



Le groupe fondamental algébrique

Eric Reynaud

► To cite this version:

Eric Reynaud. Le groupe fondamental algébrique. Mathématiques [math]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2002. Français. NNT : . tel-00202368

HAL Id: tel-00202368

<https://theses.hal.science/tel-00202368>

Submitted on 5 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER II
SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER II

Discipline : mathématiques
Formation doctorale : mathématiques
Ecole doctorale : ISS (Information, structures et systèmes)

présentée et soutenue publiquement

par

Eric REYNAUD

le mardi 18 juin 2002

Titre :

Le groupe fondamental algébrique

JURY :

M. Saorin,	président et rapporteur
C. Cibils,	directeur de Thèse
M.J. Redondo,	rapporteur
D. Guin,	membre du jury

Table des matières

Table des matières.....	1
Introduction.....	5
Chapitre 1 : Quelques notions préliminaires	9
I. Quelques modules particuliers	9
II. Le radical de Jacobson et le théorème de Krull-Schmidt	12
1/ Le radical de Jacobson d'un anneau, d'une algèbre.	12
2/ Le cas des algèbres locales.....	13
3/ Semi-simplicité et radical.....	13
4/ Le théorème de Krull-Schmidt.....	14
5/ Modules projectifs et indécomposables d'une algèbre.	14
6/ Modules projectifs et idempotents d'une algèbre.....	15
III. Notions homologiques et cohomologiques de base	15
Chapitre 2 : Présentation d'une algèbre par carquois et relations	19
I. Algèbres de carquois	19
1/ Carquois, chemins d'un carquois.....	19
2/ Algèbre de carquois.....	20
3/ Idéaux d'une algèbre de carquois.....	21
4/ Catégorie des carquois.....	23
II. Carquois de Gabriel	23
1/ Définition du carquois de Gabriel.....	23
2/ Algèbres basiques et sobres.....	24
3/ Présentation d'une algèbre par carquois et relations.	25
4/ Problème d'unicité de la présentation.	25
III. Présentation d'une algèbre d'incidence	26
1/ Poset et carquois ordonné.....	26
2/ Algèbre d'incidence.....	27

Chapitre 3 : Groupe fondamental algébrique **28**

I. Définition du groupe fondamental algébrique.	28
1/ Relations minimales.	28
2/ Relation d'équivalence liée à un idéal.	29
3/ Le groupe fondamental algébrique	30
4/ Exemples.	30
II. Algorithme de calcul de $\pi_1(Q, I)$	31
1/ Description de l'algorithme	31
2/ Exemples	33
III. Influence de la présentation.	35
1/ Contre-exemple.	35
2/ Le cas des algèbres étroites.	37
IV. Groupe fondamental et homologie de Hochschild.	39
1/ Extensions par un point	39
2/ Le théorème de Assem - De La Peña.	40
3/ Diverses notions de connexité.	41

Chapitre 4 : Réalisation topologique du groupe fondamental algébrique **43**

I. Complexes simpliciaux.	44
1/ Complexes simpliciaux et réalisation géométrique	44
2/ Homologie et Cohomologie simpliciale.	45
3/ Approximation du groupe fondamental topologique.	46
II. Poset et complexes simpliciaux.	47
1/ Poset associé à un complexe simplicial	47
2/ Complexe simplicial associé à un poset.	47
3/ Nerf d'une catégorie et carquois ordonné.	48
4/ Décomposition barycentrique d'un complexe simplicial	49
III. Isomorphisme entre les groupes fondamentaux.	50
IV. Conséquences et applications.	51
1/ Isomorphisme entre $Hom(\Pi_1(Q, I), k^+)$ et $HH^1(kQ/I)$.	52

Chapitre 5 : Algèbre d'incidence associée à une présentation **58**

I. Construction du poset associé à une présentation.	58
1/ Les sommets de Σ .	58
2/ Relation d'ordre sur Σ .	59
3/ Exemple	60
II. Relation entre les groupes fondamentaux.	61
1/ Surjection de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(\Sigma)$.	61

2/ Générateurs du noyau.....	64
3/ La suite exacte.....	65
4/ Cas où le morphisme est un isomorphisme.....	67
III. Exemples et influence de la présentation.	69
Bibliographie.....	72
Annexes.....	74

Je tiens à remercier ici tous ceux qui m'ont aidé dans la réalisation de cette thèse : tout particulièrement Claude CIBILS, mon directeur de thèse, pour sa disponibilité, ses conseils avisés, et toute l'aide qu'il m'a apportée ; Manolo SAORIN, avec qui j'ai eu la chance d'avoir de fructueuses discussions, à l'origine notamment du chapitre cinq ; et les personnes qui ont bien voulu être membre de mon jury c'est-à-dire, outre les personnes précédemment citées, Maria Julia REDONDO, Daniel GUIN, Guy LAFFAILLE.

Introduction

Dans l'optique d'étudier les modules de génération finie sur des algèbres de dimension finie, il a été développé ces dernières années une méthode diagramatique, essentiellement due à P. Gabriel, basée sur des carquois, c'est-à-dire sur des graphes orientés finis. Plus précisément, il a été démontré que pour toute algèbre A sobre de dimension finie sur un corps k algébriquement clos, il existe un carquois unique Q et au moins un idéal I admissible de l'algèbre kQ , l'algèbre des chemins de Q , tels que A soit isomorphe à kQ/I . Un tel couple (Q, I) est nommé une présentation de A par carquois et relations. Pour chaque paire (Q, I) , nous pouvons définir un groupe fondamental $\Pi_1(Q, I)$. En général, cependant, différentes présentations d'une même algèbre peuvent conduire à des groupes fondamentaux différents. Ainsi, une algèbre dont toutes les présentations donnent un groupe fondamental trivial est appelée simplement connexe. L'importance des algèbres simplement connexes dans la théorie des représentations d'algèbres réside dans le fait que souvent, il est possible de réduire, avec l'aide des recouvrements, l'étude des modules indécomposables d'une algèbre à ceux d'une algèbre simplement connexe bien choisie (voir par exemple [BG]).

Notre premier objectif a été de tenter de trouver une vision géométrique du groupe fondamental pour une certaine classe d'algèbre : les algèbres d'incidence. Ces algèbres d'incidence sont construites à partir d'un ensemble partiellement ordonné fini que l'on appelle plus succinctement un poset et ont une particularité : leur groupe fondamental ne dépend pas du choix de la présentation. Les algèbres ayant cette propriété sont néanmoins plus nombreuses ; en particulier, il a été montré récemment que les algèbres étroites (constricted en anglais) possédaient cette propriété (voir [BM]). Ainsi, à chaque poset, il est possible d'associer un groupe fondamental algébrique. Par ailleurs, ce poset, considéré comme une catégorie, a un nerf, c'est-à-dire qu'il existe une manière intrinsèque de construire à partir de ce poset un complexe simplicial. La réalisation géométrique de ce complexe simplicial possède quant à elle un groupe fondamental topologique. Mais existe-t-il un lien entre ces deux groupes fondamentaux ? Des résultats récents, dus à I. Assem et J.A. De La Peña, établissent une relation entre le groupe fondamental algébrique et le premier groupe de cohomologie de Hochschild de l'algèbre d'incidence, voir [AP]. De plus, M. Gerstenhaber et S.P. Schack, voir [GS] ou [Ci1], ont montré que la cohomologie de Hochschild de cette algèbre d'incidence est la cohomologie du complexe simplicial. Or ces liens cohomologiques nous laissent penser qu'il existe une certaine relation entre ces deux groupes fondamentaux. En effet, nous montrons :

Théorème. Soit P un poset et $Sim(P)$ le complexe simplicial associé, alors il existe un isomorphisme entre le groupe fondamental algébrique de P et le groupe fondamental topologique de $Sim(P)$.

Ce lien permet non seulement d'adapter certains théorèmes de topologie tel que le théorème de Van Kampen, mais également de faire le lien entre des résultats déjà établis en topologie et d'autres en théorie des représentations. Ainsi, le théorème de I. Assem et J.A. De La Peña, dans le cadre des algèbres d'incidence, établissant l'isomorphisme entre $Hom(\Pi_1(Q, I), k^+)$ et $HH^1(kQ/I)$ le premier groupe de la cohomologie de Hochschild de cette algèbre d'incidence, peut être obtenu à partir d'un résultat classique de topologie.

Dans un deuxième temps, afin de donner une vision géométrique du groupe fondamental algébrique, nous avons associé à toute présentation (Q, I) d'algèbre une algèbre d'incidence A dont le groupe fondamental a la particularité, d'après le théorème précédent, de se réaliser géométriquement. La façon de procéder pour construire cette algèbre étant naturelle, il semblait raisonnable de penser qu'un lien étroit unissait les groupes fondamentaux de ces deux présentations. En effet, il existe une surjection de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(A)$, mais malheureusement pas d'injection. L'idée suivante fut donc de décrire le noyau de ce morphisme. Finalement :

Théorème. Soit (Q, I) la présentation d'une algèbre et A l'algèbre d'incidence associée, il existe un sous-groupe H de $\Pi_1(Q, I)$ que l'on peut décrire par générateurs tel que la suite suivante soit exacte :

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow \Pi_1(Q, I) \longrightarrow \Pi_1(A) \longrightarrow 1$$

Il existe de nombreux cas où ce noyau est nul, par exemple dans les cas où l'algèbre est Schurian ou lorsque le carquois ne contient pas de "huit". En l'occurrence, il devient facile, grâce à ce théorème, de calculer le groupe fondamental des algèbres d'incidence dont le carquois est une couronne.

Enfin, nous avons travaillé sur un algorithme de calcul du groupe fondamental, qui permet de présenter rapidement le groupe fondamental par générateurs et relations. Pour calculer le groupe fondamental d'un couple (Q, I) , nous montrons qu'il est isomorphe au groupe fondamental d'un couple (Q', I') où Q' contient un sommet de moins que Q . Ainsi en réitérant le processus, le groupe fondamental $\Pi_1(Q, I)$ est isomorphe au groupe fondamental d'un carquois ne contenant qu'un seul sommet ce qui donne une présentation par générateurs et relations. Cet algorithme permet également de calculer le premier groupe de cohomologie de Hochschild des algèbres dont une présentation vérifie les hypothèses décrites par I. Assem et M. Saorin dans [PS] permettant d'obtenir un isomorphisme entre $Hom(\Pi_1(Q, I), k^+)$ et $HH^1(kQ/I)$.

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions élémentaires. Il contient entre autre les définitions et les propriétés usuelles de modules particuliers, le théorème de Krull-Schmidt et son influence sur la théorie des représentations et enfin des notions homologiques, avec une description plus spécifique de la cohomologie de Hochschild.

Le second chapitre sera consacré à des éléments classiques de la théorie des représentations moins connus des non-spécialistes mais qui sont le point de départ de toutes les notions suivantes. Ainsi nous évoquerons les carquois et les algèbres de carquois, le théorème de Gabriel et la présentation d'une algèbre par carquois et relations, enfin, la notion d'algèbre d'incidence.

Nous évoquerons ensuite, dans le chapitre 3, les définitions standards concernant le groupe fondamental algébrique, l'influence de la présentation de l'algèbre pour le calcul du Π_1 et les algèbres connues comme ayant le même groupe fondamental quelle que soit leur présentation. Nous énoncerons et démontrerons également l'algorithme de calcul du groupe fondamental

dont nous avons parlé précédemment ; nous en donnerons quelques exemples. Nous aborderons aussi dans ce chapitre le lien étroit qui existe entre le groupe fondamental et le premier groupe de la cohomologie de Hochschild en énonçant le théorème de I. Assem et J.A. De La Peña.

Le quatrième chapitre sera consacré à la mise en place du premier théorème énoncé. Ainsi, après avoir défini ce qu'est un complexe simplicial, nous préciserons les liens qui les unissent aux posets. Ensuite, nous montrerons que P étant un poset et Σ son nerf, alors les groupes fondamentaux, topologique pour Σ et algébrique pour P , sont isomorphes. De plus, tout complexe simplicial fini peut être envisagé comme un poset, en considérant la relation d'ordre de l'inclusion ; dans ce cas là également, les groupes fondamentaux sont isomorphes. Puis nous donnerons quelques applications. Ce chapitre fait l'objet d'une publication à paraître dans *Journal of Pure and Applied Algebra* et qui est figure en annexe. Après avoir achevé ce travail, j'ai appris que J.C. Bustamente avait indépendamment démontré un résultat analogue (voir [Bus]).

Dans le dernier chapitre, nous construirons une surjection du groupe fondamental d'une présentation dans celui d'un algèbre d'incidence construite à partir de cette présentation et nous en décrirons le noyau. Nous donnerons quelques cas simples où ce noyau est trivial, ce qui permet de réaliser géométriquement le groupe fondamental.

Dans tout ce travail, k désignera un corps algébriquement clos.

Quelques notions préliminaires

Ce premier chapitre a pour but de rappeler des résultats élémentaires dont nous aurons besoin dans les chapitres suivants. Les démonstrations des propositions de ce chapitre ne seront pas proposées. Dans un premier temps, nous donnerons les définitions et les propriétés principales de certains modules particuliers tels que les modules projectifs, indécomposables, simples et semi-simples. Ensuite nous rappellerons les résultats principaux liés au radical de Jacobson d'une algèbre et d'un module. Le paragraphe suivant énoncera le théorème de Krull-Schmidt qui affirme l'unicité de la décomposition d'un module en somme de sous-modules indécomposables et nous en donnerons quelques applications liées à notre sujet. Enfin, nous rappellerons quelques notions très élémentaires sur l'homologie et la cohomologie, et plus particulièrement sur la cohomologie de Hochschild, qui nous seront utiles dans les prochains chapitres.

I. Quelques modules particuliers.

Commençons par rappeler la définition des modules libres. Dans tout le paragraphe, A désignera un anneau.

Définition - Module libre. Un A -module M à gauche est dit libre si et seulement s'il existe une base sur M , c'est-à-dire s'il existe une famille $(s_i)_{i \in I}$ de M telle que tout x de M puisse s'écrire de manière unique sous la forme $x = \sum_{i \in I} \lambda_i s_i$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des éléments de A

Définition - Module projectif. Soit A un anneau, un A -module P est dit projectif, si pour tout morphisme s surjectif de A -modules de M dans M' , et tout morphisme f de P dans M' , il existe une application g de P dans M vérifiant $f = s \circ g$.

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \nearrow g & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{s} & M' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Proposition I.1. Une somme directe de A -modules est projective si et seulement si chaque terme est projectif.

Preuve. voir par exemple [HS], p.24, proposition 4.5. $\square$

Proposition I.2. Soit P un A -module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. P est projectif.
2. Il existe un A -module Q tel que $P \oplus Q$ soit un module libre.
3. Toute suite exacte $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$ scinde.
4. Le foncteur $\text{Hom}(P, .)$ est exact, c'est-à-dire que pour toute suite exacte

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

la suite

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(P, A) \xrightarrow{f_*} \text{Hom}(P, B) \xrightarrow{g_*} \text{Hom}(P, C) \longrightarrow 0$$

est encore exacte.

Lemme I.3. Soit $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ une suite exacte de A -modules scindés, alors M_2 est isomorphe à la somme directe $M_1 \oplus M_3$.

Plus précisément, si h est le morphisme de M_3 dans M_2 vérifiant $g \circ h = \text{Id}_{M_3}$, alors $M = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(h)$.

Preuve. pour la preuve du lemme et du théorèmes, voir par exemple [HS], p.24-25, proposition 4.6., 4.7. $\square$

Définissons à présent les modules indécomposables qui jouent un rôle important dans la construction du carquois de Gabriel.

Définition - Modules indécomposables. Soit A un anneau. Un A -module M , est dit indécomposable s'il ne peut s'écrire comme somme directe de deux A -modules non nuls. En d'autres termes, M est indécomposable si et seulement si :

$$M = M_1 \oplus M_2 \quad \implies \quad M_1 = 0 \quad \text{ou} \quad M_2 = 0$$

Proposition I.4. Soit Λ une algèbre de dimension finie sur un corps k . Tout Λ -module M de dimension finie se décompose en somme directe finie de modules indécomposables.

Proposition I.5. - la décomposition de Peirce. Soit Λ une algèbre de dimension finie sur un corps k et une décomposition somme directe de sous-modules : $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$. Sur cette somme directe, l'unité se décompose en $1 = e_1 + \dots + e_n$, avec e_i dans M_i pour tout i de $\{1, \dots, n\}$. Alors

1. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille d'idempotents orthogonaux.
2. L'algèbre Λ se décompose en $\Lambda = \Lambda.e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda.e_n$.

3. Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, le module M_i est égal à $\Lambda.e_i$.
4. Si de plus les M_i sont indécomposables, les idempotents sont primitifs c'est-à-dire qu'il ne peuvent s'écrire comme la somme de deux idempotents orthogonaux non nuls.
5. Tout Λ -module M peut se décomposer en $M = \bigoplus_{i=1}^n M.e_i$.
6. Tout Λ - Λ -bimodule M peut se décomposer en $M = \bigoplus_{i,j=1}^n e_j.M.e_i$.

Preuve. La proposition (Ch1: I.4) se traite facilement par récurrence sur la dimension de Λ . Pour la proposition (Ch1: I.5), consulter par exemple le paragraphe 1.7. de [DK]. $\square$

Définissons enfin les propriétés des modules simples et semi-simples. Soit A un anneau et M un A -module. Il existe toujours deux sous modules qui sont $\{0\}$ et M appelés les sous-modules triviaux de M .

Définition - Modules simples. Un module simple est un module n'ayant pas d'autres sous-modules que les triviaux, c'est-à-dire pas d'autres sous-modules que M et $\{0\}$.

Remarques. Les modules simples sont des modules indécomposables, en effet si le module M n'est pas indécomposable, il se décompose en $A \oplus B$ de façon non trivial. Les modules A et B sont des sous-modules non triviaux de M qui n'est donc pas simple.

La réciproque. Par exemple, le $\mathbb{Z}$ -module $\mathbb{Z}$ n'est pas simple car pour tout p de $\mathbb{Z}$, les $\mathbb{Z}$ -modules $p\mathbb{Z}$ sont des sous-modules. Cependant $\mathbb{Z}$ est indécomposable. En effet dans le cas contraire, comme les seules sous-modules de $\mathbb{Z}$ sont les $p\mathbb{Z}$, on aurait une somme directe de la forme $\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$. La somme étant directe $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ ont une intersection réduite à 0 ce qui est faux car il contient ab .

Lemme de Schur I.6. Soit S et T deux modules simples, alors un morphisme de S vers T non nul est un isomorphisme.

Preuve. voir [DK], p.31, théorème 2.1.1. $\square$

Définition - modules semi-simples. Un module semi-simple s'il est somme directe finie de modules simples.

Proposition I.7. (Caractérisation des modules semi-simples) Soit A un anneau et M un A -module de génération finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. M est semi-simple.
2. M est somme finie de sous-modules simples de M .
3. Tout sous-module N de M admet un supplémentaire.
4. Tout sous-module simple N de M admet un supplémentaire.

Preuve. voir [DK], p.32, théorème 2.2.1. $\square$

Corollaire I.8. Soit Λ une algèbre sur un corps k . Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. Λ est semi-simple.
2. Tout idéal à gauche (resp. à droite) de Λ est de la forme Λe (resp. $e\Lambda$) où e est un idempotent.
3. Tout idéal bilatère non nul de Λ contient un idempotent non nul.
4. Λ n'a pas d'idéal bilatère nilpotent non nul.
5. Λ n'a pas d'idéal à gauche (resp. à droite) nilpotent non nul.
6. Tout Λ -module de génération finie est semi-simple.

Preuve. voir [DK], p.34, Corollaire 2.2.5. $\square$

II. Le radical de Jacobson et le théorème de Krull-Schmidt.

II.1/ Le radical de Jacobson d'un anneau, d'une algèbre.

Définition. Soit Λ anneau. Le radical de Jacobson de Λ , noté $Rad(\Lambda)$, est l'intersection de tous les idéaux maximaux à gauche de Λ .

Proposition II.1.1. Soit Λ anneau. On a aussi :

1. $Rad(\Lambda)$ est l'intersection des idéaux maximaux à droite
2. $Rad(\Lambda)$ est un idéal bilatère.

Preuve. La preuve peut se décomposer en 3 étapes :

1. $x \in Rad(\Lambda) \iff \forall y \in \Lambda, 1 - yx$ est inversible à gauche
2. $\forall y \in \Lambda, 1 - yx$ est inversible à gauche $\iff \forall y \in \Lambda, 1 - yx$ est inversible
3. $Rad_d(\Lambda) = Rad(\Lambda)$ où $Rad_d(\Lambda)$ est l'intersection des idéaux maximaux à droite.

$\square$

Proposition II.1.2. Soit Λ est une k -algèbre de **dimension finie**, alors :

1. Il existe un unique idéal nilpotent maximal.
2. Il est égal au radical.

Preuve. Pour la preuve, on a besoin du lemme de Nakayama qui est rappelé ci-après. Pour la démonstration de la proposition et du lemme, voir par exemple [CLS], p.7-8. $\square$

Lemme de Nakayama II.1.3. Soit Λ un anneau et M un Λ -module de **génération finie**.

$$\text{Si } \text{Rad}(\Lambda).M = M \quad \text{alors } M = 0$$

Exemple II.1.4. Soit k un corps, le radical de Jacobson de l'algèbre des matrices carrées $M_n(k)$ est réduit à 0. En effet il n'existe pas d'idéaux bilatères dans $M_n(k)$ autre que les triviaux.

II.2/ Le cas des algèbres locales.

Définition. On dit qu'un anneau est local, s'il admet un unique idéal maximal à gauche.

Proposition II.2.1. Soit A un anneau local. Notons M l'idéal maximal à gauche, alors :

1. A admet un unique idéal maximal à droite et il coïncide avec M ,
2. M contient tous les éléments non inversibles de A .

Proposition II.2.2. - Lemme de Fitting - Si M un Λ -module indécomposable de dimension finie, alors tout endomorphisme de M est un isomorphisme ou est nilpotent.

Preuve. La preuve découle de la proposition découle du lemme de Fitting. Ces deux preuves peuvent se trouver par exemple dans [CLS], p.2-3. $\square$

Proposition II.2.3. Soit M un Λ -module de dimension finie. Alors M est indécomposable si et seulement si l'anneau $\text{End}_\Lambda(M)$ est local.

Preuve. Voir par exemple [DK], p.48, Corollaire 3.2.3. $\square$

Remarque. Noter que le résultat est faux si l'on considère un module sur un anneau. Par exemple $\mathbb{Z}$ est $\mathbb{Z}$ -module indécomposable et pourtant $\text{End}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ n'est pas local.

II.3/ Semi-simplicité et radical.

Le but de ce paragraphe est de caractériser les algèbres dont le radical est nul.

Théorème II.3.1. Soit Λ un algèbre de dimension finie sur un corps k , alors :

1. Λ est semi-simple $\iff \text{Rad}(\Lambda) = 0$
2. $\Lambda/\text{Rad}(\Lambda)$ est semi-simple.

Preuve. Pour le point 1, voir [DK], p.45, théorème 3.1.1 $\square$

Définition. Le radical d'un module, noté $Rad(M)$, est l'intersection de tous les sous-modules maximaux.

Proposition II.3.2. Soit Λ une algèbre sur un corps k et M un Λ -module, alors :

1. M est semi-simple si et seulement si $Rad(M) = 0$
2. $Rad(M) = Rad(\Lambda).M$

Preuve. Pour le point 1, voir par exemple [DK], théorème 3.1.1, p. 45. Pour le point 2, consulter [DK], théorème 3.1.6.. $\square$

II.4/ Le théorème de Krull-Schmidt.

Dans ce paragraphe, Λ désignera une k -algèbre de dimension finie.

Théorème (Krull-Schmidt) II.4.1. Soit M un Λ -module de dimension finie non nul, alors M peut se décomposer de façon unique :

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$$

où $M_1, \dots, M_n$ sont des sous-modules indécomposables non nuls de M .

Preuve. L'existence d'une telle décomposition est déjà acquise grâce au théorème (Ch1: I.4), quant à l'unicité, il faut utiliser que l'anneau d'endomorphismes d'un module indécomposable est local (Ch1: II.2.3). Pour une démonstration détaillée, voir [DK], p.56, théorème 3.4.2. $\square$

II.5/ Modules projectifs et indécomposables d'une algèbre.

Théorème II.5.1. Soit Λ une algèbre de dimension finie, il peut être considéré comme un module sur lui-même ce qui implique que :

1. Λ se décompose de manière unique à isomorphisme près en

$$\Lambda = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$$

où les P_i sont des sous-modules indécomposables de Λ .

2. Les modules P_i sont projectifs.
3. Si P est un module projectif indécomposable, alors P est isomorphe à un certain P_i avec i dans $\{1, \dots, n\}$.

Preuve. Ce sont des conséquences du théorème de Krull-Schmidt et des propriétés sur les projectifs (Ch1: I.2). $\square$

II.6/ Modules projectifs et idempotents d'une algèbre.

Définitions. Soit A un anneau, alors :

1. un élément e de A est dit idempotent si et seulement si $e^2 = e$.
2. une famille $(e_i)_{i \in I}$ d'idempotents est une famille orthogonale si et seulement si $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker.
3. un élément e de A est dit idempotent primitif si et seulement si e ne peut se décomposer en somme de deux idempotents de façon non triviale, c'est-à-dire si et seulement si

$$(e = f + g \quad \text{avec} \quad f^2 = f, g^2 = g \quad \text{et} \quad fg = gf = 0) \quad \implies \quad f = 0 \quad \text{ou} \quad g = 0$$

Proposition II.6.1. Soit Λ une algèbre de dimension finie.

1. Si $\Lambda = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ est la décomposition de Λ en somme de modules indécomposables. Alors l'unité de Λ se décompose de façon unique sur cette somme directe en somme d'idempotents primitifs orthogonaux, c'est-à-dire que $1 = e_1 + \dots + e_n$ où $e_k \in P_k$ pour k dans $\{1, \dots, n\}$ et $e_1, \dots, e_n$ est une famille d'idempotents orthogonale. De plus pour tout k de $\{1, \dots, n\}$ on a $P_k = \Lambda \cdot e_k$
2. Inversement, si $e_1, \dots, e_n$ est une famille d'idempotents primitifs orthogonale alors pour tout k de $\{1, \dots, n\}$, le module $\Lambda \cdot e_k$ est un Λ -module projectif et Λ se décompose en

$$\Lambda = \Lambda \cdot e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda \cdot e_n$$

Preuve. Cela provient de la décomposition de Pierce (Ch1: I.5). $\square$

Exemple II.6.2. Posons k un corps quelconque et notons $A = M_n(k)$ l'algèbre des matrices carrées de côté n sur k . Notons de plus E_{ij} , la matrice élémentaire $[a_{kl}]$ ou $a_{kl} = 1$ si $k = i$ et $l = j$ et $a_{kl} = 0$ sinon. L'unité de A se décompose en somme d'idempotents primitifs orthogonaux de la façon suivante : $1 = E_{11} + \dots + E_{nn}$, ce qui donne la décomposition de $M_n(k)$ en somme d'indécomposable :

$$M_n(k) = M_n(k) \cdot E_{11} \oplus \dots \oplus M_n(k) \cdot E_{nn}$$

III. Notions homologiques et cohomologiques de base.

Soit A un anneau, un complexe de chaînes $\mathbf{C}$ sur A est la donnée de

1. une famille $\{C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de A -modules,
2. une famille $\{\delta_n : C_n \rightarrow C_{n-1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de morphismes de modules,

vérifiant $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. La famille $\delta = \{\delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est appelée la différentielle ou encore l'opérateur de bord.

$$\mathbf{C} \quad : \quad \dots \xleftarrow{\delta_{n-1}} C_{n-1} \xleftarrow{\delta_n} C_n \xleftarrow{\delta_{n+1}} C_{n+1} \xleftarrow{\delta_{n+2}} \dots$$

La condition $\delta_n \circ \delta_{n+1} = 0$ montre que $Im(\delta_{n+1}) \subset Ker(\delta_n)$, on peut donc considérer la famille $\{H_n(\mathbf{C})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ notée encore $H(\mathbf{C})$ d'espaces quotients définis par :

$$H_n(\mathbf{C}) = Ker(\delta_n) / Im(\delta_{n+1}).$$

Le module $H_n(\mathbf{C})$ est appelé le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homologie du complexe de chaînes $\mathbf{C}$, les éléments de C_n sont appelés les n -chaînes, les éléments du module $ker(\delta_n)$, encore noté $Z_n(\mathbf{C})$, sont appelés les n -cycles et enfin les éléments du module $Im(\delta_{n+1})$, encore notés $B_n(\mathbf{C})$ sont appelés les n -bords. On a donc encore :

$$H_n(\mathbf{C}) = Z_n(\mathbf{C}) / B_n(\mathbf{C}).$$

De manière duale, on définit la cohomologie. Soit A un anneau, un complexe de cochaîne $\mathbf{C}$ sur A est la donnée de

1. une famille $\{C^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de A -modules,
2. une famille $\{\delta^n : C^n \rightarrow C^{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de morphismes de modules,

vérifiant $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. La famille $\delta = \{\delta^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est appelée la différentielle ou opérateur de cobord.

$$\mathbf{C} \quad : \quad \dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^{n-1} \xrightarrow{\delta^n} C^n \xrightarrow{\delta^{n+1}} C^{n+1} \xrightarrow{\delta^{n+2}} \dots$$

Soit $\mathbf{C} = \{C^n, \delta^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un complexe de cochaînes, la condition $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0$ montre que $Im(\delta^{n-1}) \subset Ker(\delta^n)$, on peut donc considérer la famille $\{H^n(\mathbf{C})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ notée encore $H(\mathbf{C})$ d'espaces quotients définis par :

$$H^n(\mathbf{C}) = Ker(\delta^n) / Im(\delta^{n-1}).$$

Le module $H^n(\mathbf{C})$ est appelé le $n^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du complexe de cochaînes $\mathbf{C}$, les éléments de C^n sont appelés les n -cochaînes, les éléments du module $ker(\delta^n)$, notés $Z^n(\mathbf{C})$, sont appelés les n -cocycles et enfin les éléments du module $Im(\delta^{n-1})$, noté $B^n(\mathbf{C})$ sont appelés les n -cobords. On a donc encore :

$$H^n(\mathbf{C}) = Z^n(\mathbf{C}) / B^n(\mathbf{C}).$$

Etant donné un complexe de chaînes $\mathbf{C}$ de Λ -modules, il est possible d'obtenir d'autres complexes de chaînes et de cochaînes en appliquant un foncteur sur le complexe initial. En particulier, il est possible d'appliquer le foncteur $Hom(-, B)$ sur le complexe $\mathbf{C}$, où B est un Λ -module, nous obtenons ainsi un complexe de cochaînes et donc une cohomologie. Nous verrons un exemple de ce procédé pour la cohomologie lié à un complexe simplicial en (Ch4: I.2). Un autre foncteur très utilisé est le foncteur $- \otimes_{\Lambda} B$ où B est un Λ -module.

