Un point de vue sur des approches factorielles et probabilistes de la covariance

Application à l'analyse locale du mouvement

Sullivan Hidot

Laboratoire Informatique, Image et Interactions (L3i)

Université de La Rochelle

Directeur de Thèse : Jean-Yves Lafaye
Co-encadrant : Christophe Saint-Jean

7 décembre 2007

Contexte


METHODES FACTORIELLES
COVARIANCE
METHODES PROBABILISTES

Contexte

METHODES FACTORIELLES — COVARIANCE — METHODES PROBABILISTES

On s'intéresse au modèle de décomposition suivant :

$$\boxed{X_t = \varphi(t) + \varepsilon_t}$$

$\varphi(t)$: fonction déterministe du temps ; ε_t : écart à la tendance

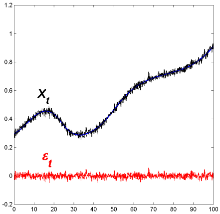
Contexte

METHODES FACTORIELLES — *COVARIANCE* — *METHODES PROBABILISTES*

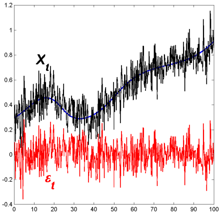
On s'intéresse au modèle de décomposition suivant :

$$\boxed{X_t = \varphi(t) + \varepsilon_t}$$

$\varphi(t)$: fonction déterministe du temps ; ε_t : écart à la tendance



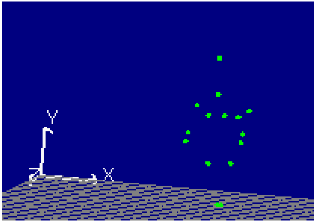
Méthodes factorielles



Méthodes probabilistes

Application à l'analyse spatio-temporelle
Mouvement dansé

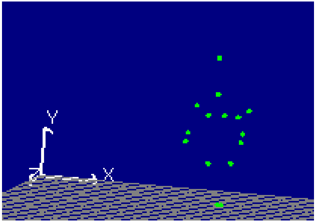
Danseur équipé de capteurs



Mouvement Enveloppé

Application à l'analyse spatio-temporelle
Mouvement dansé

Danseur équipé de capteurs

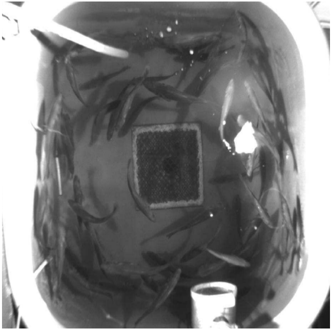


Mouvement Enveloppé

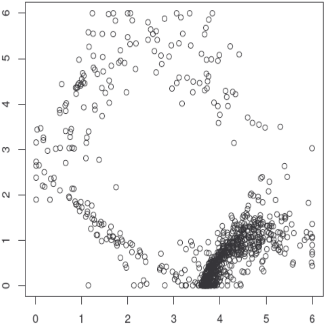
Les caractéristiques qui seront mises en valeur sont liées à :

- la morphologie
- l'interaction
- l'échantillonnage temporel

Application à l'analyse spatio-temporelle
Biologie marine

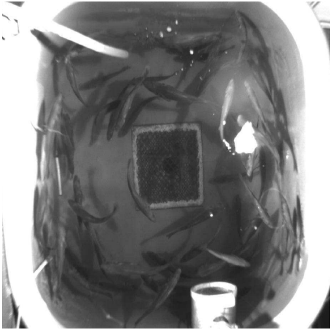


Bassin aquacole

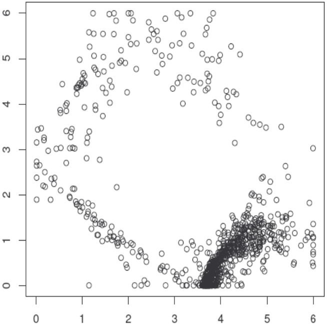


Captures du poisson

Application à l'analyse spatio-temporelle
Biologie marine



Bassin aquacole



Captures du poisson

La contrainte est liée à l'échantillonnage temporel

Plan général

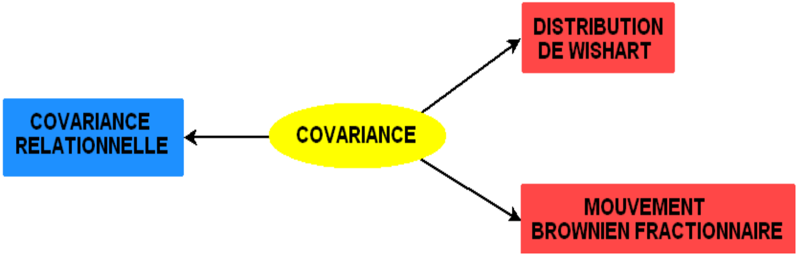
$$\boxed{X_t = \varphi(t) + \varepsilon_t}$$

