



HAL
open science

Contribution à l'identification des paramètres inertiels des segments du corps humain

Tony Monnet

► **To cite this version:**

Tony Monnet. Contribution à l'identification des paramètres inertiels des segments du corps humain. Mécanique [physics.med-ph]. Université de Poitiers, 2007. Français. NNT: . tel-00202452

HAL Id: tel-00202452

<https://theses.hal.science/tel-00202452>

Submitted on 7 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

numéro d'ordre :

THESE

Pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université de Poitiers

Faculté des Sciences Fondamentales et Appliquées
(Diplôme national - Arrêté du 7 août 2006)

Ecole doctorale **Sciences Pour l'Ingénieur & Aéronautique**
Secteur de Recherche : **Biomécanique et Bio-ingénierie**

Présentée par :

Tony MONNET

Contribution à l'identification des paramètres inertiels des segments du corps humain

Directeur de thèse : Claude Vallée
Co-directeur de thèse : Patrick Lacouture

Soutenue le 30 novembre 2007

Jury

P. Gorce	Professeur	Université du Sud Toulon-Var	Rapporteur
D. Weichert	Professeur	Institut für Allgemeine Mechanik	Rapporteur
G. de Saxcé	Professeur	Université de Lille	Examinateur
P. Lacouture	Professeur	Université de Poitiers	Examinateur
C. Vallée	Professeur	Université de Poitiers	Examinateur

Remerciements

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Mécanique des Solides (UMR 6610 CNRS) dirigé par Olivier Bonneau. Qu'il trouve ici toute ma reconnaissance pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire m'offrant ainsi la possibilité de profiter de l'environnement scientifique riche du LMS et également de travailler dans des conditions idéales.

Je tiens à remercier le professeur Claude Vallée pour avoir dirigé cette thèse. Les échanges que nous avons eus autour de ce travail ont toujours été très enrichissants. L'utilisation des méthodes inverses a été introduite dans notre équipe par Mr Vallée et constitue une ouverture très prometteuse pour la biomécanique.

Je remercie également le professeur Patrick Lacouture qui, depuis 2002 et un stage de Licence effectué au LMS, m'a accordé toute sa confiance pour mener mes différents travaux de recherche. Un clin d'œil également pour Jacques Duboy qui m'a initié à la Mécanique Humaine sans oublier le professeur Alain Junqua et ses longs discours passionnés sur l'enseignement de la Mécanique.

Je suis très sensible à l'attention portée à mes travaux par les membres du jury : les professeurs Philippe Gorce, Géry de Saxcé et Dieter Weichert. Une mention spéciale pour Mr Weichert qui m'avait encouragé et félicité lors d'un congrès à Zurich confortant ainsi l'intérêt de mes recherches.

Evidemment ce travail n'aurait pas été possible sans le soutien inconditionnel de mes parents. Ils m'ont donné les moyens de poursuivre mes études en acceptant mes réponses parfois évasives à leurs interrogations légitimes. Je les remercie très chaleureusement.

Et enfin, je tiens à remercier mes « camarades de classe » ou collègues pour m'avoir supporté/encouragé/diverti/ durant ces quelques années passées en leur compagnie : Arnaud, Eric, Fab, Floren, Ines, Khalil, Lilia, Mat, Mick, Sophie, Stephen, et spécialement Emmanuel pour nos nombreux échanges très constructifs concernant les aspects mathématiques. Je remercie également mes « camarades de cour de récré », non moins essentiel, pour m'avoir changé les idées : Oliv, Sophie, Juju, Lolo, Selim, Le Beau, Hug, Séverine, Axelle, Jérôme, Nico, Audrey, Damien, Marie, ...et Cyril.

En dernier lieu, merci à Aurélie pour m'avoir supporté, encouragé et motivé pendant les dernières semaines de la thèse...

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	5
Liste des Figures	9
Notations	12
Introduction générale	17
I Formulation des équations du mouvement et identification des paramètres inertiels	23
1 Cas d'un seul segment libre	25
1.1 Introduction	25
1.2 Formulation vectorielle	27
1.3 Formulation matricielle	31
1.3.1 Matrice rotation R et vecteur translation	32
1.3.2 Rotation généralisée B	33
1.3.3 Accélération généralisée A	34
1.3.4 Regroupement des résultantes et des moments dans une matrice 4×4 antisymétrique \mathcal{T}	34
1.3.5 Regroupement des caractéristiques d'inertie dans une matrice 4×4 symétrique et défini-positive J	34
1.3.6 Formulation matricielle des équations du mouvement	35
1.4 Bilan	36
2 Identification d'une matrice 4×4 symétrique et défini-positive	41
2.1 Optimisation	42
2.1.1 Minimisation d'une fonction par la méthode du gradient	43

2.1.2	Minimisation d'une fonction par la méthode du gradient conjugué	44
2.2	Construction d'une fonction coût minimisée par J	45
2.3	Expression du gradient de la fonction coût	46
2.4	Méthode du gradient conjugué	47
2.4.1	calcul de μ_k	47
2.4.2	Algorithme du gradient conjugué	48
2.5	Projection sur les matrices défini-positives	48
2.6	Algorithme du gradient conjugué projeté	50
3	Application à un solide rigide	53
3.1	Introduction	53
3.2	Caractéristiques d'inertie du solide étudié	55
3.3	Simulation du mouvement	57
3.3.1	Calcul numérique des matrices R , B et A	59
3.3.2	Expression de la matrice \mathcal{T} dans la base fixe	61
3.4	Identification des dix paramètres inertiels	62
4	Généralisation des équations du mouvement à un système multicorps	67
4.1	Corps composé de deux segments	69
4.1.1	Expression de la résultante des forces dans la base fixe	70
4.1.2	Expression du moment résultant des forces dans la base fixe	71
4.1.3	Formulation matricielle des équations du mouvement	72
4.2	Convention d'indexation des corps d'une chaîne ouverte	73
4.3	Matrices intervenant dans les équations du mouvement	76
4.3.1	Généralisation des matrices A et B	76
4.3.2	Génération automatique de J	76
4.3.3	Exemple	77
4.4	Application à un système multicorps composé de trois segments	78
4.4.1	Système linéaire	78
4.4.2	Système arborescent	81
	Conclusions de la première partie	85
 II Application de la méthode d'identification à un système multicorps		 87
5	Identification des paramètres inertiels du modèle Human36	89
5.1	Description du logiciel de simulation <i>HuMANs</i>	90
5.1.1	Modèle cinématique de Human36	91
5.1.2	Caractéristiques inertielles du membre supérieur	91
5.2	Simulation des mouvements de Human36	93
5.2.1	Modélisation à 2 segments	94

5.2.2	Expression du torseur \mathcal{T}	95
5.2.3	Calcul numérique des matrices R , B et A	97
5.3	Identification de la matrice J à partir des mouvements simulés	98
5.3.1	Cinématique de référence	98
5.3.2	Cinématique bruitée	100
6	Localisation <i>in vivo</i> des centres articulaires	107
6.1	Protocole expérimental	109
6.2	Présentation des méthodes fonctionnelles	112
6.2.1	Axe hélicoïdal	112
6.2.2	<i>S</i> CoRE	113
6.3	Traitement des données	115
6.4	Résultats	115
6.4.1	Localisation du centre articulaire	116
6.4.2	Précision des méthodes	117
6.4.3	<i>S</i> CoRE versus <i>S</i> CoRE2	118
6.5	Discussion	119
6.5.1	Localisation	119
6.5.2	Précision	120
7	Calcul de la matrice rotation	123
7.1	Calcul algébrique de la matrice rotation à partir de trois marqueurs	124
7.2	Optimisation de la matrice rotation à partir de plus trois marqueurs	126
7.2.1	Matrice rotation entre deux instants consécutifs	126
7.2.2	Matrice rotation du solide par rapport au repère fixe	130
7.3	Influence de la matrice rotation sur les grandeurs cinématiques	131
8	Identification <i>in vivo</i> des paramètres inertiels du membre supérieur	137
8.1	Protocole expérimental	138
8.2	Traitement des données	139
8.2.1	Cinématique	139
8.2.2	Dynamique	141
8.3	Résultats de l'identification	144
8.4	Effets des paramètres inertiels identifiés sur la dynamique articulaire	149
8.5	Conclusion	150
	Conclusion générale	151
	Bibliographie	155
	Annexes	165

Table des figures

1.1	Corps rigide S_1	27
2.1	Cône convexe et projection.	49
3.1	Le solide S_1 est un parallélépipède rectangle de côtés a, b, c et de centre de masse G_1	56
3.2	Le solide est fixé par le point P_1 à un filin, lui même fixé à un support fixe. La tension du filin est enregistrée ainsi que le déplacement des points P_1, P_2 et P_3	57
3.3	Coordonnées selon les axes \mathbf{x}_0 (trait plein), \mathbf{y}_0 (pointillé) et \mathbf{z}_0 (cercle) des marqueurs P_1, P_2 et P_3	58
3.4	Evolution de l'accélération du point P_1 selon les axes \mathbf{x}_0 (trait plein), \mathbf{y}_0 (pointillé) et \mathbf{z}_0 (cercle).	59
3.5	Evolution des neuf coefficients de la matrice rotation 1_0R	60
3.6	Evolution des neuf coefficients de la dérivée seconde de la matrice rotation 1_0R	61
3.7	Tension du filin et force \mathbf{F} exercée par le filin exprimée dans \mathcal{R}_0	62
3.8	Evolution des 10 coefficients de la matrice 4×4 symétrique et défini-positive J du solide S_1 en P_1 au cours des 11 itérations. La ligne en trait plein représente la solution exacte.	64
4.1	Schéma illustrant un système composé de 2 segments reliés par une articulation rotule. Le segment S_2 modélise le membre supérieur droit et le segment S_1 modélise le reste du corps considéré comme rigide.	70
4.2	Chaîne arborescente de corps.	74
4.3	Le corps S_i est caractérisé par différents vecteurs : \mathbf{l}_{ii} est la position du centre de masse et \mathbf{l}_{il} (\mathbf{l}_{ik}) est la contribution du corps S_i au chemin géométrique liant la base au segment S_l (S_k).	75
4.4	Système multicorps composé de six segments. Le corps S_i est lié à son parent par l'articulation P_i	77

4.5	Système multicorps composé de trois segments : S_3 représente l'ensemble { main droite + avant bras droit }, S_2 représente le bras droit et S_1 représente le reste du corps considéré comme rigide.	79
4.6	Système multicorps composé de trois segments : S_3 correspond à l'ensemble { main + avant bras + bras } gauches, S_2 à l'ensemble { main + avant bras + bras } droits et S_1 au reste du corps considéré comme rigide.	81
5.1	Paramétrage articulaire de Human36 (rotation autour de \mathbf{x}_0 , rotation autour de \mathbf{y}_0 , rotation autour de \mathbf{z}_0) ; les ronds représentent les 16 articulations.	92
5.2	Le modèle Humans36 est assimilé à un système multicorps composé de deux segments. Le segment S_2 correspond au membre supérieur droit et le segment S_1 correspond au reste du corps.	95
5.3	Modèle Human36 à 16 articulations (ronds) et 36 degrés de liberté ; les croix correspondent aux marqueurs anatomiques.	96
5.4	Evolution des neuf coefficients de la dérivée seconde de la matrice rotation du corps S_2 lors d'un mouvement de circumduction. La cinématique de référence est illustrée par le trait plein et la cinématique bruitée par la ligne pointillée avec des cercles.	102
6.1	Position des marqueurs.	110
6.2	Localisation des marqueurs anatomiques de l'omoplate. Le repère omoplate (\mathcal{R}_S) est centré en AA , l'axe \mathbf{x}_s est orienté de TS vers AA et l'axe \mathbf{z}_s est perpendiculaire au plan formé par les marqueurs AA , AI et TS , dirigé de TS vers AA	111
6.3	Position des marqueurs et illustration de la méthode <i>SCoRE</i>	114
6.4	Localisation moyenne du centre articulaire GH pour les 2 méthodes (<i>SCoRE</i> et <i>AH</i>) et pour les 3 tests (Cir , Fe/AbAd et FE/AbAd/Cir). * indique une différence significative avec $p < 0,05$ et ** avec $p < 0,01$	116
7.1	Les positions des 3 marqueurs fixés sur le solide S_1 permettent de définir un repère \mathcal{R}_1 et de calculer la matrice rotation 1_0R	124
7.2	Orientation du corps S_1	127
7.3	Variation de la moyenne de la différence absolue relative pour les neuf composantes de la matrice rotation, les trois composantes du vecteur taux de rotation et les neuf composantes de la dérivée seconde de la matrice rotation en fonction du nombre de marqueurs.	132
7.4	Evolution des trois composantes du taux de rotation en fonction du temps. Le vecteur est exprimé dans le repère \mathcal{R}_0 et calculé à partir de la matrice rotation provenant des données non bruitées (ligne continue), à partir de la matrice rotation calculée avec trois marqueurs (cercles) et avec huit marqueurs (astérisques).	134

7.5	Evolution des 9 coefficients de la dérivée seconde de la matrice rotation calculées à partir de la cinématique non bruitée (ligne continue rouge), à partir de la matrice rotation calculée avec 3 marqueurs (ronds verts) et avec huit marqueurs (astérisques bleus).	135
8.1	Représentation des différents repères utilisés : le repère cinéma (\mathcal{R}_0), le repère « plate-forme » (\mathcal{R}_{pf}), le repère lié au tronc (\mathcal{R}_1), le repère lié au bras (\mathcal{R}_2) et le repère anatomique du bras (\mathcal{R}_a), dont l'axe \mathbf{y}_a correspond à l'axe longitudinal du bras. Pour chaque repère, l'axe \mathbf{x} est en rouge, l'axe \mathbf{y} est en vert et l'axe \mathbf{z} est en bleu.	140
8.2	Evolution des trois composantes du vecteur taux de rotation du bras exprimé dans le repère \mathcal{R}_0 (composante sur \mathbf{x}_0 en rouge, sur \mathbf{y}_0 en vert et sur \mathbf{z}_0 en bleu).	141
8.3	Evolution des trois composantes de la force de réaction \mathbf{F} exprimées dans le repère \mathcal{R}_0 (composante sur \mathbf{x}_0 (ligne continue), sur \mathbf{y}_0 (ligne pointillée) et sur \mathbf{z}_0 (cercles)).	142
8.4	Evolution des trois composantes du moment résultant calculé au centre de la plate-forme (ligne continu) et au centre articulaire glénohumérale (ligne pointillée avec des cercles).	143
8.5	Evolution du gradient pour le sujet s_2	144
8.6	Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_2 lors de mouvements de flexion/extension à partir des paramètres inertiels identifiés (ligne continue) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix).	150
A.1	Localisation du centre articulaire glénohumérale.	167
B.1	Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_1 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.	169
B.2	Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_2 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.	171
B.3	Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_3 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.	173
B.4	Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_4 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.	175

B.5	Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_5 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.	177
B.6	Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_6 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.	179
B.7	Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_7 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.	181
B.8	Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_8 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.	183

Notations

Notations mécaniques

\mathcal{R}_0	le référentiel galiléen orthonormé $\mathcal{R}_0\{O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0\}$	27
\mathcal{R}_i	le référentiel lié au $i^{\text{ème}}$ corps $\mathcal{R}_i\{P_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i, \mathbf{z}_i\}$	27
i_0R	la matrice rotation de \mathcal{R}_i dans \mathcal{R}_0	28
${}^1_0R_{ij}$	le coefficient ligne i colonne j de la matrice 1_0R	60
\mathbf{g}	le vecteur gravité	27
S_i	un solide rigide	27
m_i	la masse du solide S_i	27
\mathbf{r}_{P_i}	le vecteur $\overrightarrow{OP_i}$ exprimé dans \mathcal{R}_0	27
\mathbf{d}_i	le vecteur position d'un point M de S_i : $\mathbf{d}_i = \overrightarrow{P_iM}$	28
$\mathbf{c}_i^{(i)}$	le vecteur position du centre de masse de S_i exprimé dans \mathcal{R}_i : $\mathbf{c}_i = {}^i_0R\mathbf{c}_i^{(i)}$	28
χ	la résultante dynamique	28
δ_{P_i}	le moment dynamique calculé en P_i	28
Ω	le vecteur rotation instantanée exprimé dans \mathcal{R}_0	28

$\boldsymbol{\omega}$	le vecteur rotation instantanée exprimé dans \mathcal{R}_1	141
\mathbf{F}^*	la résultante des forces extérieures agissant sur S_i	29
$\mathbf{M}_{P_i}^*$	le moment résultant des forces extérieures calculé en P_i	29
\mathbf{F}	la résultante des forces extérieures distinctes du poids : $\mathbf{F}^* = \mathbf{F} + m\mathbf{g}$..	29
\mathbf{M}_{P_i}	le moment résultant des forces extérieures distinctes du poids calculé en P_i : $\mathbf{M}_{P_i}^* = \mathbf{M}_{P_i} + \mathbf{c}_i \wedge m\mathbf{g}$	29
\mathcal{M}_{P_i}	le moment résultant des forces extérieures distinctes du poids calculé en P_i et exprimé sous forme de matrice 3×3 antisymétrique	33
δ_{P_i}	le moment dynamique calculé en P_i exprimé sous forme de matrice 3×3 antisymétrique	31
I_{P_i}	la matrice d'inertie calculée au point P_i	29
K_{P_i}	la matrice d'inertie de Poinsot calculée en P_i	33
\vec{I}	vecteur à 6 composantes contenant les coefficients de la matrice d'inertie : $\vec{I} = [I_{xx} \ I_{xy} \ I_{xz} \ I_{yy} \ I_{yz} \ I_{zz}]^T$	30
T_{P_1}	torseur des efforts extérieurs appliqués en P_1 : $T_{P_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_{P_1} \end{bmatrix}$	30
Φ	matrice 6×10 contenant les données cinématiques pour l'identification vectorielle	30
A	matrice d'accélération généralisée	34
B	matrice rotation généralisée	33
\mathcal{T}_{P_i}	matrice antisymétrique regroupant les résultantes et moments résultants en P_i dite torseur généralisé	34
J	matrice symétrique et défini-positive regroupant les paramètres inertiels d'un solide ou d'un système multicorps dite tenseur de Poinsot généralisé	34
$\mathbf{0}$	le vecteur colonne nul	30
$[0]_{i \times j}$	matrice $i \times j$ à coefficients nuls	30

Notations mathématiques

$\mathbb{1}_n$	la matrice identité $n \times n$	33
$j(\boldsymbol{\Omega})$	application linéaire antisymétrique de pré-produit vectoriel : $j(\boldsymbol{\Omega}) \mathbf{c} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{c}$	29
R^T	la transposée de la matrice R	30
R^{-1}	l'inverse de la matrice R	37
$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$	le produit vectoriel des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v}	28
$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	le produit tensoriel des vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v}	31
${}^i_0\dot{R}$	la dérivée par rapport au temps de i_0R	141
${}^i_0\ddot{R}$	la dérivée seconde par rapport au temps de i_0R	32
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$	le produit scalaire des vecteurs u et v	35
$\det(A)$	le déterminant de la matrice A	50
$\text{tr}(A)$	la trace de la matrice A	45
$\nabla f(x)$	le gradient de la fonction f au point x	43

Introduction générale

Les différents travaux menés au sein de l'équipe Mécanique du Geste Sportif s'attachent à comprendre et à caractériser les tâches mécaniques réalisées lors de mouvements humains (qu'ils soient sportifs, pathologiques, ...). L'approche expérimentale qui consiste à mesurer *in situ* ces mouvements est essentielle à une telle problématique. Néanmoins, des approches complémentaires telles la simulation ou la synthèse dynamique de mouvements humains sont également développées dans l'équipe. Dans certaines situations, ces deux dernières approches sont indispensables car, comme le souligne Begon [2006], « de nombreuses questions que se posent les techniciens du sport sont difficiles voire impossibles à appréhender par l'expérience pour des raisons éthiques ou pratiques ». Une des raisons qui nécessite parfois le recours à la simulation est l'incertitude inhérente à l'analyse du mouvement humain. En effet, il est parfois impossible de comparer deux individus ou deux techniques gestuelles car le domaine d'incertitude empêche l'interprétation des différences éventuelles. De plus, certains examens cliniques s'appuient sur les analyses biomécaniques qui déterminent le choix des traitements chirurgicaux. Il convient donc de diminuer au maximum les différentes sources d'incertitudes pouvant influencer sur les grandeurs mécaniques calculées. Évidemment les différents paramètres mécaniques (cinématiques, cinétiques et dynamiques) ont une sensibilité différente face aux multiples sources d'incertitudes.

Parmi les grandeurs mécaniques calculées, les efforts articulaires constituent une étape importante. En effet, les modélisations musculaires sont initialisées à partir de ces valeurs [Pandy *et al.*, 1992; Zajac *et al.*, 2002]. Néanmoins, les sources d'imprécision affectant les

efforts articulaires sont multiples. Ainsi, le calcul des efforts articulaires par dynamique inverse est sensible aux imprécisions et incertitudes :

- des données cinématiques,
- des paramètres inertiels segmentaires (PIS),
- des enregistrements dynamographiques selon la méthode (dynamique inverse ascendante ou descendante) et le mouvement.

Dans un article récent, [Rao et al. \[2006\]](#) précisent que la sensibilité des efforts articulaires aux incertitudes cinématographiques et dynamographiques est connue et peut être réduite par des traitements adaptés [[Cahouët et al., 2002](#); [Charlton et al., 2004](#)]. En revanche, l'effet des PIS sur les grandeurs dynamiques est plus controversé (particulièrement lors de l'étude de la marche). Certaines études montrent que les variations des PIS ont peu d'influence [[Challis et Kerwin, 1996](#); [Fantozzi et al., 2005](#); [Ganley et Powers, 2004](#); [Pearsall et Costigan, 1999](#)] alors que d'autres montrent que ces variations peuvent entraîner des différences significatives sur la dynamique articulaire [[Andrews et Mish, 1996](#); [Kingma et al., 1996](#); [Lenzi et al., 2003](#); [Silva et Ambrosio, 2004](#)]. Outre leurs effets sur les efforts articulaires, les PIS précis sont des données essentielles pour les conceptions de prothèses.

Les PIS qui interviennent dans le cadre d'analyse en dynamique inverse sont au nombre de dix par segment :

- la masse (kg),
- les trois composantes du vecteur position du centre de masse (m), souvent exprimées par rapport à l'extrémité proximale du segment,
- les six coefficients de la matrice d'inertie ($m^2 \cdot \text{kg}$).

En biomécanique, l'estimation des PIS est un sujet abondamment traité dans la littérature. Bien que les premières études concernant la détermination des PIS soient anciennes (Borelli au XVII^e siècle, Harless en 1860), ce sujet est toujours d'actualité [[Bauer et al., 2007](#); [Doane et Quesada, 2006](#); [Dumas et al., 2007](#); [Nikolova et Toshev, 2007](#)]. Les méthodes de détermination des PIS sont nombreuses et diverses (modèles mathématiques, équations de régression, immersion, changement de la force de réaction, photogrammétrie, imageries médicales) et il est parfois difficile de faire un choix pertinent. De façon générale et sans

entrer dans l'historique de l'estimation des PIS (pour cela, le lecteur pourra se référer au travail de Bjornstrup [1996]¹ ou encore à celui de Pearsall et Reid [1994]), les méthodes citées ci-dessus ont différents inconvénients :

- elles sont spécifiques à une population et donc non personnalisées (équations de régressions) ;
- elles nécessitent des hypothèses sur la localisation du centre de masse (changement de la force de réaction [Bernstein *et al.*, 1931]) ;
- elles sont difficiles d'accès et onéreuses (imageries médicales) ;
- elles supposent une densité uniforme des segments (photogrammétrie) ;
- elles délimitent de façon approximative les contours des segments (modèle d'Hanavan [1964]) ;
- leur mise en œuvre nécessite un nombre important de mesures (modèle de Hatze [1980]) ;
- elles nécessitent un appareillage spécifique (Bouisset et Pertuzon [1968]).

Ces différentes méthodes sont peu utilisées et, le plus souvent, les PIS sont déterminés à partir d'équations de régression ou à partir de modèles géométriques. Cependant, les modélisations spécifiques ne devraient pas être appliquées à des populations trop éloignées de la population ayant servi à établir le modèle. Des modèles propres à certaines populations sont alors établis : Cheng *et al.* [2000] et Hui *et al.* [1999], pour une population d'adultes chinois ; Jensen [1986], pour une population d'enfants canadiens ; Nikolova et Toshev [2007], pour une population d'adultes bulgares ; Pavol *et al.* [2002], pour une population américaine âgée ; Park *et al.* [1998], pour une population d'adultes coréens. Les modèles spécifiques à une population sont plus précis. Néanmoins, ils ne prennent pas en compte la diversité morphologique pouvant exister au sein d'une même population. C'est pourquoi, la recherche de PIS personnalisés devient un enjeu majeur des analyses biomécaniques.

Une méthode alternative aux modélisations classiques a été proposée par Vaughan *et al.* [1982]. Cette approche ne fait aucune hypothèse sur la densité ou la forme des segments, elle permet d'obtenir les PIS personnalisés en utilisant des techniques d'optimisation. Les va-

¹<http://www.cvmt.auc.dk/~jorgen/PhD/>

riables à identifier sont les PIS et la fonction objectif à minimiser est basée sur la différence entre les efforts externes mesurés et les efforts externes calculés par dynamique inverse. Des contraintes sont ajoutées concernant la symétrie des segments droits et gauches. Trois activités différentes (course, saut en longueur et coup de pied) ont été considérées afin de déterminer les PIS optimaux. De légères différences par rapport aux données provenant d'études cadavériques ont été observées. Cette méthode, bien qu'offrant une alternative intéressante à l'estimation personnalisée des PIS, n'a pas été développée davantage. De plus, ce travail a été très peu cité dans la littérature biomécanique.

Pourtant, l'approche de [Vaughan *et al.*](#), est utilisée en robotique sous le nom d'identification. En effet, les paramètres inertiels des robots manipulateurs sont des données importantes pour les performances des lois de commande basées sur l'utilisation du modèle dynamique. La robustesse dépend en partie de la qualité des incertitudes des PIS fournies par les estimations. L'identification n'est pas le seul moyen d'obtenir les paramètres des robots, mais cette méthode a été très développée par les roboticiens car elle ne nécessite pas de démonter le robot (contrairement aux méthodes de mesures sur les corps pris isolément) ni de faire d'hypothèse sur la répartition des masses ou encore sur la géométrie des segments (contrairement à la C.A.O.). Le travail présenté dans ce manuscrit s'inscrit dans cette problématique.

L'objet principal de cette thèse est d'adapter la méthode d'identification afin d'estimer les PIS du corps humain. Pour cela, le mémoire est organisé en deux parties, la **première partie** introduit les équations et algorithmes de minimisation propices à l'identification des paramètres inertiels d'un système multicorps. La **seconde partie** applique la méthode d'identification à l'estimation des PIS d'un système multicorps à partir de mouvements simulés et expérimentaux.

La particularité de la méthode d'identification présentée dans cette thèse est de formuler les équations du mouvement sous forme matricielle en regroupant les paramètres inertiels dans une matrice symétrique et défini-positive. Cette matrice apparaît linéairement dans les équations du mouvement. **Le chapitre 1** présente cette formulation des équations du mouvement pour un corps rigide ; la généralisation de ces équations à un

système multicorps quelconque est détaillée lors du **chapitre 4**. L'algorithme de gradient conjugué projeté permettant l'identification d'une matrice symétrique défini-positive est abordé dans le **chapitre 2**. Cet algorithme ainsi que la méthode d'identification sont validés au cours du **chapitre 3** à partir des mouvements simulés d'un solide rigide. Les développements théoriques et les résultats obtenus lors de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication acceptée par le Journal of Applied Mathematics and Mechanics [[Atchonouglo et al., 2007](#)].

Le **chapitre 5** présente l'application de la méthode d'identification à un système multicorps à partir de mouvements simulés [[Monnet et al., 2007a](#)]. Les résultats et conclusions du chapitre 5 font apparaître un impératif important pour la détermination des PIS : la position des centres articulaires doit être connue précisément. Ce point de discussion fait l'objet du **chapitre 6** et à fait l'objet d'une publication [[Monnet et al., 2007d](#)]. De ces deux chapitres, il ressort que le calcul précis de la matrice rotation est une donnée essentielle à la fois pour l'estimation des PIS et pour la localisation des centres articulaires. Afin de déterminer précisément cette matrice rotation, une méthode de minimisation est détaillée lors du **chapitre 7**. Enfin, le **chapitre 8** montre comment le protocole expérimental élaboré et la méthode d'identification développée permettent d'obtenir les PIS personnalisés du membre supérieur de huit sujets [[Monnet et al., 2007b,c](#)].

Première partie

Formulation des équations du mouvement et identification des paramètres inertiels

Chapitre 1

Cas d'un seul segment libre

Sommaire

1.1	Introduction	25
1.2	Formulation vectorielle	27
1.3	Formulation matricielle	31
1.3.1	Matrice rotation R et vecteur translation	32
1.3.2	Rotation généralisée B	33
1.3.3	Accélération généralisée A	34
1.3.4	Regroupement des résultantes et des moments dans une matrice 4×4 antisymétrique \mathcal{T}	34
1.3.5	Regroupement des caractéristiques d'inertie dans une matrice 4×4 symétrique et défini-positive J	34
1.3.6	Formulation matricielle des équations du mouvement	35
1.4	Bilan	36

1.1 Introduction

Avant d'aborder l'identification des paramètres inertiels segmentaires d'un système multicorps, il est utile de détailler les équations du mouvement pour un corps isolé [Chenut *et al.*, 2002; Khosla, 1987; Raucen, 1990; Raucen *et al.*, 1992]. Les équations du mouvement d'un solide ou d'un système multicorps mettent en relation les paramètres cinématiques et leurs dérivées premières et secondes avec les forces généralisées données. Les équations du mouvement peuvent s'écrire sous de multiples formes. L'une d'elles, très utilisée, consiste à employer le formalisme de « Newton-Euler ». Alors pourquoi chercher une

nouvelle formulation des équations du mouvement ? La réponse vient de notre utilité de ces équations. Alors que ces équations sont couramment utilisées (dans notre domaine tout du moins) pour déterminer les efforts s'exerçant sur un solide, nous voulons, à partir de ces équations, déterminer les paramètres inertiels du solide. L'écriture « classique » des équations du mouvement n'est alors pas envisageable car, pour identifier les paramètres, ceux-ci doivent apparaître linéairement dans les équations. L'identification des paramètres dynamiques (ce terme regroupe à la fois les paramètres inertiels d'un segment et les coefficients de frottements d'une articulation) est un sujet largement abordé dans la littérature. Les équations du mouvement laissant apparaître les paramètres dynamiques linéairement ont déjà été développés. De façon non exhaustive, nous pouvons citer les travaux de Antonelli *et al.* [1999]; Arteaga [2003]; Atkeson *et al.* [1986]; Chenut *et al.* [2002]; Gautier et Khalil [1988]; Raucant *et al.* [1992]. Dans ces différentes études, les paramètres recherchés sont regroupés dans un vecteur. Pour des raisons que nous allons évoquer plus loin (principalement pour faciliter le processus de minimisation), cette formulation des équations du mouvement n'est pas retenue, nous préférons nous tourner vers une formulation matricielle des équations du mouvement.

Dans ce chapitre, les équations du mouvement pour un solide dans le cas général, c'est à dire lorsque le solide est libre, sont développées. Les équations de la dynamique appliquées à un corps rigide totalement libre fournissent alors six informations : trois équations de translation et trois équations de rotation. Le corps étudié possède dix paramètres inertiels que l'on souhaite déterminer : la masse, la position du centre de masse (trois composantes) et la matrice d'inertie (contenant six coefficients). A chaque instant, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Pour identifier les paramètres inertiels d'un solide il faut que les paramètres à identifier soient les mêmes aux différents instants (pour cela ils doivent être exprimés dans le repère lié au solide) et apparaissent de façon linéaire dans les équations.

Dans un premier temps, la méthode classique d'identification est détaillée ; cette écriture des équations du mouvement est appelée écriture vectorielle en référence au vecteur contenant les dix paramètres à déterminer. Ensuite l'écriture matricielle des équations du

mouvement où les dix paramètres sont regroupés dans une matrice 4×4 symétrique et défini-positive est présentée. Enfin, l'intérêt d'adopter la formulation matricielle des équations du mouvement pour l'identification des paramètres inertiels sera étayé.

1.2 Formulation vectorielle

Soit le corps rigide S_1 de masse m_1 et de centre de masse G_1 illustré sur la figure 1.1.

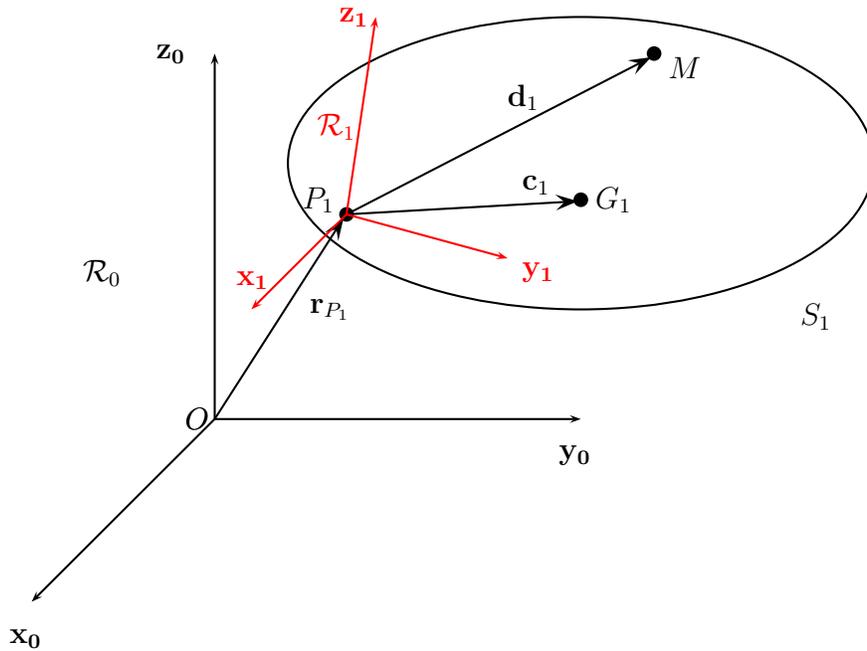


FIG. 1.1 – Corps rigide S_1 .

Nous définissons :

- \mathcal{R}_0 le référentiel galiléen : $\mathcal{R}_0\{O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0\}$,
- \mathcal{R}_1 le référentiel lié au corps S_1 : $\mathcal{R}_1\{P_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1\}$,
- $\mathbf{g}^{(0)}$ est le vecteur gravité exprimé dans \mathcal{R}_0 : $\mathbf{g}^{(0)} = [0 \ 0 \ -9,81] \text{m.s}^{-2}$,
- $\mathbf{r}_{P_1}^{(0)}$ est le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$ exprimé dans le référentiel \mathcal{R}_0 , de même, $\mathbf{r}_M^{(0)}$ est le vecteur \overrightarrow{OM} exprimé dans le référentiel \mathcal{R}_0 ,

- $\mathbf{d}_1^{(0)}$ est le vecteur $\overrightarrow{P_1M}$ exprimé dans le référentiel \mathcal{R}_0 ,
- 1_0R est la matrice rotation qui permet de passer du référentiel \mathcal{R}_1 au référentiel \mathcal{R}_0 ; les coordonnées d'un vecteur $\mathbf{d}_1^{(0)}$ dans \mathcal{R}_0 s'obtiennent à partir de ces coordonnées dans \mathcal{R}_1 par la relation : $\mathbf{d}_1^{(0)} = {}^1_0R \mathbf{d}_1^{(1)}$. Pour simplifier l'écriture, lorsqu'aucun exposant n'est indiqué sur un vecteur, celui-ci est exprimé dans le référentiel \mathcal{R}_0 : $\mathbf{d}_1 = {}^1_0R \mathbf{d}_1^{(1)}$,
- \mathbf{c}_1 est le vecteur $\overrightarrow{P_1G_1}$,
- $\ddot{\mathbf{r}}_M$ est la dérivée seconde du vecteur \overrightarrow{OM} .

Les éléments du torseur dynamique du solide S_1 au point P_1 ($\boldsymbol{\chi}$, la résultante dynamique et $\boldsymbol{\delta}_{P_1}$ le moment dynamique en P_1) dans le repère \mathcal{R}_0 s'écrivent :

$$\boldsymbol{\chi} = \int_{S_1} (\ddot{\mathbf{r}}_M) dm \quad (1.1)$$

$$\boldsymbol{\delta}_{P_1} = \int_{S_1} (\mathbf{d}_1 \wedge \ddot{\mathbf{r}}_M) dm. \quad (1.2)$$

Pour faire apparaître les paramètres inertiels dans ces équations, l'accélération de M est écrite en fonction de celle du point P_1 :

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d}_1), \quad (1.3)$$

où $\boldsymbol{\Omega}$ désigne le vecteur rotation instantanée du solide S_1 exprimé dans le repère \mathcal{R}_0 . Ainsi, la résultante dynamique s'écrit :

$$\boldsymbol{\chi} = \int_{S_1} \left[\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d}_1) \right] dm. \quad (1.4)$$

Par définition du centre de masse :

$$\int_{S_1} (\mathbf{d}_1) dm = m_1 \mathbf{c}_1, \quad (1.5)$$

l'équation (1.4) devient alors :

$$\boldsymbol{\chi} = m_1 \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge m_1 \mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge m_1 \mathbf{c}_1). \quad (1.6)$$

Le moment dynamique s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta}_{P_1} &= \int_{S_1} \left[\mathbf{d}_1 \wedge \left(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{d}_1 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d}_1) \right) \right] dm \\ &= m_1 \mathbf{c}_1 \wedge \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + I_{P_1} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (I_{P_1} \boldsymbol{\Omega}). \end{aligned} \quad (1.7)$$

La matrice I_{P_1} est la matrice d'inertie de S_1 en P_1 :

$$I_{P_1} \boldsymbol{\Omega} = \int_{S_1} [\mathbf{d}_1 \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{d}_1)] dm.$$

Le Principal Fondamental de la Dynamique s'écrit :

$$\boldsymbol{\chi} = \mathbf{F}^* \quad (1.8)$$

$$\boldsymbol{\delta}_{P_1} = \mathbf{M}_{P_1}^*, \quad (1.9)$$

où \mathbf{F}^* est la somme des forces extérieures agissant sur S_1 et $\mathbf{M}_{P_1}^*$ est la somme des moments extérieurs calculés en P_1 . En isolant l'action du poids, on obtient :

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} + m_1 \mathbf{g} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{M}_{P_1}^* = \mathbf{M}_{P_1} + \mathbf{c}_1 \wedge m_1 \mathbf{g}. \quad (1.11)$$

Les équations du mouvement s'écrivent alors :

$$\mathbf{F} = m_1 (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge m_1 \mathbf{c}_1 + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge m_1 \mathbf{c}_1) \quad (1.12)$$

$$\mathbf{M}_{P_1} = m_1 \mathbf{c}_1 \wedge (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) + I_{P_1} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (I_{P_1} \boldsymbol{\Omega}). \quad (1.13)$$

Pour formuler un système linéaire, la matrice antisymétrique (également appelée matrice de pré-produit vectoriel) $j(\boldsymbol{\Omega})$ associé au vecteur $\boldsymbol{\Omega}$ est introduite :

$$j(\boldsymbol{\Omega}) = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_{z_0} & \Omega_{y_0} \\ \Omega_{z_0} & 0 & -\Omega_{x_0} \\ -\Omega_{y_0} & \Omega_{x_0} & 0 \end{bmatrix}.$$

De plus, tous les vecteurs utilisés ci-dessus sont exprimés dans le repère \mathcal{R}_0 . Pour identifier les paramètres inertiels du solide, il faut que le vecteur \mathbf{c}_1 ainsi que la matrice d'inertie I_{P_1} soient exprimés dans le repère lié au solide \mathcal{R}_1 . On utilise alors la matrice rotation 0R_1 qui permet de passer du repère \mathcal{R}_1 au repère \mathcal{R}_0 . Les équations (1.12) et (1.13) deviennent alors :

$$\mathbf{F} = m_1 (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) + j(\dot{\boldsymbol{\Omega}}) {}^0R_1 m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} + j(\boldsymbol{\Omega}) j(\boldsymbol{\Omega}) {}^0R_1 m \mathbf{c}_1^{(1)} \quad (1.14)$$

$$\mathbf{M}_{P_1} = -j(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) {}^0R_1 m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} + {}^0R_1 I_{P_1}^{(1)} {}^0R^T \dot{\boldsymbol{\Omega}} + j(\boldsymbol{\Omega}) \left({}^0R_1 I_{P_1}^{(1)} {}^0R^T \boldsymbol{\Omega} \right). \quad (1.15)$$

Pour faire apparaître les 10 paramètres inertiels à déterminer dans un vecteur, les six coefficients de la matrice d'inertie sont rassemblés dans le vecteur de dimension six suivant :

$$\vec{I}_{P_1}^{(1)} = \left[I_{xx}^{(1)} \quad I_{xy}^{(1)} \quad I_{xz}^{(1)} \quad I_{yy}^{(1)} \quad I_{yz}^{(1)} \quad I_{zz}^{(1)} \right]^T.$$

La matrice 3×6 suivante est introduite :

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} u & v & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & v & w & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & v & w \end{bmatrix}, \quad (1.16)$$

où $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = {}^1_0R^T \Omega$. Avec cette écriture, le produit ${}^1_0R I_{P_1}^{(1)} {}^1_0R^T \dot{\Omega}$ est équivalent au produit : ${}^1_0R \tilde{\Omega} \vec{I}_{P_1}^{(1)}$. Les équations (1.14) et (1.15) sont assemblées de la façon suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{M}_{P_1} \end{bmatrix}}_{T_{P_1} (6 \times 1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) & \left[j(\dot{\Omega}) + j(\Omega)j(\Omega) \right] {}^1_0R & [0]_{3 \times 6} \\ \mathbf{0} & -j(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) {}^1_0R & {}^1_0R \tilde{\Omega} + j(\Omega) {}^1_0R \tilde{\Omega} \end{bmatrix}}_{\Phi (6 \times 10)} \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \\ \vec{I}_{P_1}^{(1)} \end{bmatrix}}_{(10 \times 1)}. \quad (1.17)$$

A chaque instant t le torseur des efforts extérieurs exprimé en P_1 dépend donc linéairement des 10 caractéristiques d'inertie du solide réunies dans une matrice 10×1 :

$$\{T_{P_1}\}(t) = \Phi(t) \begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \\ \vec{I}_{P_1}^{(1)} \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

L'équation (1.18) représente six équations pour déterminer dix inconnues. Au minimum, deux configurations différentes sont nécessaires pour déterminer les paramètres inertiels mais plus de configurations sont souhaitables à cause du bruit induit par les mesures.

Cette écriture permet d'identifier les paramètres inertiels d'un solide. Ceux-ci sont rassemblés dans un vecteur de dimension 10 et apparaissent linéairement dans les équations du mouvement. Cependant cette écriture n'est pas directe et demande de calculer des matrices intermédiaires (calcul de $\tilde{\Omega}$ et $\tilde{\tilde{\Omega}}$). De plus les propriétés de symétrie et de positivité de la matrice d'inertie ne se retrouvent pas lorsque les six coefficients de la matrice d'inertie sont écrits dans un vecteur. L'écriture matricielle des équations du mouvement permet d'avoir

une écriture plus compacte et directe des équations du mouvement. De plus, l'écriture matricielle conserve les propriétés de positivité de la matrice d'inertie qui seront utilisées lors de la minimisation.

Legnani *et al.* [1996a,b] ont introduit une formulation des équations de Newton-Euler sous forme de matrice 4×4 en utilisant les matrices de transformation homogène. Les paramètres inertiels sont regroupés dans une matrice symétrique et la cinématique est décrite par la vitesse angulaire, l'accélération angulaire et l'accélération du point P_1 . La formulation que nous allons développer est légèrement différente de celle de Legnani car les équations de Newton-Euler sont écrites à partir de la matrice rotation 0_1R . La justification de ce choix se retrouve dans la conclusion du chapitre 1 de la thèse de doctorat de Dumitriu [2003] « En ce qui concerne l'étude des systèmes polyarticulés complexes, un paramétrage dépendant tel celui conservant les neuf coefficients de la matrice rotation doit fournir une représentation plus précise du mouvement, tout en évitant les singularités. De plus, les équations de la dynamique induites ne contiennent pas de termes trigonométriques compliqués et leur degré de non-linéarité est réduit. »

1.3 Formulation matricielle

Pour écrire les équations du mouvement sous forme de matrice 4×4 , le produit tensoriel (\otimes) est employé à la place du produit vectoriel (\wedge). Ainsi, l'écriture vectorielle $\mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ est remplacée par l'écriture matricielle : $j(\mathbf{z}) = \mathbf{y} \otimes \mathbf{x} - \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$. Le résultat de ce calcul est une matrice antisymétrique. Tous les calculs sont effectués dans le référentiel inertiel \mathcal{R}_0 .

Ainsi, le moment dynamique est différent de l'équation (1.2), il s'écrit :

$$\delta_{P_1} = \int_{S_1} [\ddot{\mathbf{r}}_M \otimes \mathbf{d}_1 - \mathbf{d}_1 \otimes \ddot{\mathbf{r}}_M] dm. \quad (1.19)$$

Les équations (1.1) et (1.19) vont maintenant être détaillées de façon à faire apparaître les caractéristiques inertielles du solide S_1 en utilisant l'écriture développée dans les travaux de Dumitriu [Dumitriu, 2003; Vallée *et al.*, 1999].

1.3.1 Matrice rotation R et vecteur translation

La technique de paramétrage utilisée a été initiée par [Isnard \[1997\]](#) et [Vallée *et al.* \[1999\]](#). Le mouvement d'un solide est décrit par un vecteur translation et une matrice rotation. La position à l'instant t d'un point M de S_1 dans le référentiel galiléen \mathcal{R}_0 s'écrit :

$$\mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{P_1} + {}^1_0R \mathbf{d}_1^{(1)}. \quad (1.20)$$

Et l'accélération du point M s'écrit :

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + {}^1_0\ddot{R} \mathbf{d}_1^{(1)}. \quad (1.21)$$

On retrouve ainsi l'équation (1.3) en remarquant que :

$${}^1_0\ddot{R} = \left[j(\dot{\boldsymbol{\Omega}}) + (j(\boldsymbol{\Omega}))^2 \right] {}^1_0R. \quad (1.22)$$

A l'aide des équations (1.1) et (1.21), on écrit la résultante dynamique :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\chi} &= \int_{S_1} \left[\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + {}^1_0\ddot{R} \mathbf{d}_1^{(1)} \right] dm \\ &= m_1 \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + {}^1_0\ddot{R} m_1 \mathbf{c}_1^{(1)}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

En utilisant l'équation (1.21) et l'équation (1.19), le moment dynamique s'écrit sous la forme suivante :

$$\delta_{P_1} = \int_{S_1} \left[\left(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + {}^1_0\ddot{R} \mathbf{d}_1^{(1)} \right) \otimes \left({}^1_0R \mathbf{d}_1^{(1)} \right) \right] dm - \int_{S_1} \left[\left({}^1_0R \mathbf{d}_1^{(1)} \right) \otimes \left(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + {}^1_0\ddot{R} \mathbf{d}_1^{(1)} \right) \right] dm. \quad (1.24)$$

En utilisant la définition du centre de masse (1.5) et la notion de transposition : $\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} \otimes \left({}^1_0R \mathbf{d}_1^{(1)} \right) = \left(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} \otimes \mathbf{d}_1^{(1)} \right) {}^1_0R^T$, nous pouvons réécrire l'équation (1.24) :

$$\begin{aligned} \delta_{P_1} &= \left(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} \otimes m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \right) {}^1_0R^T - {}^1_0R \left(m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \otimes \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} \right) + {}^1_0\ddot{R} \left[\int_{S_1} \left(\mathbf{d}_1^{(1)} \otimes \mathbf{d}_1^{(1)} \right) dm \right] {}^1_0R^T - \\ &{}^1_0R \left[\int_{S_1} \left(\mathbf{d}_1^{(1)} \otimes \mathbf{d}_1^{(1)} \right) dm \right] {}^1_0\ddot{R}^T. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Remarquons que $\int_{S_1} \left(\mathbf{d}_1^{(1)} \otimes \mathbf{d}_1^{(1)} \right) dm$ est la matrice d'inertie de Poinot de S_1 en P_1 exprimée dans le repère \mathcal{R}_1 qui est notée $K_{P_1}^{(1)}$. Ainsi l'équation (1.25) devient :

$$\delta_{P_1} = \left(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} \otimes m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \right) {}^1_0R^T - {}^1_0R \left(m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \otimes \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} \right) + {}^1_0\ddot{R} K_{P_1}^{(1)} {}^1_0R^T - {}^1_0R K_{P_1}^{(1)} {}^1_0\ddot{R}^T. \quad (1.26)$$

Remarques

- La résultante dynamique $\boldsymbol{\chi}$ est une fonction linéaire des paramètres m_1 et $m_1 \mathbf{c}_1^{(1)}$ et le moment dynamique δ_{P_1} est une fonction linéaire des paramètres $m_1 \mathbf{c}_1^{(1)}$ et $K_{P_1}^{(1)}$.
- La relation entre la matrice d'inertie classique I et la matrice d'inertie de Poinsot K est détaillée dans Vallée *et al.* [1999] :

$$K = \frac{\text{tr}(I)}{2} \mathbf{1}_3 - I, \quad \mathbf{1}_3 \text{ est une matrice identité } 3 \times 3.$$

En utilisant les équations (1.10, 1.11, 1.23) et (1.26), les équations du mouvement d'un solide rigide s'écrivent :

$$\mathbf{F} = m_1 (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) + {}_0^1 \ddot{R} \left(m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \right) \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{P_1} = & \left[(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \otimes m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \right] {}_0^1 R^T - {}_0^1 R \left[\left(m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \right) \otimes (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \right] + \\ & {}_0^1 \ddot{R} K_{P_1}^{(1)} {}_0^1 R^T - {}_0^1 R K_{P_1}^{(1)} {}_0^1 \ddot{R}^T. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Le moment en P_1 des forces extérieures est toujours écrit sous la forme d'une matrice 3×3 antisymétrique :

$$j(\mathbf{M}_{P_1}) \equiv \mathcal{M}_{P_1} = \begin{bmatrix} 0 & -M_{P_1 z_0} & M_{P_1 y_0} \\ M_{P_1 z_0} & 0 & -M_{P_1 x_0} \\ -M_{P_1 y_0} & M_{P_1 x_0} & 0 \end{bmatrix}$$

Les équations du mouvement présentées ci-dessus peuvent se rassembler dans une équation matricielle faisant appel à des matrices 4×4 .

