



**HAL**  
open science

# Diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoires naturelles. Méthode exacte en coordonnées curvilignes et Principe du faible couplage

Karim Aït Braham

► **To cite this version:**

Karim Aït Braham. Diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoires naturelles. Méthode exacte en coordonnées curvilignes et Principe du faible couplage. Physique mathématique [math-ph]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2007. Français. NNT : . tel-00201723

**HAL Id: tel-00201723**

**<https://theses.hal.science/tel-00201723>**

Submitted on 2 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE VERSAILLES SAINT QUENTIN EN YVELINES  
UFR DES SCIENCES

Mémoire en vue d'obtenir le titre de DOCTEUR de l'Université de Versailles  
Spécialité : Méthodes Physiques en Télédétection

présenté par  
Karim AIT BRAHAM

Ecole doctorale Sciences de l'Environnement d'Ile de France

**Diffusion des ondes électromagnétiques par des  
surfaces rugueuses aléatoires naturelles  
Méthode exacte en coordonnées curvilignes et  
Principe du faible couplage**

Soutenue publiquement le 29 Novembre 2007

Membres du jury :

Mme Odile PICON	Rapporteur
M Christophe BOURLIER	Rapporteur
Mme Nahid EMAD	Examineur
M Mehrez ZRIBI	Examineur
M Gérard GRANET	Examineur
M Richard DUSSÉAUX	Directeur de thèse

Centre d'étude des Environnements Terrestre et Planétaires (CETP)  
10/12 avenue de l'Europe, 78140 Vélizy  
Université de Versailles - St Quentin en Yvelines (UVSQ)  
45 avenue des Etats-Unis, 78035 Versailles Cedex

# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Richard Dusséaux, mon responsable de thèse, pour m'avoir soutenu activement tout au long de ce travail de thèse. Richard, j'ai beaucoup apprécié ta rigueur scientifique et ton sens critique qui m'ont beaucoup apporté. Tu as su m'orienter et guider mes travaux par ta constante attention et tes nombreux conseils et suggestions.

Je remercie vivement Odile Picon et Christophe Bourlier pour leurs points de vue critiques et constructifs qu'ils ont apportés en tant que rapporteurs de ma thèse. Je remercie également Gérard Granet, Nahid Emad et Mehrez Zribi pour leur travail d'examineurs et leurs remarques fructueuses. Merci pour les discussions ainsi que pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail.

Je remercie tous les membres du CETP que j'ai eu l'occasion de rencontrer et qui ont rendu très agréables mes trois années au laboratoire. Un grand merci pour toutes les personnes du département Electromagnétisme et Méthodes d'Analyse, pour leur bonne humeur et pour la disponibilité qu'ils ont manifestée à mon égard. Mes remerciements pour Géraldine Garcia, Alice Le Gall, Alexandra Teste et Louis de Montera pour tous ces moments agréables que nous avons partagés au cours de ces trois années de dure labeur.

Enfin, merci à mes proches, vous avez été d'un grand soutien moral, particulièrement toi, Ionela, qui a subi la relecture de mon travail à maintes reprises. Merci à toi, maman de m'avoir épaulé et soutenu malgré les quelques milliers de kilomètres qui nous séparent.

# Résumé

Dans le cadre de la télédétection hyperfréquence active, un des objectifs est l'analyse de l'écho radar recueilli après son interaction avec la surface de la terre, afin de remonter aux paramètres physiques et géométriques de la scène observée. Pour mieux appréhender ce problème inverse, une bonne connaissance du problème direct reste indispensable.

Ce mémoire traite de l'étude de la diffraction d'une onde électromagnétique par une surface rugueuse aléatoire, séparant deux milieux homogènes. Une méthode exacte (méthode C), donnant les intensités cohérentes et incohérentes d'une surface rugueuse 1D ou 2D aléatoire, éclairée par une onde plane, a été développée. Cette méthode est basée sur la résolution des équations de Maxwell dans un système de coordonnées non orthogonales, lié à la surface.

Les surfaces considérées sont des réalisations d'un processus spatial aléatoire gaussien et isotrope. La génération des profils diffractant est assurée par filtrage linéaire. Les paramètres statistiques des profils sont estimés à partir de fichiers numériques de sols agricoles nus.

Nous avons investi la méthode numériquement et comparé nos résultats à la littérature ainsi qu'à des données expérimentales. Nous avons aussi utilisé cette méthode pour étudier l'impact de la rugosité et de l'humidité du sol sur le diagramme de rayonnement.

# Abstract

We are concerned by the scattering of an electromagnetic field by one or two dimensional rough surfaces. Our aim is to solve exactly this problem, by mean of numerical methods. We consider the case of surfaces separating homogeneous media illuminated by plane waves.

In order to analyse the scattering phenomena we have developed an exact method : the C method. The theory is based on Maxwell's equations in covariant form written in a nonorthogonal coordinate system fitted to the surface profile. This leads to an eigenvalue system, the solutions of which give the scattered fields.

The surfaces under study are modelled as a spatial random process with a height function assuming normally distributed values and are characterized by an isotropic autocorrelation function. They are numerically generated by linear filtering of a Gaussian white noise. The statistical parameters are estimated using a set of agricultural soil data base.

*A ma mère Tassadite*

# Table des matières

Résumé	iii
Abstract	iv
Table des matières	ix
Liste des tableaux	x
Table des figures	xiii
Introduction	1
<b>1 Interaction des ondes électromagnétiques avec des surfaces - Eléments théoriques</b>	<b>5</b>
1.1 Les équations de Maxwell . . . . .	6
1.2 Les relations constitutives . . . . .	8
1.3 Les conditions aux limites . . . . .	10
1.4 Onde plane et équation de propagation . . . . .	12
1.5 La polarisation d'une onde . . . . .	14
1.6 L'onde incidente et les composantes du champ . . . . .	15
1.7 Réflexion et transmission d'une onde incidente par une surface plane . . . . .	17
1.7.1 Les coefficients de Fresnel . . . . .	19
1.7.2 Coefficients de Fresnel : milieu diélectrique parfait . . . . .	20
1.7.3 Coefficients de Fresnel : milieu infiniment conducteur . . . . .	21
1.8 Le développement de Rayleigh . . . . .	21
1.8.1 Cas des champs diffractés par des surfaces 2D . . . . .	21
1.8.2 Cas des champs diffractés par des surfaces 1D . . . . .	24
1.9 L'onde diffractée en zone de champ lointain . . . . .	26
1.9.1 Cas des surfaces 2D . . . . .	26
1.9.2 Cas des surfaces 1D . . . . .	27
1.10 Grandeurs énergétiques . . . . .	28
1.10.1 Vecteur de Poynting réel et vecteur de Poynting complexe . . . . .	28
1.10.2 Le coefficient de diffusion bi-statique . . . . .	29

1.10.3	Bilan de puissance . . . . .	33
1.11	Conclusion . . . . .	34
<b>2</b>	<b>Description statistique des surfaces agricoles</b>	<b>35</b>
2.1	Généralités . . . . .	36
2.1.1	Description géométrique d'une surface . . . . .	36
2.1.2	Grandeurs statistiques caractérisant un processus aléatoire . . . . .	37
2.1.2.1	Fonction de répartition et densité de probabilité . . . . .	38
2.1.2.2	Les moments statistiques et spatiaux d'un processus aléatoire . . . . .	39
2.1.3	Stationnarité et ergodicité . . . . .	41
2.2	Caractérisation statistique d'une surface rugueuse aléatoire naturelle . . . . .	41
2.3	Procédés de génération des profils de surface . . . . .	42
2.3.1	Cas particulier de l'autocorrélation gaussienne . . . . .	44
2.3.2	Discrétisation des formules . . . . .	45
2.4	Résultats numériques . . . . .	45
2.4.1	Validation de la méthode de génération numérique des surfaces . . . . .	46
2.4.2	Comparaison entre les résultats de simulation et les résultats expérimentaux . . . . .	50
2.5	Constante diélectrique et taux d'humidité . . . . .	55
2.6	Conclusion . . . . .	56
<b>3</b>	<b>La méthode des coordonnées curvilignes : méthode C</b>	<b>58</b>
3.1	Composantes des champs dans le système de translation . . . . .	59
3.2	Equation de propagation des composantes longitudinales . . . . .	61
3.3	Les composantes tangentielles . . . . .	61
3.4	Système aux valeurs propres et fonctions d'ondes élémentaires . . . . .	62
3.5	Traitement des conditions aux limites . . . . .	63
3.6	Résolution numérique . . . . .	64
3.6.1	Formulation discrète du problème . . . . .	64
3.6.2	Fonction d'onde élémentaire et champ total . . . . .	66
3.6.3	Détermination des amplitudes de diffraction . . . . .	70
3.7	Développement de Rayleigh et la méthode C . . . . .	71
3.8	Résultats - Validation de la méthode C . . . . .	73
3.8.1	Moyenne d'ensemble et méthode Monte Carlo . . . . .	73
3.8.2	Coefficient de diffusion pour deux réalisations différentes d'un même processus . . . . .	74
3.8.3	Ordre de troncature et tailles des matrices . . . . .	76
3.8.4	La fenêtre de pondération et les effets de bord . . . . .	77
3.8.5	Stabilité et convergence de la méthode C . . . . .	79
3.8.5.1	Convergence en fonction de l'ordre de troncature M . . . . .	80

3.8.5.2	Convergence en fonction du nombre de réalisations $N_R$	82
3.8.6	Comparaison de la méthode C avec la méthode SMFSIA/CAG - Cas des surfaces parfaitement conductrices . . . . .	84
3.8.7	Comparaison de la méthode C avec la méthode FB-NSA - Cas parfaitement conducteur . . . . .	86
3.8.8	Comparaison de la méthode C avec des données expérimentales - Cas parfaitement conducteur . . . . .	87
3.8.9	Comparaison de la méthode C et de la méthode SMCG - Cas des milieux à pertes . . . . .	88
3.8.10	Application aux surfaces agricoles . . . . .	90
3.8.11	Position de la méthode C par rapport aux méthodes intégrales exactes . . . . .	94
3.9	Conclusion . . . . .	95
<b>4</b>	<b>Le principe du faible couplage et la méthode C</b>	<b>97</b>
4.1	La méthode C pour les surfaces 1D . . . . .	98
4.1.1	Le problème électromagnétique en 1D . . . . .	98
4.1.2	Equation de propagation et composantes tangentielles . . . . .	101
4.1.3	Les conditions aux limites et détermination des coefficients des combinaisons linéaires . . . . .	102
4.1.4	Résolution numérique . . . . .	103
4.2	Formalisme intégral à deux dimensions . . . . .	106
4.2.1	Le principe de Huygens . . . . .	106
4.2.2	La fonction de Green . . . . .	107
4.2.3	Les formules de rayonnement . . . . .	107
4.2.3.1	Cas d'une onde plane incidente en polarisation $E_{//}$ . . . . .	109
4.2.3.2	Cas d'une onde plane incidente en polarisation $H_{//}$ . . . . .	111
4.2.4	Cas d'un milieu infiniment conducteur . . . . .	112
4.3	Les courants de surfaces . . . . .	112
4.4	Le Principe du Faible Couplage (PFC) . . . . .	113
4.5	Simulations numériques et résultats . . . . .	115
4.5.1	Contribution du PFC à la réduction des temps de calcul . . . . .	116
4.5.2	Les courants de surface sur un profil infiniment conducteur . . . . .	118
4.5.3	Les coefficients de diffusion bi-statique - Résultats sur un profil . . . . .	123
4.5.4	Influence de la zone commune $\ell$ . . . . .	124
4.5.4.1	Cas infiniment conducteur . . . . .	124
4.5.4.2	Cas diélectrique sans pertes . . . . .	127
4.6	Application à une surface à deux échelles de rugosité - Cas des milieux diélectriques à pertes . . . . .	129
4.7	Conclusion . . . . .	131

<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>132</b>
<b>A Les formulations asymptotiques</b>	<b>135</b>
A.1 Les coordonnées sphériques . . . . .	135
A.2 Méthode de la phase stationnaire . . . . .	135
A.3 Les composantes du champ lointain . . . . .	138
<b>B Le bilan de puissance</b>	<b>143</b>
<b>C Coordonnées non orthogonales</b>	<b>151</b>
C.1 Composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur . . . . .	151
C.2 Coordonnées curvilignes . . . . .	153
C.3 Relation entre les coordonnées covariantes et contravariantes . . . . .	154
C.4 Systèmes de coordonnées curvilignes : le repère de translation . . . . .	155
C.4.1 Le cas 3D . . . . .	155
C.4.2 Le cas 2D . . . . .	157
<b>D Les équations de Maxwell en coordonnées covariantes</b>	<b>160</b>
D.1 Opérateur Div et Rot en coordonnées curvilignes . . . . .	160
D.2 Equations de Maxwell sous leur forme covariante . . . . .	164
D.3 Expression d'une composante transversale en fonction des composantes longitudinales . . . . .	165
D.4 Equation de propagation . . . . .	166
<b>E Théorème de Shannon et Formules d'interpolation</b>	<b>169</b>
<b>F Raccordement des intégrales de Rayleigh et de la méthode C</b>	<b>172</b>
<b>G Formalisme intégral</b>	<b>174</b>
G.1 Deuxième théorème de Green . . . . .	174
G.2 Le principe de Huygen's . . . . .	175
<b>Bibliographie</b>	<b>178</b>

# Liste des tableaux

1.1	<i>Composantes du champ électromagnétique suivant la polarisation . . .</i>	16
2.1	<i>Valeurs du Kurtosis pour différents sols nus (état initial) . . . . .</i>	51
2.2	<i>Paramètres statistiques des semis à différents états . . . . .</i>	52
2.3	<i>Permittivités relatives de sols nus dans le domaine des hyperfréquences</i>	56
3.1	<i>Ordre de troncature, dimension du système aux valeurs propres et temps CPU correspondant . . . . .</i>	77
3.2	<i>Erreur sur le bilan de puissance en fonction de l'ordre de troncature et de l'écart type des hauteurs pour les deux polarisations <math>E_{//}</math> et <math>H_{//}</math> . . .</i>	80
3.3	<i>Paramètres statistiques des deux états du sol semis . . . . .</i>	91
3.4	<i>Valeur du coefficient de diffusion bi-statique moyen dans la direction de rétro-diffusion (<math>-40^\circ</math>) en dB . . . . .</i>	91
3.5	<i>Ecart en dB sur le coefficient de rétro-diffusion (<math>-40^\circ</math>) suivant l'état du sol et son taux d'humidité . . . . .</i>	91
4.1	<i>Composantes du champ électromagnétique 1D . . . . .</i>	101
4.2	<i>Temps de calcul en secondes en fonction de l'ordre de troncature et la longueur de la zone commune <math>\ell</math> . . . . .</i>	117
4.3	<i>Erreurs relatives moyennes sur les parties réelles et imaginaires des courants de surface suivant la polarisation de l'onde incidente . . . . .</i>	122
4.4	<i>Erreurs relatives sur les courants de surface et le coefficient de diffusion moyen suivant la longueur de la zone commune <math>\ell</math> . . . . .</i>	125
4.5	<i>Erreurs relatives sur les courants de surface et le coefficient de diffusion moyen dans le milieu supérieur, suivant la longueur de la zone commune <math>\ell</math></i>	127

# Table des figures

1.1	<i>Interface séparant deux milieux LHI</i> . . . . .	11
1.2	<i>Orientation des champs dans les deux polarisations fondamentales <math>E_{//}</math> et <math>H_{//}</math></i> . . . . .	15
1.3	<i>Champ incident dans l'espace à trois dimensions</i> . . . . .	16
1.4	<i>Ondes réfléchie et transmise en polarisation <math>E_{//}</math> et <math>H_{//}</math></i> . . . . .	18
1.5	<i>Plan localement déformé : cas 2D</i> . . . . .	22
1.6	<i>Plan localement déformé : cas 1D</i> . . . . .	25
2.1	<i>Exemples de surfaces rugueuses 1D et 2D</i> . . . . .	37
2.2	<i>Filtrage linéaire</i> . . . . .	43
2.3	<i>Profil gaussien généré par filtrage linéaire</i> . . . . .	46
2.4	<i>Densités de probabilité des hauteurs théorique et estimée (<math>\sigma_a = 0.5\lambda</math>)</i> .	47
2.5	<i>Fonction d'autocorrélation estimée sur une seule réalisation (<math>\ell_c = 1.5\lambda</math> et <math>\mathcal{H} = 1</math>)</i> . . . . .	47
2.6	<i>Fonction d'autocorrélation spatiale dans les plans <math>x = 0</math> et <math>z = 0</math></i> . . . . .	48
2.7	<i>Densité de probabilité des hauteurs moyennée sur 100 réalisations</i> . . .	49
2.8	<i>Moyenne des fonctions d'autocorrélations spatiales</i> . . . . .	49
2.9	<i>Fonction d'autocorrélation moyenne dans les plans <math>x = 0</math> et <math>z = 0</math></i> . . .	50
2.10	<i>Estimation des densités de probabilité des hauteurs obtenues à partir des fichiers numériques des sols nus</i> . . . . .	52
2.11	<i>Densité de probabilité des surfaces de semis à différents états estimée à partir des données expérimentales</i> . . . . .	53
2.12	<i>Fonction d'autocorrélation estimée à partir des données expérimentales, pour les deux états du semis, dans le plan <math>(xOy)</math></i> . . . . .	54
2.13	<i>Fonction d'autocorrélation estimée à partir des données expérimentales, pour les deux états du semis, dans le plan <math>(yOz)</math></i> . . . . .	54
2.14	<i>Coupes horizontales de la fonction d'autocorrélation estimée à partir des données expérimentales, pour les deux états du semis</i> . . . . .	55
3.1	<i>Coefficient de diffusion bi-statique <math>\sigma_1^{E_{//}E_{//}}</math> pour une seule réalisation</i> . .	75
3.2	<i>Coefficient de diffusion bi-statique moyenné sur <math>N_R = 300</math> réalisations</i> .	75
3.3	<i>Temps d'exécution en fonction de <math>M_s</math></i> . . . . .	77

3.4	Coefficient de diffusion bi-statique $\sigma_1^{E_{//}H_{//}}$ dans le plan d'incidence pour une réalisation et pour différentes valeurs de l'ordre de troncature M . . .	81
3.5	Coefficient de diffusion bi-statique $\sigma_1^{E_{//}H_{//}}$ dans le plan d'incidence pour une réalisation et pour différentes valeurs de l'ordre de troncature M . . .	82
3.6	Convergence de la composante directe du coefficient de diffusion bi-statique moyen $\langle \sigma_1^{H_{//}H_{//}} \rangle$ , dans le plan d'incidence, en fonction du nombre de réalisations $N_R$ . . . . .	83
3.7	Convergence de l'intensité incohérente, en polarisation croisée, en fonction du nombre de réalisations $N_R$ . . . . .	83
3.8	Comparaison entre la méthode C et la méthode SMFSIA/CAG . . . . .	85
3.9	<i>Histogramme des erreurs en <math>E_{//}</math></i> . . . . .	85
3.10	<i>Histogramme des erreurs en <math>H_{//}</math></i> . . . . .	86
3.11	Comparaison de la méthode C et de la méthode FB-NSA . . . . .	87
3.12	Comparaison de la méthode C avec des données expérimentales . . . . .	88
3.13	Composante directe moyenne $\langle \sigma^{E_{//}E_{//}} \rangle$ pour des surfaces gaussiennes à pertes . . . . .	89
3.14	Composante croisée moyenne $\langle \sigma^{H_{//}E_{//}} \rangle$ pour des surfaces gaussiennes à pertes . . . . .	90
3.15	<i>Effet de l'humidité sur le coefficient de diffusion bi-statique à rugosité constante</i> . . . . .	93
3.16	<i>Coefficient de diffusion bi-statique pour les deux états du semis avec un taux d'humidité égal à 5%</i> . . . . .	93
3.17	<i>Effet de la variation conjuguée de la rugosité et de l'humidité sur le coefficient de diffusion bi-statique</i> . . . . .	94
4.1	<i>Schéma du problème 1D</i> . . . . .	99
4.2	<i>Profil total de longueur <math>L</math> subdivisé en <math>N</math> parties de longueur égale</i> . . .	114
4.3	<i>Petits profils de longueur <math>\frac{L}{N}</math> avec les zones communes de dimension <math>\ell</math> (en trait discontinu)</i> . . . . .	114
4.4	<i>Intensité incohérente dans le cas d'un milieu 2 diélectrique à pertes, pour une onde incidente en polarisation <math>H_{//}</math></i> . . . . .	117
4.5	Partie réelle du courant surfacique $F_{x'}$ en polarisation $E_{//}$ . . . . .	118
4.6	Partie imaginaire du courant surfacique $F_{x'}$ en polarisation $E_{//}$ . . . . .	119
4.7	Partie réelle du courant surfacique $F_z$ en polarisation $E_{//}$ . . . . .	119
4.8	Partie imaginaire du courant surfacique $F_z$ en polarisation $E_{//}$ . . . . .	120
4.9	Partie réelle du courant surfacique $F_z$ en polarisation $H_{//}$ . . . . .	120
4.10	Partie imaginaire du courant surfacique $F_z$ en polarisation $H_{//}$ . . . . .	121
4.11	Partie réelle du courant surfacique $F_{x'}$ en polarisation $H_{//}$ . . . . .	121
4.12	Partie imaginaire du courant surfacique $F_{x'}$ en polarisation $H_{//}$ . . . . .	122

4.13	<i>Partie réelle du courant surfacique <math>F_{x'}</math> au voisinage du point de troncature. Milieu 2 infiniment conducteur</i>	122
4.14	<i>Coefficient de diffusion bi-statique dans le cas d'un milieu 2 infiniment conducteur, pour une onde incidente en polarisation <math>E_{//}</math></i>	123
4.15	<i>Coefficient de diffusion bi-statique dans le cas d'un milieu 2 infiniment conducteur, pour une onde incidente en polarisation <math>H_{//}</math></i>	124
4.16	<i>Intensité incohérente pour une onde incidente en polarisation <math>E_{//}</math>. La zone commune <math>\ell = 1\lambda</math></i>	126
4.17	<i>Intensité incohérente pour une onde incidente en polarisation <math>E_{//}</math>. La zone commune <math>\ell = 4\lambda</math></i>	126
4.18	<i>Intensité incohérente pour une onde incidente en polarisation <math>H_{//}</math> (La zone commune <math>\ell = 2\lambda</math>)</i>	128
4.19	<i>Intensité incohérente pour une onde incidente en polarisation <math>H_{//}</math> (La zone commune <math>\ell = 4\lambda</math>)</i>	128
4.20	<i>Coefficient de diffusion moyen en polarisation <math>E_{//}</math> pour une surface à deux niveaux de rugosité</i>	130
4.21	<i>Intensité incohérente en polarisation <math>H_{//}</math></i>	130
A.1	<i>Repère des coordonnées sphériques</i>	136
C.1	<i>Système de translation et repère naturel 2D</i>	157
D.1	<i>Vecteurs de base en coordonnées curvilignes</i>	161
D.2	<i>Contour d'intégration fermé sur une surface <math>x^2 = Cst</math></i>	162
D.3	<i>Surface d'intégration fermée pour l'expression de la divergence</i>	163
G.1	<i>Le volume <math>\Omega</math>, <math>\bar{\Omega}</math> et la surface <math>\Sigma</math></i>	174
G.2	<i>Région d'intégration <math>\bar{\Omega}</math></i>	176

# Introduction

L'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses a commencé depuis plus d'un siècle. Lord Rayleigh fut un des premiers physiciens à avoir analysé l'interaction d'une onde avec une surface et à avoir déterminé explicitement l'influence de la rugosité sur la diffraction de l'onde. Les recherches théoriques dans ce domaine se poursuivent activement de nos jours car de multiples applications existent en télédétection, en télécommunication, en optique ou en imagerie médicale. Dans le cas de la télédétection hyperfréquence active, un des objectifs est l'analyse de l'écho radar recueilli après son interaction avec la surface de la terre. A partir de cette signature radar, nous cherchons à obtenir des renseignements sur les paramètres physiques et géométriques de la scène observée. Dans le cas des surfaces océaniques, nous voulons estimer la salinité de la mer ou bien la répartition de la hauteur des vagues en fonction de leur direction de propagation et de leur fréquence spatiale. Ces informations contribuent ensuite à l'amélioration des modèles de prévision de l'état de la mer. Dans le cas des surfaces continentales, nous cherchons à déterminer la rugosité et l'humidité de surface d'un sol, par exemple d'une parcelle agricole. Ces paramètres sont importants car ils jouent un rôle notamment dans les processus du cycle de l'eau, pour ne citer qu'une application. L'approche utilisée dans les exemples ci-dessus relève du problème inverse. Cependant, pour mieux appréhender le problème inverse, une bonne connaissance du problème direct reste indispensable.

En effet, l'étude et l'analyse des échos radar, obtenus en site ou en laboratoire (milieu contrôlé) d'une part, et de ceux obtenus grâce à la modélisation numérique basée sur des modèles théoriques, constituent une étape importante pour la compréhension du phénomène de diffraction. De ce fait, l'élaboration de méthodes modélisant les interactions d'une onde électromagnétique avec des cibles, dont les caractéristiques statistiques et/ou physiques sont connues, demeure une première démarche essentielle.

Ce travail porte sur l'étude du phénomène de diffraction d'une onde plane monochromatique par des surfaces naturelles. Ces interfaces naturelles sont qualifiées de rugueuses et aléatoires. Elles séparent deux milieux d'indices optiques différents et elles

sont caractérisées par des fonctions statistiques bien définies. Lorsque les dimensions caractéristiques de l'objet étudié, tel que le rayon de courbure par exemple, sont très grandes devant la longueur d'onde incidente, le phénomène de diffraction peut être traité en utilisant les théories basées sur l'approximation de l'optique géométrique [1]. Les profils de surfaces analysés dans cette thèse sont caractérisés par des paramètres statistiques (hauteur quadratique moyenne et longueur de corrélation) dont la dimension est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde incidente. Dans ce domaine, dit de résonance, l'étude électromagnétique ne peut se faire de manière rigoureuse que si nous tenons compte de l'aspect vectoriel de l'onde électromagnétique.

Dans le but de comprendre le phénomène de la diffraction des ondes, différents modèles et méthodes ont vu le jour. Avant l'avènement de l'outil informatique, les physiciens étaient contraints de résoudre les problèmes auxquels ils étaient confrontés de manière analytique et en effectuant des hypothèses physiques dans le but de simplifier les équations complexes régissant le phénomène physique. Ainsi, les modèles obtenus sont dits approchés. Les méthodes approchées ont un champ d'application restreint et limité du fait des hypothèses et des différentes approximations effectuées. Nous pouvons citer, par exemple, la méthode des petites perturbations (SPM), qui est valable pour des surfaces faiblement rugueuses, la méthode de l'optique géométrique (GO) et l'approximation des faibles pentes (SSA) [1, 2, 3, 4].

A partir des années 50-60 les premiers ordinateurs voient le jour. Avec eux vont naître les méthodes numériques. De nouvelles façons de résoudre les problèmes vont être utilisées pour étudier le phénomène de la diffraction de manière rigoureuse et donner naissance aux méthodes dites numériques exactes. Leur domaine d'application est *a priori* illimité car elles ne reposent sur aucune hypothèse physique simplificatrice. Leurs seules contraintes sont les temps de calcul et la place mémoire requise.

Les méthodes approchées et les méthodes dites "exactes" présentent des avantages et des inconvénients. Si les premières permettent de rendre compte de manière physique des relations liant les caractéristiques physiques et statistiques de l'objet diffractant et des champs diffractés, leurs domaines de validité restent limités. Les méthodes exactes, quant à elles, présentent des coûts de calcul non négligeables, mais peuvent servir comme références pour qualifier les méthodes approchées d'une part, mais aussi pour traiter des problèmes à géométrie complexe, où les méthodes approchées restent inaccessibles pour le moment [5, 6, 7, 8].

En se référant au formalisme des équations de Maxwell, les méthodes exactes peuvent être classées en deux catégories, à savoir la formulation intégrale et la formulation différentielle [9]. Dans le premier cas, la résolution d'une équation intégrale permet

de calculer les courants de surface à partir desquels les champs sont déterminés. Le deuxième cas permet de ramener le problème à la résolution d'un système d'équations différentielles couplées, pouvant donner directement les amplitudes des champs. Nous avons choisi de nous intéresser uniquement aux modèles exacts dans les deux formulations différentielles et intégrales. Le premier cas est basé sur l'écriture des équations de Maxwell sous leur forme locale dans un système de coordonnées translattées épousant la surface diffractante. La résolution des équations de propagation et des conditions aux limites sur la surface donne les champs ainsi que l'énergie diffractée dans toutes les directions. La deuxième approche consiste à utiliser la formulation intégrale pour faire rayonner des courants de surface obtenus grâce à la méthode précédente. Les méthodes approchées ne sont pas étudiées dans cette thèse.

Les surfaces naturelles considérées sont représentées par des processus aléatoires. Nous traitons d'abord des surfaces 2D ensuite nous déclinons notre étude au cas des surfaces cylindriques 1D. Les surfaces considérées ici sont les surfaces agricoles telles que les champs labourés. En première approche leur description est basée sur deux types de fonctions : la densité de probabilité des hauteurs gaussiennes et la fonction d'autocorrélation entre gaussienne et exponentielle.

Au cours de ces trois années passées au Centre d'étude des Environnements Terrestre et Planétaires, nos principaux objectifs étaient :

- L'investigation de la méthode C et son extension aux cas des surfaces rugueuses 2D aléatoires
- L'implémentation d'un générateur de surfaces rugueuses 2D
- L'élaboration et l'implémentation d'une nouvelle méthode couplant la méthode C et les formulations intégrales dans le cas des surfaces 1D et pour des milieux infiniment conducteurs ou diélectriques.

Ce manuscrit est composé de quatre chapitres. Le chapitre 1 constitue un rappel des différentes notions fondamentales de l'électromagnétisme. Nous écrivons les équations de Maxwell, les relations constitutives, ainsi que les relations de continuité, en régime harmonique. Nous décrivons l'onde incidente et nous traitons la réflexion par un plan infini. Puis, nous introduisons les intégrales de Rayleigh à deux et trois dimensions et nous écrivons les expressions asymptotiques des champs dans deux milieux diélectriques. En fin de ce chapitre, nous donnons quelques grandeurs énergétiques liées aux ondes électromagnétiques, ainsi que les propriétés physiques que doivent respecter les champs.

Le chapitre 2 concerne la description des surfaces rugueuses que nous étudions. Quelques éléments théoriques sur la description statistique des processus aléatoires sont donnés. En nous basant sur ces notions, nous décrivons la méthode permettant de générer des surfaces aléatoires avec une fonction d'autocorrélation et une densité

de probabilité des hauteurs bien définies. Pour conclure ce chapitre, des résultats de simulation et une comparaison avec des données expérimentales sont exposés dans le but de valider la technique de génération numérique des surfaces.

Dans le chapitre 3, nous décrivons la méthode C, pour les surfaces 2D, de façon détaillée. Nous abordons les deux cas de polarisations fondamentales et les différents types de milieux (diélectrique ou infiniment conducteur). La méthode C en trois dimensions est validée par des tests de convergence ainsi que des comparaisons avec d'autres méthodes exactes et des données expérimentales dans le domaine des hyperfréquences.

Le chapitre 4 est consacré à la présentation de la nouvelle méthode implémentée afin de traiter des surfaces 1D de longueur importante. Elle fait appel à la méthode C en 1D, que nous décrivons de façon succincte, et aux formules de rayonnement issues du formalisme intégral. Le principe de Huygens est présenté. L'objectif de cette formulation est d'associer la méthode C et l'approximation du faible couplage [10, 11] en vue de réduire les temps de calcul. La nouvelle méthode est validée par des comparaisons avec la méthode C seule.

# Chapitre 1

## Interaction des ondes électromagnétiques avec des surfaces - Éléments théoriques

Dans cette thèse, les ondes électromagnétiques incidentes considérées sont des ondes planes. Les milieux étudiés sont linéaires, homogènes et isotropes (*LHI*) et ils sont non magnétiques (perméabilité magnétique  $\mu = \mu_0^1$ ). Les interfaces séparant deux milieux différents sont invariantes dans le temps, c'est-à-dire leur forme géométrique n'évolue pas au cours du temps, ou sur la durée du temps d'observation (par exemple les surfaces agricoles, les sols nus, etc. . .). Le milieu d'incidence est l'air. Il est assimilé au vide et représenté comme un milieu parfaitement diélectrique<sup>2</sup>.

Ce travail porte sur l'étude du problème direct (par opposition au problème inverse) de la diffraction des ondes par des surfaces rugueuses. Nous chercherons à déterminer le champ électromagnétique diffracté connaissant la loi d'éclairement et les caractéristiques géophysiques de la cible.

Le phénomène de la diffraction d'une onde électromagnétique par une surface dépend de la géométrie de celle-ci. Par exemple, les réponses d'une surface plane et d'une surface rugueuse à une excitation électromagnétique sont totalement différentes. Dans le premier cas, et si le plan est infiniment conducteur, la totalité de l'énergie incidente sera réfléchie suivant la direction spéculaire, alors que la présence des rugosités, dans le deuxième cas, introduit de nouvelles directions de diffraction. L'influence de la géométrie de la cible sur la diffraction d'une onde a suscité beaucoup d'intérêt au

---

<sup>1</sup> $\mu_0$  perméabilité du vide

<sup>2</sup>Dépourvu de charge et de courant électrique

sein de la communauté des physiciens. Beaucoup de travaux ont été consacrés à cette étude et ont abouti à l'élaboration de différentes méthodes de résolution. Ces méthodes étaient exclusivement analytiques au départ. Ensuite, des méthodes numériques ont vu le jour avec l'arrivée de l'outil informatique. De nos jours, ces deux façons de résolution continuent de progresser et d'évoluer. Toutes ces méthodes ont en commun la théorie électromagnétique de Maxwell.

Ce chapitre a pour but d'introduire les notions fondamentales de l'électromagnétisme utilisées pour la réalisation de ce travail de thèse. Nous commençons par poser les équations de Maxwell sous leur forme générale. Ensuite, nous écrivons les relations constitutives ainsi que les conditions de passage à la frontière de deux milieux en régime harmonique. La représentation des champs électromagnétiques sous forme d'intégrales de Rayleigh est donnée. Ceci permet de déduire leur forme asymptotique (zone du champ lointain). Différentes grandeurs énergétiques sont définies : le vecteur Poynting, la puissance totale diffractée et le coefficient de diffusion bi-statique. Le critère sur le bilan de puissance, que doivent respecter les champs électromagnétiques dans le cas des milieux sans pertes, est également énoncé.

## 1.1 Les équations de Maxwell

En régime temporel, les équations de Maxwell, dans un milieu quelconque, sont données sous la forme suivante [12, 13] :

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho \quad (1.1c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad (1.1d)$$

avec :

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,	le champ électrique en	(Volts/m)
$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ ,	l'excitation magnétique en	(Ampère/m)
$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ,	le champ magnétique en	(Weber/m <sup>2</sup> )
$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ ,	le déplacement électrique en	(Coulomb/m <sup>2</sup> )
$\rho(\mathbf{r}, t)$ ,	la densité de charge électrique en	(Coulomb/m <sup>3</sup> )
$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ ,	la densité de courant électrique en	(Ampère/m <sup>2</sup> )

Nous pouvons voir que les équations (1.1a) et (1.1b) ne font pas intervenir les sources. Elles sont dites équations homogènes. Elles sont valables quel que soit le milieu. Sous sa forme intégrale, l'équation (1.1a) traduit la conservation du flux du vecteur  $\mathbf{B}$ . L'équation (1.1b) donne le champ électrique  $\mathbf{E}$  induit par les variations temporelles du champ magnétique  $\mathbf{B}$ . L'équation (1.1c) présente la loi de Gauss et atteste de l'existence des charges électriques. Enfin, la dernière équation (1.1d) sous forme intégrale donne la généralisation du théorème d'Ampère et donne le vecteur induit  $\mathbf{H}$  par le mouvement des charges ainsi que les variations temporelles du vecteur  $\mathbf{D}$ . Les densités de charge et de courant électrique  $\rho$  et  $\mathbf{j}$  constituent les sources.

A partir des équations (1.1c) et (1.1d), nous obtenons l'équation de conservation de la charge. En effet, l'application de l'opérateur divergence sur l'équation (1.1d) permet d'obtenir :

$$\operatorname{div} [\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t)] = \operatorname{div} \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (1.2)$$

Sachant que  $\forall \mathbf{A}$ ,  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = 0$  et en supposant que les deux opérateurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\operatorname{div}$  peuvent permuter, l'équation précédente se transforme en :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)] = -\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \quad (1.3)$$

En remplaçant  $\operatorname{div} \mathbf{D}$  par  $\rho$  (équation (1.1c)), nous déduisons l'équation de conservation de la charge électrique :

$$\operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.4)$$

En intégrant l'équation 1.4 sur le volume  $\Omega$  contenant toutes les charges et tous les courants et en faisant appel au théorème de Green-Ostrograski, nous obtenons la forme intégrale de l'équation (1.4) :

$$\iint_{\Sigma} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} \, ds + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}, t) \, dv = 0 \quad (1.5)$$

Cette dernière équation traduit le fait que, s'il y a diminution au cours du temps de la charge totale contenue dans un volume  $\Omega$ , alors il existe un courant donné par le flux sortant du vecteur  $\mathbf{j}$  à travers la surface fermée  $\Sigma$  contenant le volume  $\Omega$ .

Supposons que la dépendance temporelle des champs électromagnétiques ainsi que celle des sources est sinusoïdale ( $\cos(\omega t + \phi(\mathbf{r}))$ ).  $\omega$  est la pulsation, avec  $\omega = 2\pi f$  où  $f$  est la fréquence.

Dans cette configuration dite *régime harmonique*, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = 0 \quad (1.6a)$$

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = -j2\pi f \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \quad (1.6b)$$

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) = \underline{\rho} \quad (1.6c)$$

$$\operatorname{rot} \underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{j}}(\mathbf{r}) + j2\pi f \underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) \quad (1.6d)$$

$\underline{\mathbf{E}}$ ,  $\underline{\mathbf{H}}$ ,  $\underline{\mathbf{D}}$ ,  $\underline{\mathbf{B}}$ ,  $\underline{\mathbf{j}}$  et  $\underline{\rho}$  désignent les amplitudes complexes associées aux vecteurs réels  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  et au scalaire  $\rho$ .

Soit  $\Psi(\mathbf{r}, t)$  une fonction spatio-temporelle désignant respectivement une des composantes des vecteurs réels  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{j}$  ou le scalaire  $\rho$ . Les expressions des composantes des champs dans le domaine temporel sont obtenues en prenant la partie réelle du produit  $\underline{\Psi}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}$  :

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re} [\underline{\Psi}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}] \\ &= |\underline{\Psi}(\mathbf{r})| \cos(\omega t + \phi(\mathbf{r})) \end{aligned}$$

L'amplitude complexe s'écrit :

$$\underline{\Psi}(\mathbf{r}) = |\underline{\Psi}(\mathbf{r})| e^{j\phi(\mathbf{r})} \quad (1.7)$$

Dans la suite, nous nous intéressons uniquement au régime harmonique et les champs sont représentés par leurs amplitudes complexes.

## 1.2 Les relations constitutives

Afin de déterminer de façon unique les composantes des vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ , pour une distribution de courant  $\mathbf{j}$  et de charge  $\rho$ , il est nécessaire d'utiliser, en plus des équations de Maxwell, les relations constitutives, décrivant le comportement du milieu soumis à un champ électromagnétique. Si le champ électromagnétique n'est pas très

intense (puissance faible), alors ces relations sont linéaires. Pour un milieu (*LHI*), non magnétique<sup>3</sup> ( $\mu(t) = \mu_0 \mu_r(t) = \mu_0$ ) et invariant dans le temps, elles s'écrivent [12, 13] :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r(t) * \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.8a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.8b)$$

Le symbole  $*$  désigne le produit de convolution.  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  représentent respectivement la perméabilité magnétique et la permittivité électrique du vide.

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{10^{-9}}{36\pi} \text{ F/m} \\ \epsilon_0 &= 4\pi 10^{-7} \text{ H/m} \end{aligned}$$

Comme nous l'avons noté, les caractéristiques diélectriques d'un milieu peuvent s'exprimer comme le produit des constantes diélectriques du vide  $\mu_0$  et  $\epsilon_0$  et d'une perméabilité magnétique et permittivité électrique relatives  $\mu_r$  et  $\epsilon_r$ <sup>4</sup>.

Dans le cas d'un milieu dit *électrique parfait*, la permittivité électrique relative est proportionnelle à une impulsion de Dirac :  $\epsilon_r(t) = \epsilon_r \delta(t)$ . Sachant que le dirac est l'élément neutre du produit de convolution, la relation (1.8a) s'écrit :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.9)$$

Cette dernière équation traduit le fait que le milieu répond *instantanément* à un champ électromagnétique.

A partir des équations (1.8a, 1.8b) et en utilisant les notations complexes, nous obtenons les relations constitutives en régime harmonique :

$$\underline{\mathbf{D}}(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \hat{\epsilon}_r(f) \underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) \quad (1.10a)$$

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\mu_0} \underline{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) \quad (1.10b)$$

où  $\hat{\epsilon}_r(f)$  est la transformée de Fourier de  $\epsilon_r(t)$  :

$$\hat{\epsilon}_r(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \epsilon_r(t) \exp(-j 2 \pi f t) dt \quad (1.11)$$

La dépendance de la transformée de Fourier  $\hat{\epsilon}_r(f)$  de la fréquence est caractéristique des milieux dits *dispersifs*. La grandeur  $\hat{\epsilon}_r(f)$  est complexe. Nous l'exprimons comme

---

<sup>3</sup>La perméabilité relative est  $\mu_r = 1$

<sup>4</sup>Pour le vide  $\mu_r = 1$  et  $\epsilon_r = 1$

la somme d'une partie réelle et d'une partie imaginaire :

$$\hat{\epsilon}_r(f) = \hat{\epsilon}'_r(f) - j\hat{\epsilon}''_r(f) \quad (1.12)$$

La partie imaginaire  $\hat{\epsilon}''$  de la permittivité complexe est liée au phénomène de l'absorption. Si cette partie imaginaire est nulle alors le milieu est dit *transparent*.

L'angle de perte à la fréquence  $f$  est défini comme le rapport de la partie imaginaire de la permittivité sur la partie réelle [13] :

$$\tan(\delta(f)) = \frac{\hat{\epsilon}''_r(f)}{\hat{\epsilon}'_r(f)} \quad (1.13)$$

Plus l'angle de perte augmente, plus le milieu est absorbant. Dans le cas des conducteurs, cet angle est voisin de  $\frac{\pi}{2}$ .

### 1.3 Les conditions aux limites

Les problèmes électromagnétiques sont basés sur les équations de Maxwell. Ces équations sont valables dans tout l'espace infini. Pour pouvoir appliquer la théorie de l'électromagnétisme à des milieux qui sont finis, il faudra associer aux équations de Maxwell des conditions que doivent vérifier les champs électromagnétiques aux frontières entre les différents milieux, possédant des caractéristiques diélectriques différentes.

Soit  $\Sigma_{21}$  une interface arbitraire séparant deux milieux (*LHI*). Nous noterons ces deux milieux : milieu 1 et milieu 2 (voir figure 1.1). Soit  $\mathbf{n}_{21}$  un vecteur unitaire normal à la surface séparant les deux milieux et orienté, par convention du milieu 2 vers le milieu 1.

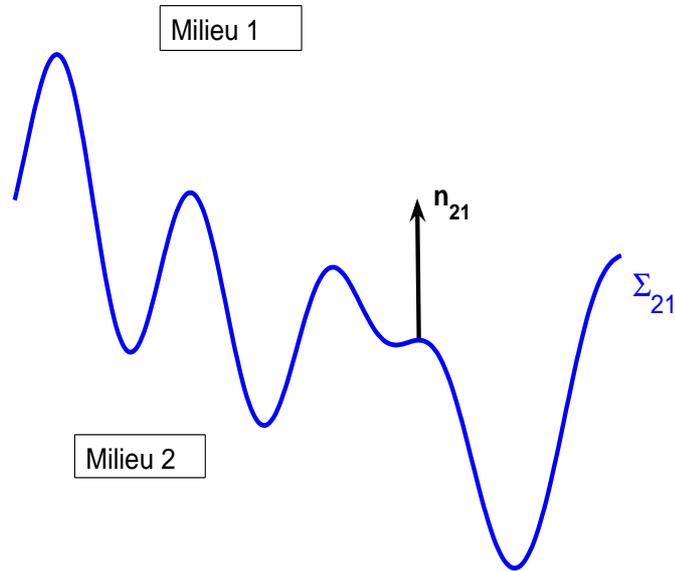
En régime harmonique (mais aussi en régime temporel) les conditions aux limites en tout point de la surface peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\mathbf{n}_{21} \bullet (\underline{\mathbf{B}}_1 - \underline{\mathbf{B}}_2) = 0 \quad (1.14a)$$

$$\mathbf{n}_{21} \bullet (\underline{\mathbf{D}}_1 - \underline{\mathbf{D}}_2) = \underline{\rho}_s \quad (1.14b)$$

$$\mathbf{n}_{21} \wedge (\underline{\mathbf{E}}_1 - \underline{\mathbf{E}}_2) = \mathbf{0} \quad (1.14c)$$

$$\mathbf{n}_{21} \wedge (\underline{\mathbf{H}}_1 - \underline{\mathbf{H}}_2) = \underline{\mathbf{j}}_s \quad (1.14d)$$



**Fig. 1.1:** Interface séparant deux milieux LHI

$\mathbf{j}_s$  et  $\rho_s$  représentent respectivement les densités de courant et de charge surfaciques libres, susceptibles d'être présentes sur la surface séparant les deux milieux.

Cet ensemble d'équations traduit le comportement des différents champs à la traversée d'une frontière. L'équation (1.14a) traduit la continuité de la composante normale du champ magnétique  $\mathbf{B}$ . L'équation (1.14c) quant à elle, traduit la continuité de la composante tangentielle du champ électrique  $\mathbf{E}$ . Ces deux équations sont appelées *les relations de continuité*. Les deux autres équations décrivent la discontinuité de la composante normale de l'excitation électrique  $\mathbf{D}$  (équation 1.14b) et de la composante tangentielle du vecteur excitation magnétique  $\mathbf{H}$  (équation 1.14d), s'il existe des charges et courants électriques sur l'interface.

Si le milieu 2 est un conducteur parfait<sup>5</sup> alors les champs macroscopiques sont nuls

---

<sup>5</sup>Conductivité infinie

dans ce milieu et les conditions aux limites sont réduites à :

$$\mathbf{n}_{21} \bullet (\underline{\mathbf{B}}_1) = 0 \quad (1.15a)$$

$$\mathbf{n}_{21} \bullet (\underline{\mathbf{D}}_1) = \underline{\rho}_s \quad (1.15b)$$

$$\mathbf{n}_{21} \wedge (\underline{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{0} \quad (1.15c)$$

$$\mathbf{n}_{21} \wedge (\underline{\mathbf{H}}_1) = \underline{\mathbf{j}}_s \quad (1.15d)$$

Dans le cas des milieux diélectriques et conducteurs à pertes,  $\underline{\mathbf{j}}_s = \underline{\rho}_s = 0$ .

## 1.4 Onde plane et équation de propagation

Afin d'exhiber les équations de propagation, nous partons des deux équations de Maxwell (1.6b, 1.6d) et des deux relations constitutives (1.10a, 1.10b). En appliquant l'opérateur **rot** et en utilisant la propriété suivante :

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot}(\mathbf{V}) = \mathbf{grad} \mathit{div}(\mathbf{V}) - \Delta(\mathbf{V})$$

où  $\Delta$  représente le Laplacien vectoriel.

Les équations de propagation de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  s'écrivent comme suit :

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} + \hat{\epsilon} \mu_0 \omega^2 \underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{\hat{\epsilon}} \mathbf{grad} \underline{\rho} + j\omega \mu_0 \underline{\mathbf{j}} \quad (1.16a)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} + \hat{\epsilon} \mu_0 \omega^2 \underline{\mathbf{H}} = -\mathbf{rot} \underline{\mathbf{j}} \quad (1.16b)$$

Si le milieu de propagation ne contient ni courants ni charges électriques libres ( $\underline{\rho} = 0$  et  $\underline{\mathbf{j}} = \mathbf{0}$ ), alors les équations de propagation se réduisent à :

$$\Delta \underline{\mathbf{E}} + \hat{\epsilon} \mu_0 \omega^2 \underline{\mathbf{E}} = 0 \quad (1.17a)$$

$$\Delta \underline{\mathbf{H}} + \hat{\epsilon} \mu_0 \omega^2 \underline{\mathbf{H}} = 0 \quad (1.17b)$$

Les équations (1.17a, 1.17b) sont les équations de Helmholtz sans second membre. Elles admettent une solution particulière donnée sous la forme suivante :

$$\underline{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1.18a)$$

$$\underline{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{H}}_0 e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (1.18b)$$

où  $\underline{\mathbf{E}}_0$  et  $\underline{\mathbf{H}}_0$  sont indépendants de  $\mathbf{r}$ .

Le vecteur  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde dans le milieu de propagation. Nous montrons aisément que les deux dernières équations de Helmholtz (1.17a, 1.17b) imposent la valeur du carré scalaire du vecteur  $\mathbf{k}$  :

$$\mathbf{k}^2 = \epsilon_0 \hat{\epsilon}_r \mu_0 \omega^2 \quad (1.19)$$

Dans le cas général,  $\hat{\epsilon}_r$  est complexe :  $\hat{\epsilon}_r = \tilde{\epsilon}'_r - j \tilde{\epsilon}''_r$ . Si le milieu est transparent,  $\hat{\epsilon}_r$  et  $\mathbf{k}$  sont réels. Nous pouvons associer au vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  une longueur d'onde  $\lambda$  traduisant la périodicité spatiale des champs dans la direction de propagation de l'onde. Son module est donné par :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.20)$$

En remplaçant  $k$  dans la relation (1.19) nous obtenons la relation suivante :

$$\epsilon_0 \tilde{\epsilon}'_r \mu_0 v^2 = 1$$

où  $v$  est une constante caractérisant le milieu de propagation et dont la dimension est celle d'une vitesse.

Si le milieu considéré est l'air, assimilé au vide ( $\mu_0, \epsilon_0$ ), alors cette onde se propage à la célérité de la lumière  $c$ , donnée par la relation  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ . La valeur numérique de cette vitesse est  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

Dans le cas d'un milieu (*LHI*) non magnétique transparent d'indice optique  $n = \sqrt{\epsilon_r}$ , la constante  $v$  s'exprime comme suit :

$$v = \frac{c}{n}$$

Les équations (1.18a, 1.18b) traduisent la nature d'une onde plane monochromatique. Sa direction de propagation est donnée par le vecteur d'onde  $\mathbf{k}$ .

Dans un plan équiphase (plan d'onde donné par  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = Cte$ ), les amplitudes des composantes de l'onde sont indépendantes de la position sur ce plan et restent constantes.

A partir des équations de Maxwell, nous montrons que le trièdre ( $\underline{\mathbf{E}}, \underline{\mathbf{H}}, \mathbf{k}$ ) est direct, et les vecteurs  $\underline{\mathbf{E}}$  et  $\underline{\mathbf{H}}$  sont reliés par la relation d'orthogonalité suivante :

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{\underline{\mathbf{H}} \wedge \mathbf{k}}{\epsilon_0 \hat{\epsilon}_r \omega} \quad (1.21)$$

En faisant intervenir l'impédance<sup>6</sup> du milieu  $Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \hat{\epsilon}_r}}$  dans (1.21), nous obtenons :

$$\underline{\mathbf{E}} = Z \underline{\mathbf{H}} \wedge \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (1.22)$$

Dans cette thèse, nous travaillons en régime harmonique. La dépendance temporelle de l'onde plane est en  $e^{+j\omega t}$ , elle est omise dans les calculs. Par ailleurs, nous représentons les composantes du champ électromagnétique par les amplitudes complexes  $\underline{\Psi}(\mathbf{r})$ . Pour la suite, par souci de simplification de l'écriture, les amplitudes complexes ne seront plus soulignées, sauf au paragraphe (§ 1.10.1) où nous introduisons les vecteurs de Poynting réel et complexe.

## 1.5 La polarisation d'une onde

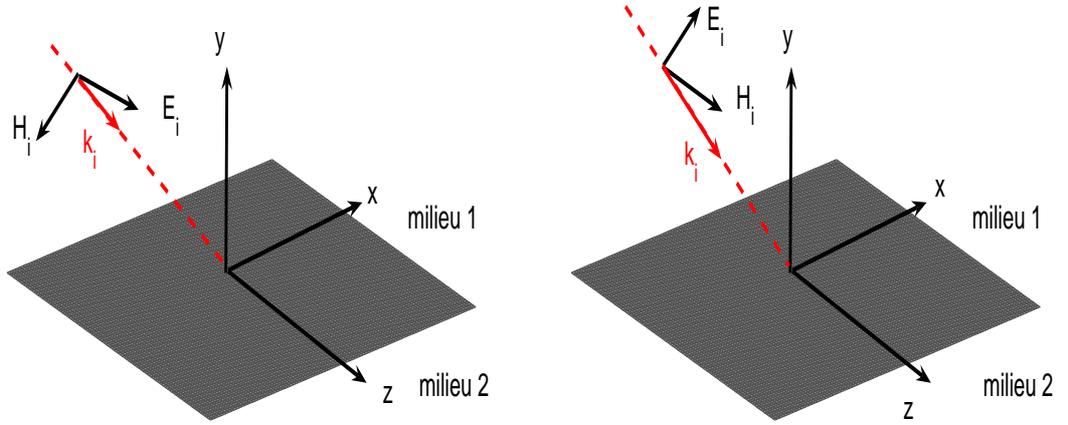
Soit le repère cartésien  $(Oxyz)$ , muni d'une base orthonormée  $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ . Soit une onde plane incidente monochromatique se propageant dans l'espace constitué de deux milieux diélectriques semi infinis, séparés par une interface. Considérons le cas d'une incidence classique (Le vecteur d'onde incident  $\mathbf{k}_i$  est situé dans le plan  $(xOy)$ ). La direction de propagation de l'onde incidente est repérée par l'angle  $\theta_i$ . La polarisation d'une onde plane est déterminée en fonction de la courbe que va décrire le champ électrique  $\mathbf{E}$  dans un plan d'onde. Cette polarisation est dans le cas général elliptique et peut se décomposer en une combinaison de deux polarisations rectilignes, dites polarisations fondamentales : horizontale et verticale.

La polarisation horizontale correspond au cas où le champ électrique  $\mathbf{E}$  est perpendiculaire au plan d'incidence (voir figure 1.2) formé par le couple de vecteurs  $(\mathbf{k}_i, \hat{\mathbf{y}})$ . Elle est aussi appelée polarisation transverse électrique (notée TE ou h). Nous l'appellerons *polarisation E parallèle* et elle sera notée  $E_{//}$ , car le champ  $\mathbf{E}$  est parallèle au plan  $(xOz)$ .

Concernant la polarisation verticale ou transverse magnétique (notée TM ou v), représentant la configuration où le champ  $\mathbf{H}$  est perpendiculaire au plan d'incidence (voir figure 1.2), nous l'appellerons *polarisation H parallèle* et elle sera notée  $H_{//}$ . Dans le cas général, toute polarisation peut s'exprimer comme combinaison linéaire de ces deux polarisations fondamentales  $E_{//}$  et  $H_{//}$ .

---

<sup>6</sup>L'impédence du vide  $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\hat{\epsilon}_0}} \approx 377\Omega$



**Fig. 1.2:** Orientation des champs dans les deux polarisations fondamentales  $E_{//}$  et  $H_{//}$

## 1.6 L'onde incidente et les composantes du champ

Supposons que l'interface séparant les deux milieux est une surface rugueuse 2D, représentée par son équation  $y = a(x, z)$ . La fonction 'a' est nulle en dehors d'un intervalle borné  $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ . Elle est supposée continue et deux fois dérivable. Les deux milieux diélectriques représentent respectivement l'air (milieu 1), assimilé au vide et caractérisé par les constantes diélectriques  $(\epsilon_0, \mu_0)$ , et un milieu 2 (LHI) diélectrique, non magnétique et non dispersif, dont l'indice optique  $n_2$  est soit réel soit complexe. La loi d'éclairage est une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ . Son vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$  est repéré dans l'espace par l'angle de site  $\theta_i$  par rapport à l'axe  $(Oy)$  et l'angle d'azimut  $\varphi_i$  dans le plan  $(xOz)$ .

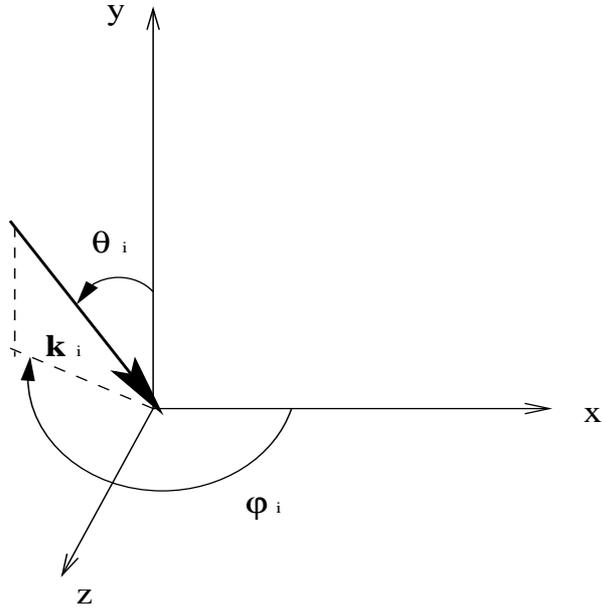
$$\mathbf{k}_i = \alpha_i \hat{\mathbf{x}} - \beta_i \hat{\mathbf{y}} + \gamma_i \hat{\mathbf{z}} \quad (1.23)$$

Avec

$$\begin{cases} \alpha_i = k_i \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ \beta_i = k_i \cos \theta_i \\ \gamma_i = k_i \sin \theta_i \sin \varphi_i \end{cases} \quad (1.24)$$

et  $k_i = \frac{2\pi}{\lambda}$

Au contact de l'interface, l'onde incidente est diffractée dans différentes directions de l'espace, repérées par le couple d'angles  $(\theta, \varphi)$ . Le tableau (1.1) rappelle les différentes



**Fig. 1.3:** Champ incident dans l'espace à trois dimensions

composantes des champs électromagnétiques suivant la polarisation.

	Polarisation $E_{//}$	Polarisation $H_{//}$
Champ $\mathbf{E}$	$E_x, E_z$	$E_x, E_y, E_z$
Champ $\mathbf{H}$	$H_x, H_y, H_z$	$H_x, H_z$

**Tab. 1.1:** Composantes du champ électromagnétique suivant la polarisation

Nous travaillons en régime harmonique. Les champs électromagnétiques dans les deux milieux sont représentés par leurs amplitudes complexes. Nous utilisons des lettres minuscules pour désigner les différents champs considérés (i pour incident, d pour diffracté, r pour réfléchi, tot pour total). Pour distinguer les champs diffractés dans les deux milieux, les amplitudes complexes seront accompagnées d'un indice 'm' valant 1 ou 2 respectivement pour le milieu 1 ou le milieu 2. Les mêmes notations s'appliqueront pour toutes les autres grandeurs physiques qui peuvent intervenir dans la suite de ce travail. Les deux cas fondamentaux de polarisation, à savoir la polarisation  $E_{//}$  et  $H_{//}$ , sont étudiés.

Soit  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  une fonction complexe désignant la composante parallèle au plan  $(xOz)$  du champ électromagnétique. Dans le cas de la polarisation  $E_{//}$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  représente le vecteur  $\mathbf{E}$ . Pour la polarisation  $H_{//}$ , elle représente la grandeur  $Z\mathbf{H}$ .  $Z$  est l'impédance du milieu considéré. La multiplication du vecteur champ magnétique  $\mathbf{H}$  par l'impédance permet d'obtenir une grandeur de même dimension que le champ électrique  $\mathbf{E}$ . Par exemple, le

champ électromagnétique incident est donné par :

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{r}) = \mathbf{V}_i e^{-i\mathbf{k}_i \mathbf{r}} = \begin{cases} \mathbf{E}_i(x, y, z) & \text{en } E_{//} \\ Z_1 \mathbf{H}_i(x, y, z) & \text{en } H_{//} \end{cases} \quad (1.25)$$

avec

$$\begin{cases} \mathbf{V}_i = \sin \varphi_i \hat{\mathbf{x}} - \cos \varphi_i \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}} \end{cases}$$

La relation d'orthogonalité (1.26), permet d'obtenir les autres composantes du champ incident selon la polarisation :

$$Z_1 \mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{k}_i}{k_1} \wedge \mathbf{E}_i \quad (1.26)$$

Comme la surface considérée dépend de deux variables  $(x, z)$  et donc présente des variations bidirectionnelles, suivant  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$ , alors les champs incidents et diffractés sont dépendants des trois variables spatiales  $(x, y, z)$ .

## 1.7 Réflexion et transmission d'une onde incidente par une surface plane

Comme l'interface est à géométrie plane, alors l'onde incidente, au contact de la surface, donne naissance à une onde réfléchi dans la direction spéculaire et une onde transmise dans le milieu 2. Ces ondes réfléchi et transmise auront la même polarisation que l'onde incidente. Soit  $\mathbf{k}_r$  et  $\mathbf{k}_t$  les vecteurs d'onde respectivement des ondes planes réfléchi et transmise.