Partie 1 : $\varphi(t)$

Partie 2 : ε_t

APPROCHES FACTORIELLES

APPROCHES PROBABILISTES



Plan

Approches liées à la statistique géométrique

- Covariance et espérance relationnelles
- Analyse en composantes principales
- Analyse d'opérateurs de covariance

Approches probabilistes

- Distribution de Wishart
- Analyse fractale

Conclusion et perspectives

Covariance

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

Propriété [Leb69]

La covariance entre deux variables aléatoires centrées X et Y se calcule en utilisant la formule quadratique :

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} (X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega'))dP(\omega)dP(\omega')$$

On utilise une mesure produit pour définir la covariance, ce qui permet l'ajout d'une connaissance exogène sur les individus.

Covariance relationnelle

La covariance relationnelle se définit à l'aide d'un graphe de relation binaire entre les individus :

$$g(\omega, \omega') = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est connecté à } \omega' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Covariance relationnelle

La covariance relationnelle se définit à l'aide d'un graphe de relation binaire entre les individus :

$$g(\omega, \omega') = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \text{ est connecté à } \omega' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La covariance classique s'exprime par :

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega \times \Omega} (X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega'))dP(\omega)dP(\omega')$$

Définition (Covariance relationnelle)

$$Cov_g(X, Y) =$$

$$= \frac{1}{2\kappa} \iint_{\Omega \times \Omega} (X(\omega) - X(\omega'))(Y(\omega) - Y(\omega'))g(\omega, \omega')dP(\omega)dP(\omega')$$

Covariance relationnelle

Propriété [HLSJ07]

La covariance relationnelle utilise implicitement une version symétrisée du graphe g.

On a la relation :

$$Cov_g(X, Y) = Cov_{g^*}(X, Y)$$

où

$$g^*(\omega, \omega') = \frac{1}{2}(g(\omega, \omega') + g(\omega', \omega))$$

On pourra choisir sans perte de généralité un graphe symétrique

Covariance relationnelle

Pour les exemples d'application, on considère le graphe :

$$\boxed{g_\theta(\omega,\omega') = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega-\omega'| \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

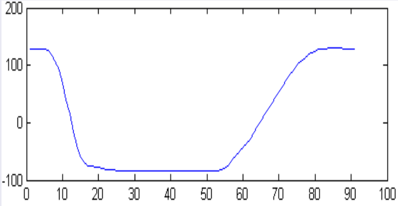
Covariance relationnelle

Pour les exemples d'application, on considère le graphe :

$$\boxed{g_\theta(\omega,\omega') = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega-\omega'| \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

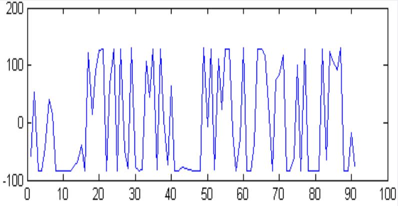
Exemple : $\theta = 5$

X



$$\sigma(X) = 89.59$$
$$\sigma_{g_\theta}(X) = 18.14$$

X_{perm}



$$\sigma(X_{perm}) = 89.59$$
$$\sigma_{g_\theta}(X_{perm}) = 82.75$$

Espérance relationnelle

Définition **[HLSJ07]**

Posons pour tout $\omega \in \Omega$:

$$E(X|g)(\omega) = \frac{1}{deg(\omega)} \int_{\Omega} X(\omega')g(\omega, \omega')dP(\omega')$$

où

$$deg(\omega) = \int_{\Omega} g(\omega, \omega')dP(\omega')$$

$E(X|g)(\omega)$ est appelée *espérance relationnelle* de la variable aléatoire X mesurée sur le voisinage de ω selon le graphe g.

