



**HAL**  
open science

**ARTICULATION DES REGISTRES GRAPHIQUE ET  
SYMBOLIQUE POUR L'ETUDE DES EQUATIONS  
DIFFERENTIELLES AVEC CABRI GEOMETRE.**

**Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel**

Julio Antonio Moreno Gordillo

► **To cite this version:**

Julio Antonio Moreno Gordillo. ARTICULATION DES REGISTRES GRAPHIQUE ET SYMBOLIQUE POUR L'ETUDE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC CABRI GEOMETRE. Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel. domain\_stic.educ. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2006. Français. NNT: . tel-00203681

**HAL Id: tel-00203681**

**<https://theses.hal.science/tel-00203681>**

Submitted on 11 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITE JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1

**THESE**  
présentée par  
**Julio Antonio MORENO GORDILLO**

Pour obtenir le titre de  
**Docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble 1**  
Spécialité : **Didactique des Mathématiques**

## **ARTICULATION DES REGISTRES GRAPHIQUE ET SYMBOLIQUE POUR L'ETUDE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC CABRI GEOMETRE**

Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel

Soutenue le 2 mai 2006

### Composition du jury

Fernando HITT, Professeur Université du Québec à Montréal	Rapporteur
Aline ROBERT, Professeur IUFM de Versailles	Rapporteur
Abdelhamid CHAACHOUA, Maître de Conférences IUFM de Grenoble	Examineur
Colette LABORDE, Professeur IUFM de Grenoble	Directeur
Bernard PARZYSZ, Professeur Emérite IUFM d'Orléans-Tours	Examineur

Thèse préparée au sein de l'équipe IAM – ERTe MAGI







# UNIVERSITE JOSEPH FOURIER – GRENOBLE 1

**THESE**  
présentée par  
**Julio Antonio MORENO GORDILLO**

Pour obtenir le titre de  
**Docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble 1**  
Spécialité : **Didactique des Mathématiques**

## **ARTICULATION DES REGISTRES GRAPHIQUE ET SYMBOLIQUE POUR L'ETUDE DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES AVEC CABRI GEOMETRE**

Analyse des difficultés des étudiants et du rôle du logiciel

Soutenu le 2 mai 2006

### Composition du jury

Fernando HITT, Professeur Université du Québec à Montréal	Rapporteur
Aline ROBERT, Professeur IUFM de Versailles	Rapporteur
Abdelhamid CHAACHOUA, Maître de Conférences IUFM de Grenoble	Examineur
Colette LABORDE, Professeur IUFM de Grenoble	Directeur
Bernard PARZYSZ, Professeur Emérite IUFM d'Orléans-Tours	Examineur

Thèse préparée au sein de l'équipe IAM – ERTe MAGI



## **R e m e r c i e m e n t s**

Cette thèse n'aurait pu voir le jour sans l'aide et la contribution de plusieurs institutions et personnes, que je tiens ici à remercier.

Je remercie tout d'abord, la DGEST (Direction Générale d'Education Supérieure Technologique) du Mexique de m'avoir accordé une bourse pour effectuer ma thèse en France.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance et à remercier Madame Colette LABORDE, directrice de ma thèse, qui m'a accueilli dans l'équipe IAM et m'a beaucoup aidé pendant tout le déroulement de cette recherche. C'est grâce à ses conseils, ses encouragements et sa disponibilité que ce travail a pu être mené à bien.

Je remercie vivement Madame Aline ROBERT et Monsieur Fernando HITT d'avoir bien voulu rapporter mon travail de thèse, et pour leur remarques et suggestions.

Mes remerciements vont également à Monsieur Bernard PARZYSZ, qui a bien voulu faire partie du jury et le présider, et à Monsieur Abdelhamid CHAACHOUA pour avoir accepté d'être membre du jury.

J'aimerais également exprimer toute ma gratitude à tous les membres de l'équipe IAM pour leur soutien tout au long de ma thèse. Je n'oublierai pas l'ambiance très agréable de travail avec vous.

Merci à Zilora ZOUAOUI, pour sa disponibilité et son attention apportées à mes petits problèmes.

Merci à Sylvia COUTAT d'avoir été toujours positive et disponible pour m'aider.

Merci à Sophie SOURY-LAVERGNE pour ses remarques sur mon travail, qui ont été très pertinentes.

Merci à Armando LANDA qui a toujours émis des avis constructifs sur mon travail et m'a sans cesse encouragé.

Merci à Seden TAPAN, Ruth RODRIGUEZ et à Angela RESTREPO de leur amitié et gentillesse.

Merci à Rossana FALCADE pour son soutien et ses encouragements donnés à tout moment, et très précieux dans les moments difficiles.

Merci à Martin ACOSTA pour son amitié et les échanges très enrichissants sur différents sujets.

Merci à Iranete LIMA pour son amitié, et sa motivation pour arriver presque en même temps que moi-même à finir sa thèse de doctorat.



Un grand merci également à Bernard GENEVES, Jérôme BORDIER, Christophe FOUCHER, Tristan BLANC-BRUDE pour leur sympathie, leur gentillesse et leur amitié.

Je voudrais remercier spécialement Salahattin ARSLAN pour le temps consacré à revoir mes premiers écrits, ses remarques et ses encouragements.

Merci à Ariane JAMET qui a relu cette thèse, en traquant soigneusement les erreurs linguistiques.

Merci à Bruno et Maryleine VILLARD pour leur amitié, et de nous avoir accueillis en France comme si nous étions de leur famille.

Merci à mon épouse, Fadia NIEVES SANTANA et à mes trois enfants, Uriel Yojanan, Fadia Rut et Janani Ajabael MORENO NIEVES, de m'avoir accompagné dans cette aventure. Très souvent, le temps dédié à la thèse a signifié le temps de mon absence... Mais j'espère que le fruit de notre expérience en France se révélera profitable pour toute la famille.

Merci à Octavio RIOS TERCERO pour son appui constant à Tuxtla Gutiérrez, avec toutes les démarches administratives qui m'obligèrent à m'absenter du lieu de travail.

Merci à ma tante Maria GONZALES SOLORZANO de m'avoir toujours encouragé et avoir cru que je réussirais cette thèse.

Enfin je voudrais remercier mes parents, Armando MORENO FLORES et Rosa GORDILLO SOLORZANO, ainsi que mes frères et sœurs Luis Armando, Alicia Vidaura et Sofía MORENO GORDILLO, pour leur soutien à distance mais indéfectible pendant mon séjour en France.





# Table des matières

<b>INTRODUCTION</b> .....	1
---------------------------	---

## PARTIE A

### CHAPITRE 1

#### Cadre théorique et problématique

INTRODUCTION .....	6
1.1. TRAVAUX DE REFERENCE.....	6
1.1.1. La faiblesse du développement d'une pensée flexible dans l'enseignement des mathématiques à l'Université.....	7
1.1.2. L'enseignement traditionnel des équations différentielles au niveau universitaire .....	9
1.1.3. Quelques difficultés des étudiants lors de l'étude des équations différentielles .....	10
1.1.4. Le fonctionnement du graphique dans l'enseignement secondaire et universitaire .....	13
1.2. LES OBJETS MATHÉMATIQUES DU CHAMP DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES .....	15
1.2.1. Quelques aspects épistémologiques relatifs aux équations différentielles .....	15
1.2.2. Registres de représentation .....	16
1.2.3. La notion de cadre .....	19
1.2.4. Le rôle des outils informatiques lors des efforts pour changer l'enseignement des équations différentielles.....	21
1.2.5. Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances...	22
1.3. NOTRE TRAVAIL.....	23
1.3.1. Les étudiants qui préparent le CAPES.....	24
1.3.2. Un environnement de géométrie dynamique comme élément intervenant dans l'organisation de milieux pour l'étude des équations différentielles .....	26
1.4. NOS HYPOTHESES DE RECHERCHE.....	33

### CHAPITRE 2

#### Méthodologie de recherche, conception et analyse a priori du dispositif expérimental

INTRODUCTION.....	36
2.1. METHODOLOGIE DE RECHERCHE.....	36

2.1.1.	L'ingénierie didactique .....	36
2.1.2.	Les principaux choix effectués .....	37
2.2.	LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL DE L'ANNEE 2003.....	42
2.2.1.	Le questionnaire initial.....	42
2.2.2.	Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$ .....	50
2.2.3.	Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles en géométrie dynamique.....	64
2.2.4.	Mise en équation différentielle d'une famille de tractrices en géométrie dynamique.....	74
2.3.	LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL DE L'ANNEE 2004.....	79
2.3.1.	Mise en équation de familles de courbes en papier/crayon.....	80
2.3.2.	Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien explicitement donné).....	83
2.3.3.	Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien n'étant pas explicitement donné).....	96

## PARTIE B

### CHAPITRE 3

#### L'expérimentation 2003

	LA MISE EN PLACE DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL.....	104
3.1.	LE QUESTIONNAIRE INITIAL.....	106
3.1.1.	Première partie du questionnaire initial.....	107
3.1.2.	Deuxième partie du questionnaire.....	110
3.1.3.	Troisième partie du questionnaire.....	116
3.1.4.	Quatrième partie du questionnaire.....	119
3.2.	ETUDE DESCRIPTIVE DES COURBES SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$ .....	123
3.2.1.	Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$ en papier/crayon.....	123
3.2.2.	Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$ en géométrie dynamique.....	137
3.3.	MISE EN EQUATION D'UNE FAMILLE D'EXPONENTIELLES EN GEOMETRIE DYNAMIQUE.....	156
3.3.1.	Le travail de l'ensemble de binômes.....	157
3.3.2.	La recherche de l'équation différentielle des exponentielles par les binômes choisis.....	160
3.3.3.	La justification de l'équation différentielle par les binômes choisis.....	178

3.4. LA MISE EN EQUATION DE UNE FAMILLE DE TRACTRICES EN GEOMETRIE DYNAMIQUE.....	186
3.4.1. Première phase : une première rencontre avec les tractrices...	187
3.4.2. Deuxième phase : le retour à la famille d'exponentielles.....	188
3.4.3. Troisième phase : le retour à la famille de tractrices (ensemble des binômes).....	193
3.4.4. Troisième phase : le retour à la famille de tractrices (binômes choisis).....	196

## CHAPITRE 4

### L'expérimentation 2004

LA MISE EN PLACE DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL.....	206
4.1. MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE DE FAMILLE DE COURBES EN PAPIER/CRAYON.....	208
4.1.1. Une famille d'exponentielles.....	208
4.1.2. Une famille de tractrices.....	213
4.2. L'ASSOCIATION D'UN VECTEUR DYNAMIQUE ET D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE (LIEN EXPLICITEMENT DONNE)	220
4.2.3. Le binôme $E'1/E'4$ .....	222
4.2.4. Le binôme $E'12/E'17$ .....	231
4.2.5. Le binôme $E'14/E'15$ .....	244
4.2.6. Bilan par le professeur .....	254
4.3. L'ASSOCIATION D'UN VECTEUR DYNAMIQUE ET D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE (LIEN N'ETANT PAS EXPLICITEMENT DONNE).....	254
4.2.3. Le binôme $E'1/E'4$ .....	256
4.2.4. Le binôme $E'12/E'17$ .....	263
4.2.5. Le binôme $E'14/E'15$ .....	271

## PARTIE C

## CHAPITRE 5

### Le bilan des expérimentations

INTRODUCTION .....	282
5.1. LES ETUDIANTS N'ARTICULENT PAS SPONTANEMENT DES REGISTRES DIFFERENTS DE REPRESENTATION.....	283
5.2. DES DIFFICULTES CONCERNANT LE TRAITEMENT GRAPHIQUE DES DONNEES GRAPHIQUES.....	284
5.2.1. Des difficultés pour traiter des données graphiques en papier/crayon.....	284
5.2.2. Des apports du logiciel pour le traitement des données graphiques.....	285
5.3. DES DIFFICULTES CONCERNANT L'INTERPRETATION	

MATHEMATIQUE DES DONNEES GRAPHIQUES.....	286
5.3.1. Des difficultés concernant le lien : équation de la droite tangente – équation différentielle.....	286
5.3.2. Des difficultés concernant le lien : équation différentielle – famille de solutions.....	288
5.3.3. Des difficultés concernant le passage : propriété numérique de la famille de courbes – équation différentielle.....	288
5.4. DES INDICES DU DEVELOPPEMENT D'UNE FLEXIBILITE POUR ARTICULER LES REGISTRES GRAPHIQUE ET SYMBOLIQUE.....	289
5.4.1. Des traces du développement d'une flexibilité pour articuler les registres graphique et symbolique, lors de la première expérimentation.....	289
5.4.2. Des traces du développement d'une flexibilité pour articuler les registres graphique et symbolique, lors de la deuxième expérimentation.....	290
5.5. LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL.....	294
 <b>CONCLUSION</b> .....	 297
 <b>Références bibliographiques</b> .....	 305
 <b>ANNEXES</b> .....	 311







# INTRODUCTION

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à l'étude des difficultés des étudiants de niveau avancé pour construire des liens entre des représentants graphiques et des représentants symboliques de certains objets du champ des équations différentielles. Nous avons aussi cherché à étudier les apports d'un logiciel de géométrie dynamique pour développer ce type de liens.

Tout d'abord, nous avons constaté que de nombreux travaux attestaient l'importance de la flexibilité de la pensée dans la conceptualisation et le progrès des étudiants en mathématiques. Néanmoins, l'enseignement universitaire semble ne pas lui accorder d'importance. Il suppose implicitement que le développement d'un tel type de compétences n'est pas à l'enjeu de l'enseignement, et qu'il peut se faire automatiquement.

Nous avons trouvé également que différentes recherches en didactique des mathématiques et de la physique témoignaient de la prédominance d'une approche algébrique dans l'enseignement au niveau universitaire des équations différentielles, malgré l'existence des approches numérique et qualitative de ce champ de connaissances. L'approche algébrique donne une vision partielle et limitée de ce domaine d'étude, les étudiants pensent que toutes les équations différentielles sont résolubles par des méthodes algébriques. Cette approche semble aussi devenir un obstacle pour la conceptualisation des notions de ce domaine, et elle empêche la mise en œuvre de stratégies différentes aux algébriques. En particulier, dans le contexte de l'approche qualitative des équations différentielles, l'articulation des registres graphique et symbolique des équations différentielles mobilise des connaissances de différents cadres, comme ceux des fonctions, de la géométrie analytique, de l'analyse, etc. Cette articulation nécessite en effet du traitement et de l'interprétation mathématiques de faits graphiques, notamment en raison du besoin de raisonner sur des fonctions dont on ne connaît pas l'expression symbolique.

Par ailleurs, nous avons constaté que les efforts actuels dans le sens d'un changement dans l'enseignement des équations différentielles, font appel d'une manière importante, à l'usage des outils informatiques. Or, des environnements informatiques comme ceux de la géométrie dynamique permettent de créer un contexte d'exploration et d'interprétation de phénomènes graphiques, à l'aide de la manipulation directe de divers représentants graphiques. Donc, à l'aide de nos travaux nous essayons d'apporter des éléments de réponse aux questions suivantes :

*Dans un environnement de géométrie dynamique, l'exploration des phénomènes graphiques liés aux représentants d'objets du champ des équations différentielles et leur mise en relation avec des connaissances de ce domaine, peuvent-elles contribuer au développement des compétences requises pour articuler le registre graphique et le registre symbolique ? Cette exploration et cette mise en relation peuvent-elles rendre problématique l'usage de connaissances élémentaires et contribuer à une évolution de ces connaissances ?*

---

Dans le premier chapitre, nous passons en revue quelques travaux concernant la flexibilité cognitive dans l'enseignement universitaire, et les caractéristiques de l'enseignement des équations différentielles. Nous faisons ensuite appel à certains outils didactiques théoriques, qui nous permettent de clarifier la problématique liée à la flexibilité pour articuler les registres graphique et symbolique dans une étude qualitative des équations différentielles. Puis, nous étudions les potentialités du logiciel Cabri II Plus pour ce type d'approche des équations différentielles. La dernière partie du chapitre contient nos hypothèses de recherche.

Le deuxième chapitre est consacré à la conception du dispositif expérimental et à l'analyse *a priori* des situations qui le composent. Le chapitre a été divisé en trois parties, la première dédiée à la méthodologie de recherche, et les deux dernières contenant les choix mathématiques et didactiques effectués ainsi que les connaissances pouvant être mises en œuvre, par les étudiants, dans chaque expérimentation réalisée (années 2003 et 2004).

Nous consacrons ensuite deux chapitres à l'étude des processus de dévolution et de résolution des situations proposées aux étudiants. Nous analysons les difficultés des étudiants ainsi que le rôle joué par le logiciel dans l'établissement de liens entre les représentants en jeu, le premier de ces deux chapitres se focalise sur l'expérimentation menée en 2003 et le deuxième sur l'expérimentation de 2004.

Dans le chapitre 5 et dernier, nous procédons à un bilan des deux expérimentations et nous mettons en évidence les difficultés rencontrées par les étudiants de CAPES. Nous effectuons aussi une brève analyse *a posteriori* du dispositif expérimental.

Finalement, dans la conclusion nous revenons sur les questions initialement posées et sur les éléments de réponse et les perspectives de recherche que notre travail apporte.

# **PARTIE A**

**CHAPITRE 1 : CADRE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE**

**CHAPITRE 2 : METHOLOGIE DE RECHERCHE, CONCEPTION  
ET ANALYSE A PRIORI DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL**



# CHAPITRE 1

## CADRE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE

INTRODUCTION.....	6
1.1. TRAVAUX DE REFERENCE.....	6
1.1.1. La faiblesse du développement d'une pensée flexible dans l'enseignement des mathématiques à l'Université.....	7
1.1.2. L'enseignement traditionnel des équations différentielles au niveau universitaire.....	9
1.1.3. Quelques difficultés des étudiants lors de l'étude des équations différentielles.....	10
1.1.4. Le fonctionnement du graphique dans l'enseignement secondaire et universitaire.....	13
1.2. LES OBJETS MATHÉMATIQUES DU CHAMP DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.....	15
1.2.1. Quelques aspects épistémologiques relatifs aux équations différentielles.....	15
1.2.2. Registres de représentation.....	16
1.2.3. La notion de cadre.....	20
1.2.4. Le rôle des outils informatiques lors des efforts pour changer l'enseignement des équations différentielles.....	22
1.2.5. Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances.....	23
1.3. NOTRE TRAVAIL.....	24
1.3.1. Les étudiants qui préparent le CAPES.....	25
1.3.2. Un environnement de géométrie dynamique comme élément intervenant dans l'organisation de milieu pour l'étude des équations différentielles.....	27
1.4. NOS HYPOTHESES DE RECHERCHE.....	33

## Introduction

L'enseignement des équations différentielles au niveau universitaire a été, depuis quelques années, au centre de plusieurs recherches en didactique des mathématiques et de la physique. Notre travail s'intéresse, dans ce domaine, spécifiquement à l'étude des difficultés d'étudiants avancés<sup>1</sup> pour construire des liens entre des représentants<sup>2</sup> graphiques et symboliques d'objets de ce champ de connaissances. Il concerne aussi l'étude des possibilités d'un logiciel de géométrie dynamique d'organiser des milieux qui favorisent le développement de ces liens.

Afin de préciser le contexte dans lequel se place notre recherche, dans ce chapitre nous présenterons d'abord quelques travaux qui décrivent de façon générale les caractéristiques de l'enseignement des mathématiques au niveau universitaire, et en particulier l'enseignement des équations différentielles. Nous nous appuierons ensuite sur certains outils théoriques qui nous servent à décrire les caractéristiques des objets mathématiques du champ des équations différentielles, ainsi qu'à interpréter et modéliser le fonctionnement des connaissances des étudiants lors de l'apprentissage de ce domaine d'étude. Nous passerons aussi en revue certains travaux spécifiques pour clarifier la problématique concernant l'articulation de registres de représentation d'objets du champ des équations différentielles. Enfin, nous présenterons nos hypothèses de recherche.

### 1.1. TRAVAUX DE REFERENCE

Nous présentons ici les résultats de quelques travaux de recherche qui nourrissent nos questions et nos hypothèses. Le choix a été fait de prendre ceux qui nous semblaient en accord avec notre problématique, et nous les avons organisés autour des aspects suivants :

- la faiblesse du développement d'une pensée flexible dans l'enseignement des mathématiques à l'Université ;
- l'enseignement traditionnel des équations différentielles au niveau universitaire ;
- quelques difficultés des étudiants lors de l'étude des équations différentielles ;
- le fonctionnement du registre graphique dans l'enseignement secondaire et universitaire.

---

<sup>1</sup> Il s'agit d'étudiants en préparation au CAPES (Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement Secondaire) ; nous précisons dans un autre paragraphe les caractéristiques de ces étudiants.

<sup>2</sup> Bloch (2000) considère que le terme « représentation » (Duval, 1993) peut prêter à confusion avec l'acte de représenter, alors elle utilise à sa place le terme « représentant », que nous avons adopté dans notre travail.

### **1.1.1. La faiblesse du développement d'une pensée flexible dans l'enseignement des mathématiques à l'Université**

La flexibilité cognitive est considérée, en didactique des mathématiques, comme un élément essentiel dans la conceptualisation et la réussite en mathématiques. Cette flexibilité implique la capacité de regarder un objet mathématique de différentes manières, de le faire fonctionner dans différents environnements conceptuels, de le reconnaître dans différents registres de représentation, etc. (Douady, 1992 ; Duval, 1993 ; Robert, 1998). Cependant, de nombreux travaux de recherche montrent qu'au niveau universitaire, l'enseignement ne favorise pas le développement d'une pensée flexible. En nous appuyant sur quelques-uns de ces travaux, nous allons essayer d'identifier des raisons de cette situation.

Une recherche portant sur les connaissances en mathématiques du premier cycle universitaire des étudiants de CAPES<sup>3</sup>, menée par J. Pian (1999), montre que :

- les étudiants ont peu de connaissances disponibles<sup>4</sup> ;
- les connaissances des étudiants sont très atomisées. Elles ne sont pas organisées en un système cohérent ;
- les étudiants perçoivent principalement le côté « outil » des notions mathématiques et ne semblent pas s'intéresser au côté « objet » de ces notions. De façon générale, ils réussissent bien les exercices lorsque la mise en fonctionnement des connaissances met en jeu des applications directes des définitions, théorèmes et propriétés.

L'auteur considère que cette absence de flexibilité cognitive des étudiants reflète des attentes dans l'enseignement à ce niveau, telles que :

*« Notre enseignement universitaire laisse la conceptualisation individuelle se faire au hasard. Il suppose qu'il suffit d'énoncer les concepts mathématiques, de proposer des problèmes et exercices d'application pour que les étudiants qui travaillent les assimilent. » (pp. 14-15)*

Pian (1999) considère qu'une des causes du manque de flexibilité cognitive des étudiants est due au fait que l'enseignement secondaire, puis universitaire favorise seulement un mode de pensée associatif. Dans ce mode, face à une tâche, les connaissances se mettent en fonctionnement mécaniquement de façon consécutive, sans s'appuyer sur la compréhension des notions mathématiques en jeu. L'auteur décrit ce mode de pensée en les termes suivants :

*« Si nous sommes occupés à effectuer des calculs ou à appliquer des méthodes connues, les savoir-faire utiles s'enchaînent dans un ordre cohérent résultant d'un apprentissage antérieur. La pensée est absorbée par l'exécution de procédures. En général les pensées s'enchaînent les*

---

<sup>3</sup> Nous présentons dans un autre paragraphe les caractéristiques de ces étudiants.

<sup>4</sup> Les différents niveaux de fonctionnement des connaissances (Robert, 1998) sont définis plus loin.



*unes derrière les autres. L'organisation des connaissances en réseau fait qu'une information en appelle une autre. Certaines informations ne sont pas reconnues comme relevant de la situation et sont écartées. D'autres sont retenues. Malgré tout, dans ce mode de fonctionnement la pensée est occupée essentiellement à accomplir une tâche et n'est pas mobilisée vers une recherche de sens. » (p. 19)*

Une des caractéristiques des tâches qui favorisent le mode de pensée associatif est qu'elles peuvent s'automatiser facilement. Pian (1999) considère que dans ce cas, l'étudiant *peut passer en revue la quasi-totalité des situations possibles de mise en application d'une notion*. Il peut aussi essayer de les mémoriser, mais cela ne signifie pas de faire une recherche de sens. L'auteur considère que la conceptualisation et la prise de sens en mathématiques reposent sur un mode de pensée différent de l'associatif. En s'appuyant sur Vergnaud (1999), Pian considère qu'il faut *organiser des perturbations pour changer le cours des associations automatisées*.

De son côté, A. Robert (1998) considère qu'à l'Université, les enseignants attendent que les étudiants organisent, par eux-mêmes, leurs connaissances et qu'ils les utilisent avec une certaine flexibilité.

Par ailleurs, G. Gueudet (2005) identifie quelques facteurs qui empêchent le développement de la flexibilité cognitive au niveau universitaire. En s'appuyant sur différentes recherches menées dans l'enseignement supérieur, elle signale parmi ces facteurs :

- *les conséquences de l'incomplétude des organisations mathématiques locales dans le secondaire* : l'enseignement à ce niveau privilégie un même type de tâches, qui impliquent normalement la mobilisation d'une seule technique. Ces tâches ne font pas appel à des activités d'interprétation et elles ne sont pas articulées. Il y a presque une absence de tâches ouvertes. En revanche, dans l'enseignement supérieur, les organisations mathématiques du secondaire sont supposées complètes et il n'y a pas un travail de reconstruction de celles-ci (Bosch, M. ; Fonseca, C. ; Gascon, J., 2004) ;
- *les modes de travail personnel des étudiants* : le travail des étudiants dépendant surtout des évaluations en vigueur à l'Université, il favorise un apprentissage superficiel, car il ne vise que la reproduction de techniques ciblées sur des exercices susceptibles d'apparaître à l'examen (Crawford, K. ; Gordon, S. ; Nicholas, J. ; Prosser, M., 1998 ; Lithner, J., 2003 ; Castela, C., 2004).

Le panorama esquissé par ces recherches montre de façon générale les caractéristiques de l'enseignement des mathématiques à l'Université. Il nous donne des indices sur l'existence d'un lien entre la non-prise en compte, par l'enseignement universitaire, du développement d'une pensée flexible chez les étudiants et des éventuelles carences dans les capacités des étudiants à la faire fonctionner spontanément.

Dans notre travail nous sommes intéressés particulièrement aux équations différentielles, et nous présentons ci-après quelques caractéristiques de l'enseignement de ce domaine d'étude.

### 1.1.2. *L'enseignement traditionnel des équations différentielles au niveau universitaire*

Une des recherches pionnières concernant l'enseignement universitaire des équations différentielles a été menée à l'Université de Lille 1 (Artigue, 1989a). Dans cette recherche, le but était d'étudier la viabilité d'un enseignement plus conforme à l'épistémologie de ce champ d'étude. Les analyses préalables montrent que dans le développement historique des équations différentielles, trois approches sont intervenues : **l'approche algébrique** qui privilégie les méthodes de résolution exacte pour arriver à des formules explicites des solutions, en termes d'expressions finies, en termes de développements en séries, ou par des expressions intégrales ; **l'approche numérique**, qui met l'accent sur la résolution numérique approchée ; et **l'approche qualitative ou graphique**, qui permet l'étude globale des courbes solutions. Pourtant et malgré l'existence de ces trois approches, cette recherche montre que l'enseignement traditionnel privilégie essentiellement une approche algébrique. Artigue (1989a) considère que ceci est dû à des contraintes, qu'elle classe en trois catégories :

- des contraintes épistémologiques : la longue domination du cadre algébrique dans l'évolution historique, le développement tardif et relativement autonome de l'étude qualitative, l'élémentarisation relativement récente de la théorie géométrique, le statut utilitaire et palliatif de la résolution numérique approchée ;
- des contraintes cognitives : la mobilité du point de vue nécessaire à l'approche qualitative, le niveau de maîtrise en analyse requis par les justifications dans les cadres numérique et géométrique ;
- des contraintes didactiques : la tentation de la réduction algorithmique, le statut infra-mathématique du cadre graphique, le mythe de la résolution complète.

La dominance de l'approche algébrique dans l'enseignement, soulignée dans l'étude précédente, semble persister dans l'enseignement actuel. Bien qu'il y ait eu des efforts pour réaliser un changement dans l'enseignement des équations différentielles (ces efforts étant liés à l'évolution des outils technologiques), les contraintes signalées par Artigue (1989a) pèsent encore fortement sur l'enseignement. Par exemple, dans la recherche menée par Saglam (2004) avec des étudiants de première année à l'Université Grenoble I, elle trouve que :

- l'étude du concept d'équation différentielle reste très liée à l'exécution de types de tâches concernant la résolution d'équations différentielles linéaires ;
- il y a une quasi-exclusivité du registre symbolique pour représenter et traiter les équations différentielles ;
- il y a un manque de lien avec d'autres disciplines, et une quasi-absence de travaux de modélisation de situations mathématiques ou d'autres domaines par les équations différentielles ;

- l'enjeu de l'enseignement est presque réduit à l'utilisation exclusive des méthodes algébriques de résolution.

Ce paradigme de l'enseignement universitaire des équations différentielles n'est pas exclusif en France, car des recherches effectuées dans d'autres pays convergent vers ce même constat. On identifie ce même phénomène au Mexique (Hernández, 1995), au Venezuela (Vera et Cemborain, 1999), aux Etats-Unis (Havre, 2000), en Espagne (Moreno et Azcárate, 2003), en Colombie (Castro et Pardo, 2004), etc.

Un enseignement centré sur une approche algébrique fournit aux étudiants une vision partielle du domaine d'étude, comme le signale Artigue (1992) :

*« Such an approach gives rise in students' minds to a restricted and unsatisfactory image of the field. For instance, most of them are convinced that there exists a recipe allowing the exact algebraic integration of each kind of differential equation and that the aim of research in this field is to complete the existing cook-book » (p. 112)*

Nous pouvons supposer qu'à l'Université, les étudiants qui se trouvent face à un enseignement des équations différentielles ne considérant que la seule approche algébrique risquent d'une part, de ne pas développer une pensée flexible sur les concepts de ce champ d'étude et d'autre part, de ne donner aucun sens aux concepts mathématiques en jeu.

Nous présentons dans les pages suivantes, en nous appuyant sur certains travaux de recherche, quelques difficultés des étudiants lors de l'étude des équations différentielles, dans le contexte d'enseignements qui mettent en jeu l'usage de représentants graphiques.

### **1.1.3. Quelques difficultés des étudiants lors de l'étude des équations différentielles**

Nous trouvons, dès la première ingénierie didactique organisée dans ce domaine (Artigue, 1989a), que la modification de l'enseignement traditionnel suscite de nouvelles difficultés chez les étudiants. Par exemple, l'introduction d'une approche qualitative exige des capacités telles que : envisager les tracés de courbes compatibles avec le régionnement du plan suivant le signe de la dérivée, ce qui demande une interaction forte entre le registre graphique des solutions et le registre symbolique des équations différentielles.

Bien que la mise en place de cette ingénierie montre l'accessibilité d'autres approches dans l'enseignement des équations différentielles, certaines difficultés concernant la justification qualitative sont apparues, et celles-ci ont été les plus problématiques pour les étudiants. Artigue (1989a) considère que le développement des capacités de justification, dans ce contexte, se heurte à des obstacles de nature différente, comme le besoin de faire fonctionner de manière fine des outils élémentaires de l'analyse (avec une faible probabilité de les trouver chez des étudiants qui commencent l'étude des équations différentielles).

A l'époque, l'auteur considérait que le travail des débutants sur les équations différentielles leur permettrait de développer des capacités de justification :

*« On peut estimer que le travail sur les équations différentielles va les mettre en condition de faire fonctionner ces outils, renforcer leur compétence dans ce domaine et que c'est l'un de ses objectifs » (p. 205)*

En ce qui concerne l'interprétation des données graphiques, quelques travaux menés aux Etats-Unis ont démontré que le jeu local/global entre un champ de vecteurs et la famille de courbes qui lui est associée, n'est pas évident pour les étudiants débutants. Rasmussen (1996) a trouvé que certains étudiants traçaient les courbes sans suivre la direction du champ de vecteurs. Par ailleurs, James et al. (1997) observent que les étudiants ne pensent pas aux solutions en tant que famille, mais comme à un ensemble discret de courbes qui satisfont à la propriété de tangence aux vecteurs du champ de vecteurs donné.

Dans une autre recherche menée aux Etats-Unis, dont l'objectif était d'étudier les difficultés d'établir des liens entre les équations différentielles et leurs solutions, Zandieh et MacDonald (1999) identifient des conceptions chez les étudiants, telles que : les solutions sont seulement des « choses » issues d'une expression symbolique de l'équation différentielle, à l'aide d'une intégration ; les solutions ne fournissent que des expressions symboliques qui permettent de déterminer une équation différentielle ; les solutions fournissent des expressions symboliques qui ne servent qu'à valider, par dérivation, l'équation différentielle. Les auteurs pensent que ces conceptions constituent des obstacles pour relier les représentants graphiques et symboliques.

Une autre recherche, conduite par Rasmussen (2001), lui a permis d'analyser les difficultés de six étudiants qui suivaient des cours sur les équations différentielles. Dans ce cas, il s'agissait d'un enseignement qui favorisait les approches algébrique, numérique et graphique, et dans lequel les étudiants complétaient leur formation à l'aide du logiciel informatique Mathematica. Quelques-unes des difficultés qu'il a repérées peuvent être formulées de la manière suivante :

- les étudiants établissent des liens partiels entre représentants graphiques associés aux équations différentielles. Par exemple, pour une équation différentielle autonome de la forme  $y' = f(y)$ , où les étudiants disposaient d'un représentant graphique de la fonction  $f$ , ils arrivent à partir de celui-ci à tracer des courbes solutions particulières (solutions constantes), ainsi qu'à distinguer si les solutions autour des solutions constantes sont stables ou non ; par contre, ils ont des difficultés pour interpréter le comportement global de la famille de courbes solutions ;
- dans des tâches d'association d'un champ de tangentes<sup>5</sup> avec une expression symbolique d'une équation différentielle, les étudiants interprètent de façon générale l'isocline zéro comme une solution ;

---

<sup>5</sup> Nous utilisons l'expression « champ de tangentes », dans le sens qu'elle a dans le contexte de l'approche qualitative des équations différentielles. Il s'agit d'un représentant graphique composé d'un ensemble de petits segments tracés sur une grille de points associés avec un système de coordonnées, chacun de ces segments ayant pour pente la pente de la droite tangente à la courbe solution qui passe par ce point.

- dans des tâches de tracé de courbes solutions à partir d'un champ de tangentes, les étudiants ne font pas le lien entre les courbes et les segments ; les courbes ne respectent pas le champ de tangentes.

Dans la citation ci-dessous de Rasmussen (2001) concernant les difficultés identifiées chez les étudiants, nous trouvons des indices qui suggèrent que l'absence de signification mathématique, peut trouver son origine dans le fait que les tâches proposées aux étudiants ne mettent en jeu que des connaissances au niveau technique. En effet, le traitement des représentants graphiques semble réduit à la mise en œuvre de certains algorithmes :

*« The findings just elaborated suggest that these students learned to carry out a graphical method of analysis without understanding fundamental concepts about solutions functions. Thus, instead of (or in addition to) mindless symbolic manipulation, students' activities might well be characterized as mindless graphical manipulation » (p.11)*

Par ailleurs, Saglam (2004) remarque aussi que l'absence d'autres approches non-algébriques semble entraîner une incompréhension vis-à-vis des diverses tâches, autres que celles liées à la résolution algébrique. Elle trouve que tous les étudiants recourent à des stratégies algébriques lorsqu'il s'agit d'étudier le comportement d'une courbe solution d'une équation différentielle, ou dans l'association d'une équation différentielle avec un champ de vecteurs<sup>6</sup>, même si dans les deux cas, le recours à une stratégie qualitative permettait de répondre facilement aux questions posées.

Enfin, il faut mentionner la recherche effectuée par Arslan (2005) avec des élèves de Terminale S. Il repère que l'accent mis sur l'approche algébrique risque de constituer un obstacle pour l'enseignement des autres approches, puisque les élèves utilisent l'approche algébrique dès que possible. Ce constat est confirmé par le fait que cette tendance s'observe davantage chez les redoublants (qui ont étudié les équations différentielles l'année précédente et connaissent donc la résolution algébrique) que chez les autres élèves. De même, Arslan (2005) trouve que les élèves ont des difficultés pour faire le lien entre l'expression symbolique de la droite tangente à une courbe solution, et l'expression symbolique de l'équation différentielle : ils pensent que l'expression symbolique de l'équation de la droite tangente doit vérifier l'équation différentielle. Une autre difficulté identifiée consiste à supposer que la solution générale de n'importe quelle équation différentielle, dans son expression symbolique, contient forcément la fonction exponentielle. Cette supposition résulte, en fait, non seulement de la prédominance de la résolution algébrique, mais également du choix de l'enseignement privilégiant les équations différentielles dont la solution générale contient la fonction exponentielle.

Les travaux mentionnés ci-dessus, nous montrent des différentes difficultés des étudiants lors de l'étude des équations différentielles. Nous avons remarqué de manière particulière les difficultés concernant l'articulation des registres graphique et symbolique. Il semblerait que pour les étudiants il y ait une absence de lien entre ces registres. Pourtant, la mise en relation entre les registres graphique et symbolique joue un rôle très important dans une étude

---

<sup>6</sup> L'expression « champ de vecteurs » est utilisée dans son sens courant dans le contexte de l'approche qualitative des équations différentielles. Elle désigne un représentant graphique d'une équation différentielle, où les segments d'un champ de tangentes sont remplacés par un trait se terminant par une flèche.

qualitative des équations différentielles. Nous supposons aussi que ces difficultés chez les étudiants reflètent la complexité de la pensée flexible qui requiert, entre autres, la mise en relation de différents représentants des objets de ce champ d'étude : par exemple, entre représentants graphiques de l'équation et des solutions (Rasmussen, 2001), ou entre représentants symboliques de l'équation différentielle et d'une tangente en un point d'une courbe solution (Arslan, 2005).

#### **1.1.4. Le fonctionnement du graphique dans l'enseignement secondaire et universitaire**

Dans notre travail, les représentants graphiques jouent un rôle important. Dans ce paragraphe nous présentons un bref aperçu de l'usage de ce type de représentants dans l'enseignement secondaire et universitaire en France, et de façon particulière dans l'enseignement de l'analyse.

##### ***Le graphique dans l'enseignement de l'analyse dans le secondaire***

Dans une étude faite dans le contexte de la conception et de la réalisation d'un logiciel, dont l'objectif était de favoriser un fonctionnement opérationnel des représentations graphiques des fonctions numériques d'une variable réelle, Chauvat (1997), en s'appuyant sur les travaux de Lacasta (1995), identifie trois modes de fonctionnement des représentants graphiques :

- *Le mode nomographique.* Ce mode correspond au fonctionnement du graphique comme un abaque et comme outil de calcul : « *Le graphique est alors un moyen effectif, algorithmisé, d'obtenir des résultats numériques (en général approchés) par des procédures locales* » (p. 25)
- *Le mode idéogrammatique.* Dans ce mode, le graphique fonctionne comme un idéogramme « [...] *comme signe graphique qui renvoie à une idée* » (p. 26)
- *Le mode opératoire.* Dans ce mode, le graphique fonctionne comme : « *processus interactif, non algorithmisé : la tâche ne peut pas être effectuée sans le graphique, mais la réponse n'est pas donnée directement par le graphique, elle doit être construite par le sujet en interaction avec le graphique, sans disposer d'un algorithme standardisé.* » (p.26)

Cette classification du fonctionnement des représentants graphiques nous donne des éléments pour analyser le fonctionnement du graphique, lors de l'étude des équations différentielles.

Dans le cas de l'usage des représentants graphiques au collège, Chauvat (1998) trouve que pendant le traitement didactique de la rencontre avec les notions de courbes et de fonctions, le recours aux modes idéogrammatiques ou nomographiques sont privilégiés.

En ce qui concerne l'enseignement de l'analyse au lycée, Bloch (2000, pp. 232-233) signale que *le graphique est vu comme l'aboutissement d'une suite d'opérations algorithmiques et non comme un outil de preuve ou de construction.* Elle remarque aussi que le graphique est utilisé seulement sous un mode idéogrammatique et que *son traitement est essentiellement*

*ponctuel*, ce qui constitue *un obstacle pour un fonctionnement global* des représentants graphiques.

Bloch (2002) souligne aussi un changement important à l'issue des dernières réformes, qui est l'accent mis sur les représentations graphiques. Elles sont considérées comme un moyen de rendre accessibles les notions mathématiques de ce champ d'étude. Cependant, l'auteur remarque une absence d'outils de validation des élèves pour pouvoir travailler avec les représentations graphiques sur des critères mathématiques :

*« Dans les faits, le travail proposé ne permet pas aux élèves de disposer d'outils pour déterminer des savoirs de l'analyse [...] cet enseignement ostensif ne permet pas aux élèves de travailler sur des critères mathématiques. En effet c'est le propre des énoncés mathématiques que de pouvoir dire quelle propriété mathématique ils déterminent, quels sont les objets mathématiques qui vérifient ces propriétés [...] Or le fait de ne pas disposer d'outils de validation relatifs à une propriété entraîne une incapacité à opérer avec cette propriété » (p. 28)*

### **Le graphique dans l'enseignement de l'analyse à l'Université**

En ce qui concerne l'enseignement universitaire, le fonctionnement du graphique semble ne pas être différent de celui du niveau secondaire. Dans sa recherche sur les fonctionnalités des représentations graphiques à l'Université, Maschietto (2001) trouve dans les manuels représentatifs d'analyse, un très faible recours aux représentations graphiques. *Les représentations graphiques sont le plus souvent un objet à produire dans un exercice*, et très souvent, *les représentations typiques relèvent du mode idéogrammatique*. Dans la partie expérimentale de sa recherche, où elle essaye d'identifier les fonctionnalités du graphique lors de la résolution de problèmes, les résultats confirment un recours quasi-total au mode idéogrammatique. Elle trouve que les étudiants sont très mal préparés à exercer efficacement les fonctionnalités des représentations graphiques :

*« En particulier, ils ont du mal à se départir de la contingence des graphiques tracés, vis-à-vis de propriétés comme la continuité [...] Or une sensibilité à cette contingence devient, au niveau universitaire, tout à fait indispensable, compte tenu de la généralité envisagée. Elle est en revanche visible, malgré le peu d'usage de graphiques, dans les productions des mathématiciens. » (p. 153)*

### **Conclusion**

Les études précédentes montrent de façon générale que dans l'enseignement secondaire et universitaire, les représentations graphiques fonctionnent majoritairement dans le mode idéogrammatique, et ne jouent pratiquement aucun rôle dans l'activité mathématique. Dans notre étude, grâce aux fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique nous envisageons de faire fonctionner le graphique dans différentes situations selon un mode opératoire (nous présenterons plus loin un paragraphe dédié à ce logiciel).

Dans les pages suivantes nous présenterons les particularités des objets du champ des équations différentielles. Nous essayerons aussi de présenter, d'une manière plus précise, la problématique que suscite la mise en relation des registres graphique et symbolique.

## 1.2. LES OBJETS MATHÉMATIQUES DU CHAMP DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Les équations différentielles se caractérisent par le fait qu'elles constituent un champ de connaissances. Dans ce champ d'étude intervient aussi bien un vaste réseau d'objets mathématiques de différents domaines qu'un ensemble de propriétés et de théorèmes sur ces objets.

Nous présentons, dans un premier temps, certains des aspects épistémologiques relatifs aux équations différentielles. Il est possible que certaines des spécificités concernant la nature de ces objets mathématiques puissent, éventuellement, avoir des liens avec les difficultés des étudiants lors de l'étude de ce champ de connaissances.

### 1.2.1. Quelques aspects épistémologiques relatifs aux équations différentielles

D'abord, nous signalons que les équations différentielles sont des relations qui portent sur des dérivées de fonctions inconnues. Nous remarquons une différence concernant les équations numériques où pour ces dernières les inconnues sont des nombres, tandis que pour les équations différentielles il s'agit de fonctions. Pour les étudiants débutants il s'agit d'une rupture importante, car c'est la première fois qu'ils se retrouvent face à des équations fonctionnelles.

Un autre aspect important à prendre en compte lors de l'étude des équations différentielles concerne le fait que leurs solutions constituent une famille de fonctions. Cette particularité des équations différentielles nécessite aussi un changement conceptuel important, car habituellement dans l'enseignement secondaire, on ne travaille que sur des équations ayant un nombre fini de solutions.

Par ailleurs, dans le contexte d'une étude qualitative d'équations différentielles de la forme  $y'=f(x,y)$ , où  $f$  est une fonction numérique à deux variables réelles, il faut prendre en compte le fait qu'elles mettent en jeu deux types de fonctions : la fonction numérique  $y$  de variable réelle  $x$  et la fonction numérique  $f$  à deux variables réelles  $(x,y)$ . Les fonctions  $f$  et  $y$  permettent de considérer l'équation différentielle  $y'=f(x,y)$  sous un double aspect :

- *Graphique* : où l'équation différentielle est associée à un champ de tangentes,  $f(x,y)$  étant la pente de la droite tangente qui passe par le point de coordonnées  $(x,y)$ . Les courbes du plan qui ont en chacun de leurs points  $(x,y)$  une tangente dont la pente est justement  $f(x,y)$  sont dites courbes intégrales ou courbes solutions de l'équation différentielle ;
- *Fonctionnel* : où l'équation différentielle est associée à des fonctions qui la vérifient. Une fonction  $u$  est solution de l'équation différentielle si elle est dérivable et si dans



son domaine de définition elle vérifie  $u' = f(x, u(x))$ . Chercher les fonctions solutions  $u$ , c'est résoudre l'équation différentielle.

(Rogalski, 1987, p.6)

En ce qui concerne la caractérisation des objets du champ d'étude des équations différentielles, nous utilisons les « registres de représentation » et les « cadres ». Nous présentons, brièvement ci-après, ces notions théoriques ainsi que l'usage que nous en faisons dans notre travail.

### 1.2.2. Registres de représentation

Duval (1993) considère que pour rendre accessible la perception des objets mathématiques, il faut des représentants. Il appelle **sémiosis** « l'appréhension, ou la production d'une représentation sémiotique » et **noésis** « l'appréhension conceptuelle d'un objet ». Cet auteur considère qu'« il n'y a pas de noésis sans sémiotis », ce qui montre le rôle fondamental de la sémiotis dans la conceptualisation des objets mathématiques. Il remarque aussi l'importance du recours à plusieurs registres de représentation et la reconnaissance des objets mathématiques dans ces registres, ce qui permet de ne pas les confondre avec leurs représentations :

*« La coordination de plusieurs registres de représentation sémiotique apparaît fondamentale pour une appréhension conceptuelle des objets : il faut que l'objet ne soit pas confondu avec ses représentations et qu'il soit reconnu dans chacune de ses représentations possibles. » (p. 40)*

Un système sémiotique est défini par Duval (1993) comme un registre de représentation, s'il permet les trois activités cognitives suivantes :

- « 1. La formation d'une représentation identifiable comme une représentation d'un registre donné,*
- 2. Le traitement d'une représentation est la transformation de cette représentation dans le registre même où elle a été formée. Le traitement est une transformation interne à un registre.*
- 3. La conversion d'une représentation est la transformation de cette représentation en une représentation d'un autre registre, en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. »*  
*(p. 41-42)*

Par rapport au champ des équations différentielles, Arslan (2005) identifie, en s'appuyant sur une analyse de manuels de Terminale S, les registres : algébrique, graphique, tableau de variations et intrinsèque. Nous retiendrons pour notre étude les registres algébrique et graphique. Et nous préférons appeler « registre symbolique » ce qui est appelé registre algébrique par Arslan, afin de bien distinguer l'approche algébrique des équations différentielles du registre symbolique. Nous considérerons aussi le registre numérique et le registre discursif. Dans le Tableau 3 ci-contre, nous explicitons quelques objets mathématiques de notre domaine d'intérêt ainsi que leurs représentants dans ces registres :

Objet mathématique	Représentant dans les registres												
	Symbolique	Graphique	Numérique		Discursif								
Equation différentielle	Expression symbolique. Par exemple $y'=f(x,y)$ , $F(x,y,y')=0$	Champ de tangentes ou champ de vecteurs	Tableau de valeurs Par exemple de la forme : <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>(x_i, y_i)</math></td> <td><math>f(x_i, y_i)</math></td> </tr> <tr> <td>.</td> <td>.</td> </tr> <tr> <td>.</td> <td>.</td> </tr> <tr> <td>.</td> <td>.</td> </tr> </table>		$(x_i, y_i)$	$f(x_i, y_i)$	.	.	.	.	.	.	Expression de la langue naturelle
$(x_i, y_i)$	$f(x_i, y_i)$												
.	.												
.	.												
.	.												
Solution	Expression symbolique. Par exemple $y=f(x)$	Courbe dans un système de coordonnées	Tableau de valeurs Par exemple <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x_i</math></td> <td><math>f(x_i)</math></td> </tr> <tr> <td>.</td> <td>.</td> </tr> <tr> <td>.</td> <td>.</td> </tr> <tr> <td>.</td> <td>.</td> </tr> </table>		$x_i$	$f(x_i)$	.	.	.	.	.	.	Expression de la langue naturelle
$x_i$	$f(x_i)$												
.	.												
.	.												
.	.												
Droite tangente en un point d'une courbe solution	Expression symbolique. Par exemple : $y_T = y'(x_i)(x_T - x_i) + y_i$ où $(x_i, y_i)$ est un point de la courbe	Représentant de la droite tangente en un point d'une courbe solution (dans un système de coordonnées)	Tableau de valeurs Par exemple <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td><math>x_{Ti}</math></td> <td><math>y_{Ti}</math></td> </tr> <tr> <td>.</td> <td>.</td> </tr> <tr> <td>.</td> <td>.</td> </tr> <tr> <td>.</td> <td>.</td> </tr> </table>		$x_{Ti}$	$y_{Ti}$	.	.	.	.	.	.	Expression de la langue naturelle
$x_{Ti}$	$y_{Ti}$												
.	.												
.	.												
.	.												
Isocline zéro	$f(x,y)=0$ pour une équation de la forme $y'=f(x,y)$	Courbe d'équation $f(x,y)=0$			Expression de la langue naturelle								

Tableau 3 : Représentants d'objets du champ des équations différentielles

### **Les passages entre registres de représentation favorisés par l'enseignement traditionnel**

Pour avoir une idée des interactions entre représentants des registres graphique et symbolique des équations différentielles que l'enseignement universitaire habituel prend en compte, nous nous appuyons sur l'analyse praxéologique faite par Saglam (2004). Elle classe les exercices proposés aux étudiants de première année de DEUG (en dix séances de cours de 90 minutes), dans la filière des sciences de la matière, en 12 types de tâches différents (cf. Tableau 4, page ci-après). Ces tâches concernent les équations différentielles linéaires du premier et du second ordres :

Type de tâches	Taux d'apparition
T <sub>1</sub> : Trouver la famille des fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre	37,6 %
T <sub>2</sub> : Trouver une seule solution vérifiant une équation différentielle linéaire du premier ordre	2,6 %
T <sub>3</sub> : Trouver la famille des fonctions solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre	25,7 %
T <sub>4</sub> : Vérifier si une famille de fonctions est bien solution d'une équation différentielle	1,7 %
T <sub>5</sub> : Tracer des courbes solutions d'une équation différentielle	0,8 %
T <sub>6</sub> : Résoudre un problème décrit par une équation différentielle	6,8 %
T <sub>7</sub> : Démontrer que deux solutions données d'une équation différentielle du second ordre sont indépendantes	3,4 %
T <sub>8</sub> : Choisir le champ de vecteurs d'une équation différentielle linéaire du premier ordre	3,4 %
T <sub>9</sub> : Trouver l'ensemble des solutions d'une équation différentielle dont le portrait de phase est connu	1,7 %
T <sub>10</sub> : Etudier le comportement des fonctions solutions d'une équation différentielle dont le champ de vecteurs tangents est connu	3,4 %
T <sub>11</sub> : Trouver une équation différentielle dont la famille des solutions est connue	5,2 %
T <sub>12</sub> : Préciser la nature d'une équation différentielle	7,7 %

Tableau 4 : Des tâches sur les équations différentielles en première année d'Université

Nous constatons qu'excepté les tâches T<sub>6</sub>, T<sub>7</sub> et T<sub>12</sub> qui représentent 17,9 % des exercices proposés, les autres tâches sont internes à un registre, ou mettent en relation les registres graphique et symbolique des équations différentielles. Dans le schéma de la figure 1 ci-dessous, nous montrons les interactions suscitées par ces dernières tâches :

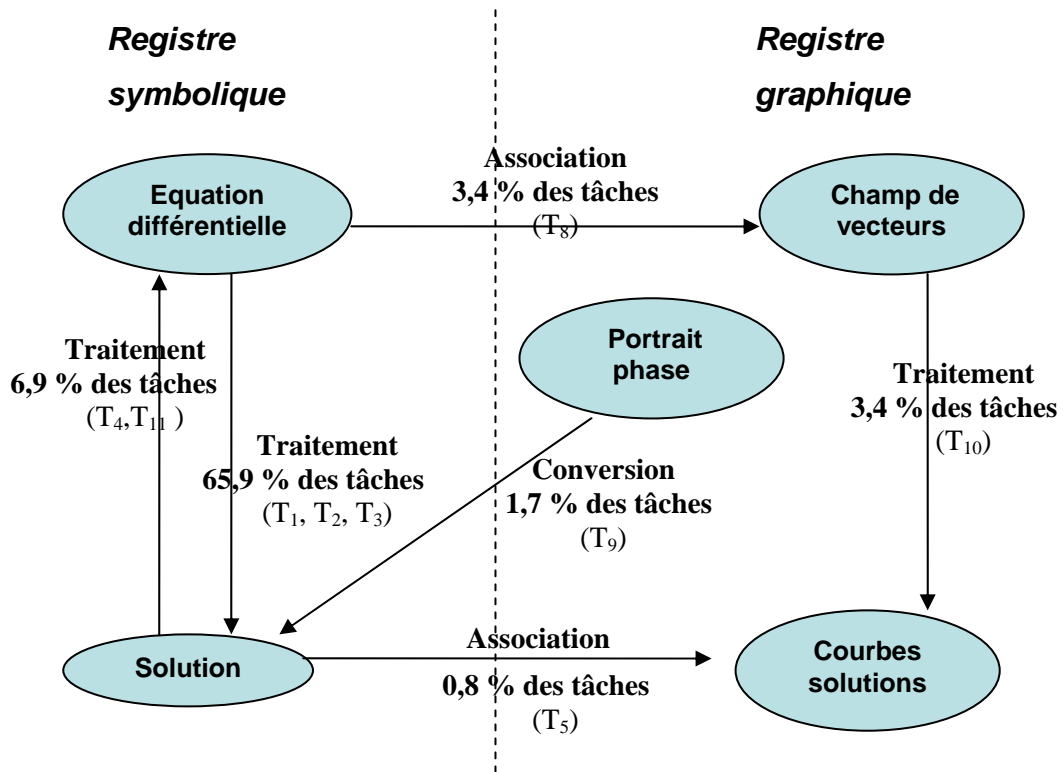


Fig. 1 : L'articulation des registres graphique et symbolique dans l'enseignement traditionnel des équations différentielles à l'Université

Nous remarquons que 72,8% des tâches sont consacrées au traitement des représentants dans le registre symbolique (tâches  $T_1, T_2, T_3, T_4, T_{11}$ ), tandis que 9,3% font intervenir le registre graphique (tâches  $T_5, T_8, T_9, T_{10}$ ). Cette étude nous montre que dans l'enseignement traditionnel, le registre symbolique est fortement privilégié et que même si le recours au registre graphique est pris en compte, on remarque la faiblesse des interactions entre les registres graphique et symbolique. Nous trouvons aussi, à partir de ce travail (Saglam, 2004), que le recours au registre graphique s'effectue plutôt dans le mode idéogrammatique : par exemple, dans les tâches du type  $T_5$ , les représentants graphiques des solutions sont des objets à produire après la résolution algébrique ; dans les tâches du type  $T_9$ , l'enjeu est de reconnaître une expression symbolique associée avec la forme de la courbe solution et d'appliquer une technique algébrique pour parvenir à l'expression symbolique des solutions ; dans les tâches du type  $T_{10}$ , l'étude du comportement des courbes solutions peut s'appuyer aussi sur l'expression symbolique des solutions.

Cette analyse nous permet de constater que dans le contexte d'un enseignement traditionnel, le passage du registre symbolique des équations différentielles vers le registre graphique des solutions est réalisé pratiquement dans un seul sens : du registre symbolique vers le registre graphique. Par contre, le passage dans le sens inverse (à savoir du symbolique au graphique) est presque inexistant. Différents travaux de recherche (notamment dans le domaine des fonctions) ont montré des difficultés des élèves à réaliser ce type de passage (Duval, 1988 ; Hitt, 2003 ; etc.). Dans le cas des équations différentielles, la complexité pour passer du registre graphique vers le registre symbolique s'accroît, du fait que les informations tirées du registre graphique doivent être interprétées mathématiquement en termes de dérivées des solutions. Ce qui demande la mise en œuvre de connaissances de différents domaines (géométrie analytique, fonctions, analyse) pour lier les objets mathématiques en jeu.

### 1.2.3. La notion de cadre

La notion de « cadre » nous permet de faire la distinction entre les différents domaines mathématiques qui interviennent dans le champ des équations différentielles. Elle a été introduite par Douady (1992) :

*« Un cadre est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre les objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales associées à ces objets et à ces relations. Ces images jouent un rôle essentiel dans le fonctionnement comme outil des objets du cadre. Deux cadres peuvent comporter les mêmes objets et différer par les images mentales et la problématique développée » (p. 135)*

En ce qui concerne la distinction entre *cadre* et *registre de représentation*, Perrin-Glorian (2001) donne cette explication :

*« Duval (1995) considère les représentations sémiotiques d'un point de vue cognitif général qui n'est pas spécifique des mathématiques. Elles remplissent des fonctions de communication, d'objectivation et de traitement. [...] Or, le traitement sur les objets se fait dans un cadre : le traitement sur les objets et les représentations sont intrinsèquement liés. Ce sont des propriétés des objets du cadre, des définitions et des théorèmes qui valident et permettent de produire les règles de traitement dans les registres de représentation. » (pp. 64-65)*

Dans le champ des équations différentielles, nous distinguons plusieurs cadres : le cadre des fonctions, le cadre de l'analyse, le cadre de la géométrie analytique, le cadre des équations différentielles ordinaires du premier ordre, etc. Dans le Tableau 5 ci-dessous, nous montrons trois objets mathématiques du champ des équations différentielles, le cadre auquel ils appartiennent, ainsi que leurs représentants dans des différents registres :

Objet mathématique	Cadre	Représentant dans les registres			
		Symbolique	Graphique	Numérique	Discursif
Solutions	Fonctions	Expression symbolique. Par exemple $y=f(x)$	Courbe dans un système de coordonnées	Tableau de valeurs	Expression de la langue naturelle
Droite tangente en un point d'une courbe solution	Géométrie analytique	Expression symbolique	Représentant graphique	Tableau de valeurs	Expression de la langue naturelle
Isocline zéro	Fonctions	$f(x,y)=0$	Courbe d'équation $f(x,y)=0$		Expression de la langue naturelle

Tableau 5 : Caractérisation d'objets du champ des équations différentielles en termes de cadres et de registres

#### **Liens entre équations différentielles et représentants graphiques de leurs solutions**

Nous avons déjà remarqué que dans le contexte de l'enseignement traditionnel des équations différentielles, les liens entre registre symbolique et registre graphique sont rares, et pratiquement dans un seul sens (symbolique vers graphique). De façon générale, étant donnée

une équation différentielle, on applique une méthode de résolution algébrique pour arriver à l'expression symbolique des solutions et quelquefois, à partir de cette expression symbolique on construit un représentant graphique des solutions. Ce représentant graphique constitue normalement la dernière étape du procédé de résolution mis en œuvre. Nous remarquons que dans ce cas, le fonctionnement des représentants graphiques se fait principalement dans un mode idéogrammatique et qu'ils servent seulement à illustrer les fonctions solutions. Par ailleurs, la production de ces représentants graphiques ne requiert pas d'établir un lien direct entre l'équation différentielle et le représentant graphique des solutions : on passe de l'expression symbolique des fonctions solutions vers leurs représentants graphiques.

En revanche, lors de l'étude qualitative des équations différentielles il y a nécessité d'aller et retours entre le registre graphique des solutions et le registre symbolique de l'équation différentielle. Nous remarquons que dans le cas de l'étude qualitative des équations différentielles, très souvent on ne dispose pas des expressions symboliques des solutions, et il faut donc raisonner sur des fonctions dont on connaît seulement des informations relatives à leur dérivée. Nous pouvons apprécier, dans la citation ci-dessous d'Artigue (1989a), certains aspects des raisonnements requis par les mises en relation entre les registres graphique et symbolique :

*« on extrait du cadre graphique des informations sur les courbes associées aux solutions, traduites algébriquement et réinjectées dans l'équation, ces informations se traduisent par des renseignements sur les dérivées des solutions que l'on va interpréter à leur tour graphiquement ... » (p. 187)*

Pour illustrer quelques-unes des interactions, en termes de cadres et de registres, que l'étude qualitative des équations différentielles peut susciter, nous prenons le cas suivant : pour établir un lien entre un représentant symbolique de la forme  $y' = f(x,y)$  et un représentant graphique des courbes solutions, il faudrait mettre en œuvre des connaissances de divers cadres. Par exemple, pour interpréter  $y'$  comme étant la pente de la droite tangente en un point P de coordonnées  $(x_P, y_P)$ , il faut mobiliser certaines connaissances du cadre des fonctions ( $f$  doit être interprétée comme une fonction à deux variables réelles, etc.) et de l'analyse ( $y'$  doit être interprétée comme la pente de la droite tangente, etc.). Lors de cette mise en relation entre registre graphique et registre symbolique, différents objets interviennent, tels que : points, coordonnées, courbes représentatives de solutions, fonctions à deux variables, pentes, droites tangentes, dérivées, etc. Par ailleurs, si l'on a besoin d'étudier le sens de variation d'une solution particulière  $y^*$  en P, il est nécessaire d'avoir des informations sur  $y^{*'}(x_P)$ , mais il faut les obtenir à partir de  $y' = f(x,y)$ ; donc ce type de tâche problématise les liens entre ces fonctions.

L'exemple précédent montre succinctement la richesse d'interactions entre cadres et registres de représentation, qui peut donner lieu à l'étude qualitative des équations différentielles. Néanmoins, une des contraintes de la mise en œuvre de ce type d'approche dans l'enseignement, tient aux besoins de traitement et de production des divers représentants graphiques en jeu. Nous présentons, dans le paragraphe suivant, certains éléments du rôle des outils informatiques dans les efforts pour modifier l'enseignement des équations différentielles, ces efforts visant notamment à l'incorporation des trois approches (algébrique, numérique et qualitative) dans l'enseignement.

### **1.2.4. Le rôle des outils informatiques dans les efforts pour changer l'enseignement des équations différentielles**

Nous observons dès le début du 20<sup>e</sup> siècle, des efforts comme ceux réalisés par Brodetsky (1919-1920) pour incorporer dans l'enseignement l'étude graphique des équations différentielles, à l'aide de champs de tangentes tracés à la main. Cependant, des contraintes de différentes sortes n'ont pas permis le développement de ce type de techniques graphiques, en raison de difficultés comme : le temps et la complexité des tâches incombant aux étudiants pour construire des représentants graphiques associés aux équations différentielles ; la légitimité du cadre graphique ; etc.

Pourtant, plus récemment le développement des outils informatiques a joué en faveur d'un changement dans l'enseignement des équations différentielles. Par exemple, dans l'organisation de l'ingénierie didactique mise en place à l'Université de Lille en 1989, l'un des choix a été le recours à l'outil informatique. Dans cette recherche, l'informatique est considérée comme un instrument de « *décomplexification didactique* ». En effet, l'approche qualitative entraîne de nouveaux besoins qui n'existent pas dans l'approche algébrique. Par exemple, l'étude des propriétés globales ou locales des courbes solutions suppose de disposer de divers représentants graphiques de celles-ci. Mais en papier/crayon, le travail pour les réaliser peut ne pas être envisageable, d'où l'intérêt de faciliter ce type de tâche par un moyen comme ici, l'informatique. Les résultats de cette recherche montrent que l'utilisation de l'ordinateur a rendu accessible la nouvelle approche, et a permis de réduire la complexité des tâches qui seraient restées à la charge des étudiants.

Dans le mouvement de réforme de l'enseignement de l'analyse aux Etats-Unis, amorcé dans les années quatre-vingt, l'utilisation des technologies informatiques s'inscrit au cœur de cette réforme. L'un des objectifs est le recours aux outils informatiques pour favoriser l'enseignement de pratiques plus expérimentales. Ce contexte de réforme a encouragé, dans le domaine des équations différentielles, la parution de nombreux ouvrages tels ceux de Hubbard et West (1991), Blanchard, Devaney, et Hall (1998), Borrelli et Coleman (1998), Lomen et Lovelock (1999), Diacu (2000), etc., qui témoignent des efforts déployés pour intégrer l'informatique (considérée comme un outil favorisant l'accès aux approches algébrique, numérique et qualitative, ainsi qu'à la modélisation) à l'étude des équations différentielles.

Nous trouvons aussi quelques voix (Rasmussen, 1996 ; Sabella, 1996 ; Zandieh et McDonald, 1999) qui s'élèvent pour remarquer une quasi-absence de travaux de recherche dans ce domaine. Ces auteurs considèrent que l'effectivité d'une réforme de l'enseignement des équations différentielles demande des recherches qui prennent en compte les difficultés des étudiants, et aussi leur lien avec l'intégration de la technologie.

Dans notre travail, notre intérêt est d'étudier les difficultés des étudiants et le rôle d'un logiciel de géométrie dynamique, Cabri Géomètre, dans l'étude des équations différentielles. Et en particulier, lors de l'articulation des registres graphique et symbolique. Nous présenterons plus loin les particularités de notre recherche.

### 1.2.5. Les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances

Nous avons déjà constaté l'importance des connaissances dans divers cadres, lorsqu'il s'agit d'articuler des représentants d'objets mathématiques du champ des équations différentielles. En particulier pour mettre en relation des objets des registres graphique et symbolique, ces connaissances jouent principalement deux rôles : elles servent soit à interpréter mathématiquement les données graphiques en termes de la dérivée des solutions ; soit à interpréter graphiquement des informations sur les fonctions solutions pour lesquelles on ne dispose que de leur dérivée.

Pour rendre compte du fonctionnement des connaissances lors de la mise en relation des registres graphique et symbolique des équations différentielles, nous faisons appel aux trois niveaux définis par A. Robert (1998) :

- Le niveau technique : *ce niveau correspond à des mises en fonctionnement indiquées, isolées, mettant en jeu des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules, etc. [...] Cela concerne plutôt le fonctionnement des outils (y compris des définitions)*
- Le niveau mobilisable : *ce niveau correspond à des mises en fonctionnement plus larges : encore indiquées, mais dépassant l'application simple d'une propriété à la fois [...] ce niveau teste une mise en fonctionnement où existe un début de juxtaposition de savoirs dans un domaine donné, voire d'organisation [...] un savoir est dit mobilisable si, lorsqu'il est bien identifié, il est bien utilisé par l'élève ...*
- Le niveau disponible : *ce niveau correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indication, d'aller rechercher soi-même dans ses connaissances ce qui peut intervenir. Par exemple, pouvoir donner des contre-exemples [...] changer de cadres sans suggestion [...] appliquer des méthodes non prévues ... (pp. 165-167)*

Les liens entre le mode de pensée associatif et les niveaux technique, mobilisable et disponible de mise en fonctionnement de connaissances, sont décrits par Pian (1999) :

*« Le niveau technique serait l'expression d'un penser associatif automatisé. Il ne peut alors permettre à lui seul le développement de la conceptualisation. Les deux autres niveaux correspondent à des mises en application de connaissances où le penser associatif automatisé ne fait plus l'affaire. » (p.26)*

Compte tenu de l'abondance d'interactions entre cadres et registres lors de l'étude qualitative des équations différentielles, et de la complexité des tâches cognitives que cette étude entraîne, nous supposons que la conception de situations favorisant l'établissement de liens entre les registres graphique et symbolique (même pour des situations simples du point de vue mathématique), peut susciter le fonctionnement de connaissances des divers cadres concernés aux niveaux mobilisable et disponible.



### 1.3. NOTRE TRAVAIL

Les parties précédentes ont donné un aperçu global de l'enseignement actuel des équations différentielles, ainsi que de la dominance de l'approche algébrique. En ce qui concerne l'articulation des registres graphique et symbolique, nous avons constaté que dans le contexte d'un enseignement traditionnel, il y a une quasi-absence de liens entre ces registres. Nous avons aussi remarqué certaines difficultés des étudiants lorsqu'il s'agit de mettre en jeu des représentants graphiques des équations différentielles. En particulier, nous avons constaté l'importance des interactions entre cadres et registres de représentation, lors de l'étude qualitative des équations différentielles. Compte tenu de ces constats, nous avons fondé notre recherche sur l'**hypothèse de travail** suivante :

*« L'articulation des registres graphique et symbolique des équations différentielles n'est pas naturelle. Bien au contraire, elle demande le développement de compétences que les étudiants ne possèdent pas spontanément. »*

Par ailleurs, nous avons pris en compte le fait que dans tous les efforts entrepris pour modifier l'enseignement des équations différentielles, les outils informatiques ont joué un rôle important. De façon particulière dans notre travail, nous avons envisagé l'organisation de situations permettant d'articuler les registres graphique et symbolique des équations différentielles, à l'aide du logiciel de géométrie dynamique Cabri Géomètre. Dans notre recherche nous essayerons donc de donner des éléments de réponse aux questions suivantes :

*Dans un environnement de géométrie dynamique, l'exploration des phénomènes graphiques liés aux représentants d'objets du champ des équations différentielles et leur mise en relation avec des connaissances dans ce domaine, peuvent-elles contribuer au développement des compétences requises pour articuler le registre graphique et le registre symbolique ? Cette exploration et cette mise en relation peuvent-elles rendre problématique l'usage de connaissances élémentaires et contribuer à une évolution de ces connaissances ?*

En ce qui concerne l'usage des outils informatiques pour l'étude des équations différentielles, dans les travaux précédents les étudiants ont utilisé soit des logiciels de calcul formel, soit des logiciels spécifiques dédiés aux équations différentielles. Ayant fait le choix d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique, nous reviendrons dans un paragraphe ultérieur sur les spécificités de ce logiciel, qui nous ont amenés à le choisir pour cette étude.

Un autre aspect qui distingue notre travail des autres recherches dans le même domaine, c'est le choix de travailler avec des étudiants qui préparent le CAPES. Des recherches antérieures se sont focalisées sur l'étude des difficultés des étudiants débutants relatives aux équations différentielles (Artigue, 1989a ; Zandieh et MacDonald, 1999 ; Rasmussen, 2001, Saglam, 2004), ou des difficultés des élèves de Terminale de lycée (Arslan, 2005). Les étudiants de CAPES ont un rapport aux mathématiques différent de celui des étudiants débutants ou des élèves de Terminale. Etudiants en fin d'études, ils sont censés ne plus apprendre de nouvelles notions mathématiques. Donc, les expérimentations avec ce type d'étudiants nous permettront de tester nos hypothèses de manière renforcée :

- les difficultés de ces étudiants en fin de cursus seront fortement révélatrices des effets d'un enseignement traditionnel ;
- les évolutions possibles de ces étudiants dans la conceptualisation des notions mathématiques en jeu pourront donner des pistes sur les conditions didactiques à prendre en compte, lors d'un changement dans l'enseignement des équations différentielles.

Dans le paragraphe suivant, nous décrivons de façon plus précise quelques caractéristiques des étudiants de CAPES.

### **1.3.1. Les étudiants qui préparent le CAPES**

Le CAPES (Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement Secondaire) certifie les professeurs destinés à exercer dans les collèges et les lycées. Pour avoir accès au concours du CAPES, il faut suivre une formation dont l'objectif primordial vise à acquérir le plus grand recul possible par rapport aux connaissances mathématiques antérieures, afin d'en obtenir à la fois une maîtrise générale et une vision d'ensemble. Les IUFM (Instituts Universitaires de Formation des Maîtres) assurent cette préparation au CAPES en une année.

Les candidats doivent posséder une licence ou un diplôme qui valide au moins trois années d'études après le bac. En ce qui concerne la formation en mathématiques des futurs enseignants de mathématiques du cycle secondaire, le document « Panorama des Mathématiques dans l'Education Française de la maternelle à l'Université » de la Commission Française pour l'Enseignement des Mathématiques (Artigue, et al. 2004) donne une vue globale :

*« [...] les étudiants ont reçu une formation en mathématiques sous une forme encore très influencée par Bourbaki. L'enseignement porte sur les structures algébriques, les définitions formelles des bases du calcul [...], les démonstrations des théorèmes fondamentaux, des théories comme l'intégrale de Riemann. Le programme est centré sur l'algèbre et l'analyse. [...] la géométrie qui joue un rôle important dans le second degré a presque disparu, sauf un peu de géométrie analytique, en liaison avec l'algèbre linéaire. En troisième année [...], il y a un saut qualitatif du point de vue de l'abstraction avec des cours sur la topologie générale, le calcul différentiel dans les espaces vectoriels normés, l'intégration, l'analyse fonctionnelle, la théorie des ensembles, les structures algébriques abstraites et, mais souvent non obligatoires, les probabilités, les géométries affine, euclidienne et projective. [...] depuis la première année [...] les étudiants sont souvent initiés aux logiciels [...] tels que Maple, Mathematica ou Matlab. [...] les liaisons avec les autres disciplines, les applications et la modélisation, les statistiques, l'analyse numérique sont en général absents du curriculum [...] la plupart des étudiants préparant le CAPES [...] ont une vue tout à fait abstraite des mathématiques [...]. La préparation du CAPES [...] leur donne ainsi l'occasion de développer une vue plus synthétique et intégrée des*

*mathématiques, avec l'introduction d'une pensée réflexive sur les objets mathématiques* » (p. 30)

Cet aperçu général nous montre que les étudiants qui préparent le CAPES possèdent des connaissances sur une gamme étendue de domaines dans les mathématiques avancées, mais aussi que ces connaissances sont très abstraites et isolées. On remarque également qu'une des attentes dans la préparation au CAPES est de leur donner une vision globale et articulée des mathématiques.

Par ailleurs, la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques dans le document « La formation des maîtres en mathématiques » (Kahane<sup>7</sup> et al., 2003, pp. 35-36), établit un lien entre la formation des étudiants au CAPES et un changement de paradigme dans l'enseignement de niveau secondaire souhaité par la commission. Il s'agit d'inverser la tendance actuelle consistant à ne pas accorder trop d'importance à la justification. La commission considère que la réussite d'un tel objectif suppose que les professeurs doivent remplir deux conditions : *posséder une culture mathématique assez étendue, et avoir la capacité de transposer leurs connaissances et de les adapter à leurs élèves.*

La commission considère que dans le cas de l'analyse, les futurs professeurs en général dominent les contenus correspondants, mais dans le cas de la géométrie, *les formations universitaires et même les préparations au CAPES ne fournissent pas, en général, l'arrière-plan mathématique nécessaire à l'enseignement au collège.*

En ce qui concerne la capacité de transposer leurs connaissances, la commission remarque l'importance de pouvoir compter avec une culture mathématique étendue qui permette, non seulement de maîtriser les situations mathématiques auxquelles leurs élèves sont confrontés, mais aussi de posséder les compétences nécessaires pour faire les adaptations au niveau de ces élèves.

Les documents que nous venons de mentionner nous donnent un aperçu global des caractéristiques des étudiants de CAPES :

- Il s'agit d'étudiants ayant une vaste formation en mathématiques, mais néanmoins trop abstraite. L'enseignement universitaire semble leur avoir fourni une vue désarticulée des différents domaines des mathématiques ;
- Au niveau secondaire, l'enseignement a des besoins spécifiques en géométrie et pourtant, lors de la formation des futurs enseignants, la quasi-absence de lien entre les différents domaines des mathématiques et la géométrie les met dans une situation de faiblesse face à ces demandes ;
- Les attentes en formation des futurs enseignants requièrent d'une part, une bonne maîtrise des contenus mathématiques et d'autre part, des capacités suffisantes pour adapter les connaissances au niveau des élèves.

Ces constats nous montrent l'importance du développement d'une pensée flexible chez les étudiants qui préparent le CAPES. Notre travail vise à trouver des voies pour favoriser le

---

<sup>7</sup> Sur le web :

<http://www.smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportFormationMaitres/Formation-des-maitres.pdf> (Dernière consultation : 14 octobre 2005)

développement de capacités en vue d'articuler différents domaines des mathématiques. Dans le cas particulier qui nous intéresse, à savoir les équations différentielles, nous avons déjà montré que la mise en relation des représentants graphiques et symboliques d'objets de ce champ d'étude faisait intervenir des connaissances mathématiques dans différents cadres (Douady, 1992) et à différents niveaux. Donc, nous pensons que cette interaction entre cadres peut contribuer à l'articulation des domaines mathématiques en jeu.

Ci-après, nous présentons les caractéristiques du logiciel Cabri Géomètre et les possibilités qu'il offre pour l'étude des équations différentielles.

### **1.3.2. Un environnement de géométrie dynamique comme élément intervenant dans l'organisation de milieux pour l'étude des équations différentielles**

Un des objectifs du recours aux outils informatiques est de rendre accessible aux étudiants des tâches et des productions qui, dans un environnement papier/crayon, seraient presque impossibles à considérer ou difficiles à produire. Par exemple, une approche numérique peut nécessiter des tableaux de valeurs pour les différentes méthodes de résolution numérique : l'accès à un logiciel peut permettre de les obtenir facilement. De même, dans une approche qualitative des équations différentielles il y a besoin de représentants graphiques des objets de ce champ d'étude, tels que des champs de tangentes ou des familles de courbes solutions. Or, les outils informatiques permettent de produire facilement ces représentants graphiques.

Pour produire ceux-ci, il est possible de recourir soit à des logiciels de calcul formel tels que Mathematica, Derive, etc., soit à des logiciels dédiés aux équations différentielles. Dans ces deux types de logiciels, le changement de configuration des représentants graphiques se fait de façon indirecte, par modification des réglages initiaux ou à l'aide de curseurs (ou barres paramétrées), et l'on ne peut donc pas manipuler directement les objets. En revanche, un logiciel de géométrie dynamique comme Cabri Géomètre permet la manipulation directe des objets, sans devoir se préoccuper de nouveaux réglages ou de curseurs. On peut déplacer directement les objets à l'aide de la « souris ». Par ailleurs, Laborde et Caponi (1994) remarquent que les rétroactions du logiciel sont fondées sur des connaissances mathématiques. Cela signifie que le déplacement des objets dans cet environnement doit respecter les propriétés mathématiques de base utilisées lors de leurs constructions. Comme nous l'illustrerons ci-dessous, ces spécificités du logiciel permettent de concevoir des contextes d'expérimentation donnant lieu à des phénomènes graphiques en lien étroit avec les connaissances mathématiques en jeu.

Nous présentons ensuite quelques constructions possibles en utilisant Cabri Géomètre. Ce logiciel permet, par exemple, de construire à partir d'un point mobile  $P(x_P, y_P)$  de l'écran, un vecteur tangent dynamique  $V$  d'origine  $P$ , associé avec une équation différentielle de la forme  $y' = f(x, y)$ . Une méthode de construction consiste à assigner aux coordonnées  $(a, b)$  du vecteur  $V$  les valeurs  $a = 1$  et  $b = f(x_P, y_P)$  (cf. fig. 3, ci-après). Les phénomènes graphiques qui donnent lieu au déplacement de  $P$  dépendent donc de l'équation différentielle.

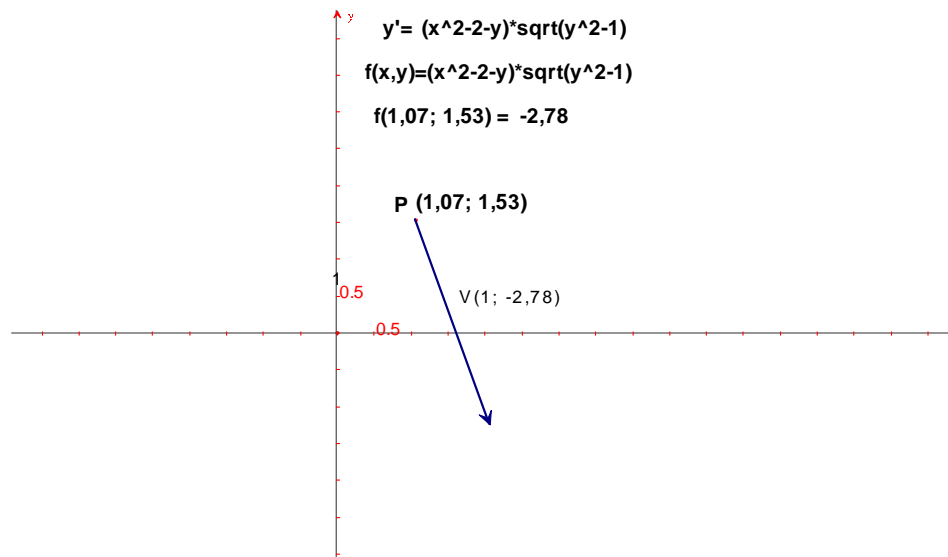


Fig. 3 : Construction d'un vecteur tangent dynamique

Nous montrons en page suivante (figures 4 et 5), deux écrans possibles<sup>8</sup> issus du déplacement d'un vecteur dynamique normé associé avec l'équation différentielle  $y' = (x^2 - 2 - y) \sqrt{y^2 - 1}$ . Dans la figure 4, on essaie de souligner que le déplacement du point P peut conduire à l'identification de zones où le vecteur est inexistant :

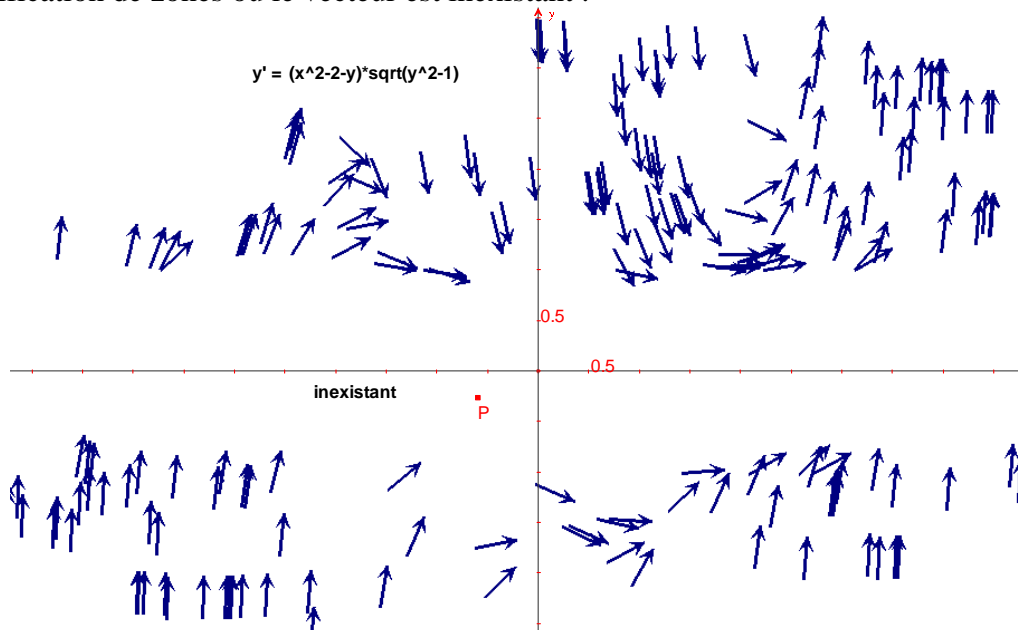


Fig. 4 : Le vecteur disparaît dans la région  $-1 < y < 1$

La figure 5 ci-dessous, tente de montrer que le déplacement du vecteur peut conduire à l'identification d'une courbe du plan où le vecteur devient horizontal :

<sup>8</sup> Dans les figures 4 et 5, nous avons utilisé l'outil « Trace » de Cabri qui permet de conserver le parcours du vecteur lors de son déplacement.

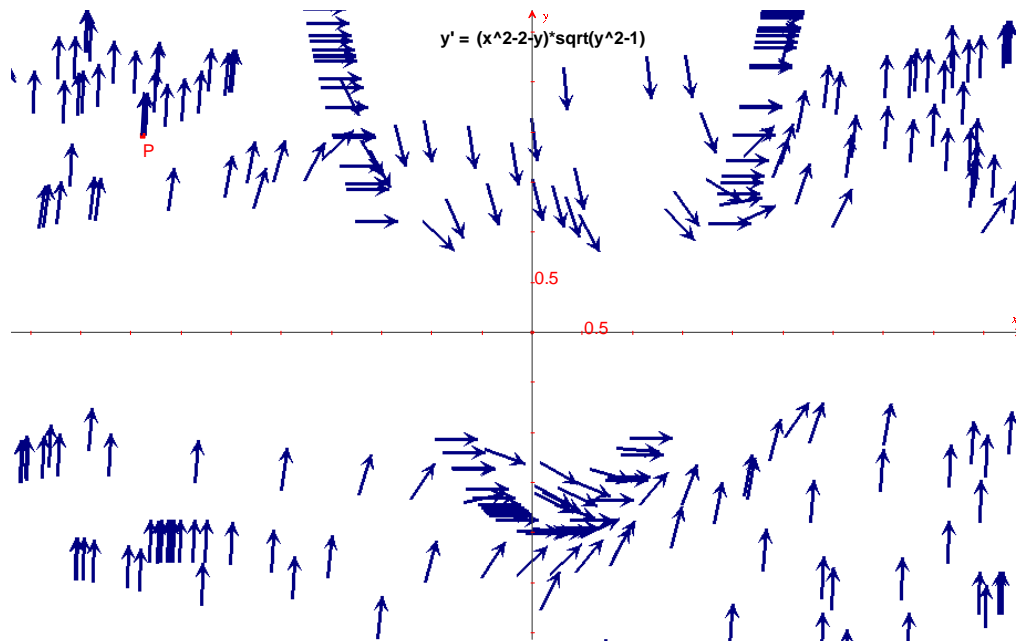


Fig. 5 : Il y a une région du plan où le vecteur devient horizontal

Il est évident que dans des logiciels de calcul formel, tels que Dérive ou Mathematica, on peut avoir accès à différents représentants graphiques. Dans le cas particulier d'un champ de tangentes, ces logiciels fournissent une configuration régulière de celui-ci. Le champ est construit sur une grille de points distribués de manière uniforme. Par opposition, dans un logiciel de géométrie dynamique, l'identification de phénomènes graphiques comme les précédents résulte d'un travail exploratoire à l'aide du vecteur dynamique et de l'outil « Trace » de Cabri. Dans les figures 4 et 5 précédentes, grâce à la précision de calcul du logiciel, le déplacement continu (et non discret comme la grille des logiciels de calcul formel) du vecteur permet, dans le premier cas, de vérifier par manipulation directe que lorsque le vecteur se trouve hors du domaine de la fonction  $f$ , il disparaît ; tandis que dans le deuxième cas, le déplacement soigneux du vecteur peut conduire à identifier un lieu géométrique sur lequel les vecteurs deviennent horizontaux.

Ces exemples montrent que dans ce contexte, le graphique pourrait avoir un rôle différent de celui de l'enseignement traditionnel. Les rétroactions du logiciel donnent lieu à divers phénomènes graphiques, liés aux particularités de l'équation différentielle en question, mais pour les expliquer et les justifier, on ne peut pas se limiter au graphique. Il faut faire le lien entre ces faits graphiques et certaines connaissances des cadres concernés (fonctions, géométrie analytique, analyse, etc.). Ces constats nous montrent que dans un environnement de géométrie dynamique, le graphique peut fonctionner dans un mode opératoire.

Nous considérons que l'interprétation mathématique des faits graphiques repérés grâce à l'environnement de la géométrie dynamique, peut favoriser l'apprentissage de certaines notions du champ des équations différentielles. Par exemple, dans le premier cas présenté ci-dessus (fig. 4), des questionnements sur les causes de la disparition du vecteur dynamique pourraient permettre d'établir un lien entre ce type de comportement et la nature de l'expression symbolique de l'équation différentielle concernée. Dans le cas de la figure 5 ci-dessus, l'exigence d'arguments mathématiques pour expliquer l'existence d'une courbe particulière où le vecteur devient horizontal, peut conduire à mettre en relation les faits

graphiques repérés avec des notions sur les équations différentielles, comme celles sur les isoclines.

Les possibilités de la géométrie dynamique, comme outil d'aide à l'apprentissage de notions dans le domaine des équations différentielles, ont déjà été soulignées par Laborde (1999). Elle a montré comment, en se servant du déplacement et de l'outil Trace, les étudiants pouvaient (dans un travail préalable à un cours) donner du sens aux concepts tels que l'isocline zéro :

*« The trace facility of the software allows the user to have an image of the field of vectors [...]. The density of displayed points of this field may be regulated according to the speed of movement of P. This provides a first image of the behavior of the derivative, which can be given to be interpreted by the students. They can be asked to visually identify the locus of points P where  $y'=0$  [...] The manipulation is not very easy and requires permanent adjustment [...] This compels the necessity to have a more precise idea of the set of points P where  $y'=0$ , and leads back to the algebraic setting to find an equation of this locus and then to construct it in Cabri, using the calculate and the locus facility [...] It is possible to check more precisely, using the drag mode, that the tangent vectors at points of this locus are horizontal. » (pp. 169-170)*

Le logiciel Cabri Géomètre II Plus offre d'autres possibilités d'exploration (accessibles par manipulation directe) telles que : construire le lieu géométrique du vecteur lorsque son origine se déplace sur une grille ; obtenir l'équation d'un lieu géométrique ; déplacer le système de coordonnées, changer la graduation des axes ; changer l'emplacement de la fenêtre d'affichage sur une région de  $1 \text{ m}^2$  ; redéfinir des objets, comme par exemple le vecteur dynamique pouvant se déplacer sur un autre objet : une grille, un lieu géométrique, etc.

Une autre fonctionnalité du logiciel, c'est la possibilité de créer des macro-constructions, celles-ci permettant de construire des objets à partir des objets initiaux utilisés lors de leur construction. Ainsi, le vecteur-tangent dynamique peut être reconstruit à l'aide d'une macro, ce qui permet de le reproduire à chaque fois que l'on veut. L'obtention du représentant graphique d'une solution approchée (en suivant la méthode d'Euler), à l'aide d'une macro, peut se faire de la manière suivante : à partir d'un point quelconque de l'écran, on construit un premier vecteur tangent ; ensuite, on construit un deuxième vecteur à partir de l'extrémité du premier ; etc. Cette solution approchée a aussi une nature dynamique et peut être manipulée librement. Si l'on déplace l'origine du premier vecteur, la ligne polygonale formée par l'ensemble des vecteurs attachés se déplace aussi. Ces rétroactions du logiciel permettent, par exemple, d'explorer les différentes configurations que les courbes solutions peuvent présenter dans une région du plan.

La figure 6 ci-dessous, présente le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle  $y' = (x^2 - 1 - y)\sqrt{25 - y^2}$ , produit comme le lieu géométrique du vecteur dynamique lorsque son origine se déplace sur une grille<sup>9</sup> :

---

<sup>9</sup> Pour placer l'origine P du vecteur sur la grille, nous avons utilisé l'outil « Redéfinir un objet ».

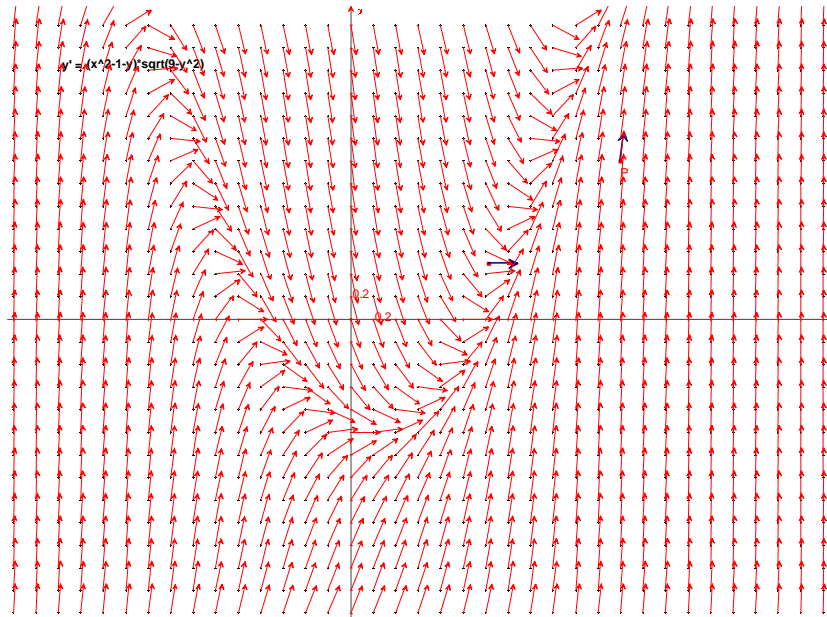


Fig. 6 : Champ de vecteurs associé à l'équation différentielle  $y' = (x^2 - 1 - y)\sqrt{25 - y^2}$

La figure 7 ci-contre, présente un ensemble de solutions approchées, qui ont été construites par le déplacement d'une solution approchée dynamique et à l'aide de l'outil « Trace » de Cabri :

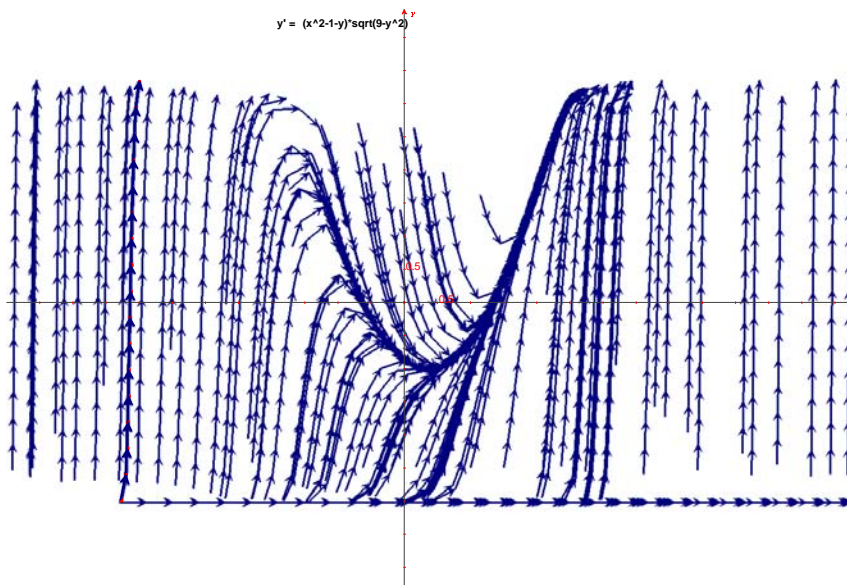


Fig. 7 : Familles de solutions approchées de l'équation différentielle  $y' = (x^2 - 1 - y)\sqrt{25 - y^2}$

Les faits graphiques que suscitent l'exploration des courbes solutions, dans l'environnement de géométrie dynamique, ainsi que l'accès à des outils tels que « Coordonnées ou équation », « Pente », etc. permettent de concevoir un travail mathématique spécifique sur le registre graphique : dans un environnement de géométrie dynamique, le registre graphique pourrait fonctionner dans un mode opératoire. Ces particularités de l'environnement informatique nous permettent d'envisager la possibilité de concevoir une grande variété d'activités d'expérimentation.

### **Les objets dynamiques : vecteurs tangents et courbes solutions**



Comme nous venons de le constater, dans un environnement de géométrie dynamique il est possible de construire différents objets associés à des représentants graphiques du champ des équations différentielles. Dans notre travail en particulier, nous nous sommes intéressés à deux de ces objets : des vecteurs tangents dynamiques et des courbes solutions dynamiques. Ces deux objets dynamiques ont la particularité de pouvoir générer, à partir de leur manipulation et grâce à l'exploration à l'aide des outils « Trace » ou « Lieu » de Cabri, soit un champ de vecteurs, soit la famille de courbes solutions associées à l'équation différentielle. Par ailleurs, les variations de l'objet dynamique « vecteur tangent » sont étroitement liées aux propriétés algébriques de  $f(x,y)$  en  $y'=f(x,y)$ , et la courbe solution dynamique matérialise les fonctions solutions d'une équation différentielle.

Pour problématiser l'articulation entre le registre graphique et le registre symbolique des équations différentielles, en utilisant les objets dynamiques « vecteur tangent » et « courbe solution », nous avons imaginé deux types de situations :

- étant donné des vecteurs dynamiques et des équations différentielles, relier et justifier. Nous les avons appelées « situations d'association », en effet ; il s'agit d'associer des représentants d'objets du champ des équations différentielles ;
- étant donné une courbe dynamique, trouver l'équation différentielle de la famille obtenue à partir de cette courbe dynamique. Nous les avons appelées « situations de construction », dans ce cas, il s'agit de construire un représentant symbolique d'une équation différentielle.

Nous considérons que les demandes d'interprétation et de justification mathématiques des faits graphiques identifiés peuvent susciter des raisonnements de nature différente. Dans le premier type de situation, le fait de disposer d'informations sur les deux représentants pourrait conduire à mettre en œuvre des arguments qualitatifs pour lier le registre graphique et le registre symbolique. En revanche, dès lors que pour le deuxième type de situation, les arguments qualitatifs ne sont pas suffisants, il est nécessaire de mobiliser des connaissances des cadres concernés (fonctions, géométrie analytique, analyse, etc.), d'une manière plus ciblée, pour contrôler le travail mathématique permettant d'obtenir le représentant recherché. Néanmoins, la demande de justification mathématique des liens entre les registres symbolique et graphique dans ces deux types de situations, pourrait requérir la mise en fonctionnement de connaissances aux niveaux mobilisable et disponible des cadres concernés (fonctions, géométrie analytique, analyse, etc.).

Ci-après nous analyserons brièvement les caractéristiques de la géométrie dynamique, et son rôle possible pour l'organisation de « milieux » favorisant l'apprentissage des notions du champ des équations différentielles.

### ***Cabri peut-il jouer un rôle dans l'organisation d'un milieu ?***

Brousseau (1998) considère que l'apprentissage des élèves est le résultat des interactions entre un milieu organisé et une intention didactique. Ce milieu est un « système antagoniste » de l'élève :

*« L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage » (p. 59)*

Les deux caractéristiques les plus importantes d'un milieu sont : les possibilités d'action et de rétroaction qui se produisent dans les actions des apprenants ; la possibilité de répéter une même stratégie lors de la résolution d'un problème. Le rôle de ces caractéristiques dans l'apprentissage est souligné par Margolinas (1993) :

*« L'importance de la répétition est une conséquence de l'option constructiviste qui est à la base de l'apprentissage par adaptation. L'élève doit avoir l'occasion de se heurter au milieu pour pouvoir remanier qualitativement sa connaissance. De plus, les occasions de répétition en situation d'action, permettent de rendre l'élève de plus en plus conscient de ce qui le pousse à agir, le rendant capable d'aborder des situation de formulation.*

*L'importance de la répétition du même jeu tient également à la nature de la validation par le milieu. La rétroaction due au milieu est, la plupart du temps, bien plus riche qu'un simple Vrai-Faux. » (pp. 117-118)*

Les spécificités du logiciel Cabri Géomètre décrites précédemment, ainsi que les différentes rétroactions qu'il offre, montrent qu'il satisfait aux conditions pour se constituer en élément important dans l'organisation de milieux pour l'étude des équations différentielles.

#### 1.4. NOS HYPOTHESES DE RECHERCHE

Les études précédentes nous ont permis de constater que l'enseignement des mathématiques à l'Université ne favorisait pas le développement d'une pensée flexible chez les étudiants. En particulier, l'étude des équations différentielles dans le contexte d'un enseignement traditionnel, est caractérisée par un centrage dans un seul registre de représentation, le registre symbolique. Les travaux que nous avons cités nous montrent des difficultés des étudiants, lorsqu'ils font face à des situations où il faut travailler avec des représentants graphiques. Nous avons vu aussi que l'articulation des registres graphique et symbolique des équations différentielles de la forme  $y' = f(x, y)$  mettait en jeu de façon importante de nombreuses connaissances de divers cadres. Par ailleurs, les caractéristiques du logiciel Cabri Géomètre nous ont conduits aussi à le considérer comme un élément pouvant jouer un rôle important dans la conceptualisation des notions du champ des équations différentielles. Et en particulier, dans le développement de compétences en vue d'articuler le registre graphique et le registre symbolique des équations différentielles.

Ces considérations nous ont conduits à formuler trois hypothèses de recherche. La **première hypothèse de recherche** prend en compte l'importance de considérer  $y'$  comme fonction de deux variables, pour établir un lien direct (sans passer par l'expression symbolique des solutions) entre le registre graphique et symbolique. Cette hypothèse porte sur les possibilités de favoriser l'établissement de liens entre les phénomènes graphiques produits lors du déplacement des représentants graphiques associés aux équations différentielles (vecteurs

dynamiques, courbes dynamiques, etc.), et la nature fonctionnelle des expressions symboliques en jeu. Nous l'avons formulé de la manière suivante :

*Le déplacement d'objets dynamiques associés aux équations différentielles de la forme  $y'=f(x,y)$ , peut fournir un contexte pour établir un lien entre les variations de ces objets et la nature fonctionnelle de la fonction « f »*

Face à la faiblesse usuelle des passages du registre graphique vers le registre symbolique (Saglam, 2004), **la deuxième hypothèse de recherche** concerne les possibilités pour le logiciel de géométrie dynamique, de contribuer à ce type de passages et en particulier de favoriser la construction d'un représentant symbolique :

*« L'exploration d'une famille de courbes solutions d'une équation différentielle, dans un environnement de géométrie dynamique, peut permettre l'identification ou la construction d'un invariant caractérisant la famille de courbes, et éventuellement à partir de celui-ci d'obtenir l'équation différentielle associée »*

Notre **troisième hypothèse de recherche** concerne les apports de l'exploration dynamique à l'élaboration d'arguments mathématiques qui lient, directement (sans passer par la résolution de l'équation différentielle), les phénomènes graphiques identifiés avec l'expression symbolique des équations différentielles :

*La demande de justifier les faits graphiques issus du déplacement d'objets dynamiques associés aux équations différentielles de la forme  $y'=f(x,y)$  peut susciter l'élaboration d'arguments mathématiques mettant en relation directe cette expression symbolique avec les phénomènes graphiques identifiés, et engage donc l'usage de connaissances mathématiques des cadres des fonctions, de géométrie analytique, de l'analyse.*

Pour mettre à l'épreuve nos hypothèses, nous construirons une ingénierie didactique visant à problématiser la mise en relation de différents registres de représentations, dans le contexte d'une étude qualitative des équations différentielles. Le chapitre suivant étant consacré à la méthodologie de recherche et à la conception du dispositif expérimental.

## CHAPITRE 2

### METHODOLOGIE DE RECHERCHE, CONCEPTION ET ANALYSE A PRIORI DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL

INTRODUCTION.....	36
2.1. METHODOLOGIE DE RECHERCHE.....	36
2.1.1. L'ingénierie didactique.....	36
2.1.2. Les principaux choix effectués.....	37
2.2. LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL DE L'ANNEE 2003.....	42
2.2.1. Questionnaire initial.....	42
2.2.2. Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$ .....	50
2.2.3. Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles en géométrie dynamique.....	64
2.2.4. Mise en équation différentielle d'une famille de tractrices en géométrie dynamique.....	74
2.3. LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL DE L'ANNEE 2004.....	79
2.3.1. Mise en équation différentielle de familles de courbes en papier/crayon.....	80
2.3.2. Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien explicitement donné).....	83
2.3.3. Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien n'étant pas explicitement donné).....	96

## Introduction

Au chapitre précédent, nous avons formulé trois hypothèses de recherche sur les apports possibles d'un logiciel de géométrie dynamique pour articuler les registres graphique et symbolique des équations différentielles :

- la première hypothèse, concernant les possibilités de cet environnement informatique pour favoriser l'établissement de liens entre les phénomènes graphiques produits lors du déplacement des représentants graphiques associés aux équations différentielles (vecteurs dynamiques, courbes dynamiques, etc.), et la nature fonctionnelle des expressions symboliques en jeu ;
- la deuxième hypothèse de recherche, concernant les possibilités du logiciel de géométrie dynamique de contribuer au passage du registre graphique au registre symbolique des équations différentielles, lors de la construction d'un représentant symbolique ;
- la troisième hypothèse de recherche, concernant les apports de l'exploration dynamique à l'élaboration d'arguments mathématiques qui lient directement (sans passer par la résolution de l'équation différentielle) les phénomènes graphiques identifiés avec l'expression symbolique des équations différentielles.

Ces hypothèses ont guidé la partie expérimentale de notre recherche. Nous présentons ci-après la méthodologie que nous avons adoptée.

### 2.1. METHODOLOGIE DE RECHERCHE

#### 2.1.1. *L'ingénierie didactique*

Pour mettre à l'épreuve nos hypothèses de recherche, nous nous sommes inspirés de la méthode d'ingénierie didactique construite dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998 ; Artigue, 1989b). En effet, l'observation naturaliste d'une classe ordinaire ne nous permettrait probablement pas de répondre aux questions relatives à l'usage d'un environnement de géométrie dynamique. Plutôt que la comparaison avec une classe-témoin, ce qui nous intéresse c'est le fonctionnement même des étudiants dans des tâches spécifiques, conçues selon les objectifs de notre recherche, ce qui demande l'organisation d'une expérimentation spécifique et de plus, elle se situe dans la perspective d'une étude de cas.

Artigue (1989b) remarque que la méthodologie d'ingénierie didactique est fondée sur deux points essentiels : un schéma expérimental, basé sur des réalisations didactiques en classe et sur un type de validation particulier. Selon elle, l'ingénierie didactique se décompose en quatre phases:

1. **Les analyses préliminaires.** Dans cette phase, le chercheur identifie un phénomène dans le système didactique et essaie de le comprendre à la lumière des outils théoriques disponibles ; et cette étude l'amène à concevoir une ingénierie avec l'objectif de mieux comprendre ce phénomène, ou de trouver des conditions plus favorables pour le modifier. Artigue précise :

« On considère un point du système didactique dont le fonctionnement apparaît, pour des raisons qui peuvent être de nature diverse, peu satisfaisant. On analyse ce point de fonctionnement et les contraintes qui tendent à en faire un point d'équilibre du système puis, en jouant sur ces contraintes, on cherche à déterminer les conditions d'existence d'un point de fonctionnement plus satisfaisant. » (p. 285)

Dans le cas particulier de notre recherche, l'aspect du système didactique sur lequel nous nous focalisons concerne la problématique relative à l'articulation de registres de représentation, lors de l'étude des équations différentielles.

2. **La conception et l'analyse a priori.** Dans cette phase, le chercheur décide de faire le choix des variables qui structureront son ingénierie (dans ce cas, il s'agit de variables des situations). Artigue signale que ces variables sont de deux types : les *variables macro-didactiques ou globales qui concernent l'organisation globale de l'ingénierie* ; et les *variables micro-didactiques ou locales qui concernent l'organisation locale de l'ingénierie*. L'analyse a priori est une modélisation initiale des interactions de l'apprenant avec le milieu, en prenant en compte les choix de conception et le cadre théorique (Laborde, 1997).

3. **L'expérimentation.** Cette phase concerne proprement la mise en place de l'ingénierie.

4. **L'analyse a posteriori et la validation.** Dans cette phase, l'analyse a posteriori est fondée sur les données recueillies lors de la séquence d'enseignement réalisée. Artigue (1988) considère qu'une des originalités de l'ingénierie didactique réside dans son mode d'évaluation, qui est essentiellement interne. Sur ce point, Laborde (1997) signale que :

« L'ingénierie didactique consiste à mettre à l'épreuve les liens que la théorie supposait entre enseignement et apprentissage par une **validation interne**. Il ne s'agit pas de comparer les conduites des partenaires et les événements à ceux d'une classe témoin, mais de comparer les deux modélisations différentes du même objet (la séquence) que sont l'analyse a priori et l'analyse a posteriori. » (p. 103)

En ce qui concerne notre recherche, la première phase de l'ingénierie didactique a été développée au chapitre 1. Dans le chapitre 2, nous présentons la conception du dispositif expérimental et son analyse a priori, et dans les chapitres suivants nous développerons les phases restantes.

### **2.1.2. Les principaux choix effectués**

Nous présentons ici les principaux choix que nous avons effectués lors de la conception du dispositif expérimental.

### **Organisation générale**

L'ingénierie didactique que nous avons conçue est composée d'un ensemble de situations à réaliser par les étudiants dans deux environnements différents : papier/crayon et géométrie dynamique. Dans ces situations, compte tenu de l'existence de rétroactions de l'environnement Cabri, les interventions prévues de l'enseignant sont en nombre faible. Par ailleurs, soulignons que les contraintes de préparation au concours du CAPES ont obligé à mettre en place une ingénierie sur un temps court.

Les analyses *a priori* des situations proposées portent sur la mise en relation entre les représentants d'objets du champ des équations différentielles, du point de vue des connaissances en jeu et des procédures possibles à mettre en œuvre.

### **Les situations**

Lors de la conception des situations nous avons essayé de promouvoir la mise en fonctionnement des niveaux mobilisables et disponibles des connaissances concernant les notions élémentaires de l'analyse. Pour cette raison, nous avons proposé des questions inhabituelles aux étudiants, mais que nous considérons *a priori* comme accessibles. Compte tenu de leur niveau (des étudiants préparant le CAPES), on peut attendre d'eux qu'ils arrivent à transférer des connaissances d'un domaine mathématique à un autre, même s'ils ne l'ont jamais fait explicitement. A propos du transfert de connaissances lors des apprentissages scientifiques, Johsua et Dupin (2003) remarquent :

*« A plusieurs reprises [...] est revenu le thème du transfert, ou du moins de la généralisation des savoirs et aptitudes acquises dans un domaine, à d'autres domaines a priori distincts. [...] La grande complexité de ces savoirs rend à jamais impossible le projet de les dominer tous un à un, et il est a priori raisonnable de supposer que des mécanismes de généralisation se produisent, qui conduisent à savoir certaines choses sans les avoir explicitement apprises. » (pp. 103-104)*

Les contenus mathématiques dans les situations que nous avons conçues se sont inspirés des sujets ci-dessous, tirés du programme du CAPES de mathématiques :

*« Recherche de solutions approchées d'une équation différentielle scalaire d'ordre 1 par la méthode d'Euler.  
Exemples d'étude qualitative des courbes intégrales d'une équation différentielle. Exemples de recherche des courbes intégrales d'un champ d'éléments de contact ou d'un champ de vecteurs dans le plan. »<sup>1</sup> (p. 15)*

Les situations qui composent les deux expérimentations ont été conçues de manière à problématiser la mise en relation entre représentants d'objets du champ des équations différentielles. Ces mises en relation se font à ces deux niveaux : descriptif et justificatif. Nous avons fait le choix de proposer des situations qui du point de vue mathématique, n'exigent pas de connaissances complexes. En revanche, nous avons décidé de restreindre la mise en œuvre des connaissances en ce qui concerne le niveau technique.

---

<sup>1</sup> Programme du CAPES Externe de Mathématiques 2005 (le document comprend le texte du Bulletin Officiel spécial n° 8 du 24 Mai 2001, incluant la modification parue au B.O. spécial n° 5 du 20 Mai 2004)

Lors de la conception des expérimentations, nous avons pris en compte les deux types de situations envisagées, dans l'environnement de géométrie dynamique, pour problématiser l'articulation des registres graphique et symbolique des équations différentielles : des situations d'association de représentants de ces registres ; des situations de construction de l'un des représentants. Nous considérons que ces deux types de situations permettent de mettre à l'épreuve nos hypothèses de recherche. Les spécificités des situations conçues seront présentées en détail plus loin.

Dans la première expérimentation (année 2003), nous avons proposé une situation d'association de représentants d'objets du domaine des équations différentielles (champ de vecteurs et expression symbolique d'une équation différentielle), et deux situations de construction d'un représentant symbolique (mise en équation différentielle de familles de courbes). Dans la deuxième expérimentation (année 2004), nous avons proposé, en papier/crayon, une situation de construction d'un représentant (mise en équation différentielle de familles de courbes) et deux situations, en géométrie dynamique, d'association d'un représentant graphique avec un représentant symbolique (association explicitant le lien entre les représentants donnés d'une part, et association n'explicitant pas le lien entre les représentants donnés d'autre part). Lors de la conception de la deuxième expérimentation, nous avons pris en compte quelques résultats préliminaires de la première expérimentation. Ces résultats montraient de nombreuses difficultés chez les étudiants, concernant notamment la faiblesse de connaissances sur des notions telles que fonction, tangente, dérivée. Donc, nous avons accordé un rôle plus important aux situations d'association.

Dans chaque expérimentation, l'ordre des activités suppose une progression dans le développement des liens entre les divers représentants en jeu. De manière générale, nous avons privilégié le passage du registre graphique vers le registre symbolique.

### **Les expérimentations**

Sur les sites de Grenoble et de Chambéry, l'IUFM de Grenoble offre une formation de six heures où l'on aborde les équations différentielles. Cette formation est répartie en deux séances de trois heures. Pour les expérimentations faites durant les années 2003 et 2004, nous avons disposé de ces deux séances auprès des étudiants.

Dans la partie suivante, nous décrivons brièvement les situations qui composent chaque expérimentation :

#### **Expérimentation de l'année 2003 :**

Pour la première expérimentation, nous avons conçu un questionnaire initial (papier/crayon) et deux types de situations dans l'environnement de géométrie dynamique :

- le *Questionnaire initial* a comme objectif un panorama global de l'état initial des connaissances des étudiants de CAPES sur les équations différentielles. En particulier, notre intérêt est d'examiner si ces étudiants arrivent à faire fonctionner spontanément leurs connaissances pour établir des liens entre divers représentants d'objets mathématiques dans ce champ d'étude. Il sera alors possible de mettre éventuellement en relation ces connaissances (dans leur état initial) avec une évolution probable des connaissances des étudiants au cours de l'expérimentation ;



- la situation *Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle*  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$  est composée d'une phase de travail en papier/crayon, et d'une phase dans l'environnement informatique. Il s'agit d'une situation du type « association de représentants » d'objets du champ des équations différentielles. Elle propose un travail de mise en relation entre les représentants suivants : un champ de tangentes donné ; la famille de courbes solutions qui devra être étudiée à partir du champ de tangentes ; l'expression symbolique de l'équation différentielle associée au champ de tangentes. La situation cherche à étudier le fonctionnement des connaissances des étudiants lors de l'établissement des liens entre ces représentants : Quelles sont les difficultés rencontrées par les étudiants ? Quels sont les liens qu'ils établissent entre les objets mathématiques en jeu ? L'incorporation de l'outil informatique apporte-t-elle des évolutions éventuelles par rapport à de possibles difficultés identifiées en papier/crayon ? Ce type d'activité permet de tester principalement la première et la troisième hypothèses de recherche ;
- les situations de *Mise en équation différentielle d'une famille de courbes* sont du type construction d'un représentant du champ des équations différentielles. Elles s'appuient sur les caractéristiques de la géométrie dynamique pour proposer une tâche inhabituelle (passer du registre graphique vers le registre symbolique). Nous proposons une courbe dynamique, et l'enjeu des situations est d'obtenir l'équation différentielle de la famille de courbes. Ces situations comportent deux phases, la première qui se focalise sur la construction du représentant symbolique demandé, et la deuxième centrée sur la vérification du résultat obtenu. Les situations proposées ont pour but d'étudier le fonctionnement des connaissances des étudiants ainsi que les apports possibles de la géométrie dynamique pour établir des liens entre les registres en jeu : Quelles sont les difficultés rencontrées par les étudiants ? Quels sont les liens qu'ils établissent entre les objets mathématiques en jeu ? Quel est le rôle du logiciel dans la construction de ces liens ? Ces situations de mise en équation de familles de courbes nous permettent de mettre à l'épreuve, notamment, la deuxième hypothèse de recherche.

### **Expérimentation de l'année 2004 :**

Le dispositif expérimental de l'année 2004 est composé d'une situation, en papier/crayon, de mise en équation de familles de courbes (situation du type construction d'un représentant) et de deux situations, en géométrie dynamique, d'association entre représentants d'objets du champ des équations différentielles :

- la situation de *Mise en équation différentielle de familles de courbes*, en papier/crayon, a une certaine ressemblance avec ce type de situation de la première expérimentation. Comme un travail exploratoire en papier/crayon était moins accessible sur le registre graphique, nous avons fourni explicitement les propriétés graphiques des familles permettant d'obtenir leur équation différentielle. L'objectif de cette situation est d'obtenir des éléments de comparaison dans les deux environnements : papier/crayon et géométrie dynamique : quelles sont les difficultés que les étudiants rencontrent en papier/crayon ? quels sont les liens qu'ils établissent ? y-a-t-il des relations entre les difficultés rencontrées en géométrie dynamique (expérimentation 2003) et les éventuelles difficultés éprouvées en papier/crayon ?

- la situation *Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien entre le vecteur dynamique et l'équation différentielle explicitement donné)*, propose un travail d'articulation entre un vecteur dynamique et l'équation différentielle qui lui est associée. Il s'agit de relever les propriétés des graphiques produits lors du déplacement du vecteur, et de faire la mise en relation entre ces faits graphiques et les propriétés mathématiques de l'expression de l'équation différentielle. L'objectif est d'étudier si l'exploration graphique des propriétés des courbes solutions de l'équation différentielle contribue au développement de liens entre les représentants en jeu : quels types de liens les étudiants établissent-ils dans ce contexte ? quelles sont les difficultés rencontrées par eux ? quels sont les apports de l'environnement dynamique dans la construction de ces liens ?
- la situation *Association d'un vecteur tangent dynamique avec une équation différentielle (lien entre le vecteur dynamique et l'équation différentielle explicitement non donné)*, propose l'association d'un vecteur tangent dynamique avec une équation différentielle : il s'agit d'identifier, dans une liste, l'équation différentielle associée au vecteur dynamique. L'enjeu est de mettre en relation les faits graphiques issus du déplacement des vecteurs dynamiques avec les propriétés mathématiques des expressions symboliques des équations différentielles. L'objectif de cette situation est de tester l'efficacité des liens construits par les étudiants entre les représentants en jeu (nous avons prévu de proposer ce type de situation après l'association explicite).

### ***L'organisation du travail des étudiants***

Le questionnaire initial de l'expérimentation de l'année 2003 et l'activité de mise en équation des familles de courbes de l'année 2004 ont été traités par les étudiants de façon individuelle. Ce choix a été effectué principalement pour limiter le temps consacré à cette activité. En revanche, pour les autres situations on a demandé aux étudiants de travailler par binômes avec un seul ordinateur, l'objectif étant de favoriser les échanges entre eux.

### ***Le rôle du professeur***

En ce qui concerne les interventions du professeur, nous avons considéré quatre types de participation :

- procéder à un rappel des notions élémentaires sur les équations différentielles de premier ordre ;
- introduire le logiciel Cabri Géomètre II Plus ;
- établir un bilan à la fin de chaque activité ;
- aider les étudiants ayant des problèmes d'utilisation du logiciel, ou des problèmes concernant les consignes relatives aux situations.

De manière générale, les situations ont été conçues pour fonctionner de manière quasi-isolée par rapport à l'enseignant, néanmoins celui-ci pourra apporter sa contribution à la dévolution du problème à résoudre.

### ***Les données et leur traitement***

Les données seront constituées des productions écrites des étudiants et de l'enregistrement audio de leurs échanges discursifs lors du travail en binômes. Bien que l'expérimentation ait

eu lieu en classe entière, sauf pour le questionnaire initial de l'année 2003 et l'activité de mise en équation de familles de courbes en papier/crayon, l'analyse *a posteriori* que nous en ferons est centrée sur le travail de trois binômes d'étudiants pour chaque expérimentation, compte tenu de l'importance en volume des échanges verbaux au sein de chaque binôme.

Dans les pages suivantes nous ferons la présentation détaillée des situations composant les expérimentations, et aussi de leur analyse *a priori*. Nous présenterons les choix mathématiques et didactiques effectués, ainsi que les connaissances et les procédures pouvant être mises en œuvre par les étudiants dans chacune des situations.

Quant à l'analyse *a priori* de chaque situation, nous l'avons scindée en trois étapes :

- en première étape, une description générale est faite des questions proposées, de ses objectifs ;
- en deuxième étape sont explicitées les variables didactiques sur lesquelles on a joué (sauf pour le questionnaire initial 2003 et la mise en équation de famille de courbes en papier/crayon) ;
- en troisième étape sont présentées les réponses attendues.

## 2.2. LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL DE L'ANNEE 2003

### 2.2.1. *Le questionnaire initial*

Le questionnaire initial a pour objectif un aperçu global concernant les étudiants de CAPES, sur leurs connaissances générales apprises à l'Université sur les équations différentielles. Il cherche aussi à identifier les potentialités de ces étudiants à faire fonctionner spontanément des connaissances élémentaires d'analyse, lors de la mise en relation de représentants d'objets du domaine des équations différentielles.

Nous considérons que les connaissances des étudiants de CAPES, sur les équations différentielles, ne sont pas identiques aux connaissances transmises pendant les cours, cependant compte tenu de leur niveau, nous croyons qu'ils pourraient résoudre des tâches dont les connaissances mathématiques en jeu ne sont pas complexes du point de vue mathématique.

Le questionnaire initial est composé de quatre parties :

- la première partie concerne l'avis des étudiants sur des notions générales des équations différentielles,
- la deuxième partie propose une tâche qui requiert le passage du registre graphique des solutions vers le registre symbolique des équations différentielles ;
- la troisième partie propose une tâche qui sollicite le registre graphique pour interpréter le comportement des solutions d'une équation différentielle, à partir de données numériques fournies ;

- la quatrième partie propose une tâche qui sollicite le registre discursif pour interpréter le comportement d'une courbe solution, à partir des informations qui doivent être tirées de l'expression symbolique d'une équation différentielle.

Les deux dernières parties du questionnaire problématisent de manière spéciale la mise en relation des fonctions  $f$  et  $y$ , qui interviennent dans une équation différentielle de premier ordre de la forme  $y' = f(x,y)$ . Ces fonctions requièrent l'interprétation de l'expression symbolique de l'équation, en termes de comportement des solutions particulières.

Pour faciliter la présentation et l'analyse du questionnaire, nous le scinderons en quatre parties.

### **2.2.1.1 Première partie du questionnaire initial**

Dans cette partie, nous nous focalisons sur l'avis des étudiants à propos de notions générales sur les équations différentielles. Nous avons choisi de proposer des questions ouvertes et cette partie a été présentée de la manière suivante :

- 1) Vos idées nous intéressent !
  - a) A votre avis, qu'est-ce qu'une équation différentielle? Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle? A quoi sert une équation différentielle?
  - b) Donnez trois exemples d'équations différentielles.
  - c) Quels sont les différents moyens d'exprimer ou de représenter des solutions d'une équation différentielle?

Les questions, volontairement, ont un caractère flou et ne présentent pas un aspect mathématique. Comme dans une enquête, la formulation est assez générale, l'intérêt étant de laisser les étudiants exposer librement leurs idées. Il ne s'agit pas de résoudre des problèmes, mais simplement de donner son avis à propos de quelques notions du champ des équations différentielles. Nous considérons que le fait de ne demander ni définition, ni résolution de problèmes, facilitera l'extériorisation des conceptions des étudiants sur ces notions.

Dans la question concernant les solutions d'une équation différentielle, nous avons fait le choix de la formuler au singulier, pour laisser apparaître d'éventuels conflits liés au fait qu'une équation différentielle admette une infinité de solutions.

## **Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

### **Premier groupe de questions**

Les premières questions sollicitent l'avis des étudiants seulement sur les équations différentielles, leurs solutions et l'utilité de celles-ci. Nous considérons que même si ceux-ci ne se souviennent pas des définitions données dans les cours ou les manuels, la mise en relation des sujets proposés avec des notions voisines peuvent les aider à fournir des réponses, telles que :

- *une équation différentielle fait intervenir une fonction inconnue et ses dérivées.* Dans ce cas, nous considérons que le fait de les faire parler d'équations et en particulier d'une équation différentielle, peut les conduire à établir un lien avec des connaissances sur les inconnues, les équations, les fonctions et les dérivées ;

- *les solutions sont des fonctions inconnues qui vérifient l'équation différentielle.* Nous pensons que dans une réponse de ce type, les étudiants peuvent s'appuyer sur le transfert des connaissances sur les solutions d'équations algébriques ;
- *les équations différentielles servent à modéliser des phénomènes évolutifs dans diverses disciplines (physique, biologie, etc.).* Nous considérons que même si dans l'enseignement traditionnel les équations différentielles ne s'appliquent que faiblement (Artigue 1989, Saglam 2004), tel type de réponse pourrait faire référence aux domaines d'application que les étudiants ont rencontrés dans leurs cours (par exemple en physique).

### **Deuxième question**

La deuxième question appelle trois exemples d'équations différentielles. Or, il a déjà été montré (Saglam 2004) que dans l'enseignement de niveau DEUG, les étudiants travaillant presque exclusivement avec des équations linéaires, nous pouvons donc nous attendre à ce que les exemples donnés par les étudiants reflètent cette tendance.

### **Troisième question**

Dans la troisième question il est demandé d'exprimer différents moyens de représenter les solutions. Compte tenu du fait que l'enseignement traditionnel reste centré sur le registre symbolique (Artigue, 1989 ; Saglam 2004, Arslan 2005) et que l'usage du graphique dans l'enseignement universitaire se caractérise par un mode de fonctionnement idéogrammatique, nous pouvons donc supposer que les réponses des étudiants privilégieront le registre symbolique et que le registre graphique sera considéré seulement comme un moyen d'exprimer les solutions. Il est possible d'avoir aussi quelques réponses où le registre numérique est perçu comme un moyen d'exprimer les solutions. Ce dernier cas pourrait se présenter à la suite d'une éventuelle rencontre des étudiants, précédemment, avec les méthodes numériques pour approcher les solutions.

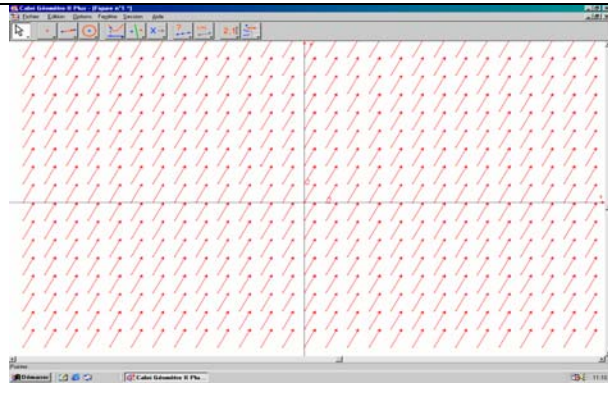
#### **2.2.1.2 Deuxième partie du questionnaire**

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés particulièrement aux passages du registre graphique des solutions au registre symbolique des équations différentielles. Compte tenu du niveau des étudiants de CAPES, nous pouvons attendre d'eux, dans des cas simples où les connaissances à faire fonctionner sont des connaissances élémentaires du lycée, qu'ils soient capables de réaliser le passage du registre graphique au registre symbolique.

Dans cette partie, nous avons fait le choix de proposer aux étudiants un champ de vecteurs très simple, car il s'agit d'un champ dont les solutions associées sont représentées graphiquement par des droites parallèles. Nous prévoyons que les étudiants seront capables d'associer l'équation différentielle qui correspond au dessin fourni. En revanche, la tâche sera révélatrice de difficultés importantes pour articuler les représentants graphiques et symboliques en jeu, si les étudiants n'y répondent pas.

Le champ de vecteurs a été présenté en termes d'une fonction vectorielle ; cette fonction a été décrite dans le registre discursif et nous avons fourni un représentant graphique de celle-ci. Ce choix est fait pour éviter de donner des indices sur l'équation différentielle associée, comme par exemple la valeur de la pente ; en revanche, le dessin fourni donne une indication explicite du sens de variation des solutions :

Le champ de vecteurs ci-dessous représente une fonction vectorielle qui à chaque point  $(x,y)$  du plan associe un vecteur de coordonnées  $(1,2)$



a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin ? Justifiez votre réponse.

b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle ?

c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

Volontairement, les questions donnent la possibilité d'admettre des réponses répétitives. Ce choix est fait pour obtenir le maximum d'informations sur les connaissances mises en œuvre.

Dans la première question, on demande l'avis des étudiants seulement sur la possibilité d'associer le représentant graphique aux équations différentielles. On y attend aussi une justification de la réponse. La deuxième question requiert, dans un cas de réponse affirmative à la première, de tirer des informations sur les solutions de l'équation différentielle à partir du représentant graphique fourni. La troisième question sollicite le registre symbolique pour exprimer l'équation différentielle associée au dessin, et demande aussi la justification de la réponse.

### **Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

Nous attendons des étudiants qu'ils parviennent à associer au dessin l'équation différentielle  $y' = 2$ . Nous décrivons, par la suite, les stratégies pouvant à notre avis être mobilisées pour y parvenir.

#### **Première question**

Dans la question : *Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin? Justifiez votre réponse*, n'apparaît pas explicitement la demande de l'expression symbolique de l'équation. Nous attendons des étudiants qu'ils expriment seulement la possibilité d'établir un lien entre le dessin fourni et les équations différentielles.

Nous considérons qu'une réponse affirmative peut s'appuyer sur la mise en fonctionnement de deux types d'arguments. D'abord la reconnaissance, à partir du représentant graphique, d'une famille de droites parallèles. Ensuite, la mise en œuvre des connaissances qui prennent en compte le fait que les solutions d'une équation différentielle sont des fonctions, et qu'elles peuvent donc être représentées dans le registre graphique au moyens de courbes. Ces connaissances permettent établir un lien d'une expression symbolique à un représentant graphique, mais on remarque que le lien de sens inverse n'est pas toujours vrai. En général, à partir d'une famille de courbes, on ne peut pas lui associer une équation différentielle. Dans le cas qui nous occupe, la configuration de la famille de courbes est très simple (une famille de droites), donc le lien dans les deux sens entre les représentants en jeu (famille de droites parallèles et équation différentielle) peut s'envisager comme possible.

Le recours à des arguments comme ceux cités ci-dessus, peut donner aux étudiants la certitude qu'il est possible d'associer au dessin une équation différentielle. Nous considérons que la justification de la réponse pourrait permettre de les expliciter.

Nous remarquons que dans cette première question, des réponses affirmatives concernant la possibilité d'associer au dessin une équation différentielle (non accompagnées d'arguments, ni de la donnée d'une expression symbolique) pourraient attester un effet de contrat : si l'on a posé la question de la possibilité d'associer une équation différentielle au dessin, cela sous-entend une réponse positive.

### **Deuxième question**

En ce qui concerne la question : *Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?* nous considérons d'abord qu'une réponse affirmative à la première question a été précédée de la reconnaissance de la famille de droites parallèles. Donc, dans la deuxième question nous attendons des étudiants qu'ils explicitent davantage les propriétés de cette famille de solutions, comme celles du sens de variation, etc., et éventuellement qu'ils fournissent l'expression symbolique associée à ces solutions.

### **Troisième question**

La question : *Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse,* demande explicitement d'exprimer dans le registre symbolique l'équation différentielle associée au dessin. Pour l'obtention de l'expression symbolique  $y'=2$  demandée, nous identifions deux stratégies :

- la première stratégie consiste à associer d'abord à la famille de droites une expression symbolique telle que,  $y=2x+C$ . Dans cette stratégie, nous supposons que les étudiants identifient la valeur de la pente à partir des données fournies. L'établissement de ce lien entre le registre graphique et le registre symbolique requiert des connaissances comme :

*« l'équation d'une famille de droites parallèles, ayant « a » comme coefficient directeur, est de la forme «  $y=ax+C$  » où C est un nombre réel quelconque » (C1)*

Ensuite, une fois que l'on dispose d'une expression symbolique pour la famille de courbes solutions, en restant dans le registre symbolique, par dérivation on peut obtenir l'équation différentielle  $y'=2$  cherchée. Les connaissances permettant ce traitement dans le registre symbolique peuvent s'énoncer comme :

*« si l'on connaît l'expression symbolique  $h(x,y,k)=0$  d'une famille de courbes, en dérivant une fois cette expression par rapport à la variable x et dans le cas où l'on peut éliminer k, il est possible de trouver l'équation différentielle  $f(x,y,y')=0$  de la famille de courbes » (C2)*

- la deuxième stratégie consiste à établir un lien direct entre le champ de vecteurs et l'équation différentielle recherchée. Ce lien demande, d'abord, le calcul de la pente des droites parallèles à partir des coordonnées des vecteurs. Ensuite, il est demandé

d'interpréter la pente en termes de la dérivée des solutions. Pour mettre en relation la pente et la dérivée il faut mobiliser des connaissances du cadre de l'analyse, telles que :

*« soit  $\Gamma_P$  la courbe représentative d'une fonction numérique continue et différentiable  $f$  qui passe par un point  $P(x_P, y_P)$ , la pente de la droite tangente à  $\Gamma_P$  en  $P$  est donnée par  $f'(x_P)$  » (C3)*

Dans cette stratégie, la reconnaissance de  $y'=2$  comme équation différentielle de la famille de droites parallèles requiert que dans cette expression symbolique, le terme constante 2 soit considéré comme la donnée d'une fonction de deux variables  $f(x,y)=2$ .

Et concernant la justification des réponses, nous supposons la mobilisation d'arguments de différents types :

- des arguments qui se fondent sur la mise en relation de l'expression symbolique  $y'=2$  avec la famille de droites parallèles. Le représentant symbolique pourrait être interprété comme fournisseur de la pente des droites parallèles. Ce lien entre le registre graphique et le registre symbolique pourrait s'appuyer sur la mise en œuvre de connaissances telles que :

*« une fonction affine admet en tout point une dérivée constante » (C4)*

- des arguments qui se basent sur la résolution algébrique de l'équation différentielle obtenue (des arguments du type RES-ED). Pour ce type d'arguments, nous considérons que les étudiants pourraient conclure sur la cohérence entre la forme graphique des solutions et leur expression symbolique ;
- des arguments qui se basent sur l'interprétation des droites parallèles en termes de sens de variation des fonctions affines qu'elles représentent (des arguments du type SENS-VAR). Ce type d'argument pourrait s'appuyer sur des connaissances du cadre de l'analyse, telles que :

*« pour une équation différentielle  $y'=f(x,y)$ , où  $f$  est une fonction numérique en  $\mathcal{R}^2$ , si  $f(x_P, y_P) > 0$  (resp.  $f(x_P, y_P) < 0$ ), alors la courbe solution  $\Gamma_P$  qui passe par  $(x_P, y_P)$  est une courbe représentative d'une fonction croissante (resp. décroissante) » (C5)*

### **2.2.1.3 Troisième partie du questionnaire**

Dans cette partie, notre intérêt est d'étudier les capacités des étudiants à effectuer des interprétations graphiques sur les solutions d'équations différentielles de la forme  $y'=f(x,y)$ , à partir de données numériques. Le passage du registre numérique au registre graphique requiert, d'abord, de lier les données numériques aux dérivées des solutions ; et ensuite, d'interpréter ces informations en termes de comportement des courbes solutions. Ce type de passage fait intervenir des connaissances liant des notions telles que : pente, dérivée, sens de variation des fonctions. Nous considérons que dans des cas simples, les étudiants de CAPES pourraient faire fonctionner ces connaissances.

Nous avons proposé l'activité suivante :



3) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une courbe solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .

Le choix d'exprimer l'équation sous une forme générale permet d'empêcher des essais de résolution algébrique ou numérique. Ce blocage tend à favoriser la mise en fonctionnement des connaissances dans les cadres des fonctions et de l'analyse pour répondre à l'activité proposée.

### **Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

L'énoncé proposé suppose implicitement qu'il est possible de construire une courbe solution de l'équation différentielle passant par le point  $P(-2,3)$ , donc qu'il est peu probable de trouver des remarques sur les propriétés de la fonction  $f$  qui garantissent l'existence des solutions. En revanche, dans cette activité nous envisageons des difficultés concernant les rôles différents des fonctions  $f$  et  $y$  en jeu.

La tâche nécessite l'étude locale d'une solution particulière  $y_P$  qui passe par le point  $P(-2,3)$ . Pour étudier le sens de variation de cette solution, il faut avoir des informations sur  $y_P'(-2)$ . Cette information doit être interprétée à partir de  $f(-2,3) = -1$  ; ce qui demande la mise en relation de connaissances du cadre des fonctions à une variable, et aussi du cadre des fonctions à deux variables. Dans ce cas, le point  $P$  devra être interprété comme un point sur la courbe représentative de la fonction  $y_P$ , mais aussi comme un point appartenant au domaine de définition de la fonction  $f$ . Nous considérons que ces mises en relation pourraient créer des sources de difficultés pour les étudiants.

Pour le tracé des représentants graphiques demandés, nous supposons l'intervention des étapes suivantes :

- une étape dédiée à l'interprétation de la donnée numérique  $f(-2,3) = -1$  : dans celle-ci, elle doit être considérée comme la pente de la droite tangente à la courbe solution qui passe par  $P$ . Cette étape s'appuie sur la mise en fonctionnement de connaissances telles que :

*« soit une équation différentielle de la forme  $y' = f(x,y)$ , la fonction  $f$  donne en chaque point  $P(x,y)$ , la pente de la droite tangente à la courbe solution passant par  $P$  » (C6)*

- une étape d'interprétation du sens de variation de la fonction dont la courbe représentative passe par le point  $(-2,3)$ . Cette étape requiert la mise en œuvre de connaissances telles que :

*« pour une équation différentielle  $y' = f(x,y)$ , où  $f$  est une fonction numérique en  $\mathcal{R}^2$ , si  $f(x_P, y_P) > 0$  (resp.  $f(x_P, y_P) < 0$ ), alors la courbe solution  $\Gamma_P$  qui passe par  $(x_P, y_P)$  est une courbe représentative d'une fonction croissante (resp. décroissante) » (C5)*

Dans cette partie du questionnaire, le fonctionnement du graphique se fait principalement dans le mode idéogrammatique : il est utilisé seulement pour esquisser les courbes solutions possibles et satisfaisant aux conditions imposées.

#### **2.2.1.4 Quatrième partie du questionnaire**

Dans la dernière partie du questionnaire, l'intérêt est d'étudier les potentialités des étudiants pour en tirer des informations sur les solutions d'une équation différentielle, à partir de l'expression symbolique de celle-ci (sans passer par la résolution algébrique). Nous voulons étudier en particulier les connaissances mises en oeuvre pour décrire, au voisinage d'un point, le comportement d'une courbe solution, et pour donner la valeur approchée de l'ordonnée d'un point de la courbe.

Nous supposons qu'à partir de l'expression symbolique explicite d'une équation différentielle de premier ordre, les étudiants pourraient arriver à connaître le sens de variation de la fonction solution dont la courbe représentative passe par un point donné (connaissances C5 et C6), sans recourir à la résolution algébrique. Nous présumons aussi qu'ils seraient capables de mettre en oeuvre la méthode d'Euler, ou de l'équation de la droite tangente, pour approcher les abscisses des points d'une courbe solution<sup>2</sup>. Dans cette dernière partie du questionnaire nous avons proposé les questions suivantes :

4) On considère l'équation différentielle  $y'=y^2-x$ . Si C est la courbe associée à la solution de l'équation qui passe par le point M(-2,1), décrire le comportement de C au voisinage du point M. Donner une valeur approchée de l'ordonnée du point N de C qui a comme abscisse  $x=-1,5$ .

Nous avons fait le choix d'une équation différentielle avec une expression symbolique simple, pour éviter des calculs numériques complexes. L'équation proposée n'est pas intégrable par des méthodes élémentaires, l'objectif de ce choix étant d'imposer l'établissement d'un lien direct entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et le sens de variation des solutions.

Les réponses font appel au registre discursif, mais il est possible que les étudiants fournissent un représentant graphique de la courbe C.

#### **Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

La description du comportement de la courbe solution C, au voisinage du point M, requiert d'abord la disponibilité de connaissances telles que C6, pour lier l'expression symbolique  $y'=y^2-x$  et les pentes des droites tangentes aux courbes solutions. Dans ce cas particulier, ces connaissances peuvent amener à la conclusion suivante : *la courbe C au point M(-2,1) a une droite tangente dont la pente est égale à 3*. Ensuite, il faut interpréter la valeur de la dérivée au point M en termes du sens de variation de la solution. Cette interprétation demande la disponibilité de connaissances, comme C5 (sens de variation à partir du signe de la dérivée dans une équation différentielle). La mise en oeuvre de ces connaissances pourrait permettre de conclure que *la courbe C qui passe par M, est une courbe représentative d'une fonction croissante*.

---

<sup>2</sup> Certaines connaissances sur la méthode d'Euler et la droite tangente sont acquises dès le lycée.

En ce qui concerne la réponse sur la valeur approchée de l'ordonnée du point N de la courbe C, nous prévoyons deux possibilités : la mise en œuvre de la méthode d'Euler ; ou bien la mise en œuvre d'une démarche d'approximation par la droite tangente (inspirée de la méthode d'Euler). Ce dernier cas oblige à supposer que la courbe au voisinage d'un point peut être approchée par sa droite tangente. Les connaissances qui permettent de faire le lien entre une courbe et la droite tangente en un point, peuvent se formuler ainsi :

*« la courbe représentative d'une fonction numérique, continue et différentiable  $f$  peut être approchée au voisinage d'un point  $P$  par sa tangente en  $P$  » (C7)*

Lors de l'obtention de la valeur approchée de l'ordonnée du point N, cette valeur peut s'appuyer sur l'équation de la droite tangente. Ce qui requiert la disponibilité de connaissances du cadre de l'analyse telles que :

*« l'équation de la droite tangente dans un point  $P(x_P, y_P)$  d'une courbe  $\Gamma_P$ , représentative d'une fonction continue et différentiable  $f$ , peut être exprimée sous la forme  $y - y_P = f'(x_P)(x - x_P)$  » (C8)*

La mise en œuvre des connaissances C8 peut conduire à l'équation  $y = 3x + 7$ , de la droite tangente à la courbe solution C passant par  $M(-2, 1)$ , et à utiliser cette équation pour fournir 2,5 comme l'ordonnée approchée du point de la courbe C ayant pour abscisse -1,5.

De la même manière que dans la troisième partie, nous considérons que les rôles différents qu'ont les fonctions  $f$  et  $y$  dans l'équation  $y' = f(x, y)$  peuvent être source de difficultés pour les étudiants. Par exemple, lors de l'écriture de l'équation de la droite tangente, cette droite est associée à une solution spécifique (variable  $y$ ), et pourtant les informations sur la pente doivent découler de la fonction  $f$ .

### **2.2.2. Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$**

Cette première situation, du type « association de représentants » d'objets du champ des équations différentielles, comporte deux étapes : la première pour être réalisée en papier/crayon, et la deuxième pour être traitée dans l'environnement de géométrie dynamique. Elle est centrée sur les passages entre deux représentants du registre graphique : un champ de tangentes et les courbes solutions qui lui sont associées.

Nous avons conçu cette situation en observant une certaine progression dans la construction des rapports entre ces représentants. Elle démarre avec des tâches de tracé et de description de courbes en papier/crayon et à la fin, avec l'utilisation de l'environnement de géométrie dynamique, cette situation porte sur des tâches de prévision et de justification de comportements des courbes solutions, à l'infini.

Le choix d'un travail préalable en papier/crayon, d'une même équation, a comme propos d'étudier si le recours au contexte informatique permet des évolutions possibles pour d'éventuelles difficultés repérées.

### 2.2.2.1 Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$ en papier/crayon

L'objectif, dans la première partie, est d'étudier les connaissances mises en œuvre par des étudiants de niveau avancé (préparation CAPES) dans des tâches apparemment simples, telles que tracer des courbes à partir d'un champ de tangentes, ou tirer des informations de ce champ en termes de comportement des courbes solutions.

Pour avoir une idée des sources possibles de difficultés chez les étudiants, nous rappelons ci-dessous la procédure pour construire un champ de tangents et les compétences en jeu pour le tracé de courbes solutions.

Lors de la construction d'un champ de tangentes associé à l'équation différentielle  $y' = f(x,y)$ , où  $f$  est une fonction numérique sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , on prend en compte le fait que pour chaque point  $P(x,y)$  de  $U$ , la fonction  $f(x,y)$  fournit la pente de la droite tangente à la courbe solution qui passe par  $P$ . Pour le tracé, on utilise normalement une grille de points d'une certaine région du plan et en chaque point de la grille, on évalue la pente que l'on représente graphiquement par un petit segment centré sur le point. Une courbe solution est une courbe qui suit le champ de tangentes, et son graphe est tangent à chacun des petits segments qu'il touche.

Les informations sur les courbes solutions tirées d'un champ de tangentes peuvent être de deux types : des informations de nature locale ou des informations de nature globale. Donc, les courbes associées à un champ de tangentes peuvent s'examiner de deux points de vue :

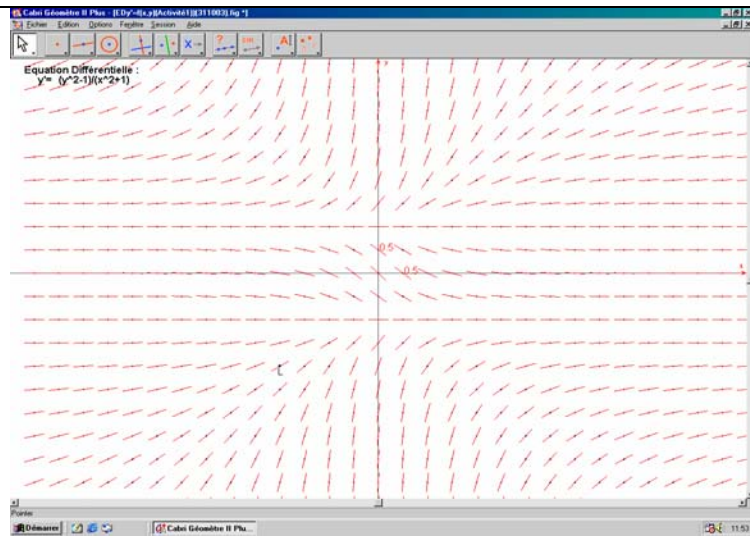
- un point de vue global, qui permet de les voir compatibles avec l'ensemble de courbes qu'esquisse le champ de tangentes ;
- un point de vue local, qui permet de considérer les petits segments du champ de tangentes comme des approximations affines locales des courbes solutions.

D'autre part, le tracé des courbes associées à un champ de tangentes peut susciter des difficultés telles que :

- pour les points qui ne sont pas sur la grille, à partir de la vue globale du champ, il faut interpoler la direction des petits segments de tangentes non tracés ;
- lors du tracé d'une courbe, une fois qu'un point de la grille a été pris comme approximation locale de la courbe, le plus souvent on n'utilise pas les points voisins de la grille pour continuer le tracé et il faut continuer en prenant des points proches mais qui n'appartiennent pas à la grille ; dans tous les cas, on doit garder une certaine cohérence avec la vue globale de l'ensemble de courbes.

Les tâches proposées aux étudiants, en papier/crayon, sont les suivantes :

Le dessin ci-dessous montre le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$



- a) Dessiner quelques courbes solutions sur l'écran ci-dessus et décrire le comportement des courbes solutions.
- b) Soit  $C_1$  la courbe solution qui passe par le point  $L(-2,-2)$ . Décrire l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$ . Qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini? Justifier votre réponse.

L'équation différentielle choisie peut être résolue algébriquement, et pourtant le traitement dans le registre symbolique pour aboutir à une expression explicite des solutions, est coûteux. De plus, l'énoncé ne suggère pas la mise en œuvre d'une telle stratégie, donc nous considérons que les étudiants n'y ont pas recours.

La première question comprend deux consignes relatives au registre graphique : tracé de courbes solutions et description des comportements des courbes. Cette question présente volontairement un caractère un peu flou, l'objectif de la question étant de familiariser les étudiants avec les représentants graphiques en jeu (champ de tangentes, courbes solutions). Elle vise aussi à identifier d'éventuelles difficultés pour réaliser les passages entre ces représentants.

La deuxième question comprend trois consignes : décrire une courbe solution, prévoir le comportement de la courbe à l'infini, justifier la réponse. Ces consignes tendent à mettre en relation les représentants en jeu (champ de tangentes, courbe solution, équation différentielle) à un niveau différent de celui de la première question. La prévision du comportement de la courbe et sa justification mathématique requièrent la mise en fonctionnement de connaissances des cadres des fonctions, de l'analyse, etc., pour rendre compte, par exemple, du sens de variation de la solution dont  $C_1$  est la courbe représentative, etc.

### **Variables didactiques**

Dans la conception de l'énoncé nous avons identifié deux variables didactiques, l'une concernant l'affichage du champ de tangentes et l'autre, le choix du point par lequel la courbe solution  $C_1$  doit passer :

### **La variable EQ1**

Cette variable rend compte du degré de complexité de la configuration graphique du champ de tangentes associé à une équation différentielle. Elle considère le fait qu'à chaque équation différentielle de la forme  $y' = f(x,y)$  on peut associer un champ de tangentes, dont la configuration dépend de l'équation. Nous avons distingué deux valeurs :

EQ<sub>1</sub><sub>1</sub> : équation différentielle dont le champ de tangentes a une configuration graphique simple ;

EQ<sub>1</sub><sub>2</sub> : équation différentielle dont le champ de tangentes a une configuration graphique complexe.

La valeur EQ<sub>1</sub><sub>1</sub> correspond au cas où la vue d'ensemble des courbes solutions fournie par le champ de tangentes permet d'identifier facilement des propriétés de la famille de courbes solutions, telles que : les courbes solutions peuvent être déduites les unes des autres par des translations de vecteur horizontal ou vertical ; etc.

La valeur EQ<sub>1</sub><sub>2</sub> correspond au cas où la vue d'ensemble des courbes solutions fournie par le champ de tangentes est complexe, par exemple lorsqu'il s'agit de courbes sinueuses et que les différentes familles de solutions sont peu visibles. Le choix de cette valeur pourrait conduire à bloquer le travail de tracé des courbes.

Nous avons fait le choix de la valeur EQ<sub>1</sub><sub>1</sub>, en cherchant une équation différentielle dont la vue globale des courbes solutions fournie par le champ de tangentes ne soit pas trop complexe, et où des propriétés telles que la symétrie, le sens de variation des courbes, etc., puissent être facilement identifiées.

### ***La variable EQ2***

Cette variable concerne le choix de la courbe spécifique à étudier. Dans cette variable, on doit prendre en compte le fait qu'il y ait une infinité de courbes susceptibles d'être étudiées. Nous considérons que les stratégies mises en œuvre pour étudier le comportement de courbes solutions spécifiques, pour lesquelles on peut associer facilement une expression symbolique, réduisent les interactions entre les registres graphique et symbolique. Par exemple, l'étude des variations de ces solutions n'oblige pas à tirer de la lecture du graphique des informations relatives à la dérivée, car l'expression symbolique de la solution pourrait leur fournir directement. Ces considérations nous amènent à identifier deux valeurs de la variable didactique (lorsqu'on ne dispose pas de l'expression symbolique des solutions) :

EQ<sub>2</sub><sub>1</sub> : une courbe solution spécifique à laquelle on associe facilement une expression symbolique ;

EQ<sub>2</sub><sub>2</sub> : une courbe solution à laquelle il n'est pas possible d'associer une expression symbolique.

Nous avons fait le choix de la valeur EQ<sub>2</sub><sub>2</sub> et de plus, nous avons choisi une courbe qui se trouve proche d'une solution constante. Dans ce dernier cas, comme le champ de tangentes donne un ensemble discret de segments, les informations explicites que l'on peut tirer de celui-ci ne sont pas suffisantes pour analyser le comportement de la courbe. Donc, ces choix problématifient le passage entre les deux représentants graphiques (champ de tangentes et courbes solutions), ce qui à notre avis pourrait favoriser la mise en relation des comportements graphiques avec des connaissances du domaine des équations différentielles.

## **Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

### **Première question**

La première question, *Dessiner quelques courbes solutions sur l'écran ci-dessus et décrire le comportement des courbes solutions*, met en relation explicite les deux représentants graphiques en jeu : le champ de tangentes et les courbes solutions. La première consigne est une tâche qui requiert seulement une lecture graphique du champ de tangentes. La deuxième consigne sollicite le registre discursif et on en attend une description mathématique du comportement des courbes.

### *Tracé des courbes solutions*

En ce qui concerne le tracé des courbes solutions, nous envisageons la stratégie suivante :

- choisir un point quelconque du plan (sur le champ de tangentes fourni). Nous considérons que le choix le plus probable se fera sur la grille (qui supporte les segments du champ de tangentes) ;
- tracer la courbe, à partir du point choisi, en suivant le champ de tangentes de manière à ce que la courbe soit tangente à chacun des petits segments qu'elle touche ;
- pour les cas où la courbe ne touche aucun des segments du champ (des régions du plan où il n'y a pas de segments des tangentes), il faudra interpoler à partir de la vue globale du champ la direction des petits segments de tangentes non tracés ;
- la courbe tracée doit être un trait continu. D'un point de vue global, elle doit être cohérente avec l'ensemble des courbes esquissées par le champ de tangentes.

Le contrôle du tracé des courbes, dans cette consigne, est perceptif. Il est basé sur la position de la courbe par rapport aux segments tangents. Nous considérons que le lien entre les segments et les courbes solutions peut être établi, en faisant fonctionner des connaissances qui prennent les petits segments comme tangents aux courbes :

*« si une courbe solution passe par un point  $Q$  de la grille qui supporte le champ de tangentes, alors la courbe est tangente au segment centré en  $Q$  »*  
(C9)

Nous considérons qu'en s'appuyant sur les données graphiques, les étudiants pourraient aussi considérer les segments comme des petits morceaux de courbes. Ce qui réduirait l'activité du tracé de courbes solutions à une tâche où il s'agirait de relier le plus possible les petits segments entre eux, sans contrôle de connaissances.

Nous remarquons que dans ces tâches de tracé des courbes solutions, le registre graphique pourrait fonctionner selon les modes idéogrammatique ou opératoire. Le tracé de courbes en s'appuyant seulement sur les données graphiques, sans mettre en jeu des connaissances telles que C9, serait distinctif d'un mode idéogrammatique.

### *Description du comportement des courbes solutions*

En ce qui concerne la description des courbes, nous nous attendons à la voir s'effectuer en vocabulaire mathématique sur le sens de variation des fonctions. Nous considérons que les étudiants pourraient identifier les solutions constantes, ainsi que les régions où les fonctions

associées aux courbes solutions sont croissantes ou décroissantes. Dans ce dernier cas, il est possible que les étudiants identifient les solutions constantes  $y=\pm 1$  et les trois régions :  $y < -1$ ,  $-1 < y < 1$ ,  $y > 1$  où les solutions sont respectivement croissantes, décroissantes, croissantes. La description des courbes pourrait aussi inclure l'identification de propriétés telles que la symétrie du champ de tangentes.

Nous considérons qu'une éventuelle interprétation mathématique des comportements des courbes solutions, qui ferait intervenir des connaissances du cadre de l'analyse sur le sens de variation des fonctions, sur le régionnement du plan selon le signe de la dérivée, etc., donnerait des indices d'une certaine flexibilité pour articuler les registres de représentation en jeu.

### *Deuxième question*

La question : Soit  $C_1$  la courbe solution qui passe par le point  $L(-2,-2)$ . Décrire l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$ . Qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini? Justifier votre réponse, se centre sur l'étude d'une courbe particulière. Les trois consignes qui composent cette question mettent en relation les représentants en jeu (le champ de tangentes, la courbe  $C_1$ , l'expression symbolique de l'équation différentielle). Cette question, à la différence de la première, ne reste pas seulement au niveau descriptif, et la justification du comportement de la courbe requiert la mise en oeuvre de connaissances des cadres des fonctions et de l'analyse pour interpréter les faits graphiques.

### *Description de l'allure de la courbe $C_1$*

Cette consigne se trouve au même niveau que les consignes de la question précédente. Nous considérons que la description de la courbe peut être précédée par son tracé, en utilisant la stratégie présentée dans la première question. Par rapport à la description de la courbe, nous attendons des étudiants qu'ils s'appuient sur l'information graphique pour conclure qu'il s'agit d'une courbe représentative d'une fonction croissante.

### *Prévision du comportement de la courbe $C_1$ en plus l'infini*

Cette consigne demande une anticipation du comportement de la courbe. La réponse, dans un premier temps, pourrait être fournie au niveau discursif, en s'appuyant seulement sur les données graphiques. Nous nous attendons à ce que les étudiants considèrent que la courbe  $C_1$  est représentative d'une fonction majorée, donc qu'elle a une limite finie. Il est possible que la prévision du comportement de la courbe à l'infini, appuyée sur l'évidence graphique, amène à conclure que la courbe  $C_1$  s'approche de la droite  $y=-1$ , et par conséquent à supposer (de manière erronée) que la limite en  $+\infty$  de la fonction solution, dont  $C_1$  est la courbe représentative, est  $-1$ .

### *Justification*

Nous considérons que suite aux constats graphiques perceptifs, la demande de justification peut favoriser la mise en oeuvre de connaissances du domaine des équations différentielles. Ces connaissances pourraient être liées au sens de variation des fonctions ou à la convergence des fonctions majorées. Nous présentons ci-dessous quelques connaissances qui pourraient être mobilisées :

- pour le sens de variation des fonctions :

« pour une équation différentielle  $y'=f(x,y)$ , où  $f$  est une fonction numérique en  $\mathcal{R}^2$ , si  $f(x_P,y_P)>0$  (resp.  $f(x_P,y_P)<0$ ), alors la courbe solution



$\Gamma_P$  qui passe par  $(x_P, y_P)$  est une courbe représentative d'une fonction croissante (resp. décroissante) » (C5)

- pour la convergence de fonctions monotones bornées :

« soit  $f$  une numérique continue définie sur  $]a, +\infty[$ , si  $f$  est décroissante et minorée (resp. croissante et majorée) sur  $]a, +\infty[$ , alors  $f$  a une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$  » (C10)

Le recours aux connaissances C5 et C10 peut permettre l'élaboration des arguments de justification qui prennent en compte des éléments comme :

- la courbe  $C_1$  est représentative d'une fonction croissante ;
- $y=-1$  est une solution constante ;
- les courbes solutions ne se croisent pas, car dans l'équation différentielle étudiée  $y'$  s'exprime sous la forme  $y'=f(x,y)$ , ce qui ne permet pas d'avoir en un même point du plan deux valeur différentes de la pente de la droite tangente ;
- la solution, dont  $C_1$  est la courbe représentative, est majorée par la solution constante  $y=-1$ , alors elle a une limite finie.

Bien évidemment, comme nous l'avons déjà signalé, nous n'attendons pas des étudiants des formulations très élaborées. Par contre, nous considérons que leurs arguments peuvent apparaître très fortement liés aux données issues de leur perception graphique.

Nous prévoyons que la demande de justification puisse devenir laborieuse pour les étudiants. Des sources possibles de difficultés pourraient reposer d'une part, sur le fait que la courbe  $C_1$  doit être associée à une fonction numérique d'une variable réelle dont on ne dispose pas de l'expression algébrique, et d'autre part, sur la justification qui doit se faire à l'aide de la dérivée, car on ne dispose pas que de l'expression algébrique de l'équation différentielle. Pour justifier le comportement de  $C_1$ , on a besoin de parler de «  $y$  » mais on ne connaît que «  $y'$  ».

### **2.2.2.2 Etude descriptive des courbes solutions de l'équation**

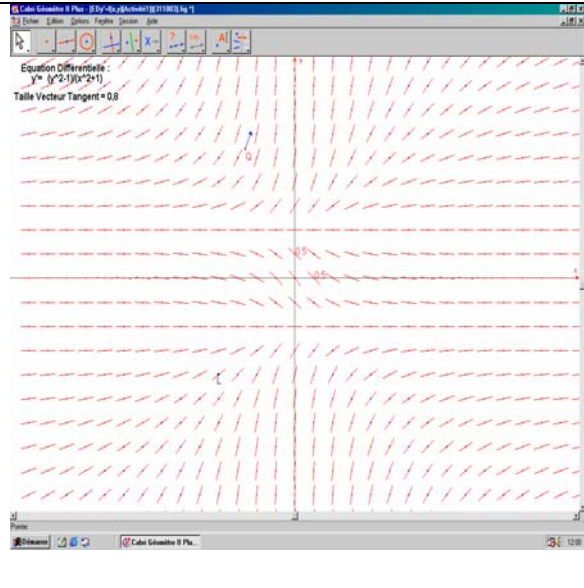
#### **différentielle $y'=\frac{y^2-1}{x^2+1}$ en géométrie dynamique**

Dans cette deuxième partie, nous voulons étudier les apports du logiciel Cabri dans l'étude des courbes solutions d'une équation différentielle. Nous cherchons à identifier d'éventuelles évolutions des étudiants dans l'établissement des liens entre les représentants en jeu. Nous supposons que les rétroactions rendues possibles par l'environnement peuvent permettre d'obtenir une description plus fine des courbes solutions, ou d'invalidier des conjectures fausses faites en papier/crayon. Nous avons mis en place cette deuxième partie tout de suite après la première partie, sans faire de bilan entre les deux.

Comme nous l'avons explicité au chapitre 1, l'environnement informatique offre différents outils pour l'exploration d'un champ de tangentes, tels que : la manipulation directe et l'outil

« Trace ». La manipulation directe permet de montrer de façon perceptible les variations d'un vecteur tangent dynamique. L'inclinaison de ce vecteur rend visible la direction des droites tangentes aux courbes solutions. La possibilité de déplacer continûment le vecteur dynamique sur tout l'écran ne nécessite pas d'interpolations pour connaître la direction des vecteurs tangents (comme c'était le cas en papier/crayon). Par ailleurs, l'utilisation de l'outil « Trace » permet d'avoir un aperçu des courbes solutions. Pour tracer une courbe solution à l'aide de l'outil « Trace », il faut déplacer le vecteur soigneusement. La densité affichée des vecteurs dépend de la vitesse du déplacement du vecteur. Nous considérons que ces rétroactions graphiques du logiciel pourraient contribuer à mettre en évidence l'aspect fonctionnel de  $y'$ , de manière à ce que  $y'$  soit identifiée comme dépendante des deux variables  $x$  et  $y$ . Rappelons que d'après les caractéristiques de l'enseignement traditionnel des équations différentielles, l'on constate que l'approche algébrique ne met en évidence que la nature fonctionnelle de la variable  $y$ , en laissant de côté l'étude des caractéristiques fonctionnelles de  $y'$ .

Dans cette deuxième partie de la situation, nous avons repris la même équation différentielle, étudiée dans la première partie. Nous avons aussi fait le choix de fournir le champ de tangentes comme fond d'écran, ainsi qu'un vecteur tangent dynamique :

<p>Ouvrir la figure "Activité 1". Sur l'écran s'affiche le champ de tangentes de l'équation différentielle <math>y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}</math>. Le vecteur d'origine Q est déplaçable.</p>	
	<p>a) Déplacer le point Q et écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe <math>C_1</math> à partir de ce que vous voyez à l'écran. <math>C_1</math> est la courbe solution qui passe par le point L(-2,-2).</p> <p>b) Le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace. Comment l'utiliser pour avoir une idée d'une courbe solution passant par un point donné ?</p> <p>c) Classifier les solutions par paquets, selon leur comportement. Combien de différents paquets on peut obtenir ? Justifier la réponse.</p> <p>d) Pour chaque paquet de courbes solutions, décrire leur comportement quand <math>x</math> tend vers plus l'infini. Justifier la réponse.</p>

L'objectif des deux premières consignes est de familiariser les étudiants avec l'environnement informatique. Dans ces cas-là, le graphique pourrait fonctionner selon un mode idéogrammatique, s'il est considéré seulement comme un moyen d'obtenir des idées sur le comportement des courbes solution. En revanche, dans les deux dernières consignes nous nous attendons à un usage du graphique sur un mode opératoire. En effet, la demande de justification faite dans les consignes c) et d) rend insuffisantes les informations obtenues à l'aide de l'exploration avec le vecteur dynamique, pour répondre aux questions. Il faut mobiliser des connaissances du domaine des équations différentielles pour interpréter et justifier les comportements graphiques repérés.

La première consigne reprend la dernière question posée en papier/crayon, et elle a pour objectif d'introduire le nouvel environnement de travail. Nous demandons explicitement de déplacer l'origine du vecteur tangent dynamique, et de tirer des informations complémentaires sur les comportements de la courbe  $C_1$ . La réponse fait appel seulement au registre discursif.

La deuxième consigne se trouve aussi dans la phase de familiarisation avec le logiciel, et elle sollicite le recours à l'outil « Trace » pour esquisser des courbes solutions. Elle fait jouer, sous un contrôle perceptif, les aspects locaux/globaux des courbes solutions. Le vecteur dynamique peut être considéré comme une approximation affine locale de la courbe, mais pour avoir un aperçu global de celle-ci, il faut suivre le vecteur dynamique et le déplacer de manière à ce que le trait de la courbe soit fin.

La troisième consigne demande le classement des solutions par paquets, ainsi que sa justification. La réponse à cette consigne requiert la prise en compte de la vue d'ensemble de la famille de courbes. Nous considérons que le déplacement du vecteur dynamique peut être utilisé comme outil, pour valider ou invalider d'éventuelles conjectures formulées sur le comportement graphique des courbes.

La quatrième consigne sollicite une tâche de prévision : il s'agit de prévoir ce qui se passe à l'infini avec le comportement des courbes solutions. Comme dans la consigne précédente, nous considérons que cette consigne favorise un usage du graphique dans un mode opératoire. Il est possible que dans un premier temps, les prévisions soient faites à partir des données graphiques, et pourtant la demande de les justifier pourrait favoriser la mise en relation des données graphiques repérées, avec des propriétés mathématiques des objets en jeu.

### **Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

#### **Première question**

Pour la première consigne, *Déplacer le point  $Q$  et écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$  à partir de ce que vous voyez à l'écran.*  $C_1$  est la courbe solution qui passe par le point  $L(-2,-2)$ , nous considérons que les étudiants ayant fait une lecture adéquate des données graphiques en papier/crayon pour décrire la courbe  $C_1$ , ne trouveront pas d'informations complémentaires lors du déplacement du vecteur dynamique. Pour ces étudiants, l'exploration à l'aide du vecteur dynamique pourrait confirmer les conjectures déjà faites. En revanche, pour les étudiants qui ont eu des problèmes pour décrire la courbe  $C_1$ , nous pensons que le travail exploratoire pourrait les amener à réfuter des conjectures fausses, et par conséquent les conduire à une meilleure description de la courbe  $C_1$ .

#### **Deuxième question**

La consigne : *Le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace. Comment l'utiliser pour avoir une idée d'une courbe solution passant par un point donné?* a comme intérêt de se concentrer sur les aspects locaux/globaux des courbes solutions de l'équation différentielle, sous un contrôle graphique perceptif. Cette consigne sous-entend que les courbes solutions sont des courbes représentatives de fonctions continues.

L'utilisation de l'outil « Trace » de Cabri demande la prise en compte des variations du vecteur dynamique. Si l'on veut esquisser une courbe solution, il faut déplacer soigneusement le vecteur, en suivant sa direction. La sensibilité du vecteur tangent aux variations de  $x$  et  $y$

oblige à déplacer le point de coordonnées  $(x,y)$  de façon lente, en contrôlant l'avancée certaine dans la direction fournie par le vecteur tangent : il faut avancer le vecteur de manière à ne pas avoir de changements brusques, et le trait résultant doit être fin. Dans la figure 1 ci-dessous, nous montrons le tracé d'une courbe solution obtenue par le déplacement du vecteur dynamique et l'outil « Trace » de Cabri :

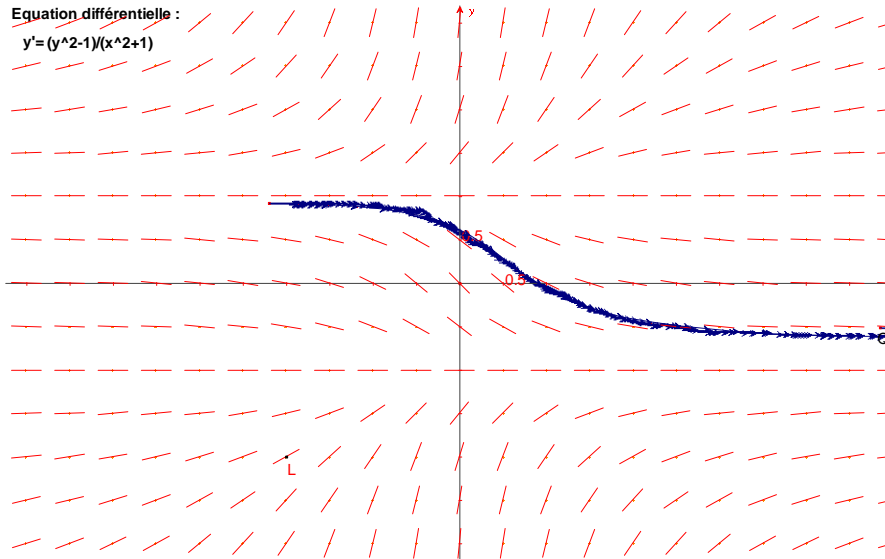


Fig.1: Courbe solution obtenue par le déplacement du vecteur dynamique et l'outil « Trace » de Cabri

Pour décrire le procédé de traçage des courbes solutions en géométrie dynamique, la réponse sollicite seulement le registre discursif. Nous considérons qu'elle pourrait évoquer certaines connaissances du cadre des fonctions relatives à l'approximation locale d'une courbe par sa tangente, telles que :

« la courbe représentative d'une fonction numérique continue et différentiable  $f$  peut être approchée au voisinage d'un point  $P$  par sa tangente en  $P$  » (C7)

### Troisième question

Pour la consigne : *Classer les solutions par paquets, selon leur comportement. Combien de différents paquets on peut obtenir? Justifier la réponse*, nous faisons l'hypothèse que l'exploration dans l'environnement informatique peut conduire à un classement des courbes solutions plus fin que celui obtenu en papier/crayon. Par exemple, le déplacement du vecteur dynamique pourrait conduire à l'identification de points d'inflexion des solutions et éventuellement à une classification des courbes solutions qui prenne en compte la courbure.

Nous identifions deux classifications possibles pour le comportement des courbes solutions : la première, qui prend en compte le sens de variation des fonctions solutions, et la deuxième qui considère la courbure. L'éventuelle identification de la symétrie du champ de tangentes peut réduire l'étude des zones à celles comprises dans le premier quadrant.

### Première classification

Une classification des courbes solution pourrait être obtenue à partir de la reconnaissance, à l'aide du vecteur dynamique, des solutions constantes :  $y=1$  et  $y=-1$  et des trois zones :  $y>1$ ,  $-1<y<1$ ,  $y<-1$ , où les solutions sont respectivement croissantes, décroissantes et croissantes. La justification d'une telle classification repose sur un usage important du graphique dans un

mode opératoire. Présentons d'abord certaines connaissances du domaine des équations différentielles que nous considérons possibles à mettre en œuvre :

- des connaissances sur le sens de variation des solutions :

*« pour une équation différentielle  $y'=f(x,y)$ , où  $f$  est une fonction numérique en  $\mathcal{R}^2$ , si  $f(x_P,y_P)>0$  (resp.  $f(x_P,y_P)<0$ ), alors la courbe solution  $\Gamma_P$  qui passe par  $(x_P,y_P)$  est une courbe représentative d'une fonction croissante (resp. décroissante) » (C5)*

- des connaissances faisant intervenir la vérification algébrique des solutions, en utilisant l'expression symbolique de l'équation différentielle (ce cas peut se présenter dans l'éventuelle représentation symbolique des solutions constantes) :

*« une solution d'une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$  est une fonction dérivable  $y$  d'une variable réelle, telle que  $y'(x)=f(x,y(x))$  » (C11)*

Pour la mise en fonctionnement des connaissances C5, nous considérons que le déplacement du vecteur dynamique pourrait jouer un rôle important. En effet, lorsque le vecteur est placé dans une des régions identifiées, il donne une indication explicite du sens de variation des fonctions solutions. Ces articulations pourraient permettre d'établir des liens directs entre les faits graphiques issus du déplacement du vecteur dynamique et les caractéristiques de

l'expression symbolique de l'équation différentielle  $y'=\frac{y^2-1}{x^2+1}$ . Donc, il est possible que les

étudiants prennent en compte le signe de  $y'$  pour justifier le sens de variation des fonctions solutions.

Dans le cas des solutions constantes, nous considérons que deux facteurs peuvent permettre de faire fonctionner les connaissances C11. Le premier, favorisé par l'exploration dynamique, peut mettre en évidence le fait que lorsqu'on déplace le vecteur dynamique en suivant une solution constante, il reste horizontal. Le deuxième facteur consiste à associer aux solutions constantes leur représentant symbolique (dans ce cas,  $y=-1$ ,  $y=1$ ). L'interprétation mathématique du premier facteur peut d'une part, permettre de faire le lien entre les fonctions constantes et la dérivée nulle. D'autre part, il est possible de vérifier facilement (sans faire un volumineux calcul) que les solutions constantes vérifient l'expression symbolique de l'équation différentielle. Donc, nous pouvons supposer que la mise en relation de tous ces éléments peut favoriser la mise en œuvre des connaissances C11. Pourtant, nous remarquons que vu la simplicité des expressions symboliques des solutions constantes, il serait possible d'établir ces liens sans forcément passer par l'exploration dynamique.

### *Deuxième classification*

Une exploration plus fine du champ de tangentes à l'aide du vecteur dynamique, pourrait permettre de classer les solutions en termes de courbure. Nous considérons que l'éventuelle reconnaissance graphique des points d'inflexion, peut conduire à chercher algébriquement le lieu des points d'inflexion. Ce qui demanderait la mise en œuvre de connaissances, telles que :

*« la courbe  $\Gamma_i$  des points d'inflexion d'une famille de solutions d'une équation différentielle, est composée des points où les pentes des courbes solutions passent par un extremum. Pour une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , ces points font partie de l'ensemble des couples  $(x,y)$  satisfaisant à  $f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)=0$  » (C12)*

Dans le cas qui nous occupe, les connaissances C12 peuvent permettre l'identification de la droite  $y=x$  comme lieu des points d'inflexion. Nous prévoyons que certains étudiants ne vont pas chercher le lieu des points d'inflexion tant que cela ne leur est pas explicitement demandé.

En s'appuyant sur la droite des points d'inflexion, les courbes solutions peuvent donc être classifiées en six paquets (cf. fig. 2, ci-dessous) :

- paquet CS1 : des courbes solutions de la zone  $y>1$  qui ne coupent pas la droite  $y=x$  ;
- paquet CS2 : des courbes solutions de la zone  $y>1$  qui coupent la droite  $y=x$  ;
- paquet CS3 : des courbes solutions de la zone  $-1<y<1$  ;
- paquet CS4 : des courbes solutions de la zone  $y<-1$  qui coupent la droite  $y=x$  ;
- paquet CS5 : des courbes solutions de la zone  $y<-1$  qui ne coupent pas la droite  $y=x$  ;
- paquet CS6 : les solutions constantes  $y=1$  et  $y=-1$ .

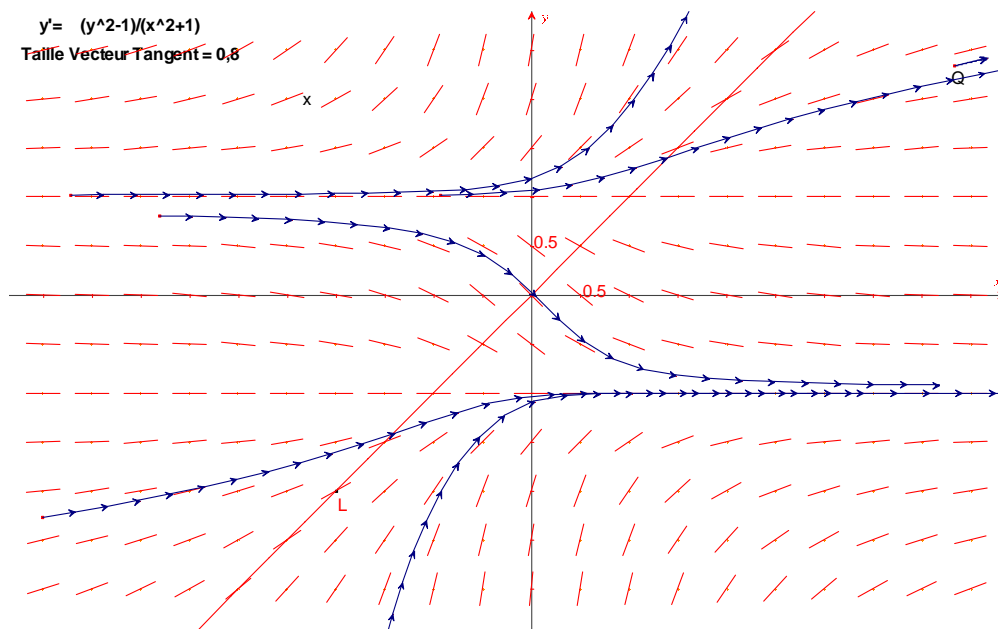


Fig. 2 : Différents comportements des courbes solutions de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$

Dans une telle classification des courbes solutions, nous considérons que le déplacement du vecteur dynamique et l'outil « Trace » de Cabri joueront un rôle très important. En effet, l'interprétation mathématique des faits graphiques repérés requiert un usage du registre graphique dans le mode opératoire où il faudrait donner, par exemple, des interprétations mathématiques aux phénomènes graphiques, comme ceux-ci : *si l'on suit une courbe solution en déplaçant le vecteur dynamique, lorsqu'on traverse la droite  $y=x$  les pentes du vecteur dynamique atteignent un extremum*. La mise en relation de ces propriétés graphiques avec des connaissances sur le sens de variation de la fonction dérivée, pourrait conduire à la formulation des arguments justificatifs appuyés sur les connaissances C12.

#### Quatrième question

La question suivante : *Pour chaque paquet de courbes solutions, décrire leur comportement quand  $x$  tend vers plus l'infini. Justifier la réponse*, place les étudiants dans une démarche de

prévision. Dans un premier temps, la question sollicite le registre discursif. Pourtant, la demande de justification peut permettre la mise en œuvre des connaissances des cadres des fonctions et de l'analyse, pour rendre compte des prévisions effectuées.

Nous présentons, ci-dessous, les prévisions possibles des comportements des courbes solutions à l'infini, pour la deuxième classification effectuée dans la question précédente. Dans ces prévisions, nous envisageons un recours important à l'exploration dynamique pour valider ou invalider des conjectures :

- les solutions du paquet CS1 tendent vers plus l'infini, lorsque  $x$  tend vers plus l'infini ;
- pour les solutions des paquets CS2, CS3, CS4 et CS5,  $y'$  tend vers zéro, quand  $x$  tend vers plus l'infini.

En ce qui concerne la justification de ces comportements à l'infini, nous supposons que parmi les connaissances appelées à fonctionner, on peut trouver :

- des connaissances sur les limites des fonctions lorsqu'on connaît quelques conditions sur la dérivée :

*« soit  $x \rightarrow y(x)$  définie sur  $]a, +\infty[$ , dérivable. Si  $y'(x) \rightarrow \alpha$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors :*

*Si  $\alpha > 0$  (éventuellement  $\alpha = +\infty$ ),  $y(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$*

*Si  $\alpha < 0$  (éventuellement  $\alpha = -\infty$ ),  $y(x) \rightarrow -\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$*

*Si  $\alpha = 0$ , on ne peut rien dire a priori » (C13)*

- des connaissances relatives aux fonctions monotones et bornées :

*« soit  $f$  une fonction numérique continue d'une variable réelle, définie sur  $]a, +\infty[$ , si  $f$  est décroissante et minorée (resp. croissante et majorée) sur  $]a, +\infty[$ , alors  $f$  a une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$  » (C10)*

Comme dans la question précédente, nous pensons que la mise en œuvre des connaissances C13 et C10 peut être favorisée aussi par un usage du graphique dans un mode opératoire. Le déplacement du vecteur dynamique, en suivant une courbe solution, peut rendre compte perceptivement des liens entre les coordonnées de l'origine du vecteur et de sa pente. Par exemple :

- dans la zone qui correspond au paquet CS1, les courbes solutions sont croissantes ; lorsqu'on suit une courbe dans la direction positive des  $x$ , le vecteur dynamique devient presque vertical ;
- dans les zones qui correspondent aux paquets CS2, CS4 et CS5, les courbes solutions sont croissantes ; lorsqu'on suit une courbe dans la direction positive des  $x$ , le vecteur dynamique devient presque horizontal ;
- dans la zone qui correspond au paquet CS3, les courbes solutions sont décroissantes ; lorsqu'on suit une courbe dans la direction positive des  $x$ , le vecteur dynamique aussi devient presque horizontal.

Ces rétroactions du logiciel peuvent d'une part, permettre d'établir un lien entre le comportement du vecteur dynamique et l'expression symbolique de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$ , et d'autre part, conduire à la mise en fonctionnement des connaissances

C13 pour justifier les prévisions faites.

Dans le cas des courbes du paquet CS3, il est possible que l'évidence perceptive du confinement de celles-ci dans la région  $-1 < y < 1$ , favorise l'établissement des liens entre ces faits graphiques et les propriétés des fonctions bornées. Dans ce cas, nous considérons que la mise en œuvre des connaissances C10 peut permettre de justifier le fait que puisque les courbes représentent des fonctions bornées, elles ont alors une limite finie.

Nous remarquons qu'une description encore plus fine des comportements des solutions, qui fait intervenir des asymptotes, requiert des expressions explicites des fonctions solutions. Ce que nous considérons comme peu probable de se produire, car l'activité a fortement privilégié le travail sur le graphique.

## **LES SITUATIONS DE MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE DE FAMILLES DE COURBES EN GEOMETRIE DYNAMIQUE**

Lors de la conception des situations de mise en équation différentielle de familles de courbes (situations de construction d'un représentant symbolique), nous avons présupposé que les étudiants auraient déjà acquis une certaine expertise pour articuler les registres graphique et symbolique des équations différentielles. En effet, ils seraient déjà confrontés aux premières parties du dispositif expérimental (questionnaire initial ; introduction brève par le professeur, aux équations différentielles ; étude descriptive des courbes solutions d'une équation différentielle ; enfin bilans conduits par le professeur, du questionnaire initial et de la première activité).

Les situations proposées se composent de tâches inhabituelles. La conception de celles-ci s'appuie sur les spécificités du logiciel Cabri Géomètre. Cet environnement permet la construction d'un représentant graphique, comme une courbe dynamique, que l'on peut déplacer par manipulation directe. Cette fonctionnalité du logiciel nous a permis de concevoir ces situations, où l'enjeu est de trouver l'équation différentielle d'une famille de courbes. Ces situations exigent un travail exploratoire des propriétés de la famille pour arriver à l'équation différentielle recherchée.

Parmi les outils d'exploration offerts par le logiciel, on trouve : le déplacement de la courbe dynamique ; le recours à l'outil Trace pour obtenir un aperçu global de la famille de courbes ; les macros, qui éventuellement peuvent être fournies pour pouvoir par exemple construire une droite tangente ; l'outil « Coordonnées ou Equation » qui affiche les coordonnées d'un lieu géométrique ou les coordonnées d'un point ; l'outil Pente, qui donne la pente d'une droite ; etc. Dans ces situations, comme nous le présenterons ci-dessous, selon la stratégie mise en œuvre pour chercher l'équation différentielle demandée, le registre graphique peut fonctionner dans des modes différents. Par exemple, un mode opératoire est mis en œuvre lorsque dans l'exploration on construit une droite tangente dynamique à la courbe donnée, et que le travail exploratoire met en évidence une certaine propriété numérique de la famille de courbes (par exemple, la pente de la droite tangente est égale au double de l'abscisse du point



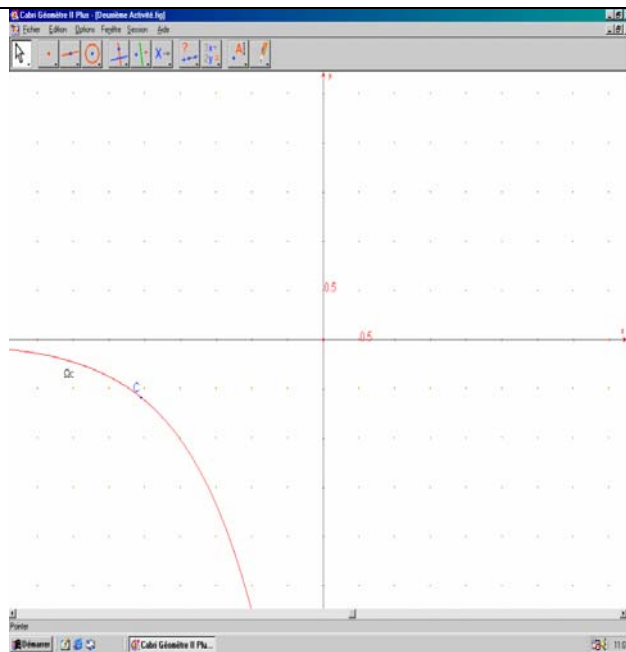
de tangence). Dans ce dernier cas, l'interprétation mathématique de ces faits nécessite des passages entre des cadres (géométrie analytique, fonctions, analyse).

L'objectif des situations de construction d'un représentant symbolique, est d'étudier les apports possibles d'un environnement de géométrie dynamique, pour réaliser des passages du registre graphique des courbes solutions vers le registre symbolique des équations différentielles. Notre hypothèse est que le recours au logiciel contribue à ces passages (deuxième hypothèse de recherche). Nous cherchons aussi à étudier les difficultés que les étudiants rencontrent dans ce type d'activité.

### 2.2.3. Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles en géométrie dynamique

Nous avons choisi une famille d'exponentielles car son étude commence dès le niveau du lycée. Donc on peut supposer que les étudiants de CAPES disposent des connaissances nécessaires pour obtenir l'équation différentielle de cette famille. Par ailleurs, comme il s'agit d'une famille de courbes prototypiques, nous considérons que les éventuelles difficultés des étudiants relatives à cette famille de courbes, seront révélatrices des effets de l'enseignement traditionnel privilégiant le travail sur le registre symbolique. La situation proposée est constituée de cinq consignes :

On considère une famille de courbes  $\Omega$ . Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega_C$ .



1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Omega$ .

Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille?

2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ?

3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ?

4) Dans Cabri, pouvez-vous vérifier que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ? Si oui, comment?

5) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ? Si oui, lesquelles?

De manière générale, les consignes séparent la situation en deux étapes : la première, qui consiste en la recherche de l'équation différentielle (première et deuxième consignes) ; la deuxième, qui demande la validation de l'équation trouvée (trois dernières consignes). Les

dernières consignes ont l'air très répétitives. L'objectif est de faire exprimer le plus d'informations possibles sur les liens établis entre les registres de représentation en jeu.

La première consigne place d'emblée les étudiants dans un contexte hors du commun dans l'étude traditionnelle des équations différentielles. La seule donnée dont ils disposent est la courbe dynamique. Il ne s'agit pas de résoudre une équation, mais de la trouver. Pour avoir des informations sur la famille de courbes, il faut explorer à l'aide du logiciel. La recherche de l'équation différentielle demande soit la reconnaissance, à partir de l'évidence visuelle, de la famille de courbes, soit l'identification des propriétés caractérisant la famille de courbes. Dans la partie consacrée aux réponses attendues, nous décrirons les différentes stratégies possibles pouvant conduire à l'équation recherchée.

La deuxième consigne demande aux étudiants un compte rendu de leur procédure pour arriver à l'équation différentielle recherchée. Elle a été proposée car il était possible, dans la première consigne, d'avoir des réponses brèves ; or nous voulons le plus d'informations possible sur les procédures suivies par les étudiants pour trouver l'équation différentielle.

La troisième consigne a pour objectif de faire exprimer des éléments de contrôle assurant d'avoir trouvé la bonne équation. Elle laisse ouverte la possibilité de présenter des arguments de différents types pour confirmer la réponse fournie. Nous nous attendons à ce que ces arguments révèlent des connaissances de divers cadres mises en fonctionnement pour arriver à la réponse.

La quatrième et la cinquième consignes ont pour objectif de solliciter des arguments dans un contexte plus précis. Elles tentent chacune de mettre l'accent sur un registre de représentation particulier :

- la quatrième consigne place les étudiants dans le registre graphique de Cabri pour valider l'équation différentielle trouvée. Il s'agit de les conduire à donner une interprétation graphique des propriétés mathématiques de l'équation différentielle obtenue, à l'aide des outils de Cabri ;
- la cinquième consigne place les étudiants dans le registre symbolique, et il s'agit d'interpréter mathématiquement les propriétés graphiques de la courbe dynamique.

### ***Variables didactiques***

Lors de la conception de l'énoncé, nous avons considéré deux variables didactiques que nous détaillons de la façon suivante :

#### ***Variable didactique ME1***

Cette variable concerne le choix de la famille d'exponentielles, en considérant qu'une représentation symbolique de cette famille peut s'exprimer sous la forme  $y'=ky$ , où  $k$  est un nombre réel, et où la forme graphique de la famille d'exponentielles dépend du paramètre  $k$ . Nous avons identifié trois valeurs de cette variable didactique :

$$ME1_1 : k > 0 ; \quad ME1_2 : k = 0 ; \quad ME1_3 : k < 0.$$

Ces valeurs conduisent à la mobilisation de différentes stratégies pour arriver à l'équation différentielle cherchée. La valeur  $ME1_1$  conduit à la forme prototype des exponentielles que

l'enseignement favorise. La reconnaissance de cette forme donne aux étudiants une stratégie de base pour obtenir l'équation différentielle, qui consiste à associer une expression symbolique à cette famille de courbes, et à partir de celle-ci à déduire l'équation différentielle cherchée. Pourtant, nous considérons que dans le cas particulier qui nous occupe, la déduction de l'équation différentielle n'est pas immédiate, à cause de la perturbation introduite par la manipulation directe de la courbe, ainsi qu'en raison du changement de sa forme lors de son déplacement. Il est possible que cette perturbation conduise à une étude ponctuelle de la courbe, pour identifier des propriétés de la famille de courbes à partir de propriétés graphiques ou numériques repérées sur des points de la courbe. Par exemple, des propriétés numériques qui lient la pente de la droite tangente aux coordonnées des points, etc.

La valeur  $ME1_2$  conduit à une famille de droites horizontales, dans laquelle les liens entre les représentants graphiques et symboliques semblent être plus évidents que pour  $ME1_1$ . De plus, le déplacement d'une droite dynamique horizontale n'introduit pas le même niveau de perturbation que pour une courbe qui change de forme. Les propriétés graphiques ou numériques de la famille de droites peuvent être étudiées d'un point de vue global : par exemple, la valeur de la pente est la même en tous les points de la courbe, etc.

La valeur  $ME1_3$  introduit la perturbation due au changement de la forme de la courbe lors de son déplacement, mais elle demande aussi plus de connaissances sur les formes graphiques des exponentielles. La mise en équation d'une famille de courbes de ce type peut aussi être réalisée par une stratégie de base, qui consiste à l'associer d'abord à une expression symbolique.

Compte tenu des difficultés identifiées chez des étudiants mexicains (Moreno et Laborde, 2003), lors de la mise en place d'une activité de ce type et pour faciliter le travail de recherche de l'équation différentielle, nous avons choisi la valeur  $ME1_1$  et en particulier  $k=1$ .

### **Variable didactique ME2**

La variable  $ME2$  concerne la possibilité de rendre visible un invariant de la famille de courbes. La reconnaissance d'un tel invariant favorise *a priori* la mobilisation d'une stratégie pour la mise en équation de la famille de courbes. Nous avons identifié trois valeurs pour cette variable :

$ME2_1$  : rendre visible un invariant numérique de la famille de courbes ;

$ME2_2$  : rendre visible un invariant graphique de la famille de courbes ;

$ME2_3$  : ne pas rendre visible des invariants de la famille de courbes.

Lors de l'exploration dans le contexte informatique, la valeur  $ME2_1$  favorise l'identification d'une propriété numérique de la famille de courbes. Par exemple, on pourrait afficher : une droite tangente à un point dynamique sur la courbe ; la pente de la droite tangente ou son équation ; les coordonnées du point de tangence ; etc. (cf. fig. 3, ci-contre).

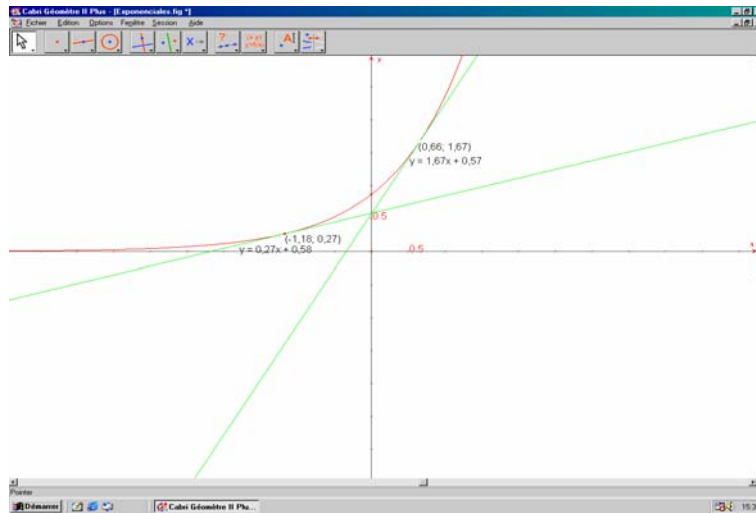


Fig. 3 : Des données favorisant l'identification d'une propriété numérique de la famille d'exponentielles

Dans ce cas, les étudiants peuvent identifier (grâce à l'exploration dynamique) les liens numériques entre les données fournies et à partir de celles-ci, écrire l'équation différentielle demandée. Cette stratégie est décrite dans la partie relative aux réponses attendues.

La valeur ME2<sub>2</sub> favorise l'identification d'une propriété graphique de la famille de courbes. Par exemple, on pourrait afficher un triangle dynamique dont l'hypoténuse est tangente à la courbe (cf. fig. 4, ci-dessous). Le déplacement du triangle peut rendre visible la propriété graphique suivante : « la sous-tangente reste constante ».

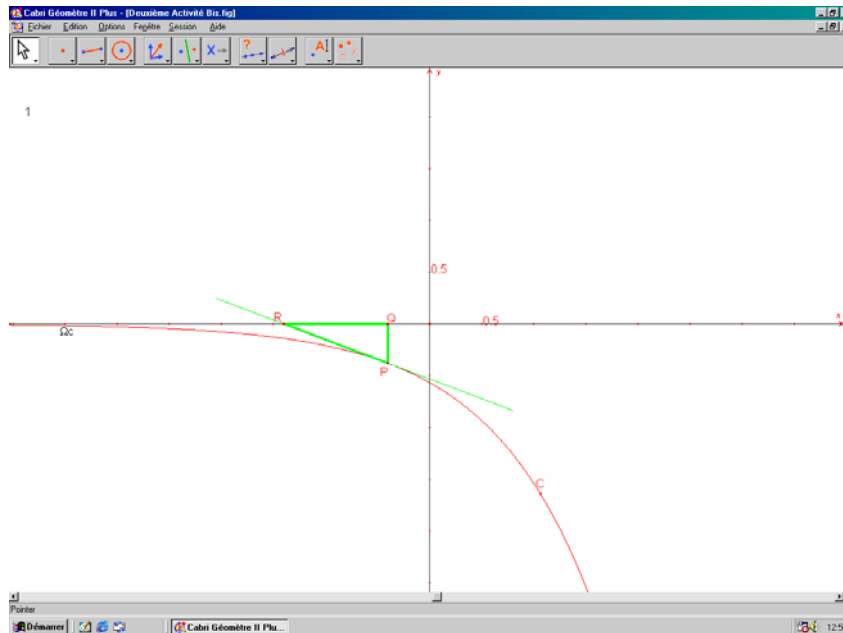


Fig. 4 : Des données favorisant l'identification d'une propriété graphique de la famille d'exponentielles

Les données graphiques fournies dans ce cas peuvent aussi induire une autre stratégie d'obtention de l'équation différentielle, qui met en jeu des connaissances des cadres de la géométrie analytique et de l'analyse. Nous précisons cette stratégie dans la partie sur les réponses attendues, en pages suivantes.

La valeur ME2<sub>3</sub> consiste à fournir seulement la courbe dynamique, et à laisser à la charge des étudiants la recherche des propriétés adéquates qui conduisent à l'équation différentielle cherchée. La seule stratégie de base est alors la reconnaissance graphique perceptive des exponentielles et qui débouche sur une stratégie algébrique.

Nous avons choisi la valeur ME2<sub>3</sub> et bien qu'elle permette la mise en œuvre de la stratégie algébrique de base, les caractéristiques dynamiques de la courbe peuvent être des éléments déstabilisants pour son fonctionnement. De plus, même si une stratégie algébrique est mobilisée, les différentes questions proposées obligent à faire interagir les différents registres de représentation en jeu (graphique, symbolique et numérique).

### **Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

#### ***Première question***

La consigne *Quelle est, selon vous, l'équation différentielle associée à cette famille ?* suppose un travail exploratoire préalable. Nous attendons une recherche des propriétés de la famille, à l'aide des outils de Cabri, dans le but de mettre en relation la famille de courbes avec les équations différentielles. Pour établir le passage du registre graphique vers le registre symbolique, nous envisageons quatre stratégies possibles :

#### ***La stratégie EXP-ALG (Obtention de l'équation à partir d'une expression symbolique des solutions)***

La stratégie EXP-ALG consiste à associer d'abord aux représentants graphiques (courbe dynamique et/ou famille de courbes) un représentant du registre symbolique (cette stratégie est illustrée dans la figure 5, ci-après). Ensuite elle passe par le traitement de ce représentant symbolique pour obtenir l'équation différentielle demandée (mise en œuvre des connaissances C2 : l'équation différentielle peut être déduite par dérivation de l'expression symbolique des solutions). Dans cette stratégie, l'association de l'expression symbolique avec les représentants graphiques est fondée seulement sur la reconnaissance graphique globale des formes des courbes. L'exploration dynamique, se réduit alors à confirmer perceptivement que la famille de courbes est bien une famille d'exponentielles. Dans cette même stratégie, le fonctionnement du graphique est dans le mode idéogrammatique. Les représentants graphiques sont pris seulement comme signes associés aux fonctions exponentielles.

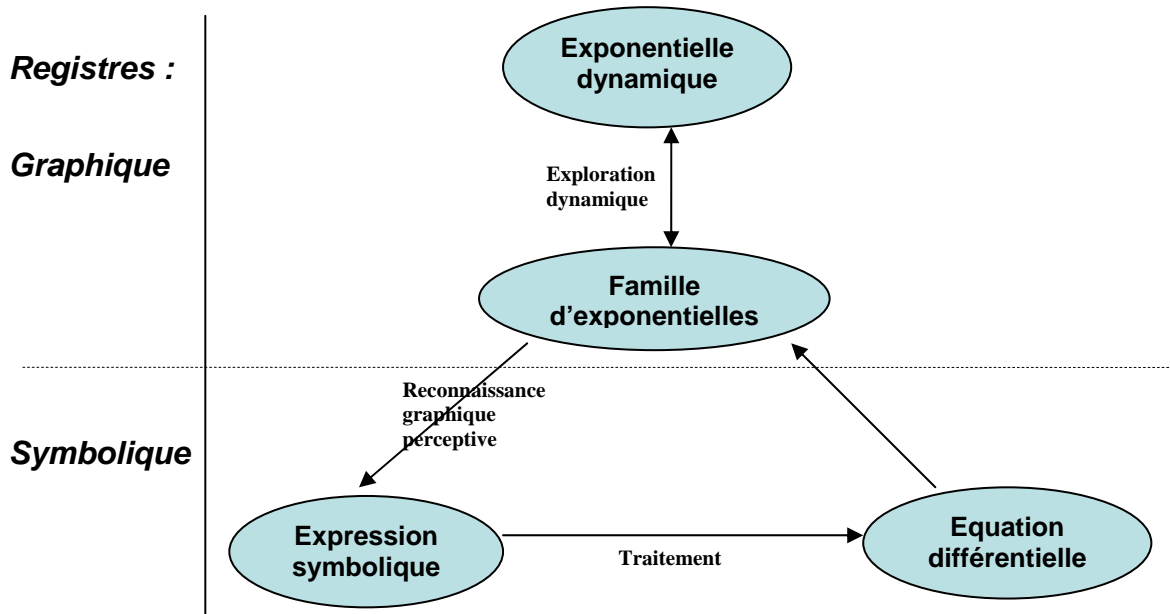


Fig. 5 : Mise en équation de la famille d'exponentielles à partir d'une expression symbolique des solutions

Dans la stratégie EXP-ALG, le passage du registre graphique au registre symbolique requiert des connaissances du cadre des fonctions, telles que :

*« une famille de courbes de forme exponentielle peut être exprimée dans le registre symbolique par une expression de la forme  $y=Ce^x$  » (C14)*

Le traitement de l'expression symbolique proposée, par dérivation (connaissances C2) pourrait permettre d'arriver à l'équation différentielle  $y'=y$  cherchée.

***La stratégie EXP-ALG-VER (Obtention de l'équation à partir d'une expression symbolique des solutions avec une phase de vérification)***

Cette stratégie est une légère variante de la stratégie EXP-ALG, et passe par une phase de vérification de l'expression symbolique associée à la famille de courbes (stratégie illustrée dans la figure 6 en page suivante). Pour cette vérification on peut avoir recours au logiciel pour tracer des courbes particulières de la famille, et ensuite au déplacement de la courbe dynamique pour vérifier qu'elle peut bien se superposer à la courbe tracée. Une autre possibilité de validation met en œuvre une stratégie numérique (sans passer par le tracé des courbes) qui consiste à : prendre quelques points de la courbe dynamique ; afficher leurs coordonnées ; et substituer ces coordonnées dans l'expression symbolique candidate. Si l'expression est vérifiée, alors elle correspond à la famille de courbes.

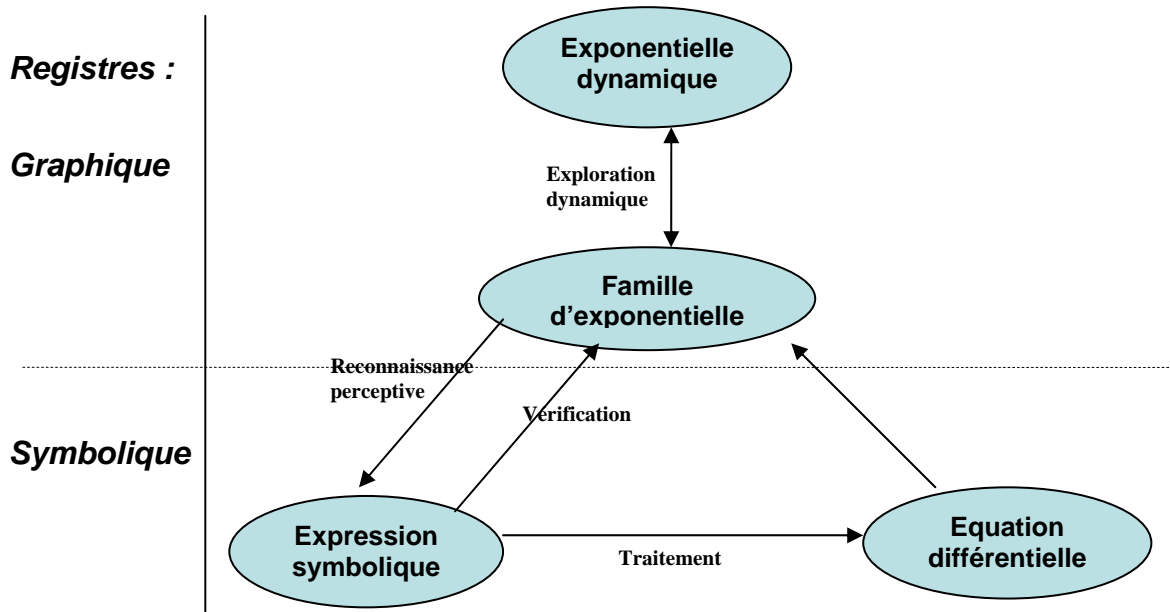


Fig. 6 : Mise en équation de la famille d'exponentielles à partir d'une expression symbolique des solutions, avec une phase de vérification

Dans cette stratégie, le fonctionnement du graphique est plutôt dans un mode nomographique. Il est utilisé seulement comme moyen effectif d'obtenir des résultats numériques par des procédures locales.

***La stratégie EXP-DT-NUM (Obtention de l'équation passant par l'identification d'un invariant numérique de la famille de courbes)***

La stratégie EXP-DT-NUM consiste à obtenir l'équation différentielle de la famille de courbes, par exploration dynamique à l'aide d'une droite tangente (la stratégie est illustrée dans le schéma n° 7, ci-après). Cette exploration peut permettre l'identification de l'invariant numérique de la famille de courbes, « la pente de la droite tangente est égale à l'ordonnée du point de tangence ». Pour l'identification de cet invariant, il faut construire une droite tangente qui passe par un point dynamique de la courbe ; et recourir aux outils « Coordonnées ou équation » et/ou « Pente » pour afficher les coordonnées du point dynamique, l'équation de la droite tangente et/ou sa pente. Nous considérons que la prise en compte de la droite tangente, lors de la recherche de l'équation différentielle, peut être suggérée par le fait que l'équation cherchée fait intervenir des dérivées. Le lien entre la pente de la droite tangente à la courbe dynamique et la dérivée des solutions, peut être établi en mettant en œuvre des connaissances du cadre de l'analyse, comme :

*« soit  $\Gamma_P$  la courbe représentative d'une fonction numérique, continue et différentiable  $f$  qui passe par un point  $P(x_P, y_P)$ , la pente de la droite tangente à  $\Gamma_P$  en  $P$  est donnée par  $f'(x_P)$  » (C3)*

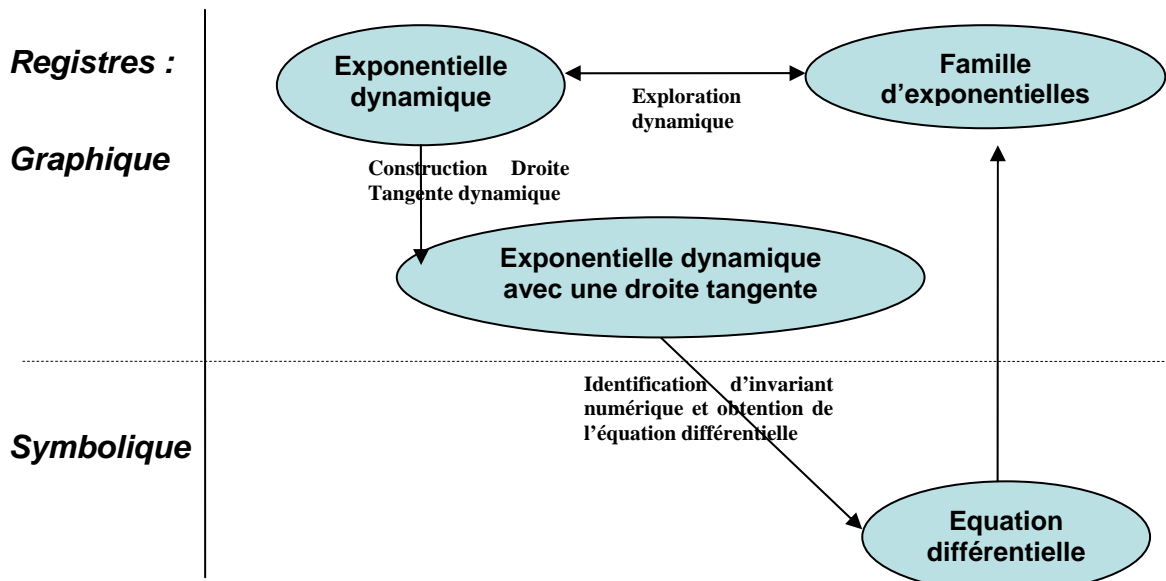


Fig. 7 : Mise en équation de la famille d'exponentielles à partir de l'identification d'un invariant numérique de la famille de courbes

Le travail exploratoire peut conduire à l'identification de l'un des deux constats suivants :

- le coefficient directeur, dans l'équation de la droite tangente dynamique, est toujours égal à l'ordonnée du point de tangence ;
- la pente de la droite tangente est toujours égale à l'ordonnée du point de tangence.

Nous considérons que l'identification de la propriété numérique invariante de la famille de courbes, et la mise en œuvre des connaissances C3 peut permettre d'arriver à l'équation différentielle  $y' = y$  recherchée.

Dans cette stratégie, l'usage du graphique est notamment dans un mode opératoire. En effet, les propriétés numériques de la famille de courbes sont mises en évidence par l'exploration dynamique, mais la réponse demande la mise en fonctionnement des connaissances du cadre des fonctions et de l'analyse en interaction avec le graphique.

***La stratégie EXP-GRAPH (Obtention de l'équation passant par l'identification d'un invariant graphique de la famille de courbes)***

La stratégie EXP-GRAPH consiste à obtenir l'équation différentielle de la famille de courbes, grâce à l'exploration dynamique à l'aide d'une construction auxiliaire rendant visibles les sous-tangentes (stratégie décrite dans le schéma n° 8, ci-après). Cette exploration peut permettre l'identification de l'invariant graphique de la famille de courbes, « les sous-tangentes de la famille de courbes sont constantes ». L'identification de cet invariant requiert, par exemple, la construction un triangle dynamique dont l'hypoténuse est tangente à la courbe dynamique, ainsi que le recours aux outils tels que : « Distance », ou bien « Coordonnées ou équation ». Nous considérons que la prise en compte d'une propriété graphique caractérisant



la famille d'exponentielles, pourrait s'inspirer d'éventuels rappels des définitions de cette famille de courbes concernant la « sous-tangente »<sup>3</sup>.

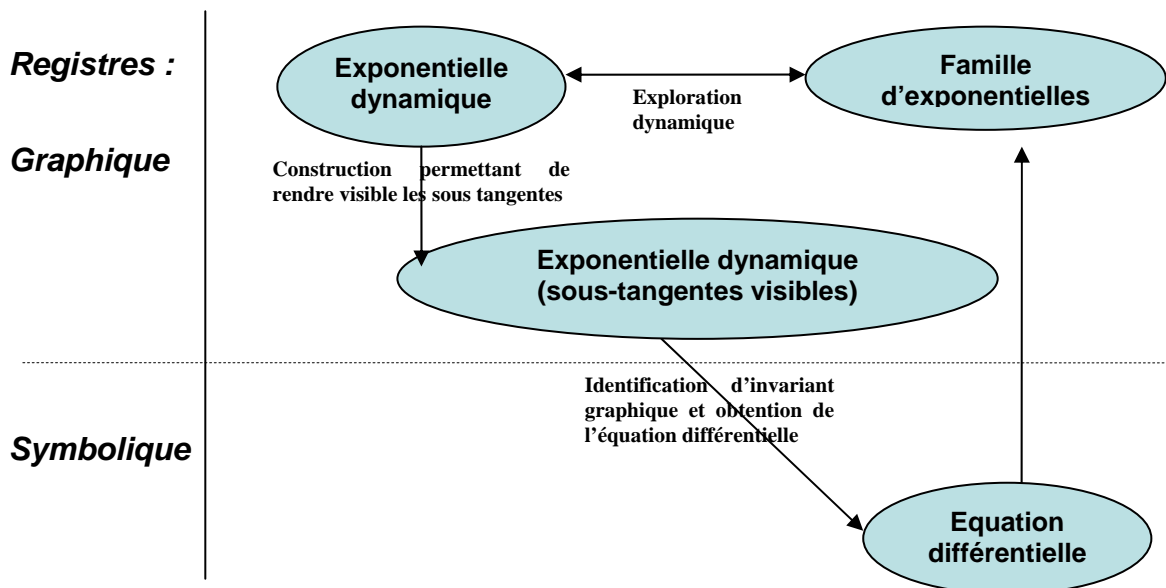


Fig. 8 : Mise en équation de la famille d'exponentielles à partir de l'identification d'une propriété graphique invariante de la famille de courbes

Dans cette stratégie, le travail exploratoire peut conduire à constater que la famille d'exponentielles étudiées concerne des courbes à sous-tangente constante (égale à l'unité). Nous considérons que l'identification de cette propriété graphique invariante de la famille de courbes, et la mise en œuvre de connaissances du cadre de la géométrie analytique sur la formule de la pente d'une droite, ainsi que des connaissances du cadre de l'analyse permettant de lier la pente de la droite tangente avec la dérivée (connaissances C3), peut permettre d'arriver à l'équation différentielle  $y' = y$  recherchée (description détaillée de la mise en œuvre de la stratégie EXP-GRAPH présentée dans la prochaine situation).