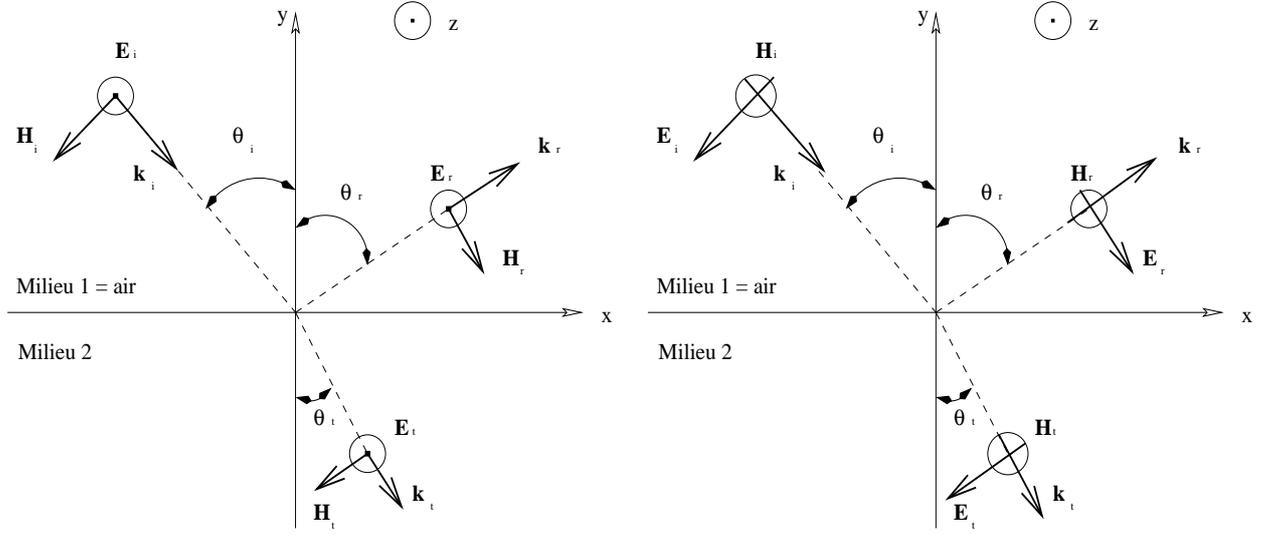
Les champs électriques incident, réfléchi et transmis s'écrivent :

– Pour l'onde incidente

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_{0i} e^{-j\mathbf{k}_i \mathbf{r}}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_i &= \alpha_i \hat{\mathbf{x}} - \beta_i \hat{\mathbf{y}} \\ \alpha_i &= k_i \sin \theta_i \\ \beta_i &= k_i \cos \theta_i \end{aligned}$$



**Fig. 1.4:** Ondes réfléchi et transmise en polarisation  $E_{//}$  et  $H_{//}$

– Pour l'onde réfléchi

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_{0r} e^{-j\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r}}$$

avec

$$\mathbf{k}_r = \alpha_i \hat{\mathbf{x}} + \beta_i \hat{\mathbf{y}}$$

– Pour l'onde transmise

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{0t} e^{-j\mathbf{k}_t \cdot \mathbf{r}}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t &= \alpha_i \hat{\mathbf{x}} - \beta_t \hat{\mathbf{y}} \\ \beta_t &= \sqrt{k_t^2 - \alpha_i^2}, \quad \text{Im}[\beta_t \leq 0] \end{aligned}$$

Dans chacun des cas précédents nous utiliserons la relation d'orthogonalité (1.21) pour déduire le vecteur  $\mathbf{H}$ .

Nous pouvons associer au vecteur  $\mathbf{k}_r$  un angle de réflexion  $\theta_r$ , tel que :

$$\begin{aligned} \alpha_i &= k_1 \sin \theta_r \\ \beta_i &= k_1 \cos \theta_r \end{aligned}$$

A partir des expressions des constantes de propagation des ondes incidentes et réfléchies, nous déduisons la première loi de Snell-Descartes :

$$\theta_i = \theta_r \tag{1.27}$$

Pour un milieu 2 sans pertes, nous associons à  $\mathbf{k}_t$  une direction de propagation et nous posons

$$\begin{aligned}\alpha_i &= k_2 \sin \theta_t \\ \beta_t &= k_2 \cos \theta_t\end{aligned}$$

où  $\theta_t$  est l'angle de réfraction.

Nous déduisons la deuxième loi de Snell-Descartes

$$n_1 \sin(\theta_i) = n_2 \sin(\theta_t) \quad (1.28)$$

### 1.7.1 Les coefficients de Fresnel

Les rapports en amplitude des champs réfléchi et incident et des champs transmis et incident donnent respectivement les coefficients de réflexion  $\rho_r$  et de transmission  $\rho_t$  de Fresnel.

$$\rho_r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} \quad (1.29)$$

$$\rho_t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} \quad (1.30)$$

En utilisant les relations d'orthogonalité des vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ , nous montrons que les conditions aux limites en polarisation  $E_{//}$  conduisent à écrire :

$$\beta_i \underline{E}_i - \beta_r \underline{E}_r = \beta_t \underline{E}_t \quad (1.31a)$$

$$\underline{E}_i + \underline{E}_r = \underline{E}_t \quad (1.31b)$$

Les coefficients de Fresnel (1.29, 1.30) se déduisent de la résolution du système des deux équations (1.31a, 1.31b) :

$$\rho_{rE_{//}} = \frac{\beta_i - \beta_t}{\beta_i + \beta_t} \quad (1.32a)$$

$$\rho_{tE_{//}} = \frac{2\beta_i}{\beta_i + \beta_t} \quad (1.32b)$$

Dans le cas d'une onde incidente en polarisation duale  $H_{//}$ , l'utilisation des condi-

tions aux limites et des relations d'orthogonalité des champs permet d'écrire :

$$\hat{\epsilon}_1 \frac{\underline{E}_i}{\beta_i} + \hat{\epsilon}_1 \frac{\underline{E}_r}{\beta_r} = \hat{\epsilon}_2 \frac{\underline{E}_t}{\beta_t} \quad (1.33a)$$

$$\underline{E}_i + \underline{E}_r = \underline{E}_t \quad (1.33b)$$

Nous montrons dans ce cas que :

$$\rho_{rH//} = \frac{\frac{\beta_i}{n_1^2} - \frac{\beta_t}{n_2^2}}{\frac{\beta_i}{n_1^2} + \frac{\beta_t}{n_2^2}}$$

$$\rho_{tH//} = \frac{2 \frac{\beta_i}{n_1^2}}{\frac{\beta_i}{n_1^2} + \frac{\beta_t}{n_2^2}} \quad (1.34a)$$

## 1.7.2 Coefficients de Fresnel : milieu diélectrique parfait

Si nous considérons que le milieu 1 est l'air et que le milieu 2 est un diélectrique sans perte, alors nous pouvons associer un angle de propagation à l'onde transmise, tel que  $\beta_t = k_2 \cos \theta_t$ . Les coefficients de Fresnel s'écrivent alors pour chacune des deux polarisations :

– Pour une incidence  $E_{//}$  :

$$\rho_{rE//} = \frac{\cos \theta_i - \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \cos \theta_t} \quad (1.35a)$$

$$\rho_{tE//} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \cos \theta_t} \quad (1.35b)$$

– Pour une incidence  $H_{//}$  :

$$\rho_{rH//} = \frac{\cos \theta_1 - \frac{\cos \theta_t}{n_2}}{\cos \theta_1 + \frac{\cos \theta_t}{n_2}} \quad (1.36a)$$

$$\rho_{tH//} = \frac{\frac{\cos \theta_i}{n_2}}{\cos \theta_1 + \frac{\cos \theta_t}{n_2}} \quad (1.36b)$$

### 1.7.3 Coefficients de Fresnel : milieu infiniment conducteur

Si le milieu 2 est un métal infiniment conducteur, alors la totalité de l'onde incidente est réfléchiée dans la direction spéculaire. Le champ électromagnétique macroscopique dans le milieu 2 est nul. Les coefficients de Fresnel sont donnés par :

– Pour une incidence  $E_{//}$  :

$$\rho_{rE_{//}} = -1 \quad (1.37)$$

– Pour une incidence  $H_{//}$  :

$$\rho_{rH_{//}} = 1 \quad (1.38)$$

## 1.8 Le développement de Rayleigh

Dans le paragraphe précédent nous avons considéré une surface plane. De fait, le champ total dans le milieu supérieur est la somme du champ incident ( $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i$ ) et du champ réfléchi dans la direction spéculaire ( $\mathbf{E}_r, \mathbf{H}_r$ ). Suivant la polarisation de l'onde, le coefficient de réflexion  $\rho_r$  est donné par les équations (1.32a, 1.34a). Pour ce qui est du milieu inférieur le champ se réduit à l'onde transmise ( $\mathbf{E}_t, \mathbf{H}_t$ ). Si maintenant nous considérons que le plan est localement déformé, alors en plus des champs réfléchis et transmis, vont apparaître des champs diffractés ( $\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d$ ) dans les deux milieux. Nous écrivons alors :

$$\mathbf{E}_{tot, m} = \mathbf{E}_{rout, m} + \mathbf{E}_{d, m} \quad (1.39a)$$

$$Z_m \mathbf{H}_{tot, m} = Z_m \mathbf{H}_{rout, m} + Z_m \mathbf{H}_{d, m} \quad (1.39b)$$

où  $m$  vaut 1 pour le milieu supérieur (milieu d'incidence) et 2 pour le milieu inférieur.

### 1.8.1 Cas des champs diffractés par des surfaces 2D

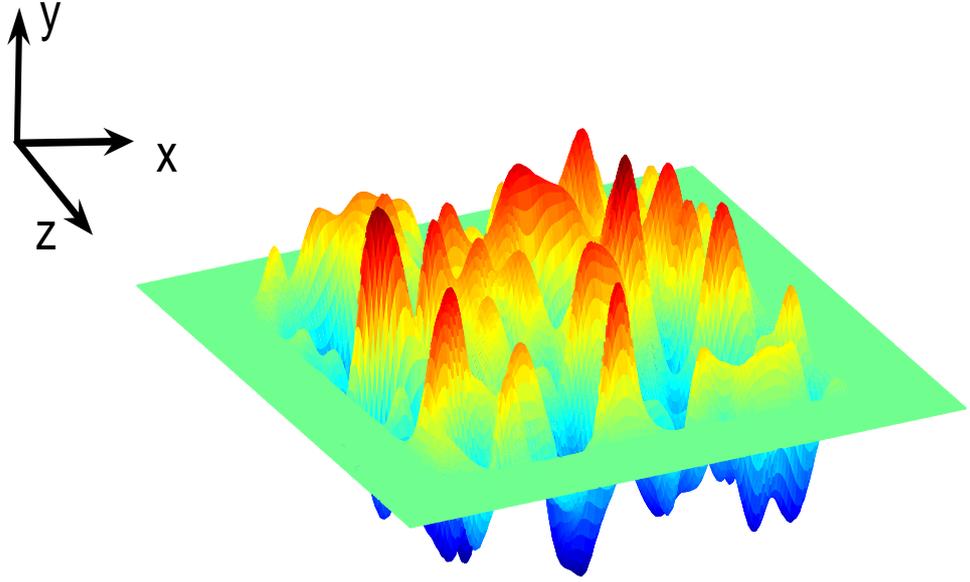
Dans le cas général où la surface présente des variations dans les deux directions ( $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}}$ ) (surface 2D), supposons que son équation dans un repère cartésien (voir figure 1.5) est donnée par  $y=a(x,z)$ . Au contact de l'interface, et du fait de la déformation bi-directionnelle, l'onde incidente subit une dépolarisation. Le champ diffracté peut être exprimé comme la somme d'une composante directe présentant la polarisation de

l'onde incidente et d'une composante croisée présentant la polarisation duale de l'onde incidente. Nous obtenons les expressions suivantes :

$$\mathbf{E}_{d,m}(x, y, z) = \mathbf{E}_{d,m}^{(pol_i, pol_i)}(x, y, z) + \mathbf{E}_{d,m}^{(\overline{pol_i}, pol_i)}(x, y, z) \quad (1.40a)$$

$$Z_m \mathbf{H}_{d,m}(x, y, z) = Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(pol_i, pol_i)}(x, y, z) + Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(\overline{pol_i}, pol_i)}(x, y, z) \quad (1.40b)$$

où  $pol_i$ ,  $\overline{pol_i}$  désignent respectivement la polarisation de l'onde incidente et la polarisation complémentaire. Par exemple si  $pol_i = E_{//}$  alors  $\overline{pol_i} = H_{//}$  et vice versa.



**Fig. 1.5:** Plan localement déformé : cas 2D

Les composantes des vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont au nombre de cinq :  $(E_x, E_z, H_x, H_y, H_z)$  pour la polarisation  $E_{//}$  et  $(H_x, H_z, E_x, E_y, E_z)$  pour la polarisation  $H_{//}$ .

En dehors de la déformation ( $y > \max[a(x, z)]$  et  $y < \min[a(x, z)]$ ), le champ diffracté ( $\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d$ ) peut être représenté par un continuum d'ondes planes sortantes [14, 15, 16]. Cette représentation est communément appelée développement de Rayleigh ou intégrale de Rayleigh.

Dans le milieu 1, et pour  $y > \max[a(x, z)]$ , les composantes des champs électrique

et magnétique diffractés en polarisation  $E_{//}$  s'écrivent :

$$\mathbf{E}_{d,1}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_1^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(\alpha, \gamma) \mathbf{V}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(\alpha, \gamma) e^{-j\mathbf{k}_{d,1}(\alpha, \gamma)\mathbf{r}} d\alpha d\gamma \quad (1.41a)$$

$$Z_1 \mathbf{H}_{d,1}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_1^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(\alpha, \gamma) \left[ \frac{\mathbf{k}_{d,1}(\alpha, \gamma)}{k_{d,1}} \wedge \mathbf{V}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(\alpha, \gamma) \right] e^{-j\mathbf{k}_{d,1}(\alpha, \gamma)\mathbf{r}} d\alpha d\gamma \quad (1.41b)$$

où le vecteur  $\mathbf{V}$  donne la direction du champ électrique associé à la fonction d'onde élémentaire  $e^{-j\mathbf{k}_{d,1}(\alpha, \gamma)\mathbf{r}}$  :

$$\mathbf{V}(\alpha, \gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.42)$$

et  $\mathbf{k}_{d,1}$  est le vecteur d'onde diffractée :

$$\mathbf{k}_{d,1} = \alpha \hat{\mathbf{x}} + \beta_1 \hat{\mathbf{y}} + \gamma \hat{\mathbf{z}} \quad (1.43)$$

avec  $\alpha^2 + \beta_1^2 + \gamma^2 = k_1^2$  et  $Im[\beta_1] \leq 0$ .

Nous pouvons noter que lorsque  $\alpha^2 + \gamma^2 > k_{d,1}^2$ , la constante de propagation  $\beta_1(\alpha, \gamma)$  suivant l'axe ( $Oy$ ) est imaginaire pure. Ceci correspond à des ondes dont l'amplitude est exponentiellement amortie. Elles représentent les ondes évanescentes. Si maintenant  $\alpha^2 + \gamma^2 < k_{d,1}^2$ , alors  $\beta_1$  est réelle et les ondes sont dites propagatives. Le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_{d,1}$  correspondant est repéré dans l'espace par le couple d'angle  $(\theta, \varphi)$  avec  $\theta$  l'angle de site et  $\varphi$  l'angle d'azimut. Les trois constantes de propagation suivant les directions  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  s'expriment en fonction de ces angles de la façon suivante :

$$\begin{cases} \alpha & = k_1 \sin \theta \cos \varphi \\ \beta_1(\alpha, \gamma) & = k_1 \cos \theta \\ \gamma & = k_1 \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

Par analogie, le champ électromagnétique dans le milieu 2, et pour  $z < \min[a(x, y)]$ , peut s'exprimer de la même façon que dans les équations (1.41a, 1.41b). Dans ce cas, le vecteur d'onde diffracté  $\mathbf{k}_{d,2}$  est donné par :

$$\mathbf{k}_{d,2} = \alpha \hat{\mathbf{x}} - \beta_2 \hat{\mathbf{y}} + \gamma \hat{\mathbf{z}} ; Im[\beta_2] \leq 0 \quad (1.44)$$

Les champs sont donnés par :

$$\mathbf{E}_{d,2}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_2^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(\alpha, \gamma) \mathbf{V}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(\alpha, \gamma) e^{-j\mathbf{k}_{d,2}(\alpha, \gamma)\mathbf{r}} d\alpha d\gamma \quad (1.45a)$$

$$Z_2 \mathbf{H}_{d,2}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_2^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(\alpha, \gamma) \left[ \frac{\mathbf{k}_{d,2}(\alpha, \gamma)}{k_2} \wedge \mathbf{V}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(\alpha, \gamma) \right] e^{-j\mathbf{k}_{d,2}(\alpha, \gamma)\mathbf{r}} d\alpha d\gamma \quad (1.45b)$$

Comme dans le milieu 1, selon que la constante de propagation  $\beta(\alpha, \gamma)$  est imaginaire pure ou réelle, les ondes correspondantes sont respectivement soit évanescentes, soit propagatives. Dans le cas d'un milieu sans pertes, si nous notons  $(\theta, \varphi)$  les directions de propagation dans le milieu 2 des ondes propagatives, les trois constantes de propagation suivant les directions  $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = k_2 \sin \theta \cos \varphi \\ \beta_2(\alpha, \gamma) = k_2 \cos \theta \\ \gamma = k_2 \sin \theta \sin \varphi \end{array} \right.$$

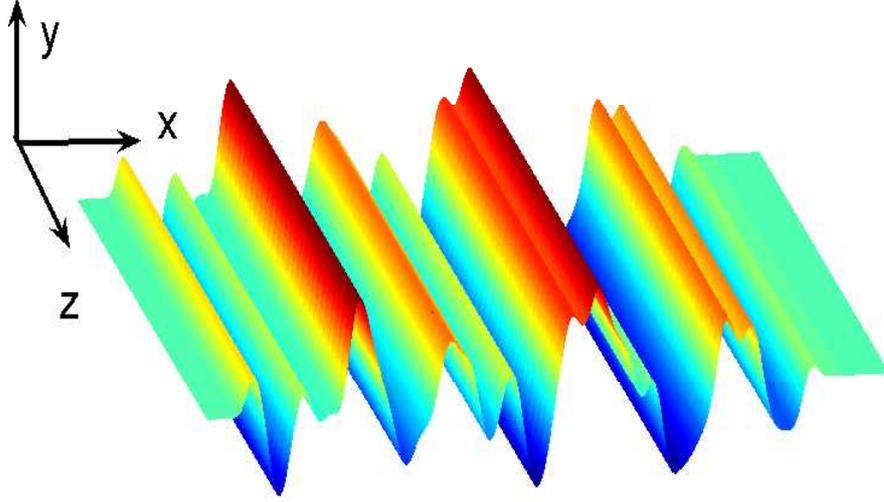
Il faut noter que suivant le milieu considéré, le signe de la partie réelle de la constante de propagation  $\beta$  permet de savoir s'il s'agit d'une onde propagative entrante ou sortante. Ainsi, si nous nous plaçons dans le milieu 1, le cas des ondes qui se propagent en s'éloignant de l'interface suivant le sens positif de l'axe  $(Oy)$  ont une constante  $\beta$  réelle et positive.

Si le milieu 2 est diélectrique à perte, alors  $\beta_2$  est toujours complexe et toutes les ondes sont évanescentes.

## 1.8.2 Cas des champs diffractés par des surfaces 1D

Supposons maintenant que la déformation du plan est uniquement dans une seule direction, par exemple suivant l'axe  $(Ox)$ . Dans cette configuration nous parlons de surface 1D ou de surface cylindrique (figure 1.6).

Considérons le cas d'une incidente classique, où le vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$  appartient au plan  $(xOy)$ . Dans ce cas, pour les deux polarisations fondamentales  $E_{//}$  et  $H_{//}$ , le



**Fig. 1.6:** Plan localement déformé : cas 1D

champ électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{H}$  respectivement sont parallèles à l'axe ( $Oz$ ). L'onde incidente ne subira aucune dépolarisation. L'onde diffractée a la même polarisation que l'onde incidente. Le champ électromagnétique diffracté s'écrit :

$$\mathbf{E}_{d,m}(x, y) = \mathbf{E}_{d,m}^{(pol_i, pol_i)}(x, y) = \mathbf{E}_{d,m}^{(pol_i)}(x, y) \quad (1.46a)$$

$$Z_m \mathbf{H}_{d,m}(x, y) = Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(pol_i, pol_i)}(x, y) = Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(pol_i)}(x, y) \quad (1.46b)$$

Les composantes des champs électromagnétiques ne dépendent que des deux variables spatiales  $(x, y)$  et sont au nombre de trois :  $(E_x, E_y, H_z)$  en polarisation  $H_{//}$  et  $(H_x, H_y, E_z)$  en polarisation  $E_{//}$ .

En dehors de la zone de déformation ( $y \notin [\min a(x) \max a(x)]$ ) et pour une incidence en polarisation  $E_{//}$ , les ondes planes peuvent s'exprimer sous forme du développement de Rayleigh suivant [2, 14, 16] :

$$\mathbf{E}_{d,m}^{E_{//}}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_m^{E_{//}}(\alpha) e^{-j\alpha x} e^{-j\beta_m |y|} d\alpha \hat{\mathbf{z}} \quad (1.47a)$$

$$Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{E_{//}}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_m^{E_{//}}\left(\frac{\mathbf{k}_{d,m}}{k_{d,m}} \wedge \hat{\mathbf{z}}\right)(\alpha) e^{-j\alpha x} e^{-j\beta_m |y|} d\alpha \quad (1.47b)$$

avec  $\alpha^2 + \beta_m^2 = k_m^2$  et  $Im[\beta_m \leq 0]$ .

La nature de l'onde est définie par la constante de propagation  $\beta_m(\alpha)$ . L'onde est propagative si cette constante est réelle et évanescente si  $\beta_m(\alpha)$  est complexe. Le signe

de la partie réelle de la constante  $\beta_m$  permet de savoir si l'onde est entrante ou sortante. Dans un milieu sans perte, les ondes propagatives sont définies pour  $|\alpha| < k_m$  avec :

$$\begin{aligned}\alpha &= k_m \sin \theta \\ \beta_m &= k_m \cos \theta\end{aligned}$$

$\theta$  est l'angle de diffraction. Il désigne la direction de propagation.

Pour les ondes évanescentes, nous avons  $|\alpha| \geq k_m$  et  $\beta_m(\alpha) = -j\sqrt{\alpha^2 - k_m^2}$ .

Jusqu'ici nous avons présenté uniquement la composante en polarisation  $E_{//}$  du champ diffracté. Afin d'obtenir la composante du champ électromagnétique diffracté dans la polarisation  $H_{//}$ , il suffit de remplacer  $\mathbf{E}_{d,m}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}$  par  $Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(H_{//} \text{ pol}_i)}$  et  $Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}$  par  $-\mathbf{E}_{d,m}^{(H_{//} \text{ pol}_i)}$  dans les équations (1.41a, 1.41b), (1.45a, 1.45b) et (1.47a, 1.47b).

## 1.9 L'onde diffractée en zone de champ lointain

Les ondes évanescentes sont exponentiellement amorties. Par conséquent, à partir d'une certaine distance de la surface, leur contribution ne doit plus être prise en compte dans les intégrales de Rayleigh. Dans cette zone de l'espace, les seules ondes restantes sont des ondes propagatives. En se plaçant dans un système de coordonnées sphériques et pour un milieu sans perte et à grande distance de la surface, la méthode de la phase stationnaire permet d'obtenir le comportement asymptotique des champs électromagnétiques en tout point  $M(r, \theta, \varphi)$  [17, 18].

### 1.9.1 Cas des surfaces 2D

En partant des équations (1.41a, 1.41b) et (1.45a, 1.45b), pour une surface 2D nous démontrons dans l'annexe A, grâce à la méthode de la phase stationnaire, que les ondes diffractées propagatives dans la zone de champ lointain peuvent s'écrire comme un produit de deux fonctions, l'une traduisant une dépendance angulaire et l'autre une dépendance radiale. Il est à noter que ces deux fonctions sont découplées. La composante en polarisation  $E_{//}$  du champ électromagnétique diffracté, est donnée par :

$$\mathbf{E}_{d,m}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(r, \theta, \varphi) \approx n_m \hat{R}_m^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(k_m \sin \theta \cos \varphi, k_m \sin \theta \sin \varphi) \cos \theta \frac{e^{-jk_m r}}{\lambda r} e^{-j\frac{\pi}{2}} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (1.48)$$

$$Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(r, \theta, \varphi) \approx -n_m \hat{R}_m^{(E_{//} \text{ pol}_i)}(k_m \sin \theta \cos \varphi, k_m \sin \theta \sin \varphi) \cos \theta \frac{e^{-jk_m r}}{\lambda r} e^{-j\frac{\pi}{2}} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (1.49)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde dans le vide.

Pour ce qui est de la composante en polarisation  $H_{//}$ , les champs électrique et magnétique s'écrivent :

$$Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(H_{//} \text{ pol}_i)}(r, \theta, \varphi) \approx n_m \hat{R}_m^{(H_{//} \text{ pol}_i)}(k_m \sin \theta \cos \varphi, k_m \sin \theta \sin \varphi) \cos \theta \frac{e^{-jk_m r}}{\lambda r} e^{-j\frac{\pi}{2}} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (1.50)$$

$$\mathbf{E}_{d,m}^{(H_{//} \text{ pol}_i)}(r, \theta, \varphi) \approx n_m \hat{R}_m^{(H_{//} \text{ pol}_i)}(k_m \sin \theta \cos \varphi, k_m \sin \theta \sin \varphi) \cos \theta \frac{e^{-jk_m r}}{\lambda r} e^{-j\frac{\pi}{2}} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (1.51)$$

La relation d'orthogonalité est donnée par :

$$\mathbf{E}_{d,m} = Z_m \mathbf{H}_{d,m} \wedge \hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.52)$$

## 1.9.2 Cas des surfaces 1D

Considérons maintenant le cas d'une surface 1D. A partir des deux équations (1.47a, 1.47b) et en utilisant la méthode de la phase stationnaire [18], comme dans le cas 2D, le champ lointain en un point  $M(r, \theta)$  en coordonnées polaires est donné par :

$$\mathbf{E}_{d,m}^{(E_{//})}(r, \theta) \approx \sqrt{n_m} \hat{R}_m^{(E_{//})}(k_m \sin \theta) \cos \theta \frac{e^{-jk_m r}}{\sqrt{\lambda r}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \hat{\mathbf{z}} \quad (1.53a)$$

$$Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(E_{//})}(r, \theta) \approx -\sqrt{n_m} \hat{R}_m^{(E_{//})}(k_m \sin \theta) \cos \theta \frac{e^{-jk_m r}}{\sqrt{\lambda r}} e^{-j\frac{\pi}{4}} \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (1.53b)$$

Pour obtenir les expressions asymptotiques des champs diffractés pour une incidence en polarisation  $H_{//}$ , comme dans le cas d'une surface 2D, nous remplaçons  $\mathbf{E}_{d,m}^{E_{//}}$  par  $Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{H_{//}}$  et  $Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{E_{//}}$  par  $-\mathbf{E}_{d,m}^{H_{//}}$  dans les équations (1.53a) et (1.53b).

Nous pouvons noter la décroissance en  $1/r$  et  $1/\sqrt{r}$  des champs asymptotiques respectivement dans le cas 2D et 1D. La dépendance angulaire est donnée par la fonction ' $\hat{R} \cos \theta$ ' où  $\hat{R}$  est l'amplitude de diffraction des ondes planes propagatives du développement de Rayleigh.

## 1.10 Grandeurs énergétiques [12, 13]

### 1.10.1 Vecteur de Poynting réel et vecteur de Poynting complexe

En multipliant respectivement les deux équations (1.1b, 1.1d) par  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{E}$ , nous obtenons :

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (1.54a)$$

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \left[ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \right] \quad (1.54b)$$

Sachant que :  $\operatorname{div}(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b} + \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a}$ , en faisant la soustraction des deux équations (1.54a, 1.54b) membre à membre nous déduisons la relation suivante :

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = 0 \quad (1.55)$$

Dans cette dernière équation, chacun des termes est homogène à une puissance par unité de volume (*watt/m<sup>3</sup>*).

Soit  $\Omega$  un volume entouré par une surface fermée  $\Sigma$  dont la normale  $\mathbf{n}$  est orientée vers l'extérieur. En utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky et l'équation (1.55), nous établissons le bilan de puissance suivant :

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, ds + \iiint_{\Omega} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}) \, dv = - \iiint_{\Omega} \left[ \mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right] \, dv \quad (1.56)$$

Le terme à droite de l'équation (1.56) traduit la diminution de l'énergie électromagnétique totale associée au volume  $\Omega$ . Le premier terme à gauche de l'équation représente le débit de l'énergie électromagnétique qui s'échappe de  $\Sigma$  par rayonnement ; et le deuxième terme à gauche nous donne l'accroissement de l'énergie cinétique des particules présentes dans le volume  $\Omega$ .

La quantité  $\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$  représente le vecteur Poynting que nous noterons  $\mathbf{S}$ .

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \quad (1.57)$$

A un instant donné  $t$ , le flux du vecteur  $\mathbf{S}$  à travers la surface fermée  $\Sigma$  donne la puissance  $P(t)$  rayonnée. En régime harmonique, la puissance moyenne  $\langle P \rangle$  rayonnée sur une période de temps  $T$  est donnée par :

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \iint_{\Sigma} \mathbf{S} \mathbf{n} \, ds \, dt \\ &= \iint_{\Sigma} \mathbf{n} \langle \mathbf{S} \rangle \, ds\end{aligned}$$

Il est plus commode de raisonner sur des valeurs énergétiques moyennes calculées sur une période  $T$ . Dans ce cas, nous pouvons définir un vecteur Poynting complexe  $\underline{\mathbf{S}}$  donné par :

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \underline{\mathbf{E}} \wedge \underline{\mathbf{H}}^* \quad (1.58)$$

où  $\underline{\mathbf{H}}^*$  est le complexe conjugué de  $\underline{\mathbf{H}}$ .

La partie réelle de  $\underline{\mathbf{S}}$  donne le vecteur Poynting moyenné sur une période  $T$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \text{Re}[\underline{\mathbf{S}}] \quad (1.59)$$

La partie réelle du flux du vecteur complexe  $\underline{\mathbf{S}}$  à travers la surface fermée  $\Sigma$ , nous donne le débit moyen d'énergie à travers  $\Sigma$ . Ce débit représente les pertes en énergie dues au phénomène de propagation. Ce vecteur permet de quantifier la puissance moyenne que véhiculent les ondes en se propageant.

$$\langle P \rangle = \iint_{\Sigma} \mathbf{n} \text{Re}[\underline{\mathbf{S}}] \, ds \quad (1.60)$$

Par la suite, nous notons simplement  $\mathbf{S}$  le vecteur Poynting complexe.

### 1.10.2 Le coefficient de diffusion bi-statique

Dans le cas des milieux sans pertes, la densité angulaire de puissance traduit la puissance diffractée par unité d'angle (ou d'angle solide) dans le cas d'une surface 1D (ou respectivement 2D).

Pour une surface 1D, en utilisant les équations (1.53a, 1.53b), le vecteur Poynting complexe est donné par :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= -\frac{1}{2} \frac{n_m}{Z_m \lambda r} \cos^2 \theta \left| \hat{R}_m^{(pol_i)}(k_m \sin \theta) \right|^2 \hat{\mathbf{z}} \wedge \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ &= \frac{1}{2} \frac{n_m}{Z_m \lambda r} \left| \hat{R}_m^{(pol_i)}(k_m \sin \theta) \right|^2 \cos^2 \theta \hat{\mathbf{u}}_r\end{aligned}\quad (1.61)$$

Considérons un demi cylindre, dont la génératrice est suivant l'axe  $Oz$ , de longueur un mètre, de rayon 'r' et dont le centre est confondu avec l'origine. Ce demi cylindre englobe la surface diffractante, dans un des deux milieux. Le flux du vecteur Poynting à travers le demi cylindre est :

$$P_{d,m}^{(pol_i)} = Re \left[ \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{S} r d\theta dz \hat{\mathbf{u}}_r \right] \quad (1.62)$$

où  $r d\theta dz$  est l'élément de surface.

Pour 'r' élevé et compte tenu de l'expression (1.61), nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\langle P \rangle = P_{d,m}^{(pol_i)} &= Re \left[ \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{S} r d\theta dz \hat{\mathbf{u}}_r \right] \\ &= Re \left[ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \frac{n_m}{Z_m \lambda} \left| \hat{R}_m^{(pol_i)}(k_m \sin \theta) \right|^2 \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dP_{d,m}^{(pol_i)}}{d\theta}(\theta) d\theta\end{aligned}\quad (1.63)$$

où  $\frac{dP_{d,m}^{(pol_i)}}{d\theta}(\theta)$  est la densité angulaire de puissance. Son expression analytique est :

$$\frac{dP_{d,m}^{(pol_i)}}{d\theta}(\theta) = \frac{1}{2} \frac{n_m}{Z_m \lambda} \left| \hat{R}_m^{(pol_i)}(k_m \sin \theta) \right|^2 \cos^2 \theta \quad (1.64)$$

Considérons maintenant le cas d'une surface 2D. Soit une demi sphère de rayon 'r' dont le centre est à l'origine. La demi sphère englobe la surface de diffraction. En champ lointain ('r' élevé) le vecteur Poynting complexe vaut :

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_m^{(E//pol_i)} + \mathbf{E}_m^{(H//pol_i)}) \wedge (\mathbf{H}_m^{(E//pol_i)*} + \mathbf{H}_m^{(H//pol_i)*}) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E}_m^{(E//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_m^{(E//pol_i)*} + \mathbf{E}_m^{(H//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_m^{(H//pol_i)*})\end{aligned}\quad (1.65)$$

Le flux de ce vecteur à travers la demi sphère est :

$$\begin{aligned}
P_{d,m}^{(pol_i)} &= Re \left[ \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathbf{S} ds \hat{\mathbf{u}}_r \right] \\
&= Re \left[ \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\mathbf{E}_m^{(E//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_m^{(E//pol_i)*}) ds \hat{\mathbf{u}}_r \right] \\
&+ Re \left[ \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (\mathbf{E}_m^{(H//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_m^{(H//pol_i)*}) ds \hat{\mathbf{u}}_r \right] \quad (1.66)
\end{aligned}$$

où  $ds = r^2 d\Omega$  est l'élément de surface et  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$  l'élément d'angle solide.

En utilisant les expressions des champs données par les équations (1.48-1.51), nous obtenons la puissance  $P_{d,m}^{(pol_i)}$  sous la forme :

$$\begin{aligned}
\langle P \rangle = P_{d,m}^{(pol_i)} &= \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dP_{d,m}^{(E//pol_i)}}{d\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega \\
&+ \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dP_{d,m}^{(H//pol_i)}}{d\Omega}(\theta, \varphi) d\Omega \quad (1.67)
\end{aligned}$$

La densité angulaire de puissance totale  $\frac{dP_{d,m}^{(pol_i)}(\theta, \varphi)}{d\Omega}$  peut s'écrire comme la somme de deux termes. Un des termes représente la contribution du champ diffracté en polarisation directe et l'autre, celle du champ diffracté dans la polarisation croisée :

$$\frac{dP_{d,m}^{(pol_i)}}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{dP_{d,m}^{(E//pol_i)}}{d\Omega}(\theta, \varphi) + \frac{dP_{d,m}^{(H//pol_i)}}{d\Omega}(\theta, \varphi) \quad (1.68)$$

Les expressions des deux termes de la densité angulaire de puissance sont données par :

$$\frac{dP_{d,m}^{(E//pol_i)}}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \frac{n_m^2}{Z_m \lambda^2} \left| \hat{R}_{d,m}^{(E//pol_i)} \right|^2 \cos^2 \theta \quad (1.69a)$$

$$\frac{dP_{d,m}^{(H//pol_i)}}{d\Omega}(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} \frac{n_m^2}{Z_m \lambda^2} \left| \hat{R}_{d,m}^{(H//pol_i)} \right|^2 \cos^2 \theta \quad (1.69b)$$

Le coefficient de diffusion bi-statique normalisé est défini comme la densité de puissance diffractée dans une direction donnée par la surface éclairée, normalisée par rapport à la puissance totale incidente  $P_i$  apportée à la déformation.

$$\sigma_d = \frac{1}{P_i} \frac{dP_d}{d\Omega} \quad (1.70)$$

Si l'interface considérée est cylindrique, alors la puissance incidente vaut :

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{+L}{2}} \text{Re}[(\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{H}_i^*) dx dz \hat{\mathbf{y}}] \\ &= \frac{L}{2 Z_1} \cos\theta_i \end{aligned} \quad (1.71)$$

A partir de (1.64) et sachant que  $n_1 Z_1 = n_2 Z_2$ , nous écrivons le coefficient de diffusion bi-statique :

$$\begin{aligned} \sigma_m^{pol_i}(\theta) &= \sigma_m^{(pol_i)}(\theta) \\ &= \frac{n_m^2 \cos^2\theta}{\lambda L \cos\theta_i} |\hat{R}_{d,m}^{(pol_i)}(k_m \sin\theta)|^2 \end{aligned} \quad (1.72)$$

Pour une surface 2D, la puissance incidente  $P_i$  est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} P_i &= \frac{1}{2} \iint_{\frac{-L}{2}}^{\frac{+L}{2}} \text{Re}[(\mathbf{E}_i \wedge \mathbf{H}_i^*) dx dz \hat{\mathbf{y}}] \\ &= \frac{L^2}{2 Z_1} \cos\theta_i \end{aligned} \quad (1.73)$$

L'expression analytique du coefficient de diffusion bi-statique dans les deux polarisations  $E_{//}$  et  $H_{//}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_m^{pol_i}(\theta, \varphi) &= \sigma_m^{(E_{//} pol_i)}(\theta, \varphi) + \sigma_m^{(H_{//} pol_i)}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{n_m^3 \cos^2\theta}{\lambda^2 L^2 \cos\theta_i} \times |\hat{R}_{d,m}^{(E_{//} pol_i)}(k_m \sin\theta \cos\varphi, k_m \sin\theta \sin\varphi)|^2 \\ &+ \frac{n_m^3 \cos^2\theta}{\lambda^2 L^2 \cos\theta_i} \times |\hat{R}_{d,m}^{(H_{//} pol_i)}(k_m \sin\theta \cos\varphi, k_m \sin\theta \sin\varphi)|^2 \end{aligned} \quad (1.74)$$

Si l'onde incidente est de polarisation  $E_{//}$ , alors  $\sigma_m^{(E_{//} E_{//})}(\theta, \varphi)$  représente le coefficient en polarisation directe et  $\sigma_m^{(H_{//} E_{//})}(\theta, \varphi)$  le coefficient en polarisation croisée. Cette terminologie reste valable dans le cas d'une incidence en polarisation  $H_{//}$ .

### 1.10.3 Bilan de puissance

Pour un plan localement déformé et des milieux sans pertes, nous montrons dans l'annexe B que le champ diffracté vérifie le bilan de puissance suivant [19] :

$$P_{d,1}^{(pol_i)} + P_{d,2}^{(pol_i)} = P_{c,1}^{(pol_i)} + P_{c,2}^{(pol_i)} \quad (1.75)$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{d,m}^{(pol_i)} = \sum_{p \in \{pol_i, \overline{pol_i}\}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\pi \sigma_m^{(p, pol_i)}(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ P_{c,1}^{(pol_i)} = -\frac{2\rho_r^{pol_i}}{L^2} \operatorname{Re} \left[ \hat{R}_{d,1}^{(pol_i pol_i)}(\alpha_i, \gamma_i) \right] \\ P_{c,2}^{(pol_i)} = -\frac{2\rho_t^{pol_i} \beta_t}{L^2 \beta_i} \operatorname{Re} \left[ \hat{R}_{d,2}^{(pol_i pol_i)}(\alpha_i, \gamma_i) \right] \end{array} \right.$$

où  $P_{d,1}$  et  $P_{d,2}$  sont les puissances diffractées dans les milieux 1 et 2.  $P_{c,1}$  représente le couplage entre les ondes planes incidente et réfléchie et le champ diffracté dans le milieu 1.  $P_{c,2}$  rend compte des couplages entre l'onde plane transmise et les ondes diffractées dans le milieu 2.

Dans le cas d'un plan localement déformé en 1D (déformation cylindrique), les résultats de l'annexe B restent valables et les champs diffractés doivent vérifier le bilan de puissance (1.75). Les expressions des puissances sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{d,m}^{(pol_i)} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sigma_m^{(pol_i)}(\theta) \, d\theta \\ P_{c,1}^{(pol_i)} = -\frac{2\rho_r^{pol_i}}{L} \operatorname{Re} \left[ \hat{R}_{d,1}^{(pol_i)}(\alpha_i) \right] \\ P_{c,2}^{(pol_i)} = -\frac{2\rho_t^{pol_i} \beta_t}{L \beta_i} \operatorname{Re} \left[ \hat{R}_{d,2}^{(pol_i)}(\alpha_i) \right] \end{array} \right.$$

où  $\rho_{r\,pol_i}$  et  $\rho_{t\,pol_i}$  sont les coefficients de Fresnel définis au paragraphe (§ 1.7.1).

Si le milieu 2 est infiniment conducteur alors le bilan de puissance se réduit à :

$$P_{d,1}^{(pol_i)} = P_{c,1}^{(pol_i)} \quad (1.76)$$

Par la suite, nous noterons  $P_d$  la somme de  $P_{d,1}$  et  $P_{d,2}$  et  $P_c$  la somme de  $P_{c,1}$  et  $P_{c,2}$ .

## 1.11 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons rappelé les différentes notions électromagnétiques fondamentales nécessaires à la présentation du travail effectué durant cette thèse. Nous avons aussi présenté quelques grandeurs énergétiques liées aux ondes électromagnétiques, et établi le bilan de puissance (1.75) qui sera utilisé aux chapitres 3 et 4 pour valider nos résultats.

## Chapitre 2

# Description statistique des surfaces agricoles

Afin d'étudier le phénomène de diffraction par des surfaces rugueuses aléatoires, nous utiliserons une méthode de résolution numérique basée sur un modèle électromagnétique exact. Cette méthode requiert des entrées décrivant de façon précise et pertinente les surfaces à analyser. Ces entrées sont une représentation numérique des surfaces réelles.

Si nous prenons par exemple la méthode des petites perturbations (SPM), qui est une méthode analytique approchée, nous avons uniquement besoin des paramètres géométriques (statistiques) caractérisant la surface à analyser (écart type des hauteurs, moyenne statistique...) afin d'étudier sa réponse moyenne à une excitation électromagnétique [3, 20]. Dans notre cas, ces paramètres ne vont pas intervenir directement dans le traitement électromagnétique. Ils vont servir lors d'une étape préliminaire qui consiste en la génération numérique des surfaces que nous souhaiterons analyser. Ces profils numériques constitueront les entrées du modèle électromagnétique que nous avons développé.

Le département EMA (Electromagnétisme et Méthodes d'Analyse) du CETP dispose d'une base de données contenant des surfaces numériques, obtenues par stéréovision, avec différents types de sols nus (labour, déchaumage et semi) dégradés à des niveaux différents par la pluie [21]. Cette base de données a été élaborée, en collaboration avec l'INRA Grignon, lors d'une campagne de mesure en 1999 dans le bassin d'Orgeval. Les techniques de stéréovision permettent la reconstitution du relief à partir de deux images, de la même parcelle, suivant deux angles de visée différents. A partir de cette base de données et moyennant quelques hypothèses que nous présentons, nous estimons des paramètres statistiques caractéristiques des sols. Ces paramètres vont servir d'entrée pour

le générateur numérique de surface.

Dans ce chapitre, nous commençons par une description géométrique des surfaces rugueuses. Nous présentons également quelques notions générales sur les processus aléatoires et les fonctions statistiques permettant de les caractériser. Nous présentons aussi les modèles et méthodes permettant la génération numérique des profils de surfaces. Des paramètres statistiques estimés à partir des bases de données expérimentales seront utilisés à cet effet.

Nous finissons par une description statistique comparative des surfaces rugueuses expérimentales et simulées. Ceci permet de tirer des conclusions concernant les hypothèses que nous avons formulées sur la statistique des surfaces agricoles sans couvert végétal. Pour compléter cette étude sur les surfaces, nous nous intéressons à leur caractérisation d'un point de vue physique. Ceci permet de faire le lien entre l'humidité du sol et la permittivité électrique qui joue un rôle très important du point de vue électromagnétique.

## 2.1 Généralités

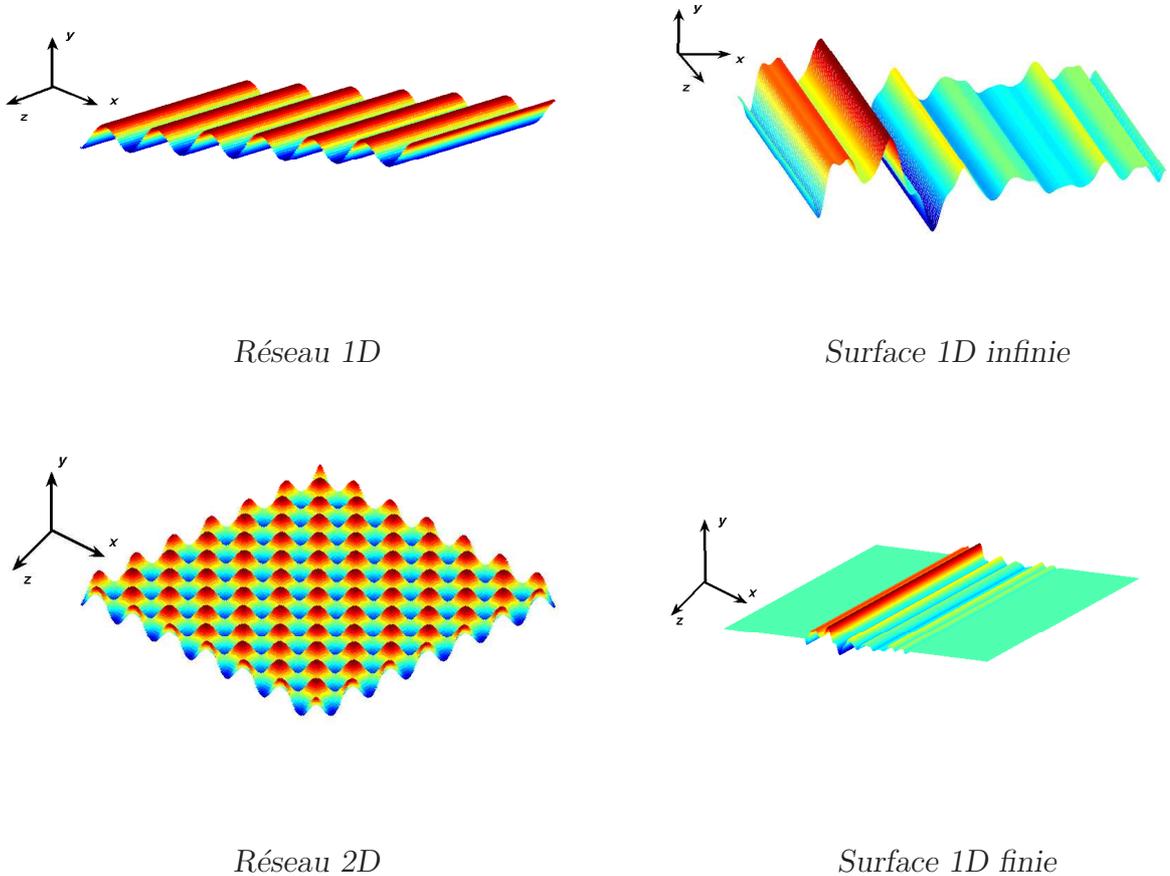
### 2.1.1 Description géométrique d'une surface

Dans un espace rapporté au repère cartésien orthonormé  $(Oxyz)$ , une surface dont la génératrice s'appuie sur une courbe d'équation  $y=a(x)$  est dite surface cylindrique ou surface 1D. Cette surface est invariante par translation dans la direction  $\hat{z}$ . Si la surface considérée présente des variations, dans le plan  $(xOz)$ , suivant les deux directions  $\hat{x}$  et  $\hat{z}$  alors son équation est donnée par  $y=a(x,z)$ . Dans ce cas, la surface est dite surface 2D.

Dans le cas général, la fonction 'a', traduisant la déformation dans le plan  $(xOz)$ , que ce soit pour le cas 1D ou 2D, peut être (voir figure 2.1) :

- périodique ou bien apériodique,
- à support borné ou non borné (déformation du plan finie ou infinie),
- déterministe ou aléatoire.

Par exemple, en optique, les surfaces 1D périodiques représentent les réseaux, qui peuvent être déterministes ou bien contenir des défauts distribués de façon aléatoire. Les sols agricoles peuvent être représentés par des surfaces 2D aléatoires.



**Fig. 2.1:** Exemples de surfaces rugueuses 1D et 2D

Dans ce travail, nous nous intéressons aux surfaces aléatoires 1D et 2D à support borné. Elles sont supposées issues de processus aléatoires, vérifiant quelques hypothèses, que nous explicitons dans la suite de ce chapitre. Le caractère aléatoire de ces surfaces exige une étude statistique afin de les caractériser. Bien comprendre et rendre compte de l'interaction des ondes électromagnétiques avec les interfaces rugueuses suppose une bonne description de ces dernières.

### 2.1.2 Grandeurs statistiques caractérisant un processus aléatoire [22]

En théorie du signal, un processus aléatoire représente l'évolution dans le temps ou dans l'espace d'une variable aléatoire. Il est symbolisé par une fonction aléatoire dépendant du temps et/ou de l'espace et d'un paramètre  $\mathcal{W}$  traduisant le caractère

aléatoire. Un processus aléatoire dépendant uniquement de l'espace (indépendant du temps) est noté  $\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W})$ . Pour une valeur donnée  $\mathcal{W}_0$  de  $\mathcal{W}$ , nous obtenons une réalisation du processus aléatoire  $\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W}_0)$ . Cette réalisation est déterministe. Si nous faisons varier le paramètre aléatoire  $\mathcal{W}$ , nous obtenons un ensemble de réalisations issues du même processus aléatoire.

La description statistique d'un processus spatial aléatoire, que ce soit dans le cas 1D ou 2D, peut se faire en étudiant ses fluctuations spatiales en fonction de la position (abscisse et ordonnée). Pour une position donnée les fonctions aléatoires  $\xi(x_0, \mathcal{W})$  pour le cas 1D, et  $\xi(x_0, z_0, \mathcal{W})$  pour le cas 2D, sont des variables aléatoires.

### 2.1.2.1 Fonction de répartition et densité de probabilité

La fonction de répartition de la variable aléatoire  $\xi(\mathbf{r}_0, \mathcal{W})$ , est définie par :

$$F_\xi(h) = \text{Prob}[\xi \leq h] \quad (2.1)$$

Pour une variable aléatoire réelle, la dérivée de sa fonction de répartition (si elle existe) donne la densité de probabilité  $P_\xi(h)$ . La densité de probabilité vérifie les propriétés suivantes :

$$\text{Prob}[\xi \in [a, b]] = \int_a^b P_\xi(h) dh$$

$$\forall h, P_\xi(h) \geq 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} P_\xi(h) dh = 1$$

Dans la pratique, cette fonction peut être estimée par l'histogramme normalisé des valeurs prises par la variable aléatoire  $\xi(x, \mathcal{W})$  ou  $\xi(x, z, \mathcal{W})$  pour une position donnée.

Dans le cas gaussien, la densité de probabilité est entièrement déterminée par deux paramètres qui sont la moyenne statistique de la variable aléatoire que nous noterons  $m_\xi$ , et l'écart type  $\sigma_\xi$ .  $\sigma_\xi$  mesure la dispersion des valeurs de la variable aléatoire autour de la valeur moyenne  $m_\xi$ .

$$m_\xi(\mathbf{r}) = \langle \xi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h P_\xi(h) dh \quad (2.2)$$

$$\sigma_\xi^2(\mathbf{r}) = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 \quad (2.3)$$

avec

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h^2 P_\xi(h) dh \quad (2.4)$$

Les crochets  $\langle \rangle$  désignent l'opérateur espérance mathématique qui permet d'obtenir la moyenne statistique de la variable aléatoire considérée.

L'expression analytique d'une densité de probabilité gaussienne est donnée par :

$$P_\xi(h) = \frac{1}{\sigma_\xi \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{(h - m_\xi)}{\sigma_\xi} \right)^2 \right] \quad (2.5)$$

Considérons maintenant une variable aléatoire gaussienne bi-dimensionnelle  $(\xi_1, \xi_2)$ , de moyenne statistique  $(m_{\xi_1}, m_{\xi_2})$  et d'écart type  $(\sigma_{\xi_1}, \sigma_{\xi_2})$ . La densité de probabilité conjointe associée est :

$$P_{(\xi_1, \xi_2)}(h_1, h_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\xi_1}\sigma_{\xi_2}\sqrt{1-\rho_c^2}} \exp \left[ -\frac{1}{2(1-\rho_c^2)} \frac{(h_1 - m_{\xi_1})^2}{\sigma_{\xi_1} \sigma_{\xi_1}} \right] \\ \exp \left[ \frac{1}{2(1-\rho_c^2)} \left( \frac{2\rho_c (h_1 - m_{\xi_1})(h_2 - m_{\xi_2})}{\sigma_{\xi_1} \sigma_{\xi_2}} - \frac{(h_2 - m_{\xi_2})^2}{\sigma_{\xi_2} \sigma_{\xi_2}} \right) \right] \quad (2.6)$$

où  $\rho_c$  est le coefficient de corrélation. Il est donné par :

$$\rho_c = \frac{\langle \xi_1 \xi_2 \rangle - m_{\xi_1} m_{\xi_2}}{\sigma_{\xi_1} \sigma_{\xi_2}} \quad (2.7)$$

### 2.1.2.2 Les moments statistiques et spatiaux d'un processus aléatoire

Afin d'analyser un processus aléatoire  $\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W})$ , nous pouvons envisager une étude au travers d'une seule réalisation ( $\mathcal{W}$  fixée). Ceci permet d'avoir ses moments spatiaux. Dans le cas général, ces moments peuvent dépendre de la réalisation, c'est-à-dire de l'aléa  $\mathcal{W}$ . L'autre façon de faire consiste à regarder les valeurs de la variable aléatoire associée au processus pour une position donnée  $\mathbf{r}'$  et sur plusieurs réalisations du processus  $\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W})$  (une famille de réalisations). Dans ce cas, le processus est décrit via ces moments statistiques (moyenne statistique et moments d'ordre supérieur).

Connaissant la densité de probabilité de la variable aléatoire  $\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W})$  pour un  $\mathbf{r}'$  donné, le moment statistique d'ordre  $n$ , associée à cette variable aléatoire est l'espérance mathématique d'ordre  $n$ . Il est défini pour une variable aléatoire continue par :

$$m_{\xi^n} = \langle \xi^n(\mathbf{r}', \mathcal{W}) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} h^n P_{\xi}(h) dh \quad (2.8)$$

Il faut noter que dans le cas général, les moments statistiques et en particulier ceux d'ordre 1 et 2 dépendent de la position  $\mathbf{r}'$ .

Afin d'évaluer la corrélation qui peut exister entre deux valeurs prises par la variable aléatoire  $\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W})$ , en deux points différents  $\mathbf{r}'$  et  $\mathbf{r}' + \mathbf{r}$ , nous calculons sa fonction d'autocorrélation statistique définie par :

$$R(\mathbf{r}', \mathbf{r}' + \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h h' P_{(\xi_{\mathbf{r}'}, \xi_{\mathbf{r}'+\mathbf{r}})}(h, h') dh dh' \quad (2.9)$$

$P_{(\xi_{\mathbf{r}'}, \xi_{\mathbf{r}'+\mathbf{r}})}(h, h')$  est la probabilité conjointe (voir l'équation 2.6 pour le cas gaussien). Cette fonction dépend de la position des deux points, c'est-à-dire  $(\mathbf{r}', \mathbf{r}' + \mathbf{r})$ .

Si nous travaillons maintenant sur une seule réalisation, nous avons accès aux moments spatiaux. Si on note  $\Delta$  l'étendue de la réalisation  $\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W}_0)$ , alors la moyenne spatiale de  $\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W}_0)$  peut être estimée par :

$$\overline{\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W}_0)} = \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \xi(\mathbf{r}, \mathcal{W}_0) d\mathbf{r} \quad (2.10)$$

La fonction d'autocorrélation spatiale est définie par :

$$\begin{aligned} C_{\xi\xi}(\mathbf{r}, \mathcal{W}_0) &= \overline{\xi(\mathbf{r}', \mathcal{W}_0) \xi(\mathbf{r}' + \mathbf{r}, \mathcal{W}_0)} \\ &= \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \xi(\mathbf{r}', \mathcal{W}_0) \xi(\mathbf{r}' + \mathbf{r}, \mathcal{W}_0) d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sans hypothèses préalables sur les processus aléatoires, ces moments spatiaux dépendent de la réalisation. Dans le paragraphe suivant, nous verrons quelles sont les hypothèses qui permettront l'égalité entre moments spatiaux et moments statistiques jusqu'à un certain ordre  $n$ .

### 2.1.3 Stationnarité et ergodicité

Précédemment, nous avons vu que la moyenne et l'autocorrélation spatiales dépendent, d'une manière générale, de la réalisation. Ceci veut dire que ce sont des grandeurs aléatoires. Si les moments spatiaux sont indépendants de l'aléa jusqu'à l'ordre 2, alors le processus spatial est dit ergodique à l'ordre 2.

Concernant les moments statistiques, la moyenne statistique calculée dépend, d'une manière générale, de la position  $\mathbf{r}$  et la fonction d'autocorrélation des deux positions  $\mathbf{r}'$  et  $\mathbf{r} + \mathbf{r}'$ . Si maintenant la fonction d'autocorrélation dépend uniquement de la distance entre les deux points considérés et que la moyenne statistique est constante quand nous changeons de position, alors le processus est dit stationnaire à l'ordre 2 (au sens large).

Si ces deux propriétés précédentes (ergodicité et stationnarité à l'ordre 2) sont satisfaites simultanément, alors le théorème de Birkoff [22] permet de dire que les moments statistiques sont égaux aux moments spatiaux jusqu'à l'ordre 2. Nous pouvons écrire :

$$m = \langle \xi(\mathbf{r}_0, \mathcal{W}) \rangle = \overline{\xi(\mathbf{r}, \mathcal{W}_0)} = \text{Cst} \quad (2.12)$$

$$R_{\xi\xi}(\mathbf{r}) = C_{\xi\xi}(\mathbf{r}) \quad (2.13)$$

## 2.2 Caractérisation statistique d'une surface rugueuse aléatoire naturelle

L'intérêt d'une description statistique réside dans la possibilité de caractériser un ensemble de surfaces, à première vue différentes géométriquement mais ayant les mêmes propriétés statistiques, avec un certain nombre de paramètres et fonctions statistiques. Cette caractérisation nous aidera à mener l'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques sur des ensembles de plusieurs réalisations, et permettra de déduire des propriétés moyennes concernant un certain nombre de grandeurs physiques bien définies.

Dans le cas des interfaces rugueuses que nous étudions, la variable aléatoire  $a(\mathbf{r}, \mathcal{W})$  définit les hauteurs de la surface en tout point de position  $\mathbf{r}$ . Les surfaces naturelles que nous analysons (les sols nus sans végétation) sont modélisées par des processus aléatoires supposés ergodiques et stationnaires à l'ordre 2.

Concernant les processus 2D, en plus des deux hypothèses précédentes, nous sup-

posons l'isotropie de la surface. Ceci permet d'avoir notamment une fonction d'auto-corrélation simple caractérisée par la même longueur de corrélation suivant toutes les directions, en particulier les deux directions  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  dans le repère cartésien  $(Oxyz)$ .

Au CETP, une des approches développée pour décrire les sols agricoles nus, fait intervenir trois paramètres : l'écart type des hauteurs, la longueur de corrélation et le paramètre de Hurst. A partir de mesures expérimentales sur les surfaces réelles (fichiers numériques des parcelles agricoles) des études sont menées pour déterminer les moments spatiaux ainsi que la densité de probabilité des hauteurs [21, 23, 24]. Sous l'hypothèse de l'ergodicité et de la stationnarité, les moments d'ordre 1 ou 2 sont indépendants de l'espace et de la réalisation. Nous déduisons les moments statistiques connaissant les moments spatiaux.

Nous travaillons sous les deux hypothèses suivantes :

- La densité de probabilité des hauteurs des surfaces  $P(h)$  est gaussienne de moyenne nulle  $\langle a(\mathbf{r}, \mathcal{W}) \rangle = 0$  et d'écart type des hauteurs  $\sigma_a$ . Cette densité est donnée par :

$$P(h) = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_a^2}\right) \quad (2.14)$$

- La fonction d'auto-corrélation  $R(d)$  est donnée par :

$$R(d) = \sigma_a^2 \exp\left(-\left[\frac{d}{\ell_c}\right]^{2\mathcal{H}}\right) \quad (2.15)$$

où  $d = x$  dans le cas 1D et  $d = \sqrt{x^2 + z^2}$  pour le cas 2D, et  $\mathcal{H}$  représentant le paramètre de Hurst. Si  $\mathcal{H} = 1$ , alors l'autocorrélation est gaussienne, et si  $\mathcal{H} = \frac{1}{2}$ , elle est exponentielle.

