans la coupe de Georges) permet d'avancer dans la compréhension de ce qui autorise l'affirmation précédente. Cette opposition peut se formaliser dans le calcul des prédicats du premier ordre. Elle est de la forme « $\neg \exists x T(x) \wedge \exists x F(x)$ » (2) avec l'hypothèse implicite : « $(\exists x Fx) \wedge (\exists x T(x))$ » (3); ce qui conduit à la contradiction « $\exists x \neg T(x) \wedge \exists x T(x)$ » (4), qui, comme (1), est nécessairement fautive en raison de sa structure logique. Le problème à résoudre vient de ce que cela décrit pourtant « un état du monde » ; autrement dit nous avons un modèle de (1) et de (4), ce qui évidemment n'est pas logiquement acceptable !

Tony propose alors de se placer sur le niveau *sémantique* en considérant les différents degrés d'appartenance (*l'oreille de Georges / La montre de Georges / La coupe de Georges*). Il introduit le fait que, bien que les structures soient analogues, la « force » de la relation d'appartenance dépend des objets dont on parle. Il s'agit bien d'une propriété sémantique puisque ce qui est en jeu c'est l'extension du prédicat « appartient à » selon la nature des objets considérés dans un domaine de réalité donné. La reconnaissance de la faiblesse de la relation concernant la coupe de champagne (ou tout autre objet de même nature, comme une tasse de thé, une assiette...) laisse entrevoir une possibilité de résolution : on pourrait imaginer qu'il y ait eu un changement dans les coupes, et par conséquent que (3) soit fautive. Pour attester de cette possibilité, Tony se livre à une petite expérience : il construit une situation artificielle (un modèle) dans lequel (2) est *vraie* tandis que (3) est *fautive*. Pour cela, il s'installe avec deux personnes autour d'un guéridon, chacun ayant une tasse de devant lui

contenant des boissons différentes mais semblant identiques ; l'un des personnages a une pipe posée à côté de sa tasse. Sous un prétexte, il fait sortir à la hâte ses amis, et il profite de la bousculade pour changer la place de la pipe. Lorsqu'ils rentrent à nouveau, le possesseur de la pipe s'assied à la place où se trouve sa pipe. Ceci montre que si nous considérons une théorie minimale dont la situation étudiée soit une réalisation (il y a des convives, des tasses, chaque convive a une tasse, le contenu de chaque tasse est au moins en apparence le même, aucun convive ne touche la tasse d'un autre convive) alors (3) n'est pas un théorème de cette théorie. En effet, le modèle artificiel construit est une réalisation d'une telle théorie, et dans ce modèle, l'interprétation de la phrase (3) est fautive. Maintenant que nous savons que (3) n'est pas un théorème de la théorie, il faut examiner ce qui s'est réellement passé *ce jour-là, dans cette situation, avec ces personnages et dans ce lieu*, pour déterminer si ce qui était possible (niveau *sémantique*) s'est effectivement réalisé (niveau *pragmatique*).

V.2.2. Où l'examen minutieux des faits actualise ce qui était seulement possible

Après avoir décrit à Iris son expérimentation, Tony poursuit son argumentation :

«Et ça, Iris, c'est ce qui s'est passé au Luxembourg le soir où Georges Burton est mort. A la fin des attractions, quand nous sommes tous allés danser, vous avez laissé tomber votre sac. Un garçon l'a ramassé, non pas le garçon qui connaissait votre place, mais un garçon <anxieux, pressé>, qui l'a placé <à gauche de votre assiette>. George et vous êtes revenus les premiers et vous êtes allé tout droit à la place occupée par votre sac.(...) Quant à Georges, il a pris ce qu'il croyait être sa place, à votre droite, et quand il a proposé un toast (..) il a bu dans ce qu'il croyait être sa coupe mais qui était en réalité *votre* coupe – coupe dans laquelle le poison avait facilement pu être versé sans qu'il faille en appeler à l'au-delà ou à la prestidigitation...et ce pour la bonne raison que l'unique personne qui n'a pas bu après les attractions était nécessairement celle dont on fêtait l'anniversaire et à la santé de laquelle on buvait.¹¹²» (pp.433-434)

On voit bien ici comment Tony s'appuie sur les faits qui se sont, d'après lui, effectivement déroulés, pour montrer que Georges a bu dans une coupe qui n'était pas la sienne et donc *n'était pas la victime visée par le meurtrier*. Ceci ne constitue qu'un des éléments du dénouement de l'intrigue qui, dans ce roman, est très complexe et que Tony expose ne

¹¹² Un toast avait été porté à Iris après les attractions et avant que tous se lèvent pour aller danser.

dialoguant avec Iris dans les pages suivantes. C'est cependant une pièce maîtresse dans la reconstitution du puzzle. Ce que nous retiendrons pour notre propos, c'est que pour établir ce résultat, il est nécessaire de revenir à la situation elle-même et d'examiner soigneusement les faits. Par rapport à la formalisation de la situation que nous avons proposée, il s'agit bien du niveau *pragmatique*, dont font partie les connaissances du sujet relativement à cette situation, et en outre, ici, ses capacités d'observation. Il est clair que, sans ces éléments, la possibilité que les coupes aient été changées resterait seulement *virtuelle*. Il pourrait sembler cependant que la différence entre la situation réelle et la situation artificielle mise en place par Tony ne soient pas si grande et que, de ce fait, on puisse discuter la distinction faite ici entre les niveaux *pragmatique* et *sémantique*. De notre point de vue, la différence tient essentiellement au fait que, dans la situation artificielle, celui qui la réalise contrôle les paramètres ; en outre, il peut éventuellement recommencer si les conditions prévues n'ont pas été bien remplies, tandis que dans la situation réelle, il y a des paramètres sur lesquels celui qui doit résoudre le problème n'a pas de prise. Dans la situation artificielle, on peut *rester* dans le modèle ; la situation réelle *déborde* le modèle.

V.3. Explicitation sur un exemple de la dimension pragmatique d'une loi logique

V.3.1. Contre-exemples et théorèmes

Quoi de plus rigoureux, de plus inexorable, au sens propre comme au sens figuré qu'une *loi logique*. Pourtant, nous soutenons avec Wittgenstein¹¹³ que « nous pouvons opposer une loi inexorable (parfaitement univoque) qui condamne les assassins à mort et une loi qui fait preuve en quelque sorte de «discernement», autorise les exceptions, prévoit une possibilité de grâce etc.. » (Bouveresse, 1987, pp.52-53). Nous proposons de reconnaître dans cette citation une version métaphorique du sujet qui nous occupe. Nous allons ci-dessous préciser, à propos de *la règle du contre-exemple*, ce que nous voulons dire lorsque nous parlons de *la dimension pragmatique d'une loi logique*. On peut énoncer cette règle du contre-exemple sous la forme suivante□

Pour prouver que la proposition « Quel que soit x élément de E , x vérifie la propriété P » est fautive, il suffit d'exhiber un contre-exemple, c'est à dire un élément de E qui ne vérifie pas cette propriété□

¹¹³ Cité in Bouveresse (1987)

Cette règle, tout à fait valide, est associée à la formule universellement valide du calcul des prédicats

$$\langle \neg \exists x \neg F(x) \rangle \equiv \langle \forall x F(x) \rangle^{114}.$$

Il est généralement admis que cette règle du contre-exemple rentre souvent en conflit avec la logique de sens commun. Or les deux quantificateurs, lorsqu'ils sont définis de manière objectuelle, et portent sur des ensembles finis, correspondent exactement à l'usage courant. En effet, tout le monde s'accordera à dire que la phrase «*tous les cubes sont rouges*» est fausse si l'on a devant les yeux une boîte pleine de cubes dont l'un au moins est vert. Les objections à cette règle sont liées, selon nous, en partie à des arguments de nature *pragmatiques* : dans la situation précédente en effet, s'il y a un seul cube vert, nous n'allons pas renoncer à notre affirmation, nous allons enlever l'intrus, et ainsi la phrase «*tous les cubes sont rouges*» pourra être affirmée. C'est ce que l'on fait également avec les règles de grammaire, où pour pouvoir énoncer la règle, on dresse la liste de ses exceptions. Il en va ainsi, par exemple, pour la règle du pluriel des mots se terminant en *«u*, en Français. Il est tout à fait clair que, sur le plan pragmatique¹¹⁵, renoncer à la règle générale au motif qu'elle a cinq ou six exceptions serait totalement injustifié. Contrairement à une idée largement répandue, ce qui vaut pour la grammaire vaut aussi bien pour les mathématiques. Lakatos (1976) a montré de façon convaincante que l'on peut concilier la rigueur mathématique et une application non rigide de cette règle. Ceci conduit à examiner la relation entre contre-exemples et théorèmes universels¹¹⁶ suivant les situations rencontrées.

Le cas le plus favorable est celui où «*l'énoncé est vrai; et on en a une preuve*», c'est celui vers lequel tendent les efforts des mathématiciens. Le deuxième cas est encore assez favorable, c'est celui où *l'énoncé ouvert correspondant a un seul contre-exemple, ou un petit nombre de contre-exemples, ou une seule classe de contre-exemples, ou un petit nombre de classes de contre-exemples aisément identifiable(s)*. Dans ce cas, on peut modifier l'univers du discours de manière à obtenir un *énoncé vrai*. Ceci peut consister à retirer quelques objets, les contre-exemples, ou bien à préciser la nature des objets auxquels s'applique l'énoncé. C'est ce que l'on fait lorsque l'on restreint le domaine de quantification, où lorsque l'on modifie les prémisses d'un énoncé conditionnel pour en faire un théorème. On trouve ceci

¹¹⁴ Rappelons qu'il s'agit en fait d'une équivalence correspondant à l'interdéfinissabilité des deux quantificateurs.

¹¹⁵ Sur le plan des effets produits sur les locuteurs, comme le dit Jacques (1990)

¹¹⁶ De la forme : $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

même dans des théorèmes aussi simples que le théorème des accroissements finis, où les conditions imposées aux fonctions permettent d'éliminer les cas limites. Le troisième cas est assez fréquent dans les mathématiques scolaires : *l'énoncé ouvert a de très nombreux contre-exemples, et aussi de très nombreux exemple, et l'on sait caractériser la classe des exemples et celle des contre-exemples*. C'est une variante favorable du cas précédent. Dans ce cas, il est pertinent de produire deux théorèmes, et plus éventuellement si l'on peut classer les différents types de contre-exemples. Prenons par exemple l'énoncé « $\forall x$ carré de tout nombre est plus grand que ce nombre ». C'est un énoncé faux dès que l'on quitte l'ensemble des entiers naturels. Pour autant, on est capable de caractériser les nombres réels qui satisfont cet énoncé et ceux qui ne le satisfont pas. Sur un plan pragmatique, se contenter, dans la classe de mathématiques, de déclarer que cet énoncé est faux, sans dire de quels nombres il est vrai et de quels nombres il est faux, semblerait tout à fait *absurde*. On trouve cependant dans un certain nombre de manuels des questions vrai / faux de ce type¹¹⁷, Or de telles questions pourrait permettre un travail de recherche si elles n'étaient pas fermées de la sorte. Le quatrième cas est par contre très défavorable : *l'énoncé ouvert a des exemples et des contre-exemples, mais on ne sait pas les catégoriser*. Dans ce cas, l'on renonce à énoncer un théorème et l'on déclare que l'énoncé est faux. On trouve ceci pour la réciproque de certains théorèmes, Cependant, il est souvent possible d'énoncer des résultats partiels indiquant que la propriété est vérifiée, ou n'est pas vérifiée, pour tel ou tel sous domaine même si cela ne permet pas de résoudre complètement le problème. C'est le cas de l'énoncé que nous allons étudier au paragraphe V.4.4. Le *cinquième cas* peut être éventuellement considéré comme un cas limite du précédent: *on pense qu'il n'y a pas, ou plus, de contre-exemple¹¹⁸, mais on ne parvient pas à prouver l'énoncé*. Ce dernier est conservé comme conjecture en attente d'une preuve ou d'une réfutation, parfois pendant plusieurs siècles. Certains de ces énoncés sont prouvés (conjecture de Fermat) ; pour d'autres on montre qu'ils sont indécidables (hypothèse du continu¹¹⁹), tandis que d'autres restent en attente (conjecture de Goldbach)¹²⁰.

¹¹⁷ Par exemple, collection Cinq sur cinq, hachette Education 3° (1999) : « Vrai ou faux ? Quel que soit l'angle aigu α , les nombres $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ et $\tan \alpha$ sont plus petit que 1 » (p.171)

¹¹⁸ On les a catégorisés et il reste un énoncé général sur un domaine restreint dont on pense qu'il est vrai.

¹¹⁹ L'hypothèse du continu est le nom donné à la proposition : « Il n'existe pas d'ensemble dont le cardinal soit compris strictement entre le cardinal de l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels et le cardinal de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, égal à « deux exposant cardinal de \mathbb{N} ». Cantor a conjecturé que cette proposition était vraie et Cohen a montré en 1963 que cet énoncé est indécidable dans la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel. (source Bouvier & al. 1983 et Delahaye 1994).