Espérance relationnelle

Soit $< .,. >_Q$ le produit scalaire défini par la densité de probabilité Q :

$$Q(\omega) = \frac{P(\omega)deg(\omega)}{\kappa}$$

Propriété [HLSJ07]

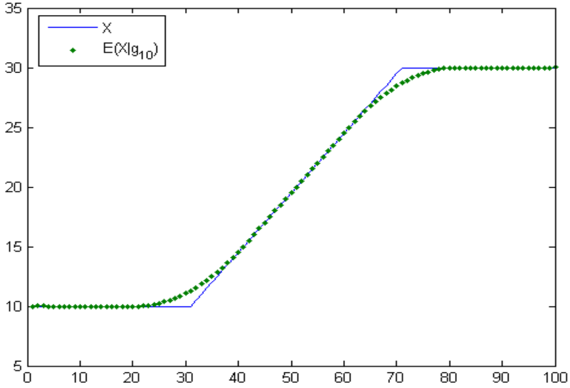
La covariance relationnelle entre X et Y est égale au produit scalaire pour Q de X avec l'écart de Y à son espérance relationnelle :

$$\boxed{Cov_g(X,Y) =< X, Y - E(Y|g) >_Q =< X - E(X|g), Y >_Q}$$

Espérance relationnelle

Exemple : $\theta = 10$

$$\boxed{Var_g(X) = < X, X - E(X|g) >_Q}$$



Plan

Analyse en composantes principales relationnelle

Le graphe induit une métrique Δ sur les variables appelée *laplacien*

$$\boxed{\text{ACP relationnelle = ACP du triplet statistique } \left(\mathbb{X}, M, \tfrac{1}{\kappa}\Delta\right)}$$

La matrice de covariance relationnelle s'exprime par :

$$V_g = \frac{1}{\kappa}{}^t\mathbb{X}\Delta\mathbb{X}$$

Analyse en composantes principales relationnelle

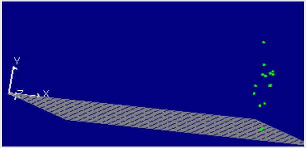
Le graphe induit une métrique Δ sur les variables appelée *laplacien*

$$\boxed{\text{ACP relationnelle = ACP du triplet statistique } (\mathbb{X}, M, \tfrac{1}{\kappa}\Delta)}$$

La matrice de covariance relationnelle s'exprime par :

$$V_g = \frac{1}{\kappa} {}^t\mathbb{X}\Delta\mathbb{X}$$

Exemple : mouvement Marche **[HLSJ06b]**

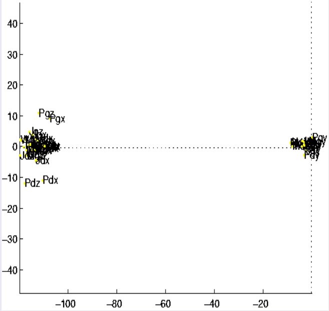


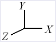
Analyse en composantes principales
Représentations graphiques

Exemple : mouvement Marche **[HLSJ06b]**

ACP standard

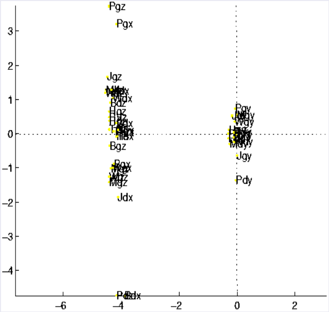
Plan 1×2 (99.70%+0.15%)





ACP relationnelle ($\theta = 5$)

Plan 1×2 (75.84%+13.12%)



Analyse en composantes principales
Application à la reconstruction partielle

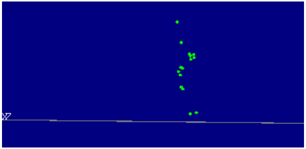
Les données initiales peuvent s'obtenir à partir des composantes principales :

$$\mathbb{X} = C^t U + \overline{X}$$

Il est possible de reconstruire partiellement les données en choisissant un nombre restreint de composantes principales :

$$\widehat{\mathbb{X}} = \widetilde{C}^t \widetilde{U} + \overline{X}$$

C_1



C_2

Plan

Approches liées à la statistique géométrique

- Covariance et espérance relationnelles
- Analyse en composantes principales
- Analyse d'opérateurs de covariance

