



HAL
open science

Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation

Laurentiu Hetel

► **To cite this version:**

Laurentiu Hetel. Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Lorraine - INPL, 2007. Français. NNT : . tel-00202479

HAL Id: tel-00202479

<https://theses.hal.science/tel-00202479>

Submitted on 7 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 21 novembre 2007

pour l'obtention du

Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Lorraine
Spécialité Automatique et Traitement du Signal

par

Laurentiu Hetel

Composition du jury

| | | |
|----------------------|---------------------|--|
| <i>Président :</i> | Janan Zaytoon | Professeur, URCA |
| <i>Rapporteurs :</i> | Jean-Pierre Richard | Professeur, EC Lille |
| | Bernard Brogliato | Directeur de Recherche, INRIA Rhone-Alpes |
| <i>Examineurs :</i> | Maurice Heemels | Professeur, TU Eindhoven |
| | Thierry Divoux | Professeur, UHP - Nancy 1 |
| | Jamal Daafouz | Professeur, INP Lorraine (directeur de thèse) |
| | Claude Iung | Professeur, INP Lorraine (co-directeur de thèse) |



Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire ont été effectués au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN) une Unité Mixte de Recherche Nancy Université - INPL - CNRS - UMR 7039. Je remercie mes directeurs de thèse, M. Jamal Daafouz et M. Claude Iung, professeurs à l'Institut National Polytechnique de Lorraine, de m'avoir accueilli au sein du groupe thématique Automatique Commande et Observation des Systèmes (ACOS). Je leur suis reconnaissant pour leurs précieux conseils, leur patience ainsi que pour la confiance qu'ils m'ont accordée.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. Jean-Pierre Richard, professeur à l'École Centrale de Lille, et M. Bernard Brogliato, directeur de recherche à l'INRIA Rhones Alpes, d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie M. Janan Zaytoon, professeur à l'Université de Reims, président du jury, M. Maurice Heemels, professeur à l'Université Technologique d'Eindhoven, et rapporteur dans le cadre du programme européen "International Curriculum Option of Doctoral Studies in Hybrid Control for Complex, Distributed and Heterogeneous Embedded Systems" et M. Thierry Divoux, professeur à l'Université Henri Poincaré, pour leur participation au jury. Je leur suis reconnaissant pour la lecture attentive de mon manuscrit, pour leurs remarques et leurs compliments.

Je souhaite remercier les membres du laboratoire CRAN pour leur aide, en particulier M. Pierre Riedinger, pour sa rigueur mathématique et ses conseils, M. Marc Jungers pour l'intérêt qu'il porte à mes recherches et ses suggestions concernant mon mémoire ainsi que MM. Benoit Marx, Radu Ranta et Nicolae Brânzei pour leurs soutien et leur sympathie.

Je remercie également mes collègues de l'ENSEM : Abdelrazik, Sophie, Rony, Emilie, Gilberto, Marine, Hugo & Rebeca, Abdelfetah, Mohamed, Yahir, Cédric et les "petits" nouveaux Julie, Nadia et Ashraf.

Un grand merci à Diego et Ivan pour les différents échanges scientifiques mais aussi pour leur amitié sincère.

Enfin, mes remerciements les plus chaleureux vont à mes parents et mon frère, ainsi qu'à toute ma famille et ma belle-famille, pour leur soutien moral et leurs encouragements.

A mes parents et à ma douce Isabelle

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Acronymes | ix |
| Notations | xi |
| Introduction Générale | 1 |
| Chapitre 1 Notions introductives | 5 |
| 1.1 Systèmes à commutation - définition formelle | 5 |
| 1.2 Stabilité classique | 6 |
| 1.3 Problématiques, outils et résultats | 8 |
| 1.3.1 Stabilité des inclusions différentielles | 9 |
| 1.3.2 Fonction de Lyapunov quadratique commune et critères algébriques de stabilité | 11 |
| 1.3.3 Fonctions de Lyapunov multiples | 14 |
| 1.4 Stabilisation | 18 |
| 1.4.1 Loi de commutation stabilisante | 18 |
| 1.4.2 Correcteurs stabilisants | 22 |
| 1.5 Conclusion | 24 |
| Chapitre 2 Systèmes à commutation avec incertitudes | 25 |
| 2.1 Incertitudes paramétriques | 25 |
| 2.1.1 Préliminaires | 26 |
| 2.1.2 Fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres | 30 |
| 2.1.3 Exemples numériques | 35 |
| 2.2 Loi de commutation incertaine | 37 |
| 2.2.1 Signal temporairement inconnu | 38 |
| 2.2.2 Conditions de stabilité | 40 |
| 2.2.3 Loi de commutation partiellement connue | 44 |

| | | |
|--|---|-----------|
| 2.2.4 | Exemples numériques | 46 |
| 2.3 | Conclusion | 47 |
| Chapitre 3 Retards incertains | | 49 |
| 3.1 | Cas linéaire | 50 |
| 3.1.1 | Approches Lyapunov-Krasovskii et "système à commutation" | 51 |
| 3.1.2 | L'équivalence des approches | 53 |
| 3.2 | Systèmes à commutation et retards | 57 |
| 3.2.1 | Formalisation mathématique | 57 |
| 3.2.2 | Modèle augmenté du système | 58 |
| 3.2.3 | Analyse de stabilité | 59 |
| 3.3 | Exemples numériques | 60 |
| 3.4 | Conclusion | 61 |
| Chapitre 4 Application aux systèmes de commande numérique | | 63 |
| 4.1 | Contexte | 63 |
| 4.2 | Représentations discrètes | 65 |
| 4.2.1 | Cas idéal | 65 |
| 4.2.2 | Pas d'échantillonnage variables | 66 |
| 4.2.3 | Retards variables inconnus | 66 |
| 4.2.4 | Retards supérieurs à la période d'échantillonnage | 67 |
| 4.2.5 | Modèle à évènements | 67 |
| 4.3 | Modèle polytopique | 69 |
| 4.3.1 | Cas des matrices diagonalisables | 69 |
| 4.3.2 | Forme polytopique avec incertitude bornée en norme additive | 71 |
| 4.4 | Synthèse de contrôle | 74 |
| 4.4.1 | Retard - paramètre de commutation | 74 |
| 4.4.2 | Représentation polytopique pour le modèle à évènements . | 75 |
| 4.4.3 | Synthèse LMI d'un retour d'état | 76 |
| 4.5 | Régulation numérique des systèmes à commutation | 78 |
| 4.6 | Exemples d'application | 81 |
| 4.7 | Conclusion | 88 |
| Conclusion Générale | | 91 |
| Annexe | | 93 |

Bibliographie

97

107

Acronymes

BMI - Inégalités Matricielles Bilinéaires (anglais Bilinear Matrix Inequalities)

LMI - Inégalités Matricielles Linéaires (anglais Linear Matrix Inequalities)

LPV - Linéaire à Paramètres Variants

LTI - Linéaire Invariant dans le Temps (anglais Linear Time Invariant)

FLKGDR - Fonctions de Lyapunov-Krasovskii Générales Dépendantes du Retard

FLPQDP - Fonctions de Lyapunov Poly-Quadratiques Dépendant des Paramètres

SDH - Systèmes Dynamiques Hybrides

Notations

- $M > 0$ - matrice carrée symétrique définie positive,
- $M < 0$ - matrice carrée symétrique définie négative,
- $M < N$ - matrice $M - N$ carrée symétrique définie négative,
- \mathbf{I} - matrice identité,
- $\det(M)$ - déterminant de la matrice carrée M ,
- $\|M\|$ - norme euclidienne de la matrice M ,
- $\text{eig}_{\max}(M)$ et $\text{eig}_{\min}(M)$ - la plus grande et la plus petite valeur propre d'une matrice M symétrique.
- M^{-1} - inverse de la matrice carrée non-singulière M ,
- M^T - transposée de M ,
- $M = \begin{bmatrix} A & B \\ * & D \end{bmatrix}$ - matrice M symétrique où $*$ désigne B^T
- $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ - matrice diagonale avec a_1, a_2, \dots, a_n sur la diagonale principale
- $\text{co}(\mathcal{S})$ - enveloppe convexe d'un ensemble \mathcal{S} ,
- $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$
- $e_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, n$ - vecteurs de la base canonique
- $\|x\|$ - norme euclidienne du vecteur x ,
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - produit scalaire, $\langle x, y \rangle = x^T y$,

Introduction Générale

Les systèmes dynamiques hybrides (SDH) sont des systèmes dynamiques faisant intervenir simultanément des phénomènes de type dynamique continue et événementielle. L'exemple classique est le cas des processus continus supervisés par des algorithmes discrets de planification. Les systèmes linéaires à commutation représentent une classe importante de SDH. Il s'agit d'un ensemble fini de sous-systèmes linéaires associés à une loi de commutation qui indique à chaque instant le système actif.

Objectifs

Les travaux de cette thèse concernent l'analyse de stabilité et la synthèse de commandes pour les systèmes linéaires à commutation. Pour cette classe, il existe des outils permettant de garantir la stabilité indépendamment de la loi de commutation. Cependant, dans le contexte des applications pratiques, il est nécessaire de développer des conditions de stabilité robuste qui tiennent compte des incertitudes. Dans la littérature, il existe très peu de résultats sur ce sujet. Dans cette thèse, nous allons traiter des problèmes de stabilité et de synthèse de commande robuste des systèmes à commutation.

On s'intéresse essentiellement aux systèmes à commutation en temps discret avec des incertitudes paramétriques et des incertitudes sur la loi de commutation. On modélise les incertitudes paramétriques sous la forme de polytopes convexes et on montre comment tenir compte des paramètres incertains pour synthétiser des lois de contrôle efficaces. Ensuite, on donne des conditions de stabilité/stabilisation robuste pour les systèmes en temps discret avec une loi de commutation incertaine. En général, il est souhaitable de proposer des conditions de stabilité faciles à tester d'un point de vue numérique. Dans cette optique, les conditions de stabilité/stabilisation proposées sont exprimées en termes d'inégalités matricielles linéaires (anglais *Linear Matrix Inequalities*, LMI).

Le deuxième objet de nos recherches est l'interaction entre les régulateurs numériques et les systèmes continus. On considère les systèmes en temps discret issus des systèmes LTI continus commandés numériquement. Les incertitudes induites sur le modèle en temps discret proviennent alors des incertitudes sur les instants

d'échantillonnage et des imprécisions liées aux retards dans l'application des commandes. On rencontre concrètement ces problèmes lorsque les informations des mesures et des commandes sont transmises à travers un réseau numérique. Pour ces systèmes, on montre comment une modélisation à base d'évènements permet de ramener le problème original à un problème spécifique aux systèmes à commutation avec des incertitudes polytopiques. La méthodologie proposée pour le cas des systèmes à commutation incertains peut être appliquée pour la stabilisation des systèmes LTI en temps continu en présence d'imprécisions de la commande et de l'échantillonnage. Enfin, les résultats proposés sont étendus pour les systèmes à commutation continus commandés par des correcteurs numériques.

Dans cette thèse, nous ne discuterons pas les propriétés structurelles des SDH sur lesquelles de nombreuses équipes de recherche travaillent activement [32, 97, 101, 7, 9]. Les systèmes à commutation ainsi que les modèles linéaires qui les composent sont supposés commandables et observables.

Organisation du mémoire

Ce mémoire est organisé en 4 chapitres qui se présentent comme suit :

Chapitre 1

Le premier chapitre est une étude bibliographique. Nous aborderons le problème général de la stabilité pour mettre en place les fondements nécessaires à la compréhension de nos travaux. Ensuite, on va présenter différents critères et problématiques de stabilité et de stabilisation rencontrés dans le domaine des systèmes à commutation.

Chapitre 2

Dans le deuxième chapitre, les problèmes de stabilité et de commande robuste des systèmes à commutation incertains en temps discret seront abordés. Le chapitre est organisé en deux sections qui traitent d'une part du problème des incertitudes paramétriques et d'autre part des incertitudes liées à la loi de commutation. Il a pour objectifs de développer des outils de stabilité et de stabilisation robuste moins conservatifs en utilisant des fonctions de Lyapunov commutées dépendant de paramètres et de montrer comment obtenir des conditions de stabilité en termes de temps minimum de séjour lorsque la loi de commutation est incertaine.

Chapitre 3

Ce chapitre est consacré à l'étude de la relation entre la stabilité des systèmes en temps discret avec des retards variables inconnus et la stabilité de systèmes à

commutation. Une fonction de Lyapunov-Krasovskii quadratique et dépendante du retard, permettant d'analyser la stabilité du système à retard, sera proposée. Elle généralise toutes les autres fonctions présentées dans la littérature et elle permet d'obtenir des conditions de stabilité moins conservatives. Cette fonction est équivalente aux fonctions de Lyapunov commutées utilisées pour étudier la stabilité des systèmes à commutation. Les résultats de cette partie de la thèse seront exploités dans le chapitre 4.

Chapitre 4

L'objectif du dernier chapitre est de présenter une méthodologie unique pour traiter les problèmes de temporisation dans le contexte de la régulation numérique. On démontrera que le modèle discret d'un système à commutation commandé par un régulateur numérique peut être exprimé comme un système incertain avec incertitude polytopique. Le problème principal est d'obtenir un modèle polytopique représentatif du système en boucle fermée et de réduire sa complexité. Cela permettra de vérifier la stabilité par les algorithmes numériques existants. Les résultats obtenus sont appliqués pour l'étude de stabilité/stabilisation des systèmes commandés en réseaux.

Références personnelles

Les recherches présentées dans cette thèse figurent dans les références suivantes :

Chapitre de livre

- L. Hetel, J. Daafouz, C. Iung - *About stability analysis for discrete time systems with time varying delays* - Chapter 19 in *Taming Heterogeneity and Complexity of Embedded Control* - International Scientific and Technical Encyclopedia (ISTE), Londres, 2006

Revue internationale et nationale avec comité de lecture

- L. Hetel, J. Daafouz, C. Iung - *Stabilization of Arbitrary Switched Linear Systems With Unknown Time-Varying Delays* - IEEE Transactions on Automatic Control, Oct. 2006, Volume : 51, Issue : 10, page(s) : 1668- 1674
- R. Bourdais, L. Hetel, J. Daafouz, W. Perruquetti - *Stabilité et stabilisation d'une classe de systèmes dynamiques hybrides* - Journal Européen Systèmes Automatisés, acceptée, à paraître
- L. Hetel, J. Daafouz, C. Iung - *Equivalence between the Lyapunov-Krasovskii functional approach for discrete delay systems and the stability conditions*

for switched systems - Journal on Nonlinear Analysis : special issue on Hybrid Systems and Applications - acceptée, à paraître

- L. Hetel, J. Daafouz, C. Iung - *Analysis and control of LTI and switched systems in digital loops via an event-based modeling* - International Journal of Control - acceptée, à paraître

Conférences internationales avec comité de lecture

- L. Hetel, J. Daafouz, C. Iung - *Robust stability analysis and control design for switched uncertain polytopic systems* - 5th IFAC Workshop on Robust Control (ROCOND 06) - Toulouse, France - 2006
- L. Hetel, J. Daafouz, C. Iung - *Stabilization of switched linear systems with unknown time varying delays* - 2nd IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems - Alghero, Sardinia, Italie - 2006
- L. Hetel, J. Daafouz, C. Iung - *LMI control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems* - American Control Conference (ACC) - USA - 2007
- L. Hetel, J. Daafouz, C. Iung - *Equivalence between the Krasovskii-Lyapunov functional approach for discrete delay systems and the stability conditions for switched systems* - IFAC Workshop on Time Delay Systems - Nantes, France - 2007
- L. Hetel, J. Daafouz, C. Iung - *Stability analysis for discrete time switched systems with temporary uncertain switching signal* - IEEE Conference on Decision and Control - New Orleans, USA - 2007

Chapitre 1

Notions introductives

Dans ce chapitre, nous allons présenter les notions fondamentales liées aux systèmes à commutation. Tout d'abord, la définition formelle d'un système à commutation sera donnée. Après quelques rappels sur la stabilité classique, les notions de stabilité et stabilisation pour les systèmes à commutation seront discutées. Les résultats notables développés dans la littérature vont être passés en revue. Bien que les travaux développés dans cette thèse concernent en majorité les systèmes en temps discret, cette partie introductive privilégie le cas temps continu. En effet, historiquement, la plupart des problèmes et résultats ont été formulés dans ce cadre. Afin de préserver l'aspect historique de ces travaux, on présentera donc les notions en temps continu et on précisera les spécificités du temps discret le cas échéant.

1.1 Systèmes à commutation - définition formelle

Les systèmes à commutation représentent une classe de systèmes dynamiques hybrides [117, 100] qui fascine par sa simplicité structurelle et par la complexité des phénomènes qu'elle peut décrire. Formellement, un système à commutation en temps continu est défini par la relation

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(t, x(t), u(t)), \quad (1.1)$$

où $\sigma(t)$, $\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ représente une fonction constante par morceaux, nommée *loi de commutation*, qui prend des valeurs dans un ensemble d'indices \mathcal{I} . $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ la commande, et $f_i(\cdot, \cdot, \cdot)$, $\forall i \in \mathcal{I}$ sont des champs de vecteurs décrivant les différents régimes de fonctionnement du système. De façon similaire, un système à commutation en temps discret est défini par

$$x(k+1) = f_{\sigma(k)}(k, x(k), u(k)), \quad (1.2)$$

avec $\sigma : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathcal{I}$.

La loi de commutation $\sigma(t)$ (ou $\sigma(k)$ pour les systèmes en temps discret) spécifie le régime (sous-système) actif. Seul un sous-système est actif à un instant

donné. Le choix du sous-système actif peut être lié à un critère temporel, à des régions ou surfaces déterminées dans l'espace d'état, à un paramètre extérieur, de manière générale au fonctionnement d'un automate. Les modèles (1.1) et (1.2) sont très généraux. Cependant, ils peuvent être affinés moyennant certaines hypothèses. Par exemple, si $u(t)$ n'est pas présent, alors le modèle (1.1) désigne un système *autonome*. Si les champs de vecteurs des sous-systèmes prennent la forme

$$A_i x(t), \forall i \in \mathcal{I},$$

alors on obtient un *système à commutation linéaire*

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t). \quad (1.3)$$

Une taxonomie des systèmes à commutation peut être définie par rapport à la loi de commutation σ . Dans ce contexte, on peut identifier un aspect *contrôlé* (quand la loi de commutation représente une commande externe) et, par opposition, un aspect *autonome* (la commutation est provoquée par le franchissement d'une frontière dans l'espace d'état). Une synthèse des différentes autres classes de systèmes à commutation et des problématiques qui leur sont associées est donnée dans [61, 31, 96, 17] et [92].

1.2 Stabilité classique

Un problème important dans le domaine des systèmes à commutation est la recherche de critères de stabilité. Avant d'aborder cet aspect, quelques concepts fondamentaux de la théorie de la stabilité seront rappelés.

D'une manière intuitive, la stabilité est la propriété d'un système de revenir à sa position d'*équilibre* lorsqu'il en est écarté ponctuellement. Considérons un système non-linéaire autonome invariant dans le temps

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.4)$$

où $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction localement lipschitzienne et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . Formellement, les points d'équilibre x^* représentent les racines réelles de l'équation $f(x) = 0$.

Définition 1 [55] *Le point d'équilibre x^* du système (1.4) est*

– *stable si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que*

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \epsilon, \forall t \geq 0;$$

– *asymptotiquement stable si x^* est stable et δ peut être choisi tel que*

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*;$$

– *exponentiellement stable s'il existe trois réels positifs c, K et λ tels que*

$$\forall \|x(0) - x^*\| < c, \|x(t) - x^*\| \leq K \|x(0) - x^*\| e^{-\lambda t};$$

– globalement asymptotiquement stable si x^* est stable et $\forall x(0) \in \Omega \subset \mathcal{R}^n$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

Par translation, le point d'équilibre peut être ramené à l'origine ($x^* = 0$), ce qui simplifie souvent l'étude de la stabilité.

Le concept de stabilité est étroitement lié à la théorie de stabilité de Lyapunov. Cette théorie établit le fait que les systèmes dont la trajectoire est attirée vers un point d'équilibre asymptotiquement stable perdent progressivement de l'énergie, de façon monotone. Lyapunov généralise la notion d'énergie en utilisant une fonction $V(x)$ qui dépend de l'état du système. Cette fonction est souvent une norme. Les principaux théorèmes en temps continu et en temps discret, très souvent utilisés pour l'analyse de stabilité, sont donnés comme suit :

Théorème 2 [55] *Considérons le système non-linéaire*

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

avec l'origine ($x^* = 0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$) comme un point d'équilibre. S'il existe une fonction $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, qui admet des dérivées partielles continues et deux fonctions α et β de classe \mathcal{K} (voir la note ¹) telles que

$$\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

l'origine du système est

– stable si

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad x \neq 0;$$

– asymptotiquement stable s'il existe une fonction φ de classe \mathcal{K} telle que

$$\frac{dV(x)}{dt} \leq -\varphi(\|x\|), \quad \forall x \in \Omega, \quad x \neq 0;$$

– exponentiellement stable s'il existe quatre constantes positives $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, p$ telles que

$$\alpha(\|x\|) = \bar{\alpha} \|x\|^p, \quad \beta(\|x\|) = \bar{\beta} \|x\|^p, \quad \varphi(\|x\|) = \gamma \|x\|, \quad \forall x \in \Omega, \quad x \neq 0.$$

¹Une fonction $\varphi : [0, a) \rightarrow [0, \infty)$ est de classe \mathcal{K} , si elle est strictement croissante et $\varphi(0) = 0$. Elle est de classe \mathcal{K}_∞ si $a = \infty$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$.

En temps discret

Théorème 3 *Considérons le système non-linéaire en temps discret*

$$x(k+1) = f(x(k))$$

avec l'origine ($x^ = 0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$) comme un point d'équilibre. S'il existe une fonction $V : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ et deux fonctions α et β de classe \mathcal{K} telles que*

$$\alpha(\|x\|) \leq V(x) \leq \beta(\|x\|), \quad \forall x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

l'origine du système est

- stable si

$$\Delta V(x(k)) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad x \neq 0$$

où

$$\begin{aligned} \Delta V(x(k)) &= V(x(k+1)) - V(x(k)) \\ &= V(f(x(k))) - V(x(k)); \end{aligned}$$

- asymptotiquement stable s'il existe une fonction φ de classe \mathcal{K} telle que

$$\Delta V(x(k)) \leq -\varphi(\|x(k)\|), \quad \forall x(k) \in \Omega, \quad x(k) \neq 0;$$

- exponentiellement stable s'il existe quatre constantes positives $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, p$ telles que

$$\alpha(\|x\|) = \bar{\alpha} \|x\|^p, \quad \beta(\|x\|) = \bar{\beta} \|x\|^p, \quad \varphi(\|x\|) = \gamma \|x\|, \quad \forall x \in \Omega, \quad x \neq 0.$$

Remarques. Les propriétés énoncées dans ces théorèmes sont locales. Elle deviennent globales ($\Omega = \mathbb{R}^n$) si les fonctions choisies sont de classe \mathcal{K}_∞ .

Définition 4 (*fonction de Lyapunov*) *La fonction $V(x)$ qui vérifie le Théorème 2 (ou du Théorème 3 pour le cas temps discret) est appelée fonction de Lyapunov pour le système.*

Souvent, dans un esprit de simplification du jargon, on emploie le terme *système stable* pour désigner un système dont le point d'équilibre est stable et unique.

1.3 Stabilité des systèmes à commutation - problématiques, outils et résultats

Le problème de stabilité des systèmes à commutation est complexe et intéressant. L'exemple de systèmes asymptotiquement stables qui, par une séquence de commutations, donnent lieu à un comportement instable, est bien connu. Le cas de systèmes instables qui, grâce à une loi de commutation particulière, donnent

lieu à un comportement stable est aussi remarquable. L'article de référence dû à Liberzon et Morse [63] énumère quelques problèmes de stabilité pour le cas des systèmes à commutation autonomes :

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad \forall \sigma(t) \in \mathcal{I}.$$

Problème A Trouver des conditions de stabilité telles que le système est asymptotiquement stable quelle que soit la loi de commutation.

Problème B Identifier les classes de lois de commutation pour lesquelles le système à commutation soit asymptotiquement stable.

Problème C Construire une loi de commutation qui rend le système asymptotiquement stable.

1.3.1 Stabilité des inclusions différentielles

Des problèmes de stabilité semblables à ceux présentés ci-dessus ont été rencontrés pour les équations différentielles ordinaires à second membre discontinu, plus précisément pour les inclusions différentielles [4].

Considérons les inclusions différentielles linéaires décrites par

$$\dot{x} \in F(x) = \{y : y = Ax, A \in \mathcal{A}\} \quad (1.5)$$

où \mathcal{A} est un ensemble compact. Un système à commutation linéaire sous la forme

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t),$$

avec $A_{\sigma(t)} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$, $\forall \sigma(t) \in \mathcal{I}$, peut être exprimé comme une inclusion différentielle (1.5) avec $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$.

En fait, l'analyse de stabilité d'une inclusion différentielle linéaire (1.5) est équivalente à l'analyse de son enveloppe convexe.

Théorème 5 [70] *L'inclusion (1.5) est asymptotiquement stable si et seulement si l'inclusion différentielle convexe*

$$\dot{x} \in \{y : y = Ax, A \in \text{co}\mathcal{A}\} \quad (1.6)$$

est stable [70].

Une condition nécessaire et suffisante de stabilité, fondée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov strictement convexes, homogènes (du second ordre) sous une forme *quasi-quadratique*

$$V(x) = x^T \mathcal{P}(x)x > 0 \quad (1.7)$$

avec

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}^T(x) = \mathcal{P}(\tau x), \quad x \neq 0, \tau \neq 0$$

et

$$\dot{V}^* = \sup_{y \in F(x)} \lim_{h \rightarrow 0} h^{-1} \{V(x + hy) - V(x)\} \leq -\gamma \|x\|^2, \gamma > 0,$$

est donnée dans [70]. Cette condition se traduit par un critère algébrique lorsque l'ensemble \mathcal{A} est un polyèdre convexe :

Théorème 6 [70] Soit l'inclusion différentielle linéaire convexe

$$\dot{x} \in F(x) = \{y : y = Ax, A \in \text{co}\{A_1, \dots, A_M\}\} \quad (1.8)$$

L'origine $x = 0$ de l'inclusion (1.8) est asymptotiquement stable si et seulement s'il existe un nombre $m \geq n$, une matrice $\mathcal{L} \in \mathcal{R}^{n \times m}$ de rang n et M matrices

$$\Gamma_s = \left(\gamma_{ij}^{(s)} \right)_{i,j=1}^m \in \mathcal{R}^{m \times m}, \quad \forall s = 1, \dots, M,$$

à diagonale dominante négative, c'est-à-dire

$$\gamma_{ii}^{(s)} + \sum_{i \neq j} \left| \gamma_{ij}^{(s)} \right| < 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \quad s = 1, \dots, M,$$

tels que la relation

$$A_s^T \mathcal{L} = \mathcal{L} \Gamma_s^T, \quad \forall s = 1, \dots, M$$

soit vérifiée.

Ce critère de stabilité est lié à la recherche d'une nouvelle inclusion différentielle stable

$$\dot{z} \in G(z) = \{y : y = \Lambda z, \Lambda \in \text{co}\{\Lambda_1, \dots, \Lambda_N\}\} \quad (1.9)$$

dans un espace de dimension augmentée \mathbb{R}^m qui contient les solutions de l'inclusion de départ. La matrice \mathcal{L} , avec $z = \mathcal{L}^T x$, représente la matrice de transformation qui relie les deux inclusions. La preuve de stabilité repose sur l'existence d'une fonction de Lyapunov quasi-quadratique $V(x) = x^T \mathcal{P}(x)x$.

Ce théorème peut être appliqué directement aux systèmes à commutation linéaires [30, 63, 66]. En effet, plusieurs classes de systèmes dynamiques hybrides peuvent être exprimées comme des inclusions différentielles [21]. Cela signifie que la stabilité des systèmes à commutation implique l'existence d'une fonction de Lyapunov commune pour l'ensemble des sous-systèmes. Cependant, d'un point de vue pratique, il est très difficile de vérifier les critères proposés par le théorème précédent. En général, la recherche numérique d'une fonction de Lyapunov quasi-quadratique $V(x) = x^T \mathcal{P}(x)x$ ou d'une matrice de transformation \mathcal{L} n'est pas aisée. Cette difficulté a conduit plusieurs auteurs à limiter leur recherche à une fonction de Lyapunov quadratique sous la forme

$$V(x) = x^T P x.$$

L'existence d'une telle fonction, une condition suffisante pour la stabilité, peut être exprimée en termes d'inégalités matricielles linéaires (anglais *linear matrix inequality* - LMI) [18] dont la solution peut être trouvée par des algorithmes d'optimisation convexe.

Théorème 7 Considérons le système (1.8). S'il existe une matrice P , $0 < P = P^T$, solution des LMIs

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad \forall i = 1, \dots, N \quad (1.10)$$

alors la fonction quadratique $V(x) = x^T P x$ est une fonction de Lyapunov pour le système (1.8) et l'origine est globalement exponentiellement stable.

Lorsque l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune détermine la stabilité d'un système, on dit que le système est *quadratiquement stable* et on parle de *stabilité quadratique*.

En temps discret

Une approche spécifique au temps discret est celle qui repose sur l'utilisation du *rayon spectral joint*. Elle donne une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité des inclusions à différences [10].

Le rayon spectral joint représente le taux maximal de croissance qui peut être obtenu en formant des produits longs de matrices appartenant à un ensemble fini $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_N\}$. Le rayon spectral joint de l'ensemble \mathcal{A} est défini formellement par :

$$\rho(\mathcal{A}) \triangleq \limsup_{p \rightarrow \infty} \rho_p(\mathcal{A})$$

où

$$\rho_p(\mathcal{A}) = \sup_{A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p} \in \mathcal{A}} \|A_{i_1} \cdot A_{i_2} \dots A_{i_p}\|^{1/p}.$$

L'inclusion différentielle linéaire

$$x(k+1) \in F(x) = \{y : y = Ax, A \in \mathcal{A}\}$$

est asymptotiquement stable si et seulement si le rayon spectral joint satisfait l'inégalité

$$\rho(\mathcal{A}) < 1.$$

La principale difficulté réside dans le calcul du rayon spectral joint [99]. Une procédure d'approximation du rayon spectral joint est donnée dans [12, 81]. L'approximation peut être utilisée pour déterminer la stabilité des systèmes linéaires à commutation en temps discret [10]

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k), \quad A_{\sigma(k)} \in \mathcal{A}.$$

1.3.2 Fonction de Lyapunov quadratique commune et critères algébriques de stabilité

Une approche très connue pour garantir la stabilité d'un système linéaire à commutation sous une loi de commutation arbitraire a été proposée par Liberzon [61]. Cette approche est fondée sur l'utilisation de l'algèbre de Lie. Considérons le système

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t), \quad \forall \sigma(t) \in \mathcal{I}. \quad (1.11)$$

La dynamique du système est caractérisée par un ensemble de matrices de Hurwitz $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$.

L'algèbre de Lie

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}\{A_i : \forall i \in \mathcal{I}\}$$

correspond à l'ensemble de toutes les matrices A_i , $\forall i \in \mathcal{I}$ et les commutateurs itérés définis à partir des crochets de Lie,

$$[A_i, A_j] = A_i A_j - A_j A_i, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}.$$

Plusieurs critères algébriques de stabilité en relation avec cette algèbre de Lie ont été proposés. Si toutes les matrices d'état A_i , $\forall i \in \mathcal{I}$ commutent par paires, c'est-à-dire si le crochet de Lie $[A_i, A_j]$ s'annule pour toute paire A_i, A_j , $i, j \in \mathcal{I}$ de matrices d'état, alors le système commuté (1.11) est asymptotiquement stable [74, 1]. Gurvits indique que si l'algèbre de Lie \mathfrak{g} est nilpotente, alors le système est asymptotiquement stable [43]. Indépendamment de ces travaux, Mori et Kuroe [72] montrent que si les matrices A_i , $\forall i \in \mathcal{I}$ admettent une triangulation supérieure (ou inférieure) simultanée, alors il existe une fonction de Lyapunov quadratique commune.

Théorème 8 [72] *Considérons le système (1.11). Si toutes les matrices A_i , $i \in \mathcal{I}$ sont Hurwitz stables et s'il existe une matrice $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inversible telle que toutes les matrices*

$$\Lambda_i = T^{-1} A_i T, \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

soient triangulaires supérieures (ou inférieures), alors il existe une fonction de Lyapunov quadratique commune $V(x) = x^T P x$ pour la famille des systèmes

$$\{\dot{x} = A_i x, \quad \forall i \in \mathcal{I}\}$$

et le système commuté (1.11) est asymptotiquement stable.

Liberzon généralise les résultats précédents pour des matrices de transformation T complexes, $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Il propose une condition suffisante pour la triangulation simultanée d'un ensemble de matrices en termes d'algèbre de Lie solvable [62]. Si

$$\mathfrak{g} = \text{Lie}\{A_i : \forall i \in \mathcal{I}\}$$

est une algèbre de Lie solvable, alors la famille des systèmes

$$\{\dot{x} = A_i x, \quad \forall i \in \mathcal{I}\}$$

accepte une triangulation supérieure (ou inférieure) simultanée. Ce résultat peut être appliqué localement aux systèmes non linéaires [1, 67]. Le résultat de Liberzon est intéressant car, lorsque toutes les matrices de l'ensemble $\{A_i, \forall i \in \mathcal{I}\}$ commutent par paires ou génèrent une algèbre de Lie \mathfrak{g} nilpotente, alors elles génèrent aussi une algèbre de Lie \mathfrak{g} solvable. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie.

L'intérêt de cette approche est d'établir un lien entre ces diverses méthodes d'analyse de stabilité quadratique basées sur les crochets de Lie et la triangulation simultanée. Cependant ces critères représentent des conditions seulement suffisantes pour l'existence de la fonction de Lyapunov quadratique commune, ce qui implique un certain conservatisme.

