



**HAL**  
open science

# Optimisation pour la configuration robuste de systèmes de production de biens et de services

Alexis Aubry

► **To cite this version:**

Alexis Aubry. Optimisation pour la configuration robuste de systèmes de production de biens et de services. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2007. Français. NNT: . tel-00204407

**HAL Id: tel-00204407**

**<https://theses.hal.science/tel-00204407v1>**

Submitted on 14 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.





À mon fils Lucas, dont le seul fait d'exister suffit à mon bonheur.  
À ses sœurs et frères qui viendront peut-être égayer notre foyer.  
À Christèle, pour l'ensemble de son être.  
Le temps passé sans moi a permis cela.



# Avant-Propos : Chronique d'une thèse

2004-2007 : c'est la période pendant laquelle j'ai préparé le travail présenté dans ce mémoire. Trois années de doutes, de petites joies et de grands bonheurs, de plaisir d'apprendre et d'enseigner. Trois années qui tiennent dans cette cent-cinquantaine de pages. Enfin pas tout à fait, car il y a tout ce que je n'arriverai pas à exprimer par la simple écriture de cet avant-propos. Je veux bien tenter de transcrire ma gratitude envers tous ces gens qui ont rendu ces trois années merveilleuses, qui ont fait de moi un privilégié de la vie. Je sais déjà que les quelques mots qui vont suivre ne suffiront pas à tout dire.

Sans structure d'accueil, je n'aurais rien pu faire. C'est pourquoi je tiens tout d'abord à remercier Monsieur Alain Barraud, directeur du Laboratoire d'Automatique de Grenoble (avant de fusionner dans GIPSA-Lab) pour m'avoir accueilli et permis d'effectuer les deux premières années de mes travaux de recherche dans d'excellentes conditions. Je tiens ensuite à remercier Yannick Frein pour avoir pris le relais et pour m'avoir accueilli dans le tout jeune G-SCOP (Laboratoire des Sciences pour la Conception, l'Optimisation et la Production de Grenoble).

À travers eux, j'aimerais également remercier ceux qui travaillent dans l'ombre de nos publications, de nos séminaires, de nos diverses missions, et de nos cours, les personnes qui vous simplifient la vie de chercheur et d'enseignant. Il y a Marie-Rose, Marie-Thérèse, Virginie, Patricia, Marielle, Souad, Chaneise, Kheira, Amandine, Myriam, Chantal, Pascal... Qu'elles reçoivent ici toute ma gratitude pour les besoins de dernière minute auxquels elles ont su répondre avec toute l'efficacité et la patience du monde.

Parallèlement à cette thèse, j'ai eu l'immense privilège de pouvoir effectuer trois années de monitorat au sein de l'ENSIEG. Je remercie Monsieur Gérard Cagnet et Monsieur Didier Retour, directeurs successifs du CIES de Grenoble, de m'avoir offert cette opportunité et je remercie Monsieur Roland Vidil de m'avoir accueilli dans son établissement. Les formations proposées par le CIES furent enrichissantes sur bien des aspects. Dans le cadre de ce monitorat, j'ai eu le plaisir de travailler avec des professeurs agrégés, des maîtres de conférences, et des professeurs des universités qui m'ont accordé le privilège et la confiance de me considérer comme un de leur collègue. Je remercie donc Hayate Khennouf, Yvon Bésanger, Thierry Chevalier, Éric Escande, Stéphane Ploix, Olivier Sename et Jean-Yves Voyant avec qui travailler a été une réelle source de plaisir et d'enrichissement.

La science offre le privilège constant (et le devoir aussi) de soumettre son travail à la lecture

critique de ses pairs pour qu'ils l'évaluent et le valident. Chacun des membres de mon jury de thèse a rempli cette fonction au delà de mes attentes. Je remercie donc tout d'abord Monsieur Yannick Frein, professeur à Grenoble INP, d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Ensuite, j'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Philippe Baptiste, chargé de recherche au CNRS et professeur à l'École Polytechnique, à Monsieur Alexandre Dolgui, professeur à l'École Nationale des Mines de Saint-Étienne, et à Monsieur Damien Trentesaux, professeur à l'université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux, pour leur critique constructive, pour leur lecture attentive du mémoire, et pour avoir accepté la charge d'en être les rapporteurs. Je remercie Monsieur Mohamed Ali Aloulou, maître de conférences à l'université Paris-Dauphine, pour l'honneur qu'il m'a fait d'accepter d'être examinateur de mes travaux et d'exercer son expertise en robustesse et flexibilité en recherche opérationnelle et en aide à la décision sur nos résultats.

Durant cette thèse, j'ai eu la chance d'être encadré merveilleusement par Madame Marie-Laure Espinouse, maître de conférences à l'université Joseph Fourier, et Madame Mireille Jacomino, professeur à Grenoble INP. Je leur exprime toute ma gratitude et toute ma reconnaissance pour la confiance qu'elles m'ont accordée en acceptant de diriger mes travaux de thèse. La confiance qui me fait parfois défaut a largement été compensée par la leur. J'ai conscience du privilège que j'ai eu de travailler dans un contexte où les valeurs humaines sont omniprésentes. Leurs conseils, leurs critiques, et leur soutien permanent ont été une source d'enrichissement personnel qui dépasse le cadre de cette thèse. L'encadrement complémentaire qu'elles m'ont offert a donné une couleur particulière à cette thèse.

Je remercie Marie-Laure pour ses connaissances en optimisation combinatoire qu'elle a mise à mon service au cours de cette thèse. Elle avait déjà réussi à éveiller ma curiosité à ce domaine lors de ses cours d'ordonnancement à l'ENSIEG, elle a continué durant les trois années de cette thèse. Elle a réussi à mettre à ma portée des concepts qui étaient parfois éloignés de ma formation initiale. Je lui suis particulièrement reconnaissant de m'avoir enseigné l'art de démontrer qu'un problème est  $\mathcal{NP}$ -difficile.

Je remercie Mireille pour l'immense disponibilité qu'elle m'a accordée malgré ses lourdes charges de directrice adjointe de l'ENSIEG et de directrice des études de l'ENSIEG. Elle a fait preuve d'une flexibilité sans faille face aux perturbations. J'ai apprécié chacune des minutes passées dans son bureau à discuter de mes travaux et d'autres choses. Mireille a l'art de mettre la barre haut et plutôt que de vous aider à l'atteindre, vous aider à la dépasser. Je n'oublierais jamais l'entière solidarité qu'elle m'a témoignée jusqu'à la soutenance.

Je renouvelle toute ma reconnaissance et toute ma gratitude à l'égard de Marie-Laure et Mireille. J'espère que chacune d'elle saura puiser la part de mérite qui lui revient dans cette thèse.

J'aimerais remercier également Dominique Groppi qui fut d'une gentillesse incomparable durant toutes ces années. Son bureau fut une salle d'attente parfaite avant d'accéder au bureau de Mireille. Les sourires d'accueil et les réponses rapides et efficaces à toutes mes sollicitations m'ont rendu la vie de doctorant plus facile. Dominique est des ces personnes dont la chaleur humaine vaut tous les remontants.

Les travaux présentés dans ce mémoire n'auraient pas eu la même saveur et la même force sans la collaboration avec André Rossi. André fut là à mes débuts de chercheur lorsqu'il a

---

co-encadré mon stage de Master Recherche avec Marie-Laure Espinouse. J'ai eu la chance de pouvoir travailler dans la ligne directe de ces travaux de thèse. Je tiens à le remercier pour la confiance qu'il m'a accordé en me laissant poursuivre ses travaux. André a su brillamment poser les premières pierres de la robustesse dans notre équipe et ce fut un plaisir de pouvoir travailler étroitement avec lui pendant les six mois du stage de Master. Ce plaisir s'est renouvelé pendant la thèse. J'exprime toute ma reconnaissance à André pour son enthousiasme sans faille pour la plus petite des idées, pour ses conseils avisés et nos échanges toujours riches. J'espère sincèrement que notre collaboration n'en restera pas là.

J'ai ensuite une pensée particulière pour les personnes qui m'ont écouté au détour d'un séminaire ou d'une conférence et qui ont pris la peine de rentrer dans mes travaux pour proposer des pistes ou émettre des critiques. Je pense notamment à Nadia Brauner, Alexia Gouin, Maria Di Mascolo, Zineb Simeu-Abazi, Olivier Adrot, Olivier Briant, Van Dat Cung, Bernard Descottes-Genon, Gerd Finke, Sébastien Henry, Pierre Ladet, Bernard Penz, Stéphane Ploix, Christophe Rapine, Andras Sebo et Éric Zamaï.

Il y a ceux qui m'ont montré la voie, et qui à travers leurs cours, m'ont donné envie de faire ce métier d'enseignant-chercheur. J'ai donc une pensée particulière pour Monsieur Jacques Chapon qui m'a très justement encouragé à poursuivre vers une école d'ingénieurs quand je me destinais à devenir professeur de mathématiques. J'ai eu la chance à l'ENSIEG, de croiser des enseignants tels que Monsieur Éric Escande dont j'espère atteindre un jour le niveau de pédagogie, Monsieur Christian Commault qui m'a donné envie de m'intéresser à la recherche opérationnelle. Parmi ces enseignants je remercie particulièrement Monsieur Éric Zamaï qui a pris au sérieux ma motivation d'entamer une thèse suite à ma troisième année de formation d'ingénieur. Il m'a encouragé dans cette voie et ne m'a rien caché de ce qui m'attendrait. Il ne s'est pas arrêté là puisqu'il m'a soutenu jusqu'au bout de cette thèse : je n'oublierais pas la discussion que nous avons eu à quatre jours de ma soutenance.

Durant ces trois années, certains ont su trouver la force de supporter mes bavardages intempestifs. Ces collègues de bureau se nomment Cindy Bassompierre, Lyes Badji, Éric Deschamps et Duy Long Ha. Ces deux derniers, compagnons de fortune, sont devenus de véritables amis au fil des étapes que nous avons franchies ensemble. Je me souviens de cette atmosphère particulière au moment où nous rédigeons tous les trois notre mémoire de thèse. Je ne désespère pas de co-écrire un article avec eux. Ces quelques lignes de remerciement sont trop minces par rapport à celles qu'ils méritent tant cette thèse leur doit d'avoir été aussi légère.

Éric m'a démontré plusieurs fois que je pouvais compter sur lui. Sa capacité à rendre service en fait un ami précieux.

Quant à Long, sa capacité de travail et sa progression dans notre langue ne cessent de forcer mon admiration. J'espère pouvoir un jour lui rendre visite dans son Vietnam natal.

Puisqu'il y a une vie en dehors du travail, cette thèse n'aurait pas été si agréable sans les petits moments d'évasion. Il y a d'abord une association dans laquelle j'aurais aimé pouvoir m'investir un peu plus tant elle m'a apporté : l'Observatoire Zététique. Tous ses membres ont insufflé en moi une dose d'esprit critique qui a participé à ma formation de scientifique. Je pense surtout à Christelle, Géraldine et Richard qui sont des formateurs hors pair. J'espère que l'esprit

critique que l'Observatoire Zététique ambitionne de transmettre au public transparaît un petit peu dans les travaux présentés dans ce mémoire. Il y a ensuite ces livres que j'ai dévorés dans le train lors de mes trajets quotidiens entre Aix-les-Bains et Grenoble. Mireille Calmel, Amélie Nothomb, Dan Brown, Yann Moix, Antoine de Saint-Exupéry ont marqué ma vie de lecteur. Il y a également ces chanteurs dont les paroles et la musique ont enivré mes sens : que Lynda Lemay, Renaud, Raphaël continuent de caresser mes oreilles et que Jacques Brel et Georges Brassens soient bénis pour l'ensemble de leur œuvre. Enfin il y a cet humoriste qui arrive à me mettre de bonne humeur même dans les pires moments : que Coluche soit élevé au rang de roi des enfoirés.

Que ceux qui ont nourri ma vie de moments inoubliables et qui continuent à le faire, découvrent ici tous les remerciements que je ne leur ai jamais formulés. J'adresse donc un clin d'œil à mes précieux amis Barbara, Virginie, Ève, Pietro, Fathi, Michaël, Jean-François (dont l'œuvre littéraire m'enchanté), Julien Bibi, Julien Boubou, François.

Ces remerciements ne pouvaient se clore sans un hommage à ma famille. J'espère qu'ils ont conscience à quel point cette thèse n'aurait pas pu être possible sans eux. Je renouvelle donc tout mon amour à ma maman, mon papa, ma chère grand'mère Favières, mes quatre sœurs Céline, Virginie, Delphine et Ludivine, mon épouse Christèle, et mon petit Lucas dont le sourire du matin me donne toutes les forces du monde. Je n'oublie pas ma belle famille qui m'a accueilli à bras ouvert et dont le soutien permanent a également permis tout cela : je ne crois pas les avoir jamais assez remerciés pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>15</b>
<b>Partie I Systèmes de production de biens et de services : description et prise en compte des perturbations</b>	<b>19</b>
<b>Chapitre 1 Contexte</b>	<b>21</b>
1 Les systèmes de production de biens et de services . . . . .	21
1.1 Rôle . . . . .	21
1.2 Organisation décisionnelle . . . . .	21
2 Contraintes et performances des systèmes de production . . . . .	22
2.1 Configuration . . . . .	22
2.2 Un problème d'optimisation . . . . .	23
3 Configuration des systèmes de production . . . . .	23
4 Fermeture du contexte : prise en compte des perturbations . . . . .	23
5 Conclusion . . . . .	25
<b>Chapitre 2 Prise en compte des perturbations pour la RO-AD</b>	<b>27</b>
1 Introduction . . . . .	27
2 Mise en évidence des perturbations . . . . .	27
2.1 Les sources de perturbations . . . . .	28
2.2 Les différents types de perturbation . . . . .	29
2.3 La modélisation des perturbations . . . . .	29
2.3.1 Modélisation stochastique . . . . .	29
2.3.2 Modélisation ensembliste . . . . .	29
2.3.3 Modélisation floue . . . . .	30
2.3.4 Modélisation sans aucune information . . . . .	30
3 Prise en compte des perturbations : les approches de résolution . . . . .	30
3.1 L'approche proactive . . . . .	30
3.2 L'approche réactive . . . . .	30
3.3 L'approche proactive/réactive . . . . .	31
4 De la robustesse en recherche opérationnelle . . . . .	31
4.1 L'analyse de sensibilité . . . . .	32
4.2 Approches de robustesse basées sur l'optimisation d'un critère . . . . .	32
4.2.1 L'approche minmax . . . . .	32

4.2.2	L'OWA-robustesse . . . . .	33
4.3	Les approches de robustesse basées sur la vérification de conditions de robustesse . . . . .	34
4.3.1	La $p$ -robustesse . . . . .	34
4.3.2	La $\beta$ -robustesse . . . . .	34
4.3.3	La $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse . . . . .	34
4.3.4	L' $\alpha$ -robustesse lexicographique . . . . .	35
4.4	Application des approches de robustesse à un exemple . . . . .	35
4.4.1	Utilisation des approches basées sur la minimisation d'un critère de robustesse . . . . .	36
4.4.2	Utilisation des approches basées sur la vérification de conditions de robustesse . . . . .	38
4.5	Comparaisons des approches et bibliographie associée . . . . .	38
4.6	Robustesse versus optimalité . . . . .	38
5	Processus complet de résolution . . . . .	39
6	Conclusion . . . . .	40

## **Partie II Configuration robuste d'un système de production de biens : un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions** **43**

### **Chapitre 3 Étude du problème statique : étape 0** **45**

1	Introduction : un bref historique de l'étude de ce problème . . . . .	45
2	Les machines parallèles partiellement multifonctions : particularités . . . . .	46
3	Modélisation de l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions . . . . .	46
3.1	Caractéristiques des machines . . . . .	46
3.1.1	Les contraintes technologiques . . . . .	46
3.1.2	La vitesse des machines . . . . .	47
3.1.3	Les coûts de qualification . . . . .	47
3.2	La demande . . . . .	47
3.3	Configuration de l'atelier . . . . .	47
3.4	Plan de production . . . . .	48
4	Contraintes et critère d'optimisation . . . . .	48
4.1	Contraintes . . . . .	48
4.1.1	Pertinence de la contrainte d'équilibre de la charge dans le contexte de la fabrication des semiconducteurs : . . . . .	49
4.2	Critère d'optimisation : les coûts liés à la configuration . . . . .	49
5	Définition du problème statique . . . . .	49
5.1	Énoncé . . . . .	49
5.2	Le problème d'affectation associé : calcul d'un plan de production équilibré . . . . .	49
5.3	Étude de complexité de <i>CACM</i> . . . . .	51
5.3.1	Preuve . . . . .	51
5.4	Formulation à l'aide d'un programme linéaire en nombres entiers . . . . .	53
5.5	Problème de l'existence d'une configuration admissible : un problème facile . . . . .	53