Les complexes de chaînes et de cochaînes ainsi construits ont leurs propres groupes d'homologie et de cohomologie et le théorème de coefficients universels se proposent de les comparer dans le cas des deux foncteurs dont nous venons de parler.

Il est nécessaire avant d'énoncer ces théorèmes d'introduire des groupes d'homologie et cohomologie particuliers que sont les Ext^n et les Tor_n . Soit M un A -module, considérons une résolution projective de M , c'est-à-dire des A -modules projectifs $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et des morphismes tels que la suite

$$\dots \longrightarrow P_3 \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

soit exacte.

Appliquons à présent les foncteurs $Hom_A(-, N)$ et $- \otimes_A N$ à cette résolution où N est un A -module :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dots \longleftarrow Hom_A(P_3, N) \longleftarrow Hom_A(P_2, N) \longleftarrow Hom_A(P_1, N) \longleftarrow 0 \\ \dots \longrightarrow P_3 \otimes_A N \longrightarrow P_2 \otimes_A N \longrightarrow P_1 \otimes_A N \longrightarrow 0 \end{array} \right.$$

L'homologie et la cohomologie associées à ces suites de complexes ne dépendent pas de la résolution de M . Elles se nomment respectivement $Ext^n(M, N)$ et $Tor_n(M, N)$.

Théorème III.1. - Théorème du coefficient universel en homologie. Soit Λ un anneau principal, commutatif, projectif, sans diviseur de zéro ; C un complexe de chaînes sur Λ ; et A un Λ -module, alors :

$$0 \rightarrow H_n(C) \otimes_{\Lambda} A \rightarrow H_n(C \otimes_{\Lambda} A) \rightarrow Tor_1^{\Lambda}(H_{n-1}(C), A) \rightarrow 0$$

Preuve. voir [HS], p.176. $\square$

Théorème III.2. - Théorème du coefficient universel en cohomologie. Soit Λ un anneau principal commutatif sans diviseur de zéro et C un complexe de chaînes sur Λ et A un Λ -module, alors :

$$0 \rightarrow Ext_{\Lambda}^1(H_{n-1}(C), A) \rightarrow H^n(Hom_{\Lambda}(C, A)) \rightarrow Hom_{\Lambda}(H_n(C), A) \rightarrow 0$$

Preuve. voir [HS], p.179. $\square$

Définissons à présent la cohomologie de Hochschild d'une k -algèbre A à coefficients dans un $A - A$ -bimodule M . Notons également, puisque il n'y a pas d'ambiguïté $\otimes$ au lieu de $\otimes_k$, le produit tensoriel sur k et $A^{\otimes n}$ le n produit tensoriel de A : $A \otimes \dots \otimes A$. Par convention $A^{\otimes n} = 0$ si $n \leq 0$.

Notons de plus le complexe de chaînes (C^n, d^n) défini par

$$C^n = \begin{cases} C^n = 0 & \text{si } n < 0 \\ C^0 = M & \text{si } n = 0 \\ C^n = Hom_k(A^{\otimes n}, M) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

et par $d^n = 0$ si $n < 0$, $(d^0 x)(a) = ax - xa$, et

$$\begin{aligned} (d^n f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) &= a_1 f(a_2 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) \\ &+ \sum_{k=1}^n (-1)^k f(a_1 \otimes \dots \otimes a_k a_{k+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) a_{n+1} \end{aligned}$$

La suite de modules :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^0} \text{Hom}_k(A, M) \xrightarrow{d^1} \text{Hom}_k(A^{\otimes 2}, M) \xrightarrow{d^2} \text{Hom}_k(A^{\otimes 3}, M) \xrightarrow{d^3} \dots$$

est un complexe de cochaînes. L'homologie associée à celui-ci est appelé la *cohomologie de Hochschild* de A à coefficients dans M et est noté $H^n(A, M)$. Lorsque $M = A$, on note plus simplement $HH^n(A)$.

Remarques. Quelques remarques sur les groupes $HH^n(A)$ de la cohomologie de Hochschild d'une k -algèbre A :

1. $HH^0(A)$ est le centre de A . En effet l'application d^0 étant injective, $HH^0(A) = \text{Ker}(d^0) = \{x \in A / d_1(a)(x) = xa - ax = 0\}$.
2. $HH^1(A)$ est égal à $\text{Der}(A)/\text{Der}^0(A)$ où $\text{Der}(A)$ est le k -espace vectoriel des dérivations de A et $\text{Der}^0(A)$ est le sous-espace vectoriel contenant les dérivations intérieures, c'est-à-dire les dérivations d vérifiant $d(x) = ax - xa$ où a est un élément de A . En effet

$$\begin{aligned} \text{Ker}(d^1) &= \{ \delta \in \text{Hom}_k(A, A) / \forall a, b \in A, d^1(\delta)(a \otimes b) = 0 \} \\ &= \{ \delta \in \text{Hom}_k(A, A) / \forall a, b \in A, a\delta(b) - \delta(ab) + \delta(a)b = 0 \} \\ \text{Im}(d^0) &= \{ \delta \in \text{Hom}_k(A, A) / \exists a \in A, \forall x \in A, \delta(x) = d^0(a)(x) = xa - ax \} \end{aligned}$$

3. On démontre que $HH_{A^e}^n = \text{Ext}_{A^e}^n(A, A)$ où $A^e = A \otimes A^{op}$ est l'algèbre enveloppante de A .

Présentation d'une algèbre par carquois et relations

Ce chapitre est une synthèse de résultats de base, bien connu des spécialistes. Nous avons cependant décidé de les exposer ici car ils forment le point de départ de toute la théorie. Nous énoncerons en particulier un théorème dû à P. Gabriel qui affirme que pour chaque algèbre A sobre sur un corps k algébriquement clos, il existe une présentation (Q, I) par carquois et relations de A , telle que A soit isomorphe au quotient de l'algèbre de carquois kQ par un de ses idéal admissible I . Les démonstrations des propositions et théorèmes ne seront pas toujours proposées, mais nous tenterons d'en donner une référence précise.

I. Algèbres de carquois.

Commençons ce chapitre par quelques définitions qui constituent les éléments indispensables à la compréhension de la notion de présentation d'une algèbre.

I.1/ Carquois, chemins d'un carquois.

On appelle graphe orienté la donnée :

1. d'un ensemble Q_0 dont les éléments sont appelés les sommets.
2. d'un ensemble Q_1 dont les éléments sont appelés les flèches.
3. d'une application s appelée *source* définie de Q_1 dans Q_0 , désignant l'origine d'une flèche.
4. d'une application t appelée *terminus* définie de Q_1 dans Q_0 , désignant le but d'une flèche.

Dans ces conditions, on dit qu'une flèche f relie le sommet a au sommet b ou encore va du sommet a au sommet b si $s(f) = a$ et $t(f) = b$. De plus, si f relie a à b ou b à a , on dit que f est entre a et b ou joint a et b . Enfin, le graphe est dit fini si les ensembles de sommets et de flèches sont finis.

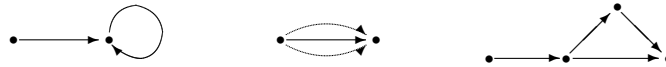
Définissons à présent la notion de chemins d'un graphe orienté. Un chemin d'un graphe orienté Q est soit un sommet de Q , dans ce cas nous l'appellerons *chemin trivial*, soit une suite finie $a_n.a_{n-1} \dots a_1$ de flèches de Q_1 vérifiant $t(a_k) = s(a_{k+1})$ pour tout k de $\{1, \dots, n-1\}$. Nous noterons $C(Q)$, l'ensemble des chemins d'un graphe orienté Q . De plus, les applications *source* et *terminus* sont étendues à l'ensemble des chemins par $s(a_n.a_{n-1} \dots a_1) = s(a_1)$ et $t(a_n.a_{n-1} \dots a_1) = t(a_n)$ si le chemin est une suite de flèches et par $s(a) = t(a) = a$ si le chemin a est un sommet. Si cela est nécessaire, le chemin ω pourra encore être noté (t, ω, s) où $s = s(\omega)$ et $t = t(\omega)$. Cette notation redondante a pour but de mettre en évidence, la source et le but du chemin.

Notons également qu'un *chemin fermé* est un chemin ayant ses extrémités confondues et qu'une *boucle* est une flèche ayant ses extrémités confondues. La longueur d'un chemin est égale au nombre de flèches le composant si c'est une suite de flèches et 0 si c'est un sommet. Un chemin fermé de longueur non nul est encore appelé un *cycle*. Deux chemins de Q sont dits *parallèles* s'ils ont même origine et même extrémité.

De plus, le graphe orienté est dit connexe si pour chaque couple de sommets (x, y) , il existe une suite de sommets $s_1, \dots, s_n$ telle que $s_1 = x$, $s_n = y$ et telle qu'il existe pour tout k de $\{1, \dots, n-1\}$ une flèche joignant s_k et s_{k+1} .

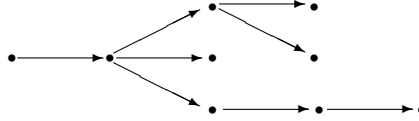
Enfin on désignera par carquois, un graphe orienté fini et connexe.

Exemples de carquois I.1.1.



Définition. Un arbre est un carquois tel que le graphe non orienté sous-jacent ne contient pas de cycle.

Exemple I.1.2. Voici un arbre :



Remarque. Dans un arbre Q , le nombre de sommets $\text{Card}(Q_0)$ est égal au nombre de flèches $\text{Card}(Q_1)$ plus 1.

I.2/ Algèbre de carquois

Etant donné Q un carquois et k un corps, considérons kQ le k -espace vectoriel de base les chemins de Q ; de façon explicite, l'ensemble kQ s'écrit :

$$kQ = \left\{ \sum_{\omega \in C(Q)} \lambda_{\omega} \omega \mid \lambda_{\omega} \in k \right\}$$

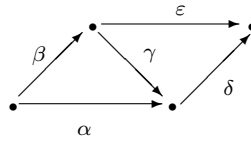
De plus, définissons le produit de deux chemins dans kQ . Soit ω_1 et ω_2 deux chemins de Q , si $t(\omega_1) \neq s(\omega_2)$ alors, on pose $\omega_2 \cdot \omega_1 = 0$, sinon $\omega_2 \cdot \omega_1$ est le chemin obtenu en mettant "bout à bout" les chemins ω_2 et ω_1 . En d'autres termes :

- $(t_2, \omega_2, s_2) \cdot (t_1, \omega_1, s_1) = 0$ si $s_2 \neq t_1$ avec ω_1 et ω_2 des chemins de Q .
- $(t, f_n \dots f_1, u) \cdot (u, g_m \dots g_1, s) = (t, f_n \dots f_1 g_m \dots g_1, s)$ si $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$ sont des flèches de Q .
- $(t, f_n \dots f_1, s) \cdot (s, z, s) = (t, f_n \dots f_1, s)$ si $f_1, \dots, f_n$ sont des flèches et z un sommet de Q .
- $(t, z, t) \cdot (t, f_n \dots f_1, s) = (t, f_n \dots f_1, s)$ si $f_1, \dots, f_n$ sont des flèches et z un sommet de Q .
- $(t, z, t) \cdot (t, z, t) = (t, z, t)$ si z est un sommet de Q .

Cette multiplication définit une unique multiplication sur kQ qui en fait une algèbre d'unité $s_1 + \dots + s_n$ où les $s_1, \dots, s_n$ sont les sommets de Q . L'algèbre kQ est appelée algèbre du carquois Q .

Remarque. Il est à noter que l'algèbre de carquois kQ est de dimension finie (en tant qu'espace vectoriel) si et seulement si Q n'a pas de cycle orienté. En effet, s'il existe un cycle ω , alors pour tout n de $\mathbb{N}$, ω^n est encore un chemin et donc la dimension de kQ est infinie. Réciproquement, s'il n'existe pas de cycle, alors n'importe quel chemin ne contient pas deux fois la même flèche, et comme le nombre de flèche est fini, le nombre de chemins est également fini.

Exemple I.2.1. Considérons le carquois suivant :



L'algèbre est de dimension 14. En effet, il y a

- 4 chemins de longueur 0 : les sommets,
- 5 chemins de longueur 1 : $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$,
- 4 chemins de longueur 2 : $\delta\alpha, \varepsilon\beta, \gamma\beta, \delta\gamma$,
- 1 chemins de longueur 3 : $\delta\gamma\beta$.

Voici quelques résultats de la table de multiplication :

$$\begin{array}{ll} s^2 = s \text{ pour tout sommet } s & f^2 = 0 \text{ et } t(f).f = f.s(f) = f \text{ pour toute flèche } f \\ \beta.\alpha = \gamma.\alpha = \delta.\alpha = 0 & \delta.\alpha = \delta\alpha \end{array}$$

Rappelons à présent quelques résultats sur la cohomologie de Hochschild des algèbres de carquois qu'il est possible de retrouver avec les preuves dans [ci3], p.645-649.

Proposition I.2.2. Soit Q un carquois, alors :

$$HH^0(kQ) = k \quad \dim_k(HH^1(kQ)) = 1 - n + \sum_{\alpha \in Q_1} \nu(\alpha) \quad HH^i(kQ) = 0 \text{ pour } i \geq 2$$

où $\nu(\alpha)$ désigne le nombre de chemins allant de $s(\alpha)$ à $t(\alpha)$ et n le nombre de sommets de Q . Ainsi $HH^1(Q) = 0$ si et seulement si le carquois Q est un arbre. En effet on a toujours $\text{Card}(Q_1) \geq \text{Card}(Q_0) - 1$, avec égalité si et seulement si Q est un arbre.

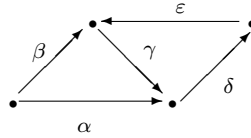
I.3/ Idéaux d'une algèbre de carquois.

Soit Q un carquois, notons F l'idéal à gauche de kQ engendré par les chemins de Q de longueur strictement positive. Il est facile de voir que F est bilatère et coïncide avec le sous-espace vectoriel de kQ engendré par les flèches de Q ; le sous-espace vectoriel F^n , pour n dans

$\mathbb{N}^*$ étant le sous-espace vectoriel de kQ engendré par les chemins de longueur n , il a pour k -base les chemins de longueur n et plus.

Définition. Un idéal bilatère I de l'algèbre de carquois kQ est dit admissible ou de définition si $I \subset F^2$ et s'il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $F^n \subset I$.

Exemple I.3.1. Considérons le carquois suivant :



et quelques exemples d'idéaux de l'algèbre de carquois. Cherchons à savoir s'ils sont admissibles ou non :

1. $I_0 = \{0\}$ n'est pas admissible car il existe un cycle $\varepsilon\delta\gamma$ orienté, et les puissances de ce cycle ne seront jamais dans I .
2. $I_1 = \langle \varepsilon\delta\gamma \rangle$ est admissible.
3. $I_2 = \langle \varepsilon\delta\gamma, \alpha - \gamma\beta \rangle$ n'est pas admissible car $\alpha - \gamma\beta$ n'est pas inclus dans F^2
4. $I_3 = \langle \varepsilon\delta\gamma, \delta\alpha - \delta\gamma\beta \rangle$ est admissible.
5. $I_4 = F^n$ est admissible si et seulement si $n \geq 2$.

Proposition I.3.2. Soit Q un carquois de sommets $(s_1, \dots, s_n)$ et I un idéal de l'algèbre de carquois kQ admissible alors

1. I est de génération finie.
2. kQ/I est de dimension finie.
3. $1_{kQ/I} = s_1 + \dots + s_n$ est une décomposition de l'unité en somme d'idempotents orthogonaux primitifs de kQ .
4. $Rad(kQ/I) = \overline{F}$ où $\overline{F}$ désigne la classe de F modulo I .

Nous verrons plus tard (Ch2: II.2.1) que kQ/I est également sobre.

Preuve. Pour la preuve des points 2,3,4, voir par exemple [CLS],p.24. Pour le point 1, voir [CLS], p.35. $\square$

Définition. L'idéal bilatère de l'algèbre kQ engendré par les différences de deux chemins parallèles est appelé *idéal parallèle*.

Proposition I.3.3. Soit Q un carquois, l'idéal parallèle de kQ est admissible si le carquois est sans boucle et sans flèche parallèle à un chemin. C'est ce que nous appellerons un carquois ordonné, voir (Ch2: III.1).

I.4/ Catégorie des carquois

Soit Q un carquois de sommets Q_0 et de flèches Q_1 . Un morphisme de carquois ϕ est la donnée de deux applications ϕ_0 de Q_0 dans Q_0 et ϕ_1 de Q_1 dans Q_1 , compatibles avec les applications *source* et *terminus*, c'est-à-dire que $\phi_0 \circ s = s \circ \phi_1$ et $\phi_0 \circ t = t \circ \phi_1$.

Proposition I.4.1. Tout morphisme (ϕ_0, ϕ_1) de carquois Q induit un endomorphisme ψ de l'algèbre kQ . De plus, si ϕ_0 et ϕ_1 sont injectives (resp. surjectives) alors ψ l'est aussi.

Preuve. Définissons le morphisme ψ par :

1. pour tout élément x de Q_0 (resp. Q_1), on a $\psi(x) = \phi_0(x)$ (resp. $\psi(x) = \phi_1(x)$).
2. si $\alpha_n \dots \alpha_1$ est un chemin alors $\psi(\alpha_n \dots \alpha_1) = \psi(\alpha_n) \dots \psi(\alpha_1)$.
3. ψ est étendu linéairement à kQ .

Clairement ψ est un morphisme. Supposons à présent que ϕ_0 et ϕ_1 sont surjectives et montrons que ψ est également surjective. Pour cela il suffit de montrer que les éléments de la base de kQ , c'est-à-dire les chemins, sont atteints par ψ . Soit $\omega = \alpha_1 \dots \alpha_n$ un chemin de kQ , alors $\phi_1^{-1}(\alpha_1) \dots \phi_1^{-1}(\alpha_n)$ est un antécédent de ω par ψ .

Supposons à présent ϕ_0 et ϕ_1 injectives. Si $\omega = \alpha_1 \dots \alpha_n$ est un chemin de Q alors $\psi(\omega) = \psi(\alpha_1) \dots \psi(\alpha_n)$ est également un chemin de Q et ceci car ϕ_0 et ϕ_1 sont compatibles avec les applications *source* et *terminus*. Ainsi, $\psi(\omega)$ est non nul. De plus, si $\psi(\sum_{i=1}^m \lambda_i \omega_i) = 0$ alors $\sum_{i=1}^m \lambda_i \psi(\omega_i) = 0$. Comme ϕ_0 et ϕ_1 sont injectives, les chemins $\psi(\omega_1), \dots, \psi(\omega_m)$ sont différents et donc libres dans kQ . On obtient alors que tous les λ_i sont nuls et ψ est injective. $\square$

II. Carquois de Gabriel.

II.1/ Définition du carquois de Gabriel.

Soit Λ une k -algèbre de dimension finie. Choisissons une famille d'idempotents primitifs orthogonaux $e = (e_1, \dots, e_n)$ telle que leur somme vaut 1.

Définition. Le carquois de Gabriel associé à Λ , noté C_Λ , est défini par :

1. C_Λ a n sommets : $e_1, \dots, e_n$.
2. Le nombre de flèches allant du sommet i au sommet j est égal à la dimension du k -espace vectoriel $e_j (Rad(\Lambda)/Rad^2(\Lambda)) e_i$.

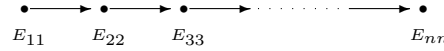
Remarquons qu'il peut exister plusieurs décomposition de l'unité en famille d'idempotents orthogonaux. En effet considérons le carquois contenant deux sommets s et t et une flèche f reliant s à t , alors $1 = s + t$ et $1 = (s - f) + (t + f)$ sont deux décompositions de 1 dans kQ . Cependant le carquois de Gabriel ne dépend pas de la famille d'idempotents orthogonaux primitifs choisie. Voir par exemple [CLS], p.27.

Exemple II.1.1. Si A est une algèbre semi-simple, alors $Rad(A) = 0$ (cf.Ch1: II.3.1) et le carquois de Gabriel est donc un ensemble de points sans flèches.

Exemple II.1.2. Le carquois de Gabriel associé à l'algèbre $A = k[x]/(x^n)$ avec $n > 1$ est le carquois ne contenant qu'un seul sommet puisque qu'il n'existe qu'un seul idempotent 1 et une seule flèche car $Rad(A) = (x)$ et $dim(Rad(A)/Rad^2(A)) = 1$.

Exemple II.1.3. Soit A une algèbre tel qu'il existe un carquois Q et un idéal I admissible de kQ vérifiant $A \simeq kQ/I$ alors le carquois de Gabriel est Q . En effet, nous savons que les sommets $s_1, \dots, s_n$ de Q forment un système d'idempotents orthogonaux primitifs de somme 1, le carquois de Gabriel Q_A à donc autant de sommets que Q . De plus, les flèches de s_i à s_j forment une base de $s_j \cdot (Rad(A)/Rad^2(A)) \cdot s_i$ et ainsi il existe autant de flèches reliant le sommet i au sommet j dans Q_A que de flèches reliant s_i à s_j dans Q . Les carquois Q et Q_A sont identiques.

Exemple II.1.4. Soit $A = T_n(k)$ l'algèbre des matrices carrées triangulaires supérieures de dimension n . Notons E_{ij} la matrice contenant que des zéros sauf en position (i, j) où il y a un 1. Les matrices $(E_{ii})_{i \in \{1, \dots, n\}}$ forment un système d'idempotents orthogonaux primitifs telles que leur somme vaut 1, il y a donc n sommets dans le carquois de Gabriel de Gabriel Q_A . De plus, $Rad(A)$ est formé des matrices triangulaires supérieures nulles sur la diagonale, ainsi $Rad(A)/Rad^2(A)$ est formé des matrices dont les seuls éléments non nuls se trouvent juste au dessus de la diagonale. Ainsi $dim_k(E_{jj} (Rad(A)/Rad^2(A)) E_{ii})$ est 1 si $j = i + 1$ et 0 sinon. Le carquois Q_A est donc le suivant :



II.2/ Algèbres basiques et sobres.

Soit Λ un algèbre sur un corps k et $\Lambda = P_1 \oplus \dots \oplus P_n$ une décomposition en somme directe de modules indécomposables. L'algèbre Λ est dite basique si P_i n'est pas isomorphe à P_j pour tout i différent de j , c'est-à-dire qu'aucun module ne se répète dans la décomposition de Λ en modules indécomposables. Elle est sobre si le corps $End_{\Lambda}(P_i)/Rad(End_{\Lambda}(P_i))$ est réduit à k pour chaque i .

Proposition II.2.1. Soit Q un carquois et I un idéal admissible de kQ , alors kQ/I est basique et sobre.

Proposition II.2.2. - la décomposition de Pierce d'une algèbre semi-simple et sobre.

Soit $\Lambda = S_1 \oplus \dots \oplus S_n$, une décomposition d'une algèbre semi-simple basique et sobre en somme directe de simples et $1 = e_1 + \dots + e_n$, la décomposition de l'unité dans cette somme directe alors la famille $e_1, \dots, e_n$ est une famille d'idempotents orthogonaux primitifs et centraux. On rappelle qu'un élément est central s'il commute avec tous les éléments de Λ .

Preuve. Voir par exemple [CLS], p.31. $\square$

Corollaire II.2.3. Soit Λ une algèbre sobre sur un corps k alors

1. $\Lambda/\text{Rad}(\Lambda)$ est sobre.
2. $\Lambda/\text{Rad}(\Lambda)$ se décompose sous la forme :

$$\Lambda/\text{Rad}(\Lambda) = k \times k \times \dots \times k = k.e_1 \oplus k.e_2 \oplus \dots \oplus k.e_n$$

II.3/ Présentation d'une algèbre par carquois et relations.

Considérons les mêmes éléments que pour la construction du carquois de Gabriel : soit k un corps et Λ une k -algèbre de dimension finie basique et sobre. Choisissons une famille d'idempotents primitifs orthogonaux $e = (e_1, \dots, e_n)$ telle que leur somme vaut 1.

Notons alors Q_Λ le carquois de Gabriel associé, $s_1, \dots, s_n$ les sommets de Q_Λ et enfin A_{ij} l'ensemble des flèches reliant i à j . De plus, comme $\dim_k(e_j.(\text{Rad}(\Lambda)/\text{Rad}^2(\Lambda)).e_i)$ est égal au nombre de flèches reliant i à j , on peut choisir une famille indexée $(x_f)_{f \in A_{ij}}$ de $e_j.\text{Rad}(\Lambda).e_i$ sur A_{ij} telle que les classes des $(x_i)_{i \in A_{ij}}$ forment une base de $e_j.(\text{Rad}(\Lambda)/\text{Rad}^2(\Lambda)).e_i$

Construction du morphisme. Soit ϕ l'application de kQ_Λ dans Λ définie par :

1. Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$: $\phi(s_i) = e_i$,
2. Pour toute flèche f de A_{ij} : $\phi(f) = x_f$,
3. Pour tout chemin $f_n \dots f_1$: $\phi(f_n \dots f_1) = x_{f_n} \dots x_{f_1}$,
4. L'application ϕ est prolongée à kQ_Λ tout entier par linéarité.

Proposition II.3.1. Si l'algèbre Λ est basique et sobre, le morphisme ϕ est un morphisme d'algèbre surjectif. De plus, son noyau est un idéal admissible.

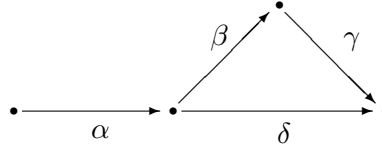
Preuve. Pour l'existence, on utilise entre autres les propositions (Ch2: II.2.3). Pour une preuve détaillée voir par exemple [CLS], p.29-34 $\square$

Définition. Soit A une algèbre. Tout couple (Q, I) où Q désigne un carquois et I un idéal admissible de kQ est une présentation par carquois et relations de A si et seulement si A est isomorphe à kQ/I . Lorsque nous parlerons de présentation dans la suite, il s'agira de présentation par carquois et relations.

Remarquons que le théorème précédent affirme l'existence d'une présentation dans le cas où l'algèbre A est basique et sobre. De plus, l'exemple (Ch2: II.1.3) montre que si l'algèbre est basique et sobre, le carquois Q ne peut être que le carquois de Gabriel.

II.4/ Problème d'unicité de la présentation.

Nous avons vu que dans toutes les présentations liées à une même algèbre, le carquois est toujours le même. Il n'est pas de même pour l'idéal comme le prouve le contre exemple suivant. Considérons le carquois Q :



et les deux idéaux $I_1 = \langle \gamma\beta\alpha - \delta\alpha \rangle$ et $I_2 = \langle \delta\alpha \rangle$ de kQ . Alors les algèbres kQ/I_1 et kQ/I_2 sont isomorphes.

Preuve. Il suffit de considérer l'endomorphisme ϕ de kQ défini par

- ϕ est constant sur les sommets,
- ϕ est constant sur α, β, γ et $\phi(\delta) = \delta + \gamma\beta$.
- ϕ est prolongé sur kQ de façon à en faire un morphisme.

Dans ce cas, on a $x \in I_1$ si et seulement si $\phi(x) \in I_2$. Il est clair que ϕ induit un isomorphisme de kQ/I_1 dans kQ/I_2 . $\square$

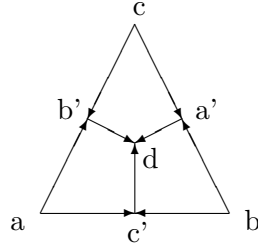
III. Présentation d'une algèbre d'incidence.

III.1/ Poset et carquois ordonné

Rappelons tout d'abord qu'un poset est un ensemble partiellement ordonné et qu'un carquois ordonné est un carquois sans boucle et sans chemin parallèle à une flèche, puis décrivons les liens qui unissent ces deux objets :

Construction du carquois ordonné associé à un poset fini. A chaque élément du poset est associé un sommet du graphe. De plus, un sommet S_1 est relié à un sommet S_2 si et seulement si l'élément associé à S_1 est inférieur à celui qui correspond à S_2 et s'il n'existe aucun élément du poset strictement compris entre ces deux éléments. Le graphe obtenu est un carquois ordonné.

Exemple III.1.1. le graphe correspondant à l'ensemble $\{a, b, c, a', b', c', d\}$ muni d'un ordre partiel défini par $a < b' < d, c < b' < d, a < c' < d, b < c' < d, b < a' < d$ et $c < a' < d$ est :



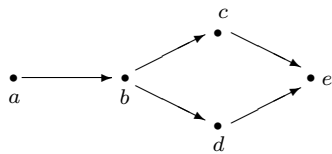
Remarque. Réciproquement, tout graphe ordonné provient par cette méthode d'un poset. Nous obtenons ainsi une bijection entre les graphes ordonnés et les posets. Dorénavant, nous ne différencierons plus ces deux objets, nous pourrions donc aussi bien dire par exemple que ce sommet est plus petit que cet autre sommet ou que ce poset est connexe.

III.2/ Algèbre d'incidence

Soit P un poset, nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il est possible de construire de façon unique un carquois Q ordonné. A ce carquois, on associe l'algèbre kQ/I_Q où I_Q est l'idéal parallèle de Q . Toute algèbre isomorphe à une algèbre provenant d'un poset est appelée algèbre d'incidence. En d'autres termes, une algèbre A est une algèbre d'incidence s'il existe une présentation (Q, I) de A où Q est un carquois ordonné et I est l'idéal parallèle de kQ . La cohomologie de Hochschild quant à elle, est étroitement liée à la cohomologie d'un complexe simplicial que nous définirons plus tard, voir (Ch4: II.2.3).

Rappelons enfin qu'il est possible de voir chaque algèbre d'incidence d'un poset P comme une sous-algèbre des matrices carrées $n \times n$ triangulaires supérieures, où n est le nombre d'éléments de P . En effet, notons $s_1, \dots, s_n$ les éléments du poset de telle façon que pour tout $i < j$ alors s_j ne soit pas inférieur à s_i , alors l'algèbre d'incidence s'identifie aux matrices triangulaires supérieures (a_{ij}) tel que $a_{ij} = 0$ si s_i n'est pas inférieur à s_j .

Ainsi par exemple le poset $P = \{a, b, c, d, e\}$ muni de la relation d'ordre engendrée par $a \leq b \leq d \leq e$ et $b \leq c \leq e$. Ainsi le carquois ordonné et les matrices de $M_5(k)$ associés sont :



$$kQ/I_Q = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$

Groupe fondamental algébrique

I. Définition du groupe fondamental algébrique.

I.1/ Relations minimales.

Donnons dans un premier temps quelques notions sur les relations minimales d'un idéal d'une algèbre de carquois ce qui permettra de construire la relation d'équivalence nécessaire à l'élaboration du groupe fondamental algébrique. Soit Q un carquois et I un idéal de kQ . Une relation de I est un élément de I du type $\sum_{i \in J} a_i \omega_i$ avec J non vide, où les a_i sont dans k^* et les ω_i sont des chemins de kQ .