1.3.2.1 Critères nécessaires et suffisants pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune pour des cas particuliers

Pour réduire le conservatisme des approches précédentes, la communauté scientifique a cherché des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune. Shorten et Narendra [93] ont proposé une telle condition pour une paire de matrices de dimension deux.

Considérons l'enveloppe convexe générée par deux matrices $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\text{co}\{A_1, A_2\} \triangleq \{\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 : \lambda \in [0, 1]\}.$$

Théorème 9 *Les systèmes*

$$\{\dot{x} = A_1 x, \dot{x} = A_2 x\} \text{ avec } A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

possèdent une fonction de Lyapunov quadratique commune si et seulement si toutes les matrices des enveloppes convexes $\text{co}\{A_1, A_2\}$ et $\text{co}\{A_1, A_2^{-1}\}$ sont Hurwitz stables.

Des extensions existent pour le cas de plusieurs systèmes du second ordre [91] ou pour une paire de systèmes du troisième ordre [56]. L'extension au cas général s'avère très difficile et reste pour l'instant sans issue.

D'autres critères algébriques pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune sont donnés dans [119], où on montre que pour les systèmes symétriques

$$A_i = A_i^T, \forall i \in \mathcal{I}$$

ou normaux

$$A_i A_i^T = A_i^T A_i, \forall i \in \mathcal{I},$$

une condition nécessaire et suffisante à la fois pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune et pour la stabilité est que chacun des sous-systèmes soit asymptotiquement stable.

1.3.2.2 Conditions LMI pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune

En dehors des résultats algébriques qui viennent d'être énoncés, on trouve aussi dans la littérature une autre manière, purement numérique, de chercher une fonction de Lyapunov quadratique commune. La méthode repose sur la résolution des inégalités linéaires matricielles (1.10). Ces critères LMI sont des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune [18]. On trouve également des critères LMI permettant de vérifier qu'une fonction de Lyapunov quadratique commune n'existe pas pour une famille de systèmes [18] :

Théorème 10 *S'il existe des matrices $R_i = R_i^T$, $\forall i \in \mathcal{I}$ solutions des inégalités linéaires matricielles :*

$$R_i > 0, \forall i \in \mathcal{I}, \sum_{i=1}^N A_i^T R_i + R_i A_i > 0.$$

alors il n'existe pas de fonction de Lyapunov quadratique commune pour la famille de systèmes

$$\{\dot{x} = A_i x, \forall i \in \mathcal{I}\}.$$

L'inconvénient de l'utilisation des inégalités linéaires matricielles est que pour certains cas de matrices de grande dimension ou de matrices mal conditionnées, les algorithmes numériques actuels peuvent ne pas donner de résultats. En effet, il existe des exemples pour lesquels l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune peut être déterminée de façon analytique, mais les algorithmes numériques usuels (LMI Toolbox de MATLAB) ne donnent pas de résultat.

1.3.3 Fonctions de Lyapunov multiples

Nous avons énoncé précédemment plusieurs critères de stabilité basés une fonction de Lyapunov quadratique commune. Toutefois, l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune n'est qu'une condition suffisante pour la stabilité. Dans [30], on démontre analytiquement que l'on peut avoir des systèmes commutés qui sont stables et pour lesquels il n'existe pas de fonction de Lyapunov quadratique commune. Ce résultat a déterminé la communauté scientifique à chercher d'autres types de fonctions de Lyapunov. On retrouve dans la littérature plusieurs fonctions de Lyapunov qui peuvent être regroupées, d'une manière générale, sous le nom de *fonctions de Lyapunov multiples*. Les fonctions de Lyapunov multiples désignent une famille de fonctions sous la forme

$$V(x) = x^T P(\sigma, x)x$$

dont la matrice de Lyapunov peut dépendre du vecteur d'état ou de la loi de commutation. La concaténation de ces fonctions détermine une seule fonction de Lyapunov commune, non quadratique.

1.3.3.1 Fonctions de Lyapunov linéaires par morceaux

En appliquant les critères de Molchanov et Pyatnitskiy [70] dans le contexte des systèmes à commutation, on observe qu'il est nécessaire et suffisant d'avoir une fonction de Lyapunov quasi-quadratique $V(x) = x^T P(x)x$ (donnée dans l'équation (1.7)), dont la matrice de Lyapunov varie en fonction de l'état.

La première approche pour déterminer des fonctions de Lyapunov multiples a été d'approximer les surfaces de niveaux de la fonction de Lyapunov quasi-quadratique $V(x) = x^T P(x)x$ (voir le théorème 6) par une fonction linéaire par morceaux [70, 77] :

$$V_m(x) = \max_{1 \leq i \leq m} \|\langle l_i, x \rangle\|. \quad (1.12)$$

Le crochet \langle, \rangle désigne le produit scalaire et les éléments $l_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, représentent des vecteurs constants appelés vecteurs générateurs. Pour un nombre de vecteurs générateurs m suffisamment grand, il est possible de montrer qu'une telle fonction est nécessaire et suffisante pour la stabilité [71].

Il existe très peu de méthodes qui permettent de vérifier l'existence d'une telle fonction pour les systèmes à commutation. La difficulté réside dans la spécification des vecteurs générateurs l_i .

L'existence d'une fonction de Lyapunov linéaire par morceaux peut être déduite en analysant le spectre des matrices de l'enveloppe convexe déterminée par A_i , $\forall i \in \mathcal{I}$. Pour une paire de matrices du deuxième ordre, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une fonction de Lyapunov linéaire par morceaux avec $m = 4$ sont données dans [107].

Dans le cas général, Yfoulis et Shorten [116] proposent un résultat suffisant, donnant lieu à une approche numérique.

1.3.3.2 Pseudo fonctions de Lyapunov

Une autre approche pour l'analyse de stabilité des systèmes à commutation est l'utilisation des *pseudo fonctions de Lyapunov* (anglais *Lyapunov-like functions*). Celles-ci ne représentent pas des fonctions de Lyapunov au sens strict du terme. Elles désignent une famille de fonctions quadratiques continues et différentiables par morceaux. Chaque fonction est associée à un sous-système. La spécificité des pseudo fonctions de Lyapunov est le fait que leur décroissance n'est exigée que lorsque le sous-système correspondant est actif.

Parmi les premiers résultats, on peut citer [82]. La structure discontinue des systèmes à commutation suggère l'utilisation des fonctions de Lyapunov discontinues. Les auteurs proposent d'utiliser une famille de *pseudo fonctions de Lyapunov*

$$\{V_i(x) = x^T P_i x, i \in \mathcal{I}\}$$

telle que chaque champ de vecteurs $A_i x$, $i \in \mathcal{I}$ ait sa propre fonction. Une pseudo fonction de Lyapunov satisfait les propriétés suivantes :

- $V_i(x) = x^T P_i x$ est définie positive $\forall x \neq 0$ et $V_i(0) = 0$;
- pour tout $i \in \mathcal{I}$, la dérivée de la fonction de Lyapunov vérifie la relation

$$\dot{V}_i(x) = \frac{\partial V_i}{\partial x} A_i x(t) \leq 0 \tag{1.13}$$

lorsque le sous-système i est actif.

Les théorèmes de stabilité élaborés dans ce contexte sont fondés sur la décroissance de la fonction de Lyapunov aux instants successifs d'activation du même sous-système.

Théorème 11 [82] *Considérons un ensemble de pseudo fonctions de Lyapunov V_σ , chacune associée au champ de vecteurs $A_\sigma x$. Pour $i < j$, soit $t_i < t_j$ des*

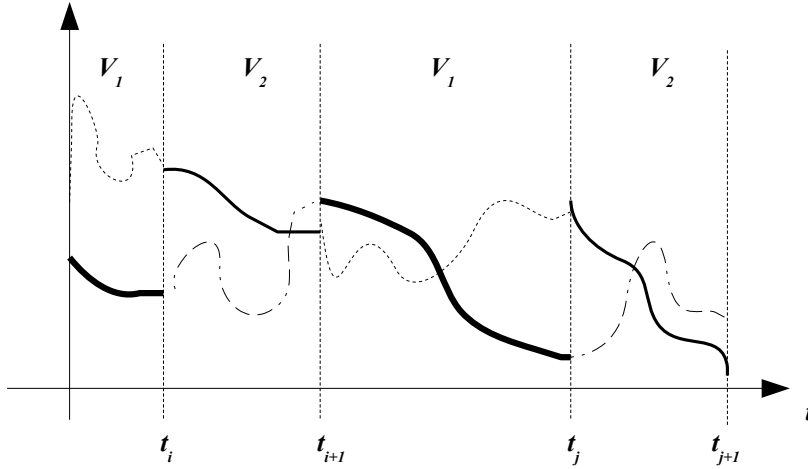


FIG. 1.1 – Fonctions de Lyapunov multiples

instants de commutations tels que $\sigma(t_i) = \sigma(t_j)$. S'il existe un $\gamma > 0$ tel que

$$V_{\sigma(t_j)}(x(t_{j+1})) - V_{\sigma(t_i)}(x(t_{i+1})) \leq -\gamma \|x(t_{i+1})\|^2$$

alors le système à commutation est stable (voir la figure 1.1).

Des extensions au cas non-linéaire ont été proposées dans [19, 20] et [31]. Un résultat plus général, qui introduit la notion de *fonction de Lyapunov faible*, est donné par [114]. Dans ce cas, la condition (1.13) est remplacée par

$$V_i(x(t)) \leq \alpha(V_i(x(t_j))), \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}]$$

où $[t_j, t_{j+1}]$ est l'intervalle de temps durant lequel le sous-système i est actif, t_j, t_{j+1} sont des instants de commutation et $\alpha : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ est une fonction continue qui satisfait $\alpha(0) = 0$. Ce résultat permet de définir des pseudo fonctions de Lyapunov qui sont potentiellement croissantes même lorsque le sous-système associé est actif, mais leur croissance reste bornée.

Les résultats présentés s'appliquent difficilement dans le cas des commutations arbitraires : on peut remarquer que le théorème précédent nécessite que la trajectoire du système soit connue au moins aux instants de commutation. Un autre problème est le fait qu'il n'y ait pas de méthode pour la construction analytique ou numérique de la famille des pseudo fonctions de Lyapunov. Ces problèmes peuvent cependant être résolus pour des configurations particulières. C'est le cas, par exemple, lorsque la loi de commutation est déterminée par une partition de l'espace d'état [53].

Considérons le système dynamique :

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) \text{ pour tout } x(t) \in X_i, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (1.14)$$

où X_i sont des ensembles fermés avec des intérieurs disjoints tels que $\cup_i X_i = \mathbb{R}^n$. Lorsque le sous-système i est actif, S_{ij} désigne la région dans l'espace d'état où les commutations vers le sous-système j sont permises, $\forall i, j \in \mathcal{I}$.

Considérons un ensemble de pseudo fonctions de Lyapunov $V_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, chacune associée au champ de vecteurs $A_i x$ et les régions :

$$\Omega^i \triangleq \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}_i(x) = \frac{\partial V}{\partial x} A_i x(t) \leq 0 \right\},$$

$$\Omega^{ij} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : V_i(x) \geq V_j(x)\}.$$

S'il est possible de trouver des fonctions $V_i, i \in \mathcal{I}$ telles que $X_i \subseteq \Omega^i$ et $S_{ij} \subseteq \Omega^{ij}$, alors on peut montrer, par extension du théorème 11, que le système (1.14) est stable [85, 86]. Si, de plus, on considère des fonctions de Lyapunov sous la forme

$$V_i = x^T P_i x$$

et des régions X_i et S_{ij} coniques, c'est-à-dire,

$$X_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q_i x \leq 0, Q_i = Q_i^T\},$$

et

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q_{ij} x \leq 0, Q_{ij} = Q_{ij}^T\}$$

alors on obtient des conditions de stabilité en termes d'inégalités matricielles linéaires [54, 87].

Théorème 12 *S'il existe des matrices $P_i > 0$ et des $\alpha_i \geq 0$ et $\alpha_{ij} \geq 0 \forall i, j \in \mathcal{I}$ tels que :*

$$A_i^T P_i + P_i A_i - \alpha_i Q_i \leq 0, \quad (1.15)$$

$$(P_i - P_j) - \alpha_{ij} Q_{ij} \leq 0, i \neq j, \quad (1.16)$$

alors le système (1.14) est asymptotiquement stable.

Ce théorème présente beaucoup d'avantages d'ordre pratique. Contrairement au théorème 11, ces conditions de stabilité ne font pas intervenir la valeur de l'état et peuvent être vérifiées par des algorithmes numériques. De plus, elles s'avèrent très flexibles : les fonctions de Lyapunov $x^T P_i x$ sont contraintes à être décroissantes seulement dans la partition X_i où le champ de vecteurs $A_i x$ est actif.

En temps discret

La version en temps discret du théorème précédent est donnée dans [69]. Cependant, dans le contexte du temps discret il est possible d'utiliser des fonctions de Lyapunov multiples même dans le cas général. Pour les systèmes à commutation en temps discret

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) \quad (1.17)$$

soumis à une loi de commutation arbitraire $\sigma(k) \in \mathcal{I}$, l'analyse de stabilité peut être exprimée en termes d'inégalités matricielles linéaires. Dans ce cas, une fonction de Lyapunov poly-quadratique est obtenue [28].

Théorème 13 *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe une fonction de Lyapunov poly-quadratique*

$$V(k, x(k), \sigma(k)) = x^T(k)P_{\sigma(k)}x(k),$$

strictement décroissante le long des trajectoires du système (1.17) $\forall \sigma \in \mathcal{I}$.

2) *Il existe des matrices $P_i = P_i^T > 0, \forall i \in \mathcal{I}$, satisfaisant les inégalités matricielles linéaires :*

$$\begin{bmatrix} P_i & A_i^T P_j \\ P_j A_i & P_j \end{bmatrix} > 0, \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}. \quad (1.18)$$

3) *Il existe des matrices symétriques $S_i = S_i^T > 0$, et des matrices $G_i \forall i \in \mathcal{I}$, satisfaisant les inégalités matricielles linéaires :*

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i^T \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0, \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}. \quad (1.19)$$

Remarques. L'approche par fonctions de Lyapunov poly-quadratiques représente une généralisation de l'approche quadratique. Il suffit de poser $P_i = P, \forall i \in \mathcal{I}$ pour se ramener au cas des fonction quadratiques. Cette généralisation permet de relaxer les contraintes imposées par la méthode quadratique et d'obtenir des conditions de stabilité moins conservatives.

1.4 Stabilisation

Dans cette partie, il sera question de deux types de problèmes de stabilisation pour les systèmes linéaires commutés : la recherche d'une loi de commutation stabilisante et la synthèse de correcteurs stabilisant le système indépendamment de la loi de commutation.

1.4.1 Loi de commutation stabilisante

Le problème de la synthèse d'une loi de commutation stabilisante est souvent formulé de la façon suivante : quelle restriction doit-on considérer pour la loi de commutation afin de garantir la stabilité du système ? Ici nous allons considérer deux types de restrictions :

- restrictions dans l'espace d'état, lorsque la loi de commutation représente une commande ;
- restrictions dans le domaine temporel, lorsqu'il est possible de contrôler uniquement le temps de séjour dans un mode, la loi de commutation étant arbitraire.

1.4.1.1 Restrictions déterminées par des domaines dans l'espace d'état

La synthèse d'une loi de commutation stabilisante peut être abordée en divisant l'espace d'état en plusieurs régions telles que le système linéaire par morceaux obtenu soit stable. Nous allons considérer ici que la loi de commutation représente une "commande". Tout d'abord nous allons nous intéresser au problème de l'existence d'une "commande" de commutation stabilisante. Ensuite nous allons donner un aperçu de la construction d'une partition de l'espace d'état stabilisante.

L'existence d'une loi de commutation stabilisante est un problème trivial dans le cas où au moins une des matrices A_i est Hurwitz. En effet, il suffit d'activer le sous-système stable pour stabiliser le système à commutation. Le problème est plus délicat dans le cas où toutes les matrices A_i , $i \in \mathcal{I}$ sont instables. Une condition nécessaire pour la stabilisation par commutation est proposée dans [97] :

Théorème 14 *S'il existe une séquence de commutations stabilisante, alors il existe un sous-système*

$$\dot{x}(t) = A_i x(t), \quad i \in \mathcal{I}$$

tel que au moins une valeur propre de $A_i + A_i^T$ soit un nombre réel négatif.

Par ailleurs, on peut citer aussi les travaux de Wicks [103], fondés sur le fait que la trajectoire de toute combinaison convexe de $\{A_1 x, A_2 x\}$ peut être approximée par des commutations rapides entre les deux sous-systèmes. Le premier résultat s'énonce comme suit :

Théorème 15 [103],[33] *Considérons une paire de systèmes instables $\{A_1, A_2\}$ ($M = 2$). S'il existe une combinaison convexe stable, c'est-à-dire s'il existe un $\alpha \in (0, 1)$ tel que la matrice*

$$A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha) A_2$$

ait toutes ses valeurs propres dans le demi-espace gauche du plan complexe, il existe une séquence de commutations telle que le système

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)} x(t), \quad \sigma(t) \in \{1, 2\}$$

soit asymptotiquement stable.

Il faut remarquer que le théorème donne seulement une condition suffisante pour la stabilisation. Des conditions qui sont à la fois nécessaires et suffisantes

existent pour le cas des systèmes de deuxième ordre [113]. Une généralisation du théorème 15 pour le cas de plusieurs systèmes est proposée dans [104]. Des méthodes pour la construction de A_{eq} sont données dans [103].

En relation avec les résultats proposés par le théorème 15, la synthèse d'une loi de commutation stabilisante peut revenir à la recherche d'une partition de l'espace d'état stabilisante [103, 102]. Nous allons donner un aperçu de la façon dont ce problème peut être abordé.

Soit $A_{eq} = \alpha A_1 + (1 - \alpha)A_2$, $\alpha \in (0, 1)$ la combinaison stable. Dans ce cas, il existe deux matrices P et Q définies positives telles que :

$$A_{eq}^T P + P A_{eq} = -Q$$

Cette condition peut être réécrite comme :

$$\alpha(A_1^T P + P A_1) + (1 - \alpha)(A_2^T P + P A_2) = -Q$$

ou encore

$$\alpha \cdot x^T(A_1^T P + P A_1)x + (1 - \alpha) \cdot x^T(A_2^T P + P A_2)x = -x^T Q x < 0,$$

$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Les deux termes, $x^T(A_1^T P + P A_1)x$ et $x^T(A_2^T P + P A_2)x$, sont pondérés par des coefficients positifs ($\alpha \in (0, 1)$). Pour assurer la négativité dans l'équation précédente, il faut qu'au moins un des deux termes soit négatif pour toute valeur du vecteur d'état, c'est-à-dire $x^T(A_1^T P + P A_1)x < 0$ ou $x^T(A_2^T P + P A_2)x < 0$. Autrement dit, l'espace d'état peut être couvert par deux régions coniques :

$$X_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T(A_i^T P + P A_i)x < 0\}, \quad i = 1, 2$$

La fonction $V(x) := x^T P x$ est strictement décroissante dans la région X_1 pour les solutions de $\dot{x} = A_1 x$ et dans la région X_2 pour les solutions de $\dot{x} = A_2 x$. En utilisant cette propriété, on construit les surfaces de commutation de telle sorte que V soit strictement décroissante pour toutes les solutions du système à commutation.

Les résultats ici présentés se basent sur l'existence d'une combinaison convexe stable, A_{eq} . Cependant, trouver une combinaison convexe stable est un problème NP-difficile [94, 11]. De plus, il existe des classes de systèmes pour lesquelles il n'y a pas de combinaison convexe stable, et une séquence de commutations stabilisante peut être trouvée malgré tout.

1.4.1.2 Restrictions dans le domaine temporel

Ici nous allons traiter de la notion de *temps de séjour* et de son rôle dans la stabilisation d'un système. Le temps de séjour signifie l'intervalle de temps entre deux commutations. L'idée de base est très simple. Considérons que la loi de commutation prend des valeurs arbitraires et que tous les sous-systèmes

$$\dot{x} = A_i x,$$

avec $i \in \mathcal{I}$ sont stables. Il est naturel de penser que le système à commutation est exponentiellement stable si le temps de séjour dans un mode est suffisamment long pour permettre à l'état de s'approcher suffisamment de zéro avant la prochaine commutation. Un problème intéressant est celui qui consiste à calculer le temps minimum τ_D entre deux commutations successives pour assurer la stabilité du système [122, 73].

Soit $\Phi_i(t, \tau)$ la matrice de transition du sous-système

$$\dot{x} = A_i x, \quad i \in \mathcal{I}.$$

Comme tous les sous-systèmes sont stables, on peut trouver deux constantes $\mu > 0$ et $\lambda_0 > 0$ telles que

$$\|\Phi_i(t, \tau)\| \leq \mu e^{-\lambda_0(t-\tau)}, \quad t \geq \tau \geq 0, \forall i \in \mathcal{I}.$$

La constante λ_0 peut être vue comme un taux de décroissance commun pour tous les sous-systèmes. Plus concrètement, les constantes μ et λ_0 peuvent être déterminées par

$$\mu \triangleq \max_{i \in \Gamma} \mu_i \text{ et } \lambda_0 \triangleq \max_{i \in \Gamma} \lambda_i$$

où μ_i et λ_i sont des constantes qui définissent la convergence de chaque sous-système $\dot{x} = A_i x$, $\forall i \in \mathcal{I}$.

Considérons t_1, t_2, \dots, t_k les instants de commutation dans l'intervalle (τ, t) , tels que $t_i - t_{i-1} \geq \tau_D$. La valeur de l'état à un moment donné est alors

$$x(t) = \Phi_{\sigma(t_k)}(t, t_k) \Phi_{\sigma(t_{k-1})}(t_k, t_{k-1}) \dots \Phi_{\sigma(t_1)}(t_2, t_1) \Phi_{\sigma(t_1)}(t_1, \tau) x(\tau).$$

Les matrices de transition sur un intervalle entre deux commutations successives respectent la relation :

$$\|\Phi_{\sigma(t_{l-1})}(t_l, t_{l-1})\| \leq \mu e^{-\lambda_0(t_l - t_{l-1})} \leq \mu e^{-\lambda_0 \tau_D}, \quad \forall l \in \{2, 3, \dots, k\}.$$

Le système sera asymptotiquement stable si $\mu e^{-\lambda_0 \tau_D} \leq 1$. Cette condition peut être satisfaite pour

$$\tau_D \geq \frac{\log \mu}{\lambda_0 - \lambda} \tag{1.20}$$

avec $\lambda \in (0, \lambda_0)$ quelconque.

Considérons le système à commutation

$$\dot{x} = A_\sigma x, \text{ avec } \sigma \in \mathcal{S}(\mathcal{I}, \tau_D)$$

où tous les sous-systèmes $\dot{x} = A_i x$, $\forall i \in \mathcal{I}$ sont asymptotiquement stables avec la marge de stabilité λ_0 . $\mathcal{S}(\mathcal{I}, \tau_D)$ désigne l'ensemble des lois de commutation tel que le temps entre deux commutations successives soit toujours supérieur à τ_D .

Théorème 16 *Pour un $\lambda \in (0, \lambda_0)$ désiré, le système commuté sera stable avec la marge de stabilité λ si le temps minimum de séjour τ_D satisfait la condition (1.20).*

Une extension pour ce théorème est donnée par [44] avec le concept de *temps moyen de séjour*, τ_{moy} . L'idée est que le système est stable si en moyenne on commute plus lentement que τ_{moy} . Cela permet occasionnellement des commutations plus rapides que le temps de séjour moyen τ_{moy} . L'approche a été généralisée pour le cas des systèmes non-linéaires [83, 84] et également dans le cas où tous les sous-systèmes ne sont pas asymptotiquement stables [118, 115].

En temps discret

Dans le cas des systèmes à commutation en temps discret, le problème de stabilisation par restriction du temps de séjour peut être traité par un ensemble d'inégalités matricielles linéaires .

Théorème 17 [41] *Considérons le système*

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k), \quad \sigma(k) \in \mathcal{I}.$$

Si pour un $\tau_D \geq 1$, $\tau_D \in \mathbb{N}$ il existe un ensemble de matrices $\{P_1, \dots, P_N\}$ définies positives telles que

$$A_i^T P_i A_i - P_i < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}$$

et

$$(A_i^{\tau_D})^T P_j (A_i^{\tau_D}) - P_i < 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{I}, \quad i \neq j$$

alors le système est globalement asymptotiquement stable pour un temps minimum de séjour supérieur à τ_D .

Pour ce théorème, en imposant $\tau_D = 1$ on retrouve la condition de stabilité (1.18), proposée dans [28].

1.4.2 Correcteurs stabilisants

Dans le cas où la loi de commutation n'est pas contrôlable, le problème de stabilisation des systèmes commutés est lié à la stabilisation des systèmes incertains (si la loi de commutation est inconnue) ou au contrôle par séquençement de gains, pour les systèmes linéaires à paramètres variants (LPV).

Considérons le système linéaire polytopique suivant :

$$\dot{x}(t) = A(\lambda(t))x(t) + B(\lambda(t))u(t) \tag{1.21}$$

où

$$A(\lambda(t)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) A_i, \quad B(\lambda(t)) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) B_i$$

et

$$\lambda(t) \in \Lambda = \left\{ \lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N] \in \mathbb{R}^N : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1 \right\}.$$

Le système à commutation décrit par l'équation :

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma(t)}x(t) + B_{\sigma(t)}u(t), \quad \sigma(t) \in \mathcal{I} \quad (1.22)$$

peut être écrit comme un cas particulier de systèmes polytopiques pour des paramètres λ_i restreints à deux valeurs discrètes $\lambda_i \in \{0, 1\}$, tels que $\lambda_i = 1$ quand $\sigma(t) = i$.

Il existe une large variété d'approches pour la stabilisation des systèmes polytopiques. La synthèse d'un retour d'état statique est formulée en termes d'inégalités matricielles linéaires dans [18]. Le résultat est basé sur l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique commune pour le système en boucle fermée. Dans le cas de non-disponibilité de la loi de commutation, un *retour d'état* indépendant de cette loi peut être calculé. Le résultat suppose l'existence d'une matrice S symétrique et définie positive et d'une matrice Y telles que

$$SA_i^T + A_iS + B_iY + Y^TB_i < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}.$$

Le retour d'état qui stabilise le système commuté (1.22) est donné par

$$u(t) = Kx(t),$$

avec

$$K = YS^{-1}.$$

Dans ce cas, la fonction de Lyapunov est x^TPx avec $P = S^{-1}$.

Lorsque la loi de commutation est disponible en temps réel, on peut rechercher un *retour d'état commuté* sous la forme :

$$u(t) = K_{\sigma(t)}x(t). \quad (1.23)$$

Dans ce cas, la stabilisation dépend de l'existence de plusieurs matrices Y_i et l'inégalité matricielle linéaire est remplacée par

$$SA_i^T + A_iS + B_iY_i + Y_i^TB_i < 0, \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (1.24)$$

Le retour d'état commuté est donné par l'équation (1.23) avec $K_i = Y_iS^{-1}$, $\forall i \in \mathcal{I}$.

En temps discret

En temps discret, une approche plus générale est possible. Elle est basée sur l'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres

$$V(x) = x^T \sum_{i=1}^N \lambda_i(t) P_i x.$$

Ce type de fonction a été proposé pour les systèmes polytopiques en temps discret dans [27]. L'extension au cas des systèmes commutés est donnée dans [28].

Théorème 18 *Le système à commutation*

$$x(k+1) = A_\sigma x(k) + B_\sigma u(k), \quad \forall \sigma \in \mathcal{I}$$

est stabilisable par le retour d'état commuté sous la forme

$$u(k) = K_{\sigma(k)} x(k)$$

s'il existe des matrices S_i définies positives et des matrices R_i et G_i , $\forall i \in \mathcal{I}$, telles que l'inégalité matricielle linéaire

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & (A_i^T G_i + B_i R_i)^T \\ A_i^T G_i + B_i R_i & S_j \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} \quad (1.25)$$

soit satisfaite $\forall i, j \in \mathcal{I}$. Le retour d'état est construit avec $K_i = R_i G_i^{-1}$ et les matrices de Lyapunov sont données par $P_i = S_i^{-1}$.

L'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendant de paramètres en temps continu s'avère très difficile. La nature discontinue des champs de vecteurs pose des problèmes pour la dérivation de la fonction de Lyapunov. Si des conditions particulières sont considérées pour la loi de commutation, ces difficultés peuvent être surmontées. Nous citerons ici les travaux de [53] dans le contexte des systèmes linéaires par morceaux. L'auteur utilise des fonctions de Lyapunov polyquadratiques pour la synthèse d'un retour d'état commuté. Le contrôleur est déterminé par des méthodes de contrôle optimal, en considérant les *inégalités* de Hamilton–Jacobi–Bellman.

1.5 Conclusion

Ce chapitre a présenté différents critères et problématiques de stabilité et de stabilisation rencontrés dans le domaine des systèmes à commutation. Nous allons nous intéresser dans les chapitres suivants à l'obtention de méthodes systématiques pour l'analyse et la synthèse robuste des systèmes linéaires à commutation.

Chapitre 2

Systemes à commutation avec incertitudes

Dans ce chapitre, les problèmes de stabilité et de commande robuste des systèmes à commutation incertains seront traités.

La première section est dédiée aux incertitudes paramétriques. Le cas des systèmes en temps discret soumis à des commutations arbitraires, avec des incertitudes polytopiques, sera considéré. On suppose que les paramètres incertains varient dans le temps.

La deuxième section est consacrée à l'étude des systèmes à commutation avec une loi de commutation incertaine. Ce type de problème intervient lorsque la loi de commutation représente un événement extérieur dont l'instant d'occurrence n'est pas parfaitement identifié. Il est également présent lorsqu'il existe des retards entre l'élaboration du signal de commutation et l'application effective au niveau des actionneurs. On va s'interroger sur la stabilité en boucle fermée de ces systèmes.

2.1 Incertitudes paramétriques

La stabilité des systèmes à commutation est un problème très complexe lorsque des incertitudes paramétriques sont considérées. La dynamique de chaque sous-système est incertaine. Il existe très peu de résultats concernant la stabilité robuste des systèmes à commutation en temps discret. Dans la littérature, les méthodes obtenues pour les systèmes à commutation linéaires, avec des sous-modèles invariants dans le temps, sont appliquées directement [120, 52, 110]. En effet, les auteurs associent une fonction de Lyapunov quadratique commune à chaque sous-modèle incertain. Les fonctions de Lyapunov obtenues commutent en fonction du sous-système actif, mais elles ne tiennent pas compte des paramètres incertains. Les résultats obtenus s'avèrent alors très conservatifs.

Dans le domaine du contrôle robuste, des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres incertains sont proposées pour réduire le conservatisme inévitable

dans le contexte des incertitudes [29, 33]. Ce type de fonctions a été utilisé pour analyser la stabilité des systèmes incertains en temps discret, avec des incertitudes polytopiques [27]. Les fonctions de Lyapunov proposées varient, elles aussi, dans un polytope convexe. Des conditions LMI pour l'existence de telles fonctions ont été développées.

Dans ce chapitre, on montrera comment réduire le conservatisme lié aux incertitudes pour le cas des systèmes à commutation. Des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres seront utilisées. Les fonctions de Lyapunov polytopiques introduites dans [27] sont étendues au cas des systèmes à commutation incertains avec des incertitudes polytopiques.

Deux approches seront proposées. Dans un premier temps, on montrera que le problème d'analyse de stabilité d'un système à commutation incertain peut être traité en analysant un seul système polytopique, global, qui contient l'ensemble des sous-systèmes. Les conditions LMI pour l'existence d'une fonction de Lyapunov polytopique [27] peuvent être directement appliquées. L'inconvénient de cette approche est qu'elle aboutit à la résolution d'un problème d'optimisation non convexe (BMI) dans le cas où on souhaite l'utiliser pour calculer un correcteur stabilisant. On proposera donc, dans un deuxième temps, une approche de type LMI qui peut être utilisée à la fois pour l'analyse de stabilité et la synthèse de contrôle. Un nouveau type de fonction de Lyapunov sera introduit : les *fonctions de Lyapunov poly-quadratiques dépendant des paramètres* (FLPQDP), qui sont des fonctions de Lyapunov qui prennent en compte à la fois la structure particulière des systèmes à commutation et les paramètres incertains. On montrera que l'utilisation de telles fonctions permet de réduire le conservatisme. Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de ces fonctions seront données en termes d'inégalités matricielles linéaires. L'approche sera étendue pour la synthèse d'un retour d'état commuté.

2.1.1 Préliminaires

Dans la littérature, les différentes erreurs de modélisation (ou d'approximation) et les modèles qui rendent compte de ces erreurs sont appelés respectivement *incertitudes paramétriques* et *modèles incertains* [8].

Pour les systèmes à commutation en temps discret, le modèle incertain peut être écrit sous la forme :

$$x(k+1) = \hat{A}_{\sigma(t)} x(k) \quad (2.1)$$

où \hat{A}_i représente une matrice incertaine appartenant à un domaine $\mathcal{A}_i \subset \mathbb{R}^{n \times n}$, $\forall i \in \mathcal{I}$. Il existe plusieurs représentations d'incertitudes [8]. Les plus fréquentes concernent un domaine \mathcal{A}_i compact et englobent

- les *incertitudes bornées en norme*, que l'on écrit classiquement sous la forme :

$$\hat{A}_i \in \mathcal{A}_i = \{A_{i,0} + D_i F_i(k) E_i, \|F_i(k)\| \leq 1\}, \quad (2.2)$$

où les matrices $A_{i,0}$ déterminent un fonctionnement nominal, D_i et E_i des matrices données $\forall i \in \mathcal{I}$ et $F_i(k)$ l'incertitude ;

– les *incertitudes polytopiques*, avec

$$\hat{A}_i \in \mathcal{A}_i = \text{co} \{A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,na_i}\}, \quad \forall i \in \mathcal{I} \quad (2.3)$$

où $A_{i,1}, A_{i,2}, \dots, A_{i,na_i}$ représente un ensemble de matrices appelées *sommets*.