---

5.6	Lien avec le makespan et limite de pertinence de l'équilibre de la charge	54
6	Relaxation du problème statique	54
6.1	Relaxation de contraintes et définition d'un nouveau critère d'optimisation	55
6.2	Identification au problème classique de transport	56
6.2.1	Valeur de $TWLoad$	56
6.2.2	Liens entre les solutions de $PLNE_1$ et $PL_2$	56
6.3	Bornes inférieure et supérieure sur le coût de la configuration	57
6.3.1	Borne inférieure sur le coût de la configuration	57
6.3.2	Borne supérieure sur le coût de la configuration	57
6.4	Garantie de performance de la relaxation	58
6.5	Variations de $\xi$ suivant les valeurs de $n$ et $m$	58
7	Mise en évidence des perturbations	59
7.1	Incertitudes sur la demande	59
7.2	Effet des variations de la demande sur l'équilibre de la charge	59
7.3	Définition du critère de robustesse	61
8	Conclusion	61
 <b>Chapitre 4 Approche proactive pour la configuration d'un atelier</b>		<b>63</b>
1	Introduction	63
2	Définition et résolution de quelques problèmes de robustesse	63
2.1	Premier problème : recherche de la garantie de performance offerte par une configuration	64
2.2	Deuxième problème : recherche du domaine des demandes pour lequel une configuration particulière est robuste	64
2.2.1	Application à l'exemple académique	67
2.2.2	Propriétés remarquables du rayon de stabilité	67
2.3	Troisième problème : recherche d'une configuration robuste	68
2.4	Quatrième problème : recherche de la configuration qui couvre le plus grand ensemble de demandes	69
3	Définition et étude d'un problème de robustesse bicritère	70
3.1	Définition du problème	70
3.2	Étude de complexité	70
3.3	L'approche $\epsilon$ -contrainte	70
3.4	À propos du compromis entre coût et robustesse	70
4	Une approche $\epsilon$ -contrainte	72
4.1	Définition d'une PSE	72
4.2	Hypothèses	72
4.3	Structure et définitions	72
4.4	Description de la PSE	73
4.4.1	Fonctionnement général	73
4.4.2	Séparation	73
4.4.3	Évaluation	73
4.4.4	Remontée dans l'arbre	74
4.4.5	Critère d'arrêt	75

4.5	Application à un exemple . . . . .	75
4.6	Expérimentation . . . . .	76
5	Conclusion . . . . .	78
<b>Chapitre 5</b>	<b>Une nouvelle performance pour l'atelier</b>	<b>81</b>
1	Introduction . . . . .	81
2	Définitions, hypothèses, et problème d'affectation . . . . .	81
2.1	Hypothèses et notations . . . . .	81
2.2	Problème d'affectation associé . . . . .	82
3	Résultats préliminaires . . . . .	83
3.1	$C_{max}^S$ est une norme sur l'espace des demandes $\mathbb{R}_n^+$ . . . . .	83
3.1.1	Propriété de séparation . . . . .	83
3.1.2	Propriété d'homogénéité . . . . .	83
3.1.3	Inégalité triangulaire . . . . .	84
3.1.4	$C_{max}^S$ est une norme . . . . .	84
3.2	$\mathcal{P}_d^S$ est un ensemble convexe . . . . .	85
4	Analyse de sensibilité de la configuration . . . . .	85
4.1	Définition . . . . .	85
4.2	Résolution approchée . . . . .	85
5	Études de robustesse . . . . .	86
5.1	Définition du critère de robustesse . . . . .	87
5.2	Premier problème de robustesse : recherche du domaine des demandes pour lequel une configuration particulière est robuste . . . . .	87
5.3	Deuxième problème de robustesse : recherche d'une solution robuste . . . . .	87
5.4	Troisième problème : recherche de la configuration qui couvre le plus grand ensemble de demandes du type $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$ . . . . .	88
5.5	Quatrième problème : recherche d'une configuration robuste la moins onéreuse . . . . .	88
5.5.1	$C(a_k)RCM$ est $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort . . . . .	89
5.5.2	Formulation à l'aide d'un programme linéaire en nombres entiers . . . . .	89
6	Conclusion . . . . .	90
<b>Partie III</b>	<b>Configuration robuste d'un système de production de services en énergie : un réseau de distribution d'électricité</b>	<b>91</b>
<b>Chapitre 6</b>	<b>Étude du problème statique : étape 0</b>	<b>93</b>
1	Introduction . . . . .	93
2	Modélisation à l'aide d'un graphe orienté . . . . .	95
2.1	Modélisation des usagers et des points de jonction . . . . .	95
2.2	Modélisation des sources . . . . .	95
2.3	Modélisation des lignes et de leurs interrupteurs . . . . .	96
2.4	Configuration du réseau . . . . .	96
3	Contraintes . . . . .	96
3.1	Contrainte de service des usagers . . . . .	96

3.2	Contraintes électrotechniques . . . . .	97
4	Configuration admissible . . . . .	97
5	Étude du problème en contexte certain : un état de l'art . . . . .	98
5.1	Critères d'optimisation classiques . . . . .	98
5.1.1	Minimisation des pertes Joule . . . . .	98
5.1.2	Minimisation du coût des manœuvres . . . . .	99
5.2	Rapprochement à un problème d'optimisation standard . . . . .	99
5.3	Formulation mathématique du problème . . . . .	100
5.4	Minimisation des pertes Joule : un état de l'art . . . . .	102
6	Mise en évidence des perturbations et de leur modélisation . . . . .	103
6.1	Les perturbations . . . . .	104
6.1.1	Les aléas . . . . .	104
6.1.2	Les incertitudes . . . . .	104
7	Prise en compte des incertitudes pour la configuration du réseau . . . . .	105
7.1	Quelles performances garantir ? . . . . .	105
7.2	Définition de la robustesse . . . . .	106
8	Conclusion . . . . .	106
<b>Chapitre 7 Résolution des problèmes de robustesse : étape 1</b>		<b>107</b>
1	Introduction . . . . .	107
2	Hypothèses . . . . .	107
3	Premier problème de robustesse . . . . .	108
3.1	Définition . . . . .	108
3.2	Hypothèse sur $\mathcal{P}$ . . . . .	108
3.3	Identification au problème de sac-à-dos avec contraintes de précédence	108
3.4	Résolution du problème . . . . .	110
3.4.1	Formulation mathématique du problème . . . . .	110
3.4.2	Approches de résolution proposées dans la littérature du problème de sac-à-dos unique avec contraintes de précédence modélisées par un arbre . . . . .	110
4	Deuxième problème de robustesse . . . . .	111
4.1	Définition . . . . .	111
4.2	Résolution du problème . . . . .	111
4.3	Une nouvelle mesure de robustesse . . . . .	111
4.4	Définition d'un niveau de robustesse global pour la configuration du réseau . . . . .	112
5	Troisième problème de robustesse . . . . .	112
5.1	Définition . . . . .	112
5.2	Étude de complexité . . . . .	112
5.2.1	Preuve . . . . .	112
5.3	Une borne supérieure sur la marge minimale de délestage . . . . .	115
5.4	Résolution du problème . . . . .	116
5.4.1	Formulation à l'aide d'un programme linéaire en nombres entiers . . . . .	116
5.4.2	Développement d'une métaheuristique : une recherche tabou	117

5.4.3	Expérimentation . . . . .	120
6	Interface entre le réseau de transport d'électricité et l'utilisateur . . . . .	123
7	Conclusion . . . . .	123
<b>Conclusion générale</b>		<b>125</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>131</b>
<b>Table des figures</b>		<b>141</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>143</b>
<b>Annexes</b>		<b>147</b>
<b>Annexe A Preuve des lemmes II.1 et II.2 de la partie II</b>		<b>149</b>
1	Preuve du lemme II.2 . . . . .	149
2	Preuve du lemme II.1 . . . . .	150

# Introduction générale

Les systèmes de production au sens large (production de biens mais aussi de services) ont pour fonction principale de transformer un flux de produits entrants en flux de produits sortants en apportant de la valeur ajoutée. À cette transformation s'ajoute des contraintes telles que la satisfaction du client et des objectifs de rentabilité de l'entreprise. De ce point de vue, la gestion des systèmes de production peut être vue comme un problème d'optimisation qui consiste à piloter le système de production de manière à optimiser des objectifs tout en respectant des contraintes. En ce sens la planification, l'ordonnancement et l'affectation sont des outils classiques qui concourent à répondre à la problématique de gestion des systèmes de production de biens et de services.

Pendant longtemps, les travaux dans les domaines de l'optimisation sont partis du principe que les données du problème d'optimisation étaient connues et certaines. Les méthodes d'optimisation classiques ont alors pour but de proposer une solution optimale pour une instance donnée censée représenter l'état du système réel. L'obtention de cette solution optimale est un problème bien souvent difficile.

Dans un contexte industriel, les problèmes d'optimisation ne sont que des modèles imparfaits qui, de fait, ont un comportement qui ne correspond pas parfaitement à la réalité. La compatibilité du modèle avec la réalité industrielle est sans cesse remise en cause par des variations des données d'entrée du modèle. Comment envisager par exemple que la demande prévisionnelle en produits correspondra précisément à la demande réelle? Le défaut de correspondance entre le modèle et la réalité entraîne bien souvent que les performances réelles d'une solution optimale calculée sur une instance prévisionnelle sont très dégradées lorsque la solution est appliquée à l'instance réelle. L'admissibilité de la solution sur l'instance réelle peut même éventuellement être remise en cause. Autrement dit les performances de la solution optimale (qui avait été obtenue souvent difficilement) sont dégradées par les perturbations.

Au cours de ces dernières années, la prise en compte des perturbations en optimisation est devenue un vrai enjeu, et les nombreuses publications de la dernière décennie en témoignent. Un groupe de chercheurs français, le groupe «Flexibilité et Robustesse en Ordonnancement» du GOTHa (Groupe d'Ordonnancement Théorique et Appliqué), a travaillé sur cette problématique pour définir un cadre commun. Leur travail s'est soldé par un ouvrage collectif ([Billaut et al., 2005](#)) qui s'intéresse à l'ordonnancement en contexte perturbé et présente des concepts et un processus de résolution qui peuvent être largement généralisés à l'optimisation.

Dans ce mémoire nous nous inscrivons volontairement dans le cadre défini par ([Billaut et al., 2005](#)) et nous proposons d'appliquer le processus de résolution présenté dans cet ouvrage à la configuration de deux systèmes de production particuliers. Le premier est un système de

production de biens : un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions soumis à des incertitudes sur la demande. Le deuxième est un système de production de services : un réseau de distribution d'électricité soumis à des incertitudes sur la charge des usagers et sur la capacité des sources.

Prendre en compte les perturbations signifie proposer des outils pour modéliser les perturbations, définir de nouvelles performances qui ne correspondent pas forcément au critère d'optimalité et enfin construire des méthodes de résolution capables de proposer des solutions qui garantissent des performances face aux perturbations. C'est l'objectif de ce mémoire.

Ce mémoire est organisé en trois parties.

**La première partie** présente de manière générale la problématique des travaux et propose un processus global de résolution pour les problèmes d'optimisation en contexte perturbé. Le contexte général de l'étude est tout d'abord précisé dans le chapitre 1 avec une vision générale des systèmes de production de biens et de services et le problème de configuration vu comme un problème d'optimisation sous contraintes des performances du système. Nous fermons ensuite le contexte en rajoutant la dimension de la prise en compte des perturbations pour la configuration des systèmes de production. Pour répondre à cette fermeture de contexte, un état de l'art est proposé dans le chapitre 2. Il vise à faire un état des lieux bibliographiques de la prise en compte des perturbations en recherche opérationnelle et en aide à la décision. Il identifie notamment les approches de résolution proposées dans la littérature, ainsi que les concepts liés à la prise en compte des perturbations tels que la robustesse. Un processus complet de résolution est finalement proposé pour les problèmes d'optimisation en contexte perturbé.

**La deuxième partie** propose d'appliquer la phase hors ligne du processus complet de résolution à la configuration d'un système de production de biens : un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions soumis à des perturbations sur la demande. Le chapitre 3 est dédié à l'étude du problème en considérant que la demande est connue et fixée. La modélisation de l'atelier et de ses caractéristiques est tout d'abord présentée. Dans la mesure où le problème de configuration est vu comme un problème d'optimisation, nous étudions ensuite les contraintes inhérentes au problème et nous proposons un critère d'optimisation qui permet de définir le problème en contexte certain. Après avoir démontré que ce problème est  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort, nous construisons une heuristique à performance garantie basée sur la relaxation de contraintes pour résoudre le problème. Enfin nous mettons en évidence les variations de la demande et étudions leurs incidences sur les performances d'une configuration. Nous montrons notamment qu'une petite variation de la demande suffit pour remettre en cause l'équilibre de la charge des machines qui est pourtant une contrainte forte du modèle. Nous proposons finalement un critère de robustesse pour évaluer la capacité de la configuration à supporter les variations de la demande. Ce critère de robustesse est décliné dans le chapitre 4 pour proposer plusieurs problèmes de robustesse et construire des méthodes de résolution adaptées à chacun de ces problèmes. Le chapitre 5 reprend la structure des chapitres 3 et 4 pour étudier l'incidence des variations de la demande sur une performance différente de l'équilibre de la charge. En effet le chapitre 5 cherche à construire des configurations capables de garantir un temps de traitement limite malgré les variations de la demande.

**La troisième partie** propose d'appliquer la phase hors ligne du processus complet de résolution présentée dans la partie I à la configuration d'un système de production de services : le

réseau de distribution d'électricité. Le chapitre 6 est consacré à l'étude du système de production de services dans sa version statique où tout est considéré comme connu et certain. Nous proposons une modélisation classique du réseau par les graphes orientés. Un état de l'art est proposé ensuite visant à recenser les méthodes utilisées pour résoudre le problème de configuration d'un réseau de distribution d'électricité pour minimiser les pertes Joule. Enfin, nous mettons en évidence et modélisons les perturbations qui peuvent survenir dans les réseaux et montrons que dans un contexte de dérégulation du marché et de montée en puissance des énergies vertes et intermittentes, la prise en compte des variations de la charge des usagers et des perturbations sur la capacité des sources représente un vrai enjeu pour le futur. Dans ce contexte garantir le service aux usagers malgré ces perturbations devient un objectif. Cette prise de conscience nous conduit à définir un critère de robustesse permettant d'évaluer la capacité de la configuration du réseau à garantir le service aux usagers malgré les perturbations sur la charge des usagers et sur la capacité des sources. Ce critère de robustesse est décliné dans le chapitre 7 pour proposer plusieurs problèmes de robustesse et construire des méthodes de résolution adaptées à chacun de ces problèmes.



## Première partie

# Systemes de production de biens et de services : description et prise en compte des perturbations



# Chapitre 1

## Contexte

Nous proposons dans ce chapitre de présenter le contexte de nos travaux qui se placent au niveau du pilotage des systèmes de production de biens et de services.

Nous commencerons tout d'abord par présenter les caractéristiques des systèmes de production de biens et de services avec leur rôle et leur organisation décisionnelle. Ensuite nous glisserons progressivement vers la problématique qui nous intéresse avec la prise en compte des perturbations pour la configuration des systèmes de production de biens et de services.

### 1 Les systèmes de production de biens et de services

#### 1.1 Rôle

La fonction principale d'un système de production vise à transformer un flux de produits entrant dans le système de production en flux de produits sortant comme sur la figure 1.1 : l'état de sortie du flux de produits devant répondre à la demande du client en terme de qualité, de coût et de délai. Il faut voir ici le terme «produit» au sens très large puisqu'on s'intéresse aussi bien à la production de biens que de services. Ainsi ce flux de produits peut être aussi bien matériel (matières premières) que immatériel (énergie, information). Pour assurer la pérennité de l'entreprise, le système de production doit apporter de la valeur ajoutée au flux de produits entre son entrée et sa sortie. Deux contraintes fortes apparaissent d'ores et déjà puisque le système de production doit être en mesure de répondre aussi bien à la demande du client qu'aux contraintes de rentabilité de l'entreprise. Ces contraintes apparaissent encore plus prégnantes dans le contexte de concurrence qui est celui des entreprises actuellement.

La difficulté du décideur dans la gestion d'un système de production tient donc dans le fait qu'il doit à la fois satisfaire le client et assurer la pérennité de l'entreprise.

#### 1.2 Organisation décisionnelle

Le double enjeu présenté dans la section 1.1 est tel qu'il intervient à tous les niveaux du système de production. Le niveau le plus haut est le niveau stratégique qui consiste à prendre des décisions sur la politique d'emploi, d'investissement, de recherche, de développement de l'entreprise. Cette stratégie a une visée à long terme. Le niveau stratégique s'interface avec le niveau opérationnel dont le but est de gérer la production tout en respectant la stratégie

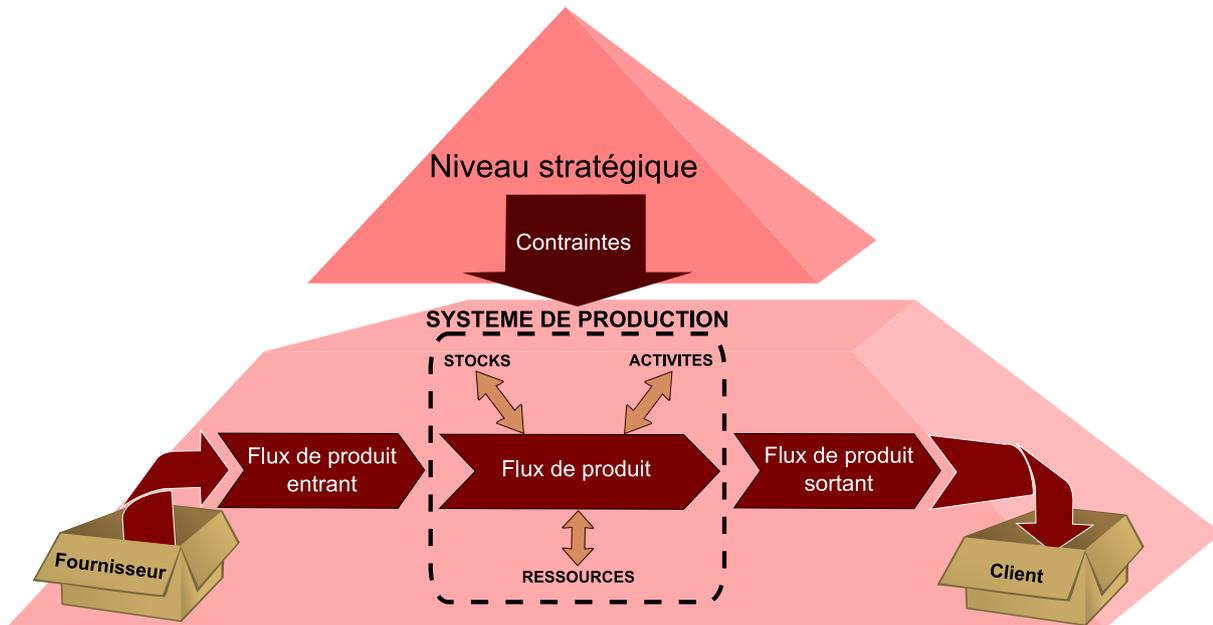


FIG. 1.1 – Entrées/Sorties d'un système de production avec sa structure interne.

imposée par le niveau supérieur. Son horizon temporel se situe à court ou moyen terme. C'est ici que se situent nos travaux. Pour parvenir à remplir les objectifs du niveau opérationnel, le décideur joue sur la gestion des activités, des ressources et des stocks et également sur la configuration du système de production. Des outils privilégiés du niveau opérationnel sont la planification, l'ordonnancement, l'affectation des ressources...