De la même manière que dans la stratégie précédente, l'usage du graphique est dans un mode opératoire. Nous considérons que cette dernière stratégie sera la moins utilisée par les étudiants, car elle requiert tant le rappel des propriétés graphiques de la famille d'exponentielles que des constructions spécifiques à l'aide du logiciel.

### Deuxième question

Dans la consigne : *Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$  ?* nous attendons une explication de toutes les étapes pour trouver l'équation. L'intérêt est de disposer de toutes les informations possibles sur le travail des étudiants. Il est possible que ceux qui ont déjà exprimé la façon d'obtenir l'équation différentielle dans la question précédente, ne répondent pas à cette question.

### Troisième question

Dans la consigne : *Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ?*,

<sup>3</sup> Dans les documents d'accompagnement des programmes (2002) du Ministère de la Jeunesse, de l'Éducation Nationale et de la Recherche, concernant des problèmes géométriques de recherche de courbes conditionnées par la sous-tangente et la sous-normale.

nous attendons l'explicitation d'arguments mathématiques justifiant les réponses. Nous présentons ci-dessous différents types d'arguments qui pourraient être proposés :

- des arguments fondés sur la résolution algébrique de l'équation différentielle trouvée, que nous avons appelés : arguments du type RES-ED. Il est possible que ce type d'arguments inclue une phase de vérification, telle que la superposition de la courbe dynamique avec des courbes obtenues à partir de l'expression symbolique des solutions. Les arguments du type RES-ED pourraient éventuellement être formulés sans forcément mettre en jeu le logiciel. Par exemple, vu l'expression symbolique des solutions (après la résolution algébrique), on pourrait affirmer qu'elle correspond aux courbes dynamiques étudiées ;
- des arguments du type VAL-NUM, fondés sur la confrontation des valeurs numériques de la pente de la droite tangente à la courbe dynamique (obtenus à l'aide du logiciel) et des valeurs de la fonction  $f(x,y)$ , évaluées selon les coordonnées de l'origine du vecteur où  $y' = f(x,y)$  est l'équation différentielle trouvée ;
- des arguments du type SENS-VAR, fondés sur la mise en relation du sens de variation des solutions et du signe de la dérivée. Les arguments de ce type peuvent être élaborés en faisant fonctionner des connaissances du cadre de l'analyse, telles que :

*« pour une équation différentielle  $y' = f(x,y)$ , où  $f$  est une fonction numérique en  $\mathcal{R}^2$ , si  $f(x_P, y_P) > 0$  (resp.  $f(x_P, y_P) < 0$ ), alors la courbe solution  $IP$  qui passe par  $(x_P, y_P)$  est une courbe représentative d'une fonction croissante (resp. décroissante) » (C5)*

Les connaissances C5 peuvent amener à conclure, à partir de l'équation différentielle  $y' = y$ , que pour  $y > 0$  (resp.  $y < 0$ ) on a  $y' > 0$  (resp.  $y' < 0$ ), les solutions sont croissantes (resp. décroissantes) dans la région  $y > 0$  (resp.  $y < 0$ ) ;

- éventuellement, la forme de l'expression symbolique de l'équation différentielle  $y' = y$  (elle dépend seulement de la variable  $y$ ) pourrait conduire à formuler des arguments fondés sur l'interprétation graphique de propriétés, telles que le parallélisme des droites tangentes aux points de la même ordonnée de courbes différentes (des arguments du type VAR-ED).

#### **Quatrième question**

La consigne : *Dans Cabri, pouvez-vous vérifier que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ? Si oui, comment ?*, attend explicitement le recours au logiciel pour vérifier l'équation différentielle trouvée. Nous considérons que les étudiants ayant fourni des arguments dans la question précédente en faisant intervenir la géométrie dynamique, ne répondront pas à cette question.

Les quatre types d'arguments que nous avons présentés dans la troisième question pourraient aussi être donnés comme réponse à cette question. Dans ce cas, les arguments reposeraient sur des vérifications faites à l'aide du logiciel. Nous considérons aussi que suite à la mise en œuvre d'une stratégie où le logiciel n'a pas joué un rôle important, telle que EXP-ALG (obtention de l'équation différentielle à partir d'une expression symbolique des solutions) ou EXP-ALG-VER (obtention de l'équation différentielle à partir d'une expression symbolique des solutions avec une phase de vérification), l'exploration dynamique pourrait permettre

d'identifier la propriété numérique invariante de la famille de courbes : « la pente de la droite tangente reste toujours égale à l'ordonnée du point de tangence » ; et ce constat pourrait donc conduire à des vérifications numériques pour justifier l'équation différentielle trouvée (des arguments du type VAL-NUM).

### **Cinquième question**

La consigne : *Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$  ? Si oui, lesquelles ?* met l'accent sur le passage du registre graphique des solutions au registre symbolique de l'équation différentielle. Nous attendons des étudiants, grâce à l'interprétation mathématique des propriétés graphiques de la courbe dynamique, qu'ils formulent des arguments justifiant l'équation différentielle  $y'=y$  trouvée. De manière particulière, nous espérons d'eux qu'ils mettent en relation des propriétés graphiques, comme celles relatives au sens de variation des solutions, avec l'expression symbolique de l'équation différentielle. Ce qui pourrait faire fonctionner des connaissances du cadre de l'analyse, telles que :

*« si  $\Gamma_P$  est la courbe représentative d'une solution croissante (resp. décroissante) en  $P(x_P, y_P)$  d'une équation différentielle de la forme  $y'=f(x, y)$ , alors  $f(x_P, y_P) > 0$  (resp.  $f(x_P, y_P) < 0$ ) » (C15)*

## **2.2.4. Mise en équation différentielle d'une famille de tractrices en géométrie dynamique**

Cette situation, comme celle des exponentielles, s'appuie sur les spécificités du logiciel qui rendent possible la construction d'une courbe qui peut être déplacée par manipulation directe. Elle a été conçue de manière à utiliser les différents outils qu'offre l'environnement de géométrie dynamique pour explorer les propriétés graphiques de la famille de tractrices. La situation cherche à identifier des évolutions possibles concernant d'éventuelles difficultés trouvées lors de la mise en équation des exponentielles. Elle cherche aussi à tester l'efficacité des liens construits entre les registres graphique et symbolique des équations différentielles.

La famille de tractrices se caractérise par la propriété graphique invariante d'avoir un « segment de tangente constant ». Pour cette famille, la seule stratégie pour obtenir l'équation différentielle passe par l'identification de cette propriété. Nous avons appelé cette stratégie TRAC-GRAPH (Mise en équation de la famille de tractrices par l'identification d'un invariant graphique de la famille de courbes), et l'identification de l'invariant graphique de la famille requiert une construction auxiliaire qui rend visible cet invariant.

Nous avons organisé la mise en équation de la famille de tractrices dans l'environnement de géométrie dynamique, en trois phases :

- une première phase, où l'on propose la famille de tractrices sans rendre visible l'invariant graphique de la famille (valeur ME2<sub>3</sub> de la variable didactique ME2). Dans cette phase, nous voulons tester la mise en œuvre spontanée de la stratégie TRAC-GRAPH. Le cas échéant, les binômes passeront aux phases suivantes ;
- une deuxième phase, où les binômes reviennent à la famille d'exponentielles. Nous proposons aux étudiants l'exploration de la famille d'exponentielles à l'aide d'une construction auxiliaire qui rend visible la propriété graphique caractérisant la famille

de courbes : « des courbes à sous-tangente constante ». L'objectif est de faire émerger la stratégie EXP-GRAPH (mise en équation de la famille d'exponentielles passant par l'identification d'un invariant graphique de la famille) ;

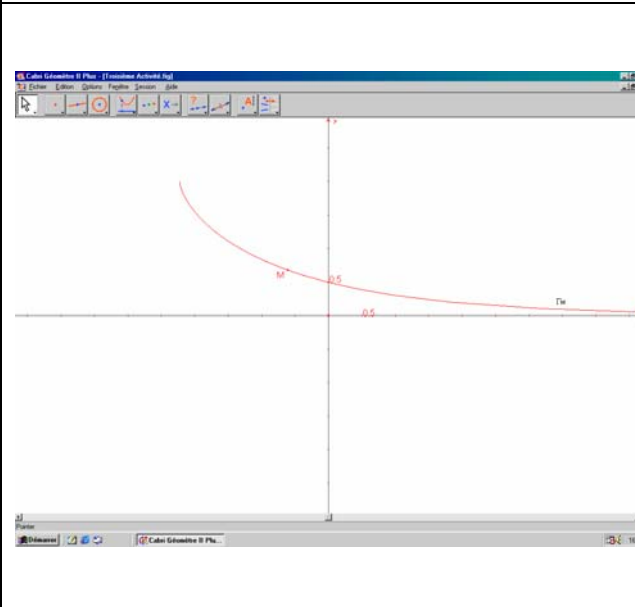
- une troisième phase, où les binômes reviennent à la famille de tractrices. Nous attendons dans cette phase, que la mise en œuvre de la stratégie TRAC-GRAPH, permette d'obtenir l'équation différentielle de la famille de courbes.

Nous présentons ci-après chacune de ces trois phases :

### Première phase

D'abord nous avons proposé la mise en équation différentielle de la famille de tractrices, gardant la même structure que celle utilisée pour la famille d'exponentielles. Elle a été présentée aux étudiants de la manière suivante :

On considère une famille de courbes  $\Gamma$ . Le point  $M$  est déplaçable sur tout le plan. A chaque point  $M$  de la bande  $0 < y < 2$  correspond une courbe  $\Gamma_M$ .

	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes <math>\Gamma</math>. Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille ?</li> <li>2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes <math>\Gamma</math> ?</li> <li>3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes <math>\Gamma</math> ?</li> <li>4) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes <math>\Gamma</math> ? Si oui, lesquelles ?</li> </ol>
--	--

**Deuxième phase**

Dans cette phase du retour à la famille d'exponentielles, les tâches ont été présentées de la manière suivante :

On considère une famille de courbes  $\Gamma$ . Le point M est déplaçable sur tout le plan. A chaque point M de la bande  $0 < y < 2$  correspond une courbe  $\Gamma_M$ .

	<p>1) La tâche consiste à identifier des propriétés géométriques invariantes associées à l'équation différentielle de premier ordre de la famille de courbes <math>\Omega</math>.</p> <p>Quelles propriétés géométriques invariantes pouvez-vous associer à cette famille de courbes?</p> <p>2) Est-il possible de déduire l'équation différentielle de la famille de courbes <math>\Omega</math> à partir des propriétés invariantes repérées? Si oui, comment?</p>
--	--

Les questions posées cherchent à favoriser la mise en œuvre de la stratégie EXP-GRAPH. La première question fait appel seulement à l'identification de l'invariant graphique de la famille de courbes, par l'exploration dynamique. Dans la deuxième question s'on attend à ce que la mise en œuvre de la stratégie EXP-GRAPH conduise à obtenir l'équation différentielle de la famille d'exponentielles.

**Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

D'abord, nous attendons de l'exploration à l'aide de la géométrie dynamique qu'elle amène à identifier la propriété graphique invariante de la famille de courbes : segment RQ de longueur constante égale à l'unité. Ensuite, la mise en œuvre de la stratégie EXP-GRAPH peut permettre d'obtenir l'équation différentielle recherchée. Cette stratégie nécessite des connaissances du cadre de l'analyse permettant d'interpréter la pente de la droite tangente en termes de la dérivée (connaissances C3).

Nous envisageons deux voies possibles pour l'obtention de l'équation différentielle:

- la stratégie EXP-GRAPH : ED-PEN, qui consiste à déduire l'équation différentielle à l'aide de la formule de la pente d'une droite. Cette stratégie requiert des connaissances sur la formule de la pente, telles que :

« si  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  sont deux points distincts quelconques d'une droite

$$\mathcal{D}, \text{ alors } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ est la pente de la droite } \mathcal{D} \text{ » (C16)}$$

En utilisant cette stratégie, l'équation différentielle de la famille d'exponentielles pourrait être obtenue de la manière suivante : Soient  $P(x_P, y_P)$ ,  $Q(x_P, 0)$ , et  $R(x_R, 0)$ , comme RQ a une longueur constante égale à 1, alors  $R(x_P - 1, 0)$ . La pente de la droite passant par P et R est donnée par  $m = (y_P - 0)/(x_P - (x_P - 1)) = y_P$ , donc  $y'(P) = y(P)$  est la

pende de la droite tangente pour tout point P d'une courbe quelconque de la famille. Alors l'équation différentielle de la famille est donnée par  $y'=y$  ;

- la stratégie EXP-GRAPH : ED-DT, consiste à déduire l'équation différentielle à l'aide de l'équation de la droite tangente. Nous remarquons que le recours à l'équation de la droite tangente n'est pas absolument nécessaire, cependant les données graphiques pourraient suggérer de l'utiliser. Cette stratégie requiert des connaissances sur l'équation de la droite tangente, telles que :

*« l'équation de la droite tangente dans un point  $P(x_P, y_P)$  d'une courbe  $\Gamma_P$ , représentative d'une fonction continue et différentiable  $f$ , peut être exprimée sous la forme  $y-y_P=f'(x_P)(x-x_P)$  » (C8)*

L'équation différentielle pourrait être obtenue, dans ce cas, de la manière suivante : l'équation de la droite tangente passant par P est donnée par  $y-y_P=f'(x_P)(x-x_P)$  ; RQ a une longueur constante égale à 1, donc  $R(x_P - 1, 0)$ . Le point R est l'intersection de la droite tangente avec l'axe des abscisses,  $0-y_P=f'(x_P)(x_P-1-x_P)$ , donc la pente de la droite tangente pour tout point P d'une courbe quelconque de la famille est de la forme  $f'(x_P)=y_P=f(x_P)$ . Alors l'équation différentielle de la famille est donnée par  $f'(x) = f(x)$  ou par  $y'=y$ .

### Troisième phase

Dans la dernière phase, nous proposons de revenir à la famille de tractrices et de reprendre les questions proposées en première phase. Nous avons prévu, pour le cas où les étudiants auraient des difficultés à réaliser la construction auxiliaire, de leur fournir un fichier contenant la tractrice dynamique avec la construction faite (cf. figure 9, ci-dessous) :

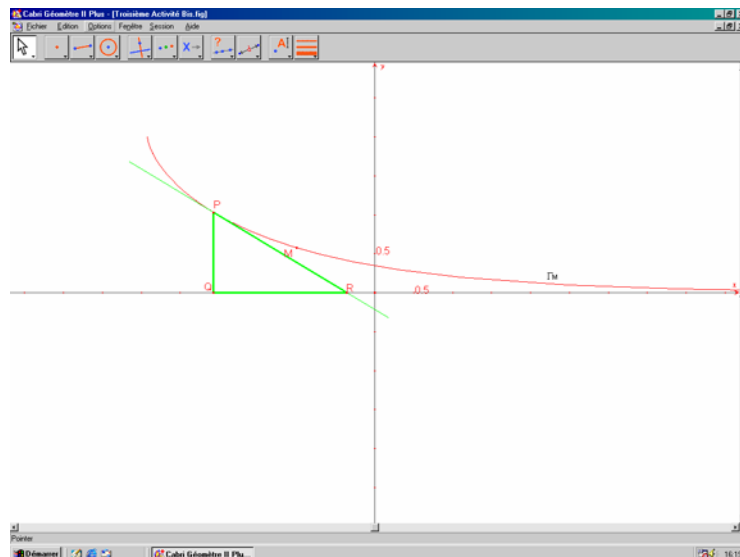


Fig. 9 : Courbe tractrice dynamique rendant visible la propriété graphique invariante de la famille de courbes

### Les réponses attendues et les connaissances en jeu

Nous nous attendons à ce que l'exploration dynamique conduise à identifier la propriété graphique invariante de la famille de tractrices : « le segment PR de longueur constante égale à 2 ».

**Première question**

Dans la première consigne : *Quelle est, selon vous, l'équation différentielle associée à cette famille ?* nous attendons des étudiants qu'ils réinvestissent la stratégie mobilisée (stratégie EXP-GRAPH), lors de la mise en équation de la famille d'exponentielles dans la deuxième phase. Nous espérons que grâce à la mise en œuvre de la stratégie TRAC-GRAPH, les étudiants puissent arriver à l'équation différentielle  $y' = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}$  de la famille de tractrices.

De la même manière que pour la famille d'exponentielles, l'équation différentielle de la famille de tractrices peut s'obtenir en s'appuyant sur la formule de la pente d'une droite ou sur l'équation d'une droite tangente. Dans le cas de la famille de tractrices, le recours au théorème de Pythagore est indispensable. Les deux stratégies que nous envisageons pour arriver à l'équation différentielle recherchée, sont les suivantes :

- la stratégie TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH, qui consiste à déduire l'équation différentielle en utilisant la formule de la pente d'une droite et le théorème de Pythagore. En utilisant cette stratégie, l'équation différentielle pourrait être obtenue de la manière suivante : soient  $P(x,y)$ ,  $Q(x,0)$ , comme PR a une longueur constante égale à 2, alors la pente de la droite tangente passant par P est donnée par  $y' = -y/QR$ . Selon Pythagore,  $QR = \sqrt{4-y^2}$ . Donc l'équation différentielle de la famille de tractrices est

$$\text{donnée par } y' = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}} ;$$

- la stratégie TRAC-GRAPH : ED-DT+PYTH, qui passe par l'équation de la droite tangente pour obtenir l'équation différentielle de la famille de tractrices. En utilisant cette stratégie l'équation différentielle pourrait être obtenue, dans ce cas, de la manière suivante : l'équation de la droite tangente passant par P est donnée par  $y-y_P = f'(x_P)(x-x_P)$  ; PR a une longueur constante égale à 2 ;  $R(x_R,0)$  est l'intersection de la droite tangente avec l'axe des abscisses, alors  $0-y_P = f'(x_P)(x_R-x_P)$  d'où  $f'(x_P) = -y_P/(x_R-x_P)$ . D'après Pythagore,  $x_R - x_P = \sqrt{4-y_P^2}$ , donc  $f'(x_P) = -y_P/\sqrt{4-y_P^2}$ . Alors on peut en déduire que l'équation différentielle de la famille de tractrices est donnée par

$$y' = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}} .$$

**Deuxième question**

Dans la consigne : *Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$  ?*, nous attendons une explicitation de toutes les étapes conduisant à l'équation différentielle de la famille de courbes.

**Troisième question**

Dans la consigne : *Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Gamma$  ?*, nous attendons l'explicitation d'arguments mathématiques justifiant les réponses fournies. Nous considérons que des arguments du même type que ceux développés pour la famille d'exponentielles (des types : RES-ED, VAL-NUM, SENS-VAR, VAR-ED, cf. pp. 100-101),

pourraient aussi être formulés pour justifier l'équation différentielle de la famille de tractrices. Nous considérons que les arguments du type RES-ED (fondés sur la résolution algébrique) ont moins de probabilités d'apparaître, en raison de la complexité de l'expression symbolique des solutions. Par contre, les caractéristiques de l'expression symbolique de l'équation différentielle  $y' = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}$ , pourraient susciter des arguments prenant en compte le domaine

de définition de la fonction  $g(y) = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}$ .

#### **Quatrième question**

Pour la consigne : *Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$  ? Si oui, lesquelles ?* nous attendons des étudiants qu'ils formulent des arguments justifiant l'équation différentielle fondés sur l'interprétation mathématique des propriétés graphiques de la courbe dynamique. De la même manière que pour les exponentielles, nous espérons que les étudiants puissent relier des comportements graphiques relatifs au sens de variation des solutions avec l'expression symbolique obtenue (connaissances C15).

### **2.3. LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL DE L'ANNEE 2004**

Lors de la conception de l'expérimentation pour l'année 2004, nous avons pris en compte les premiers résultats issus de la première expérimentation, ainsi que des résultats des autres expériences. Quelques constats lors de l'expérimentation de l'année 2003 nous montraient que :

- le travail des étudiants avait été trop descriptif, qu'il avait dépendu largement de l'évidence graphique perceptive, presque sans faire intervenir des connaissances du champ des équations différentielles ;
- le travail des étudiants a révélé de grandes difficultés pour établir des liens entre représentants d'objets dans ce domaine d'étude ;
- des nombreuses difficultés relatives au rôle des fonctions  $f$  et  $y$  qui interviennent dans une équation différentielle de la forme  $y' = f(x,y)$ . Par exemple, les tâches figurant dans le questionnaire initial qui demandaient un usage important de ces fonctions, n'ont presque pas été abordées. En revanche, nous avons repéré quelques indices qui montraient que le recours à un vecteur tangent dynamique (première activité du type association de représentants) permettait des petites évolutions concernant la mise en relation des variations de ce vecteur avec la nature fonctionnelle de la fonction  $f$ .

Par ailleurs, des expériences préliminaires réalisées avec des étudiants mexicains (2002) et avec des étudiants français (Arslan et Laborde, 2003), où l'enjeu des situations était de mettre en relation des équations différentielles avec des vecteurs dynamiques (situations du type association de représentants), donnaient des indices comme quoi ce type d'articulation favorisait l'interprétation mathématique des faits graphiques issus du déplacement du vecteur dynamique.



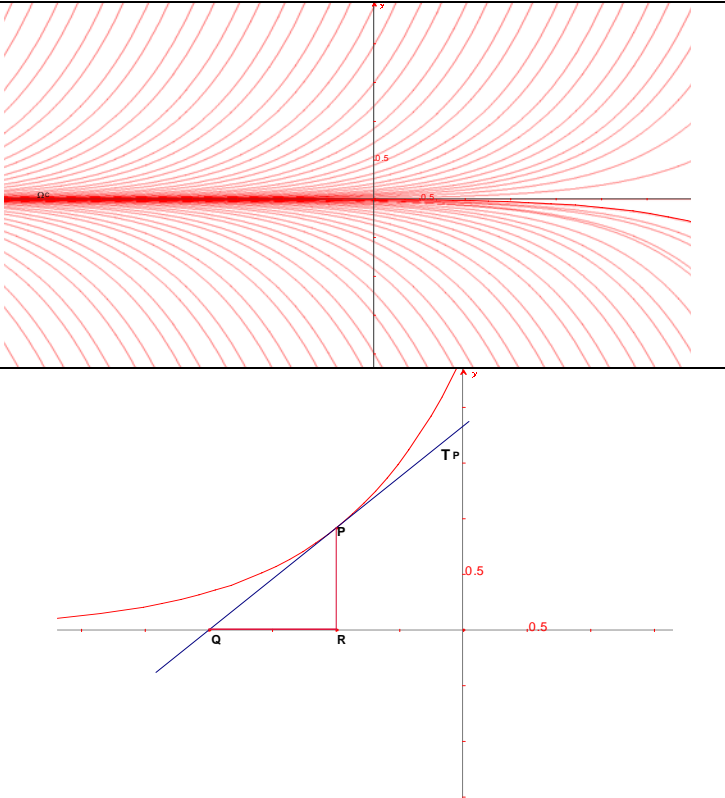
Compte tenu de ces faits, nous avons décidé de proposer un nouveau dispositif expérimental. Celui-ci suppose aussi une évolution dans le développement de liens entre les représentants des objets mathématiques en jeu, à l'intérieur comme dans l'ensemble des situations. Le dispositif comprend une situation du type « construction d'un représentant » en papier/crayon (mise en équation différentielle de familles de courbes), et deux situations en géométrie dynamique du type « association de représentants ».

### 2.3.1. Mise en équation différentielle de familles de courbes en papier/crayon

Cette situation s'est inspirée de la deuxième situation de l'année 2003. Elle présente deux familles de courbes (une famille d'exponentielles et une famille de tractrices), et la tâche consiste à trouver l'équation différentielle de ces familles et à justifier la réponse. Les informations graphiques sur les propriétés des familles pouvant conduire à l'équation différentielle, ont été fournies. Afin de faciliter la lecture, nous ferons la description des deux problèmes proposés, en deux parties comportant chacune un problème.

#### 2.3.1.1 Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles

Dans cette partie, nous avons proposé la mise en équation d'une famille d'exponentielles. Les informations graphiques fournies concernent la propriété graphique d'invariance des sous-tangentes. Le problème proposé a été présenté de la manière suivante :

<p>1) Les figures ci-contre correspondent à la même famille de courbes <math>\Omega</math>, la tâche consiste à trouver l'équation différentielle de premier ordre associée à la famille <math>\Omega</math>.</p> <p>Une propriété de la famille de courbes <math>\Omega</math> est la suivante : Pour une courbe quelconque de la famille, si <math>T_P</math> est la tangente en un point <math>P</math> de la courbe, pour tout point <math>P</math>, la sous-tangente (segment <math>QR</math>) a toujours une longueur constante « <math>k</math> ».</p>	
<p align="center"><u>Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle</u></p> <p>2) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes <math>\Omega</math> ?</p>	

Le problème est composé de deux consignes précises. La première requiert le procédé mis en œuvre pour arriver à l'équation différentielle, et la deuxième sollicite des arguments pour valider la réponse.

Dans ce problème le registre graphique a été privilégié, mais il fonctionne dans un mode idéogrammatique. Les représentants graphiques fournis ont pour objectif d'illustrer les propriétés graphiques de la famille de courbes.

### **Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

#### **Première consigne**

Pour la consigne : *Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle*, on attend la description de l'ensemble des étapes pour arriver à l'équation demandée. Nous supposons que la mise en œuvre de l'une des deux stratégies considérées dans l'environnement de géométrie dynamique peut conduire à l'équation différentielle  $y' = y/k$  recherchée. Rappelons que la stratégie EXP-GRAPH : ED-PEN permet d'obtenir l'équation différentielle à l'aide de la formule de la pente d'une droite, tandis que la stratégie EXP-GRAPH : ED-DT s'appuie sur l'équation de la droite tangente (cf. p. 105). Lors de la présentation de cette activité en environnement informatique, nous avons explicité les étapes pour obtenir l'équation différentielle.

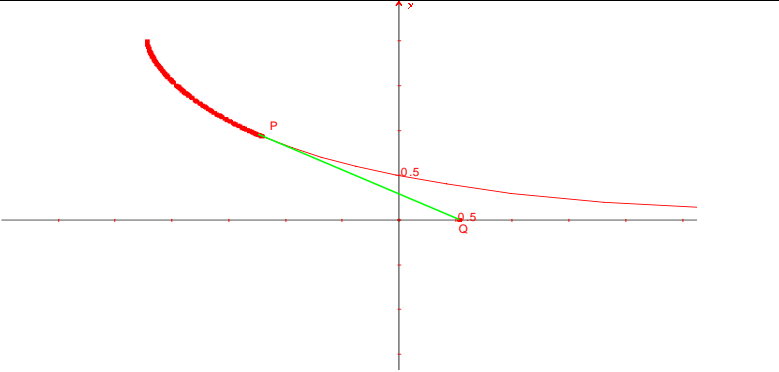
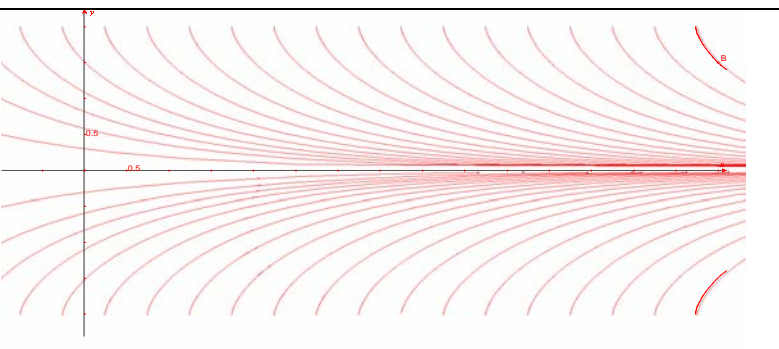
#### **Deuxième consigne**

Dans la consigne : *Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ?*, nous attendons l'explicitation d'argument validant la réponse fournie. Nous supposons que les étudiants pourraient formuler le même type d'arguments que ceux présentés lors de la situation de l'année 2003 (du type RES-ED, fondés sur la résolution algébrique de l'équation différentielle trouvée ; des arguments du type VAL-NUM, fondés sur la confrontation des valeurs numériques de la pente de la droite tangente à la courbe dynamique ; des arguments du type SENS-VAR, fondés sur la mise en relation du sens de variation des solutions et du signe de la dérivée ; des arguments du type VAR-ED, fondés sur l'établissement de liens entre les variables de l'expression symbolique de l'équation différentielle et certaines propriétés graphiques des courbes solutions ; cf. pp. 100-101).

En ce qui concerne les arguments du type VAR-ED, pour l'équation différentielle  $y' = y/k$ , il s'agit de prendre en compte la non dépendance de  $y'$  par rapport à la variable  $x$ . Ce qui pourrait amener à considérer que pour de points des courbes avec la même ordonnée, la pente de la droite tangente est la même. Cependant, vu les limitations des données graphiques, nous considérons que ce type d'arguments a de faibles probabilités d'apparaître.

### **2.3.1.2 Mise en équation différentielle d'une famille de tractrices**

Dans la deuxième partie de la situation introductive, nous avons proposé la mise en équation d'une famille de tractrices. Les informations graphiques fournies concernent des propriétés graphiques relatives au segment tangent constant qui caractérise cette famille. Le problème a été formulé dans le même style que dans la première partie :

<p>3) Soit PQ un segment de longueur constante « k ». On place le point Q sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé. La courbe décrite par P lorsque Q décrit l'axe des abscisses s'appelle <i>tractrice</i>.</p> <p>Déterminez l'équation différentielle de la famille de tractrices et explicitez ci-dessous toutes les étapes conduisant à cette équation</p>	 <p>Une tractrice</p>  <p>La famille de tractrices</p>
<p style="text-align: center;">Les étapes conduisant à l'équation différentielle</p> <p>4) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de tractrices ?</p>	

**Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

**Première consigne**

Nous considérons que la mise en œuvre d'une des deux stratégies TRAC-GRAPH : ED-PEN+PITH ou TRAC-GRAPH : ED-DT+PITH (décrites lors de la mise en équation de la famille de tractrices en géométrie dynamique, cf. p. 107) peut conduire à l'équation

différentielle  $y' = \frac{-y}{\sqrt{k^2 - y^2}}$  de la famille de courbes.

**Deuxième consigne**

Concernant la justification de l'équation différentielle trouvée, nous supposons que les mêmes arguments prévus pour l'activité en géométrie dynamique pourraient être formulés (des arguments des types : RES-ED, VAL-NUM, SENS-VAR, VAR-ED, cf. pp. 100-101). Nous considérons aussi que les arguments fondés sur la résolution algébrique sont moins probables, en raison de la complexité de l'expression symbolique des solutions. Par ailleurs, nous prévoyons la formulation d'arguments liant d'autres propriétés graphiques avec l'expression symbolique seulement pour la première famille, comme le fait que la famille soit comprise dans la région du plan limitée par les droites  $y = -k$  et  $y = k$ .

### **2.3.2. Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien explicitement donné)**

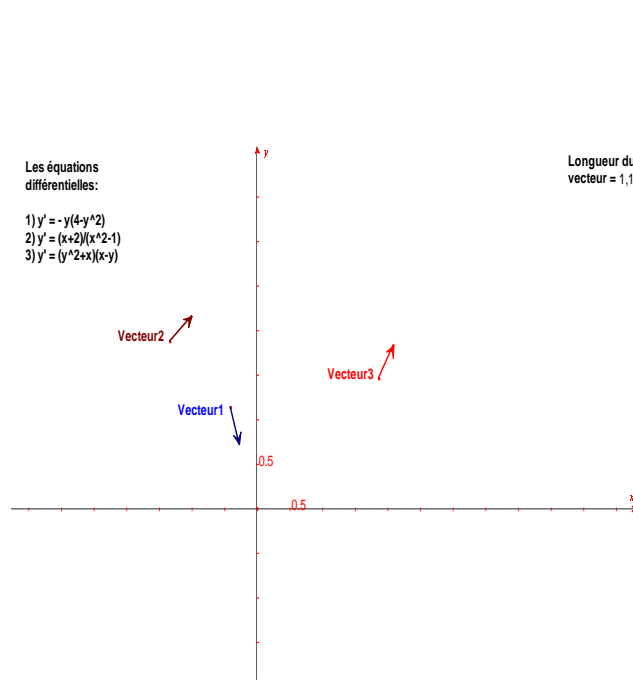
La conception de cette situation s'appuie sur les particularités du logiciel Cabri Géomètre. La manipulation directe d'un vecteur tangent dynamique associé à une équation différentielle rend compte des différentes propriétés graphiques des solutions. Les rétroactions visuelles du logiciel et les différents outils d'exploration qu'il offre, permettent que ces propriétés soient identifiées grâce à un travail exploratoire.

Dans cette situation d'association d'un représentant symbolique avec un représentant graphique, nous avons, explicitement, fourni tant l'expression symbolique de l'équation différentielle que le vecteur dynamique. L'enjeu est de faire interagir le registre graphique des solutions avec le registre symbolique de l'équation différentielle, de manière à ce que les faits graphiques identifiés soient liés directement avec les propriétés mathématiques de l'équation différentielle. Notre objectif est d'étudier dans quelle mesure le contexte informatique favorise la mise en relation des représentants en jeu.

La situation a été présentée de la manière suivante :

Ouvrez Cabri Géomètre sur votre ordinateur et le fichier VecteursEDConnues.fig. Les vecteurs Vecteur1, Vecteur2 et Vecteur3 sont associés respectivement aux équations différentielles 1), 2) et 3).

Les vecteurs sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine : a) Justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l'équation différentielle affichée ; b) Identifier les régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle, dessiner ces régions et associer à celles-ci une expression algébrique ; c) Elaborer des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions

	<p>Pourquoi le Vecteur 1 peut être associé à l'équation différentielle <math>y' = -y(4-y^2)</math> ?</p> <p>Des régions du plan où le vecteur a une pente nulle. Expressions algébriques associées.</p> <p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
	<p>Pourquoi le Vecteur 2 peut être associé à l'équation différentielle <math>y' = (x+2)/(x^2-1)</math> ?</p> <p>Des régions du plan où le vecteur a une pente nulle. Expressions algébriques associées.</p> <p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
	<p>Pourquoi le Vecteur 3 peut être associé à l'équation différentielle <math>y' = (y^2+x)(x-y)</math> ?</p> <p>Des régions du plan où le vecteur a une pente nulle. Expressions algébriques associées.</p> <p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>

Les consignes ont été présentées, d'abord de façon générale et ensuite particularisées pour chaque couple (vecteur dynamique – équation différentielle).

La première consigne, de formulation floue, laisse les étudiants présenter librement leurs arguments. Nous supposons que les arguments seront fondés sur l'interprétation mathématique des propriétés graphiques repérées, grâce à l'exploration dynamique. Dans la partie sur les réponses attendues, nous décrirons les arguments mathématiques pouvant être mis en oeuvre.

La deuxième consigne se focalise sur l'isocline zéro. Elle considère deux phases : une phase exploratoire et une phase d'association entre une expression symbolique et ce lieu géométrique. Nous considérons également que cette consigne peut permettre la mise en

fonctionnement des connaissances du cadre des fonctions et de l'analyse, pour interpréter les faits graphiques repérés.

La troisième consigne peut apparaître répétitive par rapport à la première. L'objectif est de centrer l'argumentation sur le domaine des mathématiques, afin d'éviter des réponses fondées seulement sur l'évidence graphique (qui pourraient être fournies dans la première consigne).

### **Variables didactiques**

Lors de la conception de l'énoncé nous avons pris en compte quatre variables didactiques, décrites ci-dessous :

#### **La variable didactique V-ED1**

Cette variable concernant le choix de la forme générale de l'expression symbolique des équations différentielles, prend deux valeurs :

V-ED1<sub>1</sub> : équation de la forme  $g(x,y,y')=0$  ;

V-ED1<sub>2</sub> : équation de la forme  $y'=f(x,y)$ .

Dans le cas de la valeur V-ED1<sub>1</sub>, pour établir un lien entre la pente des vecteurs dynamiques et l'expression symbolique des équations, il faut effectuer un traitement de l'expression dans le registre symbolique. Pour faciliter l'établissement de ce lien nous avons donc choisi la valeur V-ED1<sub>2</sub>.

#### **La variable didactique V-ED2**

Cette variable concerne le choix des variables à inclure dans l'expression symbolique  $y'=f(x,y)$  des équations différentielles ; elle a trois valeurs :

V-ED2<sub>1</sub> :  $y'=f(x)$  ;    V-ED2<sub>2</sub> :  $y'=f(y)$  ;    V-ED2<sub>3</sub> :  $y'=f(x,y)$ .

Le choix du type d'expression symbolique pour l'équation différentielle privilégie certaines propriétés graphiques de la famille de courbes solutions. Les courbes solutions associées à la valeur V-ED2<sub>1</sub> peuvent se déduire par translation de vecteur vertical. Les courbes solutions associées à la valeur V-ED2<sub>2</sub> peuvent se déduire par translation de vecteur horizontal. Enfin, les courbes solutions associées à la valeur V-ED2<sub>3</sub>, ne peuvent pas se déduire par les transformations précédentes. Comme nous avons proposé trois couples vecteurs-équations différentielles, nous avons choisi une équation différentielle pour chacune de ces valeurs.

#### **La variable didactique V-ED3**

Cette variable concerne la possibilité de résoudre algébriquement les équations différentielles. Le fait de connaître, ou non, l'expression explicite peut conduire à la mobilisation des différentes stratégies pour justifier le comportement des courbes solutions. Par exemple, l'absence d'une expression explicite des solutions oblige à interpréter les comportements des solutions en termes de la dérivée, et par conséquent à établir un lien direct avec l'équation différentielle. En revanche, l'interprétation des comportements des courbes à l'aide de l'expression symbolique des solutions peut se réduire au cadre des fonctions, sans forcément faire intervenir la dérivée. Cette variable prend deux valeurs :

V-ED3<sub>1</sub> : des équations différentielles non résolubles par des méthodes élémentaires ;

V-ED3<sub>2</sub> : des équations différentielles résolubles par des méthodes élémentaires.

Comme nous avons proposé trois couples vecteurs – équations différentielles, nous avons fait le choix d’une équation du type V-ED3<sub>1</sub> et deux équations du type V-ED3<sub>2</sub>.

### ***La variable didactique V-ED4***

Cette variable concerne la complexité de la forme graphique de l’isocline zéro. Elle prend en compte le fait que cette forme dépende de l’expression symbolique de l’équation différentielle choisie. Nous avons identifié deux valeurs :

V-ED4<sub>1</sub> : équation dont le représentant graphique associé à l’isocline zéro a une forme prototypique élémentaire, par exemple : droite, parabole, etc. ;

V-ED4<sub>2</sub> : équation dont le représentant graphique associé à l’isocline zéro n’a pas de forme prototypique élémentaire.

Dans les tâches proposées, nous supposons que la reconnaissance de l’isocline zéro sera le résultat d’un travail exploratoire à l’aide du logiciel. Donc, il s’imposait de faciliter aussi bien l’identification de ce lieu géométrique que sa conversion au registre symbolique. Pour ce faire, nous avons choisi la valeur V-ED4<sub>1</sub>. De plus, nous avons choisi des équations différentielles pour lesquelles l’expression symbolique associée avec l’isocline zéro, était simple.

Le choix de la valeur V-ED4<sub>2</sub> risque de demander plus de temps et d’empêcher la réalisation des autres consignes. Une configuration graphique complexe de l’isocline zéro peut aussi bloquer le travail des étudiants.

### ***Les réponses attendues et les connaissances en jeu***

#### **Première consigne**

Pour répondre à la consigne : *Justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l’équation différentielle affichée*, nous identifions d’abord cinq types d’arguments possibles pour étayer les justifications (excepté les arguments du type ISC-0, les autres types d’arguments ont déjà été présentés dans les situations précédentes). Dans un premier temps, nous les présentons de façon générale et les utilisons ensuite pour décrire les réponses possibles afin de justifier les associations explicites Vecteur dynamique – Equation différentielle.

#### ***Des arguments de type VAL-NUM***

Rappelons que les arguments de ce type s’appuient sur la confrontation des valeurs numériques de la pente du vecteur tangent dynamique (obtenues à l’aide du logiciel), et des valeurs de la fonction  $f(x,y)$  évaluées selon les coordonnées de l’origine de ce vecteur. La mise en relation de ces valeurs requiert des connaissances permettant d’interpréter la pente des vecteurs dynamiques en termes de la dérivée des solutions, telles que :

*« soit une équation différentielle de la forme  $y' = f(x,y)$ , la fonction  $f$  donne, en chaque point  $P(x,y)$ , la pente de la droite tangente à la courbe solution passant par  $P$  » (C6)*

Nous considérons que l'accès aux outils, comme « Pente » et « Calculatrice » qu'offre le logiciel, pourraient favoriser le recours à cette stratégie.

Nous remarquons que dans ce type d'arguments, le registre graphique fonctionne dans un mode nomographique : en effet, il est utilisé comme moyen d'obtenir des résultats numériques locaux.

#### ***Des arguments du type RES-ED***

Comme déjà présenté, les arguments de ce type recourent à la résolution algébrique de l'équation différentielle, lorsque c'est possible. Nous considérons que ces arguments peuvent donner lieu à des justifications basées sur des vérifications graphiques, telles que : le vecteur tangent dynamique reste toujours tangent aux courbes solutions (tracées à partir de l'expression symbolique des solutions).

Comme dans le cas précédent, nous considérons que dans la formulation des arguments du type RES-ED, le registre graphique fonctionne sous un mode nomographique, car il serait utilisé seulement pour vérifier des résultats locaux.

#### ***Des arguments du type VAR-ED***

Rappelons que les arguments du type VAR-ED s'appuient sur la prise en compte des liens existant entre les variables qui interviennent dans l'expression symbolique de l'équation différentielle et dans le comportement graphique du vecteur dynamique. Pour la formulation de ce type d'arguments, l'exploration à l'aide du vecteur dynamique joue un rôle important, et elle permet d'identifier les propriétés graphiques des courbes solutions. L'établissement d'un lien entre la pente du vecteur tangent dynamique et la dérivée des solutions demande la mise en œuvre de connaissances comme C6, citées ci-dessus. De plus, l'interprétation mathématique du comportement du vecteur dynamique en fonction des variables qui interviennent dans l'expression symbolique de l'équation différentielle, nécessite des connaissances telles que :

*« soit une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , et soit  $V$  le représentant graphique d'un vecteur d'origine  $P(x,y)$  et de pente  $f(x,y)$ . Si le vecteur reste inchangé lorsque  $P$  se déplace sur une droite verticale (resp. horizontale), il est associé à une équation différentielle dépendant uniquement de la variable  $x$  (resp.  $y$ ). Dans le cas contraire, il est associé à une équation différentielle dépendant des variables  $x$  et  $y$  » (C17)*

Nous supposons que même si les connaissances C17 ne sont pas disponibles chez les étudiants, l'exploration à l'aide du logiciel et les rétroactions du milieu pourraient conduire à les rendre mobilisables. En effet, il est possible que les variations du vecteur dynamique lors de son déplacement mettent en évidence l'aspect fonctionnel de  $y'$ . Par exemple, si l'on déplace le vecteur suivant une direction parallèle à l'un des axes, une des variables de la fonction  $f$  est fixée, donc l'inclinaison du vecteur pourrait être mise en relation avec l'autre variable de la fonction  $f$ .

Nous considérons que la formulation de ce type d'arguments attestera le développement d'une flexibilité pour articuler le registre graphique et le registre symbolique.



***Des arguments du type ISC-0***

Ce type d'arguments prend en compte l'identification des régions où le vecteur devient horizontal, ainsi que la mise en relation de ce fait graphique avec l'expression symbolique de l'équation différentielle. Cette articulation entre les registres graphique et symbolique présuppose d'interpréter la direction horizontale du vecteur en termes de la dérivée nulle, ce qui demande la mise en fonctionnement des connaissances C6 pour lier l'équation différentielle avec les pentes des droites tangentes.

***Des arguments du type SENS-VAR***

Dans ce type d'arguments nous considérons que l'exploration à l'aide du logiciel peut jouer un rôle important. Les rétroactions graphiques du logiciel peuvent permettre d'identifier des régions où le vecteur a des pentes de même signe. La mise en relation des changements de signe de la pente du vecteur dynamique avec l'expression symbolique de l'équation différentielle, requiert des connaissances sur le sens de variation des fonctions, telles que :

*« pour une équation différentielle  $y'=f(x,y)$  où  $f$  est une fonction numérique en  $\mathcal{R}^2$ , si  $f(x_P,y_P)>0$  (resp.  $f(x_P,y_P)<0$ ), alors la courbe solution  $\Gamma_P$  qui passe par  $(x_P,y_P)$  est une courbe représentative d'une fonction croissante (resp. décroissante) » (C5)*

***Utilisation des différents types d'arguments pour justifier les associations explicites vecteur dynamique – équation différentielle***

Les arguments du type **VAL-NUM**, pour justifier l'association des vecteurs tangents dynamiques avec les équations différentielles, peuvent être formulés pour les trois couples vecteur dynamique – équation différentielle, donnés. La mise en œuvre des connaissances C6, pour effectuer les validations numériques, demande seulement de connaître la pente du vecteur tangent dynamique (cette pente peut être obtenue en utilisant l'outil « Pente » de Cabri), et aussi d'identifier la fonction  $f(x,y)$  à partir de l'expression symbolique de chaque équation différentielle. Cette fonction devant être évaluée selon les coordonnées de l'origine du vecteur dynamique associé, le calcul des valeurs numériques de la fonction pouvant se faire à l'aide de l'outil « Calculatrice » de Cabri.

Les arguments du type **RES-ED** pour justifier l'association des équations différentielles et les vecteurs tangents dynamiques, peuvent être formulés seulement pour les deux premiers couples, vecteur dynamique – équation différentielle (la dernière équation différentielle n'étant pas résoluble algébriquement) :

*Equation différentielle  $y'=-y(4-y^2)$*

Pour cette équation différentielle, les solutions peuvent être exprimées sous la forme :

$\ln \left| \frac{y^2 - 4}{y^2} \right| = 8x + C$ , où  $C$  est un nombre réel. Dans ce cas, le tracé des courbes solutions

demande un traitement de l'expression symbolique pour l'écrire : soit sous la forme  $y=f(x)$ , soit sous la forme  $x=g(y)$ . Rappelons que la justification de l'association par des arguments RES-ED consiste à tracer certaines courbes solutions et à vérifier perceptivement que le vecteur dynamique reste tangent à ces courbes. La vérification graphique à l'aide du logiciel

dans ce cas-là, pourrait amener à faire face à des difficultés comme : en Cabri, il est possible seulement de tracer de manière directe les représentants graphiques de fonctions de la forme  $y=f(x)$ , tandis que pour des fonctions de la forme  $x=g(y)$  il faudrait construire un point générique et tracer ensuite son lieu géométrique.

*Equation différentielle  $y'=(x+2)/(x^2-1)$*

Pour l'équation différentielle  $y'=(x+2)/(x^2-1)$  (deuxième couple), les solutions peuvent être exprimées sous la forme :  $y = \frac{1}{2} \ln \frac{|x-1|^3}{|x+1|} + C$ . Dans ce cas, le tracé des courbes solutions à l'aide du logiciel pourrait donc devenir plus facile que pour la première équation différentielle.

Nous considérons que pour cette équation différentielle, les arguments du type **RES-ED** seront plus probablement formulés, en raison de ce que l'obtention des primitives est possible directement à partir de l'expression symbolique de l'équation (l'équation différentielle est de la forme  $y'=f(x)$ ).

Afin de faciliter le suivi des arguments justifiant l'association des vecteurs dynamiques et les équations différentielles, nous montrons ci-après, des représentants graphiques des champs de vecteurs associés à ces équations différentielles :

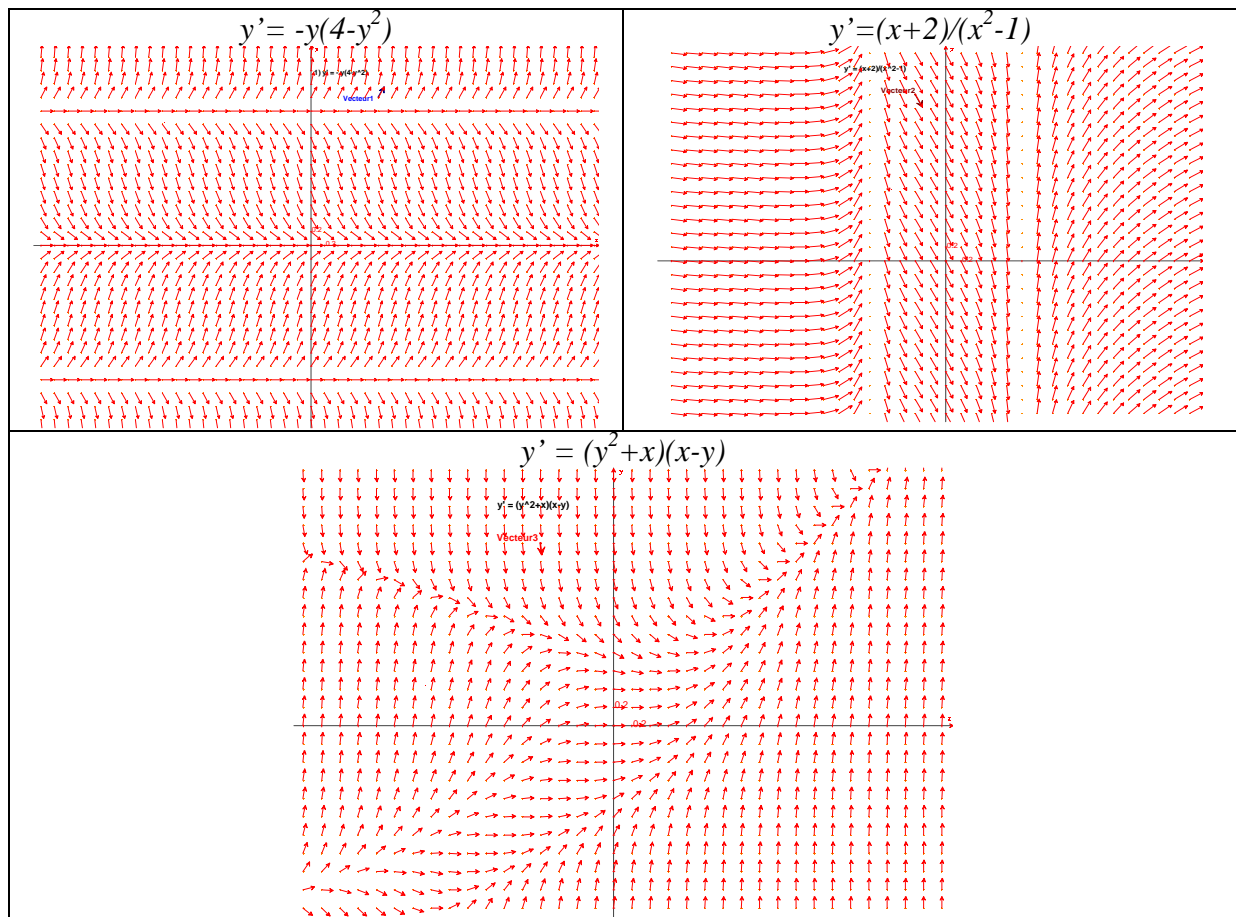


Fig. 10 : Champs de vecteurs associés aux équations différentielles (association explicite vecteurs dynamiques et équations différentielles)

Les arguments du type **VAR-ED**, pour justifier l'association des équations différentielles et des vecteurs dynamiques, peuvent être formulés pour les trois couples : vecteur dynamique – équation différentielle, donnés. Le recours à ce type d'arguments repose sur un travail important dans le registre graphique, de manière à pouvoir mettre en relation les faits graphiques repérés, lors du déplacement des vecteurs dynamiques, avec les propriétés algébriques des expressions symboliques. Nous développons ci-après quelques arguments qui pourraient être formulés, justifiant l'association Vecteur dynamique – Equation différentielle :

*Equation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$*

Pour cette équation différentielle, le *Vecteur 1* reste inchangé lorsque son origine se déplace sur une droite horizontale. Ce qui signifie que la valeur de la pente du vecteur ne dépend pas de la valeur  $x$  de l'abscisse de son origine. Donc l'expression symbolique de  $y'$  est seulement fonction de  $y$ . Le comportement du vecteur dynamique *Vecteur 1* est caractéristique des équations différentielles de la forme  $y' = f(y)$  (C17).

*Equation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$*

Pour cette équation différentielle, le *Vecteur 2* reste inchangé lorsque son origine se déplace le long d'une droite verticale. Ce qui signifie que la valeur de la pente du vecteur ne dépend pas de la valeur  $y$  de l'ordonnée de son origine. Donc l'expression symbolique de  $y'$  est seulement fonction de  $x$ . Alors, le comportement du vecteur dynamique *Vecteur 2* est caractéristique des équations différentielles de la forme  $y' = f(x)$  (C17).

Equation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$

Pour cette équation différentielle, le Vecteur 3 ne reste pas inchangé lorsque son origine se déplace le long d'une droite verticale ou sur une droite horizontale. Ce qui signifie que la valeur de la pente du vecteur dépend bien des coordonnées  $(x,y)$  de son origine. L'expression symbolique de  $y'$  est donc fonction de  $x$  et de  $y$ . Alors le comportement du vecteur dynamique Vecteur 3 est typique des équations différentielles de la forme  $y'=f(x,y)$  (C17).

Les arguments du type **ISC-0** pouvant être formulés pour justifier l'association des vecteurs tangents dynamiques avec les équations différentielles seront présentés plus loin, dans la partie des réponses attendues concernant la deuxième consigne.

Les arguments du type **SENS-VAR**, pour justifier l'association des vecteurs tangents dynamiques avec les équations différentielles, peuvent être formulés aussi pour les trois couples vecteur tangent – équation différentielle, donnés. Nous considérons que la mise en relation des registres graphique et symbolique concernant les changements du signe de la pente, s'appuie également sur un travail exploratoire important, à l'aide du logiciel, ainsi que sur la mise en œuvre des connaissances C5 pour interpréter mathématiquement les faits graphiques identifiés. Nous présentons, ci-dessous, quelques arguments qui pourraient être formulés pour chaque couple Vecteur tangent dynamique – Equation différentielle :

Equation différentielle  $y'=-y(4-y^2)$

Pour cette équation différentielle, l'exploration dynamique peut permettre l'identification des régions :  $y < -2$ ,  $-2 < y < 0$ ,  $0 < y < 2$ ,  $y > 2$  où la dérivée garde un signe constant. La mise en œuvre des connaissances C5 peut permettre d'établir un lien entre ces faits graphiques et l'expression symbolique de l'équation différentielle. Ce qui pourrait conduire à conclure que : les solutions dans la région  $y < -2$  sont décroissantes ; les solutions comprises dans la région  $-2 < y < 0$  sont croissantes ; les solutions comprises dans la région  $0 < y < 2$  sont croissantes ; et les solutions dans la régions  $y > 2$  sont décroissantes.

Equation différentielle  $y'=(x+2)/(x^2-1)$

Pour cette équation différentielle, l'exploration à l'aide du vecteur dynamique peut permettre d'identifier les régions :  $x < -2$ ,  $-2 < x < -1$ ,  $-1 < x < 1$ ,  $x > 1$ , où la dérivée a un signe fixe. L'exploration des propriétés graphiques associées à cette équation particulière peut conduire à formuler des arguments d'un autre type que nous appelons « **arguments du type DISC** ». Ces arguments consistent à identifier les régions de discontinuité de la fonction  $f$ . Dans ce cas, les droites d'équation  $x=\pm 1$ . Le travail exploratoire pourrait faire constater qu'au voisinage des discontinuités, le vecteur tangent dynamique change brusquement de signe pour sa pente, et qu'il est donc possible que ce phénomène graphique conduise à établir un lien avec l'expression symbolique de l'équation différentielle.

La mise en œuvre des connaissances C5 peut conduire à conclure que : les solutions de la région  $x < -1$  sont décroissantes pour  $x < -2$  et croissantes pour  $-2 < x < -1$ ; les solutions comprises dans la région  $-1 < x < 1$  sont décroissantes ; les solutions dans la région  $x > 1$  sont croissantes.

Equation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$

En ce qui concerne l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$ , la formulation d'arguments du type SENS-VAR peut devenir plus difficile. En effet, l'isocline zéro partage le plan en cinq

régions, c'est-à-dire les régions délimitées par les courbes d'équations  $x=-y^2$  et  $x=y$  : région I,  $x > -y^2, y > x, y > 0$  ; région II,  $x < -y^2, y > x$  ; région III,  $x < -y^2, y < x$  ; région IV,  $x > -y^2, y > x, y < 0$  ; région V,  $x > -y^2, y < x$  (cf. figure ci-dessous). L'éventuelle mise en œuvre des connaissances C5 pourrait permettre de conclure que : les solutions de la région I sont décroissantes ; les solutions de la région II sont croissantes ; les courbes de la région III sont décroissantes ; les solutions de la région IV sont décroissantes, les solutions de la région V sont croissantes.

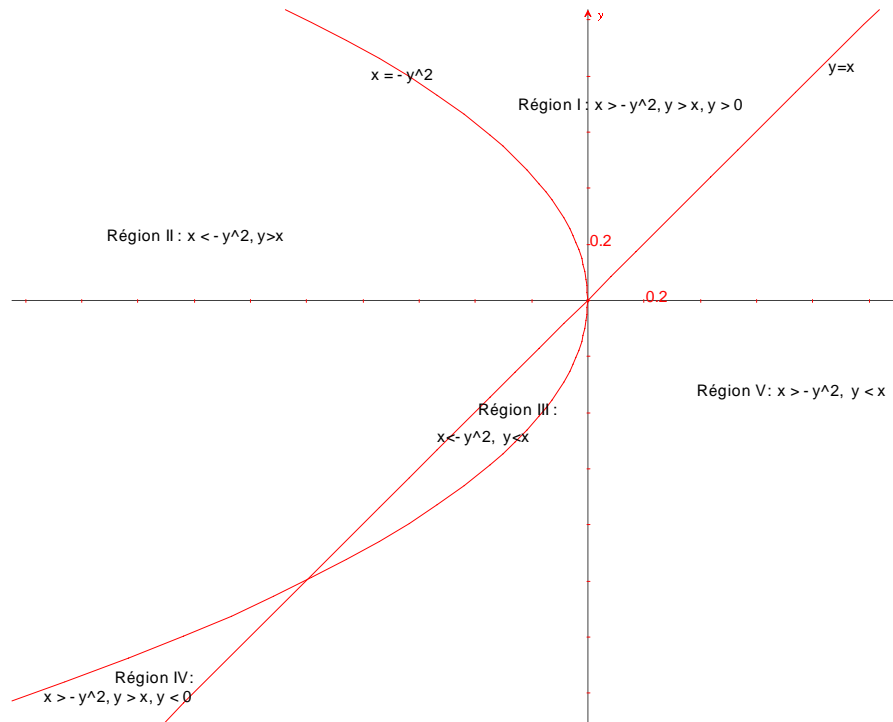


Fig. 11 : Régionnement du plan selon le signe de la dérivée pour l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$

### Deuxième consigne

La consigne : Identifier les régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle, dessiner ces régions et les associer à une expression algébrique, demande explicitement un travail exploratoire dans le registre graphique pour identifier l'isocline zéro. Nous présentons ci-dessous les réponses attendues pour cette consigne :

Equation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$

Pour cette équation différentielle, l'exploration dynamique peut conduire sans difficulté à l'identification des droites :  $y=0$ ,  $y=-2$  et  $y=2$ , comme les lieux où les vecteurs deviennent horizontaux. Compte tenu de la simplicité des expressions symbolique associées, nous présumons qu'elles pourront être exprimées facilement dans le registre symbolique. Nous considérons, dans ce cas particulier, que l'établissement de liens entre les expressions symboliques de l'isocline zéro et l'expression symbolique de l'équation différentielle pourrait être favorisé, du fait que les droites associées à l'isocline zéro représentent aussi les solutions constantes de l'équation différentielle.

Equation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$

Pour cette équation différentielle, nous considérons que l'exploration dynamique peut conduire à identifier la droite  $x=-2$ , comme l'isocline zéro. Dans ce cas particulier, l'identification de cette droite exige un déplacement soigneux de l'origine du vecteur de

manière à le placer sur la droite  $x=2$ . Comme dans le cas précédent, nous considérons que les étudiants ne trouveront pas de difficulté à exprimer symboliquement l'isocline zéro.

*Equation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$*

Pour cette équation différentielle, l'isocline zéro associée à l'équation différentielle est composée de la parabole d'équation  $x=-y^2$  et de la droite  $x=y$ . Nous considérons que l'identification graphique de cette isocline pourrait être un peu plus difficile que dans les deux équations différentielles précédentes, et notamment l'identification de la parabole. Donc, il est possible que la reconnaissance de l'isocline zéro soit faite partiellement, par exemple en identifiant seulement la droite. Nous considérons que l'éventuel établissement d'un lien direct entre les registres graphique et symbolique concernant l'isocline zéro, pourrait permettre de réaliser des anticipations sur les représentants graphiques associés à cette isocline, à partir de l'expression symbolique de l'équation différentielle.

### Troisième consigne

La consigne : *Elaborer des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions*, entraîne explicitement l'interprétation mathématique des faits graphiques repérés. Nous considérons que parmi ces arguments peuvent se trouver ceux présentés dans les deux consignes précédentes. Par ailleurs, nous supposons qu'il est possible d'élaborer d'autres types d'arguments. Nous présenterons d'abord et de façon générale deux autres types possibles d'arguments, et les appliquerons ensuite pour chaque couple Vecteur dynamique – Equation différentielle.

#### *Des arguments du type PTS-INFL*

Ces arguments se basent sur l'identification des points d'inflexion et de la courbure des solutions. Nous considérons que la reconnaissance de certains points d'inflexion pourrait conduire à la recherche algébrique du lieu des points d'inflexion. Et nous remarquons qu'il est possible que la recherche du lieu des points d'inflexion ne se fasse pas, si elle n'est pas explicitement sollicitée.

La formulation de ce type d'arguments pourrait requérir la mise en œuvre de connaissances, telles que :

*« la courbe  $I_i$  des points d'inflexion d'une famille de solutions d'une équation différentielle, est composée des points où les pentes des courbes solutions passent par un extremum. Pour une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , ces points font partie de l'ensemble des couples  $(x,y)$  satisfaisant à  $f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)=0$  » (C12)*

#### *Des arguments du type BRCH-INFI*

Les arguments de ce type se basent sur l'identification de certains comportements des courbes solutions à l'infini. L'interprétation mathématique de ces faits graphiques peut requérir la mise en fonctionnement des connaissances sur les limites des fonctions (quand on connaît certaines conditions sur la dérivée), telles que :

*« soit  $x \rightarrow y(x)$  définie sur  $]a, +\infty[$ , dérivable. Si  $y'(x) \rightarrow \alpha$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors :*

*Si  $\alpha > 0$  (éventuellement  $\alpha = +\infty$ ),  $y(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$*

*Si  $\alpha < 0$  (éventuellement  $\alpha = -\infty$ ),  $y(x) \rightarrow -\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$*

*Si  $\alpha = 0$ , on ne peut rien dire a priori » (C13)*

Les arguments de ce type peuvent aussi faire intervenir des connaissances sur la convergence de fonctions majorées ou minorées, telles que :

« soit  $f$  une numérique, continue définie sur  $]a, +\infty[$ , si  $f$  est décroissante et minorée (resp. croissante et majorée) sur  $]a, +\infty[$ , alors  $f$  a une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$  » (C10)

### **Utilisation des arguments du type PTS-INFL et BRACH-INFI pour justifier les associations explicites vecteur dynamique – équation différentielle**

En ce qui concernent les arguments du type **PTS-INFL**, nous considérons que l'exploration dynamique pourrait conduire à identifier quelques points d'inflexion des courbes solutions. Nous considérons que ces constats graphiques pourraient aussi favoriser une recherche algébrique du lieu des points d'inflexion, en mobilisant les connaissances C12. Nous présentons ci-dessous quelques arguments possibles du type PTS-INFL, pour justifier les associations Vecteur dynamique – Equation différentielle (on suppose une phase préalable d'exploration à l'aide du logiciel, et de calcul algébrique du lieu géométrique des points d'inflexion) :

*Equation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$*

Pour cette équation différentielle, les points d'inflexion des solutions se trouvent sur les droites d'équation  $y = \pm 2/\sqrt{3}$ . Donc, les solutions comprises dans la région  $-2 < y < 0$  changent de concavité en  $y = -2/\sqrt{3}$ , tandis que celles comprises dans la région  $0 < y < 2$  changent de concavité en  $y = +2/\sqrt{3}$ .

*Equation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$*

Pour cette équation différentielle, les points d'inflexion des solutions se trouvent sur les droites d'équation  $x = -2 \pm \sqrt{3}$ . Donc, les solutions de la région  $x < -1$  changent de concavité en  $x = -2 - \sqrt{3}$ , tandis que celles comprises dans la région  $-1 < x < 1$  changent de concavité en  $x = -2 + \sqrt{3}$ .

*Equation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$*

En ce qui concerne l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$ , nous considérons que la complexité de configuration des courbes solutions rend peu probable l'identification, à l'aide de l'exploration dynamique, des lieux des points d'inflexion. Nous considérons aussi que l'éventuelle mise en fonctionnement des connaissances C12 pour essayer de trouver une expression symbolique associée à ces lieux, pourrait (lors du traitement de l'expression symbolique de l'équation différentielle) se heurter à des difficultés dues à la complexité des expressions symboliques en jeu. L'équation du lieu des points d'inflexion est :  $3y^5 - 5xy^4 + (4x+2x^2)y^3 + (1-6x^2)y^2 + (2x^3+x^2-1)y - x^3 + 2x = 0$ . Donc, il est peu plausible que cette stratégie soit mobilisée.

Nous présentons ci-dessous quelques arguments possibles, du type **BRCH-INFI**, justifiant l'association des Vecteurs tangents dynamiques avec les Equations différentielles. Comme pour les arguments précédents, nous considérons que la formulation de ces arguments sera précédée d'un travail exploratoire à l'aide du logiciel. L'exploration dans l'environnement de géométrie dynamique pourrait permettre d'établir un lien entre les constats graphiques -

relatifs au comportement des solutions à l'infini- et les caractéristiques de l'expression symbolique de l'équation différentielle. Nous considérons que pour les deux premières équations différentielles  $y' = -y(4-y^2)$  et  $y' = (x+2)/(x^2-1)$ , les données graphiques pourraient conduire à faire fonctionner des connaissances telles que C13 (limites des fonctions quand on connaît certaines conditions relatives à la dérivée) pour justifier les associations (par un éventuel traitement des expressions symboliques) :

*Equation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$*

Pour cette équation différentielle, nous considérons que l'identification graphique de solutions majorées ou minorées pourrait favoriser la mobilisation des connaissances telles que C10 (relatives à la convergence de fonctions majorées ou minorées). L'interprétation mathématique des faits graphiques pourrait conduire à cette conclusion :

- les solutions de la région  $y < -2$  tendent vers moins l'infini lorsque  $x$  tend vers plus l'infini, et aussi pour ces solutions,  $y'$  tend vers zéro lorsque  $x$  tend vers moins l'infini ;
- pour les solutions comprises entre les régions  $-2 < y < 0$  et  $0 < y < 2$ ,  $y'$  tend vers zéro lorsque  $x$  tend vers plus ou moins l'infini ;
- les solutions de la région  $y > 2$  tendent vers plus l'infini lorsque  $x$  tend vers plus l'infini, et aussi,  $y'$  tend vers zéro lorsque  $x$  tend vers moins l'infini.

Nous remarquons qu'une description plus précise en termes de comportements asymptotiques peut se réaliser, à condition de connaître explicitement les expressions symboliques des solutions.

*Equation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$*

Pour cette équation différentielle, nous considérons l'interprétation mathématique des faits graphiques identifiés, qui pourrait permettre de conclure que : les solutions de la région  $x < -1$  tendent vers plus l'infini lorsque  $x$  tend vers  $-1$ , et aussi que  $y'$  tend vers zéro lorsque  $x$  tend vers moins l'infini ; les solutions comprises dans la région  $-1 < x < 1$  tendent vers plus l'infini lorsque  $x$  tend vers  $-1$ , et tendent vers moins l'infini lorsque  $x$  tend vers  $1$  ; les solutions de la région  $x > 1$  tendent vers moins l'infini lorsque  $x$  tend vers  $1$ , et tendent vers plus l'infini lorsque  $x$  tend vers plus l'infini.

Comme pour l'équation différentielle précédente, une étude plus précise des comportements asymptotiques requiert des expressions explicites des solutions.

*Equation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$*

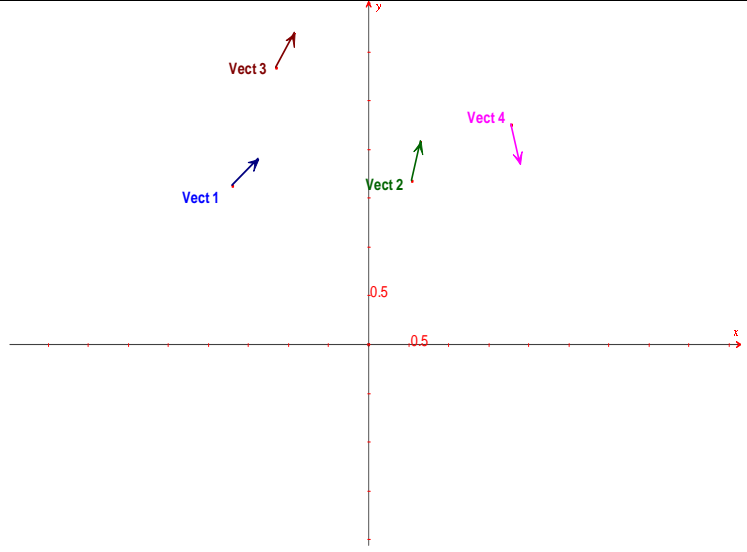
En ce qui concerne l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$ , nous considérons comme peu probable le recours aux arguments de type BRCH-INFI, en raison de la complexité de configuration des courbes solutions. Cependant, il est possible que l'information graphique amène à supposer que certaines courbes solutions ont un comportement asymptotique vers la droite  $y=x$ , mais dans ce cas, nous considérerions que les arguments seraient formulés sans être justifiés.



### 2.3.3. Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien n'étant pas explicitement donné)

Cette situation se différencie de la première par la fourniture aux étudiants d'un ensemble de vecteurs tangents dynamiques et d'une liste d'équations différentielles, où il faut choisir celle qui correspond à chaque vecteur dynamique donné. L'enjeu de la situation est l'établissement des liens entre les propriétés graphiques repérées (lors du déplacement de ces vecteurs) et les propriétés algébriques des expressions symboliques candidates. La situation a pour objectif de tester l'efficacité des liens établis par les étudiants, entre les registres graphique et symbolique des équations différentielles.

La situation proposée aux étudiants est la suivante :

<p>Les vecteurs Vect1, Vect2, Vect3 et Vect4 sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant son origine.</p> <p>Pour chaque vecteur indiquer de quelle équation différentielle de la liste ci-dessous, il peut être un vecteur tangent aux courbes solutions et justifier pourquoi.</p>	
<p><b>E1</b> <math>y' = a(x^2 + 1)</math>   <b>E2</b> <math>y' = b(y^2 - 1)(x^2 + y^2)</math>   <b>E3</b> <math>y' = c(y^2 - 4)</math>   <b>E4</b> <math>y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}</math></p> <p><b>E5</b> <math>y' = ke^{-0.05x^2}</math>   <b>E6</b> <math>y' = l(y - 1)(y^2 - 4)</math>   <b>E7</b> <math>y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}</math>   <b>E8</b> <math>y' = n(y - x^2)(x + y)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>a, b, c, d, k, l, m, n</math> réelles positives</p>	

Dans un premier temps, l'énoncé présente les consignes de façon générale, et ensuite il les précise pour chaque vecteur. D'après ces consignes, il est demandé de choisir une équation différentielle pour chaque vecteur dynamique, et de justifier ce choix.

#### Variables didactiques

Lors de la conception de cette situation, nous avons pris en compte les trois premières variables didactiques décrites dans la situation précédente. Nous avons également considéré une autre variable didactique, que nous présenterons à la fin de ce paragraphe.

Pour la variable didactique V-ED1 (forme générale de l'expression symbolique), nous avons fait le choix de la valeur V-ED1<sub>2</sub> en présentant les équations différentielles sous la forme  $y' = f(x, y)$ .

En ce qui concerne la variable didactique V-ED2 (les variables à inclure dans l'expression symbolique), nous avons choisi les valeurs V-ED2<sub>1</sub> (une équation différentielle de la forme  $y'=f(x)$ ) et V-ED2<sub>3</sub> (trois équations de la forme  $y'=f(x,y)$ ).

En ce qui concerne la variable V-ED3 (possibilité de résolution algébrique), nous avons choisi la valeur V-ED3<sub>2</sub> (des équations différentielles qui ne peuvent pas être résolubles par des méthodes élémentaires).

Nous avons aussi pris en compte la variable didactique (V-ED5) qui concerne la possibilité d'évaluer numériquement l'expression symbolique de l'équation différentielle. Des expériences préalables que nous avons eues au Mexique (2002) et en France (Arslan et Laborde, 2003) montrent que lorsqu'il est possible de faire des validations numériques, la quasi-totalité des étudiants recourent à cette stratégie numérique pour établir les associations entre les vecteurs tangents dynamiques et les équations différentielles (arguments du type VAL-NUM). Pour cette variable, nous avons identifié deux valeurs :

V-ED5<sub>1</sub>: expression symbolique de l'équation différentielle qui peut être évaluée numériquement ;

V-ED5<sub>2</sub>: expression symbolique de l'équation différentielle qui ne peut pas être évaluée numériquement.

Nous avons fait le choix de la valeur V-ED5<sub>2</sub> pour bloquer le recours aux stratégies numériques. Ce blocage peut se faire en ajoutant des paramètres positifs aux expressions symboliques des équations différentielles (idée issue du travail d'Arslan et Laborde, 2003).

### **Les réponses attendues et les connaissances en jeu**

Nous nous attendons à ce que grâce à l'interprétation mathématique des faits graphiques identifiés par l'exploration dynamique, les étudiants arrivent à réaliser les associations suivantes :

Le *Vecteur 1* est associé à l'équation différentielle E5 :  $y' = ke^{-0.05x^2}$  ;

Le *Vecteur 2* est associé à l'équation différentielle E4 :  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$  ;

Le *Vecteur 3* est associé à l'équation différentielle E8 :  $y' = n(y - x^2)(x + y)$  ;

Le *Vecteur 4* est associé à l'équation différentielle E7 :  $y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}$ .

Afin de faciliter le suivi de l'argumentation, nous montrons dans la figure suivante les champs de vecteurs obtenus à partir des vecteurs dynamiques fournis :

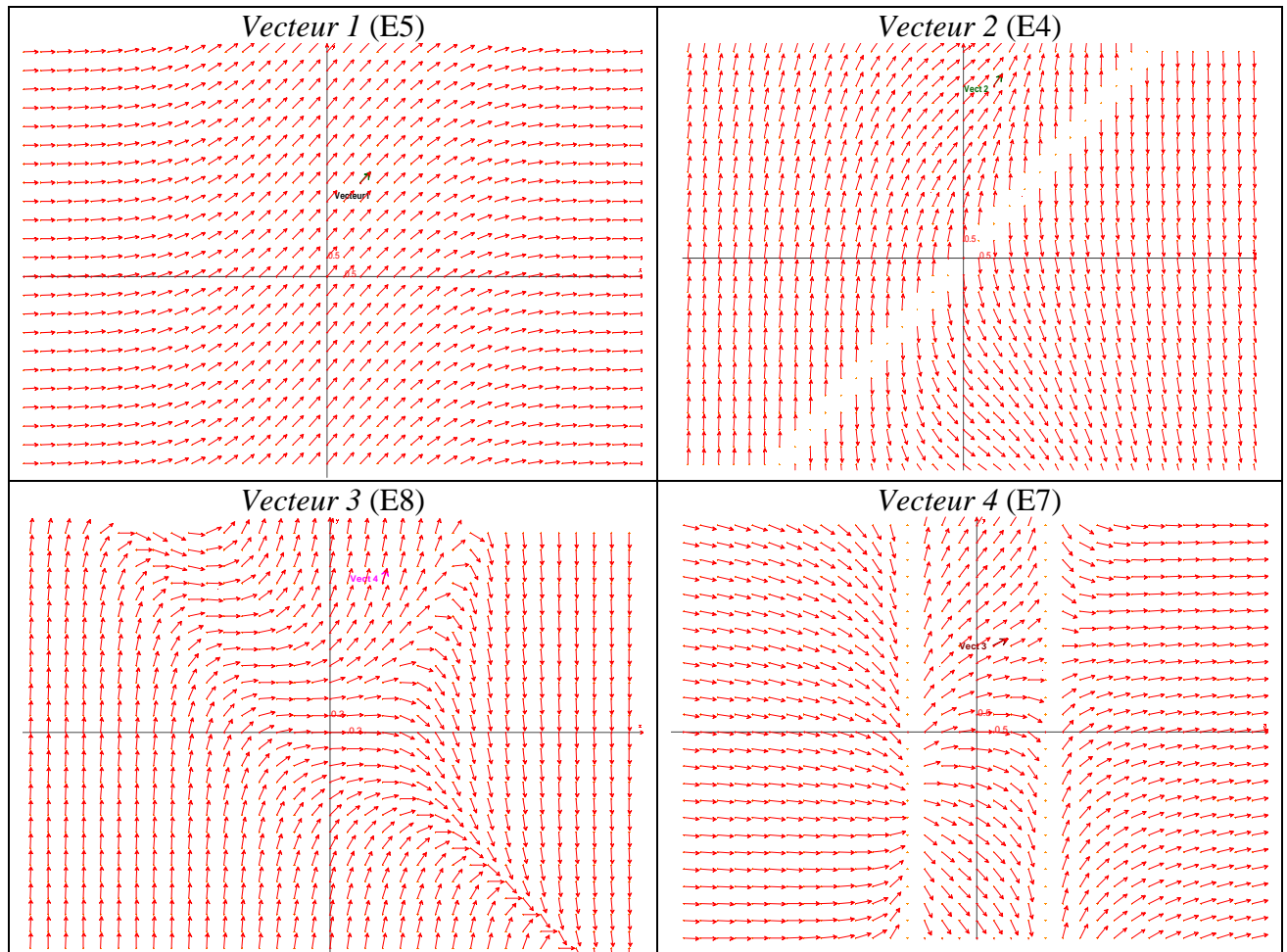


Fig. 12 : Champs de vecteurs associés aux équations différentielles  
(association problématisée de vecteurs dynamiques et d'équations différentielles)

Nous décrivons ci-dessous les stratégies que nous considérons possibles à mettre en œuvre pour effectuer ces associations. Les connaissances en jeu et les types d'arguments mobilisés ont été déjà présentés dans la situation précédente.

**Vecteur 1 – équation différentielle**  $y' = ke^{-0.05x^2}$

Le déplacement du *Vecteur 1* peut permettre de remarquer qu'il a une direction toujours positive dans le plan. Par ailleurs, si le vecteur se déplace sur des droites verticales, il ne change pas de direction. L'interprétation mathématique de ces faits graphiques peut conduire à la mise en fonctionnement des connaissances C17 selon lesquelles, si un vecteur reste inchangé lorsque son origine se déplace sur une droite verticale, alors il est associé à une équation différentielle qui dépend uniquement de la variable  $x$  (des arguments du type VAR-ED). Ces connaissances permettent de retenir comme équations possibles associées au *Vecteur 1*, les équations E1 et E5.

Pour les deux équations E1 et E5, le vecteur dynamique associé aura toujours une direction positive. Donc, il faut identifier celle qui correspond au *Vecteur 1*. L'exploration peut faire remarquer que lorsque le *Vecteur 1* se déplace de manière à ce que les valeurs des abscisses de l'origine du vecteur soient grandes en valeur absolue, le vecteur devient presque horizontal. L'identification de ce constat graphique et la mise en fonctionnement des connaissances C13 (limites des fonctions quand on connaît certaines conditions sur la dérivée), peut conduire à la conclusion que l'équation différentielle  $y' = f(x)$  associée au

Vecteur 1, satisfait  $f(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \pm\infty$ . Ce qui permettrait donc de choisir l'équation différentielle E5 comme celle qui correspond au Vecteur 1.

**Vecteur 2 – équation différentielle**  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$

Le déplacement du Vecteur 2 peut permettre de remarquer que lorsqu'on déplace son origine sur des droites parallèles aux axes, le vecteur change (des arguments du type VAR-ED). La mise en œuvre des connaissances C17 peut conduire à conclure que le Vecteur 2 n'est pas associé à une équation différentielle qui dépend seulement de  $x$  ou de  $y$ , par conséquent le Vecteur 2 est associé à une équation différentielle de la forme  $y' = f(x, y)$ . Ce qui implique que les équations E2, E4, E7 et E8 sont candidates pour être associées au vecteur.

Par ailleurs, l'exploration peut amener à identifier certaines propriétés graphiques du vecteur dynamique lorsque son origine s'approche de la droite  $y=x$ , telles que : il y a un changement brusque de direction ; si l'on arrive à placer l'origine du vecteur sur la droite, il disparaît ; la direction du vecteur est toujours positive au-dessus de la droite et négative en dessous. La mise en œuvre des arguments du type DISC (mise en relation graphique et symbolique des discontinuités) peut permettre d'identifier la droite  $y=x$  comme l'ensemble de points de discontinuité de la fonction  $f(x, y)$ . Comme la seule équation différentielle où la fonction  $f(x, y)$  est discontinue sur la droite  $y=x$ , est E4, alors le Vecteur 2 est associé à l'équation E4.

**Vecteur 3 – équation différentielle**  $y' = n(y - x^2)(x + y)$

De la même manière que pour le Vecteur 2, nous considérons que le déplacement du Vecteur 3 et la mise en fonctionnement des connaissances C17 (lien entre les variations du vecteur dynamique et les variables intervenant dans l'équation différentielle), peuvent conduire à conclure que le vecteur 3 est associé à une équation différentielle de la forme  $y' = f(x, y)$  (arguments du type VAR-ED). Donc, les équations pouvant être associées à ce vecteur sont : E2, E4, E7 et E8.

Nous considérons aussi que l'exploration à l'aide du vecteur dynamique peut permettre d'identifier les courbes d'équation  $y=x^2$  et  $y=-x$  comme les lieux géométriques de l'isocline zéro (arguments du type ISC-0). Comme l'équation E8 est la seule qui ait ces isoclines, alors le Vecteur 3 est associé à l'équation différentielle  $y' = n(y - x^2)(x + y)$ .

**Vecteur 4 – équation différentielle**  $y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}$

De la même manière que les Vecteurs 2 et 3, le déplacement du Vecteur 4 peut permettre de remarquer qu'il est associé à une équation différentielle de la forme  $y' = f(x, y)$  (des arguments du type VAR-ED). Ce qui implique que les équations E2, E4, E7 et E8 sont candidates pour être associées au Vecteur 4.

Pour choisir l'équation différentielle parmi les quatre équations possibles, nous identifions deux stratégies possibles :

- la première liée à la formulation d'arguments du type DISC, où pour ce cas particulier il s'agit de reconnaître la discontinuité de la fonction  $f(x, y)$  sur les droites  $x = \pm 2$ . Comme l'équation E7 est la seule qui a ces discontinuités, alors elle est associée au Vecteur 4 ;

- la deuxième stratégie s'appuie sur l'identification de l'isocline zéro (des arguments du type ISC-0). La reconnaissance de la droite  $y=x$  comme l'isocline zéro peut permettre d'identifier que la seule équation qui possède cette isocline est E7, alors elle est associée au *Vecteur 4*.

# **PARTIE B**

## **Les expérimentations**

**CHAPITRE 3 : L'EXPERIMENTATION 2003**

**CHAPITRE 4 : L'EXPERIMENTATION 2004**



## CHAPITRE 3

### L'EXPERIMENTATION 2003

LA MISE EN PLACE DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL .....	104
3.1. LE QUESTIONNAIRE INITIAL .....	106
3.1.1. Première partie du questionnaire .....	107
3.1.2. Deuxième partie du questionnaire .....	110
3.1.3. Troisième partie du questionnaire .....	116
3.1.4. Quatrième partie du questionnaire .....	119
3.2. ETUDE DESCRIPTIVE DES COURBES SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $y'=\frac{y^2-1}{x^2+1}$ .....	123
3.2.1. Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y'=\frac{y^2-1}{x^2+1}$ en papier/crayon.....	123
3.2.2. Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y'=\frac{y^2-1}{x^2+1}$ en géométrie dynamique.....	137
3.3. MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE D'UNE FAMILLE D'EXPONENTIELLES EN GEOMETRIE DYNAMIQUE.....	156
3.3.3. Le travail de l'ensemble de binômes .....	157
3.3.4. La recherche de l'équation différentielle des exponentielles par les binômes choisis .....	160
3.3.5. La justification de l'équation différentielle par les binômes choisis.....	178
3.4. MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE D'UNE FAMILLE DE TRACTRICES EN GEOMETRIE DYNAMIQUE.....	186
3.4.6. Première phase : une première rencontre avec les tractrices .....	187
3.4.7. Deuxième phase : le retour à la famille d'exponentielles.....	188
3.4.8. Troisième phase : le retour à la famille de tractrices (ensemble des binômes) .	193
3.4.9. Troisième phase : retour à la famille de tractrices (binômes choisis).....	196



## La mise en place du dispositif expérimental

La partie expérimentale de notre recherche a été conduite pendant les années 2003 et 2004 à l'IUFM de Grenoble, sur les sites de Grenoble et de Chambéry.

Dans ce chapitre, nous présentons l'analyse *a posteriori* de la mise en place du dispositif conçu pour l'année 2003.

La première expérimentation s'est déroulée en novembre 2003 avec trois groupes d'étudiants préparant le CAPES (un groupe à Chambéry et deux à Grenoble). Cinquante-six étudiants ont participé à l'expérimentation. Sur le questionnaire initial et les trois situations qui composent le dispositif expérimental, le travail a été conduit pendant deux séances de trois heures chacune.

Le déroulement des activités dans les trois groupes a été le même :

- la première séance a débuté avec le questionnaire, et il a été proposé de manière individuelle. Après le questionnaire, le professeur a présenté une brève introduction sur les équations différentielles basées sur la définition d'équation différentielle de premier ordre et la définition des solutions ; et sur les notions de champ de tangentes et d'isoclines. Ensuite, il a été proposé de réaliser, par binômes, la première partie de la première situation, travaillée en papier/crayon. La séance a été conclue par une introduction du professeur relative au logiciel Cabri Géomètre II Plus ;
- la deuxième séance a commencé par le bilan effectué par le professeur du questionnaire initial. Après ce bilan, la deuxième partie de la première situation a été proposée. Elle a été travaillée par binômes, avec un seul ordinateur. A la fin du travail des étudiants, le professeur a dressé le bilan de la première situation (les deux parties). Ensuite, il a été proposé aux binômes la mise en équation différentielle de la famille d'exponentielles en géométrie dynamique. A la suite a été proposée immédiatement la mise en équation différentielle de la famille de tractrices. Cette séance s'est terminée avec le bilan, par le professeur, de ces deux dernières situations.

Nous avons enregistré les échanges des étudiants lors du travail par binômes. Les dialogues de trois binômes, choisis au hasard parmi les vingt-huit formés (des trois groupes) ont été transcrits et constituent les protocoles donnés en document annexe. Nous supposons que même si les trois binômes n'appartiennent pas au même groupe, ils ne sont pas très différents globalement.

Notre analyse est basée sur les échanges des étudiants ainsi que sur leurs productions écrites. Sauf pour le questionnaire initial où est pris en compte l'ensemble des étudiants, l'analyse *a posteriori* sera centrée sur le travail des trois binômes choisis.

Lors de l'analyse *a priori*, nous avons explicité les connaissances probables à faire fonctionner dans les diverses situations que nous avons conçues. Cette analyse a été explicitée au chapitre 2 et elle a guidé l'analyse *a posteriori*. Nos analyses portent sur la mise en relation

entre représentants d'objets du champ des équations différentielles, du point de vue des connaissances en jeu. Lors de l'analyse *a posteriori* nous identifions la mise en œuvre de ces connaissances, ou bien nous essayons d'explicitier celles que les étudiants ont fait fonctionner. Dans certains cas, la répétition de raisonnements ou de procédés nous a conduits à formuler les connaissances mises en œuvre sous la forme de théorèmes en acte (Vergnaud, 1990).

Rappelons les connaissances que nous avons explicitées lors de l'analyse *a priori* du dispositif expérimental :

*C1 : « l'équation d'une famille de droites parallèles, ayant « a » comme coefficient directeur, est de la forme «  $y=ax+C$  » où C est un nombre réel quelconque »*

*C2 : « si l'on connaît l'expression symbolique  $h(x,y,k)=0$  d'une famille de courbes, en dérivant une fois cette expression par rapport à la variable x et dans le cas où on peut éliminer k, il est possible de trouver l'équation différentielle  $f(x,y,y')=0$  de la famille de courbes »*

*C3 : « soit  $\Gamma_P$  la courbe représentative d'une fonction numérique continue et différentiable f qui passe par un point  $P(x_P, y_P)$ , la pente de la droite tangente à  $\Gamma_P$  en P est donnée par  $f'(x_P)$  »*

*C4 : « une fonction affine admet en tout point une dérivée constante »*

*C5 : « pour une équation différentielle  $y'=f(x,y)$ , où f est une fonction numérique en  $\mathcal{R}^2$ , si  $f(x_P, y_P) > 0$  (resp.  $f(x_P, y_P) < 0$ ), alors la courbe solution  $\Gamma_P$  qui passe par  $(x_P, y_P)$  est une courbe représentative d'une fonction croissante (resp. décroissante) »*

*C6 : « soit une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , la fonction f donne en chaque point  $P(x,y)$ , la pente de la droite tangente à la courbe solution passant par P »*

*C7 : « la courbe représentative d'une fonction numérique, continue et différentiable f peut être approchée au voisinage d'un point P par sa tangente en P »*

*C8 : « l'équation de la droite tangente dans un point  $P(x_P, y_P)$  d'une courbe  $\Gamma_P$ , représentative d'une fonction continue et différentiable f, peut être exprimée sous la forme  $y-y_P=f'(x_P)(x-x_P)$  »*

*C9 : « si une courbe solution passe par un point Q de la grille qui supporte le champ de tangentes, alors la courbe est tangente au segment centré en Q »*

*C10 : « soit f une numérique continue définie sur  $]a, +\infty[$ , si f est décroissante et minorée (resp. croissante et majorée) sur  $]a, +\infty[$ , alors f a une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$  »*

C11 : « une solution d'une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$  est une fonction dérivable  $y$  d'une variable réelle, telle que  $y'(x)=f(x,y(x))$  »

C12 : « la courbe  $\Gamma_i$  des points d'inflexion d'une famille de solutions d'une équation différentielle, est composée des points où les pentes des courbes solutions passent par un extremum. Pour une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , ces points font partie de l'ensemble des couples  $(x,y)$  satisfaisant à  $f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)=0$  »

C13 : « soit  $x \rightarrow y(x)$  définie sur  $]a, +\infty[$ , dérivable. Si  $y'(x) \rightarrow \alpha$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors :

Si  $\alpha > 0$  (éventuellement  $\alpha = +\infty$ ),  $y(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$

Si  $\alpha < 0$  (éventuellement  $\alpha = -\infty$ ),  $y(x) \rightarrow -\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$

Si  $\alpha = 0$ , on ne peut rien dire a priori »

C14 : « une famille de courbes de forme exponentielle peut être exprimée dans le registre symbolique par une expression de la forme  $y=Ce^x$  »

C15 : « si  $\Gamma_P$  est la courbe représentative d'une solution croissante (resp. décroissante) en  $P(x_P, y_P)$  d'une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , alors  $f(x_P, y_P) > 0$  (resp.  $f(x_P, y_P) < 0$ ) »

C16 : « si  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  sont deux points distincts quelconques d'une droite  $\mathcal{D}$ , alors  $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$  est la pente de la droite  $\mathcal{D}$  »

L'analyse *a posteriori* est globalement structurée de la façon suivante : pour chaque situation, nous présentons les événements les plus marquants dans la démarche des étudiants et interprétons leurs difficultés d'un point de vue conceptuel. Nous analysons aussi le rôle joué par le logiciel.

Pour l'analyse du questionnaire initial, nous avons numéroté les étudiants de E1 à E56. Nous avons construit des tableaux présentant de façon globale leurs réponses, et dans ces tableaux nous avons regroupé les réponses en différents types, chaque type comportant un même contenu. Pour simplifier, nous remplaçons parfois les expressions « équation différentielle » ou « équations différentielles » par l'abréviation « ED ».

En ce qui concerne l'analyse des trois autres situations, nous avons choisi les binômes: E22/E23, E3/E4 et E1/E2.

### 3.1. LE QUESTIONNAIRE INITIAL

Rappelons que le questionnaire initial vise à obtenir un aperçu global des connaissances des étudiants de CAPES sur les équations différentielles. Il a aussi pour but d'étudier la capacité de ces étudiants d'établir spontanément des liens entre différents représentants d'objets du domaine d'étude.

Afin de faciliter la lecture de l'*analyse a posteriori* du questionnaire initial, nous l'avons divisé suivant les quatre parties composantes.

### 3.1.1. Première partie du questionnaire initial

La première partie du questionnaire sollicite l'avis des étudiants sur des notions générales relatives aux équations différentielles. Nous avons proposé les questions suivantes :

1) Vos idées nous intéressent !
a) A votre avis, qu'est-ce qu'une équation différentielle? Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle? A quoi sert une équation différentielle?
b) Donnez trois exemples d'équations différentielles.
c) Quels sont les différents moyens d'exprimer ou de représenter les solutions d'une équation différentielle?

Nous présentons d'abord, pour chaque question, des tableaux qui contiennent les réponses de l'ensemble des étudiants. Dans ces tableaux, en colonne « commentaires » nous donnons parfois quelques réponses des étudiants.

#### Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Le Tableau 1 ci-dessous présente de façon générale les réponses de l'ensemble des étudiants concernant leur définition d'une équation différentielle :

Type de réponse	Effectif	Commentaire
Sans réponse	6/56	
Equation faisant intervenir une fonction et ses dérivées	29/56	17 réponses discursives 13 réponses symboliques/discursives (ED sous la forme $f(x,y,y',\dots,y^{(n)})=0$ ) : 6 réponses dont l'une d'ordre un, et une d'ordre deux ED linéaire : 7 réponses, dont 3 d'ordre n et 4 d'ordre deux)
Equation dont l'inconnue est une fonction	9/56	E11, E13, E23(De), E26, E29, E38, E39, E40 : réponse discursive E53 : « une ED est une équation où l'inconnue est une fonction et ses dérivées »
Un outil en physique	4/56	E16, E17, E44, E50 : réponse discursive
Equation qui fait intervenir des dérivées	5/56	E7, E24, E25, E42, E46 : réponse discursive
Réponses isolées	3/56	E27 : « équation dépendant d'un paramètre » E55 : « équation où la variable apparaît plusieurs fois avec différents ordres de dérivation et/ou de degrés » E33 : « équation ayant pour variable une application, et dans laquelle intervient la différentielle de cette application »

Tableau 1 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur la définition d'une équation différentielle

Les réponses fournies par l'ensemble montrent qu'un peu plus de la moitié des étudiants (29 sur 56) considèrent une équation différentielle comme une équation comportant une fonction et ses dérivées. Parmi ces étudiants, plus de la moitié (17 sur 29) utilisent le seul registre discursif pour exprimer ce qu'est une équation différentielle, et le reste (13 sur 29) utilise les registres symbolique et discursif pour exprimer ses réponses, celles-ci gardant une certaine proximité avec les définitions classiques des équations différentielles.

Il est également important de remarquer qu'une partie significative des étudiants (27 sur 56) ne se souvient pas de ce qu'est une équation différentielle, ou bien leurs souvenirs apparaissent très vagues.

**Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle ?**

Type de réponse	Effectif	Commentaire
Sans réponse	17/56	
Réponses faisant intervenir des fonctions	37/56	9 réponses : une fonction qui vérifie l'équation 11 réponses : une fonction 13 réponses : une famille de fonctions E4, E6, E36 : une fonction qui vérifie l'ED avec une condition initiale
Réponses isolées	2/56	E25 : « une courbe » E50 : « une évolution du paramètre physique en fonction du temps »

Tableau 2 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur la définition de la solution d'une équation différentielle

Les réponses des étudiants (tableau 2, ci-dessus) montrent que la plupart d'entre eux (37 sur 56) identifient les solutions d'une équation différentielle avec les fonctions. Comme nous l'avons prévu, le fait d'avoir posé la question concernant la solution de l'équation (le mot « solution » a été employé au singulier), permet d'identifier certaines nuances dans les réponses, et parmi ces étudiants l'on en trouve seulement 13 qui considèrent que les solutions d'une équation différentielle constituent une famille de fonctions.

Une partie importante des étudiants (17 sur 56) ne donnent pas de réponse. Etant donné le niveau des étudiants, nous pouvons supposer que ceux qui appartiennent à ce groupe seraient capables de résoudre des équations différentielles avec des méthodes algébriques mais qu'en tous cas, ils ne peuvent pas expliquer ce qu'est une solution.

**A quoi sert une équation différentielle ?**

Le tableau 3 ci-dessous montre de façon globale les réponses des étudiants concernant l'utilité des équations différentielles :

Type de réponse	Effectif	Commentaire
Sans réponse	10/56	
Pour modéliser des phénomènes de la physique	41/56	
En mathématiques	3/56	E23 : « pour déterminer une fonction en fonction de ses dérivées » E35 : « en math elles permettent d'étudier une fonction sans forcément connaître son écriture analytique » E48 : « peut permettre de caractériser certaines fonctions, exemple $y' = y$ pour l'exponentielle »
Pour modéliser des populations	2/56	

Tableau 3 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur l'utilité des équations différentielles

Nous remarquons que la plupart des étudiants (43 sur 56) savent que les équations différentielles peuvent servir d'outils pour modéliser des phénomènes divers, notamment des phénomènes de physique. Sur les 3 étudiants qui considèrent qu'elles sont utiles en mathématiques, 2 seulement les voient comme des outils symboliques liés aux fonctions.

**Exemples d'équations différentielles**

Le tableau 4 ci-dessous montre les exemples d'équations différentielles donnés par l'ensemble des étudiants. Ayant demandé trois exemples, nous trouvons des réponses de différents types :

<i>Type de réponse</i>	<i>Effectif</i>	<i>Commentaires</i>
Equations différentielles linéaires	54/56	39 réponses fournissent seulement des exemples d'ED linéaires 15 réponses donnent des ED linéaires et d'autres types
Equations différentielles non linéaires	7/56	E5, E7, E8, E9, E10, E12, E22
Equations aux dérivées partielles	2/56	E41, E50
Systèmes d'équations différentielles linéaires	3/56	E5, E52, E53
Expression : $y'=f(x,y)$	3/56	E14, E25, E33
Réponses isolées	2/56	E39 : « $\sin(x) y = 1$ » E43 : « $8 \cos t - 7 \sin t = 4$ »

Tableau 4 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur des exemples d'équations différentielles

Comme nous nous y attendions, la quasi-totalité des étudiants (54 sur 56) ont donné des exemples d'équations différentielles linéaires. Parmi ces étudiants, une partie importante (39 sur 54) a fourni comme exemples seulement des équations linéaires. Seuls, 2 étudiants (E41 et E50) donnent comme exemples des équations aux dérivées partielles.

**Différentes manières d'exprimer ou de représenter les solutions**

Nous présentons dans le tableau 5, en page suivante, les réponses des étudiants concernant les différentes manières de représenter les solutions d'une équation différentielle :

Type de réponse	Effectif	Commentaire
Sans réponse	10/56	E2(Ro), E10, E14, E20, E23(De), E29, E33, E35, E44, E54
Un seul registre (symbolique)	15/56	E7, E11, E36, E39, E43, E45, E48, E51, E55 : résolution de l'ED et explicitation de la fonction solution E52, E53 : représentation des solutions à l'aide d'une matrice E8, E9, E25, E56 : liste de méthodes de résolution algébrique
Deux registres (symbolique et graphique)	18/56	E4, E5, E6, E16, E17, E22(Ce), E26, E27, E28, E31, E32, E37, E40, E42, E49, E50 : résolution de l'ED et tracé de courbes représentatives des solutions E15, E38 : résolution de l'ED et tracé d'un champ de vecteurs
Un seul registre (graphique)	5/56	E12, E46 : représentation graphique (sans spécifier) E34, E39, E41 : représentation par champ de vecteurs
Un seul registre (numérique)	1/56	E31 : résolution numérique de l'ED
Deux registres (symbolique et numérique)	1/56	E13 : « <i>représentation analytique des solutions si possible, sinon résolution numérique</i> »
Trois registres (symbolique, graphique et numérique)	1/56	E1 : « <i>représentation d'une ED par les courbes intégrales. Expression par une équation fonctionnelle ou par une équation numérique</i> »
Réponses isolées	5/56	E18 : « <i>résolution de l'ED en utilisant Matlab</i> » E21 : « <i>comparaison avec le 2<sup>nd</sup> membre de l'ED</i> » E3 : « <i>pour une ED homogène, représentation par une famille de courbes ; pour une ED avec 2<sup>nd</sup> membre, représentation par une courbe</i> » E19 : « <i>résolution graphique, résolution informatique, résolution mathématique</i> » E47 : « <i>calcul du wronskien et tracé de courbes représentatives des solutions</i> »

Tableau 5 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur les différentes manières de représenter les solutions d'une équation différentielle

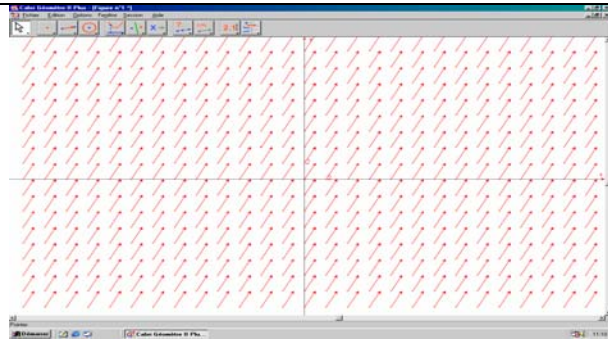
Les réponses montrent de façon générale que la plupart (33 sur 56) des étudiants privilégient le registre symbolique pour représenter les solutions d'une équation différentielle. Dans ce groupe, 15 étudiants considèrent le registre symbolique comme le seul moyen d'exprimer les solutions, tandis que 18 font le lien avec le registre graphique mais dans ce cas, ils font d'abord intervenir le registre symbolique pour trouver l'expression explicite des solutions. Nous remarquons ici l'usage du graphique dans un mode idéogrammatique, utilisé seulement pour exprimer les courbes solutions, une fois qu'elles sont connues dans le registre symbolique.

A partir des réponses fournies, nous percevons une quasi-absence de lien entre les solutions d'une équation différentielle et le registre numérique. Nous trouvons deux réponses (E13 et E31) qui explicitent le recours à ce registre, et deux réponses (E18 et E19) qui implicitement font le lien des solutions avec le registre numérique.

### 3.1.2. Deuxième partie du questionnaire

Dans la troisième partie du questionnaire, l'enjeu est de réaliser le passage du registre graphique des solutions vers le registre symbolique des équations différentielles :

Le champ de vecteurs ci-dessous représente une fonction vectorielle qui à chaque point (x,y) du plan associe un vecteur de coordonnées (1,2)



- a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin? Justifiez votre réponse.
- b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?
- c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

Le Tableau 6 ci-dessous donne un aperçu global des réponses de l'ensemble des étudiants concernant la possibilité d'associer une équation différentielle au champ de vecteurs donné :

Type de réponse	Effectif	Commentaires
Sans réponse	30/56	
Réponses affirmatives sans donner d'arguments ni d'ED	15/56	E6, E8, E9, E24, E26, E27, E36, E37, E42, E43, E46, E47, E49, E54, E55
Réponses affirmatives donnant une ED incorrecte	5/56	E32, E34, E41, E48, E50 (les ED sont montrées dans les figures 1, 2, 3, 4 et 5 ci-dessous)
Réponses affirmatives donnant l'ED $y'=2$	2/56	E1 : « $\frac{dy}{dx} = 2$ , ici $f'(x)=2$ est l'ED associée au dessin » E19 : « $\frac{dy}{dx} = \frac{+2}{1} = 2 \Rightarrow y'=2$ , oui, car on a un vecteur constant représenté »
Réponses isolées	4/56	E3 : « pour associer une ED, on le fait avec les isoclines » ; E4 : « le dessin est un champ de vecteurs ». E39 : « oui, mais laquelle ? $f : M \rightarrow M'$ $\vec{f} : M \rightarrow \overline{MM'}$ tq si $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $M' \begin{pmatrix} x+1 \\ y+2 \end{pmatrix}$ » (E39 se limite à exprimer les coordonnées des extrémités des vecteurs) E52 : « le vecteur (1,2) peut être considéré comme une dérivée ».

Tableau 6 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur la possibilité d'associer une équation différentielle au champ de vecteurs donné

Le Tableau 7 suivant présente les réponses des étudiants donnant leur avis sur les solutions de l'équation différentielle associée au dessin fourni :



Type de réponse	Effectif	Commentaires
Sans réponse	41/56	
Réponses qui font intervenir des droites	6/56	E1 : « <i>Solution générale : <math>y=2x + cste</math> » E6 : « <i>les solutions sont monotones (vecteurs tangents constants). Solutions : <math>y = 2x + cste, cste \in \mathcal{R}</math> » E8 : « <i>les solutions sont des droites, <math>y=2x + k, k \in \mathcal{R}</math> » E9 : « <i>les solutions de l'ED seraient des droites de vecteur directeur (1,2), <math>y=2x + k, k \in \mathcal{R}</math> » E21 : « <i>si c'est le cas, les solutions de l'ED sont des droites parallèles » E48 : « <i>les solutions de l'ED sont des fonctions affines, car représentées par des droites »</i></i></i></i></i></i>
Les solutions sont constantes	3/56	E34 : « <i>les solutions sont constantes » E41 : « <i>elles sont toutes égales, dans le sens où à chaque point (x,y), le même vecteur solution est associé » E42 : « <i>elles doivent être constantes ou proportionnelles (comme on a le même vecteur à chaque fois »</i></i></i>
Les solutions sont croissantes	2/56	E3, E6
Il y a une infinité de solutions	3/56	E19, E27, E36
Réponses isolées	1/56	E32 : « <i>f la fonction représentative du dessin est une solution particulière de l'ED »</i>

Tableau 7 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur les solutions de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs donné

Le Tableau 8 ci-dessous donne un aperçu global des réponses des étudiants, sur l'expression symbolique de l'équation différentielle qui correspond au champ de vecteurs donné :

Type de réponse	Effectif	Commentaires
Sans réponse	48/56	
Réponses avec des ED incorrectes	5/56	E32 : $y'=0$ avec $y : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ E34 : $\begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = 2y(t) \end{cases}$ ; E41 : $\frac{df}{dxdy} = 0$ , $\frac{df(x, y, t)}{dxdy}$ ; E48 : $y'=2y$ ; E50 : $y'=1/2$
Réponses avec l'ED correcte	2/56	E1 : $y' = 2$ ; E19 : « <i><math>y' = 2</math>, car on a un vecteur constant représenté »</i>

Tableau 8 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur l'expression symbolique de l'équation différentielle associée au champ de vecteurs donné

Les réponses des étudiants montrent que la plupart d'entre eux (plus de 30 sur 56) ne trouvent pas de lien entre le champ de vecteurs fourni et les équations différentielles. On peut dire que dans le cas particulier que nous leur avons proposé, les étudiants n'arrivent pas à faire

fonctionner le jeu global/local, pour en tirer des informations relatives aux courbes solutions et à l'équation différentielle concernée. Nous supposons que les connaissances C9 qui permettent de considérer une courbe solution comme tangente à chaque vecteur du champ qu'elle touche, ne sont pas disponibles chez ces étudiants. Il est possible aussi que l'énoncé du problème posé n'ait pas été suffisamment clair, ou que la question ait été déstabilisante pour les étudiants.

Parmi les 23 étudiants qui ont considéré la possibilité d'associer une équation différentielle au champ de vecteurs, 15 ont répondu de façon affirmative mais sans fournir l'équation (problème de contrat), et seulement 7 ont essayé de donner une expression symbolique, dont 2 ont réussi (E1 et E19) à exprimer l'équation différentielle  $y'=2$  attendue. Pour arriver à cette équation différentielle, les étudiants E1 et E19 interprètent la pente des vecteurs en termes de dérivée. Cela est effectué en faisant fonctionner les connaissances C3, ces connaissances permettant d'associer à la pente de la droite tangente en un point P d'une courbe, la valeur de la dérivée en ce point. Pourtant, l'étudiant E19 ne semble pas faire le lien entre les courbes solutions de l'équation différentielle et la famille de droites parallèles ; et il ne donne ni expression symbolique explicite de ces droites, ni description dans le registre discursif, et il se borne à dire que les solutions « *sont infinies* ».

Par rapport à la question sur les solutions de l'équation différentielle, sur les 56 étudiants, 6 seulement associent les solutions avec des droites. Nous trouvons que parmi ces 6 étudiants, 5 s'appuient sur les données tirées du champ de vecteurs pour faire le lien avec une famille de droites, et qu'ils arrivent à cette conclusion sans avoir réussi à obtenir l'équation différentielle. Concernant ces étudiants, nous pouvons identifier qu'ils ont fait deux types d'interaction entre les registres en jeu. D'abord, dans le registre graphique, ils ont réussi à faire les passages global/local pour conclure que le champ de vecteurs fourni rendait compte d'une famille de droites parallèles. Ensuite, pour les solutions ils ont établi des liens entre le registre graphique et le registre symbolique. Pour les passages entre ces registres (du graphique vers le symbolique), trois étudiants (E6, E8 et E9) semblent mobiliser les connaissances C1 (relatives à la représentation symbolique d'une famille de droites parallèles, dont on connaît le coefficient directeur) pour exprimer symboliquement la famille de solutions de l'équation différentielle. En ce qui concerne l'étudiant E1 qui a obtenu l'équation différentielle, il a fait le lien entre la famille de droites et l'expression symbolique, mettant en œuvre une stratégie de résolution algébrique de l'équation différentielle.

Pour avoir un aperçu des difficultés rencontrées par les étudiants dans ce type de tâche, nous analyserons brièvement les productions des étudiants E32 et E48, qui n'ont pas réussi à écrire correctement l'équation différentielle associée au représentant graphique donné.

L'étudiant E32

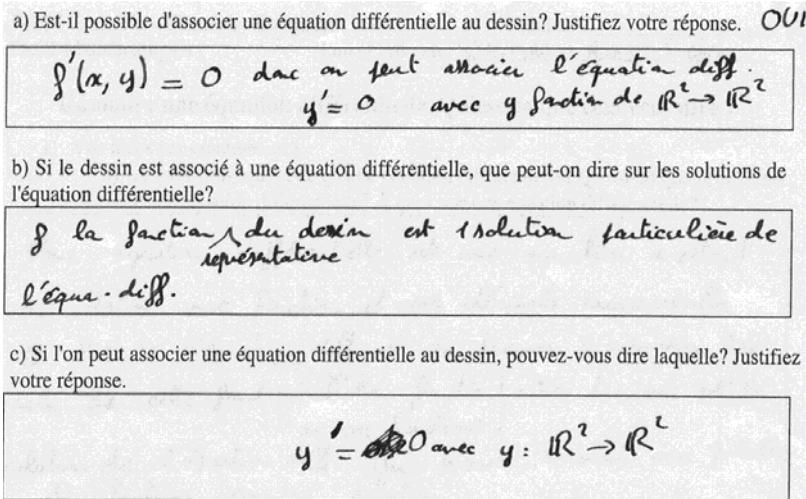


Fig. 1 : Réponses de l'étudiant E32 concernant l'association d'une équation différentielle à un champ de vecteurs

Cet étudiant conclut que l'équation différentielle associée au dessin est  $y'=0$ , où  $y$  est une fonction vectorielle à deux variables réelles. Pour lui, le fait que la fonction vectorielle soit constante entraîne donc que sa dérivée égale zéro. Nous remarquons que la réponse repose sur une adaptation inadéquate, pour ce cas particulier, des connaissances C2 (permettant de déduire, par dérivation, l'équation différentielle de la famille de courbes à partir d'une expression symbolique de celles-ci).

L'étudiant E32 considère que la fonction vectorielle fournie correspond à l'expression symbolique des solutions de l'équation différentielle, alors elle est traitée comme s'il s'agissait d'une fonction numérique d'une variable réelle. Il a fait fonctionner les connaissances C2 de façon automatique comme un moyen d'obtenir l'équation différentielle. Ce qui pourrait révéler un mode de pensée associatif.

Pour donner du sens à l'équation différentielle trouvée, l'étudiant E32 considère que le champ de vecteurs fourni est un représentant graphique d'une solution de l'équation différentielle. Il a écrit «*f la fonction représentative du dessin est une solution particulière de l'équation différentielle*». Cela veut dire que cet étudiant conceptualise les solutions de l'équation différentielle  $y'=0$  comme des fonctions vectorielles constantes. Nous pouvons supposer que pour lui, ces solutions pourraient être représentées dans le registre graphique, par des champs de vecteurs parallèles.

## L'étudiant E48

a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin? Justifiez votre réponse.

Il est possible d'associer une équation différentielle au dessin car le dessin permet d'entrevoir des droites parallèles de vecteur directeur  $(1, 2)$  qui seraient solutions de l'équation associée.

b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?

Les solutions de l'équation différentielle sont des fonctions affines car représentées par des droites.

c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

$y' = 2y$  où 2 est le coefficient directeur des droites-solutions

Fig. 4 : Réponses de l'étudiant E48 concernant l'association d'une équation différentielle à un champ de vecteurs

La première réponse montre que l'étudiant considère la possibilité d'associer au dessin une équation différentielle, en reconnaissant que le dessin rend visible une famille de droites parallèles. Ce lien entre le représentant graphique des solutions et le représentant symbolique de l'équation différentielle, semble s'appuyer sur la stratégie que nous avons prévue dans l'*analyse a priori*, où l'implication équation différentielle  $\Rightarrow$  courbes solutions, est valable (dans ce cas particulier) dans les deux sens (équation différentielle  $\Leftrightarrow$  courbes solutions).

L'étudiant E48 reconnaît que les solutions de l'équation différentielle sont des fonctions affines, mais il ne les représente pas dans le registre symbolique. L'expression symbolique des solutions pourrait le conduire jusqu'à l'équation différentielle recherchée, mettant en oeuvre les connaissances C2 (connaissances permettant de passer de l'expression symbolique des solutions à l'expression symbolique de l'équation différentielle). Pourtant, l'étudiant mobilise une autre stratégie pour arriver à l'équation différentielle.

L'étudiant E48 propose  $y' = 2y$  comme équation différentielle associée au dessin. Il ne donne pas de justification et n'essaie pas de la valider (par exemple, par une validation de type numérique). Nous remarquons que dans l'expression symbolique proposée, l'étudiant fait intervenir la variable  $y$  (la fonction inconnue) et que cet acte ne semble pas dû au hasard. En nous appuyant sur des réponses obtenues dans les autres situations, nous voyons que les étudiants tendent à supposer que dans des tâches de mise en équation, l'expression symbolique de l'équation différentielle doit contenir la fonction inconnue. Nous résumons cette stratégie sous la forme du théorème en acte :

« l'expression symbolique d'une équation différentielle inclut la fonction inconnue » (TA1).

### 3.1.3. Troisième partie du questionnaire

Dans cette partie, nous cherchons à étudier les liens que les étudiants établissent entre des données numériques associées à une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , et le registre graphique des solutions. Nous avons proposé la question suivante :

3) Soit  $y'=f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une courbe solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .

Nous donnons dans le tableau 9 suivant, un aperçu global des réponses de l'ensemble des étudiants à la tâche proposée :

Type de réponse	Effectif	Commentaires
Sans réponse	42/56	
Dessins acceptables	5/56	E8 dessine une courbe sans segment tangent, sans commentaire E9 dessine deux courbes avec un segment tangent, sans commentaire E20 dessine une courbe avec un segment tangent, il écrit « <i>équation de la tangente <math>y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)</math>, <math>y=-(x-3)-2</math>. Pente : -1 au point <math>(-2,3)</math></i> » E24 dessine une courbe avec un segment tangent, il écrit « <i><math>f(-2,3)=-1=y' \Rightarrow y=-x+k</math>, <math>k \in \mathbb{R}</math> or passe par <math>(-2,3) \Rightarrow y=-x+1</math>. La solution de l'équation sera tangente à cette droite au point <math>(-2,3)</math></i> » E25 dessine trois courbes avec un segment, sans commentaire
Dessin d'un seul segment de droite tangente de pente -1	2/56	E22 écrit « <i>en <math>(-2,3)</math> : <math>y'=-1</math>, <math>y</math> est sol. de l'ED du 1<sup>er</sup> ordre <math>\Rightarrow y=ce^{-a(x)}</math> où on a : <math>y'+a(x)y=0</math></i> » E31 écrit « <i>au voisinage de <math>(-2,3)</math> <math>y'=-1</math> donc <math>y</math> décroissante</i> »
Dessins incorrects	5/56	E5, E6, E7, E30, E34
Réponses isolées	2/56	E19 écrit « <i><math>y'=\frac{dy}{dx}=-1=f(-2,3)</math> tangente au point de pente -1</i> » E29 écrit « <i>une représentation par graphe</i> »

Tableau 9 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur l'interprétation des données numériques pour un tracé local d'une courbe solution

Les réponses montrent que la quasi-totalité des étudiants n'arrivent pas à tirer d'informations des données fournies, qu'ils pourraient traduire en termes de solutions de l'équation différentielle. La question a été trop déstabilisante pour eux. De façon générale on peut dire que les connaissances C6 ne sont pas disponibles chez les étudiants, ces connaissances permettant de lier la pente des droites tangentes aux courbes solutions avec l'expression symbolique de l'équation différentielle.

Sur le nombre total d'étudiants, seule une très faible partie (14 sur 56) a essayé de répondre à la question. 5 de ces étudiants ont fourni des dessins que nous considérons comme acceptables. Parmi ces derniers, 3 font le tracé sans fournir de commentaire. Nous

considérons que ces 5 étudiants ont fait fonctionner les connaissances C6 pour établir un lien entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et la pente de la droite tangente, ainsi que les connaissances C5 pour interpréter le sens de variation d'une fonction à partir du signe de la dérivée. Les étudiants E20 et E24 explicitent leur procédure pour obtenir l'équation de la droite tangente, et nous remarquons qu'ils semblent faire les passages du registre symbolique au registre graphique, sans difficulté.

Les étudiants E22 et E31 ont tracé seulement un segment de droite tangente. La mise en fonctionnement des connaissances C6 leur permet de connaître la pente de la droite tangente à partir de l'expression de l'équation différentielle. Le tracé d'un segment tangent atteste que les étudiants arrivent à établir un lien entre le registre numérique et le registre graphique, mais qu'ils ont des difficultés pour mettre en œuvre les connaissances adéquates permettant d'articuler ces registres :

- l'étudiant E22 suppose que le problème proposé concerne l'équation différentielle  $y' + a(x)y = 0$ . Cette réponse montre que pour l'étudiant, une équation différentielle de la forme  $y' = f(x, y)$  ne représente qu'une équation différentielle linéaire de premier ordre homogène (second membre égal à zéro) ;
- l'étudiant E31 met en œuvre les connaissances C5 pour interpréter le sens de variation des solutions à partir du signe de la dérivée, et pourtant il n'arrive pas à les traduire dans le registre graphique. Il sait que les solutions sont décroissantes et que la droite tangente a comme pente -1, mais il n'arrive pas à tracer des courbes solutions. Nous supposons que cette difficulté de l'étudiant est liée à l'absence d'expression symbolique pour les solutions.

Pour avoir un aperçu des difficultés rencontrées, nous analyserons brièvement les courbes tracées par 3 des étudiants (E5, E6 et E7) qui ont fourni des dessins que nous considérons comme incorrects :

### L'étudiant E5

3) Soit  $y' = f(x, y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2, 3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2, 3)$ .

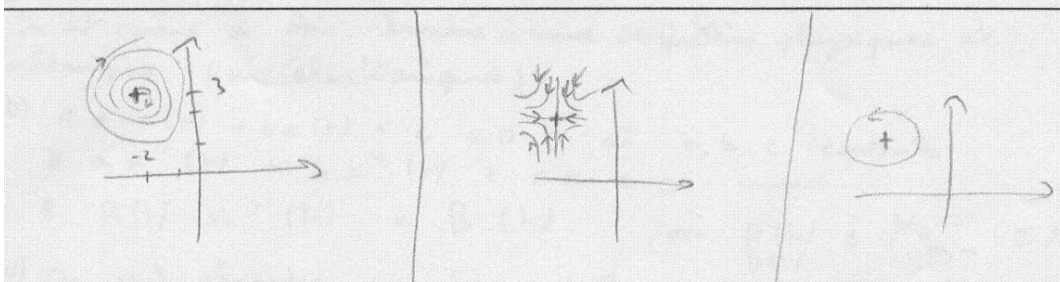


Fig. 6 : Réponses de l'étudiant E5 sur l'interprétation des données numériques pour un tracé local d'une courbe solution

L'étudiant E5 trace trois types de courbes, qui semblent des trajectoires de solutions d'un système différentiel linéaire à coefficients constants. Cela veut dire qu'il essaie d'adapter des connaissances sur les systèmes différentiels linéaires aux équations différentielles du premier ordre. Il néglige l'information  $f(-2, 3) = -1$  et il se borne à interpréter le point  $(-2, 3)$  comme un

point d'équilibre. Par rapport aux différentes configurations que E5 fournit, nous identifions que dans le premier cas, le point  $(-2,3)$  est pris comme un foyer répulsif ; dans le deuxième cas, le point  $(-2,3)$  est considéré comme un col, et dans le dernier cas, le point  $(-2,3)$  est considéré comme un centre.

Nous remarquons que dans ce cas, ce sont les connaissances antérieures de l'étudiant qui font obstacle à la compréhension de la situation proposée.

**L'étudiant E6**

3) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .

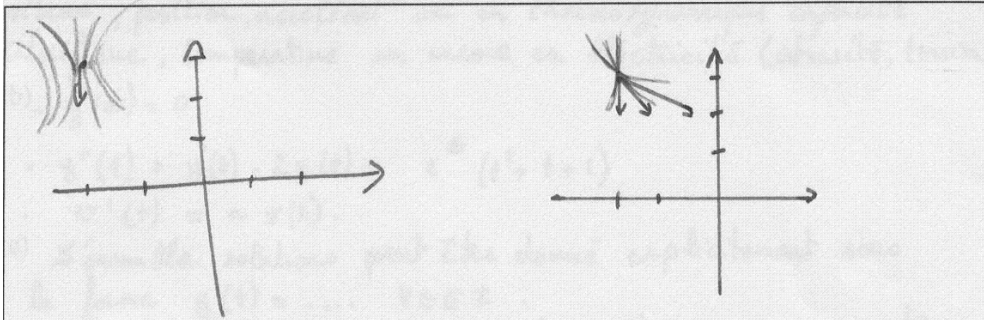


Fig. 7 : Réponses de l'étudiant E6 sur l'interprétation des données numériques pour un tracé local d'une courbe solution

Les deux types de courbes que l'étudiant E6 trace, semblent montrer qu'elles ont un lien avec des vecteurs tangents ayant pour origine le point  $(-2, 3)$ . Les courbes du premier ensemble semblent avoir le même vecteur tangent. Le vecteur tracé a l'air vertical, et il semble avoir son origine au point  $(-2, 3)$ . Les coordonnées du vecteur semblent être  $(0, -1)$ . Nous remarquons que la valeur  $-1$  de la fonction  $f$  est interprétée comme la deuxième coordonnée du vecteur.

Nous retrouvons aussi cette interprétation de la valeur de  $f$  lors du tracé du deuxième ensemble de courbes. Les trois courbes tracées ont chacune un vecteur tangent au point  $(-2,3)$ . Nous remarquons que les trois vecteurs semblent avoir tous la même seconde coordonnée égale à  $-1$ .

**L'étudiant E7**

3) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .

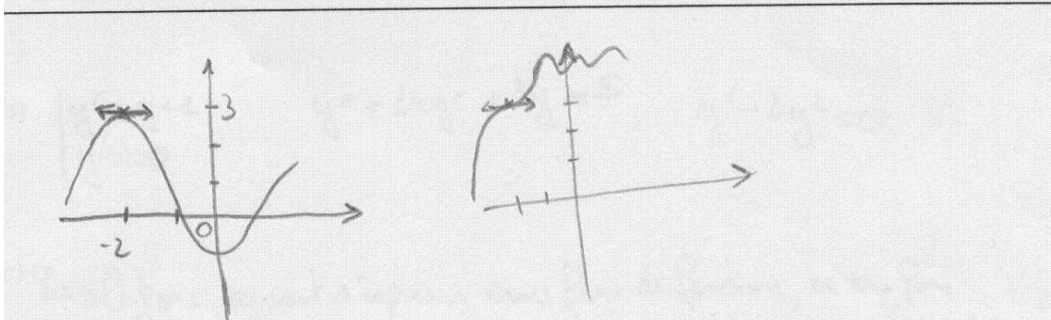


Fig. 8 : Réponses de l'étudiant E7 sur l'interprétation des données numériques pour un tracé local d'une solution

Pour l'étudiant E7, la question posée concerne le cadre de l'analyse, et pour lui il s'agit de trouver des courbes représentatives des fonctions dont la dérivée au point  $P(-2, 3)$  soit égale à zéro. Il n'interprète pas  $f(-2, 3) = -1$  en termes de la dérivée d'une solution, mais en termes de valeurs d'une certaine fonction numérique  $y$  d'une variable réelle. Nous faisons l'hypothèse que l'étudiant considère localement la fonction  $y$  comme constante, et cette conclusion pourrait s'appuyer sur le fait qu'on s'intéresse à étudier les solutions au voisinage du point  $(-2, 3)$ . Donc, si la fonction  $y$  est considérée comme localement constante, alors sa dérivée est nulle. Par conséquent, selon l'interprétation de l'étudiant, la réponse à la question posée requiert le tracé de courbes représentatives de fonctions pour lesquelles  $y' = 0$  au voisinage du point  $(-2, 3)$ . Les deux courbes qu'il propose semblent satisfaire à cette propriété, la première ayant un maximum local en  $(-2, 3)$  et la deuxième un point d'inflexion en  $(-2, 3)$  avec première dérivée nulle.

#### 3.1.4. Quatrième partie du questionnaire

Dans la dernière partie du questionnaire, nous cherchons à savoir si les étudiants sont capables de tirer des informations sur le comportement d'une courbe solution, à partir de l'expression symbolique explicite d'une équation différentielle, ainsi que d'approcher numériquement l'ordonnée d'un point. La question posée aux étudiants a été :

4) On considère l'équation différentielle  $y' = y^2 - x$ . Si  $C$  est la courbe associée à la solution de l'équation qui passe par le point  $M(-2, 1)$ , décrire le comportement de  $C$  au voisinage du point  $M$ . Donner une valeur approchée de l'ordonnée du point  $N$  de  $C$  qui a comme abscisse  $x = -1,5$ .

Le Tableau 10, en page suivante, donne un aperçu général des réponses de l'ensemble des étudiants :



Type de réponse	Effectif	Commentaires
Sans réponse	43/56	E25 : trace seulement le point M
Essai de résolution algébrique de l'équation différentielle	6/56	E1, E18, E24, E25, E54 : résolution algébrique (fausse) incomplète E19 : résolution algébrique (fausse) complète, avec essai d'approcher l'ordonnée de N par substitution de la valeur de l'abscisse dans la solution
Description acceptable de la courbe (sans dessin ni valeur approchée de l'ordonnée de N)	2/56	E5 écrit : « au voisinage de M, $y^2-x>0 \Rightarrow y'>0$ donc y va être croissante au voisinage de M » E31 écrit : « $M(-2,1)$ , $x_M = -2$ , $y_M=1$ , $y_M^2-x_M=1+2=3=y' \geq 0$ dc C croissante en le voisinage. N $x=-1,5$ »
Dessin acceptable avec l'ordonnée approchée (sans commentaire et sans expliciter la procédure pour approcher l'ordonnée)	2/56	E8 trace une courbe avec un vecteur tangent d'origine M et il écrit « en M, $y'=1-(-2)=3$ ; $y_N=2.5$ » E9 trace une courbe avec un vecteur tangent d'origine M et il écrit « au point $M(-2,1)$ , on a $y'=y^2-x=3$ donc $N(-1,5 ; 2.5)$ »
Réponses isolées	3/56	E20 écrit : « $y'=1-2=-1$ , pente $-1$ » (sans dessin ni valeur approchée de l'ordonnée de N) E22 écrit : « M est solution de (E) donc $y_M'=(1)^2-(-2)=1+2=3$ » (sans dessin ni valeur approchée de l'ordonnée de N) E37 écrit : « $y_M' = 1-(-2)=3 \rightarrow C$ a pour pente $+3$ en $(-2,1)$ . Au voisinage de N, C a à peu près $+3$ pour pente dc $3=y^2+1.5 \Rightarrow y^2=1,5 \Rightarrow y^2=\pm\sqrt{1,5}$ . Après, il faut voir que C est croissante près de M et que $y_N=1$ dc $y \approx +\sqrt{1,5}$ » (sans dessin)

Tableau 10 : Réponses de l'ensemble des étudiants sur la description locale d'une courbe solution à partir de l'expression symbolique de l'équation différentielle

La plupart des étudiants (43 sur 56) ne répondent pas à la question. De façon générale on peut dire que les étudiants ne disposent pas des connaissances C6, ces connaissances permettant de lier l'expression symbolique de l'équation différentielle avec les pentes des droites tangentes. Une petite partie des étudiants (13 sur 56) essaie de répondre à la question. Parmi les étudiants, presque la moitié de ce groupe (6 sur 13) mobilisent une stratégie de résolution algébrique pour l'équation différentielle. Il semblerait que ces derniers considèrent que toute équation différentielle est résoluble par l'approche algébrique. Nous remarquons que deux étudiants seulement font intervenir le registre graphique.

Nous avons classifié les quatre réponses jugées acceptables, en deux types :

- le premier type (réponses des étudiants E5 et E31) contient seulement la description du comportement de la courbe en termes de sens de variation de la solution qu'elle représente. Cette description est faite dans le registre discursif et n'inclut ni dessin de la courbe, ni valeur approchée de l'ordonnée du point N.  
Ce type de réponse met en œuvre les connaissances C6 pour obtenir la pente de la droite tangente au point M, ainsi que les connaissances C5 pour interpréter le sens de variation de la solution à partir du signe de la dérivée. En revanche, l'absence de réponse de la valeur approchée de l'ordonnée de N témoigne de la non- disponibilité

des connaissances C7, ces connaissances permettant d'envisager l'approximation affine locale d'une courbe par sa droite tangente ;

- Le deuxième type de réponse acceptable (réponses des étudiants E8 et E9) contient le dessin d'une courbe représentative d'une fonction croissante ainsi que la valeur approchée de l'ordonnée du point N.

Ce type de réponse met en œuvre les connaissances C6 pour obtenir la pente de la droite tangente au point M. Il fait intervenir aussi les connaissances C5 pour tracer une courbe solution représentative d'une fonction croissante, même si cela n'est pas explicité dans le registre discursif.

En ce qui concerne l'obtention de la valeur approchée de l'ordonnée du point N, compte tenu du fait que les étudiants n'ont pas explicité une procédure pour l'obtenir, nous supposons qu'ils se sont appuyés sur l'information graphique tirée des dessins tracés. Cette lecture de graphique demande la mise en fonctionnement des connaissances C7, qui permettent de percevoir localement une courbe comme approchée par sa droite tangente au voisinage d'un point.

En ce qui concerne les réponses isolées :

- l'étudiant E20 met en œuvre les connaissances C6 pour obtenir la pente de la droite tangente (la valeur qu'il obtient est erronée). Pourtant, il n'arrive pas à l'interpréter en termes de sens de variation de la solution. Ce qui démontre qu'il ne dispose pas des connaissances C5 ;
- l'étudiant E22 paraît supposer que la question posée concerne le cadre de l'algèbre. Pour cet étudiant, l'équation différentielle est une équation où les inconnues sont des points. Dans ce cas, il considère que le point M donné est une solution de l'équation, alors ses coordonnées satisfont à l'équation différentielle. Selon toute apparence, l'étudiant ne trouve pas de lien entre la valeur numérique obtenue par la substitution des coordonnées dans l'équation, et la dérivée ;
- l'étudiant E37 mobilise les connaissances C6 et C5, il obtient la pente de la droite tangente et interprète le comportement de la solution en termes de sens de variation de celle-ci, à partir du signe de la dérivée. Pourtant, pour obtenir la valeur approchée de l'ordonnée du point N, il utilise directement l'expression symbolique de l'équation différentielle. Ce qui montre que la dernière expression est perçue comme s'il s'agissait de l'expression symbolique des solutions. L'étudiant n'arrive pas à différencier ces deux expressions symboliques.

## Conclusion

L'analyse a posteriori du questionnaire, dans sa mise en rapport avec l'analyse a priori, nous apporte des informations intéressantes sur la disponibilité des connaissances des étudiants sur les équations différentielles, ainsi que sur les difficultés rencontrées pour faire les liens inter-cadre et inter-registre dans ce champ conceptuel.

Dans la première partie, nous avons demandé l'avis des étudiants de CAPES sur des notions générales concernant les équations différentielles. Nous avons prévu dans l'analyse *a priori* que même si les étudiants ne se rappelaient pas les définitions précises, ils pourraient mettre en relation ces notions avec des notions voisines. Les réponses fournies nous montrent qu'ils ont des connaissances générales sur les équations différentielles :

- environ 52% des étudiants (29 sur 56) arrivent à définir une équation différentielle comme une équation faisant intervenir une fonction inconnue et ses dérivées ;
- environ 66% des étudiants (37 sur 56) identifient les solutions d'une équation différentielle avec des fonctions. Pourtant, seulement 35% de ces étudiants (13 sur 37) considèrent que les solutions d'une équation différentielle constituent une famille de fonctions ;
- environ 77 % des étudiants (43 sur 56) savent que les équations différentielles servent à modéliser des phénomènes divers.

Dans les trois dernières parties du questionnaire, nous cherchions à étudier les capacités des étudiants de mettre en œuvre spontanément des connaissances élémentaires des cadres des fonctions et de l'analyse, pour effectuer des passages entre registres de représentation. Nous avons trouvé les résultats suivants :

- la presque totalité des étudiants (52 sur 56) n'a pas été capable d'établir un lien du registre graphique vers le registre symbolique, dans le cas de l'association d'une équation différentielle au champ de vecteurs parallèles donné. Cela atteste que des connaissances comme celles permettant d'interpréter la pente des vecteurs en termes de dérivée (connaissances C6), ne sont pas disponibles chez ces étudiants ;
- la presque totalité des étudiants (51 sur 56) n'arrive pas à déduire la valeur numérique de  $y'$  à partir de  $y'=f(x,y)$  lorsqu'une valeur numérique de  $f(x,y)$  est donnée (sans que l'expression symbolique  $f(x,y)$  soit donnée) pour tracer un dessin local d'une courbe solution. Des connaissances sur le sens de variation d'une fonction à partir du signe de la dérivée (connaissances C5) ne sont pas disponibles chez ces étudiants ;
- la presque totalité des étudiants (52 sur 56) ont été incapables de décrire localement, à partir de l'expression explicite d'une équation différentielle, le comportement d'une courbe solution en un point de coordonnées données et d'approcher l'ordonnée d'un point de cette courbe. Ils ne sont même pas arrivés à évaluer, en ce point donné, l'expression symbolique de l'équation différentielle.

Nous avons constaté que les difficultés rencontrées par les étudiants de CAPES ont été principalement : la compréhension de la consigne mais aussi la non disponibilité de connaissances pour articuler les représentants des objets du champ des équations différentielles en jeu. En ce qui concerne le premier point, les situations proposées étaient en rupture avec le contrat habituel à l'Université (car ne permettant pas la mise en œuvre d'un mode de pensée associatif) où normalement, la demande est de résoudre une équation différentielle à partir de l'expression symbolique. De plus, les questions faisaient amplement appel à des connaissances anciennes des étudiants. Ces difficultés ont en partie contribué à bloquer le travail des étudiants. En ce qui concerne le deuxième point, l'analyse révèle que pour la mise en œuvre des connaissances sur des notions élémentaires comme pente, dérivée, fonctions, ces connaissances ne sont pas disponibles chez les étudiants. Et quand il s'agit de les mettre en œuvre, normalement ils le font de façon inadéquate. Ces résultats confirment ceux trouvés par Pian (1999) : les étudiants de CAPES ont peu de connaissances disponibles.

D'autres recherches (Artigue 1989, Saglam 2004, Arslan 2005, Rasmussen, etc.) ont mis en évidence les nombreuses difficultés des étudiants en cours d'apprentissage des équations

différentielles. Notre travail montre que finalement, on ne trouve pas de grandes différences entre les difficultés des étudiants débutants et des lycéens, et les difficultés des étudiants de quatrième année d'université qui vont devenir enseignants en mathématiques.

Les éléments issus de cette première analyse nous montrent que l'établissement de liens inter-cadre et inter-registre dans le champ conceptuel des équations différentielles ne va pas de soi, qu'il s'avère intéressant d'essayer de chercher des moyens qui facilitent la mise en relation entre objets et notions du champ conceptuel des équations différentielles.

### ***Intervention du professeur : Un bref rappel de certaines notions sur les équations différentielles***

Tout de suite après le questionnaire initial, le professeur a présenté une brève introduction aux équations différentielles (en 15 minutes à peu près). Dans cette introduction, il a défini la notion d'équation différentielle et les solutions d'une équation différentielle. Le professeur a demandé aux étudiants des idées pour connaître la pente de la droite tangente à la courbe solution passant par un point donné. A partir des idées proposées, le professeur a expliqué le lien entre la pente de la droite tangente et une expression symbolique de la forme  $y' = f(x, y)$ . Il a aussi défini la notion d'isocline, et en particulier le rôle important de l'isocline zéro pour régionner le plan.

## **3.2. ETUDE DESCRIPTIVE DES COURBES SOLUTIONS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$**

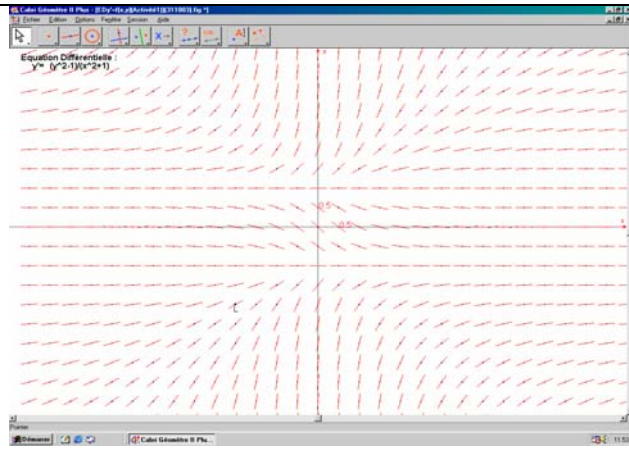
Comme présenté au chapitre 2, cette situation correspond à une situation d'association de représentants d'objets du champ des équations différentielles. Nous cherchons à étudier le fonctionnement des connaissances des étudiants lors des passages entre deux représentants du registre graphique : un champ de tangentes et les courbes solutions qu'il esquisse. La situation est composée de deux parties : la première destinée à être travaillée en papier/crayon, et la deuxième à être travaillée dans un environnement de géométrie dynamique.

L'analyse des productions des trois binômes choisis s'appuie sur les échanges verbaux et sur les fiches de travail. Nous l'avons décomposée selon les consignes de chaque partie de la situation. Pour faciliter sa lecture, nous la scindons donc en deux parties.

### **3.2.1. Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$ en papier/crayon**

Rappelons les tâches proposées :

Le dessin ci-dessous montre le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$



- a) Dessiner quelques courbes solutions sur l'écran ci-dessus et décrire le comportement des courbes solutions.
- b) Soit  $C_1$  la courbe solution qui passe par le point  $L(-2,-2)$ . Décrire l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$ . Qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini? Justifier votre réponse.

### Première question

L'analyse prend en compte les principaux observables obtenus dans les sujets suivants : *le tracé à la main des courbes solutions ; la description des comportements des courbes solutions.*

#### Le tracé à la main des courbes solutions

##### Binômes E22/E23 et E3/E4

Les courbes solutions tracées par les binômes E22/E23 et E3/E4 (cf. figures 11 et 12, ci-contre) montrent que les segments du champ de tangentes n'ont joué aucun rôle de contrôle lors du tracé des courbes. La stratégie suivie par ces binômes repose sur deux actions : « suivre le champ de tangentes » et « relier les points » :

*Binôme E22/E23 :*

E22 : ... alors, donc tu prends un truc... tu suis, non?

E23 : ça c'est les tangentes...

(lignes : 1-2)

E23 : ce sont les tangentes aux points, donc ouais, tu peux tracer euh... tu traces en reliant les points...

E22 : tu me fais confiance...

(lignes : 4-5)

*Binôme E3/E4 :*

E3 : ... donc tu en dessines une, tu prends un point et puis, ah, tu suis, euh ... tu essayes de trouver à ... les points qui se correspondent...

(ligne : 9)

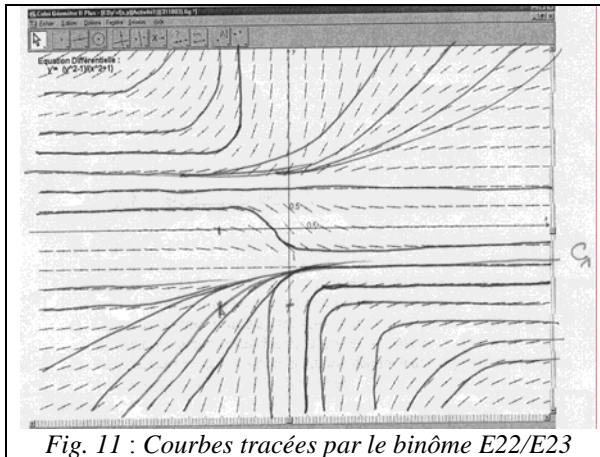


Fig. 11 : Courbes tracées par le binôme E22/E23

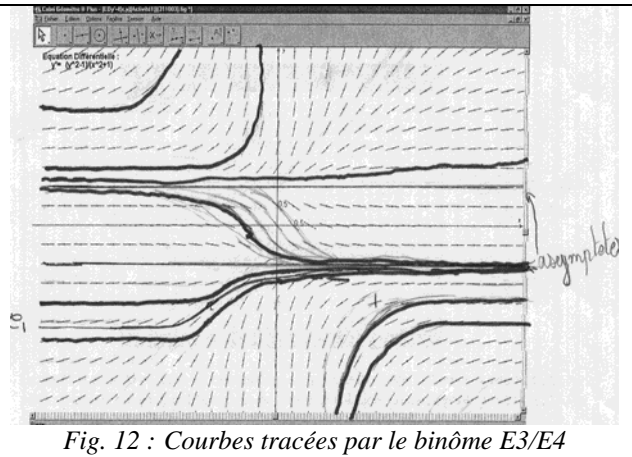


Fig. 12 : Courbes tracées par le binôme E3/E4

On remarque qu'il y a une certaine cohérence globale entre la vue d'ensemble et les courbes tracées et pourtant, au niveau local, il est évident que les petits segments n'ont pas été considérés comme tangents aux courbes solutions, ce qui atteste la non-disponibilité des connaissances C9 qui permettraient d'interpréter les courbes comme tangentes aux segments du champ qu'elles touchent.

Les incohérences entre le champ de tangentes et les courbes solutions tracées pourraient aussi s'expliquer par les difficultés prévues dans l'analyse a priori, pour le tracé des courbes. En effet, le champ a été dessiné sur un ensemble discret de points, et pour les espaces vides il faut interpoler la forme des segments de tangentes à partir de la vue d'ensemble. Lors du tracé d'une courbe, une fois qu'un segment a été pris comme approximation locale de la courbe, pour continuer normalement on n'utilise pas les segments voisins ; mais il faut se laisser guider par l'allure globale du champ et aussi vérifier, à chaque étape du tracé, que ce dernier est localement cohérent avec les petits segments. Ces difficultés font peut-être partie des écueils rencontrés par les binômes lors du tracé des courbes. Pourtant, nous retrouvons quelques indices d'autres types de difficultés qui ont peut-être joué un rôle lors du tracé des courbes. Pour le binôme E22/E23, nous trouvons dans les échanges suivants, ayant eu lieu un peu plus loin, qu'E22 (l'étudiant qui a tracé les courbes) considère que les tangentes n'ont d'intérêt que lorsque la dérivée s'annule. On peut donc faire l'hypothèse que pour cet étudiant, il n'est pas très important que les petits segments de droite tangente soient tangents aux courbes :

*Binôme E22/E23 :*

E22 : moi je croyais que la tangente en un point... si la dérivée s'annulait en ce point... on a une tangente en un point quand la dérivée s'annule en ce point

E23 : ah ben non !

E22 : ah ben si !

E23 : nous, on a la tangente en un point... et ah ! pourquoi (... ?)<sup>1</sup> faire la dérivée en ce point...

E22 : alors j'ai une question ... hum, pourtant... moi, j'ai cru que tu avais une tangente... tu sais que quand on a un maximum ou un minimum ... tu as forcément une tangente nulle... oui

E23 : oui mais bon, la pente d'une courbe comme ça

E22 : ah oui...

<sup>1</sup> Nous avons utilisé le symbole « (... ?) » pour indiquer des morceaux inaudibles de conversations des étudiants

E23 : la tangente en ce point-là... elle a pour coefficient directeur la dérivée dans ce point-là, et la dérivée-là est pas nulle, puisque le coefficient directeur de la tangente est pas nul, par contre, en ce point-là ...

(lignes : 71-78)

Les premières lignes soulignent clairement que pour l'étudiant E22 les tangentes sont réduites aux *extrema*, alors que E23 envisage des tangentes de coefficient directeur non nul. Autrement dit, pour E22 les tangentes à la courbe représentative d'une fonction  $f$  sont définies par l'expression  $f'(x)=0$ . Cet épisode révèle une difficulté de cet étudiant relative à la notion de tangente à la courbe représentative d'une fonction, qui a pu jouer un rôle important lors du tracé des courbes demandées.

Par ailleurs, en ce qui concerne le binôme E3/E4, nous identifions quelques conjectures qui ont peut-être eu quelques effets sur le tracé des courbes. Au début, le binôme se trouve très déstabilisé par les formes des courbes solutions. Il s'attendait à trouver des courbes d'une même forme graphique, où les étudiants considèrent qu'il s'agit d'une famille d'hyperboles :

E4 : en fait, c'est ... c'est des ...des trucs comme ça

E3 : c'est des hyperboles

E4 : c'est des hyperboles, ouais, dans tous les cas !

(lignes : 4 – 6)

Pour les étudiants, la conjecture de l'invariance de la forme des courbes solutions est très dominante. La mise en œuvre de ce type de raisonnement a été faite à plusieurs reprises par ce binôme, et nous avons formulé ce raisonnement sous la forme d'un théorème en acte :

*« les courbes représentatives d'une famille de solutions d'une équation différentielle sont des courbes de même forme graphique » ( TA2)*

Nous trouvons un peu plus loin, dans les échanges de E3 avec le professeur, les traces d'un argument fondé sur le théorème en acte TA2 :

E3 : je me souviens que si on avait une courbe comme ça, on arrivait à translater tout le (... ?), c'était une famille de courbes qu'on translatait, quoi

P : ça dépend...

(lignes : 179-180)

Nous observons aussi, à partir des courbes tracées, que les étudiants s'étonnent de ne pas trouver un même type de forme pour les courbes :

E4 : elle n'est plus hyperbole ... ..

E3 : hum ... puisqu'en fait celle-là ... là tu n'as pas ... parce que celle-là elle ne va pas faire ça apparemment ... donc c'est peut être ça, en fait ... c'est un peu bizarre, mais ...

E4 : donc ça fait un truc comme celle-là ...

(lignes : 30-32)

La stratégie du tracé des courbes par le binôme E3/E4 est, semble t-il, de ne pas chercher à extrapoler les courbes à partir des segments tangents, mais de faire des trajets reliant le plus grand nombre de segments.

**Binôme E1/E2**

En ce qui concerne le binôme E1/E2, il n'a pas trop de problèmes pour tracer les courbes solutions. Le champ de tangentes lui fournit des informations tant au niveau global qu'au niveau local des courbes. La figure 13 suivante montre les courbes solutions tracées par ces étudiants :

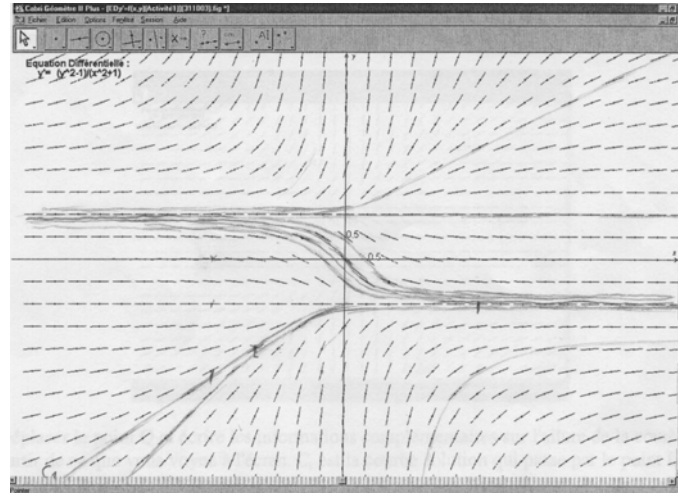


Fig. 13 : Courbes tracées par le binôme E1/E2

Lors du tracé, les étudiants donnent un rôle d'élément de contrôle aux segments du champ de tangentes. Les extraits ci-dessous montrent que même si l'étudiant E1 hésite, lui, l'autre étudiant considère que les courbes à tracer doivent avoir en chacun de leurs points les segments du champ comme tangentes. Cela veut dire qu'ils disposent des connaissances C9, qui permettent d'interpréter les courbes comme tangentes aux segments du champ qu'elles touchent :

E1 : (... ?) essayer de tracer les courbes avec ça... de façon à ce que ce soit tangent (... ?) je sais pas beaucoup ... j'essaie de faire un truc, quoi ... ben, c'est (... ?) équation ... voilà (... ?) voilà, qu'est-ce que tu en penses?

(ligne : 3)

E1 : moi, j'ai trouvé une courbe qui va ... dans les pentes, là ... euh, ben qui serait tangente à toutes ces pentes-là ... je sais pas, maintenant je ne sais pas comment faire cette courbe, ici ... euh ... j'ai l'impression que c'est quelque chose comme ça, quoi ... elle va juste comme ça, non ? Mais je ne suis pas sûre

(ligne : 7)

E1 : mais il faut que toutes les petites pentes soient tangentes à la courbe

(ligne : 35)

### **La description du comportement des courbes solutions**

**Binôme E22/E23**

Une première stratégie des étudiants, pour décrire les comportements des courbes solutions, consiste à essayer de mettre en oeuvre des connaissances sur les systèmes différentiels, pour identifier dans le registre graphique des foyers, des centres, des cols. Mais finalement le binôme n'arrive pas à les utiliser :

E22 : « comportement des courbes solutions » ... en fait, tu vois... c'est euh... si j'avais un truc de... si tu avais un truc comme ça, par exemple ... on aurait dit que ça, c'était un truc ... un centre entre ...



E23 : il y a des cols et il y a des centres... il y a des cols ...  
 E22 : hum...  
 E23 : et des foyers ...non, mais le foyer et le centre c'est quand l'allure des courbes est complexe  
 E22 : c'est pareil... le foyer et le centre

(lignes : 27-31)

Les étudiants identifient les solutions constantes, et E23 les exprime dans le registre symbolique. De plus, il mobilise les connaissances C11 (une solution est une fonction qui vérifie l'équation différentielle) pour vérifier que ces solutions satisfont l'équation différentielle donnée. Cela veut dire que pour ce cas particulier, les étudiants arrivent à relier le registre graphique des solutions avec le registre symbolique de l'équation différentielle :

E23 : donc tu vas dire... que les courbes solutions... on a des courbes constantes aux points... on a la courbe  $y = 1$  et  $y = -1$  c'est des solutions constantes... bah, d'ailleurs, c'est sûr... puisque là ça fait 0, tu as  $y' = 0$

E22 : ah, ouais

E23 : donc... « décrire le comportement des courbes solution »... ben, tu peux mettre... ah... les courbes  $y = 1$  et  $y = -1$  sont des solutions constantes

E22 : en fait, les courbes  $y = 1$  et  $y = -1$  sont des solutions...

(lignes : 84 – 87)

Pour faciliter le suivi de la production du binôme, dans la figure 14 ci-dessous nous avons tracé quelques courbes solutions de l'équation différentielle à l'aide du logiciel Cabri Géomètre. Nous remarquons en termes de comportement asymptotique des solutions, à partir de ce représentant graphique, qu'il y a des courbes suivant des directions asymptotiques verticales et des courbes qui semblent admettre des asymptotes horizontales. Les courbes comprises dans la bande  $-1 < y < 1$  semblent admettre des asymptotes horizontales :

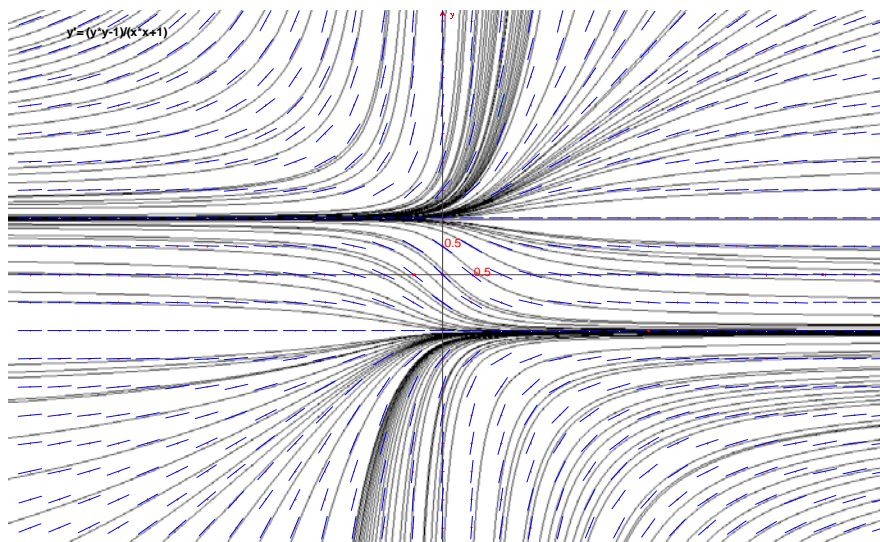


Fig. 14 : Courbes solutions associées à l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$

Les étudiants arrivent à identifier les deux types de comportements des courbes. Pour celles relatives aux directions asymptotiques verticales, ils les classent comme des courbes représentatives des solutions « divergentes ». Cette classification semble faire référence à l'existence de branches paraboliques pour ces solutions, tandis que pour celles qui semblent admettre des asymptotes horizontales, les étudiants les considèrent comme des courbes

représentatives de solutions « convergentes ». Nous pouvons repérer cette classification dans les échanges ci-dessous :

E23 : en fait, elles sont ... elles semblent admettre des asymptotes...

(ligne : 94)

E22 : parce que si je fais comme ça... il y a une droite, elles font comme ça, comme ça, comme ça ... ouais, jusqu'à droite en fait... en fait, le truc, c'est que ça fait comme ça

(ligne : 119)

E23 : bon... euh, ben, on peut dire que les solutions convergent, normalement, elles convergent aux mêmes pentes

E22 : si, tu as toute cette partie-là ... tout le temps, après, finalement, elles sont toutes sur la droite 1

E23 : ouais

E22 : mais, d'un autre côté, ça peut quand même diverger, quoi... puisque pourquoi tu regardes comme ça, comme ça

(lignes : 132 – 135)

Les étudiants font la description des comportements des courbes solutions en s'appuyant seulement sur des données graphique fournies par le dessin. Ils ont constaté qu'il y avait des courbes admettant des asymptotes horizontales, mais l'évidence visuelle n'est pas très sûre. Dans les dialogues des étudiants, nous identifions l'émergence d'un conflit sur le comportement asymptotique horizontal. Il semblerait que les courbes qui admettent des asymptotes horizontales, aient toutes la même asymptote. Ce type de raisonnement des étudiants, apparu aussi dans les autres situations, nous l'avons formulé sous la forme d'un théorème en acte :

*« si un ensemble de courbes d'une famille semblent s'approcher d'une droite D, alors ces courbes ont toutes la droite D comme même asymptote » (TA3)*

Les traces du théorème en acte TA3 apparaissent dans les échanges suivants :

E22 : ben oui, moi je dirais que le... voilà, elles tendent toutes vers... au départ elles sont vachement inclinées, si tu veux, et puis après, elles tendent toutes vers l'horizontale 1

(ligne : 137)

E23 : ah non, c'est pas la même, c'est une droite en-dessous ou pas ?

E22 : oui, mais enfin bon, après tu penses que... non ? ...

E23 : je ne sais pas, ça me dit que c'est bien particulier (... ?) en bas, ce n'est pas forcément... ouais

(lignes : 140-142)

E23 : donc... tu veux mettre qu'elles sont solutions et qu'elles sont asymptotes à une autre solution... ouais eh ben, non ...

E22 : moi, je dirais qu'elles sont toutes tangentes, elles sont toutes, elles admettent toutes comme tangente celle-là

(lignes : 150-151)

Finalement les étudiants, s'appuyant seulement sur les données graphiques repérées à partir du dessin, concluent que la famille admet comme asymptote soit la droite  $y=1$ , soit la droite  $y=-1$  (théorème en acte TA3). Dans la formulation des réponses, nous remarquons aussi que les étudiants confondent les courbes avec les fonctions. La figure 15 suivante montre un extrait de la fiche de réponses de ce binôme :

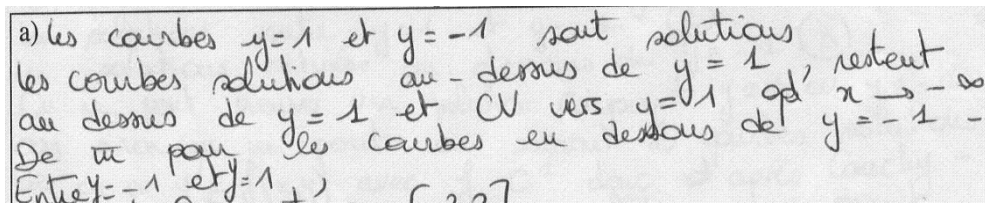


Fig. 15 : Description du comportement des courbes solutions par le binôme E22/E23

Lors du travail dans l'environnement informatique nous découvrirons que pour les étudiants le mot « convergence » a été pris finalement au sens général, pour désigner l'idée que toutes les courbes vont ensemble vers une même limite (théorème en acte TA3).

Les étudiants ont identifié quatre types de comportement différents : le premier pour les courbes solutions situées au dessus de la droite  $y=1$  ; le deuxième pour les courbes comprises entre  $y=-1$  et  $y=1$  ; le troisième pour celles qui sont en dessous de  $y=-1$  ; et le dernier pour les solutions constantes  $y=-1$  et  $y=1$ .

Le travail de ce binôme, dans la quasi-totalité de cette première partie, est resté centré dans le registre graphique/discursif. En général, les courbes ont été décrites à l'oral sans allusion à des arguments algébriques, et seuls les arguments graphiques ont été évoqués. Le seul lien établi entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et le comportement des courbes, l'a été pour les solutions constantes.

### Binôme E4/E3

Afin d'éviter que les étudiants utilisent seulement des arguments graphiques pour décrire le comportement des courbes solutions, le professeur encourage très souvent le groupe à chercher des arguments mathématiques pour justifier les faits graphiques.

Le binôme identifie les solutions constantes dans le registre graphique et fait un lien entre celles-ci et la valeur nulle de la dérivée :

E3 : hum ... parce qu'on dirait qu'il y en a une qui se voit, là ... qu'il y en a 2 qui sont ... horizontales ... celles-là ...

E4 : les horizontales, ça c'est clair

(ligne : 45-46)

E3 : en fait, ça c'est pour les trucs horizontaux parce qu'en fait (... ?)  $y'=0$  ça fait  $y^2=1$  donc ça fait  $y=\pm 1$

(ligne : 85)

Les étudiants mettent en œuvre la notion d'isocline et arrivent à une expression algébrique pour les isoclines  $k$  (cf. la figure 16, page suivante), et pourtant celle-ci n'est pas utilisée pour décrire le comportement des courbes solutions. On peut faire l'hypothèse que le binôme n'a pas les moyens d'interpréter graphiquement les informations algébriques liées aux isoclines.

Pour décrire le comportement des courbes solutions, les étudiants n'arrivent pas à lier les comportements graphiques avec des connaissances du champ des équations différentielles. Dans les échanges ci-dessous, nous remarquons que le seul recours au dessin leur crée des conflits pour identifier les comportements asymptotiques des courbes solutions :

E3 : ah mais je crois, pour moi ça fait de ... mais, que là tu peux avoir une asymptote...

E4 : je ne sais pas si c'est (... ?) ça ...

E3 : si, ça y est, ça marche comme ça, regarde, tu fais ça et puis celle-là a l'air de (... ?) elle vient de là et puis elle vient comme ça et là elles se rejoignent comme ça, ouais (... ?)

(lignes : 122-124)

E3 : je suis pas sûre que ça se rejoigne ici ..., si c'est une asymptote ça veut dire que ça se rejoint pas, puisque ...

(ligne : 134)

E3 : non, il faut qu'elles soient toutes parallèles, je crois

E4 : non, mais ça marche pas ...

E3 : ouais, tu as raison, ça marche pas ... euh ... alors attend ... non, mais là (... ?) on a essayé trop... il faudra en essayer encore en un ou deux... donc celle-là on va la laisser comme ça avec celle-ci comme asymptote ...

(ligne : 136-138)

Finalement, nous trouvons que la description des courbes par les étudiants repose seulement sur les données graphiques disponibles (cf. fig. 16 ci-dessous). De plus, le classement du comportement des courbes est imprécis. Sauf pour l'isocline zéro, le binôme n'a pas réussi à articuler les faits graphiques repérés avec des connaissances mathématiques permettant de les lier à l'expression symbolique de l'équation différentielle :

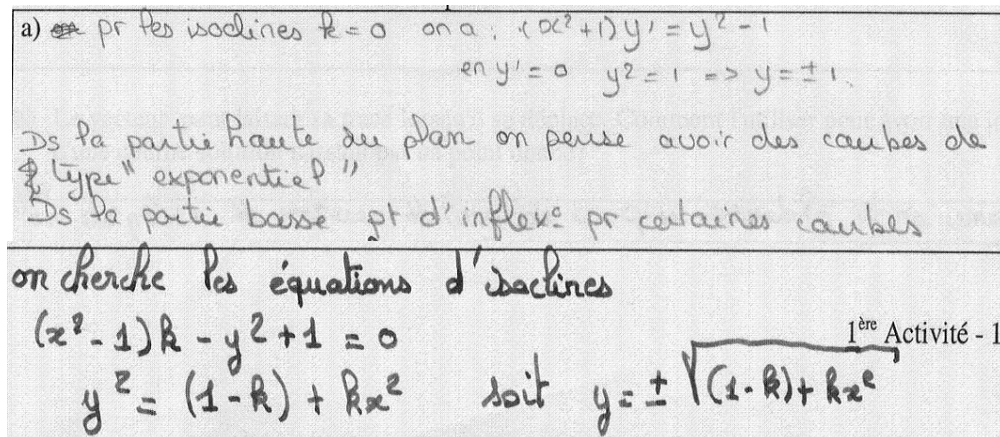


Fig. 16 : Description du comportement des courbes solutions par le binôme E3/E4

### Binôme E1/E2

Lors des échanges sur la description du comportement des courbes solutions, ce binôme identifie des courbes qui semblent avoir des asymptotes horizontales différentes. Nous remarquons que ces étudiants n'ont pas les mêmes difficultés que les précédents et acceptent sans hésitation l'existence de plusieurs asymptotes parallèles :

E1 : euh ... oui, apparemment, il y a une asymptote ici

P : ah, elles se rejoignent ou pas ?

E2 : non

E1 : ah, non, non, elles se rejoignent pas ... elles ont une asymptote...

(lignes : 98-101)

E1 : ah ouais, elles sont parallèles ... sont parallèles en fait ... ouais

E2 : elles viennent se caler là-dessus...

E1 : ouais, c'est ça, oui ... alors, qu'est ce qu'on va dire ?

(lignes : 105-107)

Dans la fiche de réponses (cf. fig. 17 ci-après), le binôme ne répond pas à la question et se borne à décrire sa procédure pour tracer les courbes, sans fournir davantage de commentaires sur le comportement des courbes. En revanche, les connaissances C9 qui permettent de

considérer les segments du champ de tangentes comme tangentes aux courbes tracées, sont explicitées :

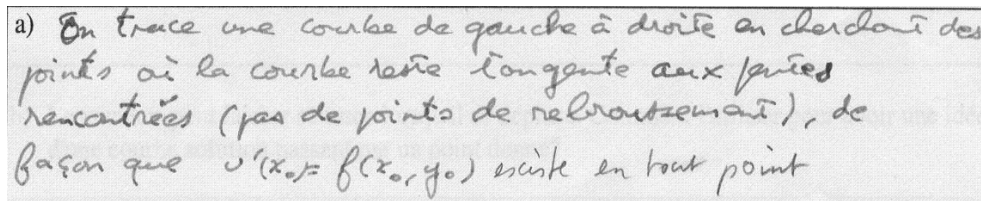


Fig. 17 : Description du comportement des courbes solutions par le binôme E1/E2

### Deuxième question

Dans cette question, l'analyse prend en compte les principaux observables obtenus dans les réponses aux trois consignes : *Description de l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$ . Prédiction sur le comportement de la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini. Justification de la réponse.*

#### Binôme E22/E23

*Description de l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$*

Le binôme trace la courbe  $C_1$  sur le champ de tangentes fourni (cf. fig. 11, p. 166). Celle-ci est identifiée comme une courbe représentative d'une fonction croissante sur l'intervalle  $[-3, 3]$  :

E22 : -0,5... -1... 1,5 ... -2 ... (... ?) cela ... donc, c'est celle-là

E23 : ouais, ben ... trace-la ...

(lignes : 165,166)

E23 : elle est croissante sur moins (... ?) tu as qu'à mettre ...

E22 : de toutes façons elle va tendre vers ... vers

E23 : ouais ... voilà... on va mettre « elle est croissante sur  $[-3,3]$  »,  $C_1$ , je ne sais pas...

elle part de  $-\infty$  visiblement

(lignes : 172-174)

*Prédiction sur le comportement de la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini*

La courbe tracée (cf. fig. 11) coupe la droite  $y=-1$  et semble s'approcher de celle-ci par-dessus. Le binôme conclut que la courbe  $C_1$  a pour asymptote la droite  $y=-1$ , lorsque  $x$  tend vers plus l'infini :

E22 : ah d'accord... donc, lorsque  $x$  tend vers ...

E23 :  $C_1$

E22 :  $C_1$  tend vers ... euh ...

E23 : admet, comme tu vois elle admet comme asymptote ... euh

E22 : alors, elle admet ... admet comme asymptote

E23 : la droite  $y = -1$

E22 : euh ...  $y = -1$

E23 : voilà

E22 : tu as vu toute la (... ?) quand  $x$  tend vers l'infini

(lignes : 185-193)

#### Justification de la réponse

Les données graphiques suggèrent que la courbe  $C_1$  s'approche asymptotiquement de la solution constante  $y=-1$ , mais comment le justifier ? Les étudiants essaient de mobiliser plusieurs stratégies pour justifier ce comportement de la courbe. Ces stratégies se basent sur la mise en œuvre des connaissances C13, qui permettent d'étudier les limites des solutions en plus l'infini, lorsqu'on connaît certaines des conditions sur la dérivée.

Dans un premier temps, le binôme considère que pour démontrer que la droite  $y=-1$  est une asymptote de la courbe  $C_1$ , il faudra prouver que les pentes des tangentes deviennent nulles lorsque  $x$  tend vers plus l'infini. Cette stratégie s'appuie fortement sur les données graphiques disponibles. Elle fait appel aux connaissances  $C_{13}$ , dans le cas particulier «  $y' \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow +\infty$  » où ces connaissances ne conduisent pas à une conclusion sur les limites des solutions en plus l'infini :

- E23 : ... (en lisant) « Justifier votre réponse » ... En fait, je pense qu'il faut, ah, pour montrer que c'est une asymptote horizontale, ça voudrait dire que sa tangente est nulle...  
 donc (... ?)  
 E22 : (... ?) en  $x$   
 E23 : ouais ... et tu regardes la limite en plus l'infini  
 E22 : de ?  
 E23 : de  $y'$

(lignes : 206-210)

Pour vérifier que  $y' \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ , le binôme fait un traitement de l'expression symbolique de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$  :

- E23 : ça veut dire que la limite quand  $x$  tend vers plus l'infini ... elle tend vers  $-1$   
 E22 : ouais  
 E23 : mais la courbe solution, mais pour la  $y'$  comme c'est la tangente, ça devrait tendre vers zéro  
 E22 : ouais  
 E23 : alors,  $y^2-1$  elle tend vers quelque chose, mais  $x^2$  tend vers plus l'infini, donc  $1/x^2$  ça va tendre vers ... 0, donc c'est bon... moi je (... ?) comme ça...  
 E22 : ouais... donc, attend,  $C_1$  admet comme asymptote  $y = -1$  ... donc, ah...  
 E23 : lorsque  $x$  tend vers plus l'infini,  $y$  ... en fait, c'est un nombre, quand même  
 E22 : donc on va dire que  $y$  tend vers  $-1$   
 E23 : ah, merde, ça va faire zéro sur plus l'infini...  
 E22 : non, mais, c'est ça, «  $y$  » tend vers  $-1$ , et donc  $y'$  tend vers zéro  
 E23 : et zéro sur plus l'infini ça fait quoi? Euh ...  
 E22 : zéro sur plus l'infini... c'est une valeur ... euh  
 E23 : ah non, c'est faux parce qu'on a zéro sur plus l'infini  
 E22 : eh ben oui, tu avais dit quoi, tout à l'heure ?  
 E23 : ben moi, j'avais dit que  $y^2-1$  c'était ... c'était un nombre différent de zéro  
 E22 : ben, oui

(lignes : 218 – 231)

- E23 : donc, tu as qu'à mettre que  $x'$  et  $y'$  tendent vers zéro... de toute façon c'est vrai... donc les ... donc  $C_1$  admet une tangente, une asymptote horizontale  
 E22 : (...?)  
 E23 : bon, pourquoi c'est  $-1$  ? ... ben, après on peut faire la limite de ça moins 1, et on devrait trouver zéro  
 E22 : ouais mais attend, c'est bon de toutes façons (... ?)

(lignes : 237-240)

Dans les échanges ci-dessus, nous trouvons chez les étudiants des difficultés pour coordonner les variables qui interviennent dans l'équation différentielle. En effet, l'expression symbolique de l'équation différentielle ne rend pas visible le fait que  $y$  est fonction de  $x$ , et il semblerait que  $x$  et  $y$  soient des variables indépendantes. En revanche, lorsqu'il s'agit d'étudier les solutions, la dépendance fonctionnelle doit être prise en compte. Dans le dialogue des étudiants nous identifions ce conflit : lors du traitement de l'expression

symbolique de l'équation différentielle, ils ne considèrent pas  $y$  comme fonction de  $x$ , et pour eux  $y$  est prise comme une variable dont ils ont fixé la valeur ; par contre, lorsqu'il s'agit de parler de la courbe  $C_1$ , ils l'associent à une fonction  $y$ . L'étudiant E23 semble gêné par le fait de faire jouer à  $y$  le double rôle de nombre et de fonction, et pourtant il n'arrive pas à trouver d'autres arguments.

Par ailleurs, les étudiants mettent en œuvre un raisonnement circulaire : ils commencent la justification avec ce qu'ils voient sur le graphique « la courbe  $C_1$  a pour asymptote la droite  $y=-1$  » et à la fin, ils traitent l'expression symbolique de l'équation différentielle, ce qui les amène à conclure que cette droite est l'asymptote de la courbe  $C_1$ . L'étudiant E23 hésite devant cette conclusion, et cependant il trouve qu'elle est cohérente avec l'évidence graphique perceptive. Finalement, dans la fiche de réponses nous trouvons la mise en œuvre de ce raisonnement :

b)  $C_1$  est croissante sur  $[-3, 3]$   
 lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $C_1$  admet comme asymptote  $y = -1$ .  
 lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y' \rightarrow 0$  donc  $C_1$  admet une  
 asymptote horizontale.

Fig. 18 : Description et justification du comportement de la courbe  $C_1$  par le binôme E22/E23

### Binôme E3/E4

Ce binôme ne consacre pas beaucoup de temps à la deuxième question. La consigne sur la justification du comportement de la courbe n'est guère appliquée par les étudiants. En ce qui concerne la description de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3, 3]$ , les étudiants concluent à partir de leur procédé de tracé de  $C_1$  que le point  $L(-2, -2)$  est un point d'inflexion. Par rapport au comportement de la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini, ils concluent que la droite  $y=-1$  est une asymptote de la courbe :

E4 : en ce point-là (... ?) elle fait un truc vraiment bizarre, ici

E3 : oui

E4 : puis là ... qu'il descend ...

E3 : oui, voilà ...

E4 : un truc un peu comme ça, quoi ... ça serait  $C_1$ ... Que se passe-t-il, qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini ? ... ben ... elle devient ... euh, elle a pour asymptote euh ... -1

(lignes : 188-192)

E4 : c'est un peu ça ... c'est  $y=-1$ , donc c'est ça ... (... ?) là (... ?) décrire l'allure... alors elle a un point d'inflexion...  $C_1$  elle a un point d'inflexion ... [elle écrit] « L est un point d'inflexion ... pour  $C_1$  » ...

(ligne : 194)

L'identification de la droite  $y=-1$  comme une asymptote de la courbe  $C_1$  et du point L comme un point d'inflexion sont explicités dans la fiche de réponses (fig. 19 ci-dessous) :

b) Qd  $x$  tend vers  $+\infty$  alors  $C_1$  aura pour asymptote  
 la droite  $y = -1$ .  
 L est un point d'inflexion pour  $C_1$

Fig. 19 : Description et justification du comportement de la courbe  $C_1$  par le binôme E3/E4

**Binôme E1/E2**

Le binôme E1/E2 réserve peu de temps à la deuxième question. A partir des échanges verbaux et du texte écrit dans la fiche de réponses, nous observons que ces étudiants décrivent l'allure de la courbe  $C_1$  et prévoient son comportement à l'infini, mais qu'ils ne justifient pas leurs réponses. La description de l'allure de la courbe n'est pas faite spécifiquement pour l'intervalle  $[-3,3]$  mais en moins l'infini et en plus l'infini. Dans cette description les étudiants, sans hésitation, considèrent qu'une partie de la courbe est rectiligne, ce qui ne montre aucun lien avec le registre symbolique (ce qui aurait permis de prendre en compte le fait que si la courbe est rectiligne, alors  $y' = \text{cte}$ ). Nous remarquons que le binôme ne met en œuvre des connaissances que pour valider ou invalider ses conjectures :

E1 : alors ...  $C_1$  comme elle est d'abord ... euh, elle est ... euh, comment dire ? ... [elle écrit] « affine jusqu'à ... (... ?)

(ligne : 221)

Pour la prévision du comportement de la courbe à l'infini, les étudiants s'appuient seulement sur l'allure de la courbe tracée pour conclure qu'elle admet par asymptote une droite parallèle à la droite  $y = -1$  :

E2 : quand  $x$  tend vers l'infini ...

E1 : donc «  $C_1$  est asymptote »

E2 : ben, elle tend vers ... elle tend vers ... à la valeur ... je ne sais combien ... -1 ... c'est ça ?

(lignes : 226-228)

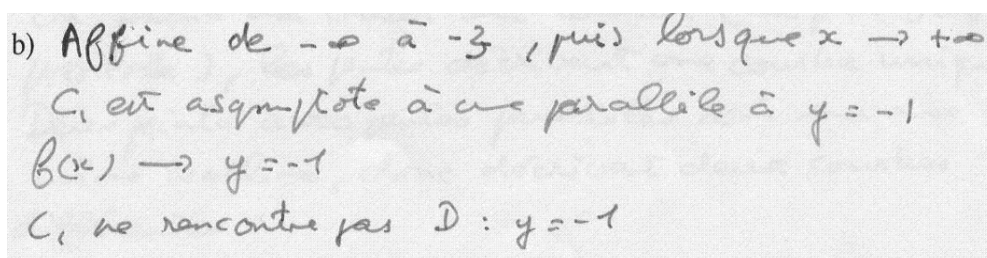
E2 : (... ?) quand  $x$  tend vers l'infini ... eh ben, le ... le «  $y$  » euh ... le «  $y$  » tend vers -1

...

E1 : non ... parallèle, parce que (... ?) on voit bien ... elle ne rencontre pas -1 ...

(Lignes : 232-233)

Dans la fiche de réponses (cf. fig. 20 ci-dessous), nous trouvons que même si le binôme signale explicitement que la courbe  $C_1$  est asymptote à une parallèle à la droite  $y = -1$ , les étudiants considèrent que la fonction associée à la courbe converge vers  $y = -1$  :



b) Affine de  $-\infty$  à  $-3$ , puis lorsque  $x \rightarrow +\infty$   
 $C_1$  est asymptote à une parallèle à  $y = -1$   
 $f(x) \rightarrow y = -1$   
 $C_1$  ne rencontre pas  $D : y = -1$

Fig. 20 : Description et justification du comportement de la courbe  $C_1$  par le binôme E1/E2

**Conclusion**

La mise en rapport de l'analyse a posteriori avec l'analyse a priori, concernant l'étude descriptive en papier/crayon des courbes solutions de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$ , nous révèle des éléments intéressants sur les difficultés des étudiants de niveau avancé pour faire fonctionner des connaissances du champ des équations différentielles, dans des tâches d'apparence simple.



En général, les étudiants restent centrés sur le registre graphique. Or les faits graphiques sont seulement décrits dans le registre discursif, et nous remarquons une absence de connaissances dans le domaine des équations différentielles pour valider les conjectures formulées. Nous avons constaté que l'usage du graphique était presque toujours dans le mode idéogrammatique. L'interprétation mathématique des informations graphiques requiert des connaissances pour les lier aux cadres des fonctions, de l'analyse, etc. Mais ces connaissances ne sont pas disponibles chez les étudiants.

Nous présentons ci-après les événements les plus marquants du travail des binômes pour chacune des consignes :

### *Le tracé à la main des courbes solutions*

Dans l'analyse *a priori*, nous avons prévu que la tâche de tracé de courbes pourrait permettre la mise en fonctionnement des connaissances C9 (les courbes sont tangentes aux segments du champ qu'elles touchent) comme un élément de contrôle pour le tracé de courbes, et pourtant nous avons observé que deux des trois binômes (E3/E4 et E22/E23) ne cherchaient pas à satisfaire à la tangence. Les segments ne sont pas considérés localement comme tangents aux courbes solutions.

Les difficultés des étudiants concernent le passage local/global, lors de l'utilisation du champ de tangentes pour tracer les courbes solutions. L'usage du champ de tangentes nécessite d'une part, de prendre en compte les informations globales sur l'allure générale de la famille de courbes, et d'autre part de s'appropriier les informations locales relatives aux petits segments. La prise en compte des informations globales de la famille de courbes ne demande pas trop de précision, la forme graphique de la famille devant être à peu près cohérente avec celle esquissée par le champ de tangentes. En revanche, la prise en compte des informations locales relatives aux petits segments exige une stratégie plus fine, appuyée sur des connaissances qui relient ces segments avec les tangentes aux courbes solutions. Lors du tracé d'une courbe, si celle-ci passe par un point où il y a un segment tangent, la courbe doit être tangente à ce segment. Ces passages du local au global sont devenus problématiques pour les étudiants. Nous avons repéré qu'ils gardaient une stratégie globale pour le traitement des informations locales. Les étudiants ne disposent pas des moyens techniques en vue d'un traitement local des courbes solutions à partir d'un champ de tangentes. Ce qui fait que lors du tracé des courbes solutions, les étudiants ne cherchent pas à satisfaire à la tangence ni à l'approximation affine locale.

Ces difficultés semblent avoir leur origine dans l'enseignement secondaire, en effet le tracé de courbes représentatives de fonctions numériques se fait normalement, en identifiant quelques points qui sont reliés ensuite par une courbe continue. Dans ce procédé graphique il n'y a pas de contrôle strict des contraintes à vérifier par les points extrapolés. De plus, lors de l'usage de calculatrices graphiques, les représentants graphiques y figurent simplement comme des objets globaux associées aux expressions symboliques en jeu.

### *La description du comportement des courbes solutions*

En ce qui concerne la description du comportement des courbes solutions, dans l'analyse *a priori* nous avons supposé qu'elle pouvait s'effectuer en utilisant le vocabulaire sur les sens de variation des fonctions solutions, et cependant les trois binômes ont plutôt cherché à identifier les comportements asymptotiques des courbes. La description s'est fortement ciblée sur les données visuelles tirées du dessin. Le seul lien avec l'expression symbolique de l'équation différentielle a été établi pour les solutions constantes (binômes E22/E23 et E3/E4).

*Description de l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$ . Prédiction de son comportement quand  $x$  tend vers l'infini. Justification de la réponse.*

Les réponses des étudiants montrent, de façon générale, un recours très faible aux connaissances du domaine des équations différentielles pour interpréter mathématiquement les faits graphiques. Les liens entre le champ de tangentes et les courbes solutions sont établis principalement à partir des données graphiques disponibles. Comme prévu, la courbe  $C_1$  est identifiée par les trois binômes comme la courbe représentative d'une fonction croissante. Cependant, le binôme E3/E4 considère, à partir de la seule évidence graphique perceptive fournie par leur tracé erroné, que le point  $L(-2,-2)$  est un point d'inflexion de la courbe.

En ce qui concerne la prédiction du comportement de la courbe à l'infini, un seul binôme (E1/E2) donne la réponse que nous attendions, à savoir que la courbe  $C_1$  est considérée comme ayant une asymptote parallèle à  $y=-1$ , et pourtant les étudiants ne justifient pas leur réponse. En revanche, les binômes E22/E23 et E3/E4 se fondent sur l'évidence visuelle tirée du dessin pour conclure que la courbe  $C_1$  admet comme asymptote la droite  $y=-1$ .

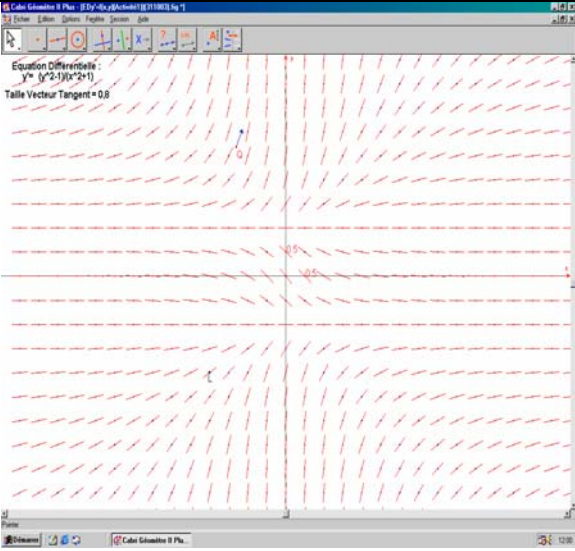
Le binôme E22/E23, en cherchant à justifier mathématiquement l'existence de cette asymptote, fait intervenir les connaissances C13 sur les limites des fonctions en plus l'infini. Dans ce cas, les étudiants considèrent que pour prouver que la courbe  $C_1$  admet comme asymptote la droite  $y=-1$ , il suffit de prouver que la dérivée devient nulle lorsque  $x$  tend vers plus l'infini. Lors de la mise en œuvre de cette stratégie, un conflit apparaît sur le rôle de la variable  $y$ , qui est considérée comme indépendante au moment du traitement de l'expression symbolique de l'équation différentielle, et en revanche considérée comme dépendante de la variable  $x$  lorsqu'il s'agit du comportement de la courbe  $C_1$ .

### **3.2.2. Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y'=\frac{y^2-1}{x^2+1}$ en géométrie dynamique**

L'objectif de cette deuxième partie est d'étudier les apports du logiciel Cabri, dans cette situation d'association de représentants d'objets du domaine des équations différentielles. Nous nous sommes intéressés à identifier si l'environnement de géométrie dynamique permet d'éventuelles évolutions dans l'établissement des liens, entre les représentants en jeu.

Rappelons les tâches que nous avons proposées :

Ouvrir la figure "Activité 1". Sur l'écran s'affiche le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$ . Le vecteur d'origine Q est déplaçable.

	<p>a) Déplacer le point Q et écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe <math>C_1</math> à partir de ce que vous voyez à l'écran. <math>C_1</math> est la courbe solution qui passe par le point <math>L(-2, -2)</math>.</p> <p>b) Le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace. Comment l'utiliser pour avoir l'idée d'une courbe solution passant par un point donné?</p> <p>c) Classer les solutions par paquets, selon leur comportement. Combien de paquets différents peut-on obtenir? Justifier la réponse.</p> <p>d) Pour chaque paquet de courbes solutions, décrire leur comportement quand <math>x</math> tend vers plus l'infini. Justifier la réponse.</p>
---	---

Nous présentons dans les pages suivantes, l'analyse des productions des trois binômes. Ces analyses ont été réalisées autour des observables obtenus dans les réponses aux consignes : *Les informations complémentaires sur le comportement de la courbe  $C_1$*  ; *L'outil Trace comme une aide pour avoir une idée de l'allure des courbes solutions* ; *Le classement des courbes solutions par paquets et sa justification* ; *Prévision du comportement des courbes solutions en plus l'infini et sa justification*.

**Première question : Les informations complémentaires sur le comportement de la courbe  $C_1$**

**Binôme E22/E23**

D'abord, les étudiants considèrent que le fait d'avoir un ordinateur leur permettra de connaître directement les courbes solutions de l'équation différentielle. Le professeur leur explique qu'il s'agit de faire presque le même travail qu'en papier/crayon, mais qu'à la différence de celui-ci on dispose dans cet environnement d'un vecteur dynamique, qui devra être déplacé pour avoir des informations complémentaires sur la courbe.

Le premier constat des étudiants est que le vecteur tangent dynamique donne un sens pour parcourir la courbe  $C_1$  :

E23 : ... ah, mais là... l'info complémentaire, c'est le sens... parce que tout à l'heure, on ne savait pas si elle venait de là et qu'elle faisait comme ça ...

(ligne : 303)

Le déplacement du vecteur dynamique leur permet d'identifier les différents comportements des courbes solutions, et de confirmer ou invalider perceptivement quelques conjectures formulées lors du travail en papier/crayon. Par exemple, les étudiants se rendent compte que la courbe  $C_1$  qu'ils ont tracée en papier/crayon (cf. fig. 11) n'était pas correcte, qu'elle ne

coupait pas la droite  $y=-1$  et qu'elle s'approchait asymptotiquement de la courbe mais au-dessous :

E23 : donc, tu vois là ... ce qu'on a mis, c'était faux

(ligne : 309)

E23 : ça converge pas, ça fait comme ça, en fait

E22 : voilà !

E23 : là, ça fait comme ça et là ça fait bien comme ça

E22 : ah ouais, tu l'as de ce côté

E23 : ça par là...

(lignes : 311-315)

L'exploration de la courbe  $C_1$  à l'aide du vecteur dynamique confirme aux étudiants la conjecture « la courbe admet par asymptote la droite  $y=-1$  » :

E23 : ça nous indique...comme tout à l'heure qu'en fait ... elle admet  $y = -1$  comme asymptote, puisque elle va bien dans ce sens-là

E22 : oui, mais on voit ... même, si on allait dans ce sens-là, la courbe serait aussi l'asymptote, ça dépend pas du sens, l'asymptote, ça dépend ...

E23 : oui, mais ça convergerait pas, ça divergerait

(lignes : 335-337)

Dans la figure 21 ci-dessous, nous montrons un extrait de la fiche de réponses des étudiants. Nous remarquons qu'ils ne différencient pas courbe et fonction :

Fig. 21 : Des informations complémentaires sur le comportement de la courbe  $C_1$  identifiées par le binôme E1/E2, grâce à l'exploration en géométrie dynamique

### **Binôme E3/E4**

Ce binôme, presque dès le début du travail en géométrie dynamique, a utilisé l'outil « Trace » de Cabri. Des difficultés concernant l'instrumentation de cet outil sont apparues<sup>2</sup> et ont pris beaucoup de temps, donc les étudiants sont passés très rapidement sur cette question. Cependant, quelques explorations effectuées à l'aide du vecteur dynamique leur permettent de se rendre compte que quelques courbes tracées ne sont pas correctes :

E3 : oui, on voit déjà qu'elles ne sont pas toutes horizontales ...

(ligne : 213)

Les étudiants confirment aussi certaines de leurs conjectures sur le comportement des courbes :

E3 : ... on voit que ce qu'on a fait c'est pas trop bête, en fait, si tu regardes... tu montes, tu montes, tu montes... et là c'est bien ça, regarde ... parce que là ... tu fais tourner là ... tu continues un peu à monter... mais quand tu descends, euh ... tu montes aussi mais (... ?) pas

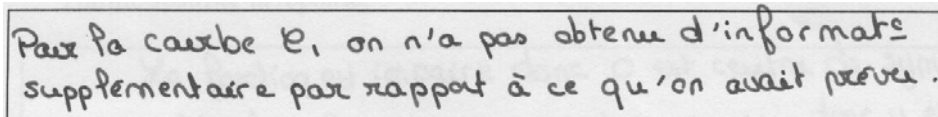
E4 : et là ... elles font (... ?)

<sup>2</sup> Des difficultés relatives au choix de l'objet dont on veut obtenir la trace. Au lieu de choisir le vecteur, ils choisissaient l'origine du vecteur. Des difficultés pour annuler l'outil « Trace ».

E3 : là, c'était ... euh ... (... ?) elle doit y avoir un point d'inflexion (... ?) là tu (... ?) ... donc... alors, à partir de (... ?) ... là, tu montes, tu montes ...

(ligne : 217-219)

L'exploration est faite rapidement et les étudiants ne trouvent pas d'autres informations sur la courbe  $C_1$ . Finalement, dans la fiche de réponses (fig. 22 ci-dessous) ils écrivent :



Par la courbe  $C_1$ , on n'a pas obtenu d'informations supplémentaires par rapport à ce qu'on avait prouvé.

Fig. 22 : Des informations complémentaires sur le comportement de la courbe  $C_1$  identifiées par le binôme E3/E4, grâce à l'exploration en géométrie dynamique

### Binôme E1/E2

Pour ce binôme, le travail exploratoire à l'aide du logiciel confirme seulement ce qui a été fait en papier/crayon. Ils ne trouvent pas d'autres informations relatives au comportement de la courbe  $C_1$  :

E2 : est-ce que la courbe  $C_1$ ... est-ce qu'elle va vraiment en ... est-ce qu'elle va finir là-bas, quoi... essaye de voir ça

E1 : par exemple, oui ... si elle devient affine pour commencer ... ben, si c'est bien ...

(lignes : 276-277)

P : vous avez le même résultat qu'à la main ...

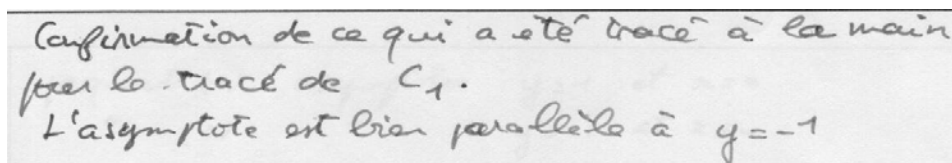
E1 : ah oui ... ça se voit pas, la différence ...

(ligne : 324-325)

E1 : comme ça on fait des courbes... alors je vois la confirmation de ce qu'on a vu ... de ce qui a été tracé à la main ...

(ligne : 342)

Dans la fiche de réponses (fig. 23 ci-dessous) le binôme écrit :



Confirmation de ce qui a été tracé à la main par le tracé de  $C_1$ .  
L'asymptote est bien parallèle à  $y=-1$

Fig. 23 : Des informations complémentaires sur le comportement de la courbe  $C_1$  identifiées par le binôme E1/E2, grâce à l'exploration en géométrie dynamique

### Conclusion

De façon générale, dans cette première confrontation des étudiants avec le logiciel, l'exploration dynamique confirme ce qu'ils ont trouvé en papier/crayon. Dans l'analyse *a priori*, nous avons supposé que pour les étudiants ayant eu des difficultés pour décrire la courbe  $C_1$  en papier/crayon, le déplacement du vecteur dynamique pouvait les conduire à mettre en cause des conjectures fausses. Pour ces étudiants-là, nous avons trouvé qu'effectivement le recours au logiciel pouvait aider à une meilleure reconnaissance perceptive du comportement de la courbe. Le binôme E22/E23 a identifié que la courbe  $C_1$  ne coupait pas la droite  $y=-1$  et qu'elle se trouvait au-dessous de celle-ci. En ce qui concerne le binôme E3/E4, les rétroactions graphiques du logiciel semblent mettre en cause quelques-unes des courbes tracées, mais en raison du temps limité, il n'a pas passé plus de temps à l'exploration.

**Deuxième question : L'outil « Trace » comme aide pour avoir une idée de l'allure des courbes solutions**

Dans la deuxième question, nous nous attendions à ce que le recours à l'outil « Trace » de Cabri apporte des informations graphiques liées au comportement des courbes solutions, permettant d'une part, de favoriser le développement du lien entre les variations du vecteur dynamique et la nature fonctionnelle de l'expression symbolique de l'équation différentielle et d'autre part, de favoriser le développement d'un point de vue local sur les courbes solutions.

**Binôme E22/E23**

De la part des étudiants, un premier constat est que pour avoir une idée de la courbe solution qui passe par un point donné, il faut déplacer et suivre soigneusement le vecteur d'origine Q, et aussi qu'on ne peut pas déplacer le vecteur n'importe comment :

E23 : (... ?) tu fait pas comme il faut, regarde, (... ?) tu mets là, la flèche elle va là, donc, tu vas jusqu'à là...stop, non mais arrête-toi là... petit à petit, après tu viens jusqu'à mon doigt, avec ton origine de Q au sommet... enfin, voilà, après tu vois à chaque fois, si tu veux tout faire, euh ... ton origine du vecteur tu le places à chaque fois sur la flèche... et à chaque fois

(ligne : 365)

E22 : non, mais regarde, c'est (... ?) regarde... alors je vais où ?

E23 : en haut... à la flèche là, après à la flèche ...

(lignes : 368-369)

E22 : le vecteur d'origine Q nous donne ... (... ?) on va mettre direction

E23 : et un sens... c'est important de le mettre là, je pense

E22 : et un sens, que l'on suit au fur et à mesure que le vecteur progresse

E23 : voilà, très bien ...

(lignes : 394-397)

Nous remarquons que même si les descriptions des courbes continuent d'être très dépendantes des données graphiques disponibles, l'usage de l'outil « Trace » pour esquisser une courbe solution requiert la prise en compte des variations du vecteur lors de son déplacement, ainsi que le besoin de suivre sa direction pour avoir un trait fin. Ces constats perceptifs amènent les étudiants à faire des petites évolutions qui permettent de relier les courbes solutions avec la droite tangente, comme les échanges ci-dessous en témoignent. L'exploration à l'aide du vecteur dynamique et de l'outil « Trace » conduit à ce que la tangente soit vue localement comme une approximation affine de la courbe. Rappelons que ce binôme, lors du tracé des courbes en papier/crayon, ne considérait pas les petits segments de droite tangente comme un élément de contrôle :

E23 : parce qu'en fait, le vecteur, ça donne la tangente à la courbe et comme c'est très près ... on a tangente

E22 : voilà

E23 : ça (... ?) on voit bien

E22 : la tangente s'approche de la courbe ...

(lignes : 401-404)

Finalement, dans la fiche de réponses (fig. 24 suivante), le binôme décrit son utilisation de l'outil « Trace » permettant d'avoir une idée d'une courbe solution associée à l'équation différentielle :

Fig. 24 : L'utilisation de « Trace », par le binôme E22/E23, pour tracer des courbes solutions

### Binôme E3/E4

Après quelques explorations, à l'aide du déplacement du vecteur dynamique et de l'outil « Trace », les étudiants trouvent la question très simple, et ils ne discutent pas beaucoup là-dessus. Dans la fiche de réponses (fig. 25 ci-dessous), ils explicitent la procédure qu'ils ont identifiée pour tracer les courbes. Cette procédure n'est pas très différente de celle que le binôme a mise en œuvre en papier/crayon. Le binôme n'arrive pas à interpréter localement les rétroactions graphiques du logiciel :

Fig. 25 : L'utilisation de « Trace », par le binôme E3/E4, pour tracer des courbes solutions

### Binôme E1/E2

Le binôme E1/E2 s'aperçoit qu'en géométrie dynamique, le tracé des courbes doit prendre en compte la sensibilité du vecteur aux variations de  $x$  et de  $y$  :

E1 : ben, on essaie de faire, euh ... de tracer une courbe là qu'on (... ?) dans la (... ?) la plus ... la plus fine possible... fine, quoi

E2 : la plus ... euh ... oui, voilà ... en suivant le ... en essayant de respecter le ... le moindre ... la moindre variation de ... la variation la plus légère des tangentes ...

E1 : oui, oui

(lignes : 350-352)

Nous remarquons que pour ces étudiants, les rétroactions de l'environnement informatique permettent d'élaborer des arguments à partir des données graphiques qui sont liées aux connaissances du domaine des équations différentielles. Par exemple, le binôme estime que pour esquisser une courbe solution, le déplacement du vecteur doit se faire en prenant en compte certains éléments de contrôle :

E2 : ... en évitant en fait de générer des vecteurs parallèles, c'est ça

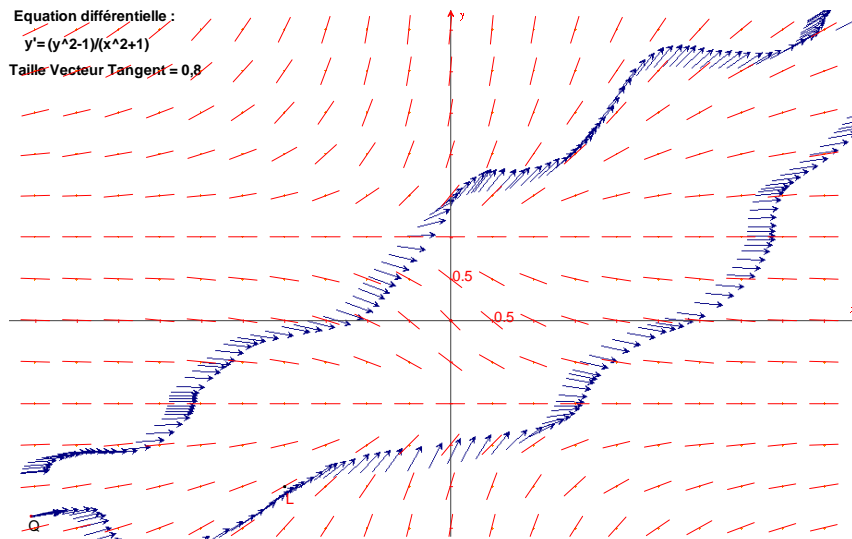
E1 : ouais

(lignes : 355-356)

E2 : là par exemple, tu peux déplacer ... un petit peu par là ... donc (... ?) un peu, je dirais, on peut faire revenir et puis ... parce que normalement il n'y a pas de vecteur parallèle ... euh ... enfin, du point donné parce que sinon ça veut dire que ... t'as... t'as quelque chose de courbe ... forcément ... (... ?) tend vers ça ... parce que si on a d'autres courbes ...

(ligne : 359)

Dans la figure 26 ci-contre, nous montrons ce que le binôme tente d'éviter : lorsqu'on déplace le vecteur sans suivre une courbe solution, la trace laissée par le vecteur dynamique semble être constituée par des vecteurs parallèles :



Les rétroactions graphiques du logiciel permettent au binôme de conclure que l'affichage de vecteurs parallèles est un constat perceptif de l'existence de courbes différentes. Dans ce cas, une connaissance théorique sur l'unicité des solutions d'une équation différentielle permet aux étudiants de contrôler le comportement graphique des courbes solutions :

E1 : sont deux courbes différentes ... tu as raison, tu as raison ... parce qu'on a le dessin, tu vois, le tableau là ...  $M_0$  et  $M_1$  appartiennent à deux courbes différentes ...

E2 :  $M_0$  et  $M_1$  ? oui ... mais on peut imaginer que ... on peut imaginer que ... on est ... regarde... on va voir si ce serait pas vrai ... ça c'est pas ... ça change toujours, la pente ... elle change toujours ...

(lignes : 376-377)

E2 : et c'est (... ?) c'est ... ce qu'on voit là ... c'est que le fait de déplacer en «  $x$  » ... en fait, si je déplace uniquement en «  $x$  » ... je peux pas avoir autre chose qu'une pente ... une pente nulle ... en fait c'est ça ... ben, parce que ... si la courbe ... si par exemple deux points sont sur ... si on me déplace comme ça latéralement... et que je passe d'un point à l'autre ... et que j'ai les vecteurs qui sont comme ça ... euh ... c'est forcément deux courbes différentes

E1 : oui, c'est ça

E2 : en revanche ... la seule possibilité qui soit sur la même courbe solution, c'est que ... la tangente soit ... [phrase inachevée]

(lignes : 383-385)

Finalement, dans la fiche de réponses (fig. 27, ci-dessous) les étudiants explicitent comment se servir de l'outil « Trace » pour esquisser des courbes solutions. Nous identifions les traces de la mise en œuvre de connaissances théoriques relatives à l'unicité des solutions :

On essaie de tracer une courbe (la plus fine possible), les pentes décrivent une courbe unique. Deux points avec pentes parallèles sont sur une même isocline, donc décrivent deux courbes différentes

Fig. 27 : L'utilisation de « Trace », par le binôme E1/E2, pour tracer des courbes solutions



### **Conclusion**

Dans l'analyse *a priori*, nous avons prévu que l'exploration des courbes solutions à l'aide de l'outil « Trace » pouvait conduire à la prise en compte des informations locales de celles-ci comme un élément de contrôle pour le tracé et la description des solutions. Nous avons supposé que les rétroactions visuelles du logiciel, lors du déplacement du vecteur dynamique, pourrait favoriser la mise en œuvre des connaissances des cadres en jeu (fonctions, analyse, équations différentielles, etc.) pour interpréter mathématiquement les faits graphiques, comme celles qui permettent d'interpréter une droite tangente comme une approximation affine locale des courbes (connaissances C7). A partir du travail des binômes E22/E23 et E1/E2, nous trouvons que le recours à l'outil « Trace » de Cabri peut permettre des apports à différents niveaux :

- pour les étudiants ayant eu des difficultés lors du tracé de courbes en papier/crayon : le recours à l'outil « Trace » peut susciter des petites évolutions pour relier les représentants graphiques en jeu. L'exploration faite par le binôme E22/E23 l'amène à établir un lien entre les droites tangentes et les courbes solutions, où les droites tangentes sont considérées comme des approximations affines locales (connaissances C7) des courbes solutions, ce qui n'a pas été le cas en papier/crayon ;
- pour les étudiants sans difficulté en papier/crayon : il peut favoriser la mise en relation des faits graphiques avec des connaissances sur les équations différentielles. Le binôme E1/E2 met en œuvre des connaissances théoriques sur l'unicité des solutions pour contrôler le comportement graphique des courbes solutions.

### **Troisième question : Le classement des courbes solutions par paquets et sa justification**

Dans l'analyse *a priori*, nous avons identifié deux classifications possibles pour le comportement des courbes solutions : la première qui prend en compte le sens de variation des fonctions solutions, et la deuxième qui considère la courbure.

#### **Binôme E22/23**

Le binôme arrive à la même classification que celle faite en papier/crayon. Il identifie trois paquets de courbes solutions, celles comprises dans les régions :  $y > 1$ ,  $-1 < y < 1$  et  $y < -1$ . La description de ces paquets a lieu dans le registre discursif, en s'appuyant seulement sur les données graphiques disponibles.

Les étudiants essaient de justifier le comportement des courbes solutions, mais ils se heurtent à plusieurs difficultés. Comme nous l'avons prévu, il y a une source de difficultés dans le fait de ne pas compter avec l'expression symbolique de l'équation différentielle. Le binôme ne trouve pas le moyen d'interpréter les comportements des courbes en termes de dérivée des fonctions solutions. Les échanges ci-dessous montrent que l'absence d'expressions symboliques pour les solutions est un obstacle considérable pour les étudiants. Par contre, ceux-ci font appel à des connaissances du cadre de l'analyse liées à ce type de comportements lorsqu'on connaît explicitement les fonctions :

E23 : une asymptote euh ... déjà une asymptote, ça dit pas si c'est au-dessous ou au-dessus pour savoir si «  $f$  » est au-dessous ou au-dessus «  $g$  » tu fais la limite  $f - g$  ... sauf que là, on ne peut pas le faire (... ?)

E22 : non, tu fais (... ?), tu regardes le signe de (... ?) g

E23 : oui, voilà ... là on sait que c'est  $y=-1$  mais là, tu sais pas les équations des solutions  
(lignes : 462-464)

Le binôme se trouve démuni pour justifier ces comportements avec les données disponibles. Donc il tente de mettre en œuvre une autre stratégie, qui essaie de faire fonctionner des connaissances du cadre des systèmes différentiels :

E22 : attend, pourquoi ça serait... pourquoi c'est (... ?) elle resterait au-dessous ?  
Pourquoi est-ce que toutes les autres resteraient au-dessous... au dessus et au milieu ?

E23 : (... ?) c'est pas assez simple (... ?) la dérivée, et c'est les points (... ?) d'équilibre, parce que c'est des points d'équilibre... c'est ça, tu te rappelles, on pourrait avoir ... les points, on cherchait des points qui annulent la dérivée

(lignes : 473, 474)

E22 : en plus ... en plus (... ?) pourquoi, parce là on cherche pas un point, c'est une fonction  $y=1$ , c'est pas un point (... ?) que je (... ?)

E23 : dans tous les points, quel que soit x

E22 : ouais, qui font  $y=-1$

E23 : on peut avoir des droites d'équilibre ?

(lignes : 491-494)

Finalement, les étudiants n'arrivent pas à élaborer une justification du comportement des courbes solutions de l'équation différentielle. Dans la fiche de réponses, ils décrivent les différents paquets de courbes solutions repérés, sans justification. De plus, ils répondent à la question posée par le professeur sur la possibilité pour les courbes de se croiser :

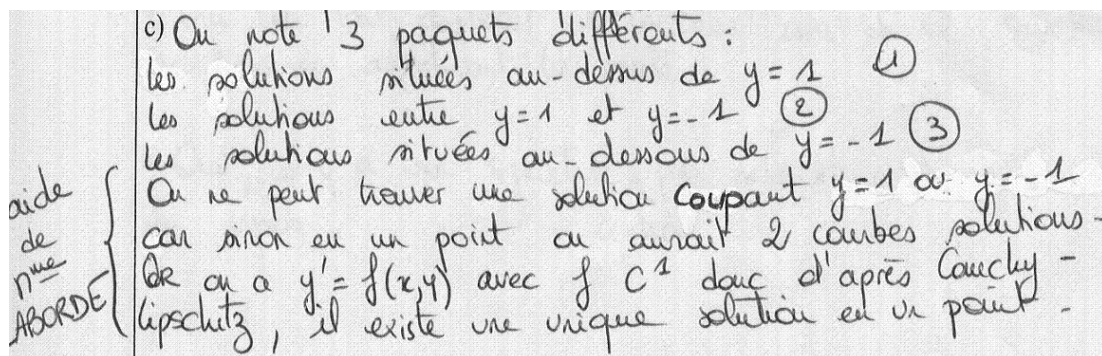


Fig. 28 : Classement des courbes solutions par paquets, d'après le binôme E22/E23

### Binôme E3/E4

Lors du travail en papier/crayon, ce binôme a eu de réelles difficultés pour tirer des informations sur le comportement des courbes solutions. Comme nous le constaterons, le travail dans l'environnement informatique a permis à ce binôme de faire de légers progrès par rapport à la description du comportement des courbes solutions, cependant qu'au niveau de la justification de nombreuses difficultés persistent.

Dans un premier temps, les informations graphiques tirées de l'exploration à l'aide du logiciel permettent aux étudiants de classer les solutions en quatre paquets (les solutions constantes et les solutions comprises dans les régions :  $y < -1$ ,  $-1 < y < 1$ ,  $y > 1$ ), et d'identifier aussi des points d'inflexion pour certaines courbes :

E4 : alors, y supérieur à 1... y entre -1 et 1

(lignes : 306)

E4 : ... moi je vois 2 points d'inflexion ... un par là  
E3 : et elles font ça ...  
E4 : je ne sais pas, je vois pas un truc comme ça, moi, je (... ?) mais ... .. alors, elles sont très, très loin... en plus, ça  
E4 : (... ?) là, il y a des plus comme ça ... ..  
(lignes : 311-314)

E4 : on a 4 ...  
P : c'est quoi, les paquets ?  
E4 : on a des trucs de forme exponentielle, comme ça, au-dessus  
P : oui  
E4 : (... ?)  $y=1$  ... ensuite  $y=1$  et  $y=-1$  (... ?) droites ... (... ?) au milieu on a des ... avec 2 points d'inflexion ... et puis au-dessous, on a des trucs avec un point d'inflexion, en fait ...  
(lignes : 322-326)

Alors que les étudiants explorent les différentes formes des courbes à l'aide du vecteur dynamique, les descriptions qu'ils en font sont pourtant très fortement liées aux données tirées de l'exploration graphique. Le rapport avec les connaissances du domaine des équations différentielles est très faible, même au niveau du vocabulaire employé :

E4 : il doit y avoir une partie comme ça vers le haut ... et puis après, une partie comme ça ... attend ... (... ?) moi je vois (... ?) là-dessous, très (... ?)  
E3 : ouais  
(lignes : 342-343)

E3 : attend ... on va en tracer plus... pourquoi est-ce que (... ?) ... .. on va déplacer, euh ... ..  
E4 : trace le vecteur ... et puis on va déplacer ...  
(lignes : 347-348)

E3 : ben ouais, mais parce qu'en fait ... ça dépend de la courbe que je prends... regarde celle-là  
(ligne : 357)

E4 : après, elle fait ça ... et après, elle va rester comme ça ... elle monte comme ça ... et (... ?)  
E3 : ouais, mais c'est la même ...  
E4 : : nous ... après, moi je le vois comme ça ... il y en a qui font ça, en tous cas comme ça... le problème... peut-être elles font même comme ça, qui montent... peut-être qu'elles sont comme ça...  
(lignes : 366-368)

Le déplacement du vecteur dynamique met en évidence certaines propriétés graphiques de la famille de courbes. Les échanges ci-dessous montrent que les étudiants décrivent les courbes solutions en utilisant le signe de la dérivée, et qu'ils reconnaissent aussi la symétrie des courbes :

E3 : moi, je vois qu'elles font ça [les courbes solutions] ... ..  
E4 : il n'y a pas ... je sais pas ... elle va pas, non ...  
E3 : moi, je vois ça... elle monte, elle fait ça  
E4 : celle-là, regarde ... elle fait ça  
E3 : oui, mais ça, c'est si tu ne suis pas la même flèche ... peut-être que c'est juste que la flèche qu'il faut suivre elle est là comme ça ... ou alors elle est un peu plus là... (... ?) elle est (... ?) là, et puis c'est celle-là qui monte ... ou alors c'est celle-là qui est droite... parce que les trucs, elles sont combien ? ... un demi ? ...  
E4 : ouais  
E3 : (... ?) comme (... ?) ... .. Enfin, de toutes façon, là ... «  $y'$  » est positif, et «  $y'$  » est négatif... .. (... ?) «  $y'$  » tend vers zéro ...