Une question importante est de savoir s'il est possible d'étendre les résultats dont on dispose sur les systèmes à commutation classiques au cas des modèles à commutation incertains.

2.1.1.1 Critères de stabilité pour les systèmes incertains

Ici, les résultats sur la stabilité proposés dans [27] vont être rappelés. Ces résultats reposent sur l'existence d'une fonction de Lyapunov poly-quadratique et peuvent être appliqués au cas des systèmes à commutation incertains.

Un *système polytopique* en temps discret est défini par :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(k) A_i x(k), \quad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^{na} \alpha_i(k) = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, na$$

où les coefficients α_i représentent les paramètres incertains. Dans [27], la stabilité d'un tel système est analysée par des fonctions de Lyapunov poly-quadratiques sous la forme

$$V(k) = x^T(k) \sum_{i=1}^{na} \alpha_i(k) P_i x(k), \quad P_i = P_i^T > 0. \quad (2.5)$$

Ces fonctions dépendent des paramètres incertains $\alpha_i, \forall i = 1, \dots, na$.

Le système (2.4) est *poly-quadratiquement stable* s'il existe une fonction de Lyapunov (2.5) dont la différence est strictement définie négative pour toutes les trajectoires du système. Des conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité poly-quadratique sont données par le théorème suivant :

Théorème 19 *Le système (2.4) est poly-quadratiquement stable si et seulement s'il existe des matrices symétriques définies positives $S_i, \forall i = 1, \dots, na$, et des matrices G_i de dimensions appropriées telles que :*

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T A_i^T \\ A_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.6)$$

pour tous $i = 1, \dots, na$ et $j = 1, \dots, na$. Dans ce cas, la fonction de Lyapunov est donnée par l'équation (2.5) avec $P_i = S_i^{-1}$.

2.1.1.2 Application au cas des systèmes à commutation

Considérons le système à commutation incertain suivant :

$$x(k+1) = \hat{A}_{\sigma(k)}(k)x(k) \quad (2.7)$$

où $\{\hat{A}_i : i \in \mathcal{I}\}$ avec $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$, est une famille de matrices

$$\hat{A}_{\sigma(k)}(k) = \sum_{j=1}^{n_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) A_{\sigma j}, \quad \sum_{j=1}^{n_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) = 1, \quad \alpha_{\sigma j}(k) \geq 0$$

et $\sigma : Z^+ \rightarrow \mathcal{I}$ représente la loi de commutation. Autrement dit, les domaines incertains \mathcal{A}_σ sont des polytopes convexes où les coefficients α_{ij} décrivent l' i ème sous-système polytopique, $A_{\sigma j}$ représentent les points extrêmes (sommets) du polytope \mathcal{A}_σ et n_σ est le nombre de sommets. Considérons

$$\mathcal{S} = \{A_{11}, \dots, A_{1n_1}, \dots, A_{N1}, \dots, A_{Nn_N}\}$$

l'ensemble qui contient tous les sommets du système et

$$\mathcal{E} = \{E \mid E \in \mathcal{S}, \text{co}\mathcal{S} \neq \text{co}(\mathcal{S} - \{E\}), \}$$

$$\mathcal{E} = \{E_1 \dots E_M\},$$

l'ensemble des points extrêmes de l'enveloppe convexe de \mathcal{S} , où M représente le nombre de points extrêmes de \mathcal{S} , et $\text{co}\mathcal{S}$ l'enveloppe convexe de \mathcal{S} ². Une représentation graphique est donnée dans la figure 2.1.

Théorème 20 [48] *Le système (2.7) est poly-quadratiquement stable si et seulement s'il existe des matrices symétriques définies positives S_i , $\forall i = 1, \dots, M$, et des matrices G_i de dimension appropriée telles que :*

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_i & G_i^T E_i^T \\ E_i G_i & S_j \end{bmatrix} > 0 \quad (2.8)$$

pour tous $i = 1, \dots, M$ et $j = 1, \dots, M$. Dans ce cas, la fonction de Lyapunov est donnée par l'équation (2.5) avec $P_i = S_i^{-1}$.

Preuve. La démonstration repose sur le fait qu'une combinaison convexe des polytopes convexes est aussi un polytope convexe, c'est-à-dire que le système (2.7) peut être exprimé sous la forme (2.4), pour laquelle le théorème 19 peut être appliqué.

Le système (2.7) est équivalent à

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) A_{ij} x(k), \quad (2.9)$$

²Rappelons qu'il existe dans la littérature des procédures numériques pour le calcul de l'enveloppe convexe [79, 5].

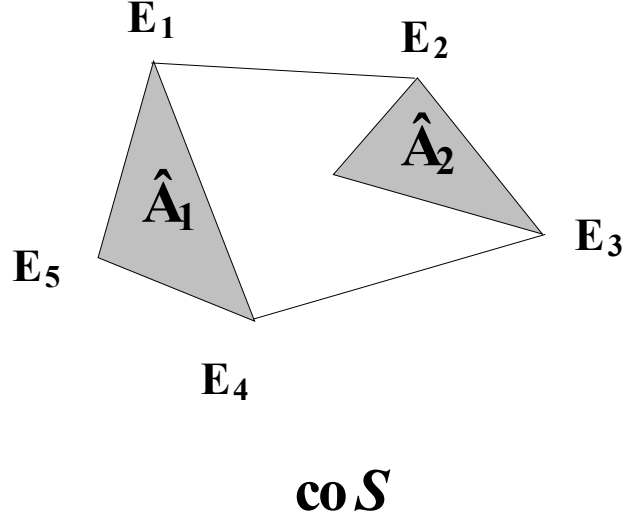


FIG. 2.1 – Pour un système diagonal du deuxième ordre, les domaines incertains peuvent être illustrés graphiquement. On montre ici la construction d’un système polytopique global ($co\mathcal{S}$) qui contient l’ensemble des sous-systèmes possibles (en gris dans la figure).

avec

$$\xi_i : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \{0, 1\}, \quad \sum_{i=1}^N \xi_i(k) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

La loi de commutation est simplement remplacée par les paramètres ξ_i tels que $\xi_i = 1$ quand $\sigma = i$ et 0 dans le cas contraire. Cette représentation est strictement équivalente à (2.7); aucune source supplémentaire de conservatisme n’est introduite.

Considérons la notation \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \hat{A}_i = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) A_{ij}. \quad (2.10)$$

Ceci signifie que \mathcal{A} est une combinaison convexe de $A_{ij} \in \mathcal{S}$. Puisque $E_p, \forall p = 1, \dots, M$ sont les points extrêmes de $co\mathcal{S}$, on peut écrire

$$\mathcal{A} = \sum_{p=1}^M \Lambda_p(k) E_p, \quad \Lambda_p \geq 0, \quad \sum_{p=1}^M \Lambda_p(k) = 1.$$

Donc \mathcal{A} est une incertitude polytopique convexe similaire à celle qui décrit le système (2.4). Cela implique que n’importe quel système à commutation incertain avec des incertitudes polytopiques est équivalent à un système polytopique sous la forme (2.4). La démonstration s’achève en appliquant le théorème 19. \square

Quand la matrice d’entrée est connue et constante, le théorème précédent peut être directement étendu pour la synthèse d’un retour d’état commun à l’ensemble

des sous-systèmes. En revanche, pour le cas général, la synthèse d'un retour d'état commuté n'est pas chose aisée.

2.1.2 Fonctions de Lyapunov poly-quadratiques dépendant des paramètres

Pour obtenir une méthode de synthèse de loi de commande robuste, une nouvelle approche est présentée. L'approche repose sur la construction de fonctions de Lyapunov qui commutent et qui dépendent des paramètres incertains. Ces fonctions peuvent être utilisées pour analyser la stabilité asymptotique des systèmes incertains et pour synthétiser un retour d'état commuté.

2.1.2.1 Analyse de stabilité robuste

Considérons le système à commutation incertain (2.7) et sa représentation équivalente (2.9). La structure du système suggère d'utiliser des fonctions qui commutent suivant le sous-système actif et varient aussi en fonction des paramètres incertains, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} V(k) &= x^T(k) \hat{P}_\sigma(k) x(k), \quad \text{avec } \hat{P}_\sigma(k) = \sum_{j=1}^{n_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) P_{\sigma j} \\ &= x^T(k) \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) P_{ij} x(k) \end{aligned} \quad (2.11)$$

où $P_{ij} = P_{ij}^T > 0$. Le système (2.9) est asymptotiquement stable si la différence de la fonction de Lyapunov ,

$$\mathcal{L} = V(k+1) - V(k)$$

satisfait la relation :

$$\mathcal{L} = x^T(k) (\mathcal{A}^T \mathcal{P}_+ \mathcal{A} - \mathcal{P}) x(k) < 0 \quad (2.12)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) A_{ij}, \\ \mathcal{P} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) P_{ij}, \\ \mathcal{P}_+ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \xi_i(k+1) \alpha_{ij}(k+1) P_{ij} \\ &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^{n_p} \xi_p(k) \alpha_{pq}(k) P_{pq}, \end{aligned}$$

$\forall k, \forall x(k), \forall \xi_i$ et $\forall \alpha_{ij}$.

Définition 21 Les fonctions (2.11) décroissantes pour toutes les solutions du système (2.9) seront appelées fonctions de Lyapunov poly-quadratiques dépendant des paramètres (FLPQDP).

Théorème 22 [48] Il existe une FLPQDP si et seulement s'il existe des matrices symétriques définies positives S_{ij} , $\forall i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$ et des matrices G_{ij} de dimension appropriée telles que :

$$\begin{bmatrix} G_{ij} + G_{ij}^T - S_{ij} & G_{ij}^T A_{ij}^T \\ A_{ij} G_{ij} & S_{pq} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.13)$$

pour tout $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$, $p = 1, \dots, N$ et $q = 1, \dots, n_p$. Les matrices de Lyapunov sont données par $P_{ij} = S_{ij}^{-1}$.

Preuve. La preuve suit les grandes lignes de [27]. Pour démontrer la suffisance des conditions, on suppose que les conditions (2.13) sont vraies. Cela implique que

$$G_{ij} + G_{ij}^T - S_{ij} > 0.$$

Donc G_{ij} est une matrice inversible et, puisque $S_{ij} > 0$, on obtient :

$$(S_{ij} - G_{ij})^T S_{ij}^{-1} (S_{ij} - G_{ij}) \geq 0,$$

ce qui est équivalent à

$$G_{ij}^T S_{ij}^{-1} G_{ij} \geq G_{ij}^T + G_{ij} - S_{ij}.$$

Donc la relation (2.13) implique

$$\begin{bmatrix} G_{ij}^T S_{ij}^{-1} G_{ij} & G_{ij}^T A_{ij}^T \\ A_{ij} G_{ij} & S_{pq} \end{bmatrix} > 0. \quad (2.14)$$

En multipliant la relation précédente à droite et à gauche par $diag(G_{ij}^{-T}, S_{pq}^{-1})$ et sa transposée, on obtient

$$\begin{bmatrix} S_{ij}^{-1} & A_{ij}^T S_{pq}^{-1} \\ S_{pq}^{-1} A_{ij} & S_{pq}^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.15)$$

Considérons la notation $P_{ij} = S_{ij}^{-1}$. L'inégalité (2.15) devient

$$\begin{bmatrix} P_{ij} & A_{ij}^T P_{pq} \\ P_{pq} A_{ij} & P_{pq} \end{bmatrix} > 0$$

pour tout $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, n_i$, $p = 1, \dots, N$ et $q = 1, \dots, n_p$. En multipliant par les coefficients appropriés et en additionnant, on obtient

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{A}^T \mathcal{P}_+ \\ \mathcal{P}_+ \mathcal{A} & \mathcal{P}_+ \end{bmatrix} > 0$$

ce qui implique, par le complément de Schur, que la différence de la fonction de Lyapunov (2.11) est strictement décroissante pour toutes les solutions du système (2.9).

Pour montrer la nécessité, on suppose que \mathcal{L} satisfait la relation (2.12). Alors la condition

$$\mathcal{A}^T \mathcal{P}_+ \mathcal{A} - \mathcal{P} < 0 \quad (2.16)$$

est vraie, ce qui implique que

$$P_{ij} - A_{ij}^T P_{pq} A_{ij} > 0$$

pour tout $i, p = 1..N$, $j = 1..n_i$, $q = 1..n_p$. Soit $S_{ij} = P_{ij}^{-1}$ et $S_{pq} = P_{pq}^{-1}$. En appliquant le complément de Schur, on obtient

$$S_{pq} - A_{ij} S_{ij} A_{ij}^T = T_{ijpq} > 0.$$

Pour $G_{ij} = S_{ij} + 2g_{ij}I$ avec g_{ij} un scalaire positif, il existe un g_{ij} suffisamment petit tel que

$$g_{ij}^{-2}(S_{ij} + 2g_{ij}I) > A_{ij}^T T_{ijpq}^{-1} A_{ij}$$

Par le complément de Schur, la relation précédente est équivalente à

$$\begin{bmatrix} S_{ij} + 2g_{ij}\mathbf{I} & -g_{ij}A_{ij}^T \\ -A_{ij}g_{ij} & T_{ijpq} \end{bmatrix} > 0$$

et elle peut être écrite comme

$$\begin{bmatrix} G_{ij} + G_{ij}^T - S_{ij} & S_{ij}A_{ij}^T - G_{ij}A_{ij}^T \\ A_{ij}S_{ij} - A_{ij}G_{ij} & S_{pq} - A_{ij}S_{ij}A_{ij}^T \end{bmatrix} > 0.$$

On peut remarquer que cette relation est identique à

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -A_{ij} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{ij} + G_{ij}^T - S_{ij} & G_{ij}^T A_{ij}^T \\ A_{ij}G_{ij} & S_{pq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -A_{ij}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0.$$

□

2.1.2.2 Synthèse des commandes robustes

Dans cette sous-section, la synthèse d'un retour d'état commuté sera discutée pour le système incertain suivant :

$$x(k+1) = \hat{A}_\sigma(k)x(k) + \hat{B}_\sigma(k)u(k), \quad (2.17)$$

où

$$\hat{A}_\sigma(k) = \sum_{j=1}^{na_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) A_{\sigma j}, \text{ et } \hat{B}_\sigma(k) = \sum_{l=1}^{nb_\sigma} \beta_{\sigma l}(k) B_{\sigma l}, \quad (2.18)$$

$$\sum_{j=1}^{na_\sigma} \alpha_{\sigma j}(k) = 1, \alpha_{\sigma j}(k) \geq 0,$$

$$\sum_{l=1}^{nb_\sigma} \beta_{\sigma l}(k) = 1, \beta_{\sigma l}(k) \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z}^+$$

représentent des matrices d'état et d'entrée incertaines. σ représente la loi de commutation, $\alpha_{\sigma j}$ et $\beta_{\sigma l}$ sont les paramètres incertains et na_σ , nb_σ le nombre de sommets des polytopes, respectivement \hat{A}_σ et \hat{B}_σ .

Hypothèse 23 *On suppose que la loi de commutation $\sigma(k)$ est disponible en temps réel pour le calcul du contrôle.*

Le problème est de trouver un retour d'état commuté

$$u(k) = K_{\sigma(k)}x(k) \quad (2.19)$$

qui stabilise le système incertain en boucle fermée.

La solution du problème de contrôle robuste est donnée par le théorème suivant :

Théorème 24 [48] *Il existe un retour d'état (2.19) qui stabilise le système (2.17) s'il existe des matrices symétriques définies positives S_{ijl} , et des matrices G_i et R_i , solutions des LMIs :*

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_{ijl} & G_i^T A_{ij}^T + R_i^T B_{il}^T \\ A_{ij} G_i + B_{il} R_i & S_{pww} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.20)$$

$\forall i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, na_i$, $l = 1, \dots, nb_i$, $p = 1, \dots, N$, $w = 1, \dots, na_p$ et $v = 1, \dots, nb_p$. Le retour d'état commuté est donné par l'équation (2.22) avec

$$K_i = R_i G_i^{-1}.$$

Preuve.

Le système peut être écrit sous la forme :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \hat{A}_i(k) x(k) + \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \hat{B}_i(k) u(k), \quad (2.21)$$

où les paramètres $\xi_i(k)$ remplacent la loi de commutation $\sigma(k)$ tels que $\xi_i = 1$ quand $\sigma(k) = i$ et $\xi_i = 0$ dans le cas contraire.

Le retour d'état commuté (2.19) s'écrit sous la forme

$$u(k) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) K_i x(k) \quad (2.22)$$

et le système en boucle fermée est donné par l'équation suivante

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) (\hat{A}_i + \hat{B}_i K_i) x(k).$$

Considérant l'équation (2.18), le système en boucle fermée s'écrit sous la forme

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N \xi_i(k) \left(\sum_{j=1}^{na_i} \alpha_{ij}(k) A_{ij} + \sum_{l=1}^{nb_i} \beta_{il}(k) B_{il} K_i \right) x(k)$$

ce qui est équivalent à :

$$x(k+1) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{na_i} \sum_{l=1}^{nb_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) \beta_{il}(k) H_{ijl} x(k)$$

avec $H_{ijl} = A_{ij} + B_{il} K_i$.

Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V(k) = x^T(k) \mathcal{P} x(k)$$

avec

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{na_i} \sum_{l=1}^{nb_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) \beta_{il}(k) P_{ijl}. \quad (2.23)$$

La différence de la fonction de Lyapunov pour une trajectoire quelconque du système est :

$$V(k+1) - V(k) = x(k) (\mathcal{H}^T \mathcal{P}_+ \mathcal{H} - \mathcal{P}) x(k),$$

où

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{na_i} \sum_{l=1}^{nb_i} \xi_i(k) \alpha_{ij}(k) \beta_{il}(k) H_{ijl},$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_+ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{na_i} \sum_{l=1}^{nb_i} \xi_i(k+1) \alpha_{ij}(k+1) \beta_{il}(k+1) P_{ijl} \\ &= \sum_{p=1}^N \sum_{w=1}^{na_p} \sum_{v=1}^{nb_p} \xi_p(k) \alpha_{pw}(k) \beta_{pv}(k) P_{pww}. \end{aligned}$$

Supposons que les conditions (2.20) sont faisables. En introduisant

$$K_i = R_i G_i^{-1}$$

dans les conditions (2.20), on obtient :

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_{ijl} & G_i^T A_{ij}^T + G_i^T K_i^T B_{il}^T \\ A_{ij} G_i + B_{il} K_i G_i & S_{pww} \end{bmatrix} > 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_{ijl} & G_i^T H_{ijl}^T \\ H_{ijl} G_i & S_{pww} \end{bmatrix} > 0. \quad (2.24)$$

En utilisant des arguments similaires à ceux donnés pour la démonstration du théorème 22, on peut montrer que (2.24) est équivalent à :

$$\begin{bmatrix} P_{ijl} & H_{ijl}^T P_{pww} \\ P_{pww} H_{ijl} & P_{pww} \end{bmatrix} > 0$$

avec $P_{ijl} = S_{ijl}^{-1}$, pour tout $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, na_i$, $l = 1, \dots, nb_i$, $p = 1, \dots, N$, $w = 1, \dots, na_p$ et $v = 1, \dots, nb_p$. En multipliant par les coefficients appropriés et en additionnant, on obtient

$$\begin{bmatrix} \mathcal{P} & \mathcal{H}^T \mathcal{P}_+ \\ \mathcal{P}_+ \mathcal{H} & \mathcal{P}_+ \end{bmatrix} > 0$$

ce qui implique, par le complément de Schur, que la différence de la fonction de Lyapunov (2.23) est strictement décroissante pour toutes les solutions du système.

Remarques.

- De façon similaire au cas des systèmes à commutation sans incertitude [28], il est très facile de montrer théoriquement que les conditions de stabilisation proposées généralisent les conditions basées sur des fonctions de Lyapunov classiques sous la forme $x^T P_\sigma x$ ou $x^T P x$.
- En utilisant la dualité commande/observation, ce théorème s’applique aussi au problème de reconstruction d’état pour les systèmes à commutation incertains.
- Lorsque les incertitudes \hat{A}_σ et \hat{B}_σ dépendent d’un paramètre incertain commun, un cas particulier de (2.18) avec $j = l$, $na_\sigma = nb_\sigma$, et $\alpha_{\sigma j} = \beta_{\sigma l} = \lambda_{\sigma j}$, les conditions LMI (2.20) deviennent :

$$\begin{bmatrix} G_i + G_i^T - S_{ij} & G_i^T A_{ij}^T + R_i^T B_{ij}^T \\ A_{ij} G_i + B_{ij} R_i & S_{uv} \end{bmatrix} > 0, \quad (2.25)$$

pour tous $i, u = 1..N$, $j, v = 1..na_\sigma$, où S_{ij} et S_{uv} sont des matrices symétriques définies positives.

2.1.3 Exemples numériques

L’efficacité des méthodes d’analyse de stabilité et de synthèse de commande robuste présentées dans la sous-section précédente est illustrée sur quelques exemples numériques académiques.

Exemple 2.1 Pour illustrer les conditions LMI de stabilité obtenues dans les sections précédentes, nous allons considérer un système à commutation incertain avec incertitude affine sous la forme :

$$x(k+1) = \hat{A}_\sigma x(k)$$

où

$$\hat{A}_\sigma(k) = A_{0\sigma} + D_\sigma \rho(k) E_\sigma, \quad \rho(k) \in [-1, 1].$$

L'intérêt de ce type d'incertitude est le fait de pouvoir le représenter à la fois comme une incertitude bornée en norme sous la forme (2.2) avec $\rho(k) = F(k)$, et comme une incertitude polytopique

$$\hat{A}_\sigma(k) = \alpha_{\sigma 1}(k) A_{\sigma 1} + \alpha_{\sigma 2}(k) A_{\sigma 2},$$

avec

$$A_{\sigma 1} = A_{0\sigma} + D_\sigma E_\sigma \text{ et } A_{\sigma 2} = A_{0\sigma} - D_\sigma E_\sigma,$$

$$\alpha_{\sigma 1}(k), \alpha_{\sigma 2}(k) > 0, \quad \alpha_{\sigma 1}(k) + \alpha_{\sigma 2}(k) = 1, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+.$$

Cela nous permettra de comparer nos résultats avec les autres conditions LMI existantes dans la littérature. Ces conditions, les seules disponibles dans le cas des systèmes à commutation incertains, sont fondées sur la stabilité quadratique [52] et sur des fonctions de Lyapunov qui ne dépendent pas des paramètres incertains [110], pour les incertitudes bornées en norme.

L'exemple choisi correspond à

$$A_{01} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.1 & -0.5 \\ 0.8 & 0 & -0.1 & -0.3 & 0.3 \\ 0 & -0.3 & -0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.1 & 0.3 & 0.5 \\ -0.2 & 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$A_{02} = \begin{bmatrix} -0.7 & -0.7 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.3 & -0.3 & 0 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 & 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & -0.8 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & -0.7 & 0.1 & -0.3 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$D_1^T = [0.2 \ 0.5 \ -0.1 \ 0.3 \ 0.2],$$

$$D_2^T = [-0.5 \ 0.38 \ 0.5 \ 0.2 \ 0.5],$$

$$E_1 = [-0.3 \ -0.3 \ -0.5 \ 0.2 \ 0.3]$$

$$E_2 = [-0.2 \ 0.1 \ -0.1 \ -0.05 \ 0.7].$$

Pour ce système, les conditions de stabilité robuste présentées dans [52, 110] s'avèrent trop conservatives et sont trouvées infaisables. La faisabilité a été testée avec le solveur LMI SEDUMI. En revanche, les conditions LMI (2.8) et (2.13) ont une solution. Cela implique qu'il existe des fonctions de Lyapunov sous les formes (2.5) et (2.11) pour ce système.

Exemple 2.2 On considère le système incertain

$$x(k+1) = \hat{A}_\sigma(k)x(k) + \hat{B}_\sigma(k)u(k), \quad (2.26)$$

où

$$\hat{A}_\sigma(k) = A_{0\sigma} + D_\sigma \rho(k) E_\sigma^A,$$

et

$$\hat{B}_\sigma(k) = B_{0\sigma} + D_\sigma \rho(k) E_\sigma^B, \quad \forall \rho(k) \in [-1, 1],$$

représentent des incertitudes affines similaires à celles présentées dans l'exemple 2.1. Les incertitudes \hat{A}_σ et \hat{B}_σ , dépendent d'un paramètre incertain commun $\rho(k)$, de façon identique aux systèmes analysés dans [110]. On considère les matrices suivantes :

$$A_{01} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.7 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 & 1 \\ 0.3 & 0.3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{02} = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 & 0.2 \\ 1 & 0.7 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{01} = [0.1 \ 0.8 \ 0.8]^T, \quad B_{02} = [0.2 \ 0.9 \ 0.2]^T$$

$$D_1 = [-0.2328 \ 0.4340 \ -0.4590]^T,$$

$$D_2 = [-0.2645 \ 0.2681 \ 0.9316]^T,$$

$$E_1^A = [0.7461 \ -0.4767 \ 0.1131],$$

$$E_2^A = [-0.4787 \ 0.4671 \ 0.4731],$$

$$E_1^B = 0.8194 \text{ et } E_2^B = -0.7610.$$

Les conditions LMI proposées dans [110] sont trouvées infaisables. En revanche, le théorème 24 permet de construire un retour d'état commuté sous la forme (2.22). En effet, les conditions LMI (2.25) ont une solution et les gains du retour d'état obtenus sont

$$K_1 = [0.1956 \ -0.8403 \ -0.7902]$$

$$K_2 = [-1.1285 \ -1.1554 \ -0.353].$$

2.2 Loi de commutation incertaine

Cette section est consacrée à l'étude des systèmes à commutation avec une loi de commutation incertaine. Ce type de problème intervient en particulier lorsqu'il existe des retards entre l'élaboration du signal de commutation et l'application effective au niveau des actionneurs. Par ailleurs, le problème est également présent lorsque la loi de commutation représente un événement extérieur dont l'instant d'occurrence n'est pas parfaitement identifié.

Dans la littérature, il existe très peu de résultats qui discutent ces aspects. A notre connaissance, seul le cas des systèmes affines par morceaux a été traité [86]. Pour ces systèmes, les incertitudes de commutations sont dues aux problèmes de modélisation des surfaces de commutation. Les auteurs offrent une solution de type LMI, en modifiant les contraintes sur les inégalités (1.15).

Dans cette étude, le cas des systèmes en temps discret qui sont stabilisés par un retour d'état commuté est analysé. La loi de commutation est supposée arbitraire.

Dans un premier temps, on va s'interroger sur la stabilité du système en boucle fermée lorsque la loi de commande utilise un signal de commutation temporairement incertain. Le problème est formalisé de la façon suivante : en supposant que les gains sont déterminés tels que le système en boucle fermée soit stable lorsque la loi de commutation est *parfaitement connue*, déterminer les restrictions à imposer sur la loi de commutation permettant de garantir que le système reste stable malgré l'incertitude sur la loi de commutation. Les conditions de stabilité seront formulées en termes de *temps de séjour minimum* [122, 73]. L'objectif est de déterminer le temps minimum de fonctionnement avec une loi de commutation parfaitement connue tel que le système en boucle fermée reste asymptotiquement stable.

Dans un deuxième temps, on suppose que le signal est *partiellement connu* : sa valeur exacte n'est pas disponible mais à chaque instant on connaît un sous-ensemble de valeurs possibles. Dans ce contexte, nous allons étudier le problème de synthèse d'un retour d'état robuste par rapport aux incertitudes sur la loi de commutation.

2.2.1 Signal temporairement inconnu - formulation du problème

Ici on formalise mathématiquement le problème de la loi de commutation temporairement inconnue. Considérons le système à commutation en temps discret suivant :

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) \quad (2.27)$$

où $x(k) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état du système, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ l'entrée, $\sigma : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$, la loi de commutation, $A_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B_{\sigma(k)} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, respectivement les matrices d'état et d'entrée. Le système est contrôlé par le retour d'état commuté

$$u(k) = K_{\gamma(k)}x(k) \quad (2.28)$$

où $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{I}$ représente le signal de commutation utilisé dans le contrôle. On suppose que les gains $K_{\gamma(k)}$ sont déterminés tels que le système en boucle fermée soit stable pour $\sigma(k) = \gamma(k)$.

Définition 25 (Configuration nominale) *Lorsque le système utilise le signal de commutation approprié, c'est-à-dire quand $\gamma(k) = \sigma(k)$, on dit que le système est dans une configuration nominale.*

Définition 26 (Configuration incertaine) *Lorsque le signal de commutation est incertain, c'est-à-dire quand le couple $(\gamma(k), \sigma(k)) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$, on dit que le système est dans une configuration incertaine.*

Définition 27 (Dynamique mixte) Lorsque $\gamma(k) \neq \sigma(k)$ on dit que le système présente une dynamique mixte. Ces dynamiques sont données par l'équation suivante :

$$x(k+1) = (A_i + B_i K_j) x(k), \quad i, j \in \mathcal{I}, \quad i \neq j.$$

Idéalement, le signal de commutation utilisé dans la commande, $\gamma(k)$, et le vrai signal de commutation, $\sigma(k)$, sont identiques. Lorsque la loi de commutation est incertaine, il est possible que le système soit commandé avec un signal de commutation différent du vrai signal, $\gamma(k) \neq \sigma(k)$. L'apparition de *dynamiques mixtes* dans le fonctionnement du système est inévitable.

Les dynamiques mixtes risquent de perturber le fonctionnement du système. Les gains de retour d'état sont conçus pour assurer la stabilisation en configuration nominale, pour $\sigma(k) = \gamma(k)$. Ils ne garantissent rien dans le cas des dynamiques mixtes. Celles-ci ne sont pas forcément stables et risquent d'affecter les performances du système, voire sa stabilité.

Le système en boucle fermée est équivalent à un système qui commute à la fois en fonction du *vrai signal de commutation*, $\sigma(k)$, et du signal de commutation $\gamma(k)$ utilisé pour le calcul de la commande, $u(k)$:

$$x(k+1) = \bar{A}_{(\sigma(k), \gamma(k))} x(k) \quad (2.29)$$

avec

$$\bar{A}_{(\sigma(k), \gamma(k))} = A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)} K_{\gamma(k)}. \quad (2.30)$$

Contrairement au cas classique où l'on suppose que les instants de commutation et les modes actifs sont connus avec précision, on s'intéresse ici au problème d'un signal de commutation temporairement incertain :

Hypothèse 28 (Signal de commutation temporairement incertain) On suppose que lorsqu'une commutation a lieu, le système reste un nombre Δ^u d'échantillons dans une configuration incertaine. Dans cette configuration, les dynamiques mixtes sont possibles. La période Δ^u est supposée bornée

$$\Delta_{min}^u \leq \Delta^u \leq \Delta_{max}^u. \quad (2.31)$$

De plus, on émet l'hypothèse que le système demeure dans une configuration nominale pour au moins Δ^n échantillons avant qu'une autre commutation intervienne.

Le problème est de déterminer la relation entre le temps minimum de fonctionnement en régime nominal, Δ^n , les bornes sur le fonctionnement incertain Δ_{max}^u , Δ_{min}^u et les autres paramètres du système telle que le système en boucle fermée soit stable.

2.2.2 Conditions de stabilité pour un signal temporairement inconnu

Dans cette section, des conditions de stabilité en termes de temps de séjour sont formulées. Ces conditions reposent sur l'évaluation du *taux de décroissance* dans une configuration nominale et le *taux de croissance* dans une configuration incertaine. Ces notions sont définies comme suit :

Définition 29 (Taux de décroissance) *Considérons un système exponentiellement stable. Alors il existe deux constantes $c > 0$ et $0 < \lambda < 1$ qui vérifient l'inégalité*

$$\|x(k)\|^2 < c\lambda^{k-k_0} \|x(k_0)\|^2, \quad \forall k > k_0.$$

Toute constante λ qui vérifie cette inégalité est appelée une estimation du taux de décroissance du système.

Définition 30 (Taux de croissance) ³ *Considérons un système instable. Alors il existe deux constantes $c > 0$ et $\lambda > 1$ qui vérifient l'inégalité*

$$\|x(k)\|^2 < c\lambda^{k-k_0} \|x(k_0)\|^2, \quad \forall k > k_0.$$

Toute constante λ vérifiant cette inégalité est appelée taux de croissance du système.

Considérons les scalaires $\lambda_n > 0$, $\lambda_u > 0$, et les matrices symétriques définies positives P_σ^n et $P_{(\sigma,\gamma)}^u$, solutions des inégalités matricielles suivantes :

$$\bar{A}_{(\sigma,\gamma)}^T P_{(\sigma,\gamma)}^u \bar{A}_{(\sigma,\gamma)} - \lambda_u P_{(\sigma,\gamma)}^u < 0, \quad \forall (\sigma, \gamma) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}, \quad (2.32)$$

$$\bar{A}_{(\sigma,\sigma)}^T P_\sigma^n \bar{A}_{(\sigma,\sigma)} - \lambda_n P_\sigma^n < 0, \quad \forall \sigma \in \mathcal{I}. \quad (2.33)$$

De plus, considérons les nombres scalaires

$$c_n = \frac{\max_{\sigma \in \mathcal{I}} \text{eig}_{\max}(P_\sigma^n)}{\min_{\sigma \in \mathcal{I}} \text{eig}_{\min}(P_\sigma^n)}, \quad (2.34)$$

$$c_u = \frac{\max_{(\sigma,\gamma) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \text{eig}_{\max}(P_{(\sigma,\gamma)}^u)}{\min_{(\sigma,\gamma) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \text{eig}_{\min}(P_{(\sigma,\gamma)}^u)} \quad (2.35)$$

où $\text{eig}_{\max}(X)$ et $\text{eig}_{\min}(X)$ désignent, respectivement, la plus grande et la plus petite valeur propre d'une matrice X symétrique.

³Un aperçu de la façon dont ces taux peuvent être déterminés pour le cas des systèmes LTI est donné en annexe.