Dans le cas 2D, l'expression (2.15) suggère l'hypothèse de l'isotropie de la surface. Ceci implique que la longueur de corrélation est la même suivant  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$  :

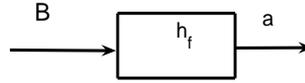
$$\ell_c = \ell_{c,x} = \ell_{c,z} \quad (2.16)$$

Dans le paragraphe suivant, nous présentons la technique que nous avons utilisée afin d'obtenir des surfaces numériques ayant ces caractéristiques statistiques.

## 2.3 Procédés de génération des profils de surface

Nous voulons générer numériquement des surfaces rugueuses 1D ou 2D ayant

- Une densité de probabilité des hauteurs gaussiennes de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_a$ .
- Une fonction d'autocorrélation ayant la forme donnée par l'équation (2.15).



**Fig. 2.2:** Filtrage linéaire

Pour ce faire, plusieurs méthodes existent. Nous pouvons citer à titre d'exemple celle basée sur le développement de la surface en séries de Fourier. Connaissant la fonction d'autocorrélation de la surface, et donc sa densité spectrale de puissance, les coefficients de Fourier sont calculés de manière relativement simple [8]. En ce qui nous concerne, nous avons implémenté un générateur de surface aléatoire basé sur le principe du filtrage linéaire d'un bruit blanc gaussien. Le caractère gaussien se retrouve en sortie du filtre car le filtrage est une opération linéaire. Pour ce qui est de la fonction d'autocorrélation, nous montrons qu'il suffit de choisir un filtre caractérisé par une réponse impulsionnelle adéquate pour avoir un signal en sortie ayant l'autocorrélation spatiale voulue. En effet, la formule du filtrage linéaire s'écrit :

$$a(\mathbf{r}) = (h_f * B)(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_f(\mathbf{r} - \mathbf{r}')B(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (2.17)$$

$B$  est le signal d'entrée du filtre. Il s'agit d'un bruit blanc gaussien, caractérisé par une densité de probabilité gaussienne et une autocorrélation donnée par

$$R_{BB}(\mathbf{r}) = \sigma_a^2 \delta(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

où  $\delta(\mathbf{r})$  est la distribution de Dirac.

Notons  $R_{aa}(\mathbf{r})$  l'autocorrélation statistique de la sortie. A partir de l'équation (2.17), nous démontrons que :

$$R_{aa}(\mathbf{r}) = (C_{h_f} * R_{BB})(\mathbf{r}) \quad (2.19)$$

où  $C_{h_f}(\mathbf{r})$  est l'autocorrélation spatiale de la réponse impulsionnelle du filtre :

$$\begin{aligned}
C_{h_f}(\mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h_f(\mathbf{r}) h_f(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\
&= \iint_{-\infty}^{+\infty} h_f(x, z) h_f(x + x', z + z') dx' dz'
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Sachant que la distribution de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution, nous obtenons :

$$R_{aa}(\mathbf{r}) = \sigma_a^2 C_{h_f}(\mathbf{r}) \tag{2.21}$$

D'après l'équation (2.21), l'autocorrélation de la sortie du filtre est égale à l'autocorrélation de la réponse impulsionnelle  $h_f(\mathbf{r})$ . Le choix du filtre détermine la fonction d'autocorrélation  $R_{aa}(\mathbf{r})$ .

Soit  $\hat{H}_f(\alpha, \gamma)$  la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

$$\hat{H}_f(\alpha, \gamma) = TF[h_f(x, z)] \tag{2.22}$$

En se rappelant que :

$$|\hat{H}_f(\alpha, \gamma)|^2 = TF[C_{h_f}(x, z)] \tag{2.23}$$

les formules de filtrage permettent d'écrire que :

$$TF[R_{aa}(\mathbf{r})] = \sigma_a^2 \left| \hat{H}_f(\alpha, \gamma) \right|^2 \tag{2.24}$$

Connaissant  $R_{aa}(\mathbf{r})$  et en supposant que la phase de la fonction de transfert est nulle ( $\hat{H}_f(\alpha, \gamma) = \left| \hat{H}_f(\alpha, \gamma) \right|$ ), la réponse impulsionnelle  $h_f(x, z)$  est déduite en utilisant la transformée de Fourier inverse :

$$\begin{aligned}
h_f(x, z) &= TF^{-1}[\hat{H}_f(\alpha, \gamma)] \\
&= TF^{-1}[\sqrt{TF[R_{aa}(x, z)]}]
\end{aligned} \tag{2.25}$$

### 2.3.1 Cas particulier de l'autocorrélation gaussienne

Une valeur du paramètre de Hurst permet d'avoir une fonction d'autocorrélation gaussienne :  $\mathcal{H} = 1$ .

$$R(d) = \sigma_a^2 \exp\left(-\left[\frac{d}{\ell_c}\right]^2\right) \tag{2.26}$$

En se rappelant que la transformée de Fourier d'une gaussienne est une gaussienne, nous montrons que la forme analytique de la réponse impulsionnelle est :

$$h_f(x, z) = \frac{2}{\ell_c \sqrt{\pi}} \exp(-2[\frac{x^2 + z^2}{\ell_c}]^2) \quad (2.27)$$

### 2.3.2 Discrétisation des formules

Afin d'implémenter la méthode de génération de surface que nous avons décrite, nous avons besoin de la forme discrète des différentes équations. Soit  $\Delta x$  et  $\Delta z$  les pas d'échantillonnage suivant les deux directions  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$ . Ils sont obtenus par :

$$\Delta x = \frac{L_x}{N_x} \text{ et } \Delta z = \frac{L_z}{N_z}$$

Dans la pratique, nous choisirons le même nombre de points, et la même longueur  $L$  suivant les deux directions  $\hat{\mathbf{x}}$  et  $\hat{\mathbf{z}}$ .

En discrétisant la formule de filtrage, nous obtenons :

$$a(x_m, z_n) = \Delta x \Delta z \sum_p \sum_q h_f(U_p, V_q) B(U_p - x_m, V_q - z_n) \quad (2.28)$$

Avec

$$\begin{aligned} x_m &= m\Delta x & U_p &= p\Delta x \\ z_n &= n\Delta z & V_q &= q\Delta z \end{aligned}$$

De façon plus compacte l'équation (2.28) peut s'écrire

$$a_{m,n} = \Delta x \Delta z \sum_p \sum_q h_{p,q} B_{p-m, n-q} \quad (2.29)$$

les valeurs discrètes  $h_{p,q}$  de la réponse impulsionnelle sont obtenues suivant la démarche explicitée dans le paragraphe précédent par l'utilisation de transformées de Fourier discrètes directe et inverse.

## 2.4 Résultats numériques

Dans ce paragraphe, nous allons présenter quelques résultats concernant d'abord la méthode de génération des surfaces rugueuses. Nous donnons un exemple de génération

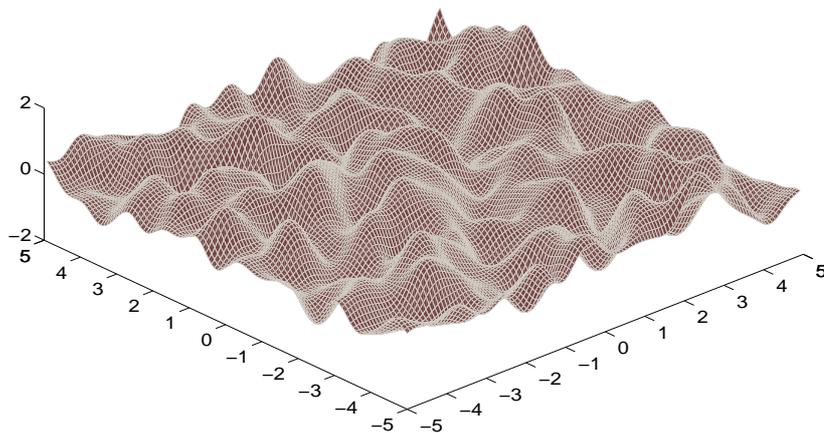
de surfaces 2D afin de valider la méthode décrite dans le paragraphe (§ 2.3). Ensuite, nous présentons une comparaison entre des résultats obtenus à partir de données expérimentales et des résultats issus de la simulation numérique (avec des paramètres statistiques obtenus à partir de la base de données).

### 2.4.1 Validation de la méthode de génération numérique des surfaces

En utilisant la méthode de génération décrite précédemment, nous avons simulé une surface 2D avec des paramètres statistiques fixés arbitrairement. Ces paramètres statistiques sont les suivants :

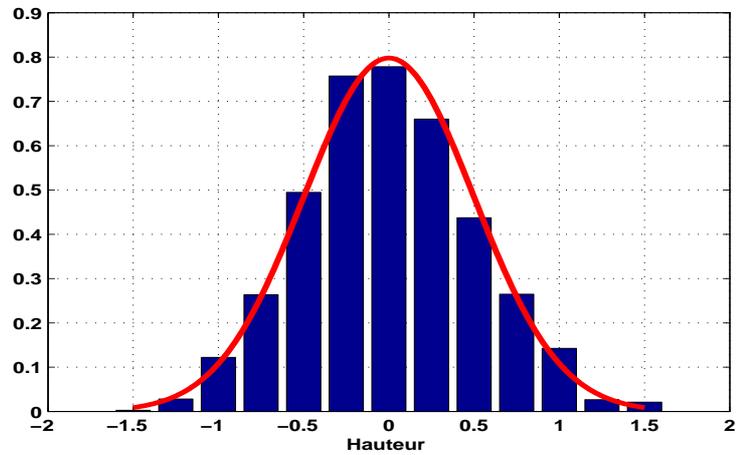
- Une DDP gaussienne avec un écart type des hauteurs  $\sigma_a = 0.5\lambda$  et une moyenne nulle
- Une fonction d'autocorrélation gaussienne ( $\mathcal{H} = 1$ ) de longueur de corrélation  $\ell_c = 1.5\lambda$

Le signal d'entrée du filtre est un bruit blanc gaussien. Le support de la surface est  $L_x = L_z = 10\lambda$  et le nombre de point  $N = N_x = N_z = 128$ . Sur la figure 2.3 nous avons représenté le profil 2D obtenu.



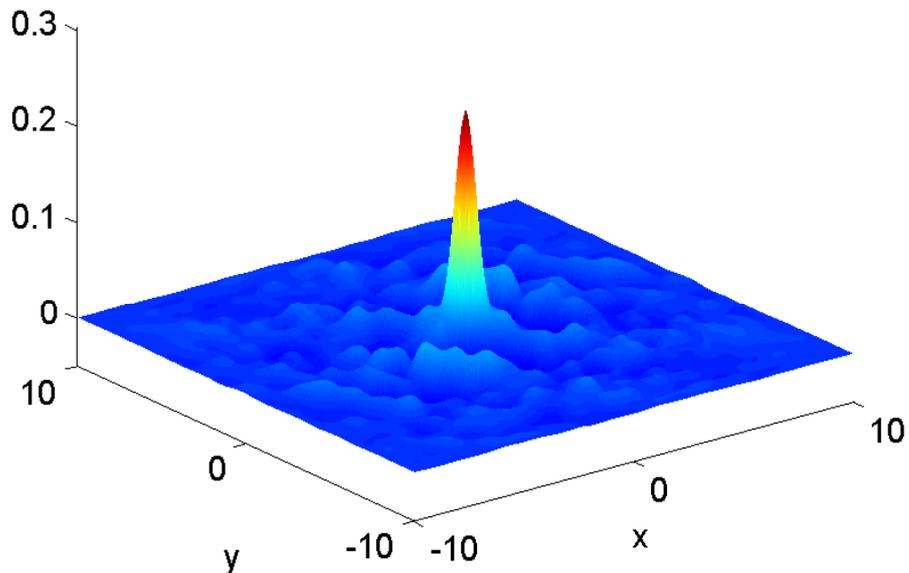
**Fig. 2.3:** Profil gaussien généré par filtrage linéaire

Nous avons estimé la densité de probabilité des hauteurs du profil généré en utilisant l'histogramme normalisé. La figure 2.4 illustre la comparaison entre la DDP théorique et celle estimée. D'après cette figure, nous retrouvons bien une courbe en cloche dont l'étendue est entre  $-3\sigma$  et  $+3\sigma$ . Ces caractéristiques sont bien celles d'une gaussienne.



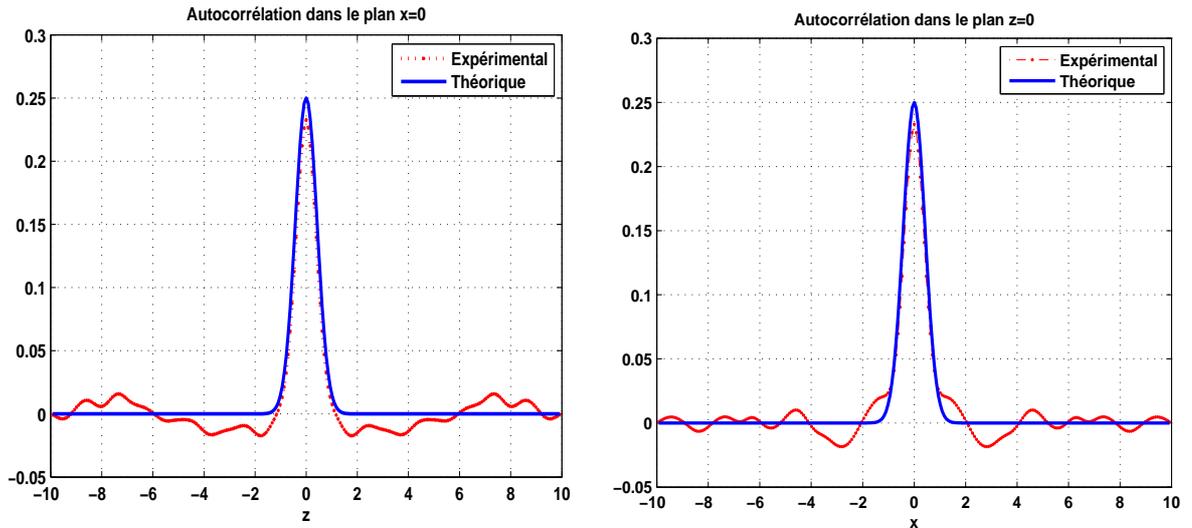
**Fig. 2.4:** Densités de probabilité des hauteurs théorique et estimée ( $\sigma_a = 0.5\lambda$ )

La fonction d'autocorrélation estimée (autocorrélation spatiale obtenue sur une réalisation de dimensions  $L \times L$ ) sur le profil généré est représentée sur la figure 2.5. Nous remarquons la présence d'oscillations en dehors du lobe principal. Ceci peut s'expliquer par la taille limitée de la surface et donc le nombre insuffisant d'échantillons.



**Fig. 2.5:** Fonction d'autocorrélation estimée sur une seule réalisation ( $\ell_c = 1.5\lambda$  et  $\mathcal{H} = 1$ )

Afin de permettre une comparaison entre la fonction d'autocorrélation estimée et théorique, nous avons réalisé une coupe verticale, de la figure 2.5, dans les plans  $(xOy)$  et  $(zOy)$ . Nous pouvons voir très nettement sur la figure 2.6 les oscillations en dehors du lobe principal dans les deux plans. Nous remarquons aussi un léger décalage, d'une valeur de 0.033, des maxima des deux fonctions. Ceci dit, les valeurs en zéro sont très proches de la variance calculée sur le profil généré.



**Fig. 2.6:** Fonction d'autocorrélation spatiale dans les plans  $x = 0$  et  $z = 0$

Les résultats que nous avons présentés jusque maintenant étaient des estimations sur une seule réalisation. Voyons maintenant comment vont-ils évoluer en fonction du nombre de réalisations utilisées. Considérons un ensemble de réalisations  $N_R = 100$  ayant chacune les mêmes paramètres statistiques.

Sur la figure 2.7, nous avons représenté l'estimation de la densité de probabilité des hauteurs en faisant une moyenne sur les 100 réalisations. La comparaison avec la courbe théorique est parfaite.

La figure 2.8 donne l'autocorrélation moyennée sur 100 réalisations (moyenne statistique de la fonction d'autocorrélation spatiale). En la comparant à la figure 2.5, nous constatons l'atténuation des oscillations en dehors du lobe principal.

Nous pouvons voir sur la figure 2.9 que les écarts entre la fonction théorique et celle estimée sont réduits par l'effet de moyennage. En effet, les oscillations en dehors du lobe principal sont différentes d'une réalisation à une autre et c'est en ce sens que leur moyenne tend vers zéro.

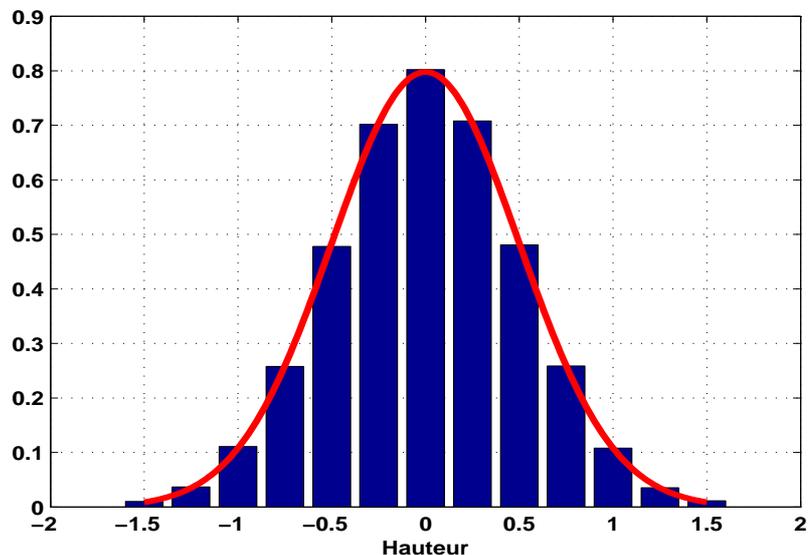


Fig. 2.7: Densité de probabilité des hauteurs moyennée sur 100 réalisations

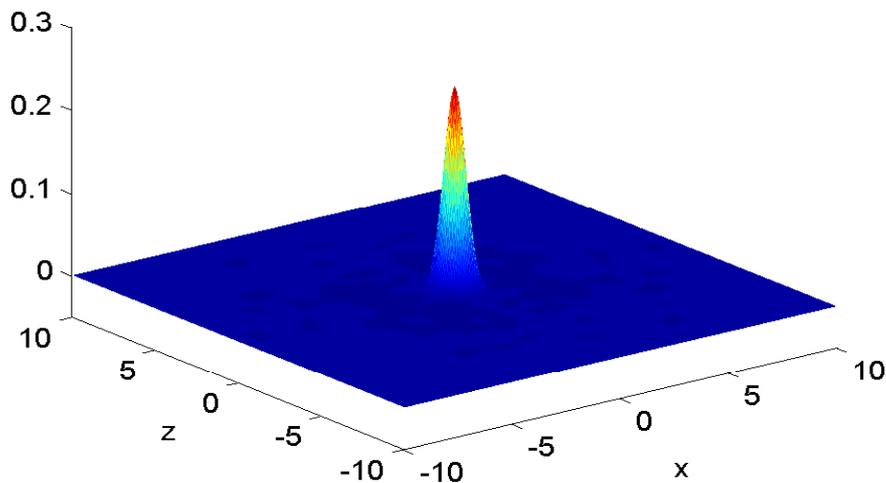
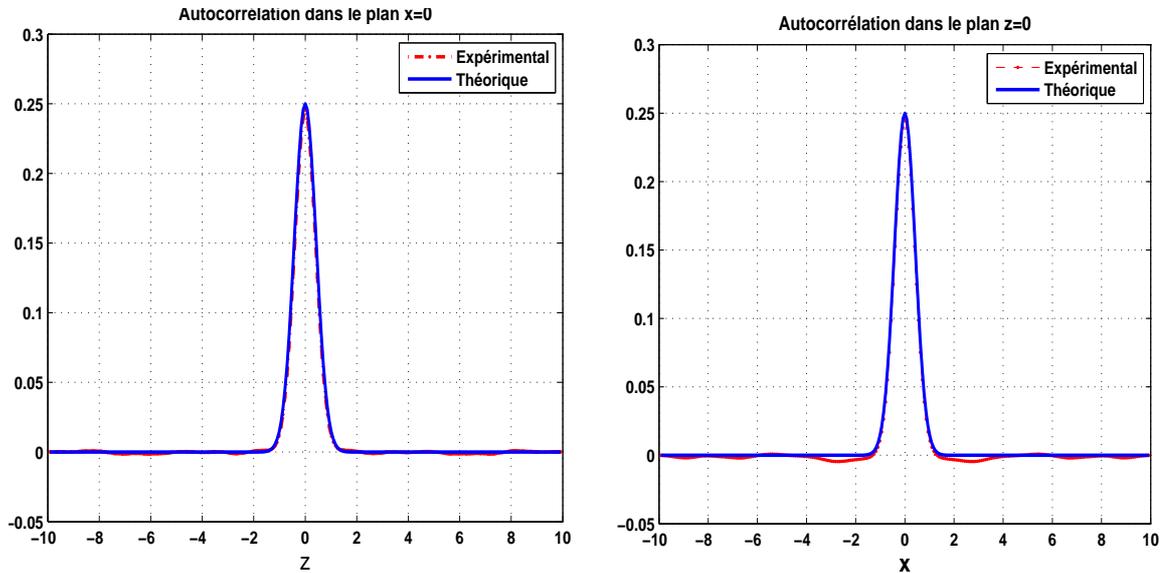


Fig. 2.8: Moyenne des fonctions d'autocorrélations spatiales

Nous pouvons retenir que la dimension des surfaces, c'est-à-dire le nombre d'échantillons considérés influe sur la statistique des surfaces générées. Ceci veut dire que les profils considérés doivent être représentatifs de la statistique que nous exigeons. La longueur de la surface doit être au minimum de quelques longueurs de corrélation. Plus ce nombre augmente meilleurs sont les résultats. Dans la pratique, il suffit d'avoir des parcelles dont la dimension est un peu plus grande que la tache radar au sol. Dans la



**Fig. 2.9:** Fonction d'autocorrélation moyenne dans les plans  $x = 0$  et  $z = 0$

mesure où nous ne pouvons pas augmenter la dimension des surfaces indéfiniment pour des contraintes liées au temps de calcul ainsi qu'à l'espace de stockage sur ordinateur, le recours aux moyennes d'ensemble est un moyen intéressant.

## 2.4.2 Comparaison entre les résultats de simulation et les résultats expérimentaux

Après avoir présenté dans les paragraphes précédents différentes notions liées aux processus aléatoires, sous différentes hypothèses, nous allons maintenant vérifier la validité de ces hypothèses sur des données expérimentales. Ces données représentent des sols agricoles nus. Les surfaces agricoles sélectionnées correspondent à différentes pratiques agricoles : labour, déchaumage et semis. Le labour est un travail agricole qui consiste à découper la terre et à la retourner à l'aide d'une charrue. Les sillons du labour sont de l'ordre de 40cm. Le déchaumage peut s'apparenter au labour, mais le travail du sol est moins profond. Il consiste à retourner la terre et le chaume (le reste de la plante après la moisson) afin d'enterrer les matières organiques dans le sol. Le semis est un travail fin (sillons de 10cm) qui consiste en la pulvérisation de la terre en très petites mottes, afin de permettre aux graines une croissance optimale. Chacun des sols a été soumis à un taux précipitant de pluie artificielle de  $40 \text{ mm h}^{-1}$ , dispensé par un dispositif d'arrosage afin d'avoir un état dégradé :

- état 0 : état initial,
- état 1 : état initial exposé à la pluie pendant 20 minutes.

Ce procédé a permis de dégrader de façon contrôlée les états initiaux en une étape et obtenir ainsi des sols altérés par la pluie, sans qu'il y ait formation de flaques [21].

A partir des fichiers numériques des sols agricoles dont nous disposons (suite au travail de O. Taconet et V. Ciarletti du CETP), nous estimons les trois paramètres statistiques suivant :

- La variance  $\sigma_a^2$ ,
- La longueur de corrélation  $\ell_c$ ,
- Le paramètre de Hurst  $\mathcal{H}$ .

Ces paramètres, rappelons-le, sont estimés sous les hypothèses de la stationnarité et de l'ergodicité à l'ordre 2. Pour ce faire, nous nous basons sur le principe de minimisation de l'écart entre la fonction d'autocorrélation expérimentale et l'autocorrélation théorique. La fonction mesurant cet écart est donnée par :

$$\epsilon(l_c, h, H) = \frac{1}{L_p^2} \int_{-\frac{L_p}{2}}^{\frac{L_p}{2}} \int_{-\frac{L_p}{2}}^{\frac{L_p}{2}} |R_{\text{experimentale}}(x, z) - R_{\text{theorique}}(x, z)|^2 dx dz \quad (2.30)$$

où  $L_p$  est l'étendue du lobe principal de l'autocorrélation expérimentale.

Nous chercherons à vérifier que :

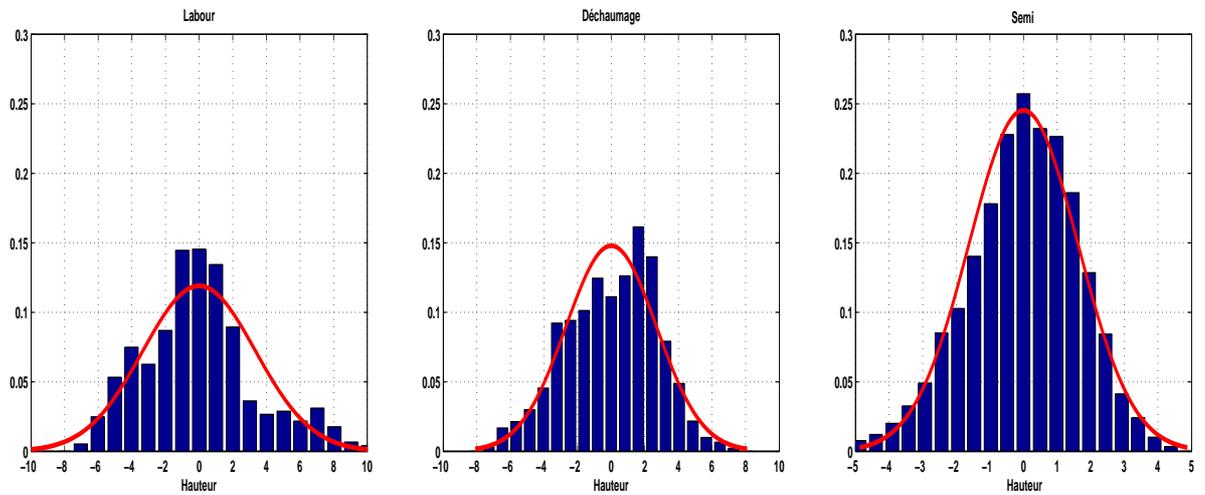
- La densité de probabilité des hauteurs est gaussienne.
- Les surfaces sont isotropes et que la fonction d'autocorrélation est de la forme donnée par l'équation (2.15).

La figure 2.10 représente l'histogramme normalisé et la densité de probabilité des hauteurs gaussiennes théoriques, pour les trois types de sol dans l'état initial. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, le caractère gaussien est confirmé pour les semis. Par contre, les courbes pour les labours et les déchaumages montrent que les densités de probabilité des hauteurs ne sont pas gaussiennes. L'hypothèse sur le caractère gaussien est vérifiée uniquement pour les semis.

Ce constat est confirmé par le calcul du Kurtosis. Cette grandeur est le rapport entre le moment d'ordre 4 et le moment d'ordre 2 élevé au carré d'une variable aléatoire. Lorsqu'il vaut 3 la variable aléatoire en question est de densité de probabilité gaussienne. Le tableau (2.1) donne les valeurs obtenues pour les trois types de sol.

Sol	Labour	Déchaumage	Semis
<b>Kurtosis</b>	3.60	2.52	2.93

**Tab. 2.1:** Valeurs du Kurtosis pour différents sols nus (état initial)



**Fig. 2.10:** Estimation des densités de probabilité des hauteurs obtenues à partir des fichiers numériques des sols nus

Nous voyons bien que la valeur du Kurtosis est assez proche de 3 pour le semis. Ce qui n'est pas le cas pour les deux autres sols.

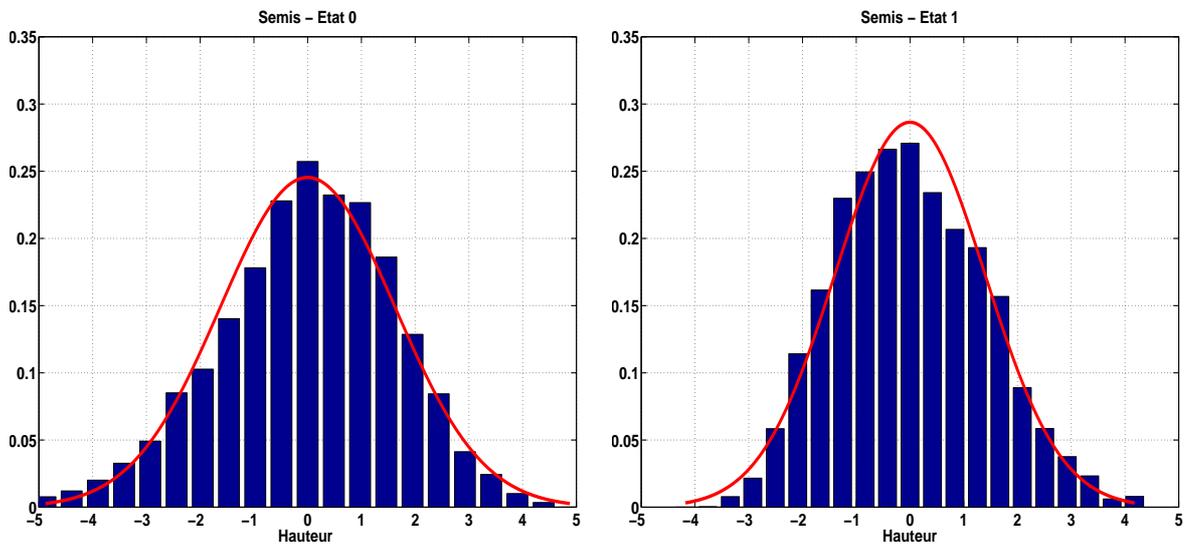
L'hypothèse d'une densité de probabilité gaussienne n'étant pas vérifiée pour les labours et les déchaumages, nous ne chercherons pas à valider les autres hypothèses sur ces deux types de sol.

Dans le tableau (2.2) nous donnons les différents paramètres statistiques estimés pour les deux états du semis. Nous pouvons noter que le caractère gaussien est conservé. En effet, le kurtosis reste proche de 3. L'écart type des hauteurs décroît de l'état initial à l'état final. Cette décroissance est liée à l'effet de la pluie qui aplanit les sols. D'autre part, la longueur de corrélation diminue légèrement et le paramètre de Hurst est presque constant. Ceci veut dire que la forme de la fonction d'autocorrélation varie peu, en revanche son amplitude va diminuer de l'état initial à l'état final.

Etat	L(cm)	$\sigma_a(cm)$	$l_c(cm)$	$\mathcal{H}$	Kurtosis
0	50	1.61	3.57	0.80	2.93
1	50	1.38	3.49	0.79	2.70

**Tab. 2.2:** Paramètres statistiques des semis à différents états

Sur la figure 2.11, nous avons représenté les histogrammes normalisés des deux états du semis ainsi que la densité de probabilité gaussienne théorique. La comparaison est satisfaisante pour chacun des deux états.



**Fig. 2.11:** Densité de probabilité des surfaces de semis à différents états estimée à partir des données expérimentales

Pour ce qui est de la fonction d'autocorrélation, nous présentons une comparaison entre la fonction expérimentale et théorique suivant deux coupes. L'une verticale dans le plan  $(xOy)$  et l'autre horizontale dans le plan  $(xOz)$ .

Nous pouvons voir sur la coupe verticale dans le plan  $(xOy)$  (voir figure 2.12) qu'il existe un léger décrochage entre les valeurs en zéro des deux fonctions théorique et estimée. Nous pouvons voir aussi les oscillations en dehors du lobe principal. Ces oscillations peuvent s'expliquer par la taille limitée des parcelles utilisées ( $50\text{ cm} \times 50\text{ cm}$ ). D'autre part, elles peuvent indiquer la présence d'une composante périodique présente dans les sols, et qui peut être due au sens du travail. Cette composante périodique n'est pas prise en compte par notre modèle. D'autre part, nous pouvons constater que la fonction d'autocorrélation n'est pas une gaussienne.

La figure 2.13 est une coupe verticale dans le plan  $(yOz)$  de la même autocorrélation que précédemment. Nous remarquons le même comportement de la fonction d'autocorrélation estimée, à savoir les oscillations en dehors du lobe principal. Néanmoins, ces oscillations sont différentes de celles dans le plan  $(xOy)$ . Cette différence renforce l'hypothèse sur la composante déterministe due au sens du travail.

La figure 2.14 montre une coupe horizontale à trois hauteurs différentes de la fonction d'autocorrélation pour chacun des états du semis. Ces trois hauteurs correspondent à 90%, 70% et 50% de la valeur maximale de la fonction. Nous pouvons remarquer que les courbes expérimentales sont très proches des résultats théoriques pour chaque état.

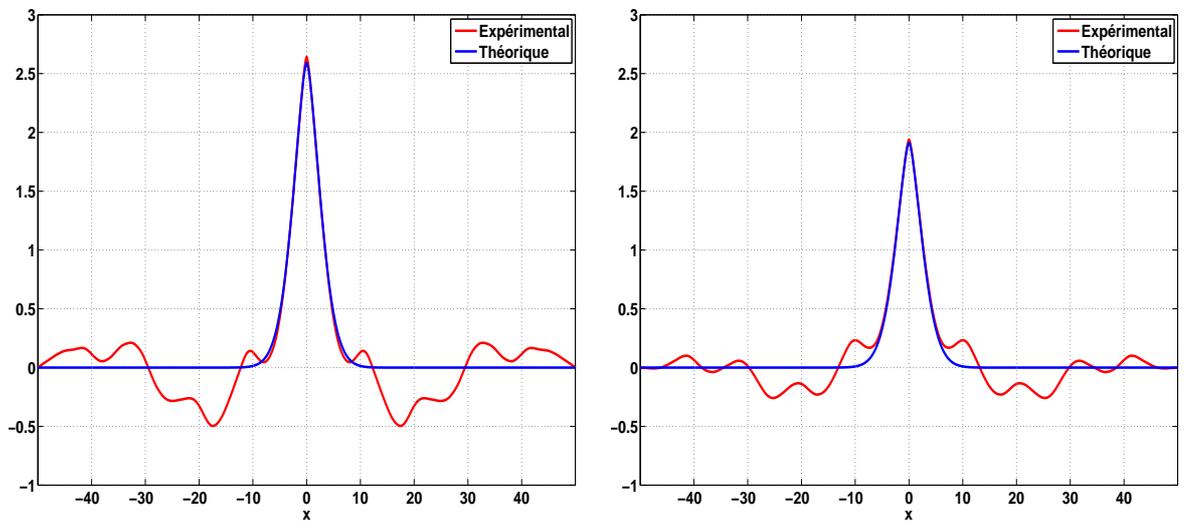


Fig. 2.12: Fonction d'autocorrélation estimée à partir des données expérimentales, pour les deux états du semis, dans le plan  $(xOy)$

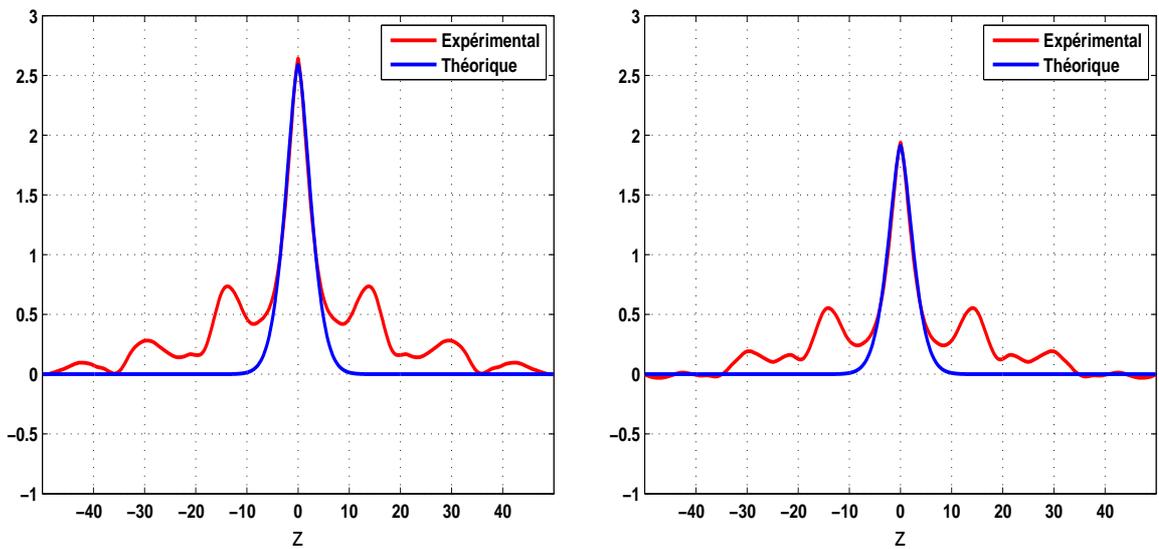
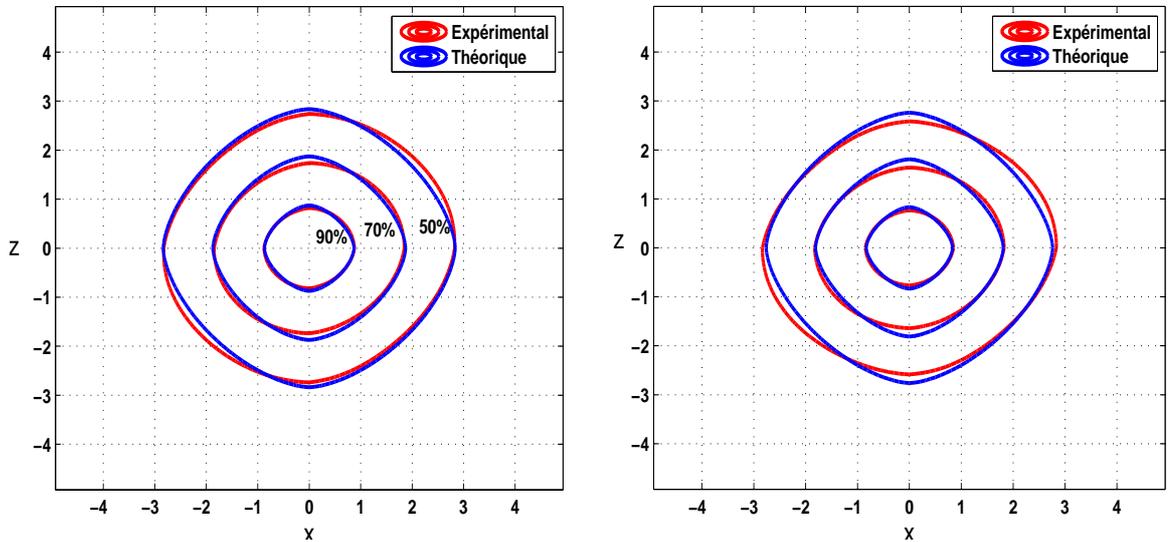


Fig. 2.13: Fonction d'autocorrélation estimée à partir des données expérimentales, pour les deux états du semis, dans le plan  $(yOz)$

Les différences s'accroissent au fur et à mesure que le périmètre des courbes augmente. Ceci est normal car nous avons vu que les écarts entre l'autocorrélation expérimentale et théorique se creusent en s'approchant de la base du lobe principal. D'autre part, ces observations permettent de dire que l'hypothèse de l'isotropie est raisonnable pour les semis.



**Fig. 2.14:** Coupes horizontales de la fonction d'autocorrélation estimée à partir des données expérimentales, pour les deux états du semis. Le rapport des longueurs de la fonction d'autocorrélation suivant  $x$  et  $z$  à 50% de la valeur maximale sont 1.05 pour l'état initial et 1.10 pour l'état dégradé

Nous pouvons imaginer que l'hypothèse de l'isotropie sera difficilement vérifiable pour les labours et les déchaumages. En effet, puisque le travail est effectué dans un sens et en utilisant des machines différentes selon le résultat souhaité, et sachant que la profondeur des sillons est plus importante pour les labours et les déchaumages que pour les semis, il est normal que ces sols présentent une direction privilégiée plus *prononcée*, qui est la direction du travail. Cette direction de travail accentue la composante périodique, et introduit une anisotropie qui n'est plus négligeable.

## 2.5 Constante diélectrique et taux d'humidité

Lors d'une analyse électromagnétique d'une surface, les aspects physiques (composition des sol, taux d'humidité, etc) des milieux séparés par cette interface sont pris en compte dans le modèle, en faisant intervenir la caractéristique diélectrique de chacun des deux milieux. Comme nous l'avons vu au premier chapitre, cette caractéristique diélectrique dépend aussi de la fréquence à laquelle nous travaillons. Connaître cette constante avec précision contribue à une meilleure étude du phénomène de diffraction.

Un milieu représentant un sol humide est composé de particules solides (sable, limon, argile), d'eau liquide et de poches d'air. Les particules d'argiles ont un diamètre inférieur

à  $2\mu m$ , celles du limon ont un diamètre compris entre  $2\mu m$  et  $50\mu m$  et les particules de sable sont de diamètre supérieur à  $50\mu m$ . L'eau dans le sol est soit *piégée*, soit *libre* de circuler d'un point à un autre du sol. Par exemple, pour le même taux d'humidité, nous aurons plus d'eau libre dans un sol ne contenant que du sable qu'un sol purement argileux.

Beaucoup de travaux ont été effectués afin de mesurer les variations de la caractéristique diélectrique en fonction du taux d'humidité et de la composition du sol dans le domaine des micro-ondes. Les résultats permettent de dire que les parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique augmentent avec l'augmentation du taux d'humidité. Nous pouvons retenir aussi que suivant la composition des sols et pour un taux d'humidité fixé, la caractéristique diélectrique présente des valeurs différentes. Pour plus de précision nous invitons le lecteur à consulter la référence [25].

Le tableau 2.3 présente quelques exemples de valeurs de la permittivité, dans le domaine des hyperfréquences (bande C), en fonction du taux d'humidité en volume. Ces valeurs sont obtenues suivant des formules empiriques de Wang [26] faisant intervenir des paramètres déterminés expérimentalement.

Taux d'humidité %	5	10	15	20	25	30	35	40
Permittivité en bande C	3.62 - j0.19	4.52 - j0.44	5.94 - j0.85	7.90 - j1.42	10.4 - j2.17	13.9 - j3.22	17.4 - j4.30	20.8 - j5.30

**Tab. 2.3:** Permittivités relatives de sols nus dans le domaine des hyperfréquences

## 2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté différentes notions liées à l'étude statistique des processus aléatoires à une et deux dimensions. Ces processus sont utilisés afin de modéliser les surfaces rugueuses aléatoires. Dans le but de synthétiser des surfaces ayant des caractéristiques statistiques bien définies, nous avons présenté une méthode de génération numérique basée sur le principe de filtrage linéaire d'un bruit blanc. Nous avons montré que cette méthode peut être utilisée pour simuler des profils de surface correspondant à un certain type de sol agricole, qui est le semis. Le générateur numérique permet d'avoir des surfaces de densité de probabilité gaussienne et de fonctions d'auto-corrélation entre gaussienne et exponentielle. Le modèle décrit dans ce chapitre est à sa

première étape de développement. Nous avons vu qu'il est satisfaisant pour la description des semis. En revanche, il est inadapté pour les labours et les déchaumages. Afin de le compléter, il faudra sans doute introduire une composante déterministe dont la forme est à définir suivant le type de sol considéré [27]. Dans la suite du document nous travaillerons sous l'hypothèse de l'isotropie des surfaces. Nos surfaces seront considérées de densité de probabilité de hauteur gaussienne.

Dans les chapitres suivants nous allons présenter les modèles et méthodes électromagnétiques que nous avons développés. Ces méthodes prennent comme paramètre d'entrée les surfaces générées en utilisant la méthode décrite dans ce chapitre. En particulier, nous étudierons des surfaces avec une statistique issue de la base de données des sols agricoles. Ceci permettra de voir comment les paramètres statistiques, ainsi que les caractéristiques diélectriques, vont intervenir d'un point de vue électromagnétique et influencer le coefficient de diffusion bi-statique et le coefficient de rétro-diffusion.

# Chapitre 3

## La méthode des coordonnées curvilignes : méthode C

Le but de ce chapitre est de présenter la méthode C dans le cas 3D. Cette méthode est basée sur la résolution des équations de Maxwell, sous leur forme covariante, dans un système de coordonnées non orthogonales adapté à la géométrie de la surface diffractante. Ceci permet d'aboutir à un système aux valeurs propres. Le champ diffracté est exprimé comme combinaison linéaire des modes propres du problème satisfaisant la condition des ondes sortantes. Les conditions aux limites permettent de déterminer les coefficients des combinaisons linéaires, c'est-à-dire les amplitudes de diffraction.

Cette méthode a été développée par l'équipe du professeur Jean Chandezon de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand et a été intensément appliquée à l'étude des réseaux de diffraction [28 - 37].

Les travaux sur les surfaces rugueuses non périodiques sont peu nombreux [19,38 - 41] et le CETP a été très actif pour la mise en oeuvre de cette méthode pour l'étude des surfaces rugueuses aléatoires [42, 43, 44].

Ce qu'apporte ce chapitre par rapport à la méthode, c'est son extension pour traiter des surfaces rugueuses 2D aléatoires séparant deux milieux diélectriques d'indices optiques différents.

Nous considérons le cas d'une surface (interface) séparant l'air, assimilé au vide, d'un milieu 2 (*LHI*) diélectrique, non magnétique et non dispersif, dont l'indice optique  $n_2$  est soit réel soit complexe.

Nous rappelons que l'onde incidente est plane de longueur d'onde  $\lambda$ . Son vecteur d'onde  $\mathbf{k}_i$  est repéré dans l'espace par l'angle de site  $\theta_i$  par rapport à l'axe  $(Oy)$  et l'angle d'azimut  $\varphi_i$  dans le plan  $(xOz)$ .

$$\mathbf{k}_i = \alpha_i \hat{\mathbf{x}} - \beta_i \hat{\mathbf{y}} + \gamma_i \hat{\mathbf{z}} \quad (3.1)$$

Avec

$$\begin{cases} \alpha_i &= k_1 \sin \theta_i \cos \varphi_i \\ \beta_i &= k_1 \cos \theta_i \\ \gamma_i &= k_1 \sin \theta_i \sin \varphi_i \end{cases} \quad (3.2)$$

Au contact de l'interface, l'onde incidente est diffractée dans différentes directions de l'espace repérées par le couple d'angle  $(\theta, \varphi)$ .

A partir des équations de Maxwell, nous nous proposons de déterminer les amplitudes des champs diffractés  $(\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d)$  dans l'air (milieu 1) et dans le milieu inférieur éventuellement.

### 3.1 Composantes des champs dans le système de translation

Soit le système de translation défini par rapport aux coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  par :

$$\begin{cases} x' &= x \\ y' &= y - a(x, z) \\ z' &= z \end{cases} \quad (3.3)$$

Un des avantages de ce système de coordonnées liées à la surface diffractante est la simplification du traitement des conditions aux frontières [28]. En effet, la surface  $y = a(x, z)$  coïncide avec la surface de coordonnées  $y' = 0$ . Les composantes du champ électromagnétique impliquées dans la résolution des conditions aux limites sont tangentes à la surface diffractante d'équation  $y' = 0$ .

Dans ce système de translation (3.3), un vecteur  $\mathbf{V}$  peut être exprimé par ses coordonnées covariantes ou contravariantes (voir annexe C et [45]). Les composantes covariantes du vecteur  $\mathbf{V}$  sont données en fonction des composantes cartésiennes par les

relations suivantes :

$$\begin{cases} v_{x'}(x', y', z') = v_x(x, y, z) + \frac{\partial a(x, z)}{\partial x} v_y(x, y, z) \\ v_{y'}(x', y', z') = v_y(x, y, z) \\ v_{z'}(x', y', z') = v_z(x, y, z) + \frac{\partial a(x, z)}{\partial z} v_y(x, y, z) \end{cases} \quad (3.4)$$

La composante covariante  $v_{y'}$  est identique à la composante cartésienne  $v_y$ . Les deux autres composantes sont tangentes en tout point à la surface de coordonnées  $z' = 0$ , c'est-à-dire  $y = a(x, z)$ .

En polarisation  $E_{//}$  :

$$E_{x'}(x', y', z') = E_x(x, y, z) \quad (3.5a)$$

$$E_{z'}(x', y', z') = E_z(x, y, z) \quad (3.5b)$$

$$H_{x'}(x', y', z') = H_x(x, y, z) + \frac{\partial a(x, z)}{\partial x} H_y(x, y, z) \quad (3.5c)$$

$$H_{y'}(x', y', z') = H_y(x, y, z) \quad (3.5d)$$

$$H_{z'}(x', y', z') = H_z(x, y, z) + \frac{\partial a(x, z)}{\partial z} H_y(x, y, z) \quad (3.5e)$$

Et en polarisation  $H_{//}$  :

$$H_{x'}(x', y', z') = H_x(x, y, z) \quad (3.6a)$$

$$H_{z'}(x', y', z') = H_z(x, y, z) \quad (3.6b)$$

$$E_{x'}(x', y', z') = E_x(x, y, z) + \frac{\partial a(x, z)}{\partial x} E_y(x, y, z) \quad (3.6c)$$

$$E_{y'}(x', y', z') = E_y(x, y, z) \quad (3.6d)$$

$$E_{z'}(x', y', z') = E_z(x, y, z) + \frac{\partial a(x, z)}{\partial z} E_y(x, y, z) \quad (3.6e)$$

Les quatre composantes  $E_{x'}$ ,  $E_{z'}$ ,  $H_{x'}$  et  $H_{z'}$  représentent les composantes tangentielles (ou transverses) des vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  à la surface  $y' = Cst$  et donc en particulier à la surface de coordonnées  $y' = 0$ . Ce sont elles qui interviennent dans l'écriture des conditions aux limites.

## 3.2 Equation de propagation des composantes longitudinales

Nous démontrons que les composantes longitudinales  $E_{y'}$  et  $ZH_{y'}$  vérifient la même équation de propagation suivante (voir D.4) [33, 34] :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y'} \left[ g^{z'y'} \frac{\partial \psi}{\partial z'} + \frac{\partial g^{z'y'} \psi}{\partial z'} \right] - \frac{\partial}{\partial y'} \left[ g^{x'y'} \frac{\partial \psi}{\partial x'} + \frac{\partial g^{x'y'} \psi}{\partial x'} \right] + j k g^{y'y'} \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \\ = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z'^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + k^2 \psi \end{aligned} \quad (3.7)$$

avec

$$\psi' = \frac{j}{k} \frac{\partial \psi}{\partial y'} \quad (3.8)$$

Les grandeurs  $g^{z'y'}$ ,  $g^{x'y'}$ ,  $g^{y'y'}$  sont des éléments du tenseur métrique. Ils ne dépendent que de la dérivée par rapport à  $x'$  et  $z'$  de la fonction  $a(x', z')$ . Leurs expressions sont données par :

$$g^{z'y'} = -\frac{\partial a}{\partial z'} \quad (3.9)$$

$$g^{x'y'} = -\frac{\partial a}{\partial x'} \quad (3.10)$$

$$g^{y'y'} = 1 + \left( \frac{\partial a}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial a}{\partial z'} \right)^2 \quad (3.11)$$

Les deux équations (3.7, 3.8) forment un système différentiel de premier ordre en  $y'$ . Sa résolution permet d'obtenir les composantes longitudinales du champ électromagnétique  $E_{y'}$  et  $ZH_{y'}$ .

## 3.3 Les composantes tangentielles

Concernant les composantes tangentielles à la surface de diffraction, nous montrons à partir des équations de Maxwell sous forme covariante qu'elles peuvent s'écrire uniquement en fonction des deux composantes longitudinales (voir D.3). Les relations entre les composantes transversales et longitudinales sont données par les quatre équations

différentielles suivantes :

$$\frac{\partial^2 E_{x'}}{\partial y'^2} + k^2 E_{x'} = \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial x' \partial y'} - k^2 g^{x'y'} E_{y'} + jk g^{z'y'} \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial y'} + jk \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial z'} \quad (3.12a)$$

$$\frac{\partial^2 E_{z'}}{\partial y'^2} + k^2 E_{z'} = \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial z' \partial y'} - k^2 g^{z'y'} E_{y'} - jk g^{x'y'} \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial y'} - jk \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial x'} \quad (3.12b)$$

$$\frac{\partial^2 ZH_{x'}}{\partial y'^2} + k^2 ZH_{x'} = \frac{\partial^2 ZH_{y'}}{\partial x' \partial y'} - k^2 g^{x'y'} ZH_{y'} - jk g^{z'y'} \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} - jk \frac{\partial E_{y'}}{\partial z'} \quad (3.12c)$$

$$\frac{\partial^2 ZH_{z'}}{\partial y'^2} + k^2 ZH_{z'} = \frac{\partial^2 ZH_{y'}}{\partial y' \partial z'} - k^2 g^{z'y'} ZH_{y'} + jk g^{x'y'} \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + jk \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'} \quad (3.12d)$$

Les deux composantes longitudinales  $E_{y'}$  et  $ZH_{y'}$  satisfont deux équations de propagation identiques. Ces deux équations sont découplées. Ceci veut dire que nous pouvons traiter les deux cas de polarisation (de l'onde diffractée) de façon indépendante. En d'autres termes pour une incidence par exemple en polarisation  $E_{//}$ , la partie de l'onde diffractée en polarisation  $H_{//}$  est déterminée indépendamment de celle diffractée en polarisation  $E_{//}$ . Il suffit d'imposer  $ZH_{y'} = 0$  dans le premier cas et  $E_{y'} = 0$  dans le second cas dans les équations (3.12a-3.12d). Ensuite, le champ total diffracté est exprimé comme la somme de la contribution directe et croisée de l'onde diffractée.

### 3.4 Système aux valeurs propres et fonctions d'ondes élémentaires

Dans ce paragraphe, afin de ne pas alourdir les notations, les grandeurs électriques et les champs ne sont pas indicés par la lettre 'm' désignant le milieu. La résolution est valable quelle que soit la nature du milieu.  $k$  représente indifféremment  $k_1$  ou  $k_2$ ,  $Z$  désigne  $Z_1$  ou  $Z_2$  et  $\psi_d$  et  $\psi_{Td}$  la composante longitudinale du champ et les composantes transversales dans le milieu 1 ou le milieu 2, respectivement. Cette remarque est aussi valable pour les paragraphes (§ 3.6.1 et § 3.6.2)

En appliquant une transformée de Fourier positive pour les deux équations (3.7, 3.8), nous passons du domaine spatial vers le domaine de Fourier  $(x, z) \leftrightarrow (\alpha, \gamma)$ , nous

obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y'} \left[ j \alpha (\hat{g}^{x'y'} * \hat{\psi}) + j \hat{g}^{x'y'} * (\alpha \hat{\psi}) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial y'} \left[ j \gamma (\hat{g}^{z'y'} * \hat{\psi}) + j \hat{g}^{z'y'} * (\gamma \hat{\psi}) \right] \\ & + j k \hat{g}^{y'y'} * \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y'} = \beta^2 \hat{\psi} \end{aligned} \quad (3.13a)$$

$$\frac{j}{k} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y'} = \hat{\psi} \quad (3.13b)$$

où  $\beta^2 = k^2 - \alpha^2 - \gamma^2$ .

Le symbole '\*' représente le produit de convolution dans le domaine de Fourier.

De manière symbolique, le système des deux équations (3.13a, 3.13b) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\frac{j}{k} [A] \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi' \end{pmatrix} = [B] \begin{pmatrix} \Psi \\ \Psi' \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

où [A] et [B] sont deux opérateurs faisant intervenir les constantes de propagation, la dérivée par rapport à  $y'$ , le produit de convolution ainsi que les termes du tenseur métrique.

C'est ce système d'équations que nous allons résoudre dans le domaine spectral afin d'obtenir l'expression générale des composantes longitudinales du champ électromagnétique. Ensuite, nous déduisons les composantes tangentielles via les équations (3.12a-3.12d).

### 3.5 Traitement des conditions aux limites

Les expressions générales des ondes font intervenir les amplitudes de diffraction. Ces inconnues du problème sont déterminées en utilisant les conditions aux limites. Comme nous supposons que l'interface séparant les deux milieux ne contient ni courants ni charges libres, alors nous avons la continuité des composantes transversales du champ électromagnétique.

Si le milieu 2 est infiniment conducteur, alors en tout point de la surface  $y' = 0$ , les

composantes tangentielles du champ électrique total dans le milieu 1 sont nulles :

$$\{(E_{dx'}^{(E//pol_i)} + E_{dx'}^{(H//pol_i)})(x', y', z')\}_{y'=0} = -\{(E_{ix'}^{(pol_i)} + E_{rx'}^{(pol_i)})(x', y', z')\}_{y'=0} \quad (3.15a)$$

$$\{(E_{dz'}^{(E//pol_i)} + E_{dz'}^{(H//pol_i)})(x', y', z')\}_{y'=0} = -\{(E_{iz'}^{(pol_i)} + E_{rz'}^{(pol_i)})(x', y', z')\}_{y'=0} \quad (3.15b)$$

Si le milieu 2 est diélectrique, alors à l'interface  $y' = 0$ , les composantes transverses du champ électromagnétique total dans le milieu 1 sont égales aux composantes transverses du champ électromagnétique dans le milieu 2 :

$$\begin{aligned} E_{dx',1}^{(E//pol_i)}(x', y', z') + E_{dx',1}^{(H//pol_i)}(x', y', z') - E_{dx',2}^{(E//pol_i)}(x', y', z') - E_{dx',2}^{(H//pol_i)}(x', y', z') \\ = -E_{ix'}^{(pol_i)}(x', y', z') - E_{rx'}^{(pol_i)}(x', y', z') + E_{tx'}^{(pol_i)}(x', y', z') \\ E_{dz',1}^{(E//pol_i)}(x', y', z') + E_{dz',1}^{(H//pol_i)}(x', y', z') - E_{dz',2}^{(E//pol_i)}(x', y', z') - E_{dz',2}^{(H//pol_i)}(x', y', z') \\ = -E_{iz'}^{(pol_i)}(x', y', z') - E_{rz'}^{(pol_i)}(x', y', z') + E_{tz'}^{(pol_i)}(x', y', z') \end{aligned} \quad (3.16a)$$

$$\begin{aligned} H_{dx',1}^{(E//pol_i)}(x', y', z') + H_{dx',1}^{(H//pol_i)}(x', y', z') - H_{dx',2}^{(E//pol_i)}(x', y', z') - H_{dx',2}^{(H//pol_i)}(x', y', z') \\ = -H_{ix'}^{(pol_i)}(x', y', z') - H_{rx'}^{(pol_i)}(x', y', z') + H_{tx'}^{(pol_i)}(x', y', z') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{dz',1}^{(E//pol_i)}(x', y', z') + H_{dz',1}^{(H//pol_i)}(x', y', z') - H_{dz',2}^{(E//pol_i)}(x', y', z') - H_{dz',2}^{(H//pol_i)}(x', y', z') \\ = -H_{iz'}^{(pol_i)}(x', y', z') - H_{rz'}^{(pol_i)}(x', y', z') + H_{tz'}^{(pol_i)}(x', y', z') \end{aligned} \quad (3.17a)$$

Nous pouvons constater que pour une polarisation de l'onde incidente fixée, les composantes en polarisation directe et croisée sont couplées par les conditions aux limites. Les équations (3.16a-3.17a) sont résolues dans le domaine fréquentiel. Les deux cas de figure (parfaitement conducteur et diélectrique) seront abordés dans la suite.

## 3.6 Résolution numérique

### 3.6.1 Formulation discrète du problème

Les différentes équations établies précédemment doivent être discrétisées afin de pouvoir être résolues sur ordinateur.

Si  $\hat{K}$  et  $\hat{L}$  sont deux transformées de Fourier, alors nous écrivons leur produit de convolution comme :

$$\begin{aligned} (\hat{K} * \hat{L})(\alpha, y', \gamma) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K}(\alpha', y', \gamma') \hat{L}(\alpha - \alpha', y', \gamma - \gamma') d\alpha' d\gamma' \\ &\approx \frac{\Delta\alpha^2}{4\pi^2} \sum_p \sum_q \hat{K}(\alpha_p, y', \gamma_q) \hat{L}(\alpha - \alpha_p, y', \gamma - \gamma_q) \end{aligned} \quad (3.18)$$

avec  $\alpha_p = k_1 \sin \theta_i \cos \varphi_i + p\Delta\alpha$ ,  $\gamma_q = k_1 \sin \theta_i \sin \varphi_i + q\Delta\alpha$

$\Delta\alpha$  est la résolution spectrale. Plus sa valeur numérique diminue plus l'approximation entre l'intégrale et la somme sera meilleure.