## 2 Contraintes et performances des systèmes de production

Le niveau stratégique d'un système de production vise à définir une politique générale de gestion liée aux choix stratégiques en terme de recherche, de développement, d'investissement et d'emploi. Le niveau opérationnel vise lui à fournir au système de production des performances en adéquation avec cette politique générale. Il doit respecter les contraintes imposées par le niveau stratégique qui peuvent s'exprimer en terme de qualité des produits, de respect des normes environnementales et de sécurité, de disponibilité des ressources (main d'oeuvre, machines), d'utilisation des ressources. À ces contraintes s'ajoute la notion de performance qui doit être en adéquation avec les objectifs généraux de l'entreprise. Ces performances peuvent s'exprimer en terme de productivité, de rentabilité, de qualité de produit ou de service. Le pilotage des systèmes de production se situe au carrefour du respect de contraintes (économiques, écologiques, techniques ...) et de l'optimisation de performances (productivité, rentabilité, qualité ...).

### 2.1 Configuration

La planification et l'ordonnancement sont des outils classiquement utilisés dans la littérature pour satisfaire le jeu des contraintes et des performances. La configuration d'un système de production vise à fixer la structure des ressources et de leur rapport aux activités et aux stocks.

De ce point de vue, la configuration constitue à nos yeux un paramètre de décision important qui peut avoir un impact fort sur les performances du système de production. C'est pourquoi nous nous intéressons dans ce mémoire à la *configuration* des systèmes de production.

## 2.2 Un problème d'optimisation

C'est le décideur qui a en charge la configuration des systèmes de production. Il doit proposer une configuration capable de faire face à des contraintes tout en optimisant des performances. Le décideur doit donc répondre à un problème d'optimisation. Pour apporter des solutions à ce problème, nous disposons des outils issus de la recherche opérationnelle.

## 3 Configuration des systèmes de production de biens ou de services en contexte certain

Le problème déterministe (toutes les données sont considérées comme connues et statiques) de configuration des systèmes de production est un problème d'optimisation.

Classiquement un problème d'optimisation  $\mathcal{P}$  consiste à trouver une solution  $\mathcal{S}$  qui optimise un critère d'optimalité  $z$  tout en vérifiant des contraintes, en partant du principe que tout est connu et statique. Souvent un scénario prévisionnel  $\mathcal{I}$  est considéré comme certain et statique et la solution optimale est instanciée sur ce scénario. Les solutions admissibles sur l'instance  $\mathcal{I}$  constituent l'ensemble  $\Upsilon_{\mathcal{I}}$ , elles sont les solutions qui ne transgressent pas les contraintes pour l'instance  $\mathcal{I}$ . Une solution optimale  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  pour le problème  $\mathcal{P}$  est une solution de  $\Upsilon_{\mathcal{I}}$  telle que la valeur du critère d'optimalité  $z$  pour la solution  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  sur  $\mathcal{I}$  notée  $z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*)$  est égale à l'optimum de  $z$  sur  $\Upsilon_{\mathcal{I}}$  noté  $z_{\mathcal{I}}^*$ . Si  $z$  est un critère à minimiser (resp. maximiser) alors  $z_{\mathcal{I}}^* = \min_{\mathcal{S} \in \Upsilon_{\mathcal{I}}} (z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}))$  (resp.  $z_{\mathcal{I}}^* = \max_{\mathcal{S} \in \Upsilon_{\mathcal{I}}} (z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}))$ ). On peut remarquer que  $z$  mesure une performance locale dans la mesure où il évalue la solution  $\mathcal{S}$  sur l'instance  $\mathcal{I}$ .

La démarche classique pour résoudre ce type de problème est l'approche prédictive représentée sur la figure 1.2. Un algorithme *hors ligne* – l'algorithme prédictif – calcule une solution optimale pour l'instance  $\mathcal{I}$ , considérée comme certaine et statique, et garantit une performance optimale pour cette instance évaluée par  $z_{\mathcal{I}}^*$ . En pratique le système de production est soumis à des perturbations de telle sorte que la solution  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  est appliquée à une instance réelle  $\mathcal{I}'$  qui est différente de l'instance prévisionnelle  $\mathcal{I}$ . Éventuellement l'application de la solution  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  à  $\mathcal{I}'$  peut conduire à une violation des contraintes, et la solution  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  n'est plus admissible sur  $\mathcal{I}'$ . Il peut également s'avérer que la performance réelle mesurée par  $z_{\mathcal{I}'}(\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*)$  soit très éloignée de la performance prévisionnelle  $z_{\mathcal{I}}^*$ .

Les limites de la démarche classique apparaissent clairement ici : elle ne permet pas de garantir des performances pour les instances réelles si celles-ci s'éloignent de l'instance prévisionnelle. La nécessité de prendre en compte les perturbations devient un enjeu.

## 4 Fermeture du contexte : prise en compte des perturbations

Nos travaux tentent d'apporter une contribution à la configuration des systèmes de production de biens ou de services. La problématique dans laquelle s'inscrivent nos travaux, consiste à 1) respecter des contraintes, 2) optimiser les performances du système de production.

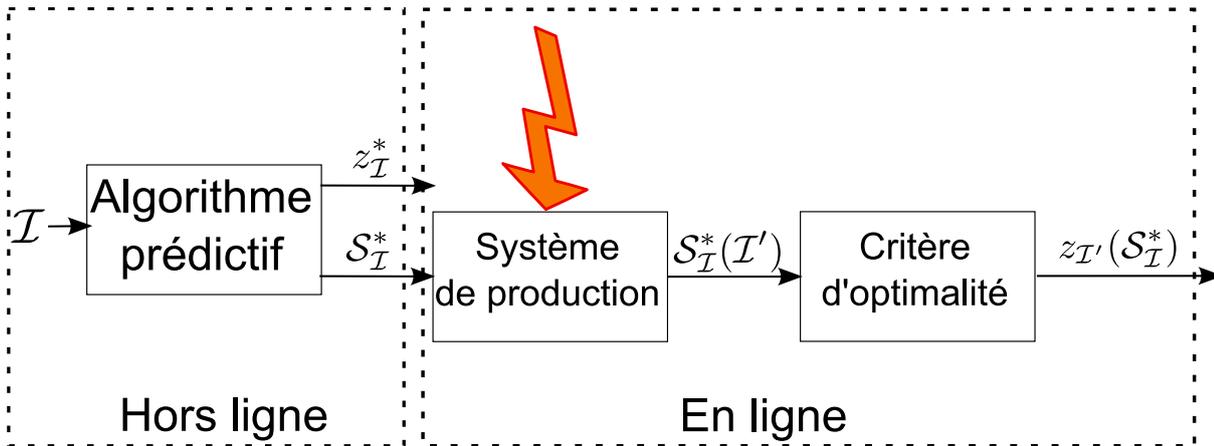


FIG. 1.2 – Vision automatique de l’approche prédictive

Classiquement les données d’un problème d’optimisation  $\mathcal{P}$  sont considérées comme déterministes. Cependant cette hypothèse est très optimiste vis-à-vis de la réalité industrielle. En effet, il est naturellement impossible d’évoluer en contexte certain. Face à cette réalité immuable, le décideur a besoin de disposer de solutions applicables dans un environnement perturbé. De notre point de vue, peu de travaux s’intéressent à la configuration des systèmes de production en contexte perturbé. Pourtant ce besoin répond à plusieurs enjeux. Premièrement le contexte concurrentiel actuel est tel qu’il oblige les industries à être les plus performantes possibles pour garantir leur pérennité. Cette pérennité passe par la gestion intégrée des perturbations par leur système de production. La configuration d’un système de production n’est pas remise en cause tous les jours et a un coût qui est rarement négligeable, elle se doit donc de résister aux perturbations pour rester valable le plus longtemps possible. Ensuite la configuration déterministe des systèmes de production constitue déjà en soi un problème très difficile d’optimisation. Trouver une solution optimale peut s’avérer très coûteux en temps alors que la solution optimale peut être très mauvaise en pratique si l’instance réelle  $\mathcal{I}'$  ne correspond pas à l’instance  $\mathcal{I}$  attendue comme sur la figure 1.2.

Le décideur, en plus de sa problématique de départ qui consistait à optimiser des objectifs tout en respectant des contraintes, doit donc tenir compte d’une troisième dimension, celle de construire des configurations qui garantissent des performances malgré les perturbations : c’est la notion de *robustesse*. Ces perturbations interviennent évidemment dans tous les objets d’un système de production (ressources, stocks, activités, flux de produits). Le problème  $\mathcal{P}$  ne se résume donc plus à une seule instance (considérée comme certaine et statique) mais représente un risque à couvrir (constitué par exemple d’un ensemble d’instances éventuellement infini qui décrit les perturbations).

Le besoin du décideur peut donc se résumer ainsi : ***construire des configurations qui garantissent des performances sur un risque à couvrir tout en respectant les contraintes***. Nos travaux cherchent à répondre à cet enjeu. Nous allons proposer au décideur des critères de performance et des approches de résolution pour répondre à cette problématique.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la problématique générale de configuration des systèmes de production de biens ou de services. Nous avons précisé le rôle et l'organisation décisionnelle des systèmes de production, puis nous avons situé nos travaux dans cette organisation décisionnelle à savoir le niveau opérationnel avec la configuration des systèmes de production. Dans ce contexte, nous nous sommes interrogés sur la problématique du décideur : optimiser les performances du système de production et respecter les contraintes. Nous avons ensuite enrichi cette problématique d'une troisième dimension qui correspond à un besoin pratique à savoir la prise en compte des perturbations.

Le chapitre suivant se propose de faire un état des lieux bibliographique de la prise en compte des perturbations en recherche opérationnelle et en aide à la décision. Il identifiera notamment les approches de résolution proposées dans la littérature, ainsi que les concepts liés à la prise en compte des perturbations.



## Chapitre 2

# Prise en compte des perturbations pour la recherche opérationnelle et l'aide à la décision

## 1 Introduction

La nécessité de tenir compte des perturbations dans les systèmes décisionnels est devenue un vrai enjeu dans la dernière décennie. Pour en témoigner, depuis ([Kouvelis et Yu, 1997](#)), la littérature s'est considérablement enrichie de travaux qui tiennent compte des perturbations dans l'approche qu'ils proposent. En France, un ouvrage collectif ([Billaut et al., 2005](#)) a vu le jour en 2005. Le point de départ de cet ouvrage était le besoin pour les chercheurs qui travaillaient dans ce domaine en France d'échanger leurs points de vue pour définir un cadre commun. Les auteurs s'intéressent à l'ordonnancement en contexte perturbé mais présentent des concepts qui peuvent être largement généralisés à la recherche opérationnelle et l'aide à la décision sous perturbations.

Le but de ce chapitre est justement de présenter les outils et les notions nécessaires à la prise en compte des perturbations en recherche opérationnelle et en aide à la décision. Pour cela, nous nous appuyerons très largement sur l'ouvrage cité précédemment.

Nous essaierons tout d'abord de mettre en évidence les perturbations. Sans être explicitement exhaustif, nous identifierons les sources de perturbation dans un système de production. La volonté de prendre en compte les perturbations peut nécessiter de disposer d'une modélisation non déterministe de ces perturbations, nous présenterons donc les modélisations les plus courantes de la littérature.

Les perturbations étant identifiées et éventuellement modélisées, il devient nécessaire de proposer au décideur des outils pour résoudre son problème avec prise en compte des perturbations. C'est pourquoi nous présenterons les approches de résolution proposées dans la littérature ainsi que le concept de robustesse.

## 2 Mise en évidence des perturbations

Il n'est pas nécessaire de justifier le fait que les systèmes de production sont naturellement soumis à des perturbations. Dans le désir de prendre en compte ces perturbations il convient d'identifier les sources de perturbations, les types de perturbations et ensuite de faire un choix

de modélisation.

## 2.1 Les sources de perturbations

A priori, tout peut être source de perturbation dans un système de production par rapport à une donnée prévisionnelle. Dans (Roy, 2005), l'auteur préfère parler d'«à-peu-près» et de «zones d'ignorance» en lieu et place de «perturbations». Il distingue de plus trois catégories de sources de perturbations :

- caractère imprécis, incertain, mal connu, voire indéterminé, des grandeurs d'entrée du problème,
- conditions de mise à exécution de la décision qui doit être arrêtée,
- caractère éminemment subjectif de divers aspects ayant trait à la faisabilité, à l'intérêt relatif et aux modes de traitement des diverses actions potentielles.

Ces sources peuvent affecter ce qu'il appelle des points de fragilité tels que les durées d'exécution d'une tâche, l'occurrence d'un événement...

Ces points de fragilités sont illustrées sur la figure 2.1 dans le cadre des systèmes de production.

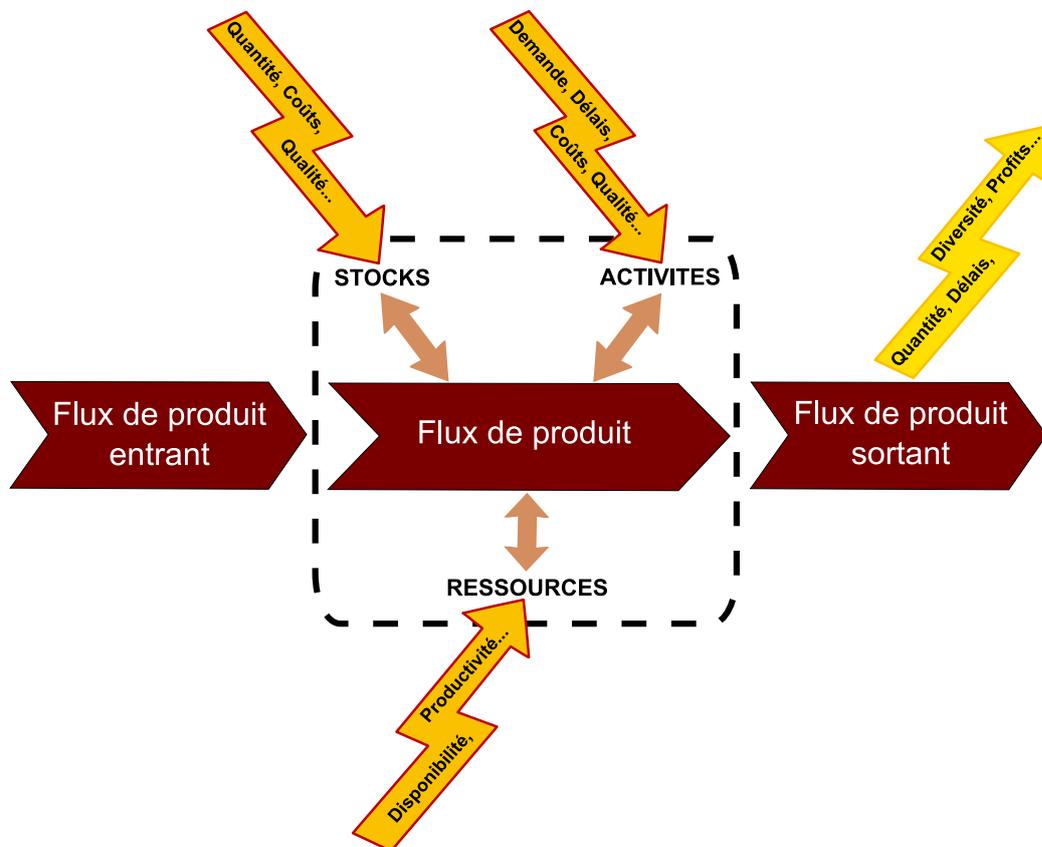


FIG. 2.1 – Système de production et sources de perturbations.

## 2.2 Les différents types de perturbation

Nous distinguons deux types de perturbation :

- Les aléas : ils sont liés à l’occurrence d’un événement non prévu tel que la panne d’une machine, la rupture de stocks. . .
- Les incertitudes : elles sont liées à la difficulté de connaître de façon précise et certaine les grandeurs factuelles d’un problème telles que les durées d’exécution, les dates limites, la demande, les coûts. . .

## 2.3 La modélisation des perturbations

Le besoin de prendre en compte les perturbations crée un besoin sous-jacent qui est celui de mettre en place des modèles non déterministes du fait de l’incertitude de certaines grandeurs. On retrouve classiquement dans la littérature quatre modèles qui sont notamment présentés dans le premier chapitre de (Billaut et al., 2005).

### 2.3.1 Modélisation stochastique

Les données (incertaines) du problème sont modélisées par des variables aléatoires. Les aléas sont eux modélisés par une probabilité d’occurrence. Plusieurs difficultés sont liées à cette modélisation. Tout d’abord cette modélisation nécessite d’avoir une connaissance statistique des données qui n’est pas toujours possible en pratique. Ensuite, cette modélisation conduit bien souvent à vouloir garantir des performances en espérance, ce que nous trouvons incompatible avec la notion de performance garantie. Cependant l’utilisation du niveau de service (Dauzère-Pérès et al., 2005) permet de limiter cet écueil. D’après Dauzère-Pérès et al. (2005), le niveau de service *permet de répondre à des questions telles que «quelle est la probabilité que cet ordonnancement se termine avant telle date ?»*. Le niveau de service, contrairement à l’espérance, permet de prendre en compte la variabilité et de ce point de vue en fait une mesure plus intéressante. Optimiser un niveau de service (et donc la probabilité qu’une solution remplisse une performance) se rapproche de la notion de performance garantie.