Théorème 31 [50] Soient λ_n^* , λ_u^* , les solutions du problème d'optimisation :

$$\lambda_n^* = \min \lambda_n, \quad \lambda_u^* = \min \lambda_u$$

sujettes aux contraintes (2.32) et (2.33). Le système en boucle fermée (2.29) est asymptotiquement stable si les relations suivantes sont vérifiées

$$c_n c_u (\lambda_n^*)^{\Delta^n} (\lambda_u^*)^{\Delta_{max}^u} < 1, \text{ lorsque } \lambda_u^* > 1 \quad (2.36)$$

ou

$$c_n c_u (\lambda_n^*)^{\Delta^n} (\lambda_u^*)^{\Delta_{min}^u} < 1, \text{ lorsque } \lambda_u^* < 1. \quad (2.37)$$

Preuve. Considérons les fonctions suivantes :

$$V^n(k) = x^T(k) P_{\sigma(k)}^n x(k), \quad (2.38)$$

$$V^u(k) = x^T(k) P_{(\sigma(k), \gamma(k))}^u x(k). \quad (2.39)$$

La fonction V^n est associée à une configuration nominale. V^u est associée aux dynamiques incertaines. En tenant compte des équations (2.32) et (2.33), on peut remarquer que

$$V^n(k) < (\lambda_n^*)^{k-k_0} V^n(k_0),$$

si le système est dans une configuration nominale, c'est-à-dire $\sigma(\tau) = \gamma(\tau) = \sigma(k_0)$, $\forall \tau \in [k_0, k] \subset \mathbb{Z}^+$ et

$$V^u(k) < (\lambda_u^*)^{k-k_0} V^u(k_0)$$

si le système est dans une configuration incertaine, c'est-à-dire si le couple $(\sigma(\tau), \gamma(\tau))$ prend une valeur arbitraire $(\sigma(k_0), \gamma(k_0))$ dans le domaine $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$, $\forall \tau \in [k_0, k] \subset \mathbb{Z}^+$. On peut remarquer que $\lambda_n^* < 1$, puisque les gains K_σ sont supposés stabilisants en configuration nominale, c'est-à-dire que les matrices

$$A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)} K_{\sigma(k)}$$

sont stables $\forall \sigma \in \mathcal{I}$. Cela implique que la fonction $V^n(k)$ est strictement décroissante et que son taux de décroissance est borné par (λ_n^*) .

En revanche, puisque les gains $K_{\gamma(k)}$ ne sont pas choisis pour stabiliser une autre combinaison que

$$A_{\gamma(k)} + B_{\gamma(k)} K_{\gamma(k)},$$

λ_u peut être supérieure à 1. La fonction $V^u(k)$ peut être divergente. Cependant son taux de croissance peut être, lui aussi, borné par (λ_u^*) .

En utilisant les valeurs propres maximales et minimales des matrices $P_\sigma^n, P_{(\sigma, \gamma)}^u$, chaque fonction $V^n(k), V^u(k)$ peut être bornée. Pour la configuration nominale, on a

$$\min_{\sigma \in \mathcal{I}} \text{eig}_{min}(P_\sigma^n) \|x(k)\|^2 < V^n(k) < \max_{\sigma \in \mathcal{I}} \text{eig}_{max}(P_\sigma^n) \|x(k)\|^2.$$

De même, pour la configuration incertaine, on obtient

$$\min_{\sigma \in \mathcal{I}} \text{eig}_{min} \left(P_{(\sigma, \gamma)}^u \right) \|x(k)\|^2 < V^u(k) < \max_{(\sigma, \gamma) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}} \text{eig}_{max} \left(P_{(\sigma, \gamma)}^u \right) \|x(k)\|^2.$$

Donc, en analysant la norme du vecteur d'état, on peut déduire le taux de croissance en régime incertain et le taux de décroissance en régime nominal comme suit :

$$\|x(k)\|^2 < \begin{cases} c_n (\lambda_n^*)^{k-k_0} \|x(k_0)\|^2, & \sigma(\tau) = \gamma(\tau) = \sigma(k_0), \\ c_u (\lambda_u^*)^{k-k_0} \|x(k_0)\|^2, & (\sigma(\tau), \gamma(\tau)) = (\sigma(k_0), \gamma(k_0)) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}, \end{cases} \quad (2.40)$$

$\forall \tau \in [k_0, k)$ avec c_n et c_u respectivement donnés par (2.34) et (2.35).

Soit k_j^u l'instant où le système en boucle fermée arrive en configuration incertaine et k_j^n , l'instant où le système démarre un comportement nominal, $j = 1, 2, 3, \dots$. En introduisant les hypothèses sur le temps minimum de séjour dans une configuration nominale, Δ^n , et sur les bornes de Δ^u , il est possible d'affirmer que

$$\Delta_{min}^u \leq k_j^n - k_j^u \leq \Delta_{max}^u,$$

et

$$k_{j+1}^u - k_j^n \geq \Delta^n.$$

Sans perte de généralité, on peut supposer qu'initialement le système se trouve dans une configuration incertaine. Cela implique que $k_j^u < k_j^n$. Le système évolue par des successions séquentielles des configurations nominales $(\sigma(k) = \gamma(k))$ et incertaines $((\sigma(k), \gamma(k)) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I})$ tel qu'il est possible que $\sigma(k) \neq \gamma(k)$.

On va analyser le comportement du système sur une séquence quelconque, entre les instants k_j^u et k_{j+1}^u . Puisque $\sigma(k) \neq \gamma(k)$, $\forall k \in [k_j^u, k_j^n)$ et $\sigma(k) = \gamma(k)$, $\forall k \in [k_j^n, k_{j+1}^u)$, on peut remarquer, en utilisant l'équation (2.40), que la norme du vecteur d'état à la fin d'une séquence est bornée

$$\|x(k_{j+1}^u)\|^2 < c_n \cdot c_u \cdot (\lambda_n^*)^{k_{j+1}^u - k_j^n} \cdot (\lambda_u^*)^{k_j^n - k_j^u} \cdot \|x(k_j^u)\|^2. \quad (2.41)$$

En utilisant le fait que la constante λ_n^* est inférieure à 1 et que le temps minimum de fonctionnement nominal est Δ^n , il est possible d'observer que le taux de décroissance en configuration nominale respecte la relation

$$(\lambda_n^*)^{k_{j+1}^u - k_j^n} \leq (\lambda_n^*)^{\Delta^n}.$$

Par ailleurs, puisque λ_u^* peut être à la fois plus petit ou plus grand que 1, on peut déduire que

$$(\lambda_u^*)^{k_j^n - k_j^u} \leq \begin{cases} (\lambda_u^*)^{\Delta_{max}^u}, & \lambda_u^* > 1 \\ (\lambda_u^*)^{\Delta_{min}^u}, & \lambda_u^* \leq 1. \end{cases}$$

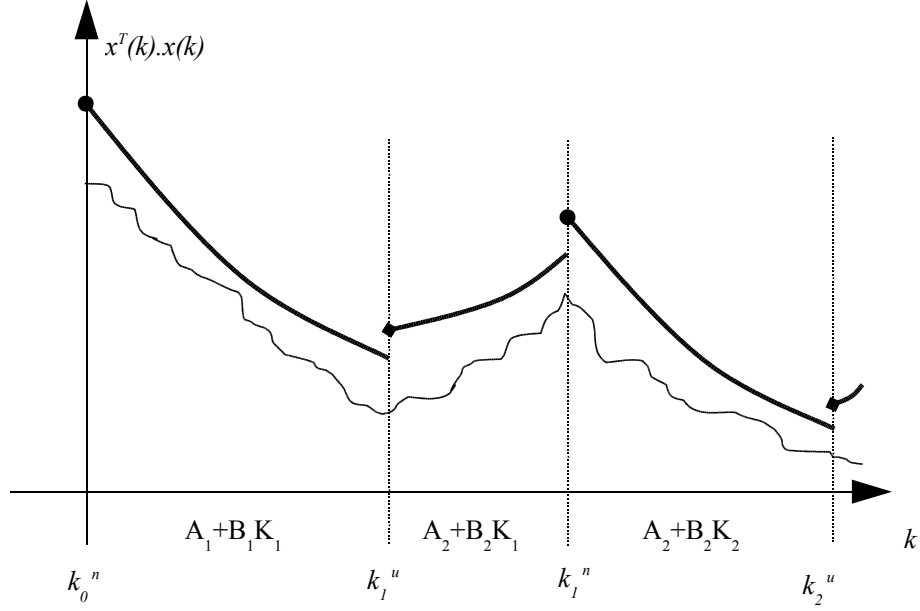


FIG. 2.2 – Principe : le problème peut être abordé en évaluant des bornes supérieures pour l'évolution de $\|x(k)\|^2$ en configuration nominale et en configuration incertaine. Ces bornes, des fonctions sous la forme $c_n \cdot \lambda_n^{k-k_j^n} \|x(k_j^n)\|^2$, pour la configuration nominale et $c_u \cdot \lambda_u^{k-k_j^u} \|x(k_j^u)\|^2$, pour le cas incertain, sont représentées en gras dans la figure.

En utilisant l'équation (2.40), on obtient que le système est asymptotiquement stable si les conditions (2.36) et (2.37) sont satisfaites. \square

Remarque. Le théorème implique une convergence asymptotique qui n'est pas strictement monotone. Au lieu de demander une décroissance stricte d'une fonction de Lyapunov, le théorème indique que le système est stable si la norme du vecteur d'état est strictement décroissante d'un instant de commutation au suivant (voir aussi la relation avec les travaux proposés dans [60] où l'on propose des fonctions de Lyapunov dont la variation est considérée sur k échantillons). De plus, s'il existe un scalaire $0 < \lambda < 1$ tel que

$$(\lambda_n^*)^{\Delta^n} (\lambda_u^*)^{\Delta_{max}^u} < \lambda^{\Delta_{max}^u + \Delta^n}, \text{ si } \lambda_u^* > 1$$

où

$$(\lambda_n^*)^{\Delta^n} (\lambda_u^*)^{\Delta_{min}^u} < \lambda^{\Delta_{min}^u + \Delta^n}, \text{ si } \lambda_u^* < 1,$$

alors le système est exponentiellement stable avec le taux de décroissance λ .

2.2.3 Loi de commutation partiellement connue - stabilisation

Dans cette sous-section, on traite le problème de la synthèse des contrôleurs commutés lorsque la loi de commutation est incertaine. Considérons le système à commutation en temps discret

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k) \quad (2.42)$$

et le retour d'état commuté

$$u(k) = K_{\gamma(k)}x(k). \quad (2.43)$$

On émet l'hypothèse que la loi de commutation $\sigma(k)$ est *partiellement connue*. Sa valeur exacte n'est pas disponible mais pour chacune de ses valeurs $\sigma(k) = i, \forall i \in \mathcal{I}$, on connaît un sous-ensemble des valeurs possibles $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{I}$. Le signal de commutation $\gamma(k)$ utilisé dans la commande prend des valeurs dans le sous-ensemble $\mathcal{E}_{\sigma(k)}$. Dans ce contexte, on étudie le problème de la synthèse d'un retour d'état robuste par rapport aux incertitudes sur la loi de commutation. Considérons le système en boucle fermée

$$x(k+1) = (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)}K_{\gamma(k)})x(k),$$

$$\forall \sigma(k) \in \mathcal{I} \text{ et } \forall \gamma(k) \in \mathcal{E}_{\sigma(k)}.$$

La synthèse LMI des gains $K_{\gamma(k)}$ qui stabilisent le système en boucle fermée est traitée.

Théorème 32 *Considérons le système à commutation (2.42) et le retour d'état (2.43) avec $\sigma(k) \in \mathcal{I}$ et $\gamma(k) \in \mathcal{E}_{\sigma(k)}$. S'il existe des matrices symétriques définies positives $S_{\alpha,\beta}$ et des matrices G_β, R_β pour tout $\alpha \in \mathcal{I}$ et $\beta \in \mathcal{E}_\alpha$, solutions des inégalités matricielles linéaires*

$$\begin{bmatrix} -S_{\alpha_1,\beta_1} + G_{\beta_1} + G_{\beta_1}^T & G_{\beta_1}^T A_{\alpha_1}^T + R_{\beta_1}^T B_{\alpha_1}^T \\ A_{\alpha_1} G_{\beta_1} + B_{\alpha_1} R_{\beta_1} & S_{\alpha_2,\beta_2} \end{bmatrix} > 0 \quad (2.44)$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}, \beta_1 \in \mathcal{E}_{\alpha_1}, \beta_2 \in \mathcal{E}_{\alpha_2}$, alors les gains qui stabilisent asymptotiquement le système (2.42) sont donnés par

$$K_\gamma = R_\gamma G_\gamma^{-1}, \forall \sigma \in \mathcal{I}, \text{ et } \forall \gamma \in \mathcal{E}_\sigma.$$

Preuve. Le théorème utilise des arguments similaires à ceux donnés pour la démonstration du théorème 22. On peut montrer que lorsque les conditions (2.44) sont satisfaites, la relation suivante est vraie :

$$-S_{\alpha_1,\beta_1} + G_{\beta_1} + G_{\beta_1}^T \leq G_{\beta_1}^T S_{\alpha_1,\beta_1}^{-1} G_{\beta_1}$$

ce qui implique que

$$\begin{bmatrix} G_{\beta_1}^T S_{\alpha_1, \beta_1}^{-1} G_{\beta_1} & G_{\beta_1}^T A_{\alpha_1}^T + R_{\beta_1}^T B_{\alpha_1}^T \\ A_{\alpha_1} G_{\beta_1} + B_{\alpha_1} R_{\beta_1} & S_{\alpha_2, \beta_2} \end{bmatrix} > 0. \quad (2.45)$$

En utilisant la relation

$$R_{\beta_1} = G_{\beta_1} K_{\beta_1}$$

et en multipliant à gauche et à droite par

$$\begin{bmatrix} G_{\beta_1}^{T-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & S_{\alpha_2, \beta_2}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

et sa transposée, on obtient

$$\begin{bmatrix} S_{\alpha_1, \beta_1}^{-1} & (A_{\alpha_1} + B_{\alpha_1} K_{\beta_1})^T S_{\alpha_2, \beta_2}^{-1} \\ S_{\alpha_2, \beta_2}^{-1} (A_{\alpha_1} + B_{\alpha_1} K_{\beta_1}) & S_{\alpha_2, \beta_2}^{-1} \end{bmatrix} > 0.$$

En posant

$$P_{\alpha_1, \beta_1} = S_{\alpha_1, \beta_1}^{-1} \text{ et } P_{\alpha_2, \beta_2} = S_{\alpha_2, \beta_2}^{-1},$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}, \beta_1 \in \mathcal{E}_{\alpha_1}, \beta_2 \in \mathcal{E}_{\alpha_2}$, on peut montrer que

$$\begin{bmatrix} P_{\alpha_1, \beta_1} & (A_{\alpha_1} + B_{\alpha_1} K_{\beta_1})^T P_{\alpha_2, \beta_2} \\ P_{\alpha_2, \beta_2} (A_{\alpha_1} + B_{\alpha_1} K_{\beta_1}) & P_{\alpha_2, \beta_2} \end{bmatrix} > 0.$$

En utilisant le complément de Schur, l'équation précédente implique

$$P_{\alpha_1, \beta_1} - (A_{\alpha_1} + B_{\alpha_1} K_{\beta_1})^T P_{\alpha_2, \beta_2} (A_{\alpha_1} + B_{\alpha_1} K_{\beta_1}) > 0.$$

En posant $\sigma(k) = \alpha_1$, $\gamma(k) = \beta_1$, $\sigma(k+1) = \alpha_2$ et $\gamma(k+1) = \beta_2$ et en multipliant à gauche et à droite respectivement par $x^T(k)$ et $x(k)$ on obtient

$$x^T(k) P_{\sigma(k), \gamma(k)} x(k) -$$

$$x^T(k) (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)} K_{\gamma(k)})^T P_{\sigma(k+1), \gamma(k+1)} (A_{\sigma(k)} + B_{\sigma(k)} K_{\gamma(k)}) x(k) > 0$$

ce qui signifie qu'il y a une fonction de Lyapunov poly-quadratique sous la forme

$$V(x) = x^T(k) P_{\sigma(k), \gamma(k)} x(k)$$

qui commute à la fois en fonction de la loi de commutation originelle $\sigma(k)$ et du signal utilisé dans la commande $\gamma(k)$ dont la différence est strictement négative pour les solutions du système en boucle fermée. \square

2.2.4 Exemples numériques

Exemple 3.1 Pour illustrer les conditions de stabilité proposées pour le cas de la loi de commutation temporairement incertaine, considérons le système suivant :

$$\dot{x}(t) = A_\sigma x(t) + B_\sigma u(t), \quad \sigma \in \{1, 2\}$$

où

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.49 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 43.12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.98 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Le système est échantillonné avec la période d'échantillonnage $T = 0.026s$ et il est stabilisé en utilisant les gains

$$K_1 = [137.2 \ 43.53 \ 8.9 \ 16.68],$$

$$K_2 = [84.23 \ 20.77 \ 7.09 \ 12].$$

On considère que le signal de commutation reste incertain pour au plus trois échantillons ($\Delta^u = 3$). En utilisant les critères de stabilité proposés, on détermine que le système est asymptotiquement stable s'il demeure au moins huit périodes d'échantillonnage dans une configuration nominale ($\Delta^n = 8$) avant qu'une commutation ne se présente.

Exemple 3.2 Considérons le système

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k)$$

avec $\mathcal{I} = \{1, 2, 3, 4\}$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0.5476 & -0.9500 \\ -0.6465 & 0.0351 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.2989 & -0.9185 \\ -0.9542 & 0.0741 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0.9378 & 0.1735 \\ 1.7643 & 0.0995 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 1.5828 & 0.2617 \\ 0.9066 & -0.0178 \end{bmatrix}$$

et

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1.0174 \\ 0.5982 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0.8536 \\ 0.3955 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0.1609 \\ 0.4881 \end{bmatrix}, \quad B_4 = \begin{bmatrix} 0.2617 \\ 0.3541 \end{bmatrix}.$$

Du point de vue de la commande, la loi de commutation n'est pas parfaitement connue. Les incertitudes liées à la loi de commutation sont définies par les ensembles

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \{1, 2\} \text{ et } \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_4 = \{3, 4\}.$$

Le théorème 32 est appliqué afin de construire un retour d'état commuté robuste, sous la forme

$$u(k) = K_{\gamma(k)}x(k)$$

avec $\gamma(k) \in \mathcal{E}_{\sigma(k)}$. Les conditions LMI (2.44) sont faisables et les gains statiques obtenus sont donnés par

$$K_1 = K_2 = [-0.2694 \ 0.8871],$$

$$K_3 = [-4.1620 \ -0.4344], \ K_4 = [-3.4314 \ 0.3672].$$

On peut remarquer que pour les modes 1 et 2 le solveur LMI trouve un gain commun.

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les problèmes de stabilité et de commande robuste des systèmes à commutation incertains en temps discret ont été traités.

Dans la première section, consacrée aux incertitudes paramétriques, le cas des systèmes avec des incertitudes polytopiques a été considéré. Le but de cette étude a été de montrer comment réduire le conservatisme lié aux incertitudes paramétriques pour le cas des systèmes à commutation.

Deux approches ont été proposées. Dans un premier temps, nous avons montré que le problème d'analyse de stabilité d'un système à commutation incertain peut être traité en analysant un seul système polytopique, global, qui contient l'ensemble des sous-systèmes. Bien qu'elle soit très bien adaptée pour l'analyse de stabilité en utilisant les conditions de [27], l'approche ne permet pas de synthétiser un contrôle. L'inconvénient de cette approche est qu'elle aboutit à la résolution d'un problème d'optimisation non convexe (BMI) dans le cas où on souhaite l'utiliser pour calculer un correcteur stabilisant. Nous avons donc proposé, dans un deuxième temps, une approche de type LMI qui peut être utilisée à la fois pour l'analyse de stabilité et la synthèse de contrôle. Un nouveau type de fonction de Lyapunov a été introduit : les *fonctions de Lyapunov poly-quadratiques dépendant des paramètres* (FLPQDP), qui sont des fonctions de Lyapunov qui prennent en compte à la fois la structure particulière des systèmes à commutation et l'évolution des paramètres incertains. Nous avons montré que l'utilisation de telles fonctions permet de réduire le conservatisme. Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de ces fonctions ont été données en termes d'inégalités matricielles linéaires. L'approche a été étendue pour la synthèse d'un retour d'état commuté.

La deuxième section a permis d'étudier les systèmes à commutation avec une loi de commutation incertaine. Le cas des systèmes en temps discret qui sont stabilisés par un retour d'état commuté a été considéré pour une loi de commutation

arbitraire. On a montré comment obtenir des conditions de stabilité en termes de temps minimum de séjour lorsque la loi de commutation est temporairement incertaine. En outre, la synthèse LMI d'un retour d'état commuté quand la loi de commutation est partiellement connue a été étudiée. Dans le chapitre suivant, nous allons montrer l'utilité de ces études dans le cas des systèmes à commutation avec des retards variables inconnus dans l'entrée.

Chapitre 3

Retards incertains

Dans ce chapitre, une étude de la robustesse par rapport aux retards sera proposée. On va traiter le cas des systèmes à commutation en temps discret. On suppose que la commande en boucle fermée est affectée par des retards variables inconnus et bornés. Le problème des retards variables est très complexe, même pour les systèmes linéaires. L'étude est décomposée en deux sous-problèmes.

Premièrement, on va considérer le cas des systèmes linéaires invariants dans le temps. Dans ce contexte, la stabilité est habituellement étudiée à l'aide de la méthode des fonctions de Lyapunov-Krasovskii. Cependant, les conditions de stabilité obtenues s'avèrent très conservatives.

Une autre approche, apparue notamment dans des applications telles que les systèmes contrôlés en réseaux [89], est possible. Elle consiste à reformuler le problème comme un problème de stabilité des systèmes à commutation [76]. Le modèle du système et la loi de commutation rendent compte de la dynamique du système en boucle fermée pour les différentes valeurs du retard. Le premier objectif de ce chapitre sera de déterminer la relation entre les deux approches. Nous allons montrer que l'application de l'*approche "système à commutation"* est équivalente à l'utilisation d'une classe de fonctions de Lyapunov-Krasovskii qui dépendent du retard. Ces fonctions représentent la forme la plus générale possible qui peut être obtenue en utilisant des sommes de formes quadratiques. Ces résultats justifient la représentation du retard comme un paramètre de commutation.

Deuxièmement, le cas des systèmes à commutation sera traité. On considère que le contrôleur, un retour d'état, dépend de la loi de commutation. La loi de commutation est arbitraire. L'approche "système à commutation" pour la prise en compte du retard dans le cas LTI est étendue au cas des systèmes à commutation avec retard. Un système équivalent, augmenté, qui commute à la fois en fonction de la loi de commutation originelle et du retard, sera obtenu. On rencontre un problème semblable au cas de la loi de commutation incertaine : l'intervention de retards sur la commande en boucle fermée détermine l'apparition de dynamiques mixtes. Nous allons montrer comment les critères de stabilité/stabilisation développés dans le chapitre précédent peuvent être appliqués dans ce cas.

3.1 Stabilité des systèmes linéaires à retards

Dans cette section, on traite de la stabilité des systèmes linéaires à retards, en temps discret. Ce problème est très difficile à aborder lorsque les retards sont variables et inconnus. Dans le cas des systèmes en temps continu, des conditions suffisantes de stabilité, dépendant ou non du retard, ont été obtenues en utilisant les méthodes des fonctionnelles de Lyapunov-Razumikhin et de Lyapunov-Krasovskii (voir [42, 88]). Les critères indépendants du retard s'avèrent plus conservatifs puisqu'ils ne tiennent pas compte des informations sur le retard (taille, domaine de variation, fréquence de variation, etc.). Généralement, il est souhaitable de proposer des conditions de stabilité faciles à tester d'un point de vue numérique (par exemple des critères LMI [95], ou des équations de Riccati [57]). Une approche particulièrement intéressante est la *forme descripteur* introduite par Fridman [35], qui permet de déterminer des critères de stabilité moins conservatifs.

Dans le contexte des systèmes en temps discret, une large variété de critères LMI a été donnée en considérant les équivalents des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii [95, 23, 112, 111, 40, 123, 14, 15]. Plusieurs auteurs ([23, 36, 37] et [16]) ont étendu la *forme descripteur* de Fridman [35]. Un résultat très connu est l'approche de Gao [39] qui a été récemment appliquée au cas des systèmes stochastiques à retard [40] (voir aussi [58]). Les auteurs utilisent l'inégalité de Moon [34] et obtiennent une condition suffisante pour l'existence d'une fonction de Lyapunov-Krasovskii très complexe. Les conditions dépendent des bornes du retard.

Parmi les problèmes ouverts dans le contexte de l'analyse de la stabilité des systèmes à retard, celui qui concerne la forme à prendre pour les fonctions de Lyapunov-Krasovskii est important :

1. *Quelles sont les fonctions de Lyapunov-Krasovskii quadratiques les moins conservatives ?*
2. *Sera-t-il possible d'obtenir des conditions LMI nécessaires et suffisantes pour l'existence des fonctions de Lyapunov-Krasovskii ?*

Jusqu'à présent, des conditions LMI seulement *suffisantes* ont été obtenues pour l'existence des fonctions de Lyapunov-Krasovskii. Les auteurs proposent généralement un type de fonction et une condition LMI associée. Or la condition LMI n'est pas *nécessaire* pour l'existence de la fonction. Ceci est très gênant car, lorsque les conditions sont trouvées infaisables, on ne sait toujours rien sur ces fonctions. Il est possible que les conditions LMI soient infaisables et qu'une fonction sous la forme proposée existe pourtant.

3. *Est-il possible d'avoir des conditions LMI obtenues directement de la différence de la fonction, sans utiliser une majoration supérieure pour ses termes ?*

Un problème pour l'obtention des conditions LMI est le conservatisme issu lorsque les termes de la différence des fonctions sont majorés. Cet aspect

semble lié à la nécessité des conditions LMI.

Certains travaux publiés dans le contexte des systèmes contrôlés en réseaux [108], ramènent le problème d'analyse de stabilité des systèmes à retard à l'analyse de stabilité d'un système à commutation équivalent [65, 76, 75, 59, 22, 109, 121]. Ces approches augmentent le modèle du système pour introduire des variables retardées comme des variables d'état supplémentaires. L'étude du système en boucle fermée est réduite à l'analyse d'un système en dimension finie, variant dans le temps. Des méthodes d'analyse spécifiques aux systèmes à commutation [44, 28] ou aux systèmes à sauts markoviens [26] sont appliquées. On retient en particulier les travaux de Tzes [76] où *la stabilité asymptotique* des systèmes contrôlés en réseaux a été analysée en utilisant des conditions LMI *nécessaires et suffisantes* [28] pour l'existence des fonctions de Lyapunov poly-quadratiques.

En apparence, il n'y a pas de relation entre la méthode des fonctions de Lyapunov-Krasovskii pour l'analyse des systèmes à retard classiques et l'approche "système à commutation" utilisée pour les systèmes contrôlés en réseaux. Cependant, d'un point de vue pratique, on traite un problème similaire. Nous allons étudier la relation entre les deux approches et montrer que l'approche "système à commutation" généralise les approches de Lyapunov-Krasovskii présentées dans la littérature. Cette méthode permet également de répondre aux problèmes ouverts 1 à 3 précédemment énoncés.

3.1.1 Approches Lyapunov-Krasovskii et "système à commutation"

Considérons le système en boucle fermée :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + BKx(k - \tau(k)), \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+, \\ x(k) &= \phi(k), \quad \forall k \in [-m, 0], \end{aligned} \quad (3.1)$$

où $\tau(k)$ est un entier positif représentant le retard variable et $\phi(k)$ est une fonction d'initialisation réelle, définie sur l'intervalle $[-m, 0]$ avec $m > 0$. Ici on considère que le retard est borné, $0 < \tau(k) \leq m$. La borne inférieure du retard est considérée comme nulle. Les résultats peuvent être généralisés facilement pour une borne inférieure différente de zéro en utilisant la publication [39]. Le système peut être exprimé comme un système à retard classique :

$$x(k+1) = Ax(k) + A_d x(k - \tau(k)), \quad (3.2)$$

où $A_d \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $A_d = BK$. Nous allons nous intéresser à l'étude de stabilité pour cette classe de systèmes à retard.

3.1.1.1 Sources de conservatisme pour la méthode des fonctions de Lyapunov-Krasovskii

Dans la littérature, des conditions LMI suffisantes sont obtenues grâce à l'approche des fonctions de Lyapunov-Krasovskii. Cependant, ces conditions s'avèrent

très conservatives. Ici un exemple très simple de fonction [95] est rappelé afin de faciliter la compréhension des différents problèmes de conservatisme :

$$V_S(k) = x^T(k)Px(k) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=k-i}^{k-1} x^T(j)Qx(j). \quad (3.3)$$

Pour ce cas, les conditions de stabilité sont données comme suit :

Lemme 33 *Supposons qu'il existe des matrices définies positives P et Q telles que l'inégalité matricielle linéaire*

$$\begin{bmatrix} P - A^T P A - mQ & A^T P A_d \\ A_d^T P A & Q - A_d^T P A_d \end{bmatrix} > 0 \quad (3.4)$$

soit vérifiée. Alors la différence de la fonction de Lyapunov-Krasovskii (3.3) est strictement négative pour les solutions du système (3.2) et le système est asymptotiquement stable.

Remarque. Ces conditions de stabilité sont obtenues en utilisant une majoration supérieure de la différence de la fonction (3.3), ce qui représente une source de conservatisme. Dans [95], le terme

$$x^T(k - \tau)Qx(k - \tau)$$

a été approximé par

$$\sum_{i=1}^m x^T(k - i)Qx(k - i)$$

(voir l'équation (2.14) de [95]). Dans la plupart des publications qui appliquent les fonctions de Lyapunov-Krasovskii, on utilise des majorations supérieures similaires. Par exemple, dans [40], les auteurs utilisent l'inégalité de *Moon* [34] et dans [37], l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Cela implique que des conditions LMI telles que (3.4) peuvent être trouvées infaisables même s'il existe une fonction de Krasovskii-Lyapunov associée. Puisque la condition LMI (3.4) est seulement une condition suffisante pour l'existence de la fonction (3.3), il est possible de trouver une fonction sous la forme (3.3) pour laquelle la condition (3.4) n'est pas satisfaite.

3.1.1.2 Approche "système à commutation"

Considérons le vecteur d'état augmenté :

$$z(k) = [x^T(k) \dots x^T(k - m)]^T, \quad (3.5)$$

la dynamique du système à retard (3.2) peut être représentée par le système à commutation équivalent :

$$z(k + 1) = \bar{A}_{\sigma(k)} z(k) \quad (3.6)$$

où les matrices \bar{A}_i , $i \in I = \{1, \dots, m\}$ ont la forme

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & A_d & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Le bloc A_d se trouve sur la $(i + 1)$ ème colonne-bloc de \bar{A}_i . De plus, la loi de commutation $\sigma : \mathbb{Z}^+ \rightarrow I = \{1, 2, \dots, m\}$ change en fonction du retard, c'est-à-dire $\sigma(k) = i$ si $\tau(k) = i$. La stabilité asymptotique du système peut être vérifiée en utilisant les fonctions de Lyapunov poly-quadratiques [28]

$$V(k) = z^T(k) \bar{P}_{\sigma(k)} z(k) \quad (3.8)$$

où les matrices $\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_m$ sont des matrices symétriques définies positives. Le système est asymptotiquement stable si les matrices \bar{P}_i , $\forall i = 1 \dots, m$ vérifient l'inégalité matricielle linéaire :

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_i & \bar{A}_i^T \bar{P}_j \\ \bar{P}_j \bar{A}_i & \bar{P}_j \end{bmatrix} > 0, \quad \forall (i, j) \in I \times I. \quad (3.9)$$

D'un point de vue théorique, ce résultat peut paraître surprenant. Plusieurs articles sur stabilité des systèmes à retard en temps discret [95, 39, 37, 15, 40] indiquent que la procédure d'augmentation d'état ne peut pas être appliquée au cas des retards variables. De plus, d'un point de vue pratique, ce résultat s'avère très utile : il existe des cas pratiques pour lesquels les approches classiques n'arrivent pas à montrer la stabilité alors que l'approche "système à commutation" y parvient. Cette approche mérite donc une étude plus approfondie.

3.1.2 L'équivalence des approches

Ici nous allons établir la relation théorique entre l'approche des fonctions de Lyapunov-Krasovskii et l'approche "système à commutation".

Dans un premier temps, une généralisation de l'approche des fonctions de Lyapunov-Krasovskii est présentée : on va introduire *les fonctions de Lyapunov-Krasovskii générales dépendantes du retard* (FLKGDR). Ce type de fonctions représente la forme quadratique la plus générale possible ; elles généralisent toutes les autres fonctions données dans la littérature [95, 23, 36, 112, 111, 16, 40, 123, 14, 15].

Dans un deuxième temps on montre comment obtenir des conditions LMI nécessaires et suffisantes pour l'existence de ces fonctions.

Enfin, on montre que l'approche "système à commutation" est équivalente à l'utilisation des FLKGDR.