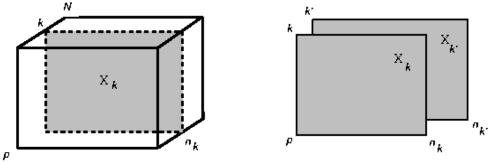
Approches probabilistes

- Distribution de Wishart
- Analyse fractale

Conclusion et perspectives

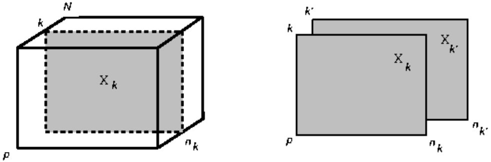
Analyse d'opérateurs de covariance

Extension de l'ACP aux tableaux à trois entrées :



Analyse d'opérateurs de covariance

Extension de l'ACP aux tableaux à trois entrées :



L'analyse d'opérateurs de covariance est la généralisation de l'ACP aux matrices de covariance relationnelle **[HLSJ06c]** :

$$\Gamma_k = \frac{1}{\kappa_k} {}^t\mathbb{X}_k \Delta_k \mathbb{X}_k$$

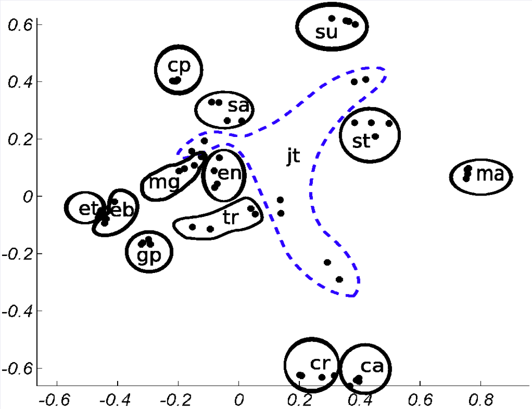
munis du produit scalaire de Hilbert-Schmidt :

$$\mathcal{H}(k,k') = <\Gamma_k, \Gamma_{k'}>_{HS} = trace(\Gamma_k^* \Gamma_{k'}) = trace(\Gamma_k \Gamma_{k'})$$

Analyse d'opérateurs de covariance Représentations graphiques

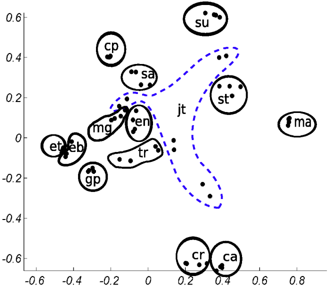
Exemple : opérateurs normés avec $\theta = 10$

Plan 2×3 (13% + 11%)

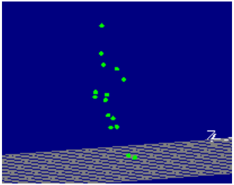


Analyse d'opérateurs de covariance
Représentations graphiques

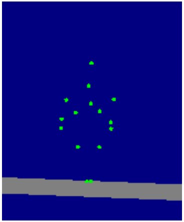
Interprétation de l'axe 2 : corrélation / décorrélation en (x, z)



Plan 2×3



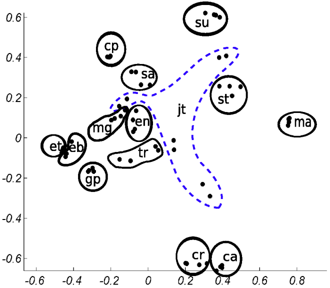
Enroulé bassin



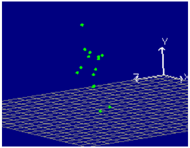
Saut attitude

Analyse d'opérateurs de covariance
Représentations graphiques

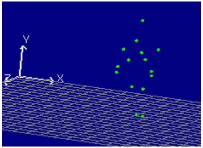
Interprétation de l'axe 3 : corrélation membres supérieurs / inférieurs



Plan 2 $\times$ 3



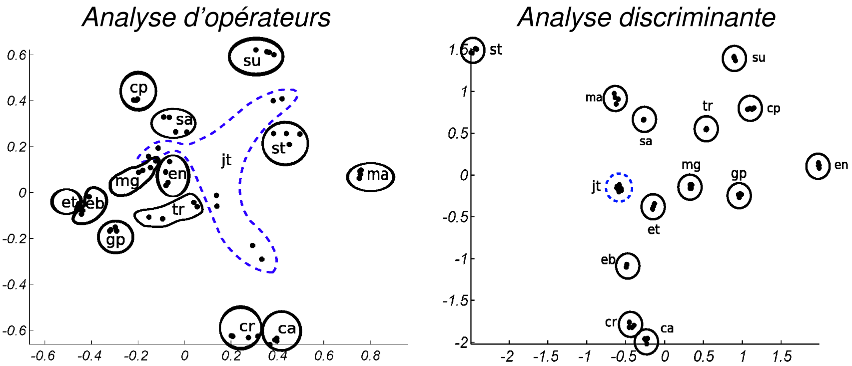
Suspension



Chute allongée

Analyse discriminante d'opérateurs de covariance

Extension à l'analyse discriminante **[HLSJ06a]**



Plan 2 $\times$ 3 (13% + 11%)