### 2.3.2 Modélisation ensembliste

Lorsqu’il est possible de maintenir la valeur des données incertaines dans des limites, les incertitudes peuvent être modélisées par des ensembles discrets ou continus.

#### Ensemble discret

Les données incertaines sont rangées dans un ensemble d’instances. Chaque instance fixe une valeur à l’ensemble des données du problème et représente une instanciation complète de celui-ci. Dans la littérature, les termes de «version» comme dans (Roy, 2002) ou de «scenario» comme dans (Kouvelis et Yu, 1997) sont parfois utilisées en lieu et place d’ «instance».

#### Ensemble continu

Chaque donnée incertaine est rangée dans un intervalle continu dont les bornes sont connues et considérées comme certaines.

### 2.3.3 Modélisation floue

On peut considérer la modélisation floue comme une généralisation de la modélisation ensembliste. Le terme «flou» se réfère au caractère imprécis des bornes sur les ensembles discrets ou continus. Les lecteurs peuvent consulter (Bourgade, 1998) pour avoir plus de détails concernant l'utilisation de la modélisation floue.

### 2.3.4 Modélisation sans aucune information

Il peut arriver parfois que la seule connaissance dont le décideur dispose soit le fait qu'une donnée est incertaine sans estimation aucune de cette donnée. La seule solution qui s'impose alors au décideur (si il souhaite prendre en compte cette incertitude) est d'utiliser une approche purement en ligne qui construit dynamiquement une solution qui évolue avec les connaissances progressives des données incertaines : c'est l'approche réactive présentée en section 3.2.

Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons les différents concepts liés à la prise en compte des perturbations en recherche opérationnelle, en partant du principe que c'est la modélisation par instances qui a été choisie par le décideur.

## 3 Prise en compte des perturbations : les approches de résolution

Les perturbations sont identifiées et modélisées, il est maintenant nécessaire de proposer une approche pour construire des solutions dont les performances restent acceptables malgré les perturbations. Il existe plusieurs approches dans la littérature dont le choix d'en privilégier une devant une autre dépend du problème considéré et de la façon dont les perturbations ont pu être modélisées.

### 3.1 L'approche proactive

Lorsque les connaissances sur les perturbations sont suffisantes, une première approche de résolution est l'approche proactive. Dans cette approche purement hors ligne, un algorithme statique profite de la connaissance sur les perturbations (qui représente un risque à couvrir) pour construire un ensemble de solutions (robustes) dont les performances correspondent à celles désirées malgré les perturbations. Le but est que la solution appliquée en ligne offre des performances en adéquation avec celles désirées par le décideur : c'est la notion de garantie de performances malgré les perturbations ou *robustesse*. Plutôt que de construire une solution optimale sur une instance prévisionnelle qui a de grande chance de ne pas correspondre à l'instance réelle, l'approche proactive propose de construire des solutions ayant une performance globale sur un ensemble d'instances qui représente un risque à couvrir.

### 3.2 L'approche réactive

L'approche proactive nécessite d'avoir des connaissances approfondies sur les perturbations. En pratique ce n'est pas toujours possible. Lorsque l'information n'est pas suffisante, il est possible de privilégier une approche purement réactive. Il s'agit d'une approche strictement en ligne qui consiste à construire une solution durant la phase dynamique. Un algorithme en ligne utilise

la connaissance progressive des grandeurs du problème pour construire une solution intermédiaire qui évolue au fur et à mesure des informations disponibles. Cette approche possède deux contraintes fortes :

- temps réel : il est nécessaire que la construction de la solution se fasse en temps réel pour que la solution intermédiaire soit en adéquation avec la réalité.
- stabilité : il est nécessaire que la solution intermédiaire proposée garantisse une stabilité dans le temps en terme de performance. Autrement dit une décision prise à l'instant  $t$  qui assure une certaine performance à la solution intermédiaire, ne doit pas impliquer de divergence en terme de performance à l'instant  $t + 1$  et aux instants suivants.

L'approche réactive pose une question essentielle : «comment évaluer la performance d'une solution intermédiaire?» Cette question est primordiale puisque le but de l'approche réactive est de tendre vers une solution finale dont la performance est maximale. Cette performance finale dépend clairement de la manière d'évaluer les solutions intermédiaires.

### 3.3 L'approche proactive/réactive

Lorsque l'approche proactive permet de construire un ensemble de plusieurs solutions, il est intéressant de la coupler à une approche réactive qui utilise les connaissances progressives des grandeurs du problème pour choisir la meilleure solution dans l'ensemble proposé par l'algorithme hors ligne.

Cette approche couplée permet également de réagir aux perturbations qui n'ont pas pu être prises en compte lors de la phase proactive : aléas, incertitudes qui font sortir une grandeur de l'intervalle qui la modélisait... Suite à un événement de ce type, l'algorithme dynamique a deux possibilités :

- «Réparer» la solution courante de façon à construire une solution proche de celles proposées lors de la phase proactive.
- Calculer une nouvelle solution en utilisant ou pas les solutions obtenues précédemment.

## 4 De la robustesse en recherche opérationnelle

Si nous imaginons maintenant que notre réflexion déjà bien avancée nous a amené à modéliser les perturbations et à choisir l'approche de résolution qui convenait le mieux à nos choix, il nous manque toujours un moyen d'évaluer les solutions fournies par un algorithme face aux perturbations.

Une façon d'évaluer une solution est de faire une *analyse de robustesse*. [Billaut et al. \(2005\)](#) proposent la définition suivante de la robustesse.

**Définition I.1** ([Billaut et al., 2005](#)). *Une solution est robuste si sa performance est peu sensible à l'incertitude des données et aux aléas.*

Cette définition, si elle a le mérite d'être consensuelle, reste imprécise dans le sens où il est possible de comprendre de beaucoup de manières différentes l'expression «être peu sensible aux perturbations». Une des manières de mesurer cette sensibilité est de faire de l'*analyse de sensibilité*.

## 4.1 L'analyse de sensibilité

Dans (Mahjoub et al., 2005), les auteurs définissent l'analyse de sensibilité de la manière suivante.

**Définition I.2** (Mahjoub et al., 2005). *Étant donné un problème d'optimisation  $\mathcal{P}$  et une instance  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{P}$ , soient  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  et  $z_{\mathcal{I}}^*$  une solution optimale pour  $\mathcal{I}$  et sa valeur. Une analyse de sensibilité sur  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{I}$  consiste à répondre (en partie au moins) aux questions suivantes :*

1. *Dans quel voisinage de  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  (resp.  $z_{\mathcal{I}}^*$ ) est-elle optimale ?*
2. *Dans quel voisinage de  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  reste-t-elle réalisable, avec une performance acceptable ?*
3. *Étant donné  $\mathcal{I}'$  voisine de  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  est-elle réalisable pour  $\mathcal{I}'$  et, si oui, quelle est sa dégradation de performance ?*
4. *Étant donné  $\mathcal{I}'$  voisine de  $\mathcal{I}$ , quelle est la nouvelle solution (resp. valeur) optimale ?*

*ainsi qu'aux variantes obtenues en remplaçant  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  par une solution quelconque dans les questions 2 et 3.*

En pratique, une façon de répondre à la question 1 consiste à calculer un rayon de stabilité au sens de (Sotskov et al., 1998).

**Définition I.3** (Sotskov et al., 1998). *Étant donné un problème  $\mathcal{P}$ , une instance  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{P}$  et une solution  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  optimale pour  $\mathcal{I}$ , le rayon de stabilité  $\rho(\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*, \mathcal{I})$  est le rayon maximum d'une boule centrée sur  $\mathcal{I}$  à l'intérieur de laquelle  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}}^*$  reste optimale.*

L'analyse de sensibilité permet donc d'évaluer la sensibilité d'une solution face aux incertitudes. En ce sens, elle ne permet pas de caractériser la solution. Pour caractériser une solution en terme de robustesse, on trouve dans la littérature beaucoup d'approches.

Aloulou et al. (2005) proposent de ranger ces différentes approches dans deux catégories :

- les approches qui définissent les solutions robustes comme étant celles qui *optimisent un critère de robustesse*,
- les approches qui définissent les solutions robustes comme étant celles qui *vérifient des conditions de robustesse*.

Nous proposons ci-après une vision large mais non exhaustive des approches de robustesse en respectant la catégorisation de (Aloulou et al., 2005).

## 4.2 Approches de robustesse basées sur l'optimisation d'un critère

### 4.2.1 L'approche minmax

L'approche minmax constitue de loin l'approche la plus utilisée dans la littérature. L'ouvrage référence en la matière est (Kouvelis et Yu, 1997).

**Définition I.4** *Une solution  $\mathcal{S}$  est minmax-robuste (resp. maxmin-robuste) si elle minimise (resp. maximise) un critère de robustesse  $\lambda$  sur un ensemble  $\mathcal{P}$  d'instances pour un critère d'optimalité  $z$  à minimiser (resp. maximiser).*

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons que le critère d'optimalité  $z$  est un critère de minimisation, sans perte de généralité.

### Critères de robustesse

Dans (Kouvelis et Yu, 1997) les auteurs définissent trois critères de robustesse (qu'il faut minimiser) :

- Le critère du *coût maximal* ou la *robustesse absolue* :  $\lambda_1(\mathcal{S}, z, \mathcal{P}) = \max_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}}(z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}))$
- Le critère de *regret maximal* ou la *déviaton robuste* :  $\lambda_2(\mathcal{S}, z, \mathcal{P}) = \max_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}}(z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}) - z_{\mathcal{I}}^*)$
- Le critère de *regret relatif* ou la *robustesse relative* :  $\lambda_3(\mathcal{S}, z, \mathcal{P}) = \max_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}}\left(\frac{z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}) - z_{\mathcal{I}}^*}{z_{\mathcal{I}}^*}\right)$

### Limites de l'approche minmax

L'approche minmax se place systématiquement dans le pire des cas pour mesurer la robustesse d'une solution. Ce constat fait de l'approche minmax une approche très pessimiste. De plus mesurer la performance pour la pire des instances implique de ne pas la mesurer pour les autres instances. Soit  $\mathcal{S}_0$  une solution minmax-robuste. Il existe éventuellement une solution  $\mathcal{S}'$  légèrement plus mauvaise que  $\mathcal{S}_0$  sur la pire des instances mais meilleure que  $\mathcal{S}_0$  sur toutes les autres instances. Le décideur aurait peut-être privilégié la solution  $\mathcal{S}'$ , mais avec l'approche minmax, il ne dispose même pas de l'information.

#### 4.2.2 L'OWA-robustesse

Étant données les limites de l'approche précédente, Galand et Spanjaard (2007) proposent d'utiliser la moyenne ordonnée pondérée (OWA, Ordered Weighted Average) pour évaluer la robustesse d'une solution sur l'ensemble des instances plutôt que sur la pire instance uniquement. De fait cette approche nécessite que l'ensemble d'instances  $\mathcal{P}$  soit un ensemble fini.

**Définition I.5** (Galand et Spanjaard, 2007). *Étant donné un vecteur  $x \in \mathbb{R}^q$ , sa moyenne ordonnée pondérée est  $OWA(x) = \sum_{i=1}^q w_i x_{(i)}$  où  $x_{(1)} \geq \dots \geq x_{(q)}$  représentent les composantes de  $x$  triées en ordre décroissant et  $\sum_{i=1}^q w_i = 1$ .*

Pour définir l'OWA-robustesse, Galand et Spanjaard (2007) utilisent des opérateurs OWA tels que les poids sont décroissants (*i.e.*  $w_1 \geq \dots \geq w_q$ ) : ce choix illustre le fait que plus l'instance est pénalisante pour la solution, plus on lui accorde de poids pour trouver la solution la plus robuste au sens de ce critère.

**Définition I.6** (Galand et Spanjaard, 2007). *Soient un ensemble  $\mathcal{P}$  de  $q$  instances, une solution  $\mathcal{S}$ , et le vecteur  $\mathcal{Z}^{\mathcal{S}} = (z_1^{\mathcal{S}}, \dots, z_q^{\mathcal{S}})$  tel que  $z_k^{\mathcal{S}} = z_{\mathcal{I}_k}(\mathcal{S})$ . La solution  $\mathcal{S}$  est OWA-robuste si elle minimise  $OWA(\mathcal{Z}^{\mathcal{S}})$ .*

En ce sens l'approche OWA se rapproche de l'agrégation de critères en optimisation multi-critère. Ici les critères sont les performances sur les instances.

### Une généralisation de la robustesse absolue

Galand et Spanjaard (2007) soulignent le fait que l'opérateur OWA englobe le critère du *coût maximal*. En effet, il suffit de prendre les poids  $w_1 = 1, w_2 = 0, \dots, w_q = 0$  pour que  $OWA = \lambda_1$ .

### Limites de l'approche

L'approche *OWA* se place dans un contexte où le nombre d'instances est fini, ce qui en pratique n'est pas toujours possible. Ensuite les premières applications de cette approche (Galand et Spanjaard, 2007) ont montré que le nombre d'instances considérées est un paramètre crucial dans la difficulté de résolution. Enfin cette approche nécessite que le décideur soit capable d'évaluer les poids  $w$ . Et le choix des poids est essentiel tout comme dans l'agrégation de critères en optimisation multicritère.

## 4.3 Les approches de robustesse basées sur la vérification de conditions de robustesse

Les approches précédentes basées sur l'optimisation d'un critère possèdent une limite majeure qui est celle de ne pas tenir compte du caractère subjectif de la robustesse. En effet, les approches précédentes ne laissent pas de liberté au décideur pour fixer ce qu'il attend d'une solution robuste. Les approches basées sur la vérification de conditions de robustesse permettent de rendre au décideur ce pouvoir puisque c'est lui qui va fixer ce qu'il attend d'une solution robuste au moyen de conditions de robustesse.

### 4.3.1 La $p$ -robustesse

Dans (Kouvelis et al., 1992), les auteurs proposent de définir la robustesse comme étant la capacité d'une solution à garantir une performance qui ne s'éloigne pas de plus de  $p\%$  de l'optimal, quelle que soit l'instance de  $\mathcal{P}$ . Les auteurs de (Snyder, 2006) appellent cette robustesse la  $p$ -robustesse.

**Définition I.7** Une solution  $\mathcal{S}$  est  $p$ -robuste sur l'ensemble d'instances  $\mathcal{P}$  si elle vérifie la condition suivante :

$$\lambda_3(\mathcal{S}, z, \mathcal{P}) \leq p$$

### 4.3.2 La $\beta$ -robustesse

Dans (Kalai et Lamboray, 2007), les auteurs comparent deux approches de robustesse dont l'une est la même approche que (Kouvelis et al., 1992) mais en considérant le critère du *regret maximal* ( $\lambda_2$ ). Ils définissent la robustesse comme étant la capacité d'une solution à garantir une performance qui ne s'éloigne pas d'un certain seuil de l'optimum, quelle que soit l'instance de  $\mathcal{P}$ . Ce seuil toléré est noté  $\beta$ . Les auteurs appellent cette robustesse la  $\beta$ -robustesse.

**Définition I.8** (Kalai et Lamboray, 2007). Une solution  $\mathcal{S}$  est  $\beta$ -robuste sur l'ensemble d'instances  $\mathcal{P}$  si elle vérifie la condition suivante :

$$\lambda_2(\mathcal{S}, z, \mathcal{P}) \leq \beta$$

### 4.3.3 La $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse

Rossi (2003) englobe les deux approches précédentes pour n'importe quel critère de robustesse. Il définit la robustesse comme étant la capacité d'une solution à garantir un niveau de performance  $\mathcal{L}_\lambda$  selon un critère de robustesse  $\lambda$ , quelle que soit l'instance de  $\mathcal{P}$ . Pour rester cohérent avec les deux approches précédentes nous appelons cette robustesse la  $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse.

**Définition I.9** Une solution  $\mathcal{S}$  est  $\mathcal{L}_\lambda$ -robuste sur l'ensemble d'instances  $\mathcal{P}$  relativement au critère de robustesse  $\lambda$  si elle vérifie la condition suivante :

$$\lambda(\mathcal{S}, z, \mathcal{P}) \leq \mathcal{L}_\lambda$$

**Une généralisation de la  $p$ - et la  $\beta$ -robustesse** La  $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse englobe la  $p$ - et la  $\beta$ -robustesse. En effet il suffit de choisir  $\lambda = \lambda_3$  et de poser  $\mathcal{L}_\lambda = p$  pour que la  $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse soit équivalente à la  $p$ -robustesse. De la même manière il suffit de choisir  $\lambda = \lambda_2$  et de poser  $\mathcal{L}_\lambda = \beta$  pour que la  $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse soit équivalente à la  $\beta$ -robustesse.

#### 4.3.4 L' $\alpha$ -robustesse lexicographique

Les reproches qui ont été faits à l'approche minmax restent vrais pour la  $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse dans le cas où le critère de robustesse utilisé est  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  ou tout autre critère qui mesure une performance dans le pire des cas.

C'est pourquoi Kalai (2006) propose une nouvelle approche de robustesse qui prend en compte toutes les instances plutôt que la pire instance. Tout comme l'OWA-robustesse, cette approche nécessite que l'ensemble  $\mathcal{P}$  d'instances soit de cardinal fini  $q$ . Les auteurs définissent d'abord le vecteur  $\mathcal{Z}(\mathcal{S}) = (z_{\mathcal{I}_1}(\mathcal{S}), \dots, z_{\mathcal{I}_q}(\mathcal{S}))$ .

**Définition I.10** (Kalai, 2006). Le vecteur de désutilité est le vecteur  $\widehat{\mathcal{Z}}(\mathcal{S}) = (\widehat{z}_1(\mathcal{S}), \dots, \widehat{z}_q(\mathcal{S}))$  obtenu en ordonnant les coordonnées de  $\mathcal{Z}(\mathcal{S})$  dans l'ordre décroissant.