3.1.2.1 Généralisation de l'approche classique

Plusieurs fonctions de Lyapunov-Krasovskii ont été présentées dans la littérature. On peut observer que toutes les fonctions sont des sommes de formes quadratiques qui impliquent des variables d'état retardées. En les analysant, on peut imaginer d'autres fonctions pour lesquelles les matrices de Lyapunov ne sont pas nécessairement liées à une matrice unique Q et pour lesquelles toutes les combinaisons croisées des variables d'état retardées sont utilisées. En considérant la forme quadratique la plus générale possible, on obtient la fonction dépendante du retard suivante :

$$V(k) = V(k, x(k) \dots x(k-m), \tau(k)) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m x^T(k-i) P_{\tau(k)}^{i,j} x(k-j). \quad (3.10)$$

Cette fonction est intitulée *fonction de Lyapunov-Krasovskii générale dépendante du retard* (FLKGDR). La fonction contient toutes les combinaisons des variables d'état retardées

$$x^T(k-i) P_{\tau(k)}^{i,j} x(k-j), \quad \forall i, j \in \{1, \dots, m\}.$$

Les formes quadratiques utilisent des matrices $P_{\tau(k)}^{i,j}$ qui changent en fonction du retard

$$P_{\tau(k)}^{i,j} \in \mathcal{P}^{i,j} = \{P_1^{i,j}, P_2^{i,j}, \dots, P_m^{i,j}\},$$

$$\forall i, j \in \{0, \dots, m\}, \tau \in \{1, \dots, m\}.$$

Ces matrices $P_{\tau}^{i,j}$, ne sont pas forcément définies positives. Seule la fonction (3.10) est définie positive, c'est-à-dire

$$V(k, x(k) \dots x(k-m), \tau(k)) > 0$$

ce qui signifie que

$$\Phi(\tau) = \begin{bmatrix} P_{\tau}^{0,0} & P_{\tau}^{0,1} & \dots & P_{\tau}^{0,m} \\ P_{\tau}^{0,1} & P_{\tau}^{1,1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ P_{\tau}^{0,m} & \dots & \dots & P_{\tau}^{m,m} \end{bmatrix} > 0, \quad (3.11)$$

pour toute valeur du retard $\tau \in \{1, \dots, m\}$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $P_{\tau}^{i,j} = P_{\tau}^{j,i^T}$.

En utilisant les méthodes traditionnelles, l'obtention de conditions LMI de stabilité est une tâche très difficile. Cette tâche semble impossible sans utiliser une majoration de la différence de la fonction. Cependant, en utilisant une augmentation du vecteur d'état, il est possible d'obtenir des conditions LMI *nécessaires et suffisantes* pour l'existence de la fonction sans aucune majoration.

Considérons les notations :

$$\Lambda(\tau) = \begin{bmatrix} A & \Xi_1(\tau) & \Xi_2(\tau) & \dots & \Xi_m(\tau) \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

avec

$$\Xi_i(\tau) = \begin{cases} Ad, & i = \tau \\ \mathbf{0}, & i \neq \tau \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.13)$$

pour tout $\tau \in \{1, \dots, m\}$.

Théorème 34 [46] *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- Il existe $m \cdot (m+1)^2$ matrices $P_{\tau}^{i,j}$, $\tau = 1, \dots, m$, $i, j = 0, \dots, m$, telles que la matrice $\Phi(\tau)$, $\tau = 1, \dots, m$ définie par (3.11) vérifie les conditions LMI

$$\begin{bmatrix} \Phi(\tau_1) & \Lambda^T(\tau_1)\Phi(\tau_2) \\ \Phi(\tau_2)\Lambda(\tau_1) & \Phi(\tau_2) \end{bmatrix} > 0, \quad (3.14)$$

$\forall \tau_1, \tau_2 \in \{1, \dots, m\}$.

- Il existe une fonction de Lyapunov-Krasovskii sous la forme (3.10) dont la différence est strictement négative pour toutes les solutions du système (3.2).

Preuve. Considérons la différence de la fonction de Lyapunov-Krasovskii (3.10)

$$V(k+1) - V(k) < 0, \quad (3.15)$$

soit

$$\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m x^T(k-i) P_{\tau(k)}^{i,j} x(k-j) - \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m x^T(k+1-i) P_{\tau(k+1)}^{i,j} x(k+1-j) > 0.$$

Dans la littérature, l'obtention des conditions LMI à partir de l'équation précédente était possible seulement en considérant des formes particulières pour les matrices $P_{\tau(k)}^{i,j}$ et en appliquant une majoration supérieure. Ici, une approche différente est utilisée. En utilisant le vecteur d'état augmenté

$$\bar{x}(k) = [x^T(k) \dots x^T(k-m)]^T$$

et les notations (3.11), l'équation (3.15) peut être exprimée comme

$$\bar{x}^T(k) \Phi(\tau(k)) \bar{x}(k) - \bar{x}^T(k+1) \Phi(\tau(k+1)) \bar{x}(k+1) > 0. \quad (3.16)$$

En considérant les notations (3.12), on peut remarquer que

$$\bar{x}(k+1) = \Lambda(\tau(k)) \bar{x}(k), \quad \forall \tau(k) \in \{1, \dots, m\}. \quad (3.17)$$

En posant $\tau_1 = \tau(k)$ et $\tau_2 = \tau(k + 1)$, l'équation (3.16) devient

$$\bar{x}^T(k)\Phi(\tau_1)\bar{x}(k) - \bar{x}^T(k)\Lambda^T(\tau_1)\Phi(\tau_2)\Lambda(\tau_1)\bar{x}(k) > 0. \quad (3.18)$$

Les équations (3.17) et (3.18) sont classiques dans le domaine des systèmes à commutation.

Il est facile de remarquer que l'équation (3.18) est équivalente à

$$\Phi(\tau_1) - \Lambda^T(\tau_1)\Phi(\tau_2)\Lambda(\tau_1) > 0. \quad (3.19)$$

En appliquant le complément de Schur, l'équation précédente est strictement équivalente aux conditions LMI (3.14), ce qui signifie que la différence (3.15) de la fonction de Lyapunov-Krasovskii (3.10) et l'équation (3.14) sont équivalentes.

□

Remarque. Jusqu'à présent, des conditions seulement *suffisantes* ont été données pour l'existence des fonctions de Lyapunov-Krasovskii. Les conditions LMI (3.14) sont des conditions *nécessaires et suffisantes* pour l'existence de la fonction quadratique la plus générale, (3.10). Cela signifie que lorsque les conditions LMI (3.14) sont infaisables, il est impossible de trouver une fonction de Lyapunov-Krasovskii sous la forme (3.10). De plus, puisque (3.10) est la fonction la plus générale, cela implique qu'il est impossible de trouver une fonction de Lyapunov-Krasovskii sous les formes proposées dans la littérature, ou n'importe quelle autre fonction qui implique des sommes de formes quadratiques.

Les conditions LMI (3.14) peuvent être facilement étendues au cas des systèmes à retard avec des retards multiples

$$x(k + 1) = Ax(k) + \sum_{i=1}^m A_i x(k - \tau_i(k)),$$

où les retards $\tau_i(k)$ sont variables, $\tau_i(k) \in \{1, 2, \dots, m\}$, $\forall i = 1, \dots, m$. Cette généralisation est obtenue en reconsidérant la notation (3.13) avec

$$\Xi_i(\tau_1, \dots, \tau_m) = \sum_{j, \tau_j(k)=i} A_j, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

et en utilisant autant de matrices $\Lambda(\tau_1, \dots, \tau_m)$ et de matrices de Lyapunov $\Phi(\tau_1, \dots, \tau_m)$ que de combinaisons de retards possibles.

3.1.2.2 Lien avec l'approche "système à commutation"

Nous allons maintenant étudier le lien entre l'approche "système à commutation" et cette nouvelle extension de la méthode des fonctions de Lyapunov-Krasovskii [47]. On peut constater que la fonction de Lyapunov poly-quadratique (3.8) peut être écrite comme

$$V(k, \bar{x}(k), \tau(k)) = \bar{x}^T(k)\bar{P}_{\tau(k)}\bar{x}(k),$$

$\forall \tau(k) \in \{1, \dots, m\}$, puisque $\sigma(k) = \tau(k)$. Ceci est une fonction qui dépend explicitement des variables retardées $x(k), \dots, x(k-m)$ et du retard τ . De même la matrice $\bar{P}_{\tau(k)}$ est strictement identique à la matrice $\Phi(\tau(k))$ donnée par (3.11). Enfin $\Lambda(\tau)$ (donné par l'équation (3.12)) est identique à \bar{A}_τ avec $i = \tau$. On peut donc observer que la fonction de Lyapunov poly-quadratique (3.8) est strictement équivalente à la FLKGDR (3.10) et que les conditions LMI (3.14) et (3.9) sont strictement identiques.

Ces raisonnements montrent que l'application de l'approche "système à commutation" est équivalente à l'utilisation des conditions *nécessaires et suffisantes* pour l'existence de la fonction de Lyapunov-Krasovskii quadratique la plus générale. Lorsque les conditions LMI de l'approche "système à commutation" sont infaisables, il est impossible de trouver d'autres fonctions de Lyapunov-Krasovskii quadratiques. Cela justifie l'application de l'approche "système à commutation" pour l'analyse des systèmes à retard avec des retards variables.

3.2 Stabilité des systèmes à commutation avec des retards en boucle fermée

Dans cette section, nous traitons une généralisation du problème des retards variables inconnus pour le cas des systèmes à commutation en temps discret. On suppose que le système est commandé par un retour d'état commuté qui est affecté par des retards variables inconnus. On considère que les retards sont bornés. Les variations de la loi de commutation sont supposées arbitraires mais la loi est contrainte par un temps minimum de séjour entre deux commutations. Ce problème est un grand défi puisque l'intervention de retards en boucle fermée détermine l'apparition de modes mixtes. Nous allons montrer comment les critères de stabilité/stabilisation développés dans le chapitre précédent peuvent être appliqués dans ce cas.

3.2.1 Formalisation mathématique

Considérons le système à commutation suivant :

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}u(k - \tau(k)), \\ u(k) &= K_{\sigma(k)}x(k) \\ x(k) &= \phi(k), \quad \forall k \in [-\bar{\theta}, 0], \\ \sigma(k) &= \epsilon(k), \quad \forall k \in [-\bar{\theta}, 0], \end{aligned} \tag{3.20}$$

où $\sigma : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathcal{I} = \{1, 2, \dots, N\}$ représente la loi de commutation, et $\tau(k) \in \mathcal{T} = \{\underline{\theta}, \dots, \bar{\theta}\}$ les retards variables ⁴. Ici $\phi(k)$ et $\epsilon(k)$ représentent des fonctions d'initialisation définies sur l'intervalle $[-\bar{\theta}, 0]$ où $\bar{\theta} > 0$ représente le retard maximal.

⁴L'ensemble \mathcal{T} ne contient pas forcément toutes les valeurs entre $\underline{\theta}$ et $\bar{\theta}$.

La borne inférieure du retard est notée $\underline{\theta}$ et le retard respecte la condition

$$0 \leq \underline{\theta} \leq \tau(k) \leq \bar{\theta}.$$

Le système en boucle fermée est donné par

$$x(k+1) = A_{\sigma(k)}x(k) + B_{\sigma(k)}K_{\sigma(k-\tau(k))}x(k-\tau(k)).$$

Lorsqu'une commutation intervient entre le moment de l'élaboration de la commande et son application, $\sigma(k)$ est différent de $\sigma(k-\tau(k))$. Cela détermine l'apparition de dynamiques mixtes qui risquent de compromettre la stabilité.

On note γ le signal de commutation utilisé dans la commande,

$$\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{I}, \quad \gamma(k) = \sigma(k-\tau(k)).$$

Soit Δ le temps minimum entre deux commutations. En considérant le cas de la loi de commutation incertaine, traité dans le chapitre précédent, on peut parler d'un fonctionnement nominal (pour $\gamma(k) = \sigma(k)$) et d'un régime incertain (lorsqu'il est possible que $\gamma(k) \neq \sigma(k)$). Le temps de fonctionnement incertain Δ^u dépend du retard τ , c'est-à-dire

$$\Delta_{min}^u \leq \Delta^u \leq \Delta_{max}^u$$

avec $\Delta_{min}^u = \underline{\theta}$ et $\Delta_{max}^u = \bar{\theta}$.

De même, le temps minimum en fonctionnement nominal est

$$\Delta^n = \Delta - \bar{\theta}.$$

On peut remarquer que si l'intervalle entre deux commutations est toujours plus petit que le retard, $\Delta < \underline{\theta}$, alors le système se trouve toujours dans une dynamique mixte. Dans ce contexte, il faut concevoir des critères de stabilité qui tiennent compte de la valeur du retard et de la fréquence de commutation.

3.2.2 Modèle augmenté du système

Les résultats obtenus pour le cas des systèmes linéaires justifient la représentation du retard comme un paramètre de commutation. Nous appliquons cette procédure au cas des systèmes à commutation. On obtient un système équivalent, augmenté, qui commute à la fois en fonction de la loi de commutation originelle $\sigma(k)$, du signal de commutation retardé $\gamma(k) = \sigma(k-\tau(k))$ et du retard $\tau(k)$.

Considérons le vecteur d'état augmenté

$$z(k) = [x^T(k) \dots x^T(k-\bar{\theta})]^T.$$

Le système en boucle fermée peut être représenté sous la forme

$$z(k+1) = (\bar{A}_{\sigma(k)} + \bar{B}_{\sigma(k)}\bar{K}_{(\gamma(k),\tau(k))})z(k) \quad (3.21)$$

où

$$\bar{A}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} A_{\sigma(k)} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\sigma(k)} = \begin{bmatrix} B_{\sigma(k)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

et

$$\bar{K}_{(\gamma(k), \tau(k))} = [\mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad K_{\gamma(k)} \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}].$$

La matrice des gains, $K_{\gamma(k)}$, se trouve sur la $(\tau+1)$ ème colonne-bloc de $\bar{K}_{(\gamma(k), \tau(k))}$.

Le système en boucle fermée peut être écrit comme

$$z(k+1) = H_{(\sigma(k), \gamma(k), \tau(k))} z(k)$$

avec

$$H_{(\sigma(k), \gamma(k), \tau(k))} = \bar{A}_{\sigma(k)} + \bar{B}_{\sigma(k)} \bar{K}_{(\gamma(k), \tau(k))}.$$

On peut remarquer l'apparition des paramètres supplémentaires de commutation $\gamma(k)$ et $\tau(k)$. Notre objectif est de donner des critères de stabilité pour ce système.

3.2.3 Analyse de stabilité

Sans émettre d'hypothèse sur le temps de séjour ou sur la loi de commutation, la stabilité peut être vérifiée en appliquant l'approche des fonctions de Lyapunov poly-quadratiques de [28]. Pour ce système, les fonctions ont la forme

$$V(k, z(k), \sigma(k), \gamma(k), \tau(k)) = z^T(k) P_{(\sigma(k), \gamma(k), \tau(k))} z(k),$$

$$\forall (\sigma, \gamma, \tau) \in \mathcal{D} = \mathcal{I} \times \mathcal{I} \times \mathcal{T}.$$

La stabilité est analysée en vérifiant s'il existe des matrices définies positives $P_i > 0$, $\forall i \in \mathcal{D}$, solutions des inégalités matricielles linéaires

$$H_i^T P_j H_i - P_i < 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}.$$

Cependant, ces conditions peuvent être très restrictives, puisque les gains $K_{\gamma(k)}$ doivent assurer la décroissance de la fonction de Lyapunov $V(k) = z^T(k) P_{(\sigma, \gamma, \tau)} z(k)$ pour toutes les valeurs du retard $\tau(k)$ et pour toutes les combinaisons de dynamiques mixtes.

Les contraintes sur les gains peuvent être relaxées en utilisant des hypothèses sur le temps minimum de séjour. Des conditions de stabilité peuvent être obtenues en appliquant le théorème 31 du chapitre précédent. Dans ce cas, les taux de croissance \ décroissance, les constantes $\lambda_n^* = \min \lambda_n$ et $\lambda_u^* = \min \lambda_u$, sont trouvées à partir des inégalités matricielles

$$H_{(\sigma, \gamma, \tau_1)}^T P_{(\sigma, \gamma, \tau_2)}^u H_{(\sigma, \gamma, \tau_1)} - \lambda_u P_{(\sigma, \gamma, \tau_1)}^u < 0$$

$$H_{(\sigma, \sigma, \tau_1)}^T P_{(\sigma, \tau_2)}^n H_{(\sigma, \gamma, \tau_1)} - \lambda_n P_{(\sigma, \tau_1)}^n < 0$$

$\forall (\sigma, \gamma) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I}$, et $(\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}$.

Proposition 35 *Considérons les scalaires :*

$$c_n = \frac{\max_{(\sigma,\tau) \in \mathcal{I} \times \mathcal{T}} \text{eig}_{\max} \left(P_{\sigma,\tau}^n \right)}{\min_{(\sigma,\tau) \in \mathcal{I} \times \mathcal{T}} \text{eig}_{\min} \left(P_{\sigma,\tau}^n \right)}, \quad (3.22)$$

et

$$c_u = \frac{\max_{(\sigma,\gamma,\tau) \in \mathcal{D}} \text{eig}_{\max} \left(P_{(\sigma,\gamma,\tau)}^u \right)}{\min_{(\sigma,\gamma,\tau) \in \mathcal{D}} \text{eig}_{\min} \left(P_{(\sigma,\gamma,\tau)}^u \right)} \quad (3.23)$$

Le système en boucle fermée (3.20) est stable si

$$c_n c_u (\lambda_n^*)^{\Delta - \bar{\theta}} (\lambda_u^*)^{\bar{\theta}} < 1, \text{ pour } \lambda_u^* > 1$$

ou

$$c_n c_u (\lambda_n^*)^{\Delta - \bar{\theta}} (\lambda_u^*)^{\underline{\theta}} < 1, \text{ pour } \lambda_u^* < 1.$$

Cette approche peut être étendue pour la synthèse de contrôle en considérant le système augmenté (3.21) et en imposant les taux de croissance \ décroissance comme contraintes de synthèse.

3.3 Exemples numériques

Nous allons donner dans cette section quelques exemples numériques pour illustrer les critères de stabilité obtenus. Les fonctions de Lyapunov-Krasovskii proposées et les conditions LMI associées dépendent de toute la plage des variables d'état retardées. Cela conduit à un nombre important de variables pour les conditions LMI (3.14) ou (3.9). Il est naturel de se poser la question de la faisabilité.

Exemple 4.1 Considérons le système (3.2) avec

$$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.97 \end{bmatrix} \text{ et } A_d = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.1 & -0.1 \end{bmatrix}.$$

Gao [39] et Fridman [37] montrent que le système est asymptotiquement stable pour, respectivement, $3 \leq \tau(k) \leq 5$ et $3 \leq \tau(k) \leq 10$. En utilisant la fonction de Lyapunov-Krasovskii quadratique la plus générale ou les fonctions de Lyapunov poly-quadratiques (3.8), les conditions LMI (3.14) et (3.9) montrent que le système est asymptotiquement stable pour $3 \leq \tau(k) \leq 13$. De plus, en utilisant notre approche, on peut considérer des retards discrets. Par exemple, il est possible de montrer que le système est stable pour un retard τ variant dans l'ensemble $\{1, 6, 11, 16\}$.

Exemple 4.2 Considérons le modèle linéaire invariant dans le temps d'un pendule inversé sur un chariot présenté dans la publication [68]

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\omega} \\ \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m) \cdot g}{M \cdot l} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m \cdot g}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ x \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{M \cdot l} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \omega \\ x \\ v \end{bmatrix}$$

où $M = 2kg$, $m = 0.1kg$, $l = 0.5m$ et $g = 9.81m/s^2$. Le système est échantillonné avec la période d'échantillonnage $T = 20ms$. Par ailleurs, il est stabilisé par un retour d'état numérique affecté par des retards :

$$u(t) = Kx(k - \tau), \quad \forall t \in [kT, (k + 1)T]$$

où

$$K = [56 \ 12 \ 0.45 \ 1.4].$$

Pour vérifier la stabilité du schéma de contrôle numérique, on considère le modèle discret du système. Les conditions LMI (3.14) et (3.9) montrent que le système est asymptotiquement stable pour $1 \leq \tau(k) \leq 4$. En fait, pour un retard constant $\tau = 5$ le système est instable (ce fait peut être vérifié en analysant les valeurs propres de la matrice d'état du système en boucle fermée augmenté). Comme on est en temps discret, cela implique que pour cet exemple les conditions LMI proposées donnent exactement l'intervalle de variation du retard pour lequel le système est stable.

Remarques. Les exemples numériques illustrent clairement la réduction du conservatisme des conditions LMI (3.14) et (3.9).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la stabilité robuste par rapport aux retards en boucle fermée. Pour les systèmes linéaires invariants dans le temps, nous avons montré que la modélisation du système à retard sous la forme d'un système à commutation permet l'obtention des conditions *nécessaires et suffisantes* pour l'existence des fonctions de Lyapunov-Krasovskii quadratiques les plus générales. La procédure a été étendue au cas des systèmes à commutation. Puisque des dynamiques mixtes interviennent, les critères de stabilité proposés dans le chapitre précédent sont appliqués. Les conditions de stabilité obtenues peuvent être étendues pour des systèmes qui présentent à la fois des retards et des incertitudes paramétriques. Cet aspect sera considéré dans le chapitre suivant, pour les systèmes à temps continus commandés par des contrôleurs numériques.

Chapitre 4

Application aux systèmes de commande numérique

Ce chapitre traite de la modélisation des systèmes continus linéaires invariants dans le temps, contrôlés par des régulateurs numériques [3]. Dans ce contexte, des retards peuvent intervenir dans l'application de la commande. Ces retards sont variables et inconnus. Dans certains cas, ils peuvent être plus grands que la période d'échantillonnage. Lorsque l'échantillonnage n'est pas uniforme, on rencontre aussi des problèmes de contrôle sur un domaine temporel variable. La modélisation et la commande de tels systèmes sont des tâches très difficiles. Dans ce chapitre on présente un modèle mathématique unique, considérant tous ces facteurs perturbateurs. Afin de représenter fidèlement les phénomènes et de permettre l'utilisation des outils classiques, le modèle doit être à la fois général et simple. Nous allons donner une nouvelle représentation discrète du système, intitulée *modèle à événements* (anglais *event based model*), qui correspond à un système incertain avec une forme exponentielle. Ensuite, nous montrerons que le problème de stabilisation peut être traité par des méthodes de synthèse LMI pour des systèmes à commutation polytopiques avec une incertitude additive bornée en norme. Enfin, la méthodologie sera étendue au cas des systèmes à commutation continus.

4.1 Contexte

Lors de la mise en œuvre d'un contrôleur numérique, les *problèmes de temporisation* (ang. *timing problems*) sont inévitables [106]. Dans une situation idéale, tous les composants (capteurs, actionneurs, ordinateurs etc.) sont parfaitement synchronisés. En réalité, les composants introduisent des retards dans le système de régulation et provoquent des *jitters* (gigues d'échantillonnage). Ces phénomènes sont dus au temps de réponse du capteur et de l'actionneur, à la charge de calcul des ordinateurs et aux différentes interfaces de communication utilisées. L'apparition de problèmes de temporisation provoque des perturbations significatives sur la commande lorsqu'ils sont ignorés. Ces problèmes compromettent les

performances du système et même sa stabilité [98]. Un défi dans le contexte des systèmes de régulations numériques [3] et en particulier dans le cas des systèmes commandés en réseaux [108], est de garantir les performances des lois de contrôle en présence de ces problèmes [90]. La première question à aborder est la modélisation de ces problèmes. Un modèle discret réaliste, qui peut être utilisé pour l'analyse de stabilité et la synthèse du contrôle, est souhaitable. La principale difficulté de modélisation réside dans l'apparition des *incertitudes exponentielles*. D'une manière informelle, les incertitudes exponentielles sont des termes sous la forme

$$e^{M\tau} \text{ ou } \int_0^\tau e^{Ms} ds$$

qui dépendent d'un paramètre variable inconnu τ . La nature incertaine et la structure particulière, fortement non-linéaire, des termes exponentiels, rendent l'analyse de stabilité et la synthèse du contrôle très difficiles. Il existe plusieurs approches pour gérer ces incertitudes. Cependant, il n'existe pas de méthodologie générale. Dans [6], les incertitudes exponentielles sont exprimées comme des incertitudes bornées en norme. Une approche similaire est appliquée pour le cas des systèmes commandés en réseaux [80]. Cette approche implique l'utilisation d'une fonction de Lyapunov commune pour toutes les valeurs des matrices incertaines, ce qui conduit à des résultats conservatifs.

Généralement, lorsque les retards variables sont pris en compte, la variation du retard est limitée à une période d'échantillonnage. En fait, les modèles d'analyse sont obtenus en considérant la représentation discrète du système sur une période d'échantillonnage. Appliquer cette méthodologie au cas général, avec du jitter d'échantillonnage et des variations importantes du retard, détermine des modèles très complexes, difficilement analysables. Des résultats intermédiaires ont été proposés lorsque des hypothèses supplémentaires sont faites sur le retard. En considérant que le retard est connu, une méthode de compensation peut être appliquée [108, 105]. Lorsque les retards appartiennent à un ensemble fini de valeurs nominales (des multiples de la période d'échantillonnage), un modèle de type "système à commutation" peut être utilisé [64, 76, 75, 2]. Le vrai problème est, en général, de déterminer le comportement du système lorsque les retards varient dans les intervalles limités par les valeurs nominales. Étendre l'approche "système à commutation" dans ce cas implique la résolution d'un nombre infini d'inégalités matricielles linéaires. Une approche qui évite ce problème, basée sur une modélisation de type systèmes à retard en temps continu, a été proposée dans [38]. Cette approche est fondée sur la méthode des fonctionnelles de Lyapunov Krasovskii.

Ici, nous allons présenter un modèle unique pour représenter l'interaction entre les régulateurs numériques et les systèmes continus. On donne un modèle qui tient compte simultanément des retards variables inconnus et de l'échantillonnage non-uniforme. Au lieu de représenter le système entre deux instants d'échantillonnage, on présente un nouveau modèle, appelé *modèle à événements*. On considère les différents événements asynchrones qui interviennent en boucle fermée (instants

d'échantillonnage, actualisations de la commande) et on donne la représentation discrète entre deux événements. On obtient un système incertain avec incertitude exponentielle et retards variables. On montre ainsi qu'un tel système peut être représenté comme un système à commutation polytopique avec une incertitude additive bornée en norme : le retard est traité comme un paramètre de commutation et la représentation des incertitudes exponentielles est simplifiée en considérant un développement en série de Taylor et sa fermeture convexe. Cette représentation réduit considérablement la complexité des incertitudes et permet l'utilisation des fonctions de Lyapunov dépendant des paramètres pour obtenir des critères de stabilité efficaces. L'approche présentée ici pour un système continu LTI est étendue au cas des systèmes à commutation.

4.2 Représentations discrètes

Considérons un système linéaire invariant dans le temps commandé par un régulateur numérique

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = Mx_c(t) + Nu_c(t) \quad (4.1)$$

où $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $N \in \mathbb{R}^{n \times m}$ représentent respectivement les matrices d'état et d'entrée, $x_c(t) \in \mathbb{R}^n$ l'état du système et $u_c(t) \in \mathbb{R}^m$ la commande. Les valeurs de l'état $x_c(t)$ sont disponibles par échantillonnage. Notons $x(k)$, la version discrète de l'état du système. Ce signal est envoyé à un ordinateur qui produit la commande numérique $u(k)$ et la renvoie au système. Un bloqueur d'ordre zéro génère, à partir de $u(k)$, un signal de commande constant par morceaux (en temps continu), $u_c(t)$, tel que $u_c(t) = u(k)$ jusqu'à ce qu'un nouveau signal arrive au niveau des actionneurs.

Afin de déterminer une loi de régulation numérique, une représentation en temps discret du système est nécessaire. Naturellement, la qualité de la représentation se répercute de façon cruciale sur les performances réelles du système de régulation.

Après un bref rappel de quelques cas d'étude classiques, nous allons proposer un modèle à événements qui permet de traiter l'ensemble des configurations étudiées dans la régulation numérique : échantillonnage à pas constant, à pas variable, temps de calcul non négligeable, retards dus aux transport d'information, jitter d'horloge, etc. En effet, ce qui est important pour le calcul de la commande c'est l'instant de la prise des variables continues (instants de mesure), pour la commande elle-même c'est l'instant où une nouvelle commande est effectivement appliquée au système continu (actualisation de la commande).

4.2.1 Cas idéal

Lorsque l'échantillonnage et l'actualisation de la commande sont périodiques et synchrones, le modèle discret est obtenu en intégrant le système sur une période

d'échantillonnage. Pour une période d'échantillonnage constante T , on obtient le modèle classique :

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \quad (4.2)$$

où les matrices A et B sont des matrices connues sous la forme

$$A = e^{MT}, \text{ et } B = \int_0^T e^{Ms} ds N.$$

4.2.2 Pas d'échantillonnage variables

Lorsque l'échantillonnage et l'actualisation des entrées s'effectuent à des instants inconnus $\{t_k\}$ répartis non-uniformément dans le domaine du temps, le système est décrit par le modèle discret [6] :

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) \quad (4.3)$$

où

$$A(k) = e^{M(t_{k+1}-t_k)}, \quad B(k) = \int_0^{t_{k+1}-t_k} e^{M(t_{k+1}-t_k-s)} ds N.$$

Dans ce cas, les matrices A et B sont des matrices dépendantes du pas d'échantillonnage $t_{k+1} - t_k$. De plus, ces matrices sont des matrices incertaines avec incertitudes exponentielles, variables dans le temps lorsque le pas d'échantillonnage n'est pas connu.

4.2.3 Retards variables inconnus

Le modèle discret change quand la commande est perturbée par des retards variables inconnus $\tau(k)$. Pour un échantillonnage régulier de période T et des retards $\tau(k) < T$, la commande s'écrit sous la forme

$$u(t) = \begin{cases} u(k-1), & t \in [kT, kT + \tau(k)) \\ u(k), & t \in [kT + \tau(k), (k+1)T) \end{cases}$$

Dans ce cas, le modèle discret est donné par [3] :

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma^0(k)u(k) + \Gamma^1(k)u(k-1)$$

où

$$\Phi = e^{MT}, \quad \Gamma^1(k) = \int_{T-\tau(k)}^T e^{Ms} ds N, \quad \Gamma^0(k) = \int_0^{T-\tau(k)} e^{Ms} ds N.$$

Le système comporte des matrices incertaines avec incertitudes exponentielles $\Gamma^0(k)$ et $\Gamma^1(k)$.

4.2.4 Retards supérieurs à la période d'échantillonnage

La représentation du système sur une période d'échantillonnage peut être adaptée pour des retards plus importants dont la variation est inférieure à une période d'échantillonnage (voir [80]). Cependant, appliquer cette méthodologie au cas général, avec des variations importantes du retard, détermine des modèles très complexes [25]. Ceci est dû au fait que plusieurs actualisations peuvent avoir lieu entre deux instants d'échantillonnage. Dans ce cas, l'entrée du système peut changer plusieurs fois dans la même période. Considérons que pour le k -ème cycle d'échantillonnage la commande appliquée au système peut prendre des valeurs dans l'ensemble $\{u(k), u(k-1), \dots, u(k-k_{max})\}$ et que la période d'échantillonnage T est constante. Soit $\tau^j(k)$, avec

$$kT \leq \tau^j(k) \leq (k+1)T, j = 0, \dots, k_{max},$$

l'instant d'occurrence de la commande $u(k-j)$ dans la k ème période. Le modèle classique obtenu est illustré comme suit :

$$\begin{aligned} x(k+1) = & e^{MT} x(k) + \int_{kT}^{\tau^{k_{max}-1}(k)} e^{M[(k+1)T-s]} ds Nu(k-k_{max}) + \dots \\ & \dots + \int_{\tau^1(k)}^{\tau^0(k)} e^{M[(k+1)T-s]} ds Nu(k-1) + \int_{\tau^0(k)}^{(k+1)T} e^{M[(k+1)T-s]} ds Nu(k). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ce modèle est très complexe : il a $k_{max} + 1$ termes non-linéaires (dans le retard) et incertains sous une forme exponentielle, chacun dépendant d'un paramètre inconnu et variable $\tau^j(k)$. En utilisant les méthodes classiques, il est très difficile d'analyser ce type de système. Le problème est encore plus complexe lorsque la période d'échantillonnage est variable.

4.2.5 Modèle à évènements

Ici nous allons proposer une nouvelle représentation discrète du schéma de régulation numérique : un *modèle à évènements*[51]. Cette représentation peut modéliser à la fois les systèmes avec des retards variables et les systèmes avec des périodes d'échantillonnage non-uniformes.

Considérons les différents évènements qui ont lieu dans le système de contrôle :

- échantillonnage,
- actualisation des entrées.

Lorsque les retards affectent le contrôle, l'échantillonnage et l'actualisation des commandes sont des évènements distincts, se succédant à des intervalles non-uniformes, dans un ordre aléatoire. Il est possible que plusieurs actualisations interviennent entre deux instants d'échantillonnage, ou qu'aucune actualisation n'ait lieu.

Soit t_i , $i \in \mathbb{N}$ l'instant où un évènement générique (actualisation ou échantillonnage) intervient. L'évolution du système entre deux évènements est décrite

par :

$$x_c(t_{i+1}) = e^{M(t_{i+1}-t_i)}x_c(t_i) + \int_0^{t_{i+1}-t_i} e^{Ms}dsNu_c(t_i). \quad (4.5)$$

La commande $u_c(t_i)$ change seulement lorsque t_i correspond à un évènement d'actualisation. De façon similaire, les valeurs du vecteur d'état $x_c(t_i)$ sont disponibles pour le calcul du contrôle seulement lorsque t_i correspond à un évènement d'échantillonnage ($t_i = kT$, $k \in \mathbb{Z}^+$). On peut remarquer que le modèle décompose le comportement du système (4.1) sur des intervalles de temps avec une commande constante.