En remplaçant les produits de convolution par leurs expressions (3.18) dans les équations (3.13a, 3.13b) et en appliquant la méthode de collocation par points pour les valeurs  $(\alpha_s, \gamma_t)$ , nous obtenons un système différentiel discret de premier ordre en  $y'$ .

$$\begin{aligned} \frac{j}{k} \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \sum_{p,q} \left[ \frac{\alpha_s}{k} (\hat{g}_{s-p,t-q}^{x'y'}) + (\hat{g}_{s-p,t-q}^{x'y'} \frac{\alpha_s}{k}) + \frac{\gamma_t}{k} (\hat{g}_{s-p,t-q}^{z'y'}) + (\hat{g}_{s-p,t-q}^{z'y'} \frac{\gamma_t}{k}) \right] \hat{\psi}(\alpha_p, y', \gamma_q) \right] \\ + \frac{j}{k} \frac{\partial}{\partial y'} \left[ \sum_{p,q} (\hat{g}_{s-p,t-q}^{y'y'}) \hat{\psi}'(\alpha_p, y', \gamma_q) \right] = \frac{\beta_{s,t}^2}{k^2} \hat{\psi}(\alpha_s, y', \gamma_t) \end{aligned} \quad (3.19a)$$

$$\frac{j}{k} \frac{\partial \hat{\psi}(\alpha_s, y', \gamma_t)}{\partial y'} = \hat{\psi}'(\alpha_s, y', \gamma_t) \quad (3.19b)$$

où

$$\hat{g}_{s,t}^{z'y'} = \frac{\Delta\alpha^2}{4\pi^2} \hat{g}^{z'y'}(\alpha_s, \gamma_t) \quad (3.20a)$$

$$\hat{g}_{s,t}^{x'y'} = \frac{\Delta\alpha^2}{4\pi^2} \hat{g}^{x'y'}(\alpha_s, \gamma_t) \quad (3.20b)$$

$$\hat{g}_{s,t}^{y'y'} = \delta_{st} + \sum_{uv} \hat{g}_{s-u,t-v}^{z'y'} \hat{g}_{u,v}^{z'y'} + \sum_{uv} \hat{g}_{s-u,t-v}^{x'y'} \hat{g}_{u,v}^{x'y'} \quad (3.20c)$$

avec  $\delta_{pq}$  le symbole de Kronecker et  $\beta_{st} = k^2 - \alpha_s^2 - \gamma_t^2$ .

Le système des deux équations (3.19a, 3.19b) peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{j}{k} L_1 \frac{\partial}{\partial y'} \begin{pmatrix} \hat{\Psi} \\ \hat{\Psi}' \end{pmatrix} = L_2 \begin{pmatrix} \hat{\Psi} \\ \hat{\Psi}' \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$L_1$  et  $L_2$  sont des matrices carrées de mêmes dimensions. Les termes des deux matrices sont donnés respectivement par les expressions à droite et à gauche des deux équations (3.19a, 3.19b). Ils dépendent des constantes de propagation et des dérivées du profil par rapport à  $x$  et  $z$ .

$$L_1 = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_s}{k}(\hat{g}_{s-p,t-q}^{x'y'}) + (\hat{g}_{s-p,t-q}^{x'y'} \frac{\alpha_s}{k}) + \frac{\gamma_t}{k}(\hat{g}_{s-p,t-q}^{z'y'}) + (\hat{g}_{s-p,t-q}^{z'y'} \frac{\gamma_t}{k}); & (\hat{g}_{s-p,t-q}^{y'y'}) \\ & I; & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

et

$$L_2 = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{s,t}^2}{k^2}, & 0 \\ 0; & I \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$I$  et  $O$  représentent la matrice identité et la matrice nulle. Les composantes des vecteurs  $\hat{\Psi}$  et  $\hat{\Psi}'$  sont respectivement  $\hat{\Psi}(\alpha_s, y', \gamma_t)$  et  $\hat{\Psi}'(\alpha_s, y', \gamma_t)$ .

Le système différentiel (3.21) admet comme solutions élémentaires les fonctions de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \hat{\Psi}_{mn} \\ \hat{\Psi}'_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{mn} \\ \hat{\Phi}'_{mn} \end{pmatrix} \exp(-jk r_{mn} |y'|) \quad (3.24)$$

avec

$$r_{mn} L_1 \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{mn} \\ \hat{\Phi}'_{mn} \end{pmatrix} = L_2 \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_{mn} \\ \hat{\Phi}'_{mn} \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

$\hat{\Phi}_{mn}$  et  $\hat{\Phi}'_{mn}$  sont les vecteurs propres de la matrice  $L_1^{-1}L_2$  associés aux valeurs propres  $r_{mn}$ . Nous notons  $\hat{\Phi}_{mn}(\alpha_s, \gamma_t)$  et  $\hat{\Phi}'_{mn}(\alpha_s, \gamma_t)$  les composantes des vecteurs  $\hat{\Phi}_{mn}$  et  $\hat{\Phi}'_{mn}$ . Les vecteurs  $\hat{\Phi}_{mn}$  et  $\hat{\Phi}'_{mn}$  sont obtenus en résolvant numériquement le système aux valeurs propres (3.25). Ainsi, les champs seront exprimés comme combinaisons linéaires de ces vecteurs propres.

### 3.6.2 Fonction d'onde élémentaire et champ total

Le calcul numérique des valeurs propres et vecteurs propres exige un ordre de troncature afin d'avoir des matrices de dimensions finies. De fait, si nous fixons l'ordre de troncature à  $M$ , nous supposons que les champs sont bien représentés sur un nombre fini

d'échantillons. La dimension des matrices  $L_1$  et  $L_2$  est alors de  $2M_s$  avec  $M_s = (2M+1)^2$ . Les matrices de I et 0 sont de dimension  $M_s$ . La résolution du système (3.25) nous donne  $2M_s$  vecteurs propres associés au même nombre de valeurs propres. Les composantes de chaque vecteur propre sont les valeurs discrètes de l'onde élémentaire qui lui est associée. En utilisant le théorème de l'échantillonnage (E.13), nous obtenons la valeur des ondes élémentaires  $\hat{\Psi}_{mn}(\alpha, y', \gamma)$  et  $\hat{\Psi}'_{mn}(\alpha, y', \gamma)$  pour toute  $\alpha$  et  $\gamma$  à partir de leurs valeurs en des points discrets repérés par les indices  $(s, t)$ . Les formules d'interpolation sont établies dans l'annexe E [46, 47] et permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_{mn}(\alpha, y', \gamma) &= \exp(-jkr_{mn}|y'|) & (3.26a) \\ &\times \sum_{t=-M}^{+M} \sum_{s=-M}^{+M} \hat{\Phi}_{mn}(\alpha_s, \gamma_t) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\alpha - \alpha_s)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\gamma - \gamma_t)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}'_{mn}(\alpha, y', \gamma) &= \exp(-jkr_{mn}|y'|) & (3.26b) \\ &\times \sum_{t=-M}^{+M} \sum_{s=-M}^{+M} \hat{\Phi}'_{mn}(\alpha_s, \gamma_t) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\alpha - \alpha_s)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\gamma - \gamma_t)\right) \end{aligned}$$

La nature des fonctions  $\hat{\Psi}_{mn}(\alpha, y', \gamma)$  dépend de la valeur propre  $r_{mn}$  associée. Ainsi, nous pouvons distinguer quatre types d'onde :

- si  $\operatorname{Re}[r_{mn}] > 0$  et  $\operatorname{Im}[r_{mn}] = 0$  alors l'onde est sortante propagative, elle correspond à l'onde diffractée propagative,
- si  $\operatorname{Re}[r_{mn}] < 0$  et  $\operatorname{Im}[r_{mn}] = 0$  alors l'onde est entrante propagative, elle correspond aux ondes incidentes,
- si  $r_{mn}$  est complexe et  $\operatorname{Im}[r_{mn}] < 0$  alors l'onde est sortante et son amplitude décroît au fur et à mesure qu'elle s'éloigne de la surface, elle est dite évanescence,
- si  $r_{mn}$  est complexe et  $\operatorname{Im}[r_{mn}] > 0$  alors l'onde est entrante mais son amplitude croît en s'éloignant de la surface. Elle est dite antiévanescence. Comme elle ne remplit pas la condition de l'onde finie à l'infini, elle ne sera pas prise en compte lors du traitement des conditions aux limites.

Nous constatons numériquement que parmi les  $2M_s$  vecteurs propres, la moitié correspond à des ondes sortantes et l'autre moitié à des ondes entrantes. Les ondes sortantes représentent les champs diffractés propagatif et évanescence. Nous notons  $U_d$  l'ensemble des valeurs prises par  $(m, n)$  tel que  $r_{mn}$ , soit une valeur propre d'une onde sortante.

Si la valeur propre est réelle, nous constatons numériquement que son module est inférieur à 1 ( $r_{mn} \in [-1, +1]$ ). Donc, nous associons un angle de site  $\theta_{mn}$  à l'onde diffractée sortante propagative correspondante, tel que :  $\cos(\theta_{mn}) = r_{mn}$  et nous constatons

qu'il existe deux entiers (m,n) tels que :

$$\begin{aligned}
r_{mn} &= \frac{\beta^2(\alpha_m, \gamma_n)}{k^2} \\
&= 1 - \left(\frac{\alpha_m}{k}\right)^2 - \left(\frac{\gamma_n}{k}\right)^2 \\
&= \cos^2(\theta_{mn})
\end{aligned} \tag{3.27}$$

L'angle d'azimut correspondant  $\varphi_{mn}$  est déterminé en utilisant les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = k \sin \theta_{mn} \cos \varphi_{mn} \\ \gamma = k \sin \theta_{mn} \sin \varphi_{mn} \end{cases} \tag{3.28}$$

Nous aurions pu indiquer les valeurs et vecteurs propres déterminés par un algorithme numérique par un seul indice entier. Nous avons fait le choix de les repérer par deux entiers (m,n) compte tenu de la relation (3.27). Cette notation rappelle par ailleurs que les surfaces sont 2D.

Finalement, les transformées de Fourier des composantes transversales des champs sont définies comme combinaison linéaire des fonctions élémentaires  $\hat{\Psi}_{mn}(\alpha, y', \gamma)$  vérifiant la condition des ondes sortantes.

$$\hat{\Psi}_d(\alpha, y', \gamma) = \sum_{(m,n \in U_d)} A_{mn} \hat{\Psi}_{mn}(\alpha, y', \gamma) \tag{3.29a}$$

$$\hat{\Psi}'_d(\alpha, y', \gamma) = \sum_{(m,n \in U_d)} A_{mn} \hat{\Psi}'_{mn}(\alpha, y', \gamma) \tag{3.29b}$$

Les quatre composantes tangentielles  $E_{x'}$ ,  $E_{z'}$ ,  $ZH_{x'}$  et  $ZH_{z'}$  sont obtenues en suivant les mêmes démarches que pour la détermination des composantes transversales. La partie du champ représentant la contribution  $E_{//}$  de l'onde est déterminée à partir des équations (3.12a-3.12d) en prenant  $E_{y'} = 0$ . Ceci permet d'écrire :

$$\hat{E}_{x',mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) = +k^2 \sum_{p=-M}^{+M} \sum_{q=-M}^{+M} (\hat{g}_{s-p,t-q}^{z'y'}) \hat{\Phi}'_{mn}(\alpha_p, \gamma_q) + k\gamma_t \hat{\Phi}_{mn}(\alpha_s, \gamma_t) \quad (3.30a)$$

$$\hat{E}_{z',mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) = -k^2 \sum_{p=-M}^{+M} \sum_{q=-M}^{+M} (\hat{g}_{s-p,t-q}^{x'y'}) \hat{\Phi}'_{mn}(\alpha_p, \gamma_q) - k\alpha_s \hat{\Phi}_{mn}(\alpha_s, \gamma_t) \quad (3.30b)$$

$$Z\hat{H}_{x',mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) = -k^2 \sum_{p=-M}^{+M} \sum_{q=-M}^{+M} (\hat{g}_{s-p,t-q}^{x'y'}) \hat{\Phi}_{mn}(\alpha_p, \gamma_q) - k\alpha_s \hat{\Phi}'_{mn}(\alpha_s, \gamma_t) \quad (3.30c)$$

$$Z\hat{H}_{z',mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) = -k^2 \sum_{p=-M}^{+M} \sum_{q=-M}^{+M} (\hat{g}_{s-p,t-q}^{z'y'}) \hat{\Phi}_{mn}(\alpha_p, \gamma_q) - k\gamma_t \hat{\Phi}'_{mn}(\alpha_s, \gamma_t) \quad (3.30d)$$

nous posons :

$$\hat{\Psi}_{T,mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) = \begin{pmatrix} \hat{E}_{x',mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) \\ \hat{E}_{z',mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) \\ Z\hat{H}_{x',mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) \\ Z\hat{H}_{z',mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

En utilisant les formules d'interpolation obtenues à partir du théorème d'échantillonnage, nous écrivons :

$$\hat{\Psi}_{T,mn}^{(E//pol_i)}(\alpha, \gamma) = \sum_{t=-M}^{+M} \sum_{s=-M}^{+M} \hat{\Psi}_{T,mn}^{(E//pol_i)}(\alpha_s, \gamma_t) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\alpha - \alpha_s)\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\gamma - \gamma_t)\right) \quad (3.32)$$

Les transformées de Fourier des composantes transversales du champ électromagnétique diffracté en polarisation  $E//$  sont des combinaisons linéaires des ondes élémentaires :

$$\hat{\Psi}_{T,d}^{(E//pol_i)}(\alpha, y', \gamma) = \sum_{(m,n \in U_d)} A_{mn}^{(E//pol_i)} \hat{\Psi}_{T,mn}^{(E//pol_i)}(\alpha, \gamma) \exp(-jk r_{mn} |y'|) \quad (3.33)$$

avec

$$\hat{\Psi}_{T,d}^{(E_{//}pol_i)}(\alpha, y', \gamma) = \begin{pmatrix} \hat{E}_{dx'}^{(E_{//}pol_i)}(\alpha, y', \gamma) \\ \hat{E}_{dz'}^{(E_{//}pol_i)}(\alpha, y', \gamma) \\ Z\hat{H}_{dx'}^{(E_{//}pol_i)}(\alpha, y', \gamma) \\ Z\hat{H}_{dz'}^{(E_{//}pol_i)}(\alpha, y', \gamma) \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Afin de calculer la contribution en  $H_{//}$ , nous prenons maintenant  $ZH_{y'} = 0$ . En remplaçant  $\mathbf{E}^{(E_{//}pol_i)}$  par  $Z\mathbf{H}^{(H_{//}pol_i)}$  et  $Z\mathbf{H}^{(E_{//}pol_i)}$  par  $-\mathbf{E}^{(H_{//}pol_i)}$  de l'équation (3.30) à (3.34), nous obtenons l'ensemble des composantes tangentielles pour la polarisation  $H_{//}$ .

### 3.6.3 Détermination des amplitudes de diffraction

Dans le paragraphe précédent, nous avons déterminé les modes propres du problème et nous avons exprimé les champs électromagnétiques comme combinaison linéaire de ces modes propres. Les coefficients des combinaisons représentent les amplitudes de diffraction et restent à déterminer. Pour ce faire, nous utilisons les conditions aux limites propres au problème que nous traitons.

Supposons que le milieu 2 est diélectrique. En prenant la transformée de Fourier des équations (3.16a-3.17a), nous pouvons les réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$\left[ \hat{\Psi}_{T,mn}(\alpha, \gamma) \right] [A_{mn}] = TF \left[ \Psi_0(x', y = a(x', z'), z') \right] \quad (3.35)$$

avec

$$\left[ \hat{\Psi}_{T,mn}(\alpha, \gamma) \right] = \begin{bmatrix} \hat{E}_{dx',mn,1}^{(E_{//}pol_i)} & \hat{E}_{dx',mn,1}^{(H_{//}pol_i)} & -\hat{E}_{dx',mn,2}^{(E_{//}pol_i)} & -\hat{E}_{dx',mn,2}^{(H_{//}pol_i)} \\ \hat{E}_{dz',mn,1}^{(E_{//}pol_i)} & \hat{E}_{dz',mn,1}^{(H_{//}pol_i)} & -\hat{E}_{dz',mn,2}^{(E_{//}pol_i)} & -\hat{E}_{dz',mn,2}^{(H_{//}pol_i)} \\ \hat{H}_{dx',mn,1}^{(E_{//}pol_i)} & \hat{H}_{dx',mn,1}^{(H_{//}pol_i)} & -\hat{H}_{dx',mn,2}^{(E_{//}pol_i)} & -\hat{H}_{dx',mn,2}^{(H_{//}pol_i)} \\ \hat{H}_{dz',mn,1}^{(E_{//}pol_i)} & \hat{H}_{dz',mn,1}^{(H_{//}pol_i)} & -\hat{H}_{dz',mn,2}^{(E_{//}pol_i)} & -\hat{H}_{dz',mn,2}^{(H_{//}pol_i)} \end{bmatrix} (\alpha, \gamma) \quad (3.36)$$

$$[A_{mn}] = \begin{bmatrix} A_{mn,1}^{(E//pol_i)} \\ A_{mn,1}^{(H//pol_i)} \\ A_{mn,2}^{(E//pol_i)} \\ A_{mn,2}^{(H//pol_i)} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$\left[ \Psi_0(x', y = a(x', z'), z') \right] = \begin{bmatrix} -E_{ix'}^{(pol_i)} - E_{rx'}^{(pol_i)} + E_{tx'}^{(pol_i)} \\ -E_{iz'}^{(pol_i)} - E_{rz'}^{(pol_i)} + E_{tz'}^{(pol_i)} \\ -H_{ix'}^{(pol_i)} - H_{rx'}^{(pol_i)} + H_{tx'}^{(pol_i)} \\ -H_{iz'}^{(pol_i)} - H_{rz'}^{(pol_i)} + H_{tz'}^{(pol_i)} \end{bmatrix} (x', y = a(x', z'), z') \quad (3.38)$$

En utilisant la méthode de collocation par point, aux valeurs discrètes  $(\alpha_p, \gamma_q)$ , et pour un ordre de troncature  $M$ , nous calculons les amplitudes de diffraction par inversion de matrice :

$$[A_{mn}] = \left[ \hat{\Psi}_{T,mn}(\alpha_p, \gamma_q) \right]^{-1} TF \left[ \Psi_0(x', y = a(x', z'), z') \right] (\alpha_p, \gamma_q) \quad (3.39)$$

La matrice à inverser est de dimension  $4M_s$  avec  $M_s = (2M + 1)^2$ .

### 3.7 Développement de Rayleigh et la méthode C

Le coefficient de diffusion bistatique  $\sigma_m^{pol_i}$  défini au chapitre 1 (voir équation 1.74) dans le milieu 'm' est donné en fonction des amplitudes de Rayleigh  $\hat{R}_m(\alpha, \gamma)$ . En dehors de la zone modulée, les composantes longitudinales et transversales du champ diffracté peuvent être représentées par les intégrales de Rayleigh [14, 16]. L'identification entre la représentation de Rayleigh et celle obtenue avec la méthode C est sans ambiguïté. Le raccordement se fait dans le milieu 1 à une hauteur  $y_{0,1} \geq \max[a(x, y)]$  et dans le milieu 2, à une hauteur  $y_{0,2} \leq \min[a(x, y)]$ .

Dans le cas d'un diélectrique sans pertes, pour la partie de l'onde diffractée en polarisation  $E_{//}$ , nous écrivons l'égalité suivante faisant intervenir les composantes transverses du champ électrique dans le milieu m (voir annexe F) :

$$E_{dx',m}^{(E_{//}pol_i)}(x, y' = y_{0,m} - a(x, z), z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma \hat{R}_m^{(E_{//}pol_i)}(\alpha, \gamma)}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \exp(-j\alpha x - j\gamma z) \exp(-j\beta_m |y_{0,m}|) d\alpha d\gamma \quad (3.40)$$

$$E_{dz',m}^{(E_{//}pol_i)}(x, y' = y_{0,m} - a(x, z), z) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha \hat{R}_m^{(E_{//}pol_i)}(\alpha, \gamma)}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \exp(-j\alpha x - j\gamma z) \exp(-j\beta_m |y_{0,m}|) d\alpha d\gamma \quad (3.41)$$

En passant dans le domaine de Fourier, les amplitudes  $\hat{R}_m^{(E_{//}pol_i)}(\alpha, \gamma)$  sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{R}_m^{(E_{//}pol_i)}(\alpha, \gamma) &= -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} TF[E_{dz',m}^{(E_{//}pol_i)}(x, y' = y_{0,m} - a(x, z), z)] \exp(-j\beta_m |y_{0,m}|) \\ &+ \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} TF[E_{dx',m}^{(E_{//}pol_i)}(x, y' = y_{0,m} - a(x, z), z)] \exp(-j\beta_m |y_{0,m}|) \end{aligned} \quad (3.42)$$

Les amplitudes de Rayleigh pour l'onde diffractée en polarisation  $H_{//}$  sont obtenues en écrivant le raccordement des composantes magnétiques avec :

$$Z_m H_{dx',m}^{(H_{//}pol_i)}(x, y' = y_{0,m} - a(x, z), z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma \hat{R}_m^{(H_{//}pol_i)}(\alpha, \gamma)}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \exp(-j\alpha x - j\gamma z) \exp(-j\beta_m |y_{0,m}|) d\alpha d\gamma \quad (3.43)$$

$$Z_m H_{dz',m}^{(H_{//}pol_i)}(x, y' = y_{0,m} - a(x, z), z) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha \hat{R}_m^{(H_{//}pol_i)}(\alpha, \gamma)}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \exp(-j\alpha x - j\gamma z) \exp(-j\beta_m |y_{0,m}|) d\alpha d\gamma \quad (3.44)$$

En utilisant la transformée de Fourier, les amplitudes  $\hat{R}_m^{(H_{//}pol_i)}(\alpha, \gamma)$  s'obtiennent par :

$$\begin{aligned}
\hat{R}_m^{(H//pol_i)}(\alpha, \gamma) &= \left[ -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} TF[Z_m H_{dz',m}^{(H//pol_i)}(x, y' = y_{0,m} - a(x, z), z)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} TF[Z_m H_{dx',m}^{(H//pol_i)}(x, y' = y_{0,m} - a(x, z), z)] \right] \\
&\quad \times \exp(-j\beta_m |y_{0,m}|)
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Dans les relations (3.42) et (3.45), les composantes de champ covariantes  $E_{d,x',m}$ ,  $E_{d,z',m}$ ,  $H_{d,x',m}$  et  $H_{d,z',m}$  sont données par la TF inverse des équations (3.33).

Finalement, les amplitudes de Rayleigh  $\hat{R}_m^{(\overline{pol_i} pol_i)}(\alpha, \gamma)$ , sont utilisées pour calculer le coefficient de diffusion bi-statique  $\sigma_m^{pol_i}$  dans le milieu m sans pertes en appliquant la relation (1.74).

## 3.8 Résultats - Validation de la méthode C

### 3.8.1 Moyenne d'ensemble et méthode Monte Carlo

Quand la méthode de résolution utilisée pour traiter la diffraction par une surface, permet d'avoir les expressions du champ diffracté en fonction des paramètres statistiques, alors le calcul du diagramme de rayonnement moyen peut se faire en effectuant une moyenne statistique, quelquefois réalisable analytiquement. C'est le cas des méthodes de petites perturbations (SPM) et de la méthode de Kirchhoff [1, 3]. Dans notre cas, le formalisme utilisé est exact et la résolution se fait numériquement. Afin de déduire des grandeurs énergétiques moyennes, nous générons un grand nombre de surfaces provenant du même processus aléatoire et nous effectuons une moyenne sur l'ensemble de ses réalisations. C'est la technique de Monte Carlo.

Comme les surfaces étudiées sont aléatoires alors les amplitudes de diffraction qui leurs sont associées sont elles aussi des grandeurs aléatoires. Les amplitudes de Rayleigh peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \hat{R}_{d,m}^{(\overline{pol_i} pol_i)}(\theta, \varphi) &= \langle \hat{R}_{d,m}^{(\overline{pol_i} pol_i)}(\theta, \varphi) \rangle + \hat{r}_{d,m}^{(\overline{pol_i} pol_i)}(\theta, \varphi) \\ \langle \hat{r}_{d,m}^{(\overline{pol_i} pol_i)}(\theta, \varphi) \rangle &= 0 \end{cases}$$

où  $\langle \rangle$  désigne la moyenne statistique.

Le coefficient de diffusion moyen est donné par la somme d'une contribution en polarisation  $E_{//}$  et d'une contribution en polarisation  $H_{//}$  :

$$\begin{aligned}\langle \sigma_{m,moy}^{pol_i}(\theta, \varphi) \rangle &= \langle \sigma_m^{(E_{//} pol_i)}(\theta, \varphi) \rangle + \langle \sigma_m^{(H_{//} pol_i)}(\theta, \varphi) \rangle \\ &= \frac{n_m^3 \cos^2 \theta}{\lambda^2 L^2 \cos \theta_i} \\ &\quad \times \left\{ \left\langle |\hat{R}_{d,m}^{(E_{//} pol_i)}(\theta, \varphi)|^2 \right\rangle + \left\langle |\hat{R}_{d,m}^{(H_{//} pol_i)}(\theta, \varphi)|^2 \right\rangle \right\} \quad (3.46)\end{aligned}$$

Nous définissons l'intensité cohérente comme le coefficient de diffusion associé au champ moyen :

$$\begin{aligned}I_{m,coh}^{pol_i}(\theta, \varphi) &= \frac{n_m^3 \cos^2 \theta}{\lambda^2 L^2 \cos \theta_i} \\ &\quad \times \left\{ \left| \left\langle \hat{R}_{d,m}^{(E_{//} pol_i)}(\theta, \varphi) \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle \hat{R}_{d,m}^{(H_{//} pol_i)}(\theta, \varphi) \right\rangle \right|^2 \right\} \quad (3.47)\end{aligned}$$

D'autre part, l'intensité incohérente est donnée par :

$$\begin{aligned}I_{m,incoh}^{pol_i}(\theta, \varphi) &= \frac{n_m^3 \cos^2 \theta}{\lambda^2 L^2 \cos \theta_i} \\ &\quad \times \left\{ \left\langle |\hat{r}_{d,m}^{(E_{//} pol_i)}(\theta, \varphi)|^2 \right\rangle + \left\langle |\hat{r}_{d,m}^{(H_{//} pol_i)}(\theta, \varphi)|^2 \right\rangle \right\} \quad (3.48)\end{aligned}$$

et est proportionnelle à la variation de l'amplitude de diffraction.

Dans la pratique, si nous disposons de  $N_R$  réalisations, nous évaluons l'intensité cohérente et le coefficient de diffusion moyen en faisant la moyenne statistique sur les  $N_R$  réalisations. L'intensité incohérente est obtenue en faisant la différence entre les deux grandeurs précédentes.

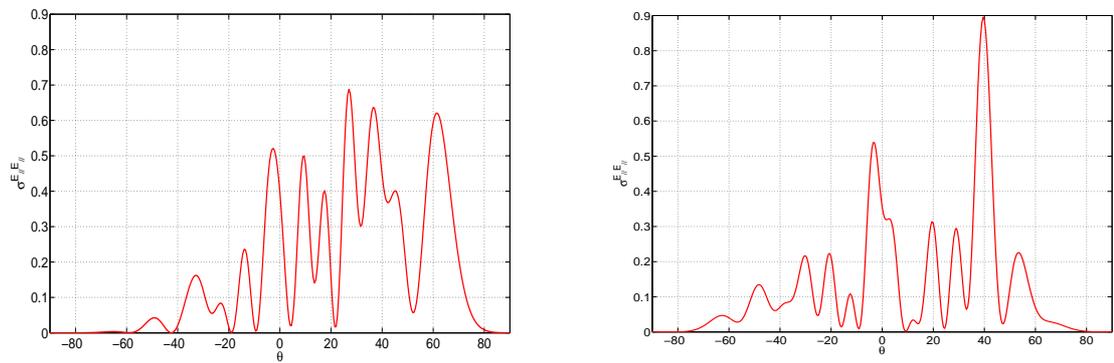
$$\begin{aligned}I_{m,incoh}^{pol_i}(\theta, \varphi) &= \frac{n_m^3 \cos^2 \theta}{\lambda^2 L^2 \cos \theta_i} \\ &\quad \times \frac{1}{N_R} \left\{ \sum_{j=1}^{N_R} |\hat{R}_{d,m,j}^{(E_{//} pol_i)}(\theta, \varphi)|^2 - \frac{1}{N_R} \left| \sum_{j=1}^{N_R} \hat{R}_{d,m,j}^{(E_{//} pol_i)}(\theta, \varphi) \right|^2 \right\} \\ &\quad \times \frac{1}{N_R} \left\{ \sum_{j=1}^{N_R} |\hat{R}_{d,m,j}^{(H_{//} pol_i)}(\theta, \varphi)|^2 - \frac{1}{N_R} \left| \sum_{j=1}^{N_R} \hat{R}_{d,m,j}^{(H_{//} pol_i)}(\theta, \varphi) \right|^2 \right\} \quad (3.49)\end{aligned}$$

### 3.8.2 Coefficient de diffusion pour deux réalisations différentes d'un même processus

Sur la figure 3.1, nous avons représenté le coefficient de diffusion bi-statique, pour deux surfaces (différentes) caractérisées par les mêmes paramètres statistiques. Chaque

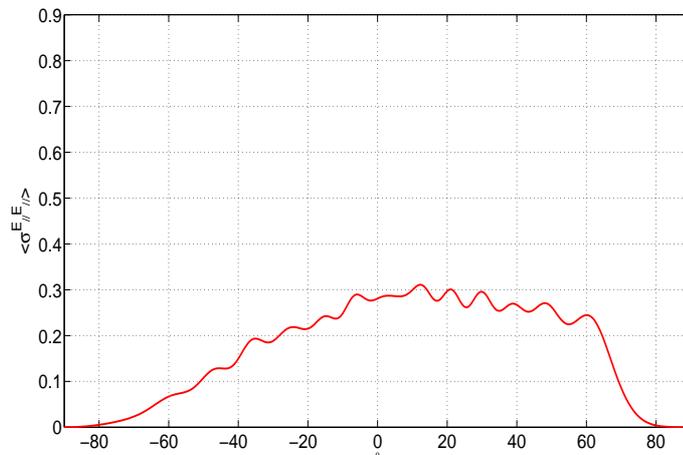
surface est de taille  $L^2 = 64\lambda^2$ , l'écart type des hauteurs  $\sigma_a = 0.5\lambda$  et la longueur de corrélation  $\ell_c = 1.41\lambda$ . Le milieu 2 est infiniment conducteur et l'onde incidente est en polarisation  $E_{//}$ . Les angles d'incidence sont  $\theta_i = 40^\circ$  et  $\varphi_i = 0^\circ$ . Le coefficient de diffusion bi-statique est donné dans le plan d'incidence ( $\varphi = \varphi_i = 0^\circ$ ) et en polarisation directe.

Nous pouvons constater que les deux graphes diffèrent assez fortement suivant la réalisation. Ils présentent tous les deux des oscillations importantes.



**Fig. 3.1:** Coefficient de diffusion bi-statique  $\sigma_1^{E_{//}E_{//}}$  pour une seule réalisation.  $L^2 = 64\lambda^2$ ,  $\sigma_a = 0.5\lambda$  et  $\ell_c = 1.41\lambda$

La figure 3.2 montre le coefficient de diffusion bi-statique moyen obtenu sur un ensemble de 300 réalisations ayant la même statistique que les deux surfaces précédentes. Les différentes fluctuations ont disparu grâce à l'effet de la moyenne.



**Fig. 3.2:** Coefficient de diffusion bi-statique moyenné sur  $N_R = 300$  réalisations

### 3.8.3 Ordre de troncature et tailles des matrices

Les solutions du système aux valeurs propres sont recherchées dans le domaine spectral. La résolution numérique impose d'avoir des matrices de dimensions finies. Dans le domaine spectral, si l'ordre de troncature est fixé à  $M$ , alors les constantes de propagation  $\alpha$  et  $\gamma$  prennent des valeurs dans l'intervalle  $[-\alpha_{max}; \alpha_{max}]$ . La valeur de  $\alpha_{max}$  est donnée par :

$$\alpha_{max} \approx M\Delta\alpha \quad (3.50)$$

où  $\Delta\alpha$  est la résolution spectrale.

Du fait de cette troncature les composantes haute fréquence des champs électromagnétiques sont éliminées. Par conséquent, la partie des vecteurs propres représentant des ondes évanescentes de haute fréquence ( $\alpha > \alpha_{max}$ ) est éliminée.

Idéalement, il nous faudrait toutes les ondes évanescentes afin de décrire parfaitement les couplages électromagnétiques et avoir une description fine du phénomène de diffraction. Cependant, au delà d'un  $\alpha_{max}$ , les amplitudes des ondes évanescentes sont très faibles et peuvent être négligées. La proportion d'ondes évanescentes prise en compte est directement liée à la valeur de  $\alpha_{max}$ . Ainsi, plus  $\alpha_{max}$  augmente et meilleure est la description du phénomène des couplages électromagnétiques et donc de la diffraction. En terme de précision, nous avons intérêt à prendre un ordre de troncature  $M$  le plus élevé possible.

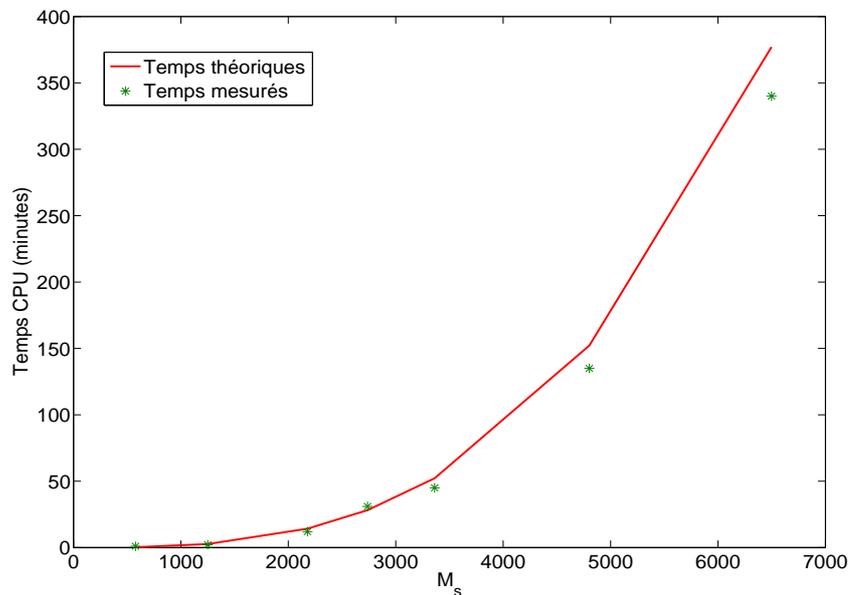
La méthode C requiert la résolution d'un système aux valeurs propres de dimension  $2M_s$  dans chacun des deux milieux et l'inversion d'une matrice, lors du traitement des conditions aux limites, de dimension  $4M_s$ . Nous rappelons que  $M_s = 2(2M + 1)^2$ . Nous avons implémenté la méthode C en utilisant le langage de programmation Matlab, sur des PC bi-processeurs dotés de 8Go de RAM et d'une fréquence de 3.4 GHz.

Le tableau 3.1 donne la dimension des matrices suivant l'ordre de troncature, les fréquences spatiales maximales ainsi que les temps d'exécution (temps CPU). Avec  $M = 8$  et  $M = 24$ , la méthode donne 578 et 4802 inconnues respectivement.

La figure 3.3 montre les temps de calcul en fonction de  $M_s$ . La courbe théorique représente la fonction proportionnelle à  $M_s^3$ . Nous pouvons voir que le temps d'exécution (temps CPU) varie approximativement comme  $M_s^3$ . Nous avons constaté que près de 90% du temps d'exécution est consacré à la recherche des valeurs et vecteurs propres.

M	$M_s = 2(2M + 1)^2$	Temps de calcul
8	578	58 sec
12	1250	130 sec
16	2178	12 minutes
18	2738	31 minutes
20	3362	45 minutes
24	4802	2h 15 minutes
28	6498	5h 40 minutes

**Tab. 3.1:** *Ordre de troncature, dimension du système aux valeurs propres et temps CPU correspondant*



**Fig. 3.3:** *Temps d'exécution en fonction de  $M_s$*

### 3.8.4 La fenêtre de pondération et les effets de bord

Les surfaces que nous générons et que nous étudions sont de dimensions finies. Afin de diminuer les effets de bord, lors de l'analyse électromagnétique, nous utilisons une fenêtre de pondération pour assurer le passage vers zéro de la surface sur les bords et éviter ainsi les très hautes fréquences dues aux discontinuités. La fenêtre de pondération

est la suivante  $V(x, z) = V_1(x) V_2(z)$ , tel que :

$$V_1(x) = \begin{cases} \frac{x + L/2}{\ell_t} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi \frac{x + L/2}{\ell_t}) & \text{si } x \in [-\frac{L}{2}; -\frac{L}{2} + \ell_t] \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{L}{2} + \ell_t; \frac{L}{2} - \ell_t] \\ \frac{L/2 - x}{\ell_t} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi \frac{L/2 - x}{\ell_t}) & \text{si } x \in [\frac{L}{2} - \ell_t; \frac{L}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.51)$$

et

$$V_2(z) = \begin{cases} \frac{z + L/2}{\ell_t} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi \frac{z + L/2}{\ell_t}) & \text{si } z \in [-\frac{L}{2}; -\frac{L}{2} + \ell_t] \\ 1 & \text{si } z \in [-\frac{L}{2} + \ell_t; \frac{L}{2} - \ell_t] \\ \frac{L/2 - z}{\ell_t} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi \frac{L/2 - z}{\ell_t}) & \text{si } z \in [\frac{L}{2} - \ell_t; \frac{L}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.52)$$

La longueur ' $\ell_t$ ' représente la zone de transition vers zéro de la surface. Afin de voir l'influence de la fenêtre de pondération sur la précision des calculs des champs diffractés, nous nous intéressons à l'erreur sur le bilan de puissance sur un ensemble de 25 réalisations.

Les surfaces utilisées sont issues du même processus gaussien d'écart type  $\sigma_a = 0.4\lambda$ . Elles sont caractérisées par une fonction d'autocorrélation gaussienne dont  $\ell_c = 1.5\lambda$ . L'angle d'incidence  $\theta_i$  est égal à  $20^\circ$ . L'ordre de troncature est fixé à  $M = 18$ .

Le bilan de puissance, pour les surfaces sans fenêtre de pondération, est très mauvais. L'erreur absolue moyenne sur cette grandeur est supérieure à 100% dans les deux polarisations fondamentales. En utilisant les mêmes surfaces, avec le même ordre de troncature  $M$  et en faisant la pondération avec un paramètre  $\ell_t = 1\lambda$ , l'erreur absolue moyenne sur le bilan de puissance devient inférieure à 0.2% pour les deux polarisations. Cette amélioration du bilan de puissance est directement liée à l'atténuation des effets de bords, due à la pondération par la fonction  $V(x, z)$ . Dans la suite, tous les résultats présentés prennent en compte cette fenêtre de pondération.

### 3.8.5 Stabilité et convergence de la méthode C

Soit une surface de dimension  $L^2 = 8\lambda \times 8\lambda$ , éclairée avec une onde plane sous les angles d'incidence  $\theta_i = 30^\circ$  et  $\varphi_i = 0^\circ$ . La surface est rugueuse et aléatoire. Elle est caractérisée par une densité de probabilité des hauteurs gaussiennes, de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_a$ . Sa fonction d'autocorrélation est aussi une gaussienne (paramètre de Hurst  $\mathcal{H} = 1$ ) de longueur de corrélation  $\ell_c = \lambda$ .

Dans le but de tester la stabilité numérique de la méthode C, nous nous proposons d'étudier la convergence du diagramme de diffraction en fonction de l'ordre de troncature  $M$ . Si la méthode est stable d'un point de vue numérique, alors la précision sur le bilan de puissance devrait augmenter avec l'ordre de troncature  $M$ .

Afin d'illustrer cette idée, nous avons calculé deux erreurs définies comme suit :

$$\Delta P^{(pol_i)} = \left| 1 - \frac{P_c^{(pol_i)}}{P_d^{(pol_i)}} \right| \quad (3.53)$$

où  $P_c^{(pol_i)}$  et  $P_d^{(pol_i)}$  sont données au chapitre 1 par les expressions (1.75) et

$$\Delta F^{(\overline{pol_i} pol_i)} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |F_{ref}^{(\overline{pol_i} pol_i)}(\theta, \varphi) - F^{(\overline{pol_i} pol_i)}(\theta, \varphi)| d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} F_{ref}^{(\overline{pol_i} pol_i)}(\theta, \varphi) d\theta} \quad (3.54)$$

$\Delta P^{(pol_i)}$  définit l'erreur sur le bilan de puissance pour une incidence en polarisation  $pol_i$ .  $\Delta F^{(\overline{pol_i} pol_i)}$  est l'erreur relative entre la grandeur énergétique  $F^{(\overline{pol_i} pol_i)}$  et  $F_{ref}^{(\overline{pol_i} pol_i)}$ .  $F_{ref}^{(\overline{pol_i} pol_i)}$  est obtenue soit à partir de données expérimentales, soit à partir d'autres méthodes exactes.  $F^{(\overline{pol_i} pol_i)}$  représente soit  $\sigma^{(\overline{pol_i} pol_i)}$ , soit sa valeur moyenne  $\langle \sigma^{(\overline{pol_i} pol_i)} \rangle$ .

Le tableau 3.2 donne les valeurs de l'erreur  $\Delta P^{(pol_i)}$ , pour différentes valeurs du couple  $(M, \sigma_a)$ , dans les deux polarisations. Pour les cinq hauteurs quadratiques moyennes, les surfaces sont obtenues par homothétie.

Ce tableau montre que pour un écart type des hauteurs donné, l'erreur décroît quand l'ordre de troncature  $M$  augmente. Nous pouvons noter aussi que l'augmentation de l'écart type des hauteurs entraîne une convergence plus lente du bilan de puissance. En effet, plus l'écart type des hauteurs augmente, et comme la longueur de corrélation

M	$\sigma_a = 0.2\lambda$		$\sigma_a = 0.4\lambda$		$\sigma_a = 0.6\lambda$		$\sigma_a = 0.8\lambda$		$\sigma_a = 1\lambda$	
	$\Delta P^{E//}$	$\Delta P^{H//}$								
12	1.0 $\times 10^{-4}$	4.0 $\times 10^{-4}$	5.0 $\times 10^{-3}$	1.6 $\times 10^{-2}$	1.4 $\times 10^{-1}$	4.0 $\times 10^{-2}$	0.22 $\times 10^1$	0.26 $\times 10^1$	63.10 $\times 10^2$	15.85 $\times 10^2$
16	1.3 $\times 10^{-4}$	4.0 $\times 10^{-4}$	1.3 $\times 10^{-3}$	2.5 $\times 10^{-3}$	6.3 $\times 10^{-3}$	3.2 $\times 10^{-3}$	0.5 $\times 10^{-1}$	1 $\times 10^{-1}$	6.3 $\times 10^1$	4.0 $\times 10^1$
20	7.9 $\times 10^{-6}$	3.2 $\times 10^{-6}$	3.2 $\times 10^{-4}$	4.0 $\times 10^{-4}$	3.2 $\times 10^{-3}$	4.0 $\times 10^{-3}$	2.5 $\times 10^{-2}$	1.3 $\times 10^{-2}$	40 $\times 10^{-1}$	16 $\times 10^{-1}$
24	1.6 $\times 10^{-6}$	1.6 $\times 10^{-7}$	1.0 $\times 10^{-4}$	5.0 $\times 10^{-5}$	1.9 $\times 10^{-3}$	7.9 $\times 10^{-4}$	1.6 $\times 10^{-2}$	1.0 $\times 10^{-2}$	3.2 $\times 10^{-1}$	2.5 $\times 10^{-1}$
28	1.0 $\times 10^{-7}$	7.9 $\times 10^{-8}$	2.0 $\times 10^{-5}$	2.0 $\times 10^{-5}$	4.0 $\times 10^{-4}$	2.0 $\times 10^{-4}$	6.3 $\times 10^{-3}$	4 $\times 10^{-3}$	1 $\times 10^{-2}$	2 $\times 10^{-2}$

**Tab. 3.2:** Erreur sur le bilan de puissance en fonction de l'ordre de troncature et de l'écart type des hauteurs pour les deux polarisations  $E_{//}$  et  $H_{//}$

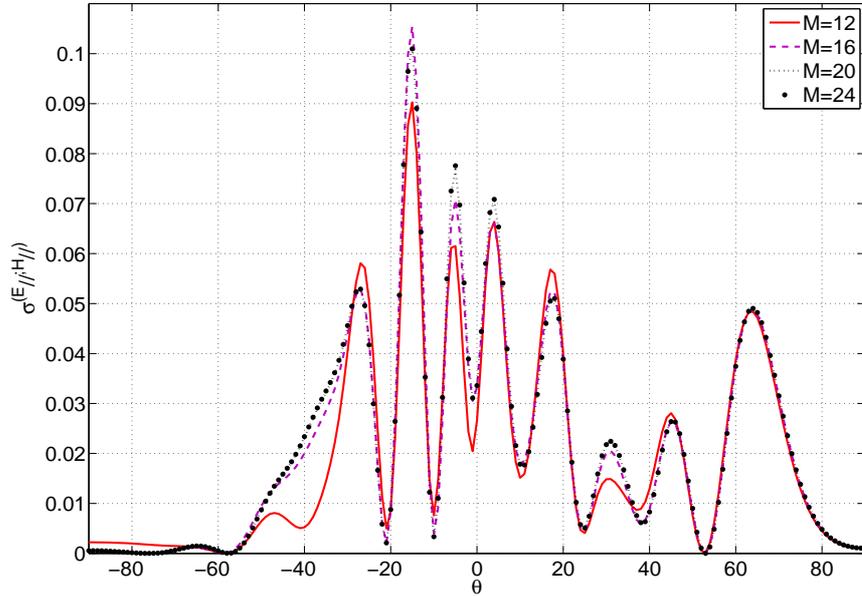
reste fixe, plus la rugosité de la surface augmente. Ceci favorise les phénomènes de couplage électromagnétique. Par conséquent, nous avons besoin d'un grand nombre d'ondes évanescentes afin de bien décrire le phénomène de diffraction.

Si nous considérons une onde plane incidente de polarisation  $E_{//}$ , et un ordre de troncature  $M = 12$ , la valeur maximale de l'écart type des hauteurs permise, afin d'avoir une erreur sur le bilan de puissance inférieure à 1%, est de  $0.45\lambda$ . Pour  $M = 24$ , la valeur de l'écart type des hauteurs est de  $0.75\lambda$ . Si nous considérons la polarisation  $H_{//}$ , les valeurs maximales de l'écart type des hauteurs correspondantes sont  $0.35\lambda$  et  $0.80\lambda$ , respectivement.

### 3.8.5.1 Convergence en fonction de l'ordre de troncature M

La vérification du bilan de puissance sur des résultats, issus d'un modèle de résolution électromagnétique, est une condition nécessaire mais pas suffisante pour la validation de ce modèle. Afin de compléter le processus de validation de la méthode C, pour des surfaces 2D, nous proposons de vérifier sa stabilité et sa convergence numérique.

La figure 3.4 montre l'évolution, dans le plan d'incidence et pour le milieu supérieur, du coefficient de diffusion bi-statique normalisé, pour différentes valeurs de l'ordre de troncature M. L'écart type des hauteurs est de  $\sigma_a = 0.4\lambda$  et les angles d'incidence sont  $\theta_i = 30^\circ$  et  $\varphi_i = 0^\circ$ . La surface est parfaitement conductrice.

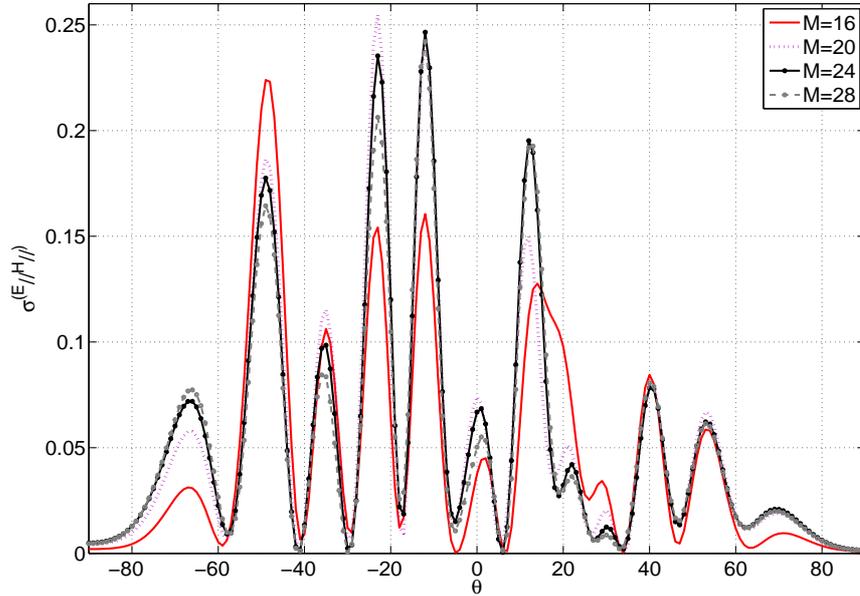


**Fig. 3.4:** Coefficient de diffusion bi-statique  $\sigma_1^{E//H//}$  dans le plan d'incidence pour une réalisation et pour différentes valeurs de l'ordre de troncature  $M$ . Les angles d'incidence sont  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $\varphi_i = 0^\circ$ .  $L = 8\lambda$ ,  $\sigma_a = 0.4\lambda$  et  $\ell_c = 1\lambda$

Nous pouvons constater que pour  $M \geq 16$ , la courbe évolue peu et donc la convergence est assurée. Si nous prenons comme référence les valeurs du coefficient de diffusion bi-statique calculé pour un ordre de troncature  $M = 28$ , alors l'erreur relative  $\Delta\sigma^{E//H//}(\theta)$  entre  $\sigma^{E//H//}(\theta, \varphi = 0^\circ, M = 16)$  et  $\sigma_{ref}^{E//H//}(\theta, \varphi = 0^\circ, M = 28)$  est de 5%. Cette valeur de l'erreur est assez faible et reste acceptable. Le temps de calcul est aussi raisonnable (12 minutes).

La figure 3.5 montre le coefficient de diffusion bi-statique normalisé dans le plan d'incidence pour une surface caractérisée par un écart type des hauteurs de  $0.8\lambda$ , obtenue par homothétie à partir de la première surface. Comme la longueur de corrélation est la même que pour la surface précédente, alors la surface actuelle présente une rugosité plus importante. Ce constat est confirmé car la convergence est assurée si l'ordre de troncature est supérieur à 24. L'erreur relative  $\Delta\sigma^{E//H//}(\theta)$ , calculée de la même façon que précédemment est égale à 9%. Pour  $M=24$  le temps de calcul CPU est de 135 minutes.

Il est évident que plus la rugosité de la surface augmente, plus l'ordre de troncature doit être grand pour avoir une bonne précision sur le bilan de puissance et sur le coefficient de diffusion bi-statique. Ceci se fait au détriment des temps de calcul qui peuvent devenir très importants.



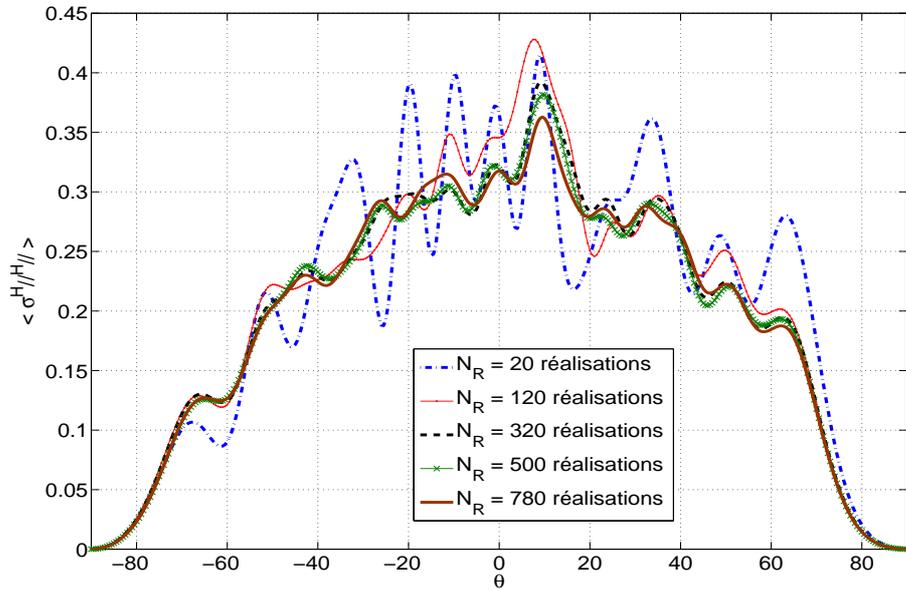
**Fig. 3.5:** Coefficient de diffusion bi-statique  $\sigma_1^{E//H//}$  dans le plan d'incidence pour une réalisation et pour différentes valeurs de l'ordre de troncature  $M$ . Les angles d'incidence sont  $\theta_i = 30^\circ$ ,  $\varphi_i = 0^\circ$ .  $L = 8\lambda$ ,  $\sigma_a = 0.8\lambda$  et  $\ell_c = 1\lambda$

### 3.8.5.2 Convergence en fonction du nombre de réalisations $N_R$

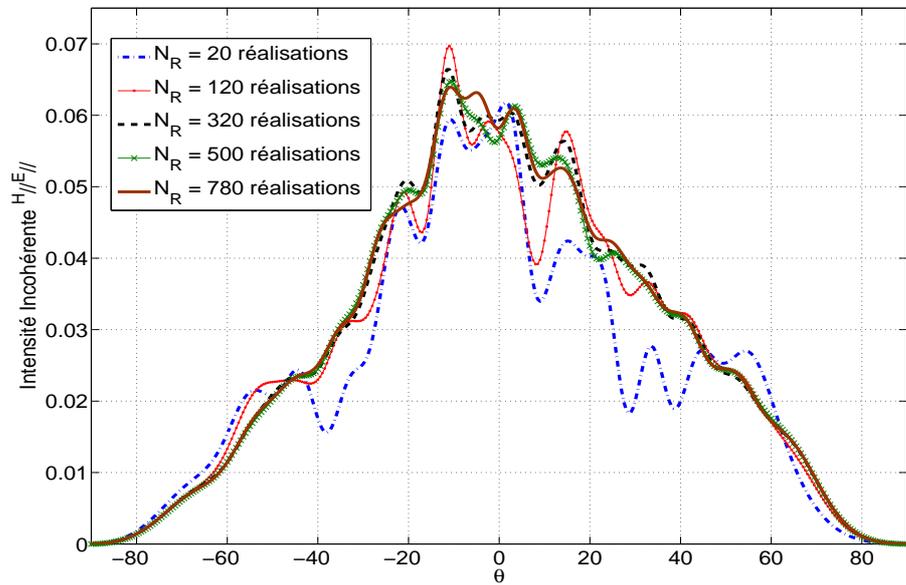
Soit une surface de  $8\lambda \times 8\lambda$ , dont les hauteurs sont distribuées suivant une loi gaussienne. L'écart type des hauteurs est fixé à  $\sigma_a = 0.2\lambda$ . La fonction d'autocorrélation est aussi une gaussienne, la longueur de corrélation est  $\ell_c = 0.6\lambda$ . La figure 3.6 montre l'évolution de la composante directe du coefficient de diffusion bi-statique moyen, pour une onde incidente en polarisation  $H//$ . Les angles d'incidence sont  $\theta_i = 10^\circ$  et  $\varphi_i = 0^\circ$ . La précision sur le bilan de puissance est inférieure à 1% pour la totalité des réalisations.

La figure 3.7 donne l'intensité incohérente suivant le nombre de réalisations prises en compte.

Nous pouvons voir qu'au fur et à mesure que le nombre de réalisations augmente, les courbes des deux figures montrent une convergence très nette. Le passage de  $N_R = 20$  réalisations à  $N_R = 320$  réalisations permet de s'affranchir des grandes oscillations. En passant à ( $N_R = 500$ ), nous améliorons nettement le résultat. La courbe varie très peu entre  $N_R = 500$  et  $N_R = 780$ .



**Fig. 3.6:** Convergence de la composante directe du coefficient de diffusion bi-statique moyen  $\langle \sigma_1^{H//H//} \rangle$ , dans le plan d'incidence, en fonction du nombre de réalisations  $N_R$ .  $\theta_i = 10^\circ$ ,  $\varphi_i = 0^\circ$ ,  $L = 8\lambda$ ,  $\sigma_a = 0.2\lambda$  et  $\ell_c = 0.6\lambda$



**Fig. 3.7:** Convergence de l'intensité incohérente, en polarisation croisée, en fonction du nombre de réalisations  $N_R$ . Les paramètres sont ceux de la figure 3.6

### 3.8.6 Comparaison de la méthode C avec la méthode SMF-SIA/CAG - Cas des surfaces parfaitement conductrices

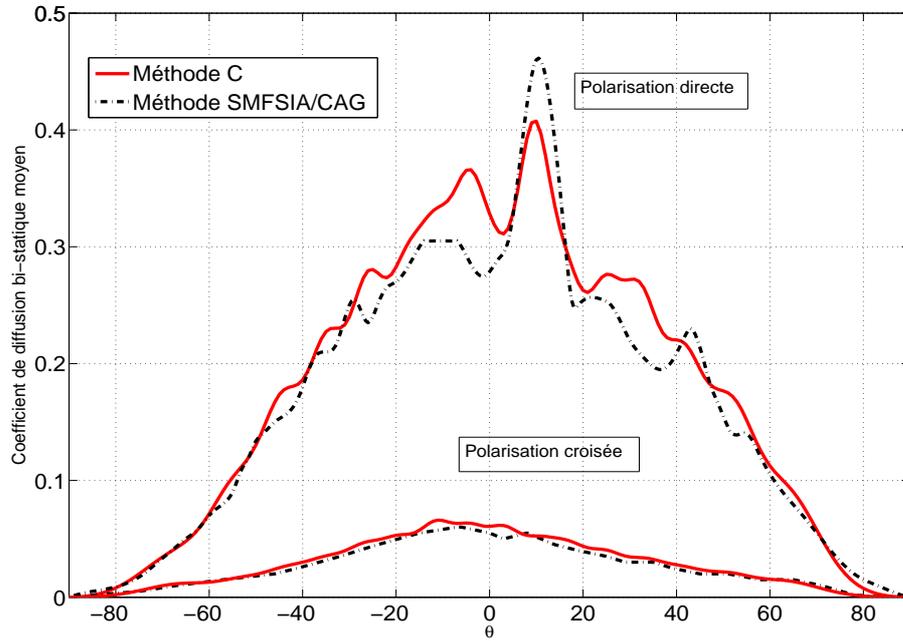
Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la méthode C respecte le critère sur le bilan de puissance, à condition de choisir un ordre de troncature  $M$  adéquat. Nous avons vu aussi que les résultats convergent en fonction de l'ordre de troncature  $M$  et du nombre de réalisations  $N_R$ . Afin de compléter cette étude, nous comparons les résultats, obtenus avec la méthode C, avec d'autres résultats issus de la littérature. Ceci permettra de voir la précision des résultats de la méthode C par rapport à d'autres méthodes exactes.

Dans ce paragraphe, nous présentons des résultats dans le cas d'un milieu 2 infiniment conducteur. La surface considérée est toujours caractérisée par une densité de probabilité et une fonction d'autocorrélation gaussienne. Nous considérons une surface rugueuse aléatoire de dimension  $8\lambda \times 8\lambda$ . Elle est illuminée avec une onde plane sous les angles d'incidence  $\theta = 10^\circ$  et  $\varphi = 0^\circ$ . L'écart type des hauteurs est de  $0.2\lambda$  et la longueur de corrélation  $\ell_c = 0.6\lambda$ .

La figure 3.8 montre le coefficient de diffusion bi-statique normalisé moyen dans le plan d'incidence. La polarisation de l'onde incidente est  $E_{//}$ . La composante directe du coefficient de diffusion bi-statique  $\langle \sigma^{E_{//} E_{//}} \rangle$  et la composante croisée  $\langle \sigma^{H_{//} E_{//}} \rangle$  représentent des moyennes calculées sur un ensemble de  $N_R = 780$  réalisations. Nous avons utilisé un ordre de troncature  $M = 18$ . Sur la même figure, nous avons aussi reporté les résultats obtenus avec la méthode SMFSIA/CAG (Sparse-Matrix Flat-Surface Iterative Approach with CAnonical Grid). Les auteurs dans [48] ont utilisé des surfaces de  $256\lambda^2$ , deux fois plus larges que les nôtres. Ces surfaces sont éclairées avec un faisceau d'ondes [49]. Les moyennes d'ensemble sont réalisées sur 280 réalisations.

