

Problème de Bogomolov sur les variétés abéliennes

Soutenance de thèse

Aurélien Galateau

Université Paris 6

13 Décembre 2007

- 1 Enoncés de finitude et hauteurs sur les variétés abéliennes
 - Théorèmes de finitude en géométrie diophantienne
 - Hauteur sur les variétés abéliennes
 - Conjecture de Bogomolov
- 2 Versions quantitatives de la conjecture de Bogomolov
 - Minoration du minimum essentiel et théorème d'uniformité
 - Lien avec une version explicite du théorème de Faltings
 - Minoration précise du minimum essentiel selon le degré
 - Application à la conjecture de Zilber-Pink
- 3 Résultats de la thèse et aperçu des méthodes
 - Le théorème principal
 - Organisation de la thèse
 - Propriétés p -adiques des points de torsion d'une variété abélienne

Conjecture de Mordell

Théorème (Faltings, 1983)

Soit C une courbe algébrique définie sur un corps de nombres K et de genre $g \geq 2$. Alors l'ensemble $C(K)$ est fini.

Conjecture de Manin-Mumford

Théorème (Raynaud, 1983)

Si C est de genre $g \geq 2$, les points de torsion de $J(C)$ qui sont dans C sont en nombre fini.

Hauteurs

Définition (intuitive)

Une hauteur sur une variété V (projective) est une “fonction de comptage” : $h : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui permet de mesurer la “complexité arithmétique” des points de V .

Hauteurs

Définition (intuitive)

Une hauteur sur une variété V (projective) est une “fonction de comptage” : $h : V \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui permet de mesurer la “complexité arithmétique” des points de V .

Propriété de Northcott

Soit D et H deux réels. Il n'y a qu'un nombre fini de points de V de hauteur $\leq H$ et définis sur un corps de degré $\leq D$.

Hauteur canonique

Soit A une variété abélienne munie de L un fibré ample et symétrique. On dispose d'une hauteur projective h . On construit par passage à la limite une hauteur canonique \hat{h} :

Hauteur canonique

Soit A une variété abélienne munie de L un fibré ample et symétrique. On dispose d'une hauteur projective h . On construit par passage à la limite une hauteur canonique \hat{h} :

Compatible à la loi de groupe

$$\hat{h}(nP) = n^2 \hat{h}(P) \text{ pour tous } n \in \mathbb{Z}, P \in A.$$

Hauteur canonique

Soit A une variété abélienne munie de L un fibré ample et symétrique. On dispose d'une hauteur projective h . On construit par passage à la limite une hauteur canonique \hat{h} :

Compatible à la loi de groupe

$$\hat{h}(nP) = n^2 \hat{h}(P) \text{ pour tous } n \in \mathbb{Z}, P \in A.$$

Proche de la hauteur projective

$$\forall x \in A : |h(x) - \hat{h}(x)| \leq C(A).$$

Conjecture de Bogomolov

Pour les courbes:

Théorème (Ullmo, 1998)

Si C est de genre $g \geq 2$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\{x \in C, \hat{h}(x) \leq \epsilon\}$ est fini.

Conjecture de Bogomolov

Pour les courbes:

Théorème (Ullmo, 1998)

Si C est de genre $g \geq 2$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $\{x \in C, \hat{h}(x) \leq \epsilon\}$ est fini.

Pour les sous-variétés de dimension quelconque:

Théorème

Soit V une sous-variété algébrique d'une variété abélienne A . Le minimum essentiel de V est nul si et seulement si V est de torsion.

Théorème de Kronecker

Théorème

Soit $x \in \overline{\mathbb{Q}}^$. La hauteur de x est nulle si et seulement si x est une racine de l'unité.*

Minima successifs

Théorème (Zhang, 1995)

Soit V une sous-variété algébrique de degré D d'une variété abélienne A . Alors:

$$\frac{\hat{h}(V)}{(\dim(V) + 1)D} \leq \hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \leq \frac{\hat{h}(V)}{D}.$$

Minoration du minimum essentiel et uniformité

Soit V une sous-variété d'une variété abélienne A de dimension g .

Minoration du minimum essentiel et uniformité

Soit V une sous-variété d'une variété abélienne A de dimension g .

Minoration du minimum essentiel

Si $\hat{\mu}_{\text{ess}} \neq 0$, peut-on en donner une minoration explicite?

Minoration du minimum essentiel et uniformité

Soit V une sous-variété d'une variété abélienne A de dimension g .

Minoration du minimum essentiel

Si $\hat{\mu}_{\text{ess}} \neq 0$, peut-on en donner une minoration explicite?

Uniformité (Bombieri et Zannier, 1996)

On peut espérer une borne ne dépendant que de $\deg(V)$ et $h(A)$ (la dimension g de A étant fixée).

Minoration du minimum essentiel et uniformité

Soit V une sous-variété d'une variété abélienne A de dimension g .

Minoration du minimum essentiel

Si $\hat{\mu}_{\text{ess}} \neq 0$, peut-on en donner une minoration explicite?

Uniformité (Bombieri et Zannier, 1996)

On peut espérer une borne ne dépendant que de $\deg(V)$ et $h(A)$ (la dimension g de A étant fixée).

Obstructions

Les sous-variétés: $V = x + B$, où x n'est pas un point de torsion.

Exemple de borne uniforme

Théorème (David et Philippon, 2002)

Soit A une variété abélienne de genre $g \geq 2$ définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, principalement polarisée par un fibré \mathcal{M} , et V une sous-variété algébrique de A qui n'est pas translatée d'une sous-variété abélienne. Alors:

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq C(g) \frac{\min\{1; \mathcal{R}_{\text{inj}}\}^{2(g+1)}}{\deg(V)^{2g(g+1)}},$$

où \mathcal{R}_{inj} désigne la plus petite norme de Riemann d'une période d'une conjuguée de A .