Plan 1 $\times$ 2 (7.9% + 7.8%)

Plan

Rappel du modèle

Modèle :

$$\boxed{X_t = \varphi(t) + \varepsilon_t}$$

Le terme ε_t est obtenu en supprimant la tendance de X_t :

$$\varepsilon_t = X_t - \varphi(t)$$

ε_t est supposé gaussien

Rappel du modèle

Modèle :

$$\boxed{X_t = \varphi(t) + \varepsilon_t}$$

Le terme ε_t est obtenu en supprimant la tendance de X_t :

$$\varepsilon_t = X_t - \varphi(t)$$

ε_t est supposé gaussien

On adopte deux points de vue probabilistes :

- Distribution de Wishart de la matrice de covariance de ε_t
- Analyse fractale par la matrice de covariance du processus induit par ε_t

Plan

Approches liées à la statistique géométrique

- Covariance et espérance relationnelles
- Analyse en composantes principales
- Analyse d'opérateurs de covariance

Approches probabilistes

- Distribution de Wishart
- Analyse fractale

Conclusion et perspectives

Distribution de Wishart

Définition (Loi de Wishart centrée)

Soit ε un échantillon de n réalisations indépendantes d'une loi multinormale $\mathcal{N}_p(0, \Sigma)$. Alors ${}^t\varepsilon\varepsilon$ suit une loi de Wishart de degré de liberté n et de matrice d'échelle Σ. On notera ${}^t\varepsilon\varepsilon \sim \mathcal{W}_p(\Sigma, n)$.

Si $M \sim \mathcal{W}_p(\Sigma, n)$, la densité s'exprime par :

$$f(M; \Sigma, n) = \frac{|M|^{\frac{n-p-1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} trace(\Sigma^{-1} M)\right\}}{2^{\frac{np}{2}} \pi^{\frac{p(p-1)}{4}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{p} \Gamma\left(\frac{1}{2}(n-j+1)\right)}$$

Cette loi a pour espérance :

$$E(M) = n\Sigma$$

Distribution de Wishart
Classification supervisée

On se place dans le cadre d'un modèle de mélanges de densité de Wishart

Données :

- $\mathcal{X} = (\Gamma_1, n_1, \ldots, \Gamma_N, n_N)$, $\Gamma_i = {}^t\varepsilon_i \varepsilon_i \sim \mathcal{W}_p(\Sigma_k, n_i)$
- K classes modélisées chacune par une distribution de Wishart
- $(\pi_k)_{k=1}^K$ poids des classes
- $\mathcal{Z} = (z_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq K}}$ matrice de classification, $z_{ik} \in \{0, 1\}$

Distribution de Wishart
Classification supervisée

On se place dans le cadre d'un modèle de mélanges de densité de Wishart

Données :

- $\mathcal{X} = (\Gamma_1, n_1, \ldots, \Gamma_N, n_N)$, $\Gamma_i = {}^t\varepsilon_i \varepsilon_i \sim \mathcal{W}_p(\Sigma_k, n_i)$
- K classes modélisées chacune par une distribution de Wishart
- $(\pi_k)_{k=1}^K$ poids des classes
- $\mathcal{Z} = (z_{ik})_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq k \leq K}}$ matrice de classification, $z_{ik} \in \{0, 1\}$

Objectif :

- Estimation des paramètres $\Theta = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_K)$

$$\underset{\Theta}{\text{argmax}}\, P(\mathcal{X}|\mathcal{Z}, \Theta) = \underset{\Theta}{\text{argmax}} \prod_{k=1}^{K} \left(\prod_{\{i; \Gamma_i \in Cl_k\}} f(\Gamma_i; \Sigma_k, n_i) \right)$$

Distribution de Wishart
Classification supervisée

On se place dans le cadre d'un modèle de mélanges de densité de Wishart

Données :