1.3.2 Rotation généralisée B

La matrice 4×4 contenant la matrice rotation du solide est appelée rotation généralisée ; elle est notée B :

$$B = \begin{bmatrix} {}_0^1 R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

où $\mathbf{0}$ représente le vecteur colonne nul.

Remarque

- $B^T B = B B^T = \mathbf{1}_4$, ($\mathbf{1}_4$ représente la matrice 4×4 identité) donc B est une rotation dans \mathbb{R}^4 .

1.3.3 Accélération généralisée A

La matrice A rassemble les accélérations du solide : l'accélération de la matrice rotation, l'accélération du point P_1 et le vecteur gravité :

$$A = \begin{bmatrix} {}^1\ddot{R} & (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

1.3.4 Regroupement des résultantes et des moments dans une matrice 4×4 antisymétrique \mathcal{T}

Les résultantes et moments extérieurs sont rassemblés dans la matrice 4×4 antisymétrique \mathcal{T} appelée torseur généralisé :

$$\mathcal{T}_{P_1} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{P_1} & \mathbf{F} \\ -\mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice contient les grandeurs dynamiques agissant sur le solide exprimées au point P_1 .

Remarques

- Les six équations du mouvement sont contenues dans une matrice antisymétrique 4×4 et une matrice antisymétrique 4×4 a six coefficients indépendants.

1.3.5 Regroupement des caractéristiques d'inertie dans une matrice 4×4 symétrique et défini-positive J

Les 10 paramètres inertiels du solide S_1 sont contenus dans la matrice J qui correspond au tenseur d'inertie global défini par Fayet [Fayet *et al.*, 2005; Fayet et Renaud, 1989] pour un solide isolé :

$$J = \begin{bmatrix} K_{P_1}^{(1)} & m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \\ m_1 \mathbf{c}_1^{(1)T} & m_1 \end{bmatrix}.$$

Propriété 1. La matrice J est défini-positive.

Preuve. On peut réécrire la matrice J :

$$J = \int_{S_1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \right) dm$$

ainsi, pour tout vecteur V de \mathbb{R}^4 , $V = \begin{bmatrix} U \\ v \end{bmatrix}$, $U \in \mathbb{R}^3$, $v \in \mathbb{R}$

$$\langle V, JV \rangle = \int_{S_1} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{d}_1^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} U \\ v \end{bmatrix} \right)^2 dm$$

où \langle , \rangle représente le produit scalaire.

$$\text{On a } \langle V, JV \rangle = 0 \implies \forall M \in S_1, \langle \mathbf{d}_1^{(1)}, U \rangle + v = 0$$

Pour $\mathbf{d}_1^{(1)} = 0$, on a $v = 0$ et $\forall M \in S_1, \langle \mathbf{d}_1^{(1)}, U \rangle = 0 \implies U = 0$ si S_1 est un corps en trois dimensions. Ainsi

$$\langle V, JV \rangle = 0 \implies V = 0$$

La positivité de la matrice J généralise la positivité du tenseur d'inertie de Poinot $K_{P_1}^{(1)}$.

1.3.6 Formulation matricielle des équations du mouvement

Les équations (1.27) et (1.28) peuvent être écrites sous forme de matrice 4×4 :

$$\begin{bmatrix} {}^1_0\ddot{R} & (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{P_1}^{(1)} & m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \\ m_1 \mathbf{c}_1^{(1)T} & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1_0R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^1_0R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{P_1}^{(1)} & m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \\ m_1 \mathbf{c}_1^{(1)T} & m_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^1_0\ddot{R}^T & \mathbf{0} \\ (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g})^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{P_1} & \mathbf{F} \\ -\mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

La formulation matricielle des équations du mouvement à un instant t est :

$$A(t)JB(t)^T - B(t)JA(t)^T = \mathcal{T}_{P_1}(t) \quad (1.30)$$

Ainsi, les équations du mouvement sont écrites sous forme de matrice 4×4 et ces équations sont linéaires en J . On retrouve la formulation introduite par [Legnani et al. \[1996a,b\]](#). En effet, en multipliant l'équation (1.30) à gauche par B^T et à droite par B , on obtient :

$$B^T AJ - JA^T B = B^T \mathcal{T}_{P_1} B.$$

Le torseur contenant les efforts extérieurs est exprimé dans le repère lié au solide \mathcal{R}_1 .

1.4 Bilan

Les équations du mouvement faisant apparaître les paramètres inertiels sous forme linéaire sont écrites de deux façons. La première rassemble les dix paramètres dans un vecteur et la seconde dans une matrice symétrique et défini-positive. Quelle que soit l'écriture retenue, les paramètres inertiels ne peuvent être identifiés que si ils sont stimulés. [Raucent \[1990\]](#) parle de trajectoire « excitante » ou « sensibilisante ». Par exemple, si le point P_1 est fixe, les équations de translation disparaissent des équations du mouvement et la masse du solide n'intervient alors plus. Dans ce cas, la matrice Φ de l'équation (1.18) n'est pas de plein rang, il s'agit d'une perte de rang structurelle. Raucent ajoute que la perte de rang peut également être due à une trajectoire non excitante. En effet, si le solide effectue un mouvement de rotation autour de l'axe \mathbf{z}_1 uniquement, la matrice d'inertie du solide ne pourra pas être identifiée dans sa globalité. Il faut alors chercher les paramètres de base [[Gautier, 1991](#); [Gautier et Khalil, 1988, 1992](#)].

Dans le cas où tous les paramètres sont stimulés, la matrice Φ de l'équation (1.18) est de plein rang. L'écriture vectorielle permet alors d'estimer les paramètres inertiels de S_1 par une résolution directe. En écrivant l'équation (1.18) à n instants différents, on forme les matrices suivantes :

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi(t_0) \\ \vdots \\ \Phi(t_n) \end{bmatrix} \text{ de dimension } 6n \times 10,$$

$$\{T_{P_1}\} = \begin{bmatrix} \{T_{P_1}\}(t_0) \\ \vdots \\ \{T_{P_1}\}(t_n) \end{bmatrix} \text{ de dimension } 6n \times 1.$$

Une estimation par moindres carrés permet alors d'obtenir les paramètres inertiels [[Atkeson et al., 1986](#)] :

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \\ \bar{I}_{P_1}^{(1)} \end{bmatrix} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \{T_{P_1}\}. \quad (1.31)$$

Cependant, les données expérimentales sont bruitées et il va s'avérer indispensable d'imposer des contraintes à la solution recherchée ; il faut rechercher une solution physiquement possible. C'est à dire, il faut que les caractéristiques inertielles trouvées soient réalistes : la masse doit être positive et la matrice d'inertie doit être défini-positive. Ainsi, lorsque les produits et moments d'inertie sont écrits dans un vecteur, les propriétés de positivité de la matrice d'inertie doivent être conservées. L'estimation des PIS s'obtient alors en résolvant le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \|\Phi \mathbf{x} - \{T_{P_1}\}\|^2 \\ m_1 > 0 \\ I_{P_1}^{(1)} > 0 \end{cases}$$

avec $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \\ \vec{I}_{P_1}^{(1)} \end{bmatrix}$. Le moment du premier ordre ($m_1 \mathbf{c}_1^{(1)}$) n'a pas de contrainte apparente avec cette formulation.

L'identification de la matrice J de l'équation (1.30) à partir des données $A(t)$, $B(t)$ et $\mathcal{T}_{P_1}(t)$ doit s'effectuer sans oublier son caractère symétrique et défini-positif. Ces contraintes doivent être prises en compte dans la procédure de minimisation. La minimisation tenant compte de ces critères s'écrit :

$$\begin{cases} \min_J \|A(t)JB^T(t) - BJA^T(t) - \mathcal{T}_{P_1}^T(t)\|^2 \\ m_1 > 0 \\ K_{P_1}^{(1)} - m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \mathbf{c}_1^{(1)T} > 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

Un algorithme de minimisation sur le cône des matrices 4×4 symétriques et défini-positives sera développé au cours du prochain chapitre. Contrairement à l'identification provenant de la formulation vectorielle des équations du mouvement, le regroupement des 10 paramètres inertiels dans une même matrice laisse apparaître des contraintes concernant le moment du premier ordre ($m_1 \mathbf{c}_1^{(1)}$). Ces contraintes consistent à exprimer la matrice d'inertie de Poinot au centre de masse du solide, qui doit évidemment être positif :

$$K_{P_1}^{(1)} - m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \mathbf{c}_1^{(1)T} = K_{G_1}^{(1)}. \quad (1.33)$$

L'écriture équivalente pour l'identification vectorielle est alors la suivante :

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{x}} \|\Phi \mathbf{x} - \{T_{P_1}\}\|^2 \\ m_1 > 0 \\ I_{P_1}^{(1)} - m_1 \left(\mathbf{c}_1^{(1)T} \mathbf{c}_1^{(1)} \mathbf{1}_3 - \mathbf{c}_1^{(1)} \mathbf{c}_1^{(1)T} \right) > 0 \end{cases} \quad (1.34)$$

Dans les contraintes du problème ci-dessus, la matrice d'inertie $I_{P_1}^{(1)}$ est écrite sous forme matricielle, ces contraintes doivent être écrites sous forme scalaire pour correspondre à la fonction à minimiser. Alors que pour la formulation matricielle, il « suffit » de chercher la matrice symétrique et défini-positive J minimisant $\|A(t)JB^T(t) - BJA^T(t) - \mathcal{T}_{P_1}^T(t)\|^2$. Des méthodes existent dans la littérature pour identifier de telles matrices. [Higham \[1988\]](#) développe une méthode permettant de trouver la matrice symétrique positive la plus proche d'une matrice réelle en projetant selon la norme de Frobenius. [Allwright \[1988\]](#) caractérise une matrice réelle symétrique de dimension $(n \times n)$ par un vecteur de dimension $(n(n+1))/2$. La positivité de la matrice est caractérisée par l'appartenance du vecteur associé au contour d'un cône convexe. Cette caractérisation est employée pour identifier au sens des moindres carrés la matrice positive A dans une équation du type $F = AG$ où F et G sont des matrices données. [Woodgate \[1996\]](#) résout le même problème sur l'espace des matrices symétriques et positives. [Deng et al. \[2004\]](#) proposent une méthode basée sur la décomposition en valeur singulière (SVD) afin d'identifier une matrice positive X minimisant $\|W - YXZ^T\|$ sur l'espace des matrices symétriques, antisymétriques et positives. [Hu \[1995\]](#) présente une méthode pour l'estimation de matrices défini-positives ; son approche consiste à transformer ce problème en un problème quadratique convexe équivalent avec des contraintes linéaires. Des techniques de projection permettent également de déterminer des matrices positives [[Malick, 2004](#); [Malick et Sendov, 2005](#)]. La méthode consiste à remplacer les valeurs propres négatives par des zéros dans la décomposition spectrale.

L'écriture matricielle des équations du mouvement est plus directe que l'écriture vectorielle et des algorithmes existent afin d'identifier une matrice défini-positive. Nous décidons donc de développer cette formulation des équations du mouvement pour un système multicorps afin d'identifier les paramètres inertiels. Le prochain chapitre va s'intéresser à un

algorithme de minimisation permettant de déterminer la matrice J de l'équation (1.30). Comme pour l'écriture vectorielle, l'équation doit être écrite au minimum pour deux configurations différentes afin d'identifier les dix coefficients de J . Afin de rester dans le cône des matrices défini-positives, la méthode de projection décrite par Higham [1988] sera implémentée.

Chapitre 2

Identification d'une matrice 4×4 symétrique et défini-positive

Sommaire

2.1 Optimisation	42
2.1.1 Minimisation d'une fonction par la méthode du gradient	43
2.1.2 Minimisation d'une fonction par la méthode du gradient conjugué	44
2.2 Construction d'une fonction coût minimisée par J	45
2.3 Expression du gradient de la fonction coût	46
2.4 Méthode du gradient conjugué	47
2.4.1 calcul de μ_k	47
2.4.2 Algorithme du gradient conjugué	48
2.5 Projection sur les matrices défini-positives	48
2.6 Algorithme du gradient conjugué projeté	50

Au chapitre précédent, nous avons introduit une formulation matricielle des équations du mouvement d'un solide rigide. Les dix paramètres inertiels de ce solide sont contenus dans une matrice 4×4 symétrique et défini-positive J . L'originalité de ce second chapitre est de proposer un algorithme permettant de minimiser une fonction coût dont la variable est la matrice J telle qu'elle apparaît dans l'équation du mouvement (1.30). Les méthodes classiques d'optimisation ou de minimisation consistent à déterminer un vecteur de \mathbb{R}^n . La matrice J est un élément d'un espace vectoriel de dimension 10. On pourrait lui associer un vecteur de \mathbb{R}^{10} . Nous préférons ne pas destructurer la matrice J afin de continuer à bénéficier des notions de calcul matriciel : produit matriciel, trace d'un produit de matrices...

Cette méthode est efficace car la matrice J est encadrée dans les équations du mouvement par deux matrices A et B . L'objet de ce chapitre est donc de présenter une méthode d'optimisation permettant d'identifier cette matrice à partir des données cinématiques et dynamiques rassemblées dans les matrices A , B et \mathcal{T} .

2.1 Optimisation

Classiquement, un problème d'optimisation sous contraintes se pose dans \mathbb{R}^n de la façon suivante [Minoux, 1983] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } f(x) \\ \text{sous les contraintes} \\ g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Le vecteur x a pour composantes x_1, x_2, \dots, x_n qui sont les inconnues du problème. La fonction f est appelée fonction objectif ou fonction coût et l'ensemble des conditions $g_i(x) \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) sont les contraintes du problème.

Souvent, on ramène la résolution d'un système linéaire de la forme :

$$Ax = b \quad (2.2)$$

où x est le vecteur inconnu, A est une matrice $n \times n$ défini-positive connue et b est un vecteur de \mathbb{R}^n également connu. Différentes méthodes permettent de résoudre ce problème. Les méthodes directes permettent d'obtenir la solution du problème (2.2) en un nombre fini d'opérations. On peut citer par exemple les méthodes du pivot de Gauss, de Jacobi, de décomposition LU. Les méthodes itératives construisent une suite vectorielle convergent vers la solution du problème. On peut citer les méthodes de Gauss-Seidel, de Jacobi et du gradient.

On remplace le problème (2.2) par le problème d'optimisation : minimiser la fonction coût :

$$f(x) = \frac{1}{2} (x^T Ax) - (b^T x) \quad (2.3)$$

quand x décrit \mathbb{R}^n . La positivité de la matrice A implique la convexité de la fonction f .

2.1.1 Minimisation d'une fonction par la méthode du gradient

Commençons par rappeler le traitement du problème (2.3) par la méthode du gradient. Celle-ci consiste à construire une suite de vecteurs x_n , convergeant vers un minimum local x^* de f annulant son gradient :

$$\nabla f(x^*) = 0. \quad (2.4)$$

A partir d'une initialisation x_0 , on calcule le gradient $\nabla f(x_0)$. Puisque la fonction f est convexe, le vecteur $\nabla f(x_0)$ indique la direction de plus grande augmentation de f , on se rapproche du minimum en suivant la direction opposée à celle du gradient : on définit un nouveau vecteur

$$x_1 = x_0 - \mu_0 \nabla f(x_0) \quad (2.5)$$

en choisissant μ_0 positif. La procédure est répétée jusqu'à un test d'arrêt imposant à la norme du gradient d'être très petite ($< \epsilon$).

Dans le cas du gradient à pas déterminé, le réel μ_k est choisi *a priori*. Cependant la convergence peut être très lente. La méthode de la plus forte pente consiste à choisir le réel μ_k qui minimise la fonction de la seule variable μ :

$$f(x_k - \mu \nabla f(x_k)) \quad (2.6)$$

à l'aide d'un algorithme de minimisation en dimension 1. L'algorithme du gradient se résume de la façon suivante :

1. initialiser x par x_0 ; $k = 0$
2. A l'itération k

$$d_k = -\nabla f(x_k) = b - Ax_k$$

$$\mu_k = \frac{d_k^T d_k}{d_k^T A d_k}$$

$$x_{k+1} = x_k + \mu_k d_k$$
3. si $\nabla f(x_{k+1}) \leq \epsilon$ stop, sinon $k = k + 1$ et retour en 2

Remarque : L'algorithme construit la direction d_{k+1} orthogonale à d_k .

2.1.2 Minimisation d'une fonction par la méthode du gradient conjugué

La méthode du gradient est rapide lorsque la matrice A est proche de la matrice unité. Par contre, lorsque la matrice A possède des valeurs propres assez éloignées les unes des autres, la méthode du gradient peut se révéler très lente. Une amélioration est de remplacer la notion d'orthogonalité par une notion associée à la matrice A . Au lieu de construire une direction d_{k+1} orthogonale à d_k , il est plus judicieux de construire une direction « conjuguée » c'est-à-dire satisfaisant :

$$d_{k+1}^T A d_k = 0. \quad (2.7)$$

La méthode du gradient conjugué est une méthode directe qui converge en n itérations (n est le nombre de composantes de x) [Brousse, 1988].

L'algorithme du gradient conjugué de Polak-Ribière se résume de la façon suivante :

1. initialiser x par x_0

$$g_0 = \nabla f(x_0) = Ax_0 - b$$

$$d_0 = -g_0; k = 0$$
2. A l'itération k

$$\mu_k = \frac{-\langle g_k, d_k \rangle}{\langle d_k, A d_k \rangle}$$

$$x_{k+1} = x_k + \mu_k d_k$$

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$$

avec $\beta_k = \frac{\langle g_{k+1}, g_{k+1} - g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle}$ (formule de Polak-Ribière)
3. si $\nabla f(x_{k+1}) \leq \epsilon$ stop, sinon $k = k + 1$ et retour en 2

Les algorithmes de gradient et de gradient conjugué sont simples à mettre en œuvre. Ils ne se composent que d'additions et de multiplications, des calculs délicats tels que l'inversion d'une matrice par exemple ne sont pas nécessaires.

Pour résoudre le problème d'identification de la matrice J posé dans le premier chapitre, nous allons définir une fonction coût $f(J)$ puis mettre en œuvre l'algorithme du gradient conjugué évoqué ci-dessus.

2.2 Construction d'une fonction coût minimisée par J

Au chapitre 1, nous avons présenté une formulation matricielle des équations du mouvement (1.30) dans laquelle les paramètres inertiels à identifier apparaissent linéairement. Les précédents paragraphes nous ont permis de dégager une méthode de minimisation susceptible de résoudre notre problème : la méthode du gradient conjugué.

L'équation (1.30) nous fournit six équations pour identifier 10 paramètres. Ces six équations dépendent du temps. Il faut au minimum deux configurations différentes pour identifier les 10 paramètres. Cependant, de plus nombreuses conditions sont souhaitées à cause :

- du bruit inhérent à la mesure,
- de l'amplification de ce bruit du au processus de dérivation nécessaire pour calculer les accélérations [Woltring, 1990; Wood, 1982].

Une méthode développée au laboratoire est exposée dans la thèse de Charles [2004]. Dans le domaine de la dynamique des rotors, cette méthode a permis d'identifier les quarante-huit inconnues composées des matrices (4×4) de raideur, d'amortissement et de masse. Elle consiste à intégrer l'équation du mouvement sur la durée de l'étude et à sommer sur l'ensemble des études.

Au chapitre précédent, les équations du mouvement à un instant t ont été formulées de la façon suivante :

$$A(t)JB(t)^T - B(t)JA(t)^T = \mathcal{T}(t) \quad (2.8)$$

La méthode des moindres carrés conduit à minimiser la fonction coût :

$$f(J) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^I \int_0^{T_i} \|A_i(t)JB_i^T(t) - B_i(t)JA_i^T(t) - \mathcal{T}_i(t)\|^2 dt \quad (2.9)$$

Les indices i indexent les I différentes études réalisées ($i = 1$ à I). La durée de la $i^{\text{ème}}$ étude est notée T_i . Pour faciliter la lisibilité des équations, les indices i et le temps t seront volontairement omis des expressions $A_i(t)$, $B_i(t)$ et $\mathcal{T}_i(t)$ dans la suite de ce paragraphe.

L'espace des matrices 4×4 est muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \text{tr}(PQ^T). \quad (2.10)$$

La norme est définie par

$$\|P\|^2 = \langle P, P \rangle \quad (2.11)$$

elle est dite norme de Frobenius.

Définissons la matrice 4×4

$$M = AJB^T - BJA^T - \mathcal{T}.$$

Puisque la matrice M est antisymétrique $\langle M, M \rangle = -\text{tr}(M^2)$, la fonction coût devient :

$$f(J) = -\frac{1}{4} \sum_{m=1}^M \int_0^{T_m} \text{tr}(AJB^T - BJA^T - \mathcal{T})^2 dt. \quad (2.12)$$

Après le développement de l'expression (2.12), on obtient :

$$\begin{aligned} f(J) &= -\frac{1}{2} \text{tr} \sum_{m=1}^M \int_0^{T_m} (AJB^T AJB^T) dt + \frac{1}{2} \text{tr} \sum_{m=1}^M \int_0^{T_m} (JB^T BJA^T A) dt + \\ &\quad \text{tr} \sum_{m=1}^M \int_0^{T_m} (AJB^T \mathcal{T}) dt - \frac{1}{4} \text{tr} \sum_{m=1}^M \int_0^{T_m} (\mathcal{T})^2 dt \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.3 Expression du gradient de la fonction coût

Le gradient de la fonction $f(J)$, noté $\nabla f(J)$, s'obtient en calculant la dérivée directionnelle de $f(J)$. Soit δJ une variation de J , alors (en omettant aussi les signes \sum et \int) :

$$\langle \delta J, \nabla f(J) \rangle = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(J + \alpha \delta J) - f(J)}{\alpha} \quad (2.14)$$

$$= -\text{tr}(\delta JB^T AJB^T A) + \text{tr}(\delta JB^T BJA^T A) + \text{tr}(\delta JB^T \mathcal{T} A) \quad (2.15)$$

$$= \langle \delta J, [-B^T AJB^T A + B^T BJA^T A + B^T \mathcal{T} A] \rangle \quad (2.16)$$

Puisque la matrice J recherchée est symétrique, la matrice $\nabla f(J)$ doit l'être aussi. On déduit donc de (2.16)

$$\nabla f(J) = -\frac{B^T AJB^T A + A^T B J^T A^T B}{2} + \frac{B^T BJA^T A + A^T A J^T B^T B}{2} + \frac{B^T \mathcal{T} A + A^T \mathcal{T}^T B}{2}.$$

Finalement, en remettant les indices, le temps, les sommations et les intégrales, nous obtenons le gradient de la fonction coût $f(J)$:

$$\begin{aligned} \nabla f(J) = & - \sum_{m=1}^M \int_0^{T_m} \frac{B_m^T(t)A_m(t)JB_m^T(t)A_m(t) + A_m^T(t)B_m(t)J^T A_m^T(t)B_m(t)}{2} dt + \\ & \sum_{m=1}^M \int_0^{T_m} \frac{B_m^T(t)B_m(t)JA_m^T(t)A_m(t) + A_m^T(t)A_m(t)J^T B_m^T(t)B_m(t)}{2} dt + \\ & \sum_{m=1}^M \int_0^{T_m} \frac{B_m^T(t)\mathcal{T}_m(t)A_m(t) + A_m^T(t)\mathcal{T}_m^T(t)B_m(t)}{2} dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

Maintenant que le gradient de la fonction $f(J)$ est calculée, nous pouvons mettre en œuvre la méthode du gradient conjugué.

2.4 Méthode du gradient conjugué

Nous allons modifier légèrement les notations : les vecteurs x_k , d_k et g_k sont maintenant des matrices symétriques que nous noterons J_k , D_k et G_k .

2.4.1 calcul de μ_k

La méthode du gradient est une méthode itérative, elle consiste à initialiser J par J_0 et à améliorer la solution J_k en la remplaçant à la $k^{\text{ième}}$ itération par :

$$J_{k+1} = J_k + \mu_k D_k. \quad (2.18)$$

Le choix optimal de μ_k est celui qui minimise la fonction $f(J_k + \mu_k D_k)$ de la variable μ_k . En omettant à nouveau les indices, le temps, les sommes et les intégrales, cette fonction se développe en :

$$\begin{aligned} f(J + \mu D) = & -\frac{1}{2}\text{tr}(AJB^T AJB^T) - \mu \text{tr}(AJB^T ADB^T) - \frac{1}{2}\mu^2 \text{tr}(ADB^T ADB^T) \\ & + \frac{1}{2}\text{tr}(JB^T BJA^T A) + \mu \text{tr}(JB^T BDA^T A) + \frac{1}{2}\mu^2 \text{tr}(DB^T BDA^T A) \\ & + \text{tr}(AJB^T \mathcal{T}) + \mu \text{tr}(ADB^T \mathcal{T}). \end{aligned} \quad (2.19)$$

C'est un trinôme du second degré.

La valeur optimale μ_k de μ est obtenue en annulant sa dérivée, c'est-à-dire en résolvant l'équation du premier degré :

$$\mu [\text{tr}(B^T B D A^T A D) - \text{tr}(D B^T A D B^T A)] = \text{tr}(D B^T A J B^T A) - \text{tr}(D A^T A J B^T B) - \text{tr}(D B^T T A) \quad (2.20)$$

2.4.2 Algorithme du gradient conjugué

Dans notre formulation matricielle, l'algorithme du gradient conjugué se résume de la façon suivante :

1. Initialiser J par J_0
 $G_0 = \nabla f(J_0)$
 $D_0 = -G_0$; $k = 0$
2. à l'itération k

$$\mu_k = \frac{\text{tr}(G_k^T D_k)}{\text{tr}[D_k^T (\sum \int B A D_k B A - B B^T D_k A^T A) dt]}$$
 $J_{k+1} = J_k + \mu_k D_k$
3. si $\|G_{k+1}\| < \epsilon$ stop, sinon
 $D_{k+1} = -G_{k+1} + \beta_k D_k$
avec $\beta_k = \frac{\text{tr}[G_{k+1}^T (G_{k+1} - G_k)]}{\text{tr}(G_k^T G_k)}$
 $k = k + 1$ et retour en 2.

Remarque : Dans l'expression du dénominateur de μ_k , les indices, le temps et les durées d'études ont été omis.

2.5 Projection sur les matrices défini-positives

L'algorithme présenté ci-dessus prend bien en considération la symétrie de la matrice J , mais rien n'impose la positivité de la matrice trouvée. Les matrices positives forment un cône convexe au sens suivant :

- la somme de deux matrices positives J et J' est une matrice positive,
- le produit d'une matrice positive J par un nombre positif λ est une matrice positive.

La situation peut s'illustrer de la manière suivante (figure 2.1). La projection d'une matrice symétrique J'' non positive s'effectue orthogonalement sur le bord du cône.

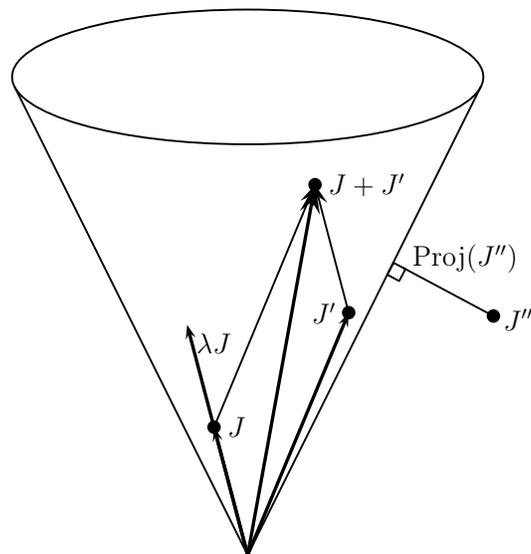


FIG. 2.1 – Cône convexe et projection.

Des algorithmes de projection sur le cône des matrices positives existent et ont été évoqués lors du chapitre 1. La méthode introduite par Higham [1988] consiste à chercher la matrice positive la plus proche d'une matrice non positive selon la norme de Frobenius. La recherche de la matrice symétrique défini-positif (SDP) projetée pose des difficultés numériques. D'ailleurs, la première phrase de l'article de Higham [1988] est : « Symmetric positive definiteness is arguably one of the highest mathematical accolades to which a matrix can aspire ». Selon Higham, l'intérêt de développer des méthodes de projection est double :

- dans certaines applications, une matrice est attendue SDP mais ne l'est pas. Il est alors nécessaire de l'approximer par une matrice SDP.
- D'autre part, il est parfois nécessaire de compenser les erreurs de mesure ou de calcul pour préserver la positivité d'une matrice.

Des problèmes similaires sont décrits dans Fletcher [1984] et Woodgate [1996]. L'algorithme d'Higham pour obtenir la matrice SDP la plus proche d'une matrice est le suivant.

Soit A une matrice $n \times n$.

1. Calculer la partie symétrique de A , $B = \frac{A+A^T}{2}$.
2. Effectuer la décomposition polaire de B :

$$B = UH, \quad (U^T U = \mathbb{1} \text{ et } \det(U) = 1, \quad H = H^T \text{ et } H > 0).$$

3. $X = \frac{B+H}{2}$

X est la matrice SDP la plus proche de A .

Le développement des preuves de cet algorithme est détaillé dans l'article de Higham.

Remarque : l'étape 2 semble nécessiter le calcul de la racine carrée positive H de la matrice positive $B^T B$. Une nouvelle approche consistant à déterminer d'abord la rotation U a été développée au laboratoire par [Bouby et al. \[2005\]](#). La matrice H est alors déduite par le produit matriciel $H = U^T B$. Cette méthode sera appliquée au chapitre 7.

2.6 Algorithme du gradient conjugué projeté

Nous corrigeons donc l'algorithme présenté en 2.4.2 en modifiant l'étape 2 de la manière suivante :

1. Initialiser J par J_0
 $G_0 = \nabla f(J_0)$
 $D_0 = -G_0$; $k = 0$
2. à l'itération k

$$\mu_k = \frac{\text{tr}(G_k^T D_k)}{\text{tr}[D_k^T (\sum \int B A D_k B A - B B^T D_k A^T A) dt]}$$
 $J_{k+1} = J_k + \mu_k D_k$
 si $\det(J_{k+1}) \leq 0$, alors $J_{k+1} = \text{Proj}(J_{k+1})$
3. si $\|G_{k+1}\| < \epsilon$ stop, sinon
 $D_{k+1} = -G_{k+1} + \beta_k D_k$
 avec $\beta_k = \frac{\text{tr}[G_{k+1}^T (G_{k+1} - G_k)]}{\text{tr}(G_k^T G_k)}$
 $k = k + 1$ et retour en 2.

Remarques :

- nous controlons la positivité de la matrice J_{k+1} par la condition nécessaire $\det(J_{k+1}) > 0$,
- l'abréviation (Proj) est un sous-programme qui exécute l'algorithme de projection de Higham résumé au paragraphe 2.5.

Dans les différents algorithmes présentés, le critère d'arrêt proposé porte sur la norme du gradient. Cependant, d'autres critères d'arrêt peuvent être choisis :

- lorsque la fonction coût atteint un minimum ou évolue peu : $f(J_{k+1}) - f(J_k) < \epsilon$,
- lorsque la solution stagne : $J_{k+1} - J_k < \epsilon$.

Un critère d'arrêt peut également être un nombre maximum d'itérations. En effet, dans un espace de dimension 10 (celui des matrices 4×4 par exemple) la méthode du gradient conjugué (sans projection) doit converger en 10 itérations. Ces différents critères peuvent être combinés et, selon l'application, nous choisirons l'un ou l'autre critère.

Les algorithmes de gradient conjugué et de gradient conjugué projeté présentés dans ce chapitre demandent à être validés. Pour cela, des mouvements obtenus par simulation vont être utilisés ; c'est l'objet du prochain chapitre.

Chapitre 3

Application à un solide rigide

Sommaire

3.1 Introduction	53
3.2 Caractéristiques d'inertie du solide étudié	55
3.3 Simulation du mouvement	57
3.3.1 Calcul numérique des matrices R , B et A	59
3.3.2 Expression de la matrice T dans la base fixe	61
3.4 Identification des dix paramètres inertiels	62

3.1 Introduction

L'identification des paramètres inertiels d'un solide rigide est un problème récurrent dans la littérature. [Schedlinski et Link \[2001\]](#) présentent une revue des différentes méthodes permettant d'identifier les paramètres inertiels d'un solide. On distingue deux catégories de méthode : les méthodes statiques et les méthodes dynamiques.

Parmi les méthodes statiques, on peut citer :

- **la pesée** : elle permet de déterminer la masse du solide ;
- **la mesure de la force d'interaction** : c'est une généralisation de la méthode précédente, elle permet de déterminer la masse et la position du centre de masse en connaissant les forces exercées ainsi que leurs points d'application ;
- **la suspension** : le solide est suspendu à un fil dans au moins deux configurations différentes, cette méthode permet de déterminer la position du centre de masse ;

- **l'équilibrage** : il consiste à équilibrer un plateau portant à son extrémité le solide à tester et à l'autre un contre-poids. Il permet de déterminer la position du centre de masse du solide à condition de connaître sa masse.

Pour déterminer la matrice d'inertie, il faut faire appel aux méthodes dynamiques.

Parmi celles-ci, on peut citer :

- **la méthode du robot de mesure** : [Niebergall et Hahn, 1997], cette méthode permet d'identifier simultanément les dix paramètres inertiels d'un solide en utilisant un robot spécial ;
- **la méthode de rotation** : le solide testé tourne autour d'un axe spécifié, le moment et l'accélération angulaire sont mesurés, la matrice d'inertie est déterminée ;
- **la méthode d'équilibrage dynamique** : à partir de la mesure de la vitesse de rotation ainsi que des forces exercées et leurs points d'application, cette méthode permet de déterminer la position du centre de masse et la matrice d'inertie.

Les méthodes évoquées ci-dessus s'appuient sur les équations du mouvement pour identifier les paramètres inertiels. D'autres méthodes permettent de déterminer les caractéristiques inertielles d'un solide : Da Lio *et al.* [1999] introduisent une méthode à partir des oscillations, Lee *et al.* [1999] proposent de déterminer les paramètres inertiels en sélectionnant les points d'excitations ainsi que les directions de ces excitations. Ce chapitre expose une méthode inspirée de la méthode du robot de mesure, elle va permettre d'identifier les 10 paramètres inertiels d'un solide rigide.

Les chapitres précédents ont présenté une formulation originale des équations du mouvement sous forme de matrices 4×4 antisymétriques ainsi qu'un algorithme de gradient conjugué projeté permettant d'identifier la matrice contenant les dix paramètres inertiels du solide. Avant d'aborder la mise en oeuvre numérique et l'étude des mouvements de quelques systèmes polyarticulés, nous allons tester notre méthode sur le cas du mouvement d'un seul solide. Les résultats de ce chapitre proviennent de mouvements simulés, les incertitudes de mesure seront prises en considération dans le chapitre 5. La simulation est basée sur la résolution en dynamique directe des équations différentielles du mouvement.

Le mouvement simulé est celui d'un solide suspendu à un support fixe. La force exté-

rieure exercée sur le solide ainsi que la cinématique de celui-ci doivent être connus. Pour cela, nous avons utilisé le logiciel **Solid Dynamics**. La méthode proposée dans cette section, bien que provenant de l'analyse d'un mouvement simulé, pourra être utilisée afin d'identifier expérimentalement les paramètres inertiels d'un solide réel avec un dispositif expérimental minimum : capteur de force et système d'analyse du mouvement. Dans leur revue bibliographique, [Schedlinski et Link \[2001\]](#) citent une seule étude permettant de déterminer les dix paramètres inertiels d'un solide à partir de l'enregistrement du mouvement de celui-ci. Il s'agit du travail de [Niebergall et Hahn \[1997\]](#) permettant de trouver les caractéristiques inertielles d'un solide placé sur un robot de mesure. Ce robot est spécialement conçu pour le problème d'identification :

1. génération d'accélération appropriées du solide testé ;
2. enregistrement des signaux d'orientations, de vitesses, d'accélération, de forces et de moments ;
3. passage des composantes mesurées dans un référentiel lié au solide à des composantes exprimées dans un référentiel inertiel ;
4. minimisation des bruits ;
5. identification des paramètres inertiels.

Dans une approche similaire à celle de Niebergall et Hahn, nous proposons un protocole permettant d'obtenir un mouvement « excitant » du solide ainsi qu'un dispositif permettant de recueillir les informations nécessaires : cinématique et efforts extérieurs.

3.2 Caractéristiques d'inertie du solide étudié

Considérons le solide S_1 homogène en forme de parallélépipède rectangle de masse $m_1 = 2$ kg et de côté $a = 0,4$ m ; $b = 0,3$ m et $c = 0,5$ m (figure 3.1).

Ses caractéristiques d'inertie sont faciles à déterminer. Dans le repère $\mathcal{R}_1 = \{P_1, x_1, y_1, z_1\}$, les coordonnées du centre d'inertie G_1 sont $\begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,15 \\ 0,25 \end{bmatrix}$ m. Ainsi, $m_1 \overrightarrow{P_1 G_1} = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,3 \\ 0,5 \end{bmatrix}$ m.kg.

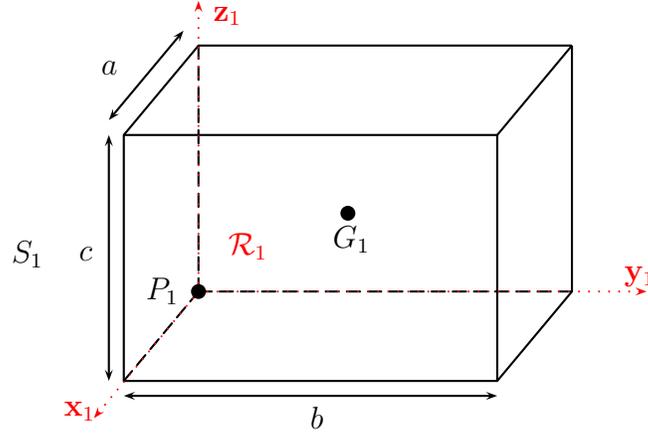


FIG. 3.1 – Le solide S_1 est un parallélépipède rectangle de côtés a , b , c et de centre de masse G_1 .

La matrice d'inertie du solide calculée en G_1 dans le repère $\{P_1, x_1, y_1, z_1\}$ est la suivante :

$$I_{G_1} = \frac{m_1}{12} \begin{bmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0567 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0683 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0417 \end{bmatrix} \text{ m}^2 \cdot \text{kg}.$$

La matrice d'inertie peut être calculée au point P_1 grâce au théorème de Huygens :

$$I_{P_1} = I_{G_1} + m_1 \left(\overrightarrow{P_1 G_1} \overrightarrow{P_1 G_1}^T \mathbb{1}_3 - \overrightarrow{P_1 G_1} \overrightarrow{P_1 G_1}^T \right) = \begin{bmatrix} 0,2267 & -0,0600 & -0,1000 \\ -0,0600 & 0,2733 & -0,0750 \\ -0,1000 & -0,0750 & 0,1667 \end{bmatrix} \text{ m}^2 \cdot \text{kg}.$$

On peut en déduire la matrice d'inertie de Poinsot en P_1 :

$$K_{P_1} = \frac{\text{tr}(I_{P_1})}{2} \mathbb{1}_3 - I_{P_1} = \begin{bmatrix} 0,1067 & 0,0600 & 0,1000 \\ 0,0600 & 0,0600 & 0,0750 \\ 0,1000 & 0,0750 & 0,1667 \end{bmatrix} \text{ m}^2 \cdot \text{kg}.$$

La matrice 4×4 symétrique et défini-positive contenant les dix paramètres inertiels du solide est la suivante :

$$J_{P_1} = \begin{bmatrix} 0,1067 & 0,0600 & 0,1000 & 0,4000 \\ 0,0600 & 0,0600 & 0,0750 & 0,3000 \\ 0,1000 & 0,0750 & 0,1667 & 0,5000 \\ 0,4000 & 0,3000 & 0,5000 & 2,0000 \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

3.3 Simulation du mouvement

La simulation a été réalisée à partir du logiciel **Solid Dynamics**. Le solide S_1 est relié au point O d'un bâti fixe par un filin attaché en P_1 (figure 3.2). Les liaisons en O et P_1 sont des liaisons rotules sans frottement.

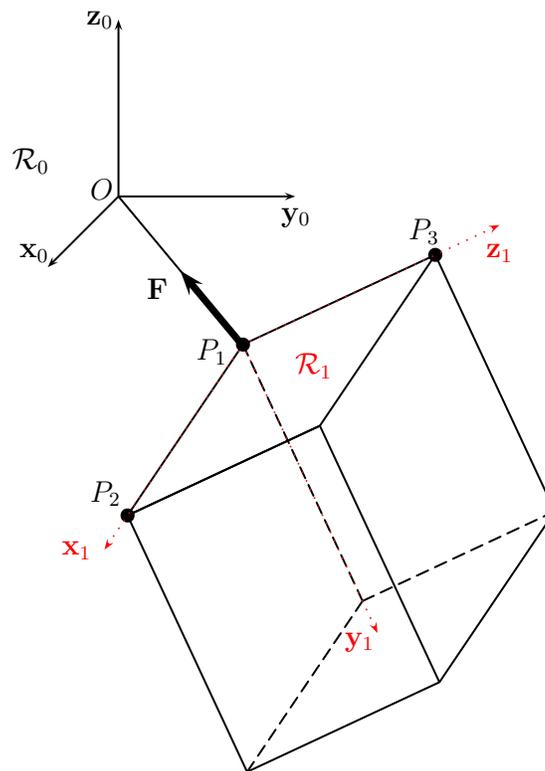


FIG. 3.2 – Le solide est fixé par le point P_1 à un filin, lui même fixé à un support fixe. La tension du filin est enregistrée ainsi que le déplacement des points P_1 , P_2 et P_3 .

La position initiale du solide S_1 est éloignée de sa position d'équilibre afin d'obtenir des accélérations importantes. La durée des simulations est de 2 s. Plusieurs simulations ont été réalisées pour des conditions initiales différentes. Nous présenterons les résultats pour une seule d'entre elle. Lors des simulations, les coordonnées des points P_1 , P_2 et P_3 dans \mathcal{R}_0 (figure 3.2) sont enregistrées ainsi que la tension exercée par le filin. La figure (3.3) illustre l'évolution de la position des points P_1 , P_2 et P_3 dans le repère \mathcal{R}_0 .

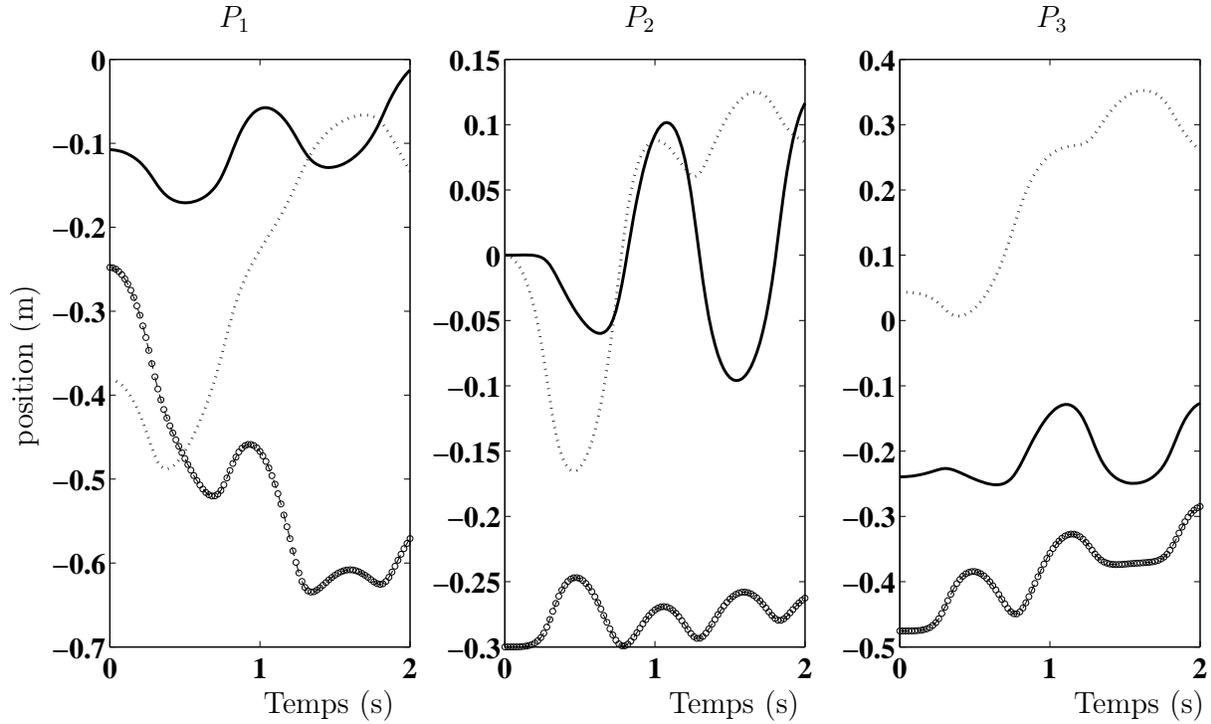


FIG. 3.3 – Coordonnées selon les axes \mathbf{x}_0 (trait plein), \mathbf{y}_0 (pointillé) et \mathbf{z}_0 (cercle) des marqueurs P_1 , P_2 et P_3 .

La section suivante détaille le calcul des différentes matrices intervenant dans la formulation matricielle des équations du mouvement. Rappelons que les équations du mouvement sont exprimées sous la forme suivante :

$$AJ_{P_1}B^T - BJ_{P_1}A^T = \mathcal{T}_{P_1},$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} {}^1_0\ddot{R} & (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} {}^1_0R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathcal{T}_{P_1} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{P_1} & \mathbf{F} \\ -\mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix}$$

A partir des données enregistrées (position des points P_1 , P_2 , P_3 et tension du filin), la matrice rotation, sa dérivée seconde, l'accélération du point P_1 ainsi que la force \mathbf{F} vont être calculées numériquement.

3.3.1 Calcul numérique des matrices R , B et A

L'accélération du point P_1 s'obtient par double dérivation numérique de sa position. La procédure de dérivation est une opération délicate lorsque les données sont issues d'un mouvement humain [Challis, 1995b; Hatze, 1982; Leboeuf, 2004]. Dans cette section, les données simulées ne sont pas entachées d'incertitude de mesure. Le choix de la technique de dérivation n'est pas déterminant. Nous avons choisi d'utiliser une différentiation numérique centrée d'ordre deux. Soit θ une fonction du temps (t) deux fois différentiable et soit Δt un accroissement de t . Les dérivées d'ordre un et deux sont approchées respectivement par :

$$\begin{aligned}\dot{\theta}(t) &= \frac{\theta(t + \Delta t) - \theta(t - \Delta t)}{2\Delta t} \\ \ddot{\theta}(t) &= \frac{\theta(t + 2\Delta t) - 2\theta(t) + \theta(t - 2\Delta t)}{4\Delta t^2}\end{aligned}$$

L'accélération du point P_1 est tracée sur la figure (3.4).

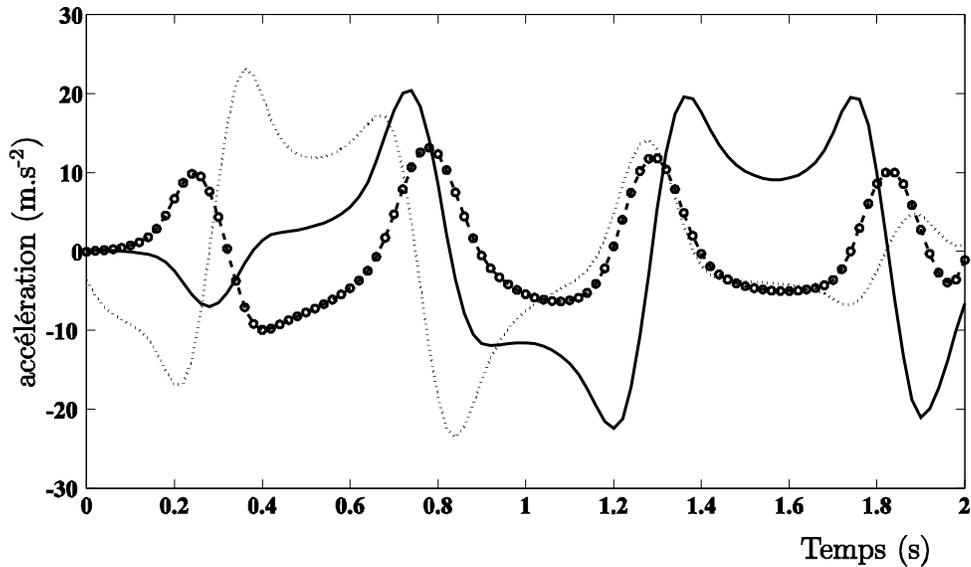


FIG. 3.4 – Evolution de l'accélération du point P_1 selon les axes x_0 (trait plein), y_0 (pointillé) et z_0 (cercle).

La matrice rotation est calculée à partir de trois marqueurs, nous détaillerons dans le chapitre 7 une méthode d'optimisation permettant de trouver la meilleure matrice rotation

à partir d'un nombre de marqueurs supérieur à trois. Ceci nécessitera une méthode plus élaborée pour calculer la matrice rotation [Bouby *et al.*, 2005; Challis, 1995a,b]. A chaque instant, les trois colonnes de la matrice rotation 1_0R permettant de passer du repère \mathcal{R}_1 au repère \mathcal{R}_0 sont créées à partir de la position des points P_1 , P_2 et P_3 de la façon suivante :

$$\mathbf{r}_x = \frac{\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}}{\|\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}\|} \quad \mathbf{r}_z = \frac{\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}}{\|\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1}\|} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{r}_z \wedge \mathbf{r}_x.$$

Ainsi,

$${}^1_0R = [\mathbf{r}_x \quad \mathbf{r}_y \quad \mathbf{r}_z]. \quad (3.2)$$

La figure (3.5) montre l'évolution des neuf coefficients de la matrice rotation 1_0R entre l'instant initial $t_0 = 0$ s et l'instant final $t_f = 2$ s.