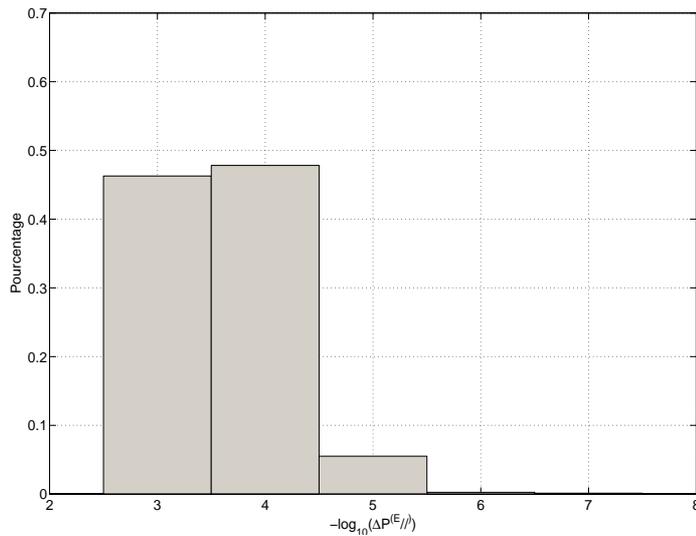
La comparaison entre les résultats est satisfaisante. En prenant comme référence les résultats de la méthode SMFSIA/CAG, nous calculons les erreurs relatives  $\Delta \langle \sigma^{E_{//} E_{//}} \rangle$  et  $\Delta \langle \sigma^{H_{//} E_{//}} \rangle$ . Leurs valeurs sont respectivement égales à 10% et 7%. Les différences entre les résultats des deux méthodes peuvent être liées d'une part à la taille des cellules utilisées mais aussi à la différence des lois d'éclairement et des surfaces utilisées. Nous retrouvons aussi le pic autour de la direction spéculaire ( $10^\circ$ ) avec un niveau légèrement inférieur à celui de la méthode SMFSIA/CAG, probablement à cause de la loi d'éclairement que nous utilisons.

Les figures 3.9 et 3.10 donnent les histogrammes normalisés des erreurs  $\Delta P^{E_{//}}$  et  $\Delta P^{H_{//}}$ , respectivement. Pour la polarisation  $E_{//}$ , l'histogramme montre que plus de la

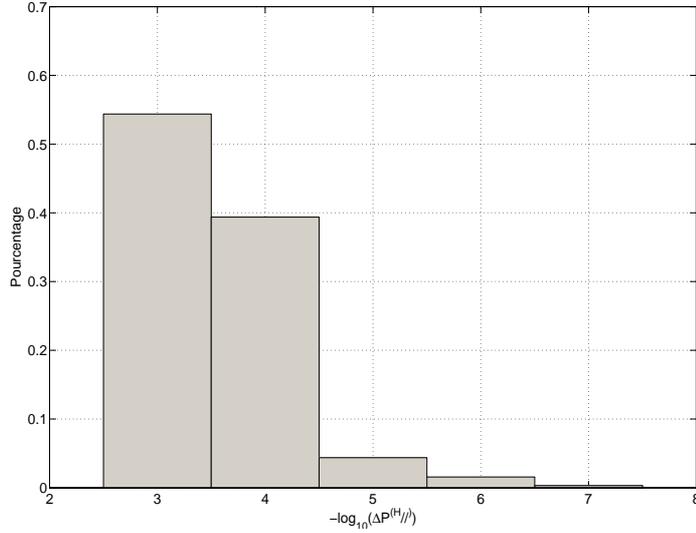


**Fig. 3.8:** Comparaison entre la méthode C et la méthode SMFSIA/CAG. Les surfaces sont gaussiennes d'écart type des hauteurs  $\sigma_a = 0.2\lambda$  et  $\ell_c = 0.6\lambda$ . Le milieu 2 est infiniment conducteur,  $\theta_i = 10^\circ$  et  $\varphi_i = 0^\circ$

moitié des surfaces (54%) vérifie le bilan de puissance avec une erreur inférieure à  $10^{-3}$ . Pour la polarisation  $H_{//}$ , la proportion des surfaces vérifiant un bilan de puissance avec une erreur inférieure à  $10^{-3}$  est de 45%. Dans les deux cas de polarisation, l'erreur sur le bilan de puissance reste inférieure à 1% pour la totalité des réalisations.



**Fig. 3.9:** Histogramme des erreurs en  $E_{//}$

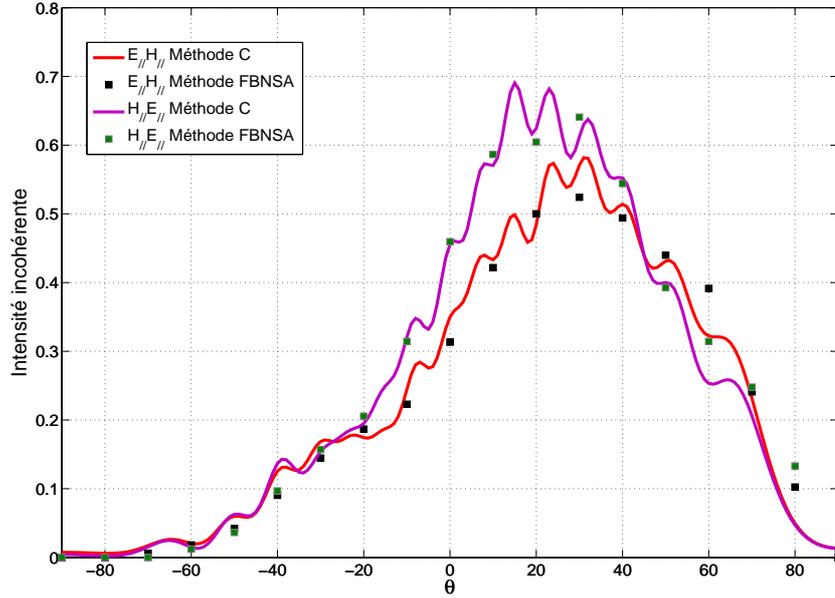


**Fig. 3.10:** Histogramme des erreurs en  $H_{//}$

### 3.8.7 Comparaison de la méthode C avec la méthode FB-NSA - Cas parfaitement conducteur

Nous considérons des surfaces rugueuses de dimension  $L^2 = 64\lambda^2$ , éclairées sous les angles  $\theta = 40^\circ$  et  $\varphi = 0^\circ$ . L'écart type des hauteurs est  $\sigma_a = 0.5\lambda$  et la longueur de corrélation est  $\ell_c = \sqrt{2}\lambda$ . Nous travaillons sur un ensemble de 300 réalisations. L'ordre de troncature est fixé à  $M = 18$ . Ceci permet d'avoir une erreur sur le bilan de puissance inférieure à 1% pour toutes les réalisations.

La figure 3.11 montre les composantes, en polarisation croisée, de l'intensité incohérente dans le plan d'incidence. Nous avons représenté sur la même figure les résultats de simulation donnés par la méthode FB-NSA (Forward-Backward/Novel Spectral Acceleration Method). Ces résultats sont obtenus en utilisant des surfaces de dimensions  $128 * 32\lambda^2$ , éclairées avec un faisceau d'ondes. Les moyennes sont réalisées sur un ensemble de 150 réalisations [50]. Les résultats obtenus avec les deux méthodes sont assez proches. Nous remarquons l'orientation des diagrammes de l'intensité incohérente autour de la direction spéculaire  $\theta = 40^\circ$ .



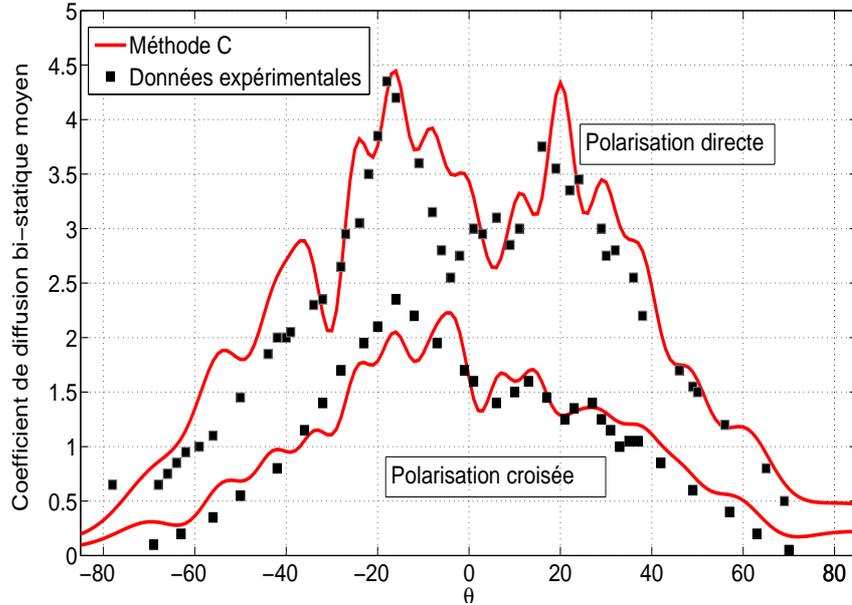
**Fig. 3.11:** Comparaison de la méthode C et de la méthode FB-NSA. Les surfaces sont gaussiennes d'écart type des hauteurs  $\sigma_a = 0.5\lambda$ , de longueur de corrélation  $\ell_c = \sqrt{2}\lambda$ . Le milieu 2 est infiniment conducteur et  $\theta_i = 40^\circ$  et  $\varphi_i = 0^\circ$

### 3.8.8 Comparaison de la méthode C avec des données expérimentales - Cas parfaitement conducteur

La figure 3.12 représente le coefficient de diffusion bi-statique moyen dans le plan d'incidence. La polarisation de l'onde incidente est  $H_{//}$ . L'écart type est de  $\sigma_a = 1\lambda$  et  $\ell_c = \sqrt{2}\lambda$ . Pour cette simulation, l'angle d'incidence est fixé à  $\theta = 20^\circ$  et  $\varphi = 0^\circ$ . La taille des cellules est toujours de  $64\lambda^2$ . Le nombre de réalisations est de  $N_R = 300$ . Dans cette simulation, l'ordre de troncature est ajusté, suivant la réalisation, pour avoir une erreur sur le bilan de puissance inférieure à 5%. Les courbes en pointillés sont issues de données expérimentales [51]. Ces données sont mesurées en milieu contrôlé en utilisant des longueurs d'onde millimétriques. Les surfaces utilisées sont usinées en utilisant du plastique, grâce à un procédé assisté par ordinateur, ce qui a permis d'avoir une très bonne précision sur la statistique de ces surfaces. Les surfaces usinées sont ensuite recouvertes de plusieurs couches de nickel pour les rendre infiniment conductrices. Ces conditions de mesure ont permis d'avoir des données très précises.

Comme l'écart type est assez important, l'ordre de troncature est relativement grand. Pour  $M=21$ , le critère sur le bilan de puissance est vérifié pour 236 réalisations sur les 300. Parmi les 64 réalisations restantes, 48 d'entre elles vérifient ce critère pour un ordre de troncature  $M=24$ . Pour les 16 réalisations restantes, nous fixons l'ordre de

troncature à 28, le critère sur le bilan de puissance est vérifié par 13 réalisations. Les courbes dans la figure 3.12 sont tracées pour les 297 réalisations vérifiant le critère sur le bilan de puissance.



**Fig. 3.12:** Comparaison de la méthode C avec des données expérimentales. Les surfaces sont gaussiennes d'écart type  $\sigma_a = 1\lambda$  et de longueur de corrélation  $\ell_c = \sqrt{2}\lambda$ . Le milieu 2 est infiniment conducteur,  $\theta_i = 20^\circ$  et  $\varphi_i = 0^\circ$

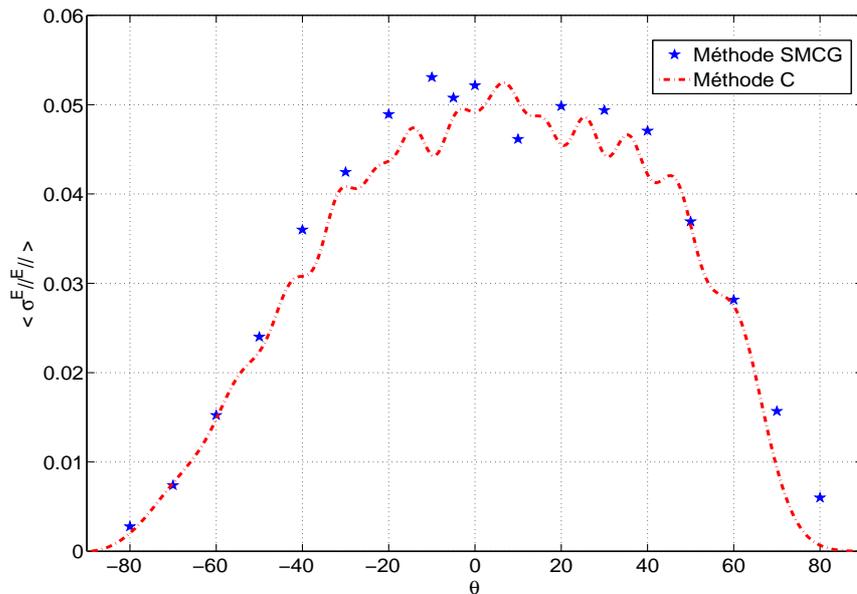
La comparaison avec les données expérimentales est satisfaisante. Par rapport aux données, l'erreur relative  $\Delta \langle \sigma^{H//H//} \rangle$  est égale à 13% et  $\Delta \langle \sigma^{E//H//} \rangle$  est égale à 12%. Les valeurs des paramètres statistiques de la surface ( $\sigma$  et  $\ell_c$ ) impliquent une rugosité très importante. Ceci conduit au phénomène de rétro-diffusion autour de  $\theta = -20^\circ$ . Ce phénomène est très bien décrit par la méthode C et les deux pics de rétro-diffusion coïncident (méthode C et les données expérimentales). Cette observation reste valable pour la direction spéculaire. Le phénomène de rétro-diffusion se manifeste aussi dans la composante croisée.

### 3.8.9 Comparaison de la méthode C et de la méthode SMCG - Cas des milieux à pertes

Dans ce paragraphe, nous présentons une comparaison entre la méthode C et la Sparse Matrix Canonical Grid (SMCG). Le milieu 2 est maintenant diélectrique à

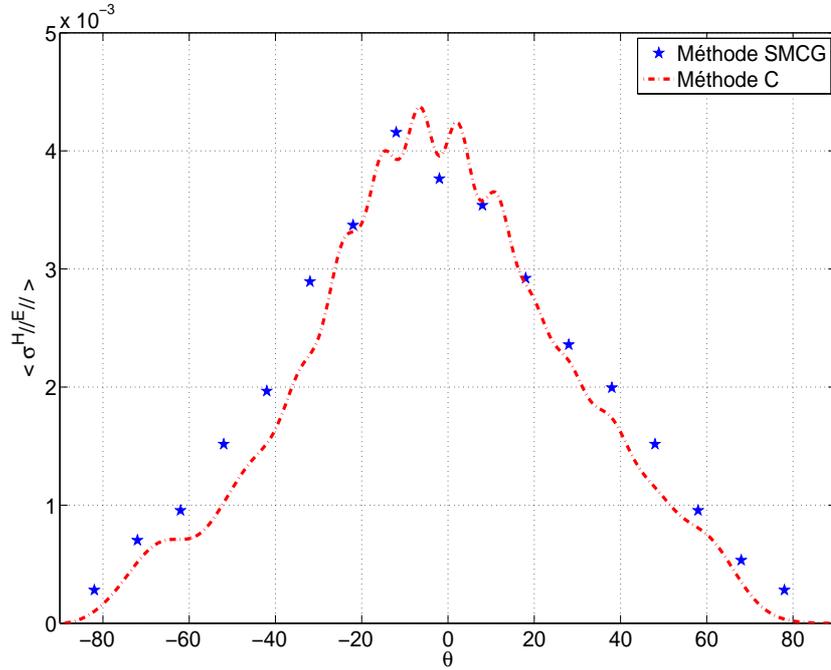
perles. Il est caractérisé par une permittivité relative  $\epsilon_r = 6.5 - j1.0$ . L'onde incidente est de polarisation  $E_{//}$ , l'angle d'incidence  $\theta_i = 10^\circ$  et l'angle d'azimut  $\varphi = 0^\circ$ . Nous générons un ensemble de 600 réalisations de dimension  $50\lambda^2$ . Ces réalisations sont issues d'un processus gaussien d'écart type  $\sigma_a = 0.2\lambda$ . Elles ont une autocorrélation gaussienne avec  $\ell_c = 0.6\lambda$ .

La figure 3.13 donne le coefficient de diffusion bi-statique moyen en polarisation directe  $\langle \sigma^{E_{//} E_{//}} \rangle$ . Sur la même figure, nous avons reporté les résultats obtenus avec la méthode SMCG sur un ensemble de 300 réalisations [52]. La dimension des surfaces utilisées pour cette méthode est de  $256\lambda^2$  et la loi d'éclairage est un faisceau d'ondes. Nous pouvons constater que les résultats sont assez proches. Les écarts entre les deux méthodes sont probablement dus à la différence de la loi d'éclairage et des surfaces utilisées dans les calculs.



**Fig. 3.13:** Composante directe moyenne  $\langle \sigma^{E_{//} E_{//}} \rangle$  pour des surfaces gaussiennes d'écart type  $\sigma_a = 0.2\lambda$  et  $\ell_c = 0.6\lambda$ . Le milieu est diélectrique avec pertes de permittivité  $\epsilon_r = 6.5 - j1.0$

Sur la figure 3.14, nous avons représenté la composante croisée du coefficient de diffusion bi-statique moyen  $\langle \sigma^{H_{//} E_{//}} \rangle$ , donnée par la méthode C et la méthode SMCG. Nous pouvons remarquer la concordance des résultats, mais surtout le succès de la méthode C dans la prédiction du pic autour de la direction de rétro-diffusion ( $-10^\circ$ ).



**Fig. 3.14:** Composante croisée moyenne  $\langle \sigma^{H//E//} \rangle$  pour des surfaces gaussiennes d'écart type  $\sigma_a = 0.2\lambda$  et  $\ell_c = 0.6\lambda$ . Le milieu 2 est diélectrique avec pertes de permittivité  $\epsilon_r = 6.5 - j1.0$

### 3.8.10 Application aux surfaces agricoles

Dans ce paragraphe, nous présentons une application de la méthode C pour étudier les sols agricoles nus. Dans ce cas, le milieu 2 est diélectrique avec pertes. Il est caractérisé par une permittivité relative  $\epsilon_r$  complexe.

Nous considérons deux parcelles, représentant deux états d'un semis. Le premier état a un taux d'humidité équivalent à 5% et le second état a un taux d'humidité de 15%. L'état 1 est issu de l'état 0, après une dégradation avec une pluie artificielle de  $40 \text{ mm h}^{-1}$  pendant 20 minutes. Afin d'effectuer des simulations numériques, en accord avec le chapitre 2, ces deux états du sol sont modélisés par une densité de probabilité des hauteurs gaussienne. La fonction d'autocorrélation isotrope est caractérisée par le paramètre de Hurst  $\mathcal{H}$ .

Le tableau (3.3) donne les différents paramètres statistiques de ces deux parcelles (nous reprenons les valeurs du tableau (2.2) du chapitre 2).

La longueur d'onde utilisée est  $\lambda = 5.6 \text{ cm}$ , l'angle de site  $\theta_i = 40^\circ$  et l'angle d'azimut

Etat	$L(cm)$	$\sigma_a(cm)$	$\ell_c(cm)$	$\mathcal{H}$
0	50	1.61	3.57	0.80
1	50	1.38	3.49	0.79

**Tab. 3.3:** Paramètres statistiques des deux états du sol semis

$\varphi_i = 0^\circ$ . Ces valeurs des paramètres liés à l'onde incidente correspondent à ceux utilisés pour les radars en bande C standard [27]. Dans ces conditions, les permittivités relatives des deux états du semis sont  $\epsilon_r = 3.62 - j0.19$  pour l'état 0 (taux d'humidité de 5%) et  $\epsilon_r = 5.94 - j0.85$  pour l'état 1 (taux d'humidité 15%). Nous utilisons ces paramètres statistiques pour générer  $N_R = 200$  réalisations. Le coefficient de diffusion bi-statique moyen est calculé sur cet ensemble de réalisations.

Afin de caractériser l'effet conjugué de la rugosité et du taux d'humidité sur l'énergie diffractée, nous effectuons des simulations avec des surfaces qui présentent les paramètres statistiques d'un état et le taux d'humidité de l'autre état. Le tableau 3.4 donne les valeurs du coefficient de rétro-diffusion pour l'ensemble des simulations.

$\overline{pol_i pol_i}$	Etat 0 (5%)	Etat 1 (5%)	Etat 1 (15%)	Etat 0 (15%)
$E_{//} E_{//}$	-22.3	-22.9	-20.4	-19.8
$H_{//} E_{//}$	-38.6	-41.1	-36.6	-34.0
$E_{//} H_{//}$	-38.8	-41.2	-36.5	-33.8
$H_{//} H_{//}$	-21.9	-22.5	-19.5	-19.2

**Tab. 3.4:** Valeur du coefficient de diffusion bi-statique moyen dans la direction de rétro-diffusion ( $-40^\circ$ ) en dB

$\overline{pol_i pol_i}$	Etat 1 (5%)- Etat 0 (5%)	Etat 1 (15%)- Etat 0 (15%)	Etat 1 (15%)- Etat 0 (5%)
$E_{//} E_{//}$	-0.6	-0.6	1.9
$H_{//} E_{//}$	-2.5	-2.6	2
$E_{//} H_{//}$	-2.4	-2.7	2.3
$H_{//} H_{//}$	-0.6	-0.3	2.4

**Tab. 3.5:** Ecart en dB sur le coefficient de rétro-diffusion ( $-40^\circ$ ) suivant l'état du sol et son taux d'humidité

Dans le cas de la polarisation directe, nous constatons que la différence de niveau entre les coefficients de rétro-diffusion associés aux deux états géométriques 0 et 1 avec

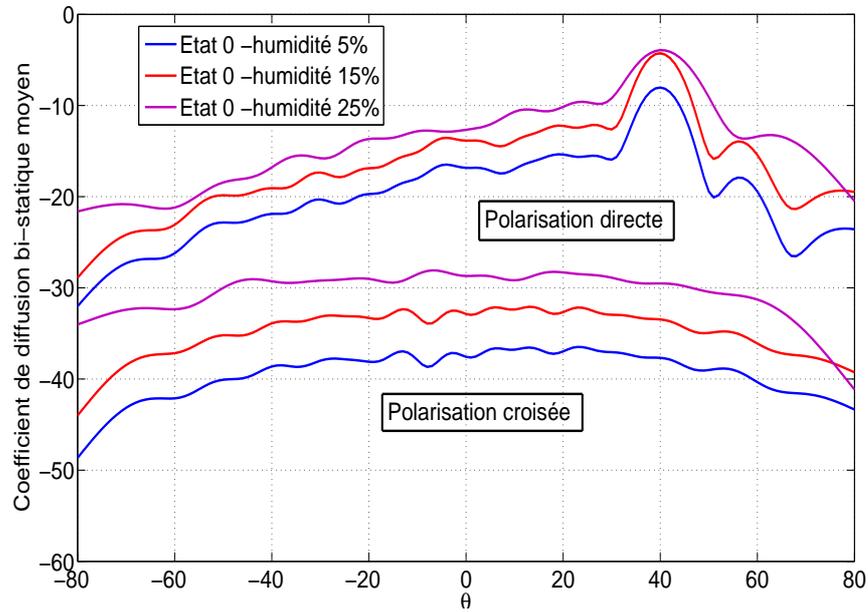
un même taux d'humidité est de  $0.6dB$  au maximum. Cet écart est dû uniquement à la variation des paramètres statistiques. Les écarts sont plus importants en polarisation croisée (la valeur maximale est de  $2.7$ ). Ces observations sont valables aussi bien pour un taux d'humidité de  $5\%$ , que de  $15\%$ .

Sous l'effet d'une pluie, la géométrie et l'humidité varient. La comparaison entre l'état 0 avec un taux de  $5\%$  et l'état 1 avec un taux de  $15\%$ , montre que l'écart en polarisation directe augmente par rapport aux deux cas précédents. Il vaut  $1.9dB$  pour  $E_{//}E_{//}$  et  $2.4dB$  pour  $H_{//}H_{//}$ . Pour les polarisations croisées, ces écarts sont de  $2dB$  pour  $H_{//}E_{//}$  et  $2.3dB$  pour  $E_{//}H_{//}$ .

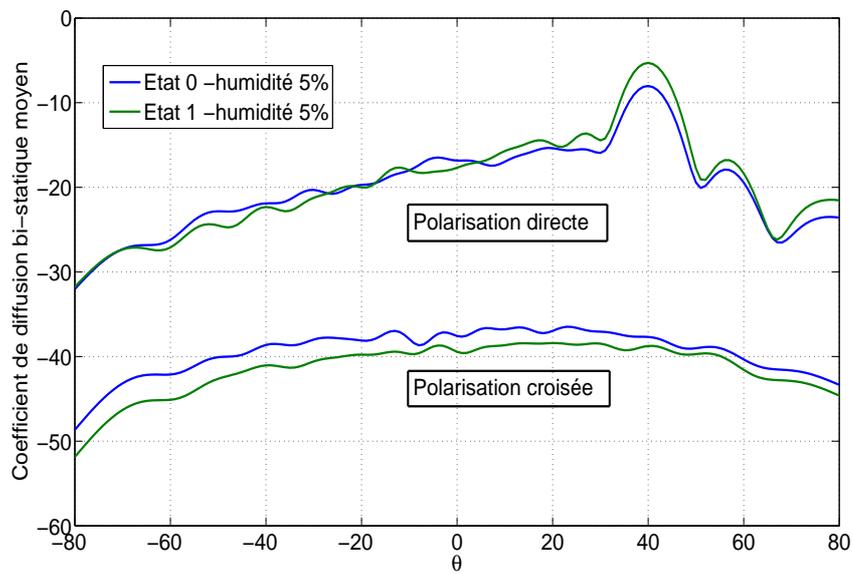
Ainsi, dans le cadre de la télédétection hyperfréquence active, si nous voulons que les radars soient capables de distinguer un sol avant et après une pluie, la résolution de l'instrument de mesure doit être inférieure à l'écart minimal calculé sur les coefficients de rétro-diffusion. C'est le cas du radar ERASME, développé au CETP, fonctionnant en bande C ( $5.35$  GHz) et dont la résolution est de  $0.5dB$  pour les deux polarisations directes  $E_{//}E_{//}$  et  $H_{//}H_{//}$  [27,53]. Les figures 3.15, 3.16 et 3.17 complètent cette étude. Sur les deux figures 3.15 et 3.16, nous représentons le coefficient de diffusion bi-statique moyenné sur  $N_R = 200$  réalisations, pour une incidence en  $H_{//}$ . La première figure illustre l'effet de l'humidité. Nous pouvons voir que plus le sol est humide, plus il est réfléchissant. Quand l'humidité augmente, les variations des deux composantes directe et croisée se font dans le même sens, en l'occurrence ici elles augmentent.

La figure 3.16 montre l'effet de la variation de la rugosité, sur le coefficient de diffusion, à un taux d'humidité constant. Les écarts entre les deux états sont moins importants que le cas précédent, probablement parce que l'écart de rugosité n'est pas très important. Les variations des deux composantes directe et croisée entre les deux états se font globalement dans un sens inverse. En d'autres termes, quand la rugosité augmente, le niveau de la composante directe  $\langle \sigma^{H_{//}H_{//}} \rangle$  diminue et celui de la composante  $\langle \sigma^{E_{//}H_{//}} \rangle$  augmente. Ceci implique que la dépolarisation de l'onde augmente avec l'écart type des hauteurs  $\sigma_a$ .

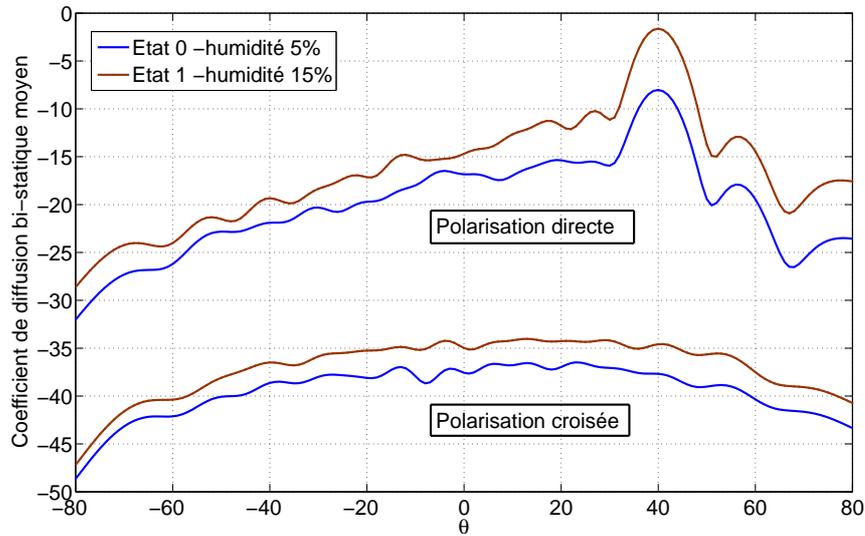
La figure 3.17 montre l'influence de l'humidité et de la rugosité sur le diagramme moyen de rayonnement et nous constatons des écarts supérieurs à  $2dB$  sur toute la plage angulaire dans les polarisations directes et croisées.



**Fig. 3.15:** Effet de l'humidité sur le coefficient de diffusion bi-statique à rugosité constante



**Fig. 3.16:** Coefficient de diffusion bi-statique pour les deux états du semis avec un taux d'humidité égal à 5%



**Fig. 3.17:** *Effet de la variation conjuguée de la rugosité et de l'humidité sur le coefficient de diffusion bi-statique*

### 3.8.11 Position de la méthode C par rapport aux méthodes intégrales exactes

Les méthodes intégrales de frontière sont utilisées pour l'analyse électromagnétique des surfaces rugueuses. Elles permettent d'obtenir le champ diffracté en tout point de l'espace à partir de ses valeurs sur une surface ou un contour. Elles sont basées sur la résolution d'équations intégrales. Ces équations intégrales font intervenir soit le champ électrique soit le champ magnétique (ainsi que leur dérivée normale). La discrétisation de ces équations, à l'aide de la méthode des moments dans le domaine spatial, conduit à des systèmes matriciels faisant intervenir les matrices d'impédance. Ce sont ces matrices d'impédance qu'il faut inverser pour obtenir les champs diffractés.

Pour une surface de dimension  $L^2 = 8\lambda \times 8\lambda$ , et en utilisant un pas d'échantillonnage de  $\frac{\lambda}{7}$ , le nombre d'échantillons est de 3136 et la taille des matrices est de 6272. Pour la méthode C, cette taille des matrices est atteinte pour un ordre de troncature  $M=28$ . Pour cet exemple, les dimensions des systèmes sont similaires. Cependant, en terme de compromis entre la précision sur les résultats et le temps de calcul, nous ne pouvons pas tirer de conclusions concernant les deux méthodes. Ceci nécessite une investigation numérique plus approfondie. Les deux méthodes doivent être implémentées sous le même langage de programmation et la résolution numérique doit se faire sur les mêmes calculateurs. La comparaison des résultats doit se faire sur un nombre important de configurations et à précision identique. Il faut retenir que la méthode des coor-

données curvilignes permet d'exprimer les champs diffractés dans la base constituée par les modes propres du problème. En ce sens, elle reste une méthode très précise. Ceci représente le principal atout de la méthode C.

Les temps de calcul sont importants pour la méthode C à cause de la résolution du système aux valeurs propres. Cette opération requiert un temps qui est de l'ordre de  $M_s^3$  (Pour un ordre de troncature  $M = 16$ , la résolution du système aux valeurs propres prend 11 minutes sur les 12 minutes nécessaires à tous les calculs). Dans le cas des méthodes intégrales, les temps de calcul sont repartis entre le calcul des valeurs de la matrice impédance, qui sont de l'ordre de  $M_s^2$ , et la résolution du système linéaire. Cette dernière opération possède une complexité de  $O(M_s^2)$ , pour les algorithmes itératifs appliqués sur des opérateurs bien conditionnés, et une complexité de  $O(M_s^3)$  pour les méthodes de factorisation directes. Il existe des méthodes intégrales rapides basées sur des algorithmes itératifs, permettant d'accélérer les inversions des matrices et réduire les temps de calcul, ce qui les rend relativement rapides par rapport à la méthode C [48,50-52,54-60].

D'autre part, ces méthodes intégrales accélérées permettent de traiter des surfaces très larges. A cause des temps de calcul, la méthode C sous sa forme actuelle ne peut être utilisée pour analyser des surfaces de ce type. De fait, des configurations où l'angle d'incidence est très grand (angles rasants) et qui nécessitent des largeurs importantes ne peuvent être traitées avec la méthode C sous sa version actuelle.

### 3.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la méthode des coordonnées curvilignes en trois dimensions. Cette méthode est dite exacte car elle ne repose sur aucune hypothèse physique simplificatrice. En ce sens, son domaine d'application est théoriquement illimité. Elle fait intervenir les équations de Maxwell sous leur forme covariante, écrites dans un système de coordonnées translaté. Nous avons vu que pour le cas d'une interface séparant deux milieux, elle conduit à la résolution d'un système aux valeurs propres dans chacun des deux milieux. Les champs diffractés sont ainsi exprimés sous forme de combinaisons linéaires des vecteurs propres du problème. Afin de définir les coefficients des combinaisons, nous avons présenté les conditions aux limites, pour le cas d'un milieu inférieur infiniment conducteur ou diélectrique.

Nous avons montré la précision des résultats obtenus avec la méthode C dans le domaine résonnant (paramètre statistique de la surface de même dimension que la

longueur d'onde incidente) et pour des surfaces de rugosités importantes ( $\frac{\sqrt{2}h}{\ell_c} \leq 1$  et  $0.5 \leq \ell_c \leq \sqrt{2}$ ) pour lesquelles les méthodes approchées sont inopérentes. D'autre part, nous avons effectué une comparaison entre la méthode C et d'autres méthodes numériques exactes ainsi qu'avec des données expérimentales. Ces comparaisons sont très concluantes et montrent la validité de la méthode des coordonnées curvilignes pour le cas des milieux infiniment conducteurs ou diélectriques. Une application de la méthode C pour l'analyse des surfaces agricoles a été présentée. Cette étude montre l'influence de la variation conjuguée de la rugosité et de l'humidité d'un sol sur le coefficient de rétro-diffusion et permet de dire si un radar est capable ou non de distinguer un sol avant et après une pluie.

Nous avons vu que les temps de calcul sont assez élevés pour la méthode C et la taille des surfaces, pouvant être analysée, reste limitée. Dans le chapitre suivant, nous proposons une solution physique à ce problème. La méthode C permet dès lors de traiter des surfaces de grandes dimensions avec des temps de calcul raisonnables. Faute de temps, nous n'avons implémenté cette version de la méthode C qu'au cas des surfaces cylindriques.

# Chapitre 4

## Le principe du faible couplage et la méthode C

Dans le chapitre 3, concernant la méthode C en 2D, nous avons vu que les contraintes liées au temps de calcul requis pour effectuer les calculs, limitent la taille des surfaces à analyser. En effet, plus la surface est grande, plus l'ordre de troncature  $M$  augmente (donc les tailles des matrices mises en jeu augmentent) et plus le temps de calcul nécessaire devient important. Dans le cas des surfaces 2D par exemple, la taille de la déformation ne doit pas dépasser  $8\lambda \times 8\lambda$ , afin d'avoir des résultats à précision acceptable pour des temps de calcul raisonnables. La méthode C est un outil très précis pour l'analyse du phénomène de diffraction, il n'est donc pas question de l'abandonner à cause des inconvénients liés aux temps de calcul. L'objectif est de mettre au point une méthode faisant appel à la méthode C et permettant des réductions de calcul importantes dans le but d'analyser des surfaces de très grande taille. Ceci permettra d'obtenir des résultats précis pour des temps de calcul raisonnables. Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle méthode qui associe la méthode C et le principe du faible couplage. Elle consiste à diviser la surface totale en petites surfaces de taille acceptable pour la méthode C et permet de calculer le diagramme de diffraction de la surface totale en tenant compte des couplages électromagnétiques entre les surfaces élémentaires. Faute de temps, nous n'avons développé et implémenté cette méthode que dans le cas des surfaces 1D.

Dans ce chapitre, nous commençons par une présentation de la méthode C dans le cas des surfaces 1D. Ensuite, nous faisons un rappel du principe de Huygens ainsi que de la fonction de Green dans l'espace libre. Nous finissons par exposer le principe du faible couplage et son association à la méthode C. Des résultats sont donnés afin de rendre compte des avantages de cette association et de confirmer la réduction des temps de calcul tout en gardant une très bonne précision sur les résultats.

## 4.1 La méthode C pour les surfaces 1D

Dans ce paragraphe nous présentons la méthode curviligne dans le cas des surfaces 1D. La fonction 'a(x)', représentant la déformation, ne dépend que d'une variable spatiale. Le principe de résolution du problème électromagnétique reste le même que pour le cas des surfaces 2D. En effet, nous partons des équations de Maxwell sous leur forme covariante et nous exhibons un système différentiel de premier ordre qui conduit à un système aux valeurs propres. Ainsi, les champs diffractés sont exprimés dans la base des modes propres du problème et les coefficients des combinaisons sont déterminés grâce aux relations de continuité. Vu les dimensions réduites du problème, les dimensions du système aux valeurs propres et le nombre de composantes du champ à déterminer sont inférieurs au cas 2D. Pour un ordre de troncature M, la dimension du système aux valeurs propres est de  $2M_s^2$  pour les surfaces 2D,  $2M_s$  pour des surfaces 1D, avec  $M_s = 2M + 1$ . D'autre part, les calculs et développements analytiques sont relativement plus légers dans ce cas.

Le but de ce chapitre est de présenter une nouvelle méthode couplant la méthode C et le principe du faible couplage. Ainsi, nous ne reviendrons pas sur la validation de la méthode C en 1D. Nous nous limitons à donner uniquement les grandes lignes concernant les étapes de résolution. Le lecteur pourra approfondir cette étude en se référant à [43].

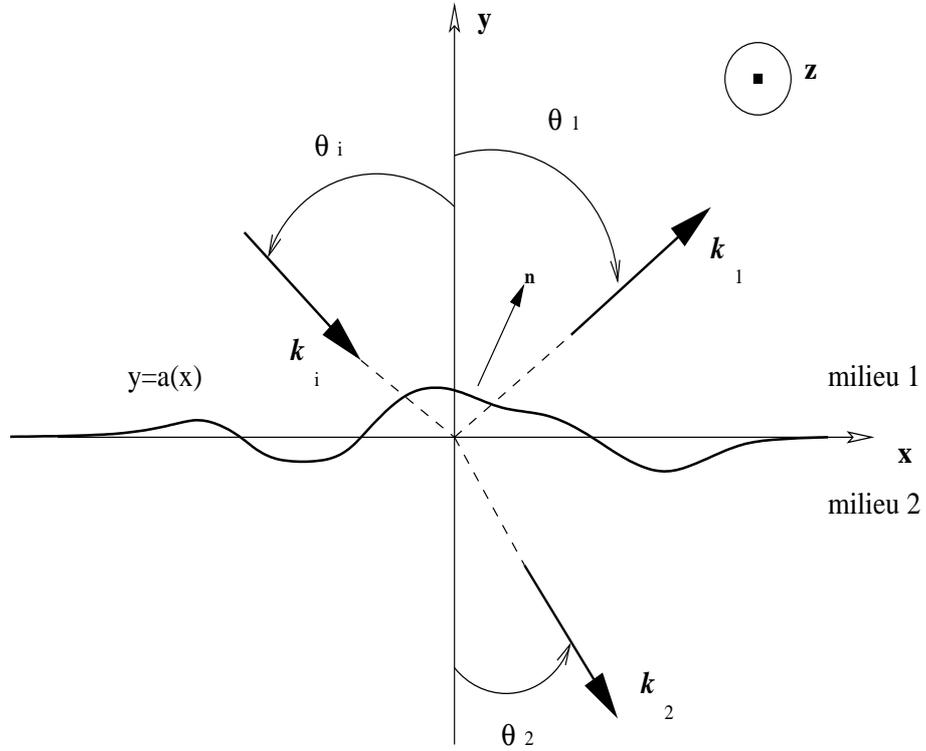
### 4.1.1 Le problème électromagnétique en 1D

A la différence du cas 2D, les coordonnées  $(x', y', z')$  dans le système de translation s'écrivent en fonction des coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - a(x) \\ z' = z \end{cases} \quad (4.1)$$

Les bases covariante et contravariante sont données par les relations (C.31, C.32 de l'annexe C). Les relations liant les composantes covariantes aux composantes cartésiennes d'un vecteur  $\mathbf{V}$  sont données par :

$$\begin{cases} v_{x'} = v_x + \frac{\partial a}{\partial x} v_y \\ v_{y'} = v_y \\ v_{z'} = v_z \end{cases} \quad (4.2)$$



**Fig. 4.1:** Schéma du problème 1D

Nous pouvons remarquer que si la composante  $v_{y'}$  = 0, alors les deux autres composantes du vecteur  $\mathbf{V}$  sont les mêmes dans les deux systèmes de coordonnées.

Nous désignons par  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  le champ électrique en polarisation  $E_{//}$ , et la grandeur  $Z\mathbf{H}(\mathbf{r})$  en polarisation  $H_{//}$ .  $Z$  est l'impédance du milieu considéré.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r})\hat{\mathbf{z}} = \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) & \text{en } E_{//} \\ Z\mathbf{H}(\mathbf{r}) & \text{en } H_{//} \end{cases} \quad (4.3)$$

L'onde incidente se propage dans le plan  $(xOy)$  (incidence classique). Du fait de l'invariance géométrique de la surface suivant la direction  $\hat{\mathbf{z}}$ , les champs électromagnétiques dans les deux milieux ne dépendent que de la variable  $x$  et  $y$  :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(x, y) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(x, y) \quad (4.5)$$

L'onde incidente est plane et monochromatique. Le champ incident s'écrit :

$$\mathbf{F}_i(x, y) = e^{(-j(\alpha_i x - \beta_i y))} \hat{\mathbf{z}} \begin{cases} \alpha_i = k_1 \sin(\theta_i) \\ \beta_i = k_1 \cos(\theta_i) = \sqrt{k_1^2 - \alpha_i^2} \end{cases} \quad (4.6)$$

où  $\theta_i \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  et  $\mathbf{k}_i = \alpha_i \hat{\mathbf{x}} - \beta_i \hat{\mathbf{y}}$ , le vecteur d'onde incident ( $\mathbf{k} \in (xOy)$ ).

Comme l'incidence est classique et la surface cylindrique, la polarisation de l'onde diffractée est la même que celle de l'onde incidente. Donc, nous n'avons pas de phénomène de dépolarisation.

En l'absence de déformation, l'onde incidente est réfléchiée et transmise :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_r(x, y) = \rho_r \exp(-j(\alpha_r x + \beta_r y)) \text{ milieu 1} \\ \mathbf{F}_t(x, y) = \rho_t \exp(-j(\alpha_t x - \beta_t y)) \text{ milieu 2} \end{cases} \quad (4.7)$$

avec

$$\begin{cases} \alpha_r = \alpha_t = \alpha_i \\ \beta_r = \beta_i \\ \beta_t = \sqrt{k_2^2 - \alpha_i^2} \end{cases} \quad (4.8)$$

$\rho_r$  et  $\rho_t$  sont les coefficients de Fresnel (§ 1.7.1).

Les autres composantes de champs des ondes incidentes, réfléchiées et transmises sont obtenues par la relation d'orthogonalité (1.21) liant le vecteur champ électrique et vecteur excitation magnétique.

Dans chaque milieu, le champ total parallèle à  $\hat{\mathbf{z}}$  s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{1,tot}(x, y) = \mathbf{F}_i(x, y) + \mathbf{F}_r(x, y) + \mathbf{F}_{1,d}(x, y) & \text{milieu 1} \\ \mathbf{F}_{2,tot}(x, y) = \mathbf{F}_t(x, y) + \mathbf{F}_{2,d}(x, y) & \text{milieu 2} \end{cases} \quad (4.9)$$

Comme dans le cas des surfaces 2D, l'objectif est de déterminer les champs  $\mathbf{F}_{1,d}$  et  $\mathbf{F}_{2,d}$ .

Suivant la polarisation de l'onde, le tableau (4.1) donne les composantes non nulles du champ électromagnétique :

	Polarisation $E_{//}$	Polarisation $H_{//}$
Champ $\mathbf{E}$	$E_z$	$E_x, E_y$
Champ $\mathbf{H}$	$H_x, H_y$	$H_z$

**Tab. 4.1:** Composantes du champ électromagnétique 1D

### 4.1.2 Equation de propagation et composantes tangentielles

Sachant que les champs sont indépendants de la coordonnée  $z'$ , à partir de (3.7, 3.8) nous déduisons l'équation de propagation des deux composantes longitudinales  $E_{y'}$  et  $ZH_{y'}$ , respectivement pour les deux polarisations  $H_{//}$  et  $E_{//}$  :

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial y'} \left[ g^{x'y'} \frac{\partial \psi}{\partial x'} + \frac{\partial g^{x'y'}}{\partial x'} \psi \right] + j k g^{y'y'} \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \\
& = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x'^2} + k^2 \psi
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Avec

$$\psi' = \frac{j}{k} \frac{\partial \psi}{\partial y'} \tag{4.11}$$

$g^{x'y'}$  et  $g^{y'y'}$  ne dépendent que de la dérivée par rapport à  $x'$  de la fonction  $a(x')$ . Leurs expressions sont données par :

$$g^{x'y'} = -\frac{\partial a}{\partial x'} \tag{4.12}$$

$$g^{y'y'} = 1 + \left( \frac{\partial a}{\partial x'} \right)^2 \tag{4.13}$$

En effectuant la transformée de Fourier positive des deux équations (4.10, 4.11) par rapport à la variable  $x$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y'} \left[ j \alpha (\hat{g}^{x'y'} * \hat{\psi}) + j \hat{g}^{x'y'} * (\alpha \hat{\psi}) \right] \\
+ j k \hat{g}^{y'y'} * \frac{\partial \hat{\psi}'}{\partial y'} = \beta^2 \hat{\psi}
\end{aligned} \tag{4.14a}$$

$$\frac{j}{k} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y'} = \hat{\psi}' \tag{4.14b}$$

où  $\beta^2 = k^2 - \alpha^2$ .

A partir du système formé des deux équations (4.14a, 4.14b), nous déduisons un système aux valeurs propres. La résolution de ce système aux valeurs propres permet d'obtenir les modes propres du problème et d'exprimer ainsi le champ diffracté comme combinaison linéaire de ces modes propres. Les coefficients de ces combinaisons restent à déterminer.

En utilisant les expressions des composantes  $ZH_{y'}$  et  $E_{y'}$ , nous calculons les composantes tangentielles du champ à l'interface. Dans le cas d'une incidence en  $E_{//}$  ( $E_{y'} = 0$ ), nous avons :

$$\frac{\partial^2 E_{z'}}{\partial y'^2} + k^2 E_{z'} = -jk g^{x'y'} \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial y'} - jk \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial x'} \quad (4.15a)$$

$$\frac{\partial^2 ZH_{x'}}{\partial y'^2} + k^2 ZH_{x'} = \frac{\partial^2 ZH_{y'}}{\partial x' \partial y'} - k^2 g^{x'y'} ZH_{y'} \quad (4.15b)$$

Pour une onde incidente en polarisation  $H_{//}$  ( $H_y = 0$ ), nous avons :

$$\frac{\partial^2 E_{x'}}{\partial y'^2} + k^2 E_{x'} = \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial x' \partial y'} - k^2 g^{x'y'} E_{y'} \quad (4.16a)$$

$$\frac{\partial^2 ZH_{z'}}{\partial y'^2} + k^2 ZH_{z'} = jk g^{x'y'} \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + jk \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'} \quad (4.16b)$$

Nous pouvons remarquer que les deux équations (4.16a, 4.16b) s'obtiennent à partir de (4.15a, 4.15b) en remplaçant  $E_{z'}$  par  $ZH_{z'}$ ,  $ZH_{y'}$  par  $-E_{y'}$  et  $ZH_{x'}$  par  $-E_{x'}$ . Ainsi, il suffit de résoudre le problème pour une seule polarisation et déduire les résultats pour l'autre polarisation.

### 4.1.3 Les conditions aux limites et détermination des coefficients des combinaisons linéaires

Une fois les expressions générales des champs calculées (combinaisons linéaires des modes propres), les coefficients des combinaisons, représentant les amplitudes de diffraction, sont déterminés via les conditions aux frontières. Si le milieu 2 est un diélectrique, alors les conditions aux limites stipulent que les composantes tangentielles, sur la surface, du champ électromagnétique sont continues.

Pour une onde incidente en polarisation  $E_{//}$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \{E_{dz',1}^{(E_{//})}(x', y') - E_{dz',2}^{(E_{//})}(x', y')\}_{y'=0} = \\ \{-E_{iz'}^{(E_{//})}(x', y') - E_{rz'}^{(E_{//})}(x', y') + E_{tz'}^{(E_{//})}(x', y')\}_{y'=0} \end{aligned} \quad (4.17a)$$

$$\begin{aligned} \{H_{dx',1}^{(E_{//})}(x', y') - H_{dx',2}^{(E_{//})}(x', y')\}_{y'=0} = \\ \{-H_{ix'}^{(E_{//})}(x', y') - H_{rx'}^{(E_{//})}(x', y') + H_{tx'}^{(E_{//})}(x', y')\}_{y'=0} \end{aligned} \quad (4.17b)$$

Si l'onde incidente est de polarisation  $H_{//}$  :

$$\begin{aligned} \{H_{dz',1}^{(H_{//})}(x', y') - H_{dz',2}^{(H_{//})}(x', y')\}_{y'=0} = \\ \{-H_{iz'}^{(H_{//})}(x', y') - H_{rz'}^{(H_{//})}(x', y') + H_{tz'}^{(H_{//})}(x', y')\}_{y'=0} \end{aligned} \quad (4.18a)$$

$$\begin{aligned} \{E_{dx',1}^{(H_{//})}(x', y') - E_{dx',2}^{(H_{//})}(x', y')\}_{y'=0} = \\ \{-E_{ix'}^{(H_{//})}(x', y') - E_{rx'}^{(H_{//})}(x', y') + E_{tx'}^{(H_{//})}(x', y')\}_{y'=0} \end{aligned} \quad (4.18b)$$

Pour un milieu 2 infiniment conducteur, le champ total dans le milieu 1 s'annule à la frontière ( $y' = 0$ ). Ce qui donne :

– en polarisation  $E_{//}$

$$\{E_{dz',1}^{(E_{//})}(x', y')\}_{y'=0} = \{-E_{iz'}^{(E_{//})}(x', y') - E_{rz'}^{(E_{//})}(x', y')\}_{y'=0}$$

– en polarisation  $H_{//}$

$$\{E_{dx',1}^{(H_{//})}(x', y')\}_{y'=0} = \{-E_{ix'}^{(H_{//})}(x', y') - E_{rx'}^{(H_{//})}(x', y')\}_{y'=0}$$

#### 4.1.4 Résolution numérique

Le système formé des deux équations (4.14a, 4.14b) est discrétisé et résolu dans le domaine spectral. En fixant l'ordre de troncature à  $M$ , nous déduisons un système aux valeurs propres de dimension  $2(2M+1)$ . En utilisant les formules d'interpolation en 1D

(E.14) de l'annexe E, les solutions élémentaires s'écrivent :

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}_n(\alpha, y') &= \exp(-jkr_n|y'|) \\ &\times \sum_{s=-M}^{+M} \hat{\Phi}_n(\alpha_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\alpha - \alpha_s)\right)\end{aligned}\quad (4.19a)$$

$$\begin{aligned}\hat{\Psi}'_n(\alpha, y') &= \exp(-jkr_n|y'|) \\ &\times \sum_{s=-M}^{+M} \hat{\Phi}'_n(\alpha_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\alpha - \alpha_s)\right)\end{aligned}\quad (4.19b)$$

$\Delta\alpha$  est le pas d'échantillonnage et  $\alpha_s = \alpha_i + s\Delta\alpha$ .  $r_n$  est la valeur propre associée au vecteur propre  $\hat{\Phi}_n$  qui contient les échantillons  $\hat{\Phi}_n(\alpha_s)$ .

Au final, les transformées de Fourier des composantes transversales des champs sont définies comme des combinaisons linéaires des fonctions élémentaires  $\hat{\Psi}_n(\alpha, y')$  vérifiant la condition d'ondes sortantes :

$$\hat{\Psi}_d(\alpha, y') = \sum_{n=1}^{2M+1} A_n \hat{\Psi}_n(\alpha, y') \quad (4.20a)$$

$$\hat{\Psi}'_d(\alpha, y') = \sum_{n=1}^{2M+1} A_n \hat{\Psi}'_n(\alpha, y') \quad (4.20b)$$

La valeur propre  $r_n$ , associée à la fonction d'onde  $\hat{\Psi}_n(\alpha, y')$ , détermine sa nature. Ainsi, si  $\operatorname{Re}(r_n) < 0$  et  $\operatorname{Im}(r_n) = 0$  alors l'onde est propagative sortante. L'onde est évanescente si  $\operatorname{Im}(r_n) < 0$ . Dans le cas des milieux sans pertes, nous constatons numériquement que les valeurs propres réelles sont associées à des directions de propagation. Nous définissons un angle de diffraction  $\theta_n$ , tel que :

$$\cos(\theta_n) = r_n \quad (4.21)$$

Les composantes tangentielles sont calculées à partir des équations (4.15a, 4.15b) et (4.16b, 4.16a) suivant la polarisation de l'onde incidente. Par exemple, pour la polarisation  $H_{//}$  les deux composantes  $\hat{E}_{x',n}$  et  $Z\hat{H}_{z',n}$  sont obtenues comme suit :

$$\hat{E}_{x',n}^{(H_{//})}(\alpha_s) = -k^2 \sum_{p=-M}^{+M} (\hat{g}_{s-p}^{x' y'}) \hat{\Phi}_n(\alpha_p) - k\alpha_s \hat{\Phi}'_n(\alpha_s) \quad (4.22a)$$

$$Z\hat{H}_{z',n}^{(H_{//})}(\alpha_s) = k^2 \sum_{p=-M}^{+M} (\hat{g}_{s-p}^{x' y'}) \hat{\Phi}'_n(\alpha_p) + k\alpha_s \hat{\Phi}_n(\alpha_s) \quad (4.22b)$$

avec

$$\hat{g}_{s,t}^{x'y'} = \frac{\Delta\alpha}{2\pi} \hat{g}^{x'y'}(\alpha_s, \gamma_t) \quad (4.23)$$

Comme dans le cas des surfaces 2D, nous utilisons la formule d'interpolation pour obtenir la transformée de Fourier des composantes tangentielles :

$$\hat{\Psi}_{T,n}^{(H//)}(\alpha) = \sum_{s=-M}^{+M} \hat{\Psi}_{T,n}^{(H//)}(\alpha_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\alpha - \alpha_s)\right) \quad (4.24)$$

où

$$\hat{\Psi}_{T,n}^{(H//)}(\alpha_s) = \begin{pmatrix} \hat{E}_{x',n}^{(H//)}(\alpha_s) \\ Z\hat{H}_{z',n}^{(H//)}(\alpha_s) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Les transformées de Fourier des composantes transversales du champ électromagnétique diffracté en polarisation  $H_{//}$  sont des combinaisons linéaires des ondes élémentaires :

$$\hat{\Psi}_T^{(H//)}(\alpha, y') = \sum_{n=1}^{2M+1} A_n^{(H//)} \hat{\Psi}_{T,n}^{(H//)}(\alpha) \exp(-jk r_n |y'|) \quad (4.26)$$

avec

$$\hat{\Psi}_T^{(H//)}(\alpha, y') = \begin{pmatrix} \hat{E}_{x'}^{(H//)}(\alpha, y') \\ Z\hat{H}_{z'}^{(H//)}(\alpha, y') \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Afin de déduire les composantes en polarisation  $E_{//}$ , nous devons remplacer, comme précisé à plusieurs reprises,  $\mathbf{E}^{(H//)}$  par  $-Z\mathbf{H}^{(E//)}$  et  $Z\mathbf{H}^{(H//)}$  par  $\mathbf{E}^{(E//)}$ . Ainsi, nous obtenons l'ensemble des composantes tangentielles pour les deux polarisations.

Dans le chapitre 3, pour le cas des surfaces 2D, une fois que les amplitudes de diffraction  $A_n$  sont déterminées via les conditions aux limites, nous déterminons les amplitudes des développements de Rayleigh (§ 3.7) et nous déduisons le coefficient de diffusion bi-statique.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'utiliser les amplitudes de diffraction  $A_n$  pour calculer les courants surfaciques. Ces courants seront utilisés à leur tour pour obtenir les champs diffractés en utilisant des formules de rayonnement. C'est cette idée qui est développée dans le paragraphe suivant [41].

## 4.2 Formalisme intégral à deux dimensions

Il existe plusieurs représentations intégrales pour les problèmes électromagnétiques. Ainsi, les équations intégrales obtenues dépendent de la représentation choisie. Nous pouvons citer par exemple la représentation basée sur le théorème de réciprocité ou bien celle utilisant le potentiel vecteur ou le vecteur de Hertz pour exprimer les champs [61]. En ce qui nous concerne, la représentation que nous utilisons est celle basée sur le deuxième théorème de Green à deux dimensions.

### 4.2.1 Le principe de Huygens

A l'origine, le principe de Huygens-Fresnel est un principe utilisé en optique pour calculer l'intensité dans des problèmes de diffraction et d'interférence. Il consiste à considérer chaque point de l'espace indépendamment. Si un point M reçoit une onde électromagnétique, alors nous pouvons considérer qu'il réémet lui-même des ondes sphériques de même fréquence, même amplitude et même phase et donc joue le rôle de source secondaire. Donc, au lieu de considérer que l'onde progresse de manière continue, nous décomposons sa progression en imaginant qu'elle progresse de proche en proche [62, 63].

La formulation mathématique de ce principe illustre son grand intérêt pour les problèmes de diffraction. En effet, nous pouvons obtenir la valeur du champ en tout point de l'espace d'un volume à partir de la seule connaissance de ses valeurs, ainsi que celles de sa dérivée normale, sur une surface. La relation est donnée par l'équation (G.12), que nous rappelons ci-dessous, où  $\zeta(\mathbf{r})$  représente une composante du champ diffracté,  $\zeta_i(\mathbf{r})$  le champ incident et  $g(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  la fonction de Green du problème 1D :

$$\zeta_i(\mathbf{r}) + \int_{\Sigma} [\zeta(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n'} \zeta(\mathbf{r}')] d s' = \zeta(\mathbf{r}) \quad (4.28)$$

Donc, il suffit de connaître le champ  $\zeta(\mathbf{r})$  et sa dérivée normale  $\frac{\partial}{\partial n'} \zeta(\mathbf{r}')$  sur la surface ' $\Sigma$ ' pour déduire le champ partout dans l'espace [62]. Le principe de Huygens ne fournit pas ces deux valeurs du champ sur la surface.

## 4.2.2 La fonction de Green

En électromagnétisme, la fonction de Green  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  pour l'espace libre sans limites représente la réponse de cet espace à une source d'excitation ponctuelle  $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Cette fonction  $g(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  vérifie l'équation de Helmholtz [62] :

$$\nabla^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (4.29)$$

où  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}} + z \hat{\mathbf{z}}$ .

D'autre part, la fonction de Green doit satisfaire des conditions aux limites bien définies ainsi qu'à la condition de rayonnement à l'infini (amplitude finie à l'infini) exprimée par la condition de Sommerfeld (G.9) dans l'annexe G.

La fonction de Green à deux dimensions est proportionnelle à la fonction de Hankel de deuxième espèce d'ordre 0 :

$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{-j}{4} H_0^{(2)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (4.30)$$

où  $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}$ .

La fonction de Hankel peut être représentée sous forme intégrale, dite représentation de Weyl :

$$H_0^{(2)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta(\alpha)} \exp(-j(x - x')\alpha) \exp(-j|y - y'|\beta) d\alpha \quad (4.31)$$

où  $\beta^2 + \alpha^2 = k^2$  et  $Im[\beta(\alpha)] \leq 0$ .

Ainsi, nous pouvons exprimer la fonction de Green sous forme intégrale. Il faut noter ici le signe (-) dans la deuxième exponentielle, correspondant à une onde se propageant dans le sens des 'y' positifs. Si nous voulons représenter une onde se propageant suivant les 'y' négatifs alors il faut remplacer le signe (-) par le signe (+).

## 4.2.3 Les formules de rayonnement

Dans l'annexe C, à partir du deuxième théorème de Green, nous montrons que [62] :

$$\begin{aligned} \zeta_i(\mathbf{r}) + \left(\frac{-j}{4}\right) \int_{\Gamma} [\zeta(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} H_0^{(2)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - H_0^{(2)}(k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial}{\partial n'} \zeta(\mathbf{r}')] d\ell' \\ = \zeta(\mathbf{r}) \text{ si } M \in \text{milieu } 1 \end{aligned} \quad (4.32a)$$

où  $d\ell'$  est l'élément de longueur.