E4 : si tu (... ?) ... ça (... ?) de plus elles font pareil, là ... de ce côté elles sont comme ça et de l'autre côté elles font pareil ... elles sont comme ça ... ça dépend du paquet dans ce cas-là ...

E3 : si, parce que là tu as une ... tu as une ... en fait une asymptote, alors que là tu as pas un truc comme (... ?) fait à ça ...

E4 : moi, je trouve qu'elle (... ?) à ça (... ?) ... ..

E3 : ah si, tu as raison, c'est pareil ... c'est pareil, donc alors elles sont symétriques ... et d'ailleurs ça se voit, parce que quand tu fais, euh ... « y » ... et « - y »...

(ligne : 375 - 385)

Les étudiants ont identifié quelques propriétés graphiques de la famille de courbes et arrivent à faire certains liens avec des notions mathématiques, mais sans pouvoir les articuler. Ils n'arrivent pas à mettre en relation les comportements graphiques des solutions et les propriétés de la dérivée de ces solutions :

P : donc là, il faut expliquer le comportement ... d'accord, et donner des raisons mathématiques par rapport au comportement que ...

E3 : mais quand on donne ... des raisons mathématiques, on s'appuie, au départ, sur le dessin... parce qu'en fait on pourrait dire qu'on a ... on a que ... là, un certain y ... euh

P : oui

E3 : y' tend vers 0 ... en fait

P : oui... oui ...

E3 : on peut pas utiliser ce genre de choses

P : ah, si ... vous avez le droit de l'utiliser ... tout à fait, au contraire ... c'est ça... il faut utiliser tout ce que vous avez ... qu'est-ce que vous obtenez comme informations à partir de l'équation ...

(lignes : 419-425)

E3 : ben, oui, on sait que ça tend vers -1 ... mais euh ... ce que je ne comprends pas, c'est que si on (... ?) ça va tendre vers 0... et après, on sait pas trop ...

(ligne : 430)

P : ouais, d'accord ... est-ce que vous avez quand même des raisons mathématiques qui permettent de dire quelque chose sur le comportement ... ?

E3 : ah ... je crois ...

P : (... ?) une petite idée ... on attend ...

E3 : il faut ... se servir de ... l'équation

P : ouais, voilà ... pas énormément, mais euh ... un peu ... plutôt du signe de « y' »... de

E3 : d'accord et ... euh ... on va voir ... est-ce qu'on se sert de la parité ? Parce que là, il y a...

(lignes : 442-446)

Le professeur a suggéré d'obtenir des informations à partir de l'expression symbolique de l'équation différentielle, ainsi que de prendre en compte le signe de la dérivée. Donc, les étudiants essaient de justifier mathématiquement la symétrie de la famille de courbes. Cela devient très problématique pour eux. Ils tentent de mobiliser des connaissances du cadre des fonctions concernant la symétrie de fonctions d'une variable réelle. Pour appliquer ces connaissances, le binôme ne fait pas la différence entre l'expression symbolique des solutions et l'expression symbolique de l'équation différentielle. Les étudiants traitent l'expression symbolique de l'équation différentielle comme s'il s'agissait de l'expression symbolique des solutions :

E3 : on va faire ... on va faire ... l'équation, c'est  $y'=(y^2-1)/(x^2+1)$  ... donc il faudra passer par  $x = -x$  en fait ... donc ...

E4 :  $y'(-x) = \dots$

E3 :  $y'(-x) = (y^2(-x)-1)/((-x)^2+1)$  ... donc... euh ... ..

(lignes : 452-454)

Lors du traitement de l'expression symbolique de l'équation différentielle, les étudiants prennent en compte que  $y$  est une fonction numérique de la variable  $x$ . En revanche,  $y'$  est seulement considérée comme une fonction numérique de variable réelle, sans l'interpréter dans le registre graphique en termes de pente des droites tangentes. La non-disponibilité des connaissances liant la symétrie de la famille de courbes par rapport à l'axe horizontal, avec les propriétés de la dérivée, conduit les étudiants à dépendre totalement des données graphiques fournies par l'exploration dynamique. Donc les étudiants concluent, sans vérifier, que « la fonction est impaire » (expression symbolique de l'équation différentielle) :

E3 : donc  $y'(-x)$  on peut dire quelque chose, quoi ...

E4 : peut-être un truc ... quand la fonction elle est paire, tu as la dérivée qui est impaire tout le temps ... .. tu as pas ça ... en fait comme ça, non

E3 : déjà  $y'(-x)$  est une fonction composée ... pas forcément moins qui va sortir ... moins (... ?) ...

E4 : ce qui me semble ... on va mettre [il écrit] « la fonction est impaire » ... .. « donc O est centre de symétrie »...

(ligne : 458-461)

Le binôme continue à chercher des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions. Rappelons que le professeur a déjà suggéré de prendre en compte le signe de la dérivée. Dans les échanges ci-dessous, nous trouvons que l'étudiant E3 tente de justifier le comportement asymptotique des solutions à partir de l'expression symbolique  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$  de l'équation différentielle. Il essaie de prouver, à partir de cette expression symbolique, que les solutions de la région  $y < -1$  tendent vers  $y = -1$  (théorème en acte TA3). Cet étudiant utilise à nouveau l'expression symbolique de l'équation différentielle comme s'il s'agissait de l'expression symbolique des solutions. Nous remarquons aussi que les étudiants font le lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation des solutions :

E4 : (... ?) il ferait  $1 - 1$  ... pour  $y$  supérieure à  $1$  ...  $y'$  est positif, donc  $y$  est croissante...

E3 : oui, mais c'est pas ça qu'on te demande ... on te demande (... ?) ... comment tu justifies ?

E4 : ah ben, ça ... c'est pas (... ?) ... J'ai justifié qu'elle est croissante, déjà ...

E3 : c'est pas ça qu'on te demande ... on essaie de montrer que si elle tend vers  $-1$ ... elle va faire  $-1$ ...

(lignes : 511-514)

E3 : (... ?) ça se tend vers  $-1$  en plus l'infini

E4 : ben, elles sont croissantes dans tous les cas...

(lignes : 516-518)

E3 :  $y$  supérieure strictement  $1$  ...  $-1$  ... si c'est plus grand que  $1$ , ça c'est positif ... (... ?) c'est positif, c'est ça ?... effectivement ... après, là, ça va être (... ?) entre  $-1$  et  $1$  donc ça, ça va être négatif ... donc ça aussi, donc les pentes elles sont négatives ...

E4 : moi j'ai écrit... «  $y'$  » il y a ça ... quand  $y$  inférieure à  $-1$  et  $y$  supérieure à  $1$  ... ben,  $y'$  est positif ... (... ?)

(lignes : 534-535)

Lors des échanges relatés ci-dessous entre l'étudiant E3 et le professeur, nous constatons que cet étudiant n'est pas arrivé à relier les variations de la pente du vecteur dynamique à

l'expression symbolique de l'équation différentielle. Pour E3, le vecteur varie car il est fourni automatiquement par le logiciel :

E3 : moi, je m'en doute sur les points à l'infini ... .. c'est une question de (... ?) en fait, là, l'on dirait (... ?) si à l'extérieure de la (courbe) ... elle fait comme ça, donc, c'est ... parce qu'elle est ... dans Cabri

P : oui... sur Cabri ...

(lignes : 540-541)

P : on sait à chaque point ... la pente de la ... on sait qu'elle dépend de l'équation différentielle... la pente est donnée en fonction des coordonnées du point ...

E3 : d'accord, donc ça c'est une équation différentielle, donc moi le ...

E4 : la solution

P : ah non, on n'a pas la solution ... on n'a que l'équation

E4 : ah oui, l'équation

P : (... ?) on a obtenu l'équation ... on n'a utilisé que l'équation

E3 : d'accord et donc ... le vecteur, il est défini par le logiciel ... par son équation ?

P : non, (... ?) justement ... c'est très facile, on n'a pas le temps, mais je peux vous le montrer

(lignes : 549-556)

La figure 29, en page suivante, montre le classement des courbes solutions fait par le binôme. Nous remarquons dans ce classement que les étudiants n'ont pas réussi à identifier, dans le registre graphique, les courbes du premier paquet ( $y > 1$ ) et du dernier paquet ( $y < -1$ ) ayant des points d'inflexion. Par ailleurs, le binôme considère que les courbes comprises dans la région  $-1 < y < 1$  ont deux points d'inflexion. Cela signifie que les étudiants ne conceptualisent pas les points d'inflexion comme des points où les pentes des droites tangentes aux courbes passent par un extremum, mais comme le nombre de parties de la courbe de concavité différente.

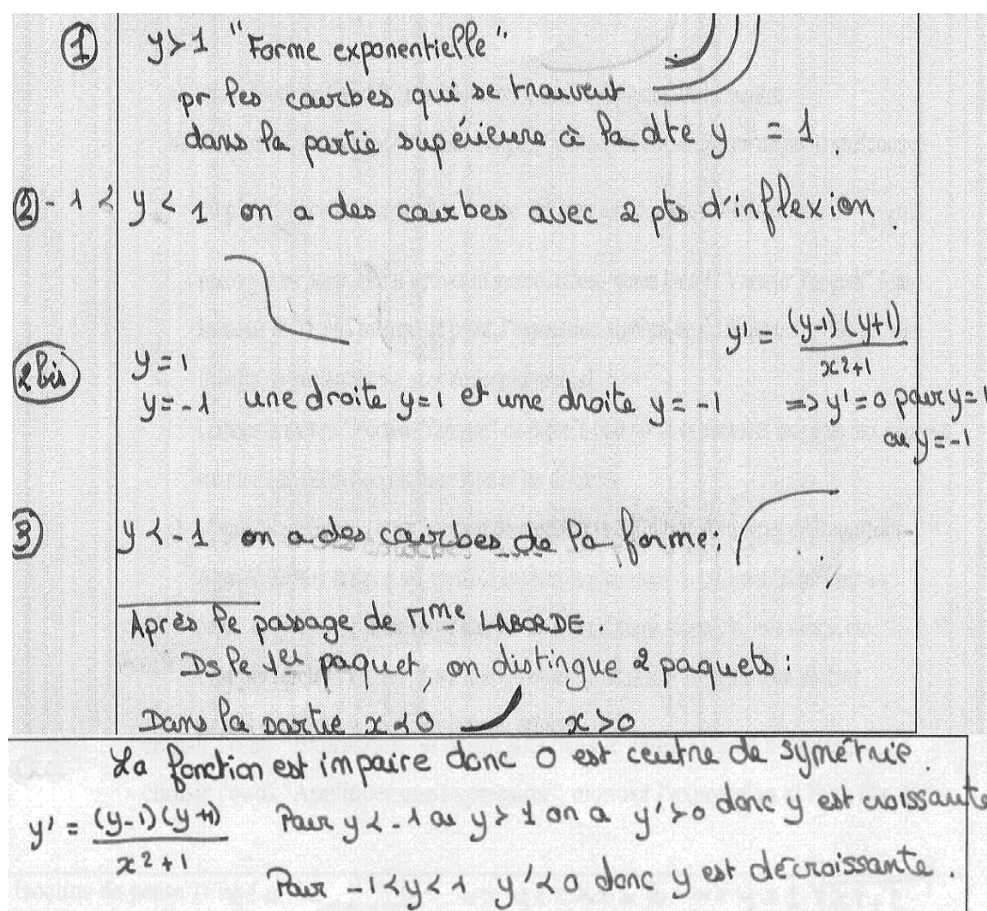


Fig. 29 : Classement des courbes solutions par paquets, d'après le binôme E3/E4

**Binôme E1/E2**

Dans un premier temps, les étudiants identifient trois paquets de courbes solutions :

E2 : « classer les solutions par paquets, selon ... » ... soit (... ?) ... eh oui, il y a 3 paquets

E1 : oui... là, là et là

(ligne : 391-392)

Peu après, l'exploration dynamique leur permet d'identifier d'autres paquets :

E1 : euh ... pourquoi ... euh ... c'est pas là ... ah, si, si ... les courbes sont symétriques...

E2 : ah si, c'est asymptote ...

(lignes : 463-464)

E2 : en fait ... il y a des hyperboles ...

E1 : oui, ça ressemblerait ... ça ressemble à des hyperboles, tu peux dire ... (... ?) on ne peut pas dire si ce sont des hyperboles (... ?) ... euh ... tu as aussi des ...

(lignes : 468-469)

E2 : voilà ... parce que je sais pas s'il y a plusieurs paquets pour (... ?) ici ... si tu as des ... si tu as des ... tangentes verticales ... elle peut pas passer par là ...

E1 : non, elle passe par là ...

E2 : c'est forcément un autre groupe...

E1 : c'est ... c'est 1, 2, 3, 4, 5 paquets ...

E2 : alors, est-ce qu'il y a 1, 2, 3 ? Ou est-ce qu'il y a 1, 2, 3, 4, 5 ? Je ne sais pas...

E1 : 5 paquets ... ouais ... à mon avis il y a 5 paquets ...

(lignes : 472-477)

Le classement fait par les étudiants est présenté dans la figure 30 ci-dessous. Ils identifient 5 types de comportements. Nous remarquons que même si ces étudiants n'ont pas eu de difficultés pour décrire les courbes solutions, ils ne justifient pas mathématiquement la classification effectuée. La description repose seulement sur les données graphiques dont ils disposent :

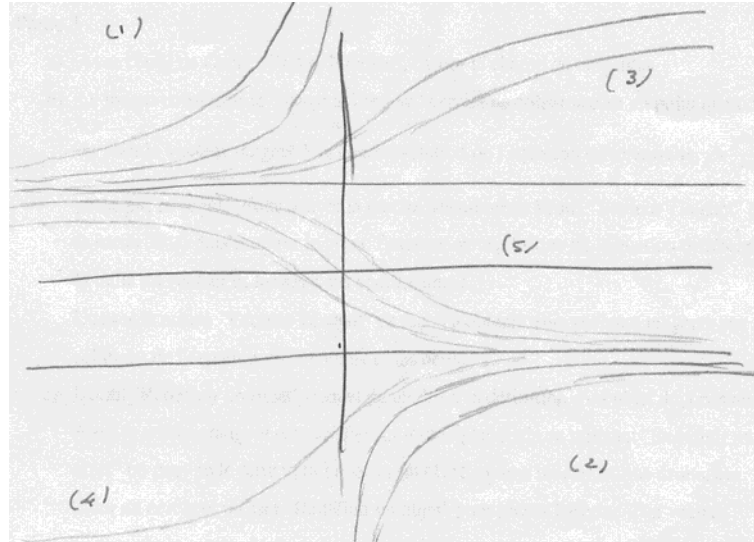


Fig. 30 : Classement des courbes solutions par paquets, d'après le binôme E1/E2

### Conclusion

En ce qui concerne le classement des courbes solutions, deux binômes (E22/E23 et E3/E4) les ont classées par rapport au sens de variation des solutions, et un binôme (E1/E2) a pris en compte la courbure. En termes généraux, comme nous l'avions prévu, le recours à la géométrie dynamique a permis de mieux classer les courbes solutions, et pourtant les classifications sont faites à partir des données graphiques tirées de l'exploration dynamique. Cependant, les étudiants n'arrivent pas à établir un lien entre les faits graphiques et l'expression symbolique de l'équation différentielle. Nous avons constaté que les essais de justification des binômes E22/E23 et E3/E4 se sont heurtés à diverses difficultés, notamment celles dues à l'absence d'expressions symboliques explicites pour les solutions.

Le travail exploratoire permet au binôme E3/E4 des petites évolutions relatives à la description des courbes solutions. Rappelons qu'en papier/crayon, ce binôme a décrit de façon imprécise le comportement des courbes solutions. Le recours au logiciel permet aux étudiants de classer les solutions en quatre paquets, ainsi que de reconnaître la symétrie de la famille de courbes. La demande de justification a permis la mise en fonctionnement des connaissances C5 pour justifier le sens de variation des solutions. Ce qui témoigne que les étudiants sont arrivés à établir un lien fonctionnel entre les variations de la pente du vecteur dynamique et l'expression symbolique de l'équation différentielle (première hypothèse de recherche) ; et de plus, ce lien a été établi de manière directe, sans passer par la résolution algébrique, ce qui confirme notre troisième hypothèse de recherche. Bien évidemment, les liens n'ont pas été établis pour permettre une articulation fluide entre les registres graphique et symbolique et en outre, ces liens sont encore très faibles. Par ailleurs, nous avons constaté que lors des essais pour justifier la symétrie de la famille de courbes, le binôme avait rencontré de nombreuses difficultés, en raison de l'absence d'une expression symbolique pour les solutions. Les étudiants ont aussi des difficultés pour différencier  $y$  fonction de  $x$ , et  $y'$  fonction de  $x$  et de  $y$ , car pour eux l'expression symbolique des fonctions solution et de l'équation différentielle est la même.



Pour le binôme E1/E2, l'exploration dynamique a permis de classer les comportements des solutions en termes de courbure, mais ils n'identifient pas explicitement les points d'inflexion. Le classement est fondé seulement sur les informations graphiques dont ils disposaient, sans le justifier mathématiquement.

**Quatrième question : Préviation du comportement des courbes solutions en plus l'infini, et sa justification**

**Binôme E22/E23**

L'exploration à l'aide du logiciel permet à ce binôme de confronter ses prévisions faites en papier/crayon, avec les informations graphiques obtenues grâce au déplacement du vecteur tangent dynamique :

E22 : on va faire partir la flèche ...  
E23 : (... ?) haut ... de toutes façon vers là-haut, c'est ...  
E22 : on a dit que ça diverge vers plus l'infini, ah  
E23 : ça divergeait... (... ?) quand « x »...  
E22 : non, mais non, parce qu'en fait... ça a pas l'air  
E23 : (... ?) celui-là, il va là-bas ...

(lignes : 587-592)

Les étudiants confirment à nouveau, grâce au travail exploratoire, que la courbe  $C_1$  tracée en papier/crayon n'est pas correcte (cf. fig. 11, p. 164) :

E23 : on avait dit, regarde ... on avait dit là que ça tendait vers cette courbe-là, mais elle n'est pas trop, en fait ...  
E22 : ah non, mais on l'avait dit, ça en  $[-3, 3]$  ça tend vers celle ... là ... houlàlà !  
E23 : mais non, ça (... ?) quand « x » tend vers plus l'infini  
E22 : c'est pas bon comme ça ...  
E23 : (... ?) des fois on est (... ?) ou pas, on ne pouvait pas le savoir... c'est qu'on a mal tracé nos courbes ...  
E22 : ouais, ouais, je les avait fait toutes ... revenir sur ... euh ...  
E23 : ouais, mais pourquoi tu as pas suivi la voie...  
E22 : bah, parce c'était comme ça, la première ... la première, regarde, c'était comme ça  
E23 : on avait que ça  
E22 : (... ?) regarde, regarde ... c'était ça  
E23 : non, mais je sais... on avait que ça au premier ... c'était vachement plus réduit, regarde... en bref... à l'infini... plus ça

(lignes : 608-618)

Les rétroactions du logiciel permettent d'identifier des comportements possibles des solutions en plus l'infini, mais les étudiants n'ont pas le moyen de mettre en œuvre des connaissances mathématiques pour les justifier :

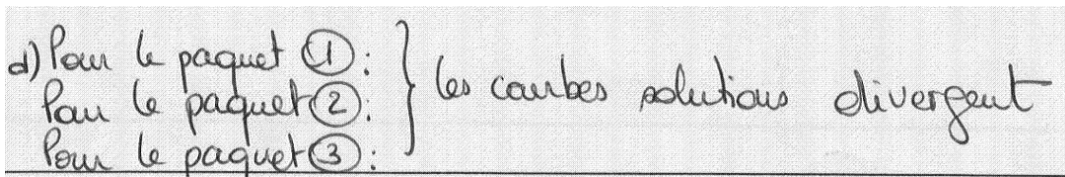
E23 : alors, pour le paquet 1... quand  $x$  tend vers ...  
E22 : bon, attend, je marque 1, 2, 3 ... pour le paquet 1, les solutions tendent vers ...  
E23 : quand  $x$  tend vers plus l'infini, ah...  
E22 : elles tendent toutes là-bas ... je sais pas ... je dirais qu'elles tendent toutes vers plus l'infini ...  
E23 : bah, non... elles n'ont pas ... regarde, elles vont tout droit...  
E22 : bah (... ?) ça veut dire quoi ?...  
E23 : je sais pas ... il faut se mettre là ... je ...

E22 : tu dis par exemple, celle-là, elle tend vers  $y=1$  ... c'est ... ah, non, non, regarde ...  
 ouais  
 E23 : elle part ... ouais  
 E22 : regarde, elles partent dans tous les sens ... regarde celle-là, elle part juste là-bas,  
 celle-là là-bas, celle-là là-bas ... après, c'est vrai que ... plus tu te rapproches  
 (lignes : 620 – 629)

Nous remarquons que le travail exploratoire permet d'écartier le théorème en acte TA3, et il faut rappeler que ce théorème laissait supposer des courbes qui s'approchaient d'une droite et admettaient toutes cette droite comme asymptote. L'exploration dynamique aide les étudiants à se rendre compte de l'existence de courbes avec des asymptotes horizontales différentes. Bien évidemment, ce constat est très contextualisé et non fondé sur des connaissances mathématiques :

E22 : ah mais, moi (... ?) par exemple, je prends celui-là... elle converge vers 2,  
 ah non,  
 E23 : non,  
 E22 : bah si, quand  $x$  tend vers plus l'infini,  $y$  vaut 2 tout le temps ...  
 (lignes : 655-657)  
 E22 : quand  $x$  tend vers plus l'infini, ça tend vers 3 ...  
 E23 : ça, c'est des solutions constantes  $y=1$  et  $y=-1$  quel que soit  $x$  ...  
 (lignes : 661-662)

Les étudiants sont convaincus que le fait d'avoir des courbes qui semblent avoir des asymptotes horizontales, ne signifie pas que toutes ces courbes aient la même asymptote. Dans les échanges ci-dessous, les étudiants interprètent ce dernier fait graphique en disant que les courbes « divergent ». Nous remarquons que les étudiants ne font pas la distinction entre fonction et courbe, qu'ils confondent l'objet mathématique avec son représentant graphique. Dans la fiche de réponses, nous trouvons que la description des courbes solutions à l'infini ne recourt plus à l'idée de la convergence des solutions vers les droites  $y=1$  et  $y=-1$ . Par contre, elle fait intervenir la notion de convergence conçue par les étudiants dans cette situation :



d) Pour le paquet (1):  
 Pour le paquet (2):  
 Pour le paquet (3): } les courbes solutions divergent

Fig. 31 : Prédiction du comportement des courbes solutions en plus l'infini, d'après le binôme E22/E23

### **Binôme E3/E4**

Nous remarquons dans les échanges ci-dessous, des essais des étudiants pour justifier le comportement des courbes solutions en plus l'infini. Pourtant, le binôme arrive seulement à établir un lien entre la pente du vecteur tangente dynamique, et le signe de  $y'$  :

E3 : ... de la croissance tu as fais quoi ? ...  
 E4 : de la croissance j'ai fait ... euh(... ?) parce que là (... ?) comme ça, c'est bon ...  
 (... ?) la limite, on va (... ?) ... tu as pas (... ?) ... ..  
 E3 : quand «  $x$  » tend vers plus l'infini ... (... ?)  
 E4 : tu as «  $y$  » (... ?) supérieur, hein ... on (... ?) comme ça ... strictement positif ...  
 E3 : donc je (... ?) ça va (... ?)  
 E4 : c'est strictement positif ...  
 E3 : (... ?)

E4 : (... ?) ça veut dire ...  
 E3 : c'est une tangente horizontale ... ..

(lignes : 579-587)

L'impossibilité de justifier mathématiquement les comportements asymptotiques des solutions, conduit le binôme à se limiter à décrire ces comportements appuyés sur les informations graphiques. La figure 32 ci-dessous montre les réponses des étudiants à la question posée. Dans la première partie, nous trouvons des tâtonnements pour justifier, à partir de l'expression symbolique de l'équation différentielle, que certaines solutions convergent vers  $y = \pm 1$ . Cette figure montre aussi que ces étudiants mettent en œuvre le théorème en acte TA3 (les courbes qui s'approchent d'une droite, admettent toutes cette droite comme asymptote) :

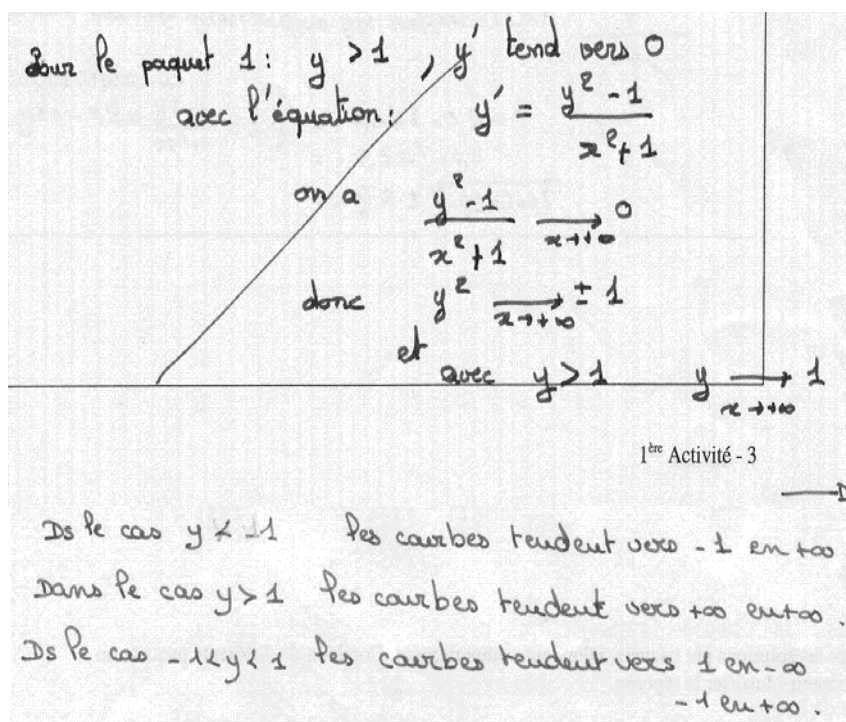


Fig. 32 : Prédiction du comportement des courbes solutions en plus l'infini, d'après le binôme E3/E4

### Binôme E1/E2

Dans la dernière partie de la situation proposée, le binôme utilise très peu le logiciel pour explorer les courbes solutions, à cause de problèmes avec la souris, qui ne fonctionnait pas bien. Et en plus, tout ce qu'il y avait à l'écran a été effacé. Alors pour finir les tâches demandées, les étudiants s'appuient sur les faits graphiques de l'exploration dynamique, qu'ils rappellent :

E1 : ouais, on a vu hein ... (... ?) ça ressemble à (... ?) il (... ?) là ...  
 E2 : ça tend vers .... 1, 2 ... 3 paquets ... moi, je dirais ... parce que ...  
 E1 : ça en 5 ... 5 paquets ...  
 E2 : non ... (... ?) c'est le même truc ... là, regarde ... c'est pas ce ... c'est le même truc, ça ... si je fait un truc un peu ... un peu brouillon, là ... là je fais quand même... comme les pièces de monnaie, là, regarde ...  
 E1 : on a effacé (... ?) comme c'est le comportement à l'infini qu'il faut regarder, effectivement ... on n'a que... euh ...

(lignes : 496-500)

En s'appuyant sur le comportement des courbes, dont ils se souviennent, les étudiants concluent que celles-ci admettent des asymptotes horizontales et verticales et ils supposent aussi que les courbes d'un même paquet ont toutes la même asymptote :

E2 : voilà, c'était comme ça ... ici (... ?) tend vers 1 ... alors ... elle tend vers la droite  $y=1$

E1 : (... ?)  $x$  tend vers plus l'infini

E2 : et puis tu as  $y=-1$  »

(lignes : 504-506)

E1 : non, (... ?) on les a bien vus ... non, on les a bien, les paquets ... parce qu'après la question ... on te demande le comportement à l'infini... on demande le comportement à l'infini ... donc on est obligé de marquer ce qui se passe ... euh ... les asymptotes différentes... et il y a 5 ... que 5 cas différents ...

E2 : ah, quand  $x$  tend vers l'infini ...

(lignes : 511-512)

E1 : quand  $x$  tend vers l'infini et quand  $y$  tend ... euh ...

E2 : mais quand  $x$  tend vers l'infini ... ça existe pas, ça ...

E1 : oui, mais là ... tu as des asymptotes différentes ici ... là tu n'as pas d'asymptote ...  
... (... ?) je peux pas réfléchir... comment tu...

(lignes : 523-525)

Les prévisions faites par le binôme E1/E2 sont exprimées dans la figure 33 ci-dessous. Nous remarquons que ce binôme, lors des autres étapes de la situation proposée, avait identifié l'existence de courbes avec des asymptotes différentes; cependant, dans cette dernière partie, l'absence de la rétroaction visuelle l'amène à conclure que les courbes par paquets admettent une même asymptote :

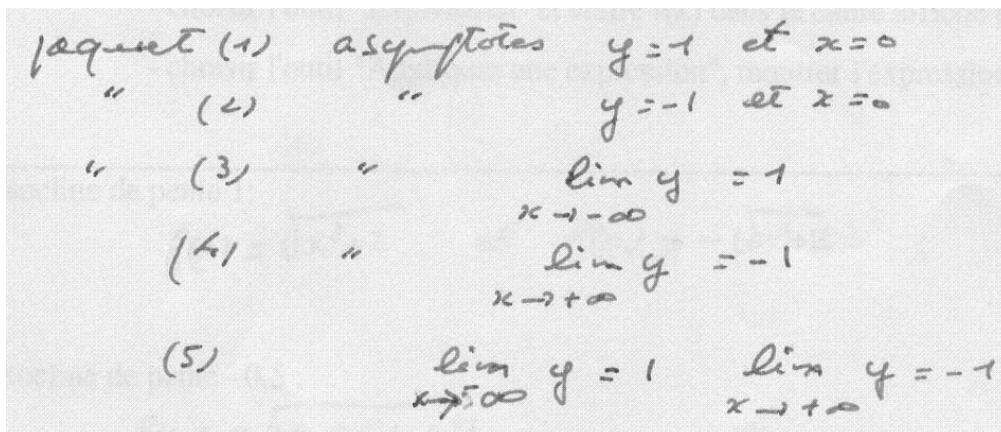


Fig. 33 : Préviation du comportement des courbes solutions en plus l'infini, d'après le binôme E1/E2

### Conclusion

De façon générale, la prévision des comportements des courbes solutions à l'infini est faite par les binômes, en ne s'appuyant que sur les données graphiques dont ils disposent. Deux binômes (E22/E23 et E1/E2) n'expriment pas leurs prévisions en termes de signes de la dérivée, comme nous l'avions prévu dans l'analyse a priori. Ils se limitent à décrire dans le registre discursif ce qu'ils perçoivent graphiquement.

Le travail exploratoire suscité dans cette dernière partie de la situation proposée a permis au binôme E22/E23 de confronter les conjectures faites en papier/crayon, avec les résultats graphiques obtenus à l'aide du logiciel. Ce binôme se rend compte que les courbes qu'ils ont tracées ne sont pas correctes. De plus, la conjecture qu'il avait faite sur l'existence d'une seule

asymptote, pour certaines courbes qui admettent des asymptotes horizontales (théorème en acte TA3), est déstabilisée. Ces étudiants identifient qu'il y a des courbes avec des asymptotes parallèles. En revanche, cette propriété graphique de la famille de courbes est interprétée par eux par cette affirmation « *les courbes divergent* ».

Le binôme E3/E4 a essayé de justifier mathématiquement les comportements asymptotiques, et pourtant il a trouvé de nombreuses difficultés, principalement dues à la non-dissociation entre équation différentielle et fonctions solutions. L'absence d'une expression symbolique des solutions conduit le binôme E3/E4 à traiter l'expression symbolique de l'équation différentielle comme s'il s'agissait des solutions.

### **LES ACTIVITES DE MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE DE FAMILLES DE COURBES EN GEOMETRIE DYNAMIQUE**

Rappelons que dans ces situations de construction d'un représentant symbolique (l'équation différentielle d'une famille de courbes), nous cherchons à mettre principalement à l'épreuve notre deuxième hypothèse de recherche : le recours au logiciel peut favoriser le passage du registre graphique au registre symbolique des équations différentielles.

Nous avons supposé aussi que compte tenu du niveau des étudiants (préparation au CAPES) et de l'expérience obtenue lors des situations de la première séance, ils auraient des moyens suffisants pour réussir les tâches proposées.

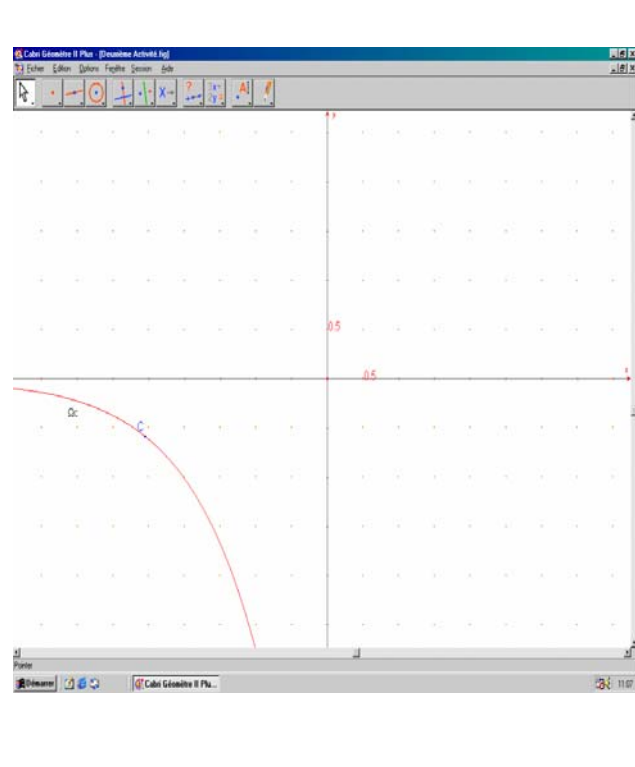
#### **3.3. MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE D'UNE FAMILLE D'EXPONENTIELLES EN GEOMETRIE DYNAMIQUE**

Cette situation consiste à mettre en équation une famille d'exponentielles où une courbe dynamique est fournie. Les objectifs sont :

- d'étudier les apports possibles du logiciel pour favoriser les passages du registre graphique au registre symbolique des équations différentielles ;
- d'étudier le fonctionnement des connaissances des étudiants dans ce type de situations, ainsi que les difficultés qu'ils rencontrent.

Nous avons proposé la situation de la manière suivante :

On considère une famille de courbes  $\Omega$ . Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega_C$ .

	<ol style="list-style-type: none"> <li>1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes <math>\Omega</math>. Quelle est, selon vous, l'équation différentielle associée à cette famille?</li> <li>2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes <math>\Omega</math>?</li> <li>3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes <math>\Omega</math>?</li> <li>4) Dans Cabri, pouvez-vous vérifier que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes <math>\Omega</math>? Si oui, comment?</li> <li>5) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes <math>\Omega</math>? Si oui, lesquelles?</li> </ol>
--	--

L'analyse *a posteriori* du travail des étudiants est effectué en tenant compte des principaux observables obtenus sur les sujets : *La recherche de l'équation différentielle, la validation de l'équation différentielle trouvée*. Dans un premier temps, nous présentons un aperçu global des réponses de l'ensemble de binômes, et ensuite nous nous focaliserons sur le travail des trois binômes choisis.

### 3.3.3. Le travail de l'ensemble de binômes

A la mise en équation des familles de courbes ont participé 23 binômes et une équipe de trois étudiants. Nous présentons leurs réponses à l'aide de tableaux, ces réponses ayant été tirées des fiches que les étudiants ont remplies.

#### **La recherche de l'équation différentielle**

Dans le Tableau 11, en page suivante, nous présentons les stratégies mises en œuvre par les binômes pour arriver à l'équation différentielle de la famille d'exponentielles :

<i>Type de stratégie</i>	<i>Effectifs</i>	<i>Commentaire</i>
EXP-ALG (ED obtenue à partir d'une expression symbolique des solutions)	1/24	E32/E33
EXP-ALG-VER (même que EXP-ALG mais avec vérification)	7/24	E34/E35, E36/E37, E38/E39, E42/E43, E44/E45, E46/E47, E54/E55
EXP-DT-NUM (ED obtenue par l'identification de l'invariant numérique de la famille, à l'aide d'une droite tangente et de sa pente)	16/24	E1/E2, E3/E4, E22/E23 : nous analyserons ci-après le travail de ces binômes  E5/E6/E7, E8/E9, E14/E15, E18/E19, E20/E21, E24/E25, E28/E29, E26/E27, E40/E56, E48/E49, E50/E51, E52/E53  E12/E13 : première stratégie « <i>intuitivement, la famille [...] est une famille d'exponentielles, on peut conjecturer que l'ED [...] est de la forme <math>ay'+by+c=0</math></i> »

Tableau 11 : Stratégies mises en œuvre par l'ensemble des étudiants pour arriver à l'équation différentielle

La totalité des binômes a réussi à mettre en équation la famille d'exponentielles. Deux tiers des binômes (16 sur 24) ont mis en œuvre la stratégie EXP-DT-NUM qui consiste à identifier, par exploration dynamique, une propriété numérique de la famille de courbes (pente de droite tangente = ordonnée du point de tangence) et à partir de celle-ci, à obtenir l'équation différentielle demandée. Le reste des binômes (8 sur 24) a associé a priori une expression symbolique à la famille de courbes, et à partir de son traitement par la dérivée (connaissances C2) ils sont arrivés à l'équation de la famille de courbes.

### **La justification de l'équation différentielle**

Dans le Tableau 12, ci-après, nous présentons les justifications fournies par l'ensemble des binômes selon le type d'arguments mis en œuvre. Très souvent, les binômes ont donné plus d'un argument pour justifier l'équation différentielle :

Type d'arguments	Effectifs	Commentaire
RES-ED (Résolution de l'ED ; tracé de courbes solutions et vérification par superposition)	20/24	E1/E2, E18/E19, E20/E21 : sans prendre en compte la superposition E3/E4, E5/E6/E7, E8/E9, E12/E13, E14/E15, E22/E23, E26/E27, E28/29, E32/E33, E36/E37, E38/E39, E42/E43, E44/E45, E48/E49, E50/E51, E52/E53, E54/E55
VAL-NUM (fondés sur la validation numérique de l'ED)	7/24	E1/E2, E18/E19, E32/E33, E34/E35, E36/E37, E40/E56, E46/E47
CHAMP- TGTS (reconnaissance de la cohérence graphique de la famille de courbes avec le champ de tangentes)	8/24	E40/E56, E42/E43, E44/E45, E48/49, E50/E51, E52/E53, : courbe dynamique tangente au champ E46/E47, E54/E55 : le champ décrit une famille d'exponentielles (ces binômes appartiennent au même groupe. La construction du champ a été guidée par le professeur)
BRCH-INF-S (étude des branches infinies à partir de l'expression symbolique des solutions)	6/24	E22/E23, E28/E29 : courbes tendent vers 0 en moins l'infini comme $e^x$ E1/E2, E14/E15, E18/E19 : $ke^x$ tend vers 0 en moins l'infini E48/E49, E50/E51 : $ke^x$ tend vers 0 en moins l'infini et vers $\pm\infty$ en $+\infty$
ISC-0 (fondés sur l'isocline zéro)	2/24	E24/E25, E40/E56
SENS-VAR (étude du sens de variation à l'aide du signe de la dérivée)	9/24	E8/E9, E14/E15, E34/E35, E40/E56, E42/E43, E44/E45, E46/E47, E52/E53, E54/E55
SOL-SYM (fondés sur la symétrie des courbes solutions)	4/24	E3/E4 (sans justifier), E5/E6/E7, E18/E19, E50/E51
VAR-ED (fondés sur l'identification de propriétés dues à la forme de l'expression symbolique $y'=f(y)$ )	1/24	E22/E23
Réponses isolées	1/24	E24/E25 : « pour C placée en (0, 1), on obtient la courbe exp. qui vérifie $y'=y$ »

Tableau 12 : Des arguments formulés par l'ensemble des étudiants justifiant l'équation différentielle

Nous constatons que la presque totalité des binômes (20 sur 24) élabore des arguments reliant de façon indirecte le registre graphique et le registre symbolique (des arguments du type RES-ED) pour justifier l'équation différentielle. Cependant, nous remarquons que tous les binômes sauf trois (E12/E13, E26/E27, E38/E39) fournissent au minimum deux types d'arguments. Nous constatons que trois des sept binômes (E1/E2, E18/E19, E40/E56) qui donnent des arguments du type VAL-NUM mettent en œuvre un raisonnement circulaire, et qu'ils sont arrivés à l'équation différentielle recherchée en mobilisant la stratégie EXP-DT-NUM qui passe par l'identification de l'invariant numérique de la famille de courbes ; cependant, ces trois binômes justifient l'équation différentielle en utilisant, au retour, des arguments numériques.

Nous remarquons que les arguments du type CHAMP-TGTS, non prévus dans l'analyse *a priori*, sont apparus suite à la demande faite au professeur, par quelques binômes d'un même groupe, au sujet de la procédure pour construire le champ de tangentes de l'équation



différentielle trouvée. Nous supposons que la mise en œuvre d'arguments du type BRCH-INFI-S pour l'étude des branches infinies des solutions, à l'aide de l'expression symbolique des solutions, a été facilitée par le fait de disposer de cette expression. Finalement, nous trouvons qu'un peu plus d'un tiers des binômes (9 sur 24) utilisent des arguments du type SENS-VAR, qui relie directement le registre graphique des solutions et le registre symbolique de l'équation différentielle. La formulation de ce dernier type d'argument témoigne de la disponibilité des connaissances telles que C6, qui permettent de faire le lien entre la dérivée et la pente des droites tangentes, et C5, qui permettent d'interpréter le sens de variations des solutions à l'aide du signe de la dérivée.

### **Conclusion**

La totalité des étudiants a obtenu l'équation différentielle associée à la famille d'exponentielles. Nous remarquons que le recours au travail exploratoire à l'aide du logiciel semble favoriser la réussite des tâches proposées. Par exemple, le binôme E12/E13, qui supposait au début que l'équation différentielle était  $ay'+by+c=0$ , arrive finalement à l'équation attendue. En ce qui concerne la justification de l'équation différentielle trouvée, presque tous les binômes ont mis en œuvre des arguments du type RES-ED (fondés sur la résolution algébrique de l'équation différentielle). La justification a été faite, de façon générale, par le tracé de courbes à partir de l'expression symbolique des solutions et par la superposition de la courbe dynamique à celles-ci.

Nous présenterons dans les développements suivants, une analyse plus détaillée du travail des trois binômes choisis.

### **3.3.4. La recherche de l'équation différentielle des exponentielles par les binômes choisis**

#### ***Binôme E22/E23***

Ce binôme fait partie du premier groupe auquel nous avons proposé cette situation. Pour ce groupe, nous n'avons pas fourni de *macro* pour construire une droite tangente à la courbe dynamique. Il s'agissait de ne pas donner d'indices sur une stratégie possible pour arriver à l'équation différentielle cherchée.

Une des premières stratégies mises en œuvre par ce binôme demandait la construction d'une droite tangente, tâche qui leur a pris beaucoup de temps. Comme nous l'avons signalé dans l'analyse *a priori*, nous supposons que le lien avec les droites tangentes est établi par le binôme, car on demande de trouver une équation différentielle ; et dans le registre graphique, les dérivées sont interprétées en termes de tangentes.

#### ***Construction de la droite tangente***

Après plusieurs essais du binôme pour tracer la droite tangente, le professeur leur suggère de la construire comme la limite d'une droite sécante. Donc les étudiants tracent la droite qui passe par deux points de la courbe, et cette droite devient tangente lorsque l'un des deux points de la courbe est superposé à l'autre.

*Le début de la recherche de l'équation différentielle*

Les étudiants tracent une droite tangente à la courbe dynamique et obtiennent son équation. Rappelons que le logiciel actualise cette équation lors du déplacement de la droite. Dans ce cas les étudiants font le lien, sans problème, entre la pente de la droite tangente et la dérivée de la fonction dont la courbe dynamique est représentative :

- E23 : ... mais ça, c'est  $y'$  pour le point là... T'es bien d'accord?  
 E22 : bah, ouais  
 E23 : là ... la tangente ... son équation, c'est pour le point, là... de coordonnées là, oui, t'es bien d'accord ?  
 E22 : oui ...  
 E23 : donc on peut écrire (... ?) que  $y'$  ... en ce point, ça vaut ça ... ça vaut 0,67  
 E22 : que  $y'$  en ce point, ça vaut 0,67...

(lignes : 32-37)

*L'équation  $y=ax+b$  comme modèle pour l'équation différentielle cherchée*

La première stratégie du binôme E22/E23 consiste à prendre l'expression symbolique  $y=ax+b$  comme modèle d'expression pour obtenir l'équation différentielle cherchée. Les étudiants supposent qu'il y a un lien entre la recherche d'une équation différentielle de premier ordre pour la famille de courbes et l'expression symbolique de l'équation d'une droite tangente à ces courbes. Dans les échanges suivants, nous remarquons que l'étudiant E23 considère la recherche de l'équation différentielle comme relevant du cadre de l'algèbre. Il suppose que pour obtenir les coefficients  $a$  et  $b$ , il faut connaître l'équation de la droite tangente en deux points distincts de la courbe. Cette stratégie met en œuvre un théorème en acte que nous formulons comme suit :

*« l'équation différentielle associée à une famille de courbes est soit de la forme  $y'=ax+b$ , soit de la forme  $y'=ay+b$ , où  $y=ax+b$  est l'équation de la droite tangente en un point quelconque d'une courbe solution de la famille » (TA4)*

La stratégie de l'étudiant E23 semble supposer que les équations des droites tangentes aux courbes solutions sont toutes de la forme «  $y=ax+b$  », avec  $a$  et  $b$  fixes : l'équation de la droite tangente en un point  $P$  est utilisée pour connaître la pente «  $y'(P)$  » ; les coordonnées de  $P$  sont utilisées pour être substituées par  $x$  et par  $y$  dans l'équation différentielle cherchée «  $y'=ax+b$  » :

- E22 : donc on a... tu vois, pour  $y$ , le point de coordonnées (-4,54; 7,46)...  
 E23 : on sait que  $y'$ , la pente, est égale à 7,46. T'es d'accord ? ... (... ?) Attend... Donc on sait que 7,46, puisque l'équation est de la forme  $y'=ax+b$  ..., donc  $7,46 = -4,54x+b$   
 ...  
 E22 : pourquoi  $y'=ax+b$  ?  
 E23 : bah, c'est une équation de premier ordre  
 E22 : ah l'équation différentielle, tu veux dire...  
 E23 : ouais... c'est donc une équation de la forme  $y'=ax+b$   
 E22 : non ! ... C'est de la forme  $y'=ay+b$ ... non ?  
 E23 : ah oui...  $ay+b$ ...  $ay+b$ ... Et ben, nous on sait que pour  $y=7,46$ ...

(lignes : 131-138)

Pour l'étudiant E22, il ne s'agit pas seulement d'un problème d'algèbre, et il propose pour l'équation différentielle cherchée la forme  $y'=ay+b$ . On peut faire l'hypothèse que le remplacement fait par E22, de la variable  $x$  par la variable  $y$ , s'appuie sur un raisonnement

fondé sur le théorème en acte TA1, que nous avons déjà repéré dans le questionnaire initial. Ce théorème permet de supposer que dans des situations qui demandent l'écriture d'une équation différentielle, l'expression symbolique de cette équation inclut la fonction inconnue. Dans les échanges ci-dessous, nous repérons la mise en œuvre des théorèmes TA1 et TA4 :

E22 : non, mais ce que je ne comprends pas... c'est qu'en y c'est une ... oui, mais droite, c'est pas un point... et toi, tu remplaces à chaque fois par des points

E23 : moi, je pensais qu'on pourrait trouver au point 7... on avait ça... ... pour un point... Et nos inconnues c'est  $a$  et  $b$ , et après on va chercher pour un autre point... (... ?)

E22 : bah oui, il ne s'agit pas d'un point, là

E23 : oui, mais imagine, tu le fais par... tu cherches un autre point de la tangente avec l'équation... tu vas avoir autre chose égale quelque chose  $ax+b$ . Tu trouves  $a$  et  $b$  et ton équation différentielle c'est  $y'=ay+b$

(lignes : 139-142)

Les étudiants essaient d'obtenir l'avis du professeur pour savoir s'ils ont trouvé la bonne équation :

E23 : du coup, là (... ?) notre équation est de la forme  $y'=ay+b$

P : quoi ? Quelle équation ?

E23 : différentielle.

P : ça je ne sais pas, moi. C'est à vous de savoir.

E23 : elle est du premier ordre

(lignes : 185-189)

C'est au cours des échanges suivants avec le professeur qu'E23 s'aperçoit qu'il n'a pas fait attention au fait que pour chacune des droites tangentes, les valeurs  $a$  et  $b$  étaient différentes :

P : parce que... ce que vous avez écrit, c'est linéaire, j'ai l'impression

E22 : oui, oui

E23 : voilà, du coup... alors je prenais une pente ... qu'on a trouvée pour un point donné... je voulais en prendre un deuxième... et puis...

P : ah, d'accord ... oui mais ...

E22 : on n'est pas sûres ...

E23 : ouais, mais, en effet, c'est un cas particulier, quoi... en effet, si l'on déplace on peut avoir plusieurs... [phrase inachevée]

P : oui, oui, mais là quand même, vous avez quand même une relation, quand vous faites bouger  $C$ , qu'est-ce que vous (... ?) qu'est ce que vous (... ?) toujours

E22 : oui donc, en effet... c'est le coefficient ici, ça sera toujours le même que...

P : ouais, voilà... alors essayez de réfléchir avec ça...

E23 : donc  $y' = y$

P : voilà, alors essayez de réfléchir, est-ce qu'on peut trouver une équation différentielle avec ces informations ? ... ..

(lignes : 199-209)

Nous remarquons dans les échanges ci-dessus que l'étudiant E23 se rend compte que lors du déplacement de la droite tangente, l'équation de la droite tangente change aussi, ce qui ne pourrait pas conduire à l'équation cherchée. Dans ce cas, nous remarquons que les rétroactions du logiciel ont contribué à faire abandonner le théorème TA4. Le binôme change de stratégie et prend en compte les remarques du professeur, qui suggère de trouver une relation numérique entre les objets en jeu. Donc la stratégie EXP-DT-NUM est mise en œuvre, et rappelons que cette stratégie consiste à identifier un invariant numérique de la famille de courbes, et à partir de celui-ci à écrire l'équation différentielle demandée.

L'exploration dynamique conduit à identifier cet invariant, sans difficulté. Le binôme se rend compte que pour la famille de courbes fournie, « la pente de la droite tangente est toujours égale à l'ordonnée du point de tangence ». Cet invariant est immédiatement exprimé dans le registre symbolique sous la forme  $y' = y$ , cette expression correspondant à celle de l'équation différentielle cherchée.

*L'équation différentielle «  $y' = y$  »*

L'épisode précédent semble montrer que les étudiants ont satisfait à la tâche demandée. L'exploration à l'aide du logiciel confirme la propriété numérique de la famille de courbes. Cependant, le binôme considère que la tâche n'est pas encore terminée. Dans les échanges ci-dessous, nous trouvons que pour l'étudiant E22, le lien entre l'expression symbolique trouvée et la courbe dynamique n'est pas clair. Cet étudiant semble supposer, dans un premier temps, que l'expression trouvée est en quelque sorte l'expression symbolique de la fonction associée à la courbe dynamique :

E22 : ouais, ouais... donc on a  $y' = y$  ...

E23 : parce que peut être, c'est une équation différentielle ...  $y' = y$

(lignes : 220-221)

E22 : disons que  $f(x)$  c'est égal à  $y' = y$

E23 : ben oui, mais ça c'est bien des courbes exponentielles

E22 : et ben alors, ça existe ?

E23 : ben oui, ben... c'est pas ça, une équation différentielle associée par une (... ?)

E22 : à mon avis, il y a pas que  $y' = y$ ...

E23 : parce que si on intègre..., ben après, il faut retrouver la constante

E22 : ben, il faut déjà écrire : on remarque que ..., ah c'est déjà, on remarque que  $f = y$

E23 : après, il faut chercher un point, une solution particulière, non ?

E22 : pourquoi ?

E23 : pour avoir..., parce que là, tu vas trouver que  $y$ ..., eh bien c'est  $Ce^x$  et  $C_0$ ..., c'est (... ?) c'est  $y(0) = 2$ , ou je sais pas quoi

(lignes : 226-231)

Dans les échanges suivants, nous voyons des étudiants quelque peu déstabilisés par le fait d'associer une seule expression symbolique à toute une famille de courbes. L'association d'une équation différentielle à une seule solution a été un raisonnement apparu fréquemment chez les étudiants. Ils considèrent que pour faire le lien bijectif entre équation différentielle et solutions, il faut prendre en compte soit des conditions initiales, soit l'inclusion de paramètres dans l'expression symbolique de l'équation différentielle. Nous avons formulé ce type de raisonnement sous la forme d'un théorème en acte :

« à chaque solution correspond une équation différentielle » (TA5)

Pour le binôme E22/E23, l'expression symbolique de l'équation différentielle doit s'accompagner de conditions initiales :

E23 : si on a déjà  $y' = y$ ... on a déjà ça...  $y' = y$ ... ... mais il manque une condition, en fait ...

E22 : si E23... il manque quelque chose, parce que quand tu intègres, t'as  $y =$  une constante fois  $e^x$ ... et tu n'as pas la constante... ... Je sais pas, mais j'ai une impression... (... ?)

(lignes : 233-234)

Pour savoir s'il faut prendre en compte des conditions initiales, le binôme demande l'avis du binôme voisin :

E23 : est-ce qu'il faut trouver une équation comme ça ? ... ou il faut chercher des conditions initiales ? ...

E : non, non (... ?)

E23 : d'accord... Merci... Bon, ça c'est bon, c'est juste...

E22 : (... ?) ... ça, c'est (... ?)  $y'=y$  (... ?) ...

(lignes : 241-244)

Le binôme finalise la phase de recherche, il a déjà trouvé l'équation différentielle demandée. Il semblerait que cette expression soit acceptée, sans problème, comme le représentant symbolique de la famille de courbes. Cependant, à la fin de la mise en équation de la famille de tractrices, lors des échanges de l'étudiant E22 avec le professeur, nous voyons qu'il a des difficultés concernant l'interprétation fonctionnelle de l'expression symbolique  $y'=y$  où la variable  $x$  n'est pas explicitement exprimée :

E22 : ben, on se base sur un point...on avait un point de...

P : oui

E22 : d'où «  $y'=y$  », alors que «  $y$  » et «  $y'$  » sont des fonctions. C'est ça que je comprends pas...

P : parce qu'hum... le symbolisme, que c'est difficile !

E22 : oui... voilà, c'est ça qu'on...

P : c'est ça, parce que... en fait... hum «  $y$  » c'est «  $y'(x) = y(x)$  »

E23 : donc c'est pour tous les «  $x$  »...

P : voilà, c'est pour tous les «  $x$  »... Exactement.

E23 : donc, si t'en trouves un...

P : voilà...

E23 : ça...tu peux le généraliser

P : voilà, c'est ça... C'est parce que vous (... ?) quand vous faites bouger, ça restait vrai

(lignes : 368-379, tirées du protocole sur la mise en équation des tractrices)

Finalement, dans l'extrait de fiche de réponses (fig. 34, ci-dessous), nous remarquons que les étudiants décrivent la procédure mise en œuvre pour trouver l'équation différentielle, mais qu'ils ont abandonné l'idée des conditions initiales :

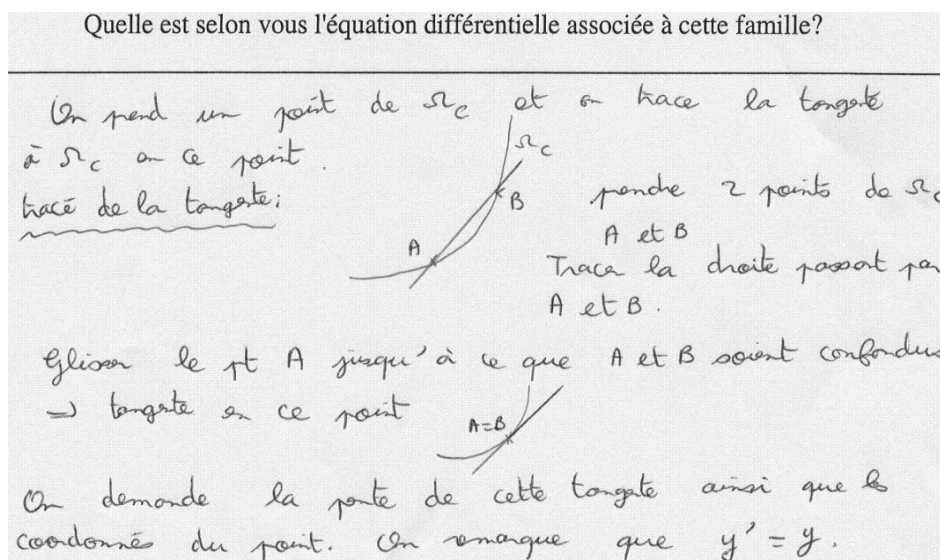


Fig. 34 : L'obtention de l'équation différentielle des exponentielles par le binôme E22/E23

### **Le choix de fournir une macro-construction pour tracer des tangentes**

Compte tenu des difficultés des étudiants dans la construction d'une droite tangente, pour les autres groupes où cette situation a été mise en place, nous avons fourni une macro-construction pour construire facilement la tangente en un point quelconque de la courbe. Nous avons fait le choix d'expliquer le fonctionnement de cette macro seulement pour les étudiants cherchant à tracer une droite tangente. Les deux binômes E3/E4 et E1/E2 dont nous analyserons ci-après les réponses, ont utilisé cette macro-construction pour tracer la droite tangente.

#### **Binôme E3/E4**

La situation de mise en équation de la famille d'exponentielles est devenue très déstabilisante pour ce binôme. Cela a obligé les étudiants à tenter plusieurs stratégies lors de la recherche de l'équation différentielle. Dans les paragraphes suivants, nous analyserons ces stratégies :

#### *Deux familles de courbes*

A partir de l'exploration de la famille de courbes, à l'aide du déplacement de la courbe dynamique, le binôme considère que les courbes sont formées par deux familles d'exponentielles et une droite. Nous faisons l'hypothèse que le binôme procède à ce classement en faisant fonctionner le théorème en acte TA2, qui laisse supposer que les courbes solutions ont une forme graphique invariante :

E4 : ... forme une famille de forme exponentielle  
 E3 : ouais, c'est vrai... d'accord  
 E4 : sauf pour regarder  $y=0$  ... cette famille correspond à des exponentielles  
 E3 : ouais, donc, il y en a même deux... il y a 2 (...?)  
 E4 : (...?) en deux mots, en fait  
 E3 : ouais

(lignes : 1-6)

E3 : [il écrit] « l'ensemble des solutions forme deux familles ... de ... »

(ligne : 8)

#### *L'équation différentielle $y'=y$ est associée à une seule courbe*

Dans les extrait d'échanges ci-dessous, nous remarquons que l'étudiant E3 associe l'expression symbolique  $y'=y$  à la forme de courbes exponentielles. Pourtant cet étudiant semble considérer l'expression comme reliée à une exponentielle particulière (probablement  $e^x$ ), et pour lui  $y'=y$  n'est pas associée à toute la famille de courbes. Nous supposons que cette image pour l'étudiant ( $y'=y \Leftrightarrow e^x$ ) pourrait être liée à un apprentissage de la fonction exponentielle fondée sur l'étude de l'équation  $y'=y$  :

E3 : parce qu'en fait, il faut rentrer, il y a quand même un coefficient puisque ces courbes c'est pas que des exponentielles,  $y'=y$  ça serait une exponentielle...

(ligne : 28)

E3 : parce qu'on a une famille de courbes exponentielles... donc si c'était une exponentielle, on aurait bien  $y'=y$ ... en fait, il y a quand même un facteur qui...

(ligne : 38)

Pour l'étudiant E3,  $y'=y$  est associée à une seule exponentielle, alors il considère qu'il faut ajouter « un facteur » (paramètre). L'étudiant met en œuvre le théorème en acte TA5 (à chaque solution correspond une équation différentielle) et il présume que pour faire le lien bijectif entre équation différentielle et les solutions, il faut inclure un paramètre dans l'expression symbolique de l'équation différentielle.

Le professeur se rend compte que le binôme parle de l'équation différentielle  $y'=y$  et il suppose que les étudiants ont déjà trouvé l'équation demandée. Donc, il leur suggère de vérifier leurs conjectures dans Cabri. Les remarques du professeur sont interprétées par les étudiants comme le signe que leur procédure est incorrecte :

P : donc, vous pensez que c'est une exponentielle, vu la forme, c'est ça?

E3 : oui

Pr : ben, regardez, vérifiez. On ne peut pas trouver un moyen pour vérifier si  $y' = y$  ou  $y' = ky$  ?

E3 :  $y'/y = k$  ça fait un ... logarithme après...

P : non, mais là, sur le fichier vous ne pouvez pas trouver un moyen pour vérifier... la conjecture que vous faites?

(lignes : 39-43)

E3 : c'est pas ça

E4 : on met ça au moins

(lignes : 46-47)

Ensuite, les étudiants abandonnent l'équation différentielle  $y'=y$  et commencent un long travail de tâtonnement en essayant de trouver l'équation différentielle de la famille de courbes.

*La famille de courbes correspond à  $y=e^{kx}$*

Le binôme essaie de mettre en œuvre la stratégie EXP-ALG-VER. Rappelons que cette stratégie consiste à proposer une expression symbolique pour la famille de courbes, à la vérifier graphiquement ou numériquement, et ensuite à la traiter dans le registre symbolique afin d'obtenir l'équation différentielle demandée. Les étudiants proposent l'expression symbolique «  $y=e^{kx}$  » comme les fonctions associées à la famille de courbes. Pour vérifier leur conjecture ils tracent, à l'aide des outils du logiciel, les courbes associées à  $y=e^x$  et  $y=e^{2x}$ ; ensuite ils examinent si ces courbes sont compatibles avec la famille de courbes, en faisant varier la courbe dynamique et en vérifiant si elle se superpose aux deux courbes tracées :

E3 : ouais ... eh, ben ...on pourrait tracer l'exponentielle, non ? On peut pas tracer l'exponentielle ?

(ligne : 50)

E3 : (... ?) ça marche, ouais, c'est bon... ok... ...

E4 : c'est quoi qui marche ?... elle est où, l'exponentielle ?... elle est où ? C'est où l'exponentielle ?

E3 : ben, elle est tracée... elle est confondue, alors...

(lignes : 94-96)

E3 : mais non. Il te faudrait tracer-y  $e^{2x}$ ...

(ligne : 112)

E4 : elle est où ?

E3 : c'est la droite en rouge, qui est là

E4 : et c'est y, là

E3 : et ça a pas marché... oh ...ouf ... (...?)

(lignes : 127-130)

E4 : mais du coup, c'est pas l'exponentielle...

E3 : ah non, c'est pas  $e^{kx}$  ... Donc, c'est pas ça ... il faut trouver autre chose, alors ... il faut tracer une tangente, alors peut-être...

(lignes : 141-142)

La vérification graphique montre que la fonction proposée ne correspond pas à la famille de courbes. Nous remarquons que les étudiants ne fournissent pas d'autre expression symbolique

candidate. Cela montre que pour eux, les courbes de forme exponentielle ne peuvent être exprimées, dans le registre symbolique, que par des fonctions de la forme  $y=e^{kx}$ . Donc, le binôme abandonne la stratégie EXP-ALG-VER.

*Le champ de tangentes*

La nouvelle stratégie mise en œuvre par le binôme consiste à essayer de construire le champ de tangentes. Les étudiants pensent que le champ de tangentes pourrait leur fournir des informations sur l'équation différentielle recherchée, et pourtant ils n'ont pas une idée précise de ce qu'ils pourraient tirer de ce champ. En ce qui concerne la construction du champ de tangentes, ils supposent que la macro fournie pourrait les aider à le construire :

E4 : non, on met l'équation, déjà, de la tangente

E3 : ah, ouais, l'équation de la tangente... Parce qu'il faudrait, il faudrait tracer un champ de pentes ... c'est-à-dire que toutes ... toutes les tangentes qui ont la même pente... (...?)  
(lignes : 173-174)

E4 : regarde ...ça bouge

E3 : ouais, tu vois, elle bouge, là... la tangente, tu... tu as pas le champ de vecteurs... tu vois ...

(lignes : 179-180)

E3 : d'un autre côté, il faut un vecteur ... tu vois bien (... ?) pour faire ça ... oui, c'est là ... mais ça, c'est presque la même que la dernière fois ...

(ligne : 182)

Les difficultés rencontrées lors de l'essai de traçage du champ de tangentes, amènent ces étudiants à concevoir une nouvelle stratégie: ils pensent qu'il y a une certaine ressemblance entre la forme de la famille d'exponentielles et celle associée à l'équation différentielle étudiée dans la séance précédente, alors il faudrait faire certaines modifications dans l'expression symbolique déjà connue pour obtenir celle qui correspond à la famille d'exponentielles.

C'est le professeur qui leur suggère d'abandonner cette stratégie, ainsi que celle du champ de tangentes. Il leur propose de se focaliser sur la courbe dynamique, afin d'identifier des propriétés de la famille lors du déplacement de la droite tangente.

*Identification d'une propriété numérique de la famille de courbes*

En suivant la suggestion du professeur, les étudiants explorent la courbe dynamique afin de trouver quelques propriétés. Ils arrivent à identifier que « la pente de la droite tangente à la courbe en un point P et l'ordonnée du P sont égales » :

P : vous voyez quelque chose, maintenant?

E3 : c'est la pente, qui est égale à... à

P : ah !

E3 : à l'ordonnée de ce point, ouais

(lignes : 214-217)

Bien que le binôme ait identifié une propriété numérique de la famille de courbes qui pourrait les conduire à l'équation différentielle recherchée, les étudiants ne voient pas que cette propriété ait quelque rapport avec une équation différentielle.

*Le tâtonnement symbolique/numérique et la stratégie des paramètres*

Les étudiants continuent alors la recherche de l'équation différentielle, et mettent en œuvre un long procédé de tâtonnement symbolique/numérique. Cette nouvelle stratégie, que nous avons



appelée VAL-NUM, s'appuie sur la confrontation des valeurs numériques de la pente de la droite tangente en un point P de la courbe dynamique (obtenue à l'aide du logiciel), avec celles obtenues la fonction  $f(x,y)$  qui intervient dans une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ . Ces valeurs sont obtenues en évaluant  $f$  dans les coordonnées de P.

Les étudiants choisissent l'expression candidate pour l'équation différentielle, au hasard, et ils essaient de la proposer de manière à ce que les valeurs numériques qu'elle produit coïncident le plus possible avec la pente des droites tangentes à la courbe dynamique :

E3 : on a ... on a  $y'$  ... c'est la tangente en ce point... égal à ...  $yx + 1,82$  ... que ça va être... alors ... (... ?)... ça me fait... 1,16, donc c'est pas ça... euh ... (... ?)

E4 : mais déjà c'est un truc "pile" ?

(lignes : 225-226)

E4 : pas mal, là

E3 : ah, ah... alors là ... on doit dire que c'est pas mal du tout

(lignes : 230-231)

E3 : non, mais là tu bouges C, tu bouges plus le point ... euh...

E4 : et j'y vais encore un peu (...?) pas mal, là

E3 : ah d'accord, tu bouges C... ah, mais là c'est moins bien

E4 : c'est moins bien

(lignes: 241-244)

Le binôme se rend compte que cette stratégie ne semble pas bien fonctionner. Le problème, c'est qu'on est dans une situation où les objets et leurs propriétés numériques sont variables. Le déplacement de la courbe dynamique, ou du point P sur la courbe, change les coordonnées de P, ainsi que la pente de la droite tangente, etc. Les étudiants considèrent que pour rendre compte des caractéristiques variationnelles des objets en jeu, l'expression symbolique de l'équation différentielle doit contenir des paramètres. Cela semble confirmer le théorème en acte TA5, selon lequel : à une équation différentielle est associée une seule solution. Donc le binôme essaie de proposer une expression symbolique contenant des paramètres, et il suppose alors que l'expression doit être semblable à celle de la droite tangente (théorème en acte TA4). Nous remarquons pourtant que la stratégie des étudiants n'est pas cohérente : d'une part, ils supposent que les paramètres peuvent rendre compte des variations des objets mais d'autre part, ils pensent qu'il faut obtenir les valeurs de ces paramètres. Par ailleurs, le binôme suppose que les paramètres pourraient être obtenus dans le registre graphique, à partir de l'identification de la pente et de l'ordonnée à l'origine d'une droite quelconque :

E3 : c'est vrai que là, t'as pas l'air d'arriver à trouver une équation correcte... c'est surtout qu'il y a ... euh (...?) le «  $b$  » quoi...

E4 : non, il aurait fallu «  $ax + b$  » ... ça te va pas, ça?

(lignes : 247-248)

E3 : ah j'ai (...?) une idée... il y a le ... quand elle coupe l'axe en 0, on ne peut pas avoir «  $b$  » si  $x = 0$

E4 : c'est ça

E3 : si  $x=0$ ... en  $x=0$  on a «  $b$  », ouais ... Là, la tangente et là, on a «  $b$  »... On a fait l'équation euh, mais ... quoi ...

(lignes : 251-253)

E3 : là, c'est évident, en fait... C'est normal... Oui, donc c'est normal... Ah! cela ne nous donne pas «  $b$  », en fait

(ligne : 255)

E3 : ouais, je pense que ça dépend de «  $x$  »... [...]

(ligne : 259)

L'échec dans l'obtention des paramètres  $a$  et  $b$  conduit les étudiants à abandonner momentanément cette stratégie. Le théorème en acte TA4 a été invalidé de façon temporaire. Ils reviennent à la stratégie VAL-NUM. Cette fois, ils analysent l'équation différentielle  $y' = yx + 3y$ . Pour celle-ci, le choix de certains points leur permet d'obtenir des valeurs proches de la pente de la droite tangente, et ces résultats les encouragent pendant quelques temps à la considérer comme une bonne candidate. Pourtant, d'autres vérifications montrent que cette équation n'est pas celle qu'on cherche :

E3 : en fait c'est ça, ouais. En fait c'est  $y' = y * x + 3y$ . Moi, je dirais ça parce que regarde : là tu te mets sur un point (...?), t'as bien ça et puis t'as bien  $3 * 5 \dots 15$ , c'est vrai que ça tombe juste. Alors, que les autres, ben... c'est arrondi à 2 centièmes près, c'est ça, mais, c'est pas bête, ça. Regarde...

(ligne : 275)

E3 : donc,  $3 * 8 \dots 24$ ,  $3 * 1 \dots 3$  ... tu vois, c'est à 2 centièmes près, ça fait 54... c'est pas 56, mais d'un autre côté c'est pas trop précis, je pense, parce que regarde... c'est pareil, c'est... 5 fois 80... euh,  $3 * 4 \dots 12$ ,  $3 * 5 \dots 15$ ... et 1 ça fait 162, c'est presque ça, quoi

(ligne : 279)

E3 : ça ne marche pas ?... ..mais c'est normal, ça dépend du point, en fait... (... ?) C'est le (... ?)

E4 : ouais ... on a besoin de (... ?) quoi alors? ...

(lignes : 292-293)

Les étudiants se trouvent démunis, faute de moyens pour lier les faits graphiques au cadre des équations différentielles. Nous trouvons que même si l'étudiant E3 identifie la propriété numérique de la famille de courbes et fait la représentation symbolique de celle-ci sous la forme  $y' = y$ , pour le binôme cette expression n'a pas de lien avec l'équation différentielle recherchée :

E3 : c'est ça ?... En plus  $y' = y$

E4 : je sais pas comment tu peux trouver ça, en passant par tout ça

E3 : mais, tu vois bien que là, la pente c'est toujours...

E4 : on ne cherche que l'équation d'une tangente...

E3 : je cherche l'équation de la tangente, oui... mais, elles ont pas toutes la même, c'est normal, on cherche une relation entre  $y'$  et  $y$ ...

(lignes : 294-298)

Pour continuer dans la recherche de l'équation différentielle, le binôme considère que la seule stratégie possible est celle des paramètres fondée sur le théorème en acte TA5. Dans le nouvel essai, les étudiants s'appuient sur le fait que l'équation différentielle  $y' = yx + 3y$  a produit des résultats plus ou moins acceptables. Donc, ils remplacent le nombre 3 par le paramètre  $\alpha$  :

E3 : bah, parce qu'... euh... il y a une relation entre la dérivée et la fonction,  $y(x)$  et  $y'$  ...  
... Mais là, on aurait, euh,  $y * (x + \alpha)$ , puisque c'est ça qui change... On sait pas trop en fonction de quoi, mais ça doit être en fonction du point «  $y$  » ... «  $y$  » il devra dépendre enfin... bon, on va essayer,  $y'/y = \dots$

E4 :  $x + \alpha$  ...

(lignes : 302-303)

Nous remarquons que l'argument de l'étudiant E3 est de dire que le paramètre  $\alpha$  permet de changer de courbes. Cette nouvelle équation est résolue (fig. 5, page suivante, extraite du brouillon). Dans ce cas, ils essaient de tracer les courbes solutions :

Fig. 35 : Un essai du binôme E3/E4 pour obtenir l'équation différentielle des exponentielles

Les étudiants n'arrivent pas à tracer la courbe, une difficulté résidant dans le fait que l'expression n'est pas sous la forme  $y=f(x)$ . Donc ils essaient d'identifier la forme des courbes associées à l'expression symbolique obtenue. Comme une partie de l'expression est de la forme quadratique, ils supposent alors que les courbes associées à l'équation différentielle  $y'=y(x+\alpha)$  sont des paraboles. Ce qui ne correspond pas à la famille d'exponentielles. L'équation différentielle n'est donc pas l'équation cherchée :

E4 : là... ah, ah, forcément, c'est une parabole, quoi

(ligne : 319)

E3 : euh, je crois que c'est toujours ... une parabole, oui... ... hum, je crois que c'est pas ça...

(ligne : 326)

#### La stratégie liant l'équation de la droite tangente

Les étudiants abandonnent la stratégie de tâtonnement symbolique/numérique et celle des paramètres. Ils mettent en œuvre une autre stratégie, qui consiste à supposer que l'équation différentielle recherchée peut se déduire de l'expression symbolique de l'équation de la droite tangente. Cette idée était déjà apparue lors de la mise en fonctionnement du théorème en acte TA4. Cependant dans ce cas, le binôme change de point de vue par rapport au rôle de la droite tangente, et au lieu de s'appuyer sur l'équation des droites tangentes particulières, il est proposé une expression symbolique générale, de la forme  $y-y(a)=y'(a)(x-a)$  pour la droite tangente en un point quelconque d'une courbe :

E3 : c'est ça, viens voir, c'est qu'en fait... la pente de la tangente ça va être  $y - y$  (en le point)  $= y'(x-a)$ . D'accord ? On a trouvé que  $y'$  c'était  $y$ , finalement

E4 : pourquoi  $y - y$  (... ?). Comment tu as ça ?...

E3 : c'est l'équation de la tangente, donc c'est «  $y$  »...

(ligne : 328-330)

Dans les extraits des échanges oraux entre étudiants et du brouillon de la figure 36, nous remarquons que lors du traitement de l'équation des droites tangentes, le binôme change de notation, «  $y$  » étant remplacé par «  $f$  ». Les étudiants semblent gênés par le fait que  $y$  est à la fois une coordonnée d'un point et une fonction. Ils utilisent aussi la propriété numérique  $y'=y$  qui a été identifiée, mais qui n'est pas considérée comme l'équation différentielle cherchée. Le traitement de l'équation de la droite tangente fait disparaître la dérivée. Les étudiants finissent par se décourager :

E4 : (... ?) il faut  $f'$  ... oui, c'est pas...  $f'$  fois d'accord ...  $f'(a)$

E3 : tout ça  $f'(a)$ , aussi... non?  
 E4 :  $f'(a)$ , oui. Moi, j'ai ... j'ai la (... ?)  
 E3 : est-ce que c'est  $f'(a)$  ?... Voilà, mais nous, ce qu'on a trouvé c'est que la pente de la tangente finalement, euh, c'est  $f'(a)$ ... hein ?  
 E4 : hum, ouais ... ..  
 E3 : donc finalement, on a  $y=f'(a)(x-1-a)$ ... on n'a plus de «  $y'$  » ... uff (...?) en plus...  
 E4 : je comprends plus rien

(lignes : 333-339)

Fig. 36 : Un essai du binôme E3/E4 pour obtenir l'équation différentielle des exponentielles

Tous les essais des étudiants ayant échoué, ils sont découragés. Dans ce contexte, une question d'E4 sur l'utilité des droites tangentes aux courbes solutions, amène E3 à se rendre compte que l'équation différentielle cherchée pourrait bien être  $y'=y$  :

E4 : eh bon, la tangente des courbes solutions, ça nous sert à quoi ? ...  
 E3 : ben, c'est ça, en fait. Ça nous permet de... ..  $y'=y$   
 E4 : comment on aurait dans tous les points, comment on aurait dans tous les points...  
 $y'=ay+b$   
 E3 : bah,  $y'=y$  quoi.  
 E4 : pourquoi  $y'=y$  ?  
 E3 : ben, à chaque fois tu as  $y'=y$ . C'est la pente de la tangente «  $y'$  »... «  $f'=f$  »  
 E4 : hum... .. dans ce cas-là, ce serait  $Ce^x$

(lignes : 345-351)

E3 : ben, parce qu'on écrit ça  $y-f(a)=f'(a)(x-a)$ .. Donc on trouve  $y'=y$

(ligne : 361)

Dans les échanges ci-dessus, nous identifions que pour l'étudiant E3,  $y'=y$  est l'équation recherchée ; tandis que l'étudiant E4 trouve que pour que cette expression soit valable dans tout le plan, il faut encore ajouter des paramètres. Ces paramètres sont considérés comme ceux qui rendent applicable en général, l'expression symbolique de l'équation différentielle (TA5). Nous identifions aussi un raisonnement circulaire de l'étudiant E3 : lors du traitement de l'expression symbolique de la droite tangente, il a utilisé la propriété numérique  $y'=y$ , mais il suppose que l'équation différentielle  $y'=y$  cherchée a été déduite de l'équation de la droite tangente. Ce raisonnement est explicité dans l'extrait suivant de la fiche de réponses (fig. 37) :

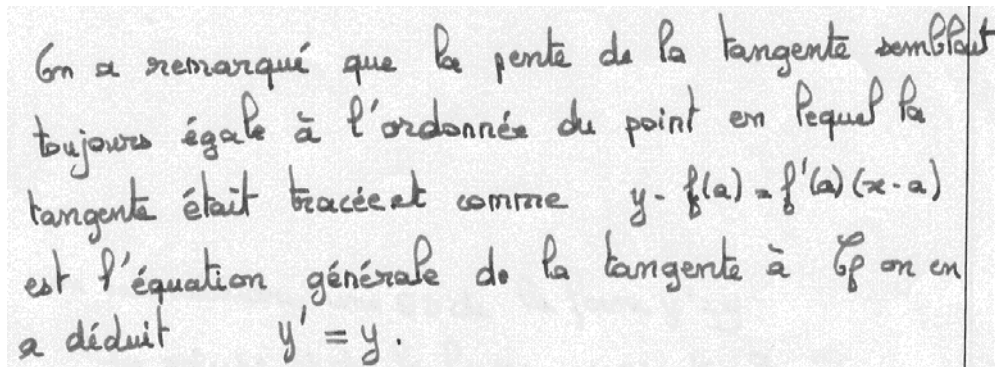


Fig. 37 : Obtention de l'équation différentielle des exponentielles par le binôme E3/E4

### Binôme E1/E2

Les étudiants utilisent la macro fournie pour construire la droite tangente qui passe par le point C de la courbe (le point C étant celui par lequel on déplace la courbe), ils obtiennent aussi la pente de cette droite. Le binôme met en œuvre immédiatement la stratégie EXP-DT-NUM (obtention de l'équation différentielle passant par l'identification de la propriété numérique de la famille de courbes, à l'aide de la droite tangente) il repère la propriété « pente de la droite tangente = ordonnée du point de tangence ». Les étudiants expriment aussi cette propriété dans le registre symbolique, sous la forme  $y' = y$ , alors que cette expression n'a pas été considérée tout de suite comme l'équation différentielle recherchée. Ce statut est accordé après application de différentes explorations faites à l'aide du logiciel, que nous décrivons ci-dessous :

«  $y' = y$  » une propriété d'un seul point d'une courbe quelconque de la famille de courbes

D'abord, les étudiants obtiennent la pente de la droite tangente et les coordonnées du point mobile C. Ils commencent l'exploration en déplaçant le point C :

E1 : donc cette pente ...il faudra qu'on regarde... à quoi elle est égale

(ligne : 66)

E2 : en  $y=0$  on a une pente zéro

E1 : oui, ça c'est clair

(lignes : 69-70)

L'exploration les amène à identifier la propriété numérique de la famille de courbes, et cette propriété est exprimée dans le registre symbolique :

E1 : elle est sympa, cette pente

E2 : assez directement proportionnelle à « y », c'est « y »...

E1 :  $y' = y$

E2 :  $y' = y$

E1 : on l'a remarqué

(lignes : 106-110)

Le professeur leur explique qu'en déplaçant le point C, ils changent de courbe, et leur suggère de construire un point variable sur la courbe pour continuer l'exploration :

P : oui, mais alors là... je suis d'accord avec vous, ça, c'est vrai pour les tangentes en C, mais vous faites ça sur des courbes solutions différentes... vous comprenez?

E2 : oui

P : oui, le point C change la courbe ... maintenant ça, c'est vrai juste pour ce point, maintenant il faudrait ... c'est pour ça que je vous disais qu'il fallait un point variable  
(lignes : 112-114)

Le résultat de l'exploration, en utilisant le point C de la courbe, est généralisé par les étudiants :

E2 : d'accord, en  $x=0$  en tous cas on a exactement le point de la pente égal à l'ordonnée  
G :  $y'=y$  en  $x=0$

(lignes : 117-118)

E2 : en  $x=0$  on a  $y'=y$  quel que soit C, quelle que soit la courbe, quoi, quel que soit oméga, quoi ... voilà, c'est...

E1 : on dirait... pour toutes les courbes, quoi !

E2 : pour toutes les courbes

E1 : pour toutes les courbes, on a  $y'=y$

(lignes : 122-125)

Nous remarquons dans les échanges ci-dessus, que pour le binôme  $y'=y$  est seulement l'expression symbolique de la propriété numérique de la famille des courbes « pente de droite tangente = ordonnée du point de tangence ». Elle n'est pas encore considérée comme l'équation différentielle recherchée.

«  $y'=y$  » une propriété de quelques points d'une courbe de la famille des courbes solutions

Le binôme continue ensuite l'exploration sur une seule courbe. Il est supposé qu'une courbe intéressante à étudier est celle qui passe par le point (1, 1). Le choix de ce point leur semble stratégique, car il donne peut-être certaines informations particulières sur l'équation différentielle recherchée :

E2 : voilà, je (... ?) le point... ... voilà, là on a un point typique, je vais afficher ses coordonnées, peut-être

E1 : oui, oui

E2 : parce qu'on fait la tang... la ...

E1 :  $y'=1$

E2 : ça me donne la droite  $y=x$

E1 : ouais

(lignes : 148-153)

E1 : au point 1 ...  $y'=1$ , ça doit être une équation simple ... mais bon ...

E2 : on a ça, ça a l'air faux, ça

(lignes : 163-164)

Les étudiants vérifient que la propriété numérique  $y'=y$  est valable pour certains points de la courbe. Nous remarquons qu'ils ne déplacent pas les points, mais qu'ils les tracent à chaque fois :

E1 : donc, on a quand même  $y'=y$  en chacun des points de la courbe

E2 : non, non, non, non

E1 : bah, nous on a aussi  $y'=y$  par ces points-là

(lignes : 187-189)

E1 : (... ?) on aura  $y'=y$  dans tous les points de la courbe, on va peut-être prendre d'autres points encore

(ligne : 191)

Les échanges ci-dessous montrent que pour le binôme E1/E2, l'expression  $y'=y$  n'est pas encore considérée comme l'équation différentielle de la famille de courbes, mais comme une propriété numérique de quelques points de la courbe :

P : on vous demande une équation différentielle et vous, qu'est ce que vous avez remarqué ?

E1 : ben, que  $y'=y$  en deux points déjà

P : ah... on ne peut pas le voir en plus de points ? ...

E1 : alors, il faut qu'on fasse plus de points, parce que deux points c'est pas suffisant, c'est sûr...

(lignes : 209-212)

«  $y'=y$  » *propriété valable pour différentes courbes de la famille*

Les étudiants continuent l'exploration avec d'autres courbes et ils commencent à déplacer les points sur les courbes, les rétroactions graphiques et numériques du logiciel leur permettant de se rendre compte de la validité de la propriété pour les nouvelles courbes :

E1 : c'est pas mal, là... mais ça, on le savait... mais on va le bouger quand même (... ?) plus

E2 : ouais, c'est ça, voilà c'est ça, ouais

(lignes : 228-229)

E2 : ouais, on a qu'on a toujours  $y'=y$

E1 : voilà  $y'=y$

E2 : quel que soit  $x$

E1 : oui, c'est bien ça, ouais ... 0.11... (... ?) 0.9... voilà... ... oui, voilà... Donc on a réussi à le prouver là ... alors

(lignes : 231-234)

L'exploration dynamique a permis de vérifier la validité de la propriété numérique pour toute la famille de courbes. Nous remarquons dans les échanges ci-dessous, le conflit procédant du lien entre l'expression symbolique  $y'=y$  et la famille de courbes :

E2 : mais  $y'=y$  donc... ça serait ... euh ... après, qu'est-ce qui distingue les... comment est-ce que  $y'=y$  ça va donner toute la famille de courbes ?

E1 : ah, ben, c'est l'équation différentielle

E2 : c'est les conditions à l'origine, alors ?

(lignes : 235-237)

E1 : sur une courbe solution, on dirait que l'équation différentielle c'est  $y'=y$ . Maintenant, il faudrait peut-être tracer une autre courbe solution, et on n'aura pas forcément  $y'=y$

(ligne : 240)

Nous remarquons qu'à nouveau le théorème en acte TA5 est mobilisé, et que les étudiants supposent que l'équation différentielle est associée à une seule solution. Pour avoir le lien bijectif il faudra, soit prendre en compte les conditions à l'origine, soit modifier l'expression symbolique de l'équation différentielle.

Par ailleurs, dans les échanges relatés ci-dessous ainsi que dans la première partie de l'extrait de la fiche de réponses (fig. 38 ci-après), nous observons que les étudiants donnent le même niveau d'importance aux informations particulières concernant la droite tangente au point (1,1) de la courbe représentative de la fonction solution  $y=e^x$ , qu'à la propriété numérique de la famille de courbes :

E2 : on a vérifié déjà deux choses  
 E1 : oui  
 E2 : on a vérifié que la pente d'une part est égale, était égale à... on a vérifié, on a vérifié que la tangente... la droite... euh  
 E1 : alors... [il écrit] « La tangente »  
 E2 : restait tangente en C à la courbe, donc  $y'$ ... (... ?) en C à la courbe, et la droite  $y=x$   
 ...  
 E1 : a pour pente 1 ?  
 E2 : voilà, et en plus elle passe par l'origine, c'est ça que je veux dire... je sais pas ce que ça peut ...  
 E1 : ah, déjà (... ?) c'est bon, elle a pour pente 1, oui ... euh ... passe par l'origine ?... ah oui  
 E2 : est-ce que ça (... ?) dans l'équation solution... est-ce que ça a un sens ?... je me demande si c'est pas un point très caractéristique  
 E1 : oui, c'est un point caractéristique, ce point C, mais enfin bon, on va (... ?) rien à faire pour l'équation, je pense  
 E2 : d'accord, on vérifie que ... euh ...  
 E1 : pour l'équation différentielle  
 E2 : mais je ne sais pas  
 E1 : mais, ça a quand même une importance, parce que (... ?) origine en plus  
 E2 : parce que si c'était décalé comme ça, ça seraient pas les mêmes équations  
 (lignes : 247-261)

Nous trouvons, dans les échanges suivants, que pour résoudre le conflit provoqué par le lien entre une expression symbolique de l'équation différentielle et la famille de courbes (TA5), l'étudiant E2 recourt aux conditions initiales en s'appuyant sur l'avis du professeur :

P : ça y est, vous vous êtes mis d'accord ?  
 E1 : voilà, l'équation différentielle de cette courbe-là, c'est  $y'=y$  maintenant, pour les autres courbes on va essayer de voir, parce que ça sera  $y'$  plus quelque chose ... donc il y a quelque chose à (... ?)  
 E2 : et je me demande si ce n'est pas les conditions à l'origine, parce qu'en fait...  
 P : oui, c'est ça ... la condition à l'origine est donnée par C, c'est exactement ça  
 (lignes : 265-268)

Malgré l'équilibre apparent trouvé entre la famille de courbes et l'équation différentielle, suite à la mise en œuvre du théorème en acte TA5, nous remarquons que des difficultés persistent pour lier l'équation différentielle et la famille de courbes. L'étudiant E2 pense que peut-être il faudra prendre en compte les propriétés de la courbe particulière qui passe par le point (1,1) :

E2 : et ça veut dire, c'est que pour moi... s'il m'intéressait, ce point C, plus qu'un autre, puisque c'était que la tangente passe par l'origine, je ne sais pas si c'est vraiment important, mais

(ligne : 272)

E1 : et après, il faut regarder aussi ... (... ?) oui pour les autres... ça va être différent, on va essayer de trouver des points intéressants comme celui-là

E2 : oui, oui

E1 : peut-être qu'on a des points symétriques, par exemple... (... ?)

(lignes : 283-285)

E1 : maintenant, on va prendre une autre courbe, un peu intéressante comme cela, qu'est-ce qu'on peut faire ?...en ce point ... en ...(-1,1) ?

E2 : et ça, par exemple... c'est, euh ... Tu vois ce que je veux dire ... parce que la question que je veux poser, c'est... est-ce que... quel le ... quels sont les conditions d'origine pour cela, quoi ?... est ce qu'on peut les trouver ?



E1 : ben, il suffit d'avoir un point, on sait que c'est une courbe qui passe par le point (1, 1), ça c'est les conditions à l'origine

(lignes : 289-291)

Finalement, les rétroactions du logiciel et le recours à la stratégie des conditions initiales (TA5) aboutissent à un point d'équilibre qui permet de faire le lien entre l'expression symbolique et la famille de courbes :

E1 : l'équation différentielle... ouais, on a trouvé que  $y'=y$  avec la condition initiale. Maintenant, avec une autre condition initiale on va voir si c'est la même chose, et j'ai l'impression que c'est pareil... puisque t'as les deux pentes ici... voilà

E2 : donc on va faire deux points, c'est suffisant

(lignes : 331-332)

E1 : c'est bien ça ouais ...

E2 : on aura tous, tous ceux ...

E1 : quelle que soit la courbe

(lignes : 341-343)

Dans l'extrait de fiche de réponses (fig. 38 suivante), en première partie nous remarquons les traces du conflit sur la prise en compte de propriétés particulières d'une droite tangente. Le recours au théorème en acte TA5 permet finalement de donner à l'expression symbolique  $y'=y$  le statut d'équation différentielle de la famille de courbes :

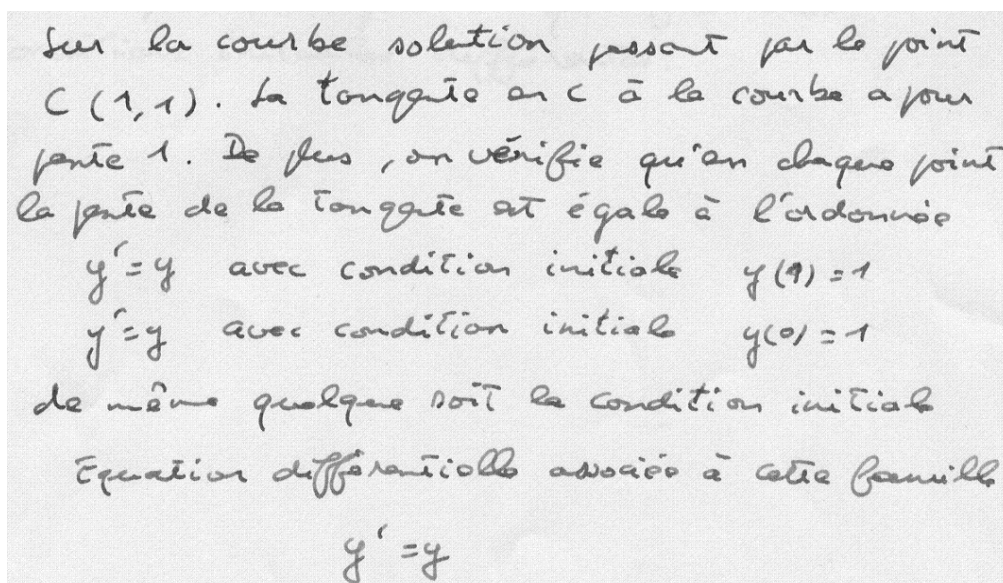


Fig. 38 : Obtention de l'équation différentielle des exponentielles par le binôme E1/E2

### Conclusion

De façon générale, la mise en équation de la famille d'exponentielles en géométrie dynamique est devenu très déstabilisante pour les trois binômes. Les réponses fournies par les étudiants nous ont permis de déceler de nombreuses difficultés concernant des notions élémentaires de l'analyse. Nous avons constaté aussi que l'accès à un travail exploratoire, à l'aide du logiciel, a donné la possibilité de mettre en œuvre différents types de raisonnements lors de la recherche de l'équation différentielle.

La stratégie de base EXP-ALG-VER (obtention de l'équation différentielle à partir d'une expression symbolique des solutions, avec vérification) a été brièvement évoquée, mais seulement par le binôme E3/E4. Finalement, les trois binômes ont mis en œuvre la stratégie

EXP-DT-NUM (obtention de l'équation différentielle passant par l'identification d'un invariant numérique de la famille de courbes) pour arriver à l'équation différentielle demandée. Pourtant, le recours à cette stratégie n'a pas été immédiat pour les binômes E22/E23 et E3/E4, c'est le professeur qui l'a suggérée. Le binôme E1/E2 a utilisé la stratégie EXP-DT-NUM dès le début du travail. De plus, les trois binômes ont eu des difficultés lors de sa mise en fonctionnement.

Nous avons observé que deux binômes (E22/E23 et E3/E4), dans une des phases de la recherche de l'équation différentielle, ont supposé que l'expression symbolique de l'équation de la droite tangente pouvait être utilisée comme modèle pour l'équation différentielle de la famille de courbes (théorème en acte TA4). Ces étudiants assimilent la recherche de l'équation différentielle d'une famille de courbes et la recherche de l'équation de la famille de droites tangentes d'une courbe.

Les trois binômes ont éprouvé des difficultés à mettre en relation la seule expression symbolique de l'équation différentielle avec toute la famille de courbes. Ils considèrent qu'une équation différentielle correspond à une fonction solution (TA5). Pour régler le conflit suscité par le recours au théorème en acte TA5, les étudiants ont fait intervenir soit les conditions initiales, soit l'incorporation de paramètres dans l'expression symbolique de l'équation différentielle. Les étudiants supposent que les conditions initiales ou les paramètres permettent de faire une association bijective entre équation différentielle et solutions. Ces difficultés semblent avoir des liens avec l'enseignement traditionnel au niveau du lycée, sur les fonctions numériques : de façon générale, une fonction est explicitement représentée par une expression symbolique et elle est associée à une seule courbe. Par ailleurs, ces difficultés semblent avoir aussi un lien avec le sens dans lequel on fait le passage entre les registres graphique et symbolique. Dans la première situation que nous avons proposée (étude descriptive d'une équation différentielle), les étudiants connaissaient l'expression symbolique de l'équation différentielle, et ils n'ont pas remis en question le fait d'associer une seule expression symbolique à toute une famille de courbes. En revanche, dans le sens contraire, du graphique vers le symbolique, ces difficultés sont apparues.

Une autre grande difficulté pour les étudiants, plus explicitement identifiée chez les binômes E1/E2 et E3/E4, a été la reconnaissance de  $y'=y$  comme l'équation différentielle recherchée, et celle-ci a été considérée seulement comme une propriété numérique des points de la famille d'exponentielles. L'expression symbolique  $y'=y$  est reconnue comme une relation entre la pente de la droite tangente à une courbe solution et la coordonnée du point de tangence. Les étudiants restent dans le cadre de la géométrie analytique ; ils constatent que pour la courbe dynamique, point par point, la coordonnée du point est égale à la pente de la droite tangente en ce point. Le binôme E3/E4 arrivait à exprimer symboliquement la relation numérique identifiée comme  $y'=y$ , mais il ne trouvait pas que cette relation aurait quelque lien avec l'équation différentielle cherchée. Nous faisons l'hypothèse que les difficultés pourraient tenir à ce que dans l'expression  $y'=y$ , on ne voit pas que  $y'$  est fonction de  $x$  et de  $y$ . L'étude des difficultés rencontrées par les étudiants dans des situations où les propriétés numériques de la famille de courbes conduisent à des équations différentielles de forme  $y'=g(x)$  ou  $y'=f(x,y)$ , pourrait être intéressante.

Néanmoins, par-delà les difficultés identifiées chez les étudiants, nous avons constaté que les trois binômes sont arrivés à l'équation différentielle attendue. Le recours à l'environnement de géométrie dynamique a favorisé l'identification de la propriété numérique invariante de la famille de courbes, et à partir de celle-ci, les binômes ont obtenu son équation différentielle.

Ce qui confirme que la géométrie dynamique peut contribuer à faire le passage du registre graphique vers le registre symbolique des équations différentielles (deuxième hypothèse de recherche).

### 3.3.5. *La justification de l'équation différentielle par les binômes E22/E23, E3/E4 et E1/E2*

Nous présentons dans les paragraphes suivants, les arguments proposés par les binômes E22/E23, E3/E4 et E1/E2 pour valider l'équation différentielle trouvée.

#### *Binôme E22/E23*

Le binôme E22/E23 élabore des arguments des types RES-ED (fondés sur la résolution algébrique de l'équation différentielle), VAR-ED (fondés sur l'identification de propriétés liées aux courbes solutions par rapport aux variables qui interviennent dans l'expression symbolique de l'équation différentielle) et BRCH-INF-S (fondés sur l'étude des branches infinies des solutions à partir de l'expression symbolique des solutions), pour valider l'équation différentielle trouvée. Nous présenterons par la suite le cheminement suivi par les étudiants pour élaborer ces arguments.

D'abord, dans les échanges ci-après, nous trouvons que le binôme trace la courbe représentative de la solution  $y=e^x$  et nous remarquons que l'étudiant E22 essaie de la faire bouger. Il semblerait que cet étudiant suppose que toutes les courbes qu'on trace à l'aide du logiciel sont dynamiques. L'étudiant E23 se rend compte que la courbe dynamique semble pouvoir se superposer à cette courbe. Cet essai pour formuler des arguments justifiant l'équation différentielle conduit l'étudiant à mettre en oeuvre une stratégie fondée sur des arguments du type VAR-ED :

E22 : on peut même (... ?) ... on pourrait peut-être tracer la courbe «  $e^x$  »... et voir si C passe par la courbe... non ?

(ligne : 273)

E23 : si l'équation... ça veut dire c'est «  $y =$  quelque chose fois  $e^x$  »... Comment on fait, déjà, pour tracer une courbe ? ... Je sais plus comment on fait. Il faut montrer les axes... ... Attend. Il faut créer un point, je sais pas ... ... Comment on fait pour tracer une équation, une droite... si on veut tracer la droite «  $e^x$  » (... ?)

(ligne : 278)

E22 : mais, le problème c'est qu'elle peut pas bouger ...

E23 : ah non, c'est bon... on peut trouver, euh ... la même courbe

E22 : on n'est pas sûr, quoi ... ..

E23 : eh ben, il faut montrer... On peut faire une ... une tangente en un point... et les tangentes seront parallèles... justement

(ligne : 287-290)

E23 : et tu vois, je voudrais faire la tangente, là, et voir si les deux droites, là, sont parallèles...

E22 : mais je sais pas... autant dire que si C appartient à cette droite, c'est bon, quoi...

(lignes : 300-301)

Dans les échanges suivants, nous remarquons que l'étudiant E23 conjecture le parallélisme des droites tangentes à des courbes solutions pour les points de la même ordonnée (des arguments du type VAR-ED). L'étudiant E22 ne comprend pas la raison de la stratégie suggérée par E23, ce qui conduit E23 à expliciter plus en détail l'interprétation graphique qu'il fait de l'expression symbolique de l'équation différentielle :

E22 : ça me paraît bizarre de prendre deux points à peu près situés dans le même endroit... et voir si la tangente est parallèle...tu vois ce que je veux dire...

E23 : ah  $y'=y$ ... l'équation différentielle, donc pour les mêmes points sur « y » tu peux trouver la même pente de la tangente... Tu comprends ? C'est pour ça que je parle de parallèle et du coup, les tangentes devraient être égales...

(lignes : 333-334)

Pour s'assurer de l'efficacité de cette stratégie, E23 demande l'avis du professeur :

E23 : on essaie de montrer que les tangentes sont parallèles, pour un même point d'ordonnée égale ou pas ?

P : oui, par exemple

E23 : d'accord... c'est comme ça que...

P : ah si, il y a plein de manières

(lignes : 345-348)

Dans les échanges ci-dessous, nous remarquons que le recours au logiciel joue un rôle très important pour vérifier la conjecture formulée par E23. Le lien entre le registre graphique et le registre symbolique semble être favorisé par l'exploration dynamique. Les étudiants cherchent aussi à utiliser l'outil « Appartient ? » de Cabri pour vérifier si le point C de la courbe dynamique appartient aussi aux courbes tracées à partir de l'expression symbolique des solutions. Dans ce cas, cet outil de Cabri ne peut pas être utilisé :

E23 : ah, parce que ... ou alors... puisqu'on n'arrive pas à se servir de la commande C « Appartient ? » à la droite... on essaie de montrer que C appartient à  $e^x$ ... Enfin, ou que les deux droites sont confondues, en fait

(ligne : 349)

Comme les étudiants ne trouvent pas à l'aide du logiciel la manière de vérifier que les courbes se superposent, alors ils se limitent à affirmer que les courbes se confondent (cf. fig. 39 ci-dessous). Nous trouvons aussi que le binôme partage avec ses voisins étudiants leur stratégie, fondée sur la vérification des droites parallèles. L'étudiant E22 semble avoir compris cette stratégie :

E22 : tu choisis le point où t'as tracé la tangente. Ensuite tu traces la parallèle à l'axe des abscisses...

E23 : en fait, tu donnes un point qui a la même ordonnée que la (... ?) à la tangente...

Voisin : ah (... ?) d'accord

E23 : (... ?) T'as le point sur la courbe, et il faut que les tangentes soient parallèles à la (... ?)

Voisin : d'accord

(lignes : 420-424)

Finalement, dans la fiche de réponses (fig. 39 ci-après) le binôme explicite les arguments (des types RES-ED et VAR-ED) qui valident l'équation différentielle trouvée :

3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ?

Si  $y' = y$  alors  $y = A e^x$  où  $A \in \mathbb{R}$ .  
 On trace la courbe  $y = e^x$  par exemple.  
 On regarde si les tangentes à  $\Omega_c$  et  $\exp(x)$  en un point de même ordonnée sont parallèles.  
 Elles le sont donc  $\exp(x) \in \Omega$  la famille de courbes  $\Omega$ .  
 ou On peut vérifier que lorsqu'on déplace  $c$ ,  $\Omega_c$  et  $\exp(x)$  sont confondues.

Fig. 39 : Des arguments justifiant l'équation différentielle (binôme E22/E23)

La quatrième question requiert explicitement d'utiliser le logiciel pour valider l'équation différentielle obtenue. Pour le binôme, il s'agit de la même question que précédemment, et ils explicitent un peu plus la stratégie mise en œuvre dans l'élaboration des argument des types RES-ED et VAR-ED lors de la question précédente (cf. fig. 40 suivante) :

On peut reprendre le procédé de la question 3.1.  
 On trace plusieurs courbes d'équation  $y = \exp(x)$ ,  $y = n \exp(x)$ ,  $y = 20 \exp(x)$ ...  
 On trace la parallèle à  $(0x)$  passant par le point de  $\Omega_c$  où on a la tangente.  
 $\Rightarrow$  On obtient des points de même ordonnée.  
 On trace les tangentes en ces points aux courbes ( $\exp(x)$ ,  $n \exp(x)$ ,  $20 \exp(x)$ ...).  
 On vérifie avec Calc que ces tangentes sont parallèles (avec la fonction "parallèle ?").

Fig. 40 : Des arguments justifiant l'équation différentielle (binôme E22/E23)

La dernière question demandait d'expliciter des propriétés mathématiques de la courbe dynamique, permettant de confirmer qu'on avait trouvé la bonne équation. Pour E22, un argument pour confirmer la validité de l'équation est la cohérence graphique perceptive entre le comportement en moins l'infini de la courbe représentative de la solution  $e^x$ , et le comportement graphique de la courbe dynamique. Le lien établi dans ce cas, entre le registre graphique des solutions et le registre symbolique de l'équation différentielle, passe par l'expression symbolique des solutions; il s'agit d'un argument du type BRCH-INFI-S (étude des branches infinies, à l'aide de l'expression symbolique des solutions) :

E22 :... on peut dire que la limite d'exponentielle en moins l'infini, c'est 0... et ça se voit, alors...

(ligne : 464)

Finalement, dans la fiche de réponses (fig. 41 ci-dessous) nous trouvons que la solution  $e^x$  est prise par le binôme comme représentative de toute la famille de solutions :

5) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ? Si oui, lesquels?

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \Omega_c(x) = 0.$$

Fig. 41 : Des arguments justifiant l'équation différentielle (binôme E22/E23)

### Binôme E3/E4

Dès que le binôme a obtenu l'équation différentielle  $y'=y$ , il la résout. Dans la fig. 42 ci-dessous, nous présentons la procédure mise en œuvre par ce binôme pour obtenir la solution. Nous remarquons aussi les traces de la mise en œuvre du théorème en acte TA2 (les courbes d'une famille ont toutes une même forme graphique), ce qui amène les étudiants à conclure qu'il s'agit de deux familles d'exponentielles :

L'ensemble des solutions forme deux familles de courbes exponentielles.

On vérifie en traçant les tangentes à une solution que  $y' = y$  (E)

On cherche les solutions  $\forall y = 0$ , alors  $y' = 0$  donc (E) est bien vérifiée. C'est une solution singulière.

Pour le théorème de Cauchy ~~il n'y a pas~~ aucune solution de (E) ne la coupe donc  $\forall x \in I$   $y(x) \neq 0$ , ainsi on peut écrire :  $\frac{y'}{y} = 1$  soit  $\ln|y| = x + C$

$$y = \pm e^{x+C} = Ke^x$$

avec  $K = e^C$

Fig. 42 : Résolution algébrique de l'équation différentielle par le binôme E3/E4

En ce qui concerne l'explicitation d'arguments prouvant que la bonne équation a été trouvée, le binôme tente de les formuler selon deux types différents. L'un, concernant des arguments du type RES-ED (fondés sur la résolution algébrique de l'équation différentielle), mais sans faire de vérifications à l'aide du logiciel. L'autre, fondé sur l'association erronée entre une propriété de parité et l'expression symbolique de l'équation différentielle. Pour ces étudiants, l'expression symbolique de l'équation différentielle  $y'=y$  correspond aux fonctions paires. Nous trouvons dans les échanges ci-dessous les traces de ces deux types d'arguments :

E4 : alors, [en lisant] « quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équ... »... bah

(ligne : 440)

E4 : qu'elle est paire ...

E3 : si tu fais mon raisonnement là, selon le cas, ça marche ...

E4 : ça te dit qu'elle est paire, déjà ?

E3 : ouais

E4 : tu dis qu'elle est paire et puis aussi, si tu veux ... on l'a résolue, on l'a résolue ... on avait la forme générale des solutions, et on voit bien que la forme générale des solutions correspond avec l'ensemble des courbes

E3 : ouais

E4 : on met les deux trucs ?

E3 : ouais...

(lignes : 442-449)

Pour vérifier la parité supposée de l'expression symbolique de l'équation différentielle, les étudiants la traitent algébriquement comme s'il s'agissait de l'expression symbolique d'une fonction numérique d'une variable. Le binôme ne s'aperçoit pas que les informations fournies par l'expression symbolique de l'équation différentielle, sont des informations sur la dérivée des solutions :

E4 : ah, non, mais c'est la solution qui est paire, pas l'équation... il n'y a que les solutions qui sont paires

E3 : ouais

E4 : tu laisses, euh, on peut vérifier qu'elle est paire, que les solutions sont paires...

(lignes : 455-457)

E4 : si, on a  $y'(-x) = \dots$

(ligne : 461)

E4 : en fait, ouais... on joue spécialement avec la parenthèse, on voit plus avec...

(ligne : 463)

Les étudiants n'arrivent pas à gérer les difficultés apparues lors du traitement de l'expression symbolique de l'équation différentielle. Ils essaient d'avoir l'avis du professeur sur ce sujet :

E3 : ah ... moi, j'en (... ?) pour montrer qu'elle était paire, en fait  $y'=y$ , enfin que quand on a  $y'=y$  alors, ça donne une équation paire. En disant que si on a  $y'(-x)$  ça fait pas supposer que  $y'(-x) = y(-x)$

P : hum...

E3 : si on suppose  $y(x)$ , et ça  $y(x)$  ça c'est bien...  $y'(x)$

P : oui, mais en fait, ici ...

E4 : moi, ça me pousse à dire qu'on sait résoudre une équation de cette forme-là

P : oui.

E4 : donc, on a les solutions

P : voilà !

E4 : et on a les solutions... et on (parle des) solutions

P : voilà, je pense que tu n'avais pas raison parce qu'ici, et en plus, c'est pas vrai, ça...

(lignes : 476-484)

Suite aux remarques du professeur, le binôme abandonne cette stratégie. Dans la fiche de réponses, les arguments fournis pour justifier l'équation différentielle de la famille de courbes ne concernent que la vérification graphique perceptive de la superposition des courbes (arguments du type RES-ED) :

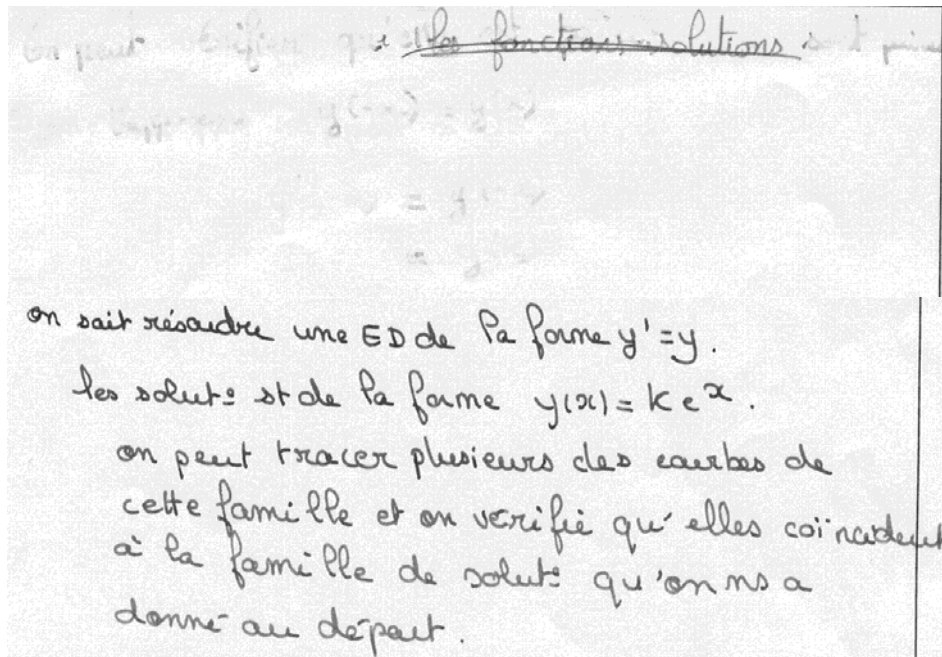


Fig. 43 : Des arguments justifiant l'équation différentielle (binôme E3/E4)

La dernière question demandait d'expliciter des propriétés mathématiques de la courbe dynamique confirmant avoir trouvé la bonne équation. Le binôme identifie la symétrie de la famille de courbes par rapport à l'axe Ox. Nous trouvons dans les échanges ci-dessous que les étudiants relient la parité supposée de l'expression symbolique de l'équation différentielle à la symétrie de la famille de courbes :

E4 : (...?) plutôt la symétrie par rapport à l'axe...

E3 : ah, ouais, mais il n'y a pas de signe... ah, oui, on avait dit que l'on aurait en... euh (...?) ...

E4 : il y a encore ? qu'est-ce que je peux mettre (...?) propriété mathématique ?

E3 : ouais... la parité

E4 : et à part ça ?

E3 : mais, c'est même pas la parité, en plus

E4 : je mets symétrie, par rapport à Ox

E3 : oui, voilà

E4 : on ne met que ça ?

E3 : ah, oui, c'est ça... ... ça, tu l'aimes pas trop?

(lignes : 512-521)

Finalement, le binôme abandonne l'idée de la parité et se limite à écrire que la famille de courbes est symétrique par rapport à l'axe des abscisses (cf. fig. 44 ci-dessous), sans le justifier :

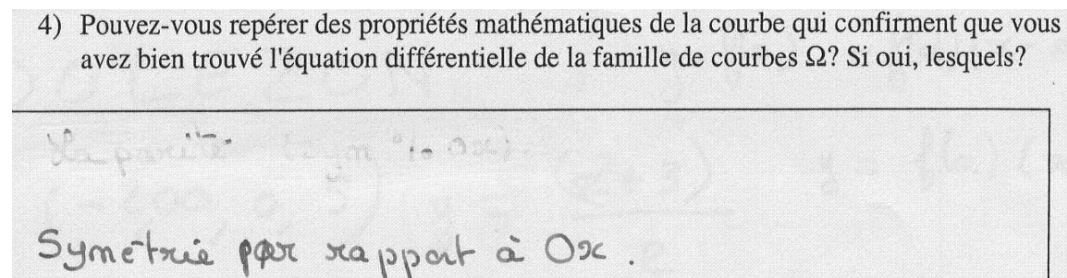


Fig. 44 : Des arguments justifiant l'équation différentielle (binôme E3/E4)



**Binôme E1/E2**

Les arguments de ce binôme justifiant l'équation différentielle trouvée, sont de deux types : le premier, fondé sur la vérification de la propriété numérique « la pente de la droite tangente à la courbe en un point P et l'ordonnée de P sont égales » pour toute courbe (arguments du type VAL-NUM) ; et le deuxième, concernant l'identification graphique et symbolique de l'isocline zéro (des arguments du type ISC-0).

D'abord, le binôme considère la propriété numérique de la famille de courbes :

E1 : ben, on a vérifié que « y' » ... on peut vérifier que  $y'=y$  quelle que soit... euh... quelle que soit la courbe, et quel que soit le point sur la courbe... voilà, parce que là, quel que soit le point sur la courbe

E2 : on vérifie en tous les points qui appartiennent ...

(lignes : 436-437)

Nous remarquons que dans l'analyse *a priori*, nous nous attendions à ce que les arguments du type VAL-NUM fussent mis en œuvre, dans le cas d'avoir obtenu l'équation différentielle par une autre stratégie, différente de EXP-DT-NUM (identification d'un invariant numérique de la famille de courbes et traitement symbolique). La formulation des arguments du type VAL-NUM, dans ce cas, témoigne de la mise en fonctionnement d'un raisonnement circulaire : propriété numérique → équation différentielle → propriété numérique.

Ensuite, le binôme met en œuvre des arguments fondés sur l'articulation graphique et symbolique de l'isocline zéro :

E2 : ben et puis, il n'y a pas... il n'y a pas des points, par exemple de pentes nulles ... que sur la droite... que la courbe... la seule courbe qui fournit des pentes à 0, mis à part l'infini, mais des pentes à 0 dans le quadrant qu'on observe, c'est la courbe qui passe par... qui est confondue avec l'axe des « x », quoi... Donc on vérifie déjà que bon, ben ce n'est pas... si tu cherches les points des pentes  $y'=0$ , ça te donne la seule, la seule équation c'est  $y=0$

E1 : ouais

E2 : donc, on a cette implication-là

E1 : ah ben oui, oui

E2 :  $y'=0$  implique  $y=0$ ... donc on a... quel que soit « x »

E1 : oui

(lignes : 439-444)

Ces deux types d'arguments, garantissant au binôme d'avoir bien trouvé l'équation différentielle, sont explicités dans la fiche de réponses (fig. 45 suivante) :

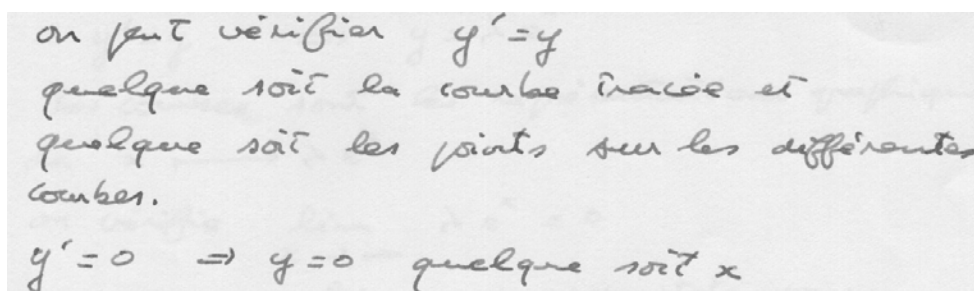


Fig. 45 : Des arguments justifiant l'équation différentielle (binôme E1/E2)

La dernière question demandait d'élaborer des arguments validant l'équation, à partir de l'identification de propriétés mathématiques de la courbe dynamique. Dans ce cas, le binôme formule des arguments du type BRCH-INFI-S (étude des branches infinies des solutions à l'aide de l'expression symbolique des solutions). Les étudiants arrivent aux solutions sans mettre en œuvre de manière explicite un procédé d'intégration, en connaissant l'expression symbolique des solutions de ce type d'équation différentielle :

E2 : c'est une exponentielle, puisque c'est une exponentielle euh... euh des exponentielles euh... de (... ?)  $\lambda$ ... je ne sais pas quoi ...  $\lambda x$  ... un peu comme ça  
 E1 : (... ?) le ...  $\lambda y$  ...  $y = \lambda e^x$  ouais, c'est ça ... c'est  $\lambda e$  puissance ... euh, non, c'est  $\lambda e^{ax}$  ...

(lignes : 459-460)

E1 : alors, donc l'asymptote euh ... on vérifie... limite quand «  $x$  » tend vers moins l'infini ... vaut 0, donc  $x=0$ , non  $y=0$  est une asymptote...

E2 : ouais ... ..

E1 : et donc la résolution de  $y'=y$  c'est  $y=\lambda e^x$

E2 : c'est forcément  $\lambda e^x$  ? Où...

E1 : oui

E2 : il n'y a pas de "coef" devant  $x$  ?

E1 : non... parce qu'il n'y a pas de  $ax$ , si c'était ... s'il y avait  $y'=ay$ , ça serait  $\lambda e^{ax}$  E2 : ah ouais ...

E1 : voilà, donc  $y=0$  c'est une asymptote pour chacune des courbes, on voit bien, ensuite ben... chacune se déduit de... elles se déduisent les unes des autres en multipliant les ordonnées par  $\lambda$

E2 : on pourrait le vérifier pour la courbe... pour  $\lambda=1$ , est-ce qu'on peut trouver ?... est-ce qu'on la retrouve ... l'exponentielle de base ?

(lignes : 468-477)

L'accès à l'expression symbolique des solutions permet aux étudiants d'articuler les registres graphique et symbolique des solutions. Certaines propriétés graphiques des solutions sont interprétées en termes de propriétés de l'expression symbolique de celles-ci. Cette mise en relation entre ces registres est constatée dans l'extrait ci-dessous de la fiche de réponses (fig. 46) :

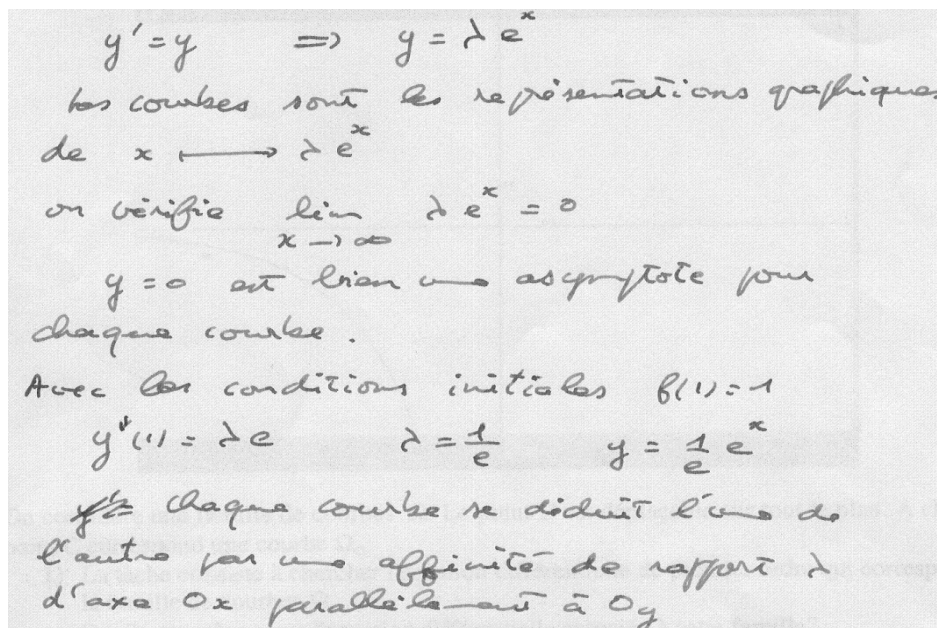


Fig. 46 : Des arguments justifiant l'équation différentielle (binôme E1/E2)

### Conclusion

De façon générale, nous remarquons que lors de la vérification de l'équation différentielle trouvée, les binômes articulent plus facilement les registres graphique et symbolique. Pourtant, nous constatons que même si les trois binômes font intervenir à un moment donné l'expression symbolique des solutions pour relier les registres en jeu (arguments des types RES-ED et BRCH-INFI-S), l'environnement informatique a permis aux binômes E23/E24 et E1/E2 d'établir des liens directs entre ces registres (sans passer par l'expression symbolique des solutions).

Le binôme E23/E24 a élaboré des arguments des types RES-ED, VAR-ED et BRCH-INFI-S. Les arguments du type RES-ED ont permis au binôme de justifier l'équation grâce à la superposition de la courbe dynamique à des courbes tracées à partir de l'expression symbolique des solutions. La mise en œuvre des arguments du type VAR-ED a permis aux étudiants d'interpréter graphiquement, à partir de l'expression symbolique  $y'=y$ , le parallélisme des droites tangentes à des courbes solutions, sur des points avec la même ordonnée. La vérification de ce fait graphique s'est appuyée sur les fonctionnalités du logiciel. Par ailleurs, lors de la mise en œuvre des arguments du type BRCH-INFI-S pour justifier le comportement de la courbe dynamique en moins l'infini, les étudiants obtiennent seulement la limite en moins l'infini de la solution  $e^x$ . Cette solution a été considérée comme représentative de toute la famille de solutions.

La mise en œuvre des arguments BRCH-INFI-S, RES-ED par le binôme E22/E23 témoigne d'une dominance de l'approche algébrique. Cependant, le recours aux arguments du type VAR-ED montre que le contexte informatique peut favoriser l'articulation directe du registre symbolique et graphique.

Le binôme E3/E4 a élaboré des arguments du type RES-ED et a essayé de vérifier la symétrie de la famille de courbes par rapport à l'axe Ox. Pourtant, ils ont eu les mêmes difficultés, identifiées dans les situations précédentes relatives à la non dissociation entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et l'expression symbolique des solutions. Lors de cet essai de vérification, l'équation différentielle est traitée dans le registre symbolique comme s'il s'agissait des solutions. Cette difficulté est apparue, même si les étudiants avaient accès à l'expression symbolique des solutions.

Pour justifier l'équation différentielle, le binôme E1/E2 élabore des arguments des types VAL-NUM et BRCH-INFI-S. Pour ce binôme, le recours à des arguments du type VAL-NUM atteste la mise en œuvre d'un raisonnement circulaire. En effet, ils sont arrivés à l'équation différentielle en identifiant la propriété numérique de la famille de courbes (stratégie EXP-DT-NUM), et cependant ils considèrent que la vérification de la propriété numérique par la famille est une justification de l'équation différentielle. Ce qui montre que les étudiants disposent de très peu de ressources pour justifier l'équation différentielle trouvée. Le binôme avance aussi des arguments du type BRCH-INFI-S pour justifier le comportement des courbes solutions, à l'aide de l'expression symbolique des solutions.

### 3.4. MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE D'UNE FAMILLE DE TRACTRICES EN GEOMETRIE DYNAMIQUE

La dernière situation proposée aux étudiants consiste à mettre en équation différentielle une famille de tractrices. Comme nous l'avons signalé au chapitre 2, dans cette situation on

cherche à identifier des évolutions possibles concernant des éventuelles difficultés trouvées lors de la mise en équation des exponentielles. Il s'agit aussi de tester l'efficacité des liens construits entre les registres graphique et symbolique des équations différentielles.

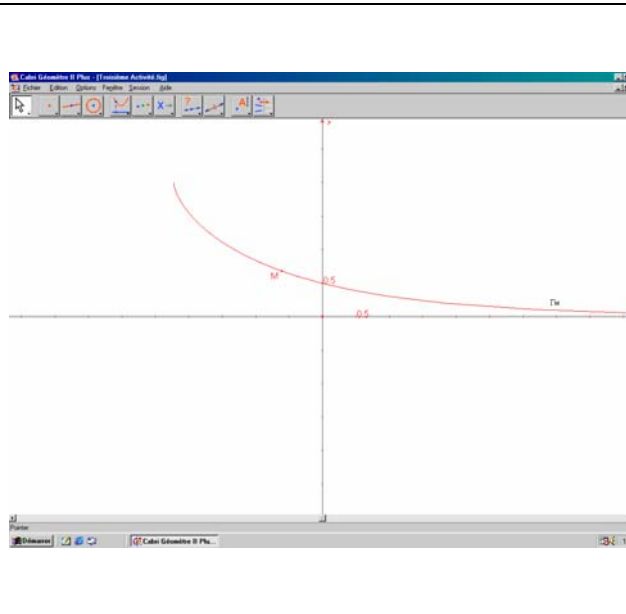
Rappelons que cette situation a été divisée en trois phases :

- une première phase, où l'on propose la famille de courbes sans rendre visible l'invariant graphique de la famille. L'objectif de cette étape était de tester la possibilité de mise en œuvre spontanée de la stratégie TRAC-GRAPH (mise en équation de la famille de trajectrices passant par l'identification d'un invariant graphique de la famille) ;
- une deuxième phase, où les binômes reviennent à la famille d'exponentielles pour faire émerger la stratégie EXP-GRAPH (mise en équation de la famille d'exponentielles passant par l'identification d'un invariant graphique de la famille) ;
- une troisième phase, où les binômes reviennent à la famille de trajectrices, et où nous attendons que la mise en œuvre de la stratégie TRAC-GRAPH permette d'obtenir l'équation différentielle de la famille de courbes.

### 3.4.6. Première phase : une première rencontre avec les trajectrices

Les questions proposées dans la première phase ont été les suivantes :

On considère une famille de courbes  $\Gamma$ . Le point M est déplaçable sur tout le plan. A chaque point M de la bande  $0 < y < 2$  correspond une courbe  $\Gamma_M$ .



1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Gamma$ .

Quelle est, selon vous, l'équation différentielle associée à cette famille ?

2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$  ?

3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Gamma$  ?

4) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$  ? Si oui, lesquelles ?

Nous avons constaté qu'aucun binôme parmi les vingt-quatre participants, n'a réussi à identifier spontanément l'invariant graphique de la famille de trajectrices. En ce qui concerne les trois binômes choisis, leurs stratégies cherchent plutôt une propriété numérique de la famille de courbes :

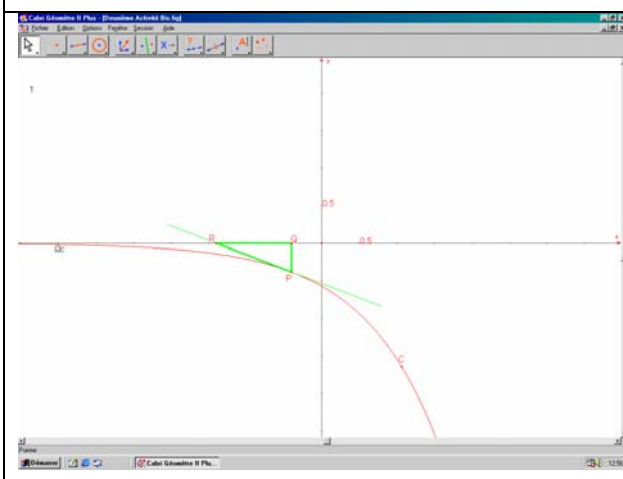
- le binôme E22/E23 met en œuvre la stratégie VAL-NUM. Il propose une expression d'une équation différentielle candidate, et confronte les valeurs numériques de la pente avec les valeurs obtenues de la substitution des coordonnées du point de tangence dans l'équation proposée. Le choix des équations proposées laisse présumer que la courbe dynamique a l'air de correspondre à une courbe de forme logarithmique. Donc les étudiants proposent les équations différentielles :  $y'=1/x$ ,  $1/y'=x$ , et ils supposent que lors de la résolution algébrique de ces équations, devront apparaître des fonctions logarithmiques ;
- le binôme E3/E4 suppose que la macro-construction « distance » fournie, a un certain lien avec la situation proposée (effet de contrat), alors ces étudiants l'utilisent pour rechercher une régularité numérique dans la famille de courbes. Ils tracent, par exemple, un point sur la courbe et regardent si la distance de ce point vers l'origine est constante. Le binôme trace aussi la droite tangente dans le point M que l'on utilise pour déplacer la courbe, et essaient d'obtenir la distance de la droite vers l'origine ;
- le binôme E1/E2 met en œuvre la stratégie TRAC-DT-NUM (obtention de l'équation différentielle passant par l'identification d'un invariant numérique de la famille de courbes), il cherche à identifier une régularité numérique entre la pente de la droite tangente et les coordonnées du point de tangence. Ces 2 étudiants évoquent aussi la stratégie TRAC-ALG (obtention de l'équation différentielle passant par l'association d'une expression symbolique aux solutions), qui consiste à associer une expression symbolique à la famille de courbes. L'expression proposée contient la fonction exponentielle, car les étudiants supposent que la courbe dynamique a une certaine ressemblance avec des exponentielles. Pour eux, il s'agit d'exponentielles filtrées (une partie cachée).

Comme la stratégie TRAC-GRAPH n'est pas apparue, le professeur propose alors aux étudiants de revenir à la famille d'exponentielles.

### 3.4.7. Deuxième phase : le retour à la famille d'exponentielles

Nous avons proposé dans cette phase les questions suivantes :

On considère une famille de courbes  $\Gamma$ . Le point M est déplaçable sur tout le plan. A chaque point M de la bande  $0 < y < 2$  correspond une courbe  $\Gamma_M$ .



1) La tâche consiste à identifier des propriétés géométriques invariantes associées à l'équation différentielle de premier ordre de la famille de courbes  $\Omega$ .

Quelles propriétés géométriques invariantes pouvez-vous associer à cette famille de courbes?

2) Est-il possible de déduire l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$  à partir des propriétés invariantes repérées? Si oui, comment?

Dans cette phase, l'intérêt est de faire apparaître la stratégie EXP-GRAPH (obtention de l'équation différentielle à l'aide d'une propriété graphique invariante de la famille de courbes) pour la mise en équation de la famille d'exponentielles. Nous avons fait l'hypothèse que l'exploration à l'aide du logiciel pourrait permettre d'identifier l'invariant graphique « courbes à sous-tangente constante », et à partir de cet invariant d'écrire l'équation différentielle de la famille de courbes.

Nous avons constaté que l'ensemble des binômes étaient arrivés à identifier l'invariant graphique de la famille d'exponentielles, néanmoins nous avons trouvé 5 binômes (E5/E6/E7, E26/E27, E38/E39, E40/E56, E54/E55) qui ne mettaient pas en œuvre la stratégie EXP-GRAPH.

Maintenant nous nous focalisons de manière plus précise sur le travail des trois binômes choisis :

***Première question : l'identification de l'invariant géométrique***

L'identification de l'invariant graphique de la famille de courbes n'a pas posé de problèmes aux étudiants, les trois binômes l'ayant identifié sans difficulté. Les binômes E22/E23 et E1/E2 font l'identification, en déplaçant le point C (celui qui déplace la courbe) ainsi que le point P (celui qui se déplace sur la courbe). Le binôme E3/E4 identifie l'invariant graphique seulement par le déplacement du point C.

***Deuxième question : la mise en équation de la famille d'exponentielles à partir de l'invariant graphique repéré***

***Binôme E22/E23***

Le binôme E22/E23 trouve facilement l'équation différentielle de la famille de courbes. Il met en œuvre la stratégie EXP-GRAPH : ED-DT, qui consiste à déduire l'équation différentielle à l'aide de l'équation de la droite tangente. D'abord, les étudiants font le lien entre la pente de la droite tangente à la courbe dynamique dans le point P, et la valeur de la dérivée de la fonction associée en P. Ensuite, les étudiants cherchent à obtenir l'équation de la droite tangente et pourtant lors de la recherche du coefficient directeur de cette droite, ils arrivent directement à l'équation de la famille d'exponentielles :

E23 : ben, ça veut dire que « y' »... Ça, c'est le point d'intersection de la tangente... et ça c'est le projeté orthogonal...

E22 : ouais

E23 : donc, si t'as un point P, tu peux avoir Q... le point Q, tu sais son ordonnée...

E22 : pourquoi ?

E23 : le point Q, tu sais ses coordonnées, si t'as les coordonnées de P... Et donc, tu sais les coordonnées de R, donc tu peux avoir la droite PR... .. donc, PR c'est la tangente...

tu peux avoir l'équation de la tangente ... en un point, sans faire la méthode qu'on a ...

Tu vois ce que je veux dire ? ... (... ?)... RQ est toujours comme ça, ouais ... voilà... ..

Si «  $\Delta y$  »... .. «  $y + \dots$  » ... voilà, ... tu (... ?) pas à dire, je pense...

E22 : si, si, non, mais j'ai lu... mais je (... ?)

E23 : mais, je sais pas si ça répond à la question

E22 : mais, attends... On retrouve... on retrouve bien «  $y' = y$  »...

(lignes : 128-135)

Dans la fiche de réponses (fig. 47 suivante), le binôme décrit leur procédure pour arriver à l'équation différentielle :

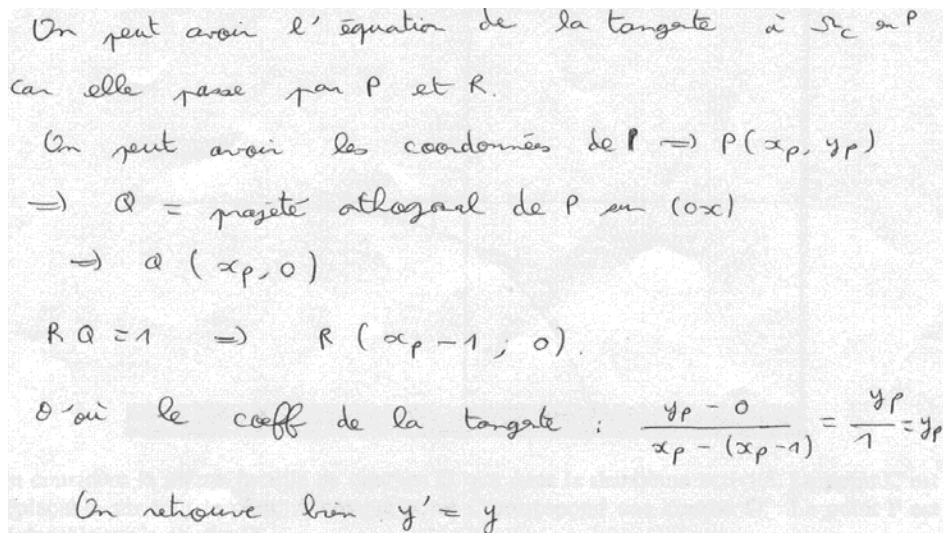


Fig. 47 : Obtention de l'équation différentielle des exponentielles à partir de l'invariant graphique de la famille de courbes (binôme E22/E23)

### Binôme E3/E4

Ce binôme met en œuvre la stratégie EXP-GRAPH : ED-PEN, qui consiste à obtenir l'équation différentielle en utilisant la formule de la pente d'une droite. Pourtant, nous constatons que les étudiants ont quelques difficultés concernant l'interprétation graphique de la pente de la droite tangente, car ils supposent qu'elle est égale à l'arc tangente de l'angle entre la tangente et l'axe des  $x$ . Ils ont aussi des difficultés pour interpréter les données graphiques identifiées :

E3 : puisque la pente de la tangente «  $y'$  »... elle doit être égale à, à... ..  $y' = \text{arc tan de..}$  euh... côté opposé sur côté adjacent, PQ / RQ

(ligne : 168)

E4 : pourquoi  $\alpha = f'(a)$  ?

E3 : bah, parce que ça, c'est la pente de la tangente... non ?... Arc tangente, euh... côté opposé sur...

E4 : ...côté adjacent ...

E3 : puisque  $\tan \alpha = PQ / RQ$  »... .. donc  $y' = \text{arc tan ...}$

E4 : de PQ / RQ...

E3 : mais RQ vaut toujours 1, donc, arc tangente PQ...

E4 : attend, mais ça donne une équation ?

E3 : ça c'est ... «  $y$  » ... puisque «  $y' = y$  »... j'en sais rien... alors PQ c'est quoi ?...

(lignes : 173-180)

Grâce à l'intervention de l'enseignant, les étudiants utilisent correctement la formule de la pente de la droite tangente :

P : la pente de la tangente, c'est quoi ?

E4 : bah, c'est...

E3 : c'est «  $\alpha$  »

P : ah non, c'est «  $\tan \alpha$  » la pente de la tangente

E3 : ah, c'est «  $\tan \alpha$  »

(lignes : 193-197)

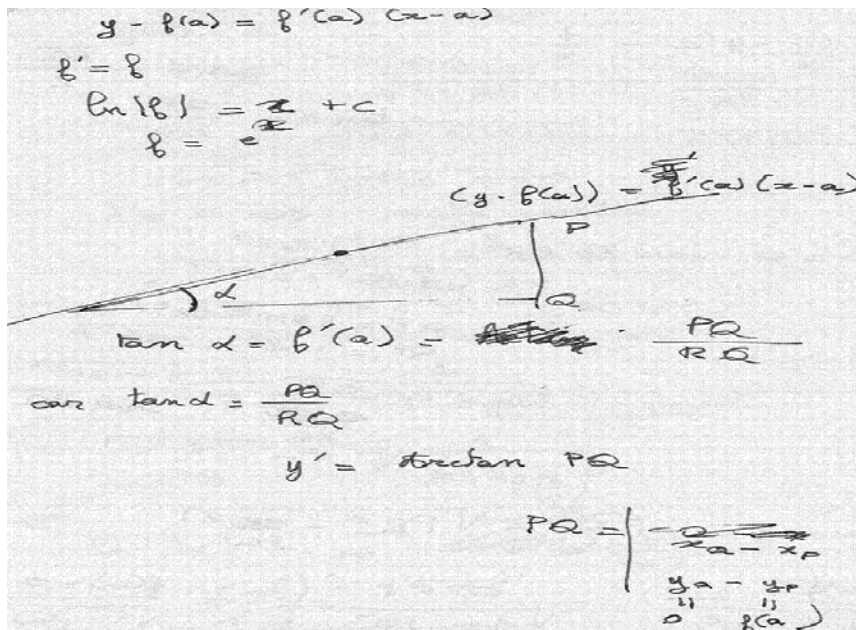


Fig. 48 : Essai d'obtention de l'équation différentielle des exponentielles (Binôme E3/E4)

Nous avons constaté aussi que les étudiants avaient des difficultés pour écrire l'équation différentielle ; et ils semblent supposer que celle-ci doit contenir des valeurs absolues (cf. fig. 48 ci-dessus). Dans les échanges ci-dessous, nous trouvons que le raisonnement des étudiants est fondé sur des distances, et qu'ils ne prennent pas en compte les valeurs algébriques :

E3 : bah oui, parce qu'on était d'accord, on a mis en valeur absolue... on a mis la valeur absolue, là, puisque la... la distance c'est euh... c'est pas ça la distance, en fait. Ah si, c'est racine de «  $x^2 \dots (x-1)^2$  »... donc ça fait machin... C'est bon, c'est valable...

(ligne : 236)

E3 : non, parce que si l'on passe à une dimension plus grande, on fait racine de machin de ... au carré plus l'autre au carré, donc ça fait une valeur absolue, je pense

(ligne : 238)

P : ah, oui, oui... mais là, vous avez une équation différentielle avec une valeur absolue, alors ?

E3 : mais non,  $f(a)$  ... égal  $f(a)$

P : et si  $f(a)$  est négatif

E3 : euh... ah là là... moi, je vais le mettre dans l'autre sens... oui, parce que si ça je le mets dans le sens (nul)

P : dans quel sens ?

E4 : je mets juste «  $y_P - y_Q$  »

(lignes : 241-246)

Les étudiants s'appuient sur les remarques du professeur pour obtenir l'équation différentielle de la famille d'exponentielles. La procédure utilisée est explicitée dans la fiche de réponses (fig. 49, page suivante) :



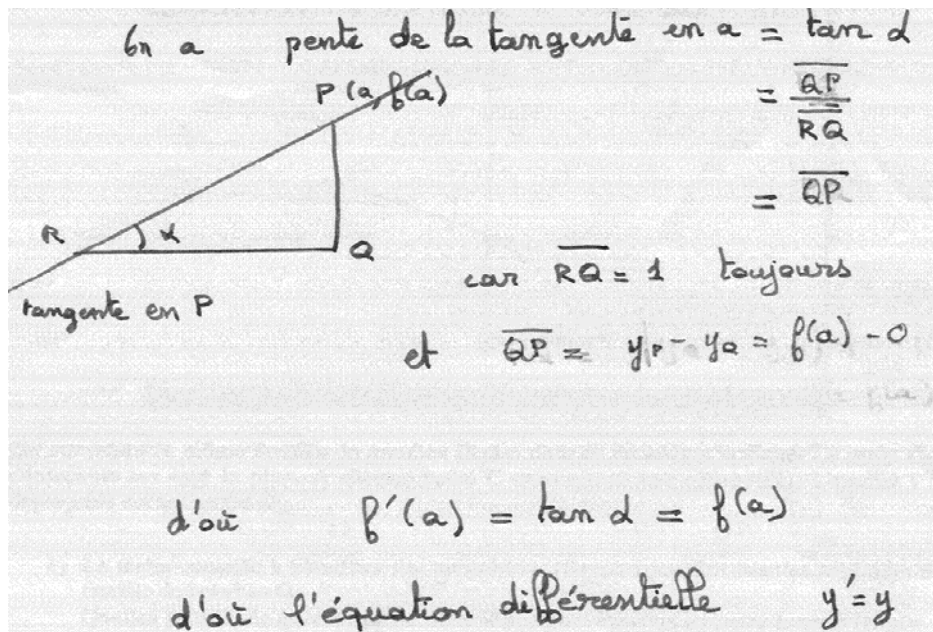


Fig. 49 : Obtention de l'équation différentielle des exponentielles par l'identification de l'invariant graphique de la famille de courbes (Binôme E3/E4)

**Binôme E1/E2**

Le binôme met en œuvre la stratégie EXP-GRAPH : ED-PEN (qui utilise la formule de la pente d'une droite) pour obtenir l'équation différentielle des exponentielles. Ce binôme utilise, comme le binôme E3/E4, la valeur absolue. Cependant, lors de l'obtention algébrique de la pente de la droite tangente, ils remarquent que la « pente de la droite tangente en P = ordonnée de P », ce qui permet de relier la propriété graphique de la famille et la propriété numérique identifiée dans la situation précédente. Donc le binôme ne prête pas attention aux valeurs absolues :

E1 : voilà, je vais calculer la pente en P, et puis je vais établir la relation entre RQ et...  
 (lignes : 246)

E1: alors, la pente au point P est donnée par ... PQ / RP, alors, valeur absolue de la pente... égale PQ / RP... tu es d'accord avec moi ?...

E2 : ouais

E1 : égale PQ parce que « RP=1 » ...

(lignes : 251-253)

E1: donc égale ordonnée ... de P... on a bien « y' »

E2: on va faire pareil sur l'autre courbe

E1: « y'(P) = y(P) »

E2: voilà « y'=y » puisque voilà, quel que soit P, en fait

E1 : quel que soit P

E2 : et ensuite quel que soit C a fortiori ... donc on l'a trouvé directement là, comme ça  
 (lignes : 265-270)

Dans la fig. 50 suivante, nous montrons la réponse du binôme :

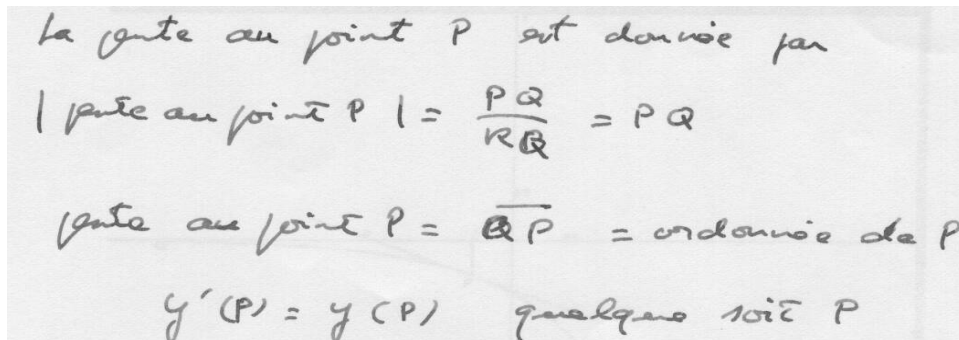


Fig. 50 : Obtention de l'équation différentielle des exponentielles par l'identification de l'invariant graphique de la famille de courbes (Binôme E1/E2)

### Conclusion

Dans la phase concernant le retour à la famille d'exponentielles, nous avons constaté, chez les trois binômes, la mise en œuvre de la stratégie EXP-GRAPH attendue. L'exploration à l'aide du logiciel a permis, conformément à notre deuxième hypothèse, d'identifier l'invariant graphique de la famille de courbes. Sauf les difficultés rencontrées par le binôme E3/E4, les trois binômes sont arrivés à l'équation différentielle recherchée.

### 3.4.8. Troisième phase : le retour à la famille de trajectrices (ensemble des binômes)

Dans cette phase, les étudiants reviennent à la famille de trajectrices, nous attendions ici la mise en œuvre de la stratégie TRAC-GRAPH, qui passe par l'identification de l'invariant graphique de la famille de courbes, pour obtenir l'équation différentielle cherchée. Nous présentons les réponses fournies par les binômes à l'aide de tableaux.

Le Tableau 13 ci-dessous montre les stratégies des onze binômes ayant obtenu correctement l'équation différentielle :

Type de stratégie	Effectifs	Commentaire
TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH (ED obtenue à l'aide de la formule de la pente et du théorème de Pythagore)	8/11	E1/E2, E3/E4, E8/E9, E12/E13, E22/E23, E32/E33, E34/E35, E36/E37
TRAC-GRAPH : ED-DT+PYTH (ED obtenue à l'aide de l'équation de la droite tangente et du théorème de Pythagore)	3/11	TrE5/E6/E7, E18/E19, BiE24/25

Tableau 13 : Stratégies mises en œuvre pour obtenir l'équation différentielle des trajectrices (binômes ayant obtenu l'équation différentielle correcte)

Le Tableau 14 suivant montre les arguments justifiant l'équation différentielle, des onze binômes l'ayant obtenue correctement :

Type d'argument	Effectifs	Commentaire
BRCH-INF-ED (Vérification à l'aide des limites en $+\infty$ et en 2)	3/11	E1/E2, E32/E33; E12/E13 (vérification en 2)
ISC-0 (fondés sur l'isocline 0)	1/11	E32/E33
RES-ED (fondés sur la résolution de l'ED)	2/11	E3/E4 résout erronément l'ED, E22/23 n'arrive pas à intégrer l'ED
SENS-VAR (étude du sens de variation à l'aide du signe de la dérivée)	3/11	E18/E19, E36/E37; E5/E6/E7 essai de mise en œuvre de ce type d'argument
VAL-NUM (validation numérique)	2/11	E1/E2, E12/E13
DISC-ED (fondés sur l'étude des discontinuités)	1/11	E8/E9 (la courbe et l'expression symbolique ne sont pas définies en 2)
CONC-DER-SEC (étude de la concavité à l'aide du signe de la dérivée seconde)	2/11	E34/E35, E36/E37
SOL-SYM (fondés sur la symétrie des courbes solutions)	1/11	E1/E2
Sans justification	1/11	E24/E25

Tableau 14 : Arguments justifiant l'équation différentielle des tractrices (binômes ayant obtenu l'équation différentielle correcte)

Le Tableau 15 ci-dessous montre les stratégies en vue d'obtenir l'équation différentielle, des treize binômes ne l'ayant pas obtenue correctement :

Type de stratégie	Effectifs	Commentaire
TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH (ED obtenue à l'aide de la formule de la pente et du théorème de Pythagore)	7/13	E20/E21 : sans aboutir à l'ED ; E44/E45, E48/E49 : erreur avec le signe ; E26/E27 : $y' = \frac{y}{x+1}$ (le binôme affirme utiliser Thalès) ; BiE28/29 : $y' = 0,54y$ (le binôme utilise la longueur des côtés d'un triangle dynamique pour un cas particulier) ; E38/E39 : « on a $QR = \text{constante} = 2$ . La pente au point P est $y_P/2$ » ; E14/E15 : le binôme commence avec la formule de la pente, mais il ne finit pas
TRAC-GRAPH : ED-DT+PYTH (ED obtenue à l'aide de l'équation de la droite tangente et du théorème de Pythagore)	1/13	E46/E47 : sans aboutir à l'ED
Sans réponse	3/13	E40/E56, E42/E43, E52/E53
Réponses isolées :	2/13	BiE50/E51: « $y'$ est de la forme $\frac{g(x,y)}{y^a(y-2)^b x^c}$ avec $g(x,y)$ soit définie et irréductible » ; E54/E55 : le binôme fait un tableau de variation pour $y$ et $y'$ et il écrit « $=y'(a)x + ay'(a) + y(a)$ »

Tableau 15 : : Stratégies mises en œuvre pour obtenir l'équation différentielle des tractrices (binômes n'ayant pas obtenu l'équation différentielle correcte)

Le Tableau 16 ci-dessous montre les arguments justifiant l'équation différentielle, des treize binômes ne l'ayant pas obtenue correctement :

<i>Type d'argument</i>	<i>Effectifs</i>	<i>Commentaire</i>
CONC-DER-SEC (étude de la concavité à l'aide du signe de la dérivée seconde)	1/13	E44/E45 : le binôme obtient erronément la dérivée seconde, il dérive comme s'il s'agissait d'une fonction qui dépend seulement de $x$
Sans justification	12/13	E14/E15, E20/E21, E26/E27, E28/E29, E38/E39, E40/E56, E42/E43, BiE46,47, E48/E49, BiE50/E51, E52/E53, E54/E55

*Tableau 16 : Arguments justifiant l'équation différentielle des tractrices (binômes n'ayant pas obtenu l'équation différentielle correcte)*

Nous constatons de façon générale, que la mise en équation de la famille de tractrices dans le contexte de l'environnement de géométrie dynamique, a été plus difficile pour les étudiants que celle des exponentielles. Le travail exploratoire a permis à la totalité des binômes, conformément à nos hypothèses, d'identifier l'invariant graphique de la famille de courbes. Cependant, lors de l'étape de mise en équation, un peu moins de la moitié des binômes (11 sur 24) ont obtenu correctement l'équation différentielle de la famille de courbes. Parmi les 11 binômes ayant obtenu l'équation différentielle, nous trouvons que la plupart (8 sur 11) mobilise la stratégie TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH, qui utilise la formule de la pente d'une droite et le théorème de Pythagore.

En ce qui concerne la justification de l'équation différentielle, nous observons que les étudiants l'ayant obtenue correctement ont fait fonctionner huit types d'arguments différents. Quatre des onze binômes (E1/E2, E12/E13, E32/E33, E36/E37) ont fourni deux types différents d'arguments. Nous remarquons que sauf les arguments du type RES-ED (fondés sur la résolution algébrique des équations différentielles) que deux binômes (E3/E4 et E22/E23) ont tenté d'utiliser, les sept autres types d'arguments relient directement le registre graphique des solutions et le registre symbolique de l'équation différentielle. Les arguments les plus utilisés par les binômes ont été des types SENS-VAR et BRCH-INFI-ED. Nous remarquons que deux types d'arguments que nous n'avions pas prévus dans l'analyse *a priori* sont apparus : il s'agit des arguments des types CONC-DER-SEC (fondés sur l'étude de la concavité des courbes à l'aide de la dérivée seconde) et SOL-SYM (fondés sur l'identification d'une propriété de symétrie de la famille de courbes). Compte tenu du fait qu'en raison des contraintes techniques nous avons fourni une courbe tractrice dynamique qui montrait seulement la moitié de la famille de courbes, nous n'attendions pas ce dernier type d'argument, cependant le binôme E1/E2 (qui fait partie de ceux que nous analyserons en détail) arrive à ce type d'argument en s'appuyant sur les rétroactions numériques du logiciel, lors de la mise en œuvre d'une stratégie de validation numérique (arguments du type VAL-NUM).

En ce qui concerne les treize binômes n'ayant pas obtenu l'équation de la famille de courbes, nous trouvons que sept binômes ont tenté de mettre en œuvre la stratégie TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH, parmi ces derniers binômes, deux seulement (E44/E45 et BiE48/49) ont négligé le signe de l'expression symbolique. Des six binômes restants, un binôme (E46/E47) tente d'obtenir l'équation différentielle en utilisant l'équation de la droite tangente et le théorème de Pythagore (stratégie TRAC-GRAPH : ED-DT+PYTH), et trois binômes n'ont pas répondu aux questions posées. Les deux derniers binômes (E50/E51 et E54/E55) n'arrivent pas à articuler l'invariant graphique de la famille de courbes avec les notions telles

que pente d'une droite et théorème de Pythagore. Des treize binômes, seul un binôme (E44/E45) tente de justifier l'équation différentielle trouvée.

### 3.4.9. Troisième phase : retour à la famille de tractrices (binômes choisis)

#### La recherche de l'équation différentielle

Les trois binômes mettent en œuvre la stratégie TRAC-GRAPH pour mettre en équation la famille de tractrices. L'exploration à l'aide du déplacement du triangle auxiliaire PQR fourni leur permet d'identifier que pour toute courbe de la famille, la longueur du segment PR reste constant, ce qui leur permet d'arriver à l'équation différentielle demandée. Dans le développement suivant, nous décrivons quelques épisodes de cette étape :

#### *Binôme E22/E23*

Une fois que le binôme a repéré l'invariant graphique de la famille de courbes, nous trouvons que les étudiants ont des difficultés pour lier le segment PR avec le coefficient directeur de la droite tangente en P. Dans les échanges ci-dessous, nous remarquons des hésitations des étudiants pour interpréter mathématiquement le segment de longueur constante :

E22 : (... ?) si tu (... ?)... valeur attendue de PR, ça représente quoi ?...

E23 : (... ?) ça peut être le coefficient ...

E22 : attend, attend. Déjà on va mettre tout ça dans la même (... ?)

E23 : je sais pas... si (... ?) ça veut dire que le coefficient, il est constant... Ben, ça veut dire que « y' » égale constante

E22 : tu crois ?

E23 : ben, ouais

(lignes : 262-267)

E22 : ... PR est constante... PR c'est quoi ? PR c'est la distance du point P, qui fait partie de la tangente à R ... ah ça peut être quoi, ça ? Qu'est ce ?... c'est euh

(ligne : 272)

L'épisode précédent témoigne de connaissances peu affirmées sur la notion de coefficient directeur. Pourtant, cette notion a été bien interprétée et utilisée lors de la mise en équation de la famille d'exponentielles.

Finalement, après les échanges entre eux, le binôme utilise la formule de la distance entre deux points et la pente de la droite tangente pour arriver à l'équation différentielle demandée (stratégie TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH). La figure 51 ci-contre, montre un extrait de la fiche de réponses où les étudiants explicitent la procédure mise en œuvre pour obtenir l'équation différentielle de la famille de tractrices :

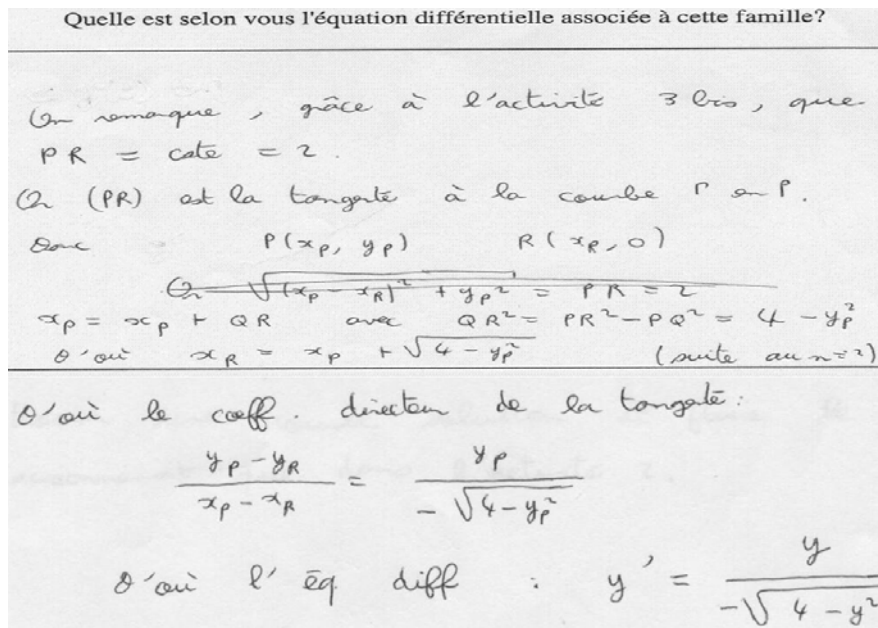


Fig. 51 : Obtention de l'équation différentielle de la famille de tractrices (Binôme E22/E23)

### Binôme E3/E4

Après avoir identifié le segment PR de longueur constante, le binôme ne sait pas comment se servir de cet invariant géométrique pour arriver à l'équation différentielle demandée. Les étudiants ne trouvent pas la façon de relier le segment PR avec la pente de la droite tangente :

E3 : c'est 1/2 de la distance PQ

E4 : la pente ?

E3 : la pente

E4 : non, ça fait -1/2

E3 : ouais, ça fait -1/2...

E4 : on a à P, on a P. C'est quoi, ce truc qui reste constant ? c'est... PR reste constant...

E3 : euh, non, ça marche pas

(lignes : 320-326)

E3 : côté opposé... .. Eh! c'est pas si mal que ça, ça... .. J'ai fait quoi ? Côté opposé... j'ai fait côté opposé sur l'hypoténuse... côté adjacent sur l'hypoténuse... .. Ça ne marche pas ... .. Non, mais attend...

E4 : tout à l'heure, c'était quoi qu'on avait de constante, c'était PR ? Mais là, ça nous sert à rien d'avoir cette constante

(lignes : 334-335)

Les étudiants ont des difficultés pour articuler les notions de pente, de distance, de tangente :

E3 : oui, mais là... (... ?) la distance ... la distance c'est pas la même que la tangente... c'est pas la même qui ... plus celui qui est constant, c'est pas la même, donc il faut changer...

E4 : d'accord, tu changes, mais t'as quand même ça, cette distance qui est constante. Quoiqu'il en soit, si t'appelles cet angle-là «  $\alpha$  »...

E3 : oui

E4 : ça sera toujours égal (... ?) ... on aura toujours la tangente de cet angle-là qui sera toujours égale à la pente de la tangente...

E3 : mais, bah oui. C'est ce qu'on cherche

E4 : d'accord. Donc, tu as PR constant

(lignes : 344-349)

Finalement, les étudiants utilisant la formule de la pente et le théorème de Pythagore arrivent à l'équation différentielle recherchée :

E4 : donc c'est l'hypoténuse qui est constante... c'est tangente égale à ... divisée par...  
... racine carrée de 4 moins côté adjacent au carré ...

E3 : oui! ...Ça marche! Avec un signe moins accroché... donc, c'est quoi que je vais faire ? ... QR

(lignes : 365-366)

E3 : f(P) ?... Ah mais là c'est bon, parce que non... f(P)... f(P) ... on a dit f(P), c'est «  $(f(a) - 0)/\sqrt{4 - f(a)^2}$  »... Donc, ça fait «  $y/\sqrt{4 - y^2}$  »... avec un moins

E4 : c'est ça, l'équation ?

E3 : ouais ... ..

(lignes : 382-384)

Ci-dessous (fig. 52), on trouvera un extrait du brouillon du binôme lors de la recherche de l'équation différentielle. Dans la partie supérieure nous identifions la phase de tâtonnement et ensuite la mise en œuvre de la stratégie TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH :

Fig. 52 : Obtention de l'équation différentielle de la famille de tractrices (Binôme E3/E4)

### Binôme E1/E2

Ce binôme n'a pas de difficulté pour arriver à l'équation différentielle de la famille de tractrices. Les étudiants construisent, eux-mêmes, le triangle dynamique auxiliaire MQR. Nous constatons qu'ils articulent sans difficulté les notions de pente, dérivée, distance entre deux points :

E1: ben « y » c'est MQ et puis on a la distance entre « y » ... ah et R, donc on aurait la pente... on va pouvoir avoir la pente...

(ligne : 435)

E1: alors, donc ... (... ?) c'est la distance (... ?) c'est ça ... la pente, la pente c'est toujours MQ / RQ, MQ / RQ = y'(M)

E2: la valeur ... c'est bien le... ça ... c'est la pente c'est bien la tangente de l'angle ici ?

E1 : la tangente quoi, ben, la pente c'est la différence des abscisses sur la différence des ordonnées c'est MQ / QR ...

(lignes : 452-454)

E2: avec un (... ?) quoi, alors ça serait... oui M... ça serait ... avec un signe moins, quoi  
 E1 : oui, il doit y avoir un signe, on va faire un petit signe  
 E2 : mais ça, la pente... on peut lire que... elle est égale, donc  $y' = MQ / QR$  et après on peut dire que ce MQ c'est « y », donc « y / QR » et QR c'est 2... c'est 2 ... euh  
 (lignes : 457-459)

Finalement, ils arrivent à l'équation différentielle de la famille de tractrices :

E2: ah, oui, ... c'est vrai... ça chauffe un peu... d'accord... et après, t'as «  $y' = y / \sqrt{4 - y^2}$  »

E1: c'est pour ça qu'il y a la bande d'abord ... parce que la bande  
 (lignes : 469-470)

E2: ah, non, non ...  $y' = -y$ ... ça- doit avoir un signe, il y a un signe moins

E1 : ah oui

(lignes : 491-492)

Ci-dessous (fig. 53), un extrait de la fiche de réponses qui explicite la mise en œuvre de la stratégie TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH pour obtenir l'équation différentielle des tractrices :

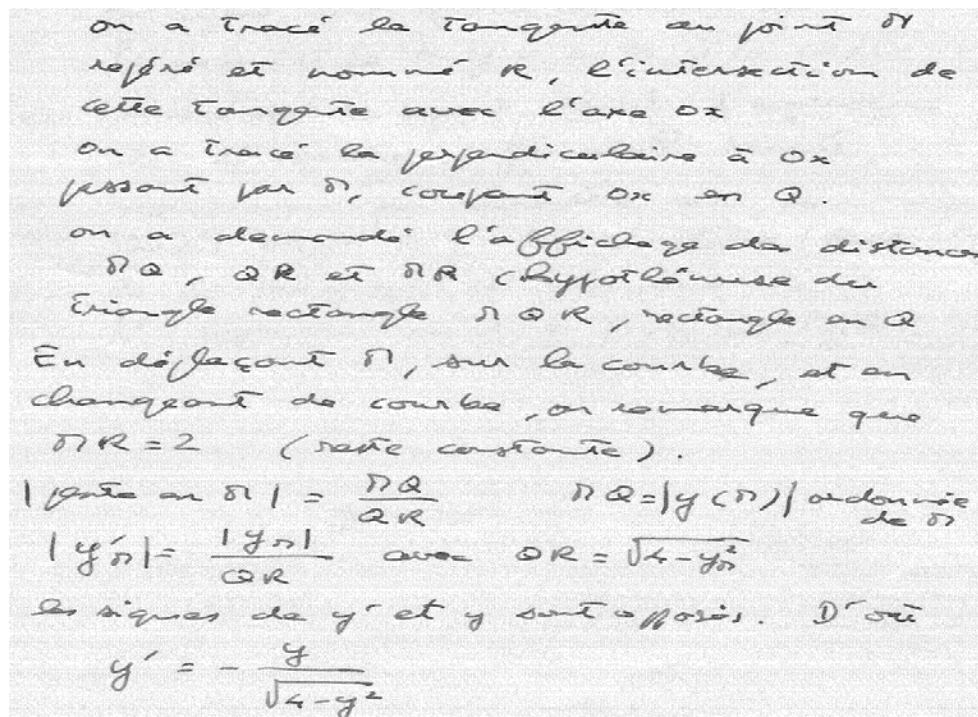


Fig. 53 : Obtention de l'équation différentielle de la famille de tractrices (Binôme E1/E2)

## La justification de l'équation différentielle

### Binôme E22/E23

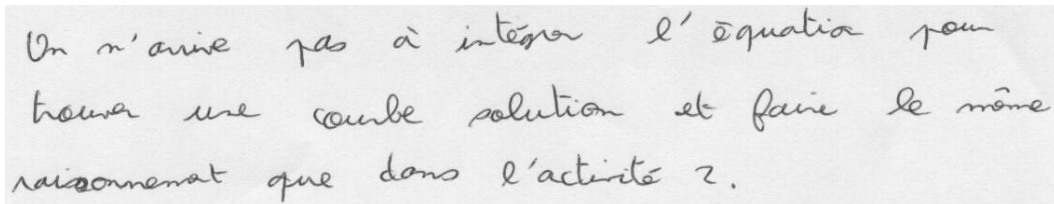
Pour justifier l'équation différentielle trouvée, le binôme tente de résoudre algébriquement l'équation différentielle (arguments du type RES-ED). Pour ces étudiants, l'expression symbolique leur permettrait de tracer certaines courbes solutions et ensuite de vérifier si la courbe dynamique peut y être superposée. Cependant, le binôme n'arrive pas à intégrer l'équation différentielle :



E23 : alors... tout à l'heure on avait tracé une courbe... eh ben, il faudrait essayer de trouver la solution... Ce qui est un petit peu impossible... Il faudrait avoir une courbe solution pour pouvoir faire comme tout à l'heure et tracer le point...

(ligne : 414)

Finalement, dans la fiche de réponses (fig. 54 ci-dessous), les étudiants expriment leur incapacité de résoudre algébriquement l'équation différentielle :



On n'arrive pas à intégrer l'équation pour trouver une courbe solution et faire le même raisonnement que dans l'activité 2.

Fig. 54 : Des arguments justifiant l'équation différentielle des tractrices (binôme E22/E23)

Nous avons demandé aussi des arguments sur des propriétés mathématiques de la courbe dynamique, qui justifient que l'on a trouvé la bonne équation. Les étudiants identifient un certain comportement de la courbe en plus l'infini (des arguments du type BRCH-INF), mais il n'arrivent pas à le relier à l'expression symbolique de l'équation différentielle :

E23 : ... « ...des propriétés mathématiques de la courbe... » [elle lit la question] ... Bon, qu'est-ce qu'on peut dire sur cette courbe ? Visiblement, sa limite en plus l'infini c'est 0...

E22 : oui

(lignes : 416-417)

#### **Binôme E3/E4**

Ce binôme met aussi en œuvre une stratégie de validation de l'équation différentielle fondée sur la résolution algébrique de l'équation différentielle (des arguments du type RES-ED). Cependant, les étudiants la résolvent de façon erronée, mais ils n'arrivent pas à tracer des courbes permettant une vérification graphique, en raison d'un manque de temps :

Il faut résoudre l'équation trouvée

$$y' = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}} \quad \text{c'est 1 équation autonome.}$$

on cherche les solutions singulières ie celles que

$$y(x) = c e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda = 0 \text{ est la seule solution possible}$$

car  $y' e = 0 = \frac{-\lambda}{\sqrt{4-\lambda^2}} \Rightarrow \lambda = 0.$

Par le th. de Cauchy Lipschitz aucune des courbes  
sol ne va couper l'axe des abscisses.  
de  $\forall x \in \mathbb{I} \quad y(x) \neq 0.$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sqrt{4-y^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-(\frac{y}{2})^2}}$$

on a  $|y| = + A \arccos \frac{y}{2} + C.$

$$y = \pm e^{+ A \arccos(y/2)}$$

pr vérifier on tracerait les courbes de cette  
forme et on vérifie qu'elles coïncident avec  
celles de Padi.

Fig. 55 : Des arguments justifiant l'équation différentielle des tractrices (Binôme E3/E4)

### Binôme E1/E2

Pour justifier l'équation différentielle trouvée, le binôme E1/E2 met en œuvre une stratégie numérique (des arguments du type VAL-NUM) qui consiste à confronter les valeurs numériques de la pente de la droite tangente à la courbe dynamique (ces valeurs ont été obtenues en utilisant l'outil « Pente » de Cabri) avec les valeurs de la pente obtenues de l'expression symbolique de l'équation différentielle (ces valeurs sont obtenues en substituant les coordonnées du point de tangence dans l'équation différentielle) :

E2 : la pente est égale à «  $-y$  » [...]... parce qu'en fait... d'ailleurs on pourrait faire une expression et puis vérifier que c'est juste, et si on pouvait faire une expression, ouais... on pourrait taper toutes choses, euh [l'étudiant cherche à utiliser l'outil « Expression » de Cabri]

E1 : ah, oui, oui

(lignes : 493-494)

E2 : c'est ça, voilà, c'est ce que j'ai fait... ouais !

E1 : voilà

E2 : on a vérifié

P : elle marche ?

E2 : avec ... on n'a que l'expression, et puis on a vérifié que.. [phrase inachevée]

(lignes : 529-533)

La stratégie mise en œuvre pour vérifier l'équation différentielle est explicitée dans la fiche de réponses (cf. fig. 56 suivante). Les étudiants ont utilisé l'outil « Pente » de Cabri pour afficher la pente de la droite tangente au point M de la courbe dynamique, ainsi que l'outil « Expression » pour obtenir la valeur numérique de  $y'$  à partir de l'expression symbolique de

l'équation différentielle trouvée ( $y' = -\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$ ) :

En ayant fait afficher la valeur de la pente de la tangente en M à la courbe ainsi que en ayant rentré l'expression de l'équation différentielle trouvée, nous avons pu constater que, en chaque point M, les 2 valeurs (pente de la tangente et résultat de l'expression au pt M) étaient égales.

Fig. 56 : Des arguments numériques justifiant l'équation différentielle des tractrices (Binôme E1/E2)

La dernière question demandait de repérer des propriétés mathématiques de la courbe dynamique pour justifier l'équation trouvée. Cette question amène les étudiants à interpréter mathématiquement le comportement de la courbe dynamique à partir de l'expression symbolique de l'équation différentielle. Cette interprétation les conduit à conjecturer l'existence d'une autre moitié de la famille de courbes :

E2 : et puis... propriétés mathématiques... on va parler un peu, et puis c'est bon

E1 : alors ... la bande

E2 : oui, et voilà... on peut dire que

E1 : la fonction est définie en... euh... l'équation différentielle est définie

E2 : voilà, voilà ... entre ... -2 et plus... je ne comprends pas bien... pourquoi on ne le voit pas en -2 ? ... mais bon ...

(lignes : 609-613)

E1 : il y avait une possibilité d'aller plus bas...

E2 : parce que là on voit plus, là, si je prends là...

E1 : il n'aura plus la courbe

(lignes : 616-618)

E2 : attend ... attend, si, si ... elle existe parce que regarde... on voit pas la courbe, elle est peut-être cachée ...

E1 : ils l'ont cachée ?

(lignes : 621-622)

Les étudiants arrivent à confirmer leur conjecture grâce à la stratégie de validation numérique qu'ils ont déjà utilisée. Ils se rendent compte, par le déplacement du point M (celui qui permet de déplacer la courbe dynamique) que même s'il n'y a pas de courbe ni de droite tangente, il est possible de continuer à déplacer le point M. De plus, comme les valeurs de l'expression symbolique de l'équation différentielle ne dépendent que des coordonnées de M, alors on peut connaître la pente de la droite tangente au point M de la courbe dynamique, même si la courbe dynamique n'est pas affichée :

E2 : voilà ... et en fait, on le voit encore en dynamique aussi, celui-là... il calcule l'expression en dynamique... ce (... ?) on devra faire attention effectivement

E1 : ah oui, oui

E2 : oui, regarde... voilà... donc on peut vérifier vraiment... j'ai peur que ce soit marqué en dynamique, bon, ce n'est pas grave, donc en fait on le voit, mais la courbe existe aussi entre -2 et 2

E1 : oui, oui

E2 : parce que sinon, il mettrait pas les... il ne donnerait pas ça...

E1 : ah oui, oui

(lignes : 635-640)

E2 : (... ?) l'on sache... parce qu'on a les propriétés mathématiques, alors on nous dit qu'on a entre -2 et 2, mais on ne la voit qu'entre 0 et 2... mais elle existe quand même, c'est parce qu'elle est cachée, ou non ?

(ligne : 643)

L'étudiant E2 identifie aussi que la famille de courbes doit être symétrique, et cela est à nouveau confirmé par les rétroactions numériques du logiciel :

E2 : ce que je veux dire, là on la voit, mais là elle existe pareil et symétrique, et on la voit parce qu'en fait, quand on atteint 2 ici, après on voit qu'on va arriver, paf ! ça y est

(ligne : 649)

E2 : et l'expression le dit parce que je l'ai fait calculer, là

(ligne : 651)

Nous constatons que le travail exploratoire et les rétroactions numériques du logiciel ont contribué à établir un lien direct (sans passer par l'expression symbolique des solutions) entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et les courbes solutions.

Le binôme continue la recherche d'arguments mathématiques justifiant l'équation différentielle. Il met en relation le registre graphique et symbolique concernant la valeur infinie de la pente de la droite tangente, ainsi que sur la reconnaissance de l'axe des abscisses comme une asymptote horizontale de la famille de courbes :

E1: il faudrait vérifier qu'on a une asymptote en fait, quand « x » ... tend ... euh

E2: ben, quand x tend vers l'infini ? [...]

(lignes : 667-668)

E2: et ben, la pente est égale à l'infini quand « y » tend vers 2

E1: oui, oui, c'est ça

E2 : et la valeur de « x » en ce point... quelle est sa valeur ?.. non, pourquoi ? non, c'est la valeur de « x », on ne l'aura plus, ça dépend de la courbe et puis après, comme il y a symétrie, il y a forcément une asymptote horizontale « Ox »

(lignes : 672-674)

Dans la fiche de réponses (fig. 57 ci-après), les étudiants explicitent leurs arguments justifiant l'équation différentielle trouvée :

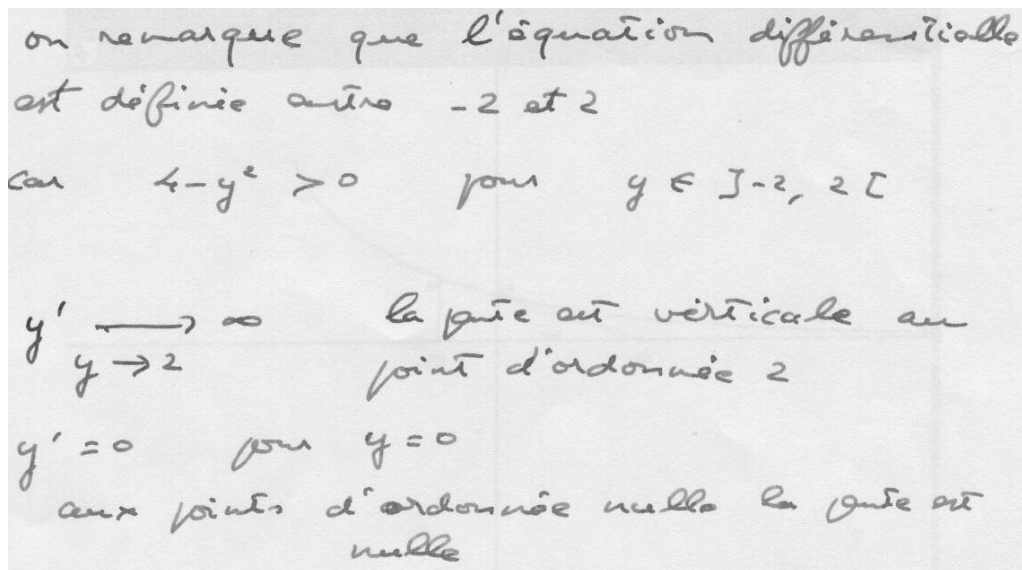


Fig. 57 : Des arguments justifiant l'équation différentielle des tractrices (Binôme E1/E2)

### Conclusion

Nous avons supposé, lors de la conception de la situation de mise en équation de la famille de tractrices, qu'elle pouvait permettre d'identifier certaines évolutions possibles concernant d'éventuelles difficultés trouvées lors de la mise en équation des exponentielles. Nous avons aussi considéré que cette situation permettrait de tester l'efficacité des liens construits entre les registres graphique et symbolique des équations différentielles.

En ce qui concerne les évolutions possibles des difficultés identifiées lors de la mise en équation de la famille d'exponentielle, nous avons constaté que les difficultés identifiées dans la situation précédente ont été absentes. Cela ne signifie pas nécessairement qu'il y a eu un apprentissage définitif, mais on peut quand même souligner que les étudiants n'ont pas cherché à mettre en œuvre une stratégie où la droite tangente fût prise comme modèle pour l'équation différentielle cherchée (théorème en acte TA5) ; ils n'ont pas eu non plus de difficultés concernant le lien avec une seule expression symbolique (l'équation différentielle) pour toute une famille de courbes solutions (théorème en acte TA4). Cependant, nous considérons la possibilité que ces difficultés ne soient pas apparues, à cause des stratégies mises en œuvre pour obtenir l'équation différentielle de chacune de ces familles de courbes, qui étaient très différentes. Rappelons que pour la famille d'exponentielles, la stratégie utilisée par la plupart des étudiants a été celle qui passait par l'identification d'un invariant numérique de la famille de courbes, tandis que pour les tractrices la seule stratégie possible était celle qui passait par l'identification de l'invariant graphique de la famille de courbes.

En ce qui concerne les liens construits entre le registre graphique et le registre symbolique des équations différentielles, nous avons constaté, à partir du travail des trois binômes choisis, que deux d'entre eux (E22/E23 et E3/E4) tentaient de résoudre l'équation différentielle (arguments du type RES-ED). Cela veut dire que pour ces deux binômes, le seul lien possible entre le registre graphique des solutions et le registre symbolique de l'équation différentielle passe par la résolution algébrique. En revanche, le binôme E1/E2 mobilise la stratégie VAL-NUM pour justifier la validité de l'équation différentielle, ce qui le conduit à un travail exploratoire qui favorise la mise en relation directe des propriétés graphiques des solutions avec des propriétés algébriques de l'équation différentielle. Ce qui, pour ce binôme, témoigne d'un progrès dans la flexibilité pour articuler le registre graphique des solutions avec le registre symbolique de l'équation différentielle.

## CHAPITRE 4

### L'EXPERIMENTATION 2004

LA MISE EN PLACE DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL .....	206
4.1. MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE DE FAMILLES DE COURBES EN PAPIER/CRAYON.....	208
4.1.1. Une famille d'exponentielles .....	208
4.1.2. Une famille de tractrices .....	213
4.2. L'ASSOCIATION D'UN VECTEUR DYNAMIQUE ET D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE (LIEN EXPLICITEMENT DONNE).....	220
4.2.3. Le binôme $E'1/E'4$ .....	222
4.2.4. Le binôme $E'12/E'17$ .....	231
4.2.5. Le binôme $E'14/E'15$ .....	244
4.2.6. Bilan par le professeur .....	254
4.3. L'ASSOCIATION D'UN VECTEUR DYNAMIQUE ET D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE (LIEN N'ETANT PAS EXPLICITEMENT DONNE) .....	254
4.3.1. Le binôme $E'1/E'4$ .....	256
4.3.2. Le binôme $E'12/E'17$ .....	263
4.3.3. Le binôme $E'14/E'15$ .....	271

## La mise en place du dispositif expérimental

Dans ce chapitre nous présentons l'analyse *a posteriori* de la mise en place du dispositif expérimental conçu pour l'année 2004.

La deuxième expérimentation s'est déroulée en novembre 2004, avec trois groupes d'étudiants préparant le CAPES (un groupe à Chambéry et deux groupes à Grenoble). Trente-deux étudiants ont participé à l'expérimentation. Le questionnaire initial proposé dans l'expérimentation de l'année 2003, la mise en équation de familles de courbes en papier/crayon et les deux situations en Cabri qui composent le dispositif expérimental, ont fait l'objet de deux séances de travail de trois heures chacune.

Le déroulement du dispositif expérimental dans les trois groupes, a été le même :

- la première séance a débuté avec le questionnaire initial, et il a été proposé de façon individuelle (nous n'avons pas analysé ce questionnaire, car c'est le même que celui proposé en 2003). Après le questionnaire, le professeur a fait une brève introduction sur les équations différentielles, basée sur certaines définitions : équation différentielle de premier ordre, solutions, champs de tangentes. Ensuite, la situation concernant la mise en équation différentielle de familles de courbes, en papier/crayon, a été proposée de manière individuelle. Le professeur a conclu la séance avec une introduction au logiciel Cabri II Plus. Dans cette introduction, le professeur a guidé les étudiants pour construire un vecteur tangent dynamique associé à une équation différentielle, ainsi que le champ de vecteurs à l'aide des outils « Trace » et « Lieu » de Cabri ;
- la deuxième séance a commencé par un bilan effectué par le professeur sur le questionnaire initial. Après quoi il a été proposé, par binômes, la première situation dans Cabri : l'association d'un vecteur dynamique et d'une équation différentielle (lien explicitement donné). Tout de suite après cette situation, le professeur a corrigé l'association d'un des couples : vecteur dynamique – équation différentielle. Ensuite, il a été proposé la deuxième situation en Cabri : l'association d'un vecteur dynamique et d'une équation différentielle (lien n'étant pas explicitement donné). Après cette deuxième situation, le professeur a proposé aux binômes l'étude qualitative d'une équation différentielle dans l'environnement de géométrie dynamique (nous ne l'avons pas analysée faute de temps, le professeur y a travaillé de manière guidée avec les étudiants).

Nous avons enregistré les échanges des étudiants lors du travail par binômes. Les dialogues de trois binômes, choisis au hasard parmi les seize formés (des trois groupes), ont été transcrits et constituent les protocoles donnés en annexe.

Notre analyse est basée sur les échanges des étudiants ainsi que sur leurs productions écrites. Sauf pour la situation de mise en équation différentielle de famille de courbes, en papier/crayon, où est pris en compte l'ensemble des étudiants, l'analyse *a posteriori* se centrera sur le travail des trois binômes choisis.

Lors de l'analyse *a priori*, nous avons explicité les connaissances probables à faire fonctionner dans les diverses situations que nous avons conçues, ainsi que les types

d'arguments pour faire les justifications. Cette analyse est explicitée au chapitre 2 et elle a guidé l'analyse *a posteriori*. Nos analyses portent sur la mise en relation entre les représentants d'objets du champ des équations différentielles, du point de vue du type de lien établi, des types d'arguments mis en œuvre lors des justifications et des connaissances mises en fonctionnement. Rappelons les connaissances que nous avons explicitées au chapitre 2 concernant la deuxième expérimentation :

*C5 : « pour une équation différentielle  $y'=f(x,y)$ , où  $f$  est une fonction numérique en  $\mathcal{R}^2$ , si  $f(x_P,y_P)>0$  (resp.  $f(x_P,y_P)<0$ ), alors la courbe solution  $IP$  qui passe par  $(x_P,y_P)$  est une courbe représentative d'une fonction croissante (resp. décroissante) »*

*C6 : « soit une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , la fonction  $f$  donne en chaque point  $P(x,y)$ , la pente de la droite tangente à la courbe solution passant par  $P$  »*

*C10 : « soit  $f$  une numérique continue définie sur  $]a, +\infty[$ , si  $f$  est décroissante et minorée (resp. croissante et majorée) sur  $]a, +\infty[$ , alors  $f$  a une limite finie quand  $x \rightarrow +\infty$  »*

*C12 : « la courbe  $F_i$  des points d'inflexion d'une famille de solutions d'une équation différentielle, est composée des points où les pentes des courbes solutions passent par un extremum. Pour une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , ces points font partie de l'ensemble des couples  $(x,y)$  satisfaisant à  $f_x(x,y)+f_y(x,y)f(x,y)=0$  »*

*C13 : « soit  $x \rightarrow y(x)$  définie sur  $]a, +\infty[$ , dérivable. Si  $y'(x) \rightarrow \alpha$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors :*

*Si  $\alpha > 0$  (éventuellement  $\alpha = +\infty$ ),  $y(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$*

*Si  $\alpha < 0$  (éventuellement  $\alpha = -\infty$ ),  $y(x) \rightarrow -\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$*

*Si  $\alpha = 0$ , on ne peut rien dire a priori »*

*C17 : « soit une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$ , et soit  $V$  le représentant graphique d'un vecteur d'origine  $P(x,y)$  et de pente  $f(x,y)$ . Si le vecteur reste inchangé lorsque  $P$  se déplace sur une droite verticale (resp. horizontale), il est associé à une équation différentielle dépendant uniquement de la variable  $x$  (resp.  $y$ ). Dans le cas contraire, il est associé à une équation différentielle dépendant des variables  $x$  et  $y$  »*

L'analyse *a posteriori* est globalement structurée de la façon suivante : pour chaque situation, nous présentons les événements les plus marquants des démarches des étudiants et interprétons leurs difficultés d'un point de vue conceptuel. Nous analysons aussi le rôle joué par le logiciel dans les démarches des étudiants.

Pour l'analyse de la situation de mise en équation différentielle de familles de courbes, en papier/crayon, nous avons numéroté les étudiants de E'1 à E'32. Nous utilisons des tableaux pour présenter de façon globale les réponses des étudiants, et dans ceux-ci nous avons regroupé les réponses en différents types, chaque type comportant un même contenu.



Pour les situations d'association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle, nous analyserons les trois binômes : E'1/E'4, E'12/E'17 et E'14/E'15.

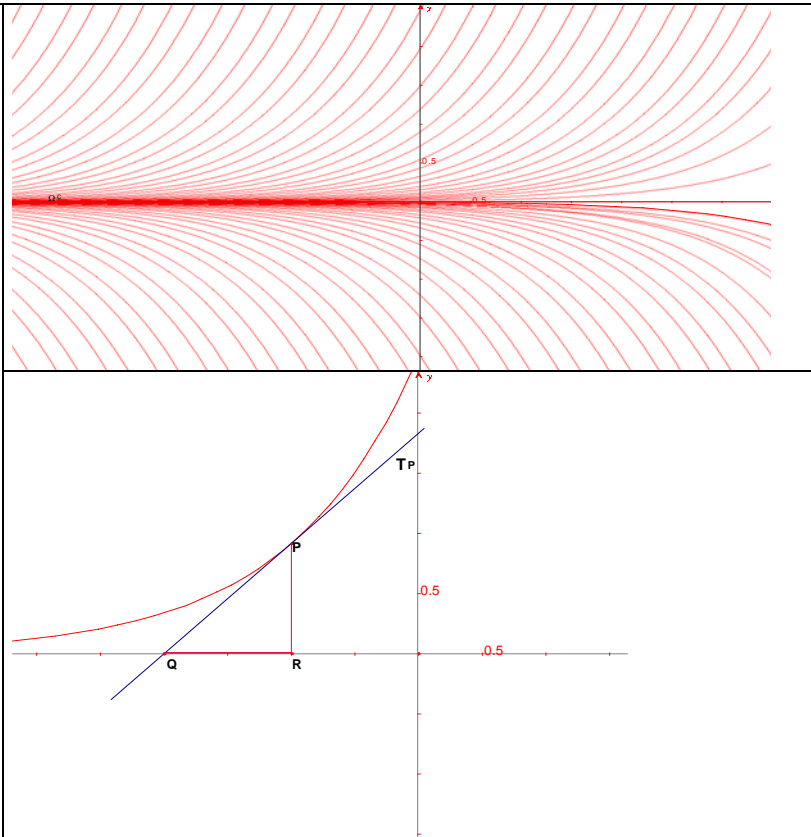
#### 4.1. MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE DE FAMILLES DE COURBES EN PAPIER/CRAYON

Rappelons que dans cette situation, on recherche des éléments de comparaison sur les difficultés des étudiants identifiées à travers ce type de situation en géométrie dynamique. Les questions proposées ont été inspirées des situations de mise en équation différentielle de familles de courbes dans l'expérimentation de l'année 2003. A la différence du travail en géométrie dynamique, nous avons fourni les informations graphiques pertinentes pour arriver à l'équation demandée

Nous avons divisé l'*analyse a posteriori* de cette situation en deux parties.

##### 4.1.1. Une famille d'exponentielles

La première partie demandait la mise en équation d'une famille d'exponentielles, ainsi que la justification de l'équation différentielle trouvée. Nous avons proposé les questions suivantes :

<p>1) Les figures ci-contre correspondent à la même famille de courbes <math>\Omega</math>, la tâche consiste à trouver l'équation différentielle de premier ordre associée à la famille <math>\Omega</math>.</p> <p>Une propriété de la famille de courbes <math>\Omega</math> est la suivante : Pour une courbe quelconque de la famille, si <math>T_P</math> est la tangente en un point <math>P</math> de la courbe, pour tout point <math>P</math>, la sous-tangente (segment <math>QR</math>) a toujours une longueur constante « <math>k</math> ».</p>	
<p style="text-align: center;"><u>Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle</u></p> <p>2) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes <math>\Omega</math> ?</p>	

Pour l'analyse, nous nous appuyons sur les observables obtenues dans les deux sujets : *La mise en équation différentielle de la famille d'exponentielles*, et *La justification de l'équation différentielle*.

### La mise en équation différentielle de la famille d'exponentielles

Dans le Tableau 1 suivant, nous présentons les réponses des trente-deux étudiants, selon le type de stratégie mis en œuvre pour obtenir l'équation différentielle de la famille d'exponentielles :

Type de stratégie	Effectifs	Commentaire
EXP-GRAPH : ED-PEN (ED déduite à l'aide de la formule de la pente d'une droite)  (Réponses correctes)	15/32	E'1, E'3, E'4, E'5, E'6, E'9, E'10, E'14, E'15, E'17, E'18, E'22, E'23, E'24, E'25
EXP-GRAPH : ED-DT (ED déduite à l'aide de l'équation de la tangente en P)  (Réponses correctes)	3/32	E'13, E'29, E'30
Mélange des stratégies EXP-GRAPH : ED-DT et EXP-GRAPH : ED-PEN  (Réponses correctes)	3/32	E'11, E'19, E'21  L'équation de la droite tangente a été exprimée, mais elle n'est pas utilisée pour obtenir l'équation différentielle. Celle-ci a été obtenue par la stratégie ED-PEN
EXP-GRAPH : ED-DT  (ED déduite à l'aide de l'équation de la tangente en P)  (Réponses incorrectes)	8/32	E'2, E'7, E'8, E'16, E'26, E'27, E'28, E'31 E'2 : $-y/y' + 2x = -k$ (stratégie ED-DT, des erreurs lors du traitement symbolique) ; E'7 : $f(x_P)k = f'(x_P)$ (stratégie ED-DT, erreur de signe lors du traitement symbolique) ; E'8 : $f'(x) = -y/k$ (stratégie ED-DT, erreur de signe lors du traitement symbolique) ; E'16 : $f'(t) = kf(t)$ (stratégie ED-DT, erreur de signe lors du traitement symbolique) ; E'26 : $y' = \tan x$ (sans fournir plus de détails) ; E'27 : $f(x_0, y_0) = y_0/(x_0 - 4)$ ; E'28 : $y = (y_P/k)x + b$ (l'étudiant donne l'expression symbolique de la droite tangente) E'31 : $y' = /x /$
Sans réponse	1/32	E'32
Réponses isolées  ED correcte mais ayant mis en œuvre une procédure incorrecte	2/32	E'12 : $y' = y/k$ (ci-dessous nous analyserons la réponse de l'étudiant) ; E'20 : $y' = -y/k$ , (ci-dessous nous analyserons la réponse de l'étudiant).

Tableau 1 : Stratégies mises en œuvre par l'ensemble des étudiants lors de la mise en équation différentielle de la famille d'exponentielles

Les réponses des étudiants montrent que la plupart (21 sur 32) arrivent à l'équation différentielle demandée. Parmi ces étudiants, 15 utilisent directement la formule de la pente de la droite tangente pour obtenir l'équation différentielle (stratégie EXP-GRAPH : ED-PEN).

Pour la moitié des étudiants qui n'ont pas obtenu de façon correcte l'équation différentielle (4 sur 8), la raison de cet échec a tenu à des difficultés de nature algébrique lors du traitement de l'expression symbolique de l'équation de la droite tangente (stratégie EXP-GRAPH : ED-DT).

L'étudiant E'26 semble supposer que lorsqu'on ne connaît pas explicitement la fonction associée à une courbe, la dérivée peut s'obtenir à l'aide de la fonction trigonométrique tangente. Cette interprétation démontre qu'un lien erroné est établi par l'étudiant entre les notions de dérivée, de pente de la droite tangente, et la fonction trigonométrique tangente. En ce qui concerne l'étudiant E'28, la réponse qu'il fournit montre que pour lui, l'équation différentielle correspond à l'équation de la droite tangente (nous avons identifié ce raisonnement dans l'expérimentation de l'année 2003, sous la forme du théorème en acte TA4).

Pour avoir un aperçu des difficultés rencontrées par les étudiants, nous analyserons brièvement les réponses des étudiants E'12 (cet étudiant appartient à l'un des binômes que nous avons choisis) et E'20. Ces étudiants ont fourni l'équation différentielle correcte, et pourtant leur procédure est incorrecte :

**L'étudiant E'12**

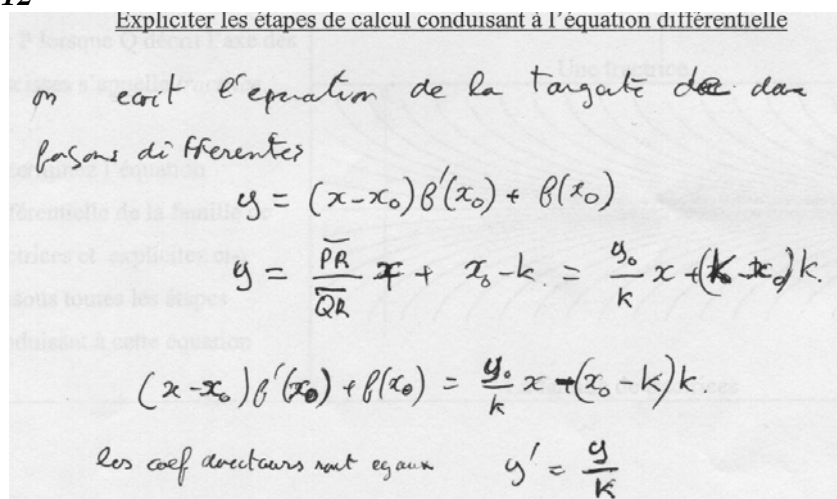


Fig. 1 : Mise en équation différentielle de la famille d'exponentielles par l'étudiant E'12

Cet étudiant essaie de mettre en œuvre la stratégie EXP-GRAPH : ED-DT et il propose deux manières différentes d'écrire l'équation de la droite tangente. Dans la deuxième expression symbolique, E'12 exprime correctement le coefficient directeur de la droite tangente, et pourtant l'ordonnée à l'origine est substituée erronément par l'abscisse du point Q. Lors de la comparaison qu'il fait des deux expressions proposées, il prend en compte seulement les coefficients directeurs et il néglige les autres termes. Ce qui le conduit à l'équation différentielle cherchée.

## L'étudiant E'20

Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle

$T_p$  passe par  $P(x_p, y_p)$ .  
 coeff directeur de  $T_p$ :  $\frac{y_p - y_a}{x_p - x_a} = \frac{y_p - 0}{x_p - k} = \frac{y_p}{k}$

$T_p: y = \frac{y_p}{k}x + \frac{y_p}{k}(k - x_p) = \left(\frac{y_p}{k}\right)(x + k - x_p)$

$f(x, y) = \frac{y_p}{k}(x_p, k - x_p) = y_p = f(x_p)$

$y' = f(x, y)$   
 l'axe de la tangente =  $y'$ .

$y' = \frac{y_p}{k}$        $\frac{y'}{y} = \frac{1}{k}$        $\ln y = \frac{1}{k}x + c$        $y = c e^{1/k x}$

$P\left(\frac{x_p}{y_p}\right)$      $R\left(\frac{x_p}{0}\right)$      $Q\left(\frac{x_p - k}{0}\right)$

$y = a \times 1 + b = \frac{y_p}{k} \times 1 + b$   
 $\frac{y_p}{k}(x_p, k) + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{y_p}{k}(k - x_p)$

Fig. 2 : Mise en équation différentielle de la famille d'exponentielles par l'étudiant E'20

L'étudiant E'20 obtient sans problème la pente de la droite tangente, ainsi que son équation. Pourtant, il considère que l'équation différentielle demandée est de la forme  $y' = f(x, y)$ , où la fonction  $f(x, y)$  doit s'obtenir à partir de l'équation de la droite tangente écrite sous la forme  $y - ax - b = 0$ , alors l'étudiant déclare  $f(x, y) = y - ax - b$ . En ce qui concerne l'équation différentielle  $y' = y/k$ , E27 semble supposer que dans l'expression symbolique de  $f$ , le coefficient de  $x$  est le coefficient directeur de la droite tangente et il est pris pour l'équation cherchée. La stratégie mise en œuvre par cet étudiant paraît s'appuyer sur le théorème en acte TA4 (l'équation de la droite tangente comme modèle pour l'équation différentielle cherchée).

**La justification de l'équation différentielle**

Le Tableau 2, en page suivante, contient les types d'arguments justifiant l'équation différentielle de la famille d'exponentielles, donnés par les vingt-trois étudiants qui ont fourni l'équation différentielle correcte. Quelques étudiants ont fourni plus d'un argument :

Type d'arguments	Effectifs	Commentaire
RES-ED (fondés sur la résolution algébrique de l'ED)	9/23	E'6, E'19, E'20, E'21, E'25, E'29 : les courbes solutions et la famille donnée ont la même forme ; E'12 : sans résoudre l'ED, il écrit « on a bien des courbes qui ressemblent à l'exponentielle » ; E'30 : sans commentaires, il écrit « $y' = y/k$ , $y = Ce^{x/k}$ » ; E'9 : l'étudiant résout l'ED et obtient « $y = Ae^{1/k}$ » et il ajoute « pour vérifier que l'ED déterminée correspond à celle cherchée, on peut choisir un point quelconque pour voir s'il résout l'équation, généralement on peut prendre le point d'abscisse 0 ».
CONC-DER-SEC (étude de la concavité à l'aide du signe dérivée seconde)	6/23	E'3, E'5 : interprètent le signe de la dérivée 2 <sup>de</sup> en termes de variation de la dérivée 1 <sup>ère</sup> ; E'1, E'4 : obtiennent la dérivée seconde mais ils se bornent à affirmer que cela correspond bien au dessin ; E'21, E'22 : utilisent le signe de la dérivée dans le cas où il est positif et l'interprètent en termes de croissance des solutions
SENS-VAR (étude du sens de variation à l'aide du signe de la dérivée)	6/23	E'10, E'11, E'13, E'17, E'19, E'24
VAR-ED (fondés sur l'identification de propriétés dues à la forme de l'expression symbolique $y' = f(y)$ )	4/23	E'14, E'15, E'17, E'18 : la même pente de la tangente pour les points des courbes solutions de même ordonnée
BRCH-INFI-S (étude des branches infinies à partir de l'expression symbolique des solutions)	1/23	E'29
Réponses isolées	1/23	E'23 : « Thalès dans le triangle PQR avec un côté de longueur k et un angle adjacent tel que $\tan \theta = y'$ »

Tableau 2 : Des arguments justifiant l'équation différentielle de la famille d'exponentielles formulés par les étudiants l'ayant obtenue correctement

Le Tableau 3 ci-dessous contient les types d'arguments justifiant l'équation différentielle, donnés par les neuf étudiants qui n'ont pas fourni l'équation correcte. Un seul étudiant (E'16) donne deux types d'arguments :

Type d'argument	Effectifs	Commentaire
RES-ED (fondés sur la résolution algébrique de l'ED)	2/9	E'2 : « soit résoudre l'ED et tracer les courbes que l'on trouve, soit faire des tangentes et dessiner les courbes » E'16 résout l'ED et affirme que les courbes solutions correspondent bien à la famille
SENS-VAR (étude du sens de variation à l'aide du signe de la dérivée)	1/9	E'16
Réponses isolées	3/9	E'7 : « il faut faire la réciproque. Tracer une exponentielle et montrer que la sous-tangente est une constante » E'8 : « une ED avec une solution particulière » E'27 : « l'équation de la tangente que j'ai trouvée »
Sans réponse	4/9	E'26, E'28, E'31, E'32

Tableau 3 : Des arguments justifiant l'équation différentielle de la famille de tractrices formulés par les étudiants ne l'ayant pas obtenue correctement

La plupart des étudiants ayant réussi à écrire l'équation différentielle la justifient en mettant en œuvre les stratégies que nous avons prévues dans l'analyse *a priori*. Nous remarquons qu'un peu plus d'un tiers de ces étudiants (9 sur 23) utilisent des arguments fondés sur la résolution algébrique de l'équation différentielle (arguments du type RES-ED) pour justifier l'équation différentielle. L'étudiant E'9 semble supposer que la vérification de l'équation différentielle consiste à vérifier que les coordonnées d'un point quelconque des solutions satisfont leur expression symbolique. Ce dernier paraît confondre l'équation différentielle avec l'expression symbolique des solutions.

Le lien entre les registres graphique et symbolique en utilisant des arguments du type RES-ED est un lien indirect, qui passe par l'expression symbolique de l'équation différentielle. Pourtant, nous avons constaté que plus des deux tiers (16 sur 23) des étudiants ayant obtenu l'équation différentielle correcte tentent de mettre en œuvre des arguments (CONC-DER-SEC, SENS-VAR et VAR-ED) liant directement les registres graphique et symbolique. Cependant, nous trouvons que par exemple les arguments du type CONC-DER-SEC (étude de la concavité à l'aide du signe dérivée seconde) ont été bien utilisés seulement par deux étudiants (E'3 et E'5), tandis que les quatre autres étudiants (E'1, E'4, E'21 et E'22) ne sont pas arrivés à interpréter dans le registre graphique le signe de la dérivée seconde.

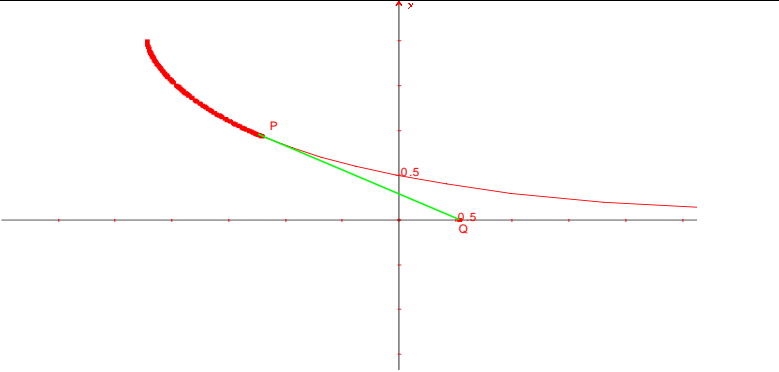
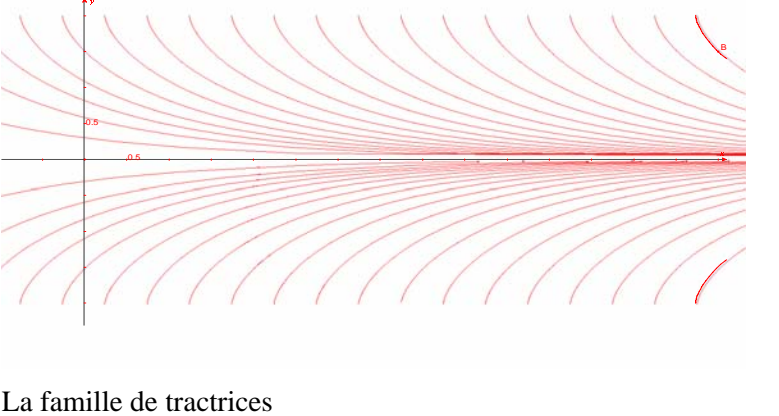
En ce qui concerne les neuf étudiants n'ayant pas obtenu l'équation différentielle correcte, nous remarquons que l'étudiant E'2 envisage de mettre en œuvre des arguments du type RES-ED pour vérifier la cohérence graphique des solutions obtenues par la résolution algébrique avec les courbes fournies, et pourtant il ne résout pas l'équation qu'il a trouvée. L'étudiant E'16 qui a obtenu  $f'(t)=kf(t)$  comme équation différentielle pour la famille d'exponentielles, formule des arguments du type SENS-VAR pour déterminer le sens de variation des solutions à partir du signe de la dérivée, ce qui correspond bien aux courbes fournies. Enfin, l'étudiant E'8 semble considérer la courbe qui illustre la propriété de la famille de courbes, comme une solution particulière de l'équation différentielle.

## Conclusion

Rappelons que dans l'expérimentation de l'année 2003, la totalité des étudiants est arrivée à l'équation différentielle, cependant l'analyse du travail des binômes choisis a montré diverses difficultés que nous avons signalées au chapitre 3. Ces difficultés ne sont presque pas apparues dans l'expérimentation 2004. Il semblerait que la perturbation introduite par la nature dynamique des objets en jeu (courbes, droites tangentes) augmente la complexité des tâches proposées. En revanche, l'environnement de géométrie dynamique semble donner un champ plus vaste pour la vérification des conjectures. Nous constatons que les binômes donnent davantage d'arguments pour valider l'équation différentielle trouvée dans l'environnement informatique, qu'en papier/crayon.

### 4.1.2. Une famille de tractrices

La deuxième partie demande la mise en équation différentielle d'une famille de tractrices et la justification de l'équation trouvée. Les questions posées ont été les suivantes :

<p>3) Soit PQ un segment de longueur constante « k ». On place le point Q sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé. La courbe décrite par P lorsque Q décrit l'axe des abscisses s'appelle <i>tractrice</i>.</p>	 <p>Une tractrice</p>
<p>Déterminez l'équation différentielle de la famille de tractrices et explicitez ci-dessous toutes les étapes conduisant à cette équation</p>	 <p>La famille de tractrices</p>
<p>Les étapes conduisant à l'équation différentielle</p> <p>4) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de tractrices ?</p>	

De la même manière que dans la première partie, nous ferons l'analyse en prenant en compte les observables sur : *La mise en équation différentielle de la famille de tractrices*, et *La justification de l'équation différentielle*.

### La mise en équation différentielle de la famille de tractrices

Le Tableau 4 suivant présente de façon globale les stratégies mises en œuvre par les trente-deux étudiants, pour obtenir l'équation différentielle de la famille de tractrices :

Type de stratégie	Effectifs	Commentaire
TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH (ED obtenue à l'aide de la formule de la pente et du théorème de Pythagore) (Réponses correctes)	15/32	E'1, E'3, E'4, E'5, E'6, E'10, E'12, E'17, E'19, E'23, E'24, E'25, E'28, E'31, E'32
TRAC-GRAPH : ED-DT+PYTH (ED obtenue à l'aide de l'équation de la droite tangente et du théorème de Pythagore) (Réponses correctes)	2/32	E'8, E'13
TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH  (Réponse incorrectes) (Erreur : il manque le signe moins)	7/32	E'11, E'14, E'15, E'18, E'20, E'22, E'30. E'20 : il ajoute une constante à la fin du traitement symbolique, comme s'il s'agissait de l'obtention d'une primitive
TRAC-GRAPH : ED-PEN (ED obtenue à l'aide de la formule de la pente et du théorème de Pythagore)  (Réponses incorrectes)	3/32	E'9 : l'étudiant essaie d'arriver à une équation en dérivant $\tan \theta$ , où $\theta$ est l'angle aigu entre la droite tangente et l'axe des $x$ (procédure inachevée) ; E'26 : $y'_p = \frac{y_p}{k \cos \alpha}$ ; E'27 : $y' = \frac{y}{x - 0,5}$
TRAC-GRAPH : ED-DT (ED obtenue à l'aide de l'équation de la droite tangente et du théorème de Pythagore)  (Réponses incorrectes)	4/32	E'2 : $y' = \sin \theta$ (nous analyserons la réponse de l'étudiant en page suivante) ; E'7 : l'étudiant essaie de résoudre un système de deux équations, où une équation procède du Théorème de Pythagore et l'autre de l'équation de la droite tangente (procédure inachevée) ; E'16 : $f(t) + f'(t)(f(t)-k)=0$ (plus loin nous analyserons la réponse de l'étudiant) ; E'29 : l'étudiant écrit l'équation de la droite tangente et essaie d'obtenir l'abscisse du point Q (procédure inachevée)
Sans réponse	1/32	E'21

Tableau 4 : Stratégies mises en œuvre par l'ensemble des étudiants lors de la mise en équation différentielle de la famille d'exponentielles

Nous trouvons qu'un peu plus de la moitié des étudiants (17 sur 32) arrivent à l'équation différentielle demandée et que sept étudiants échouent pour ne pas avoir mis un signe moins dans l'expression symbolique (l'étudiant E'20 ajoute une constante à l'expression obtenue). Pour ces étudiants-là, l'équation trouvée n'a pas été contrôlée à l'aide du registre graphique (par exemple, en interprétant le signe de la dérivée en termes de sens de variation des solutions). La plupart des étudiants qui ont trouvé l'équation différentielle ont mis en œuvre la stratégie TRAC-GRAPH : ED-PEN+PYTH, en déduisant l'équation à l'aide de la formule de la pente d'une droite.

Des huit étudiants restants, l'étudiant (E'21) et les sept autres n'ont pas obtenu l'équation différentielle correcte. Parmi ces derniers, deux (E'7 et E'29) n'ont pas réussi à finir le traitement symbolique en jeu, et l'étudiant E'9 suppose que l'équation peut être déduite en dérivant la tangente de l'angle entre la droite tangente et l'axe des abscisses.