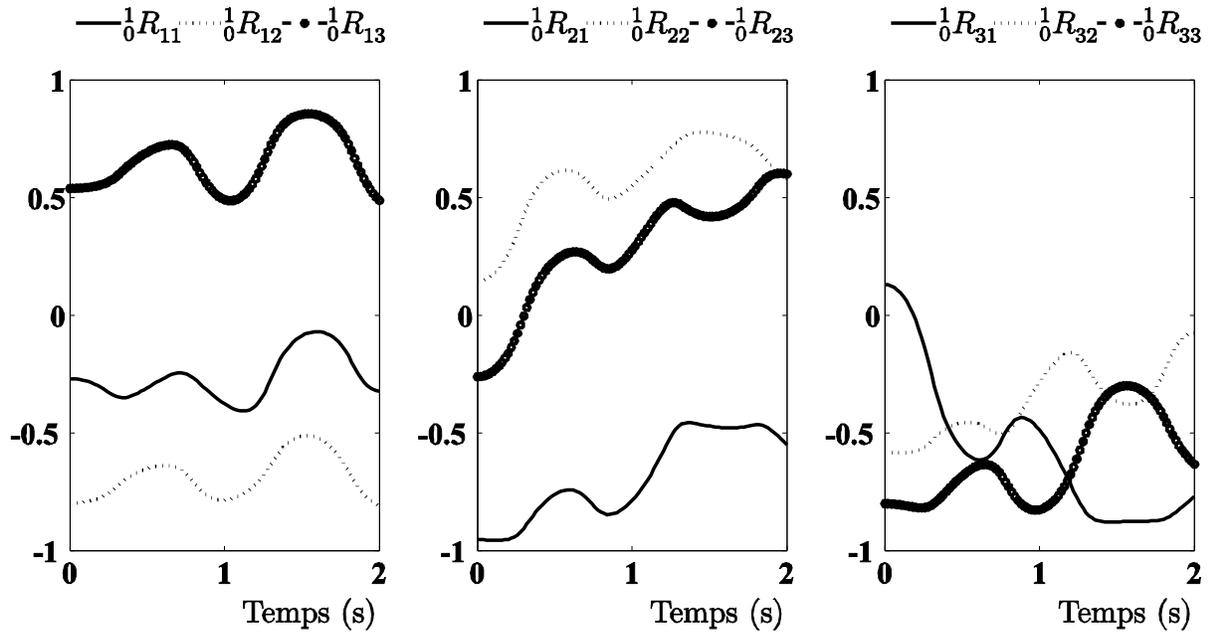


FIG. 3.5 – Evolution des neuf coefficients de la matrice rotation 1_0R .

Les dix paramètres inertiels sont stimulés et pourront être identifiés car les neuf coefficients de la matrice rotation varient au cours du temps et car le point P_1 n'est pas fixe

(figure 3.3). La dérivée seconde de la matrice rotation est obtenue par dérivation numérique des neuf coefficients de 1_0R . Ces coefficients sont représentés sur la figure (3.6).

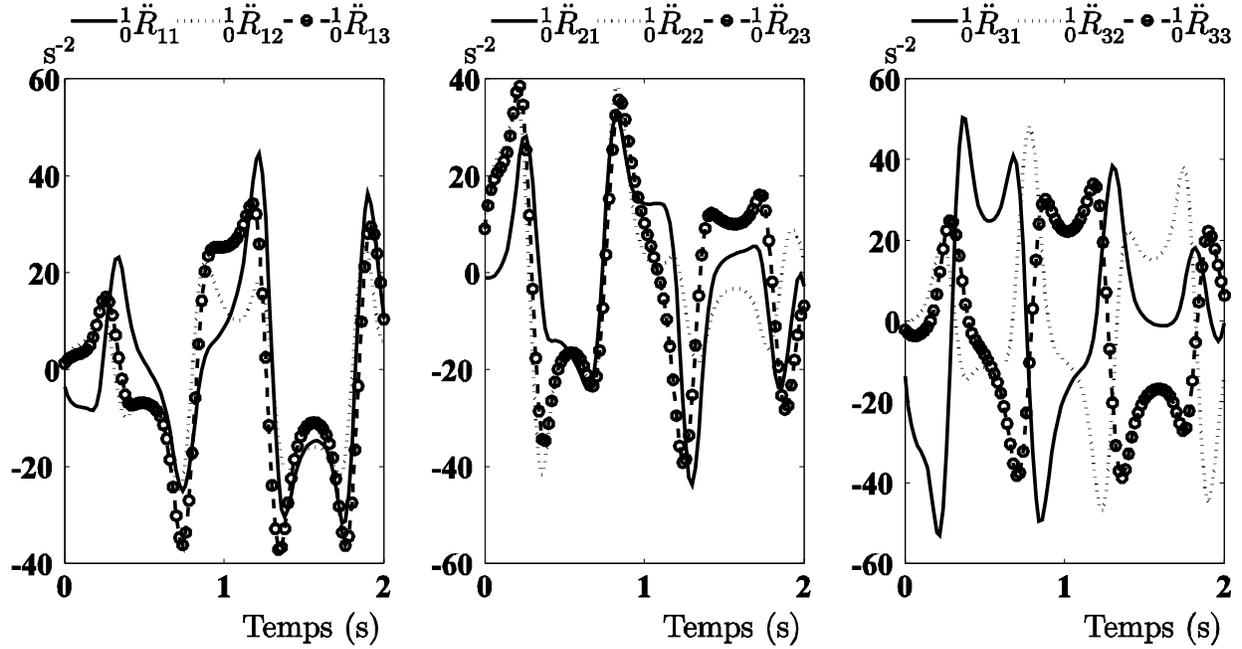


FIG. 3.6 – Evolution des neuf coefficients de la dérivée seconde de la matrice rotation 1_0R .

3.3.2 Expression de la matrice \mathcal{T} dans la base fixe

Outre la pesanteur, la seule force agissant sur le solide S_1 est la force \mathbf{F} exercée par le filin. Dans notre formulation, cette force doit être exprimée dans le repère \mathcal{R}_0 :

$$\mathbf{F} = \frac{f}{\| \overrightarrow{P_1O} \|} \begin{bmatrix} \overrightarrow{P_1O} \cdot \mathbf{x}_0 \\ \overrightarrow{P_1O} \cdot \mathbf{y}_0 \\ \overrightarrow{P_1O} \cdot \mathbf{z}_0 \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

en désignant par f la tension du filin. La tension du filin et les composantes de la force \mathbf{F} sont représentées sur la figure (3.7).

La seule connaissance de la cinématique du point P_1 et de la tension du filin permettent d'exprimer les composantes de la force \mathbf{F} dans le repère fixe \mathcal{R}_0 . Cette précision est im-

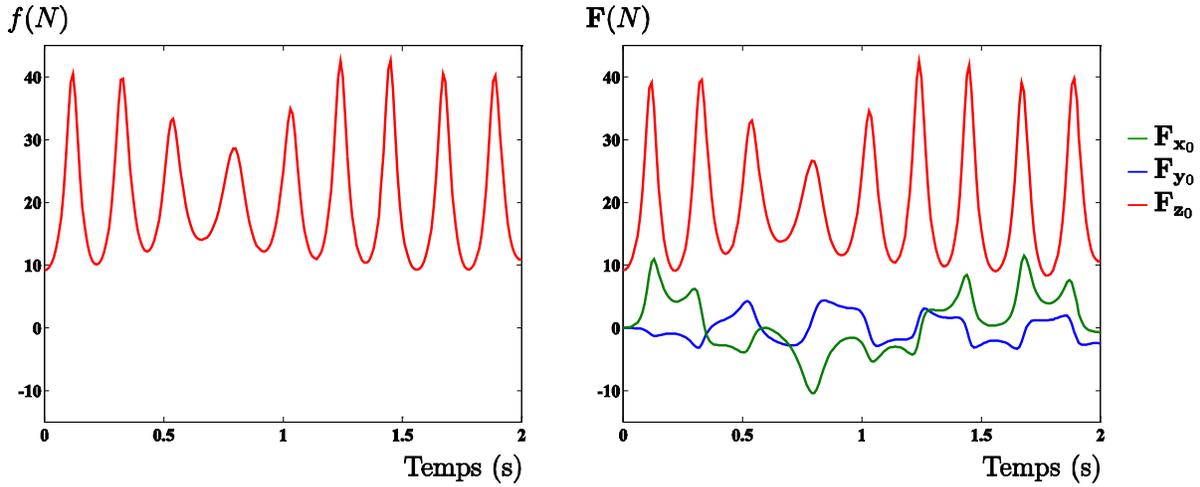


FIG. 3.7 – Tension du filin et force \mathbf{F} exercée par le filin exprimée dans \mathcal{R}_0 .

portante car la procédure présentée dans cette section peut directement être exploitée afin d'identifier expérimentalement les caractéristiques inertielles d'un solide réel. En disposant un capteur de force mono-axial sur le filin et en enregistrant le mouvement du solide avec un système d'analyse d'images, toutes les données nécessaires à l'identification des paramètres inertiels sont recueillies.

Le moment en P_1 de la force \mathbf{F} est nulle, ainsi à chaque instant la matrice antisymétrique \mathcal{T}_{P_1} a la forme suivante :

$$\mathcal{T}_{P_1}(t) = \begin{bmatrix} [0]_{3 \times 3} & \mathbf{F}(t) \\ -\mathbf{F}^T(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Maintenant que les matrices A , B et \mathcal{T}_{P_1} sont numériquement calculées, nous allons pouvoir mettre en oeuvre l'algorithme du gradient conjugué projeté. La section suivante présente les résultats de l'identification à partir des mouvements simulés.

3.4 Identification des dix paramètres inertiels

Les équations du mouvement étant exprimées au point P_1 , la matrice de Poinsot généralisée va être identifiée en P_1 . Le gradient conjugué projeté doit donc converger vers

la matrice (3.1). La procédure itérative du gradient conjugué projeté est initialisée par la matrice 4×4 identité. Le critère d'arrêt porte sur la norme du gradient. Au terme de 11 itérations, la norme du gradient est inférieure à 10^{-4} , la matrice identifiée est la suivante :

$$J^* = \begin{bmatrix} 0,1067 & 0,0601 & 0,1002 & 0,4002 \\ 0,0601 & 0,0600 & 0,0751 & 0,3001 \\ 0,1002 & 0,0751 & 0,1668 & 0,5003 \\ 0,4002 & 0,3001 & 0,5003 & 2,0011 \end{bmatrix}.$$

Elle correspond bien aux caractéristiques inertielles du solide S_1 . Nous pensons que cette méthode d'identification permettra, avec un dispositif expérimental simple, d'obtenir les caractéristiques inertielles d'un solide réel. Seule la tension du filin et la cinématique du solide doivent être connues. Les évolutions au cours des 11 itérations des 10 coefficients de la matrice J sont représentées sur la figure (3.8).

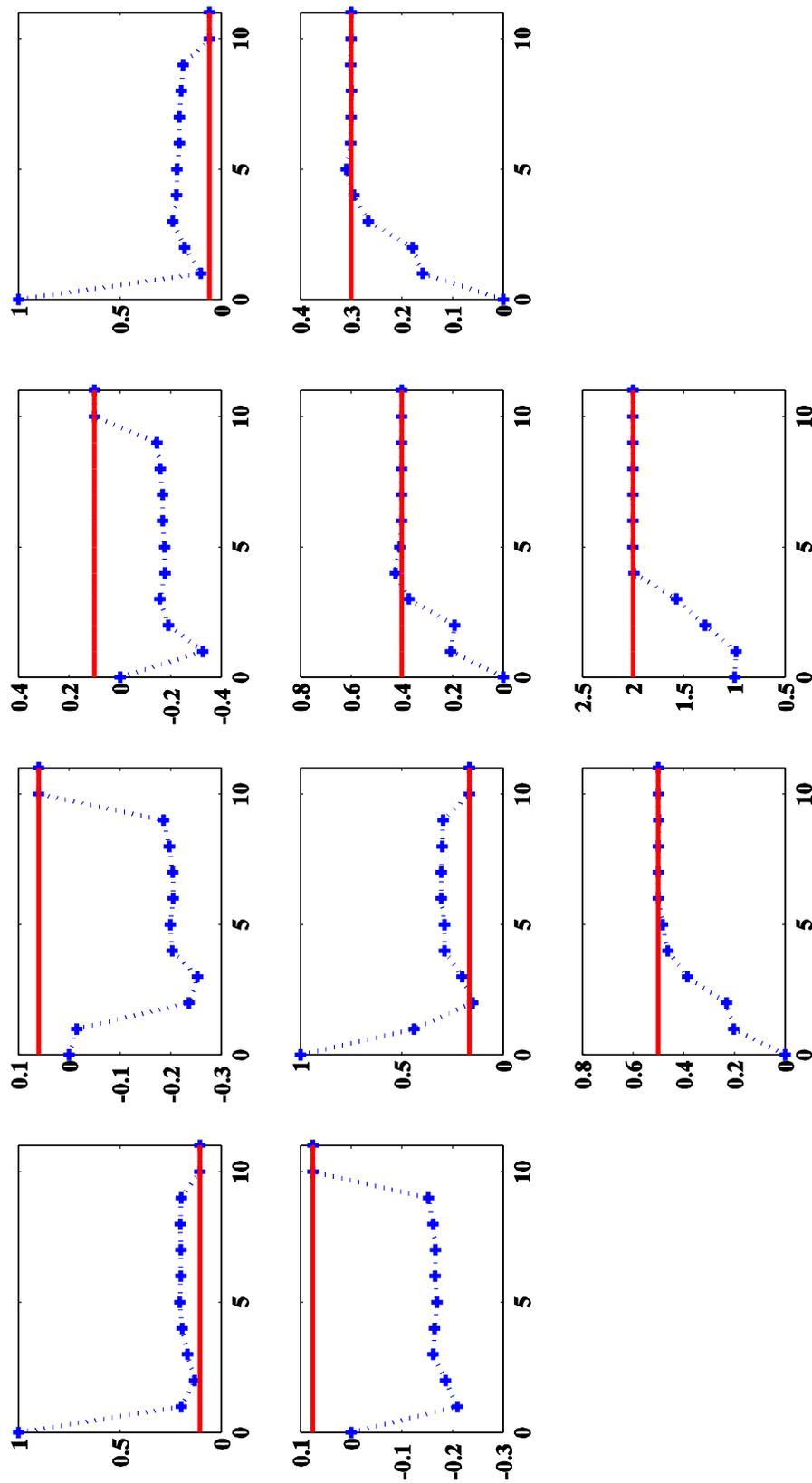


FIG. 3.8 – Evolution des 10 coefficients de la matrice 4×4 symétrique et défini-positive J du solide S_1 en P_1 au cours des 11 itérations. La ligne en trait plein représente la solution exacte.

Les différents coefficients de la matrice J ne convergent pas à la même vitesse. Ainsi, la masse m_1 du solide S_1 est approchée en seulement 4 itérations. Le moment du premier ordre est approché en 6 itérations et il faut 10 itérations pour obtenir la matrice d'inertie de Poincot du solide S_1 en P_1 .

Dans le cas expérimental, les perturbations affectant le modèle d'identification sont de différentes natures : bruit de mesure, frottements diverses... Cependant, cette approche à partir de mouvements simulés a été validée : la convergence est maintenue même avec un bruit ajouté à la cinématique. Nous ne présenterons pas les résultats mais nous y reviendrons dans le cas d'un système multicorps au chapitre 5. Remarquons que l'algorithme du gradient conjugué projeté développé permet de projeter une matrice 4×4 symétrique sur le cône des matrices défini-positives. Une projection sur le cône des matrices $n \times n$ positives s'effectuera de la même manière.

L'objet du prochain chapitre est de généraliser la formulation matricielle des équations du mouvement pour un système multicorps composé de n segments, il sera alors facile d'étendre l'algorithme d'identification.

Chapitre 4

Généralisation des équations du mouvement à un système multicorps

Sommaire

4.1 Corps composé de deux segments	69
4.1.1 Expression de la résultante des forces dans la base fixe	70
4.1.2 Expression du moment résultant des forces dans la base fixe	71
4.1.3 Formulation matricielle des équations du mouvement	72
4.2 Convention d'indexation des corps d'une chaîne ouverte	73
4.3 Matrices intervenant dans les équations du mouvement	76
4.3.1 Généralisation des matrices A et B	76
4.3.2 Génération automatique de J	76
4.3.3 Exemple	77
4.4 Application à un système multicorps composé de trois segments	78
4.4.1 Système linéaire	78
4.4.2 Système arborescent	81

Ce chapitre généralise les équations matricielles du mouvement à un système multicorps composé de n segments. Seuls les systèmes articulés de type linéaire ou arborescent sont traités. Les articulations considérées sont de types charnières ou rotules. Le cas des articulations glissières n'est pas abordé car :

- d'une part ces articulations ne se rencontrent pas dans le corps humain (concernant l'épaule la grande majorité des études considère cette articulation comme une rotule bien que certains auteurs aient montré que la tête humérale se déplaçait de 1 mm en translation [Graichen *et al.*, 2000]) ;

- d’autre part, elles nécessitent une modélisation différente à cause de la translation de l’articulation [Postiau, 2004; Raucent, 1990].

Les procédures classiques permettant d’identifier les paramètres inertiels segmentaires d’un système multicorps consistent à utiliser comme modèle d’identification le modèle dynamique (utilisé pour la commande en robotique) [Antonelli *et al.*, 1999; Arteaga, 2003; Bennis et Khalil, 1991; Chenut *et al.*, 2002; Ferreira, 1984; Gautier, 1991; Gautier et Khalil, 1988; Khosla, 1987; Lydoire et Poignet, 2003; Olsen et Petersen, 2001; Raucent *et al.*, 1992, 1991; Serban *et al.*, 1997]. Ce modèle relie la cinématique du segment au couple fourni par l’actionneur. La formulation des équations du mouvement ne nécessite pas la connaissance des paramètres inertiels (masse, position du centre de masse, matrice d’inertie) de tous les solides mais seulement de certaines combinaisons linéaires de ces paramètres (masse, moments du premier et du second ordre). Gautier et Khalil [1988] ont proposé des règles systématiques pour générer ces combinaisons.

En robotique, ces modèles sont mis en œuvre et permettent d’estimer les paramètres inertiels et les coefficients de frottement des transmissions lorsque le couple moteur est connu. Néanmoins, cette méthode à deux principaux inconvénients [Raucent, 1990] :

- la mesure du couple fourni par l’actionneur est peu fiable,
- on estime simultanément les paramètres inertiels et les coefficients de frottement, or les frottements sont difficiles à modéliser et l’estimation des coefficients de frottement dégrade l’estimation des paramètres inertiels.

De plus, mis à part les travaux de Raucent *et al.* et ceux de Chenut *et al.*, les différentes études cités ci-dessus nécessitent la connaissance des efforts articulaires. Or, dans le cas du corps humain, ces efforts ne peuvent pas être mesurés directement. En effet les efforts articulaires sont déterminés par dynamique inverse et cette méthode demande de connaître précisément les paramètres inertiels que l’on recherche. Une méthode de mesure de la force tendineuse existe, mais cette méthode invasive n’est jamais utilisée lors de l’analyse de mouvements humains [Vigouroux, 2005]. C’est pourquoi, Raucent *et al.* ont présenté une méthode originale d’identification nécessitant seulement comme données d’entrée la cinématique et les efforts externes. Cette méthode « d’identification externe » consiste à écrire

le « modèle de réaction » : les six composantes des interactions entre le système multicorps et l'extérieur sont mises en relation avec la cinématique des segments. Le modèle est indépendant des frottements et la connaissance des efforts articulaires est inutile. Seuls les efforts extérieurs appliqués au système multicorps et la cinématique des segments doivent être connus. La méthode est particulièrement intéressante car seuls les outils classiques d'analyse du mouvement (système d'analyse d'images et plate-forme de forces) sont nécessaires. La première application de **Raucent** a été l'identification des paramètres inertiels d'un robot manipulateur (PUMA 560). Celui-ci était placé sur une plate-forme de forces et des marqueurs étaient disposés sur les trois segments du robot.

Dans un premier temps, nous allons développer la formulation matricielle des équations du mouvement répondant au modèle de réaction dans le cas d'un système multicorps composé de deux segments. Ensuite, une génération automatique des combinaisons linéaires pertinente des paramètres inertiels de n segments sera proposée. Enfin deux exemples seront présentés :

- le premier concerne un système polyarticulé composé d'une chaîne simple de trois segments ;
- le second concerne un système arborescent de trois segments également.

4.1 Corps composé de deux segments

Soient S_1 et S_2 deux corps rigides de masse m_1 et m_2 articulés en P_2 (figure 4.1). Ces corps sont en mouvement dans un système Galiléen de repère $\mathcal{R}_0(O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0)$. Les centres de masse segmentaires sont notés G_i et sont repérés par rapport à P_i par les vecteurs \mathbf{c}_i ($i=1$ à 2). On passe des composantes d'un vecteur : $\mathbf{c}^{(i)} = [x^{(i)} \ y^{(i)} \ z^{(i)}]^T$ exprimées dans le repère \mathcal{R}_i lié au segment S_i à ses composantes $\mathbf{c}^{(0)} = [x^{(0)} \ y^{(0)} \ z^{(0)}]^T$ exprimées dans le repère de base (\mathcal{R}_0) par la matrice rotation i_0R : $\mathbf{c}^{(0)} = {}^i_0R \mathbf{c}^{(i)}$. Le numéro d'un repère dans lequel sont exprimées les composantes d'un vecteur est indiqué par un exposant entre parenthèses (lorsqu'aucun exposant n'est indiqué, le vecteur est exprimé dans \mathcal{R}_0).

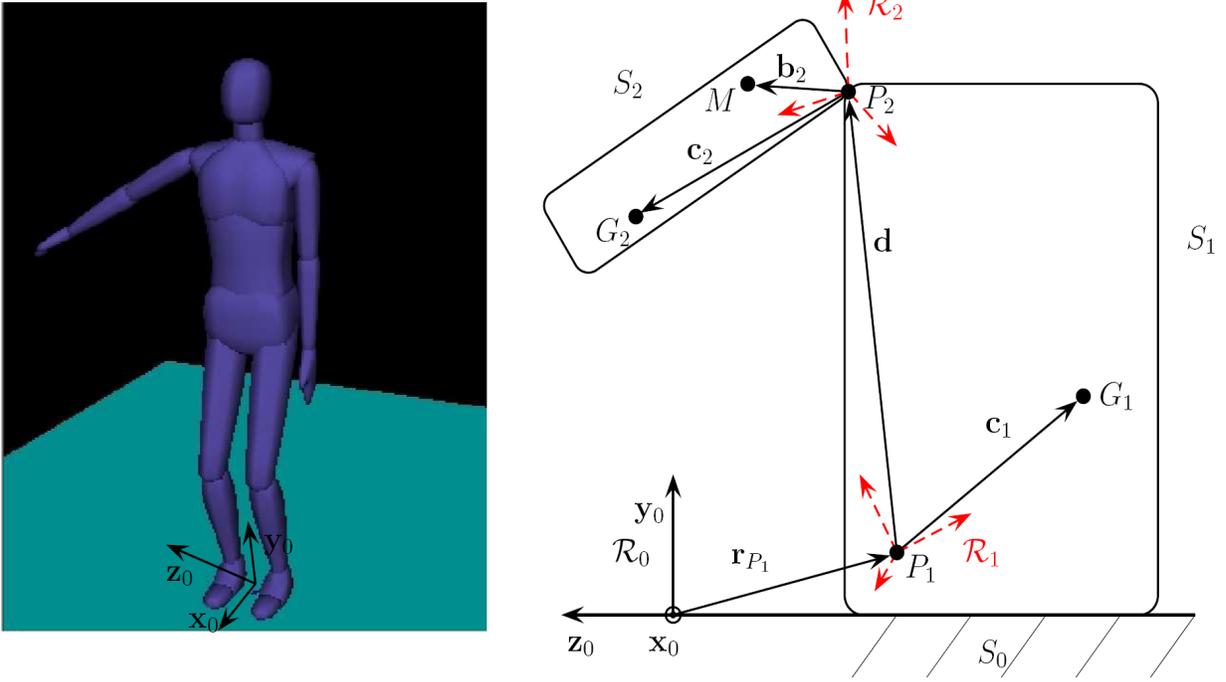


FIG. 4.1 – Schéma illustrant un système composé de 2 segments reliés par une articulation rotule. Le segment S_2 modélise le membre supérieur droit et le segment S_1 modélise le reste du corps considéré comme rigide.

4.1.1 Expression de la résultante des forces dans la base fixe

Soit P_1 un point particulier de S_1 dont la position est décrite par le vecteur \mathbf{r}_{P_1} . La position d'un point M de S_2 est repérée par rapport au point P_2 par le vecteur $\mathbf{b}_2 = \overrightarrow{P_2M}$. La position du point M dans \mathcal{R}_0 est repérée par les composantes du rayon vecteur :

$$\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}_M = \mathbf{r}_{P_1} + {}^1_0R \mathbf{d}^{(1)} + {}^2_0R \mathbf{b}_2^{(2)} \quad (4.1)$$

Son expression met en jeu

- les composantes de $\overrightarrow{OP_1} = \mathbf{r}_{P_1}$ dans \mathcal{R}_0 ;
- les composantes de $\mathbf{d} = \overrightarrow{P_1P_2}$ dans \mathcal{R}_1 ;
- les composantes de \mathbf{b}_2 dans \mathcal{R}_2 ;
- la matrice rotation 1_0R de \mathcal{R}_1 (lié à S_1) par rapport à \mathcal{R}_0 ;
- la matrice rotation 2_0R de \mathcal{R}_2 (lié à S_2) par rapport à \mathcal{R}_0 ;

L'accélération de M est alors :

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} + {}^1_0\ddot{R} \mathbf{d}^{(1)} + {}^2_0\ddot{R} \mathbf{b}_2^{(2)} \quad (4.2)$$

Notons \mathbf{F}_1 la résultante des actions de S_1 sur S_2 , \mathbf{F}_0 la résultante des actions du sol (S_0) sur S_1 , $\boldsymbol{\chi}_i$ la résultante dynamique de S_i ($i=1$ à 2) et \mathbf{g} le vecteur gravité : $\mathbf{g} = [0 \quad -9.81 \quad 0]^T \text{m.s}^{-2}$. En appliquant la seconde loi de Newton successivement à S_1 et S_2 :

$$\mathbf{F}_1 = \boldsymbol{\chi}_2 - m_2 \mathbf{g} = m_2 \left(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g} + {}^1_0\ddot{R} \mathbf{d}^{(1)} + {}^2_0\ddot{R} \mathbf{c}_2^{(2)} \right) \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \boldsymbol{\chi}_1 - m_1 \mathbf{g} + \mathbf{F}_1 \\ &= m_1 \left(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g} + {}^1_0\ddot{R} \mathbf{c}_1^{(1)} \right) + m_2 \left(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g} + {}^1_0\ddot{R} \mathbf{d}^{(1)} + {}^2_0\ddot{R} \mathbf{c}_2^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

On commence à voir apparaître deux combinaisons pertinentes : $m_1 + m_2$ et $m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} + m_2 \mathbf{d}^{(1)}$.

4.1.2 Expression du moment résultant des forces dans la base fixe

Comme au chapitre 1, les moments résultants sont exprimés par des matrices 3×3 antisymétriques. Par exemple, le moment dynamique de S_2 par rapport à P_2 est :

$$\delta_{P_2} = \int_{S_2} \left[\ddot{\mathbf{r}}_M \otimes {}^2_0R \mathbf{b}_2^{(2)} - {}^2_0R \mathbf{b}_2^{(2)} \otimes \ddot{\mathbf{r}}_M \right] dm. \quad (4.5)$$

En introduisant l'accélération de M (4.2) dans l'équation (4.5), le moment devient après simplification :

$$\begin{aligned} \delta_{P_2} &= \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} \otimes m_2 {}^2_0R \mathbf{c}_2^{(2)} + {}^1_0\ddot{R} \mathbf{d}^{(1)} \otimes m_2 {}^2_0R \mathbf{c}_2^{(2)} + \\ &\quad \left[\int_{S_2} {}^2_0\ddot{R} \mathbf{b}_2^{(2)} \otimes {}^2_0R \mathbf{b}_2^{(2)} dm \right] - m_2 {}^2_0R \mathbf{c}_2^{(2)} \otimes \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \\ &\quad m_2 {}^2_0R \mathbf{c}_2^{(2)} \otimes {}^1_0\ddot{R} \mathbf{d}^{(1)} - \left[\int_{S_2} {}^2_0R \mathbf{b}_2^{(2)} \otimes {}^2_0\ddot{R} \mathbf{b}_2^{(2)} dm \right] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Notons \mathcal{M}_{P_i} le moment résultant en P_i des actions de S_{i-1} sur S_i ($i=1$ à 2). Le théorème du moment appliqué au solide S_2 en P_2 conduit après simplification à :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{P_2} &= \left[(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \otimes m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \right] {}^2_0R^T + {}^1_0\ddot{R} \left(\mathbf{d}^{(1)} \otimes m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \right) {}^2_0R^T + \\ &\quad {}^2_0\ddot{R} K_{P_2}^{(2)} {}^2_0R^T - {}^2_0R \left[m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \otimes (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \right] - \\ &\quad {}^2_0R \left(m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \otimes \mathbf{d}^{(1)} \right) {}^1_0\ddot{R}^T - {}^2_0R K_{P_2}^{(2)} {}^2_0\ddot{R}^T \end{aligned} \quad (4.7)$$

Par dynamique inverse :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{P_1} = & \left[(\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \otimes m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \right] {}_0^1 R^T + {}_0^1 \ddot{R} K_{P_1}^{(1)} {}_0^1 R^T - \\ & {}_0^1 R \left[m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} \otimes (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \right] - {}_0^1 R K_{P_1}^{(1)} {}_0^1 \ddot{R}^T + \mathcal{M}_{P_2} + \\ & \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{d}^{(1)} {}_0^1 R^T - {}_0^1 R \mathbf{d}^{(1)} \otimes \mathbf{F}_1 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Si on reporte les expressions (4.3) et (4.7) de \mathbf{F}_1 et \mathcal{M}_{P_2} dans l'expression (4.8) de \mathcal{M}_{P_1} , on voit apparaître deux nouvelles combinaisons pertinentes : $m_2 \mathbf{d}^{(1)} \otimes \mathbf{d}^{(1)} + K_{P_1}^{(1)}$ et $m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \otimes \mathbf{d}^{(1)}$.

4.1.3 Formulation matricielle des équations du mouvement

Les équations du mouvement du système constitué de S_1 et S_2 sont résumées dans (4.4) et (4.8). Elles peuvent être rassemblées sous forme matricielle. Introduisons les matrices 4×7 A et B et la matrice antisymétrique 4×4 \mathcal{T}_{P_1} :

$$A = \begin{bmatrix} {}_0^2 \ddot{R} & {}_0^1 \ddot{R} & (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

$$B = \begin{bmatrix} {}_0^2 R & {}_0^1 R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

$$\mathcal{T}_{P_1} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{P_1} & \mathbf{F}_0 \\ -\mathbf{F}_0^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

Regroupons les paramètres inertiels des corps S_1 et S_2 dans la matrice 7×7 J_{P_1} :

$$J_{P_1} = \begin{bmatrix} K_{P_2}^{(2)} & m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \otimes \mathbf{d}^{(1)} & m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \\ \mathbf{d}^{(1)} \otimes m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} & K_{P_1}^{(1)} + m_2 \mathbf{d}^{(1)} \otimes \mathbf{d}^{(1)} & m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} + m_2 \mathbf{d}^{(1)} \\ m_2 \mathbf{c}_2^{(2)T} & \left(m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} + m_2 \mathbf{d}^{(1)} \right)^T & m_1 + m_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Nous retrouvons dans les blocs constituant la matrice J_{P_1} les quatre combinaisons pertinentes évoquées précédemment. Remarquons que :

$$J_{P_1} = \int_{S_2} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2^{(2)} \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2^{(2)} \\ \mathbf{d}^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} dm + \int_{S_1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_1^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_1^{(1)} \\ 1 \end{bmatrix} dm. \quad (4.13)$$

La matrice J_{P_1} est donc positive.

Nous retrouvons la même écriture matricielle des équations du mouvement que celle introduite au chapitre 1 :

$$AJ_{P_1}B^T - BJ_{P_1}A^T = \mathcal{T}_{P_1}. \quad (4.14)$$

Nous remarquons que la masse de chaque segment n'intervient pas dans les équations du mouvement. Seule la masse totale du système intervient et on ne peut pas dissocier la masse du segment 1 de celle du segment 2. Les positions des centres d'inertie ne peuvent donc pas être identifiées, seul le moment du premier ordre $m_2\mathbf{c}_2^{(2)}$ du deuxième segment sera identifiable. Nous remarquons également que la matrice J_{P_1} contient le vecteur \mathbf{d} qui est la position du centre articulaire reliant les segments S_1 et S_2 .

Ainsi, pour un système composé de deux segments, les équations du mouvement s'écrivent sous la même forme matricielle que pour un seul corps. L'algorithme du gradient conjugué projeté (chapitre 2) peut s'adapter pour identifier une matrice 7×7 défini-positive. L'expression (4.12) de la matrice J_{P_1} semble difficile à généraliser. Par contre l'expression (4.13) laisse entrevoir une possibilité de génération automatique dans le cas de plusieurs segments. C'est ce que nous allons développer dans les prochains paragraphes.

4.2 Convention d'indexation des corps d'une chaîne ouverte

Commençons par détailler les concepts et les conventions nécessaires à notre génération automatique. Ces concepts sont issus de la thèse de doctorat de [Postiau \[2004\]](#).

- les corps sont numérotés par ordre croissant en partant de la base (S_0) vers les organes terminaux ;
- la base est un corps fixe attachée au repère \mathcal{R}_0 , dans notre cas elle est constituée par la plate-forme de forces ;
- une chaîne cinématique est un ensemble de corps consécutifs rencontrés lorsqu'on parcourt la structure de la base vers une extrémité, par exemple le système multicorps de

la figure (4.2) comporte trois chaînes cinématiques : $\{S_i, S_j, S_k, S_l\}$, $\{S_i, S_j, S_m, S_n, S_p\}$ et $\{S_i, S_j, S_m, S_n, S_o\}$;

- un corps S_i est un *ancêtre* du corps S_j s'il appartient à la chaîne cinématique qui commence par la base et se termine juste avant le corps S_j , la base est l'ancêtre de tous les corps ;
- un corps S_j est un *descendant* du corps S_i si celui-ci est un ancêtre du corps S_j ;
- le corps S_i est le *parent* du corps S_j s'il est l'ancêtre direct du corps S_j , c'est-à-dire si le corps S_j est le descendant attaché au corps S_i , un corps n'a qu'un seul parent dans une structure arborescente ;
- le corps S_j est un *enfant* du corps S_i si celui-ci est le parent du corps S_j , un corps peut avoir plusieurs enfants ;
- un corps terminal est un corps sans enfant.

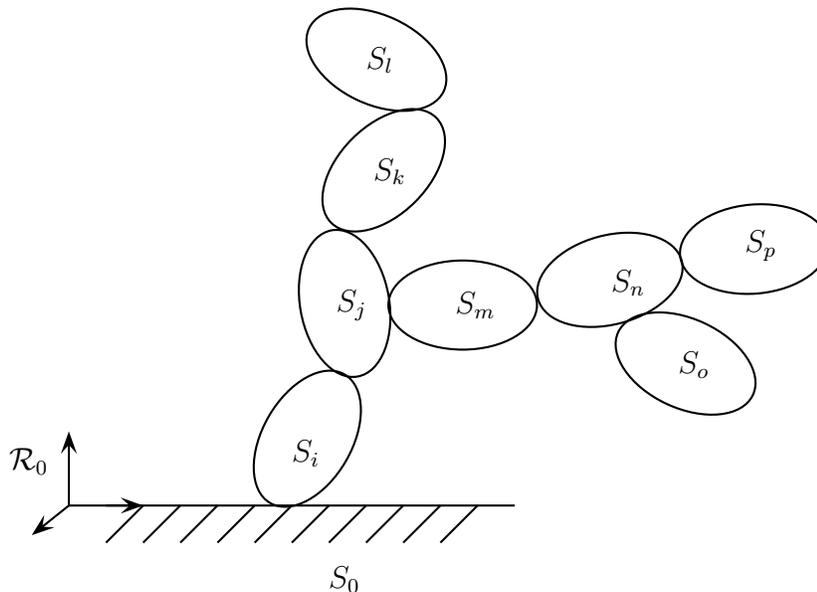


FIG. 4.2 – Chaîne arborescente de corps.

La figure (4.2) permet d'illustrer ces concepts :

- le corps S_j est le parent des corps S_k et S_m ;
- le corps S_j est l'ancêtre des corps $S_k, S_l, S_m, S_n, S_o, S_p$;

- le corps S_n est le parent des corps S_o et S_p ;
- le corps S_k est un descendant des corps S_i et S_j , c'est l'enfant du corps S_j .

Pour caractériser les vecteurs positions, nous utilisons deux indices (figure 4.3) :

- \mathbf{l}_{ii} désigne le vecteur position d'un point M appartenant au solide S_i exprimé dans la base liée au solide S_i : $\mathbf{l}_{ii} = \mathbf{d}_i = \overrightarrow{P_i M}$,
- \mathbf{l}_{il} désigne la contribution du corps S_i au chemin géométrique liant la base au segment S_l . Si S_i est le parent de S_k et S_k celui de S_l , alors $\mathbf{l}_{il} = \mathbf{l}_{ik}$. De plus, pour $n \neq i$, $\mathbf{l}_{ni} = 0$ si $S_n > S_i$ ou si S_n n'est pas un ancêtre de S_i .

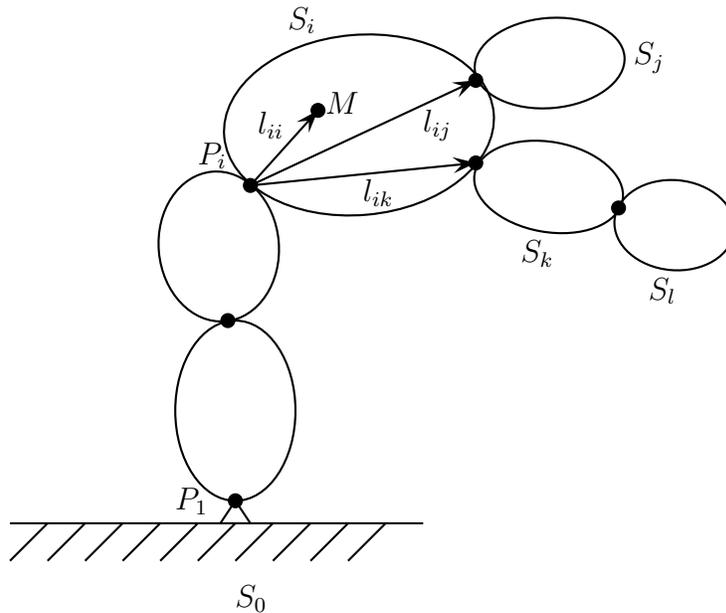


FIG. 4.3 – Le corps S_i est caractérisé par différents vecteurs : \mathbf{l}_{ii} est la position du centre de masse et \mathbf{l}_{il} (\mathbf{l}_{ik}) est la contribution du corps S_i au chemin géométrique liant la base au segment S_l (S_k).

4.3 Matrices intervenant dans les équations du mouvement

4.3.1 Généralisation des matrices A et B

Soit un corps composé de n segments semblable à celui présenté sur la figure (4.3). Le point P_1 est l'articulation entre la base et le corps S_1 . La matrice (4.9) contenant les accélérations se généralise facilement en la matrice $4 \times (3n + 1)$:

$$A = \begin{bmatrix} {}^n\ddot{R} & {}^{n-1}\ddot{R} & \dots & {}^2\ddot{R} & {}^1\ddot{R} & \ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice (4.10) contenant les rotations de chaque segment se généralise facilement en la matrice $4 \times (3n + 1)$:

$$B = \begin{bmatrix} {}^nR & {}^{n-1}R & \dots & {}^2R & {}^1R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Le torseur \mathcal{T}_{P_1} des actions de S_0 sur S_1 en P_1 a toujours la forme d'une matrice 4×4 :

$$\mathcal{T}_{P_1} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{P_1} & \mathbf{F} \\ -\mathbf{F}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3.2 Génération automatique de J

Avec les concepts et notations introduits précédemment, la matrice J_{P_1} (4.12) contenant les combinaisons linéaires pertinentes des paramètres inertiels se généralise en :

$$J = \sum_{i=1}^n \int_{S_i} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{ni} \\ \vdots \\ \mathbf{l}_{1i} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{l}_{ni} \\ \vdots \\ \mathbf{l}_{1i} \\ 1 \end{bmatrix} dm \quad (4.15)$$

Les exposants indiquant le repère dans lequel sont exprimées les composantes d'un vecteur ont été volontairement omis de cette génération de J ainsi que dans la suite du chapitre. Les composantes d'un vecteur sont toujours exprimées dans le repère lié au segment contenant le vecteur.

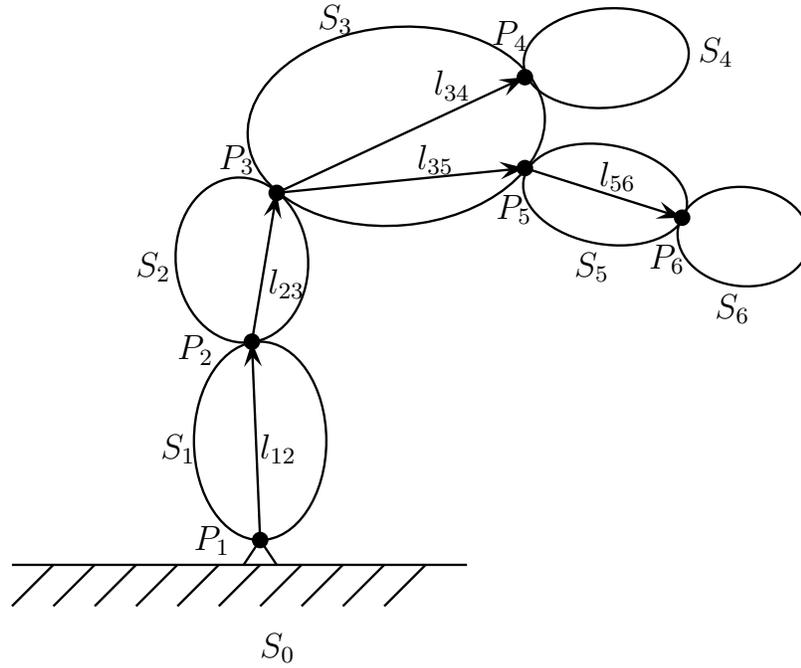


FIG. 4.4 – Système multicorps composé de six segments. Le corps S_i est lié à son parent par l'articulation P_i .

4.3.3 Exemple

Ces principes sont appliqués au système multicorps composé de six segments illustré sur la figure (4.4).

Les matrices A et B sont de dimension 4×19 :

$$A = \begin{bmatrix} {}^6\ddot{R} & {}^5\ddot{R} & {}^4\ddot{R} & {}^3\ddot{R} & {}^2\ddot{R} & {}^1\ddot{R} & (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} {}^6R & {}^5R & {}^4R & {}^3R & {}^2R & {}^1R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice J_{P_1} s'obtient en appliquant la généralisation (4.15); elle est de dimension

19×19 et est la somme des six matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 J = & \int_{S_6} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_6 \\ \mathbf{l}_{56} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_{35} \\ \mathbf{l}_{23} \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{d}_6 \\ \mathbf{l}_{56} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_{35} \\ \mathbf{l}_{23} \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} dm + \int_{S_5} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_5 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_{35} \\ \mathbf{l}_{23} \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_5 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_{35} \\ \mathbf{l}_{23} \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} dm + \int_{S_4} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{l}_{34} \\ \mathbf{l}_{23} \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{l}_{34} \\ \mathbf{l}_{23} \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} dm + \\
 & \int_{S_3} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{l}_{23} \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{l}_{23} \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} dm + \int_{S_2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} dm + \int_{S_1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_1 \\ 1 \end{bmatrix} dm.
 \end{aligned}$$

Quelques précisions sur le calcul de cette matrice J_{P_1} :

- $\mathbf{l}_{46} = 0$ car le corps S_4 n'est pas un ancêtre du corps S_6 ;
- de même, $\mathbf{l}_{45} = 0$;
- $\mathbf{l}_{36} = \mathbf{l}_{35}$.

4.4 Application à un système multicorps composé de trois segments

Deux exemples sont présentés dans cette section. Le premier correspond à une chaîne cinématique simple composée de trois segments. Le second est une chaîne arborescente composé de trois segments.

4.4.1 Système linéaire

Considérons le système linéaire composé de trois corps illustré sur la figure (4.5).

Le solide S_3 correspond à l'ensemble {main droite + avant bras droit}, le solide S_2 correspond au bras droit et le solide S_1 correspond au reste du corps. Dans cet exemple, le solide S_1 représente un ensemble de segments (tronc, membres inférieurs, membre supérieur gauche et tête). Il est donc difficile de mobiliser le solide S_1 comme un seul segment rigide.

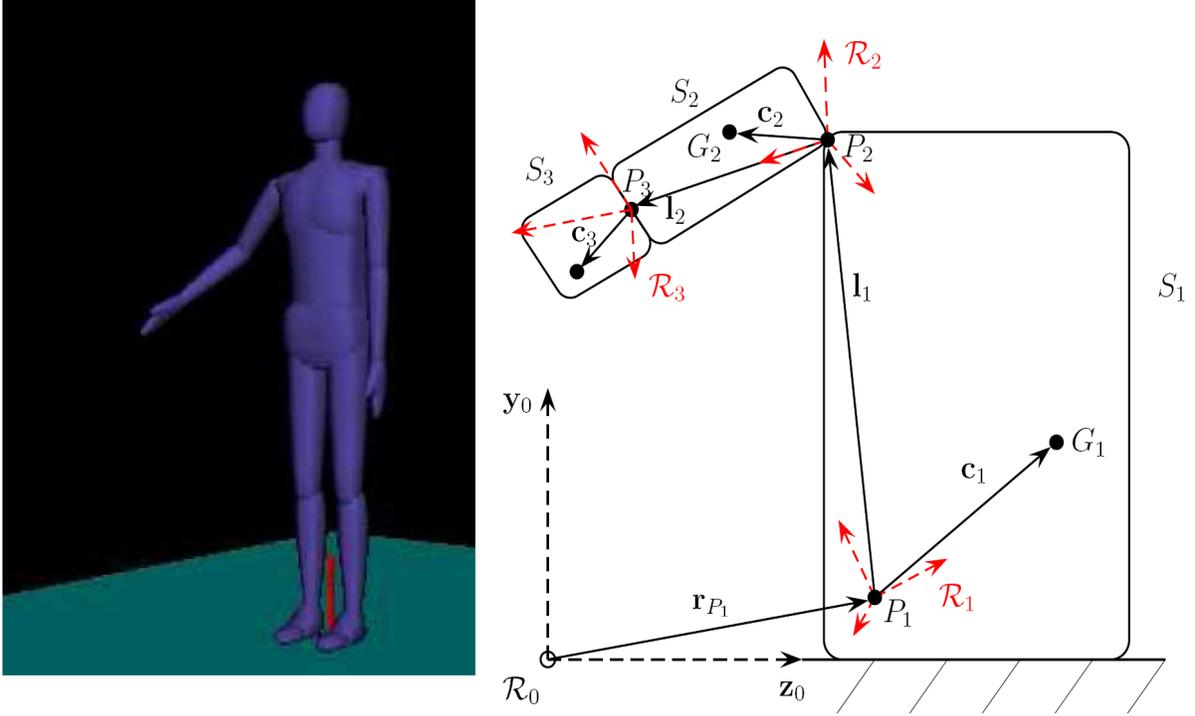


FIG. 4.5 – Système multicorps composé de trois segments : S_3 représente l'ensemble { main droite + avant bras droit }, S_2 représente le bras droit et S_1 représente le reste du corps considéré comme rigide.

Ce qui signifie que les paramètres inertiels de ce segment ne pourront pas être identifiés car ils ne seront pas stimulés. Néanmoins, l'absence de mouvement du solide S_1 n'empêche pas l'identification des paramètres inertiels de S_2 , comme nous allons le voir.