La relation est dite minimale si pour tout sous-ensemble J' non vide et strict de J , la somme $\sum_{i \in J'} a_i \omega_i$ n'est plus un élément de I . Commençons par quelques remarques sur les relations minimales :

Proposition I.1.1. Soit I un idéal d'une k -algèbre A .

1. Les relations minimales de I engendrent I .
2. Si $\sum_{i \in J} a_i \omega_i$ est une relation minimale, alors les chemins $(\omega_i)_{i \in J}$ sont parallèles.

Preuve.

1. Soit $x = \sum_{i \in J} a_i \omega_i$ un élément de I . Si x n'est pas une relation minimale alors il existe un sous-ensemble J' de J , non-vide et strict, tel que $x' = \sum_{i \in J'} a_i \omega_i$ soit une relation minimale. On recommence la décomposition sur $x'' = \sum_{i \in J \setminus J'} a_i \omega_i$. Il n'y aura qu'un nombre fini de décompositions car à chaque étape le cardinal de J décroît.
2. Soit j quelconque dans J , notons s et t la source et le but de ω_j et J' le sous-ensemble de J contenant les indices des chemins $(\omega_i)_{i \in J'}$ parallèles à ω_j . Il suffit de montrer que $J' = J$. Tout d'abord, comme I est un idéal bilatère, $t. (\sum_{i \in J} a_i \omega_i) . s$ est encore dans I . De plus :

$$t. \left(\sum_{i \in J} a_i \omega_i \right) . s = \sum_{i \in J} a_i . t. \omega_i . s = \sum_{i \in J'} a_i \omega_i \in I$$

Comme la relation est minimale et que J' est non vide, puisqu'il contient j , on en déduit grâce à la définition que $J' = J$.

I.2/ Relation d'équivalence liée à un idéal.

Les relations minimales vont permettre de construire, sur les promenades d'un carquois, une relation d'équivalence qui permettra de définir le groupe fondamental d'une présentation. Commençons par introduire la notion de promenades d'un carquois :

Définition. Soit Q un carquois et kQ son algèbre de carquois. Soit α une flèche de Q reliant x à y , notons α^{-1} son inverse formel qui relie y à x ; les sommets y et x sont appelés respectivement *source* et *terminus* de α^{-1} et sont notés $s(\alpha^{-1})$ et $t(\alpha^{-1})$. Une promenade de kQ de longueur n est une suite formelle $p = \alpha_n^{\pm 1} \alpha_{n-1}^{\pm 1} \dots \alpha_1^{\pm 1}$ telle que le but de $\alpha_k^{\pm 1}$ soit égal à la source de $\alpha_{k+1}^{\pm 1}$ pour k variant de 1 à $n - 1$; les sommets $s(\alpha_1^{\pm 1})$ et $t(\alpha_n^{\pm 1})$ sont naturellement appelés *source* et *terminus* de la promenade p et sont notés $s(p)$ et $t(p)$. Remarquons que les applications *source* et *terminus* ainsi définies sont des prolongements des applications *source* et *terminus* définies sur les chemins de Q . Nous noterons $P(Q)$ l'ensemble des promenades de Q .

La promenade triviale en x , celle ne contenant aucune flèche et dont les extrémités se trouvent en x , est encore notée x . De plus, une promenade est dite fermée si elle a des extrémités identiques. La composition des chemins munit également l'ensemble des promenades d'une multiplication partiellement définie. Elle prolonge celle construite sur l'ensemble des chemins. Plus précisément, si p_1 et p_2 sont deux promenades, alors $p_2.p_1$ est définie uniquement si le terminus de p_1 est égal à la source de p_2 et vaut, dans ce cas là, la concaténation des deux suites.

Remarque. Une promenade est en fait un chemin à travers le graphe non orienté, c'est-à-dire qu'une promenade peut parcourir les flèches dans le sens que celles-ci indiquent ou dans le sens inverse.

Définition. Afin de construire le groupe fondamental d'une présentation (Q, I) , nous considérerons une relation d'équivalence sur l'ensemble des promenades du carquois Q . Celle-ci est définie comme étant la plus petite relation d'équivalence $\sim$ vérifiant :

1. Si α est une flèche reliant le sommet x au sommet y alors $\alpha\alpha^{-1} \sim y$ et $\alpha^{-1}\alpha \sim x$.
2. Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ est une relation minimale alors $\omega_1 \sim \dots \sim \omega_n$.
3. Si les promenades α et β sont équivalentes alors $\omega \alpha \omega' \sim \omega \beta \omega'$ pour toute promenade ω et ω' de Q telles que les produits précédents existent.

Remarques.

1. Si l'idéal I de la présentation (Q, I) est l'idéal parallèle, le point (2) revient à ce que les chemins parallèles soient équivalents.
2. La relation d'équivalence $\sim$ dépend de l'idéal I et est compatible avec la multiplication des promenades, lorsqu'elle est définie grâce au point (3).
3. Deux chemins équivalents sont parallèles ; cela provient de (Ch3: I.1.1-2).

I.3/ Le groupe fondamental algébrique

Rappelons à présent la définition du groupe fondamental algébrique, voir par exemple [AP].

Proposition I.3.1. Considérons un sommet x_0 de Q . L'ensemble quotient des promenades fermées en x_0 par la relation d'équivalence précédente est un groupe et ne dépend pas de x_0 lorsque Q est connexe. Il est noté $\Pi_1(Q, I)$.

Preuve. Tout d'abord, montrons que l'ensemble des promenades fermées en x_0 est un groupe. Comme les promenades considérées sont fermées en x_0 , la composition des chemins est toujours définie. Montrons que celle-ci est une loi interne : l'associativité de cette loi découle de sa définition ; l'élément neutre est la promenade triviale x_0 ; enfin, l'inverse d'une promenade de la forme $\alpha_n^{\varepsilon_n} \alpha_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ est la promenade $\alpha_1^{-\varepsilon_1} \alpha_2^{-\varepsilon_2} \dots \alpha_n^{-\varepsilon_n}$. Ainsi le quotient est un groupe, car c'est le quotient d'un groupe par une relation d'équivalence compatible avec la multiplication.

De plus, si le carquois est connexe, le groupe fondamental ne dépend pas du point base choisi pour le calculer. En effet, soit y_0 un sommet de Q . Comme Q est connexe, il existe une promenade ω reliant x_0 à y_0 . Notons $P_{x_0}(Q)$ et $P_{y_0}(Q)$, les ensembles de promenades fermées respectivement en x_0 et en y_0 . Le morphisme :

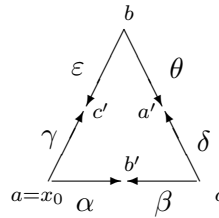
$$\begin{array}{ccc} P_{y_0}(Q) & \rightarrow & P_{x_0}(Q) \\ p & \mapsto & \omega^{-1} \cdot p \cdot \omega \end{array}$$

induit sur les groupes fondamentaux associés un isomorphisme. $\square$

Remarque. Le fait que I soit admissible n'est pas utilisé dans la démonstration précédente, aussi nous parlerons également du groupe fondamental d'un couple (Q, I) où I est un idéal quelconque de kQ . De plus, si la présentation (Q, I) provient d'un poset P , nous noterons également $\Pi_1(P)$ le groupe fondamental associé à (Q, I) .

I.4/ Exemples.

Exemple I.4.1. Soit Q le carquois suivant et I l'idéal parallèle de kQ :



les lettres grecques représentant les flèches et les lettres latines les sommets. Notons ω la promenade $\gamma^{-1} \varepsilon \theta^{-1} \delta \beta^{-1} \alpha$ fermée en x_0 . Le point 1 lors de la définition de la relation d'équivalence indique qu'un aller-retour sur une même flèche équivaut à ne pas bouger. De plus, comme il

n'existe pas de chemins parallèles, le groupe fondamental ne contient que les classes des promenades ω^n avec n dans $\mathbb{Z}$. Par ailleurs, ni ω ni aucune de ses puissances n'est trivial puisque I est trivial. Le groupe fondamental est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Remarquons que ce carquois provient du poset $P = \{a, b, c, a', b', c'\}$ muni de la relation d'ordre : $a < c', b < c', a < b', c < b', b < a', c < a'$; ces inéquations ayant donné respectivement dans le carquois Q les flèches $\gamma, \varepsilon, \alpha, \beta, \theta$ et δ . On a donc $\Pi_1(Q, I) = \Pi_1(P) \simeq \mathbb{Z}$.

II. Algorithme de calcul de $\pi_1(Q, I)$

II.1/ Description de l'algorithme

Avant d'énoncer le théorème principal, nous introduisons quelques notations. Considérons un carquois Q , un sommet x_0 de Q et des familles de chemins $(c_i)_{i \in A}$ et $(c'_i)_{i \in A}$ de Q indexés par un ensemble A . Notons $< (c_i \sim c'_i)_{i \in A} >$ la plus petite relation d'équivalence sur l'ensemble $P(Q)$ des promenades de Q , compatible avec la concaténation et vérifiant :

1. Si f est une flèche de Q allant de a vers b alors $f.f^{-1} \sim b$ et $f^{-1}.f \sim a$.
2. Pour tout i de A , on a : $c_i \sim c'_i$

Cette notation pourra également servir pour désigner la même relation d'équivalence restreinte à $P_{x_0}(Q)$, l'ensemble des promenades fermées en x_0 .

Considérons de plus une flèche f_0 de Q d'origine a_0 et d'extrémité b_0 avec $a_0 \neq b_0$, et désignons par Q' le carquois obtenu à partir de Q en fusionnant les sommets a_0 et b_0 . Plus précisément :

- Les sommets de Q' sont les sommets de Q où a_0 et b_0 sont identifiés. Notons c_0 ce sommet.
- Les flèches de Q' sont les flèches de Q privées de f_0 . Chacune a même origine et même but que dans Q . Remarquons qu'une flèche parallèle à f_0 devient une boucle dans Q' .

Notons également par p la projection de $P(Q)$ sur $P(Q')$ définie par

- $p(s) = s$ pour tout sommet s différent de a_0 et b_0 ,
- $p(a_0) = p(b_0) = c_0$,
- $p(f) = f$ pour toute flèche f différente de f_0 ,
- $p(f_0) = c_0$.

Définissons enfin R' sur kQ' , la relation d'équivalence $< (p(c_i) \sim p(c'_i))_{i \in A} >$.

Théorème II.1.1. Dans le contexte ci-dessus, le morphisme p induit un isomorphisme :

$$P_{x_0}(Q)/R \simeq P_{p(x_0)}(Q')/R'$$

Preuve.

Définissons tout d'abord une application q de $P_{p(x_0)}(Q')$ dans $P_{x_0}(Q)$ vérifiant $p \circ q = Id$. Considérons $\omega' = \alpha_n^{\epsilon_n} \dots \alpha_1^{\epsilon_1}$ une promenade de Q' fermée en $p(x_0)$. Cette promenade en général

n'est pas une promenade de Q , puisque que l'on a pas forcément $t(\alpha_i^{\epsilon_i}) = s(\alpha_{i+1}^{\epsilon_{i+1}})$ pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$. L'application q insère f_0 et f_0^{-1} entre certaines flèches de ω' de façon à ce que celle-ci deviennent une promenade de Q .

Construisons q de façon plus formelle. Posons pour faciliter l'écriture $\alpha_0^{\epsilon_0} = \alpha_{n+1}^{\epsilon_{n+1}} = p(x_0)$, et notons s_i et t_i respectivement la source et le terminus de $\alpha_i^{\epsilon_i}$ considéré comme une promenade de Q . Considérons alors $\omega = e_n \cdot \alpha_n^{\epsilon_n} \cdot e_{n-1} \dots e_1 \cdot \alpha_1^{\epsilon_1} \cdot e_0$ de Q , où les e_i sont définis de façon suivante :

$$e_i = \begin{cases} t_i & \text{si } t_i = s_{i+1} \\ f_0 & \text{si } t_i = a_0 \text{ et } s_{i+1} = b_0 \\ f_0^{-1} & \text{si } t_i = b_0 \text{ et } s_{i+1} = a_0 \end{cases}$$

On a alors $p(\omega) = \omega'$. Posons $q(\omega') = \omega$, alors $p \circ q = Id$.

Montrons que l'image par q de deux promenades équivalentes par R' sont deux promenades équivalentes par R .

Il suffit de montrer cette propriété sur les générateurs de la relation d'équivalence. Considérons dans un premier temps une flèche f de Q' et les promenades de Q' fermées en $p(x_0)$ $\omega = p_1 \cdot f^{-1} \cdot p_2$ et $\omega' = p_1 \cdot p_2$, et montrons que $q(\omega)$ et $q(\omega')$ sont équivalentes. Pour cela notons p'_1 et p'_2 les promenades de Q obtenues à partir de p_1 et p_2 en insérant f_0 et f_0^{-1} , comme expliqué lors de la construction de q , on a ainsi :

$$q(\omega) = p'_1 \cdot e_3 \cdot f^{-1} \cdot e_1 \cdot f \cdot e_4 \cdot p'_2 \quad \text{et} \quad q(\omega') = p'_1 \cdot e_2 \cdot p'_2$$

Comme $t(f) = s(f^{-1})$ on a $e_1 = t(f)$ et

$$q(\omega) = p'_1 \cdot e_3 \cdot f^{-1} \cdot e_1 \cdot f \cdot e_4 \cdot p'_2 = p'_1 \cdot e_3 \cdot f^{-1} \cdot f \cdot e_4 \cdot p'_2 \sim p'_1 \cdot e_3 \cdot e_4 \cdot p'_2$$

Etant donné que les promenades e_2 , e_3 et e_4 sont formées uniquement avec la flèche f_0 et son inverse, on obtient $q(\omega) \sim q(\omega')$. La démonstration est identique pour l'insertion de $f \cdot f^{-1}$.

Considérons à présent deux promenades de Q' fermées en $p(x_0)$ de la forme $\omega = p_1 \cdot c_1^{-1} \cdot c_2 \cdot p_2$ et $\omega' = p_1 \cdot p_2$ avec c_1 et c_2 R' -équivalents où c_1 et c_2 sont deux chemins équivalents générateurs de la relation d'équivalence R' . En d'autres termes, il existe des chemins c'_1 et c'_2 de Q équivalent par la relation R tels que $p(c'_1) = c_1$ et $p(c'_2) = c_2$. Montrons alors que les promenades $q(\omega)$ et $q(\omega')$ sont équivalentes. Notons de plus, comme précédemment, p'_1 et p'_2 les promenades de Q obtenues à partir de p_1 et p_2 en insérant f_0 et f_0^{-1} . Ainsi :

$$q(\omega) = p'_1 \cdot e_3 \cdot c_1'^{-1} \cdot e_1 \cdot c_2' \cdot e_4 \cdot p'_2 \quad \text{et} \quad q(\omega') = p'_1 \cdot e_2 \cdot p'_2$$

Les chemins c'_1 et c'_2 étant équivalents, on a $t(c'_2) = s(c_1'^{-1})$ et $e_1 = t(f)$. On obtient donc

$$q(\omega) = p'_1 \cdot e_3 \cdot c_1'^{-1} \cdot e_1 \cdot c_2' \cdot e_4 \cdot p'_2 = p'_1 \cdot e_3 \cdot c_1'^{-1} \cdot c_2' \cdot e_4 \cdot p'_2 \sim p'_1 \cdot e_3 \cdot e_4 \cdot p'_2$$

Etant donné que les promenades e_2 , e_3 et e_4 sont formées uniquement avec la flèche f_0 et son inverse, on obtient encore $q(\omega) \sim q(\omega')$.

Par définition de la relation R' , la projection p est également constante sur les classes d'équivalence. Ainsi p et q induisent p_* et q_* entre les espaces $P_{x_0}(Q)/R$ et $P_{p(x_0)}(Q')/R'$. Il suffit de montrer que $q_* \circ p_* = Id$, ce qui est vrai puisque l'application $q \circ p$ appliquée à une

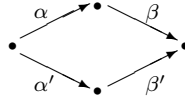
promenade lui enlève les expressions du type $f_0.f_0^{-1}$ et $f_0^{-1}.f_0$ et sa classe d'équivalence reste inchangée. $\square$

La méthode. Soit Q un carquois et I un idéal quelconque de kQ . Remarquons tout d'abord que la relation d'équivalence définie afin de construire le groupe fondamental algébrique $\Pi_1(Q, I)$ est en fait la relation d'équivalence $< (\omega_i \sim \omega'_i)_{i \in A} >$ où pour tout i de A , les chemins ω_i et ω'_i sont des chemins d'une relation minimale. En appliquant ensuite le théorème un certain nombre de fois (autant que de sommets de Q moins 1), et après avoir simplifié par les boucles équivalentes à leur extrémité, on trouve que le groupe fondamental algébrique $\Pi_1(Q, I)$ est isomorphe au groupe fondamental d'un carquois ne contenant qu'un seul sommet. Cela donne donc une description de $\Pi_1(Q, I)$ par générateurs et relations.

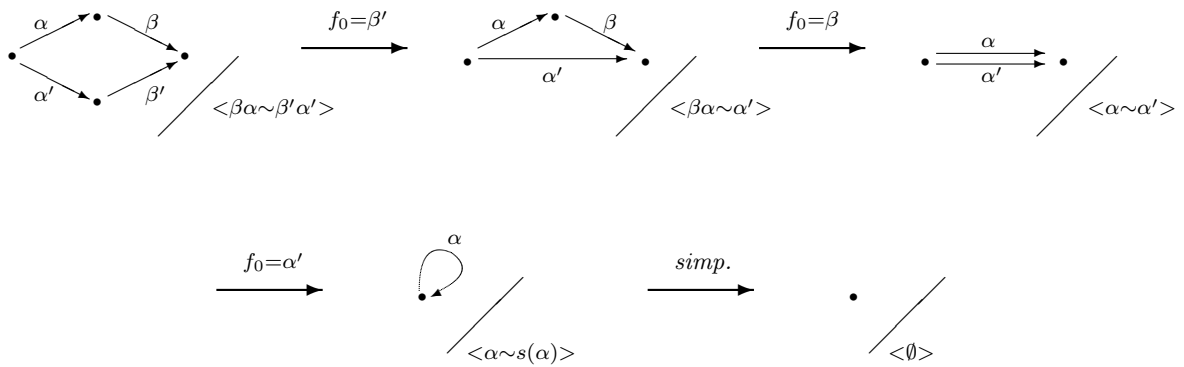
II.2/ Exemples

Nous allons reprendre des exemples vus précédemment et les calculer grâce à cet algorithme.

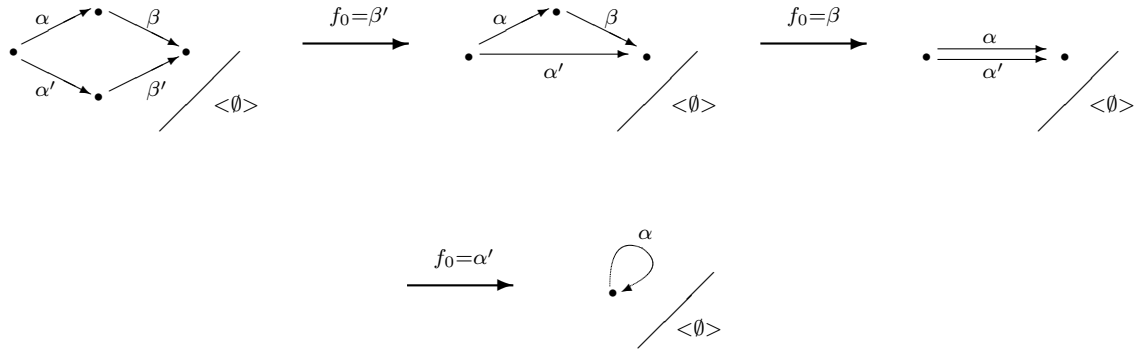
Exemple II.2.1. Considérons le carquois Q :



et les idéaux $I_1 = < \beta\alpha - \beta'\alpha' >$ et $I_2 = < \beta\alpha >$. Calculons les groupes fondamentaux associés à ces deux présentations. Tout d'abord pour (Q, I_1) :

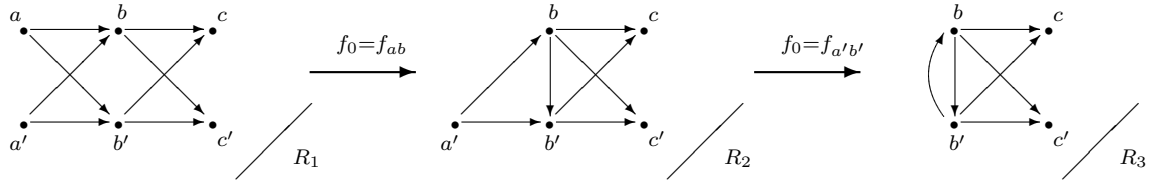


Le groupe fondamental associé à (Q, I_1) est donc trivial. Calculons à présent celui de (Q, I_2) :



Ainsi, le groupe fondamental de la présentation (Q, I_2) est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

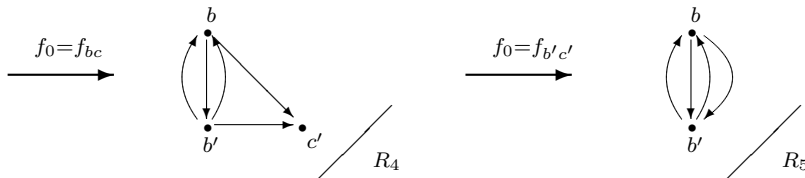
Exemple II.2.2. Considérons à présent l'algèbre d'incidence suivante. Cet exemple sera repris en (Ch4: II.2.2) pour montrer que le complexe simplicial associé est un octaèdre. Nous noterons par f_{xy} la flèche allant du sommet x au sommet y .



Avec

$$\begin{cases} R_1 = < f_{bc}f_{ab} \sim f_{b'c}f_{ab'}, & f_{bc'}f_{ab} \sim f_{b'c'}f_{ab'}, & f_{bc}f_{a'b} \sim f_{b'c}f_{a'b'}, & f_{bc'}f_{a'b} \sim f_{b'c'}f_{a'b'} > \\ R_2 = < f_{bc} \sim f_{b'c}f_{bb'}, & f_{bc'} \sim f_{b'c'}f_{bb'}, & f_{bc}f_{a'b} \sim f_{b'c}f_{a'b'}, & f_{bc'}f_{a'b} \sim f_{b'c'}f_{a'b'}, > \\ R_3 = < f_{bc} \sim f_{b'c}f_{bb'}, & f_{bc'} \sim f_{b'c'}f_{bb'}, & f_{bc}f_{b'b} \sim f_{b'c}, & f_{bc'}f_{b'b} \sim f_{b'c'}, > \end{cases}$$

On effectue le même procédé sur les flèches f_{bc} et $f_{b'c'}$; les nouvelles flèches entre b et b' seront notées avec des primes. On obtient :



Avec

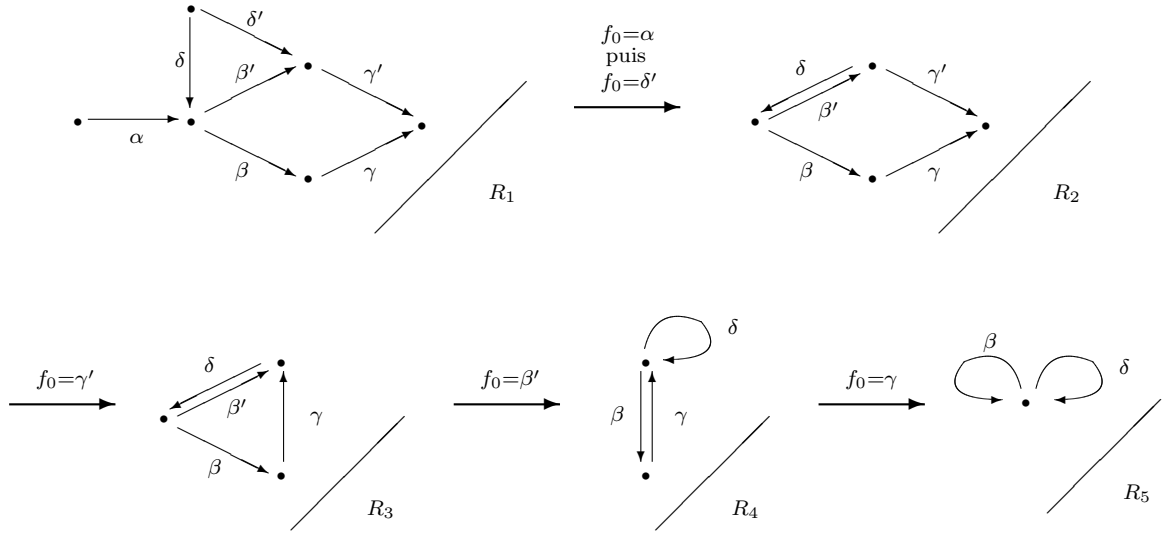
$$\begin{cases} R_4 = < b \sim f'_{b'b}f_{bb'}, & f_{bc'} \sim f_{b'c'}f_{bb'}, & f_{b'b} \sim f'_{b'b}, & f_{bc'}f_{b'b} \sim f_{b'c'}, > \\ R_5 = < b \sim f'_{b'b}f_{bb'}, & f'_{bb'} \sim f_{bb'}, & f_{b'b} \sim f'_{b'b}, & f'_{bb'}f_{b'b} \sim b', > \end{cases}$$

Enfin en effectuant l'opération une dernière fois avec $f_0 = f_{bb'}$, et en posant $\alpha = p(f_{b'b})$, $\beta = p(f'_{bb'})$ et $\gamma = p(f'_{b'b})$, on obtient un carquois ne contenant qu'un seul sommet b et trois flèches α , β et γ avec les relations :

$$R = \langle b \sim \gamma, \beta \sim b, \alpha \sim \gamma, \beta\alpha \sim b \rangle = \langle \alpha \sim \beta \sim \gamma \sim b \rangle$$

Le groupe fondamental topologique est donc trivial, ce qui est logique puisque c'est le groupe fondamental de la surface d'un octaèdre.

Exemple II.2.3. Un dernier exemple avec le carquois ci-dessous et l'idéal $I = \langle \gamma\beta\alpha - \gamma'\beta'\alpha, \gamma\beta\delta - \gamma'\delta', \gamma'\beta'\delta - \gamma'\delta' \rangle$.



Avec

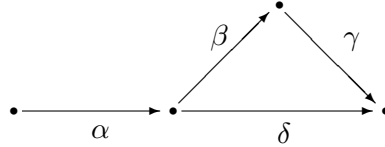
$$\begin{cases} R_1 = \langle \gamma\beta\alpha \sim \gamma'\beta'\alpha, & \gamma\beta\delta \sim \gamma'\delta', & \gamma'\beta'\delta \sim \gamma'\delta' \rangle \\ R_2 = \langle \gamma\beta \sim \gamma'\beta', & \gamma\beta\delta \sim \gamma', & \gamma'\beta'\delta \sim \gamma' \rangle \\ R_3 = \langle \gamma\beta \sim \beta', & \gamma\beta\delta \sim t(\gamma), & \beta'\delta \sim t(\gamma) \rangle \\ R_4 = \langle \gamma\beta \sim s(\beta), & \gamma\beta\delta \sim t(\gamma), & \delta \sim t(\gamma) \rangle \\ R_5 = \langle \beta \sim s(\beta), & \beta\delta \sim s(\beta), & \delta \sim s(\beta) \rangle \end{cases}$$

Ainsi, après simplification des deux dernières flèches, on trouve que le groupe fondamental de (Q, I) est trivial.

III. Influence de la présentation.

III.1/ Contre-exemple.

Nous avons vu en (Ch2: II.4) qu'une algèbre pouvait avoir plusieurs présentations, et ce problème va se répercuter sur le groupe fondamental qui est défini sur une présentation. En effet, les groupes fondamentaux associés à l'algèbre que nous avons déjà prise en (Ch2: II.4), et que nous rappelons ci-dessous, dépendent de la présentation choisie pour décrire l'algèbre (voir [AP], p.190). Considérons le carquois Q ci-dessous :

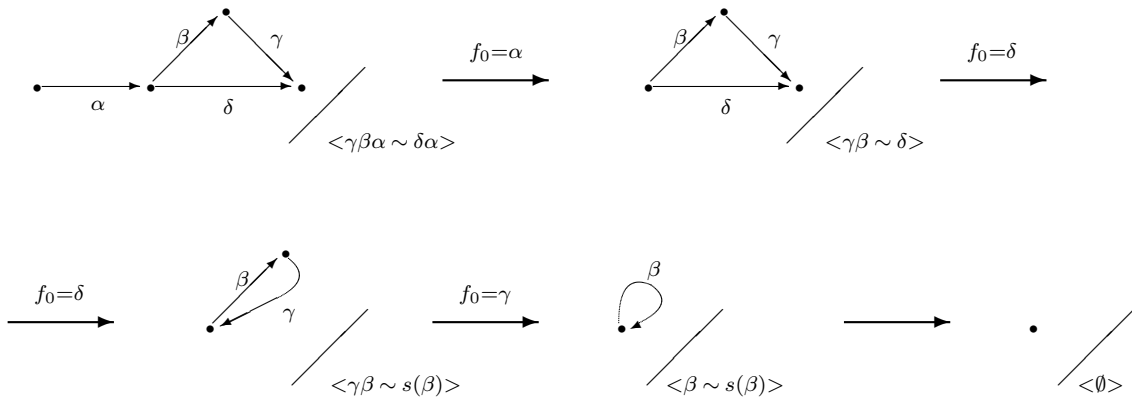


et les deux idéaux $I_1 = \langle \gamma\beta\alpha - \delta\alpha \rangle$ et $I_2 = \langle \delta\alpha \rangle$ de kQ .

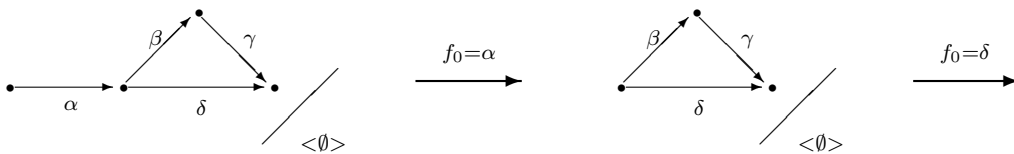
Proposition III.1.1. Les algèbres kQ/I_1 et kQ/I_2 sont isomorphes, et pourtant, les présentations (Q, I_1) et (Q, I_2) n'ont pas le même groupe fondamental. En effet le groupe fondamental associé à (Q, I_1) est trivial tandis que celui associé à (Q, I_2) est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

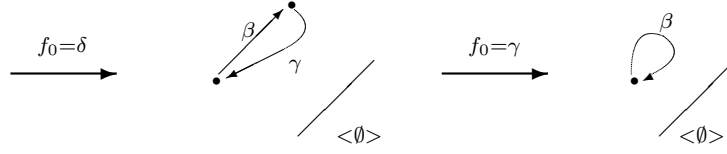
Preuve. Nous avons déjà vu en (Ch2: II.4) que ces deux algèbres sont isomorphes. Il suffit de calculer les groupes fondamentaux associés à ces présentations. Pour cela, utilisons l'algorithme décrit en (Ch3: II.1.1) pour calculer le groupe fondamental.