¹²⁰ Il s'agit de l'énoncé : « Tout entier pair supérieur ou égal à 4 est somme de deux nombres premiers ». Cette conjecture résiste depuis 1742. (Source Bouvier & al. 1983)

Ceci illustre selon nous le fait qu'il faut distinguer entre l'application *rigide* d'une règle et son application *pragmatique*. Nous faisons ainsi l'hypothèse qu'une des différences essentielles entre la logique de sens commun et la logique formelle, vis-à-vis de cette règle, tient précisément à ce que la première étant associée à l'action, elle s'intéresse non pas tant à la règle elle-même qu'à son *application*. Notons bien qu'en aucun cas, les situations évoquées ne transgressent la règle du contre-exemple. Les différents cas examinés le sont sous un angle *sémantique*, qui concerne les objets qui satisfont la phrase ouverte associée à l'énoncé universel. Selon les cas, cela peut concerner un ou plusieurs objets, voire même, pour des énoncés plus complexes, nécessiter de mobiliser le calcul des prédicats du second ordre. Les décisions qui sont prises relèvent clairement selon nous du niveau pragmatique, ce qui d'une certaine manière fait descendre la question de la *transposition didactique* jusqu'au niveau de l'activité effective du mathématicien. Il s'agit en effet d'une problématique bien connue des chercheurs en didactique des mathématiques dont l'objet d'étude est *l'intégration de situations de recherche en classe*¹²¹. Une des questions les plus difficiles est celle de savoir quels indicateurs permettraient de décider que l'activité de l'élève est effectivement, ou non, de nature mathématique, au sens du chercheur. Des réponses sont recherchées du côté de la nature de la question, de son ouverture, du fait que l'élève ne possède pas les connaissances nécessaires pour résoudre. Nous pensons également que *la nature de la prise de décision devant un résultat obtenu* est un indicateur important pour aborder cette question.¹²²

V.3.2. la règle du contre-exemple et la déduction

Il est tout à fait clair que l'importance que revêt la règle du contre-exemple en mathématiques tient à son rôle vis-à-vis de la déduction, dans un sens que nous allons préciser ci-dessous. Etant donnée une phrase ouverte, une structure interprétative \mathcal{M} , et un sujet qui s'interroge sur la valeur de vérité, dans cette structure, d'une instance de cette phrase ouverte, nous notons $F(x)$, la formule du calcul des prédicats dont cette phrase est une interprétation, a un élément générique de l'univers discours et $F(a)$ l'instance de $F(x)$ considérée. $F(a)$ est donc une proposition de la structure \mathcal{M} . Plusieurs cas peuvent se produire selon que \mathcal{M} est un modèle de « $\forall x F(x)$ », donc de « $\exists x F(x)$ » ou non, et que le sujet sait ce qu'il en est à ce sujet.

1. \mathcal{M} est un modèle de $\forall x F(x)$ et le sujet le sait ; il peut affirmer $F(a)$.
2. \mathcal{M} est un modèle de $\exists x F(x)$ et le sujet le sait ; il peut affirmer $\exists F(a)$.

¹²¹ Grenier et Payan (2003).

¹²² Ces questions sont travaillées au sein de l'ERTE « Maths à modeler ».

3. \mathcal{M} n'est pas un modèle de $\forall x F(x)$ et \mathcal{M} est un modèle de $\exists x F(x)$ et le sujet le sait ; il ne peut alors rien dire quand à la vérité de $F(a)$ sans informations supplémentaires. Il est alors renvoyé à ses connaissances éventuelles sur la situation ; dans certains cas, il ne pourra pas lever la contingence de l'énoncé pour lui-même. Ce cas-là est évidemment très défavorable. C'est ce qui se produit dans le cas du labyrinthe pour les phrases 3 et 6, où rien dans la situation ne permet de se prononcer sur la vérité de ces deux phrases si on les considère comme des instances d'une phrase ouverte. Cependant comme le montre Lakatos (1976) les efforts pour éliminer ces situations contribuent largement aux processus de découverte en mathématiques. Notons qu'il se peut aussi que le sujet ne sache pas dans quel cas on se trouve. Par exemple, étant donné un théorème conditionnel, le sujet peut ne pas savoir si la réciproque est aussi un théorème, et ceci particulièrement dans le cadre scolaire où, depuis un certain nombre d'années, en France, les programmes du second degré recommandent de scinder toutes les équivalences en deux théorèmes.

Nous avons abordé ci-dessus un type de déduction de nature clairement sémantique, puisque le sujet se place dans un modèle, et que l'on s'interroge sur la question de la satisfaction d'une phrase ouverte par un élément. Nous pensons pouvoir dire, sans risquer de nous tromper, que ce type d'inférence ne fait pas, en général, dans la classe de mathématiques, l'objet d'une explicitation, ce que nous allons retrouver au paragraphe suivant. Si nous nous intéressons maintenant au pas fondamental de la déduction en mathématiques, « $\forall x (p(x) \rightarrow q(x))$; or $p(a)$; donc $q(a)$ », nous voyons qu'il s'agit simplement du cas particulier où le prédicat $F(x)$ est de la forme « $p(x) \rightarrow q(x)$ ». En effet, lorsque la structure \mathcal{M} est un modèle de l'énoncé « $\forall x (p(x) \rightarrow q(x))$ », et que le sujet le sait, il peut appliquer, via la proposition vraie « $p(a) \rightarrow q(a)$ », le Modus Ponens. Par contre, dès lors que la structure \mathcal{M} n'est ni un modèle de l'énoncé « $\forall x (p(x) \rightarrow q(x))$ », ni un modèle de sa négation, et que le sujet le sait, la valeur de vérité d'une instance générique de « $p(x) \rightarrow q(x)$ » est contingente pour le sujet (il ne peut pas la déterminer sans information supplémentaire) ; il ne pourra donc pas faire de déduction : la connaissance de la vérité de $p(a)$ ne permet pas d'affirmer la vérité de $q(a)$; il se peut cependant que l'énoncé « $p(a) \rightarrow q(a)$ » soit vrai ; auquel cas, dès lors que « $p(a)$ » est vrai, le Modus Ponens s'applique et $q(a)$ est également vrai. Cependant si l'énoncé « $p(a) \rightarrow q(a)$ » est contingent pour le sujet (il n'a pas les moyens avec les informations dont il dispose de savoir que cet énoncé est vrai), il ne peut pas appliquer le Modus Ponens. Ceci montre clairement que la question de la rigueur ne peut pas être traitée *indépendamment des connaissances du sujet*, et que les lois logiques ne valent, pour le sujet, que par les

applications qu'il peut en faire dans des circonstances données. Il est clair que nous ne sommes plus ici dans un point de vue sémantique, mais dans un point de vue *pragmatique* qui concerne les relations entre les signes et ceux qui les utilisent. Un exemple éclairant à l'université concerne le fait que la relation d'équivalence en un point des fonctions réelles définies au voisinage de ce point n'est pas compatible avec l'addition. On ne peut donc pas « \square ajouter les équivalents \square ». Or cette pratique est très résistante chez les étudiants, qui utilisent la compatibilité comme un *théorème en acte*, d'autant plus stable que l'énoncé ouvert correspondant a beaucoup d'exemples et qu'y renoncer rend nécessaire de faire des calculs souvent longs et fastidieux.

V.4. Le tiers exclu en question dans la classe de mathématiques

V.4.1. Syntaxe, sémantique et pragmatique : à propos du tiers exclu

Comme nous avons déjà eu l'occasion de le dire le tiers exclu est une loi logique, qui doit être distinguée du principe de bivalence. Affirmer le principe de bivalence, c'est affirmer que *tout énoncé est soit vrai, soit faux*. Affirmer le tiers exclu, c'est affirmer que la *disjonction d'un énoncé et de sa négation est nécessairement un énoncé vrai*, en raison de sa structure logique. Cette position est déjà celle d'Aristote qui écrit dans le livre II de l'*Organon* à propos de «*L'opposition des futurs contingents*» :

« \square Chaque chose nécessairement est ou n'est pas, sera ou ne sera pas, et cependant, si on envisage séparément ces alternatives, on ne peut pas dire laquelle des deux est nécessaire. Je prends un exemple. Nécessairement, il y aura une bataille navale demain ou il n'y en aura pas \square mais il n'est pas nécessaire qu'il y ait une bataille demain, pas plus qu'il n'est nécessaire qu'il n'y en ait pas. Mais qu'il y ait ou qu'il n'y ait pas demain une bataille navale, voilà qui est nécessaire. (...) Par suite, il n'est évidemment pas nécessaire que deux propositions¹²³ opposées l'une soit vraie et l'autre fausse. (II,9,19a 25-35)

En philosophie logique, les débats sur le tiers exclu sont nombreux. Nous avons examiné, dans le chapitre 5 de notre thèse, quelques points de ce débat que nous ne reprendrons pas

¹²³ Ceci suppose que *proposition* soit utilisé ici en un sens plus large que le sens logique habituel, les propositions étant précisément les entités linguistiques portant le vrai ou le faux.

ici¹²⁴. La position que nous adoptons est proche de celle d'un auteur comme Quine (1990) pour qui :

« Il arrive communément qu'un énoncé puisse être rendu éternel de manières divergentes en réfléchissant les intentions d'un locuteur dans des situations différentes. Ici, ce sont plutôt les émissions respectives qui sont vraies ou fausses, y compris sous leur forme complètement élaborée et non ambiguë. L'énoncé ambigu original n'est alors ni vrai, ni faux, mais cela ne doit pas être considéré comme une violation du tiers exclu ☐ on y percevra plus justement un inachèvement qui demande à être parfait d'une manière ou d'une autre. ☐ (pp.130-131)

Dans l'activité mathématique, on rencontre fréquemment des énoncés pour lesquels l'information disponible ne permet pas de conclure quant à la vérité de l'énoncé. Nous en avons vu un exemple avec la situation du losange : compte tenu des informations disponibles, la phrase « *le quadrilatère (A,B,C,D) est un losange* » n'a pas de valeur de vérité, c'est pourtant une expression bien formée et douée de sens en mathématiques ; il en est de même de la phrase « *le quotient de deux fonctions numériques de limite nulle est une fonction de limite nulle* ». Dans l'exemple du labyrinthe, comme il est indiqué que le trajet a été effectivement réalisé, chacune des phrases proposées a une valeur de vérité ; cependant, pour les phrases n°3 et n°6, celui qui doit répondre à la question n'a pas le moyen de se prononcer ; ici c'est l'ignorance du sujet qui laisse la vérité en suspens. Plus précisément, l'analyse sémantique montre que suivant les contextes, ces deux phrases peuvent être soit vraies, soit fausses. Pour trancher sur la valeur de vérité de ces deux phrases, il faudrait soit connaître le trajet effectué, soit avoir des informations supplémentaires (il a pris le plus court chemin), soit introduire une notion de nécessité comme le font les auteurs pour la phrase n°6. On voit bien d'ailleurs que dans le cas d'une situation artificielle comme celle-là, on peut jouer sur un certain nombre de variables pour fermer la situation (i.e. faire en sorte que l'on puisse toujours se prononcer sur la vérité des phrases sans avoir besoin de connaître le trajet). Quant à l'exemple tiré du Kangourou des mathématiques, présenté et analysé dans la partie II, la question de la vérité ou la fausseté de certaines phrases ne pouvait pas être stabilisée au moment où les élèves remplissaient la questionnaire, dans la mesure où chaque personne qui répond peut modifier la

¹²⁴ En particulier, nous ne discuterons pas ici la position intuitionniste. Comme il apparaît clairement dans tout ce qui précède, nous nous plaçons résolument dans le cadre de la logique classique du calcul des prédicats du premier ordre.

valeur de vérité de certaines phrases. Il ressort de ceci que l'on retrouve, en considérant l'usage du tiers exclu, les trois catégories qui nous intéressent ici : *syntactique* (le tiers exclu est une loi logique et sa vérité *se montre* dans sa structure logique), *sémantique* (le fait de pouvoir établir la vérité de l'un des deux termes de l'alternative dépend de l'univers du discours, comme dans le cas du losange) et *pragmatique* (dans une situation donnée, la possibilité de se prononcer sur la valeur de vérité de l'un des deux termes de l'alternative dépend non seulement de la possibilité d'une telle valeur de vérité mais aussi de l'état des connaissances du sujet, de l'interprétation de l'énoncé, de la situation ...). De notre point de vue, ceci rend nécessaire que l'on reconnaisse que, dans la classe de mathématiques, *les énoncés contingents* jouent un rôle important. Soit qu'un tel énoncé n'ait pas à proprement parler de valeur de vérité (point de vue *sémantique*), soit qu'il ait une valeur de vérité mais que le sujet n'ait pas, *ici et maintenant*, les moyens de se prononcer sur la valeur de vérité d'un tel énoncé (point de vue *sémantique* et *pragmatique*). En accord avec Quine (1990), nous disons que cela ne remet pas en cause le principe du tiers exclu.