- $\mathcal{X} = (\Gamma_1, n_1, \ldots, \Gamma_N, n_N)$, $\Gamma_i = {}^t\varepsilon_i \varepsilon_i \sim \mathcal{W}_p(\Sigma_k, n_i)$
- K classes modélisées chacune par une distribution de Wishart
- $(\pi_k)_{k=1}^K$ poids des classes
- $\mathcal{Z} = (z_{ik})_{\substack{1 \le i \le N \\ 1 \le k \le K}}$ matrice de classification, $z_{ik} \in \{0, 1\}$

Objectif :

- Estimation des paramètres $\Theta = (\Sigma_1, \ldots, \Sigma_K)$

$$\underset{\Theta}{\operatorname{argmax}}\, P(\mathcal{X}|\mathcal{Z}, \Theta) = \underset{\Theta}{\operatorname{argmax}} \prod_{k=1}^{K} \left(\prod_{\{i; \Gamma_i \in Cl_k\}} f(\Gamma_i; \Sigma_k, n_i) \right)$$

$$\widehat{\Sigma}_k = \frac{\sum_{i=1}^{N_k} \Gamma_{ik}}{\sum_{j=1}^{N_k} n_{jk}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_k} n_{ik} \left(\frac{1}{n_{ik}} {}^t\varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik} \right)}{\sum_{j=1}^{N_k} n_{jk}} \quad ; \quad card(Cl_k) = N_k$$

Distribution de Wishart
Classification supervisée

La tendance est supprimée en retranchant de chaque variable son espérance relationnelle :

$$\varepsilon = X - E(X|g_\theta)$$

Distribution de Wishart
Classification supervisée

La tendance est supprimée en retranchant de chaque variable son espérance relationnelle :

$$\varepsilon = X - E(X|g_\theta)$$

Application au mouvement dansé

Test sur un ensemble de $N = 219$ mouvements répartis dans $K = 14$ classes avec π_k équiprobables (leave-one out)

θ	1	2	5	10	*max*
Taux	77.17	84.93	93.60	94.06	97.71

Table: Classification supervisée en supprimant la tendance en fonction du niveau de lissage.

Distribution de Wishart
Classification non supervisée

Les données sont incomplètes : $\mathcal{Z}$ inconnue.

Distribution de Wishart
Classification non supervisée

Les données sont incomplètes : $\mathcal{Z}$ inconnue.

Les paramètres à estimer sont $\Theta = (\pi_1, \ldots, \pi_K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_K)$

$$\mathcal{L}_c(\Theta) = P(\mathcal{X}, \mathcal{Z}|\Theta) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{K} (\pi_k f(\Gamma_i; \Sigma_k, n_i))^{z_{ik}}$$

Distribution de Wishart
Classification non supervisée

Les données sont incomplètes : $\mathcal{Z}$ inconnue.

Les paramètres à estimer sont $\Theta = (\pi_1, \ldots, \pi_K, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_K)$

$$\mathcal{L}_c(\Theta) = P(\mathcal{X}, \mathcal{Z}|\Theta) = \prod_{i=1}^{N} \prod_{k=1}^{K} (\pi_k f(\Gamma_i; \Sigma_k, n_i))^{z_{ik}}$$

$$\underset{\Theta}{\operatorname{argmax}}\, \mathcal{L}_c(\Theta) = \mathbf{?}$$

$$\boxed{\text{Algorithme EM pour matrices de Wishart}}$$

Distribution de Wishart
Classification non supervisée

Algorithme EM pour matrices de Wishart **[HSJL07]**

$$\boxed{E \log \mathcal{L}_c(\Theta) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} E(z_{ik}) \{\log \pi_k + \log f(\Gamma_i; \Sigma_k, n_i)\}}$$

E-step : Estimation des $z_{ik}^{(t)}$

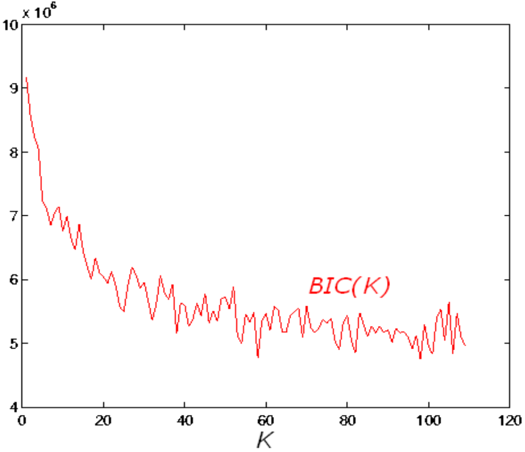
$$\widehat{z}_{ik}^{(t)} = \frac{\widehat{\pi}_k^{(t)} f(\Gamma_i; \Sigma_k^{(t)}, n_i)}{\sum_{l=1}^{g} \widehat{\pi}_l^{(t)} f(\Gamma_i; \Sigma_l^{(t)}, n_i)}$$