La commande $u_c(t_i)$ dépend d'un échantillon $x_c(t_j)$, avec $t_i \geq t_j$. On note ρ_i l'intervalle de temps entre deux évènements successifs. ρ_i est un paramètre inconnu, borné et variable c'est-à-dire :

$$0 = \underline{\rho} < \rho_i = t_{i+1} - t_i \leq \bar{\rho}.$$

De plus, on note par

$$\eta_i = x_c(t_i), \text{ et } u_i = u_c(t_i) \quad (4.6)$$

respectivement, le vecteur d'état et d'entrée à l'instant d'occurrence d'un évènement donné. Le système (4.5) peut être exprimé comme un système incertain en temps discret avec *incertitude exponentielle*

$$\eta_{i+1} = A(\rho_i)\eta_i + B(\rho_i)u_i. \quad (4.7)$$

L'expression *incertitude exponentielle* désigne les termes

$$A(\rho_i) = e^{M\rho_i}, \quad B(\rho_i) = \int_0^{\rho_i} e^{Ms}dsN.$$

La stabilisation d'un système affecté par des problèmes de temporisation (jitter, retards variables inconnus, etc.) peut être considérée comme un problème de synthèse de contrôle robuste pour le système (4.7). Nous allons considérer le cas où la commande $u_c(t_i)$ est un retour d'état sous la forme

$$u_c(t_i) = Kx_c(t_j) = Kx_c(t_{i-\theta_i}), \quad \theta_i \in \mathcal{T} = \{\theta \in \mathbb{Z}^+ : \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\}$$

où $\theta_i = i - j$ représente la distance dans l'espace d'indices d'évènement entre la prise de l'échantillon et l'actualisation de la sortie. Puisqu'un nombre fini d'actualisations intervient dans un intervalle de temps fini, le nombre entier positif θ_i peut être borné. Soit $\underline{\theta}$ et $\bar{\theta}$, respectivement les bornes supérieures et inférieures de θ_i ,

$$\underline{\theta} \leq \theta_i \leq \bar{\theta}.$$

Le vecteur d'entrée u_i du système (4.7) est équivalent à

$$u_i = K\eta_{i-\theta_i}$$

et le modèle à événements en boucle fermée devient :

$$\eta_{i+1} = A(\rho_i)\eta_i + B(\rho_i)K\eta_{i-\theta_i}.$$

Ce modèle représente un système incertain avec incertitude exponentielle et retards variables dans l'état. Un gain K qui stabilise ce modèle assure la stabilisation du système en temps continu original (4.1). La recherche d'un tel contrôle doit résoudre deux problèmes. Le premier problème est lié aux incertitudes exponentielles et il concerne la recherche d'une meilleure représentation qui permet d'appliquer des techniques de synthèse classiques. Le deuxième problème concerne les retards variables. Ces problèmes seront discutés dans les sections suivantes.

4.3 Modèle polytopique

Dans cette section nous allons présenter une méthode pour exprimer le modèle à événements (4.7) sous la forme d'un modèle polytopique. Cette représentation est importante puisqu'elle permet l'application des résultats classiques de contrôle robuste. Considérons les matrices incertaines :

$$A(\rho_i) = e^{M\rho_i}, \quad B(\rho_i) = \int_0^{\rho_i} e^{Ms} ds N. \quad (4.8)$$

Notre but est de déterminer la représentation des incertitudes la plus appropriée pour une synthèse de contrôle LMI.

4.3.1 Cas des matrices diagonalisables

Pour des cas particuliers, une approche très simple peut être appliquée. Considérons que la matrice M soit diagonalisable, c'est-à-dire qu'il y ait une matrice T inversible et une matrice D diagonale telle que

$$M = TDT^{-1},$$

où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Ici $\lambda_j, j = 1 \dots n$ représentent les valeurs propres de M . Pour garder la simplicité, nous allons traiter le cas des valeurs propres λ_j réelles. L'approche peut être facilement étendue au cas des valeurs propres complexes.

En utilisant la méthode des matrices constituantes [13], il est possible de montrer qu'il existe des matrices $Z_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telles que

$$A(\rho_i) = \sum_{j=1}^n Z_j e^{\lambda_j \rho_i} \quad (4.9)$$

et

$$B(\rho_i) = \sum_{j=1}^n Z_j \int_0^{\rho_i} e^{\lambda_j s} ds N. \quad (4.10)$$

Dans ce cas, les matrices Z_j sont données par

$$Z_j = T \text{diag}(e_j) T^{-1}, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

où e_j représentent les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Considérons les notations :

$$a_j(\rho_i) = e^{\lambda_j \rho_i}, \quad b_j(\rho_i) = \int_0^{\rho_i} e^{\lambda_j s} ds.$$

Les incertitudes exponentielles peuvent être exprimées sous la forme

$$A(\rho_i) = T \text{diag}(a_1(\rho_i), \dots, a_n(\rho_i)) T^{-1} \quad (4.11)$$

et

$$B(\rho_i) = T \text{diag}(b_1(\rho_i), \dots, b_n(\rho_i)) T^{-1} N. \quad (4.12)$$

Cela implique que chaque incertitude exponentielle dépend de n paramètres variables inconnus. Les bornes des paramètres a_j et b_j sont données par :

$$\bar{a}_j = \max_{\underline{\rho} < \rho_i < \bar{\rho}} a_j(\rho_i), \quad \underline{a}_j = \min_{\underline{\rho} < \rho_i < \bar{\rho}} a_j(\rho_i), \quad (4.13)$$

$$\bar{b}_j = \max_{\underline{\rho} < \rho_i < \bar{\rho}} b_j(\rho_i) \text{ et } \underline{b}_j = \min_{\underline{\rho} < \rho_i < \bar{\rho}} b_j(\rho_i). \quad (4.14)$$

Les matrices $A(\rho_i)$ et $B(\rho_i)$ sont bornées chacune par un polytope convexe avec 2^n sommets définis par toutes les combinaisons possibles des paramètres \bar{a}_j , \underline{a}_j , \bar{b}_j et \underline{b}_j . De façon équivalente, la matrice $[A(\rho_i) \quad B(\rho_i)]$ appartient à un polytope avec 2^{2n} sommets :

$$[A(\rho_i) \quad B(\rho_i)] \in \sum_{j=1}^{2^{2n}} \mu_j [U_j^A \quad U_j^B], \quad \sum_{j=1}^{2^{2n}} \mu_j = 1, \quad \mu_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, 2^{2n}$$

où

$$U_j^A = T E_j^a T^{-1}, \quad U_j^B = T E_j^b T^{-1} N,$$

tel que $[E_j^a \quad E_j^b]$, $j = 1, \dots, 2^{2n}$, sont les sommets du polytope

$$\mathcal{E} = \{E = [\text{diag}(a_1, \dots, a_n) \quad \text{diag}(b_1, \dots, b_n)] : \underline{a}_j \leq a_j \leq \bar{a}_j, \underline{b}_j \leq b_j \leq \bar{b}_j, j = 1, \dots, n\}. \quad (4.15)$$

Cette représentation peut être introduite dans les modèles (4.3) et (4.4), ce qui permet de traiter les problèmes d'analyse de stabilité et de synthèse de contrôle en utilisant les techniques de contrôle robuste pour des systèmes polytopiques [27].

4.3.2 Forme polytopique avec incertitude bornée en norme additive

Il est possible d'étendre cette approche par l'utilisation de formes de Jordan. Une autre approche est de donner directement l'enveloppe convexe des incertitudes [24] ou d'utiliser le théorème de Caley-Hamilton. Cependant, dans ces cas on obtient un polytope convexe avec un nombre très important de sommets, ce qui ajoute aux problèmes de résolution LMI une complexité de calcul assez importante. Par exemple, pour un système du n -ème ordre, le polytope convexe obtenu est un hyper-rectangle avec $2^{n \times n}$ sommets; on obtient donc $2^{2 \times n \times n}$ LMIs à résoudre (pour plus de détails sur la complexité de calcul liée à la résolution des LMI, voir les travaux de Oliveira [78]). De plus, il est possible que l'enveloppe convexe obtenue soit une approximation trop grossière de l'incertitude. Afin de donner une approximation plus précise, avec un nombre de sommets réduit, nous allons exprimer les incertitudes exponentielles sous la forme d'un polytope convexe avec une incertitude bornée en norme additive. Cette représentation est obtenue à partir d'un développement en série de Taylor des matrices incertaines. Le polytope convexe est déterminé par la troncature d'ordre h de la série de Taylor (une matrice polynomiale d'ordre h); l'incertitude bornée en norme représente le reste de la troncature.

4.3.2.1 Développement en série de Taylor

En utilisant un développement en série de Taylor d'ordre h , les incertitudes exponentielles $A(\rho_i)$ et $B(\rho_i)$ peuvent être exprimées comme des matrices polynomiales avec un terme additif qui peut être borné.

Proposition 36 *Les matrices incertaines*

$$A(\rho_i) = e^{M\rho_i}, \text{ et } B(\rho_i) = \int_0^{\rho_i} e^{Ms} ds N.$$

peuvent être exprimées sous la forme

$$A(\rho_i) = A^h(\rho_i) + \Delta A^h(\rho_i) \text{ et } B(\rho_i) = B^h(\rho_i) + \Delta B^h(\rho_i) \quad (4.16)$$

où

$$A^h(\rho_i) = \sum_{j=0}^h \frac{M^j}{j!} \rho_i^j, B^h(\rho_i) = \sum_{j=1}^h \frac{M^{j-1}}{j!} \rho_i^j N,$$

représentent les troncatures d'ordre h des séries de Taylor et

$$\Delta A^h(\rho_i) = e^{M\rho_i} - \sum_{j=0}^h \frac{M^j}{j!} \rho_i^j, \quad (4.17)$$

$$\Delta B^h(\rho_i) = \int_0^{\rho_i} e^{Ms} ds N - \sum_{j=1}^h \frac{M^{j-1}}{j!} \rho_i^j N,$$

sont les restes.

4.3.2.2 Forme polytopique

Les matrices $A^h(\rho_i)$ et $B^h(\rho_i)$ sont des matrices polynomiales avec des paramètres positifs. Nous allons montrer comment construire un polytope convexe qui englobe ces matrices polynomiales. En général, une matrice polynomiale sous la forme

$$L(\rho_i) = L_0 + \rho_i L_1 + \rho_i^2 L_2 + \dots + \rho_i^h L_h, \quad (4.18)$$

avec des paramètres ρ_i bornés, peut être englobée dans un polytope convexe avec 2^h sommets, un hyper-rectangle. Cependant, pour le cas présenté ici, les paramètres ρ_i sont positifs. Dans ce cas il est possible de trouver un polytope convexe avec seulement $h + 1$ sommets. Ce polytope se trouve à l'intérieur de l'hyper-rectangle, donc il donne une approximation plus fine de la série de Taylor.

Lemme 37 [45] *Considérons la matrice polynomiale (4.18) avec des paramètres ρ_i positifs et bornés : $0 < \underline{\rho} < \rho_i < \bar{\rho}$. Alors on peut trouver un polytope convexe avec $h + 1$ sommets qui englobe la matrice polynomiale $L(\rho_i)$, c'est-à-dire qu'il existe des paramètres $\mu_j(\rho_i)$,*

$$\sum_{j=1}^{h+1} \mu_j(\rho_i) = 1, \quad \mu_j > 0 \quad \forall j = 1, \dots, h + 1$$

tels que

$$L(\rho_i) = \sum_{j=1}^{h+1} \mu_j(\rho_i) U_j \quad (4.19)$$

où U_j représentent les sommets du polytope et ils sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} U_1 &= L_h \underline{\rho}^h + L_{h-1} \underline{\rho}^{h-1} + \dots + \underline{\rho}^2 L_2 + \underline{\rho} L_1 + L_0, \\ U_2 &= L_h \underline{\rho}^h + L_{h-1} \underline{\rho}^{h-1} + \dots + \underline{\rho}^2 L_2 + \bar{\rho} L_1 + L_0, \\ U_3 &= L_h \underline{\rho}^h + L_{h-1} \underline{\rho}^{h-1} + \dots + \bar{\rho}^2 L_2 + \bar{\rho} L_1 + L_0, \\ &\vdots \\ U_{h+1} &= L_h \bar{\rho}^h + L_{h-1} \bar{\rho}^{h-1} + \dots + \bar{\rho}^2 L_2 + \bar{\rho} L_1 + L_0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

La relation entre les paramètres ρ et μ est donnée par

$$\mu_1 = 1 - \frac{\rho - \underline{\rho}}{\bar{\rho} - \underline{\rho}}, \quad \mu_j = \frac{\rho^{j-1} - \underline{\rho}^{j-1}}{\bar{\rho}^{j-1} - \underline{\rho}^{j-1}} - \frac{\rho^j - \underline{\rho}^j}{\bar{\rho}^j - \underline{\rho}^j}, \quad j = 2..h + 1. \quad (4.21)$$

Preuve. A partir des équations (4.18), (4.19) et (4.20), on peut remarquer que démontrer le lemme 37 est la même chose que montrer qu'il existe un ensemble de paramètres $\mu_j(\rho_i)$, solutions du système linéaire :

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ \underline{\rho} & \bar{\rho} & \dots & \dots & \bar{\rho} \\ \underline{\rho}^2 & \underline{\rho}^2 & \bar{\rho}^2 & \dots & \bar{\rho}^2 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \underline{\rho}^h & \dots & \dots & \underline{\rho}^h & \bar{\rho}^h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{h+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \underline{\rho} \\ \underline{\rho}^2 \\ \vdots \\ \underline{\rho}^h \end{bmatrix}$$

L'existence d'une solution unique $[\mu_1 \dots \mu_{h+1}]$ est garantie par le fait que le déterminant du système n'est pas nul puisque les colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes (les paramètres sont choisis parmi les sommets d'un hyperrectangle, voir l'équation (4.20)). En utilisant la méthode du pivot de Gauss, les solutions sont calculées par la formule récursive :

$$\mu_1 = 1 - \frac{\rho - \underline{\rho}}{\bar{\rho} - \underline{\rho}}, \quad (4.22)$$

$$\mu_k = \frac{\rho^{k-1} - \underline{\rho}^{k-1}}{\bar{\rho}^{k-1} - \underline{\rho}^{k-1}} - \sum_{j=k+1}^{h+1} \mu_j, \quad k = 2..h. \quad (4.23)$$

Dans ce cas, on peut montrer que

$$\mu_j = \frac{\rho^{j-1} - \underline{\rho}^{j-1}}{\bar{\rho}^{j-1} - \underline{\rho}^{j-1}} - \frac{\rho^j - \underline{\rho}^j}{\bar{\rho}^j - \underline{\rho}^j}, \quad \forall j = 2..h+1 \quad (4.24)$$

et que les paramètres μ_j sont strictement positifs puisque la fonction $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, $f(x) = \frac{\rho^x - \underline{\rho}^x}{\bar{\rho}^x - \underline{\rho}^x}$ est monotone décroissante pour $x \in (0, \infty)$. Les matrices U_j déterminent un polytope convexe qui contient $L(\rho)$. \square

4.3.2.3 Formulation polytopique avec incertitude bornée en norme additive

Considérons les notations :

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \rho^h \mathbf{I} \\ \underline{\rho}^{h-1} \mathbf{I} \\ \vdots \\ \rho^2 \mathbf{I} \\ \underline{\rho} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \phi_2 = \begin{bmatrix} \rho^h \mathbf{I} \\ \underline{\rho}^{h-1} \mathbf{I} \\ \vdots \\ \rho^2 \mathbf{I} \\ \underline{\rho} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \dots, \phi_{h+1} = \begin{bmatrix} \bar{\rho}^h \mathbf{I} \\ \bar{\rho}^{h-1} \mathbf{I} \\ \vdots \\ \bar{\rho}^2 \mathbf{I} \\ \bar{\rho} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

En utilisant le lemme précédent, (équations (4.19) et (4.20)), on peut déterminer une nouvelle représentation des incertitudes exponentielles.

Proposition 38 *L'incertitude exponentielle (4.8) peut être exprimée sous la forme :*

$$\begin{aligned} A(\rho_i) &= \sum_{j=1}^{h+1} \mu_j(\rho_i) U_j^{Ah} + \Delta A^h(\rho_i) \\ B(\rho_i) &= \sum_{j=1}^{h+1} \mu_j(\rho_i) U_j^{Bh} + \Delta B^h(\rho_i) \end{aligned} \quad (4.26)$$

avec

$$\begin{aligned} U_j^{Ah} &= \begin{bmatrix} \frac{M^h}{h!} \cdots \frac{M^2}{2!} & M & \mathbf{I} \end{bmatrix} \phi_j, \\ U_j^{Bh} &= \begin{bmatrix} \frac{M^{h-1}}{h!} \cdots \frac{M}{2!} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \phi_j N, \end{aligned}$$

où ϕ_j sont donnés par (4.25). Les termes bornés en norme $\Delta A^h(\rho_i), \Delta B^h(\rho_i)$ sont explicités dans (4.17) et la relation entre les paramètres incertains ρ et les coordonnées à l'intérieur du polytope $\mu_j(\rho)$ est donnée par l'équation (4.21).

Dans la littérature qui concerne le contrôle robuste, il existe plusieurs techniques pour analyser les systèmes polytopiques. La représentation polytopique obtenue ici peut simplifier l'analyse du système à événements (4.7).

4.4 Synthèse de contrôle

Dans cette section on présente des critères de synthèse de contrôle LMI pour le modèle à événements (4.7). On traite le cas d'un retour d'état. Considérons le modèle à événements (4.7) donné dans la deuxième section :

$$\eta_{i+1} = A(\rho_i)\eta_i + B(\rho_i)u_i \quad (4.27)$$

avec

$$A(\rho_i) = e^{M\rho_i}, \quad B(\rho_i) = \int_0^{\rho_i} e^{Ms} ds N.$$

Le contrôle est un retour d'état. Lorsqu'il est affecté par des retards, le contrôle peut être exprimé sous la forme

$$u_i = K\eta_{i-\theta_i} \quad (4.28)$$

avec $\theta_i \in \mathcal{T} = \{\theta \in \mathbb{Z}^+ : \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\}$. L'objectif est de déterminer un gain K stabilisant. Dans un premier temps, nous allons construire un modèle augmenté du système afin de mieux gérer le retard variable. Dans un second temps, la modélisation polytopique des incertitudes exponentielles est incluse dans le modèle augmenté du système à événements et des critères LMI de stabilisation sont donnés.

4.4.1 Retard - paramètre de commutation

Le système (4.27) est exprimé comme un système à commutation équivalent en considérant le retard variable comme un paramètre de commutation. Considérons le vecteur d'état augmenté

$$z_i = \left[\eta_i^T \quad \eta_{i-1}^T \quad \dots \quad \eta_{i-\bar{\theta}}^T \right]^T$$

et les matrices

$$\bar{A}(\rho_i) = \begin{bmatrix} A(\rho_i) & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\rho_i) = \begin{bmatrix} B(\rho_i) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Le retour d'état (4.28) peut être exprimé en fonction du vecteur d'état augmenté z_i :

$$u_i = \bar{K}_{(\theta_i)} z_i, \quad (4.29)$$

où les gains $\bar{K}_{(\theta_i)}$ sont donnés par

$$\bar{K}_{(\theta_i)} = [\mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad K \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}]$$

avec K sur la $(\theta_i + 1)^{me}$ colonne-bloc. La position de la matrice K dans $\bar{K}_{(\theta_i)}$ est déterminée par la valeur du retard θ_i à un moment donné. Le système (4.27) avec le retour d'état (4.28) peut être écrit comme le système augmenté suivant :

$$z_{i+1} = (\bar{A}(\rho_i) + \bar{B}(\rho_i) \bar{K}_{(\theta_i)}) z_i \quad (4.30)$$

qui est un système à commutation sans retard. Le retard est introduit comme un paramètre de commutation dans la matrice des gains $\bar{K}_{(\theta_i)}$.

Rappelons, comme cela a été montré dans le chapitre précédent, que l'emploi de cette transformation est équivalent à traiter le problème de départ avec la fonction de Lyapunov-Krasvoskii la plus générale.

4.4.2 Représentation polytopique pour le modèle à événements

Considérons le système (4.27), sa version augmentée (4.30) et les notations :

$$\bar{A}_j^h = \begin{bmatrix} U_j^{Ah} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_j^h = \begin{bmatrix} U_j^{Bh} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\Delta \bar{A}^h(\rho_i) = \begin{bmatrix} \Delta A^h(\rho_i) & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{B}^h(\rho_i) = \begin{bmatrix} \Delta B^h(\rho_i) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

En appliquant les résultats donnés dans la section précédente (Proposition 38), on remarque que les solutions du système (4.30) peuvent être exprimées comme des solutions du système polytopique avec une incertitude bornée en norme additive et un contrôle commuté

$$z_{i+1} = \left(\sum_{j=1}^{h+1} \mu_j(\rho_i) \bar{A}_j + \Delta \bar{A}^h(\rho_i) \right) z_i + \left(\sum_{j=1}^{h+1} \mu_j(\rho_i) \bar{B}_j + \Delta \bar{B}^h(\rho_i) \right) \bar{K}_{(\theta_i)} z_i, \quad (4.31)$$

où

$$\sum_{j=1}^{h+1} \mu_j(\rho_i) = 1, \quad \mu_j(\rho_i) > 0 \quad \forall j = 1 \dots, h+1, \forall i \in \mathbb{Z}^+$$

avec $\Delta \bar{A}^h(\rho_i)$ et $\Delta \bar{B}^h(\rho_i)$ bornés pour $\underline{\rho} < \rho_i < \bar{\rho}$ (voir l'équation (4.17)). Les bornes de $\Delta \bar{A}^h(\rho_i)$ et $\Delta \bar{B}^h(\rho_i)$ sont notées respectivement

$$\epsilon_A^{1/2} = \sup_{\underline{\rho} < \rho < \bar{\rho}} \|\Delta \bar{A}^h(\rho)\|$$

et

$$\epsilon_B^{1/2} = \sup_{\underline{\rho} < \rho < \bar{\rho}} \|\Delta \bar{B}^h(\rho)\|.$$

4.4.3 Synthèse LMI d'un retour d'état

Nous présentons ici une méthode de synthèse LMI pour le système à commutation polytopique avec des incertitudes bornées en norme additives (4.31). Ce contrôle permet de stabiliser le modèle à événements (4.7).

Théorème 39 [51] *Considérons le système à commutation (4.31) et les matrices*

$$G_\theta = \begin{bmatrix} G_\theta^1 & G_\theta^2 & G_\theta^3 & G_\theta^4 \\ G_\theta^2 & G_\theta^3 & G_\theta^4 & G_\theta^5 \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

avec $G_\theta^1 \in \mathbb{R}^{n \cdot \theta \times n \cdot (\bar{\theta}+1)}$, $G_\theta^2 \in \mathbb{R}^{n \times n \cdot \theta}$, $G_\theta^3 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $G_\theta^4 \in \mathbb{R}^{n \times n \cdot (\bar{\theta}-\theta)}$, $G_\theta^5 \in \mathbb{R}^{n \cdot (\bar{\theta}-\theta) \times n \cdot (\bar{\theta}+1)}$, et

$$R_\theta = \begin{bmatrix} R_\theta^2 & R_\theta^3 & R_\theta^4 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

avec $R_\theta^2 \in \mathbb{R}^{m \times n \cdot \theta}$, $R_\theta^3 \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $R_\theta^4 \in \mathbb{R}^{m \times n \cdot (\bar{\theta}-\theta)}$, telles que

$$G_\theta^2 = G_\theta^3 \Omega_\theta^2, \quad G_\theta^4 = G_\theta^3 \Omega_\theta^4, \quad R_\theta^2 = R_\theta^3 \Omega_\theta^2, \quad R_\theta^4 = R_\theta^3 \Omega_\theta^4 \quad (4.34)$$

où $\Omega_\theta^2, \Omega_\theta^4$ sont des matrices arbitraires de dimensions appropriées $\forall \theta \in \mathcal{T}$. S'il existe deux scalaires $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, des matrices G_θ , R_θ et des matrices symétriques définies positives $S_{j,\theta}$, telles que

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & R_{\theta_1} & \mathbf{0} \\ * & \lambda_1 \mathbf{I} & G_{\theta_1} & \mathbf{0} \\ * & * & -S_{j_1, \theta_1} + G_{\theta_1} + G_{\theta_1}^T & G_{\theta_1}^T \bar{A}_{j_1}^{hT} + R_{\theta_1}^T \bar{B}_{j_1}^{hT} \\ * & * & * & S_{j_2, \theta_2} - \lambda_2 \epsilon_B^2 \mathbf{I} - \lambda_1 \epsilon_A^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.35)$$

pour tous $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{T}$, alors le système en boucle fermée (4.31) est stabilisé par les gains

$$\bar{K}_\theta = R_\theta G_\theta^{-1}, \quad \forall \theta \in \mathcal{T}.$$

Preuve. Considérons le système à commutation obtenu à partir des sommets du système polytopique (4.31) :

$$z_{i+1} = (\bar{A}_j^h + \Delta \bar{A}^h) z_i + (\bar{B}_j^h + \Delta \bar{B}^h) \bar{K}_{(\theta_i)} z_i$$

avec $\theta \in \mathcal{T}$. En appliquant la Proposition 44 donnée en Annexe avec $\alpha = (j)$ et $\beta = (\theta)$, on montre que le système peut être stabilisé par les gains $\bar{K}_{(\theta_i)}$ si les inégalités matricielles linéaires (4.35) ont une solution. Dans ce cas il existe une fonction de Lyapunov commutée

$$V(i) = z_i^T P_{j,\theta} z_i \quad \text{avec } P_{j,\theta} = S_{j,\theta}^{-1}$$

strictement décroissante. Ceci implique que

$$\begin{bmatrix} P_{j_1,\theta_1} & (\bar{A}_{j_1}^h + \Delta \bar{A}_{j_1}^h + (\bar{B}_{j_1}^h + \Delta \bar{B}_{j_1}^h) K_{\theta_1})^T P_{j_2,\theta_2} \\ * & P_{j_2,\theta_2} \end{bmatrix} > 0$$

$\forall j_1, j_2 = 1, \dots, h+1$. On multiplie par μ_{j_1} et on additionne pour $j_1 = 1, \dots, h+1$. En répétant la procédure pour μ_{j_2}, j_2 , l'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{h+1} \mu_j P_{j,\theta_1} - \sum_{j=1}^{h+1} \mu_j (\bar{A}_j^h + \Delta \bar{A}_j^h + (\bar{B}_j^h + \Delta \bar{B}_j^h) K_{\theta_1})^T \times \\ & \times \sum_{j=1}^{h+1} \mu_j P_{j,\theta_2} \sum_{j=1}^{h+1} \mu_j (\bar{A}_j^h + \Delta \bar{A}_j^h + (\bar{B}_j^h + \Delta \bar{B}_j^h) K_{\theta_1}) > 0, \forall \theta_1, \theta_2 \in \mathcal{T} \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$V(i) = z_i^T \sum_{j=1}^{h+1} \mu_j P_{j,\theta} z_i$$

est une fonction de Lyapunov pour le système (4.31). \square

Remarque. Le théorème précédent permet de synthétiser un retour d'état numérique sous la forme

$$u(k) = Kx(k)$$

pour le système original en temps continu (4.1). La matrice des gains K est obtenue en cherchant un retour d'état contraint pour le système polytopique augmenté (4.31). En utilisant des matrices G_θ particulières, avec des termes constants G^3 , les conditions LMI présentées donnent des gains \bar{K}_θ sous la forme $\bar{K}_\theta = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times \theta} & K & \mathbf{0}_{m \times (\bar{\theta} - \theta)} \end{bmatrix}$ pour le système augmenté. Ces gains commutent en fonction du retard et dépendent du gain constant K . Le système à événements est stabilisé par $K = R^3(G^3)^{-1}$. Les matrices arbitraires Ω_θ^2 et Ω_θ^4 dans (4.34) assurent que le système d'équations

$$\begin{cases} KG_\theta^2 = R_\theta^2 \\ KG^3 = R^3 \\ KG_\theta^4 = R_\theta^4 \end{cases}$$

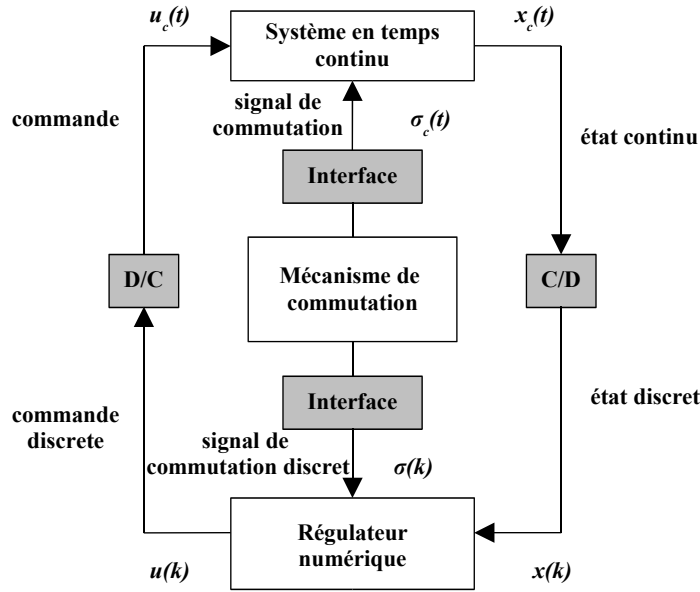


FIG. 4.1 – Schéma de commande

a une solution, K . Pour des cas simples, Ω_θ^2 et Ω_θ^4 peuvent être prises comme des matrices nulles. Prendre des matrices Ω_θ^2 et Ω_θ^4 non nulles peut être utile pour relaxer les contraintes LMI et donner plus de liberté dans le choix de la matrice G_θ . Les gains K assurent la stabilisation de la représentation à événements (4.7). En utilisant des techniques similaires à celles données dans [49], on peut analyser le comportement du système continu entre les événements.

4.5 Régulation numérique des systèmes à commutation

Dans cette section nous allons étendre les résultats obtenus au cas des systèmes à commutation :

$$\frac{dx_c(t)}{dt} = M_{\sigma_c(t)}x_c(t) + N_{\sigma_c(t)}u_c(t). \quad (4.36)$$

Ici $\{M_i \in \mathbb{R}^{n \times n} : i \in P\}$ et $\{N_i \in \mathbb{R}^{n \times m} : i \in P\}$ représentent deux familles de matrices. Chaque paire (M_i, N_i) , $i \in P = \{1, 2, \dots, N\}$ décrit un modèle en temps continu représentant un régime de fonctionnement du système. Le schéma de régulation est donné dans la Figure 4.1. On note par $\sigma_c(t)$ le signal de commutation en temps continu. Formellement, $\sigma_c(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow P$ est un signal constant par morceaux qui donne un indice particulier i indiquant le régime actif. Aucune hypothèse n'est émise sur la nature du mécanisme de commutation. Il peut représenter un procédé complètement aléatoire, incontrôlable, ou un automate digital

complexe, très difficile à modéliser. En fonction de la nature numérique/continue du signal de commutation, des interfaces sont utilisées entre le mécanisme de commutation et les autres éléments. Dans certain cas, il s'agit simplement des convertisseurs numérique/analogique ou analogique/numérique. Ici on suppose que la fonction de commutation est arbitraire et qu'elle peut être mesurée.

On considère que les valeurs des signaux continus $x_c(t)$ et $\sigma_c(t)$ sont disponibles par échantillonnage et qu'elles peuvent être utilisées pour le calcul du contrôle. En supposant qu'un nombre infini de commutations ne peut pas intervenir dans un intervalle de temps fini et en considérant que la commutation est aussi un évènement, il est possible de généraliser le *modèle à évènements* (4.7) pour le cas des systèmes à commutation. On obtient :

$$\eta_{i+1} = A_{s_i}(\rho_i)\eta_i + B_{s_i}(\rho_i)u_i \quad (4.37)$$

où

$$A_{s_i}(\rho_i) = e^{M_{s_i}\rho_i}, \quad B_{s_i}(\rho_i) = \int_0^{\rho_i} e^{M_{s_i}s} ds N_{s_i} \quad (4.38)$$

$$\eta_i = x_c(t_i), \quad (4.39)$$

$$s_i = \sigma_c(t_i), \quad (4.40)$$

$$u_i = x_c(t_i) \quad (4.41)$$

$$0 = \underline{\rho} < \rho_i \leq \bar{\rho}. \quad (4.42)$$

Pour ce modèle on peut appliquer l'approche de modélisation polytopique. Ici, la méthodologie est appliquée pour un retour d'état commuté sous la forme :

$$u_c(t_i) = K_{\sigma_c(t_j)}x_c(t_j).$$

i représente un évènement arbitraire (intervenu à l'instant t_i), et t_j avec $t_i \geq t_j$ correspond à un instant d'échantillonnage passé. Soit $\theta_i = j - i$ le nombre d'évènements qui sont intervenus entre l'échantillonnage (à l'instant t_j) et l'actualisation de la commande $K_{\sigma_c(t_j)}x_c(t_j)$ (à l'instant t_i). De façon similaire au cas des systèmes continus invariants dans le temps, le paramètre θ peut être borné, $\theta_i \in \mathcal{T} = \{\theta \in \mathbb{Z}^+ : \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\}$. Pour le système (4.37) le retour d'état commuté est donné par

$$u_i = K_{\gamma_i}\eta_{i-\theta_i}, \quad (4.43)$$

où $\gamma : \mathbb{Z}^+ \rightarrow P$ est une fonction qui représente le signal de commutation utilisé dans la commande lors du i -ème évènement, $\gamma_i = s_{i-\theta_i}$.

Considérons le vecteur d'état augmenté

$$z_i = \left[\eta_i^T \quad \eta_{i-1}^T \quad \dots \quad \eta_{i-\bar{\theta}}^T \right]^T$$

et les matrices

$$\bar{A}_{\varsigma_i, j}^h = \begin{bmatrix} U_{\varsigma_i, j}^{Ah} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\varsigma_i, j}^h = \begin{bmatrix} U_{\varsigma_i, j}^{Bh} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.44)$$

$$\Delta \bar{A}_{\varsigma_i}^h(\rho_i) = \begin{bmatrix} \Delta A_{\varsigma_i}^h(\rho_i) & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \Delta \bar{B}_{\varsigma_i}^h(\rho_i) = \begin{bmatrix} \Delta B_{\varsigma_i}^h(\rho_i) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

$$\bar{K}_{(\gamma_i, \theta_i)} = [\mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0} \quad K_{\gamma_i} \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]$$

avec K_{γ_i} sur la $(\theta_i + 1)$ ème colonne-bloc.