Considérons tout d'abord la présentation (Q, I_1) :



Ainsi le groupe fondamental $\Pi_1(Q, I_1)$ ou $I_1 = \langle \gamma\beta\alpha - \delta\alpha \rangle$ est nul. Calculons à présent le groupe fondamental $\Pi(Q, I_2)$ avec $I_2 = \langle \delta\alpha \rangle$ qui correspond à la relation d'équivalence $\langle \emptyset \rangle$.





Le groupe fondamental $\Pi_1(Q, I_2)$ est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. $\square$

III.2/ Le cas des algèbres étroites.

Le groupe fondamental n'est en conséquence pas un invariant de l'algèbre, cependant il existe quelques cas particuliers où le groupe fondamental est le même quel que soit sa présentation. Nous allons reprendre ici une partie de l'article [BM], où il est démontré que pour une classe d'algèbres appelées les algèbres étroites ("constricted" en anglais), le groupe fondamental ne dépend pas de la présentation choisie. Notons que les algèbres étroites comprennent les algèbres d'incidence et les algèbres Schurian.

Lemme III.2.1. Soit $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ deux familles complètes d'idempotents orthogonaux primitifs d'une k -algèbre Λ . Alors e est l'image de f par un automorphisme intérieur, c'est-à-dire qu'il existe un élément μ inversible et une permutation σ du $n^{\text{ième}}$ groupe symétrique S_n vérifiant $f_i = \mu^{-1}e_{\sigma(i)}\mu$ pour tout i de $\{1, \dots, n\}$.

Preuve. D'après (Ch1: I.5), l'algèbre Λ se décompose en modules indécomposables de deux manières : $\Lambda.e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda.e_n$ et $\Lambda.f_1 \oplus \dots \oplus \Lambda.f_n$. Ainsi le théorème de Krull-Schmidt (Ch1: II.4.1) affirme que les modules indécomposables de ces deux décompositions sont isomorphes. Quitte à renuméroter, on peut supposer qu'il existe des isomorphismes de Λ -module ϕ_i de $\Lambda.e_i$ dans $\Lambda.f_i$. En recollant tous ces morphismes, on obtient un isomorphisme de Λ -module $\phi = \phi_1 \oplus \dots \oplus \phi_n$ de $\Lambda = \Lambda.e_1 \oplus \dots \oplus \Lambda.e_n$ dans $\Lambda = \Lambda.f_1 \oplus \dots \oplus \Lambda.f_n$. Posons $\mu = \phi(1)$, on a alors $\phi(e_i) = e_i\phi(1) = e_i\mu$.

Montrons tout d'abord que μ est inversible. Pour cela il est nécessaire de remarquer que $\Lambda = \Lambda.\mu$. En effet, comme ϕ est surjectif, pour tout élément z de Λ , il existe y dans Λ tel que $z = \phi(y) = y.\phi(1) = y.\mu$. Il existe donc ν dans Λ vérifiant $\nu\mu = 1$; on en déduit que μ est inversible à gauche. De plus $\phi(\mu\nu) = \mu\nu\phi(1) = \mu\nu\mu = \mu$ et $\phi(1) = \mu$. Ainsi ϕ étant injective, on a $\mu\nu = 1$ et μ inversible.

Pour conclure, remarquons que $\mu = 1.\mu = e_1.\mu + \dots + e_n.\mu$, donc en multipliant par μ^{-1} à gauche $1 = \mu^{-1}.e_1.\mu + \dots + \mu^{-1}.e_n.\mu$. Ensuite :

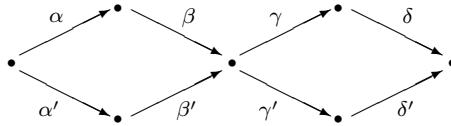
$$\mu^{-1}.e_i.\mu = \mu^{-1}.e_i.\phi(1) = \mu^{-1}.\phi(e_i) \in \Lambda.f_i$$

Ainsi, on a deux décompositions de l'unité dans la somme directe $\Lambda.f_1 \oplus \dots \oplus \Lambda.f_n$; ces deux décompositions sont donc égales et $f_i = \mu^{-1}.e_i.\mu$. $\square$

Définition. Soit $\Lambda = kQ/I$ une algèbre, alors Λ est dite étroite si pour toute flèche α de Q , on a $\dim_k(t(\alpha)\Lambda s(\alpha)) \leq 1$. Notons que c'est une définition indépendante de la présentation,

même s'il fait intervenir les notions de source et terminus qui sont propres au carquois.

Exemple III.2.2. Les algèbres Schurian et les algèbres d'incidence sont des algèbres étroites. Rappelons qu'une algèbre Schurian est une algèbre telle que $\dim_k(s.\Lambda.s') \leq 1$ pour tout sommet s et s' de Q . Dans l'exemple suivant nous montrons une algèbre étroite non Schurian et deux de ses présentations. Ceci montre qu'il peut exister plusieurs présentations d'une algèbre étroite ce qui justifie le théorème suivant. Pour cela considérons le carquois :



et les idéaux $I = \langle \delta\gamma\beta\alpha - \delta'\gamma'\beta'\alpha' \rangle$ et $I' = \langle \delta\gamma\beta\alpha - \lambda\delta'\gamma'\beta'\alpha' \rangle$ de kQ , où λ est un élément non nul de k .

Théorème III.2.3. ([BM], p.5) Soit (Q, I) et (Q, I') deux présentations d'une algèbre Λ étroite de dimension finie, alors les groupes fondamentaux $\Pi_1(Q, I)$ et $\Pi_1(Q, I')$ sont isomorphes.

Preuve. Montrons tout d'abord qu'il existe un isomorphisme entre kQ/I et kQ/I' laissant globalement fixes l'ensemble des classes des sommets de Q . Notons ϕ le morphisme surjectif de kQ dans $\Lambda = kQ/I'$ de noyau I associé à la présentation (Q, I) . Les images des sommets $s_1, \dots, s_n$ de Q par ϕ et les classes des sommets $\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n$ dans kQ/I' sont deux systèmes complets d'idempotents orthogonaux et primitifs. D'après le lemme (Ch3: III.2.1), il existe μ dans A tel que $\{\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n\} = \{\mu^{-1}\phi(s_1)\mu, \dots, \mu^{-1}\phi(s_n)\mu\}$. Considérons alors le morphisme ϕ' de kQ dans kQ/I' défini par $\phi'(x) = \mu^{-1}\phi(x)\mu$. Nous savons déjà que ϕ' laisse globalement fixes les sommets de Q , mais en fait l'ensemble des sommets est fixe point par point. En effet notons i et j des entiers tels que $\phi'(s_i) = \bar{s}_j$, ainsi $\mu^{-1}.\bar{s}_i.\mu - \bar{s}_j = 0$. Si $i \neq j$, alors cette équation introduit une relation minimale faisant intervenir un sommet, ce qui contredit le fait que I soit admissible. Il reste donc à montrer que le noyau de ϕ est égal au noyau de ϕ' . Ainsi :

$$x \in \ker(\phi') \iff \mu^{-1}\bar{x}\mu = 0 \iff \bar{x} = 0 \iff x \in \ker(\phi)$$

L'image par ϕ' d'une flèche f allant de s à t sera une combinaison linéaire de chemins allant de s à t . Or l'algèbre étant étroite, il n'existe que la flèche reliant s à t , ainsi $\phi'(f) = \lambda.\bar{f}$ où λ appartient à k .

Enfin $r = \sum_{i \in J} a_i \omega_i$ est une relation minimale de I si et seulement si $\phi'(r)$ est une relation minimale de I' . En effet $\phi'(r) = 0 = \sum_{i \in J} a_i \lambda_i \bar{\omega}_i$ avec $\phi'(\omega_i) = \lambda_i \bar{\omega}_i$. Si $\sum_{i \in J} a_i \lambda_i \omega_i$ n'est pas une relation minimale de I' , il existe donc $J' \subset J$ tel que $\sum_{i \in J'} a_i \lambda_i \omega_i$ soit une relation minimale et son image par ϕ'^{-1} donne la relation $\sum_{i \in J'} a_i \omega_i$ dans I ; ce qui contredit la minimalité de r . $\square$

Corollaire III.2.4. Le groupe fondamental des types d'algèbres suivantes ne dépend pas de la présentation choisie pour le calculer :

1. Les algèbres étroites.

2. Les algèbres d'incidence.
3. Les algèbres Schurian.

Remarquons que le groupe fondamental est également intrinsèque en ce qui concerne les algèbres de carquois, car il n'existe pour celles-ci qu'une seule présentation.

IV. Groupe fondamental et homologie de Hochschild.

Soit (Q, I) une présentation d'une algèbre A . On note $Hom(\Pi_1(Q, I), k^+)$ le groupe des morphismes de groupe de $\Pi_1(Q, I)$ dans le corps k . Assem et De la Peña ont montré qu'il existe un morphisme de groupe injectif de $Hom(\Pi_1(Q, I), k^+)$ dans $HH^1(A)$, le premier groupe de la cohomologie de Hochschild. Ce lien entre ces deux notions nous amène à connaître une méthode efficace de calcul pour la cohomologie de Hochschild. C'est pourquoi nous allons dans un premier temps rappeler une suite exacte longue très utile, due à D. Happel dans [Hap], p123. C'est ensuite que nous énoncerons et démontrerons le théorème de Assem - De la Peña.

IV.1/ Extensions par un point

Soit A une k -algèbre et M un A -module. Notons $A[M]$ l'algèbre :

$$A[M] = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \middle/ \text{avec } a \in A, m \in M \text{ et } \lambda \in k \right\}$$

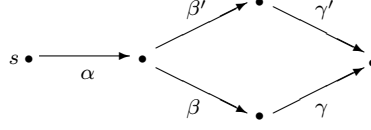
La multiplication dans $A[M]$ est la multiplication classique des matrices. L'algèbre $A[M]$ est appelé extension par un point de A par M .

Théorème IV.1.1. ([Hap], p.124) Soit $B = A[M]$ l'extension par un point de A par M , alors il existe une suite exacte longue :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & HH^0(B) & \longrightarrow & HH^0(A) & \longrightarrow & Hom_A(M, M)/k \longrightarrow \\ & & HH^1(B) & \longrightarrow & HH^1(A) & \longrightarrow & Ext_A^1(M, M) \longrightarrow \dots \\ \dots & \longrightarrow & HH^n(B) & \longrightarrow & HH^n(A) & \longrightarrow & Ext_A^n(M, M) \longrightarrow \dots \end{array}$$

Prenons, en particulier, le cas où B est une algèbre de la forme kQ/I avec I un idéal bilatère de kQ et où il existe un sommet s de Q qui est une source, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune flèche ayant s pour terminus. Notons alors Q' le sous-carquois de B obtenu à partir de Q en enlevant le sommet s et toutes les flèches ayant s pour source et notons A la sous algèbre de B associée au carquois Q' . Le module $M = rad(P_s)$ a une structure naturelle de B -module et il a été montré que B est isomorphe à $A[M]$.

Exemple IV.1.2. Considérons le carquois Q suivant :

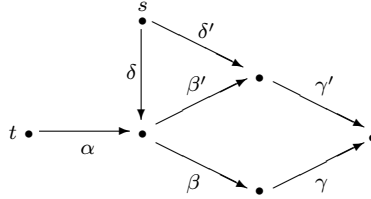


l'idéal $I = \langle \gamma\beta\alpha - \gamma'\beta'\alpha \rangle$ de kQ . Notons de plus $B = kQ/I$ et $A = kQ'/I'$ où Q' est obtenu à partir de Q en supprimant le sommet s et la flèche partant de s . Ainsi $B = A[Rad(P_s)]$. L'algèbre A est alors une algèbre d'incidence et son groupe fondamental est nul. Nous verrons dans le paragraphe suivant que, dans le cas des algèbres d'incidence, $Hom(\Pi_1(Q', I'), k)$ est isomorphe à $HH^1(A)$; ainsi $HH^1(A) = 0$. Posons $M = Rad(P_s)$. En remarquant que $End_A(Rad(P_s))/k = 0$ et en utilisant la suite exacte de Happel, on trouve :

$$0 \longrightarrow 0 = End_A(Rad(P_s))/k \longrightarrow HH^1(B) \longrightarrow HH^1(A) = 0$$

Ainsi $HH^1(B) = 0$.

Exemple IV.1.3. Considérons le carquois Q suivant :



et l'idéal $I = \langle \gamma\beta\alpha - \gamma'\beta'\alpha, \gamma\beta\delta - \gamma'\delta', \gamma'\beta'\delta - \gamma'\delta' \rangle$ de kQ . Notons de plus $B = kQ/I$ et $A = kQ'/I'$ où Q' est obtenu à partir de Q en supprimant le sommet s et les flèches partant de s , ainsi $B = A[Rad(P_s)]$. D'après l'exercice précédent $HH^1(A) = 0$. En remarquant que $\dim_k(End_A(M)) = 2$ et $HH^0(A) = k$ alors d'après la suite exacte longue :

$$k = HH^0(A) \longrightarrow Hom_A(M, M)/k \longrightarrow HH^1(B) \longrightarrow HH^1(A) = 0$$

on trouve que $HH^1(B) \simeq k$ (voir par exemple [Red], p.6).

IV.2/ Le théorème de Assem - De La Peña

Théorème IV.2.1. (Assem - De La Peña) Soit A une algèbre et (Q, I) une présentation de A où le carquois Q est sans cycle orienté (on dit que A est triangulaire). Il existe alors une application $\bar{s}$ k -linéaire injective :

$$\bar{s} : Hom(\Pi_1(Q, I), k^+) \longrightarrow HH^1(A)$$

où $Hom(A, B)$ désigne les morphismes de groupes de A dans B , k^+ désigne le groupe abélien sous-jacent au corps et $HH^1(A)$ est le premier groupe de la cohomologie de Hochschild de A .

Preuve. Voir AP, p.200. $\square$

Remarques.

1. Il existe des cas où l'injection n'est pas une surjection. Par exemple, le premier groupe de la cohomologie de Hochschild de l'algèbre B de l'exemple *Ch3 : IV.1.3* est non nul et pourtant l'algèbre est simplement connexe, voir (Ch3: II.2.3).
2. Il existe de nombreux cas où ce morphisme est surjectif. Pour en avoir une liste exhaustive, voir [PS], corollaire 3, p.9. Cependant, nous démontrerons en (Ch4: IV.1.1) que ceci est vrai en ce qui concerne les algèbres d'incidence, et ce d'une manière qui permet de voir le lien avec la géométrie.

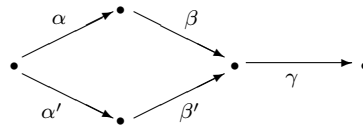
IV.3/ Diverses notions de connexité.

Suivant les valeurs de ses groupes fondamentaux, un par présentation, on donne différents noms à une algèbre. Ainsi, A est dite :

1. simplement connexe si pour toute présentation (Q, I) de A , le groupe fondamental $\Pi_1(Q, I)$ est réduit à 0.
2. librement connexe si pour toute présentation (Q, I) de A , le groupe fondamental $\Pi_1(Q, I)$ est libre.

Exemples IV.3.1.

1. Les algèbres de carquois kQ sont librement connexes. Elles sont simplement connexes si et seulement si Q est un arbre. Remarquons que dans ce cas là, kQ simplement connexe est encore équivalent à $HH^1(kQ) = 0$, voir (Ch2: I.2.2)
2. Les algèbres dont le carquois de Gabriel est un arbre sont simplement connexes.
3. Toutes les algèbres étroites qui possèdent une présentation telle que le groupe fondamental est réduit à 0 sont simplement connexes. Ainsi par exemple l'algèbre kQ/I où Q est le carquois :



et I l'idéal $I = \langle \alpha\beta\gamma - \alpha'\beta'\gamma \rangle$ est une algèbre étroite telle que $\Pi_1(Q, I) = 0$; elle est donc simplement connexe.

Proposition IV.3.2. Si A est une algèbre triangulaire librement connexe vérifiant $HH^1(A) = 0$ alors A est simplement connexe.

C'est une conséquence directe du théorème de Assem-De la Peña (Ch3: IV.2.1). Remarquons que la réciproque est fausse. Pour un contre-exemple, considérer l'exemple de l'algèbre A de l'exemple (Ch3: IV.1.3) qui a un premier groupe de Hochschild isomorphe au corps k et qui est simplement connexe, voir (Ch3: II.2.3).

Considérons maintenant une présentation (Q, I) d'une algèbre A . Un sous-carquois Q' de Q est dit plein si pour tout sommet x et y de Q' , le nombre de flèches de x vers y dans Q' est identique au nombre de flèches entre x et y dans Q . Supposons que Q' soit plein et posons $I' = kQ' \cap I$, alors I' est admissible dans kQ' . Dans ce cas, $B = kQ'/I'$ est naturellement une sous-algèbre de A et s'appelle une sous-algèbre pleine de A . Le sous-carquois Q' est dit convexe dans Q si pour tout sommet x et y de Q' , les chemins reliant x à y dans Q sont encore dans Q' . Cela signifie que Q' est plein et que les sommets traversés par les chemins reliant x à y sont encore dans Q' . L'algèbre kQ/I' est alors appelée une sous algèbre convexe de A .

Définition. Une algèbre A est dite fortement simplement connexe si toute sous-algèbre convexe de A est simplement connexe.

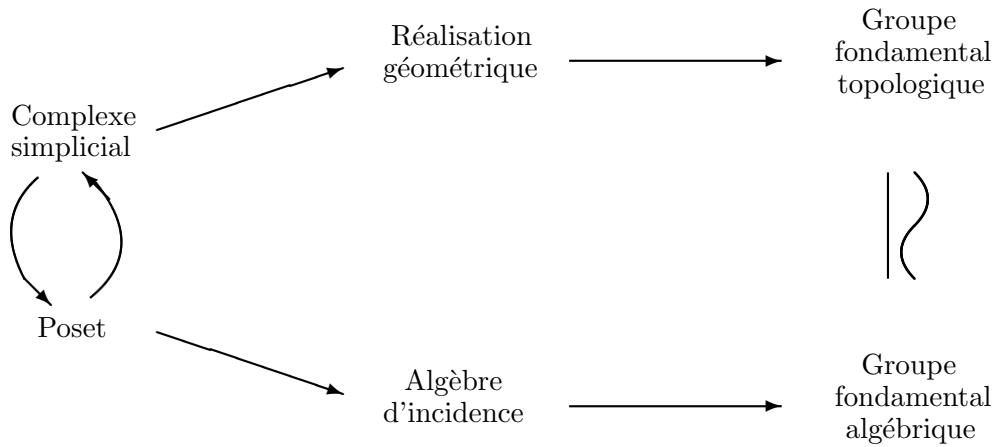
Pour compléter le panorama, énonçons un théorème dû à Skowronski.

Théorème (Skowronski) IV.3.3. Soit A une algèbre triangulaire. L'algèbre A est fortement simplement connexe si et seulement si $HH^1(B) = 0$ pour toute sous algèbre convexe B de A .

Preuve. Voir [Sko], p.438. $\square$

Réalisation topologique du groupe fondamental algébrique

L'objectif de ce chapitre est de lier dans un cadre particulier les groupes fondamentaux topologique et algébrique. Plus précisément, d'une part, tout complexe simplicial fini et connexe donne naissance à un groupe fondamental topologique, celui de sa réalisation géométrique. D'autre part, à tout poset, on peut associer le groupe fondamental algébrique de son algèbre d'incidence. Enfin, il existe des moyens naturels de passer d'un complexe simplicial à un poset et vice et versa. Dans ce cas les deux groupes fondamentaux considérés sont isomorphes. Le schéma suivant rend compte de cette situation.



Ceci permet de plus d'adapter certains théorèmes de topologie algébrique comme par exemple le théorème de Van Kampen ou de faire le lien entre des résultats de topologie algébrique et des résultats de théorie des représentations. Par exemple le théorème de I. Assem et J.A. de la Peña, dans le cadre particulier des algèbres d'incidence, établissant un isomorphisme entre $Hom(\Pi_1(Q, I), k^+)$ et $HH^1(kQ/I)$ où (Q, I) est la présentation d'une k -algèbre d'incidence, k^+ le groupe additif du corps k et $HH^1(kQ/I)$ le premier groupe de cohomologie de Hochschild de kQ/I peut être démontré à partir du résultat classique de topologie algébrique établissant l'isomorphisme entre l'abélianisé du Π_1 d'un complexe simplicial et le premier groupe d'homologie de ce même complexe simplicial.

I. Complexes simpliciaux.

I.1/ Complexes simpliciaux et réalisation géométrique

On appelle complexe simplicial la donnée :

1. d'un ensemble $\{a_i\}_{i \in I}$ dont les éléments sont appelés les sommets,
2. d'ensembles finis non vides de sommets appelés des simplexes, tels que si S est un simplexe tous les sous-ensembles non vides de S sont encore des simplexes.

Le complexe simplicial est dit fini si I est fini et connexe si pour tout couple de sommets (s, t) , il existe des sommets $s_0, \dots, s_n$ tels que $s_0 = s$, $s_n = t$ et que pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, l'ensemble $\{s_{i-1}, s_i\}$ soit un simplexe du complexe simplicial.

Sauf mention contraire, tous les complexes simpliciaux que nous considérerons à présent seront finis et connexes. Ainsi, les ensembles ne contenant qu'un seul sommet seront forcément des simplexes et il suffira pour décrire un complexe simplicial de donner la liste de ses simplexes.

Exemple I.1.1. Les ensembles $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ sont les simplexes d'un complexe simplicial dont les sommets sont a, b, c, d .

Définissons à présent la réalisation géométrique d'un complexe simplicial. Soit C un complexe simplicial fini de sommets $\{a_1, \dots, a_n\}$. Considérons des points $\{A_1, \dots, A_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ tels que

1. Si $\{a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_p}\}$ est un simplexe de C alors les points $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_p}$ sont affinement indépendants. L'enveloppe convexe stricte de ces points, c'est-à-dire l'ensemble des points à coordonnées barycentres strictement positives, est appelée une p -face.
2. Si S et S' sont deux simplexes disjoints, l'intersection des faces correspondantes doit être vide.

Une réalisation géométrique de C , noté $|C|$, est la réunion disjointe des faces associées aux simplexes du complexe simplicial. Lorsque nous parlerons de face fermée, il s'agira en fait de l'adhérence de la face.

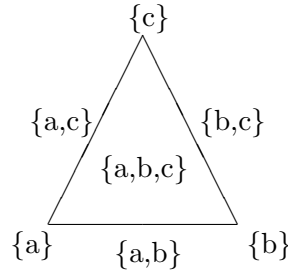
Remarques.

1. Les complexes simpliciaux considérés étant finis, leur réalisation géométrique existe toujours. En effet à chaque complexe C d'éléments $a_1, \dots, a_n$, on associe le polyèdre de $\mathbb{R}^n$ tel qu'à chaque simplexe $\{a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_p}\}$, on associe l'ensemble :

$$\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \text{ et } \lambda_i = 0 \iff i \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_p\}\}$$

2. Le complexe simplicial C est connexe si et seulement si sa réalisation géométrique $|C|$ est connexe.

Exemple I.1.2. Une réalisation géométrique du complexe simplicial de l'exemple (Ch4: I.1.1) est le triangle plein :



I.2/ Homologie et Cohomologie simpliciale.

Soit C un complexe simplicial, un simplexe orienté de C est un simplexe sur lequel on a choisi d'ordonner les sommets formant ce simplexe. Nous noterons $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ le simplexe $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ ordonné par $s_0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n$. Ainsi par exemple $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ et $(s_1, s_0, s_2, \dots, s_n)$ sont deux orientations du même n -simplexe $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$. Une p -chaîne sur un anneau A est une combinaison linéaire formelle de la forme :

$$\sum_{i=1}^m a_i \sigma_p^i$$

où $(\sigma_p^i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ est la famille des p -simplexes orientés de C et $(a_i)_{i \in \{1, \dots, m\}}$ une famille d'éléments de A . L'ensemble des p -chaînes à coefficients dans A , noté $C_p(C, A)$, forme un A -module libre. Introduisons à présent l'opérateur de dérivation δ défini sur les p -simplexes orientés par :

$$\delta_p((s_0, \dots, s_p)) = \sum_{i=0}^p (-1)^i (s_0, s_1, \dots, \widehat{s_i}, \dots, s_p)$$

et étendu à $C_p(C)$ par linéarité ; le symbole $\widehat{}$ au dessus d'un sommet indiquant que ce sommet n'apparaît pas dans le simplexe. Ainsi le complexe $(C_n(C), \delta_n)$:

$$\dots \longleftarrow 0 \longleftarrow C_0(C, A) \xleftarrow{\delta_1} C_1(C, A) \xleftarrow{\delta_2} C_2(C, A) \xleftarrow{\delta_3} C_3(C, A) \xleftarrow{\delta_4} \dots$$

est le complexe de chaîne associé à l'homologie simpliciale. La démonstration du fait que $\delta_p \delta_{p-1} = 0$ est immédiate.

Nous pouvons également définir la cohomologie d'un complexe simplicial en appliquant le foncteur $Hom(-, B)$ où B est un A -module, au complexe de chaîne précédent. On obtient le complexe de cochaîne suivant :

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Hom_A(C_0(C, A), B) \xrightarrow{d_1} Hom_A(C_1(C, A), B) \xrightarrow{d_2} Hom_A(C_2(C, A), B) \xrightarrow{d_3} \dots$$

où la codérivation (d_n) est définie par $d_n(f) = f \circ \delta_n$. La cohomologie associée à ce complexe est appelée la cohomologie simpliciale du complexe simplicial C .

I.3/ Approximation du groupe fondamental topologique.

Rappelons succinctement, dans un premier temps, la construction du groupe fondamental topologique ; pour plus de détail sur cette construction classique, consulter par exemple [HW], p.228. Soit $|C|$ la réalisation géométrique d'un complexe simplicial C fini et connexe. On appelle chemin de $|C|$ une fonction continue de $[0,1]$ dans $|C|$. Le chemin est dit fermé si $f(0) = f(1)$. On définit à présent une relation d'équivalence $\sim$ sur les chemins de $|C|$. Deux chemins σ_0 et σ_1 sont équivalents (on dit encore homotopes) si $\sigma_0(0) = \sigma_1(0)$, $\sigma_0(1) = \sigma_1(1)$ et s'il existe une fonction f de $[0;1] \times [0,1]$ dans $|C|$ vérifiant :

1. f est continue.
2. $\forall t \in [0;1], f(0,t) = \sigma_0(t)$ et $f(1,t) = \sigma_1(t)$
3. $\forall t \in [0;1], f(t,0) = \sigma_0(0) = \sigma_1(0)$ et $f(t,1) = \sigma_0(1) = \sigma_1(1)$

Soit x_0 un point de $|C|$. Le groupe fondamental de $|C|$ est le quotient de l'ensemble des chemins fermés en x_0 par la relation d'équivalence précédemment définie. Comme C est supposé connexe, il en est donc de même pour sa réalisation géométrique $|C|$ et le groupe fondamental ne dépend pas du point x_0 choisi. Le groupe fondamental sera noté $\Pi_1(|C|)$.

Cette définition du groupe fondamental algébrique s'applique à tout espace topologique. Quant il s'agit d'un complexe simplicial, il existe une manière équivalente de le définir et ceci grâce aux *chemins d'arêtes*.

Définitions. Soit C un complexe de sommets $\{a_1, \dots, a_n\}$. Un *chemin d'arêtes* du complexe simplicial C est une suite finie de sommets $a_{i_r} \dots a_{i_1}$ de C telle que les couples $\{a_{i_j}, a_{i_{j+1}}\}$ soient des simplexes pour tout j dans $\{1, \dots, r-1\}$. Si $w = a_{i_r} \dots a_{i_1}$ est un chemin d'arête notons le chemin d'arête inverse $w^{-1} = a_{i_1} \dots a_{i_r}$. Le chemin d'arête est dit *fermé* si le premier et le dernier sommet sont identiques. Soit $w = a_{i_r} \dots a_{i_1}$ et $w' = a_{j_s} \dots a_{j_1}$ deux chemins d'arêtes. Si $a_{j_s} = a_{i_1}$, le produit $w.w'$ existe et vaut $a_{i_r} \dots a_{i_1} a_{j_s} \dots a_{j_1}$. Définissons à présent une *opération admissible* sur un chemin : si trois sommets consécutifs du chemin d'arêtes appartiennent au même simplexe, le sommet central peut être supprimé. Inversement, on peut ajouter un sommet entre deux autres, si ces trois sommets forment un simplexe de C . De plus, il est possible de remplacer les doublets aa à l'intérieur d'un chemin d'arêtes par a et inversement. Ceci engendre une relation d'équivalence sur les chemins d'arêtes. Notons $\bar{w}$, la classe d'équivalence associée à un chemin d'arête w . Les premier et le dernier sommets de chemins d'arêtes équivalents sont identiques, ainsi le produit défini précédemment lorsqu'il existe induit un produit sur les classes d'équivalence.

Exemple I.3.1. Dans le complexe simplicial de l'exemple (Ch4: I.1.1) les suites de sommets abc, abc, ac sont des chemins d'arêtes équivalents.

Proposition I.3.2. ([HW], p.236, théorème 6.3.2) Soit C un complexe simplicial et x_0 un sommet de C . L'ensemble des classes d'équivalence de chemins d'arêtes fermés en x_0 est un groupe pour le produit défini par $\overline{w_1.w_2} = \overline{w_1}.w_2$ pour tout chemin d'arêtes w_1 et w_2 . L'inverse est quant-à-lui défini par : $\overline{w_1}^{-1} = \overline{w_1^{-1}}$. Puisque C est supposé connexe, ce groupe ne dépend pas du point x_0 choisi. On le notera $\Pi_1(C)$.

Théorème I.3.3. ([HW], p.237, théorème 6.3.3) Soit C un complexe simplicial (connexe), les groupes fondamentaux $\Pi_1(C)$ et $\Pi_1(|C|)$ sont isomorphes.

II. Poset et complexes simpliciaux.

II.1/ Poset associé à un complexe simplicial

Soit C un complexe simplicial. L'ensemble des simplexes de C muni de l'inclusion est un poset que l'on notera $Pos(C)$. On définit ainsi une application, et même un foncteur, des complexes simpliciaux vers les posets qui est injective mais non surjective. Par exemple, le poset $a < b$ n'a pas d'antécédent.

Exemple II.1.1. Si C est le complexe simplicial défini en (Ch4: I.1.1), c'est-à-dire $\{a, b, c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, alors le poset $Pos(C)$ est celui décrit en (Ch2: III.1.1).

Remarque. Les flèches d'un carquois issu d'un complexe simplicial, ne peuvent aller que d'un sommet représentant une p -face à un sommet représentant une q -face avec $p > q$. L'algèbre des chemins de ce carquois est donc de dimension finie.