Pour avoir un aperçu des difficultés rencontrées par les étudiants, nous analyserons brièvement les réponses de deux étudiants E'2 et E'27 :



L'étudiant E'2

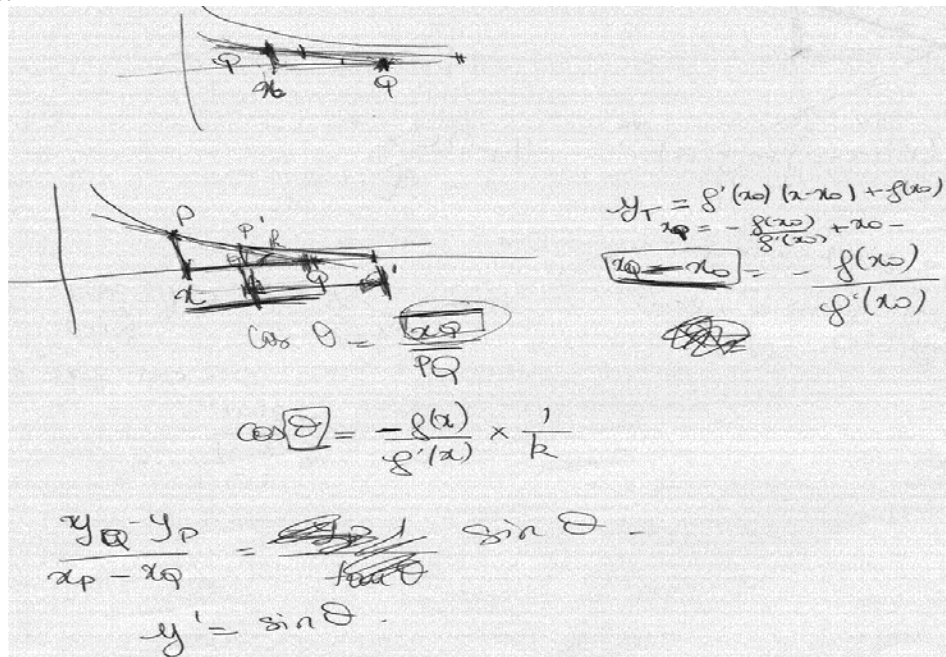


Fig. 5 : Mise en équation différentielle de la famille de tractrices par l'étudiant E'2

L'étudiant E'2 met en oeuvre la stratégie TRAC-GRAPH : ED-DT. Il appelle  $x$  la projection orthogonale de P et utilise le triangle PQx. L'équation de la droite tangente lui permet d'établir un lien entre le triangle PQx et la dérivée de la solution, au moyen de la fonction cosinus. Nous remarquons, lors de l'utilisation de la fonction cosinus, que l'étudiant ne prend pas en compte les valeurs algébriques des expressions. Pour arriver à l'équation  $y' = \sin \theta$ , l'étudiant semble avoir effectué les traitements suivants : l'expression  $\cos \theta = \frac{-f(x)}{f'(x)} \times \frac{1}{k}$  le conduit à la relation  $\frac{-y_P}{k} = \sin \theta$ , en remplaçant  $f(x)$  par  $y_P$  et  $f'(x)$  par  $\tan \theta$ ; il lie aussi la pente de la droite PQ et la dérivée, de la manière suivante :  $y' = \frac{y_Q - y_P}{x_P - x_Q} = \frac{-y_P}{k} = \sin \theta$ , où il considère  $x_P - x_Q = k$ .

## L'étudiant E'27

Les étapes conduisant à l'équation différentielle

$PQ = k$

Pente de la tangente :

$$y'_P = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{y_P - 0}{x_P - 0,5}$$

$$= \frac{y_P}{x_P - 0,5}$$

$$y' = \frac{y}{x - 0,5}$$

la hypf du triangle rect.  
HPQ.

Mais ne nous permet pas  
de calculer  $y'_P$ .

$x_P = HQ - 0,5$ .

$y_P = PH$ .

et  $PH^2 + HQ^2 = k^2$ .

$y^2 + (x+0,5)^2 = k^2$ .

équation vérifiée par les  
coord de tous pts P vérifiant  
les condit° demandées.

Fig. 8 : Mise en équation différentielle de la famille de tractrices par l'étudiant E'27

L'étudiant E'27 lit sur le graphique les coordonnées du point Q et met en œuvre la stratégie TRAC-GRAPH : ED-PEN pour arriver à l'équation  $y' = \frac{y}{x - 0,5}$ . Il semble être gêné du fait

que le paramètre  $k$  n'intervienne pas. Nous remarquons aussi que l'étudiant E'27 ne trouve pas le moyen de lier l'hypoténuse du triangle HPQ (H est la projection orthogonale de P) à la dérivée en P. La mise en œuvre du théorème de Pythagore le conduit à une expression qui contient le paramètre  $k$ , mais il n'arrive pas à le relier à l'équation différentielle cherchée. Dans cette dernière expression, il suppose implicitement que le segment HQ reste aussi de longueur constante égale à 0,5. On peut supposer toutefois que E'27 est conscient du fait que l'expression qui met en jeu le paramètre  $k$ , n'est pas l'équation différentielle demandée.

### La justification de l'équation différentielle

Nous présentons d'abord les arguments fournis par les étudiants ayant obtenu l'équation différentielle attendue, et ensuite les arguments des autres étudiants. Le Tableau 5 suivant présente les types d'arguments justifiant l'équation différentielle de la famille de tractrices, formulés par les dix-sept étudiants qui ont obtenu l'équation différentielle attendue :

Type d'argument	Effectif	Commentaire
RES-ED (fondés sur la résolution de l'ED)	1/17	E'8 essaie de résoudre l'ED et suppose que les courbes correspondront au dessin ;
CONC-DER-SEC (étude de la concavité à l'aide du signe dérivée seconde) (des essais de mise en œuvre de ce type d'arguments)	2/17	E'3 obtient l'expression symbolique de la dérivée seconde, mais il n'arrive pas à l'analyser à l'aide de son signe ; E'5 effectue les étapes du début pour obtenir la dérivée seconde
SENS-VAR (étude du sens de variation à l'aide du signe de la dérivée)	3/17	E'17, E'19, E'24
VAR-ED (fondés sur l'identification de propriétés dues à la forme $y'=f(y)$ de l'expression symbolique)	1/17	E'17 suppose que la pente de la tangente est la même en tous les points des courbes solutions de même ordonnée (E'17 a utilisé ce type d'arguments pour les exponentielles)
Sans réponse	8/17	E'1, E'4, E'10, E'23, E'25, E'28, E'31, E'32
Réponses isolées	3/17	E'6 : « $\lim y \rightarrow 0 \Rightarrow y'^2 \rightarrow 0$ : or la tangente est horizontale à $+\infty$ » ; E'12 : « la dérivée CV vers 0 quand $x \rightarrow \infty$ » E'13 : « si P est au-dessus de l'axe des abscisses, alors $y \forall$ » (sans justifier mathématiquement)

Tableau 5 : Des arguments justifiant l'équation différentielle des tractrices, formulés par les étudiants ayant obtenu l'équation différentielle correcte

Le Tableau 6 ci-dessous présente les arguments formulés par les quinze étudiants qui n'ont pas fourni l'équation différentielle attendue :

Type d'argument	Effectifs	Commentaire
RES-ED (fondés sur la résolution de l'ED)	2/15	E'2, E'20 : supposent que si on résout l'ED, les courbes solutions correspondront au dessin ;
CONC-DER-SEC (étude de la concavité à l'aide du signe dérivée seconde)	1/15	E'22 obtient l'expression symbolique de la dérivée seconde et conclut qu'elle est toujours négative et donc que la dérivée première est décroissante ;
SENS-VAR (étude du sens de variation à l'aide du signe de la dérivée)	1/15	E'14, E'15, E'18 : « si $y < 0 \Rightarrow y' < 0$ , si $y > 0 \Rightarrow y' > 0$ » (conclusion tirée de l'expression de l'ED sans la confronter avec le dessin)
VAR-ED (fondés sur l'identification de propriétés dues à la forme de l'expression symbolique $y'=f(y)$ )	2/15	E'14, E'15, E'18 : la pente de la tangente est égale pour les points des courbes solutions de même ordonnée (E'15 et E'18 ont utilisé ce type d'arguments pour les exponentielles)
Sans réponse	8/15	E'7, E'9, E'11, E'16, E'21, E'26, E'29, E'30
Réponse isolée	1/15	E'27 : « solution de la forme $e^{-\lambda x}$ ? avec $\lambda = k$ peut-être ? »

Tableau 6 : Des arguments justifiant l'équation différentielle des tractrices formulés par les étudiants n'ayant pas obtenu l'équation différentielle correcte

Les réponses montrent que parmi les étudiants, sur les dix-sept qui ont réussi à obtenir l'équation différentielle de la famille de tractrices, presque la moitié ne fournit pas d'argument pour justifier l'équation différentielle :

- seuls les étudiants E'17, E'19 et E'24 font le lien direct entre l'expression symbolique et des propriétés graphiques (arguments du type SENS-VAR et VAR-ED) des courbes solutions ;

- pour l'étudiant E'8, l'argument de justification de l'équation différentielle repose sur la résolution algébrique, et pourtant il n'arrive pas à la résoudre. De même, les étudiants E'3 et E'5 tentent de mettre en œuvre la stratégie CONC-DER-SEC, mais ils n'arrivent pas à interpréter graphiquement le signe de la dérivée seconde ;
- l'étudiant E'6 fait le lien entre l'expression symbolique et l'inclinaison de la droite tangente en plus l'infini ;
- sur les dix étudiants restants, huit ne donnent pas de réponse à la question et les deux autres (E'12 et E'13) donnent des réponses vagues.

En ce qui concerne les quinze étudiants n'ayant pas obtenu l'équation de la famille de trajectrices, plus de la moitié (8 sur 15) ne donnent pas de réponse. Les étudiants E'2, E'20, E'22, E'14 font la justification sans contrôler mathématiquement leurs conclusions. Compte tenu de ce que les étudiants E'15 et E'18 ont obtenu l'équation différentielle de la famille de courbes sans le signe moins, mais toujours sous la forme  $y' = f(y)$ , celle-ci satisfait donc bien à l'argument fourni par ces étudiants (argument du type VAR-ED). Enfin, l'étudiant E'27 suppose que la famille de courbes (trajectrices) est représentative d'une famille d'exponentielles.

### Conclusion

De façon générale, nous constatons que la mise en équation de la famille de trajectrices est plus difficile pour les étudiants que celle des exponentielles, et de même pour la justification. Un peu plus de la moitié du groupe (53%) a obtenu l'équation différentielle de la famille de courbes et parmi ces étudiants, 53% ont fourni également des arguments justifiant l'équation différentielle trouvée. Dans le cas des exponentielles, l'obtention de l'équation de la famille de courbes était possible directement, à partir de la formule de la pente d'une droite ; alors que pour la famille de trajectrices, il fallait un traitement faisant intervenir le théorème de Pythagore. En ce qui concerne la justification, la mise en œuvre d'arguments tels que SENS-VAR (fondés sur l'étude du sens de variation à l'aide du signe de la première dérivée), CONC-DER-SEC (fondés sur l'étude de la concavité à l'aide du signe de la dérivée seconde) ou RES-ED (fondés sur la résolution de l'équation différentielle), demandait un traitement de l'expression symbolique de l'équation différentielle, compte tenu de sa complexité et alors qu'il était difficile de les faire fonctionner.

Par rapport à l'expérimentation de l'année 2003, il semblerait qu'en papier/crayon les étudiants réussissent mieux que dans le contexte informatique, où ils ont plus de difficultés. Dans cet environnement, la nature dynamique des objets semble être source de perturbation. Le mouvement introduit le fait qu'il y a plusieurs courbes, tandis qu'en papier/crayon, la mise en équation de la famille de courbes s'effectue à partir de l'étude d'une courbe particulière. Pourtant, il semble que dans le contexte informatique les étudiants arrivent à prendre en compte des aspects du problème qui ne sont pas évidents en papier/crayon. Les résultats de l'année 2003 nous amènent à constater que les étudiants ayant obtenu l'équation différentielle sont presque tous arrivés à la justifier, ce qui n'a pas été le cas dans ceux de 2004. L'exploration dynamique a permis aux binômes d'identifier davantage de propriétés de la famille de courbes. Par exemple, quatre binômes ont élaboré un argument fondé sur le lien entre l'expression symbolique obtenue et le comportement des courbes concernant la dérivée tendant vers plus l'infini. Ce type d'argument n'est pas apparu en papier/crayon.

Nous considérons aussi que l'organisation de la situation de mise en équation de la famille de trajectoires lors de l'expérimentation de l'année 2003 (d'abord les exponentielles, ensuite les trajectoires, puis retour aux exponentielles, et finalement retour aux trajectoires) pourrait avoir contribué à une réussite moindre dans cette situation. En effet, lorsque les étudiants sont revenus à la dernière phase, ils ont eu moins de temps pour y travailler. En revanche, en papier/crayon (année 2004) le travail sur les trajectoires était effectué sitôt après la mise en équation des exponentielles, et la stratégie graphique mise en œuvre dans ce dernier cas était donc réinvestie immédiatement pour l'équation différentielle recherchée.

### **4.2.L'ASSOCIATION D'UN VECTEUR DYNAMIQUE ET D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE (LIEN EXPLICITEMENT DONNE)**

Comme il a été déjà signalé, cette situation a pour objectif de faire interagir de façon directe le registre graphique des solutions, à l'aide d'un vecteur dynamique, avec le registre symbolique d'une équation différentielle. Nous cherchons à étudier dans quelle mesure le contexte informatique favorise le développement des liens entre les représentants en jeu.

Rappelons les tâches proposées aux étudiants :

Ouvrez Cabri Géomètre sur votre ordinateur et le fichier VecteursEDConnues.fig. Les vecteurs Vecteur1, Vecteur2 et Vecteur3 sont associés respectivement aux équations différentielles 1), 2) et 3).

Les vecteurs sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine : a) Justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l'équation différentielle affichée ; b) Identifier les régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle, dessiner ces régions et les associer à une expression algébrique ; c) Elaborer des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions.

<p>Les équations différentielles:          1) <math>y' = -y(4-y^2)</math>          2) <math>y' = (x+2)/(x^2-1)</math>          3) <math>y' = (y^2+x)(x-y)</math></p> <p>Longueur du vecteur = 1,1</p>	<p>Pourquoi le Vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle <math>y' = -y(4-y^2)</math> ?</p> <p>Des régions du plan où le vecteur a une pente nulle. Expressions algébriques associées.</p> <p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
	<p>Pourquoi le Vecteur 2 peut être associé à l'équation différentielle <math>y' = (x+2)/(x^2-1)</math> ?</p> <p>Des régions du plan où le vecteur a une pente nulle. Expressions algébriques associées.</p> <p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions.</p>
	<p>Pourquoi le Vecteur 3 peut-il être associé à l'équation différentielle <math>y' = (y^2+x)(x-y)</math> ?</p> <p>Des régions du plan où le vecteur a une pente nulle. Expressions algébriques associées.</p> <p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions.</p>

L'analyse du travail des trois binômes choisis prend en compte les observables obtenus pour chacune des trois consignes : *Pourquoi le vecteur peut-il être associé à l'équation différentielle ? Les régions où le vecteur a une pente nulle. Les arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions.* Nous avons fait l'analyse en considérant un seul binôme à chaque fois, car les étudiants n'ont pas suivi le même ordre lors de la résolution des tâches proposées.

Afin de faciliter le suivi des productions des binômes, nous montrons dans la figure 9, en page suivante, le champ de vecteurs associé à chaque équation différentielle proposée :

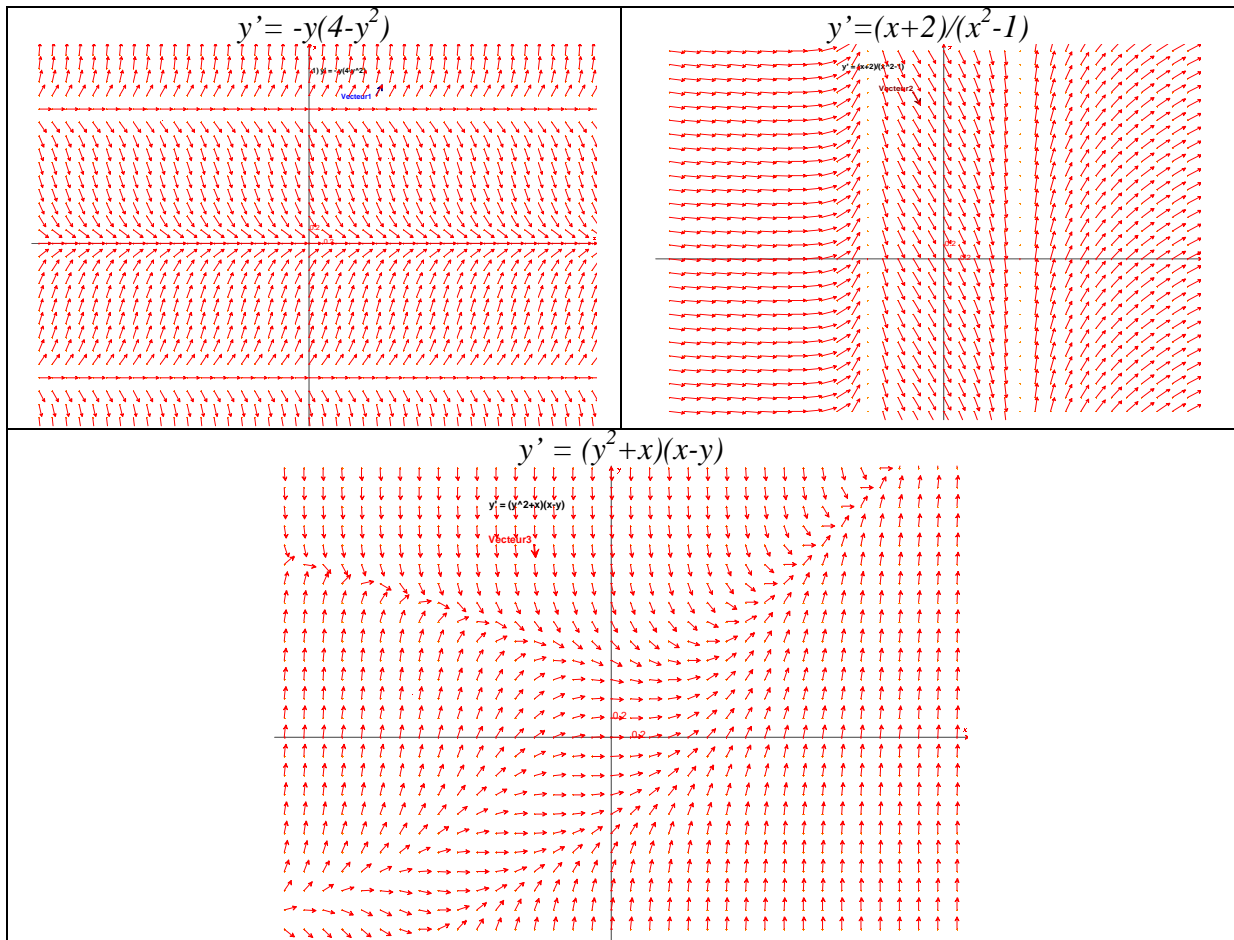


Fig. 9 : Champs de vecteurs associés aux équations différentielles

### 4.2.3. Le binôme E'1/E'4

Lors du travail du binôme E'1/E'4 dans cette situation, chaque étudiant écrit lui-même ses conclusions après les échanges sur un même sujet, sur sa propre feuille de réponses. Pour le travail exploratoire, le binôme utilise dès le début l'outil « Trace » de Cabri.

#### Vecteur 1 – Equation différentielle $y' = -y(4-y^2)$

##### *Pourquoi le vecteur peut-il être associé à l'équation différentielle ?*

Dans un premier temps, le binôme ne trouve aucun lien entre le vecteur tangent dynamique et l'équation différentielle. Les étudiants ne comprennent pas pourquoi le vecteur change, s'il est associé à une équation différentielle. Lors de la première étape du travail, nous remarquons que le déplacement du vecteur est fait sans but spécifique :

- E'4 : c'est lui, cela... tu vois, le vecteur1... est celui-là
- E'1 : voilà ... ah oui, il est là ... je ne comprends rien du tout
- E'4 : (... ?) seule direction en fait ... il a l'air de faire, euh ... faire (... ?)
- E'1 : on va faire, euh ... ses coordonnées

(lignes : 2-5)

- E'4 : attends-moi, je ne comprends pas pourquoi on peut les faire varier comme ça ... s'ils sont associés à une équation différentielle ...
- E'1 : oui, mais ... on est sur un point ...
- E'4 : ah oui, c'est tout pareil ...
- E'1 : la tangente, elle change

(lignes : 26-29)

L'exploration à l'aide du déplacement du vecteur dynamique et la recherche d'arguments permettant d'expliquer les faits graphiques repérés, amènent le binôme à se rendre compte que l'inclinaison du vecteur donne des informations utiles. Les étudiants identifient l'existence de certaines régions du plan où le vecteur devient horizontal (argument type ISC-0). D'abord, ils remarquent que sur la droite  $y=0$  le vecteur reste horizontal. Ce constat graphique conduit le binôme à interpréter la direction horizontale du vecteur en termes de dérivée nulle. De plus, l'expression symbolique de l'équation différentielle s'annule pour  $y=0$ , donc le fait graphique est validé aussi dans le registre symbolique. Comme nous le constaterons, le lien entre  $y'=0$  et la tangente horizontale permet à ce binôme, dans le cas des trois équations différentielles, d'articuler le registre graphique et le registre symbolique concernant le cas particulier de l'isocline zéro :

E'4 : mais déjà les fiches, il faut travailler là-dessus ... parce que déjà  $y=0$ , la dérivée nulle ça veut dire qu'on a une tangente horizontale... et là ça marche, on l'avait tout à l'heure... ou est-ce que ça marche pour tous [les autres vecteurs]? Oui, et encore celui  
(ligne : 43)

E'4 : voilà ... oui, c'est bon

E'1 : d'accord ...

E'4 : ça confirme ce que je veux te dire

E'1 : oui ?

E'4 : tu vois ... puis c'est un premier point... non ? ...

(lignes : 51-55)

P : vous avez trouvé une raison ?

E'1 : non

E'4 : bon ... on a essayé de voir qu'en  $y=0$ , la tangente est horizontale

P : et ça se correspond ?

E'4 : oui, puisque la dérivée s'annule

P : ah, vous avez déjà une raison

E'1 : ah bon ... oui (... ?) c'est la même

P : ça sur un point ...

E'4 : tu vois...

P : il y a une infinité de points dans le plan ...

E'4 : oui, je sais ... bon

(lignes : 58-68)

Le binôme identifie aussi les deux autres droites  $y=-2$  et  $y=2$  où le vecteur devient horizontal. La mise en relation des informations graphiques tirées du travail exploratoire avec des informations tirées de l'expression symbolique de l'équation différentielle, permet au binôme d'associer les changements du vecteur au signe de la pente. Les étudiants reconnaissent des régions où la pente est positive ou négative :

E'1 : ah, puis en « y ... » ... oups ... en  $y=2$  fait ... euh ...

E'4 : ah bah, oui ...

E'1 : et ... euh ... en -2

E'4 : on écrit ?

E'1 : allez ... déjà c'est fait... bon, c'est une chose ... et après ... ?

(lignes : 70-74)

E'1 : qu'est-ce qu'on pourrait dire d'autre... quand ... quand « y » différent de 2, la pente est soit positive ou négative... quand « y » est différent... si tu vois bien, quand « y » est différent de 2 ou -2

E'4 : hum ... ah oui !



E'1 : dans ce cas-là, tu (... ?) donc effectivement elle n'est plus positive (... ?) donc la pente ... est positive

(lignes : 84-86)

La recherche d'arguments mathématiques justifiant ces constats graphiques amène les étudiants à établir des liens avec l'expression symbolique de l'équation différentielle, ils interprètent la pente du vecteur dynamique en termes de signe de la dérivée (arguments du type REG-PLAN). Pourtant, comme nous le constaterons un peu plus loin, ce lien a été établi entre la direction du vecteur dynamique et l'équation différentielle, sans faire intervenir les solutions. Il s'agit juste d'un lien entre le signe de  $f(x,y)$  dans l'expression  $y'=f(x,y)$  et la pente  $y'$  du vecteur, où  $y'$  n'est pas interprétée comme la dérivée d'une fonction :

E'4 : ... c'est juste vérifier, quoi

E'1 : hum...

(lignes : 155-156)

E'1 : donc ... on peut dire pour « y » supérieure à 2 (... ?)

E'4 : hum...

E'1 : « y' » est toujours positive ... ..

E'4 : bah, non ... tu as un moins -y devant « y »... ..

E'1 : ah si ... «  $4-y^2$  » (... ?) c'est négatif

E'4 : ah oui, oui ...

(lignes : 158-163)

E'4 : ah ouais ... bon, voyons « y » entre -2 et 0, normalement c'est positif

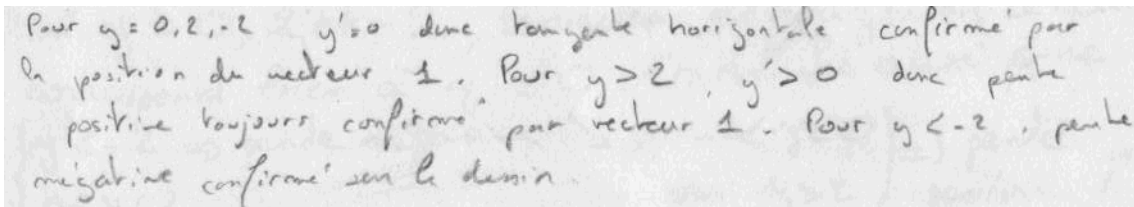
E'1 : hum...

E'4 : et entre 0 et 2 c'est négatif ...

(lignes : 167-169)

Dans la figure 9 ci-dessous, nous montrons un extrait de la fiche de réponses du binôme :

*Etudiant E'1*



*Etudiant E'4*

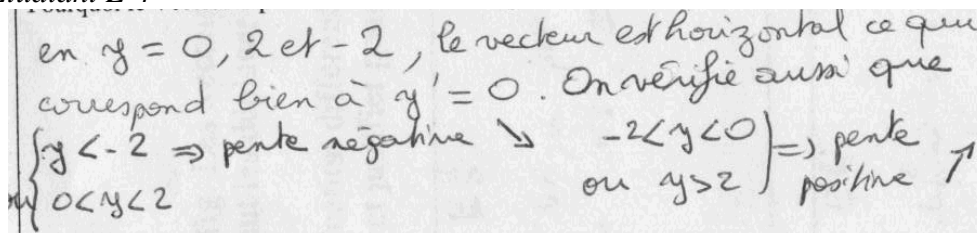


Fig. 10 : Justification de l'association Vecteur 1 – Equation différentielle  $y'=-y(4-y^2)$  (BiE'1-E'4)

**Les régions où le vecteur a une pente nulle**

Comme le binôme E'1/E'4 a déjà mis en œuvre des arguments de type ISC-0 (fondés sur l'isocline zéro) dans la partie précédente, il se limite dans la deuxième consigne à tracer les droites horizontales et à leur associer l'expression symbolique correspondante. Ci-après (fig. 11), les réponses écrites des étudiants :

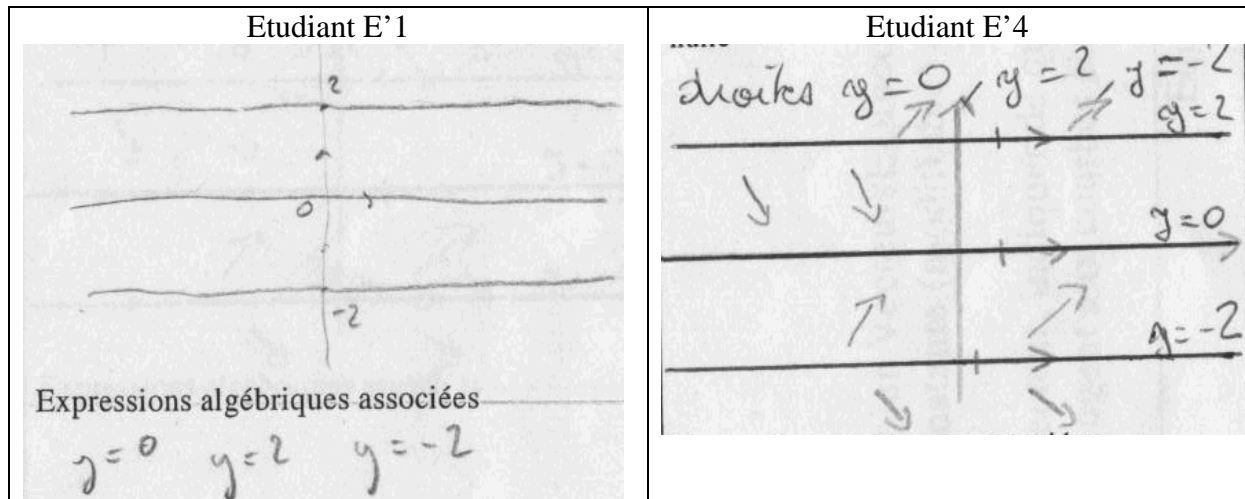


Fig. 11 : Identification de l'isocline zéro (Bi E'1-E'4)

### Les arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions

En ce qui concerne l'élaboration d'arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions, le binôme ne trouve pas les moyens de le faire. Pour les étudiants, les liens établis entre les représentants en jeu (vecteur dynamique et expression symbolique de l'équation différentielle) dans les consignes précédentes, rendent compte plutôt du comportement du vecteur dynamique et non pas du comportement des courbes solutions. Dans les échanges ci-dessous, nous remarquons que les étudiants considèrent une possibilité de fournir les arguments demandés, à l'aide de la résolution algébrique de l'équation différentielle (arguments du type RES-ED) :

E'4 : (en lisant) « des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions »... ah, des courbes solutions, ... il faudra peut-être calculer les courbes solutions... on peut pas

E'1 : quoi ?

E'4 : je ne sais pas

E'1 : moi non plus... non, on sait pas ... donc

E'4 : on intègre ?

(lignes : 181-185)

Les étudiants tentent de résoudre algébriquement l'équation différentielle, mais ils n'y parviennent pas. Alors le binôme continue avec les deux autres couples : vecteur dynamique – équation différentielle. Et après, ils reviennent à cette consigne. Nous remarquons dans les échanges ci-dessous, que le lien entre le vecteur tangent dynamique et les courbes solutions n'est pas clair :

E'4 : attend ... parce que là, sur les courbes qu'on a, c'est une courbe solution...

E'1 : oui

E'4 : donc ...

E'1 : ben ... qu'est-ce que tu appelles les courbes qu'on a ?

E'4 : euh... celles qui faisaient la trace ...

E'1 : oui, ah oui, oui, ça c'est complètement... tout à fait

E'4 : comme comportement, ça peut être euh ... croissantes, décroissantes ... c'est ça ? ... on sait qu'il y a des points d'inflexion, on sait (... ?) comme ça

(lignes : 226-232)

E'4 : parce que le truc c'est que, étudier le comportement des courbes, on n'a même pas qu'à étudier les vecteurs tangents

E'1 : ah oui... moi, je ne sais pas ... on ... pourquoi elles sont croissantes, décroissantes justement ? ... hum ... (... ?)

(lignes : 238-239)

Nous voyons dans ces échanges que même si les étudiants parlent du sens de variation des solutions, ils n'arrivent pas à établir de lien avec l'expression symbolique de l'équation différentielle. Finalement, les étudiants abandonnent cette consigne et ils n'écrivent pas de réponse sur les fiches.

## **Vecteur 2 – Equation différentielle $y'=(x+2)/(x^2-1)$**

### *Pourquoi le vecteur peut-il être associé à l'équation différentielle ?*

Le binôme élabore deux types d'arguments pour justifier l'association du vecteur dynamique Vecteur 2 avec l'équation différentielle. Il s'agit des arguments du type ISC-0, qui s'appuient sur l'identification de l'isocline zéro et la mise en relation de ce fait graphique avec l'expression symbolique de l'équation différentielle. Et aussi des arguments du type DISC, en identifiant le comportement de la pente du vecteur dynamique, qui tend vers plus ou moins l'infini dans le voisinage des discontinuités de la fonction  $f$ . Ces arguments ont été construits grâce aux interactions entre le registre graphique et le registre symbolique. Le binôme fait appel également aux arguments de type RES-ED, et il parvient à l'expression symbolique des solutions de l'équation différentielle. Cependant, l'expression n'est pas utilisée. En pages suivantes, nous présentons quelques épisodes de la mise en œuvre de ces arguments.

Les étudiants identifient d'abord l'isocline zéro, et font le lien avec l'expression symbolique de l'équation différentielle :

E'4 : ouais ... donc le vecteur 2 il s'annule, enfin la tangente est nulle  
E'1 : ... il n'y a pas de « y », ça fait rien ... il faut juste intégrer ?...  
E'4 : voilà, déjà c'est bon parce que en  $x = -2$ , la pente a l'air de se caler...  
E'1 : le problème, c'est qu'en  $x=-2$  c'est ... (... ?) ...

(lignes : 250-253)

E'4 : ce que je ne comprends pas, c'est que (... ?) en  $x=-2$   
E'1 : ouais  
E'4 : on a bien  $y'=0$  ...  
E'1 : (vas-y...)  
E'4 : donc la pente des points d'abscisses -2 est nulle

(lignes : 289-293)

L'exploration dynamique permet aussi au binôme de mettre en relation le comportement graphique du vecteur dynamique, au voisinage des discontinuités de la fonction  $f$ . Nous remarquons que les interactions entre les faits graphiques et l'expression symbolique de l'équation différentielle permet aux étudiants d'articuler le registre graphique et le registre symbolique, en trouvant que les informations tirées de ces deux registres sont cohérentes concernant le comportement à l'infini (arguments du type DISC) :

E'4 : ah, il y a ... regarde quand « x » tend vers 1  
E'1 : quand « x » tend vers 1  
E'4 : normalement ... « y' » si ... « y' » doit tendre vers l'infini ... et voilà ! C'est ce que j'avait fait, c'est bon... quand « x » tend vers  $\pm 1$ ...  
E'1 : oui  
E'4 : « x » tend vers  $\pm 1$ ... « y' »...  
E'1 : c'est ça

E'4 : tend vers  $\pm\infty$  ... euh ... regarde en -1... Ah non, en -1 tend vers là-haut [plus l'infini]

(lignes : 299-305)

E'4 : et en 1 ... c'est toujours vrai ? ah non, c'est vraiment là

E'1 : ça dépend (y - où... ?)

E'4 : si, x tend vers moins l'infini

E'1 : mais normalement ... c'est (... ?) ça dépend ... ..

E'4 : donc c'est pas mal, ça ...

(lignes : 307-311)

Le binôme identifie dans le registre graphique des régions où les solutions sont croissantes ou décroissantes, mais il n'a pas les moyens de le justifier :

E'1 : ça veut dire qu'elle est décroissante ... tout ce que tu veux, machin quoi, elle est croissante ... croissante, décroissante ... c'est ça ... faisons ça

E'4 : pas comme ça

(lignes : 318-319)

E'4 : ce qu'entre... entre -2 et -1 elle est croissante

E'1 : ouais...

(lignes : 323-324)

Finalement, dans la fiche de réponses (fig. 12 ci-dessous), le binôme explicite les arguments du type ISC-0 et DISC justifiant l'association Vecteur dynamique – Equation différentielle :

#### Etudiant E'1

Pourquoi le Vecteur 2 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  ?  
 en  $x = -2$   $y' = 0$  ce que vérifie le vecteur 2. il est horizontal  
 quand  $x \rightarrow \pm 1$   $y' \rightarrow \pm\infty$  ce que confirme le vecteur 2  
 il est vertical.

#### Etudiant E'4

Pourquoi le Vecteur 2 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  ?  
 en  $x = -2$ ,  $y' = 0$  ce qui se vérifie sur le vecteur ?  
 il est horizontal.  
 qd  $x \rightarrow \pm 1$ ,  $y' \rightarrow \pm\infty$  : vecteur 2 ↑ ou ↓  
 vertical

Fig. 12 : Justification association Vecteur 2 – Equation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  (BiE'1-E'4)

### Vecteur 3 – Equation différentielle $y' = (y^2+x)(x-y)$

#### Pourquoi le vecteur peut-il être associé à l'équation différentielle ?

Le binôme poursuit en explorant les comportements graphiques du Vecteur 3. Cette exploration permet aux étudiants d'identifier certains comportements et ils tentent d'établir des liens avec des connaissances des cadres concernés. En s'appuyant sur les données graphiques repérées à l'aide du déplacement du vecteur dynamique et de l'outil « Trace » de Cabri, l'étudiant E'4 suppose que les courbes ont des points d'inflexion en  $x=0$ . Ce qui le conduirait à essayer de mettre en œuvre des connaissances sur la dérivée seconde, mais finalement le binôme ne le fait pas. Nous repérons aussi, dans les échanges ci-dessous, que le lien établi entre le registre graphique et le registre symbolique concernant l'isocline zéro (dans les deux couples précédents Vecteur dynamique – Equation différentielle) permet à l'étudiant E'4 d'anticiper, à partir de l'expression symbolique de l'équation différentielle, une des

branches de l'isocline zéro. Ce qui témoigne d'une certaine flexibilité pour articuler les registres symbolique et graphique :

E'4 : je veux avoir la dérivée seconde  
 E'1 : ah oui,  
 E'4 : j'ai l'impression qu'en 0 il y a un point d'inflexion ... c'est un... tu vois, parce que là, fait comme ça, l'approximation...  
 E'1 : et c'est vrai ?  
 E'4 : mais là en 0 ça fait, ouais ... .. donc c'est (... ?) point d'inflexion ... ..  
 E'1 : oui...  
 E'4 : ben, il sera bon que tu traces la droite «  $y=x$  »... parce que normalement, ça devra s'annuler sur cette droite-là

(lignes : 352-359)

E'4 : prend le vecteur 3, maintenant  
 E'1 : je prends le vecteur 3 maintenant... qu'est-ce que tu avais dit ?  
 E'4 : ouais, voilà ... le vecteur est horizontal, euh ... ce qui est normal ... ..  
 (lignes : 361-363)

Le lien établi depuis le registre symbolique vers le registre graphique à propos de l'isocline zéro, conduit l'étudiant E'4 à conclure que pour  $y^2=-x$ , il devrait y avoir une autre branche de l'isocline zéro. La forme de l'expression symbolique le fait hésiter, pourtant l'exploration dynamique confirme l'existence de points différents de ceux qui se trouvent sur la droite  $y=x$ , sur lesquels le vecteur devient horizontal. Ce constat amène les étudiants à se rendre compte que l'expression  $y^2=-x$  peut être valable aussi pour des valeurs de  $x$  négatives :

E'4 : parce qu'après, ça s'annule pas ...  $y^2=-x$  impossible ... (... ?) en 0 ... (... ?) ça va faire (... ?) donc c'est tout ce qu'on peut vérifier pour l'instant ...  
 E'1 : hum ... ah... il y a une (... ?) qui s'annule autre part, quoi ...  
 E'4 : euh ... donc là tu as un  $x = \dots$  quoi ? ... attends ... 1 ?... en 2... non ? ... ah non, en fait, elle (... ?) très (bon) ... oui  
 E'1 : apparemment... ..  
 E'4 : non, mais si, je suis bête ... en  $-x$  c'est pas forcément négatif  
 E'1 : voilà ...  
 E'4 : donc ... c'est  $y=\pm\sqrt{-x}$  quand  $x$  est négatif ... donc

(lignes : 371-377)

Les étudiants vérifient que  $y=\pm\sqrt{-x}$  correspond bien à l'isocline zéro à partir de certains points du plan. Ils tracent aussi, à l'aide du logiciel, une branche de la parabole :

E'4 : en  $y=2$ ... ça serait racine de 4...  $\pm 2$ ... donc là, on trouve  $-2$ ... là ... et là  $-$  (... ?) racine (... ?)... ouais ... et là  
 E'1 : ouais ... .. donc ...

(lignes : 387-388)

E'4 : (... ?) de l'autre côté de toutes façons...  
 E'1 : je vais tracer la (... ?) ben, ça va faire racine de l'autre côté, quoi...  
 E'4 : ouais ... et  $-$  racine de ça  
 E'1 : et ben ... c'est la même  
 E'4 : oui, normalement on le voit...

(lignes : 393-397)

La mise en relation des informations graphiques et symboliques concernant l'isocline zéro permet au binôme d'élaborer des arguments pour justifier l'association Vecteur 3 – Equation

différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$  (arguments du type ISC-0). Dans la figure 13 suivante, nous présentons un extrait des fiches de réponses du binôme :

Etudiant E'1

Pourquoi le Vecteur 3 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$  ?  
 sur la droite  $y=x$  et sur la courbe  $y = \pm\sqrt{-x}$ ,  $y'$  est nul... en effet vecteur 3 est horizontal sur ces 2 courbes

Etudiant E'4

Pourquoi le Vecteur 3 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$  ?  
 sur la droite  $y=x$ , le vecteur est horizontal  
 pour  $x \leq 0$ , en  $y = \pm\sqrt{-x}$  vecteur horizontal  
 (ex :  $x = -4, y = \pm 2$ )

Fig. 13 : : Justification de l'association Vecteur 3 – Equation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$  (BiE'1-E'4)

### Retour au couple : Vecteur 2 – Equation différentielle $y'=(x+2)/(x^2-1)$

Le binôme revient au deuxième couple et il cherche à tracer le représentant graphique d'une courbe solution. Les étudiants veulent vérifier à l'aide du vecteur dynamique que lorsque l'origine du vecteur parcourt la courbe, celui-ci reste tangent. Pour tracer la courbe, ils demandent l'aide du professeur :

E'4 : je vais essayer de la retracer pour bien voir que le vecteur est tangent ici  
 (ligne : 420)

E'1 : ça, c'est une belle courbe solution

E'4 : voilà, on va voir si on déplace ...

(lignes : 422-423)

E'4 : ça veut dire, ça marche

(ligne : 428)

Les étudiants tentent aussi d'obtenir d'autres courbes de la famille des solutions, par le biais de translations verticales de la courbe tracée :

E'4 : juste pour faire ... pour en faire d'autres, c'est juste une translation, non ?

E'1 : pour en faire d'autres ? ah oui

(lignes : 453-454)

E'4 : je pense, parce que la plus constante ça correspond à ...

E'1 : ouais, (... ?) de toutes façons le (... ?) ... qu'est ce qu'on va faire ? ...

E'4 : une translation

E'1 : on va faire ... ouais

(lignes : 457-460)

Le binôme n'arrive pas à tracer d'autres courbes, cependant les étudiants s'appuient sur la courbe tracée pour construire des tableaux de signes de la dérivée et des variations de solutions. Ils fournissent ces tableaux (cf. fig. 14 suivante) comme des arguments qui justifient le comportement des courbes solutions :

E'4 : bon, les arguments (... ?) ... (... ?) si on peut faire un tableaux de signes ...

E'1 : comment ?

(lignes : 474-475)

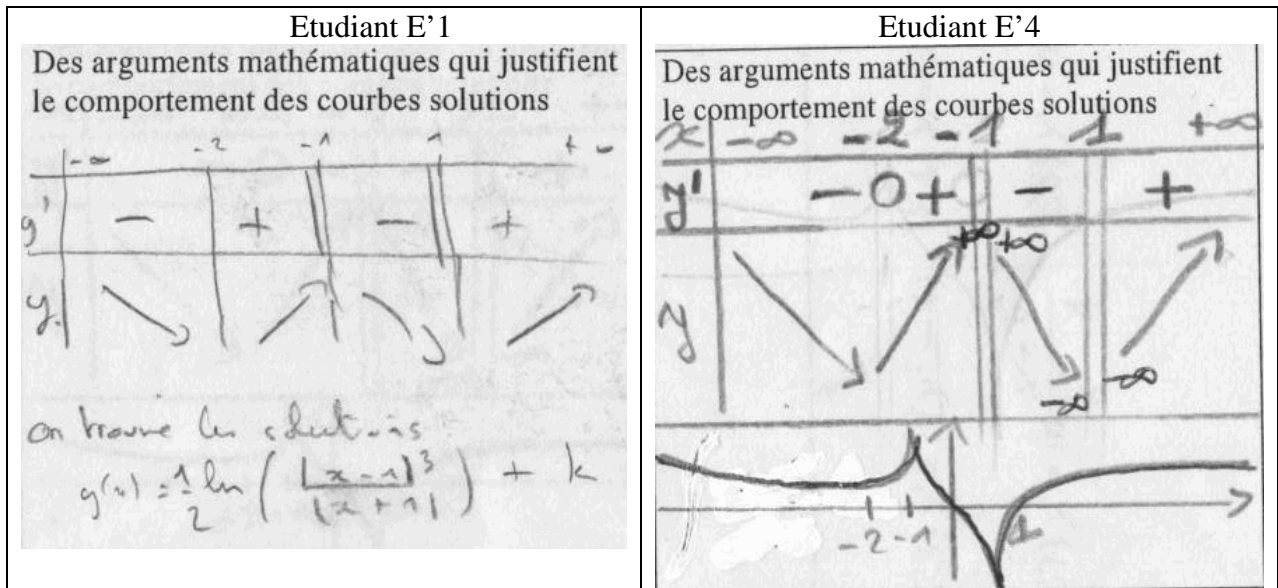


Fig. 14 : Des arguments BiE'1/E'4 justifiant le comportement des courbes solutions

Le temps dédié à cette situation touchant à sa fin, le binôme trace sur la fiche de réponses l'isocline zéro pour les couples Vecteur 2 – Equation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  et Vecteur 3 – Equation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$  (cf. fig. 15, ci-dessous). En ce qui concerne l'élaboration d'arguments justifiant le comportement des solutions de la troisième équation différentielle, le binôme ne répond pas.

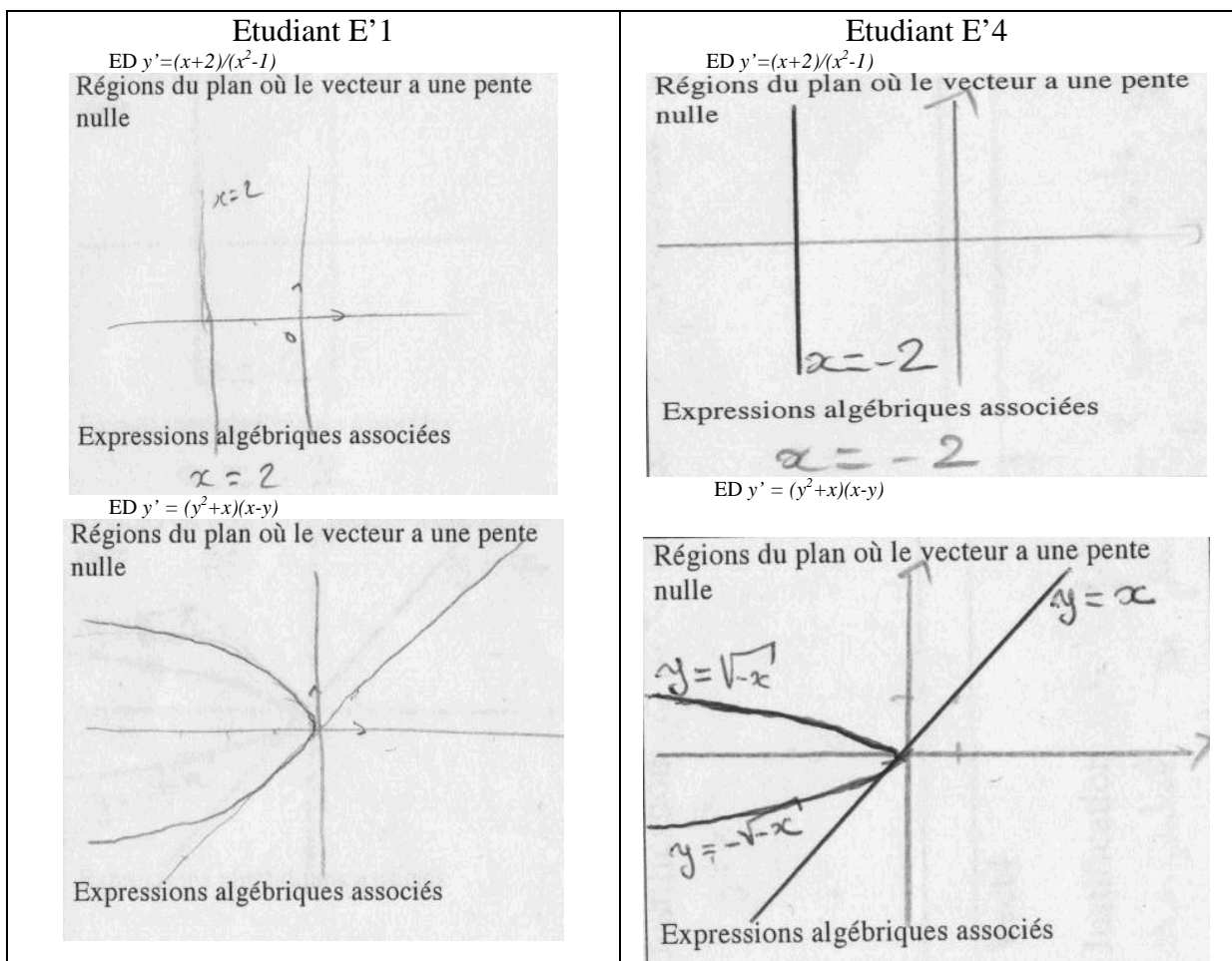


Fig. 15 : Identification isocline zéro, deuxième et troisième équations différentielles (BiE'1/E'4)

Nous remarquons que pour le binôme E'1/E'4, le seul lien qu'il ait établi entre le registre graphique et le registre symbolique des équations différentielles est celui de l'isocline zéro. Ce lien ne repose que sur l'association entre pente du vecteur et signe de  $y'$ .

#### 4.2.4. Le binôme E'12/E'17

De la même manière que le binôme précédent, chaque étudiant a écrit ses réponses sur des feuilles différentes. Ce binôme utilise aussi l'outil « Trace » de Cabri dès le début du travail dans cette situation.

#### Vecteur 1 – Equation différentielle $y'=-y(4-y^2)$

##### *Pourquoi le vecteur peut-il être associé à l'équation différentielle ?*

L'exploration dynamique permet d'identifier immédiatement les régions où le vecteur devient horizontal (arguments du type ISC-0) :

E'12 : bon, la trace c'est horizontal en 4 ... c'est normal ?  
 E'17 : horizontal ?  
 E'12 : ah non ... c'est 0,5 ... c'est horizontal en 2 ce qu'il est ... voilà ... (en lisant)  
 «Pourquoi le Vecteur 1 peut-il être associé ... »... déjà, d'abord il y a les 2; c'est horizontal ici et c'est horizontal là, on sait déjà

(lignes : 20-22)

Nous observons dans les échanges ci-dessous que les étudiants interprètent, sans difficulté, l'inclinaison du vecteur en termes du signe de la dérivée (arguments du type SENS-VAR). Ils relient aussi le signe de la dérivée avec l'expression symbolique de l'équation différentielle :

E'17 : en fait (...?) en- dessous de -2 c'est négatif ... la dérivée, elle va être négative à un moment  
 Y: au dessus de -2  
 E'17 : ... positive entre -2 et 0 ... négative entre 0 et 2 et positive en (...?)  
 Y: au dessous de -2 ... donc là je vais ... ce point ...  
 E'17 : tu vois  
 Y: d'accord  
 E'17 : et après, euh ... là elle passe négative en 0 et positive en 2 ... déjà c'est moins ...  
 ... (...?) (en lisant) «pourquoi le vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle»  
 ... ... alors, déjà euh ...  
 E'12 : donc c'est bon ...  
 E'17 : ouais ...

(lignes : 23-31)

Un autre argument des étudiants repose sur la reconnaissance que l'expression symbolique de l'équation différentielle ne dépend pas de  $x$  (arguments du type VAR-ED). Nous remarquons dans les échanges ci-dessous que pour l'interprétation graphique correcte de cette propriété algébrique de l'équation différentielle, le logiciel joue un rôle important. D'abord, E'12 interprète erronément que la pente du vecteur dynamique reste constante lorsque  $x$  est constant. Cependant, l'exploration à l'aide du déplacement du vecteur dynamique conduit le binôme à l'interprétation graphique correcte de cette propriété :

E'17 : une autre chose c'est qu'euh ... comme tu vois, ça dépend pas de «  $x$  » ...  
 E'12 : oui, en fait, ça dépend pas de «  $x$  » ... ouais  
 E'17 : déjà... euh ...



E'12 : il dépend pas de « x » (...?) une équation (...?) « x » (...?) simplement ... il faut mettre qu'il est constant quand « x » est constant ... [silence, l'étudiant E'17 déplace le vecteur dynamique]  
 E'17 : non, il n'est pas constant quand « x » est constant [le déplacement invalide l'affirmation de E'12]  
 E'12 : si, le vecteur il est constant si « x » est constant ... si « x » ... ah non  
 E'17 : non ... c'est pas « x » ... c'est « y »  
 E'12 : c'est constant quel que soit « x »  
 E'17 : ouais  
 E'12 : c'est ça  
 E'17 : ouais... si tu fixes « y »...

(lignes : 33-43)

Nous remarquons dans les échanges ci-dessus, que le déplacement du vecteur tangent dynamique a permis d'invalider l'affirmation de l'étudiant E'12, et qu'il a conduit à formuler de manière correcte la propriété graphique en termes de coordonnées variables  $(x,y)$  du vecteur dynamique. Finalement, dans la fiche de réponses (fig. 16 ci-dessous), les étudiants écrivent les trois types d'arguments développés (ISC-0, SENS-VAR et VAR-ED), justifiant l'association entre le vecteur dynamique et l'équation différentielle :

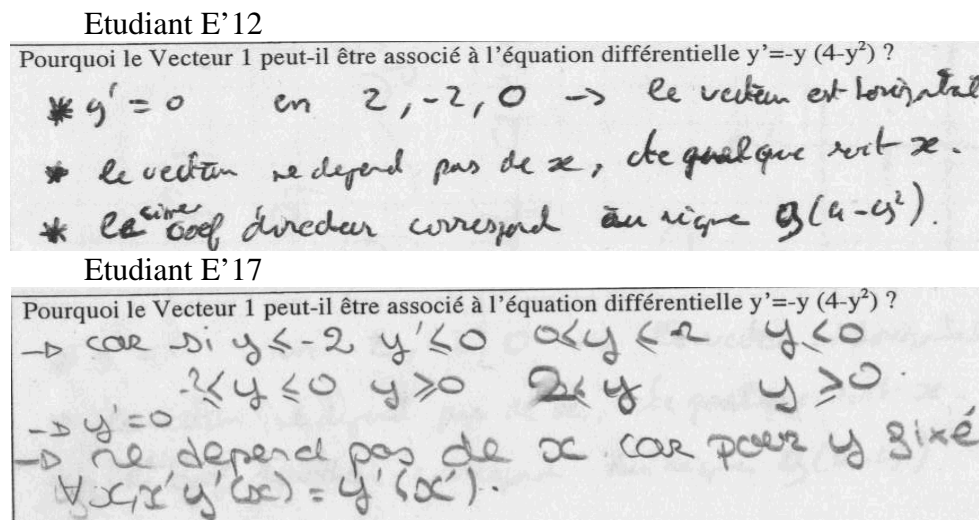


Fig. 16 : Justification (BiE'12-E'17) association Vecteur 1 – Equation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$

### Les régions où le vecteur a une pente nulle

La deuxième consigne devient très simple pour les étudiants, car ils se limitent à reprendre ce qu'ils ont trouvé dans la première partie. Dans la figure 17 ci-contre, nous montrons un extrait de la fiche de réponses des étudiants :

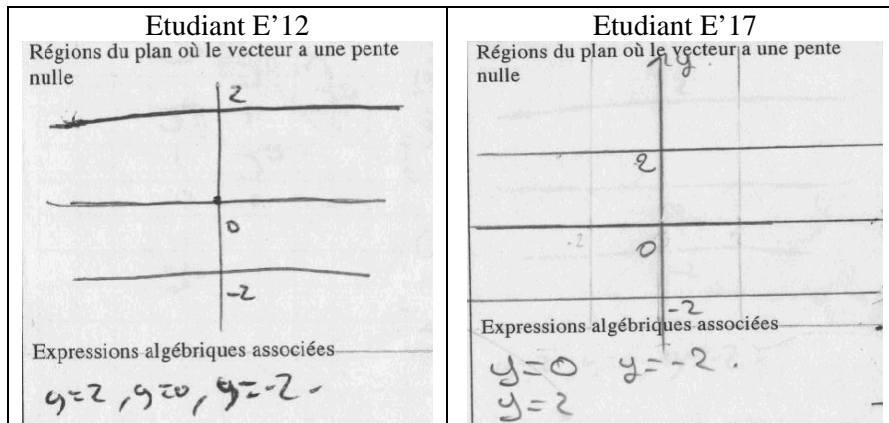


Fig. 17 : Identification de l'isocline zéro de l'équation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$  (Bin E'12-E'17)

### Des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions

D'abord, le binôme suppose que pour justifier le comportement des courbes solutions il faudra calculer la dérivée seconde (arguments du type CONC-DER-SEC). Les étudiants supposent que celle-ci pourrait rendre compte des changements du vecteur dynamique. Pourtant, ils ne mettent pas en œuvre immédiatement cette stratégie et demandent l'avis du professeur sur ce qu'il attend comme arguments. Le professeur leur explique que lorsqu'on parle du comportement des solutions, il s'agit de : leur croissance, décroissance, le comportement à l'infini, etc. Les étudiants cherchent donc à identifier ces comportements :

E'17 : ben ... la fonction elle est croissante, elle est décroissante, croissante, décroissante et croissante...

E'12 : ah oui, mais ...

E'17 : il faut que la dérivée, elle soit positive, négative, positive, négative, positive

E'12 : ah non, ça, peut-être pas ...

E'17 : si ... si, la dérivée ...

(lignes : 83-87)

Les étudiants font le lien entre le comportement graphique sur le sens de variation des solutions et le signe de la dérivée (arguments du type SENS-VAR) :

E'17 : la dérivée de la fonction ... si une dérivée de la fonction est positive, la fonction elle est croissante ... si elle est négative ...

E'12 : ah ... là, c'est négatif ... positif ... négatif ...

E'17 : donc là, tu es d'accord pour ta fonction... elle décroît

E'12 : ouais, ouais ... d'accord et pas (... ?) ...

(lignes : 89-92)

Le binôme identifie, en utilisant la trace du vecteur, les différents types de formes des courbes solutions. Et en particulier, les étudiants s'aperçoivent de l'existence des régions où les courbes restent confinées :

E'17 : maintenant si tu regardes ... elle décroît forcément ... elle décroît

E'12 : ouais

E'17 : d'accord ... mais elle fait que ça ... si on sait avant ce qui s'est passé ... tu vois, soit elle va rester là-dessous ... en fait, on va avoir des courbes qui vont être de cette forme maintenant, si tu as des courbes ... si tu as une courbe qui est ... qui est toute (... ?) entre les deux, soit elle va rester à l'intérieur ... mais si elle reste là

(lignes : 95-97)

E'12 : là, tu as une tangente horizontale, là ...

E'17 : non, mais il y a un truc ... parce qu'en fait elle croît, et dès qu'elle passe là elle décroît ... en fait elle peut pas ... en fait elle va toujours ... ça va être une asymptote ...  
... et en fait, je crois qu'il y a ... ouais, ouais comme ça, et en fait à chaque fois ça va être ça ... et là ça va être comme ça ... c'est comme ça qu'elle fait la courbe... ça va dépendre de son ... le point par lequel elle passe

(lignes : 100-101)

L'étudiant E'17 suppose que pour justifier que les solutions confinées entre les solutions constantes ne coupent pas ces dernières, il faut s'appuyer sur la dérivée seconde. Dans les échanges ci-dessous, nous distinguons que cet étudiant considère que si la dérivée seconde ne s'annule pas au voisinage des solutions constantes, alors les solutions comprises entre les solutions constantes ne couperont pas celles-ci. Par contre, l'étudiant E'12 n'est pas sûr de faire intervenir la dérivée seconde :

E'17 : ah il (... ?) hein ... elle est croissante comme ça ... parce qu'en fait il faut expliquer qu'en fait, une courbe ... en fait, une courbe qui appartient à la bande, elle peut pas passer là ... c'est ça qu'il faut expliquer, à mon avis, c'est qu'elle peut pas couper les

...

E'12 : ouais, ouais

(lignes : 119-120)

E'17 : ça va donner quoi ? en fait, on sait tout ... on connaît déjà tout sur la dérivée ... le problème, c'est que sur la dérivée on connaît tout ... en fait le problème c'est que si tu montres qu'en fait, en ces points, la dérivée seconde elle change pas de signe, ça veut dire que la dérivée elle est tout le temps de la même croissance et du coup, c'est pour ça qu'elle pourra pas passer, elle pourrait pas être égale à 0 parce qu'elle sera strictement croissante ... mais en (... ?) point (... ?) on sait rien, en fait

E'12 : donc... la dérivée ... non, ça peut pas marcher, cette histoire ... je ne sais pas si c'est lié à la dérivée seconde

(lignes : 129-130)

E'17 : et ben... si ça traverse ça ... le problème que si ça traverse ces courbes, ces axes-là, ça veut dire que la dérivée seconde elle change de signe

(ligne : 133)

Nous remarquons que la stratégie de l'étudiant E'17 est très fortement appuyée sur les informations graphiques dont il dispose. En effet, l'exploration dynamique semble avoir confirmé que les solutions comprises entre les régions  $-2 < y < 0$  et  $0 < y < 2$  ne coupent pas les solutions constantes. Par ailleurs, au voisinage de celles-ci, elles n'ont pas l'air d'avoir des points d'inflexion. Alors, E'17 suppose que ces constats graphiques peuvent se prouver à l'aide de la dérivée seconde. Il ne prend pas en compte le fait que même si la dérivée seconde ne s'annule pas au voisinage des solutions constantes, cela ne garantit pas que les solutions ne se coupent pas. E'17 tente d'obtenir l'avis du professeur sur sa stratégie :

E'17 : ouais, ben parce qu'en fait, moi je pense à faire ça mais je n'arrive pas à ... à montrer qu'en fait, une courbe elle va jamais passer à travers ça

P : ah oui, c'est cette... ici

E'17 : alors la dérivée seconde, la dérivée seconde elle a le signe inverse de ça

(lignes : 162-164)

E'17 : parce qu'en fait ... mais non, parce qu'en fait, là, une fois tu as une tangente qui va décroître ... si tu passes ça, elle va croître, si elle passe ça, elle va décroître et en fait, elle va rester là...

E'12 : et l'autre, pareil

E'17 : alors que là c'est pas possible ... là, si ... ah mais non, là ça monte ...

(lignes : 173-175)

Lors des échanges avec le binôme, le professeur leur suggère de faire un raisonnement par l'absurde pour justifier que les courbes ne coupent pas les solutions constantes :

E'17 : mais en fait c'est pas ça ... là c'est pareil, elle va jamais ... en fait elle va jamais couper ces axes ...

P : pourquoi ?

E'17 : parce que ... c'est pas possible

P : et pourquoi ?

E'17 : voilà, c'est ça

P : c'est ça que vous savez pas ?

(lignes : 183-188)

P : (... ?) on peut faire un raisonnement par l'absurde ?

E'17 : ah, en supposant ... en supposant qu'elle coupe

P : comme ça, elle passerait en le point où elle coupe

E'17 : mais ah oui, voilà, c'est ça ... parce qu'en fait au point où elle coupe, là elle doit avoir une dérivée positive, elle doit avoir une dérivée ... tant... ah ... elle doit avoir une dérivée comme ça ... en ce point-là, en fait

(lignes : 194-197)

Pour l'étudiant E'12, la justification à l'aide d'un raisonnement par l'absurde est suffisante, alors que l'étudiant E'17 considère que la stratégie de la dérivée seconde peut s'y appliquer :

E'12 : donc il n'a pas de dérivée seconde ...

E'17 : mais... si, tu as la dérivée seconde

E'12 : ouais, mais ça c'est pas lié à la dérivée seconde

E'17 : ben, la dérivée seconde elle te dit que là-dedans, elle change pas de signe ...

P : qu'est ce que ça veut dire la dérivée seconde sur la dérivée première ?

E'17 : en fait, elle dit simplement qu'elle change pas de ... entre ... là-dedans

(lignes : 208-213)

Nous remarquons, dans les échanges suivants, certains aspects des difficultés de l'étudiant E'17. Il semble avoir des problèmes pour articuler les variations de la dérivée première et la dérivée seconde. Comme nous le constaterons de manière plus claire après, cet étudiant relie aussi les points d'inflexion à l'image prototypique du point d'inflexion de la cubique  $y=x^3$ . Donc à certains moments, il apparaît que l'étudiant suppose que les solutions comprises dans les deux zones délimitées par les solutions constantes n'ont pas de points d'inflexion, mais que pour lui la dérivée seconde a un même signe dans ces régions :

P : là, euh ... donc ... et « y'' », non ... « y' » elle est décroissante ou croissante, ici ?

E'17 : (... ?) elle est décroissante

P : elle est décroissante, et donc ça, qu'est ce que ça veut dire sur « y'' » ?

E'17 : ben, c'est qu'elle est négative

P : ouais

E'17 : ben non, elle va (... ?) ... ah si, si c'est ça, ouais, elle est négative

P : vous avez trouvé « y'' » négative ?

E'17 : ouais

P : donc c'est compatible, ouais

E'17 : ouais, ouais ... mais le problème c'est que c'est pareil ... en fait... on reste toujours ... parce qu'on sait que ça va changer de variation, la tangente elle va changer de variation si la dérivée seconde ...

(lignes : 228-237)

E'17 : mais ... donc la dérivée seconde elle change de signe, ça... y'a pas de souci parce que ...

P : ouais  
E'17 : mais le problème ... en fait, ça veut rien dire  
P : comment, ça veut rien dire ?  
E'17 : moi, je n'arrive à comprendre ce que la dérivée seconde ... a de ... .. (... ?)...  
parce qu'entre ... .. en fait, si on est dans un intervalle  $-2$  (... ?)  $2$  à  $0$  par exemple, on  
sait que la dérivée seconde, elle est constante ... elle n'est pas constante ... elle est, euh  
... elle change pas de signe ... ben, elle est égale à  $0$ , euh ...  
P : donc ça veut dire que la dérivée première elle est monotone  
E'17 : elle est monotone, ouais ... mais je vois pas ce que ça dit sur les ... j'arrive pas  
à...

(lignes : 239-245)

Le professeur explique au binôme que si la dérivée seconde change de signe, alors cela veut dire qu'il y a un point d'inflexion. Il illustre par les courbes comprises dans les régions  $-2 < y < 0$  et  $0 < y < 2$  la façon dont la pente varie :

P : ça peut aussi, oui ... non, ce que je ne comprends pas bien, c'est qu'on dirait qu'il y a un point d'inflexion, là  
E'17 : ah, non, non, mais ça c'est ... c'est de (... ?)  
P : ah ... et j'aimerais savoir quel est le signe de «  $y'$  » là dedans ?  
E'17 : là dedans ? ... elle est positive  
P : «  $y'$  » est positive, donc la fonction elle est croissante

(lignes : 254-258)

P : c'est une pente négative ... mais ici, la pente est négative mais elle est croissante...  
parce qu'elle, au départ, elle est très pentue négativement et après, elle l'est moins ... ok,  
d'accord ?  
E'17 : mais elle s'annule après, ici, la dérivée seconde... ici, elle rechange de signe ...  
P : oui... mais les courbes ne vont pas... mais ici «  $y'=0$  » là-dessus ?  
E'17 : ouais  
P : d'accord ?  
E'17 : je veux savoir si c'était une ... en fait, on essayait de trouver... un truc... de savoir  
si on pouvait montrer avec euh ... la dérivée seconde... en fait, on (... ?)  
P : là... euh... non  
E'17 : (là ?) il faut simplement montrer par l'absurde que si ça coupe, ça veut dire ...

(lignes : 268-275)

L'étudiant E'17 a écouté le discours du professeur et à la fin, il essaie d'avoir son avis pour mettre en œuvre sa stratégie fondée sur la dérivée seconde. Le professeur ne l'approuve pas, donc l'étudiant abandonne sa stratégie. Ensuite, le binôme suit l'exploration pour le cas des solutions constantes et dans ce cas-là, il n'a pas de difficulté pour mettre en relation le registre graphique et le registre symbolique :

E'12 :  $y=0$  est une solution si (... ?)  
P : ah, c'est une solution ? Pourquoi c'est une solution,  $y=0$  ?  
E'12 : parce qu'elles sont pas (... ?)  
E'17 : parce que si  $y=0$  ...  
E'12 :  $y=0$  ça fait  $y'=0$  et c'est bon  
E'17 : ça fait  $0$  et la dérivée elle est nulle  
P : d'accord ...oui  
E'17 : donc, c'est bien une solution

(lignes : 284-291)

Dans cette première partie, le binôme a identifié les différents comportements des courbes solutions, et il les a associés à la dérivée première et à la dérivée seconde. Cependant, ce lien reste centré dans le registre discursif. Les étudiants n'arrivent pas à mettre en relation de manière directe, sauf pour les solutions constantes, ces comportements avec l'expression symbolique de l'équation différentielle :

- E'12 : moi, j'ai mis ... euh ... croissante tendant plus l'infini si elle est là ... puisque la tangente elle devient verticale ... elle est croissante tendant vers plus l'infini  
 E'17 : mais le problème, vu qu'elle est croissante obligatoirement...  
 E'12 : on voit qu'elle est bornée ... là, c'est ...  
 E'17 : ah, mais elle est strictement croissante ... c'est pour ça ?  
 E'12 : là c'est ... décroissant  
 E'17 : parce qu'en fait c'est du strict à chaque fois  
 E'12 : là, c'est croissant tendant vers 0 ...

(lignes : 310-317)

- E'12 : non mais ... la dérivée elle est strictement croissante aussi ... la dérivée est strictement croissante, ça veut pas dire que (... ?) on a plus l'infini...  
 E'17 : euh ... non parce que si elle ... elle est strictement croissante ?  
 E'12 : bah, ouais  
 E'17 : ouais, bah ouais, elle s'annule jamais ... euh ... (... ?)

(lignes : 322-325)

Finalement, dans les fiches de réponses, les étudiants se limitent à décrire le comportement des courbes solutions en termes du sens de variation des solutions (arguments du type SENS-VAR) :

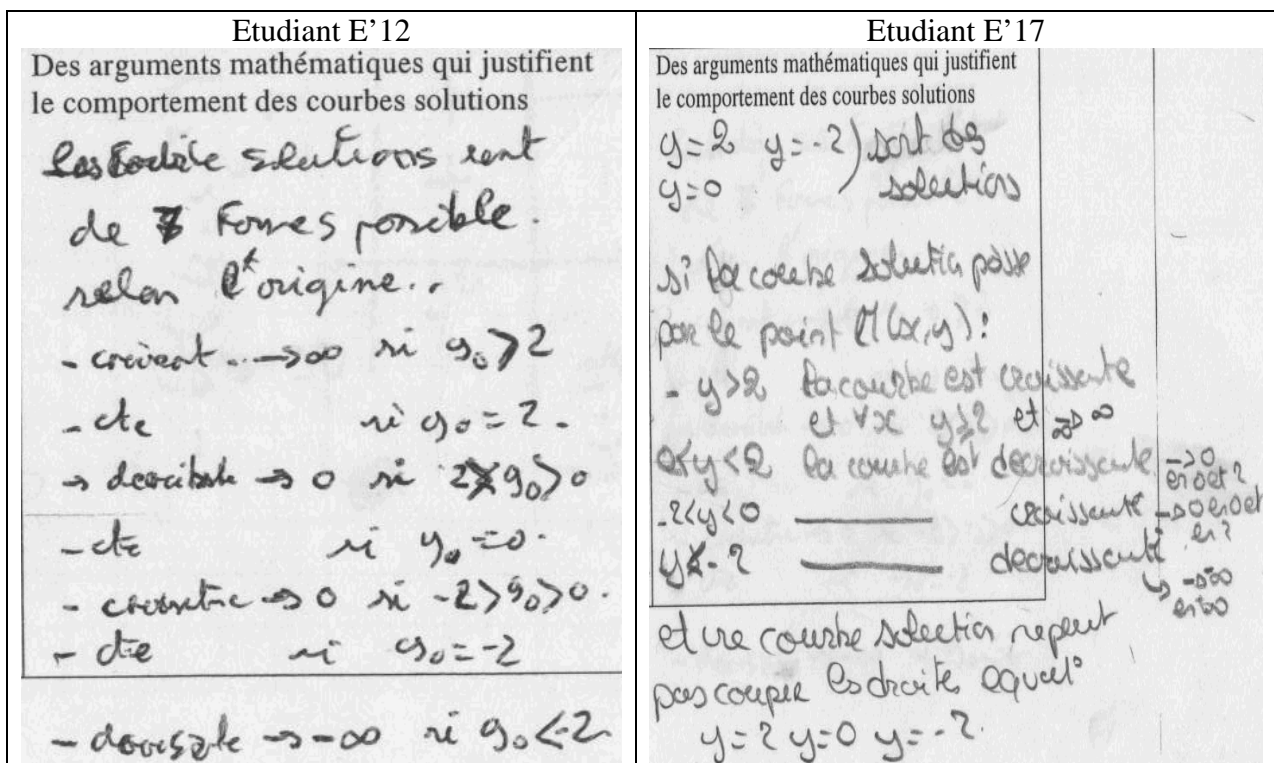


Fig. 18 : Des arguments mathématiques justifiant le comportement graphique des solutions (Bi E'12-E'17)

## Vecteur 2 – Equation différentielle $y'=(x+2)/(x^2-1)$

### *Pourquoi le vecteur peut-il être associé à l'équation différentielle ?*

Les étudiants se rendent compte immédiatement que l'expression symbolique de l'équation différentielle ne dépend pas de  $y$ , et ils font aussi la vérification graphique de cette propriété algébrique de l'équation différentielle à l'aide du déplacement du vecteur dynamique (argument du type VAR-ED) :

E'12 : ouais ... déjà y'a un truc ... c'est sûr que ça dépend pas de «  $y$  » ... ça se voit ...  
pour un «  $y$  » donné, c'est le même  
E'17 : ouais

(lignes : 330-331)

Le binôme identifie aussi l'isocline zéro (argument du type ISC-0) et le comportement à l'infini dans le voisinage des discontinuités de la fonction  $f$  (argument du type DISC). Pour le cas de l'isocline zéro, les étudiants font le lien immédiatement entre la propriété graphique et l'expression symbolique de l'équation différentielle. En revanche, pour le comportement à l'infini des solutions, le lien de la pente du vecteur et de la dérivée avec l'expression symbolique (lien appuyé sur les connaissances C13 relatives à la limite des fonctions lorsqu'on connaît des limites de la dérivée) se développe en étroite interaction avec les informations graphiques :

E'17 : après  $y'=0$  pour  $x=-2$   
E'12 : égale à 0 quand  $x=-2$ . Là, je suis pas sûr... -1, -2, ah oui, c'est ça. C'est égal à 0 quand  $x=-2$ .  
E'17 : doit y avoir le truc tout du long, c'est ça ?  
E'12 : comment ?  
E'17 : ça doit (... ?) mais c'est pas la même chose  
E'12 : ah ouais, tu n'arrives pas à changer ce «  $x$  », c'est sur «  $y$  » que ça change, quoi ?  
E'17 : ah, ben oui.  
E'12 : donc, là, la pente effectivement, elle tend vers plus l'infini en -1. Ce qui me paraît normal. Mais elle tend vers moins l'infini en 1.

(lignes : 335-342)

E'12 : c'est quoi le «  $y'$  » ? (... ?) le coefficient directeur  
E'17 : ça devrait tendre aussi vers... Ah, mais je suis bête. Si «  $y'$  » tend vers... et «  $x$  » tend vers 1  
E'12 : ouais, bon... ça correspond bien...  
E'17 : ce que je comprends pas, c'est que... pourquoi c'est plus là ? Parce que là, ça fait 0  
E'12 : ben, ça dépend par où tu approches. Non, parce que là, ils sont comme ça, et après ils sont dans l'autre sens. Ça dépend si tu approches par valeurs négatives ou par valeurs positives  
E'17 : ah, ouais  
E'12 : si tu approches par des nombres inférieurs à -1, ça va être positif.  
E'17 : parce que ça fait  $0^+$   
E'12 : si tu approches par un nombre inférieur à -1, ça va être négatif

(lignes : 347-355)

Pour suivre plus facilement le dialogue des étudiants, nous montrons dans la figure 19 suivante l'allure de la famille de courbes solutions, tracées à l'aide du logiciel Cabri :

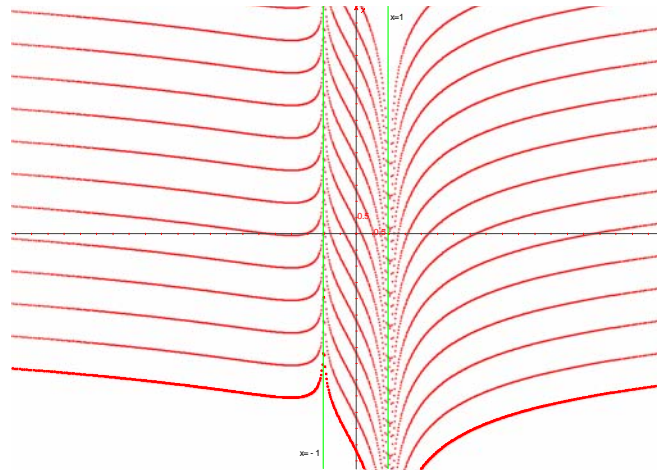


Fig. 19 : Courbes solutions de l'équation différentielle  $y'=(x+2)/(x^2-1)$

Dans les échanges suivants, nous voyons émerger les difficultés du binôme pour interpréter graphiquement les dérivées successives d'une fonction. Ces difficultés apparaissent lors de l'analyse du comportement des courbes solutions, en ce qui concerne les points d'inflexion (arguments du type PTS-INFL). Rappelons que lors de l'exploration du comportement des courbes solutions, le binôme a utilisé l'outil « Trace » de Cabri :

E'17 : ça, c'est bizarre ; les points d'inflexion. Oui mais, il y a pas un point d'inflexion, là

E'12 : si !

E'17 : non, un point d'inflexion, c'est quand la dérivée est nulle

E'12 : mais non !

E'17 : ah si, un point d'inflexion, c'est quand la dérivée est nulle

E'12 : ah si, c'est quand la dérivée est nulle. Ce n'est pas un point... c'est un point de... ?

E'17 : c'est un point de (...?)

E'12 : si, si. La dérivée troisième (...?)

E'17 : mais, c'est la même chose, non ?

(lignes : 378-386)

E'12 : ...dans ce sens-là, et après dans ce sens-là, donc forcément c'est la dérivée troisième. Je ne sais pas avec les dérivées, si ça doit être la troisième

E'17 : il paraît que...

E'12 : mais si, c'est pareil que la dérivée seconde

E'17 : (...?) , non, non, ce n'est pas ça

E'12 : si, c'est la dérivée seconde. Parce que là, tu as des...

(lignes : 389-393)

Dans les échanges ci-dessus, nous trouvons de façon explicite l'image que l'étudiant E'17 a sur les points d'inflexion, où il considère qu'un point d'inflexion existe lorsque la forme de la courbe ressemble à celle de la cubique. Cette image l'amène à supposer que dans un point d'inflexion, la dérivée première est nulle. Nous avons formulé le raisonnement de l'étudiant E'17 sous la forme du théorème en acte :

*« la forme d'une courbe au voisinage d'un point d'inflexion est celle des cubiques  $y=x^3$  ou  $y=-x^3$  » (TA6)*

Ce théorème en acte conduit les étudiants à supposer que dans un point d'inflexion, la première dérivée de la fonction associée est nulle. Dans les échanges ci-dessous, nous repérons les traces du recours au théorème TA6. Le binôme cherche à établir un lien entre la dérivée seconde et les points d'inflexion :



E'12 : ça ne passe pas forcément par 0. Ce n'est pas forcément tangente horizontale, le point d'inflexion. Tu es sûre de toi ? Ce n'est pas de...

E'17 : ben, un changement de variation de...

(lignes : 395-396)

E'17 : mais le point d'inflexion, en fait, c'est quand la dérivée seconde est nulle. Et en fait, c'est comme un point  $x^3$ . Tu vois ?

E'12 : c'est ça mais là, la dérivée devient la dérivée<sup>1</sup>...

(lignes : 401-402)

E'12 : là, donc, là, elle est décroissante... la dérivée, elle est décroissante ; de moins en moins importante

E'17 : nulle

E'12 : d'accord ? Et après, hop ! Elle est croissante

E'17 : c'est la dérivée seconde

E'12 : non, ça c'est la dérivée... C'est ta fonction

E'17 : elle est décroissante, et après...

E'12 : ta dérivée première...

E'17 : est-ce que ça... ?

E'12 : la dérivée est décroissante. Elle baisse

E'17 : ouais. Et après, elle remonte

E'12 : et après, elle remonte. Donc, la dérivée sera nulle ici ; et le point d'inflexion semble être (...?)

(lignes : 406-416)

Les informations graphiques tirées de l'exploration dynamique et la recherche de liens entre les variations du vecteur dynamique, semblent conduire l'étudiant E'12 à mettre en cause l'association : point d'inflexion et première dérivée nulle :

E'12 : ... juste une question (...?). Si un point d'inflexion, la dérivée, elle n'est pas forcément nulle ? Ah, c'est ça. C'est juste la dérivée seconde qui change de signe. La dérivée n'est pas forcément nulle

E'17 : et il y a quoi de particulier quand la dérivée est nulle ?

E'12 : il n'y a rien

E'17 : c'est un point d'inflexion particulier

E'12 : la dérivée nulle, ça change pas le signe, ça (...?) c'est tout.

(lignes : 450-454)

Les étudiants ont des échanges avec le professeur au sujet du lien entre les points d'inflexion et la dérivée première nulle. Ces échanges semblent conduire à déstabiliser le théorème TA6 :

E'12 : parce que ça, c'est celui d'avant. Et en fait, on se demandait juste si un point d'inflexion où la dérivée est nulle, c'est un point particulier ?

P : c'est un point d'inflexion, aussi

E'12 : c'est un point d'inflexion aussi, d'accord. Mais...

P : non, il n'a rien de particulier

(lignes : 466-469)

P : vous connaissez  $y=x^3$  ?

E'12 : oui, oui, oui

E'17 : ouais

E'12 : mais il n'y a pas d'inflexion en 0

P : ouais, et la tangente est horizontale ?

(lignes : 473-477)

---

<sup>1</sup> Le vecteur tangent est considéré déjà comme une dérivée

E'17 : en fait, c'est simplement que quand il y a « y » seconde égale à 0, tu as un point... tu peux avoir un point d'inflexion, mais sans que ça change de signe.

P : voilà, c'est ça.

E'17 : voilà, c'est ça.

(lignes : 481-483)

E'17 : alors que là, tu es obligé de changer... Quand tu as un point d'inflexion, c'est obligé que ça change de...

(ligne : 485)

Après les échanges avec le professeur, le binôme traite l'expression symbolique de l'équation différentielle afin d'obtenir la dérivée seconde (fig. 20 ci-dessous extraite du brouillon), ensuite les étudiants cherchent à identifier les points d'inflexion sur le graphique, de manière approchée :

$$y' = \frac{x+2}{x^2-1}$$

$y'$		-3	-1	+1	
$x+2$	-	0	+	+	+
$x^2-1$	+	+	-	0	+
	-	+	-	+	+

$$y'' = \frac{(x^2-1) - 2x(x+2)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1-2x^2-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$$

$$x^2+4x+1 \quad \Delta = 16-4 = 12$$

Fig. 20 : Traitement de l'expression symbolique pour obtenir la dérivée seconde (BiE'12/E'17)

E'17 : ou alors, il faudrait calculer les racines...  $x^2+4x+1$ ...

E'12 : hum...

E'17 : c'est égal à 2... Ah, mais c'est compliqué, les racines. C'est ce que j'allais dire

E'12 :  $\sqrt{3}-2$ , non...

E'17 : c'est à peu près ça, ou pas ?

E'12 : ça, quoi ?

E'17 : le point d'inflexion

E'12 : mais c'est là

E'17 : ah ! Mais (...?), je n'ai pas regardé.

E'12 : sinon, je dirais 0

E'17 : ah ? C'était en 0 ?

E'12 : ça, j'avais l'impression que c'était là. Tu as pris quoi ? C'est quoi, racine de... ?

Ça fait combien, moins... racine de 3 ? Ça fait combien, ça ? Ah, ça fait... C'est vraiment pas très loin de 0, quoi. Ce n'est vraiment pas très loin de 0

E'17 : ouais, ça doit être ça. Racine de... ce n'est pas très loin de 0

E'12 :  $\sqrt{3}-2$  ce n'est pas loin de 0

(lignes : 513-526)

Le binôme obtient les zéros de la dérivée seconde. Cependant dans les échanges suivants, nous trouvons à nouveau le conflit que suscite la confrontation des résultats algébriques et le

théorème en acte TA6. Pour les courbes comprises dans la région  $-1 < x < 1$ , les courbes ont l'allure de cubiques, alors le binôme admet qu'elles ont un point d'inflexion en  $x = \sqrt{3} - 2$ . En revanche, pour les courbes de la région  $x < -1$  (cf. fig. 19, plus haut), elles n'ont pas l'allure de cubiques. Par ailleurs, pour celles-ci les étudiants considèrent que les points d'inflexion  $x = -\sqrt{3} - 2$  ne sont pas loin de l'isocline zéro, mais  $x = -2$  n'annule pas la dérivée seconde :

- E'17 :  $\sqrt{3} - 2$ . Et c'est quoi, l'autre racine ? L'autre truc ? C'est  $-\sqrt{3} - 2$   
 E'12 : ouais,  $-\sqrt{3} - 2$ , c'est à peu près le  $-2$  qui est là  
 E'17 : ça c'est oui. Mais c'est ça. Mais ce n'est pas le  $-2$   
 E'12 : ce n'est pas  $y'$  égal...  $y' = 0$  en  $-2$  ?  
 E'17 : ça devrait être ça.  $-2$ , ça fait  $4 + 8$ . En  $-2$ .  $-4$  plus<sup>2</sup>... Comment c'est possible, ça ?  
 Je n'en sais rien. Allez, et l'autre...

(lignes : 529-533)

Enfin, dans les fiches de réponses (fig. 21 ci-dessous) le binôme ne formule pas d'argument fondé sur les points d'inflexion (arguments type PTS-INFL), et il abandonne cette stratégie. Les étudiants se limitent à décrire les autres arguments qu'ils ont mis en œuvre pour justifier l'association vecteur dynamique – équation différentielle (arguments du type : VAR-ED, DISC, ISC-0). Nous remarquons que l'étudiant E'12 ne fait pas la différence entre le représentant graphique « Vecteur dynamique » et le coefficient directeur :

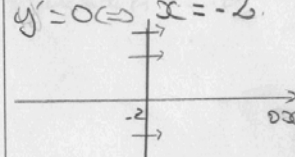
Etudiant E'12		Etudiant E'17	
Pourquoi le Vecteur 2 peut-il être associé à l'équation différentielle $y' = (x+2)/(x^2-1)$ ? - le vecteur me départ pas de $x$ . - les coef directeur est vertical en $-1$ et en $+1$ .		Pourquoi le Vecteur 2 peut-il être associé à l'équation différentielle $y' = (x+2)/(x^2-1)$ ? ne dépend pas $y$ . - $y' \xrightarrow{x \rightarrow -1} = \infty$ $y' \xrightarrow{x \rightarrow -2} = 0$ $y' \xrightarrow{x \rightarrow 1} = \infty$ $y' \xrightarrow{x \rightarrow 2} = 0$	
Régions du plan où le vecteur a une pente nulle pente nulle en $x = -2$	Des arguments mathématiques sur le comportement des courbes	Régions du plan où le vecteur a une pente nulle $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$ 	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions -> si la courbe solution passe par $M(x, y)$ . si $x < -2$ la courbe est ↘ -2 puis ↗ quand $x > -2$ si $x < -1$ la courbe ↗ si $x \in ]-1, 1[$ la courbe ↘ si $x \in ]1, +\infty[$ la courbe ↗
Expressions algébriques associées		Expressions algébriques associées	

Fig. 21 : Association Vecteur 2 – Equation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  (BiE'12/E'17)

### Vecteur 3 – Equation différentielle $y' = (y^2+x)(x-y)$

Le binôme identifie que l'expression symbolique de l'équation différentielle contient les variables  $x$  et  $y$ , mais il ne l'interprète pas dans le registre graphique. En revanche, l'identification des branches de l'isocline zéro (arguments du type ISC-0) est faite en interaction entre les registres graphique et symbolique :

- E'12 : donc, là, il y a les tangentes horizontales. Donc, on peut tracer la courbe des tangentes horizontales aussi. Là, il y a des tangentes horizontales  
 E'17 : c'est  $x = y$   
 E'12 : ah, non, non. Ça fait...  
 E'17 : regarde !

<sup>2</sup> L'étudiant évalue  $x^2 + 4x + 1$  pour  $x = -2$

- E'12 : eh, ouais. Il n'y a pas... Il n'y a pas l'équation (...?)  
 E'17 : mais si, c'est ça. Tu ne me crois pas...  
 E'12 : si, je te crois. (...) Ouais, ça marche, c'est ça. Ça se vérifie par...  
 E'17 : ah, ouais, ouais  
 E'12 : si  $x=y$ , ça fait tangente égale à 0  
 E'17 : tangente... Ouais, ouais  
 E'12 : ça fait  $y'=0$ . Ben, oui,  $x=y$ , ça fait bien...  
 E'17 : et là, tu as un truc, quand «  $x$  » est négatif, la tangente est nulle pour  $y = \pm\sqrt{-x}$   
 (lignes : 538-549)

Nous remarquons que les étudiants ont établi des liens entre les registres graphique et symbolique de l'équation différentielle concernant l'isocline zéro. Ensuite, ils essaient d'identifier des comportements particuliers des courbes solutions. Dans la figure 22 ci-dessous, nous montrons l'allure des courbes solutions de l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$  :

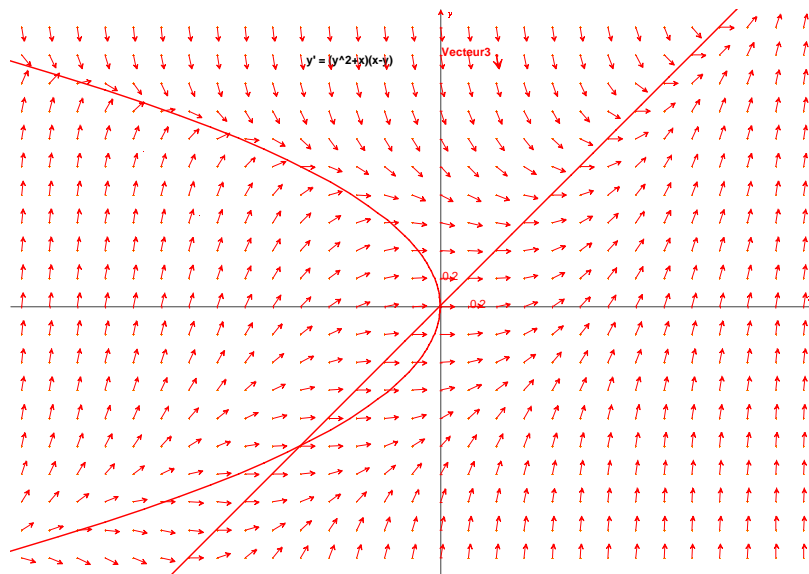


Fig. 22 : Allure des courbes solutions de l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$

Le binôme identifie différents comportements des solutions dans le registre graphique, mais sans arriver à établir un lien avec les propriétés algébriques de l'expression symbolique de l'équation différentielle :

- E'12 : donc, il y a des branches qui sont comme ça. D'accord ? Si tu as une fonction initiale qui est là, ben ça décroît. Ça touche ça, ça devient horizontal, et après...  
 E'17 : et ça reste dessus  
 E'12 : ben, je ne suis pas sûr, parce que là...  
 E'17 : ah, c'est quoi, cette courbe ?  
 E'12 : ben, ça devient horizontal, tu vois ? Et ça, ce n'est pas horizontal, la tangente n'est pas horizontale. Ça veut dire que...  
 E'17 : non, mais si, et ça reste dessus, tu es obligé. Parce que là, tu as (...?) et la tangente qui sont dans ce sens-là. Il y a des tangentes qui sont nulles  
 (lignes : 602-607)  
 E'12 : là, notre courbe doit avoir une tangente horizontale, là  
 E'17 : imagine qu'elle reste dessus  
 E'12 : elle doit avoir une tangente horizontale là, et une tangente verticale, par là... donc là. Et pour avoir une tangente horizontale là, il faut qu'elle arrive d'ici  
 E'17 : et elle y reste

E'12 : et ici, elle ne peut pas y arriver parce que dès qu'elle est là, elle descend  
(lignes : 654-658)

Le binôme tente de tracer la branche  $y^2 = -x$  de l'isocline, mais il n'y arrive pas. Le temps imparti à cette situation est terminé et les étudiants se limitent à noter brièvement sur l'isocline zéro (cf. fig. 23 ci-dessous) :

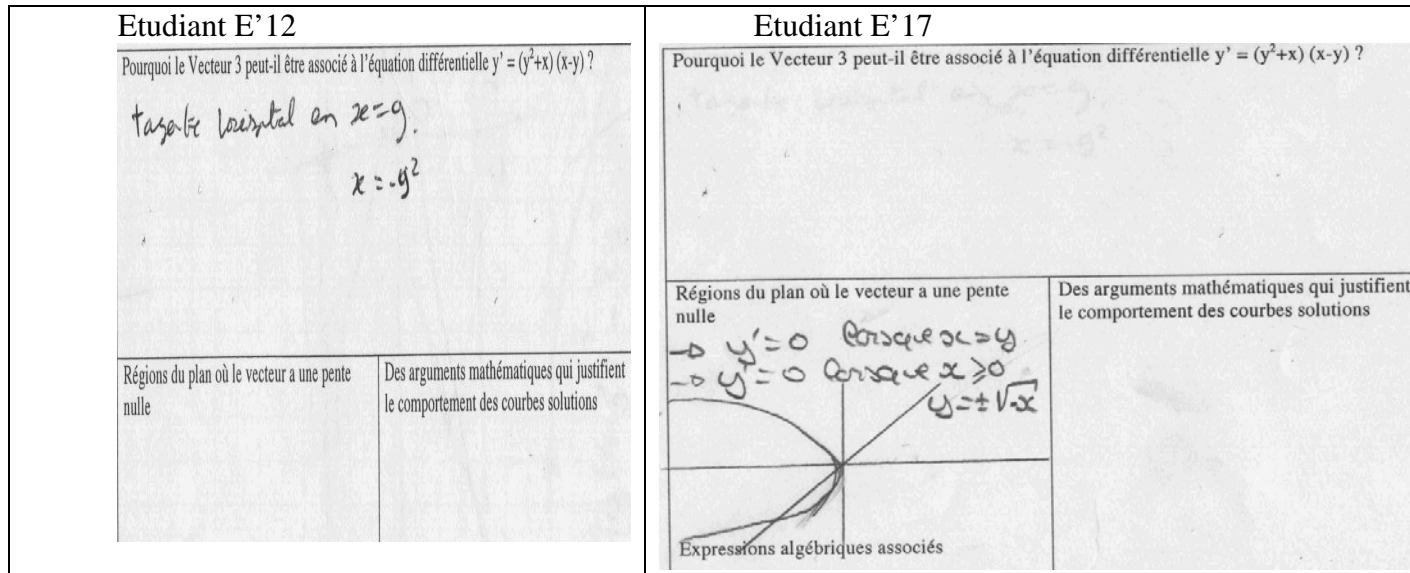


Fig. 23 : Association Vecteur 3 – Equation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$

#### 4.2.5. Le binôme E'14/E'15

Le binôme utilise une même feuille pour répondre aux questions posées. Il commence l'exploration en déplaçant le vecteur dynamique, mais immédiatement les étudiants se rendent compte qu'à la question posée dans la tâche suivante il est plus facile de répondre, car il s'agit d'identifier les *régions du plan où le vecteur a une pente nulle*. Donc les étudiants n'ont pas un ordre précis pour répondre aux questions, et ils essaient d'abord de répondre à la deuxième consigne en explorant en même temps les autres vecteurs dynamiques. Ils reviennent aussi à la première consigne. Les étudiants cherchent d'abord les régions où les vecteurs ont une pente nulle (arguments du type ISC-0). Dans un premier temps, ils vérifient si tous les vecteurs deviennent horizontaux. Ensuite, ils commencent à remplir la fiche de réponses.

En ce qui concerne la première équation différentielle, le binôme arrive à articuler les registres graphique et symbolique relatifs à l'isocline zéro. Nous constatons dans les échanges ci-après que grâce au lien établi entre la pente nulle et l'expression  $y'=0$  pour la droite  $y=0$ , les étudiants traitent algébriquement l'expression symbolique de l'équation différentielle, ce qui leur permet d'identifier les deux autres droites  $y = \pm 2$  qui font partie de l'isocline zéro :

E'15 : ben déjà... « Régions du plan où le vecteur a une pente nulle » ...

E'14 : ouais

E'15 : sur l'axe des abscisses (... ?)

(lignes : 61-63)

E'14 : (... ?) expressions algébriques associées...

E'15 : ça veut dire que ... la tangente est nulle... non ?

E'14 : que « y »

E'15 : ça veut dire que  $y'=0$ , non ?

E'14 : c'est-à-dire si  $y=0$  ou

E'15 :  $y'=0$  ...  
 E'14 : non, mais quand tu remplaces ... ..  
 E'15 : donc ... tu veux dire ça, quand (... ?)  
 E'14 : (... ?) en -2 ...  
 E'15 : qu'en fait «  $y$  » et «  $4-y^2$  » égalent 0

(lignes : 72-81)

E'15 : ça veut dire ... «  $y=0$  » ... tu vois ce que je veux dire ?  
 E'14 : hum...  
 E'15 : ou «  $y=$  ... »  
 E'14 :  $\pm 2$   
 E'15 : ouais ...  $\pm 2$ , c'est ça ...

(lignes : 83-87)

Nous montrons la fiche de réponses de ce binôme, et nous remarquons que même si dans le registre symbolique les étudiants ont identifié les trois droites  $y=0$  et  $y=\pm 2$ , ils font seulement la description de la première (cf. fig. 24 ci-dessous) :

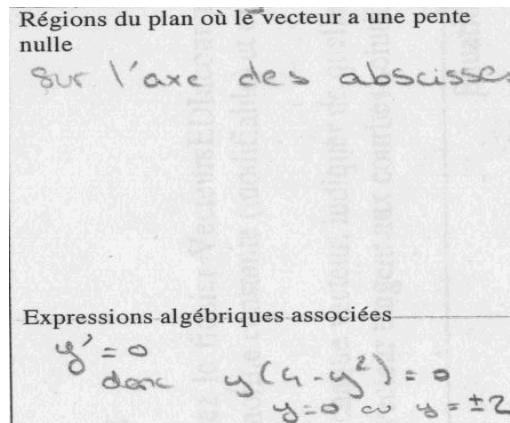


Fig. 24 : Identification de l'isocline zéro (BiE'14-E'15)

Le binôme continue l'identification de l'isocline zéro pour les deux autres équations différentielles. Bien que les étudiants aient établi un lien entre la pente nulle et la dérivée nulle où l'expression symbolique de l'équation différentielle a été utilisée, ce lien n'a été fait que pour ce cas particulier. Ils ne trouvent pas, de façon générale, que la pente du vecteur dynamique soit liée à la dérivée. Nous remarquons que les étudiants ne disposent pas des connaissances C6 qui permettent de faire le lien direct entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et la pente des droites tangentes. Ce sont les rétroactions du logiciel et les échanges avec le binôme voisin qui permettent au binôme E'14/E'15 d'établir ce lien. Comme nous le constaterons, le développement de celui-ci n'est pas immédiat. Pourtant, il sera utilisé finalement par le binôme pour justifier l'association Vecteurs dynamiques – Equations différentielles.

Les étudiants poursuivent la recherche des régions où les autres vecteurs dynamiques deviennent horizontaux, et ils identifient les droites  $x=-2$  et  $y=x$  pour les deuxième et troisième équations différentielles, respectivement. L'identification de ces droites s'effectue à l'aide de l'expression symbolique des équations différentielles, ainsi qu'en vérification graphique :

E'14 : regarde, en fait ... il y a (... ?) ce soit la diagonale (... ?)  
 E'15 : non, mais le choix de la diagonale parce que (... ?)

(lignes : 104-105)

E'15 : ouais ... donc... là, régions du plan ? (... ?) je suis sûre, je pense, là en la diagonale  
 E'14 :  $y = x$  ?  
 E'15 : hum ...  $y = x$  ... .. Donc ça veut dire que «  $(x+2)/(x^2-1) = 0$  », tu vois ...  
 E'14 : ah ouais ... ça c'est pareil, ça veut dire que «  $x = (... ?)$  »  
 E'15 : non,  $x = -2$  ... tu vois (... ?)  $x$  (... ?) 0 ... c'est ça, là  
 E'14 : ouais

(lignes : 111-116)

Lors du développement de liens entre le registre graphique et le registre symbolique concernant l'isocline zéro, l'exploration dynamique joue un rôle important. L'environnement donne aux étudiants la possibilité de vérifier leurs conjectures :

E'14 : parce qu'ici «  $y'$  » elle vaut 0  
 E'15 : (... ?) c'est pareil ... (... ?)  
 E'14 : ça fait rien, en fait, on peut faire des tests ... non (... ?)

(lignes : 122-124)

E'14 : si, parce qu'en fait, «  $y'$  » est nulle, ça veut dire que ... ah ouais si, c'est bon... je vois plus comment il a réfléchi ...  
 E'15 : ah, ça veut dire ça ... que pour tout «  $y$  » que ... ouais, ouais, ah non, le vecteur tangent il est constant... ah ouais, ton «  $y'$  » elle est nulle pour ces points-là  
 E'14 : oui, oui, voilà (... ?)  $x = -2$   
 E'15 : associé justement à ces points là, oui donc... effectivement, oui voilà (... ?) ce point  
 E'14 : je ne sais pas le ... bon...  
 E'15 : donc ... Jérémie, il avait dit que «  $y'$  » c'était la pente ...  
 E'14 : ouais

(lignes : 130-136)

Les liens établis entre les registres graphique et symbolique sont encore faibles. Nous constatons, dans les échanges ci-dessous, que la recherche des régions où le Vecteur 3 devient horizontal pose des problèmes aux étudiants, principalement à cause des expressions symboliques en jeu. Cependant nous remarquons à nouveau que les rétroactions graphiques du logiciel et les échanges des étudiants permettent d'établir le lien correct entre les représentants concernés. Dans ce cas, l'exploration dynamique a permis d'abord d'identifier la branche  $y=x$  de l'isocline zéro :

E'15 : [...] c'est pas le vecteur 3, [...] qui est sur la diagonale...  
 E'14 : ah si, houlàlà ... tu as (... ?)  
 E'15 : donc  $y=x$ ... donc ça faisait  $(y^2+x)(x-y)=0$   
 E'14 : il y a un problème, là ... elle est positive ou elle est négative... parfois ça marche dans les négatifs, celui-là

(lignes : 141-142)

E'14 : tu fais  $y^2+x=0$  ... ça fait  $y^2=-x$  ... comment on peut faire ... ah, non, c'est pas défini avec positifs, justement  
 E'15 : (... ?) défini là ... je ne sais pas ... non, bah (... ?) ... attend  
 E'14 : ah oui, si elle est positive, regarde ... elles font comme ça ...

(lignes : 146-148)

La figure 25, ci-après, montre l'extrait de fiche de réponses du binôme correspondant à l'identification de l'isocline zéro pour les couples : Vecteur 2 – Equation différentielle  $y'=(x+2)/(x^2-1)$  et Vecteur 3 – Equation différentielle  $y'=(y^2+x)(x-y)$  :

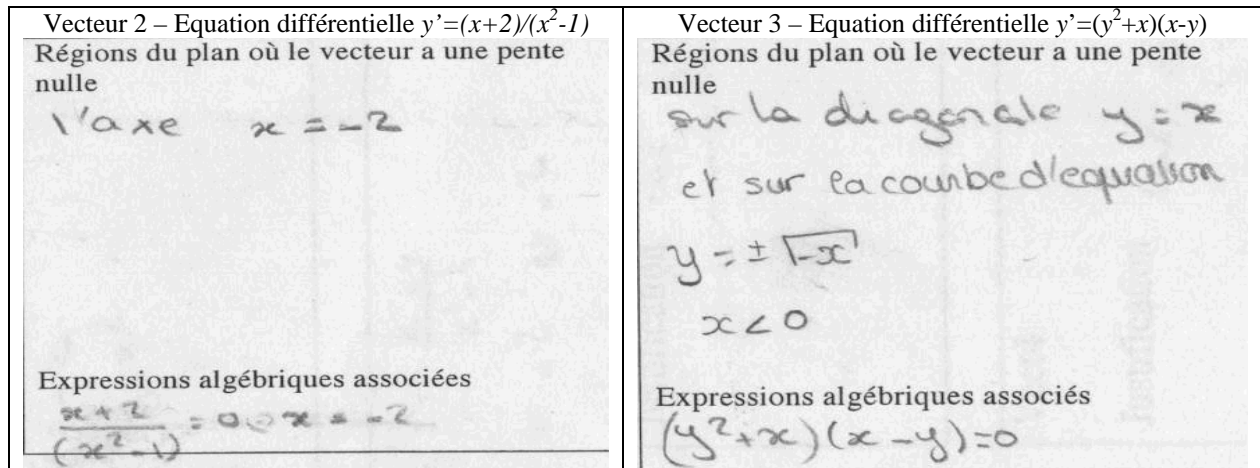


Fig. 25 : Identification de l'isocline zéro (BiE'14-E'15)

Dans les échanges suivants, nous remarquons que les rétroactions numériques du logiciel permettent aux étudiants de confirmer que les variations de la pente du vecteur dynamique ont un lien avec l'expression symbolique de l'équation différentielle. Le binôme vérifie (prenant en compte la suggestion donnée par les voisins), à l'aide de la calculatrice de Cabri, que la valeur de la pente du vecteur dynamique varie selon le déplacement du vecteur :

E'15 : on n'a pas toujours la même, tu vois, quand tu calcules la pente ça bouge, elle bouge selon ce que tu fais de ce vecteur ...

(ligne : 171)

E'15 : ah, oui, oui ... tu veux les coordonnées du point à l'origine du vecteur ... tu veux les coordonnées du vecteur ...

E'14 : ah je (... ?) vecteur ...

E'15 : voilà, ça y est ... ouais... je mets le « y » de ... le (... ?) le « y » des coordonnées ... donc ça fait « - » (... ?) fois entre parenthèses « 4 - tac au carré ...

E'14 : ah ouais ... donc il y a ...

(lignes : 175-178)

E'15 : et qu'on fait ...

E'14 : tu (... ?) tu le déplaces ... voilà, ouais ...

(lignes : 181-182)

L'étudiant E'15 n'ayant pas encore compris le lien entre les variations du vecteur dynamique et l'expression symbolique de l'équation différentielle, pour confirmer ce lien le binôme recourt à l'avis de l'étudiant voisin (que nous avons nommé J). Celui-ci leur explique à nouveau la relation qui existe entre la pente du vecteur et la dérivée, ainsi que la manière d'utiliser l'outil « Calculatrice » de Cabri :

E'15 : je ne comprends pas ce que tu veux dire... simplement quand je bouge mon truc (... ?) comme ça, là ... (... ?) il est où, mon vecteur ?

J : comment tu fais ? (... ?) ça fait pareil

E'15 : ça, tu tapes à l'origine, là ?

J : hum ... c'est le (... ?) ... l'ordonnée du vecteur, vous tapez sur l'ordonnée ?

E'15 : ouais

J : donc tu vas (... ?) ... mais tu n'as pas la pente, là ... met cette pente du vecteur...

E'15 : comment on fait ?

J : tu vas dans (... ?) normalement (... ?) quelque chose, je ne suis pas sûr... essaie « pente »

(lignes : 187-194)

J : la pente fait toujours ... la pente du vecteur vaut toujours la même chose que ton « y' »



E'14 : ah ...

J : « y' » c'est la pente du vecteur

E'14 : j'avais compris

E'15 : alors ça veut dire qu'il faut ton « y' » (... ?) comment (... ?) on peut calculer la pente (... ?)

(lignes : 203-207)

Comme nous l'avons constaté, les rétroactions du logiciel et principalement, les échanges avec le voisin, ont permis au binôme de mettre en relation l'expression symbolique de l'équation différentielle et la pente du vecteur dynamique. Finalement, les étudiants s'appuient sur ce lien, pour formuler des arguments du type VAL-NUM justifiant l'association Vecteur dynamique – Equation différentielle, pour les trois couples. Dans la figure 26 ci-après, nous montrons des extraits de la fiche de réponses des étudiants où sont explicités des arguments de ce type :

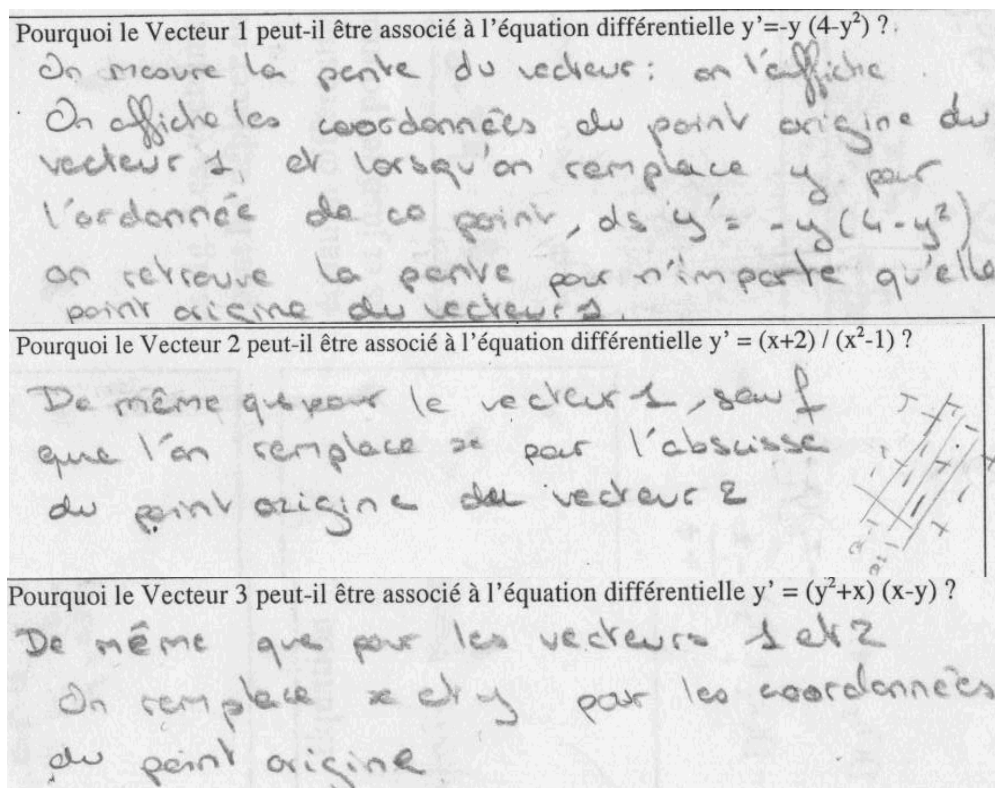


Fig. 26 : Justification de l'association Vecteur 2 – Equation différentielle (BiE'14-E'15)

**Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions**

En ce qui concerne la troisième consigne, le binôme tente d'identifier des liens entre le vecteur dynamique, l'expression symbolique de l'équation différentielle et les courbes solutions qui peuvent les servir :

E'14 : elles recommencent, en fait, elles suivent le même champ ... comme ça  
 (ligne : 374)

E'15 : ouais, mais comment pourraient-ils être « des arguments mathématiques »

E'14 : (... ?) quels arguments faire avec ce vecteur, si (... ?)

E'15 : mathématiques ? ...

E'14 : ouais... et ça, à la limite de ... ..

E'15 : je ne sais pas ... théoriquement...

E'14 : elles font comme ça, les traces ... on va le (... ?) une trace

(lignes : 385-390)

Les étudiants identifient certains comportements des courbes solutions, mais ils ne trouvent pas le moyen de les justifier mathématiquement :

E'15 : je comprends rien du tout ... ah la (... ?) ça ci

E'14 : pourquoi ça fait comme ça, celles-là

E'15 : ouais

E'14 : là, fais tout comme ça ... là, fais tout comme ça ... là, fais tout comme ça avec

l'(... ?) qui est là

E'15 : hum...

E'14 : tu as vu ? ... là, fais tout comme ça ...

E'15 : ça veut dire qu'elles font toutes comme ça, en fait ... un champ comme ça ... de vecteurs ... chaque truc, chaque truc ... et après elle fait ça

E'14 : après ça ... il diminue un peu... ouais

(lignes : 399-406)

Finally, le binôme E'14/E'15 formule des arguments pour justifier le comportement des courbes solutions en s'appuyant d'une part, sur les informations graphiques concernant la croissance ou décroissance des solutions tirées de l'exploration dynamique et d'autre part, sur le lien établi entre la pente du vecteur dynamique et l'expression symbolique de l'équation différentielle. Cependant, comme nous le constaterons, les étudiants mettent en relation plutôt les variations de la pente  $y'$  des vecteurs dynamiques avec les propriétés algébriques des expressions symboliques des équations différentielles. Les étudiants utilisent notamment des arguments du type BRCH-INFI-ED (fondés sur l'étude des branches infinies à l'aide de l'expression symbolique de l'équation différentielle). Nous remarquons par la suite que les arguments de ce type ont été fournis pour les couples : Vecteur 1 – Equation différentielle  $y'=-y(4-y^2)$  et Vecteur 2 - Equation différentielle  $y'=(x+2)/(x^2-1)$ , car le traitement des deux expressions symboliques permet, pour le premier couple, d'obtenir la limite de  $y'$  lorsque  $y$  tend vers plus ou moins l'infini ; et pour le deuxième couple, d'obtenir la limite de  $y'$  lorsque  $x$  tend vers  $\pm 1$ . En revanche, pour le couple : Vecteur 3 – Equation différentielle  $y'=(y^2+x)(x-y)$ , le binôme n'arrive pas à formuler ce type d'arguments.

Nous constatons, ci-dessous, que le binôme s'appuie à la fois sur les informations graphiques relatives au vecteur dynamique et sur le traitement de l'expression symbolique de l'équation différentielle (en mobilisant des connaissances C13 sur les limites des solutions à partir de la dérivée). Cette interaction graphique/symbolique permet au binôme de justifier le comportement à l'infini des solutions associées à l'équation différentielle  $y'=-y(4-y^2)$  :

E'14 : on dit ça... il faudra calculer la limite en plus l'infini ... c'est moins l'infini en (... ?) ça va être finalement qu'en plus l'infini ... quand « y » tend vers plus l'infini, tu as le vecteur comme ça, d'accord

E'15 : et (... ?) tend vers plus l'infini

E'14 : et en moins l'infini ...

E'15 : et plus ... il va faire plus, non ? ... ah, non, ça fait moins

E'14 : c'est moins, ouais ...

E'15 : donc c'est moins, à l'infini ...

(lignes : 446-451)

Par contre, le binôme ne trouve pas le moyen de justifier le comportement des solutions comprises dans les régions  $-2 < y < 0$  et  $0 < y < 2$  :

E'14 : ... et après en 0 ... (... ?) en 0 ... -2 ça fait, c'est normal puis ça fait 0... donc elle est tangente à ...

E'15 : à tout moment elle va (... ?) c'est tout

(lignes : 452-453)

Dans la figure 27 ci-dessous, voici un extrait de fiche de réponses qui contient les arguments formulés par le binôme, justifiant le comportement des courbes solutions associées à l'équation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$  (arguments du type BRCH-INF-ED et ISC-0) :

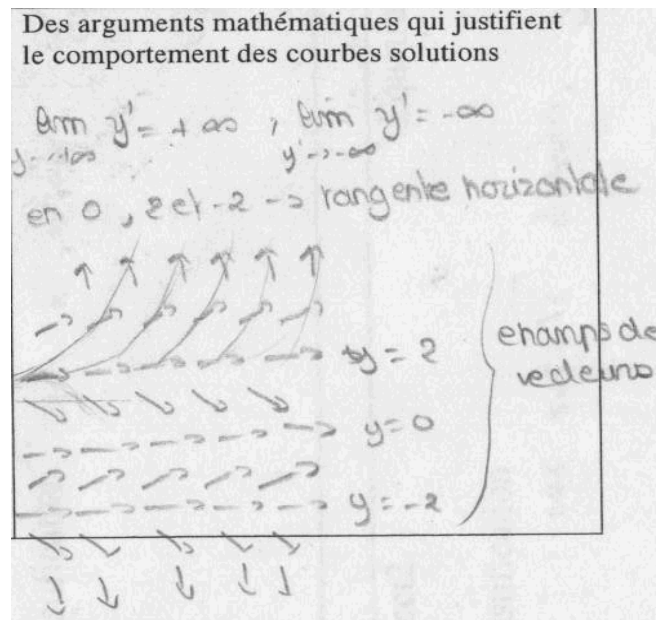


Fig. 27 : Des arguments justifiant le comportement des solutions (BiE'14-E'15)

En ce qui concerne la justification du comportement des solutions associées à l'équation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$ , le binôme s'appuie aussi sur des informations graphiques et l'expression symbolique de l'équation différentielle. L'exploration dynamique leur a permis d'identifier les discontinuités en 1 et -1 de la fonction  $f$ , ainsi que l'existence de solutions tendant vers plus ou moins l'infini (arguments du type DISC). Par ailleurs, le traitement de l'expression symbolique confirme que la dérivée tend aussi vers plus ou moins l'infini :

E'14 :  $x = -2$  ça fait 0, donc ça veut dire que ... donc ça veut dire qu'on a  $y'$  qui vaut 0

E'15 : hum...

E'14 : quand ça tend vers -1 ... vers 1 ... ça fait  $3/0$  ... ça fait plus l'infini, donc ça va faire comme ça

E'15 : hum ... ouais

E'14 : ensuite en 1 et en -1, on voit en plus, ça va vers plus l'infini, donc ça vaut 0

(lignes : 525-529)

E'15 : alors, quand « x » tend vers 1, « y » il faut qu'il tende vers moins l'infini... non ?

(ligne : 549)

E'15 : ah oui ... ça monte ... attend, attend ... quand « x » tend vers 1

(ligne : 553)

E'14 : donc en -1 moins, ça c'est plus l'infini ... et -1 plus ... ça c'est moins l'infini ... pourquoi (... ?) moins l'infini ...

(ligne : 560)

Dans les échanges ci-dessous, nous remarquons que les rétroactions graphiques du logiciel permettent au binôme de lier le comportement des solutions à l'infini, autour des points de discontinuité de la fonction  $f$ , avec les limites à droite et à gauche :

E'14 : oui, mais celui là quand « x » tend vers moins, ça monte quand (il y a ?) plus l'infini

E'15 : et en fait, elle descend en cas de moins l'infini, ça

E'14 : eh oui... mais quand tu fais, hein ... quand tu fais la fonction, euh ... elle est (comme ?) ça ... si elle tendait vers plus l'infini ... en 1 ... en 0 plus

E'15 : attend, on marche pas comme (... ?) ... ah, je fais 1 ... il fait «  $2/(x^2-1)$  » ... «  $x^2-1$  » c'est pas en -1 ... (ce d'abord ?) ça fait 1 ... -1 et c'est quelque chose qui est plus petit que -1, donc c'est quelque chose de plus petit que 1 ... donc c'est quelque chose qui est négatif ici,

E'14 : et t'as dans -1... en moins ou en plus ?

E'15 : en moins ...

E'14 : ah non, (... ?) c'est plus, non ?

E'15 : ah non (... ?) c'est moins, ici ... donc j'ai un moins ici ... moins je (... ?) à 1 ... ça va être quelque chose de négatif... c'est enfin, 1 moins

E'14 : non, en -1 je vois plus

E'15 : ouais, c'est ça que je vois moins

E'14 : si on fait une table de signes ... si tu regardes par (... ?) tu as des signes, normalement ...

(lignes : 566-576)

Concernant l'équation différentielle  $y'=(y^2+x)(x-y)$ , le binôme ne trouve pas d'arguments pour justifier le comportement des solutions, ils identifient certains faits graphiques mais les étudiants ne trouvent pas de lien avec l'expression symbolique de l'équation différentielle :

E'14 : c'est super joli

E'15 : oui, mais on sait pas quoi faire

(lignes : 747-748)

E'15 : c'est plus que tu peux dire, en fait... en plus tu n'as pas de fonction de « x » ... donc tu peux pas faire la limite et tout, euh ... je vois pas du tout... (... ?) le problème, c'est que ... je ne vois pas ce qu'on peut dire, franchement ... (... ?)

(ligne : 762)

E'15 : mais il y a des moments où tu arrives à ... alors il se fait 0, quoi...

E'14 : voilà, où la tangente c'est horizontal, ça vaut 0

(lignes : 842-843)

Finalement le binôme n'arrive pas à trouver d'arguments justifiant le comportement des solutions pour la troisième équation différentielle, et les réponses fournies se limitent à identifier l'origine des coordonnées comme un point où le vecteur devient horizontal. Dans la figure 28 suivante, nous présentons les arguments du binôme justifiant le comportement des courbes solutions associées aux équations différentielles  $y'=(x+2)/(x^2-1)$  et  $y'=(y^2+x)(x-y)$  :

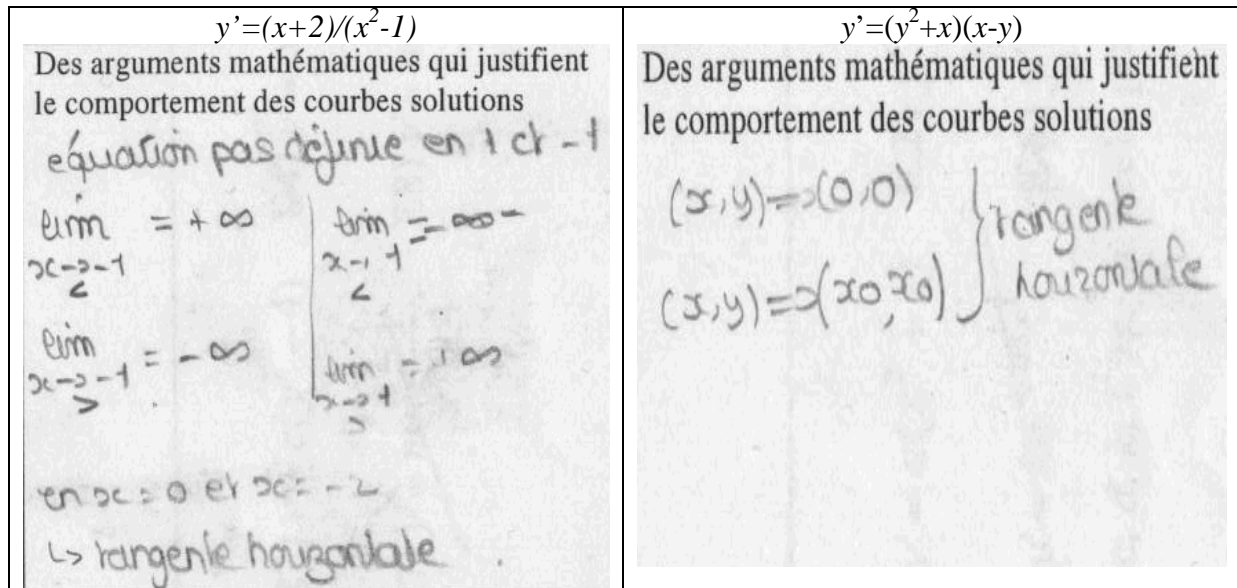


Fig. 28 : Des arguments justifiant le comportement des solutions (BiE'14-E'15)

### Conclusion

Nous remarquons que seul le binôme BiE'12/E'17 met en relation directe l'expression symbolique des équations différentielle avec les courbes solutions. Pour les deux autres binômes (BiE'1/E'4 et BiE'14/E'15), le lien établi a été plutôt celui entre la pente  $y'$  des vecteurs dynamiques et l'équation différentielle.

De manière générale, les trois binômes justifient l'association entre les vecteurs dynamiques et les équation différentielles par des arguments qui font intervenir l'isocline zéro (arguments du type ISC-0). Ils relient l'isocline zéro à l'expression symbolique de l'équation différentielle par la mise en correspondance de la tangente horizontale et de la dérivée nulle. Nous considérons que l'articulation entre dérivée nulle et tangente horizontale témoigne de l'influence de l'enseignement reçu au lycée, où les passages entre les registres graphique et symbolique concernant la dérivée sont très peu problématisés et se limitent à des tâches isolées, explicitement sollicitées (Praslon, 2000).

Le binôme E'1/E'4 identifie l'isocline zéro pour chacune des équations différentielles, et lui associe son expression symbolique. La mise en relation de l'isocline zéro avec l'expression symbolique de l'équation différentielle se fait, grâce aux rétroactions graphiques du logiciel et à la mise en correspondance avec la dérivée nulle. Ce lien entre les registres graphique et symbolique n'a pas été établi de façon immédiate, mais il a fallu tout un travail exploratoire pour le développer. L'expérience acquise sur les deux premières équations différentielles, permet au binôme d'anticiper l'isocline zéro de la troisième équation différentielle à partir de l'expression symbolique de celle-ci. Ce qui témoigne d'une certaine flexibilité entre les registres de représentations en jeu.

Le binôme E'1/E'4 arrive aussi, grâce aux interactions du logiciel, à établir un lien entre le signe de la dérivée et la pente du vecteur dynamique pour l'équation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$  ; ainsi qu'un lien entre l'expression symbolique de l'équation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  et le comportement de la pente du vecteur dynamique au voisinage de  $x = \pm 1$ . Pour cette dernière équation différentielle, le lien a été établi en étroite interaction avec les informations graphiques tirées du déplacement du vecteur dynamique. Néanmoins, les liens ayant été développés par les étudiants entre les registres graphique et symbolique, l'expression

symbolique de l'équation différentielle a été mise en relation avec la pente  $y'$  du vecteur dynamique, sans arriver à l'interpréter comme la dérivée des fonctions solutions.

En ce qui concerne le binôme E'12/E'17, leurs connaissances sur le lien entre l'expression symbolique et la pente des droites tangentes (connaissances C6) semblent être disponibles. Ce binôme relie presque immédiatement les registres graphique et symbolique de l'isocline zéro pour les deux premières équations différentielles ( $y' = -y(4-y^2)$ ,  $y' = (x+2)/(x^2-1)$ ). Par contre, pour la troisième équation différentielle ( $y' = (y^2+x)(x-y)$ ), le binôme s'appuie plus sur l'exploration dynamique pour articuler les registres graphique et symbolique. Dans le cas de la première équation différentielle, les étudiants mobilisent les connaissances C6 pour régionner le plan selon le signe de la dérivée (arguments du type SENS-VAR). Pour la deuxième équation différentielle, l'identification graphique de la discontinuité de  $(x+2)/(x^2-1)$  conduit le binôme à établir un lien entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et la pente du vecteur dynamique au voisinage de  $x = \pm 1$  (arguments du type DISC). L'étude de la troisième équation différentielle n'est pas conclue, faute de temps.

Toutefois, le binôme E'12/E'17 a établi des liens corrects entre les registres graphique et symbolique et a mobilisé des connaissances telles que C6, et ce binôme a eu de grandes difficultés concernant les points d'inflexion. Pour ces étudiants (de façon particulière, E'17), les points d'inflexion sont associés à celui de la cubique prototypique  $y = x^3$  (théorème en acte TA6). En s'appuyant sur TA6, les étudiants conjecturent que la première dérivée s'annule dans un point d'inflexion, et pour la deuxième équation différentielle ce théorème les a conduits à rejeter ce type de point, même s'ils l'avaient calculé algébriquement. La mise en œuvre du théorème en acte TA6 montre que les connaissances de ces étudiants sur les points d'inflexion sont très restreintes, et appuyées sur des cas très particuliers.

En ce qui concerne le binôme E'14/E'15, il est arrivé aussi à établir un lien entre l'isocline zéro et l'expression symbolique de l'équation différentielle, grâce à la mise en relation de la tangente horizontale avec la dérivée nulle. Pourtant, pour ce binôme, les connaissances qui lient la pente du vecteur dynamique et l'expression symbolique de l'équation différentielle, n'étaient pas disponibles. Cependant, les interactions avec le logiciel et les échanges avec les voisins permettent à ces connaissances de devenir mobilisables. Ce qui a demandé tout un travail d'exploration et de validation numérique (arguments du type VAL-NUM). Le binôme E'14/E'15 est arrivé, grâce aux rétroactions du milieu, à articuler directement (sans passer par l'expression symbolique des solutions) les registres graphique et symbolique des équations différentielles, comme en témoigne la formulation d'arguments du type BRCH-INFI-ED (fondés sur l'étude des branches infinies à l'aide de l'expression symbolique de l'équation différentielle) pour les équations différentielles  $y' = -y(4-y^2)$  et  $y' = (x+2)/(x^2-1)$ .

Les résultats obtenus dans cette situation semblent confirmer nos hypothèses de recherche. Les variations de la pente du vecteur dynamique, lors de son déplacement, favorisent l'établissement des liens fonctionnels entre ces variations et les propriétés algébriques des expressions symboliques des équations différentielles associées (première hypothèse de recherche). Nous avons constaté aussi que la demande de justifications mathématiques des faits graphiques identifiés, a contribué à établir des liens directs entre les registres graphique et symbolique des équations différentielles (troisième hypothèse de recherche), les étudiants étant arrivés à formuler des arguments des types SENS-VAR, BRACH-INFI-ED, etc.

Finalement, nous avons remarqué que le travail des étudiants, dans les situations proposées, a permis d'identifier certaines de leurs difficultés concernant des connaissances élémentaires du niveau du lycée.

### **4.2.6. Bilan par le professeur**

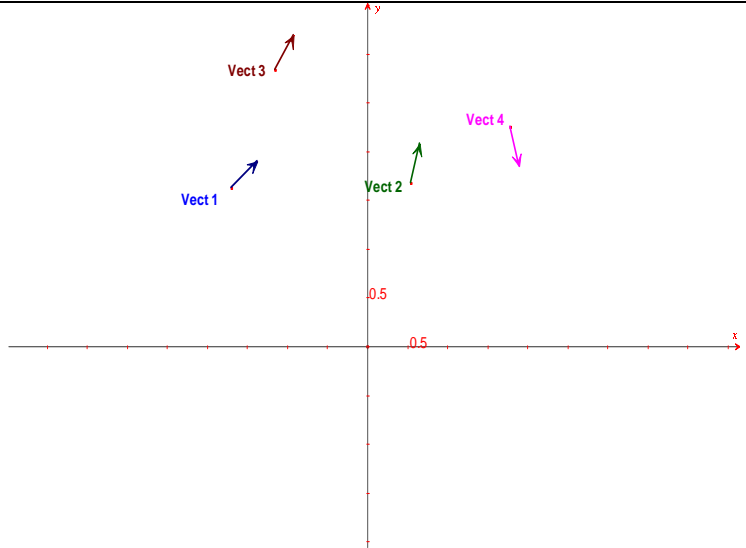
Compte tenu des difficultés repérées, le professeur a procédé, à la fin de la première situation, à un petit bilan. Ce bilan a été organisé de la même manière pour les trois groupes qui ont participé à l'expérimentation :

- dans une première partie, le professeur a demandé aux étudiants leur stratégie mise en œuvre pour justifier l'association entre les vecteurs dynamiques et les équations différentielles. Les stratégies apparues étaient celles fondées sur les arguments des types VAL-NUM (confrontation numérique entre pente du vecteur et expression symbolique de l'équation différentielle), VAR-ED (propriété graphique du fait que l'équation différentielle dépend d'une seule variable), ISC-0 (lien entre les registres graphique et symbolique concernant l'isocline zéro) ;
- dans la deuxième partie du bilan, le professeur s'est focalisé sur une étude brève de l'équation différentielle  $y' = (y^2 + x)(x - y)$ . Cette étude s'est centrée principalement sur le régionnement du plan par l'isocline zéro, et sur l'étude du sens de variation des solutions à l'aide du signe de la dérivée.

### **4.3. L'ASSOCIATION D'UN VECTEUR DYNAMIQUE ET D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE (LIEN N'ETANT PAS EXPLICITEMENT DONNE)**

Rappelons que l'enjeu de cette situation est d'identifier des propriétés graphiques des vecteurs dynamique fournis, de les interpréter mathématiquement et de les mettre en relation avec des propriétés mathématiques d'un ensemble d'équations différentielles, afin de choisir celle qui correspond à chaque vecteur dynamique donné. L'objectif est de tester l'efficacité des liens construits pour articuler les registres graphique et symbolique des équations différentielles.

Les tâches proposées ont été les suivantes :

<p>Les vecteurs Vect1, Vect2, Vect3 et Vect4 sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine.</p> <p>Pour chaque vecteur, indiquer de quelle équation différentielle de la liste ci-dessous il peut être un vecteur tangent aux courbes solutions, et justifier pourquoi.</p>	
<p><b>E1)</b> <math>y' = a(x^2 + 1)</math>   <b>E2)</b> <math>y' = b(y^2 - 1)(x^2 + y^2)</math>   <b>E3)</b> <math>y' = c(y^2 - 4)</math>   <b>E4)</b> <math>y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}</math></p> <p><b>E5)</b> <math>y' = ke^{-0.05x^2}</math>   <b>E6)</b> <math>y' = l(y - 1)(y^2 - 4)</math>   <b>E7)</b> <math>y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}</math>   <b>E8)</b> <math>y' = n(y - x^2)(x + y)</math></p> <p style="text-align: center;"><math>a, b, c, d, k, l, m, n</math> réelles positives</p>	

L'analyse se focalise sur les stratégies et les types d'arguments que les étudiants ont mis en œuvre pour faire l'association des vecteurs dynamiques avec l'équation différentielle choisie ; ainsi que sur la nature du lien établi entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et les courbes solutions.

Pour faciliter le suivi des productions des binômes, nous montrons dans la figure 29, en page suivante, le champ de vecteurs associé à chaque vecteur dynamique :



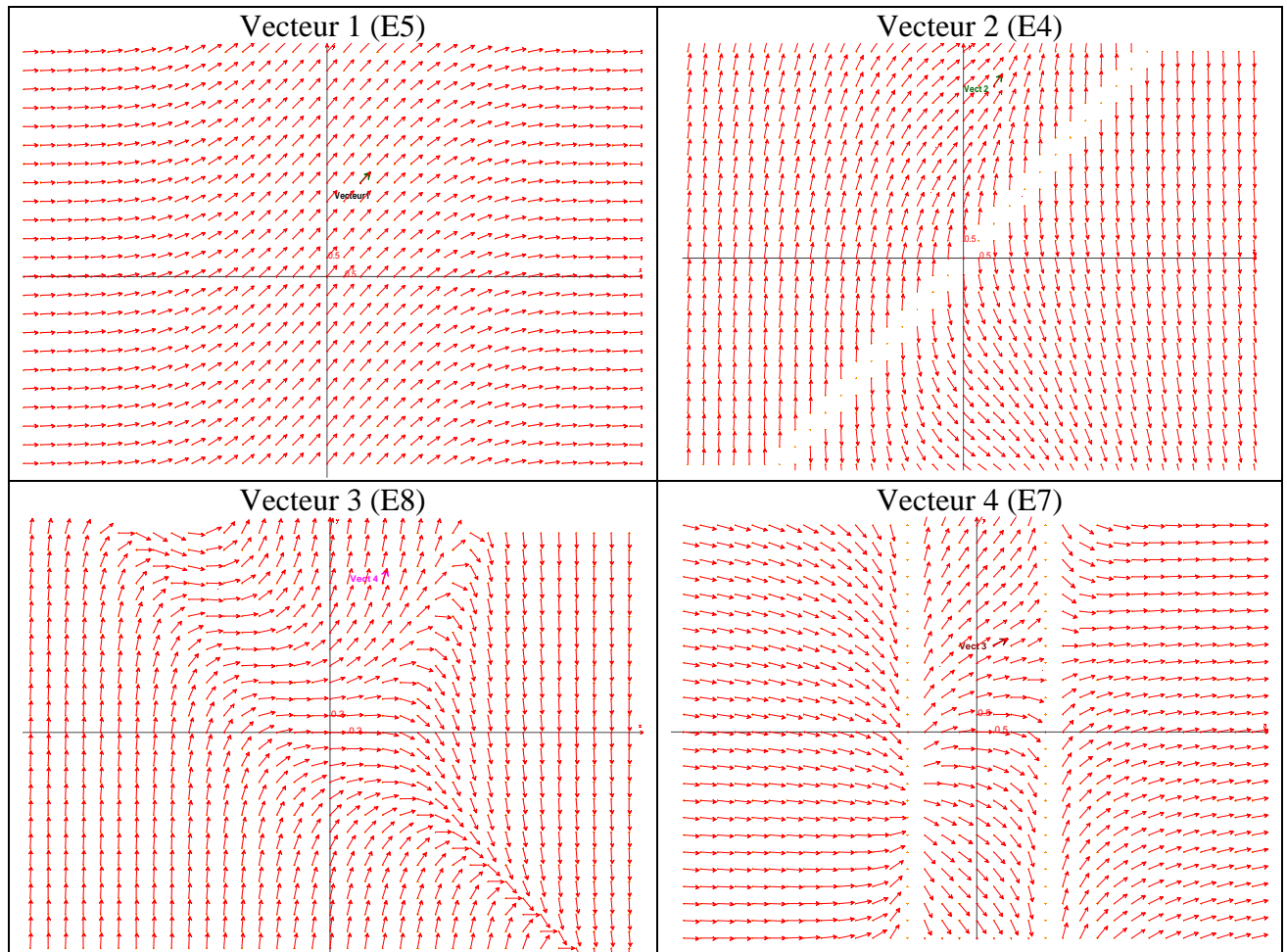


Fig. 29 : Champs de tangentes associés aux vecteurs dynamiques

#### 4.3.1. Le binôme E'1/E'4

D'abord, pour faire l'association vecteurs dynamiques – équations différentielles, le binôme considère qu'il faut résoudre les équations différentielles (arguments du type RES-ED). La stratégie envisagée par les étudiants consiste à : résoudre les équations différentielles ; tracer des courbes à partir de l'expression symbolique des solutions ; et vérifier perceptivement si les vecteurs restent tangents aux courbes, lorsque leur origine parcourt les courbes tracées. Cette stratégie est mobilisée pour la première équation différentielle de la liste :

- E'1 : mais l'E1, c'est facile (... ?) c'est la première ...  
 E'4 : ouais  
 E'1 : on peut même calculer la ...  
 E'4 : l'intégrale  
 E'1 : la primitive ... oui, voilà  
 E'4 : c'est  $y = ax^3/3 + ax$  ... c'est ça ?  
 E'1 : hum ... le problème, c'est qu'on a «  $ax$  » avec l' «  $a$  » ... même «  $a$  »  
 E'4 : mais «  $a$  » c'est positif, quoi  
 E'1 : bon ... on a déjà ça ...  
 E'4 : ce qu'on peut faire, on peut trouver ce truc-là... et chercher quels sont les vecteurs qui suivent ... (... ?) quoi  
 E'1 : (... ?) on peut voir ça  
 E'4 : quand on a «  $a=1$  »

(lignes : 4-15)

Les étudiants tracent à l'aide de Cabri la courbe associée à la solution  $y=x^3/3 + x$  et vérifient si les vecteurs restent tangents lorsque son origine se déplace sur la courbe :

E'1 : ouais... alors qu'est ce qu'on a bien ...il faut « redéfinir » ... « redéfinir un objet »  
oui, c'est point

E'4 : oui, point sur un objet, oui

E'1 : sur ce lieu, oui

E'4 : non,

E'1 : et ...

E'4 : ah ... pas génial ... si ?

E'1 : bah non ... non, pas génial ... parce que ça devra être tangent

(lignes : 50-56)

P : (... ?) c'est tangent, là ?

E'1 : justement, ça marche pas

(lignes : 66-67)

Comme la vérification graphique n'a pas marché, la stratégie fondée sur des arguments du type RES-ED est abandonnée. Les étudiants ne comprennent pas pourquoi on a mis des paramètres dans les expressions symboliques, alors le professeur leur explique que ce choix a servi à complexifier les tâches proposées, mais que les vecteurs dynamiques étaient associés à une équation différentielle dont le paramètre avait une valeur réelle fixe.

Lors de l'exploration, le binôme utilise le déplacement du vecteur ainsi que l'outil « Trace » de Cabri.

### L'association vecteur 1 $\Leftrightarrow$ E5 : $y' = ke^{-0.05x^2}$

En raison de l'échec de la mise en œuvre de la stratégie algébrique, le binôme est alors obligé d'interpréter les variations des vecteurs dynamiques. D'abord, les étudiants constatent que lorsqu'on déplace le premier vecteur tangent dynamique, il y a toujours une pente positive. Ils interprètent ce fait graphique en termes de signe de la dérivée :

E'1 : non, non, non, mais ils bougent tous... ah, d'accord... lui il ...

E'4 : (... ?) le contraire

E'1 : voilà

E'4 : donc « y' » est toujours positif

E'1 : ouais

E'4 : donc, ça veut dire que ...

E'1 : tu (... ?) en la courbe

E'4 : « y' » (... ?) tangent

E'1 : (... ?) la courbe ... ..

E'4 : E5, elle est toujours positive

E'1 : (... ?) là aussi ... la première (... ?) [l'équation E1]...

(lignes : 100-110)

Nous remarquons que l'interprétation des variations du vecteur dynamique en termes de dérivée, permet de le relier aux équations E1)  $y' = a(x^2 + 1)$  et E5)  $y' = ke^{-0.05x^2}$ . Cependant, les étudiants continuent la recherche d'autres liens possibles entre les variations du vecteur 1 et les expressions symboliques :

E'4 : vecteur 1 ... ça pourra peut-être ... euh ... ça peut être... c'est E3, non ?

E'1 : oui

E'4 : ouais, c'est tout (... ?)

E'1 : donc c'est pareil, on pourrait intégrer celui-là, mais je crois que ... l'E3 n'est pas (... ?)

E'4 : sachant que la limite ... quand «  $x$  » est très grand... quand «  $x$  » est très grand, ça tend vers 0... [l'étudiant explore le comportement du vecteur 1]

E'1 : oui, ça se voit bien...

(lignes : 113-118)

L'exploration dynamique permet au binôme d'identifier que le vecteur devient presque horizontal lorsque  $x$  est grand. Ce constat graphique les amène à tenter de mettre en œuvre des arguments du type ISC-0 (fondés sur l'identification de l'isocline zéro). Cette stratégie amène les étudiants à explorer aussi pour voir si les autres vecteurs deviennent horizontaux.

L'étudiant E'1 évalue l'expression  $y' = ke^{-0.05x^2}$  en  $x=0$ , mais il ne trouve pas de lien entre l'expression obtenue et le vecteur dynamique ; il semblerait que ce qu'il cherchait, c'était à identifier l'isocline zéro, et pourtant il n'a pas mis en œuvre le traitement correct de l'expression symbolique E5 :

E'4 : donc il faudrait ... pour analyser t'as ... ouais ... il faut voir où ils s'annulent ...

E'1 : ah ouais, c'est très bien ... celui là tend vers 0 ? ... et celui là tend plutôt vers... celui là ... se (... ?) là

(lignes : 119-120)

E'1 : donc en 0 ça fait 1 ... et en 0 ça fait «  $k$  » ... ah oui d'accord... donc ça va pas plus

(ligne : 126)

Le binôme abandonne la stratégie de l'isocline zéro et met en œuvre une autre stratégie, qui est basée sur des arguments du type VAR-ED (propriétés graphiques du vecteur dynamique dues au fait que l'équation est de la forme  $y' = f(x)$ ). Les étudiants cherchent à mobiliser les connaissances C17 (relatives au type de variation du vecteur dynamique selon les variables qui interviennent dans l'expression symbolique de l'équation différentielle), et cependant ils n'arrivent pas à faire fonctionner ces connaissances :

E'1 : ah ... qu'est-ce qui ... qu'est ce qui (... ?) le vecteur 1... est-ce que tu as suivi le truc qui dépend de je sais quoi ... il dépend de (... ?) quoi ... bon...

E'4 : c'est surtout que ... c'est qu'en «  $y$  » il dépend tout le temps de «  $x$  »

E'1 : oui, normalement

E'4 : c'est ça, en fait,

E'1 : normalement, ça, je crois pas que ça dépende de «  $x$  » [le vecteur dynamique]... ..

bon alors, je ne sais pas ce qu'on va faire... je vais te dire ce qu'on va faire ...

exactement ... est-ce qu'on peut pas tracer la droite avec la pente ... non ? ... bon ...

comment ? ... un peu changer un (point) ...

(lignes : 126-130)

Le binôme change de stratégie, il utilise l'outil « Pente » pour connaître la pente du vecteur dynamique en certains points du plan (arguments du type VAL-NUM). Pourtant, les informations obtenues ne leur permettent pas d'établir un lien entre le vecteur et les expressions des équations différentielles :

E'4 : quand «  $x=0$  » ça fait «  $y=0$  »

E'1 : et pourquoi ?

E'4 : quand «  $x=0$  »

E'1 : oui

E'4 : ça fait «  $y=0$  »

E'1 : ah oui ... il n'y pas «  $y$  » ... la pente, c'est 1

E'4 : ah oui, la pente c'est 1

E'1 : oui, mais alors on va faire ... ça, on nous dit pas grand chose

(lignes : 143-150)

Finally, the students notice that when the dynamic vector is displaced, when  $x$  increases, the slope of the vector remains always positive and it tends towards 0. They also notice, in the symbolic register, that starting from the symbolic expression  $y' = ke^{-0.05x^2}$  one could conclude that the derivative tends towards 0 when  $x$  tends towards plus infinity. The putting in relation of these constats in the two registers (graphical and symbolic) leads the binôme to make the association : Vecteur 1 - Equation différentielle E5 :

E'1 : (... ?) bon, quand tu l'amènes... dans les « x » positives ... elle décroît ... la pente

E'4 : ah bon ?

E'1 : bah, regarde

E'4 : « x » augmente

E'1 : « x » augmente

E'4 : « y' » est positive

E'1 : ça veut dire quoi ? ... logiquement, ça veut dire ça

E'4 : qu'est-ce que (... ?)

E'1 : ah ... regarde ça ... regarde bien ... regarde bien la pente ... ..

E'4 : ah ... elle tend vers 0

E'1 : hum... quand elle est (... ?)

E'4 : ouais, c'est bon ... donc c'est l'équation E5 ... « Justification » ... .. hum...

(lignes : 158-169)

Ci-dessous (fig. 30) un extrait de fiche de réponses du binôme. Elle explicite les deux équations choisies et les arguments qui ont conduit à l'équation E5 :

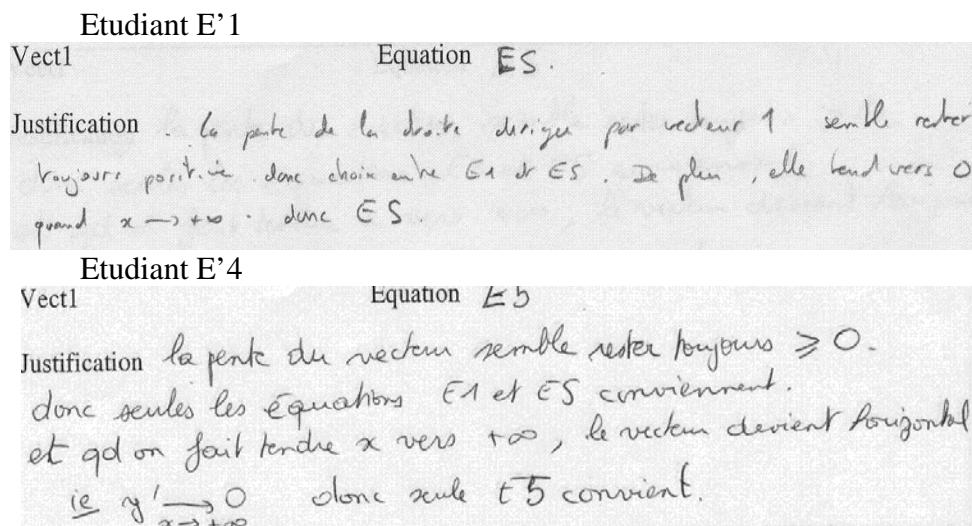


Fig. 30 : Association Vecteur 1 – Equation différentielle E5 (BiE'1/E'4)

Comme pour la première situation, la mise en relation entre les registres graphique et symbolique semble ne pas faire considérer  $y'$  comme la dérivée des solutions.

**L'association vecteur 2  $\Leftrightarrow$  E4 :  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$**

Le déplacement du vecteur 2 permet au binôme d'identifier qu'il change de signe et que la droite  $y=x$  régionne le plan. Dans un premier temps, les étudiants supposent que sur cette droite le vecteur devrait devenir horizontal (arguments du type ISC-0) :

- E'4 : serait en tous cas négatif ... ah non ...  
 E'1 : oh  
 E'4 : change de signe ... en ... (... ?)  
 E'1 : il y a une droite, là  
 E'4 : change de signe ...  
 E'1 : tu vois  
 E'4 : en  
 E'1 : il y a une droite, je pense... quelque chose comme ...  
 E'4 : ah ouais ... c'est une droite  
 E'1 : ça m'a l'air ... tu as comme  $y=x$ , ça  
 E'4 : (... ?) ah ouais  
 E'1 : bah oui  
 E'4 : ah c'est bon, si c'est cela ...  
 E'1 : et au-dessus... qu'est ce qu'elle a dit ? Ah ... où est ...  
 E'4 : est-ce que ... et ça s'annule ... sur ... ? ...  
 E'1 : au-dessus ... alors on va ... attend ! ...  
 E'4 : ah ouais ... il faut que ça s'annule en  $x=y$   
 E'1 : oui

L'exploration permet d'invalider la conjecture concernant l'annulation de la pente du vecteur sur la droite  $y=x$ . Dans les échanges ci-dessous, nous trouvons que cette exploration permet au binôme de reconnaître que sur cette droite, le vecteur n'est pas défini (arguments du type DISC). Les étudiants identifient aussi le signe de la dérivée par rapport à la droite  $y=x$  (arguments du type SENS-VAR) :

- E'4 : il n'a pas l'air de s'annuler ... donc on sait pas trop, ah non, c'est cela ... parce que ça tend vers l'infini ... en  $y=x$  c'est ça ?  
 E'1 : attend ... oui, je crois qu'en «  $y$  » ... pourquoi ça fait ça ? ... oui, oui ... ça, je ne comprends pas

(lignes : 184-203)

- E'1 : tu vois ... donc c'est pas défini (... ?) ...  
 E'4 : ouais, donc regarde-le ... si (... ?) en  $y=x$  et ça m'a l'air de faire ça  
 E'1 : ah (... ?) a l'air pas mal  
 E'4 : et euh ...  
 E'1 : et de plus, est-ce qu'au-dessus ...  
 E'4 : au-dessus, c'est positif

(lignes : 205-210)

- E'4 : ah ouais  
 E'1 : «  $y'$  » positif ... elle est plus grande<sup>3</sup> que «  $x$  » ? est-ce que c'est possible ?  
 E'4 : oui  
 E'1 : oh, ce n'est pas assez bien ... et en dessous ?  
 E'4 : c'est négatif ...

(lignes : 212-216)

---

<sup>3</sup> L'étudiant considère en réalité la variable  $y$  de l'expression symbolique de l'équation différentielle

E'1 : donc c'est quoi ... l'E4 ?

E'4 : hum ... (... ?)

E'1 : je (... ?) quel sens ... et la ... ..

E'4 : alors que l'E4 est juste la pente du vecteur (... ?) en « x » ... ..

(lignes : 221-224)

Finalement, les étudiants arrivent à relier les faits graphiques identifiés lors de l'exploration dynamique avec l'expression symbolique E4. Dans la figure 31 ci-dessous, un extrait des fiches de réponses justifiant l'association : Vecteur 2 - Equation différentielle E4. Nous constatons la mobilisation des arguments des types DISC et SENS-VAR :

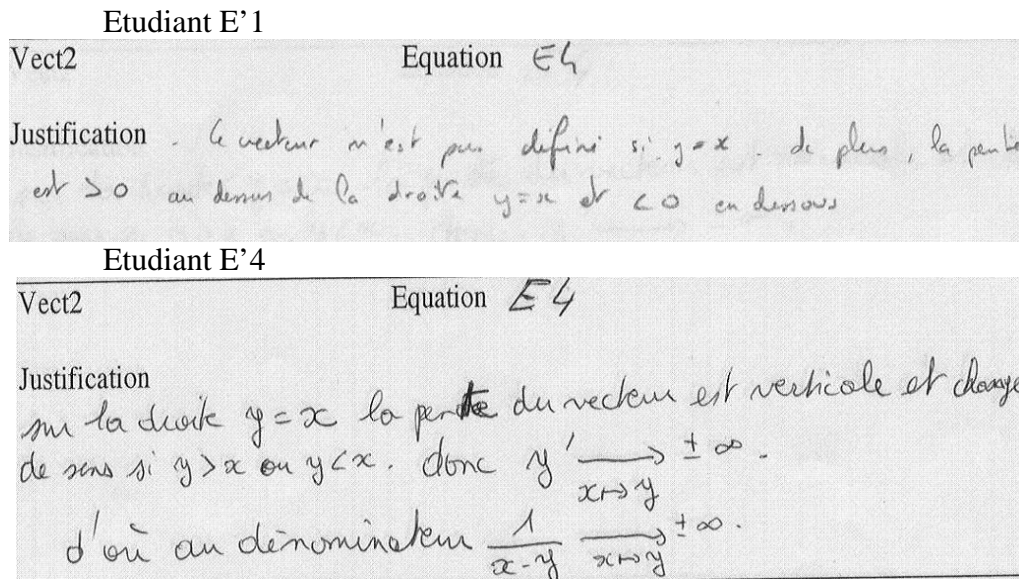


Fig. 31 : Association Vecteur 2 – Equation différentielle E4 (BiE'1/E'4)

### L'association vecteur 4 $\Leftrightarrow$ E7 $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$

Le binôme poursuit avec le vecteur 4. Lors de l'exploration des comportements graphiques du vecteur dynamique, les étudiants interprètent directement les phénomènes graphiques identifiés en termes de propriétés algébriques de l'équation différentielle associée au vecteur dynamique (cf. fig. 32 ci-après). Dans les échanges ci-dessous, nous constatons que les étudiants se rendent compte que le vecteur devient vertical sur les droites  $x=\pm 2$ , et que ceci est interprété comme la pente tendant vers plus l'infini (arguments du type DISC). Le binôme cherche l'équation qui pourrait satisfaire à ces propriétés, ce qui conduit à associer l'équation E7 au vecteur 4 :

E'4 : (... ?) et euh ... il faudrait qu'il y ait une pente, euh ... je ne sais pas... ah, en  $x=2$  et  $x=-2$  ça doit tendre vers l'infini...

(ligne : 236)

E'4 : bah ... essaie justement, en vérifiant que

E'1 : pourquoi on a déjà (... ?) on a déjà une (... ?) cela, cela ... on a déjà (... ?)

E'4 : attend, on sait pas... peut-être, peut-être il faut trouver une (... ?) de positif, comme celle-là ...

E'1 : qu'est ce que tu as dit ?

E'4 : celle-là peut-être, elle marcherait

E'1 : ah oui, oui ... (... ?)

E'4 : parce que moi, je dis que cela pourrait être celle-là... et tu vois, il faut vérifier quand même si (... ?) en 2 ... « y' » tend vers l'infini,

E'1 : ça marche comme (... ?)  
 E'4 : donc « x » plus ou moins  
 E'1 : c'est pas défini ? (... ?) ouais ... donc voilà  
 E'4 : donc en 2 et en -2 ... c'est bon... donc on met les deux arguments  
 E'1 : ouais... donc en 2 c'est E7  
 E'4 : E7 ...

(lignes : 238-250)

Dans les fiches de réponses (fig. 32 ci-dessous), nous trouvons les deux types d'arguments mobilisés pour justifier l'association du vecteur dynamique avec l'équation différentielle choisie (arguments du type ISC-0 et du type DISC) :

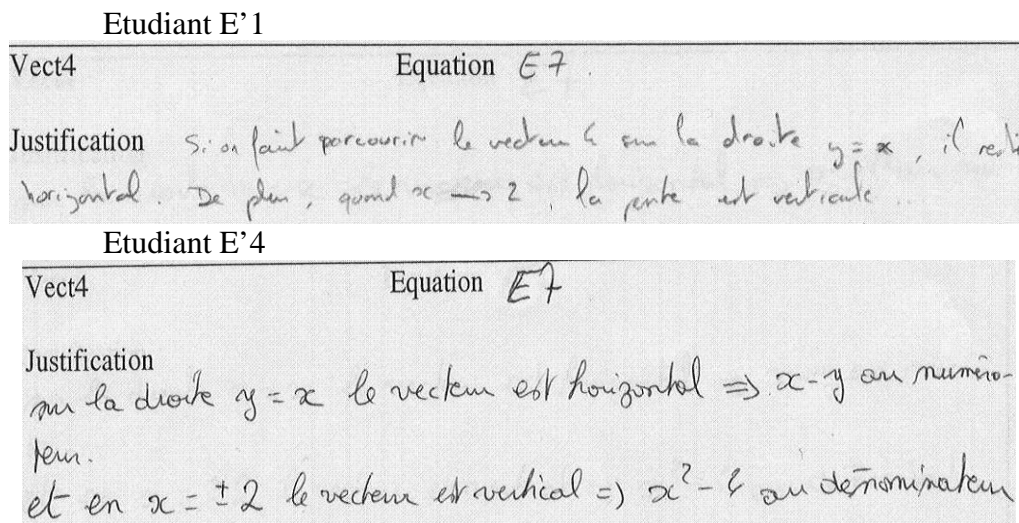


Fig. 32 : Association Vecteur 3 – Equation différentielle E4 (BiE'1/E'4)

### L'association vecteur 3 $\Leftrightarrow$ E8 $y'=n(y-x^2)(x+y)$

Le binôme explore les comportements graphiques issus du déplacement du troisième vecteur dynamique. Il cherche à les interpréter en termes de propriétés de l'expression symbolique candidate :

E'4 : regarde, ça me dit que (... ?) la valeur de « y »  
 E'1 : alors regarde ... hop là  
 E'4 : est-ce que lui, il va vers le bas ? ... ou (... ?) s'il vient ... ouais, hop ... hop  
 E'1 : (... ?) que là (... ?) ça ... ouais  
 E'4 : hum ... ça veut dire qu'il y a un dénominateur ... ah non, pas forcément...

(lignes : 258-262)

Bientôt, les étudiants identifient la droite  $y=-x$  où le vecteur devient horizontal, ce qui les amène à considérer immédiatement l'équation E8 comme celle qui pourrait être associée au Vecteur 3 (arguments du type ISC-0). Le choix de cette équation différentielle permet au binôme d'anticiper sur le fait que le vecteur dynamique devrait devenir horizontal sur la parabole d'équation  $y=x^2$ . Pour le vérifier, les étudiants tracent la parabole à l'aide du logiciel. Ils utilisent l'outil « Redéfinir un objet » pour faire déplacer le vecteur dynamique sur la courbe tracée. Ce qui permet de confirmer le fait que le vecteur reste horizontal lorsque son origine parcourt la parabole :

E'1 : sur la droite ... ah, je pourrais le voir mieux ... voilà  $y=-x$  ... (... ?) tu vois, là ...  
 E'4 : il n'y est pas

E'1 : (... ?) je vais réessayer ...

E'4 : ah si

E'1 : voilà ... redéfinir un ...

E'4 : il faudrait qu'il s'annule aussi en  $y=x^2$ ...

E'1 : redéfinir ... euh

E'4 : trace  $x^2$

(lignes : 265-272)

E'4 : non, il faudrait que ce soit aussi en  $y=x^2$  » bon, trace  $x^2$  et on va voir si ...

(ligne : 276)

E'4 : alors, maintenant tu mets le vecteur 3 là-dessus

E'1 : donc ... redéfinir un objet ... attend, je vais redéfinir

E'4 : ça marche pas, par contre...

P : point sur objet

E'1 : point sur objet... merci... ouais ... .. alors

(lignes : 278-282)

Dans les fiches de réponses (fig. 33 ci-dessous), le binôme explicite l'argument du type ISC-0 mobilisé pour justifier le choix de l'équation différentielle E8 :

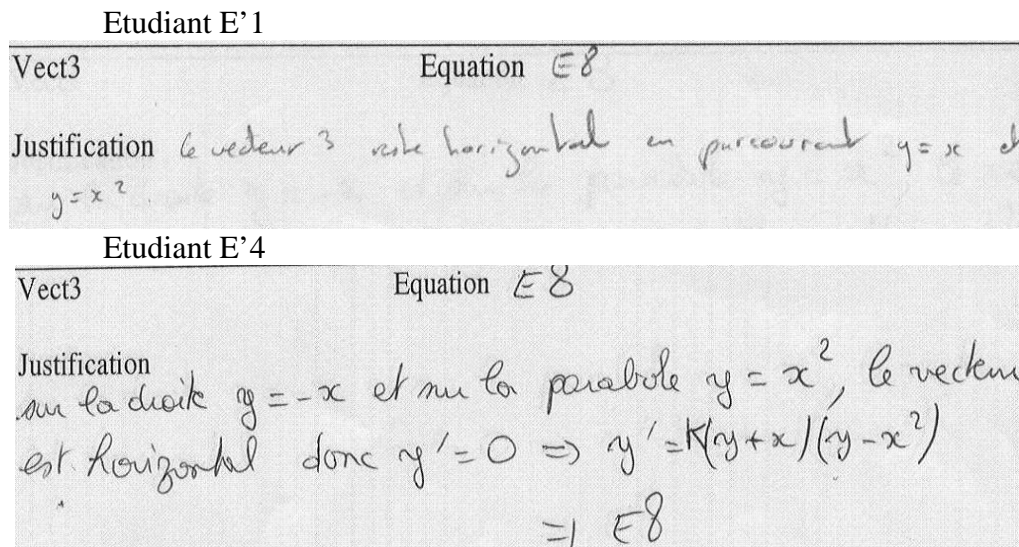


Fig. 33 : Association Vecteur 4 – Equation différentielle E4 (BiE'1/E'4)

Pour le binôme E'1/E'4, les arguments du type ISC-0 (fondés sur la mise en relation de la dérivée nulle et du vecteur horizontal) ont joué un rôle important pour faire l'association entre les vecteurs dynamiques et les équation différentielles. Nous remarquons que l'exploration dynamique a favorisé aussi la mobilisation des autres types d'arguments (DISC, SENS-VAR). Ce binôme semble aussi avoir acquis une certaine flexibilité pour articuler l'expression symbolique des équations différentielles et la pente  $y'$  du vecteur dynamique, mais pour le premier vecteur dynamique il a eu plus d'hésitations que pour les derniers.

#### 4.3.2. Le binôme E'12/E'17

Lors de l'exploration des comportements graphiques des vecteurs dynamiques, le binôme utilise les outils « Trace » et « Pente » de Cabri. Le recours à « Trace » lui permet d'avoir un aperçu de l'allure globale de la famille de courbes. Les étudiants utilisent une seule fiche de réponses.



**L'association vecteur 1  $\Leftrightarrow$  E5 ( $y' = ke^{-0.05x^2}$ )**

Dès le début de l'exploration, les informations graphiques sur le comportement des courbes solutions, issues du déplacement du Vecteur 1, sont interprétées en termes de variation de la pente. Les étudiants se rendent compte que les courbes associées au Vecteur 1 sont des courbes où les pentes des droites tangentes ont un maximum :

- E'12 : attend, parce que là, regarde, ça a l'air d'être un peu plus vertical que là  
 E'17 : ah, ouais. Ben regarde, là et là  
 E'12 : ça (...?) et après, ça rebaisse un peu  
 E'17 : donc, ben on devrait dire qu'elle va être maximum en «  $x$  »... la pente  
 E'12 : toujours positive, déjà. Toujours positive. Tu es d'accord ? Donc, toujours positive. Même si l'axe n'est pas positif...

(lignes : 13-17)

Le binôme identifie que le Vecteur 1 a une pente toujours positive. L'association de ce fait graphique avec les expressions symboliques des équations différentielles conduit à retenir E1 ( $y' = a(x^2 + 1)$ ) et E5 ( $y' = ke^{-0.05x^2}$ ), comme candidates pour être associées au vecteur dynamique. Pour choisir l'équation, les étudiants sont en désaccord, et dans les échanges suivants, nous remarquons que l'étudiant E'17 suppose qu'il faut choisir l'équation E1. Pour cet étudiant, l'équation E5 ne convient pas, car selon lui les courbes solutions associées à cette équation auraient une forme exponentielle typique. En revanche, l'étudiant E'12 suppose que la forme graphique des courbes solutions correspond plutôt aux caractéristiques de l'équation E5 :

- E'17 : la première [E1], avec un «  $a$  » positif. Ah ben oui, c'est ça. La première  
 E'12 : la première c'est toujours positif. Attend, pas forcément  
 E'17 : si, si, si. 1 c'est positif, et  $x^2 + 1$  c'est positif  
 E'12 : mais ça, c'est positif aussi [E5]  
 E'17 : ouais, mais ça n'a pas du tout cette allure, ça  
 E'12 : pourquoi ?  
 E'17 : parce que c'est des trucs comme ça [l'étudiant fait un mouvement avec les mains pour montrer la forme des courbes solutions]. C'est des... là, ça va être le contraire. Ça va être comme ça  
 E'12 : ouais, mais ça ne varie quasiment pas sur le «  $x$  ». Tu imagines...  
 E'17 : ah, mais oui, positif ! Ah, ben oui. D'accord, oui  
 E'12 : mais elle est quasiment constante [la solution]  
 E'17 : il y a les maximums. On va dire qu'elle est maximale. Elle est maximale pour  $x=0$ .  
 On dirait, non ? Toi, tu l'as dit tout à l'heure. Ah, non, peut-être...

(lignes : 18-28)

Comme nous le constaterons, les arguments qui permettent au binôme d'établir un lien entre les propriétés graphiques du vecteur dynamique et les équations différentielles, sont fondés sur la reconnaissance, à partir des informations graphiques, du fait que les pentes des tangentes aux courbes solutions possèdent un maximum. Ces arguments reposent, dans un premier temps, principalement sur les informations graphiques. La mobilisation du théorème en acte TA6 par l'étudiant E'17 l'empêche de mobiliser la dérivée seconde. Rappelons que ce théorème conduit à supposer que la dérivée première s'annule dans un point d'inflexion (image prototype du point d'inflexion associé au cubique  $y=x^3$ ). Nous trouvons les traces de ce raisonnement dans les échanges suivants :

- E'12 : bravo. C'est en un la pente maximale. Donc, c'est la dérivée seconde qui est maximale en un

E'17 : je ne veux plus entendre parler de dérivée seconde  
 E'12 : mais pourquoi ?  
 E'17 : ah, la dérivée seconde, elle est toujours égale à 0  
 E'12 : non  
 E'17 : et du coup, il y a un changement de variation  
 E'12 : oui. Ça, je suis d'accord avec toi  
 E'17 : mais, non. Parce que tu sais quoi ? La dérivée, elle est nulle en 0  
 E'12 : donc, ce n'est pas celle-là, déjà  
 E'17 : c'est pas celle-là. Parce que la dérivée est nulle en 0 [l'étudiant élimine l'équation E1]  
 E'12 : en 0 ça fait  $k$ , en 0 [l'étudiant parle de l'équation E5]  
 E'17 : mais non. Tu dérivés ça, ça fait moins...  
 E'12 : non, mais tu calcules «  $x$  », en  $x=0$   
 E'17 : ah, l'abscisse... Moi, je croyais que c'était...  
 E'12 : tu ne dérivés pas, c'est «  $y'$  » directement  
 E'17 : ah, ben justement

(lignes : 41-56)

Dans les échanges ci-dessus, nous trouvons que l'étudiant E'17 suppose qu'il faut dériver les expressions données pour connaître la valeur de la pente de la droite tangente. Il semblerait que parfois, E'17 considère les expressions symboliques comme s'il s'agissait des expressions des courbes solutions. Cette stratégie de dérivation lui a permis d'éliminer l'équation E1, mais dans ce cas l'élimination n'a pas été effectuée, à cause de la mise en œuvre des arguments concernant la dérivée seconde. Ensuite, l'étudiant E'12 centre la discussion sur l'équation E5, et pour lui cette expression semble être plus adéquate pour décrire le comportement du vecteur dynamique. Dans l'argumentation d'E'12, nous trouvons qu'il interprète, à partir de la forme de l'expression symbolique d'E5 ( $y' = ke^{-0.05x^2}$ ), que les variations de la fonction  $ke^{-0.05x^2}$  sont faibles par rapport à  $x$ . Cette affirmation d'E12 semble s'appuyer sur le fait que le coefficient de  $x^2$  dans l'exponentielle est  $-0.05$ , ce qui est interprété comme « une faible dépendance de  $x$  ». De plus, ce constat dans le registre symbolique a été lié au comportement du vecteur dynamique dans les régions du plan où ce vecteur devient presque horizontal (la pente est presque constante) :

E'12 : regarde, regarde E5, ça ne me paraît pas mal. Ça, ça dépend... Tu vois, parce que là, ça dépend effectivement de «  $x$  », mais super faiblement, quoi  
 E'17 : très petit. Ouais, d'accord  
 E'12 : tu vois ce que je veux dire ?  
 E'17 : ouais. Ouais, parce que...  
 E'12 : allez, E5, c'est bon ?  
 E'17 : ouais  
 E'12 : on dit que c'est ça, et puis on verra si on a une réponse bonne.  
 P : pour la (...?) vous avez trouvé ça ?  
 E'12 : ouais  
 P : quelle raison ?  
 E'17 : parce que  
 E'12 : elle est quasiment constante, la tangente, et elle est maximum en  $x=0$   
 P : ah, d'accord  
 E'17 : et en plus, ça (...?) parce que la dérivée seconde est nulle en  $x=0$

(lignes : 59-72)

Nous trouvons que l'étudiant E'12 justifie l'association entre le vecteur dynamique et l'équation différentielle, principalement sur l'identification dans les deux registres, graphique et symbolique, d'une seule propriété commune des représentants en jeu : « une variation presque constante ». Cette propriété a été faiblement vérifiée et l'étudiant n'a pas pris en compte d'autres propriétés comme celles relatives aux branches infinies. Le choix de l'équation E5 a été validé par le calcul de la dérivée seconde et la vérification qu'elle est nulle en  $x=0$ . Nous remarquons aussi que lors des échanges avec le professeur, l'étudiant E'17 change d'avis par rapport au théorème en acte TA6, il affirme que l'équation E5 est celle recherchée, car pour celle-ci la dérivée seconde est nulle en  $x=0$ . L'étudiant E'17 semble admettre l'existence de points d'inflexion, même si la dérivée première ne s'annule pas. Dans la phase d'identification des formes de courbes solutions, les étudiants se sont rendu compte que la dérivée première atteignait une valeur maximum en  $x=0$ , mais que le vecteur dynamique dans ce cas, n'était pas horizontal. Toutes ces rétroactions du milieu semblent déstabiliser le théorème en acte TA6 :

E'17 : ouais, c'était ça. En fait, au début je me disais... Ouais, mais en fait, non. En fait, « y' », on observe... que « y' »... est maximum pour  $x=0$ ... ça coïncide... avec l'équation car... Ah, tiens. En fait, on pourrait calculer le... [phrase inachevée]  
(ligne : 84)

Dans la figure 34 ci-dessous, un extrait de la fiche de réponses du binôme. Les arguments fournis reposent sur le lien entre le signe de la dérivée et l'expression symbolique, ainsi que sur l'étude du sens de variation de la dérivée première :

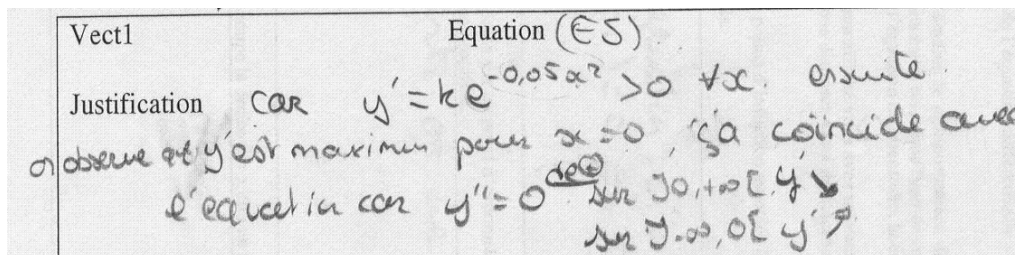


Fig. 34 : Justification association Vecteur 1 – Equation différentielle E5 (BiE'12/E'17)

### L'association vecteur 2 $\Leftrightarrow$ E4 : $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$

Lors des premières explorations du comportement du vecteur dynamique, le binôme se borne à décrire le comportement des courbes solutions en termes de sens de variation des solutions :

E'17 : ... ça c'est quoi ? Croissant, décroissant. La composée d'un truc croissant et d'un truc décroissant, ça fait quoi ?

E'12 : quoi ?

E'17 : la composée d'un truc croissant et d'un truc décroissant ?

E'12 : on n'en sait rien

E'17 : on n'en sait rien ? Exponentielle d'un truc...

E'12 : oh, oh. Qu'est-ce qui se passe ?

E'17 : mais si ça décroît. Exponentielle, il décroît. Ah ? Yvan...

E'12 : quoi

E'17 : si tu as... Regarde, ça, ça décroît sur 0, plus l'infini. Ça, ça décroît sur 0, plus l'infini

E'12 : euh

E'17 : plus ça descend, et plus l'exponentiel il est petit

E'12 : ouais, ouais, c'est décroissant

(lignes : 85-96)

Le travail exploratoire conduit le binôme à remarquer que la droite  $y=x$  régionne le plan, par rapport au signe de la dérivée. Ce constat graphique laisse les étudiants supposer que l'équation recherchée doit être telle que la dérivée s'annule sur cette droite (ISC-0). Donc ils prennent les équations E7)  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$  et E4)  $y' = d \frac{x^2+4}{y-x}$  comme candidates pour les associer au vecteur 2. Ces équations ont été choisies car elles ont le facteur  $(y-x)$  comme partie de leur expression symbolique :

E'12 : celle-là, elle s'annule sur le (... ?) dérivée en  $y=x$ . Donc, on cherche une courbe qui s'annule en  $y=x$

E'17 : là. Je l'ai. E7

E'12 : ouais, mais il y a aussi... Non, c'est E4 aussi

(lignes : 98-100)

E'12 : E7 et E4. Et a priori c'est plutôt E4

E'17 : mais non. Ça ne peut pas s'annuler, ça

E'12 : non, ça... La dérivée change de signe

E'17 : elle doit bien s'annuler, alors. Elle doit bien...

E'12 : non, parce qu'elle n'est pas définie, regarde. Il y a un point où elle n'est pas définie

E'17 : ah, donc ce n'est pas ça. Donc, ce n'est pas ça

E'12 : non, c'est la dérivée. Elle change de signe... change de signe, c'est ça que (...?) .

Elle change de signe (...?)

(lignes : 104-110)

Dans un premier temps, le binôme conjecture que l'équation cherchée doit s'annuler sur la droite, cependant l'exploration dynamique conduit les étudiants à se rendre compte que le vecteur n'est pas défini sur la droite  $y=x$  (arguments du type DISC). Les échanges entre les étudiants et la mise en relation entre les faits graphiques et les expressions symboliques des équations différentielles candidates, conduisent le binôme à choisir l'équation E4. Ils mobilisent aussi des arguments du type SENS-VAR (fondés sur le régionnement du plan selon le signe de la dérivée) :

E'12 : non, mais là, la dérivée, elle est... Mais la dérivée n'est pas définie en  $y=x$ . C'est pas continu, en tous cas, c'est sûr. (...) Ouais, c'est bon. Donc, il n'y en a qu'une qui n'est pas définie en  $y=x$

E'17 : après, qu'est-ce qu'il y a d'autre (...?) dire ça ?

E'12 : c'est tout, là, c'est bon. Je pense que ça suffit. Il n'y en a qu'une qui n'est pas définie en  $y=x$

E'17 : et elle est positive en... Et « y' » supérieur à 0... parce que « y » est supérieur à « x »

E'12 : ouais, c'est ça... « y' » négatif...

E'17 : c'est ça

E'12 : c'est ça

E'17 : ça coïncide. Parce que ça, c'est toujours positif

E'12 : ouais, c'est ça. (...)

(lignes : 112-120)

Dans la figure 35 suivante, un extrait de la fiche de réponses du binôme. Les étudiants justifient l'association en utilisant des arguments du type DISC et SENS-VAR :

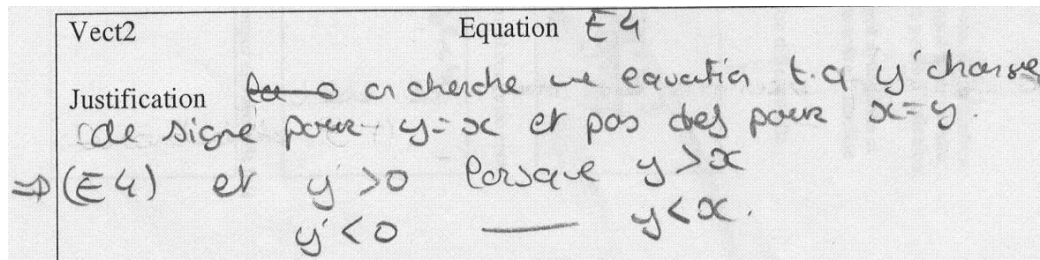


Fig. 35 : Justification association Vecteur 2 – Equation différentielle E4 (BiE'12/E'17)

**L'association vecteur 4  $\Leftrightarrow$  E7  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$**

Le binôme poursuit avec le vecteur 4. Le travail dans l'environnement informatique permet d'identifier les droites  $x = \pm 2$  comme des frontières des régions où le signe de la dérivée change. Les étudiants se rendent compte aussi que sur ces droites, le vecteur n'est pas défini. Ce dernier constat leur permet d'identifier l'équation E7 comme pouvant être associée au vecteur dynamique (arguments du type DISC) :

E'12 : ben oui, il y a un changement, ici

(ligne : 121)

E'12 : en 2 et -2

E'17 : et elle est nulle à un moment ?

E'12 : elle n'est pas définie en 2 et -2

E'17 : ben là. J'en ai une

E'12 : tu en as une qui n'est pas définie en 2 et -2 ?

E'17 : E7. Et à la fois, elle est... ah, ça change de signe...

E'12 : et, elle est égale à 0 en 0 ?

E'17 : 0, 0 ?

E'12 : ouais

(lignes : 129-137)

Les étudiants cherchent aussi, en déplaçant le vecteur dynamique, les points où la dérivée devient nulle. Nous remarquons que dans un premier temps, ils n'établissent pas de lien direct entre l'expression symbolique de l'équation différentielle candidate et l'isocline zéro. Ils s'appuient seulement sur les données graphiques tirées de l'exploration dynamique :

Y : tu peux dire (...?) tend vers 0, en 0. En  $x=0, y=0$ .

E : défini en « x » pour « x » égal (...?) et « x » égal 2. Elle vaut 0. Et à « y' »

(lignes : 139-140)

E'17 : c'est juste en 0,0 ?

E'12 : ouais, ouais

E'17 : et, qu'est-ce qu'on dit sur le signe aussi ?

E'12 : le signe... comment ça, le signe ?

E'17 : donc, là...

E'12 : là, elle est décroissante

E'17 : ...c'est positif quand c'est supérieur à quoi ?

E'12 : c'est positif quand c'est entre -2 et 2. Voilà. Là, j'ai l'impression qu'elle... C'est bizarre, ce qu'elle fait là

(lignes : 144-151)

Le travail exploratoire amène le binôme à se rendre compte que l'isocline zéro est la droite  $y=x$ . Ce constat graphique amène les étudiants à faire un lien direct entre l'expression

symbolique de l'équation différentielle E7 et le représentant graphique de l'isocline zéro (arguments du type ISC-0) :

E'17 : c'est normal, parce qu'en fait, tu sais... regarde  
 E'12 : oui  
 E'17 : tu regardes le signe, ça dépend de ça et ça, voilà  
 E'12 : ouais  
 E'17 : donc là, elle va être  
 E'12 : pas très proche de 0, en fait, pour les « x » proches de « y ». Non, mais d'ailleurs, elle est égale à 0 pour  $x=y$ , en fait. C'est pas en... Elle est égale à 0 en  $x=y$ . Différent de 2  
 E'17 : ben oui  
 E'12 : pour  $x=y$

(lignes : 152-159)

Finalement, les étudiants explicitent dans la fiche de réponses (fig. 36 ci-dessous) leurs arguments justifiant l'association du vecteur 4 avec l'équation E7. Les arguments fournis sont du type DISC (fondés sur la discontinuité de la fonction  $f$ ) et du type ISC-0 (fondés sur l'isocline zéro). Les étudiants justifient aussi l'association en s'appuyant sur la cohérence entre le signe de la dérivée et les faits graphiques (arguments du type SENS-VAR). Ils remplissent, par erreur, la case correspondant au vecteur 3, à la place de celle du vecteur 4, mais à la fin ils se rendent compte de cette erreur :

E'12 : ben, le dernier  
 E'17 : c'est le trois  
 E'12 : le trois  
 E'17 : en fait, on a inversé, le trois c'est ça

(lignes : 232-235)

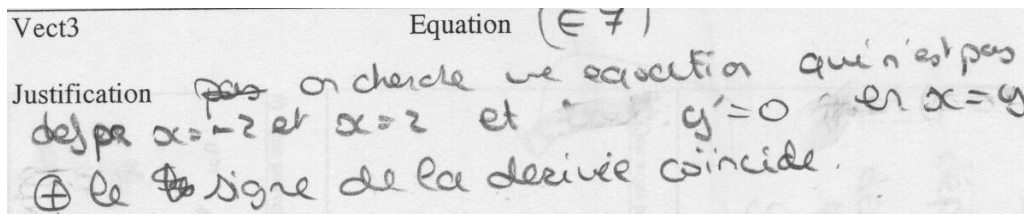


Fig. 36 : Association Vecteur 4 – Equation différentielle E7 (BiE'12/E'17)

### L'association vecteur 3 $\Leftrightarrow$ E8 $y'=n(y-x^2)(x+y)$

Le déplacement du vecteur 3 permet au binôme de se rendre compte que l'équation différentielle doit être définie sur tout le plan. L'exploration permet aussi d'identifier certains points où le vecteur devient horizontal :

E'12 : [...] celle-là, elle est définie partout, on dirait. C'est vachement plus (...?) quand c'est défini par tout (...?)  
 E'17 : donc, égal à 0 en 1 et en -1, non ?  
 E'12 : si, si. Je vais passer là, elle est égale à 0, à un moment donné, là  
 E'17 : oui. Alors, elle ne serait pas égale à...  
 E'12 : ah, regarde, regarde, juste après. Verticale, là, c'est passé, 0  
 E'17 : donc, c'est en 2. Pour  $y=2$   
 E'12 : non, ce n'est pas si simple que ça. C'est la (...?) numéro un. C'est sur une droite comme ça qu'elle va changer

(lignes : 167-173)

Les étudiants identifient une droite sur laquelle les vecteurs deviennent horizontaux, mais ils ne l'associent pas à une expression symbolique. Dans les échanges ci-dessous, nous trouvons que le binôme cherche à identifier si l'équation différentielle associée au vecteur tangent dynamique contient les variables «  $x$  » ou «  $y$  » (arguments du type VAR-ED). Ce qui témoigne de la disponibilité des connaissances C17 mettant en relation les variations du vecteur dynamique, selon l'expression soit de la forme  $y'=f(x)$ ,  $y'=f(y)$ , soit de  $y'=f(x,y)$ . Les étudiants concluent que l'expression symbolique associée au vecteur 3 contient les variables  $x$  et  $y$  :

- E'17 : alors, maintenant, descend pour voir si elle dépend de «  $x$  »  
 E'12 : 0 ici aussi  
 E'17 : alors, regarde si elle dépend de «  $x$  » ou de «  $y$  »  
 E'12 : non, justement, ça dépend des deux, en fait. C'est ça le problème  
 E'17 : ouais. Et il y a des points où ça dépend de «  $y$  » et d'autres points où ça dépend de «  $x$  », à mon avis

(lignes : 181-185)

Comme le binôme a identifié que le vecteur dynamique devient horizontal à l'origine des coordonnées, un critère mis en œuvre consiste alors à éliminer les expressions symboliques qui ne satisfont pas à la valeur nulle de la dérivée à l'origine des coordonnées. Ce qui conduit les étudiants à garder les équations E2)  $y'=b(y^2-1)(x^2+y^2)$  et E8)  $y'=n(y-x^2)(x+y)$  :

- E'17 : regarde en (0,0) ça permet d'éliminer les courbes  
 E'12 : (0,0), là

(lignes : 191-192)

- E'17 : donc, déjà, elle est nulle  
 E'12 : nulle en (0,0)  
 E'17 : déjà, tu peux prendre celle-là. Celle-là est éliminée. Celle-là, l'autre là, en (0,0).  
 O.k. En (0,0), celle-ci ne va pas. Ça ne va pas. Déjà, il ne nous en reste que deux [E2 et E8]. Alors est-ce que ce ne serait pas sur une...

(lignes : 197-199)

Pour choisir entre E2 et E8, le binôme explore pour voir si le vecteur reste horizontal sur les droites  $y=\pm 1$ . Ce qui permet d'éliminer l'équation E2 :

- E'17 : tu veux pas regarder si en 1 et en -1 ça vaut 0 pour «  $y$  », indépendamment de «  $x$  »  
 E'12 : en 1, je peux te dire que ça n'a pas changé  
 E'17 : non, mais en «  $y$  », pas pour «  $x$  »  
 E'12 : je varie en 1. Je varie comme ça  
 E'17 : voilà

(lignes : 203-207)

- E'17 : d'accord, donc ce n'est pas celle-là, c'est celle-là. C'est celle-là, parce que regarde, ça peut être égal à 0, tu vois la parabole  $y=x^2$ . Tu peux tracer la parabole

(ligne : 209)

Une fois que les étudiants ont éliminé l'équation E2, ils essaient de vérifier à l'aide du logiciel si l'isocline zéro obtenue à partir de l'expression symbolique E8 correspond bien au lieu où le vecteur devient horizontal. Ils tentent de tracer la parabole  $y=x^2$ , l'objectif étant de vérifier si le vecteur dynamique reste horizontal, lorsque son origine la parcourt. Pourtant ils n'y parviennent pas en temps voulu, l'activité étant terminée :

- E'12 : on vérifie juste pour savoir si la tangente horizontale sera parabole...

P : ah, ouais. D'accord, c'est bien ça

(lignes : 228-229)

E'12 : c'est un peu compliqué de tracer une parabole.

(ligne : 244)

Dans la fiche de réponses (fig. 37 ci-dessous), le binôme explicite les arguments qui justifient le choix de l'équation différentielle E8. Ces arguments sont de deux types : le premier, fondé sur l'identification de la dérivée nulle pour l'origine des coordonnées ; et le deuxième type s'appuyant sur l'élimination de l'équation E2, car le vecteur 3 ne s'annule pas sur la droite  $y=1$  (une branche de l'isocline associée à l'équation E2). Nous remarquons que même si les étudiants ont identifié la parabole  $y=x^2$  comme le lieu où le vecteur 3 devient horizontal, ils n'explicitent pas ce type d'arguments (arguments du type ISC-0) pour justifier l'association vecteur dynamique – équation différentielle :

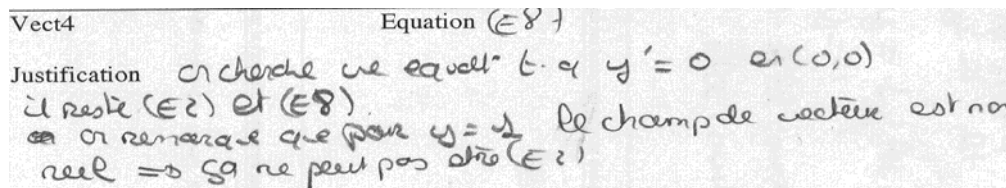


Fig. 37 : Association Vecteur 3 – Equation différentielle E8 (BiE'12/E'17)

#### 4.3.3. Le binôme E'14/E'15

De la même manière que les binômes précédents, ce binôme explore les comportements graphiques des vecteurs dynamiques, à l'aide du déplacement et de l'outil « Trace » de Cabri.

#### L'association vecteur 1 $\Leftrightarrow$ E5 : $y' = ke^{-0.05x^2}$

Le déplacement du vecteur dynamique permet aux étudiants d'identifier immédiatement que les courbes solutions semblent admettre des tangentes horizontales, lorsque  $x$  tend vers plus ou moins l'infini. Ils interprètent erronément ce fait graphique, en supposant que dans ce cas particulier la dérivée seconde doit s'annuler. Cependant, le binôme ne calcule pas cette dérivée :

E'15 : et ça a l'air d'une constante, ça veut dire qu'«  $y'$  » est égale à une constante nulle

E'14 : donc «  $y''$  » ...

E'15 : mais égale à 0, donc

E'14 : en «  $y''$  » ça vaut 0

(lignes : 8-11)

Ensuite, le binôme cherche à décrire le comportement graphique du vecteur dynamique. Ce qui conduit à interpréter les variations du vecteur dynamique en termes de dérivée tendant vers zéro, lorsque  $x$  tend vers plus l'infini :

E'14 : après je vais aller où ... mais je voulais aller au fond en fait, je ne sais pas comment il fait à la fin

E'15 : ah ouais tu (... ?) il y a un truc (... ?) ... monte jusqu'en- haut ... voilà et normalement il descend comme ça ... tu vois, il fait un truc (... ?)

E'14 : ouais c'est vrai ...

(lignes : 43-45)

E'14 : en fait, ce qu'il nous dit c'est que «  $y'$  » est nulle en plus l'infini ...

E'15 : pourquoi «  $y'$  » est nulle ? ...

E'14 : on a au loin «  $y'$  » il a un (... ?) est bien nulle ... on dirait ça

E'15 : peut être, c'est pas sûr ...



E'14 : ben, au bout d'un moment il n'est pas comme ça, le vecteur ... il a l'air de faire comme ça

(lignes : 51-55)

E'14 : donc il veut dire que ... quand « x » tend vers plus l'infini « y' » est nulle ...

(ligne : 61)

La mise en relation entre l'inclinaison du vecteur dynamique et la valeur de la dérivée en plus l'infini, amène le binôme à chercher une expression symbolique qui satisfait à cette condition.

Le binôme conclut alors que l'équation  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$  (E7) doit être celle qui est associée au vecteur 1, l'argument étant que  $y'$  tend vers zéro, lorsque  $x$  tend vers plus l'infini et qu'une fonction positive décroissante a pour limite 0 lorsque  $x$  tend vers plus l'infini :

E'14 : ah ouais, c'est celui là, ouais

E'15 : donc c'est celui-là, non ?

(lignes : 65-66)

E'14 : oui, je vois que (... ?) bien ouais ...

E'15 : donc l'équation  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$  ... .. donc ... puisque c'est vu ... c'est vu sur le ...

on met (... ?) parce que (... ?) comme «  $y'=0$  » vu sur le dessin ?

E'14 : ouais, j'ai mis (... ?) sur Cabri, on remarque ...

(lignes : 69-71)

Cependant, plus tard, lorsque les étudiants cherchent l'équation différentielle associée au vecteur 4, ils se rendent compte que l'association Vecteur 1 – Equation E7 est erronée, car les variations du vecteur 4 étaient plus conformes à l'expression E7, en particulier dans les discontinuités (arguments du type DISC). Donc, le binôme reprend à nouveau, en ce moment, la recherche de l'équation associée au Vecteur 1. Il anticipe que si E7 est l'équation associée au vecteur 1, alors le vecteur ne devrait pas être défini dans les droites  $x=\pm 2$  :

E'14 : attend y on a pris (... ?) pour le vecteur 1 si c'était défini en 2 et en -2 ... Pour être sûres

(ligne : 155)

E'14 : parce qu'en fait il faut que surtout en  $x=2$  et  $-2$

E'15 : alors  $x=2$  et  $-2$  ?

E'14 : non regarde ... non c'est pas ça ... C'est parce qu'il est là, et donc en fait ...

E'15 : et pourquoi on l'avait choisi, celui-là... parce sa tangente elle est égale à 0 ?

E'14 : ouais ...

(lignes : 159-163)

E'14 : mais non parce que en  $-2$  et  $2$  il est défini ...

E'15 : et il n'était pas comme ça ?

E'14 : non, mais il est défini ... quelquefois

E'15 : ah ouais ...

E'14 : on a déjà que c'est pas une fraction

(lignes : 165-169)

Le binôme conclut, finalement, grâce à la vérification par le déplacement du vecteur dynamique, que l'équation E7 ne peut pas être associée au vecteur 1, parce qu'il est défini sur les droites  $x=\pm 2$ . Les étudiants savent que le type d'expression symbolique associée au vecteur 1 n'est pas du type d'une fraction rationnelle. Donc, ils cherchent encore à identifier laquelle des équations disponibles rend compte des variations de la pente du vecteur dynamique :

E'15 : donc tu as l'E2 qui est éliminé ...  
 E'14 : quand « x » tend vers l'infini... alors ça peut être celle-là, ça peut être E2...  
 E'15 : pourquoi ... C'est quand « x » tend vers plus l'infini ?  
 E'14 : ouais  
 E'15 : ouais, mais en plus l'infini  
 E'14 : ça tend vers 0 [il parle probablement de l'équation E5]  
 E'15 : le problème c'est que ça aussi [l'équation E7]... Ah et ça, parce que ça tend vers plus l'infini, ça [l'équation E2], ça fait  $-\infty$  [l'équation E8]... ça fait 0 [probablement l'équation E5]  
 E'14 : ouais

(lignes : 184-191)

Après avoir analysé les expressions symboliques probables de la liste, le binôme arrive à lier le vecteur dynamique avec l'équation E5. L'argument qui a permis d'établir ce lien repose sur la mise en relation entre la pente du vecteur et l'expression symbolique en plus l'infini. Les étudiants font le lien aussi entre la forme de l'expression symbolique  $y'=f(x)$  et la pente des droites tangentes (arguments du type VAR-ED) :

E'15 : c'est ça (... ?) quand (... ?) tend vers plus l'infini ça va être des exponentielles, en fait et (... ?) avoir l'E5 et après en « y » ... en « x » au-dessous ... tu n'as que E7 [l'étudiant semble explorer aussi avec le vecteur 4]  
 E'14 : hum ... ouais  
 E'15 : donc ça t'oblige ... c'est E5 en fait ... voilà

(lignes : 192-194)

E'14 : maintenant il faut dire qu'à « x » donnée, en fait, « y' » est toujours constante aussi, c'est ça qu'on a vu

(ligne : 199)

Dans les fiches de réponses (fig. 38) les étudiants expriment leurs arguments qui justifient l'association Vecteur 1 – Equation différentielle E5. Ces arguments reposent sur la cohérence graphique et symbolique de la dérivée en plus l'infini, ainsi que sur la valeur constante de la dérivée pour une  $x$  fixe (arguments du type VAR-ED) :

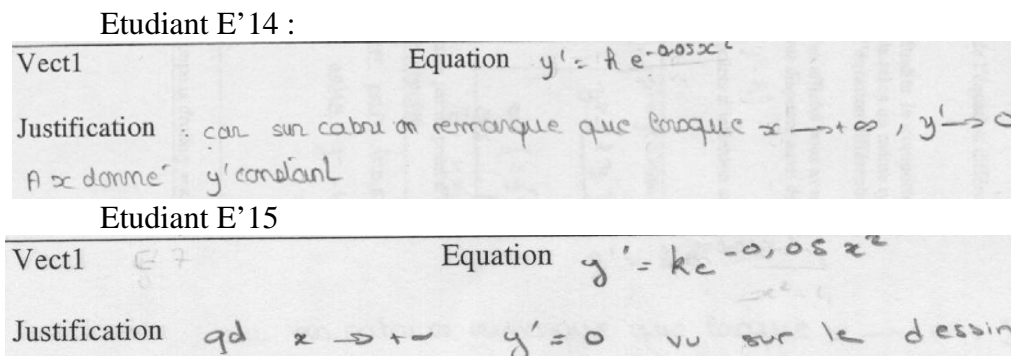


Fig. 38 : Association Vecteur 1 – Equation différentielle E5 (BiE'14/E'15)

**L'association vecteur 2  $\Leftrightarrow$  E4 :  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$**

Le travail exploratoire à l'aide du déplacement du vecteur dynamique et de l'outil Trace de Cabri, permet au binôme de reconnaître que le vecteur n'est pas défini, sur la droite  $y=x$  (arguments du type DISC). Ce qui favorise la mise en relation immédiate du Vecteur 2 avec l'expression symbolique E4 :

E'15 : alors, attend, attend ... tu as vu des points qui peuvent être (... ?) pris là  
 E'14 : ah ouais ... (... ?) c'est normal ... ça veut dire qu'il n'est pas défini en «  $y=x$  » ...  
 E'15 : ah ... c'est vrai (... ?) je ne sais pas si (... ?) ... attend, ça veut pas dire qu'à chaque fois  
 E'14 : mais tout à l'heure on a trouvé (... ?)  
 E'15 : attend, je vais le faire ... [elle trace un morceau du champ de vecteurs à l'aide de l'outil Trace]... ouais... ouais, c'est «  $y=x$  » cela ... alors attend, je vais vérifier quand même parce que (... ?) ... ouais, c'est cela ... alors «  $d(x^2+4)/(y-x)$  »... tu mets qu'«  $y'$  » n'est pas définie  
 E'14 : ouais ...  
 E'15 : voilà ... (... ?) c'est fait

(lignes : 85-91)

Le binôme explicite dans les fiches de réponses (fig. 39 ci-dessous), le seul argument du type DISC (arguments fondés sur la mise en relation graphique et symbolique des discontinuités de la fonction  $f$ ) trouvé pour justifier l'association : Vecteur 2 – équation différentielle :

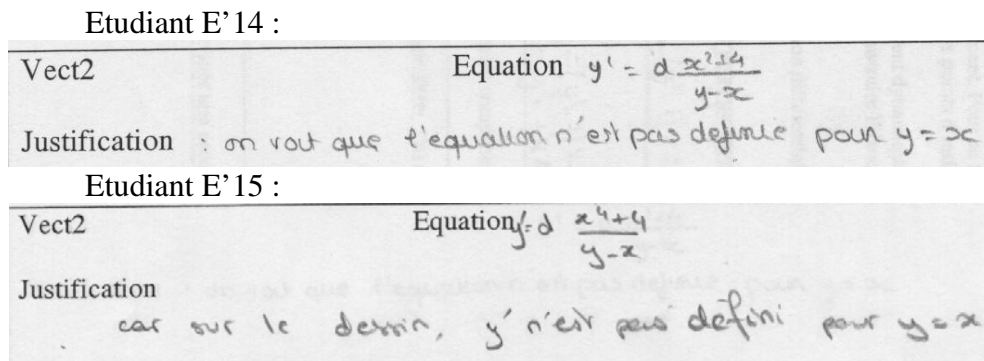


Fig. 39 : Association Vecteur 2 – Equation différentielle E7 (BiE'14/E'15)

### L'association vecteur 3 $\Leftrightarrow$ E8 $y'=n(y-x^2)(x+y)$

Le binôme identifie que le vecteur 3 devient horizontal à l'origine des coordonnées. Comme nous le constaterons par la suite, ce constat graphique, ainsi que la reconnaissance que l'expression symbolique de l'équation différentielle cherchée doit contenir la variable  $x$ , amène le binôme à éliminer les équations E1, E3, E5 et E6 (à ce moment, les étudiants avaient associé le vecteur 1 à l'équation E7 et le vecteur 2 à l'équation E4). Donc, les étudiants retiennent l'équation E2)  $y'=b(y^2-1)(x^2+y^2)$  et l'équation E8)  $y'=n(y-x^2)(x+y)$ . D'abord, ils identifient la valeur zéro de la dérivée à l'origine et ils éliminent quelques-unes des équations :

E'14 : là, de toutes façons il y a «  $y'$  » qui vaut 0 en (0,0)... donc  
 E'15 : «  $y'$  » il vaut 0 en (0,0)...  
 E'14 : je vois qu'en  $x=0$  ... «  $y'$  » est 0 ...  
 E'15 : donc ça, c'est pas possible quand ça vaut 0 ici  
 E'14 : (... ?)  $y'$  a (... ?) celui-là  
 E'15 : attend, déjà on va barrer... non ?  
 E'14 : ouais ... allez-y  
 E'15 : hop, hop, ce n'est pas possible que ce soit celle-là ... Euh, alors c'est pas possible qu'elle soit ici, celle-là... en plus elle n'a pas de «  $x$  » ... [le binôme écarte des expressions symboliques qui ne contiennent pas la variable  $x$ ]  
 E'14 : il n'y a pas de «  $x$  »

(lignes : 98-106)

Les étudiants traitent l'expression symbolique de l'équation E2 pour obtenir l'isocline zéro (arguments du type ISC-0), et ils arrivent à l'expression  $y = \pm 1$ , cependant ils ont des difficultés à interpréter correctement cette expression. Nous voyons dans les échanges ci-dessous, que  $y = \pm 1$  semble s'interpréter plutôt comme les ordonnées de certains points, et non comme représentants symboliques de fonctions :

E'15 : et celui-là ...

E'14 : ah si ... ça va être possible ... (... ?) zéro, là

E'15 : donc  $y = \pm 1$  ...

E'14 : non, ici (... ?) ça fait  $x=0$  ... oui, et il va être tangente aussi en ... en  $y = \pm 1$

E'15 : de quoi il est tangente, quoi ?

E'14 : en  $y = \pm 1$  la tangente elle va être comme ça ... ouais, regarde, en  $y = \pm 1$

E'15 : pourquoi ?

E'14 : parce que ... regarde, tu vois c'est (... ?) essaie de 0 ... ça c'est  $y^2 - 1$

(lignes : 109-116)

E'15 : ouais... mais bon, c'est le seul point qui voudrait dire que c'est ça ... oui, oui, il te dit pas les coordonnées, il te dit que «  $y$  » est égal à qui ... il te dit que  $y = \pm 1$  mais il te dit pas quelle valeur ça fait

E'14 : ouais, mais regarde... c'est celui-là qui marche... Ah oui, c'est un point et tu vois

(... ?) un divisé ... ouais, c'est un de deux ... [E2 ou E8]

(lignes : 119-120)

Le binôme n'arrive pas à interpréter correctement le lien qu'il existerait entre  $y = \pm 1$  et le vecteur dynamique, si le vecteur 3 était associé à l'équation E8. Donc, il abandonne cette équation et continue l'exploration des comportements graphiques du vecteur dynamique. Nous remarquons que les difficultés concernant la reconnaissance de  $y = \pm 1$  comme le représentant symbolique de fonctions constantes, n'ont pas été surmontées.

Dans les échanges ci-dessous, nous trouvons que cette exploration conduit le binôme à identifier dans le registre graphique la parabole  $y = x^2$ , et la droite  $y = -x$  comme étant les régions où le vecteur 3 devient horizontal. Ces constats graphiques amènent à prendre l'équation E8 :

E'14 : et c'est où ?

E'15 : c'est sûr, je pense, parce qu'en  $y = x^2$

E'14 : ah ouais

E'15 : non ?

E'14 : ben, non

E'15 : et nous on se fait pour un «  $y = x$  » là, qu'est-ce que tu penses ? ... on voudrait les coordonnées de ce point-là ... ce point

(lignes : 122-127)

E'14 : on voit  $y = -x$  ... non, mais c'est ça

E'15 : oui, puisque le (... ?) c'est ça,  $y = -x$

E'14 : ouais

(lignes : 140-142)

E'15 : en fait, dire que  $y = -x$  donc c'est tout cela, en fait

E'14 : ouais ...  $y = x^2$  ici

(lignes : 145-146)

Finalement, dans les fiches de réponses (fig. 40, page suivante), le binôme exprime les arguments (arguments du type ISC-0) pour justifier l'association du vecteur 3 avec l'équation

E8. Nous remarquons que les étudiants font le passage du registre graphique vers le registre symbolique :

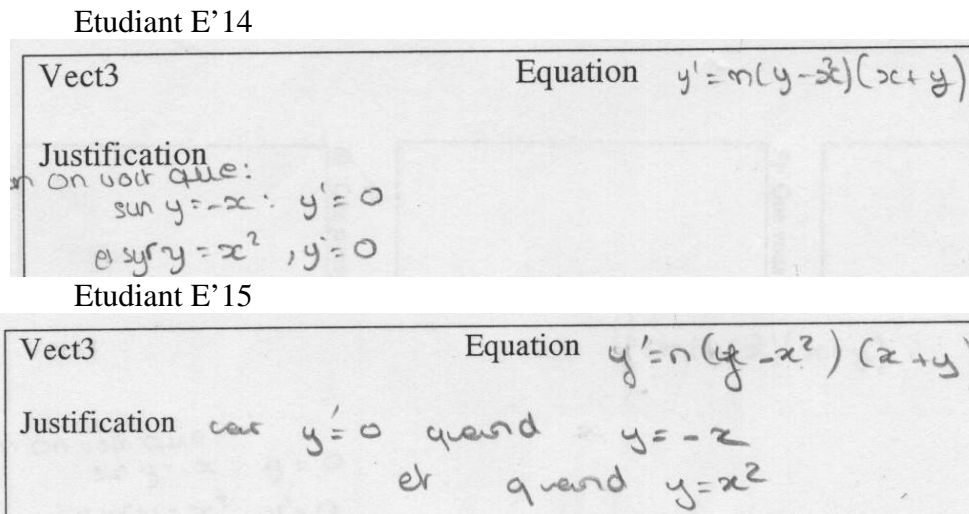


Fig. 40 : Association Vecteur 3 – Equation différentielle E8 (BiE'14/E'15)

**L'association Vecteur 4  $\Leftrightarrow$  E7  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$**

Comme nous l'avons déjà signalé lors de l'association du premier couple : Vecteur – Equation différentielle  $y' = ke^{-0.05x^2}$ , le binôme E'14/E'15 identifie les discontinuités du vecteur 4 et les met en relation directe avec l'expression symbolique E7 (arguments du type DISC). Les derniers échanges des étudiants dans cette partie n'ont pas été enregistrés, mais dans les fiches de réponses (fig. 41 ci-dessous), ils explicitent les arguments qui justifient l'association : Vecteur 4 – Equation différentielle E7

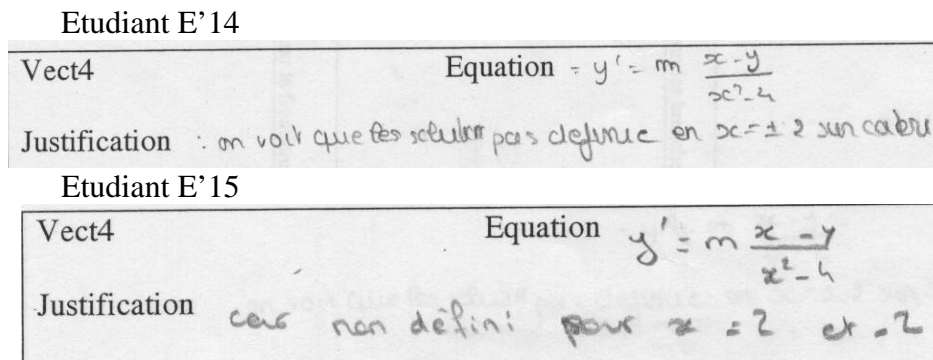


Fig. 41 : Association Vecteur 4 – Equation différentielle E4 (BiE'14/E'15)

**Conclusion**

Les trois binômes sont parvenus à faire l'association entre les vecteurs dynamiques et les expressions symboliques des équations différentielles. De façon générale, nous pouvons conclure que le travail exploratoire suscité par la situation proposée a contribué à mettre en relation les faits graphiques identifiés à l'aide du déplacement du vecteur dynamique, avec les expressions symboliques des équations différentielles. Les étudiants sont arrivés à relier les variations de la pente  $y'$  du vecteur dynamique avec l'expression symbolique de l'équation différentielle.

Le binôme E'1/E'4 semble avoir acquis une certaine flexibilité pour articuler le registre graphique et le registre symbolique. Nous avons identifié que ce binôme était arrivé à faire des anticipations à partir de l'expression symbolique de l'équation différentielle sur l'isocline zéro (exemple : Vecteur 3 – ED). Ces étudiants ont aussi interprété les propriétés graphiques du vecteur dynamique en termes de propriétés algébriques de l'équation différentielle (cf. par exemple, fig. 32).

Concernant le binôme E'12/E'17, il semblerait que le théorème en acte TA6 (qui laisse supposer que les points d'inflexion sont toujours comme celui de la cubique prototypique) ait été déstabilisé. Le binôme paraît admettre qu'il y a des points d'inflexion, là où la dérivée première n'est pas forcément nulle.

Nous avons repéré dans la première situation (association explicitée de vecteurs dynamiques et d'équations différentielles) que le binôme E'14/E'15 avait des difficultés pour articuler la pente du vecteur dynamique et l'expression symbolique de l'équation différentielle. Ces difficultés sont apparues dans la deuxième situation. Lors de l'association du Vecteur 1 avec l'équation E5 :  $y' = ke^{-0.05x^2}$ , dans un premier temps le binôme conclut que l'équation qui correspond au vecteur est  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$ . Cependant, les rétroactions du logiciel, principalement celles associées aux discontinuités des expressions symboliques des équations différentielles associées aux vecteurs dynamiques 4 et 2, ainsi que celles sur les isoclines zéro, ont contribué pour ce binôme à fortifier le lien entre la pente  $y'$  du vecteur dynamique et l'expression symbolique de l'équation différentielle. A la fin, les étudiants ont réussi à faire les associations correctes entre les quatre couples Vecteur dynamique – Equation différentielle.

Comme nous l'avions prévu, le travail des étudiants confirme, conformément à nos hypothèses, que les situations conçues dans l'environnement de géométrie dynamique permettent de développer une certaine flexibilité pour articuler les registres graphique et symbolique des équations différentielles. Bien évidemment, les liens établis par les étudiants sont encore faibles, mais les conditions de l'expérimentation ne permettaient pas de les approfondir. Rappelons que l'un de nos choix a été de laisser travailler les étudiants quasi-isolés par rapport aux interventions de l'enseignant.

Dans le prochain chapitre, nous procéderons à un bilan des deux expérimentations que nous avons réalisées (années 2003 et 2004).