V.4.2. Plusieurs expressions du tiers exclu dans le calcul des prédicats

Dans le calcul des prédicats qui, rappelons-le, englobe le calcul des propositions, on peut proposer quatre expressions du tiers exclu :

<i>Calcul propositionnel 1</i>	$p \vee \neg p$	$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel
<i>Calcul des prédicats 2</i>	$p(x) \vee \neg p(x)$	Un nombre réel est rationnel ou n'est pas rationnel
<i>Calcul des prédicats 3</i>	$\forall x (p(x) \vee \neg p(x))$	Tout nombre réel est rationnel ou n'est pas rationnel
<i>Calcul des prédicats 4</i>	$(\forall x p(x)) \vee (\exists x \neg p(x))$	Tout nombre réel est rationnel ou il existe au moins un nombre réel qui n'est pas rationnel

La première forme est celle du calcul des propositions, c'est le principe de base, celui qui est rejeté par les intuitionnistes¹²⁵ et qui sert à construire les trois autres. Ce principe est fondateur dans la construction du calcul des propositions d'un point de vue sémantique (à la manière de Wittgenstein, 1921). Dans ce système affirmer le tiers exclu « $p \vee \neg p$ » revient à affirmer l'un des deux énoncés. Ainsi, dans ce système, le tiers exclu et le principe de bivalence sont « solidaires¹²⁶ ». L'énoncé 2 du calcul des prédicats affirme la nécessité de la disjonction pour des énoncés ouverts ; nous avons utilisé cette propriété pour définir une extension de la négation dans le calcul des prédicats. En mathématiques, il sert en particulier à faire des démonstrations par disjonction des cas. L'énoncé 3 du calcul des prédicats exprime le fait que la validité universelle pour une phrase ouverte se transmet à sa clôture universelle. Le dernier énoncé s'obtient par substitution à « p » de l'énoncé clos « $\forall x p(x)$ » dans l'énoncé 1 et est une conséquence de l'énoncé universellement valide « $(\forall x Fx) \vee (\exists x \neg Fx)$ » qui sert à définir la négation d'un énoncé universel dans le calcul des prédicats. Il est naturellement associé à la règle du contre-exemple.

Nous avons vu dans l'exemple précédent que la confrontation à un *état de chose* donné d'une contradiction apparente conduisait à raffiner l'analyse logique afin d'ouvrir la possibilité d'une solution. L'exemple suivant montre comment la catégorisation proposée permet d'aborder la question de la rationalité des élèves. Avant d'analyser la situation elle-même, nous allons commenter et présenter ce qui sert de toile de fond à toutes les situations présentées dans l'ouvrage auquel nous nous référons.

V.4.3. Les règles du débat : des formulations ambiguës

La situation que nous allons analyser au paragraphe suivant est extraite de la brochure *Initiation au raisonnement déductif au collège* publiée par l'IREM de Lyon en 1992¹²⁷. Il s'agit d'un ouvrage collectif dont les auteurs sont des enseignants : universitaires, professeurs de collège et de lycée. Les analyses des auteurs s'appuient sur de nombreuses

¹²⁵ Ils refusent en particulier certaines démonstrations construites sur la disjonction des cas, comme la démonstration suivante de l'existence d'un couple (a,b) de nombres irrationnels tels que a^b soit rationnel : soit le couple $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ répond à la question, soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ n'est pas rationnel ; mais dans ce cas, le couple $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ répond à la question puisque $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}$ sont irrationnel et $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$. Cette démonstration est rejetée par les intuitionnistes car on ne démontre aucun des deux termes de l'alternative.

¹²⁶ On ne peut pas rejeter le principe de bivalence et conserver à la fois le tiers exclu et le principe d'extensionnalité

¹²⁷ Arsac et al. 1992

expérimentations conduites dans le cadre de recherches sur l'innovation « *problème ouvert* ». Ces travaux sont étroitement articulés avec les travaux sur *la preuve* de Balacheff (1988) et les travaux *sur le débat scientifique* de Legrand (1993). Le sous-titre de l'ouvrage en précise l'objet : il s'agit de présenter *Une suite de situations permettant l'appropriation des règles du débat mathématique*. Les cinq règles proposées s'adressent à des élèves des classes de sixième et cinquième (élèves de 11 à 13 ans) de l'enseignement français, donc avant l'apprentissage de la démonstration. Nous en énonçons trois¹²⁸ que nous commentons brièvement.

Première règle : Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux.

Comme nous l'avons vu plus haut, cette règle correspond au principe de bivalence du calcul des propositions : elle s'applique aux propositions, au sens logique du terme, qui sont précisément les énoncés susceptibles de porter le vrai ou le faux, et par conséquent, dans le calcul des prédicats, elle ne s'applique qu'aux énoncés clos, sans variable libre. Les auteurs quant à eux considèrent qu'il s'agit du principe du tiers exclu et notent que « ce principe n'est pas toujours appliqué dans la vie courante. Pour un élève, un énoncé peut être parfois vrai, parfois faux, vrai à 90%¹²⁹ » (p.14). Nous verrons en effet apparaître ce type d'affirmation dans l'exemple étudié au paragraphe suivant.

Deuxième règle : Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé

Par rapport à la règle que nous avons donnée plus haut, cette formulation est plus concise. Elle répond aux contraintes du niveau auquel elle est proposée (6^o et 5^o, 11-13 ans), mais elle est pour le moins ambiguë. En effet, cette règle, qui correspond à l'expression n°4 du tiers exclu dans le calcul des prédicats, s'applique exclusivement aux énoncés universellement quantifiés, ce qui n'est pas spécifié. En outre, les contre-exemples concernent les énoncés ouverts associés, et non pas l'énoncé universel clos. Cette ambiguïté se retrouve dans la formulation de la règle suivante :

Troisième règle : En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai.

¹²⁸ Les auteurs indiquent cinq règles, l'une concerne spécifiquement les situations de géométrie, que nous n'abordons pas ici ; l'autre est une métarègle qui précise que pour débattre on s'appuie sur des définitions et des propriétés.

¹²⁹ Notons que Vuillemin (1988) propose une interprétation probabiliste des futurs contingents d'Aristote dont une présentation se trouve dans notre thèse au chapitre 4.

De même que les contre-exemples, les exemples concernent l'énoncé ouvert et, ici encore, la règle s'applique uniquement aux énoncés universels, sous réserve que le domaine d'objets correspondant soit un ensemble infini (cette définition du mot *énoncé* est assumée par les auteurs). D'autre part, cette phrase est syntaxiquement incorrecte, du point de vue des règles de la grammaire française. En effet, le pronom « *il* » devrait renvoyer à l'occurrence du terme « énoncé » qui apparaît dans le premier membre, or tel n'est pas le cas puisque cette occurrence du terme « énoncé » renvoie à l'énoncé ouvert, tandis que le pronom « *il* » renvoie à la clôture universelle de cet énoncé ouvert. Ceci sera encore plus clair si on substitue à « vérifier » l'expression synonyme « rendre vrai ». La règle se traduit alors par la phrase : « En mathématiques, des exemples qui rendent *vrai* un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est *vrai*. »

Sur le plan logique, cette règle est une conséquence du fait que « $(F(x)) \sqsupset (\forall x F(x))$ » n'est pas une formule universellement valide du calcul des prédicats. Elle est cependant consistante, au sens où elle a de nombreux modèles. En outre la formule $(F(x)) \sqsupset (\exists x F(x))$ est universellement valide, si bien que, si nous considérons un énoncé existentiel, la règle énoncée n'est pas correcte.

Pour que ces deux règles soient opératoires pour un utilisateur potentiel, il apparaît donc indispensable de marquer dans la formulation leur domaine de validité. On peut proposer par exemple :

Un contre-exemple, pour une propriété s'appliquant à plusieurs éléments, suffit à prouver que cette propriété n'est pas vérifiée par tous les éléments.

En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas, en général¹³⁰, à prouver qu'il est vérifié par tous les éléments.

Une des difficultés majeures rencontrées à ce niveau par les élèves est liée à la dissymétrie entre le vrai et le faux, qui apparaît clairement dans l'énoncé de ces deux règles. Nous disons que cette difficulté est renforcée par les pratiques mathématiques ordinaires concernant la gestion du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. Nous en avons déjà parlé à propos du Kangourou et du Labyrinthe. L'exemple qui suit illustre cette thèse et montre que d'autres choix didactiques sont possibles.

¹³⁰ Cette précision nous semble nécessaire ; il n'est en effet pas rare de voir, en première année d'université, des étudiants considérant que la vérification « à la main » de tous les cas lorsque l'on travaille avec un « petit » ensemble fini ne fournit pas une preuve de l'énoncé universel associé.

V.4.4. Les règles du débat à l'épreuve

La situation que nous allons étudier maintenant est la situation n°1 proposée dans la rubrique *Nombres et démonstration* (pp. 25-48), qui comprend deux situations ; celle que nous allons étudier porte le titre suivant : *Plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver : $n^2 - n + 11$.*

Cette situation a été expérimentée avec des élèves de cinquième. Elle se place dans la filiation de l'innovation *problème ouvert* développée à l'IREM de Lyon en reprenant en particulier la gestion de la classe qui se déroule en quatre temps:

« 1er temps : recherche individuelle

2ème temps : recherche en groupe. Cette recherche s'achève par la production d'une affiche présentant le résultat et les idées du groupe et une explication pour convaincre les autres de la validité de leurs résultats.

3ème temps : débat sur les affiches.

4ème temps : Synthèse sur les règles du débat et (ou) sur l'insuffisance de certaines preuves qui ont été mises en évidence au cours du troisième temps. » (p 19)

En outre la gestion de la classe doit remplir les deux conditions suivantes :

« Il doit y avoir un enjeu qui incite les élèves à s'assurer de la validité du résultat produit. Cet enjeu, qui ne doit pas être lié à l'enseignant, est généralement lié à la compétition entre les groupes qui s'instaure naturellement.

Le professeur, par son attitude, n'induit ni méthode, ni résultat. Entre autres, il ne dit pas si les solutions proposées sont exactes ou pas : c'est la classe qui en débattera. Evidemment après le débat, le professeur dira si les solutions, les explications retenues sont correctes ou non. » (p.18)

L'énoncé est donné aux élèves sous la forme ci-dessous :

Dans l'expression $n^2 - n + 11$,
si on remplace n par n'importe quel entier naturel,
obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ?

Cette activité vise, selon les auteurs, deux objectifs spécifiques :

« - Institutionnalisation de la règle : « un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux. »

- Institutionnalisation de la règle : « Des exemples mêmes nombreux ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé mathématique est vrai ». » (p 27)

Il s'agit donc a priori d'institutionnaliser les règles n°2 et n°3. En fait nous verrons que sous la pression des élèves, le professeur va institutionnaliser la règle n°1¹³¹.

L'énoncé proposé est un énoncé clos universellement quantifié et l'univers du discours est l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels ; l'énoncé ouvert correspondant est vérifié par les entiers de 0 à 10; il n'est pas vérifié par 11, ni par aucun multiple de 11; il a d'autres contre-exemples, comme les nombres 12 ou 25. On ne sait pas caractériser la classe des contre-exemples. On peut prévoir que le contre-exemple 11 apparaîtra au moins dans certains groupes. Nous n'étudions pas ici l'analyse faite par les auteurs de la situation. Nous allons nous intéresser à l'affiche produite par l'un des groupes et aux extraits du débat auquel elle a donné lieu, dont les auteurs ont donné la transcription dans l'ouvrage.

Les modalités d'organisation du débat sont présentées comme suit (p.30) :

Le professeur choisit une première affiche. Il la présente à la classe.

- Il demande aux élèves d'en prendre connaissance et de poser des questions liées à la compréhension du texte (en classe entière).
- Il invite chaque groupe à donner son avis par l'intermédiaire du porte-parole du groupe sous forme d'une phrase commençant par :

Nous sommes d'accord car ...

ou Nous ne sommes pas d'accord car...

- Il note au tableau les arguments de chaque groupe en regroupant les pour et les contre
- Le débat s'instaure au niveau de la classe sur la validité des arguments produits.

Au moment opportun (c'est un choix décisif), le professeur arrête le débat et propose une autre affiche.

L'affiche retenue pour notre analyse est l'affiche A (p.34)

OUI

¹³¹ Ceci renvoie à *notre* numérotation des règles.

Le résultat n'a toujours que deux diviseurs car c'est toujours un nombre premier (donc impair), car le premier résultat (qui est $N \times N - N$) est égal à un nombre pair donc celui-ci $+ 11 =$ un nombre premier (impair).

1er résultat = un nombre pair parce que $N \times N - N$ égal N multiplié par son premier nombre inférieur :

Exemple :

$$5 \times 5 - 5 + 11 = 20 + 11 = 31 \qquad 5 \times 4$$

$$8 \times 8 - 8 + 11 = 56 + 11 = 67 \qquad 8 \times 7$$

En commentaire de l'affiche, les auteurs de l'article écrivent :

« Affiche contenant deux exemples et un essai d'explication du résultat impair (il y a confusion entre impair et premier.) »

Les arguments avancés par les élèves des autres groupes pour cette affiche sont les suivants (p.36) :

« Nous ne sommes pas convaincus :

- car si on remplace n par 11 , 121 a trois diviseurs
- car il n'y a que deux exemples, rien ne prouve qu'avec d'autres nombres cette théorie marche.
- car le premier paragraphe est mal rédigé, mais l'idée est bonne.
- car l'explication n'est pas claire. »

Les extraits du débat, proposés par les auteurs dans la brochure (p.39-45), correspondent à la discussion des arguments à propos de l'affiche A. Pour notre analyse, nous avons numéroté chaque intervention dans l'ordre d'apparition de 1 à 100. Les renvois correspondent à cette numérotation. Plusieurs aspects peuvent se dégager de ce débat □ nous en avons retenu essentiellement trois qui concernent a) le nombre de contre-exemples nécessaires pour invalider un énoncé ; b) la possibilité ou non pour un énoncé d'être à la fois vrai et faux et c) la fréquence d'apparition de l'expression *toujours* □ dans les arguments des élèves.