**Définition I.11** (Kalai et Vanderpooten, 2006). La solution idéale (fictive) est la solution  $\mathcal{S}^*$  telle que  $\widehat{\mathcal{Z}}(\mathcal{S}^*) = (\widehat{z}_1(\mathcal{S}_1^*), \dots, \widehat{z}_q(\mathcal{S}_q^*))$ .  $\mathcal{S}_k^*$  étant la solution qui vérifie  $\widehat{z}_k(\mathcal{S}_k^*) = \min_{\mathcal{S} \in \Upsilon} \widehat{z}_k(\mathcal{S})$ .

où  $\Upsilon$  est l'ensemble des solutions qui doivent être évaluées en terme de robustesse.  $\Upsilon$  peut être par exemple l'ensemble des solutions admissibles sur l'ensemble  $\mathcal{P}$  ou encore l'ensemble des solutions optimales.

**Définition I.12** (Kalai et Vanderpooten, 2006). Une solution  $\mathcal{S}$  est  $\alpha$ -robuste lexicographique si elle vérifie les conditions suivantes :

$$\widehat{z}_k(\mathcal{S}) - \widehat{z}_k(\mathcal{S}_k^*) \leq \alpha, \quad \forall k \leq q$$

**Une relaxation de la  $\beta$ -robustesse** Dans (Kalai et Lamboray, 2007), les auteurs démontrent que l' $\alpha$ -robustesse lexicographique est une relaxation de la  $\beta$ -robustesse. En ce sens, si  $\beta \leq \alpha$  alors l'ensemble des solutions  $\beta$ -robustes est inclus dans l'ensemble des solutions  $\alpha$ -robustes lexicographiques.

## 4.4 Application des approches de robustesse à un exemple

Afin d'illustrer les différentes approches de robustesse présentées dans les sections précédentes, nous allons les appliquer à un exemple simple issu de l'ordonnancement.

Nous considérons le problème  $1//\sum C_j$  qui consiste à ordonner  $n$  tâches de durée respective  $p_j$  (et disponibles à l'instant  $t = 0$ ) sur une machine de telle sorte à minimiser les encours mesurés par  $z = \sum C_j$  où  $C_j$  représente la date de fin de la tâche  $j$ . Une solution  $\mathcal{S}$  à un tel problème fixe un ordre des tâches sur la machine  $j$ . En contexte certain, ce problème est facile

puisqu'il existe un algorithme polynomial pour le résoudre qui consiste à ordonnancer les tâches par durée croissante (règle SPT).

Dans notre exemple, nous considérons cinq tâches pour lesquelles il existe des incertitudes sur les durées. Cependant, nous partons du principe que le décideur a identifié un ensemble  $\mathcal{P}$  de trois instances  $\mathcal{I}_1$ ,  $\mathcal{I}_2$ ,  $\mathcal{I}_3$ . Ces trois instances sont décrites dans le tableau 2.1.

TAB. 2.1 – Instances du problèmes  $1//\sum C_j$

	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3$
$p_1$	9	5	2
$p_2$	5	3	5
$p_3$	3	2	7
$p_4$	2	9	3
$p_5$	7	7	9
$\sum p_j$	26	26	26

À chacune des instances  $\mathcal{I}_k$  nous associons sa solution optimale  $\mathcal{S}_k^*$  et la valeur optimale du critère correspondant  $z_k^*$ . On peut les retrouver dans le tableau 2.2.

TAB. 2.2 – Solutions optimales et valeurs associées pour les différentes instances de  $1//\sum C_j$

	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3$
$\mathcal{S}_k^*$	{4, 3, 2, 5, 1}	{3, 2, 1, 5, 4}	{1, 4, 2, 3, 5}
$z_k^*$	60	60	60

La solution  $\mathcal{S}_1^* = \{4, 3, 2, 5, 1\}$  consiste à exécuter en premier lieu la tâche 4, puis la tâche 3, suivie des tâches 2 et 5 et enfin la tâche 1.

Le tableau 2.3 dresse le bilan des performances des solutions appliquées aux différentes instances du problème.

TAB. 2.3 – Performances des solutions sur les différentes instances du problème

$z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3$
$\mathcal{S}_1^*$	60	81	78
$\mathcal{S}_2^*$	78	60	82
$\mathcal{S}_3^*$	81	81	60

#### 4.4.1 Utilisation des approches basées sur la minimisation d'un critère de robustesse

Nous proposons tout d'abord d'utiliser les approches de robustesse qui utilisent la minimisation des critères  $\lambda_2$  et *OWA* pour discriminer les solutions  $\mathcal{S}_1^*$ ,  $\mathcal{S}_2^*$ ,  $\mathcal{S}_3^*$ . Nous définissons les poids  $w$  de l'opérateur *OWA* par  $w_1 = \frac{1}{2}$ ,  $w_2 = \frac{1}{3}$  et  $w_3 = \frac{1}{6}$ .

Le tableau 2.4 donne les valeurs des déviations entre  $z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$  et  $z_{\mathcal{I}}^*$  pour chacune des instances et chacune des solutions.

TAB. 2.4 – Valeurs des déviations pour chacune des instances et chacune des solutions

$z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}) - z_{\mathcal{I}}^*$	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3$
$\mathcal{S}_1^*$	0	21	18
$\mathcal{S}_2^*$	18	0	22
$\mathcal{S}_3^*$	21	21	0

Le tableau 2.5 donne les valeurs des deux critères de robustesse pour les solutions.

TAB. 2.5 – Évaluation des critères de robustesse sur les différentes solutions

	$\mathcal{S}_1^*$	$\mathcal{S}_2^*$	$\mathcal{S}_3^*$
$\lambda_2(\mathcal{S}, z, \mathcal{P})$	21	22	21
<i>OWA</i>	76,5	77	77,5

Le critère  $\lambda_2$  ne permet pas de discriminer les solutions  $\mathcal{S}_1^*$  et  $\mathcal{S}_3^*$  qui sont les plus robustes d'après ce critère. Cet exemple est intéressant car il nous permet de mettre en avant une des limites de l'approche minmax. En regardant le tableau 2.4, qui donne les valeurs de  $z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}) - z_{\mathcal{I}}^*$  pour les différentes solutions, on peut se rendre compte que  $\mathcal{S}_1^*$  a des meilleures performances globales que  $\mathcal{S}_3^*$ . Si le décideur avait à sa disposition ces informations, il privilégierait certainement la solution  $\mathcal{S}_1^*$  devant la solution  $\mathcal{S}_3^*$ . Le critère  $\lambda_2$  ne permet pas de le faire car il ne s'intéresse qu'au pire cas.

Le critère *OWA*, qui évalue les solutions sur l'ensemble des instances permet justement de faire cette discrimination en faveur de  $\mathcal{S}_1^*$ . Notons tout de même ici que la notion de robustesse dépend clairement du critère de robustesse. En effet, selon le critère *OWA*,  $\mathcal{S}_2^*$  est plus robuste que  $\mathcal{S}_3^*$ , contrairement à ce qu'annonce le critère  $\lambda_2$ .

Nous n'avons étudié, pour l'instant, la robustesse que parmi les solutions optimales. Étudions maintenant la solution  $\tilde{\mathcal{S}} = \{3, 2, 4, 1, 5\}$ . Ses performances sont répertoriées dans le tableau 2.6.

TAB. 2.6 – Performances de la solution  $\tilde{\mathcal{S}}$

	$\mathcal{I}_1$	$\mathcal{I}_2$	$\mathcal{I}_3$
$z_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathcal{S}})$	66	66	77
$z_{\mathcal{I}}(\tilde{\mathcal{S}}) - z_{\mathcal{I}}^*$	6	6	17
$\lambda_2(\tilde{\mathcal{S}}, z, \mathcal{P})$	17		
<i>OWA</i>	71,5		

On peut voir que  $\tilde{\mathcal{S}}$  est plus robuste que les solutions optimales. De manière générale, les solutions robustes ne sont pas à chercher parmi les seules solutions optimales.

#### 4.4.2 Utilisation des approches basées sur la vérification de conditions de robustesse

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, les approches de robustesse basées sur la vérification de conditions de robustesse permettent de prendre en compte le caractère subjectif lié à la robustesse. Nous illustrons cette réalité sur l'exemple  $1//\sum C_j$  avec la  $\beta$ -robustesse et l' $\alpha$ -robustesse lexicographique.

Nous allons évaluer les solutions  $\mathcal{S}_1^*$ ,  $\mathcal{S}_2^*$ ,  $\mathcal{S}_3^*$  et  $\tilde{\mathcal{S}}$  à l'aide de la  $\beta$ -robustesse et de l' $\alpha$ -robustesse lexicographique. On peut retrouver le vecteur de désutilité pour chacune des solutions dans le tableau 2.7. Les écarts entre les vecteurs de désutilité des différentes solutions et celui de la solution idéale fictive sont donnés dans le tableau 2.8.

TAB. 2.7 – Vecteur de désutilité pour les solutions  $\mathcal{S}_1^*$ ,  $\mathcal{S}_2^*$ ,  $\mathcal{S}_3^*$ ,  $\tilde{\mathcal{S}}$  ainsi que la solution idéale fictive  $\mathcal{S}^*$

$\widehat{\mathcal{Z}}(\mathcal{S})$	$\mathcal{S}_1^*$	$\mathcal{S}_2^*$	$\mathcal{S}_3^*$	$\tilde{\mathcal{S}}$	$\mathcal{S}^*$
$\widehat{\mathcal{Z}}_1(\mathcal{S})$	81	82	81	77	77
$\widehat{\mathcal{Z}}_2(\mathcal{S})$	78	78	81	66	66
$\widehat{\mathcal{Z}}_3(\mathcal{S})$	60	60	60	66	60

TAB. 2.8 – Écarts entre les vecteurs de désutilité des solutions et le vecteur de désutilité de la solution idéale fictive

$\widehat{\mathcal{Z}}_k(\mathcal{S}) - \widehat{\mathcal{Z}}_k(\mathcal{S}^*)$	$\mathcal{S}_1^*$	$\mathcal{S}_2^*$	$\mathcal{S}_3^*$	$\tilde{\mathcal{S}}$
$\widehat{\mathcal{Z}}_1(\mathcal{S}) - \widehat{\mathcal{Z}}_1(\mathcal{S}^*)$	4	5	4	0
$\widehat{\mathcal{Z}}_2(\mathcal{S}) - \widehat{\mathcal{Z}}_2(\mathcal{S}^*)$	12	12	15	0
$\widehat{\mathcal{Z}}_3(\mathcal{S}) - \widehat{\mathcal{Z}}_3(\mathcal{S}^*)$	0	0	0	6

À l'aide des différents tableaux issus de cet exemple, nous pouvons dresser le tableau 2.9 qui donne les ensembles de solutions robustes suivant les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ .

On peut voir que si le décideur est trop exigeant, il se peut qu'aucune solution ne soit robuste. Si il ne l'est pas assez, il se retrouvera avec toutes les solutions comme étant robustes et il sera incapable de les discriminer.

#### 4.5 Comparaisons des approches et bibliographie associée

Le tableau 2.10 dresse un bilan des différentes approches de robustesse que nous venons de présenter. Il fait la synthèse des avantages et des limites de chacune des approches et donne également une courte bibliographie associée à chacune des approches.

#### 4.6 Robustesse versus optimalité

Si l'optimalité peut être vue comme une performance locale sur une instance, la robustesse est une performance globale sur un ensemble d'instances. Vouloir une performance globale à un prix : celui d'accepter que les performances ne seront éventuellement pas optimales pour une

TAB. 2.9 – Solutions robustes suivant les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$ 

Valeurs de $\alpha$ et $\beta$	Ensemble des solutions $\beta$ -robustes	Ensemble des solutions $\alpha$ -robustes lexicographiques
$(\alpha, \beta) \leq 5$	$\{\emptyset\}$	$\{\emptyset\}$
$6 \leq (\alpha, \beta) \leq 11$	$\{\emptyset\}$	$\{\tilde{\mathcal{S}}\}$
$12 \leq (\alpha, \beta) \leq 14$	$\{\emptyset\}$	$\{\mathcal{S}_1^*; \mathcal{S}_2^*; \tilde{\mathcal{S}}\}$
$15 \leq (\alpha, \beta) \leq 16$	$\{\emptyset\}$	$\{\mathcal{S}_1^*; \mathcal{S}_2^*; \mathcal{S}_3^*; \tilde{\mathcal{S}}\}$
$17 \leq (\alpha, \beta) \leq 20$	$\{\tilde{\mathcal{S}}\}$	$\{\mathcal{S}_1^*; \mathcal{S}_2^*; \mathcal{S}_3^*; \tilde{\mathcal{S}}\}$
$(\alpha, \beta) = 21$	$\{\mathcal{S}_1^*; \mathcal{S}_3^*; \tilde{\mathcal{S}}\}$	$\{\mathcal{S}_1^*; \mathcal{S}_2^*; \mathcal{S}_3^*; \tilde{\mathcal{S}}\}$
$(\alpha, \beta) \geq 22$	$\{\mathcal{S}_1^*; \mathcal{S}_2^*; \mathcal{S}_3^*; \tilde{\mathcal{S}}\}$	$\{\mathcal{S}_1^*; \mathcal{S}_2^*; \mathcal{S}_3^*; \tilde{\mathcal{S}}\}$

instance donnée. Les approches de robustesse basées sur la vérification de conditions de robustesse permettent de fixer le prix que le décideur est prêt à payer. Plus le prix qu'il est prêt à payer est faible, plus la possibilité de trouver une solution robuste l'est également. Si nous reprenons l'exemple de la section 4.4, on peut voir que le décideur doit être prêt à s'éloigner de près de 30% de l'optimal pour trouver une solution robuste parmi  $\{\mathcal{S}_1^*; \mathcal{S}_2^*; \mathcal{S}_3^*; \tilde{\mathcal{S}}\}$ . En effet, d'après le tableau 2.9, il faut que  $\beta$  soit supérieur ou égal à 17 pour que  $\tilde{\mathcal{S}}$  soit une solution robuste au sens de la  $\beta$ -robustesse : ce qui veut dire d'après la définition de la  $\beta$ -robustesse que la solution peut s'éloigner de 17 de l'optimal soit un peu moins de 30% de 60 qui est la valeur optimale pour chacune des instances prises en compte.

## 5 Processus complet de résolution

Les différentes approches de robustesse présentées précédemment propose des outils pour évaluer la robustesse d'une solution mais ne donne pas de méthode de résolution.

Billaut et al. (2005) propose justement un processus complet de résolution en ordonnancement sous incertitudes parfaitement généralisable à notre problématique.

Le processus de résolution proposé par (Billaut et al., 2005) s'articule autour de trois étapes :

1. Étape 0 : Définition du problème statique. Elle comprend donc la définition des spécifications classiques du problème déterministe mais elle implique également la spécification des incertitudes et leur modélisation. La notion de qualité d'une solution doit également être précisée à cette étape avec le critère d'optimalité  $z$  et le critère de robustesse  $\lambda$ .
2. Étape 1 : Calcul d'un ensemble de solutions par un algorithme proactif.
3. Étape 2 : Calcul d'une solution unique par un algorithme réactif.

L'étape 1 ou 2 est facultative. Si il n'y a que l'étape 1, le processus se résume à l'approche proactive présentée en section 3.1. Si il n'y a que l'étape 2, le processus se résume à l'approche réactive présentée en section 3.2. Si les deux étapes sont présentes, le processus correspond à une approche proactive/réactive présentée en section 3.3.

Si nous choisissons la  $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse pour évaluer la robustesse d'une solution, le processus complet de résolution peut être illustré à l'aide de la figure 2.2.

D'après la figure 2.2, un algorithme proactif calcule, pour un ensemble d'instances  $\mathcal{P}$ , une solution  $\mathcal{S}_0$  dont la performance globale mesurée par  $\lambda(\mathcal{S}_0, z, \mathcal{P})$  vérifie la condition de robustesse :

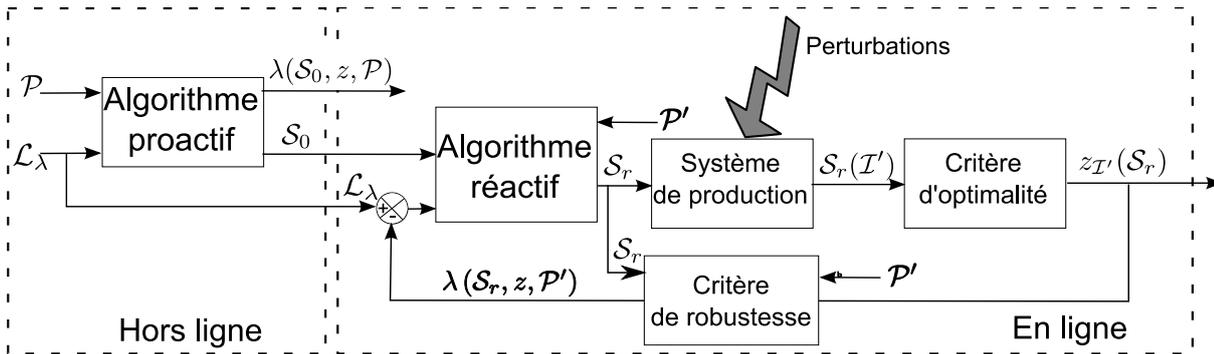


FIG. 2.2 – Vision automatique du processus complet de résolution

$\lambda(\mathcal{S}_0, z, \mathcal{P}) \leq \mathcal{L}_\lambda$ .  $\mathcal{L}_\lambda$  est une consigne. En ligne, des perturbations peuvent survenir de telle sorte que l'instance réelle ne soit plus dans  $\mathcal{P}$ . L'ensemble  $\mathcal{P}$  est donc enrichi de cette nouvelle instance pour donner  $\mathcal{P}'$ . Si les performances globales sur  $\mathcal{P}'$  de la solution  $\mathcal{S}_0$  ne respectent plus la consigne  $\mathcal{L}_\lambda$  alors l'algorithme réactif calcule une nouvelle solution  $\mathcal{S}_r$  qui garantit la performance globale sur  $\mathcal{P}'$ .