# **PARTIE C**

**CHAPITRE 5 : LE BILAN DES EXPERIMENTATIONS**

**CONCLUSION**

**Références bibliographiques**





## CHAPITRE 5

### LE BILAN DES EXPERIMENTATIONS

INTRODUCTION.....	282
5.1. LES ETUDIANTS N'ARTICULENT PAS SPONTANEMENT DES REGISTRES DIFFERENTS DE REPRESENTATION.....	283
5.2. DES DIFFICULTES CONCERNANT LE TRAITEMENT GRAPHIQUE DES DONNEES GRAPHIQUES.....	284
5.2.1. Des difficultés pour traiter des données graphiques en papier/crayon.....	284
5.2.2. Des apports du logiciel pour le traitement des données graphiques.....	285
5.3. DES DIFFICULTES CONCERNANT L'INTERPRETATION MATHEMATIQUE DES DONNEES GRAPHIQUES.....	286
5.3.1. Des difficultés concernant le lien : équation de la droite tangente – équation différentielle .....	286
5.3.2. Des difficultés concernant le lien : équation différentielle – famille de solutions .....	288
5.3.3. Des difficultés concernant le passage : propriété numérique de la famille de courbes – équation différentielle .....	288
5.4. DES INDICES DU DEVELOPPEMENT D'UNE FLEXIBILITE POUR ARTICULER LES REGISTRES GRAPHIQUE ET SYMBOLIQUE.....	289
5.4.1. Des traces du développement d'une flexibilité pour articuler les registres graphique et symbolique, lors de la première expérimentation .....	289
5.4.2. Des traces du développement d'une flexibilité pour articuler les registres graphique et symbolique, lors de la deuxième expérimentation .....	290
5.5. LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL.....	294

## Introduction

Au chapitre 1, nous avons signalé que l'enseignement traditionnel des équations différentielles mettait l'accent sur un lien indirect entre le registre symbolique et le registre graphique. En effet, le passage entre ces deux registres a lieu normalement dans un seul sens : de l'expression symbolique de l'équation différentielle vers les courbes solutions. De plus, il passe par la résolution algébrique de l'équation différentielle. Le schéma de la fig. 1 ci-dessous montre ce type de lien :

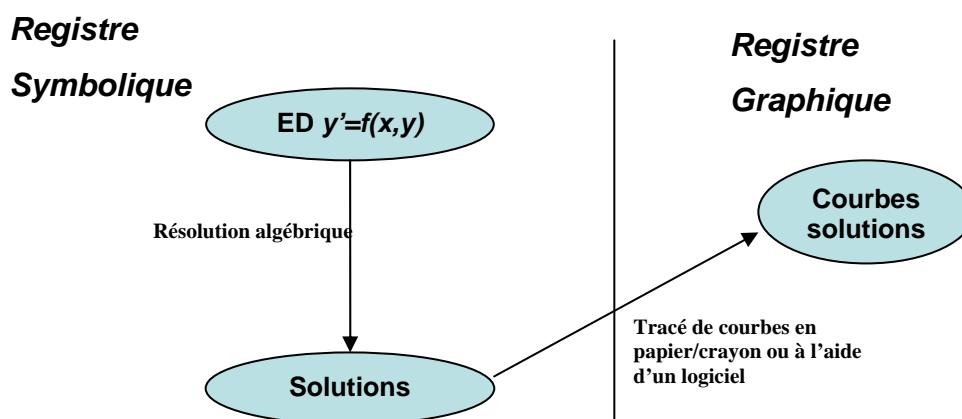


Fig. 1 : Lien indirect entre équation différentielle et courbes solutions

Le passage des solutions vers les courbes solutions n'a pas de lien direct avec l'équation différentielle ; il s'agit seulement de tracer des courbes représentatives de fonctions dont on connaît explicitement les expressions symboliques. Dans ce cas, le registre graphique est utilisé seulement dans un mode idéogrammatique. En revanche, comme nous l'avons signalé aussi au chapitre 1, l'étude qualitative des équations différentielles met en jeu de façon importante l'articulation des registres graphique et symbolique, ce qui requiert la mise en fonctionnement de connaissances de divers cadres (fonctions, analyse, géométrie analytique, équations différentielles, etc.). Ces connaissances permettant soit d'interpréter mathématiquement des faits graphiques associés aux courbes solutions, soit d'interpréter graphiquement des propriétés mathématiques de l'expression symbolique de l'équation différentielle. Très souvent, le lien entre ces registres repose sur des connaissances élémentaires concernant les cadres en jeu.

Dans notre recherche, nous avons étudié notamment les possibilités des étudiants de CAPES d'articuler le registre graphique et le registre symbolique des équations différentielles, dans des conditions où ils ne disposaient que d'un rappel très bref des connaissances mathématiques relatives aux équations différentielles. L'objectif était d'étudier les difficultés de ces étudiants, leurs évolutions possibles et le rôle de la géométrie dynamique dans l'établissement de liens entre les registres graphique et symbolique des équations différentielles.

Nous avons donc conçu deux expérimentations, en 2003 et 2004. La première a eu principalement une visée diagnostique, tandis que dans la deuxième nous avons tenté de susciter des évolutions pour articuler les registres de représentation en jeu. Les situations qui composent les dispositifs expérimentaux ne mettent pas en jeu des connaissances nouvelles pour les étudiants de CAPES, mais ces situations ont été porteuses de problématiques nouvelles pour les étudiants : passages du registre graphique vers le registre symbolique, interprétation mathématique de phénomènes graphiques issus de l'exploration en géométrie dynamique, etc.

Les tâches que nous avons proposées problématisent de différentes manières la mise en relation entre représentants symboliques et graphiques des équations différentielles. Elles demandent soit la mise en relation de vecteurs tangents dynamiques et des équations différentielles (situations d'association de représentants), soit la mise en équation différentielle d'une famille de courbes (situations de construction d'un représentant symbolique). Ce qui nous a permis d'identifier chez des étudiants de CAPES différents types de difficultés pour établir ces liens, certaines de ces difficultés n'étant pas prévisibles. Les légères évolutions que nous avons observées chez ces étudiants, pour articuler des représentants d'objets du champ des équations différentielles, semblent avoir été favorisées par le type de tâches proposées ainsi que par les rétroactions de l'environnement de géométrie dynamique. En effet, le dispositif expérimental cherchait à perturber la mise en œuvre d'un mode de pensée associatif.

### **5.1. LES ETUDIANTS N'ARTICULENT PAS SPONTANEMENT DES REGISTRES DIFFERENTS DE REPRESENTATION**

Le questionnaire initial proposé tout au début de la première séance, lors de l'expérimentation de l'année 2003, montre que les étudiants de CAPES ont des connaissances générales sur les équations différentielles (définition d'une équation différentielle, définition des solutions, des différentes applications possibles des équations différentielles) (cf. Chap. 3, paragraphe 3.1.1). En revanche, la plupart des étudiants ne parviennent pas à mettre en œuvre des connaissances pour établir spontanément des liens entre représentants d'objets mathématiques du champ des équations différentielles.

L'analyse nous a révélé que la presque totalité des étudiants n'était pas capable d'établir un lien du registre graphique vers le registre symbolique, même dans un cas simple comme par exemple l'association d'une équation différentielle à un champ de vecteurs parallèles. Cela atteste que des connaissances comme celles permettant d'interpréter la pente des vecteurs en termes de dérivée, ne sont pas disponibles chez ces étudiants (cf. Chap. 3, paragraphe 3.1.2).

Nous avons constaté que les étudiants n'arrivaient pas à déduire la valeur numérique de  $y'$  à partir de  $y' = f(x,y)$  lorsqu'une valeur numérique de  $f(x,y)$  est donnée (sans que l'expression symbolique  $f(x,y)$  soit donnée) pour tracer un dessin local d'une courbe solution (cf. Chap. 3, paragraphe 3.1.3). Des connaissances sur le sens de variation d'une fonction à partir du signe de la dérivée ne sont pas disponibles chez ces étudiants.

Nous avons observé aussi que la plupart des étudiants étaient incapables de décrire localement, à partir de l'expression explicite d'une équation différentielle, le comportement d'une courbe solution en un point de coordonnées données et d'approcher l'ordonnée d'un

point de cette courbe. Ils n'arrivent même pas à évaluer, en ce point donné, l'expression symbolique de l'équation différentielle (cf. Chap. 3, paragraphe 3.1.4).

Les résultats obtenus montrent que les difficultés rencontrées par la presque totalité des étudiants de CAPES, ont des liens avec les caractéristiques épistémologiques des équations différentielles de la forme  $y'=f(x,y)$ . En effet, les étudiants n'arrivent pas à interpréter spontanément  $y'$  comme la dérivée de la fonction inconnue dans l'équation différentielle, ni à reconnaître qu'elle dépend de deux variables réelles. Ces constats témoignent que des connaissances acquises au lycée, sur des notions telles que la dérivée, ne sont pas transférées, notamment lorsqu'il s'agit de les faire fonctionner dans des tâches inhabituelles qui mettent en jeu un changement de registre de représentation. Ces résultats montrent aussi des conséquences d'un enseignement des équations différentielles centré sur l'approche algébrique : les étudiants de CAPES ayant suivi un tel enseignement, sont incapables de résoudre des tâches où est requise la mise en relation des registres graphique, numérique et symbolique des équations différentielles.

### **5.2. DES DIFFICULTES CONCERNANT LE TRAITEMENT GRAPHIQUE DES DONNEES GRAPHIQUES**

Nous avons observé que le traitement graphique des données graphiques posait aussi des problèmes aux étudiants. L'expérimentation de l'année 2003 a mis en évidence certaines difficultés à propos de la lecture de données graphiques en papier/crayon, elle a permis aussi d'identifier quelques indices de l'apport de l'outil informatique pour une meilleure maîtrise de ce type d'informations.

#### **5.2.1. Des difficultés pour traiter des données graphiques en papier/crayon**

Nous avons constaté que des tâches comme celles relatives au tracé des courbes solutions à partir d'un champ de tangentes, révélaient des difficultés chez les étudiants concernant le passage du local vers le global. Deux des trois binômes que nous avons étudiés (E22/E23 et E3/E4) tracent des courbes sans respecter le champ de tangentes (cf. Chap. 3, pp. 124-126), ce type de difficulté ayant été identifié aussi bien chez des étudiants débutants (Rasmussen, 1996) que chez des lycéens (Arslan, 2005). Les courbes tracées suivent de façon globale l'allure du champ de tangentes, mais au niveau local elles ne sont pas tangentes aux segments.

Nous trouvons ici les traces de ce qui semble un obstacle de nature didactique qui tire son origine de l'enseignement secondaire, concernant tant la production de représentants graphiques de fonctions numériques que leur traitement graphique. Dans l'enseignement secondaire, le tracé de courbes représentatives de fonctions se fait normalement à partir de l'identification de quelques points qui sont reliés ensuite par une courbe continue, sans contrôle strict des contraintes à vérifier par les points extrapolés. Par ailleurs, lors du recours aux calculatrices graphiques, les représentants graphiques des fonctions sont simplement des objets globaux qu'on associe aux expressions symboliques.

Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 1 en nous appuyant sur les travaux de Chauvat (1998), Bloch (2000, 2002) et Maschietto (2001), le fonctionnement des représentants

graphiques dans l'enseignement secondaire et universitaire est principalement du type idéogrammatique. Ce mode de fonctionnement du graphique met l'accent sur l'aspect global des représentants graphiques. Par contre, en ce qui concerne le tracé de courbes solutions à partir d'un champ de tangentes, il demande une stratégie plus fine que celle du tracé global d'une courbe. Le tracé d'une courbe, dans ce cas, doit s'appuyer sur des connaissances qui lient les petits segments aux courbes solutions, car on ne peut pas se contenter de relier les points en essayant de garder une certaine cohérence avec l'allure globale du champ de tangentes : les courbes solutions doivent être tangentes aux segments en leur point de contact, et les tangentes aux points extrapolés doivent avoir une pente voisine de celle des tangentes fournies, ce qui exige un contrôle local des pentes des tangentes.

Pour les étudiants, la seule stratégie de tracé de courbes solutions dont ils disposent est la stratégie globale. Ils ont tracé les courbes en essayant soit de joindre les petits segments de droites tangentes, soit en reliant seulement les milieux des segments. Les productions des étudiants montrent qu'ils n'arrivent pas à réaliser spontanément les passages locaux/globaux requis dans ce type d'activité. Ils ne disposent pas d'une technique pour un traitement local des courbes solutions à partir d'un champ de tangentes.

### **5.2.2. Des apports du logiciel pour le traitement des données graphiques**

Le recours à un environnement de géométrie dynamique pour explorer le comportement des courbes solutions semble contribuer à une meilleure maîtrise des données graphiques. Nous avons proposé, lors de l'expérimentation de l'année 2003, l'étude graphique de la même équation différentielle que celle étudiée en papier/crayon. Dans cet environnement, pour esquisser une courbe solution à l'aide de l'outil « Trace », il faut déplacer soigneusement le vecteur. Si l'on veut obtenir un trait fin de la courbe, il faut alors suivre attentivement la direction du vecteur. Les résultats obtenus montrent que l'exploration des courbes solutions à l'aide du logiciel contribuent à une meilleure interprétation des informations graphiques. En effet, nous avons constaté que lors de l'exploration dans le contexte informatique, les variations du vecteur dynamique et la possibilité de garder la trace du vecteur semblent devenir un élément de contrôle perceptif important. Elles permettent aux étudiants de tirer des informations plus précises sur le comportement des courbes solutions à partir des données graphiques. Nous avons observé que certains étudiants étaient arrivés à identifier des erreurs lors du tracé de courbes en papier/crayon. Par exemple, le binôme E22/E23 identifie des courbes qui en papier/crayon coupaient une autre courbe solution, ne le font pas en réalité (cf. Chap. 3, p. 125 ; p. 139 ; pp. 152-153) tandis que le binôme E3/E4 reconnaît que certaines courbes tracées étaient incorrectes (cf. Chap. 3, p. 139). L'exploration à l'aide du logiciel a permis aussi aux binômes E3/E4 et E1/E2 de mieux identifier les différents types de comportement de la famille de courbes solutions. Ces binômes ont reconnu respectivement quatre à cinq types de comportements différents, alors qu'en papier/crayon le binôme E3/E4 n'en avait vu que deux, et que le binôme E1/E2 n'avait pas remarqué les différents comportements des courbes solutions (cf. Chap. 3, pp. 130-131 ; pp. 145-151).

Par ailleurs, pour le binôme E1/E2, le travail dans l'environnement dynamique a permis de formuler des arguments fondés sur des liens intuitifs entre les représentants graphiques et l'unicité des solutions. Ces étudiants établissent un lien entre les traces du vecteur dynamique et l'impossibilité d'avoir des courbes différentes qui passent par un même point. En effet, lorsqu'on déplace un vecteur tangent dynamique (associé à une expression symbolique de la

forme  $y'=f(x,y)$ , où  $f$  est une fonction continue) sans direction précise, les traces des vecteurs laissées par le logiciel pour des points qui se trouvent proches, ont l'air d'être parallèles. Donc, les étudiants prennent le constat perceptif de « ne pas produire de vecteurs parallèles », comme un élément de contrôle pour le tracé de courbes solutions. L'argument étant : « les courbes solutions tangentes à deux vecteurs parallèles sont différentes ». Dans ce cas, c'est une connaissance théorique sur l'unicité des solutions d'une équation différentielle qui permet aux étudiants de contrôler le comportement graphique des courbes solutions (cf. Chap. 3, pp. 142-143).

En ce qui concerne le traitement des données graphiques dans les situations que nous avons proposées, il semble que l'environnement de géométrie dynamique permette de mieux remarquer un phénomène graphique. En effet, les faits graphiques liés aux équations différentielles apparaissent comme une conséquence du travail exploratoire. En revanche, lorsqu'on travaille en papier/crayon, les phénomènes graphiques sont toujours présents, ce qui paraît contribuer à les rendre moins remarquables. Cependant, comme nous l'avons constaté, une meilleure identification d'un phénomène graphique ne signifie pas forcément une meilleure interprétation mathématique de celui-ci.

### **5.3. DES DIFFICULTES CONCERNANT L'INTERPRETATION MATHÉMATIQUE DES DONNÉES GRAPHIQUES**

De façon générale, nous avons identifié de nombreuses difficultés chez les étudiants pour interpréter mathématiquement les phénomènes graphiques. En particulier, la situation de mise en équation différentielle de la famille d'exponentielles (expérimentation année 2003) a révélé certaines conceptualisations de notions mathématiques élémentaires ayant entravé le passage du registre graphique vers le registre symbolique. Rappelons que cette situation est du type construction d'un représentant d'un objet du champ des équations différentielles. La tâche consistait, à l'aide d'une courbe exponentielle dynamique et des outils de Cabri, à explorer des propriétés de la famille de courbes et à partir de celles-ci à obtenir l'équation différentielle de la famille de courbes. Même si la tâche a été menée avec succès par l'ensemble des binômes participants, à partir de l'analyse du travail des trois binômes choisis nous avons identifié des difficultés persistantes (parfois surmontées grâce aux interventions de l'enseignant) lors des rétroactions graphiques du logiciel, ou des échanges au sein du binôme ou avec les binômes voisins. Nous avons classé ces difficultés de la manière suivante : difficultés concernant le lien : droite tangente – équation différentielle ; difficultés concernant le lien : équation différentielle – famille de solutions ; difficultés concernant le passage du graphique au symbolique : propriété numérique de la famille de courbes - équation différentielle de la famille de courbes.

#### **5.3.1. Des difficultés concernant le lien : équation de la droite tangente – équation différentielle**

Nous avons constaté chez deux binômes (E22/E23 et E3/E4), lors de la recherche de l'équation différentielle de la famille de courbes, une stratégie qui consistait à prendre l'équation de la droite tangente comme modèle de l'équation recherchée. Nous avons formulé cette stratégie sous la forme d'un théorème en acte :

*« l'équation différentielle associée à une famille de courbes est soit de la forme  $y'=ax+b$ , soit de la forme  $y'=ay+b$ , où  $y=ax+b$  est l'équation de la droite tangente en un point quelconque d'une courbe solution de la famille »*

Il est possible que les étudiants aient été inspirés par la forme de l'expression de la droite tangente affichée par le logiciel, pour proposer une expression symbolique de l'équation différentielle. Dans le cas du binôme E22/E23, les étudiants changent de stratégie grâce aux interventions du professeur, et au constat que l'équation de la droite tangente change lors de son déplacement (cf. Chap. 3, pp. 161-162). Le binôme E3/E4 a rencontré le plus de difficultés pour obtenir l'équation de la famille d'exponentielles. Ce binôme a mis en œuvre, principalement, une stratégie fondée sur un tâtonnement numérique qui consistait à confronter les valeurs numériques de la pente de la droite tangente avec des valeurs obtenues à partir d'une équation différentielle de la forme  $y'=f(x,y)$  (des arguments du type VAL-NUM) ; cette équation, proposée au hasard, cherchant à produire les valeurs les plus proches possibles. Lors de ces essais, le binôme a proposé une équation différentielle de la forme  $y'=ax+b$ . Finalement, le binôme E3/E4 passe par l'équation de la droite tangente pour arriver à l'équation différentielle de la famille d'exponentielles. Lors du traitement de l'équation de la droite tangente écrite sous la forme générale  $y-y(a)=y'(a)(x-a)$ , les étudiants mettent en œuvre un raisonnement circulaire : ils utilisent implicitement  $y'=y$  comme propriété de la famille des solutions, et concluent que  $y'=y$  est l'équation différentielle recherchée (cf. Chap. 3, pp. 170-172).

Dans les situations de mise en équation différentielle de la famille de trajectrices en géométrie dynamique, et dans celles en papier/crayon pour les exponentielles et les trajectrices, nous avons identifié aussi un passage important consistant à traiter l'équation de la droite tangente pour arriver à l'équation cherchée, même si ce passage n'était pas nécessaire (cf. Chap. 3, paragraphe 3.4.8 ; Chap. 4, p paragraphes 4.1.1 et 4.1.2). Il semblerait que le fait de disposer d'une expression symbolique dans une situation où l'on cherche une équation, rassure les étudiants. Nous remarquons que l'influence algébrique est très forte, et qu'une fois que les étudiants disposent d'une expression symbolique ils tentent de l'adapter au problème, mais sans le contrôle des connaissances des cadres concernés. Le binôme E22/E23 supposait que pour l'expression symbolique  $y'=ay+b$ , il fallait seulement connaître la droite tangente en deux points différents de la courbe pour former un système d'équations (cf. Chap. 3, pp. 161-162). Tandis que le binôme E3/E4 cherchait à obtenir graphiquement l'ordonnée à l'origine d'une droite tangente pour connaître la valeur de  $b$  (cf. Chap. 3, p. 168).

La non-distinction entre l'équation d'une droite tangente et l'équation différentielle a été identifiée aussi chez les lycéens (Arslan, 2005). Cette association n'est pas due au hasard, il semblerait qu'elle soit en lien avec l'interprétation traditionnelle de la dérivée d'une fonction comme la pente de la droite tangente. Dans ce cas, à partir de l'expression symbolique explicite de la dérivée d'une fonction, on peut connaître l'équation de la droite tangente pour n'importe quel point de la courbe. Donc, les étudiants conceptualisent une équation différentielle comme une expression symbolique fournissant directement des équations de droites tangentes. On peut penser que cela provient d'une réduction de l'équation d'une tangente à sa pente.



### **5.3.2. Des difficultés concernant le lien : équation différentielle – famille de solutions**

Nous avons identifié aussi une autre difficulté très persistante chez les étudiants, du fait qu'une seule expression symbolique de l'équation différentielle est associée à un ensemble de solutions. Les étudiants supposent qu'à chaque solution doit correspondre une équation différentielle. Nous avons exprimé ce type de raisonnement sous la forme du théorème en acte :

« à chaque solution correspond une équation différentielle » (TA5)

Pour établir un lien bijectif entre une famille de courbes solutions et l'expression symbolique d'une équation différentielle, les étudiants mettent en œuvre le théorème en acte TA5 de deux manières différentes : soit ils ajoutent à l'équation différentielle des conditions initiales (cf. Chap. 3, pp. 163-164 ; pp. 174-176) ; soit ils ajoutent des paramètres dans l'expression symbolique de l'équation différentielle. Dans ce dernier cas, nous avons identifié de façon particulière ce type de raisonnement chez le binôme E3/E4. Pour ces étudiants, les paramètres permettent en quelque sorte de relier chaque courbe à l'équation (cf. Chap. 3, pp. 169-171).

Nous considérons que ces difficultés rencontrées par les étudiants, pour mettre en relation une famille de courbes et l'expression symbolique d'une équation différentielle, reflètent la résistance à conceptualiser qu'une équation différentielle admet une famille de solutions, due à ce que les étudiants ont jusqu'à présent rencontré le plus souvent des équations numériques. D'autre part, ces difficultés peuvent aussi avoir des liens avec un enseignement traditionnel des fonctions, où une fonction est explicitement représentée par une expression symbolique et où elle est associée à une seule courbe.

Par ailleurs, les difficultés identifiées chez les étudiants semblent être aussi en relation avec le sens dans lequel on fait le passage entre les registres graphique et symbolique. Dans la première situation proposée, les étudiants connaissent l'expression symbolique de l'équation différentielle, et ils n'ont pas remis en question le fait d'associer une seule expression symbolique à toute une famille de courbes. En revanche, dans le sens contraire, du graphique vers le symbolique, ces difficultés sont apparues.

### **5.3.3. Des difficultés concernant le passage : propriété numérique de la famille de courbes – équation différentielle**

Pour arriver à l'équation différentielle de la famille d'exponentielles, la stratégie mobilisée par la plupart des étudiants est passée, grâce à l'environnement de géométrie dynamique, par l'identification de la propriété numérique de la famille de courbes « pente de la droite tangente = ordonnée du point de tangence ». Nous avons observé que deux des binômes analysés (BiE1/E2 et BiE3/E4) avaient eu des difficultés pour faire le passage de la propriété numérique à l'équation différentielle, même s'ils avaient déjà formulé la propriété numérique comme  $y' = y$  (cf. Chap. 3, p. 162 ; pp. 169-172).

Il semblerait que les étudiants prennent l'expression symbolique  $y' = y$  seulement comme une étiquette de la propriété numérique. Ils ont confirmé sa validité à l'aide du logiciel, mais elle n'est pas perçue comme une relation fonctionnelle. Nous considérons que le fait de demander

le passage dans le sens inhabituel, du graphique vers le symbolique, pourrait en partie expliquer ces difficultés. Mais les difficultés pourraient tenir aussi à ce que dans l'expression  $y'=y$ , on ne voit pas que  $y'$  est fonction de  $x$  et de  $y$ . L'étude des difficultés rencontrées par les étudiants dans des situations où les propriétés numériques de la famille de courbes conduisent à des équations différentielles de forme  $y'=g(x)$  ou  $y'=f(x,y)$ , pourrait être intéressante.

#### **5.4. DES INDICES DU DEVELOPPEMENT D'UNE FLEXIBILITE POUR ARTICULER LES REGISTRES GRAPHIQUE ET SYMBOLIQUE**

Dans les deux expérimentations, nous avons constaté de nombreuses difficultés des étudiants pour établir un lien direct (c'est-à-dire sans passer par le représentant symbolique des solutions) entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et les courbes solutions. Dans la première expérimentation, nous avons décelé que l'exploration dynamique permettait aux étudiants d'identifier différents comportements des courbes solutions, mais qu'ils se limitaient à les décrire. Dans la situation concernant l'étude graphique des courbes solutions d'une équation différentielle, les étudiants arrivaient à classer les courbes solutions par paquets et à identifier certains comportements asymptotiques, toutefois ils étaient incapables de les justifier. Par exemple, les binômes E22/E23 et E1/E2 ne mettent pas en œuvre de connaissances du cadre de l'analyse permettant d'établir un lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation des solutions (cf. Chap. 3, pp. 144-145, pp. 150-151) ; et le binôme E3/E4 décrit le comportement des solutions utilisant le signe de la dérivée, mais il n'arrive pas à le relier à l'expression symbolique de l'équation différentielle (cf. Chap. 3, pp. 145-147). Ce dernier binôme ne réussit même pas à bien faire la différence entre équation différentielle et solutions. Parfois il utilise l'expression symbolique de l'équation différentielle comme s'il s'agissait de l'expression symbolique des solutions. Ces étudiants mettent en œuvre des connaissances sur la symétrie de fonctions pour essayer de prouver la symétrie de la famille de courbes, mais ils traitent l'expression de l'équation différentielle comme une fonction numérique d'une variable réelle (cf. Chap. 3, pp. 147-148).

##### ***5.4.1. Des traces du développement d'une flexibilité pour articuler les registres graphique et symbolique, lors de la première expérimentation***

Malgré les difficultés mentionnées au paragraphe précédent, nous avons déjà trouvé, dès la première expérimentation, des petits indices témoignant que l'exploration dans l'environnement de géométrie dynamique, pouvait donner lieu à des raisonnements permettant l'établissement d'un lien direct entre le registre graphique des solutions et le registre symbolique de l'équation différentielle.

Certes, nous avons constaté, lors de la phase de justification de l'équation différentielle des familles de courbes (exponentielles et tractrices) que de façon générale, la plupart des étudiants essayaient de passer par l'expression symbolique des solutions et formulaient des arguments fondés sur cette expression symbolique (même si dans le cas des tractrices, les étudiants n'arrivant pas à résoudre l'équation différentielle évoquaient la possibilité d'obtenir

l'expression symbolique des solutions). Cependant, certains étudiants sont arrivés à mettre en relation directe des propriétés graphiques de la famille de courbes avec l'expression symbolique de l'équation différentielle. Par exemple, le binôme E22/E23 infère à partir de l'équation différentielle  $y' = y$  une propriété de parallélisme des droites tangentes aux courbes solutions : pour ces courbes, les étudiants concluent et vérifient à l'aide du logiciel que les droites tangentes tracées sur des points de la même ordonnée (des courbes tracées à partir de l'expression symbolique des solutions et de la courbe dynamique fournie) sont parallèles (cf. Chap. 3, pp. 178-180). Le binôme E1/E2, lors de la justification de l'équation différentielle de la famille de tractrices, utilise des arguments du type VAL-NUM (confrontation des valeurs numériques de la pente de la droite tangente avec des valeurs obtenues à partir de l'équation différentielle). Les rétroactions numériques du logiciel lors de la mise en œuvre de ce type d'arguments permettent au binôme E1/E2 de confirmer une conjecture faite, à partir de l'expression symbolique de l'équation différentielle, sur la possibilité de l'existence d'une autre moitié de la famille de courbes (par des contraintes techniques, la tractrice dynamique fournissait seulement la moitié de la famille de courbes). Dans le cas de ce dernier binôme, nous avons constaté que le travail exploratoire et les rétroactions numériques du logiciel ont contribué clairement à établir un lien direct (sans passer par l'expression symbolique des solutions) entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et les courbes solutions (cf. Chap. 3, pp. 201-204).

#### **5.4.2. Des traces du développement d'une flexibilité pour articuler les registres graphique et symbolique, lors de la deuxième expérimentation**

La deuxième expérimentation (année 2004) a confirmé les difficultés des étudiants pour articuler directement les registres graphique et symbolique des équations différentielles, ces difficultés concernant principalement la justification mathématique des phénomènes graphiques identifiés. Les situations proposées étaient centrées sur l'association de vecteurs dynamiques avec des équations différentielles.

Nous avons constaté dans la première situation (association de vecteurs dynamiques et d'équations différentielles, lorsque le lien était explicitement donné) que tous les étudiants identifiaient sans difficulté, grâce à l'exploration dynamique, l'isocline zéro associée aux équations différentielles  $y' = -y(4-y^2)$  et  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  et la mettaient en relation avec l'expression symbolique de l'équation différentielle. En effet, le déplacement du vecteur dynamique et l'usage de l'outil « Trace » de Cabri ont favorisé la reconnaissance des régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle. Nous avons remarqué que les liens entre l'inclinaison horizontale des vecteurs dynamiques, la dérivée nulle et les expressions symboliques des équations différentielles, ont été établis avec moins de difficultés que dans le cas où la dérivée n'est pas nulle. Cette mise en relation presque immédiate que les étudiants font entre l'isocline zéro et l'expression symbolique de l'équation différentielle, a été observée aussi dans l'expérimentation de l'année 2003. Il semblerait que dans ce cas, l'interprétation graphique de la dérivée nulle, le traitement simple des expressions symboliques pour obtenir l'isocline zéro, contribuent à les relier. Nous remarquons que de façon générale, ce lien entre le registre graphique et le registre symbolique n'est réalisé que pour ce cas particulier. Nous faisons l'hypothèse que ce lien singulier pourrait être favorisé par un enseignement au lycée fournissant l'interprétation graphique de la dérivée, lors de la recherche des valeurs extrêmes des fonctions numériques à une variable.

Les observables ont montré à nouveau des indices témoignant que l'exploration, dans l'environnement de géométrie dynamique, permettait de faire quelques progrès pour relier directement les registres graphique et symbolique des équations différentielles. D'après le travail des trois binômes analysés, on constate qu'ils sont tous arrivés à établir certains liens directs entre les variations de la pente du vecteur dynamique et les expressions symboliques des équations différentielles. Néanmoins, nous avons constaté que ces liens n'avaient été établis ni de manière spontanée, ni de manière immédiate. Pour les développer, il a fallu tout un travail exploratoire à l'aide du logiciel. Parfois ces liens sont encore très faibles ; par exemple lors de l'association explicite de vecteurs dynamiques et d'équations différentielles, où la première question demandait des arguments justifiant l'association des vecteurs dynamiques avec des équations différentielles, le binôme E'14/E'15 n'est arrivé à formuler que des arguments du type VAL-NUM (fondés sur la confrontation des valeurs numériques de la pente avec celles obtenues à partir de l'équation différentielle) pour justifier l'association des vecteurs dynamiques avec des équations différentielles (cf. Chap. 4, pp. 247-248). De plus, ce binôme n'a établi ces liens qu'après plusieurs tentatives et il s'est fortement appuyé sur les remarques des binômes voisins. Nous avons trouvé aussi que pour l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$ , les trois binômes arrivaient seulement à formuler des arguments mettant en jeu l'isocline zéro, et que ces arguments n'ont pas été formulés immédiatement (cf. Chap. 4, pp. 228-230 ; pp. 242-244 ; pp. 246-247).

Dans la figure 2 suivante nous montrons le type de lien établi entre les registres graphique et symbolique par les binômes E'1/E'4 et E'14/E'15 (le binôme E'12/E'17 établit aussi ce lien, mais il met également en relation directe les courbes solutions et l'équation différentielle). Ce lien met en relation directe vecteurs tangents et équation différentielle, mais il ne met pas en relation directe l'expression symbolique de l'équation différentielle et les courbes solutions. Une des raisons possibles en est l'accent mis par les situations sur l'exploration à l'aide des vecteurs dynamiques :

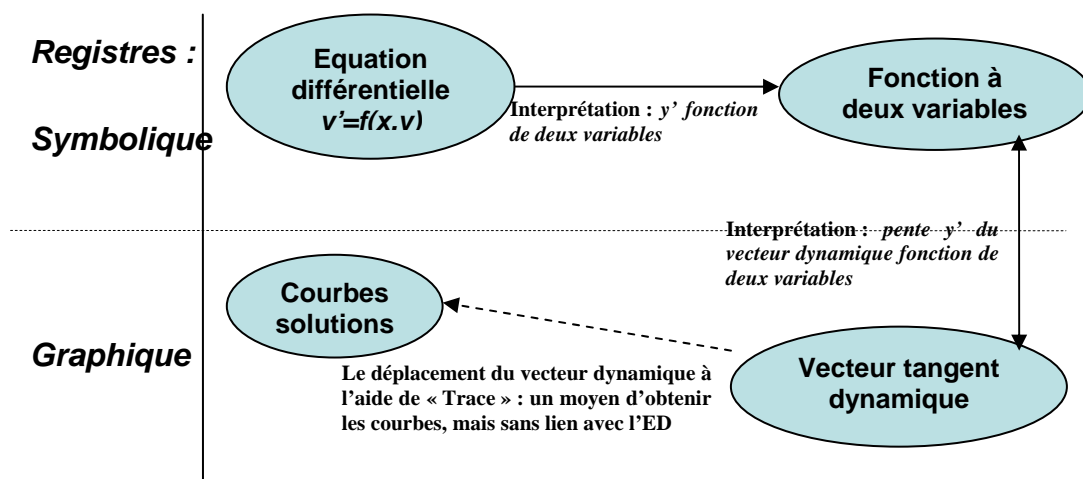


Fig. 2 : Liens établis par deux binômes lors de l'association explicite entre vecteurs dynamiques et équations différentielles

Les binômes E'1/E'4 et E'14/E'15 semblent interpréter  $y'=f(x,y)$  seulement comme une expression fonctionnelle qui donne  $y'$  (la pente du vecteur dynamique) en fonction de  $x$  et de

y. Dans les arguments formulés par ces étudiants, nous remarquons une quasi-absence de mention du sens de variation des solutions.

Nous avons observé que grâce à l'établissement de ce type de liens, les trois binômes étaient arrivés à formuler des arguments reliant directement un représentant symbolique de l'équation différentielle avec un champ de vecteurs. Dans les tableaux 1 et 2 ci-dessous, nous illustrons certains des arguments formulés par les étudiants lors de la mise en relation des phénomènes graphiques issus de l'exploration dynamique, avec les expressions symboliques des équations différentielles :

Equation différentielle :  $y' = -y(4 - y^2)$

Type d'argument	Constat graphique	Interprétation mathématique	Mise en relation registres graphique et symbolique	Binômes
REG-PLAN	Changement de signe de la pente du vecteur dynamique	Valeur de $y'$ positive ou négative	Régionnement du plan selon le signe de $y'$	E' 1/E' 4 E' 12/E' 17
VAR-ED	Invariance de la pente du vecteur dynamique lorsque son origine parcourt une droite parallèle à l'axe des abscisses	$y'$ même pour des $x$ différents	L'expression symbolique de l'ED ne dépend que de la variable $y$	E' 12/E' 17
BRCH-INF	Le vecteur dynamique devient presque vertical et avec des pentes de signe opposé lorsqu'il se déplace vers le haut ou le bas de l'écran	$\lim_{y \rightarrow +\infty} y' = +\infty$ $\lim_{y \rightarrow -\infty} y' = -\infty$	Vérification par traitement de l'expression symbolique de l'ED	E' 14/E' 15

Tableau 1 : Des arguments mettant en relation directe les registres graphique et symbolique relatifs à l'équation différentielle  $y' = -y(4 - y^2)$

Equation différentielle :  $y' = (x+2)/(x^2-1)$

Type d'argument	Constat graphique	Interprétation mathématique	Mise en relation registres graphique et symbolique	Binômes
DISC	Changement soudain de signe de la pente du vecteur dynamique au voisinage d'une région du plan	$\lim_{x \rightarrow \pm 1} y' = \pm \infty$	Vérification par le traitement de l'expression symbolique de l'ED	E' 1/E' 4 E' 12/E' 17 E' 14/E' 15
VAR-ED	Invariance de la pente du vecteur dynamique lorsque son origine parcourt une droite parallèle à l'axe des ordonnées	$y'$ même pour des $y$ différents	L'expression symbolique de l'ED ne dépend que de la variable $x$	E' 12/E' 17

Tableau 2 : Des arguments mettant en relation directe les registres graphique et symbolique relatifs à l'équation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$

En ce qui concerne la troisième équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$ , comme nous l'avons déjà signalé, les étudiants ont rencontré plus de problèmes pour interpréter les faits graphiques qui lui sont associés. Nous remarquons que pour les deux premières équations différentielles, le fait que leur expression symbolique indique des conditions, soit sur  $x$ , soit sur  $y$ , facilite la mise en œuvre d'arguments reliant directement le registre graphique du champ de vecteurs avec les équations différentielles; tandis que pour la 3<sup>ème</sup> équation différentielle, les conditions sur  $(x,y)$  sont plus difficiles à identifier. Cependant, nous avons constaté que pour cette dernière équation différentielle, les étudiants arrivaient à faire des passages entre le registre symbolique et le registre graphique dans les deux sens : certains d'entre eux (binôme E'1/E'4) anticipent, à partir de l'expression symbolique de l'équation différentielle, l'existence de deux branches de l'isocline zéro et font des vérifications à l'aide du logiciel (cf. Chap. 4, pp. 228-229); d'autres étudiants (binômes E'12/E'17 et E'14/E'15) reconnaissent, à partir de l'exploration graphique, une branche de l'isocline zéro ( $y=x$ ) et établissent ensuite un lien avec l'expression symbolique de l'équation différentielle, ce qui leur permet d'identifier l'autre branche de l'isocline zéro (cf. Chap. 4, pp. 242-244 ; pp. 245-247).

La deuxième situation proposée<sup>1</sup> dans l'expérimentation de l'année 2004 (association de vecteurs dynamiques et d'équations différentielles, lorsque le lien n'était pas explicitement donné), demandait un travail plus important dans le registre graphique. Rappelons que cette situation consistait à trouver dans une liste d'équations différentielles celles qui correspondaient aux vecteurs dynamiques. Nous avons constaté que même si certaines difficultés sont apparues, de façon générale les trois binômes sont arrivés à établir des liens entre les propriétés graphiques des champs de vecteurs et les propriétés algébriques des expressions symboliques. De plus, l'analyse du travail des binômes révèle une certaine progression dans la maîtrise pour lier les faits graphiques aux expressions symboliques. De façon générale, nous avons identifié une phase d'exploration où les étudiants ne trouvent pas de lien entre les phénomènes graphiques issus du déplacement du vecteur dynamique. Dans cette phase, certains étudiants tentent de résoudre les équations différentielles et de faire des vérifications graphiques à l'aide du logiciel (binôme E'1/E'4, cf. Chap. 4, pp. 256-257), d'autres interprètent partiellement les propriétés graphiques identifiées, ce qui les conduit à des associations erronées. Citons par exemple le binôme E'14/E'15 qui reconnaît, pour le premier vecteur, la propriété suivante « la pente est toujours positive et décroissante lorsque  $x$  tend vers plus l'infini », ce qui le conduit à associer ce vecteur, dans un premier temps, à l'équation différentielle  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$ . L'argument étant que  $y'$  tend vers zéro, lorsque  $x$  tend vers plus l'infini et qu'une fonction positive décroissante a pour limite 0 lorsque  $x$  tend vers plus l'infini (cf. Chap. 4, p. 272).

Nous avons remarqué aussi que l'exploration des comportements graphiques associés aux équations différentielles  $y'=f(x,y)$ , où la fonction  $f$  a des discontinuités, ces comportements étant identifiés grâce au déplacement des vecteurs dynamiques et l'outil « Trace » de Cabri, a déclenché une meilleure maîtrise du passage du registre graphique vers le registre symbolique. Nous trouvons, par exemple, que le binôme E'1/E'4 formule des arguments tels que « en  $x=\pm 2$  le vecteur est vertical  $\Rightarrow x^2-4$  au dénominateur » (cf. Chap. 4, pp. 261-262).

<sup>1</sup> Cette situation a été précédée d'un bref bilan par le professeur sur l'étude de l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$ . L'équation a été choisie comme celle ayant provoqué le plus de difficultés chez les étudiants pour articuler les registres en jeu. L'étude s'est focalisée sur le régionnement du plan par l'isocline zéro, à l'aide du signe de la dérivée.

Le binôme E'14/E'15 se rend compte que l'équation différentielle  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$  n'était pas celle qui devrait être associée au premier vecteur. En effet, le comportement graphique du quatrième vecteur remarquait des discontinuités qui correspondaient plutôt à cette dernière équation. De plus, ce binôme prévoit que pour que le premier vecteur soit associé à cette équation différentielle, il faudrait qu'il ne soit pas défini sur les droites  $x = \pm 2$ . L'exploration à l'aide du déplacement du vecteur dynamique et de l'outil « Trace » de Cabri leur confirme que l'équation  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$  ne correspond pas au premier vecteur (cf. Chap. 4, pp. 272-274).

Nous avons trouvé aussi que cette situation a permis au binôme E'12/E'17 de formuler des arguments fondés sur les variations de la dérivée. Ces étudiants analysant le comportement graphique des courbes solutions associées à l'équation différentielle  $y' = ke^{-0.05x^2}$  en termes de variations de la pente du vecteur dynamique. Cette analyse est faite à l'aide du déplacement du vecteur dynamique en essayant de suivre les courbes solution. Ce qui amène ce binôme à identifier l'existence d'un maximum pour la pente du vecteur tangente, et à relier ce fait graphique avec la dérivée seconde (cf. Chap. 4, pp. 264-267). Dans ce cas, le travail sur le registre graphique conduit le binôme à mettre en cause des connaissances (mobilisées dans la situation précédente) que nous avons formulées sous la forme du théorème en acte « *la forme d'une courbe au voisinage d'un point d'inflexion est celle des cubiques  $y=x^3$  ou  $y=-x^3$*  ». Ce théorème en acte avait amené les étudiants à conjecturer, lors de la situation précédente, qu'en un point d'inflexion, la première dérivée est aussi nulle (cf. Chap. 4, pp. 239-240), et donc à utiliser ce critère pour rejeter des points d'inflexion, même s'ils avaient été obtenus algébriquement (cf. Chap. 4, pp. 241-242).

Le travail des étudiants dans cette situation démontre qu'une étude graphique des équations différentielles effectuée dans un environnement de géométrie dynamique, arrive à développer chez eux une certaine flexibilité pour articuler les registres de représentation en jeu (graphique et symbolique). Rappelons que l'un de nos choix, dans les deux expérimentations que nous avons conduites, a été de placer les étudiants dans des situations créées en ne leur fournissant que les informations mathématiques essentielles pour démarrer dans leur activité.

## 5.5. LE DISPOSITIF EXPERIMENTAL

En ce qui concerne les différentes situations qui composent les deux expérimentations, nous avons vu que certains choix faits lors de leur conception n'avaient pas permis de tirer un meilleur profit des facilités de la géométrie dynamique. Par exemple, pour la première situation de l'expérimentation de l'année 2003, l'étude graphique d'une famille de courbes (situation du type association de représentants), nous avons fait le choix de fournir comme fond d'écran le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$ . Ce choix n'a pas aidé les étudiants à une démarche d'exploration pour identifier eux-mêmes les phénomènes graphiques liés à l'équation différentielle, et a même empêché un usage plus important de l'outil « Trace » de Cabri.

Nous avons constaté aussi que la transition de la première situation (association de représentants) vers une situation de mise en équation des familles de courbes (situation de

construction d'un représentant), a été une rupture conceptuelle très forte. En effet, il ne favorisait pas le réinvestissement de stratégies mobilisées dans la première situation. La première situation mettait en jeu principalement le passage du point de vue local vers un point de vue global des courbes solutions d'une équation différentielle, tandis que dans les dernières situations le passage était dans le sens contraire.

Nous avons remarqué aussi, pour les situations de mise en équation différentielle des familles de courbes, que le choix de laisser certaines constructions à la charge des étudiants (par exemple la construction de la droite tangente) avait provoqué d'autres difficultés relatives à l'usage des outils du logiciel, ce qui a demandé beaucoup de temps. Donc, il semble que pour ce type de situations il convienne de fournir toutes les macro-constructions nécessaires. Nous avons constaté aussi que l'instrumentation de certains outils du logiciel n'avait pas été immédiate, et que par exemple, certains étudiants avaient des difficultés pour utiliser l'outil « Trace », concernant le choix des objets ou la désactivation de l'outil.

Nous avons trouvé également que l'organisation de la situation sur la mise en équation différentielle de la famille de trajectrices (d'abord les exponentielles, ensuite les trajectrices, puis retour aux exponentielles, et finalement retour aux trajectrices) semble avoir contribué à une réussite moindre par rapport au travail en papier/crayon. En effet, lorsque les étudiants sont revenus à la dernière phase, ils ont eu moins de temps pour y travailler. Nous avons constaté qu'en papier/crayon (expérimentation 2004), le taux de réussite de la mise en équation des trajectrices était supérieur à celui obtenu en géométrie dynamique. En papier/crayon, la situation sur les trajectrices était effectuée sitôt après la mise en équation des exponentielles, et la stratégie graphique mise en œuvre dans ce dernier cas était donc réinvestie immédiatement pour obtenir la famille de trajectrices.

Dans les situations proposées en géométrie dynamique lors de l'expérimentation de l'année 2004, nous observons que les affinités entre les deux situations d'association entre vecteurs et équations différentielles, ont permis le réinvestissement des stratégies mises en œuvre lors de la première situation, ainsi qu'une meilleure identification des évolutions des étudiants.

En ce qui concerne les variables didactiques, de façon générale nous avons constaté que les valeurs choisies nous ont permis d'observer les difficultés attendues. Citons quelques choix à titre d'exemple : dans la première situation de l'expérimentation de 2003, la valeur choisie de la variable EQ2 (degré de complexité de la configuration géométrique du champ de tangentes) a permis de repérer, grâce à la complexité moyenne de ce champ, les difficultés concernant le tracé de courbes solutions. Dans la situation de mise en équation différentielle de la famille d'exponentielles nous avons constaté aussi, que le choix de valeur de la variable didactique ME1 (la forme de l'expression symbolique de l'équation différentielle à obtenir) conduisant à l'équation différentielle  $y'=y$ , même s'il s'agissait d'une équation différentielle très simple, a entraîné les difficultés que nous avons identifiées. Finalement, pour les deux situations d'association de vecteurs dynamiques avec des équations différentielles, nous avons constaté que le choix des valeurs de la variable didactique V-ED3 (la possibilité de résoudre algébriquement les équations différentielles) permettant de résoudre les équations différentielles, semblait favoriser le recours à l'approche algébrique (stratégies de type RES-ED). Pour bloquer cette stratégie, il conviendrait donc de proposer des équations différentielles non résolubles algébriquement.



### **Conclusion**

La mise en place du dispositif expérimental nous a donné accès à un vaste éventail de difficultés suscitées par la mise en relation des registres graphique et symbolique des équations différentielles. Nous avons constaté le rôle important joué par certaines connaissances élémentaires dans l'établissement de ces liens, mais aussi la fragilité de ces connaissances chez les étudiants de CAPES, lorsqu'elles doivent fonctionner dans des contextes inhabituels.

Nous avons observé aussi des indices qui montrent, conformément à nos hypothèses, les possibilités de l'environnement de géométrie dynamique pour favoriser l'articulation entre les registres graphique et symbolique des équations différentielles. Certes, les liens établis par les étudiants sont encore faibles, mais nous pensons cependant qu'ils ont contribué à faire prendre conscience que les équations différentielles ne sont pas seulement des équations à résoudre : les propriétés graphiques des courbes solutions et les propriétés algébriques de l'expression symbolique de l'équation différentielle entretiennent des liens directs, sans passer forcément par l'expression symbolique des solutions.

## C O N C L U S I O N

En nous appuyant sur différents travaux de didactique, au premier chapitre de cette thèse nous avons constaté que de façon générale, l'enseignement des mathématiques au niveau universitaire ne favorisait pas le développement d'une flexibilité cognitive. Pourtant celle-ci joue un rôle très important dans la conceptualisation et le succès en mathématiques. Dans notre recherche, nous nous sommes intéressés à l'analyse des difficultés des étudiants pour construire des liens entre représentants graphiques et symboliques d'objets du champ des équations différentielles. Dans cette perspective, nous avons cherché à étudier les apports du logiciel Cabri Géomètre pour développer ce type de liens.

Les objectifs de notre travail nous ont conduits, dans un premier temps, à clarifier la problématique relative à la mise en relation de registres de représentation lors de l'étude des équations différentielles, par la revue de quelques travaux liés à notre sujet, ainsi que par le recours à certains outils théoriques. Nous avons constaté l'influence prédominante de l'approche algébrique dans l'enseignement des équations différentielles. Dans cette approche, le lien entre le registre symbolique et le registre graphique est fait dans un seul sens, il passe par la résolution algébrique de l'équation différentielle et le registre graphique est utilisé seulement sous un mode idéogrammatique. Nous avons constaté aussi que l'articulation des registres graphique et symbolique suscitait des difficultés de nature cognitive, lorsqu'il s'agit de construire des liens du registre graphique vers le registre symbolique (le sens contraire au sens habituel), ou lorsqu'il s'agit d'associer ces registres directement (sans passer par la résolution algébrique). Dans le dernier cas, l'articulation entre les registres graphique et symbolique exige la mise en oeuvre de connaissances de divers cadres (fonctions, géométrie analytique, analyse, équations différentielles, etc.). Ces connaissances permettent d'interpréter mathématiquement les données graphiques en termes de dérivée des solutions, ou bien d'interpréter graphiquement des informations sur les fonctions solutions pour lesquelles on ne dispose que de leur dérivée. Ces constats nous ont conduits à fonder notre recherche sur **l'hypothèse de travail suivante** :

*« L'articulation des registres graphique et symbolique des équations différentielles n'est pas naturelle. Bien au contraire, elle demande le développement de compétences que les étudiants ne possèdent pas spontanément. »*

Diverses raisons nous ont conduits à envisager qu'un travail d'étudiants dans un environnement de géométrie dynamique, pouvait faciliter la mise en relation des registres graphique et symbolique des équations différentielles. En effet, d'une part on a pu constater que les outils informatiques pouvaient contribuer à un changement de paradigme dans l'enseignement des équations différentielles. D'autre part, les spécificités d'un logiciel de géométrie dynamique sur lesquelles nous reviendrons par la suite, sont adaptées pour une étude des équations différentielles fondée sur l'articulation de différents représentants d'objets

---

de ce domaine d'étude. Donc, dans cette thèse nous avons essayé de donner des éléments de réponse aux questions suivantes :

*Dans un environnement de géométrie dynamique, l'exploration des phénomènes graphiques liés aux représentants d'objets du champ des équations différentielles et leur mise en relation avec des connaissances de ce domaine, peuvent-elles contribuer au développement des compétences requises pour articuler le registre graphique et le registre symbolique ? Cette exploration et cette mise en relation peuvent-elles rendre problématique l'usage de connaissances élémentaires et contribuer à une évolution de ces connaissances ?*

Ces questions nous ont amenés à étudier les potentialités du logiciel Cabri Géomètre pour l'étude qualitative des équations différentielles. Ce logiciel fournit divers outils tels que « Trace », « Coordonnées ou équation », « Pente », etc. qui permettent de concevoir un travail mathématique particulier sur le registre graphique. Dans cet environnement, grâce à la manipulation directe des objets et aux rétroaction graphiques du logiciel (lesquelles sont étroitement liées aux propriétés mathématiques de base utilisées dans les constructions), les propriétés graphiques des solutions des équations différentielles peuvent s'obtenir comme le résultat d'un travail exploratoire : dans un environnement de géométrie dynamique, le registre graphique peut fonctionner dans un mode opératoire. L'interprétation et la justification mathématiques des faits graphiques identifiés demandent la mise en fonctionnement de connaissances hors du registre graphique, en particulier des connaissances dans les cadres des fonctions, de géométrie analytique, de l'analyse. Toutes ces spécificités du logiciel Cabri Géomètre nous ont permis de concevoir deux types de tâches pour problématiser l'articulation entre le registre graphique et le registre symbolique des équations différentielles : des tâches d'association, où deux (ou plus) représentants d'objets sont donnés et où l'enjeu est de les relier et justifier ; des tâches de construction, où l'un des deux représentants est fourni et où l'enjeu est de construire l'autre représentant. Ces deux types de tâches peuvent susciter des raisonnements de nature différente et requièrent la mobilisation de connaissances des cadres concernés (fonctions, géométrie analytique, analyse, etc.). Dans le premier type de tâche, le fait de disposer d'informations sur les représentants peut conduire à mettre en œuvre des arguments qualitatifs pour lier le registre graphique et le registre symbolique. En revanche, pour le deuxième type de tâche où les arguments qualitatifs ne sont pas suffisants, il est possible de solliciter la mise en œuvre de connaissances des cadres en jeu d'une manière plus ciblée. Notamment, dans les cas de passages du registre graphique vers le registre symbolique, ces connaissances permettent de contrôler le travail mathématique en jeu.

Prenant en compte la problématique pour articuler les registres graphique et symbolique des équations différentielle, ainsi que les caractéristiques de la géométrie dynamique et ses potentialités pour développer un environnement de travail mathématique dans le domaine des équations différentielles, nous avons formulé trois hypothèses de recherche. La **première hypothèse de recherche** porte sur les possibilités de favoriser l'établissement de liens entre les faits graphiques produits lors du déplacement des objets associés aux équations différentielles, et la nature fonctionnelle des expressions symboliques en jeu :

*Le déplacement d'objets dynamiques associés aux équations différentielles de la forme  $y'=f(x,y)$ , peut fournir un contexte pour établir un lien entre les variations de ces objets et la nature fonctionnelle de la fonction « f »*

**La deuxième hypothèse de recherche** concerne les possibilités du logiciel de géométrie dynamique de favoriser la construction de liens allant du registre graphique des solutions vers le registre symbolique de l'équation différentielle :

*« L'exploration d'une famille de courbes solutions d'une équation différentielle, dans un environnement de géométrie dynamique, peut permettre l'identification ou la construction d'un invariant caractérisant la famille de courbes, et éventuellement à partir de celui-ci d'obtenir l'équation différentielle associée »*

Nous avons également formulé une **troisième hypothèse de recherche** concernant les possibilités de susciter l'élaboration d'arguments mathématiques liant directement (sans passer par la résolution de l'équation différentielle) les phénomènes graphiques identifiés avec l'expression symbolique des équations différentielles :

*La demande de justifier les faits graphiques issus du déplacement d'objets dynamiques associés aux équations différentielles de la forme  $y'=f(x,y)$  peut susciter l'élaboration d'arguments mathématiques mettant en relation directe cette expression symbolique avec les phénomènes graphiques identifiés, et elle engage donc l'usage de connaissances mathématiques des cadres des fonctions, de géométrie analytique, de l'analyse.*

Pour tester ces hypothèses, nous avons conçu une ingénierie didactique qui a été mise en place avec des étudiants de CAPES. La phase de conception et d'analyse *a priori* a été présentée dans le chapitre 2, et la phase d'expérimentation a été présentée dans les chapitres 3 et 4. Nous présentons par la suite, à partir des résultats obtenus dans ce travail, quelques éléments de réponse aux questions de recherche que nous nous sommes posées. Ils concernent principalement : la géométrie dynamique et la construction de liens fonctionnels entre objets dynamiques et équations différentielles ; la géométrie dynamique et le passage du registre graphique vers le registre symbolique des équations différentielles ; l'exploration dynamique et la formulation d'arguments mathématiques pour lier directement les registres graphique et symbolique des équations différentielles ; la géométrie dynamique et les rapports des étudiants aux connaissances mathématiques élémentaires.

## **La géométrie dynamique et la construction de liens fonctionnels entre objets dynamiques et équations différentielles**

L'analyse des situations où l'exploration graphique se faisait à l'aide d'un vecteur dynamique et de l'outil « Trace » de Cabri (la première situation de l'année 2003, et les situations d'association de vecteurs tangents dynamiques à des équations différentielles de l'année 2004), montre que les variations de la pente du vecteur dynamique, lors de son déplacement, apparaissent comme un phénomène perceptif à partir duquel les étudiants arrivent à établir des liens fonctionnels entre ces variations et l'expression symbolique de l'équation différentielle associée. Les observations montrent que les étudiants lient les propriétés graphiques identifiées, grâce au déplacement des vecteurs dynamiques et de l'outil « Trace » de Cabri, avec les caractéristiques algébriques de la fonction  $f$  qui intervient dans l'expression symbolique  $y'=f(x,y)$ . Pourtant ces mises en relation entre le registre graphique et le registre symbolique sont établies après plusieurs tentatives et restent parfois encore faibles, et très

---

contextualisées. Nous avons constaté que quelquefois ces liens ne consistaient qu'à faire des justifications numériques.

Même si les liens établis par les étudiants ne sont pas très solides, ils confirment la prise en compte de la nature fonctionnelle de  $f$  dans l'expression symbolique  $y'=f(x,y)$ . Les expressions symboliques ne sont pas considérées simplement comme des équations qu'il faut résoudre par une méthode algébrique : ces expressions comportent dès lors un rapport différent avec le registre graphique du champ de vecteurs. Les observables confirment que les étudiants arrivent à mettre en relation des propriétés graphiques issues du déplacement des vecteurs dynamiques avec des propriétés algébriques des expressions symboliques. Nous avons constaté que cette mise en relation reposait sur l'articulation de certains invariants graphiques, ou certaines variations du vecteur dynamique, avec l'expression symbolique de l'équation différentielle. Par exemple, des constats tels que : la pente du vecteur dynamique ne change pas selon s'il se déplace suivant une certaine direction, ont été liés aux caractéristiques algébriques des expressions symboliques de l'équation différentielle. De même, certains constats tels que : la pente du vecteur dynamique est toujours négative sur une région du plan, ont été liés aux propriétés des expressions symboliques de l'équation différentielle. Ces résultats confirment notre première hypothèse de recherche : la géométrie dynamique fournit un contexte pour établir des liens fonctionnels entre l'expression symbolique de l'équation différentielle et des objets dynamiques qui lui sont associés.

### **La géométrie dynamique et le passage du registre graphique vers le registre symbolique des équations différentielles**

Nous avons constaté dans les situations de mise en équation différentielle de familles de courbes (année 2003), conformément à notre deuxième hypothèse, que le recours aux outils offerts par l'environnement de géométrie dynamique avait permis aux étudiants d'identifier l'invariant caractérisant les familles de courbes. Dans le cas des exponentielles, la plupart des étudiants a identifié spontanément une propriété numérique invariante de la famille de courbes, tandis que pour la famille de tractrices, la totalité des étudiants a identifié l'invariant graphique des courbes, mais seulement après qu'on leur ait proposé d'identifier l'invariant géométrique des exponentielles.

En ce qui concerne la phase d'obtention de l'équation différentielle à partir de l'invariant identifié, nous avons constaté pour la famille d'exponentielles de sérieuses difficultés pour opérer le passage de la propriété numérique de la famille de courbes (pente de la droite tangente = ordonnée du point de tangence) vers le registre symbolique de l'équation différentielle, même si cette propriété était exprimée pour des courbes de la famille, sous la forme  $y'=y$ . Ce qui témoigne que cette équation n'a pas la même signification dans le cadre de la géométrie analytique que dans le cadre des équations différentielles. Ces difficultés pourraient aussi tenir au fait que la dérivée  $y'$  est conceptualisée comme dépendante seulement de la variable  $x$ , sans concevoir la possibilité d'avoir  $y'$  comme fonction de  $x$  et de  $y$ . En revanche, pour le cas de la famille de tractrices, le passage à l'expression symbolique à partir de l'invariant graphique des courbes semble poser moins de problèmes aux étudiants. Dans ce dernier cas, le traitement des données graphiques se fait en mettant en œuvre des connaissances du cadre de la géométrie analytique, ce qui permet de relier directement les variations des objets dynamiques aux variables  $x$  et  $y$ , et qui rend le passage au registre symbolique des équations différentielles moins difficile.

Nous avons constaté, lors de la phase de justification, que le recours à des arguments fondés sur la résolution algébrique des équations différentielles est privilégié. Cependant, l'environnement de géométrie dynamique a favorisé aussi l'élaboration d'arguments liant directement les propriétés graphiques des familles de courbes aux propriétés algébriques des équations différentielles.

### **L'exploration dynamique et la formulation d'arguments mathématiques pour lier directement les registres graphique et symbolique**

Nous avons constaté, à partir des résultats du questionnaire initial de 2003, que de façon générale les étudiants de CAPES avaient de nombreuses difficultés à faire fonctionner spontanément des connaissances élémentaires dans des tâches requérant plusieurs passages entre les registres de représentation. En revanche, quand les étudiants travaillent en géométrie dynamique, des indices témoignent de certains apports de cet environnement pour articuler directement les registres graphique et symbolique des équations différentielles. Alors que les situations proposées privilégiaient le passage du registre graphique vers le registre symbolique, l'analyse du travail des étudiants montre cependant qu'ils arrivent à effectuer le passage entre ces registres dans les deux sens. Nous avons constaté certains cas où les étudiants raisonnaient à partir des expressions symboliques, et où l'outil informatique était donc utilisé comme moyen de vérification des conjectures faites.

Même si les étudiants cherchent, dès que possible, à élaborer des arguments fondés sur la résolution algébrique des équations différentielles pour justifier les comportements graphiques identifiés, nous avons remarqué que les possibilités d'exploration et de vérification offertes par l'environnement de géométrie dynamique, permettaient aux étudiants, conformément à la troisième hypothèse de recherche, de formuler d'autres types d'arguments, tels que : des arguments liant le sens de variation des solutions à l'expression symbolique de l'équation différentielle, des arguments établissant un lien direct des propriétés graphiques d'une famille de courbes ou des vecteurs dynamiques, avec les variables intervenant dans l'expression symbolique de l'équation différentielle, etc.

D'après les observations, certains faits graphiques ont été plus facilement mis en relation avec les expressions symboliques, comme cela a été le cas pour l'isocline zéro et les discontinuités. En ce qui concerne l'isocline zéro, la plupart des étudiants relient les registres graphique et symbolique pour ce cas particulier. Les autres liens établis entre les variations de la pente du vecteur dynamique, tels que le signe de la pente et l'expression symbolique, ont été construits de manière indépendante par rapport à l'isocline zéro. Par contre, les changements brusques de la pente du vecteur dynamique au voisinage des discontinuités ont déclenché la formulation d'arguments qui prennent en compte le signe de la pente et les propriétés algébriques des équations différentielles. Nous avons constaté aussi que la mise en relation entre les registres graphique et symbolique pour une équation différentielle particulière, comme celle de la forme  $y'=f(x)$  ou  $y'=g(y)$ , ne signifie pas forcément que les stratégies utilisées seront réinvesties pour une autre équation différentielle.

---

## La géométrie dynamique et les relations des étudiants avec les connaissances mathématiques élémentaires

Nous avons constaté aussi un rôle de révélateur de la géométrie dynamique, relativement aux difficultés des étudiants dans leurs connaissances mathématiques, ainsi que des indices d'un rôle moteur joué par les rétroactions du milieu contribuant à des évolutions de ces connaissances. Les situations proposées faisaient intervenir de manière importante différentes connaissances mathématiques élémentaires. Nous avons constaté la faiblesse des connaissances des étudiants sur des notions telles que fonction, tangente, dérivée. Ces résultats confirment ceux obtenus par Pian (1999) : les étudiants de CAPES ont peu de connaissances mathématiques élémentaires disponibles.

Dans le cas qui nous occupe, la faiblesse de ces connaissances tient notamment aux caractéristiques épistémologiques des équations différentielles (les solutions sont des fonctions, l'expression symbolique met en jeu plus d'une fonction numérique) ainsi qu'aux types de raisonnements que l'articulation directe des registres graphique et symbolique met en jeu (il faut raisonner sur des fonctions pour lesquelles on ne connaît que leur dérivée).

Nous avons trouvé aussi que parfois les étudiants n'arrivaient pas à mettre en œuvre certaines connaissances, en raison d'images prototypiques liées aux notions mathématiques en jeu. Des images telles que : les courbes ayant un point d'inflexion ont une forme graphique particulière (associée à la forme cubique) ; les courbes solutions d'une équation différentielle sont composées de familles de courbes ayant toutes une forme graphique invariante ; les droites tangentes aux courbes sont réduites à la représentation des tangentes aux extrêmes d'une fonction. Ces images ont empêché la mobilisation des connaissances concernées.

Nous avons constaté aussi qu'une autre source de difficultés tenait à une absence de différenciation entre des notions mathématiques qui semblaient voisines, comme par exemple la non-dissociation entre l'équation d'une droite tangente à une courbe solution et l'équation différentielle.

Ces résultats montrent que l'introduction d'un environnement de géométrie dynamique pour l'étude des équations différentielles est un élément perturbateur, qui permet de révéler de nombreuses difficultés des étudiants relatives aux connaissances mathématiques élémentaires.

L'analyse du travail des étudiants montre aussi que dans certains cas, ils ont réussi à surmonter leurs difficultés, grâce aux rétroactions graphiques du logiciel, comme par exemple dans le cas des points d'inflexion, où le travail exploratoire a conduit les étudiants à admettre l'existence de courbes avec un point d'inflexion différent de celui des cubiques prototypiques. Dans d'autres cas, par exemple dans l'assimilation entre équation de la droite tangente et équation différentielle, l'accès aux outils informatiques semble seulement contribuer pour certains étudiants à invalider quelques stratégies, mais sans réussir à remettre en question des conjectures erronées.

## Questions soulevées par notre travail

Dans le premier chapitre, en nous appuyant sur d'autres recherches, nous avons signalé l'usage prédominant dans l'enseignement secondaire et universitaire, du graphique sous un mode idéogrammatique lors de l'étude des fonctions et de l'analyse. Nous avons signalé aussi une quasi-absence de tâches qui demandent le passage du graphique vers le symbolique concernant les notions mathématiques des cadres des fonctions et de l'analyse. Les résultats de notre recherche montrent que la plupart des difficultés des étudiants de CAPES pour articuler les registres graphique et symbolique des équations différentielles, concernent des connaissances mathématiques élémentaires acquises au lycée. Ces constats nous amènent à nous poser quelques questions telles que : Pourquoi l'enseignement au lycée ne donne t-il pas aux futurs étudiants d'éléments minimaux pour établir des liens entre le registre graphique et le registre symbolique des équations différentielles ? Vu le faible potentiel de l'environnement papier/crayon pour favoriser l'articulation des registres graphique et symbolique, nous nous demandons si un enseignement des notions mathématiques élémentaires au lycée dans un contexte de géométrie dynamique, où le graphique serait utilisé sous un mode opératoire, pourrait favoriser la mise en relation des registres graphique et symbolique sur des notions des cadres des fonctions et de l'analyse. Dans cet environnement, quel type de tâches informatique faudrait-il mettre à disposition des enseignants pour favoriser l'articulation des registres graphique et symbolique des fonctions ou de l'analyse ? Est-ce que le recours à des représentants graphiques dynamiques pourrait empêcher l'association des images prototypiques aux notions mathématiques élémentaires ?

Nous avons aussi remarqué, au premier chapitre, que l'enseignement universitaire ne favorisait pas le développement d'une pensée flexible alors que pourtant, cette flexibilité devrait être développée dans la formation des enseignants afin qu'ils puissent adapter leurs connaissances aux différentes situations rencontrées par leurs futurs élèves. Dans notre travail, nous avons trouvé des indices montrant que la perturbation d'un mode de pensée associatif, grâce aux fonctionnalités d'un environnement de géométrie dynamique et grâce au travail sur des tâches inhabituelles, pouvait favoriser chez les étudiants l'articulation des registres graphique et symbolique des équations différentielles. Compte tenu de ce que, dans un environnement de géométrie dynamique les représentants graphiques peuvent être construits avec des caractéristiques particulières, et que sont offerts différents outils qui jettent des ponts vers des cadres divers tels que le cadre numérique, le cadre algébrique, le cadre de la géométrie analytique, le cadre de l'analyse, etc. Nous nous interrogeons aussi sur l'existence d'autres types de tâches ou sur les possibilités de la géométrie dynamique pour favoriser la mise en relation de connaissances de cadres différents, pour l'étude des équations différentielles ou celle d'autres domaines mathématiques.

Finalement, d'un point de vue général, nous nous demandons s'il serait possible de trouver un équilibre dans l'enseignement des mathématiques à l'Université, qui d'une part permettrait de fournir toutes les connaissances théoriques nécessaires, mais d'autre part utiliserait les outils informatiques pour développer un mode de pensée flexible.



---

## **PERSPECTIVES**

Notre recherche a montré que l'environnement de géométrie dynamique pouvait contribuer à l'articulation des registres graphique et symbolique des équations différentielles. Les phénomènes graphiques suscités par le contexte dynamique ont favorisé la mise en place d'un travail mathématique des étudiants de CAPES, pour les interpréter. Cependant, le temps restreint dont nous avons disposé pour l'expérimentation, ne nous a pas permis de fortifier les liens développés par les étudiants, ni de tester en profondeur leur impact par une étude théorique de l'approche qualitative des équations différentielles. Une prolongation de cette recherche par un travail plus détaillé avec les étudiants, avec d'autres situations, sur un temps plus long, s'avère envisageable. De plus, dans le dispositif expérimental que nous avons conçu, le travail des étudiants a été fortement privilégié, et les interventions de l'enseignant ont été les plus réduites possibles. Alors, nous pensons que d'autres conditions de mise en place de ce type de dispositif expérimental, où des phases d'institutionnalisation de stratégies seraient considérées, pourraient permettre de faire fructifier la flexibilité acquise par les étudiants pour articuler les registres graphique et symbolique des équations différentielles.

Par ailleurs, compte tenu des situations proposées qui sollicitaient la mise en œuvre seulement de connaissances élémentaires du niveau du lycée, il pourrait être intéressant aussi d'étudier la mise en place de ce type de dispositif expérimental chez des étudiants d'Université débutants ou chez des lycéens.

## Références bibliographiques

- ARSLAN S., LABORDE, C. (2003), Un outil favorisant l'interaction entre cadres: CABRI. Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. *Actes du Congrès Européen ITEM*, Reims France.
- ARSLAN S. (2005), *L'Approche qualitative des équations différentielles en classe de Terminale S : Est-elle viable ? Quels sont les enjeux et les conséquences ?* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- ARTIGUE M., GAUTHERON, V. (1983), *Systèmes différentiels : étude graphique*, Paris : Cedic
- ARTIGUE M. (1989b), Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 9 n° 3, pp. 281-308.
- ARTIGUE M. (1989a), Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles en premier cycle universitaire. In *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, Grenoble, Année 1988-89, pp. 183-209.
- ARTIGUE M. (1992), Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices», In G. Harel et al. (Eds) *The Concept of Function. Aspects of Epistemology and Pedagogy*, 109-132. MAA Notes Number 25.
- BLANCHARD P., DEVANEY R., HALL G. (1998), *Differential equations*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole.
- BLOCH I. (2000), *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université. Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.
- BLOCH I. (2002), Un milieu graphique pour l'apprentissage de la notion de fonction au lycée. *Petit x*, 58, pp. 25-46.
- BORRELLI R., COLEMAN C. (1998), *Differential equations: A modeling perspective*. New York: Wiley.
- BOSCH M., FONSECA C., GASCON J. (2004), Incompletud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactique des mathématiques*, vol 24 n°2-3, pp. 205-250, la Pensée Sauvage, Grenoble.
- BRODETSKY S. (1919-20), The Graphical Treatment of Differential Equations, *The Mathematical Gazette*, IX (142, pp. 377-382, pp. 3-8, pp. 35-38; 1919), X (146, pp. 49-59; 1920)

- BROUSSEAU G. (1998), *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : la Pensée Sauvage Editions.
- CASTELA C. (2004), Institutions influencing mathematics students' private work : a factor of academic achievement. *Educational Studies in Mathematics* 57, pp. 33-63, Kluwer Academic Publishers.
- CASTRO F., PARDO H. (2004), El computador en la clase de matemáticas un enfoque semiótico, présenté in *XVI Simposio Iberoamericano de enseñanza de la matemática*, Castellon, España,  
[http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/82\\_fernando\\_castro.doc](http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones/82_fernando_castro.doc)
- CHAUVAT G. (1998-1999), Courbes et fonctions au college. *Petit x*, n°51, pp. 23-44
- CRAWFORD K., GORDON S., NICHOLAS J., PROSSER M., (1998), Qualitatively different experiences of learning mathematics at university. *Learning and instruction*, Vol 8 n°5 pp. 455-468. Elsevier.
- DIACU F. (2000), *An introduction to differential equations: Order and chaos*. New York: W. H. Freeman.
- DOUADY R. (1986), Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement, *Repères IREM*, Vol. 6, p. 132-158.
- DUVAL R. (1988), Graphiques et Equations : l'Articulation de deux registres, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 1, p. 235-253.
- DUVAL R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, Vol. 5, p. 37-65.
- DUVAL R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang, Berne.
- GUEUDET G. (2005), La transition secondaire-supérieur : Résultats de recherches didactiques et perspectives, présenté in *XIII<sup>e</sup> Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, ARDM
- HABRE S. (2000), Exploring Student's Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting, In *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 455-472.
- HERNÁNDEZ A. (1995), *Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Gráfico y Algebraico en relación con las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Tesis doctoral, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

- 
- HITT F. (2003), Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2 pp. 213-224.
- HUBBARD J., WEST B. (1991), *Differential equations : A dynamical systems approach*. New York: Springer-Verlag.
- JAMES M., KENT P., RAMSDEN P. (1997), “TangentFiel”: A tool for “webbing” the learning of differential equations. Présenté en *International Conference on Technology in Collegiate Mathematics*, Chicago.
- JOHSUA S., DUPIN J-J. (2003), *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Quadrige, PUF, Paris.
- LABORDE C., CAPPONI B. (1994), Cabri Géomètre constituant d’un milieu pour l’apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, n°1.2, pp. 165-210, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- LABORDE, C. (1997), Affronter la complexité des situations d’apprentissage des mathématiques en classe. Défis et tentatives. *Didaskalia*, n° 10, pp. 97-112.
- LABORDE C. (1999), Core Geometrical Knowledge for using the Modelling Power of Geometry with Cabri-Geometry. *Teaching Mathematics and its Applications*, The Institute of Mathematics and its Applications, Vol. 18, n° 4, pp. 166-171.
- LACASTA E. (1995), *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l’enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux I.
- LITHNER J. (2003), Student’s mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational studies in mathematics* n°52, p.29-55.
- LOMEN D., LOVELOCK D. (1999), *Differential equations: Graphics, models, data*. New York: Wiley.
- MARGOLINAS C. (1993), *De l’importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble : la Pensée Sauvage Editions.
- MASCHIETTO M. (2001), Fonctionnalités des représentations graphiques dans la résolution de problèmes d’analyse à l’Université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 21, n°1.2, pp. 123-156.
- MASCHIETTO M. (2002), *L’enseignement de l’analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l’environnement de calculatrices*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- MORENO J., LABORDE C. (2003), Articulation entre cadres et registres pour la modélisation par des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique. *Actes du Congrès Européen ITEM*, Reims, France.

- MORENO M., AZCÁRATE C. (2003), Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, In *Enseñanza de las Ciencias*, 2003, 21 (2), 265-280. Universitat Autònoma de Barcelona,  
<http://www.bib.uab.es/pub/ensenanzadelasciencias/02124521v21n2p265.pdf>
- PERRIN-GLORIAN M-J. (2001), Milieu, cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*. IREM : Université Paris 7.
- PIAN J. (1999), *Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels*. Cahier de Didirem, Université Paris 7.
- PRASLON F. (2000), *Continuités et ruptures dans la transition terminale S / DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
- RASMUSSEN C. (1996), Learning obstacles in differential equations, *Proceedings of the twenty-second PME Conference*, Stellenbosch, South Africa pp. 25-32.
- RASMUSSEN C. (2001), New directions in differential equations : A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, pp. 55-87
- ROBERT A. (1998), Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université, In *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 18, n° 2, pp. 139-190, La Pensée Sauvage, Grenoble.
- ROGALSKI M. (1987), *L'étude qualitative des équations différentielles. Quelques procédés pour étudier le comportement des solutions d'une équation différentielle*. Université de Lille
- SABELLA M. (1996), Student Understanding of Topics in Differential Equations. In site du Physics Education Research Group, University of Maryland,  
<http://www.physics.umd.edu/rgroups/ripe/perg/plinks/diffeq.htm>
- SAGLAM A. (2004), *Les équations différentielles en mathématiques et en physique : étude des conditions de leur enseignement et caractérisation des rapports personnels des étudiants de première année d'université à cet objet de savoir*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.
- VERA H., CEMBORAIN M. (1999), Una propuesta constructivista en informática educacional para la enseñanza de la matemática. In *Agenda Académica On-Line*, Vol 6, N#1. Universidad Central de Venezuela,  
<http://www.sadpro.ucv.ve/agenda/online/vol6n1/a01.html>
- VERGNAUD G. (1990), La théorie des champ conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 10, n°2.3, pp. 133-170.

---

VERGNAUD G. (1999), On n'a jamais fini de relire Vygotski et Piaget, In Y. Rochex (Ed.)  
*Avec Vigotski La dispute.*

ZANDIEH M., MCDONALD D. (1999), Student understanding of equilibrium solution in  
differential equations. In F. Hitt et M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21<sup>st</sup> Annual  
Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology  
of Mathematics Education*, Columbus, OH: ERIC, pp. 253-258.



# **A N N E X E S**





# ANNEXES

## ANNEXE 1 : L'EXPERIMENTATION DE L'ANNEE 2003

Les fiches .....	317
Les résolutions des étudiants.....	333
Binôme E22/E23.....	335
Binôme E3/E4.....	345
Binôme E1/E2.....	357
Les transcriptions.....	367
Binôme E22/E23.....	369
Binôme E3/E4.....	407
Binôme E1/E2.....	445

## ANNEXE 2 : L'EXPERIMENTATION DE L'ANNEE 2004

Les fiches .....	489
Les résolutions des étudiants.....	497
Travail individuel :	
E'1, E'4, E'12, E'14, E'15 et E'17...	499
Travail par binômes :	
E'1/E'4, E'12/E'17 et E'14/E'15 .....	509
Les transcriptions.....	517
Binôme E'1/E'4.....	519
Binôme E'12/E'17 .....	537
Binôme E'14/E'15.....	559



# **ANNEXE 1**

## **L'EXPERIMENTATION DE L'ANNEE 2003**

**Les fiches  
Les résolutions des étudiants  
Les transcriptions**



# **LES FICHES**

**L'expérimentation de l'année 2003**

**Résoudre une équation différentielle. Qu'est-ce que cela veut dire ?**

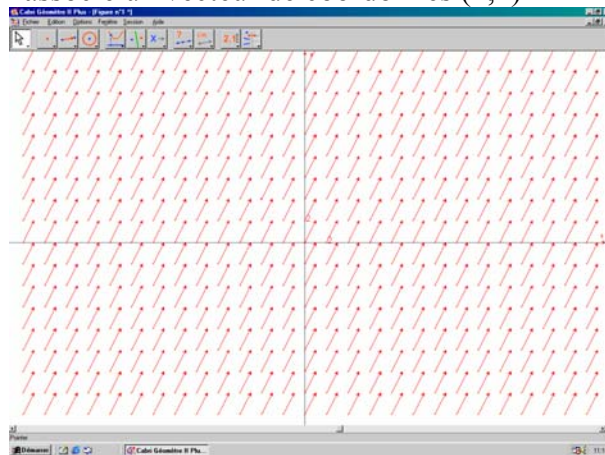
1) Vos idées nous intéressent !

a) A votre avis, qu'est-ce qu'une équation différentielle? Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle? A quoi sert une équation différentielle?

b) Donnez trois exemples d'équations différentielles

c) Quels sont les différents moyens d'exprimer ou de représenter des solutions d'une équation différentielle?

2) Le champ de vecteurs ci-dessous représente une fonction vectorielle qui à chaque point  $(x,y)$  du plan associe un vecteur de coordonnées  $(1,2)$



a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin? Justifiez votre réponse.

b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?

c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

3) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .

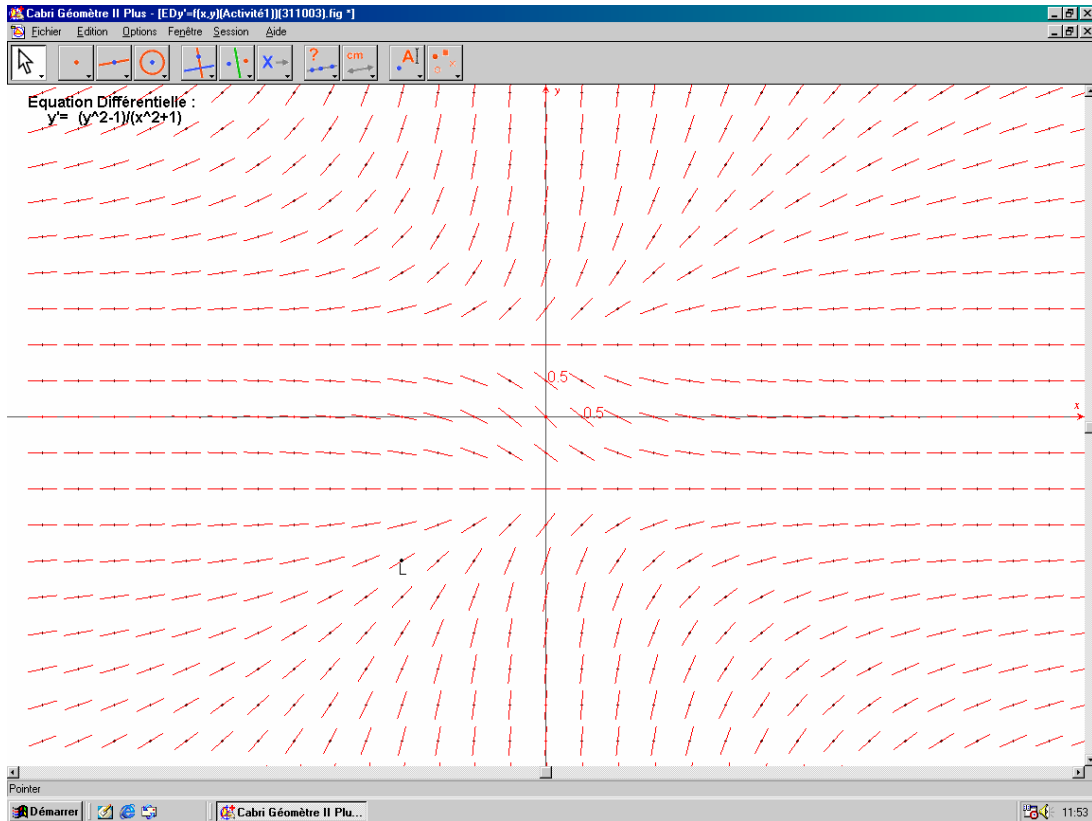
4) On considère l'équation différentielle  $y' = y^2 - x$ . Si  $C$  est la courbe associée à la solution de l'équation qui passe par le point  $M(-2,1)$ , décrire le comportement de  $C$  au voisinage du point  $M$ . Donner une valeur approchée de l'ordonnée du point  $N$  de  $C$  qui a comme abscisse  $x = -1,5$ .



**Première Activité**

## Partie 1

Le dessin ci-dessous montre le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$



- Dessiner quelques courbes solutions sur l'écran ci-dessus et décrire le comportement des courbes solutions.
- Soit  $C_1$  la courbe solution qui passe par le point  $L(-2,-2)$ . Décrire l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$ . Qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini? Justifier votre réponse.

a)

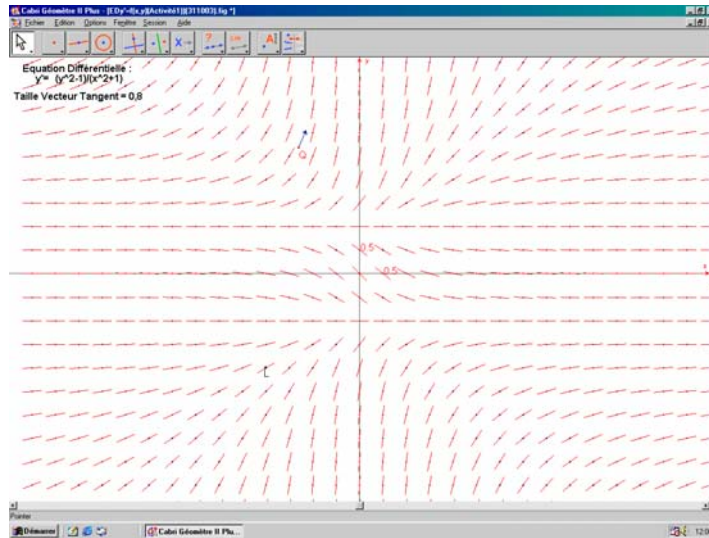
b)

**Première Activité**

Partie 2

Ouvrir la figure "Activité 1"

Sur l'écran s'affiche le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$ . Le vecteur d'origine Q est déplaçable.




- a) Déplacer le point Q et écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$  à partir de ce que vous voyez à l'écran.  $C_1$  est la courbe solution qui passe par le point L(-2,2).

- b) Le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace. Comment l'utiliser pour avoir une idée d'une courbe solution passant par un point donné?

- c) Classer les solutions par paquets, selon leur comportement. Combien de différents paquets on peut obtenir? Justifier la réponse.

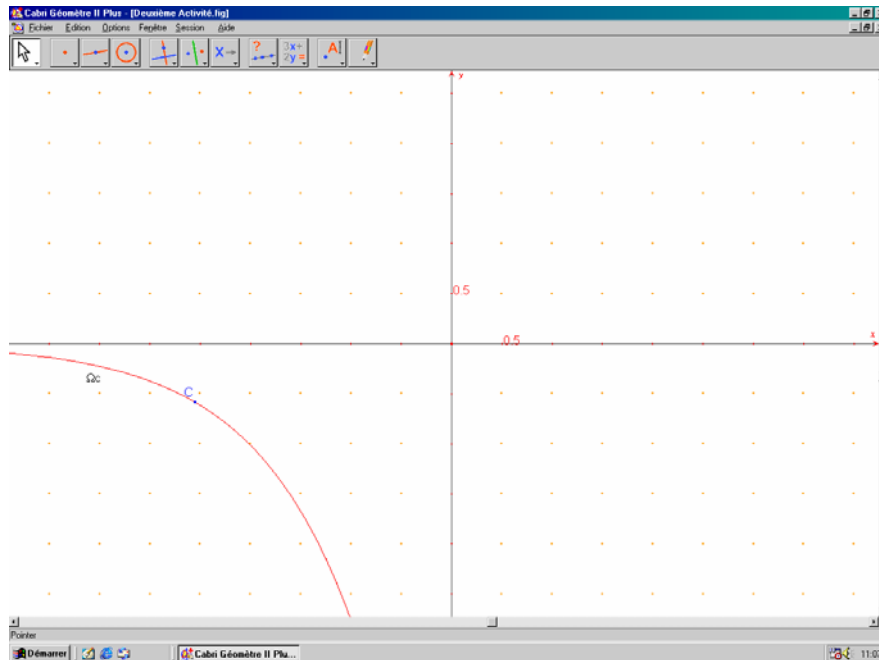


- d) Pour chaque paquet de courbes solutions, décrire leur comportement quand  $x$  tend vers plus l'infini. Justifier la réponse.



**Deuxième Activité**

Ouvrez la figure "Deuxième Activité"



On considère une famille de courbes  $\Omega$ . Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega_C$ .

- 1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Omega$ .  
Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille?

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Groupe : \_\_\_\_\_

- 2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ?

- 3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ?

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

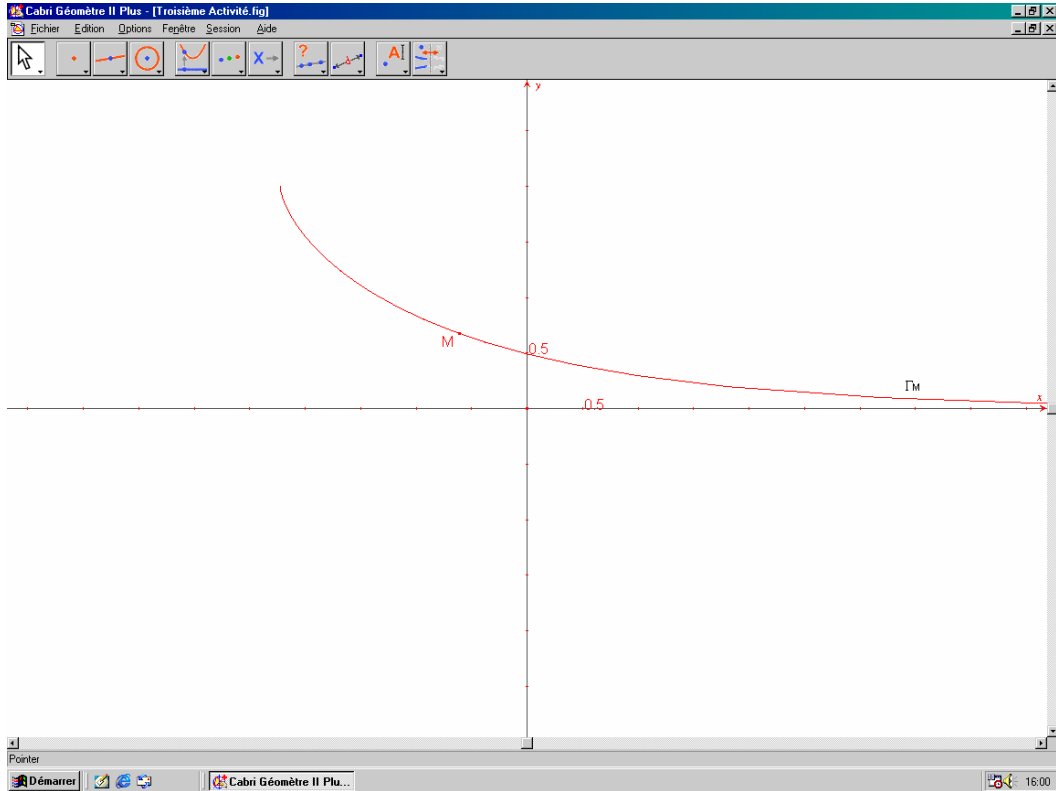
Groupe : \_\_\_\_\_

- 4) Dans Cabri, pouvez-vous vérifier que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ? Si oui, comment?

- 5) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ? Si oui, lesquels?

**Troisième Activité**

Ouvrez la figure "Troisième Activité"



On considère une famille de courbes  $\Gamma$ . Le point  $M$  est déplaçable sur tout le plan. A chaque point  $M$  de la bande  $0 < y < 2$  correspond une courbe  $\Gamma_M$ .

- 1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Gamma$ .

Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille?

2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$ ?

3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Gamma$ ?

4) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$ ? Si oui, lesquels?



IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003

Groupe : \_\_\_\_\_

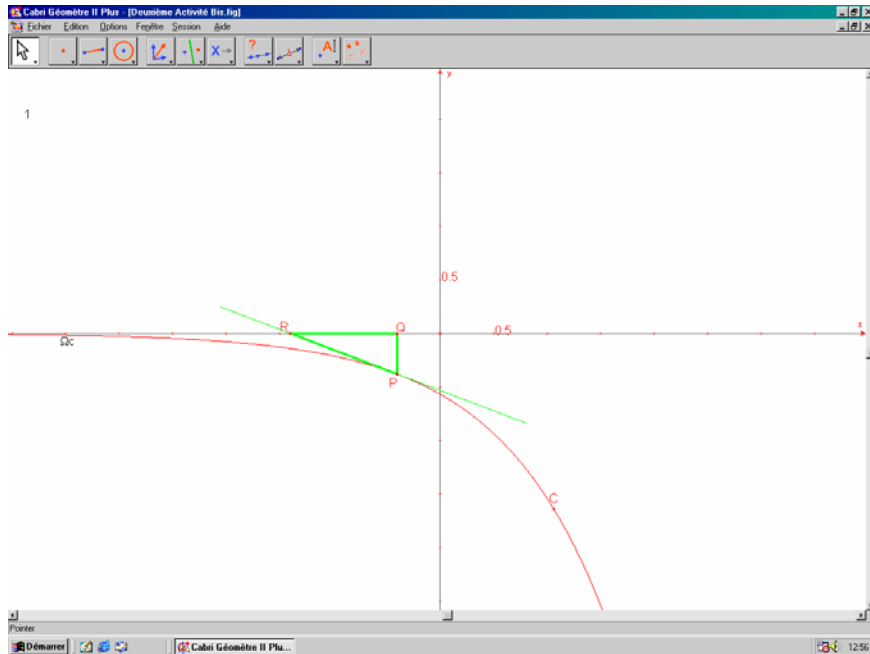
PLC1 Mathématiques

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

**Deuxième Activité Bis**

Ouvrez la figure "Deuxième Activité Bis"



On considère la même famille de courbes  $\Omega$  que dans la deuxième activité. Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega_C$ . Le point P est déplaçable sur la courbe  $\Omega_C$ .

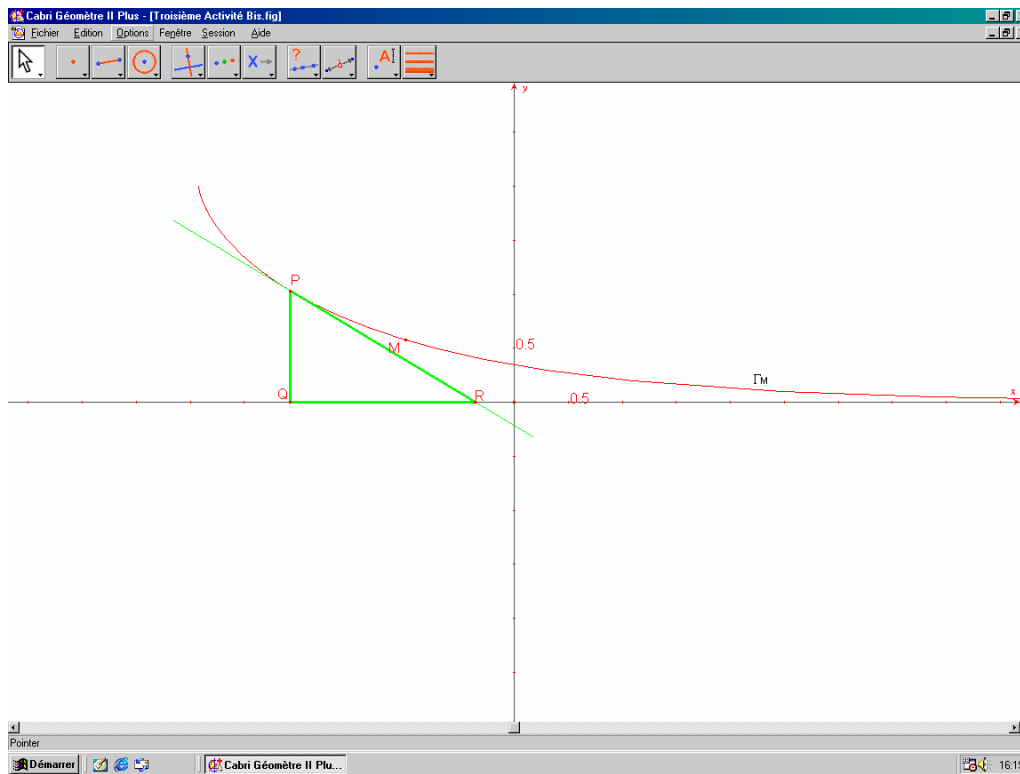
- 1) La tâche consiste à identifier des propriétés géométriques invariantes associées à la famille de courbes  $\Omega$ .  
Quelles propriétés géométriques invariantes pouvez-vous associer à cette famille de courbes?

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Groupe : \_\_\_\_\_

- 2) Est-il possible de déduire l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$  à partir des propriétés invariantes repérées? Si oui, comment?

## Construction auxiliaire pour la mise en équation différentielle de la famille de tractrices







# **LES RESOLUTIONS DES ETUDIANTS**

**Expérimentation de l'année 2003**



# **Binôme E22/E23**

**Les productions écrites**

**L'expérimentation de l'année 2003**



### Questionnaire initial (travail individuel)

Etudiant E22

E22

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003      Groupe : \_\_\_\_\_  
 PLC1 Mathématiques      Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

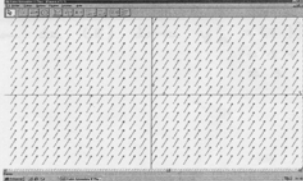
**Résoudre une équation différentielle. Qu'est-ce que cela veut dire ?**

1) Vos idées nous intéressent !

a) A votre avis, qu'est-ce qu'une équation différentielle? Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle? A quoi sert une équation différentielle?  
 a) Donnez trois exemples d'équations différentielles  
 a) Quels sont les différents moyens d'exprimer ou de représenter des solutions d'une équation différentielle?

a) Une équation différentielle est de la forme :  
 $a_n y^{(n)}(t) + \dots + a_1(t) y'(t) + a_0(t) y(t) = b(t)$  (E)  
 où  $y(t)$  est l'inconnue,  $a_i(t)$  sont les coeff de (E) dépendant ou non de  $t$  et  $b(t)$  le second membre constant ou non.  
 Une solution de (E) est une fonction  $y(t)$ ,  $C^\infty$  qui vérifie (E). Une eq. diff sert à modéliser un phénomène physique par exemple.  
 b)  
 •  $y'(t) + 2y(t) = 5$  (coeff. constants) (linéaire)  
 •  $y''(t) + 2t y'(t) + e^t y(t) = 1+t$  (linéaire à coeff var. cont.)  
 •  $y''(t) + 2y'(t) = 0$  (non linéaire).  
 c)  
 On peut représenter une solution d'une eq. diff par une fonction :  $y(t) = 2e^t$  par ex; ou par un graphe.

2) Le champ de vecteurs ci-dessous représente une fonction vectorielle qui à chaque point (x,y) du plan associe un vecteur de coordonnées (1,2)



a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin?  
 b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?

Introduction - 1

E22


c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

a)  
 b)  
 c)

3) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .

on  $(-2, 3)$ :  
 $y' = -1$

$y$  est sol. d'1 eq. diff du 1<sup>er</sup> ordre  $\Rightarrow y = C e^{-ax}$   
 où on a :  $y' + ax = 0$ .



4) On considère l'équation différentielle  $y' = y - x$ . Si C est la courbe associée à la solution de l'équation qui passe par le point  $M(-2,1)$ , décrire le comportement de C au voisinage du point M. Donner une valeur approchée de l'ordonnée du point N de C qui a comme abscisse  $x = -1,5$ .

M est solution de (E) donc  $y'_M = (1)^{-(-2)} - (-2)$   
 $= 1 + 2$   
 $= 3$

Introduction - 2

E23

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003      Groupe :

PLC1 Mathématiques      Nom et Prénom :

**Résoudre une équation différentielle. Qu'est-ce que cela veut dire ?**

1) Vos idées nous intéressent !

a) A votre avis, qu'est-ce qu'une équation différentielle? Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle? A quoi sert une équation différentielle?

b) Donnez trois exemples d'équations différentielles

c) Quels sont les différents moyens d'exprimer ou de représenter des solutions d'une équation différentielle?

a) C'est une équation dont l'inconnue est une fonction et composée des dérivées de cette fonction. Une équation différentielle sert à déterminer une fonction en fonction de ses dérivées.

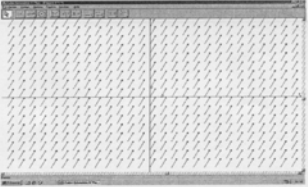
b)  $2x'' + 5x' + 3x = 7$

$2x' + 5x = 7t + 3$

$(2y) x'' + (5y + 7) x' + 3x = y$

c)

2) Le champ de vecteurs ci-dessous représente une fonction vectorielle qui à chaque point (x,y) du plan associe un vecteur de coordonnées (1,2)



a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin?

b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?

Introduction - 1

---

E23


c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

a)


b)

c)

3) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .



4) On considère l'équation différentielle  $y' = y^2 - x$ . Si C est la courbe associée à la solution de l'équation qui passe par le point  $M(-2,1)$ , décrire le comportement de C au voisinage du point M. Donner une valeur approchée de l'ordonnée du point N de C qui a comme abscisse  $x = -1,5$ .



Introduction - 2

# Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$

Binôme E22/E23

8,22-23

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003      Groupe :

PLC1 Mathématiques      Nom et Prénom :  
 Nom et Prénom :

**Première Activité**

Partie 1

Le dessin ci-dessous montre le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$

a) Dessiner quelques courbes solutions sur l'écran ci-dessus et décrire le comportement des courbes solutions.  
 b) Soit  $C_1$  la courbe solution qui passe par le point  $L(-2,-2)$ . Décrire l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$ . Qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini? Justifier votre réponse.

a) les courbes  $y=1$  et  $y=-1$  sont solutions  
 les courbes solutions au-dessus de  $y=1$  restent au-dessus de  $y=1$  et CV vers  $y=1$  car  $x \rightarrow -\infty$   
 De ce vu pour les courbes en dessous de  $y=-1$   
 Entre  $y=-1$  et  $y=1$   
 b)  $C_1$  est croissante sur  $[-3,3]$   
 lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $C_1$  admet comme asymptote  $y=-1$ .  
 lorsque  $x \rightarrow -\infty$ ,  $y' \rightarrow 0$  donc  $C_1$  admet une asymptote horizontale.

1<sup>ère</sup> Activité - 1

Partie 2

Ouvrir la figure "Activité 1"

Sur l'écran s'affiche le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$ . Le vecteur d'origine Q est déplaçable.

a) Déplacer le point Q et écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$ , à partir de ce que vous voyez à l'écran.  
 b) Le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace. Comment l'utiliser pour avoir une idée d'une courbe solution passant par un point donné?  
 c) Classifier les solutions par paquets, selon leur comportement. Combien de différents paquets on peut obtenir? Justifier la réponse.  
 d) Pour chaque paquet de courbes solutions, décrire leur comportement quand  $x$  tend vers plus l'infini. Justifier la réponse.

a) le vecteur issu du point Q nous indique le sens de la trajectoire de  $C_1$  qui CV lorsque  $x \rightarrow +\infty$  vers  $y=-1$ .  
 b) Au part du point donné - le vecteur d'origine Q nous donne une direction et un sens que l'on suit au fur et à mesure que le vecteur progresse: ainsi on a l'allure de la courbe.  
 c) On note 3 paquets différents:  
 les solutions situées au-dessus de  $y=1$  ①  
 les solutions entre  $y=1$  et  $y=-1$  ②  
 les solutions situées au-dessous de  $y=-1$  ③  
 On ne peut trouver une solution coupant  $y=1$  ou  $y=-1$  car sinon en un point on aurait 2 courbes solutions - Or on a  $y' = f(x,y)$  avec  $f \in C^1$  donc d'après Cauchy-Lipschitz, il existe une unique solution en un point.

aide de mes L'ABORDE

a) Pour le paquet ①: } les courbes solutions divergent  
 Pour le paquet ②:  
 Pour le paquet ③:

1<sup>ère</sup> Activité - 2

# Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles

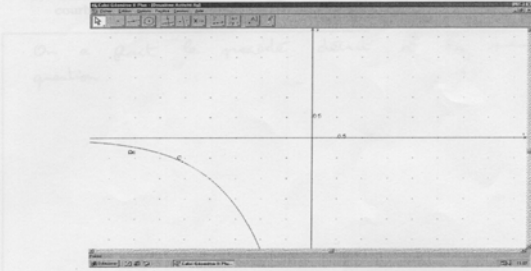
Binôme E22/E23

E22/E23

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques

Groupe :  
 Nom et Prénom :  
 Nom et Prénom :

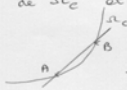
**Deuxième Activité**  
 Ouvrez la figure "Deuxième Activité"



On considère une famille de courbes  $\Omega$ . Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega_C$ .

1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Omega$ .  
 Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille?

On prend un point de  $\Omega_C$  et on trace la tangente à  $\Omega_C$  en ce point.  
base de la tangente:



prend 2 points de  $\Omega_C$   
 A et B  
 trace la droite passant par A et B.

Églisson le pt A jusqu'à ce que A et B soient confondus  
 $\rightarrow$  tangente en ce point  $A=B$

On demande la pente de cette tangente ainsi que les coordonnées du point. On remarque que  $y' = y$ .

Deuxième Activité Séance 2- 1

---

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

Groupe : \_\_\_\_\_

2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ?

On a fait le procédé décrit à la première question.

On regarde en fait la tangente en un point de la courbe. On prend deux points de la courbe, on trace la droite passant par ces deux points. On déplace ces deux points jusqu'à ce qu'ils soient confondus. On demande la pente de cette tangente ainsi que les coordonnées du point. On remarque que  $y' = y$ .

Deuxième Activité Séance 2- 2

## Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles

### Binôme E22/E23

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : \_\_\_\_\_

3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ?

Si  $y' = y$  alors  $y = A e^x$  où  $A \in \mathbb{R}$ .

On trace la courbe  $y = e^x$  par exemple.

On regarde si les tangentes à  $\Omega_c$  et  $\exp(x)$  en un point de même ordonnée sont parallèles.

Elles le sont donc  $\exp(x) \in \Omega$  la famille de courbes  $\Omega$ .

ou On peut vérifier que lorsqu'on déplace  $c$ ,  $\Omega_c$  et  $\exp(x)$  sont confondues.

Deuxième Activité Séance 2-3

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : \_\_\_\_\_

4) Dans Cabri, pouvez-vous vérifier que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ? Si oui, comment?

On peut répondre la positivité de la question 3.1.

On trace plusieurs courbes d'équation  $y = \exp(x)$ ,  $y = \pi \exp(x)$ ,  $y = 20 \exp(x)$ ...

On trace la parallèle à  $(Ox)$  passant par le point de  $\Omega_c$  où  $c$  a la tangente.

$\Rightarrow$  On obtient des points de même ordonnée.

On trace les tangentes en ces points aux courbes ( $\exp(x)$ ,  $\pi \exp(x)$ ,  $20 \exp(x)$ ...).

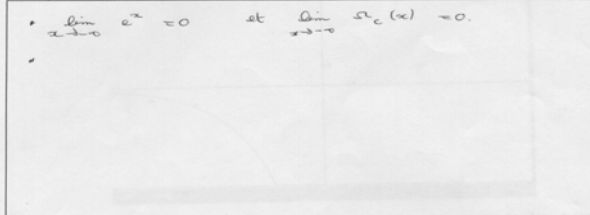
On vérifie avec Cabri que ces tangentes sont parallèles (avec la fonction "parallèle ?").

Deuxième Activité Séance 2-4

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : \_\_\_\_\_

5) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ? Si oui, lesquels?

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Omega_c(x) = 0$ .



Deuxième Activité Séance 2-5

# Mise en équation d'une famille d'exponentielles (stratégie graphique)

Binôme E22/E23

E22/E23

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques  
 Deuxième Activité Bis

Nom et Prénom :  
 Nom et Prénom :

Groupe :

Ouvrez la figure "Deuxième Activité Bis"

On considère la même famille de courbes  $\Omega$  que dans la deuxième activité. Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega_C$ . Le point P est déplaçable sur la courbe  $\Omega_C$ .

1) La tâche consiste à identifier des propriétés géométriques invariantes associées à la famille de courbes  $\Omega$ . Quelles propriétés géométriques pouvez-vous associer à cette famille de courbes?

On remarque que la distance RQ est toujours la même, égale à 1.

Deuxième Activité Bis, Séance 2 - 1

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : \_\_\_\_\_

2) Est-il possible de déduire l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$  à partir des propriétés invariantes repérées? Si oui, comment?

On peut avoir l'équation de la tangente à  $\Omega_C$  en P car elle passe par P et R.  
 On peut avoir les coordonnées de P  $\Rightarrow P(x_p, y_p)$   
 $\Rightarrow Q =$  projeté orthogonal de P sur  $(Ox)$   
 $\rightarrow Q(x_p, 0)$   
 $RQ = 1 \Rightarrow R(x_p - 1, 0)$   
 On a le coeff de la tangente :  $\frac{y_p - 0}{x_p - (x_p - 1)} = \frac{y_p}{1} = y_p$   
 On retrouve bien  $y' = y$

Deuxième Activité Bis, Séance 2 - 2

## Mise en équation différentielle d'une famille de trajectrices

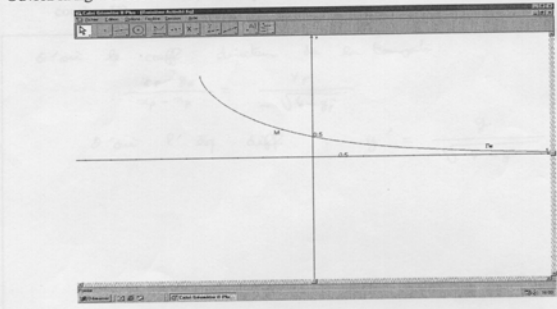
### Binôme E22/E23

E22/E23

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques

Groupe : \_\_\_\_\_  
 Nom et Prénom : \_\_\_\_\_  
 Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

**Troisième Activité**  
 Ouvrez la figure "Troisième Activité"



On considère une famille de courbes  $\Gamma$ . Le point M est déplaçable sur tout le plan. A chaque point M de la bande  $0 < y < 2$  correspond une courbe  $\Gamma_M$ .

1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Gamma$ .  
 Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille?

On remarque, grâce à l'activité 3 les, que  
 $PR = \text{côté} = 2$ .

Or (PR) est la tangente à la courbe  $\Gamma$  en P.

Soit  $P(x_p, y_p)$   $R(x_p, 0)$

Or  $\sqrt{(x_p - x_R)^2 + y_p^2} = PR = 2$

$x_p = x_p + QR$  avec  $QR^2 = PR^2 - PQ^2 = 4 - y_p^2$

Soit  $x_R = x_p + \sqrt{4 - y_p^2}$  (soit au  $x=2$ )

Troisième Activité, Séance 2- 1

---

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : \_\_\_\_\_

2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$ ?

Soit la coeff. direction de la tangente :

$$\frac{y_p - y_R}{x_p - x_R} = \frac{y_p}{-\sqrt{4 - y_p^2}}$$

Soit l'éq diff :  $y' = \frac{y}{-\sqrt{4 - y^2}}$

Troisième Activité, Séance 2- 2

## Mise en équation différentielle d'une famille de trajectoires

Binôme E22/E23

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : \_\_\_\_\_

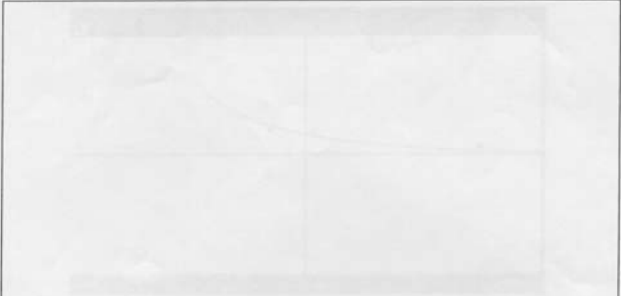
3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Gamma$ ?

On n'a pas à intégrer l'équation pour trouver une seule solution et faire le même raisonnement que dans l'activité 2.

Troisième Activité, Séance 2-3

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : \_\_\_\_\_

4) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$ ? Si oui, lesquels?



Troisième Activité, Séance 2-4





# **Binôme E3/E4**

**Les productions écrites**

**L'expérimentation de l'année 2003**

### Questionnaire initial (travail individuel)

Etudiant E3

E3

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003      Groupe :  
 PLC1 Mathématiques      Nom et Prénom :

**Résoudre une équation différentielle. Qu'est-ce que cela veut dire ?**

1) Vos idées nous intéressent !

a) A votre avis, qu'est-ce qu'une équation différentielle? Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle? A quoi sert une équation différentielle?

C'est une équation fonctionnelle reliant une fonction et sa ou ses dérivées selon son ordre.  
 La solution d'une équation différentielle est une famille de fonction. C'est un espace vectoriel.  
 Une équation différentielle sert à modéliser une situation physique, d'évolution de population ...

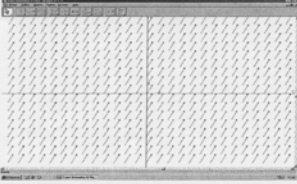
b) Donnez trois exemples d'équations différentielles

$a(x)y' + b(x)y = 0$  homogène à coeff constant  
 $a(x)y'' + b(x)y' = c(x)$  avec 2nd membre avec a, b continus  
 $\sin x y' + \cos x y' + y = 0$  générale

c) Quels sont les différents moyens d'exprimer ou de représenter des solutions d'une équation différentielle?

Pour une E.D homogène: une famille de courbes  
 avec 2nd membre: une courbe

2) Le champ de vecteurs ci-dessous représente une fonction vectorielle qui à chaque point (x,y) du plan associe un vecteur de coordonnées (1,2)



Introduction - 1

Rq: Les questions concernent les équations différentielles généralisées.

a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin? Justifiez votre réponse.

avec les courbes isoclines

b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?

Elles seront croissantes.

c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

$y'' = 2y$

3) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .

4) On considère l'équation différentielle  $y' = y^2 - x$ . Si C est la courbe associée à la solution de l'équation qui passe par le point  $M(-2,1)$ , décrire le comportement de C au voisinage du point M. Donner une valeur approchée de l'ordonnée du point N de C qui a comme abscisse  $x=1,5$ .

Introduction - 2

E4

IUFM Grenoble - Chambéry Continuum 2003 Groupe :  
 PLCI Mathématiques Nom et Prénom :

**Résoudre une équation différentielle. Qu'est-ce que cela veut dire ?**

1) Vos idées nous intéressent !

a) A votre avis, qu'est-ce qu'une équation différentielle? Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle? A quoi sert une équation différentielle?

une équation différentielle est une équation dans laquelle interviennent des dérivées n-èmes.  
 La solution d'une équation différentielle est une famille de fonctions qui forment un espace vectoriel. Elle est unique sous une condition initiale donnée.  
 La solution d'une équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière.

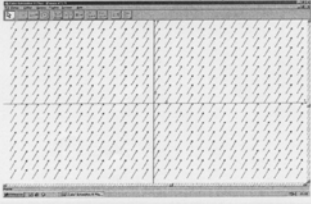
b) Donnez trois exemples d'équations différentielles

$y'' = ay$   $y' = ay$   
 $ay'' + by' + cy = x^2$

c) Quels sont les différents moyens d'exprimer ou de représenter des solutions d'une équation différentielle?

on peut représenter les solutions d'une équation différentielle par des courbes.  
 on peut exprimer les solutions d'une équation différentielle par des ensembles de points.

2) Le champ de vecteurs ci-dessous représente une fonction vectorielle qui à chaque point (x,y) du plan associe un vecteur de coordonnées (1,2)



Introduction - 1

a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin? Justifiez votre réponse.

le dessin est un champ de vecteurs.  
 Résoudre une équation différentielle, qu'est-ce que cela veut dire?

b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?

c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

3) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point (-2,3).

4) On considère l'équation différentielle  $y' = y^2 - x$ . Si C est la courbe associée à la solution de l'équation qui passe par le point M(-2,1), décrire le comportement de C au voisinage du point M. Donner une valeur approchée de l'ordonnée du point N de C qui a comme abscisse  $x = -1,5$ .

Introduction - 2

# Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$

## Binôme E3/E4

L.E3-4

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques  
 Nom et Prénom :  
 Nom et Prénom :

Groupe :

**Première Activité**

Partie 1

Le dessin ci-dessous montre le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$

a) Dessiner quelques courbes solutions sur l'écran ci-dessus et décrire le comportement des courbes solutions.  
 b) Soit  $C_1$  la courbe solution qui passe par le point  $L(-2,-2)$ . Décrire l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$ . Qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini? Justifier votre réponse.

a) pr les droites  $k=0$  on a  $(x^2+1)y' = y^2-1$   
 en  $y=0$   $y^2=1 \Rightarrow y=\pm 1$ .

→ la partie haute du plan on pense avoir des courbes de type "exponentielle"  
 → la partie basse pt d'inflexion pr certaines courbes  
 → ad  $x$  tend vers  $+\infty$  alors  $C_1$  aura pour asymptote la droite  $y=-1$   
 $L$  est un point d'inflexion pour  $C_1$

on cherche les équations d'isoclines  
 $(x^2-1)k - y^2 + 1 = 0$   
 $y^2 = (x^2-1) + kx^2$  soit  $y = \pm \sqrt{(x^2-1) + kx^2}$

1<sup>ère</sup> Activité - 1

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques  
 Nom et Prénom :  
 Nom et Prénom :

Groupe :

**Première Activité**

Partie 2

Ouvrir la figure "Activité 1"

Sur l'écran s'affiche le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$ . Le vecteur d'origine  $Q$  est déplaçable.

a) Déplacer le point  $Q$  et écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$  à partir de ce que vous voyez à l'écran.  $C_1$  est la courbe solution qui passe par le point  $L(-2,-2)$ .

Pour la courbe  $C_1$  on n'a pas obtenu d'infos supplémentaires par rapport à ce qu'on avait vu.

b) Le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace. Comment l'utiliser pour avoir une idée d'une courbe solution passant par un point donné?

on déplace le vecteur le long de ce qui semble être une courbe, le vecteur laisse sa trace et on obtient ainsi l'allure de la courbe.

1<sup>ère</sup> Activité - 2

c) Classer les solutions par paquets, selon leur comportement. Combien de différents paquets on peut obtenir? Justifier la réponse.

①  $y > 1$  "forme exponentielle"  
 pr les courbes qui se trouvent dans la partie supérieure à la droite  $y = 1$ .

②  $-1 < y < 1$  on a des courbes avec 2 pts d'inflexion.

③  $y < -1$  on a des courbes de la forme: ...

Après le passage de l'axe des ordonnées.  
 → le 1<sup>er</sup> paquet, on distingue 2 paquets:  
 dans la partie  $x < 0$   $x > 0$

d) Pour chaque paquet de courbes solutions, décrire leur comportement quand  $x$  tend vers plus l'infini. Justifier la réponse.

La fonction est impaire donc 0 est centre de symétrie.  
 $y' = \frac{(y-1)(y+1)}{x^2+1}$  Pour  $y < -1$  ou  $y > 1$  on a  $y' > 0$  donc  $y$  est croissante.  
 Pour  $-1 < y < 1$   $y' < 0$  donc  $y$  est décroissante.

Pour le paquet 1:  $y > 1$ ,  $y'$  tend vers 0 avec l'équation:  $y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$   
 on a  $\frac{y^2-1}{x^2+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$   
 donc  $y^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \pm 1$   
 et avec  $y > 1$   $y \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$

1<sup>ère</sup> Activité - 3

→

→ le cas  $y < -1$  les courbes tendent vers  $-1$  en  $+\infty$ .  
 dans le cas  $y > 1$  les courbes tendent vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .  
 → le cas  $-1 < y < 1$  les courbes tendent vers  $1$  en  $-\infty$  et  $-1$  en  $+\infty$ .

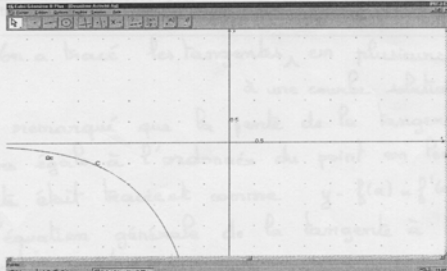
# Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles

Binôme E3/E4

B, E3-4

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques Nom et Prénom :  
 Deuxième Activité Nom et Prénom :

Deuxième Activité  
 Ouvrez la figure "Deuxième Activité"



On considère une famille de courbes  $\Omega$ . Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega$ .

1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Omega$ .  
 Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille?

L'ensemble des solutions forme deux familles de courbes exponentielles.

On vérifie en traçant les tangentes à une solution que  $y' = y$  (E)

On cherche les solutions  $\forall y = 0$ , alors  $y' = 0$  donc (E) est bien vérifiée. C'est une solution singulière.

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz aucune solution de (E) ne la coupe donc  $\forall x \in I$   $y(x) \neq 0$ , ainsi on peut écrire:  $\frac{y'}{y} = 1$  soit  $\ln|y| = x + C$   
 $y = \pm e^{x+C} = Ke^x$   
 avec  $K = e^C$

Deuxième Activité Séance 2- 1

Nom et Prénom \_\_\_\_\_ Groupe : Groupe 1

2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ?

On a tracé les tangentes en plusieurs points à une courbe solution

On a remarqué que la pente de la tangente semblait toujours égale à l'ordonnée du point en lequel la tangente était tracée et comme  $y - f(a) = f'(a)(x - a)$  est l'équation générale de la tangente à  $\mathcal{C}$  on en a déduit  $y' = y$ .

Deuxième Activité Séance 2- 2

## Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles

### Binôme E3/E4

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : Groupe 4

3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ?

On peut vérifier que ~~les~~ fonctions solutions sont bien  
 Symétriques  $y(-x) = y(x)$   
 $y'(x) = y(x)$   
 $= y(x)$

on sait résoudre une ED de la forme  $y' = y$ .  
 Les solutions sont de la forme  $y(x) = K e^x$ .  
 on peut tracer plusieurs des courbes de  
 cette famille et on vérifie qu'elles coïncident  
 à la famille de solutions qu'on nous a  
 donnée au départ.

Deuxième Activité Séance 2-3

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : Groupe 4

4) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirmer que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ? Si oui, lesquels?

Symétrie par rapport à  $Ox$ .

Deuxième Activité Séance 2-4

Mise en équation d'une famille d'exponentielles (brouillons)

Binôme E3/E4

$y' = y \cdot x +$

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$   
 $y \cdot f(a) = f(a)(x-a)$

$(-2, 0, 5) \quad y = \frac{(x+3)}{e} \quad y = f(a)(x-13-a)$

$-2 \rightarrow \frac{3}{e}$

$3 \times 0,6$

$y' = y(x+a)$

DS Defuit correction

$\frac{y'}{y} = x+a$

$\ln|y| = \frac{x^2}{2} + ax + c$

$f(x) = f(x)$   
 ~~$f(x)$~~   $y(-x) = y(x)$

$y' = y$   
 $y' = ky$

$y' = \frac{y^2-1}{x^2-1}$

$y'(-x) = k \cdot y(-x) = k \cdot y(x) = y'(x) \Rightarrow$  Courbe paire Sym 10

$y = k e^x$

$y' = y$

$y' = ay + b$

$x \rightarrow c e$

$M(x) = \int \dots$

$\frac{y'}{y} = k$

$\ln y = kx + C$   
 $y = e^{kx+C} = e^C \cdot e^{kx} = e \cdot e^{kx}$

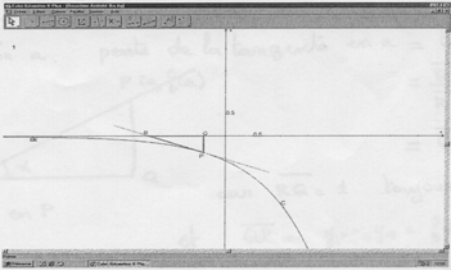


## Mise en équation d'une famille d'exponentielles (stratégie graphique)

### Binôme E3/E4

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques  
 Groupe :  
 Nom et Prénom :  
 Nom et Prénom :

**Deuxième Activité Bis**  
 Ouvrez la figure "Deuxième Activité Bis"



On considère la même famille de courbes  $\Omega$  que dans la deuxième activité. Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega_C$ . Le point P est déplaçable sur la courbe  $\Omega_C$ .

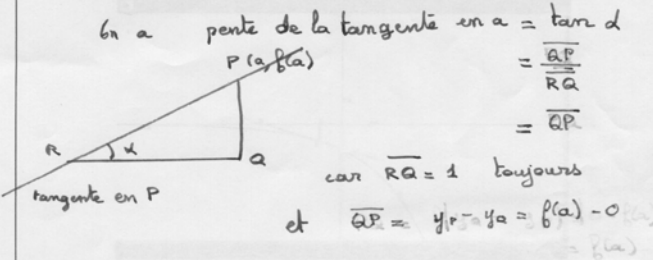
1) La tâche consiste à identifier des propriétés géométriques invariantes associées à la famille de courbes  $\Omega$ .  
 Quelles propriétés géométriques invariantes pouvez-vous associer à cette famille de courbes?

en faisant varier le pt c on remarque que la distance de Q à R reste constante, le triangle PQR est tjs rectangle.

Deuxième Activité Bis, Séance 2 - 1

Nom et Prénom :  
 Groupe : Groupe 1

2) Est-il possible de déduire l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$  à partir des propriétés invariantes repérées? Si oui, comment?



On a pente de la tangente en a =  $\tan \alpha$   
 $P(a, f(a)) = \frac{QP}{RQ}$   
 $= \frac{QP}{RQ}$   
 $= \frac{QP}{RQ}$   
 car  $RQ = 1$  toujours  
 et  $QP = y_P - y_a = f(a) - 0$   
 $= f(a)$

d'où  $f'(a) = \tan \alpha = f(a)$   
 d'où l'équation différentielle  $y' = y$

Deuxième Activité Bis, Séance 2 - 2

# Mise en équation différentielle d'une famille de trajectrices

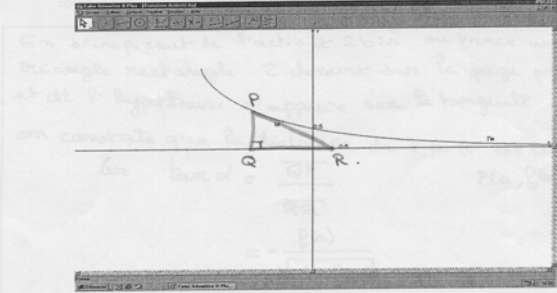
Binôme E3/E4

B. E3-4

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques

Groupe :  
 Nom et Prénom :  
 Nom et Prénom :

Troisième Activité  
 Ouvrez la figure "Troisième Activité"



En considère une famille de courbes  $\Gamma$ . Le point M est déplaçable sur tout le plan. A chaque point M de la bande  $0 < y < 2$  correspond une courbe  $\Gamma_M$ .

1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Gamma$ .  
 Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille?

$$y' = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}}$$

Troisième Activité, Séance 2-1

Nom et Prénom :  
 Groupe : Groupe 1

2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$ ?

En s'inspirant de l'activité 2 bis on trace un triangle rectangle  $\hat{c}$  dans une sur la page précédente et dt P hypoténuse s'appuie sur la tangente.

on constate que la distance de P à R est constante.

$$\text{car } \tan d = \frac{QP}{RQ} \quad P(a, \beta(a))$$

$$= \frac{\beta(a)}{\sqrt{4-\beta(a)^2}}$$

car  $RQ = \sqrt{PR^2 - RP^2}$

$$= \sqrt{4 - \beta(a)^2}$$

Troisième Activité, Séance 2-2

## Mise en équation différentielle d'une famille de trajectrices

### Binôme E3/E4

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : Groupe 1

3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Gamma$ ?

IP Sans résoudre l'équation trajectrice

$$y' = \frac{-y}{\sqrt{4-y^2}} \quad \text{c'est 1 équation autonome.}$$

on cherche les solutions singulières ie celles que

$$y(x) = c^2 = a \Rightarrow a = 0 \text{ est la seule solution possible}$$

car  $y' = 0 = \frac{-a}{\sqrt{4-a^2}} \Rightarrow a = 0$ .

Par le th. de Cauchy Lipschitz aucune des courbes ne va couper l'axe des abscisses.

de  $\forall x \in I \quad y(x) \neq 0$ .

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sqrt{4-y^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{y}{2}\right)^2}}$$

$$\ln|y| = + A \arccos \frac{y}{2} + C.$$

$$y = K e^{+ A \arccos(y/2)}$$

pr vérifier on tracerait les courbes de cette forme et on vérifie qu'elles coïncident avec celles de  $\Gamma$  adic.

Troisième Activité, Séance 2-3

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : Groupe 1

4) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$ ? Si oui, lesquels?

$\beta = 0$

$(g, \beta(a)) = \frac{f'(a)(x-a)}{1}$

$\tan \alpha = \beta'(a) = \frac{f''(a)}{1}$

ou  $\tan \alpha = \frac{PQ}{RQ}$

$y' = \text{tangent } PQ$

$PQ = \frac{-a}{2a-x}$

Troisième Activité, Séance 2-4

# Mise en équation différentielle d'une famille de tractrices (brouillons)

## Binôme E3/E4

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$   
 $f' = f$   
 $\ln|f| = x + c$   
 $f = e^x$

$(y - f(a))' = f'(a)(x - a)$

$\tan \alpha = f'(a) = \frac{PQ}{RQ}$   
 car  $\tan \alpha = \frac{PQ}{RQ}$   
 $y' = \text{tangent } PQ$

$PQ = \begin{vmatrix} y_a - y_p \\ x_a - x_p \\ 0 \\ f(a) \end{vmatrix}$

$y' = -\frac{1}{2}$   
 $\cos \alpha = \frac{RQ}{2}$   
 $\tan \alpha = \frac{QP}{RQ}$   
 $PR^2 = PQ^2 + QR^2$   
 $PR = \sqrt{PQ^2 + QR^2}$   
 $QP = \sqrt{PR^2 - QR^2}$   
 $QP = \sqrt{2^2 - QR^2}$   
 $\tan \alpha = \frac{QP}{RQ} = \frac{\sqrt{4 - QR^2}}{RQ}$   
 $y' = \sqrt{4 - \frac{RQ^2}{y^2}}$   
 $RQ = \sqrt{PR^2 - QR^2}$   
 $\frac{QP}{\sqrt{4 - PQ^2}} = \frac{f(a) - 0}{\sqrt{4 - f(a)^2}}$

$y(x) = \lambda$   
 $0 = \frac{-\lambda}{\sqrt{4 - \lambda^2}}$   
 $\sqrt{4 - x^2} + \lambda = 0$   
 $\lambda = 0$  seule possible  
 $y \equiv 0$  ou a bien  $y = 0$   
 $\forall x \in I \quad y(x) \neq 0$

$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sqrt{4 - y^2}}$   
 $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{2\sqrt{1 - (\frac{y}{2})^2}}$   
 Arcsint  
 $\ln|y| = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$   
 $(\ln|y|)' = \frac{1}{y} y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{y}{2})^2}}$



# **Binôme E1/E2**

**Les productions écrites**

**L'expérimentation de l'année 2003**

Questionnaire initial (travail individuel)

Etudiant E1

E1 R1

IUFM Grenoble - Chambéry Continuum 2003      Groupe : 1  
 PLC1 Mathématiques      Nom et Prénom :

**Résoudre une équation différentielle. Qu'est-ce que cela veut dire ?**

1) Vos idées nous intéressent !

a) A votre avis, qu'est-ce qu'une équation différentielle? Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle? A quoi sert une équation différentielle?

Une équation différentielle est une fonction du type  $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$  où  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  application d'un intervalle  $I$  sur  $\mathbb{R}$ .  
 L'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension  $n$ .  
 La représentation graphique d'une solution est appelée courbe intégrale.  
 Utilité: En physique par exemple  $\Delta N = -\lambda N \Rightarrow N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$   
 permet d'étudier la décroissance d'un élément radioactif.  
 En chimie, cela permet de calculer la vitesse de réaction.

b) Donnez trois exemples d'équations différentielles

1<sup>er</sup> Dérivée  $N'(t) = -\lambda N(t)$   
 2<sup>ème</sup>  $L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$   $\Rightarrow$   $q(t)$  de un circuit électrique  
 3<sup>ème</sup> Vitesse de réaction en chimie (comme 1<sup>er</sup>)

c) Quels sont les différents moyens d'exprimer ou de représenter des solutions d'une équation différentielle?

Représentation d'une équation différentielle par ses courbes intégrales  
 Expression par une équation fonctionnelle ou par une équation numérique

2) Le champ de vecteurs ci-dessous représente une fonction vectorielle qui à chaque point (x,y) du plan associe un vecteur de coordonnées (1,2)

Introduction - 1

a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin? Justifiez votre réponse.

$\frac{dy}{dx} = 2$  En fait  $f(x,y) = 2$  est l'équation différentielle associée au dessin.

b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?

$y = \int 2 dx = 2x + cste$  avec condition initiale  $y=0$  pour  $x=0$

c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

Solution générale  $y = 2x + cste$

4) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .

Si  $f(x,y) = -y^2$ , alors  $y' = -y^2$

$\frac{dy}{dx} = -y^2$       Solution générale  $\frac{dy}{dx} = -y^2$   
 $\frac{dy}{y^2} = -dx$        $-\frac{1}{y} = x + cste$        $y = -\frac{1}{x+c}$   
 Solution particulière  $y = -\frac{1}{x+c(1)}$        $y = -\frac{1}{x+1}$

Introduction - 2

**Résoudre une équation différentielle. Qu'est-ce que cela veut dire ?**

1) Vos idées nous intéressent !

a) A votre avis, qu'est-ce qu'une équation différentielle? Qu'est-ce que la solution d'une équation différentielle? A quoi sert une équation différentielle?

- une équation liant une fonction et ses dérivées successives  
 - la solution d'une équation diff. est une fonction  
 - cela sert notamment en physique pour caractériser, par exemple, des fonctions du temps -

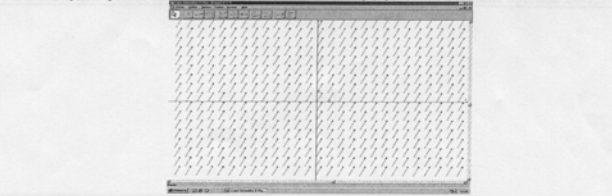
b) Donnez trois exemples d'équations différentielles

-  $y + y' = 0$      $-y'' = 5$   
 -  $h''(t) = h'(t)$

c) Quels sont les différents moyens d'exprimer ou de représenter des solutions d'une équation différentielle?

[Empty box for answer to question c)

2) Le champ de vecteurs ci-dessous représente une fonction vectorielle qui à chaque point (x,y) du plan associe un vecteur de coordonnées (1,2)



Introduction - 1

a) Est-il possible d'associer une équation différentielle au dessin? Justifiez votre réponse.

[Empty box for answer to question a)

b) Si le dessin est associé à une équation différentielle, que peut-on dire sur les solutions de l'équation différentielle?

[Empty box for answer to question b)

c) Si l'on peut associer une équation différentielle au dessin, pouvez-vous dire laquelle? Justifiez votre réponse.

[Empty box for answer to question c)

3) Soit  $y' = f(x,y)$  une équation différentielle du premier ordre, où  $f$  est une fonction numérique sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait que  $f(-2,3) = -1$ . Proposer différentes représentations d'une solution de l'équation différentielle au voisinage du point  $(-2,3)$ .

[Empty box for answer to question 3)

4) On considère l'équation différentielle  $y' = y^2 - x$ . Si  $C$  est la courbe associée à la solution de l'équation qui passe par le point  $M(-2,1)$ , décrire le comportement de  $C$  au voisinage du point  $M$ . Donner une valeur approchée de l'ordonnée du point  $N$  de  $C$  qui a comme abscisse  $x = -1,5$ .

[Empty box for answer to question 4)

Introduction - 2



Etude descriptive des courbes solutions de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$

Binôme E1/E2

*B1 E1-2*

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
PLC1 Mathématiques

Nom et Prénom :  
Nom et Prénom :

Groupe :

Première Activité

Partie 1

Le dessin ci-dessous montre le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$

a) Dessiner quelques courbes solutions sur l'écran ci-dessus et décrire le comportement des courbes solutions.

b) Soit  $C_1$  la courbe solution qui passe par le point  $L(-2, -2)$ . Décrire l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $]-3, 3[$ . Qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini? Justifier votre réponse.

*a) On trace une courbe de gauche à droite en cherchant des points où la courbe reste tangente aux parties rencontrées (pas de points de rebroussement), de façon que  $v(x, y) = f(x, y)$  existe en tout point*

*b) Affine de  $-\infty$  à  $-3$ , puis lorsque  $x \rightarrow +\infty$ ,  $C_1$  est asymptote à une parallèle à  $y = -1$ .  
 $f(x) \rightarrow y = -1$   
 $C_1$  ne rencontre pas  $D: y = -1$*

1<sup>ère</sup> Activité - 1

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
PLC1 Mathématiques

Nom et Prénom :  
Nom et Prénom :

Groupe :

Première Activité

Partie 2

Ouvrir la figure "Activité 1"

Sur l'écran s'affiche le champ de tangentes de l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$ . Le vecteur d'origine  $Q$  est déplaçable.

a) Déplacer le point  $Q$  et écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$ , à partir de ce que vous voyez à l'écran.  $C_1$  est la courbe solution qui passe par le point  $L(-2, 2)$ .

*Confirmation de ce qui a été tracé à la main pour le tracé de  $C_1$ .  
L'asymptote est bien parallèle à  $y = -1$*

b) Le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace. Comment l'utiliser pour avoir une idée d'une courbe solution passant par un point donné?

*On essaie de tracer une courbe (la plus fine possible), les parties décrivent une courbe unique. Deux points avec pentes parallèles sont sur une même isocline, donc décrivent deux courbes différentes*

1<sup>ère</sup> Activité - 2

c) Classer les solutions par paquets, selon leur comportement. Combien de différents paquets on peut obtenir? Justifier la réponse.

*5 paquets      13 paquets*

d) Pour chaque paquet de courbes solutions, décrire leur comportement quand  $x$  tend vers plus l'infini. Justifier la réponse.

*paquet (1) asymptotes  $y = -1$  et  $x = 0$   
" (2) " " "  $y = -1$  et  $x = 0$   
" (3) " "  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$   
(4) " "  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$   
(5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1$      $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -1$*

1<sup>ère</sup> Activité - 3

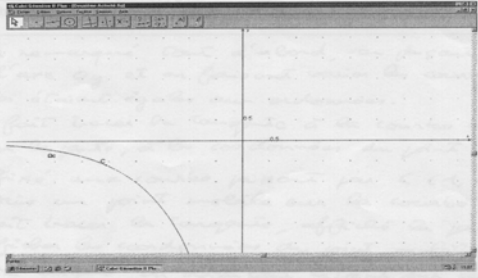
# Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles

Binôme E1/E2

E1-E2

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques Nom et Prénom :  
 Nom et Prénom :

**Deuxième Activité**  
 Ouvrez la figure "Deuxième Activité"



On considère une famille de courbes  $\Omega$ . Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega_C$ .

1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Omega$ .  
 Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille?

Sur la courbe solution passant par le point C (1,1). La tangente en C à la courbe a pour pente 1. De plus, on vérifie qu'en chaque point la pente de la tangente est égale à l'ordonnée

$y' = y$  avec condition initiale  $y(1) = 1$   
 $y' = y$  avec condition initiale  $y(0) = 1$

de même quelque soit la condition initiale

Equation différentielle associée à cette famille

$y' = y$

Deuxième Activité Séance 2- 1

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : 1

2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ?

on a remarqué tout d'abord, en faisant C sur l'axe Oy et en faisant varier les courbes, que les pentes étaient égales aux ordonnées.

(on a fait tracer la tangente à la courbe en C, afficher la pente, et les coordonnées du point).

on a fixé une courbe passant par C (1,1). on a pris un point mobile sur la courbe, on a fait tracer la tangente, affiché la pente, et affiché les coordonnées du point mobile.

on a remarqué, en déplaçant le point sur cette courbe, que les pentes, en chaque point étaient égales aux ordonnées des points.

on a vérifié cette propriété sur plusieurs courbes, avec le point C qui fixe des conditions initiales différentes.

Deuxième Activité Séance 2- 2

## Mise en équation différentielle d'une famille d'exponentielles

### Binôme E1/E2

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : I

3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ?

on peut vérifier  $y' = y$   
quelque soit la courbe tracée et  
quelque soit les points sur les différentes  
courbes.  
 $y' = 0 \Rightarrow y = 0$  quelque soit  $x$

Deuxième Activité Séance 2- 3

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : 1

4) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$ ? Si oui, lesquels?

$y' = y \Rightarrow y = \lambda e^x$   
les courbes sont les représentations graphiques  
de  $x \mapsto \lambda e^x$   
on vérifie  $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda e^x = 0$   
 $y = 0$  est bien une asymptote pour  
chaque courbe.  
Avec les conditions initiales  $f(1) = 1$   
 $y'(1) = \lambda e \quad \lambda = \frac{1}{e} \quad y = \frac{1}{e} e^x$   
chaque courbe se déduit l'une de  
l'autre par une affinité de rapport  $\lambda$   
d'axe  $Ox$  parallèle à  $Oy$

Deuxième Activité Séance 2- 4

# Mise en équation d'une famille d'exponentielles (stratégie graphique)

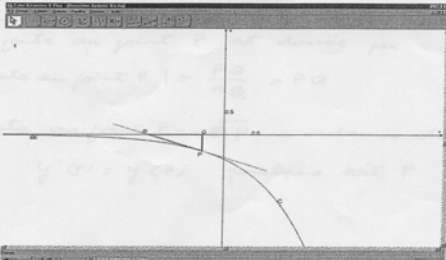
Binôme E1/E2

E1/E2

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques  
 Nom et Prénom :  
 Nom et Prénom :

Groupe

**Deuxième Activité Bis**  
 Ouvrez la figure "Deuxième Activité Bis"



On considère la même famille de courbes  $\Omega$  que dans la deuxième activité. Le point C est déplaçable sur tout le plan. A chaque point C correspond une courbe  $\Omega_C$ . Le point P est déplaçable sur la courbe  $\Omega_C$ .

1) La tâche consiste à identifier des propriétés géométriques invariantes associées à la famille de courbes  $\Omega$ .  
 Quelles propriétés géométriques invariantes pouvez-vous associer à cette famille de courbes?

Propriété géométrique particulière  
 $RQ = 1$  quelque que soit la courbe  $\Omega_C$

Deuxième Activité Bis, Séance 2 - 1

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : T

2) Est-il possible de déduire l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Omega$  à partir des propriétés invariantes repérées? Si oui, comment?

La pente au point P est donnée par  
 $| \text{pente au point P} | = \frac{PQ}{RQ} = PQ$   
 $\text{pente au point P} = \overline{QP} = \text{ordonnée de P}$   
 $y'(P) = y(P)$  quelque soit P

Propriété géométrique particulière  
 $RQ = 1$  quelque que soit la courbe  $\Omega_C$

Deuxième Activité Bis, Séance 2 - 2

## Mise en équation différentielle d'une famille de tractrices

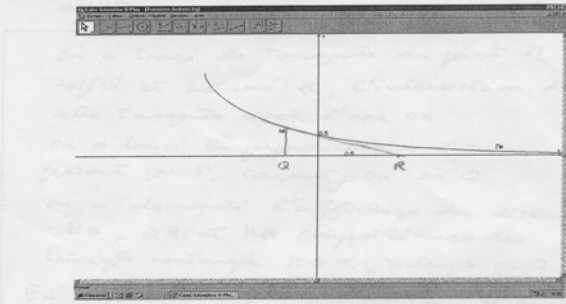
### Binôme E1/E2

B1E1-E2

IUFM Grenoble – Chambéry Continuum 2003  
 PLC1 Mathématiques

Groupe : \_\_\_\_\_  
 Nom et Prénom : \_\_\_\_\_  
 Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

**Troisième Activité**  
 Ouvrez la figure "Troisième Activité"



On considère une famille de courbes  $\Gamma$ . Le point  $M$  est déplaçable sur tout le plan. A chaque point  $M$  de la bande  $0 < y < 2$  correspond une courbe  $\Gamma_M$ .

1) La tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre qui correspond à la famille de courbes  $\Gamma$ .  
 Quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille?

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$$

Troisième Activité, Séance 2- 1

---

Nom et Prénom \_\_\_\_\_ Groupe : I

2) Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$ ?

on a tracé la tangente au point  $M$   
 repéré et nommé  $R$ , l'intersection de  
 cette tangente avec l'axe  $Ox$   
 on a tracé la perpendiculaire à  $Ox$   
 passant par  $M$ , coupant  $Ox$  en  $Q$ .  
 on a demandé l'affichage de distances  
 $MQ$ ,  $QR$  et  $MR$  (hypoténuse du  
 triangle rectangle  $MQR$ , rectangle en  $Q$   
 En déplaçant  $M$ , sur la courbe, et en  
 changeant de courbe, on remarque que  
 $MR=2$  (reste constante).  
 $|y'| = \frac{MQ}{QR} = \frac{MQ}{MR} = \frac{MQ}{2}$  avec  $MR = \sqrt{4-y^2}$   
 les signes de  $y'$  et  $y$  sont opposés. D'où  

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{4-y^2}}$$

Troisième Activité, Séance 2- 2

## Mise en équation différentielle d'une famille de tractrices

Binôme E1/E2

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : I

3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Gamma$ ?

En ayant fait afficher la valeur de la pente de la tangente en  $M$  à la courbe ainsi qu'en ayant rentré l'expression de l'équation différentielle trouvée, nous avons pu constater que, en chaque point  $M$ , les 2 valeurs (pente de la tangente et résultat de l'expression au pt  $M$ ) étaient égales.

Troisième Activité, Séance 2-3

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : I

4) Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle de la famille de courbes  $\Gamma$ ? Si oui, lesquels?

on remarque que l'équation différentielle est définie entre  $-2$  et  $2$   
car  $4 - y^2 > 0$  pour  $y \in ]-2, 2[$

$y' \rightarrow \infty$  la pte est verticale au point d'ordonnée  $2$   
 $y \rightarrow 2$

$y' = 0$  pour  $y = 0$   
aux points d'ordonnée nulle la pte est nulle

Troisième Activité, Séance 2-4



# **LES TRANSCRIPTIONS**

**Expérimentation de l'année 2003**





# **Binôme E22/E23**

**L'étude descriptive des courbes solutions de**

**l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$**

**L'expérimentation de l'année 2003**

## Binôme E22/E23

## Première partie : le travail en papier/crayon

1. E22 : bon, (en lisant) « Dessiner quelques courbes solutions... Alors, donc tu prends un truc... tu suis, non ?
2. E23 : ça c'est les tangentes...
3. E22 : tu (... ?) celle-là
4. E23 : c'est les tangentes aux points, donc ouais, tu peux tracer euh... tu traces en reliant les points...
5. E22 : tu me fais confiance ?
6. E23 : tu vas le faire directement en stylo ?
7. E22 : tu veux que je (... ?) à pied?
8. E23 : non mais de toutes façon... je (...) qu'est-ce que ça peut être d'autre
9. E22 : mais de toutes façon, ça suffit de faire ça
10. E23 : oui, c'est ce qu'on a fait l'année dernière là (...) quoi déjà...
11. E22 : euh... je ne sais plus... alors là... je peux tracer, non ?
12. E23 : oui, bon, ça c'est de l'extérieur
13. E22 : on a dessiné encore le...
14. E23 : si tu voudrais elle plus au milieu que là (... ?) ouais cela... ben, cela c'est (...)
15. E22 : attend, j'en (vais) faire un (...) en fait ... (... ?) regarde je (... ?)
16. E23 : tu (... ?)
17. E22 : oui, c'est pas tellement une tangente ça
18. E23 : non...
19. E22 : comme il paraît celle là a l'air d'être pas tellement tangente
20. E23 : hum... et après au milieu, donc, tu as une toute droite-là
21. E22 : non, il y a (... ?) qui fait comme ça... qui fait comme ça... comme ça
22. E23 : voilà, par contre cela elle est toute droite
23. E22 : ah, oui, je ne l'avais pas vu...
24. E23 : ok ... bon ... (en lisant) « et décrire le comportement de courbes solutions »... Alors... .. alors, il faudrait peut-être qu'on identifie les points-là ... (... ?) ... parce que là, si tu traces ça, ici, (justement)... là tu dois l'avoir où ?
25. E22 : mais à mon avis... ça fait comme ça
26. D : ouais ... (... ?) ...
27. E22 : « comportement des courbes solutions » ... en fait, tu vois... c'est euh... si j'avais un truc de... .. si tu avais un truc comme ça, par exemple ... on aurait dit que ça c'était un truc ... un centre entre ...
28. D : il y a des cols et il y a des centres... il y a des cols ...
29. C : hum
30. E23 : et des foyer ...non, mais le foyer et le centre c'est quand l'allure des courbes sont complexes
31. E22 : c'est pareille... le foyer et le centre
32. E23 : ouais, et c'est quoi l'autre dessin ...
33. E22 : tu avais comme ça
34. E23 : ça, c'est quoi ?
35. E22 : ça, c'était un col
36. E23 : ouais, et après ... et l'autre (... ?)
37. E22 : après... tu as un de centre, ça c'est un centre
38. E23 : ouais... elle est devenue (... ?)
39. E22 : ah, oui, c'était... c'était pas comme ça ? ...
40. E23 : non, (... ?) spécial
41. E22 : comment? c'était comme ça ? ... comme c'était l'autre...
42. E23 : là c'est dingue ... bon (... ?)
43. E22 : mais, si c'est (... ?) un truc comme ça
44. E23 : mais, c'est... comme ça?
45. E22 : ouais, un truc comme ça
46. E23 : moi, je ne sais pas
47. E22 : un point  $C_L$ ... c'était quoi comme le point  $C_L$  ?
48. E23 : c'est un col
49. E22 : ah, ouais... un centre ...
50. E23 : (... ?) point
51. E22 : écoute je ne sais plus ... ouais de toutes façon (... ?) il y a de tout (... ?)

52. D : (en lisant) « décrire le comportement des courbes », et ben ... certains ... en fait, il faudrait voir là ce point-là ... ce point-là, parce qu'en fait c'est (...) aussi là... tu vois ... donc en fait, on a le point (0,0), on a un point ... c'est pas des points de (rembrassement) non ?... ça fait (... ?)
53. C : je sais pas c'est quoi les point d'(rembrassement)
54. E23 : (...) existait l'année dernière ou pas?
55. C : un point de (rembrassement) ?
56. D : (... ?) en plus c'était sur (... ?) si la flèche arrivait ou (... ?) pas
57. E22 : voilà c'est ça... ouais (... ?)... c'est comme ça, quand il se barrait,
58. E23 : c'étais un foyer ... attend... (...) attractif ou un...
59. C : ouais, mais bon, c'est foutu ... « décrire le comportement » euh ... donc (... ?) elle va quoi n'importe où, euh ... autrement ... euh...
60. D : c est (... ?) là au point-là... 0,5 donc ça c'est 1... ce point 1 et -1 on a une solution... on va le mettre déjà
61. E22 : attend, 0,5 et en fait tu as 1, qu'est-ce que tu dis ?
62. D : ouais, tu as là 1, là c'est 0,5 et là aussi
63. C : ah, d'accord
64. D : donc, tu peux dire ah... on a une tangente horizontale
65. E22 : mais t'as le 1... c'était là 1
66. D : si... parce que là c'est -0,5... là c'est zéro, là c'est 0,5
67. C : ah tu ... tu (... ?)... ah ouais, d'accord ... pourquoi ça fait zéro ?
68. E23 : bah, ça c'est les axes
69. E22 : ah, ouais, ça c'est les axes ... pourtant je les ai pas vu... d'accord... oui, d'accord, j'avait pas vu
70. E23 : donc, je pense que déjà on connaît une solution... courbe solution ... horizontale ... d'équation «  $y = 1$  »
71. C : mois je croyais que la tangente en un point... si la dérivée s'annulait dans ce point... on a une tangente en un point quand la dérivée s'annule en ce point
72. D : ah ben non
73. E22 : ah ben si
74. E23 : nous, on a la tangente en un point... et hein pourquoi (... ?) faire la dérivée en ce point...
75. C : alors j'ai une question... hum, pourtant... moi, j'ai cru que tu avais une tangente... tu sais que quand on a un maximal ou un minimum ... tu as forcément une tangente nulle... oui
76. D : oui mais bonne, la (pente) d'une courbe comme ça
77. C : ah oui,
78. D : la tangente dans ce point-là... elle a par coefficient directeur la dérivée dans ce point-là, et la dérivée-là est pas nulle, puisque le coefficient directeur de la tangente est pas nul, par contre, en ce point-là ...
79. C : attend (... ?) (c'est faux)... la tangente est de pente (... ?) «  $f'(x)$  »... (... ?) c'est vrai
80. E23 : voilà, la pente est «  $f'$  » ...
81. E22 : ah d'accord ... ..
82. E23 : allez-y, écrit
83. C : j'écris quoi? ...
84. E23 : donc tu vas dire... que les courbes solutions... on a des courbes constantes aux points... on a la courbe «  $y = 1$  » et «  $y = -1$  » c'est des solutions constantes... ben, d'ailleurs, c'est sûr... puisque là ça fait 0, tu as «  $y' = 0$  »
85. C : ah, ouais
86. D : donc... « décrire le comportement des courbes solution »... ben, tu peux mettre... ah... les courbes «  $y = 1$  » et «  $y = -1$  » sont des solutions constantes
87. E22 : en fait, les courbes «  $y = 1$  » et «  $y = -1$  » sont solutions... de toutes façon ça se voit bien
88. D : (... ?) ...
89. E22 : en fin, je vais mettre constante,
90. D : ouais, voilà, oui, oui, (...) de toutes façon «  $y = 1$  » c'est de solution, ouais, c'est (... ?) constante
91. E22 : ouais, donc... j'écris que «  $y = 1$  » et «  $y = -1$  » sont constantes, sont solutions
92. D : ouais, ensuite, ah, entre, on peut (... ?) bien entre -1 et 1... donc, là, je ne sais pas qu'est ce qu'il faut dire ...
93. C : et ... donc ...
94. D : en fait, elles sont ... elles semblent admettre des asymptotes...
95. E22 : de toutes façon je (... ?) il y a une qui tourne comme ça, qui tourne comme ça, qui tourne comme ça...
96. D : (... ?) c'est ...
97. E22 : tu vois (... ?) ça fait comme ça
98. E23 : tu crois?

99. C: ben, ouais (... ?) elles (... ?) toutes ça quand le point (... ?) je sais pas quoi  
100. E23 : ouais  
101. E22 : ben, oui, mais en fin nous, on a une droite  
102. E23 : (... ?) on remarque qu'en zéro, le point zéro... euh  
103. C: (0,0) est solution ...  
104. D: je ne sais pas les courbes elles font un truc bizarre sur (0,0)... tu vois... par rapport à l'axe tout droit  
105. E22 : attend... sur (0,0), qu'est ce que tu veux dire par là ?  
106. E23 : mais tu vois en (0,0), c'est là qu'on a le décroché ... hum, je ne sais pas, comment le dire,  
107. E22 : ah, au voisinage du zéro, tu veux dire (... ?) voilà  
108. E23 : dans cette  
109. E22 : bon, si non, elles ont toutes l'air ... euh parallèle là, oui, mais c'est ça le principe, oui ... ça veut dire que le point (0,0) est un point, hum, hum, ...  
110. E23 : c'est un mot qu'on ne sait pas ...  
111. E22 : bon ... voilà mais c'est ... (en lisant) « décrire le comportement des courbes solutions »... qu'est-ce que ça veut dire ?  
112. E23 : ben la courbe là que ... mais « décrire » ça veut dire quoi?... que là en fait, elle est ... ouais, c'est vrai que c'est difficile entre -1 et 1, (... ?) 0,5 en dessous ... ah non ... donc, les courbes solution elles viennent vers le point-là, et alors, elles repartent... donc ce c'est un point, euh ... c'est le nom du point de recherche  
113. E22 : mais non (... ?) si tu t'occupes de (... ?) recherche, non ?  
114. E23 : non, mais celui-là aussi, c'est comme ça, c'est comme ça, là au voisinage de point hein... 0.. hein ... tu vois ça se rapproche, par contre, pas-là... tu vois... et là c'est symétrique, bon... je ne sais plus... (peut être)  
115. E22 : oui mais c'est au point... en voisinage du point 0, tu as ça en fait, non?... tu ne reconnais pas ça?  
116. E23 : ah ouais, tout reste autour du voisinage de 0... parce qu'on a des lignes horizontales... c'est ça qu'est trop bizarre  
117. E22 : ah mais c'est bizarre, par ce que ça se retrouve, (en supposant) que je sais pas quoi ... et par contre là, je n'arrive pas à voir le truc comme ça  
118. E23 : ben ouais, il n'est pas...  
119. E22 : parce que si je fais comme ça... il y a une droite, elles font comme ça, comme ça, comme ça ... ouais, jusqu'à droite en fait... en fait, le truc, c'est que ça fait comme ça  
120. E23 : peut être il faut dire... c'est vers tel point  
121. E22 : mais, je sais pas, parce qu'en fait elles font (... ?) toutes comme ça, op! et puis en haut, elles vont faire (... ?) comme ça, comme ça, comme ça, comme ça, comme ça, comme ça, ... voilà, elles font (... ?) toutes comme ça  
122. E23 : ah, ben oui  
123. E22 : je retrouve, tu deux trucs comme ça  
124. E23 : et ben, voilà parce que ...  
125. E22 : et tu as celui-là, tu vois ça fait, elle se fait (... ?) en plus  
126. E23 : on va tracer des autres  
127. E22 : ouais, d'accord... marque le trajet, en fait le truc, donc en fait... là (... ?) perds je vois ce truc ... ..  
128. E23 : ouais, cela on s'en fou, ça c'est surtout cela je pense  
129. E22 : oui, mais c'est pour le faire voir que ça va (...) tout là-bas quoi  
130. E23 : donc, on pourrait dire que ... .. il faut qu'on se (... ?) ... ok  
131. E22 : voilà, donc (... ?) c'est forcément  
132. E23 : bon... euh ben, on peut dire que les solutions convergent, normalement, elles convergent à la même pente  
133. E22 : si, tu as toute cette partie là ... tout le temps, après finalement, elles sont toutes sur la droite 1  
134. E23 : ouais  
135. E22 : mais, d'un autre côté, ça peut quand même diverger, quoi... puisque pourquoi tu regardes ça comme ça, comme ça  
136. E23 : hum il n'y a pas des flèches euh... bon, je ne sais pas qu'est ce qu'il faut écrire pour décrire le comportement de courbes ... tu as une idée ?  
137. E22 : bah, oui, moi je dirais que le... voilà, elles tendent toutes vers... au départ elles sont vachement inclinées, si tu veux, et puis après elles tendent toutes vers la horizontale 1  
138. E23 : 1,5 (... ?)  
139. E22 : tout ça va... 1, ah (... ?) demi (... ?)  
140. E23 : ah non, c'est pas la même, c'est une droite en dessous ou pas ?  
141. E22 : oui, mais en fin bon après tu en penses que... non? ...  
142. E23 : je ne sais pas, ça me dit que c'est bien particulier (... ?) en bas, c'est pas forcément... ouais

- 143.E22 : hum... (... ?) tu vois je le fait tomber à (... ?)... tu vois (... ?), mais les courbes elles tombent vers elle
- 144.E23 : ah, ouais
- 145.E22 : et là pourquoi ça elle fait pas pareil ?
- 146.E23 : ouais, ben en fait là... elle est bien une autre courbe ... euh
- 147.E22 : non, il n'y pas d'autre... il n'y pas d'autre... elle est là
- 148.E23 : ah, ouais... celle là c'est plus (... ?) que l'autre...
- 149.E22 : donc là c'est vrai ... elle tendrait vers la droite comme ça... là c'est de la même manière, c'est pareil, c'est +1 (... ?) tout ça en (ligne)
- 150.E23 : donc... tu veux mettre qu'elles sont solutions et qu'elles sont asymptotes à une autre solution... ouais eh ben, non ...
- 151.E22 : moi, je dirais qu'elles tombent toutes tangentes, elles sont toutes, elles admettent toutes comme tangente celle-là
- 152.E23 : hum, bon, on se (... ?)
- 153.E22 : ah, elles sont toutes tangentes à celle, celle-là c'est la tangente de toutes les ...
- 154.E23 : ouais
- 155.E22 : non?
- 156.E23 : alors, en fait... quand « x » tend vers l'infini, les courbes en dessous... comme tu vois ... (... ?) dire... parce que là, elles font dans l'autre sens, c'est ça qu'est chaud, tu veux qu'on (... ?) ça ?
- 157.E22 : ouais
- 158.E23 : (en lisant) « Soit  $C_1$  le courbe la courbe qui passe par le point (-2,-2) » (... ?) ... Alors, -1 ...
- 159.E22 : (... ?) (en lisant) « soit  $C_1$  est une courbe solution qui passe pour  $L(-2,-2)$  »
- 160.E23 : -2 ... alors (... ?)
- 161.E22 : je suis là ... le -2, donc là je met son signe (... ?)
- 162.E23 : ouais
- 163.E22 : - 2
- 164.E23 : ouais
- 165.E22 : -0,5... -1... 1,5 ... -2 ... (... ?) cela ... donc, c'est celle-là
- 166.E23 : ouais, ben ... traces-la ...
- 167.E22 : ouais, il faudra que (... ?) celui là
- 168.E23 : bon, tu n'as qu'à marquer  $C_1$  comme ça (si tu veux)
- 169.E22 : ouais mais (... ?)  $C_1$ ...
- 170.E23 : alors, (en lisant) « Décrire l'allure de la courbe sur l'intervalle  $[-3, 3]$  » bon (... ?) là-dessous, et bon, on dit que... qu'elle est croissante
- 171.E22 : ouais, en tout cas ça va ... ouais de là à ...
- 172.E23 : elle est croissante sur moins (... ?) tu as que mettre ...
- 173.E22 : de toutes façons elle va tendre vers ... vers
- 174.E23 : ouais ... voilà... on va mettre elle est croissante sur  $[-3,3]$ ,  $C_1$ , je ne sais pas... elle part de  $-\infty$  visiblement
- 175.E22 : attend, il faudra juste voir (... ?) ça fait 0,5 ; 1, 2... visiblement
- 176.E23 : non
- 177.E22 : euh ... 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3... ouais, elle est vachement
- 178.E23 : bon, elle est croissante sur  $[-3,3]$  ... et admet la courbe d'équation «  $y = -1$  » comme asymptote en - 3... en 3 je veux dire,
- 179.E22 : ah mais (... ?) c'est pas (fait)
- 180.E23 : ouais, ouais
- 181.E22 : ce n'est pas parce que (...) ... voilà, tu mets (...)
- 182.E23 : ouais, quand « x » tend vers -3, elle a l'air...
- 183.E22 : voilà ...et lorsque... lorsque, en fin, « x » non ? ... En fin, on appelle « t », non ?
- 184.E23 : ah non, c'est «  $y(x)$  » forcément
- 185.E22 : ah d'accord... donc, lorsque « x » tend vers 3...
- 186.E23 :  $c_1$
- 187.E22 :  $c_1$  tend vers ... euh ...
- 188.E23 : admet, (comme tu vois) elle admet comme asymptote ... hum...
- 189.E22 : alors, elle admet ... admet comme asymptote...
- 190.E23 : ... la droite «  $y = -1$  »
- 191.E22 : euh ... «  $y = -1$  »
- 192.E23 : voilà !
- 193.E22 : tu as vu toute la (... ?) quand « x » tend vers l'infini
- 194.E23 : ah ben, en fait c'est en tout ça, je crois... bon, tu mets ça... tu mets plus infini là ?

- 195.E22 : au lieu de 3, je mets plus infini ?  
196.E23 : ouais ...  
197.E22 : non, mais, c'est vrai qu'on a met du blanc partout!  
198.E23 : ouais (... ?)  
199.E22 : (en lisant) « Qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  ...  
200.E23 : ... quand  $x$  tend vers infini ? Justifier votre réponse » ...  
201.E22 : oui, mais en fin bon, on n'a pas décrit pour sur un (théorème) (... ?)... « décrire l'allure de la courbe »  
202.E23 : ben, elle est croissante, elle passe, euh ... elle est croissante, je sais pas, on peut faire un tableau de variation, si tu veux  
203.E22 : ah mais non, on veut l'allure de la courbe  
204.E23 : l'allure c'est quoi? ... elle est croissante, elle reste en dessous de «  $y$  » ..., en fait, je pense que le deuxième truc importante, c'est que la pente est en dessous de «  $y = -1$  »  
205.C: non, mais «  $C_1$  admet comme asymptote  $y = -1$  » ... c'est bon  
206.E23 : ouais ... (en lisant) « Justifier votre réponse » ... En fait, je pense qu'il faut, ah, pour montrer que c'est une asymptote horizontale, ça voudrait dire que sa tangente est nulle... donc (... ?)  
207.E22 : (... ?) en «  $x$  »  
208.E23 : ouais ... et tu regard la limite en  $+\infty$   
209.E22 : de ?  
210.E23 : de «  $y'$  »  
211.E22 : qu'est-ce que tu veux faire là ?... « Justifier votre réponse »  
212.E23 : ben, voilà, je veux justifier!  
213.E22 : ouais  
214.E23 : donc, je me suis dit que si elle admet «  $y = -1$  » comme asymptote  
215.E22 : hum...  
216.E23 : ça veut dire que la limite quand «  $x$  » tend vers  $+\infty$  ... elle tend vers  $-1$   
217.E22 : ouais  
218.E23 : mais la courbe solution, mais pour la «  $y'$  » comme c'est la tangente, ça devrait tomber vers zéro  
219.E22 : ouais  
220.E23 : alors, «  $y^2-1$  » elle tend vers quelque chose, mais «  $x^2$  » tend vers plus infini, donc «  $1/x^2$  » ça va tendre vers ... 0, donc c'est bon... moi je (... ?) comme ça...  
221.E22 : ouais... donc, attend,  $C_1$  admet comme asymptote «  $y = -1$  »... donc, ah...  
222.E23 : lorsque «  $x$  » tend vers plus l'infini, «  $y$  »... en fait, c'est un nombre, quand même  
223.E22 : il tend vers plus infini, donc on va dire que «  $y$  » tend vers  $-1$   
224.E23 : ah, merde, ça va faire zéro sur plus infini...  
225.E22 : non, mais, c'est ça, «  $y$  » tombe vers  $-1$ , et donc «  $y'$  » tend vers zéro  
226.E23 : et zéro sur plus infini ça fait quoi? Euh ...  
227.E22 : zéro sur plus l'infini... c'est un valeur ... euh  
228.E23 : ah non, c'est faux parce qu'on a zéro sur plus l'infini  
229.E22 : eh bah oui, tu avais dit quoi toute l'heure?  
230.E23 : ben moi, j'avais dit que «  $y^2-1$  » c'était ... c'était un nombre différent de zéro  
231.E22 : ben, oui  
232.P : bon, on va (... ?)  
233.E23 : ah, ouais, on va finir nos traces  
234.P : vous finissez vos traces alors  
235.E23 : ouais  
236.E22 : ouais  
237.E23 : donc, tu n'as qu'à mettre que «  $x'$  » et «  $y'$  » tendent vers zéro... de toutes façon c'est vrai... donc les ... donc  $C_1$  admet une tangente, une asymptote horizontale  
238.E22 : (...?)  
239.E23 : bon, pourquoi c'est  $-1$ ? ... ben, après on peut faire la limite de ça moins 1, et on devrait trouver zéro  
240.E22 : ouais mais attend c'est bon de toutes façon (... ?)  
241.E23 : on n'a pas décrit les courbes là, tu mets) (... ?) quelle (...) comme toutes les autres  
242.E22 : ouais, elles tendent toutes  
243.E23 : ben, on peut dire que celles qui sont situées entre (sous) (... ?)  $-1$ , en fin... elles peuvent pas rentrer... tu vois ce que je veux dire?... là il y a un domaine qui est interdit... si tu veux, c'est la courbe et en départ... euh  
244.E22 : hum  
245.E23 : en dessus de  $-1$ ... dès en dessus de  $-1$  elle resterait en dessus de  $-1$  (... ?), alors que entre  $-1$  et 1 elles restent entre  $-1$  et 1...  
246.E22 : ouais

247. E23 : d'ailleurs, ben (... ?) dire c'est ...ouais ... tu veux mettre ça? (... ?) ou pas?
248. E22 : tu veux que je le mette? ... hum, ou alors, on peut dire que les courbes situées au dessus de (ligne) «  $y = 1$  » convergent vers «  $y = 1$  »
249. E23 : ouais
250. E22 : (... ?) ça en tend vers «  $y = 1$  »
251. E23 : quand «  $x$  » tend vers moins l'infini...
252. E22 : alors, allez-y, qu'est-ce que je écrive ?
253. E23 : ouais, ben ça...
254. E22 : les courbes solutions ont telle allure
255. E23 : les courbes solution ... au dessus de «  $y = 1$  » restent au dessus (ha, ha, ha) (... ?) bais, oui... et convergent vers, et convergente vers «  $y = 1$  » quand  $x$  tombe vers moins l'infini... de même pour les courbes en dessous de  $y = -1$  euh ... de même les courbes, ouais... en dessous ...
256. E22 : de -1 et entre -1 et 1...
257. E23 : il faudrait mettre «  $y$  » parce que ...
258. E22 : ah, ouais, et entre  $y = -1$  et  $y = 1$ ... euh
259. E23 : les courbes elles restent ... entre «  $y$  » ...

## Deuxième partie : le travail en géométrie dynamique

260. P : alors, (... ?) vous allez refaire presque la même activité sur l'ordinateur ... parce vous avez vu que sur le papier c'est pas très commode parce qu'on sait pas bien ce qui se passe... donc je vais... le logiciel que vous allez vous servir s'appelle Cabri Géomètre et là c'est la version qu'on appelle la version II Plus... (... ?) ... ..
261. E23 : (en lisant) « Ouvrir la figure ... Le vecteur d'origine Q est déplaçable »... D'accord...
262. E22 : tu peux faire (... ?) ou pas
263. E23 : « déplacer le point Q et écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$  à partir de ce que vous voyez à l'écran » ... ..alors, je vais pointer, c'est ça ?
264. E22 : ouais ...
265. E23 : ce vecteur
266. E22 : hum ... non, voilà, ... là tu, voilà tu laisses appuyé... voilà, tu peux déplacer
267. E23 : (... ?) on a un point
268. E22 : tu veux que je le fasse ?
269. E23 : en fait, c'est le point qu'il faut déplacer...
270. E22 : je ne sais pas...
271. E23 : voilà, (... ?) ta (... ?) bouge au même temps
272. E22 : hum,
273. E23 : ah, parce qu'en fait, là ... c'est pour tracer (... ?) la courbe...
274. E22 : ben, alors, tu vas là...
275. E23 : pourquoi là?
276. E22 : ah, ben, parce qu'il faut, (...) l'allure ... « écrire les info complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$  à partir de ce que vous voyez à l'écran »
277. P : la courbe  $C_1$  ... c'est la courbe solution qui passe par ...
278. E23 : (... ?) dessiner un point
279. E22 : ah, click dessus (... ?)...
280. E23 : comment on peut la tracer ?
281. E22 : « déplacer le point Q et écrire les infos complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$  à partir de ce que vous voyez à l'écran » ...
282. E23 : (en demandant au professeur) Madame, est-ce qu'on peut tracer la courbe  $C_1$  ou pas ?
283. P : ah, c'est vous qui voyez ce que ... Vous pouvez déplacer le point Q euh ...
284. E23 : on ne peut pas tracer ..., il n'y a pas une option, je ne sais pas ... en tout cas...
285. P : ...on fera ça après, non, il n'y a rien que vous dites « tracer la courbe  $C_1$  »
286. E23 : d'accord
287. P : justement c'est votre intelligence ...
288. E22 : (... ?) il fait comme ça... point Q, oui ...
289. E23 : elle fait comme ça la courbe
290. E22 : ah op!
291. E23 : bah ouais, c'est ça qu'on avait vu... (... ?)
292. E22 : ah ouais, ben c'est meilleure (... ?) elle fait comme ça, je pense
293. E23 : bon, on va écrire ... (...?)
294. E22 : tu (... ?) et en passant cela il fait ... hum, hop ! et il va (rester) (... ?) là



295. E23 : voilà
296. E22 : celle-là... hop ! ... bon, alors, on va le laisser on va le mettre (... ?)... alors, donc, « déplacer le point Q et écrire les infos complémentaires sur l'allure de la courbe à partir de ce que vous voyez à l'écran » ... euh, qu'est-ce qu'on voit à l'écran ?
297. E23 : ben, la courbe elle est croissante...
298. E22 : non, je pense que ... ça (... ?) tendre parce que je pense que c'est par rapport au point Q, non? ... La courbe croissante on ne la voyait pas comme ça?
299. E23 : sur l'allure de la ... de toutes façons (... ?) des infos sur l'allure (... ?)
300. E22 : non, mais des infos complémentaires
301. E23 : (... ?) tu vois quoi...
302. E22 : non, mais, justement... « déplacer le point Q et écrire les infos complémentaires sur l'allure » ...
303. E23 : ah c'est pour t'aider à mieux voir ... euh ... comment en faire? Ah, mais là... l'info complémentaire, c'est le sens... parce que toute à l'heure, on ne savait pas si elle venait de là et qu'elle faisait comme ça ...
304. E22 : oui, mais là, pourquoi ça sera comme ça
305. E23 : ben, il y a le vecteur qui tourne
306. E22 : mais c'est quoi ce vecteur Q ?
307. E23 : ben, c'est un vecteur posé là, et tu vois toute l'heure, ce que je te disait, on n'a pas de flèches sur les titres rouges...
308. E22 : ah ben oui, parce que là (... ?) faire comme ça
309. E23 : donc, tu vois là ... ce qu'on mis c'était faux
310. E22 : (... ?) la première question
311. E23 : ça ne converge pas, ça fait comme ça en fait.
312. E22 : voilà !
313. E23 : là, ça fait comme ça et là ça fait bien comme ça
314. E22 : ah oui tu l'as de ce côté
315. E23 : ça par là
316. E22 : et met (...?)
317. E23 : alors que là ça converge
318. E22 : on le met alors ?... bon, (en lisant) « déplacer le point Q et écrire ... »... et bien, euh ... le vecteur issu de Q...
319. E23 : grâce à l'orientation du vecteur Q
320. E22 : ouais, alors le vecteur issu de Q ... nous indique le sens de ...
321. E23 : voilà... la courbe  $C_1$ , voilà
322. E22 : alors je dit quoi?
323. E23 : le vecteur issu de Q,
324. E22 : le vecteur issu du point Q nous indique
325. E23 : la ...
326. E22 : le sens
327. E23 : ouais, on a la direction en fait
328. E22 : non, c'est la direction justement, (cela n'a) pas de sens, elle a direction par exemple une droite, et la direction ça veut dire qu'elle est parallèle à (... ?)
329. E23 : ouais
330. E22 : le vecteur issu du point Q nous indique le sens, de la trajectoire de la courbe
331. E23 : voilà... de  $C_1$  ...
332. E22 : voilà, et on ne peut pas dire ...
333. E23 : on est (... ?)
334. E22 : (en lisant) « le vecteur peut laisser sa trace... »
335. E23 : non, mais, est-ce que tu veux pas qu'on met... ça nous, ça nous indique comme toute à l'heure qu'en fait ... elle admet «  $y = -1$  » comme asymptote, puisque elle va bien dans ce sens-là
336. E22 : oui, mais on voit ... même, si on allait dans ce sens-là, la courbe serait aussi l'asymptote, ça dépend pas du sens l'asymptote, ça dépend ...
337. E23 : oui, mais ça convergerait pas, ça divergerait
338. E22 : ah, oui, alors après en ce sens là
339. E23 : on peut mettre un petit truc comme ça, non?
340. E22 : oui, il faut dire que ce ... euh
341. E23 : nous indique le sens de la trajectoire de  $C_1$  eh, qui converge, qui tend ou je ne sais pas moi
342. E22 : on va mettre qui, qui converge lorsque  $x$  tend vers plus l'infini... vers ...
343. E23 : «  $y = -1$  »

- 344.E22 : qui converge ... vers ... lorsque  $x$  tend vers plus l'infini... vers (... ?) bon, qui converge ... lorsque ... qui converge lorsque  $x$  tend vers plus l'infini vers «  $y = -1$  »... (en lisant) « le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace... »
- 345.E23 : « comment l'utiliser »
- 346.E22 : bon, « comment l'utiliser pour avoir une idée d'une courbe solution passant par un point donné ? »
- 347.E23 : bon, et (... ?) comme (... ?) fait
- 348.E22 : déjà on (... ?) ce point, on remet au point L
- 349.E23 : et ben si...
- 350.E22 : ah voilà, il va mettre quel est l'objet? si c'est L ou Q... rien... allez point, point Q, point Q, ...  
« lieu »
- 351.E23 : non ... écoute, en fait, c'est (... ?) on s'en fou (... ?) en attendant de bouger... « Comment utiliser la trace pour avoir une courbe? »... et ben, en fait, si tu veux qu'il passe par un point donné, tu mets ton vecteur sur un point
- 352.E22 : (... ?) sur L
- 353.E23 : et en même temps tu déplaces ton vecteur
- 354.E22 : ouais, mais, tu (... ?) déplace comme ça, regard, attend ... on va mettre pointer, bon j'ai pointé, quel objet? J'ai pointé le point Q, on va montrer ... allez ! ah, voilà... ah ouais, c'est le point que je déplace... j'ai mis point Q quand même ... c'est quoi alors?
- 355.E23 : tu l'as (... ?)
- 356.E22 : tu vois c'est toujours le point L que je déplace...
- 357.E23 : (... ?) qu'est-ce que tu fais ?
- 358.E22 : ah oui, attend Delphine... j'essaie de déplacer le point Q, point Q d'accord... donc après, je vais (... ?) ... voilà... hum, qu'est-ce que je déplace ? ...
- 359.E23 : tu déplaces pas le point (... ?) ...
- 360.E22 : ben oui, (... ?) alors... ah ouais, voilà... bon, regarde, tu peux très (... ?) déplacer comme ça
- 361.E23 : mais tu es sur la flèche ... (... ?) la flèche elle monte
- 362.E22 : hum, je vais descendre, non, (... ?)
- 363.E23 : ben si, regarde
- 364.E22 : non, (...)
- 365.E23 : (... ?) tu fait pas comme il faut, regarde, (... ?) tu mets là, la flèche elle vas là, donc, tu vas jusqu'à là... stop, non mais arrête toi là... petit à petit, après tu viens jusqu'à mon doigt, avec ton origine de Q au sommet... en fin, voilà, après tu vois à chaque fois, si tu veux tout faire, euh ... ton origine du vecteur tu le places à chaque fois sur la flèche... et à chaque fois
- 366.E22 : non, mais on va faire la trace, finalement... (... ?) te dit ou pas... nous on va la placer là, d'accord, puisque si je déplace sur L
- 367.E23 : alors, « trace » ... (... ?)... ah c'est pas non, c'est celui-là à côté? Ah, non... « trace » donc tu l'actives... et après tu mets pointer, je crois, et tu ... il faut déplacer après ton vecteur ... non, il faut que tu le mets sur point et tu déplaces ..., là c'est ailleurs...
- 368.E22 : non, mais regarde, c'est (... ?) regarde... alors je vais où ?
- 369.E23 : en haut... à la flèche là, après à la flèche ...
- 370.E22 : non (... ?)
- 371.E23 : (... ?) ça va ?
- 372.E22 : (... ?) d'accord (... ?)
- 373.E23 : tu vois à chaque fois, il faudra que ... là tu puisses aller là ...
- 374.E22 : ah, (... ?)
- 375.E23 : elle marche ? (... ?) pas... ah, (... ?) en fait... le vecteur ...
- 376.E22 : tu déplaces (... ?) parce que tu (...)
- 377.E23 : on va enlever « trace », peut-être, non ?
- 378.E22 : on le connaît (... ?)
- 379.E23 : hum ... le vecteur, « comment l'utiliser pour avoir une idée de la courbe solution passant par un point donné ? »
- 380.E22 : bon, par rapport à « passant par un point donné », on part d'un point, la flèche nous indique un sens
- 381.E23 : et une direction
- 382.E22 : et une direction, que là ensuite ... en fonction de... que l'en suit et à chaque fois la flèche elle va nous indiquer, euh ...
- 383.E23 : la direction à prendre
- 384.E22 : la direction
- 385.E23 : là il (... ?) la direction et le sens
- 386.E22 : ouais, voilà, donc... « comment l'utiliser pour avoir une idée de la courbe solution passant par un point donné? » ben, on part ...

- 387.E23 : on place le vecteur Q  
388.E22 : on part du point ... donné  
389.E23 : on remplace... le vecteur en Q  
390.E22 : non ... ouais, non mais « le vecteur peut laisser sa trace, comment l'utiliser pour avoir une idée » ...  
on part du point, oui, ça veut dire, on met le point Q... donc, attend, on part du point Q  
391.E23 : donc on a, donc un vecteur euh... on part (... ?) que nous donne  
392.E22 : on part du point Q de (... ?)... le vecteur Q  
393.E23 : ah, d'origine Q en fait  
394.E22 : le vecteur d'origine Q nous donne ... (... ?) on va mettre direction  
395.E23 : et un sens... c'est importante de mettre là, je pense  
396.E22 : et un sens, que l'on suit en fur et à mesure que le vecteur progresse  
397.E23 : voilà, très bien ... alors, euh « trace » on va l'enlever tout de suite, parce que (... ?) ça peut être (... ?)  
voilà  
398.E22 : attend, que l'on trace au fur et à mesure que le vecteur (... ?) ah si on a le (... ?) voici  
399.E23 : voilà  
400.E22 : on a l'allure  
401.E23 : parce qu'en fait, le vecteur, ça donne la tangente à la courbe et comme c'est très près ... on a tangente  
402.E22 : voilà  
403.E23 : ça (... ?) on voit bien  
404.E22 : la tangente approxime la courbe ... (en lisant) « classer les solutions par paquets, selon leur  
comportement », c'est ça qu'on a fait  
405.E23 : ouais  
406.E22 : un paquet là, un paquet là, un paquet là ... on en a trois  
407.E23 : « combien de différents paquets... » ouais, moi je dirais que (... ?) au-dessus de -1, en dessous et  
entre ... et est-ce que -1 et 1 ça ferait pas un paquet ?  
408.E22 : bah, c'est la limite des paquets plutôt, non ? c'est le (... ?) du paquet, voilà c'est vrai  
409.E23 : oui, mais à côté de ça, euh ...  
410.E22 : tu as les paquets qui sont des solutions  
411.E23 : les solutions c'est «  $y=1$  et  $-1$  » c'est quand même des solutions  
412.E22 : oui  
413.E23 : donc...  
414.E22 : non, mais tu peux dire que tu as un paquet compris entre plus l'infini et 1  
415.E23 : hum...  
416.E22 : un paquet comprend entre 1 et -1, et un paquet comprend entre -1 et moins l'infini  
417.E23 : ouais ... puisque ...  
418.P : elles peuvent couper les ... les droites «  $y=-1$  » ...  
419.E23 : non  
420.P : et vous avez une idée pourquoi ?  
421.E22 : comment, excusez-moi ?  
422.P : la question, c'est ... est-ce qu'il y a des courbes solutions qui coupent les droites ... ?  
423.E23 : non, on n'a (... ?) mais non  
424.E22 : non, (... ?) toujours non  
425.E23 : on a mis que c'étaient des asymptotes ...  
426.P : et pourquoi elles ne se coupent jamais ?  
427.E23 : ça doit être ...  
428.E22 : pourquoi elles ne se coupent jamais ?  
429.P : est-ce qu'il y a une raison mathématique ?... pas de .... pas perceptif, pas des yeux ... mais, est-ce qu'il  
y a une raison mathématique pour lequel se coupent jamais...  
430.E23 : (... ?) c'est des (... ?) ...  
431.E22 : parce que quand « y », euh ...  
432.E23 : ça ... parce que peut être ...  
433.E22 : (... ?) sera une solution impossible... mais regarde si tu prends (... ?)  
434.E23 : non, ça c'est des solutions «  $y=1$  et  $-1$  »  
435.E22 : oui  
436.E23 : pourquoi elles ne couperaient pas ?  
437.E22 : parce que ça viendrait à dire que tu aurais un point qui appartiendrait à la fois à une solution là et à la  
fois à la courbe ... «  $y=1$  », et ça (doive) pas (... ?)  
438.E23 : à la fois ...  
439.E22 : ça veut dire que ton point il est (... ?) parce que c'est le (... ?)  
440.E23 : attend (... ?) un point qui est là (... ?)

441. E22 : comme c'est une solution constante ... forcément en tous les autres sont constantes on se (... ?) comme ça
442. E23 : si tu as un point qui est sur la courbe et (... ?) en «  $y=-1$  » comme c'est une solution constante alors toutes les points vérifient «  $y=-1$  » donc du coup ... on n'est plus en (... ?) là ... ça c'est parce que les (... ?) proches, tu as une solution qu'à un même endroit et qui (... ?) en nulle ... elle (... ?) tout en nulle ... ça ce doit être ça, non ?
443. E22 : alors, ça montre quoi ? non, parce que l'on avait une solution constante ...
444. E23 : oui, mais donc ça peut ... euh, non, ça doit être nulle, tu sais en devenant (... ?) nulle avec tout le temps nul, je ne sais pas quoi ...
445. E22 : ouais mais je (... ?) nulle
446. E23 : parce que là on peut faire pareil avec -1
447. E22 : ah ben si, explique ...
448. E23 : de moins, je pense que si à un moment elles se coupent ...
449. E22 : hum ... .. (... ?) ça montrerait pas euh (... ?) là, le truc ...
450. E23 : si un moment cette courbe elle coupe le truc ça veut dire qu'il aurait un moment où «  $y$  » vaut -1 ...
451. E22 : voilà
452. E23 : mais s'il vaut -1, ça veut dire qu'en (... ?) on pourrait ... et il faut (peut être) quand même un point d'inflexion, tu sais, comme ça ... ..
453. E22 : en fin, tu traces là (... ?) il faut (question) de ...
454. E23 : ouais (... ?)
455. E22 : si ... c'est (... ?) même un truc quand on avait de paquets différents
456. E23 : ouais
457. E22 : qu'à à chaque fois le truc, il ne va jamais passer en (dessus) de -1
458. E23 : ouais, ben c'est pas (... ?) comme ça
459. E22 : « justifier la réponse »
460. E23 : on devrait justifier (... ?) pas ça ... ça que on a justement oui, c'est des asymptotes sont (... ?)
461. E22 : oui, mais pourquoi sont des asymptotes (... ?) la question ? ... en cas général pourquoi on a des asymptotes ? (... ?)
462. E23 : une asymptote euh ... déjà une asymptote ça dit pas si c'est au-dessous ou au-dessus pour savoir si «  $f$  » est au-dessous ou au-dessus de «  $g$  » tu fais la limite «  $f - g$  »... sauf que là, on n'a peut faire (... ?)
463. E22 : non, tu fais (... ?), tu regardes le signe de (... ?) «  $g$  »
464. E23 : oui voilà ... là on sait que c'est «  $y=-1$  » mais là, tu sais pas les équations des solutions
465. E22 : là pas (... ?) tout là (... ?) ... tu sais que c'est «  $y=-1$  » mais là tu sais pas
466. E23 : là ... cette courbe, pour dire qu'elle toujours au-dessous, tu sais pas son équation... tu peux pas faire
467. E22 : ben, non
468. E23 : donc ça va pas
469. E22 : non
470. E23 : ça doit être une autre raison par rapport à la (... ?) de l'équation, je ne sais pas
471. E22 : ouais ... cherche bien, j'ai la solution, ouais !
472. E23 : (... ?)
473. E22 : attend, pourquoi ça serait... .. pourquoi c'est (... ?) elle resterait au-dessous ? pourquoi est-ce que toutes les autres resteraient au-dessous... en dessus et au milieu ?
474. E23 : (... ?) c'est pas assez simple (qu'admis) la dérivée, et c'est les points (commun) d'équilibre, parce que c'est de points d'équilibre... c'est ça, tu te rappelles on pourrait avoir ... les points, on cherchait des points qui annulent la dérivée
475. E22 : oui
476. E23 : (... ?) pour les systèmes
477. E22 : oui, c'étaient des point d'équilibre ... et c'étaient quoi les points d'équilibre déjà ?
478. E23 : ben, c'est des points qui annulent la dérivée
479. E22 : oui, mais je voulais dire ...
480. E23 : (... ?) -1 et 1 parce que ... euh
481. E22 : oui ... s'annule la dérivée... (... ?) sont des points d'équilibre, (il faudrait) une propriété sur les points d'équilibre
482. E23 : hum
483. E22 : qui serait (... ?) ... ..
484. E23 : (... ?) ... euh ... il faut (... ?) des axes sont des points d'équilibre... ..
485. E22 : mais, non, en fait, on est bêtes ... les points d'équilibre c'est juste par exemple ... ça c'est un point d'équilibre, mais ce point d'équilibre par exemple c'est une centre, et tu sais qu'à chaque fois les sens (... ?) c'est tous des points d'équilibre
486. E23 : ouais

- 487.E22 : en quelques mots, d'abord les points d'équilibre on (... ?) regarder qu'est-ce que c'étaient... comme points
- 488.E23 : ben, non parce qu'on (regarde) qu'est ce que c'étaient pour avoir un valeur propre de la matrice
- 489.E22 : ouais, mais celle ci s'annule de (... ?) s'annule où est-ce que c'étaient le (... ?) point d'équilibre
- 490.E23 : ah, ouais, en fait, on avait le point et après on (... ?) la valeur (propre) (... ?)
- 491.E22 : en plus ... en plus (... ?) pourquoi, parce là on cherche pas un point, c'est une fonction «  $y=1$  », c'est pas un point (... ?) que je (... ?)
- 492.E23 : dans tous les points, quelque soit «  $x$  »
- 493.E22 : ouais, qui font «  $y=-1$  »
- 494.E23 : on peut avoir des droites d'équilibre ?
- 495.E22 : de quoi ?
- 496.E23 : droite d'équilibre
- 497.E22 : ah ouais ... (... ?) ah
- 498.E23 : quand (... ?) vont (... ?) un petit peu ...
- 499.E22 : bon ... « classer les solutions par paquets ... », on note trois paquets différents ... .. (... ?) petite (... ?) ...
- 500.E23 : donc, après le (... ?) euh ... des courbes situés ... ..
- 501.E22 : ... au-dessus de  $-1$  ou (... ?) qui coupent
- 502.E23 : (... ?) sens
- 503.E22 : ouais, ça j'aurais dû dire, en fait
- 504.E23 : après, on peut pas trouver des solutions qui coupent «  $y=1$  »
- 505.E22 : ouais, c'est vrai que c'est (... ?) ... (en écrivant) « on ne peut trouver une solution coupant  $y=1$  », je vais mettre
- 506.E23 : ouais
- 507.E22 : car sinon ...
- 508.E23 : ah, ou tu mets d'après le théorème de Cauchy ... en effet, si ... ouais, on mets « car sinon » ... euh... parce que (... ?) de fois ...
- 509.E22 : attend, petite idée (... ?) ... descends-là, descends ... .. « on ne peut trouver une solution ... coupant ... », « on ne peut trouver une solution coupant ... »
- 510.E23 : «  $y=1$  ou  $y=-1$  »
- 511.E22 : ah, «  $y=-1$  » par exemple ...
- 512.E23 : car où, en fin, tu peux mettre « où » ...
- 513.E22 : oui... oui, « on ne peut trouver une solution coupant  $y=1$  et  $y=-1$  »
- 514.E23 : alors on met quoi ?
- 515.E22 : « car », et ben, parce que si elle coupait, elle n'aurait pas sa tangente ... euh, nulle
- 516.E23 : si ça, ça allait pas... parce que nous, on pouvait trouver une droite d'inflexion ... tu as carrément
- 517.E22 : oui mais après, après le truc c'est que ... le truc c'est que si ça coupait la tangente serait nulle et on l'a pas la droite d'inflexion parce que on a une unique solution en un point
- 518.E23 : et on peut pas directement dire, car si elle coupait en un point on aurait en ce point deux solutions possibles?... ce qui est faux... moi j'avais compris comme ça, en fait, en chaque point tu as une unique solution qui passe par ce point
- 519.E22 : oui ...
- 520.E23 : donc ... si elles se coupent... c'est à deux droites qui passent par ce point, ce point admet donc deux courbes solutions ... quelque soit la tangente
- 521.E22 : oui
- 522.E23 : ce qui est faux ou non ?
- 523.E22 : ah ... ah, oui
- 524.E23 : moi j'avais compris que toutes les tangentes elles sont (... ?)
- 525.E22 : ah, d'accord
- 526.E23 : parce que du coup, parce si ça coupe la tangente on peut avoir une droite d'inflexion
- 527.E22 : mais, oui mais...
- 528.E23 : mais le problème c'est
- 529.E22 : attend, pourquoi ... c'était quoi ton problème la droite d'inflexion?... parce que si tu as ta courbe ...
- 530.E23 : parce qu'au début on a ... on nous a demandé par rapport aux tangentes
- 531.E22 : oui
- 532.E23 : et après j'ai dit, mais si on peut trouver une tangente horizontale si on a une courbe comme ça
- 533.E22 : si on a une courbe comme ça ...
- 534.E23 : la tangente vaut bien 0
- 535.E22 : ouais

- 536.E23 : donc ça marchait pas ... elle m'a dit oui, il y a (... ?) donc un problème ... et (... ?) bon si ça coupe à ...
- 537.E22 : non, mais c'est après ... il n'y a pas de Cauchy-Liphzchits ... moi j'avais compris par rapport à ta droite d'inflexion
- 538.E23 : ah, ouais ... moi j'ai compris ... du coup c'était ... par rapport aux tangentes ça servait pas, et en fait à partir d'un moment (... ?)
- 539.E22 : (... ?) exactement le même
- 540.E23 : ouais ... le truc c'est que montrer qu'en un point il y a deux droites solutions qui passent.
- 541.E22 : voilà !
- 542.E23 : c'est qu'il faut d'après Cauchy
- 543.E22 : voilà, parce que là finalement si on avait une droite d'inflexion on aurait pareil deux droites ... une droite qui est comme ça et puis tu aurais une droite qui est comme ça et qui vérifie la solution
- 544.E23 : voilà exactement... donc... mets ce que tu veux, mais c'est vrai que ça revient au même
- 545.E22 : ouais, on va pas passer par droite d'inflexion, ouais... donc « on ne peut pas trouver une solution ... »
- 546.E23 : « car sinon »
- 547.E22 : « car sinon en un point... on aurait 2 courbes solutions »
- 548.E23 : passant par ce point, en fin (... ?)
- 549.E22 : en un point on a 2 courbes solutions, « car sinon en un point on aurait 2 courbes solutions, or ... »
- 550.E23 : ce qui est faux d'après le théorème de Cauchy, non ? ...
- 551.E22 : ah, il faut dire car f... ah ouais
- 552.E23 : car f est  $C^1$ , ouais, mais bon ça ... euh
- 553.E22 : non, mais f ...
- 554.E23 : oui
- 555.E22 : « or on a  $y'=f(x, y)$ ... »
- 556.E23 : c'est avec f  $C^1$
- 557.E22 : « avec f  $C^1$  donc d'après ... »
- 558.E23 : Cauchy
- 559.E22 : Cauchy-Lipschitz
- 560.E23 : c'est que Cauchienne ... tu sais c'est l'autre théorème que tu me disais ... Cauchy-Lipschitz c'est ... elle est lipschitzienne
- 561.E22 : il existe une unique solution maximal ... Cauchy-Lipschitz c'est pareil
- 562.E23 : non ... Cauchy-Lipschitz
- 563.E22 : (... ?) je l'ai vu (... ?)
- 564.E23 : en fin, on avait vu que c'était ... euh ... une lipschitzienne et une solution particulière, donc elle a une unique solution et tu m'avais dit oui mais il y a un autre théorème qu'on n'a pas vu (... ?) sur les lipschitzienne, elle suffit que soit  $C^1$  ...
- 565.E22 : oui, c'est Cauchy-Lipschitz
- 566.E23 : ah moi je crois c'est que Cauchy, parce qu'elle a dit que c'était Cauchy ...
- 567.E22 : oui, mais c'est ... à mon avis c'est le même, moi j'ai que f ...  $C^1$ ... euh, mais je crois que les ai enlevé ...
- 568.E23 : ouais, c'est pareil ... Cauchy ... Cauchy-Lipschitz
- 569.E22 : je pense que quand tu dis Cauchy c'est pour voir de Cauchy
- 570.E23 : ouais
- 571.E22 : (... ?) mais à mon avis c'est Cauchy-Lipschitz, ah ... « donc d'après Cauchy ... »
- 572.E23 : « il existe une unique solution »
- 573.E22 : « or on a  $y'=f(x, y)$  avec f  $C^1$  donc d'après Cauchy-Lipschitz, il existe une unique ... »
- 574.E23 : « solution en un point »
- 575.E22 : « solution en un point »
- 576.E23 : mets un point là
- 577.E22 : déjà ?
- 578.E23 : voilà ... donc les courbes ne peuvent pas se couper ... en fin, je sais pas ...
- 579.E22 : donc les courbes ... c'est impossible que les ... que deux ... qu'une solution ... non, mais je dit ça ... c'est bon (elle lit) « on ne peut trouver une solution coupant ça car sinon... en un point (... ?) or on a (... ?) ça d'après Cauchy-Lypschrift (... ?) solution en un point ». Bon, donc voilà ... pourquoi, on a 3 grands paquets ... maintenant euh ...
- 580.E23 : ben, voilà, c'est tout ... hein
- 581.E22 : et alors, pourquoi on a 3 grands paquets ?
- 582.E23 : parce qu'après là ... c'est ça, ouais, on n'a pas besoin de le mettre

- 583.E22 : ouais, j'ai mis ... c'est bon ? ... attend ça on va marquer « aide de la professeur... aide de Mme Laborde »
- 584.E23 : ouais, tu peux mettre parce qu'on (... ?) un petit (... ?)
- 585.E22 : attend je vais (... ?) ... bon ... (en lisant) « pour chaque paquet de courbes solutions, décrire leur comportement quand  $x$  tend vers plus l'infini »
- 586.E23 : bon alors, on va faire
- 587.E22 : on va faire partir la flèche ...
- 588.E23 : (... ?) haut ... de toutes façon vers là haut c'est ...
- 589.E22 : on a dit que ça divergeait vers plus l'infini, ah
- 590.E23 : ça divergeait... (... ?) quand «  $x$  »...
- 591.E22 : non, mais non, parce qu'en fait... ça pas l'air
- 592.E23 : (... ?) celui-là il va là-bas ...
- 593.E22 : ah mais, c'est «  $y=$  ... » et ça c'est ton «  $y=1$  »
- 594.E23 : ben, regarde, quand «  $x$  » tend vers ...
- 595.E22 : ah, regarde, ça fait comme ça ...
- 596.E23 : oui, mais ça va dans l'autre sens ...
- 597.E22 : et pourquoi ça va dans l'autre sens ?...
- 598.E23 : on avait dit que ça divergeait
- 599.E22 : attend c'est quoi qu'on va regarder là ...
- 600.E23 : ça on avait dit que ça divergeait finalement avec le (... ?)
- 601.E22 : oui, parce qu'on avait O qui partait et (... ?) dans tous les sens
- 602.E23 : regarde quand «  $x$  » tend vers plus l'infini, elle peut faire comme ça ... .. tu vois, là si on fait un point là ... euh, (... ?) plus ... et tu vois...
- 603.E22 : et toutes les courbes divergent quand «  $x$  » tend plus l'infini
- 604.E23 : hum, ben oui on avait dit que ça convergeait vers ... non ? tu (... ?)
- 605.E22 : oui, mais attend, le problème ce qu'il faut pas considérer «  $x$  », il faut considérer «  $x$  » et «  $y$  »
- 606.E23 : non
- 607.E22 : ben si... c'est pas seulement quand «  $x$  » tend vers plus l'infini...
- 608.E23 : on avait dit, regarde ... .. on avait dit là que ça tendait vers cette courbe là mais elle n'est pas trop en fait ...
- 609.E22 : ah non mais on l'avait dit ça en  $[-3, 3]$  ça tend vers celle ... là ... .. oulàlà
- 610.E23 : mais, non ça (... ?) quand «  $x$  » tend vers plus l'infini
- 611.E22 : c'est pas bon comme ça ...
- 612.E23 : (... ?) des fois on est (... ?) ou pas, on ne pouvait pas le savoir... c'est qu'on a mal tracé nos courbes ...
- 613.E22 : ouais, ouais je les avait fait toutes ces ... revenir sur ... euh ...
- 614.E23 : ouais, mais pourquoi tu as pas suivi le voie
- 615.E22 : ben, parce que c'était comme ça la première ... la première regarde, c'était comme ça
- 616.E23 : on avait que ça
- 617.E22 : (... ?) regarde, regarde ... c'était ça
- 618.E23 : non, mais je sais... on avait que ça au premier ... c'était vachement plus réduit, regarde... au bref... à l'infini... plus ça
- 619.E22 : « pour chaque paquet de courbes » ... alors... .. ben oui, mais ...
- 620.E23 : alors, pour le paquet 1... quand «  $x$  » tend vers ...
- 621.E22 : bon, attend, je marque 1, 2, 3 ... pour le paquet 1, les solutions tendent vers ...
- 622.E23 : quand «  $x$  » tend vers plus l'infini ah...
- 623.E22 : bon, elles tendent toutes là bas ... je sais pas ... je dirais que' elles tendent toutes vers plus l'infini ...
- 624.E23 : ben, non... elles n'ont pas ... regarde, elles vont tout droit...
- 625.E22 : ben (... ?) ça veut dire quoi ?...
- 626.E23 : je sais pas ... il faut se mettre là ... je ...
- 627.E22 : tu dis par exemple celle-là, elle tend vers «  $y=1$  »... c'est ... ah, non, non, regarde ... ouais
- 628.E23 : elle part ... ouais
- 629.E22 : regarde, elles partent dans tous les sens ... regarde celle-là, elle part juste là-bas, celle-là là-bas, celle-là là-bas ... après c'est vrai que ... plus tu te rapproches ...
- 630.E23 : (... ?) plus ça diverge ... .. ouais, on va faire un point
- 631.E22 : (... ?) je met « les solutions divergent »... mais attend parce que là les courbes c'est  $y(x)$  on est d'accord ...
- 632.E23 : j'ai pris un point là et je vais regarder ses coordonnées de ce point-là... .. alors (... ?) dans le sens «  $x$  » et que plus d'autre ... comme on déplace...
- 633.E22 : tu vas avoir (... ?) ... .. ahlàlà

- 634.E23 : 58 ... parce que je(... ?) dû faire ... comme tu fais ? (... ?) clignoter
- 635.E22 : (... ?)... maintenant j'en met en clignotant là, parce que là moi je dirais que ça diverge ... .. « y » diverge pas...
- 636.E23 : mais qu'est-ce qu'il faut faire ?
- 637.E22 : et ben, en fin, on avait dit que quand « x » tend vers l'infini ... qu'est ce qui fait « y »... ?
- 638.E23 : (... ?)
- 639.E22 : non, mais, reviens-toi au milieu, comment tu fais ?
- 640.E23 : déjà c'est là
- 641.E22 : tu as mis où là ?
- 642.E23 : voilà, voilà tu étais trop loin ... voilà, tu va avoir des droites perpendiculaires ...
- 643.E22 : ouais, tu peux tout mettre ... voilà, maintenant tu peux mettre le Q par là, pour voir ce qui fait en 3<sup>ème</sup> région ... et là, je peux regarder s'il va par là ? ... ouais
- 644.E23 : (... ?) c'est bizarre cette courbe là, j'ai l'impression qu'il y a quelque chose entre « x=1 » et « x=-1 » regarde là... (... ?) et après comment on dit ... là change au-dessous de « y=-1 » ...
- 645.E22 : hum...
- 646.E23 : tu vois la catastrophe ... je ne sais pas si tu vois la catastrophe ...
- 647.E22 : non mais, c'est faux ce (... ?) c'est ça qui est juste...
- 648.E23 : (... ?)
- 649.E22 : et là, ça fait quoi là ... ..
- 650.E23 : alors voilà ...
- 651.E22 : bon, (... ?) ... .. donc, nous on a quoi ? ... les solutions quand (... ?) plus l'infini
- 652.E23 : et ben, tu mets « les courbes solutions divergent » ... certainement en plus l'infini... (... ?) non, je ne sais pas
- 653.E22 : ... les courbes solutions (... ?)
- 654.E23 : après, entre -1 et 1 ...
- 655.E22 : ah mais je vois (... ?) par exemple, tu prends celui là... elle converge vers 2, ah non,
- 656.E23 : non,
- 657.E22 : ben si, quand « x » tend vers plus l'infini « y » vaut 2 tout le temps ...
- 658.E23 : vaut 1, tu veux dire
- 659.E22 : mais pourquoi il y a en 2 là, bon en fin... un, deux (... ?) ... là tu prends ce point-là
- 660.E23 : oui (... ?) maintenant (... ?) est une solution (... ?)
- 661.E22 : quand « x » tend vers plus l'infini ça tend vers 3 ...
- 662.E23 : ça c'est des solutions constantes « y=1 » et « y=-1 » quelque soit « x » euh ... ah mais tu as un tout
- 663.E22 : (... ?) ...
- 664.E23 : ah mais je pensais que la paquet 1 moi
- 665.E22 : eh oui, le paquet 2 ...
- 666.E23 : le paquet 2 ça reste entre -1 et 1 quand même, (... ?) ... Le paquet 2 quand tu prends une courbe là entre -1 et 1 ... elle reste dedans
- 667.E22 : ben oui, mais ça diverge ... ça correspond à un point
- 668.E23 : ben, apparemment elles sont toutes droites
- 669.E22 : oui, mais ça correspond à un point (... ?) des points partout... je mets ... elles sont toutes parallèles à l'axe (... ?) ... et pourtant là... où elles sont parallèles, on a qu'elles divergent ... là ... elles sont parallèles on a qu'elles divergent et pourtant c'est entre -1 et 1
- 670.E23 : ouais, et tu va mettre qu'elles sont horizontales ?
- 671.E22 : non écoute ... de toutes façon on n'a vu ça (... ?) ... ..

**(fin de l'activité)**





# **Binôme E22/E23**

**Mise en équation différentielle  
d'une famille d'exponentielles**

**L'expérimentation de l'année 2003**

## Binôme E22/E23

1. E22 : on connaît pas la perpendiculaire... au même point,
2. E23 : oui,
3. E22 : alors, pour moi c'est la perpendiculaire au même point,
4. E23 : (...?) fais la même chose, mais, ce que je ne comprend pas, c'est comme tu dis, si je prend un point-là, et un point-là, pour celui-là, ça c'est claire que j'ai pas la tangente là, quoi, se je fais la parallèle, c'est ce que tu m'as dit tout à l'heure
5. E22 : oui, pourtant s'on fait la perpendiculaire à ça passant par ce point, et la per... après tu fais bien la perpendiculaire à celle-ci passant ...
6. E23 : ah oui,
7. E22 : en fait tu n'auras non plus la tangente...
8. E23 : parce que le segment c'est compliqué, tout simplement,
9. E22 : mais cela c'est une approximation,
10. E23 : ah, ben oui, mais de toutes façon c'est pas ... c'est pas ...
11. E22 : d'accord, bon, ben c'était pour ça, parce que juste ce que tu m'avais dit c'était vrai, je disais ça marche pas en fait... si je fais d'écran
12. E23 : non parce que tu sais quand tu fait un... justement, on disait que tu (visais)... ce quand t'avait plein de vecteurs, un champ de vecteurs tangentes, et ben ton champ de vecteurs c'était ton approximation de la courbe, et en fait à chaque truc tu sais ça faisait une approximation de la courbe
13. E22 : d'accord, ben c'est comme ça,
14. E23 : ok, donc, bon
15. E22 : donc à mon avis c'est pareil pour le vecteur non? et c'est pour ça que si on prendre un vecteur ... un segment plus petit,
16. E23 : d'accord,
17. E22 : de manière à (... ?) plus déplacer (... ?)... je sais pas,
18. E23 : ok,
19. E22 : j'imagine... (elle chante)
20. E23 : bon, maintenant on se fait la pente de ce point...
21. E22 : ouais...
22. E23 : voilà ... 0,67
23. E22 : «  $y = ,067$  » et tu me donnes... le point là
24. E23 : «  $y'$  »... .. tu veux l'équation?
25. E22 : non, j'aimerais bien les coordonnées de ce point
26. E23 : pourquoi?
27. E22 : ça me donnera le point de (...?)
28. E23 : nous ... on peut ordonner toute mon équation de la courbe
29. E22 : ah bah ouais ... il faut la pente... (...?)
30. E23 : par exemple?
31. E22 : c'est bien ça...
32. E23 : donc c'est quoi? «  $y$  » moins ça ... mais ça c'est «  $y'$  » pour le point là... T'es bien d'accord?
33. E22 : bah ouais
34. E23 : là ... la tangente ... son équation, c'est pour le point là... de coordonnés là, oui, t'es bien d'accord
35. E22 : oui ...
36. E23 : donc on peut écrire (... ?) que «  $y'$  » ... en ce point ça vaut ça ... ça vaut 0,67
37. E22 : que «  $y'$  » en ce point, ça vaut 0,67...
38. P : ah, je sais pas... elle est pas très très bonne, l'approximation de votre tangente, vous pouvez ... vous l'avez faite avec médiatrice et perpendiculaire là, c'est ça ?
39. E23 : non
40. P : comment vous avez fait la tangente ?
41. E23 : en effet il nous a dit de tracer un ...
42. P : qui vous a dit ça ?
43. E23 : ... on ne savait pas donc...
44. P : écoutez...
45. E22 : on a demandé à côté
46. P : vous avez profité de l'opinion publique
47. E23 : on a pris un segment encadrant un point...
48. P : voilà, d'accord... essayez qu'il soit plus petit ce segment, parce que l'approximation de votre tangente n'est pas très très bonne...
49. E23 : ah ouais voilà... c'est ça qu'on disait, en fin (... ?) on savait pas

50. P : vous pouvez le faire plus petit votre segment, non ?
51. E23 : comment ?
52. P : vous pouvez le faire plus petit
53. E22 : oui, oui
54. P : ça serait une meilleure approximation
55. E22 : et si on bouge le ... (... ?) ...
56. P : vous bougez aux point qui (...?) vous bougez les extrémités du segment, là... .. bougez... (... ?) n'allez pas trop vite, que je regarde...
57. E22 : voilà
58. E23 : non, mais parce qu'en effet on a mal choisit le point... On va choisir un point là déjà, donc...
59. P : oui, votre point est terriblement difficile...
60. E22 : bah ouais
61. P : oui, c'est ça... Terriblement difficile votre point
62. E22 : juste là (... ?) ça change brutalement...
63. P : ben oui c'est pour ça...
64. E23 : ah (... ?) entre 0,62 et je sais pas (... ?)... Non, c'est pas encore... Non, mais bon...
65. P : non, c'est pas bon... c'est très mauvaise approximation
66. E23 : non écoute, on va (... ?)
67. P : ce point vous pouvez pas le bouger... vous pouvez pas bouger carrément votre segment ?... vous pouvez ! et (... ?) le segment
68. E23 : oui mais (... ?) je verrais (... ?) rapprocher les points déjà... mais je peux pas rapprocher plus
69. P : mais non, mais ce point là, il est obligé d'être là ?
70. E23 : ben... déplace le point... le point là, tu le mets là
71. P : si vous (... ?) le point (... ?) le segment et vous les mettez là-bas, tout va suivre, non ?
72. E23 : mois je mets le point là... Voilà.
73. E22 : non, on ne peut pas ... .. Pointer...
74. E23 : en effet, tu veux déplacer quel point ?...
75. E22 : les points sont un bordel ... les points sur lesquelles on a tracé le segment, la perp... et les deux perpendiculaires. Si tu déplaces les points, tu déplaceras les trois bordels, donc ça donnera à nouveau la tangente... voilà ...non mais t'as pas encore déplacé le segment donc...
76. E23 : non, ben non...
77. E22 : non, mais ça sert à rien de placer le segment comme ça... Le segment, si tu veux, si tu le déplace le long de ton truc, il va changer. Si tu le déplaces et puis tu le mets là, euh ...
78. E23 : en, on ne peut pas le déplacer le long du truc
79. E22 : bah oui,... mais le problème c'est que tu l'a déjà déplacé... tu viens de déplacer les perpendiculaires au segment, mais le segment est là... Oui, t'as déplacé le segment...
80. E23 : oui, c'est ce que j'ai essayé de faire, mais je n'arrive pas...
81. E22 : oui, mais maintenant c'est trop tard ce que te veux dire... Remet tes droites là, et redéplace ton (... ?)
82. E23 : voilà
83. E22 : et essaie de déplacer le segment, et (... ?) quoi. Vas-y « segment ». Vas dans « segment ». Ça y est? Vas-y...
84. D: attend (...?)
85. E22 : essaie de le faire coulisser tu sais sur la....
86. E23 : mais il n'y a rien qui bouge
87. E22 : à ce segment... oui... il veut pas bouger le segment ! donc on n'y peut rien... .. bon, ce segment...
88. E23 : alors (... ?)
89. E22 : pointer... tu mets sur ce segment
90. E23 : ça me (... ?)... il veut pas bouger le segment! ... il faut tout recommencer, on efface tout(.. ?), non mais bon, on n'y arrive pas (... ?)
91. E22 : regarde il s'est mis (... ?)
92. E23 : oui bon, ben ce lieu oui. Quel objet ? le segment... ..
93. E22 : quel objet ? le segment...
94. E23 : (... ?) en fait (... ?) pourquoi tu voudrais avec tout (... ?) dedans
95. E22 : oui bon ça c'est pas « footing » d'accord ?
96. E23 : mais je peux (... ?) la tangente (... ?)
97. E22 : oui ben oui, et ben non !
98. E23 : tu n'as pas pensé plus que moi
99. E22 : voilà.. ah non ! toi t'as pensé à prendre un point ici où c'est bien compliqué ! et (... ?) tout les ceux ci !