Les matrices A et B s'écrivent :

$$A = \begin{bmatrix} {}^3\ddot{R} & {}^2\ddot{R} & {}^1\ddot{R} & (\ddot{\mathbf{r}}_{P_1} - \mathbf{g}) \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

$$B = \begin{bmatrix} R_3 & R_2 & R_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

La matrice \mathcal{T} représente le torseur des efforts extérieurs exprimé au point P_1 . La matrice J est la somme de trois intégrales sur les corps S_1 , S_2 et S_3 :

$$J = \int_{S_3} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_1 \\ 1 \end{bmatrix} dm + \int_{S_2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{l}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{l}_1 \\ 1 \end{bmatrix} dm + \int_{S_1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_1 \\ 1 \end{bmatrix} dm.$$

Après développement des produits tensoriels, elle devient :

$$J = \begin{bmatrix} K_3 & m_3 \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{l}_2 & m_3 \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{l}_1 & m_3 \mathbf{c}_3 \\ m_3 \mathbf{l}_2 \otimes \mathbf{c}_3 & m_3 \mathbf{l}_2 \otimes \mathbf{l}_2 & m_3 \mathbf{l}_2 \otimes \mathbf{l}_1 & m_3 \mathbf{l}_2 \\ m_3 \mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{c}_3 & m_3 \mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{l}_2 & m_3 \mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{l}_1 & m_3 \mathbf{l}_1 \\ m_3 \mathbf{c}_3^T & m_3 \mathbf{l}_2^T & m_3 \mathbf{l}_1^T & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \mathbf{0} \\ [0] & K_2 & m_2 \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{l}_1 & m_2 \mathbf{c}_2 \\ [0] & m_2 \mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{c}_2 & m_2 \mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{l}_1 & m_2 \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{0}^T & m_2 \mathbf{c}_2^T & m_2 \mathbf{l}_1^T & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \mathbf{0} \\ [0] & [0] & [0] & \mathbf{0} \\ [0] & [0] & K_1 & m_1 \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & m_1 \mathbf{c}_1^T & m_1 \end{bmatrix}.$$

D'où finalement :

$$J = \begin{bmatrix} K_3 & m_3 \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{l}_2 & m_3 \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{l}_1 & m_3 \mathbf{c}_3 \\ m_3 \mathbf{l}_2 \otimes \mathbf{c}_3 & K_2 + m_3 \mathbf{l}_2 \otimes \mathbf{l}_2 & (m_3 \mathbf{l}_2 + m_2 \mathbf{c}_2) \otimes \mathbf{l}_1 & m_2 \mathbf{c}_2 + m_3 \mathbf{l}_2 \\ m_3 \mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{c}_3 & \mathbf{l}_1 \otimes (m_3 \mathbf{l}_2 + m_2 \mathbf{c}_2) & K_1 + (m_3 + m_2) \mathbf{l}_1 \otimes \mathbf{l}_1 & (m_3 + m_2) \mathbf{l}_1 + m_1 \mathbf{c}_1 \\ m_3 \mathbf{c}_3^T & m_3 \mathbf{l}_2^T + m_2 \mathbf{c}_2^T & (m_3 + m_2) \mathbf{l}_1^T + m_1 \mathbf{c}_1^T & m_3 + m_2 + m_1 \end{bmatrix}.$$

Remarques

Le système modélisé est composé de trois segments soit 30 paramètres inertiels. Nous avons déjà précisé que les masses de chaque segment n'interviennent pas dans notre formulation, seule la masse totale est identifiable, soit 28 paramètres. A ces paramètres, il faut ajouter les composantes des vecteurs \mathbf{l}_1 et \mathbf{l}_2 , soit un total de 34 paramètres. Or la matrice symétrique 10×10 J est composée de 55 coefficients ; cette différence s'explique par :

- le calcul du produit tensoriel $m_3 \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{l}_2$ qui conduit à une matrice 3×3 pour identifier le vecteur \mathbf{l}_2 , soit un supplément de 6 coefficients ;
- de même pour $m_3 \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{l}_1$, supplément de 6 coefficients ;
- la combinaison $(m_3 \mathbf{l}_2 + m_2 \mathbf{c}_2) \otimes \mathbf{l}_1$ qui reprend des paramètres qui sont déjà présents dans J , soit un supplément de 9 coefficients.

On retrouve donc bien les 34 paramètres à identifier.

La matrice d'inertie et le moment d'ordre 1 ($m_3 \mathbf{c}_3$) du corps S_3 (ensemble {main + avant bras}) s'obtiennent directement. La matrice d'inertie du corps S_2 ne peut pas être identifiée. En effet, la matrice K_2 apparaît bien dans la matrice J mais elle est combinée au tenseur $m_3 \mathbf{l}_2 \otimes \mathbf{l}_2$. Le vecteur \mathbf{l}_2 peut être identifié mais pas la masse du segment S_3 , on ne peut donc pas retrouver la matrice K_2 (de même pour le moment d'ordre 1 de S_2).

Afin d'identifier l'inertie propre du bras droit, il faudra dans un premier temps déterminer l'inertie de l'ensemble {main + avant bras + bras} en modélisant le corps humain par deux segments (figure 4.1) puis soustraire l'inertie de l'ensemble {main + avant bras} identifiée à partir de la modélisation illustré sur la figure (4.5).

4.4.2 Système arborescent

Considérons le système arborescent de 3 segments présenté sur la figure (4.6). Dans ce cas, le solide S_3 correspond à l'ensemble {main + avant bras + bras} gauches, le solide S_2 à l'ensemble {main + avant bras + bras} droits et le solide S_1 au reste du corps.

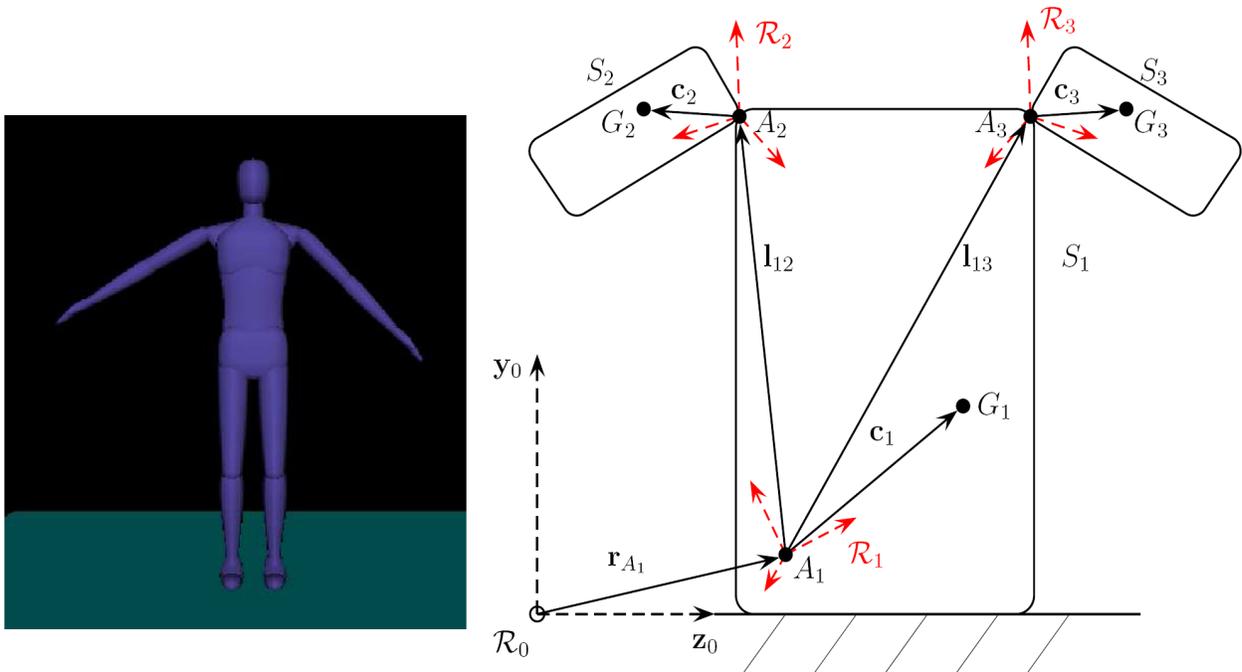


FIG. 4.6 – Système multicorps composé de trois segments : S_3 correspond à l'ensemble {main + avant bras + bras} gauches, S_2 à l'ensemble {main + avant bras + bras} droits et S_1 au reste du corps considéré comme rigide.

Les matrices A et B sont identiques aux matrices présentés précédemment (4.16) et (4.17). La matrice J est différente car le vecteur \mathbf{l}_2 n'existe pas et le vecteur \mathbf{l}_1 se duplique

en \mathbf{l}_{12} et \mathbf{l}_{13} , elle est la somme des trois intégrales suivantes :

$$J = \int_{S_3} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_{13} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{l}_{13} \\ 1 \end{bmatrix} dm + \int_{S_2} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{l}_{12} \\ 1 \end{bmatrix} dm + \int_{S_1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_1 \\ 1 \end{bmatrix} dm.$$

Après développement des produits tensoriels, elle devient :

$$J = \begin{bmatrix} K_3 & [0] & m_3 \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{l}_{13} & m_3 \mathbf{c}_3 \\ [0] & [0] & [0] & [0] \\ m_3 \mathbf{l}_{13} \otimes \mathbf{c}_3 & [0] & m_3 \mathbf{l}_{13} \otimes \mathbf{l}_{13} & m_3 \mathbf{l}_{13} \\ m_3 \mathbf{c}_3^T & [0] & m_3 \mathbf{l}_{13}^T & m_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \mathbf{0} \\ [0] & K_2 & m_2 \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{l}_{12} & m_2 \mathbf{c}_2 \\ [0] & m_2 \mathbf{l}_{12} \otimes \mathbf{c}_2 & m_2 \mathbf{l}_{12} \otimes \mathbf{l}_{12} & m_2 \mathbf{l}_{12} \\ \mathbf{0}^T & m_2 \mathbf{c}_2^T & m_2 \mathbf{l}_{12}^T & m_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & \mathbf{0} \\ [0] & [0] & [0] & \mathbf{0} \\ [0] & [0] & K_1 & m_1 \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & m_1 \mathbf{c}_1^T & m_1 \end{bmatrix}.$$

D'où finalement :

$$J = \begin{bmatrix} K_3 & [0] & m_3 \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{l}_{13} & m_3 \mathbf{c}_3 \\ [0] & K_2 & m_2 \mathbf{c}_2 \otimes \mathbf{l}_{12} & m_2 \mathbf{c}_2 \\ m_3 \mathbf{l}_{13} \otimes \mathbf{c}_3 & m_2 \mathbf{l}_{12} \otimes \mathbf{c}_2 & K_1 + m_3 \mathbf{l}_{13} \otimes \mathbf{l}_{13} + m_2 \mathbf{l}_{12} \otimes \mathbf{l}_{12} & m_1 \mathbf{c}_1 + m_3 \mathbf{l}_{13} + m_2 \mathbf{l}_{12} \\ m_3 \mathbf{c}_3^T & m_2 \mathbf{c}_2^T & m_1 \mathbf{c}_1^T + m_3 \mathbf{l}_{13}^T + m_2 \mathbf{l}_{12}^T & m_1 + m_2 + m_3 \end{bmatrix}.$$

Remarques

Cette modélisation permet d'identifier simultanément les matrices d'inertie et les moments du premier ordre des membres supérieurs droit et gauche. De plus, les centres articulaires reliant les bras droit et gauche au tronc peuvent être localisés car \mathbf{l}_{12} et \mathbf{l}_{13} sont identifiables. En effet, la position du centre articulaire de S_3 (il en est de même pour S_2) apparaît dans la matrice J multipliée par le tenseur d'ordre 1. Connaissant la matrice non symétrique :

$$K_3^+ = m_3 \mathbf{c}_3 \otimes \mathbf{l}_{13}$$

ainsi que $m_3 \mathbf{c}_3$, on peut déterminer les composantes de \mathbf{l}_{13} par la formule :

$$\mathbf{l}_{13} = \frac{K_3^{+T} m_3 \mathbf{c}_3}{\langle m_3 \mathbf{c}_3, m_3 \mathbf{c}_3 \rangle} \quad (4.18)$$

Dans notre modélisation, le corps S_1 est rigide et les vecteurs \mathbf{l}_{12} et \mathbf{l}_{13} sont constants dans \mathcal{R}_1 . Cependant, la réalité est toute autre. Le complexe de l'épaule a fait l'objet de nombreux travaux [Graichen *et al.*, 2000; Johnson *et al.*, 1993; Karduna *et al.*, 2001; Meskers *et al.*, 1998, 2007; Stokdijk *et al.*, 2000]. Le centre articulaire gléno-humérale, reliant le bras à l'omoplate n'est pas fixe par rapport au tronc car l'omoplate bouge lors de mouvements du bras. La localisation précise de la position du centre articulaire glénohumérale sera l'objet du chapitre 6.

La formulation matricielle des équations du mouvement a été généralisée pour un système multicorps de structure linéaire ou arborescente composé de n segments. Des règles ont été évoquées afin d'obtenir facilement les matrices intervenant dans les équations du mouvement. A partir des différents exemples étudiés, il apparaît que l'identification des paramètres inertiels des segments est possible mais ne s'obtient pas directement (exemple de la matrice d'inertie du bras). De plus, la position des centres articulaires peut également être identifiée. Les différents exemples traités se sont intéressés aux membres supérieurs. Les paramètres inertiels des membres inférieurs peuvent être identifiés de la même façon. Les applications abordées en seconde partie se limiteront à l'identification des paramètres inertiels des membres supérieurs.

Conclusion de la première partie

Cette première partie a permis d'introduire une formulation matricielle des équations du mouvement répondant au « modèle de réaction » (identification externe) pour un système multicorps.

Tout d'abord une nouvelle formulation matricielle des équations du mouvement pour un corps rigide a été présentée lors du chapitre 1. Dans cette formulation, les équations du mouvement ont été écrites sous forme d'égalité entre matrices 4×4 antisymétrique. Les paramètres inertiels sont rassemblés dans une matrice 4×4 J symétrique et défini-positif et le torseur des efforts extérieurs est représenté par une matrice 4×4 antisymétrique \mathcal{T} . La matrice J apparaît linéairement dans les équations du mouvement. Notre formulation offre l'avantage d'être plus compacte et facile à manipuler que l'écriture « vectorielle » classique. Le chapitre 2 a détaillé une méthode de minimisation permettant d'identifier la matrice J intervenant à chaque instant dans l'équation du mouvement $AJB^T - BJA^T = \mathcal{T}$. Ce problème d'identification a été résolu par un algorithme de gradient conjugué projeté (sur le cône des matrices symétriques et défini-positives). Le troisième chapitre a permis de valider l'algorithme du gradient conjugué projeté à partir de mouvements simulés d'un solide rigide. Dans ce chapitre, un protocole expérimental a été présenté permettant de connaître les dix paramètres inertiels d'un solide réel à partir de la mesure de son mouvement et des forces extérieures appliquées.

Notre objectif étant l'identification des paramètres inertiels d'un système multicorps, la généralisation de la formulation matricielle des équations du mouvement au cas d'un tel

système a été abordée au cours du chapitre 4. Des règles de combinaisons ont été introduites afin d'obtenir facilement les différentes matrices généralisant la matrice J .

La suite du manuscrit va donc s'intéresser à l'identification des paramètres inertiels d'un système multicorps. La première application concernera l'identification des paramètres inertiels du modèle Human36 du logiciel de simulation HuMAnS. Un protocole expérimental en sera extrait. Il permettra dans une seconde application d'identifier *in vivo* les paramètres inertiels segmentaires du corps humain.

Deuxième partie

Application de la méthode d'identification à un système multicorps

Chapitre 5

Identification des paramètres inertiels du modèle Human36

Sommaire

5.1 Description du logiciel de simulation <i>HuMANs</i>	90
5.1.1 Modèle cinématique de Human36	91
5.1.2 Caractéristiques inertielles du membre supérieur	91
5.2 Simulation des mouvements de Human36	93
5.2.1 Modélisation à 2 segments	94
5.2.2 Expression du torseur \mathcal{T}	95
5.2.3 Calcul numérique des matrices R , B et A	97
5.3 Identification de la matrice J à partir des mouvements simulés	98
5.3.1 Cinématique de référence	98
5.3.2 Cinématique bruitée	100

Ce chapitre applique la méthode d'identification externe à un système multicorps représentant le corps humain : le modèle Human36 du logiciel HuMANs. Le recours à la simulation permet de valider notre méthode dans le cas d'un système multicorps. Après avoir évoqué le fonctionnement du simulateur HuMANs, le calcul algébrique des paramètres inertiels du membre supérieur sera détaillé. Disposant ainsi des valeurs de référence, la procédure d'identification sera employée à partir de mouvements simulés (cinématique de référence) puis à partir des mêmes mouvements mais avec un bruit ajouté à la cinématique (cinématique bruitée). Les résultats de l'identification de la matrice J provenant d'une cinématique bruitée vont nous amener à exprimer le torseur \mathcal{T} au centre articulaire pour

avoir des résultats corrects. Les conclusions de ce chapitre vont permettre de dégager un protocole expérimental permettant d'identifier les caractéristiques inertielles du membre supérieur du corps humain. L'intérêt de ce chapitre est alors double : validation de l'algorithme du gradient conjugué pour une matrice 7×7 symétrique et défini-positive et proposition d'un protocole expérimental. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une communication au 18^{ème} congrès de la Société Française de Mécanique [Monnet *et al.*, 2007b].

5.1 Description du logiciel de simulation *HuMANs*

HuMANs, pour **H**umanoid **M**otion **A**nalysis and **S**imulation, est un simulateur par gestion d'événements. Il a été développé à l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique) à partir des travaux de doctorat de Wieber [2000] qui simulaient la locomotion d'un robot marcheur (le robot BIP). Le logiciel, initialement prévu pour simuler la marche, peut-être exploité dans de multiples applications comme il a été fait dans la thèse de Begon [2006]. Le simulateur permet ainsi une analyse cinématique, cinétique et dynamique de mouvements reconstruits ou simulés.

Le logiciel fonctionne sous trois environnements de programmation : MapleTM, un compilateur C et Scilab. MapleTM est tout d'abord utilisé pour la génération symbolique des matrices et vecteurs des équations de Lagrange. Cette génération symbolique permet des calculs aisés de la dynamique et de la cinématique directe ou inverse. Les algorithmes récurrents décrits par Featherstone et Orin [2000] sont programmés grâce au principe de récursivité proposé par MapleTM (une fonction peut s'appeler elle-même). Le modèle est généré en fonction C puis compilé dans une librairie dynamique appelée finalement dans Scilab.

La dynamique est obtenue par résolution d'équations différentielles interrompues par des événements (impacts, butées articulaires ou commandes). Les événements sont ensuite gérés par modification des coordonnées ou des vitesses généralisées, ainsi que par modification des commandes. L'équation différentielle régissant la dynamique d'un système

multicorps a la forme suivante :

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = T(q)u \quad (5.1)$$

où q , \dot{q} et \ddot{q} sont les vecteurs des positions, vitesses et accélérations généralisées, $M(q)$ est la matrice de masse exprimée dans l'espace articulaire, $N(q, \dot{q})\dot{q}$ est le vecteur prenant en compte les effets non linéaires de Coriolis et centrifuges, $G(q)$ est le vecteur opposé aux effets de gravité, u est le vecteur de commande et $T(q)$ les effets de cette commande sur le système.

5.1.1 Modèle cinématique de Human36

Le modèle biomécanique Human36 décompose le corps humain en 15 segments reliés par 16 articulations lui offrant 36 degrés de liberté (figure 5.1).

Le repère \mathcal{R}_0 est le repère inertiel. Son origine est la projection sur le sol du milieu des deux chevilles quand le modèle est en position neutre. L'axe \mathbf{x}_0 est orienté vers l'avant, l'axe \mathbf{y}_0 vers le haut et l'axe \mathbf{z}_0 vers la droite. En position neutre, le repère lié à chaque segment est orienté dans la même direction que le repère de référence, son origine étant l'articulation du segment.

La rotation de chaque segment par rapport à \mathcal{R}_0 est repérée par trois angles. Le vecteur position généralisé est composé de l'ensemble des angles non nuls et des trois coordonnées du centre d'inertie. Dans un premier temps, seul le bras droit va être mobilisé. Seuls les paramètres (q_{18}, q_{19}, q_{20}) vont être activés (figure 5.1). Des fonctions trigonométriques simples vont servir de cinématique de référence pour simuler ces trois angles.

5.1.2 Caractéristiques inertielles du membre supérieur

Les paramètres inertiels des segments du modèle Human36 sont algébriquement calculés à partir de différentes sources bibliographiques [Clauser *et al.*, 1969; de Leva, 1996; Dempster, 1955; Zatsiorsky et Seluyanov, 1985]. Le tableau (5.1) regroupe les données nécessaires au calcul de la masse, de la position du centre de masse et de la matrice d'inertie

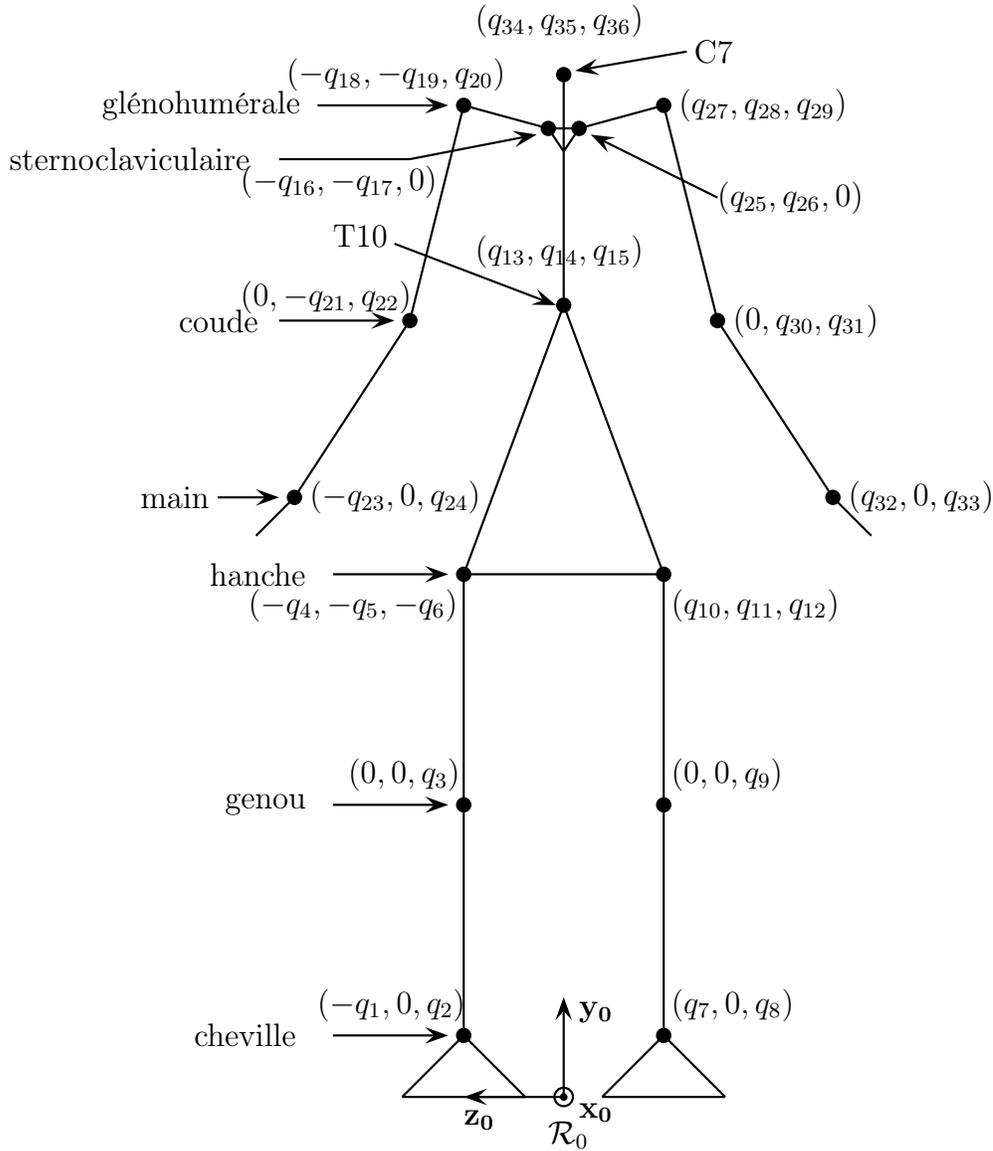


FIG. 5.1 – Paramétrage articulaire de Human36 (rotation autour de \mathbf{x}_0 , rotation autour de \mathbf{y}_0 , rotation autour de \mathbf{z}_0) ; les ronds représentent les 16 articulations.

du membre supérieur. Le modèle Human36 représente un homme de masse 63 kg et de taille 1,74 m ; il est toutefois facilement personnalisable.

Dans les axes principaux, la matrice d'inertie du segment au centre de masse s'obtient

TAB. 5.1 – Caractéristiques des segments du membre supérieur : origine, extrémité, longueur (% de la taille du sujet), masse (% de la masse totale), position longitudinale du centre de masse (CoM [% de la longueur du segment]) et rayons de giration (R_x , R_y et R_z [% de la longueur du segment])

Segment	Origine	Extrémité	longueur	masse	CoM	R_x	R_y	R_z
main	poignet	3 ^{ème} phalange	10,91	0,61	36,91	28,8	18,4	23,5
avant-bras	coude	poignet	15,41	1,62	45,74	27,6	12,1	26,5
bras	épaule	coude	16,18	2,71	57,72	28,5	15,8	26,9

de la façon suivante :

$$I_G = \begin{bmatrix} mR_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & mR_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & mR_z^2 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Les matrices d'inertie ainsi que les positions des centres de masse des trois segments composant le membre supérieur vont pouvoir être calculées. Ces paramètres sont exprimés dans un repère dit « anatomique » (\mathcal{R}_a) lié au segment, dont l'axe \mathbf{y}_a est orienté selon l'axe longitudinal du segment, dirigé vers le centre articulaire distal, l'axe \mathbf{x}_a est l'axe sagittal et \mathbf{z}_a est l'axe transverse. L'origine de chaque repère est le centre articulaire proximal. Les matrices d'inertie, les positions du centre de masse et les masses de chaque segment composant le membre supérieur sont rassemblées dans le tableau (5.2). Les paramètres du membre supérieur droit sont déduits par addition et par transport.

La matrice d'inertie du membre supérieur est calculée au centre articulaire de l'épaule droite dans un repère « anatomique ». Ce repère a la même orientation que les repères segmentaires ; l'origine est le centre articulaire de l'épaule, l'axe \mathbf{y}_a est l'axe longitudinal du segment, l'axe \mathbf{x}_a est l'axe sagittal et l'axe \mathbf{z}_a est l'axe transverse.

5.2 Simulation des mouvements de Human36

La première application consiste à identifier les caractéristiques inertielles du membre supérieur droit. Des mouvements de flexion/extension, abduction/adduction et rotation de ce segment ont été simulés. A partir des données cinématiques et dynamiques de ces mouvements, cette section va s'intéresser au calcul numérique des matrices A , B et \mathcal{T}

TAB. 5.2 – Matrices d’inertie, masses et positions du centre de masse du bras, de l’avant-bras, de la main et du membre supérieur. Les matrices d’inertie sont calculées au centre de masse, sauf pour le membre supérieur (calculé au centre articulaire de l’épaule)

Segment	Inertie (m ² .kg)	masse (kg)	position du centre de masse (m)
main	$\begin{bmatrix} 0,0012 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0005 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0008 \end{bmatrix}$	0,3843	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,0701 \\ 0 \end{bmatrix}$
avant-bras	$\begin{bmatrix} 0,0056 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0011 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0052 \end{bmatrix}$	1,0206	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,1230 \\ 0 \end{bmatrix}$
bras	$\begin{bmatrix} 0,011 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0034 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0098 \end{bmatrix}$	1,7073	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,1626 \\ 0 \end{bmatrix}$
membre supérieur	$\begin{bmatrix} 0,3780 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0049 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3760 \end{bmatrix}$	3,1122	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0,2987 \\ 0 \end{bmatrix}$

nécessaires à l’identification de la matrice d’inertie, du moment d’ordre 1 et de la position du centre articulaire du membre supérieur.

5.2.1 Modélisation à 2 segments

La modélisation à deux segments décrite au chapitre 4 est reprise avec les notations suivantes : le repère lié au corps S_1 est noté \mathcal{R}_1 et le repère lié au corps S_2 est noté \mathcal{R}_2 (figure 5.2).

Le corps S_1 regroupe les membres inférieurs, le tronc, le membre supérieur gauche et la tête. Le corps S_2 correspond à l’ensemble {main + avant-bras + bras} droits.

Les paramètres inertiels de S_1 ne sont pas recherchés. En effet, ce corps modélise un ensemble de segments qui ne peuvent pas être mobilisés simultanément (contrairement au membre supérieur) ; lors des simulations, le corps S_1 sera immobile. L’algorithme du gradient conjugué projeté étant un processus itératif, cette condition ne va pas perturber

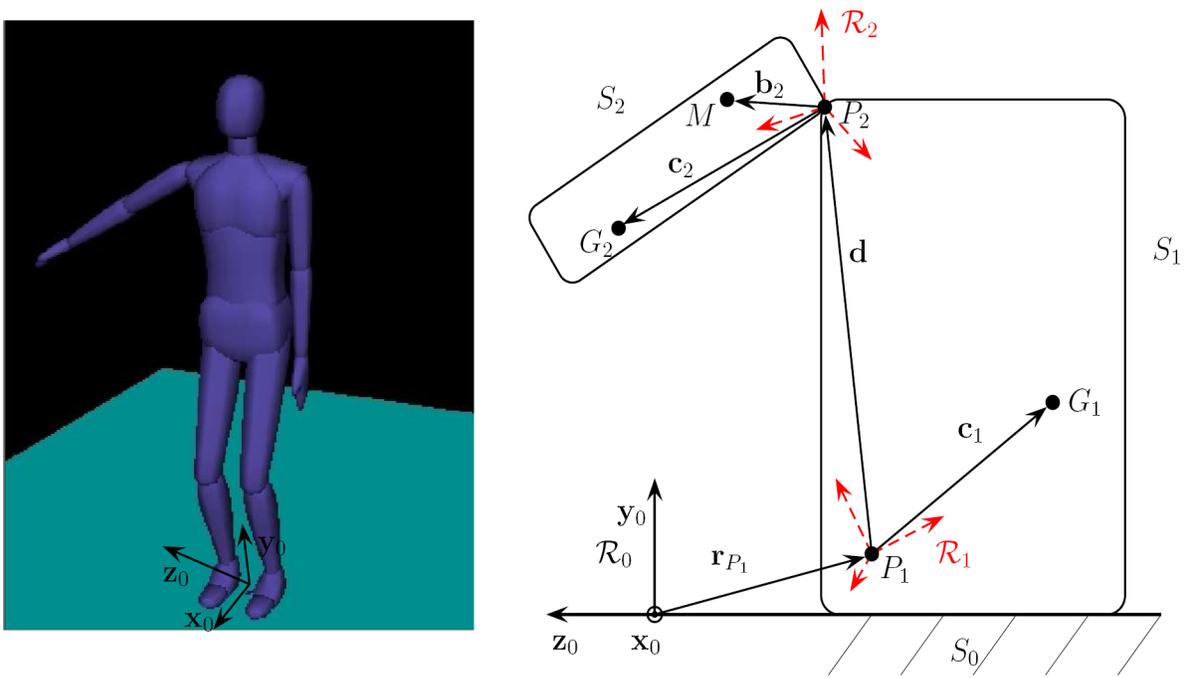


FIG. 5.2 – Le modèle Humans36 est assimilé à un système multicorps composé de deux segments. Le segment S_2 correspond au membre supérieur droit et le segment S_1 correspond au reste du corps.

l'estimation des paramètres du corps S_2 . Seuls les paramètres inertiels du corps S_2 sont recherchés. La matrice J calculée en P_1 est la suivante :

$$J = \begin{bmatrix} K_{P_2}^{(2)} & m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \otimes \mathbf{d}^{(1)} & m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \\ \mathbf{d}^{(1)} \otimes m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} & K_{P_1}^{(1)} + m_2 \mathbf{d}^{(1)} \otimes \mathbf{d}^{(1)} & m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} + m_2 \mathbf{d}^{(1)} \\ m_2 \mathbf{c}_2^{(2)T} & (m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} + m_2 \mathbf{d}^{(1)})^T & m_1 + m_2 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

La position du point P_1 ainsi que les orientations des repères \mathcal{R}_1 (lié au corps S_1) et \mathcal{R}_2 (lié au corps S_2) vont être précisées lors du calcul des matrices A , B et \mathcal{T} .

5.2.2 Expression du torseur \mathcal{T}

Des données exportées du simulateur HuMANs, nous allons garder les positions des marqueurs anatomiques ainsi que les forces de contact entre chaque appuis. Nous avons choisi ces données car elles correspondent aux données accessibles par l'expérience. Ainsi, l'algorithme d'identification sera le même pour les mouvements simulés ou expérimentaux.

La figure (5.3) reprend les centres articulaires de la figure (5.1), les marqueurs anatomiques y sont représentés par une croix.

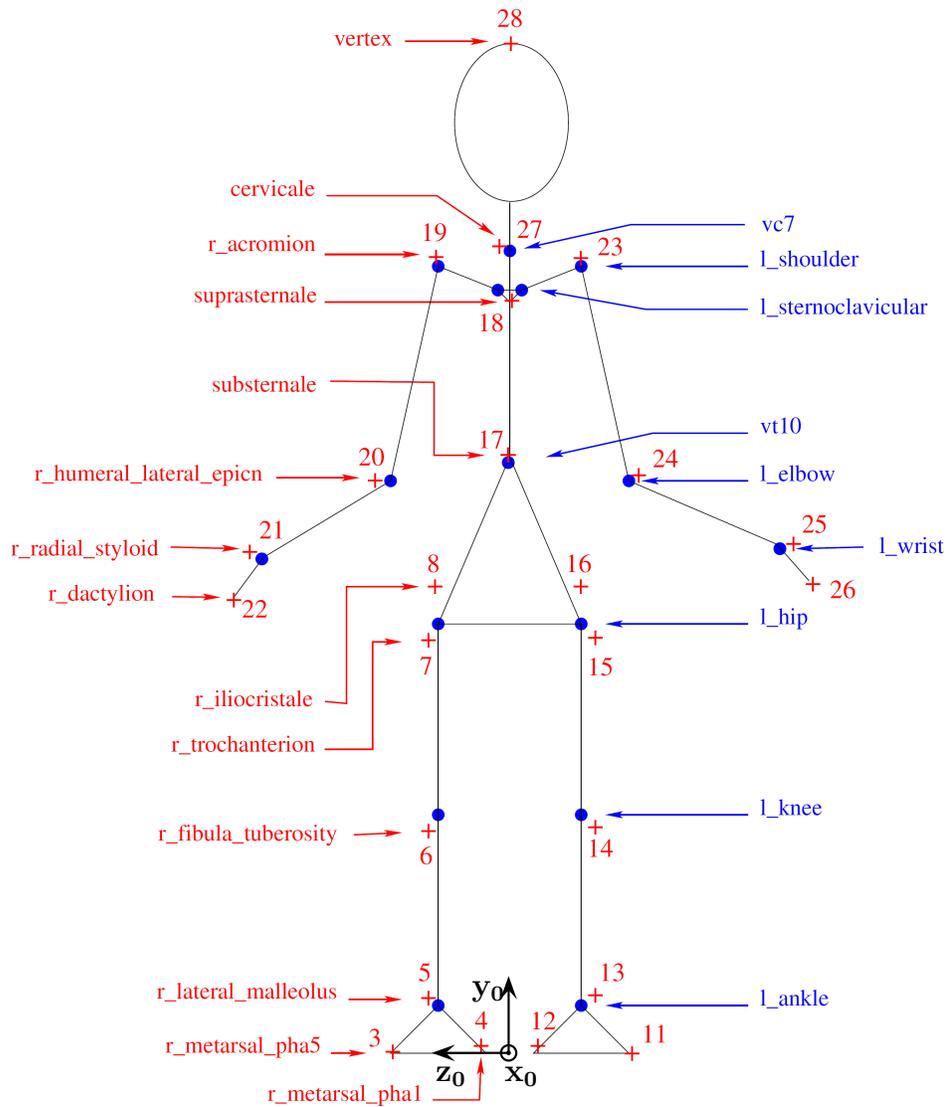


FIG. 5.3 – Modèle Human36 à 16 articulations (ronds) et 36 degrés de liberté; les croix correspondent aux marqueurs anatomiques.

Le premier calcul algébrique à effectuer est celui du torseur des actions du sol sur le corps S_1 . Le simulateur calcule huit forces de contact (\mathbf{F}_i), quatre sous le pied gauche et

quatre sous le pied droit. La force de réaction se calcule par la somme :

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{F}_i. \quad (5.4)$$

Le point d'application de chaque force \mathbf{F}_i est le point O_i . Le moment résultant des forces \mathbf{F}_i est calculé au point anatomique 17 (figure 5.3) qui correspond à l'appendice xyphoïde :

$$\mathbf{M}_{17} = \sum_{i=1}^8 \overrightarrow{O_{17}O_i} \wedge \mathbf{F}_i. \quad (5.5)$$

La matrice \mathcal{T} est ainsi calculée à chaque instant t par :

$$\mathcal{T}_{17}(t) = \begin{bmatrix} M_{17}(t) & \mathbf{F}(t) \\ -\mathbf{F}(t)^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.6)$$

5.2.3 Calcul numérique des matrices R , B et A

Les rotations des corps S_1 et S_2 par rapport au repère fixe \mathcal{R}_0 doivent être déterminées afin de calculer les matrices A et B qui sont composées des matrices rotations et de leurs dérivées secondes.

Le repère \mathcal{R}_1 lié au corps S_1 est construit à partir des marqueurs 17, 18 et 27. L'axe \mathbf{x}_1 est porté par le vecteur allant du marqueur 27 au marqueur 17. L'axe \mathbf{z}_1 est perpendiculaire au plan formé par les points 17, 18 et 27, on choisit de l'orienter vers la droite comme \mathbf{z}_0 . Le vecteur \mathbf{y}_1 est obtenu par produit vectoriel : $\mathbf{y}_1 = \mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{x}_1$. Le corps S_1 est immobile, la matrice rotation 1_0R est constante :

$${}^1_0R = \begin{bmatrix} 0,789 & 0,615 & 0 \\ -0,615 & 0,789 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.7)$$

Concernant le membre supérieur, un repère « technique » \mathcal{R}_2 lié au corps S_2 est créé à partir des marqueurs 20, 21 et 22. L'orientation du repère technique n'est pas déterminante car une fois la matrice J identifiée, les résultats seront exprimés dans le repère anatomique \mathcal{R}_a (paragraphe 5.1.2) créé à partir de la position du centre articulaire identifiée.

Le corps S_1 étant immobile, la matrice A va être composée de la dérivée seconde de la matrice rotation du corps S_2 et du vecteur gravité; la matrice B contient les matrices

rotations de chaque segment. A chaque instant t , A et B s'écrivent :

$$A(t) = \begin{bmatrix} {}^2_0\ddot{R}(t) & [0]_{3 \times 3} & \mathbf{g} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} {}^2_0R(t) & {}^1_0R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

avec $\mathbf{g} = [0 \quad -9.81 \quad 0]^T \text{ m.s}^{-2}$.

5.3 Identification de la matrice J à partir des mouvements simulés

Différents mouvements de flexion/extension, abduction/adduction, rotation et circumduction ont été simulés. Chaque mouvement a une durée de 5 secondes. Dans un premier temps, les résultats de l'algorithme du gradient conjugué projeté issus des cinématiques de références (non bruitées) vont être détaillés. Ensuite, afin de se rapprocher des conditions expérimentales, un bruit aléatoire va être ajouté à la position des marqueurs (cinématique bruitée).

5.3.1 Cinématique de référence

La procédure du gradient conjugué projeté est initialisée par la matrice identité 7×7 . Après 40 itérations, la norme du gradient de la fonction coût est $< 10^{-4}$, on obtient la solution approchée :

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 0,3729 & -0,0284 & 0,0010 & -\mathbf{0,1969} & \mathbf{0,0692} & \mathbf{0,2101} & 0,9261 \\ -0,0284 & 0,0060 & 0,0006 & \mathbf{0,0145} & -\mathbf{0,0050} & -\mathbf{0,0158} & -0,0742 \\ 0,0010 & 0,0006 & 0,0012 & -\mathbf{0,0001} & \mathbf{0,0013} & \mathbf{0,0007} & 0,0000 \\ \hline -0,1969 & 0,0145 & 0,0001 & 1 & 0 & 0 & -5,0824 \\ 0,0692 & -0,0050 & 0,0013 & 0 & 1 & 0 & -5,6450 \\ 0,2101 & -0,0158 & 0,0007 & 0 & 0 & 1 & -3,2054 \\ \hline 0,9261 & -0,0742 & 0,0000 & -5,0824 & -5,6450 & -3,2054 & 63,0000 \end{array} \right] \quad (5.10)$$

La masse (63 kg) du système multicorps est identifiée ainsi que le vecteur $m_1 \mathbf{c}_1^{(1)} + m_2 \mathbf{d}^{(1)}$ écrit en italique. Ce vecteur est identifiable car il est stimulé par le vecteur gravité et par la

matrice rotation du corps S_1 . Ce résultat ne sera pas discuté car ce vecteur ne correspond pas à un paramètre recherché. De plus, comme la masse du corps S_2 n'est pas identifiée, le moment du premier ordre du corps S_1 ne peut pas en être déduit.

La position du centre articulaire ($\mathbf{d}^{(1)}$) ne s'obtient pas directement. Elle apparaît dans la partie 3×3 écrite en gras dans la matrice J , notons $J_{(1:3,4:6)}$ cette matrice :

$$J_{(1:3,4:6)} = m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \otimes \mathbf{d}^{(1)} \quad (5.11)$$

La notation $J_{(1:3,4:6)}$ renvoie à l'élément de la matrice J compris entre les lignes 1 à 3 et les colonnes 4 à 6. Le vecteur $\mathbf{d}^{(1)}$ s'obtient alors par la formule présentée au chapitre 4 (4.18) :

$$\mathbf{d}^{(1)T} = \frac{[J_{(1:3,4:6)}]^T m_2 \mathbf{c}_2^{(2)}}{\langle m_2 \mathbf{c}_2^{(2)}, m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \rangle} = \begin{bmatrix} -0,2125 \\ 0,0747 \\ 0,2267 \end{bmatrix} \text{ m.} \quad (5.12)$$

Maintenant que la position du centre articulaire est connue, nous pouvons créer le repère anatomique \mathcal{R}_a dont l'axe \mathbf{y}_a est l'axe longitudinal du segment. La matrice d'inertie $K_{P_2}^{(2)}$ identifiée est celle de Poinot, on détermine la matrice d'inertie associée par :

$$I_{P_2}^{(2)} = \text{tr}(K_{P_2}^{(2)}) \mathbf{1}_3 - K_{P_2}^{(2)} \quad (5.13)$$

La matrice d'inertie et le moment du premier ordre du segment S_2 sont ensuite exprimés dans le repère anatomique \mathcal{R}_a . Ces résultats ainsi que la position du centre articulaire sont regroupés dans le tableau (5.3) et comparés avec les données d'entrée du modèle (tableau 5.2).

La matrice d'inertie du membre supérieur est retrouvée avec un écart en norme de 0,44%, le moment du premier ordre du membre supérieur est retrouvé avec un écart de 0,06% et la position du centre articulaire est retrouvée avec un écart de 0,56%. Les différences observées avec les données d'entrées sont vraisemblablement dues au calcul par différence finie des dérivées secondes de la matrice rotation du corps S_2 . Lors des simulations, les paramètres cinématiques (position, vitesse et accélérations) étaient des fonctions trigonométriques du temps.

TAB. 5.3 – Paramètres inertiels identifiés (matrice d’inertie et moment du premier ordre du corps S_2 et position du centre articulaire) et différence (%) par rapport aux valeurs d’entrées du modèle

Paramètres	Valeurs identifiées	Différence absolue	%
$I_{P_2}^{(2)}$ (m ² .kg)	$\begin{bmatrix} 0,3788 & -0,0010 & -0,0007 \\ -0,0010 & 0,0050 & -0,0012 \\ -0,0007 & -0,0012 & 0,3762 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,0008 & -0,0010 & -0,0007 \\ -0,0010 & 0,0001 & -0,0012 \\ -0,0007 & -0,0012 & 0,0002 \end{bmatrix}$	0,44
$m_2 \mathbf{c}_2^{(2)}$ (m.kg)	$[0,0000 \quad 0,9291 \quad -0,0001]^T$	$[0,0000 \quad -0,0005 \quad -0,0001]^T$	0,06
$\mathbf{d}^{(1)}$ (m)	$[-0,2125 \quad 0,0747 \quad 0,2267]^T$	$[-0,0013 \quad 0,0000 \quad 0,0012]^T$	0,56

L’absence de mouvement du corps S_1 n’est en aucun cas une limite pour la procédure itérative du gradient conjugué projeté; les paramètres non stimulés restent à leur valeurs initiales (5.10). La méthode d’identification permet donc de déterminer les paramètres inertiels d’un système multicorps composée de deux segments. Alors que dans les procédures classiques d’identification, les paramètres non stimulés doivent être retirés du modèle [Raucent *et al.*, 1992], seuls les paramètres de base apparaissent dans le modèle d’identification [Gautier et Khalil, 1988]. Leur modèle d’identification dépend du degré de mobilité des articulations, tandis que notre modèle ne change pas.

5.3.2 Cinématique bruitée

Afin de se rapprocher des conditions expérimentales, nous avons ajouté un bruit à la cinématique de référence. Le bruit ajouté s’apparente à l’incertitude inhérente à l’analyse cinématographique induite par :

- le mauvais placement des marqueurs,
- les mouvements de peau,
- la précision des capteurs.

Dans sa thèse de doctorat réalisée au sein du laboratoire, Boucher [2005] évalue en détail la précision des coordonnées. L’incertitude sur chaque coordonnée pour un volume d’acquisition de 0,9 m × 1,1 m × 1,9 m est de 1,2 mm avec le système d’analyse cinématographique SAGA3. L’auteur précise que cette incertitude est due au système uniquement et

que le nombre de caméras détectant un marqueur est un facteur primordial sur la précision.

Dans un précédent travail sur la localisation des centres articulaires, nous avons élaboré un modèle de bruit [Begon *et al.*, 2007]. Il est composé d'une partie aléatoire et d'une partie continue représentant les erreurs de mesure et les artefacts dus aux mouvements de peau. Ce bruit artificiel est ajouté à une cinématique de référence obtenue par simulation. Le pattern de bruit continu est dépendant de la nature du mouvement (vitesse et amplitude), de la localisation du marqueur et des coordonnées (x, y, z) . Les coefficients utilisés pour ce modèle de bruit sont ajustés pour obtenir une déformation similaire à celle obtenue expérimentalement.

Dans notre étude, les mouvements sont obtenus directement à partir du logiciel de simulation HuMANs, nous ne disposons d'aucune donnée expérimentale pour appliquer le même modèle de bruit. Un bruit blanc d'amplitude extrême de ± 3 mm a été choisi à la place. Ce bruit a été ajoutée aux coordonnées de l'ensemble des marqueurs.

Traitement des données

Les données bruitées ne sont pas traitées de la même façon que les données issues de la cinématique de référence. En effet, comme le soulignent Boucher [2005] et Lanshammar [1982], les effets néfastes du bruit affectant les coordonnées apparaissent au cours des dérivations, celles-ci amplifient le bruit. Après le calcul de la matrice rotation $({}^2_0R)$ du corps S_2 , un premier lissage est effectué sur les neuf coefficients de cette matrice. Le lissage choisi est un lissage de Savitsky-Golay [Savitzky et Golay, 1964] d'ordre 3 et de largeur de fenêtre 15. La dérivée seconde de la matrice rotation $({}^2_0\ddot{R})$ est obtenue par double dérivation des neuf coefficients de 2_0R . La méthode de dérivation choisie est une méthode de dérivation par splines cubiques. Les coefficients de ${}^2_0\ddot{R}$ sont ensuite lissés de la même façon que les coefficients de 2_0R . L'effet du bruit ajouté à la cinématique de référence est illustré sur la figure (5.4) qui représente les neuf coefficients de la dérivée seconde de la matrice rotation lors d'un mouvement de circumduction.

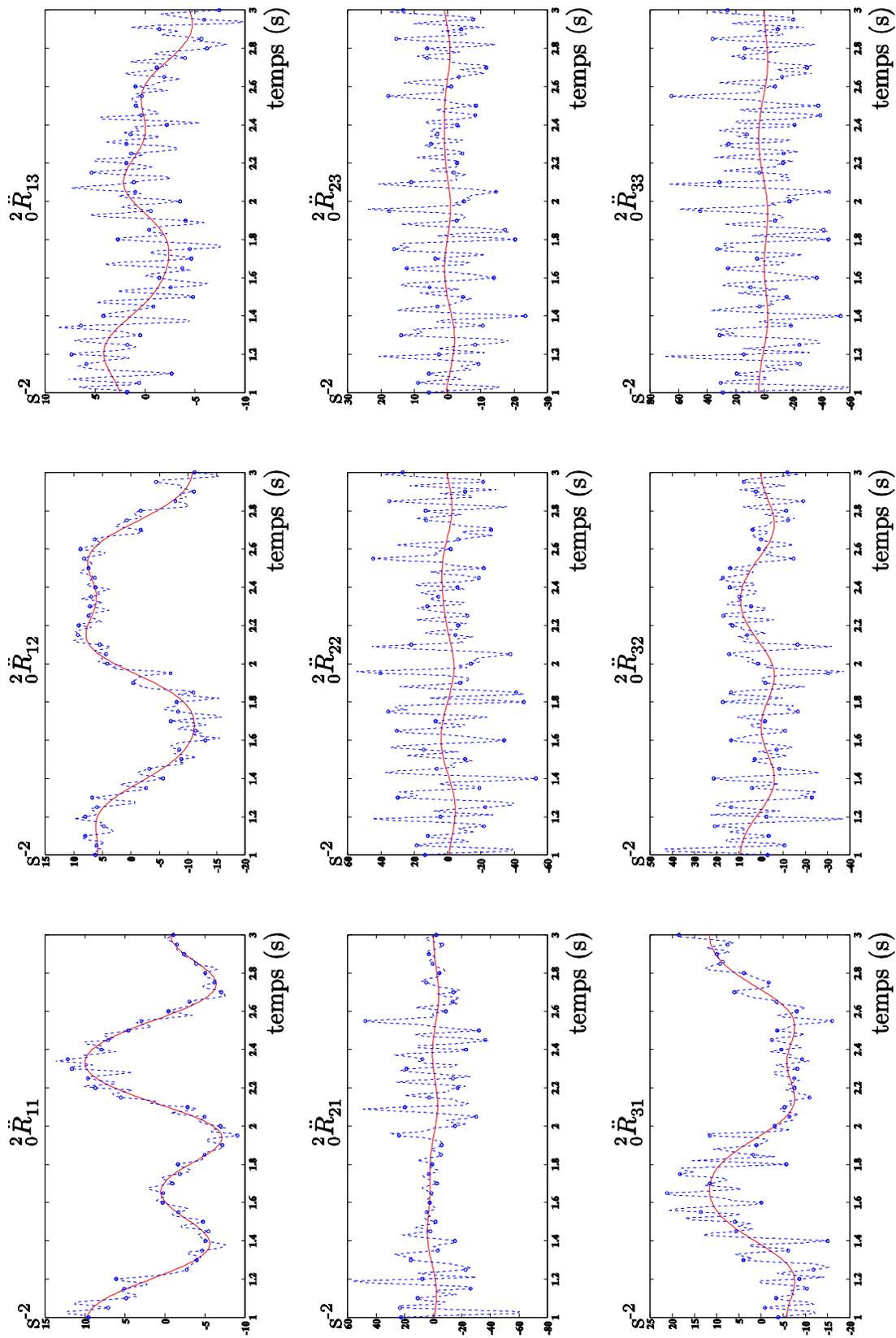


FIG. 5.4 – Evolution des neuf coefficients de la dérivée seconde de la matrice de rotation du corps S_2 lors d'un mouvement de circumduction. La cinématique de référence est illustrée par le trait plein et la cinématique bruitée par la ligne pointillée avec des cercles.