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les concepts et les outils liés à la prise en compte des perturbations en recherche opérationnelle et aide à la décision. Cette étude s'est largement appuyée sur le cadre défini par le groupe de recherche «Flexibilité et Robustesse» du GOTHa (Groupe d'Ordonnement Théorique et Appliqué) dont le travail a abouti à l'ouvrage collectif (Billaut et al., 2005).

Nous nous inscrivons volontairement dans le cadre défini par (Billaut et al., 2005) qui propose un processus complet de résolution des problèmes d'optimisation en contexte incertain. Dans la suite de ce mémoire nous nous efforcerons de nous inscrire dans ce cadre pour l'application à un système de production de biens dans la partie II et un système de production de services dans la partie III.

TAB. 2.10 – Comparaison des différentes approches de robustesse et bibliographie associée

Approches	Hypothèses	Avantages	Limites	Références
Qui optimisent un critère de robustesse	minmax-robustesse	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Valable pour un ensemble non fini d'instances</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Considère uniquement le pire cas</li> <li>– Ne tient pas compte du caractère subjectif de la robustesse</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <a href="#">Kouvelis et Yu (1997)</a></li> </ul>
	$OWA$ -robustesse	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Prend en compte toutes les instances</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Détermination des poids</li> <li>– Le nombre d'instances est un paramètre crucial dans la difficulté de résolution</li> <li>– Nombre fini d'instances pas toujours possible dans la réalité</li> <li>– Ne tient pas compte du caractère subjectif de la robustesse</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <a href="#">Galand et Spanjaard (2007)</a></li> <li>– <a href="#">Perry et Spanjaard (2003, 2006)</a></li> </ul>
Qui vérifient des conditions de robustesse	$p$ -robustesse	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Valable pour un ensemble non fini d'instances</li> <li>– Tient compte du caractère subjectif de la robustesse</li> <li>– Permet de chercher un ensemble de solutions robustes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Considère uniquement le pire cas</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <a href="#">Kouvelis et al. (1992)</a></li> <li>– <a href="#">Snyder (2006)</a></li> </ul>
	$\beta$ -robustesse			<ul style="list-style-type: none"> <li>– <a href="#">Kalai et Lamboray (2007)</a></li> </ul>
	$\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse		<ul style="list-style-type: none"> <li>– Considère uniquement le pire cas (suivant le critère de robustesse choisi)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <a href="#">Aubry et al. (2005a, b, 2006a, b, 2007a, b)</a></li> <li>– <a href="#">Rossi (2003)</a></li> <li>– <a href="#">Rossi et al. (2004, 2005)</a></li> </ul>
$\alpha$ -robustesse lexicographique	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Ensemble fini d'instances</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Considère toutes les instances</li> <li>– Tient compte du caractère subjectif de la robustesse</li> <li>– Permet de chercher un ensemble de solutions robustes</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– Le nombre d'instances est un paramètre crucial dans la difficulté de résolution</li> <li>– Nombre fini d'instances pas toujours possible dans la réalité</li> <li>– Difficile à interpréter pour le décideur : que mesure <math>\alpha</math>? Qu'est-ce qui est garanti?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <a href="#">Aloulou et al. (2005)</a></li> <li>– <a href="#">Kalai et al. (2005)</a></li> <li>– <a href="#">Kalai et Vanderpooten (2006)</a></li> <li>– <a href="#">Kalai (2006)</a></li> <li>– <a href="#">Kalai et Lamboray (2007)</a></li> </ul>



## Deuxième partie

# Configuration robuste d'un système de production de biens : un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions



## Chapitre 3

# Étude du problème statique : étape 0

### 1 Introduction : un bref historique de l'étude de ce problème

L'objet de ce chapitre est d'étudier le problème statique issu du problème plus général de prise en compte des incertitudes sur la demande pour la configuration robuste d'un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions. Ce que nous entendons par problème statique au sens de (Billaut et al., 2005) est le problème où toutes les données sont considérées comme certaines et connues.

Avant de commencer notre étude, nous aimerions revenir sur la genèse de ce problème. Si le problème actuel ressemble beaucoup à un problème théorique, il trouve son origine dans le milieu industriel.

En effet, l'étude inductive du problème qui nous concerne dans cette partie a été entamée lors de la thèse d'André Rossi (Rossi, 2003). Il a étudié un atelier particulier de la chaîne de production des semiconducteurs : l'atelier de photolithographie. Cet atelier a la particularité de subir des flux de produits réentrants. Cela fait de lui un atelier goulot pour l'ensemble de la production et donc d'être le lieu où se concentre la plupart des enjeux de l'entreprise. La configuration de cet atelier en devient critique, d'où la nécessité de prendre en compte les incertitudes sur la demande.

Dans (Rossi, 2003) les machines de l'atelier de photolithographie ont été modélisées par des machines parallèles partiellement multifonctions.

Le travail d'André Rossi a principalement consisté à modéliser ce problème, à définir le critère de performance de l'équilibre de la charge, et à proposer un outil d'évaluation et de mesure de la robustesse offerte par la configuration de l'atelier. L'acquisition de cet outil pour évaluer la capacité de l'atelier à garantir l'existence d'un plan de production équilibré malgré les perturbations sur la demande nous a permis de prolonger ce travail en le généralisant aux ateliers de machines parallèles partiellement multifonctions (Brucker et al., 1997; Vaik, 2005).

Nous proposons notamment d'utiliser l'outil développé par André Rossi pour construire la configuration qui minimise son coût et qui maximise son niveau de robustesse : c'est l'objet du chapitre 4.

Nous nous intéressons dans ce chapitre au problème statique qui considère que la demande est certaine et connue et qui consiste à construire la configuration la moins onéreuse tout en garantissant l'existence d'un plan de production équilibré qui satisfait une demande prévisionnelle.

## 2 Les machines parallèles partiellement multifonctions : particularités

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la configuration d'un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions. Classiquement les machines parallèles partiellement multifonctions sont modélisées de la façon suivante (Brucker et al., 1997; Vaik, 2005) : chaque machine est associée à un sous-ensemble de produits qu'elle est capable de produire a priori. Nous utilisons un modèle différent mais équivalent : l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions est vu comme un atelier de machines parallèles. Cependant il existe des *contraintes technologiques* qui empêchent d'associer certains produits à certaines machines pour des raisons physiques ou technologiques. De plus lorsqu'il n'y a pas de contrainte technologique, le fait d'associer une machine à un certain type de produit implique le réglage et la mise en place d'une ressource sur cette machine. Cette action se traduit par la *qualification* de la machine pour le type de produit considéré. L'ensemble des qualifications représente exactement la *configuration* de l'atelier. De plus qualifier une machine pour un type de produit induit un coût. Ce coût est infini lorsqu'une contrainte technologique interdit la qualification. Le coût est fini lorsqu'il n'y a pas de contrainte technologique.

Lorsque le coût est fini, une décision doit être prise : la machine doit-elle être qualifiée pour le produit en question ? Répondre à cette question pour chaque machine et chaque type de produit permet de définir la *configuration* de l'atelier.

## 3 Modélisation de l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions

Un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions est constitué de  $m$  machines. L'ensemble  $\{1, \dots, m\}$  des machines est noté  $\mathcal{M}$ . Chacune de ces machines est technologiquement capable de ne traiter qu'un sous-ensemble de types de produit parmi  $n$  types. L'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  des types de produits est noté  $\mathcal{N}$ .

Nous présentons dans cette section comment nous avons modélisé les différents objets de notre problème et comment nous avons pris en compte leurs caractéristiques.

### 3.1 Caractéristiques des machines

#### 3.1.1 Les contraintes technologiques

Un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions se caractérise notamment par des contraintes technologiques. Ces données sont modélisées par une matrice binaire  $T$  de taille  $n \times m$  appelée *matrice technologique*. Chaque ligne représente un type de produit et chaque colonne une machine.  $T(i, j) = 0$  si une contrainte technologique existe qui empêche de qualifier la machine  $j$  pour le produit de type  $i$ ,  $T(i, j) = 1$  sinon. L'existence de ces contraintes technologiques peut se justifier par le fait qu'une machine ancienne est incapable de traiter un type de produit de dernière génération par exemple.

Lorsque  $T = [1]$  (il n'y a pas de contrainte technologique), alors les machines sont des machines parallèles dans l'acception classique de ce terme. De ce point de vue, les machines parallèles partiellement multifonctions représentent une généralisation des machines parallèles.

### 3.1.2 La vitesse des machines

Les machines peuvent avoir des vitesses différentes pour réaliser un produit donné, nous définissons donc une *matrice vitesse*  $V$  de taille  $n \times m$ .  $V(i, j)$  évalue la quantité de produits de type  $i$  que peut traiter la machine  $j$  par unité de temps. Si une contrainte technologique entre la machine  $j$  et le produit de type  $i$  existe (*i.e.*  $T(i, j) = 0$ ) alors  $V(i, j) = 0$ .

Classiquement, l'ensemble des machines est caractérisé selon 3 types que nous généralisons aux machines parallèles partiellement multifonctions :

- les machines non liées : il n'existe aucun lien entre les différentes données vitesses des machines.
- les machines uniformes : il existe un vecteur colonne  $V_P$  de taille  $n$  et un vecteur ligne  $V_M$  de taille  $m$  tels que :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad V(i, j) = T(i, j) \times V_P(i) \times V_M(j) \quad (3.1)$$

où  $V_P(i)$  et  $V_M(j)$  sont des réels strictement positifs.

- les machines identiques : les vitesses sont toutes identiques et la matrice  $V$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad V(i, j) = v \times T(i, j) \quad (3.2)$$

où  $v$  est une constante réelle positive.

### 3.1.3 Les coûts de qualification

Qualifier une machine pour un type de produit induit des coûts liés à la préparation de la machine : mise à disposition de ressources particulières sur la machine, mise à disposition d'outils, positionnement de l'outil, réglage de l'outil, nettoyage, inspection du matériel (Allahverdi et al., 1999, 2006). Ces coûts de qualification sont les composantes d'une *matrice de coût* réelle de taille  $n \times m$  notée  $K$ .  $K(i, j)$  représente le coût de qualification de la machine  $j$  pour le produit de type  $i$ . Si la machine  $j$  est technologiquement incapable de produire le type  $i$  (*i.e.*  $T(i, j) = 0$ ),  $K(i, j)$  est infini. Si la contrainte technologique n'existe pas,  $K(i, j)$  est un nombre réel strictement positif.

## 3.2 La demande

Nous partons du principe qu'une *demande prévisionnelle* existe. Elle est notée  $\mathcal{I}_{ref}$  et correspond à une instance particulière modélisée par un vecteur réel de taille  $n$  qui évalue une demande prédictive moyenne pour chacun des types de produit. La demande définit  $n$  tâches dont chacune correspond à un type de produit. Chaque tâche consiste à fabriquer la totalité du type de produit.

## 3.3 Configuration de l'atelier

Nous représentons la configuration de l'atelier par une *matrice de qualification* binaire  $\mathcal{S}$  de taille  $n \times m$ .  $\mathcal{S}(i, j) = 1$  si la machine  $j$  est qualifiée pour le produit de type  $i$ . Lorsque  $\mathcal{S}(i, j) = 0$ , la machine  $j$  est incapable de produire le produit de type  $i$ . Deux raisons peuvent expliquer une telle non-qualification :

- une raison technologique : technologiquement ou physiquement, la machine  $j$  ne peut pas produire le produit de type  $i$ . Cette contrainte est donnée par la matrice  $T$  lorsque  $T(i, j) = 0$ .

- une raison économique : le choix de ne pas qualifier la machine  $j$  pour le produit de type  $i$  est le résultat d'une décision stratégique, principalement économique. Toutes les machines ne doivent pas nécessairement être qualifiées pour tous les types de produit parce que cela serait d'une part économiquement non viable et d'autre part inutile même d'un point de vue performance.

Le coût d'une configuration est évalué par la fonction suivante :

$$C(\mathcal{S}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{M}} K(i, j) \times \mathcal{S}(i, j) \quad (3.3)$$

Nous définissons également le coût réduit d'une configuration par :

$$C_r(\mathcal{S}) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{M}} K(i, j) \times \mathcal{S}(i, j)}{\sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{M}} K(i, j) \times T(i, j)} \quad (3.4)$$

Le coût réduit est un coût normé qui représente un pourcentage par rapport au coût maximal lorsque les machines sont qualifiées pour tous les types de produits pour lesquels elles peuvent être qualifiés a priori (*i.e.*  $\mathcal{S} = T$ ).

### 3.4 Plan de production

Un plan de production est représenté par une *matrice de répartition* réelle  $R$  de taille  $n \times m$ .  $R(i, j)$  est le temps alloué à la machine  $j$  pour produire une certaine quantité de produits de type  $i$ . La préemption et le splitting sont autorisés dans le plan de production : une tâche peut être coupée et exécutée en même temps sur deux machines différentes. L'origine industrielle de notre problème nous autorise cette liberté.

La préemption et le splitting nous permettent de traiter le calcul du plan de production comme un problème d'affectation et non d'ordonnancement : l'ordre des tâches sur les machines n'a pas d'importance, seule l'affectation d'une quantité d'un type de produit à une machine compte.

## 4 Contraintes et critère d'optimisation

Configurer l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions impliquent de respecter des contraintes tout en optimisant un critère.

### 4.1 Contraintes

Une solution admissible est une configuration  $\mathcal{S}$  qui respecte les contraintes suivantes.

1. **Contrainte liée à la demande** : une configuration admissible contient au moins une machine qualifiée par produit pour assurer que le produit puisse être fabriqué.
2. **Contraintes technologiques** : les contraintes technologiques sont définies par la matrice  $T$  qui illustre les incapacités physiques de certaines machines à produire certains produits. Une configuration  $\mathcal{S}$  admissible doit donc vérifier l'ensemble des contraintes suivantes :

$$\forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad \mathcal{S}(i, j) \leq T(i, j) \quad (3.5)$$

3. **L'équilibre de la charge** : une configuration admissible  $\mathcal{S}$  doit garantir qu'il existe un plan de production équilibré pour la demande  $\mathcal{I}_{ref}$  : la même durée de travail est allouée à toutes les machines.

**Définition II.1** *Un plan de production  $R$  est équilibré si il vérifie la contrainte suivante :*

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) = TWLoad \quad \forall j \in \mathcal{M} \quad (3.6)$$

où  $TWLoad$  est une constante réelle positive.

#### 4.1.1 Pertinence de la contrainte d'équilibre de la charge dans le contexte de la fabrication des semiconducteurs :

La contrainte d'équilibre de la charge est pertinente dans le contexte de la fabrication des semiconducteurs comme l'ont montré (Rossi et al., 2004; Miwa et al., 2005). En effet dans ce contexte, les machines représentent un tel coût d'investissement (plus de 25 millions d'euros pour certaines d'entre elles (Johnzén et al., 2007)) comparativement à leur obsolescence rapide, qu'il est indispensable qu'elles aient un taux d'occupation maximal pour les rentabiliser le plus rapidement possible.

#### 4.2 Critère d'optimisation : les coûts liés à la configuration

Nous nous plaçons dans un contexte où qualifier une machine pour un type de produit induit un coût qui est loin d'être négligeable. Ce coût peut-être lié au réglage de la machine, à l'installation de ressources particulières . . .

Le critère d'optimalité du problème statique est donc le coût de la configuration à minimiser  $z = C(\mathcal{S})$ .

## 5 Définition du problème statique

### 5.1 Énoncé

À la lumière des précédentes notations et définitions, le problème statique peut être énoncé de la manière suivante.

**Définition II.2** *Connaissant la demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$ , les vitesses des machines  $V$  et les coûts de qualification  $K$ , le problème Configuration Admissible de Coût Minimal (CACM) consiste à trouver la configuration admissible  $\mathcal{S}$  qui minimise  $C(\mathcal{S})$ .*

La figure 3.1 donne la manière dont nous avons décomposé le problème statique dans ce chapitre.

### 5.2 Le problème d'affectation associé : calcul d'un plan de production équilibré

Si une configuration admissible  $\mathcal{S}$  est connue, le problème d'affectation consiste à chercher un plan de production équilibré  $R$ .