100. E23 : écoute (... ?)
101. E22 : non (... ?)
102. E23 : je crois (... ?) l'activité on avait des erreurs... Allez prend un point s'il te plaît..
103. E22 : tu as un..... ah oui (... ?),... et ce texte ?
104. E23 : non, je rigole !
105. E22 : (... ?) à l'aide de la figure... voilà, bon, allez on va avec ce point là ?
106. E23 : ouais
107. E22 : bon, on va tracer le segment....
108. E23 : très très près
109. E22 : ouais... très près... bon, ce segment ouais, ce je peut le supprimer, ce point aussi, ah voila un qui me connaît maintenant... oui
110. E23 : je veux faire là... tout supprimer moi.... Non c'est le point rouge !.. on supprime.. Ouais, allez fermes (... ?)
111. E22 : fermes cette (... ?) là, ce point là oui (... ?)
112. E23 : oh, il est trop bas ... Il était bien par là.
113. E22 : voilà...
114. E23 : bon, ensuite segment... segment là, voilà
115. E22 : je veux de ce point là ... à ce point...là ! ... là, on est bien alors?
116. E23 : ouais...perpendiculaire, voilà et la perpendiculaire par ce point (... ?) mais ce n'est pas grave...  
Ensuite équation de la droite...
117. E22 : (déjà)...
118. E23 : bien voir la équation de la tangente
119. E22 : oulala ... ..
120. E23 : ça se fait (comme)
121. E22 : nous on avait 0,67 ben..
122. E23 : là c'est normale puisque là t'as que 0,62, elle n'est pas mal, en fin je veut dire...
123. E22 : bon, les filles vous avait quoi comme équation de tangente ? (filles à côté)
124. E23 : ben ça va être différente de nous !(les filles : ben oui)
125. E22 : ouais, ben elle est où la vôtre ? ...
126. E23 : t'as qu'a faire un dessin pour expliquer comment on trouve la tangente ... ..
127. E22 : ah non Delphine s'il tout plait, non, moi je n'en peut plus, tiens je te le redonne
128. E23 : ensuite si on regarde (... ?)... regarde là, la pente elle est bien (... ?)
129. E22 : bon, tu vois ... ça change petit a peu... .. (... ?)... Alors maintenant nous allons trouver... Je voudrais trouver les coordonnées du point... .. C'est point ?, Ah non... on peut pas... maintenant c'est tout (... ?)
130. E23 : ben c'est celui-là, celui qui était trouvé...
131. E22 : donc on a... tu vois pour « y » pour le point de coordonnées (-4,54 ; 7,46)...
132. E23 : ... on sait que  $y'$ , la pente, est égale à 7,46. T'es d'accord ? ... .. (... ?) attend... Donc on sait que 7,46, puisque l'équation est de la forme «  $y'=ax+b$  »..., donc «  $7,46 = -4,54x+b$  » non, égal moins...
133. E22 : pourquoi «  $y'=ax+b$  » ?
134. E23 : bah, c'est une équation de premier ordre
135. E22 : ah l'équation différentielle tu veux dire...
136. E23 : ouais... c'est donc une équation de la forme «  $y'=ax+b$  »
137. E22 : non ! ... C'est le forme «  $y'=ay+b$  »... non ?
138. E23 : ah oui... «  $ay+b$  »... «  $ay+b$  »... Et ben, nous on sait que pour  $y=7,46$ ...
139. E22 : non, mais ce que tu comprends pas que... c'est qu'en « y » c'est une ... oui mais droite, c'est pas un point... et toi tu remplaces à chaque fois par des points
140. E23 : moi, je pensais qu'on pourrait trouver au point 7... on avait ça... .. pour un point... Et nous inconnues c'est « a » et « b », et après on va chercher pour un autre point... Oui mais ... reste que le « x »
141. E22 : bah oui, il ne (s'agit) pas de point là
142. E23 : oui, mais imagine tu le fais par... tu cherches un autre point de la tangente avec l'équation... tu vas avoir autre chose égale quelque chose «  $ax+b$  ». Tu trouves a et b et ton équation différentielle c'est «  $y'=ay+b$  »
143. E22 : on va prendre de points solutions ?... je comprends que les solutions des fonctions mais (... ?) ... et (... ?) déjà on a la solution de l'équation... On a la solution là ? On l'a ...
144. P : vous l'avez trouvé l'équation différentielle ?... ..
145. E23 : ce que là on a trouvé une tangente avec un point...

146. P : votre tangente, l'approximation n'est pas assez bonne, c'est pour ça que vous n'arrivez pas... (... ?)  
Comment ça se fait que votre... C'est ce point là que je peux bouger ? ... Pourquoi il y a plein de points  
ici ?
147. E23 : (... ?) elle se (... ?) et puis le point... le point de la tangente.
148. P : (... ?) la tangente vous la... (... ?) pourquoi c'est si mauvais ? Eh là je bouge pas... Qu'est-ce que ce  
point ?
149. E23 : ça c'est le point du segment.
150. P : ah oui ?
151. E23 : il faut (peut-être) se rapprocher tout le temps, en effet.
152. P : j'arrive pas à...
153. E22 : (... ?) pour tracer la tangente c'est quoi la méthode, en effet, finalement ?
154. P : vous pouvez prendre cette méthode là
155. E22 : donc... de tracer un segment... tracer la perpendiculaire passant par le point, la perpendiculaire...
156. P : vous pouvez tracer la médiatrice qu'on (... ?) du segment (... ?) euh...
157. E22 : mais on trace pas la médiatrice quoi...
158. E23 : ouais, mais ça revient au même... On fait une perpendiculaire...
159. P : (... ?) par (... ?)
160. E22 : en effet, on... Non, (... ?) puisque la perpendiculaire, elle passe par le point par lequel on veut la  
tangente à la courbe
161. P : ah oui, d'accord.
162. E22 : donc... dans le cas d'un... au piff...
163. P : (... ?) qu'elle est meilleure, je sais pas, parce que vous travaillez avec la médiatrice. Vous, vos deux  
points sont indépendants par rapport à la perpendiculaire...
164. E22 : ah ouais, c'est ça. C'est-à-dire qu'on... on met dans un segment... Donc, en effet, (... ?) c'est le  
point soit au milieu du segment, en effet.
165. P : je pense que l'autre est meilleur, ouais
166. E22 : donc en fait, on trace la médiatrice... à un segment...
167. P : ouais mais j'ai une meilleur... moi (... ?) j'ai une proposition qui sera plus simple de (... ?) Je vais  
vous la montrer... ça sera un point, je prend ce point là, par exemple. (... ?) et puis je mets un point, un  
autre point là-dessus... sur le lieu. Et puis, je trace une droite. Ça c'est une droite qui est sécante...
168. E22 : oui
169. P : à la courbe en ces deux points. Et ce point là... qu'est-ce que vous pensez de ces points là quand je  
bouge et je les rapproche ?
170. E23 : ben, ça devient... Ah ben ça fait la tangente
171. P : là ... je l'ai bien mis là ?... donc, si... donc je sais pas s'il est vraiment bien, bien là-dessus ?
172. E22 : ouais, non...
173. E23 : enfin, s'il est vraiment bien confondu, oui c'est la tangente alors...
174. P : voilà exactement, voilà... Et là vous demandez l'équation... je veux voir si c'est meilleur... ... Alors,  
il faut les coordonnées du point, de ce point là ah ? Donc c'est le premier... Donc... le problème que  
comme c'est sous forme de fraction je vois pas (... ?)
175. E23 : il faut déplacer le point C
176. P : euh ... ouais, on peut déplacer C. Il est là C ? C'est lequel ? Il est là ?
177. E23 : ouais.
178. P : donc c'est pas encore parfait ...
179. D : on doit avoir «  $y = y$  »... le coefficient...
180. P : peut-être... peut-être... Il faudrait l'améliorer un petit peu, ouais... elle n'est pas encore parfaite  
comme approximation. C'est le deuxième je pense, il faut que je le bouge...
181. E23 : alors ben du coup, moi j'ai cette question : là on a «  $y'$  », on a trouvé une pente...
182. P : attendez, je dépasse là, je suis...
183. E22 : là c'est parfait
184. P : voilà c'est parfait... ouais
185. E23 : du coup là (... ?) notre équation est de la forme «  $y' = ay + b$  »
186. P : quoi ? Quelle équation ?
187. E23 : différentielle.
188. P : ça je sais pas, moi. C'est à vous de savoir.
189. E23 : elle est du premier ordre
190. P : qu'est-ce que ça veut dire une équation différentielle de premier ordre ?
191. E22 : ouais, c'est pas (... ?) comme ça
192. E23 : ben, ça veut dire que...
193. P : oui...

194. E22 : (et elle est)... c'est la première dérivée... c'est euh ... elle est juste en fonction de la fonction de sa première dérivée...
195. P : c'est ça que ça veut dire, d'accord. Donc, c'est vrai qu'une fonction de ... l'équation différentielle ça va s'écrire effectivement... il y aura « y' » dedans, il y aura « y »... peut-être « y », peut-être...
196. E22 : ah, oui mais pas forcément ça quoi.
197. E23 : ça peut être (... ?)
198. E22 : ah ouais
199. P : parce que ce que vous avez écrit c'est linéaire, j'ai l'impression
200. E22 : oui, oui
201. E23 : voilà, du coup... alors je prenais une pente ... qu'on a trouvé pour un point donné... j'en voulais prendre un deuxième... et puis...
202. P : ah, d'accord ... oui mais ...
203. E22 : on n'est pas sûres ...
204. E23 : ouais, mais, en effet, c'est un cas particulier quoi... en effet si on déplace ... on peut avoir plusieurs...
205. P : oui, oui, mais là quand même, vous avez quand même une relation, quand vous bougez C, qu'est-ce que vous (... ?) qu'est ce que vous (... ?) toujours
206. E22 : oui donc, en effet... c'est le coefficient ici, ça sera toujours le même que...
207. P : ouais, voilà... alors essayez de réfléchir avec ça...
208. E23 : donc «  $y' = y$  »
209. P : voilà, alors essayez de réfléchir, est-ce qu'on peut trouver une équation différentielle avec ces informations ? ... ..
210. E22 : (... ?) j'ai eu une idée, on va effacer ça ...
211. E23 : j'explique comme on a tracé la (... ?)
212. E22 : (... ?) à chaque fois, regarde (... ?) ... ouais, explique ... ..
213. E23 : pourquoi ça ne marche pas ? ... ..
214. E22 : comment on peut bouger les points ?
215. E23 : elle a expliqué qui sont confondus...
216. E22 : bah oui, (... ?) le point ... Ça c'est les coordonnées de quel point ?... Attend, c'est bon. Vas-y continue... ..
217. E23 : bon (... ?) d'accord
218. E22 : et donc, ça c'est les coordonnées de quel point ?
219. E23 : du point là... de la tangente... .. (... ?)
220. E22 : ouais, ouais... donc on a «  $y' = y$  » ...
221. E23 : parce que peut être c'est une équation différentielle ... «  $y' = y$  »
222. E22 : disons que  $f(x)$  c'est égale à «  $y' = y$  »
223. E23 : ben oui, mais ça c'est bien de courbes exponentielles
224. E22 : et ben alors, ça existe ?
225. E23 : ben oui, ben... c'est pas ça une équation différentielle associée par une (classe ?)
226. E22 : à mon avis il y a pas que  $y' = y$ ...
227. E23 : parce que si on intègre... ben après il faut retrouver la constante.
228. E22 : ben, il faut déjà écrire : on remarque que ... ah c'est déjà, on remarque que «  $f = y$  »
229. E23 : après il faut chercher un point... une solution particulière, non ?
230. E22 : pourquoi ?
231. E23 : pour avoir... parce que là tu vas trouver que « y »... et bien c'est  $Ce^x$  et  $C_0$ ... c'est (... ?) c'est «  $y(0) = 2$  » ou je sais pas quoi.
232. E22 : vous l'avez trouvé l'équation ? (Elles parlent avec d'autres filles) ... .. Delph on va trouver, on va trouver...
233. E23 : si on a déjà «  $y' = y$  »... on a déjà ça... «  $y' = y$  »... .. mais il manque une condition, en fait ... .
234. E22 : si Delph... il manque quelque chose, parce que quand t'intègres, t'as «  $y =$  une constante fois  $e^x$  »... et t'as pas la constante... .. Je sais pas mais j'ai une impression... t'as pas une impression que ... moi j'ai eu une impression que l'idée de (... ?) ... ah je (... ?) rien
235. E23 : (... ?) mais on peut regarder... .. Mon point il était quasiment (... ?) ça alors... Bon... on va (... ?) pour ce point et on va demander la (tangente)
236. E22 : ah mais c'est juste ça qu'il fallait répondre... ..
237. E23 : je sais pas mais tout le monde va (... ?) répondre (... ?) là-dessus ... ..
238. E22 : voilà
239. E23 : glissons, t'as pas mis un « s ». Pourquoi t'as écrit (... ?)... Glisser ... (... ?) tu vois on n'a pas trouvé une autre chose...  $y'$  elle est toujours égale à  $y$ ...
240. E22 : mmh... .. (... ?)

241. E23 : euh ... le ... est-ce qu'il faut trouver une équation comme ça ? ... ou il faut chercher des conditions initiales ...
242. E : non, non
243. E23 : Ça c'est...euh (... ?) ... d'accord... Merci... Bon, ça c'est bon, c'est juste. ... ..
244. E22 : (... ?) ... ça c'est (... ?) «  $y'=y$  » (... ?) ...
245. E23 : « Comment avez-vous procédé pour déterminer l'équation différentielle... » (elle lit la question 2).  
Ah, mais c'est con c'est ça...
246. E22 : on va pas répéter parce que (... ?) dire rien (... ?) ...
247. E23 : c'était quoi la première question ? Est-ce que tu l'as lu déjà ?
248. E22 : « On considère une famille de courbes  $\Omega$  » (elle lit question 1)
249. E23 : « Quelle est selon vous l'équation différentielle associé... » (elle lit la question 1)
250. E22 : est-ce qu'on t'as demandé d'écrire tous (... ?), là ?
251. E23 : non ! (...) demande la question d'après.
252. E22 : donc tu réécris.
253. E23 : ben c'est sûr ouais
254. E22 : ben, on verra... Ça se trouve où il attendait ouais... .. ça va être trop compliqué, je crois...  
(... ?)... Bon ...là il faut faire quoi ? Il faut dire...
255. J : il faut dire qu'est-ce que vous avez fait
256. E23 : en fait c'était ça... c'est ça... c'était expliquer la tangente...
257. J : oui, alors vous pouvez écrire que...
258. E23 : ...voir question d'avant... D'accord...
259. E22 : ouais... .. la réponse au première demande ... .. (... ?) en suite, c'est ça la deuxième question...  
Alors, l'autre feuille.
260. E23 : bon...
261. E22 : « Quels éléments pourriez-vous... » (elle commence à lire la question 3).
262. E23 : eh mais attend. On n'a pas (... ?) en plus...
263. E22 : c'est pas grave.
264. E23 : bon (... ?)
265. E22 : alors « Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvez correspond bien à la famille... » (elle lit la question 3) ... tu avais regardé (... ?)
266. E23 : (... ?) ...
267. E22 : (... ?) je réponde
268. E23 : allez-y tu peux le faire
269. E22 : (... ?) la feuille par (... ?) ... ..
270. E23 : alors... « correspond bien à la famille de courbes »... (... ?) C'est bien « y » ... oui, alors je cherche (combien) (... ?)
271. E22 : si ...
272. E23 : ah (... ?) c'est pas la peine que (... ?)
273. E22 : on peut même (... ?) ... on pourrait peut-être tracer la courbe «  $e^x$  »... et voir si C passe par la courbe... non ?
274. E23 : alors comment en faire ? ...
275. E22 : non, ça te dit pas ?
276. E23 : puisque là, visiblement... euh
277. E22 : ah
278. E23 : si l'équation... ça veut dire c'est «  $y =$  quelque chose fois  $e^x$  »... Comment on fait déjà pour tracer une courbe ? ... .. Je sais plus comment on fait. Il faut montrer les axes... .. Attend. Il faut créer un point, je sais pas ... .. Comment on fait pour tracer une équation, une droite... si on veut tracer la droite «  $e^x$  » (... ?)
279. J : il faut ... ici ... expression...
280. E23 : ah, oui... on rentre l'expression là... en rentre  $e^x$ ?... exp ?
281. J : exp ... entre parenthèse x...
282. E23 : et on montre après les axes... c'est ça ?
283. J : oui... (... ?)
284. E23 : (... ?) expression ...
285. J : non, non, non... appliquer une expression... appliquer une expression.
286. E23 : d'accord, merci... donc, si on trace... je pense que le point C en déplaçant (... ?)
287. E22 : mais, le problème c'est qu'elle peut pas bouger ...
288. E23 : ah non, c'est bon. ... On peut trouver euh ... la même courbe
289. E22 : on n'est pas sûr quoi ... ..



290. E23 : eh ben, il faut montrer... On peut faire une ... une tangente en un point... et les tangentes seront parallèles... justement.
291. E22 : non, c'est pas une tangente comme (... ?) si on veut qui soient parallèles...
292. E23 : ben, par exemple, si tu fais la (... ?) en ce point
293. E22 : tu vas (... ?) un point, ça veut dire ?
294. E23 : là tu fais la parallèle... euh, tu fais ...
295. E22 : qu'est-ce que tu fais là ?
296. E23 : attend, je vais recommencer... Voilà, donc en fait, t'as un point... On pourrait définir un objet... Comme on définit un point à l'intersection?... En plus, tu vois, on pourra demander si étaient des parallèles ... des ...
297. E22 : ben, non... il faudrait plus demander si C appartient à la droite...
298. E23 : peut-être, c'est tout un bordel, hein !
299. E22 : ouais...
300. E23 : et tu vois, je voudrais faire la tangente là, et voir si les deux droites là sont parallèles...
301. E22 : mais je sais pas... autant de dire si C appartient à cette droite c'est bon quoi...
302. E23 : ouais, et comment l'on fait ?
303. E22 : eh ben, tu fais le truc « appartient », avec le (... ?).
304. E23 : ah... Ce point...
305. E22 : ...cet axe (... ?)
306. E23 : c'est tout (... ?) pas ça...
307. E22 : à mon avis ça (... ?) c'est bon...
308. E23 : ce point (... ?) ... alors, « appartient » c'est quoi ? ... ..
309. E22 : voilà ...c'est-à-dire que tu dois cliquer deux fois...
310. E23 : non, non, retourne là peut être ...mais, non, on pouvait pas, tu vois
311. E22 : quelle droite ?
312. E23 : non mais c'est la droite, euh ... .. non, tu supprimes le texte. Vas-y appuie
313. E22 : alors ce point ... mais attend, regarde.
314. E23 : ou alors il faudra (... ?) ... ne pas (... ?) C... Moi, je le ferais déjà varier sur la droite. Puisque là, C appartient pas à cette droite visiblement. Tu vois, il est sur l'autre droite, mais quand on les confond... est-ce qu'il appartiendrait ou pas ? ... .. Tu fais quoi?... tu vas remettre qui appartient (... ?) ? ... ..
315. E22 : non, ça marche pas par tous ... ah, point sur ...
316. E23 : vas-y, clique sur... .. et c'est une translation quelque part non ? ... ..
317. E22 : (... ?) si on comprend rien de (... ?)
318. E23 : on a (... ?) ... ..
319. E22 : c'est une expression... Moi, je voudrais voir si ça fait le  $2e^x$ ... il fait voir si ça le déplace comme ça...
320. E23 : tu veux voir son (... ?) ... mmh ... tu vois, chaque fois il va se décaler
321. E22 : ah remet  $2 e^x$ , ça fait  $2 e^x$
322. E23 : mais non, C est une constante ... et je voudrais mettre A et faire... euh ... Tu comprends ce que je veux dire ?
323. E22 : non
324. E23 : je voudrais mettre  $A e^x$ ... puis faire varier le A et (... ?) toutes les courbes et les choses que... .. ah là, là ... (... ?) le A ... ouais (... ?) ... ..
325. E22 : moi je pense que on a oublié de ... ..
326. E23 : là, moi j'aimerais tracer la tangente
327. E22 : je peux dessiner par ... Je vais dessiner les trucs que j'avais fait ... voilà, après je (... ?) tracer la tangente en ce point là... .. voilà, et je voudrais savoir si c'est parallèle. ...
328. E23 : parce que là je dois bouger le point (et toutes les courbes)... J'ai pas des (... ?) lui-même... (... ?) on va essayer
329. E22 : (... ?) je pense que c'est pas l'en traçant une droite parallèle à l'axe que tu vas avoir un point euh ... et d'abord ça sera pas le même point (... ?)
330. E23 : alors c'est quelle tangente qui doit être parallèle ?
331. E22 : mais tu peux pas, parce qu'il faudrait... moi je pense (... ?) on peut regarder le dessin, je crois
332. E23 : je sais pas...
333. E22 : ça me paraît bizarre de prendre deux points à peu près situés dans le même endroit... et voir si la tangente est parallèle...tu vois ce que je veux dire...
334. E23 : ah «  $y'=y$  »... l'équation différentielle, donc pour les mêmes point sur « y » tu peux trouver la même pente de la tangente... Tu comprends ? C'est pour ça que je parle de parallèle et du coup, les tangentes devraient être égales...
335. E22 : Mme ... .. ben ouais, moi j'aimerais les retrouver parce que du coup...

336. E23 : tu vois, ils sont pas mélanges là, les deux points. ... comment (... ?) ... J'arrive pas à avoir les deux points ensemble... Parce que là la tangente elle est où cette équation de la tangente ? ... Elle doit être (... ?) ...
337. E22 : on a plus l'équation de la tangente Delph... C'est quoi ça ?... ..
338. E23 : oui mais on voudrait l'équation de cette droite... On a dû la déplacer... Ah oui, c'est toi qui la effacé... ..
339. E23 : Madame ... pour se convaincre qu'on a trouvé les bonnes équations...
340. P : oui, ben c'est vous qui devez me le dire.
341. E23 : et ben, nous, on a tracé  $e^x$
342. P : oui, oui, par exemple...
343. E23 : et on essaie de ...
344. E22 : mais comment on vérifie, en fait ?
345. E23 : on essaie de montrer que les tangentes sont parallèles, pour un même point d'ordonnée égale ou pas ?
346. P : oui, par exemple.
347. E23 : d'accord... c'est comme ça que...
348. P : ah si il y a des pleins manières
349. E23 : ah parce que ... ou alors... puisqu'on n'arrive pas à se servir de la commande C « Appartient ? » à la droite... on essaie de montrer que C appartient à  $e^x$ ... Enfin, ou que les deux droites sont confondues en fait
350. P : oui mais pour déduire que C appartient à...
351. E23 : enfin...
352. P : à une courbe... à l'autre courbe... C'est ça ?
353. E23 : oui, par exemple, qu'on (... ?) C
354. P : et elle marcherait, je sais pas... je pense que ça marche que sur les droites ça marche
355. E22 : on voudrait montrer que c'est la même courbe... comment on en fait
356. P : oui... donc... vous voyez déjà, ç'a l'air
357. E23 : ben, oui
358. P : ça coïncide... Mais autrement, vous voudriez donc montrer qu'elle appartient, par exemple, à celle là ?
359. E23 : ouais
360. P : quand c'est comme ça ?
361. E22 : ouais.
362. P : ah, je sais pas... je sais s'il va répondre ça...
363. E23 : non, il comprend pas ce que je lui demande.
364. P : vous avez écrit « appartient », là ?
365. E22 : oui
366. P : et vous avez dit C ? C'est ça ?
367. E23 : ouais, ce point... déjà (... ?) on a fait... (... ?) (théoriquement)
368. P : comment on arrive à avoir C ? (... ?) arrivez le voir
369. E22 : ben, des fois ouais...
370. P : pourquoi j'ai rien ?
371. E22 : peut être il faut faire clic ...
372. E23 : ouais mais c'est... ah oui, ce point.
373. P : ç'a marché ? ... Qu'est-ce que tu as fait ? ...
374. E23 : non, mais bon, on va écrire... les plusieurs choses qu'on a...
375. P : ouais, ouais
376. E22 : alors comment (... ?) ... mmh
377. E23 : on vient de (... ?)... c'est parce qu'en fait, au départ, si tu bougeais... Il faudrait re-arriver, à ce que les deux pentes du segment ne fassent qu'un... parce que là la tangente n'est pas précise par rapport à celle-là...
378. E22 : bah ouais, d'accord...
379. E23 : alors, «  $y=Ae^x$  »...  $A \in \mathfrak{R}$ , non ?
380. E22 : voilà ... ah, mais moi je l'ai passé comme ça, mais bon
381. E23 : quoi ?
382. E22 : je (... ?) passer comme ça.
383. E23 : comment ça ?
384. E22 : elle est juste... (... ?) ... Par exemple...
385. E23 : par exemple «  $y=Ae^x$  » vérifie le truc, tu vois...
386. E22 : ah oui.

387. E23 : j'explique bien... (... ?) le truc de tangente ça t'embête ?... puis après les (... ?) on peut faire euh ...  
Ça t'embête pas ? ... Tu vas réfléchir sur la question 4... ..
388. P : il y en avait qui voulaient que je vous montre comment on faisait un champ de vecteurs. Donc, je vais le montrer à tout le monde, comme ça, ça sera fait, d'accord ?... Donc, je prends un point et je le mets par exemple ici, dans le plan, et je vais l'appeler P. Et je voudrais construire le champ de vecteurs tangentes, par exemple, à l'équation différentielle «  $y'=y$  ». On sait jamais, d'accord ?... Donc... comme ça j'aurai, puisque  $y'=y$ ... j'affiche les coordonnées de P. Comme ça j'ai le y de P. Et en ce point, donc, il faut que je fasse un vecteur dont la pente est égale à y. Si la pente est égale à y, ça veut dire que le vecteur il a comme composantes 1 et y ; s'il a comme ordo... S'il a comme composante en « x »... 1, ça veut dire que la composante en « y » vaut justement « y ». Alors 1 je peux l'avoir ici ; ici là, j'ai 1. Mais pour avoir « y », si l'ordonnée de P est sur l'axe des « y »... j'ai pris report de mesures, d'accord, ici... Je montre l'ordonnée de P, je montre l'axe « y », et il construit un point de l'axe « y » qui a pour ordonnée exactement l'ordonnée de P. Et maintenant, je vais faire, par exemple, ce vecteur ici... ..
389. E22 : (...) ne marche pas
390. E23 : parce que (... ?)
391. E22 : comme ça ?
392. E23 : (... ?) ça serait plus petit (... ?)
393. E22 : bon, ben, on a fini les (... ?) que 3...
394. E23 : on avance sur les autres...
395. E22 : ensuite, la activité 4... ..
396. E23 : ah (... ?) j'ai mis ça (... ?)
397. E22 : (...) je ne sais pas (...?)... je crois que j'ai mis... (... ?)...
398. E23 : « Dans Cabri, pouvez-vous vérifier que l'équation différentielle... » (elle lit la question 4) (... ?) celui qu'on a ...
399. E22 : dans Cabri ?
400. E23 : alors là, je vois pas comment on peut faire, dans Cabri...
401. E22 : (... ?) si (... ?) n'on (... ?) pas (... ?) prendre (l'explication) droites... ah ouais... tu vois...
402. E23 : ouais... Ben, alors...
403. P : alors, vous en êtes où vous ?
404. E22 : à l'activité 4.
405. P : ah, d'accord... Ouais, il faut y aller.
406. E23 : ben, on essaie de voir dans Cabri...
407. E22 : vous voulez les feuilles d'avant ?
408. P : vous me les donnerez après... ..
409. E22 : on l'a pas fait...
410. Ex : vous l'avez pas eu ça ?
411. E23 : si, mais on s'est débrouillé sans
412. E22 : sans quoi ?
413. E23 : les constantes
414. E22 : quelles constantes ?
415. E23 : ah ben, nous on a (... ?) fait (... ?) constantes... quoi ...
416. E22 : et ben, on a fait comment ? ...
417. E23 : moi, je dors ...
418. E22 : eh ben, on a tracé la courbe «  $y = e^x$  »...
419. Ex : ouais, et après ? ... en fait, tu prends... la courbe... un point de la courbe (... ?) C...
420. E22 : tu choisis le point où t'as tracé la tangente. Ensuite tu traces la parallèle à l'axe des abscisses...
421. E23 : en fait, tu donnes un point qui a la même ordonnée que la (... ?) à la tangente...
422. Ex : ah (... ?) d'accord
423. E23 : (... ?) T'as le point sur la courbe, et il faut que les tangentes soient parallèles à la (... ?)
424. Ex : d'accord.
425. E23 : non mais non, mais ça c'est une façon ah ! On n'a pas une autre à la (... ?)... et tu déplaces...
426. E22 : ben, oui. C'est ce que je suis en train de me dire... (... ?)
427. E23 : qu'est ce qu'à la question 4 il suffit de dire... tu déplaces le point C et tu vérifies que  $\Omega_C$  comprenait cette «  $e^x$  »
428. Ex : ah ouais, voilà ... .. (... ?)
429. E23 : ah oui, c'est ça que je me disais tout à l'heure...
430. E22 : c'est normal qu'il y ait (... ?)... Ça dure combien de temps cette (...?)... Oui, il fallait pas attendre... ..

431. E23 : oui... « Dans Cabri, pouvez-vous vérifier que l'équation différentielle que on a trouvé correspond bien... » (elle lit la question 4)... Je pense que c'est ça en fait... c'est qu'on trace plusieurs courbes et pour un même point... euh
432. E22 : oui, on doit arriver à la même chose.
433. E23 : essaie de tracer plusieurs... écris, en fait... et fait  $e^{20x}$ ... (... ?)...
434. E22 : mais pourquoi ?
435. E23 : mais comme ça on va faire une jolie droite parallèle, et puis on va voir que toutes les parallèles sont... et ça t'occupera...
436. E22 : ah ?
437. E23 : ça t'occupera
438. E22 : (... ?) ... .. alors, je mets quoi alors ? -12 ? je mets quoi ?
439. E23 : (... ?) ça va être en dessous, comme... pas
440. E22 : là je mets quoi ?
441. E23 : tu peux mettre 7, 5, 16 et 10... (... ?) ... voilà.
442. E22 : elle est là
443. E23 : (... ?) alors on met -50... je voudrais en faire passer une de ce côté-là... ..
444. E22 : je veux (... ?) une expression (... ?) depuis tout à l'heure... .. Alors... .. Mais tu vois ça c'est tombé (... ?) alors
445. E23 : non, c'est (... ?)... Ben...
446. E22 : elle est où alors ?
447. E23 : « x » ... «  $e^{2x}$  » 7, 15 et 17 il faut varier le ... mais on n'arrive pas à les faire passer là...
448. E22 : ah merde.
449. E23 : c'est dingue.
450. E22 : on peut-être pas, non ... Quoi ? ... .. Oh putain !
451. E23 : ben, met 1000.
452. E22 : alors je mets 1000... ouais c'est pareil... Mais pourquoi tu n'en vois rien de ce côté (... ?) ?
453. E23 : comme ça ?
454. E22 : ah oui, non mais... Comme ça l'autre...
455. E23 : tu peux me mettre, juste (... ?) s'il te plaît
456. E22 : attend ... Ah ! de l'autre côté.
457. E23 : tu peux (... ?)
458. E22 : ah oui, là ?
459. E23 : là, alors... on prend parallèles...
460. E22 : un peu
461. E23 : non, mais... il faut que j'explique...
462. E22 : voilà (... ?) l'activité 4.
463. E23 : (... ?) tu peux faire la ... la parallèle ? ... Alors... écoute ... en « y » c'est parallèle...
464. E22 : et C c'est près 5... .. « Pouvez-vous repérer des propriétés de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'équation différentielle... » (elle lit la question 5)... On peut dire que la limite d'exponentielle en moins l'infini c'est 0... et ça se voit, alors...
465. E23 : si t'as d'autres propriétés, on a trouvé un ..... La limite de  $\Omega_C$  (... ?)...
466. E22 : on peut dire que... euh, regarde... si tu bouges C ... t'as les tangentes en (... ?) ... .. Quelle autre propriété on pourrait trouver ? Tu vas retourner un petit peu...
467. P : vous pouvez commencer la troisième, parce qu'elle est dure la troisième.
468. E23 : la troisième, quoi ?
469. P : activité...
470. E22 : nous on a fait 5
471. P : vous avez fait ça ? D'accord
472. E23 : bon, on a la 5 déjà
473. E22 : non, il faut attaquer le 2 bis, non ? il faut faire le bis ?
474. P : non, non, la troisième d'abord. C'est compliqué. C'est la troisième avant le 2 bis, c'est comme ça.
475. E22 : ah, c'est pas ça la troisième activité. Nous on est toujours à la deuxième activité.
476. P : voilà. Là, vous êtes toujours dans la deuxième activité.
477. E23 : et en propriétés c'est des propriétés sur (le dessin) ?
478. P : ouais, ouais, c'est ça... Oui !
479. E22 : celle-là ça suffit ou... ?
480. P : oui, ça suffit. Vous avez ça, vous avez repéré sur... Vous avez vu que ça marchait ?
481. E23 : oui.
482. P : d'accord, ça suffit. Je vous (... ?) maintenant la troisième...
483. E23 : donc, on prend dans « fichier »... Et ça on en fait quoi ?

484. P : Julio, elles n'en enregistrent pas ? qu'est-ce qu'elle fait ?  
485. J : non ?  
486. E22 : je n'enregistre pas ?...  
487. P : non

**(fin deuxième activité)**

# **Binôme E22/E23**

**Mise en équation différentielle  
d'une famille de trajectrices**

**L'expérimentation de l'année 2003**

## Binôme E22/E23

## Première étape : la famille de trajectrices

1. E22 : « Fichier », « ouvrir », « troisième activité » donc... ..
2. E23 : et après on fera l'activité 2 bis
3. P : ça dépend.... Ça dépend de ce que vous faites en troisième, c'est un joker la 2 bis
4. E23 : (... ?) dans la 3
5. P : si vous avez du mal dans la troisième vous pouvez (... ?) le joker... ..
6. E22 : bien (... ?) sortir ?
7. E23 : eh ben, on a tout ça à faire
8. E22 : mais il y a combien de feuilles ? ...la 5... T'as relu ... t'as ... ?
9. E23 : oui
10. E22 : bon... ça y est, qu'est-ce que t'as mis ?
11. E23 : j'ai mis limite en moins l'infini
12. E22 : ah oui... ..
13. E23 : mmh ... là (... ?) donc... ce point est déplaçable en ordonnée de 0 à 2... Essaie de le déplacer, ou tu veux que je le fasse ? ... Alors, donc tu vois on peut déplacer M dans tout le plan, sauf qu'on peut le déplacer que de 0 à 2 ... C'est simple, là t'as plus de...
14. E22 : et après il y a plus la...
15. E23 : là il a plus de courbe
16. E22 : mmh
17. E23 : donc, tu vois, quand je vais dé... Alors, on va déplacer en hauteur... ça fait comme ça, et en largeur, ça fait comme ça... .. Ensuite « la tâche consiste à chercher l'équa dif de premier ordre qui corresponde à la famille  $\Gamma$ , quelle est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille... ».
18. E22 : bon, ben là il faut trouver au piff, parce qu'après ça va être chaud je suppose : « comment avez-vous procédé ? » (début de la 2<sup>ème</sup> question)... oup. Alors... moi ça me fait penser des logs à l'inverse, et toi ?
19. E23 : tu sais, le log il est comme ça, et nous c'est comme ça. Est-ce que ça serait, euh ... par exemple,  $1/x$ . Par exemple... «  $y'=1/x$  »... donc «  $y = \dots$  » non... non «  $y'=y$  »
20. E22 : non, «  $y'/y$  »...
21. E23 : égale à 1
22. E22 : ben, égal quelque chose quoi... je sais pas...
23. E23 : donc, ça serait « ln » de quoi ?
24. E22 : ah, ben, je sais pas moi
25. E23 : moi, je dit que c'est «  $y'$  »... du coup ça me fait «  $y'$  »...
26. E22 : «  $y'/y=1$  » mais (... ?) qu'admettre
27. E23 : ah mais ça va faire «  $y'=y$  », ça va faire des exponentielles
28. E22 : mais pourquoi tu veux pas refaire tout (... ?)... et puis on explique après
29. E23 : bon, ah ben... c'est vrai
30. E22 : moi, je sais pas...
31. E23 : oui, oui... je le fais donc...
32. E22 : parce qu'à mon avis on va trouver  $y'=1/y$ .
33. E23 : donc on prend 2 points...
34. E22 : ouais...
35. E23 : maintenant ... si on fait une droite...
36. E22 : non, en fait c'est pas... ah ouais
37. E23 : et après il faut que
38. E22 : rapproche-les
39. E23 : les deux points soient en le même point...
40. E22 : voilà... très bien.
41. E23 : alors, après, on demande l'équation... Il faut l'équation de cette droite...
42. E22 : mmh, et (... ?) un point
43. E23 : et le point
44. E22 : oui... ben... maintenant tu vas dans la calculette...
45. E23 : et tu vas calculer quoi ? ... on n'a pas l'«  $y'$  » moi
46. E22 : oui, c'est «  $y'$  » la (... ?) regarde... Tu fais comme tout à l'heure
47. E23 : oui, mais tout à l'heure on avait le «  $y$  » du point, qui est égale à la pente là, à 0,74...
48. E22 : oui
49. E23 : là on voit pas un truc spécial qui a ses (... ?)
50. E22 : oui, mais non. On dit... on dirait que c'est... on dirait que ça fait «  $y'/y$  » donc on va voir (un) «  $y$  » euh, non ?

51. E23 : ah, d'accord, oui... ouais, bonne idée... je n'avais pas compris
52. E22 : euh...
53. E23 : on fait les travaux
54. E22 : alors, on va faire 1/0,18 ou tu mets 1/0...
55. E23 : non ... 1/4
56. E22 : ben, « y' »...
57. E23 : ouais... égale 1/y
58. E22 : non !
59. E23 : -1/y.
60. E22 : « y'=y »... on pourrait avoir « y'/y »... non nous on veut
61. E23 : (... ?) complètement à ça
62. E22 : mais nous, on veut « y'/y = 1 » ... donc « y'=y »
63. E23 : non, non, parce que ça va faire exactement la même équation que tout à l'heure
64. E22 : ah, ben ouais ... c'est vrai
65. E23 : tu peux faire « 1/y » et voir si c'est égale à « y' »
66. C: t'as « y'=1 »... ça va pas du tout
67. E23 : donc (... ?) qu'est ce que ça fait
68. E22 : oui, mais comme on peut expliquer que ça fasse « ln »
69. E23 : donc ... c'est (... ?) à voir, ça fera pas un nombre négatif...
70. E22 : bon, je fait 1 divisé par quoi ?
71. E23 : 1/0,74 ... ah non ... Juste voir ce que ça fait, ça se trouve que ça (... ?)
72. E22 : ben, ouais ... tu fais sur « y' »
73. E23 : ah
74. E22 : tu veux quoi ?
75. E23 : eh ben, 1/1,19 alors...
76. E22 : voilà... ..
77. E23 : une (près) (... ?) si (... ?)
78. E22 : et 1/0,74 ? ... ..
79. E23 : ça fait « x »... ça serait « 1/y' = x »
80. E22 : moins (... ?)
81. E23 : ah non, même pas... si c'est de moins...
82. E22 : alors... 1/-0,74... Ah oui, mince !
83. E23 : (... ?) je pense ça va faire non plus (... ?)
84. E22 : ben oui
85. E23 : attend... on va trouver un truc (pour expliquer)... Moi, je ferais bien ça. Donc, ça ferait « xy'=1 »...  
Alors, on va marquer... .. « Quelle est selon vous... » (début de la question 1)
86. E22 : y'(x)
87. E23 : « xy'=1 »...
88. E22 : ouais mais y' ça va être... c'est une fonction de « x »
89. E23 : tu mets ça ...
90. E22 : ah, tu peux marquer comme ça
91. E23 : alors ... parce que pour diviser par « x » il faut pas que « x » soit égale à 0... .. Tu vois ?
92. E22 : oui, oui
93. E23 : bon (... ?) ensuite (... ?) (tangente) (... ?)
94. E22 : donc t'es sûre de ton truc là ?
95. E23 : non
96. E22 : attend, attend... On va changer le point M...
97. E23 : essaie de faire une autre tangente
98. E22 : non, mais je vais juste changer le point M tout simple... Mince. Là... Et maintenant, alors...
99. E23 : et là on va prendre (... ?)...
100. E22 : ben, oui... ben ouais
101. E23 : mais, essaie quand même « 1/... ..
102. E22 : (... ?) bougeait et bouge pas
103. P : qu'est-ce qui se passe là ?
104. E22 : ben, en fait, on a pensé que ça pourrait être ça... mais en fait non. On a vérifié que c'est pas ça
105. P : je vais vous donner un joker, d'accord ?...
106. E23 : un joker ! bon...
107. E22 : ben oui, parce que finalement en 0,514 on ne va jamais le bouger mais ...
108. E23 : pour ce point



109. E22 : et pourquoi il ne bouge pas ?... Ah ben oui, parce que c'est (... ?) pousse pas... Ben oui...  
donc, ça va pas du tout, du tout...

### Deuxième étape : le retour aux exponentielles (activité 2 bis)

110. P : et là, vous avez le 2 bis  
111. E22 : ah, d'accord... ..  
112. E23 : ouais, ouais. Mais c'est un peu la même chose  
113. E22 : oui  
114. E23 : alors, qu'est-ce qu'il faut faire ? ... « On considère la même famille de courbes que dans la deuxième activité... donc le point C il se déplace ... le point P il est déplaçable, d'accord »  
115. E22 : jusqu'à là ouais ...  
116. E23 : « la tâche consiste à identifier des propriétés géométriques invariantes associées à la famille de courbes  $\Omega$  ... Quelles propriétés géométriques invariantes pouvez-vous associer à cette famille de courbes ? » ... Ça veut dire quoi des propriétés géométriques ?... ..  
117. E22 : peut-être que... .. tu vois, on dirait que RQ est toujours constante... vas-y  
118. E23 : que la courbe... ouais  
119. E22 : oui, à mon avis RQ  
120. E23 : oui, alors... on va faire « distance », c'est où « distance » ?... .. distance... 1 ... ensuite si on bouge... je nécessite rentrer ... voilà, tu me dis si tu veux faire (... ?)  
121. E22 : (... ?)  
122. E23 : je vais faire pareil... ah... .. voilà... voilà... .. Donc, c'est toujours la même. Donc, ça veut dire quoi ? que « la distance RQ est toujours la même, égale à 1 » (elle écrit)... en termes de mesure, à 1 ... Et donc, ça veut dire que... parce que Q... Q c'est le projeté orthogonal de P, et R c'est le point d'intersection de la tangente. Ça veut dire quoi ? ... .. attend ... Bon... Et si on bouge le point C dans le plan ... ..  
123. E22 : donc ...  
124. E23 : alors, attend...  
125. E22 : qu'est-ce que tu fais là ?  
126. E23 : moi, j'ai bougé le point C ... pour voir... .. Ben, écoute, moi je vois que cette propriété ... hein ... non ? ... Mais ça veut seulement dire un truc sur la tangente... (... ?) très bien ... bon ...  
127. E22 : « Est-il possible de déduire l'équation différentielle de la famille, à partir des propriétés invariantes... » (elle lit la question 2).  
128. E23 : ben, ça veut dire qu'« y' »... Ça c'est le point d'intersection de la tangente... et ça c'est le projeté orthogonal...  
129. E22 : ouais  
130. E23 : donc, si t'as un point P, tu peux avoir Q, le point Q tu sais son ordonnée...  
131. E22 : pourquoi ?  
132. E23 : le point Q tu sais ses coordonnées, si t'as les coordonnées de P... Et donc, tu sais les coordonnées de R, donc tu peux avoir la droite PR... .. donc, PR c'est la tangente... tu peux avoir l'équation de la tangente ... en un point, sans faire la méthode qu'on a ... Tu vois ce que je veux dire ? ... ..  
(... ?)... RQ est toujours comme ça, ouais ... voilà... .. Si «  $\Delta y$  »... .. «  $y^+$  » ... voilà, ... tu (... ?) pas à dire, je pense...  
133. E22 : si, si, non mais j'ai lu... mais je (... ?)  
134. E23 : mais, je sais pas si ça répond à la question  
135. E22 : mais, attend... On retrouve... on retrouve bien «  $y'=y$  »...  
136. E23 : ben, ouais... mais ... ..  
137. E22 : Madame, pour l'activité 2 bis, il fallait juste remarquer que  $RQ=1$ ...  
138. P : bravo, oui. Et à partir de là alors ?  
139. E23 : ben, on retrouvait que QR...  
140. P : ben, génial, vous avez tout fait  
141. E23 : c'est tout ce qu'il faut faire ?  
142. P : voilà, donc vous pouvez retourner à l'activité 3  
143. E22 : d'accord...

### Troisième étape : retour à la famille de tractrices (activité 3)

144. E23 : et alors...  
145. E22 : (... ?) trompé  
146. E23 : ouais, tu veux retourner à l'activité 3 ?...  
147. E22 : euh... mince... Tu ne veux pas qu'on laisse la tangente

148. E23 : ben, on va les retracer autrement, je pense... On va prendre un point... (... ?) c'est l'activité 2 bis... Là « y' » était plus égale à « y »
149. E22 : ben, non, moi je pense pas, non...
150. E23 : là en fait, c'était pour trouver l'équation, on avait remarqué que la distance, si tu prends un point... son projeté orthogonal et la tangente étaient constants... On pourrait peut-être regarder...
151. E22 : et puis ça donnerait quoi ?
152. E23 : ben, si elle est constante, on pourra trouver l'équation de la tangente et la pente...
153. E22 : si elle est constante en quoi ?... Pour la première courbe tu veux dire ?
154. E23 : la constante c'est ... non RP là ou RQ...
155. E22 : ouais, mais tu prends un point de la courbe et tu regardes ?
156. E23 : non, un
157. E22 : et... mais le problème c'est comment tu peux voir si la distance est constante si t'en prends qu'un...
158. E23 : non, mais... ah ... après tu projettes orthogonalement ton point...
159. E22 : oui
160. E23 : et l'autre c'est la tangente qui coupe l'axe
161. E22 : oui
162. E23 : donc, il faut tracer la tangente
163. E22 : et après tu regardes comment ?
164. E23 : ben, la distance entre le projeté orthogonal et l'intersection de la tangente avec l'axe « Ox »
165. E22 : d'accord... et après tu fait bouger le point pour voir si elle reste...
166. E23 : voilà...
167. E22 : ben, on peut faire quoi là ?
168. E23 : ça marche pas... Attends j'y vais... Tu prends un point sur la courbe... Voilà... Tu fais son projeté orthogonal... Donc on va faire...
169. E22 : c'est pas parallèle ?
170. E23 : perpendiculaire.
171. E22 : et parallèle à ça...
172. E23 : ben ouais, c'était comme ça... mais ça revient exactement au même... Donc, là, on a un point et après il faut qu'on ait la tangente... donc il faut prendre ça... c'est ça ?... Faire la droite par ce point et par ce point, et rapprocher ce point... Elles sont pas tout à fait au même endroit...
173. E22 : non
174. E23 : il faut que je reprenne le (... ?) ... Ah c'est drôle cette merde... ..
175. E22 : ouais
176. E23 : (... ?) bien
177. E22 : très bien
178. E23 : voilà... Et donc, là on a deux points... .. mais qu'est-ce qui se passe là ?
179. E22 : non, mais il y a une anomalie ... Ouais, non, mais les points...
180. E23 : c'est où ?
181. E22 : tu peux pas nommer les points ?
182. E23 : non, on peut pas
183. E22 : si
184. E23 : mais, on peut faire euh « distance »
185. E22 : ben, mais je sais pas comment on les nomme... ils sont tous là... appeler Q et R
186. E23 : non mais ... nommer (...?)
187. E22 : ben, si. Je crois (... ?) le truc (... ?) ...
188. E23 : nommer
189. E22 : voilà... Très bien...
190. E23 : ah ben, non. On peut pas donner ça...
191. E22 : quel objet ? ...
192. E23 : point d'intersection... Ouais, mais ils ont pas ... intersection de ces droites ... Bon, écoute, on va chercher cette distance déjà... C'est pas ça qu'on voulait ... .. Ça va pas... j'avais machin...
193. E22 : ben, on a créé des points, tu mets un point là et un point là
194. E23 : ah, oui... .. Voilà ...

### **Le recours à la tractrice avec la construction auxiliaire**

195. P : vous êtes sur la trois là ? c'est ça ... Vous ferez le 3 bis, vous verrez mieux.
196. E23 : ben, on essaie de refaire pareil, en fait
197. P : ouais, c'est ça... avec le 3 bis vous verrez mieux
198. E23 : d'accord... Donc là, on a 1,64... .. J'essaie juste deux secondes de déplacer le point là...
199. E22 : là c'est le point qu'il faut déplacer, ouais...

200. E23 : mais là, c'est logique que la... Tu vois, ç'aurait été en déplaçant le point P...
201. E22 : je ne sais plus ce qu'on avait déplacé...
202. E23 : le point P... Ah ben, là, elle est pas constante
203. E22 : ah ben ... rien nous dit ça...
204. E23 : oui mais bon, tu vois là, le point P. Et là, normalement la tangente il faut aussi la mettre là
205. E22 : ah, ben nous, on ne faisait pas ça tout à l'heure.
206. E23 : oui, mais parce qu'il arrivait à prendre la tangente au même temps. Là on arrive pas à prendre la tangente au même temps. Donc, c'est pas la même distance visiblement... Tu veux qu'on ouvre l'activité 3 bis ?
207. E22 : mmh
208. J : l'activité (... ?) vous pouvez faire aussi avec...
209. E23 : la 3 bis
210. J : c'est pareil, c'est la même ... ..
211. E23 : ah
212. E22 : c'est mieux
213. E23 : ah, ben ça va mieux... Donc, là on va mesurer... 1,50... Et si on déplace P... 1,80... ah c'est la même... ..
214. E22 : pourquoi (... ?) mais, non... Mais la tâche consiste à chercher l'équation différentielle de premier ordre...
215. E23 : pourquoi tu (... ?) toi
216. E22 : ben, l'autre c'était pour «  $y'=y$  » qu'on avait ça
217. E23 : ben, ouais... Mais là, on sait que « y' » est constante... et ben, c'est ça...
218. E22 : pourquoi « y' » est constante ?
219. E23 : parce que quelque soit ton point P... là...
220. E22 : oui...
221. E23 : ah non... la distan... je raconte n'importe quoi...
222. E22 : mmh... Non, mais je veux dire c'est pas « y' » égale constante...
223. E23 : ben, tu as « y »... tu auras P... R tu peux l'avoir... donc on peut essayer de trouver... Je mets dans quel cadre ?
224. E22 : non, mais quand tu fais quoi là ?
225. E23 : ben, on va essayer de faire le même raisonnement... Une fois que t'as les coordonnées de P, celles Q tu l'as, et R tu rajoutes 1... Pourquoi la distance, elle est 2,66... ?
226. E22 : ah, mais les deux bougent ...
227. E23 : attend, on va essayer... .. Non, elle pas constante ... ouais
228. E22 : elle n'est pas constante ?
229. E23 : je comprends plus...
230. E22 : c'est pas (... ?) euh ... tu avais obtenu cette distance en cherchant le point M, non ?
231. E23 : non
232. E22 : ah (... ?) (jeux) en point P
233. E23 : alors ... Là entre P... la distance entre de là à là, elle fait 1,56... euh ... 1,99 c'est pas les mêmes Céline
234. E22 : oh putain, c'est pas la même... Mais pourquoi tout à l'heure on a trouvé un truc pareil ? (... ?)
235. E23 : non, mais attend, ce que je comprends pas...
236. E22 : tout à l'heure on avait un truc pareil
237. E23 : ce que quand tu déplaces... elle bouge plus... je ne comprends pas ... Ah oui, parce que ça mesure la distance... ça mesure la distance QR. C'est pour ça qu'on avait écrit (... ?) cette distance ça sert à rien
238. E22 : (... ?) ...
239. E23 : ok... Alors...
240. E22 : de toutes façons (... ?) si non c'était égal qui (... ?) « y' »... ..
241. P : alors, qu'est-ce qui est constant ?
242. E22 : ben non, elle n'est pas constante
243. E23 : on est dans l'activité 3 bis
244. P : ben oui, il y a quelque chose qui reste constant
245. E23 : on voit pas QR...
246. P : non, mais il y a beaucoup d'autre choses qui restent constantes. C'est pas forcément toujours la même
247. E22 : PR
248. E23 : PR
249. P : peut-être... Vous avez affiché
250. E22 : non
251. E23 : ah ouais, alors, là déjà c'est mal barré, parce que le point P est un petit peu... ouais (... ?) super

252. E22 : et pourquoi t'as (... ?) un boulot PR... Enfin, (... ?) ensemble ...
253. E23 : (... ?) tu as (... ?) j'ai peux (... ?)
254. E22 : (... ?) 2 plus (... ?)...
255. E23 : voilà, il reprend... il faut trop (... ?)...
256. E22 : bon (...?) on avait que ça...
257. E23 : bon, on met déjà que PR est (... ?).
258. E22 : ah c'est bon
259. E23 : et (... ?) selon l'activité 2 bis qu'on avait...
260. E22 : et la 3 bis ... La distance PR est constante...
261. E23 : voilà ...
262. E22 : (... ?) si tu (... ?)... valeur attendu de PR ça représente quoi ?...
263. E23 : (... ?) ça peut être le coefficient ...
264. E22 : attend, attend. Déjà on va mettre tout ça dans la même (... ?)
265. E23 : je sais pas... si (... ?) ça veut dire que le coefficient il est constant... Ben, ça veut dire que « y' » égal constante
266. E22 : tu crois ?
267. E23 : ben, ouais
268. E22 : bon, on se remet comme il faut
269. E23 : or PR... (elle écrit)
270. E22 : la distance de là à là est constante... ..
271. E23 : (... ?) que « x » euh... donc « y' »...
272. E22 : il reste 1 minutes... PR est constante... PR c'est quoi ? PR c'est la distance du point P, qui fait parti de la tangente à R ... ah ça peut être quoi ça ? Qu'est ce ?... c'est euh
273. E23 : c'est la pente... Si tu fais «  $(y_P - y_R)/(x_P - x_R)$  » c'est égale à « y' »
274. E22 : euh, si tu fais... la distance ... est la même... Donc, tu changes les coordonnées de P et de R, tu t'en fous... voilà, si tu fait «  $(x_R - x_P)/(y_R - y_P)$  »... Non... c'est pas ça
275. E23 : la distance de P à R, en fait c'est  $PQ^2 + QR^2$ ...
276. E22 : la distance de P à R c'est ?
277. E23 : tu fais Pythagore, c'est :  $PQ^2 + QR^2$ ...
278. E22 : non, mais il faudrait trouver une relation entre « y » et « y' »... Je sais pas, si on trouvait les coordonnées du point P, et les coordonnées du point R.
279. E23 : qu'on a ça ... voilà, et maintenant il faudrait trouver R... et ben...
280. E22 : ben oui, on va dans « coordonnées » non ?
281. E23 : non, non, mais il faut les faire à la main... ça ce pour P tu dis que P
282. E22 : mais non... il faut observer...
283. E23 : P... il a pour coordonnées  $(x_P, y_P)$ ... R, il a pour coordonnées  $(x_R, 0)$ ... Or, la distance de « x »... de PR c'est quoi ? ... C'est «  $x_P - x_R$  » ? ou plus... Celle-là ... dans le vecteur
284. E22 : attend... tu veux la distance de PR ?
285. E23 : ouais
286. E22 : ben, c'est «  $x_R - x_P$  »
287. E23 : bon, c'est pareil «  $(x_P - x_R) + y_P^2 =$  donc  $PR=2$  »... et donc, de là, tu peux trouver  $x_R$
288. E22 : mais pourquoi tu veux  $x_R$  ?
289. E23 : ah ben, je sais pas... tu m'avais dit que tu (... ?) les coordonnées de  $x_R$
290. E22 : ah non, je n'ai jamais dit ça, non
291. E23 : non ... mais pour avoir la pente... Parce que du coup « y' » la pente... c'est... euh
292. E22 : ouais...
293. E23 : «  $x_P - x_R$  »... non ... «  $(y_P - y_R)/(x_P - x_R)$  » ...
294. E22 : (... ?) (f) ... ouais si on (... ?) (voulait) qu'il y ait une relation entre y et y'...
295. E23 : pour (... ?) vaut « y' »
296. E22 : pourquoi ?
297. E23 : parce que « y' » c'est «  $(y_P - y_R)/(x_P - x_R)$  » ...
298. E22 : mais comment tu sais ça ?
299. E23 : oui, c'est le coefficient directeur... « y' »... On veut le coefficient directeur de la tangente...
300. E22 : on veut le coefficient directeur de la tangente... Oui !... Et ben, pour moi c'est «  $y'_P$  » ..... «  $y'(x_P)$  » moi...
301. E23 : oui, mais c'est aussi la pente de la tangente PR...
302. E22 : eh, ben, c'est facile
303. E23 : c'est ce quoi la pente de la tangente ? ... C'est...
304. E22 : attend
305. E23 : «  $(y_P - y_R)/(x_P - x_R)$  » ...

306. E22 : «  $y'(x_P)$  » met «  $x_P$  »...
307. P : alors... vous faite pas... On cherche pas sur du papier comme ça... (... ?) trop ouvert
308. E23 : ouais, ben, on en est là nous... On a  $PR=2$
309. P : ah ...  $PR=2$  ?
310. E22 : oui
311. P : ah, oui, oui, excusez-moi
312. E23 : et après, ben, je sais pas... il faut trouver «  $y'$  »
313. P : ben, ouais, c'est ça...
314. E23 : en fait, il faut faire «  $(y_P - y_R)/(x_P - x_R)$  », non ?
315. P : ben, non... Non, R il a était... R en fait...
316. E23 : on fait le point ouais
317. P : vous pouvez calculer ses coordonnées
318. E23 : ben, voilà, c'est  $x_R$  ... on le trouve avec la distance  $PR$  en fait...
319. P : je pense que R il vaut mieux le considérer comme un point d'intersection de la tangente avec l'axe des «  $x$  »
320. E23 : bon, ça veut dire que 0 est son ordonnée...
321. P : voilà, et on cherche «  $x_R$  »
322. E23 : et on peut pas faire avec la distance ?
323. P : avec la distan... Non, parce qu'après quand vous aurez (... ?)
324. E23 : on aura de (... ?)
325. P : c'est ça qui vous donnera l'équation... il faudra le trouver...
326. E22 : ouais, voilà
327. P : donc, il faut trouver les coordonnées de R
328. E23 : r
329. E22 : d'accord ... eh, ben oui c'est «  $x_P+2$  »... non ? ... C'est «  $x_P+2$  », «  $x_R$  »
330. E23 : ben, oui ... ah non, ... ben, ça... ça fait 2, mais c'est... c'est pas égale à ça là... il faut faire Pythagore
331. E22 : ah ouais
332. E23 : on (... ?) comme ça... bon, alors...
333. E22 : oui, mais en fin, on n'a pas trouvé
334. E23 : non, là c'était QR... donc, tu pouvais faire plus un moins un... (... ?) ... bon allez Celine... «  $x_R$  »... en fait, «  $(x_R - x_Q)^2$  », c'est-à-dire «  $x_P$  »... plus cette distance là, c'est-à-dire plus...
335. E22 : (pas) question (... ?) qu'elle ferait là...
336. E23 : égale 4 ... moi, je retrouve la même chose que là, c'est pas grave...
337. E22 : que (... ?) là ... s'il te plaît ...
338. E23 : elle veut qu'on trouve «  $x_R$  »... Là tu sais que ça vaut 2...  $PR$ ...
339. E22 : et non, c'est pas celui là... la distance QR, ah non ... la distance QR (... ?) en fin (... ?) QR ça va être égale à «  $x_P + QR$  »... (... ?)
340. E23 : «  $x_P + QR$  »...
341. E22 : ben, oui
342. E23 : euh (... ?) voilà ...
343. E22 : donc, nous avons... On veut «  $x_R$  »... d'accord ?
344. E23 : mmh...
345. E22 : bon, «  $x_R = x_P + QR$  »...
346. E23 : mmm...
347. E22 : bien, QR on peut le trouver avec Pythagore...
348. E23 : mmm... ça va revenir exactement au même... (... ?)
349. E22 : ah je sais pas ah... On essaie. QR, c'est donc égale à
350. E23 : à racine carrée...
351. E22 :  $PR^2$
352. E23 : ouais, moins  $PQ^2$ .
353. E22 : alors, «  $QR^2 = PR^2 - PQ^2$  »
354. E23 : mmm...
355. E22 : bon,  $PR^2$  on avait dit que c'était 4. Moins  $PQ$  qu'on a dit que c'était «  $y_P$  »... C'est ça que tu trouves ? ... donc, c'est racine de ça... Donc, «  $x_R = x_P + \sqrt{4 - y_P^2}$  »...
356. E23 : ouais... ah, ben c'est cool alors... parce que du coup après, on a ça... après elle a dit qu'il fallait le rapporter là dedans pour avoir l'équation... mais je vois pas pourquoi...
357. E22 : bon, on a déjà «  $x_R$  »... on est d'accord ? Bon, euh... d'un autre côté... d'un autre côté euh ...
358. E23 : attend je vais... tu te mets là... voilà, on a «  $x_R$  » ... Ben donc, ça fait bien «  $(y_P - y_R)/(x_P - x_R)$  »... Et les «  $x_P$  » on peut les barrer, ça sera bien ça... on écrit «  $y'$  » ... «  $y_R$  »/«  $(x_P - x_R)$  »

359. E22 : moi, je ne sais pas d'où tu sortes ça donc...
360. E23 : c'est le coefficient directeur d'une droite, c'est  $\Delta y / \Delta x$  ... Alors, égale  $\langle y_p \rangle$  parce que  $\langle y_R \rangle$  il vaut 0... et  $\langle x_p - x_R \rangle$ ... tu vois les deux  $x_p$  se barrent... Et il te reste moins racine...
361. E22 : ben, c'est ça... c'est que  $\langle y' \rangle$ ...  $\langle y' \rangle$ ...
362. E23 : c'est égal à moins racine...
363. E22 : attend, ça-y est... En fait on a trouvé  $\langle y'(x_p) \rangle$ ... donc...  $\langle y' \rangle$  de quoi ? ...  $\langle y'(P) = (y_p - y_R) / (x_p - x_R) \rangle$  ... donc... voilà. Et bien  $\langle y_p \rangle$  c'est quoi ? ... ah ben c'est  $\langle y(P) \rangle$ ... je mets...
364. E23 : voilà
365. E22 :  $\langle y_R \rangle$  c'est 0, donc c'est  $\langle y_p / (x_p - x_R) \rangle$ . Et ben, ça nous fait sur  $\langle (x_p - \dots) \rangle$  ...  $\langle x_p - \sqrt{4 - y_p^2} \rangle$ ... Ça, ça se barre et ça nous fait  $\langle y' = y / \dots \rangle$  (il nous reste)...  $\langle -y / \sqrt{4 - y_p^2} \rangle$  ... voilà
366. E23 : et ça c'est égale...
367. E22 : ah c'est l'équation différentielle...

(changement de cassette)

368. E22 : ben, on se base sur un point... on avait un point de...
369. P : oui
370. E22 : d'où  $\langle y' = y \rangle$  alors que  $\langle y \rangle$  et  $\langle y' \rangle$  ils sont des fonctions. C'est ça que je comprends pas...
371. P : parce qu'euh... le symbolisme que c'est difficile
372. E22 : oui... voilà c'est ça qu'on...
373. P : c'est ça, parce que... en fait... euh  $\langle y \rangle$  c'est  $\langle y'(x) = y(x) \rangle$
374. E23 : donc c'est pour tous les  $\langle x \rangle$ ...
375. P : voilà, c'est pour tous les  $\langle x \rangle$ ... Exactement.
376. E23 : donc, si t'en trouves un...
377. P : voilà...
378. E23 : ça... tu peux le généraliser
379. P : voilà, c'est ça... C'est parce que vous (... ?) quand vous bougez ça restait vrai
380. E22 : d'accord... mais alors, pourquoi tout à l'heure quand... pour... quand, pardon, Delphine, elle a dit, qu'on prenait un point. Eh ben, le point... on regardait... on regardait les coordonnées et ça allait pas avec ce que vous aviez dit... Ben non, parce que c'est pour une fonction...
381. P : je ne me souviens plus
382. E23 : ah, c'était pour la symétrie
383. P : qu'est-ce qui s'est passé, je ne me souviens plus
384. E22 : pour la symétrie, en faite...
385. E23 : parce que l'allure de... la courbe de solution allait pouvait être symétrique par rapport au O...
386. P : oui... oui...
387. E23 : et j'ai dit, on prend deux points et... en fait (... ?) quel point appartient (... ?)...
388. E22 : et en fait vous ... après vous vous aviez dit... non, on que ça égal (... ?). Donc, après, bon moi j'ai compris... c'est vrai que je comprends mieux avec les fonction. Mais alors du coup, là, finalement on fait le même principe : on prend un...
389. E23 : non, parce que là c'est pour la symétrie de...
390. P : j'arrive pas... je n'arrive plus à... Qu'est-ce que vous... c'était vous qui avez dit...
391. E23 : bon, on voulait démontrer que deux droites solutions étaient symétriques par rapport à (... ?)
392. P : deux courbes solutions
393. E23 : ouais... Et moi, j'avais dit ben, on prend on point d'une... et on va démontrer que son symétrique appartient à courbe solution symétrique
394. P : oui... et donc comment vous auriez fait après ?
395. E22 : voilà, le problème c'est que... je vois pas... Je pense que tu dirais que le point là vérifie l'équation
396. E23 : voilà, alors que ça va pas. Puisqu'on veut que ce soit une...
397. E22 : une droite...
398. E23 : une fonction qui vérifie l'équation... Et là...
399. P : non, non... Je pense que simplement ... je vous dit pas comment vous allez pouvoir faire, c'est ça mon problème...
400. E23 : nous, on pouvait pas calculer  $\langle y' \rangle$  à partir d'un point
401. P : voilà, c'est ça. Exactement. C'est pour ça que j'ai
402. E22 : ouais mais là j'en vois pas. Parce qu'en fait pareil ... mais bon ça (... ?)...
403. E23 : non, on fait à l'envers justement...
404. P : oui
405. E23 : là tu aurais voulu avoir  $\langle y' \rangle$ ... voir si ça appartenait à une courbe, et tu peux pas avoir la dérivée d'un point... (... ?) que dans la dérivée d'une courbe... Alors que là, on sait que pour un point, on a telle

- dérivée. En fin, je sais pas comment dire. On a vu que pour tous les points la dérivée serait la même ; en fin, que ça serait égale à... en faite pour point...
406. E22 : mais en fait, si c'est vérifié pour tous les points...
407. P : voilà...
408. E22 : on a tous les « x »
409. P : voilà pour tous les « x » on a «  $y'(x)=y(x)$  »
410. E23 : ouais on n'a pas pris un P particulier, on a pris un P au pif
411. P : voilà exactement
412. E23 : et on a vu que «  $y'(P)$  » c'était ça... mais quelque soit le point P... bon, finalement on a enlève le P... (... ?)
413. E22 : bon on aura (... ?) ... .. allez ... « quels éléments pourriez-vous indiquer... » (elle lit la quest. 3). Alors...
414. E23 : alors... tout à l'heure on avait tracé une courbe... eh ben, il faudrait essayer de trouver la solution... Ce qui est un petit peu impossible... .. Il faudrait avoir une courbe solution pour pouvoir faire comme tout à l'heure de tracer le point...
415. E22 : ouais mais (?) c'était «  $y'=y$  »...
416. E23 : c'est quoi l'activité 4 ?... « ...des propriétés mathématiques de la courbe... » (quest. 4)... Bon, qu'est-ce qu'on peut dire sur cette courbe. Visiblement sa limite en plus l'infini c'est 0...
417. E22 : oui
418. E23 : là c'est quoi ce point ?... .. on va jusqu'à 2 et -2,92...
419. E22 : oui
420. E23 : c'est -3,2... .. (... ?) ... ..
421. P : Julio va bientôt ramasser les feuilles... et moi, je vais juste prendre trois minutes pour faire le bilan, quand même. Pour que vous ne partiez pas sans savoir...
422. E22 : non, on peut pas... (... ?) ... est-ce qu'on peut (... ?) ... ..
423. E23 : ouais, c'est pas possible (... ?) ...
424. E22 : on pourrait (... ?)
425. E23 : ça c'est un petit peu impossible (... ?) ...
426. E22 : pour qu'on (... ?) alors (... ?)
427. P : est-ce que vous les avez données ?
428. E23 : ouis...
429. P : merci... ..

### Bilan

430. P : alors, juste je fais le (... ?)... Les premières courbes solutions... vous avez tous raisonné comme stratégie de tracer une tangente, (à peu près en moyen ?), de tracer une droite et d'approcher (... ?) qu'elle devient tangente. Et vous avez constaté que la pente de la tangente était toujours égale à l'ordonnée... ça c'était une stratégie assez facile. Donc vous avez découvert que c'était «  $y'=y$  »... donc que c'était une courbe exponentielle... solution de la forme  $y=Ce^x$ ... c'est ça ? Après on vous a passé la troisième activité. Et la troisième activité, ça marchait plus du tout aussi bien. Parce que la relation entre la pente de la tangente et les coordonnées du point n'étaient pas du tout évidentes... C'était volontaire, et donc on vous a donné un joker. On vous a fait revenir là-dessus, sur l'exponentielle et on vous a fait constater que, en faite, PR est constant. La distance PR est constante ; même encore, le vecteur... je sais pas... c'est RT, fois le vecteur RP est constant. Ce vecteur RP on l'appelle la sous-tangente, et c'est une propriété caractéristique des exponentielles : le vecteur tangente, sous-tangente constants est une caractéristique... C'est-à-dire, si une famille de courbes vérifie que le vecteur sous-tangente est constant, c'est une courbe exponentielle... c'est une famille d'exponentielles. Donc c'est une caractéristique qui a été trouvé aussi, assez tard au XVII siècle. Alors, vous... on vous a tout mis en l'évidence pour que vous trouviez. Après vous avez écrit... je pense... ç'a été assez facile d'écrire que puisque cette histoire ça allait pas... ..
431. P : (le professeur déduit l'équation différentielle de la tractrice)
432. E23 : (elles parlent entre elles) je crois qu'on s'est trompé parce que (... ?) toujours la droite positive, parce que nous on a un moins
433. E22 : «  $4-y^2$  »
434. E23 : mais si le «  $4-y$  » est positive ... est négatif ... (... ?)
435. E22 : (... ?)
436. E23 : ah ben, c'est bon, c'était marqué dans le (... ?) non c'est (... ?) un moins non
437. E22 : mais « y » sur (... ?) a un moins... on a oui « y » sur racine de (... ?)... bon ... ..

(fin de l'activité)

# **Binôme E3/E4**

**L'étude descriptive des courbes solutions de**

**l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$**

**L'expérimentation de l'année 2003**



## Binôme E3/E4

## Première partie : le travail en papier/crayon

1. E3 : alors ... (... ?) (en lisant) « le dessin il montre le champ de l'équation ... dessiner quelques courbes solutions sur l'écran ci-dessus et décrire le comportement des courbes solutions »
2. E4 : (... ?) pourtant on fait ça les solutions... un truc comme ça, ouais
3. E3 : mmh ...
4. E4 : en fait, c'est ... c'est des ...des trucs comme ça
5. E3 : c'est des hyperboles
6. E4 : c'est des hyperboles ouais, dans tous les cas
7. E3 : ouais, ouais ... mais en fait c'est le ... quand il y a une solution tu as une famille des solutions de (... ?)
8. E4 : (... ?)
9. E3 : non mais si ... (... ?) sur l'écran ci-dessous... donc tu dessines une, tu prends un point et puis ah, tu suis euh ... tu essayes de trouver à ... les points qui se correspondent... en fait elle n'est pas en parallèle ... mais attend celle-là est droite, non ? ... attend (... ?) on va (... ?) ça toi ...
10. E4 : tu as les (... ?) toi
11. E3 : alors je vais faire ... euh, moi je vais faire... peut être
12. E4 : tu vas chercher ...
13. E3 : ah oui tu as raison ... allez-y
14. E4 : et ce (essaie)... ça marche avec ça ?
15. E3 : ouais, ouais ...
16. E4 : ah c'est une petite hyperbole comme ça...
17. E3 : ouais, ouais, je ne voyais pas comme ça en fait, parce que j'ai pas bien enregistré ...
18. E4 : elle est comment celle-là ?
19. E3 : en fait, il te vaut mieux prendre la même... dessine d'abord une, donc tu en as pris le troisième truc... alors pour rentrer... donc tu prends le troisième...
20. E4 : là il n'y est pas (... ?) des hyperboles alors ... (... ?) attend... est-ce qu'on peut voir un peu plus... parce que (... ?) est bizarre... bah parce que le milieu il est où ?
21. E3 : alors ... même là tu vois, c'est bizarre ...
22. E4 : (... ?) de toutes façon (... ?) cela
23. E3 : peut être que j'ai plutôt ça
24. E4 : où est que (... ?) ...
25. E3 : en fait, elles sont peut être comme ça ... juste là...
26. E4 : qu'est le même de l'autre côte
27. E3 : regarde, si on fait ... en fait, donc là, on sait plus où elle est là ... là ça marche mieux
28. E4 : ouais
29. E3 : ouais... là, là ... regarde ... comme ça
30. E4 : elle n'est plus hyperbole ... ..
31. E3 : mmh ... puisqu'en fait celle-là ... là tu n'as pas ... parce que celle-là elle ne va pas faire ça apparemment ... donc c'est peut être ça en fait ... c'est un peu bizarre mais ...
32. E4 : donc ça fait un truc comme celle là ...
33. E3 : ouais, ils nous en demandent qu'une... ah non... tracer quelques ...
34. E4 : (... ?) (s'annule)
35. E3 : donc déjà celle-là... on va l'essayer de la magnifier comme ça ... alors comment (... ?)... comme ça ... ça te (... ?) ... ça irait ? pour toi ?
36. E4 : ouais, je sais pas
37. E3 : on va dessiner quand même un peu loin ... pour voir si ça donne, parce que là en fait c'est quoi ? ... celle-là ...
38. E4 : à moins que ce soit des trucs comme ça regarde... tu as des (... ?)
39. E3 : ouais, c'est ça que je voulais dire ... mais j'essaie de voir en fonction
40. E4 : (... ?) tout le temps
41. E3 : ouais, allez-y ... bon et après ?
42. E4 : normalement je pars de là ... et puis je monte comme ça tout le (... ?)
43. E3 : bon... je pense que ... tu peux pas (... ?) avoir (... ?) le même début...
44. E4 : et pourquoi ? ... ah c'est des solutions (... ?) ... c'est bizarre...
45. E3 : mmh ... parce qu'on dirait qu'il y a une que se voit là ... qui on a 2 qui sont ... horizontales ... celles-là ...
46. E4 : les horizontales ça c'est claire

47. E3 : en (... ?)
48. E4 : (... ?) si tu veux
49. E3 : non, attend parce qu'on sait jamais ... en fait il fallait partir de celle-là pour faire le truc ... et alors, après y'on est ...
50. E4 : (... ?) c'est bizarre
51. E3 : non, c'est pour ça que je veux pas le faire directe parce que je me demande si c'est pas une autre chose en fait ... quand même on a l'impression que c'est ça, mais c'est pas ça ... Tournent entre (... ?) ... tournent elles aussi en bas... en milieu elle a (... ?) ... Est-ce que c'est ce pas ça ? ... oup... non, ou alors comme ça ?... Je peux pas avoir de morceaux comme ça avec ...
52. E4 : elle a (... ?) après ... là au milieu ça a l'air ... Tu peux pas (... ?) qu'y a de trucs comme ça ? ... (... ?) tu t'as fait qui sont pas bons ...
53. E3 : ouais, mais pourquoi il se (... ?) parce que là en plus, elle n'est plus tangente après (... ?) ... Donc, alors c'est (... ?) c'est compris... (en lisant) « Soit  $C_1$  la courbe solution qui passe par le point  $L(-2,-2)$  » ... on va essayer de voir (... ?) sinon, 0.5 ... 1... 2 ...
54. E4 : ah ouais, mais c'est -2 ...
55. E3 : 0.5 ... 1 (... ?) avec lui... ouais ... 0.5 ... 1... 2 ... ah ouais, elle est là ... alors « décrire l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$  »
56. E4 :  $[-3,3]$  sur (... ?) 2 ...
57. E3 : mmh ... mmh ...
58. E4 : le (... ?) ça fait 0.1 ? (... ?) ... une tangente en ce point là
59. E3 : ouais, mais comment on n'a pas tracé la courbe... alors qu'est ce qu'on pourrait tracer comme courbe ?
60. E4 : parce qu'elle est bizarre là ...
61. E3 : à moins que ... ouais carrément... peut être ... il faudrait qu'en passant pas ces points là à chaque fois, c'est-à-dire tu as ça ... ça... voilà (... ?) elle doit se retrouver tangente (... ?), là tu peux pas passer une tangente... Là tu vois on avait de mal à faire les tangentes (... ?)
62. E4 : ouais ... (... ?)
63. E3 : ouais, elle se fait tangente un peu près ...
64. E4 : tu as un truc comme ça pour cette tangente là ... ouais
65. E3 : ouais, mais tu fait courbe de quoi ?
66. E4 : (... ?) ...
67. P : là elles se rejoignent toutes là, alors ... qu'est ce qu'elles font après ?
68. E4 : bah, oui, ça c'est le problème ...
69. P : ah, c'est le problème là ?
70. E4 : parce que là on a l'impression qu'il y a un truc des hyperboles ... ouais, il y a des endroits où elles ne sont pas des hyperboles alors ... là des deux côtés ça a l'air de tracé plus correct
71. P : vous avez vu l'équation différentielle elle est comme ... cela en fait on sait la résoudre mais je peux vous assurer tout suite si c'est pas des hyperboles
72. E3 : ah c'est pas des hyperboles ?
73. P : regardez la forme de l'équation différentielle «  $y' = \dots$  »
74. E3 : effectivement ... ouais
75. E4 : ouais, mais bon ...
76. E3 : on va regarder comme ça ... ..
77. E4 : donc c'est pas des hyperboles...
78. E3 : donc il faut tout effacer peut être ... ça sera plus simple ... .. alors on va regarder ça dans d'un œil neuf ... on va regarder ça (... ?) ...
79. P : (en parlant au groupe) c'est pas simplement un exercice de coloriage... de dessin, hein ...
80. E3 : (tu as) de la tangente
81. P : (en parlant au groupe) il faut des raisons mathématiques quand même...
82. E3 : bon, alors on va regarder l'équation ... mais déjà (... ?)
83. E4 : c'est en « x » ... ..
84. P : (en parlant au groupe) d'autre part ici les tangentes elles sont pas dessinés partout ... on les a mis sur une grille (... ?) régulière vous avez vu ... il y en a entre les éléments de la grille il y a aussi de tangentes partout, hein...
85. E3 : en fait ça c'est pour les trucs horizontaux parce qu'en fait (... ?) «  $y'=0$  » ça fait «  $y^2=1$  » donc ça fait  $y = \pm 1$
86. E4 : donc ... on va marquer justification ... .. tu prends l'équation ou tu prends quoi ? (... ?) en la justification ouais
87. E3 : en la justification ouais,
88. E4 : non, n'on peut pas (... ?)

89. E3 : tu crois que c'est pour cela la (... ?) ah, oui, d'accord ... alors, pour  $y'=0$  ... pour les isoclines  $k=0$ ...
90. E4 : ouais (... ?) 0
91. E3 : on a ... euh ... tu as (... ?) cette équation, et puis (... ?) fait égale 1 ... comme ça
92. E4 : attend ... c'est quoi ce que tu t'as fait ? C'est juste l'équation là «  $(x^2+1)$ ... »
93. E3 : ouais, ouais, l'équation et j'ai remplacé  $y'=0$  ... voilà...
94. E4 :  $y'=0$  ça fait
95. E3 : après il faudra faire  $y'=k$  normalement ...
96. E4 :  $y^2=1$  donc (... ?) ...
97. E3 : donc ça fait que  $y^2=1+k(x^2-1)$  ... donc ça fait «  $(1-k)$  » ... (... ?) alors, attend, parce que si tu fais «  $y'=k$  » pour chercher les isoclines
98. E4 : ah mais (... ?) parce que (... ?) courbe de (milieu) je crois c'est pas ça
99. E3 : si, c'est pareil ... euh, non, parce que la (... ?) ... c'est pareil la dérivée (... ?) ... la même chose que (... ?) pour une équation (... ?) ...
100. P : (en parlant au groupe) commencez à répondre les questions ...
101. E3 : on a (... ?) fois « y » ... (... ?)
102. E4 : alors «  $y^2=1-k$  » c'est-à-dire ...
103. E3 : alors ...
104. E4 : (... ?) faire comme ça ...
105. E3 : ah ... (... ?)
106. E4 : moi, je crois que (... ?) « x » et des « y » ... justement
107. E3 : « y » ... eh, en fait c'est (... ?) ... «  $y^2=...$  »
108. E4 : ça fait (... ?) ... qui passe par le point L ...
109. E3 : (... ?) ça ?
110. E4 : (... ?) essaie de faire (... ?) ...
111. E3 : il y a (... ?) ... ça m'énerve ce point
112. E4 : qui passe par  $(-2,2)$
113. E3 : parce que je désirais (carrément) ... ah mais ouais, voilà ça fait «  $y=\pm\sqrt{...}$  » et trouver l'équation des isoclines ... j'ai (... ?) ... donc je (... ?)
114. P : quand vous remplissez votre ... la fiche, nous on attend des réponses en termes mathématiques quand même, hein ... pas, la courbe va vers le haut ou va vers le bas ...
115. E4 : (... ?) 2 ... ça c'est « y » il est (sur)
116. E3 : ouais ... en fait on sait si (... ?) ...
117. E4 : (... ?) (toujours) la même
118. E3 : (... ?) elle est constante (... ?) si sont pas toutes (... ?)...
119. E4 : en fait, normalement (... ?) choses (... ?) donc tu peux trouver ... (... ?) ça monte ...
120. E3 : tu voulais faire d'autre (... ?)
121. E4 : je voulais (... ?) tangente ... je crois que (... ?) ça fait de ...
122. E3 : ah mais je crois pour moi ça fait de ... mais, que là tu peux avoir une asymptote...
123. E4 : je ne sais pas c'est (... ?) ça ...
124. E3 : si ça y est, ça marche comme ça, regarde tu fais ça et puis celle-là a l'air de (... ?) elle vient de là et puis elle vient comme ça et là se rejoindrent comme ça, ouais (... ?)
125. E4 : (elle parle au professeur) tout à l'heure quand vous nous demandiez si ça se rejoignaient ... comment en faire pour ... en fait là ça va être une asymptote alors ... on a toutes les courbes en ...
126. P : oui, et vous ne savez pas si ça se rejoignent ou pas ...
127. E4 : ça se rejoignent pas, non
128. P : une asymptote bah, vous pouvez le mettre alors indiquez-le et que vous savez pas vers quelle courbe, c'est ça ?
129. E4 : oui, voilà
130. P : voilà ... mais avec
131. E4 : il me semble que quand on ...
132. P : vous savez pas bien pourquoi
133. E4 : on peut avoir une asymptote mais ...
134. E3 : je suis pas sûre que ça se rejoignent ici ... si c'est une asymptote ça veut dire que ça se rejoignent pas, puisque ...
135. E4 : elle fait (... ?) comme ça alors ... et L tu vois c'est un point d'inflexion ...
136. E3 : non, il faut qu'elles soient toutes parallèles, je crois
137. E4 : non, mais ça marche pas ...
138. E3 : ouais, tu as raison, ça marche pas ... euh ... alors attend ... non, mais là (... ?) on n'a essayé trop... il faudra essayer encore un ou deux ... donc celle-là on va la laisser comme ça avec celle comme asymptote ...

139. E4 : (pourquoi) tu as 2 droites «  $x=1$  » et «  $x=-1$  »
140. E3 : moi je vais (... ?) asymptote ... après ... donc ... quand même on a l'impression qu'il y a (... ?) comme ça, on va essayer de dessiner ... et puis en fait, il y avait comme ça, non ?
141. E4 : c'est pour n-tuplets ...
142. E3 : je (... ?) rien ... cela... c'est pas tout à fait (plane) en fait, tu vois ...
143. E4 : mais ça fait (... ?) exponentielle...
144. E3 : ouais (... ?) donc je (... ?)
145. E4 : (... ?) exponentiel ... (... ?) peut être (... ?) exponentiel comme ça
146. E3 : ouais, ouais ... (... ?) si tu as un (... ?)
147. E4 : bah si on (... ?)
148. E3 : d'un autre côté il n'y a pas des asymptotes (... ?)
149. E4 : moi je vois que c'est un peu de forme exponentiel (... ?)
150. E3 : et là il faudra voir que cela ... je trouve que ça va pas (... ?) ... alors il faut faire un peu plus ... euh ... on va faire une que est plutôt comme ça, ces là elles vont-y (... ?) faire cela et puis là ... en l'inflexion elle (... ?) faire (... ?) ... à mon avis elles sont (les mêmes) fonctions comme ça ... (... ?) et puis (... ?) ... comme ça, et puis là tu as en une deuxième ... donc tu traces ta droite comme ça, je pense que (... ?) peut voir les (courbes) (... ?) ça a l'air de (... ?)
151. E4 : et (... ?) je sais pas comme (... ?)
152. E3 : mmh (... ?) le truc (... ?)
153. E4 : comment on peut (... ?) qu'elles ont des points d'inflexion ...
154. E3 : ouais
155. E4 : parce que là on dirait qu'elles sont de forme exponentielle
156. E3 : en haut, ouais, elles sont de forme exponentielle
157. E4 : là, dans la partie haut du plan... (elle écrit) « dans la partie haut du plan », donc (... ?)
158. P : est-ce que on va pouvoir ramasser ce fouille là ?
159. E4 : (... ?) (elle écrit) « on pense avoir des courbes » (sont) de forme exponentiel... de... de forme on dit ? ... courbes de (... ?) exponentiel ..., je pense
160. E3 : de forme (... ?) hein ... donc
161. E4 : ensuite (... ?)
162. E3 : des points d'inflexion (... ?) ... (... ?) c'est ça
163. E4 : (... ?) exponentiel ... oui ... ensuite ... euh ... Dans (... ?)
164. P : on va commencer à ouvrir les ordinateurs là, pour mettre en marche le logiciel que vous allez utiliser ...
165. E4 : (... ?)
166. P : vous le gomez ?
167. E3 : bah, on va le refaire comme il faut (... ?) ... euh (... ?) ... ce qui est étonnant c'est que (... ?) des trucs comme ça normalement ... moi, en fin, je le vois que (... ?) on a partout
168. E4 : ouais, mais (... ?)
169. E3 : peut être qu'en fait c'est que ... bon, on fait ça non ?
170. E4 : et puis voilà ... (... ?) pas absolument ...
171. E3 : mmh ... on va faire une ...
172. E4 : (... ?)
173. E3 : c'est bon ?
174. E4 : ouais (... ?) sur  $C_1$  encore (... ?) ... cela ?
175. E3 : j'ai l'impression que  $C_1$  a un truc bizarre ... Sur ... le milieu, il faudra essayer ... en fin, je ne sais pas si ça pourrait avoir un rapport avec quelque chose, mais là je me souviens plutôt que quand on avait de trucs comme ça on le translatait tout le (monde) ... là c'est un problème bizarre, qu'en plus (... ?)
176. P : c'est-à-dire, qu'est ce que vous voulez dire ?
177. E3 : parce que là on a même essayé de ... donc, je sais pas... quelques cinq... mais, euh
178. P : oui
179. E3 : je me souviens que si on avait une courbe comme ça, on arrivait à le translater tout le (monde), c'était une famille de courbes qu'on translatait quoi
180. P : ça dépend
181. E3 : ça dépend
182. P : oui, ça dépend ... c'est pas forcément une translation, ça dépend
183. E3 : c'est pas forcément une famille qu'on va translater
184. P : si il y a une famille c'est sûr mais euh ... c'est (... ?)
185. E3 : parce que là on n'a plus de tout de quoi ... en ce cas, en fait ce qui se passe de ce côté ah ... c'est juste ce qui (... ?) a ... quelques formes
186. P : ouais, ouais, juste avec l'ordinateur vous allez voir ...

187. E3 : d'accord  
 188. E4 : quasiment pas ça (... ?) ... en ce point là (... ?) elle fait un truc vraiment bizarre ici  
 189. E3 : oui  
 190. E4 : puis là ... qu'il descende ...  
 191. E3 : oui, voilà ...  
 192. E4 : un truc un peu comme ça quoi ... ça serait  $C_1$ ... Qui se passe-t-il, qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini ? ... ben ... elle devient ... euh, elle a par asymptote euh ... -1  
 193. E3 : mmh, mmh ... ..  
 194. E4 : c'est un peu ça ... c'est «  $y=-1$  », donc c'est ça ... (... ?) là (... ?) décrire l'allure ... alors elle a un point d'inflexion...  $C_1$  elle a un point d'inflexion ... (elle écrit) « L est un point d'inflexion ... .. pour  $C_1$  » ... .. (... ?)  
 195. E3 : j'ai pas pu entendre (... ?) ... ..  
 196. E4 : (décrire) l'allure de la courbe  $C_1$  ...  
 197. E3 : ah oui d'accord... en fait, là on l'a fait plus qu'en -3, 3 là ... bon, c'est pas grave ... .. bah il faut trouver (... ?) que ça, tu (... ?) ... peut être on pourrait mettre mon truc alors ... ..  
 198. P : donc je vais ramasser les feuilles ... ..  
 199. E4 : c'est quoi le (... ?) ... ..

### Deuxième partie : le travail en géométrie dynamique

200. E4 : (en lisant) « ouvrir la figure Activité 1... sur l'écran s'affiche le champ de tangentes de l'équation ... le vecteur d'origine Q est déplaçable ... Déplacer le point Q... et écrire les information complémentaire sur l'allure de la courbe  $C_1$  à partir de ce que vous voyez à l'écran... »  
 201. P : alors, n'oubliez vous qu'il a un zoom dans Cabri... il faut appuyer Ctr + ou Ctr - ...  
 202. E4 : (elles ne font pas attention à ce que le professeur dit) ...  
 203. E3 : (... ?) c'est pas (... ?)  
 204. E4 : (... ?) ce quoi qui (... ?)  
 205. E3 : voilà (... ?) tangente ... et là, et là  
 206. E4 : les traces elles (... ?) au même temps ... tu peut tracer lieu... pour cette (forme) là (... ?)  
 207. E3 : c'est quoi ? ... j'ai pas compris ce que tu veux ... (... ?)  
 208. E4 : (... ?) complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$  à partir de (... ?) ...  
 209. E3 : le point ... non, j'ai pas compris ce que tu veux dire... est  $C_1$  ça la courbe qui passe par le point  
 210. E4 : c'est comme tout à l'heure ... et ... « quelles informations complémentaires sur l'allure ... »  
 211. E3 : on va essayer de décrire ... j'imagine ...  
 212. P : ici vous allez avoir des informations plus fines ...  
 213. E3 : oui, on voit déjà qu'elles ne sont pas toutes horizontales ...  
 214. P : ouais, ouais  
 215. E3 : donc c'est plus ... ..  
 216. E4 : euh ... en revanche, on peut tracer les ... le (... ?) de la courbe qui passe par le (... ?) les vecteurs ...  
 217. E3 : on voit que ce qu'on a fait c'est pas trop con en fait, si tu regardes... tu montes, tu montes, tu montes... et là c'est bien ça, regarde ... parce que là ... tu fais tourner là ... tu continues un peu à monter... mais quand tu descends, euh ... tu montes aussi mais (... ?) pas  
 218. E4 : et là ... elles font comment ?  
 219. E3 : là, c'était ... euh ... elle doit y avoir un point d'inflexion ... et là tu (... ?) ... donc... alors, à partir de (... ?) ... là, tu montes, tu montes ...  
 220. P : vous pouvez laisser la trace du vecteur, ouais, si vous voulez  
 221. E3 : c'est ça que (... ?) le vecteur  
 222. P : ah oui, avec la trace... ..  
 223. E4 : on va (... ?)... on va la tracer ...  
 224. E3 : on va voir si ça va faire (... ?)... (on va voir si elle monte) ... ..  
 225. E4 : on l'avait (tout à l'heure)  
 226. E3 : oui, mais il ne trace pas là ... ah, c'est pas ça ...  
 227. E4 : qu'est ce que tu en fait ?  
 228. E3 : je ne sais pas ce que je fait...  
 229. E4 : trace par là ...  
 230. E3 : elle ne trace pas  
 231. E4 : trace ...  
 232. J : il faut faire la trace avec le vecteur  
 233. E3 : ah, oui mais (... ?)  
 234. J : (leur explique comme faire la trace du vecteur) ... ..

235. P : je sais pas si vous avez compris, vous avez un point Q qui est l'origine du vecteur et ce point Q vous pouvez le mettre n'importe où dans le plan, et donc ça veut dire qu'avec ce point Q mobil ... en tout les points du plan vous avez un vecteur tangent à une courbe solution ... donc vous avez vu cette information sur le papier c'est pour ça qu'on vous demande si vous trouvez des informations complémentaires, par rapport à ce que vous avez vu sur le papier, parce qu'ici c'est plus fin ... vous pouvez mettre le point Q partout...
236. E3 : bon, en fin on va faire (... ?) avec le vecteur sur (... ?)
237. E4 : (tu le) déplaces
238. E3 : on va (... ?) ... parce que je (pars) du plan
239. E4 : tu veux encore ...
240. E3 : quand tu montes ... ça (... ?) ... donc on va faire une (... ?) parce que tu (... ?) ...
241. E4 : attend, on va faire (... ?) ... on est (... ?) bien sûr
242. E3 : bah, je sais pas ... elle se lève normalement (... ?) ...
243. E4 : (... ?) qu'on a (... ?)
244. E3 : non pas de tout...
245. E4 : tu es (... ?) spécial
246. E3 : (... ?) je ne voit que de spécial
247. E4 : on va dire... (... ?) ... comment on (... ?) Q, c'est vraiment extraordinaire
248. E3 : ah ouais
249. E4 : je vais essayer de tracer une
250. E3 : tu vas essayer de tracer ... euh ...
251. E4 : ... alors je prends le vecteur
252. E3 : non, non, d'abord il faut le mettre en un point ...
253. E4 : tu le traces alors ...
254. E3 : pointer, pointer ...
255. E4 : pointer ... ce vecteur (... ?) ... il est là, maintenant ... pointer
256. E3 : et tu vas faire tracer, ouais ...
257. E4 : (... ?) oup ...
258. E3 : essaie trace ...
259. E4 : vecteur, ensuite je pointe ... pointer
260. E3 : point Q ...
261. E4 : il bouge plus
262. E3 : mais si lui ... tu vas pointer le Q ...
263. E4 : si il a pointé Q ...
264. E3 : point Q, il (... ?) alors, ne marche pas ? ... et tu veux essayer finalement (... ?)
265. E4 : donc c'était (... ?)
266. E3 : c'est pas ... ça passe pas trop, trop (... ?) comme ça, cela tu as (... ?) ...
267. P : je crois que la trace, j'ai l'impression que si vous allez ailleurs du point Q ...
268. Ex : ça continue à tracer
269. P : oui, ah ... Ctrl F ... désactiver la trace, en allant dans Trace ... vous choisissez Trace et vous montrez le vecteur d'origine Q ...
270. E4 : donc il ne peut pas (s'en servir) de la figure ...
271. P : ouais, ouais, cliquez dessus probablement ... cliquez ... voilà, maintenant il n'est plus ...
272. E4 : (... ?) Q (... ?) moi ...
273. E3 : ça a tout effacé ...
274. E4 : alors, pointer ... (... ?) faire ... je ne sais pas ...
275. E3 : on fait la trace
276. E4 : ouais, mais attend (... ?) ...
277. E3 : (... ?) nous ça s'efface
278. E4 : (... ?) s'efface ... Ctrl F ... comme tu fais ça ? (... ?) ... (en lisant) « Déplacer le point Q et écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$  » ... on l'a fait
279. E3 : (... ?) il faut voir si (... ?) ...
280. E4 : (en lisant) « le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace. Comment l'utiliser pour avoir une idée d'une courbe solution passant par un point donné ? »
281. E3 : donc comme ça
282. E4 : voilà ...
283. E3 : ça marche ... (en lisant) « le vecteur peut laisser sa trace ... » ... il faut essayer de trouver une courbe qui passe par ça, c'est ça ? ... Je crois que je (... ?)
284. E4 : ctrl F ...
285. E3 : tu as (... ?) ... si tu traces ce vecteur ... moi j'aimerais bien (... ?) je sais pas (... ?) ça ...

286. E4 : alors ... (en lisant) « le vecteur peut laisser sa trace lorsqu'il se déplace. Comment l'utiliser pour avoir une idée d'une courbe solution passant par un point donné ? » ...
287. E3 : (... ?)
288. E4 : alors tu peux ... tu traces par un truc (... ?) c'est comme ça, pas comme ça ... je trace celle qui passe par là ...
289. E3 : on trace (... ?) ... alors moi je me demande où ça passe ... (... ?) c'est ça (... ?) (... ?) ... En fait pour le déplacer, il suffit de déplacer (... ?) une solution et puis voilà ... et tampus ...
290. E4 : bon, on va faire déplacer le vecteur ...
291. E3 : ouais, si tu veux déplacer le vecteur ... voilà et puis ... en fait, il faut essayer de trouver un truc ... il faut qu'on arrive à suivre le vecteur ... on trace beaucoup de vecteurs comme ça ...
292. P : dans la feuille on a oublié un signe du point L, il a comme coordonnées (-2,-2)...
293. E3 : j'ai une idée de pourquoi c'est comme ça ...
294. E4 : regarde, je crois que tu as raison
295. E3 : si tu trouves au milieu ... et puis encore au milieu (... ?) ...
296. E4 : (... ?) on met où ?
297. E3 : on a trois possibilités (... ?) à chaque fois (... ?)
298. E4 : non, regarde ... tu te places au milieu de ce (... ?) à chaque fois
299. P : donc pour remplir le cadre a) et le cadre b) maintenant vous allez pouvoir dire si vous avez obtenu des informations supplémentaires ou pas... euh, comment vous faites pour une trajectoire et puis après on vous demande des paquets, des paquets de courbes solutions c'est la même question ... on voudrais savoir si vous envoyé le même nombre ou un nombre différent (contenu) du fait que maintenant vous un vecteur tangent qui est déplaçable ...
300. E4 : (elles parlent au même que le professeur) (... ?) je pense que (... ?) ...
301. E3 : donc elle reste (... ?) ... ah mais il n'y a un autre truc
302. E4 : la dernière (... ?)
303. E3 : (en lisant) « classer les solutions par paquets, selon leur comportement... »
304. E4 : on va essayer de trouver quel (... ?)
305. E3 : ouais (... ?) mieux ... il doit avoir ... (... ?)
306. E4 : alors « y » supérieur à 1... « y » entre -1 et 1
307. E3 : tout ça c'est l'expérimentation
308. E4 : strictement inférieure dans le nouvel sens ...
309. E3 : c'est ça l'inflexion ... (... ?) est compliqué ... ah, je suis pas d'accord avec le (... ?)
310. E4 : non, je suis pas d'accord ... (... ?) ... le problème c'est euh ...
311. E3 : une forme exponentielle si tu veux (... ?) vous êtes sûrs (elle parle aux voisins) moi je vois 2 points d'inflexion ... un par là
312. E4 : et elles font ça ...
313. E3 : je ne sais pas, je voit pas un truc comme ça moi, je (... ?) mais ... alors elles sont très, très loin... en plus ça
314. E4 : (... ?) là il y a de plus comme ça ...
315. E3 : ah ouais, il n'a pas 2 points d'inflexion ... j'ai perdu Q, attends ... alors il doit avoir raison ouais (à propos commentaire de voisin) ...
316. E4 : c'est quand (... ?) ... il faut (... ?) dans quel sens (... ?) comme ça qu'elles sont (... ?) un truc (... ?)
317. E3 : ah elle est (... ?) changer ... elle fait comme ça ...
318. P : combien vous avez de paquets ?
319. E3 : 3
320. E4 : en fin ... on aurait plus ... (... ?) « y=1 » et « y=-1 »
321. P : un paquet ...
322. E4 : on a 4 ...
323. P : c'est quoi vos paquets ?
324. E4 : on a des trucs de forme exponentielle comme ça au-dessus
325. P : oui
326. E4 : (... ?) « y=1 » ... ensuite « y=1 » et « y=-1 » (... ?) droites ... (... ?) au milieu on a des ... avec 2 points d'inflexions ... et puis au dessous on a des trucs avec un point d'inflexion en fait ...
327. P : d'accord, ok, bon ... alors ... ici, euh ... comment vous ... parce que j'aimerais aussi que vous disiez c'est comme vous pourriez vérifier qu'il y a ... ah ben, c'est pour la dérivée, c'est ça ... pour chacun des paquets ... il faudra indiquer ce comme vous pouvez vérifier, qu'est-ce que il faudra faire pour vérifier qu'il y a bien un point d'inflexion par exemple...
328. E3 : selon nos dérivée ... d'accord
329. P : d'accord ça serait (... ?) que par exemple ici, j'ai pas les courbes là... elles sont (... ?) qu'est ce que vous leur dit sur le comportement à l'infini ... elles disent rien ...

330. E3 : (... ?) en plus l'infini elles sont (... ?) elles font ça ... ça peut servir ?

(changement de cassette)

331. E3 : (... ?) trace de ce vecteur... en ce point (... ?) ... il n'y a pas de trace

332. E4 : recommencer ... trace de ... ce vecteur ... (... ?)

333. E3 : (... ?)

334. E4 : parce que là elles sont pas comme ça (... ?) si elles font un truc comme ça, ça serait pas (... ?)

335. E3 : elles montent (... ?)

336. E4 : ouais mais là à partir de (... ?)

337. E3 : il n'y a pas d'inflexion ... oui mais non, il n'y a pas d'inflexion ... toi tu as laissé non, il devait définir l'inflexion ...

338. E4 : elles (... ?) finalement

339. E3 : non, pour moi elles le font euh ... elles font ça, ouais, une droite

340. E4 : là il faut (... ?) regarde, sinon (... ?)

341. E3 : ouais mais ben parce que...

342. E4 : il doit y avoir une partie comme ça vers le haut ... et puis après une partie comme ça ... attend ... (... ?) moi je vois (... ?) là-dessous très (... ?)

343. E3 : ouais

344. E4 : tu vois pas ?

345. E3 : non, je vois ça

346. E4 : (... ?) je voit comme ça ...

347. E3 : attend ... on va en tracer plus... pourquoi est-ce que (... ?) ... on va déplacer euh ...

348. E4 : trace le vecteur ... et puis on va déplacer ...

349. E3 : c'est quoi ce qu'on va (... ?)... (... ?) en plus ça va plus tracer non plus ...

350. E4 : tracer ...

351. E3 : je veux le prendre... juste ...

352. E4 : (... ?) là

353. E3 : (... ?) je voit pas le (... ?) où elle se déplace ... tu vois ? tu vois le truc qui change ...

354. E4 : (... ?) monté ...

355. E3 : ben ouais, mais je vois pas (... ?)

356. E4 : (... ?)

357. E3 : ben, ouais, mais parce qu'en fait ... ça dépend de la courbe que je prends... regarde celle-là

358. E4 : (... ?) ...

359. E3 : regarde celle-là ... oui, elle est faite celle-la... mais elle va rester faite ...

360. E4 : (... ?) on met là ... celle-là je suis désolée, elle fait comme ça quoi ... oui, elle fait comme ça

361. E3 : oui,

362. E4 : elle fait comme ça

363. E3 : oui mais droite ... ouais mais là tu fais, euh... un seul truc ... où elle faisait ... un ... (... ?) un seul (... ?) d'inflexion (... ?)

364. E4 : (... ?) je (... ?) avec ça ...

365. E3 : oui mais

366. E4 : après elle fait ça ... et après elle va rester comme ça ... elle monte comme ça ... et (... ?)

367. E3 : ouais, mais c'est la même ...

368. E4 : nous ... après moi je le vois comme ça ... il y en a qui font ça, en tout cas comme ça... le problème... peut être il font même comme ça, qui montent... peut être qu'elles sont comme ça...

369. E3 : ouh là là ... et c'est quoi les points d'inflexion ? ...

370. E4 : (tout restent) comme ça les fiches ?...

371. E3 : euh ... ouais, non, c'était euh ...

372. E4 : (... ?) que les deux feuilles

373. E3 : en fait (... ?) avait fait (... ?) ... ah ouais elles si font comme ça ... c'est juste (... ?)

374. E4 : c'est comme ça... fait ça (... ?) elle (... ?) (tu as l'allure) ... tu as la (... ?)... la (tangente) elles font ça... (... ?) quand même (... ?) 0 ... (... ?) était comme ça

375. E3 : moi je vois qu'elles font ça ...

376. E4 : il n'y a pas ... je sais pas ... elle va pas non ...

377. E3 : moi je vois ça... elle monte, elle fait ça

378. E4 : celle-là regard ... elle fait là

379. E3 : oui, mais ça c'est si tu ne suit pas la même flèche ... peut être que c'est juste que la flèche qu'il faut suivre elle est là comme ça ... ou alors elle est un peu plus là... (... ?) elle est (... ?) là et puis c'est celle-là qui monte ... ou alors que c'est celle-là qui est droite... parce que les trucs, elles sont combien ? ... un demi ? ...



380. E4 : ouais (... ?)
381. E3 : (... ?) comme (... ?) ... En fin de toutes façon là ... « y' » est positif, et « y' » est négatif... (... ?) « y' » tend vers zéro ...
382. E4 : si tu (... ?) ... ça (... ?) de plus elles font pareil là ... de ce côté elles sont comme ça et de l'autre côté elles sont pareil ... elles sont comme ça ... ça dépend du paquet dans ce cas là ...
383. E3 : si parce que là tu as une ... tu as une ... en fait une asymptote, alors que là tu as pas un truc comme (... ?) fait à ça ...
384. E4 : moi, je trouve qu'elle (... ?) à ça (... ?) ... ..
385. E3 : ah, si, tu as raison c'est pareil ... c'est pareil donc alors elles sont symétriques ... et d'ailleurs ça se voit parce que quand tu fais euh ... « y » ... et « - y » ...
386. E4 : (... ?) symétriques (... ?) ... si tu fais « -y » ...
387. E3 : si tu prends moins ... bon, moi je vais (... ?) ... tu va voir (... ?)
388. E4 : (... ?) je vais écrire le truc ... (... ?) il y a ça et ça
389. E3 : tu vas voir les pentes qui sont ... et voir son, euh ... est-ce que c'est bon ça ? ...
390. E4 : (... ?) j'ai pas eu le temps
391. P : bon, il n'y a plus que 5 minutes là ... (... ?) donner des raisons mathématiques ... c'est ça que nous intéressent (... ?)
392. E4 : euh, et là tu es d'accord
393. E3 : (... ?) en fait, on a « y » elle est (... ?) ... tu as « y' » que tend vers 0 ... tu as « y' » que tend vers 0... or « y » (... ?)
394. E4 : non (... ?)
395. E3 : et là c'est (... ?) qui tend à chaque fois
396. E4 : ouais
397. E3 : donc « y' » tend vers 0 quand « x » tend vers plus l'infini
398. E4 : « y » tend vers... (... ?)... (il fait) là ... pourquoi c'est (... ?) « x »
399. E3 : ben, tend vers plus ... ouais ... parce qu'il faut le regarder et puis euh ...
400. E4 : « y' » tend vers 0 ... et (... ?) là tend vers -1 ...
401. E3 : donc finalement tu as un « x » ... qui tend vers plus l'infini... ah, mais c'est « y » qu'on cherche ...
402. E4 : (... ?)
403. E3 : attend, donc ça ... on ne connaît pas ... elle tend vers plus l'infini... .. elle tend vers 0, donc ça se fait 0... ..
404. E4 : en fait ça (... ?)
405. E3 : en fait c'est même, c'est ça (... ?)
406. E4 : (... ?) avec ... si « x=0 » ce c'est (... ?) « y=0 » pour le moment (... ?) ton axe de symétrie (... ?) ... donc ça (... ?) en fait c'est celle qui a la même (... ?) regarde (... ?)
407. E3 : c'est pas ça (... ?)
408. E4 : (... ?) elle est impaire (... ?)
409. E3 : on a (... ?) ... après ... celui là
410. E4 : ouais, c'est comme (... ?)
411. E3 : (... ?) on va se (... ?) ... on demande à côté ?... je pense que (... ?) ... c'est comme celui là (... ?)
412. E4 : l'axe de symétrie ... l'axe euh ... « Oy » ... dans le cas c'est impaire ... c'est le ... euh ... c'est (symétrique)
413. E3 : ah ouais, ouais ... (... ?) ... « f(x) » (... ?)
414. De: (...?) entre (...?)
415. Do: (...?) par contre impaire (... ?) comme (... ?) en fait ? ... centre de symétrie?
416. E4 : oui, mais elle n'est pas (... ?) normalement ... finalement ... on a ce du milieu ...
417. E3 : ah ouais (... ?)
418. E4 : (... ?) celui du milieu ... .. tu as y' qui tend vers zéro
419. P : donc là il faut expliquer le comportement ... d'accord et donner des raisons mathématiques par rapport au comportement que ...
420. E3 : mais quand on donne ... des raisons mathématiques on s'appuie au départ sur le dessin... parce qu'en fait on pourrait dire qu'on a ... on a que ... là certains « y » ... euh
421. P : oui
422. E3 : « y' » tend vers 0 ... en fait
423. P : oui... oui ...
424. E3 : on peut pas utiliser ce genre de chose ?
425. P : ah, si ... vous avez le droit de l'utiliser ... tout à fait, au contraire ... c'est ça... il faut utiliser tout ce que vous avez ... qu'est ce que vous obtenez comme information à partir de l'équation ...

426. E3 : et euh ... donc ... parce que ... ouais... il y a un problème ... parce que j'ai transformé l'équation en argumentant ça et du coup j'obtiens en plus l'infini comme ça ... j'obtiens (... ?) s'annule (... ?) vers plus l'infini
427. P : ah oui, c'est indéterminé ... ça dépend justement ...
428. E3 : parce que si « x » et « y » tend vers ...
429. P : ben, voilà, ça dépend de « y » ... (... ?) ... pour ici là ... ben, parce qu'ici vous (... ?) -1, je signale ...
430. E3 : ben, oui, on sait que ça tend vers -1 ... en fait ... mais euh ... ce que je ne comprends pas c'est que si on (... ?) ça va tendre vers 0... et après on sait pas trop ...
431. P : c'est (... ?) sur « y' » ce que vous savez sur « y » ... quand vous avez une fonction solution « u(x) » ... donc vous savez que lorsque « x » tend vers plus l'infini « u(x) » est croissante ...
432. E4 : oui
433. P : et puis vous savez qu'elle est ... vous avez des autres informations ? ...
434. E3 : ouais là, elle tend vers -1 ...
435. P : pourquoi ?
436. E3 : en fait ... ce qu'on a vu ...
437. E4 : c'est pareil ... euh
438. E3 : j'(embête) moi (... ?) ouais ... on l'as vu (... ?)
439. P : ouais, ouais ... mais justement... là euh ... non, mais ce que j'aimerais c'est ... est-ce que vous avez une raison mathématique pour affirmer que ça tend vers -1
440. E3 : ben, non ... parce que j'ai (... ?)
441. P : ouais, d'accord ... est-ce que vous avez quand même des raisons mathématiques qui permettent de dire quelque chose sur le comportement ... ? ...
442. E3 : ah ... je crois ...
443. P : (... ?) une petite idée ... on attend ...
444. E3 : il faut ... se servir de ... l'équation
445. P : ouais, voilà ... pas énormément mais euh ... un peu ... plutôt du signe de « y' »... de ...
446. E3 : d'accord et ... euh ... on va voir ... est-ce qu'on se sert de la parité parce que là il y a ...
447. P : ah si vous voulez absolument ... tout à fait ... ouais, ouais ...
448. E3 : donc on va essayer de montrer un truc
449. E4 : on va dire pas grande chose ...
450. E3 : alors on fait la parité ...
451. E4 : on va faire « f(y) » ...
452. E3 : on va faire ... on va faire ... l'équation c'est «  $y' = (y^2 - 1)/(x^2 + 1)$  » ... donc il faudra passer par « x = -x » en fait ... donc ...
453. E4 : «  $y'(-x) =$  »... ..
454. E3 : «  $y'(-x) = (y^2(-x) - 1)/((-x)^2 + 1)$  » ... donc... euh ... ..
455. E4 : (... ?)
456. E3 : (... ?)
457. E4 : ah là là, quelle (... ?) ...
458. E3 : donc «  $y'(-x)$  » on peut dire quelque chose quoi ...
459. E4 : peut être un truc ... quand la fonction elle est paire, tu as la dérivée qui est impaire tout le temps ... tu as pas ça ... on fait comme ça, non
460. E3 : déjà «  $y'(-x)$  » est une fonction composé ... pas forcément moins qui va sortir ... moins (... ?) ...
461. E4 : ce qui me semble ... on va mettre [elle écrit] « la fonction est impaire » ... .. « donc O est centre de symétrie »...
462. E3 : au milieu il faudra démontrer que ... là c'est (... ?)
463. E4 : moi je vais dériver « y »... ..
464. E3 : attend ... on va (... ?)
465. E4 : alors « y » fonction de « x » va être égale à (... ?)
466. E3 : et ça va te servir à quoi ?
467. E4 : «  $x^2 - 1$  » ... je ne sais pas ... j'envie ...
468. E3 : alors, allez-y ...
469. E4 : alors le «  $x^2$  » on peut le sortir ... ah, non... c'est plus fonction de « x » ... « x » on peut pas le sortir ... regarde ... (... ?)
470. E3 : (... ?) prend (... ?) « x »... (... ?) ça dépend en fait (... ?) quand « x = » (... ?)
471. E4 : (... ?) on prend (... ?) moins (... ?) « v' »
472. E3 : (... ?) ce ça va pas marcher...
473. E4 : « v' » ... « 2x » (... ?) « 2x » (... ?) ... .. (... ?) cette question (... ?) « y' »
474. E3 : (... ?) ah mais tu (... ?)
475. E4 : ah mais non, parce que normalement on avait 2

476. E3 : non, il y en a 3 ... mais le troisième en fait ... ouais mais c'est le paquet 2 bis
477. E4 : et on avait des truc différents (... ?) on pouvait (... ?) ... .. (... ?)
478. E3 : ah si, si d'accord, non mais là (... ?) « y » (... ?) moi je remplace dans ce cas (... ?) là (... ?) c'est surtout x/plus l'infini ... ..
479. E4 : on sait pas trop ...
480. P : (... ?) on vous demande des raisons mathématiques ...
481. E4 : pour « y » (... ?) que -1 ...
482. E3 : (... ?) je ne (... ?)
483. E4 : d'accord
484. E3 : parce que je (... ?)
485. E4 : (... ?) en prend -1
486. E3 : mmh ... ..
487. E4 : j'ai un (... ?) « y » (... ?)
488. E3 : il n'y a pas une option pour recentrer directement ?
489. P : qu'est ce que vous voulez ?
490. E3 : recentrer directement euh ... (... ?)
491. P : centrer le repère là ?... et le mettre ici ?
492. E3 : oui, recentrer le repère (... ?) mettre un nouveau centre comme on l'a fait (... ?)
493. P : il est où votre (... ?)... vous pouvez le déplacer ça c'est sûr ...
494. E3 : oui, on l'a déplace avec ça (... ?)
495. P : il faudra l'origine pour le déplacer votre repère (... ?) ... c'est ça que vous voulez faire ?
496. E3 : oui mais (... ?)
497. P : il faut prendre l'origine et le mettre ailleurs ...
498. E3 : oui (... ?)
499. P : on peut ... Julio c'est possible de mettre l'origine ailleurs ?
500. E3 : (... ?) c'était tout ce que je veux (... ?)
501. P : ah, c'est tout ce que vous vouliez, j'ai cru vous vouliez changer votre repère...
502. E4 : ah (... ?)
503. P : et (... ?) vous vouliez mettre ça là ... ici
504. E3 : c'était juste qu'on voulait cette partie (... ?) on peut pas directement ... euh
505. P : parce que là vous pouvez prendre l'origine (... ?) d'accord
506. E3 : je (... ?) évidemment (... ?) il pose un problème pour (... ?) si tu remplaces avec « y » (... ?) entre -1 et 1
507. P : ouais
508. E3 : parce que juste c'est ça... comme « y' » tend vers 0 (... ?) ça ... ça ... « x<sup>2</sup>-1 » ... ça
509. P : c'est pas « x<sup>2</sup>-1 » ... c'est « x<sup>2</sup>+1 »... ..
510. E3 : ah oui, ça va pas en fait, je ne sais pas... ..
511. E4 : (... ?) il ferait (... ?) 1 - 1 ... pour « y » supérieure à 1 ... « y' » est positif donc « y » est croissante...
512. E3 : oui mais c'est pas ça qu'on te demande ... on te demande (... ?) ... .. comment tu justifies ?
513. E4 : ah ben ça ... c'est pas (... ?) ... J'ai justifié qu'elle est croissante déjà ...
514. E3 : c'est pas ça qu'on te demande ... on essaie de montrer que si elle tend vers -1... elle va faire -1... vers 1 elle a l'air de faire 1 (... ?) et elle est déjà (... ?) -1 ... moi je (... ?)
515. E4 : tu t'as en pas l'air (... ?) ...
516. E3 : (... ?) ça se tend vers -1 en plus infini
517. E4 : ben, elles sont croissantes dans tous les cas...
518. E3 : non, je crois pas ... ..
519. E4 : (... ?) est une asymptote ...
520. E3 : mmh ... c'est une asymptote (... ?) ... c'est -1, non c'est 1 ... ..
521. E4 : si (... ?) ... bon, peut être (... ?)
522. E3 : non, ça c'est faux ... tu peux le voir... parce que là tu as une limite ... ah ça fait ... (... ?) je sais pas
523. E4 : et là ? ... regarde (... ?) en le cas (... ?)
524. E3 : tu peux bien savoir comme elle définit le vecteur qui vient comme ça ? est-ce qu'on appelle l'équation différentielle ou ... ? ...
525. Ex : (... ?) ça tend vers plus l'infini ...
526. E3 : et là ça tend vers plus l'infini... regarde ... et ça tend vers -1 ...
527. E4 : (... ?) t'as (... ?) je sais pas ...
528. E3 : (... ?) très lentement (... ?) ...
529. E4 : ça peut (... ?)
530. E3 : ça peut pas aller vers -1 (... ?)
531. E4 : (... ?) c'est pas (... ?)

532. E3 : tu as raison ... ..
533. E4 : parce que là ... ça tend vers l'infini ...
534. E3 : « y » supérieure strictement 1 .. -1 ... si c'est plus grand que 1 c'est positif ... (... ?) si c'est positif c'est ça ?... effectivement ... après là ça va être (... ?) entre -1 et 1 donc ça, ça va être négatif ... donc ça aussi donc les pentes elles sont négatives ...
535. E4 : moi j'ai écrit... « y' » il y a ça ... quand « y » inférieure à -1 et « y » supérieure à 1 ... ben, « y' » est positif ... (... ?) justement
536. E3 : (... ?)
537. E4 : mmh ... mmh ... .. quand « y » entre -1 et 1 ...
538. E3 : ben, ça c'est négatif ...
539. E4 : négatif ...
540. E3 : moi je m'en doute sur les points à l'infini ... .. c'est une question de (... ?) en fait, là l'on dirait (... ?) si à l'extérieure de la (courbe) ... elle fait comme ça, donc c'est ... parce qu'elle est ... dans Cabri
541. P : oui... sur Cabri ...
542. E3 : justement (... ?) (vu) le champ de vecteurs parce que comme tout à l'heure quand je (... ?) mon vecteur Q... en fin, le vecteur
543. P : ben, il est défini euh ... (... ?) il y a (... ?) rentrait les expressions et graphé ...
544. E3 : d'accord ...
545. P : en on peut là ... là en revanche on le construit mais avec ... numériquement c'est-à-dire que (... ?)
546. E3 : et le vecteur ...
547. P : (... ?) on sait que...
548. E3 : est remmené ?
549. P : on sait à chaque point ... la pente de la ... on sait qui dépend de l'équation différentielle... la pente est donné en fonction des coordonnées du point ...
550. E3 : d'accord, donc ça c'est une équation différentielle, donc moi le ...
551. E4 : la solution
552. P : ah non, on n'a pas la solution ... on a que l'équation
553. E4 : ah oui l'équation
554. P : (... ?) on a obtenu l'équation ... on a utilisé que l'équation
555. E3 : d'accord et donc ... le vecteur il est défini par le logiciel ... par son équation ?
556. P : non, (... ?) justement ... c'est très facilement, on n'a pas le temps mais je peux vous le montrer
557. E3 : ouais, parce que moi je défini l'autre vecteur sur le dessin (... ?) ça marche pas
558. E4 : (... ?)
559. P : ah ben, non (... ?) dessin ... vous voyez en fait, il y a une ... imaginez par exemple que dans ce point là qu'on (... ?) il y a un point ici ... et puis on affiche ses coordonnées ... coordonnées ... j'affiche, voilà ... et maintenant je prends calculatrice ici ... je vais faire ... [elle explique comment construire le vecteur tangent] ... c'est comme ça qu'on a obtenu le vecteur tangent ... donc ce qu'on fait c'est de est rien d'autre que d'utiliser l'équation différentielle ...
560. E3 : d'accord ...
561. P : bon, on va vous ramasser les feuilles ... ..
562. E4 : (... ?) elle est croissantes déjà ... on sait que (... ?) comme ça
563. E3 : (... ?) les paquets (... ?)
564. E4 : ouais, mais de toutes façons (... ?) raisons mathématiques ...
565. E3 : alors je (... ?) ... moi je sais (... ?) pourquoi tu (... ?) ?
566. P : vous allez (... ?) ou pas ?
567. E4 : ben, (... ?) mathématiquement probablement ...
568. E3 : ah si, que la croissance
569. P : ouais, la croissance ça va ... c'est déjà pas mal ...
570. E3 : que la limite euh ... malheureusement elle marche pas parce que j'ai de « x » en (... ?) quoi
571. P : ouais ...
572. E4 : on avait mis ... d'après qu'on avait vu ...
573. P : ça c'est ce que vous avez vu ...
574. E3 : ouais ...
575. P : vous n'avez pas aucune raison mathématique pour l'affirmer ...
576. E3 : ben, si ... en fonction de la fonction quand même ça si (... ?)
577. E4 : ouais, mais c'est un (... ?)
578. P : et quelle vous avez ... (... ?) voilà c'est une raison mathématique
579. E3 : ah mais je sais pas si je l'avait mis... euh... là ... si  $y^2$  ... ah mais non... .. [le professeur part] ... de la croissance tu as fais quoi ? ...

580. E4 : de la croissance j'ai fait ... euh (... ?) parce que là (... ?) comme ça c'est bon ... (... ?) la limite on va (... ?) ... tu as pas (... ?) ... ..
581. E3 : quand « x » tend vers plus l'infini ... (... ?)
582. E4 : tu as « y » (... ?) supérieure hein ... on (... ?) comme ça ... strictement positif ...
583. E3 : donc je (... ?) ça va (... ?)
584. E4 : c'est strictement positif ...
585. E3 : (... ?)
586. E4 : (... ?) ça veut dire ...
587. E3 : c'est une tangente horizontale ... ..
588. E4 : (... ?) la parité ...
589. E3 : non, mais la parité je vois pas ... je commence à (... ?) ...

### **Fin l'activité**

# **Binôme E3/E4**

**Mise en équation différentielle  
d'une famille d'exponentielles**

**L'expérimentation de l'année 2003**

## Binôme E3/E4

1. E4 : ... forme une famille de forme exponentielle
2. E3 : ouais, c'est vrai... d'accord
3. E4 : sauf pour regarder «  $y=0$  »... cette famille correspond à des exponentielles
4. E3 : ouais, donc, il y en a même deux... il y a 2 (...?)
5. E4 : (...?) en deux mots en fait
6. E3 : ouais
7. E4 : ouais ... ..
8. E3 : [elle écrit] « l'ensemble des solutions forme deux familles ... de ... » ... Qu'elle vienne de voir?
9. E4 : quoi?
10. E3 : qu'elle vienne de voir?
11. E4 : non, arrêt (...?)
12. E3 : d'accord...
13. E4 : (...?)
14. E3 : eh?
15. E4 : (...?) c'est courbes exponentielles,
16. E3 : bah, des exponentielles j'aurais mis, comme autre alternative...
17. E4 : tu laisses-y
18. E3 : moi, je veux l'équation de la droite pour savoir où elle se situe, ...
19. E4 : quelle droite tu veux?
20. E3 : l'équation de...
21. E4 : tu veux quoi comme droite?
22. E3 : «  $y' = 2x$  »... non, non, et pourquoi équation des droites, je sais pas comment (... ?) la droite...  
Quand «  $y=0$  » ... donc ça c'est une courbe...
23. E4 : non, ça se (l'équation d'une droite)... (... ?) en bas
24. E3 : c'est «  $y=0$  »
25. E4 : et pourquoi elle fait ça? Pourquoi elle se (...?)... s'il déplace?
26. E3 : elle (...?) se déplace (...?) la direction... moi, je dirais «  $y=x$  » mais, quand on intègre en (...?)  
« $y$ »... finalement intègre que «  $y$  »... donc...
27. E4 : ouais...
28. E3 : parce qu'en fait, il faut rentrer, il y a quand même un coefficient puisque ces courbes c'est pas que  
des exponentielles,  $y'=y$  ça serait une exponentielle...
29. E4 : c'est grand C "exp"... c'est grand C "exp"... (... ?)
30. P : vous cherchez une équation différentielle ... ..
31. E4 : déjà on peut dire ça
32. P : [elle parle au groupe] ne vous focalisez pas sur la fonction distance, hein, ça vous servira plus tard,  
c'est pas pour ... euh ...
33. E4 : là, tu veux virer aussi...
34. E3 : ah... moi je me souviens plus trop, en fait, quand on a «  $y'=ay+b$  »
35. P : c'est ça l'équation différentielle?
36. E3 : moi j'aurais dit ça, mais...
37. P : et pourquoi?
38. E3 : parce qu'on a une famille de courbes exponentielles... donc si c'était une exponentielle on aurait  
bien «  $y'=y$  »... en fait, il y a quand même un facteur qui...
39. P : donc, vous pensez que c'est une exponentielle, vue la forme, c'est ça?
40. E3 : oui
41. P : ben, regardez, vérifiez. On peut pas trouver un moyen pour vérifier si «  $y' = y$  » ou «  $y' = ky$  » ?
42. E3 : «  $y'/y = k$  » ça fait un ... logarithme après...
43. P : non, mais là sur le fichier vous pouvez pas trouver un moyen pour vérifier... la conjecture que vous  
faites,
44. E3 : ben, on met ... (... ?) ici égale 1... ah non, ça va (...?)
45. P : si, si mais... je vous laisse réfléchir...
46. E3 : c'est pas ça
47. E4 : on met ça au moins
48. E3 : on sait pas... on disait que ça, ça arrive en 1...
49. E4 : zéro...
50. E3 : non, pas zé... ah, oui, si... mais comment on fait pour savoir ... que c'est 1... on n'a pas le théorème  
de variation non?
51. E4 : oui c'est vrai, c'est (... ?) qu'ils veulent

52. E3 : ouais ... eh, ben ...on pourrait tracer l'exponentielle, non? On peut pas tracer l'exponentielle?
53. E4 : comment tu sais qu'il faut tracer les courbes? comme ça?
54. Do : je pense, oui... « équation »... non mais... on va aller dans « équation »... et on se débrouille...  
« coordonnées ou équation »... là tu fais un (cadre), n'importe où... oufff, non, c'est pas ça
55. E4 : je peux pas
56. E3 : « distance ou longueur »
57. E4 : outil « expression »...
58. E3 : non plus
59. E4 : ahh, je l'ai ...
60. E3 : je crois qu'il faut pas écrire « y= »... je crois qu'il faut « e<sup>x</sup> »
61. E4 : comment s'écrit exponentiel avec ça?
62. E3 : avec ça?
63. E4 : non, tu as mis 2...
64. E3 : non, non, mais je sais... t'arrives pas dans ce cas...
65. E4 : et après?
66. E3 : c'est pareil sur tout
67. E4 : oh!
68. E3 : c'est magnifique...
69. E4 : « Appliquer une expression »... appliquer cette expression...
70. E3 : il faut mettre les axes
71. E4 : cet axe...oui, et puis ?
72. E3 : et puis l'autre, et puis l'autre axe
73. E4 : et cet axe ...
74. E3 : c'est la fête !
75. E4 : et elle est contente...et puis ?
76. E3 : et puis je regrette ouais, un chou fleur
77. E4 : eh ... celui-là... ça te vas pas? Cette droite?
78. E3 : non, non il fait la toucher parce qu'on va faire des bêtises, donc non, c'est pas ça...
79. E4 : qu'est-ce qu'il y a?... qu'est-ce qu'il y a mon petit?... « appliquer une expression »... Cette expression, oui, oui ce t'exp ... Celui-là aussi...
80. P : [en parlant au groupe] quand vous cherchez, eh, vous avez la possibilité d'avoir l'expression de la courbe rouge. Mais ne vous fiez pas à ce qui est affiché, parce qu'en faite, l'équation qui vous est donnée c'est une équation polynomiale. Si la courbe n'a pas une équation polynomiale, c'est donc simplement une approximation, hein! ... Et c'est ..., on est dans ce cas là, on est pas dans un cas où, euh, la courbe elle a une équation polynomiale donc ça vous sert à rien, on n'avez dû l'enlever, euh...
81. E4 : (...?) si je tape une (...?)
82. E3 : ou alors, il l'a tracé ...
83. E4 : (... ?) on a abouti...
84. E3 : ah, non, non (... ?)...
85. P : qu'est-ce qu'il y a ?
86. E3 : euh, en fait, je crois qu'on arrive pas à tracer l'exponentielle... on devait la tracer, mais... alors, on a fait « appliquer une expression » ...
87. P : non, c'est pas, eh... c'est pas ça, il faut tracer... il faut écrire « exp(x) ». Vous allez dans ... eh non, là dedans... « Expression » il faut d'abord taper l'expression, expression. Là, là, là. Là, vous cliquez dans un coin de l'écran, voilà. Vous tapez « exp », parenthèse... ils sont où les parenthèses?... « x », fermez... Et maintenant vous choisissez, ça va, ça va, vous choisissez « appliquer une expression »... Voilà... Voilà... Elle est tracée.
88. E3 : eh, bah... c'est pas trop mal...
89. E4 : (...?) voir (...?) je peux pas (... ?) « x » (... ?) c'est toi (...?) ... c'est que (...?).. moi, je n'arrive pas (... ?)
90. E3 : (... ?) ou avec la courbe (...?) ... ouais, on est arrivée toute à l'heure
91. E4 : ouais, mais ça sert à rien, en fait
92. E3 : ça sert à rien, ouais...
93. E4 : (...?)
94. E3 : (... ?) ça marche, ouais, c'est bon... ok... ...
95. E4 : c'est quoi qui marche?... elle est où l'exponentielle?... elle est où ? C'est où l'exponentielle ?
96. E3 : ben, elle est tracée... elle est confondue alors...
97. E4 : on peut pas les séparer ?
98. E3 : ouais, change le couleur ...
99. E4 : c'est où les couleurs déjà ?



100. E3 : ouais, mais maintenant on sais plus qu'y a une exponentielle ... Ah, oui, les couleurs... non, c'est là ...
101. E4 : couleur, couleur, couleur, tu es (... ?)
102. E3 : alors (... ?)
103. E4 : comment ça
104. E3 : c'est bien,
105. E4 : ouais ! ... ouais ! ... ..
106. E3 : c'est quand même pas très (...?) je veux (... ?)
107. E4 : hum
108. E3 : ensuite on va faire euh ... .. « Appliquer »... Je vais essayer un truc...non, c'est pas ça... .. l'axe...
109. E4 : elle est où ?
110. E3 : ben ... non, non, mais là cela bouge
111. E4 : ça c'est pas elle ?
112. E3 : mais non. Il te faudrait tracer-y exponentiel de  $2x$ ...
113. E4 : mais, elle est pas tracée ?
114. E3 : mais non... il te faut appliquer...
115. E4 : tu as fais mieux, on doit appliquer cette expression, cette exp...
116. E3 : non, mais non il faut cliquer là aussi, non ?...
117. E4 : ah mais j'y suis pour rien alors
118. E3 : non, non, mais je sais bien, mais attend... en plus on commence à avoir des trucs par tout, euh... ..
119. P : alors vous en êtes où ?
120. E4 : on n'arrive pas à tracer (... ?) de  $2x$ ... donc on a cette expression...
121. P : et, ben, parce qu'il faut  $2^*x$ , parce que c'est un produit
122. E4 : hum
123. P : elle comprend pas...
124. E4 : comme ça ?
125. P : ouais, vas-y, ok... ..
126. E3 : est-ce que ça avec ça ? (...?)
127. E4 : elle est où ?
128. E3 : c'est la droite en rouge qui est là
129. E4 : et c'est-y là
130. E3 : et ça a pas marché... oh ...ouff ... (...?)
131. E4 : ouff
132. E3 : (... ?) je (... ?) que
133. E4 : ouais, ben oui
134. E3 : alors... .. ils font chier ces trucs, ça marche (... ?) une connaissance (... ?)
135. E4 : attend... oh! j'ai dit pointer, j'ai pas dit autre chose, moi... ..
136. E3 : attend... qu'est-ce que j'ai foutu ?... bon, enfin, de toutes façons ça marche pas (... ?) ça... ..
137. E4 : ouais, (... ?) c'est alors ... la première efface... exponentielle  $2x$ , c'est laquelle ?, c'est ça ?
138. E3 : ouais, non, non, ça marche pas alors... euff
139. E4 : c'est pas ça l'exponentielle «  $2x$  » ?
140. E3 : oui, si mais ça marche pas du coup, il l'efface
141. E4 : mais du coup c'est pas exponentielle...
142. E3 : ah non, c'est pas exponentiel de «  $kx$  » ... Donc, c'est pas ça ... .. il faut trouver une autre chose alors ... il faut tracer une tangente alors peut-être
143. E4 : comment on trace les tangentes ... ..
144. E3 : si, si ça doit être là-dedans, non? ... Tangente ... (...?) être ...
145. E4 : je vais taper la pente... Vous savez faire les tangentes? [en demandant à un autre binôme] ...
146. Ex : ouais, il faut que tu prennes la macro, dans le fichier « ouvrir »... Et là, t'as... en bas, tout en bas, dans le petit (...?)...
147. E4 : dans le petit ?
148. Ex : ouais, tout en bas, dans le (...?) roulant... Tu prends mac, voila, cliques dessus.. Là t'as... tu prends la deuxième (...?)... et t'auras la tangente. Et là, elle est dans le... point d'interrogation, non, c'est pas celui-la?... C'est là dedans...
149. E4 : (...?)
150. Ex : non, ben, alors c'est celui d'avant ou celui d'après. Ouais. (...?) la tangente de quelque chose ... Et tu prends un point sur la courbe, et tu donnes un axe.
151. E3 : un axe?
152. Ex : ouais, donne l'axe des abscisses

153. E3 : ok, merci
154. E3 : donc tu pourrais effacer
155. E4 : tu veux effacer quoi ?
156. E3 : ben, l'exponentielle, non, on vas le laisser pour l'instant... je ne sais pas
157. E4 : et oh! (...?) c'est lequel le menu ? Je veux prendre cela ... et qu'est-ce qu'il fait là
158. E3 : tu l'as bloqué ? [il y a un problème avec l'ordinateur]
159. P : il faudra redémarrer, ah... Vous avez tracé trop de courbes. Il y a eu une saturation et les machines elles sont très vieilles, eh bon... ..
160. E4 : alors on va là-dessus ... on passe à la deuxième activité.
161. E3 : je crois bien ouais, oui c'est ça. Tu veux qu'on commence comme tout à l'heure ?
162. E4 : parce qu'on a trop
163. P : ce qu'il faut, c'est pas de tracer trop de courbes à la fois, ah!
164. E4 : oui, donc (...?)
165. E3 : on sait pas comment on efface? On efface comment déjà ?
166. E4 : si (... ?)
167. P : montrer (... ?) avec le pointeur. Cliquez dessus, ça, ça clignote, et vous appuyez sur cette flèche là...
168. E3 : ah, bon, ça va, d'accord. Merci
169. E4 : donc ça (...?) ... de plus (on aura) une autre... ..
170. E3 : donc tu vas tracer celle-là ... .. (... ?) là ... on trace, euh
171. E4 : on va tracer exponentiel x ? Non! Même pas. Tu (as pas vu)
172. E3 : tangente égale à (...?)
173. E4 : non, on met l'équation déjà de la tangente
174. E3 : ah, ouais, l'équation de la tangente... Parce qu'il faudra, il faudrait tracer un champ de pentes ... c'est-à-dire que toutes ... toutes les tangentes qui ont la même (pente)... on la (accepte) ... ah
175. E4 : (...?) et l'équation de (... ?)...
176. E3 : donc, il faudrait tracer toutes les droites qui ...
177. E4 : je vois pas les (... ?) en rouge, je vois pas
178. E3 : qui ont pour pente 0,8041 et qui appartient à C ... Ah, ça ... elle nous l'avait fait faire la dernière fois...
179. E4 : regarde ...ça bouge
180. E3 : ouais, tu vois, elle bouge là... la tangente, ce tu... tu as pas le champ de vecteurs... tu vois ...
181. E4 : ah, donc, il faut tracer une droite...
182. E3 : d'un autre côté, il faut un vecteur ... tu vois bien (... ?) pour faire ça ... oui c'est là ... mais ça c'est presque la même que la dernière fois ...
183. E4 : hein ?
184. E3 : c'est presque la même que la dernière fois, mise à part un truc... c'est qu'on a pas le... les 2 trucs entre ...
185. E4 : on n'a pas les... elles étaient comme ça la dernière fois...
186. E3 : et elles faisaient ça ...
187. E4 : hum
188. E3 : ...et puis ça... il faudra enlever ça, en fait... C'était quoi ?
189. E4 :  $y'=(y^2-1)/(x^2+1)$ ... non ?
190. E3 : ouais
191. E4 : et, alors, c'était quoi le problème ?
192. E3 : (juste) (...?) pour « x » ... « k » +1
193. E4 : c'était l'inverse ... .. ah oui ...
194. E3 : mme la dernière fois l'équation c'était ça ? «  $y'=(y^2-1)/(x^2+1)$  »
195. P : ouais, ouais
196. E3 : parce qu'en faite... on voit quand même une ressemblance sauf que juste on aura de moins (... ?)
197. P : vous ne focalisez pas là-dessus
198. E4 : d'accord
199. E3 : on pourrait essayer de retracer le champ des vecteurs...
200. P : ah, vous voudriez le champ de vecteurs tangents ?
201. E3 : hum,
202. P : ah, oui, oui, on pourrait, mais...
203. E3 : ça ne sert pas à grande chose
204. P : là, euh... c'est la tangente qui est là ?
205. E4 : oui (... ?)
206. P : et vous... d'accord, et... Donc, ça c'est l'équation de la tangente en ce point
207. Do -E4 : hum, hum

208. P : et ce point, vous connaissez ces coordonnées ?...
209. E4 : ben ouais... ..
210. P : quand vous faites bouger le point... ouais ce point là... non, non, bougez-le. Vous allez là dedans...  
Ouais... Il ne faut pas aller trop vite pour qu'on puisse observer, euh...
211. E3 : (par rapport à la) (... ?)
212. P : vous voyez...
213. E3 : ah ! C'est « y » ...
214. P : vous voyez quelque chose maintenant?
215. E3 : c'est la pente, qui est égale à... à
216. P : ah !
217. E3 : à la ordonnée de ce point ouais
218. P : (... ?)
219. E3 : oui... d'accord
220. E4 : tu veux la (... ?) ?
221. E3 : non, 0,63 c'est... c'est varié au même temps que « y » ... si tu définis (x,y), le point...
222. E4 : ouais
223. E3 : ah ... « y » (est fonction) de « x »
224. E4 : non, là ... elle l'est effacé...
225. E3 : on a ... on a « y' »... .. c'est la tangente en ce point... égal à ... «  $yx + 1,82$  » ... que ça va être... ..  
... alors ... (... ?)... ça me fait... 1,16, Donc c'est pas ça... euh ... (... ?)
226. E4 : mais déjà c'est un truc pile ?
227. E3 : ouais ... .. 1,29 essaie de voir (...?) ...
228. E4 : j'arrive à combien ?
229. E3 : je sais pas, mais, on doit (... ?) ... ouais, un valeur moins de 0,5 (... ?)
230. E4 : pas mal là
231. E3 : ah, ah... alors là ... on doit dire que c'est pas mal du tout
232. E4 : d'accord, ah...
233. E3 : 2 et (...?) -2 et -3/2...donc ça serait...
234. E4 : non, -2 et 1/2 égale... ouais, c'est marqué déjà, tu peux marquer déjà ... (... ?) la tangente en -2,05...  
... je peux essayer t'avoir un aussi bien
235. E3 : essaie de trouver un autre ...
236. E4 : c'est joli ça ?
237. E3 : ouais
238. E4 : non, mieux
239. E3 : ouais non mieux... tout à l'heure tu t'avais un truc euh ...
240. E4 : tu t'habitues à trouver un nombre
241. E3 : non, mais là tu bouges C, tu bouges plus le point ... euh...
242. E4 : et j'y vais encore un (...?) mal, là
243. E3 : ah d'accord, tu bouges C... ah, mais là c'est moins mieux
244. E4 : c'est moins bien
245. E3 : attends ... deux minutes
246. E4 : non, mais attend... je vais te trouver un joli truc c'est bon
247. E3 : c'est vrai que là t'as pas l'air d'arriver à trouver une équation correcte... c'est surtout qu'il y a ... euh  
(...?) le « b » quoi...
248. E4 : non, il aurait fallu «  $ax + b$  » ... .. ça te va pas ça?
249. E3 : non, essaie de faire (bouger) le C quand le (...?) tend (... ?)
250. E4 : dans ce cas, tu peux le laisser euh, coordonnées... j'ai plus d'autre... Euh, là il y'a que l'équation de  
la tangente... elle change après (le sens)
251. E3 : ah j'ai (...?) une idée... il y'a le ... quand elle coupe l'axe en 0, on ne peut pas avoir « b » si «  $x = 0$  »
252. E4 : c'est ça
253. E3 : si «  $x=0$  »... en «  $x=0$  » on a « b », ouais ... Là, la tangente et là on a « b »... .. On a fait l'équation  
euh, mais ... quoi ... ..
254. E4 : là, tu as même pas 0... attend ... ..
255. E3 : là, c'est évident, en fait... C'est normal... Oui, donc, c'est normal... Ah! ce ne nous donne pas « b »  
en fait
256. E4 : tu veux (...?) un point petit « b », pour faire quoi ?
257. E3 : ben, alors là on a ... -2, correspond à 3/2... il faudrait un autre point...
258. E4 : non, mais pourquoi tu dis 3/2, ah! pour le petit « b » tu veux dire...

259. E3 : ouais, je pense que ça dépend de « x »... .. quoique  $3/2$  c'est quoi ? ... c'est 3 fois  $1/2$  aussi... et si on faisait 3 fois... 3 fois euh, 0,65... attends, poses-toi à l'endroit...
260. E4 : je cherche une jolie
261. E3 : non, non...
262. E4 : (...?) c'est moins joli
263. E3 : 30, voilà, c'est bon... en 30 c'était mieux... Non, ça marche plus,  $3*3... 9...$  parce que tu vois je les ai fait-y, c'est peut-être... Là, tu as 3 fois  $1/2$ ; comme là c'était  $1/2$ , ça fait 3 fois « y » en fait. Mais ça pas l'air de marcher
264. E4 : tant pis... (...?) j'ai l'impression de (...?) truc (... ?)
265. E3 : attends, je peux (...?) ?
266. E4 : ouais, vas-y.
267. E3 : ah non ... ..
268. E4 : c'est ça l'équation finie
269. E3 : ouais, mais à peu (... ?) expliquer (... ?) ça ressemble à 3 fois 7... 21 ... donc ...
270. E4 : et si c'est une tangente c'est «  $f(x-a)+f(a)$  »
271. E3 : ouais
272. E4 : mais « f » on l'a pas là, (...?) ... ..
273. E3 : ouais, c'est ça...
274. E4 : de quoi c'est ça?
275. E3 : en fait c'est ça, ouais. En fait c'est «  $y'=y*x+3y$  ». Moi, je dirais ça parce que regardes : là tu te mets sur un point (...?), t'as bien ça et puis t'as bien  $3*5... 15$ , c'est vrai qui tombe bien juste. Alors, que les autres ben, c'est arrondi à 2 centièmes près c'est ça, mais, c'est pas qu'on (... ?) ça. Regarde...
276. E4 : ah non?
277. E3 : sur celui-là par exemple ... .. 3 fois 8... 3 fois 8... 24
278. E4 : 3 fois 8, 24, uhum
279. E3 : donc,  $3*8... 24$ ,  $3*1... 3$  ... tu vois c'est à 2 centièmes près ça fait 54... c'est pas 56, mais d'un autre côté c'est pas trop précis, je pense, parce que regarde... c'est pareil, c'est... 5 fois 80... euh,  $3*4... 12$ ,  $3*5... 15...$  et 1 ça fait 162, c'est presque ça, quoi
280. E4 : ouais..., ça c'est la tangente. Ah, je ne sais pas comment on fait (...?) par (... ?)
281. E3 : on peut faire une autre tangente peut-être, pour voir (... ?)
282. E4 : d'accord ...
283. E3 : oui donc... c'est ça
284. E4 : et ensuite cet axe... équation après tu vas dans un autre truc ... .. non (... ?)
285. E3 : hum,
286. E4 : (...?) ça en plus
287. E3 : (... ?) change ... c'était quoi ?
288. E4 : vas-y... encore... (...?) encore déplace... (... ?) déplace... déplace ton... de l'autre côté ... là voilà, coordonnées (... ?) ... ..
289. P : [en parlant à autre binôme] il trouve que c'est trop ouvert Julio, ils sont pas assez guidés... C'est Julio qui a fabriqué toutes ces tâches... donc, là, ils disent que la dernière fois ils étaient guidés, mais là, vraiment c'est dur
290. E3 : 3 fois 2,5... .. ça marche plus là... ah, ah, ah
291. E4 : 3 fois (... ?) ... (... ?) c'étais pas tout point...
292. E3 : ne marche pas ?... ..mais c'est normal, ça dépend du point, en fait... (... ?) c'est le (... ?)
293. E4 : ouais ... on a besoin de (... ?) quoi alors? ...
294. E3 : c'est ça ?... (en plus) «  $y'=y$  »
295. E4 : je sais pas comment tu peux trouver ça, en passant par tout ça
296. E3 : mais, tu vois bien que là, la pente c'est toujours...
297. E4 : on cherche que l'équation d'une tangente...
298. E3 : je cherche l'équation de la tangente, oui... .. mais, elles ont pas toutes la même, c'est normal, on cherche une relation entre « y' » et « y »
299. E4 : on cherche l'équa dif, ça c'est l'équa dif c'est pas l'équation
300. E3 : ben, oui
301. E4 : comment tu peux la reconnaître à partir de la tangente ?
302. E3 : bah, parce qu'... euh... il y a une relation entre la dérivée et la fonction, «  $y(x)$  » et «  $y'$  » ... .. Mais là, on aurait, euh, «  $y*(x+\alpha)$  », puisque c'est ça qui change... On sait pas trop en fonction de quoi, mais ça doit être en fonction de point « y » ... « y » il devra dépendre enfin... bon, on va essayer, «  $y'/y = ...$  »
303. E4 : «  $x+\alpha$  » ...
304. E3 : euh... elle est en...
305. E4 : on s'en fout on va faire comme ça

306. E3 : eh... «  $x+\alpha$  » ... et ça te fait le «  $\ln |y| = e^{x+\alpha}$  »
307. E4 : non, non
308. E3 : euh, (... ?) plus constante
309. E4 : non, le log c'est pas égal que ça... L'autre, c'est que tu intègres, c'est intègre à ça. C'est intégrale, pas... pas exponentiel...
310. E3 : ah, oui. «  $x^2$  »..
311. E4 : intégral «  $1/2 x^2 + \alpha x$  »
312. E3 : d'accord, c'est pas très gros
313. E4 : pourquoi tu as (... ?) «  $\alpha x$  »
314. E3 : c'est pas très bon ça... ça serait plutôt euh... on pourrait essayer d'en tracer une ... .. (..?)
315. E4 : effaces, je vais continuer euh ...
316. E3 : c'est ça, mais en même temps on sait pas, on va mettre ça pour l'instant, bon...
317. E4 : on va faire un truc comme ça, non ? ... Tu as une parabole? ...
318. E3 : « appliquer » c'est où déjà ?... ..
319. E4 : là... ah, ah, forcément, c'est une parabole, quoi
320. E3 : ben, oui, ah, ah, ah... je suis un peu con, oui c'est vrai, j'ennuie... Qu'est-ce qu'il manque ?
321. E4 : ...pointez, pointez là... et là tu pointes... pareille sur l'expression, tu peux la virer aussi
322. E3 : c'est vrai, tu crois ?
323. E4 : ouais, vas-y
324. E3 : ah, ah, ah ... .. Ah, oui? ... mais, qu'est-ce que ça va faire, alors ? Ah, ah ...
325. E4 : (...?) je sais pas (... ?) ... ..
326. E3 : euh, je crois que c'est toujours ... une parabole, oui... .. hum, je crois que c'est pas ça
327. E4 : non, non ... .. parce qu'en fait il veut seul que l'équation ...
328. E3 : c'est ça, viens voir, c'est qu'en fait... la pente de la tangente ça va être «  $y - y$  (en le point) =  $y'(x-a)$  ». D'accord ? On a trouvé que «  $y'$  » c'était «  $y$  » finalement
329. E4 : pourquoi «  $y - y$  (...?) ». Comment tu as ça ?...
330. E3 : c'est l'équation de la tangente, donc c'est «  $y$  »
331. E4 : en fait, pourquoi tu as mis «  $y$  », enfin, moi je (...?)
332. E3 : oui, oui,... Alors... ça va?
333. E4 : (... ?) il faut «  $f$  » ... oui, c'est pas... «  $f$  » fois d'accord ...  $f(a)$
334. E3 : tout ça «  $f(a)$  », aussi... non?
335. E4 : «  $f(a)$  », oui. Moi, j'ai ... j'ai la (... ?)
336. E3 : est-ce que c'est  $f(a)$  ?... Voilà, mais nous ce qu'on a trouvé c'est que la pente de la tangente finalement, euh, c'est «  $f(a)$  »... hein ?
337. E4 : uhmm, ouais ... ..
338. E3 : donc finalement, on a «  $y=f(a)(x-1-a)$  »... on n'a plus de «  $y'$  » ... uff (...?) en plus
339. E4 : je comprends plus rien
340. E3 : moi non plus, je commence à ...
341. E4 : saturer
342. E3 : hein?
343. E4 : saturer, saturation... .. Il reste une heure et quart... .. (.. ?) ...
344. E3 : alors...
345. E4 : eh bon, la tangente des courbes solutions, ça nous sert à quoi ? ...
346. E3 : ben, c'est ça en fait. Ça nous permet de... .. «  $y'=y$  »
347. E4 : comment on aurait dans tous les points, comment on aurait dans tous les points «  $y'=ay+b$  »
348. E3 : bah, «  $y'=y$  » quoi.
349. E4 : pourquoi «  $y'=y$  » ?
350. E3 : ben, à chaque fois tu as «  $y'=y$  ». C'est la pente de la tangente «  $y'$  »... «  $f=f$  »
351. E4 : uhmm, uhmm... .. dans ce cas-là ça serait, «  $Ce^x$  »
352. E3 : ben, oui ... .. (.. ?) j'ai pas compris ...
353. E4 : (... ?) constante (... ?) ça
354. E3 : ouais, mais non, si tu lui rajoutes une constante, tu la montes l'exponentielle... .. (.. ?) on peut pas (... ?) de toutes façon ...
355. P : alors là, vous êtes où ?... parce que je vois que vous avez l'air ...
356. E3 : non, on est démoralisé
357. P : vous êtes ...?
358. E4 : démoralisées
359. E3 : h. S
360. P : j'ai l'impression, jamais, absolument, là
361. E3 : ben, parce qu'on écrit ça «  $y-f(a)=f(a)(x-a)$  ».. donc on trouve «  $y'=y$  »

362. P : oui
363. E3 : on intègre, on trouve une exponentielle, plus « C »... et si on a une exponentiel plus « c », la famille de courbes ça va être des exponentielles (... ?) ça
364. P : alors, vous trouvez «  $y'=y$  »... c'est ça ?
365. Do - E4 : ouais
366. P : d'accord? ... Donc, vous avez l'impression que ça c'est une équation différentielle
367. Do - E4 : ben, oui
368. P : et, vous savez l'intégrer ?
369. E4 : bah, oui. Ça fait «  $Ce^x$  »
370. P : et, ben, alors ?
371. E3 : ben, oui, mais après il faut rajouter la constante
372. P : ben, elle-y est la constante
373. E4 : c'est «  $Ce^x$  »
374. E3 : ah, bah, oui... bah c'est « C »
375. E4 : c'est que ça ?
376. E3 : alors c'était juste, ça!
377. P : oui
378. E4 : vous avez dit que c'était faux au début...
379. P : je vous ai pas dit que c'était faux
380. E4 : vous nous avait mis en doute
381. P : ah, non! moi, je suis désolée... Ça et ça c'est pas la même chose. Ah non, justement
382. E4 : ah, non, ça c'est la solution tandis que ça c'est l'équation... donc, la seul, la ...
383. E3 : c'est pas pareil, oui
384. P : ah non, non, non
385. E4 : donc, l'équation c'est «  $y'=y$  »
386. E3 : c'est mon cas, je ne l'ai pas mis au bon endroit
387. P : oui, exactement... Là vous aviez un ensemble de familles, un ensemble d'EDs...
388. E3 : là, on avait réussi, et ça marchait pas, ouais on avait réussi
389. P : d'accord, ok ?
390. E4 : oui, c'est clair
391. P : ça va maintenant ?
392. E4 : (...?)
393. P : (...?) ça vous laisserez vos brouillons, hein, ça intéresse beaucoup Julio, hein, d'accord ?
394. E3 : d'accord
395. P : lui, il étudie comment ça se passe dans votre cerveau
396. E4 : ok
397. E3 : d'accord, c'est pas brillant, hein
398. E4 : c'est "confondu", quoi
399. P : c'est plus clair maintenant ?
400. E4 : ouais, ben, ouais
401. P : vous pouvez remplir les fiches, vous avez les fiches ?
402. E4 : ouais, c'est bon, c'est bon, elles sont là
403. P : en fait, c'est bien de remplir les fiches
404. E3 : (... ?) mais j'arrivais pas à voir ... ce que cela voulait dire, ouais
405. P : voilà, ouais
406. E4 : ok... bon, bah, je te laisse remplir ça
407. E3 : ouais. C'est moi qui écris
408. E4 : c'est toi qui me l'ai (demandé)
409. E3 : [elle écrit] « l'ensemble des solutions forme 2 familles »
410. E4 : (... ?) quoi on a fini là
411. E3 : oui... oui ... ouf ...
412. E4 : d'après le (...?) «  $y'=y$  »
413. E3 : donc... « on vérifie... en traçant les tangentes à ... »
414. E4 : les tangentes à C... on a (... ?)
415. E3 : « les tangentes ... » ...
416. E4 : (... ?) «  $y'=y$  »...
417. E3 : donc, pour ... Donc, il faut différencier le cas où «  $y=0$  »... Pour ... «  $y=0$  » ... donc, identiquement nul...
418. E4 : non, tel que, quelque soit « x »...

419. E3 : elle est non nulle ... .. donc... .. donc pour « y » tel que quelque soit « x » appartenant à «  $y(x)=0$  »... .. Non, en fait. Il ne faut pas faire comme ça. Il faut dire si «  $y=0$  » en un point... .. «  $y'=0$  » aussi
420. E4 : sauf que pour «  $y=0$  » la solution c'est «  $y=0$  »
421. E3 : bah, oui, voilà mais il faut le ... le démontrer ...
422. E4 : (... ?) en tout cas (... ?)
423. E3 : mais, (... ?) comme c'est une solution, c'est une solution singulière. En plus, toutes les autres peuvent pas la couper... .. d'accord ?... ben, alors, si ... .. « on cherche ... les solutions « y » ... (...?) »
424. E4 : je ne sais pas comment on (le dire) ... on a que ça a dire, en fait, qu'elles sont nulles, l'équation différentielle associée à cette famille, c'est le seul point
425. E3 : ouais, mais je voudrais ... je justifie ... pourquoi est-ce qu'on a le droit de diviser par ... ..
426. E4 : allez ... je te (...?) de un (choc) ...
427. E3 : [en lisant] « comment avez-vous procédé... »
428. E4 : bah, ouais, c'est ce qu'on a dit... tu mets... on a tracé, euh ... une tangente... on a fait varier le... on a fait varier les coordonnées du point... Et on a vu que l'équation varie en même temps... et puis on a (...?) la pente de la tangente était toujours égale à l'ordonnée du point...
429. E3 : comme ça ... ouais...
430. E4 : plusieurs points, la tangente il fallait la dire à quelle courbe... à la courbe ... à une courbe solution ... ..
431. E3 : (... ?) justifie
432. E4 : on a remarqué que la pente de la tangente ... .. La pente de la tangente variait, euh ... était égale à l'ordonnée du point ... en lequel elle est tracée
433. E3 : semblait! (tu inventes)
434. E4 : ben, on l'a fait sur plein de points... donc...
435. E3 : toujours ? ... semblait toujours quoi ? On n'est pas sûres ...
436. E4 : être égale ... à l'ordonnée du point en lequel la tangente elle est tracée... .. la tangente était tracée... D'après, euh, la formule générale, la formule générale du... de l'équation de la tangente et on a déduit que «  $y' = y$  », mmh
437. E3 : oui ...
438. E4 : d'où, euh, est égal à  $f'(a)(x-a)$ ... et on a déduit ... ..
439. E3 : c'est bon

### Justification de l'équation différentielle

440. E4 : alors, [en lisant] « quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que les EDs... »... bah
441. E3 : que le champ donné les ... solutions...
442. E4 : qu'elle est paire ...
443. E3 : si tu fais mon raisonnement, là, selon le cas, ça marche ...
444. E4 : ça te dit qu'elle est paire déjà ?
445. E3 : ouais
446. E4 : tu dis qu'il est paire et puis aussi si tu veux ... on l'a résolu, on l'a résolu ... on avait la forme générale des solutions, et on voit bien que la forme générale des solutions correspond avec l'ensemble des courbes
447. E3 : ouais
448. E4 : on met les deux trucs ?
449. E3 : ouais...
450. E4 : ah je ... c'est cool quand ça se débloque !... ..
451. P : vous êtes en train de recopier ?
452. De -E3 : ouais, mmh
453. E4 : aïe, ici les courbes... mmh ...
454. E3 : moi, je signale (...?)
455. E4 : ah, non, mais c'est la solution qui est paire, pas l'équation... il y a que les solutions qui sont paires
456. E3 : ouais
457. E4 : tu laisses, euh, on peut vérifier qu'elle paire, que les solutions sont paires ... ..
458. P : donc, ça va ? vous recopiez, vous...
459. E4 : mmh ...
460. E3 : attend, qu'est-ce c'est pas à supprimer ?...
461. E4 : si, on a «  $y' (-x) =$  » ...
462. E3 : ah non, il faut (reprendre) ... non...

463. E4 : en fait, ouais... on joue spécialement avec la parenthèse, on vois plus avec ...
464. E3 : tu dois (...?)
465. E4 : (...?) on a trouvé la solution, voilà, ouais
466. E3 : et puis (...?) avec ça
467. E4 : voilà, en plus, on sais résoudre, on sais résoudre, moi je marque vraiment on sait résoudre une équation différentielle de la forme «  $y'=y$  ». Tu la aurais résolu et tu dis... c'est en train de...
468. E3 : non, non, parce qu'il faut partir de «  $y'=y$  » pas de la solution, là... Pour vérifier que «  $y'=y$  » ... ..
469. E4 : je vois pas... ouais... mais c'est bon mon truc, (devant) les éléments, puisqu'on sait résoudre une équation de cette forme là, et qu'on peut tracer des solutions sur cette forme-là ...
470. E3 : ouais, enfin, (... ?) seulement il y a un truc qui me (... ?)... ..
471. E4 : parce que moi, je trouve ça plus, euh... .. On n'est pas trop d'accord, en fait
472. E3 : on n'est pas d'accord
473. E4 : (... ?)
474. E3 : [en lisant] « quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'ed que vous avez trouvée corresponde bien à la famille des solutions »
475. P : mmh
476. E3 : ah ... moi, j'en (démarque) pour montrer que qu'elle était paire, en fait «  $y'=y$  » enfin que quand on a «  $y'=y$  » alors, ça donne une équation paire. En disant que si on a «  $y'(-x)$  » ça fait pas supposer que «  $y'(-x) = y(-x)$  »
477. P : mmh,
478. E3 : si on suppose «  $y(x)$  », et ça «  $y(x)$  » ça c'est bien... y' de ... «  $y'(x)$  »
479. P : ouais, mais en fait ici ...
480. E4 : moi, ça me pousse à dire qu'on sait résoudre une équation de cette forme-là
481. P : oui
482. E4 : donc, on a les solutions
483. P : voilà
484. E4 : et on a les solutions... et on (parle des) solutions
485. P : voilà, je pense que tu n'avais pas raison parce qu'ici, et en plus, c'est pas vrai ça
486. E3 : on suppose ...

(changement de cassette)

487. E3 : ... c'est quand on prend un point (x,y)... c'est de la forme  $f(x,y)$  qui (gère quand la fonction est paire) (... ?) ...
488. P : non, mais là on peut... je veux... peut-être tracer...peut-être... on va laisser ça. Vous avez fini là, tout le reste ?
489. E3 : oui
490. P : moi je vous donne... Laissez ça, laissez ça. C'est pas grave. Et ça, je vais vous donner la troisième activité, parce que... Vous êtes déjà fatiguées ?
491. E3 : bah, on était fatiguées normalement
492. P : vous êtes (...?)
493. E4 : je ne sais pas, on va a remplir juste on vérifie, juste avant de commencer (...?)
494. P : oui, vous pouvez vérifier, d'accord
495. E4 : ah tu mets ...
496. E3 : ah, je remplis ça, tu commences ça vite...
497. E4 : je commence à faire alors
498. E3 : oui, je vais remplir toute seule
499. E4 : oup (...?)
500. P : il faut ouvrir un autre votre fichier, euh !
501. E4 : d'accord ... ..
502. E3 : mais, quel malheur... .. mais qu'horreur ça n'avait pas marché vite ... ..
503. E3 : alors [en lisant] « On considère une famille de courbes "gama", le point M, est déplaçable sur tout le plan. A chaque point de la bande ..., corresponde une courbe  $\Gamma_M$ . La tâche consiste à chercher l'équation ». Ouh là là ... .. Alors, quand on bouge le point M ... ..
504. E4 : c'était quoi la dernière question de cette partie ? [en lisant] « Pouvez-vous repérer des propriétés mathématiques de la courbe qui confirment que vous avez bien trouvé l'ed de la famille des courbes? »
505. E3 : alors, regarde...
506. E4 : une propriété mathématique ? Donc c'est ça... de la (courbe)
507. E3 : non, non, non, c'était... c'est quoi ça ? C'était encore un aspect ?
508. E4 : tu as là qui tend ...
509. E3 : mais, (... ?) c'était ça là pointer .... (...?)



510. E4 : ouais  
511. E3 : c'était quoi celle qu'on a rempli ? (...) ... On a bien la droite «  $y=0$  »... Euh, là... on doit avoir une courbe...  
512. E4 : (...) plutôt la symétrie par rapport à l'axe...  
513. E3 : ah, ouais, mais il n'y a pas de signe... ah, oui on avait dit que l'on auriez en... euh (...) ...  
514. E4 : il y a encore ? qu'est-ce que je peux mettre (...) propriété mathématique ?  
515. E3 : ouais... la parité  
516. E4 : et appart ça ?  
517. E3 : mais, c'est même pas la parité en plus  
518. E4 : je mets symétrie par rapport à Ox  
519. E3 : oui, voilà  
520. E4 : on met que ça ?  
521. E3 : ah, oui, c'est ça... ... ça tu l'aimes pas trop?  
522. E4 : tu l'aimes ? (...) je pense (...?)  
523. E3 : j'aime un peu mieux... je sais pas où est la tangente  
524. E4 : (...) regarde, on va la laisser comme ça, elle est (...) bonne  
525. E3 : non, non, (...) tous, qu'elle est (...?)  
526. E4 : tant pis ... ..Madame  
527. P : merci  
528. E3 : ça sert à quoi d'ouvrir le (...) ...  
529. P : qu'est-ce qui est?...  
530. E3 : (...) était là  
531. P : attend. Qu'est-ce que vous...?  
532. E4 : c'est ça  
533. P : ah, les brouillons, vous pouvez passer vous brouillons?  
534. E4 : bah, oui... mais regarde, tu donneras après la feuille (...) ... ..

**(fin de l'activité)**

# **Binôme E3/E4**

**Mise en équation différentielle  
d'une famille de trajectrices**

**L'expérimentation de l'année 2003**

## Binôme E3/4

## Première étape : la famille de trajectrices

1. E4 : alors... (... ?) autre activité [en lisant] « On considère la famille de courbes gamma, le point M est déplaçable sur tout le plan. A chaque point M de la bande » ...
2. E3 : je me souviens plus où elle est, euh...
3. E4 : tu veux quoi?
4. E3 : ah... c'est ... ..
5. E4 : c'est tout qu'on cherche c'est la solution de ce truc là
6. E3 : d'accord
7. E4 : (... ?) on fait ... trouver les équations ... [en lisant] « Quel est selon vous l'équation différentielle associée à cette famille ». Hum, c'est le même truc que tout à l'heure, sauf que c'est pas la même équation... C'est la même chose...
8. E3 : non, c'était pas expression que je veux dire... alors ... je pointe ...
9. E4 : allez-y... équation...non, les coordonnées de l'équation... voilà de ce point... du point...
10. E3 : ah, oui mais non
11. E4 : voilà, je tape, non, non, (...?) tu fais varier aussi... bah oui ça peut être comme toute à l'heure ... ah, c'est la distance là, nous a fait mettre la distance, donc, ça nous sert à quelque chose la distance
12. E3 : c'est quoi qu'on a mis la distance ?
13. E4 : dans le macro
14. E3 : c'est vrai ?
15. E4 : macro m... (...?) ...je tac, ah, non mais, il faut aller... vas-y, vas-y
16. E3 : mais ici où je suis allé en (... ?) fin
17. E4 : tu es sûre
18. E3 : ouais, je suis sûre oui
19. E4 : ouais, tu vois là la distance on la va a laisser comme ça... (... ?) ... on prend un autre truc. Tac, tac... voilà. Là c'est moins évident ... hein, puisqu'on nous avait dit ça... Parce que peut-être la distance elle joue quelque chose là...
20. E3 : et si on met les coordonnées du point M aussi. La distance que ce soit entre le point M et...
21. E4 : la coordonnée de ce point, de ce point là, ah
22. E3 : on va voir (que sont égales)
23. E4 : c'est gommé, on peut (...?) la distance. On fait « distance »
24. E3 : euh... ouais
25. E4 : vas-y... .. ce point-là et ce point-là... Voilà... et donc
26. E3 : par rapport à l'axe
27. E4 : ouais, c'est bon... c'est une droite
28. E3 : ouais, ça marche pas... Alors, on (... ?) ou...
29. E4 : ah, on trace la droite entre ces deux points, si... Distance égale à 1,83 mais ça (...?) quoi ?
30. E3 : bah, d'entre (...?) c'est ce que j'ai fait, non ?
31. E4 : ché pas... (...?) cette fois aussi ça ...
32. E3 : non, ça marche pas tu crois ?
33. E4 : (...?) est différent le point... ces deux... .. (... ?) pas trop vite
34. E3 : juste, on va les mettre de côté les autres quoi... ah ouais c'est ça... ouais, mais ça sert à rien. A moins que (...?) pas ... .. ah, ils sont euh ... quand ils sont confondus c'était zéro, donc, c'est bien la distance
35. E4 : ouais
36. E3 : non?
37. E4 : ah, ouais elle bien la distance...
38. E3 : euh, en plus 0,36 c'est pas la moitié de 0.61 ?
39. E4 : non !
40. E3 : ah, ah, ah,
41. E4 : ah, mon jolie
42. E3 : essaye encore!... Et, si on fait, euh... Non, même pas...
43. E4 : non
44. E3 : non, n'y pense même pas... donc... peut-être qu'il faudrait quand même bouger ... quel objet?... Le point M... .. Ah, mais c'est constant, là, 0,36. Tu trouves pas?
45. E4 : et comment ça (...?)
46. E3 : il y a un (moins)... 0,36
47. E4 : vas-y, descend encore, descend, ah, ouais... parce que c'est l'équation de la tangente

48. E3 : ah, ouais... En fait ça dépend de la position du point M, peut-être, par rapport à l'axe des... des abscisses, ça
49. E4 : c'est -0.36 la pente de la tangente... Et quand tu (déplaces) je...
50. E3 : tu vois comme à chaque fois...
51. E4 : tu déplaces ce point là ...
52. E3 : là je devais varier un (... ?) au nombre (tellement) mon truc
53. E4 : (... ?) quand tu déplaces ... pourquoi t'as ...
54. E3 : ouais, mais c'est normal. Disons par exemple si je continue. Elle peut varier horizontalement, et elle reste sur le 0,26... Alors, on va faire « distance »... entre ce point... cet axe... Ah, ouais, mais c'est entre deux points qu'on doit la prendre justement. Donc, ça c'est pas la peine, euh... On peut pas le prendre entre une droite et un point, donc... On pourrait tracer la perpendiculaire à... euh...
55. E4 : alors, quand tu déplaces (...?), je crois... Non, à côté alors... droite perpendiculaire
56. E3 : ouais, mais, elle va pas, elle va pas varier avec M
57. E4 : si, en ce point vas-y... cet axe ... voilà, vas-y, on fait varier M
58. E3 : je t'en dis qu'elle va pas varier ...
59. E4 : ah, trop fort! Alors ensuite, la distance euh... Le problème c'est que ce point-là ... se va (... ?) quel point ... ..
60. E3 : ouais, ça vient d'un autre côté, on est un peu connes quand même, parce que c'est l'ordonnée
61. E4 : tu pouvais (...?)... je prends (... ?) les coordonnées
62. E3 : qu'est-ce qu'on est à toute l'heure, ah ouais
63. E4 : mercredi matin c'est pas ça
64. E3 : alors...
65. E4 : tu vois le truc (...?) ...
66. E3 : 0,71 et 0,26... .. vas-y... .. ah ... 1,26 c'est pas très (... ?) si on prend (... ?) ... Pourquoi c'est toujours -0,26 ?
67. E4 : qu'est-ce que tu fumes?... mais là a fait ce point... Le fait qu'on a constaté c'est quoi, c'est que quand ça varie... quand M varie
68. E3 : ah, non, mais attend 1,26 ci restait, euh... un long temps éternel, mais il reste vachement long temps
69. E4 : on a dit quoi? que quand M varie, t'as ... la pente de la tangente elle est constante, c'est ça?
70. E3 : ah, ouais, mais même, elle reste ... .. D'un autre côté, il n'y a pas besoin de beaucoup de précision, c'est pour ça. Parce que là, en fait, elle est toujours (... ?)... on va pas (...?). On va le mettre à ce point, on va le mettre à un endroit où il varie beaucoup... plutôt...
71. E4 : mhm
72. E3 : et, où est l'équation ?
73. P : alors, là, vous avez trouvé quelque chose, ou pas ?
74. E3 : bah, en fait oui... qu'il y a pas beaucoup de précision, donc, il faut se placer à un endroit où la tangente elle a une grande pente. Parce que sinon, on voit tout pareille (...?)
75. P : d'accord... mais si vous vous placez dans un point, vous pouvez pas regarder ce qui varie, ce qui ne varie pas, ah
76. E3 : ah, si !
77. P : ah, oui mais là c'est plus la même courbe. D'accord... À chaque fois que vous changez de point M vous changez de courbe, d'accord ?
78. E3 : bah, oui, oui. Mais, euh, on essaye de trouver une relation...
79. E4 : ce qu'on essaie de constater c'est que quand on voit varier M
80. P : ah non, parce que la relation d'équation différentielle c'est une relation pour tous les x, y et y' de la même courbe
81. E4 : ah, oui
82. P : d'accord ?
83. E3 : donc, on va prendre plutôt une grosse pente... Non, mais il n'y a pas (... ?)
84. E4 : c'est l'autre point qui varie pas, alors ...
85. E3 : mhm
86. E4 : et la distance, elle varie avec quoi ?... Vas-y arrête ... ..
87. E3 : et 1,75 - 0,63 ça fait quoi ?
88. E4 : 1,75 - 0,63...
89. E3 : non, mais ça c'est pas ça...
90. E3 : et 1,75-0,...
91. E4 : ça, ça marche, d'accord...
92. E3 : ...- 2,5.
93. E4 : ... 1,75 moins... vas-y, je (... ?)
94. E3 : si tu prends ça, moins ça... Non, ça marche pas non plus... Si, regarde là ... Ça moins ça, ça donne ça

95. E4 : qu'est ce que tu fais ?  
 96. E3 : attend, plutôt ça moins... Mais, si ... 1 - 1... 0... en fin plutôt, 0 - 7... comment j'ai dit ?...  
 97. E4 : non, ça donne pas 0,5  
 98. E3 : non, si, si  
 99. E4 : entre la distance c'est un cas, en fait  
 100. E3 : voilà, entre les deux ... il manque combien ?... 3... 33, non, c'est pas ça  
 101. E4 : c'est pas ça, non ... (...?) descend ... .. essaie de le mettre là bas  
 102. E3 : attend (...?)  
 103. E4 : (...?) tac  
 104. E3 : 2,71 ... ..  
 105. E4 : ah, non ça, je ne veux pas ça. Dégage  
 106. E3 : mais si, tu passes par le point M, passe par le point M-là maintenant  
 107. E4 : mets en pointer... alors attend... voilà ... ça (allait) déjà... on va y arriver et puis on va voir comme (...?) ... .. Il passe par M ... ..  
 108. E3 : attend je suis (...?)  
 109. E4 : tu es (...?) ... ..  
 110. E3 : je (...?) qu'est ce que tu fais ? ... ..  
 111. E4 : pourquoi il ne bouge ce truc... je veux pas bouger ça ? (...?) qu'il reste en M  
 112. E3 : parce tu ne l'as pas définie par rapport à ...  
 113. E4 : ah, merde, qu'est-ce qu'il fait ?...  
 114. E3 : bon ... j'en ai marre, c'est trop dur...  
 115. E4 : droite  
 116. E3 : il faut qu'elle passe par les deux points... sinon, il marcherais pas ... c'est en fonction de ...  
 117. E4 : non !  
 118. E3 : bah, si, et après tu fait passer le ...  
 119. E4 : non, mais il fait pas ça..., attend... droite  
 120. E3 : passant par le premier, là...  
 121. E4 : ... par ce point, oui... et par lequel, c'est celui-là ?  
 122. E3 : oui  
 123. E4 : voilà, là elle est bonne... ..

### Deuxième étape : le retour aux exponentielles

124. P : là c'est pareil, je vous passe un joker... Vous aviez bien à trouver ?  
 125. E4 : non,  
 126. P : rien du tout ?  
 127. E4 : on a essayé la distance, mais, euh ...  
 128. E3 : je crois pas  
 129. P : donc il faut ouvrir la activité 2 bis  
 130. E3 : activité 2 bis...  
 131. E4 : ça va pas ? (...?)  
 132. E3 : (...?) à mon avis c'est pas ça... non, non. C'est pareil, il faut revenir à l'intérieur, il faut sortir  
 133. E4 : (...?) l'activité deux bis c'est par où ? ...  
 134. E3 : elle est pénible, eh!  
 135. E4 : oh, je suis en un super bon état ... [en lisant] « on considère la même famille de courbes que la deuxième ... la tâche consiste des propriétés » ... qu'est-ce qui est invariante à cette famille? ... .. on va faire la distance  
 136. E3 : tu fais (...?) plus ... (...?) faire bouger (...?) le point là, non ?  
 137. E4 : ouais, mais attend. On va voir les propriétés qu'il y a ici... .. Et pourquoi ça n'avait pas marché la distance ?  
 138. E3 : parce que t'as pas dit par rapport à quel axe tu (...?)... Et là, tu cliques... .. Attend, on va mettre quand même des noms, parce que sinon, on va pas (...?) trouver, hein, tu crois pas ?  
 139. E4 : ouais, c'est bien... c'est bien ... c'est éloigné exprès  
 140. E3 : d'accord  
 141. E4 : voilà, et puis, on voit là l'équation...  
 142. E3 : et ça est bien ça ? (...?) ...  
 143. E4 : équation tangente  
 144. E3 : ah non, en fait, il va (t'avoir) en faire calculatrice. Et ça il va-y avoir rester rectangle, le carré de la tangente (...?) machin truc... c'est tout  
 145. E4 : maintenant on veut le déplacer... On prend C on le déplace... .. Bah, on a que QR qui reste constante, quoi.

146. E3 : ah?!
147. E4 : il y a QR qui reste constant.
148. E3 : d'accord, ouais... Puis, il reste rectangle aussi... ..
149. E4 : on écrit que QR reste constante ? C'est une propriété ça ?... ..
150. P : alors, vous avez trouvé là ?
151. E3 : la distance, euh ...
152. E4 : on a QR qui reste constante
153. E3 : ... reste constante
154. P : donc, vous la marquez... et après vous répondez à la seconde question qui est dans la page d'après
155. E4 : il y avait que ça à faire dans cette question?
156. P : oui !
157. E4 : d'accord... [elles parlent d'autres choses]... [elle écrit] « en faisant varier le pt C on remarque que la distance ... de Q à R reste constante »... donc on passe à la question suivante. Ouh là là ... « Est-il possible de déduire l'équation différentielle à partir des propriétés ... »
158. E3 : [elle lit] « Est-il possible de déduire l'équation .... » [elles parlent d'autres choses]
159. E4 : j'en vais mettre que le triangle...
160. E3 : non, mais c'est bon, elle a dit que c'était tout. Il faut revenir à l'activité 3...
161. E4 : non, il faut répondre à cette question
162. E3 : je pense (...?), oui, c'est vrai que le choix (...?) c'est n'est pas répondu mais je (...?) ton appelle
163. E4 : [elle lit] « est-il possible de déduire l'équation différentielle de la famille ... à partir des propriétés ... ». Le problème c'est qu'il y a des propriétés mais on a qu'une. C'est pour ça que je voulais ajouter qu'il était rectangle, en plus
164. E3 : d'accord, vas-y
165. E4 : le triangle PQR est toujours rectangle
166. E3 : ah, bah oui, il est tangente. C'est-à-dire, dépend juste de la... Ah! de la distance PQ, en fait, ça dépend...
167. E4 : et tu veux...
168. E3 : puisque la pente de la tangente « y' »... elle doit être égale à, à... .. « y' = arc tan de.. » euh... côté opposé sur côté adjacent, PQ / RQ
169. E4 : non, (...?) on se le va faire doucement, vas-y
170. E3 : là, t'as..., t'as la tangente
171. E4 : mhm... ..
172. E3 : alors... ok ?... voilà ... mais finalement là, t'as «  $\alpha$  »... «  $\alpha = f(a) = \text{arc tan}$  » ...
173. E4 : pourquoi «  $\alpha = f(a)$  » ?
174. E3 : bah, parce que ça c'est la pente de la tangente... non ?... Arc tangente, euh... côté opposé sur...
175. E4 : ...côté adjacent ...
176. E3 : puisque «  $\tan \alpha = \text{PQ} / \text{RQ}$  »... .. donc « y' = arc tan » ...
177. E4 : de PQ / RQ...
178. E3 : mais RQ vaut toujours 1, donc, arc tangente PQ...
179. E4 : attend mais ça donne une équation ?
180. E3 : ça c'est « y » puisque « y' = y »... j'en sais rien... alors PQ c'est quoi ?...
181. E4 : donc, donc, donc...
182. E3 : PQ finalement c'est, PQ c'est PQ... donc PQ égal f de... non, égal 0 moins l'abscisse de P. Non, ça c'est ... « y »... Alors t'as x de Q... .. x de P
183. P : qu'est-ce que vous avez trouvé comme propriété invariante ?
184. E4 : bah, on a dit que la ...
185. P : ah oui, d'accord. Et là qu'est ce que vous ...
186. E4 : c'est un triangle rectangle, et l'angle c'est droite, en fait... donc, ça c'est f... f(a), d'après l'équation de la tangente, ça c'est l'équation de la tangente
187. P : oui
188. E4 : et donc, d'après le théorème de Pythagore... (...?) le théorème de Pythagore c'est cela ...
189. P : il faut arriver à une équation différentielle
190. E4 : ouais, c'est ça
191. P : il faudrait lier la pente de la tangente...
192. E4 : avec, euh...
193. P : la pente de la tangente c'est quoi ?
194. E4 : bah, c'est...
195. E3 : c'est «  $\alpha$  »
196. P : ah non, c'est «  $\tan \alpha$  » la pente de la tangente
197. E3 : ah, c'est «  $\tan \alpha$  » ?

198. P : ah bah, oui
199. E3 : bah, alors ça fait PQ sur, euh... il n'y a pas d'arc tangente, et comme ça seulement 1
200. P : oui
201. E3 : ça vaut PQ, et comme PQ est la distance, ça va être ... comme il reste droit, aussi...
202. P : oui
203. E3 : ça reste... f de ..., f de ... de f(P)
204. P : oui, donc, l'équation différentielle ça va être quoi ? [elle part]
205. E3 : euh ... et f(P) c'est f(a) en fait. Donc, « f'(a) = ... ben « f' »... « y' = y » ... ça fait ça alors
206. E4 : vas-y, vas-y. Ce ça qu'on avait dit tout à l'heure...
207. E3 : bah, oui
208. E4 : bah, oui, on essayait (... ?) un joli petit dessin aussi
209. E3 : t'as mis qu'il restait droit ?
210. E4 : ouais, si, c'est rectangle...
211. E3 : ah là là ... mhm ... ah, je n'ai trop envie de détailler moi...
212. E4 : si, vas-y... allez, up... Dépêche-toi. Je vais (...?)... alors c'est bien... elles sont où les autres ? Ah, elle est là
213. E3 : (... ?)
214. E4 : t'as besoin de mon truc ou pas ? parce que moi, du coup, j'ai tracé sur l'autre. Tu n'en as pas besoin ?
215. E3 : non, c'est bon... Je pense que la tangente je vais (...?) en « a » égale ...
216. E4 : alors, fichier « ouvrir ». C'est deuxième acti... c'est troisième activité...
217. E3 : attend c'était R ... moi je (...?) faire des chemins ... (qu'est ce que tu mets ?)
218. E4 : on a des pleines droites (...?)
219. E3 : je veux dormir, arrê
220. E4 : (...?) dans quel point qu'on avait là ?
221. E3 : P
222. E4 : donc, on fait un point P quelconque... point, on fait QP... étant dit que je le fasse là ça doit être P ... « nommer »... sauf que nommer ... C'est P (...?) là-dessus... Donc, on est au moins à faire ... Tangente ...
223. P : vous avez trouvé l'équation différentielle, alors ?
224. E3 : bah, « y'=y » ...
225. E4 : bah, je n'arrive pas tracer la tangente en P en plus ...
226. P : ah, parce qu'il faut ouvrir une autre macro
227. E3 : mais, d'un autre côté, il faut mettre une valeur absolu...
228. P : ouvrir... « macro » ok... et c'est la troisième
229. E4 : ah, ok... donc, c'est... donc
230. P : voilà... et là je dois créer un point, et l'axe, l'axe, l'axe des « y », non des « x » excusez-moi. Voilà
231. E4 : ok, merci
232. E3 : excusez-moi... mais euh, là en fait, en fait comme ça, parce que sinon il faut prendre le vecteur...
233. P : d'accord... ça, c'est vous ... je ne sais pas, c'est comme vous vouliez
234. De :-E3 : mhm
235. P : moi je veux rien savoir
236. E3 : bah oui, parce qu'on était d'accord, on est mis en valeur absolue... on a mis la valeur absolue, là, puisque la... la distance c'est euh... c'est pas ça la distance en fait. Ah si, c'est racine de «  $x^2 \dots (x-1)^2$  »... donc ça fait machin... C'est bon, c'est valable... ..
237. E4 : (...?) elle fait ... comme ça...
238. E3 : non, parce que si on passe à une dimension plus grande, on fait racine de machin de ... au carré plus l'autre au carré, donc ça fait une valeur absolue, je pense
239. E4 : (... ?)
240. E3 : racine de (« y »)
241. P : ah, oui, oui... mais là vous avez une équation différentielle avec une valeur absolue, alors ?
242. E3 : mais non, f(a) ... égal f(a)
243. P : eh si f(a) est négatif
244. E3 : euh... ah là là... moi, je vais le mettre dans l'autre sens... oui, parce que si ça je le mets dans le sens (nul)
245. P : dans quel sens ?
246. E4 : te mets juste «  $y_P - y_Q$  »
247. P : d'accord, ouais
248. E3 : mais ..., je ... (... ?) en quelque part, non ?
249. P : qu'est-ce que vous trouverez ?
250. E3 : parce que la distance elle pourrait être, euh...

251. P : oui, mais la pente c'est quoi ?  
 252. E3 : là je prends une valeur algébrique, en fin, je prends une valeur algébrique ...  
 253. P : voilà, il faut prendre une valeur algébrique pour la pente  
 254. E3 : voilà  
 255. P : ouais, et qu'est-ce que c'est par définition la valeur algébrique de la pente ?  
 256. E3 : alors, la valeur algébrique de la pente... euh... ah c'est l'équation de valeur algébrique...  
 257. E4 : non, mais là, la pente elle est positive  
 258. P : c'est  $QP/RQ$ , ah, en valeur absolu, là vous l'avez interverti, parce qu'on va comme ça, c'est pour ça que vous n'avez pas sorti (...?)  
 259. E3 : je ne sais pas... en valeur algébrique ça s'écrit comme ça ?  $QP$  sur ...  
 260. P :  $QP$  avec un trait dessus  
 261. E4 : oui  
 262. E3 : non, mais je jamais appris la valeur algébrique de la tangente ou je ne me souviens plus...  
 263. P : voilà, d'accord ?... parce que vous voyez bien que si la droite elle est comme ça, ça va être négatif  
 264. E3 - E4 : oui, oui  
 265. P : c'est pour ça  
 266. E3 : non, c'est vrai, oui ... ..justement... (...?) pas ... ..  
 267. E4 : on apprend des trucs (...?) ... ..  
 268. E3 : oulala, oui, mais qu'est-ce que tu fais?  
 269. E4 : bah, comme l'autre, je traçais la tangente et j'ai fait le (... ?)  
 270. E3 : et l'équation de la tangente elle est où?  
 271. E4 : là, il me manque juste ça à faire  
 272. E3 : et tu crois que ça va servir ?  
 273. E4 : bah, ouais. Sinon, ils ne doivent pas donner ce truc intermédiaire  
 274. E3 : et tu crois pas que...  
 275. E4 : ils ont fait pareil (... ?) à côté là-bas ...  
 276. E3 : bon, alors  
 277. E4 : moi, je ne sais pas comme dire ça là bas, moi je reviens à ça... ça devient pas super grave ?  
 278. E3 : non, fais bouger, fais bouger, et alors ...  
 279. E4 : je (... ?) pointer ...  
 280. E3 : peut être ... euh, ouais, assez gentil mais de un autre côté...  
 281. E4 : attend, viens voir, viens voir. Non, non, qu'est-ce qu'il fait... il fait que de bêtises. C'est pas moi c'est lui-ci... (...?) j'ai fait bouger seul le point... le petit truc...  
 282. E3 : voilà, comme cela. Attend là, attend là, regardez (...?)  
 283. E4 : il y rien qui reste constant ?  
 284. E3 : c'est le même qui reste constant, c'est 2  
 285. E4 : mhm  
 286. E3 : je sais pas ce que c'est... mais... Cela à là elle (vaut) 2 ?  
 287. E4 : c'est là, c'est de  $P$  à... .. attend je vais nommer les points. Je sais faire ça, moi je sais utiliser l'ordinateur... Alors, lui il va s'appeler... ah, non, mais je suis conne, parce qu'il fait deux segments ... non, attend, on va tout recommencer. Tu vois, comme je le recommence ça va aller super vite... Non, non... « ouvrir », c'est pas ça que je voulais faire. Non, pas ça non plus... Allez! allez!... Troisième activité, voilà... non

### Troisième étape : le retour aux tractrices

288. E3 : non ?  
 289. E4 : moi, je trouve (...?) oui. Voilà. Attend... on va pas tracer un invariante... Tangente ... on va créer un point... point...  $P$  (... ?) si je le mets là ? Up, « nommer » ... .. grand  $P$ ...voilà. Ensuite, on va tracer tangente... La tangente, ce point et cet axe. Et alors on est d'accord j'ai la tangente. Ensuite on va faire l'équation  
 290. E3 : t'avais déjà définie la tangente (...?)  
 291. E4 : t'as revu l'autre feuille ?  
 292. E3 : oui  
 293. E4 : ok, ensuite, on y va. J'ai dit perpendiculaire, donc... (... ?) alors par ce point... perpendiculaire à cet axe. D'accord, ensuite... « nommer », nommer, nommer. C'est la droite, non c'est pas la droite je vais nommer, non, c'est pas ça..., ce point je l'ai... intersection  
 294. E3 : bah, elle n'existe pas  
 295. E4 : « nommer »... non!  
 296. E3 : bah, c'est le système de coordonnées. Mais c'est le système de coordonnées, ah non... Comment ça se fait? Mais laisse tomber c'est pas... ah mais si t'es obligée. Non, fait distance c'est bon, on va trouver...



297. E4 : moi je fais la droite... ..
298. E3 : bah, non. On va le trouver quand même
299. E4 : alors après. Il n'est pas nommé ? il est con (...?) euh...
300. E3 : mhn, c'est marron ce truc
301. E4 : il est con ce truc. Bon, je vais nommer un point, mais il est con. Attend je vais créer un point
302. E3 : (... ?) pas... .. Intersection de la droite... et le système de coordonnées ... alors... on va le nommer si tu veux (...?)
303. E4 : intersection de...
304. E3 : mais non!, allez!. On s'en fout de ça Julie
305. E4 : non, c'est important... Voilà, normalement je nomme les points (...?) on a tracé
306. E3 : ça va pas marcher non plus si (...?)
307. E4 : ce point. C'est comme déjà qu'il s'appelle, il s'appelle ? Q ?
308. E3 : non, mais on l'appelle comment on veut, non ?
309. E4 : ouais, on (...?) va tout garder (...?) des trucs (...?) ... voilà, et lui ... et lui c'est quoi? (... ?)... voilà. Ensuite on veut les distances... les distances, distances... ce point à ce point... cet axe. Et je le mets là. Ensuite ce po... non! ... ce point
310. E3 : non, tu vas pas appuyer... il faut en prendre les distances maintenant... distances...
311. E4 : alors, ce point, ce point, cet axe. Après, on met ce point, ce point, cet axe et là. Là voilà
312. E3 : comment tu peux faire bouger normalement ?
313. E4 : on va pointer...
314. E3 : donc, il faut mettre l'équation ... ah non, on l'a... Quel objet ? Non... le point, si le point... Le point M il faut bouger
315. E4 : c'est M ou P ?
316. E3 : non, mais le plus bas, parce que sinon on voit pas l'équation
317. E4 : (... ?) il y a la distance qui reste constante, c'est, euh...
318. E3 : il faut mettre rétroaction, attend, attend, attend. On voit rien, alors... .. Là ça serait  $-1/2$ . Il faut voir si ça touche, si ça continue?... C'est bon, c'est  $1/2$  de ...
319. E4 : de quoi ?
320. E3 : c'est  $1/2$  de la distance PQ
321. E4 : la pente ?
322. E3 : la pente
323. E4 : non, ça fait  $-1/2$
324. E3 : ouais, ça fait  $-1/2$ ...
325. E4 : on a à P, on a P. C'est quoi ce truc qui reste constant ? c'est... PR reste constant...
326. E3 : euh, non, ça marche pas
327. E4 : distance de P à R...
328. E3 : mais non, regarde...  $1,41$  divisé par 2 ça fait pas  $0,99$ ... .. Mhm, donc, alors... en faisant (...?) ... en utilisant ... ah,  $1,42$  ça fait rien (en plus) ... on est pire
329. E4 : on avait tout à l'heure que (PR) restait constante
330. E3 : mais c'est pas sûr... Bah, si mais il faut trouver une tangente, un truc avec les autres. Pour pouvoir appliquer soit la ... .. la tangente, soit un truc comme ça, quoi...  $0,75$  fois 2 ça fait quoi ?  $14$ ...  $15$  ... c'est ...
331. E4 : ché pas
332. E3 : celles-là, elles sont pas mal les valeurs, attend ...  $0,75$ ... .. Attend, mais si on fait, euh...  $0,75$ ... t'as pas une calculatrice?
333. E4 : non ... ..
334. E3 : côté opposé... .. Eh! c'est pas si mal que ça, ça... .. J'ai fait quoi ? Côté opposé... j'ai fait côté opposé sur l'hypoténuse... côté adjacent sur l'hypoténuse... Ça ne marche pas ... Non, mais attend... ..
335. E4 : tout à l'heure c'était quoi qu'on avait de constante, c'était PR ? Mais là ça nous sert à rien d'avoir cette constante
336. E3 : mais, non, si, c'est ce que j'ai essayé de faire, en fait. Je divise par 2 chaque fois... je fais côté machin truc sur hypoténuse... .. et là ça marche pas en fait. Parce que j'essaye de trouver, euh ...
337. E4 : parce que de coup ils étaient ... euh (...?) ...
338. E3 : cosinus ou le sinus
339. E4 : là, ce qu'on a c'est que... attend, distance de P à R c'est constant. PR c'est sur la tangente
340. E3 : pourquoi (tu dis) que PR est tangente ?
341. E4 : parce qu'ils sont tangentes
342. E3 : j'ai pas compris en fait tout à l'heure.. la pente égale à la ordonnée...
343. E4 : moi, si je crois... la tangente (elle marche pas) ... .. si t'appelle cet angle-là «  $\alpha$  »... t'aurais pas-y comme tout à l'heure «  $\tan \alpha$  »

344. E3 : oui, mais là... (... ?) la distance ... la distance c'est pas le même que la tangente... c'est pas le même qui ... plus celui qui est constant, c'est pas le même, donc il faut changer...
345. E4 : d'accord tu changes, mais t'as quand même ça, cette distance qui est constante Quoiqu'il en soit, si t'appelles cet angle-là «  $\alpha$  »...
346. E3 : oui
347. E4 : ça sera toujours égal (... ?) ... on aura toujours tangente de cet angle-là qui sera toujours égal à la pente de la tangente...
348. E3 : mais, bah oui. C'est ce qu'on en cherche
349. E4 : d'accord. Donc, tu as PR constant
350. E3 : non, t'as pas PR cons...
351. E4 : si, si, PR constant
352. E3 : si PR est constante, PR égal constante
353. E4 : c'est égal à 2
354. E3 : mais c'est plus égal à la tangente...
355. E4 : non, mais pour la tangente tu fais côté... côté opposé sur côté adjacent c'est la tangente
356. E3 : oui, c'est ça! ...
357. E4 : d'après Pythagore t'as que...
358. E3 : (...?) que RP égale à racine...
359. E4 : (... ?) racine carré ... qu'est l'hypoténuse au carré. Nous ce qu'on a c'est l'hypoténuse qui est constante... ..
360. E3 : alors, on va faire, euh... .. T'es d'accord ?
361. E4 : de quoi ? ...
362. E3 : puis c'est ça... ah bah ouais... est-ce que PR, euh... des machins trucs... en fin (...?) de faire (...?)
363. E4 : le 2 ... c'est quoi déjà ? ... c'est l'adjacent donc...
364. E3 : ouais
365. E4 : donc c'est l'hypoténuse qui est constant... .. c'est tangente égale à ... ..divisée par... .. racine carré de 4 moins côté adjacent au carré ...
366. E3 : oui! ...Ça marche! avec un signe moins accroché... donc, c'est quoi que je vais faire ? ... QR
367. E4 : tangente égal ...
368. E3 : je sais pas, si le signe est faux
369. E4 : racine carré... de 4...
370. E3 : c'est moins
371. E4 : sur adjacent
372. E3 : ah mais oui. Je suis bête. On le laisse ... c'est plus, euh ...
373. E4 : là, ça fait...
374. E3 : tout à l'heure on avait quoi ? ... .. QP/RQ, Donc là c'est sur RQ... Attend, mais pourquoi c'est moins ?... J'ai pas de moins, moi... QP...
375. E4 : alors... donc ...
376. E3 : c'est vrai qu'il y a un moins, c'est bon... Donc, on arrive à «  $y' = \sqrt{4 - QR}$  euh ... QR ... ok mais QR je sais pas combien il va valoir ... .. J'en ai marre ... .. je crois que... (... ?) je ferais ...
377. E4 : un petit dessin, tu veux pas...
378. E3 : un peu de conneries... .. «  $RQ = \sqrt{PR^2 - QR^2}$  »... Voilà, il faut faire comme ça... donc ... « PR – PQ »... donc QP ... .. sur racine de 4 ...
379. E4 : elle n'est pas définie (...?)
380. E3 : moins  $PQ^2$ ... Voilà. A partir de là j'ai égal  $f(Q)$  ... 0...  $f(P)$  ...
381. E4 : ouais mais (...?) me planter
382. E3 :  $f(P)$  ?... Ah mais là c'est bon, parce que non...  $f(P)$ ...  $f(P)$  ... on a dit  $f(P)$ , c'est «  $(f(a) - 0)/\sqrt{4 - f(a)^2}$  »... Donc, ça fait «  $y/\sqrt{4 - y^2}$  »... avec un moins
383. E4 : c'est ça la équation ?
384. E3 : ouais ... ..
385. E4 : bah, alors, je vais la marquer. Parce que là on demande que ... « quelle est selon vous l'équation ? »
386. E3 : mais attend, on va demander quand même si on a trouvé quand même, non ?
387. E4 : ouais, en fin (...?) juste que ça ... on a quelque chose de précis... .. on va remplir ... « comment avez-vous procédé ? » ... ..
388. E3 : «  $-y/\sqrt{4 - y^2}$  » ? [elle demande à un voisin]
389. Ex : ouais
390. E4 : c'est bon ? ... Alors...
391. E3 : c'est bon
392. E4 : «  $y' = -y/\sqrt{4 - y^2}$  »... là je mets que l'équation parce que c'est ce qu'on nous demande, en fait (...?) ... .. Alors, « comment avez-vous procédé ? »... .. alors, [elle écrit] « en s'inspirant de l'activité 2 bis »...

393. E3 : il faut que tu dises que ... ici la ... mesure (...?) en fin
394. E4 : « 2 bis ... on trace un triangle rectangle »... comme il est dessiné « sur la page précédente ..... et dont l'hypoténuse s'appuie sur la tangente »... ..
- (changement de cassette)
395. E3 : (...?) je prends que l'équation
396. E4 : ... sur la tangente,
397. E3 : ah je suis fatigué
398. E4 : alors, là (...?) on n'a pas des (...?) propriétés, non ? Pour la suite
399. E3 : il faut la déduire ?
400. E4 : ouais, bah, si, (...?) juste comme même ça
401. E3 : ouais, alors, déjà il est indépendante de la variable « x » et donc c'est une équation... euh... c'est une équation particulière, c'est une équation autonome ... euh, ensuite ...
402. E4 : et ... c'est ça une autonome ?
403. E3 : ouais, c'est autonome il est indépendante de la variable « x »... donc on cherche les solutions constantes «  $y = \alpha$  », «  $y(x) = \lambda$  » ... donc ça c'est «  $y' = -\lambda/\sqrt{4-\lambda^2}$  »
404. E4 : tu mets un truc  $\lambda$  ?
405. E3 : ah? ... euh ... donc ça, qu'est ce qu'on a comme ? ... .. là c'est «  $(2-\lambda)(2+\lambda)$  » ... euh ... ..
406. E4 : c'est «  $\lambda = 2$  » et  $-2$
407. E3 : et c'est «  $y = \text{constante}$  »... ça vaut 0 finalement
408. E4 : pourquoi tu (...?)... ben, tu as «  $\lambda=0$  » mais il y a que «  $\lambda=0$  »
409. E3 : ah, non, on a «  $\lambda^2 + \lambda = 0$  »... ah non
410. E4 : non c'est pas (...?)
411. E3 : donc «  $\lambda = \dots$  »... oui ça correspond ... euh, une seule solution ... possible... alors, est-ce que ça marche pour « y » identiquement égal à zéro ? On a bien ... «  $y'=0$  » ... donc... c'est une solution... Donc en plus euh, quelque soit les solutions, elles sont toutes euh, tel que quelque soit « x », appartenant en grand I... si ... «  $y(x) \neq 0$  » ... Alors, on a «  $y'/y = -1/\sqrt{4-y^2}$  »... donc ça tu peux l'intégrer parce que tu peux écrire «  $-1/2\sqrt{1-(y/4)}$  » ... (... ?) on met tout au carré... égal «  $y'/y$  » ... donc ça fait «  $\ln |y|$  » qui est égal à ... ça c'est ... l'arc tan, non ?... (... ?) ... arc tan ...  $y/2$
412. E4 : pourquoi c'est «  $\alpha$  » la solution constante ?
413. E3 : ouais
414. E4 : ça sert à quoi ?
415. E3 : ça sert à ça... en pouvoir diviser en (...?) mais attend je le vais faire parce que ... si, tu vas y aller ?
416. E4 : mmh, non
417. E3 : on cherche les solutions singulières... il faut que tu écrives, on cherche les solutions ... singulières, c'est-à-dire, telles que ... .. (... ?) tel que «  $\lambda = \text{constante}$  » il faut mettre «  $\lambda$  » parce que ... .. on est bien «  $\lambda = 0$  » car ...
418. E4 : mmh... mais qu'est ce que tu fais là ?
419. E3 : il faut que l'on explique un peu pourquoi «  $\lambda = 0$  », hein, ... car, alors «  $y'=0=-\lambda/\dots$  »  $y'=0=-\lambda/\sqrt{4-\lambda^2}$  » ... Par l'intégral de cosinus « x » ... .. Aucune de ces droites n'est ... Aucune de...
420. E4 : des courbes solutions ...
421. E3 : aucune des courbes solutions va à couper, euh, ... l'axe de ... des abscisses ?... Donc quelque soit... .. tu es d'accord pour ça ? ... elle va à couper l'axe des abscisses, Donc, quelque soit « x » appartenant à I... «  $y(x) \neq 0$  »... donc là tu peux diviser, on fait ... (... ?) «  $y'/y = -1/\sqrt{4-y^2}$  » et là on intègre... «  $\ln |y| = \dots$  » alors là, moi je dis « - arc tan ( $y/2$ ) » parce qu'en fait, si tu fais (g o f)' ... donc la dérivée d'arc tan ... c'est «  $1/ \dots$  »
422. E4 : parce qu'en fait est égale «  $-1/ \dots$  »
423. E3 :  $1/2$ ... non c'est (... ?)
424. E4 : c'est le 4 un facteur
425. E3 : ouais, je met le 2
426. E4 : donc, ça fait «  $2\sqrt{\dots}$  » de (...?)
427. E3 : ah (... ?) ouais ... (... ?) sur 2
428. E4 : au carré...
429. E3 : voilà... donc là tu reconnais «  $1/\sqrt{1-x^2}$  » ce c'est l'arc tan ... et comme elle est composé ...
430. E4 : arc tan (...?) par racine carré c'est pas arc sinus quand c'est comme ça c'est avec la racine carré
431. E3 : ah, si tu as raison...
432. E4 : arc cosinus, c'est (... ?)
433. E3 : et avec un moins, c'est arc cosinus, je crois bien, quand il y a un moins en plus... t'as une c'est ... ah, non, c'est un plus

434. E4 : moi, je crois que c'est arc cosinus...
435. E3 : c'est arc cosinus...
436. E4 : et là on a juste un truc
437. E3 : c'est – arc sinus... ouais, ben ouais, c'est ça
438. E4 : arc sinus... il a juste un petit truc (...?)
439. E3 : la primitive de ...
440. P : une primitive!
441. E3 : la primitive
442. P : une! ... alors si vous dites au jury de CAPES c'est (...?)
443. E4 : ha, ha
444. P : il est sur que vous l'aviez pas, ah non, c'est le truc qu'à vous faire, mettre à le porte
445. E4 : ah, ouais
446. P : pourquoi, c'est une primitive ?
447. E3 : parce qu'il y a la constante (...?) dire après
448. P : ben voilà ... attention à ça
449. E4 : on s'était juste à (...?) là ha, ha ... une primitive de ... quand on va faire un moins, euh ...
450. E3 : ah, hein, s'il est bien...
451. E4 : en fait, on sait plus si arc sinus ou arc cosinus
452. E3 : non, c'est arc sinus... Et arc cosinus ce serait bien en plus ....
453. P : mmh ... pas de tout, y'a ... ben non, non, non, c'est ... parce que comme sinus, comme ... on va avoir euh ..., non, non, non... je ne me souviens plus exactement, mais certainement pas, simplement vous changez le ... parce que vous avez ... ça vous avez dit que c'était arc sinus ?
454. E3 : aha
455. E4 : on sait plus, c'est euh ... on sais pas justement ... si c'est arc sinus ou arc...
456. P : ce que m'inquiète un peu c'est que ça s'annule, ça devient infini, c'est ça que m'inquiète
457. E3 : (en  $\pm 2$ ) ?
458. P : bah oui, pour «  $x = 2$  » ... il y a un problème... non ?
459. E3 : oui, c'est vrai..., c'est une primitive ?
460. P : oui... oui, mais quand même...
461. E3 : et ben... y'a une tangente, euh, horizontale... ah, ouais, c'est l'arc... Ben, justement c'est là... Non, ça c'est CH que je regarde ...
462. P : euh... non, c'est ... euh ...
463. E3 : non, non, moi, j'ai regardé ça, je prends la tangente ...
464. P : attendez, quand  $x$  tend vers 1,  $x$  c'est le sinus, donc ça veut dire que l'angle tend vers  $\pi/2$ ... donc c'est bon ... ouais
465. E4 : c'est l'arc sinus
466. P : voilà, et donc, qui vous devra (...?) aussi quelque chose comme ça pour «  $x$  » sinus
467. E3 : oui, oui, c'est avec un plus
468. E4 : avec un plus, parce que sinus elle tend (...?)
469. P : mais, non ... c'est pas possible...
470. E3 : alors, c'est moins...
471. P : voilà, exactement...
472. E3 : c'est moins là, d'accord ...
473. E4 : donc, cela c'est arc cosinus
474. E3 : l'arc cosinus
475. P : ouais
476. E3 : finalement, c'est arc cosinus
477. P : mais, comme ... comme vous intégrez ? ... c'est qui me fait peur, vous pouvez pas intégrer comme ça!
478. E3 : et pourquoi ?
479. P : et après qu'est-ce que vous faites ?
480. E3 : euh, ben ... euh ...
481. P : ah... d'accord, comme ça! Ah, oui, oui, d'accord, non, non, c'est bon
482. E4 : c'est (... ?) l'exponentielle de l'arc ...
483. P : d'accord
484. E3 : on a même vérifié que c'est tellement nul
485. P : bon, je vais ramasser le (...?), Julio va ramasser les feuilles juste (...?) un petit bilan
486. E4 : arc cosinus de  $y/2$  ...
487. E3 : donc ... «  $y$  » est bon ... donc «  $y = \pm$  ... »
488. E4 : non, non ...

489. E3 :  $\pm$  ... exponentiel ...  
490. E4 : non, c'est grand k  
491. E3 : d'accord  
492. E4 : c'est moins ou c'est plus ? Comme ça c'est plus ... non c'est plus ça... mmh  
493. E3 : (...?) ça arc cosinus (...?) ...  
494. E4 : arc cosinus ...  
495. E3 : «  $y/2$  »  
496. E4 : «  $y/2$  » alors c'est bon, pour cela c'est bon  
497. E3 : aha  
498. E4 : donc ça-y c'est de cette forme là ... donc pour vérifier, pour vérifier on tracerait...  
499. P : alors .... juste un petit bilan parce tout le monde ... .. [le professeur fait le bilan mais les étudiantes continuent à remplir les fiches]

**(fin de l'activité)**

# **Binôme E1/E2**

**L'étude descriptive des courbes solutions de**

**l'équation différentielle  $y' = \frac{y^2 - 1}{x^2 + 1}$**

**L'expérimentation de l'année 2003**

## Binôme E1/E2

## Première partie : le travail en papier/crayon

1. E1 : donc on va essayer de tracer les choses joliment ... je sais pas de tout comment (... ?) des courbes
2. E2 : on dirait un champ magnétique ... qu'est ce qu'on va (... ?)
3. E1 : (... ?) essayer de tracer les courbes avec ça... de façon à que ce soit tangent (... ?) je sais pas beaucoup ... j'essaie de faire un truc quoi ... ben, c'est (... ?) équation ... voilà (... ?) voilà, qu'est ce que tu en penses ?
4. E2 : (... ?) en papier / crayon (on le va faire)
5. E1 : par contre (... ?) ici je pense que (... ?) pourquoi (... ?)
6. E2 : alors ...
7. E1 : moi j'ai trouvé une courbe qui va ... dans les pentes là ... euh, ben qui serait tangente à toutes ces pentes là ... je ne sais pas, maintenant je ne sais pas comment faire cette courbe ici ... euh ... j'ai l'impression que c'est quelque chose comme ça quoi ... elle va juste comme ça, non ? Mais je ne suis pas sûre.
8. E2 : essaie de reprendre déjà ... déjà à partir d'un cas simple ...
9. E1 : il faudra (... ?) entre (des autres) ...
10. E2 : et bien... il y a déjà euh ... tous les points qui ont une tangente horizontale...
11. E1 : oui ... donc on aura pas forcément une courbe ici, (... ?) ça
12. E2 : on aura déjà ... ça sera déjà ... elle fait partie de la courbe quoi ...
13. E1 : ouais
14. E2 : la courbe égale ... était égale ... en fin, donc ... la tangente horizontale...
15. E1 : alors ça serait une isocline en plus, tu vois (... ?)
16. E2 : (... ?) parce que sinon ...
17. E1 : ah oui
18. E2 : parce que cette (... ?)
19. E1 : non, c'est pas (... ?) ... est-ce que ce c'est une isocline cela ?... oui
20. E2 : ce qu'il faut dessiner quelques courbes solutions... on va voir, une première courbe ... la première c'est la droite ...
21. E1 : bon, alors celle-ci ... ne couperait pas l'autre mais par contre j'ai l'impression que ça sera quand même comme ça... je ne suis pas sûre de moi mais bon ...
22. E2 : dans ce cas là tu as le point
23. E1 : non mais ... elles ne se coupent pas, euh
24. E2 : elles n'ont pas la même tangente... attend... qu'est ce qu'il faut dessiner ? ... quelques courbes solutions ...
25. E1 : voilà.
26. E2 : quelques courbes solutions ...
27. E1 : ben, dessiner (... ?) une (... ?) comme ça, celle-ci, une autre ... celle-ci me semble pas mal... euh... il y a sûrement d'autres qui sont ...
28. E2 : alors c'est pas les isoclines qu'il faut dessiner
29. E1 : non, c'est les solutions
30. E2 : donc ... les courbes solutions
31. E1 : (... ?) regarde par là ... qui vont être un peu ... un peu pareil ... (... ?) pas assez
32. E2 : je (... ?) ... on prend ...
33. E1 : tu vois, il y a de courbes qui se ... qui passent par ce point là et qui sont tangentes ... tangentes à ces points là ... à ces points là
34. E2 : non, c'est pas tangente ... soit ... qui passent par ... ah oui, elles le sont ...
35. E1 : mais il faut que toutes les petites pentes soient tangentes à la courbe
36. E2 : mais comment on sait qu'elles se (relient) en deux points ?
37. E1 : oui, c'est ça que ... on fait ça un petit peu au pif quoi ... (... ?) ... alors je vais trouver (... ?) ... j'ai l'impression quand même qu'on en a 2 quoi (... ?) ... elle comme ça là ...
38. E2 : (... ?) au pif il y a...
39. E1 : ouais, au pif ... ouais, ouais ... ça serait au pif ... voilà, je sais pas si c'est plus là ou plus là-bas ... et là euh ... de toutes façon, là on a bien l'impression qu'on a des parallèles.
40. E2 : ah pour (... ?) sinon, je peux ...
41. E1 : vas-y ...
42. E2 : je prends ... un super machin (... ?) un truc comme ça
43. E1 : voilà elle est (... ?) un jolie petit (... ?) ...
44. E2 : (... ?) et cela ... ensuite ... (on traite) ... puisque là, là il y a une idée qu'on voit bien (... ?) si on veut choisir ...