Dès le début du débat, une élève donne le contre-exemple 11 (4); le groupe auteur se défend et demande d'autres contre-exemples, en particulier Marie (16, 18 et 19)

(19) Marie : *Il faut qu'il trouve d'autres contre-exemples pour ce qu'il a dit (..)*

Après qu'un élève ait réaffirmé que 11 est un contre exemple, Stéphanie intervient :

(29) Stéphanie : *Oui, mais il n'y a peut-être que cette exception. Il faut qu'il nous en trouve d'autres alors.*

Et Marie ajoute :

(31) Marie : *On n'a pas pensé à 11 mais ...s'il y en a d'autres, on serait d'accord avec ce qu'il dit, mais...*

Les auteurs écrivent en commentaire :

« Les élèves ne sont pas d'accord sur le nombre d'exceptions nécessaires pour invalider un énoncé mathématique. » (p 42)

Nous dirions plutôt que certains d'entre eux ne sont pas d'accord pour rejeter un énoncé ayant un seul contre-exemple. Les interventions suivantes de Marie semblent confirmer cette hypothèse :

(40) Elève : *Y a une exception, donc c'est pas toujours !*

(41) Marie : *Ça a été reconnu. A part ça, c'est toujours un nombre premier. Si on éliminait 11 ben...*

et encore

(63) Marie : *Oui mais 22, c'est le double de 11, on peut peut-être essayer 33, à mon avis ce sera aussi une exception.*

(76) Marie : *Ça devient plus des exceptions, parce que 22, 33 c'est tout des multiples.*

Ces interventions de Marie peuvent s'interpréter en considérant une application *pragmatique* de la règle. Elle ne veut pas renoncer à la vérité de l'énoncé, et pour le préserver elle propose d'éliminer 11 et ses multiples. Elle accepte de rejeter l'énoncé seulement quand un élève produit le contre-exemple 25 :

(64) Marie : *Je crois qu'ils ont gagné, parce qu'il y a aussi 25 comme exception.*

Le professeur ne comprend pas tout de suite pourquoi Marie est convaincue par 25 ; il semble penser que c'est une question de *nombre d'exceptions* ; nous pensons que 25 est un contre-exemple convaincant car il apparaît ici comme *crucial*¹³², sans doute parce que contrairement à 11 et à ses multiples, on ne peut pas le rattacher directement à l'énoncé, et qu'il est donc d'une certaine manière *imprévisible*.

¹³² Dans la typologie des preuves, Balacheff(1987) appelle expérience cruciale un processus qui consiste à vérifier une proposition sur un cas pour lequel on ne se fait pas de cadeau. Il nous semble que l'expérience de Marie est de ce type, bien qu'elle n'ait pas elle-même construit le contre-exemple 25.

Au cours du débat, on voit également se dessiner une attitude de refus du rejet de l'énoncé chez Géraldine. C'est elle qui, au début, a donné le contre-exemple *II*. Au bout de quelques échanges, elle intervient à nouveau dans le débat :

(36) Géraldine : *C'est vrai, il n'y a que II comme exception. Mais c'est pas entièrement juste, mais pas entièrement faux non plus.*

Les auteurs écrivent :

« Ainsi pour Géraldine, un énoncé mathématique peut être à la fois vrai et faux. » (p 42)

Nous avons déjà dit que ceci est correct si l'énoncé considéré est en fait l'énoncé ouvert et que ce que l'on veut dire par là c'est que certaines instances sont vraies et d'autres fausses, ce qui est le cas ici. La prise en compte du niveau sémantique, ici la satisfaction d'une phrase ouverte par différents éléments, permet d'ouvrir la possibilité que Géraldine ne soit pas « illogique ». Bien sûr nous n'avons pas les moyens de savoir précisément ce que « Géraldine veut dire », mais comme nous l'avons dit plus haut, nous suivrons Quine et plutôt que d'attribuer à Géraldine la croyance que « $(\exists aFa) \wedge (\forall b \neg Fb)$ », qui ne recèle pas de contradiction puisque les deux membres ne sont pas la négation l'un de l'autre. La divergence linguistique peut selon nous légitimement être invoquée ici, et ceci d'autant plus que les autres interventions de Géraldine semblent confirmer la pertinence de cette interprétation :

(51) Géraldine : *Ça peut être autant oui que non, je pense, parce que tous les autres nombres c'est oui, alors pourquoi?*

(87) Géraldine : *Une seule exception, s'il n'y a que ça, c'est vrai que c'est pas entièrement faux ni pas entièrement vrai.*

Dans l'intervention (51), Géraldine évoque la réponse obtenue pour les instances de l'énoncé ouvert pour justifier le fait de ne pas choisir entre *oui* et *non*. Les deux interventions de Géraldine montrent la stabilité de sa position au cours du débat, alors que, à plusieurs reprises, des élèves interviennent pour défendre le fait que l'énoncé est faux. Pour ces derniers, l'argument utilisé de façon récurrente est qu'il y a *toujours* dans l'énoncé :

(38) Elève : *Dans l'énoncé, c'est marqué toujours. On peut pas dire que c'est toujours.*

(40) Elève : *Y a une exception donc c'est pas toujours.*

(44) Cécile : *La question était : « Est-il un nombre qui a toujours exactement deux diviseurs? » (...)*

(45) Elève : *C'est pas toujours juste.*

(49) Elève : *C'est marqué toujours, donc on répond non, c'est pas toujours.*

(56) Sébast. : *Je dirais plutôt que c'est faux, s'ils mettent que le résultat n'a toujours que deux diviseurs, c'est faux, puisqu'ils ont dit qu'il y avait des exceptions, c'est pas toujours.*

On voit se dessiner dans ce qui précède deux grandes catégories d'élèves (parmi ceux qui s'expriment) : ceux qui explicitent la quantification universelle et qui, pour cette raison, déclarent l'énoncé faux et ceux qui insistent sur la présence simultanée d'exemples et de contre-exemples. Nous insistons cependant sur le fait qu'il ne s'agit pas ici de *décrire* les modes de raisonnements des sujets, mais de proposer *un cadre théorique* permettant d'interpréter les traces, essentiellement linguistiques, de ces raisonnements et de se donner les moyens de reconstruire *a posteriori* la *rationalité* des élèves. Il est clair que cette posture du chercheur n'a rien à voir avec celle du maître dans la classe qui gère «*En direct*» les échanges. Cependant, nous pensons que les interventions de l'enseignant mettent en évidence une posture assez classique vis-à-vis de la question du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. En effet, au cours du débat, l'enseignant intervient à plusieurs reprises pour reprendre les interrogations des élèves sur le vrai et le faux :

(36) Prof. : *Alors c'est pas entièrement juste, et pas entièrement faux.*

(46) Prof. : *Alors est-ce que c'est faux, est-ce que c'est pas toujours faux? est-ce que c'est ...parfois vrai, parfois faux?*

(79) Prof. : *Donc tu penses maintenant, donc, ce n'est pas toujours vrai.*

(81) Prof. : *Donc à partir du moment où il n'y a qu'une exception c'est non.*

Après cette dernière intervention, le professeur demande si tous les élèves sont d'accord. Géraldine répond *non*. Le professeur pose alors la question suivante :

(89) Prof. : *Ce qu'on pourrait peut-être poser comme question là, je crois que c'est ce qui intervient ici. Est-ce que vous pensez qu'une propriété ou une phrase peut être à la fois vraie et à la fois fausse en mathématiques?*

(90) Elève : *Non*

Ce qui est remarquable dans cette intervention, c'est le fait que n'apparaisse pas le mot *toujours* qui, d'une part, comme on l'a vu, est l'argument avancé par les élèves convaincus et qui, d'autre part, légitime l'affirmation de l'enseignant. Tout se passe comme si, pour l'enseignant, la quantification était tellement incorporée aux énoncés mathématiques qu'il n'est pas nécessaire de l'expliciter. Or, dans la question elle-même, il y a une ambiguïté

sur les mots «*propriété*» et «*phrase*», tout d'abord, une propriété n'est pas *vraie*, ou *fausse*, elle est *vérifiée* (*possédée*) ou *non* par un objet auquel elle est susceptible de s'appliquer ; ceci vaut aussi pour les objets de type supérieur comme les structures. Ici, si l'on parle de propriété, c'est bien d'une propriété de structure qu'il s'agit ; ceci correspond au fait que l'énoncé proposé est faux dans l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels (l'ensemble \mathbb{N} muni des propriétés de l'arithmétique élémentaire n'est pas un modèle de cet énoncé), tandis que si l'on se restreint aux entiers de 1 à 10, on obtient un modèle de cet énoncé. D'autre part, le mot *phrase* a, dans la langue, un sens beaucoup trop large pour être utilisé comme synonyme de *proposition* : en effet de très nombreuses phrases ne sont pas susceptibles de recevoir de valeur de vérité ; non seulement des phrases interrogatives, ou exclamatives, mais aussi certaines phrases déclaratives en raison d'une ambiguïté référentielle comme on l'a vu précédemment. Un élève répond cependant explicitement à la question posée par l'enseignant (95) Alex. : *C'est ou vrai, ou faux, ça peut pas être les deux à la fois.*

Alexandre affirme « \square principe du tiers exclu¹³³ » et solidement « \square principe de non-contradiction» que le professeur va institutionnaliser (98 et 100), sans expliciter la quantification universelle. A la suite de l'intervention d'Alexandre, un autre élève fait une remarque significative qui est reprise par l'enseignant :

(97) Sébast. : *En maths, c'est comme ça ! (rires)*

(98) Prof. : *Donc tout le monde est d'accord avec ça. En mathématiques, Sébastien a dit en mathématiques, c'est soit vrai, soit faux, ça ne peut pas être les deux en même temps. Est-ce que tout le monde est d'accord avec ça?*

(100) Prof. \square *Alors effectivement c'est une règle, comme a dit Sébastien, je trouve qu'il l'a bien dit. En mathématiques, pour que tout le monde soit d'accord, on s'est mis d'accord, les propriétés ne sont jamais à la fois vraies et fausses; On ne peut pas avoir à la fois vrai et à la fois faux. Alors ce qui nous reste à discuter, peut-être c'est...bon, est ce qu'un seul exemple, comme par exemple on avait trouvé 11, est-ce qu'un seul exemple permet de décider?*

La remarque de Sébastien, qui est validée par l'enseignant, nous semble témoigner de la confusion qui règne encore pour certains élèves et qui nécessite l'usage d'un *argument d'autorité*, dont on pourrait se passer en explicitant la quantification. Le fait que certains élèves n'aient pas été convaincus par l'argument selon lequel puisqu'il y a une exception, l'énoncé est faux, apparaît lorsque, à la suite du débat, lors d'une autre séance, le professeur

¹³³ Ou plutôt, comme nous l'avons dit plus haut, le principe de bivalence.

demande à chaque élève de rédiger sa solution individuelle au problème. En effet, si tous les élèves répondent que l'énoncé est faux, et sauf un élève, citent le contre-exemple 11, huit élèves donnent le contre-exemple 25 et deux élèves donnent à la fois un exemple et un contre-exemple. On retrouve donc dans ces réponses les éléments du débat.