Le problème d'affectation peut donc être formulé ainsi : «étant données une configuration  $\mathcal{S}$  et une demande  $\mathcal{I}_{ref}$ , trouver un plan de production équilibré  $R$  qui satisfait la demande  $\mathcal{I}_{ref}$ »

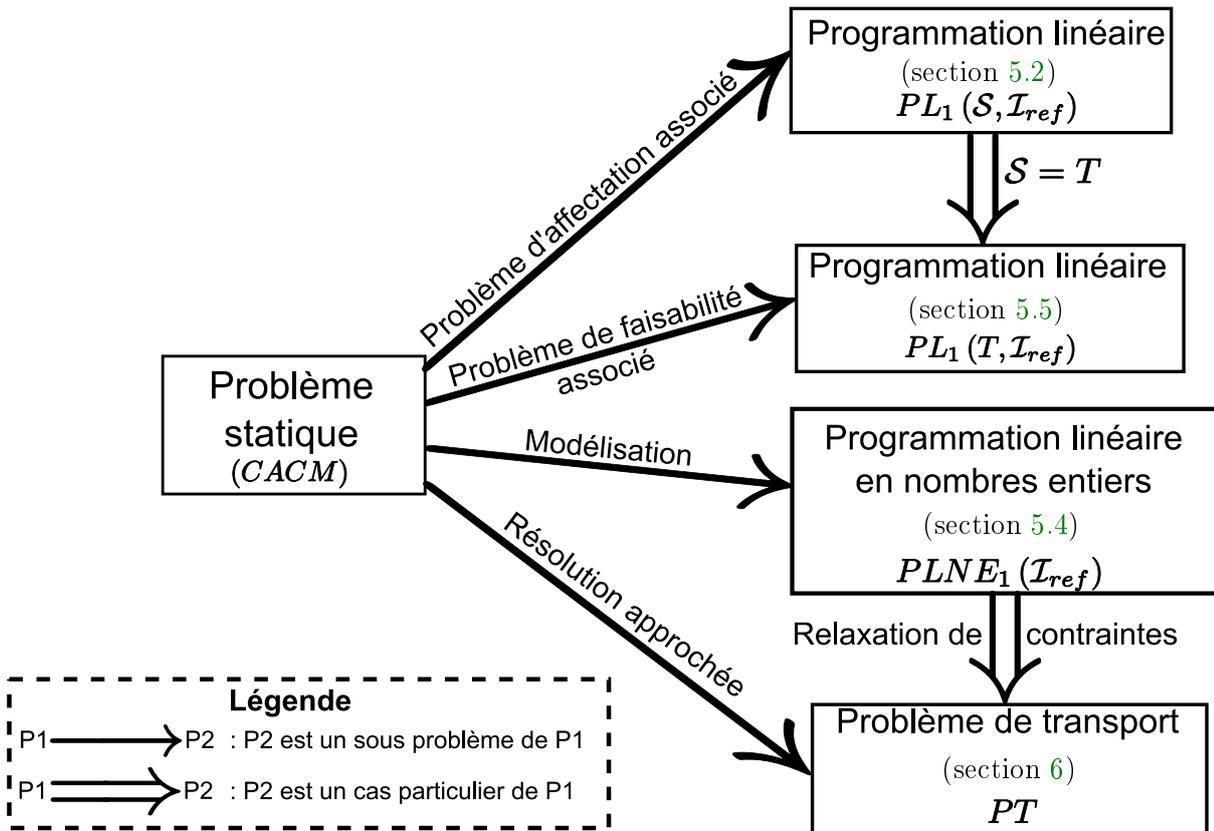


FIG. 3.1 – Décomposition du problème statique en sous problèmes

En utilisant les champs classiques de notation  $\alpha|\beta|\gamma$  de l'ordonnancement introduits par (Graham et al., 1979) puis complétés par (Blazewicz et al., 1996) et (T'Kindt et Billaut, 2002), ce problème est noté  $MPM|split, blcg|-$ . Le champs  $\alpha$  se réfère au type de machines. Ici  $MPM$  signifie que l'on a affaire à des machines parallèles partiellement multifonctions (Multi-Purpose Machines en anglais). Le champs  $\beta$  contient l'ensemble des contraintes du problème. Dans notre cas,  $split$  signifie que le splitting est autorisé : une tâche peut être partitionnée et les parties peuvent être exécutées en même temps sur plusieurs machines.  $blcg$  signifie que les machines doivent finir leur production à la même date. Enfin le champs  $\gamma$  définit les critères à optimiser. Ici, le tiret ( $-$ ) signifie qu'il n'y a pas de critère à optimiser, et que nous avons affaire à un problème de faisabilité.

Le problème  $MPM|split, blcg|-$  est un problème facile qui peut être résolu à l'aide du pro-

gramme linéaire suivant noté  $PL_1(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$ .

$$PL_1(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) \left\{ \begin{array}{ll} \min (z_{eq} = C_{max} - C_{min}) & \\ \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V(i, j) = \mathcal{I}_{ref}(i) & \forall i \in \mathcal{N} \quad (a) \\ \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) \right) - C_{max} \leq 0 & \forall j \in \mathcal{M} \quad (b) \\ \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) \right) - C_{min} \geq 0 & \forall j \in \mathcal{M} \quad (c) \\ (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times R(i, j) = 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (d) \\ R(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (e) \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$V(i, j)$ ,  $\mathcal{I}_{ref}(i)$  et  $\mathcal{S}(i, j)$  sont des données alors que  $C_{max}$ ,  $C_{min}$  et  $R(i, j)$  sont des variables.  $C_{max}$  est le temps de traitement de la machine la plus chargée (le makespan classique).  $C_{min}$  est le temps de traitement de la machine la moins chargée.

Nous notons ce problème  $PL_1(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  pour montrer que les instances du problème sont  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{I}_{ref}$ . Les autres données du problème sont supposées comme étant constantes tout au long de ce chapitre. L'ensemble des contraintes (3.7a) permet de vérifier que la demande  $\mathcal{I}_{ref}$  est satisfaite. L'ensemble des contraintes (3.7b) permet de mettre à jour le temps de traitement de la machine la plus chargée. L'ensemble des contraintes (3.7c) permet de mettre à jour le temps de traitement de la machine la moins chargée. Les contraintes (3.7d) interdisent l'affectation d'un type de produit à une machine qui n'est pas qualifiée pour le type de produit en question. Enfin les contraintes (3.7e) définissent le domaine de variation des variables  $R(i, j)$ .

Soit  $\{R, C_{max}, C_{min}, z_{eq}^*\}$  une solution optimale de  $PL_1(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$ ; le problème  $MPM|split, blcg|$  admet une solution si et seulement si  $z_{eq}^* = 0$ . Dans ce cas, la charge commune à toutes les machines est  $TWLoad = C_{max} = C_{min}$ .

### 5.3 Étude de complexité de CACM

Le but de cette section est de démontrer que le problème statique est  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort.

**Théorème II.1** (*Aubry et al., 2006c*). *Le problème Configuration Admissible de Coût Minimal est  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort même dans le cas où les machines sont identiques avec des vitesses et des coûts de qualification unitaires.*

#### 5.3.1 Preuve

La preuve utilise une transformation du problème *3-partition* (*Garey et Johnson, 1979*).

#### Réduction de CACM au problème 3-partition

Une instance du problème 3-partition est définie par un nombre entier strictement positif  $E$  et un ensemble  $O$  de  $3m$  entiers  $\{o_1, \dots, o_{3m}\}$  tels que  $\frac{E}{4} \leq o_i \leq \frac{E}{2}$  et  $\sum_{o \in O} o = mE$ . La question est : « l'ensemble  $O$  peut-il être partitionné en  $m$  sous-ensembles disjoints  $O_1, \dots, O_m$  tels que pour  $j = 1 \dots m$ ,  $\sum_{o \in O_j} o = E$ ? »

Étant donnée une instance du problème 3-partition, une instance particulière du problème *Configuration Admissible de Coût Minimal* est définie de la manière suivante. Il y a  $n = 3m$  types de produits et  $m$  machines. Pour  $i = 1 \dots 3m$ , on pose  $\mathcal{I}_{ref}(i) = o_i$ . Puis pour  $i = 1 \dots 3m$

et pour  $j = 1 \dots m$ , on pose  $K(i, j) = T(i, j) = V(i, j) = 1$ . La question du problème de décision correspondant au problème *CACM* devient : « Existe-t-il une configuration  $\mathcal{S}$  de coût  $C(\mathcal{S}) = 3m$  qui garantit l'existence d'un plan de production  $R$  satisfaisant la demande  $\mathcal{I}_{ref}$  avec une charge équilibrée égale à  $E$  ? »

⇒ **Identification de *CACM* réduit au problème 3-partition**

Nous montrons ici que si le problème 3-partition a une réponse positive alors le problème *CACM* réduit a également une réponse positive.

La configuration  $\mathcal{S}$  est construite de la manière suivante à partir de la solution du problème 3-partition. Pour  $i = 1 \dots 3m$  et pour  $j = 1 \dots m$ , on pose  $\mathcal{S}(i, j) = 1$  si  $o_i \in O_j$  et  $\mathcal{S}(i, j) = 0$  sinon. Dans la mesure où  $\frac{E}{4} \leq o_i \leq \frac{E}{2}$  et  $\sum_{o \in O_i} o = E$ , chaque ensemble  $O_j$  possède exactement trois éléments.

On peut montrer que  $C(\mathcal{S}) = 3m$  :

$$C(\mathcal{S}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{3m} K(i, j) \times \mathcal{S}(i, j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{3m} \mathcal{S}(i, j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i|o_i \in O_j} \mathcal{S}(i, j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i|o_i \in O_j} 1 = \sum_{j=1}^m 3 = 3m$$

Cette égalité signifie que exactement une machine est qualifiée pour un type de produit donné. Et par suite un plan de production  $R$  admissible est tel que chaque demande  $\mathcal{I}_{ref}(i)$  est entièrement satisfaite sur l'unique machine qui est qualifiée pour produire le produit de type  $i$ .

La charge temporelle de chaque machine  $j$  peut donc être calculée de la manière suivante :

$$TWLoad(j) = \sum_{i=1}^{3m} R(i, j) = \sum_{i=1}^{3m} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i) * \mathcal{S}(i, j)}{V(i, j)} = \sum_{i=1}^{3m} o_i * \mathcal{S}(i, j) = \sum_{i|o_i \in O_j} o_i = E$$

Ainsi le plan de production  $R$  est équilibré et la charge commune de chaque machine est égale à  $E$ .

Il existe donc une configuration  $\mathcal{S}$  de coût  $3m$  et tel qu'il existe un plan de production équilibré de charge  $E$ .

⇐ **Identification du problème 3-partition au problème *CACM* réduit**

Nous montrons maintenant que si notre problème a une réponse positive, alors le problème 3-partition a également une réponse positive.

La configuration  $\mathcal{S}$  a un coût égal à  $3m$  et chaque demande  $\mathcal{I}_{ref}(i)$  doit être produite sur l'unique machine qualifiée pour le type de produit  $i$  (sinon la demande ne pourrait pas être satisfaite). De plus  $TWLoad(j) = E$  pour chaque machine  $j$ .

Pour  $j = 1 \dots m$ , nous construisons l'ensemble  $O_j$  de la manière suivante.  $O_j$  contient tous les entier  $o_i$  tels que  $\mathcal{S}(i, j) = 1$ . Par construction les ensembles  $O_1, \dots, O_m$  sont disjoints et :

$$\sum_{i|o_i \in O_j} o_i = \sum_{i|o_i \in O_j} \mathcal{I}_{ref}(i) = \sum_{i=1}^{3m} \mathcal{I}_{ref}(i) \times \mathcal{S}(i, j) = \sum_{i=1}^{3m} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i) * \mathcal{S}(i, j)}{V(i, j)} = TWLoad(j) = E$$

Il en résulte donc que l'ensemble  $O$  peut être partitionné en  $m$  ensembles disjoints  $O_1, \dots, O_m$  tels que pour  $j = 1 \dots m$   $\sum_{o \in O_j} o = E$ . □

#### 5.4 Formulation à l'aide d'un programme linéaire en nombres entiers

Nous proposons maintenant une formulation mathématique du problème *CACM*. Le problème peut être écrit comme le programme linéaire en nombres entiers suivant noté  $PLNE_1(\mathcal{I}_{ref})$ .

$$PLNE_1(\mathcal{I}_{ref}) \left\{ \begin{array}{ll} \min C(\mathcal{S}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{M}} K(i, j) \times \mathcal{S}(i, j) & \\ \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V(i, j) = \mathcal{I}_{ref}(i) & \forall i \in \mathcal{N} \quad (a) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) - TWLoad = 0 & \forall j \in \mathcal{M} \quad (b) \\ R(i, j) \times V(i, j) - \mathcal{S}(i, j) \times \mathcal{I}_{ref}(i) \leq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (c) \\ \mathcal{S}(i, j) \in \{0, 1\} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (d) \\ R(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (e) \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$V(i, j)$ ,  $K(i, j)$  et  $\mathcal{I}_{ref}(i)$  sont des données alors que  $\mathcal{S}(i, j)$ ,  $TWLoad$  et  $R(i, j)$  sont des variables de décision.  $\mathcal{S}(i, j)$  est une variable binaire qui rend compte de la qualification ou non de la machine  $j$  pour le type de produit  $i$ .  $R$  est le plan de production pour la demande  $\mathcal{I}_{ref}$  :  $R(i, j)$  mesure le temps de traitement alloué à la machine  $j$  pour produire une certaine quantité de produits de type  $i$ .  $TWLoad$  est la charge temporelle commune aux machines. Nous notons ce problème  $PLNE_1(\mathcal{I}_{ref})$  pour montrer que l'instance du problème est  $\mathcal{I}_{ref}$ .

L'ensemble des contraintes (3.8a) garantit que la demande  $\mathcal{I}_{ref}$  est satisfaite. L'ensemble des contraintes (3.8b) garantit que le plan de production  $R$  est équilibré. L'ensemble des contraintes (3.8c) interdit l'affectation d'un type de produit à une machine qui n'est pas qualifiée pour le type de produit en question. Les ensembles de contraintes (3.8d) et (3.8e) définissent le type des variables de décision  $\mathcal{S}(i, j)$  et  $R(i, j)$ .

#### 5.5 Problème de l'existence d'une configuration admissible : un problème facile

Avant d'essayer de résoudre *CACM*, comme pour tout problème  $\mathcal{NP}$ -difficile, il est toujours intéressant de se poser la question de l'existence d'une solution admissible. Dans le cadre qui nous intéresse, cette question équivaut à la suivante : « existe-t-il une configuration  $\mathcal{S}$  admissible telle qu'il existe un plan de production équilibré satisfaisant la demande  $\mathcal{I}_{ref}$  ? »

Répondre à cette question est un problème facile puisqu'il suffit de résoudre  $PL_1(T, \mathcal{I}_{ref})$ . Plus précisément nous répondons à la question par l'affirmative si et seulement si le problème  $PL_1(T, \mathcal{I}_{ref})$  possède une base admissible  $\{R, C_{max}, C_{min}, z_{eq}^*\}$  telle que  $z_{eq}^* = 0$ .

Si une telle solution existe, nous pouvons construire une configuration admissible  $\mathcal{S}$  à *CACM* en posant  $\mathcal{S}(i, j) = 1$  si et seulement si  $R(i, j) > 0$ .

Cette configuration est admissible car :

- elle vérifie les contraintes technologiques. Sinon  $R$  ne serait pas admissible non plus,
- elle vérifie la contrainte d'équilibre de la charge.  $z_{eq}^* = 0$  implique que le plan de production  $R$  vérifie l'équilibre de la charge,
- elle vérifie la contrainte liée à la demande. Le plan de production  $R$  garantit que la demande est satisfaite donc elle contient au moins un élément non nul sur chaque ligne et donc  $\mathcal{S}$  également.

## 5.6 Lien avec le makespan et limite de pertinence de l'équilibre de la charge

Une solution optimale de  $PLNE_1$  est une base  $\{\mathcal{S}, R, TWLoad\}$  où  $\mathcal{S}$  est une configuration admissible de coût minimal,  $R$  est un plan de production équilibré et  $TWLoad$  est la charge temporelle commune à toutes les machines.

Nous allons maintenant considérer le cas des machines non liées qui fixe les limites de pertinence du critère d'équilibre de la charge. En effet, résoudre  $PLNE_1$  ne conduit pas toujours à des configurations pertinentes du point de vue du coût et du temps de traitement dans le cas de machines non liées.

Considérons l'exemple suivant :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 0,5 & 1 \\ 2 & 0,5 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \mathcal{I}_{ref} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

La solution optimale pour  $PLNE_1$  est  $\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Son coût optimal est  $K_1 = 3$  et l'unique plan de production équilibré associé est  $R_1 = \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .  $R_1$  correspond à une charge temporelle commune aux machines égale à  $C_{max}^1 = \frac{16}{3}$ .

Il existe une autre configuration qui, si elle ne garantit pas l'existence d'un plan de production équilibré, a le mérite d'être moins coûteuse en temps et en argent. Cette solution est  $\mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Cette configuration est moins chère puisqu'elle a un coût  $K_2 = 2 < K_1$ . Pour cette configuration, il existe un plan de production tel que le temps de traitement maximum est  $C_{max}^2 = 4 < C_{max}^1$ .

Ainsi le critère d'équilibre de la charge n'est pas du tout pertinent dans le cas de machines non liées puisqu'il peut amener à construire des configurations chères et avec une productivité moindre en qualifiant et en chargeant des machines plus lentes pour garantir l'existence d'un plan de production équilibré.

Dans la suite de ce chapitre et dans le chapitre 4, nous ne considérerons que des machines uniformes pour garantir la pertinence de la contrainte d'équilibre de la charge.

## 6 Relaxation dans le cas des machines uniformes et des coûts de qualification identiques

Nous proposons maintenant une relaxation de  $PLNE_1$  dans le cas de machines uniformes et de coûts de qualification identiques. Si les machines sont uniformes, il existe deux vecteurs  $V_P$  et  $V_M$  tels que  $\forall(i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M}$ ,  $V(i, j) = T(i, j) \times V_P(i) \times V_M(j)$ . Le fait de considérer des coûts de qualification identiques signifie que la matrice  $K$  s'écrit  $K(i, j) = \frac{\mathcal{K}}{T(i, j)}$  pour tout  $(i, j)$  de  $\mathcal{N} \times \mathcal{M}$ , où  $\mathcal{K}$  est une constante réelle positive. Ainsi le coût d'une configuration admissible  $\mathcal{S}$  est directement proportionnel au nombre de qualifications dans  $\mathcal{S}$ .

L'hypothèse des machines uniformes permet de préserver la pertinence de la contrainte d'équilibre de la charge. En effet lorsque les machines sont uniformes, le lemme suivant est vérifié. Sa preuve est donnée en annexe A.

**Lemme II.1** (*Aubry et al., 2006c*). *Les machines uniformes garantissent que si un plan de production équilibré existe, il minimise le makespan.*

Ainsi considérer des machines uniformes permet de garantir conjointement des performances temporelles et la contrainte d'équilibre de la charge.

Considérer des machines uniformes permet d'avoir une autre propriété intéressante donnée par le lemme suivant. Sa preuve est également donnée en annexe A.

**Lemme II.2** (*Aubry et al., 2006c*). *Les machines uniformes garantissent que la charge temporelle commune aux machines est une valeur constante connue. Cette valeur est donnée par l'équation suivante :*

$$TWLoad = \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)}}{\sum_{j \in \mathcal{M}} V_M(j)} \quad (3.9)$$

Dans  $PLNE_1$ ,  $TWLoad$  n'est donc plus une variable puisque sa valeur est fixée par l'équation (3.9).