La matrice rotation (1_0R) du corps S_1 est calculée numériquement à chaque instant. Le corps S_1 étant immobile, cette matrice devrait être constante, or le bruit ajouté provoque de légères variations des composantes de ${}^1_0R(t)$. Pour chaque mouvement, une matrice rotation moyenne est calculée à partir de 1_0R . De même, le moment résultant est calculé en un point O_{17} moyen.

La procédure du gradient conjugué est toujours initialisée par une matrice 7×7 identité. Après 40 itérations, la norme de la fonction coût est inférieure à 10^{-4} , nous obtenons la solution approchée suivante :

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 0,3630 & 0,0047 & -0,0094 & -0,0347 & -0,0027 & 0,3134 & 0,9196 \\ 0,0047 & 0,0033 & 0,0047 & 0,0130 & 0,0097 & 0,0086 & -0,0681 \\ -0,0094 & 0,0047 & 0,0039 & 0,0006 & -0,0132 & -0,0049 & -0,0003 \\ \hline -0,0347 & 0,0130 & 0,0006 & 1 & 0 & 0 & -5,1772 \\ -0,0027 & 0,0097 & -0,0132 & 0 & 1 & 0 & 6,4282 \\ 0,3134 & 0,0086 & -0,0049 & 0 & 0 & 1 & -1,0883 \\ \hline 0,9196 & -0,0681 & -0,0003 & -5,1772 & 6,4282 & -1,0883 & 62,9999 \end{array} \right] \cdot (5.14)$$

A partir de cette matrice, les paramètres inertiels du corps S_2 ainsi que la position du centre de rotation sont exprimés dans le repère anatomique et rassemblés dans le tableau (5.4).

TAB. 5.4 – Paramètres inertiels (matrice d’inertie et moment du premier ordre du corps S_2 et position du centre articulaire) identifiés à partir des cinématiques bruitées et différence (%) par rapport aux valeurs d’entrées du modèle

Paramètres	Valeurs identifiées	Différence absolue	%
$I_2^{(2)}$ (kg.m ²)	$\begin{bmatrix} 0,3663 & 0,0098 & -0,0039 \\ 0,0098 & 0,0103 & -0,0332 \\ -0,0039 & -0,0332 & 0,3639 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0117 & 0,0098 & -0,0039 \\ 0,0098 & 0,0054 & -0,0332 \\ -0,0039 & -0,0332 & -0,0121 \end{bmatrix}$	10,1
$m_2 \mathbf{c}_2^{(2)}$ (kgm)	$[-0,0003 \quad 0,9221 \quad 0,0055]^T$	$[-0,0003 \quad -0,0075 \quad 0,0055]^T$	1,0
$\mathbf{d}^{(1)}$ (m)	$[-0,0386 \quad -0,0037 \quad 0,3382]^T$	$[0,1726 \quad -0,0784 \quad 0,1127]^T$	69,4

Seul le moment du premier ordre du corps S_2 est obtenu avec une bonne précision (1%), les autres paramètres, c’est à dire la matrice d’inertie et la position du centre articulaire,

ne sont pas satisfaisants. Une possibilité de correction de la méthode serait par exemple de minimiser la fonction coût en respectant des contraintes sur le vecteur position du centre articulaire ($\mathbf{d}^{(1)}$). En effet, on remarque dans le tableau (5.4) que la composante sur \mathbf{y}_1 de ce vecteur est négative alors qu'elle est attendue positive. A chaque itération, le vecteur $\mathbf{d}^{(1)}$ doit être calculé et le signe de chaque composante vérifié.

La position des centres articulaires est un problème abondamment traité dans la littérature biomécanique [Gamage et Lasenby, 2002; Hicks et Richards, 2005; Holden et Stanhope, 1998; Piazza *et al.*, 2004; Stokdijk *et al.*, 2000]. Cette position s'obtient avec une bonne précision par des méthodes cinématiques. Deux de ces méthodes seront détaillées dans le prochain chapitre, consacré à la localisation des centres de rotation.

Si l'on suppose connue la position du centre de rotation, le moment résultant peut être calculé en ce point. Ainsi, le vecteur $\mathbf{d}^{(1)}$ disparaît des équations du mouvement et la matrice J recherchée contient une matrice de zéros en lieu et place de la matrice formée par le produit $m_2 \mathbf{c}_2^{(2)} \otimes \mathbf{d}^{(1)}$ (équation 5.3). En calculant les efforts extérieurs au centre de rotation, seuls les paramètres inertiels du corps S_2 interviennent dans les équations du mouvement. On peut ainsi espérer de meilleurs résultats pour l'identification de la matrice d'inertie du corps S_2 .

Après avoir calculé le moment des forces \mathbf{F}_i au centre de rotation, la méthode du gradient conjugué est mise en oeuvre avec les mêmes mouvements que précédemment. Afin de montrer l'intérêt de la projection, les premiers résultats sont obtenus sans projection sur le cône des matrices défini-positives. A chaque itération n , une matrice 3×3 de zéros est imposée à la matrice du gradient de la fonction coût (cf. chapitre 2, algorithme du gradient conjugué) :

$$G^n = \nabla [f(J^n)] \quad (5.15)$$

$$G_{1:3,4:6}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$G_{4:6,1:3}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Au terme de 18 itérations, nous aboutissons par la méthode du gradient conjugué à la matrice suivante :

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 0,3543 & -0,0269 & -0,0002 & 0 & 0 & 0 & 0,9201 \\ -0,0269 & -0,0092 & -0,0004 & 0 & 0 & 0 & -0,0681 \\ -0,0002 & -0,0004 & 0,0154 & 0 & 0 & 0 & -0,0005 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11,1574 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -14,1132 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -15,4325 \\ \hline 0,9201 & -0,0681 & -0,0005 & 11,1574 & -14,1132 & -15,4325 & 62,9999 \end{array} \right] \quad (5.18)$$

Nous pouvons remarquer que la matrice d'inertie de Poincot identifiée n'est pas définie positive, cette solution n'est donc pas possible. La méthode de projection sur le cône des matrices définies positives (chapitre 2) est alors activée dans l'algorithme du gradient conjugué. La projection porte uniquement sur la partie contenant la matrice d'inertie de Poincot du corps S_2 . Comme certaines composantes de J ne peuvent pas être identifiées (soit elles ne sont pas stimulées, soit leur valeur théorique est connue comme étant égale à zéro), la projection ne peut pas porter sur ces valeurs. A chaque itération, si la partie supérieure gauche de la matrice J n'est pas défini-positive, elle est projetée sur le cône des matrices défini-positives. Le critère d'arrêt est remplacé par un critère portant sur l'évolution de la matrice J : lorsque les valeurs de J sont stationnaires (différence inférieure à 10^{-4}) entre deux itérations, la minimisation est stoppée. L'algorithme du gradient conjugué projeté conduit en 37 itérations à la matrice suivante :

$$J = \left[\begin{array}{ccc|ccc|c} 0,3633 & -0,0267 & -0,0002 & 0 & 0 & 0 & 0,9200 \\ -0,0267 & 0,0020 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 & -0,0680 \\ -0,0002 & -0,0001 & 0,0046 & 0 & 0 & 0 & -0,0004 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5,0721 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6,3055 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -19,5329 \\ \hline 0,9200 & -0,0680 & -0,0004 & 5,0721 & -6,3055 & -19,5329 & 62,9999 \end{array} \right] \quad (5.19)$$

Les paramètres inertiels du corps S_2 sont alors exprimés dans le repère anatomique et regroupés dans le tableau (5.5).

TAB. 5.5 – Paramètres inertiels identifiés (matrice d’inertie et moment du premier ordre du corps S_2) et différence (%) par rapport aux valeurs d’entrées du modèle

Paramètres	Valeurs identifiées	Différence	%
$I_{P_2}^{(2)}$ (kg.m ²)	$\begin{bmatrix} 0,3653 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0,0001 & 0,0046 & -0,0023 \\ 0,0001 & -0,0023 & 0,3698 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,0127 & 0,0001 & 0,0001 \\ 0,0001 & -0,0003 & -0,0023 \\ 0,0001 & -0,0023 & -0,0062 \end{bmatrix}$	3,4
$m_2 \mathbf{c}_2^{(2)}$ (kgm)	$[-0,0004 \quad 0,9225 \quad 0,0056]^T$	$[-0,0004 \quad -0,0071 \quad 0,0056]^T$	1,0

Cette fois-ci, les paramètres inertiels du corps S_2 sont retrouvés avec une différence relative en norme de 3,4%.

Dans ce chapitre, nous avons validé l’algorithme du gradient conjugué projeté pour une matrice 7×7 . Lorsque les données cinématiques sont bruitées, deux précautions sont à prendre afin d’estimer précisément les paramètres inertiels : les et moments résultants doivent être calculés au centre articulaire et la projection de la matrice d’inertie de Poinot sur le cône des matrices défini-positives est indispensable.

Afin d’estimer simultanément la matrice d’inertie, le moment du premier ordre du corps et la position du centre articulaire S_2 , des contraintes sur le signe des composantes du vecteur position du centre articulaire doivent être ajoutées.

Chapitre 6

Localisation *in vivo* des centres articulaires

Sommaire

6.1	Protocole expérimental	109
6.2	Présentation des méthodes fonctionnelles	112
6.2.1	Axe hélicoïdal	112
6.2.2	<i>SCoRE</i>	113
6.3	Traitement des données	115
6.4	Résultats	115
6.4.1	Localisation du centre articulaire	116
6.4.2	Précision des méthodes	117
6.4.3	<i>SCoRE</i> versus <i>SCoRE2</i>	118
6.5	Discussion	119
6.5.1	Localisation	119
6.5.2	Précision	120

Comme nous l'avons vu précédemment, la connaissance précise de la position du centre articulaire est importante afin d'estimer le plus précisément possible les paramètres inertiels du segment distal. Ce chapitre détaille la méthode utilisée pour déterminer la position du centre articulaire glénohumérale. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet de l'article intitulé « Comparison of the **SCoRE** and **HA** methods for locating *in vivo* the glenohumeral joint centre » publié dans le *Journal of Biomechanics* [Monnet *et al.*, 2007c].

De façon générale, la localisation précise de tous les centres articulaires est une donnée importante pour mener à bien les analyses biomécaniques, calculs en dynamique inverse notamment. Certains auteurs précisent que la mauvaise localisation des centres articulaires

provoque plus d'erreurs sur les grandeurs cinétiques que les variations des paramètres inertiels induites par différents modèles [Holden et Stanhope, 1998]. Le centre articulaire glénohuméral (GH) est particulièrement important puisque sa position est indispensable pour définir le repère du bras [Wu *et al.*, 2005]. Les articulations du corps humain ne sont pas des articulations parfaites ; de par la complexité des surfaces osseuses en contact, les articulations possèdent des centres instantanés de rotation. Ainsi, le centre articulaire GH se déplace de 1 mm en translation lors d'élévation de bras [Graichen *et al.*, 2000]. Cependant, afin de correspondre à notre modélisation et comme il est fait dans de très nombreux travaux, la position du centre articulaire GH est supposée fixe.

Deux types d'approches permettent de localiser les centres articulaires : l'approche fonctionnelle et l'approche prédictive. La première nécessite d'effectuer des mouvements plus ou moins standardisés de flexion-extension, abduction-adduction et circumduction car les données cinématiques issues des gestes couramment étudiés (marche, montée d'escalier) ne sont pas adaptés pour localiser les centres articulaires par les méthodes fonctionnelles [Piazza *et al.*, 2004]. Les principales méthodes fonctionnelles sont le calcul de l'axe hélicoïdal instantané [Woltring *et al.*, 1985], l'ajustement de sphères [Gamage et Lasenby, 2002] et la méthode symétrique [Ehrig *et al.*, 2006]. Les approches prédictives quant à elles estiment la position des centres articulaires à partir de régressions linéaires faisant intervenir les dimensions et la géométrie du segment. Ainsi, à partir des dimensions de l'omoplate, Meskers *et al.* [1998] définissent les équations de régression permettant de localiser le centre articulaire GH. Cette méthode présente une facilité d'utilisation, néanmoins, elle est très sensible au positionnement des marqueurs ainsi qu'aux mesures anthropométriques.

Ce chapitre s'intéresse à une nouvelle méthode fonctionnelle, la méthode *SCoRE* (pour *Symmetrical Centre of Rotation Estimation*) présentée par Ehrig *et al.* [2006], consistant à chercher un point commun appartenant à la fois au segment distal et au segment proximal. Cette méthode est intéressante car elle nécessite de connaître uniquement la position et la matrice rotation de ces deux segments. Ainsi, les problèmes rencontrés avec la méthode des axes hélicoïdaux (*AH*) pour des mouvements réalisés à faible vitesse [Ehrig *et al.*, 2006; Stokdijk *et al.*, 2000; Woltring *et al.*, 1985] ne se posent pas avec cette méthode. De plus,

la méthode *SCoRE* permet de calculer un centre articulaire lorsque les deux segments sont en mouvements.

Comme il a été mentionné plus haut, des mouvements spécifiques sont nécessaires pour mettre en œuvre les approches fonctionnelles. Certains articles ont mis en évidence l'importance des caractéristiques du mouvement (type de mouvement, amplitude, nombre de répétitions) sur la localisation du centre articulaire [Begon *et al.*, 2007; Hicks et Richards, 2005]. Ces deux études ont montré l'intérêt de combiner les différents types de mouvements (flexion-extension, abduction-adduction et circumduction). De plus, lorsqu'un seul cycle de mouvement est effectué, il est préférable d'effectuer ces mouvements avec une grande amplitude [Begon *et al.*, 2007].

Dans le cas de l'épaule, le centre articulaire GH est assimilé au centre de la tête humérale [Helm *et al.*, 1992; Meskers *et al.*, 1998; Soslowsky *et al.*, 1992; Veeger, 2000]. La Société Internationale de Biomécanique (ISB) recommande d'utiliser la méthode *AH* pour déterminer ce centre articulaire [Wu *et al.*, 2005]. Plusieurs articles se sont intéressés à la comparaison des différentes méthodes fonctionnelles et prédictives. Stokdijk *et al.* [2000] ont montré par exemple que les méthodes *AH* et d'ajustement de sphères conduisent aux mêmes résultats. Ils obtiennent cependant des résultats différents avec l'approche prédictive de Meskers *et al.* [1998]. Veeger [2000] compare *in vitro* une méthode fonctionnelle (*AH*) et une méthode géométrique et obtient les mêmes résultats.

Bien que la méthode *AH* soit très utilisée, aucune étude ne s'intéresse à l'effet des caractéristiques du mouvement sur la localisation du centre articulaire GH avec cette méthode. De plus, la méthode *SCoRE* étant récente, les effets des différents mouvements ne sont pas connus avec cette méthode. Ce chapitre présente une comparaison de ces deux méthodes dans la détermination du centre articulaire GH *in vivo*.

6.1 Protocole expérimental

Neuf sujets masculins âgés de $27,9 \pm 1,05$ ans ont participé à cette étude. Aucun des sujets ne présentait de troubles connus de l'épaule droite. Les sujets ont effectué trois types

de mouvements composé chacun de 10 cycles : flexion-extension (**FE**), abduction-adduction (**AbAd**) et circumduction (**Cir**). Lors de chaque mouvement, l'élévation du bras ne devait pas excéder la hauteur de l'épaule car la translation de la tête humérale est plus importante lors de mouvements amples [Graichen *et al.*, 2000]. Chaque mouvement a été répété pour deux vitesses différentes : lente (un cycle durait huit secondes) et moyenne (un cycle durait quatre secondes).

La localisation des centres articulaires par l'approche fonctionnelle nécessite de connaître le mouvement des segments communs à l'articulation. L'articulation GH réunit l'omoplate (la glène de l'omoplate) à la tête de l'humérus. Le mouvement de l'humérus est décrit en positionnant quatre marqueurs sur le bras (A_i , $i = 1..4$, figure (6.1) et Annexe A) : deux marqueurs sur la face postérieure, un marqueur à l'insertion du deltoïde et un marqueur sur le biceps. Ces marqueurs permettent de créer un repère \mathcal{R}_H et une matrice rotation $\begin{pmatrix} H \\ 0 \end{pmatrix} R$ à partir d'une méthode de minimisation (chapitre 7).

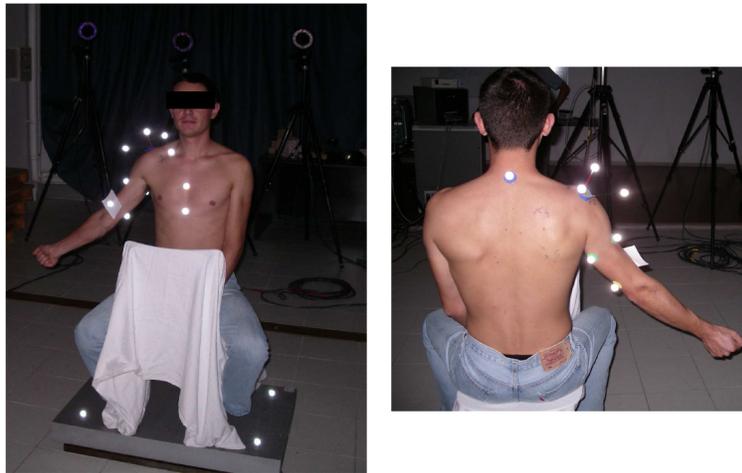


FIG. 6.1 – Position des marqueurs.

Le mouvement de l'omoplate est plus délicat à mesurer [Johnson *et al.*, 1993; McClure *et al.*, 2001]. En effet le placement de marqueurs sur la peau (face dorsale de l'omoplate) est inutile car l'omoplate glisse sous la peau. Karduna *et al.* [2001] ont montré que le mouvement de l'omoplate pouvait être repéré en positionnant un cluster sur l'acromion.

Avec cette méthode, ils ont obtenu les mêmes résultats que ceux obtenus par une méthode invasive (pins directement fixés sur l'omoplate). Dans notre étude, le mouvement de l'omoplate est repéré en fixant un cluster composé de trois marqueurs sur l'acromion. Lors d'une acquisition statique, une calibration anatomique¹ [Cappozzo *et al.*, 1995] de cinq points de l'omoplate est effectuée (figure 6.2) : l'angle de l'acromion (AA), le trigone spinal (TS), le processus coracoïde (PC), l'articulation acromio-claviculaire (AC) et l'angle inférieur (AI). Ainsi, à l'aide de ces marqueurs, un repère anatomique de l'omoplate \mathcal{R}_S est créé (figure 6.2), centré en AA et orienté de la façon suivante Stokdijk *et al.* [2000] :

$$\mathbf{x}_s = \frac{AA - TS}{\|AA - TS\|}, z_s = x_s \wedge \left(\frac{AI - AA}{\|AI - AA\|} \right), y_s = z_s \wedge x_s$$

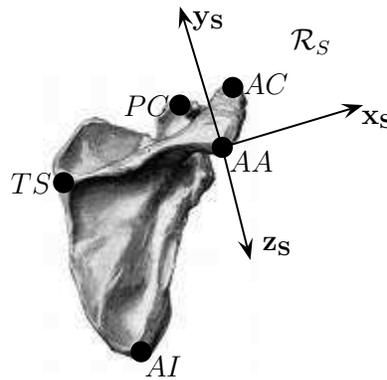


FIG. 6.2 – Localisation des marqueurs anatomiques de l'omoplate. Le repère omoplate (\mathcal{R}_S) est centré en AA, l'axe \mathbf{x}_s est orienté de TS vers AA et l'axe \mathbf{z}_s est perpendiculaire au plan formé par les marqueurs AA, AI et TS, dirigé de TS vers AA.

A partir des résultats de Begon *et al.* [2007], trois différents tests composés de dix essais ont été créés à partir des mouvements de référence :

- [Cir] composé d'un cycle de Cir,
- [FE/AbAd] composé d'un cycle de FE et d'un cycle de AbAd,

¹la calibration anatomique consiste à repérer des points anatomiques de l'omoplate à l'aide d'une baguette calibrée. Ces points sont exprimés dans un repère formé à partir du cluster lors d'une acquisition statique. Ces différents points appartenant au même segment, leur position est ensuite recalculée lors de chaque mouvement.

- [FE/AbAd/Cir] composé d'un cycle de **FE**, un cycle de **AbAd** et d'un cycle de **Cir**.

Chaque test a été construit pour les deux vitesses d'exécution (lente et moyenne) du mouvement.

6.2 Présentation des méthodes fonctionnelles

6.2.1 Axe hélicoïdal

Le passage d'une position à une autre position pour un même solide peut être obtenu par une rotation autour d'un axe spécifique suivie d'une translation le long de cet axe. Cet axe est appelé l'axe hélicoïdal instantané. Il est déterminé par un vecteur unitaire \mathbf{n} , un vecteur position \mathbf{s} et un angle de rotation θ . La position de chacun des quatre marqueurs placés sur le bras est calculé dans le repère \mathcal{R}_S . On note ces positions \mathbf{a}_i . L'approche qui suit reprend les recommandations de [Guillard \[2005\]](#) pour calculer l'axe hélicoïdal instantané. Soit le centroïde \mathbf{a}_0 :

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbf{a}_i. \quad (6.1)$$

et le vecteur \mathbf{v}_0 :

$$\mathbf{v}_0 = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbf{v}_i, \quad (6.2)$$

où \mathbf{v}_i désigne la vitesse du marqueur \mathbf{a}_i . La position de l'axe se calcule alors à chaque instant par la relation :

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{a}_0(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \wedge \frac{\mathbf{v}_0(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|} \quad (6.3)$$

où $\boldsymbol{\omega}$ correspond à la vitesse angulaire du bras exprimée dans le repère \mathcal{R}_S telle que :

$$j(\boldsymbol{\omega}) = {}^H_S \dot{R} {}^H_S R^T \quad (6.4)$$

où ${}^H_S R$ est la matrice rotation du repère \mathcal{R}_H dans \mathcal{R}_S .

Le vecteur directeur s'obtient par le calcul suivant :

$$\mathbf{n}(t) = \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{\|\boldsymbol{\omega}(t)\|} \quad (6.5)$$

Le vecteur position optimale est obtenu en calculant le point pivot (\mathbf{s}_{opt}) sur N instants différents à partir de toutes les positions $\mathbf{s}(t)$ des axes hélicoïdaux instantanés au sens des moindres carrés par la relation suivante [Stokdijk *et al.*, 1999; Woltring *et al.*, 1985] :

$$\mathbf{s}_{opt} = \tilde{Q}^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Q(t) \mathbf{s}(t), \quad (6.6)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Q(t), \\ Q(t) &= \mathbf{1}_3 - \mathbf{n}(t) \mathbf{n}(t)^T \end{aligned} \quad (6.7)$$

La détermination des axes hélicoïdaux est très sensible aux faibles vitesses angulaires. L'équation (6.3) montre que pour de faibles vitesses angulaires, la position de l'axe est délicate à calculer. Le point pivot est alors calculé pour les données dont la vitesse angulaire est supérieure à 0,25 rad.s⁻¹.

6.2.2 SCoRE

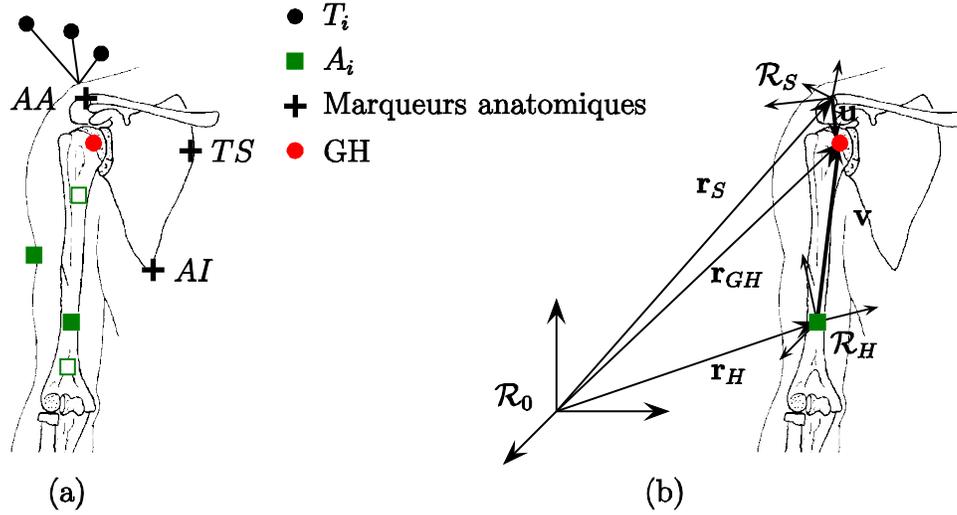
La position du centre articulaire GH est constante dans le repère lié à l'omoplate et dans le repère lié à l'humérus, on la note respectivement \mathbf{u} et \mathbf{v} (figure 6.3). A partir des matrices rotations S_0R de \mathcal{R}_S dans le repère fixe \mathcal{R}_0 et H_0R de \mathcal{R}_H dans \mathcal{R}_0 , on peut écrire la position du centre articulaire GH dans \mathcal{R}_0 de deux façons :

$$\mathbf{r}_{GH} = \mathbf{r}_S + {}^S_0R \mathbf{u} \quad (6.8)$$

$$\mathbf{r}_{GH} = \mathbf{r}_H + {}^H_0R \mathbf{v} \quad (6.9)$$

Il est alors possible d'écrire :

$$\mathbf{r}_H + {}^H_0R \mathbf{v} = \mathbf{r}_S + {}^S_0R \mathbf{u} \quad (6.10)$$

FIG. 6.3 – Position des marqueurs et illustration de la méthode *SCoRE*.

Seuls les vecteurs positions du centre articulaire sont inconnus. L'égalité précédente s'écrit en regroupant les paramètres à déterminer dans un seul vecteur de dimension six :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^H R & -{}^S R \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{3 \times 6} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}}_{6 \times 1} = \mathbf{r}_S - \mathbf{r}_H \quad (6.11)$$

L'équation précédente présente un système linéaire composé de six inconnues pour trois équations. Les vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} sont exprimés dans les repères locaux, ils sont donc constants. En enregistrant le mouvement à n instants différents, on peut former le système linéaire suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {}^H R(t_0) & -{}^S R(t_0) \\ \vdots \\ {}^H R(t_n) & -{}^S R(t_n) \end{bmatrix}}_{3n \times 6} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}}_{6 \times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_S(t_0) - \mathbf{r}_H(t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_S(t_n) - \mathbf{r}_H(t_n) \end{bmatrix}}_{3n \times 1}, \quad (6.12)$$

soit sous forme simplifiée :

$$\Phi \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \Lambda. \quad (6.13)$$

La position du centre articulaire s'obtient alors dans les repères proximal et distal par moindres carrés en introduisant la pseudo-inverse :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \Lambda \quad (6.14)$$

La méthode *AH* est employée avec moins de données que la méthode *SCoRE* car les données pour lesquelles la vitesse angulaire est inférieure à $0,25 \text{ rad.s}^{-1}$ sont éliminées. Comme la localisation du centre articulaire à partir de ces deux méthodes fait appel aux moindres carrés, la précision de ces deux méthodes dépend du nombre de données. Pour éliminer ce biais expérimental, la position du centre articulaire est également calculée avec la méthode *SCoRE2* qui utilise les mêmes données que la méthode *AH*.

6.3 Traitement des données

Pour chaque essai des trois tests, la position du centre articulaire est calculée avec les trois méthodes (*AH*, *SCoRE* et *SCoRE2*). Pour chaque sujet, la position moyenne du centre articulaire dans le repère $\mathcal{R}_S (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ et l'écart-type (SD_x, SD_y, SD_z) sont calculés. La précision est définie comme la moyenne de l'écart-type ($\frac{1}{3}(SD_x + SD_y + SD_z)$). Les résultats expriment la position du centre articulaire dans le repère de l'omoplate pour permettre une comparaison inter-sujets. En effet, les marqueurs anatomiques de l'omoplate ont été localisés avec précision par le kinésithérapeute de l'équipe alors que les marqueurs placés sur le bras (A_i) ne correspondent pas à des marqueurs anatomiques ; ils sont placés sur des zones peu sensibles aux mouvements de peau. Le repère local du bras n'est donc pas reproductible d'un sujet à l'autre, il peut varier légèrement.

Une ANOVA deux voies évalue l'effet de la méthode et du test sur les coordonnées 3-D du centre articulaire ainsi que sur la précision. Lorsqu'une différence significative ($p < 0,05$) est obtenue, une procédure de comparaison multiple (*t*-test) est effectuée.

6.4 Résultats

Dans un premier temps, nous allons comparer la localisation du centre articulaire GH par les méthodes *SCoRE* et *AH*. Ensuite la précision de chacune des méthodes sera analysée et enfin l'apport de la méthode *SCoRE2* par rapport à *SCoRE* sera étayé. Les localisations du centre articulaire GH pour les 2 méthodes et les 3 tests sont illustrées sur la figure (6.4).

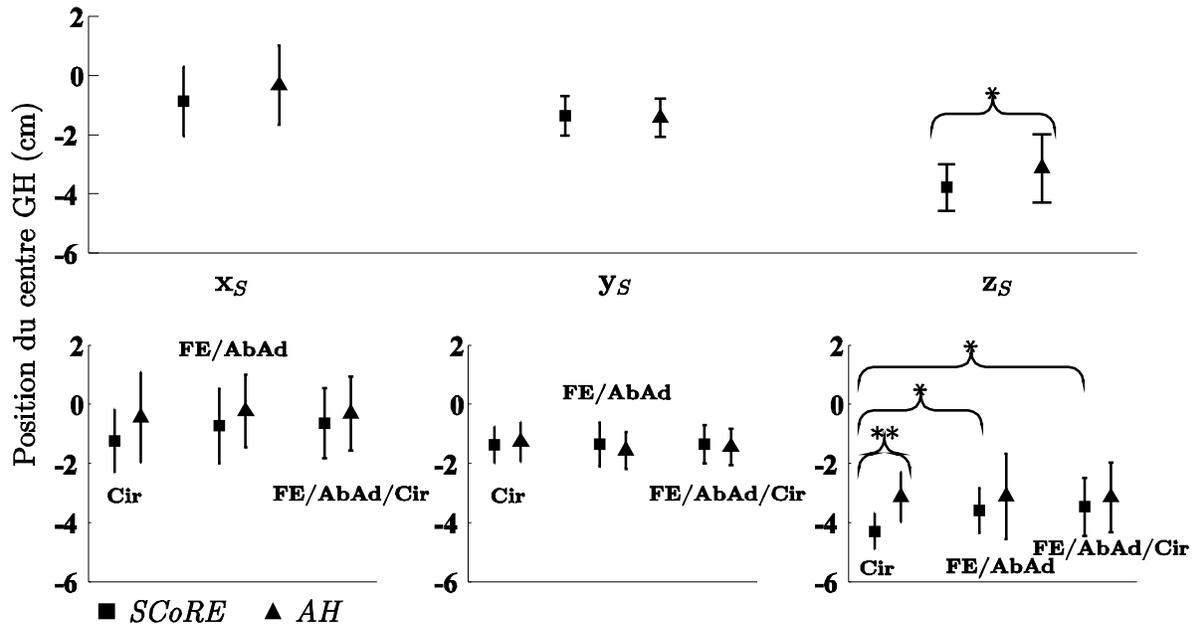


FIG. 6.4 – Localisation moyenne du centre articulaire GH pour les 2 méthodes (*SCoRE* et *AH*) et pour les 3 tests (**Cir**, **FE/AbAd** et **FE/AbAd/Cir**). * indique une différence significative avec $p < 0,05$ et ** avec $p < 0,01$.

Cette figure met en évidence une localisation différente du centre articulaire entre les méthodes *SCoRE* et *AH* avec le test **Cir** et également des différences pour la méthode *SCoRE* entre les tests **Cir** et **FE/AbAd** et entre les tests **Cir** et **FE/AbAd/Cir**.

6.4.1 Localisation du centre articulaire

Le tableau (6.1) regroupe la position moyenne du centre articulaire exprimé dans le repère \mathcal{R}_S pour les neuf sujets. L'écart-type révèle une variation inter-individuelle importante. Ceci avait déjà été mis en avant par [Stokdijk *et al.* \[2000\]](#) pour justifier l'emploi de méthodes fonctionnelles afin de localiser le centre articulaire GH.

Dans un premier temps, les deux méthodes sont comparées à vitesse moyenne. Le tableau (6.1) montre une influence du test sur la localisation du centre articulaire GH par la méthode *SCoRE*. Pour cette méthode, la localisation du centre articulaire GH est différente sur l'axe z_s entre les tests [**Cir**] et [**FE/AbAd**] ($p=0,046$) et entre les tests

TAB. 6.1 – Localisation du centre articulaire (cm) dans le repère \mathcal{R}_S pour les neuf sujets (écart-type) en fonction du test, de la méthode et de la vitesse

méthode	vitesse		[Cir]	[FE/AbAd]	[FE/AbAd/Cir]
<i>AH</i>	moyenne	\mathbf{x}_S	-0,44 (1,53)	-0,23 (1,23)	-0,32 (1,24)
		\mathbf{y}_S	-1,28 (0,68)	-1,57 (0,62)	-1,45 (0,62)
		\mathbf{z}_S	-3,13 (0,84)	-3,12 (1,44)	-3,15 (1,18)
<i>SCoRE</i>	moyenne	\mathbf{x}_S	-1,24 (1,07)	-0,73 (1,26)	-0,64 (1,19)
		\mathbf{y}_S	-1,37 (0,63)	-1,36 (0,74)	-1,35 (0,67)
		\mathbf{z}_S	-4,29 (0,62)	-3,59 (0,75)	-3,47 (0,98)
<i>SCoRE</i>	lente	\mathbf{x}_S	-1,27 (1,17)	-0,66 (1,25)	-0,69 (1,30)
		\mathbf{y}_S	-1,55 (0,46)	-1,58 (0,80)	-1,64 (0,77)
		\mathbf{z}_S	-4,25 (0,47)	-3,81 (0,73)	-3,79 (0,86)

[Cir] et [FE/AbAd/Cir] ($p=0,049$). Pour la méthode *AH*, quelque soit le test, la position du centre articulaire GH est identique. En moyenne, avec la méthode *SCoRE*, la position du centre articulaire GH est de $[-0,87 \ -1,36 \ -3,78]^T$ cm. Avec la méthode *AH*, elle est de $[-0,33 \ -1,43 \ -3,13]^T$ cm. Les méthodes *SCoRE* et *AH* utilisées avec le test [Cir] donne une localisation différente du centre articulaire GH sur l'axe \mathbf{z}_S : -4,29 *versus* -3,13 cm ($p=0,004$).

La méthode *SCoRE* associée aux tests effectués à vitesse lente donne les mêmes résultats que lorsqu'elle est associée aux tests effectués à vitesse moyenne. Cependant, l'association de la méthode *SCoRE* et des tests effectués à vitesses lentes ne montre pas de localisation différente pour les trois tests.

6.4.2 Précision des méthodes

La précision de la localisation du centre articulaire GH pour chaque sujet est rassemblée dans le tableau (6.2).

Quel que soit le test, la meilleure précision est obtenue avec la méthode *SCoRE* (0,24 0,19 et 0,17 *versus* 0,43 0,32 et 0,26 cm pour les trois tests). Pour les deux méthodes, le test [FE/AbAd] est aussi précis que le test [FE/AbAd/Cir] ($p=0,376$ pour *SCoRE* et $p=0,056$ pour *AH*). Le test [Cir] est le moins précis : 0,43 cm pour la méthode *AH* et 0,24 cm pour la méthode *SCoRE*. Pour la méthode *SCoRE*, les tests réalisés à vitesse lente

TAB. 6.2 – Précision (cm) de la localisation du centre articulaire GH pour chaque sujet, chaque méthode, chaque vitesse et chaque test

Méthode	Vitesse	Test	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	mean
<i>AH</i>	moyenne	[Cir]	0,65	0,40	0,21	0,67	0,23	0,37	0,38	0,33	0,33	0,43
		[FE/AbAd]	0,22	0,21	0,28	0,31	0,46	0,27	0,47	0,43	0,25	0,32
		[FE/AbAd/Cir]	0,28	0,20	0,19	0,25	0,41	0,19	0,33	0,28	0,21	0,26
<i>SCoRE</i>	moyenne	[Cir]	0,21	0,21	0,14	0,39	0,28	0,19	0,37	0,24	0,11	0,24
		[FE/AbAd]	0,29	0,11	0,12	0,12	0,25	0,18	0,27	0,32	0,09	0,19
		[FE/AbAd/Cir]	0,25	0,15	0,12	0,09	0,21	0,12	0,20	0,31	0,08	0,17
<i>SCoRE</i>	lente	[Cir]	0,20	0,17	0,18	0,40	0,20	0,18	0,35	0,33	0,17	0,24
		[FE/AbAd]	0,23	0,14	0,13	0,21	0,18	0,23	0,15	0,20	0,10	0,17
		[FE/AbAd/Cir]	0,18	0,15	0,11	0,25	0,16	0,19	0,13	0,24	0,09	0,17

conduisent à la même précision que ceux réalisés à vitesse moyenne.

6.4.3 *SCoRE* versus *SCoRE2*

La position du centre articulaire GH calculée avec la méthode *SCoRE2* est la même que lorsqu'elle est calculée avec la méthode *SCoRE* (tableau 6.3). De plus, la réduction du nombre de données entre *SCoRE* et *SCoRE2* n'altère pas la précision et la méthode *SCoRE2* est plus précise que la méthode *AH* (tableau 6.3). La moins bonne précision obtenue avec la méthode *AH* n'est donc pas imputable à un nombre de données moins important. Ce résultat est du à la dérivation numérique des positions, nécessaire pour calculer les axes hélicoïdaux, qui augmente l'incertitude.

TAB. 6.3 – *SCoRE* versus *SCoRE2*

Tests	Position (cm)		Précision (cm)		
	<i>SCoRE</i>	<i>SCoRE2</i>	<i>SCoRE</i>	<i>SCoRE2</i>	
[Cir]	x_S	-1,24	-1,25	0,24	0,24
	y_S	-1,37	-1,37		
	z_S	-4,29	-4,30		
[FE/AbAd]	x_S	-0,73	-0,69	0,19	0,21
	y_S	-1,36	-1,36		
	z_S	-3,59	-3,60		
[FE/AbAd/Cir]	x_S	-0,64	-0,64	0,17	0,18
	y_S	-1,35	-1,36		
	z_S	-3,47	-3,47		

6.5 Discussion

Cette étude compare deux méthodes d'estimation des centres articulaires en terme de localisation et de précision. Les méthodes sont employées afin de localiser *in vivo* le centre articulaire glénohumérale de neuf sujets. Les effets du type de mouvements (test) ainsi que la vitesse d'exécution du mouvement sont analysés.

6.5.1 Localisation

Dans leur étude, [Stokdijk et al. \[2000\]](#) trouvent le centre articulaire glénohumérale à $[-0,98 \pm 0,54 \quad -3,82 \pm 0,83 \quad -4,48 \pm 0,71]^T$ cm. Les résultats présentés ici sont différents selon l'axe \mathbf{y}_S : $[-0,32 \pm 1,24 \quad -1,45 \pm 0,62 \quad -3,15 \pm 1,18]^T$ cm. Cette différence peut s'expliquer par la calibration anatomique des marqueurs de l'omoplate. En effet, certains marqueurs sont délicats à repérer et l'étude de [Stokdijk et al. \[2000\]](#) a mis en évidence des différences inter-observateurs significatives. De plus, les tests pour localiser le centre articulaire sont différents entre les deux études. Dans l'étude de [Stokdijk et al.](#), le test combine des mouvements de flexion, abduction, adduction, circumduction du bras et d'abduction-adduction de l'omoplate. Or, comme il a été précisé en introduction, le type de mouvement influence la localisation du centre articulaire [[Begon et al., 2007](#)].

Les méthodes *SCoRE* et *AH* localisent le centre articulaire GH au même endroit excepté pour le test [**Cir**]. Alors que les précédentes études utilisaient la méthode *SCoRE* sur des mouvements simulés [[Ehrig et al., 2006](#)] ou sur des chaînes articulés [[Siston et Delp, 2006](#)], cette étude montre que la méthode est adaptée pour localiser les centres articulaires *in vivo*. L'utilisation de mouvements de circumduction n'est pas recommandée avec la méthode *SCoRE*, la présence de rotation médio-latérale augmentant les artefacts dus aux mouvements de peau [[Besier et al., 2003](#); [Growney et al., 1997](#)].

Cependant, l'effet du test disparaît lorsque les mouvements sont réalisés à faible vitesse. Le nombre de données supplémentaires dans ce cas permet d'éliminer l'effet du test avec la méthode *SCoRE*. Contrairement à la méthode *AH*, la méthode *SCoRE* est adaptée aux mouvements effectués à faible vitesse. De plus, [Ehrig et al. \[2006\]](#) ont montré une

bonne précision de la méthode *SCoRE* à partir de mouvements d'amplitude restreinte ($< 20^\circ$). Cette méthode peut donc s'avérer très intéressante pour des études impliquant des personnes ayant des difficultés à mobiliser certaines articulations.

6.5.2 Précision

La méthode *SCoRE* est plus précise que la méthode *AH* : 0,17 cm *versus* 0,26 cm. Avec des mouvements simulés et un modèle de bruit, [Begon et al. \[2007\]](#) rapportent une erreur moyenne de 4 mm. Pour cette étude *in vivo*, nous avons une erreur moyenne de 3 mm ($\sqrt{SD_x^2 + SD_y^2 + SD_z^2}$). Cette précision est obtenue sans effectuer de lissage sur les données cinématiques alors que [Begon et Lacouture \[2005\]](#) ont montré que la solidification augmentait la précision dans la localisation des centres articulaires. La procédure de minimisation employée pour calculer la matrice rotation (détaillée au chapitre 7) à partir de quatre marqueurs permet de s'affranchir du lissage des positions. De plus, l'utilisation d'un cluster rigide pour repérer l'omoplate élimine les artefacts dus aux mouvements de peau. Enfin, le champ d'acquisition restreint contribue également à obtenir une telle précision.

Le centre articulaire a été calculé à partir d'un cycle de chaque mouvement. L'augmentation du nombre de cycle n'a pas d'effet sur la précision lorsque les centres articulaires sont calculés à partir de mouvements de grande amplitude [[Begon et al., 2007](#)]. Nous retrouvons ce résultat dans notre étude, lorsque les calculs sont effectués avec deux cycles, la localisation du centre articulaire est identique et la précision n'est que légèrement améliorée pour la méthode *SCoRE*. Cependant, pour la méthode *AH*, plus de cycles sont souhaitables afin de compenser les données éliminées lorsque la vitesse angulaire est inférieure à $0,25 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$. Les données éliminées correspondent aux changements de directions du mouvement, c'est à dire pour les amplitudes extrêmes du mouvement. Or ce sont précisément ces données qui sont importantes.

La méthode *SCoRE* permet de localiser précisément les centres articulaires *in vivo*. Cette méthode demande de connaître uniquement les positions et matrices rotations des segments proximal et distal. Comme pour l'identification des paramètres inertiels, la matrice rotation revêt une importance prépondérante dans la qualité des résultats. Un mi-

nimum de trois marqueurs est nécessaire afin de déterminer cette matrice. Cependant, le recours à un nombre de marqueurs supérieur à trois permet d'améliorer la détermination de la rotation par un processus de minimisation [Challis, 1995a,b]. Le prochain chapitre détaille une méthode de détermination de la matrice rotation par une méthode de minimisation faisant appel à un algorithme de gradient conjugué.

Calcul de la matrice rotation

Sommaire

7.1	Calcul algébrique de la matrice rotation à partir de trois marqueurs	124
7.2	Optimisation de la matrice rotation à partir de plus trois marqueurs	126
7.2.1	Matrice rotation entre deux instants consécutifs	126
7.2.2	Matrice rotation du solide par rapport au repère fixe	130
7.3	Influence de la matrice rotation sur les grandeurs cinématiques	131

Souvent, la matrice rotation n'est qu'un intermédiaire permettant de calculer l'orientation du segment dans le référentiel fixe ou par rapport au segment voisin. Cette matrice rotation est alors décomposée sous la forme d'une succession de trois rotations élémentaires qui permettent de calculer les angles de rotations. Plusieurs travaux de synthèse ont été réalisés sur la représentation des mouvements des solides [Dumitriu, 2003; Gogu et Coiffet, 1996; Spring, 1986]. Dans notre travail, l'écriture des équations du mouvement sous forme matricielle met en avant l'importance de la matrice rotation de chaque segment. En effet, de la bonne détermination de cette matrice dépendent les résultats de l'identification. De plus, la méthode recommandée pour calculer les centres de rotation dépend également de la qualité du calcul de cette matrice rotation.

Celle-ci est calculée à partir de la position des marqueurs fixés sur un segment. Ces positions sont mesurées dans le référentiel inertiel \mathcal{R}_0 . Un minimum de trois marqueurs par segment est nécessaire afin de déterminer ces matrices rotations. Cependant, afin de

limiter les incertitudes inhérentes à l'analyse du mouvement humain, plusieurs auteurs [Carman et Milburn, 2006; Challis, 1995a,b; Spoor et Veldpaus, 1980; Veldpaus *et al.*, 1988; Woltring, 1991] se sont intéressés au calcul des matrices rotations à partir d'un nombre de marqueurs supérieur ou égal à quatre. Elles s'obtiennent alors par minimisation. L'objet de ce chapitre est de présenter une méthode de calcul de cette matrice rotation à partir d'un algorithme de gradient conjugué [Bouby *et al.*, 2005] et de montrer l'effet d'un tel calcul sur les paramètres cinématiques.

7.1 Calcul algébrique de la matrice rotation à partir de trois marqueurs

Un minimum de trois marqueurs par segment est nécessaire pour déterminer la matrice rotation. Soit le repère $\mathcal{R}_1 \{M_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1\}$ lié au solide S_1 . Ce solide est repéré par trois marqueurs M_1, M_2 et M_3 (figure 7.1). La position de ces marqueurs est mesurée dans le référentiel de base $\mathcal{R}_0 \{O, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0\}$.

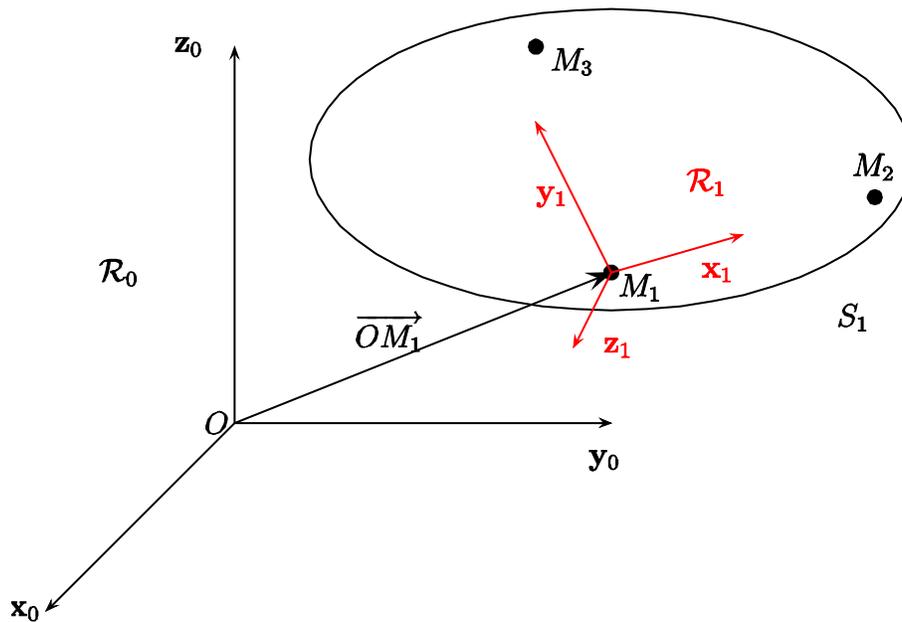


FIG. 7.1 – Les positions des 3 marqueurs fixés sur le solide S_1 permettent de définir un repère \mathcal{R}_1 et de calculer la matrice rotation 1_0R .

Les trois colonnes de la matrice rotation 0_1R permettant de passer de \mathcal{R}_1 dans \mathcal{R}_0 sont constituées des composantes des vecteurs $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_1$ dans la base de référence \mathcal{R}_0 [Lallemant et Zeghloul, 1994; Liégeois, 1984; Wittenburg, 1977] :

$${}^0_1R = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_0 \rangle & \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_0 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{x}_0 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0 \rangle & \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_0 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{y}_0 \rangle \\ \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{z}_0 \rangle & \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{z}_0 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_0 \rangle \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Ainsi, à partir des positions $\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}$ et $\overrightarrow{OM_3}$ des trois marqueurs M_1, M_2 et M_3 dans \mathcal{R}_0 , on construit 0_1R de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\|\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}\|} \\ \mathbf{z}_1 &= \mathbf{x}_1 \wedge \frac{\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1}}{\|\overrightarrow{OM_3} - \overrightarrow{OM_1}\|} \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{x}_1 \\ {}^0_1R &= [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{z}_1]. \end{aligned}$$

Soit $\overrightarrow{M_1M_2}^{(1)}$ la position du point M_2 dans \mathcal{R}_1 . La relation est alors la suivante :

$$\overrightarrow{OM_2}^{(0)} = {}^0_1R \overrightarrow{M_1M_2}^{(1)} + \overrightarrow{OM_1}^{(0)}.$$

où $\overrightarrow{OM_1}^{(0)}$ représente la position de l'origine de \mathcal{R}_1 dans \mathcal{R}_0 (figure 7.1).