Les termes

$$U_{\varsigma, j}^{Ah} = \left[\frac{M_{\varsigma}^h}{h!} \cdots \frac{M_{\varsigma}^2}{2!} \quad M_{\varsigma} \quad \mathbf{I} \right] \phi_j,$$

$$U_{\varsigma, j}^{Bh} = \left[\frac{M_{\varsigma}^{h-1}}{h!} \cdots \frac{M_{\varsigma}}{2!} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{0} \right] \phi_j N_{\varsigma},$$

(où ϕ_j sont donnés par (4.25)) et les matrices incertaines $\Delta A^h(\rho_i), \Delta B^h(\rho_i)$,

$$\Delta A_{\varsigma}^h(\rho_i) = e^{M_{\varsigma} \rho_i} - \sum_{j=0}^h \frac{M_{\varsigma}^j}{j!} \rho^j \quad \text{et} \quad (4.46)$$

$$\Delta B_{\varsigma}^h(\rho_i) = \int_0^{\rho_i} e^{M_{\varsigma} s} ds N_{\varsigma} - \sum_{j=1}^h \frac{M_{\varsigma}^{j-1}}{j!} \rho^j N_{\varsigma},$$

sont obtenus en appliquant la Proposition 38 au cas des incertitudes (4.38).

La *représentation polytopique* du système à évènements (4.37) est donnée par

$$z_{i+1} = \left(\sum_{j=1}^{h+1} \mu_j(\rho_i) \bar{A}_{\varsigma_i, j} + \Delta \bar{A}_{\varsigma_i}^h(\rho_i) \right) z_i + \left(\sum_{j=1}^{h+1} \mu_j(\rho_i) \bar{B}_{\varsigma_i, j} + \Delta \bar{B}_{\varsigma_i}^h(\rho_i) \right) \bar{K}_{(\gamma_i, \theta_i)} z_i, \quad (4.47)$$

avec

$$\epsilon_A^{1/2} = \sup_{\rho < \rho < \bar{\rho}} \|\Delta \bar{A}_{\varsigma_i}^h(\rho)\| \quad \text{and} \quad \epsilon_B^{1/2} = \sup_{\rho < \rho < \bar{\rho}} \|\Delta \bar{B}_{\varsigma_i}^h(\rho)\|.$$

Pour ce système, la synthèse de contrôle LMI est exprimée comme suit :

Théorème 40 [51] *Considérons le système à commutation polytopique en boucle fermée (4.47) et les matrices*

$$G_{\gamma, \theta} = \begin{bmatrix} G_{\gamma, \theta}^2 & G_{\gamma, \theta}^1 & G_{\gamma, \theta}^4 \\ & G_{\gamma, \theta}^3 & \\ & G_{\gamma, \theta}^5 & \end{bmatrix}, \quad (4.48)$$

$$G_{\gamma,\theta}^1 \in \mathbb{R}^{n \cdot \theta \times n \cdot (\bar{\theta}+1)}, G_{\gamma}^3 \in \mathbb{R}^{n \times n}, G_{\gamma,\theta}^2 \in \mathbb{R}^{n \times n \cdot \theta},$$

$$R_{\gamma,\theta} = [R_{\gamma,\theta}^2 \quad R_{\gamma}^3 \quad R_{\gamma,\theta}^4], \quad (4.49)$$

$$R_{\gamma}^2 \in \mathbb{R}^{m \times n \cdot \theta}, R_{\gamma}^3 \in \mathbb{R}^{m \times n}, R_{\gamma}^4 \in \mathbb{R}^{m \times n \cdot (\bar{\theta}-\theta)}, \text{ tel que}$$

$$G_{\gamma,\theta}^2 = G_{\gamma}^3 \Omega_{\gamma,\theta}^2, G_{\gamma,\theta}^4 = G_{\gamma}^3 \Omega_{\gamma,\theta}^4, R_{\gamma}^2 = R_{\gamma}^3 \Omega_{\gamma,\theta}^2, R_{\gamma}^4 = R_{\gamma}^3 \Omega_{\gamma,\theta}^4 \quad (4.50)$$

où $\Omega_{\gamma,\theta}^2, \Omega_{\gamma,\theta}^4$ sont des matrices arbitraires de dimensions appropriées avec $\varsigma \in P$, $j = 1, \dots, h+1$, $\gamma \in P$ et $\theta \in \mathcal{T}$. S'il existe des scalaires $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, des matrices $G_{\gamma,\theta}$, $R_{\gamma,\theta}$ et des matrices $S_{\varsigma,j,\gamma,\theta}$ symétriques définies positives tel que

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & R_{\gamma_1, \theta_1} & \mathbf{0} \\ * & \lambda_1 \mathbf{I} & G_{\gamma_1, \theta_1} & \mathbf{0} \\ * & * & -S_{\varsigma_1, j_1, \gamma_1, \theta_1} + G_{\gamma_1, \theta_1} + G_{\gamma_1, \theta_1}^T & G_{\gamma_1, \theta_1}^T \bar{A}_{\varsigma_1, j_1}^{hT} + R_{\gamma_1, \theta_1}^T \bar{B}_{\varsigma_1, j_1}^{hT} \\ * & * & * & S_{\varsigma_2, j_2, \gamma_2, \theta_2} - \lambda_2 \epsilon_B^2 \mathbf{I} - \lambda_1 \epsilon_A^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.51)$$

pour tous $\varsigma_1, \varsigma_2 \in P$, $j_1, j_2 = 1, \dots, h+1$, $\gamma_1, \gamma_2 \in P$ et $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{T}$, alors le système en boucle fermée (4.47) est stabilisé par les gains

$$\bar{K}_{\gamma,\theta} = R_{\gamma,\theta} G_{\gamma,\theta}^{-1}, \quad \forall (\gamma, \theta) \in P \times \mathcal{T}.$$

Preuve. Considérons le système à commutation obtenu en utilisant les sommets du système polytopique (4.47). Les LMIs (4.51) sont obtenues en appliquant la Proposition 44 avec $\alpha = (\varsigma, j)$ et $\beta = (\gamma, \theta)$ et en utilisant des arguments similaires à ceux donnés dans la démonstration du Théorème 39. \square

4.6 Exemples d'application

Dans cette section on présente une application de l'approche de modélisation proposée, et quelques exemples numériques.

Modélisation à événements pour la commande des systèmes à commutation via des réseaux

Nous allons illustrer la construction du modèle à événements et de la représentation polytopique pour un cas simple de système à commutation. On considère un système à commutation sous la forme (4.1) commandé à travers un réseau (voir la Figure 4.2). Le signal de commutation est une commande donnée par un superviseur (il ne sera pas modélisé ici). On suppose que les valeurs du signal sont arbitraires, et qu'elles sont disponibles en temps réel. L'état discret du système, $x(k)$, est transmis à un ordinateur qui produit la version digitale du contrôle $u(k)$ et la synchronise avec le signal de commutation $\sigma(k)$. On suppose que $u(k)$ et $\sigma(k)$ peuvent être transmis simultanément sur le réseau, dans un seul paquet de données. L'actionneur génère les signaux continus $u_c(t)$ et $\sigma_c(t)$ dès que $u(k)$ et

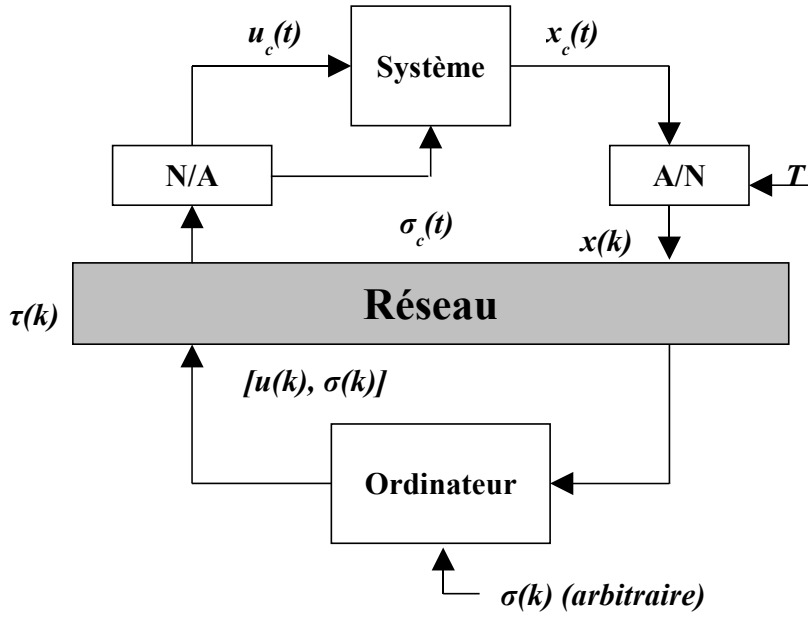


FIG. 4.2 – Architecture du système

$\sigma(k)$ sont disponibles. Puisque le signal de commutation et la commande sont synchronisés, on évite l'apparition de dynamiques mixtes.

Le transfert d'informations à travers le réseau implique l'apparition de retards variables. On considère ici le cas d'un retard total $\tau(k)$ plus petit que la période d'échantillonnage T :

$$\tau_{min} < \tau(k) < \tau_{max} < T$$

Un exemple d'évolution du système est donné dans la Figure 4.3. Les signaux continus affectés par des retards sont donnés par :

$$\sigma_c(t) = \begin{cases} \sigma(k-1), & t \in [kT, kT + \tau(k)) \\ \sigma(k), & t \in [kT + \tau(k), (k+1)T) \end{cases} \quad (4.52)$$

et

$$u_c(t) = \begin{cases} u(k-1), & t \in [kT, kT + \tau(k)) \\ u(k), & t \in [kT + \tau(k), (k+1)T). \end{cases} \quad (4.53)$$

Ici nous allons montrer comment construire un modèle à évènements sous la forme (4.37) pour le système à commutation présenté. L'évolution du système est dirigée par deux évènements : l'échantillonnage ($t_i = kT$) et l'actualisation/commutation (à $t_i = kT + \tau(k)$). Le vecteur d'état du système discret est

$$\eta_i = \begin{cases} x_c(kT), & \text{lors de l'échantillonnage,} \\ x_c(kT + \tau(k)), & \text{lors de l'actualisation/commutation,} \end{cases}$$

mais la valeur de η_i est connue seulement pour $t_i = kT$. Le paramètre incertain ρ_i prend successivement les valeurs $\tau(k)$ et $T - \tau(k)$ et ses bornes sont $\underline{\rho} =$

$\min(\tau_{min}, T - \tau_{max})$ et $\bar{\rho} = \max(\tau_{max}, T - \tau_{min})$. v_i est la commande qui dépend de η_i . Puisque η_i est connu seulement pour $t_i = kT$, il est évident que la commande ne peut pas dépendre de la valeur de l'état continu à l'instant de l'actualisation. L'évolution du système est décrite par :

$$\eta_{i+1} = A_{s_i}(\rho_i)\eta_i + B_{s_i}(\rho_i)u_i.$$

Considérons que la commande est un retour d'état commuté :

$$u(k) = K_{\sigma(k)}x(k).$$

Dans l'espace des évènements,

$$u_i = \begin{cases} K_{\gamma_i}\eta_{i-1}, & \text{si } i \text{ correspond à une actualisation} \\ K_{\gamma_i}\eta_{i-2}, & \text{si } i \text{ correspond à un instant d'échantillonnage.} \end{cases}$$

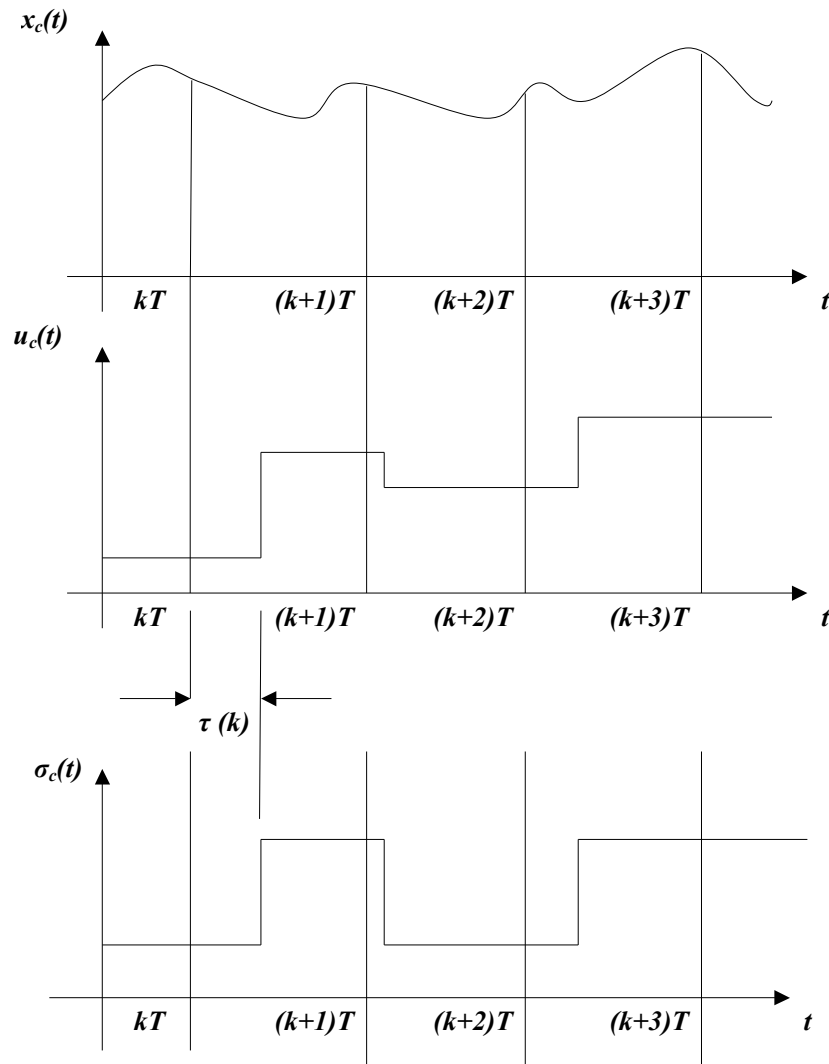


FIG. 4.3 – Les signaux de contrôle et de commutation

On obtient un système sous la forme (4.37) avec $\theta_i \in \{1, 2\}$. Puisque la valeur future du signal est disponible à l'instant du calcul du contrôle, on peut l'utiliser pour le contrôle, c'est-à-dire $\gamma_i = \varsigma_i$. Par ailleurs, la valeur du signal de commutation change seulement à $t_i = kT + \tau(k)$, ce qui signifie que $\varsigma_i = \varsigma_{i-1}$ si $\theta_i = 2$. Donc, pour le cas d'un retour d'état commuté, la commande est donnée par

$$u_i = K_{\varsigma_i} \eta_{i-\theta_i}$$

et le système en boucle fermée est

$$\eta_{i+1} = A_{\varsigma_i}(\rho_i) \eta_i + B_{\varsigma_i} K_{\varsigma_i} \eta_{i-\theta_i}.$$

On utilise le vecteur d'état augmenté $z_i = [\eta_i^T \ \eta_{i-1}^T \ \eta_{i-2}^T]^T$ pour lequel on obtient le système

$$z_{i+1} = \bar{A}_{\varsigma_i}(\rho_i) z_i + \bar{B}_{\varsigma_i}(\rho_i) \bar{K}_{(\varsigma_i, \theta_i)} z_i$$

avec

$$\bar{A}_{\varsigma_i}(\rho_i) = \begin{bmatrix} A_{\varsigma_i}(\rho_i) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\varsigma_i}(\rho_i) = \begin{bmatrix} B_{\varsigma_i}(\rho_i) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Le retard est introduit comme un paramètre de commutation dans les gains $\bar{K}_{(\varsigma_i, \theta_i)}$:

$$\bar{K}_{(\varsigma_i, 1)} = [\mathbf{0} \ K_{\varsigma_i} \ \mathbf{0}], \quad \bar{K}_{(\varsigma_i, 2)} = [\mathbf{0} \ \mathbf{0} \ K_{\varsigma_i}].$$

Pour ce système, on applique la modélisation polytopique afin de déterminer un retour d'état. En considérant une approximation de premier ordre, les incertitudes exponentielles $A_{\varsigma_i}(\rho_i)$ et $B_{\varsigma_i}(\rho_i)$ peuvent être exprimées sous la forme

$$A_{\varsigma_i}(\rho) = \mathbf{I} + M_{\varsigma_i} \cdot \rho + \Delta A_{\varsigma_i}, \quad B_{\varsigma_i}(\rho) = N_{\varsigma_i} \cdot \rho + \Delta B_{\varsigma_i}.$$

On obtient un système polytopique incertain commuté avec deux sommets par polytope :

$$\bar{A}_{\varsigma_i, 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + M_{\varsigma_i} \cdot \underline{\rho} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\varsigma_i, 1} = \begin{bmatrix} N_{\varsigma_i} \cdot \underline{\rho} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_{\varsigma_i, 2} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} + M_{\varsigma_i} \cdot \bar{\rho} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{\varsigma_i, 2} = \begin{bmatrix} N_{\varsigma_i} \cdot \bar{\rho} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Les incertitudes additives bornées en norme $\Delta \bar{A}_{\varsigma_i}$ et $\Delta \bar{B}_{\varsigma_i}$ peuvent être données à partir de (4.45). Pour ce modèle, on applique le Théorème 40 avec $\gamma_i = \sigma_i$ afin d'obtenir un retour d'état stabilisant.

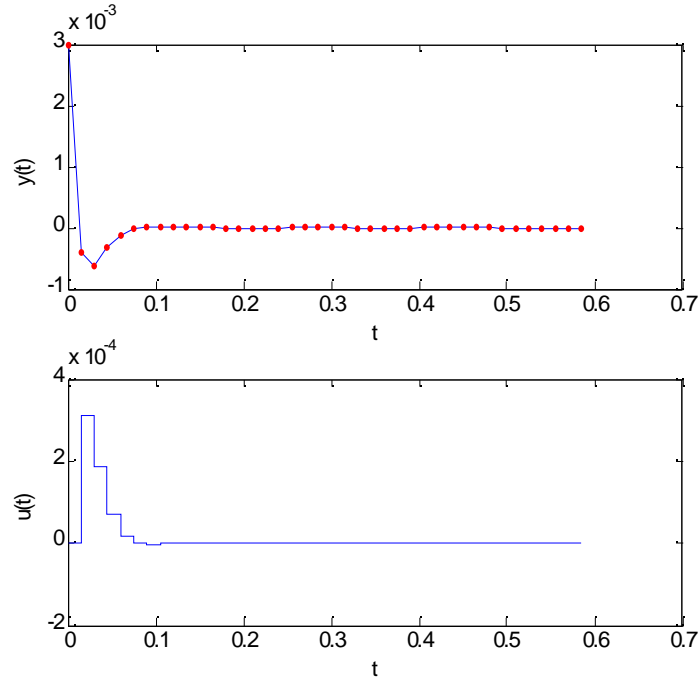


FIG. 4.4 – Les signaux de sortie et de contrôle dans le cas idéal.

Systèmes linéaires avec jitter et retards

Considérons le modèle linéaire invariant dans le temps d'un système de positionnement

$$G_p(s) = \frac{1000}{s(0.25s + 1)}. \quad (4.54)$$

En fonctionnement idéal, le système est échantillonné avec une période constante $T = 0.015s$ et il n'y a pas de retard dans l'application de la commande. Dans ce cas le gain de retour d'état

$$K = [-4.6 \quad -9.5]$$

stabilise le système (voir la figure 4.4).

On suppose que la période d'échantillonnage $T = 0.015s$ est affectée par un jitter $\delta T \in [0, 0.005s]$ et qu'un retard τ est introduit dans le système de régulation. Ce retard varie entre $\tau_{min} = 0.001s$ et $\tau_{max} = 0.018s$. En raison de ces retards variables, plusieurs actualisations peuvent apparaître dans une période d'échantillonnage. Dans ce cas le système en boucle fermée devient instable. Une illustration de l'instabilité est donnée dans les figures 4.5.

On construit le modèle à évènements du système en boucle fermée afin de déterminer une nouvelle loi de commande. On obtient un modèle sous la forme (4.7) avec un paramètre incertain $\rho \in (0, 0.02s]$ et un retard discret θ qui prend

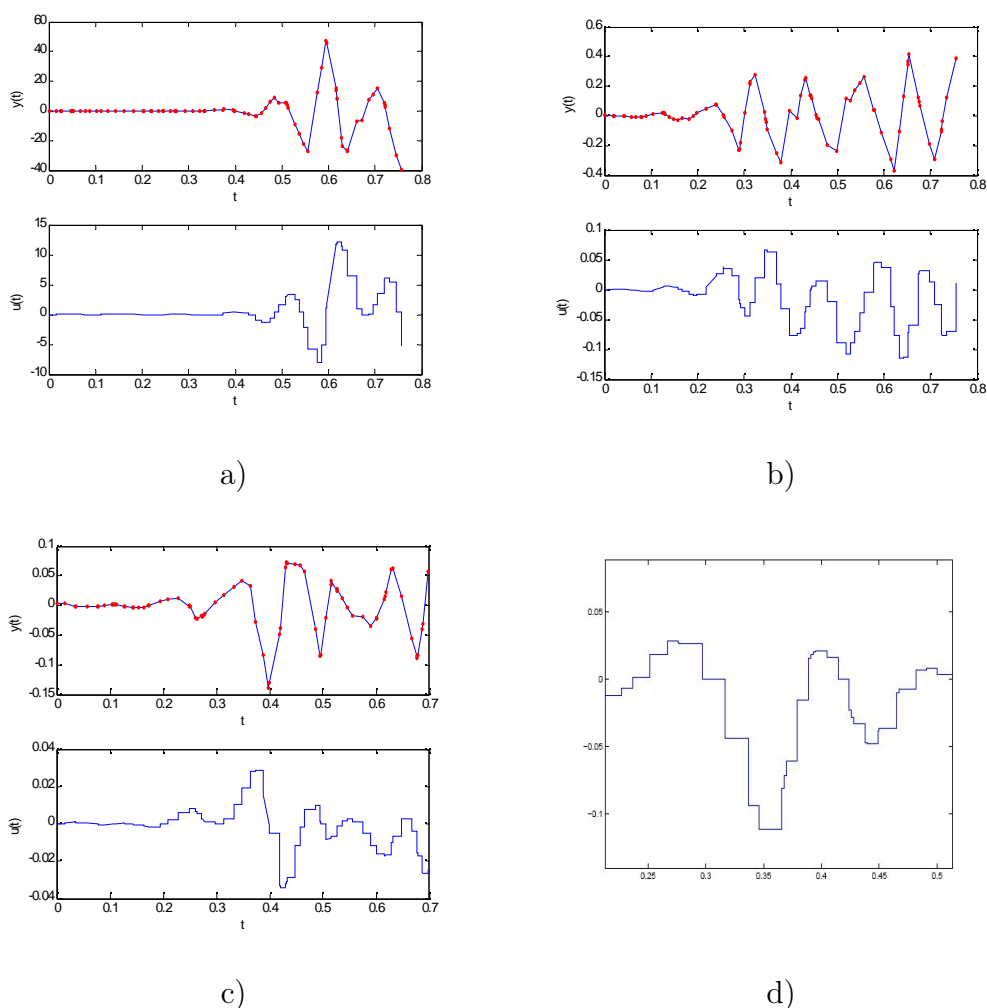


FIG. 4.5 – Réponse du système en situation réelle (avec jitter d'échantillonnage et retard). Les figures a), b) et c) représentent les signaux de sortie et de contrôle pour des séquences aléatoires du retard et de la période d'échantillonnage. Un agrandissement illustrant les variations de la commande est donné dans la figure d).

des valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ (voir la figure 4.6). Comme on peut le constater, la réduction des termes non-linéaires implique une augmentation de la plage de valeurs du retard dans le modèle à événements. On considère un développement en série de Taylor des termes incertains. Pour cet exemple, en utilisant une approximation de premier ordre ($h = 1$) la norme du reste est plus petite que 1.3×10^{-4} . On obtient dans ce cas un modèle polytopique avec deux sommets. En utilisant une augmentation de l'état du système pour introduire le retard comme un paramètre de commutation, on détermine un système du 10ème ordre qui commute parmi 4 polytopes, chacun avec 2 sommets. On suppose que le retard est complètement inconnu et on cherche un retour d'état. En utilisant

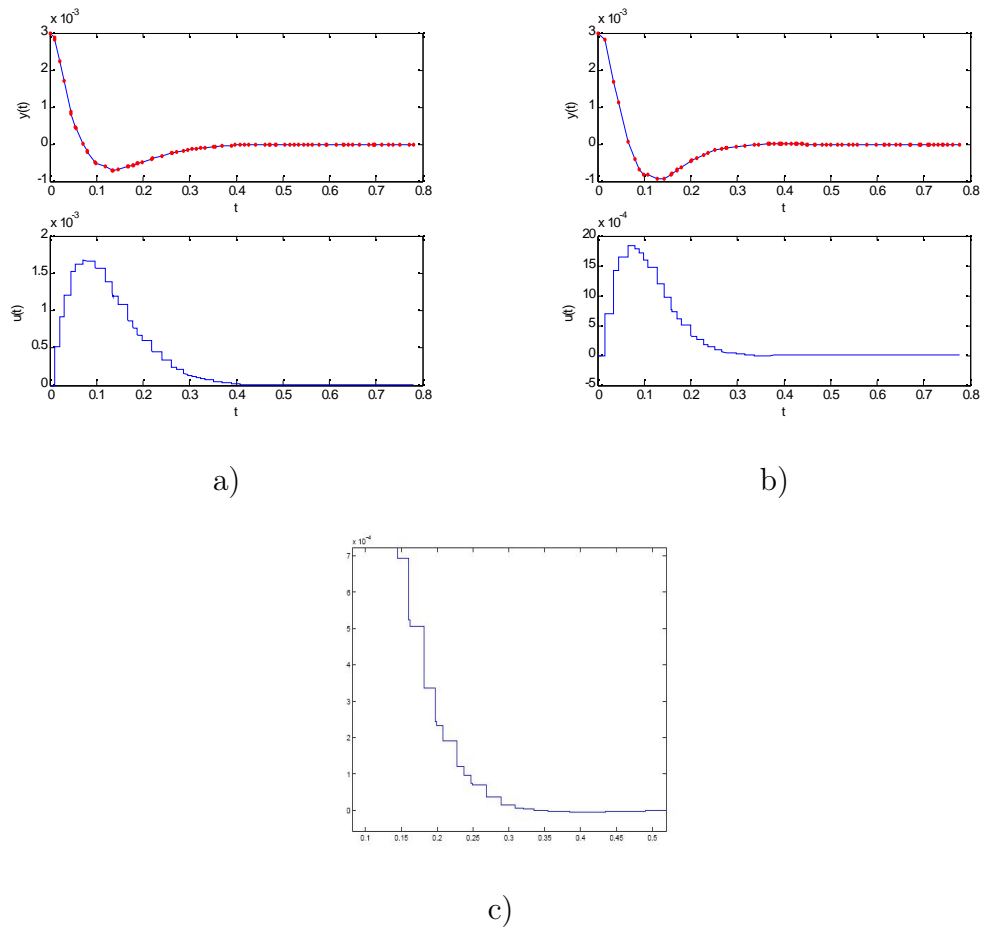


FIG. 4.6 – Réponse du système commandé par le retour d'état robuste en situation réelle. Dans les figures a) et b) on illustre les signaux de sortie et de contrôle pour des séquences aléatoires du retard et de la période d'échantillonnage. Sur le signal de sortie, les différents évènements sont marqués par des points rouges. La figure c) représente un agrandissement du diagramme temporel de la commande pour le cas b).

le Théorème 39, on obtient le gain

$$K = [-0.9942 \quad -0.5431]$$

qui stabilise le système en présence du jitter d'échantillonnage et des retards variables.

Contrôle des systèmes à commutation sur des domaines de temps non-uniformes

Ici on considère la commande d'un système dans le cas d'une période d'échantillonnage variable. Le système est caractérisé par un comportement nominal (décrit par l'équation (4.54)) et un comportement avec une commande réduite :

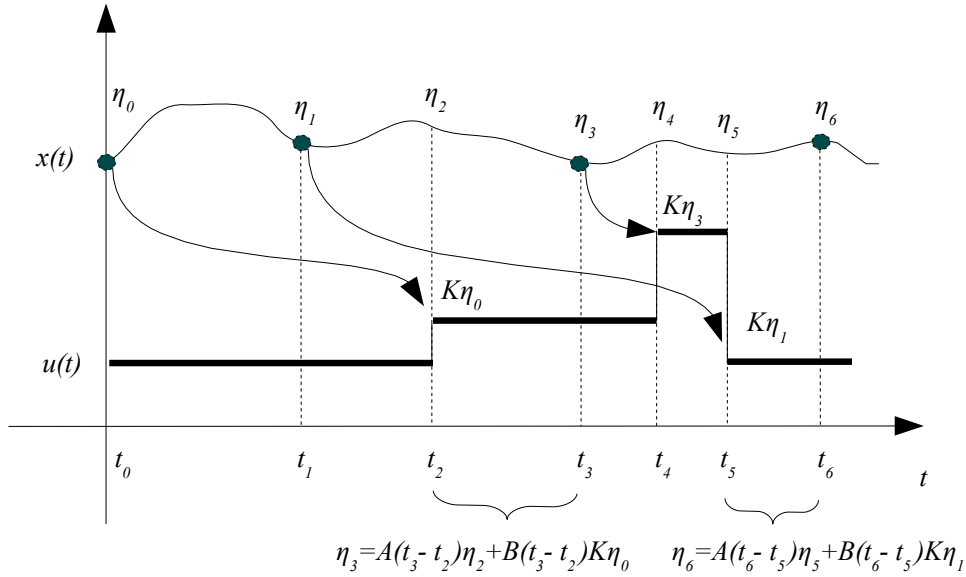


FIG. 4.7 – Systèmes linéaires avec jitter et retards. Les valeurs du vecteur d'état disponibles par échantillonnage sont marquées par des points noirs. t_i spécifie l'instance d'occurrence du i ème évènement et η_i représente la valeur de $x(t)$ pour $t = t_i$.

l'entrée du système est multipliée par un facteur de 50/100. On suppose que la période d'échantillonnage T varie entre $T_{min} = 0.007s$ et $T_{max} = 0.018s$. La commutation entre ces deux modes de fonctionnement est donnée par un superviseur et elle est synchronisée avec l'instant d'échantillonnage. L'objectif est de déterminer un retour d'état commuté qui stabilise le système. En utilisant une modélisation à évènements avec $\rho \in [0, 0.018s]$, $\theta \in \{1, 2\}$ et une approximation de premier ordre de l'incertitude exponentielle, on obtient les gains suivants :

$$K_1 = [-1.1582 \quad -0.0344],$$

$$K_2 = [-2.3165 \quad -0.0689],$$

où K_1 assure la stabilité du régime nominal et K_2 compense la réduction de la commande. Un exemple d'évolution du système à partir d'une condition initiale arbitraire est donné dans la Figure 4.8.

4.7 Conclusion

L'objectif du chapitre a été de donner une méthodologie unique pour traiter les problèmes de temporisation dans le contexte de la régulation numérique des systèmes linéaires invariants dans le temps. On montre qu'en utilisant un modèle polytopique/commuté du système de régulation, la synthèse de contrôle peut être

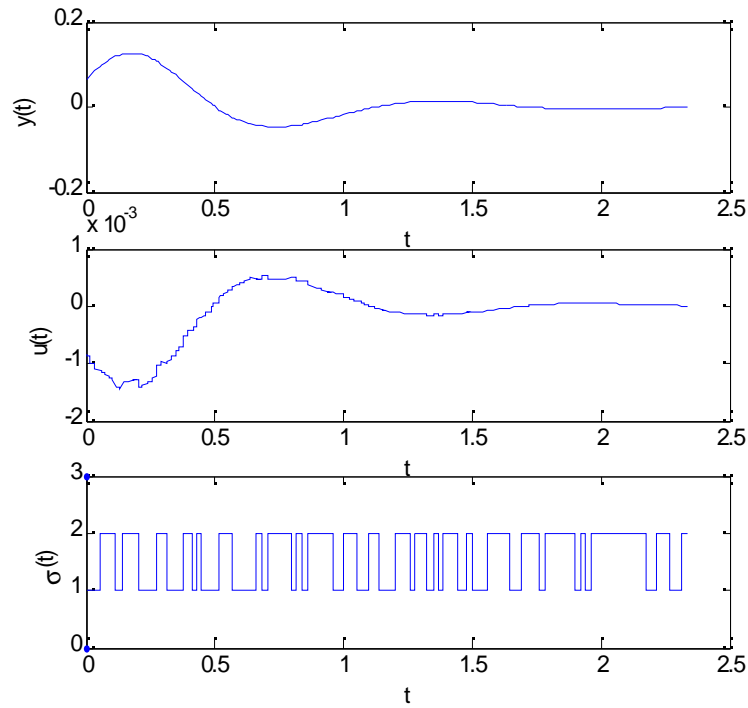


FIG. 4.8 – Les signaux de contrôle et de commutation

effectuée à l'aide de critères LMI. Le modèle obtenu est capable de gérer simultanément le jitter, les périodes d'échantillonnage variables et les retards inconnus, même lorsque la variation du retard est supérieure à la période d'échantillonnage. La méthodologie a été étendue au cas des systèmes à commutations.

Conclusion Générale

Les travaux de cette thèse sont consacrés à l'analyse de stabilité et à la synthèse de commandes robustes pour les systèmes linéaires à commutation. La recherche porte principalement sur les systèmes à commutation en temps discret avec des incertitudes polytopiques et des incertitudes sur la loi de commutation. La modélisation des systèmes via des polytopes convexes est parfaitement naturelle, elle reflète la réalité industrielle où les paramètres physiques sont spécifiés par des intervalles d'incertitude. Le cadre de travail choisi pour résoudre les problèmes de stabilité et de stabilisation est celui de la théorie de stabilité de Lyapunov et il repose sur l'utilisation d'outils numériques de type LMI. Dans ce contexte, nous avons montré comment tenir compte des paramètres incertains pour synthétiser des lois de contrôle efficaces : l'utilisation des fonctions de Lyapunov commutées dépendant de paramètres permet de déterminer des critères de stabilité et de stabilisation robuste en limitant le conservatisme de ce type d'approche.