Si nous revenons maintenant au discours de Marie nous voyons qu'il se déploie tout au long de l'échange avec, dans un premier temps, un refus de renoncer à l'énoncé ; elle rend les armes lorsque le contre-exemple 25 apparaît. La dernière remarque

(91) Marie : *A mon avis pour qu'il n'y ait pas d'exception, le résultat ne devrait pas être supérieur à 100.*

peut laisser penser qu'elle cherche à sauver l'énoncé : en d'autres termes, on pourrait dire qu'elle cherche un *modèle* de l'énoncé. Nous avons vu en effet que jusqu'à la valeur 10 pour n , tous les nombres obtenus sont premiers, le dernier nombre étant 101. On peut donc *préserver* la vérité de l'énoncé en mettant cette restriction (drastique au demeurant). Marie cherche donc d'une certaine manière à déterminer les conditions qui permettent de déclarer l'énoncé vrai, dans une démarche que l'on peut, selon nous, qualifier de *scientifique*, dans la perspective ouverte par les travaux de Lakatos, repris en didactique des mathématiques par Balacheff. En effet, d'un point de vue *pragmatique*, la posture de Marie est tout à fait pertinente ; si les seuls contre-exemples étaient les multiples de 11, on aurait intérêt à énoncer le théorème correspondant.¹³⁴ D'un point de vue didactique enfin, l'analyse des interventions de Marie permet de penser qu'il est possible, au niveau considéré, d'envisager des situations permettant un travail de recherche sur les conditions permettant de déclarer vrai (au sens de toujours vrai) un énoncé ouvert donné. Ceci montre que la dichotomie du vrai / faux érigée en *règle absolue* dans la classe de mathématiques a pour conséquence, paradoxalement, de *fermer* une situation proposée dans le cadre du *problème ouvert*. Dans ce cas, on peut penser que c'est parce que le professeur sait déjà que l'on ne sait pas caractériser les contre-exemples qu'il ferme de la sorte la situation. Un exemple assez proche, à cet égard, est décrit dans Houdebine (1998). L'auteur rapporte une situation de classe dans laquelle il est demandé à des élèves de quatrième (13-14 ans) de se prononcer sur la vérité de plusieurs énoncés conditionnels parmi lesquels l'énoncé ci-dessous :

*Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires, alors c'est un losange.*¹³⁵

¹³⁴ Comme nous l'avons développé au paragraphe V.1.3

¹³⁵ Nous trouvons ici une autre présentation de la situation du losange étudiée au paragraphe III.1.4.2

Il indique que lors d'un travail de groupe, un élève a dessiné un exemple (un losange) tandis qu'un autre élève a dessiné un contre-exemple (un cerf-volant). Les élèves de ce groupe hésitent entre vrai, faux, ni vrai, ni faux pour l'énoncé. L'objectif de l'exercice étant de trier entre les théorèmes et les « non théorèmes », c'est la réponse *non* qui est retenue par le professeur ; de ce fait l'exploration s'arrête. Or on pourrait, au collège, et même au cycle 3 de l'école primaire, proposer des situations de recherche autour des quadrilatères à diagonales perpendiculaires.

Nous retiendrons de cette analyse les points suivants :

1. Bien que, dans cette situation, l'énoncé proposé soit explicitement universellement quantifié, certains élèves semblent s'intéresser à l'énoncé ouvert, qui est de fait l'énoncé avec lequel ils travaillent lorsqu'ils font des essais.
2. Nous avons ici un phénomène d'ambiguïté référentielle liée à la quantification qui se manifeste dans les dialogues. Lors de l'institutionnalisation des règles logiques, l'enseignant n'explique pas la quantification qui permettrait pourtant de lever cette ambiguïté, et ceci alors même que les élèves qui déclarent l'énoncé faux insistent sur la présence du mot *toujours* dans l'énoncé. Tout se passe comme si pour l'enseignant, la quantification implicite *allait de soi*. Or nous avons vu par ailleurs que de nombreux élèves et étudiants ne partagent pas cet implicite, y compris parmi les bons élèves. D'une certaine manière, tout se passe comme si la question de la vérité était *rabattue* sur le niveau syntaxique, qui force à choisir entre le vrai et le faux indépendamment, d'une part, de la situation mathématique étudiée et, d'autre part, de l'état des connaissances des élèves et des divergences possibles d'interprétation de la situation.

Du point de vue du chercheur en didactique des mathématiques, la prise en compte de cette ambiguïté référentielle permet de lever le soupçon d'incohérence à l'égard de certains élèves. Plus généralement, elle montre qu'on peut se dispenser d'attribuer à *la logique de sens commun* des positions *prélogiques*, en reconnaissant dans la classe de mathématiques l'existence d'énoncés contingents. Après la situation du labyrinthe, ceci plaide pour ne pas exacerber¹³⁶ la différence entre *logique de sens commun* et *logique à l'œuvre dans la classe de mathématiques*, ce que la prise en compte des possibilités offertes par une analyse

¹³⁶ Ceci ne signifie pas que nous proposons de nier ces différences ; mais nous pensons qu'il est préférable de les envisager en termes de continuité plutôt que de rupture.

sémantique permet en nous renvoyant sur les aspects pragmatiques de la situation. Ceci permet ainsi d'avancer dans l'interprétation des raisonnements des élèves, au-delà d'un constat d'incohérence, sans pour autant se référer à des considérations psychologiques, dont nous ne nions pas qu'elles puissent jouer un rôle, mais qui se trouvent hors du champ de notre travail.

On pourrait sans doute à bon droit nous faire remarquer que, ce principe de choisir l'interprétation des réponses des élèves qui respecte au mieux l'hypothèse de rationalité, est fondateur du projet de la didactique des mathématiques. Ce que nous disons, c'est que l'analyse logique des situations, telle que nous la proposons, permet de mettre à jour des phénomènes didactiques qui sans cela resteraient cachés, ou difficilement interprétables, comme on le voit dans cette situation. L'exemple précédent montre, en outre, que la prise en compte des énoncés contingents permet de construire des situations ouvertes du point de vue des conditions de détermination de la vérité, au-delà du seul fait de se prononcer sur la valeur de vérité d'un énoncé clos.

V.5. Un exemple de règle pragmatique : la règle de dépendance des variables

La question du niveau de rigueur requis dans la rédaction des démonstrations est une question didactique difficile, à laquelle sont confrontés les enseignants et qui apparaît comme saillante en particulier en situation de correction de copies d'examen. Cette question est étroitement liée à la question de l'équilibre nécessaire, dans une pratique d'enseignement, à un niveau donné, entre l'explicite et l'implicite. Nous avons montré dans les analyses précédentes que les élèves ne partagent pas nécessairement les implicites véhiculés par le discours de l'enseignant, et qu'en outre, une forme de *naturalisation* de ces implicites, sans aucune référence à des arguments de type logique pouvant en fonder la légitimité, peut priver le professeur de la possibilité d'interpréter rationnellement les réponses *inattendues* des élèves. Nous avons vu également à plusieurs reprises que le contrôle de la validité des raisonnements exercés par les experts que sont les enseignants s'appuie, d'une manière générale et y compris à l'université, non sur des considérations logiques mais d'une part sur les connaissances mathématiques en jeu, d'autre part sur des règles de raisonnement pragmatiques plus ou moins explicitées. Pour explorer cette question, nous avons conduit une recherche s'appuyant sur une démonstration de topologie erronée fournie à son professeur par un étudiant considéré comme *brillant par ce professeur*. Nous présentons ci-dessous cette démonstration, les

questions que nous avons posés à un certain nombre d'enseignants susceptibles d'avoir à corriger une telle copie et l'essentiel des résultats obtenus¹³⁷.

V.5.1. Présentation du protocole et première analyse

La démonstration sur laquelle nous allons travailler (voir ci-dessous) est exactement celle proposée par l'étudiant à son professeur. Nous avons ajouté la numérotation des lignes pour faciliter les renvois au texte. On notera qu'il raisonne par contraposition sans le dire en partant en fait de l'hypothèse $d(A, B) = 0$.

Question : (E, d) est un espace métrique, A et B sont deux parties de E . On définit $d(A, B) = \inf\{d(x, y), x \in A, y \in B\}$. Montrer que si A est compact et B est fermé et $A \cap B = \emptyset$, alors $d(A, B) > 0$.

Démonstration :

1 $\square \epsilon > 0, \square x \in A, \square y \in B, 0 \leq d(x, y) < \frac{\epsilon}{2}$.

2 Comme $x \in A$, et A fermé $\square x \in \bar{A} \square \square (x_n) \in A, x_n \rightarrow x$.

3 Or, $d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y)$

4 Et, comme $x_n \rightarrow x, \square n_0, n \geq n_0, d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}$,

5 d'où, pour $n \geq n_0, d(x_n, y) < \epsilon$, ainsi $x_n \rightarrow y$ et comme $(x_n) \in A$, alors :

6 $y \in \bar{A} = A$, or $y \in B \square y \in A \cap B \square A \cap B \neq \emptyset$.

Il s'agissait d'un devoir à la maison et l'étudiant a soumis cette démonstration, à son professeur en étant conscient d'avoir démontré un résultat avec des hypothèses plus faibles que celles indiquées (A fermé, au lieu de A compact et B fermé). En commentaire, le professeur concerné écrit :

¹³⁷ Ce qui suit est repris de Durand-Guerrier et Arsac. 2003.

“ A première vue, je n’ai pas vu l’erreur mais en reprenant la démonstration je me suis rendu compte que (x_n) dépend de ϵ de départ ! On a donc $d(x_n, y) < \epsilon/2$, mais si on prend un $\epsilon > 0$, on ne peut avoir $d(x_n, y) < \epsilon$. Je pense que le problème relève d’un abus de langage ; on devrait dire : $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A, \exists y \in B$ $0 \leq d(x, y) < \epsilon/2$. ”

Notons qu’il n’y a pour l’enseignant aucun doute sur le fait que la démonstration comporte une erreur ; en effet, a priori, il sait que les hypothèses indiquées dans l’exercice sont minimales. Autrement dit, c’est le savoir mathématique qui lui permet de disqualifier d’emblée la démonstration proposée par l’étudiant. Pour autant, cela ne suffit pas aux yeux de l’enseignant dont le commentaire concerne *la recherche de l’erreur dans la démonstration*. L’enseignant écrit que *l’étudiant n’a pas vu que x dépend du ϵ de départ*. L’erreur est donc analysée en référence à une règle de manipulation des variables dont nous avons mis en évidence l’importance en analyse.¹³⁸ Ici, il faut successivement l’appliquer à (1), x dépend de ϵ puis à (2), (x_n) dépend de x , pour en déduire que (x_n) dépend de ϵ ¹³⁹. De plus, l’enseignant fait référence à la notation $\forall \epsilon$, ce qui fait qu’il classe l’erreur comme un “ abus de langage ”.

Pour une analyse logique de cette erreur, nous pouvons utiliser les règles de Copi présentées plus haut. Leur application au cas qui nous intéresse montre qu’il manque trois instantiations successives de l’énoncé (1). De l’énoncé, $\forall \epsilon > 0 \exists x \in A \exists y \in B (0 \leq d(x, y) < \epsilon/2)$ (1) on peut inférer par la règle d’Instantiation Universelle (I.U.) $\exists x \in A \exists y \in B (0 \leq d(x, y) < c/2)$ (2) où c est une lettre de constante, sans restriction (un élément générique du domaine de référence, ici \mathbb{R}^{+*}). De cet énoncé, on peut inférer en appliquant deux fois la règle d’Instantiation Existentielle (I.E.), $0 \leq d(a, b) < c/2$ (3) où cette fois a et b sont des lettres de constantes soumises aux restrictions de la règle d’instanciation existentielle. De cette manière, après avoir introduit la suite convergeant vers x , on aboutit à la ligne 5 à l’énoncé : $\forall n > n_0, (d(x_n, b) < c)$ (4). En appliquant alors la règle de généralisation existentielle (G.E.), on obtient : $\exists y \in B \exists x \in A^N (\forall n > n_0, d(x_n, y) < c)$ (5), puis par la règle de généralisation universelle (G.U.) : $\forall \epsilon > 0 \exists y \in B \exists x \in A^N (\forall n > n_0, d(x_n, y) < \epsilon)$ (6). Ceci montre clairement que l’énoncé (6) ne traduit pas le fait qu’il existe une suite de A convergeant vers un point de B , si bien que l’erreur de

¹³⁸ Durand-Guerrier et Arsac. (2003)

¹³⁹ On utilise ici la transitivité de la relation “ dépendre de ”, évidente du point de vue langagier, même si sa définition mathématique est floue.

l'étudiant provient d'une conclusion illégitime : la lecture qu'il fait de ce qu'il a écrit à la ligne 5 le conduit à restituer les quantificateurs absents sans contrôler l'ordre dans lequel ces quantificateurs doivent être écrits. Notons que ce que nous avons proposé ici est un contrôle de nature sémantique, puisque nous utilisons les règles d'instantiation qui conduisent comme on l'a déjà vu à se placer dans un modèle générique du fragment de théorie considéré. Nous allons voir que ce n'est pas ce type d'argument qui est prédominant dans les réponses des enseignants.

V.5.2 *Le point de vue des enseignants*

Nous avons posé à un certain nombre d'enseignants les trois questions suivantes.

- 1) Quelles erreurs comporte cette démonstration, (vous pouvez supposer que vous l'expliquez à un collègue) ?
- 2) Qu'écrieriez-vous sur la copie ?
- 3) Quel corrigé proposeriez-vous à cet étudiant ?

Nous avons obtenu vingt-deux réponses d'enseignants de mathématiques en poste dans diverses universités scientifiques : Grenoble, Lille, Lyon, Montpellier, Paris, Rouen. Plusieurs réponses sont très détaillées, d'autres sont un peu plus elliptiques. Nous proposons une étude qualitative des réponses permettant de dégager quelques grandes tendances dans le discours des enseignants, et aussi de pointer des différences.