Lien avec Mordell explicite

Théorème (Rémond, 2000)

Une courbe C projective lisse de genre $g \geq 2$ sur un corps de nombres K a au plus:

$$c(J, L)^{7(r+1)g^3},$$

où J est la jacobienne de C , r son rang de Mordell-Weil, L un fibré défini par translation à partir du diviseur théta, et $c(J, L)$ une constante strictement positive.

Dépendance en le degré: le cas torique

Théorème (Amoroso et David, 2003)

Soit V une sous-variété propre (et irréductible) de \mathbb{G}_m^n de codimension k qui n'est contenue dans aucun translaté d'un sous-tore propre de \mathbb{G}_m^n . On a alors:

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{c(n)}{\omega(V)} \times (\log(3\omega(V)))^{-\lambda(k)},$$

où $c(n)$ est un réel strictement positif et $\lambda(k) = (9(3k)^{(k+1)})^k$.

Intersection d'une courbe avec des sous-groupes algébriques

On pose:

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\text{codim}(H)=2} H,$$

où la réunion porte sur tous les sous-groupes algébriques de \mathbb{G}_m^n de codimension indiquée.

Intersection d'une courbe avec des sous-groupes algébriques

On pose:

$$\mathcal{H} = \bigcup_{\text{codim}(H)=2} H,$$

où la réunion porte sur tous les sous-groupes algébriques de \mathbb{G}_m^n de codimension indiquée.

Théorème (Bombieri, Masser, Zannier, 1999)

Soit C une courbe algébrique irréductible de \mathbb{G}_m^n non incluse dans un translaté de sous-tore propre. Alors $C \cap \mathcal{H}$ est fini.

Théorème principal de cette thèse

Hypothèse **H**

Il existe une densité positive d'idéaux premiers de \mathcal{O}_K ordinaires pour A , ou associés à un p -rang égal à 0.

Théorème

*Soit A une variété abélienne définie sur K un corps de nombre, vérifiant **H**. Pour toute sous-variété V propre (et irréductible) de codimension $r \leq 2$ contenue dans aucun translaté d'une sous-variété abélienne propre de A , on a :*

$$\hat{\mu}_{\text{ess}}(V) \geq \frac{C(A)}{\omega(V)} \times (\log(3\deg(V)))^{-\lambda(r)},$$

où $C(A) > 0$ ne dépend que de A et $\lambda(r) = (16(2r)^{(r+1)})^r$.

Cas des produits de courbes elliptiques

- L'hypothèse **H** est toujours vérifiée.

Cas des produits de courbes elliptiques

- L'hypothèse **H** est toujours vérifiée.
- Preuve de transcendance classique.

Variétés abéliennes générales

- Etude du groupe formel associé à une variété abélienne en caractéristique p .

Variétés abéliennes générales

- Etude du groupe formel associé à une variété abélienne en caractéristique p .
- Méthode des pentes et formalisme arakelovien.

Théorie de Galois sur les courbes elliptiques

- Soit E une courbe elliptique définie sur K un corps de nombres.

Théorie de Galois sur les courbes elliptiques

- Soit E une courbe elliptique définie sur K un corps de nombres.
- Pour p un nombre premier, on note E_p le groupe de p -torsion de E et $K(E_p)$ l'extension associée. Soit v/p une place de K non-ramifiée et de bonne réduction pour E .

Théorie de Galois sur les courbes elliptiques

- Soit E une courbe elliptique définie sur K un corps de nombres.
- Pour p un nombre premier, on note E_p le groupe de p -torsion de E et $K(E_p)$ l'extension associée. Soit v/p une place de K non-ramifiée et de bonne réduction pour E .
- Si v est ordinaire, *i.e.* le sous-groupe de p -torsion modulo v est non-trivial: $\forall w/v \in K(E_p) : e_{w/v} = p$.

Théorie de Galois sur les courbes elliptiques

- Soit E une courbe elliptique définie sur K un corps de nombres.
- Pour p un nombre premier, on note E_p le groupe de p -torsion de E et $K(E_p)$ l'extension associée. Soit v/p une place de K non-ramifiée et de bonne réduction pour E .
- Si v est ordinaire, *i.e.* le sous-groupe de p -torsion modulo v est non-trivial: $\forall w/v \in K(E_p) : e_{w/v} = p$.
- Si v est supersingulière, *i.e.* le sous-groupe de p -torsion modulo v est trivial: $\forall w/v \in K(E_p) : e_{w/v} = p^2$.

Etude du groupe formel sur les variétés abéliennes

- Les propriétés galoisiennes ne suffisent pas.

Etude du groupe formel sur les variétés abéliennes

- Les propriétés galoisiennes ne suffisent pas.
- Etude du groupe formel d'une variété abélienne en caractéristique p .

Etude du groupe formel sur les variétés abéliennes

- Les propriétés galoisiennes ne suffisent pas.
- Etude du groupe formel d'une variété abélienne en caractéristique p .
- **Première obstruction:** Existence de deux invariants, le p -rang et le rang de Hasse-Witt, en général différents (mais égaux sur les produits de courbes elliptiques).

Etude du groupe formel sur les variétés abéliennes

- Les propriétés galoisiennes ne suffisent pas.
- Etude du groupe formel d'une variété abélienne en caractéristique p .
- **Première obstruction:** Existence de deux invariants, le p -rang et le rang de Hasse-Witt, en général différents (mais égaux sur les produits de courbes elliptiques).
- **Deuxième obstruction:** Les techniques diophantiennes ne permettent pas d'exploiter le principe de compensation.