La matrice rotation déterminée ainsi à partir de trois marqueurs s'obtient facilement. Cependant, toujours dans le but de traiter au mieux les données bruitées, certaines études ont montré l'intérêt de multiplier les marqueurs sur un même segment afin d'améliorer la détermination de cette matrice rotation [Challis, 1995a,b; Spoor et Veldpaus, 1980; Veldpaus *et al.*, 1988]. Les algorithmes de minimisation proposés utilisent les propriétés suivantes de la matrice rotation :

$$R^T R = R R^T = \mathbb{1}_3$$

$$R^T = R^{-1}$$

$$\det(R) = 1.$$

7.2 Optimisation de la matrice rotation à partir de plus trois marqueurs

Dans cette section, la matrice rotation est calculée à partir d'un nombre de marqueurs supérieur ou égal à quatre par un algorithme de gradient conjugué. Dans un premier temps, la matrice rotation calculée permet de passer du repère lié au solide à l'instant t_n au même repère à l'instant t_0 .

7.2.1 Matrice rotation entre deux instants consécutifs

Soit \mathbf{b}_1 le vecteur $\overrightarrow{M_1M_4}$ à l'instant t_0 et \mathbf{c}_1 le même vecteur à l'instant t_1 (figure 7.2).

Dans un premier temps, la matrice rotation ${}^{t_1}R$ qui permet de passer du repère \mathcal{R}_1 à l'instant t_1 au même repère à l'instant t_0 va être calculée; soit : $\mathbf{b}_1 = {}^{t_1}R \mathbf{c}_1$. Afin de faciliter la lecture, cette matrice est notée $R = {}^{t_1}R$. Dans l'exemple illustré sur la figure (7.2), quatre marqueurs sont fixés sur le solide et on dispose de six vecteurs liés au solide S_1 . Ainsi, nous allons chercher R en minimisant la fonction coût :

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \|\mathbf{b}_i - R \mathbf{c}_i\|^2. \quad (7.2)$$

En développant cette expression, on obtient :

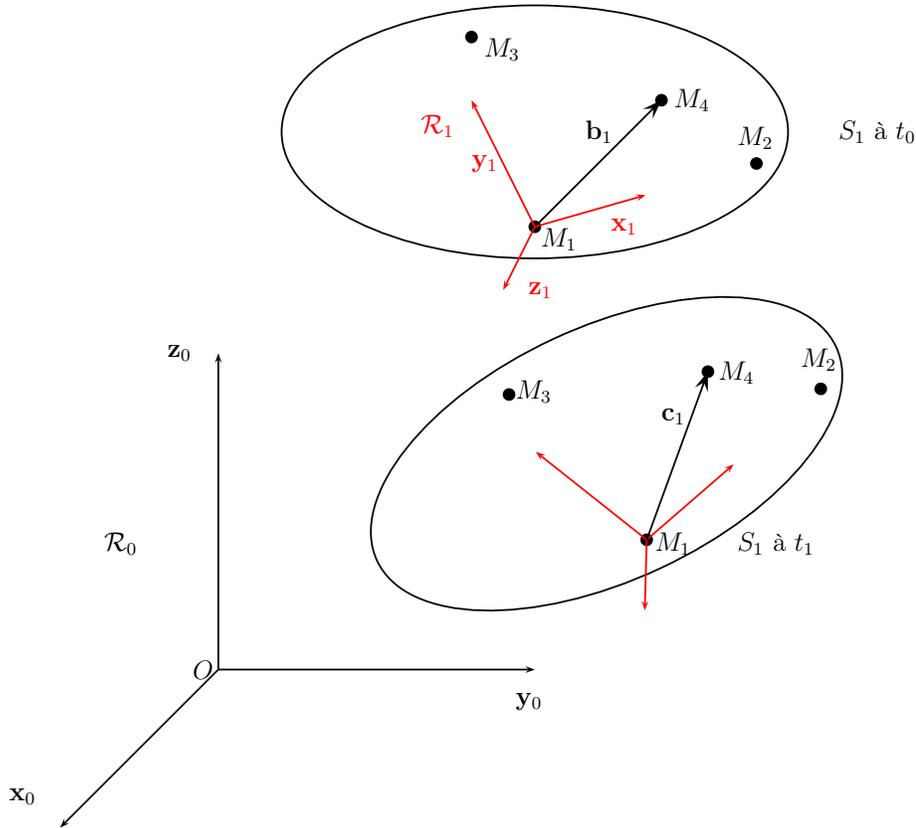
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \|\mathbf{b}_i - R \mathbf{c}_i\|^2 &= \frac{1}{2} \sum_i \text{tr} \left[(\mathbf{b}_i - R \mathbf{c}_i) (\mathbf{b}_i - R \mathbf{c}_i)^T \right] \\ &= \frac{1}{2} \text{tr} \sum_i (\mathbf{b}_i \mathbf{b}_i^T + \mathbf{c}_i \mathbf{c}_i^T) - \frac{1}{2} \text{tr} \left[R \sum_i (\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i^T) \right] - \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sum_i (\mathbf{b}_i \mathbf{c}_i^T) R^T \right] \end{aligned}$$

(nous avons utilisé la propriété de la rotation : $R^T R = \mathbf{1}_3$).

Notre problème de minimisation devient un problème de maximisation :

$$\max_{R^T R = \mathbf{1}_3} \text{tr} \left[R \sum_i (\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i^T) \right]. \quad (7.3)$$

Lorsque R varie de δR , $(\delta R)^T R + R^T (\delta R) = 0$. Pour respecter cette contrainte, on introduit une matrice Λ symétrique ($\Lambda^T = \Lambda$) de multiplicateurs de Lagrange. Cette technique

FIG. 7.2 – Orientation du corps S_1 .

conduit alors à imposer pour toute variation δR de R :

$$\text{tr} \left[\delta R \sum_i (\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i^T) \right] = \text{tr} (\Lambda R^T \delta R) \\ \text{tr} (\delta R \Lambda R^T).$$

En conséquence :

$$\sum_i (\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i^T) = \Lambda R^T \quad \text{ou} \quad \sum_i (\mathbf{b}_i \mathbf{c}_i^T) = R \Lambda$$

A partir des données, nous pouvons construire la matrice :

$$F = \sum_i (\mathbf{b}_i \mathbf{c}_i^T).$$

Trouver la rotation R revient alors à effectuer la décomposition polaire de F . Décomposer un tenseur en un produit d'un tenseur orthogonal par un tenseur symétrique défini positif à gauche ou à droite s'effectue habituellement de la manière suivante : on remarque que le tenseur :

$$C = F^T F = \Lambda R^T R \Lambda = \Lambda^2 \quad (7.4)$$

est symétrique et défini positif, on peut en prendre la racine

$$\Lambda = C^{1/2} \quad (7.5)$$

on en déduit la rotation cherchée :

$$R = F \Lambda^{-1}. \quad (7.6)$$

Elle satisfait bien les propriétés caractéristiques des rotations :

$$R^T R = \Lambda^{-1} F^T F \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \Lambda^2 \Lambda^{-1} = \mathbf{1}_3 \quad (7.7)$$

$$\det(R) = \frac{\det(F)}{\det(\Lambda)} = \frac{\det(F)}{\sqrt{\det(C)}} = \frac{\det(F)}{\sqrt{(\det(F^T))(\det(F))}} = \frac{\det(F)}{\sqrt{(\det(F))^2}} = 1 \quad (7.8)$$

Toutefois, nous préférons éviter l'inversion de la matrice Λ , nous allons donc utiliser une autre méthode proposée par [Bouby et al. \[2005\]](#) qui calcule directement la matrice rotation R .

Toute rotation R peut s'exprimer sous la forme suivante [[Souriau, 1964](#)] :

$$R = (m_0^2 - \langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle) \mathbf{1}_3 + 2\mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + 2m_0 [j(\mathbf{m})]. \quad (7.9)$$

où $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix}$ et m_0 sont respectivement un vecteur et un scalaire liés par la relation :

$$\langle \mathbf{m}, \mathbf{m} \rangle + m_0^2 = 1. \quad (7.10)$$

On dit que $X = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \\ m_0 \end{bmatrix}$ est un quaternion.

A partir de la partie symétrique de F

$$S = \frac{1}{2}(F + F^T) \quad (7.11)$$

et de sa partie antisymétrique

$$j(\mathbf{w}) = F - F^T, \quad (7.12)$$

on forme la matrice 4×4 symétrique suivante

$$Q = \begin{bmatrix} 2S - [\text{tr}(S)] \mathbb{1}_3 & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^T & \text{tr}(S) \end{bmatrix}. \quad (7.13)$$

Ainsi, la trace de $(F^T R)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{tr}(F^T R) = \langle X, QX \rangle. \quad (7.14)$$

Le problème de maximisation (7.3) se ramène à la maximisation d'une forme quadratique. On peut en déduire que $\text{tr}(F^T R)$ sera maximum lorsque X sera un vecteur propre de Q associé à la plus grande de ses valeurs propres. Ce problème peut être résolu de deux façons :

- maximiser la forme quadratique $\langle X, QX \rangle$ en respectant la condition $\langle X, X \rangle = 1$.
- maximiser $\phi(X) = \langle Q \frac{X}{\|X\|}, \frac{X}{\|X\|} \rangle = \frac{\langle QX, X \rangle}{\langle X, X \rangle}$ sans condition.

La seconde façon est plus facile à mettre en œuvre, elle consiste à :

1. maximiser le quotient de Rayleigh :

$$\phi(X) = \frac{\langle QX, X \rangle}{\langle X, X \rangle} \quad (7.15)$$

2. normer le vecteur X réalisant le maximum en le divisant par sa norme.

Pour trouver X , on utilise l'algorithme du gradient conjugué de Polak-Ribière (algorithme du paragraphe 2.4) adapté à \mathbb{R}^4 :

1. initialiser X par X_0

$$g_0 = \nabla\phi(X_0)$$

$$d_0 = -g_0; k = 0$$
2. A l'itération k

rechercher μ_k maximisant $\phi(X_k + \mu Z_k)$

$$X_{k+1} = X_k + \mu_k d_k$$

$$d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$$

avec $\beta_k = \frac{\langle g_{k+1}, g_{k+1} - g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle}$
3. si $\nabla\phi(X_{k+1}) \leq \epsilon$ stop, sinon $k = k + 1$ et retour en 2

Cet algorithme doit être utilisé à chaque instant pour déterminer la matrice rotation entre l'instant t_n et l'instant t_0 : ${}^{t_n}R$. Or, il est souvent préférable de connaître la rotation entre l'instant t_n et le repère fixe \mathcal{R}_0 .

7.2.2 Matrice rotation du solide par rapport au repère fixe

La méthode proposée ci-dessus permet de déterminer la matrice rotation entre différentes orientations du solide S_1 , c'est la matrice rotation entre deux instants, par exemple entre t_n et t_0 (${}^{t_n}R$). En effet, pour mettre en œuvre l'algorithme, la matrice de déformation F est construite à partir des vecteurs liés au solide. On ne peut donc pas calculer directement par cette méthode la rotation ${}^{t_n}R$ de \mathcal{R}_{t_n} dans \mathcal{R}_0 . Pour obtenir cette matrice, on calcule par la méthode classique la matrice rotation ${}^{t_0}R$ de \mathcal{R}_{t_0} dans \mathcal{R}_0 puis à chaque instant on calcule la matrice rotation de \mathcal{R}_{t_n} dans \mathcal{R}_0 par le calcul suivant :

$${}^{t_n}R = {}^{t_0}R {}^{t_n}R. \quad (7.16)$$

La section suivante montre l'intérêt de calculer la matrice rotation avec un nombre de marqueurs supérieur ou égal à quatre en analysant les effets sur les grandeurs cinématiques.

7.3 Influence de la matrice rotation sur les grandeurs cinématiques

Afin d'illustrer l'intérêt de calculer la matrice rotation à partir d'un nombre de marqueurs supérieur ou égal à quatre, les grandeurs cinématiques calculées à partir des différentes matrices rotations obtenues avec 3, 4, 5, 6, 7 et 8 marqueurs vont être comparées. Le mouvement aérien simulé du parallélépipède (chapitre 3) a été utilisé pour cette illustration. Un bruit (le même que celui utilisé dans le chapitre 5) a été ajouté aux positions des huit marqueurs placés à chaque coin du solide. La matrice rotation a été calculée à partir des données simulées puis à partir des données bruitées avec un nombre de marqueurs allant de trois à huit.

Dans un article traitant de la détermination de la matrice rotation, [Challis \[1995b\]](#) propose d'évaluer la précision dans l'estimation des paramètres cinématiques en calculant la moyenne de la différence absolue relative (\bar{E}) entre les données issues de la cinématique bruitée et celles issues de la cinématique de référence. La moyenne de la différence absolue relative est calculée par la formule suivante :

$$\bar{E} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{VC_i - VE_i}{VC_i} \right\| \quad (7.17)$$

où n est le nombre de données, VC_i est la valeur critère (obtenue à partir de la cinématique de référence) et VE_i est la valeur estimée à partir des données bruitées.

Cette moyenne a été calculée sur 3 paramètres cinématiques différents : les neuf coefficients de la matrice rotation R , le vecteur taux de rotation ($\boldsymbol{\omega}$) et les neuf coefficients de la dérivée seconde de la matrice rotation (\ddot{R}). Le vecteur taux de rotation est calculé de la façon suivante :

$$j(\boldsymbol{\omega}) = \dot{R}R^T. \quad (7.18)$$

Ainsi, à partir de R , $\boldsymbol{\omega}$ et \ddot{R} , l'effet du bruit va être évalué à chaque niveau de dérivation. La figure(7.3) présente la moyenne de la différence relative absolue pour la matrice rotation, le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ et la dérivée seconde de la matrice rotation en fonction du nombre de marqueurs.

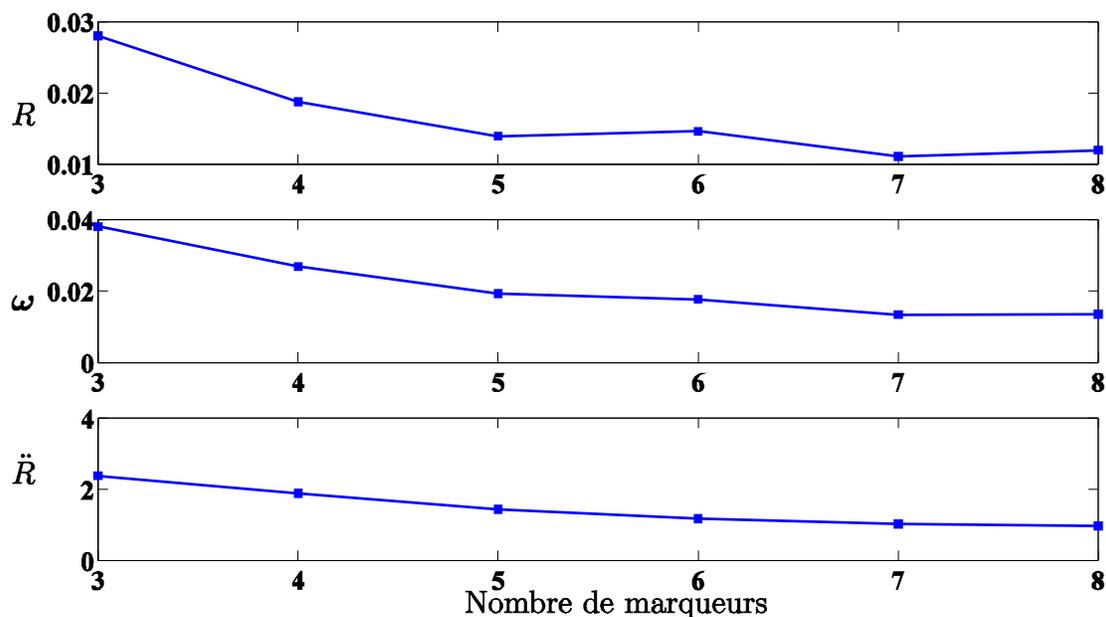


FIG. 7.3 – Variation de la moyenne de la différence absolue relative pour les neuf composantes de la matrice rotation, les trois composantes du vecteur taux de rotation et les neuf composantes de la dérivée seconde de la matrice rotation en fonction du nombre de marqueurs.

L'effet du nombre de marqueurs pour calculer la matrice rotation est peu prononcé sur les neuf coefficients de la matrice rotation, la différence absolue relative est de 0,028 pour trois marqueurs et 0,011 pour sept marqueurs. Ces résultats, comme ceux de [Challis \[1995b\]](#), montrent que la précision de l'estimation augmente avec le nombre de marqueurs ; l'augmentation étant plus importante lorsque le nombre de marqueurs passe de trois à quatre. On peut également remarquer que l'augmentation du nombre de marqueurs n'est pas toujours significative d'une augmentation de précision pour le calcul de la matrice rotation ; en passant de cinq à six marqueurs par exemple, la précision passe de 0,0139 à 0,0146. Néanmoins, cette tendance disparaît avec la dérivation.

Lors de l'analyse de mouvements humain, il est parfois délicat de placer plus de trois marqueurs par segment. En effet, il faut placer les marqueurs à des endroits où l'influence des mouvements de peau n'est pas trop importante et les marqueurs ne doivent pas être

placés trop près les uns des autres pour être correctement discernés par le système cinématographique. Bien évidemment cette dernière condition dépend du système utilisé et de la taille du champ de mesure. Un nombre de quatre marqueurs pour des segments comme le bras ou l'avant bras semble être un maximum avec notre système (SAGA3) et un volume d'acquisition de $0,9 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 1,7 \text{ m}$.

Pour illustrer l'effet du nombre de marqueurs utilisé pour calculer la matrice rotation sur les grandeurs obtenues par dérivation, les figures illustrant l'évolution du vecteur taux de rotation (figure 7.4) et des neuf coefficients de la dérivée seconde de la matrice rotation (figure 7.5) sont présentées. Ces paramètres sont obtenus par une différentiation numérique centrée d'ordre 2 et aucun lissage n'est appliquée sur les données ainsi calculées.

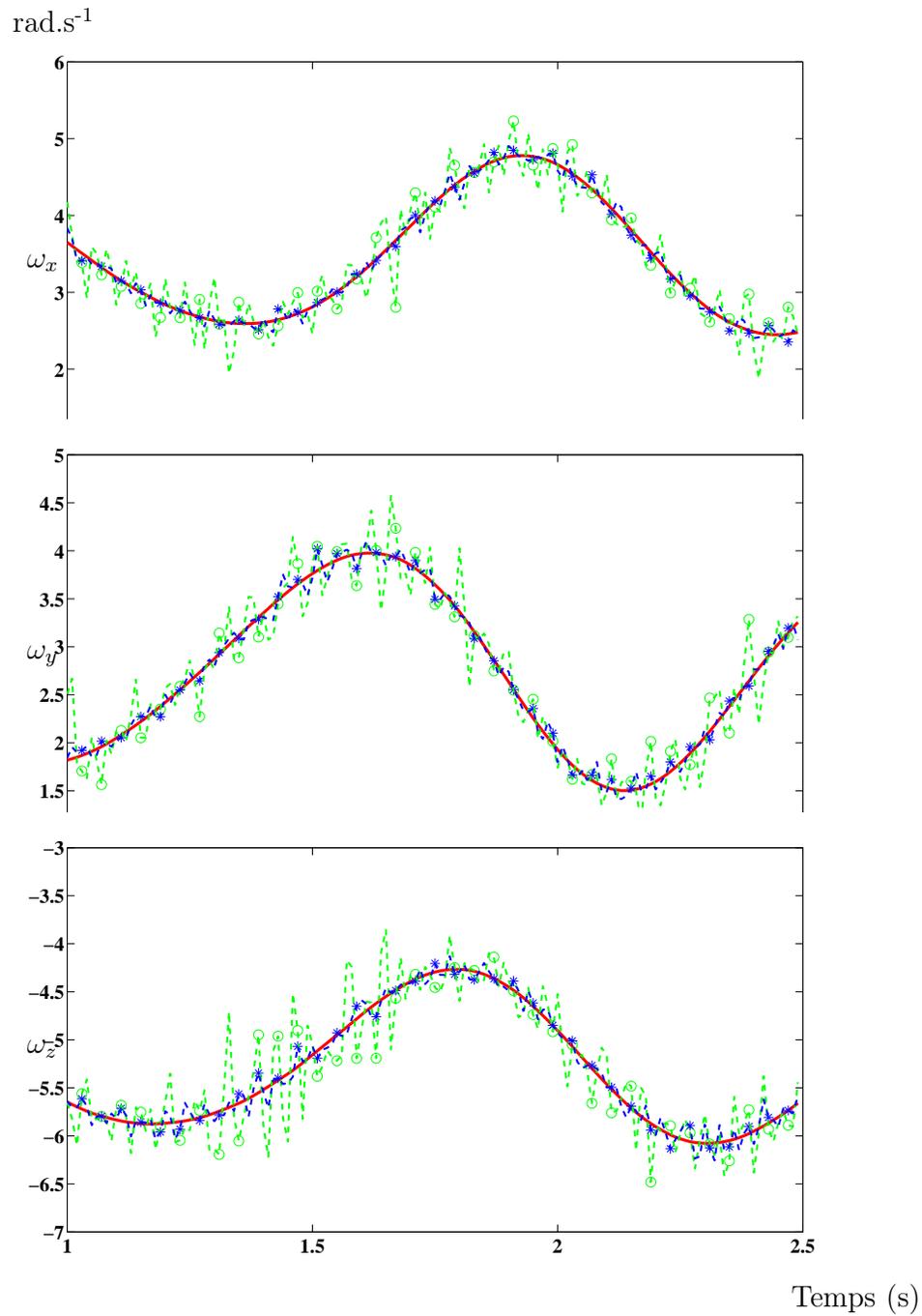


FIG. 7.4 – Evolution des trois composantes du taux de rotation en fonction du temps. Le vecteur est exprimé dans le repère \mathcal{R}_0 et calculé à partir de la matrice rotation provenant des données non bruitées (ligne continue), à partir de la matrice rotation calculée avec trois marqueurs (cercles) et avec huit marqueurs (astérisques).

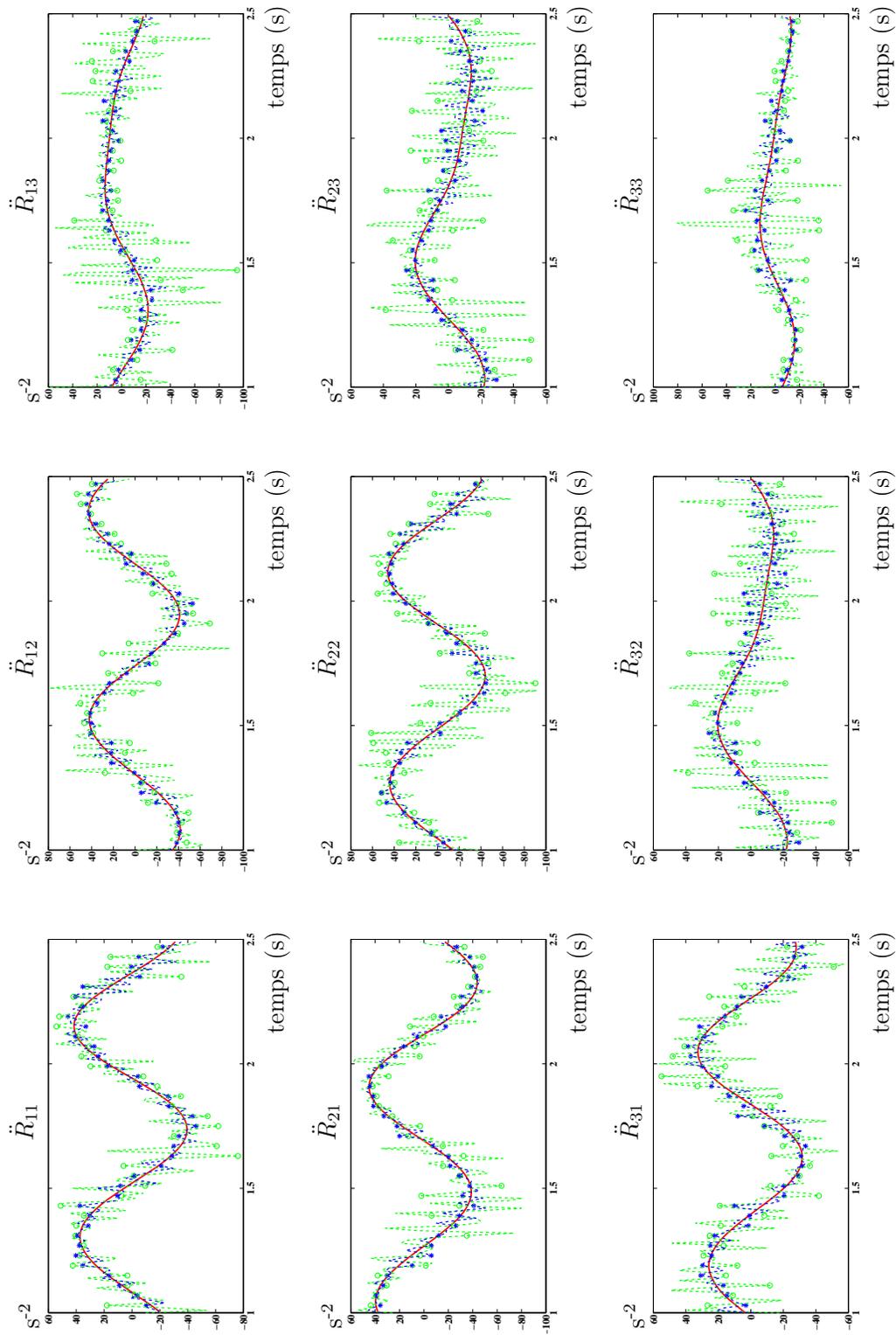


FIG. 7.5 – Evolution des 9 coefficients de la dérivée seconde de la matrice rotation calculées à partir de la cinématique non bruitée (ligne continue rouge), à partir de la matrice rotation calculée avec 3 marqueurs (ronds verts) et avec huit marqueurs (astérisques bleus).

Ces figures mettent en évidence que l'augmentation du nombre de marqueurs pour calculer la matrice rotation permet de réduire de façon non négligeable l'amplification du bruit. Il apparaît alors important de placer un maximum de marqueurs sur un segment afin de déterminer correctement la matrice rotation et surtout limiter l'amplification du bruit sur sa dérivée seconde qui intervient dans les équations de la dynamique. Cependant, [Begon \[2006\]](#) et [Boucher \[2005\]](#) indiquent que la précision du système d'analyse d'images dépend du nombre de caméras détectant un marqueur. Il faut donc faire un compromis entre le nombre de marqueurs et la visibilité de ceux-ci.

Les mouvements à analyser afin de déterminer les PIS sont des mouvements complexes en trois dimensions et entraînent des pertes de marqueurs sur certaines caméras voire des confusions de marqueurs. Lors des acquisitions, quatre marqueurs ont été placés sur le membre supérieur. Le prochain chapitre présente les résultats expérimentaux de l'identification des paramètres inertiels du membre supérieur pour huit sujets.

Identification *in vivo* des paramètres inertiels du membre supérieur

Sommaire

8.1	Protocole expérimental	138
8.2	Traitement des données	139
8.2.1	Cinématique	139
8.2.2	Dynamique	141
8.3	Résultats de l'identification	144
8.4	Effets des paramètres inertiels identifiés sur la dynamique articulaire	149
8.5	Conclusion	150

Dans ce chapitre, la méthode d'identification est appliquée afin de déterminer les paramètres inertiels du membre supérieur du corps humain. Au cours des chapitres précédents nous avons dégagé des principes permettant d'estimer le plus précisément possible les paramètres inertiels. Dans le but d'améliorer la précision dans la détermination de la matrice d'inertie du membre supérieur, nous avons montré l'intérêt, au chapitre 5, de calculer préalablement la position du centre articulaire. Celle-ci a été estimée au chapitre 6 par une méthode fonctionnelle simple et robuste s'appuyant uniquement sur la position et l'orientation des deux segments communs à l'articulation. Enfin, l'intérêt de déterminer la matrice rotation à partir d'un nombre de marqueurs supérieurs ou égal à quatre a été détaillé au chapitre 7. Toutes ces recommandations sont mises en application dans ce chapitre afin d'identifier *in vivo* les paramètres inertiels du membre supérieur. Ces résultats et méthodes

ont été exposés lors de deux congrès internationaux [Monnet *et al.*, 2007a,d].

8.1 Protocole expérimental

Huit des neuf sujets (noté s_i , $i=1$ à 8) ayant participé à l'étude concernant la détermination du centre articulaire glénohumérale ont pris part à cette nouvelle étude. Dans le cas du neuvième sujet, l'absence d'enregistrement dynamographique a compromis l'exploitation des données pour cette application. Les mouvements utilisés afin de calculer la position du centre articulaire sont conservés (flexion/extension, abduction/adduction et circumduction). Une condition est ajoutée afin de stimuler correctement les paramètres inertiels segmentaires : effectuer les mouvements avec une vitesse d'exécution importante. Suivant les suggestions du doctorant-kiné de l'équipe, nous avons ajouté un quatrième mouvement que nous nommons « mouvement du kiné ». Il s'agit d'un mouvement combinant les trois rotations du membre supérieur : flexion, abduction horizontale, adduction et rotation interne. Ce mouvement est le seul contenant une rotation interne du membre supérieur et donc le seul à stimuler le moment d'inertie autour de l'axe longitudinal.

La position des marqueurs est identique à celle qui a permis la localisation du centre articulaire glénohumérale : quatre marqueurs sont placés sur le bras, trois sur un cluster rigide fixé sur l'acromion, trois sur le tronc (deux sur le sternum et un sur C7¹). Des marqueurs anatomiques sont pointés en utilisant la méthode détaillée au chapitre 6. Ces marqueurs sont l'épicondyle, l'épitrochlée, l'articulation sterno-claviculaire et les cinq points anatomiques de l'omoplate (Annexe A).

La consigne donnée aux huit sujets est de réaliser les mouvements en bloquant le coude. Le membre supérieur est considéré comme un segment rigide, les mouvements de flexion de l'avant-bras sur le bras doivent être minimales, de plus le reste du corps doit être immobile. Pour faciliter cette condition, les sujets étaient assis sur une chaise, placée sur la plate-forme de forces.

¹septième vertèbre cervicale

8.2 Traitement des données

Les paramètres cinématiques et dynamiques nécessaires à l'identification des paramètres inertiels sont calculés à partir de la position des marqueurs et des données enregistrées par la plate-forme de forces.

8.2.1 Cinématique

Les matrices A et B intervenant dans les équations du mouvement sont calculées numériquement à partir de la cinématique. La figure 8.1 illustre les différents repères utilisés.

L'origine du repère « cinéma » (\mathcal{R}_0) correspond à un coin de la plate-forme de forces. L'origine du repère « plate-forme » (\mathcal{R}_{pf}) est situé en son centre géométrique. Un repère \mathcal{R}_2 est défini à partir des quatre marqueurs fixés sur le bras. La matrice rotation 2_0R est calculée à chaque instant. Un repère \mathcal{R}_1 est fixé au tronc, l'axe vertical (\mathbf{z}_1) étant porté par l'axe du sternum, l'axe transverse (\mathbf{x}_1) est perpendiculaire au plan formé par le sternum et la vertèbre C7 et dirigé vers la gauche du sujet. L'axe sagittal (\mathbf{y}_1) est le produit vectoriel $\mathbf{z}_1 \wedge \mathbf{x}_1$. Le tronc est supposé immobile, une matrice rotation moyenne (${}^1_0\bar{R}$) est calculée numériquement à partir de la matrice rotation ${}^1_0R(t)$ déterminée à chaque instant.

A chaque instant t , la matrice B est formée de la façon suivante :

$$B(t) = \begin{bmatrix} {}^2_0R(t) & {}^1_0\bar{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

La matrice A est obtenue par dérivation numérique de ${}^2_0R(t)$:

$$A(t) = \begin{bmatrix} {}^2_0\ddot{R}(t) & [0] & \mathbf{g} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

Seules les 9 coefficients de la dérivée seconde de la matrice rotation sont lissés. La méthode de lissage est la même que celle utilisée précédemment (chapitre 5, paragraphe 5.3.2) : lissage de Savitsky-Golay [Savitzky et Golay, 1964] d'ordre trois et de largeur de fenêtre 15.

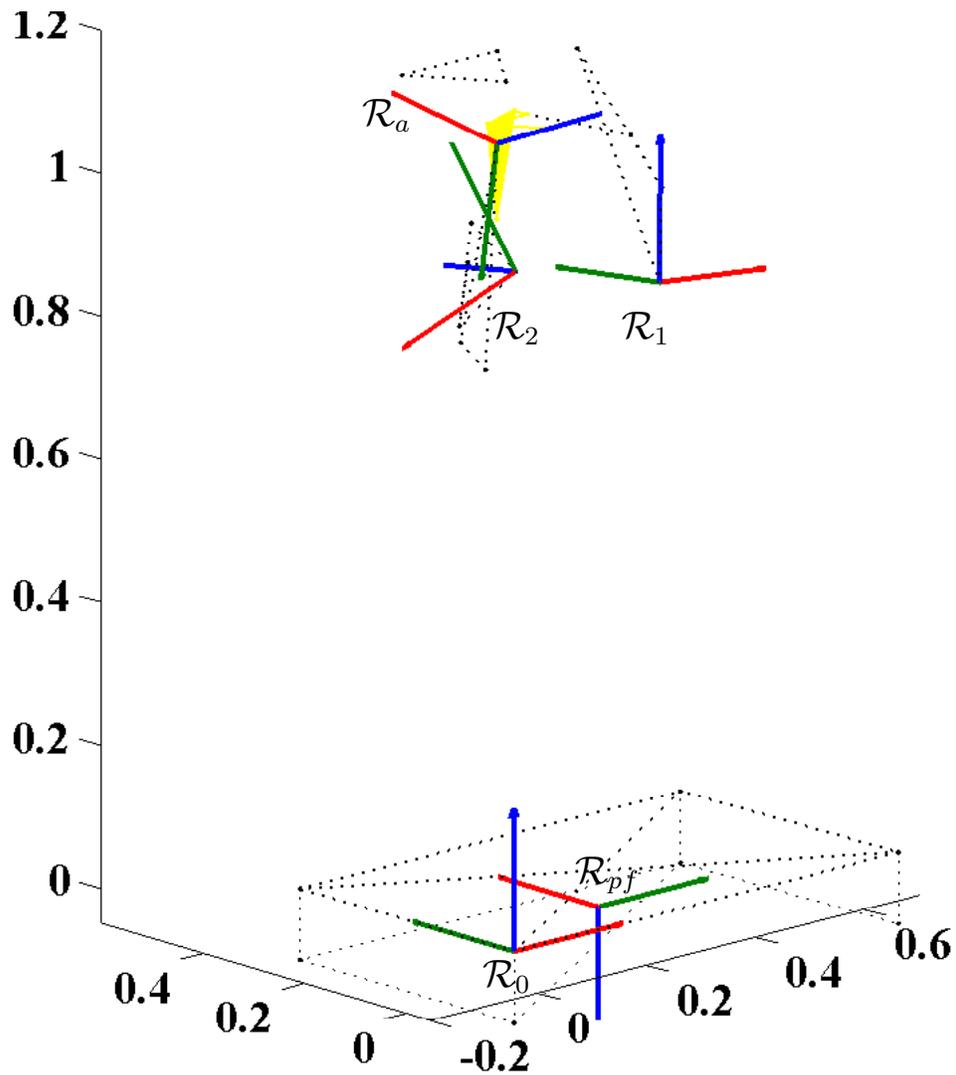


FIG. 8.1 – Représentation des différents repères utilisés : le repère cinéma (\mathcal{R}_0), le repère « plate-forme » (\mathcal{R}_{pf}), le repère lié au tronc (\mathcal{R}_1), le repère lié au bras (\mathcal{R}_2) et le repère anatomique du bras (\mathcal{R}_a), dont l'axe y_a correspond à l'axe longitudinal du bras. Pour chaque repère, l'axe x est en rouge, l'axe y est en vert et l'axe z est en bleu.

Afin d'illustrer la cinématique du mouvement du kiné, le vecteur taux de rotation du membre supérieur est calculé. Ce vecteur est exprimé dans le repère \mathcal{R}_0 :

$$j(\boldsymbol{\omega}) = {}_0^2\dot{R}_0^2 R^T. \quad (8.3)$$

La figure (8.2) montre l'évolution du vecteur $\boldsymbol{\omega}$ au cours du temps pour le mouvement du kiné.

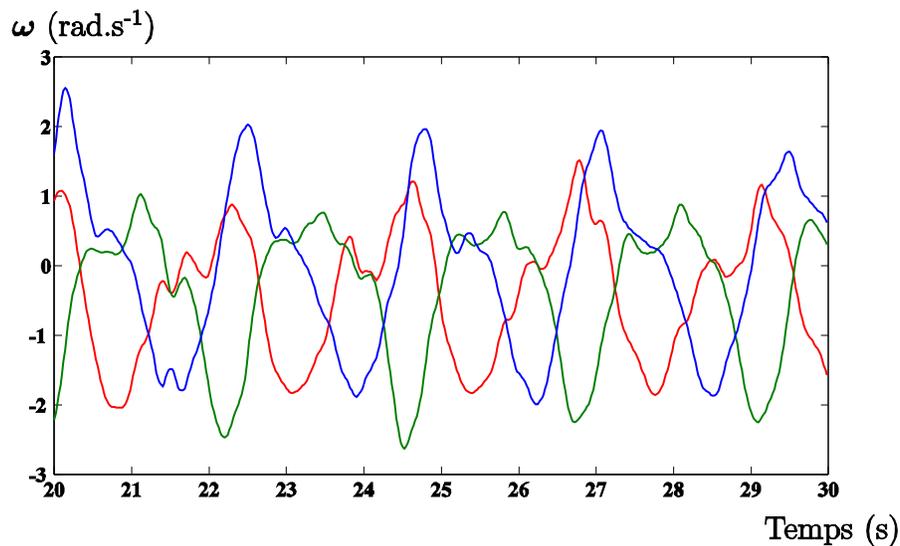


FIG. 8.2 – Evolution des trois composantes du vecteur taux de rotation du bras exprimé dans le repère \mathcal{R}_0 (composante sur \mathbf{x}_0 en rouge, sur \mathbf{y}_0 en vert et sur \mathbf{z}_0 en bleu).

On retrouve sur cette figure le mouvement de flexion (rotation négative autour de \mathbf{x}_0 , en rouge), d'abduction horizontale (rotation négative autour de \mathbf{z}_0 , en bleu), d'adduction (rotation négative autour de \mathbf{y}_0 , en vert) et de rotation interne (rotation positive autour de \mathbf{z}_0). Cette figure est issue d'un mouvement effectué à vitesse rapide, les deux dernières rotations sont effectuées en même temps.

8.2.2 Dynamique

La plate-forme de forces enregistre la résultante des forces exercées sur le plateau ainsi que le moment résultant de ces forces calculé au centre du plateau. Ces deux grandeurs sont

exprimées dans le repère plate-forme (\mathcal{R}_{pf} , figure 8.1). Le torseur \mathcal{T} du modèle d'identification représente les efforts extérieurs exercés sur le corps S_1 , nous prenons donc l'opposé des valeurs mesurées par la plate-forme de forces et nous exprimons ces données dans le repère « cinéma » \mathcal{R}_0 . La figure (8.3) présente l'évolution de la force de réaction en fonction du temps pour le sujet s_8 lors du mouvement du kiné.

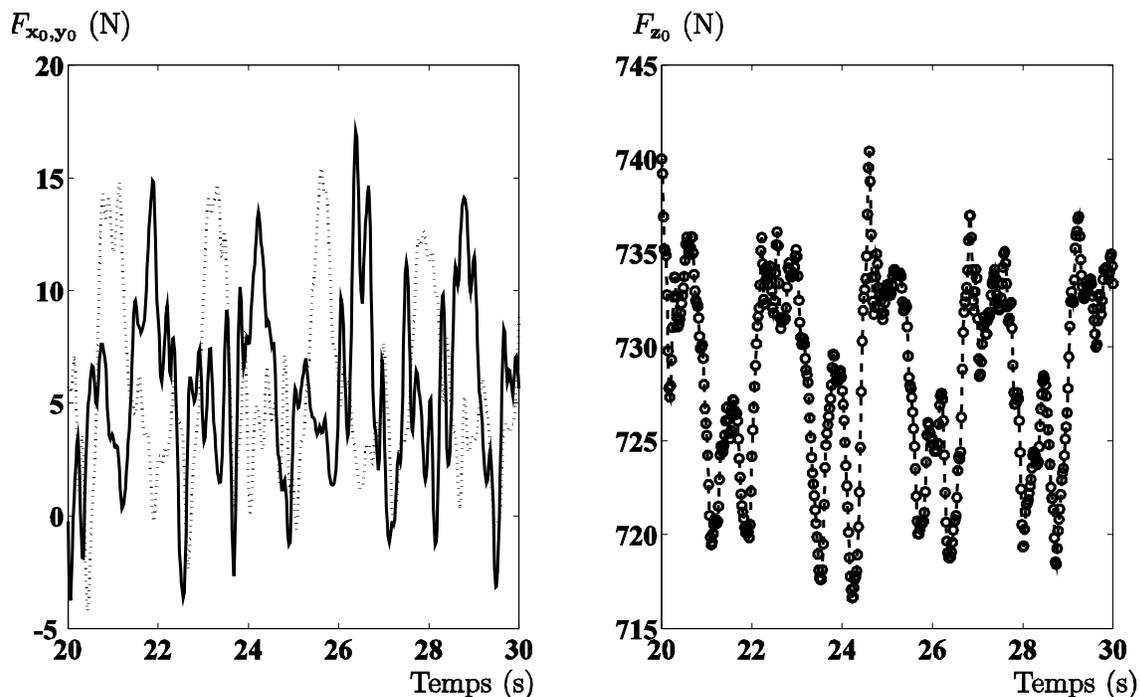


FIG. 8.3 – Evolution des trois composantes de la force de réaction \mathbf{F} exprimées dans le repère \mathcal{R}_0 (composante sur \mathbf{x}_0 (ligne continue), sur \mathbf{y}_0 (ligne pointillée) et sur \mathbf{z}_0 (cercles)).

Comme il a été montré au cours du chapitre 5, le moment résultant doit être calculé au centre articulaire glénohumérale afin d'améliorer la précision dans l'estimation de la matrice d'inertie du membre supérieur. Le moment résultant (noté \mathbf{M}_{GH}) est calculé au centre articulaire glénohumérale, dont la position a été calculée pour chaque sujet au chapitre 6. La figure (8.4) présente le moment résultant calculé au centre de la plate-forme et au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_8 lors du mouvement du kiné. Ce moment est exprimé dans \mathcal{R}_0 .

La matrice \mathcal{T} représentant les efforts extérieurs appliqués au corps S_1 est formée à

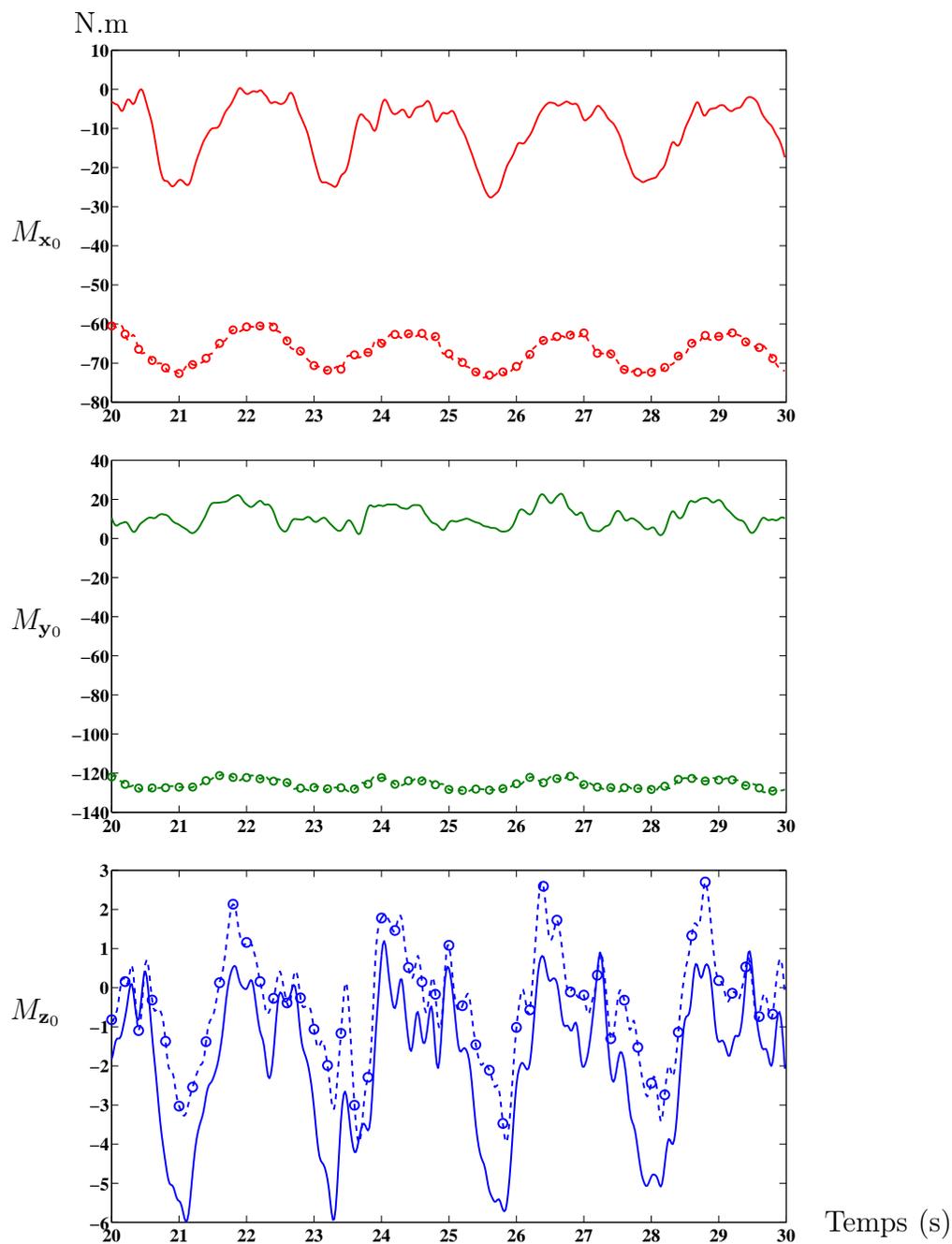


FIG. 8.4 – Evolution des trois composantes du moment résultant calculé au centre de la plate-forme (ligne continue) et au centre articulaire glénohumérale (ligne pointillée avec des cercles).

chaque instant (t) de la façon suivante :

$$\mathcal{T}_{GH}(t) = \begin{bmatrix} j(\mathbf{M}_{GH})(t) & \mathbf{F}(t) \\ -\mathbf{F}^T(t) & 0 \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

8.3 Résultats de l'identification

Plusieurs combinaisons ont été essayées à partir des différents mouvements (flexion-extension, abduction-adduction, rotation, mouvement du kiné). Pour ces différentes combinaisons, la fonction coût a été formée et minimisée. Aucune des différentes combinaisons essayées n'apportait satisfaction sauf le mouvement du kiné. Soit le gradient ne convergait pas, soit les résultats étaient aberrants. La figure (8.5) trace l'évolution de la norme du gradient pour le sujet s_2 (des figures pour les huit sujets sont présentées en annexe B).

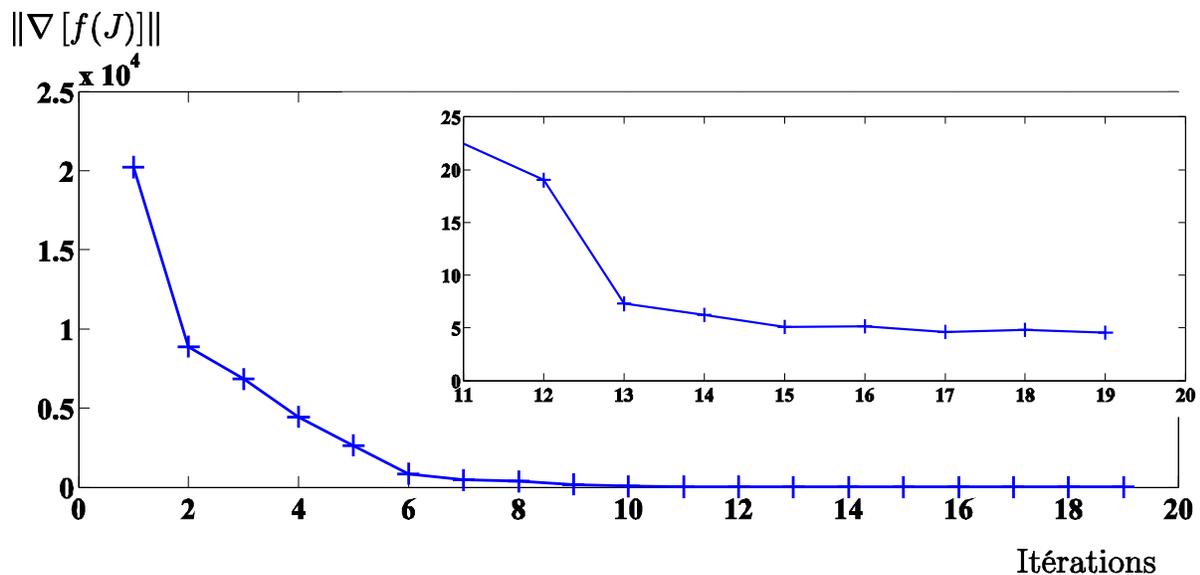


FIG. 8.5 – Evolution du gradient pour le sujet s_2 .

La convergence de la suite J_k est atteinte en 19 itérations, la norme du gradient de la fonction coût stagne et l'évolution de $\|J_{k+1} - J_k\|$ est devenue inférieure au critère d'arrêt

fixé à 10^{-4} . Au terme de ces itérations, la valeur approchée de J est la suivante :

$$J^* = \begin{bmatrix} 0,2648 & -0,1995 & -0,1101 & 0 & 0 & 0 & 0,5630 \\ -0,1995 & 0,2993 & 0,0793 & 0 & 0 & 0 & -0,4644 \\ -0,1101 & 0,0793 & 0,0459 & 0 & 0 & 0 & -0,2190 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15,3118 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5,3829 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,4232 \\ 0,5630 & -0,4644 & -0,2190 & 15,3118 & -5,3829 & -0,4232 & 81,9253 \end{bmatrix}$$

(Les matrices J identifiées pour chaque sujet sont présentées en annexe).