V.5.2.1. *Le contrôle par les connaissances mathématiques*

Tous les enseignants repèrent que le résultat étant faux, la démonstration ne saurait être correcte. Quatorze d'entre eux proposent un contre-exemple ; pour une minorité, c'est le premier argument proposé à l'étudiant. C'est en effet un moyen de s'assurer de la non validité du résultat établi. Mais ceci ne permet pas de savoir en quoi la démonstration est fautive. Il est remarquable de constater que certains enseignants disent n'avoir pas détecté, à la première lecture, d'erreur dans la démonstration. Ce sont donc leurs connaissances mathématiques (et non pas l'analyse de la démonstration) qui leur donnent la certitude d'une erreur de raisonnement et c'est leur pratique de la démonstration en Analyse qui les oriente vers le problème de la dépendance des variables. On comprend mieux alors le fait que l'étudiant, ne disposant pas de ce contrôle, puisse ne pas voir son erreur. On peut en outre s'interroger sur le conseil donné par l'un d'entre eux : "*quand on n'est pas sûr, il faut expliciter la dépendance*". N'est-ce pas précisément un des problèmes de nombreux étudiants de n'être jamais très sûrs des démonstrations qu'ils produisent ?

V.5.2.2. La prégnance de la notion de dépendance

Tous les collègues, sauf un, (soit vingt-et-un), écrivent que “ x et y dépendent de \square ” et douze d’entre eux le traduisent en introduisant la notation $x_{\square}y_{\square}$ ou la notation y^{\square} ¹⁴⁰. Pour certains collègues, cette notation indicée apparaît comme un “ canon ” mathématique. On peut lire par exemple (réponse à la première question) “ à la ligne 1, x et y qui dépendent de \square ne sont pas indicés par \square ; c’est un abus classique, souvent pratique ”. Pour d’autres collègues, les indices fonctionnent plutôt comme un *garde-fou* ; on peut lire dans quelques réponses à la question 2: “ mettre des indices quand on n’est pas sûr de soi ” ; “ x et y dépendent de \square une notation comme x_{\square} évite de l’oublier ” ; “ le dérapage fondamental est là, quand on oublie d’écrire $x = x_{\square} y = y_{\square}$ ”.

Les réponses recueillies confirment que la règle qui consiste à indiquer les lettres de variables muettes dans une quantification existentielle lorsque celle-ci est précédée d’une quantification universelle fonctionne comme une *règle de raisonnement* en Analyse, permettant à la fois d’éviter les erreurs et de mettre en évidence la “ dépendance des variables ”. Si on prend au pied de la lettre la notation proposée comme une notation fonctionnelle, alors ceci revient à assumer implicitement l’axiome du choix (sauf cas particuliers où l’on pourrait effectivement déterminer une telle fonction). On peut penser que pour certains collègues, cette notation vise avant tout à rappeler, par le symbolisme, le fait que x_{\square} « dépend » de \square en un sens *vague*, qui est d’ailleurs exprimé dans un vocabulaire varié, comme le montre le relevé ci-dessous établi à partir des réponses des enseignants : “ *Il faut pouvoir prendre \square et le faire varier* ; “ *ligne 5 on “ voyait ” que si on changeait de \square on changeait de y_{\square} ”* ; “ *(...) elle émousse notre vigilance sur la variabilité de x et de y ”* ; “ *il faudrait montrer qu’étant donné un réel quelconque, indépendant de tout choix antérieur, à partir d’un certain rang la distance à y d’un terme de la suite est inférieur à ce réel.* ” ; “ *Attention, pour chaque $\square > 0$ fixé, x et y dépendent de \square ”* ; “ *Attention, x se déplace avec \square ; si tu fixes x , \square est fixé également ”* ; “ *x et y sont fonction de \square (surtout y) ”* ; “ *il faut garder en mémoire les paramètres dont dépendent les quantités qu’on manipule.* ” ; “ *il faut acquérir l’intuition des moments où on piétine et de ceux où on avance réellement quand on cherche un exercice, et se souvenir*

¹⁴⁰ On ne peut évidemment pas en conclure que seuls ces douze collègues parmi notre population traduisent, en général, cette dépendance par cette notation.

qu'un raisonnement mathématique est un voyage qui ne peut pas s'achever quand est resté à la case départ ; “ *x et y dépendent de \square ! Aussi son x bouge avec \square* ”....

Le vocabulaire utilisé est assez varié et imagé : on fait varier, ou au contraire on fixe ; on change ; il apparaît des termes liés à l'idée de déplacement : on accompagne, on fait un voyage ; il y a les interventions du temps (du raisonnement) ; la notion de mouvement : tout bouge. Comme on pouvait s'y attendre apparaissent donc des images, des métaphores, des analogies. Il est tout à fait clair que cette profusion d'expressions renvoie très explicitement *aux utilisateurs des signes* et relève donc clairement du niveau *pragmatique* qui, pour certains enseignants, semble remplacer le contrôle par les outils logiques ou symboliques qui sont peu mobilisés. D'autres collègues font cependant référence explicitement aux deux modes de contrôles.

V.5.2.3. Le contrôle par des arguments logiques de nature sémantique

Contrairement aux positions largement partagées que nous venons de rapporter concernant la règle de dépendance de variables, la mise en relation des erreurs de l'étudiant avec des règles formelles de manipulation des variables et des quantificateurs fait apparaître de très grandes différences entre les enseignants.

Notons tout d'abord qu'il y a assez peu d'arguments relevant de cette catégorie. Le premier que nous relevons conduit à un commentaire étrange, puisque dans ses commentaires à l'adresse de l'étudiant, un des enseignants à qui nous avons soumis la démonstration écrit : “ *(l'étudiant) confond le fait qu'une propriété est vraie pour un “ \square fixé ” et “ quel que soit \square ”*. Or la méthode classique de démonstration par élément générique associée à la règle de généralisation universelle, légitime dans de nombreux cas, consiste bien à démontrer “ pour un *a* fixé ” et à affirmer ensuite que le résultat ne dépend pas en fait du choix de *a*. Autrement dit, ce commentaire laisse dans l'ombre la difficulté spécifique de cette démonstration proposée par l'étudiant, à savoir qu'on ne peut pas appliquer ici, *sans précaution*, la règle de généralisation universelle en raison de la présence d'instantiations existentielles.

En ce qui concerne les quantificateurs, deux enseignants parlent d'une *mauvaise gestion des quantificateurs*, tandis que quelques autres proposent de contrôler ce qui a été démontré en réécrivant formellement la phrase avec les quantificateurs (il s'agit donc ici d'un contrôle de type global sur les écritures symboliques) ; deux autres, quant à eux, proscrivent au contraire tout emploi des quantificateurs et recommandent l'usage de la langue courante. En ce qui concerne les variables, à lire la plupart des commentaires, il semble bien que dans la phrase

quantifiée, les lettres renvoient implicitement à des objets du domaine considéré ; ceci n'est cependant pas partagé par tous. En effet, quelques (rares) collègues pensent que, comme les lettres qui suivent un quantificateur sont muettes et ne désignent par conséquent aucun objet, les objets que l'on manipule doivent être introduits explicitement au moyen d'*identificateurs* à l'aide de lettres qui les désignent. Cette position est à rapprocher des règles de Copi présentées plus haut. Cette exigence d'introduction des identificateurs s'oppose à une pratique largement répandue qui consiste à ne pas distinguer entre variable liée (lettre muette) et constante individuelle d'objets (paramètre) ; le changement de statut logique des lettres dans les démonstrations est en effet le plus souvent passé sous silence¹⁴¹. Cette question est en général considérée comme trop difficile pour être abordée. C'est par exemple la position de Glaeser (1973) ; dans cet ouvrage destiné aux futurs enseignants de mathématiques, il consacre un chapitre à la logique dans lequel il aborde le calcul des propositions et le calcul des prédicats. Concernant ce dernier, il écrit :

“Cela (la formalisation de la grammaire du langage des prédicats) nécessite un grand effort d'analyse que nous ne pouvons pas entreprendre dans cet ouvrage ; les règles de substitution sont très subtiles et font intervenir des distinctions entre variables libres et symboles individuels.”

Cette question n'est donc pas traitée dans l'ouvrage. D'une manière générale, cet aspect est peu abordé dans les éléments de logique proposés aux étudiants de premiers cycles universitaires. Notons cependant qu'il faut ici se garder de généraliser ; en effet dans certaines démonstrations, les objets, ou certains objets, sont introduits explicitement et parfois les deux modes d'exposition cohabitent comme nous l'avons montré en analysant trois démonstrations de topologie dans Choquet (1984)¹⁴². Les trois démonstrations que nous avons analysées mettent en évidence la variabilité de traitement des écritures quantifiées à l'intérieur d'un même manuel. Dans d'autres démonstrations de l'ouvrage apparaissent plusieurs niveaux d'indices dans des énoncés existentiels et l'on retrouve le changement subreptice de statut des lettres à l'intérieur d'une même démonstration.

V.5.3. Conséquences didactiques

¹⁴¹ Voir ici même paragraphe IV.6

¹⁴² dans l'article cité en référence

Tant dans le manuel de Choquet que dans les réponses proposées par les enseignants, Il n'est pas toujours facile de déterminer ce qui pilote les choix quant aux notations utilisées. On peut légitimement se demander comment un lecteur novice peut faire la différence entre les situations où telle pratique peut conduire à une démonstration erronée, alors qu'elle sera acceptable dans d'autres cas. Notre étude montre que *la règle de raisonnement* consistant à marquer la dépendance n'a pas un caractère de généralité absolue. D'ailleurs, si on voulait l'appliquer en toute généralité, il faudrait par exemple écrire que dans le théorème des accroissements finis, le « c » dépend de f , de a et de b et donc noter $c_{f,a,b}$! Cependant, l'expert va utiliser cette notation lorsqu'il sait qu'il y a un risque de "dérage". En d'autres termes, l'expert choisit le niveau de rigueur qu'il s'impose dans un cours ou dans un manuel, non seulement en tenant compte du niveau d'évolution de la théorie qu'il expose, et du public auquel il s'adresse, mais également en s'appuyant sur ses connaissances du domaine, ce dernier point n'étant a priori pas partagé par celui qui s'adonne à l'étude. Ceci conduit à un paradoxe didactique : *l'appropriation des règles de raisonnement suppose apparemment l'expertise mathématique, qui précisément fait défaut à celui qui étudie un nouveau domaine mathématique.* Comme le montre la majorité des réponses des enseignants, il apparaît que l'absence de disponibilité¹⁴³ des outils de contrôle logique de type sémantique conduit les enseignants à utiliser, de manière plus importante qu'on aurait pu le penser a priori, des considérations de type pragmatique. Or les considérations pragmatiques sont extrêmement contextualisées, et la question de leur généralisation se pose donc de manière aigüe. Comme nous l'avons vu au fil des situations analysées, c'est précisément un apport essentiel de la théorie des modèles que de pouvoir rapporter la question de la validité d'un mode donné de raisonnement dans un contexte donné à une question plus générale de validité logique dans le calcul des prédicats. Selon nous, ceci peut apporter un éclairage nouveau aux questions posées par Robert et al.(1996) sur *la prise en compte du méta*¹⁴⁴ *en didactique des mathématiques* . Les commentaires des enseignants fournissent en effet « un discours sur les mathématiques, plus ou moins important, plus ou moins diffus, plus ou moins explicité comme tel », que les auteurs de l'article classent « comme discours méta en tant que discours sur les

¹⁴³ Ces outils ne sont pas disponibles, d'une part parce qu'il ne font pas, ou peu, l'objet d'un enseignement, mais aussi parce que les règles de raisonnement sont *naturalisées*, si bien que leur justification logique n'est pas (plus) interrogée.

¹⁴⁴ Les auteurs disent qu'ils adoptent le seul préfixe *méta* pour réunir différentes catégories (réflexion et métacognition notamment) concernant le niveau de ce dont on parle par rapport à la connaissance en jeu.

mathématiques précisément » (p.147). Ce que l'on aperçoit dans cet exemple, comme dans d'autres étudiés ici, c'est que les outils logiques permettent de structurer partiellement ce discours et d'améliorer l'efficacité des contrôles que le sujet, étudiant ou enseignant, est amené à exercer dans le cadre de son activité mathématique.

V.6. Commentaires

Les questions abordées dans cette section mettent en évidence le fait que l'étude de l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique mobilise de façon concomitante les analyses de types syntaxique, sémantique et pragmatique. Plus précisément, nous pensons avoir montré que l'analyse sémantique, qui renvoie à la fonction référentielle du langage, ouvre le champ des interprétations possibles d'un fragment de discours mathématique dans une situation donnée, ce qui nécessite, pour poursuivre l'analyse de revenir à la dimension pragmatique, en particulier en ce qui concerne les conditions d'énonciation et l'état des connaissances des sujets. Le dernier exemple montre également l'importance des considérations de type pragmatique dans le discours des enseignants à l'intention des étudiants, dont par essence le contexte d'utilisation reste mal défini ; ceci venant en quelque sorte palier la quasi-absence de références explicites aux outils logiques susceptibles d'éclairer les pratiques mathématiques.