45. E1 : oui
46. E2 : il faut trouver ... je prends ce point là ... donc ... là c'est ... c'est peut ...
47. E1 : on n'a va pas pouvoir passer ... et en plus (... ?) elle va pouvoir passer ici
48. E2 : elle fait (... ?) ça... ça fait ça... ça nous fait un truc euh ...
49. E1 : ah oui
50. E2 : (sûr) si... si en sens envers ... euh ...
51. E1 : par contre on a quelque chose comme ça ... voilà tu vois ... euh ...
52. E2 : voilà, d'accord ...
53. E1 : il y a quelque chose comme à l'intérieure.
54. E2 : ok, à l'intérieure et là on a une limite ... (... ?) une limite
55. E1 : et ça aussi
56. E2 : et à ce moment là c'est... c'est ça ... (... ?) attend ... tac ... (parce) que ce sont les courbes... là... ce point là, qu'elles sont ... ensuite c'est des points du même (... ?) qu'il faut que ... un (... ?) je (suppose) pas (... ?) forcément un lien (un point là)
57. E1 : oui
58. E2 : ensuite ... parce qu'elle peut pas ... elle peut pas atteindre ... elle peut avoir un ... je ne sais pas, elle peut pas monter ... si elles font ... si ce sont des fonctions, elles peuvent pas... elles peuvent pas faire de ... (... ?)
59. E1 : non, non ...
60. E2 : je ne pense pas
61. E1 : euh ...
62. E2 : par contre, (il y a) (... ?) verticale
63. E1 : si, si ... là ... tu vois ... ouais ... euh ... (... ?) verticale ici
64. E2 : (... ?) on (... ?) pas ... à l'infini quoi ...
65. E1 : (... ?) ... euh par exemple le point est dessiné euh ... ça va se terminer par une verticale quoi ...
66. E2 : donc, dans ce cas là ça va pas, parce qu'on n'as pas (... ?) ça
67. E1 : (... ?) donc on les apprend les représentations mais ... à mon avis tu vas pas pouvoir passer (... ?) (à un moment) de celui là à celui là ... c'est difficile de passer comme ça ...
68. E2 : on voudrait cela ... là, et mais là, on peut pas passer que comme ça ...
69. E1 : (... ?) ce (... ?) pas bien (suivi) ... euh ...
70. E2 : en (... ?) ...
71. E1 : là oui... à mon avis ça suis ce (... ?) à mon avis ... ouais, ouais, parce que (... ?) ouais
72. E2 : tu vois et ça ...
73. E1 : et on va pas...
74. E2 : et ça...
75. E1 : on va pas aller jusqu'à là... on va pas toucher ici... (... ?) on va rester tangente ici
76. E2 : bon, si on reprend ça ... cela... ... ouf !... ça (m'était) ... je (... ?)... je comprends tout le trois.
77. E1 : celle que je vois bien c'est celle-ci là, ça se suis bien là ... (... ?) ouais ... (bon) ouais c'est bien ça ... peut être bien, plus ... plus que (... ?) pas
78. E2 : d'accord
79. E1 : (c'est pas sûr)... et puis de toutes façons là ... on va pas aller dessous... voilà on va retourner ... on va retourner je sais pas où ... mais c'est pas très, très claire ... ça va ... on va retourner ... et celles-ci ... celles du milieu là... elles sont (coincées)... là... je vais peut être (... ?) (on sait faire le plan)...
80. E2 : ah celle là ... si on (... ?)
81. E1 : comme ça on a (... ?) ... (... ?) si tu vois ... euh ...
82. E2 : d'accord
83. E1 : mais je vais (... ?) tout ici...
84. E2 : là comme ça ... ah ouais, ça va...
85. E1 : donc ... (il aura) après ... ben ... donc on a (... ?) ... voilà ... bon, ça suffit peut être ... parce qu'après on va essayer de voir une autre chose (... ?) la courbe solution qui passe par le point (-2,-2)... et on va essayer de (-2,-2) ... ah ... -1 ici ... -2 ici ...
86. P : [elle parle au group] c'est pas simplement un exercice de coloriage, de dessin ... euh, d'accord ? (... ?) des raisons mathématiques quand même ?
87. E1 : alors  $C_1$  ... on demande celle-ci ... donc à mon avis celle-ci ... elle a une pente ...  $C_1$  c'est un peu celle que j'avais dessinée (... ?) je crois ... en fin, moi je ne sais pas comment on le va ...
88. E2 : à moins que (... ?) les choses comme ça mais c'est ça
89. E1 : ouais, je (... ?) ça complique bien les choses ... (... ?) apparemment la pente elle est bien (... ?) bon (... ?)  $C_1$
90. P : [elle parle au group] (... ?) les tangentes elles sont pas dessinés partout, on les a mis sur une grille ...
91. E1 : oui, c'est pour ça !



92. P : [elle parle au group] il y en a entre les éléments de la grille il y a aussi des tangentes partout !
93. E1 : bon ... voilà, déjà on sait que  $C_1$  c'est ça ... euh ... (en lisant) « Décrire l'allure de la courbe  $C_1$  sur l'intervalle  $[-3,3]$  » ... alors -2 ici, -3 c'est là ... d'ici on va jusqu'à là ... (... ?) voilà la courbe entre moins (... ?) et (... ?) ... ah si, d'accord ... (en lisant) « Qu'arrive-t-il à la courbe  $C_1$  quand  $x$  tend vers l'infini ? »... ben,  $C_1$  euh ... on va (faire) expliquer pourquoi on a fait ça peut être
94. E2 : oui
95. P : bon, il faut (donner) des raisons
96. E1 : ouais, il fait ça
97. P : ce qui nous intéresse et qui (... ?) nous intéresse ... donc celles-là elles se rejoignent ?
98. E1 : euh ... oui, apparemment il y a une asymptote ici
99. P : ah, elles se rejoignent ou pas ?
100. E2 : non
101. E1 : ah, non, non elles se rejoignent pas ... elles ont une asymptote...
102. P : il faudrait bien le dire alors ...
103. E1 : oui, il faudra expliquer ... ah ... [le professeur part] ...
104. E2 : elles viennent (... ?)
105. E1 : ah ouais, elles sont parallèles ... elles sont parallèles en fait ... ouais
106. E2 : elles viennent se (caler) là-dessus...
107. E1 : ouais, c'est ça oui ... alors, qu'est ce qu'on va dire ?
108. E2 : et là pareil (... ?)
109. E1 : on trace des courbes de ... alors
110. E2 : ok pareil sur ...
111. E1 : ouais, on va exprimer ça, on va tracer des courbes dans le ... euh ... qui sont tangentes ... euh ...
112. E2 : ah ... on (... ?) ... en fait ... on ...
113. E1 : on trace des courbes qui sont tangentes ... le point euh ...
114. E2 : on se décale horizontalement ... c'est un point de (... ?)... on prend le premier point euh ... sur la courbe, on se pose sur la courbe... on part de gauche à droite... mais (... ?) le sens ... (il me semble) qui est rétrospective ... mais on peut aller que ... en progressant sur les droites...
115. E1 : oui, on trace une courbe en progressant sur la droite... ouais ... [elle écrit] « on trace une courbe de gauche à droite » en suivant ... « en cherchant des pentes»
116. E2 : en cherchant des pentes de variation voisines ... euh, en fin de variation ... euh
117. E1 : en cherchant des pentes où la courbe ... elle va rester tangente...
118. E2 : (... ?) de ... euh ... en gardant la dérivée (... ?) c'est ça en fait... le succès du truc c'est ça ... c'est qu'il y a toujours une tangente ... s'il y a toujours une tangente... ça peut être que certains arrondi ... parce que si c'était pas arrondi ça ferait des points ... euh de type de rebroussement ... il n'y a pas de tangentes ... ou la tangente ... est pas la même à gauche et à droite ...
119. E1 : ouais ... voilà [elle lit] « on trace une courbe de (... ?) » en gardant le ...
120. E2 : on va dire ... euh
121. E1 : en gardant les pentes... on va dire...
122. E2 : en cherchant des points où... euh
123. E1 : [elle écrit] « en cherchant des points »
124. E2 : la courbe existe à gauche et à droite ... ben (où) il y a ... la tangente à la courbe ... est la même à gauche et à droite... ah elles sont pas (obligés) de faire un changement brusque des pentes ... donc c'est ... c'est ... je pense que c'est ça qu'on appelle « point de rebroussement » ... il n'y a pas des points de rebroussement ...
125. E1 : euh ... [elle écrit] « où la courbe reste tangente » ...
126. E2 : si on (n'a pas) des rebroussement, c'est quoi ? ... on s'est trompé ... si elles ont là ... là ... un (emblé) droite ou n'importe quoi
127. E1 : oui ... mais on ne voit pas ... (... ?) compliqué ... ben, « des points où la courbe reste tangente » ... les points où... euh
128. E2 : (... ?) la tangente qui l'a (... ?) la courbe elle n'est pas tangente...
129. E1 : elle est tangente ...
130. E2 : puisque (si) la courbe est tan... non, la tangente à la courbe, mais la courbe elle n'est pas tangente ...
131. E1 : (... ?) c'est l'un ou l'autre quoi, la courbe est tangente aux pentes et les pentes sont tangentes à la courbe ... en fin ...
132. E2 : (... ?) une (ligne) droite, la tangente ?
133. E1 : oui ...
134. E2 : euh... je ...
135. E1 : mais, elle ... bon ...
136. E2 : euh ... c'est (complètement) (... ?)

137. E1 : euh ... oui, mais elle est tangente parce qu'elle ne rencontre pas la petite tangente (... ?) bon... reste tangente aux points successifs... en fin, ou ... les points (... ?) ... .. (... ?)
138. P : [elle parle au group] quand vous remplissez la fiche nous on attend des réponses dans un (cadre) mathématique quand même, pas (... ?)
139. E1 : (... ?) alors on va essayer de (... ?) l'équation différentielle pour ça
140. E2 : (en la continuité limitée) (... ?) il n'a pas des points de rebroussement ?
141. E1 : oui, mais en fin ...
142. E2 : ça me (... ?) ... points de rebroussement ... .. parce que (... ?) il doit exister ... par l'essence de l'équation même
143. E1 : oui, c'est ça, ouais ... (il n'y a pas) les rebroussements...
144. E2 : intuitivement c'est ça qu'on fait... puisqu'on cherche à ...
145. E1 : oui, oui ... c'est vrai, c'est vrai ... on peut pas (... ?) (rebroussement)... oui ...
146. E2 : (... ?) (discute) ... parce que c'est vrai que (... ?)
147. E1 : je sais ouais ... (... ?) (pouvait-t-il y avoir des points de rebroussement) ouais...
148. E2 : (... ?) quand on n'est pas d'accord ... parce qu'on bénéficie de l'âge ... c'est (... ?) ça change ...
149. E1 : non, non, non ... je suis d'accord avec ça mais ... chercher déjà à expliquer tout ... alors ... ouais ... toujours ouais ... ce que je veux dire ... c'est essayer de dire que de façon que ... de façon que ...
150. E2 : elles ne peuvent pas se croiser... (... ?) plus ...
151. E1 : ouais ... ben, je le mets comme ça.
152. E2 : je pense que si ... si elles se croisent ... il y a un (souci)
153. E1 : si elles se croisent ... il y a un (souci)
154. E2 : ah oui
155. E1 : (... ?) pourquoi ?
156. P : est-ce que vous avez une raison mathématique ?
157. E2 : parce qu'elle a ... (... ?) tangente au même point... (... ?) la même chose que les isoclines ...
158. P : ça c'est (... ?)
159. E1 : bon ...
160. E2 : ah oui d'accord, ok
161. E1 : on va ...
162. P : (... ?) une question ouais ... je me (... ?) ... je ne fait que (... ?)
163. E1 : (... ?) tu (... ?) les idées sur le croisement ... (... ?)
164. E2 : non, c'est bon ... ce n'est pas le truc (... ?)
165. E1 : moi, je ... je parle de ce qui est là ... parce que (... ?) (c'est un truc)
166. E2 : on peut imaginer ... un noyau, en fait ... donc tu as... un noyau ... comme par exemple si on devrait former un polynôme de (... ?) point ... on peut (... ?) quoi le ... tu peux faire varier le ... euh
167. E1 : le point (... ?)
168. E2 : (... ?) un truc comme ça quoi ... regarde, je ne sais pas mais ça, je sais pas si ça peut exister ...
169. E1 : ah oui, la tangente ...
170. E2 : (... ?) comme ça par exemple
171. E1 : euh au point 0 et dans (... ?) là ... oui, voilà !
172. E2 : un truc comme ça (... ?)
173. E1 : (... ?)
174. E2 : par exemple ... voilà ... un (trois) qui serait ...
175. E1 : c'est possible ... est-ce que je (... ?) là
176. E2 : (... ?) comme ça
177. E1 : oui, on peut imaginer ça ...
178. E2 : oui, je vois ça ... (... ?) un truc (... ?) ...
179. E1 : on peut imaginer ... mais bon, on va ... oui bien ... on sait que ça pourrait se faire... (... ?) se faire (... ?)
180. E2 : est-ce qu'on peut?... mais là ... ça apparaît (... ?)
181. E1 : tu peux apparemment ... il n'y a pas tellement de truc qui (... ?) là ... (... ?) pourrait être, non ?
182. E2 : si puisque ... puisque si on (voulait) faire un truc comme ça il faudrait que ...
183. E1 : et ben... ici ... ici là, tu vois ... (se voit) comme ça là... efface là ...
184. E2 : voilà, c'est ça ... voilà, c'est ça ... .. d'accord, celle là, oui elle (a l'air de) repasser par-dessous, d'accord ... parce que c'est ça
185. E1 : ouais
186. E2 : donc ... on va donner un exemple éventuellement
187. E1 : oui, (... ?) et on va (... ?)...
188. E2 : là en revanche est-ce que ce ... là se fait que pareil, c'est pas possible ... est-ce qu'on aurait en pu avoir un (... ?) négatif que de ...

189. E1 : (... ?) à mon avis elles se rencontrent ici, elles se rencontrent ici mais pas ici ... (... ?) elles ne vont pas apparaître ici ...
190. E2 : ouais (... ?) on va essayer celle là (... ?) comme ça ... .. (... ?) dessin ... eh c'est juste pour montrer qu'elle est compris ...
191. E1 : ah ouais, tu fais le périmètre...
192. E2 : voilà ... (... ?) le system ... .. est-ce que c'est juste ce que je fais ?...
193. E1 : ouais, mais ... il te prend ... entre (... ?) avec le (point) qui était là ... ah ouais, (... ?) pas question là, tu as peut être (... ?) oui, d'accord ... tu vas utiliser ce point là, d'accord (... ?)
194. E2 : c'est (... ?) plus (... ?) là ... justement
195. E1 : ah oui, oui... donc je vais utiliser cela ... mais (... ?)
196. E2 : (mise) à la même tangente...
197. E1 : oui, c'est ça
198. E2 : en ce point ... il y a une même tangente... parce que le point il a ... si la solution ...
199. E1 : parce que...
200. E2 : si la solution ... la courbe solution ...
201. E1 : ouais, parce que là (moi ce que je vois) (... ?)
202. E2 : s'il est sur 2 courbes solution ... euh, au même temps ... de toutes façon, si ... par ce point passe une seule isocline (... ?)
203. E1 : oui, mais en fin là je suis pas très sûre de ce que tu as dessiné ... parce que je suis pas sûre ... ça correspond vraiment ... au problème, tu vois, parce que je trouve autre chose moi là ... je trouve autre chose ... on va le faire comme ça ... et le tienne (correspond) pas trop à ce qui est fait ...
204. E2 : attend... si, si parce que là regarde ... justement là tu vas chercher ça et tu vas passer là et tu vas passer là ...
205. E1 : ouais, ça dépend ... je prend le point qui a été trouvé (au même) temps je sais pas où... et moi je prends le ... j'utilise les points qui sont trouvés ici ... et tu vois, tu est passé par des points qui ...
206. E2 : ah... non, non
207. E1 : qui n'existent pas... donc tu as un peu (... ?)
208. E2 : si, si, si, ils existent mais euh ... regarde ... mais je le (... ?)
209. E1 : oui, celui-ci est là ... celui-ci... mais bon ...
210. E2 : (... ?) le 0... (attend) (... ?) je fais ça un petit bout de la tangente forcément ...
211. E1 : oui
212. E2 : alors ... ici c'était passé par le (... ?) je fais euh ...
213. E1 : alors, on va essayer de prendre un (... ?) dessin ... on fait (la tangente) (... ?)
214. E2 : (... ?) tout à fait ... comme ça ... voilà, en fait ... c'était ... moi j'ai l'impression que ... si c'était ici ... passe pas par ... en fait c'était ma (courbe) qui était loin ... mais là, la, dans l'esprit... la tienne elle passerait au dessous ...
215. E1 : ah bon, ouais
216. E2 : elle passe ... elle passe comme ça ... (ouais) c'est celle là qui (fait) (... ?) la (jonction)...
217. E1 : c'est (... ?) c'est celle-ci ouais
218. E2 : après celle-là l'on passe par-dessous ... voilà, donc en fait... j' (arrive) (... ?)
219. E1 : (... ?) reprend la questions ici... parce qu'il faut exprimer (... ?) « décrire l'allure » ... bon, alors l'allure de la courbe  $C_1$ ...
220. E2 : comme ça (la tienne)
221. E1 : alors ...  $C_1$  comme elle est d'abord ... euh, elle est ... euh, comment dire ? ... [elle écrit] « affine jusqu'à ... (... ?)
222. E2 : ah je suis (... ?) et après (... ?) celle-là
223. E1 : « puis lorsque ...
224. E2 : quand « x » tend vers l'infini...
225. E1 : donc ... « plus l'infini »...
226. E2 : quand « x » tend vers l'infini ...
227. E1 : donc «  $C_1$  est asymptote »
228. E2 : ben, elle tend vers ... elle tend vers ... à la valeur ... je ne sais pas combien ... -1 ... c'est ça ?
229. E1 : oui elle tend ...
230. E2 : elle tend vers -1 ... en fin le ... (... ?)
231. E1 : (... ?)
232. E2 : (... ?) quand « x » tend vers l'infini ... et ben, le ... le « y » euh ... le « y » tend vers -1 ...
233. E1 : non ... parallèle, parce que (... ?) on (en voit) bien ... elle ne rencontre pas -1 ...
234. E2 : non, non, elle tend ... elle tend ... on va dire ... si c'est asymptote c'est ça ... (autant) que je (... ?) ... .. et (alors) ... .. non, en ce cas là c'est pas (... ?) ... (donc) je (... ?) faire le (... ?) ... (tend vers) comme ça je pense... .. en fait

235. P : vous avez rempli les fiches là ? (... ?)  
 236. E1 : oui.  
 237. P : d'accord ...  
 238. E1 : on n'est pas (... ?) ... ..  
 239. E2 : voilà ... ..  
 240. E1 : (... ?) M ... (est-ce que) tu avais ce qu'il fallait ? ... ..  
 241. E2 : (... ?) elle (tendait) pas si tu me dis s'il tendait ...

### Deuxième partie : le travail en géométrie dynamique

242. P : maintenant vous avez le champ de vecteurs tangentes plus un vecteur qui est déplaçable et c'est ça qui est intéressant, on va le déplacer en déplaçant son origine Q...  
 243. E1 : qu'est-ce que ... il fallait faire quoi ?  
 244. E2 : on va faire ça (... ?) bon  
 245. E1 : tu as pas de (... ?) n'est-ce pas ?  
 246. E2 : (... ?) ça va permettre de ... c'est un raccourci on peut dire pour aller ...  
 247. P : il y a un zoom en Cabri ... il faut appuyer en Ctrl + ou Ctrl -, comme ça, ça vous agrandi ou ça vous euh ...  
 248. E2 : ok  
 249. E1 : ah ouais, d'accord ... (on aura plus) de choses ... ah le point Q est déplaçable ...  
 250. E2 : c'est pas (... ?) pour nous (servir)  
 251. E1 : ah oui c'est (peut être moins) (... ?)  
 252. E2 : on verra  
 253. E1 : on verra, oui ... oui, on peut déplacer le point ... d'accord, ouais, non ... ce point qui (explique) là ... ah, on le déplace ... ben, (... ?)  
 254. E2 : elle tend vers (... ?) déjà ...  
 255. E1 : (en lisant) « déplacer le point Q et écrire ... » ... on va déplacer le point Q et ...  
 256. E2 : alors ...  
 257. E1 : « écrire les informations complémentaires sur l'allure de la courbe  $C_1$  » la courbe  $C_1$  dont on a parlé tout à l'heure ? ... j'espère parce que je vois pas moi ... euh ... (... ?) en (-2,-2) ... (... ?) en (-2,-2) elle était (... ?) déjà ... elle était ici, ah oui ... en 2 ... oui c'est ça ... on va la déplacer à partir de là ? ...  
 258. E2 : donc ... la tangente (... ?) la tangente est ... quand tu bouges le point, où est le point ?  
 259. E1 : ah oui ... « à partir de ce que vous voyez à l'écran » ... bon, alors on va déplacer le point Q ... alors maintenant je l'ai (coincé) le point ... donc... je va essayer ... je (... ?) de différents bêtises... le point Q, il existe plus maintenant ... (... ?) je peux plus bouger le point Q, je l'ai mis sur le point L parce que je voulait tracer la courbe et puis voilà ... .. ouais, je l'ai (coincé) ...  
 260. E2 : et pourquoi tu l'as mis sur le point L ?  
 261. E1 : parce que c'était le point (-2,-2)... ah non, (-2,2)... (... ?) ah maintenant je suis coincé ici... je (... ?) ... c'est le point L qui se déplace maintenant !  
 262. E2 : (... ?) parce que là tu fais (... ?) truc ...  
 263. E1 : ouais, j'essaie de cliquer pour voir  
 264. E2 : ah mais je ... essaie de voir, met le point et met-le ailleurs ... (... ?) bougeait (... ?) par le point Q... parce que sinon ...  
 265. E1 : alors, pointe ... tu mets-là... je pense cliquer ce point L d'ailleurs ... le point Q il bouge plus ... alors le point Q, c'est le point qui m'intéresse, ce point oui...  
 266. E2 : tu peux (... ?) tu as (... ?) ... tu fais (... ?) le truc et ça ... ça ...  
 267. E1 : j'essaie de remplacer là..  
 268. E2 : ça ne peut pas ...  
 269. E1 : ah oui, ça marche pas comme ça [ils continuent à essayer de déplacer Q] ... ..

(changement de cassette)

270. E1 : (... ?) coordonnés ... on est (... ?) droite comme ça ...  
 271. E2 : (... ?) descend pas que (... ?)  
 272. E1 : donc ... (elle descend) ouais ... .. alors après elles doivent être confondues ... ouais  
 273. P : donc vous remplissez le cadre a) et le cadre b) ... et maintenant vous (... ?) pouvoir dire si vous avez obtenu des informations supplémentaires ou pas ... comme vous faites pour avoir une trajectoire ... et puis après on vous demande des paquets ... les paquets des courbes solutions, c'est la même question ... ce qu'on voudrait savoir c'est si vous en voyez le même nombre ou un nombre différent (... ?)  
 274. E2 : (... ?) sur ... (... ?) ... ah, (... ?) absolument (... ?) ... voilà, ok

275. E1 : donc qu'est-ce qu'on va écrire, je vois (... ?) comment faire ce que nous demande ?... parce que moi j' (avais) fait des trucs à la main (... ?) je vois pas (... ?) plus ... on sait que ... est-ce que par exemple si on (... ?) tracer de (... ?) un truc comme ça, est-ce que c'est bon ?
276. E2 : est-ce que la courbe  $C_1$ ... est-ce qu'elle va vraiment en ... est-ce qu'elle va finir là bas quoi... essaye de voir ça
277. E1 : par exemple, oui ... si elle devient affine pour commencer ... ben, si c'est bien ...
278. E2 : (alors) je prends ... voilà
279. E1 : comment tu déplaces ? ... (... ?)
280. E2 : (... ?) par là ... quel objet ? ben oui, il fallait bien (... ?) le point Q ... voilà, je prends le point Q et je me (... ?) où ... ..
281. E1 : (... ?) on voit que ça passe bien ... ouais
282. E2 : ouais, ouais (... ?) je pense parce que là ...
283. E1 : (... ?) exactement (... ?) ouais ...
284. E2 : est-ce qu'on pourrait avoir (... ?) la trace ... ah ouais, on va voir si c'est ça ... (... ?) la trace ... on va le bouger le point... et on va revenir au point (1,2) ... alors, attend ... si je reviens (... ?) truc ... on va vérifier qu'on a bien le ... la continuité de (la pente), je reviens à (... ?)... .. ok ... ensuite j'ai dit tout à l'heure... je vais (... ?) la trace ... Trace du vecteur ... (... ?) de trace ... « quel objet ? », quel objet ...
285. E1 : est-ce que tu avas cliqué sur « trace » ? ah ... je ne sais pas si c'est ici ?
286. E2 : pourquoi je le (... ?) la trace
287. E1 : je pense que c'est sur le (plan) (... ?) ... Trace ... euh ... « trace » c'est un des deux, ouais je pense ... peut être
288. E2 : (... ?) ouais ... .. (... ?)
289. E1 : (... ?) « trace » ça doit être là ... .. c'est pas la « trace » ...
290. E2 : ah ouais (... ?)
291. E1 : ben, essaie là ... on va (... ?) ... on verra tout de suite si c'est bon ... .. [ils continuent en essayant d'utiliser Trace 060]
292. P : (... ?) pourquoi il y a tout ces trucs là ? ... c'est quoi ?
293. E1 : on a mis la longueur du vecteur, on a mis les coordonnées du vecteur ...
294. P : on peut les enlever ça vous fait rien qu'on les enlève ...
295. E1 : on ne sait pas les enlever ... comment ça marche ? ...
296. E2 : ah, si, si ... (... ?) bien ...
297. P : oui c'est ...
298. E2 : je les ai pas enlève c'est tout parce que je regardait les coordonnées ... (... ?)
299. P : il faut les sélectionner (... ?) pour sélectionner je doit le pointer et puis montrer l'objet et cliquer ... .. Alors là, vous voudriez voir ...
300. E2 : on (a pointé) la taille du vecteur et puis ...
301. P : pourquoi ? non, parce que ce qu'on voudrait ... vous n'avez pas intérêt à que le vecteur soit trop long !
302. E2 : ah ouais, d'accord
303. P : ah oui ... parce que sinon vous (... ?) vous aurez quelque chose de (... ?)
304. E1 : (... ?) la trace (... ?)
305. P : (... ?) comme ça (... ?) elle est activé (... ?)
306. E2 : oui c'est bon... il y a (... ?)
307. P : vous déplacez le point Q... Déplacer ...
308. E2 : ah ouais (... ?)
309. P : vous choisissez le point Q, je pense ... et vous le déplacez doucement et pour avoir une idée, comment vous faites ? ... de ... qu'est-ce qui fait la courbe ?
310. E2 : alors, on va suivre euh ...
311. P : voilà
312. E2 : les variations (... ?)
313. P : vous suivez la flèche... c'est un peu comme si vous étiez en ski là ...
314. E1 : voilà... donc on a fait déjà ça et puis bon on a ...
315. P : voilà ... ça vous donne une idée des courbes solutions
316. E2 : attend ...
317. P : là il ne (je suis) pas (... ?)
318. E2 : ah mais la souris ... elle n'a pas bien roulé
319. E1 : (... ?) signale
320. P : vous avez une bonne souris ?
321. E1 : ah, non ... (... ?)
322. E2 : alors attend on va enlever ça ...

323. E1 : mais une fois que c'est fait ça ... moi, déjà on l'a fait ... on a fait la même ici mais euh ... on n'arrive à rien comme résultat quoi ...
324. P : vous avez le même résultat qu'à la main ...
325. E1 : ah oui ... ça se voit pas la différence ...
326. P : d'accord ... alors vous dites que ne voyez pas la différence ... non, non mais les traces vous les avez ... il y a (... ?) des traces
327. E2 : je voudrais enlever la trace ...
328. P : qu'est ce que vous voulez enlever ?
329. E2 : la trace... ben
330. E1 : (... ?) la trace
331. P : voilà ça efface ... attend ... et là je comprends ... là vous avez activé la trace de L... on va la désactiver... donc on va y arriver et maintenant on va activer la trace de ce vecteur (... ?) [le professeur part]
332. E1 : alors on va effacer la trace...
333. E2 : (on va effacer) la trace ... je regarde.
334. E1 : euh (... ?)
335. E2 : (... ?) mais (... ?) il fait de ...
336. E1 : il fait de ... bon ... ..
337. E2 : (... ?) va arriver à ...
338. E1 : alors, je voit aucune information complémentaire ... parce que (... ?) ... ..
339. E2 : ok ... on va déjà activer la trace là ...
340. E1 : ah, non parce qu'on en a bien besoin ... on aura bien besoin de trace...
341. E2 : pour (... ?) ouais... ouais
342. E1 : comme ça on fait des courbes... alors je vois la confirmation de ce qu'on a vu ... de ce qui a été tracé à la main ...
343. E2 : hum...
344. E1 : je vois presque (... ?) on a (... ?) d'autre ... .. (... ?)
345. E2 : (tout ce qui est) fait à la main ... comme ... ah ben, voilà c'est ça ouais ... (... ?) déplacer à la main ou déplacer le point on fait les deux (dans le courbe) ... de toutes façons (... ?)
346. E1 : un peu (... ?) ça c'est (... ?) bien (... ?)
347. E2 : utiliser ... comme l'utiliser, ben ... on ... on
348. E1 : on essaie de ...
349. E2 : en suivant le ... le (mode) de variation, en fait ... parce que certainement le ...
350. E1 : ben, on essaie de faire euh ... de tracer une courbe là qu'on (... ?) dans la (... ?) la plus ... la plus fine possible... fine, quoi.
351. E2 : la plus ... euh ... oui, voilà ... .. en suivant le ... en essayant de respecter le ... le moindre ... la moindre variation de ... la variation la plus légère des tangentes ...
352. E1 : oui, oui
353. E2 : parce que de toutes façons ... suivons sa ... ah non c'est pas ça (... ?) ça bouge ... si la tangente bouge ... c'est pas ça... (exactement) ça la variation ... je ne sais pas
354. E1 : ah ... (... ?) la plus fine possible... maintenant, une courbe fine, quoi ... c'est (beaucoup faite)... le trace ... son ... mis bout à bout (... ?)
355. E2 : pas (assez) sûr ... il fallait ... .. où est que (... ?) la ... .. en évitant en fait de générer des vecteurs parallèles, c'est ça.
356. E1 : ouais
357. E2 : c'est ça, celle-là elle est pas bonne, c'est quand ça marche pas (... ?) était de (pâté) ... en essayant de ne pas générer des vecteurs parallèles en (... ?) lors du déplacement du point...
358. E1 : ouais, c'est ça ... c'est (... ?) fait ...
359. E2 : (... ?) là (par exemple) tu peux déplacer ... un petit peu par là ... donc (... ?) un peu, je dirais, on peut faire revenir et puis ... parce normalement il n'y a pas de vecteur parallèle ... euh ... en fin, du point donné parce que sinon ça veut dire que ... t'as... t'as quelque chose de courbe ... forcément ... (... ?) (tend vers) ça ... parce que si on a une autre courbe ...
360. E1 : ouais ... on prend une (... ?) voilà ...
361. E2 : deux points avec ... euh...
362. E1 : alors deux points ...
363. E2 : avec deux vecteurs parallèles, à partir ... euh, forcément ... deux points sont sur ... sont sur une ... une demi-isocline ... et donc sur deux courbes solutions différentes, avec ça (... ?)
364. E1 : avec... avec (une pente) parallèle, oui ...
365. E2 : ah ... sont sur une même isocline ... et donc sur deux courbes solutions ... différentes, parce que ... c'est une bêtise ou pas ?

366. E1 : je pense que c'est bon ... (... ?) que ça ...  
367. E2 : si sont sur la même isocline ...  
368. E1 : [elle écrit] « deux points avec pentes parallèles sont sur une même isocline, donc... » sur deux ... donc décrivent ...  
369. E2 : non, parce que non ... parce que ces points là ils ont la même pente ... puis ils sont sur la même isocline ...  
370. E1 : mais ce sont deux courbes différentes, tu as raison ...  
371. E2 : euh ...  
372. E1 : j'ai du mal à l'expliquer ...  
373. E2 : non, parce que ... non ça fait rien ... si j'ai ... quand je dessine ça moi je ... on a bien souligné la même pente là... (en plus) c'est la même pente ... et puis... là aussi ...  
374. E1 : ouais (c'est vrai) ... là c'est ...  
375. E2 : c'est pas, c'est pas ... c'est (... ?) courbe (... ?) qu'une isocline ... elles sont  
376. E1 : ce sont deux courbes différentes ... tu as raison, tu as raison ... parce qu'on a le dessin, tu vois, le tableau là ...  $M_0$  et  $M_1$  appartiennent à deux courbes différentes ...  
377. E2 :  $m_0$  et  $M_1$  ? oui ... mais on peut imaginer que ... on peut imaginer que ... on est ... regarde... on va voir si serait pas vrai ... ça c'est pas ... ça change toujours la pente ... elle change toujours ...  
378. E1 : oui, oui, elle change d'un point à l'autre ... (... ?) complètement (elle est) différente  
379. E2 : elle change (... ?) mais là pareil, elle a toujours la même ...  
380. E1 : sauf si ... euh ...  
381. E2 : ça change tout pareil ...  
382. E1 : sauf si la droite est une droite de ... (... ?) ouais... droite définie, quoi... comme si (... ?) en fait c'est l'équation ...  
383. E2 : et c'est (... ?) c'est ... ce qu'on voit là ... c'est que le fait de déplacer en « x » ... en fait, si je déplace uniquement en « x » ... je peut pas avoir autre chose qu'une pente ... une pente nulle ... en fait c'est ça ... ben, parce que ... si la courbe ... si par exemple deux points sont sur ... si on déplace comme ça latéralement... et que je passe d'un point à l'autre ... et que j'ai les vecteurs qui sont comme ça ... euh ... c'est forcément deux courbes différentes  
384. E1 : oui c'est ça  
385. E2 : en revanche ... la seule possibilité qu'ils soient sur la même courbe solution c'est que ... la tangente soit ...  
386. E1 : ah oui ... (... ?) oui ...  
387. E2 : euh ... les choses là (on va) faire  
388. E1 : (... ?) ces paquets ... donc ...  
389. E2 : alors attend ... (en lisant) « classer les solutions par paquets »  
390. P : (... ?) vos paquets et puis donner des raisons mathématiques aussi sur le comportement, c'est ça qui nous intéresse ...  
391. E2 : « classer les solutions par paquets, selon ... » ... soit (... ?) ... et oui, il y a 3 paquets ...  
392. E1 : oui... là, là et là  
393. E2 : un paquet ... euh ...  
394. E1 : donc ... (on va essayer) de faire plusieurs ... maintenant qu'on a (... ?) ... on essaie de faire ... on prend le point Q ou je ne sais pas où ...  
395. E2 : on va, on va ...  
396. E1 : un deuxième paquet ... ah, ben, un deuxième...  
397. E2 : ouais ... (... ?) un point ... je vais revenir le (... ?)  
398. E1 : oui... ..  
399. E2 : oui, voilà ... je vais recentrer un peu ... ..  
400. E1 : si (... ?) efface-le  
401. E2 : oui ... tu (... ?) je sais pas ... (... ?) peut être revenir ... est-ce que ... comme je (... ?) pas déplace...  
402. E1 : bon ... on a plusieurs points ...  
403. E2 : ah, non, il a effacé... parce que je n'ai pas fini... il n'a pas laissé la trace ...  
404. E1 : ah bon... alors, on refait la trace comme ça, comme ça ... on voit les courbes ...  
405. E2 : là ... on peut revenir à... .. non ... puisque le point Q il reste dans l'écran lui ... donc (... ?) je sais pas quoi (... ?) ... ça marche pas ce truc là (... ?) on a ce souris (... ?) on peut pas déplacer ...  
406. E1 : donc on peut rien faire  
407. E2 : (... ?) ce souris ... parce que quand ça bouge il attend un délai de moins d'une seconde (... ?)  
408. E1 : on a rien pu faire ...  
409. E2 : on peut effacer la trace ...

410. E1 : mais ... est-ce que on pourrait avoir des courbes comme ça ? ... est-ce qu'on pouvait avoir une trace ... mettre la trace et puis faire de courbes ? ...
411. E2 : oui, c'est ça qu'on va faire...
412. E1 : oui ... suivre la trace ...
413. E2 : je vais essayer de réactiver ... c'est vrai qu'on a un problème...[problème avec la souris]... je sais pas si on peut y arriver ...
414. E1 : heureusement qu'on l'a fait à la main puisque je vois pas qu'est-ce que ( ça apporte) de plus ... ... moi j'aimerais bien voir les paquets mais ... .. est-ce qu' on peut avoir une trace ou quelque chose qui permettrait de tracer une courbe ... j'aimerais bien les voir les courbes ... parce que je (comprends) que c'est ça le but ... [il y a des problème avec l'ordinateur] ... .. au même (temps) que je le vois ... je voudrais quand même voir si ce qu'on avait comme courbe ici... ..
415. E2 : ça bloque ...
416. E1 : ah, j'ai pas de point Q ... ce point il est là, bon, je peux le mettre de côté ... ..
417. E2 : ça va ... j'ai pas compris ce vecteur ... comment désactiver « trace » ... ?
418. E1 : tu cliques dessous ...
419. E2 : non parce qu'elle est toujours activée.
420. E1 : non, en fait, elle n'est pas désactivée ...
421. E2 : celle là ... .. ouais (... ?)
422. E1 : ouais, parce que j'ai mal placé, en fin, bon ... parce que je me déplace trop mal ... en fait, on est en dessous ... ouais, d'accord ... bon, on voit quand même les paquets là ...
423. E2 : et si on fait comme ça on aura une vue (... ?) comme quand tu (... ?) dans une (... ?) des monnaies sur un ...
424. E1 : oui, oui, en fait, on a de choses à voir, oui ... et pourquoi il y a des trucs qui viennent comme ça là ... c'est pas ce (... ?) qu'on cherche ... c'est le point que j'ai ... tu vois bien le point maintenant ...
425. E2 : ah ça clignote là-bas ... là-bas ... non, non, en dessous ... (... ?) te déplacer ...
426. E1 : ce point
427. E2 : non
428. E1 : ce point ...
429. E2 : point Q.
430. E1 : ouais, c'est pas le point Q qui cherche ...
431. E2 : ah c'est le (... ?) qui déplace ... (... ?) le point
432. E1 : le point il est où ?
433. E2 : il est là ... devant le vecteur ...
434. E1 : devant le vecteur ? ... ah si, si ... celui que clignote ...
435. E2 : et tu as mis dessous le nom ?
436. E1 : alors c'est quoi ? ... d'accord ... c'est point ... ça-y est ... bon, alors, je vais le déplacer ... il y a une trace encore ... alors ... on va supprimer... .. donc là la souris c'est vraiment pas bien (... ?) ... ..
437. E2 : ouais ... (... ?) ... « classer les solutions » ... 3 paquets ... et ça ... ce (... ?) qui passe maintenant ...
438. E1 : ah oui ... dès qu'on (... ?) on (... ?) trouve ... euh ... je prends le point...
439. E2 : (... ?) essaie peut être de faire déjà ce (... ?) (point)
440. E1 : ouais, ici, je vais remplacer là ... ..
441. E2 : et là on est peut être en ... en ... ..
442. E1 : ouhlàlà ... ça (... ?) partout ... (... ?) ah non (... ?) ...
443. E2 : ah si ... (... ?) il est ... .. (... ?) on met 3 paquets... où ?
444. E1 : ah oui, 3 paquets ... je vais essayer de tracer ... bon ça va.
445. E2 : tu (... ?) vérifier que le dernier... si on est bien ... ah non ...
446. E1 : bon, alors ... c'est (... ?)
447. E2 : (... ?) à l'extérieure
448. E1 : j'essaie de le mettre ... de mettre ici quoi ... ah ouais, ça-y est ...
449. E2 : et là on est pas ... comment dire ... on n'a pas une bonne vue de... la fenêtre est pas bien (... ?)
450. E1 : ouais ... c'est pas suffisamment grand ... oui ... ah mais ... oui, oui ... on a une asymptote que ... j'ai pas vu là ... oui ... on n'a pas vu
451. E2 : ah regarde... on va faire  $C_1$  ... ..
452. E1 : ce point (... ?)
453. E2 : tout le temps (... ?)
454. E1 : voilà ... (... ?) je peux faire des points ... ce point ... bon, ce point je le mets là ... ..
455. E2 : (... ?) ils sont locales ... en plus ...
456. P : il faut remplir ...
457. E2 : oui, mais ... je (... ?) ...
458. E1 : on vient juste de s'installer ...



459. P : d'accord ...
460. E2 : essaie de voir plus (... ?)  $C_1$ , non ...
461. E1 : mais, ce que je ne comprends pas ... c'est ce qui se passe ... ah si, si, tu as une asymptote ici ... bon ...
462. E2 : non, parce que (... ?) c'est pas ...
463. E1 : euh ... pourquoi ... euh ... c'est pas là ... ah, si, si ... les courbes sont symétriques...
464. E2 : ah si, c'est asymptote ...
465. E1 : (des) asymptotes comme ça... (... ?)
466. E2 : et ben ... donc ... c'est...
467. E1 : alors ... ah bon ... peut être qu'il faut dessiner d'abord ... parce que (... ?)... euh on va voir le comportement de ceux-ci qui ont une asymptote ... une parallèle à l'axe « y » ...
468. E2 : en fait ... il y a des hyperboles ...
469. E1 : oui, ça me ressemblerait ... ça ressemble à des hyperboles, tu peux dire ... (... ?) on ne peut pas dire si sont des hyperboles (... ?) pas ... euh ...tu as aussi des ...
470. E2 : ah mais ce qui est importante c'est de voir ... si cette (forme) (... ?) cette courbe machin là ...  $C_1$  ... parce qu'en fait ...
471. E1 : c'est un (... ?) (de) (... ?)
472. E2 : voilà ... parce que je ne sais pas s'il y a plusieurs paquets pour (... ?) ici ... si tu as des ... si tu as des ... tangentes verticales ... elle ne peut pas passer par là ...
473. E1 : non, elle passe par là ...
474. E2 : c'est forcément un autre groupe...
475. E1 : c'est ... c'est 1, 2, 3, 4, 5 paquets ...
476. E2 : alors, est-ce qu'il y a 1, 2, 3 ? ou est-ce qu'il y a 1, 2, 3, 4, 5 ? je ne sais pas...
477. E1 : 5 paquets ... ouais ... à mon avis il y a 5 paquets ...
478. E2 : si on va tracer (5) à mon avis ... que...
479. E1 : euh ... je ne sais plus où est le point maintenant ... est-ce que tu vois clignoter en quelque part ...
480. E2 : là ... mais on le voit pas, si, là il faudra qu'on agrandisse ... ah non, non ... le ...
481. E1 : le point
482. E2 : ah ça je ne sais pas ...
483. E1 : le point j'ai quitté...
484. E2 : c'est toi qui pilotes la souris ... tu es la responsable de ton point ... ..
485. E1 : ah il est là le point ... tant mieux
486. E2 : (... ?) les tangentes elles sont toutes déplacées et tout est ... je sais pas quoi ...
487. E1 : si, si là ... ce qui est visible c'est bon... ouais
488. E2 : ah non c'est bien
489. E1 : ce n'est pas bon
490. E2 : tu as de super positions des machins ...
491. E1 : ah ouais, d'accord
492. E2 : il faut revenir à la ... à l'origine ... on va fermer au moins ...
493. E1 : bon, je te laisse faire ... je vais essayer de remplir les choses ... euh... essayer de rectifier ce qu'on a fait ... ..
494. P : bon, on va ramasser le feuilles là ... je pense que (... ?) mathématiques ... (... ?)
495. E2 : ah d'accord je vais changer d'échelle après ... ok ... (... ?) (prend) ça ... ah ce point là ... voilà ... (... ?) faire... (... ?) ... ce point (... ?) trace ... (... ?) ... comme ça, ensuite ... ah moi je dirais (... ?) ... si je comprends (... ?) ici ... (... ?) c'est (... ?) tracer ... j'arrive pas à savoir s'il a 3 que tu (... ?) mais je sais pas (... ?) ce point ... ah il est là ... bon, comme ça c'est la ... c'est (... ?) on va bouger la (... ?) parce que ... quand je relâche ça fait tout ça ... c'est ... tu relâches la souris ça se met tout à (... ?) ... à (... ?) n'importe quoi ... et là commence à faire ça ... ah, c'est pas ça ... et là par exemple... voilà, tu vois ... il y a un grand saut là par exemple
496. E1 : ouais, on a vu hein ... (... ?) ça ressemble à (... ?) il (... ?) là ...
497. E2 : ça tend vers ... 1, 2 ... 3 paquets ... moi je dirais ... parce que ...
498. E1 : il y en a 5 ... 5 paquets ...
499. E2 : non ... (... ?) c'est le même truc ... là regarde ... c'est pas ce ... c'est le même truc ça ... si je fait un truc un peu ... un peu brouillon là ... là je fait quand même... comme les pièces de monnaie là regarde ...
500. E1 : on a effacé (... ?) c'est comme le comportement à l'infini qu'il faut regarder effectivement ... on a qu'à... euh ...
501. E2 : (... ?) voilà, regarde ... .. là on fait ça ...
502. P : (... ?) des feuilles ?
503. E1 : on est en train de remplir là ...

504. E2 : voilà c'était comme ça ... ici (... ?) ça tend vers 1 ... voilà ... elle tend vers la droite «  $y=1$  »
505. E1 : euh ... «  $x$  tend vers plus l'infini »
506. E2 : et puis tu as «  $y=-1$  »
507. E1 : oui... elles tendent vers -1 et puis le paquet 5 ...
508. E2 : non, non, il y a 3 paquets ... (... ?)
509. E1 : non, mais il y en a 5 ...
510. E2 : on n'est pas d'accord ...
511. E1 : non, non, on les a bien vu ... non, on les a bien vu les paquets ... parce qu'après la question ... on te demande le comportement à l'infini... on demande le comportement à l'infini ... donc on est obligé de marquer ce qui se passe ... euh ... les asymptotes différentes... et il y en a 5... 5 cas différents ...
512. E2 : ah, quand «  $x$  » tend vers l'infini ...
513. E1 : voilà là (... ?) cas là, (... ?) cas là, (... ?) cas là ... 4 et 5 ... euh ... alors j'ai mis donc (... ?) «  $x$  » tend vers moins l'infini ...
514. E2 : alors ... quand «  $x$  » tend vers l'infini tu as 3 paquets ...
515. E1 : voilà ... (... ?)
516. E2 : forme 3 paquets normalement ...
517. E1 : (... ?) oui mais bon je les ai ... je te les ai montré ... les 5 paquets ...
518. E2 : non ... ça c'est 1 ... 2 et 3
519. E1 : 1, 2, 3...
520. E2 : ce n'est pas à l'infini ça
521. E1 : mais si ... quand «  $x$  » tend vers l'infini ... si quand  $y$  tend vers...
522. E2 : et mon infini c'est par là ?
523. E1 : quand «  $x$  » tend vers l'infini et quand «  $y$  » tend ... euh ...
524. E2 : mais quand «  $x$  » tend vers l'infini ... ça existe pas ça ...
525. E1 : oui, mais là ... tu as des asymptotes différentes ici ... là tu n'as pas de asymptote ... .. (... ?) je peux pas réfléchir... comment tu ...
526. E2 : (... ?)
527. E1 : comme tu peux parler contre les asymptotes qui sont là ... .. je me presse là-bas parce que normalement ici on est arrivé... ..

**(Fin de l'activité)**



# **Binôme E1/E2**

**Mise en équation  
d'une famille d'exponentielles**

**L'expérimentation de l'année 2003**

## Binôme E1/E2

1. E2 : tu as pas le (... ?) là
2. E1 : ben je fais une droite qui passe par C...
3. E2 : ouais mais tu sais pas, il faut tracer la tangente à ce moment là
4. E1 : donc je vais faire la droite.
5. E2 : ben on va tracer la tangente, on a la pente....
6. E1 : ouais, voilà
7. E2 : non, mais c'est pas bon, parce que là tu prends une droite.
8. P : ne vous focalisez pas sur la fonction distance, ça vous servira plus tard.
9. E2 : donc là tu laisses (... ?)
10. E1 : je fais la pente comme ça
11. E2 : oui mais là ... on disait que tu n'as pas la tangente, c'est une droite qui passe par C, alors que nous pour la tracer la tangente...
12. E1 : on va voir si on peut tracer la tangente
13. E2 : il faut effacer la droite, ça sert à rien
14. E1 : donc je l'efface alors ...
15. E2 : alors tu vas sur pointer ... tu là cliques dessus, voilà et tu fais back ... Ok... ensuite, il y a deux points... donc peut être il faut tout effacer dans le (... ?) parce qu'il va nous embêter si non, on prend celui là en plus... ensuite tu veux (... ?) parler...
16. E1 : tangente
17. E2 : tu veux un peu ...
18. E1 : ça va, non ça va
19. E2 : tu as pas (suivre) ... alors, dans les boîtes ... va voir dans la ... le truc B là ... est-ce qu'il y a un ... où ? ah non, non... celui d'à côté, le truc B
20. E1 : (... ?) ce qui va pas.
21. E2 : voilà ... attend.
22. E1 : une parallèle à (... ?) ...
23. E2 : comment est-ce qu'on peut tracer la tangente ? ...
24. E1 : là il avait une touche comme ça
25. E2 : alors, si on peut tracer la tangente... peut être dans les... il y peut être une macro là, (... ?) ramener (... ?) tracer la tangente...
26. E1 : alors, c'était deuxième séance, non ?
27. E2 : hum ... droite tangente, on peut pas ramener les macro pour tracer la tangente ?
28. P : absolument, bravo ... très bien...
29. E1 : je vais voir... après quand tu avais dit qu'il fallait le faire
30. E2 : click droit, copier
31. P : (... ?) vous avez un spécialiste
32. E1 : voilà comme ça
33. E2 : donc on fait coller là
34. E1 : j'en ai collé ...
35. E2 : attend, je crois que tu ne l'as pas sélectionné.
36. E1 : alors...
37. E2 : voilà, stop, click droit.
38. E1 : click droit !
39. E2 : non, reste dessus, click droit... copier
40. E1 : copier, mes documents.
41. E2 : et voilà, tu fais click droit, coller, et puis c'est bon, control V si non
42. E1 : oui, click droit, coller.
43. E2 : voilà ... et là maintenant, on va revenir dans le ... tout en bas, non ?... tu viens là, et tu prends la nouvelle macro.
44. P : ouvrir là, le fichier.
45. E1 : voilà, d'accord.
46. P : alors il faut probablement montrer le point, j'imagine...
47. E2 : c ouais, je suppose.
48. P : par exemple C, ouais.
49. E2 : et la courbe...
50. P : hum, non, je pense que les axes.
51. E2 : ah ouais (... ?) la courbe ... ah, non ?
52. P : on (... ?) voir, (... ?) voir... parce qu'il faut... voilà

53. E2 : parce que C...
54. P : juste le point ouais.
55. E1 : je crois que l'axe aussi... d'accord ...
56. P : ben parce que ça vous donne l'unité... c'est le problème ... et il a dû la construire numériquement, je pense, c'est une macro qui utilise pour (... ?) l'unité sur l'axe
57. E1 : d'accord
58. P : simplement là... vous ... donc vous avez la tangente en un point bien particulier, parce que c'est le point qui permet de déplacer la courbe, vous pouvez la mettre aussi ici, il y a pour tout, ouais ... vous pouvez créer un point sur la courbe et puis avoir la tangente ...
59. E1 : voilà
60. E2 : d'accord... on peut avoir un point...
61. E1 : donc on va étudier la pente, l'évolution de la pente
62. E2 : (... ?) c'est la pente en fonction de l'endroit où elle est quoi....
63. E1 : « y' » en fonction de ...
64. E2 : en fonction de l'ordonnée.
65. P : (... ?) vous avez la possibilité d'avoir un point sur la courbe rouge, mais ne vous méfiez pas à ce qui est affiché parce qu'en fait l'équation qu'on vous a donné est une équation polynomiale, et si la courbe n'a pas une équation polynomiale c'est donc simplement une approximation, hein... bon, on est dans ce cas là, on n'est pas dans un cas où la courbe a une équation polynomiale... ça vous vous sert à rien ... on aurait du l'enlever...
66. E1 : donc cette pente ...il faudra qu'on regarde... à quoi est égale
67. E2 : à (... ?) zéro ou en (... ?)
68. E1 : on va pas avoir une équation de la pente
69. E2 : en « y=0 » on a une pente zéro
70. E1 : oui, ça c'est clair
71. E2 : pour « x = 0 »
72. E1 : alors maintenant on va peut être l'afficher la pente
73. E2 : pour « x=0 » mais c'est valable pour quelque soit x même ouais, quelque soit « x »
74. E1 : oui
75. E2 : maintenant si on reste il aura un « x =0 » et quand on se balade
76. E1 : la pente elle augmente,
77. E2 : elle augmente la pente en (... ?)
78. E1 : en fonction de « x »
79. E2 : alors là je fais ça pour « x » pour l'instant ouais
80. E1 : en fonction de « y »
81. E2 : en fonction de « y » elle croît, elle croît ... quand ...
82. E1 : ben... si on l'affiche, elle sont dans un...
83. E2 : alors attends, on va voir (... ?) puis on va voir sur la graduation si cela donne une proportionnalité peut être directe
84. E1 : oui, oui on va voir
85. E2 : je suis un collégien
86. E1 : ben par fois
87. E2 : (...?)... alors on va prendre la pente ...
88. E1 : (un tableau) de
89. E2 : elle est bon... et on va prendre cette droite... là on met zéro ok
90. E1 : zéro...
91. E2 : donc, ensuite, on se met en pointer
92. E1 : pourquoi faire ?
93. E2 : parce que regarde, (... ?) le point... le point C... allez ... regarde, tu t'affiches la pente
94. E1 : la pente en C alors, alors
95. E2 : voilà, en 0.5 combien elle est ?
96. E1 : mais je déplace aussi les (nombres) ...
97. E2 : 0.5 regarde
98. E1 : oui, alors
99. E2 : donc elle croit quand « x », quand « y »
100. E1 : euh... ah ouais
101. E2 : en 1 au 1
102. E1 : ah, elle est 1 ... ah c'est pour ça
103. E2 : (... ?) ... c'est col tout
104. E1 : ah ben c'est bien ça

105. E2 : voilà tu as ça  
106. E1 : elle est sympa cette pente  
107. E2 : assez directement proportionnelle à « y », c'est « y »...  
108. E1 : «  $y'=y$  »  
109. E2 : «  $y'=y$  »  
110. E1 : on l'a remarqué  
111. E2 : (... ?) puisque regarde, on a la même, ici en 0.5  
112. P : oui, mais alors là... je suis d'accord avec vous ça c'est vrai pour les tangentes en C, mais vous faites ça sur des différentes courbes solutions... vous comprenez  
113. E2 : oui  
114. P : oui, le point C change la courbe ... maintenant ça c'est vrai juste pour ce point, maintenant il faudrait ... c'est pour ça je vous disais qu'il fallait un point variable  
115. E2 : oui ça c'est vrais, ça fait une courbe  
116. P : mais c'est ça, exactement, vous avez fait une courbe, et ce qu'il faut c'est rester sur la même courbe, vous comprenez la différence ?  
117. E2 : d'accord, en «  $x=0$  » en tout cas on a exactement que le point de la pente égal à l'ordonnée  
118. E1 : «  $y'=y$  » en «  $x=0$  »  
119. P : voilà exactement  
120. E2 : et on peut pas (... ?) ...  
121. E1 : c'est ça ... voilà maintenant il faut prendre un autre point, c'est ça ? On sait déjà «  $y'=y$  » en «  $x=0$  »  
122. E2 : en  $x=0$  on a «  $y'=y$  » quelque soit C, quelque soit la courbe, quoi, quelque soit oméga quoi ... voilà c'est...  
123. E1 : on dirait... pour toutes les courbes quoi  
124. E2 : pour toutes les courbes  
125. E1 : pour toutes les courbes on a «  $y'=y$  »  
126. E2 : maintenant c'est clair, ce n'est pas mal  
127. E1 : c'est déjà un renseignement important  
128. E2 : ensuite, maintenant  
129. E1 : on va se placer  
130. E2 : on va finir euh ...  
131. E1 : alors tu places le point C ailleurs alors  
132. E2 : au moins on l'a fini en «  $x=0$  »  
133. E1 : euh, ouais  
134. E2 : quelque soit... ah non... (en un petit) point ... on sait pas  
135. E1 : on sait pas trop ... alors on se place dans le... avec une ordonnée différente ... avec un « x »... une abscisse différente peut être ...  
136. E2 : ouais, on va prendre ... écoute, c'est bien en 1 ?... qu'est ce qu'on a en x ?  
137. E1 : «  $x=1$  » ... «  $x=1$  » ... « y » de (... ?) (maintenant), ah ouais se voit d'ici, de (... ?) « y' »... en ce moment là  
138. E2 : dessine une autre courbe ... ah non ... il faudra fixer la courbe... alors je vais fixer par une courbe qui passe comme ça ... 0.5 ... 25 ... je vais afficher les coordonnées du point peut-être... ce qui fera c'est bloquer la courbe, si si je peux bloquer la courbe...  
139. E1 : mais...  
140. E2 : prend cette courbe là, peut-être, elle, elle est intéressante, parce qu'en fait on voit « y' »  
141. E1 : oui, oui ... en la courbe on va regarder « y' » c'est pour ça...  
142. E2 : alors, attend... « y' » ... non attend, j'ai peut être une meilleure idée... je ne sais pas, je vais faire un essaie... euh ... je vais le prendre le placé ... ça a placé la droite... voilà ... je vais le mettre en un point 1 ... il restait en passant par 1  
143. E1 : ah oui, on (... ?) je ne sais pourquoi ...  
144. E2 : ouais mais ... j'arrive (... ?)  
145. E1 : oui c'est facile de prendre 1 dans le repère, mais ...  
146. E2 : voilà  
147. E1 : voilà on aurait les coordonnées de C  
148. E2 : voilà, je (... ?) le point... ... voilà, là on a un point typique, je vais afficher ses coordonnées peut-être...  
149. E1 : oui, oui  
150. E2 : parce qu'on fait la tang... la ...  
151. E1 : «  $y'=1$  »  
152. E2 : ça me donne la droite «  $y=x$  »  
153. E1 : ouais

154. E2 : et...
155. E1 : ça fait que «  $y'=1$  »
156. E2 : mais aussi par exemple on voit que le «  $y$  » ... le «  $y$  » ... de la courbe est plus grande... avant ce point là, la pente est inférieure après le point elle est supérieure
157. E1 : ouais c'est ça
158. E2 : voilà
159. E1 : voilà, c'est déjà un renseignement «  $y'=1$  » en quel point ?
160. E2 : alors on va afficher ses coordonnées... ah coordonnées c'est, c'est, c'est...
161. E1 : c'est peut-être là... « coordonnées ou équations » ... ça ce n'est pas mal
162. E2 : voilà ...
163. E1 : au point 1 ... «  $y'=1$  » ça doit être une équation simple ... mais bon ...
164. E2 : on a ça, ça a l'air faux, ça
165. E1 : ah ... (... ?) une information
166. E2 : mais il faut du temps
167. E1 : ouais mais avec ça ... ah ...
168. E2 : la pente en 1
169. E1 : le point (1, 1)
170. E2 : mais la pente valait 0.5 au point (0.5, 0)
171. E1 : ouais ... alors (... ?) égal 0.5 en 0.5 ...
172. E2 : on va trouver un point
173. E1 : non, en (0, 0.5)
174. E2 : on va trouver un point caractéristique mais ... attend, si on a ça ... en (0.5, 0) ...
175. E1 : alors, en 0 ... en 0.5
176. E2 : on prend le même ... alors le ... voilà ... mais là elle n'a pas l'air ... là en revanche ici
177. E1 : «  $y'=1$  »
178. E2 : ici ... c'est une autre courbe ... 0.5 ... 0, la pente, et la pente était à 0.5
179. E1 : oui de toutes façons on avait la pente qu'était égale à ...
180. E2 : ici la pente devait être égale alors ... on sait que là... on a vérifié sur cet axe la pente vaut que l'ordonnée
181. E1 : oui, c'est ça
182. E2 : donc si on atteint 0 ... euh 0,4 ici ...
183. E1 : ah oui
184. E2 : parce qu'on n'est plus sur la même courbe ... on a 0.4 et après je ne sais pas moi mais ... mais il faut prendre un point
185. E1 : et on sait que là ... juste on va avoir 0.4 et ici la (pente est) (... ?)
186. E2 : et puis euh ... et après ça augmente ...
187. E1 : donc, on a quand même «  $y'=y$  » en chacun des points de la courbe
188. E2 : non, non, non, non
189. E1 : bah, nous on a aussi «  $y'=y$  » par ces points là
190. E2 : ah, bah oui, parce que là on dépasse pas la pente, on aurait quelque chose de (au-delà) ... parce que ...
191. E1 : (en ce moment là on aura) «  $y'=y$  » dans tous les points de la courbe, on va peut être prendre d'autres points encore
192. E2 : (... ?) je ne sais pas comme en faire pour (... ?) sur ça
193. E1 : oui, oui
194. E2 : on va prendre un point sur la courbe ... point sur un objet, voilà, ça va être ça... oui sur la même courbe, bon on va prendre un deuxième
195. E1 : ouais ... pas ici, pas ici, parce que si on connaît ... (peut être) ici la pente ... oui, on a remarqué que «  $y'=y$  » c'est toujours (... ?)
196. P : eh alors ... ça veut dire quoi ça ?
197. E2 : ben ... c'est ça qui...
198. E1 : on sait que c'est «  $y'=y$  »
199. E2 : c'est ça qui ... c'est ça qui (... ?) on a un batch... le ... en fait
200. P : et l'équation différentielle c'est quoi ?
201. E1 : «  $y'=y$  »
202. P : à votre avis
203. E2 : bah ... ouais... parce que ... parce qu'y a ... en passant par ((1,1) on a) que «  $y=x$  » quoi ... on s'a ... on a fait coller la tangente voilà ... pour voir ce que ...
204. P : d'accord mais ...
205. E2 : et après ça, on voit que c'est supérieure à «  $y$  »



206. P : regardez plus (... ?)
207. E1 : (... ?) pour passer tu regarde... c'est ce que tu me dis
208. E2 : et avant c'est inférieure (... ?)... alors « y » là on (... ?) «  $y'=y$  » ... on l'a en deux points en tout cas
209. P : on vous demande une équation différentielle et vous qu'est ce que vous avez remarqué ?
210. E1 : bah, que «  $y'=y$  » en deux points déjà
211. P : ah... on peut pas le voir en plus de points ...
212. E1 : alors il faut qu'on fasse plus de points, parce que deux points c'est pas suffisant c'est sûr... on l'a (ramasse) dans (entre égaux)... si on s'est placé là ... voilà, si tu veux oui c'est (... ?)... pourquoi, on a des trucs pareil ? ... pour remplacer un point ... voilà
213. E2 : ah ... c'est parce que j'ai mis des points ... attend, voilà ...
214. G : ben, en plusieurs points oui ... d'accord
215. E2 : attend je vais l'enlever ... et (... ?) vas-y ... pas encore ... ok, ben, je déplace le point maintenant ... je vais le déplacer
216. E1 : voilà
217. E2 : moi je vais le mettre cette courbe ... ce que voulait c'est ses coordonnées ... c'est une conclusion effectivement qu'il n'y a pas ... alors c'est ça les coordonnées ?
218. E1 : je sais plus, mais tu connais ... « coordonnées » ...
219. E2 : voilà ...
220. E1 : c'est point ... voilà, ben ...
221. E2 : on pourrait (peut être) passer à une autre courbe ...
222. E1 : et puis il faudrait ... tracer une tangente ... tangente en ce point, et puis trouver la pente... .. Tangente c'est pas là...
223. E2 : pardon... ouais ... normalement c'est là les macros ... voilà ... tangente
224. E1 : ce point ... .. d'accord, la pente maintenant...
225. E2 : (... ?) la pente ... donc il faudra déplacer la (... ?) pente ... (... ?) on va la mettre là pour qu'on le lise
226. E1 : oui, pour qu'on le lise, oui... c'est 1.45... alors, après on va bouger le point avec la pente, j'espère qu'elle va bouger... voilà, et on voit (... ?) 0.37 ... 0.37
227. E2 : ah, ouais
228. E1 : c'est pas mal là... mais ça on le savait... mais on va le bouger quand même (... ?) plus
229. E2 : ouais, c'est ça, voilà c'est ça, ouais
230. E1 : donc le point... 0.30... on voit qu'en 0.29 ... c'est 0.29
231. E2 : ouais, on a qu'on a toujours «  $y'=y$  »
232. E1 : voilà «  $y'=y$  »
233. E2 : quelque soit « x »
234. E1 : oui, c'est bien ça, ouais ... 0.11... (... ?) 0.9... voilà... .. oui, voilà, , donc on a réussi à le prouver là ... .. alors
235. E2 : mais «  $y'=y$  » donc... ça serait ... euh ... après qu'est ce qui distingue le... comment est-ce qu'«  $y'=y$  » va ça va donner toutes le familles de courbes ?
236. E1 : ah, bah c'est l'équation différentielle
237. E2 : c'est les conditions à l'origine, alors ?
238. E1 : l'équation différentielle... mais... c'est ... on a (tracé) une courbe ... solution
239. E2 : oui
240. E1 : sur une courbe solution, on dirait que l'équation différentielle c'est «  $y'=y$  » maintenant il faudrait peut-être tracer une autre courbe solution, et on aura pas forcément «  $y'=y$  »
241. E2 : et on va (... ?) (mettre) ... sur la courbe, voilà ... sur une courbe solution passant par le point (1, 1) (... ?)
242. E1 : ah, oui
243. E2 : sur une... sur la ... sur la courbe sol... sur une des courbes solution, je sais pas, passant... parce qu'on a pris cela comme exemple...
244. E1 : oui ... la solution
245. E2 : déjà on va mettre ça... passant par le point ... (1, 1)
246. E1 : [elle écrit] « passant par le point C des coordonnées (1, 1) »...euh... toutes les pentes... euh ...
247. E2 : on a vérifié déjà deux choses
248. E1 : oui
249. E2 : on a vérifié que la pente d'une part est égale, était égale à... on a vérifié, on a vérifié que la tangente... la droite... euh
250. E1 : alors... [elle écrit] « la tangente »
251. E2 : (restait) tangente en C à la courbe, donc «  $y'$  »... (atteint) en C à la courbe, et la droite «  $y=x$  » ...
252. E1 : a pour pente 1 ?

253. E2 : voilà, et en plus elle passe par l'origine, c'est ça que je veux dire... je sais pas ce qui ça peut ...
254. E1 : ah, déjà (... ?) c'est bon, elle a pour pente 1, oui ... euh ... passe par l'origine ?... ah oui
255. E2 : est-ce que ça (peut être) dans l'équation solution... est-ce que ça a un sens ?... je me demande si c'est pas un point très caractéristique
256. E1 : oui c'est un point caractéristique ce point C, mais enfin bon, on va (... ?) rien à faire pour l'équation, je pense
257. E2 : d'accord, on vérifie que ... euh ...
258. E1 : pour l'équation différentielle
259. E2 : mais je ne sais pas
260. E1 : mais, ça a quand même une importance parce que (... ?) origine en plus
261. E2 : parce que si c'était décalé comme ça, ça seraient pas les mêmes équations
262. E1 : ah ouais... alors ... [elle écrit] « la tangente en C à la courbe a pour pente 1 »
263. E2 : c'est l'histoire des conditions à l'origine
264. E1 : [elle écrit] « de plus on vérifie » ...
265. P : ça y est, vous vous êtes mis d'accord ?
266. E1 : voilà, l'équation différentielle de cette courbe là, c'est «  $y'=y$  » maintenant pour les autres courbes on va essayer de voir, parce que ça sera «  $y'$  » plus quelque chose ... donc il y a quelque chose à (... ?)
267. E2 : et je me demande si ce n'est pas les conditions à l'origine, parce qu'en fait...
268. P : oui c'est ça ... la condition à l'origine est donné par C, c'est exactement ça
269. E1 : oui (... ?) à l'origine elle est (par C), oui
270. P : vous en avez une équation différentielle et chaque point C vous donne une courbe solution de l'équation différentielle
271. E1 : en C... en C égal (1 ;1) l'équation différentielle...
272. E2 : et ça veut dire c'est que pour moi... s'il m'intéressait ce point C plus qu'un autre puisque c'était que la tangente passe par l'origine, je ne sais pas si c'est vraiment important, mais
273. E1 : je ne sais pas
274. E2 : ça me paraît euh...
275. E1 : je pense pas pour les équation différentielles c'est (... ?)
276. E2 : parce qu'en fait ça sera pas la même famille, après c'est... euh ... c'est (marron) que
277. E1 : ouais, c'est ça cette courbe ...
278. P : quand vous bougez votre point C ça passe toujours par l'origine ?
279. G – E2 : non, non, non
280. E2 : c'est un point de ...
281. E1 : ça c'est une courbe solution... et des courbes solutions on a tout un paquet
282. P : voilà
283. E1 : et après il faut regarder aussi ... (... ?) oui pour les autres... ça va être différent, on va essayer de trouver des points intéressants comme celui là
284. E2 : oui, oui
285. E1 : peut être (qu'on a) des (points) symétriques par exemple... (... ?)
286. E2 : ça (... ?) qu'un (... ?)
287. E1 : euh ... [elle écrit] « en chaque point »... voilà ... « la pente de la tangente est égale à l'ordonnée »... ... oui, alors «  $y'=y$  »...
288. E2 : (dans ce cas là) en ce point
289. E1 : maintenant on va prendre une autre courbe, un peu intéressante comme cela, qu'est ce qu'on peut faire ?...en ce point ... en ...(-1,1) ?
290. E2 : et ça par exemple... c'est euh ... Tu vois ce que je veux dire ... parce que la question que je veux poser c'est... est-ce que... quel le ... quels sont les conditions d'origine pour cela, quoi ?... est ce qu'on peut les trouver ?
291. E1 : bah il suffit d'avoir un point, on sait que c'est une courbe qui passe par le point (1, 1), ça c'est les conditions à l'origine
292. E2 : et comme on écrit ça ? on écrit  $x_1=1$  ou  $y_1=1$  ?... comment on le traduit en équation... c'est ça que ... par ce que souvent on sait ... en équation différentielle ...
293. E1 : alors c'est une équation différentielle
294. E2 : tu donnes pas
295. E1 : avec une condition initiale
296. E2 : condition initiale ... mais, est- ce que les conditions initiales sont données à une équation différentielle ? ou c'est le deux ? ou est-ce que c'est pas juste « x » de « x » ... « x » ?
297. E1 : alors, la condition initiale c'est... euh
298. E2 : quand « x » vaut « 0 »
299. E1 : en « y » en 0...

300. E2 : (... ?) quel (... ?)
301. E1 : ben non, condition initiale c'est «  $y(1)=1$  »
302. E2 : la condition initiale (... ?) quand on a une équation de premier ordre ... la équation différentielle
303. E1 : une seule condition initiale
304. E2 : on donne simplement  $x_0$  ou on donne  $x_0$  et  $y_0$  ?
305. P :  $x_0$  et  $y_0$  parce que si vous donnés (... ?)
306. E1 : une condition initiale  $y(0)$  ...  $y(1)$
307. P : puis qu'en fait (... ?) une équation différentielle de premier ordre, c'est la dérivée première «  $y'$ ,  $y$  et  $x$  » il faut que vous fixiez au moins deux pour avoir l'équation différentielle
308. E2 : oui, d'accord, d'accord
309. E1 : la condition initiale c'est «  $y(1)=1$  »
310. E2 : (... ?) c'est marron, d'accord
311. E1 : «  $y(1)=1$  » c'est la condition initiale
312. P la condition initiale c'est quoi ?
313. E1 : «  $y(1)=1$  »
314. P : d'accord
315. E1 : voilà, maintenant on va prendre une autre condition initiale
316. P : ça c'est dans l'autre cas, en votre cas
317. E1 : oui, oui, c'est ça
318. E2 : (... ?) là c'est ça, ouais ... maintenant on peut faire autrement
319. E1 : donc on peut prendre une autre courbe
320. E2 : on peut prendre ... essaie de (... ?) la courbe...absolument
321. E1 : ah, ben c'est bien quand je (... ?) la bouge et puis tout bouge au même temps, c'est bien... on n'a pas tout retracer ...on se met en (1, -1) ou alors je ne sais pas, comme tu veux... ou (-1, 1)
322. E2 : où est qu'il est le (...?)... (la tangente) ...
323. E1 : qu'est ce que tu as ... ce qui t'intéressé comme
324. E2 : ce point là ... je vais le (ramener) ... voilà ... parce que si non (... ?)
325. E1 : oui il gêne... alors, celui là on va le ... on va le
326. E2 : (1, 0) ...
327. E1 : condition initiale ... condition initiale, alors on va regarder, donc on avait dit que c'était la même chose pour l'instante, ouais
328. E2 : oui mais (... ?)
329. E1 : oui, on va regarder ici (0,40, 0,40) on voit déjà pour ce point là le même ...
330. E2 : et en ce point là, comment on va (trouver) la ...qu'est ce qu'on cherche ?
331. E1 : l'équation différentielle... ouais, on a trouvé que «  $y'=y$  » avec la condition initiale ça, maintenant avec une autre condition initiale on va voir si c'est la même chose, et j'ai l'impression que c'est pareil... puisque t'as les deux pentes ici... voilà
332. E2 : donc on va faire deux points, c'est suffisant
333. E1 : voilà [elle écrit] «  $y'=y$  avec condition initiale »... donc ça c'était «  $y(0)=1$  »... et on vérifie bien qu'on va bouger le point ça serait la même pente
334. E2 : ok et après maintenant si on descend là... en (0, 0)... parce que là c'est «  $y$  » ... donc on a «  $y(0)=1$  »
335. E1 : mmh, ça va... ouais ... on (... ?)que deux points, maintenant on va faire ça pour plein de points si tu veux, mais bon...
336. E2 : bah c'est pareil, ouais
337. G : oui, oui c'est bon... euh... pour (... ?) c'est 0,9 ... tu (... ?) (0,0)
338. E2 : voilà
339. E1 : tiens, on a par exemple ici là (-0.5, -0.5)... (0.5, -0.54)... (-0.5, 15)
340. E2 : voilà de tout ouais
341. E1 : c'est bien ça ouais ...
342. E2 : on aura tous, tous ceux ...
343. E1 : quelque soit la courbe
344. P : alors, donc vous remplissez tous les trucs maintenant si vous avez trouvé... je vais vous passer l'activité suivante
345. E2 : oui, on va ...
346. E1 : donc on ... ah ... donc ... ah non ... ..
347. E2 : ce fait 0.4 ici, ouais ... je vais même (... ?) ici ouais, je vais prendre (... ?)
348. E1 : ah, mais... bon, on a déjà répondu la question « comment avez-vous procédé ? »... on va expliquer tout ce qu'on a fait
349. E2 : voilà ...

350. E1 : ce qui est intéressante ouais ... c'est un peu ça
351. E2 : on a ... au point C ... on a ... on a tracé ... on a fait afficher ces coordonnées et on a fait tracer la tangente à la courbe en C...
352. E1 : mais la première chose qu'on a remarqué c'est quand on se place en 0, euh... .. bon... ..
353. E2 : on a un peu quand même parce que... .. on a tracé... voilà, on a tracé pas mal de (... ?)... besoin d'un seul point ... on a fait en 2
354. E1 : « en plaçant C sur l'axe des « y » et en faisant varier » ... ..
355. E2 : on a vérifié que ...
356. E1 : que les pentes... .. étaient égales
357. E2 : à l'ordonnée
358. E1 : à son ordonnée, ouais
359. E2 : et ça on (... ?) pas ... (... ?) quand on (... ?) ... on avait mis en tracer la ... bah, je ne sais pas s'il demande
360. E1 : ben on a remarqué tout d'abord qu'en plaçant C sur l'axe des y, que les pentes étaient égales à l'ordonnée
361. E2 : non, on a dit
362. E1 : (... ?) un deuxième (... ?) ...
363. E2 : non, l'on dit ... on dit pas qu'on a fait afficher la pente, je ne sais pas si c'est ça ce qu'ils veulent ou pas, on va dire qu'on l'a fait tracer la tangente par C et que
364. E1 : oui, oui, oui
365. E2 : ça peut être (... ?) entre parenthèses
366. E1 : entre parenthèse, oui c'est vrai
367. E2 : on est en valable
368. E1 : on est allés chercher... à l'outil, ouais
369. E2 : ouais, d'abord on l'a fait tracer comme ça
370. E1 : on l'a fait tracer, oui
371. E2 : on a fait tracer la tangente à la courbe en C, et affiché la pente en ... en dynamique quoi
372. E1 : ouais
373. E2 : ainsi que les coordonnées du point ...
374. E1 : c
375. E2 : on sait que va suffire largement..
376. E1 : oui, oui
377. E2 : pour moi ça c'est bon, (... ?) ils disent que ça a un peu du visuel, quoi, je sais pas comme
378. E1 : oui, oui, bien sur, ça a été quand même
379. E2 : on s'apprend à contrôler ça et les chiffres
380. E1 : ben, ça a été contrôlé comme il faut, oui ... « on a fait tracer la pente ... afficher la pente et les coordonnées du point»... ça en un premier temps, ensuite
381. E2 : ensuite on s'est baladés sur la courbe... euh
382. E1 : on a fixé
383. E2 : on a fixé C (1,1) ...par exemple
384. E1 : une courbe
385. E2 : une courbe passant par C (1,1)... et on avait vérifié que cette fois ci, pour une courbe c'était valable aussi pour déplaçant un point... ah
386. E1 : alors, on a
387. E2 : on a repris un point sur la courbe
388. E1 : on a pris
389. E2 : ouais, voilà, un point attaché à la courbe... fixé
390. E1 : euh ... libre sur la courbe
391. E2 : voilà, c'est ça... il est c'est ça, c'est qu'on a balaye la même famille, et puis ensuite dans une courbe ... et puis ensuite on a pris une courbe et on a balayé toute la courbe
392. E1 : voilà
393. E2 : donc on a ... on a croisé deux informations
394. E1 : voilà... euh ... « on l'a fait tracer la tangente »
395. E2 : affiché sa pente... ensuite les coordonnées du point
396. E1 : « affiché la pente » euh
397. E2 : (... ?) les coordonnées du point mobile, et puis ... le point libre
398. E1 : (... ?)... donc, on a remarqué
399. E2 : et puis, en déplaçant le point sur la courbe, sur cette courbe particulière...
400. E1 : « en déplaçant »
401. E2 : ah, ben, tu veux que je (... ?)?...

402. E1 : « sur cette courbe »
403. E2 : ce qui, qui est venu par là ?
404. E1 : « en déplaçant le point sur cette courbe, que »... la...
405. E2 : les pentes en chaque point de la courbe étaient égales à l'ordonnée du point...
406. E1 : « les pentes »
407. E2 : on a presque compris ... finalement...
408. E1 : ben oui, on a tout compris... (au) début ... tu as bien (... ?)
409. E2 : on a défini un protocole
410. E1 : un protocole de... pour
411. E2 : (... ?) pouvait (... ?) de deux questions...
412. E1 : d'équations différentielles... alors que « les pentes à chaque point étaient égales aux ordonnées ... des points »... et puis on a même pas restés là, on a tracé ... on a déplacé, on a changé de courbe, dont des conditions initiales
413. E2 : on a vérifié aussi sur une autre courbe... passant par C...
414. E1 : « on a vérifié »
415. E2 : et puis sur plusieurs courbes, plusieurs... sur C(0,1) ...
416. E1 : cette propriété
417. E2 : en changeant de courbes
418. E1 : voilà... « sur plusieurs »
419. E2 : des individus... parmi la population des courbes
420. E1 : « sur plusieurs courbes »... euh ... on a ... euh
421. E2 : ouais ... on a pris C (0, 1)... C par exemple...
422. E1 : avec des conditions... avec le point C (disons) (... ?)
423. E2 : avec différentes...
424. E1 : « avec le point C ... » ... un roman voilà... ce fini là mon roman...
425. E2 : tu as (... ?) le plan ... je remets mon nom, il faut le remettre à chaque fois ?
426. E1 : oui, je ne sais pas
427. E2 : alors, on va faire la suite ...
428. J : vous avez déjà fini ?
429. E2 : euh ... on a ça, on a ça...
430. E1 : alors, qu'est ce qui nous manque de faire maintenant ? ... ..
431. E2 : [en lissant] « quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ? »... et ben... ..
432. E1 : de convaincre, est-ce que c'est bien ça ? je sais pas, tout ce qu'on a fait c'était bon (... ?) un (... ?)
433. E2 : ben oui... on peut être (... ?) il faut
434. E1 : (... ?) courbes solutions (... ?) rien fait (... ?) de la courbe qui (croise) les courbes solutions... ah ... bon, maintenant il faut le (... ?) encore... ce n'est pas suffisant ils en veulent plus... euh ...
435. E2 : ben, alors (... ?)
436. E1 : ben, on a vérifié que «  $y'$  » ... on peut vérifier que «  $y'=y$  » quelque soit... euh... quelque soit la courbe, et quelque soit le point sur la courbe... voilà, parce que là, quelque soit le point sur la courbe
437. E2 : on vérifie en tous les points qui appartiennent ...
438. E1 : « on peut vérifier ... »
439. E2 : ben et puis, il n'y a pas... il n'y a pas des points, par exemple de pentes nulles ... que sur la droite... que la courbe... la seule courbe qui fournit des pentes à 0, mis à part l'infini, mais des pentes à 0 dans le quadrant qu'on observe c'est la courbe qui passe par... qui est confondue avec l'axe des « x », quoi... Donc on vérifie déjà que bon, ben ce n'est pas... si tu cherches les points des pentes «  $y'=0$  », ça te donne toute la seule, la seule équation c'est «  $y=0$  »
440. E1 : ouais
441. E2 : donc, on a cette implication là
442. E1 : ah ben oui, oui
443. E2 : «  $y'=0$  » implique «  $y=0$  »... donc on a... quelque soit « x »
444. E1 : oui
445. E2 : donc, ça c'est... ça laisse croire ...
446. E1 : bon, tu veux que je l'en rajoute... mais je ... c'est juste une particularité
447. E2 : si parce que ici, si tu recherches sur cette courbe là tu en trouveras pas... même je pense, en baladant le point ici, euh ... après... je vais peut être pas, on le laisse forcément ta pente va diminuer, mais 0,1 ... 0,1 elle tend vers 0
448. E1 : oui, oui
449. E2 : mais... elle n'y est ... et puis on sait ainsi elle tend vers 0 ... ah, quand « y » tend vers moins l'infini la pente tend vers 0... (... ?) est-ce qu'on pourrait utiliser ça ?

450. E1 : ben
451. E2 : ça veut dire que ...
452. E1 : je crois qu'on va peut être essayer de voir quelle est l'équation de cette courbe, oui ... ben, les propriétés mathématiques de la courbe justement, donc ça serait... ça serait
453. E2 : ouais... c'est une propriété, ouais, ouais ... oui ça ce montre (leur propre sens) forcément ...
454. E1 : en la prochaine (... ?) propriétés mathématiques des courbes ...
455. E2 : « y » tend (... ?) sur
456. E1 : que confirme qu'on a trouvé l'équation différentielle ?
457. E2 : « y' » (sur) « y »
458. E1 : donc, l'équation différentielle comment ... elle a une solution de forme (exponentielle) ... c'est, euh ... c'est « e » puissance ... [les binômes voisins parlent aussi des exponentielles]
459. E2 : c'est une exponentielle, puisque c'est une exponentielle euh... euh des exponentielles euh... de (... ?)  $\lambda$ ... je ne sais pas quoi ... «  $\lambda x$  »... un peu comme ça ..
460. E1 : (... ?) le ... «  $\lambda y$  » ... «  $y = \lambda e^x$  » ouais, c'est ça ... c'est «  $\lambda$  » « e » puissance ... euh, non, c'est «  $\lambda e^{ax}$  » ...
461. E2 : pourquoi tu dis ça ?
462. P : vous en est où, la ?
463. E2 : ben, on regarde les propriétés mathématiques
464. P : parfait, et après je vais vous chercher l'autre activité ... ..
465. E2 : bon ... on va chercher une (... ?) qui passe par le point... .. le « x » pour trouver un « y » qui passe par... .. attend on va ...
466. E1 : donc, les, les courbes sont des ...
467. E2 : (... ?) ça ... je cherche un point ... .. c'est quoi là ? ... (... ?) valeur de (... ?)...
468. E1 : alors, donc l'asymptote euh ... on vérifie... limite quand « x » tend vers moins l'infini ... vaut 0, donc «  $x=0$  », non «  $y=0$  » est une asymptote...
469. E2 : ouais ... ..
470. E1 : et donc la résolution de «  $y'=y$  » c'est «  $y=\lambda e^x$  »
471. E2 : c'est forcément  $\lambda e^x$  ? ou
472. E1 : oui
473. E2 : il n'y a pas de coef devant « x » ?
474. E1 : non... parce qu'il n'a pas de « ax », si c'était ... s'il y avait «  $y'=ax$  » ça serait «  $\lambda e^{ax}$  »...
475. E2 : ah ouais ...
476. E1 : voilà, donc «  $y=0$  » c'est une asymptote pour chacune des courbes, on voit bien, ensuite ben... chacune se déduit de... elles se déduisent les unes des autres en multipliant les ordonnées par «  $\lambda$  »
477. E2 : on pourrait le vérifier pour la courbe... pour «  $\lambda=1$  », est-ce qu'on peut trouver ?... est ce qu'on la retrouve ... l'exponentiel de base ?
478. E1 : «  $\lambda=1$  »
479. R : «  $\lambda=1$  » ça veut dire qu'en «  $x=0$  » puis on doit trouver « e »
480. E1 : je crois que est celle qu'on avait tracée au démarrage
481. E2 : non, non... ah si, parce qu'elle passait par 1... «  $e^1$  » c'est...
482. E1 : quand «  $x=0$  » ... «  $\lambda = \dots$  »
483. E2 : ben oui, c'est ça... je suis bête, c'est ça la courbe, ma courbe que je...
484. E1 : ah oui, c'est ça que tu avais ...
485. E2 : oui c'était cela, c'est pour ça que (... ?) parce que j'avais tracé directement
486. E1 : c'est la bonne quoi
487. E2 : qui a bien sa, la pente en (1, 1)
488. E1 : et ben oui, l'exponentielle
489. E2 : c'est «  $y=x$  »
490. E1 : et oui... ben tiens, on peut le mettre ici là justement, c'est intéressant de le mettre là
491. E2 : c'est ça...
492. E1 : on vérifie que ...
493. E2 : je fais pas de bêtises
494. E1 : ouais... avec les conditions initiales... .. je sais pas si je ... je vais peut être tout multiplier parce que ce n'est pas (vraiment) ça... ..
495. E2 : et alors
496. E1 : «  $\lambda = \dots$  » attend ...
497. E2 : elle est toujours grande... .. oui parce qu'en fait si tu veux, la limite de «  $e^x / x^a$  » est toujours égale à plus l'infini ...
498. E1 : oui, oui
499. E2 : «  $e^x$  » c'est toujours grande, grande que «  $x^a$  » quelque soit... quelque soit la puissance de ...

500. E1 : oui, mais pourquoi «  $x^a$  » s'il n'y a pas de «  $x^a$  » ici (... ?)  
501. E2 : non, non, non mais je...  
502. E1 : ah oui, oui, c'est ça, ah oui, d'accord  
503. E2 : mais là c'est ... là on va retrouver comme ça ... c'est bien ça ?  
504. E1 : oui, mais là c'est  
505. E2 : et là attend ... et là  
506. E1 : c'est pas «  $e^x$  » en fait ce parce que on fait (... ?) « a »  
507. E2 : ah non, ce n'est pas «  $e^x$  »  
508. E1 : non, ce n'est pas «  $e^x$  »  
509. E2 : mais, ce quoi la valeur de « e » ?  
510. E1 : 2,718 mais en fin bon...  
511. E2 : bah... ..  
512. E1 : (... ?) ... ..  
513. E2 : ah ... on ferait mieux attendre...  
514. E1 : allez-y  
515. E2 : elle est pas trop mes (...?)... ah voilà, ok... voilà ... .. (... ?) pointer sur une droite ... .. donc, c'est cela on fait ... l'exponentielle... ..  
516. E1 : euh ... donc je (... ?) ... donc la dérivé de ... la pente ... la pente ...  
517. P : bon, vous en êtes où là ?  
518. E1 : en... (... ?) les propriétés mathématiques, mais bon, on voulait mettre une autre chose, mais  
519. P : voilà vous arrêtez... voilà, voilà je vais vous passer, parce que la troisième activité est plus corsé...  
...  
520. E2 : alors, vu qu'on devait arriver à «  $e^x$  », j'ai trouvé que «  $e^x$  » ... tout ça pour ça  
521. E1 : voilà ... pour trouver euh ... les propriétés de l'exponentielle ... euh ...

**(fin de l'activité)**

# **Binôme E1/E2**

**Mise en équation différentielle  
d'une famille de tractrices**

**L'expérimentation de l'année 2003**



## Binôme E1/E2

## Première étape : la famille de tractrices

1. P : il faut ouvrir le troisième fichier ... ..
2. E2 : troisième activité
3. E1 : voilà, on y va ... ..
4. E2 : c'est droite tangente ... .. (... ?)
5. E1 : droite tangente (... ?) c'est bon comme ça ? [ils ouvrent l'activité et les macros] ... ..
6. E1 : alors [elle lit] « une famille de courbes  $\Gamma$ , le point M »... on a tout ces feuilles là à remplir maintenant
7. E2 : oui, oui, oui
8. E1 : ouh là là ... elle laisse pas se (... ?)... en fin, mais elle déplace (... ?) tout le plan à chaque (... ?) point ... .. ben on a encore le même travail à faire
9. E2 : ah ouais [il lit] « comment avez-vous procédé »... (... ?) « indiquer pour vous convaincre »... et « les propriétés mathématiques »... .. c'est le même
10. E1 : ah, ben, c'est exactement la même chose
11. E2 : avancement d'euphorie
12. E1 : voilà.. donc, ce n'est pas si compliqué que ça, sauf que ça va être plus compliqué forcément...
13. E2 : oui, alors ... « famille de courbes  $\Gamma$ . Le point M est déplaçable sur tout le plan » ... le plan... je vais voir donc ce que ça donne, regarde... .. il y a rien dessous !
14. E1 : il y a rien dessous, oui !... ils le disent bien, c'est dans la bande (0 ;2), « y » entre 0 et 2 ... et on va essayer d'aller plus loin que 0...
15. E2 : ah, il est dedans qu'un (... ?) ... entre 0 et 2, d'accord... ah non, il n'y a plus de courbe
16. E1 : ouais ... alors, après 2 il n'y a plus rien
17. E2 : donc, ils ont fait un filtre comme ça
18. E1 : ouais, c'est ça, oui
19. E2 : ils ont caché les trucs
20. E1 : voilà
21. E2 : c'est gentil
22. E1 : dans une bande ...
23. E2 : donc ça doit être de l'exponentiel moins quelque chose, ça se ressemble à ça, non ?
24. E1 : oui... espérons que c'est quelque chose de ça parce que sinon on doit faire un (... ?) ... on va faire les pentes, les tangentes
25. E2 : allez ... allez-y ... à toi
26. E1 : je ne sais pas comment ça marche, alors, les tangentes
27. E2 : non, attend
28. E1 : c'est pas ici que je prend la tangente
29. E2 : la tangente, si, si, il va falloir prendre la tangente, troisième activité, mais on l'a peut être ouvert le mac... si tu vas dans...
30. E1 : je crois que si, on l'a (... ?) là, ce n'est pas là
31. E2 : non, attend, tu peux (même) avoir les coordonnées du point, si tu veux... tu l'aurais déjà
32. E1 : ici ... « coordonnées du point »
33. E2 : alors, coordonnées, toc, point M... ce point voilà, très bien
34. E1 : ensuite
35. E2 : ensuite tu reviens sur ... euh, non, non ... (... ?)... voilà le macro... pour tracer la tangente on va voir si c'était... voilà droite tangente, mais là on est dans la deuxième activité
36. E1 : alors, je vais voir, si quand même... eh non! ... je pense que ...
37. E2 : euh ... je crois pas parce qu'il va.. voilà
38. E1 : ah, ça m'a tracé une droite tangente
39. E2 : c'est une macro...
40. E1 : oui
41. E2 : en fait, alors là, il faut que tu cliques reviens dessus et tu l'effaces... alors attend, tu (... ?) pointer ... voilà, c'est bon... une fois que tu as la flèche activée c'est bon, si non il change le dessin
42. E1 : d'accord
43. E2 : en fait, la tangente, il nous l'a tracé, c'est une macro, ils ont pris l'équation de la courbe et ils te font une petite, un petit programme qui te trace en fonction du point... et c'est pour ça qu'il fallait pas cliquer sur la courbe... j'avais demandé mais il faut cliquer sur la courbe.. ben, il ne reconnaît pas la courbe, en fait, il reconnaît que c'est l'activité 2, c'est la fonction  $e^x$  et du coup il te génère un truc
44. E1 : oh, d'accord
45. E2 : donc, là il faut qu'on charge la macro de la troisième activité

46. E1 : ouais, il faut la chercher
47. E2 : elle est là, c'est bon, il suffit de faire ouvrir mac
48. E1 : ah oui, d'accord
49. E2 : tu fais ouvrir, là tu fais le point mac avec le... et tu sélectionnes
50. E1 : d'accord, oui
51. E2 : alors, si non il y a un truc qui va tout afficher et comme ça on voit tout
52. E1 : tout afficher ?
53. E2 : mais l'on verra... on verra tous les (... ?) alors, ce n'est pas la peine... bon, en prend mac... comme ça, voilà... c'est bon ... troisième activité
54. E1 : euh, ah ben, la tangente... d'accord, alors je vais
55. E2 : donc, cela tu l'ouvres...
56. E1 : je vais faire click là dessus
57. E2 : voilà, et maintenant il est activé elle chargé dans M
58. E1 : dans M de quoi ?
59. E2 : oui, oui, voilà c'est là
60. E1 : d'accord...
61. E2 : et donc tu le (... ?) sur le point M... tu mets l'axe, cet axe
62. E1 : ah oui, cet axe,
63. E2 : tu cliques sur la (... ?)
64. E1 : voilà !... c'est miraculeux ça
65. E2 : ah ? ... et puis après...
66. E1 : ah, la pente aussi
67. E2 : la pente qu'on mettra un petit peu à l'écart... la pente et tu le cliques par là ou par là pour qu'on soit pas...
68. E1 : ah, oui, pour qu'elle (... ?) soit, en fait
69. E2 : pour qu'elle ne soit pas dans le champ de...
70. E1 : voilà, alors, déjà on voit qu'il y a encore un rapport... euh
71. E2 : (... ?) on met en planté parce que ...
72. E1 : oui
73. E2 : on évitera comme ça les
74. E1 : ah, oui, c'est ça pour éviter... voilà
75. E2 : les bavures
76. E1 : bon, ben maintenant on va chercher un rapport entre le fait de
77. E2 : (... ?) déplacer ... tu veux tes ... (... ?) en (... ?)
78. E1 : non, non ça va... ah, tout à l'heure on avait fixé une courbe... alors on va regarder un petit peu là
79. E2 : non, mais là (... ?)
80. E1 : il y avait la pente et elle a disparu, non, c'est (... ?)
81. E2 : bon, déjà on avait en balayé des courbes sur l'axe «  $x=0$  » pour voir un petit peu comment ça faisait
82. E1 : oui, alors, on était restés là... on avait monté
83. E2 : tu sais ce qu'on peut faire ?
84. E1 : oui, vas-y
85. E2 : si tu vois pas d'inconvénient, c'est comme on a qu'une bande en deux on va zoomer pour avoir une précision majeure
86. E1 : mmh ... ben, oui, oui
87. E2 : donc tu fais control et plus, quand tu vas faire control et tu fais... voilà, comme ça on va y aller jusqu'à ...
88. E1 : oui, jusqu'au but
89. E2 : c'est bon ... comme ça on a une bonne précision pour bouger le point et le mettre sur l'axe.. tu auras plus de marge... alors, donc maintenant si ...
90. E1 : on va essayer de regarder un petit peu comme ça c'est ... euh
91. E2 : si on se balade verticalement on peut imaginer que
92. E1 : si on fait des points ... qu'on était restés... on était restés sur l'axe
93. E2 : si tu as besoin de recentrer tu prends le ... tu vois ... tu cliques là sur le bouton et tu descends légèrement pour le centrer
94. E1 : ah, oui, oui... on va peut être regarder comme on peut se centrer ... oui
95. E2 : non, on sait l'inverse
96. E1 : l'inverse... oui
97. E2 : voilà comme ça visuellement ce n'est pas mal, on peut aussi même...
98. E1 : et là aussi...
99. E2 : passer par là un petit peu

100. E1 : et peut être que là on va se mettre en plus ... l'inverse  
 101. E2 : voilà c'est bien ça comme ça visuellement ça (... ?)  
 102. E1 : ouais, on voit bien les choses  
 103. E2 : donc là si tu mets ... euh  
 104. E1 : non, mais (... ?) plus... si tu es bien resté comme il le faut dessus  
 105. E2 : oui, j'ai, j'ai... je vais faire mieux, quoi  
 106. E1 : (... ?) voilà, là je suis bien mais alors bon j'ai pas  
 107. P : vous avez trouvé quelque chose ?  
 108. E1 : pour l'instant on n'a rien trouvé, oui ...  
 109. P : vous aviez ...  
 110. E2 : on a trouvé que ça serait peut être ... euh «  $e^{-x}$  »  
 111. P : non, non ce n'est pas ça  
 112. E2 : c'est pas ça ...  
 113. E1 : il faut passer des années ... ça sera pas toujours des exponentiels  
 114. P : l'équation, l'équation est horrible ...  
 115. E2 : voilà  
 116. E1 : d'accord  
 117. P : l'équation de la courbe... il faut vraiment chercher l'équation différentielle...  
 118. E1 : alors, là, maintenant j'avait un (... ?)  
 119. E2 : alors, attend... 0 ... la pente on la voit plus ?  
 120. E1 : on la voit plus  
 121. E2 : ah si ... elle est en bas ?  
 122. E1 : ouais, elle est trop basse  
 123. E2 : ah, bon  
 124. E1 : est-ce que je la déplace ? ...  
 125. E2 : euh ... si tu prends pointer... voilà, tu vas... seulement ... pointer... tu fais ... tu pointes sur le texte, à mon avis, le nombre en pointe... tu vois tu pointes au dessus, là, voilà, tu le remontes... et tu le mets euh ... voilà  
 126. E1 : ici... voilà  
 127. E2 : et là tu aura fais pointer... t'as pas besoin de le.. voilà  
 128. E1 : oui ...  
 129. E2 : ouais, il est suffit là ... tu prends dans le blanc ... voilà ...  
 130. E1 : alors, bon, ça va être dur... (... ?) une équation différent, je ne sais pas comment on va s'y prendre  
 131. E2 : alors, on sait que « y » en plus l'infini ça va être 0  
 132. E1 : oui, on le voit  
 133. E2 : en (... ?) quand «  $x = +\infty$  »... on a une pente nulle, et en plus ça tend vers 0, « y » tend vers 0... « y » tend vers 0 avec une pente nulle ou pas ?  
 134. E1 : « y » tend vers 0  
 135. E2 : (... ?) on peut le supposer  
 136. E1 : ah, oui quand euh ...  
 137. E2 : on peut supposer qu'on a «  $y' = y$  » à l'infini, ah, non pardon... si ... c'est sûr ...  
 138. E1 : «  $y' = y$  » en 0 ?  
 139. E2 : « y » ... «  $y' = 0$  »  
 140. E1 : là par exemple  
 141. E2 : et «  $y = 0$  » quand x tend vers plus l'infini  
 142. E1 : voilà donc («  $y' = 0$  »)... encore une fois  
 143. E2 : en plus l'équation est vérifiée pour « x »... voilà, pour les points... tous les points de la courbe gamma... des points ... de l'axe Ox, il y a une courbe gamma qui passe par l'axe Ox ...  
 144. E1 : ouais ...

### Deuxième étape : le retour aux exponentielles

145. P : bon, je vais vous donner un joker  
 146. E2 : c'est gentil  
 147. E1 : oui, parce qu'on a du mal  
 148. P : c'est l'activité 2bis ...  
 149. E2 : (?) alors on s'avait dit ça sert à quoi  
 150. P : c'est un joker ... on revient à la courbe dernière  
 151. E2 : on va la changer ... on va la prendre... .. ouais, deuxième activité ... ..  
 152. E1 : un joker ... ..  
 153. E2 : bon, euh ... c'est la 2 bis ... j'ai ramené chez nous et puis

154. E1 : tu as trouvé la 2bis ?
155. E2 : voilà
156. E1 : d'accord... il y a des propriétés géométriques qui vont nous servir je pense, pour le troisième ...  
« propriétés géométriques invariantes associées à la famille des courbes »
157. E2 : donc, là on a ... euh ... tu mets ses noms déjà... puis ça va tout (... ?) y arriver ...
158. E1 : voilà, il faudrait...
159. E2 : rectangle
160. E1 : on va faire les distances PQ, RQ euh
161. E2 : Pythagore
162. E1 : Pythagore, on va faire...
163. E2 : « est-il possible de déduire l'équation différentielle de la famille de courbes à partir des propriétés invariantes repérés ? »... .. La réponse c'est sûrement oui
164. E1 : oui, bien sur
165. E2 : je (... ?) c'est pas ça (... ?)
166. E1 : oui, bien sur, mais comme il faut le faire... (... ?) je ne sais pas comme je le ferait
167. E2 : donc, fait ... (... ?) (on aura) beaucoup des propriétés géométriques
168. E1 : ah, là on nous fait un triangle là... avec ce triangle on va faire quelque chose...
169. E2 : c'est peut être je pense déjà ...
170. E1 : donc on... on va essayer de trouver les distances PQ... euh
171. E2 : ah ouais ...
172. E1 : tu te rappelles comment... il faut aller où pour trouver les distances déjà ?... .. je crois qu'on l'avait ... (... ?) je ne sais pas où, là dedans, distances de deux points...
173. E2 : je ne sais pas si on a besoin de ça s'il s'agit des propriétés qu'on veut
174. E1 : ben, les propriétés géométriques... à mon avis, ils nous invitent vraiment à faire quelque chose avec ça, donc trouver euh que... trouver quelque chose en rapport avec les distances, quoi !
175. E2 : alors attend... et si on se mettait sur un point caractéristique, alors la courbe C... je me permets de-y
176. E1 : oui, oui, vas y... on regarde un petit peu ce que ça donne... et ce point P là qu'est ce qui on nous fait ? qu'est ce que c'est ce point P ? ...
177. E2 : voilà, ensuite
178. E1 : distance entre les points
179. E2 : ouais, ah, c'est quel ça que tu t'avais... ouais, je vais mettre le point sur le... sur le point de la courbe...
180. E1 : ce que je voudrais...
181. E2 : qui passe par (0,1) comme ça, en fin après je te passe la main, je vais juste vérifier ça
182. E1 : en plus je ... ce qu'on voit ce que ...
183. E2 : là c'est (... ?) et qu'on ramène P... tu vois c'est la (... ?)
184. E1 : bah, tu gardes, tu gardes bien ça bah... parce qu'on (... ?) t'en servir
185. E2 : ah oui... je ramène P
186. E1 : oui, si on peut le
187. E2 : voilà
188. E1 : oui, d'accord... en fait P et Q sont mobiles
189. E2 : et là, regarde... R si tu demandes ses coordonnées...
190. E1 : oui (... ?) ...
191. E2 : c'est ça que (... ?) ce qu'est ce que je voulais faire premièrement ?
192. E1 : coordonnées de ce point ...
193. E2 : oui, a l'erreur de... .. c'est-à-dire qu'on a une... ici on a (1, 1) ...
194. E1 : alors, tu fais le bouger... qu'est ce qu'on peut bouger là dedans ce... ?
195. E2 : il faut choisir, soit si C tu changes de courbe ... et puis P tu bouges le triangle ... là tu bouges C, donc changes de courbe
196. E1 : moi, je voudrais simplement bouger le triangle
197. E2 : ah, ben ce n'était pas le bon point qu'il fallait choisir
198. E1 : en P
199. E2 : là P, voilà, ouais ... tu peux bouger P
200. E1 : maintenant en (... ?) P elle doit bouger
201. E2 : non, mais non, tu étais dans les coordonnées
202. E1 : ah, oui, d'accord
203. E2 : on peut pas afficher les coordonnées de P.. tu es pas en pointé
204. E1 : voilà, maintenant je vais en pointé, donc et je pourrais bouger, voilà
205. E2 : tu peux ramener C peut être, sur ce point ... sur (0, 1), ou en fin, ben, je ne sais pas si c'est une courbe caractéristique ou pas ?... mais qui nous donne des valeurs assez rondes quoi

206. E1 : oui, c'est ça, bon ... maintenant je prends C et je le mets sur (0,1)  
 207. E2 : en fin ... le point ( 0 ;1) ... alors zoom  
 208. E1 : mais ce qui est bizarre c'est que C a pour coordonnées (-0...) ... attend  
 209. E2 : oui, parce que tu es un peu a gauche... fais un petit zoom dessus et tu verras que ça va, pour le bouger  
 210. E1 : (... ?) pour le bouger je vais faire à la main ... voilà  
 211. E2 : il faut remonter après, prends 0 ...  
 212. E1 : je peux pas remonter parce que je ne suis pas dans une  
 213. E2 : ouais, mais il faut pas bouger latéralement... après.. voilà tu-y es presque... voilà, c'est parfait  
 214. E1 : voilà  
 215. E2 : donc, là maintenant on a ... (... ?) regarde 0,26 à 26 c'est ce qu'il y a dans le (... ?)  
 216. E1 : ah, oui, 0,26 à 26, bon  
 217. E2 : ouais, j'ai trouvé une relation !  
 218. E1 : oui, ouais, tu as raison, il a quelque chose là  
 219. E2 : -1 ... l'ordonnée de R est égale à la celle de P moins 1  
 220. E1 : c'est ... c'est pas l'ordonnée...  
 221. E2 : l'abscisse pardon, l'abscisse  
 222. E1 : l'abscisse est égale à 1  
 223. E2 : RQ est égale à 1... bravo !  
 224. E1 : mais bon  
 225. E2 : ça c'est du boulot ...  
 226. E1 : déjà ... euh, maintenant, est-ce qu'on le verra seulement sur PQ ... sur RP ? euh... ben... c'est (... ?)  
 227. E2 : ah ouais ça ... est-ce qu'est valable sur une autre courbe... que celle qui passe par.. ? ... voilà, parce que c'est peut être le ... c'est peut être l'ordonnée c'est peut être pas 1, c'est peut être l'ordonnée de...  
 228. E1 : (c'est vrai) ça dépend, ça dépend de C  
 229. E2 : donc, si tu mets C à 0,5 par exemple, est ce qu'on voit que ça va faire 0,5 ? ou est ce que ça va... est-ce que ça (boule) pas ?... non, non, ça reste constant... ouais... oui mais ce n'est pas (seulement)  
 230. E1 : ah oui, c'est bon, quelque soit C, attends, je... on va aller même en C, en C de n'importe (... ?)  
 231. E2 : l'intersection de la tangente en (... ?)  
 232. E1 : RQ = 1...  
 233. E2 : voilà  
 234. E1 : tout le temps... maintenant si RQ on va le changer parce qu'on veut déplacer le point P...  
 235. E2 : non, non, (... ?) c'est ce qu'on a vu, c'est bon ...  
 236. E1 : on a trouvé une propriété  
 237. E2 : c'est vrai que ça commence à tenir... euh  
 238. E1 : alors, ici, qu'est ce qu'on fait pour faire ... en fin (... ?) soit difficile ... on sait plus faire (... ?) voilà... c'est bon  
 239. P : vous avez-y trouvé ?  
 240. E1 : on a trouvé la propriété RQ reste constante égal à 1  
 241. P : écrivez... et après on vous demande, vous remplissez ça et après on vous demande à partir de là de trouver l'équation différentielle...  
 242. E1 : donc ... parce qu'on peut le dessiner... parce que ah non... ah, oui, c'est dessiné ici  
 243. E2 : (... ?) un petit machin parce que là je ... ..  
 244. E1 : voilà, quelque soit la courbe... et de là... l'équation différentielle c'est (... ?)... ..  
 245. P : bon, alors il faut trouver une (... ?) pour répondre à la question d'après  
 246. E1 : voilà, je vais calculer la pente en P, et puis je vais établir la relation entre RQ et...  
 247. P : ouais  
 248. E1 : voilà, la pente en ... (... ?)... .. alors ... ..  
 249. E2 : et dire que tout ça a été enregistré  
 250. E1 : on est pas enregistrés... et oui... ce n'est vraiment pas intéressante ce qu'on dit ... ..  
 251. E1 : alors, la pente au point P est donnée par ... PQ / RP, alors, valeur absolue de la pente... égale PQ / RP... tu es d'accord, avec moi ?...  
 252. E2 : ouais  
 253. E1 : égal PQ parce que « RP=1 » ...  
 254. E2 : (... ?) pointer ... attend, RQ ? ... RP n'est pas égal à 1  
 255. E1 : « RP = 1 » ... c'est ce qu'on avait marqué  
 256. E2 : RQ était égal à 1  
 257. E1 : RQ qu'est ce que j'ai écrit moi ? RP ou RQ ? ... c'est RP / RQ  
 258. E2 : RP / RQ c'est le cosinus de l'angle  
 259. E1 : qu'est ce que c'est PQ / RQ... (... ?) la pente c'est PQ

260. E2 : non, c'est l'inverse de cosinus RP / RQ ...mais...
261. E1 : ouais, bon, c'est ... la pente est PQ / RQ... maintenant je vais
262. E2 : oui, c'est ça, la pente c'est PQ / RQ... donc la pente est égale à l'ordonnée du point
263. E1 : maintenant en valeur algébrique, c'est quand même meilleur de le donner... la pente au point P égal mesure algébrique de QP
264. E2 : ce on peut pas bouger ... ce segment... ce segment... ..
265. E1 : donc égale ordonnée ... de P... on a bien « y' »
266. E2 : on va faire pareil sur l'autre courbe
267. E1 : «  $y'(P) = y(P)$  »
268. E2 : voilà «  $y'=y$  » puisque voilà, quelque soit P, en fait
269. E1 : quelque soit P
270. E2 : et ensuite quelque soit C à fortiori ... donc on l'a trouvé directement là comme ça
271. E1 : voilà, on l'a trouvé par la propriété géométrique... alors il faut qu'on fasse la même chose de l'autre côté, quoi

### Troisième étape : le retour aux tractrices

272. E2 : voilà ... donc ... .. troisième activité ... ..
273. E1 : alors, on va faire la même chose, on va tracer un point P, R ... euh
274. E2 : ben, ouais, je pense, on va vérifier ça... après (... ?) je ne sais plus comment on (...?) connaître... bon ... je dois définir une intersection de droite, un point, point sur un objet, point d'intersection... regarde ça, point d'intersection... tu veux le faire ou ?
275. E1 : euh, non, je veux bien que tu la fasses toi... donc point d'intersection entre
276. E2 : cette droite
277. E1 : ouais... et puis l'axe
278. E2 : cet axe
279. E1 : oui... tu as trouvé ça dans la rubrique euh...
280. E2 : ouais
281. E1 : il faudrait le donner un nom
282. E2 : ah, il l'a mis... d'accord, ok... donc, celui là donc on va l'appeler
283. E1 : oui, oui...
284. E2 : on va les nommer
285. E1 : on va l'appeler Q ... et R ...
286. E2 : nommer ce point, on va l'appeler donc comme tu veux ... voilà, ensuite je viens à cliquer là... je peut être déplacer un petit peu l'axe... voilà, la c'était meilleur
287. E1 : oui
288. E2 : et là c'est, je vais mettre une droite, je vais mettre là un segment, ben, on peut avoir les points comme ça
289. E1 : ce point qui a la même abscisse
290. E2 : normalement, si je déplace ça, voilà c'est bien, c'est ce que voulais... il se balade avec
291. E1 : oui
292. E2 : on va lui mettre ses coordonnées... on l'a trouvé ...
293. E1 : voilà ses coordonnées ... voilà et (... ?) il faudrait l'abscisse de ce point ... Peut être que ce point il a été remplacé ...
294. E2 : voilà, ensuite... on va faire soit une droite ou un segment... peut être, il est plus simple de faire une droite pour faire l'intersection ... Alors, je trace un droite... on va voir si ça marche (...?), ah mais, non, un segment c'est mieux
295. E1 : ouais, il fait (... ?) le point alors, nous, on a besoin d'avoir la même abscisse
296. E2 : d'accord... droite, passant par un point... par ce point
297. E1 : oui
298. E2 : c'est ça ? ouais
299. E1 : oui... ..
300. E2 : en M ... droite ... bon
301. E1 : ouais, on va faire la perpendiculaire, ah tiens perpendiculaire, il dit ça
302. E2 : ah oui, mais ce n'est pas ...
303. E1 : perpendiculaire à cet axe
304. E2 : alors, la perpendiculaire... perpendiculaire à cet axe... passant par ce point ... ensuite, on remet en pointer ... là on va demander l'intersection de (...?), chacun son truc
305. E1 : oui ... alors, l'intersection
306. E2 : tu vas dans fiche, dans le ...
307. E1 : ici, là ?

308. E2 : ouais, pointe... et tu vas cliquer en bas... point d'intersection... et tu cliques l'axe et puis, la droite et l'axe, ah, ben non, pointe sur ...
309. E1 : point en cette intersection ... oui c'est bon là
310. E2 : c'est encore en direct, voilà
311. E1 : voilà
312. E2 : et ensuite tu fais
313. E1 : et après nommer
314. E2 : nommer, c'est le A, voilà ... le premier truc qui va en la boîte
315. E1 : nommer ...
316. E2 : voilà ... ce point... ce point
317. E1 : ce point, et on va le nommer comment ?
318. E2 : Q
319. E1 : Q, ici, oui, c'est ça... voilà euh ...
320. E2 : ensuite
321. E1 : je le mets dans pointer
322. E2 : tu mets les coordonnées
323. E1 : ah, oui, les coordonnées
324. E2 : ou là, on peut afficher les distances, carrément il y avait une macro qui fais les distances pour deux points
325. E1 : ah, oui, oui, alors ça serait bien ça, oui... M distances
326. E2 : non, c'était là, M la macro, sauf que c'est la distance entre deux points
327. E1 : voilà
328. E2 : alors, ce n'est pas là, c'est QR, en fin
329. E1 : ah oui, c'est ça, c'est QR, ce point ... ce point
330. E2 : non, t'as fait cet axe
331. E1 : j'avais fait ce point
332. E2 : ah, non ... ah et puis c'est, il fait même cliquer un axe
333. E1 : ah, oui, cet axe
334. E2 : voilà, très bien
335. E1 : et alors, la distance s'affiche
336. E2 : voilà
337. E1 : distance
338. E2 : 1,80... maintenant on balade le point ... attend
339. E1 : bon alors, oui, vas-y
340. E2 : pardon... donc ici on a un point
341. E1 : avec qui (... ?)
342. E2 : voilà, tu peux balader le point M pour voir ce que ça donne, si ça bouge la distance... pointe pas sur un objet... attend
343. E1 : pointer
344. E2 : c'est le point qu'il fait pointé... c'est bon, tu fais M et tu sélectionnes le point M ... parce que l'autre c'est le point qu'on a mis sur l'intersection de la droite
345. E1 : d'accord
346. E2 : tu cliques... tu le balades
347. E1 : voilà
348. E2 : la distance, elle donc, elle ...
349. E1 : alors, on l'a (... ?) s'il a un rapport entre ces distances... c'est bien Q
350. E2 : ah non, mais deux droites... attend ... comment tout à l'heure ... ah, si c'est la tangente... je suis bête
351. E1 : oui, il a la tangente qui se promène toujours...
352. E2 : la tangente et puis après
353. E1 : on a la pente de la tangente
354. E2 : mais sauf que nous, on est bêtes, on est bêtes...
355. E1 : qu'est ce qu'il faudrait qu'on fasse ?
356. E2 : c'est le point R... en fait cette droite là elle n'a pas de sens... cette droite ...
357. E1 : ah ouais qu'est ce fait là cette droite (... ?) ?
358. E2 : cette droite, c'est quoi ça ?
359. E1 : on va la supprimer parce que ...
360. E2 : ah, ouais, parce qu'elle ça reste, c'est pas ça la tangente ça ?
361. E1 : non, ce n'est pas ça, on va la supprimer

362. E2 : attend... ah ouais, ce parce ( ?)... non, il y a un seul point, c'est ça, voilà, c'est une droite qui passe pas là, ben, qui est mis ailleurs, mais ça va nos gêner parce que...
363. E1 : oui, ça va gêner
364. E2 : alors, j'efface cette droite, vas-y... c'est bon, ce point, ok, on va un peu se balader euh ... parce que ça
365. E1 : on va voir ce que ça donne, mais
366. E2 : ce qu'on peut faire si tu veux, comme on est en pointer, tu prends la boîte là, distances en (... ?), tu cliques et tu la mets en bas... voilà, comme ça elle ne nous gênera pas, pour le lire
367. E1 : alors, je vais reprendre... ça gêne
368. E2 : non, parce qu'il a deux points confondus, c'est pour ça... vas-y
369. E1 : voilà
370. E2 : ça va... 84
371. E1 : alors, oui, on aurait encore (...?), la pente ... 1,38... 1,40... oui, d'accord... je ne vois pas le rapport entre les distances... est ce qu'il faudrait choisir un autre point ?
372. E2 : c'est un rapport entre la pente et la distance quelque part à mon avis
373. E1 : peut être la pente alors
374. E2 : 48, 78, 52, 76 à 54, ça fait quoi la différence ? ... essaye de prendre déjà un point caractéristique où ça la distance vaut 1 par exemple.. qu'on voit la pente
375. E1 : voilà, distance égal 1
376. E2 : (... ?) peut être qu'on aura pas donc
377. E1 : ouais, on n'a pas
378. E2 : (... ?)... en (0, 1)... la pente vaut -173, et le point -73
379. E1 : ah, ah, ah, tiens, voilà, on garde des choses comme ça
380. E2 : ah, si, on a toujours « y »... on a ... c'est marron ... c'est rigolote ça
381. E1 : oui, oui
382. E2 : on a 1, 62 ... 0,62 ... (... ?) y'a
383. E1 : ah, oui, oui, alors ça ne serait plutôt ça
384. E2 : ouais
385. E1 : la distance MQ ?
386. E2 : ouais, ouais, alors on va faire ça, on va les afficher les distances MQ
387. E1 : ouais... alors, comment on fait les distances ?... c'est ici
388. E2 : ben ... (... ?) là, et là tu as pas besoin, regarde ce que je veut dire... tu as pas... tu peux ... directement comme il est activé, comme il est présélectionné tu l'enfonces le bouton et tu sais que c'est ça la distance
389. E1 : mmh... ah, d'accord
390. E2 : voilà ... donc, lieu M
391. E1 : ah, le lieu c'est là ... quel objet ? c'est le point qui (... ?)
392. E2 : oui, mais comme il y a plusieurs objets, tu ... ah va pas
393. E1 : (... ?) voilà ... ce que m'intéresse c'est le point
394. E2 : ben, tu as remet en pointer parce que j'ai l'impression que c'est (... ?)... qu'on va avoir (...?)... tu reprends D, stop, c'est bon, tu le mets directement... c'est bon, c'est bon... tu viens là, ce point, voilà... ensuite... et cet axe parce que c'est la même... cet axe, voilà.. c'est bon... 1,76... voilà
395. E1 : après, pour déplacer la distance, je sais pas quoi tu fais
396. E2 : ah, non, mais non, ce n'est pas cette distance là, c'est celle là qui est constante, regarde, celle là...
397. E1 : euh ... ah, oui, c'est cette distance là qui est constante ... tu as raison
398. E2 : (... ?) je les bougé elles sont là ... donc, ça c'est égale à ... on a la relation en « y », on a « y' »
399. E1 : mais qu'est ce qu'on a fait ?
400. E2 : ben, c'est le « y »... C'est normal, c'est l'ordonnée, ça sert à rien
401. E1 : mais en fait oui
402. E2 : on va l'enlever, ok ... en fait c'est ça qui est constant
403. P : vous avez trouvé quoi qui est constant ?
404. E2 : ça
405. P : d'accord, ok... c'est à partir de là, ça, pouvez déjà le marquer, c'est à partir de là qu'il faut trouver l'équation différentielle...
406. E2 : donc ça en va
407. E1 : donc on a vu qui est égal à 1 finalement.. non, ce n'est pas 1 c'est...
408. E2 : attend... c'est (... ?)
409. E1 : attend... c'est combien ? c'est constant mais ce n'est pas ... attend, c'est quoi comme constant
410. E2 : si, si, parce que regarde
411. E1 : ça va changer les deux points



412. E2 : non ... voilà... ça marche avec le point mais...
413. E1 : parce que (là) je ne comprends pas ... 1,73 ... pente 1,73
414. E2 : distance... tac
415. E1 : ok, égale la pente... en valeur absolue
416. E2 : voilà
417. E1 : 22 ... qu'est ce qui est égale à la distance 2 ? ... où est la distance 2 ? Entre quoi et quoi ?
418. E2 : voilà, la distance 2 c'est entre ce point M et ce point R
419. E1 : ah, d'accord
420. E2 : et si tu veux, si tu prends M... tu vois, regarde... la distance, le chiffre elle bouge pas
421. E1 : ah, c'est MR qui est constante
422. E2 : voilà
423. E1 : d'accord
424. E2 : parce qu'en fait, c'est un peu plus compliqué que...
425. E1 : oui, oui
426. E2 : que tout à l'heure au sens où c'est... et c'est l'hypoténuse, en fait, voilà
427. E1 : c'est l'hypoténuse qui est constante
428. E2 : voilà ok, ça veut dire que dans ce moment là il devrais avoir une racine, il sera une racine de quelque chose
429. E1 : ah, ben, super, à partir de là on va trouver une équation différentielle
430. E2 : oui, donc, voilà
431. E1 :  $mR=2$  en plus, ah, c'est toujours 2...
432. E2 : et tout à l'heure on a... donc il faut remettre maintenant ça en fonction de ça
433. E1 : voilà
434. E2 : ça est constant il faudra MQ, il faut l'exprimer parce qu'on sait que MQ est égale à
435. E1 : ben « y » c'est MQ et puis on a la distance entre « y » ... ah et R, donc on aurait la pente... on va pouvoir avoir la pente...
436. E2 : mais la pente de la tangente c'est le... mais si, la pente de la tangente c'est la... c'est la tangente justement
437. J : si vous voulez cette construction a été faite aussi avec, il y a un (... ?) qui s'appelle trois bis
438. E1 : trois bis
439. J : donc vous l'avez déjà regardé ?
440. E1 : non
441. J : il faut aller à, comment s'appelle ?
442. E1 : ah, oui
443. E2 : d'accord... ..
444. E1 : ah ouais voilà
445. J : et dans ce cas là, vous pouvez bouger le point P, le point P c'est déplaçable
446. E2 : ok
447. J : c'est pareil ... c'est la même
448. E1 : voilà, oui, oui, donc c'est ... maintenant qu'on la trouve on le voit ici
449. E2 : ben, la notre était bien
450. E1 : oui, ben nous on l'a trouvé et la c'est fait, ça nous le montre mieux
451. E2 : la notre aussi était bien
452. E1 : alors, donc ... (... ?) c'est la distance (... ?) c'est ça ... .. la pente, la pente c'est toujours  $MQ / RQ$ ,  $MQ / RQ = y'(M)$
453. E2 : la valeur ... c'est bien le rap... ça ... c'est la pente c'est bien la tangente de l'angle ici ?
454. E1 : la tangente quoi, ben, la pente c'est la différence des abscisses sur la différence des ordonnées c'est  $MQ / QR$  ...
455. E2 : voilà, donc, là ... avec un... ici avec un
456. E1 :  $mQ$
457. E2 : avec un (... ?) quoi, alors ça serait... oui M... ça serait ... avec un signe moins quoi
458. E1 : oui, il doit-y avoir un signe, on va faire un petit signe
459. E2 : mais ça la pente... on peut lire que... elle est égale, donc  $y' = MQ / QR$  et après on peut dire que ce  $MQ$  c'est « y » donc «  $y / QR$  » et  $QR$  c'est 2... c'est 2 ... euh
460. E1 : après on va calculer en fonction de R
461. E2 :  $QR$  c'est égal à racine de ça plus 2
462. E1 :  $\sqrt{4}$  ... euh
463. E2 : «  $\sqrt{(y+2)} \dots y^2 + 2 \dots$  » racine de carre... oui, c'est ça, donc ça fait «  $y' = y \dots$  non «  $y' = \dots$  »
464. E1 : alors  $QR$
465. E2 : « y » divisé par

466. E1 : je vais, on calcule QR, «  $QR = \sqrt{(4-y^2)}$  »
467. E2 : oui, pardon c'est «  $y^2 + 4 \dots + y^2$  »
468. E1 : «  $4 - y^2$  »... parce que « y » est plus petit que
469. E2 : ah, oui, oui... c'est vrai... ça chauffe un peu... d'accord.. et après t'as «  $y = y / \sqrt{(4-y^2)}$  »
470. E1 : c'est pour ça qu'il y a la bande d'abord ... parce que la bande
471. E2 : ah ... effectivement, ça risque d'être problématique après
472. E1 : on peut pas avoir « y » plus (grand) (... ?) 2
473. E2 : voilà, c'est bien... on nous donne ça
474. E1 : on a bien travaillé... on a été étonné ... on a eu un jocker... sans le jocker je ne sais pas si on ...
475. E2 : voilà ... si on peut racheter d'autres points... tu es contente ?
476. E1 : oui, on a travaillé,
477. E2 : voilà on (... ?)
478. E1 : oui, on avait rien d'intéressant
479. E2 : ah, non, non, au pif ... j'arrive ...
480. E1 : et puis je n'arrivais pas
481. E2 : c'est là que ça m'a alerté parce que j'arrivais même (... ?), j'arrivais comme ça (... ?) du truc là...
482. E1 : bah oui (... ?) en plus ça c'est (... ?) oui euh... et là tout (... ?)
483. E2 : voilà, donc, donc, c'est ça l'histoire de deux, la bande deux, on pourra le conserver ... pour... sachant que normalement il doit-y avoir un symétrique quand même, parce qu'il peut-y avoir « y » en un bande -2 ... +2
484. E1 : oui, -2 ... +2, oui, oui, d'ailleurs on
485. E2 : on nous montre qu'une partie...
486. E1 : voilà
487. E2 : mais pour les propriétés mathématiques... peut être
488. E1 : voilà, justement... oui... « quels éléments pouvaient ils vous convaincre ? »
489. E2 : à moins que... à moins que
490. E1 : pour les propriétés mathématiques... oui c'est ici qu'on ... alors qu'est ce qu'on a fait ? euh
491. E2 : ah, non, non ...  $y' = -y$ ... ça- doit avoir un signe, il y a un signe moins
492. E1 : ah oui
493. E2 : la pente est égale à «  $-y$  »... parce qu'en fait... d'ailleurs on pourrait faire une expression et puis vérifier est ce que c'est juste, et si on pouvait faire une expression, ouais... on pouvait taper toutes choses, euh
494. E1 : ah, oui, oui
495. E2 : ah, je sais pas comment on avait fait ... là ? ... On l'a tapé ?... « appliquer une expression »
496. E1 : c'est (... ?) parce que (... ?)
497. E2 : je la tape ... voilà, ... ah non ... on va appliquer une expression... justement ... « expression », alors, on retape, on va calculer nous ...  $-y$ ... voilà ... comment on fait ça aussi ?
498. E1 : ouais, je sais pas trop
499. E2 : «  $-y/\sqrt{\dots}$  » on avait des trucs
500. E1 : mais il faut pas... il faut pas oublier le signe moins
501. E2 : (...?)
502. E1 : racine
503. E2 : de... top... moins... et puis  $y^2$  c'est
504. E1 :  $y^2$
505. E2 : c'est pas le sqrt ... c'est y... on va le ...
506. E1 : il n'y a pas de signe ?
507. E2 : ah, non, non
508. E1 : non
509. E2 : ça
510. E1 : elle est pas chapeau ?... oui, c'est ça... un chapeau comme ça... et celui, celui-ci
511. E2 : pouvez vous nous indiquer comment on peut taper l'expression ça... on voudrais taper... est ce qu'il reconnaît y ?
512. J : ah, non, non, non
513. E2 : comment on fait pour taper (... ?)?
514. J : vous voulez faire... (... ?)
515. E2 : (... ?) faire le «  $\sqrt{(4-y^2)}$  »
516. J : non, mais vous voulez faire la représentation graphique de... qu'est ce que vous voulez faire ici ?
517. E2 : non, on veut juste la valeur, qu'il nous donne une valeur de la fonc ...
518. J : la valeur numérique ?
519. E2 : en fonction d'un point...

520. J : oui, oui ... ça c'est possible
521. E2 : alors qu'on avait autrement... pour vérifier qu'on est bien quoi, bien la pente  $y^2$
522. J : alors, il faut donner une valeur
523. E2 : une valeur, alors on peut le rentrer, oui, par exemple... alors, en appuyant dessus, qu'est ce qu'on fait ?... alors, je vais rentrer 1, 0 2
524. J : vous pouvez...
525. E2 : comme ça ?...
526. J : non, non
527. E2 : pardon
528. J : si vous voulez, vous pouvez « appliquer l'expression »... appliquer cette expression et vous pouvez prendre les valeurs directement avec ces valeurs
529. E2 : c'est ça, voilà, c'est ce que j'ai fait... ouais !
530. E1 : voilà
531. E2 : on a vérifie
532. P : elle marche ?
533. E2 : avec ... on a que l'expression et puis on a vérifie que..
534. P : d'accord...vous êtes contents alors ?
535. E1 : on est contents
536. E2 : ça c'est bien
537. E1 : en fin il faut vérifier tout ça ...
538. J : ils ont vérifie avec l'expression (... ?) la même pente
539. P : c'est génial, vous remplissez les feuilles là
540. E2 : voilà, c'est ce qu'on a fait
541. E1 : alors (... ?) « comment on a procédé ? » ... on a pris le point M, comment on l'a (...?) non, on l'a tracé
542. E2 : ben, on a tracé les... on a fait afficher les coordonnées du point d'intersection
543. E1 : alors il faut plutôt « comment on a procédé ? »... je veux remplir d'abord comment on a procédé... alors, on a affiché les coordonnées du point d'intersection... est ce que c'était utile ?
544. E2 : ah, si tu peux mettre ça... on ne finira pas ça alors
545. E1 : on finira pour...
546. E2 : on a que (...?) équation
547. E1 : voilà
548. E2 : bah oui, on peut (proposer) ... euh «  $y' = -y / \dots$  »
549. E1 : voilà ... «  $y' = -y \dots$  » c'est ce qu'on a trouvé, alors on met...  $\sqrt{4-y^2}$ ... voilà... alors, après... donc... « comment avez-vous procédé ? »... Alors, on a commencé par faire quoi ?... alors on a tracé la tangente au point M
550. E2 : tangente au point M et... noté R au point d'intersection de cette tangente avec l'axe des « x »... ça on s'en fait la distance (... ?) ...
551. E1 : « et nommé R, l'intersection de cette tangente ... »
552. E2 : et ensuite on a fait afficher
553. E1 : ah la perpendiculaire, attend, on a tracé-y
554. E2 : ouais, on a tracé aussi la perpendiculaire ... à Ox en passant par M, coupant Ox au point Q... voilà ... ..
555. E1 : euh ... on l'a demandé l'affichage des distances
556. E2 : ensuite on a demandé d'afficher la distance entre les points M et R
557. E1 : il faut dire qu'on a demandé l'affichage des distances, là.. ce variait quand même (... ?)
558. E2 : oui, de la pente (...?), en fin, demande des distances, les coordonnées de M, de R, et la distance de MR... donc, presque (... ?) et voilà (...?) représente ...
559. E1 : de ...des distances... des distances euh ...
560. E2 : et la distance de MR représentant l'hypoténuse ... du triangle MQR, c'est ça je pense qu'il va nous servir... pour (ramener) le truc ... c'est un (... ?) ça au moins ...
561. E1 : (... ?) MQ
562. E2 : et R rectangle en le point Q...
563. E1 : vas-y
564. E2 : en fin (... ?) des trucs
565. E1 : pourquoi pas ? si c'est bien
566. E2 : parce que ça s'observe ... (...?) c'est pas grave, c'est pas grave
567. E1 : voilà ... mais... on peut aussi (... ?)
568. E2 : parce qu'en fait on pouvait utiliser Pythagore ...
569. E1 : très positif

570. E2 : ensuite on a... voilà, et donc on a constaté en déplaçant le point M sur... en déplaçant le point M... que cette distance restait constante que ce soit sur la courbe, sur une courbe ou en changeant de courbe ...
571. E1 : sur la courbe...et ?
572. E2 : en changeant de courbe
573. E1 : « en changeant de courbe » ...
574. E2 : donc
575. E1 : «  $MR=2$  »
576. E2 :  $mR$  était égale à la pente et puis... à la valeur, bon ...
577. E1 : voilà ... alors, maintenant il faut déterminer l'équation, on a fait que
578. E2 : en sachant, voilà, en sachant que la pente de la tangente... sachant que la ... la valeur de la tangente ...
579. E1 : la pente en M, valeur absolu de la pente en M, je (... ?) pour l'instant on met valeur absolu, donc c'est MQ sur
580. E2 :  $mQ / QR$ ... et que MQ était égal à l'ordonnée du point M
581. E1 : oui ... donc ... «  $MQ = y$  » ...
582. E2 : on a fait ... apparaître ... euh ...
583. E1 : valeur absolue ...
584. E2 : une relation entre «  $y' = \dots$  »... de ce point (finalement) ...
585. E1 : en M égal
586. E2 : voilà
587. E1 : alors, je laisse en valeur absolue pour l'instant
588. E2 :  $mQ / QR$ ...
589. E1 :  $y(M)$
590. E2 : voilà.. sur QR
591. E1 : sur QR ... avec QR
592. E2 : égal ... bon, puis ça sera l'ordonnée et il y a plus parce qu'après... (... ?) ... donc ça
593. E1 : et on observe aussi le signe de ... les
594. E2 : bon, que la pente est toujours négative entre... euh ...
595. E1 : de «  $y'$  » et «  $y$  » sont opposés
596. E2 : voilà et «  $y$  » est toujours inférieur à 2 (... ?)
597. E1 : oui, mais ça on le dira après
598. E2 : on le verra après d'accord, oui, c'est vrai ... ..

(changement de cassette)

599. E2 : et puis la pente, on a rentre l'expression de le machin ... et puis
600. E1 : alors pour se convaincre
601. E2 : ben, on a fait ça, on a fait ça
602. E1 : ah, oui, oui
603. E2 : on a fait ça, ça fait de (... ?), ça vérifie que (... ?)
604. E1 : donc ... je vais ... c'est marqué là
605. E2 : si tu veux il n'y a pas de problème, donc on a ... alors que tu fais la (tâche) alors je prends le ... donc on a fait afficher la pente ...
606. E1 : oui, là... c'est (... ?) ... (...?) de se convaincre que (... ?) ... personnel est très bien
607. E2 : (... ?) [il écrit] « en ayant fait afficher la valeur de la pente de la tangente en M à la courbe... ainsi qu'en ayant rentré l'expression de l'équation différentielle trouvé ... nous avons pu constater que, en chaque point M, les 2 valeurs ... la valeur... le deux valeurs de (... ?) 2 valeurs (pente de la tangente et résultat de l'expression au point M) ... étaient égales » ... .. (... ?)
608. E1 : oui, oui ... donc ... maintenant les propriétés mathématiques de la courbe
609. E2 : et puis propriétés mathématiques... on va parler un peu et puis c'est bon
610. E1 : alors ... la bande
611. E2 : oui, et voilà... on peut dire que
612. E1 : la fonction est définie en... euh l'équation différentielle est définie
613. E2 : voilà, voilà ... entre ... -2 et plus... je ne comprends pas bien... pourquoi on ne le voit pas en -2 ? ... mais bon ...
614. E1 : parce qu'ils se sont limités, en fait, mais
615. E2 : (facilement)
616. E1 : il y avait une possibilité d'aller plus bas...
617. E2 : parce que là on voit plus, là, si je prends là...
618. E1 : il n'aura plus la courbe
619. E2 : oui, mais

620. E1 : en fait (elle colle)
621. E2 : attend ... attend, si, si ... elle existe parce que regarde... on voit pas la courbe, elle est peut être cachée ...
622. E1 : ils l'ont cachée ?
623. E2 : non... pourquoi il n'y a pas ?... parce que sinon il n'aurait pas de tangente... la distance bouge par là... c'est vrai, c'est vrai ... parce que si on... la distance bougerait
624. E1 : ouais ... mais
625. E2 : alors si je prends (... ?)
626. E1 : mais, la distance ne bouge pas parce qu'elle... elle (...?)...
627. E2 : ah, ouais, ben regarde, regarde ce que j'ai eu, j'ai pas... regarde... .. là je l'avait mis un (... ?)...
628. E1 : ah, oui, elle les affichait
629. E2 : voilà regarde les nombres... c'est
630. E1 : c'est... normal, hein
631. E2 : je vais le ramener
632. E1 : oui, ramène ça
633. E2 : ça on s'en fou, et en fait... ah ... il est... à un moment il est lié, c'est pour ça ?
634. E1 : oui
635. E2 : voilà ... et en fait on le voit encore en dynamique aussi celui là... il calcule l'expression en dynamique... ce (... ?) quoi on devra faire attention effectivement
636. E1 : ah oui, oui
637. E2 : oui, regarde... voilà... donc on peut vérifier vraiment... j'ai peur que c'est marqué en dynamique, bon, ce n'est pas grave, donc en fait on le voit, mais la courbe existe aussi entre -2 et 2
638. E1 : oui, oui
639. E2 : parce que si non il mettrait pas les... il ne donnerait pas ça...
640. E1 : ah oui, oui
641. E2 : pourquoi est ce qu'elle n'est pas affichée entre -2 et 0 ? c'est par... ?... parce qu'elle existe, on peut le vérifier
642. J : oui, oui
643. E2 : (... ?) l'on sache... parce qu'on a les propriétés mathématiques, alors nous on dit qu'on a entre -2 et 2, mais on la voit qu'entre 0 et 2... mais elle existe quand même, c'est parce qu'elle est cachée ou, non ?
644. J : non, le problème c'est que quand j'ai fait courbe j'ai utilisé la solution, j'ai résolu l'équation différentielle, et dans la résolution de l'équation différentielle il y a un, comment ça s'appelle ?... le dénominateur, il y a un « y » ... alors c'est la racine
645. E1 : «  $-y^2$  »
646. J : oui
647. E2 : ouais, mais pour avoir « y » pour cette courbe ...
648. J : oui, oui
649. E2 : ce que je veux dire là on la voit, mais là elle existe pareil et symétrique, et on la voit parce que en fait quand on atteint 2 ici après on voit qu'on va arriver, paf ça y est
650. J : une façon de la regarder, peut être soit
651. E2 : et l'expression le disse parce que je l'ai fait calculer là
652. J : oui, oui, alors ce qu'on pourrait faire c'est faire le symétrique, je ne sais pas si ça marche
653. E2 : oui, axiale, oui, sur ce lieu
654. J : ah, non
655. E2 : par rapport à ce système, ah...mais il a fait juste un point
656. J : oui, on pourrait faire la trace, là, ce point et alors on pourrait bouger ce point là...
657. R-E1 : d'accord
658. E1 : donc, voilà, on aurait pu la
659. E2 : voilà, ok
660. J : non, encore pour c'est lieu on peut faire... je vais la tracer, on peut demander le lieu, de ce point quand ce point bouge ...
661. E2 : et cliquer (... ?) la courbe ... ah voilà
662. E1 : donc, on a l'ensemble quoi, la courbe, le symétrique de la courbe
663. J : maintenant c'est un peu lent, mais ça marche ...
664. E2 : il a vérifié en fait que ça existait en dessous
665. E1 : parce que c'est défini entre -2 et 2 donc on sait (... ?) là ... ..
666. E2 : ben, c'est bien ...
667. E1 : il faudrait vérifier qu'on a une asymptote en fait quand « x » ... tend ... euh

668. E2 : ben, quand  $x$  tend vers l'infini ? non, ah, ben ... quelle valeur de la tangente (... ?) ... ah ... c'est un peu plus long... puisque à ... tout à l'heure ... puisqu'il bouge encore... alors ne t'inquiète pas, s'il bouge, parce que... ah
669. E1 : elle bouge
670. E2 : voilà ... c'est pas grave
671. E1 : qu'est ce que je vais dire... les propriétés mathématiques ... on a (besoin) d'un peu plus
672. E2 : et ben, la pente est égale à l'infini quand «  $y$  » tend vers 2
673. E1 : oui, oui, c'est ça
674. E2 : et la valeur de «  $x$  » en ce point... quelle est sa valeur ?.. non, pourquoi ? non, c'est la valeur de «  $x$  » on ne l'aura plus ça dépende de la courbe et puis après comme il y a symétrie il y a forcément une asymptote horizontale «  $Ox$  »
675. E1 : oui, il y a ça aussi
676. E2 : en raison de symétrie, parce que ça va se couper, je sais pas (...) une courbe
677. E1 : bon, attend, pour l'instant «  $y$  » tend vers plus l'infini... et quand «  $y$  » tend vers 2... quand «  $y$  » tombe vers 2 ... euh
678. E2 : ben, sans le joker on l'aurait pas trouvé
679. E1 : ah, ouais, sans le joker, impossible... impossible de penser à ces distances
680. E2 : je l'efface parce qu'elle a ralenti vachement
681. E1 : voilà c'est bien de savoir que finalement elle n'a pas si (... ?) là existe... (... ?) passé ... euh ... la pente ... ..
682. P : bon, je vais peut être ramasser les... nous on va ramasser les feuilles, je vais juste faire un petit bilan  
...
683. E2 : voilà, c'est bon ... ..

**(fin de l'activité)**



# **ANNEXE 2**

## **L'EXPERIMENTATION DE L'ANNEE 2004**

**Les fiches**

**Les résolutions des étudiants**

**Les transcriptions**

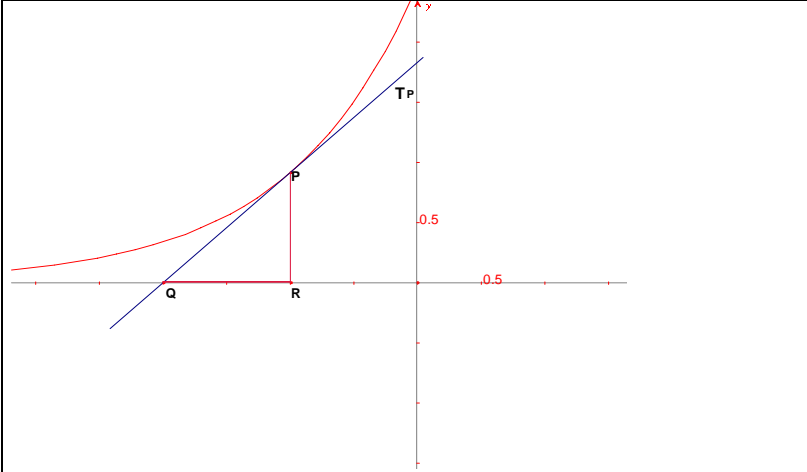
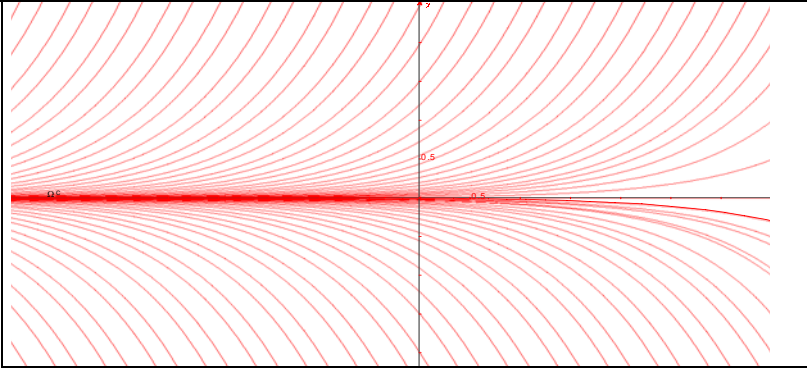




# **LES FICHES**

**L'expérimentation de l'année 2004**

1) Les figures ci-contre correspondent à la même famille de courbes  $\Omega$ , la tâche consiste en trouver l'équation différentielle de premier ordre associé à la famille  $\Omega$ .  
 Une propriété de la famille de courbes  $\Omega$  est la suivante : pour une courbe quelconque de la famille, si  $T_P$  est la tangente en point  $P$  de la courbe, la sous tangente (segment  $QR$ ) a toujours une longueur constante  $k$ .



Explicités les pas qui leur ont conduit à l'équation différentielle

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Groupe : \_\_\_\_\_

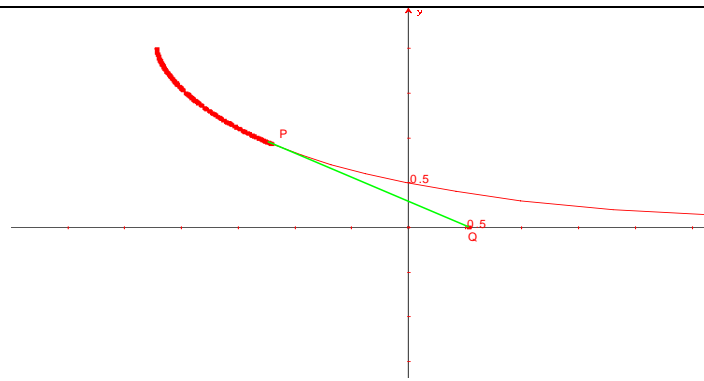
- 3) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$ ?

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

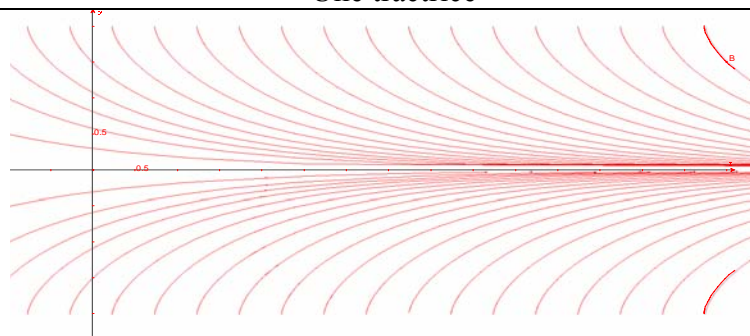
Groupe : \_\_\_\_\_

Soit PQ un segment de longueur constante «  $k$  ». On place le point Q sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé. La courbe décrite par P lorsque Q décrit l'axe des abscisses s'appelle *tractrice*.

3) Déduisez l'équation différentielle de la famille de tractrices et explicitez tous les pas que leur ont conduit à cette équation



Une tractrice



La famille de tractrices

Les pas qui ont conduit à l'équation différentielle

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

Groupe : \_\_\_\_\_

- 4) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de trajectoires?

IUFM Grenoble Continuum 2004  
 PLC1 Mathématiques

Groupe : \_\_\_\_\_  
 Date : \_\_\_\_\_

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_  
 Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

### Equations différentielles et Vecteurs tangents

#### Partie 1

- Ouvrez Cabri-Géomètre sur votre ordinateur et le fichier VecteursEDConnues.fig. Les vecteurs Vecteur1, Vecteur2 et Vecteur3 sont associés respectivement aux équations différentielles 1), 2) et 3).
- Les vecteurs sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant son origine : a) Justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l'équation différentielle affichée ; b) Identifier les régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle, dessiner ces régions et les associer une expression algébrique ; c) Elaborer des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions

Pourquoi le Vecteur 1 peut être associé à l'équation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$  ?

Des régions du plan où le vecteur a une pente nulle

Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions

Expressions algébriques associés

<p>Pourquoi le Vecteur 2 peut être associé à l'équation différentielle <math>y' = (x+2)/(x^2-1)</math> ?</p>	
<p>Des régions du plan où le vecteur a une pente nulle</p>	<p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
<p>Expressions algébriques associées</p>	

<p>Pourquoi le Vecteur 3 peut être associé à l'équation différentielle <math>y' = (y^2+x)(x-y)</math> ?</p>	
<p>Des régions du plan où le vecteur a une pente nulle</p>	<p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
<p>Expressions algébriques associées</p>	



**Partie 2**

4. Ouvrez le fichier VecteursEDInconnues.fig. Les vecteurs Vect1, Vect2, Vect3 et Vect4 sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant son origine.

5. Pour chaque vecteur indiquer de quelle équation différentielle de la liste ci-dessous, il peut être un vecteur tangente aux courbes solutions et justifier pourquoi.

Vect1	Equation
Justification	

Vect1	Equation
Justification	

Vect1	Equation
Justification	

Vect1	Equation
Justification	

**E1)**  $y' = a(x^2 + 1)$    
**E2)**  $y' = b(y^2 - 1)(x^2 + y^2)$    
**E3)**  $y' = c(y^2 - 4)$    
**E4)**  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$   
**E5)**  $y' = ke^{-0.05x^2}$    
**E6)**  $y' = l(y - 1)(y^2 - 4)$    
**E7)**  $y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}$    
**E8)**  $y' = n(y - x^2)(x + y)$

$a, b, c, d, k, l, m, n$  réelles positives

# **LES RESOLUTIONS DES ETUDIANTS**

**Expérimentation de l'année 2004**



# **LE TRAVAIL INDIVIDUEL DES ETUDIANTS**

**E'1, E'4, E'12, E'14, E'15, E'17**

## **MISE EN EQUATION DE FAMILLES DE COURBES (Papier/Crayon)**

**L'expérimentation de l'année 2004**

### Mise en équation de familles de courbes (papier/crayon)

Etudiant E'1

E'1

IUFM Grenoble - Chambéry Continuum 2004  
PLC1 Mathématiques

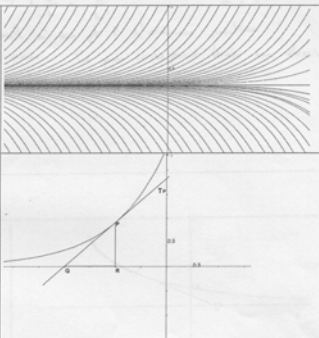
Groupe : \_\_\_\_\_  
Date : \_\_\_\_\_

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

**Première étude**

1) Les figures ci-contre correspondent à la même famille de courbes  $\Omega$ , la tâche consiste à trouver l'équation différentielle du premier ordre associée à la famille  $\Omega$ .

Une propriété de la famille de courbes  $\Omega$  est la suivante : Pour une courbe quelconque de la famille, si  $T_P$  est la tangente en point  $P$  de la courbe, pour tout point  $P$ , la sous-tangente (segment  $QR$ ) a une longueur constante «  $k$  ».



**Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle**

peut de la tangente au point  $P$  :  $\frac{y_P - y_a}{x_P - x_a} = \frac{y_P}{k}$   
 or  $y_P$  est la valeur de la fonction choisie en  $P$ .  
 donc  $y' = \frac{y}{k}$

Questionnaire IUFM 2004 1/3

E'1

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

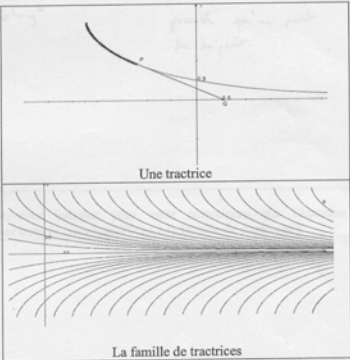
Groupe : Grenoble 1

2) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ?

On peut penser à  $y'' = \frac{y'}{k} = \frac{y}{k^2}$   
 $y'' > 0$  si on est en un pt  $P$  d'ordonnée positive.  
 $y'' < 0$  sinon. Ce qui correspond bien aux dessins.

**Deuxième étude**

Soit  $PQ$  un segment de longueur constante «  $k$  ». On place le point  $Q$  sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé. La courbe décrite par  $P$  lorsque  $Q$  décrit l'axe des abscisses s'appelle **tractrice**.



**Une tractrice**

Déterminez l'équation différentielle de la famille de tractrices et explicitez ci-dessous toutes les étapes conduisant à cette équation

Questionnaire IUFM 2004 2/3

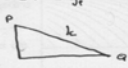
E'1

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

Groupe : Grenoble 1

**Les étapes conduisant à l'équation différentielle**

La tangente en  $P$  a pour pente :  $\frac{y_P - y_a}{x_P - x_a} = \frac{y_P}{k}$   
 or  $x_P - x_a = \sqrt{k^2 - y_P^2}$  et  $x_P - x_a < 0$   
 donc  $y' = \frac{-y}{\sqrt{k^2 - y^2}}$  et  $y' = k$  n'est possible qu'en point de départ



4) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de tractrices ?

Questionnaire IUFM 2004 3/3

# Mise en équation de familles de courbes (papier/crayon)

Etudiant E'4

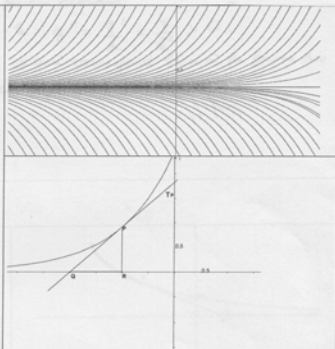
E'4

IUFM Grenoble - Chambéry Continuum 2004  
PLC1 Mathématiques

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : \_\_\_\_\_  
Date : \_\_\_\_\_

**Première étude**

1) Les figures ci-contre correspondent à la même famille de courbes  $\Omega$ , la tâche consiste à trouver l'équation différentielle du premier ordre associée à la famille  $\Omega$ .  
Une propriété de la famille de courbes  $\Omega$  est la suivante :  
Pour une courbe quelconque de la famille, si  $T_P$  est la tangente en point P de la courbe, pour tout point P, la sous-tangente (segment QR) a une longueur constante « k ».



Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle

pende de la tangente en P :  $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{y_P}{h}$

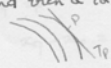
$\Rightarrow y' = \frac{y}{h}$

Questionnaire IUFM 2004 1/3

E'4

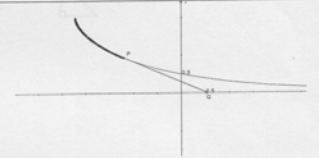
Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : Grenoble 1

2) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ?  
d'après le dessin (position relative de la courbe et la tge),  
 $y'' > 0$ . Vérifions-le :  $y'' = \frac{y'}{h} = \frac{\frac{y}{h}}{h} = \frac{y}{h^2} > 0$ .  
Si  $y < 0$ ,  $y'' < 0$  ce qui correspond bien à la forme des courbes d'ordonnées négatives.




**Deuxième étude**

Soit PQ un segment de longueur constante « k ». On place le point Q sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé. La courbe décrite par P lorsque Q décrit l'axe des abscisses s'appelle tractrice.



Une tractrice

Déterminez l'équation différentielle de la famille de tractrices et explicitez ci-dessous toutes les étapes conduisant à cette équation



La famille de tractrices

Questionnaire IUFM 2004 2/3

E'4

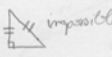
Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : Grenoble 1

Les étapes conduisant à l'équation différentielle

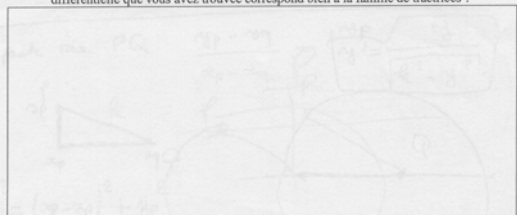
pende de (PQ) :  $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{-y_P}{h}$

et  $PQ^2 = (x_Q - x_P)^2 + y_P^2 \Rightarrow x_Q - x_P = \sqrt{h^2 - y^2}$

$\Rightarrow y' = \frac{-y}{\sqrt{h^2 - y^2}}$

soit  $h = y$  impossible :  impossible

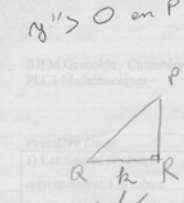
4) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de tractrices ?



Questionnaire IUFM 2004 3/3

E'4

$y'' > 0$  en P.



pende =  $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{-y}{h}$

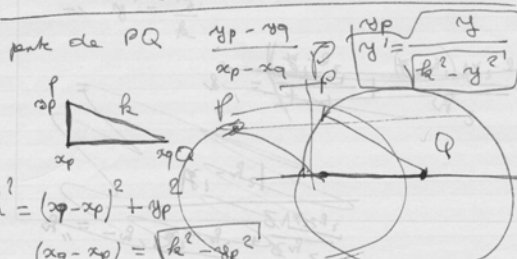
$h = -x_Q$

$y' = \frac{y}{h}$

$y'' = \frac{y'}{h} = \frac{\frac{-y}{h}}{-x_Q} = \frac{y}{h^2}$

$y' h = y$

pende de PQ  $\frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{y}{\sqrt{h^2 - y^2}}$



$h^2 = (x_P - x_Q)^2 + y_P^2$

$(x_P - x_Q) = \sqrt{h^2 - y^2}$

Questionnaire IUFM 2004 1/3

### Mise en équation de familles de courbes (papier/crayon)

Etudiant E'12

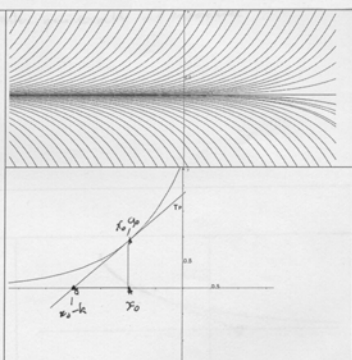
IUFM Grenoble - Chambéry Continuum 2004  
PLC1 Mathématiques

Groupes : \_\_\_\_\_  
Date : \_\_\_\_\_

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

**Première étude**

1) Les figures ci-contre correspondent à la même famille de courbes  $\Omega$ , la tâche consiste à trouver l'équation différentielle du premier ordre associée à la famille  $\Omega$ . Une propriété de la famille de courbes  $\Omega$  est la suivante : Pour une courbe quelconque de la famille, si  $T_P$  est la tangente en point  $P$  de la courbe, pour tout point  $P$ , la sous-tangente (segment  $QR$ ) a une longueur constante «  $k$  ».



Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle

on écrit l'équation de la tangente de la courbe en  $P(x_0, y_0)$  :

$$y = (x - x_0) \beta'(x_0) + \beta(x_0)$$

$$y = \frac{PR}{QR} x + x_0 - k = \frac{y_0}{k} x + (x_0 - k)$$

$$(x - x_0) \beta'(x_0) + \beta(x_0) = \frac{y_0}{k} x + (x_0 - k)$$

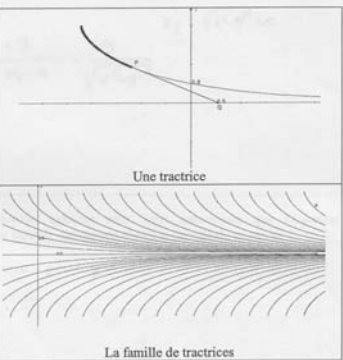
les coef directeurs sont égaux  $y' = \frac{y}{k}$

2) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ?

on a tracé des courbes qui ressemblent à l'exponentiel

**Deuxième étude**

Soit  $PQ$  un segment de longueur constante «  $k$  ». On place le point  $Q$  sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé. La courbe décrite par  $P$  lorsque  $Q$  décrit l'axe des abscisses s'appelle *tractrice*.



Déterminez l'équation différentielle de la famille de tractrices et explicitez ci-dessous toutes les étapes conduisant à cette équation

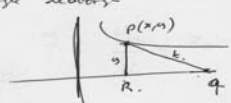
Questionnaire IUFM 2004 1/3

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

Groupes : \_\_\_\_\_

**Les étapes conduisant à l'équation différentielle**

on utilise le triangle rectangle



$$k^2 = y^2 + (x_q - x)^2$$

$$x_q - x = \sqrt{k^2 - y^2}$$

$$x_q = \sqrt{k^2 - y^2} + x$$

$$y' = \frac{-y}{x_q - x} = \frac{-y}{\sqrt{k^2 - y^2}}$$

4) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de tractrices ?

→ la limite on voit quand  $x \rightarrow \infty$

Questionnaire IUFM 2004 3/3

Mise en équation de familles de courbes (papier/crayon, brouillons)  
 Etudiant E'12

E'12

QR

$$Ax + b = 0 \quad \boxed{y = (x - x_0) \beta'(x) + \beta(x_0)}$$

$\beta'(x)$

$(x_0, y_0) \rightarrow y = \frac{pR}{qR} + q$

$y = \beta(x)$

$$y = \frac{y_0}{k} + x_0 - k$$

$$(x - x_0) \beta'(x) + \beta(x_0) = \frac{y_0}{k} + x_0 - k$$

$$(x - x_0) y' + y_0 = \frac{y_0}{k} + x_0 - k \cdot \frac{y_0}{k}$$

~~$y' + y_0 = k$~~   
 ~~$y' = k - y_0$~~

$$y' = \frac{k - 1}{k} y_0$$

$$\boxed{x y' + y_0 = \frac{y_0}{k} - k}$$

$y =$

$$y = \frac{pR}{qR} x - k$$

$$0 =$$

$$y = \frac{pR}{qR} x + x_0 - k$$

$(x - x_0) y'(x_0) + y(x_0) = \frac{y_0}{k} x + x_0 - k$

$\beta'(x_0)$

$y =$

E'12

$P = (p, 0)$

$$x y' = \frac{y}{k} x + k^2$$

$$\boxed{y' = \frac{y}{k} + \frac{k^2}{x}}$$

$$\left( \frac{1}{k} y \right)' = \frac{1}{k} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{y = e^{\frac{1}{k}}}$$

$(x - x_0) y' + y_0 = \frac{y_0}{k} x + k^2$

$$y' = \frac{y_0}{k} x + k^2$$

$(x - x_0) k =$   
 $x y_0 - k^2 = y_0$   
 $0 = k x_0 - k^2 + y_0 = 0$   
 $y = x_0 - k^2$   
 $0 = k(x_0 - k) + y_0$   
 $y + x_0 = y_0$   
 $y = y_0 - x_0$

---


$$y = \frac{pR}{qR} (x - x_0) + \beta(x_0)$$

$$y = \frac{pR}{qR} x + \frac{pR}{qR} (x_0 - k) + y_0$$

$\beta(x) = k$

$$y = \frac{b^2}{a^2} x$$

$y =$



### Mise en équation de familles de courbes (papier/crayon)

Etudiant E'14

E'14

IUFM Grenoble - Chambéry Continuum 2004  
PLC1 Mathématiques

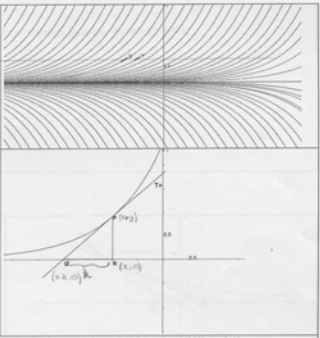
Groupe : \_\_\_\_\_  
Date : 11/12/04

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

**Première étude**

1) Les figures ci-contre correspondent à la même famille de courbes  $\Omega$ , la tâche consiste à trouver l'équation différentielle du premier ordre associée à la famille  $\Omega$ .

Une propriété de la famille de courbes  $\Omega$  est la suivante : Pour une courbe quelconque de la famille, si  $T_P$  est la tangente en point  $P$  de la courbe, pour tout point  $P$ , la sous-tangente (segment  $QR$ ) a une longueur constante «  $k$  ».



Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle

soit  $P \in \Omega$   $P(x_0, y_0)$  — pente de  $T_P$   $\frac{y_0 - y_0}{x_0 - x_0} = \frac{y_0}{k}$   
 $Q(x_0, 0) = (x_0, 0)$

D'où,  $\forall$  point de  $\Omega$   $y' = \frac{y}{k} \Rightarrow ky' - y = 0$

Questionnaire IUFM 2004 1/3

E'14

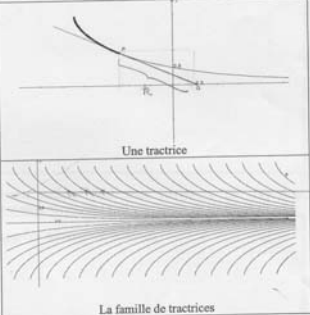
Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : 4

2) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ?

solutions  $ky' = y$   
 à y fixé, on a bien des tangentes qui ont même pente :  
 ne dépendent pas de x.

**Deuxième étude**

Soit  $PQ$  un segment de longueur constante «  $k$  ». On place le point  $Q$  sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé. La courbe décrite par  $P$  lorsque  $Q$  décrit l'axe des abscisses s'appelle *tractrice*.



Déterminez l'équation différentielle de la famille de tractrices et explicitez ci-dessous toutes les étapes conduisant à cette équation

Questionnaire IUFM 2004 2/3

E'14

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_ Groupe : 1

**Les étapes conduisant à l'équation différentielle**

$P(x_0, y_0)$   $Q(x_0, 0)$   $T$  pente :  $\frac{y_0 - 0}{x_0 - x_0} = \frac{y_0}{k}$   
 $k^2 = (x_0 - x_0)^2 + y_0^2$   
 $\sqrt{k^2 - y^2} = x_0 - x_0$   
 $\Rightarrow y' = \frac{y}{\sqrt{k^2 - y^2}}$

4) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de tractrices ?

- y' ne dépend pas de x, ce que l'on retrouve sur le dessin.
- si  $y < 0 \Rightarrow y' < 0$
- si  $y > 0 \Rightarrow y' > 0$

Questionnaire IUFM 2004 3/3

# Mise en équation de familles de courbes (papier/crayon)

Etudiant E'15

E'15

IUFM Grenoble - Chambéry Continuum 2004  
PLCI Mathématiques

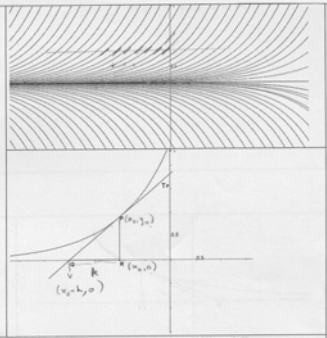
Groupe : \_\_\_\_\_  
Date : 1/12/04

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

**Première étude**

1) Les figures ci-contre correspondent à la même famille de courbes  $\Omega$ , la tâche consiste à trouver l'équation différentielle du premier ordre associée à la famille  $\Omega$ .

Une propriété de la famille de courbes  $\Omega$  est la suivante : Pour une courbe quelconque de la famille, si  $T_P$  est la tangente en point P de la courbe, pour tout point P, la sous-tangente (segment QR) a une longueur constante « k ».



**Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle**

$r a^2 : (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 = k^2$  donc  $r a^2 = \sqrt{k^2 - y_p^2}$

$\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} = y'_p$  donc  $\frac{y_p}{x_p - \sqrt{k^2 - y_p^2}} = y'_p$

avec  $x_q = x_p - k$

$\frac{y_p}{x_p - \sqrt{k^2 - y_p^2}} = y'_p$

Questionnaire IUFM 2004 1/3

E'15

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

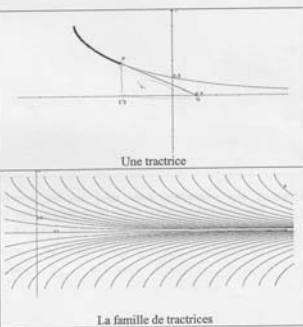
Groupe : \_\_\_\_\_

2) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ?

pour un  $k$  fixe, les tangentes aux courbes de la famille ont une même longueur  $k$  sur l'axe des abscisses.

**Deuxième étude**

Soit PQ un segment de longueur constante « k ». On place le point Q sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé. La courbe décrite par P lorsque Q décrit l'axe des abscisses s'appelle *tractrice*.



Déterminez l'équation différentielle de la famille de tractrices et explicitez ci-dessous toutes les étapes conduisant à cette équation

Questionnaire IUFM 2004 2/3

E'15

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

Groupe : \_\_\_\_\_

**Les étapes conduisant à l'équation différentielle**

$r a^2 : (y_p - y_q)^2 + (x_p - x_q)^2 = k^2$  (1)  $(x_p, 0)$

$y_p^2 + (x_p - x_q)^2 = k^2$

$x_p^2 - 2x_p x_q + x_q^2 + y_p^2 = k^2$

$x_p^2 - 2x_p x_q + x_q^2 + (x_p - x_q)^2 = k^2$

$x_p^2 - 2x_p x_q + x_q^2 + x_p^2 - 2x_p x_q + x_q^2 = k^2$

$2x_p^2 - 4x_p x_q + 2x_q^2 = k^2$

$x_p^2 - 2x_p x_q + x_q^2 = \frac{k^2}{2}$

$(x_p - x_q)^2 = \frac{k^2}{2}$

$x_p - x_q = \frac{k}{\sqrt{2}}$

$x_p - x_q = \frac{k}{\sqrt{2}}$

$x_p - x_q = \frac{k}{\sqrt{2}}$

4) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de tractrices ?

pour  $y$  fixe,  $y'$  se dégrade plus de  $x$  si  $y$  est  $< 0$  alors  $y'$  est négatif et si  $y$  est  $> 0$  alors  $y'$  est  $> 0$ .

Questionnaire IUFM 2004 3/3

Mise en équation de familles de courbes (papier/crayon)

Etudiant E'17

E'17

IUFM Grenoble - Chambéry Continuum 2004  
PLC1 Mathématiques

Groupe : \_\_\_\_\_  
Date : \_\_\_\_\_

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

**Première étude**

1) Les figures ci-contre correspondent à la même famille de courbes  $\Omega$ , la tâche consiste à trouver l'équation différentielle du premier ordre associée à la famille  $\Omega$ .

Une propriété de la famille de courbes  $\Omega$  est la suivante : Pour une courbe quelconque de la famille, si  $T_P$  est la tangente en point P de la courbe, pour tout point P, la sous-tangente (segment QR) a une longueur constante « k ».

Expliciter les étapes de calcul conduisant à l'équation différentielle

$T_P = \frac{PQ}{k} \Leftrightarrow y' = \frac{y}{k}$

Questionnaire IUFM 2004 1/3

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

2) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de courbes  $\Omega$  ?

on observe sur les figures que si on fixe  $y_0$  alors pour toutes ces les tangentes sont les mêmes, c'est pourquoi l'équation différentielle ne dépend pas de  $x$ .

de  $\oplus$  si  $y > 0$   $y'$  est positive  
de  $\ominus$  si  $y < 0$   $y'$  est négative.

**Deuxième étude**

Soit PQ un segment de longueur constante « k ». On place le point Q sur l'axe des abscisses d'un repère orthonormé. La courbe décrite par P lorsque Q décrit l'axe des abscisses s'appelle *tractrice*.

Une tractrice

Déterminez l'équation différentielle de la famille de tractrices et explicitez ci-dessous toutes les étapes conduisant à cette équation

La famille de tractrices

Questionnaire IUFM 2004 2/3

E'17

Nom et Prénom : \_\_\_\_\_

Groupe : \_\_\_\_\_

**Les étapes conduisant à l'équation différentielle**

on cherche  $\alpha$  on regarde le triangle rectangle

P de  $(x, y)$   
 $k^2 = y^2 + (\alpha - x)^2$   
d'où  $\alpha = \sqrt{k^2 - y^2} + x$

$y' = \frac{-y}{\alpha + \sqrt{k^2 - y^2} - x} = \frac{-y}{\sqrt{k^2 - y^2}}$

4) Quels éléments pourriez-vous indiquer pour vous convaincre que l'équation différentielle que vous avez trouvée correspond bien à la famille de tractrices ?

- de  $\hat{m} \forall x$  si  $y$  fixe  $\hat{m}$  tangente.  
- si  $y > 0$   $y'$  est négative.  
- si  $y < 0$   $y'$  est positive.  
- et la dérivée seconde est  $\oplus$  si  $y < 0$  et  $\ominus$  si  $y > 0$

Questionnaire IUFM 2004 3/3

Mise en équation de familles de courbes (papier/crayon, brouillons)  
 Etudiant E'17

E'17

Équation fonctionnelle qui relie  $g(x)$  et ses dérivées.

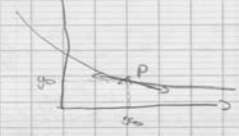
1<sup>er</sup> ordre :  $g(x)$  et sa dérivée Jolie  $F(g'(x), g(x)) = 0$   
 idéal :  $g(x)$  qui satisfait l'équation.

divers écriture :

$$g' + 2g = 0 \Leftrightarrow g'(x) + 2g(x) = 0 \Leftrightarrow y' + 2y = 0$$

et  $x'' + 2x' + 1 = 0 \in \mathbb{R}$

$F(x, y, y') = 0$   
 expression algébrique  $y = g(x) + k$



P on a écrit l'équation de la tangente avec  $F(x_0, y_0, y') = 0$

$$T_p = \frac{PR}{k} = \frac{y - y_0}{x - x_0} = y'$$


$$y = (x - x_0)y' + y_0$$

$$y(1 - (x - x_0)y') = y_0$$


$$y = \frac{y_0}{1 - (x - x_0)y'}$$

$$y_0^2 + (x - x_0)^2 = k^2$$

$$y' = \frac{y_0}{x - x_0} = y'$$

$$y' = \frac{y}{x - x_0} = \frac{y}{\sqrt{k^2 - y^2}}$$



---



$P(x, y)$   $\Phi(k^2 = y^2 + (x - x_0)^2)$   
 $x_0 - x = \sqrt{k^2 - y^2}$   
 $x_0 = x + \sqrt{k^2 - y^2}$

$$\frac{-y}{x + \sqrt{k^2 - y^2} - x} = y' \Leftrightarrow y' = \frac{-y}{\sqrt{k^2 - y^2}}$$

$$\sqrt{k^2 - y^2} = (k^2 - y^2)^{1/2} = \frac{1}{2y} (k^2 - y^2)^{-1/2} \times (-2y y')$$

$$\frac{y}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \frac{y'(\sqrt{k^2 - y^2}) + y(k^2 - y^2)^{-1/2} \times y y'}{k^2 - y^2}$$

$$= \frac{y'(\sqrt{k^2 - y^2}) + y(k^2 - y^2)^{-1/2} \times y y'}{k^2 - y^2}$$

$$= \frac{-y}{\sqrt{k^2 - y^2}}$$

si  $y > 0$  négatif  
 si  $y < 0$  positif



# **LE TRAVAIL PAR BINOMES**

**E'1/E'4, E'12/E'17, E'14/E'15**

**LES ACTIVITES D'ASSOCIATION**

**VECTEURS TANGENTS DYNAMIQUES – EQUATIONS DIFFERENTIELLES**

**(Géométrie dynamique)**

**L'expérimentation de l'année 2004**

## Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien explicitement donné)

### Binôme E'1/E'4 (étudiant E'1)

**E'1-E'4**

IUFM Grenoble Continuum 2004  
PLC1 Mathématiques

Groupes :  
Date : 2/12/04

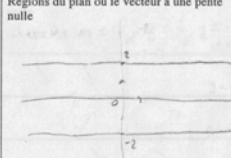
Nom et Prénom :  
Nom et Prénom :

Equations différentielles et Vecteurs tangents

**Partie 1**

1. Ouvrez Cabri-géomètre sur votre ordinateur et le fichier VecteursEDConnues.fig. Les vecteurs Vecteur1, Vecteur2 et Vecteur3 sont associés respectivement aux équations différentielles 1), 2) et 3).

2. Les vecteurs sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine : a) Justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l'équation différentielle affichée ; b) Identifier les régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle, dessiner ci-dessous ces régions et les associer une expression algébrique ; c) Donner des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions

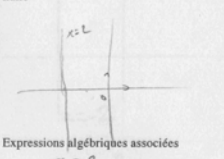
<p>Pourquoi le Vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle <math>y' = y(4-y)</math> ?</p> <p>Sur <math>y = 0, 2, 4</math> le vecteur est horizontal ce qui correspond bien à <math>y' = 0</math>. On vérifie aussi que pour <math>y &lt; 0</math> la pente est négative et pour <math>0 &lt; y &lt; 2</math> la pente est positive.</p>	
<p>Régions du plan où le vecteur a une pente nulle</p> 	<p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
<p>Expressions algébriques associées</p> <p><math>y = 0</math> <math>y = 2</math> <math>y = 4</math></p>	

ED-VecteursTangents IUFM 2004 1/3

**E'1**

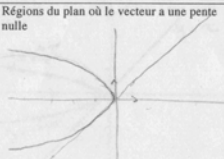
Pourquoi le Vecteur 2 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  ?

Sur  $x = -2$  et  $x = \pm 1$ , le vecteur est horizontal. Pour  $x < -2$  la pente est négative et pour  $-2 < x < 1$  la pente est positive.

<p>Régions du plan où le vecteur a une pente nulle</p> 	<p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
<p>Expressions algébriques associées</p> <p><math>x = 2</math></p>	

Pourquoi le Vecteur 3 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$  ?

Sur la droite  $y = x$ , le vecteur est horizontal. Pour  $x < 0$ , en  $y = \pm \sqrt{x}$ , le vecteur est horizontal.

<p>Régions du plan où le vecteur a une pente nulle</p> 	<p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
<p>Expressions algébriques associées</p>	

ED-VecteursTangents IUFM 2004 2/3

### Binôme E'1/E'4 (étudiant E'4)

**E'1-E'4**

IUFM Grenoble Continuum 2004  
PLC1 Mathématiques

Groupes :  
Date : 2/12/04

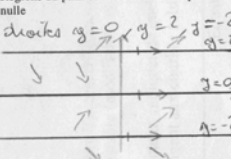
Nom et Prénom :  
Nom et Prénom :

Equations différentielles et Vecteurs tangents

**Partie 1**

1. Ouvrez Cabri-géomètre sur votre ordinateur et le fichier VecteursEDConnues.fig. Les vecteurs Vecteur1, Vecteur2 et Vecteur3 sont associés respectivement aux équations différentielles 1), 2) et 3).

2. Les vecteurs sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine : a) Justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l'équation différentielle affichée ; b) Identifier les régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle, dessiner ci-dessous ces régions et les associer une expression algébrique ; c) Donner des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions

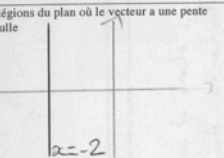
<p>Pourquoi le Vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle <math>y' = y(4-y)</math> ?</p> <p>En <math>y = 0, 2</math> et <math>4</math>, le vecteur est horizontal ce qui correspond bien à <math>y' = 0</math>. On vérifie aussi que pour <math>y &lt; 0</math> la pente est négative et pour <math>0 &lt; y &lt; 2</math> la pente est positive.</p>	
<p>Régions du plan où le vecteur a une pente nulle</p> 	<p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
<p>Expressions algébriques associées</p> <p><math>y = 0</math> <math>y = 2</math> <math>y = 4</math></p>	

ED-VecteursTangents IUFM 2004 1/3

**E'4**

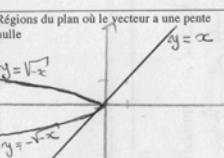
Pourquoi le Vecteur 2 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  ?

En  $x = -2$  et  $x = \pm 1$ , le vecteur est horizontal. Pour  $x < -2$  la pente est négative et pour  $-2 < x < 1$  la pente est positive.

<p>Régions du plan où le vecteur a une pente nulle</p> 	<p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
<p>Expressions algébriques associées</p> <p><math>x = -2</math></p>	

Pourquoi le Vecteur 3 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$  ?

Sur la droite  $y = x$ , le vecteur est horizontal. Pour  $x < 0$ , en  $y = \pm \sqrt{x}$ , le vecteur est horizontal.

<p>Régions du plan où le vecteur a une pente nulle</p> 	<p>Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions</p>
<p>Expressions algébriques associées</p>	

ED-VecteursTangents IUFM 2004 2/3

# Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien n'étant pas explicitement donné)

Binôme E'1/E'4 (étudiant E'1)

E'1-E'4

**Partie 2**

4. Ouvrez le fichier VecteursEDInconnues.fig. Les vecteurs Vect1, Vect2, Vect3 et Vect4 sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine.

5. Pour chaque vecteur, indiquer de quelle équation différentielle de la liste ci-dessous, il peut être un vecteur tangent aux courbes solutions et justifier pourquoi.

Vect1 Equation E5

Justification La pente de la droite dirigée par vecteur 1 semble rester toujours positive dans deux cas E4 et E5. De plus, elle tend vers 0 quand  $x \rightarrow +\infty$  donc E5.

Vect2 Equation E4

Justification Le vecteur n'est pas défini si  $y = x$ . de plus, la pente est  $> 0$  au dessus de la droite  $y = x$  et  $< 0$  en dessous.

Vect3 Equation E8

Justification Le vecteur 3 reste horizontal en parcourant  $y = x$  et  $y = x^2$ .

Vect4 Equation E7

Justification Si on fait parcourir le vecteur 4 sur la droite  $y = x$ , il reste horizontal. De plus, quand  $x \rightarrow 2$ , la pente est verticale.

E1)  $y' = a(x^2 + 1)$  E2)  $y' = b(y^2 - 1)(x^2 + y^2)$  E3)  $y' = c(y^2 - 4)$  E4)  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$   
 E5)  $y' = ke^{-0.05x}$  E6)  $y' = l(y - 1)(y^2 - 4)$  E7)  $y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}$  E8)  $y' = n(y - x^2)(x + y)$   
 a, b, c, d, k, l, m, n réels positifs

ED-VecteursTangents IUFM 2004 3/3

Binôme E'1/E'4 (étudiant E'4)

E'1-E'4

**Partie 2**

4. Ouvrez le fichier VecteursEDInconnues.fig. Les vecteurs Vect1, Vect2, Vect3 et Vect4 sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine.

5. Pour chaque vecteur, indiquer de quelle équation différentielle de la liste ci-dessous, il peut être un vecteur tangent aux courbes solutions et justifier pourquoi.

Vect1 Equation E5

Justification la pente du vecteur semble rester toujours  $\geq 0$ . donc seules les équations E1 et E5 conviennent. et qd on fait tendre  $x$  vers  $+\infty$ , le vecteur devient horizontal ie  $ny' \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$  donc seule E5 convient.

Vect2 Equation E4

Justification sur la droite  $y = x$  la pente du vecteur est verticale et change de sens si  $y > x$  ou  $y < x$ . donc  $ny' \xrightarrow{x \rightarrow y} \pm \infty$ . d'où au dénominateur  $\frac{1}{x - y} \xrightarrow{x \rightarrow y} \pm \infty$ .

Vect3 Equation E8

Justification sur la droite  $y = -x$  et sur la parabole  $y = x^2$ , le vecteur est horizontal donc  $ny' = 0 \Rightarrow ny' = k(y + x)(y - x^2) = 0 \Rightarrow E8$

Vect4 Equation E7

Justification sur la droite  $y = x$  le vecteur est horizontal  $\Rightarrow x - y$  au numérateur. et en  $x = \pm 2$  le vecteur est vertical  $\Rightarrow x^2 - 4$  au dénominateur.

E1)  $y' = a(x^2 + 1)$  E2)  $y' = b(y^2 - 1)(x^2 + y^2)$  E3)  $y' = c(y^2 - 4)$  E4)  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$   
 E5)  $y' = ke^{-0.05x}$  E6)  $y' = l(y - 1)(y^2 - 4)$  E7)  $y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}$  E8)  $y' = n(y - x^2)(x + y)$   
 a, b, c, d, k, l, m, n réels positifs

ED-VecteursTangents IUFM 2004 3/3



## Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien explicitement donné)

Binôme E'12/E'17 (étudiant E'17)

B'E'12-E'17
E'17

IUFM Grenoble Continuum 2004  
PLC1 Mathématiques

Nom et Prénom :  
Nom et Prénom :

Equations différentielles et Vecteurs tangents

**Partie 1**

1. Ouvrez Cabri-géomètre sur votre ordinateur et le fichier VecteursEDConnues.fig. Les vecteurs Vecteur1, Vecteur2 et Vecteur3 sont associés respectivement aux équations différentielles 1), 2) et 3).

2. Les vecteurs sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine : a) Justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l'équation différentielle affichée ; b) Identifier les régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle, dessiner ci-dessous ces régions et les associer une expression algébrique ; c) Donner des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions

Pourquoi le Vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle $y' = y(4-y)$ ? $\rightarrow$ car si $y < 2$ $y' < 0$ $2 < y < 4$ $y' > 0$ $y = 2$ $y' = 0$ $\rightarrow$ ne dépend pas de $x$ car pour $y$ fixé $y'(x) = y(4-y)$ . $\rightarrow$	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions $y = 2$ $y = -2$ sont des solutions $y = 0$ si la courbe solution passe par le point $(x, y)$ : - $y > 2$ la courbe est croissante et $x$ $y$ et $y' > 0$ - $2 < y < 4$ la courbe est décroissante et $x$ $y$ et $y' > 0$ - $2 < y < 4$ la courbe est décroissante et $x$ $y$ et $y' < 0$ - $y < 2$ la courbe est croissante et $x$ $y$ et $y' < 0$ et une courbe solution ne peut pas couper la droite $y = 2$ $y = 0$ $y = -2$ .
--	---

ED-VecteursTangents IUFM 2004 1/3

Pourquoi le Vecteur 2 peut-il être associé à l'équation différentielle $y' = (x+2)/(x^2-1)$ ? ne dépend pas de $y$ . $\rightarrow$ $x < -2$ $y' < 0$ $x \in ]-2, -1[$ $y' > 0$ $x \in ]-1, 1[$ $y' < 0$ $x \in ]1, +\infty[$ $y' > 0$	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions $\rightarrow$ si la courbe solution passe par $M(x, y)$ . si $x < -2$ la courbe est décroissante et $x$ $y$ et $y' < 0$ si $x \in ]-2, -1[$ la courbe est croissante et $x$ $y$ et $y' > 0$ si $x \in ]-1, 1[$ la courbe est décroissante et $x$ $y$ et $y' < 0$ si $x \in ]1, +\infty[$ la courbe est croissante et $x$ $y$ et $y' > 0$
Régions du plan où le vecteur a une pente nulle $y' = 0 \Leftrightarrow x = -2$	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions
Expressions algébriques associées $y = 0$ $y = -2$	Expressions algébriques associées

ED-VecteursTangents IUFM 2004 2/3

Binôme E'12/E'17

B'E'12-E'17
E'12-E'17

IUFM Grenoble Continuum 2004  
PLC1 Mathématiques

Nom et Prénom :  
Nom et Prénom :

Equations différentielles et Vecteurs tangents

**Partie 1**

1. Ouvrez Cabri-géomètre sur votre ordinateur et le fichier VecteursEDConnues.fig. Les vecteurs Vecteur1, Vecteur2 et Vecteur3 sont associés respectivement aux équations différentielles 1), 2) et 3).

2. Les vecteurs sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine : a) Justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l'équation différentielle affichée ; b) Identifier les régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle, dessiner ci-dessous ces régions et les associer une expression algébrique ; c) Donner des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions

Pourquoi le Vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle $y' = y(4-y)$ ? * $y' = 0$ en $2, -2, 0 \rightarrow$ le vecteur est horizontal * le vecteur ne dépend pas de $x$ , de quelque soit $x$ . * le coef directeur correspond au signe $y(4-y)$ .	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions les courbes solutions sont de 3 formes possible selon l'origine : - croissante $\rightarrow \infty$ si $y_0 > 2$ - dite si $y_0 = 2$ - décroissante $\rightarrow 0$ si $2 < y_0 < 4$ - dite si $y_0 = 0$ - croissante $\rightarrow 0$ si $-2 < y_0 < 0$ - dite si $y_0 = -2$ - décroissante $\rightarrow -\infty$ si $y_0 < -2$
---	--

ED-VecteursTangents IUFM 2004 1/3

Pourquoi le Vecteur 2 peut-il être associé à l'équation différentielle $y' = (x+2)/(x^2-1)$ ? - le vecteur ne dépend pas de $y$ . - les coef directeur est vertical en $-1$ et en $+1$ .	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions
Régions du plan où le vecteur a une pente nulle pente nulle en $x = -2$	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions
Expressions algébriques associées	Expressions algébriques associées

ED-VecteursTangents IUFM 2004 2/3

# Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien explicitement donné)

Brouillon (étudiant E'17)

E'17

$$y' = -y(4-y^2)$$

$$-y + y^3 > 0$$

$$y^3 > y \quad y^3 = y \quad y = 0 \quad y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

$y' = 0$  vecteur nul quand  $y = 0$  et  $y = \pm 2$ .

$$-y(4-y^2) > 0$$

$y$	-2	0	2
$-y$	+	+	-
$4-y^2$	-	+	-
	-	+	-

$y^2 = 4$   
 $y = \pm 2$

$y' \leq 0$  ( $y'' > 0$ )

$$-y'' = y'(4-y^2)$$

$$-y'' = y'(4-y^2) + 2y y'$$

$$= -y(4-y^2) + 2y^2$$

$$= -y((4-y^2)^2 - 2y)$$

E'17

$$y'' = -y'(4-y^2) - y(-2y)$$

$$= +y(4-y^2)^2 + 2y^2 \geq 0$$

$$= y((4-y^2)^2 + 2y)$$

$y'' = 0 \Leftrightarrow y = 0$

$$y'' = -y'(4-y^2) - y(-2y)$$

$$= +y(4-y^2)^2 + y^3(4-y^2)$$

$$= y(4-y^2)^2 (4-y^2 + y^2)$$

$$= 4y(4-y^2) = -\text{signe } y'$$


---

$y' = \frac{(x+2)}{x^2-1}$  ( $y^2, y$ )

$y'$		-3	-1	+1	
$x+2$	-	0	+	+	+
$x^2-1$	+	+	-	0	+
	-	+	-	+	+

$y^2 = -x$   
 $y^2 = \pm \sqrt{-x}$

$$y'' = \frac{(x^2-1) - 2x(x+2)}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1-2x^2-2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2} = -\frac{(x+1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{x^2-1 - (x+2)2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-1-2x^2-4x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-4x-1}{(x^2-1)^2}$$

$\Delta = 16-4 = 12$

**Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien n'étant pas explicitement donné)**

Binôme E'12/E'17

E'12-E'17

E'12-E'17

**Partie 2**

4. Ouvrez le fichier VecteursEDInconnues.fig. Les vecteurs Vect1, Vect2, Vect3 et Vect4 sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine.

5. Pour chaque vecteur, indiquer de quelle équation différentielle de la liste ci-dessous, il peut être un vecteur tangent aux courbes solutions et justifier pourquoi.

Vect1 Equation (E5)

Justification car  $y' = ke^{-0,05x^2} > 0 \forall x$ . ensuite on observe que  $y$  est maximum pour  $x=0$ , ça coïncide avec l'équation car  $y'' = 0$  sur  $]0, +\infty[$  et  $] -\infty, 0[$ .

Vect2 Equation E4

Justification on cherche une équation t.q  $y'$  change de signe pour  $y=x$  et pas des pour  $x=y$ .  
 $\Rightarrow$  (E4) et  $y > 0$  lorsque  $y > x$   
 $y' < 0$  —  $y < x$ .

Vect3 Equation (E7)

Justification on cherche une équation qui n'est pas des pour  $x=-2$  et  $x=2$  et  $y'=0$  en  $x=y$ .  
 Le signe de la dérivée coïncide.

Vect4 Equation (E8)

Justification on cherche une équation t.q  $y' = 0$  en  $(0,0)$  il reste (E2) et (E8).  
 on remarque que pour  $y=1$  le champ de vecteur est non réel  $\Rightarrow$  ça ne peut pas être (E2)

- ~~E1~~)  $y' = a(x^2 + 1)$    
 ~~E2~~)  $y' = b(y^2 - 1)(x^2 + y^2)$    
 ~~E3~~)  $y' = c(y^2 - 4)$    
 ~~E4~~)  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$   
~~E5~~)  $y' = ke^{-0,05x^2}$    
 ~~E6~~)  $y' = l(y - 1)(y^2 - 4)$    
 ~~E7~~)  $y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}$    
 (E8)  $y' = n(y - x^2)(x + y)$   
 $a, b, c, d, k, l, m, n$  réels positifs

# Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien explicitement donné)

Binôme E'14/E'15

E'14-E'15
E'14-E'15

IUFM Grenoble Continuum 200  
PLC1 Mathématiques

Date : 01/12/04

Nom et Prénom :  
Nom et Prénom :

Equations différentielles et Vecteurs tangents


**Partie 1**

1. Ouvrez Cabri-géomètre sur votre ordinateur et le fichier VecteursEDConnues.fig. Les vecteurs Vecteur1, Vecteur2 et Vecteur3 sont associés respectivement aux équations différentielles 1), 2) et 3).

2. Les vecteurs sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine : a) Justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l'équation différentielle affichée ; b) Identifier les régions du plan où les vecteurs ont une pente nulle, dessiner ci-dessous ces régions et les associer une expression algébrique ; c) Donner des arguments mathématiques pour justifier le comportement des courbes solutions

pourquoi le Vecteur 2 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (x+2)/(x^2-1)$  ?

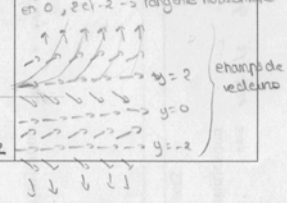
De même que pour le vecteur 1, sauf que l'on remplace  $x$  par l'abscisse du point origine du vecteur 2



Régions du plan où le vecteur a une pente nulle l'axe $x=2$	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions équation posée jointe en 1 et 1
Expressions algébriques associées $\frac{x+2}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x=2$	$\lim_{x \rightarrow -1} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow -1} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1} = +\infty$ et $x=0$ et $x=-2$ $\rightarrow$ tangente horizontale

pourquoi le Vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = -y(4-y^2)$  ?

On mesure la pente du vecteur : on affiche  
On affiche les coordonnées du point origine du vecteur 1, et lorsqu'on remplace  $y$  par l'ordonnée de ce point, ds  $y' = -y(4-y^2)$  on retrouve la pente pour n'importe quelle point origine du vecteur 1

Régions du plan où le vecteur a une pente nulle sur l'axe des abscisses	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions $\lim_{y \rightarrow 0} = +\infty$ , $\lim_{y \rightarrow 0} = -\infty$ en 0, 2 et -2 $\rightarrow$ tangente horizontale
Expressions algébriques associées $y' = 0$ donc $y(4-y^2) = 0$ $y=0$ ou $y = \pm 2$	 exemple de vecteurs

pourquoi le Vecteur 3 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y' = (y^2+x)(x-y)$  ?

De même que pour les vecteurs 1 et 2  
On remplace  $x$  et  $y$  par les coordonnées du point origine

Régions du plan où le vecteur a une pente nulle sur la diagonale $y=x$ et sur la courbe d'équation $y = \pm \sqrt{x}$ $x < 0$	Des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions $(x,y) = (0,0)$ } tangente $(x,y) = (x_0, x_0)$ } horizontale
Expressions algébriques associées $(y^2+x)(x-y) = 0$	

ED-VecteursTangents IUFM 2004 1/3
ED-VecteursTangents IUFM 2004 2/3

**Association d'un vecteur tangent dynamique et d'une équation différentielle (lien n'étant pas explicitement donné)**  
**Binôme E'14/E'15 (étudiant E'15)**

E'15

Partie 2

4. Ouvrez le fichier VecteursEDInconnues.fig. Les vecteurs Vect1, Vect2, Vect3 et Vect4 sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine.

5. Pour chaque vecteur, indiquer de quelle équation différentielle de la liste ci-dessous, il peut être un vecteur tangent aux courbes solutions et justifier pourquoi.

Vect1	Equation $y' = k e^{-0,05 x^2}$
Justification	qd $x \rightarrow +\infty$ $y' = 0$ vu sur le dessin

Vect2	Equation $y' = \frac{x^2+4}{y-x}$
Justification	car sur le dessin, $y'$ n'est pas défini pour $y = x$ .

Vect3	Equation $y' = n(y-x^2)(x+y)$
Justification	car $y' = 0$ quand $y = -x$ et quand $y = x^2$

Vect4	Equation $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$
Justification	car non défini pour $x = 2$ et $x = -2$

E1)  $y' = a(x^2 + 1)$  E2)  $y' = b(y^2 - 1)(x^2 + y^2)$  E3)  $y' = c(y^2 - 4)$  E4)  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$   
 → E5)  $y' = k e^{-0,05 x^2}$  E6)  $y' = l(y - 1)(y^2 - 4)$  E7)  $y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}$  E8)  $y' = n(y - x^2)(x + y)$   
 a, b, c, d, k, l, m, n réels positifs

ED-VecteursTangents IUFM 2004 3/3

**Binôme E'14/E'15 (étudiant E'14)**

E'14

Partie 2

4. Ouvrez le fichier VecteursEDInconnues.fig. Les vecteurs Vect1, Vect2, Vect3 et Vect4 sont de norme constante (modifiable) et on peut les déplacer en bougeant leur origine.

5. Pour chaque vecteur, indiquer de quelle équation différentielle de la liste ci-dessous, il peut être un vecteur tangent aux courbes solutions et justifier pourquoi.

Vect1	Equation $y' = k e^{-0,05 x^2}$
Justification	car on voit que lorsque $x \rightarrow +\infty$ , $y' \rightarrow 0$ à $x$ détermine $y'$ constant

Vect2	Equation $y' = \frac{x^2+4}{y-x}$
Justification	on voit que l'équation n'est pas définie pour $y = x$ .

Vect3	Equation $y' = n(y-x^2)(x+y)$
Justification	car on voit que sur $y = -x$ , $y' = 0$ et sur $y = x^2$ , $y' = 0$

Vect4	Equation $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$
Justification	on voit que les résultats pas définies en $x = 2$ et $x = -2$ sur calcul

E1)  $y' = a(x^2 + 1)$  E2)  $y' = b(y^2 - 1)(x^2 + y^2)$  E3)  $y' = c(y^2 - 4)$  E4)  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$   
 E5)  $y' = k e^{-0,05 x^2}$  E6)  $y' = l(y - 1)(y^2 - 4)$  E7)  $y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}$  E8)  $y' = n(y - x^2)(x + y)$   
 a, b, c, d, k, l, m, n réels positifs

ED-VecteursTangents IUFM 2004 3/3

# **LES TRANSCRIPTIONS**

**Expérimentation de l'année 2004**



# **Binôme E'1/E'4**

**Les associations :**

**Vecteurs dynamiques – Equations différentielles**

**L'expérimentation de l'année 2004**



## Binôme E'1 / E'4

## Association explicite entre vecteurs et équations différentielles

Vecteur 1 – ED  $y' = -y(4-y^2)$ 

1. E'1 : (en lisant) « Les vecteurs ... affichée » ... ouais alors, où il se trouve ?
2. E'4 : celui cela... tu vois, le vecteur 1... est celui là
3. E'1 : voilà ... ah oui, il est là ... je ne comprends rien du tout
4. E'4 : (... ?) seule direction en fait ... il a l'air de faire euh ... faire (... ?)
5. E'1 : on va faire euh ... ses coordonnées
6. E'4 : tu ne peux pas faire les coordonnées du vecteur ?
7. E'1 : si
8. E'4 : on devra les trouver c'est tout ... à partir du vecteur on peut trouver là ... ..
9. E'1 : alors ...
10. E'4 : la dernière fois on avait une tangente et on calculait la pente ... donc là on a la pente, quoi
11. E'1 : on a la pente ... et donc ... est bien, c'est très bien (... ?) pas ... en tout point
12. E'4 : oui, mais ... ah oui,
13. E'1 : (... ?) c'est bon ?
14. E'4 : on cherche ... on faisait ça ... donc, il faudra essayer de faire ça pareil ... parce qu'on a pointé ... (... ?) ... on a (... ?) on a la pente ...
15. E'1 : ouais
16. E'4 : donc ... si tu vas le (... ?) directement tu auras les coordonnées de ce vecteur ... quelle est la pente ... on peut faire comme ça quoi
17. E'1 : ouais
18. E'4 : ben oui, c'est juste le ...
19. E'1 : non, il est là... ah ...
20. E'4 : ah ouais on peut ...
21. E'1 : (... ?) malin
22. E'4 : on attend ... en fait c'est tout cela (... ?) les vecteurs ...
23. E'1 : ah oui, c'est vrai, on pourrait même afficher la trace ... attends ... je ne me rappelle plus (... ?)
24. E'4 : tu veux afficher quoi ?
25. E'1 : la trace ... Regarde ... comme on fait ? ... ah non, ce n'est pas (... ?) moi, je croyais ... ah ouais ... d'accord... ok, tan pis ... bon, c'est rien
26. E'4 : attends moi je ne comprends pas pourquoi on peut les faire varier comme ça ... s'ils sont associés à une équation différentielle ...
27. E'1 : oui mais ... on est sur un point ...
28. E'4 : ah oui, c'est tout pareil ...
29. E'1 : la tangente elle change
30. E'4 : ah oui ... bon alors là, ce qu'on voit est comme une mesure ... non, mais la mesure n'est pas là
31. E'1 : qu'est-ce que tu veux voir ? parce que je ne comprends pas ce que tu veux
32. E'4 : moi je ne sais pas comme on fait ça ...
33. E'1 : ah d'accord, on le voit bien ... alors comme on va faire ? ... ..
34. E'4 : là si on met le vecteur comme ça
35. E'1 : hum ...
36. E'4 : on peut avoir ça et ça, non ? ... non ?
37. E'1 : oui
38. E'4 : on le va retrouver dans ce qu'on avait fait l'autre fois ... et après on fait le même boulot ... « y' » ... « y » truc... je ne sais rien
39. E'1 : moi non plus ... bon alors attends, ça c'est... .. donc ... souviens ... ..
40. E'4 : ben écoute ... pourquoi le vecteur 1... ..
41. P : (la prof a parlé aux binômes voisins sur le fait de bouger les vecteurs ... que le vecteur tangent est associé à une équation différentielle etc.) On est dans les équations différentielles
42. E'1 : hum ...
43. E'4 : mais déjà, les fiches, il faut les travailler là-dessus ... parce que déjà «  $y=0$  », la dérivée nulle ça veut dire qu'on a une tangente horizontale... et là ça marche, on l'avait tout à l'heure, est-ce que ça marche pour tous ? oui, et encore celui
44. E'1 : (... ?) dif
45. E'4 : non, je veux dire euh ... les vecteur 2 et 3
46. E'1 : pourquoi le vecteur 2 ?

47. E'4 : parce que ... là mon truc ça ne marchera pas ... en «  $y=0$  » la dérivée s'annule pas... bon, je veux voir ... je crois que si on bouge le vecteur 2... mais le vecteur 2 il n'est nul
48. E'1 : le vecteur 2 c'est pour celui là
49. E'4 : oui
50. E'1 : mais en ... oui, si tu veux ... il faut faire ...
51. E'4 : voilà ... oui, c'est bon
52. E'1 : d'accord ...
53. E'4 : ça confirme ce que je veux te dire
54. E'1 : oui ?
55. E'4 : tu vois ... puis, c'est un premier point... non ? ... parce que tu ne crois pas que ce soit suffisant, mais
56. E'1 : non, non, pas du tout
57. E'4 : mais ... c'est un premier pas ...
58. P : vous avez trouve une raison ?
59. E'1 : non
60. E'4 : bon ... on a essayé de voir que en «  $y=0$  » la tangente est horizontale
61. P : et ça correspond ?
62. E'4 : oui, puisque la dérivée s'annule
63. P : ah, vous avez déjà une raison
64. E'1 : ah bon ... oui (... ?) c'est la même
65. P : ça sur un point ...
66. E'4 : tu vois...
67. P : il y a une infinité de points dans le plan ...
68. E'4 : oui, je sais ... bon
69. P : vous risquez de pas sortir un (... ?)
70. E'1 : ah puis en «  $y$  ... » ... hop ... en «  $y=2$  » fait ... euh ...
71. E'4 : ah ben oui ...
72. E'1 : et ... euh ... en -2
73. E'4 : on écrit ?
74. E'1 : allez ... déjà c'est fait... bon c'est une chose ... après ...
75. E'4 : ce que je ne comprends pas c'est que la semaine dernière on a feuilleté sur un cas particulière aussi, on (... ?) que pour tous les vecteurs
76. E'1 : donc on n'a rien assuré... et on a trouvé ... l'équation (2 ?)
77. E'4 : ouais
78. E'1 : on regarde ... on a tous les dessins ...
79. E'4 : pourquoi la semaine dernière on prenait un (... ?) classique de (... ?) ?
80. E'1 : ouais, mais bon ça marchait partout ...
81. E'4 : parce que des ... des trucs pareils ... tous les vecteurs ils sont ...
82. E'1 : ouais ... mais ... ouais ... elle profit de la construction finalement
83. E'4 : hum ... la dernière fois j'ai pris de notes, moi ...
84. E'1 : qu'est-ce qu'on pourrait dire d'autre... quand ... quand «  $y$  » différente que 2, la pente est, soit positive ou négative... quand «  $y$  » est différente... si tu vois bien, quand «  $y$  » est différente que 2 ou -2
85. E'4 : hum ... ah, oui
86. E'1 : dans ce cas là, tu (... ?) donc elle est plus effectivement positive (... ?) donc la pente ... est positive
87. E'4 : ouais... donc c'est quand ...
88. E'1 : (... ?)... Qu'est-ce qu'on fait ? est-ce que tu as une idée ? ...
89. E'4 : voilà ... une idée c'est de dire ... voilà le (... ?)
90. E'1 : hum ... où ?
91. E'4 : donc, on voit quand même
92. E'1 : un peu quoi ?
93. E'4 : comme elle est majorée tout suite
94. E'1 : ouais mais il faut un truc (... ?) ...
95. E'4 : ouais (... ?)
96. E'1 : je sais ce qu'on va faire ... (... ?) d'afficher la dernière (... ?) ... alors (... ?)...
97. E'4 : c'est ça ... ah il doit (... ?) quelque soit le (... ?) ... voilà ...
98. E'1 : ok ... je vais le bouger
99. E'4 : non plus
100. E'1 : non

101. E'4 : ah si, si, il faut pointer ... donc là on est en  $-0,5$  (... ?) ... attends... donc je vais appeler le ... ouais  $-0,5$ ... est-ce que tu peux pas tracer la droite là ?
102. E'1 : si
103. E'4 : suivant le vecteur ... comme ça je ferais point d'intersection
104. E'1 : droite ... oui... d'accord ... c'était perdu, ok ... donc on va dire, ah non ..., je voudrais bien prendre ce point (... ?) là, sa pente (... ?) ça va ? d'accord ? ... euh ... on peut pas faire euh ... comme ça ?
105. E'4 : là ?
106. E'1 : oui
107. E'4 : on va voir, ah non... on affiche « édition » ...
108. E'1 : d'accord
109. E'4 : effacer ...
110. E'1 : ah, ouais ... alors, attends ... il faut que soit sélectionné avant ... non, c'est moins ... ah oui, d'accord ... ce point là ... oui ... attends ... quel objet ? c'est point ... on va attendre ...
111. E'4 : il ne va pas
112. E'1 : il ... ce point, oui ... dégage ... une droite ... donc, que ce que tu veux que je marque ?
113. E'4 : non (... ?) la boîte
114. E'1 : donc je marque ce point ... euh ... droite ... par ce point, oui ... sur ce vecteur
115. E'4 : et ce point là ...
116. E'1 : et ce point, oui
117. E'4 : est-ce que tu peux avoir les coordonnées de ce truc ?
118. E'1 : bien sur ... j'en ... (... ?) ... ça y est ...
119. E'4 : donc en «  $x=0$  » ça fait ? ... non c'est «  $y=0$  »
120. E'1 : ben, on a la pente c'est tout
121. E'4 : ah, mais oui ... alors attends ...
122. E'1 : on est...
123. E'4 : ça nous avance (... ?) ça ?
124. E'1 : (... ?) ...
125. E'4 : (... ?) en  $0,6$  (... ?) égale à  $-0,5$  (... ?)
126. E'1 : je comprends, je comprends rien pour ces (... ?) toi
127. E'4 : et après PQ ... non, moi je veux encore ce point
128. E'1 : lequel ?
129. E'4 : là ... c'est... c'est «  $x$  » (... ?) sur «  $y=0$  »
130. E'1 : je ne vois pas
131. E'4 : c'est le point d'intersection ...
132. E'1 : ah ... ok, alors ...
133. E'4 : intersection, le point
134. E'1 : alors ... intersection, point
135. E'4 : pointe sur deux objets
136. E'1 : oui
137. E'4 : elle est où ?
138. E'1 : ah oui, il est con
139. E'4 : hum
140. E'1 : voilà
141. E'4 : ah, c'est bon ... les coordonnées... c'est bon... ah mais non, je suis bête...
142. E'1 : alors ?
143. E'4 : parce que je veux avoir ... oui, je veux avoir ça... oui ... mais dans ce cas ça ...
144. E'1 : qu'est-ce que tu veux toi ?
145. E'4 : moi, je veux trouver ça ...
146. E'1 : alors comment ... en  $(0 ?)$  ... ah oui, mais on avait un truc ... d'accord
147. E'4 : donc là en fait (... ?) ... et là c'est OP ... RQ ... point (P ?)
148. E'1 : on voit bien
149. E'4 : «  $y_p$  »
150. E'1 : si, on a vu ... on a bien trois ...
151. E'4 : ouais ...
152. E'1 : mais bon ...
153. E'4 : sur «  $x_p$  » et sur «  $x_Q$  »... ..
154. E'1 : je ne sais pas si on peut en retrouver ...
155. E'4 : non, on peut pas (... ?) c'est juste vérifier, quoi
156. E'1 : hum

157. E'4 : peut-il être sur ici ? pourquoi s'il (... ?) ... il est déjà dedans là
158. E'1 : donc ... on peut dire pour « y » supérieure à 2 (... ?)
159. E'4 : hum
160. E'1 : « y' » est toujours positive ... ..
161. E'4 : ben, non ... tu as un moins-y devant « y »... ..
162. E'1 : ah si ... «  $4-y^2$  » (... ?) c'est négatif
163. E'4 : ah oui, oui ... ..
164. E'1 : donc ... .. On ne peut pas faire là cette courbe ? ... pourquoi elle est malin ?
165. E'4 : tu as trouvé à « y » fois plus
166. E'1 : pourquoi ? on est malins ... on a toutes les pentes ... ..
167. E'4 : ah ouais ... .. bon, voyons « y » entre -2 et 0 normalement c'est positif
168. E'1 : hum
169. E'4 : et entre 0 et 2 c'est négatif ... ..
170. E'1 : (... ?) ... .. ah comment on fait ce truc là ... j'aimerais bien faire-le ... après ... voilà ...  
(... ?) de le faire... .. tu vois ... .. ça dessine un champ de vecteurs normalement ... parce comme ça  
tu peux... .. c'est bon ? c'est marron ?... là on peut effacer après... on s'amuse bien
171. E'4 : oui on s'amuse, mais ça (... ?)
172. E'1 : non, mais je vais l'enlever ... voilà ... bon, c'est bon ? ...
173. E'4 : bon (... ?) on va faire exact, non, je pense qu'il y a des trucs (... ?) vachement ...
174. E'1 : donc fais une (... ?) là c'est ... cette droite... sur la droite « y= quelque chose »
175. E'4 : ouais ... «  $y=0$  » 2 et -2 ... ..
176. E'1 : euh ... .. c'est quoi déjà, la ? (... ?) de justifier le comportement des courbes solutions ?
177. E'4 : en plus il faut le dessiner là, déjà... (en lisant) Identifier les régions qu'on a fait, dessiner ci-dessous  
ces régions, et les associer une expression algébrique... ouais c'est ça (... ?) le truc ... il faut faire un  
petit dessin...
178. E'1 : tu crois ? ... ..
179. E'4 : je suis nulle ... ..
180. E'1 : hum ... en 2... .. -2 ... voilà (... ?) ... bon
181. E'4 : (en lisant) « des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions »...  
ah, des courbes solutions, ... il faudra peut être calculer les courbes solutions... on peut pas
182. E'1 : quoi ?
183. E'4 : je ne sais pas
184. E'1 : moi non plus... non on sais pas ... donc
185. E'4 : on intègre ?
186. E'1 : d'accord ... je veux bien... c'est quoi ? en fin, il faut des (... ?) en fait...
187. P : ah... je ne vais pas vous le dire ...
188. E'1 : non, mais d'accord ... quel style ?
189. P : ah ben, justement ça nous intéresse de voir le style que vous allez choisir exactement ... alors je peux  
pas vous dire quel style ...
190. E'1 : ok
191. P : votre style
192. E'1 : ouais
193. P : si vous aviez à expliquer à vos voisines assez proprement que ...
194. E'1 : voilà ... expliquez-moi
195. P : les solutions se comportent ...
196. E'1 : d'une tel façon ... très bien ...
197. E'4 : on a des choses, ouais ... .. il y a de choses que l'on trouve du comportement des courbes  
solutions ?
198. E'1 : ouais ... (... ?) quoi ... tu dessines en tout cas
199. E'4 : oui ... ..