De plus pour toute p -face F_p incluse dans l'adhérence d'une q -face F_q , il existe un chemin reliant S_{F_p} à S_{F_q} , les sommets représentant les faces F_p et F_q dans le carquois $Pos(C)$. En effet, $\overline{F_p} \subset \overline{F_q}$ implique $S_{F_p} < S_{F_q}$ et donc il existe des sommets $(T_i)_{\{1, \dots, n\}}$ tels que $S_{F_p} < T_1 < \dots < T_n < S_{F_q}$ et qu'il n'existe pas de sommets pouvant s'intercaler entre deux de ces éléments, on en déduit donc le chemin. Notons que le chemin n'est pas unique dès que $p - q > 1$.

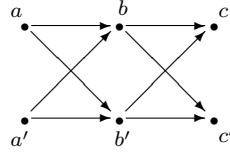
II.2/ Complexe simplicial associé à un poset

La construction d'un poset à partir d'un complexe simplicial n'est pas surjective. Nous rappelons dans ce paragraphe une méthode générale pour construire malgré tout un complexe simplicial connaissant un poset.

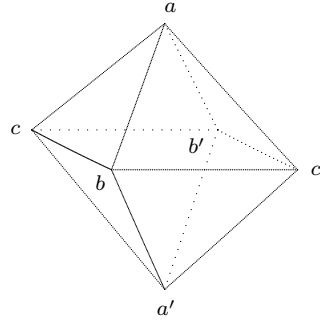
Définition. A chaque poset P , on associe un complexe simplicial $Sim(P)$, où les n -simplexes sont les sous-ensembles de P totalement ordonnés contenant $n+1$ éléments. L'application Sim , et même le foncteur Sim est surjective mais non injective. Par exemple les posets définis par $a < c < d$, $b < c < d$ d'une part et $a < c < b$, $a < d < c$ d'autre part auront le même complexe simplicial. Soulignons que l'application Sim n'est pas l'inverse de l'application Pos précédemment définie (Ch4: II.1).

Exemple II.2.1. Au poset $\{a, b, c, d / a < b < d, a < c < d\}$, on associe le complexe simplicial décrit par les ensembles $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$ et tous leurs sous-ensembles.

Exemple II.2.2. Considérons le poset P défini par le carquois ordonné suivant :



Et $Sim(P)$ est la surface de l'octaèdre suivant :



Nous allons voir à présent qu'il existe un lien étroit entre l'algèbre d'incidence d'un poset P et la cohomologie simpliciale associée au complexe simplicial $Pos(P)$. Pour la preuve de ce théorème, voir par exemple [Ci1], p. 225, Corollaire 1.4.

Théorème II.2.3. - (Gerstenhaber et Schack, [Ci1], p. 225, corollaire 1.4). Soit C un complexe simplicial et k un corps commutatif. Notons $Q = Sim(C)$ le poset associé à C et $A = kQ/I_Q$ son algèbre d'incidence sur k . Alors :

$$H^n(C, k, k) \simeq HH^n(A)$$

où $H^n(C, k, k)$ est la cohomologie simpliciale de C (Ch4: I.2) et $HH^n(A)$ est la cohomologie de Hochschild de l'algèbre A (Ch1: III.2).

II.3/ Nerf d'une catégorie et carquois ordonné.

Le foncteur Sim introduit dans le précédent n'est en fait que l'utilisation d'un concept plus général appliqué aux carquois ordonnés : le nerf d'une catégorie. En effet, à toute présentation (Q, I) on peut associer une catégorie contenant un nombre fini d'objets et de flèches. Les objets sont les sommets de Q et l'ensemble des morphismes d'un objet s à un objet t est l'ensemble des chemins de s à t quotienté par la relation d'équivalence définie pour construire le groupe fondamental (Ch3: I.2), c'est-à-dire la plus petite relation d'équivalence compatible avec la multiplication des chemins vérifiant que si $\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i$ est une relation minimale alors les $(c_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ sont équivalents. Par exemple, la catégorie de la présentation (Q, I) définie par

$$Q = \begin{array}{ccccc} & & \bullet & & \\ & \nearrow \alpha & & \searrow \beta & \\ \bullet & & & & \bullet \\ & \searrow \alpha' & & \nearrow \beta' & \\ & & \bullet & & \end{array} \quad I = \langle \beta\alpha - \beta'\alpha' \rangle$$

a pour objets les sommets du carquois et les morphismes sont les sommets qui représentent les identités de chaque objet, les flèches et le chemin $\beta\alpha = \beta'\alpha'$.

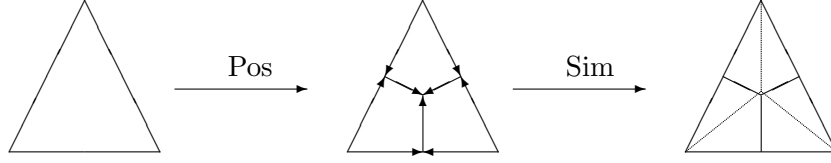
Par ailleurs, pour chaque catégorie, on peut associer classiquement un complexe simplicial appelé le nerf de la catégorie : les n -simplexes sont les suites $s_0, \dots, s_n$ de $n+1$ objets tels qu'il existe un morphisme différent de Id entre s_i et s_{i+1} pour tout i de $\{0, \dots, n-1\}$. Par convention, les 0-simplexes sont les objets de la catégorie. Ces ensembles forment bien un simplexe puisque si $s = (s_0, \dots, s_n)$ est un n -simplexe alors $s' = (s_0, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ est un $n-1$ simplexe où le morphisme reliant s_{i-1} à s_{i+1} dans s' est la composée des morphismes reliant respectivement s_{i-1} à s_i et s_i à s_{i+1} dans s . Le nerf d'une catégorie est en fait un foncteur allant de la catégorie des petites catégories à la catégorie des complexes simpliciaux. Ainsi par exemple, le nerf de la présentation $(Q, \{1\})$ où Q est le carquois contenant deux sommets s et t et deux flèches f et g allant de s à t est le complexe simplicial $\{s, t\}$ et ses sous-ensembles stricts et non vides. Sur cette exemple, nous voyons que le nerf n'associe pas en général de façon injective les morphismes de la catégorie aux simplexes. Cependant ceci se produit dans le cas des présentations d'une algèbre d'incidence, et plus généralement dans le cas des présentations d'une algèbre Schurian, c'est-à-dire d'une algèbre A vérifiant $\dim_k(eAe') \leq 1$ pour tout idempotent e et e' associés aux sommets du carquois. Dans le cas des algèbres d'incidence, le nerf coïncide avec le foncteur Pos que nous avons décrit précédemment.

II.4/ Décomposition barycentrique d'un complexe simplicial

Soit C un complexe simplicial, la décomposition barycentrique de C est le complexe simplicial $Sim(Pos(C))$. Remarquons que la décomposition barycentrique de $|C|$, dans le sens ou nous l'entendons d'ordinaire, est bien égale à $|Sim(Pos(C))|$. Énonçons alors un résultat classique que nous utiliserons par la suite :

Proposition II.4.1. Les groupes fondamentaux associés à $|Sim(Pos(C))|$ et à $|C|$ sont isomorphes.

Exemple II.4.2. Soit C le complexe simplicial dont les simplexes sont les sous-ensembles non vides de $\{a, b, c\}$. Appliquons-lui successivement les foncteurs Pos et Sim et vérifions que l'on obtient bien la décomposition barycentrique de C :



III. Isomorphisme entre les groupes fondamentaux.

Le but de ce paragraphe est de démontrer que le groupe fondamental défini sur la réalisation géométrique d'un complexe simplicial est isomorphe au groupe fondamental de l'algèbre d'incidence du poset induit par le complexe c'est-à-dire que $\Pi_1(C) \simeq \Pi_1(Pos(C))$. On déduit un résultat similaire en partant d'un poset, c'est-à-dire que les groupes fondamentaux $\Pi_1(Sim(P))$ et $\Pi_1(P)$ sont isomorphes pour tout poset P .

Nous démontrons tout d'abord que pour tout poset P on a : $\Pi_1(P) \simeq \Pi_1(Sim(P))$. Pour cela, nous allons utiliser l'approximation du groupe fondamental vu en (Ch4: I.3.3) et construire un isomorphisme explicite entre $\Pi_1(Sim(P))$ et $\Pi_1(P)$.

Théorème III.1. Soit P un poset, les groupes $\Pi_1(P)$ et $\Pi_1(Sim(P))$ sont isomorphes.

Preuve. En vertu de la proposition (Ch4: I.3.3), il est suffisant de montrer que $\Pi_1(P)$ est isomorphe au groupe fondamental construit sur les chemins d'arêtes de $Sim(P)$. Remarquons tout d'abord qu'à tout élément s du poset correspond par construction un sommet du complexe simplicial; nous noterons s' ce sommet.

Soit Q le carquois ordonné associé à P et ϕ l'application de $P(Q)$, l'ensemble des promenades du carquois Q , vers E l'ensemble des chemins d'arêtes de $Sim(P)$ définie par

$$\phi(s) = s' \quad \phi(\alpha_n^{\epsilon_n} \dots \alpha_1^{\epsilon_1}) = s'_{n+1} \dots s'_1$$

où s est un élément quelconque de Q , $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des flèches de Q et s_i, s_{i+1} sont respectivement l'origine et le terminus de $\alpha_i^{\epsilon_i}$.

Vérifions tout d'abord que ϕ est bien définie. En effet, $s'_{n+1} \dots s'_1$ est un chemins d'arêtes car pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, l'ensemble $\{s_i, s_{i+1}\}$ est totalement ordonné puisque α_i est une flèche d'extrémité s_i et s_{i+1} , donc $\{s'_i, s'_{i+1}\}$ est un simplexe de $Sim(P)$.

Nous allons à présent montrer que les images par ϕ de promenades équivalentes sont équivalentes. Il suffit de montrer ceci sur les générateurs de la relation d'équivalence. Soit f une flèche de Q reliant s_1 à s_2 , alors $\phi(f^{-1}.f) = s'_1.s'_2.s'_1$ qui est équivalent à $s'_1 = \phi(s_1)$. Soit c_1 et c_2 deux chemins parallèles traversant respectivement les sommets $s_1, t_1, t_2, \dots, t_n, s_2$ et $s_1, u_1, u_2, \dots, u_m, s_2$, alors les ensembles $\{s_1, t_1, t_2, \dots, t_n, s_2\}$ et $\{s_1, u_1, u_2, \dots, u_m, s_2\}$ sont totalement ordonnés et les chemins d'arêtes $\phi(c_1) = s'_1 t'_1 t'_2 \dots t'_n s'_2$ et $\phi(c_2) = s'_1 u'_1 u'_2 \dots u'_m s'_2$ sont tous les deux équivalents à $s'_1 s'_2$. Le troisième point est immédiat puisque la relation d'équivalence sur les chemins d'arêtes est compatible avec la composition des chemins.

Notons alors ϕ_* la fonction induite par ϕ définie de $\Pi_1(P)$ et à valeurs dans $\Pi_1(Sim(P))$ ceci étant possible car en plus de ce qui précède, l'image d'une promenade fermée est un chemin

d'arête fermé. Notons également x_0 et $x'_0 = \phi(x_0)$ les points pris comme base pour calculer $\Pi_1(P)$ et $\Pi_1(\text{Sim}(P))$. Montrons que ϕ_* est un morphisme.

$$\text{Si } \begin{cases} \phi(p) = x'_0 a'_n \dots a'_1 x'_0 \\ \phi(q) = x'_0 b'_n \dots b'_1 x'_0 \end{cases} \quad \text{alors} \quad \begin{cases} \phi(p) \cdot \phi(q) = x'_0 a'_n \dots a'_1 x'_0 x'_0 b'_n \dots b'_1 x'_0 \\ \phi(p \cdot q) = x'_0 a'_n \dots a'_1 x'_0 b'_n \dots b'_1 x'_0 \end{cases},$$

et les deux chemins d'arêtes $\phi(p) \cdot \phi(q)$ et $\phi(p \cdot q)$ sont équivalents.

Pour montrer que ϕ_* est bijective, nous allons construire son inverse ψ_* . Considérons le chemin d'arête $s'_{n+1} \dots s'_1$ et fixons i dans $\{1, \dots, n\}$. L'ensemble $\{s'_i, s'_{i+1}\}$ étant un simplexe, l'ensemble $\{s_i, s_{i+1}\}$ est totalement ordonné. Alors il existe un ensemble totalement ordonné maximal (pour l'inclusion) qui le contient et ayant s_i and s_{i+1} comme bornes inférieure et supérieure. Le choix de cet ensemble maximal n'a pas d'importance car les chemins correspondant à tous ces ensembles sont parallèles et donc équivalents. Cet ensemble maximal correspond à un chemin ou à un inverse de chemin de Q , noté $w_i^{\epsilon_i}$, ayant pour origine s_i et pour terminus s_{i+1} . Ainsi, nous pouvons définir un morphisme ψ de E dans $\Pi_1(C)$ par $\psi(s'_{n+1} \dots s'_1) = w_n^{\epsilon_n} \dots w_1^{\epsilon_1}$ si $n \geq 1$ et par $\psi(s'_1) = s_1$ sinon.

Montrons que ψ induit un morphisme ψ_* en montrant que l'application ψ est constante sur les classes d'équivalence. Montrons cela sur les générateurs de la relation d'équivalence. Tout d'abord, $\psi(s's')$ et $\psi(s')$ sont des chemins ne passant que par le sommet s , alors $\psi(s's') = s = \psi(s')$. De plus, si $s't'u'$ est un chemin d'arête tel que $\{s', t', u'\}$ soit un simplexe, alors $\psi(s't'u') = \psi(s't') \cdot \psi(t'u')$ et $\psi(s'u')$ sont des chemins parallèles allant de u à s , ils sont donc équivalents.

Finalement nous allons vérifier que $\phi_* \circ \psi_* = Id$ and $\psi_* \circ \phi_* = Id$. Soit f une flèche du carquois ordonné Q allant de s_1 à s_2 alors $\phi_*(f) = s'_2 s'_1$ et $\psi_* \circ \phi_*(f)$ est un chemin allant de s_1 à s_2 . Puisque le carquois est ordonné, il n'existe pas d'autre chemin que f , ainsi $\psi_* \circ \phi_*(f) = f$ et $\psi_* \circ \phi_* = Id$. Pour l'autre égalité, considérons un chemin d'arête $s'_1 s'_2$, alors $\psi_*(s'_1 s'_2)$ est un chemin reliant s_1 à s_2 , alors $\phi_* \circ \psi_*(s'_1 s'_2)$ est un chemin d'arête commençant en s'_1 et se terminant en s'_2 tel que tous les sommets formant ce chemin d'arêtes soient dans le même simplexe. Il est donc équivalent à $s'_1 s'_2$. $\square$

Théorème III.2. Soit C un complexe simplicial, alors les groupes fondamentaux $\Pi_1(C)$ et $\Pi_1(\text{Pos}(C))$ sont isomorphes.

Preuve. Le théorème découle du théorème (Ch4: II.4.1) qui montre que $\Pi_1(\text{Sim}(\text{Pos}(C)))$ et $\Pi_1(C)$ sont isomorphes et du théorème (Ch4: III.1) qui montre que $\Pi_1(\text{Sim}(\text{Pos}(C)))$ et $\Pi_1(\text{Pos}(C))$ sont isomorphes. $\square$

IV. Conséquences et applications.

Comme nous l'avons remarqué en (Ch4: II.3) le foncteur nerf n'associe pas de façon injective les morphismes de la catégorie (Q, I) aux n -simplexes s'il existe plus d'un morphisme entre deux objets, c'est-à-dire s'il existe deux chemins c_1 et c_2 parallèles de Q , non nuls et non

équivalents. En effet, le foncteur les transforme en un même simplexe et comme ils ne sont pas équivalents, toute promenade de la forme $\omega.c_1.c_2^{-1}.\omega^{-1}$ sera non nul et le chemin correspondant dans le groupe fondamental topologique du complexe simplicial sera nul. Il est donc inutile de chercher à généraliser le résultat aux algèbres non Schurian. Une généralisation à une classe d'algèbres comprise entre les algèbres d'incidence et Schurian a été réalisé dans [Bus].

IV.1/ Isomorphisme entre $\text{Hom}(\Pi_1(Q, I), k^+)$ et $HH^1(kQ/I)$.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que le Théorème de Assem et De la Peña (Ch3: IV.2.1) dans le cadre particulier des algèbres d'incidence, est une conséquence du théorème classique de topologie algébrique suivant :

$$\Pi_1(C)^{ab} \simeq H_1(C, \mathbb{Z})$$

où $\Pi_1(C)^{ab}$ est l'abélianisé du groupe fondamental topologique du complexe simplicial C et $H_1(C, \mathbb{Z})$ est le premier groupe d'homologie sur $\mathbb{Z}$ associé à C . Pour une démonstration de ce théorème, il est possible de consulter par exemple [HW], 6.4.7, p.246. La démonstration que nous proposons du théorème de Assem-De La Peña a pour avantage de relier les points de vue topologique et algébrique et ainsi d'établir une correspondance entre des résultats connus sur les deux groupes fondamentaux.

Théorème IV.1.1. Soit A une k -algèbre d'incidence et (Q, I) une présentation quelconque de A . Alors

$$\text{Hom}(\Pi_1(Q, I), k^+) \simeq HH^1(A)$$

où k^+ désigne le groupe additif du corps k .

Lemme IV.1.2. Soit R et S des anneaux, considérons la situation $(A_{R,R}B_S, C_S)$, c'est-à-dire que A est un R -module à droite, B un R - S -bimodule et C un S -module à droite. Alors, il existe alors un isomorphisme :

$$\text{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \simeq \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_S(B, C))$$

Pour une démonstration de ce lemme, voir par exemple [Rot], p.37.

Preuve du théorème. Désignons tout d'abord par P le poset associé à Q et par C le complexe simplicial $\text{Sim}(P)$. De plus, notons par $C_\bullet(\Lambda)$ le complexe de chaînes sur un anneau Λ associé à C et $H_\bullet(C, \Lambda)$ l'homologie simpliciale qui en découle (voir Ch4: I.2). De plus, la cohomologie associée au complexe $\text{Hom}_\Lambda(C_\bullet(\Lambda), A)$ où A est un Λ -module sera notée $H^\bullet(C, \Lambda, A)$.

Pour tout complexe simplicial l'abélianisé du Π_1 est isomorphe au premier groupe d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$; voir par exemple [HW], théorème 6.4.7, p.246. Ainsi, nous avons :

$$\Pi_1(C)^{ab} \simeq H_1(C, \mathbb{Z}).$$

Soit encore en appliquant le foncteur $\text{Hom}(-, k^+)$:

$$\text{Hom}(\Pi_1(C)^{ab}, k^+) \simeq \text{Hom}(H_1(C, \mathbb{Z}), k^+).$$

Par ailleurs, comme k^+ est abélien, on a :

$$Hom(\Pi_1(C)^{ab}, k^+) \simeq Hom(\Pi_1(C), k^+).$$

En utilisant le théorème d'isomorphisme entre les groupes fondamentaux (Ch4: III.2), nous obtenons donc :

$$Hom(\Pi_1(Q, I), k^+) \simeq Hom(H_1(C, \mathbb{Z}), k^+) \quad (*)$$

Par ailleurs, en prenant $B = C = S = k$, $R = \mathbb{Z}$ et $A = H_1(C, \mathbb{Z})$ et en identifiant les groupes abéliens et les $\mathbb{Z}$ -modules, le lemme précédent fournit :

$$Hom_k(H_1(C, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} k, k) \simeq Hom(H_1(C, \mathbb{Z}), k^+).$$

L'isomorphisme $(*)$ devient :

$$Hom(\Pi_1(Q, I), k^+) \simeq Hom_k(H_1(C, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} k, k) \quad (*)$$

D'autre part, comme $C(\mathbb{Z})$ est libre et donc projectif, les hypothèses du Théorème des coefficients universels en homologie (Ch1: III.1) et en cohomologie (Ch1: III.2) s'appliquent. Par ailleurs, $Ext_k^1(H_{n-1}(C), A) = 0$ car k est un corps et $Tor_1^\Lambda(H_0(C), k) = 0$ car $H_0(C)$ est libre d'après ([HS], p.63, cor.2.4.7). En posant $C = C(\mathbb{Z})$, $\Lambda = \mathbb{Z}$, $A = k$ et $n = 1$ dans le Théorème des coefficients universels en homologie et $C = C(k)$, $\Lambda = k$, $A = k$ et $n = 1$ dans le Théorème des coefficients universels en cohomologie, ceux-ci fournissent :

$$\begin{cases} H_1(C, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} k \simeq H_1(C \otimes_{\mathbb{Z}} k, \mathbb{Z}) \\ H^1(C, k, k) \simeq Hom_k(H_1(C, k), k) \end{cases}$$

En utilisant l'isomorphisme entre les complexes $C(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ et $C(k)$, l'équation $(*)$ devient :

$$Hom(\Pi_1(Q, I), k^+) \simeq Hom_k(H_1(C \otimes_{\mathbb{Z}} k, \mathbb{Z}), k) \simeq Hom_k(H_1(C, k), k) \simeq H^1(C, k, k)$$

Nous concluons en utilisant le théorème de Gerstenhaber et Schack ([Ci1] 1.4, p.225) appelé en (Ch4: II.2.3) affirmant que les cohomologies $H^i(C, k, k)$ et $HH^i(kQ/I)$ sont isomorphes. $\square$

Nous allons dans ce paragraphe introduire la notion de carquois complet qui nous sera utile entre autre dans le paragraphe suivant pour l'adaptation du théorème de Van Kampen au groupe fondamental algébrique. Un carquois est dit complet si

- il ne contient aucun cycle,
- chaque chemin de longueur au moins deux admet une flèche qui lui est parallèle,
- il n'existe pas de couple de flèches parallèles.

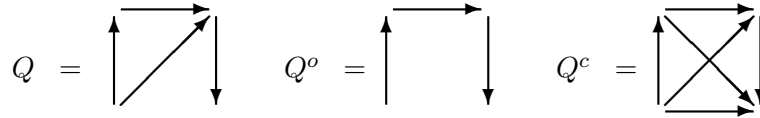
A partir d'un carquois Q sans cycle et sans flèche parallèle, nous pouvons construire deux carquois particuliers :

1. il existe un carquois ordonné unique Q^o obtenu en considérant l'ensemble des chemins de Q de longueur au moins 2, et en enlevant les flèches qui leur sont parallèles. Plus précisément, les sommets de Q^o sont les mêmes que ceux de Q et il existe une flèche de a à b , $a \neq b$, dans Q^o si et seulement si il existe une flèche dans Q de a à b qui n'est pas parallèle à un autre chemin de Q .

2. il existe un carquois complet Q^c obtenu à partir de Q en considérant l'ensemble des chemins de Q de longueur au moins 2, et en ajoutant, si elle n'existe pas déjà, une flèche parallèle à chacun de ces chemins. Plus précisément, les sommets de Q^c sont les mêmes que ceux de Q et il existe une flèche de a à b , $a \neq b$, dans Q^c si et seulement s'il existe un chemin de a à b dans Q .

Il est facile de voir que les carquois Q^o et Q^c sont bien définis et que ce sont des carquois respectivement ordonné et complet. Remarquons de plus que $(Q^o)^c = Q^c$ et $(Q^c)^o = Q^o$.

Exemple IV.1.3.



Théorème IV.1.4. Soit Q un carquois sans cycle et sans couple de flèches parallèles, alors les trois groupes fondamentaux associés aux carquois Q , Q^o et Q^c et aux idéaux parallèles respectifs sont isomorphes :

$$\Pi_1(Q, I_Q) \simeq \Pi_1(Q^o, I_{Q^o}) \simeq \Pi_1(Q^c, I_{Q^c})$$

Remarque. Les idéaux parallèles considérés dans le théorème précédent ne sont pas admissibles en général.

Preuve. Nous allons montrer que pour tout chemin de Q^c (resp. de Q), il existe un chemin parallèle formé de flèches provenant de Q (resp. Q^o). Soit $q = \alpha_1 \dots \alpha_n$ un chemin de Q^c . Pour chaque flèche α_i qui n'existe dans Q , il existe par construction un chemin ω_i de Q^c , déjà présent dans Q et parallèle à α_i . Si la flèche α_i de Q^c est une flèche qui provient de Q , posons $\omega_i = \alpha_i$. Alors le chemin q est parallèle au chemin $q' = \omega_1 \dots \omega_n$ qui est issue de Q . Le même processus est applicable aux carquois Q et Q^o .

Montrons à présent que les groupes fondamentaux $\Pi_1(Q, I_Q)$, $\Pi_1(Q^o, I_{Q^o})$ et $\Pi_1(Q^c, I_{Q^c})$ sont isomorphes. Remarquons tout d'abord que la relation d'équivalence sur les promenades de Q est la restriction de celle mise sur les promenades de Q^c . Ainsi, il suffit de montrer que les nouvelles promenades ajoutées lors du passage de Q à Q^c ne créent pas de classes supplémentaires. Puisque chaque chemin de Q^c est parallèle à un chemin qui provient de Q , à chaque classe de promenades de $\Pi_1(Q^c, I_{Q^c})$ on peut associer une classe de promenades de $\Pi_1(Q, I_Q)$. La preuve de l'isomorphisme entre $\Pi_1(Q^o, I_{Q^o})$ et $\Pi_1(Q, I_Q)$ est similaire. Enfin, il est clair que Q^o est ordonné et que Q^c est complet. $\square$

Théorème (Van Kampen) IV.1.5. Soit Q un carquois ordonné connexe et Q_1, Q_2 deux sous carquois connexes tels que $Q_1^c \cup Q_2^c = Q^c$ et tels que Q_3 , le carquois associé au carquois $Q_1^c \cap Q_2^c$ soit également connexe. Les inclusions i_1 (resp. i_2) de Q_3^c dans Q_1^c (resp. Q_2^c) induisent i_{1*} (resp. i_{2*}) de $\Pi_1(Q_0, I_{Q_3})$ dans $\Pi_1(Q_1, I_{Q_1})$ (resp. $\Pi_1(Q_2, I_{Q_2})$).

De plus $\Pi_1(Q, I_Q)$ est le quotient du produit libre de $\Pi_1(Q_1, I_{Q_1})$ et $\Pi_1(Q_2, I_{Q_2})$ par le sous-groupe normal engendré par les relations $i_{1*}(\alpha) = i_{2*}(\alpha)$ pour tout α de $\Pi(Q_3, I_{Q_3})$

Preuve. Nous utilisons pour la démonstration le théorème de Van Kampen classique adapté aux complexes simpliciaux (voir par exemple [11], p243) que nous rappelons ici :

Soit K un complexe simplicial connexe et K_1, K_2, K_3 des sous complexes connexes, tel que $K_1 \cup K_2 = K$ et $K_1 \cap K_2 = K_3$. Considérons de plus a_0 un sommet de K_3 . L'injection canonique $j_r : K_3 \rightarrow K_r$, $r = 1, 2$, induit

$$j_{r*} : \Pi(K_3, a_0) \mapsto \Pi(K_r, a_0)$$

Alors $\Pi_1(K)$ est le quotient du produit libre de $\Pi_1(K_1)$ et $\Pi_1(K_2)$ par le sous-groupe normal engendré par les relations $j_{1}(\alpha) \mapsto j_{2*}(\alpha)$ pour tout α dans $\Pi(Q_3, I_{Q_3})$.*

Notons K, K_1, K_2, K_3 les complexes simpliciaux correspondant aux carquois Q, Q_1, Q_2, Q_3 . Par hypothèse, ces complexes simpliciaux sont connexes. De plus, étant donné que l'ensemble des chemins de Q_i^c de longueur n et les simplexes de dimension n de K_i sont en bijection, nous avons $K = K_1 \cup K_2$ et $K_3 = K_1 \cap K_2$.

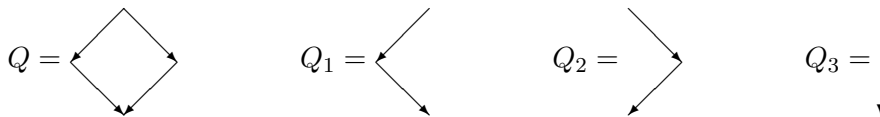
Appelons ϕ_* l'isomorphisme défini dans le théorème Ch4: III.1 entre $\Pi_1(Q, I_Q)$ et $\Pi_1(K)$. Alors il est facile de voir que le diagramme suivant est commutatif ($n = 1, 2$) :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(Q_3, I_{Q_3}) & \xrightarrow{i_{k*}} & \Pi_1(Q_n, I_{Q_n}) \\ \phi_* \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \phi_* \\ \Pi_1(K_3) & \xrightarrow{j_{k*}} & \Pi_1(K_n) \end{array}$$

De plus, $\Pi_1(Q, I_Q)$ est le produit libre de $\Pi_1(Q_1, I_{Q_1})$ et $\Pi_1(Q_2, I_{Q_2})$ en ajoutant les relations $i_{1*}(\alpha) = i_{2*}(\alpha)$ pour tout α de $\Pi(Q_0, I_{Q_0})$ $\square$

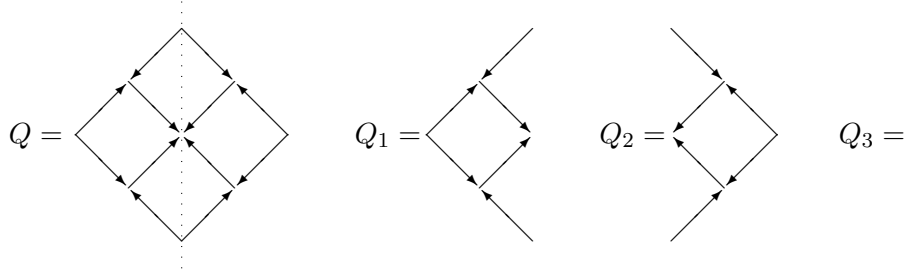
Corollaire IV.1.6. Si $\Pi_1(Q_3, I_{Q_3})$ est réduit à 0, alors $\Pi_1(Q, I_Q)$ est le produit libre de $\Pi_1(Q_1, I_{Q_1})$ et $\Pi_1(Q_2, I_{Q_2})$.

Exemple IV.1.7. Nous commençons avec un exemple simple.

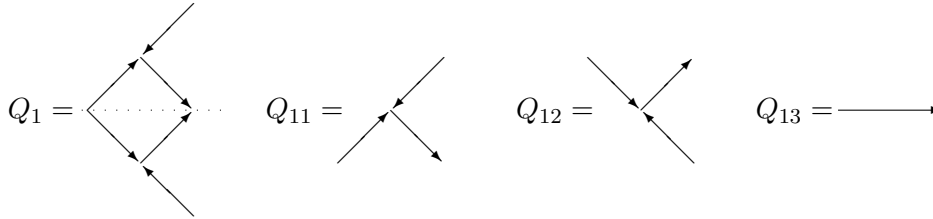


Le groupe fondamental d'un arbre étant nul, nous déduisons du corollaire que $\Pi_1(Q, I_Q) = 0$.

Exemple IV.1.8. Maintenant considérons le carquois Q ci-dessous ; la ligne pointillée indique les limites des carquois Q_1 et Q_2 .