VI Conclusion et perspectives scientifiques

Nous pensons avoir montré tout au long de cette note de synthèse que la théorie des modèles offre un cadre de référence épistémologique pertinent et consistant pour analyser, dans une perspective didactique, la question difficile de l'articulation entre logique et raisonnement mathématique. Parmi les résultats que nous avons obtenus, le plus important à nos yeux est sans conteste le fait que l'analyse épistémologique mise au service d'un questionnement didactique montre de manière décisive que les questions de logique doivent être travaillées en articulation étroite avec les problèmes mathématiques qu'elles contribuent à résoudre, et que ce travail contribue tout autant à l'appropriation des notions logiques qu'à celles des notions mathématiques en jeu, sous réserve que l'on se place dans ce *va et vient* instauré par Tarski dans le cadre de la théorie sémantique de la vérité et de la théorie des modèles entre *forme et contenu*. Un autre résultat essentiel en découle tout naturellement, c'est le fait que la prise en compte de la dimension sémantique dans l'analyse des raisonnements ouvre nécessairement sur leur dimension pragmatique ; l'exemple le plus frappant étant le chemin qui conduit de la notion de phrase ouverte à celle d'énoncé contingent pour le sujet à un instant donné. Nous avons fait le choix de choisir un formalisme qui n'intègre pas les aspects pragmatiques car, de fait, nous considérons que les aspects pragmatiques des questions didactiques qui nous occupent font l'objet des différentes théories développées depuis de nombreuses années dans ce champ, si bien que nous espérons que nos analyses, reprises par d'autres, pourront contribuer positivement par leurs apports spécifiques dans les années à venir, à l'évolution de ces théories, que l'on pense par exemple aux questions de transposition didactique, de validation ou de conceptualisation¹⁴⁵.

En ce qui nous concerne, nous envisageons de développer nos travaux de recherche suivant deux axes complémentaires : le premier concerne l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans l'enseignement universitaire, le second concerne l'analyse du discours dans la classe de mathématiques à tous les niveaux d'enseignement.

¹⁴⁵ S'il est clair que les analyses logiques – telles que nous les avons développées dans cette note de synthèse ne représentent qu'une petite partie des analyses nécessaires pour l'étude des phénomènes didactiques dans la classe de mathématiques, nous pensons cependant que notre travail montre de manière décisive que leurs apports ne doivent pas être négligés.

VI.1. Articulation entre la logique et le raisonnement mathématique à l'université

Les travaux de recherche que nous avons conduits jusqu'à présent nous fournissent un cadre théorique suffisamment assuré pour pouvoir aborder des questions plus complexes concernant l'enseignement des mathématiques à l'université. La question de la rigueur est naturellement au cœur de l'activité mathématique, et la logique moderne, de Frege à Tarski, vise à offrir des moyens efficaces de contrôle de cette rigueur. Or, les travaux que nous avons conduits avec Gilbert Arzac depuis quelques années sur l'enseignement de l'analyse montrent que, d'une certaine manière, la logique est le plus souvent absente du discours du professeur, remplacée par un certain nombre de règles de raisonnement relevant d'un savoir-faire qui n'est pas constitué en savoir théorique, et qui ne possède pas en particulier de frontières franches. Nos analyses, tout en montrant le caractère très contextualisé de ces règles de raisonnement, montrent aussi combien elles sont imbriquées avec le savoir mathématique si bien que d'une manière générale, la bonne application de ces règles repose sur l'expertise mathématique de l'acteur. Ceci conduit à un paradoxe didactique : l'appropriation des règles de raisonnement suppose apparemment l'expertise mathématique, qui précisément fait défaut à celui qui étudie un nouveau domaine mathématique. Nous envisageons de poursuivre nos recherches dans cette direction d'une part en approfondissant nos études dans le champ de l'analyse et de la topologie, lieux par excellence des difficultés de contrôle de la validité des raisonnements, d'autre part en les élargissant à l'algèbre et à l'algèbre linéaire, où de nombreux auteurs font mention de difficultés de type logique avérées. Les questions vives de recherche concernent d'une part l'étude des pratiques du professeur en situation d'enseignement, d'autre part l'étude des impacts sur la construction des connaissances mathématiques d'un travail structuré de logique, dans la perspective qui est la nôtre, avec les étudiants de premier cycle universitaire. Une première exploration de ces questions fait l'objet de la thèse de Faiza Chellougui (Chellougui, 2004) qui s'intéresse à la gestion de la quantification, à la part respective de l'implicite et de l'explicite dans l'usage du formalisme logique ainsi qu'à son impact sur les modes de raisonnement des étudiants. Une question centrale de ce travail concerne le paradoxe apparent entre les effets bénéfiques attendus, pour avancer dans l'appropriation des mathématiques, de l'introduction d'un formalisme opératoire qui a incontestablement contribué aux progrès de cette discipline et les difficultés bien réelles rencontrées par les étudiants de premier cycle universitaire scientifique pour utiliser correctement ce formalisme en situation de résolution de problème. Une première direction du travail consiste à catégoriser les réponses des étudiants, dont la variabilité dépasse largement

ce que nous avons vu pour les enseignants au paragraphe V.5., pour tenter de dégager la nature des interactions entre arguments logiques et arguments mathématiques dans les démonstrations produites. Une autre direction, plus ambitieuse, consiste à essayer de repérer les effets, pour la construction des connaissances, de la prise en compte explicite, lorsqu'elle est attestée, des phénomènes de quantification en situation de résolution de problèmes mobilisant la notion de borne supérieure. Nous envisageons de poursuivre ce travail dans le cadre d'un projet de collaboration avec la Tunisie.

Nous nous proposons également d'étudier dans quelle mesure un travail sur l'articulation entre logique et raisonnement mathématique, dans la perspective qui est la nôtre, proposé à des étudiants préparant les concours de recrutement ou à de futurs professeurs de collège et de lycée, permet une réorganisation des connaissances mathématiques favorisant l'entrée dans un questionnement didactique. Nous disposons en effet d'un ensemble de situations riches et variées, dont les plus éclairantes ont été choisies pour cette note de synthèse, ce qui devrait nous permettre à priori de proposer des outils de formation pour les futurs professeurs. Il s'agit pour nous de les mettre à l'épreuve, au sein d'un dispositif expérimental, auprès d'un public se destinant à l'enseignement des mathématiques. Une première expérimentation a été conduite au cours de l'année 2002-2003 avec des étudiants préparant le CAPES de mathématiques : nous leur avons proposé un module expérimental appuyé sur un certain nombre de situations présentées et comportant un apport minimum de connaissances sur le calcul des prédicats, et la théorie sémantique de la vérité (notion de satisfaction, de vérité dans une interprétation, de validité) et la démonstration naturelle de Copi. Le corpus issu des données empiriques recueillies dans ce cadre est en cours d'analyse. Nous envisageons de poursuivre et de compléter cette expérimentation au cours de l'année universitaire 2005-2006.

VI.2. Analyse du discours dans la classe de mathématiques

Les didacticiens des mathématiques se préoccupent depuis longtemps des questions langagières, mais les outils d'analyse qu'ils se sont forgés ne prennent pas ou peu en compte les travaux disponibles dans le champ de la sémantique formelle des langues naturelles, qui, eu égard à nos préoccupations de recherche, nous semblent extrêmement prometteurs et fructueux. Le point de vue adopté dans ce paradigme est inspiré de la théorie élémentaire des modèles, dans la suite des travaux de Montague (1974), et les notions de syntaxe, sémantique et pragmatique correspondent à celles que nous essayons de mettre en œuvre dans nos analyses des raisonnements mathématiques et des échanges langagiers dans les conduites explicatives et argumentatives. Ce cadre théorique (la sémantique formelle) devrait permettre

d'enrichir les analyses classiques en didactique des mathématiques, qui prennent comme unité d'analyse la phrase, évacuant ainsi les questions relatives à la quantification, à l'anaphore, aux ambiguïtés référentielles, toutes dimensions dont la prise en compte est cruciale dans l'analyse en contexte du discours (cf. Corblin, 2002). Dit autrement, nous faisons l'hypothèse qu'une analyse dynamique du discours avec les outils de la sémantique formelle croisés avec les outils didactiques d'analyse du milieu et d'analyse logique, nous permettrons d'introduire une plus grande rigueur conceptuelle dans les interprétations que nous proposons. Nous bénéficions pour cette ouverture de nos travaux de la présence à Lyon de deux spécialistes de cette discipline : Jacques Jayez, responsable de l'équipe Corpus, Ressources et Apprentissages, Linguistiques, à l'Ecole Normale Supérieure -Lettres et Sciences Humaines et Viviane Deprez, chercheur à l'Institut de Sciences Cognitives de Lyon, spécialiste de la négation. Les travaux de recherches dans ce champ complètent et interrogent nos propres analyses, en particulier en ce qui concerne d'une part le rôle des indéfinis (*un, deux, plusieurs, quelques*) et d'autre part le fonctionnement dans la langue des connecteurs logiques négation, implication ... Le rôle des indéfinis est clairement lié à la question de la quantification, sans lui être subordonné, et porteur de multiples interprétations possibles changeant fondamentalement sa contribution à la dynamique du discours. Le fonctionnement de la négation, est, en français, extrêmement complexe, et son articulation avec les autres connecteurs de la langue porteuse de très nombreuses ambiguïtés, le plus souvent sous-estimées, voire méconnues des locuteurs. Or, si l'on considère qu'un concept se caractérise à la fois par les objets qui tombent sous ce concept, et ceux qui ne tombent pas sous ce concept, il est clair que la négation est au cœur de tout processus d'élaboration des connaissances. Enfin, l'implication, concept central s'il en est en mathématique, s'exprime dans la langue sous des formes multiples, non nécessairement en adéquation avec la norme logique standard, ni avec l'usage qui en est fait en mathématique. Ceci permet de poser également la question du multilinguisme dans les apprentissages. Concernant la négation, cette question est au cœur du travail de Ben Kilani (Thèse en cours).

Comme on l'aura compris, ces deux axes de recherche sont complémentaires. En effet, même si en avançant dans les cursus, le formalisme occupe une place de plus en plus grande dans l'activité mathématique, il n'en reste pas moins que la langue vernaculaire continue à porter le discours mathématique, de manière incontournable à l'oral, mais également à l'écrit. D'un autre côté, dès l'école élémentaire et le collège, les élèves sont amenés à mettre en oeuvre des

raisonnements qui, bien que portés par la langue naturelle, ressortent également, dans la perspective didactique qui est la nôtre, d'une analyse logique.

•

Références

- ANTIBI, A. (1988) *Etude sur l'enseignement de méthodes de démonstration. Enseignement de la notion de limite : réflexions, propositions*. Thèse de l'université de Toulouse. IREM de Toulouse.
- A.P.M.E.P. (1992) *Publication n°88 : EVAPM91/2. Evaluation des programmes de mathématiques Seconde 1991*
- ARISTOTE, Métaphysique, tome 1, Traduction Jean Tricot, Librairie philosophique J. Vrin, 1991.
- ARISTOTE, Organon : I. Catégories- II De l'interprétation, Traduction nouvelle et notes par Jean Tricot, Librairie philosophique J. Vrin, 1989.
- ARSAC, G. (1987) L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 8/3. 267-312.
- ARSAC, G. & al., (1992) *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon; I.R.E.M. de Lyon
- ARTIGUE, M. (1991) Epistémologie et Didactique in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10/2.3. 241-285.
- BACHELARD, G. (1938) *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : Vrin.
- BALACHEFF, N. (1988) *Une étude du processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*; Thèse de l'Université Joseph Fourier Grenoble 1.
- BENBACHIR, A & ZAKI, M. (2001) production d'exemples et de contre-exemples en analyse \square étude en première année d'université. *Educational Studies in Mathematics* 47(3) 273-295
- BEN KILANI I. (2001) Les conceptions des élèves de la 6^{ème} année de l'enseignement secondaire tunisien à propos de la négation des énoncés quantifiés. Mémoire de DEA de l'Université de Tunis.
- BETH, E.W. (1955) Semantic Entailment and Formal Derivability, *Mededelingen der Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, 18, n°13, 1955, pp. 309-342, traduction française in Largeault, J., 1972, *Logique mathématique, textes*, Armand Colin, 57-90.
- BLANCHE, R (1970) *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*. Armand Colin
- BOLZANO, B. (1993), *Les paradoxes de l'infini*. Editions du Seuil.
- BOROWSKI, E.J. & BORWEIN, J.M. (2002) *Mathematics*. Collins Dictionary
- BOUVERESSE, J. (1987) *La force de la règle Wittgenstein et l'invention de la nécessité*. Editions de Minuit.
- BOUVIER, A. & GEORGE, M. & LE LIONNAIS, F. (1983) *Dictionnaire des Mathématiques* 2^o édition. Presses Universitaires de France
- BROUSSEAU G. (1986), Fondements et méthodes de la Didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*.7(2) 33-115.
- CHELLOUGUI, F. (2000) *Approche didactique de la quantification dans la classe de mathématiques à la fin de l'enseignement secondaire et au début du supérieur scientifique*. Mémoire de DEA, Université de Tunis.
- CHELLOUGUI, F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universels et existentiels en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse des l'Universités Lyon 1 et Tunis.
- CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage Editions
- CHOQUET G. (1984), *Cours de Topologie*. Masson.