Nous avons montré que l'interaction entre les régulateurs numériques et les systèmes continus conduit à des systèmes incertains avec des incertitudes polytopiques. On a considéré des systèmes en temps discret issus des systèmes LTI continus commandés numériquement. Dans ce cas, des incertitudes paramétriques sont induites sur le modèle en temps discret. Ces incertitudes proviennent des imprécisions sur les instants d'échantillonnage des signaux et les instants d'application des commandes. L'objectif a été de donner une méthodologie unique pour la stabilisation numérique des systèmes LTI continus en présence de ces imprécisions.

Nous avons montré comment une modélisation à base d'évènements permet de ramener le problème original à un problème spécifique aux systèmes à commutation avec des incertitudes polytopiques. Cette transformation du problème repose, en partie, sur les résultats du chapitre 3 où on a montré que le fait de considérer un retard discret comme un paramètre de commutation est équivalent à traiter le problème de stabilité original avec la fonction de Lyapunov-Krasvoskii la plus générale. La méthodologie proposée pour le cas des systèmes à commutation incertains a été ensuite appliquée pour la stabilisation des systèmes LTI en temps continu en présence d'imprécisions de la commande et de l'échantillonnage. Enfin, on a présenté l'extension de ces résultats aux systèmes à commutation continus

commandés par des correcteurs numériques. La modélisation choisie peut sembler lourde ; cela peut être vrai dans le pire des cas : systèmes à commutation avec retards supérieurs à la période d'échantillonnage, loi de commutation arbitraire et dynamiques mixtes. Cependant, en pratique, tous les problèmes ne se cumulent pas et, en général, on possède des informations supplémentaires sur la loi de commutation. Ceci simplifie la modélisation, et par voie de conséquence, diminue la complexité des LMI à résoudre.

Au niveau perspective, un premier point à développer est la prise en compte des informations sur le retard pour la synthèse des lois de commande. En effet, il est possible dans certaines applications pratiques, comme la commande des systèmes via les réseaux, d'estimer la largeur du retard en fonction de divers paramètres du réseau. Il sera intéressant, dans ce cas, de définir des plages de variation de ces retards et d'envisager de déterminer des gains adaptatifs qui commutent en fonction de la valeur instantanée du retard.

Un deuxième point qui pourrait être considéré est l'étude des relations entre la fréquence d'échantillonnage et l'approximation polytopique des incertitudes exponentielles, $e^{M\tau}$. Dans ce contexte, le théorème de Shannon peut amener des informations supplémentaires sur le domaine de variation du paramètre inconnu τ dans les cas d'applications pratiques. Ces informations pourraient être utilisées afin de mieux sélectionner l'ordre du développement en série de Taylor de l'incertitude, pour réduire le nombre des sommets du polytope convexe et, en conséquence, la complexité calculatoire.

Dans cette thèse, nous avons abordé le problème de stabilisation par retour d'état. Pour des raisons pratiques, il faudrait étendre les résultats proposés au cas des lois de commande du type retour de sortie, retour d'état dynamique, etc. Enfin, la prise en compte de contraintes de performance doit également être considérée.

Annexe

Lemme 41 (Complément de Schur) [18] *Considérons la matrice*

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

avec D , une matrice non-singulière (invertible). La matrice

$$S := A - BD^{-1}C$$

est appelée le complément de Schur de D dans M . Si M est une matrice symétrique alors $M > 0$ est équivalent à

$$D > 0 \text{ et } S = A - BD^{-1}C > 0.$$

Lemme 42 (réel borné en norme) [18] *Étant donné un scalaire constant $\lambda > 0$ et des matrices M , N et Y de dimension appropriée, la relation suivante est vérifiée :*

$$MYN + N^T Y^T M^T \leq \lambda M M^T + \lambda^{-1} N^T N$$

où $Y^T Y \leq I$.

Lemme 43 (adaptation d'après [18] pour le cas temps discret) *Considérons un système LTI en temps discret*

$$x(k+1) = Ax(k),$$

le scalaire $\lambda > 0$ et la matrice symétrique définie positive P solution de l'inégalité matricielle suivante :

$$A^T P A - \lambda P < 0. \tag{1}$$

Alors la norme de vecteur d'état du système satisfait la relation

$$\|x(k)\|^2 < c \cdot \lambda^{k-k_0} \|x(k_0)\|^2, \quad \forall k > k_0$$

avec

$$c = \frac{eig_{max}(P)}{eig_{min}(P)}.$$

Proposition 44 *Considérons un système à commutation incertain commandé par un retour d'état :*

$$x(k+1) = (A_{\alpha(k)} + \Delta A_{\alpha(k)})x(k) + (B_{\alpha(k)} + \Delta B_{\alpha(k)})K_{\beta(k)}x(k) \quad (2)$$

où $\alpha(k) \in \mathcal{I}_\alpha$, $\beta(k) \in \mathcal{I}_\beta$ représentent des fonctions de commutation distinctes respectivement pour la matrice du système et pour les gains du retour d'état. Les incertitudes sont caractérisées par $\Delta A_{\alpha(k)}^T \Delta A_{\alpha(k)} < \epsilon_\alpha \mathbf{I}$, $\Delta B_{\beta(k)}^T \Delta B_{\beta(k)} < \epsilon_\beta \mathbf{I}$, $\forall \alpha(k) \in \mathcal{I}_\alpha$, $\beta(k) \in \mathcal{I}_\beta$. S'il existe des matrices symétriques définies positives $S_{\alpha,\beta}$, des matrices G_β , R_β et des scalaires $\lambda_\alpha > 0$ et $\lambda_\beta > 0$, avec $\alpha \in \mathcal{I}_\alpha$, $\beta \in \mathcal{I}_\beta$ qui vérifient l'inégalité matricielle linéaire

$$\begin{bmatrix} \lambda_\beta \mathbf{I} & \mathbf{0} & R_{\beta_1} & \mathbf{0} \\ * & \lambda_\alpha \mathbf{I} & G_{\beta_1} & \mathbf{0} \\ * & * & -S_{\alpha_1, \beta_1} + G_{\beta_1} + G_{\beta_1}^T & G_{\beta_1}^T A_{\alpha_1}^T + R_{\beta_1}^T B_{\alpha_1}^T \\ * & * & * & S_{\alpha_2, \beta_2} - \lambda_\beta \epsilon_\beta^2 \mathbf{I} - \lambda_\alpha \epsilon_\alpha^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} > 0 \quad (3)$$

$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}_\alpha$, $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{I}_\beta$ alors le système en boucle fermée (2) est asymptotiquement stable, et les gains stabilisants sont donnés par

$$K_\beta = R_\beta G_\beta^{-1}, \quad \forall \beta \in \mathcal{I}_\beta.$$

Lorsque les conditions LMI (3) sont vérifiées, il existe une fonction de Lyapunov commutée

$$V(x) = x^T(k) P_{\alpha,\beta} x(k)$$

avec $P_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta}^{-1}$ strictement décroissante pour toutes les trajectoires du système en boucle fermée.

Preuve. En utilisant des arguments similaires à ceux donnés pour le Théorème 1 de [27], on peut montrer que lorsque la condition (3) est satisfaite, la relation suivante est vérifiée

$$\begin{bmatrix} \lambda_\beta \mathbf{I} & \mathbf{0} & K_{\beta_1} & \mathbf{0} \\ * & \lambda_\alpha \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & * & P_{\alpha_1, \beta_1} & (A_{\alpha_1} + B_{\alpha_1} K_{\beta_1})^T P_{\alpha_2, \beta_2} \\ * & * & * & P_{\alpha_2, \beta_2} - P_{\alpha_2, \beta_2} (\lambda_\beta \epsilon_\beta^2 \mathbf{I} - \lambda_\alpha \epsilon_\alpha^2 \mathbf{I}) P_{\alpha_2, \beta_2} \end{bmatrix} > 0$$

où $P_{\alpha,\beta} = S_{\alpha,\beta}^{-1}$, $\forall \alpha \in \mathcal{I}_\alpha$, $\beta \in \mathcal{I}_\beta$. En utilisant le complément de Schur on obtient

$$\begin{bmatrix} \lambda_\alpha \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & P_{\alpha_1, \beta_1} & (A_{\alpha_1} + B_{\alpha_1} K_{\beta_1})^T P_{\alpha_2, \beta_2} \\ * & * & P_{\alpha_2, \beta_2} - P_{\alpha_2, \beta_2} (\lambda_\alpha \epsilon_\alpha^2 \mathbf{I}) P_{\alpha_2, \beta_2} \end{bmatrix} - \lambda_\beta^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -K_{\beta_1}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -K_{\beta_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} -$$

$$-\lambda_\beta \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \epsilon_\beta P_{\alpha_2, \beta_2}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \epsilon_\beta P_{\alpha_2, \beta_2}^T \end{bmatrix} > 0$$

En appliquant le Lemme 42

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda_\alpha \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & P_{\alpha_1, \beta_1} & (A_{\alpha_1} + B_{\alpha_1} K_{\beta_1})^T P_{\alpha_2, \beta_2} \\ * & * & P_{\alpha_2, \beta_2} - P_{\alpha_2, \beta_2} (\lambda_\alpha \epsilon_\alpha^2 \mathbf{I}) P_{\alpha_2, \beta_2} \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -K_{\beta_1}^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Delta B_{\alpha_1}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & P_{\alpha_2, \beta_2}^T \end{bmatrix} - \\ & - \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ P_{\alpha_2, \beta_2}^T \end{bmatrix} \Delta B_{\alpha_1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -K_{\beta_1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

ce qui est la même chose que

$$\begin{bmatrix} \lambda_\alpha \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ * & P_{\alpha_1, \beta_1} & (A_{\alpha_1} + (B_{\alpha_1} + \Delta B_{\alpha_1}) K_{\beta_1})^T P_{\alpha_2, \beta_2} \\ * & * & P_{\alpha_2, \beta_2} - P_{\alpha_2, \beta_2} (\lambda_\alpha \epsilon_\alpha^2 \mathbf{I}) P_{\alpha_2, \beta_2} \end{bmatrix} > 0.$$

En répétant la procédure (complément de Schur et Lemme 42) pour ΔA_{α_1} on obtient

$$\begin{bmatrix} P_{\alpha_1, \beta_1} & (A_{\alpha_1} + \Delta A_{\alpha_1} + (B_{\alpha_1} + \Delta B_{\alpha_1}) K_{\beta_1})^T P_{\alpha_2, \beta_2} \\ * & P_{\alpha_2, \beta_2} \end{bmatrix} > 0$$

ce qui implique que

$$V(x) = x^T(k) P_{\alpha, \beta} x(k)$$

est une fonction de Lyapunov pour le système en boucle fermée. \square

Bibliographie

- [1] A.A. Agrachev and D. Liberzon. Lie-algebraic stability criteria for switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(1) :253–269, 2001.
- [2] Karl-Erik Arzen, Antonio Bicchi, Steven Hailes, Karl Henrik Johansson, and John Lygeros. On the design and control of wireless networked embedded systems. In *Proceedings of the 2006 IEEE Computer Aided Control Systems Design Symposium*, Munich, Germany, 2006.
- [3] K. J. Åström and B. Wittenmark. *Computer-Controlled Systems*. Prentice Hall, 1997.
- [4] J. P. Aubin and A. Cellina. *Differential Inclusions*. Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [5] D. Avis and K. Fukuda. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra. *Discrete Comput. Geom.*, 8 :295–313, 1992.
- [6] Andrea Balluchi, Pierpaolo Murrieri, and Alberto L. Sangiovanni-Vincentelli. Controller synthesis on non-uniform and uncertain discrete-time domains. In *The 8th International Workshop on Hybrid Systems : Computation and Control(HSCC05)*, Zurich, Switzerland, 2005.
- [7] A. Bemporad, G. Ferrari-Trecate, and M. Morari. Observability and controllability of piecewise affine and hybrid systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 45(10) :1864–1876, 2000.
- [8] S.P. Bhattacharyya, H. Chapellat, and L.H. Keel. *Robust Control - The Parametric Approach*. Prentice Hall, 1995.
- [9] Abderazik Birouche. *Contribution sur la synthèse d’observateurs pour les systèmes dynamiques hybrides*. PhD thesis, Nancy Université - Institut National Polytechnique de Lorraine, november 2006.
- [10] V. Blondel, Y. Nesterov, and J. Theys. Approximations of the rate of growth of switched linear systems. In *Proceedings of HSSC.*, 2003.
- [11] Vincent Blondel and John N. Tsitsiklis. NP-hardness of some linear control design problems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 35(6) :2118–2127, 1997.
- [12] Vincent D. Blondel and Yurii Nesterov. Computationally efficient approximations of the joint spectral radius. *SIAM Journal of Matrix Analysis*, 27 :256–272, 2005.

- [13] P. Borne, G. Dauphin, J.-P. Richard, F. Rottela, and I. Zambettakis. *Modélisation et identification des processus : Tome 1*. TECHNIP, 1992.
- [14] K.E. Bouazza, M.Boutayeb, and M. Darouach. On state feedback observers for a class of delay discrete-time nonlinear systems. In *IFAC/Workshop on Time Delay Systems*, Louvain, Belgique, 2004.
- [15] K.E. Bouazza, M.Boutayeb, and M. Darouach. State feedback stabilization of a class of nonlinear discrete-time delay systems. In *In Proceedings of the 6th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, 2005.
- [16] El-Kébir Boukas. State feedback stabilization of nonlinear discrete-time systems with time-varying delay. *Nonlinear Analysis*.
- [17] R. Bourdais, L. Hetel, J. Daafouz, and W. Perruquetti. stabilité et stabilisation d'une classe de systèmes dynamiques hybrides. *Journal Européen Systèmes Automatisés*, acceptée, à paraître.
- [18] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [19] M.S. Branicky. Stability of switched and hybrid systems. *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, 4 :3498 – 3503, December 1994.
- [20] M.S. Branicky. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :475–482, April 1998.
- [21] B. Brogliato, A. Daniilidis, C. Lemaréchal, and V. Acary. On the equivalence between complementarity systems, projected systems and unilateral differential inclusions. *Systems & Control Letters*, 55(1) :45–51, 2006.
- [22] H. Chan and U. Ozguner. Optimal control of systems over a communication network with queues via a jump system approach. In *Proceedings of the 1995 IEEE Conference on Control Applications*, pages 1148–1153,, 1995.
- [23] W.-H. Chen, Z.-H. Guan, and X. Lu. Delay-dependent guaranteed cost control for uncertain discrete-time systems with delay. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*, 4 :412 –416, 2003.
- [24] M.B.G. Cloosterman, N. van de Wouw, W.P.M.H. Heemels, and H. Nijmeijer. Robust stability of networked control systems with time-varying network-induced delays. In *45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, USA, 2006.
- [25] M.B.G. Cloosterman, N. van de Wouw, W.P.M.H. Heemels, and H. Nijmeijer. Stability of networked control systems with large delays. In *46th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA, 2007.
- [26] O. L. V. Costa and M. D. Fragoso. Stability results for discrete-time linear systems with markovian jumping parameters. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 179 :154–178,, 1993.

-
- [27] J. Daafouz and J. Bernussou. Parameter dependent Lyapunov functions for discrete time systems with time varying parametric uncertainties. *Systems & Control Letters*, 43 :355–359, 2001.
- [28] J. Daafouz, P. Riedinger, and C. Iung. Stability analysis and control synthesis for switched systems : A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :1883–1887, 2002.
- [29] S. Dasgupta, G. Chockalingam, B.D.O. Anderson, and M. Fu. Lyapunov functions for uncertain systems with applications to the stability to time varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :93–106, 1994.
- [30] W.P. Dayawansa and C.F. Martin. A converse Lyapunov theorem for a class of dynamical systems which undergo switching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(4), 1999.
- [31] R.A. Decarlo, M.S. Branicky, S. Pettersson, and B. Lennartson. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 88(7) :1069–1082, 2000.
- [32] J. Ezzine and A. H. Haddad. Controllability and observability of hybrid systems. *International Journal of Control*, 49 :2045–2055, june 1989.
- [33] E. Feron, P. Apkarian, and P. Gahinet. Analysis and synthesis of robust control systems via parameter-dependent Lyapunov functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :1041–1046, 1996.
- [34] E. Fridman and U. Shaked. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems. *International Journal of Control*, 74 :1447–1455, 2001.
- [35] E. Fridman and U. Shaked. A descriptor system approach to H-infinity control of linear time-delay systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47 :253–270, 2002.
- [36] E. Fridman and U. Shaked. An LMI approach to stability of discrete delay systems. In *Proceedings of the European Control Conference*, Cambridge, UK, 2003.
- [37] E. Fridman and U. Shaked. Stability and guaranteed cost of uncertain discrete delay systems. *International Journal of Control*, 78 :235–246, 2005.
- [38] Emilia Fridman, Alexandre Seuret, and Jean-Pierre Richard. Robust sampled-data stabilization of linear systems : an input delay approach. *Automatica*, 40 :1441–1446, 2004.
- [39] H. Gao, J. Lam, C. Wang, and Y. Wang. Delay-dependent output-feedback stabilisation of discrete-time systems with time-varying state delay. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, 151 :691–698, 2004.
- [40] H. Gao, J. Lam, and Z. Wang. Discrete bilinear stochastic systems with time-varying delay : Stability analysis and control synthesis. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006.

- [41] J. C. Geromel and P. Colaneri. Stability and stabilization of discrete time switched systems. *International Journal of Control*, 79(7) :719–728, 2006.
- [42] Kequin Gu, Vladimir L Kharitonov, and Jie Chen, editors. *Stability of Time-Delay Systems*. Birkhäuser, 2003.
- [43] L. Gurvits. Stability of linear inclusions. *part 2. Tech. rep., NECL.*, 1994.
- [44] J.P. Hespanha and A.S. Morse. Stability of switched systems with average dwell-time. *Proceedings of the 38th IEEE CDC*, pages 2655–2660, 1999.
- [45] L. Hetel, J. Daafouz, and C.Iung. LMI control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems. In *Proceedings of 2007 IEEE American Control Conference*, 2007.
- [46] L. Hetel, J. Daafouz, and C.Iung. Equivalence between the Krasovskii-Lyapunov functional approach for delay systems and the stability conditions for switched systems. *Nonlinear Analysis*, accepted.
- [47] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. *Taming Heterogeneity and Complexity of Embedded Control*, chapter Stability analysis for discrete time systems with time varying delays.
- [48] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Robust stability analysis and control design for switched uncertain polytopic systems. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on Robust Control Design*, Toulouse, France, 2006.
- [49] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Stabilization of arbitrary switched linear systems with unknown time varying delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006.
- [50] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Stability analysis for discrete time switched systems with temporary uncertain switching signal. In *Proceedings of 46th IEEE Conference On Decision and Control*, 2007, to appear.
- [51] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. Analysis and control of LTI and switched systems in digital loops via an event-based modeling. *International Journal of Control*, accepted.
- [52] Z. Ji, L. Wang, and G. Xie. New results on the quadratic stabilization of switched linear systems. In *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii USA, 2003.
- [53] M. Johansson. *Piecewise Linear Control Systems - A Computational Approach*. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 2002.
- [54] M. Johansson, A. Rantzer, and K. Arzen. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 7 :713–722, 1999.
- [55] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [56] C. King and R. Shorten. A singularity test for the existence of common quadratic Lyapunov functions for pairs of stable lti systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 3881–3884, 2004.

-
- [57] V. Kolmanovskii, J.F. Lafay, and J.P. Richard. Riccati equations in stability theory of difference equations with memory. In *European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [58] V.B. Kolmanovskii, T.L. Maizenberg, and J.P. Richard. Mean-square stability of difference equations with a stochastic delay. *Nonlinear Analysis*, 52 :795–804, 2003.
- [59] R. Krtolica, U. Ozguner, H. Chan, H. Goktas, J. Winkelman, and M. Liubakka. Stability of linear feedback systems with random communication delays. *International Journal of Control*, 59 :925–953,, 1994.
- [60] Alexandre Kruszewski. *Lois de commande pour une classe de modèles non linéaires sous la forme Takagi-Sugeno : Mise sous forme LMI*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2006.
- [61] D. Liberzon. *Switching in Systems and Control*. Systems and Control : Foundation and Applications. Birkhäuser, 2003.
- [62] D. Liberzon, J.P. Hespanha, and A.S. Morse. Stability of switched linear systems : a Lie-algebraic condition. *Systems & Control Letters*, 37(3) :117–122, 1999.
- [63] D. Liberzon and A.S. Morse. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Mag.*, pages 59–70, 1999.
- [64] H. Lin and P. J.Antsaklis. *Stability and Control of Dynamical Systems with Applications : A Tribute to Anthony N. Michel*, chapter Robust Regulation of Polytopic Uncertain Linear Hybrid Systems with Networked Control System Applications. Control Engineering. Birkhauser, 2003.
- [65] H. Lin, G. Zhai, and P. J.Antsaklis. Robust stability and disturbance attenuation analysis of a class of networked control systems. In *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii USA, 2003.
- [66] J.L. Mancilla-Aguilar and R.A. García. A converse Lyapunov theorem for nonlinear switched systems. *Systems & Control Letters*, 41 :67–71, 2000.
- [67] M. Margaliot and D. Liberzon. Lie-algebraic stability conditions for nonlinear switched systems and differential inclusions. *Systems & Control Letters*, 55(1) :8–16, 2006.
- [68] Paul Marti. *Analysis and design of real-time control systems with time-varying control timing constraints*. PhD thesis, Automatic Control Department, Technical University of Catalonia, 2002.
- [69] D. Mignone, G. Ferrari-Trecate, and M. Morari. Stability and stabilization of piecewise affine and hybrid systems : A LMI approach. *Proceedings of the 39th Conference on Decision and Control*, pages 504–509, 2000.
- [70] A. Molchanov and E. Pyatnitskiy. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory. *Systems & Control Letters*, 13 :59–64, 1989.

- [71] A. P. Molchanov and E. S. Pyatnitskii. Lyapunov functions that specify necessary and sufficient conditions of absolute stability of nonlinear nonstationary control systems iii. *Automation and Remote Control*, 47 :620–630, 1986.
- [72] T.M. Yoshihiro Mori and Y. Kuroe. A solution to the common Lyapunov function problem for continuous-time systems. In *Proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, volume 3, pages 3530–3531, 1997.
- [73] A. S. Morse. Supervisory control of families of linear set-point controllers - part 1 : Exact matching. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41 :1413–1431, 1996.
- [74] K.S. Narendra and J. Balakrishnan. A common Lyapunov function for stable lti systems with commuting A-matrices. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 39(12) :2469–2471, 1994.
- [75] G. Nikolakopoulos, A. Panousopoulou, A. Tzes, and J. Lygeros. Multi-hopping induced gain scheduling for wireless networked controlled systems. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain,, 2005.
- [76] G. Nikolakopoulos, A. Tzes, and I. Koutroulis. Development and experimental verification of a mobile client-centric networked controlled system. *European Journal of Control*, 11, 2005.
- [77] Y. Ohta, H. Imanishi, L. Gong, and H. Haneda. Computer generated Lyapunov functions for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 40 :343–354, 1993.
- [78] Ricardo C.L.F. Oliveira and Pedro L.D. Peres. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions. *Systems & Control Letters*, 55 :52–61, 2006.
- [79] Th. Ottmann, S. Schuierer, and S. Soundaralakshmi. Enumerating extreme points in higher dimensions. In *12th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, Boston, 1995.
- [80] Ya-Jun Pan, Horacio J. Marquez, and Tongwen Chen. Remote stabilization of networked control systems with unknown time varying delays by LMI techniques. In *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control*, Seville,Spain, 2005.
- [81] P. Parrilo and A. Jadbabaie. Approximation of the joint spectral radius using sum of squares. *Linear Algebra and its Applications, Special issue on joint spectral radius*, to appear, 2007.
- [82] P. Peleties and R.A. DeCarlo. Asymptotic stability of m -switched systems using Lyapunov-like functions. *Proc. of American Control Conference*, pages 1679–1684, 1991.
- [83] C. D. Persis, R. Santis, and A. Morse. Switched nonlinear systems with state dependent dwell time. *Automatica*, 50 :291–302, 2003.

-
- [84] C. D. Persis, R. Santis, and A. Morse. Supervisory control with state-dependent dwell-time logic and constraints. *Automatica*, 40 :269–275, 2004.
- [85] S. Pettersson and B. Lennartson. Stability and robustness for hybrid systems. *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pages 1202–1207, December 1996.
- [86] S. Pettersson and B. Lennartson. LMI for stability and robustness for hybrid systems. *Proceedings of the American Control Conference*, 1997.
- [87] A. Rantzer, M. Johansson, and K. Arzen. Piecewise linear quadratic optimal control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 45 :629–637, 2000.
- [88] Jean-Pierre Richard. Time-delay systems : an overview of some recent advances and open problems. *Automatica*, 39 :1667–1694, 2003.
- [89] Jean-Pierre Richard and Thierry Divoux. *Systèmes commandés en réseau*. Hermès-Lavoisier, Paris, 2007.
- [90] Alexandre Seuret. *Commande et observation des systèmes à retards variables : théorie et applications*. PhD thesis, École Centrale de Lille, 2006.
- [91] R. Shorten and K. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a cqlf for a finite number of stable LTI systems. *Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 16(10) :709–728, 2002.
- [92] R. Shorten, F. Wirth, O. Mason, K. Wulff, and C. King. Stability criteria for switched and hybrid systems. *Invited paper for SIAM Review, Accepted for publication*, 2007.
- [93] R.N. Shorten and K.S. Narendra. Necessary and sufficient conditions for the existence of a common quadratic Lyapunov function for two stable second order linear time-invariant systems. In *In Proc. of the 1999 Amer. Contr. Conf.*, pages 1410–1414, 1999.
- [94] E. Skafidas, R. J. Evans, A. V. Savkin, and I. R. Petersen. Stability results for switched controller systems. *Automatica*, 35(4) :553–564, 1999.
- [95] Seong-Ho Song, Jeom-Keun Kim, Choong-Hyuk Yim, and Ho-Chan Kim. H_∞ control of discrete-time linear systems with time-varying delays in state. *Automatica*, 35 :1587–1591, 1999.
- [96] Z. Sun and S. Ge. Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, 41(2) :181–195, 2005.
- [97] Z. Sun, S. Ge, and T. Lee. Controllability and reachability criteria for switched linear control systems. *Automatica*, 38 :775–786, 2002.
- [98] Yodyium Tipsuwan and Mo-Yuen Chow. Control methodologies in networked control system. *Control Engineering Practice*, 11 :1099–1111, 2003.
- [99] J. Tsitsiklis and V. Blondel. The Lyapunov exponent and joint spectral radius of pairs of matrices are hard when not impossible to compute and to approximate. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 10 :31–40, 1997.

- [100] A. van der Schaft and H. Schumacher. *An introduction to hybrid dynamical systems*. Springer, Berlin, 2000.
- [101] R. Vidal, A. Chiuso, and S. Soatto. Observability and identifiability of jump linear systems. In *In Proceedings of 41nd IEEE conference on decision and control*, pages 3614–3619, Las Vegas NV, Usa,, december 2002.
- [102] M. Wicks and R. DeCarlo. Solution of coupled Lyapunov equations for the stabilization of multimodal linear systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, pages 1709–1713, 1997.
- [103] M. Wicks, P. Peleties, and R. DeCarlo. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In *Proceedings 33rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 3492–3497, Lake Buena Vista, FL, 1994.
- [104] M. Wicks, P. Peleties, and R. DeCarlo. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems. *Eur. J. Contr.*, 7 :140–147, 1998.
- [105] E. Witrant, C. Canudas de Wit, D. Georges, and M. Alamir. Remote stabilization via communication networks with a distributed control law. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52 :1480 – 1485, 2007.
- [106] B. Wittenmark, J. Nilsson, and M. Törngren. Timing problems in real-time control systems. In *Proceedings of the 1995 American Control Conference*, Seattle,WA,USA, 1995.
- [107] K. Wulff, R. Shorten, and P. Curran. On the 45 degree region and the uniform asymptotic stability of classes of second order parameter varying and switched systems. *International Journal of Control*, 75 :812–823, 2002.
- [108] W.Zhang, M.S. Branicky, and S.M. Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, pages 84–99, 2001.
- [109] L. Xiao, A. Hassibi, and J. How. Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach. In *In Proceedings of 2000 American Control Conference*, pages 1148–1153,, 2000.
- [110] D. Xie, L. Wang, F. Hao, and G. Xie. Robust stability analysis and control synthesis for discrete time uncertain switched systems. In *Proceedings of the 42th IEEE Conference on Decision and Control*, Maui, Hawaii USA, 2003.
- [111] S. Xu, J. Lam, and T. Chen. Robust H_∞ control for uncertain discrete stochastic time-delay systems. *Systems & Control Letters*, 51 :203–215, 2004.
- [112] S. Xu, J. Lu, S. Zhou, and C. Yang. Design of observers for a class of discrete-time uncertain nonlinear systems with time delay. *Journal of the Franklin Institute*, 341 :295–308, 2004.
- [113] X. Xu and P.J. Antsaklis. Stabilization of second-order LTI switched systems. *International Journal of Control*, 73(14) :1261–1279, 2000.

-
- [114] H. Ye, A.N. Michel, and L. Hou. Stability theory for hybrid dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 43(4) :461–474, April 1998.
- [115] R. K. Yedavalli. Ultimate boundedness control of linear switched systems using controlled dwell time approach. In *Proceedings of 40th Conference on Decision and Control*, Orlando, Florida,, 2001.
- [116] C. Yfoulis and R. Shorten. A numerical technique for the stability analysis of linear switched systems. *International Journal of Control*, 77 :1019–1039, 2004.
- [117] J. Zaytoon. *Systèmes dynamiques hybrides*. Hermès Science Publication, Paris, 2001.
- [118] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, and A. N. Michel. Piecewise Lyapunov functions for switched systems with average dwell time. *Asian Journal of Control*, 2 :192–197, 2000.
- [119] G. Zhai, B. Hu, K. Yasuda, and A. N. Michel. Qualitative analysis of discrete-time switched systems. In *Proceedings of the American Control Conference*, volume 3, pages 1880–1885, 2002.
- [120] G. Zhai, H. Lin, and P.J. Antsaklis. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *Int.J.Control*, 76 :747–753, 2003.
- [121] L. Zhang, Y. Shi, T. Chen, and B. Huang. A new method for stabilization of networked control systems with random delays. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50 :1177–1181, 2005.
- [122] J. Zheng. General lemmas for stability analysis of linear continuous-time systems with slowly time-varying parameters. *International Journal of Control*, 58 :1437–1444, 1993.
- [123] S. Zhou and T. Li. Robust stabilization for delayed discrete-time fuzzy systems via basis dependent Lyapunov-Krasovskii function. *Fuzzy Sets and Systems*, 151 :139–153, 2005.

AUTORISATION DE SOUTENANCE DE THESE
DU DOCTORAT DE L'INSTITUT NATIONAL
POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

oOo

VU LES RAPPORTS ETABLIS PAR :

Monsieur Jean-Pierre RICHARD, Professeur, Ecole Centrale de Lille, Villeneuve d'Ascq

Monsieur Bernard BROGLIATO, Directeur de Recherche, INRIA Rhône-Alpes, Saint-Ismier

Le Président de l'Institut National Polytechnique de Lorraine, autorise :

Monsieur HETEL Laurentiu

à soutenir devant un jury de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE,
une thèse intitulée :

"Stabilité et commande robuste des systèmes à commutation"

en vue de l'obtention du titre de :

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

Spécialité : « **Automatique et traitement du signal** »

Fait à Vandoeuvre, le 06 novembre 2007

Le Président de l'I.N.P.L.,

F. LAURENT



NANCY BRABOIS
2, AVENUE DE LA
FORET-DE-HAYE
BOITE POSTALE 3
F - 54501
VANDOEUVRE CEDEX

Résumé

Les travaux de cette thèse portent sur l'analyse de stabilité et la synthèse de commandes robustes pour les systèmes linéaires à commutation en temps discret avec des incertitudes polytopiques et des incertitudes sur la loi de commutation. On considère des lois de commutations arbitraires et on montre que l'utilisation des fonctions de Lyapunov commutées dépendant de paramètres permet de déterminer des critères de stabilité et de stabilisation robuste moins conservatifs. Ensuite, des conditions de stabilité robuste pour les systèmes en temps discret avec une loi de commutation incertaine sont présentées en termes de temps minimum de séjour. Les résultats obtenus s'avèrent utiles dans le contexte de la commande numérique des systèmes continus en présence d'imprécisions sur les instants d'échantillonnage et d'application des commandes. Nous montrons comment une modélisation à base d'évènements permet de ramener le problème original à un problème spécifique aux systèmes à commutation avec des incertitudes polytopiques. Les résultats sont étendus au cas des systèmes à commutation continus commandés par des correcteurs numériques.

Mots-clés: systèmes à commutation, robustesse, incertitudes paramétriques, retards variables inconnus, contrôle numérique.

Abstract

This PhD thesis is dedicated to the study of robust stability analysis and control synthesis for discrete time uncertain switching systems under arbitrary switching. Polytopic uncertainties are considered. We show that Lyapunov functions that depend on the uncertain parameter and that take into account the structure of the system may be used in order to reduce the conservatism related to uncertainty problems. Next, we consider the case of discrete time switched systems that are stabilized by a switched state feedback for which the switching signal may be temporary uncertain. Dwell time conditions for stability analysis of such systems are given. These results are useful in the context of continuous time systems that are stabilized via a computer when uncertainties occur on the sampling and actuation events. We present a new event based discrete-time model and we show that the stabilizability of this system can be achieved by finding a control for a switched polytopic system. The methodology is extended to the case of switched system.

Keywords: switched systems, robustness, parametric uncertainty, time varying delays, digital control.