A partir de cette matrice identifiée, nous avons calculé les paramètres inertiels du membre supérieur droit (matrice d'inertie et moment du premier ordre) et nous les avons exprimés dans un repère anatomique \mathcal{R}_a similaire à celui du chapitre 5 : l'axe longitudinal est l'axe \mathbf{y}_a , l'axe \mathbf{x}_a est l'axe transverse et \mathbf{z}_a et l'axe sagittal. Les paramètres inertiels du membre supérieur droit des huit sujets sont rassemblés dans les tableaux (8.1) à (8.8). Nous les comparons aux paramètres inertiels obtenus en appliquant le modèle de [Zatsiorsky et Seluyanov \[1990\]](#) (adapté par [de Leva \[1996\]](#)).

TAB. 8.1 – Matrice d’inertie identifiée et calculée à partir du modèle de Zatsiorsky (de Leva) pour le sujet (s_1)

s_1 : 1,82 m 71,5 kg	Identification	de Leva
Matrice d’inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,4428 & -0,0849 & 0,0005 \\ -0,0849 & 0,0359 & -0,0378 \\ 0,0005 & -0,0378 & 0,4569 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4721 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0062 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4696 \end{bmatrix}$
Tenseur d’ordre 1 ($kg.m$)	$[0,2698 \ 0,8669 \ 0,1317]^T$	$[0 \ 1,1100 \ 0]^T$

TAB. 8.2 – Matrice d’inertie identifiée et calculée à partir du modèle de Zatsiorsky (de Leva) pour le sujet (s_2)

s_2 : 1,76 m 78,1 kg	Identification	de Leva
Matrice d’inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,5222 & -0,1008 & -0,0414 \\ -0,1008 & 0,1140 & 0,0026 \\ -0,0414 & 0,0026 & 0,5839 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4789 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0062 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4764 \end{bmatrix}$
Tenseur d’ordre 1 ($kg.m$)	$[0,2522 \ 0,7175 \ 0,0472]^T$	$[0 \ 1,1643 \ 0]^T$

TAB. 8.3 – Matrice d’inertie identifiée et calculée à partir du modèle de Zatsiorsky (de Leva) pour le sujet (s_3)

s_3 : 1,90 m 91,7 kg	Identification	de Leva
Matrice d’inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,5955 & -0,0716 & -0,0067 \\ -0,0716 & 0,0702 & -0,0170 \\ -0,0067 & -0,0170 & 0,6640 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6553 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0085 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6518 \end{bmatrix}$
Tenseur d’ordre 1 ($kg.m$)	$[0,0995 \ 1,1100 \ -0,0471]^T$	$[0 \ 1,4758 \ 0]^T$

TAB. 8.4 – Matrice d’inertie identifiée et calculée à partir du modèle de Zatsiorsky (de Leva) pour le sujet (s_4)

s_4 : 1,77 m 67,0 kg	Identification	de Leva
Matrice d’inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,4066 & 0,0315 & 0,0240 \\ 0,0315 & 0,0640 & 0,0244 \\ 0,0240 & 0,0244 & 0,4223 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4155 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0054 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4133 \end{bmatrix}$
Tenseur d’ordre 1 ($kg.m$)	$[-0,0683 \ 0,9236 \ -0,0675]^T$	$[0 \ 1,0045 \ 0]^T$

TAB. 8.5 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir du modèle de Zatsiorsky (de Leva) pour le sujet (s_5)

s_5 : 1,78 m 74,9 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,5168 & -0,0541 & 0,0072 \\ -0,0541 & 0,0270 & -0,0059 \\ 0,0072 & -0,0059 & 0,5085 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4698 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0061 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4673 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 ($kg.m$)	$[0,1200 \ 1,0285 \ 0,0787]^T$	$[0 \ 1,1293 \ 0]^T$

TAB. 8.6 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir du modèle de Zatsiorsky (de Leva) pour le sujet (s_6)

s_6 : 1,79 m 74,1 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,4051 & -0,0183 & -0,0074 \\ -0,0183 & 0,0515 & 0,0341 \\ -0,0074 & 0,0341 & 0,4472 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4700 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0061 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4675 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 ($kg.m$)	$[0,0611 \ 0,7876 \ -0,1158]^T$	$[0 \ 1,1235 \ 0]^T$

TAB. 8.7 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir du modèle de Zatsiorsky (de Leva) pour le sujet (s_7)

s_7 : 1,80 m 78,4 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,5037 & 0,0248 & 0,0003 \\ 0,0248 & 0,0045 & -0,0214 \\ 0,0003 & -0,0214 & 0,5048 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5029 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0066 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5002 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 ($kg.m$)	$[-0,0429 \ 0,7603 \ 0,0201]^T$	$[0 \ 1,1954 \ 0]^T$

TAB. 8.8 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir du modèle de Zatsiorsky (de Leva) pour le sujet (s_8)

s_8 : 1,80 m 70,4 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,4914 & -0,0359 & -0,0144 \\ -0,0359 & 0,0346 & -0,0048 \\ -0,0144 & -0,0048 & 0,4805 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4516 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0059 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4491 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 ($kg.m$)	$[0,1123 \ 1,2210 \ -0,0485]^T$	$[0 \ 1,0734 \ 0]^T$

La lecture de ces résultats nous permet de tirer plusieurs conclusions. Tout d'abord, excepté pour le sujet s_7 , les moments d'inertie selon l'axe longitudinal identifiés selon notre méthode sont très différents de ceux obtenus à partir des données de Zatsiorsky. Différentes hypothèses sont avancées pour expliquer cette discordance. Tout d'abord, il peut s'agir d'un biais expérimental induit par une flexion du coude lors de la réalisation des mouvements. Ceci expliquerait alors la valeur importante du moment d'inertie selon l'axe longitudinal que nous avons identifiée pour sept des huit sujets. Cet argument permettrait également d'expliquer les valeurs importantes des moments du premier ordre identifiés selon les axes \mathbf{x}_a et \mathbf{z}_a . De plus, selon les sujets les axes longitudinaux du bras et de l'avant bras ne sont pas exactement colinéaires. Ce cubitus varus plus ou moins prononcé n'a pas été pris en compte dans l'estimation des paramètres inertiels par le modèle de Zatsiorsky, ceci explique l'absence de produits d'inertie.

Pour les mêmes raisons, le moment du premier ordre du membre supérieur droit obtenu à partir de la méthode d'identification présente des composantes non nulles selon les axes \mathbf{x}_a et \mathbf{z}_a alors qu'elles sont nulles lorsqu'on applique la méthode de Zatsiorsky.

Les valeurs identifiées de la matrice d'inertie du membre supérieur correspondent à des valeurs réalistes et proches des valeurs calculées par la modélisation anthropométrique classique de Zatsiorsky. Concernant les valeurs identifiées des moments du premier ordre, il est délicat de juger de leurs qualités. Évidemment, la difficulté dans l'interprétation des résultats vient du fait qu'il n'y a pas de référence, de « gold standard » concernant les PIS. Les valeurs calculées à partir du modèle de Zatsiorsky nous permettent de fixer un ordre de grandeur mais en aucun cas ces valeurs ne constituent les valeurs de référence. Afin de montrer l'influence des paramètres inertiels sur la dynamique articulaire, nous allons comparer pour les différents sujets les couples à l'épaule en les calculant à partir des paramètres inertiels identifiés et obtenus par la méthode de Zatsiorsky.

8.4 Effets des paramètres inertiels identifiés sur la dynamique articulaire

Le calcul des forces et moments articulaires par dynamique inverse nécessite de connaître les PIS et la cinématique des segments. La sensibilité des efforts ainsi calculés dépend de la qualité de ces données d'entrées. Les effets des incertitudes provenant des données cinématiques et des données sthéniques sont connus et peuvent être réduits par des traitements adaptés [Cahouët *et al.*, 2002; Charlton *et al.*, 2004; Rao *et al.*, 2006]. En revanche, l'influence des paramètres inertiels sur la dynamique articulaire est plus controversée, particulièrement lors de l'étude de la marche [Rao *et al.*, 2006]. Certaines études concluent que les variations des PIS ont peu d'influence [Challis et Kerwin, 1996; Fantozzi *et al.*, 2005; Ganley et Powers, 2004; Pearsall et Costigan, 1999] alors que d'autres estiment que ces variations peuvent entraîner des différences significatives sur la dynamique articulaire [Andrews et Mish, 1996; Kingma *et al.*, 1996; Lenzi *et al.*, 2003; Silva et Ambrosio, 2004].

L'objet de cette section est de mettre en évidence les différences observées sur les couples articulaires calculés à partir des PIS identifiés par notre méthode et calculés à partir des régressions de Zatsiorsky. Les mouvements étudiés sont les mouvements ayant servi à l'identification des paramètres inertiels : flexion-extension, abduction-adduction, circumduction et mouvement du kiné. La figure (8.6) présente le moment calculé à l'épaule droite lors d'un mouvement de flexion-extension réalisé par le sujet 2. Des courbes similaires sont présentées en annexe pour les différents mouvements réalisés par les huit sujets.

Contrairement à l'étude de Pearsall et Reid [1994], la figure (8.6) montre que les variations des paramètres inertiels modifient l'allure des moments articulaires. De plus ces différences augmentent avec l'accélération du segment : plus un mouvement est accéléré, plus l'effet des paramètres inertiels sur les grandeurs dynamiques est important. La non-identification de la masse par notre modèle d'identification n'est pas une limite pour calculer le moment puisque la masse n'intervient pas dans ce calcul.

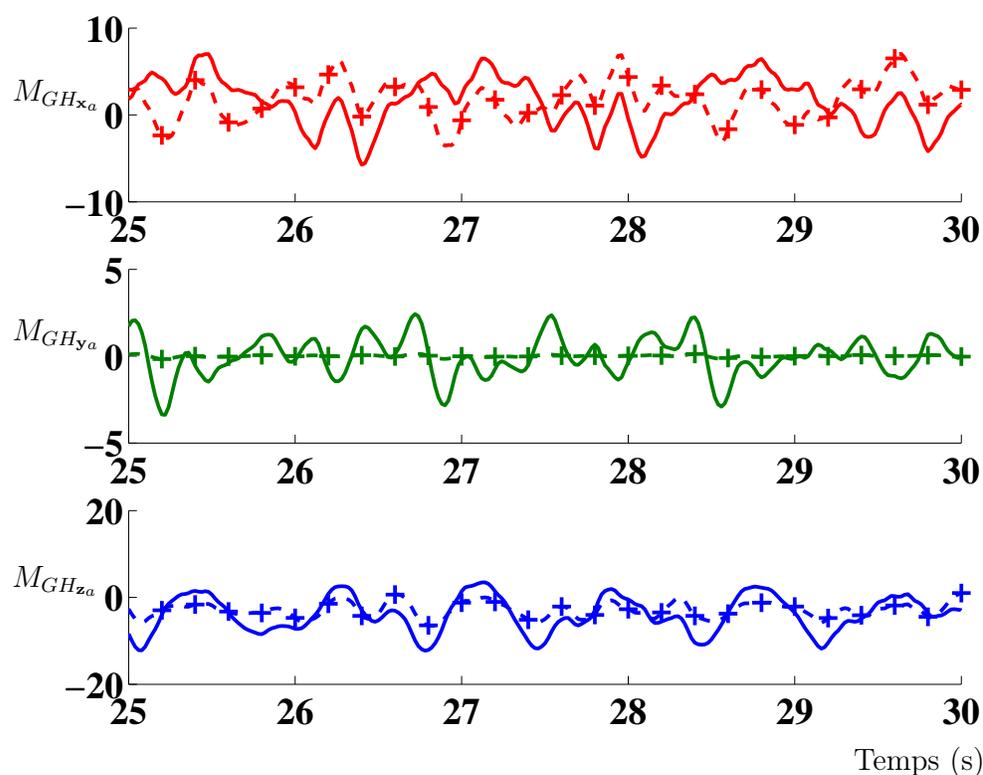


FIG. 8.6 – Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_2 lors de mouvements de flexion/extension à partir des paramètres inertiels identifiés (ligne continue) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix).

8.5 Conclusion

La méthode d'identification proposée permet d'obtenir les paramètres inertiels des segments du corps humain. Les premiers résultats sont prometteurs bien que la modélisation à deux segments simplifie beaucoup la réalité. Comparés à des valeurs obtenus à partir d'une modélisation classique, ils sont individualisés. La modélisation à trois segments va permettre d'obtenir les paramètres inertiels pour des segments tels le bras ou l'avant bras ou encore pour les membres inférieurs. Pour évaluer notre méthode d'identification, le recours à des modélisations plus précises que celle de Zatsiorsky (comme le modèle de [Hatzte \[1980\]](#) par exemple) ou à des méthodes d'imageries médicales (IRM) est nécessaire.

Conclusion générale

Dans le domaine de l'analyse du mouvement humain, la validité des valeurs expérimentales des données dynamiques repose fortement sur l'estimation des paramètres inertiels des différents segments constituant le corps humain. De nos jours, la plupart des études biomécaniques font appel à des tables anthropométriques. Ces tables ont été établies à partir de mesures sur un petit nombre de cadavres ou à partir de statistiques sur des populations spécifiques. L'inconvénient majeur rencontré est que les paramètres inertiels segmentaires ainsi déterminés sont transposés par proportionnalité à des sujets particuliers, sans aucune personnalisation.

Aussi, l'objectif de cette thèse était de proposer une méthode non invasive pour identifier des paramètres inertiels segmentaires personnalisés. Pour cela une procédure d'identification externe a été développée à partir d'une nouvelle formulation des équations du mouvement. Cette méthode d'identification consiste à écrire le modèle de réaction : les efforts entre le système multicorps et l'extérieur sont mis en relation avec la cinématique des segments. Le principal intérêt de l'identification externe est que les données expérimentales nécessaires sont obtenues par les outils classiques d'analyses biomécaniques : système cinématographique et plate-forme de forces.

Nous avons commencé par formuler les équations du mouvement pour un corps rigide unique sous forme d'égalité entre matrices 4×4 antisymétriques. Cette formulation a permis de rassembler les 10 paramètres inertiels dans une matrice 4×4 symétrique et défini-positive. Cette matrice apparaît linéairement dans les équations du mouvement, elle

regroupe les constantes caractéristiques du solide : masse, matrice d'inertie, position du centre d'inertie. Nous avons développé ensuite un algorithme du type « gradient conjugué projeté » pour identifier cette matrice. Une première application à partir du mouvement simulé d'un corps rigide a validé la méthode ainsi que l'algorithme de minimisation. Un protocole expérimental simple a également été proposé pour identifier les 10 paramètres inertiels d'un solide réel. Les données nécessaires à cette identification sont issues de la cinématique du mouvement du solide et de la mesure d'une force extérieure exercée sur le solide.

Une génération automatique des équations du mouvement a ensuite été introduite pour un système multicorps composé de n segments. Les paramètres inertiels du système ainsi que les positions des centres articulaires sont rassemblés dans une matrice $(3n + 1) \times (3n + 1)$ symétrique et défini-positive. Nous avons généralisé la méthode d'identification et l'avons validée en retrouvant les paramètres inertiels du modèle Human36 du logiciel de simulation HuMAnS. Les résultats issus du bruitage des mouvements simulés ont mis en exergue l'importance de connaître précisément la position du centre articulaire pour déterminer les paramètres inertiels segmentaires avec une erreur relative maximale de l'ordre de 4%.

Une méthode fonctionnelle pour localiser précisément les centres articulaires a ensuite été utilisée et validée à partir d'une étude expérimentale portant sur neuf sujets. Cette méthode fonctionnelle, ainsi que l'identification des paramètres inertiels, met en évidence l'importance de la matrice rotation de chaque segment. Ces rotations influencent considérablement les résultats et doivent être déterminées avec précision. Aussi, nous avons utilisé un algorithme de gradient conjugué pour calculer une matrice rotation à partir de données redondantes. Toutes ces recommandations ont été ensuite exploitées afin de proposer un protocole expérimental. Associé à la méthode d'identification, il a permis de déterminer les paramètres inertiels personnalisés du membre supérieur droit de huit sujets.

En conclusion, la méthode d'identification proposée est propice à l'identification des paramètres inertiels des segments du corps humain. L'intérêt majeur de la méthode d'identification est d'obtenir des paramètres inertiels propres au sujet étudié. De plus, la procédure

nécessite uniquement l'usage de matériel utilisé classiquement en analyse biomécanique. De prochaines applications de ce travail nous permettrons d'augmenter le nombre de segments pour par exemple dissocier le bras de l'avant bras ou encore pour déterminer les caractéristiques des membres inférieurs. De plus, il sera intéressant de comparer les résultats de notre méthode d'identification avec ceux obtenus par une modélisation fine du corps humain comme l'imagerie médicale.

Bibliographie

- ALLWRIGHT J. (1988). Positive semidefinite matrices : Characterization via conical hulls and least-squares solution of a matrix equation. *SIAM, Journal on Control and Optimization*, 26(3): 537–556.
- ANDREWS J. et MISH S. (1996). Methods for investigating the sensitivity of joint resultants to body segment parameter variations. *Journal of Biomechanics*, 29(5): 651–654.
- ANTONELLI G., CACCAVALE F. et CHIACCHIO P. (1999). Systematic procedure for the identification of dynamic parameters of robot manipulators. *Robotica*, 17(4): 427–435.
- ARTEAGA M. (2003). Robot control and parameter estimation with only joint position measurements. *Automatica*, 39(1): 67–73.
- ATCHONOUGLO E., VALLÉE C., MONNET T. et FORTUNÉ D. (2007). Identification of the ten inertia parameters of a rigid body. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, In Press, corrected proof.
- ATKESON C. G., AN C. H. et HOLLERBACH J. M. (1986). Estimation of inertial parameters of manipulator loads and links. *International Journal of Robotics Research*, 5(3): 101–119.
- BAUER J. J., PAVOL M. J., SNOW C. M. et HAYES W. C. (2007). MRI-derived body segment parameters of children differ from age-based estimates derived using photogrammetry. *Journal of Biomechanics*, 40(13): 2904–2910.
- BEGON M. (2006). *Analyse et simulation tridimensionnelle de mouvements cycliques sur un ergomètre spécifique au kayak*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- BEGON M. et LACOUTURE P. (2005). Solidification procedure adapted to locating joint centre. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, Supplement 1: 23–24.
- BEGON M., MONNET T. et LACOUTURE P. (2007). Effects of movement for estimating the hip joint centre. *Gait & Posture*, 25 (3): 353–359.

- BENNIS F. et KHALIL W. (1991). Minimum inertial parameters of robots with parallelogram closed loops. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 21(2): 318–326.
- BERNSTEIN N., SALZGEBER O., PAVLENKO P. et GURVICH N. (1931). Determination of location of the centers of gravity and mass of the links of the living human body. All-Union Institute of Experimental Medicine, Moscow.
- BESIER T., STURNIEKS D., ALDERSON J. et LLOYD D. (2003). Repeatability of gait data using a functional hip joint centre and a mean helical knee axis. *Journal of Biomechanics*, 36(8): 1159–1168.
- BJORNSTRUP J. (1996). Estimation of human body segment parameters. Inter Tech-Report, <http://www.cvmt.auc.dk/jorgen/PhD/>.
- BOUBY C., FORTUNÉ D., VALLÉE C. et PIETRASZKIEWICZ W. (2005). Direct determination of the rotation in the polar decomposition of the deformation gradient by maximizing a rayleigh quotient. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 85(3): 155–162.
- BOUCHER M. (2005). *Limites et précision d'une analyse mécanique de la performance sur ergocycle instrumenté*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- BOUISSET S. et PERTUZON E. (1968). Experimental determination of the moment of inertia of limb segments. *Biomechanics 1st International Seminar, Zurich*, Karger, Basel: 106–109.
- BROUSSE P. (1988). *Optimization in mechanics : problems and methods*. North Holland Editor, Amsterdam.
- CAHOUËT V., MARTIN L. et AMARANTINI D. (2002). Static optimal estimation of joint accelerations for inverse dynamics problem solution. *Journal of Biomechanics*, 35(11): 1507–1513.
- CAPPOZZO A., CATANI F., DELLA CROCE U. et LEARDINI A. (1995). Position and orientation in space of bones during movement : anatomical frame definition and determination. *Clinical Biomechanics*, 10: 171–178.
- CARMAN A. et MILBURN P. (2006). Determining rigid body transformation parameters from ill-conditioned spatial marker co-ordinates. *Journal of Biomechanics*, 39(10): 1778–1786.
- CHALLIS J. (1995a). An examination of procedures for determining body segment attitude and position from noisy biomechanical data. *Medical Engineering & Physics*, 17(2): 83–90.

- CHALLIS J. (1995b). A procedure for determining rigid body transformation parameters. *Journal of Biomechanics*, 28(6): 733–737.
- CHALLIS J. et KERWIN D. (1996). Quantification of the uncertainties in resultant joint moments computed in a dynamic activity. *Journal of Sports Sciences*, 14(3): 219–231.
- CHARLES S. (2004). *Mise en place d'un dispositif expérimental de caractérisation du comportement des lames fluides, identification des coefficients dynamiques*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- CHARLTON I. W., TATE P., SMYTH P. et ROREN L. (2004). Repeatability of an optimised lower body model. *Gait & Posture*, 20(2): 213–221.
- CHENG C.-K., CHEN H.-H., CHEN C.-S., LEE C.-L. et CHEN C.-Y. (2000). Segment inertial properties of chinese adults determined from magnetic resonance imaging. *Clinical Biomechanics*, 15(8): 559–566.
- CHENUT X., FISETTE P. et SAMIN J.-C. (2002). Recursive formalism with a minimal dynamic parameterization for the identification and simulation of multibody systems. Application to the human body. *Multibody System Dynamics*, 8(2): 117–140.
- CLAUSER C., MCCONVILLE J. et YOUNG J. (1969). Weight, volume and center of mass of segments of the human body. *Technical report, Wright Patterson Air Force Base, Ohio*.
- DA LIO M., DORIA A. et LOT R. (1999). A spatial mechanism for the measurement of the inertia tensor : Theory and experimental results. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, Transactions of the ASME*, 121(1): 111–116.
- de LEVA P. (1996). Adjustments to Zatsiorsky-Seluyanov's segment inertia parameters. *Journal of Biomechanics*, 29(9): 1223–1230.
- DEMPSTER W. (1955). Space requirements of the seated operator. *Technical report, Wright Patterson Air Force Base, Ohio*.
- DENG Y.-B., HU X.-Y. et ZHANG L. (2004). Least squares solution of $BXA^T = T$ over symmetric, skew-symmetric, and positive semidefinite X . *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 25(2): 486–494.
- DOANE J. E. et QUESADA P. M. (2006). Subject specific body segment parameter estimation using 2D work and energy principles. *Gait & Posture*, 24(Supplement 2): S123–S125.
- DUMAS R., CHEZE L. et VERRIEST J.-P. (2007). Adjustments to McConville et al. and Young et al. body segment inertial parameters. *Journal of Biomechanics*, 40(10): 543–553.

- DUMITRIU D. (2003). *Modélisation dynamique des systèmes articulés par des vecteurs translation et des matrices rotation. Prise en compte des rigidités par des multiplicateurs de Lagrange. Simulation du mouvement à l'aide d'un code en C++*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- EHRIG R. M., TAYLOR W. R., DUDA G. N. et HELLER M. O. (2006). A survey of formal methods for determining the centre of rotation of ball joints. *Journal of Biomechanics*, 39(5): 2798–2809.
- FANTOZZI S., STAGNI R., CAPPELLO A. et LEARDINI A. (2005). Effect of different inertial parameter sets on joint moment calculation during stair ascending and descending. *Medical Engineering & Physics*, 27(6): 537–541.
- FAYET M., SANDEL A. et MAIFFREDY L. (2005). Utilisation des tenseurs d'inertie globaux dans le cas de systèmes à liaisons complexes et pseudo-paramètres. *17^{ème} congrès français de mécanique*, Troyes.
- FAYET M. et RENAUD M. (1989). Quasi-minimal computation under an explicit form of the inverse dynamic model of a robot manipulator. *Mechanism & Machine Theory*, 24(3): 165–174.
- FEATHERSTONE R. et ORIN D. (2000). Robot dynamics : equations and algorithms. *Proceedings - IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1: 826–834.
- FERREIRA E. (1984). *Contribution à l'identification de paramètres et à la commande dynamique adaptative des robots manipulateurs*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse.
- FLETCHER R. (1984). Semi-definite matrix constraints in optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(4): 493–513.
- GAMAGE S. S. H. U. et LASENBY J. (2002). New least squares solutions for estimating the average centre of rotation and the axis of rotation. *Journal of Biomechanics*, 35(1): 87–93.
- GANLEY K. J. et POWERS C. M. (2004). Determination of lower extremity anthropometric parameters using dual energy x-ray absorptiometry : the influence on net joint moments during gait. *Clinical Biomechanics*, 19(1): 50–56.
- GAUTIER M. (1991). Numerical calculation of the base inertial parameters of robots. *Journal of Robotic Systems*, 8(4): 485–506.
- GAUTIER M. et KHALIL W. (1988). On the identification of the inertial parameters of robots. *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, Austin: 2264–2269.

- GAUTIER M. et KHALIL W. (1992). Exciting trajectories for the identification of base inertial parameters of robots. *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control Part 1*, pages 494–499.
- GOGU G. et COIFFET P. (1996). *Représentation du mouvement des corps solides*. Hermès, Paris.
- GRAICHEN H., STAMMBERGER T., BONEL H., ENGLMEIER K.-H., REISER M. et ECKSTEIN F. (2000). Glenohumeral translation during active and passive elevation of the shoulder – a 3D open-MRI study. *Journal of Biomechanics*, 33(5): 609–613.
- GROWNEY E., MEGLAN D., JOHNSON M., CAHALAN T. et AN K.-N. (1997). Repeated measures of adult normal walking using a video tracking system. *Gait & Posture*, 6(2): 147–162.
- GUILLARD G. (2005). *Un espace de représentation pour l'étude conjointe de la morphologie et de la fonctionnalité des surfaces articulaires*. Thèse de doctorat, Université Rennes 1.
- HANAVAN P. (1964). A mathematical model of human body. *Technical Report, Wright Patterson Air Force Base, Ohio*.
- HATZE H. (1980). A mathematical model for the computational determination of parameter values of anthropomorphic segments. *Journal of Biomechanics*, 13(10): 833–843.
- HATZE H. (1982). The fundamental problem of myoskeletal inverse dynamics and its implications. *Journal of Biomechanics*, 35: 109–115.
- HELM F., VEEGER H., PRONK G., WOUDE L. et ROZENDAL R. (1992). Geometry parameters for musculo-skeletal modelling of the shoulder system. *Journal of Biomechanics*, 25: 129–144.
- HICKS J. et RICHARDS J. (2005). Clinical applicability of using spherical fitting to find hip joint centers. *Gait Posture*, 22(2): 138–145.
- HIGHAM N. (1988). Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix. *Linear Algebra and its Application*, 103: 103–118.
- HOLDEN J. et STANHOPE S. (1998). The effect of variation in knee center location estimates on net knee joint moment. *Gait & Posture*, 7: 1–6.
- HU H. (1995). Positive definite constrained least-squares estimation of matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 229: 167–174.
- HUI X., XIUYUAN Z., XUANLIANG D., DONGHONG H., QIN L., HONG L., JINGMIN L. et WEI L. (1999). A research of the body center of mass of chinese adults. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 23: 129–133.

- ISNARD F. (1997). *Génération des équations du mouvement de systèmes polyarticulés avec prise en compte des rigidités par des multiplicateurs de Lagrange*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- JENSEN R. K. (1986). Body segment mass, radius and radius of gyration proportions of children. *Journal of Biomechanics*, 19(5): 359–368.
- JOHNSON G. R., STUART P. R. et MITCHELL S. (1993). A method for the measurement of three-dimensional scapular movement. *Clinical Biomechanics*, 8(5): 269–273.
- KARDUNA A., MCCLURE P., MICHENER L. et SENNETT B. (2001). Dynamic measurements of three-dimensional scapular kinematics : A validation study. *J. Biomech. Eng.*, 123(2): 184–190.
- KHOSLA P. (1987). Estimation of robot dynamics parameters : theory and application. Internal Report Carnegie Mellon University, http://www.ri.cmu.edu/pubs/pub_146.html.
- KINGMA I., TOUSSAINT H., DE LOOZE M. et DIEEN J. (1996). Segment inertial parameter evaluation in two anthropometric models by application of a dynamic linked segment model. *Journal of Biomechanics*, 29: 693–704.
- LALLEMAND J. et ZEGHLOUL S. (1994). *Robotique. Aspects fondamentaux : modélisation mécanique, CAO robotique, commande*. Masson, Paris.
- LANSHAMMAR H. (1982). On precision limits for derivatives numerically calculated from noisy data. *Journal of Biomechanics*, 15: 459–470.
- LEBOEUF F. (2004). *Contribution à l'analyse dynamique et à la synthèse dynamique du mouvement humain*. Thèse de doctorat, Université de Poitiers.
- LEE H., LEE Y. et PARK Y. (1999). Response and excitation points selection for accurate rigid-body inertia properties identification. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 13(4): 571–592.
- LEGNANI G., CASALO F., RIGHETTINI P. et ZAPPA B. (1996a). A homogeneous matrix approach to 3D kinematics and dynamics—II. applications to chains of rigid bodies and serial manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 31(5): 589–605.
- LEGNANI G., CASALO F., RIGHETTINI P. et ZAPPA B. (1996b). A homogeneous matrix approach to 3D kinematics and dynamics – I. theory. *Mechanism and Machine Theory*, 31(5): 573–587.
- LENZI D., CAPPELLO A. et CHIARI L. (2003). Influence of body segment parameters and modeling assumptions on the estimate of center of mass trajectory. *Journal of Biomechanics*, 36(9): 1335–1341.

- LIÉGOIS A. (1984). *Les Robots - analyse des performances et CAO. (tome 7)*. Hermès, Paris.
- LYDOIRE F. et POIGNET P. (2003). Experimental dynamic parameters identification of a 7 dof walking robot. In *6th International Conference on Climbing and Walking Robots*, Catania, Italia.
- MALICK J. (2004). A dual approach to semidefinite least-squares problems. *SIAM, Journal on Matrix Analysis and Applications*, 26 (1): 272–284.
- MALICK J. et SENDOV H. (2005). Clarke generalized jacobian of the projection onto the cone of positive semidefinite matrices. Rapport technique, INRIA.
- MCCLURE P., MICHENER L., SENNETT B. et KARDUNA A. (2001). Direct 3-dimensional measurement of scapular kinematics during dynamic movements in vivo. *Journal Shoulder Elbow Surgery*, 10(3): 269–277.
- MESKERS C., HELM F., ROZENDAAL L. et ROZING P. (1998). In vivo estimation of the glenohumeral joint rotation center from scapular bony landmarks by linear regression. *Journal of Biomechanics*, 31: 93–96.
- MESKERS C. G., van de SANDE M. A. et de GROOT J. H. (2007). Comparison between tripod and skin-fixed recording of scapular motion. *Journal of Biomechanics*, 40(4): 941–946.
- MINOUX M. (1983). *Programmation Mathématique : Théorie et Algorithme*. Dunod, Paris.
- MONNET T., ATCHONOUGLO E. et VALLÉE C. (2007a). Identification of the shoulder joint centre and of the body segment parameters. *6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics*, Zurich.
- MONNET T., BEGON M. et VALLÉE C. (2007b). Identification des paramètres inertiels du corps humain. *18^{ème} congrès Français de Mécanique*, Grenoble.
- MONNET T., DESAILLY E., BEGON M., VALLÉE C. et LACOUTURE P. (2007c). Comparison of the **SCoRE** and **HA** methods for locating *in vivo* the glenohumeral joint centre. *Journal of Biomechanics*, In Press, Corrected Proof.
- MONNET T., VALLÉE C. et LACOUTURE P. (2007d). Identification of the inertia matrix of the upper limb. *21th congress of the International Society of Biomechanics*, Taipei.
- NIEBERGALL M. et HAHN H. (1997). Identification of the ten inertia parameters of a rigid body. *Nonlinear Dynamics*, 13(4): 361–372.
- NIKOLOVA G. S. et TOSHEV Y. E. (2007). Estimation of male and female body segment parameters of the bulgarian population using a 16-segmental mathematical model. *Journal of Biomechanics*, In Press, Corrected Proof.

- OLSEN M. et PETERSEN H. (2001). A new method for estimating parameters of a dynamic robot model. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(1): 95–100.
- PANDY M., ANDERSON F. et HULL D. (1992). A parameter optimization approach for the optimal control of large-scale musculoskeletal systems. *Transactions of the ASME*, 114: 450–460.
- PARK S. J., PARK S. C., KIM J. H. et KIM C.-B. (1998). Biomechanical parameters on body segments of korean adults. *International Journal of Industrial Ergonomics*, 23 (1-2): 23–31.
- PAVOL M. J., OWINGS T. M. et GRABINER M. D. (2002). Body segment inertial parameter estimation for the general population of older adults. *Journal of Biomechanics*, 35(5): 707–712.
- PEARSALL D. et REID J. (1994). The study of human body segment parameters in biomechanics, an historical review and current status report. *Sports Medicine*, 18: 126–140.
- PEARSALL D. J. et COSTIGAN P. A. (1999). The effect of segment parameter error on gait analysis results. *Gait & Posture*, 9(3): 173–183.
- PIAZZA S. J., ERDEMIR A., OKITA N. et CAVANAGH P. R. (2004). Assessment of the functional method of hip joint center location subject to reduced range of hip motion. *Journal of Biomechanics*, 37(3): 349–356.
- POSTIAU T. (2004). *Génération et parallélisation des équations du mouvement de systèmes multicorps par l'approche symbolique*. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain.
- RAO G., AMARANTINI D., BERTON E. et FAVIER D. (2006). Influence of body segments' parameters estimation models on inverse dynamics solutions during gait. *Journal of Biomechanics*, 39(8): 1531–1536.
- RAUCENT B. (1990). *Identification des paramètres dynamiques des robots manipulateurs*. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain.
- RAUCENT B., CAMPION G., BASTIN G., SAMIN J. C. et WILLEMS P. Y. (1992). Identification of the barycentric parameters of robot manipulators from external measurements. *Automatica*, 28(5): 1011–1016.
- RAUCENT B., CAMPION G., BASTIN G., SAMIN J. et WILLEMS P. (1991). On the identification of the barycentric parameters of robot manipulators from external measurements. *Proceedings of the 1991 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2: 1169–1174. Sacramento.
- SAVITZKY A. et GOLAY M. (1964). Smoothing and differentiation of data by simplifies least squares procedures. *Analytical Chemistry*, 36: 1627–1639.

- SCHEDLINSKI C. et LINK M. (2001). A survey of current inertia parameter identification methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(1): 189–211.
- SERBAN R., FREEMAN J. et NEGRUT D. (1997). Parameter identification for multibody dynamic systems. In *Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences*.
- SILVA M. P. T. et AMBROSIO J. A. C. (2004). Sensitivity of the results produced by the inverse dynamic analysis of a human stride to perturbed input data. *Gait & Posture*, 19(1): 35–49.
- SISTON R. et DELP S. (2006). Evaluation of a new algorithm to determine the hip joint center. *Journal of Biomechanics*, 39(1): 125–130.
- SOSLOWSKY L., FLATOW E., BIGLIANI L. et MOW V. (1992). Articular geometry of the glenohumeral joint. *Clinical Orthopaedics and Related Research*, 285: 181–190.
- SOURIAU J. (1964). *Géométrie et relativité*. Editions Hermann, Paris.
- SPOOR C. et VELDPAUS F. (1980). Rigid body motion calculated from spatial coordinates markers. *Journal of Biomechanics*, 13: 391–393.
- SPRING K. (1986). Euler parameters and the use of quaternion algebra in the manipulation of finite rotations : A review. *Mechanism and Machine Theory*, 21 (5): 365–373.
- STOKDIJK M., MESKERS C., VEEGER Y., de BOER Y. et ROZING P. (1999). Determination of the optimal elbow axis for evaluation of placement of prostheses. *Clinical Biomechanics*, 14: 177–184.
- STOKDIJK M., NAGELS J. et ROZING P. (2000). The glenohumeral joint rotation center in vivo. *Journal of Biomechanics*, 33: 1629–1636.
- VALLÉE C., HAMDOUNI A., ISNARD F. et FORTUNÉ D. (1999). The equations of motion of a rigid body without parametrization of rotations. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 63(1): 25–30.
- VAUGHAN C., ANDREWS J. et HAY J. (1982). Selection of body segment parameters by optimization methods. *Journal of Biomechanical Engineering*, 104(1): 38–44.
- VEEGER (2000). The position of the rotation center of the glenohumeral joint. *Journal of Biomechanics*, 33(12): 1711–1715.
- VELDPAUS F., WOLTRING H. et DORTMANS L. (1988). A least-square algorithm for the equiform transformation from spatial marker coordinates. *Journal of Biomechanics*, 21: 45–54.
- VIGOUROUX L. (2005). *Modélisation biomécanique des systèmes musculosquelettiques sous-déterminés. Analyse statique des tensions des tendons mobilisant le doigt*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

- WIEBER P.-B. (2000). *Modélisation et commande d'un robot marcheur anthropomorphe*. Thèse de doctorat, Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris.
- WITTENBURG J. (1977). *Dynamics of Systems of Rigid Bodies*. B.G. Teubner, Stuttgart.
- WOLTRING H. (1990). Data processing and error analysis. *Biomechanics of Human Movement : Applications in rehabilitation, sports and ergonomics*, Berme, N., Cappozzo, A.: 186–202.
- WOLTRING H. (1991). Representation and calculation of 3D joint movement. *Human movement Sciences*, 10: 603–616.
- WOLTRING H., HUISKES R. et DE LANGE A. (1985). Finite centroid and helical axis estimation from noisy landmark measurements in the study of human joint kinematics. *Journal of Biomechanics*, 18(5): 379–389.
- WOOD G. (1982). Data smoothing and differentiation procedures in biomechanics. *Exercise and Sport Sciences Reviews*, 10: 308–362.
- WOODGATE K. G. (1996). Least-squares solution of $F = PG$ over positive semidefinite symmetric P . *Linear Algebra and its Applications*, 245: 171–190.
- WU G., van der HELM FRANS C.T., VEEGER H., MAKHSOUS M., VAN ROY P., ANGLIN C., NAGELS J., KARDUNA A. R., MCQUADE K. et WANG X. (2005). ISB recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion—part II : shoulder, elbow, wrist and hand. *Journal of Biomechanics*, 38(5): 981–992.
- ZAJAC F. E., NEPTUNE R. R. et KAUTZ S. A. (2002). Biomechanics and muscle coordination of human walking : Part I : Introduction to concepts, power transfer, dynamics and simulations. *Gait & Posture*, 16(3): 215–232.
- ZATSIORSKY V. et SELUYANOV V.N. and Chugunova L. (1990). In vivo body segment inertial parameters determination using a gamma scanner method. *Biomechanics of Human Movement : Applications in rehabilitation, sports and ergonomics*, Berme, N., Cappozzo, A.: 186–202.
- ZATSIORSKY V. et SELUYANOV V. (1985). *Estimation of the mass and inertia characteristics of the human body by means of the best predictive regressions equations*. Human Kinetics Publishers, Champaign.

Annexes

Annexe A	Localisation du centre articulaire	167
Annexe B1	Résultats pour le sujet s_1	168
Annexe B2	Résultats pour le sujet s_1	170
Annexe B3	Résultats pour le sujet s_3	172
Annexe B4	Résultats pour le sujet s_4	174
Annexe B5	Résultats pour le sujet s_5	176
Annexe B6	Résultats pour le sujet s_6	178
Annexe B7	Résultats pour le sujet s_7	180
Annexe B8	Résultats pour le sujet s_7	182
Annexe C	Liste des publications de l'auteur	184

ANNEXE A : Localisation des marqueurs anatomiques de la scapula

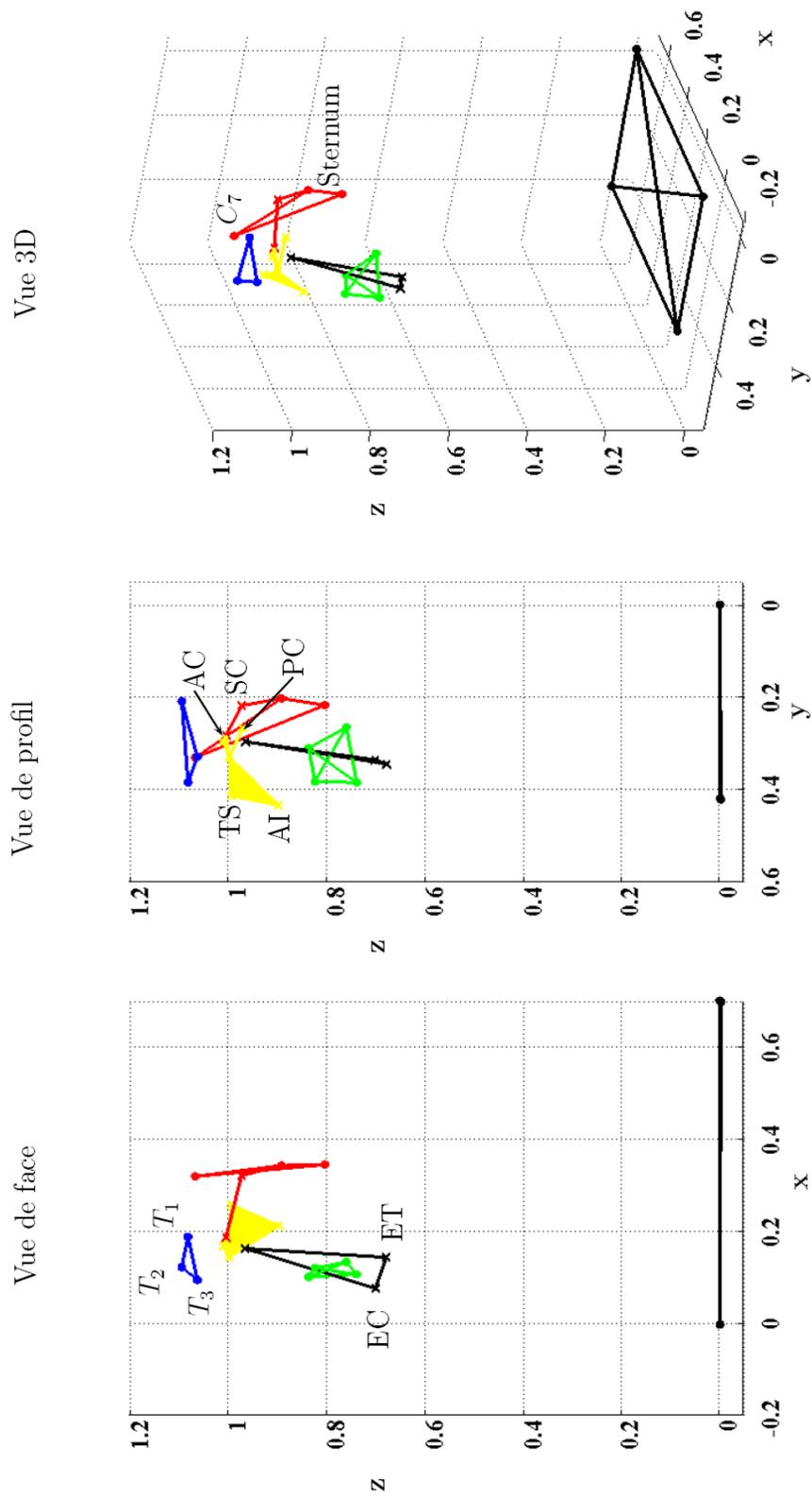
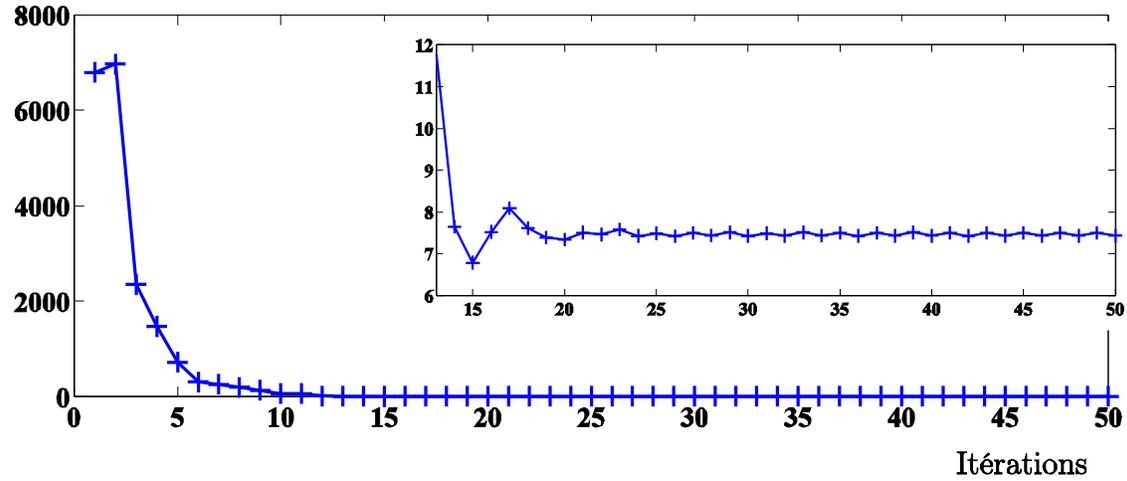


FIG. A.1 – Localisation du centre articulaire glénohumérale.

ANNEXE B1 : Résultats pour le sujet s_1 $\|\nabla [f(J)]\|$ 

$$H^* = \begin{bmatrix} 0,2009 & -0,1890 & -0,1070 & 0 & 0 & 0 & 0,6492 \\ -0,1890 & 0,1925 & 0,1167 & 0 & 0 & 0 & -0,5089 \\ -0,1070 & 0,1167 & 0,0744 & 0 & 0 & 0 & -0,4017 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12,5841 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -8,3725 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5404 \\ 0,6492 & -0,5089 & -0,4017 & 12,5841 & -8,3725 & 0,5404 & 75,4714 \end{bmatrix}$$

TAB. 9 – Matrice d’inertie identifiée et calculée à partir des données de de Leva pour le sujet s_1

s_1 : 1,82 m 71,5 kg	Identification	de Leva
Matrice d’inertie ($m^2.kh$)	$\begin{bmatrix} 0,4428 & -0,0849 & 0,0005 \\ -0,0849 & 0,0359 & -0,0378 \\ 0,0005 & -0,0378 & 0,4569 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4721 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0062 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4696 \end{bmatrix}$
Tenseur d’ordre 1 ($kg.m$)	$[0,2698 \ 0,8669 \ 0,1317]^T$	$[0 \ 1,1100 \ 0]^T$

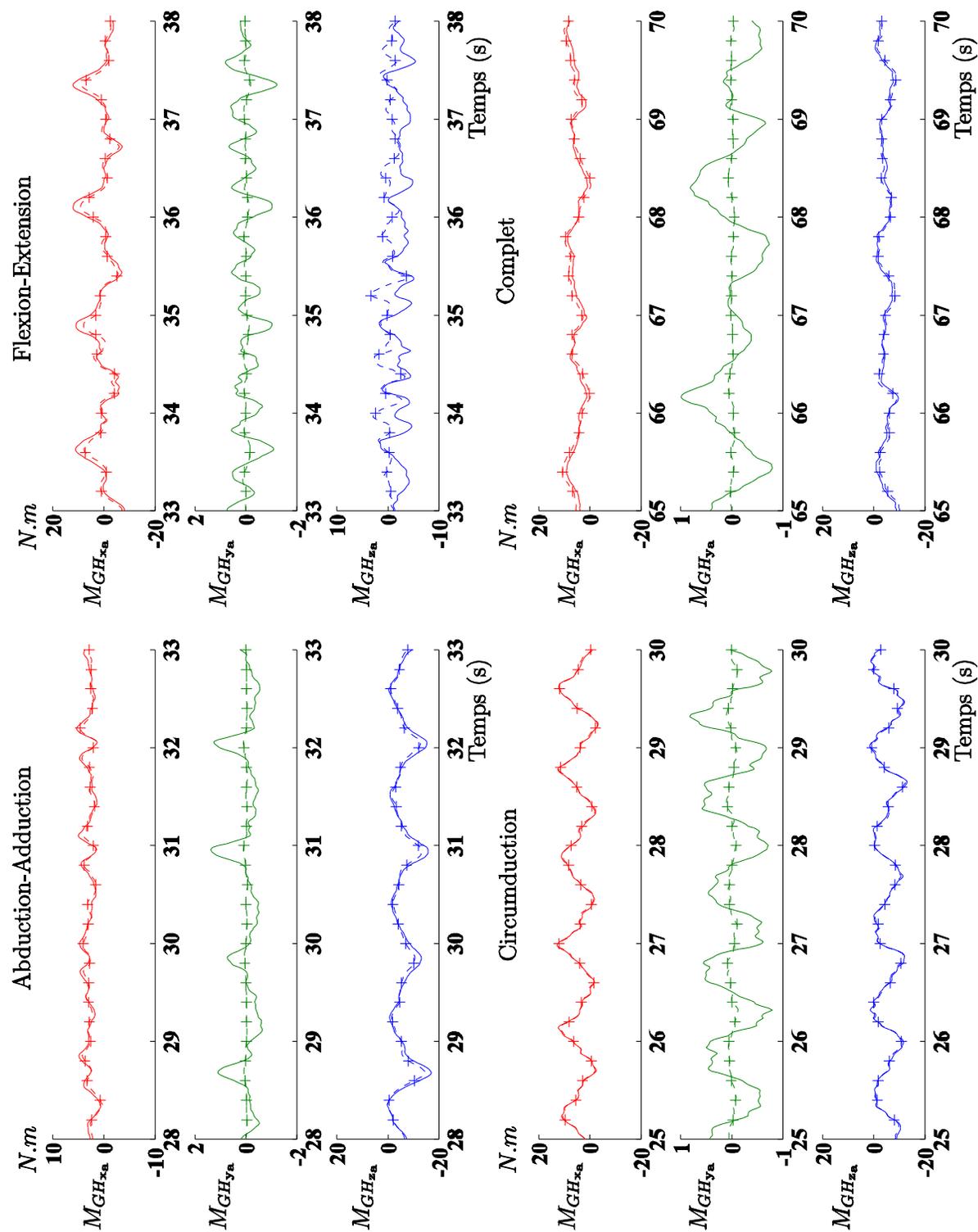
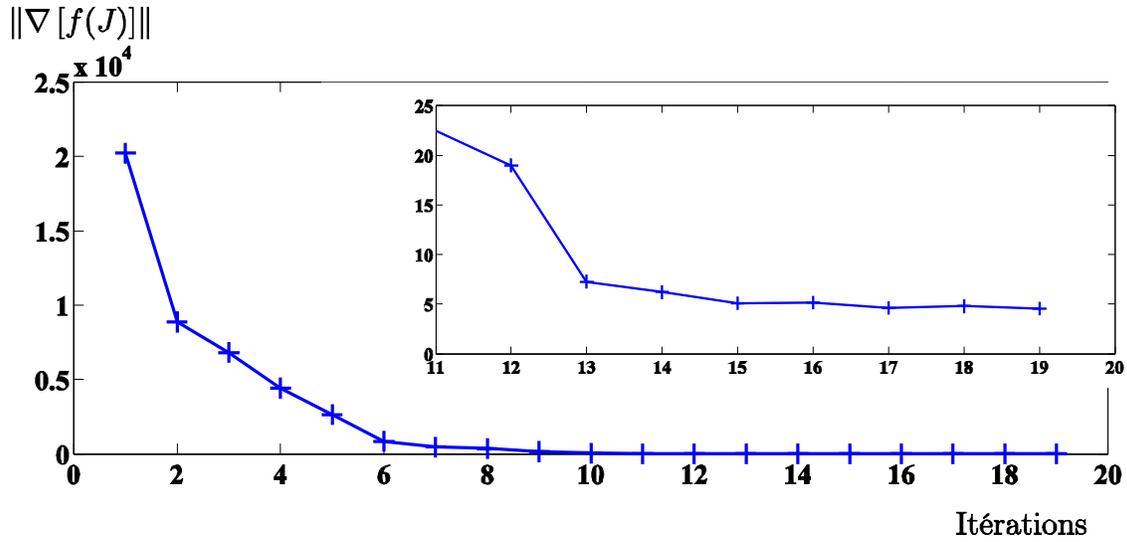


FIG. B.1 – Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_1 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.