- CHRISTIE, A. (1995) Meurtre au Champagne in *Intégrale : Les années 1945-1949*. Librairie des Champs Elysées.
- CONNE, F. (1986) *La transposition didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire*. Thèse de l'université de Genève.
- COPI I.(1954), *Symbolic Logic*. NewYork.
- CORBLIN, J. (2002) *Représentation du discours et sémantique formelle*. PUF
- CORI, R. & LASCAR, D. (1993) *Logique mathématiques, cours et exercices*, tome 1. Masson
- DA COSTA, N.C.A.(1997), *Logiques classiques et non classiques : essai sur les fondements de la logique*. Paris : Masson.
- DAVIDSON, D. (1993) *Enquête sur la vérité et l'interprétation*, éditions Jacqueline Chambon.
- DELPLA, I. (2001) *Quine, Davidson Le principe de charité*. Paris : Presses Universitaires de France.
- DEHAME, F & CLENET, D. (1995) *Algèbre générale. Exercices corrigés. Conseils. Précis de cours*. Vuibert.
- DELOUSTAL-JORRAND, V. (2002) Implication and mathematical reasoning, *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 26(2)*, Norwich, England, pp. 281–288.
- DELOUSTAL-JORRAND, V. (2004) L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique Etude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication. Thèse de l'Université Joseph Fourier-Grenoble 1.
- DIEUDONNE, J. (1987) *Pour l'honneur de l'esprit humain. Les mathématiques aujourd'hui*. Collection Pluriel. Hachette.
- DORIER, J.L. (1991) Sur l'enseignement des premiers concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'Université, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11, 2/3; 325-364.
- DORIER, J.L. (1996) Genèse des premiers espaces vectoriels de fonctions, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 2(2) 265-307.
- DORIER, J.L. (ed.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La Pensée Sauvage Editions, Grenoble.
- DORIER, J.L. (2000) *Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'algèbre linéaire. Perspective théorique sur leurs interactions*. les cahiers du laboratoire Leibniz n°12, <http://www.leibniz-imag.fr/LesCahiers>.
- DURAND-GUERRIER, V. (1994) Problèmes de raisonnement et de logique chez les élèves de terminales C et de premier cycle universitaire scientifique; les difficultés liées à l'implication; questions méthodologiques, in *Actes du Premier colloque Jeunes Chercheurs en Sciences Cognitives*, Université J. Fourier Grenoble 1, la Motte d'Aveillans, 23-25 mars 1994.
- DURAND-GUERRIER, V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de l'Université Lyon 1.
- DURAND-GUERRIER, V. : 1999 L'élève, le professeur et le labyrinthe, in *Petit X* 50, 57-79. IREM de Grenoble, Université Joseph Fourier Grenoble 1.

- DURAND-GUERRIER, V. : 2003, Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective, *Educational Studies in Mathematics* 53, 5-34.
- DURAND-GUERRIER, V. (2004) La théorie élémentaire des modèles comme référence épistémologique pour analyser les énoncés et les raisonnements mathématiques, in Durand-Guerrier, V. & Tisseron, C. (eds.), *Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2003*, IREM de Paris 7.
- DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G.: 2003, Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 23/3, 295-342.
- DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G., An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule, à paraître en 2005 in *Educational Studies in Mathematics*
- DURAND-GUERRIER, V. & BEN KILANI, I. (2004), Négation grammaticale versus négation logique dans l'apprentissage des mathématiques. Exemple dans l'enseignement secondaire Tunisien, *Les Cahiers du Français Contemporain*, 9, 29-55.
- DUVAL, R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- DUVAL, R. (1993) Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive, *petitX*, n°31, 37-61.
- DUVAL, R. & EGRET, M.A. (1993) Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif in *Repères* n°12, Topiques éditions.
- ECO, U. (1980) *Segno*. Milan : A. Mondatori. *Le signe*, 1988 pour la traduction française. Bruxelles : Editions Labor.
- EL FAQIH, E.M. (1991) *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique*. Thèse de l'université de Strasbourg.
- ENGEL, P. (1989) *La norme du vrai Philosophie de la logique*, Gallimard
- FREGE, G. (1879) *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Halle a. S.: Louis Nebert
- FREGE, G. (1970) *Écrits logiques et philosophiques*, Editions du Seuil
- FUCHS, C. 1996. *Les ambiguïtés du français*, Collection l'essentiel français Ophrys.
- GARDIES, J.L. (1994) *Les fondements sémantiques du discours naturel*. Vrin : Paris.
- GENTZEN G. (1935), Untersuchungen über das logische Schliessen in *Math. Zeitschr.*, 39. Traduction française : *Recherche sur la déduction logique*. PUF 1955.
- GIBEL, P. (2004) *Fonctions et statuts des différentes formes de raisonnements dans la relation didactique en classe à l'école primaire*. Thèse de l'université Victor Segalen, Bordeaux 2.
- GLAESER G. (1973), *Mathématiques pour l'élève professeur*. Paris : Hermann
- GOCHET, P. & GRIBOMONT, P. (1990) *Logique, méthodes pour l'informatique fondamentale*, Volume 1. Hermès
- GÖDEL, K. (1931) Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System I., traduction française in Nagel, E.; Newman, J.R., Gödel, K. & Girard, J.Y. (1989) *Le théorème de Gödel*, Editions du Seuil, 105-143.
- GRANGER, G-G. (1994) *Formes, opérations, objets*, Vrin
- HANNAH, G. (2000) Proof, explanation and exploration, an overview . *Educational Studies in mathematics* 44, 5-23. Kluwers Academic Publishers

- HAUG, P.J. (2000) *Mathématiques pour l'étudiant scientifique*. Grenoble : EDP Sciences.
- HEALY, L.& HOYLES, C.. (2000) A study of proof conceptions in algèbre, *Journal for Research in Mathematics Education.*, 31(4), 396-428.
- HERSH R. (1997), *What is mathematics, really*. Oxford.
- HOFSTADTER, D. (1979) *Gödel, Escher, Bach, an Eternal Goden Braid*, Basic Book, New York, traduction Française 1985, Interéditions.
- HOUEBINE J. (1998), *La démonstration. Ecrire des démonstrations au Collège et au Lycée*. Hachette Education.
- HOUZEL C. (1996) *Analyse mathématique. Cours et exercices*. Paris : Belin.
- HOTTOIS,G. (1989) *Penser la logique, une introduction technique, théorique et philosophique à la logique formelle*. De Boeck-Wesmael: Bruxelles .
- HOYLES, C. & KÜCHEMANN, D. (2003) Students' understandings of logical implication in *Educational Studies in Mathematics* 51,3/2, 193-223.
- IMBERT, C. (1970) Introduction in FREGE,G. (1970) *Ecrits logiques et philosophiques*, Editions du Seuil
- INHELDER, B. & PIAGET, J. (1970) *De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*. Essai sur la construction des structures opératoires formelles. PUF
- JACQUES, F. (1990) Article Pragmatique, in *Encyclopedia Universalist*, vol. 18, pp.856-860.
- JOHNSON-LAIRD,P.N. (1986) Reasoning without logic, in T.Meyers, K.Brown & B.McGonigle (Eds) *Reasoning and discourse processes*,14-49, Academic press: London.
- KLEENE, S.C. (1967) *Mathematical logic*. Johne Wiley & sons.
- LAKATOS, I. (1976) *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte scientifique*. Hermann (1984) pour la traduction française
- LARGEAULT J. (1972) *Logique mathématique, textes*. Paris : Armand Colin
- LEGRAND, M. (1993) Débat scientifique en cours de mathématique et spécificité de l'analyse in *Repères* n°10 123-158
- LUKASIEWICZ,J. (1934)*Contribution à l'histoire de la logique des propositions* in LARGEAULT, J. 1972) *Logique mathématique*, Textes. Armand Colin, 81-109.
- MARGOLINAS, C. (1989) *Le point de vue de la validation*. Essai d'analyse et de synthèse en didactique des mathématiques. Thèse de l'université Joseph Fourier Grenoble 1.
- MARGOLINAS, C. 1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.
- MAUDET, C. (1982) *Les situations et les processus de l'apprentissage d'une fonction logique*. Thèse de l'université de Bordeaux 1.
- MITCHELL D. (1962) *An introduction to logic*, Hutchinson, London.
- MONTAGUE, R. (1974) *Selected papers of Richard Montague*, R.Thomason editor, Yale University Press, cité in CORBLIN 2002.
- MORRIS, C.W. (1938), *Foundations of the theory of signs*, Chicago : Chicago University Press, cité in Hottois G. (1997), *De la renaissance à la post-modernité* (p.258). Bruxelles : De Boeck Université.
- ORUS BAGUENA Pilar (1992) *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique; effets d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire*. Thèse de l'Université de Bordeaux
- PIAGET,J.1972 *Essai de logique opératoire* Dunod

- PIAGET, J. & GARCIA, R. (1983) *Psychogénèse et histoire des sciences*. Paris : Flammarion.
- PIAGET, J. & GARCÍA, R. (1987). *Vers une logique des significations*, Genève: Murionde.
- PICHON, J. (1989) *Théorie des ensembles, logique, les entiers. Cours et conseils de travail, exercices et problèmes corrigés*. Ellipses.
- POLITZER, G. (1991) L'informativité des énoncés : contraintes sur le jugement et le raisonnement, *Intellectica*, n°11, 111-147.
- PÓLYA, G. (1958). *les mathématiques et le raisonnement plausible*. Paris : Gauthier-Villars
- QUINE, W.V.O. (1950) *Methods of logic*, Holt, Rinehart & Winston; Traduction française Armand Colin, 1972
- QUINE, W.V.O. (1960) *Word and Object*. MIT press. Traduction française Flammarion 1978, 1999.
- QUINE, W.V.O. (1970) *Philosophy of logic*. Prentice-Hall. Traduction Française Aubier 1975.
- QUINE, V.W.O. (1990) *Pursuith of truth*, Harvard University Press, Traduction française Editions du seuil 1993
- RADFORD, L. (1985) *Interprétations d'énoncés implicatifs et traitement logiques Contribution à la faisabilité d'un enseignement de la logique au lycée*. Thèse de l'université de Strasbourg.
- REBOUL, A. & MOESCHLER, J. (1998) *La pragmatique aujourd'hui*. Points Seuil.
- RICHARD, J.F. (1990) *Les activité mentales, comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Armand Colin
- ROBERT, A. & ROBINET, J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, in *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 16/2.145-175.
- ROGALSKI, J. & ROGALSKI, M. (2004a) Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Vol.9*, Actes du colloque Argentoratum de juillet 2002, 175-203.
- ROGALSKI, J. & ROGALSKI, M. (2004b) Traitement de la validité de l'implication par des étudiants, corrélation avec leurs performances mathématiques, liens avec diverses questions de psychologie cognitive, in Durand-Guerrier, V. & Tisseron, C. (eds.), Actes du Séminaire National de Didactique des Mathématiques 2003, IREM de Paris 7, 227-256.
- ROLLAND, J. (1999) *Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- RUSSELL, B. (1903) *Les principes de la mathématique*, traduction française in *RUSSEL, Ecrits de logique philosophique*. PUF: Paris 1989
- RUSSELL, B. (1910) *Principia Mathematica* traduction française in *RUSSEL, Ecrits de logique philosophique*. PUF: Paris 1989
- SINACEUR, H. (1991a) *Corps et Modèles*. Paris : Vrin
- SINACEUR, H. (1991b) Logique : Mathématique ordinaire ou épistémologie effective ? in *Hommage à Jean-Toussaint Dessanti*. T.E.R.
- SINACEUR, H. 1996. Mathématiques et métamathématique du congrès de Paris (1900) au congrès de Nice (1970) : nombres réels et théorie des modèles dans les travaux de Tarski, in *Studies in the history of modern mathematics, II. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Serie II n° 44* : 113-132.
- SINACEUR, H. (1998) Du modèle à la stratégie in E. RIGAL (éd.) *Jaakko Hintikka. Questions de logique et de phénoménologie*. Paris : Vrin.
- TARSKI, A. 1936a. Le concept de vérité dans les langages formalisés in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 157-269. Armand Colin, 1972.

- TARSKI, A. 1936b. Sur le concept de conséquence in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 1* : 141-152. Armand Colin, 1972.
- TARSKI, A. 1944. La conception sémantique de la vérité et les fondements de la sémantique in *Logique, sémantique et métamathématique, volume 2* : 265-305. Armand Colin, 1972.
- TARSKI, A. (1960) *Introduction à la logique*. Paris-Louvain
- TARSKI, A. (1972) *Logique, sémantique et métamathématique*. Armand Colin.
- WASON, P.C. & JOHNSON-LAIRD, P.N. (1977) A theoretical analysis of insight into a reasoning task, in JOHNSON-LAIRD, P.N. & WASON, P.C. (Eds) *Thinking: readings in cognitive science*, Open university 143-157, cité in RICHARD (1990).
- VERGNAUD, G.(1991) La théorie des champs conceptuels in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10/2.3
- VUILLEMIN, J. (1988) Le chapitre IX du De Interpretatione et la connaissance probable in *Aristote aujourd'hui* sous la direction de M.A.Sinaceur. Editions érès
- WITTGENSTEIN, L.(1921) *Tractatus logico-philosophicus*. Annalen der naturphilosophie, Leipzig; traduction française, Gallimard, 1961.