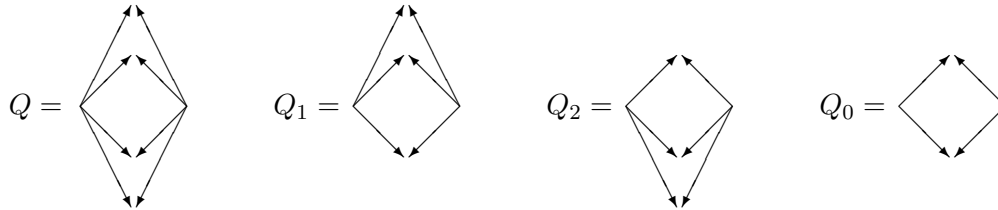


Puisque les carquois Q_1 et Q_2 sont identiques, nous avons à calculer uniquement le groupe fondamental de (Q_1, I_{Q_1}) . Utilisons à nouveau le théorème de Van Kampen, et décomposons le carquois Q_1 en Q_{11} et Q_{12} . Notons par Q_{13} l'intersection de ces deux carquois :

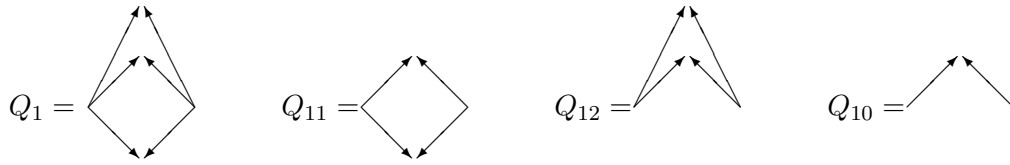


Les groupes fondamentaux de $(Q_{11}, I_{Q_{11}})$, $(Q_{12}, I_{Q_{12}})$ et $(Q_{13}, I_{Q_{11}})$ sont nuls, il en est de même pour (Q_1, I_{Q_1}) et ainsi pour (Q, I_Q) lui-même.

Exemple IV.1.9. Ce dernier exemple montre une situation où le carquois Q_0 n'est pas simplement connexe :



Une fois de plus, les carquois Q_1 et Q_2 sont les mêmes et nous utilisons encore le théorème de Van Kampen pour calculer le groupe fondamental $\Pi_1(Q_1, I_{Q_1}) = \Pi_1(Q_2, I_{Q_2})$:



Comme le groupe fondamental de Q_{10} est 0, le groupe fondamental de Q_1 est le produit libre de ceux associés à Q_{11} et Q_{12} qui sont isomorphes à $\mathbb{Z}$. Notons a et b les générateurs des groupes fondamentaux de Q_{11} et Q_{12} , alors le groupe fondamental de Q_1 est le groupe engendré par $\{a, b\}$. De la même façon, le groupe fondamental de Q_2 est engendré par deux éléments notés c et d . En ajoutant les relations $i_{1*}(Q_0) - i_{2*}(Q_0) = 0$, nous obtenons que $d = b$ et ainsi le groupe fondamental de Q est le groupe engendré par $\{a, b, c\}$.

Algèbre d'incidence associée à une présentation

Dans ce chapitre nous allons pour chaque présentation par carquois et relations (Q, I) d'une k -algèbre A , construire une algèbre d'incidence A' , avec pour objectif d'obtenir une surjection du groupe fondamental du couple (Q, I) sur le groupe fondamental de l'algèbre d'incidence A' .

Nous commencerons donc par construire un poset Σ à partir d'une présentation (Q, I) , puis nous montrerons qu'il existe une surjection de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(A')$ où A' est l'algèbre d'incidence associée à Σ . Enfin nous mettrons en évidence un sous-groupe H de $\Pi_1(Q, I)$ tel que la suite

$$0 \rightarrow H \rightarrow \Pi_1(Q, I) \rightarrow \Pi_1(A') \rightarrow 0$$

soit exacte.

L'intérêt principal de cette algèbre d'incidence est de donner dans le cas où le sous-groupe H est trivial, une vision géométrique du groupe fondamental. En effet, comme nous l'avons montré en (Ch4: III.1) les groupes fondamentaux $\Pi_1(A')$ et $\Pi_1(\text{Sim}(\Sigma))$ sont isomorphes. Ceci permet de réaliser géométriquement tout groupe fondamental dont le sous-groupe H est nul.

Enfin signalons que dans le cas où l'algèbre de départ est déjà une algèbre d'incidence, les groupes fondamentaux de cette algèbre et de l'algèbre d'incidence construite par la méthode précédente sont isomorphes ; dans ce cas H est trivial. Nous montrerons ensuite qu'il existe d'autres familles avec cette même propriété.

I. Construction du poset associé à une présentation.

I.1/ Les sommets de Σ .

Considérons tout d'abord l'ensemble quotient $C(Q)/\sim$ où $C(Q)$ est l'ensemble des chemins de Q et $\sim$ est la relation d'équivalence utilisée lors de la construction du groupe fondamental (Ch3: I.2) restreinte à l'ensemble $C(Q)$. Notons alors Σ l'ensemble quotient de $C(Q)/\sim$ privé des classes contenant des chemins se trouvant dans I . Ainsi par construction, tout chemin se trouvant dans une classe de Σ n'est jamais équivalent à un chemin se trouvant dans I .

Etant donné que les origines et les terminus de chemins équivalents sont identiques, les notions d'origine, d'extrémité et de parallélisme s'étendent à l'ensemble Σ . De plus comme la relation d'équivalence $\sim$ est compatible avec la concaténation des chemins, l'ensemble Σ hérite d'une loi de composition interne partiellement définie sur les promenades. Remarquons également que cette opération est entièrement définie sur $\Sigma \cup \{0\}$ qui est ainsi muni d'une structure de semi-groupe.

I.2/ Relation d'ordre sur Σ .

Soit (Q, I) une présentation et Σ l'ensemble associé à (Q, I) défini précédemment.

Proposition - Définition I.2.1. Soit $\bar{a}$ et $\bar{b}$ des éléments de Σ alors les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\exists \bar{w}, \bar{w}' \in \Sigma \quad / \quad \bar{b} = \bar{w}.\bar{a}.\bar{w}'$
2. $\forall a \in \bar{a}, \quad \exists b \in \bar{b}, \quad \exists w, w' \in C(Q) \quad / \quad b = w.a.w'$
3. $\exists a \in \bar{a}, \quad \exists b \in \bar{b}, \quad \exists w, w' \in C(Q) \quad / \quad b = w.a.w'$
4. $\forall a \in \bar{a}, \quad \forall b \in \bar{b}, \quad \exists w, w' \in C(Q) \quad / \quad b \sim w.a.w'$

On dit alors que $\bar{a}$ divise $\bar{b}$ et on note $\bar{a}/\bar{b}$. Cette relation est donc la restriction à Σ de la relation divise du semi-groupe $\Sigma \cup \{0\}$

Preuve.

(1 $\implies$ 2) : supposons qu'il existe $\bar{w}$ et $\bar{w}'$ dans Σ vérifiant $\bar{b} = \bar{w}.\bar{a}.\bar{w}'$. Fixons a, ω et ω' respectivement dans $\bar{a}, \bar{\omega}$ et $\bar{\omega}'$, il suffit alors de poser $b = w.a.w'$.

(2 $\implies$ 3) : évident.

(3 $\implies$ 4) : tous les chemins de $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) sont équivalents. De plus la relation $\sim$ est compatible avec la multiplication.

(4 $\implies$ 1) : soit $b \sim w.a.w'$. Comme b n'est pas dans I , il en est de même pour $w.a.w'$ d'après la construction de Σ . De plus, $\bar{w}$ (resp. $\bar{w}'$) est dans Σ . En effet dans le cas contraire w est équivalent à un chemin dans I et donc $w.a.w'$ est équivalent à un chemin dans I ce qui est exclus. Ainsi $\bar{b} = \bar{w}.a.\bar{w}' = (\bar{w}).(\bar{a}).(\bar{w}')$ $\square$

Proposition I.2.2. La relation divise définie précédemment est une relation d'ordre sur Σ .

Preuve. La réflexivité et la transitivité étant évidentes, il ne reste que l'antisymétrie à considérer. Les relations $\bar{a}/\bar{b}$ et $\bar{b}/\bar{a}$ impliquent qu'il existe $\alpha_1, \alpha'_1, \alpha_2$ et α'_2 tels que $a \sim \alpha_1.b.\alpha'_1$ et $b \sim \alpha_2.a.\alpha'_2$ où a et b désigne des éléments quelconques de $\bar{a}$ et $\bar{b}$. En posant $w = \alpha_1.\alpha_2$ et $w' = \alpha'_2.\alpha'_1$, on a $a \sim w.a.w'$. Ainsi, en utilisant n fois la dernière équation, on trouve que $a \sim w^n.a.w'^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Comme I est admissible, il existe un n_0 de $\mathbb{N}$ tel que $F^{n_0} \subset I$ où F^{n_0} est l'idéal contenant les chemins de longueur supérieure ou égale à n_0 . Deux cas peuvent alors se produire :

1. Les classes $\bar{w}$ ou $\bar{w}'$ contiennent au moins un chemin de longueur strictement positive. Supposons pour clarifier la situation que ce soit $\bar{w}$ et notons ω_0 ce chemin. Ainsi, le chemin a est équivalent à $\omega_0^{n_0}.a.\omega'^{n_0}$. Mais $\omega_0^{n_0}$ étant dans I , l'élément a est équivalent à un élément de I ce qui est impossible par construction de l'ensemble Σ . Ce cas ne peut donc pas se produire.
2. Les classes $\bar{w}$ et $\bar{w}'$ ne contiennent que des sommets. Comme I est admissible les sommets ne peuvent pas être équivalents à un autre chemin que le sommet lui-même et ainsi $\bar{w}$ et $\bar{w}'$ sont des singletons contenant respectivement le terminus t et la source s de $\bar{a}$; ainsi

$w' = s$ et $w = t$. De plus, pour une question de longueur, l'égalité $\alpha_1.\alpha_2 = t$ se traduit forcément par $\alpha_1 = \alpha_2 = t$. En raisonnant de même pour w' , on trouve que $a = b$.

□

Proposition I.2.3. Soit (Q, I) une présentation d'une algèbre et Σ le poset associé à cette présentation, alors :

1. $\dim(kQ/I) \geq \text{card}(\Sigma)$. En particulier, si kQ/I est de dimension finie alors Σ est fini et l'algèbre d'incidence associée est également de dimension finie.
2. Le carquois Q est connexe si et seulement si son poset d'incidence Σ est connexe.

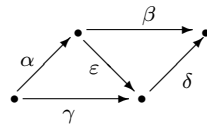
Preuve.

(1) : Soit $(w_i)_{i \in J}$ une famille de représentants de chaque classe de Σ . Montrons que c'est une famille libre dans kQ/I . On suppose que $\sum_{i \in J} \lambda_i w_i \in I$, il existe donc $J' \subset J$ non vide tel que $\sum_{i \in J'} \lambda_i w_i$ soit une relation minimale : en conséquence les $(w_i)_{i \in J'}$ sont équivalents. Par ailleurs, les w_i étant choisis dans des classes d'équivalence distinctes, le cardinal de J ne peut être que 1. Ainsi, la relation minimale se réduit à $\lambda_k.w_k = 0$ pour un certain k de J . Comme w_k n'est pas dans I par construction de Σ , le scalaire λ_i est nul. On réitère l'opération autant de fois que J contient d'éléments, et nous trouvons que tous les λ_i avec i dans J sont nuls, la famille $(w_i)_{i \in J}$ est libre.

(2) : La démonstration sera plus facile après avoir démontré la surjection entre les deux groupes fondamentaux, voir (Ch5: II.1.1). □

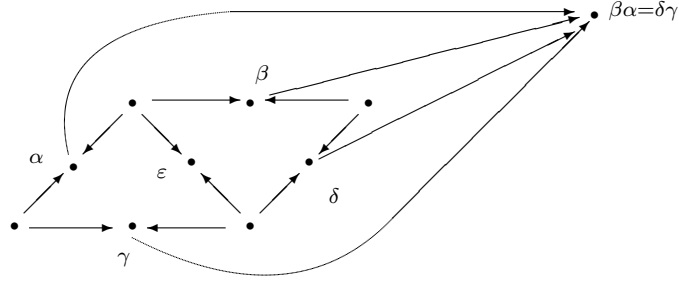
I.3/ Exemple

Considérons le carquois Q et l'idéal I de kQ suivants :



$$I = \langle \varepsilon\alpha, \delta\varepsilon, \beta\alpha - \delta\gamma \rangle$$

Mis à part les flèches et les sommets, il existe un unique chemin dans Q à savoir $\beta\alpha = \delta\gamma$. Ainsi le carquois d'incidence est :



II. Relation entre les groupes fondamentaux.

Soit (Q, I) , une présentation d'une algèbre par carquois et relations. Dans les paragraphes précédents, nous avons construit un poset Σ à partir cette présentation (Q, I) . Ces deux objets, la présentation et le poset, ont chacun leur groupe fondamental, et notre propos est de les comparer. Nous allons tout d'abord montrer qu'il existe toujours une surjection de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(\Sigma)$. Puis pour étudier le défaut d'injectivité, nous allons introduire un sous-groupe explicite H de $\Pi_1(Q, I)$ tel que le groupe quotient $\Pi_1(Q, I)/H$ soit isomorphe à $\Pi_1(\Sigma)$. En d'autres mots, nous donnons un système de générateurs du noyau de la surjection.

II.1/ Surjection de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(\Sigma)$

Théorème II.1.1. Soit (Q, I) une présentation d'une algèbre et Σ le poset d'incidence associé, alors il existe une surjection :

$$\phi_* : \Pi_1(Q, I) \twoheadrightarrow \Pi_1(\Sigma).$$

Preuve. Notons Q_Σ le carquois ordonné associé à Σ . Pour simplifier les notations de la démonstration un sommet de Q_Σ pourra également désigner une classe de chemins de $C(Q)/\sim$ ou même un chemin de Q si le chemin est seul dans sa classe. Ceci est le cas par exemple pour les classes de sommets ou de flèches. Considérons à présent l'application ϕ définie de $P(Q)$, l'ensemble des promenades de Q , vers $P(Q_\Sigma)$, l'ensemble des promenades de Q_Σ , caractérisé par :

- Si a est un sommet de Q (considéré comme chemin constant) alors $\phi(a) = a$. Remarquons que l'idéal étant admissible, a n'est pas dans I ; la classe de a est donc bien dans Σ .
- Soit α une flèche de Q allant de a vers b , alors a et b sont des diviseurs de α . L'idéal I étant admissible, les flèches de Q ne sont pas dans I ; ainsi α est dans Σ . Comme il n'existe pas d'éléments strictement compris, pour la relation d'ordre divise, entre a et α (resp. entre b et α), il existe dans Q_Σ deux flèches α_a et α_b reliant respectivement les sommets a et b à la flèche α . On peut alors poser $\phi(\alpha) = \alpha_b^{-1}\alpha_a$.

$$\text{Dans } Q : \quad a \xrightarrow{f} b \quad \quad \text{Dans } Q_\Sigma : \quad a \xrightarrow{\alpha_a} \xleftarrow{\alpha_b} b$$

- L'application ϕ est compatible avec la composition des chemins, ainsi si $\alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ est une promenade de $P(Q)$ alors

$$\phi(\alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}) = \phi(\alpha_n)^{\varepsilon_n} \dots \phi(\alpha_1)^{\varepsilon_1}$$

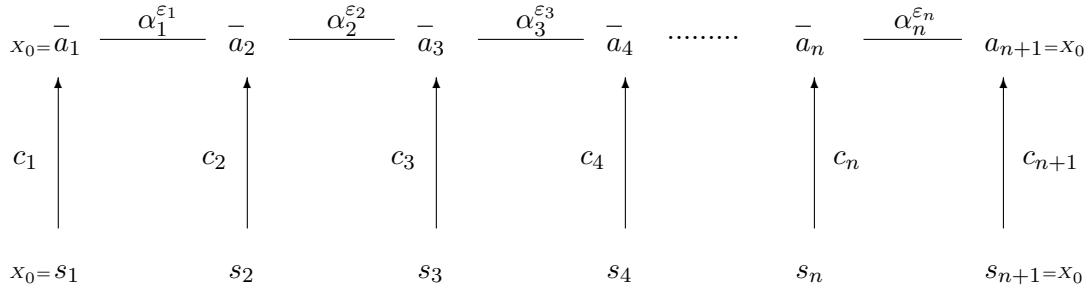
Soit X_0 le sommet base de Q choisi pour le calcul de $\Pi_1(Q, I)$, le point $\phi(X_0) = X_0$ sera également le sommet de Q_Σ choisi pour calculer $\Pi_1(Q_\Sigma, I_{Q_\Sigma})$. Nous noterons également par ϕ le morphisme induit par ϕ de source le groupe des chemins de Q fermés en X_0 et de but $\Pi_1(Q_\Sigma, I_{Q_\Sigma})$.

Montrons tout d'abord que l'application ϕ est surjective. Soit $p = \alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ une promenade de Q_Σ passant successivement par les sommets $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}$ avec $\overline{a_1} = \overline{a_{n+1}} = X_0$; en d'autres termes $\overline{a_i}$ est l'origine de $\omega_i^{\varepsilon_i}$. Nous allons prouver que p est équivalent à un chemin p' traversant les sources $s_1 \dots s_{n+1}$ des classes de chemins $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_{n+1}}$.

Pour tout i de $\{1, \dots, n\}$, le sommet $\overline{s_i}$ divise $\overline{a_i}$ et donc il existe un chemin c_i de Q_Σ reliant $\overline{s_i}$ à $\overline{a_i}$. De plus, comme X_0 est également un sommet de Q , les chemins c_1 et c_{n+1} valent X_0 . La promenade p est alors équivalente à :

$$p = (c_{n+1} \alpha_n^{\varepsilon_n} c_n) \dots (c_3^{-1} \alpha_2^{\varepsilon_2} c_2) (c_2^{-1} \alpha_1^{\varepsilon_1} c_1)$$

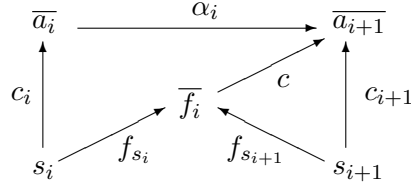
La situation est résumée sur le schéma suivant :



Soit i fixé dans $\{1, \dots, n\}$. Supposons de plus que $\overline{a_i/a_{i+1}}$, c'est-à-dire que $\varepsilon_i = 1$; l'autre cas se traitant de la même façon. Comme $\overline{a_i}$ est relié à $\overline{a_{i+1}}$ dans Q_Σ par α_i , il n'existe aucun élément b strictement entre $\overline{a_i}$ et $\overline{a_{i+1}}$. Il existe donc une flèche f_i de Q tel que $\overline{a_{i+1}} = \overline{a_i \cdot f_i}$ ou $\overline{a_{i+1}} = \overline{f_i \cdot a_i}$.

Dans le second cas $\overline{a_{i+1}} = \overline{f_i \cdot a_i}$, les chemins c_i et c_{i+1} ont une même origine s_i et donc les chemins $\alpha_i c_i$ et c_{i+1} sont parallèles et donc $\overline{c_{i+1}^{-1} \alpha_i c_i}$ est équivalent à s_i .

Considérons à présent le premier cas : $\overline{a_{i+1}} = \overline{a_i \cdot f_i}$. La flèche f_i de Q a pour origine s_{i+1} et pour extrémité s_i , donc il existe des flèches f_{s_i} et $f_{s_{i+1}}$ de Q_Σ reliant respectivement s_i et s_{i+1} au sommet f_i ; ces flèches vérifiant $\phi(f_i) = f_{s_i}^{-1} f_{s_{i+1}}$. De plus f_i divise $\overline{a_{i+1}}$, ainsi il existe un chemin c de Q_Σ reliant f_i à $\overline{a_{i+1}}$.



Les chemins c_{i+1} et $cf_{s_{i+1}}$ d'une part et $\alpha_i c_i$ et cf_{s_i} d'autre part sont parallèles, la promenade $c_{i+1}^{-1} \alpha_i c_i$ est donc équivalente à $f_{s_{i+1}}^{-1} c^{-1} c f_{s_i}$ puis à $f_{s_{i+1}}^{-1} f_{s_i}$ qui est exactement l'image par ϕ de f_i^{-1} . Remarquons que si nous avions considéré $\overline{a_{i+1}/a_i}$, nous en aurions déduit que le chemin est équivalent à l'image de la flèche f_i .

Remarquons également pour la suite, en utilisant le même procédé que précédemment, que la promenade de Q_Σ d'origine a et d'extrémité b :

$$a \rightarrow f_1 \rightarrow \overline{f_2 f_1} \rightarrow \overline{f_3 f_2 f_1} \rightarrow \dots \rightarrow \overline{f_n f_{n-1} \dots f_1} \rightarrow \overline{f_n \dots f_2} \rightarrow \overline{f_n \dots f_3} \rightarrow \dots \rightarrow b$$

est équivalente à $\phi(c)$ où $c = f_n f_{n-1} \dots f_1$.

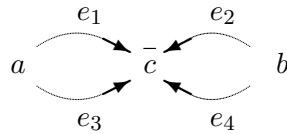
Montrons que ϕ est constant sur les classes d'équivalence de la relation $\sim$. Il induit donc ϕ_* . Vérifions tout d'abord que pour toute flèche f d'origine a et de but b , on a $\phi(f f^{-1}) \sim \phi(b)$ et $\phi(f^{-1} f) \sim \phi(a)$. En effet $\phi(f^{-1} f) = f_a^{-1} f_b f_b^{-1} f_a \sim a = \phi(a)$; la démonstration étant identique pour l'autre égalité.

Il suffit maintenant de vérifier que les images de deux chemins c_1 et c_2 de Q équivalents sont équivalentes. Supposons dans un premier temps que c_1 et c_2 ne sont pas dans I , ils sont donc représentés dans Σ .

Considérons $c_1 = \alpha_n \dots \alpha_1$ et $c_2 = \beta_m \dots \beta_1$ des chemins équivalents de Q et notons a et b respectivement l'origine et le but communs aux deux chemins c_1 et c_2 . Définissons, à présent, les chemins suivants :

- e_1 le chemin de Q_Σ passant par les sommets $a, \alpha_1, \alpha_2 \alpha_1, \dots, c_1$
- e_2 le chemin de Q_Σ passant par les sommets $b, \alpha_n, \alpha_n \alpha_{n-1}, \dots, c_1$
- e_3 le chemin de Q_Σ passant par les sommets $a, \beta_1, \beta_2 \beta_1, \dots, c_2$
- e_4 le chemin de Q_Σ passant par les sommets $b, \beta_m, \beta_m \beta_{m-1}, \dots, c_2$

Les chemins c_1 et c_2 étant équivalents, ils sont représentés dans Σ par le même sommet $\bar{c}$. La situation est résumée dans le schéma suivant, les flèches courbes représentant des chemins de Q_Σ :



D'après la remarque de la fin de la preuve de la surjectivité de ϕ , nous avons $e_2^{-1} e_1 \sim \phi(c_1)$ et $e_4^{-1} e_3 \sim \phi(c_2)$, donc $\phi(c_1)$ et $\phi(c_2)$ sont équivalents.

Intéressons nous à présent au cas où c_1 ou c_2 sont dans I . Comme c_1 et c_2 sont équivalents, il existe des promenades $\beta_1, \dots, \beta_n$ vérifiant :

$$c_1 = \beta_1 \sim \beta_2 \sim \dots \sim \beta_n = c_2$$

et tels que pour tout i de $\{1, \dots, n-1\}$, soit β_{i+1} est obtenu à partir de β_i en ajoutant ou en enlevant une promenade du type $f.f^{-1}$ ou $f^{-1}.f$ où f est une flèche, dans ce cas là nous avons déjà montré que $\phi(\beta_{i+1})$ et $\phi(\beta_i)$ sont équivalents ; soit il existe $\alpha_i, \alpha'_i, w_i, w'_i$ vérifiant : $\beta_i = w_i.\alpha_i.w'_i$, $\beta_{i+1} = w_i.\alpha'_i.w'_{i+1}$ et les chemins α_i et α'_i font parties d'une même relation minimale de I de la forme $\lambda_{i1}\alpha_i + \lambda_{i2}\alpha'_i + \dots$. Fixons i dans $\{1, \dots, n-1\}$. Remarquons tout d'abord que α_i ne peut être dans I car sinon α_i serait une relation minimale et $\lambda_{i1}\alpha_i + \lambda_{i2}\alpha_i + \dots$ n'en serait plus une. Comme α_i et α'_i sont équivalents et ne se trouvent pas dans I , en utilisant ce qui précède, leurs images par ϕ sont équivalentes, ainsi $\phi(\alpha_i) \sim \phi(\alpha'_i)$. L'application ϕ étant un morphisme et la relation $\sim$ de $\Pi_1(\Sigma)$ étant compatible avec la multiplication, on obtient :

$$\phi(w'_i.\alpha_i.w_i) = \phi(w'_i).\phi(\alpha_i).\phi(w_i) \sim \phi(w'_{i+1}).\phi(\alpha_{i+1}).\phi(w_{i+1}) = \phi(w'_{i+1}.\alpha_{i+1}.w_{i+1})$$

Comme i est quelconque, les chemins $\phi(c_1)$ et $\phi(c_2)$ sont également équivalents. Nous obtenons donc une application ϕ_* surjective de $\Pi_1(Q, I)$ dans $\Pi_1(Q_\Sigma)$. $\square$

Preuve de (Ch5: I.2.3). Nous allons à présent démontrer la propriété (Ch5: I.2.3) qui affirme qu'un carquois Q est connexe si et seulement si son poset d'incidence associé Σ est également connexe.

En effet, supposons que Q soit connexe. Considérons $\bar{a}$ et $\bar{b}$ deux sommets de Σ . Notons également $\bar{s}_a$ et $\bar{s}_b$ les sources de $\bar{a}$ et $\bar{b}$. Comme $\bar{s}_a/\bar{a}$ et $\bar{s}_b/\bar{b}$, il existe des chemins c_1 et c_2 de Σ reliant respectivement $\bar{s}_a$ à $\bar{a}$ et $\bar{s}_b$ à $\bar{b}$. De plus, les sommets $s_a = \bar{s}_a$ et $s_b = \bar{s}_b$ de Σ sont également des sommets de Q . Ainsi, comme Q est connexe, il existe une promenade ω de Q reliant s_a et s_b . Enfin $c_2\phi(\omega)c_1^{-1}$ est une promenade reliant $\bar{a}$ à $\bar{b}$. Le poset Σ est donc connexe.

Inversement, supposons que Σ soit connexe. Considérons x et y deux sommets quelconques de Q , ils sont également dans Σ . Comme Σ est connexe, il existe une promenade ω' de x à y dans Q . Puisque ϕ est surjective, il existe une promenade de Q reliant x à y et telle que $\phi(\omega) \sim \omega'$. Ainsi, Q est connexe.

$\square$

II.2/ Générateurs du noyau.

Soit (Q, I) une présentation d'algèbre vérifiant la propriété (P) . Notons $\sim$, la relation d'équivalence définie lors de la construction du groupe fondamental $\Pi(Q, I)$ (Ch3: I.2). On considère ensuite la relation d'équivalence R sur $P(Q)/\sim$, l'ensemble des classes de promenades de Q suivant la relation $\sim$, définie comme étant la plus petite relation d'équivalence compatible avec la multiplication et vérifiant la propriété suivante : si deux chemins parallèles c_1 et c_2 de Q divisent deux chemins équivalents par $\sim$ ne se trouvant pas dans I , alors les classes $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ sont R -équivalentes.

Exemple II.2.1. Considérons le carquois Q et l'idéal I de kQ suivant :

$$Q = \begin{array}{c} \alpha \\ \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \\ \beta \end{array} \quad I = \langle \gamma\alpha - \gamma\beta \rangle$$

Les chemins α et β sont parallèles et divisent respectivement $\gamma\alpha$ et $\gamma\beta$ qui sont $\sim$ -équivalents. Ainsi, les classes de chemins $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ sont R -équivalentes.

Exemple II.2.2. Considérons à présent le carquois Q ne contenant qu'une seul sommet s avec une boucle f sur ce sommet et l'idéal I réduit à $\{0\}$:

$$Q = \begin{array}{c} \text{---} f \text{---} \\ \curvearrowright \\ s \end{array} \quad I = \{0\}$$

Les chemins s et f sont parallèles et divisent f qui est équivalente à elle-même, donc les classes $\overline{s}$ et $\overline{f}$ sont R -équivalentes.

Soit H le sous-groupe distingué de $\Pi_1(Q, I)$ associé à la relation R , c'est-à-dire le plus petit sous-groupe distingué H de $\Pi_1(Q, I)$ contenant les promenades de la forme $p^{-1}\overline{c_1}^{-1}\overline{c_2}p$, avec p une promenade commençant en X_0 , le point base choisi pour calculer $\Pi_1(Q, I)$, et avec c_1 et c_2 parallèles divisant respectivement deux chemins $\sim$ -équivalents non nuls dans kQ/I . Le sous-groupe H peut donc s'écrire :

$$H = \langle \overline{p}^{-1} \cdot \overline{c_1}^{-1} \cdot \overline{c_2} \cdot \overline{p} \mid \overline{p} \text{ une promenade d'origine } X_0, \overline{c} \in \Sigma, \text{ et } \overline{c_1}/\overline{c}, \overline{c_2}/\overline{c}, \overline{c_1}/\overline{c_2} \rangle$$

Remarquons que H ne varie pas si on le calcul avec la présentation (Q, I) ou avec la présentation (Q, I') , la présentation ne contenant que des relations monômiales et binômiales associées.

II.3/ La suite exacte.

Théorème II.3.1. Soit (Q, I) une présentation d'une algèbre vérifiant la propriété (P) et Σ le poset d'incidence associé. Alors les groupes $\Pi_1(Q, I)/R$ et $\Pi_1(Q_\Sigma)$ sont isomorphes, en d'autres termes, la suite

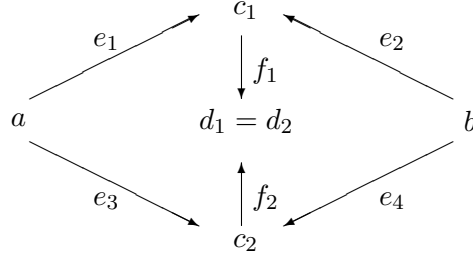
$$0 \longrightarrow H \longrightarrow \Pi_1(Q, I) \longrightarrow \Pi_1(Q_\Sigma) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Preuve. Nous garderons les mêmes notations que lors de la preuve de la surjectivité.

Montrons tout d'abord que ϕ_* est constant sur les classes d'équivalence de la relation R . Il induit donc ϕ_{**} . Il faut montrer que les images de deux chemins parallèles c_1 et c_2 dans Q divisant respectivement des chemins équivalents d_1 et d_2 non dans I , sont équivalents. Remarquons que c_1 et c_2 ne sont alors pas dans I , sinon d_1 ou d_2 le seraient ce qui n'est pas possible. Ceci montre que les chemins c_1 et c_2 sont bien représentés dans Σ .