L'équation (4.32a) illustre le principe de Huygens à deux dimensions. Dans notre cas, le contour  $\Gamma$  représente la courbe sur laquelle la génératrice de notre surface 1D s'appuie. Par abus de langage, nous appelons le contour  $\Gamma$  "surface  $S$ ". En effet, d'après cette équation, connaissant le champ et la valeur de sa dérivée normale sur la surface  $S$ , nous calculons ses valeurs en tout point  $M$  situé en  $\mathbf{r}$ . Nous utilisons le théorème de Huygens afin d'exhiber les relations donnant le champ diffracté dans le milieu 1 ou 2.

Si nous supposons que les deux milieux séparés par la surface  $S$  sont identiques, alors nous pouvons remplacer  $\zeta(\mathbf{r})$  par  $\zeta_i(\mathbf{r})$  dans (G.13a). Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \zeta_i(\mathbf{r}) + \left(\frac{-j}{4}\right) \int_{\Gamma} [\zeta_i(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - H_0^{(2)}(k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \frac{\partial}{\partial n'} \zeta_i(\mathbf{r}')] d\ell' \\ = \zeta_i(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

En exprimant le champ total dans le milieu comme  $\zeta_1 = \zeta_i + \zeta_{d,1}$  dans (G.13a), et en lui soustrayant (4.33), nous obtenons une équation ne faisant intervenir que le champ diffracté :

$$\begin{aligned} \left(\frac{-j}{4}\right) \int_{\Gamma} [\zeta_{d,1}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} H_0^{(2)}(k_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - H_0^{(2)}(k_1|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \frac{\partial}{\partial n'} \zeta_{d,1}(\mathbf{r}')] d\ell' \\ = \zeta_{d,1}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.34)$$

La fonction  $\zeta_{d,1}(\mathbf{r})$  peut représenter la composante, dans le milieu 1, suivant  $\hat{\mathbf{z}}$  du champ électrique ou magnétique selon la polarisation de l'onde incidente.

Dans le milieu 2 le champ incident est nul (source du champ incident située à l'infini dans le milieu 1), nous pouvons écrire le principe de Huygens en utilisant les valeurs aux limites du champ dans le milieu 2 :

$$\begin{aligned} \left(\frac{-j}{4}\right) \int_{\Gamma} [\zeta_{d,2}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} H_0^{(2)}(k_2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - H_0^{(2)}(k_2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) \frac{\partial}{\partial n'} \zeta_{d,2}(\mathbf{r}')] d\ell' \\ = -\zeta_{d,2}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Les deux relations (4.34, 4.35) constituent les deux équations intégrales que nous allons utiliser pour calculer le champ électromagnétique diffracté dans le milieu 1 ou 2.

#### 4.2.3.1 Cas d'une onde plane incidente en polarisation $E_{//}$

Si l'onde incidente est de polarisation  $E_{//}$  alors les composantes non nulles du champ électromagnétique sont  $E_z$ ,  $H_x$  et  $H_y$ . En remplaçant  $\zeta_d$  par  $E_{z,d}$  dans l'équation (4.34), nous obtenons pour le milieu supérieur :

$$E_{d,z,1}^{(E_{//})}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{j}{4}\right) \int_{\Gamma} [E_{d,z,1}^{(E_{//})}(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} H_0^{(2)}(k_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - H_0^{(2)}(k_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial}{\partial n'} E_{d,z,1}^{(E_{//})}(\mathbf{r}')] d\ell' \quad (4.36)$$

La normale à la surface en tout point de la surface (Fig 4.1), s'exprime dans le système cartésien par :

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}}(-\dot{a}(x)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}) \quad (4.37)$$

où  $\dot{a} = \frac{\partial a(x)}{\partial x}$ .

La dérivée normale est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= \mathbf{n} \bullet \text{grad} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} \left(-\dot{a}(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

En utilisant l'expression (4.38), la dérivée normale de la composante  $E_{d,z}$  s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial n'} E_{d,z,1}^{(E_{//})}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} \left(-\dot{a}(x) \frac{\partial E_{d,z,1}^{(E_{//})}}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial E_{d,z,1}^{(E_{//})}}{\partial y} \hat{\mathbf{y}}\right) \quad (4.39)$$

D'autre part, l'équation au rotationnel de Maxwell-Faraday permet d'écrire :

$$\begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -j k Z H_x \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = j k Z H_y \end{cases} \quad (4.40)$$

Nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} E_{d,z,1}^{(E_{//})}(\mathbf{r}) &= \frac{-jk_1 Z_1}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} [\dot{a}(x) H_{d,y,1}^{(E_{//})} + H_{d,x,1}^{(E_{//})}] \\ &= \frac{-jk_1 Z_1}{\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} H_{d,x',1}^{(E_{//})} \end{aligned} \quad (4.41)$$

En remplaçant la fonction de Hankel par sa représentation intégrale (4.31), la composante  $E_{d,z,1}$  s'écrit pour  $y > \max[a(x')]$  :

$$\begin{aligned}
E_{d,z,1}^{(E//)}(\mathbf{r}) &= \int_S E_{d,z,1}^{(E//)}(\mathbf{r}') \\
&\times \left[ \frac{-j}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j(-\alpha\dot{a} + \beta_1)}{\beta_1\sqrt{\dot{a}^2 + 1}} \exp(-j\alpha(x-x')) \exp(-j\beta_1|y-a(x')|) d\alpha \right] d\ell' \\
&- \int_S \frac{\partial E_{d,z,1}^{(E//)}}{\partial n}(\mathbf{r}') \\
&\times \left[ \frac{-j}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\beta_1} \exp(-j\alpha(x-x')) \exp(-j\beta_1|y-a(x')|) d\alpha \right] d\ell'
\end{aligned} \tag{4.42}$$

L'élément de longueur  $d\ell$  s'exprime comme suit :

$$d\ell = \sqrt{1 + (\dot{a})^2} dx$$

Afin qu'il n'y ait pas de confusion entre les coordonnées translattées et les variables d'intégration, nous notons ces dernières  $u, v$  et  $w$  au lieu  $x', y'$  et  $z'$ . En remplaçant  $d\ell$  et la dérivée normale de la composante  $E_z$  par leurs expressions et en permutant les deux intégrales, nous obtenons pour  $y > \max[a(x)]$  :

$$\begin{aligned}
E_{d,z,1}^{(E//)}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_S [(\beta_1 - \alpha\dot{a}) \frac{E_{d,z,1}^{(E//)}}{2\beta_1} + \frac{k_1 Z_1}{2\beta_1} H_{d,x',1}^{(E//)}] \exp(j\alpha u) \exp(j\beta_1 a(u)) du \right\} \\
&\times \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta_1 y) d\alpha \\
&= TF^{-1} \{ \exp(-j\beta_1 y) \\
&\int_S [(\beta_1 - \alpha\dot{a}) \frac{E_{d,z,1}^{(E//)}}{2\beta_1} + \frac{k_1 Z_1}{2\beta_1} H_{d,x',1}^{(E//)}] \exp(j\alpha u) \exp(j\beta_1 a(u)) du \}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

En dehors de la déformation ( $y > \max[a(x)]$ ), l'intégrale de Rayleigh est valable. Nous pouvons exprimer  $E_{d,z,1}$  par (1.47a)

$$\begin{aligned}
E_{d,z,1}^{(E//)}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_1^{(E//)}(\alpha) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta_1 y) d\alpha \\
&= TF^{-1} [\hat{R}_1^{(E//)}(\alpha) \exp(-j\beta_1 y)]
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Nous posons :

$$\begin{cases} E_z = F_{z'} \\ ZH_{x'} = F_{x'} \end{cases} \quad (4.45)$$

Nous déduisons de (4.43), (4.44) et (4.45) que [10] :

$$\beta_1 \hat{R}_1^{(E_{//})}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_S \left[ (\beta_1 - \alpha \dot{a}) F_{d,z,1}^{(E_{//})} + k_1 F_{d,x',1}^{(E_{//})} \right] \exp(j\alpha u) \exp(j\beta_1 a(u)) du \quad (4.46)$$

A partir de l'équation (4.35) nous obtenons les expressions du champ dans le milieu 2. Il faut faire attention à l'orientation de la normale ainsi qu'à la direction de propagation de l'onde. Les amplitudes de Rayleigh  $\hat{R}_2^{(E_{//})}$  sont données par :

$$\beta_2 \hat{R}_2^{(E_{//})}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_S \left[ (\beta_2 + \alpha \dot{a}) F_{d,z,2}^{(E_{//})} - k_2 F_{d,x',2}^{(E_{//})} \right] \exp(j\alpha u) \exp(-j\beta_2 a(u)) du \quad (4.47)$$

#### 4.2.3.2 Cas d'une onde plane incidente en polarisation $H_{//}$

Cette fois-ci, les composantes non nulles du champ sont  $H_z$ ,  $E_x$  et  $E_y$ . La correspondance entre les composantes tangentielles et les fonctions  $F_z$  et  $F_x$  est :

$$\begin{cases} ZH_z = F_{z'} \\ E_{x'} = -F_{x'} \end{cases} \quad (4.48)$$

Nous montrons, en suivant la même démarche que pour le cas  $E_{//}$ , que les amplitudes de Rayleigh dans les deux milieux sont données par :

$$\beta_1 \hat{R}_1^{(H_{//})}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_S \left[ (\beta_1 - \alpha \dot{a}) F_{d,z,1}^{(H_{//})} + k_1 F_{d,x',1}^{(H_{//})} \right] \exp(j\alpha u) \exp(j\beta_1 a(u)) du \quad (4.49)$$

et

$$\beta_2 \hat{R}_2^{(H_{//})}(\alpha) = \frac{1}{2} \int_S \left[ (\beta_2 + \alpha \dot{a}) F_{d,z,2}^{(H_{//})} - k_2 F_{d,x',2}^{(H_{//})} \right] \exp(j\alpha u) \exp(-j\beta_2 a(u)) du \quad (4.50)$$

Ces expressions sont semblables à celles de la polarisation  $E_{//}$ . Cependant les courants de surface  $F_{x'}$  et  $F_{z'}$  sont différents. En effet, ils dépendent des amplitudes de diffraction qui sont différentes suivant la polarisation de l'onde incidente.

Dans les équations (4.46, 4.49) et (4.47-4.50), les valeurs des fonctions  $F_{z',d}$  et  $F_{x',d}$  sont prises sur la surface  $y' = 0$ . Elles représentent les courants surfaciques. Ces courants sont déterminés par la méthode C et leurs expressions sont données par les transformées de Fourier inverses par rapport à  $\alpha$  des équations (4.26, 4.24).

#### 4.2.4 Cas d'un milieu infiniment conducteur

Si nous supposons que le milieu 2 est infiniment conducteur, alors le champ dans cette région est nul. Les conditions aux limites stipulent que :

- Pour une onde incidente en polarisation  $E_{//}$ , la composante tangentielle du champ électrique total ( $E_z$ ) sur la surface est nulle.
- Pour une onde incidente en polarisation  $H_{//}$ , la dérivée normale de la composante tangentielle du champ magnétique total ( $H_z$ ) sur la surface est nulle.

Nous montrons que les amplitudes de Rayleigh, dans le milieu supérieur, pour chacune des polarisations, sont données par :

$$\begin{aligned} \beta_1 \hat{R}_1^{(E_{//})}(\alpha) &= \frac{1}{2} \int_S \left[ k_1 F_{d,x',1}^{(E_{//})} \right] \exp(j\alpha u) \exp(j\beta_1 a(u)) du \\ + j \int_S & [\sin(\beta_i a(u))(\alpha \hat{a} - \beta_1)] \exp(j(\alpha - \alpha_i)u) \exp(j\beta_1 a(u)) du \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \beta_1 \hat{R}_1^{(H_{//})}(\alpha) &= \frac{1}{2} \int_S \left[ (\beta_1 - \alpha \hat{a}) F_{d,z,1}^{(H_{//})} \right] \times \exp(j\alpha u) \exp(j\beta_1 a(u)) du \\ + j Z_1 \int_S & [\{\beta_i \sin(\beta_i a(u)) - j \hat{a} \alpha_i \cos(\beta_1 a(u))\}] \\ &\times \exp(j(\alpha - \alpha_i)u) \exp(j\beta_1 a(u)) du \end{aligned} \quad (4.52)$$

### 4.3 Les courants de surfaces

Les fonctions  $F_{x'}$  et  $F_{z'}$  (intervenant dans les intégrales permettant de calculer les amplitudes  $\beta \hat{R}(\alpha)$ ) dépendent uniquement de la position sur le profil diffractant (coordonnée  $x'$ ). En effet, elles représentent les courants surfaciques et sont calculées en

$y' = 0$  ( $y = a(x)$ ). Leurs expressions sont obtenues en prenant la transformée de Fourier inverse des composantes tangentielles du champ dans le domaine spectral.

A partir de l'équation (4.27), nous écrivons :

$$\begin{pmatrix} F_{x'}^{(pol_i)}(x', y') \\ F_{z'}^{(pol_i)}(x', y') \end{pmatrix} = TF^{-1}[\hat{\Psi}_T^{(pol_i)}(\alpha, y')] = TF^{-1} \begin{pmatrix} \hat{F}_{x'}^{(pol_i)}(\alpha, y') \\ \hat{F}_{z'}^{(pol_i)}(\alpha, y') \end{pmatrix} \quad (4.53)$$

Nous rappelons que :

$$\hat{\Psi}_T^{(pol_i)}(\alpha, y') = \sum_{n=1}^{2M+1} A_n^{(pol_i)} \hat{\Psi}_{T,n}^{(pol_i)}(\alpha) \exp(-jk r_n |y'|) \quad (4.54)$$

Il suffit de prendre la valeur de la  $TF^{-1}$  en  $y' = 0$  :

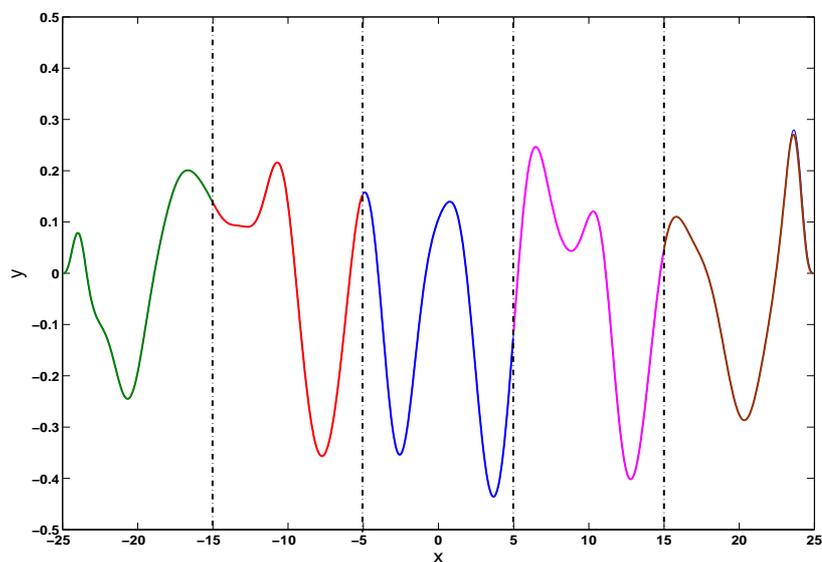
$$TF^{-1}[\hat{\Psi}_T^{(pol_i)}(\alpha, y')]_{y'=0} = \sum_{n=1}^{2M+1} A_n^{(pol_i)} TF^{-1}[\hat{\Psi}_{T,n}^{(pol_i)}(\alpha)] \quad (4.55)$$

## 4.4 Le Principe du Faible Couplage (PFC)

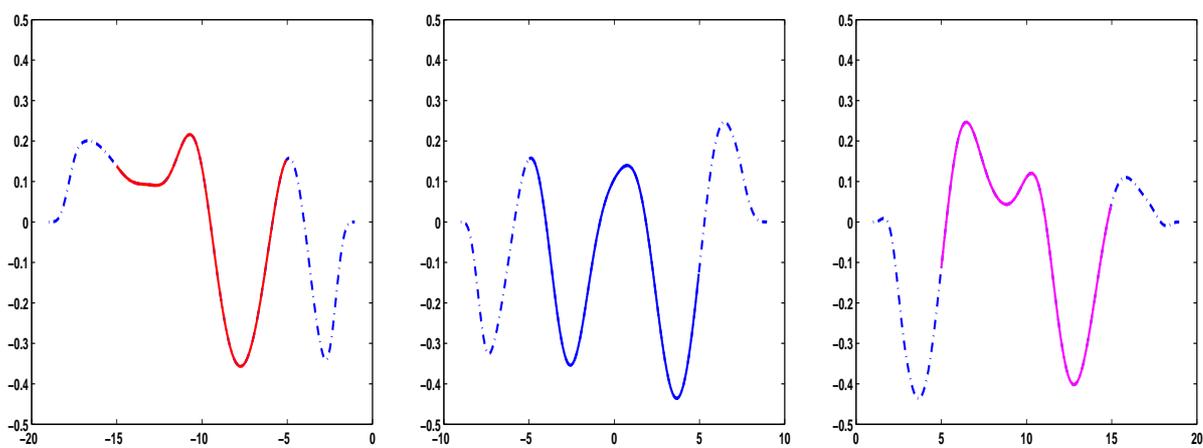
Dans les articles [10, 11], l'auteur, Daniel Maystre, montre que les courants surfaciques, en un point donné d'une surface rugueuse infiniment conductrice, dépendent uniquement de la forme du profil considéré compris dans un intervalle centré sur ce point. La largeur de cet intervalle dépend de la polarisation de l'onde incidente, et des paramètres statistiques de la surface rugueuse. Ce phénomène physique est baptisé *Le principe du faible couplage (PFC)*. Le *PFC* est valide, d'après les références [10, 11], pour des surfaces dont la hauteur des aspérités reste inférieure à leur largeur.

Dans ce paragraphe, nous associons le PFC et la méthode C afin de calculer les courants surfaciques pour un profil rugueux donné, séparant l'air d'un milieu 2 diélectrique ou infiniment conducteur [64].

Soit une surface totale que nous découpons en  $N$  parties élémentaires chacune de longueur  $\frac{L}{N}$  (voir figure 4.2). Les courants de surface élémentaires sont calculés en tenant compte d'une zone commune  $\ell$  entre deux profils élémentaires consécutifs. La longueur globale du petit profil est  $\frac{L}{N} + 2\ell$  (voir figure 4.3).



**Fig. 4.2:** Profil total de longueur  $L$  subdivisé en  $N$  parties de longueur égale



**Fig. 4.3:** Petits profils de longueur  $\frac{L}{N}$  avec les zones communes de dimension  $\ell$  (en trait discontinu)

Ceci permet de réduire les discontinuités sur les courants surfaciques à l'endroit des tronçatures. Une fenêtre de pondération est aussi utilisée pour limiter les effets de bord,

comme dans le cas des surfaces 2D. Nous rappelons son expression ci-dessous [10] :

$$V(x) = \begin{cases} \frac{x + L/2}{\ell_t} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi \frac{x + L/2}{\ell_t}) & \text{si } x \in [-\frac{L}{2}; -\frac{L}{2} + \ell_t] \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{L}{2} + \ell_t; \frac{L}{2} - \ell_t] \\ \frac{L/2 - x}{\ell_t} - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi \frac{L/2 - x}{\ell_t}) & \text{si } x \in [\frac{L}{2} - \ell_t; \frac{L}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.56)$$

Supposons que le profil total de longueur  $L$  est représenté par  $NE$  points. Le pas d'échantillonnage est  $\Delta x = \frac{L}{NE}$ . Le profil total discrétisé est représenté par  $a(x_p)$  avec  $x_p = p \Delta x$  et  $p \in [-\frac{NE}{2}; \frac{NE}{2} - 1]$

Ainsi, le petit profil  $a_q$  est représenté comme suit :

$$a_q(x_p) = \begin{cases} a(x_p) & \text{si } p \in [-\frac{NE}{2} + (q-1)\frac{NE}{N}; -\frac{NE}{2} + q\frac{NE}{N} - 1] \\ \text{avec } q \in [1; N] \end{cases} \quad (4.57)$$

Pour calculer le courant élémentaire global  $F_{elemglob}$ , le petit profil  $a_q$  est prolongé d'une longueur  $\ell$  contenant  $N_\ell$  points. Au final, nous obtenons un petit profil élémentaire global représenté par  $\frac{NE}{N} + 2N_\ell$  points.

$$F_{elemglob,q}^{(pol_i)}(x'_p, 0) = \sum_n A_n^{(pol_i)} T F^{-1}[\hat{\Psi}_{T,n}^{(pol_i)}(\alpha)](x'_p) \quad (4.58)$$

Le principe du faible couplage permet d'obtenir le courant de surface total  $F_{tot}$  comprenant la contribution de chacun des tronçons de la surface, réduit à leur longueur  $\frac{L}{N}$ , excluant ainsi les courants de la zone commune. Le courant de surface total  $F_{tot}$  est une concaténation des courants élémentaires  $F_{elem}$  des profils élémentaires.

$$F_{tot} = [F_{elem,1} F_{elem,2} \dots F_{elem,N}] \quad (4.59)$$

Ce courant total  $F_{tot}$  et les intégrales (4.46), (4.49), (4.47) et (4.50) sont ensuite utilisés pour déterminer les amplitudes des champs lointains.

## 4.5 Simulations numériques et résultats

Dans ce paragraphe, nous présentons des résultats de simulation pour des interfaces 1D séparant l'air d'un milieu 2, soit infiniment conducteur, soit diélectrique. La

comparaison des résultats se fera par rapport à la méthode C que nous prenons pour référence.

### 4.5.1 Contribution du PFC à la réduction des temps de calcul

Nous avons vu que les temps de calcul pour la méthode C sont de l'ordre de  $M_s^3$ . Comme nous sommes dans le cas 1D, la dimension du système aux valeurs propres est  $M_s = 2(2M + 1)$ , avec 'M' l'ordre de troncature. Si nous divisons la surface totale de longueur L en N petits profils, alors nous montrons, théoriquement, que les temps de calcul sont divisés par un facteur  $\rho_{th}$ .

La méthode C et la méthode C associée au principe du faible couplage sont implémentées avec le même taux d'ondes évanescentes d'où  $M_{methodeC}\Delta\alpha \approx M_{methodeC+PFC}\Delta\alpha' = \alpha_{max}$ .  $\Delta\alpha$  est la résolution spectrale de la méthode C seule et  $\Delta\alpha'$ , la résolution de la méthode C associée au PFC. Le gain en temps de calcul est défini par :

$$\begin{aligned}\rho_{th} &\approx \frac{1}{N} \left( \frac{M_{methodeC}}{M_{methodeC+PFC}} \right)^3 \\ &= \frac{1}{N} \left( \frac{\Delta\alpha'}{\Delta\alpha} \right)^3\end{aligned}$$

$$\text{avec } \Delta\alpha' \approx \frac{2\pi}{\frac{L}{N} + 2\ell + 2} \text{ et } \Delta\alpha \approx \frac{2\pi}{L + 2}$$

Nous obtenons donc le facteur théorique suivant :

$$\begin{aligned}\rho_{th} &\approx \frac{1}{N} \left( \frac{L + 2}{\frac{L}{N} + 2\ell + 2} \right)^3 \\ &= N^2 \frac{\left(1 + \frac{2}{L}\right)^3}{\left(1 + 2(\ell + 1)\frac{N}{L}\right)^3}\end{aligned}\tag{4.60}$$

Le tableau 4.2 donne quelques exemples des temps de calcul et de facteur  $\rho_{th}$ , en fonction de l'ordre de troncature M, à précision identique pour les deux méthodes et pour un milieu 2 diélectrique à pertes.

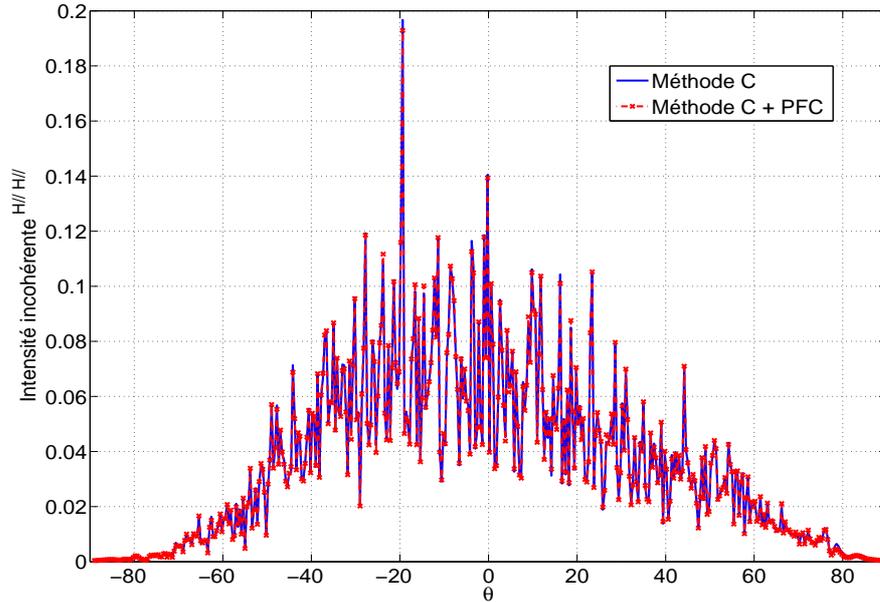
Nous constatons une légère différence entre le facteur théorique et celui calculé à partir des temps réels d'exécution, mais les valeurs sont proches. Le coefficient  $\rho_{th}$  est calculé en supposant que  $M \gg 2$ . Par conséquent, plus M est petit, plus la valeur théorique s'écarte de  $\rho_{exp}$ . Le PFC permet un gain sur le temps de calcul très important.

Méthode C			Méthode C + PFC					$\alpha_{max}$	$\rho_{exp}$	$\rho_{th}$
L ( $\lambda$ )	M	$T_{cpu}(s)$	N	$\frac{L}{N}$	$\ell$ ( $\lambda$ )	M	$T_{cpu}(s)$			
50	156	75	5	10	3	54	21	18.85	3.6	4.8
60	372	670	6	10	3	108	87	37.70	7.7	6.8
200	606	4000	25	8	4	48	90	18.85	44	56.5

**Tab. 4.2:** Temps de calcul en secondes en fonction de l'ordre de troncature et la longueur de la zone commune  $\ell$

De fait, il nous permet de traiter des surfaces très larges sur des intervalles de temps raisonnables.

Sur la figure 4.4 nous représentons l'intensité incohérente calculée sur un ensemble de 10 réalisations. La taille des surfaces est de  $L = 200\lambda$ . Les paramètres du PFC sont ceux du tableau (4.2) correspondant à la longueur  $L = 200\lambda$ . La comparaison entre les deux courbes, obtenues avec les deux méthodes, est satisfaisante.



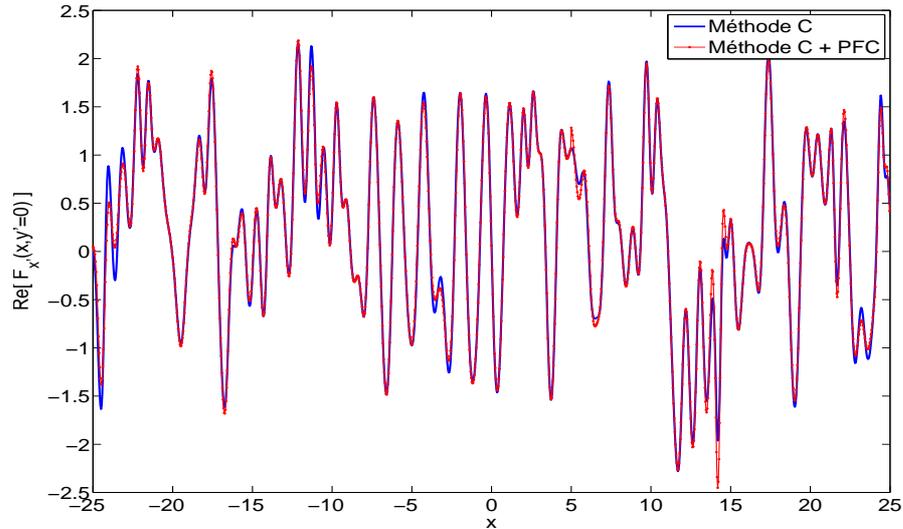
**Fig. 4.4:** Intensité incohérente dans le cas d'un milieu 2 diélectrique à pertes, pour une onde incidente en polarisation  $H_{//}$

Les résultats de ce paragraphe montrent clairement l'avantage de l'utilisation de l'approximation du faible couplage en terme de temps de calcul. A précision presque identique ( $\alpha_{max, methode C} \approx \alpha_{max, methode C+PFC}$ ) avec la méthode C toute seule, le PCF permet de traiter une surface de largeur  $L = 200\lambda$  avec un temps 40 fois plus faible.

## 4.5.2 Les courants de surface sur un profil infiniment conducteur

Soit une surface de longueur  $L = 50\lambda$ . Cette surface est caractérisée par une densité de probabilité des hauteurs gaussiennes et une fonction d'autocorrélation gaussienne. L'écart type des hauteurs est  $\sigma_a = 0.5\lambda$  et la longueur de corrélation  $\ell_c = 1.5\lambda$ . Supposons que le milieu 2 soit infiniment conducteur. L'angle d'incidence est de  $\theta_i = 40^\circ$ . Dans un premier temps, nous appliquons la méthode C directement sur la totalité de la surface avec un ordre de troncature  $M = 156$ , puis nous retraitions la même surface en appliquant la méthode C associée au PFC. La surface totale est divisée en cinq tronçons, chacun de longueur  $10\lambda$  et la zone commune est  $\ell = 2\lambda$ .

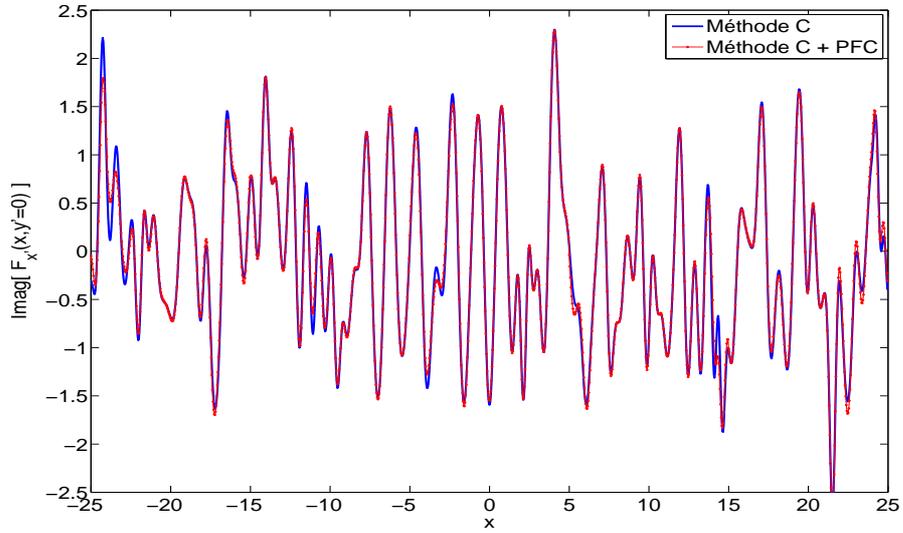
Les figures 4.5 et 4.6 montrent la partie réelle et la partie imaginaire du courant de surface  $F_{x'}(x, 0)$ , pour une onde incidente en polarisation  $E_{//}$ , calculées avec les deux méthodes.



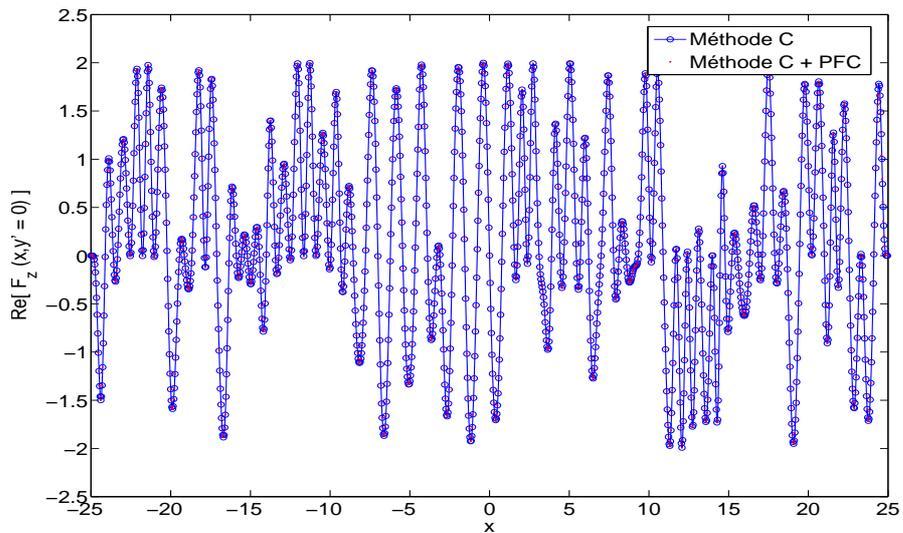
**Fig. 4.5:** Partie réelle du courant surfacique  $F_{x'}$  en polarisation  $E_{//}$ . Milieu 2 infiniment conducteur. Les paramètres sont  $L = 50\lambda$ ,  $\sigma_a = 0.5\lambda$ ,  $\ell_c = 1.5\lambda$ ,  $N = 5$  et  $\ell = 2\lambda$ .

Les figures 4.7 et 4.8 donnent la partie réelle et la partie imaginaire du courant de surface  $F_{z'}(x, 0)$ .

Considérons maintenant le cas de l'incidence en polarisation  $H_{//}$ . Les figures 4.9 et 4.10 montrent la partie réelle et la partie imaginaire du courant de surface  $F_z(x, y' = 0)$ , obtenues avec les deux méthodes, et les figures 4.11 et 4.12 donnent la partie réelle et la partie imaginaire du courant de surface  $F_{x'}(x, y' = 0)$ .

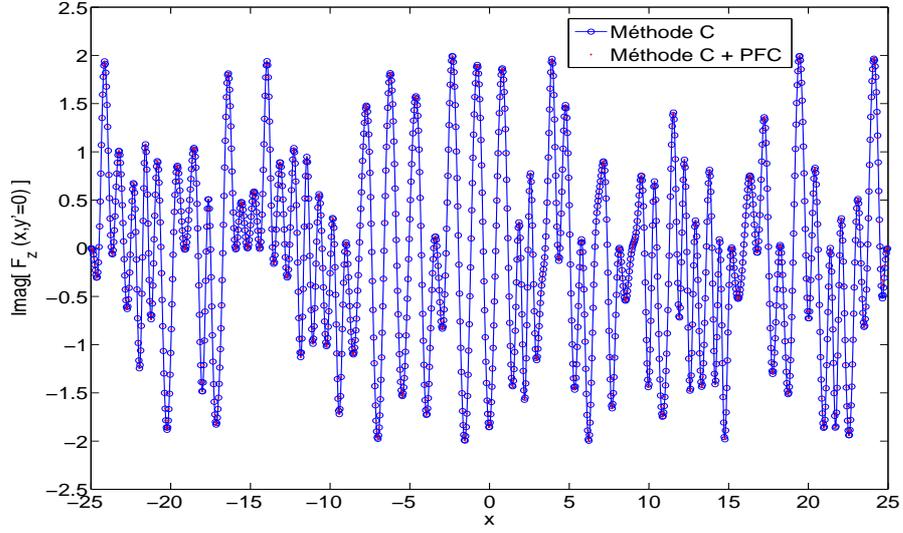


**Fig. 4.6:** Partie imaginaire du courant surfacique  $F_{x'}$  en polarisation  $E_{//}$ . Milieu 2 infiniment conducteur. Les paramètres sont ceux de la figure 4.5.

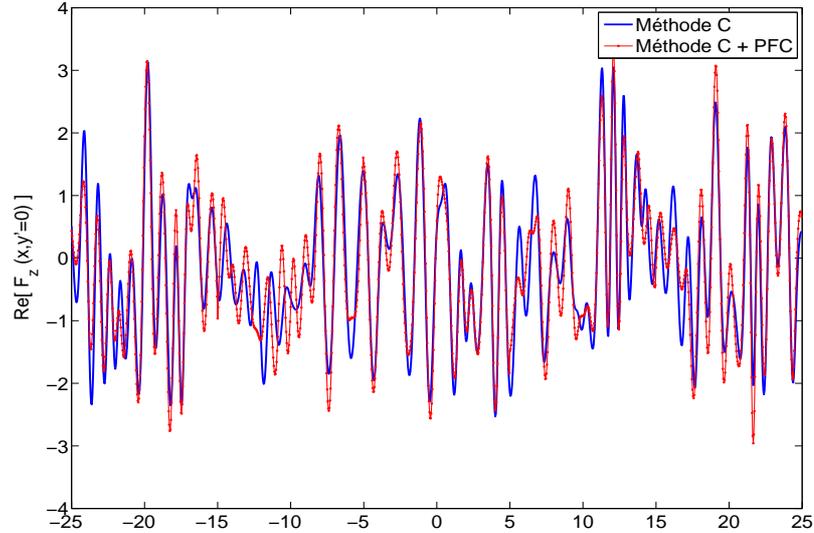


**Fig. 4.7:** Partie réelle du courant surfacique  $F_z$  en polarisation  $E_{//}$ . Milieu 2 infiniment conducteur. Les paramètres sont ceux de la figure 4.5.

Pour la polarisation  $E_{//}$ , nous pouvons voir sur les figures 4.5-4.8 que les résultats donnés par les deux méthodes sont très proches. Les courbes montrent que la précision sur la composante  $F_z$  est meilleure que sur la composante  $F_{x'}$ . Quand l'onde incidente est polarisée  $H_{//}$ , ce constat s'inverse et l'erreur sur la composante  $F_z$  devient plus grande que sur  $F_{x'}$ . Il apparaît clairement sur les figures 4.9 et 4.10, que l'erreur sur la composante  $F_z$  en polarisation  $H_{//}$  est la plus importante.



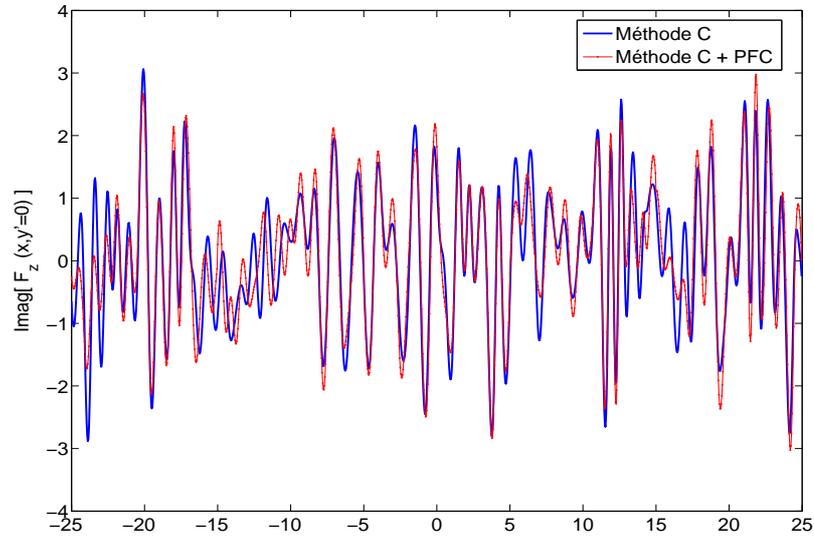
**Fig. 4.8:** Partie imaginaire du courant surfacique  $F_z$  en polarisation  $E_{//}$ . Milieu 2 infiniment conducteur. Les paramètres sont ceux de la figure 4.5.



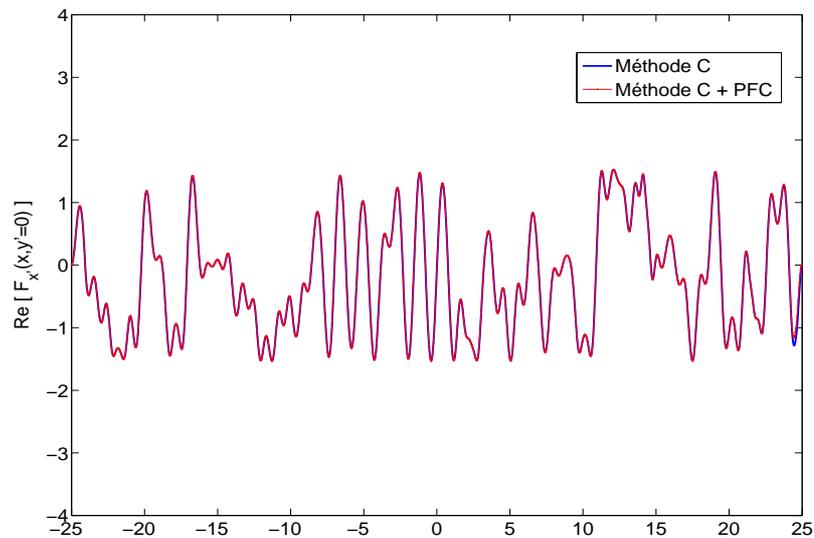
**Fig. 4.9:** Partie réelle du courant surfacique  $F_z$  en polarisation  $H_{//}$ . Milieu 2 infiniment conducteur. Les paramètres sont ceux de la figure 4.5

Afin de quantifier les écarts entre la méthode C et la méthode C couplée au PFC, nous définissons une erreur relative  $\Delta f^{(pol_i)}$  sur la grandeur 'f' représentant ici un courant de surface ou le coefficient de diffusion bi-statique. Pour une onde incidente en polarisation  $pol_i$ ,  $\Delta f^{(pol_i)}$  est donnée par :

$$\Delta f^{(pol_i)} = \frac{\int (|f_{methodeC+PFC}^{(pol_i)}| - |f_{methodeC}^{(pol_i)}|)^2 dv}{\int |f_{methodeC}^{(pol_i)}|^2 dv} \quad (4.61)$$

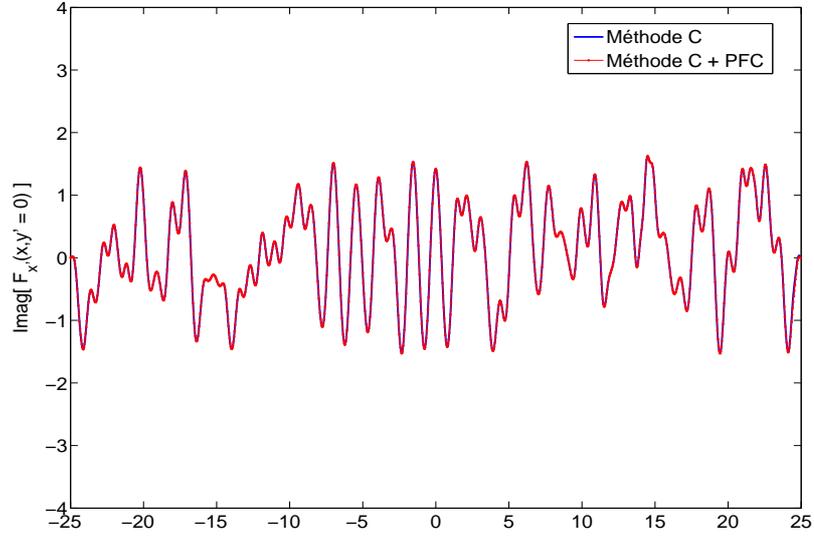


**Fig. 4.10:** Partie imaginaire du courant surfacique  $F_z$  en polarisation  $H_{//}$ . Milieu 2 infiniment conducteur. Les paramètres sont ceux de la figure 4.5



**Fig. 4.11:** Partie réelle du courant surfacique  $F_x$  en polarisation  $H_{//}$ . Milieu 2 infiniment conducteur. Les paramètres sont ceux de la figure 4.5

Le tableau 4.3 donne les erreurs relatives des parties réelle et imaginaire des courants de surface, pour les deux polarisations fondamentales  $E_{//}$  et  $H_{//}$ . A partir de ces résultats, nous pouvons conclure que, globalement, pour un ordre de troncature  $M$  donné et une zone commune  $\ell$  fixée, la précision sur les courants de surface, dans le cas d'une incidence en polarisation  $E_{//}$ , est meilleure que dans la polarisation  $H_{//}$ . Pour les deux polarisations, la composante magnétique du courant présente une erreur plus élevée que la composante électrique.

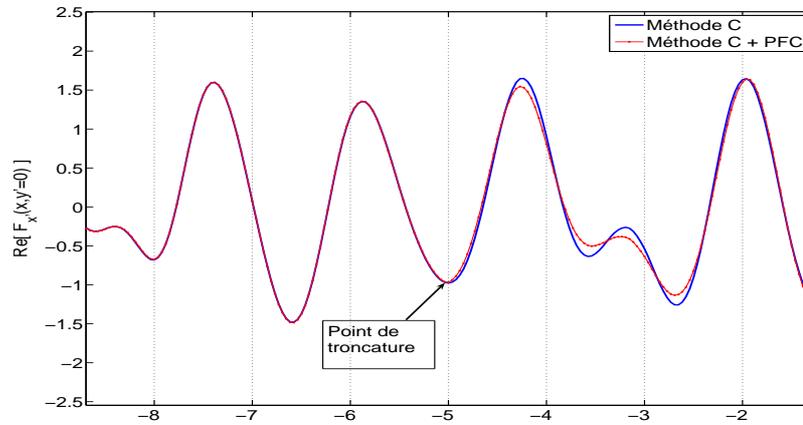


**Fig. 4.12:** Partie imaginaire du courant surfacique  $F_{x'}$  en polarisation  $H_{//}$ . Milieu 2 infiniment conducteur. Les paramètres sont ceux de la figure 4.5

$pol_i$	$\Delta\text{Imag}[F_{x'}]$	$\Delta\text{Re}[F_{x'}]$	$\Delta\text{Imag}[F_{z'}]$	$\Delta\text{Re}[F_{z'}]$
$E_{//}$	0.0097	0.0066	0.0001	0.0002
$H_{//}$	0.0001	0.0003	0.1348	0.1288

**Tab. 4.3:** Erreurs relatives moyennes sur les parties réelles et imaginaires des courants de surface suivant la polarisation de l'onde incidente

Sur la figure 4.13, nous avons représenté un zoom sur la zone commune entre deux petits profils consécutifs de la composante  $F_{x'}$  dans la polarisation  $E_{//}$ .



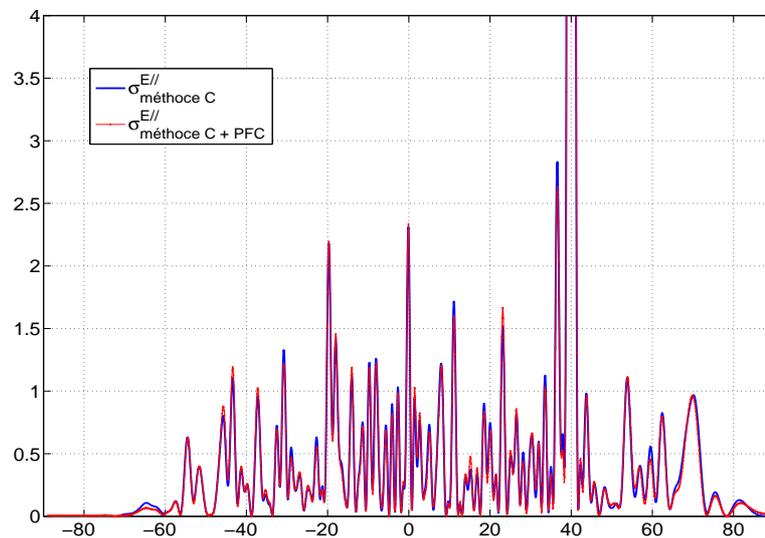
**Fig. 4.13:** Partie réelle du courant surfacique  $F_{x'}$  au voisinage du point de troncature. Milieu 2 infiniment conducteur

Nous pouvons constater que malgré la troncature au point d'abscisse  $x = -5$ , le principe du faible couplage permet de reconstituer le courant total avec une très grande précision. Nous vérifions sur toutes les figures donnant les courants qu'il n'existe pas de discontinuité aux points de troncature.

### 4.5.3 Les coefficients de diffusion bi-statique - Résultats sur un profil

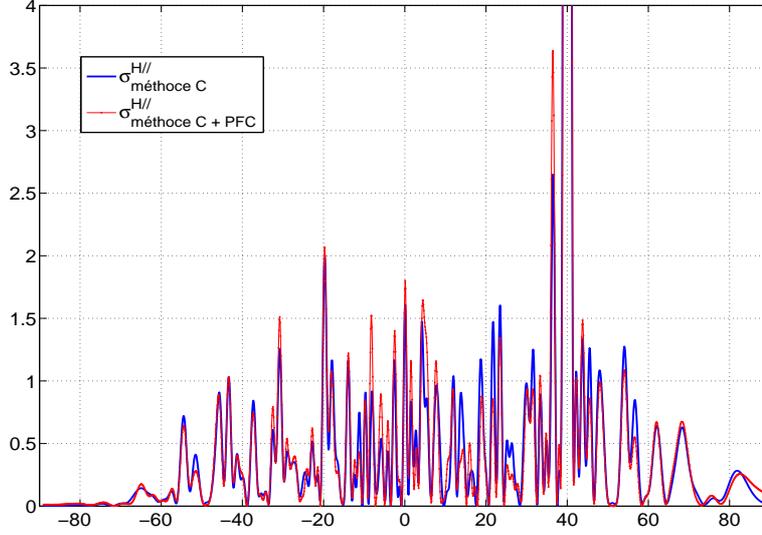
En faisant rayonner les courants de surface calculés précédemment avec la méthode C toute seule et la méthode C associée au PFC, nous obtenons les amplitudes des champs diffractés et nous calculons le coefficient de diffusion bi-statique pour chacune des polarisations fondamentales, dans le milieu supérieur.

Les deux figures 4.14 et 4.15 illustrent une comparaison des deux coefficients de diffusion donnés par les deux méthodes. Nous retrouvons le pic de diffraction autour de la direction spéculaire ( $\theta = 40^\circ$ ). La comparaison par rapport à la méthode C est très concluante pour les deux polarisations.



**Fig. 4.14:** Coefficient de diffusion bi-statique dans le cas d'un milieu 2 infiniment conducteur, pour une onde incidente en polarisation  $E_{//}$

En calculant les erreurs relatives sur le coefficient de diffusion bi-statique, nous obtenons  $\Delta\sigma^{(E_{//})} = 0.0005$  et  $\Delta\sigma^{(H_{//})} = 0.0380$ . L'erreur en polarisation  $H_{//}$  est plus importante que celle en polarisation  $E_{//}$ . Ceci est sans doute lié à la longueur de la



**Fig. 4.15:** Coefficient de diffusion bi-statique dans le cas d'un milieu 2 infiniment conducteur, pour une onde incidente en polarisation  $H_{//}$

zone commune  $\ell$ , prise ici égale à  $2\lambda$ , pour les deux cas de polarisations fondamentales. Malgré une erreur de 14% sur les courants de surface ( $F_{z'}$ ) en polarisation  $H_{//}$ , le coefficient de diffusion bi-statique est estimé avec une précision proche de 4%.

#### 4.5.4 Influence de la zone commune $\ell$

##### 4.5.4.1 Cas infiniment conducteur

Nous étudions une surface infiniment conductrice, de longueur  $L = 60\lambda$ . Cette surface est caractérisée par une densité de probabilité des hauteurs gaussiennes, dont l'écart type  $\sigma_a = 0.5\lambda$ . La fonction d'autocorrélation est aussi gaussienne. La longueur de corrélation  $\ell_c = 1.5\lambda$ . Nous divisons la surface en 6 petits profils chacun de longueur  $10\lambda$ . Nous faisons varier la longueur de la zone commune  $\ell$  et nous calculons le coefficient de diffusion bi-statique. L'onde incidente est de polarisation  $E_{//}$  ou  $H_{//}$ , et l'angle d'incidence est fixé à  $\theta_i = 30^\circ$ . Ces résultats sont confrontés à ceux obtenus uniquement avec la méthode C dont l'ordre de troncature  $M = 372$  et  $\alpha_{max} \approx 6k$ . Nous travaillons sur un ensemble de  $N_R = 100$  profils.

Avec la méthode C, l'erreur sur le bilan de puissance, sur l'ensemble des 100 réalisations, est inférieure à 2% pour les deux polarisations fondamentales.

Le tableau 4.4 donne les valeurs des erreurs moyennes  $\Delta f^{(pol_i)}$  sur 100 réalisations, sur le module des courants de surface, ainsi que sur le coefficient de diffusion moyen  $\langle \sigma^{(E//)} \rangle$  et  $\langle \sigma^{(H//)} \rangle$  pour chaque longueur  $\ell$  de la zone commune.

$\Delta f^{(pol_i)}$	$\Delta F_z^{(E//)}$	$\Delta F_{x'}^{(E//)}$	$\Delta F_z^{(H//)}$	$\Delta F_{x'}^{(H//)}$	$\Delta \langle \sigma_1^{(E//)} \rangle$	$\Delta \langle \sigma_1^{(H//)} \rangle$
$\ell = 1\lambda$	0.007	0.069	0.099	0.006	0.0007	0.0006
$\ell = 2\lambda$	0.007	0.054	0.076	0.006	0.0005	0.0006
$\ell = 3\lambda$	0.007	0.048	0.066	0.006	0.0005	0.0005
$\ell = 4\lambda$	0.007	0.042	0.053	0.006	0.0004	0.0005

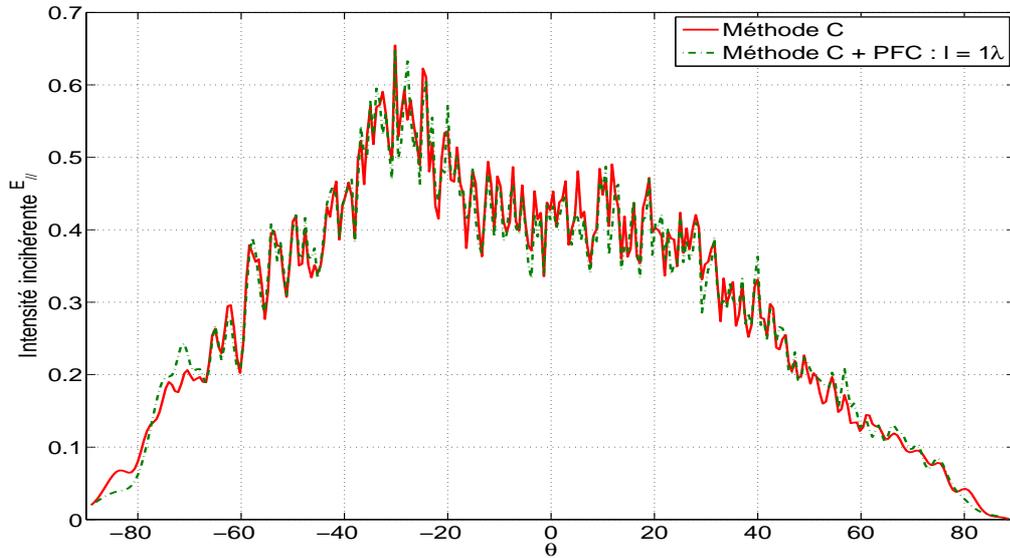
**Tab. 4.4:** Erreurs relatives sur les courants de surface et le coefficient de diffusion moyen suivant la longueur de la zone commune  $\ell$

Ces résultats montrent que pour une longueur  $\ell$  fixée, l'erreur  $\Delta F_{x'}^{(E//)}$  est supérieure à  $\Delta F_z^{(E//)}$ . Comme dans le cas d'un seul profil, ce constat s'inverse pour la polarisation  $H_{//}$ . D'autre part, quand la longueur de la zone commune augmente, l'erreur sur la composante électrique reste constante (avec une précision de  $10^{-3}$ ) dans chacune des polarisations. En effet, le taux d'ondes évanescentes est le même pour les deux méthodes, et dans le cas de la composante électrique, une zone commune de  $1\lambda$  suffit pour prendre en compte la portée des courants liés à cette composante. L'effet de l'augmentation de la zone commune se voit clairement sur les composantes magnétiques  $\Delta F_z^{(H//)}$  et  $\Delta F_{x'}^{(E//)}$ .

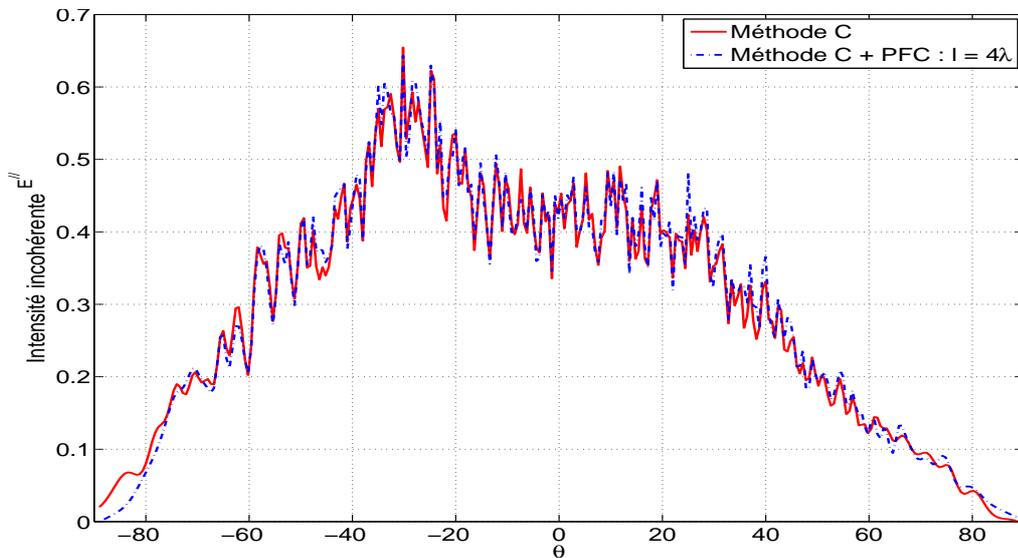
Le coefficient de diffusion bi-statique pour une polarisation donnée, prend en compte la composante électrique et magnétique. Nous pouvons constater que les erreurs sur le coefficient de diffusion bi-statique sont inférieures à la valeur minimale de l'erreur moyenne sur les courants qui interviennent dans leur calcul. Donc l'erreur en zone du champ lointain reste toujours inférieure à l'erreur sur les courants de surface.

Les figures 4.16 et 4.17 montrent l'intensité incohérente en polarisation  $E_{//}$  obtenue avec et sans application du PFC et pour les différentes valeurs de  $\ell$ . Ce graphe permet de constater la validité du principe du faible couplage et de voir l'évolution de l'intensité incohérente en fonction de  $\ell$ .

Pour le cas infiniment conducteur et pour les paramètres géométriques et statistiques pris dans ce paragraphe, il suffit de prendre une zone commune de longueur  $\ell = 1\ell_c$  pour avoir une bonne approximation du coefficient de diffusion. Les nombreuses oscillations sur la figure sont dues en partie au nombre insuffisant de réalisations utilisées. Nos investigations numériques montrent que pour cette longueur de la zone commune ( $\ell = 1\ell_c$ ), les résultats obtenus restent au moins exploitables jusqu'à un rapport  $\frac{\sigma_a}{\ell_c} = \frac{2}{3}$ . Au delà



**Fig. 4.16:** *Intensité incohérente pour une onde incidente en polarisation  $E_{//}$ . La zone commune  $\ell = 1\lambda$*



**Fig. 4.17:** *Intensité incohérente pour une onde incidente en polarisation  $E_{//}$ . La zone commune  $\ell = 4\lambda$*

de cette valeur, les variations verticales du profil deviennent grandes et des couplages électromagnétiques deviennent importants entre des points de la surface séparés par une distance plus grande qu'une longueur de corrélation donc il est nécessaire d'augmenter la longueur de la zone commune.

#### 4.5.4.2 Cas diélectrique sans pertes

Considérons maintenant une surface diélectrique, dont la permittivité relative est  $\epsilon_r = 6$ . La largeur de la surface est  $L = 60\lambda$ . Cette surface est caractérisée par une densité de probabilité des hauteurs gaussiennes, dont l'écart type est  $\sigma_a = 0.8\lambda$ . La longueur de corrélation  $\ell_c = 1\lambda$ . Nous faisons varier la longueur de la zone de transition  $\ell$  et nous calculons le coefficient de diffusion bi-statique pour les deux polarisations fondamentales  $E_{//}$  et  $H_{//}$ . Nous travaillons sur un ensemble de  $N_R = 100$ . La longueur d'onde incidente est  $\lambda = 5.36\text{cm}$  et les angles d'incidence sont  $\theta_i = 30^\circ$  et  $\varphi_i = 0^\circ$ .

Nous appliquons la méthode C sur la totalité de la surface, avec un ordre de troncature que nous fixons à  $M = 558$ . Le temps de calcul nécessaire pour chaque profil est de 2750 secondes. Ensuite, le PFC est appliqué et chaque surface est découpée en six parties de longueur  $10\lambda$ . La zone commune prend des valeurs différentes et pour chacune des valeurs une comparaison est réalisée par rapport à la méthode C. Quand la zone commune varie de  $2\lambda$  à  $4\lambda$ , les temps de calcul varient de 216 secondes à 460 secondes sur l'ensemble des six petits profils. Ceci correspond à un gain en temps de calcul  $\rho_{exp} = 12$  dans le premier cas et  $\rho_{exp} = 6$  dans le second cas. Sur l'ensemble des réalisations, l'erreur sur le bilan de puissance est inférieure à 1%.