(Dialogue du professeur avec un binôme voisin)

200. P : qu'est-ce que vous voulez voir ?
201. V : ah ça correspond à la première question
202. P : ah oui
203. V : nous avons trouvé un valeur comme (... ?) les coordonnées du vecteur... un valeur précise
204. P : ça c'est les coordonnées de l'origine
205. V : ouais ... j'ai la longueur du vecteur .donc ... je ferais ... je vais peut être le lier avec les coordonnées  
de l'extrémité ...
206. P : ah non, vous pouvez les afficher c'est pas de les calculer ...

207. V : non, ouais on va les afficher ... euh ... alors les coordonnées de ce vecteur ... c'est proportionnel à ça sur «  $y'$  » ... donc
208. P : hum
209. V : donc, je trouve mes coordonnées du vecteur ici ... mes coefficients de proportionnalité, donc mon «  $y'$  » ... on connaît «  $y$  » et j'ai les (... ?)
210. P : ok, d'accord. (fin du dialogue professeur et binôme voisin)
211. E'1 : ... moi je ne sais pas ... il faudra afficher
212. E'4 : puis, qu'à un même point quelconque du plan on peut pas tracer la pente de ... la pente de... la pente est «  $-y$  » facteur de «  $4-y^2$  »
213. E'1 : puisque quoi ?
214. E'4 : à un même point quelconque on peut pas tracer la ... tu pointes là, (... ?) (fonction d' ?) «  $y$  »...
215. E'1 : ouais ... (... ?) là ... si ...
216. E'4 : mais euh ...
217. E'1 : ouais, je suis d'accord ... ..
218. E'4 : en fait, (... ?) c'est bien ça mais les coefs ... les coefs c'est quoi, c'est moins ça ...
219. E'1 : (... ?) change
220. E'4 : ça change beaucoup
221. E'1 : ah oui, ... (... ?) il faut afficher ce point
222. E'4 : on l'aimerait bien
223. E'1 : euh, oui... je voudrais bien mais il n'est pas sélectionné... donc ...
224. E'4 : est-ce que tu es sûr que c'est là bas ...
225. E'1 : on (... ?) ... (... ?) hum ... on dit rien ?... donc...
226. E'4 : attends ... parce que là, sur les courbes qu'on a, c'est une courbe solution...
227. E'1 : oui
228. E'4 : donc ...
229. E'1 : ben ... qu'est-ce que tu appelles les courbes qu'on a ?
230. E'4 : euh... ce qui faisait la trace ...
231. E'1 : oui ah oui, oui, ça c'est complètement... tout à fait
232. E'4 : comportement, ça peut être euh ... croissantes, décroissantes ... c'est ça ? ... on sait qu'il y a des points d'inflexions, on sait (... ?) comme ça
233. E'1 : hum, hum... dire qu'on des (... ?)
234. E'4 : essayons ... ..
235. E'1 : (... ?) qu'est ce que tu as fais ... .. (il tape beaucoup)
236. E'4 : comportement (... ?) pourquoi (... ?) et à (... ?) c'est nul ... ah non
237. E'1 : c'est pas nul ...
238. E'4 : parce que le truc c'est que, étudier le comportement des courbes, on n'a même pas qu'étudier les vecteurs tangents
239. E'1 : ah oui ... moi, je ne sais pas ... on ... pourquoi elles sont croissantes, décroissantes justement ... hum ... (... ?)
240. E'4 : euh, c'était pas mal ...
241. E'1 : en train de faire rien
242. E'4 : c'est pas grave
243. E'1 : on fait rien de spectaculaire
244. E'4 : je peux faire une table de signes mais...
245. E'1 : non, non, mais ... on n'arrive pas à voir... ..
246. E'4 : comportement des courbes solution ... ..

### Vecteur 2 – ED $y'=(x+2)/(x^2-1)$

247. E'1 : bon, on fait le 2 ...
248. E'4 : hum
249. E'1 : d'accord ...
250. E'4 : ouais ... donc, le vecteur 2 il s'annule, en fin la tangente est nulle
251. E'1 : où je la mets, alors ? ... le 2 qui se (... ?) équation ... .. je veux-y dire que si c'est cette équation différentielle... «  $y'=(x+2)$ ... » c'est ça ? il n'y a pas d'«  $y$  » ça fait rien ... il faut juste intégrer ?...
252. E'4 : voilà, déjà c'est bon parce que en «  $x = -2$  » la pente a l'air de se décaler... (... ?) en «  $x=-2$  » ... ..
253. E'1 : le problème c'est qu'en «  $x=-2$  » c'est ... (« Ox ») (... ?) ...
254. P : alors ... où vous en êtes ?
255. E'1 : ben en Ve2...

256. P : et là, vous avez rien sur le comportement des solutions ?
257. E'1 : on ne sait pas quoi dire de spectaculaire
258. P : mais nous, on vous demande pas de spectaculaire
259. E'1 : non, mais, même du normal
260. P : d'accord, donc vous faites le 2...
261. E'1 : ouais ... qu'est ce qui fait ce truc là ... oui (... ?)
262. P : (en parlant au groupe) vous savez que pour avoir aussi une idée de la courbe solution ... vous avez, on vous donne un vecteur ... si vous utilisez la macro « Vecteur 1 » et que vous mettez un vecteur à l'extrémité du vecteur que vous avez ça va être 2 vecteurs but à but ...
263. E'1 : ah, oui
264. P : vous comprenez ce que ça veut dire ? et après vous pourriez en avoir un troisième ... qu'est-ce que ça vous donnera ?
265. E'1 : la courbe ... en fin ... une ...
266. E : (un autre étudiant) la méthode d'Euler
267. P : exactement, la méthode d'Euler donc ... mettre but à but les vecteurs, ça va vous donner une approximation d'une courbe solution ... donc c'est un moyen pour vous de voir l'allure des courbes solutions ... ..
268. E'1 : je comprends ... donc (... ?)
269. E'4 : en gros ... en gros, ce qu'on intègre c'est que pour « y »
270. E'1 : ah oui
271. E'4 : hum
272. E'1 : c'est pas ça ? ... t'as vu déjà des formes comme ça ...
273. E'4 : ouais, un peu
274. E'1 : hum ... attend j'y peut te donner ... ..
275. E'4 : ah non
276. E'1 : c'est quoi ?... c'est ça ?
277. E'4 : hum, elle est (...?) ... ..
278. E'1 : c'est pas drôle ça, c'est pas drôle de tout ...
279. E'4 : pourquoi ? ... .. donc là les solutions ... c'est vrai que... attend ... .. Regarde ici, ça c'est dans une courbe solution ... pourquoi on ne peut pas aller là dedans
280. E'1 : je sais pas
281. E'4 : ah non, il faut mettre plus qu'un (... ?)
282. E'1 : non, mais oui ... oui mais ça confirme bien, regarde ... comme ça ... quelques, là ça fait ...
283. E'4 : ouais, ouais ... après (... ?) pointe là
284. E'1 : voilà
285. E'4 : mais, est-ce qu'on peut pas la tracer là, il fait pas l'intégral de ... ?
286. E'1 : là dedans il y a de ...
287. E'4 : on ne peut pas calculer ? ah calculatrice ... ah non, calculatrice c'est juste ...
288. E'1 : (... ?) on peut pas (... ?) .... ça par contre (... ?) de la géométrie effectivement ... non, on peut pas tracer quelque chose ... .. alors ... ..
289. E'4 : ce que je ne comprends pas c'est que (..... ?) en «  $x=-2$  »
290. E'1 : ouais
291. E'4 : on a bien «  $y'=0$  »...
292. E'1 : (vas-y...)
293. E'4 : donc, la pente des points d'abscisses -2 est nulle
294. E'1 : la pente aux points d'abscisse -2... qui est ? Ici -2 ?
295. E'4 : non, c'est ça ...
296. E'1 : ah, oui, oui ... s'annule ... ouais ... je regardais là ...
297. E'4 : déjà on peut mettre ça ...
298. E'1 : ça sert à rien, mais on peut mettre que ... ..
299. E'4 : ah, il y a ... regarde quand « x » tend vers 1
300. E'1 : quand « x » tend vers 1
301. E'4 : normalement ... « y' » si ... « y' » doit tendre vers l'infini ... et voilà ! c'est ce que j'avait fait, c'est bon... quand « x » tend vers  $\pm 1$ ...
302. E'1 : oui
303. E'4 : « x » tend vers  $\pm 1$ ... « y' »...
304. E'1 : c'est ça
305. E'4 : tend vers  $\pm\infty$  ... euh ... regarde en -1... Ah non en -1 tend vers là haut
306. E'1 : j'étais ...
307. E'4 : et en 1 ... c'est toujours vrai ? ah non, c'est vraiment là

308. E'1 : ça dépend y - où...
309. E'4 : si tend vers moins l'infini
310. E'1 : mais normalement ... c'est (... ?) ça dépend ... ..
311. E'4 : donc, c'est pas mal ça ...
312. E'1 : hum ... alors ... ..
313. E'4 : pourquoi ? (... ?) ... .. bon je vais dessiner ici la courbe solution ... .. « arguments mathématiques » ... ben ... on peut dire qu'on a intégré ...
314. E'1 : oui, bien sûr ... .. mais là on a ... quand les courbes (... ?) tendent (... ?) ... ah je suis con
315. E'4 : hum
316. E'1 : j'ai envie... comme la (... ?) l'air de justement « f(x) » on peut pareil à faire un peu pareil
317. E'4 : oui
318. E'1 : ça veut dire qu'elle est décroissante ... tout ce que tu veux, machin quoi, elle est croissante ... croissante, décroissante ... c'est ça ... faisons ça
319. E'4 : pas comme ça
320. E'1 : un peu oui ... c'est un peu (... ?) ... .. (... ?) ...
321. E'4 : c'est un peu ce qu'on dit
322. E'1 : hum, hum
323. E'4 : ce qu'entre... entre -2 et -1 elle est croissante
324. E'1 : ouais...
325. E'4 : ça ouais ... d'accord ... où se trouve (... ?) « y' » moins ... euh ... mais oui forcément ... c'est en -2, ben oui... bon ... On se trouve plus entre ... moins ... (... ?) va changer en moyen ... ça va mal ...
326. E'1 : pourquoi ?
327. E'4 : ben, parce que ça s'annule pas
328. E'1 : en -1 ?
329. E'4 : tangente zéro ... ah si j'avait fait une bêtise
330. E'1 : il s'annule pareil alors ... ouais ... des asymptotes ... voilà ... ça on ...
331. E'4 : et après c'est plus
332. E'1 : des asymptotes ... tu t'es bien géré ?
333. E'4 : oui sauf qu'en « y » elle est peu croissante ... croissante, croissante, croissante... ..
334. E'1 : hum ... .. si tu veux on a (... ?) que directement l'équation de la courbe (... ?) ... moins... (... ?) ... moins ... .. comme ça non ... .. C'est bon, et c'est où qu'on a une pente nulle ? ... en -2 c'est tout... ..

### Vecteur 3 – ED $y' = (y^2+x)(x-y)$

335. E'4 : on fait le 3 ?
336. E'1 : où est qu'on pouvait trouver une pente (... ?)
337. E'4 : ouais je me (... ?)
338. E'1 : non, mais, normalement
339. E'4 : c'est en -2
340. E'1 : quand « x » est -2 ?
341. E'4 : ouais
342. E'1 : ouais, d'accord, pour tout normalement
343. E'4 : ouais
344. E'1 : ben ouais ... attends ... zéro ... voilà ... .. tu vois
345. E'4 : ben
346. E'1 : merde ... tu sais ce que je suis en train de faire ?
347. E'4 : vecteur 1
348. E'1 : voilà...
349. P : et vous avez le vecteur 3
350. E'1 : non, non ... oui (... ?) non...
351. E'4 : (... ?) là
352. E'1 : oui, il est là ... c'est bon... .. donc c'est la droite comme ça ... ..
353. E'4 : je veux avoir la dérivée seconde
354. E'1 : ah oui,
355. E'4 : j'ai l'impression qu'en 0 il y a un point d'inflexion ... c'est un... tu vois, parce que là elle fait comme ça l'approximation
356. E'1 : et c'est vrai ?
357. E'4 : mais là en 0 ça fait, ouais ... .. donc c'est (... ?) point d'inflexion ... .. ça se trouve, quoi ?
358. E'1 : oui...

359. E'4 : ben, il serait bon que tu traces la droite «  $y=x$  »... parce que normalement ça devrait s'annuler sur cette droite là
360. E'1 : on dirait ça, alors comment on va faire si je prends un point là c'est pas difficile... cette droite passant par ... ben oui, c'est ça ...
361. E'4 : prends le vecteur 3 maintenant
362. E'1 : je prends le vecteur 3 maintenant... qu'est-ce que tu avais dit ?
363. E'4 : ouais voilà ... le vecteur est horizontal, euh ... ce qui est normal ... ..
364. E'1 : alors on va voir, attends ... on peut pas faire une pente (... ?) un truc ... comment on recopie ? je vais (... ?) ...
365. E'4 : c'est pas ... euh, c'est macro, je crois... t'as (... ?) tu as une macro
366. E'1 : (... ?) faire
367. E'4 : le vecteur 3 ...
368. E'1 : voilà ... et donc ?
369. E'4 : je sais pas ...
370. E'1 : (... ?) comment j'ai fait ça ?
371. E'4 : parce qu'après ça s'annule pas ...  $y^2 = -x$  impossible ... (... ?) en 0 ... (... ?) ça va faire (... ?) donc c'est tout ce qu'on peut vérifier pour l'instant ...
372. E'1 : hum ... ah... il y a une (... ?) qui s'annule en autre part quoi ...
373. E'4 : euh ... donc là tu as un «  $x=$  » quoi ? ... attends ... 1 ?... en 2... non ? ... ah non, en fait, elle (... ?) très bien ... oui
374. E'1 : apparemment... ..
375. E'4 : non, mais si, je suis bête ... en «  $-x$  » c'est pas forcément négatif
376. E'1 : voilà ...
377. E'4 : donc ... c'est «  $y=\pm\sqrt{-x}$  » quand «  $x$  » est négatif ... donc
378. E'1 : on fait des points ?
379. E'4 : parce que je peux tracer la droite ...
380. E'1 : non, (... ?)
381. E'4 : oui, il l'a fait, oui ?
382. E'1 : non
383. E'4 : on peut pas ?... .. on était en quoi, là ? ... en «  $y=...$  » ... (allez-y)  $-1/2$
384. E'1 : non, (... ?) elle (... ?) pas d'un valeur ouais ... quand («  $x$  »... ?)  $-4$
385. E'4 : hum
386. E'1 : ah peut être (... ?) qu'est-ce qu'on a ?
387. E'4 : en «  $y=2$  »... ça serait racine de 4...  $\pm 2$ ... donc là on trouve  $-2$ ... là ... et là  $-$  (... ?) racine (... ?)... ouais ... et là
388. E'1 : ouais ... .. donc ...
389. E'4 : c'est ça un peu (... ?) l'impression à ça ... ..
390. E'1 : pourquoi (... ?) rien ? ... .. sur la courbe «  $y=\pm\sqrt{x}$  »...
391. E'4 : «  $-x$  » ça ... «  $\sqrt{-x}$  » ça ...
392. E'1 : ah oui ... .. un peu dommage, quoi ... (... ?) un truc ...

(changement de cassette)

393. E'4 : (... ?) de l'autre côté de toute façon...
394. E'1 : je vais tracer la (... ?) ben ça va faire racine de l'autre côté, quoi...
395. E'4 : ouais ... et – racine de ça
396. E'1 : et ben ... c'est la même
397. E'4 : oui, normalement on le voit...
398. E : qu'est-ce que veux voir ?
399. E'1 : de quoi ?... on a fait ...
400. E'4 : c'est ça
401. E'1 : ouais ?
402. E'4 : oui ... .. alors on va attendre ... .. c'est pas très jolie
403. E'1 : je ne sais pas, c'est pas jolie ... ..
404. E'4 : bon, c'est tout à priori
405. E'1 : hum ... ..
406. E'4 : comportement des courbes solutions ... hum
407. E'1 : je suis con ... aucune idée quoi ... ..
408. E'4 : il n'y a pas un truc équiva diff ? ... c'est seul idée ... tu as ça ... comme ça
409. E'1 : tu comprends ?
410. E'4 : on a fait ... euh ... comme ça



411. E'1 : il y a (... ?) là ... juste (... ?) après je sais pas quoi (... ?)  
 412. E'4 : «  $y' = \dots$  » «  $y$  » quand c'est égal ( $y_k \dots y_k \dots t \dots$  sur carré +  $t$  fois  $t$  (... ?)) (elle tape) ... .. ouais ce c'est ça ... je crois qu'il faut pas mettre («  $y'$  ») il faudra mettre «  $y$  » c'est ça... je ne sais pas... je ne sais pas comme ça marche ah ...  
 413. E'1 : moi non plus

**Retour au vecteur 2**

414. E'4 : non, il n'y a pas (... ?) ... non on peut pas ? ... comportement des courbes solutions ... ..  
 Mme comment on fait pour tracer une courbe ?  
 415. P : j'arrive ... on fait un point ... on met un point, quelle courbe vous voulez tracer ?  
 416. E'4 : euh ... .. cela, elle n'est pas jolie  
 417. P : celle-là ?  
 418. E'4 : ouais...  
 419. P : non, je mets un point ici ... (... ?) il faut que «  $x$  » soit sur le point là ... j'affiche les coordonnées, je prends calculatrice ... et maintenant «  $\frac{1}{2} \ln(|x-1|^3/|x+1|)$  »  
 420. E'4 : je vais essayer de la retracer pour bien voir que le vecteur est bien tangent ici  
 421. P : hum ... rapport de mesure ... après vous faites perpendiculaire, après le point ... (elle continue à expliquer comment tracer la courbe)  
 422. E'1 : ça c'est une belle courbe solution  
 423. E'4 : voilà, on va voir si on déplace ...  
 424. P : vous avez trouvé une expression de la solution ?  
 425. E'1 : ouais  
 426. P : d'accord ... ah (... ?) marqué  
 427. E'1 : oui,  
 428. E'4 : ça veut dire, ça marche  
 429. E'1 : on est à l'origine des mathématiques (il parle avec le professeur)  
 430. E'4 : (... ?)  
 431. E'1 : ouais ... on ne peut pas ... euh  
 432. E'4 : c'est tangent  
 433. P : ah, on dirait une patinoire, un truc (... ?) claire (... ?) soit la piste  
 434. E'1 : ouais ...  
 435. P : vous pouvez le redéfinir, le mettre là-dessus si vous voulez  
 436. E'4 : oui  
 437. P : vous choisissez redéfinir ... redéfinir un objet ... (elle explique comment redéfinir un objet)  
 438. E'4 : ouais  
 439. E'1 : là, grand (... ?) ... je pense  
 440. E'4 : ouais  
 441. E'1 : alors on est forts... euh ... alors on est forts ...  
 442. E'4 : on est forts ?... là et là euh (... ?)...  
 443. E'1 : en fait, c'est le ... c'est une solution de cela ...  
 444. P : vous m'avez demandé de taper une courbe, de taper un truc, je l'ai fait ...  
 445. E'1 : voilà  
 446. P : mais il faut utiliser euh  
 447. E'1 : en fait on a...  
 448. E'4 : ouais, on l'a calculé, on a intégré  
 449. P : il faut utiliser leur calculatrice...  
 450. E'1 : oui, oui, juste pour voir, comme ça ... ben oui, parce que si c'est qu'en fonction de «  $x$  », c'est assez facile de le faire... (... ?) après on se promène ... et puis c'est jolie ... voilà (ils rient)  
 451. E'4 : juste pour faire le plus on (... ?) sur moins  
 452. E'1 : qu'est-ce que tu dis ?  
 453. E'4 : juste pour faire ... pour en faire d'autres, c'est juste une translation, non ?  
 454. E'1 : pour en faire d'autres ? ah oui,  
 455. E'4 : (... ?) translation sur elle  
 456. E'1 : ouais  
 457. E'4 : je pense, parce que le plus constant ça correspond à ...  
 458. E'1 : ouais, (... ?) de toute façon le (... ?) ... qu'est ce que on va faire ? ...  
 459. E'4 : une translation  
 460. E'1 : on va faire ... ouais  
 461. E'4 : par contre il faut définir le vecteur 1

462. E'1 : ouais ... alors on le va faire ... (... ?) vecteur, on va prendre un vecteur sur cette droite (... ?) comme ça on est (... ?)... et puis, je sais pas ... c'est ça ?
463. E'4 : tu fais quoi ? ... oh là là
464. E'1 : oh (... ?) je voulais le faire (... ?)
465. E'4 : mais c'est bon, il est sur cette droite
466. E'1 : ok
467. E'4 : alors, translation
468. E'1 : translation c'est où ? ... Translation ... sur ce lieu ?
469. E'4 : attends ... montre le vecteur d'abord ... alors attends, il faut réfléchir... si je crois qu'il faut montrer le vecteur avant, selon le vecteur
470. E'1 : selon le vecteur, ah oui (... ?)
471. E'4 : non, d'abord il faut sélectionner le lieu...
472. E'1 : ok, alors ... attends (... ?) ... translation... c'est pas là
473. E'4 : on ne peut pas (... ?) un truc ? si on peut ... (... ?) ... (ils continuent à essayer de faire la translation de la courbe)
474. E'4 : bon, les arguments (... ?) ... (... ?) si on peut faire un tableau de signes ...
475. E'1 : comment ?
476. E'4 : non, on ne peut pas... ..
477. E'1 : attends (... ?) (il tape)
478. E'4 : c'est pas la bonne ... mais bon, c'est (... ?)
479. E'1 : ouais, mais j'aimerais savoir pourquoi ...
480. E'4 : on peut pas ... on peut pas ... ( ... ?)

### Retour au vecteur 3

481. E'1 : (... ?) d'accord ... .. et donc le vecteur 3, qu'est-ce qui .... ? ... .. Regarde, tu veux que je te fasse un truc de uff
482. E'4 : ouais
483. E'1 : d'accord ... Droite, segment non ... (... ?) redéfinir ...
484. E'4 : ah ouais ...
485. E'1 : maintenant on va faire « 2-x » alors ... comment ... ça marche (ils rient)
486. E'4 : je crois qu'il faut que tu prennes un point (... ?) un point négatif
487. E'1 : un point sur la ... sur quelque part ... (... ?) j'aurais-y
488. E'4 : non (... ?) parce que l'autre c'est «  $y=0$  » ... prene-le ...
489. E'1 : comment le faire ? c'est comme ça ? et après je rapporte ... (ils continuent les pas pour tracer la courbe associé à  $y=\sqrt{-x}$ , ils prennent un point d'abscisse -4 et utilisent calculatrice ... )
490. E'4 : magnifique
491. E'1 : bon, on va (... ?)
492. E'4 : on va (... ?) ... ..

(fin de l'activité)

## Binôme E'1/E'4

## Association ne pas explicite entre vecteurs dynamiques et équations différentielles

## Essai de résolution algébrique

1. E'4 : donc ... je propose... qu'on fasse son équation comme étant... on sait qu'elle s'annulait mais elle ne s'annule pas... donc par exemple en « y » ... ah ouais, elle est nulle, ils doivent avoir plusieurs...
2. E'1 : donc, il y a 8 choix et on a qu'un vecteur ...
3. E'4 : déjà, pour l'équation 2, le vecteur s'annule en «  $y=\pm 1$  » ... moi, je vois bien si on prend les vecteurs et on cherche où ils s'annulent et après on ...
4. E'1 : mais, l'E1 c'est facile (... ?) c'est la première ...
5. E'4 : ouais
6. E'1 : on peut même calculer la ...
7. E'4 : l'intégral
8. E'1 : la primitive ... oui, voilà
9. E'4 : c'est «  $y= ax^3/3 + ax$  » ... c'est ça ?
10. E'1 : hum ... le problème c'est qu'on a « ax » avec l' « a » ... même « a »
11. E'4 : mais « a » c'est positif, quoi
12. E'1 : bon ... on a déjà ça ...
13. E'4 : ce qu'on peut faire, on peut trouver ce truc là... et chercher quels sont les vecteurs qui suivent ... (... ?) quoi
14. E'1 : (... ?) on peut voir ça
15. E'4 : quand on a «  $a=1$  »
16. E'1 : oui
17. E'4 : n'est ce pas ?
18. E'1 : on va voir déjà ... alors, attends ... « y » (... ?) ce machin (... ?) ... voilà... alors qu'est ce qu'on (... ?) en (... ?) mais en moins (il semble utiliser sa calculatrice)
19. E'4 : mais, sachant que ça, les pentes de l'équation se trouvent ... bon ...
20. E'1 : sachant que...
21. E'4 : oui sachant que ça (... ?) se trouvent là ... on trouve pas tout à ...
22. E'1 : c'est rien, c'est juste comme ça
23. E'4 : ouais ... de toute façon c'est une première idée... et on trouve ça
24. E'1 : voilà ...
25. E'4 : on trouve le (... ?)
26. E'1 : ah oui...
27. E'4 : non, c'est bon
28. E'1 : coordonnées plus ... de ce point
29. E'4 : calculatrice
30. E'1 : et on devrait (... ?) avoir un nombre (... ?)
31. E'4 : un point et (... ?)
32. E'1 : c'est ça qu'on va tracer
33. E'4 : exacte ... je suis bête
34. E'1 : non...
35. E'4 : donc ... «  $x^3/3$  » ... ça fait « x »
36. E'1 : prendre « y » ça
37. E'4 : «  $x^3/3 + x$  » (... ?) ... attends, on vérifie que (... ?) c'est pas des points de ... des parenthèses
38. E'1 : je vais le remettre ... non
39. E'4 : elles sont sur (... ?)
40. E'1 : ok... ensuite (... ?) je fais report ...
41. E'4 : non, dans le résultat
42. E'1 : oui, c'est là et l'y... voilà...
43. E'4 : après les droites perpendiculaires ...
44. E'1 : les droites perpendiculaires ... par ce point, oui, ...
45. E'4 : lieu
46. E'1 : lieu ... ce point ? par rapport à ?
47. E'4 : cela ... voilà ... (... ?) ... donc ... pour chaque vecteur il faudra redéfinir (... ?) ce truc...
48. E'1 : alors ...
49. E'4 : celle-là, elle a l'air pas mal
50. E'1 : ouais... alors, qu'est ce qu'on a bien ...il faut « redéfinir » ... « redéfinir un objet » oui, ce point
51. E'4 : oui, point sur un objet, oui

52. E'1 : sur ce lieu, oui  
53. E'4 : non,  
54. E'1 : et ...  
55. E'4 : ah ... pas génial ... si ?  
56. E'1 : ben non ... non, pas génial ... parce que ça devrait être tangent  
57. E'4 : je vais regarder si (... ?)  
58. E'1 : ah ouais, d'accord  
59. E'4 : ouais... ..  
60. E'1 : (... ?) donc ... ah ... il est comme ça ...  
61. P : (... ?) ça vous (... ?) des stratégies de (... ?)  
62. E'1 : ouais (... ?) comme stratégie ?  
63. P : ça me (... ?) il paraît que c'est n'est pas tangente là  
64. E'4 : non  
65. E'1 : voilà  
66. P : (... ?) c'est tangent là ?  
67. E'1 : justement ça marche pas  
68. P : ah, d'accord  
69. E'4 : ah, parce que le ...  
70. E'1 : ben oui,  
71. E'4 : est-ce que les réels là ...  
72. P : ils sont positifs  
73. E'4 : ils sont positifs... mais, euh  
74. P : et non nuls  
75. E'4 : mais ... euh ... mais ... euh, exactement comme ça  
76. P : tout le temps  
77. E'1 : non, mais ... il y a un truc que je ne comprends pas ... c'est que pour dessiner le vecteur vous avez bien du prendre une valeur, non ?  
78. P : ah ben, évidemment  
79. E'4 : une valeur de « a » ?  
80. P : ben, évidemment oui...  
81. E'4 : donc on comprends pas ... donc il se trouve que le bon truc il n'est pas (... ?) vraiment  
82. E'1 : ah oui ... bon d'accord ... .. bon  
83. P : il peut pas (... ?) constante (... ?) parce qu'il faisait la (... ?) plus (... ?)  
84. E'1 : non, non ... ouais c'est la pire stratégie que marchait est normal ... alors, ok ... (... ?) mettre ailleurs sur...  
85. P : (... ?) vous utilisez (... ?) intégrer (... ?) les équations différentielles  
86. E'1 : ouais (... ?) on va redéfinir, non ? ... non ... non tan pis ... non (... ?)  
87. P : la première fois ...  
88. E'1 : comment ?  
89. P : on avait, vous avez donné des nombres ?  
90. E'1 : ouais  
91. P : puis on a vu des (... ?) alors  
92. E'1 : ouais  
93. P : on a complexé par des lettres  
94. E'4 : oui, mais ça on peut juste le faire pour la première  
95. E'1 : oui, non mais c'est juste ... parce que (... ?) après on  
96. E'4 : pour les autres non, ils sont plus (... ?)  
97. P : ouais  
98. E'1 : pour enlever la courbe ... (il demande comme redéfinir le vecteur de manière à que son origine soit ailleurs ...) ok merci... alors, je pense...  
99. E'4 : bon, mets (... ?) alors ... ouais, le vecteur 2 il n'a pas l'air de

**Vecteur 1**  $\Leftrightarrow E5 y' = ke^{-0.05x^2}$

100. E'1 : non, non, non, mais ils bougent tous... ah d'accord... lui il ...  
101. E'4 : (... ?) le contraire  
102. E'1 : voilà  
103. E'4 : donc « y' » est toujours positif  
104. E'1 : ouais  
105. E'4 : donc, ça veut dire que ...  
106. E'1 : tu (... ?) en la courbe

107. E'4 : « y' » (... ?) (tangente)  
108. E'1 : (... ?) la courbe ... ..  
109. E'4 : e5 elle est toujours positive  
110. E'1 : (... ?) là aussi ... la première (... ?) [l'équation E1]...  
111. E'4 : donc ... on voit que c'est (... ?) ... où est ?  
112. E'1 : vecteur 1 ...  
113. E'4 : vecteur 1 ça pourra peut être ... euh ... ça peut être... c'est E3 non ?  
114. E'1 : oui  
115. E'4 : ouais, c'est tout (... ?)  
116. E'1 : donc, c'est pareil on pourrait intégrer celui là mais je crois que ... l'E3 n'est pas (... ?)  
117. E'4 : sachant que la limite ... quand « x » est très grand... quand « x » est très grand ça tend vers 0...  
[l'étudiant explore le comportement du vecteur 1]  
118. E'1 : ouais, ça se voit bien...  
119. E'4 : donc, il faudrait ... pour analyser tu as ... ouais ... il faut voir où ils s'annulent ...  
120. E'1 : ah, ouais c'est très bien ... celui-là tend vers 0 ? ... et celui-là tend vers, plutôt ... celui-là ... se  
(... ?) là  
121. E'4 : donc (... ?) du haut ça a l'air de tendre vers 1  
122. E'1 : tu ... tu mets... euh  
123. E'4 : (... ?) tend vers plus l'infini, en gros ...  
124. E'1 : ouais  
125. E'4 : mais ... ah ouais, non...  
126. E'1 : donc, en 0 ça fait 1 ... et en 0 ça fait « k » ... ah oui d'accord... donc, ça va pas plus ... ah ...  
qu'est-ce qui ... qu'est ce qui (... ?) le vecteur 1... est-ce que tu as suivi le truc de qui dépend de je sais  
pas quoi ... il dépend que de (... ?) quoi ... bon...  
127. E'4 : c'est surtout que ... c'est qu'en « y » il dépend tout le temps de « x »  
128. E'1 : oui, normalement  
129. E'4 : c'est ça, en fait,  
130. E'1 : normalement, ça je crois pas que ça dépende de « x »... .. bon alors, je ne sais pas ce qu'on va  
faire... je vais te dire ce qu'on va faire ... exactement ... est-ce qu'on peut pas tracer la droite avec la  
pente ... non ? ... bon ... comment ? ... on peut changer un point ...  
131. E'4 : donc c'est de l'ordre de quoi, après ? ... ça vaut rien en (... ?) exactement en quoi  
132. E'1 : hop ... déjà ... mettre de (... ?) là  
133. E'4 : tu vas (... ?) de (... ?) ?  
134. E'1 : on dirait  
135. E'4 : ça peut pas être le ... (... ?) « k »  
136. E'1 : hum ... 99 ... ah, regarde  
137. E'4 : mets toi en « x=0 »  
138. E'1 : ah, ça marche  
139. E'4 : et tu vois « x=0 »  
140. E'1 : « y=x » ... .. bon quand « x=0 » ça fait « y=x »  
141. E'4 : ça se fait 0  
142. E'1 : ah  
143. E'4 : quand « x=0 » ça fait « y=0 »  
144. E'1 : et pourquoi ?  
145. E'4 : quand « x=0 »  
146. E'1 : oui  
147. E'4 : ça se fait « y=0 »  
148. E'1 : ah oui ... il n'y pas « y' » ... la pente c'est 1  
149. E'4 : ah oui, la pente c'est 1  
150. E'1 : oui, mais alors on va faire ... de ça on nous dit pas grand chose  
151. E'4 : ah ouais ... (a=)(... ?) et (... ?) (=) (... ?)  
152. E'1 : pourquoi ça peut pas (... ?)... euh ... je pense que c'est pas mal beaucoup de ... je peux pas (... ?)  
... tout ce que tu vois là  
153. E'4 : oui... mais effectivement ça (... ?) trouver la pente  
154. E'1 : oui, mais on en verrait déjà quand même ... hum ... regarde  
155. E'4 : cela tend vers ... vers l'infini là bas  
156. E'1 : ouais ... logiquement ... quand « x » tend vers ... (... ?)  
157. E'4 : pointe, pointe ... ah ... ah non c'est ce vecteur ... non, tu peux pas le passer parce qu'on est (... ?)  
158. E'1 : (... ?) bon, quand tu l'amènes... dans les « x » positives ... elle décroît ... la pente  
159. E'4 : ah bon ?

160. E'1 : ben, regarde  
 161. E'4 : « x » augmente  
 162. E'1 : « x » augmente  
 163. E'4 : « y » est positive  
 164. E'1 : ce ça veut dire quoi ? ... logiquement ça veut dire ça  
 165. E'4 : qu'est-ce que (... ?)  
 166. E'1 : ah ... regarde ça ... regarde bien ... regarde bien la pente ... ..  
 167. E'4 : ah ... elle tend vers 0  
 168. E'1 : hum... quand elle est (... ?)  
 169. E'4 : ouais, c'est bon ... donc, c'est l'équation E5 ... « Justification » ... .. hum ...  
 170. E'1 : je t'avais dit que (...?) (« x » ?) t'as (... ?) (E2 ?) (... ?) déjà  
 171. E'4 : parce que la pente du vecteur semble rester tout le temps positive  
 172. E'1 : ah oui, c'est ça ... .. E5 ... ..  
 173. E'4 : et après ?  
 174. E'1 : d'accord ?  
 175. E'4 : d'accord  
 176. E'1 : d'accord ... donc E5 logiquement... oui, ouais

**Vecteur 2**  $\Leftrightarrow$  E4  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$

177. E'4 : tu fais le ...  
 178. P : ben si... ça va ... (... ?) vous allez vouloir (... ?) avec ça  
 179. E'1 : uff, on va pas exagérer  
 180. E'4 : donc ... essaie de voir le vecteur 2 ... euh, si « x » elle se voit ou non ?  
 181. E'1 : euh, celui-là  
 182. E'4 : hum  
 183. E'1 : ah ok ... comme on fait le ... ?  
 184. E'4 : ça serait en tout cas négatif ... ah non ...  
 185. E'1 : oh  
 186. E'4 : change de signe ... en ... (... ?)  
 187. E'1 : il y a une droite là  
 188. E'4 : change de signe ...  
 189. E'1 : tu vois  
 190. E'4 : en  
 191. E'1 : il y a une droite, je pense... quelque chose comme ...  
 192. E'4 : ah ouais ... c'est une droite  
 193. E'1 : ça m'a l'air ... tu as comme « y=x » ça  
 194. E'4 : (... ?) ah ouais  
 195. E'1 : ben oui  
 196. E'4 : ah c'est bon, si est cela ...  
 197. E'1 : et au-dessus... au-dessus, qu'est ce qu'elle a dit ? ah ... où est ...  
 198. E'4 : est-ce que ... et ça s'annule ... sur ... ? ...  
 199. E'1 : au-dessus ... alors on va ... attends ...  
 200. E'4 : ah non, non ... il faut que ça s'annule en « x=y »  
 201. E'1 : oui  
 202. E'4 : il n'a pas l'air de s'annuler ... donc on sait pas trop... .. ah non, c'est cela ... parce que ça tend vers l'infini ... en « y=x » c'est ça ?  
 203. E'1 : attends ... oui, je crois que en « y » ... pourquoi fait ça ? ... .. oui, oui ... ça, je ne comprends pas  
 204. E'4 : et 2 ... (... ?)  
 205. E'1 : tu vois ... donc c'est pas défini (... ?) ...  
 206. E'4 : ouais donc regarde-le ... si (... ?) en « y=x » et ça m'a l'air de faire ça  
 207. E'1 : ah (... ?) a l'air pas mal  
 208. E'4 : et euh ...  
 209. E'1 : et de plus est-ce que au-dessus ...  
 210. E'4 : au-dessus, c'est positif  
 211. E'1 : est-ce que ...  
 212. E'4 : ah ouais  
 213. E'1 : « y » positif ... elle est plus grande que « x » ? est-ce que c'est possible ?  
 214. E'4 : oui

215. E'1 : oh n'est pas assez bien ... et en dessous ?  
 216. E'4 : c'est négatif ...  
 217. E'1 : bon, on va voir (... ?)  
 218. E'4 : (... ?) ça change pas  
 219. E'1 : (... ?)  
 220. E'4 : ouais ... (... ?) pour (... ?) positive (... ?)  
 221. E'1 : donc c'est quoi ... l'E4 ?  
 222. E'4 : hum ... (... ?)  
 223. E'1 : je (... ?) quel sens ... et la ... ..  
 224. E'4 : alors que l'E4 c'est juste la pente du vecteur (... ?) en « x » ... ..  
 225. E'1 : (... ?) à dire ... quoi d'autre ce ... ça tend vers je sais pas quoi... ça tend à rien du tout, ouais...  
 donc non, ça suffit non ?  
 226. E'4 : hum ... ..

$$\text{Vecteur 4} \Leftrightarrow \text{E7 } y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$$

227. E'1 : parce que l'E2 est (... ?) non ... ah, il n'y a pas problème ... .. je te vais donner ... regarde-le,  
 pourquoi ça (... ?) le vecteur 4, je crois que je (... ?) cette droite là  
 228. E'4 : il vaut 0  
 229. E'1 : ouais ... on va faire les droites  
 230. E'4 : (... ?) (elle parle au même temps de J) ... d'accord ... on va voir où est nulle (... ?) (en lissant ce  
 que J a écrit) « le vecteur n'est pas définie si y=x de plus, la pente est >0 au dessus de la droite y=x et <0  
 en dessous » ... ok  
 231. E'1 : ouais, c'est bien... E4... ensuite V3 ... bon, on va faire directement le V4 comme ça, ça sera fait  
 ... qu'est-ce que tu en penses ?  
 232. E'4 : pour (... ?) vérifier si ça serait celle-là  
 233. E'1 : quoi ?  
 234. E'4 : pour vérifier que c'est cela... que c'est celle-là qui s'annule en ...  
 235. E'1 : oui, (... ?) je vais faire (... ?) le V4... .. voilà...  
 236. E'4 : (... ?) et euh ... il faudrait qu'il y ait une pente, euh ... je ne sais pas... ah, en « x=2 » et « x=-2 »  
 ça doit tendre vers l'infini...  
 237. E'1 : est-ce que celui là que nous (... ?) ... rien  
 238. E'4 : ben ... essaie justement en vérifiant que  
 239. E'1 : pourquoi on a déjà (... ?) on a déjà une (... ?) cela, cela ... on a déjà (... ?)  
 240. E'4 : attend, on sait pas... peut être, peut être il faut trouver une (... ?) de positif, comme celle-là ...  
 241. E'1 : qu'est ce que tu as dit ?  
 242. E'4 : celle-là peut être elle marcherait  
 243. E'1 : ah oui, oui ... (... ?)  
 244. E'4 : parce que moi, je dis que ça pourrait être celle-là... et tu vois il faut vérifier quand même si (... ?)  
 en 2 ... « y' » tend vers l'infini,  
 245. E'1 : ça marche comme (... ?)  
 246. E'4 : donc « x » plus ou moins  
 247. E'1 : c'est pas définie ? (... ?) ouais ... donc voilà  
 248. E'4 : donc, en 2 et en -2 ... c'est bon... donc on met les deux arguments  
 249. E'1 : ouais... donc en 2 c'est E7  
 250. E'4 : e7 ...  
 251. E'1 : alors ... ..  
 252. E'4 : (... ?)  
 253. E'1 : (il écrit) quand « x » tend vers (2) ça ... quand « x » tend vers 2  
 254. E'4 : ah oui c'est tend... puisque (... ?)  
 255. E'1 : ouais... la pente... ouais, elle est verticale ... voilà

$$\text{Vecteur 3} \Leftrightarrow \text{E8 } y' = n(y-x^2)(x+y)$$

256. E'4 : donc, voilà on doit finir le V3  
 257. E'1 : alors ... pourquoi on (... ?) pas le (... ?) ... alors qu'est ce qu'il aura fallu ... donc, lui euh ...  
 258. E'4 : regarde, ça me dit que (... ?) la valeur de « y »  
 259. E'1 : alors regarde ... hop là  
 260. E'4 : est-ce que lui il va vers le bas ? ... ou (... ?) s'il vient ... ouais, hop ... hop  
 261. E'1 : (... ?) que là (... ?) ça ... ouais  
 262. E'4 : hum ... ça veut dire qu'il y a un dénominateur ... ah non, pas forcément...

263. E'1 : alors qu'est ce qu'on (... ?) ... regarder de celui là ?... ..
264. E'4 : entre ... franchement entre un  $\frac{1}{2}$  et  $-\frac{1}{2}$  il reste (... ?) vas-y baisse... .. oui, si ça marche par tout il reste (... ?) non un peu plus... ah non ...
265. E'1 : sur la droite ... .. ah je pourrais le voir mieux ... voilà «  $y=-x$  »... (... ?) tu vois là ...
266. E'4 : il n'y est pas
267. E'1 : (... ?) je vais essayer ...
268. E'4 : ah si
269. E'1 : voilà ... redéfinir un ...
270. E'4 : il faudrait qu'il s'annule aussi en «  $y=x^2$  »...
271. E'1 : redéfinir ... euh
272. E'4 : trace «  $x^2$  »
273. E'1 : (... ?) sur celui-là ... et qu'est ce qu'on va faire ... oh (... ?)
274. E'4 : et trace passant par cela vers le «  $x$  »
275. E'1 : «  $y$  »
276. E'4 : non, il faudrait que ce soit aussi en «  $y=x^2$  », bon, trace «  $x^2$  » et on va voir si ...
277. E'1 : ok ... euh ... alors il a l'air pas mal... bon on va regarder (... ?) qui est (... ?)... ouais, calculatrice ... on va faire ça ... carre ... lieu (il construisent la courbe  $y=x^2$  et la droite  $y=-x$ ) ... ouais, voilà
278. E'4 : alors, maintenant, tu mets le vecteur 3 là-dessus
279. E'1 : donc ... redéfinir un objet ... attend, je vais redéfinir
280. E'4 : ça marche pas par contre...
281. P : point sur objet
282. E'1 : point sur objet... merci... ouais ... .. alors
283. E'4 : «  $y=-$  (... ?) ... ..
284. E'1 : (...) ah non, (...) celui-là ... il ne peut pas faire un autre ... bon (...?)
285. E'4 : voilà

**(fin de l'activité)**





# **Binôme E'12/E'17**

**Les associations :**

**Vecteurs dynamiques – Equations différentielles**

**L'expérimentation de l'année 2004**

## Binôme E'12/E'17

## Association entre vecteurs dynamiques et équations différentielles (lien explicitement donné)

Vecteur 1 – ED  $y' = -y(4-y^2)$ 

1. E'17 : tu comprends
2. E'12 : oui mais le problème c'est (...?)
3. E'17 : c'est comme ça je crois
4. E'12 : eh ... essaie sur la machine, tu appuies sur la touche ... prend la (...?)
5. E'17 : parce là normalement elle reste appuyé ... on l'a fait tout à l'heure
6. E'12 : je ne sais pas... j'appuie sur une touche je ne me souviens plus laquelle
7. E'17 : je ne sais pas
8. E'12 : ça se déplace tout normalement (...?) ... tout droit ... ah ... mais ... Mme comment on fait pour déplacer le vecteur, je n'arrive plus
9. P : alors, vous le prenez par l'origine ... vous allez d'abord dans la flèche bleu, là ...
10. E'12 : ouais
11. P : vous approchez ... quand il va vous dire «ce point» ... vous cliquez ... voilà
12. E'12 : alors, c'est ce point qu'il faut prendre
13. P : ah oui, c'est l'origine du vecteur
14. E'12 : alors là ... «trace»
15. P : c'est la trace du point ou la trace du vecteur?
16. E'12 : ah, du vecteur
17. P : alors vous cliquez sur le vecteur ... vous avez
18. E'12 : trace sur le vecteur
19. P : voilà, et maintenant vous pouvez bouger le vecteur
20. E'12 : bon, la trace c'est horizontale en 4 ... c'est normal ?
21. E'17 : horizontale ?
22. E'12 : ah non ... c'est 0,5 ... c'est horizontale en 2 ce qu'il est ... voilà ... (en lisant) «Pourquoi le Vecteur 1 peut-il être associé ... »... déjà d'abord il y a les 2; c'est horizontale ici et c'est horizontale là, on sait déjà
23. E'17 : en fait (...?) au dessous de -2 c'est négatif ... la dérivée elle va être négative à ce moment
24. E'12 : au dessus de -2
25. E'17 : ... positive entre -2 et 0 ... négative entre 0 et 2 et positive en (...?)
26. E'12 : au dessous de -2 ... donc, là, je vais ... ce point ...
27. E'17 : tu vois
28. E'12 : d'accord
29. E'17 : et après euh ... là elle devient négative en 0 et positive en 2 ... déjà c'est moins ... (...?) question déjà (en lisant) «pourquoi le vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle» ... alors, déjà euh ...
30. E'12 : donc c'est bon ...
31. E'17 : ouais ...
32. E'12 : ah ouais ... (...?) ...
33. E'17 : une autre chose c'est qu'euh ... comme tu vois ça dépend pas de « x » ...
34. E'12 : oui, en fait, ça ne dépend pas de « x » ... ouais
35. E'17 : déjà... euh ...
36. E'12 : il ne dépend pas de « x » (...?) une équation (...?) « x » (...?) simplement ... il faut mettre qu'il est constant quand « x » est constant ... [silence, E'17 déplace le vecteur dynamique]
37. E'17 : non, il n'est pas constant quand « x » est constant [le déplacement invalide l'affirmation de E'12]
38. E'12 : si, le vecteur est constant si « x » est constante ... si « x » ... ah non
39. E'17 : non ... c'est pas « x » ... c'est « y »
40. E'12 : c'est constante quelque soit « x »
41. E'17 : ouais
42. E'12 : c'est ça
43. E'17 : ouais... si tu fixes « y »
44. E'12 : qu'est ce qu'on peut dire d'autre ?... tu (...?)
45. E'17 : je marque
46. E'12 : donc
47. E'17 : on met dessous ... pour l'instant c'est tout ce que je vois ... (en lisant) «Régions du plan où le vecteur a une pente nulle» ... pourquoi ils dessinaient (...?) régions du plan ...

48. E'12 : et ben les régions du plan où le vecteur a une pente nulle c'est (...?) ci ça ... c'est 2 ou ... .. «expressions» ... .. «expressions algébriques associées» à cette fonction
49. E'17 : ça veut dire que (...?) là-dessus ... ah non (...?) c'est « $y=...$ » ...
50. E'12 : donc ça va (...?) en 2 (...?) ... «expressions algébriques associées» ... on parle des régions du plan où ...
51. E'17 : ouais
52. E'12 : c'est ça?
53. E'17 : je crois oui
54. E'12 : donc, c'est « $y=2, y=0 \dots y=-2$ » ...
55. E'17 : alors ... .. c'est quoi que vous entendez par expression algébrique ... « $y = \dots$ » ... c'est la droite ?
56. Julio : oui, c'est la droite
57. E'17 : ah d'accord ...
58. E'12 : (... ?) c'est sont les jeux, là-dessus (... ?) on est super forts mais ... après c'est quoi ça « les arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions »
59. E'17 : solution de ça ? ah non ... (en lisant) « les arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions » ...
60. E'12 : donc c'est parce que tu as un truc là (... ?) toi
61. E'17 : c'est ça ... il faudra calculer la dérivée seconde
62. E'12 : pourquoi ?
63. E'17 : parce qu'en fait, là tu sais que... en fait, en plus en chaque truc ... elle va changer de variation ... la tangente elle passe nulle, elle devient et euh ... normalement parce qu'en fait on a déjà euh ... on a déjà ça ... ça on sait déjà ... en fait ça peut être il faut pas le calculer
64. E'12 : là il faut pas (... ?) là mais moi je (... ?) dis là
65. E'17 : de quoi ? ... comment tu vas justifier hein ...
66. E'12 : moi je vas juste dire que pour « $(y')=0$  ... le signe du coefficient directeur ... parce que le signe de ...
67. E'17 : une pente ... ouais c'est ça hein
68. E'12 : ouais c'est ça ... tu veux que chacun remplisse les fiches ?
69. E'17 : c'est la même chose
70. E'12 : ouais ... (... ?) ça
71. E'17 : « des arguments ... qui justifient le comportement des courbes solutions »
72. E'12 : on regarde le 2
73. E'17 : attend ... je vais demander ... Mme c'est quoi que vous attendez là bas ... « les arguments mathématiques qui justifient ... » ... c'est pas ça ?
74. P : ah non mais ça c'est pas le comportement des courbes solutions ... ce qu'on appelle le comportement des courbes solutions c'est par exemple la croissance, la décroissance ... ce qu'elles font à l'infini ... c'est ça le comportement
75. E'17 : d'accord ... donc par rapport à ça
76. P : par rapport à cette équation différentielle ... ouais
77. E'17 : ouais ... donc... mais c'est là qu'il faut tout
78. E'12 : là ... la tangente elle est verticale ... la tangente elle quasiment verticale à un moment ... donc (... ?) laquelle courbe elle tend vers l'infini ... .. (... ?) fait quoi ...
79. E'17 : alors ...
80. E'12 : (... ?) réfléchir (... ?) un truc ... ..
81. E'17 : (... ?) cette courbe
82. E'12 : attend ... .. il est sur le (... ?)
83. E'17 : ben ... la fonction elle croissante, elle est décroissante, croissante, décroissante et croissante...
84. E'12 : ah oui mais ...
85. E'17 : il faut que la dérivée elle soit positive, négative, positive, négative, positive
86. E'12 : ah non ça peut être pas ...
87. E'17 : si ... si la dérivée ...
88. E'12 : attend ... (... ?) j'ai-y perdu ... je ...
89. E'17 : la dérivée de la fonction ... si une dérivée de la fonction elle est positive la fonction elle est croissante ... si est négative ...
90. E'12 : ah ... là c'est négative ... positive ... négative ...
91. E'17 : donc là tu es d'accord pour ta fonction... elle décroît
92. E'12 : ouais, ouais ... d'accord et pas (... ?) ...
93. E'17 : ah... mais j'ai compris ... c'est le champ de vecteurs c'est le ... en fait si ... (correctement ?) (... ?) (explique ?) un champ ... donc tu as ça ... tu as « $y=-2$ » et tu as « $y=2$ » ... tu prends une courbe qui passe par là

94. E'12 : oui
95. E'17 : maintenant si tu regardes ... elle forcément décroît ... elle décroît
96. E'12 : ouais
97. E'17 : d'accord ... mais elle fait que ça ... si on sait avant ce qui s'est passé ... tu vois, soit elle va rester là-dessous ... en fait on va avoir des courbes qui vont être de cette forme maintenant si tu as des courbes ... si tu as une courbe qui est ... qui est toute (... ?) entre les deux, soit elle va rester à l'intérieur ... mais si elle reste là
98. E'12 : non elle (... ?) comme ça
99. E'17 : ah non, non, là ça croît, je me suis trompé ... là ça monte ... en fait elle peut pas jamais couper ce truc je crois ...
100. E'12 : là tu as une tangente horizontale là ...
101. E'17 : non mais il y a un truc ... parce qu'en fait elle croît et dès qu'elle passe là elle décroît ... en fait elle peut pas ... en fait elle va toujours ... ça va être une asymptote ... et en fait je crois qu'il y a ... ouais, ouais comme ça, et en fait à chaque fois ça va être ça ... et là ça va être comme ça ... c'est le truc comme ça qu'elle fait la courbe, la fonction ... ça va dépendre de son ... le point pour lequel elle passe ...
102. P : la condition initial c'est ça que vous voulez dire ... oui c'est vrai tout à fait
103. E'17 : mais ... c'est le comportement des courbes, c'est ça ?
104. P : ah bah vous pouvez décrire ça ... oui, oui
105. E'17 : ce problème c'est que dépendent énormément des conditions initiales ...
106. P : mais il faut des arguments mathématiques
107. E'17 : comme ça, ça (attend ?) le (... ?)
108. E'12 : d'accord ...
109. E'17 : (... ?) ouais ... (... ?) entre (tableaux ?) (... ?) c'est (... ?) que ça ... ah des arguments mathématiques ... c'est quoi les arguments mathématiques ? ... (... ?) je ne sais pas comme on peut expliquer
110. E'12 : ouais je ne me souviens où s'est trouvé hein ... mais ça, ça peut pas exister ça ... non c'est (... ?) croissants
111. E'17 : ah non elle (... ?) là je vais faire (... ?)
112. E'12 : donc là je pense que c'est
113. E'17 : non là c'est que comme ça
114. E'12 : elle est tangente à ça et ... non elle c'est comme ça quoi
115. E'17 : ouais on n'a pas forcément ... elle n'est pas forcément tangente ... ah (... ?) seulement ... mais si est tangente ... ouais mais (... ?) d'accord
116. E'12 : donc ... on verra ... au dessous elle est décroissante, donc (... ?) elle est (... ?)
117. E'17 : non, il te manque un truc
118. U : (... ?) donc là c'est la même colonne c'est la (... ?) comme ça ... et ça, et là c'est comme ça
119. E'17 : ah il (... ?) hein ... elle est croissante comme ça ... parce qu'en fait il faut expliquer qu'en fait une courbe ... en fait, une courbe qui appartient à la bande, elle peut pas passer là ... c'est ça qu'il faut expliquer à mon avis, c'est qu'elle peut pas couper les ...
120. E'12 : ouais, ouais
121. E'17 : elle peut pas couper cette droite ... donc elle va les atteindre, elle peut les atteindre mais elle va jamais passer de l'autre côté ... en (... ?) ... mais alors
122. E'12 : ah (quand même ?) pourquoi elle pourrait pas couper cette droite ? ... c'est, en fin, elle peut pas le couper... lie à la dérivée mais ça veut dire quoi ? ... c'est ...
123. E'17 : on peut pas le ... elle peut pas être ... ouais ça dépend de la dérivée seconde
124. E'12 : euh ... est-ce que tu peux ... est-ce que on peut pas ...
125. E'17 : ah oui, c'est ça, c'est ça, c'est ça ... non, c'est ... attend ...  $y'' = y'(4 - y^2) + y$  ... il y a de moins ... donc c'est bon ... « y » facteur de « -2y » .. « -2y » ... ça va dépendre de la dérivée ... en fait la dérivée seconde à mon avis elle va être positive ... bon attend, (elle doit jamais changer de signe... alors la dérivée, elle va jamais changer de signe, elle s'annule jamais la dérivée seconde à mon avis ... .. « y' » ... (... ?) celle là (elle semble calculer)
126. E'12 : et ... une inverse là... mais là un inverse du théorème de Rolle
127. E'17 : pourquoi tu veux le théorème de Rolle
128. E'12 : je ne sais pas ... parce qu'il y a beaucoup de (... ?) égale à 0 ... c'est en fait ...
129. E'17 : ça va donner quoi ? en fait, on sais tout ... on connaît déjà tout sur la dérivée ... le problème c'est que sur la dérivée on connaît tout ... en fait le problème c'est que si tu montres qu'en fait, en ces points, la dérivée seconde elle change pas de signe, ça veut dire que la dérivée elle est tout le temps de la même croissance et de coup c'est pour ça qu'elle pourra pas passer, elle pourrait pas être égale à 0 parce qu'elle sera strictement croissante ... mais en (... ?) point (... ?) on sait rien en fait

130. E<sup>12</sup> : donc... la dérivée ... non ça peut pas marcher cette histoire ... je ne sais pas si c'est lié à la dérivée seconde
131. E<sup>17</sup> : ben si parce qu'en fait vu qu'en fait là (... ?) en ça tu montres que ton champ de vecteurs, que les tangentes à ta courbe solution ... elle est toujours ... il est de la même croissance en fait ... la dérivée ... elle a la même croissance et en fait ça c'est lié à la dérivée seconde
132. E<sup>12</sup> : ouais, ouais ... mais
133. E<sup>17</sup> : et ben... si ça traverse ça ... le problème que si ça traverse ces courbes, ces axes là, ça veut dire que la dérivée seconde elle change de signe
134. E<sup>12</sup> : mmh, en fait le ... je trouve qu'y a pas ce (quand même ?) comme ça (... ?) ... c'est bizarre, ça dépend pas de « x » en fait donc ...
135. E<sup>17</sup> : non, ça dépendra jamais de « x »
136. E<sup>12</sup> : ouais, ça dépend jamais de « x »... donc ...
137. E<sup>17</sup> : bon ... le problème c'est que (... ?) ça va pas bien le ...
138. E<sup>12</sup> : je ne sais rien ... si (... ?) (trouve pas ?) la dérivée seconde (... ?) tout le champ de tangentes ?
139. E<sup>17</sup> : non, il faudra déjà montrer que ça doit toujours avoir le même signe... ça va pas être possible... ce (truc ? (... ?) (quel ?) tu es (... ?)... là je me suis remonté... alors, direction ... (... ?) ... tu as (... ?) là ?
140. E<sup>12</sup> : ouais ...
141. E<sup>17</sup> : ah ouais voilà, c'est ça, donc ... plus ... ouais là c'est normal, en fait c'est deux sommes de carrés, donc de coup elle est supérieure ou égale à 0 la dérivée seconde ...
142. E<sup>12</sup> : (... ?) les courbes ... elle est constante, il sera (... ?) ... excusez-moi
143. E<sup>17</sup> : (... ?) (elle fait des calculs) ... et en fait c'est jamais, c'est simplement égale à 0 ... ça c'est bizarre... «  $\sqrt{2}$  » ... (en ?) 2 ... j'ai un (... ?) ...
144. E<sup>12</sup> : c'est «  $-2y$  »... c'est «  $-2y^2$  » non ? ...
145. E<sup>17</sup> : attend ... c'est ça que va pas, non ... ah ... la dérivée est composé... c'est ça ouais
146. E<sup>12</sup> : elle est « f »... «  $f^2$  » ... «  $f^2$  » c'est «  $2ff'$  »
147. E<sup>17</sup> : ouais ... «  $4y^2 - y$  » facteur de ... alors «  $-2y^2 y$  »
148. E<sup>12</sup> : c'est mieux non ?
149. E<sup>17</sup> : ouais ... fonction composé ouais... alors ... pourquoi (... ?) à l'infini ... mmh ça, ça va pas de tout ...
150. P : alors qu'est ce qu'il y a là ?
151. E<sup>12</sup> : rien ... il veut pas (... ?) que sur la grille
152. P : il veut pas ... il veut pas faire quoi ?
153. E<sup>12</sup> : comme en faire pour que le vecteur soit sur la grille ?
154. P : ah ... vous avez une macro ... donc ... (elle explique avec le vecteur 2 comme le placer sur la grille, elle montre aussi comment utiliser la trace) ...
155. E<sup>12</sup> : (... ?) sur ta dérivée seconde
156. E<sup>17</sup> : elle est l'inverse de celle là ... ah, non, ah ouais c'est (pire maintenant ?)
157. E<sup>12</sup> : on va (... ?) parce qu'on a fait directement le vecteur 2 quoi
158. E<sup>17</sup> : ouais il faut voir ça le plus simple (... ?) ... si la dérivée seconde ... Mme on n'arrive pas à ...
159. P : qu'est-ce qui se passe ?
160. E<sup>17</sup> : ça ... ouais
161. P : oui alors ... on vous demande pas de choses terribles, on vous demande de ...
162. E<sup>17</sup> : ouais ben parce qu'en fait, moi je pense à faire ça mais je n'arrive pas à ... à montrer qu'en fait une courbe elle va jamais passer à travers ça
163. P : ah oui c'est cette ici
164. E<sup>17</sup> : alors la dérivée seconde, la dérivée seconde elle a le signe inverse de ça
165. P : ça c'est difficile, ce que vous avez remarqué c'est qu'ici ...
166. E<sup>17</sup> : en fait ... la courbe, s'il y a une courbe solution, par exemple comme (... ?) en fait elle va jamais cette (... ?) une courbe solution elle va jamais couper cet axe
167. P : et vous n'avez pas l'idée pourquoi ...
168. E<sup>17</sup> : non, en fait je pense parce que ça... vu que là (... ?) une tangente nulle, de coefficient nul en fait, et là euh ... et mais là elle décroît !... non ça (... ?) ... alors attend... si ça passe là
169. E<sup>12</sup> : non mais (... ?)
170. E<sup>17</sup> : là ça peut passer, mais là ça passe pas ... c'est en 0 que ça passe pas
171. P : pourquoi ?
172. E<sup>12</sup> : (... ?) c'est pareil (... ?)
173. E<sup>17</sup> : parce qu'en fait ... mais non, parce qu'en fait là une fois tu as une tangente qui va décroître ... si tu passes ça elle va croître, si elle passe ça elle va décroître et en fait elle va rester là

174. E'12 : et l'autre pareil
175. E'17 : alors que là c'est pas possible ... là si ... ah mais non là ça monte ...
176. P : bah oui
177. E'17 : mais nous on n'a... elle n'a même pas (... ?)
178. P : absolument
179. E'17 : mais ça se passe là bas en fait le problème
180. P : toute la fonction elle est croissante, elle va être supérieure à ...
181. E'17 : ouais ... mais je ne sais pas pourquoi
182. P : alors qu'est ce que vous reste comme question ... là vous êtes d'accord que cette courbe là elle va pas couper... c'est une fonction croissante... elle est... elle (... ?) départ (... ?) coupait ailleurs ... bon ... là il n'y a pas de problème ... c'est là que vous savez pas ?
183. E'17 : mais en fait c'est pas ça ... là c'est pareil, elle va jamais ... en fait elle va jamais couper ces axes ...
184. P : pourquoi ?
185. E'17 : parce que ... c'est pas possible
186. P : et pourquoi ?
187. E'17 : voilà c'est ça
188. P : c'est ce que vous savez pas ?
189. E'17 : voilà ...
190. P : ah je vois
191. E'12 : c'est (... ?) au dessous il y a une tangente... elle remonte
192. P : oui, alors justement si on ...
193. E'17 : je pense que quand elle est là
194. P : (... ?) on peut faire un raisonnement à l'absurde ?
195. E'17 : ah, en supposant ... en supposant qu'elle coupe
196. P : comme ça se passerait en le point où elle coupe
197. E'17 : mais ah oui voilà c'est ça ... parce qu'en fait au point où elle coupe là elle doit avoir une dérivée positive, elle doit avoir une dérivée ... tant... ah ... elle doit avoir une dérivée comme ça ... en ce point là en fait
198. E'12 : en ce point là elle doit avoir une dérivée 0 (point bas ?)...
199. P : (point bas ?) comme vous dites mais ...
200. E'12 : elle peut aller ... elle peut mettre sur l'axe et rester sur l'axe
201. P : oui mais elle coupe ... si elle coupe c'est qu'elle n'a pas une ...
202. E'17 : ah voilà et si elle coupe c'est qu'elle a une tangente ... c'est qu'elle a une tangente comme ça
203. P : oui, voilà
204. E'12 : juste avant
205. E'17 : et bah
206. P : et or elle devra avoir une tangente horizontale ... c'est pas possible
207. E'17 : ouais ... voilà... mmh pas possible, ouais, ouais ... ah oui (... ?) si elle coupe l'axe, c'est pour ça
208. E'12 : donc il n'a pas de dérivée seconde ...
209. E'17 : mais... si tu as la dérivée seconde
210. E'12 : ouais, mais ça c'est pas lié à la dérivée seconde
211. E'17 : bah, la dérivée seconde elle te dit que là dedans elle change pas de signe ...
212. P : qu'est ce que ça veut dire la dérivée seconde sur la dérivée première ?
213. E'17 : en fait, elle dit simplement qu'elle change pas de ... entre ... là dedans
214. P : la dérivée seconde elle a quel signe là dedans ?
215. E'17 : la inverse de la dérivée seconde ... de la dérivée ...
216. P : pardon ?
217. E'17 : j'ai trouvé l'inverse de la dérivée mais j'ai galéré ...
218. P : comment ça ?
219. E'17 : j'ai d'une (... ?) ...
220. P : vous avez trouvé ...
221. E'17 : je fais plein calculs alors
222. P : ah que ... ce que vous (appelez ?) l'inverse c'est que...
223. E'17 : ah c'est moins pardon...
224. P : ah je comprends rien de tout
225. E'17 : le signe (... ?) de signe opposé
226. P : ah bah c'est qu'un signe ... c'est possible ... qu'est ce que ça veut dire ? ... donc ... et la dérivée elle était comment là ... ici elle est décroissante ?

227. E<sup>17</sup> : ouais, elle est négative (... ?)
228. P : là, euh ... donc ... et « y' » , non ... « y' » elle est décroissante ou croissante ici ?
229. E<sup>17</sup> : (... ?) elle est décroissante
230. P : elle est décroissante, et donc ça qu'est ce que ça veut dire sur « y' »
231. E<sup>17</sup> : bah, c'est qu'elle est négative
232. P : ouais
233. E<sup>17</sup> : bah non elle va (... ?) ... ah si, si c'est ça, ouais, elle est négative
234. P : vous avez trouvé « y' » négative ?
235. E<sup>17</sup> : ouais
236. P : donc c'est compatible, ouais
237. E<sup>17</sup> : ouais, ouais ... mais le problème c'est que c'est pareil ... en fait... on reste toujours ... parce qu'on sait que ça va changer de variation, la tangente elle va changer de variation si la dérivée seconde ...
238. P : oui, c'est ça
239. E<sup>17</sup> : elle change de signe en fait
240. P : voilà, exactement
241. E<sup>17</sup> : mais ... donc la dérivée seconde elle change de signe ça y'a pas souci parce que ...
242. P : ouais
243. E<sup>17</sup> : mais le problème ... en fait, ça veut dire rien
244. P : comment ça veut dire rien ?
245. E<sup>17</sup> : moi je n'arrive à comprendre ce que la dérivée seconde ... ai de ... (... ?) ... parce qu'entre ... en fait si on est dans un intervalle  $-2 (... ?) 2$  à  $0$  par exemple on sait que la dérivée seconde, elle est constante ... elle n'est pas constante ... elle est euh ... elle change pas de signe ... bah elle est égale à  $0$  euh ...
246. P : donc (ça veut dire ?) que la dérivée première elle est monotone
247. E<sup>17</sup> : elle est monotone ouais ... mais je vois pas ce que ça dit sur les ... j'arrive pas à ...
248. E<sup>12</sup> : ça veut dire que la ... en fait la tangente, elle a ... elle doit être petit à petit comme ça quoi ... donc ça veut dire que ...
249. E<sup>17</sup> : ah oui, non mais ça je suis d'accord
250. E<sup>12</sup> : ça veut dire qu'elles ne sont pas toutes (... ?) au départ et doucement après
251. E<sup>17</sup> : ah si
252. P : non, non, non
253. E<sup>17</sup> : ah si, si, si, ça peut dire ça
254. P : ça peut aussi, oui ... non, ce que je ne comprends pas bien ce qu'on dirait qu'il y a un point de inflexion là
255. E<sup>17</sup> : ah, non, non, mais ça c'est ... c'est de (truc ?) (... ?)
256. P : ah ... et j'aimerais savoir quel est le signe de « y' » là dedans
257. E<sup>17</sup> : là dedans ? ... elle est positive
258. P : « y' » est positive donc la fonction elle est croissante
259. E<sup>17</sup> : (non mais ?) c'est
260. P : et là vous l'avez dessiné décroissante
261. E<sup>17</sup> : ah non, non, non ... alors, attendez ...
262. E<sup>12</sup> : là elle est négative
263. E<sup>17</sup> : non, non, elle est décroissante donc « y' » est... alors attend ... vous me demandez « y' » ?
264. P : oui
265. E<sup>17</sup> : « y' » elle est négative ... « y' » elle est positive
266. P : d'accord ... et ça marche, parce que là effectivement
267. E<sup>17</sup> : oui, oui et ça (... ?) parce que
268. P : c'est une pente négative ... mais ici, la pente est négative mais elle est croissante... parce qu'elle au départ elle est très pentue négativement et après elle est moins ... ok, d'accord
269. E<sup>17</sup> : mais elle s'annule après ici la dérivée seconde... ici, elle rechange de signe ...
270. P : oui... mais les courbes ne vont pas... mais ici « y'=0 » là-dessus ?
271. E<sup>17</sup> : ouais
272. P : d'accord ...
273. E<sup>17</sup> : je veux savoir si c'était une ... en fait (on essayait de trouver ?) un truc... savoir si on pouvait montrer avec euh ... la dérivée seconde... en fait on (... ?)
274. P : là... euh... non
275. E<sup>17</sup> : (là ?) il faut simplement montrer par l'absurde que si ça coupe ça veut dire ...
276. P : et alors, j'aimerais savoir là ... euh...
277. E<sup>17</sup> : cette droite là ?
278. P : oui, cette droite là



279. E'17 : c'est «  $y=0$  »  
 280. P : oui ... mmh ... donc vous avez des ... qu'est ce que vous avez comme solutions ?  
 281. E'17 : une asymptote ?  
 282. E'12 : «  $y=0$  » c'est une solution  
 283. E'17 : en fait c'est... on a ... on peut avoir ... euh ...  
 284. E'12 : «  $y=0$  » est une solution si (... ?)  
 285. P : ah, c'est une solution ? pourquoi c'est une solution «  $y=0$  » ?  
 286. E'12 : parce qu'elles sont pas (... ?)  
 287. E'17 : parce que si «  $y=0$  » ...  
 288. E'12 : «  $y=0$  » ça fait «  $y'=0$  » et c'est bon  
 289. E'17 : ça fait 0 et la dérivée elle est nulle  
 290. P : d'accord ...oui  
 291. E'17 : donc c'est bien une solution  
 292. P : ouais, c'est bien une solution ... donc vous pouvez quand même dire pas mal de choses là-dessus dans cette petite case  
 293. E'17 : ah mais en fait il faut tout dire ?  
 294. P : oui, il faut tout dire ... comme vous dites  
 295. E'17 : d'accord  
 296. E'12 : bon, on rendra ta feuille (... ?) marquée (ils parlent d'autres choses)... ..  
 297. E'17 : ça ce m'énerve... je ne sais pas quoi mettre  
 298. E'12 : pourquoi ?  
 299. E'17 : je sais pas quoi mettre ... ..  
 300. E'12 : (... ?) la forme possible ... cela ... mmh ... ..  
 301. E'17 : c'est bon je pense ... ..  
 302. E'12 : j'ai mis 7 formes possibles ... 7 formes possibles  
 303. E'17 : ah j'en oublié une là  
 304. E'12 : c'est celle-ci  
 305. E'17 : 1, 2, 3, 4 ... j'ai oublié un intervalle entre super à (... ?) entre 0 et 2 et 0 et -2, non ?  
 306. E'12 : et égale à 2 ... égale à 0 et égale à -2  
 307. E'17 : ouais (mais ça fait ?) (... ?)  
 308. E'12 : ouais, donc bah ça fait 3 et 4 ... 7  
 309. E'17 : 3 et 4 moi, j'ai mis... ah oui, mais d'accord  
 310. E'12 : moi j'ai mis ... euh ... croissante tendant plus l'infini s'elle est là ... puisque la tangente elle devient verticale ... elle s'est croissante tendant plus l'infini  
 311. E'17 : mais le problème, vu qu'elle est croissante obligatoirement...  
 312. E'12 : on voit qu'elle est bornée ... là c'est ...  
 313. E'17 : ah mais elle est strictement croissante ... c'est pour ça ?  
 314. E'12 : là c'est ... décroissante  
 315. E'17 : parce qu'en fait c'est du stricte à chaque fois  
 316. E'12 : là c'est croissante tendant vers 0 ...  
 317. E'17 : alors, pourquoi c'est de...  
 318. E'12 : cela  
 319. E'17 : attend ouais ...  
 320. E'12 : non, parce que la tangente devient verticale ... là elle devient horizontale la tangente  
 321. E'17 : ouais mais parce qu'en fait ici ... dans les ... si tu regardes entre ... à plus l'infini ici, en fait la fonction elle est strictement croissante puisque elle s'annule jamais ... et là pareil, alors que là elle tend vers quelque chose qui (est égale à ?) 0 ... c'est pour ça... ouais  
 322. E'12 : non mais ... la dérivée elle est strictement croissante aussi ... la dérivée est strictement croissante, ça veut pas dire que (... ?) on a plus l'infini...  
 323. E'17 : euh ... non parce que si elle ... elle est strictement croissante ?  
 324. E'12 : bah ouais  
 325. E'17 : ouais bah ouais, elle s'annule jamais ... euh ... (tendant vers l'infini?)

**Vecteur 2 – ED  $y'=(x+2)/(x^2-1)$** 

326. E'12 : donc voilà la gueule du deuxième ... ..  
 327. E'17 : alors l'autre maintenant  
 328. E'12 : (?) déjà marqué quelque chose donc ...  
 329. E'17 : c'est quoi alors ... c'est ça l'autre ?  
 330. E'12 : ouais ... déjà il y'a un truc ... c'est sur que ça dépend pas d' « y » ... ça se voit ... pour un « y » donné c'est le même

331. E'17 : ouais
332. E'12 : donc voilà... c'est pas très dur... ah qu'il n'y a pas d'« y » dans la seconde équation donc ça se peut que ça corresponde ... ah ...
333. E'17 : après  $y^2=0$  pour  $x=-2$
334. E'12 : égale à 0 quand  $x=-2$ . Là je suis pas sûr... -1, -2, ah oui, c'est ça. C'est égal à 0 quand  $x=-2$ .
335. E'17 : doit avoir le truc tout du long, c'est ça ?
336. E'12 : comment ?
337. E'17 : ça doit (... ?) mais c'est pas la même chose
338. E'12 : ah ouais, tu n'arrives pas à changer ce « x », c'est sur « y » que ça change quoi ?
339. E'17 : ah ben oui
340. E'12 : donc, là, la pente effectivement, elle tend vers plus l'infini en -1. Ce qui me paraît normal. Mais elle tend vers moins l'infini en 1
341. E'12 : ben, d'abord elles font comme ça, et puis, après elles font comme ça. Donc...
342. E'17 : et elles tendent vers plus l'infini en...
343. E'12 : (... ?)
344. E'17 : ouais
345. E'12 : déjà, on peut dire que c'est égal à 0 en 1, c'est bon
346. E'17 : ouais, mais en fait, ils en partent après, c'est pour ça. Parce qu'après (...?) « x » tend vers...
347. E'12 : c'est quoi le « y » ? (... ?) le coefficient directeur
348. E'17 : ça devrait tendre aussi vers... Ah mais je suis conne. Si « y » tend vers... et « x » tend vers 1.
349. E'12 : ouais, bon... ça correspond bien...
350. E'17 : ce que je comprends pas c'est que... pourquoi c'est plus là ? Parce que là, ça fait 0.
351. E'12 : ben, ça dépend si tu approches par. Non, parce que là, ils sont comme ça, et après ils sont dans l'autres sens. Ça dépend si tu approches par valeurs négatives ou par valeurs positives.
352. E'17 : ah, ouais
353. E'12 : si tu approches par des nombres inférieurs à -1, ça va être positif
354. E'17 : parce que ça fait  $0^+$
355. E'12 : si tu approches par un nombre inférieur à -1, ça va être négatif
356. E'17 : supérieur, ça fait (...?) . Quand « x » est supérieur, ben, ça doit faire... c'est l'inverse. « y » tend vers plus l'infini, « x » tend vers -1, « y »...
357. P : ça va ?
358. E'17 : ouais, ouais
359. E'12 : (...?) ...
360. E'12 : (...?)
361. E'17 :  $x+2$
362. E'12 : (...?)
363. E'17 : donc...
364. E'12 : (...?) le vecteur rouge. Le vecteur rouge... tu n'as pas donné la forme mathématique ? vu que (...?) on aura moins...
365. E'17 : tu vois, c'est la même chose en fait...
366. E'17 : mais, moi les.... ouais, c'est ça...
367. E'12 : (...?)
368. E'17 : par contre, ça c'est pas une courbe
369. E'12 : quoi ?
370. E'17 : ça ne peut pas être une courbe. (...?) Parce que, de la même façon que tout à l'heure.
371. E'12 : et là, ce n'était pas (...?)
372. E'17 : ah, mais si
373. E'12 : mais alors, elle peut pas être remplacé par n'importe où. Parce que ça ne dépend pas de « y », mais... (...?) entière, une tangente (...?) là, une tangente verticale là
374. E'17 : ouais
375. E'12 : c'est tout, eh. Il y a des tangentes qui sont (\*\* signe ?) ; et là, il y a...
376. E'12 : euh, ça peut être des (liens/lieux ?)
377. E'17 : mais...
378. E'17 : ça c'est bizarre ; les points d'inflexion. Oui mais, il y a pas un point l'inflexion là
379. E'12 : si
380. E'17 : non, un point d'inflexion c'est quand la dérivée est nulle
381. E'12 : mais, non
382. E'17 : ah si, un point d'inflexion c'est quand la dérivée est nulle
383. E'12 : ah si, c'est quand la dérivée est nulle. Ce n'est pas un point... c'est un point de... ?
384. E'17 : c'est un point de (...?)

385. E'12 : si, si. La dérivée troisième (...?)  
386. E'17 : mais, c'est là même chose, non ?  
387. E'12 : mais si, parce que là, tu as une courbe qui est...  
388. E'17 : ah, c'est la dérivée...  
389. E'12 : ... dans ce sens là, et après dans ce sens là, donc forcément c'est la dérivée troisième. Je ne sais pas avec les dérivées, si ça doit être la troisième  
390. E'17 : il paraît que...  
391. E'12 : mais si, c'est pareil que la dérivée seconde  
392. E'17 : (...?) , non, non, ce n'est pas ça  
393. E'12 : si, c'est la dérivée seconde. Parce que là, tu as des...  
394. E'17 : ah, mais pour que...  
395. E'12 : ça ne passe pas forcément par 0. Ce n'est pas forcément tangente horizontale le point d'inflexion. Tu es sûre de toi ? Ce n'est pas de...  
396. E'17 : ben, un changement de variation de...  
397. E'12 : comme ça là. (...?) si tu le met là  
398. E'17 : ouais  
399. E'12 : là, tu as le point d'inflexion ici ; tu changes  
400. E'17 : mais, tu ne changes rien du tout, en fait. Tu changes juste le...  
401. E'17 : mais le point d'inflexion, en fait, c'est quand la dérivée seconde est nulle. Et en fait, c'est comme un point  $x^3$ , en fait. Tu vois ?  
402. E'12 : c'est ça mais là, la dérivée devient la dérivée  
403. E'17 : ta dérivée, elle n'est pas...  
404. E'12 : là, la dérivée, elle est... tu (...?) plus tu avances, moins elle est...  
405. E'17 : (...?)  
406. E'12 : là, donc, là, elle est décroissante... la dérivée, elle est décroissante ; de moins en moins importante  
407. E'17 : nulle  
408. E'12 : d'accord ? Et après up, elle est croissante  
409. E'17 : c'est la dérivée seconde  
410. E'12 : non, ça c'est la dérivée... C'est ta fonction  
411. E'17 : elle est décroissante et après  
412. E'12 : ta dérivée première...  
413. E'17 : est-ce que ça... ?  
414. E'12 : la dérivée est décroissante. Elle baisse  
415. E'17 : ouais. Et après elle remonte  
416. E'12 : et après elle remonte. Donc, la dérivée sera nulle ici ; et le point d'inflexion semble être (...?)  
417. E'17 : c'est ça. Attend, tu as deux trucs comme ça  
418. E'12 : c'est pas forcément...  
419. E'17 : ... la première dérivée...  
420. E'12 : et ça, je pense c'est pas le point d'inflexion. Ce n'est pas forcément (la courbe\*\*\* ?)  
421. E'17 : (...?) ah, non, je n'avais jamais vu dans ma vie  
422. E'12 : bon, ben, (...?) d'autres  
423. E'17 : ouais. Alors, attend. Non, mais ça m'embête parce qu'en fait la dérivée seconde, elle change. Elle est... c'est ça... elle est l'inverse de... si, elle change que dalle (=elle change rien). Elle ne change pas de signe à ce moment-là  
424. E'12 : ici, là ?  
425. E'17 : non  
426. E'12 : si, je pense qu'elle doit changer de signe  
427. E'17 : moi, j'ai pas observé, moi  
428. E'12 : ouais mais toi, tu ne sais pas...  
429. E'17 : parce qu'elle (...?) dérivée. Je ne sais pas, on verra. Mais là c'est en fonction de « x », alors la dérivée c'est juste en fonction de « x », tu dérivés ça  
430. E'12 : c'est un carré, on regarde  
431. E'17 : et ben voilà, elle ne change jamais de signe. La dérivée ne change jamais de signe  
432. E'12 : pourquoi ? En haut tu as quoi ?  
433. E'17 : elle est tout le temps négative  
434. E'12 : attend,  $x^2$  moins  $2x^2$ , là ?  
435. E'17 : ouais  
436. E'12 : et il en reste  $x^2$ , là.  
437. E'17 : c'est ça.  $-x^3$ ...  $x^2$   
438. E'12 :  $-x^2$  ?

439. E'17 : oui
440. E'12 : c'est bizarre, qu'il y ait un truc de moins-là ? Je suis sûr qu'elle change de signe si je (...?)
441. E'17 : ça change de signe, ça
442. E'12 : non
443. E'17 : ça ?
444. E'12 : c'est toujours négatif quelque soit le nombre...
445. E'17 : ouais ?
446. E'12 : ...les valeurs
447. E'17 : ah, mais merde, ces stylos
448. E'12 : ça c'est positif et ça c'est forcément négatif. Et (...?) négatif, négatif. Donc... non, mais ça tu le (...?) n'importe quoi, là
449. E'17 : mais oui. Ah, oui, alors refait-là
450. E'12 : monsieur, juste une question (...?) . Si, un point d'inflexion, la dérivée, elle n'est pas forcément nulle ? Ah, c'est ça. C'est juste la dérivée seconde qui change de signe. La dérivée n'est pas forcément nulle
451. E'17 : et il y a quoi de particulier quand la dérivée est nulle ?
452. E'12 : il n'y a rien
453. E'17 : c'est un point d'inflexion particulier
454. E'12 : la dérivée nulle ça change pas le signe, ça (...?) c'est tout
455. P : vous parlez plus vite, Julio, il a établi tout un système de...
456. E'12 : d'accord
457. E'17 : non, mais c'est bizarre ce truc là.
458. E'12 : ouais, ouais, parce que...
459. P : ah, mais ça c'est des courbes solutions
460. E'12 : oui
461. P : ah, c'est joli
462. E'12 : ouais
463. P : donc...
464. E'12 : ben, après (ça va décrire \*\*\* ?)...
465. P : d'accord
466. E'12 : Parce que ça c'est celui d'avant. Et en fait, juste, on se demandait si un point d'inflexion où la dérivée est nulle c'est un point particulier ?
467. P : c'est un point d'inflexion aussi
468. E'12 : c'est un point d'inflexion aussi, d'accord. Mais...
469. P : non, il n'a rien de particulier
470. E'12 : ...il est plus (...?) que les autres
471. P : ouais, c'est ça
472. E'12 : c'est juste que...
473. P : vous connaissez  $y=x^3$  ?
474. E'12 : oui, oui, oui
475. E'17 : ouais
476. E'12 : mais il n'y a pas d'inflexion en 0
477. P : ouais. Et la tangente est horizontale
478. E'12 : ouis, d'accord, mais... on appelle ça... ça dépend pas de... Ça peut être (toujours ?) en 0
479. P : pas de tangente
480. E'12 : oui, oui, c'est ça. Voilà
481. E'17 : en fait, c'est simplement que quand il y a « y » seconde égale à 0, tu as un point... tu peut avoir un point d'inflexion, mais sans que ça change de signe
482. P : voilà, c'est ça
483. E'17 : voilà, c'est ça
484. P : moi, j'ai autre chose
485. E'17 : alors que là, tu es obligé de changer... Quand tu as un point d'inflexion c'est obligé que ça change de...
486. P : voilà.
487. E'17 : ...de variation
488. P : exactement. C'est ça
489. E'17 : mais alors, il faut... Mais là, attend... Calculer la dérivée seconde, mais je ne l'ai pas ce truc là.
490. E'12 : il est où le... (...?)
491. E'17 : mais par contre là, la dérivée, elle devrait être nulle... Tu ne veux pas calculer la dérivée seconde ? Arrêt de faire des erreurs de calcul. Arrêt de prendre ta calette pour calculer une dérivée !

492. E'12 : ben, si, pourquoi ?
493. E'17 : après tu ne saura plus faire. Tu as perdu du temps
494. E'12 : mais c'est utile d'avoir une calculette. Attends tu fais vraiment...
495. E'17 : elle n'est pas magique ta calculette, quand même. Ah, j'ai dû me planter de signe, non ?
496. E'12 : moins «  $x^2$  » plus «  $4x$  » plus 1
497. E'17 : mais c'est ça. La dérivée de ça fois ça, moins la dérivée de ça fois ça, sur...
498. E'12 : tu prends «  $g'$  » moins («  $g'f$  » ?) sur «  $g^2$  »
499. E'17 : je ne comprends pas. Parce que si tu fais la dérivée de  $x+2$ , c'est  $1 \dots x^2-1$ , après moins...
500. E'12 : parenthèse
501. E'17 : moins, ben...  $-x+2$
502. E'12 : facteur de...
503. E'17 : facteur de  $2x$
504. E'12 :  $2x$
505. E'17 : c'est ça. Divisé par  $x^2-1$ ,  $x^2$ , c'est bien égal à  $x^2-1$ ,  $-2x^2$
506. E'12 : ouais
507. E'17 :  $-2x \dots -4x$
508. E'12 :  $-4x$
509. E'17 : et puis, non. Mon point d'inflexion doit être (...?)
510. E'12 : non, mais c'est ça. Et là, je pense que tu dois pouvoir faire  $AB/dx$
511. E'17 : mais attends. Qu'est-ce qu'on a d'autre ?
512. E'12 : et ben, (...?)
513. E'17 : ou alors, il faudrait calculer les racines...  $x^2+4x+1 \dots$
514. E'12 : mmm
515. E'17 : c'est égale à 2... Ah mais c'est compliqué les racines. C'est ce que j'allais dire
516. E'12 : racine de  $3-2$ , non...
517. E'17 : c'est à peu près ça, ou pas ?
518. E'12 : ça ?
519. E'17 : le point d'inflexion
520. E'12 : mais c'est là
521. E'17 : ah ! mais (...?), je n'ai pas regardé
522. E'12 : sinon, je dirais 0
523. E'17 : ah ? C'était en 0 ?
524. E'12 : là, j'avais l'impression que c'était. Tu as pris quoi ? C'est quoi racine de... ? ça fait combien moins... racine de 3 ? ça fait combien ça ? Ah, ça fait... C'est vraiment pas très loin de 0, quoi. Ce n'est vraiment pas très loin de 0
525. E'17 : ouais, ça doit être ça. Racine de... ce n'est pas très loin de 0
526. E'12 :  $\sqrt{3} - 2$  ce n'est pas loin de 0
527. E'17 : donc...
528. E'12 : qu'est-ce que tu as mis comme... ? Par contre la dernière...
529. E'17 :  $\sqrt{3} - 2$ . Et c'est quoi l'autre racine ? L'autre truc ? C'est  $-\sqrt{3} - 2$
530. E'12 : ouais.  $-\sqrt{3}-2$ , c'est à peu près le  $-2$  qui est là.
531. E'17 : ça c'est oui. Mais c'est ça. Mais ce n'est pas le  $-2$
532. E'12 : ce n'est pas  $y'$  égal...  $y'=0$  en  $-2$  ?
533. E'17 : ça devrait être ça.  $-2$ , ça fait  $4$ .  $+8$ . En  $-2$ .  $-4$  plus... Comment ça c'est possible ça ? Je n'en sais rien. Allez, et l'autre. L'autre, elle dépend de «  $x$  » et de «  $y$  »

### Vecteur 3 – ED $y' = (y^2+x)(x-y)$

534. E'12 : ouais, regarde le «  $y$  » qui est là, voilà. Après, on vérifie, est-ce que c'est juste
535. E'17 : juste, en quoi ?
536. E'12 : non, juste à la main, pour voir ce qui a changé
537. E'17 : alors, ah lala
538. E'12 : donc, là, il y a les tangentes horizontales. Donc, on peut tracer la courbe des tangentes horizontales aussi. Là, il y a des tangentes horizontales
539. E'17 : c'est  $x=y$
540. E'12 : ah, non, non. Ça fait...
541. E'17 : regarde
542. E'12 : eh, ouais. Il n'y a pas les... Il n'y a pas l'équation (...?)
543. E'17 : mais si, c'est ça. Tu ne me crois pas
544. E'12 : si, je te crois. (...) Ouais, ça marche, c'est ça. Ça se vérifie par...
545. E'17 : ah, ouais, ouais

546. E'12 : si  $x=y$ , ça fait tangente égale à 0
547. E'17 : tangente... Ouais, ouais
548. E'12 : ça fait  $y'=0$ . ben, oui,  $x=y$ , ça fait bien...
549. E'17 : et là, tu as un truc, quand « x » est négatif, la tangente est nulle pour  $y = \pm\sqrt{x}$
550. E'12 : ...égal « y »
551. Voisin : quoi ?
552. E'12 : il y aussi une tangente horizontale à...
553. E'17 : ah ?
554. E'12 : quand  $y = \pm\sqrt{x}$ , c'est ça ?
555. E'17 : ouais
556. E'12 :  $y = \pm\sqrt{x}$
557. Voisin :  $y = \pm\sqrt{x}$
558. E'17 :  $y = \pm\sqrt{x}$
559. Voisin : ça va. « x », il va être négatif. Comme nous, en fait
560. E'17 : tu crois quoi, toi ? (...?)
561. E'12 :  $\sqrt{x}$ , ça n'existe pas,  $\sqrt{x}$
562. E'17 : mais, si. Si tu prends « x » (...?) négatif
563. Voisin : ah, c'est ça
564. E'17 : voilà
565. E'12 : ah, c'est ça. C'est ce machin là
566. Voisin : et, il y a la bisectrice aussi
567. E'12 : ouais, on l'avait déjà vu, ça. (...?)
568. E'17 : (...?)
569. Voisin : (...?)
570. E'17 : ben, ouais, on est sur écoute
571. E'12 : ils ont choisi le groupe qui réfléchissait le mieux et ils ont mis le truc, là
572. Voisin : (...?)
573. E'12 : (...?)
574. E'17 : (pour « x » ?)
575. E'12 : donc, elles sont comment les courbes ?
576. E'17 : les parcours ?
577. E'12 : suivant les conditions initiales, elles sont carrément différentes
578. E'17 : les parcours...
579. E'12 : quoi ?
580. E'12 : ben, ça veut dire qu'elles sont comme ça. Si elle part d'ici, elle monte. Elle est horizontale. Et elle ne peut pas couper ce truc-là, pareil. Comme tout à l'heure
581. E'17 : elle ne peut pas couper  $x=y$
582. E'12 : non.  $x=y$ . Et après, elle est encore verticale, encore. Comment ça se fait ? Comment ça se fait ? Ah, non, non, si, si
583. E'17 : et après, elle reste sur la courbe
584. E'12 : parce que là, elle descend
585. E'17 : ouais, elle ne peut pas la passer. Elle reste dessus
586. E'12 : d'accord. Elles font comme ça, et up
587. E'17 : elle reste dessus. C'est ça. Parce qu'en fait... et quand elle vient en haut, elles font pareil
588. E'12 : c'est vrai ? Après, il y a... Je vais te montrer ça sur une courbe
589. E'17 : alors
590. E'12 : racine de « x », elle fait quelque chose comme ça. D'accord ?  $x=y$  ça fait quelque chose comme ça. Le point... Alors là, ça redescend. Là, elle descend. Donc... Elle touche ça. Elle touche ça, elle devient horizontale
591. E'17 : en fait, tu as vu les courbes, comment elles sont ?
592. Voisin : fais voir
593. E'17 : elles sont... c'est des droites
594. E'12 : ouais, si c'est des droites
595. E'17 : tu pars de là, tu vas en haut, direct
596. E'12 : ouais, tu (note ?) quasiment. Comme celle-là, et up. (Quand tu tournes là ?), tu tombe sur la première
597. E'17 : ouais, mais elle (monte ?) direct
598. E'12 : mais là, ce n'est pas vertical
599. E'17 : mais quasiment
600. E'12 : ouais, (ça se passe comme ça ?)

601. E'17 : quasiment
602. E'12 : donc, il y a des branches qui sont comme ça. D'accord ? Si tu as une fonction initial qui est là, ben ça décroît. Ça touche ça, ça devient horizontale, et après...
603. E'17 : et ça reste dessus
604. E'12 : ben, je ne suis pas sûr, parce que là...
605. E'17 : ah, c'est quoi cette courbe ?
606. E'12 : ben, ça devient horizontale, tu vois ? Et ça, ce n'est pas horizontale, la tangente n'est pas horizontale. Ça veut dire que...
607. E'17 : non, mais si, et ça reste dessus, tu es obligé. Parce que là, tu as (...?) et la tangente qui sont dans ce sens-là. il y a des tangentes qui sont nulles
608. E'12 : ouais
609. E'17 : et du coup, (elle peuvent ?)... ça traverse là
610. E'12 : ça traverse pas (...?)
611. E'17 : donc, ça reste dessus
612. E'12 : ben, non
613. E'17 : si. Parce qu'en fait, ces traits-là, ils partent d'ici ; donc ils sont (...?)
614. E'12 : regarde, regarde. Là, sur la gauche, j'ai une tangente horizontale, et ça c'est pas une tangente... Si on fait un grossissement sur ce point là...
615. E'17 : oui, oui, c'est bon. Et puis ça descend...
616. E'12 : ça descend, la courbe arrive, là, elle est horizontale, et après elle redescend comme ça. Et à mon avis, à chaque fois qu'elle touche...
617. E'17 : ouais, mais c'est tellement minime que ça reste dessus, à mon avis
618. E'12 : a mon avis... Ben, non, (c'est plus bas ?). Parce que là, la tangente... celle-là, elle est horizontale, et celle-là est horizontale. Donc, ce n'est pas vraiment au-dessus
619. E'17 : non, mais en ce point-là
620. E'12 : ouais
621. E'17 : en ce point-là, la tangente est horizontale
622. E'12 : on voit la courbe
623. E'17 : voilà
624. E'12 : pas pour les points... pas pour celle-là
625. E'17 : donc, dès que tu es...
626. E'12 : pas pour celle-là.
627. E'17 : dès que tu es juste un tout petit peu à côté, tu redescend au-dessus. Et en fait, tu ne peux pas faire (...?)
628. E'12 : ouais
629. E'17 : a mon avis, tu ne le vois même pas
630. E'12 : ouais mais, il faut réfléchir un peu. Je pense que c'est comme ça l'objectif... Up, et quand ç'arrive ici, ça s'arrête. (Ça, ça veut dire quoi ?)... ah si, ça remonte. Ah, non, ça ne remonte pas
631. E'17 : tu ne peux pas, tu reste au-dessus
632. E'12 : tac, tac. Si elle part de là, elle a cette gueule, si elle part de là, elle a cette gueule. Et tout ça c'est pareil. Mais à moins, si elle part de là...
633. E'17 : ah, si elle part de... elle fait...
634. E'12 : non, non, les truc ici, (...?) bizarre par là. C'est pareil, c'est racine de « x »
635. E'17 : ça c'est racine de... ouais, ouais. Mais le problème c'est que tu vois, là, tu aura la même chose ici, en fait. Oh, là-bas
636. E'12 : regarde, si tu traces cet axe... ça ne change rien
637. E'17 : le problème c'est qu'il faut regarder ici. En fait, là-dessus, tu dois avoir le tracé...
638. E'12 : là c'est des (...?)
639. E'17 : ben, ouais, j'ai bien peur que ce soit mis
640. E'12 : là, je vais tout (plaindre ?) si je déplace... Là c'est décroissant, c'est sur. (maintenu ici ?) c'est toujours décroissante. Et quand elle arrive là, ça se passe quoi ? Et si elle passe là, elle a une tangente horizontale là-dessus. Ce n'est pas très (chelou ?)
641. E'17 : non, elle ne peut pas la passer
642. E'12 : si, si, si
643. E'17 : et comment elle le passe ? C'est le même problème que là
644. E'12 : non, là, il y a une tangente horizontale
645. E'17 : non, ce n'est pas le même problème que là ;
646. E'12 : non
647. E'17 : ben si, parce qu'après ça doit être croissant, ça

648. E'12 : ben oui. Ça remonte, et après (ça ne repasse pas ?). (Mais si, ça remonte ?), et ç'arrive là. Il y a une tangente horizontale, comme ça. (en tournant ?) Et là, ça ne peut plus passer. Moi, je te dis que c'est décroissant
649. E'17 : là, il n'y a pas de tangente horizontale, tu es d'accord ?
650. E'12 : il fait où une tangente horizontale
651. E'17 : ouais, donc, c'est faut
652. E'12 : ben, écoute
653. E'17 : elle ne peut pas repartir... Parce que tu es d'accord, si elle traverse la tangente horizontale, il faut qu'elle soit... Parce que là, tu es d'accord, ce n'est pas une tangente horizontale. Pour qu'il y ait une tangente horizontale, il faut qu'elle fasse comme ça ta courbe. Il faut qu'elle arrive comme ça
654. E'12 : là, notre courbe doit avoir une tangente horizontale là
655. E'17 : imagine elle reste dessus
656. E'12 : elle doit avoir une tangente horizontale là, et une tangente verticale, par là... donc là. Et pour avoir une tangente horizontale là, il faut qu'elle arrive d'ici
657. E'17 : et il y reste
658. E'12 : et ici, elle ne peut pas y arriver parce que dès qu'elle est là, elle descend
659. E'17 : et ben, (...?) dans ce sens là
660. E'12 : quoi ?
661. E'17 : elle peut en avoir un dans ce sens là
662. E'12 : non, elle ne peut pas... (...?) déjà vu passer. (...?)
663. E'17 : ça fait comment avant et après ?
664. E'12 : tu la (...?)
665. E'17 : là, ça descend (...?) y reste, non ?
666. E'12 : là, ici, il y a une tangente comme ça ; et là, il y a une tangente comme ça
667. E'17 : si parce qu'elle arrive comme ça. Attend. Tangente comme ça... ah mais tu ne peux pas, mais c'est le même problème que tout à l'heure, mais ça reste dessus après. En fait, ton truc comme ça, à mon avis il doit faire comme ça. Ah non, parce que là (tu as une tangente ?) comme ça
668. E'12 : je pense qu'elle arrive là et après elle (chope la ?). Elle la suit
669. E'17 : mais en fait, non. Même pas, c'est impossible, parce que là, tu vois, elle doit avoir une tangente comme ça ; et pour avoir une tangente comme ça, il ne faut pas qu'elle soit comme ça la courbe, en fait, il faut qu'il n'y ait plus de point après, je crois. (Ça ne doit pas être des chiffres ?)
670. E'12 : tu l'as appris ?
671. E'17 : non ... (... ?)
672. E'12 : (on l'a tracé ?) C'est vrai qu'avec la calculette c'est ça ?
673. Julio : oui. (...?) plus facile de calculer, ou de placer un point sur l'axe. Après, on va vous demander les coordonnées de ce point
674. E'12 : oui
675. Julio : après, on utilise la calculatrice, et on fait comme on voudrait faire... C'est laquelle l'équation qu'il faut faire ?
676. E'12 : c'est moins racine de « x », pour « x » négatif, en fait.  $\sqrt{-x}$ , pour « x » inférieur à 0
677. Julio : mais on peut faire « x » égale à moins  $y^2$
678. E'12 : ah, oui, c'est ça. « y »...  $x=-1$ .  $-y^2$
679. Julio : on va faire ça, c'est plus facile. Ici, j'ai pris un point sur l'axe. Alors, il y a moins... voilà
680. E'12 : et maintenant on met « y »
681. Julio : j'ai pris (« x » ?)
682. E'12 : d'accord
683. Julio : et maintenant, on fait « report de mesure ». On va reporter (cette/sa ?) valeur ce ici...
684. E'12 : ...cet axe
685. Julio : maintenant, on fait (...?) « perpendiculaire à ce point » (...?)
686. E'12 : le point, oui
687. Julio : le point d'intersection
688. E'12 : d'accord, et après on fait tracer le point
689. Julio : et après on demande le lieu de ce point, quand ce point bouge (...?)
690. E'12 : là c'est quand même compliqué pour ce point
691. Julio : oui.
692. E'12 : d'accord
693. E'17 : (...?) chanter une petite chanson ?
694. P : alors, lorsqu'on vous demande le vecteur à une (...?) , qu'est-ce que vous avez fait pour trouver ça ? Ouais, c'est les isoclines, et vous avez cherché à résoudre « y' » égal 0. Alors, c'est très facile pour les droites sauf pour le vecteur 3. Vous avez (...?) une droite et une parabole. Et, en effectuant... pour les



deux premiers vecteur, pour le comportement des courbes solutions, ç'allait assez bien, parce que «  $y'$  ». (...?) «  $y'$  » ne dépendait plus de «  $x$  ». Donc, vous avez fait une (espèce ?) de tableau de variation, et vous avez (...?) croissantes et décroissantes. Le troisième était plus dur...

695. E<sup>17</sup> : je n'ai rien écrit pour le troisième

696. P : alors, le troisième, en fait, il fallait régioner le plan. Il y en a pas mal qui l'on fait. Donc, vous avez la droite  $y=x$ , et vous avez la parabole. Et la parabole c'était, je crois, ( $y+x=0$  ?). Et il faut donc, régioner le plan... bon alors, la droite ( $y=x$  ?)

**(fin de l'activité)**

## Binôme E'12/E'17

### Association Vecteurs dynamiques – Equations différentielles (lien n'étant explicitement donné)

1. E'12 : c'est la parabole
2. P : c'est la parabole. La droite (...) c'est la parabole
3. E'12 : (...?)
4. P : voilà, alors ici c'était le signe, je pense, négatif
5. E'12 : il faut changer d'échelle. Il y a une (...) quelque part ? Ah, là c'est « y' » égal à une constante, c'est sur
6. E'17 : ben alors, attend
7. E'12 : « y' » égal constante, je suis désolé mais...
8. E'17 : et ben, tu vois bien que c'est...
9. E'12 : ah, ah, attend, peut-être que ça change un peu. Il faut qu'on voie... On va l'afficher, la pente. Ah, il ne veut pas l'afficher. Merde
10. E'17 : en fait, il faut que tu refasses « trace »
11. E'12 : ouais
12. E'17 : il faut que tu refasses tout, et avant de...

### Vecteur 1 $\Leftrightarrow E5 y' = ke^{-0.05x^2}$

13. E'12 : attend, parce que là, regarde, ç'a l'aire d'être un peu plus vertical que là
14. E'17 : ah, ouais. Ben regarde, là et là
15. E'12 : ça (...?), et après ça rebaisse un peu
16. E'17 : donc, ben on devrait dire qu'elle va être maximum en « x »...
17. E'12 : toujours positive, déjà. Toujours positive. Tu es d'accord ? Donc, toujours positive. (...) axe c'est pas positive ?
18. E'17 : la première, avec un « a » positif. Ah ben oui, c'est ça. la première
19. E'12 : la première c'est toujours positif. Attend, pas forcément
20. E'17 : si, si, si. 1 c'est positif, et  $x^2+1$  c'est positif
21. E'12 : mais ça c'est positif aussi
22. E'17 : ouais, mais c'est pas du tout cette allure, ça
23. E'12 : pourquoi ?
24. E'17 : parce que c'est des trucs comme ça. C'est des... là ça va être le contraire. Ça va être comme ça
25. E'12 : ouais, mais ça ne varie quasiment pas sur le « x ». Tu imagines...
26. E'17 : ah, mais oui, positif ! Ah, ben oui. D'accord, oui
27. E'12 : mais elle est quasiment constante
28. E'17 : il y a les maximums. On va dire qu'elle est maximale. Elle est maximale pour  $x=0$ . On dirait, non ? Toi, tu l'as dit tout à l'heure. Ah, non, peut-être...
29. E'12 : ah, merde
30. E'17 : non, mais oui, ben voilà. Maintenant refait... met la pente
31. E'12 : oui, je crois que c'est la pente d'une droite mais de ce vecteur. Ah si. Mais (...) là
32. E'17 : maintenant... Et fais-le juste bouger, et pas la trace
33. E'12 : ah, ben attend. Là, je n'ai pas chopé ce point, là
34. E'17 : bouge le 98
35. E'12 : tac. Ce vecteur
36. E'17 : 1
37. E'12 : un. Là c'est le (« y » ?) moins, et la c'est moins
38. E'17 : ben alors, c'est moins
39. E'12 : bravo
40. E'17 : c'est en 1
41. E'12 : bravo. C'est en un la pente maximale. Donc, c'est la dérivée seconde qui est maximale en 1
42. E'17 : je ne veux plus entendre parler de dérivée seconde
43. E'12 : mais pourquoi ?
44. E'17 : ah, la dérivée seconde, elle est toujours égale à 0
45. E'12 : non
46. E'17 : et du coup, il y a un changement de variation
47. E'12 : oui. Ça, je suis d'accord avec toi
48. E'17 : mais, non. Parce que tu sais quoi. La dérivée, elle est nulle en 0
49. E'12 : donc, ce n'est pas celle-là, déjà
50. E'17 : c'est pas celle-là. parce que la dérivée est nulle en 0

51. E'12 : en 0 ça fait k, en 0  
 52. E'17 : mais non. Tu dérivés ça, ça fait moins...  
 53. E'12 : non, mais tu calcules « x », en x=0  
 54. E'17 : ah, l'abscisse... Moi, je croyais que c'était...  
 55. E'12 : tu ne dérivés pas, c'est « y' » directement  
 56. E'17 : ah, ben justement  
 57. E'12 : ça c'est...  
 58. E'17 : et tu vois, je le mets là et...  
 59. E'12 : regarde, regarde E5, ça ne me paraît pas mal. Ça, ça dépend... Tu vois, parce que là, ça dépend effectivement de « x », mais super faiblement quoi  
 60. E'17 : très petit. Ouais, d'accord  
 61. E'12 : tu vois ce que je veux dire ?  
 62. E'17 : ouais. Ouais, parce que...  
 63. E'12 : allez, E5, c'est bon ?  
 64. E'17 : ouais  
 65. E'12 : on dit que c'est ça, et puis on verra si on a une réponse bonne  
 66. P : pour la (...?) vous avez trouvé ça ?  
 67. E'12 : ouais  
 68. P : quelle raison ?  
 69. E'17 : parce que  
 70. E'12 : elle est quasiment constante, la tangente, et elle est maximum en x=0  
 71. P : ah, d'accord  
 72. E'17 : et en plus, ça (...?) parce que la dérivée seconde est nulle en x=0  
 73. P : oui, parce que... Quels ont été les choix possibles ?  
 74. E'17 : celui-là et celui-là  
 75. E'12 : non, celui-là non, celui-là, il dépend de « x ». ça dépend vachement de « x »  
 76. E'17 : ah, oui, mais à la base on était partis de celui-là parce que...  
 77. P : d'accord  
 78. E'17 : (...?)  
 79. P : ...c'est ça que je voulais savoir strictement positif, et après ça s'élimine  
 80. E'17 : c'est comme ça qu'on a fait  
 81. E'12 : oui, oui. De toutes façon c'est négatif  
 82. E'17 : justification, car...  
 83. E'12 : ça, ça peut être négatif, ouais. Ça, ça peut être négatif... ouais. Attend, ça... Ouais, ça peut être négatif si « y », va être négatif, plus il est proche de 0, ça peut être négatif. Donc, car... car positif. (...) Voilà, tu as vu. Et ce n'est pas « et » c'est « car »  
 84. E'17 : ouais, c'était ça. En fait, au début je me disais... Ouais, mais en fait, non. En fait, « y' », on observe... que « y' »... est maximum pour x=0... ça coïncide... avec l'équation car... Ah, tiens. En fait, on pourrait calculer le...

$$\text{Vecteur 2} \Leftrightarrow \text{E4 : } y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$$

85. E'17 : ... ça c'est quoi ? Croissant, décroissant. La composée d'un truc croissant et d'un truc décroissant, ça fait quoi ?  
 86. E'12 : quoi ?  
 87. E'17 : là composée d'un truc croissant et d'un truc décroissant ?  
 88. E'12 : on n'en sait rien  
 89. E'17 : on n'en sait rien ? Exponentielle d'un truc...  
 90. E'12 : oh, oh. Qu'est-ce qui se passe ?  
 91. E'17 : mais si ça décroît. Exponentielle, il décroît. Ah ? Yvan  
 92. E'12 : quoi  
 93. E'17 : si tu as... Regarde, ça, ça décroît sur 0, plus l'infini. Ça, ça décroît sur 0, plus l'infini  
 94. E'12 : euh  
 95. E'17 : plus ça descend, et plus exponentiel est petit  
 96. E'12 : ouais, ouais, c'est décroissant  
 97. E'17 : c'est décroissant. C'est pour ça que c'est maximale ; parce que là, elle diminue et... Alors, « y », elle est croissante, ben non... « y' », est sur moins l'infini, 0, « y' » est croissant, ce qui coïncide bien. Alors, après la deux

98. E'12 : celle-là, elle s'annule sur le (... ?) dérivée en  $y=x$ . Donc, on cherche une courbe qui s'annule en  $y=x$
99. E'17 : là. Je l'ai. E7
100. E'12 : ouais, mais il y a aussi... Non, c'est E4 aussi
101. E'17 : non, mais de toute façon je n'écris pas...
102. E'12 : d'accord
103. E'17 : en fait, je marque juste qu'elle coïncidait, en fait
104. E'12 : e7 et E4. Et à priori c'est plutôt E4
105. E'17 : mais non. Ça ne peut pas s'annuler, ça
106. E'12 : non, ça... La dérivée change de signe
107. E'17 : elle doit bien s'annuler, alors. Elle doit bien...
108. E'12 : non, parce qu'elle n'est pas définie, regarde. Il y a un point où elle n'est pas définie
109. E'17 : ah, donc ce n'est pas ça. Donc, ce n'est pas ça
110. E'12 : non, c'est la dérivée. Elle change de signe... change de signe, c'est ça que (...?) . Elle change de signe (...?)
111. E'17 : ...change de signe. Une fois elle est positive et une fois elle est négative
112. E'12 : non, mais là, la dérivée, elle est... Mais la dérivée n'est pas définie en  $y=x$ . C'est pas continue, en tout cas, c'est sur. (...) Ouais, c'est bon. Donc, il n'y a qu'une qui n'est pas définie en  $y=x$
113. E'17 : après, qu'est-ce qu'il y a d'autre à dire de ça ?
114. E'12 : c'est tout là, c'est bon. Je pense que ça suffit. Il n'y a qu'une qui n'est pas définie en  $y=x$
115. E'17 : et elle est positive en... Et « y' » supérieure à 0... parce que « y » est supérieure à « x »
116. E'12 : ouais, c'est ça... « y' » négatif...
117. E'17 : c'est ça
118. E'12 : c'est ça
119. E'17 : ça coïncide. Parce que ça, c'est toujours positif
120. E'12 : ouais, c'est ça. (...)

**Vecteur 4**  $\Leftrightarrow$  E7  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$

121. E'12 : ben oui, il y a un changement ici
122. E'17 : c'est beau
123. E'12 : changement de signe ici. Je suis un spécialiste en repérage d'erreurs
124. E'17 : alors, pour 1, 2, 3, 4
125. E'12 : ah, il y a un changement de signe là
126. E'17 : 4
127. E'12 : non, 2, 2. C'est 0,5
128. E'17 : ah, c'est 0,5. Et ben, c'est en 2, -2
129. E'12 : en 2 et -2
130. E'17 : et c'est nulle à un moment ?
131. E'12 : elle n'est pas définie en 2 et -2
132. E'17 : ben là. J'en ai une
133. E'12 : tu en as une qui n'est pas définie en 2 et -2 ?
134. E'17 : e7. Et à la fois, elle est... ah, ça change de signe...
135. E'12 : et, elle est égale à 0 en 0 ?
136. E'17 : 0, 0 ?
137. E'12 : ouais
138. E'17 : ouais
139. E'12 : tu peux dire (...?) tend vers 0, en 0. En  $x=0, y=0$
140. E'17 : définie en « x » pour « x » égal (...?) et « x » égal 2. Elle vaut 0. Et à « y' »
141. E'12 : égal à 0
142. E'17 : égal à 0
143. E'12 : en 0,0
144. E'17 : c'est juste en 0,0 ?
145. E'12 : ouais, ouais
146. E'17 : et, qu'est-ce qu'on dit sur le signe aussi
147. E'12 : le signe... comment ça le signe ?
148. E'17 : donc, là...
149. E'12 : là, elle est décroissante
150. E'17 : ...c'est positif quand c'est supérieur à quoi ?

151. E'12 : c'est positif quand c'est entre -2 et 2. Voilà. Là, j'ai l'impression qu'elle... C'est bizarre ce qu'elle fait là
152. E'17 : c'est normal, parce qu'en fait, tu sais... regarde
153. E'12 : oui
154. E'17 : tu regardes le signe, ça dépend de ça et ça, voilà
155. E'12 : ouais
156. E'17 : donc là, elle va être
157. E'12 : pas très proche de 0, en fait, pour les « x » proches de « y ». Non, mais d'ailleurs, elle est égale à 0 pour  $x=y$ , en fait. C'est pas en... Elle est égale à 0 en  $x=y$ . Différent de 2
158. E'17 : ben oui
159. E'12 : pour  $x=y$
160. E'17 : en plus, qu'est-ce qu'il y a d'autre ?
161. E'12 : ben, c'est bon. C'est la seule. (...?) trouve, justifié
162. E'17 : ouais puis (...?) justifier

**Vecteur 3**  $\Leftrightarrow$  **E8**  $y'=n(y-x^2)(x+y)$

163. E'12 : la dernière, parce qu'on n'a pas le temps, c'est l'heure
164. E'17 : c'est la seule qui va, ça ? C'est simplement pour les définitions, en fait, parce que les autres ne sont pas définies
165. E'12 : ah, mais c'est la 4 celle-là
166. E'17 : c'est celle-là la 4 ?
167. E'12 : celle que je viens de faire c'est la 4. Je ne fais pas de bruit, pardon. Désolé. (...) Celle-là, elle est définie partout, on dirait. C'est vachement plus (...?) quand c'est défini par tout (...?)
168. E'17 : donc, égal à 0 en 1 et en -1, non ?
169. E'12 : si, si. Je vais passer, passer. Là, elle est égale à 0, à un moment donné, là
170. E'17 : oui. Alors, elle ne serait pas égale à...
171. E'12 : ah, regarde, regarde, juste après. Verticale, là, c'est passé 0
172. E'17 : donc, c'est en 2. Pour  $y=2$
173. E'12 : non, ce n'est pas si simple que ça. C'est la (...?) numéro 1. C'est sur une droite comme ça qu'elle va changer
174. E'17 : tu crois ?
175. E'12 : ouais
176. E'17 : moi, je dirais bien que c'est pour...
177. E'12 : regarde, bouge pas. Ah merde, ce n'est pas le bon chiffre. Donc, je vais déplacer un peu pour qu'on voie quelque chose. Ce vecteur... je ne sais pas si je peux déplacer les points... Je vais déplacer avec la (...?)
178. E'17 : en 1
179. Voisin : 0
180. E'12 : en un ? Mais regarde, là, elle vaut 0 en... ici. Là
181. E'17 : alors, maintenant descend pour voir si elle dépend de « x »
182. E'12 : 0 ici aussi
183. E'17 : alors, regarde si elle dépend de « x » ou de « y »
184. E'12 : non, justement, ça dépend des deux, en fait. C'est ça le problème
185. E'17 : ouais. Et il y a des points où ça dépend de « y » et d'autres points où ça dépend de « x », à mon avis
186. E'12 : ouais, attend
187. E'17 : déjà, regarde en (0,0) combien elle vaut
188. E'12 : ben oui, ce point
189. E'17 : regarde, en (0,0)
190. E'12 : quoi ?
191. E'17 : regarde en (0,0) ça permet d'éliminer les courbes
192. E'12 : (0,0), là
193. E'17 : non. En (0,0)
194. E'12 : quoi ?
195. E'17 : en (0,0), en le point (0,0)
196. E'12 : voilà
197. E'17 : donc, déjà, elle est nulle
198. E'12 : nulle en (0,0)
199. E'17 : déjà, tu peux prendre celle-là. Celle-là est éliminée. Celle-là, l'autre là, en (0,0). ok. En (0,0), celle ne va pas. Ça ne va pas. Déjà, il ne nous en reste que deux. Alors est-ce que ce ne serait pas sur une...

200. E<sup>12</sup> : alors, je l'ai là. On a trouvé si...
201. E<sup>17</sup> : alors, regarde si en « y » plus ou moins un est égale à 0
202. E<sup>12</sup> : j'ai (0,0) ici en... j'ai du (0,0) en... alors, j'ai mesuré combien... deux et demi. Ah merde je suis con
203. E<sup>17</sup> : tu veux pas regarder si en 1 et en -1 ça vaut 0 pour « y », indépendamment de « x »
204. E<sup>12</sup> : en 1, je peux te dire que ça n'a pas changé
205. E<sup>17</sup> : non, mais en « y », pas pour « x »
206. E<sup>12</sup> : je varie en 1. Je varie comme ça
207. E<sup>17</sup> : voilà
208. E<sup>12</sup> : ça n'a pas changé aussi
209. E<sup>17</sup> : d'accord, donc ce n'est pas celle-là, c'est celle-là. C'est celle-là, parce que regarde, ça peut être égale à 0, tu vois la parabole  $y=x^2$ . Tu peux tracer la parabole
210. E<sup>12</sup> : alors droite. Tu n'as pas suivi comment on trace une courbe
211. E<sup>17</sup> : non
212. E<sup>12</sup> : je ne t'explique même pas comment on trace un courbe. Alors, attend. Je vais essayer de le faire, c'est intéressant... ce point... c'est où « calculatrice »?... Calculatrice... nombre au carré. La parabole est (...?) au carré, entrer
213. E<sup>17</sup> : ben, « x » est carré. Pourquoi tu fais ça ?
214. E<sup>12</sup> : ben c'est au carré.  $Y=x^2$ . Donc, ça fait « x » égal racine carré de « y ». C'est ça, c'est la même chose
215. E<sup>17</sup> : pourquoi tu ne la mets pas dans ce sens là ?
216. E<sup>12</sup> : parce que j'ai en fonction de « y ». Il fallait que j'écrive en fonction de « y »
217. E<sup>17</sup> : ben oui, c'est ça. Ouais, mais c'est racine carré de valeur absolue de « y »
218. E<sup>12</sup> : ouais, mais on s'en fous, je veux juste voir là-dessus
219. E<sup>17</sup> : ben, je ne comprend pas pourquoi il (...?)
220. E<sup>12</sup> : non, non, mais je vais le faire en fonction de « x », et alors, il faut que je refasse (...?)
221. E<sup>17</sup> : te ne veux pas enlever la trace ?
222. E<sup>12</sup> : je prends un point sur cet axe. Je fais... j'affiche les coordonnées. Elles sont où les coordonnées ?
223. P : ah, mais vous avez fini, vous ?
224. E<sup>17</sup> : ouais, ben on va finir
225. P : d'accord. Je vous passe ça
226. E<sup>17</sup> : la correction ?
227. P : non
228. E<sup>12</sup> : on vérifie juste pour savoir si la tangente horizontale sera parabole...
229. P : ah, ouais. D'accord, c'est bien ça
230. E<sup>12</sup> : c'est une parabole ?
231. P : c'est lequel ?
232. E<sup>12</sup> : ben le dernier
233. E<sup>17</sup> : c'est le trois
234. E<sup>12</sup> : le trois
235. E<sup>17</sup> : en fait, on a inversé, le trois c'est ça
236. P : si, ce sont des paraboles. C'est ça
237. E<sup>12</sup> : c'est une parabole
238. E<sup>17</sup> : on fait ça maintenant ?
239. P : ouais. Je peux prendre ça, vous avez mis les deux ?
240. E<sup>17</sup> : non. Il n'y avait pas le petit truc
241. P : j'ai oublié.
242. E<sup>17</sup> : ah, mais il ne l'a pas rempli...
243. E<sup>12</sup> : c'est un peu compliqué de tracer une parabole

**(fin de l'activité)**



# **Binôme E'14/E'15**

**Les associations :**

**Vecteurs dynamiques – Equations différentielles**

**L'expérimentation de l'année 2004**



## Binôme E'14/E'15

## Association Vecteurs dynamiques – Equations différentielles (lien explicitement donné)

1. E'15 : alors, (elle lit) il y a une question là bas ? est-ce qu'on répond à ça ou à ça (elle parle possiblement des questions dans 2 et dans les tableaux ...)
2. E'14 : je ne sais pas (elle lit) « justifier pourquoi chaque vecteur peut être un vecteur tangent associé à l'équation différentielle affichée ? »
3. E'15 : tu peux pas... ? (... ?) s'il te plaît...
4. E'14 : je ne comprends pas
5. E'15 : moi, non plus... non, mais le problème est que si on bouge la (... ?) là, la (... ?) plus
6. E'14 : ah oui... ah c'est ça (... ?)
7. E'15 : le quoi ?
8. E'14 : ah mais, c'est plus facile pour la question d'après
9. E'15 : de quoi ?
10. E'14 : « régions du plan où le vecteur a une pente nulle »
11. E'15 : (... ?) c'est à partir de là où-y ... des .... abscisse
12. E'14 : est sur l'axe des abscisses en fait
13. E'15 : ouais... et ...
14. E'14 : hop
15. E'15 : parce que ... attend, (... ?) cosinus c'est (... ?)
16. E'14 : tu es en sûr ...
17. E'15 : ah ... il faut une pente nulle ... ah oui... (... ?) pente négative, ça va
18. E'14 : pour le vecteur 1 mais pas pour le vecteur 2
19. E'15 : bouge, bouge... ah ben oui, c'est ... c'est sûr... t'as ... le vecteur 3 ici
20. E'14 : là...
21. E'15 : ouais ... c'est pareil ... je ne sais pas ... il s'annule quand il est ... en ...
22. E'14 : le vecteur ... fait un ...
23. E'15 : il faut que ce soit toujours horizontal en fait
24. E'14 : ah oui
25. E'15 : ah oui et puis ...
26. E'14 : ah il s'annule déjà ...
27. E'15 : ben oui...
28. E'14 : il s'annule ... en fait ce qu'on (...?) c'est les régions du plan
29. E'15 : ah les régions du plan (... ?) il faudrait dire, c'est pas bon
30. E'14 : et pourquoi tu as fait un cercle ?
31. E'15 : et (... ?) pas ça (... ?) ben, tu veux dire qu'ils vont (... ?)... bon ...
32. E'14 : tu as (... ?) que c'est un vecteur tangent qui fait l'équation ... « pourquoi l'équation différentielle affichée ? » ... ah c'est ça ? ... ah non, (... ?) avait trop mal ... ah c'est (... ?)
33. E'15 : ce que je ne comprends pas (... ?) non, quoi, tu as compris ?
34. E'14 : ah mais, en fait, c'est ça... résume pourquoi le vecteur essaye (... ?) faire ça ... ? voilà et... sur d'« y »
35. E'15 : il faut par (... ?) là ?
36. E'14 : il fait ça, pourquoi si le vecteur c'est un vecteur tangent ... pourquoi le vecteur 1 parce c'est ça (... ?) je pense que c'est la même chose ...
37. E'15 : ah d'accord
38. E'14 : ah (elle lit) « pourquoi le vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle  $y'=-y(4-y^2)$  »...
39. E'15 : alors, le vecteur 1 ...
40. E'14 : ce truc (... ?) que l'on fait ... d'avoir les 2...
41. E'15 : on sais plus
42. E'14 : attend ... on va faire, en fait, on va faire une pente ...
43. E'15 : tu sais faire ?
44. E'14 : oui ...
45. E'15 : qu'est ce que tu fais ? une pente ?
46. E'14 : parce que je voulais faire
47. E'15 : non mais là, si tu t'arrêtes là ... il faut que tu t'arrêtes ... « édition, annuler »...
48. E'14 : ouais, c'est pas ça que je voulais faire, et j'avait compris ... et là tu (... ?) comme ... tu veux le ...
49. E'15 : voilà
50. E'14 : on recommence
51. E'15 : (... ?)

52. E'14 : ouais, ce que je voulais faire, en fait ...
53. P : vous voulez effacer le point ?
54. E'14 : non, c'est bon ça
55. P : si non, (... ?) vous faites juste retour, ce truc là
56. E'14 : ah ouais, ah d'accord ... il n'a pas l'air bon, en fait si je le déplace se (... ?) ce là et je vais cliquer la pente, ah ouais, mais ça dépend, en fait ...
57. E'15 : ce là ... qu'est ce que tu fais ?
58. E'14 : tu le déplaces ... et ça (... ?) dépend
59. E'15 : ah oui, mais ça dépend (... ?) quand tu le déplaces
60. E'14 : ah oui, c'est ça ... ouais,
61. E'15 : ben déjà... « régions du plan où le vecteur a une pente nulle » ...
62. E'14 : ouais
63. E'15 : sur l'axe des abscisses (... ?)
64. E'14 : tu vas remplir c'est ... ouais ...
65. E'15 : ah, non, j'avais oublié (... ?) on fasse ... (... ?) que le vecteur 1, ah non ... oui, le vecteur 2 et le vecteur 3 d'accord ... sur l'axe des abscisses ...
66. E'14 : (... ?) écrire à petit
67. E'15 : oulàlà
68. E'14 : (... ?) une page (... ?) ne touches pas ... tiens, tiens, tiens ...
69. E'15 : regarde ...
70. E'14 : tiens on recoupera
71. E'15 : ouais, vraiment... non, c'est bon, non
72. E'14 : (... ?) expressions algébriques associés...
73. E'15 : ça veut dire que ... la tangente est nulle... non ?
74. E'14 : que « y »
75. E'15 : ce ça veut dire qu' «  $y'=0$  », non ?
76. E'14 : c'est-à-dire si «  $y=0$  » ou
77. E'15 : «  $y'=0$  » ...
78. E'14 : non, mais quand tu remplaces ... ..
79. E'15 : donc ... tu veux dire ça, quand (... ?)
80. E'14 : (... ?) en -2 ...
81. E'15 : qu'en fait, que « y » et «  $4-y^2=0$  »
82. E'14 : hum
83. E'15 : ça veut dire ... «  $y=0$  » ... tu vois ce que je veux dire ?
84. E'14 : hum
85. E'15 : ou «  $y=$  ... »
86. E'14 :  $\pm 2$
87. E'15 : ouais ...  $\pm 2$ , c'est ça ... « pourquoi le vecteur 1 peut-il être associé à l'équation différentielle ... »... parce qu'en fait, ça veut dire ... c'est la tangente ... c'est euh ... ..
88. E'14 : parce qu'en fait là, c'est pas constante, la pente de la tangente ... normalement ce qu'on verrait ...
89. E'15 : (... ?) ... ..
90. E'14 : en fait, tu peux (... ?) en part ... on part (... ?) nulle là ...
91. E'15 : on avait fait ça sans allure d'orientation
92. E'14 : ouais
93. E'15 : d'afficher la courbe associée à l'équation différentielle grâce à ce point de (... ?) après le vecteur ... donc ... .. donc je sais pas quoi... je pointe ...
94. E'14 : (... ?) on le verra (... ?) voilà...
95. E'15 : des arguments mathématiques qui justifient un peu ce comportement des solutions...
96. E'14 : (... ?) on n'a pas la même solution ... .. ben, là aussi on le (... ?) ...
97. E'15 : hum... elle bougeait partout
98. E'14 : ouais...
99. E'15 : on va demander à Jérémie
100. E'14 : (... ?)
101. E'15 : Jérémie, comment se (... ?)
102. J : (... ?)
103. E'15 : ouais, et après ? ... .. la pente du vecteur c'est « y' » ?
104. E'14 : regarde, en fait ... il y a (... ?) ce soit la diagonale (... ?)
105. E'15 : non, mais le choix de la diagonale parce que (... ?)
106. E'14 : (... ?) rien ...
107. E'15 : moi, je me (... ?) pas

108. E'14 : parce que là, il n'est pas là ... il est dans le sens  
 109. E'15 : il est (... ?) ?  
 110. E'14 : non ... c'était là ça que je disais  
 111. E'15 : ouais ... donc là, régions du plan (... ?) je suis sûre, je pense, là en la diagonale ...  
 112. E'14 : «  $y = x$  » ?  
 113. E'15 : hum ... «  $y = x$  » ... donc ça veut dire que «  $(x+2)/(x^2-1) = 0$  », tu vois ...  
 114. E'14 : ah ouais ... ça, c'est pareil, ça veut dire que «  $x = (... ?)$  »  
 115. E'15 : non, «  $x = -2$  » ... tu vois (... ?) «  $x$  » (... ?) 0 ... c'est est ça là  
 116. E'14 : ouais  
 117. E'15 : tu peux (... ?) écrire (... ?) 0  
 118. E'14 : ah oui ... ah oui ... moi, je n'était là, en fait, encore ...  
 119. E'15 : on va dire qu'on pourrait trouver et calculer la pente du vecteur... le problème c'est que la pente, je ne la voit pas, moi ...  
 120. E'14 : comment tu fais pour faire ça ? pourquoi tu mets (... ?) 0, il y a un problème là  
 121. E'15 : non, parce que justement «  $y'$  » c'est euh... (... ?) l'équation d'une (... ?) c'est ça, non ? «  $y$  » pardon ... moins (... ?) de «  $x$  » (... ?) 0... «  $x - x_0 + f(x)$  » c'est 0 mais pour tous les points ... c'est nul ... ah non... par contre on a mis 0 ici ... alors  
 122. E'14 : parce qu'ici «  $y'$  » elle vaut 0  
 123. E'15 : (... ?) c'est pareil ... (... ?)  
 124. E'14 : ça fait rien, en fait, on peut faire de tests ... non (... ?)  
 125. E'15 : (... ?) déjà  
 126. E'14 : non, j'ai mal réfléchi ...  
 127. E'15 : ça ne marche pas ...  
 128. E'14 : qu'est-ce que ?... ah mais, si, si, si  
 129. E'15 : de quoi ?  
 130. E'14 : si, parce qu'en fait, «  $y'$  » est nulle ça veut dire que ... ah ouais si, c'est bon... je ne vois plus comme il a réfléchi...  
 131. E'15 : ah ça veut dire ça ... que pour tout «  $y$  » que ... ouais, ouais, ah non, le vecteur tangent il est constant... ah ouais ton «  $y'$  » elle est nulle pour ces points là  
 132. E'14 : oui, oui, voilà (... ?) «  $x = -2$  »  
 133. E'15 : associé justement à ces points là, oui donc... effectivement, oui voilà (... ?) ce point  
 134. E'14 : je ne sais pas le ... bon...  
 135. E'15 : donc ... Jérémie, il avait dit que «  $y'$  » c'était la pente ...  
 136. E'14 : ouais  
 137. E'15 : la formule de la pente, je ne sais pas s'il ... (... ?) ... en ce point  
 138. E'14 : en fonction de «  $x$  » et en fonction d'«  $y$  »  
 139. E'15 : ouais, mais tu mets 0 pour calculer tout, mais ... c'est bizarre, qu'en fait, c'était tout comme tu avais tout à l'heure, ah si ... comment tu fais pour calculer la pente ? ... (... ?) c'est pas le vecteur 3, tu t'es trompé, qui est sur la diagonale...  
 140. E'14 : ah si oulàlà ... tu as (... ?)  
 141. E'15 : donc «  $y = x$  »... donc ça faisait «  $(y^2+x)(x-y)=0$  »  
 142. E'14 : il y a un problème là ... elle est positive ou elle est négative... parfois ça marche dans les négatifs celui là  
 143. E'15 : (... ?) avec quelle (... ?)  
 144. E'14 : ce là ...  
 145. E'15 : pourquoi ? ... pourquoi si tu fais définir (... ?) elle est négative ? (... ?)  
 146. E'14 : tu fais «  $y^2+x=0$  » ... ça fait «  $y^2=-x$  » ... comment on peut faire ... ah, non, c'est pas défini avec positifs justement  
 147. E'15 : (... ?) définie là ... je ne sais pas ... non ben (... ?) ... attend  
 148. E'14 : ah oui, si elle est positive regarde ... elles font comme ça ...  
 149. E'15 : je ne sais pas comment elle (... ?) les questions  
 150. E'14 : elle est nulle (... ?) (pas ?) (... ?) suite  
 151. E'15 : ouais mais la suite c'est ça ? ... maintenant il est jamais en haut  
 152. E'14 : ah (... ?) plus racine  
 153. E'15 : non ? ... ± ... il est parallèle ... non ... à l'axe  
 154. E'14 : ouais ... ah ouais ... tu fais positif ... si tu veux de «  $x$  » ...  
 155. E'15 : ouais, mais là ... tu vois (... ?) descends, quoi  
 156. E'14 : si après (... ?) elle (... ?) j'ai l'impression ... (... ?) s'arrentent tous  
 157. E'15 : oui, bien sûr ouais (... ?) ...  
 158. E'14 : la pente c'est quoi ?

159. E'15 : ouais (... ?) tu peux les (... ?)
160. E'14 : par contre la (... ?) je crois ... ..
161. E'15 : ouais, il est là ... prend la parallèle
162. E'14 : pourquoi tu dis la parallèle ...
163. E'15 : la parallèle (... ?) à cet axe ... oui, normalement, d'accord
164. E'14 : pour «  $x=1, 2, \dots$  » ... en fait, on ne sait rien, parce que c'est un vecteur ...
165. E'15 : un vecteur c'est pour... on voit rien ... donc tu prends celui-là ... ah non, c'est (... ?) là
166. E'14 : hum
167. E'15 : en tout cas, c'est sûr (... ?) ... .. (... ?) tout à l'heure... (... ?) comme il faudra (... ?)
168. E'14 : ouais, attends, on va réfléchir
169. E'15 : tu as (... ?)
170. E'14 : (... ?) peut être que oui,
171. E'15 : on n'a pas toujours la même, tu vois, quand tu calcules la pente ça bouge, elle bouge selon ce que tu fasses à ce vecteur ... donc en (... ?) qui es jaune, tu vas la calculer ici ?... (... ?) là (... ?) le problème en fait... ah tu peux pas normalement ... « coordonnées ou équation » alors...
172. E'14 : hum
173. E'15 : ouais
174. E'14 : (... ?) mets sur le vecteur ... et tu as fait coordonnées d'un point (... ?) alors (... ?) vecteur
175. E'15 : ah, oui, oui ... tu veux les coordonnées du point à l'origine du vecteur ... tu veux les coordonnées du vecteur ... ?
176. E'14 : ah je (... ?) vecteur ...
177. E'15 : voilà ça y est ... ouais... je mets le « y » de ... le (... ?) le « y » de les coordonnées ... donc ça fait « - » (... ?) fois entre parenthèses « 4- tac au carre ...
178. E'14 : ah ouais ... donc il y a ...
179. E'15 : attends ... au carre ... ferme les parenthèses et tu fais « = »... voilà
180. E'14 : alors
181. E'15 : et qu'on fait ...
182. E'14 : tu (... ?) tu le déplaces ... voilà, ouais ...
183. E'15 : tu bouges mon vecteur
184. E'14 : ouais
185. E'15 : moi je l'ai trouvé là, apparemment... le vecteur 1, mais je le trouverait pareil il augmente de valeur ...
186. E'14 : (... ?) ah ouais
187. E'15 : je ne comprends pas ce que tu veux dire... simplement quand je bouge mon truc (... ?) comme ça, là ... (... ?) il est où mon vecteur
188. J : comme tu fais ? (... ?) se fait pareil
189. E'15 : tu tapes à l'origine ça là ?
190. J : hum ... c'est le (... ?) ... l'ordonnée du vecteur, vous tapez sur l'ordonnée ?
191. E'15 : ouais
192. J : donc, tu vas (... ?) ... mais tu n'as pas la pente là ... mets cette pente du vecteur ...
193. E'15 : comment on fait ?
194. J : tu vas dans (... ?) normalement (... ?) quelque chose, je ne suis pas sûr... essaie « pente »
195. E'15 : pente
196. J : quelque chose de Excel... ah cet appareil là ... et là
197. E'15 : ouais
198. J : et donc ... c'est bon
199. E'14 : se fait en bas ?
200. J : ah oui mais ...
201. E'15 : oui c'est vrai que tu as (... ?)
202. E'14 : (... ?) problème, c'est pas ça que (... ?) ...
203. J : la pente fait toujours ... la pente du vecteur vaut toujours la même chose que ton « y' »
204. E'14 : ah ...
205. J : « y' » c'est la pente du vecteur
206. E'14 : j'avais compris
207. E'15 : alors ça veut dire qu'il faut ton « y' » (... ?) comme (... ?) l'on peut calculer la pente (... ?)
208. J : par exemple, la pente du vecteur c'est facteur égale à «  $y' = \dots$  » (... ?)
209. E'15 : ah d'accord ... ah (... ?) faire un truc
210. J : je ne sais pas moi
211. E'15 : (... ?) tout à l'heure (... ?) je n'avait pas compris
212. E'14 : (... ?) allait faire

213. E'15 : moi non plus (... ?) entre guillemets ...  
214. E'14 : on a essayé quand même ?  
215. E'15 : ah ouais ... justement parce que (... ?)  
216. E'14 : «  $x=0$  » ouais,  
217. E'15 : (... ?) ici, tu remplaces... c'est toujours égal à zéro (... ?) dessus...  
218. E'14 : ah d'accord ... donc (... ?) vecteur 1 qui appartient...  
219. E'15 : je mets (... ?) on cherche dans un premier temps le ...  
220. E'14 : moi je mets ... on mesure la pente du vecteur avec pente ? ...  
221. E'15 : on mesure la pente du vecteur ...  
222. E'14 : on affiche ... mais non  
223. E'15 : du vecteur ... on affiche  
224. E'14 : non, ouais ... on affiche, c'est pas ça (... ?) on affiche les coordonnées du point, on l'appelle le point de bas...  
225. E'15 : ben, origine du vecteur  
226. E'14 : ah oui, oui,  
227. E'15 : on affiche les coordonnées du point ...  
228. E'14 : en fait, il suffit de dire que ... ouais (... ?) bas  
229. E'15 : c'est ça ? on affiche les coordonnées du point origine  
230. E'14 : du vecteur ... oui vecteur V1  
231. E'15 : et ...  
232. E'14 : lorsqu'on remplace ...  
233. E'15 : « y » par  
234. E'14 : ouais, justement  
235. E'15 : l'ordonnée  
236. E'14 : ouais  
237. E'15 : de ce point... c'est ça ?  
238. E'14 : hum... « y » dans l'équa dif... (... ?)  
239. E'15 : euh, on retrouve la pente ...  
240. E'14 : donc ça marche ...  
241. E'15 : on va faire pour chacun et après on reprend pour l'instant  
242. E'14 : ouais  
243. E'15 : ah ben oui, c'est pareil, donc, on fait ... on va le bouger ... euh ... on va faire coordonnées  
244. E'14 : il n'y a pas (... ?) ... ah c'est bon  
245. E'15 : coordonnées de lui  
246. E'14 : voilà ... ensuite, calculatrice  
247. E'15 : la pente ... vas-y ... allez-y on va le bouger... ah c'est chiant, il peut pas le joindre... ah voilà, et ... donc il fallait calculer... donc après par des calculatrice  
248. E'14 : ouais... c'est ça  
249. E'15 : ah d'accord je disais pour ... donc c'était un (... ?) « x »... (attend ?)  
250. E'14 : ouais, mais alors, en fait, ça serait à lui ... ouais, donc  
251. E'15 : non, non, non ... mais efface, il faut pas (... ?) t'appuies sur ça ... à ça, allez-y plus 2 il fait ça (... ?)  
252. E'14 : ouais  
253. E'15 : alors (... ?) allez-y au carré  
254. E'14 : où on est (... ?) puissance (... ?)  
255. E'15 : au carré  
256. E'14 : au carré  
257. E'15 : -1... (... ?) point (... ?) c'est la même chose ... donc là il m'a dit que je fasse ça (... ?) quand même  
258. E'14 : ouais  
259. E'15 : c'est chaud... hein, apparemment (... ?) 1  
260. E'14 : il faudra marquer le vecteur 1, vecteur 2, vecteur ...  
261. E'15 : c'est chouette (... ?) ah ouais (... ?) ah c'est pas grave, mais on va le bouger le truc (... ?) comme ça va ...  
262. E'14 : (... ?) jusque (... ?) il s'annule, il va haut (... ?) ... attend  
263. E'15 : qu'est ce qu'on fait  
264. E'14 : ouais, ouais ...  
265. E'15 : (... ?) c'est bon  
266. E'14 : hum (... ?) fois ... on a trouvé plein trucs là (... ?) ouais  
267. E'15 : ah oui, pardon (... ?) et donc

268. E'14 : (en écrivant) de même que pour le vecteur 1
269. E'15 : hum... on avait remarqué une chose, que quand on bouge le vecteur ... le vecteur ... ..
270. E'14 : pour n'importe quel position
271. E'15 : comment tu dis ?
272. E'14 : on retrouve la même pente pour n'importe quel
273. E'15 : position du point origine
274. E'14 : ouais ... en fait tu m'as (... ?)
275. E'15 : alors ... (en écrivant) « pour n'importe ... qu'elle point origine ... du vecteur 1 » donc c'était pareil, hein
276. E'14 : hum ... (en écrivant) « De même que pour le vecteur 1, sauf que l'on remplace » tu (... ?) le truc « x » par l'abscisse ... par l'abscisse
277. E'15 : du point origine... .. (... ?) pourquoi (... ?) c'est marqué (... ?) ça va non ... ah ouais, d'accord ... du point origine ... bon, normalement il faut trouver euh ... les régions du plan où le vecteur a une pente ... .. ah ouais, tu fais pour sauver le truc là
278. E'14 : ben ouais, mais en différence de tout
279. E'15 : (... ?) je clique...
280. E'14 : plus « x »
281. E'15 : alors ... c'était « y » là, ouais d'accord ...
282. E'14 : plus « x »
283. E'15 : (... ?) parenthèses moins (... ?)
284. E'14 : hum ... peut être (... ?) des trucs ... .. (... ?)
285. E'15 : ah, c'est chiant ... vaut rien ... (... ?) là ...
286. E'14 : d'accord ... on voit rien ...
287. E'15 : (... ?) point ... si tu mets ton point ... ..
288. E'14 : alors ...
289. P : vous avez pas répondu dans le casse « comportement de ... »
290. E'14 : oui (... ?) non
291. E'15 : en fait, on fait
292. E'14 : la deuxième partie d'abord
293. P : ah bon d'accord
294. E'14 : (... ?) ... ..
295. E'15 : tu mets (... ?) « x » quoi
296. E'14 : mais en plus, ce qu'on a (... ?) par un point ... ..
297. E'15 : moi je comprends rien, en fait il avait (... ?) ce truc (... ?)
298. E'14 : hum ... je (... ?) là
299. E'15 : il s'annule en (... ?) ... et en fait parce qu'à ce moment là «  $y^2 = (... ?)$  » (... ?) comme on l'a fait
300. E'14 : oui (... ?) expression algébrique
301. E'15 : ouais
302. E'14 : (... ?) c'est ça ...
303. E'15 : (... ?) on sait pas si c'est ça ouais ... (... ?) appelle (... ?) chose
304. E'14 : et ça va (... ?)
305. E'15 : ça va pas quoi (... ?)
306. E'14 : si (... ?) tu avais écrit que (... ?) «  $y = \pm 2$  »
307. E'15 : oui
308. E'14 : c'est ça  $\pm 2$ ...
309. E'15 : et (... ?) tu (... ?) que ça fasse
310. E'14 : je ne sais pas justement en quoi ton «  $y=0$  » (... ?) 0 (... ?) on a là et en « y » (... ?) on voit (... ?) et il faut que (... ?) ça marche ... ça marche pas (... ?) 0 (... ?) ce que je veux dire ...
311. E'15 : c'est fou, hein ?
312. E'14 : ah ouais ... (... ?) en fait ça marche pas ... et là on fait quoi alors ? ... pourquoi j'ai « y' » ?
313. E'15 : (en écrivant) « de même que pour le vecteur... »
314. E'14 : (... ?) «  $x=-2$  » le vecteur nul ... oulàlà...
315. E'15 : ça ne marche pas
316. E'14 : ça marche pas non... .. et pour le vecteur 3 ça marche (... ?) «  $x = y$  »
317. E'15 : hum
318. E'14 : on a «  $x=y$  » ... on le trouve bien ... tu vois (... ?)
319. E'15 : ouais, on voit bien
320. E'14 : donc, c'est bon
321. E'15 : ah oui, par rapport aux coordonnées ...
322. E'14 : ouais... parfois (... ?) ça marche pas ... pour «  $x=-2$  » il fait comme ça et (... ?) s'arrête... (... ?)

323. E'15 : (... ?) en «  $x=±1$  » ça marche pas non plus ... tu avais dit que ça marchait où là ... ?  
324. E'14 : pour «  $x=...$  »  
325. E'15 : on n'a pas fait ça ... oui ... quand (... ?) était parallèle avec « Oy »,  
326. E'14 : je pense (... ?) -4 parce qu'on a ...  
327. E'15 : en plus, tu as fait des trucs quand on a placé ça  
328. E'14 : mais si, (... ?) tout à l'heure  
329. E'15 : mais non, on avait faux... on avait faux (... ?) c'était celui là  
330. E'14 : ouais je jamais écrit là  
331. E'15 : hum ... là ça marchait ça ... il fait 0 ? on voit pas ...  
332. E'14 : c'est (... ?) là ...  
333. E'15 : donc c'est ça en fait ...  
334. E'14 : ouais  
335. E'15 : et ça veut dire qu'il faut qu'il appartient à 2, c'est ça ? qu'il (... ?) 0  
336. E'14 : ouais, d'abscisse -2  
337. E'15 : d'abscisse -2  
338. E'14 : ouais, ça marche ... ah ouais, c'est 0.5 (... ?) ouais, c'est ça  
339. E'15 : donc ... comme tu expliques ça pour (... ?) ça ... « régions du plan où le vecteur a une pente nulle »  
340. E'14 : tu fais «  $y'=0$  »...  
341. E'15 : oui mais (... ?) de fois  
342. E'14 : c'était écrit en -2, c'est comme avant ... ..  
343. E'15 : ah ouais, je vois où on est... non mais je (... ?) tu veux dire  
344. E'14 : ça là ... ..  
345. E'15 : « régions du plan où le vecteur a une pente nulle » ... c'est tous les points, tous les vecteurs d'abscisses -2 ...  
346. E'14 : tous les ...  
347. E'15 : tous les vecteurs d'abscisse -2 et ...  
348. E'14 : d'origine ... d'origine ... euh ... tous les vecteur d'origine (-2, y) ...  
349. E'15 : (... ?) en gros c'est ça en fait ... les régions du plan ... c'est ...  
350. E'14 : ben, c'est l'axe ... ben l'axe «  $x=-2$  » ...  
351. E'15 : ouais  
352. E'14 : normalement j'ai pas... pourquoi elle vérifie sur le dessin, en fait ... (... ?) ça a marché bien  
353. E'15 : comment on fait ... et ben, on va faire ça ... « expressions algébriques associées » ... ouais ça fait «  $x=-2$  » ... comme j'avais fait ce (... ?)  
354. E'14 : (... ?) je sais pas pourquoi... (... ?)  
355. E'15 : (... ?)  
356. E'14 : mais, en fait, en étudiant que ça marche... celui-là, celui-là est bien 0 pour «  $y=x$  »  
357. E'15 : ah, ouais  
358. E'14 : c'est bien ce qu'on a fait ici  
359. E'15 : ouais  
360. E'14 : c'est juste  
361. E'15 : et maintenant il faut répondre à cette question que (... ?) qu'attend... (... ?)  
362. E'14 : ouais mais je m'en (... ?) vas-y pourquoi ?  
363. E'15 : (... ?) là  
364. E'14 : ah ouais, je le tiens, ouais  
365. E'15 : voilà, normalement je (... ?) qu'on fait... « des arguments mathématiques qui justifient le comportement des courbes solutions » et ben là, la courbe à l'infini  
366. E'14 : les (... ?) ont fait comme ça, ils ont l'air  
367. E'15 : et tu vois ...  
368. E'14 : ici qu'est ce qu'il fait ?  
369. E'15 :  $v_2$  il fait comme ça ... encore là, comme ça ... « expressions algébriques associés » je ne sais pas si c'est ça, en fait...  
370. E'14 : j'avais trouvé je pense... elles font ça, les solutions ... elles font tac, tac ...  
371. E'15 : elles font comme (... ?) qu'on a fait ?  
372. E'14 : ça c'est le vecteur tangent ...  
373. E'15 : hum  
374. E'14 : elles recommencent, en fait, elles suivent le même champ ... comme ça  
375. E'15 : (... ?) tu viens pas de le faire ... (... ?) tu te rappelles elle avait fait un truc (... ?) tu avais vecteur, d'associer tous les vecteurs... comme ça (... ?) beaucoup de (... ?) justement  
376. E'14 : (... ?) normalement

377. E'15 : quand tu voyais tous que tu avais un champ de vecteurs et tu pouvais arriver (... ?) à partir du vecteur ...
378. E'14 : (... ?) j'ai fait un peu
379. E'15 : c'est vrai qu'ils demandaient une tâche normalement ?
380. E'14 : ouais, j'ai fait
381. E'15 : ah, je sais pas
382. E'14 : que c'est un (... ?) qu'allait faire ça
383. E'15 : même je ne sais pas s'il l'a fait, mais ...
384. E'14 : mais tu vois il fait quoi ce (... ?) ... que là il fait comme ça, en fait (... ?) doucement ... ça (... ?)
385. E'15 : ouais, mais comment ils pourraient être « des arguments mathématiques »
386. E'14 : (... ?) quels arguments dire pour ce vecteur si (... ?)
387. E'15 : mathématiques ? ...
388. E'14 : ouais... et ça à la limite de ... ..
389. E'15 : je ne sais pas ... théoriquement...
390. E'14 : elles font comme ça les traces ... on va le (... ?) une trace
391. E'15 : non mais il faut le dire d'un point mais il n'y rien à voir d'un truc là ...
392. E'14 : le vecteur, je sais pas
393. E'15 : non, mais il faut ... tu (... ?) composé ton vecteur de (... ?) cet fois par ça ... ah ouais... ah oui, (... ?) marche pour (... ?)
394. E'14 : je crois que la trace ... avec tous les vecteurs qui sont comme ça là
395. E'15 : hum... non, à mon avis c'est des vecteurs (... ?)
396. E'14 : attend ... .. pourquoi je fais (... ?) ...
397. E'15 : (... ?) en termes de pentes
398. E'14 : c'est (... ?)...
399. E'15 : je comprends rien de tout ... .. ah la (... ?) ça ci
400. E'14 : pourquoi ça fait comme ça celles-là
401. E'15 : ouais
402. E'14 : là elles font toutes comme ça ... là, elles font toutes comme ça ... là, elles font toutes comme ça avec (... ?) qui est là
403. E'15 : hum
404. E'14 : tu as vu ? ... là elle fait tout comme ça ...
405. E'15 : ça veut dire qu'elles font toutes comme ça, en fait ... un champ, comme ça ... de vecteurs ... chaque truc, chaque truc ... et après, elle fait ça
406. E'14 : après ça ... il diminue un peu... ouais
407. E'15 : chaque ... chaque, chaque ... (... ?) comme ça ... ces quoi... qu'ils se trouvaient horizontales et en bas c'était quoi ?
408. E'14 : quand en bas...
409. E'15 : on a fait en tout l'axe des abscisses ...
410. E'14 : c'est (... ?) qu'en nous a (... ?) ça a fait
411. E'15 : elles remontent après
412. E'14 : ouais, elles remontent, ouais
413. E'15 : et après, quand c'est tout en bas ? elles descendent encore plus, là ?
414. E'14 : ouais, parce que après elle fait pas ...
415. E'15 : (... ?) pas trop ... .. ah, elles descendent (... ?)
416. E'14 : attends, on va là ... ben, elle va monter
417. E'15 : allez-y ... elle descend ...
418. E'14 : après elle redescend ... ah, elle vaut 0 aussi là ... .. elle vaut 0 aussi en «  $y=1$  », non -2
419. E'15 : non, il faudra faire un (... ?) ouais... oui, c'est ça «  $y=-2$  » il s'annule
420. E'14 : ouais
421. E'15 : normal
422. E'14 : et pourquoi en «  $y=-2$  » elle vaut pas 0 ? ... ah si, il s'annule aussi ici
423. E'15 : oui, c'est que tu t'es trompé ... tu avais-y là et là c'est 1 ... (... ?) 0.5
424. E'14 : ah ouais, j'avais pas vu tout à l'heure... qu'en fait, elle fait comme ça ... après elle sera nulle, s'annule... et après elle descend et en fait (... ?) et elle descend jusqu'à 0... tac
425. E'15 : ah donc, en fait, elle redescend un peu
426. E'14 : ouais ... non, elle vaut 0 ... donc là elle est comme ça, après ... elle va s'annuler
427. E'15 : ah oui
428. E'14 : donc ... comme ça, c'est ici,
429. E'15 : oui
430. E'14 : mais là, c'est «  $y=2$  » ...



431. E'15 : ouais ... mais, après elle redescend (... ?) en fait  
432. E'14 : après, elle redescend ... elle redescend, ouais ... ..  
433. J : (il semble que Jérôme leur parle ?)  
434. E'14 : ça rien non ... elle est sur le dessin c'est bien... .. tiens, on peut pas descendre à la verticale complètement  
435. E'15 : c'est vrai, juste pour le dessin, je sais pas, quoi  
436. E'14 : mais là ... (... ?) en 0  
437. E'15 : et elle remonte  
438. E'14 : et après, elle remonte jusqu'à 2  
439. E'15 : et après elle (... ?) jusqu'à (... ?)  
440. E'14 : ben jusqu'à pas 2 ... et après elle redescend, et après elle redescend ouais ...  
441. E'15 : (... ?) après elle fait comme ça ...  
442. E'14 : ouais ... ah ouais comme ça (... ?) ... .. comme un axe de symétries de plier ta feuille  
443. E'15 : est-ce que tu penses qu'on va pouvoir avoir le cas où était symétrique  
444. E'14 : on pourrait avoir une symétrie, je pense, comme tu dis  
445. E'15 : non, mais du coup (... ?) ce champ si non... ce champ peut être cela... peut être (... ?) comme ça (... ?) ce champ ... j'ai une exponentielle, elle me semble... que c'est une exponentielle c'est sur, en plus, tu peux juste ...  
446. E'14 : on dit ça... il faudra calculer la limite en plus l'infini ... c'est moins l'infini en (... ?) ça va être finalement qu'en plus l'infini ... quand « y » tend vers plus l'infini, tu as le vecteur comme ça, d'accord ?  
447. E'15 : et (... ?) tend vers plus l'infini  
448. E'14 : et en moins l'infini ...  
449. E'15 : et plus ... il va faire de plus, non ? ... ah, non, ça fait moins  
450. E'14 : c'est moins, ouais ...  
451. E'15 : donc, c'est moins à l'infini ...  
452. E'14 : hum ... donc c'est normal ... et après en 0 ... (... ?) en 0 ... -2 ça fait, c'est normal puis ça se fait 0... donc elle est tangente à ...  
453. E'15 : en tout moment elle va (... ?) c'est tout  
454. E'14 : changer quoi ? ...  
455. E'15 : ah, ça change pas ... je ne sais pas, il est bête... .. ça c'est voit bien (... ?) c'est pour ça ? de façon que (... ?) je me (... ?) qu'on avait un petit (... ?)  
456. E'14 : donc il faut marquer ça, peut être c'est juste ça ... par contre il y avait que ça en 2 ... oui j'en (... ?) qui fait (1 ?)  
457. E'15 : et c'est (... ?) ... ouais parce que j'ai l'impression qu' ...  
458. E'14 : hum  
459. E'15 : lui, ici ... c'est « x » également (... ?)  
460. E'14 : pour «  $x=-2$  » donc (1 ?) ... fais comme ça  
461. E'15 : (... ?) qui a plusieurs (... ?)  
462. E'14 : après ça monte... et après... l'inverse ... ouais, ça fait comme ça  
463. E'15 : ouais  
464. E'14 : ça, ça... jusqu'à ... hop, jusqu'à ici elle est (... ?)  
465. E'15 : (elle parle avec Jérôme) de quoi de « y' »  
466. E'14 : non, mais nous, on va faire ça ... ça, c'est Jérôme, il a fait ça  
467. E'15 : on (... ?) ... on fait le champ  
468. E'14 : c'est pas le champ là, dessus ? ... ..  
469. E'15 : (... ?) elle vous a dit comme il faut le faire ? « des arguments »  
470. J : (... ?)  
471. E'15 : ah ouais ... ouais je (... ?) bien ... ben, si non, on lui demandera...  
472. E'14 : on va calculer les (... ?) on marque la limite ... on a d'« y' » comme ça si (... ?)  
473. E'15 : (... ?) ...  
474. E'14 : ça, on aura mis quelque chose d'étrange... ..  
475. E'15 : (... ?) ça, il doit pas, d'abord il faut travailler sur le vecteur, ouais ... justement...  
476. E'14 : ce qu'on peut voir ce que comme en tout à la rigueur on est capable de définir les (... ?) du vecteur ...  
477. E'15 : c'est une question ...  
478. E'14 : mais (... ?)  
479. E'15 : c'est pour (... ?) le champ qu'on cherche on (... ?) pas ça  
480. E'14 : mais ...

481. E'15 : donc, en fait, « y' » tu peut le connaître, en fait, tout ce qu'on cherche, l'approximation qu'elle va être comme ça si tu prends « y' »... « y » qu'on cherche ... ben si, si tu (... ?) le sinus d'« y' » après, tu pourrait trouver dedans
482. J : ouais (... ?) souvent ... ce que je pense
483. E'15 : au moins ça
484. J : à moins que tu parles en direct ça (... ?) dedans
485. E'15 : ouais, normalement ... c'est ça que tu veux dire ...
486. P : bon, vous remplirez les feuilles ... on a des autres activités ...
487. E'15 : au moins je vais faire un champ
488. E'14 : (... ?) très bien ce que (... ?)
489. E'15 : (... ?) mais à côté de ce champ vecteur ... en fait, il fallait peut être que marquer que pour «  $x=2$  » et ...
490. E'14 : ouais le champ des vecteurs, ouais ...
491. E'15 : (... ?) j'en ai fait ...
492. E'14 : on va remplir toute la feuille ...
493. E'15 : donc (... ?) champ de vecteurs ... mais tu vois (... ?) là ... ah (... ?)
494. E'14 : ouais ...
495. E'15 : parce qu'ici si tu as « y' » (... ?) déjà est égal à «  $-y(4-y^2)$  »
496. E'14 : « y » (... ?)
497. E'15 : ben ouais, déjà tu peux le séparer, en fait, c'est négatif quand « y » est positive , alors on fait, ça quoi ... mais, je ne sais pas si ça te donne ... parce que ce qu'on veut c'est « y », non ? quand tu te demandes les courbes solutions, le comportement ...
498. E'14 : (... ?) c'est « y » ça ... il faut que tu te (... ?)
499. E'15 : ah oui, normalement ... ouais...
500. E'14 : (... ?) ça fait comment ?
501. E'15 : on peut pas faire le champ ? pour voir le champ de vecteurs ...
502. P : pardon ?
503. E'15 : on peut pas faire le champ de vecteurs de celui-là?
504. P : oui, vous voulez faire autour d'une grille ou ... ?
505. E'15 : je ne sais pas... (... ?) sur tout, la première, on l'a fait sur (... ?)
506. P : d'accord (... ?) (elle explique comme faire le champ de vecteurs associé au vecteur 1, en utilisant la trace) ça vous donne une idée de comme ça se passe... ça correspond à ce que vous avez trouvé ?
507. E'15 : ouais ...
508. P : (elle explique comme faire le champ pour les autres vecteurs, comme en utiliser les macros, etc.) (par rapport au champ de vecteurs associe au vecteur 2) ah, je n'arrive pas à en faire en 1, on l'a pourquoi ?... qu'est ce qui passe ? si là l'affiche peut rien faire (... ?) ... c'est normal ça ?
509. E'15 : c'est lequel, c'est le deuxième ? ... ah oui, c'est indéfini en 1 et en -1 ...
510. P : ah voilà, c'est bien ça ... ça c'est déjà une confirmation, non ?
511. E'15 : ouais
512. P : un élément...
513. E'14 : ouais, ça c'est pour le (... ?)... ouais... marque là ...
514. E'15 : donc l'équation n'est pas définie
515. E'14 : hum... et après ...
516. E'15 : pourquoi tu as (... ?) l'équation (... ?) ... je vois bien que pour (... ?) de ça...
517. E'14 : c'est ça qu'on voyait tout à l'heure, parce qu'on avait (... ?) qui faisait comme ça
518. E'15 : ah ... non, mais par rapport à ...
519. E'14 : à la courbe ... ah ça... ah non
520. E'15 : c'est ce de (... ?) par exemple ...
521. E'14 : d'accord « x » tombe vers ...
522. E'15 : plus l'infini... (... ?) plus
523. E'14 : «  $x = -2$  » ça fait 0, donc ça veut dire que ... donc ça veut dire qu'on « y' » qui vaut 0
524. E'15 : hum
525. E'14 : quand ça tend vers -1 ... vers 1 ... ça fait 3/0 ... ça fait plus l'infini, donc ça va faire comme ça
526. E'15 : hum ... ouais
527. E'14 : ensuite, en 1 et en -1, on voit en plus, ça va vers plus l'infini, donc ça vaut 0
528. E'15 : ouais, ça beaucoup ... ouais
529. E'14 : et puis en (... ?) en -1 il aura un plus
530. E'15 : il faut mettre la limite ... on va expliquer ça ? ... ouais ...
531. E'14 : d'une part quand « x » tombe vers
532. E'15 : en fait, tu vas faire 1 ... -1

533. E'14 : 1 négatif et (... ?)  
534. E'15 : (... ?) c'est un moins ...  
535. J : pour (... ?) faire ça (... ?) toujours 0  
536. E'15 : non, mais tu fais ton pointer là et tu bouges ...  
537. J : (... ?) ce point  
538. E'15 : je ne sais pas, j'ai pas tout compris pour nous la forme elle est différente  
539. J : (... ?) la (... ?) toujours elle (... ?) si tu veux le dire  
540. E'15 : c'est vrai ... ouais, c'est pareil  
541. E'14 : de quoi ?  
542. E'15 : ben, (... ?) c'était (... ?) je peux (... ?) on va faire un (... ?) comme ça le vecteur ... ..  
543. E'14 : elle est pourtant symétrique ...  
544. E'15 : elle est (... ?) sur le plus  
545. E'14 : c'est une symétrie, si tu veux ...  
546. C et E'14 : (elles parlent d'autres choses)  
547. E'15 : alors, quand « x » tend vers 1 « y » il faut qu'il tende vers moins l'infini... non ?  
548. E'14 : (... ?)  
549. E'15 : à moins ... tu as (... ?) négatif  
550. E'14 : (... ?) par ailleurs  
551. E'15 : ah oui ... ça monte ... attend, attend ... quand « x » tend vers 1  
552. E'14 : et on trouvait moins en 0  
553. E'15 : en « y » ça fait 0 - 1 ... ah non, ça fait 0 ... justement j'ai (... ?) de calculer (... ?) il fais 0 plus...  
554. E'14 : (... ?) qu'il y a que le signe de ça en fait  
555. E'15 : non, ça fait 0+ parce que c'est « x<sup>2</sup> » en fait ... ah non ...  
556. E'14 : donc c'est (... ?) en -1 et ça vaut (... ?) que 1  
557. E'15 : non, non, non ... ça fait un (... ?) négatif là ... ..  
558. E'14 : donc en -1 moins, ça c'est plus l'infini ... et -1 plus ... ça c'est moins l'infini ... pourquoi (... ?) moins l'infini ...  
559. E'15 : non, c'est l'allure de ce point  
560. E'14 : grâce au (... ?) que (... ?) c'est la pente... (... ?) introduire ça, on n'a pas ...  
561. E'15 : au moins de (... ?)  
562. E'14 : j'ai rien testé moi ... mais normalement c'est ça qu'on a trouvé, je comprends pas là  
563. E'15 : mais non, parce que tu as trouvé la même chose en celui là et en celui là ...  
564. E'14 : oui, mais celui-là quand « x » tend vers moins, ça monte quand il y a plus l'infini  
565. E'15 : et en fait, elle descend en cas d'avoir moins l'infini ça  
566. E'14 : et oui... mais quand tu fais, hein ... quand tu fais la fonction euh ... elle est comme ça ... si elle tendait vers plus l'infini ... en 1 ... en 0 plus  
567. E'15 : attend, ça marche pas comme (... ?) ... ah je fais 1 ... il fait «  $2/(x^2-1)$  » ... «  $x^2-1$  » c'est pas en -1 ... c'est d'abord... ça fait 1 ... -1 et c'est quelque chose qui est plus petite que -1, donc c'est quelque chose que plus petite que 1 ... donc c'est quelque chose qui est négative ici,  
568. E'14 : et t'as dans 1 moins ... qu'en moins ou en plus ?  
569. E'15 : en moins ...  
570. E'14 : ah non, (... ?) c'est plus, non ?  
571. E'15 : ah non (... ?) c'est un moins ici ... donc j'ai un moins ici ... moins je (... ?) à 1 ... ça va être quelque chose de négatif... c'est en fin, 1 moins  
572. E'14 : non, en 1 moins je vois plus  
573. E'15 : ouais, c'est ça que je vois en moins  
574. E'14 : si on fait un tableau de signe ... si tu regardes par (... ?) tu as des signes normalement ...  
575. E'15 : qu'est ce que tu fais de (... ?)  
576. E'14 : (... ?)  
577. E'15 : ouais, ouais  
578. E'14 : et maintenant en (... ?) il fait plus l'infini... c'est (... ?) tu peux pas arranger  
579. E'15 : si d'accord et en (... ?) -2  
580. E'14 : ouais, c'était qu'on avait en moins, tu m'avais dit  
581. E'15 : ah ouais, mais je (... ?) pourquoi... vas-y  
582. E'14 : donc, si non, en 1 ... si ça se fait moins l'infini tout ça ... et (... ?) c'est en plus l'infini ...  
583. E'15 : voilà  
584. E'14 : d'accord  
585. E'15 : c'est bon ... je peux les effacer ? pour euh ... .. entre (... ?) ... où (... ?) ... voilà ici non (... ?) on bougeait ... (... ?) tu te rappelles comment elle a fait ?  
586. E'14 : oui

587. E'15 : elle a fait la trace ... non ... directement là ... la trace
588. E'14 : c'est (... ?) ah ouais, parce que c'est directement ...
589. E'15 : je me souviens que sur le vecteur ...
590. E'14 : non fais sur trace ... vecteur ... ouais ici
591. E'15 : (... ?) ce vecteur ... ah non, il faut mettre d'abord sur un point
592. E'14 : ouais... non ... pas ça
593. E'15 : non ?
594. E'14 : il faut (... ?) c'est vrai que (... ?) ... c'est ... je sais, tu prends un point ... si tu prends la longueur du vecteur ...
595. E'15 : c'est une tâche que tu pouvais accomplir quelque part à (... ?) où tu (... ?) pas ... (... ?) en quoi ... allez-y j'écoute ... je ne comprends pas...
596. E'14 : tu prends l'ordonnée de (... ?) ça, le point de (... ?) l'ordonnée de l'origine ... ouais, tu (... ?) là ...
597. E'15 : ça fait pas grand-chose
598. E'14 : non, mais ... prends un point quelconque ... ton point il est (... ?) ... prends un point de la grille ... ouais, et après tu prends la longueur là ...
599. E'15 : non, il (... ?) un truc
600. E'14 : ouais
601. E'15 : non, elle faisait ça, non ?
602. E'14 : ah ouais ...
603. E'15 : donc ...
604. E'14 : tu fais ... ce nombre ... en ce point de la grille
605. E'15 : et ce vecteur ... on refait ... vecteur 3 ... où c'est ce vecteur ? ... on n'arrive pas ...
606. E'14 : (... ?)
607. E'15 : (... ?) troisième
608. E'14 : ouais ... si tu (... ?) c'est ça la trace et tu peux pas la (... ?)
609. E'15 : pourquoi ça marche pas ? ... ah non, (... ?)
610. E'14 : parce qu'il faut faire ... enlève la grille ...
611. E'15 : non, non, non ... on va faire ça... trace de vecteur
612. E'14 : tu peux pas faire (... ?) le 2 ... enlève la grille
613. E'15 : on enlève la grille pour faire (... ?) en cette axe ?
614. E'14 : non ... grille, c'est grille ... tu fais clic là (... ?) grille après ...
615. E'15 : comment on fait pour enlever la grille ?
616. E'14 : tu avais dit que (... ?) les axes ... là ... (... ?) grille ...
617. E'15 : (... ?) n'importe quoi ... ah ben voilà ... c'est (... ?) je ne sais pas comment j'ai fait (... ?) ... ouais c'est (... ?) ... (... ?) (... ?)
618. E'14 : pourquoi elle se ... ?
619. E'15 : tu as un (... ?)
620. E'14 : après il y a plus rien ...
621. E'15 : ah, parce que j'ai lâché ... bon, et en ce (... ?) dernier alors, peut-être celui-là (... ?)
622. E'14 : car ils ... ils vont faire ça pour faire ça
623. E'15 : ah ... ah (... ?) comment ... ah voilà, parce que dès que je monte un peu le dessin ça ... ah là là ...
624. E'14 : pourquoi (... ?) tu fais marcher où il faut (... ?)
625. E'15 : (... ?) (il semble qu'elles ont effacé le vecteur 3 et n'arrivent pas à le afficher)
626. E'14 : on le va faire comme ça ... « y » (... ?) 5
627. E'15 : c'est bizarre ça ne marche pas que quand « y » est (... ?) ça qui (... ?) là... tu as vu il y a en bas ... il y a que (... ?) petits et après tu vois c'est pareil ... tu as ... c'est comme ça en fait ...
628. E'14 : (... ?) vecteur
629. E'15 : et (... ?) le vecteur 1
630. E'14 : (elles rient) ... tu as (... ?) ça
631. E'15 : et tu (... ?) se trompé (... ?) ... c'est pénible quand j'ai trouvé (... ?) ... où tu as oublié ... ça n'est pas marché ... après j'enlève
632. E'14 : c'est (... ?) (... ?) ...
633. V : (... ?) je ne sais pas
634. E'15 : moi non plus ...
635. E'14 : (... ?)
636. E'15 : ah normalement si, non mais c'est surtout que tu fais toujours (... ?)
637. E'14 : (... ?) animation (... ?) ... je vais essayer d'avancer
638. E'15 : tu as les limites, tu fais ça ...
639. E'14 : (... ?) le grille (... ?)

640. E'15 : ouais ... non, mais déjà dans ce vecteur comment on s'en serve ? on va l'afficher (... ?) vecteur 3  
...
641. E'14 : alors, il nous fait un point ...
642. E'15 : ah (... ?) déçu ... pourquoi (... ?) ça marche toujours
643. E'14 : il est où ? (... ?)
644. E'15 : (... ?) pire maintenant ...
645. E'14 : elle est vraiment (... ?) ... .. encore travailler ça fait des trucs ...
646. E'15 : c'est vrai (... ?) quelque chose (... ?) pourquoi ça marche pas ? (... ?) ... (... ?) je comprends rien ... parce que là, tu as ton point, donc, en fait, ça fait comme ça, c'est bon ... (... ?) ah mais non, je suis (... ?) au carré où ? ...
647. E'14 : ça elle m'avait demandé je crois ...
648. E'15 : ah, je crois qu'on a un gros souci... attend on va (... ?) alors ... non, mais on va voir ça quoi ...
649. E'14 : voilà (... ?) ton pointer
650. E'15 : ouais, je (... ?) je comprends rien ... tu vois, là, j'avais demandé trace ...
651. E'14 : et on n'a pas enregistré ça quand on avait fait la trace ...
652. E'15 : c'est pour ça qu'on comprend rien ...
653. P : qu'est ce qui se passé ?
654. E'15 : mais en fait, le problème c'est que je dis (... ?) la trace et j'ai pas de trace ... et quand je ne l'en fait il le fait ...
655. P : non
656. E'14 : si, si
657. E'15 : là par exemple j'ai pas demandé ... il l'a pas fait parce que ... vous êtes là ... mais
658. E'14 : voilà
659. P : (... ?)
660. E'15 : c'est pas bien ça
661. P : oui c'est ça ...
662. E'15 : et j'ai pas une trace ...
663. P : parce que vous bougez et que la trace est activé ...
664. E'15 : oui ... on comprend
665. P : vous avez ... à partir du moment ...
666. E'14 : elle n'est pas activée
667. E'15 : oui, on a changé ...
668. P : parce que vous l'avez activé ... et vous avez toujours oublié de la désactiver ... Activer la trace d'un vecteur ça veut dire que vous avez sélectionné ce vecteur... que vous avez celui là (... ?) toujours le vecteur (... ?) trace, je veux dire ...
669. E'15 : ah, d'accord
670. P : et vous l'avez jamais désactivé...
671. E'14 : (... ?) qu'on fait (... ?) un clic ... on désélectionne ?
672. E'15 : ouais
673. P : vous n'avez pas désélectionné
674. E'14 : c'est pour ça que ...
675. E'15 : d'accord, bon
676. P : normalement la machine ne fait que ce que vous lui dites...
677. E'15 : là par exemple ... si on veut reprendre... il n'est plus près
678. P : si, si, si... il est en quelque part
679. E'14 : (... ?) là-dessus
680. P : il est là dedans c'est ça le problème ... (... ?) si vous le bougez il va laisser ça trace
681. E'15 : normalement j'ai du enlever ça, (... ?)
682. P : non, non ... bougez-le ... prenez l'origine ... non, l'origine ... sur le point qui est marqué ... voilà, bougez-le ... vous voyez
683. E'14 : ah, mais ... c'est pour ça qu'il faut le (... ?)
684. P : (... ?) le vecteur, on peut pas bouger
685. E'15 : ouais
686. E'14 : oui, c'est vrai ... mais c'est pas (... ?) ...
687. E'15 : bon, ce qu'on a fait, c'est pas grand-chose
688. P : vous en êtes au 3 ?
689. E'14 : ouais
690. E'15 : (... ?) la calculatrice
691. E'14 : (... ?) plusieurs fois (... ?)
692. E'15 : bon, alors (... ?) le problème c'est que quand ça pas l'air bien (... ?)

693. E'14 : ça c'est l'inverse  
 694. E'15 : (... ?) tous qui (... ?) finalement

(changement de cassette)

695. E'14 : ( $x_0, y_0$ ) ... ah oui parce que c'est le même point (... ?) ...  
 696. E'15 : (... ?) je suis un peu (... ?) en fait c'est comme ça ouais ...  
 697. E'14 : (juste ?) en pointer une équation ... avec de « x ... y » avec de « x » et de « y » on sait que (... ?) des différentielles  
 698. E'15 : hum  
 699. E'14 : il (... ?) qu'on étudie le ... le comportement ... non c'est comme elle est toute paramétrée ...  
 700. E'15 : ouais  
 701. E'14 : tu sais quand on fait « x » (... ?)  
 702. E'15 : non mais, je ne sais pas  
 703. E'14 : quand tu fais ton « x » à l'infini ... « y » (... ?) à l'infini ... (... ?) plus l'infini  
 704. E'15 : hum  
 705. E'14 : (... ?) tend vers plus l'infini... oui je ne sais pas  
 706. E'15 : moi, je pouvais plus, qu'est ce que tu veux dire ?  
 707. E'14 : non plus  
 708. E'15 : parce que pour celui là (... ?) ... quand on (... ?) qui justifient le comportement des courbes solution...  
 709. E'14 : on est sur la courbe symétrique, non ?  
 710. E'15 : même pas ...  
 711. E'14 : il est où ton vecteur ?  
 712. E'15 : ben, il faut que tu effaces tout et tu fais (... ?) là haut  
 713. E'14 : ah j'y vais (... ?) la trace ... tu l'as désactivé ou pas ? (... ?)  
 714. E'15 : je crois pas  
 715. E'14 : bon ... fait-le à côté (... ?) il faut voir ... tu sais que je (... ?) à côté ...  
 716. E'15 : voilà ...  
 717. E'14 : (... ?) regarde ... ça veut dire que «  $x^2=0$  »  
 718. E'15 : et (... ?) là  
 719. E'14 : pour « y » fixé ... on a tout ce qui est là ...  
 720. E'15 : oui ... ah non, attend ... on sait pas trop (... ?) comme ils sont  
 721. E'14 : on a là... il va faire 1  
 722. E'15 : (... ?) il fait une (... ?)  
 723. E'14 : (... ?) ... là aussi ... (... ?)  
 724. E'15 : tu as ... c'est comme tu n'as pas l'(... ?) d'égal à 0 ... le « x »  
 725. E'14 : si  
 726. E'15 : «  $x_p$  » ? ou «  $x(... ?)$  » (... ?)  
 727. E'14 : peut-être (... ?) («  $x_p$  ?) = 0 »  
 728. E'15 : moi, je ne comprends pas pourquoi tout, à ce moment là tu as ... c'est (... ?)  
 729. E'14 : et là (... ?)  
 730. E'15 : non mais tu as la même (... ?)... ah non, elle a aussi  
 731. E'14 : non, non, elle l'a aussi  
 732. E'15 : maintenant qu'est-ce que je vais... ? ... ah non...  
 733. E'14 : elle se fait (... ?)  
 734. E'15 : ah mais bon, c'est ce que tu as imposé ? (... ?) une en lieu de faire ça (... ?) l'on peut pas ... on les montre les courbes comme, elles ? (... ?)  
 735. E'14 : tout à fait...  
 736. E'15 : je ne sais pas ce que ça donne tout ça ...  
 737. E'14 : moi, j'ai pas vu le truc  
 738. E'15 : (... ?) est bien jolie euh ...  
 739. E'14 : et pourquoi (« x » ?) (... ?) ... ce qui continue, en plus, égal à 0  
 740. E'15 : qu'est ce que ça veut dire que c'est égal à 0 ?  
 741. E'14 : de quoi ?  
 742. E'15 : ça veut dire qu'on prend égal 0  
 743. E'14 : c'est ça, ça vaut rien dire, c'est ça que je suis en train de dire ...  
 744. E'15 : (... ?) pour essayer de comprendre qu'est ce que tu veux dire... nous, on voit rien du tout ...  
 745. E'14 : c'est super jolie  
 746. E'15 : oui, mais on sait pas quoi faire  
 747. E'14 : qui sait faire ?

748. E'15 : ah ouais, c'est tout ce qu'on a essayé en gros de refaire, on l'a pas fait ... hum  
749. E'14 : et nous ce truc de (... ?) c'est très tardant  
750. E'15 : mais ouais j'ai l'impression que là on a beaucoup plus de choses connues, ouais  
751. E'14 : (... ?) c'est pas grave ...  
752. E'15 : (... ?) c'est grave ... mais on voit pas que (... ?) de plus quoi ... ..  
753. E'14 : (... ?) ... ah ouais tu vas pas (... ?) ... .. je vais refaire ...  
754. E'15 : ils veulent pas qu'on cherche la solution ? ... ..  
755. E'14 : tu as réussi à faire les raisonnements mathématiques ... parce que ... en plus ... ce que tu as vu ...  
756. E'15 : mais il est souvent ... il est souvent en l'axe perpendiculaire quoi, t'as (... ?) qui est égal 0 ...  
757. E'14 : et puis l'axe ça fait (... ?)  
758. E'15 : c'est pas ... c'est pas (... ?) qui bouge  
759. E'14 : (... ?) se fait comme ça ...  
760. E'15 : c'est plus ce que tu peux dire en fait... en plus tu n'as pas en fonction de « x » ... donc, tu peux pas faire la limite et tout euh ... .. je vois pas du tout... .. (... ?) le problème c'est que ... .. je ne vois pas qu'est ce qu'on peut dire franchement ... (... ?)  
761. E'14 : (... ?) qu'il y a (... ?) fait moins  
762. E'15 : (... ?) en fait, c'est toujours ... toujours là, c'est vrai, de petits endroits où ça bouge un peu quoi ... .. vraiment pas du tout  
763. E'14 : ah, non (... ?)  
764. P : voilà les filles (... ?)  
765. E'14 : on est coincé (... ?)  
766. E'15 : ouais (... ?) la fin on n'arrive pas à voir ...  
767. E'14 : on n'arrive pas à voir ce qui passe ?  
768. P : qu'est ce que vous voulez voir ?  
769. E'14 : en fait c'est (... ?)  
770. E'15 : (... ?) comportement (... ?)  
771. P : ah, ouais ... vous voyez-y rien ?  
772. E'15 : ouais  
773. E'14 : ben si on voit bien que ... ..  
774. P : vous avez trouvez que ça ? ... où la pente est nulle ... mais, et vous avez essayé avec le vecteur de regarder ... s'il a une pente nulle ?  
775. E'14 : ben oui  
776. E'15 : oui, c'est comme ça qu'on avait dit  
777. P : comme ça ... et vous n'avez trouvez que ça ... ?  
778. E'14 : ouais  
779. P : ah ...  
780. E'15 : en fait, il a y à voir  
781. P : il n'y a pas un autre moyen de le voir ?  
782. E'14 : ben si, on a des points, on a fait ... ben (... ?) on l'en fait y'a 0  
783. P : oui  
784. E'14 : on a «  $y = \pm\sqrt{-x}$  » mais ça marche si « x » est négative ... .. (le professeur s'éloigne)  
785. E'15 : on a «  $\sqrt{-x}$  » (... ?) ça marche si « x » c'est négative  
786. E'14 : voilà, ça marche (... ?) quoi la racine ... ça fait (... ?) ... attends je vais (... ?) ... on pourrait faire racine de... « y » (... ?) « x » (... ?)  
787. E'15 : normalement, tu vas le faire (... ?)  
788. E'14 : non, en fait je vais lui (... ?)  
789. E'15 : ah, ouais  
790. E'14 : je veux passer à la trace (... ?) bouger ...  
791. E'15 : je sais plus...  
792. E'14 : ah, mais, je veux le faire ... machin (... ?) qui (... ?) le vecteur  
793. E'15 : (... ?) vous l'avez déjà (... ?)  
794. J : vous voulez faire quoi ?  
795. E'14 : qu'il laisse la trace  
796. J : il faut montrer le vecteur  
797. E'15 : ah d'accord (... ?)  
798. E'14 : ah ouais, voilà  
799. E'15 : alors  
800. E'14 : normalement ça (... ?)  
801. E'15 : il fait de (... ?) par exemple (... ?) ben par exemple (... ?) c'est tout voilà  
802. E'14 : regarde

803. E'15 : ouais
804. E'14 : pour « y » c'est vrai qu'il a la «  $\sqrt{x}$  » mais à l'inverse, normalement la racine elle est comme ça, en fait ... .. on met « sur la courbe d'équation » ?
805. E'15 : ouais ... .. mais la «  $\sqrt{x}$  » on sait toujours (... ?) «  $\sqrt{x}$  » hein
806. E'14 : ben si
807. E'15 : mais, moi je peux prendre que pour « x » négative
808. E'14 : oui mais ...
809. E'15 : « y » est (... ?) toujours (... ?) là ...
810. E'14 : ah, je sais pas (... ?) ... .. si regarde
811. E'15 : ouais
812. E'14 : (... ?) symétrique
813. Julio : (leur explique comme tracer la courbe «  $y = \sqrt{-x}$  », et comme construire le vecteur 3 sur la courbe)
814. E'15 : (... ?)
815. E'14 : on doit passer pour toute ...
816. E'15 : non plus (... ?)...
817. E'14 : mais ce que tu avais dit ... tu avais une racine, je ne sais pas (... ?) justement
818. E'15 : d'accord ... est-ce qu'il avait un... ? (... ?)
819. E'14 : tu vois (... ?)
820. E'15 : parce qu'il n'y a pas « y »
821. E'14 : (... ?) racine (... ?) c'était « -y »
822. E'15 : et donc ... je ne sais pas (... ?) il y a quelque chose ?
823. Julio : (leur explique comme faire la courbe symétrique «  $y = -\sqrt{-x}$  »)
824. E'14 : (... ?) alors ... non, elle se fait pour (... ?) ... il est où le vecteur ?
825. E'15 : vecteur 3, c'est le ...
826. E'14 : (... ?) tu mets le vecteur ici sur (... ?)
827. E'15 : ouais... mais pourquoi il a pris la dimension (... ?) ...
828. E'14 : (... ?) on va faire l'image ... voilà, là-dessus il est nul...
829. E'15 : et par rapport à l'axe
830. E'14 : parce qu'il l'a fait que par certains (elle parle possiblement de ce que Julio leur a dit)
831. E'15 : voilà ...
832. E'14 : maintenant on va essayer de tracer le (... ?) ... on associe... essaye de tracer une (... ?) ... au moins qu'il suffisse de faire une droite... nous on va essayer quand même ... un point ... ensuite on a dit qu'il fallait faire les coordonnées ... .. coordonnées de ce point... (Les étudiantes essaient de tracer une droite, en suivant les pas montrés par Julio. Elles n'arrivent pas à tracer la courbe, les étudiantes essaient de faire le champ de vecteurs. Finalement Jérôme leur aide à faire le champ associé au vecteur 3)
833. E'15 : ah ouais déjà c'est un peu mieux... (... ?)
834. E'14 : (... ?) là il vient le vecteur comme ça
835. E'15 : normalement ce que (... ?) truc
836. E'14 : et en fait c'est l'axe (... ?)
837. E'15 : mais il y a de moments que tu arrives à ... alors il se fait 0 quoi...
838. E'14 : voilà, où la tangente est horizontale ça vaut 0
839. E'15 : tu as (... ?) appuyé le truc
840. E'14 : oui
841. E'15 : ah ouais c'est vrai qu'il y a des points y'a ... il faut (... ?)
842. E'14 : en fait ça va toujours faire ... c'est bon ... il y a toujours horizontales et à partir d'un moment ça arrive à ...
843. E'15 : ouais en fait, on a dit d'autres fois j'ai... de la courbe où il y a des tangentes horizontales
844. E'14 : ouais
845. E'15 : là où il y a des tangentes posées...
846. E'14 : (... ?) pourquoi ? ... tu cherches la (... ?) qui arrive faire ça (... ?) pour fixer
847. E'15 : si, je peut placer le vecteur et (... ?)
848. E'14 : ah, il a un moins (... ?) ...
849. E'15 : (... ?) on l'a mis sur la grille, voilà
850. E'14 : je ne sais pas pourquoi (... ?)
851. E'15 : ouais, je pense qu'il est là ... mais je vois pas moi ... en quoi (... ?) tombe (... ?) en fait ... .. (... ?)
852. E'14 : pas bien
853. E'15 : (... ?) en fait on pouvait (... ?)

**(fin de l'activité)**



## Binôme E'14/E'15

## Association entre vecteurs dynamiques et équations différentielles (lien n'étant pas explicitement donné)

Vecteur 1  $\Leftrightarrow E5 y' = ke^{-0.05x^2}$ 

1. E'14 : parce ce qu'on a vu (... ?) y'a un axe ... un peu près
2. E'15 : ouais, et donc là
3. E'14 : « y » tu (... ?)
4. E'15 : (... ?) c'est après pour le moment ... (... ?) s'on est trompé ... c'est pas grave, c'est très jolie ça ... on se fixe ce truc sur (... ?) vecteur... non, non, non
5. E'14 : ah ouais
6. E'15 : donc là et après tu prends (... ?) tu lâches ... et tu peux pas... non mais, tu as raison ... pour (... ?) c'est bon, allez-y (... ?) qui va le prendre... (... ?) pour voir si c'est toujours 1 ... ouais donc c'est vraiment toujours constante, il est 1 ...
7. E'14 : ouais je (... ?) ... ouais c'est vrai parce que (... ?) donc c'est bon ...
8. E'15 : et ça a l'air constante, ça veut dire qu'« y' » égale à une constante nulle
9. E'14 : donc « y' » ...
10. E'15 : mais égale à 0 donc
11. E'14 : en « y' » ça vaut 0
12. E'15 : si, celui-là... non ?
13. E'14 : ben non
14. E'15 : (... ?) pourquoi ? on suit « y », on suit alors... c'est parce qu'il est là
15. E'14 : pourquoi ?
16. E'15 : il faut pas qu'il dépende de « y », non ? ... ah, je sais pas ... je sais pas si c'est une constante... non ?
17. E'14 : (... ?) soit il fait...
18. E'15 : alors... c'est « y' » c'est une const... ah ... mais tu es là ... tu peux pas être sûre que soit la même, tu vois ?
19. E'14 : non
20. E'15 : c'est pas la même ... donc (... ?) c'est pas la même
21. E'14 : non c'est (... ?) ça
22. E'15 : c'est pas vrai... ouais (... ?) que l'axe ?
23. E'14 : ah ouais, en fait, il est là
24. E'15 : en fait, non ... ouais ...
25. E'14 : ah... il est là
26. E'15 : non, c'est pas le même, en fait... c'est pas constante, c'est pas un truc comme ça
27. E'14 : ah ouais (... ?)
28. E'15 : ben, c'est un truc exponentiel ça ...
29. E'14 : ah... qu'est ce que tu as fait ?
30. E'15 : ah ... non ça fait ... je pense c'est celui là, non ?
31. E'14 : tu veux voir ... hein... tu veux pas ? ... ah tu as fait ...
32. E'15 : bon ... donc tu refais ce truc ... tu fais... Vecteur 1, en cas tu l'avais ...
33. E'14 : oui (... ?)
34. E'15 : non c'est pas le cas où ...
35. E'14 : tu fais M ... Vecteur 1 ...
36. E'15 : donc ... alors... le point qui est (... ?) avoir ... un point n'importe où ... non (... ?) vachement celui là ... la longueur
37. E'14 : ah oui ... (... ?) on repart
38. E'15 : voilà, et après tu fais « Trace » ...
39. E'14 : maintenant ... le vecteur ... il va apparaître...mais là...
40. E'15 : voilà ... et maintenant tu fais « Trace » ... mais ... tu sais très bien qu'il faut pas bouger (... ?)
41. E'14 : il dit pas ... je n'y pas mal fait ...
42. E'15 : (... ?) en fait ...
43. E'14 : après je vais aller où ? ... mais je voulais aller à fond en fait, je ne sais pas comme il fait à la fin
44. E'15 : ah ouais tu (... ?) il y a un truc (... ?) ... monte jusqu'à haut ... voilà et normalement il descend comme ça ... tu vois, il fait un truc (... ?)
45. E'14 : ouais, c'est vrai ...
46. E'15 : tu vois, si tu fais ça ... ah non,
47. E'14 : non, il faut plutôt comme ça ...

48. E'15 : ouais, ouais ... parce que là il descend ... il fait plutôt comme ça... non c'est pas nul, je ne sais pas comme il fait, en fait ...
49. E'14 : donc là ça c'est « y' » ...
50. E'15 : ah ouais ... (... ?) comment on peut trouver là ?
51. E'14 : en fait, ce qu'il nous dit ce que « y' » est nulle en plus l'infini ...
52. E'15 : pourquoi « y' » est nulle ? ...
53. E'14 : on a au loin « y' » il a un (... ?) est bien nulle ... on dirait ça
54. E'15 : peut être, c'est pas sûr ...
55. E'14 : ben, au but d'un moment il n'est pas comme ça le vecteur ... il a l'air de faire comme ça
56. E'15 : oui, il a l'air mais tu vois pas ... qui
57. E'14 : oui mais ...
58. E'15 : oui, il a l'air mais ... Ah, continue ... continue ... Ah... tu (... ?) qu'on (... ?) peut être après ...
59. E'14 : ouais
60. E'15 : et comment on sait dire ça ?
61. E'14 : donc, il veut dire que ... quand « x » tend vers plus l'infini « y' » est nulle ...
62. E'15 : non ... non plus... (il semble elles regardent la liste d'équation et essaient de choisir celle qui satisfait la propriété)
63. E'14 : alors, peut être celui là ...
64. E'15 : celui là ? ... celui là peut être, si... non ? ... ah non
65. E'14 : ah ouais, c'est celui là, ouais
66. E'15 : donc c'est celui là, non ?
67. E'14 : hum ...
68. E'15 : ils lissent tout que c'est un (... ?) ? « y' »... et tu mets (... ?) ça directement ?
69. E'14 : oui, je vois que (... ?) bien ouais ...
70. E'15 : donc l'équation  $y' = m \frac{x-y}{x^2-4}$  ... donc ... puisque c'est vu ... c'est vu sur le ... on met (... ?) parce que (... ?) comme « y'=0 » vu sur le dessin ?
71. E'14 : ouais, j'ai mis (... ?) sur cabri on remarque ...

**Vecteur 2 ⇔ E4 :  $y' = d \frac{x^2 + 4}{y - x}$**

72. E'14 : hum ... ensuite ... tu as vu ta vecteur en (... ?)
73. E'15 : je ne sais pas si (... ?) désactivé la « Trace »
74. E'14 : ah oui, il faut que tu cliques dessus, oui ... vecteur ... ah sur le vecteur et tu cliques sur le vecteur qui bouge là, clic dessous, voilà ce vecteur ... tu clics
75. E'15 : ça y est, effectivement
76. E'14 : ouais, normalement (... ?) la trace... ben il faut que tu désactives la « Trace » du point alors
77. E'15 : ah ouais,
78. E'14 : voilà, allez-y re-bouge le vecteur (... ?)
79. E'15 : (... ?)
80. E'14 : (... ?) vecteur 2
81. E'15 : tu mets
82. E'14 : ce point
83. E'15 : ce machin, voilà et là (... ?) alors
84. E'14 : (... ?) « y=1 » (... ?) ah oui ...
85. E'15 : alors, attend, attend ... tu as vu des points qui peuvent être (... ?) pris là
86. E'14 : ah ouais ... (... ?) c'est normal ... ça veut dire qu'il n'est pas défini en « y=x » ...
87. E'15 : ah ... c'est vrai, je ne sais pas si (... ?) ... attend, ça veut dire pas qu'à chaque fois
88. E'14 : mais tout à l'heure on a trouvé (... ?)
89. E'15 : attend je vais le faire ... [elle trace un morceau du champ de vecteurs à l'aide de l'outil Trace]... ouais... ouais c'est « y=x » cela ... alors attend, je vais vérifier quand même parce que (... ?) ... ouais, c'est celle-là ... alors « d (x<sup>2</sup>+4)/(y-x) »... tu mets qu' « y' » n'est pas définie
90. E'14 : ouais ...
91. E'15 : voilà ... maintenant, qu'est ce qu'on fait ?

**Vecteur 3 ⇔ E8  $y' = n(y-x^2)(x+y)$**

92. E'14 : je vais (... ?) vecteur 3
93. E'15 : le vecteur 3 ...
94. E'14 : alors, le point

95. E'15 : ouais, le nombre  
96. E'14 : le nombre  
97. E'15 : un point... l'axe, ouais ... tu fais trace... voilà, maintenant tu prends le point et tu bouges (... ?) voilà ... (... ?) ça ... Ah si elles sont (... ?) dans tous les points ... comme ça on verra s'il y a un saut ... «  $y=2$  » ... elle a (... ?)  
98. E'14 : là, de toute façon il y a «  $y'$  » qui vaut 0 en (0,0)... donc  
99. E'15 : «  $y'$  » il vaut 0 en (0,0)...  
100. E'14 : je vois qu'en «  $x=0$  » ... «  $y'$  » est 0 ...  
101. E'15 : donc ça, c'est pas possible quand ça vaut 0 ici  
102. E'14 : (... ?) y'a (... ?) celui là  
103. E'15 : attend, déjà on va barrer... non ?  
104. E'14 : ouais ... allez-y  
105. E'15 : hop, hop, ce n'est pas possible que ça soit celle-là ... Euh, alors c'est pas possible que soit ici celle-là... en plus j'ai pas de «  $x$  » ...  
106. E'14 : il n'y a pas de «  $x$  »  
107. E'15 : et j'ai un problème moi, c'est qu'après euh ...  
108. E'14 : là c'est pas possible tu vois ... tu vois (... ?) «  $-x$  »  
109. E'15 : et celui là ...  
110. E'14 : ah si ... si va être possible ... (... ?) zéro là  
111. E'15 : donc «  $y = \pm 1$  » ...  
112. E'14 : non, ici (... ?) ça fait «  $x=0$  » ... oui et il va être tangente aussi en ... en «  $y = \pm 1$  »  
113. E'15 : de quoi il est tangente, quoi ?  
114. E'14 : en «  $y = \pm 1$  » la tangente elle va être comme ça ... ouais regarde, en «  $y = \pm 1$  »  
115. E'15 : pourquoi ?  
116. E'14 : parce que ... regarde, tu vois c'est (... ?) essaie de 0 ... ça c'est  $y^2-1$   
117. E'15 : ah oui il est déjà tangente ... (... ?) te veux dire ... ah oui d'accord, oui ... comme ça tu as déjà un point qui va (... ?) là ... tu vois là ...  
118. E'14 : ah non, il y a un problème ah c'est marron  
119. E'15 : ouais... mais bon, c'est le seul point qui voudrait dire que c'est ça ... oui, oui, il te dit pas les coordonnées, il te dit que le «  $y$  » est égale à quoi ... il te dit que «  $y = \pm 1$  » mais il te dit pas quel valeur il fait  
120. E'14 : ouais, mais regarde... c'est celui-là qui marche... Ah oui, c'est un point ici, et tu vois (... ?) un divisé ... ouais, c'est un de deux ...  
121. E'15 : ouais, mais, le problème c'est que ça serait pour E2 ... en fait pour «  $y=x^2$  », «  $x = -1$  » ah ouais, et ça marcherait, en plus ... Ah ouais, et puis celui là, regarde... en tous les points ça fait ça, en fait  
122. E'14 : et c'est où ?  
123. E'15 : c'est sûr je pense, parce qu'en «  $y = x^2$  »  
124. E'14 : ah ouais  
125. E'15 : non ?  
126. E'14 : ben, non  
127. E'15 : et nous on se fait pour un «  $y=x$  » là, qu'est-ce que tu penses ? ... on voudrait les coordonnées de ce point là ... ce point  
128. E'14 : attend... « coordonnées »  
129. E'15 : ça c'est «  $y=-x$  » ... de ce point ... c'est comme ça qu'elle fait ?  
130. E'14 : c'est «  $y=-x$  » celui-là, non ?  
131. E'15 : attend ... pourquoi ça ne marche pas, les coordonnées ?... ah ouais, d'accord ... on peut pas faire les coordonnées du vecteur comme ça  
132. E'14 : ah  
133. E'15 : parce que ce que tu vois, ça sera quoi ? ah non, tu as 0,5  
134. E'14 : et 0,5, ça va ?  
135. E'15 : après ça fait (1,1) ... (2,2)  
136. E'14 : donc c'est pour «  $y=x$  »  
137. E'15 : que tu as les tangentes de (... ?)  
138. E'14 : oui, (... ?) tu as les tangentes pour «  $y=x$  »  
139. E'15 : tu as celui là ? elle est barré déjà ? (... ?) barré, ben (... ?) tu as celui-là aussi ... ah ben tu as ça ? ... ah non  
140. E'14 : on voit «  $y=-x$  »... non mais c'est ça  
141. E'15 : oui, puisque le (... ?) est ça «  $y=-x$  »  
142. E'14 : ouais  
143. E'15 : ouis, mais elle, ça marche pas pour ... et si ça marche pour

144. E'14 : c'est à «  $y = -x$  » et «  $y = x$  » ça fait (... ?)  
 145. E'15 : en fait, dire qu' «  $y = -x$  »... donc, c'est tous cela, en fait  
 146. E'14 : ouais ... «  $y = x^2$  » ici  
 147. E'15 : ouais, parce que tu as... c'est pas ça  
 148. E'14 : puisque là (... ?) non, il n'y a pas  
 149. E'15 : parce que c'est peut être là qui tourne... parce que là, c'est pareil ... ah non ça ferait «  $x$  » ... «  $x =$   
 ... » ah non, à «  $x = -y$  »... et «  $x = y$  » ça  
 150. E'14 : hum  
 151. E'15 : c'est de plus, celui-là, donc carrément ça fait «  $x^2 = -y^2$  »... regardes un petit peu ça  
 152. E'14 : pourquoi il (... ?)  
 153. E'15 : ah non, on va faire que ça ... (... ?) marche là ...

**Vecteur 4**  $\Leftrightarrow$  E7  $y' = m \frac{x - y}{x^2 - 4}$

154. E'15 : le vecteur 4 peut être (... ?) il devra (... ?) point de là, je ne sais pas que (... ?) là ... ça peut (... ?)  
 là ? je ne sais pas si ça peut (... ?) là  
 155. E'14 : attend-y on a pris (... ?) pour le vecteur 1 s'il était défini en 2 et en -2 ... Pour être sûres  
 156. E'15 : ben, attends on va faire « control (... ?) » ... donc c'est difficile pour faire cela  
 157. E'14 : non, mais ça y est, ça va maintenant  
 158. E'15 : ouais, donc (... ?) ... un point ... sur l'axe et tu fais « Trace »  
 159. E'14 : parce qu'en fait, il faut que surtout en «  $x=2$  et -2 »  
 160. E'15 : alors «  $x=2$  et -2 » ?  
 161. E'14 : non, regarde ... non c'est pas ça ... C'est parce qu'il est là... et donc en fait ...  
 162. E'15 : et pourquoi on l'avait choisi celui-là... parce sa tangente elle est égale à 0 ?  
 163. E'14 : ouais ...  
 164. E'15 : parce qu'en fait (... ?) là (... ?) ... à mon avis, ce qu'il faut ... il est là ... ouais, ça se  
 ressemble bien... ça peut être... je l'ai marqué  
 165. E'14 : mais non, parce que en -2 et 2 il est défini ...  
 166. E'15 : et il n'était pas comme ça ?  
 167. E'14 : non, mais il est défini ... quelque choix  
 168. E'15 : ah ouais ...  
 169. E'14 : on a déjà que c'est pas une fraction  
 170. E'15 : je parle d'E4 pour voir ce que ce donnée ...  
 171. E'14 : ouais ... je voyais de celle-là ... ouais  
 172. E'15 : c'est d'abord un point ...  
 173. E'14 : en fait, «  $y'$  » est constante en fait ... ..  
 174. E'15 : celle-là (... ?) n'a rien à voir (... ?) il l'on a qui ne sont pas définis, en fait, (... ?)  
 175. E'14 : en 2  
 176. E'15 : en 2  
 177. E'14 : en 2  
 178. E'15 : par contre en 2 ... ah oui, d'accord ... ce c'est laquelle celle-là, il y a l'E2 en plus aussi  
 179. E'14 : et l'E1  
 180. E'15 : donc celle-là, il a le ... c'est obligé qu'on prend l'E7 celle-là  
 181. E'14 : ouais  
 182. E'15 : «  $x -$  » donc on va faire « control F » ... «  $y -$  ... » ... ..  
 183. E'14 : donc, c'est bon ... d'ailleurs ...  
 184. E'15 : donc tu as E2 qui est éliminé ... je refuse d'être la première ...  
 185. E'14 : quand «  $x$  » tend vers l'infini... alors ça peut être celle-là, ça peut être E2...  
 186. E'15 : pourquoi ... c'est quand «  $x$  » tend vers plus l'infini ?  
 187. E'14 : ouais  
 188. E'15 : ouais mais, en plus l'infini  
 189. E'14 : ça tend vers 0 [probablement il parle de l'équation E5]  
 190. E'15 : le problème c'est que ça aussi [l'équation E7]... Ah et ça, parce que ça tend vers plus l'infini ça  
 [l'équation E2], ça fait  $-\infty$  [l'équation E8]... ça se fait 0 [probablement l'équation E5]  
 191. E'14 : ouais  
 192. E'15 : c'est ça (... ?) quand (... ?) tend vers plus l'infini ça va être des exponentielles en fait et (... ?)  
 avoir l'E5 et après en «  $y$  » ... en «  $x$  » au-dessous ... tu as que E7 [l'étudiant semble explorer aussi avec  
 le vecteur 4]  
 193. E'14 : hum ... ouais  
 194. E'15 : donc, ça t'oblige ... c'est E5 en fait ... voilà

195. E'14 : et en plus ça va, tu as dit tout à l'heure que sous forme exponentielle on a (... ?) ... si (... ?) ce moi qui l'a dit ...
196. E'15 : ouais ... mais on a des erreurs, alors
197. E'14 : le premier tu as (... ?) à quoi ?
198. E'15 : e5
199. E'14 : maintenant il faut dire qu'à « x » donnée, en fait, « y' » est toujours constante aussi, c'est ça qu'on a vu
200. E'15 : ouais, ben c'est pas grave ... on va faire les deux, les deux manquants ... c'est bon le vecteur 2 à ton avis ?
201. E'14 : ouais
202. E'15 : c'est le vecteur 3 qui manque ... Jeremy, le vecteur 2 tu l'as fait ? (... ?) combien ?
203. J : (... ?)
204. E'15 : l'E4 ?
205. E'14 : oui
206. E'15 : et l'E4, le vecteur 4 tu l'as fait ?
207. E'14 : mais dans le (... ?) sur cela
208. E'15 : c'est l'E7 ... et c'est l'autre vecteur (... ?) qu'on n'a pas ...
209. J : (... ?)
210. E'15 : ah (... ?) ... alors un point, le nombre, la droite (... ?)

**(fin du enregistrement audio)**



### ***Résumé***

L'enseignement des équations différentielles privilégie l'approche algébrique, malgré l'existence des approches numérique et qualitative. Dans l'approche algébrique le lien entre les registres symbolique et graphique est quasi-inexistant, et il passe éventuellement par l'expression symbolique des solutions. En revanche, l'approche qualitative requiert une interaction forte entre ces registres, ce qui demande la mobilisation de connaissances de divers cadres : fonctions, géométrie analytique, analyse, etc. Cette interaction nécessite des raisonnements sur des fonctions dont on ne connaît pas l'expression symbolique. Les efforts actuels pour changer le paradigme algébrique dominant font appel aux outils informatiques. Or, des logiciels comme Cabri Géomètre permettent de créer des contextes d'exploration de phénomènes graphiques liés aux équations différentielles. Notre étude porte sur les difficultés des étudiants de CAPES à construire des liens entre les registres graphique et symbolique, ainsi que sur les apports du logiciel pour développer ces liens. Au chapitre 1, nous passons en revue quelques travaux de référence. A l'aide de certains outils théoriques, nous clarifions la problématique pour articuler ces registres. Puis, nous étudions les potentialités du logiciel pour l'étude des équations différentielles. Au chapitre 2, nous présentons le dispositif expérimental conçu pour vérifier nos hypothèses. Nous consacrons ensuite deux chapitres à l'étude des expériences réalisées. Au chapitre 5, nous tirons un bilan de ces expériences et nous exposons les difficultés rencontrées par les étudiants, ainsi que les apports du logiciel. Enfin, nous concluons en revenant sur les questions initiales et sur les éléments de réponse, avant de proposer les perspectives de notre travail.

### ***Mots-clés***

Didactique des mathématiques, Equations différentielles, Cabri Géomètre, Articulation de registres de représentation, Difficultés des étudiants.

### ***Abstract***

The teaching of the differential equations prioritizes the algebraic approach, in spite of the existence of the numerical and qualitative approaches. In the algebraic approach, the link between the symbolic and the graphic registers is almost non-existent, eventually it passes by the symbolic expression of the solutions. On the other hand, the qualitative approach requires a strong interaction between these registers, it needs the mobilization of knowledge of various frameworks: functions, analytical geometry, analysis, etc. This interaction requires reasoning on functions which one does not know the symbolic expression. The current efforts to change the dominating algebraic paradigm call upon the new technology tools. However, software programs as CABRI Géomètre allow creating contexts of browsing of graphic phenomena related to differential equations. Here we study the difficulties of CAPES' students building links between the graphic and the symbolic registers, as well as the contribution of the software in helping to develop these links. In chapter 1, we review some reference works. Using certain theoretical tools, we clarify the problematic to articulate these registers. Then, we study the potentialities of the software in the study of differential equations. In chapter 2, we present the experimental device designed to check our hypotheses. We dedicate then two chapters to the study of the experiments carried out. In chapter 5, we draw an assessment from these experiments and we show the difficulties students found, as well as the contributions of the software. In conclusion, we reconsider the initial questions and the elements of response, and the prospects for our work.

### ***Key words***

Mathematical education, Differential equations, Cabri Geometry, Link between registers of representation, Difficulty of the students.