Comme c_1/d_1 et c_2/d_2 , il existe f_1 un chemin de Q_Σ reliant $\overline{c_1}$ à $\overline{d_1}$ et f_2 un chemin de Q_Σ reliant $\overline{c_2}$ à $\overline{d_2}$. Utilisons de plus les mêmes définitions que dans la preuve de la surjectivité (Ch5: II.1.1) pour les chemins e_1, e_2, e_3 et e_4 . Nous obtenons ainsi la situation suivante, les flèches de ce schéma représentant des chemins de Q_Σ :



En utilisant la remarque de la fin de la preuve de la surjectivité de ϕ , nous avons :

$$\phi(c_1) \sim e_2^{-1}e_1 \sim e_2^{-1}f_1^{-1}f_1e_1 \sim e_4^{-1}f_2^{-1}f_2e_3 \sim e_4^{-1}e_3 \sim \phi(c_2)$$

La construction de l'antécédent lors de la démonstration de la surjectivité définit une application ψ des promenades de Q_Σ dans le quotient des promenades de Q par les deux relations d'équivalence. Définissons ici plus précisément cette application. Considérons l'application ψ définie de $P(Q_\Sigma)$, l'ensemble des promenades de Q_Σ , dans $(P(Q)/\sim)/R$ engendrée par les relations suivantes :

1. $\psi(e) = s(e)$ pour tout sommet e de Q_Σ .
2. Si $\alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}$ est une promenade fermée en x_0 alors

$$\psi(\alpha_n^{\varepsilon_n} \dots \alpha_1^{\varepsilon_1}) = \psi(\alpha_n)^{\varepsilon_n} \dots \psi(\alpha_1)^{\varepsilon_1}.$$

3. Si α est une flèche de Q_Σ reliant $\bar{a}$ à $\bar{b}$ alors il existe une flèche f de Q vérifiant $\bar{b} = \bar{f}.\bar{a}$ ou $\bar{b} = \bar{a}.\bar{f}$. Si $\bar{b} = \bar{f}.\bar{a}$ alors $\psi(\alpha)$ est l'origine de $\bar{a}$ sinon $\psi(\alpha)$ est égal à f^{-1} .

Soit x_0 le sommet pris comme point base pour calculer $\Pi_1(Q, I)$, le sommet $x_0 = \phi(x_0)$ sera également pris comme point base pour calculer $\Pi_1(Q_\Sigma, I_{Q_\Sigma})$. Notons également par ψ , l'application ψ restreinte à l'ensemble des promenades fermés en x_0 . Remarquons que l'image de ψ est alors incluse dans $\Pi(Q_\Sigma, I_{Q_\Sigma})$.

Montrons tout d'abord que ψ est bien définie.

1. S'il existe f et g vérifiant $\bar{b} = \bar{a}.\bar{f} = \bar{g}.\bar{a}$, alors $s(\bar{a}) = s(\bar{f}) = s(\bar{b})$, $t(\bar{f}) = s(\bar{a})$ et $t(\bar{a}) = s(\bar{g})$; les applications *source* et *terminus* étant toujours utilisés sur les classes de chemins de Q et non sur les sommets de Σ . Ainsi f est une boucle d'extrémité $s(\bar{a})$. Le sommet $s(\bar{a})$ de Q et la flèche f sont parallèles et divisent f , non nul car l'idéal I est admissible ce qui interdit aux sommets et aux flèches de Q d'être dans I , ils sont R -équivalents. Grâce à un raisonnement identique sur g nous en déduisons que les deux définitions dans ce cas coïncident.
2. S'il existe f et g vérifiant $\bar{b} = \bar{f}.\bar{a} = \bar{g}.\bar{a}$ ou $\bar{b} = \bar{a}.\bar{f} = \bar{a}.\bar{g}$, alors f et g sont des flèches parallèles divisant b , non nul car b est dans Σ , ils sont donc R -équivalents.

Montrons ensuite que l'application ψ est constante sur les classes d'équivalence et induit donc une fonction ψ_* une application de $\Pi_1(Q_\Sigma)$ dans $\Pi_1(Q, I)/H$

Vérifions cela sur les générateurs de la relation d'équivalence. Soit α une flèche de Q_Σ reliant le sommet $\bar{a}$ au sommet $\bar{b}$. Il existe alors f vérifiant $\bar{b} = \bar{f}.\bar{a}$ ou $\bar{b} = \bar{a}.\bar{f}$. Dans le premier

cas insérer $\alpha^{-1}\alpha$ dans une promenade de Q_Σ n'influe pas sur l'image puisque $\psi(\alpha)$ est un sommet. Dans le deuxième cas, cela revient à insérer $f.f^{-1}$, ce qui ne change pas sa classe d'équivalence. On raisonne de la même façon sur $\alpha\alpha^{-1}$.

Considérons à présent, deux chemins c et c' de Q_Σ parallèles. Montrons que remplacer $\psi(c)$ par $\psi(c')$ dans une promenade de Q ne change pas sa classe d'équivalence. Soit $\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}$ et $\overline{a'_1}, \dots, \overline{a'_{n'}}$ les sommets traversés par c et c' et posons $\overline{a} = \overline{a_1} = \overline{a'_1}$. Pour tout i , le sommet $\overline{a_i}$ est relié au sommet $\overline{a_{i+1}}$ donc il existe une flèche f de Q telle que $\overline{a_{i+1}} = \overline{a_i} \cdot \overline{f}$ ou $\overline{a_{i+1}} = \overline{f} \cdot \overline{a_i}$. Ainsi,

$$\begin{array}{ll} \exists r, s \in \mathbb{N} & \exists f_1 \dots f_{r+s} \quad \text{tels que} \quad \overline{a_n} = \overline{f_{r+1}} \dots \overline{f_{r+s}} \cdot \overline{a} \cdot \overline{f_1} \dots \overline{f_r} \\ \exists r', s' \in \mathbb{N} & \exists f'_1 \dots f'_{r'+s'} \quad \text{tels que} \quad \overline{a_{n'}} = \overline{f'_{r'+1}} \dots \overline{f'_{r'+s'}} \cdot \overline{a} \cdot \overline{f'_1} \dots \overline{f'_{r'}} \end{array}$$

On a alors $\psi(c)^{-1} = f_1.f_2 \dots f_r$ et $\psi(c')^{-1} = f'_1.f'_2 \dots f'_{r'}$. Ces chemins sont parallèles et leurs classes selon la relation $\sim$ divisent $\overline{a_n} = \overline{a_{n'}}$, ils sont donc R -équivalents.

Vérifions enfin que les applications ψ_* et ϕ_{**} vérifient $\psi_* \circ \phi_{**} = Id$. Ainsi, ϕ_{**} sera injective. Comme ψ_* et ϕ_{**} sont des morphismes, il suffit de vérifier cela sur les sommets et les flèches de Q_Σ . Si a est un sommet de Q , alors $\psi_* \circ \phi_{**}(a) = a$. Si f est une flèche de Q allant de a à b alors

$$\psi_* \circ \phi_{**}(f) = \psi_*(f_b^{-1} \cdot f_a) = \psi_*(f_b)^{-1} \cdot \psi_*(f_a) = (f^{-1})^{-1} \cdot a = f$$

□

Corollaire II.3.2. Soit (Q, I) une présentation quelconque d'une algèbre, alors il existe un poset Σ tel que les groupes $\Pi_1(Q, I)/R$ et $\Pi_1(Q_\Sigma)$ sont isomorphes.

Preuve. D'après le théorème (), il suffit de démontrer le résultat pour toute algèbre vérifiant la propriété (P) , ce qui est l'objet du théorème. □

Corollaire II.3.3. En particulier, si A est une algèbre simplement connexe, toutes les algèbres d'incidence construites les présentations de A sont simplement connexes.

Remarque. Pour toute présentation (Q, I) vérifiant la propriété (Q, I) , nous pouvons construire un idéal $\bar{I}$ contenant I en ajoutant les relations $c_1 + c_2$ avec c_1 et c_2 R -équivalents, de telle sorte que :

$$\Pi_1(Q_\Sigma) = \Pi_1(Q, \bar{I})$$

Cependant, l'idéal $\bar{I}$ n'est pas admissible en général.

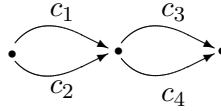
II.4/ Cas où le morphisme est un isomorphisme.

Nous allons donner des conditions suffisantes afin d'avoir un isomorphisme entre les deux groupes fondamentaux décrits dans les paragraphes précédents, c'est-à-dire pour avoir un sous-groupe H réduit à l'élément neutre.

Proposition II.4.1. Soit (Q, I) une présentation d'une algèbre et Q_Σ le carquois d'incidence associé. Alors si l'une des conditions suivantes est vérifiée, le sous-groupe H est trivial et ainsi

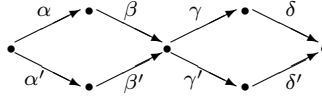
$$\Pi_1(Q_\Sigma) \simeq \Pi_1(Q, I).$$

1. L'idéal I est nul.
2. Si c_1 et c_2 sont parallèles et non équivalents alors les chemins $\omega.c_1.\omega'$ et $\omega.c_2.\omega'$ ne sont pas équivalents, pour tout chemins ω et ω' tel que les produits précédents aient un sens.
3. Si c_1 et c_2 sont parallèles alors les chemins $\omega_1.c_1.\omega_2$ et $\omega_3.c_2.\omega_4$ ne sont pas parallèles, pour tout chemin $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 non tous triviaux et tels que les produits précédents aient un sens. Cette condition est indépendante de I .
4. Le couple (Q, I) est la présentation d'une algèbre incidence ou plus généralement une algèbre Schurian.
5. Le carquois Q ne contient pas de cycle et n'a pas de sous-carquois en forme de huit, c'est-à-dire de la forme :



où les flèches représentent en fait des chemins.

Remarque. Nous venons de voir que H est trivial dans le cas des algèbres Schurian. Cependant ceci n'est pas le cas dans le cadre des algèbres rétrécies. En effet, considérons le carquois Q suivant



et l'idéal $I = \langle \delta\gamma\beta\alpha - \delta'\gamma'\beta'\alpha' \rangle$. L'algèbre kQ/I est une algèbre rétrécie non Schurian et le sous-groupe H est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

Preuve de la proposition.

1 : Dans le cas où $I = 0$, deux chemins équivalents par la relation $\sim$ sont deux chemins identiques. Ainsi si c_1 et c_2 parallèles divisent un même chemin d , alors c_1 et c_2 sont identiques, et $\overline{c_1} = \overline{c_2}$ n'apporte aucun générateur à H .

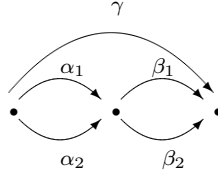
2 : C'est une traduction de la définition.

3 : Si les multiples des c_1 et c_2 ne sont jamais parallèles, ils ne peuvent être équivalents.

4 : soit c_1 et c_2 deux chemins parallèles divisant deux chemins d_1 et d_2 équivalents et non nuls. Ceci entraîne que c_1 et c_2 sont parallèles et non nuls. Comme l'algèbre est une algèbre Schurian, ces deux chemins sont équivalents.

5 : soit c_1 et c_2 deux chemins parallèles divisant deux chemins d_1 et d_2 équivalents. Comme ils n'existe pas de carquois en huit et de cycles alors il existe ω et ω' tels que $d_1 = \omega.c_1.\omega'$ et $d_2 = \omega.c_2.\omega'$. Alors comme d_1 et d_2 sont équivalents alors $\omega^{-1}.d_1.\omega'^{-1}$ et $\omega'^{-1}.d_2.\omega^{-1}$ sont équivalents et ainsi c_1 et c_2 . $\square$

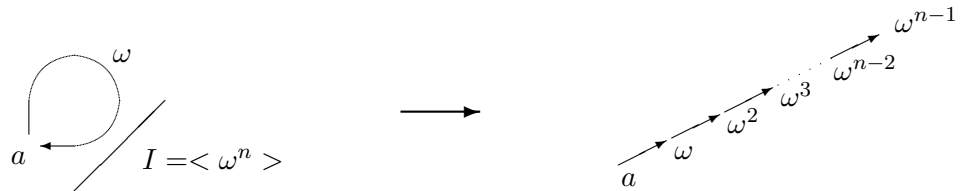
Remarque. Lorsque I est engendré par des relations minimales dont les chemins n'ont aucun sommet en commun autre que leurs extrémités, alors H n'est pas forcément trivial. En effet considérons le carquois suivant et l'idéal $I = \langle \beta_1\alpha_1 - \gamma, \beta_2\alpha_2 - \gamma \rangle$



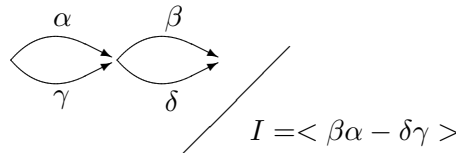
Le sous-groupe H est alors engendré par $\alpha_1\alpha_2^{-1} = \alpha_1\beta_2\beta_1^{-1}\alpha_1$ en prenant l'origine de α_1 comme point base pour calculer le groupe fondamental. Il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$.

III. Exemples et influence de la présentation.

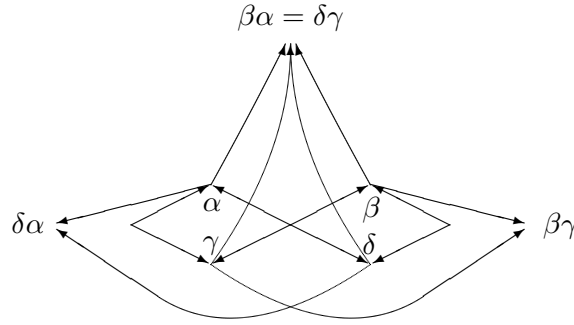
Exemple III.1. Ces premiers exemples ont pour but de montrer des cas très simples où le sous groupe H n'est pas trivial.



Dans cet exemple, le sommet a et la flèche ω divisent ω . Donc H est égal au groupe fondamental de (Q, I) . Sur la droite, nous trouvons le carquois d'incidence associé dont le groupe fondamental est trivial. Considérons à présent le carquois suivant :

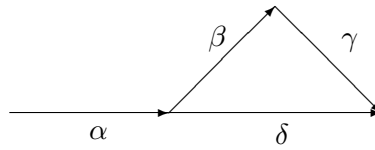


L'algèbre d'incidence associée a pour carquois :

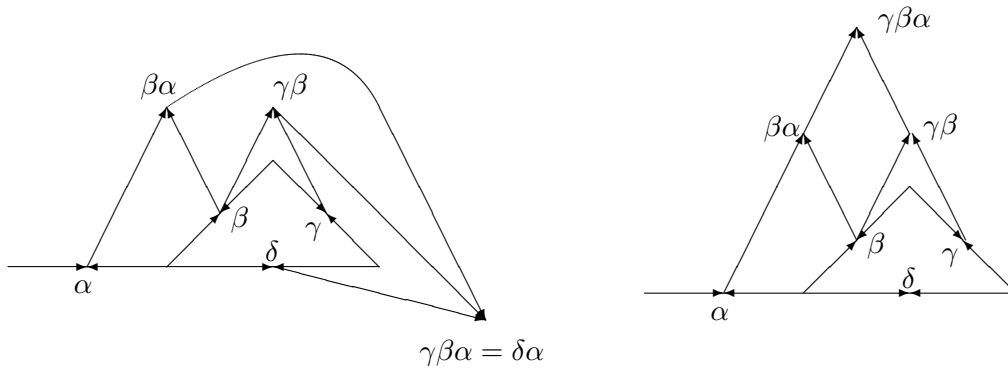


Dans ce cas les flèches α , γ et β , δ divisent $\beta\alpha = \delta\gamma$. La relation R est engendré par $\alpha R \gamma$ et $\beta R \delta$.

Exemple III.2. Reprenons l'exemple montrant que le groupe fondamental dépend de la présentation choisie pour décrire l'algèbre (cf. Ch3: III.1.1). Cet exemple montre que l'algèbre d'incidence associée dépend également de la présentation. En effet considérons le carquois Q :



et deux idéaux $I_1 = \langle \gamma\beta\alpha - \delta\alpha \rangle$ et $I_2 = \langle \delta\alpha \rangle$ de kQ . Les deux algèbres kQ/I_1 et kQ/I_2 sont isomorphes (cf). Construisons à présent les carquois d'incidence $\Sigma_{(Q,I_1)}$ et $\Sigma_{(Q,I_2)}$ qui en découlent :

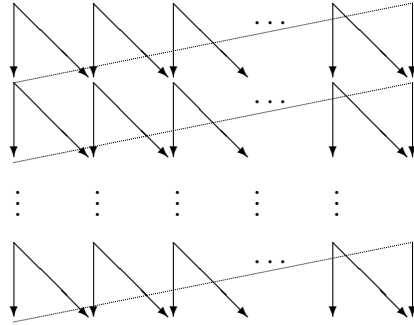


Pour la présentation (Q, I_1) , le groupe fondamental est trivial (voir Ch3: III.1.1), le carquois d'incidence associé a donc également un groupe fondamental réduit à 1 d'après le théorème (Ch5: II.3.2). Quand au deuxième carquois d'incidence, son groupe fondamental est isomorphe

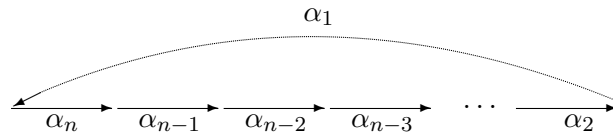
à $\mathbb{Z}$. Pour voir cela, calculons le groupe H associé à $\Pi_1(Q, I_2)$. Seuls les chemins δ et $\gamma\beta$ sont parallèles et non équivalents. Le groupe H est donc engendré par la relation $\beta\alpha - \delta\gamma\alpha$ en prenant l'origine de α comme point base pour calculer le groupe fondamental. Cependant cette relation est triviale dans $\Pi_1(Q, I_2)$ et ainsi H est réduit à 1. Le groupe fondamental de $\Sigma_{(Q, I_2)}$ est donc isomorphe à $\Pi_1(Q, I_2)$ d'après le théorème (Ch5 : II.3.2) qui lui-même est isomorphe à $\mathbb{Z}$ d'après (Ch3: III.1.1).

Il existe donc deux présentations d'une même algèbre dont les carquois d'incidence donnent des groupes fondamentaux différents ; le groupe fondamental de l'algèbre d'incidence construit dépend donc également de la présentation de l'algèbre.

Exemple III.3. Dans cet exemple, on retrouve de façon élémentaire le groupe fondamental d'un type particulier d'algèbre d'incidence et donc de son premier groupe de cohomologie de Hochschild, ce sont les algèbres d'incidence dont le carquois associé est une couronne, c'est-à-dire un carquois du type :



Elles ont été considérées dans [GS] et le calcul a été effectué dans [GR]. Pour cela, considérons le carquois cyclique Q_n suivant :



Soient p et q des entiers naturels tels que $q < n$. Considérons l'idéal I_{pq} de kQ_n engendré par tous les chemins de Q_n de longueur $p \times n + q$. Alors le carquois d'incidence associé à (Q_n, I_{pq}) est la couronne précédemment décrite avec n sommets sur l'horizontale et $n \times p + q$ sommets sur la verticale. Les sommets de la première ligne représentent les sommets de Q_n , les sommets de la seconde les flèches de Q_n , ceux de la troisième les chemins de longueur 2 de Q_n , etc.

Il suffit donc de trouver le groupe fondamental de Q_n et le groupe H . En ce qui concerne le groupe fondamental, il ne varie pas en fonction de I_{pq} car I_{pq} ne contient que des relations minimales à un terme. Il est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$. Pour le sous groupe H , deux cas se présentent.

Si $p = 0$, il n'existe pas de chemins non nuls parallèles donc H est nul et $\Pi_1(Q_c, I_{pq})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Si $p \neq 0$, le chemin $\alpha_1 \dots \alpha_n$ et l'origine de α_1 divisent tous les deux $\alpha_1 \dots \alpha_n$, le sous-groupe H contient un générateur de $\Pi_1(Q_c, I_{pq})$, donc $\Pi_1(Q_c, I_{pq})/H$ est trivial.

Ainsi, le groupe fondamental d'une couronne $C_{n,p,q}$ à n colonnes et à $pn + q$ lignes est :

$$\Pi_1(C_{n,p,q}, I_{C_{n,p,q}}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \\ 0 & \text{si } p > 0 \end{cases}$$

Pour une autre démonstration, voir [GR].

De plus comme $Hom(\Pi_1(Q, I), k^+) \simeq HH^1(kQ/I)$ dans le cas d'un algèbre d'incidence, on peut en déduire que le premier groupe de Hochschild de l'algèbre d'incidence de la couronne vaut k si $p = 0$ et 0 sinon.

Bibliographie

- [AP] I. ASSEM et J.A. DE LA PEÑA, *The fundamental groups of a triangular algebra*, Comm. Algebra, 24(1), p.187-208 (1996).
- [Ber] M. BERGER, *Géométrie*, Nathan (1990).
- [Bus] J.C. BUSTAMANTE, *On the fundamental group of a schurian algebra*, preprint, 2001.
- [BG] K. BONGARTZ et P. GABRIEL, *Covering Spaces in representation-Theory*, Invent. Math. 65, p.331-378 (1982).
- [BM] M.J. BARDZELL et E.N. MARCOS, *H^1 and presentations of finite dimensional algebras*, préprint 2001.
- [Ci1] C. CIBILS, *Cohomology of incidence algebras and simplicial complex*, J. Pure Appl. Algebra 56 p.221-232 (1989).
- [Ci2] C. CIBILS, *Complexes simpliciaux et carquois*, C.R. Acad. Sci. Paris t.307, Serie I, p.929-934 (1988).
- [Ci3] C. CIBILS, *On the Hochschild cohomologie of finite dimensional algebras*, Comm. in Algebra, 16, p645-649 (1988), p.647.
- [CLS] C. CIBILS, F. LARRION et L. SALMERON, *Méthodes diagrammatiques en représentation d'algèbres de dimensions finie*, publications internes de la section de mathématiques de l'université de Genève.
- [DK] Yu.A. DROZD, *Finite Dimensional Algebras*, Springer-Verlag, (1980).
- [Gab] P. GABRIEL, *Indecomposable representation II*, Symposia Mathematica II (Istituto Nazionale di alta Matematica), Roma, p.81-104 (1973).
- [GRo] P. GABRIEL et A.V. ROITER *Representations of finite-dimensional Algebras*, Springer, 1997.
- [GR] M. A. GATICA et M. J. REDONDO, *Hochschild cohomology and fundamental groups of incidence algebras*, à paraître dans Comm. Algebra.
- [GS] M. GERSTENHABER et S.P. SCHACK, *Simplicial cohomology is Hochschild cohomology*, J. Pure Appl. Algebra 30 p.143-156 (1983).
- [Gre] E.L. GREEN, *Graphs with relations, coverings and group-graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), 297-310.
- [Hap] D. HAPPEL, *Hochschild Cohomologie of finite dimensional algebras*, p.108-126. Number 1404 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1989.
- [HS] P.J. HILTON et U. STAMMBACH, *A course in Homological Algebra*, Springer (1996).
- [HW] P.J. HILTON et S. WYLIE, *An introduction to Algebraic Topology*, Cambridge University press (1967).
- [Mas] W.S. MASSEY, *Algebraic Topology : an Introduction*, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin (1989).
- [MP] R. MARTINEZ-VILLA et J.A. DE LA PEÑA, *The universal cover of a quiver with relations*, J. Pure Appl. Algebra 30, p.277-292 (1983).

- [PS] J.A. DE LA PEÑA et M. SAORIN, *The first Hochschild cohomology group of an algebra*, preprint.
- [Pe] J.A. DE LA PEÑA, *On the abelian Galois covering of an algebra*, J. Algebra 102(1) p.129-134 (1986).
- [Red] M.J. REDONDO, *Cohomología de Hochschild de álgebras de Artin*, preprint.
- [Rey] E. REYNAUD, *Algebraic fundamental group and simplicial complexes*, à paraître dans J. Pure Appl. Algebra.
- [Rot] J. ROTMAN, *An introduction to Homological Algebra*, Academic press, inc. (1979).
- [Sko] A. SKOWRONSKI, *Simply connected algebras and Hochschild cohomologie*, Can. Math. Soc. Conf. Proc. 14 (1993), 431-447.
- [Wei] C. WEIBEL, *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge Univerty Press, (1997).

Annexes

Ceci est un article à paraître dans "Journal of pure and applied algebra".

Algebraic fundamental group and simplicial complexes

Eric Reynaud*

Département de Mathématiques, Université de Montpellier II
pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5

Abstract

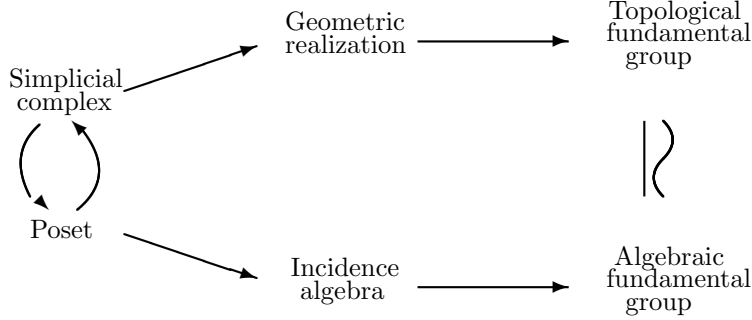
In this paper we prove that the fundamental group of a simplicial complex is isomorphic to the algebraic fundamental group of its incidence algebra, and we derive some applications.

AMS classification : 16E40 ; 16G20 ; 06A11 ; 55Q05

Let k be a field and A be a basic and split finite dimensional k -algebra, which means that $A/r = k \times k \times \dots \times k$ where r is the radical of A . There exists a unique quiver Q and usually several admissible ideals I of the algebra kQ such that $A = kQ/I$ (see [6]). In the 1980s, an algebraic fundamental group has been defined which depends on the presentation of A , that is to say on the choice of the ideal I (see [13]). For incidence algebras, that is algebras obtained from a simplicial complex, it has been proved that the presentation does not influence the fundamental group ([15]). Then it is a natural question to compare it with the fundamental group of the geometric realisation. Note also that in [4,8] the analogous question concerning homology is solved.

Actually, we prove that the fundamental groups considered for a finite and connected simplicial complex are isomorphic. The following diagram summarizes the situation :

* E-mail address : reynaud@math.univ-montp2.fr



The isomorphism above enables us to adapt results of algebraic topology to the purely algebraic setting : for instance the isomorphism recently proved between $Hom(\Pi_1(Q, I_Q), k^+)$ and $HH^1(kQ/I_Q)$ where Q is an ordered quiver, I_Q the associated parallel path and k^+ the additive group of a field ([8], see also [7]) is a consequence of the classic result in algebraic topology which states that the abelianisation of the Π_1 and the first homology group of a simplicial complex are isomorphic. In another direction, we also derive an algebraic Van Kampen theorem.

For our purpose we consider in the first part of this paper simplicial complexes and usual fundamental groups ; as well as posets, incidence algebras and algebraic fundamental groups. We also explain the relations between posets and simplicial complexes. In the last section, we provide the isomorphism and give applications.

This work is part of my thesis in Montpellier and I thank C. Cibils for his help, his apposite advice and his patience. When finishing this paper, I learned that J.C. Bustamante had independently considered a similar context.

All simplicial complexes will be finite, connected and not empty.

1. Fundamental group and incidence algebras

We consider the classical definition of a simplicial complex (see for instance [11]). A simplicial complex is the union of elements $\{a_i\}_{i \in I}$ called the vertices, and finite sets of vertices called the simplexes, such that if S is a simplex all subsets of S are also simplexes. Each set containing only one element is a simplex. A simplicial complex is said to be finite if I is finite, and is connected if for each couple of vertices (s, t) , there exist vertices $s_0, \dots, s_n$ such that $s_0 = s$, $s_n = t$ and $\{s_{i-1}, s_i\}$ is a simplex for each i in $\{1, \dots, n\}$.

The geometric realization of a simplicial complex C with vertices $\{a_i\}_{i \in I}$ is as follows. Let $\{A_i\}_{i \in I}$ be points of $\mathbb{R}^n$, such that if $\{a_{\alpha_1}, \dots, a_{\alpha_p}\}$ is a simplex of C , then the points $A_{\alpha_1}, \dots, A_{\alpha_p}$ are linearly independent. The set of points whose barycentric coordinates are strictly positive is called a face. Note that we prefer to define a face as the points with strictly positive barycentric coordinates instead of positive barycentric coordinates : this way, the geometric realization becomes the disjoint union of its faces and there exists only one face containing it. Moreover, if S and S' are two simplexes with empty intersection, the intersection of the corresponding faces is empty. A geometric realization of C denoted by $|C|$, is the union

of the faces associated to simplexes of a simplicial complex. A closed face is the closure of a face.

Note that since we assume that the simplicial complexes are finite, their geometric realization exist. Indeed let C be a complex with set of vertices $a_1, \dots, a_n$. The geometric realization $|C|$ of a simplicial complex C is a subset of $\mathbb{R}^n$ and inherits the topology of $\mathbb{R}^n$. Behind the usual definition of the fundamental group $\Pi_1(|C|)$ obtained through homotopy classes of closed paths, we recall the construction of the edge-paths group of $|C|$. This provides another description of the fundamental group $\Pi_1(|C|)$ which is useful for our purpose (see [11] for example).

An *edge-path* of C is a finite sequence of vertices $a_{i_r} \dots a_{i_1}$ such that for all j in $\{1, \dots, r-1\}$, the set $\{a_{i_j}, a_{i_{j+1}}\}$ is a simplex. If $w = a_{i_r} \dots a_{i_1}$ is an edge-path, let w^{-1} denote the edge-path $a_{i_1} \dots a_{i_r}$. An edge-path is said to be *closed* (or an *edge-loop*) if the first and the last vertices are the same. Let $w = a_{i_r} \dots a_{i_1}$ and $w' = a'_{i'_r} \dots a'_{i'_1}$ be two edge-paths; if $a'_{i'_r} = a_{i_1}$, the product $w.w'$ is defined and is equal to $a_{i_r} \dots a_{i_1} a'_{i'_r} \dots a'_{i'_1}$.

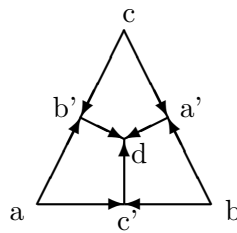
This is an *allowable operation* on edge-paths : if three consecutive vertices of the edge-path are in the same simplex, the middle vertex can be removed. Conversely, we can add a vertex between two others, if these three vertices are in a same simplex of C . Moreover, it is possible to change $a_{i_0} a_{i_0}$ by a_{i_0} and conversely. This generates an equivalence relation on the set of edge-paths. Let $\bar{w}$ denote the equivalence class of the edge-path w . As two equivalent edge-paths have the same extremities, the product defined before, when it exists, is defined also on the equivalence classes, as well as on the set of edge-loops starting at a fixed point.