M-step : Estimation des $\Theta_k^{(t+1)} = (\widehat{\pi}_k^{(t+1)}, \widehat{\Sigma}_k^{(t+1)})$

$$\widehat{\pi}_k^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \widehat{z}_{ik}^{(t)}}{N} \quad ; \quad \widehat{\Sigma}_k^{(t+1)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \widehat{z}_{ik}^{(t)} \Gamma_i}{\sum_{j=1}^{N} \widehat{z}_{jk}^{(t)} n_j}$$

Distribution de Wishart
Classification non supervisée : validation

Sélection du nombre optimal de clusters : critère d'information



Plan

Approches liées à la statistique géométrique

- Covariance et espérance relationnelles
- Analyse en composantes principales
- Analyse d'opérateurs de covariance

Approches probabilistes

- Distribution de Wishart
- Analyse fractale

Conclusion et perspectives

Analyse fractale
Mouvement brownien fractionnaire

Définition

Un MBF d'autosimilarité $H \in]0, 1[$*, noté* $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$*, est un processus gaussien centré réel de matrice de covariance :*

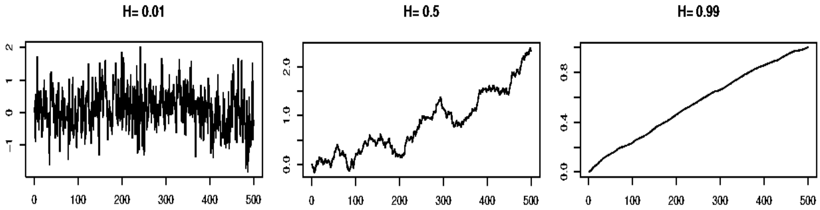
$$\boxed{V_H(i, j) = E(Z_{t_i} Z_{t_j}) = \frac{1}{2} \left(|t_i|^{2H} + |t_j|^{2H} - |t_i - t_j|^{2H} \right)}$$

Analyse fractale
Mouvement brownien fractionnaire

Définition

Un MBF d'autosimilarité $H \in]0, 1[$, noté $(Z_t)_{t \in \mathbb{R}}$, est un processus gaussien centré réel de matrice de covariance :

$$\boxed{V_H(i,j) = E(Z_{t_i} Z_{t_j}) = \frac{1}{2}\left(|t_i|^{2H} + |t_j|^{2H} - |t_i - t_j|^{2H}\right)}$$



Analyse fractale
Échantillonnage irrégulier

On adopte le modèle :

$$X_t = \varphi(t) + \varepsilon_t = mt + \sqrt{a}Z_t$$

Les méthodes de simulation et d'estimation sont limitées

Analyse fractale
Échantillonnage irrégulier

On adopte le modèle :

$$X_t = \varphi(t) + \varepsilon_t = mt + \sqrt{a}Z_t$$

Les méthodes de simulation et d'estimation sont limitées

Simulation : **Cholesky**	Estimation : **maximum de vraisemblance**

$\Longrightarrow$ Estimation de m, a et H

Analyse fractale
Échantillonnage irrégulier

On adopte le modèle :

$$X_t = \varphi(t) + \varepsilon_t = mt + \sqrt{a} Z_t$$

Les méthodes de simulation et d'estimation sont limitées

Simulation : **Cholesky**	Estimation : **maximum de vraisemblance**

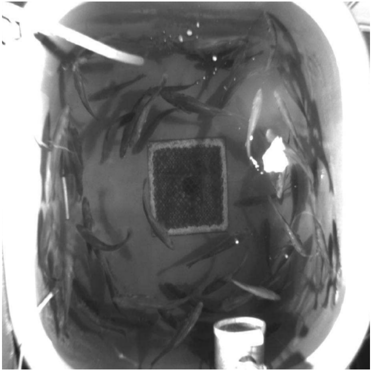
$\Longrightarrow$ Estimation de m, a et H

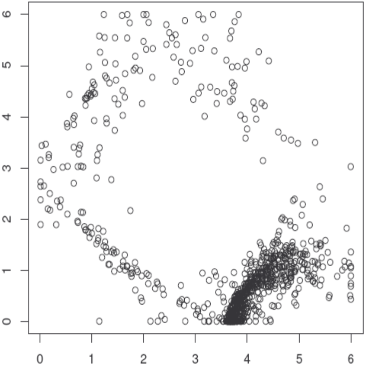
Une étude a été menée **[HSJL08]** sur des signaux de longueur ...