Le tableau (4.5) donne les erreurs moyennes sur les courants de surface et l'erreur sur le coefficient de diffusion moyen, dans le milieu supérieur.

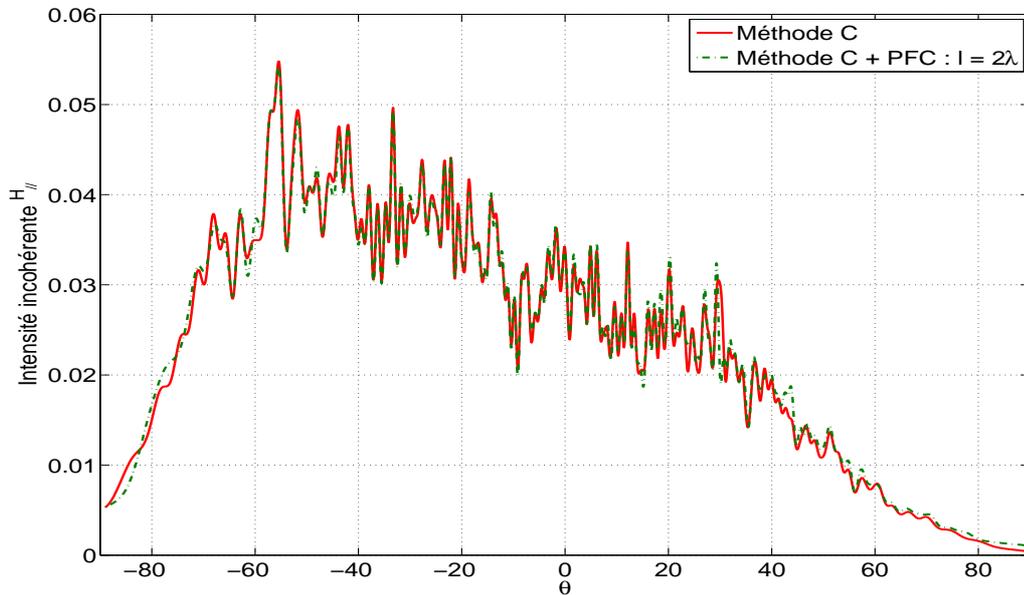
$\Delta f^{(pol_i)}$	$\Delta F_z^{(E//)}$	$\Delta F_{x'}^{(E//)}$	$\Delta F_z^{(H//)}$	$\Delta F_{x'}^{(H//)}$	$\Delta \langle \sigma^{(E//)} \rangle$	$\Delta \langle \sigma^{(H//)} \rangle$
$\ell = 2\lambda$	0.015	0.050	0.024	0.036	0.00047	0.00055
$\ell = 4\lambda$	0.012	0.036	0.018	0.028	0.00039	0.00057

**Tab. 4.5:** Erreurs relatives sur les courants de surface et le coefficient de diffusion moyen dans le milieu supérieur, suivant la longueur de la zone commune  $\ell$

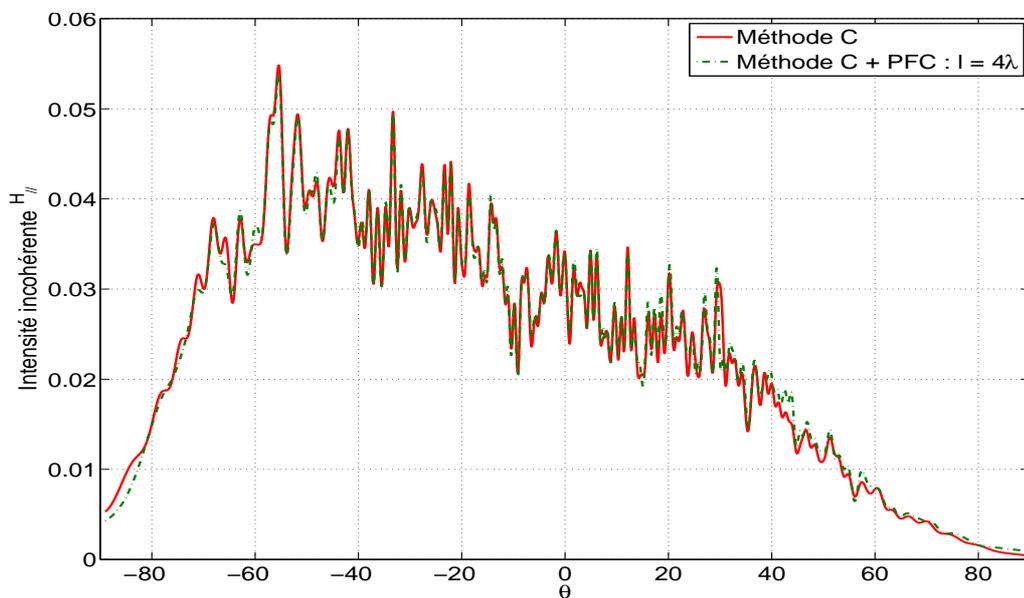
Quand la longueur de la zone commune passe de  $2\lambda$  à  $4\lambda$ , les erreurs sur les courants de surface diminuent pour les deux polarisations fondamentales. En zone du champ lointain, nous observons une erreur très faible sur le coefficient de diffusion moyen par rapport aux erreurs sur les courants de surface. Le PFC permet d'obtenir des résultats avec une très bonne précision (compte tenu de la rugosité des surfaces :  $\ell_c = 1\lambda$  et  $\sigma_0 = 0.8\lambda$ ).

Les figures 4.18 et 4.19 représentent l'intensité incohérente dans le milieu supérieur,

en polarisation  $H_{//}$ . Les courbes obtenues avec les deux méthodes sont très proches et l'application du PFC est probante.



**Fig. 4.18:** Intensité incohérente pour une onde incidente en polarisation  $H_{//}$ . La zone commune  $\ell = 2\lambda$ ,  $L = 60\lambda$ ,  $\ell_c = 1\lambda$ ,  $\sigma_a = 0.8\lambda$ ,  $\lambda = 5.36\text{cm}$ ,  $\epsilon_r = 6$  et  $\theta_i = 30^\circ$



**Fig. 4.19:** Intensité incohérente pour une onde incidente en polarisation  $H_{//}$ . La zone commune  $\ell = 4\lambda$  et les autres paramètres sont ceux de la figure 4.18

Pour ce cas diélectrique, le principe du faible couplage est valable pour un rapport  $\frac{\sigma_a}{\ell_c} \leq \frac{5}{4}$  et une zone commune de  $\ell = 2\ell_c$ .

## 4.6 Application à une surface à deux échelles de rugosité - Cas des milieux diélectriques à pertes

Considérons une perturbation cylindrique, séparant l'air d'un milieu 2 présentant des pertes. La longueur d'onde incidente est  $\lambda = 5.36\text{cm}$ , elle est de polarisation  $E_{//}$  ou  $H_{//}$ . L'angle d'incidence est  $\theta_i = 30^\circ$ . La permittivité relative du milieu 2 est  $\epsilon_r = 5.94 - j0.85$ . Cette valeur de la permittivité correspond à une humidité de 15% d'un sol agricole, à la fréquence de  $5.6\text{GHz}$ . L'équation de la déformation est donnée par :

$$y = a(x) + b \cos \frac{2\pi}{D}x \quad (4.62)$$

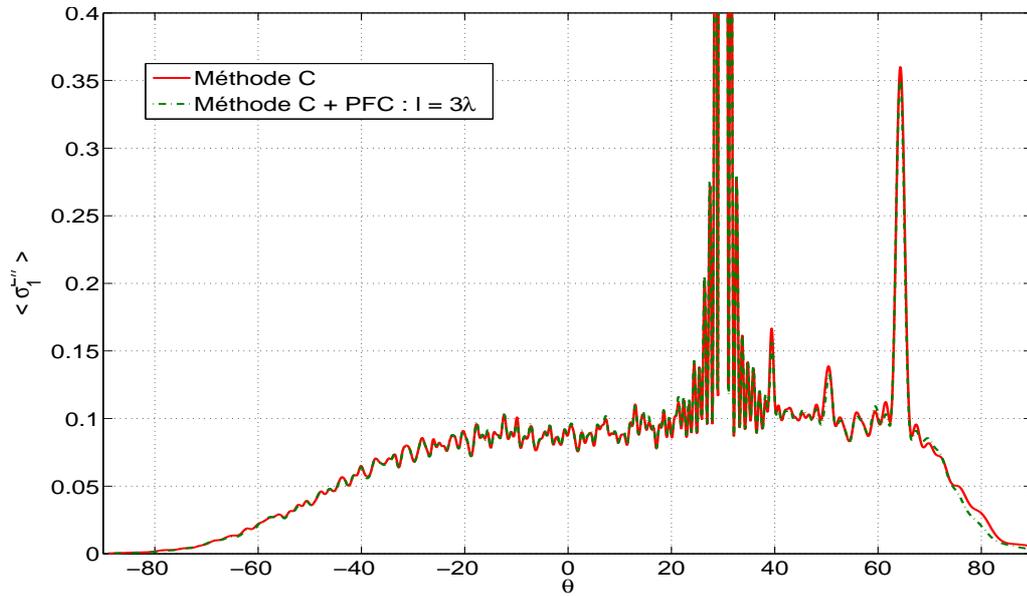
Cette surface pourrait représenter un sol agricole, la fonction périodique représente la composante déterministe (les sillons dus au travail agricole) et la fonction  $a(x)$  la composante aléatoire.

L'interface considérée est de longueur  $L = 64\lambda$ . Elle est la somme de la fonction  $a(x)$ , issue d'un processus gaussien, et d'une fonction périodique de période  $D = 7.5\lambda$  et d'amplitude  $b = 0.6\lambda$ . La fonction  $a(x)$  est caractérisée par une autocorrélation gaussienne. L'écart type des hauteurs  $\sigma_a$  est égal à  $0.2\lambda$  et la longueur de corrélation  $\ell_c$  à  $0.94\lambda$ . Ces paramètres statistiques sont réalistes [27]. Cette surface totale est divisée en huit profils de longueur  $8\lambda$ . La zone commune vaut  $\ell = 3\lambda$ .

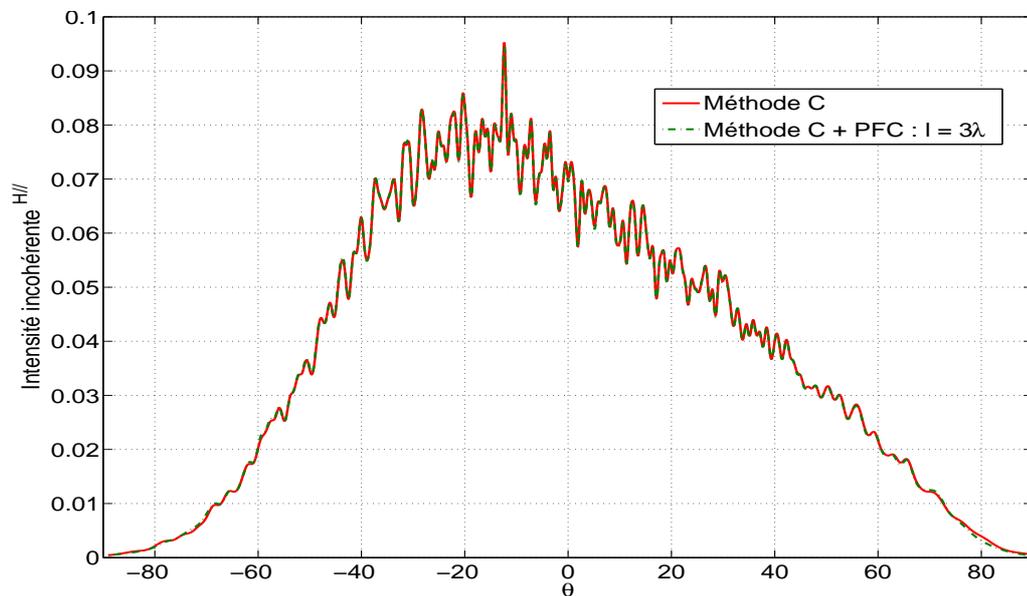
Nous travaillons sur un ensemble de 300 profils. Chaque profil est d'abord analysé avec la méthode C. L'ordre de troncature est fixé à  $M = 330$  et  $\alpha_{max} \approx 5k$ . Puis, l'approximation de faible couplage est appliquée.

Les figures 4.20 et 4.21 donnent le coefficient de diffusion bi-statique moyen et l'intensité incohérente, respectivement. Les courbes obtenues par la méthode C avec et sans l'approximation PFC sont similaires. Nous notons sur la figure représentant le coefficient de diffusion bi-statique des pics secondaires, en plus de celui autour de la direction spéculaire ( $\theta = 30^\circ$ ). Ces pics supplémentaires sont dus à la composante périodique des surfaces analysées qui, par analogie avec les réseaux de diffraction, donne naissance à des raies de diffraction.

La figure 4.21 montre un phénomène de rétro-diffusion sur l'intensité incohérente. Ce phénomène se produit pour une hauteur quadratique moyenne  $\sigma_a$  égale à  $0.2\lambda$ . Pour des surfaces rugueuses ne présentant pas de composantes périodiques, ce phénomène de rétro-diffusion se produit pour des écarts types plus élevés [43]. La composante périodique influe donc sur ce phénomène.



**Fig. 4.20:** Coefficient de diffusion moyen en polarisation  $E_{//}$ . La surface a deux niveaux de rugosité et le milieu 2 est diélectrique à pertes. La zone commune  $\ell = 3\lambda$ ,  $L = 64\lambda$ ,  $\theta_i = 30^\circ$



**Fig. 4.21:** Intensité incohérente en polarisation  $H_{//}$ . Les mêmes paramètres que la figure 4.20

## 4.7 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la présentation de la nouvelle méthode que nous avons développée, pour le cas des surfaces 1D, dans le but de réduire les temps de calcul de la méthode C et traiter des surfaces de grande taille. Pour ce faire, nous associons le principe du faible couplage (PFC) à la méthode C. Le PFC stipule que le courant surfacique, en un point donné de la surface, dépend uniquement de la forme du profil compris dans un intervalle centré sur ce point. La largeur de cet intervalle dépend de la polarisation de l'onde incidente et des paramètres statistiques de la surface. Ce constat permet de traiter la surface totale par morceaux.

La méthode C en 1D est appliquée pour chaque tronçon de la surface et permet de calculer les courants de surface avec précision. Le courant total est obtenu par concaténation des courants élémentaires. Les amplitudes des champs diffractés sont calculées, à partir de ce courant total, en utilisant les formules de rayonnement. Nous avons montré que cette méthode est valable aussi bien pour des milieux infiniment conducteurs que diélectriques. Par comparaison avec la méthode C, les résultats obtenus sont satisfaisants en terme de précision. Cette méthode est appliquée avec succès pour l'analyse d'une surface à deux échelles de rugosité.

# Conclusion et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons traité le problème de l'interaction d'une onde électromagnétique avec des surfaces rugueuses aléatoires à variation unidimensionnelle (1D) ou bidimensionnelle (2D). Ces surfaces séparent l'air d'un milieu diélectrique ou infiniment conducteur. Elles sont issues d'un processus gaussien et caractérisées par une loi de distribution des hauteurs gaussiennes et une fonction d'autocorrélation isotrope entre gaussienne et exponentielle. L'onde incidente est plane de polarisation  $E_{//}$  ou  $H_{//}$ .

Le formalisme électromagnétique utilisé, pour résoudre le problème de la diffraction, est un formalisme exact. Dans le cas des surfaces rugueuses 2D, nous avons utilisé la méthode des coordonnées curvilignes, appelée aussi la méthode C. Cette méthode est fondée sur l'écriture des équations de Maxwell dans un système de coordonnées non-orthogonales lié à la surface diffractante. Une combinaison judicieuse de ces équations, sous leur forme covariante, permet d'exhiber un système aux valeurs propres, faisant intervenir les composantes longitudinales du champ diffracté. La résolution de ce système aux valeurs propres se fait dans le domaine spectral. Ceci permet d'obtenir les modes propres du problème traité et d'exprimer les champs sous forme de combinaisons linéaires des vecteurs propres. Les coefficients de ces combinaisons linéaires sont déterminés en traitant les conditions aux limites. Concernant les composantes transversales du champ, nous montrons qu'elles s'expriment uniquement en fonction des composantes longitudinales. Ainsi, elles sont déduites par des opérations matricielles à partir des composantes longitudinales.

D'un point de vue numérique, la méthode C dépend de l'ordre de troncature  $M$  et de la résolution spatiale  $\Delta\alpha$ . L'ordre de troncature fixe la dimension du système aux valeurs propres à résoudre ( $M_s = 2(2M + 1)^2$ ), et le produit des deux paramètres permet d'ajuster le taux d'ondes évanescentes. Nous adaptons ces deux paramètres numériques en fonction des paramètres géométriques et statistiques des surfaces traitées. Ainsi, plus la rugosité des surfaces augmente, plus les couplages électromagnétiques sont importants, et donc nous avons besoin d'un nombre important d'ondes évanescentes pour bien décrire le phénomène de diffraction, ce qui signifie augmenter l'ordre de

troncature M. La méthode C est une méthode exacte. Son domaine d'application est *a priori* illimité. Nous avons testé la validité des résultats par des comparaisons avec des méthodes concurrentes. Les résultats sont probants. La méthode C est très performante dans le domaine résonnant. La comparaison avec des données expérimentales est très encourageante.

Malgré ses performances, la méthode C souffre d'un handicap lié au temps de calcul. Ceci restreint son utilisation au traitement de surfaces 2D de dimensions limitées. En effet, les temps d'exécution sont proportionnels à  $M_s^3$  (la recherche des vecteurs et valeurs propres représente plus de 90% du temps total). Afin de dépasser cet obstacle, nous avons proposé une nouvelle méthode, qui reprend la méthode C et l'associe au principe du faible couplage, pour le cas des surfaces 1D. Ceci constitue la deuxième méthode que nous avons présentée dans ce manuscrit.

Au lieu de traiter directement la surface totale par la méthode C, nous la découpons d'abord en N morceaux. La méthode C est appliquée sur chacun des tronçons, en tenant compte d'une zone commune entre deux profils consécutifs. Ceci permet de réduire les discontinuités sur les courants surfaciques à l'endroit des troncatures. Par concaténation, le principe du faible couplage permet d'obtenir le courant de surface total comprenant la contribution de chacun des profils élémentaires réduits à leurs largeurs initiales, excluant les courants des zones communes. A partir de ce courant de surface total, calculé avec la méthode C, nous obtenons les amplitudes des champs diffractés en faisant appel aux formules de rayonnement, issues du formalisme intégral.

Cette nouvelle méthode permet de traiter des profils de grande taille et avec une grande précision. Nous avons étendu l'application du principe du faible couplage aux cas des milieux diélectriques. Nous avons montré que cette méthode reste valable pour des rugosités assez importantes. Les simulations numériques montrent un gain de temps de calcul indiscutable.

Dans la continuité du travail effectué pour le cas des surfaces 1D, dans le but de réduire les temps de calcul, l'application de l'approximation du faible couplage aux surfaces 2D constitue une de mes perspectives. Ceci représentera une solution pour le traitement des surfaces de largeur importante ( $L > 8\lambda$ ) mais de longueur de corrélation limitée  $\ell_c \leq 1.5\lambda$ . Le principe du faible couplage nécessite l'emploi d'une zone commune  $\ell$  d'au moins une longueur de corrélation. De fait, même si nous divisons la surface totale en N cellules, la taille de ces cellules élémentaires auxquelles nous rajoutons la zone commune, devient tout de suite importante et les limites de la méthode C, dues au temps de calcul, sont facilement atteignables.

Une autre perspective est de chercher des solutions numériques, afin d'accélérer la recherche des valeurs et vecteurs propres qui interviennent dans le calcul du champ diffracté. Sous sa version actuelle, la méthode C calcule et utilise la totalité des valeurs et vecteurs propres pour décrire le champ diffracté. Il sera intéressant de voir si la recherche d'un sous ensemble des valeurs propres n'est pas suffisant. En effet, les fonctions d'onde associées aux valeurs propres réelles et imaginaires décrivent, en coordonnées cirvilignes, les ondes propagatives et évanescentes du développement de Rayleigh. Ainsi au lieu de chercher toutes les valeurs propres, nous nous limiterons uniquement à celles représentant les ondes évanescentes à valeurs propres complexes. Des méthodes numériques basées sur des algorithmes rapides de recherche de valeurs et vecteurs propres sur des critères bien définis, doivent pouvoir répondre à cette problématique [65, 66].

En parallèle, l'éclairement de la surface par une source d'étendue limitée, à savoir un faisceau gaussien, sera abordé, car la loi d'éclairement d'une antenne radar peut être représentée par une somme de faisceaux gaussiens. Et d'autre part, une approche par faisceau permet de s'affranchir des effets de bord sans l'utilisation de la fenêtre de pondération.

Enfin, le modèle statistique décrivant les sols agricoles sera réinvesti dans le but de prendre en compte la composante déterministe des surfaces. Ceci permettra d'avoir une description plus réaliste des sols nus, qui sera valable pour tous les types de sols (semis, déchaumage et labour). La modélisation des problèmes directs de diffraction par des sols agricoles nus sera alors plus performante.

# Annexe A

## Les formulations asymptotiques

### A.1 Les coordonnées sphériques

Soit  $(r, \theta, \varphi)$  les coordonnées sphériques d'un point M dans l'espace à 3 dimensions. Dans le repère cartésien associé à cet espace le vecteur  $\mathbf{OM}$  s'écrit :

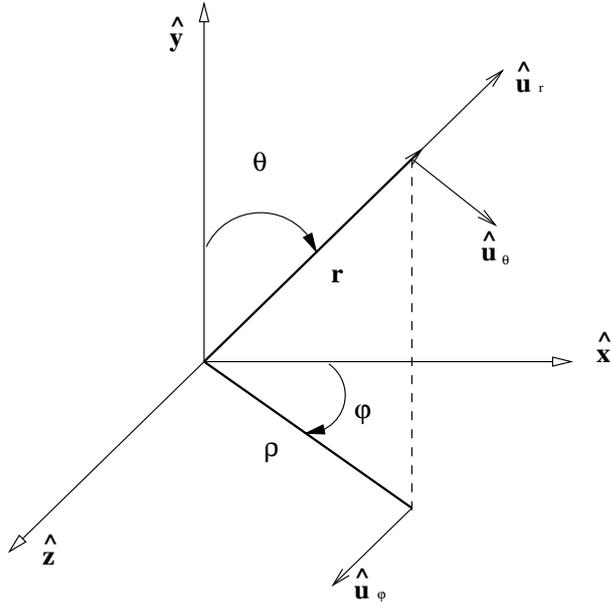
$$\mathbf{OM} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.1})$$

Le passage des coordonnées sphériques aux coordonnées cartésiennes se fait par les relations suivantes :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta & = \rho \cos \varphi \\ y = r \cos \theta & = \sqrt{r^2 - \rho^2} \cos \theta \\ z = r \sin \varphi \sin \theta & = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

### A.2 Méthode de la phase stationnaire

Nous déterminons les composantes des champs à grande distance en appliquant la méthode de la phase stationnaire. Nous menons le calcul en polarisation  $E_{//}$  et nous cherchons à déterminer le comportement asymptotique des 5 composantes de champs  $E_x, E_z, H_x, H_y$  et  $H_z$ . Afin de ne pas alourdir les notations, nous omettons l'exposant  $E_{//}$  dans les amplitudes des champs intervenant dans les développements de Rayleigh. Le raisonnement peut bien sûr être mené pour les composantes de champs polarisés  $H_{//}$ .



**Fig. A.1:** Repère des coordonnées sphériques

A grande distance, les intégrales de Rayleigh représentant le champ électromagnétique, se résument à la seule contribution des ondes propagatives. Par exemple, la composante  $E_y$  du champ électrique s'écrit :

$$ZH_y(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k^2} \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{R}(\alpha, \gamma) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta y) \exp(-j\gamma z) d\alpha d\gamma \quad (\text{A.3})$$

Les constantes de propagation sont données par :

$$\begin{cases} \alpha = k \cos \varphi \sin \theta \\ \beta = k \cos \theta \\ \gamma = k \sin \varphi \sin \theta \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Nous faisons le changement de variable suivant :  $(\alpha, \gamma) \leftrightarrow (\theta, \varphi)$

$$d\alpha d\gamma = \begin{vmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} & \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} & \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} \end{vmatrix} d\theta d\varphi = k \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi \quad (\text{A.5})$$

Ceci permet d'écrire le continuum d'ondes planes propagatives sous la forme :

$$ZH_y = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \hat{R}(k \cos \varphi \sin \theta, k \sin \varphi \sin \theta) \sin^2 \theta \cos \theta \exp(-j\mathbf{k}\mathbf{r}) d\theta d\varphi \quad (\text{A.6})$$

Le terme  $\mathbf{kr}$  vaut :

$$\begin{aligned}
\mathbf{kr} &= \alpha x + \beta y + \gamma z \\
&= k r [\cos \varphi' \sin \theta' \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi' \sin \theta' \sin \varphi \sin \theta + \cos \theta' \cos \theta] \\
&= k r [\sin \theta' \sin \theta (\cos \varphi' \cos \varphi + \sin \varphi' \sin \varphi) + \cos \theta' \cos \theta] \\
&= k r [\sin \theta' \sin \theta \cos (\varphi - \varphi') + \cos \theta' \cos \theta]
\end{aligned} \tag{A.7}$$

A partir de ces résultats, nous pouvons écrire :

$$ZH_y = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \hat{R}(k \cos \varphi \sin \theta, k \sin \varphi \sin \theta) \sin^2 \theta \cos \theta \exp(-j\mathbf{kr}) d\theta d\varphi \tag{A.8}$$

$$= \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\theta, \varphi) \exp(+jr\hat{f}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')) d\theta d\varphi \tag{A.9}$$

où

$$\hat{g}(\theta, \varphi) = \hat{R}(\theta, \varphi) \sin^2 \theta \cos \theta \text{rect}[\varphi - \frac{\pi}{2}, \theta] \tag{A.10}$$

$$\hat{f}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = -k[\sin \theta' \sin \theta \cos (\varphi - \varphi') + \cos \theta' \cos \theta] \tag{A.11}$$

où  $\text{rect}[\varphi - \frac{\pi}{2}, \theta]$  est la fonction rectangle à 3 dimensions qui est égale à 1 pour  $0 \leq \varphi \leq \pi$  et  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  et égale à zéro ailleurs.

Afin d'exhiber la forme asymptotique de la représentation intégrale des champs quand le point d'observation est situé en zone champ lointain, nous cherchons le point critique non dégénéré de la fonction  $\hat{f}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$ . Il représente le point où la première dérivée de la fonction s'annule et la deuxième dérivée est différente de zéro.

Les points critiques sont donnés par :

$$\frac{\partial \hat{f}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')}{\partial \theta} = 0 \tag{A.12}$$

$$\frac{\partial \hat{f}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')}{\partial \varphi} = 0 \tag{A.13}$$

A partir de l'équation (A.12), nous déduisons que :

$$\varphi' = \varphi \tag{A.14}$$

En prenant en compte ce résultat, l'équation (A.13) permet de déduire que :

$$\theta' = \theta \tag{A.15}$$

Donc le point  $(\theta, \varphi) = (\theta', \varphi')$  est l'unique point critique.

Le développement limité de la fonction  $\hat{f}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')$  au voisinage du point  $(\theta', \varphi')$  est :

$$\hat{f}(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = -k \left[ \sin \theta' \sin \theta - \sin \theta' \sin \theta \frac{\Delta(\varphi)^2}{2} + \cos \theta' \cos \theta \right] \quad (\text{A.16})$$

$$= -k \left[ \cos(\theta - \theta') - \frac{\Delta(\varphi)^2}{2} \sin \theta' \sin \theta \right] \quad (\text{A.17})$$

$$= -k \left[ 1 - \frac{\Delta(\theta)^2}{2} - \frac{\Delta(\varphi)^2}{2} \sin \theta' \sin \theta \right] \quad (\text{A.18})$$

où  $\Delta(\varphi) = \varphi - \varphi'$  et  $\Delta(\theta) = \theta - \theta'$ .

Le théorème de la phase stationnaire permet le passage à la forme asymptotique de l'intégrale [17], en ne retenant que le point critique où  $\hat{f} = -k$  :

$$ZH_y = \frac{k^2}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\theta, \varphi) \exp(+jr \hat{f}(\theta, \varphi, \theta', \varphi')) d\theta d\varphi \quad (\text{A.19})$$

$$= \frac{j}{\sin \theta'} \frac{k}{2\pi} \hat{g}(\theta', \varphi') \frac{\exp(+jr \hat{f}(\theta', \varphi'))}{r} \quad (\text{A.20})$$

Au final, nous déduisons la forme asymptotique de  $ZH_y$  :

$$ZH_y(\theta, \varphi) = \frac{1}{\lambda r} \hat{R}(k \sin \theta \cos \varphi, k \sin \theta \sin \varphi) \sin \theta \cos \theta \exp(-jkr) \exp(j\frac{\pi}{2}) \quad (\text{A.21})$$

Ce résultat reste valable pour toutes les composantes du champ électromagnétique.

### A.3 Les composantes du champ lointain

Considérons la polarisation  $E_{//}$ . Les composantes non nulles du champ électromagnétique sont  $E_x, E_z, H_x, H_y, H_z$

Les vecteurs de base  $(\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_\theta, \hat{\mathbf{u}}_\varphi)$  s'écrivent :

$$\hat{\mathbf{u}}_r = \sin \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.22})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} - \sin \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \sin \varphi \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.23})$$

$$\hat{\mathbf{u}}_\varphi = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.24})$$

Les champs électrique et magnétique s'expriment comme suit :

$$\mathbf{E} = E_x \hat{\mathbf{x}} + E_z \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.25})$$

$$= E_r \hat{\mathbf{u}}_r + E_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + E_\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (\text{A.26})$$

$$\mathbf{H} = H_x \hat{\mathbf{x}} + H_y \hat{\mathbf{y}} + H_z \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{A.27})$$

$$= H_r \hat{\mathbf{u}}_r + H_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta + H_\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (\text{A.28})$$

Les composantes sphériques sont reliées aux composantes cartésiennes par :

$$\begin{cases} E_r = \sin \theta \cos \varphi E_x + \sin \theta \sin \varphi E_z \\ E_\theta = \cos \theta \cos \varphi E_x + \cos \theta \sin \varphi E_z \\ E_\varphi = -\sin \varphi E_x + \sin \varphi E_z \end{cases} \quad (\text{A.29})$$

et

$$\begin{cases} H_r = \sin \theta \cos \varphi H_x + \cos \theta H_y + \sin \theta \sin \varphi H_z \\ H_\theta = \cos \theta \cos \varphi H_x - \sin \theta H_y + \cos \theta \sin \varphi H_z \\ H_\varphi = -\sin \varphi H_x + \sin \varphi H_z \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

Nous savons que chaque composante du champ électromagnétique peut s'écrire sous forme d'une intégrale de Rayleigh. Par exemple, en polarisation  $E_{//}$  :

$$ZH_x = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{R}_x(\alpha, \gamma) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta y) \exp(-j\gamma z) d\alpha d\gamma \quad (\text{A.31})$$

$$ZH_y = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{R}_y(\alpha, \gamma) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta y) \exp(-j\gamma z) d\alpha d\gamma \quad (\text{A.32})$$

$$ZH_z = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{R}_z(\alpha, \gamma) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta y) \exp(-j\gamma z) d\alpha d\gamma \quad (\text{A.33})$$

$$E_x = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{C}_x(\alpha, \gamma) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta y) \exp(-j\gamma z) d\alpha d\gamma \quad (\text{A.34})$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{C}_z(\alpha, \gamma) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta y) \exp(-j\gamma z) d\alpha d\gamma \quad (\text{A.35})$$

En coordonnées cartésiennes, le tenseur métrique se réduit à la matrice unité et les équations (3.12a-3.12d) deviennent :

$$\frac{\partial^2 E_{x'}}{\partial y'^2} + k^2 E_{x'} = \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial x' \partial y'} + jk \frac{\partial Z H_{y'}}{\partial z'} \quad (\text{A.36a})$$

$$\frac{\partial^2 E_{z'}}{\partial y'^2} + k^2 E_{z'} = \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial z' \partial y'} - jk \frac{\partial Z H_{y'}}{\partial x'} \quad (\text{A.36b})$$

$$\frac{\partial^2 Z H_{x'}}{\partial y'^2} + k^2 Z H_{x'} = \frac{\partial^2 Z H_{y'}}{\partial x' \partial y'} - jk \frac{\partial E_{y'}}{\partial z'} \quad (\text{A.36c})$$

$$\frac{\partial^2 Z H_{z'}}{\partial y'^2} + k^2 Z H_{z'} = \frac{\partial^2 Z H_{y'}}{\partial y' \partial z'} + jk \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'} \quad (\text{A.36d})$$

En polarisation  $E_{//}$ , nous obtenons les composantes transversales des champs en prenant  $E_y = 0$ , soit :

$$\frac{\partial^2 Z H_x}{\partial y^2} + k^2 (Z H_x) = \frac{\partial^2 Z H_y}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.37})$$

$$\frac{\partial^2 Z H_z}{\partial y^2} + k^2 (Z H_z) = \frac{\partial^2 Z H_y}{\partial z \partial y} \quad (\text{A.38})$$

A partir de (A.37) et (A.38), nous déduisons que pour les composantes magnétiques :

$$\hat{R}_x(\alpha, \gamma) = -\frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{R}_y(\alpha, \gamma) \quad (\text{A.39})$$

$$\hat{R}_z(\alpha, \gamma) = -\frac{\gamma\beta}{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{R}_y(\alpha, \gamma) \quad (\text{A.40})$$

En zone champ lointain et en utilisant les résultats concernant la phase stationnaire (A.21), au point d'observation  $(\theta, \varphi, r)$ , nous avons pour les composantes magnétiques :

$$Z H_x = \frac{-1}{\lambda r} \exp(j\frac{\pi}{2}) \hat{R}_y(\theta, \varphi) \cos \varphi \cos^2 \theta \exp(-jkr) \quad (\text{A.41})$$

$$Z H_z = \frac{-1}{\lambda r} \exp(j\frac{\pi}{2}) \hat{R}_y(\theta, \varphi) \sin \varphi \cos^2 \theta \exp(-jkr) \quad (\text{A.42})$$

A partir de l'équation (A.30), nous calculons les trois composantes  $H_r$ ,  $H_\theta$  et  $H_\varphi$  et nous montrons que :

$$ZH_r = 0 \quad (\text{A.43})$$

$$ZH_\theta = \frac{-1}{\lambda r} \exp(j\frac{\pi}{2}) \hat{R}_y(\theta, \varphi) \cos \theta \exp(-jkr) \quad (\text{A.44})$$

$$ZH_\varphi = 0 \quad (\text{A.45})$$

Par conséquent, le vecteur  $\mathbf{H}$ , en zone champ lointain, est porté par le vecteur  $\hat{\mathbf{u}}_\theta$ .

$$Z\mathbf{H}(r, \theta, \varphi) = ZH_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (\text{A.46})$$

Concernant le vecteur  $\mathbf{E}$ , nous suivons la même démarche que précédemment. En écrivant les composantes  $E_x$  et  $E_z$  sous forme de développement de Rayleigh, avec des amplitudes correspondantes  $\hat{C}_x$  et  $\hat{C}_z$ , nous déduisons grâce aux équations (A.3), (A.35), (A.36) et (A.37) que :

$$\hat{C}_x(\alpha, \gamma) = \frac{k\gamma}{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{R}_y(\alpha, \gamma) \quad (\text{A.47})$$

$$\hat{C}_z(\alpha, \gamma) = -\frac{k\alpha}{\alpha^2 + \gamma^2} \hat{R}_y(\alpha, \gamma) \quad (\text{A.48})$$

En utilisant l'expression de la composante radiale du champ électrique en fonction des composantes cartésiennes, nous montrons qu'en zone du champ lointain,  $E_r$  la composante radiale et la composante en site  $E_\theta$  sont nulles.

La composante en azimut est donnée par :

$$E_\varphi = -\frac{1}{\lambda r} \exp(j\frac{\pi}{2}) \hat{R}_y(\theta, \varphi) \cos \theta \exp(-jkr) \quad (\text{A.49})$$

Donc, pour la polarisation  $H_{//}$ , en zone de champ lointain, les vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  sont orientés comme suit :

$$\mathbf{E} = E_\varphi \hat{\mathbf{u}}_\varphi \quad (\text{A.50})$$

$$Z\mathbf{H} = ZH_\theta \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (\text{A.51})$$

et  $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{u}_r)$  est un trièdre direct.

Des résultats analogues peuvent être obtenus pour la polarisation  $E_{//}$  et nous montrons que :

$$Z\mathbf{H} = ZH_{\varphi}\hat{\mathbf{u}}_{\varphi} \quad (\text{A.52})$$

$$\mathbf{E} = E_{\theta}\hat{\mathbf{u}}_{\theta} \quad (\text{A.53})$$

# Annexe B

## Le bilan de puissance

Soit  $(\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i)$  un faisceau d'ondes planes incident éclairant une surface 2D. Le champ diffracté est noté  $(\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d)$ . Nous définissons deux vecteurs  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{G}$  tel que :

- en polarisation  $E_{//}$  :  $\mathbf{F} = \mathbf{E}$  et  $\mathbf{G} = Z\mathbf{H}$
- en polarisation  $H_{//}$  :  $\mathbf{F} = Z\mathbf{H}$  et  $\mathbf{G} = -\mathbf{E}$

Le champ incident peut s'écrire comme un continuum d'ondes planes. En polarisation  $E_{//}$ , nous avons :

$$\mathbf{F}_i(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_i^{(E_{//})}(\alpha, \gamma) \mathbf{V}(\alpha, \gamma) \times e^{-j\mathbf{k}_i \mathbf{r}} d\alpha d\gamma \quad (\text{B.1})$$

$\mathbf{k}_i$  est le vecteur d'onde incidente, il est donné par :

$$\mathbf{k}_i = \alpha \hat{\mathbf{x}} - \beta_1 \hat{\mathbf{y}} + \gamma \hat{\mathbf{z}} ; \text{Im}[\beta_1] = 0$$

$$\mathbf{V}(\alpha, \gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \hat{\mathbf{z}}$$

Le vecteur  $\mathbf{G}_i$  est donné par :

$$\mathbf{G}_i(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_i^{(E_{//})}(\alpha, \gamma) \left[ \frac{\mathbf{k}_i}{k_1} \wedge \mathbf{V}(\alpha, \gamma) \right] \times e^{-j\mathbf{k}_i \mathbf{r}} d\alpha d\gamma \quad (\text{B.2})$$

Nous supposons toutes les ondes planes élémentaires propagatives avec  $\hat{R}_i^{(E_{//})}(\alpha, \gamma) = 0$  pour  $\alpha^2 + \gamma^2 > k_1^2$ .

Le vecteur de Poynting complexe s'écrit :

$$\mathbf{S}_i = \frac{1}{2Z_1} (\mathbf{F}_i \wedge \mathbf{G}_i^*) \quad (\text{B.3})$$

Son flux à travers le plan  $(xOz)$  à une hauteur 'y' donne la puissance incidente totale  $P_i^{(E//)}$ .

$$\begin{aligned} P_i^{(E//)} &= \text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_i dx dz (-\hat{\mathbf{y}}) \right] \\ &= -\text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2Z_1} (\mathbf{F}_i \wedge \mathbf{G}_i^*) dx dy \hat{\mathbf{y}} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

D'après le théorème de Parseval permettant le passage du domaine spatial au domaine spectral, en remplaçant les vecteurs  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{F}$  par leurs expressions, l'équation (B.4) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P_i^{(E//)} &= -\frac{1}{4\pi^2} \text{Re} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2Z_1} (\hat{\mathbf{F}}_i \wedge \hat{\mathbf{G}}_i^*) d\alpha d\gamma \hat{\mathbf{y}} \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi^2} \text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2Z_1} \left| \hat{R}_i^{(E//)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \mathbf{V} \wedge \left[ \frac{\mathbf{k}_i}{k_1} \wedge \mathbf{V} \right] e^{(-j\beta_1 y + j\beta_1^* y)} d\alpha d\gamma \right] \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Avec  $-j\beta_1 + j\beta_1^* = 0$ , car l'onde incidente est propagative et  $\beta_1$  est réel.

D'autre part

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \wedge \left[ \frac{\mathbf{k}_i}{k_1} \wedge \mathbf{V} \right]) \hat{\mathbf{y}} &= (\mathbf{V}^2 \frac{\mathbf{k}_i^*}{k_1} - \left[ \frac{\mathbf{V}\mathbf{k}_i}{k_1} \mathbf{V} \right]) \hat{\mathbf{y}} \\ &= \frac{\beta_1^*}{k_1} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

En injectant ces calculs élémentaires dans la formule de  $P_i^{(E//)}$ , nous obtenons :

$$P_i^{(E//)} = \frac{1}{8\pi^2 Z_1} \text{Re} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{R}_i^{(E//)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \frac{\beta_1}{k_1} d\alpha d\gamma \right] \quad (\text{B.7})$$

$\beta$  est réel, donc l'intégration se fera uniquement sur les valeurs de  $\alpha$  et  $\gamma$  telles que  $\alpha^2 + \gamma^2 < k_1^2$ .

Nous obtenons :

$$P_i^{(E//)} = \frac{1}{8\pi^2 Z_1} \left[ \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_1^2} \left| \hat{R}_i^{(E//)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \frac{\beta_1}{k_1} d\alpha d\gamma \right] \quad (\text{B.8})$$

Les constantes de propagation s'expriment en fonction des angles de site  $\theta$  et d'azimut  $\varphi$  par :

$$\begin{cases} \alpha & = k_1 \sin \theta \cos \varphi \\ \beta_1(\alpha, \gamma) & = k_1 \cos \theta \\ \gamma & = k_1 \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

En passant dans un système de coordonnées sphériques  $(r, \theta, \varphi)$ , nous avons :

$$d\alpha d\gamma = |J| d\theta d\varphi$$

où  $|J|$  représente le jacobien et vaut :  $k_1^2 \sin \theta \cos \varphi$

La puissance incidente s'écrit :

$$P_i^{(E_{//})} = \frac{1}{2Z_1} \left(\frac{k_1}{2\pi}\right)^2 \int_{\pi}^0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \hat{R}_i^{(E_{//})}(k_1 \sin \theta \cos \varphi, k_1 \sin \theta \sin \varphi) \right|^2 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{B.9})$$

Un résultat similaire à (B.9) peut être obtenu pour une onde incidente en polarisation  $H_{//}$ .

Concernant le champ diffracté ( $\mathbf{E}_d, \mathbf{H}_d$ ) nous ferons le même calcul. Bien sûr comme nous travaillons avec des surfaces 2D, l'onde diffractée est dépolarisée et les deux polarisations fondamentales  $E_{//}$  ou  $H_{//}$  sont considérées.

$$\mathbf{E}_{d,m}(x, y, z) = \mathbf{E}_{d,m}^{(E_{//}pol_i)}(x, y, z) + \mathbf{E}_{d,m}^{(H_{//}pol_i)}(x, y, z) \quad (\text{B.10})$$

$$Z_m \mathbf{H}_{d,m}(x, y, z) = Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(E_{//}pol_i)}(x, y, z) + Z_m \mathbf{H}_{d,m}^{(H_{//}pol_i)}(x, y, z) \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{F}_{d,m}^{(pol_d pol_i)}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_{d,m}^{(pol_d pol_i)}(\alpha, \gamma) \mathbf{V}(\alpha, \gamma) \times e^{-j\mathbf{k}_{d,m}\mathbf{r}} d\alpha d\gamma \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{d,m}^{(pol_d pol_i)}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_{d,m}^{(pol_d pol_i)}(\alpha, \gamma) \left[ \frac{\mathbf{k}_{d,m}}{k_m} \wedge \mathbf{V}(\alpha, \gamma) \right] \\ &\times e^{-j\mathbf{k}_{d,m}\mathbf{r}} d\alpha d\gamma \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

où  $\mathbf{r} \mathbf{k}_{d,m} = \alpha x - \beta_m |y| + \gamma z$ , avec  $\mathbf{k}_{d,m}$  le vecteur d'onde diffracté dans le milieu m. Le vecteur  $\mathbf{V}$  donne la direction du champ diffracté parallèlement au plan  $(xOz)$  :

$$\mathbf{V}(\alpha, \gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \hat{\mathbf{x}} - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \hat{\mathbf{z}}$$

Le vecteur de Poynting complexe, dans le milieu m, est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{d,m} &= \frac{1}{2Z_m} (\mathbf{F}_{d,m} \wedge \mathbf{G}_{d,m}^*) \\ &= \frac{1}{2} \left( (\mathbf{E}_{d,m}^{(E//pol_i)} + \mathbf{E}_{d,m}^{(H//pol_i)}) \wedge (\mathbf{H}_{d,m}^{*(E//pol_i)} + \mathbf{H}_{d,m}^{*(H//pol_i)}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{d,m}^{(E//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_{d,m}^{*(E//pol_i)} \right] + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{d,m}^{(H//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_{d,m}^{*(H//pol_i)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{d,m}^{(E//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_{d,m}^{*(H//pol_i)} \right] + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{d,m}^{(H//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_{d,m}^{*(E//pol_i)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{d,m}^{(E//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_{d,m}^{*(E//pol_i)} \right] + \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{d,m}^{(H//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_{d,m}^{*(H//pol_i)} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Les produits vectoriaux faisant intervenir des vecteurs de champ de polarisations différentes donnent un résultat nul, car leur projection suivant  $\hat{\mathbf{y}}$  donne zéro.

La puissance diffractée totale  $P_{d,tot}^{(pol_i)}$  est le flux du vecteur Poynting à travers le plan  $(xOz)$  à une hauteur 'y' donnée.

$$P_{d,tot}^{(pol_i)} = \sum_{m \in \{1,2\}} \text{Re} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_{d,m} dx dz (\pm \hat{\mathbf{y}}) \right] \quad (\text{B.15})$$

avec un signe '+' pour le champ diffracté dans le milieu 1 et un signe '-' pour le milieu 2.

En utilisant les expressions des champs sous forme intégrale, ainsi que le théorème de Parseval, les résultats des calculs précédents nous permettent de déduire que :

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{d,m}^{(E//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_{d,m}^{*(E//pol_i)} \right] dx dz (\pm \hat{\mathbf{y}}) = \\ \frac{1}{8\pi^2 Z_m} \text{Re} \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{R}_{d,m}^{(E//pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \frac{\beta_m}{k_m} d\alpha d\gamma \right] \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left[ \mathbf{E}_{d,m}^{(H//pol_i)} \wedge \mathbf{H}_{d,m}^{*(H//pol_i)} \right] dx dz (\pm \hat{\mathbf{y}}) = \\ \frac{1}{8\pi^2 Z_m} Re \left[ \iint_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{R}_{d,m}^{(H//pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \frac{\beta_m}{k_m} d\alpha d\gamma \right] \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Au final, seules les ondes propagatives sont prises en compte dans le calcul de la puissance diffractée, car  $Re[\beta_m] = 0$  pour les ondes évanescentes. La puissance diffractée totale est donnée par :

$$P_d^{(pol_i)} = \sum_{m \in \{1,2\}} \frac{1}{8\pi^2 Z_m} \left[ \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_m^2} \left( \left| \hat{R}_{d,m}^{(E//pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 + \left| \hat{R}_{d,m}^{(H//pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \right) \frac{\beta_m}{k_m} d\alpha d\gamma \right] \quad (\text{B.18})$$

En coordonnées sphériques, les constantes de propagation s'écrivent :

$$\begin{cases} \alpha & = k_m \sin \theta \cos \varphi \\ \beta_m(\alpha, \gamma) & = k_m \cos \theta \\ \gamma & = k_m \sin \theta \sin \varphi \end{cases}$$

avec  $\frac{-\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  et  $0 < \varphi < \pi$

Ceci conduit à :

$$P_d^{(pol_i)} = \sum_{m \in \{1,2\}} \frac{1}{2Z_m} \left( \frac{k_m}{2\pi} \right)^2 \int_{\pi}^0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left( \left| \hat{R}_{d,m}^{(E//pol_i)}(\theta, \varphi) \right|^2 + \left| \hat{R}_{d,m}^{(H//pol_i)}(\theta, \varphi) \right|^2 \right) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi \quad (\text{B.19})$$

Les milieux considérés sont sans pertes. Le bilan des puissances impose que la puissance incidente soit égale à la puissance totale diffractée.

$$P_d^{(pol_i)} = P_i^{(pol_i)} \quad (\text{B.20})$$

donc en tenant compte des relations (B.18, B.8) :

$$\sum_{m \in \{1,2\}} \frac{1}{8\pi^2 Z_m} \left[ \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_m^2} \left( \left| \hat{R}_{d,m}^{(E//pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 + \left| \hat{R}_{d,m}^{(H//pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \right) \frac{\beta_m}{k_m} d\alpha d\gamma \right] = \frac{1}{8\pi^2 Z_1} \left[ \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_1^2} \left| \hat{R}_i^{(pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \frac{\beta_1}{k_1} d\alpha d\gamma \right] \quad (\text{B.21})$$

Sachant que  $Z_1 n_1 = Z_2 n_2$ , l'équation précédente nous donne :

$$\sum_{m \in \{1,2\}} \frac{n_m}{4\pi^2} \left[ \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_m^2} \left( \left| \hat{R}_{d,m}^{(E//pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 + \left| \hat{R}_{d,m}^{(H//pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \right) \frac{\beta_m}{k_m} d\alpha d\gamma \right] = \frac{n_1}{4\pi^2} Re \left[ \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_1^2} \left| \hat{R}_i^{(pol_i)}(\alpha, \gamma) \right|^2 \frac{\beta_1}{k_i} d\alpha d\gamma \right] \quad (\text{B.22})$$

Les expressions des champs diffractés établies au début de ce paragraphe contiennent aussi bien les champs réfléchis et transmis dans la direction spéculaire que dans toutes les autres directions de diffraction. Si nous exprimons l'amplitude totale de Rayleigh comme somme d'une amplitude du champ réfléchi spéculairement  $\hat{R}_{r,0}$ , du champ transmis  $\hat{R}_{t,0}$  et d'une amplitude du champ diffracté dans les autres directions  $\hat{R}_d$  alors :

$$\hat{R}_1^{pol_i pol_i}(\alpha, \gamma) = \rho_{r pol_i}(\alpha, \gamma) \hat{R}_i^{pol_i}(\alpha, \gamma) + \hat{R}_{d,1}^{pol_i pol_i}(\alpha, \gamma) \quad (\text{B.23})$$

$$\hat{R}_2^{pol_i pol_i}(\alpha, \gamma) = \rho_{t pol_i}(\alpha, \gamma) \hat{R}_i^{pol_i}(\alpha, \gamma) + \hat{R}_{d,2}^{pol_i pol_i}(\alpha, \gamma) \quad (\text{B.24})$$

$$\hat{R}_m^{\overline{pol_i} pol_i}(\alpha, \gamma) = \hat{R}_{d,m}^{\overline{pol_i} pol_i}(\alpha, \gamma) \quad (\text{B.25})$$

$\rho_{t pol_i}(\alpha, \gamma)$  et  $\rho_{r pol_i}(\alpha, \gamma)$  sont les coefficients de transmission et de réflexion de Fresnel (voir paragraphe § 1.7.1).

Il est à noter que l'onde réfléchi spéculairement ainsi que l'onde transmise ont la même polarisation que l'onde incidente.

Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |\hat{R}_1^{pol_i pol_i}|^2 + |\hat{R}_1^{\overline{pol_i} pol_i}|^2 &= |\rho_{r pol_i} \hat{R}_i^{pol_i}|^2 + |\hat{R}_{d,1}^{pol_i pol_i}|^2 + |\hat{R}_{d,1}^{\overline{pol_i} pol_i}|^2 \\ &+ 2Re[\rho_{r pol_i} \hat{R}_i^{pol_i} \hat{R}_{d,1}^{pol_i pol_i}] \end{aligned} \quad (B.26)$$

$$\begin{aligned} |\hat{R}_2^{pol_i pol_i}|^2 + |\hat{R}_2^{\overline{pol_i} pol_i}|^2 &= |\rho_{t pol_i} \hat{R}_i^{pol_i}|^2 + |\hat{R}_{d,2}^{pol_i pol_i}|^2 + |\hat{R}_{d,2}^{\overline{pol_i} pol_i}|^2 \\ &+ 2Re[\rho_{t pol_i} \hat{R}_i^{pol_i} \hat{R}_{d,2}^{pol_i pol_i}] \end{aligned} \quad (B.27)$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (B.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \{1,2\}} \frac{n_m}{4\pi^2} \left[ \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_m^2} \left( |\hat{R}_{d,m}^{(pol_i pol_i)}(\alpha, \gamma)|^2 + |\hat{R}_{d,m}^{\overline{pol_i} pol_i}(\alpha, \gamma)|^2 \right) \frac{\beta_m}{k_m} d\alpha d\gamma \right] \\ = -\frac{n_1}{4\pi^2} \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_1^2} Re \left[ \rho_{r pol_i} \hat{R}_{d,1}^{(pol_i pol_i)} \hat{R}_i^{(pol_i)} \right] \frac{\beta_1}{k_1} d\alpha d\gamma \\ - \frac{n_2}{4\pi^2} \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_2^2} Re \left[ \rho_{t pol_i} \hat{R}_{d,2}^{(pol_i pol_i)} \hat{R}_i^{(pol_i)} \right] \frac{\beta_2}{k_2} d\alpha d\gamma \end{aligned} \quad (B.28)$$

Pour une onde incidente plane caractérisée par les deux constantes de propagation  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ , nous pouvons écrire :

$$\hat{R}_i^{(pol_i)}(\alpha, \gamma) = \delta(\alpha - \alpha_i) \delta(\gamma - \gamma_i)$$

où  $\delta(\gamma)$  est la distribution de Dirac.

L'équation (B.28) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \{1,2\}} \frac{1}{4\pi^2} \left[ \iint_{\alpha^2 + \gamma^2 \leq k_m^2} \left( |\hat{R}_{d,m}^{(pol_i pol_i)}(\alpha, \gamma)|^2 + |\hat{R}_{d,m}^{\overline{pol_i} pol_i}(\alpha, \gamma)|^2 \right) \beta d\alpha d\gamma \right] \\ = -2Re \left[ \rho_{0r pol_i} \hat{R}_{d,1}^{(pol_i pol_i)}(\alpha_i, \gamma_i) \right] \beta_i \\ - 2Re \left[ \rho_{0t pol_i} \hat{R}_{d,2}^{(pol_i pol_i)}(\alpha_i, \gamma_i) \right] \beta_t \end{aligned} \quad (B.29)$$

où  $\rho_{0t pol_i} = \rho_{t pol_i}(\alpha_i, \gamma_i)$  et  $\rho_{0r pol_i} = \rho_{r pol_i}(\alpha_i, \gamma_i)$

En passant en coordonnées sphériques et en utilisant les relations (B.9, B.19), puis en divisant de part et d'autre de l'équation précédente par  $L^2 \beta_i$ , nous introduisons le

coefficient de diffusion bistatique normalisé et obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{p \in \{pol_i, \overline{pol_i}\} \\ m \in \{1, 2\}}} \iint_{2\pi} \sigma_m^{(p pol_i)}(\theta, \varphi) d\Omega &= -\frac{2\rho_{0r} pol_i}{L^2} Re \left[ \hat{R}_{d,1}^{(pol_i pol_i)}(\alpha_i, \gamma_i) \right] \\
&- \frac{2\rho_{0t} pol_i \beta_t}{L^2 \beta_i} Re \left[ \hat{R}_{d,2}^{(pol_i pol_i)}(\alpha_i, \gamma_i) \right] \quad (B.30)
\end{aligned}$$

# Annexe C

## Coordonnées non orthogonales

L'espace à trois dimensions est muni d'un repère  $R(\mathbf{O})$ , défini par un point à l'origine  $\mathbf{O}$  et trois vecteurs de base  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ . Nous notons  $(x^1, x^2, x^3)$  les coordonnées d'un point  $P$  de l'espace dans ce repère.

### C.1 Composantes covariantes et contravariantes d'un vecteur

Le vecteur position  $\mathbf{OP}$  s'écrit :

$$\mathbf{OP} = \sum_{i=1}^3 x^i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{C.1})$$

Soit  $(\hat{\mathbf{e}}_{1'}, \hat{\mathbf{e}}_{2'}, \hat{\mathbf{e}}_{3'})$  une deuxième base associée à ce même espace. Les nouvelles coordonnées du point  $P$  sont notées :  $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ . Dans cette nouvelle base, le vecteur position est donné par :

$$\mathbf{OP} = \sum_{i'=1}^3 x^{i'} \hat{\mathbf{e}}_{i'} \quad (\text{C.2})$$

Chacun des vecteurs de la base  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des vecteurs de base  $(\hat{\mathbf{e}}_{1'}, \hat{\mathbf{e}}_{2'}, \hat{\mathbf{e}}_{3'})$ . Pour  $i = 1$  par exemple, nous pouvons écrire :

$$\hat{\mathbf{e}}_1 = \sum_{i'=1}^3 a_1^{i'} \hat{\mathbf{e}}_{i'} \quad (\text{C.3})$$

En généralisant cette relation pour tout  $i$ , les relations de changement de base peuvent s'exprimer comme suit :

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i'=1}^3 A_i^{i'} \hat{\mathbf{e}}_{i'} \quad (\text{C.4})$$

avec  $A_i^{i'}$  matrice dont les coefficients sont les composantes  $a_i^{i'}$

En supposant que la matrice  $A_i^{i'}$  est régulière et qu'elle est inversible, nous pouvons écrire aussi :

$$\hat{\mathbf{e}}_{i'} = \sum_{i=1}^3 A_{i'}^i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (\text{C.5})$$

avec  $A_{i'}^i$  matrice dont les coefficients sont les composantes  $a_{i'}^i$

$A_{i'}^i$  représente la matrice de passage de la base  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  vers la base  $(\hat{\mathbf{e}}_{1'}, \hat{\mathbf{e}}_{2'}, \hat{\mathbf{e}}_{3'})$ .  $A_i^{i'}$  est la matrice inverse de  $A_{i'}^i$  et assure le passage de  $(\hat{\mathbf{e}}_{1'}, \hat{\mathbf{e}}_{2'}, \hat{\mathbf{e}}_{3'})$  vers  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ .

En utilisant les équations (C.1, C.2) et les relations de changement de base (C.4) et (C.5), nous montrons que :

$$x^i = \sum_{i'=1}^3 A_i^{i'} x^{i'} \quad (\text{C.6})$$

$$x^{i'} = \sum_{i=1}^3 A_{i'}^i x^i \quad (\text{C.7})$$

Si nous comparons les deux relations (C.6, C.7), respectivement, avec les deux équations (C.4, C.5) nous pouvons voir que, par changement de base, les coordonnées  $x^i$  et  $x^{i'}$  se transforment, respectivement, à l'inverse des vecteurs de la base  $\hat{\mathbf{e}}_i$  et  $\hat{\mathbf{e}}_{i'}$ . Pour cette raison elles sont dites coordonnées contravariantes.

Une grandeur qui obéirait à une loi de changement de base analogue à celle des  $(\hat{\mathbf{e}}_i)$  serait dite covariante.

Nous écrivons, maintenant, le vecteur position comme  $\mathbf{OP} = \sum_{i=1}^3 x_i \hat{\mathbf{e}}^i$  dans la base  $(\hat{\mathbf{e}}^1, \hat{\mathbf{e}}^2, \hat{\mathbf{e}}^3)$ . En reprenant les mêmes calculs que précédemment, tout en respectant la nouvelle convention d'écriture concernant les indices, nous pouvons montrer que par changement de base les coordonnées  $x_i$  et  $x_{i'}$  se transforment respectivement de la même façon que les vecteurs de la base  $\hat{\mathbf{e}}_i$  et  $\hat{\mathbf{e}}_{i'}$ . Donc, ces coordonnées sont covariantes.

## C.2 Coordonnées curvilignes

En géométrie vectorielle, le vecteur position  $\mathbf{OP}$  peut s'exprimer soit à l'aide de ses composantes contravariantes  $x^i$  dans une base naturelle covariante  $\hat{\mathbf{e}}_i$ , soit en fonction des composantes covariantes  $x_i$  dans une base naturelle contravariante  $\hat{\mathbf{e}}^i$ .

Au lieu d'utiliser trois familles de plan comme surface de coordonnées, nous pouvons choisir trois familles de surface d'une autre nature. Ce choix doit se faire de manière qu'en tout point de l'espace, il passe une surface de chaque famille et une seule. Chaque surface est caractérisée par la valeur d'un paramètre qui reste constant pour tout point de la surface. Tout point de l'espace peut être considéré comme un point commun à trois surfaces de coordonnées ou bien comme le point commun à trois courbes de coordonnées.

Soit  $(\hat{\mathbf{e}}_{1'}, \hat{\mathbf{e}}_{2'}, \hat{\mathbf{e}}_{3'})$  une base associée au nouveau système de coordonnées, ayant des surfaces de coordonnées non planes. Les nouvelles coordonnées du point P sont notées :  $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ .

Considérons une transformation  $\Theta$ , permettant le passage des coordonnées  $(x^1, x^2, x^3)$  vers les coordonnées  $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ , suivant les trois équations non linéaires ci-dessous :

$$x^{1'} = f^{1'}(x^1, x^2, x^3) \quad (\text{C.8})$$

$$x^{2'} = f^{2'}(x^1, x^2, x^3) \quad (\text{C.9})$$

$$x^{3'} = f^{3'}(x^1, x^2, x^3) \quad (\text{C.10})$$

Supposons que les fonctions  $f^{i'}$  sont continûment dérivables et inversibles. Ce nouveau système de coordonnées représente un système de coordonnées curvilignes.

En chaque point P de l'espace, nous définissons un repère  $R(\mathbf{P})$ , ayant pour origine le point P et pour vecteur de base  $(\hat{\mathbf{e}}_{1'}, \hat{\mathbf{e}}_{2'}, \hat{\mathbf{e}}_{3'})$ , obtenus à partir de la base initiale par les relations ci-dessous :

$$\hat{\mathbf{e}}_{i'} = \sum_{i=1}^3 A_{i'}^i \hat{\mathbf{e}}_i \text{ avec } A_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \quad (\text{C.11})$$

$$\hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i'=1}^3 A_i^{i'} \hat{\mathbf{e}}_{i'} \text{ avec } A_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \quad (\text{C.12})$$

Les coefficients des matrices  $A_i^i$  et  $A_i^{i'}$  dépendent des fonctions  $f^{i'}$ , c'est-à-dire des coordonnées  $(x^{i'})$ . Donc  $R(\mathbf{P})$  est dépendant du point  $\mathbf{P}$  et représente le repère naturel lié à ce point. L'orientation des vecteurs de base  $(\hat{\mathbf{e}}_{1'}, \hat{\mathbf{e}}_{2'}, \hat{\mathbf{e}}_{3'})$  dépend aussi de la position du point  $\mathbf{P}$  dans l'espace. En effet, les directions de ces vecteurs de base sont portées par les tangentes aux trois courbes de coordonnées  $(f^{1'}(x^1, x^2, x^3), f^{2'}(x^1, x^2, x^3), f^{3'}(x^1, x^2, x^3))$  se coupant au point  $\mathbf{P}$ .

### C.3 Relation entre les coordonnées covariantes et contravariantes

Le produit scalaire des vecteurs de la base naturelle d'un système de coordonnées curvilignes donne les éléments  $g(i, j)$  d'un tenseur  $\mathbf{G}$  d'ordre 2, appelé tenseur métrique.

$$g_{ij} = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \quad (\text{C.13})$$

Ce tenseur est symétrique car :

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \\ &= \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= g_{ji} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

Il est à lui seul suffisant pour définir une base. En effet, il permet de connaître la longueur des vecteurs de base ainsi que les angles qu'ils forment deux à deux.

Les composantes covariantes d'un vecteur  $\mathbf{V}$  sont données par :

$$\begin{aligned} v_i &= \mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= \left( \sum_{j=1}^3 v^j \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \right) \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= \sum_{j=1}^3 g_{ij} v^j \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

L'équation (C.15) nous donne la relation entre les composantes covariantes et contravariantes du vecteur  $\mathbf{V}$ .

Nous pouvons tout aussi définir le tenseur métrique associé à la base contravariante et dont les éléments seront notés  $g^{ij}$ . Par analogie à la relation (C.15) nous écrivons

que :

$$v^i = \sum_{j=1}^3 g^{ij} v_j \quad (\text{C.16})$$

Lors d'un changement de base, les éléments du tenseur métrique de la base d'arrivée s'écrivent, comme ci-dessous, en fonction de ceux de la base de départ et des matrices de changement de base :

$$g_{i'j'} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{i'}^i A_{j'}^j g_{ij} \quad (\text{C.17})$$

et

$$g^{i'j'} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_i^{i'} A_j^{j'} g^{ij} \quad (\text{C.18})$$

## C.4 Systèmes de coordonnées curvilignes : le repère de translation

### C.4.1 Le cas 3D [33]

A partir d'un système de coordonnées cartésiennes ( $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ ), nous définissons un nouveau système comme suivant :

$$\begin{cases} x'_1 = x' = x \\ x'_3 = y' = y - a(x, z) \\ x'_3 = z' = z \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

Les surfaces de coordonnées  $y' = Cst$  sont des surfaces translattées suivant l'axe ( $Oy$ ) de la surface représentée par la fonction  $a(x, z)$ , d'où le nom de repère de translation.

D'après l'équation (C.11), les matrices de changement de base s'écrivent :

$$A_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} A_{1'}^1 & A_{2'}^1 & A_{3'}^1 \\ A_{1'}^2 & A_{2'}^2 & A_{3'}^2 \\ A_{1'}^3 & A_{2'}^3 & A_{3'}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x} & 1 & \frac{\partial a}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

$$A_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial a}{\partial x} & 1 & -\frac{\partial a}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

Les vecteurs de base covariants du repère naturel s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_{1'} = \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial a}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_{2'} = \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_{3'} = \frac{\partial a}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{\mathbf{e}}_3 \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

Les vecteurs de base contravariants du repère naturel sont donnés par :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}^{1'} = \hat{\mathbf{e}}^1 \\ \hat{\mathbf{e}}^{2'} = -\frac{\partial a}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^2 - \frac{\partial a}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}^3 \\ \hat{\mathbf{e}}^{3'} = \hat{\mathbf{e}}^3 \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

Les tenseurs métriques se calculent en utilisant les équations (C.13, C.17) :

$$g_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial x} & 1 & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial z} & \frac{\partial a}{\partial z} & 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.24})$$

$$g^{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\partial a}{\partial x} & 0 \\ -\frac{\partial a}{\partial x} & 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial z}\right)^2 & -\frac{\partial a}{\partial z} \\ 0 & -\frac{\partial a}{\partial z} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.25})$$

Nous notons que :

$$g' = \det(g^{i'j'}) = \det(g_{i'j'}) = 1 \quad (\text{C.26})$$

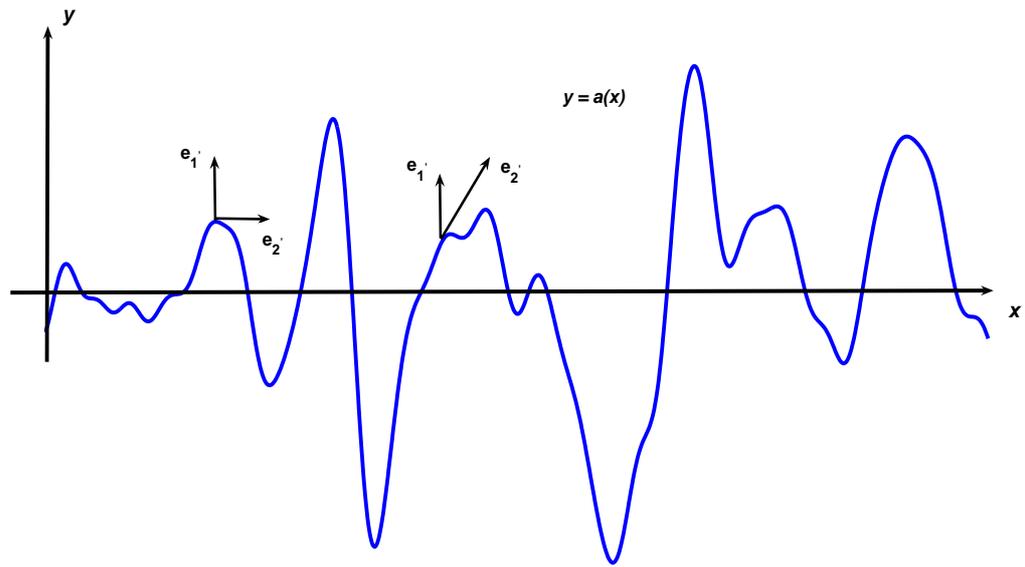
et vérifions que  $g^{i'j'} = (g_{i'j'})^{-1}$ .

Dans ce système de coordonnées translattées, les composantes covariantes d'un vecteur  $\mathbf{V}$  s'écrivent :

$$\begin{cases} v_{1'} = v_1 + \frac{\partial a}{\partial x} v_2 \\ v_{2'} = v_2 \\ v_{3'} = \frac{\partial a}{\partial z} v_2 + v_3 \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

### C.4.2 Le cas 2D [28]

Si la fonction 'a' ne dépend que de la première coordonnée  $x^1$ , alors  $x^{2'} = x^2 - a(x^1)$ . Cette équation représente une surface dite cylindrique, dont la génératrice reste parallèle à l'axe des coordonnées  $x^3$ . Dans ce cas, à partir d'un système de coordonnées cartésiennes ( $x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$ ), le système de translation est défini comme suit :



**Fig. C.1:** *Système de translation et repère naturel 2D*

$$\begin{cases} x'_1 = x' = x \\ x'_2 = y' = y - a(x) \\ x'_3 = z' = z \end{cases} \quad (\text{C.28})$$

La courbe de coordonnées  $x^{2'} = 0$  est tracée dans le plan  $z = Cts$ . La génératrice de cette courbe est parallèle à l'axe des  $z$ , perpendiculaire au plan de la figure. Quand le point P parcourt la courbe, les vecteurs de la base naturelle en ces points changent de direction.

D'après l'équation (C.11), les matrices de changement de base s'écrivent :

$$A_{i'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = \begin{pmatrix} A_{1'}^1 & A_{2'}^1 & A_{3'}^1 \\ A_{1'}^2 & A_{2'}^2 & A_{3'}^2 \\ A_{1'}^3 & A_{2'}^3 & A_{3'}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.29})$$

$$A_i^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & A_3^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & A_3^{2'} \\ A_1^{3'} & A_2^{3'} & A_3^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\partial a}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.30})$$

Les vecteurs de base covariants du repère naturel s'expriment par :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_{1'} = \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial a}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_{2'} = \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_{3'} = \hat{\mathbf{e}}_3 \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

et les vecteurs de base contravariants du repère naturel s'écrivent :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}^{1'} = \hat{\mathbf{e}}^1 \\ \hat{\mathbf{e}}^{2'} = -\frac{\partial a}{\partial x} \hat{\mathbf{e}}^1 + \hat{\mathbf{e}}^2 \\ \hat{\mathbf{e}}^{3'} = \hat{\mathbf{e}}^3 \end{cases} \quad (\text{C.32})$$

Les tenseurs métriques se calculent en utilisant l'équation(C.17), ou en imposant  $\frac{\partial a}{\partial z} = 0$  dans (C.24, C.25) :

$$g_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial a}{\partial x} & ; 0 \\ \frac{\partial a}{\partial x} & 1 & ; 0 \\ 0 & 0 & ; 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.33})$$

$$g^{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\partial a}{\partial x} & ; 0 \\ -\frac{\partial a}{\partial x} & 1 + \left(\frac{\partial a}{\partial x}\right)^2 & ; 0 \\ 0 & 0 & ; 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.34})$$

Dans ce système de coordonnées translattées, les composantes covariantes d'un vecteur  $\mathbf{V}$  s'écrivent :

$$\begin{cases} v_{1'} = v_1 + \frac{\partial a}{\partial x} v_2 \\ v_{2'} = v_2 \\ v_{3'} = v_3 \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

$$\begin{cases} v^{1'} = v^1 \\ v^{2'} = -\frac{\partial a}{\partial x} v^1 + v^2 \\ v^{3'} = v^3 \end{cases} \quad (\text{C.36})$$

# Annexe D

## Les équations de Maxwell en coordonnées covariantes

### D.1 Opérateur Div et Rot en coordonnées curvilignes [67]

Soit  $(i', j', k')$  trois indices pouvant prendre les valeurs  $(1,2,3)$ . Dans la base covariante  $(\hat{\mathbf{e}}_{i'})$  et d'après l'équation (C.17), nous obtenons :

$$g' = g \frac{1}{\left(\det(A_i^{i'})\right)^2}, \quad (\text{D.1})$$

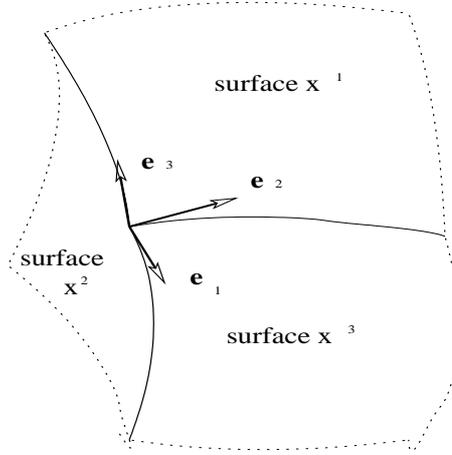
où  $g' = \det(g'^{ij})$  et  $g = \det(g^{ij})$ ; et donc

$$\hat{\mathbf{e}}_{1'}(\hat{\mathbf{e}}_{2'} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{3'}) = \sqrt{\frac{g'}{g}} \hat{\mathbf{e}}_1(\hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3) \quad (\text{D.2})$$

Dans notre cas, la base  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  du système cartésien est orthonormée, donc  $g = 1$  et  $\hat{\mathbf{e}}_1(\hat{\mathbf{e}}_2 \wedge \hat{\mathbf{e}}_3) = 1$ . Ceci implique que  $\hat{\mathbf{e}}_{1'}(\hat{\mathbf{e}}_{2'} \wedge \hat{\mathbf{e}}_{3'}) = \sqrt{g'}$ .

Un déplacement élémentaire est noté :

$$d\ell = \sum_{i'=0}^3 dx^{i'} \hat{\mathbf{e}}_{i'} \quad (\text{D.3})$$



**Fig. D.1:** Vecteurs de base en coordonnées curvilignes

L'élément de surface est donné par :

$$\begin{aligned} d\mathbf{S}^{i'j'} &= dx^{i'} \hat{\mathbf{e}}_{i'} \wedge dx^{j'} \hat{\mathbf{e}}_{j'} \\ &= \sqrt{g'} dx^{i'} dx^{j'} \hat{\mathbf{e}}^{k'} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

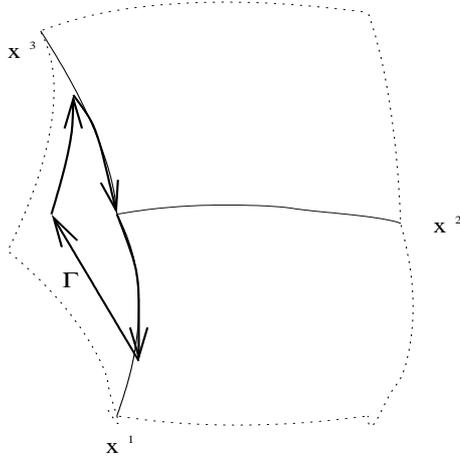
L'élément de volume est donné par :

$$\begin{aligned} d\tau &= dx^{2'} \hat{\mathbf{e}}_{2'} (dx^{3'} \hat{\mathbf{e}}_{3'} \wedge dx^{1'} \hat{\mathbf{e}}_{1'}) \\ &= \sqrt{g'} dx^{i'} dx^{j'} dx^{k'} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

En évaluant la circulation d'un vecteur  $\mathbf{V}$  sur un circuit fermé dans la surface de coordonnées  $x^2 = \text{Cst}$  (figure D.2), et en effectuant un développement limité à l'ordre 1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} d\ell)_\Gamma &= (\mathbf{V} \hat{\mathbf{e}}_{1'} dx^1)_{x^3 \text{ fixe}} + (\mathbf{V} \hat{\mathbf{e}}_{3'} dx^3)_{x^{1'} + dx^{1'}} - (\mathbf{V} \hat{\mathbf{e}}_{1'} dx^1)_{x^{3'} + dx^{3'}} - (\mathbf{V} \hat{\mathbf{e}}_{3'} dx^3)_{x^{1'}} \\ &= -\frac{\partial (\mathbf{V} \hat{\mathbf{e}}_{1'} dx^1)}{\partial x^{3'}} dx^{3'} + \frac{\partial (\mathbf{V} \hat{\mathbf{e}}_{3'} dx^3)}{\partial x^{1'}} dx^{1'} \\ &= \left( \frac{\partial (v_{3'})}{\partial x^{1'}} - \frac{\partial (v_{1'})}{\partial x^{3'}} \right) dx^{1'} dx^{3'} \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

D'après le théorème de Stokes :  $(\mathbf{V} d\ell)_\Gamma = (\mathbf{Rot} \mathbf{V} d\mathbf{S})_S$



**Fig. D.2:** Contour d'intégration fermé sur une surface  $x^2 = Cst$

d'où

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{V}d\ell)_\Gamma &= -(\mathbf{Rot} \mathbf{V} d\mathbf{S}^{1'3'}) \\
 &= -(\mathbf{Rot} \mathbf{V} dx^{1'} dx^{3'} \sqrt{g'}) \hat{\mathbf{e}}^{2'} \\
 &= -(\mathbf{Rot} \mathbf{V})^{2'} dx^{1'} dx^{3'} \sqrt{g'}
 \end{aligned} \tag{D.7}$$

A partir de (D.6) et (D.7), nous déduisons que :

$$(\mathbf{Rot} \mathbf{V})^2 = -\frac{1}{\sqrt{g'}} \left( \frac{\partial v_3}{\partial x^{1'}} - \frac{\partial v_1}{\partial x^{3'}} \right) \tag{D.8}$$

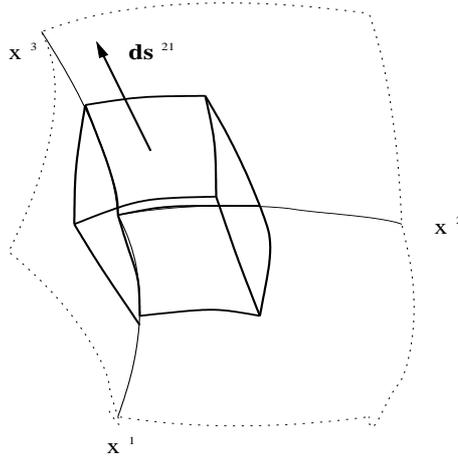
Nous pouvons généraliser ce résultat pour les autres composantes du vecteur rotationnel, nous obtenons :

$$(\mathbf{Rot} \mathbf{V})^i = \frac{1}{\sqrt{g'}} \left( \frac{\partial v_{k'}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial v_{j'}}{\partial x^{k'}} \right) \tag{D.9}$$

Pour avoir l'expression de la divergence, calculons le flux du vecteur  $\mathbf{V}$  au travers

d'une surface fermée (figure D.3) :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{V}dS)_S &= (\mathbf{V}d\mathbf{S}^{2'3'})_{x^1+dx^1} - (\mathbf{V}d\mathbf{S}^{2'3'})_{x^1} \\
&\quad + (\mathbf{V}d\mathbf{S}^{1'3'})_{x^2+dx^2} - (\mathbf{V}d\mathbf{S}^{1'3'})_{x^2} \\
&\quad + (\mathbf{V}d\mathbf{S}^{2'1'})_{x^3+dx^3} - (\mathbf{V}d\mathbf{S}^{2'1'})_{x^3} \\
&= \frac{\partial(\mathbf{V}d\mathbf{S}^{2'3'}dx^1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\mathbf{V}d\mathbf{S}^{1'3'}dx^2)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\mathbf{V}d\mathbf{S}^{2'1'}dx^3)}{\partial x^3} \\
&= \frac{\partial(\sqrt{g'}v^1dx^2dx^3)dx^1}{\partial x^1} \\
&\quad + \frac{\partial(\sqrt{g'}v^2dx^1dx^3)dx^2}{\partial x^2} \\
&\quad + \frac{\partial(\sqrt{g'}v^3dx^2dx^1)dx^3}{\partial x^3}
\end{aligned} \tag{D.10}$$



**Fig. D.3:** Surface d'intégration fermée pour l'expression de la divergence

D'autre part, le théorème d'Ostrogradsky stipule que :  $(\mathbf{a}d\mathbf{S})_\Sigma = \text{div}\mathbf{a}d\tau$ .

Nous obtenons :

$$\text{div}\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \sum_{i'=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^{i'}}(\sqrt{g'}v^{i'}) \tag{D.11}$$

## D.2 Equations de Maxwell sous leur forme covariante

Si nous considérons l'interface séparant les deux milieux dépourvue de courants et de charges libres, en utilisant les expressions de la divergence et du rotationnel en coordonnées contravariantes (D.11, D.9), les équations de Maxwell en régime harmonique s'écrivent :

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \sum_{i'=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^{i'}} (\sqrt{g'} B^{x^{i'}}) = 0 \quad (\text{D.12a})$$

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \left( \frac{\partial E_{x^{k'}}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial E_{x^{j'}}}{\partial x^{k'}} \right) = -j \omega B^{x^{i'}} \quad (\text{D.12b})$$

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \sum_{i'=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^{i'}} (\sqrt{g'} D^{x^{i'}}) = 0 \quad (\text{D.12c})$$

$$\frac{1}{\sqrt{g'}} \left( \frac{\partial H_{x^{k'}}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial H_{x^{j'}}}{\partial x^{k'}} \right) = +j \omega D^{x^{i'}} \quad (\text{D.12d})$$

Pour un milieu *LHI* non magnétique et invariant dans le temps d'un point de vue électrique, les relations constitutives sont données en régime harmonique par :

$$D^{x^{i'}} = \hat{\epsilon} E^{x^{i'}} \quad (\text{D.13a})$$

$$B^{x^{i'}} = \mu_0 H^{x^{i'}} \quad (\text{D.13b})$$

Nous pouvons constater que ces relations permettent de remonter aisément aux composantes des vecteurs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{B}$  connaissant  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ . Dans la suite, nous travaillerons uniquement sur les équations au rotationnel. D'après la relation (C.15) donnant les composantes contravariantes en fonction des composantes covariantes, et sachant que  $g' = 1$  pour ce système de translation (C.26), nous pouvons réécrire les deux équations (D.12b, D.12d) comme suit :

$$\left( \frac{\partial E_{x^{k'}}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial E_{x^{j'}}}{\partial x^{k'}} \right) = -j \omega \mu_0 \sum_{j'=1'}^{3'} g^{x^{i'} x^{j'}} H_{x^{j'}} \quad (\text{D.14a})$$

$$\left( \frac{\partial H_{x^{k'}}}{\partial x^{j'}} - \frac{\partial H_{x^{j'}}}{\partial x^{k'}} \right) = j \omega \hat{\epsilon} \sum_{j'=1'}^{3'} g^{x^{i'} x^{j'}} E_{x^{j'}} \quad (\text{D.14b})$$

Cette écriture fait intervenir uniquement les coordonnées covariantes des vecteurs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$ .

Sachant que  $(i', j', k') \longleftrightarrow (1', 2', 3')$  et que  $(x^1, x^2, x^3) \longleftrightarrow (x', y', z')$ , nous écrivons un système de trois équations pour les composantes électriques ainsi que pour les composantes magnétiques :

$$\left(\frac{\partial E_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial E_{y'}}{\partial z'}\right) = -j \omega \mu_0 \sum_{j'=1'}^{3'} g^{x'x^{j'}} H_{x^{j'}} \quad (\text{D.15a})$$

$$\left(\frac{\partial E_{z'}}{\partial x'} - \frac{\partial E_{x'}}{\partial z'}\right) = -j \omega \mu_0 \sum_{j'=1'}^{3'} g^{y'x^{j'}} H_{x^{j'}} \quad (\text{D.15b})$$

$$\left(\frac{\partial E_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial E_{x'}}{\partial y'}\right) = -j \omega \mu_0 \sum_{j'=1'}^{3'} g^{z'x^{j'}} H_{x^{j'}} \quad (\text{D.15c})$$

$$\left(\frac{\partial H_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial H_{y'}}{\partial z'}\right) = j \omega \hat{\epsilon} \sum_{j'=1'}^{3'} g^{x'x^{j'}} E_{x^{j'}} \quad (\text{D.16a})$$

$$\left(\frac{\partial H_{z'}}{\partial x'} - \frac{\partial H_{x'}}{\partial z'}\right) = j \omega \hat{\epsilon} \sum_{j'=1'}^{3'} g^{y'x^{j'}} E_{x^{j'}} \quad (\text{D.16b})$$

$$\left(\frac{\partial H_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial H_{x'}}{\partial y'}\right) = j \omega \hat{\epsilon} \sum_{j'=1'}^{3'} g^{z'x^{j'}} E_{x^{j'}} \quad (\text{D.16c})$$

$g^{x^i x^j}$  sont les termes du tenseur métrique.

### D.3 Expression d'une composante transversale en fonction des composantes longitudinales

Prenons par exemple l'équation (D.15a) et faisons sa dérivée par rapport à  $y'$ . En se rappelant que  $\omega \mu_0 = kZ$ ,  $g^{x'z'} = 0$  et  $g^{x'x'} = g^{z'z'} = 1$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 E_{z'}}{\partial y'^2} - \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial y' \partial z'}\right) &= -j \omega \mu \frac{\partial}{\partial y'} [H_{x'} + g^{x'y'} H_{y'}] \\ &= -jk g^{x'y'} \frac{\partial Z H_{y'}}{\partial y'} - jk \frac{\partial Z H_{x'}}{\partial y'} \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

En utilisant l'équation (D.16c) et en se rappelant que  $\omega\epsilon = \frac{k}{Z}$  et  $g^{z'x'} = 0$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial ZH_{x'}}{\partial y'} = \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial x'} - jk[g^{z'y'}E_{y'} + E_{z'}] \quad (\text{D.18})$$

En combinant (D.18) et (D.17), nous exprimons  $E_{z'}$  uniquement en fonction de  $E_{y'}$  et  $H_{y'}$  :

$$\frac{\partial^2 E_{z'}}{\partial y'^2} + k^2 E_{z'} = \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial y' \partial z'} - g^{z'y'} k^2 E_{y'} - jk \left( \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial x'} + g^{x'y'} \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial y'} \right) \quad (\text{D.19})$$

De la même manière, nous exhibons les trois autres équations donnant les composantes  $E_{x'}$ ,  $ZH_{x'}$  et  $ZH_{z'}$  uniquement en fonction de  $E_{y'}$  et  $ZH_{y'}$  :

$$\frac{\partial^2 E_{x'}}{\partial y'^2} + k^2 E_{x'} = \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial x' \partial y'} - k^2 g^{x'y'} E_{y'} + jk \left( g^{z'y'} \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial z'} \right) \quad (\text{D.20a})$$

$$\frac{\partial^2 ZH_{x'}}{\partial y'^2} + k^2 ZH_{x'} = \frac{\partial^2 ZH_{y'}}{\partial x' \partial y'} - k^2 g^{x'y'} ZH_{y'} - jk \left( g^{z'y'} \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{y'}}{\partial z'} \right) \quad (\text{D.20b})$$

$$\frac{\partial^2 ZH_{z'}}{\partial y'^2} + k^2 ZH_{z'} = \frac{\partial^2 ZH_{y'}}{\partial y' \partial z'} - k^2 g^{z'y'} ZH_{y'} + jk \left( g^{x'y'} \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'} \right) \quad (\text{D.20c})$$

## D.4 Equation de propagation

En dérivant (D.15a) et (D.15c) respectivement par rapport à  $z'$  et  $x'$ , nous obtenons :

$$\left( \frac{\partial^2 E_{z'}}{\partial y' \partial z'} - \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial z'^2} \right) = -j k Z \frac{\partial}{\partial z'} \sum_{j=1}^3 g^{x'x^j} H_{x^j} \quad (\text{D.21a})$$

$$\left( \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 E_{x'}}{\partial x' \partial y'} \right) = -j k Z \frac{\partial}{\partial x'} \sum_{j=1}^3 g^{z'x^j} H_{x^j} \quad (\text{D.21b})$$

En faisant la différence (D.21a - D.21b), nous déduisons que :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial z'^2} \right) = \\ & \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'} + \frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} \right) + j k \frac{\partial}{\partial z'} \sum_{j'=1}^3 g^{x'xj'} ZH_{xj'} - j k \frac{\partial}{\partial x'} \sum_{j'=1}^3 g^{z'xj'} ZH_{xj'} \quad (\text{D.22}) \end{aligned}$$

En tenant compte des valeurs des éléments du tenseur métrique (C.25) et en utilisant les deux équations (D.16a, D.16c), nous écrivons les expressions de  $E_{x'}$  et  $E_{z'}$ ,

$$j k E_{x'} = \left( \frac{\partial ZH_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial z'} \right) - j k g^{x'y'} E_{y'} \quad (\text{D.23a})$$

$$j k E_{z'} = \left( \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial ZH_{x'}}{\partial y'} \right) - j k g^{z'y'} E_{y'} \quad (\text{D.23b})$$

et déduisons l'expression  $\frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'}$  présente dans la relation (D.22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'} &= \frac{1}{jk} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial ZH_{z'}}{\partial y'} - \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial z'} \right) - \frac{\partial}{\partial x'} [g^{x'y'} E_{y'}] \\ &+ \frac{1}{jk} \frac{\partial}{\partial z'} \left( \frac{\partial ZH_{y'}}{\partial x'} - \frac{\partial ZH_{x'}}{\partial y'} \right) - \frac{\partial}{\partial z'} [g^{z'y'} E_{y'}] \\ &= \frac{-1}{jk} \frac{\partial}{\partial y'} \left( \frac{\partial ZH_{z'}}{\partial x'} - \frac{\partial ZH_{x'}}{\partial z'} \right) - \frac{\partial}{\partial x'} [g^{x'y'} E_{y'}] - \frac{\partial}{\partial z'} [g^{z'y'} E_{y'}] \end{aligned} \quad (\text{D.24a})$$

A partir de l'équation (D.16b), nous avons l'expression de  $\frac{\partial ZH_{z'}}{\partial x'} - \frac{\partial ZH_{x'}}{\partial z'}$  de (D.24) :

$$\left( \frac{\partial ZH_{z'}}{\partial x'} - \frac{\partial ZH_{x'}}{\partial z'} \right) = j k [E_{x'} + g^{y'y'} E_{y'} + E_{z'}] \quad (\text{D.25})$$

En injectant l'expression (D.25) dans l'équation (D.24) et en reportant le tout dans (D.22), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial z'^2} \right) + k^2 g^{y'y'} E_{y'} + \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} [g^{x'y'} E_{y'}] + \frac{\partial^2}{\partial y' \partial z'} [g^{z'y'} E_{y'}] + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} [g^{y'y'} E_{y'}] = \\ & -g^{y'x'} \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) E_{x'} - g^{y'z'} \left( k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) E_{z'} + j k \left[ \frac{\partial g^{x'y'} ZH_{y'}}{\partial z'} - \frac{\partial g^{z'y'} ZH_{y'}}{\partial x'} \right] \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

Nous remplaçons les termes  $(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y'^2})E_{x'}$  et  $(k^2 + \frac{\partial^2}{\partial y'^2})E_{z'}$  par leurs expressions (D.19). En notant que  $g^{x'y'}g^{y'x'} + g^{y'z'}g^{z'y'} = g^{y'y'} - 1$ , nous montrons que :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial x'^2} + g^{y'y'} \frac{\partial^2}{\partial y'^2} E_{y'} + \frac{\partial^2 E_{y'}}{\partial z'^2} + k^2 E_{y'} + \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} [g^{x'y'} E_{y'}] \\ & + \frac{\partial}{\partial y'} [g^{x'y'} \frac{\partial E_{y'}}{\partial x'}] + \frac{\partial^2}{\partial z' \partial y'} [g^{z'y'} E_{y'}] + \frac{\partial}{\partial y'} [g^{y'z'} \frac{\partial E_{y'}}{\partial z'}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.27})$$

L'équation (D.27) représente l'équation de propagation de la composante  $E_{y'}$ . Nous montrons aussi que la composante  $ZH_{y'}$  obéit à la même équation de propagation.

## Annexe E

# Théorème de Shannon et Formules d'interpolation

Théoriquement, nous pouvons écrire chaque composante  $\Psi(x, y, z)$  du champ électromagnétique comme suit :

$$\Psi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}(\alpha, \gamma) \exp(-j\alpha x) \exp(-j\beta y) \exp(-j\gamma z) d\alpha d\gamma \quad (\text{E.1})$$

où  $\hat{R}(\alpha, \gamma)$  est une fonction à variables continues.

Numériquement, nous écrivons que :

$$\Psi(x, y, z) = \sum_{s,t} \check{R}_{s,t} \exp(-j\alpha_s x) \exp(-j\beta_{s,t} y) \exp(-j\gamma_t z) \quad (\text{E.2})$$

Si nous discrétisons l'équation (E.1), nous obtenons :

$$\Psi(x, y, z) = \frac{\Delta\alpha\Delta\gamma}{4\pi^2} \sum_{s,t} \hat{R}_{s,t} \exp(-j\alpha_s x) \exp(-j\beta_{s,t} y) \exp(-j\gamma_t z) \quad (\text{E.3})$$

$$\text{D'où } \hat{R}_{s,t} = D^2 \check{R}_{s,t}, \text{ avec } D^2 = \frac{4\pi^2}{\Delta\alpha\Delta\gamma}.$$

Les  $\hat{R}_{s,t}$  sont les valeurs discrètes de la fonction continue  $\hat{R}(\alpha, \beta)$  aux points ( $\alpha_s = s \Delta\alpha$ ,  $\gamma_t = t \Delta\gamma$ ).

Supposons que ces valeurs discrètes soient issues d'une opération d'échantillonnage idéal.

$$\hat{R}_{ech}(\alpha, \gamma) = \hat{R}(\alpha, \gamma)\varpi(\alpha, \gamma) = \sum_{s,t} \hat{R}_{s,t} \delta(\alpha - s\Delta\alpha, \gamma - t\Delta\gamma) \quad (\text{E.4})$$

où  $\varpi(\alpha, \gamma)$  représente le peigne de Dirac en 3D.

$$\varpi(\alpha, \gamma) = \sum_s \sum_t \delta(\alpha - s\Delta\alpha, \gamma - t\Delta\gamma) \quad (\text{E.5})$$

En faisant la transformée de Fourier inverse de (E.4), nous obtenons :

$$R_{ech}(x, z) = R(x, z) * TF^{-1}[\varpi(\alpha, \gamma)] \quad (\text{E.6})$$

La transformée de Fourier d'un peigne de Dirac reste un peigne de Dirac :

$$\begin{aligned} TF^{-1}[\varpi(\alpha, \gamma)] &= \varpi(x, z) \\ &= \frac{4\pi^2}{\Delta\alpha\Delta\gamma} \sum_s \sum_t \delta(x - s\frac{2\pi}{\Delta\alpha}, z - t\frac{2\pi}{\Delta\gamma}) \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

D'où

$$\begin{aligned} R_{ech}(x, z) &= R(x, z) * \frac{4\pi^2}{\Delta\alpha\Delta\gamma} \sum_s \sum_t \delta(x - s\frac{2\pi}{\Delta\alpha}, z - t\frac{2\pi}{\Delta\gamma}) \\ &= \frac{4\pi^2}{\Delta\alpha\Delta\gamma} \sum_s \sum_t R(x - s\frac{2\pi}{\Delta\alpha}, z - t\frac{2\pi}{\Delta\gamma}) \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Si la fonction  $R(x, z)$  est à support centré borné  $x \in [-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}]$  et  $y \in [-\frac{D}{2}, \frac{D}{2}]$ , alors le théorème de Shannon précise que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{\Delta\alpha} \geq 2\frac{D}{2} \\ \frac{2\pi}{\Delta\gamma} \geq 2\frac{D}{2} \end{array} \right. \quad (\text{E.9})$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\alpha \leq \frac{2\pi}{D} \\ \Delta\gamma \leq \frac{2\pi}{D} \end{array} \right. \quad (\text{E.10})$$

Si nous réalisons un échantillonnage en respectant le critère de Shannon, il est possible de restituer  $\hat{R}(\alpha, \gamma)$  à partir du motif central de  $R_{ech}(x, z)$ , que nous devons isoler en faisant un filtrage passe bas (dans le domain spatial) avec la fréquence de coupure  $(\frac{D}{2}, \frac{D}{2})$ .

Ceci permet d'écrire :

$$\frac{4\pi^2}{\Delta\alpha\Delta\alpha}R(x, z) = R_{ech}(x, z)rect[\frac{x}{D}, \frac{z}{D}] \quad (\text{E.11})$$

D'où

$$R(x, z) = \frac{\Delta\alpha\Delta\gamma}{4\pi^2}R_{ech}(x, z)rect[\frac{x}{D}, \frac{z}{D}] \quad (\text{E.12})$$

En prenant la transformée de Fourier de (E.12), nous obtenons d'après les relations (E.12) et (E.4) :

$$\begin{aligned} \hat{R}(\alpha, \gamma) &= \frac{\Delta\alpha\Delta\gamma}{4\pi^2}\hat{R}_{ech}(\alpha, \gamma) * TF\{rect[\frac{x}{D}, \frac{x}{D}]\} \\ &= \frac{\Delta\alpha\Delta\gamma}{4\pi^2}\hat{R}_{ech}(\alpha, \gamma) * [\frac{2\pi}{\Delta\alpha}sinc(\frac{\pi\alpha}{\Delta\alpha})\frac{2\pi}{\Delta\gamma}sinc(\frac{\pi\gamma}{\Delta\gamma})] \\ &= \sum_{s,t} \hat{R}_{s,t} sinc(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\alpha - s\Delta\alpha)) sinc(\frac{\pi}{\Delta\gamma}(\gamma - t\Delta\gamma)) \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Cette formule d'interpolation en 3D reste valable en 2D. Dans ce cas, son expression est la suivante :

$$\hat{R}(\alpha) = \sum_s \hat{R}_s sinc(\frac{\pi}{\Delta\alpha}(\alpha - s\Delta\alpha)) \quad (\text{E.14})$$

Les deux équations (E.13) et (E.14) représentent les formules d'interpolation. Elles permettent de remonter à la fonction continue  $\hat{R}$  à partir de ces valeurs discrètes, respectivement dans le cas des surfaces 2D et 1D.

## Annexe F

# Raccordement des intégrales de Rayleigh et de la méthode C

En polarisation  $E_{//}$ , la composante  $E_y$  est nulle et nous pouvons exprimer le vecteur  $\mathbf{E}_{d,1}^{(E_{//} pol_i)}(x, y, z)$  dans le repère cartésien de la manière suivante :

$$\mathbf{E}_{d,1}^{(E_{//} pol_i)}(x, y, z) = E_{d,x,1}^{(E_{//} pol_i)}(x, y, z) \hat{\mathbf{x}} + E_{d,z,1}^{(E_{//} pol_i)}(x, y, z) \hat{\mathbf{z}} \quad (\text{F.1})$$

Avec  $E_y = 0$ , les composantes cartésiennes du champ électrique sont identiques aux composantes dans le repère translaté, nous déduisons que :

$$E_{dx',1}^{(E_{//} pol_i)}(x', y', z') = E_{dx,1}^{(E_{//} pol_i)}(x, y, z) \quad (\text{F.2})$$

$$E_{dz',1}^{(E_{//} pol_i)}(x', y', z') = E_{dz,1}^{(E_{//} pol_i)}(x, y, z) \quad (\text{F.3})$$

Soit  $y_{0,1} = \max[a(x, y)]$ . La représentation des composantes des champs diffractés, à cette hauteur, sous la forme d'intégrales de Rayleigh est valide :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{d,1}^{(E_{//} pol_i)}(x, y_{0,1}, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_1^{(E_{//} pol_i)}(\alpha, \gamma) \mathbf{V}^{(E_{//} pol_i)}(\alpha, \gamma) \\ &\quad \exp(-j\alpha x - j\gamma z) \exp(-j\beta y_{0,1}) d\alpha d\gamma \end{aligned} \quad (\text{F.4a})$$

D'où,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{d,1}^{(E_{//} pol_i)}(x', y' = y_{0,1} - a(x, z), z') &= \mathbf{E}_{d,1}^{(E_{//} pol_i)}(x, y_{0,1}, z) \\
&= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{R}_1^{(E_{//} pol_i)}(\alpha, \gamma) \mathbf{V}^{(E_{//} pol_i)}(\alpha, \gamma) \\
&\quad \exp(-j\alpha x - j\gamma z) \exp(-j\beta y_{0,1}) d\alpha d\gamma
\end{aligned} \tag{F.5a}$$

Ce résultat reste valable dans le milieu 2 à condition de remplacer le maximum de  $a(x, z)$  par son minimum et de prendre en compte le sens de la propagation de l'onde. Pour la polarisation  $H_{//}$ , un résultat identique à l'équation (F.5a), est obtenu pour le vecteur  $Z\mathbf{H}_{d,m}^{(H_{//} pol_i)}$  pour lequel  $H_y = 0$ .

# Annexe G

## Formalisme intégral [62]

### G.1 Deuxième théorème de Green

Soit  $\Omega$  une région de l'espace entourée par une surface fermée  $\Sigma$ . Nous notons l'extérieur de la région  $\Omega$  par  $\overline{\Omega}$ . Si  $f_1(\mathbf{r})$  et  $f_2(\mathbf{r})$  sont deux fonctions définies sur le domaine de définition de l'opérateur  $\nabla^2$  (Laplacien) alors :

$$f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1 = \nabla \cdot (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) \quad (\text{G.1})$$

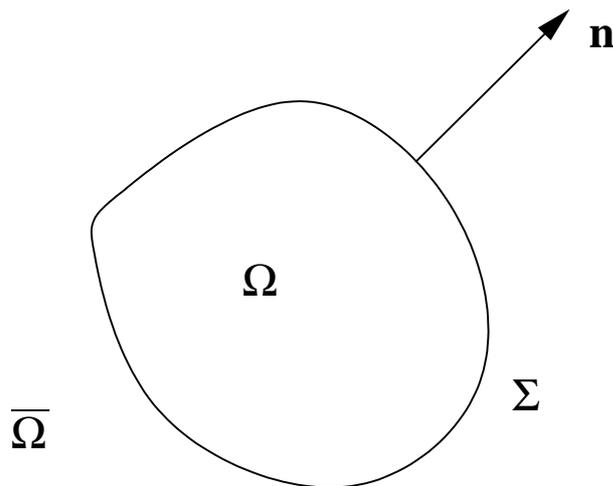


Fig. G.1: Le volume  $\Omega$ ,  $\overline{\Omega}$  et la surface  $\Sigma$

En intégrant l'équation précédente sur le volume  $\Omega$  et utilisant le théorème de la

divergence, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f_1 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 f_1) dv &= \int_{\Sigma} (f_1 \nabla f_2 - f_2 \nabla f_1) \mathbf{n} ds \\ &= \int_{\Sigma} (f_1 \frac{\partial}{\partial n} f_2 - f_2 \frac{\partial}{\partial n} f_1) ds \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

avec  $\frac{\partial}{\partial n} = \mathbf{n} \nabla$ , où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante

## G.2 Le principe de Huygen's

Soit  $\Psi(\mathbf{r})$  une composante d'un champ généré par la source  $f_s(\mathbf{r})$  localisée dans le volume  $\Omega_s$  entouré par la surface  $\Sigma_s$ .  $\Psi(\mathbf{r})$  obéit à l'équation d'onde suivante dans le volume  $\bar{\Omega}$  délimité par  $\Sigma$ ,  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_{infin}$

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r}) = -f_s(\mathbf{r}) \quad (\text{G.3})$$

Si  $g(\mathbf{r}', \mathbf{r})$  est la fonction de Green associée à l'espace libre et dont le point source est en  $\mathbf{r}'$  à l'intérieur de la surface  $\Sigma_s$ , alors nous pouvons écrire :

$$\nabla^2 g + k^2 g = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (\text{G.4})$$

La fonction de Green en trois dimensions est donnée par :

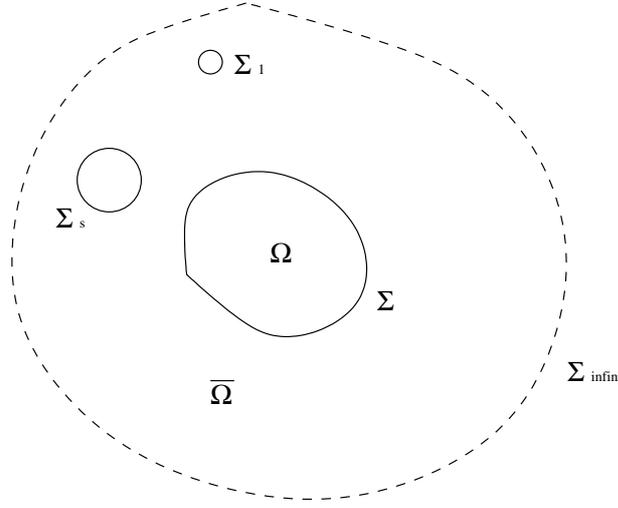
$$g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp -jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (\text{G.5})$$

Si le point d'observation est dans le volume  $\bar{\Omega}$  mais extérieur à  $\Omega_s$ , ceci donne :

$$\nabla^2 g + k^2 g = 0 \quad (\text{G.6})$$

Posons  $f_1 = \Psi$ ,  $f_2 = g$  et  $L = \nabla^2 + k^2$ , et supposons le point d'observation dans le volume  $\bar{\Omega}$  mais extérieur à  $\Omega_s$ .

$$\begin{aligned} (f_1 L f_2 - f_2 L f_1) &= \Psi(\mathbf{r}) [\nabla^2 g + k^2 g] - g [\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}) + k^2 \Psi(\mathbf{r})] \\ &= g f_s \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$



**Fig. G.2:** Région d'intégration  $\bar{\Omega}$

Compte tenu de la relation (G.7), l'équation (G.2) permet d'écrire :

$$\Psi_i(\mathbf{r}) = \int_{\Sigma_1 + \Sigma + \Sigma_{infin}} [\Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(\mathbf{r}')] d s' \quad (\text{G.8})$$

où  $\Psi_i(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_s} g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) f_s(\mathbf{r}') d v'$  représente par définition le champ incident.

Nous assimilons  $\Sigma_{infin}$  à une sphère de rayon infini, alors l'élément de surface est donné par :  $ds = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ . D'autre part, l'onde à l'infini doit rester d'amplitude finie. Ceci est assuré si la condition de Sommerfeld est vérifiée :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial}{\partial r} + jk \right) \Psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{G.9})$$

A partir de ces deux hypothèses nous déduisons que :

$$\begin{aligned} I_\infty &= \int_{\Sigma_{infin}} [\Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(\mathbf{r}')] d s' \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Pour ce qui est de l'intégrale sur la surface  $\Sigma_1$  entourant le point d'observation et assimilée à une petite sphère de rayon  $\epsilon$ , nous montrons qu'elle est égale à  $-\Psi(\mathbf{r})$ .

Soit  $M(\mathbf{r})$  le centre de la sphère  $\Sigma_1$ . Supposons que le point  $M'(\mathbf{r}')$  est sur la sphère  $\Sigma_1$ .

Si  $M' \rightarrow M$  alors  $\epsilon \rightarrow 0$ , la fonction de Green  $g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{\exp -jk|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}{4\pi|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}$  tend vers

$$g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \frac{\exp -jk|\epsilon|}{4\pi|\epsilon|}.$$

Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \lim_{M' \rightarrow M} I_{\Sigma_1} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_1} [\Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial \epsilon} g(\epsilon) - g(\epsilon) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Psi(\mathbf{r}')] \epsilon^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 4\pi \epsilon^2 [\Psi(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial \epsilon} g(\epsilon) - g(\epsilon) \frac{\partial}{\partial \epsilon} \Psi(\mathbf{r})] \\ &= -\Psi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{G.11})$$

Au final, l'équation (G.8) donne :

$$\Psi_i(\mathbf{r}) + \int_{\Sigma} [\Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) - g(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(\mathbf{r}')] d s' = \Psi(\mathbf{r}) \quad (\text{G.12})$$

Cette équation permet le calcul du champ  $\Psi(\mathbf{r})$  en un point d'observation extérieur à la surface  $\Sigma$  et ceci connaissant sa valeur sur la surface  $\Sigma$ . Elle reste valable pour un espace à deux dimensions. Il suffit de remplacer l'intégration sur le volume par une intégration sur une surface et l'intégration sur une surface par une intégration sur un contour. Ceci nous donne le champ en un point M situé en  $\mathbf{r}$  :

$$\begin{aligned} \Psi_i(\mathbf{r}) + \left(\frac{-j}{4}\right) \int_{\Gamma} [\Psi(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n'} H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) - H_0^{(2)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \frac{\partial}{\partial n'} \Psi(\mathbf{r}')] d \ell' \\ = \Psi(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (\text{G.13a})$$

# Bibliographie

- [1] P. Beckmann and A. Spizzichino, "The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces," Pergamon : Oxford, 1963.
- [2] G. Voronovich, "Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces," *Waves Random Media*, pp. 337-367, 1994.
- [3] L. Tsang, J.A. Kong and K.H. Ding, "Scattering of electromagnetic waves : theories and applications," John Wiley et Sons : New York, 2000.
- [4] T.M. Elfouhaily and C.A. Guérin, "A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces," *Waves Random Media*, Vol. 14, pp. 1-10, 2004.
- [5] A.J. Ogilvy, "Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces," Bristol : Hilger, 1991.
- [6] K.F. Warnick and W.C. Chew, "Numerical simulation methods for rough surface scattering," *Waves Random Media*, Vol. 11, pp. 1-30, 2001.
- [7] M. Saillard and A. Sentennac, "Rigorous solutions for electromagnetic scattering from rough surfaces," *Waves Random Media*, Vol. 11, pp. 103-137, 2001.
- [8] L. Tsang, J.A. Kong and K.H. Ding, "Scattering of electromagnetic waves - Numerical simulations," Wiley-Interscience : New York, 2001.
- [9] N. Déchamps, "Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des interfaces naturelles monodimensionnelles," Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2004.
- [10] D. Maystre, "An electromagnetic scattering from perfectly conducting rough surfaces in resonance region," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 31, pp. 885-895, 1983.
- [11] D. Maystre and P. Rossi, "Implementation of a rigorous vector theory of speckle for two-dimensional microrough surfaces," *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 3, pp. 1276-1282, 1986.
- [12] J.D. Jackson, "Classical Electrodynamics," John Wiley et Sons : New York, 1975.

- [13] R. Petit, "Ondes électromagnétiques en radioélectricité et en optique," ed. Masson : Paris, 1993.
- [14] G. Voronovich, "Wave Scattering from Rough Surfaces," Springer : Berlin, 1994.
- [15] R. Petit and M. Cadilhac, "Sur la diffraction d'une onde plane par un réseau infiniment conducteur," *C.R. Acad. Sci. B*, pp. 468-471, 1966.
- [16] P.M. Van Den Berg and J.T. Fokkema, "The Rayleigh hypothesis in the theory of diffraction by a perturbation in a plane surface," *Radio Sci.*, Vol. 15, pp. 723-732, 1980.
- [17] M. Born and E. Wolf, "Principles of optics - Electromagnetic theory of propagation interference and diffraction of light," Pergamon : Oxford, Appendix III, 1980.
- [18] C. Baudier and R. Dusséaux, "Scattering of an E// -polarized plane wave by one-dimensional rough surfaces : numerical applicability domain of a Rayleigh method in the far-field zone," *Progress In Electromagnetics Research*, Vol. 34, pp. 1-27, 2001.
- [19] R. Dusséaux and C. Baudier, "Scattering of a plane wave by 1-dimensional dielectric rough surfaces - Study of the field in a nonorthogonal coordinate system," *Progress In Electromagnetic Research*, Vol. 37, pp. 289-317, 2003.
- [20] J.M. Soto-Crespo, M. Nieto-Vesperinas and A.T. Friberg, "Scattering from slightly rough random surfaces : a detailed study on the validity of the small perturbation method," *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 7, pp. 1185-1201, 1990.
- [21] O. Taconet and V. Ciarletti, "Estimating soil roughness indices on a ridge-and-furrow surface using stereo photogrammetry," *Soil and Tillage Research*, pp. 64-76, 2007.
- [22] M. Charbit, "Eléments de théorie du signal : les signaux aléatoires," Ellipses : Paris, 1990.
- [23] M. Zribi, "Développement de nouvelles méthodes de modélisation de la rugosité pour la rétrodiffusion hyperfréquence de la surface du sol", Thèse de l'Université Paul Sabatier - Toulouse III, France, 1998.
- [24] M. Zribi, V Ciarletti, O. Taconet and P. Boissard, "Characterisation of the soil structure and microwave backscattering based on numerical three dimensional surface representation : Analysis with a Brownian model," *Remote Sens. Env.*, Vol. 72, pp. 159-169, 2000.
- [25] M.T. Hallikainen, F.T. Ulaby, M.C. Dobson, M.A. El-Rayes and L.K. Wu, "Microwave Dielectric Behavior of Wet Soil - Part I : Empirical Models and Experimental Observations," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, Vol. 23, pp. 25-34, 1985.
- [26] J.R. Wang and T.J. Schmugge, "An empirical model for the complex dielectric permittivity of soils as a function of water content," *IEEE Trans. Geosci. Remote Sensing*, Vol. 18, pp. 288-295, 1980.

- [27] M. Zribi, O. Taconet, V. Ciarletti and D. Vidal-Madjar, "Effect of row structures on radar microwave measurements over soil surface," *Int. J. Remote Sensing*, Vol. 23, pp. 5211-5224, 2002.
- [28] J. Chandezon, D. Maystre and G. Raoult, "A new theoretical method for diffraction gratings and its numerical application," *J. Opt. (Paris)*, Vol. 11, pp. 235-241, 1980.
- [29] L. Li and J. Chandezon, "Improvement of the coordinate transformation method for surface-relief gratings with sharp edges," *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 13, pp. 2247-2255, 1995.
- [30] S.J. Elston, P.G. Bryan-Brown and J.R. Sambles, "Polarization conversion from diffraction gratings," *Phys. Rev. B*, Vol. 44, pp. 6393-6400, 1991.
- [31] J.P Plumey, G. Granet and J. Chandezon, "Differential covariant formalism for solving Maxwell's equations in curvilinear coordinates : Oblique scattering from lossy periodic surfaces," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 43, pp. 835-842, 1995.
- [32] G. Granet, J.P Plumey and J. Chandezon, "Scattering by a periodically corrugated dielectric layer with non-identical faces," *Pure Appl. Opt.*, Vol. 4, pp. 1-5, 1995.
- [33] G. Granet, "Diffraction par des surfaces bipériodiques : résolution en coordonnées non-orthogonales," *Pure Appl. Opt.*, Vol. 4, pp. 777-793, 1995.
- [34] G. Granet, "Analysis of diffraction by surface-relief crossed gratings with use of the Chandezon method : application to multilayer crossed gratings," *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 15, pp. 1121-1131, 1998.
- [35] G. Granet, J. Chandezon, J.P Plumey and K. Raniriharinosy, "Reformulation of the coordinate transformation method through the concept of adaptative spatial resolution. Application to trapezoidal gratings," *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 18, pp. 2102-2108, 2001.
- [36] G. Granet and J. Chandezon, "La méthode des coordonnées curvilignes appliquée à la diffraction par des réseaux dont le profil est donné par des équations paramétriques : application à la diffraction par un réseau cycloïdal", *Pure App. Opt.*, Vol. 6, pp. 727-740, 1997.
- [37] T. Vallius, "Comparing the Fourier modal method with the C method : analysis of conducting multilevel gratings in TM polarization," *J. Opt. Soc. Am. A* Vol. 18, pp. 1555-1562, 2002.
- [38] S. Afifi, "Propagation et diffraction d'une onde électromagnétique dans des structures apériodiques," Thèse, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, 1986.
- [39] A. Benali, J. Chandezon and J. Fontaine, "A new theory for scattering of electromagnetic waves from conducting or dielectric rough surfaces," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 40, pp. 141-148, 1992.

- [40] R. Dusséaux and R. de Oliveira, "Scattering of a plane wave by 1-dimensional rough surface - Study in a nonorthogonal coordinate system," *Progress In Electromagnetic Research*, Vol. 34, pp. 63-88, 2001.
- [41] K. S. Edee, G. Granet, R. Dusséaux and C. Baudier, "A hybrid method for the study of plane waves scattering by rough surfaces," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, Vol. 18, No 8, pp. 1001-1015, 2004.
- [42] C. Baudier, "Diffraction d'ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoires : méthode approchée de Rayleigh et méthode exacte en coordonnées non-orthogonales," Thèse de l'Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, France, nov. 2002.
- [43] C. Baudier, R. Dusséaux, K.S. Edee and G. Granet, "Scattering of a plane wave by one-dimensional dielectric random surfaces - Study with the curvilinear coordinate method," *Waves in Random Media*, Vol. 14, pp. 61-74, 2004.
- [44] K. Aït Braham, R. Dusséaux and G. Granet, "Scattering of electromagnetic waves from two-dimensional perfectly conducting random rough surfaces - Study with the curvilinear coordinate method," soumis dans la revue *Waves in Random and Complex Media*.
- [45] C. Jeanperrin, "Initiation progressive au calcul tensoriel," Ellipse : Paris, 1987.
- [46] C.E. Shannon, "Mathematical theory of communication", *Bell System Tech. J.*, Vol. 27, pp. 379-423, 1948.
- [47] D. Middleton, "Statistical Communication Theory," McGraw-Hill : New York, 1960.
- [48] K. Pak, L. Tsang, C.H. Chan and J.T. Johnson "Backscattering enhancement of electromagnetic waves from two dimensionnal perfectly conducting random rough surfaces based on Monte-Carlo simulation," *J. Opt. Soc. Am.*, Vol. 12, pp. 2491-2499, 1995.
- [49] E.I. Thorsos, "The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum," *J. Acoust. Soc. Am. A*, Vol. 82, pp. 78-92, 1988.
- [50] D. Torrungrueng and J.T. Johnson, "Numerical studies of backscattering enhancement of electromagnetic waves from two-dimensional random rough surfaces with the forward-backward/novel spectral acceleration method," *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 18, pp. 2518-2526, 2001.
- [51] J.T. Johnson, L. Tsang, R.T Shin, K. Pak, C.H. Chan, A. Ishimaru and K. Yasuo, "Backscattering enhancement of electromagnetic waves from two-dimensional perfectly conducting random rough surfacers : A comparison of Monte-Carlo simulations with experimental data," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 44, pp. 748-756, 1996.

- [52] K. Pak, L. Tsang and J.T. Johnson, "Numerical simulations and backscattering enhancement of electromagnetic waves from two-dimensional dielectric random rough surfaces with the sparse-matrix canonical grid method," *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 18, pp. 1515-1529, 1997.
- [53] K. Aït Braham, R. Dusséaux, O. Taconet, E. Vannier and G. Granet, "Scattering from Two-Dimensional Dielectric random surface - Effect of Roughness and Moisture of seedbed Surfaces upon the Bistatic Scattering Coefficient," The International Geoscience And Remote Sensing Symposium, Barcelona, Spain, 23-27 July 2007, 3 pages.
- [54] G. Soriano and M. Saillard, "Scattering of electromagnetic waves from two-dimensional rough surfaces with an impedance approximation," *J. Opt. Soc. Am. A*, Vol. 18, pp. 124-133, 2001.
- [55] M. Saillard and D. Maystre, "Scattering from random rough surfaces : a beam simulation method," *J. Opt.*, Vol. 19, pp. 173-176, 1988.
- [56] R.L. Wagner, J. Song and W.C. Chew, "Monte Carlo simulations of electromagnetic scattering from two-dimensional random rough surfaces," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. 45, pp. 235-245, 1997.
- [57] L. Tsang, D. Chen and P. Xu, "Wave scattering with the UV multilevel partitioning method : 1. Two-dimensional problem of perfect electric conductor surface scattering," *Radio Sci.*, Vol. 39, RS5010, pp. 1-13, 2004.
- [58] L. Tsang, Q. Li, D. Chen, P. Xu and V. Jandhyala, "Wave scattering with the UV multilevel partitioning method : 2. Three-dimensional problem of nonpenetrable surface scattering," *Radio Sci.*, Vol. 39, RS5011, pp. 1-11, 2004.
- [59] H.D. Ngo and C.L. Rino, "Application of beam simulation to scattering at low grazing angles - 1 Methodology and validation," *Radio Sci.*, RS00823, pp. 1365-1379, 1994.
- [60] H.D. Ngo and C.L. Rino, "Application of beam simulation to scattering at low grazing angles - 2 Oceanlike surfaces," *Radio Sci.*, RS01924, pp. 1381-1391, 1994.
- [61] N. Morita, N. Kumagai and J.R. Mautz, "Integral equation methods for electromagnetics," London : Artech House, 1990.
- [62] A. Ishimaru, "Electromagnetic wave propagation, Radiation and scattering," Prentice Hall : New Jersey, 1991.
- [63] M.B. Faroux, "Optique et physique ondulatoire," Dunod : Paris, 1993.
- [64] K. Aït Braham and R. Dusséaux, "Analysis of the Scattering from Rough Surfaces with the C Method and the Short-Coupling Range Approximation," The 23rd Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, Conference proceeding, pp. 1880-1885, Verona, Italy, 19-23 march 2007.

- [65] N. Emad, S. Petiton and G. Adjlali, "Multiple explicit restarted Arnoldi method for solving large eigenproblems," à paraître dans *SIAM Journal on Scientific Computing*.
- [66] N. Emad, "The Padé-Rayleigh-Ritz method for solving large symmetric eigenproblem," *Numerical Algorithms*, Vol. 11, pp :159-179, 1996.
- [67] J.A. Stratton, "Electromagnetic theory," McGraw-Hill : New York, 1941.