ANNEXE B2 : Résultats pour le sujet s_2 

$$H^* = \begin{bmatrix} 0,2648 & -0,1995 & -0,1101 & 0 & 0 & 0 & 0,5630 \\ -0,1995 & 0,2993 & 0,0793 & 0 & 0 & 0 & -0,4644 \\ -0,1101 & 0,0793 & 0,0459 & 0 & 0 & 0 & -0,2190 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15,3118 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -5,3829 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,4232 \\ 0,5630 & -0,4644 & -0,2190 & 15,3118 & -5,3829 & -0,4232 & 81,9253 \end{bmatrix}$$

TAB. 10 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir des données de de Leva pour le sujet s_2

s_2 : 1,76 m 78,1 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie (m ² .kg)	$\begin{bmatrix} 0,5222 & -0,1008 & -0,0414 \\ -0,1008 & 0,1140 & 0,0026 \\ -0,0414 & 0,0026 & 0,5839 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4789 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0062 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4764 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 (kg.m)	$[0,2522 \ 0,7175 \ 0,0472]^T$	$[0 \ 1,1643 \ 0]^T$

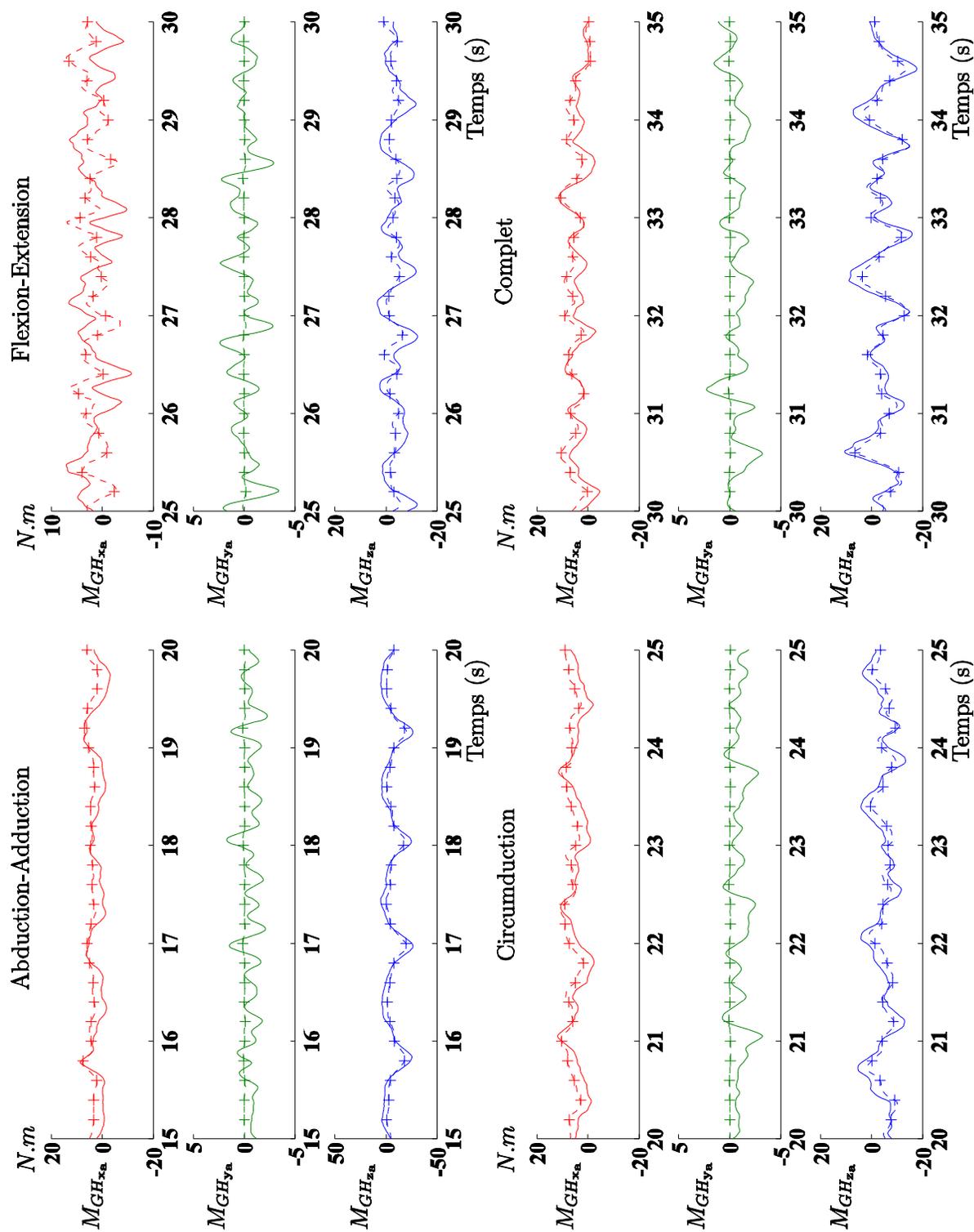
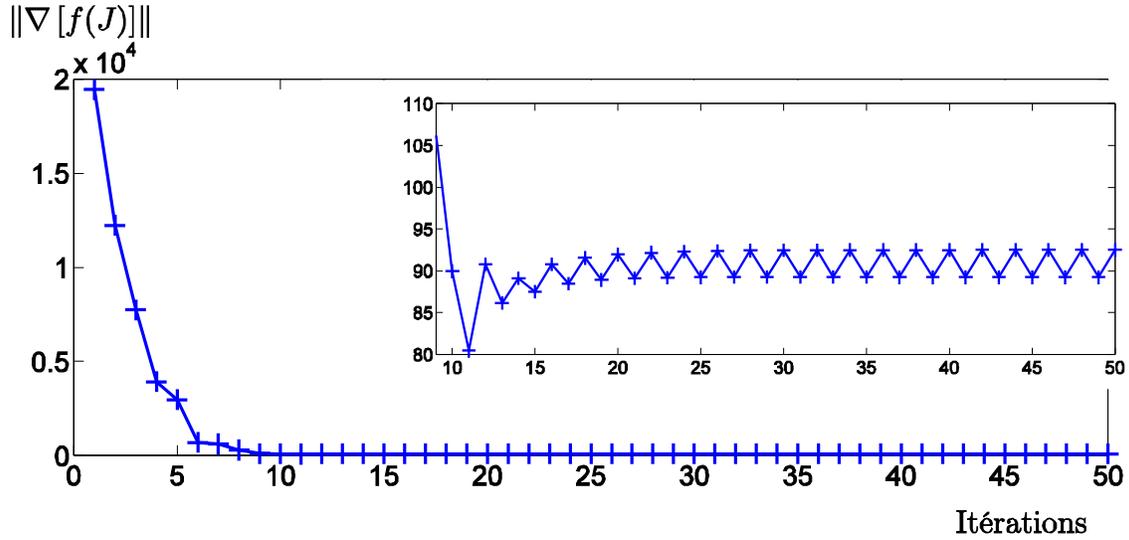


FIG. B.2 – Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_2 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.

ANNEXE B3 : Résultats pour le sujet s_3 

$$H^* = \begin{bmatrix} 0,2638 & -0,1836 & -0,1821 & 0 & 0 & 0 & 0,6783 \\ -0,1836 & 0,2675 & 0,1789 & 0 & 0 & 0 & -0,7450 \\ -0,1821 & 0,1789 & 0,1452 & 0 & 0 & 0 & -0,4934 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 18,4452 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9,9355 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,3115 \\ 0,6783 & -0,7450 & -0,4934 & 18,4452 & -9,9355 & -0,3115 & 95,7964 \end{bmatrix}$$

TAB. 11 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir des données de de Leva pour le sujet s_3

s_3 : 1,90 m 91,7 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie (m ² .kg)	$\begin{bmatrix} 0,5955 & -0,0716 & -0,0067 \\ -0,0716 & 0,0702 & -0,0170 \\ -0,0067 & -0,0170 & 0,6640 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,6553 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0085 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6518 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 (kg.m)	$[0,0995 \quad 1,1100 \quad -0,0471]^T$	$[0 \quad 1,4758 \quad 0]^T$

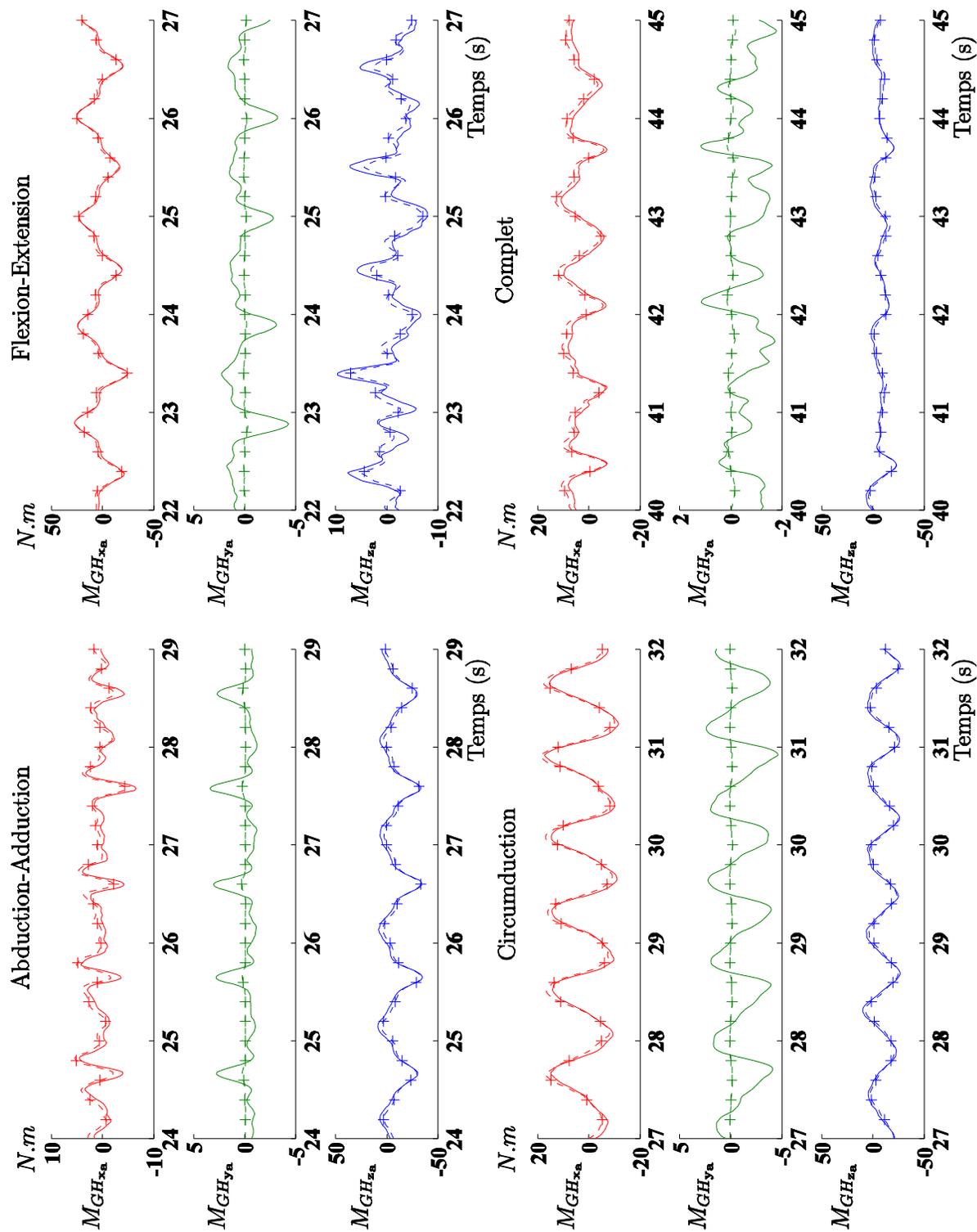
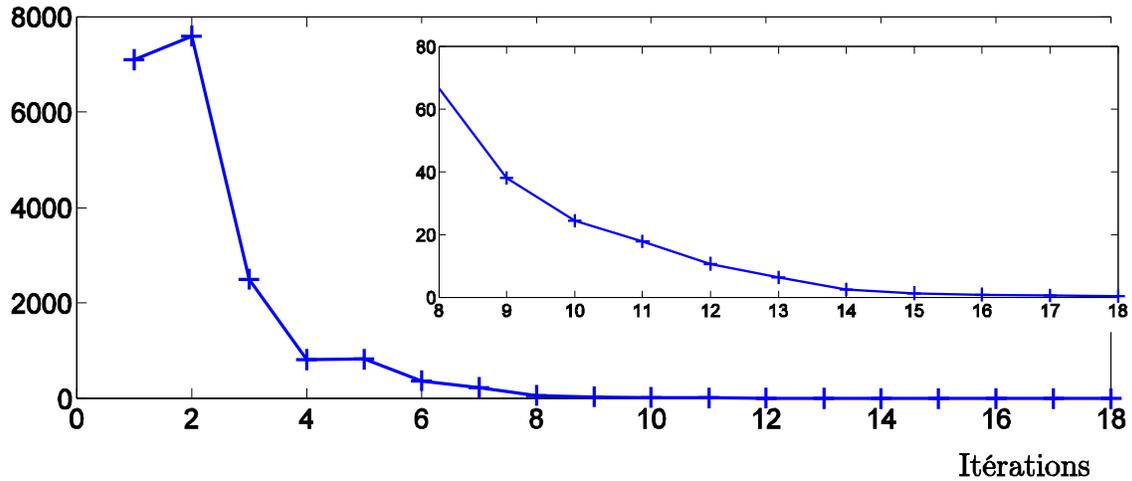


FIG. B.3 – Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_3 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.

ANNEXE B4 : Résultats pour le sujet s_4 $\|\nabla[f(J)]\|$ 

$$H^* = \begin{bmatrix} 0,1769 & -0,1263 & -0,1012 & 0 & 0 & 0 & 0,5780 \\ -0,1263 & 0,1360 & 0,1280 & 0 & 0 & 0 & -0,5376 \\ -0,1012 & 0,1280 & 0,1335 & 0 & 0 & 0 & -0,4892 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12,2520 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9,7613 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3,1627 \\ 0,5780 & -0,5376 & -0,4892 & 12,2520 & -9,7613 & -3,1627 & 71,2833 \end{bmatrix}$$

TAB. 12 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir des données de de Leva pour le sujet s_4

s_4 : 1,77 m 67,0 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,4066 & 0,0315 & 0,0240 \\ 0,0315 & 0,0640 & 0,0244 \\ 0,0240 & 0,0244 & 0,4223 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4155 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0054 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4133 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 ($kg.m$)	$[-0,0683 \quad 0,9236 \quad -0,0675]^T$	$[0 \quad 1,0045 \quad 0]^T$

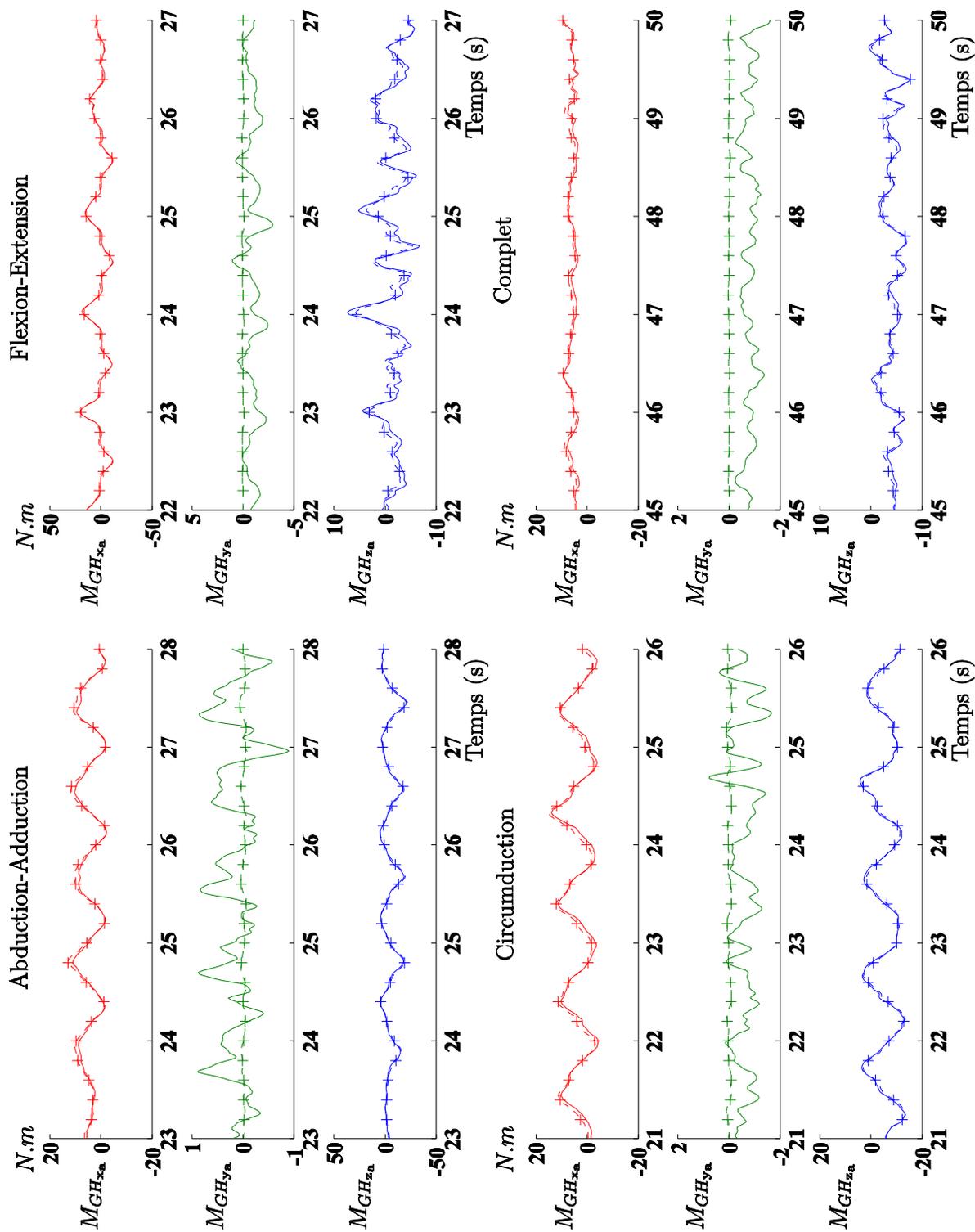
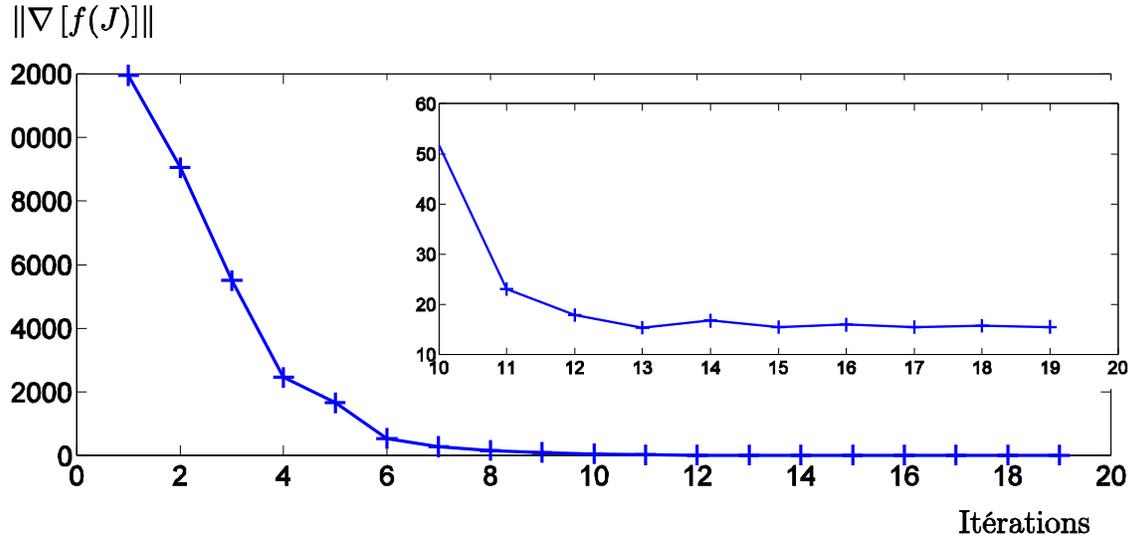


FIG. B.4 – Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_4 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.

ANNEXE B5 : Résultats pour le sujet s_5 

$$H^* = \begin{bmatrix} 0,3028 & -0,1768 & -0,1646 & 0 & 0 & 0 & 0,7807 \\ -0,1768 & 0,1054 & 0,1040 & 0 & 0 & 0 & -0,4412 \\ -0,1646 & 0,1040 & 0,1179 & 0 & 0 & 0 & -0,5237 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 14,8026 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -7,5760 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2,5400 \\ 0,7807 & -0,4412 & -0,5237 & 14,8026 & -7,5760 & -2,5400 & 78,8599 \end{bmatrix}$$

TAB. 13 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir des données de de Leva pour le sujet s_5

s_5 : 1,78 m 74,9 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,5168 & -0,0541 & 0,0072 \\ -0,0541 & 0,0270 & -0,0059 \\ 0,0072 & -0,0059 & 0,5085 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4698 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0061 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4673 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 ($kg.m$)	$[0,1200 \ 1,0285 \ 0,0787]^T$	$[0 \ 1,1293 \ 0]^T$

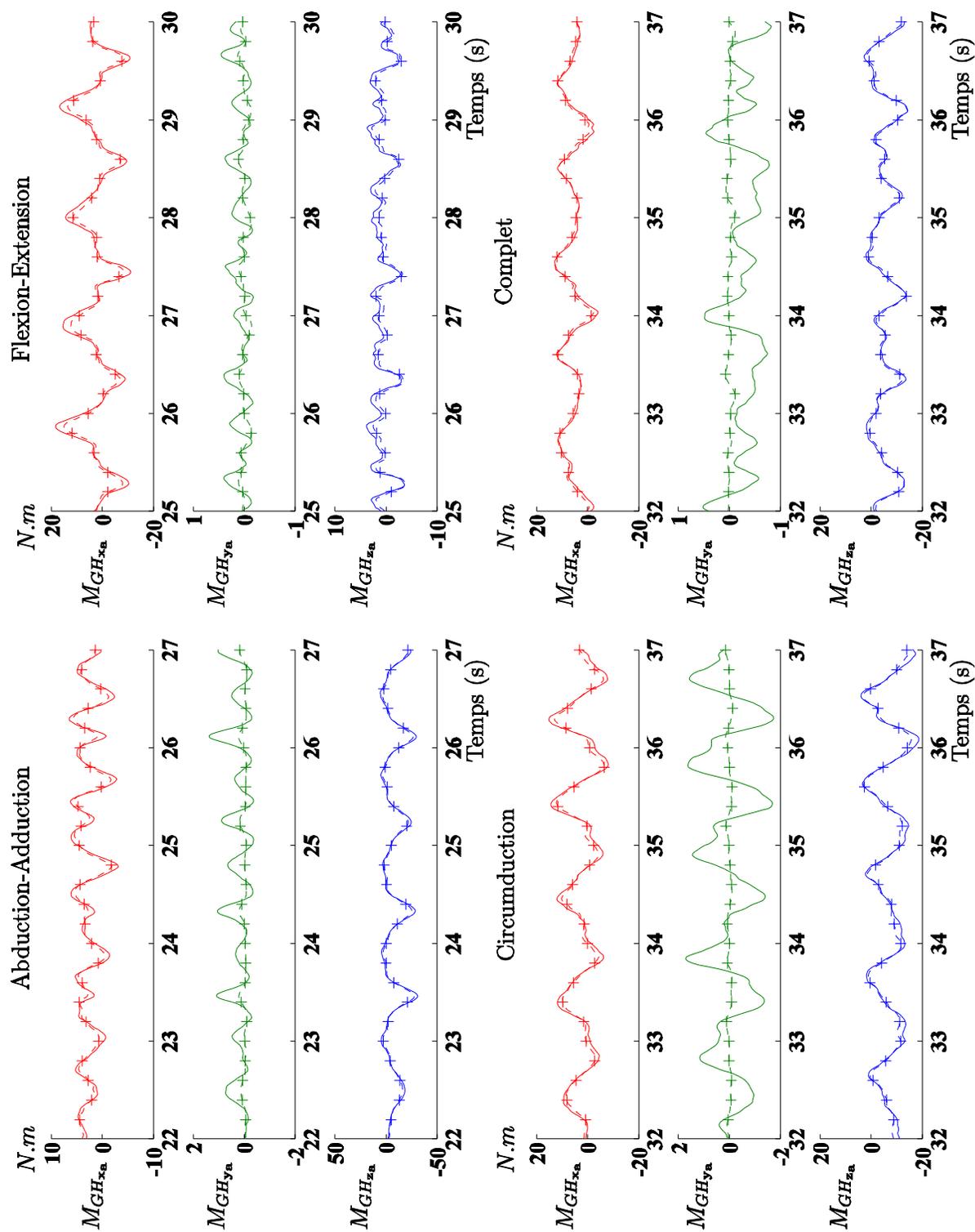
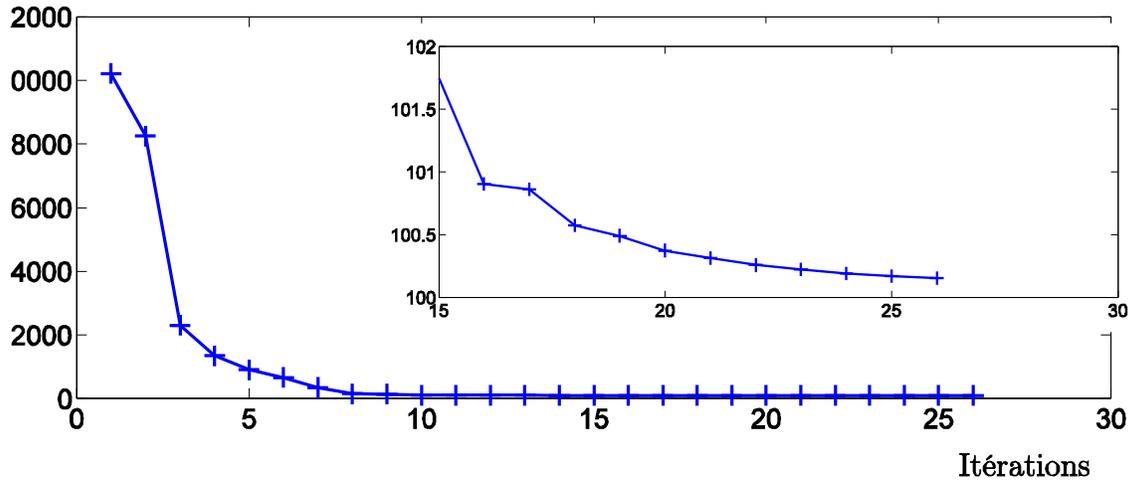


FIG. B.5 – Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_5 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.

ANNEXE B6 : Résultats pour le sujet s_6 $\|\nabla [f(J)]\|$ 

$$H^* = \begin{bmatrix} 0,1513 & -0,1621 & -0,0030 & 0 & 0 & 0 & 0,4366 \\ -0,1621 & 0,2998 & 0,0131 & 0 & 0 & 0 & -0,6679 \\ -0,0030 & 0,0131 & 0,0008 & 0 & 0 & 0 & 0,0283 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 12,7904 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6,0282 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,2185 \\ 0,4366 & -0,6679 & 0,0283 & 12,7904 & -6,0282 & -0,2185 & 78,1166 \end{bmatrix}$$

TAB. 14 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir des données de de Leva pour le sujet s_6

s_6 : 1,79 m 74,1 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie (m ² .kg)	$\begin{bmatrix} 0,4051 & -0,0183 & -0,0074 \\ -0,0183 & 0,0515 & 0,0341 \\ -0,0074 & 0,0341 & 0,4472 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4700 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0061 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4675 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 (kg.m)	$[0,0611 \ 0,7876 \ -0,1158]^T$	$[0 \ 1,1235 \ 0]^T$

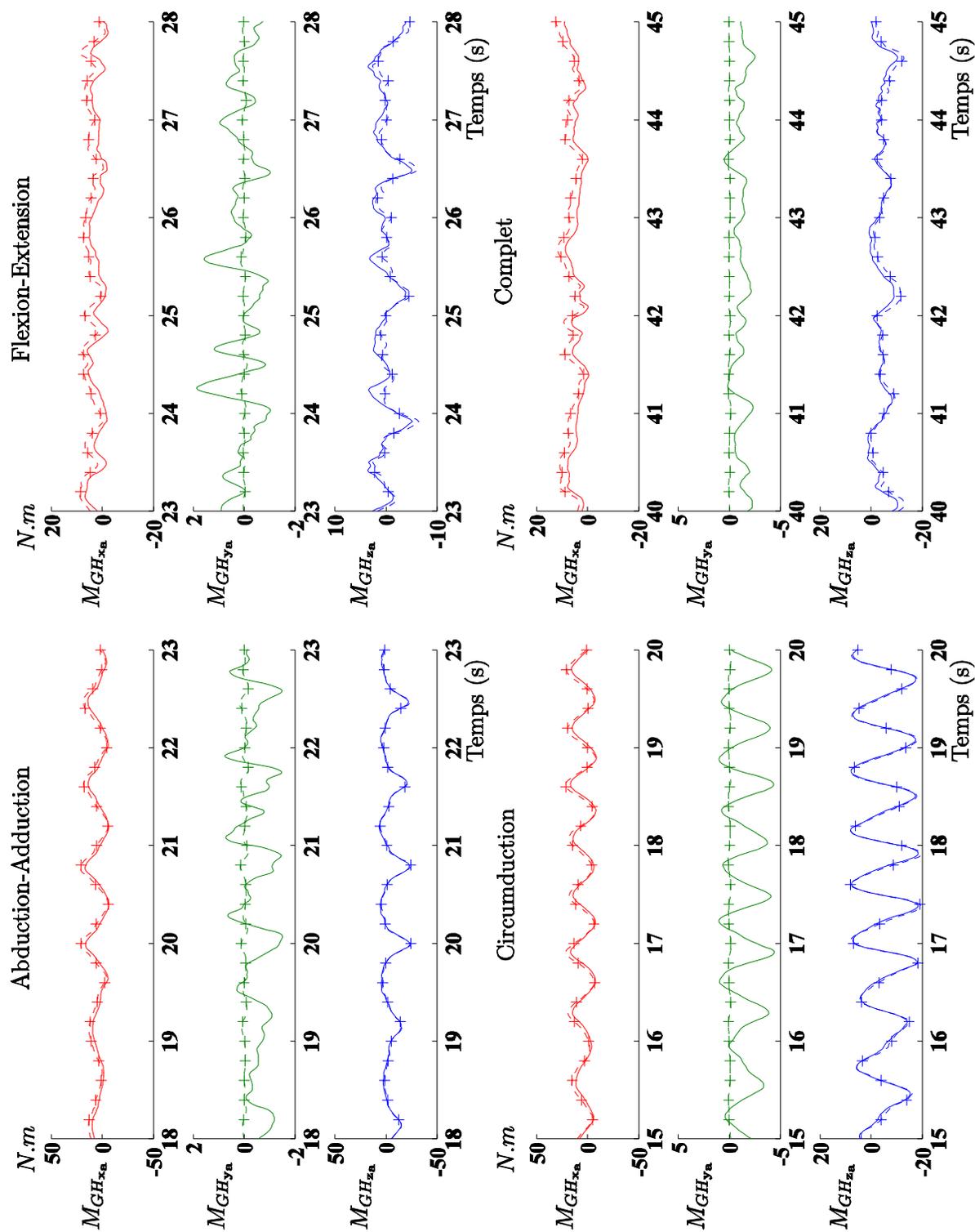
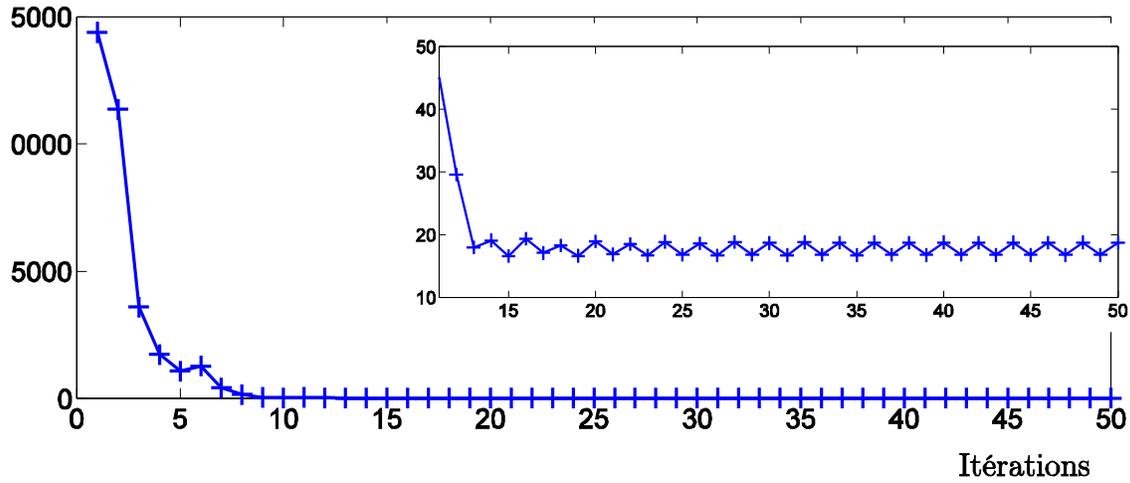


FIG. B.6 – Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_6 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.

ANNEXE B7 : Résultats pour le sujet s_7 $\|\nabla [f(J)]\|$ 

$$H^* = \begin{bmatrix} 0,2192 & -0,2209 & -0,1164 & 0 & 0 & 0 & 0,5034 \\ -0,2209 & 0,2248 & 0,1161 & 0 & 0 & 0 & -0,5122 \\ -0,1164 & 0,1161 & 0,0625 & 0 & 0 & 0 & -0,2536 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 15,2441 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -9,2268 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0,7769 \\ 0,5034 & -0,5122 & -0,2536 & 15,2441 & -9,2268 & -0,7769 & 82,4260 \end{bmatrix}$$

TAB. 15 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir des données de de Leva pour le sujet s_7

s_7 : 1,80 m 78,4 kg	Identification	de Leva
Matrice d'inertie ($m^2.kg$)	$\begin{bmatrix} 0,5037 & 0,0248 & 0,0003 \\ 0,0248 & 0,0045 & -0,0214 \\ 0,0003 & -0,0214 & 0,5048 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,5029 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0066 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5002 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 ($kg.m$)	$[-0,0429 \ 0,7603 \ 0,0201]^T$	$[0 \ 1,1954 \ 0]^T$

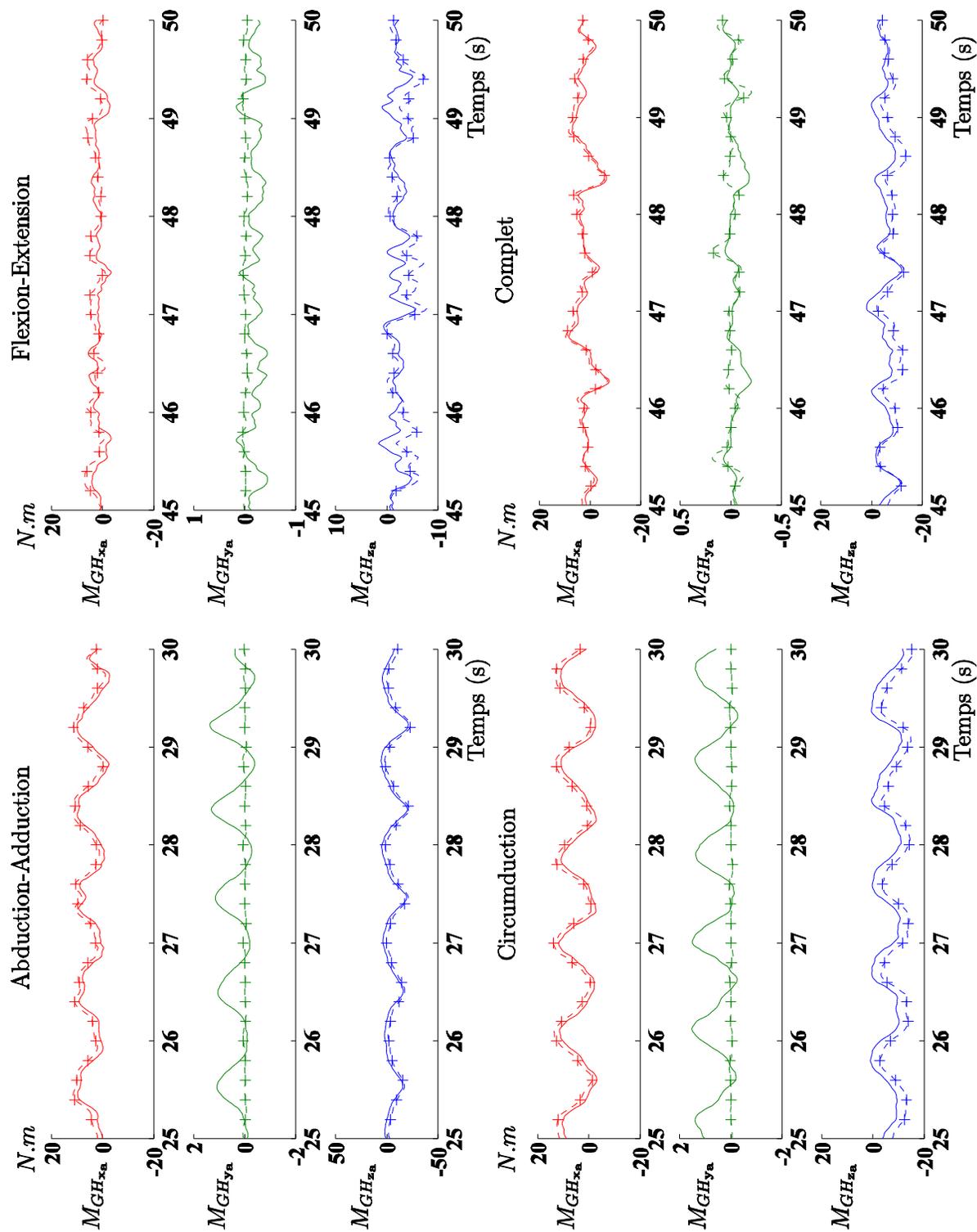
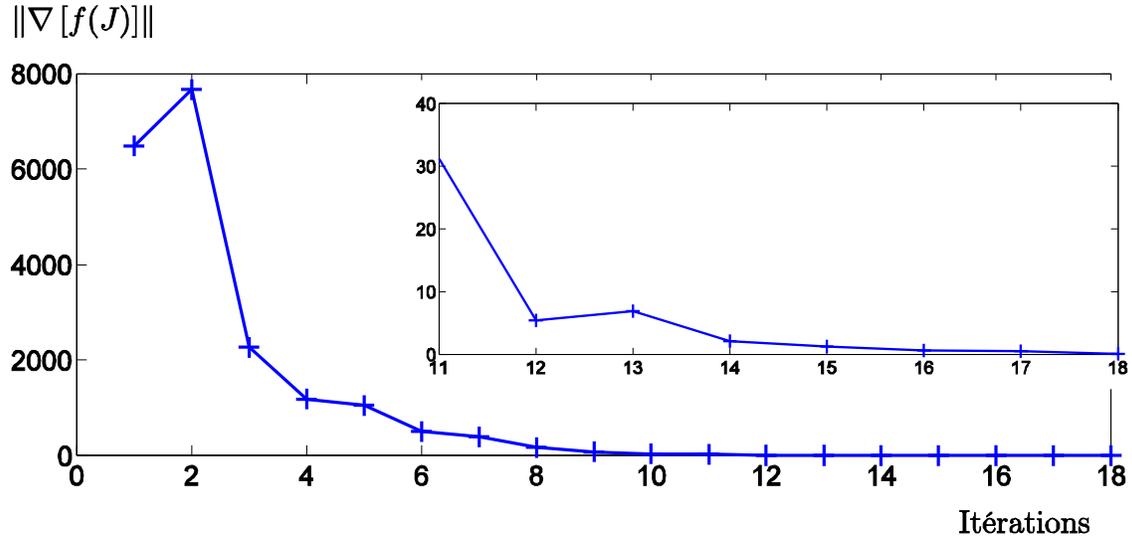


FIG. B.7 – Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_7 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.

ANNEXE B8 : Résultats pour le sujet s_8 

$$H^* = \begin{bmatrix} 0,1610 & -0,1444 & -0,1704 & 0 & 0 & 0 & 0,7561 \\ -0,1444 & 0,1463 & 0,1375 & 0 & 0 & 0 & -0,6550 \\ -0,1704 & 0,1375 & 0,1959 & 0 & 0 & 0 & -0,7107 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 13,3686 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6,2428 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1,7123 \\ 0,7561 & -0,6550 & -0,7107 & 13,3686 & -6,2428 & -1,7123 & 74,2322 \end{bmatrix}$$

TAB. 16 – Matrice d'inertie identifiée et calculée à partir des données de de Leva pour le sujet s_8

$s_2 : 1,80 \text{ m } 70,4 \text{ kg}$	Identification	de Leva
Matrice d'inertie ($\text{m}^2.\text{kg}$)	$\begin{bmatrix} 0,4914 & -0,0359 & -0,0144 \\ -0,0359 & 0,0346 & -0,0048 \\ -0,0144 & -0,0048 & 0,4805 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0,4516 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0059 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4491 \end{bmatrix}$
Tenseur d'ordre 1 ($\text{kg}.\text{m}$)	$[0,1123 \quad 1,2210 \quad -0,0485]^T$	$[0 \quad 1,0734 \quad 0]^T$

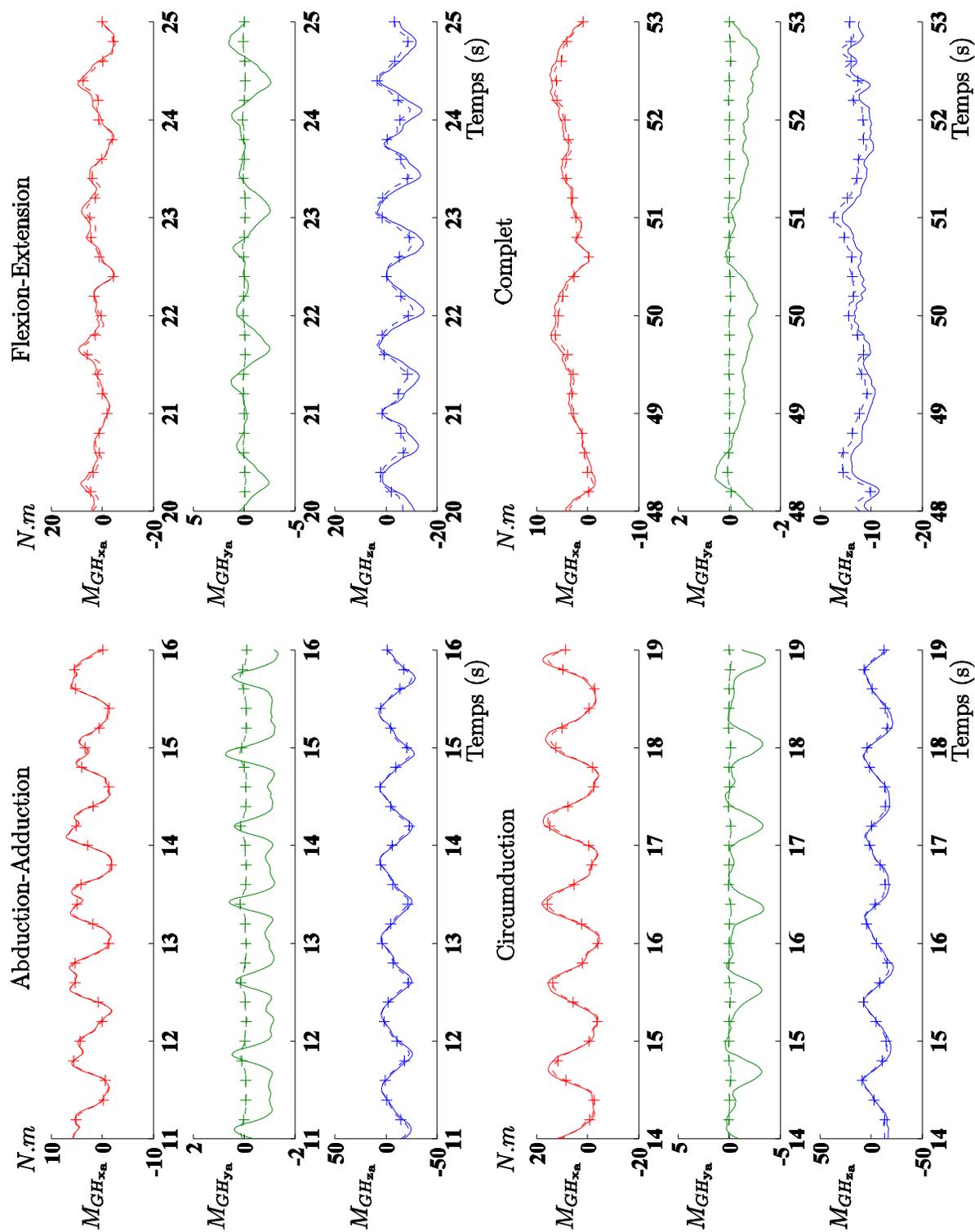


FIG. B.8 – Moment calculé au centre articulaire glénohumérale pour le sujet s_8 à partir des paramètres inertiels identifiés (trait plein) et calculés par le modèle de Zatsiorsky (ligne pointillée avec des croix) selon les trois axes du repère anatomique.

ANNEXE C : Liste des publications de l'auteur

Revue internationale à comité de lecture

MONNET, T., ATCHONOU GLO, E., VALLÉE, C. ET FORTUNÉ, D : Identification of the ten inertia parameters of a rigid body. PMM, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, In Press.

MONNET, T., DESAILLY, E., BEGON, M., VALLÉE, C. ET LACOUTURE, P. : Comparison of the **SCoRE** and **HA** methods for locating *in vivo* the glenohumeral joint centre. Journal of Biomechanics, In Press.

BEGON, M., MONNET, T. ET LACOUTURE, P. : Effects of movement for estimating the hip joint centre. Gait & Posture, 25 (3) : 353-359. 2007.

Congrès internationaux avec comité de sélection et avec actes

MONNET, T., ATCHONOU GLO, E. ET VALLÉE, C. : Identification of the shoulder joint centre and of the body segment parameters. VIth International Congress on Industrial and Applied Mathematics, 16-20 Juillet 2007, Zürich, Suisse.

MONNET, T., VALLÉE, C. ET LACOUTURE, P. : Identification of the inertia matrix of the upper limb XXIth congrès of the International Society of Biomechanics, 1-5 Juillet 2007, Taipei, Taiwan.

MONNET, T., BEGON, M. ET LACOUTURE, P. : Advantage of center of pressure feedback on static element performance for gymnasts and coaches, XVIIth Conference of International Society for Posture and Gait Research, 29 mai au 2 juin 2005, Marseille, France.

Congrès nationaux avec comité de sélection et avec actes

MONNET, T., BEGON, M. ET VALLÉE, C. : Identification des paramètres inertiels du corps humain 18^{ème} congrès Français de Mécanique, 27-31 août 2007, Grenoble.

MONNET, T., DECATOIRE A. ET LACOUTURE P. : Comparison of shoulders net moment between practice and real condition. 30^{ème} congrès de la Société de Biomécanique, Bruxelles, 2005.

CHAMPEY MONT L., MONNET T., KOBBI Y., ET LACOUTURE P. : Triple Lutz analysis : reply to trainers on the toe-pick phase. 28^{ème} congrès de la Société de Biomécanique, Poitiers, 2003.