Proposition ([11] 6.3.1 and 6.3.2.) .1. Let C be a simplicial complex and x_0 a vertex of C . The set of equivalence classes of edge-loops starting at one point x_0 is a group for the product defined before. Since C is connected, this group does not depend on x_0 and is denoted by $\Pi_1(C)$. The fundamental groups $\Pi_1(C)$ and $\Pi_1(|C|)$ are isomorphic.

Hereafter, $\Pi_1(C)$ will be either the approximation of the fundamental group $\Pi_1(C)$ or the fundamental group $\Pi_1(|C|)$ itself.

Given a *poset* (i.e. a partially ordered set), there is an associated *ordered quiver*, that is to say a finite oriented graph without loops and such that if there exists an arrow from a to b , there does not exist another path from a to b . To each element of the poset corresponds a vertex of the graph. Moreover, let S_1 and S_2 be vertices in the graph; there exists an arrow from S_1 to S_2 if and only if the element associated to S_1 in the poset is smaller than the element associated to S_2 and if there does not exist an element of the poset strictly between these two elements. The graph obtained is an ordered quiver.

For example, the graph that corresponds to the poset a, b, c, a', b', c', d with $a < b' < d$, $c < b' < d$, $a < c' < d$, $b < c' < d$, $b < a' < d$ and $c < a' < d$ is :



Conversely, by this operation all ordered graphs arise from a poset. There is a bijection between the set of ordered graphs and the set of posets. Moreover, a poset is said to be connected if its ordered quiver is connected. All the posets considered will be connected, finite and non empty.

Let now Q be a quiver, and k be a field. We denote kQ the k -vector space with basis the paths of Q (the paths of length 0 being the vertices), with the multiplication given by the composition of two paths if possible and 0 otherwise. Two paths of Q are *parallel* if they have the same beginning and the same end. The k -space generated by the set of differences of two parallel paths is a two-sided ideal of kQ , denoted I_Q and called *parallel ideal*. The quotient algebra kQ/I_Q is the *incidence algebra* of Q .

The general definition of the fundamental group depends on a couple (Q, I) where I is an admissible ideal of kQ , it can be found in [8, 15, 7] and we recall it below. We notice that for an algebra the presentation as a quiver with relations is not unique in general, that is to say that different ideals I may exist such that $A \cong kQ/I$. We do not have in general a unique fundamental group associated to an algebra. Nevertheless, in the case of an incidence algebra it has been proved that the fundamental group does not depend on the presentation of the algebra (see [15] for example).

A relation $\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ is *minimal* if the sum is in I and if for all non empty proper subset J of $\{1, \dots, n\}$ the sum $\sum_{i \in J} \lambda_i \omega_i$ is not in I . We note that if the relation is minimal then $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ have the same source and the same terminus.

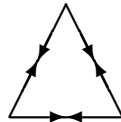
If α is an arrow from x to y , let α^{-1} denote its formal inverse which goes from y to x . A walk from x to y is a formal product $\alpha_1^{\pm 1} \alpha_2^{\pm 1} \dots \alpha_n^{\pm 1}$ which begins in x and ends in y . The trivial walk x , which begins in x and no longer moves is denoted e_x . A *closed walk* (or a *loop*) is a walk having the same extremities. A walk is, in fact, a path in the non oriented graph associated to Q ; in other words, a walk can follow the arrows in any direction.

We consider the smaller equivalence relation $\sim$ on the walks of Q containing the following items :

1. if α is an arrow from x to y then $\alpha \alpha^{-1} \sim e_y$ and $\alpha^{-1} \alpha \sim e_x$,
2. if $\sum_{i=1}^n \lambda_i \omega_i$ is a minimal relation then $\omega_1 \sim \dots \sim \omega_n$,
3. if $\alpha \sim \beta$ then, for all (ω, ω') , we have $\omega \alpha \omega' \sim \omega \beta \omega'$

Let x_0 be a vertex of Q . The set of equivalence classes of loops starting at x_0 does not depend on x_0 since Q is connected. We denote this set by $\Pi_1(Q, I)$. If the quiver Q comes from a poset P , the fundamental group associated to (Q, I_Q) is denoted $\Pi_1(P)$.

We remark that if I is the parallel ideal, the second item means parallel paths are equivalent. For example if Q is defined by the following quiver, the fundamental group $\Pi_1(Q, I_Q)$ is isomorphic to $\mathbb{Z}$.



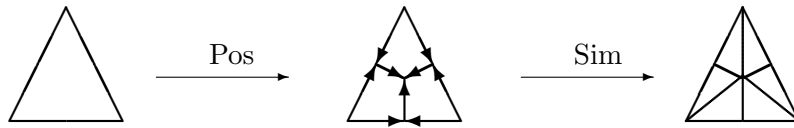
We note that the hypothesis I admissible is not fully used neither to define the fundamental group nor to prove that it is a group. So, in this paper, we will consider the fundamental group of a couple (Q, I) where I satisfies $F^n \subset I \subset F$ for an integer n . This will be used to adapt Van Kampen's theorem to purely algebraic fundamental groups.

Let C be a simplicial complex. The set of non empty simplexes of C ordered by inclusion is a poset which we will denote $Pos(C)$. This Pos defines an application from simplicial complexes to posets which is injective, but not surjective, since there is no simplicial complex which gives the poset $a < b$. Due to the construction of the quiver from a simplicial complex, an arrows can only go from a vertex corresponding to a p-face to a vertex corresponding to a q-face with $p > q$, then the path algebra of this quiver is then of finite dimension.

We provide now the construction of a simplicial complex from a poset. These procedures are of course not inverse one of each other, their composition is the barycentric decomposition.

To each poset P we associate a simplicial complex $Sim(P)$, where a n -simplex is a subset of P containing $n + 1$ elements and totally ordered. The application Sim is surjective but not injective, for instance the simplicial complexes which are associated to $a < b < c$, $a < b < d$ and to $a < c < b$, $a < d < b$ are the same.

Let C be a simplicial complex, $|Sim(Pos(C))|$ is the geometric realization of the barycentric decomposition of C . Then for example let C be the set of the non empty parts of $\{a, b, c\}$; its geometric realization being the triangle drawn on the next figure. Then, $Pos(C)$ contains all the elements of C that is to say $T = \{a, b, c\}$, $A_1 = \{b, c\}$, $A_2 = \{a, c\}$, $A_3 = \{a, b\}$, $S_1 = \{a\}$, $S_2 = \{b\}$ and $S_3 = \{c\}$ and its order is defined by $S_i \leq A_j \leq T$ for all $i, j \in \{1, 2, 3\}$ and $i \neq j$. The associated quiver is drawn on the next figure. Then $Sim(Pos(C))$ is the complex containing the total ordered subsets of P that is to say : for all $i, j \in \{1, 2, 3\}$, the 0-simplexes are $\{S_i\}$, $\{A_i\}$, $\{T\}$, the 1-simplexes are $\{S_i, A_j\}$ $i \neq j$, $\{S_i, T\}$, $\{A_i, T\}$, the 2-simplexes are $\{S_i, A_j, T\}$ $i \neq j$. By identifying poset and associated ordered quiver, simplicial complexes and their geometric realization, the situation can be summarized by the following diagram :



2. Equivalence between algebraic and topological approaches.

The aim of this section is to prove that the fundamental group $\Pi_1(|C|)$ defined on the geometric realization of a finite simplicial complex C is isomorphic to the fundamental group $\Pi_1(Pos(C))$ of the incidence algebra of the poset deduced from the complex.

We prove first that for any poset P we have $\Pi_1(P) \simeq \Pi_1(Sim(P))$. We will use the approximation of the topological fundamental group considered before in order to provide an isomorphism between $\Pi_1(Sim(P))$ and $\Pi_1(P)$.

Théorème .2. Let P be a poset, the groups $\Pi_1(P)$ and $\Pi_1(Sim(P))$ are isomorphic.

Preuve. Due to proposition 1, it is sufficient to prove that $\Pi_1(P)$ is isomorphic to the edge-paths group of $|Sim(C)|$

For each element s of the poset P , it corresponds by construction a vertex in the simplicial complex $Sim(P)$. We denote by s' this vertex of $Sim(P)$.

Let ϕ be the map from the set of the associated quiver walks to the set of edge-paths of $Sim(P)$ be defined by

$$\phi(s) = s' \quad \phi(\alpha_n^{\epsilon_n} \dots \alpha_1^{\epsilon_1}) = s'_{n+1} \dots s'_1$$

where s is an element of P and s_i, s_{i+1} are the poset elements which are the origin and the end of the walk $\alpha_i^{\epsilon_i}$.

The map ϕ is well defined. Indeed, $s'_{n+1} \dots s'_1$ is an edge-path because for all i in $\{1, \dots, n\}$, the set $\{s_i, s_{i+1}\}$ is totally ordered since α_i is an arrow of the extremities s_i, s_{i+1} and therefore $\{s'_i, s'_{i+1}\}$ is a simplex of $Sim(P)$.

We assert now that the images by ϕ of equivalent walks are equivalent. We have to prove this fact on the generators of the equivalence relation. Let f be an arrow from s_1 to s_2 , then $\phi(f^{-1}.f) = s'_1.s'_2.s'_1$ which is equivalent to $s'_1 = \phi(s_1)$. Let c_1 and c_2 be two parallel paths crossing respectively the vertex $s_1, t_1, t_2, \dots, t_n, s_2$ and $s_1, u_1, u_2, \dots, u_m, s_2$. Then the sets $\{s_1, t_1, t_2, \dots, t_n, s_2\}$ and $\{s_1, u_1, u_2, \dots, u_m, s_2\}$ are totally ordered and the edge paths $\phi(c_1) = s'_1.t'_1.t'_2 \dots t'_n.s'_2$ and $\phi(c_2) = s'_1.u'_1.u'_2 \dots u'_m.s'_2$ are both equivalent to $s'_1.s'_2$.

The third relation is immediate because the equivalence relation on the edge paths set is compatible with the product of the group.

Let $\phi_* : \Pi_1(P) \rightarrow \Pi_1(Sim(P))$ denote the application induced by ϕ . Note that the image of a loop is also a loop.

First of all ϕ_* is a morphism. Indeed :

$$\text{If } \begin{cases} \phi(p) = x_0 v_n \dots v_1 x_0 \\ \phi(q) = x_0 w_n \dots w_1 x_0 \end{cases} \text{ then } \begin{cases} \phi(p).\phi(q) = x_0 v_n \dots v_1 x_0 x_0 w_n \dots w_1 x_0 \\ \phi(p.q) = x_0 v_n \dots v_1 x_0 w_n \dots w_1 x_0 \end{cases}$$

These two edge-paths are equivalent so $\phi_*(p)\phi_*(q) = \phi_*(p.q)$.

To prove that ϕ_* is bijective, we are going to construct its inverse ψ_* .

Let $s'_{n+1} \dots s'_1$ be an edge-path. We fix i in $\{1, \dots, n\}$. The set $\{s'_i, s'_{i+1}\}$ being a simplex, the set $\{s_i, s_{i+1}\}$ is totally ordered. Then, there exists a maximal (for the inclusion) totally ordered set containing it and having s_i and s_{i+1} as extremities. The choice of this is not important because all paths corresponding to these sets have the same origin and the same end and therefore are parallel. This maximal set corresponds to a path or to an inverse path $w_i^{\epsilon_i}$ of the associated quiver with origin s_i and end s_{i+1} . So we can define a morphism ψ from edge paths group to $\Pi_1(C)$ by $\psi(s'_{n+1} \dots s'_1) = w_n^{\epsilon_n} \dots w_1^{\epsilon_1}$ if $n \geq 1$ and $\psi(s'_1) = s_1$.

We will prove now that this application is constant on the equivalence class. In deed $\psi(s's')$ is a path from s to s , so $\psi(s's') = s = \psi(s')$. Moreover, let take s', t', u' such that $\{s', t', u'\}$ is a simplex, so $\psi(s't'u') = \psi(s't').\psi(t'u')$ and $\psi(s'u')$ are paths from u to s . Therefore they are parallel.

Finally, we will verify that $\phi_* \circ \psi_* = \psi_* \circ \phi_* = Id$. Let f be an arrow of the ordered quiver associated to P from s_1 to s_2 then $\phi_*(f) = s'_2 s'_1$ and $\psi_* \circ \phi_*(f)$ is a path from s_1 to s_2 . Since the quiver is ordered, it does not exist any other path than f , so $\psi_* \circ \phi_*(f) = f$ and $\psi_* \circ \phi_* = Id$. For the other equality, let's consider an edge path $s'_1 s'_2$. Then $\psi_*(s'_1 s'_2)$ is a path from s_1 to s_2 and then $\phi_* \circ \psi_*(s'_1 s'_2)$ is an edge path beginning with s'_1 and ending with s'_2 such that all vertices of this edge-path are in a same simplex. So it is equivalent to $s'_1 s'_2$. $\square$

Théorème .3. Let C be a simplicial complex. The fundamental groups $\Pi_1(|C|)$ and $\Pi_1(Pos(C))$ are isomorphic.

Preuve. The fundamental groups associated to the simplicial complex and to its barycentric decomposition are isomorphic. Then,

$$\Pi_1(|C|) \simeq \Pi_1(\text{Sim}(\text{Pos}(C))).$$

Moreover, the previous theorem shows that the group $\Pi_1(\text{Pos}(C))$ and $\Pi_1(\text{Sim}(\text{Pos}(C)))$ are isomorphic. $\square$

3. Applications.

We first show that in a particular case of incidence algebra the result obtained by I. Assem and J.A. De La Peña ([1], p.200) is a consequence of a classic fact in algebraic topology ; so this proof has the advantage to link this result to algebraic topology.

Théorème .4. Let P be a poset and $A = kQ/I$ its incidence algebra over a field k . Then

$$\text{Hom}(\Pi_1(P), k^+) \simeq HH^1(A)$$

where k^+ is the additive group of the field k and $HH^1(A)$ is the first Hochschild cohomology group of A .

Preuve. Let C be a simplicial complex and $C_\bullet(\Lambda)$ be the chain complex over a ring Λ associated to the simplicial homology of C ; the latter homology will be denoted by $H_\bullet(C, \Lambda)$. Moreover, the cohomology of the complex $\text{Hom}_\Lambda(C_\bullet(\Lambda), A)$, where A is a Λ -module, is denoted by $H^\bullet(C, \Lambda, A)$.

For any simplicial complex, the abelianisation Π_1^{ab} of Π_1 is isomorphic to the first homology group (see for example [11], 6.4.7). If we denote by C the simplicial complex associated to Q , we have

$$(\Pi_1(C))^{ab} \simeq H_1(C, \mathbb{Z})$$

and

$$\text{Hom}((\Pi_1(C))^{ab}, k^+) \simeq \text{Hom}(H_1(C, \mathbb{Z}), k^+).$$

Note that since k^+ is abelian we have :

$$\text{Hom}(\Pi_1(C), k^+) \simeq \text{Hom}(H_1(C, \mathbb{Z}), k^+).$$

Making use of theorem we have :

$$\text{Hom}(\Pi_1(Q, I_Q), k^+) \simeq \text{Hom}(H_1(C, \mathbb{Z}), k^+) \quad (*)$$

Adjunction, for two rings R and S and bimodules $A_R, {}_R B_S, C_S$, provides an isomorphism, (see [17], p.37, for example) :

$$\text{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \simeq \text{Hom}_R(A, \text{Hom}_S(B, C))$$

In our case, we consider $B = C = S = k$, $R = \mathbb{Z}$ and $A = H_1(C, \mathbb{Z})$. Identifying commutative groups and $\mathbb{Z}$ -modules, this isomorphism becomes

$$\text{Hom}_k(H_1(C, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} k, k) \simeq \text{Hom}(H_1(C, \mathbb{Z}), k^+).$$

Then (*) becomes

$$Hom(\Pi_1(Q, I_Q), k^+) \simeq Hom_k(H_1(C, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} k, k) \quad (*)$$

Moreover, the universal coefficients theorem in homology and in cohomology (see for example [10], p.176-179) are as follows. Let Λ be a principal ring and C be a flat chain complex over Λ , and let A be a Λ -module, then

$$\begin{cases} 0 \rightarrow H_n(C) \otimes_{\Lambda} A \rightarrow H_n(C \otimes_{\Lambda} A) \rightarrow Tor_1^{\Lambda}(H_{n-1}(C), A) \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow Ext_{\Lambda}^1(H_{n-1}(C), A) \rightarrow H^n(Hom_{\Lambda}(C, A)) \rightarrow Hom_{\Lambda}(H_n(C), A) \rightarrow 0 \end{cases}$$

are exact.

As $C_{\bullet}(\mathbb{Z})$ is free and therefore flat, the hypotheses are verified with $C = C_{\bullet}(\mathbb{Z})$, $\Lambda = \mathbb{Z}$, $A = k$ and $n = 1$ in the first theorem and $C = C_{\bullet}(k)$, $\Lambda = k$, $A = k$ et $n = 1$ in the second.

Moreover, $Ext_k^1(H_{n-1}(C), A) = 0$ because k is a field, and $Tor_1^{\Lambda}(H_0(C), k) = 0$ because $H_0(\mathbb{Z})$ is free (see for example [10], p.63, cor.2.4.7).

Then we have

$$\begin{cases} H_1(C, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} k \simeq H_1(C \otimes_{\mathbb{Z}} k, \mathbb{Z}) \\ H^1(C, k, k) \simeq Hom_k(H_1(C, k), k) \end{cases}$$

Since the complexes $C_{\bullet}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} k$ and $C_{\bullet}(k)$ are isomorphic, the equation (*) becomes

$$Hom(\Pi_1(Q, I), k^+) \simeq Hom_k(H_1(C \otimes_{\mathbb{Z}} k, \mathbb{Z}), k) \simeq Hom_k(H_1(C, k), k) \simeq H^1(C, k, k)$$

We conclude using the Gerstenhaber-Schack theorem ([4] 1.4, or [8]) which shows that the cohomologies $H^i(C, k, k)$ and $HH^i(kQ/I)$ are isomorphic. $\square$

We introduce now the notion of completed quiver which is interesting in view of the following results, and also in order to adapt Van Kampen's theorem to an algebraic setting. A quiver is said to be a completed quiver if

1. it does not contain cycles.
2. each path of length at least two has a parallel arrow,
3. there are no couples of parallel arrows.

Théorème .5. Let Q be a quiver without cycles and without parallel arrows.

1. There exists an ordered quiver Q^o obtained by considering the set of paths of length at least 2 and deleting all arrows parallel to these paths.
2. There exists a completed quiver Q^c obtained from Q by considering the set of paths of length at least 2 and adding a parallel arrow for each of these paths, unless there already is one, either added or in Q .
3. The three fundamental groups of the quivers Q , Q^o and Q^c with their own parallel ideals which are not necessary admissible, are isomorphic :

$$\Pi_1(Q, I_Q) \simeq \Pi_1(Q^o, I_{Q^o}) \simeq \Pi_1(Q^c, I_{Q^c})$$

Preuve.

First, we give more details on the construction of Q^c and Q^o . The vertices of Q^c and Q^o are the same as those of Q . Moreover, there exists an arrow from a to b , $a \neq b$, in Q^c if and only if there exists a path (possibly an arrow) from a to b in Q , and there exists an arrow in Q^o if and only if there exists an arrow in Q from a to b which is not parallel to another path in Q .

We prove that for any path in Q^c (resp. in Q) there exists a parallel path constructed with arrows that come from Q (resp. Q^o). Let $q = \alpha_1 \dots \alpha_n$ be a path of Q^c . For any α_i that does not come from Q , there exists by construction a path ω_i in Q^c , already present in Q , parallel to α_i . If α_i is an arrow which comes from Q , let us set $\omega_i = \alpha_i$. Then the path q is parallel to the path $q' = \omega_1 \dots \omega_n$ which is issued from Q .

The same process is applicable to the quivers Q and Q^o .

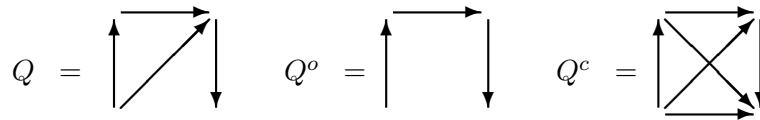
The fundamental groups $\Pi_1(Q, I_Q)$, $\Pi_1(Q^o, I_{Q^o})$ and $\Pi_1(Q^c, I_{Q^c})$ are isomorphic. Since any path in Q^c is parallel to a path that comes from Q , every walk of $\Pi_1(Q^c, I_{Q^c})$ is equivalent to a walk that contains only arrows issuing from Q ; then, the equivalent classes will not be changed by adding the parallel arrows of Q^c .

The proof of the isomorphism between $\Pi_1(Q^o, I_{Q^o})$ and $\Pi_1(Q, I_Q)$ is the same.

Q^o is ordered. The quiver Q^o does not contain cycles, and there is no arrow parallel to a path by construction.

Q^c is completed. The quiver Q^o does not contain cycles either, and if there exists a path p from a to b and no arrow from a to b , then there is a path in Q , parallel to p . This is in contradiction with the construction of Q^o . $\square$

Exemple .6.



Théorème (Van Kampen) .7. Let Q be a connected ordered quiver and let Q_1, Q_2 be two connected subquivers such that $Q_1^c \cup Q_2^c = Q^c$ and such that Q_0 , the ordered quiver associated to the completed quiver $Q_1^c \cap Q_2^c$, is also connected. The inclusions i_1 (resp. i_2) from Q_0 to Q_1^c (resp. Q_2^c) induce i_{1*} (resp. i_{2*}) from $\Pi_1(Q_0, I_{Q_0})$ to $\Pi_1(Q_1, I_{Q_1})$ (resp. $\Pi_1(Q_2, I_{Q_2})$).

Therefore $\Pi_1(Q, I_Q)$ is the free product of $\Pi_1(Q_1, I_{Q_1})$ and $\Pi_1(Q_2, I_{Q_2})$ by adding the relations $i_{1*}(\alpha) = i_{2*}(\alpha)$ for all α in $\Pi(Q_0, I_{Q_0})$

Preuve. We use Van Kampen's theorem for a simplicial complex (see [11], p243, for example) :

K is a connected complex and K_0, K_1, K_2 are connected subcomplexes, such that $K_1 \cup K_2 = K$ and $K_1 \cap K_2 = K_0$; a_0 is a vertex of K_0 ; the injection maps $j_r : K_0 \rightarrow K_r$, $r = 1, 2$, induce

$$j_{r*} : \Pi(K_0, a_0) \mapsto \Pi(K_r, a_0)$$

Then $\Pi_1(K)$ is the free product of $\Pi_1(K_1)$ and $\Pi_1(K_2)$ by means of the mapping $j_{1*}(\alpha) \mapsto j_{2*}(\alpha)$ for all α in $\Pi(Q_0, I_{Q_0})$.

To Q, Q_0, Q_1, Q_2 , there correspond simplicial complexes that we denote K, K_0, K_1, K_2 . By hypothesis, these simplicial complexes are connected. Moreover, as there is a bijection between the paths of Q_i^c of length n and the n -dimensional simplices of K_i , we have $K = K_1 \cup K_2$ and $K_0 = K_1 \cap K_2$.

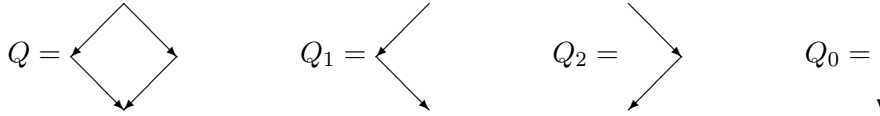
Let us denote by ϕ_* the isomorphism defined in theorem between $\Pi_1(Q, I_Q)$ and $\Pi_1(K)$. Then it is easy to see that the following diagrams are commutative (n=1,2) :

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(Q_0, I_{Q_0}) & \xrightarrow{i_{k*}} & \Pi_1(Q_n, I_{Q_n}) \\ \phi_* \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \phi_* \\ \Pi_1(K_0) & \xrightarrow{j_{k*}} & \Pi_1(K_n) \end{array}$$

Therefore $\Pi_1(Q, I_Q)$ is the free product of $\Pi_1(Q_1, I_{Q_1})$ and $\Pi_1(Q_2, I_{Q_2})$ by adding the relations $i_{1*}(\alpha) = i_{2*}(\alpha)$ for all α in $\Pi(Q_0, I_{Q_0})$ $\square$

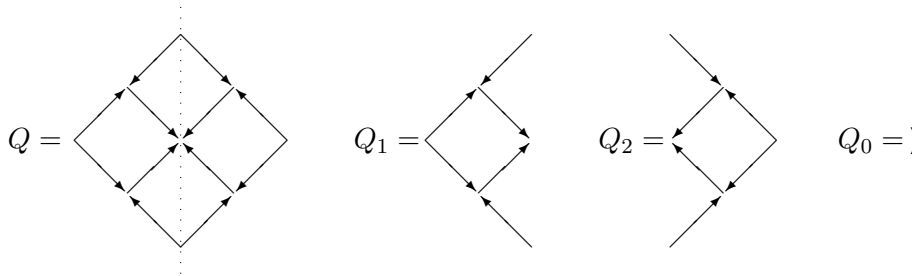
Corollary. If $\Pi_1(Q_0, I_{Q_0}) = 0$, then $\Pi_1(Q, I_Q)$ is the free product of $\Pi_1(Q_1, I_{Q_1})$ and $\Pi_1(Q_2, I_{Q_2})$.

Exemple .8. We begin with an easy example to show how the theorem works

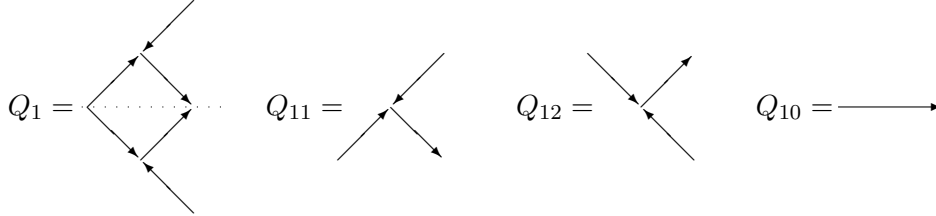


As the fundamental group of a tree is zero, we deduce from the corollary that $\Pi_1(Q, I_Q) = 0$.

Exemple .9. Now, let's consider the quiver Q drawn on the next figure. The dotted line indicates the limits of quivers Q_1 and Q_2 . Then the quivers Q, Q_1, Q_2 and Q_0 are :

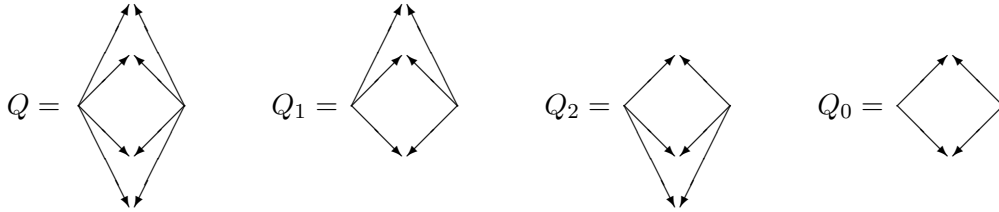


Since the quiver Q_1 and Q_2 are the same, we only had to calculate the fundamental group of Q_1 . Let's use again the Van Kampen theorem, and decompose the quiver Q_1 in Q_{11} and Q_{12} . The intersection quiver will be denoted by Q_{10} :

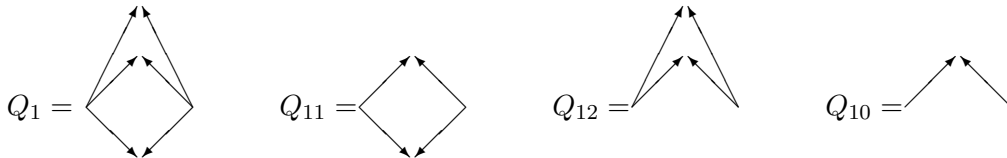


The fundamental groups of quivers Q_{10} , Q_{11} and Q_{12} is 0. Then it is the same for the quiver Q_1 and therefore for Q itself.

Example .10. The last example shows a situation where Q_0 is not simply connected :



Once again, the quivers Q_1 and Q_2 are the same and we use again the Van Kampen theorem to calculate it :



Since the fundamental group Q_{10} is 0, Q_1 is the free product of Q_{11} and Q_{12} which are isomorphic to $\mathbb{Z}$. Then, if Q_{11} and Q_{12} are generated by a and b , Q_1 is the group generated by $\{a, b\}$. In the same way, Q_2 is generated by two elements c and d . If we add the relation $i_{1*}(Q_0) - i_{2*}(Q_0) = 0$, we obtain that $d = b$ and therefore the fundamental group of Q is the group generated by $\{a, b, c\}$.

References

- [1] I. ASSEM and J.A. DE LA PEÑA, *The fundamental groups of a triangular algebra*, Comm. Algebra, 24(1), pp.187-208 (1996).

- [2] M. BERGER, *Géométrie*, Nathan (1990).
- [3] K. BONGARTZ and P. GABRIEL, *Covering Spaces in representation-Theory*, Invent. Math. 65, pp.331-378 (1982).
- [4] C. CIBILS, *Cohomology of incidence algebras and simplicial complex*, J. Pure Appl. Algebra 56 pp.221-232 (1989).
- [5] C. CIBILS, *Complexes simpliciaux et carquois*, C.R. Acad. Sci. Paris t.307, Serie I, pp.929-934 (1988).
- [6] P. GABRIEL, *Indecomposable representation II*, Symposia Mathematica II (Istituto Nazionale di alta Matematica), Roma, pp.81-104 (1973).
- [7] M. A. GATICA and M. J. REDONDO, *Hochschild cohomology and fundamental groups of incidence algebras*, to appear in Comm. Algebra.
- [8] M. GERSTENHABER and S.P. SCHACK, *Simplicial cohomology is Hochschild cohomology*, J. Pure Appl. Algebra 30 pp.143-156 (1983).
- [9] E.L. GREEN, *Graphs with relations, coverings and group-graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), 297-310.
- [10] P.J. HILTON and U. STAMMBACH, *A course in Homological Algebra*, Springer (1996).
- [11] P.J. HILTON and S. WYLIE, *An introduction to Algebraic Topology*, Cambridge University press (1967).
- [12] W.S. MASSEY, *Algebraic Topology : an Introduction*, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin (1989).
- [13] R. MARTINEZ-VILLA and J.A. DE LA PEÑA, *The universal cover of a quiver with relations*, J. Pure Appl. Algebra 30, pp.277-292 (1983).
- [14] J.A. DE LA PEÑA and M. SAORIN, *The first Hochschild cohomology group of an algebra*, preprint.
- [15] J.A. DE LA PEÑA, *On the abelian Galois covering of an algebra*, J. Algebra 102(1) pp.129-134 (1986).
- [16] M.J. REDONDO, *Cohomología de Hochschild de álgebras de Artin*, preprint.
- [17] J. ROTMAN, *An introduction to Homological Algebra*, Academic press, inc. (1979).