- forte : préservation des propriétés asymptotiques de l'estimateur
- faible : biais réduit pour un échantillonnage uniforme

Analyse fractale
Application à l'analyse du comportement

Estimation de l'autosimilarité locale d'un bar évoluant dans un bassin aquacole :



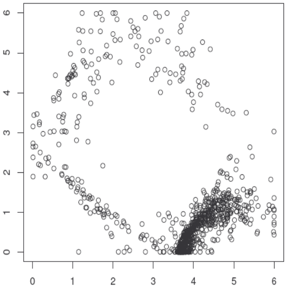


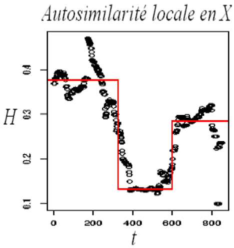
Analyse fractale
Application à l'analyse du comportement

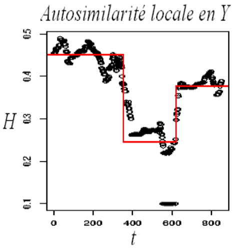
- Dates de capture irrégulières ($\approx$ 0.2 sec.)
- Estimations locales de H sur les trajectoires en X et Y (θ=3 sec.)

Analyse fractale
Application à l'analyse du comportement

- Dates de capture irrégulières ($\approx$ 0.2 sec.)
- Estimations locales de H sur les trajectoires en X et Y (θ=3 sec.)







Plan

Approches liées à la statistique géométrique

- Covariance et espérance relationnelles
- Analyse en composantes principales
- Analyse d'opérateurs de covariance

Approches probabilistes

- Distribution de Wishart
- Analyse fractale

Conclusion et perspectives

Conclusion : rappel des contributions

- Formalisme de la covariance et de l'espérance relationnelles
- Intégration de la covariance relationnelle dans l'ACP et l'analyse d'opérateurs
- Modèle de classification multidimensionnelle supervisée et non supervisée par Wishart
- Analyse fractale avec échantillonnage irrégulier
- Analyse du mouvement : reconstruction, segmentation, classification, comportement

Perspectives

- Croisements entre les modèles

  Modèle de Wishart sur la covariance relationnelle
  ACP sur les variables d'un mouvement brownien fractionnaire

- Optimisation

  Choix du θ
  Modèles contraints

- Démarche plus expérimentale

  Segmentation temporelle
  Autres applications : traitement d'images ...

Références

Covariance et espérance relationnelles
[HLSJ07] S. Hidot, J.-Y. Lafaye et C. Saint-Jean, ***Propriétés et interprétation de la covariance relationnelle en ACP***. Revue Traitement du Signal, 24(1): 29-37, 2007.

ACP relationnelle
[HLSJ06b] S. Hidot, J.-Y. Lafaye et C. Saint-Jean, ***ACP relationnelle pour l'analyse du mouvement : Application à la danse***. RFIA'06.

Analyse factorielle d'opérateurs
[HLSJ06c] S. Hidot, J.-Y. Lafaye et C. Saint-Jean, ***Analyse factorielle d'opérateurs pour l'étude du mouvement : Application à la danse***. Atelier "Fouille de données", EGC'06.

Analyse discriminante d'opérateurs
[HLSJ06a] S. Hidot, J.-Y. Lafaye and C. Saint-Jean, ***Discriminant factor analysis for movement recognition: application to dance***. ICCVG'06, Special issue in Journal of Machine Graphics and Vision (à paraître).

Algorithme EM pour matrices de Wishart
[HSJL07] S. Hidot, C. Saint-Jean et J.-Y. Lafaye, ***Classification de signaux multidimensionnels utilisant la distribution de Wishart : Application à la reconnaissance de mouvements***. GRETSI'07.

Analyse fractale et échantillonnage irrégulier
[HSJL08] S. Hidot, C. Saint-Jean et J.-Y. Lafaye, ***Étude expérimentale de l'influence d'un échantillonnage irrégulier dans l'estimation du paramètre de Hurst***. À paraître dans la Revue de Statistique Appliquée, 2008.