## 6.1 Relaxation de contraintes et définition d'un nouveau critère d'optimisation

Dans  $PLNE_1$ , nous relaxons les contraintes (3.8c) et (3.8d). Nous proposons également de remplacer le critère d'optimisation de  $PLNE_1$  par un autre. Nous obtenons le programme linéaire suivant que l'on note  $PL_2(\mathcal{I}_{ref})$ .

$$PL_2(\mathcal{I}_{ref}) \begin{cases} \min \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{M}} (1 - T(i, j)) \times R(i, j) \\ \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V_P(i) \times V_M(j) = \mathcal{I}_{ref}(i) & \forall i \in \mathcal{N} \quad (a) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) = TWLoad & \forall j \in \mathcal{M} \quad (b) \\ R(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (c) \end{cases} \quad (3.10)$$

Résoudre  $PL_2$  revient à répondre à la question suivante : «quel est le plan de production  $R$  équilibré qui minimise la somme des temps affectés à des machines pour produire une certaine quantité de types de produits pour lesquelles elles ne sont pas qualifiées?»

En ce sens si un plan de production  $R$  existe tel que l'objectif est nul, cela signifie qu'aucune contrainte technologique n'est violée.

Cette relaxation permet tout d'abord de ne plus avoir de variables entières dans notre formulation mathématique. En effet la variable  $\mathcal{S}(i, j)$  n'apparaît plus. Une configuration  $\mathcal{S}$  peut être construite à partir de  $R$  de la manière suivante :  $\mathcal{S}(i, j) = 1$  si et seulement si  $R(i, j) > 0$ . Cette relaxation ne garantit pas que le coût de la configuration est minimale.

Cette relaxation permet d'identifier  $PL_2$  à un problème classique de transport comme cela est démontré dans la section 6.2.

## 6.2 Identification au problème classique de transport

Nous allons maintenant montrer que  $PL_2$  est équivalent à un problème de transport.

**Rappel :** un problème de transport est un programme linéaire défini de la manière suivante (Hitchcock, 1941) que nous notons  $PT$ .

$$PT \left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{M}} c(i, j) \times x(i, j) & \\ \sum_{j \in \mathcal{M}} x(i, j) = r(i) & \forall i \in \mathcal{N} \quad (a) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} x(i, j) = s(j) & \forall j \in \mathcal{M} \quad (b) \\ x(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (c) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

$\mathcal{N}$  représente ici l'ensemble des destinations tandis que  $\mathcal{M}$  représente l'ensemble des sources.  $s(j)$  est la quantité disponible à la source  $j$  tandis que  $r(i)$  est la quantité demandée à la destination  $i$ .  $x(i, j)$  est la quantité de matériaux transportée entre la source  $j$  et la destination  $i$ . Enfin  $c(i, j)$  est le coût de transport d'une unité de matériaux entre la source  $j$  et la destination  $i$ . Le problème de transport consiste donc à chercher quelle quantité de matériaux doit être transportée entre la source  $j$  et la destination  $i$  de telle sorte que le coût total de transport soit minimal.

**Lemme II.3** *Le problème relaxé est équivalent à un problème de transport.*

**Preuve.** Pour s'en convaincre il suffit de respecter les étapes suivantes :

1. Pour tout  $i$  de  $\mathcal{N}$ , divisons chaque contrainte (3.10a) de  $PL_2$  par  $V_P(i)$ .
2. Pour tout  $j$  de  $\mathcal{M}$ , multiplions chaque contrainte (3.10b) de  $PL_2$  par  $V_M(j)$ .
3. Nous introduisons les notations standards du problème de transport :

$$\text{Pour tout } (i, j) \text{ de } \mathcal{N} \times \mathcal{M}, x(i, j) = R(i, j) \times V_M(j)$$

$$\text{Pour tout } (i, j) \text{ de } \mathcal{N} \times \mathcal{M}, c(i, j) = \frac{1-T(i, j)}{V_M(j)}$$

$$\text{Pour tout } i \text{ de } \mathcal{N}, r(i) = \frac{I_{ref}(i)}{V_P(i)}$$

$$\text{Pour tout } j \text{ de } \mathcal{M}, s(j) = TWLoad \times V_M(j)$$

Suite à ces étapes, nous retrouvons bien  $PT$ .  $\square$

### 6.2.1 Valeur de $TWLoad$

Tout problème de transport possède une solution admissible si et seulement si l'égalité suivante est respectée :  $\sum_{i \in \mathcal{N}} r(i) = \sum_{j \in \mathcal{M}} s(j)$  (de Werra, 1990). Si on remplace  $r(i)$  et  $s(j)$  par leur expression originale dans notre problème cette égalité devient :  $\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{I_{ref}(i)}{V_P(i)} = \sum_{j \in \mathcal{M}} TWLoad \times V_M(j)$ . Ce qui conduit exactement à l'équation donnée par le lemme II.2.

### 6.2.2 Liens entre les solutions de $PLNE_1$ et $PL_2$

Résoudre  $PL_2$  nous conduit à deux possibilités :

1. Un plan de production optimal  $R^*$  de critère nul existe pour  $PL_2$ .  $R^*$  permet alors de construire une configuration admissible  $\mathcal{S}$  pour  $PLNE_1$  (qui n'est pas forcément de coût minimum). La configuration  $\mathcal{S}$  est admissible car :
  - aucune contrainte technologique n'est violée sinon la valeur du critère pour le plan de production  $R^*$  ne serait pas nul.
  - $R^*$  est un plan de production équilibré admissible pour  $\mathcal{S}$ .
  - la demande  $\mathcal{I}_{ref}$  est satisfaite par construction de  $PL_2$ .
2. Le critère associé au plan de production optimal pour  $PL_2$  a un coût strictement positif alors il n'existe pas de configuration admissible pour  $PLNE_1$  (puisque au moins une contrainte technologique est violée).

### 6.3 Bornes inférieure et supérieure sur le coût de la configuration

#### 6.3.1 Borne inférieure sur le coût de la configuration

Pour une demande  $\mathcal{I}_{ref}$  non nulle,  $BI$  est une borne inférieure sur le coût de la configuration avec :

$$BI = \mathcal{K} \times \max(n, m) \quad (3.12)$$

La présence du  $\max$  dans la formule illustre les deux contraintes suivantes : au moins une machine doit être qualifiée par type de produit et chaque machine est qualifiée sur au moins un type de produit (sinon le plan de production ne peut pas être équilibré).

#### 6.3.2 Borne supérieure sur le coût de la configuration

Un plan de production  $R$  de critère nul pour  $PL_2$  permet de construire une configuration admissible  $\mathcal{S}$  pour  $PLNE_1$ . Par construction de  $\mathcal{S}$ , son coût est directement proportionnel au nombre de variables non nulles de  $R$ .  $PL_2$  et  $PT$  sont équivalents, or un problème de transport faisable ne possède que  $n + m - 1$  contraintes linéairement indépendantes (Kasana et Kumar, 2004). Ainsi un plan de production admissible pour  $PL_2$  ne contient que  $n + m - 1$  variables de base, soit  $n + m - 1$  variables non nulles au maximum. Le coût de la configuration  $\mathcal{S}$  est donc majoré par  $BS$  tel que :

$$BS = \mathcal{K} \times (n + m - 1) \quad (3.13)$$

Il est important de noter que cette borne n'est pas nécessairement atteinte dans la mesure où  $R(i, j)$  peut appartenir aux variables de base et être nulle ( $\Rightarrow \mathcal{S}(i, j) = 0$ ). Autrement dit, pour que le coût de  $\mathcal{S}$  soit strictement inférieur à  $BS$  il faut qu'il y ait dégénérescence dans  $PL_2$ . D'après Kasana et Kumar (2004) il y a dégénérescence d'une solution dès lors qu'une ou plusieurs variables appartenant à la solution de base sont nulles. Dans la mesure où le coût de la configuration  $\mathcal{S}$  est directement proportionnel au nombre de variables non nulles dans la base de  $PL_2$ , résoudre  $PLNE_1$  à l'optimal est équivalent à trouver la base la plus dégénérée de  $PL_2$ . On est donc face à un problème original dans la mesure où la dégénérescence est généralement vu comme un phénomène indésirable : en effet la dégénérescence peut causer un phénomène de cyclage lors de la résolution par l'algorithme du simplexe par exemple (Kasana et Kumar, 2004).

## 6.4 Garantie de performance de la relaxation

À partir des bornes présentées précédemment, il devient facile d'évaluer la performance garantie par la relaxation proposée dans cette section. Le pire cas qui puisse arriver est le cas où une configuration  $\mathcal{S}^*$  existe de coût égal à  $BI$  alors que la résolution de  $PL_2$  conduit à la construction d'une configuration  $\mathcal{S}$  dont le coût est égal à  $BS$ . La garantie de performance offerte par la relaxation est donc égale à  $\xi$  :

$$\xi = \frac{BS}{BI} = \frac{n + m - 1}{\max(n, m)} \quad (3.14)$$

Cette borne est purement théorique dans la mesure où elle n'est atteinte que lorsqu'il y a dégénérescence dans  $PL_2$ . En pratique supposer la non-dégénérescence dans les programmes linéaires peut être considéré comme une hypothèse raisonnable (Muramatsu et Tsuchiya, 1996; Schrijver, 1998). Dans ce cas une solution optimale pour  $PL_2$  permet de construire une solution optimale pour  $PLNE_1$ . De Werra (1990) propose un théorème qui donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution dégénérée pour le problème de transport et donc pour  $PL_2$ .

**Théorème II.2** (de Werra, 1990). *Il peut y avoir dégénérescence d'une solution admissible du problème de transport si et seulement s'il existe des sous-ensembles  $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$  et  $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$  tels que*

$$\sum_{i \in \mathcal{N}'} r(i) = \sum_{j \in \mathcal{M}'} s(j) \quad (3.15)$$

De Werra (1990) souligne également, qu'en pratique, tester si les conditions du théorème II.2 sont satisfaites est difficile.

## 6.5 Variations de $\xi$ suivant les valeurs de $n$ et $m$

Si nous nous efforçons de considérer le cas industriel, le nombre de types de produit est souvent bien plus grand que le nombre de machines. Dans l'industrie des semiconducteurs, par exemple,  $n$  est trois fois plus grand que  $m$ . Il s'avère donc qu'en pratique la performance garantie par la relaxation peut être très bonne. Le tableau 3.1 donne la performance garantie par la relaxation suivant l'ordre de grandeur de  $n$  par rapport à  $m$ .

TAB. 3.1 – Performance garantie par la relaxation suivant l'ordre de grandeur de  $n$  par rapport à  $m$

	$n = m$	$n = 2m$	$n = 3m$	$n \geq 4m$
$\xi$	$\leq 2$	$\leq 1,5$	$\leq 1,34$	$\leq 1,25$

Dès lors que  $n \geq 4m$  la performance de la relaxation ne s'éloigne pas de plus de 25% de la performance optimale. La performance garantie vérifie les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 \leq \xi < 2 & \quad (a) \\ \xi \xrightarrow[n=m, n \rightarrow \infty]{} 2 & \quad (b) \end{aligned} \quad (3.16)$$

La borne inférieure 1 est atteinte lorsque  $n = 1$  ou  $m = 1$ .

## 7 Mise en évidence des perturbations, incidences sur les performances et critère de robustesse

Un atelier de machines parallèles est naturellement soumis à des perturbations qui peuvent toucher tous les objets de celui-ci : les machines, les stocks, la demande... Nous souhaitons prendre en compte les incertitudes sur la demande. En effet, si nous considérons le contexte industriel duquel le problème est issu, à savoir l'industrie des semiconducteurs et l'atelier de photolithographie, il s'agit d'un contexte où la demande est difficile à prévoir. De plus l'atelier de photolithographie est un atelier qui se trouve au coeur du processus et sa charge dépend très fortement des ateliers amonts, mais également des ateliers avals car il s'agit d'un système réentrant. De ce fait la variation de la demande fait partie intégrante du processus de fabrication et est d'autant plus critique que l'atelier de photolithographie peut être considéré comme un atelier goulot pour les raisons évoquées précédemment.

### 7.1 Incertitudes sur la demande

Nous souhaitons prendre en compte les incertitudes sur la demande. Nous pouvons représenter cette variation par un voisinage  $\mathcal{P}$  autour de l'instance prévisionnelle  $\mathcal{I}_{ref}$  comme sur la figure 3.2. Reste que les contours de  $\mathcal{P}$  ne sont pas connus a priori. L'instance réelle  $\mathcal{I}$  est considérée comme le résultat d'une variation autour de  $\mathcal{I}_{ref}$ . Cette variation est représentée par un vecteur  $\Delta\mathcal{I}$ . L'amplitude de la variation  $\Delta\mathcal{I}$  est mesurée par  $\|\Delta\mathcal{I}\|_1$  :

$$\|\Delta\mathcal{I}\|_1 = \sum_{i \in \mathcal{N}} |\Delta\mathcal{I}_i| \quad (3.17)$$

### 7.2 Effet des variations de la demande sur l'équilibre de la charge

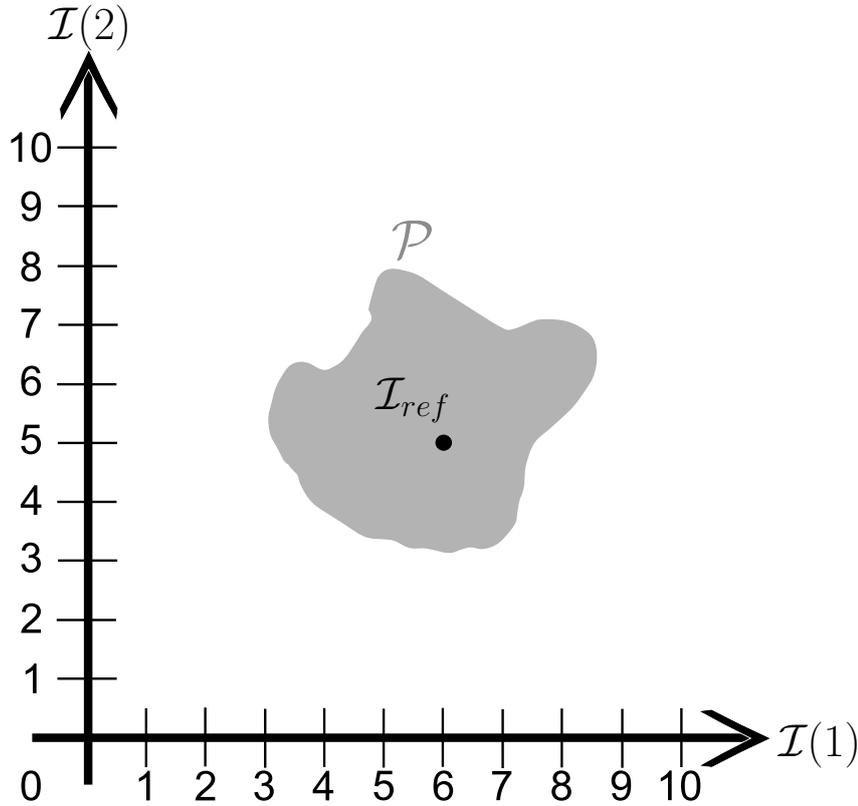
En pratique, avoir une demande réelle correspondant à la demande prévisionnelle relève de l'utopie. Imaginons une configuration  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$  optimale pour  $\mathcal{I}_{ref}$ . Par définition, cette configuration est de coût minimal et garantit l'existence d'un plan de production équilibré pour  $\mathcal{I}_{ref}$ . Il n'est pas sûr que cette dernière performance soit garantie pour la demande réelle  $\mathcal{I}$ .

Pour s'en convaincre, considérons l'exemple suivant. Soient  $T$  une matrice technologique,  $V$  une matrice vitesse et  $\mathcal{I}_{ref}$  une demande de référence définies de la manière suivante :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 30 & 45 & 20 \\ 0 & 9 & 4 \\ 12 & 0 & 8 \\ 18 & 27 & 12 \end{bmatrix}, \quad V_P = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad V_M = [6 \quad 9 \quad 4], \quad \mathcal{I}_{ref} = \begin{bmatrix} 209 \\ 151 \\ 262 \\ 77 \end{bmatrix}$$

Une configuration optimale pour  $PLNE_1$  est  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$  définie de la manière suivante :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

FIG. 3.2 – Exemple de voisinage  $\mathcal{P}$  dans le cas  $n = 2$  types de produit

Cette configuration respecte les contraintes technologiques puisque  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*(2, 1) = T(2, 1) = 0$  et  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*(3, 2) = T(3, 2) = 0$ . Les autres non-qualifications dans  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$  résultent d'un choix économique. Cette configuration permet de construire le plan de production suivant :

$$R = \begin{bmatrix} 6,97 & 0 & 0 \\ 0 & 16,78 & 0 \\ 9,57 & 0 & 18,39 \\ 1,85 & 1,61 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce plan de production est bien équilibré : il suffit de sommer chaque colonne de la matrice  $R$  pour obtenir  $TWLoad = 18,39$  qui est la valeur donnée par le lemme II.2.

Imaginons maintenant que la demande pour le produit de type 2 a été mal évaluée. La demande réelle  $\mathcal{I}(2)$  pour ce type de produit est de 129 et non pas de 151 comme prévu. La

demande réelle est alors  $\mathcal{I} = \begin{bmatrix} 209 \\ 129 \\ 262 \\ 77 \end{bmatrix}$  pour une déviation qui équivaut à  $\Delta\mathcal{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ -22 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Pour cette demande réelle et pour  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$  il n'existe plus de plan de production équilibré :  $PL_1(\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*, \mathcal{I})$  retourne une solution  $\{R, C_{max}, C_{min}, z_{eq}^*\}$  telle que  $z_{eq}^* > 0$ . Autrement dit, une variation *négative* qui représente moins de 4% du volume total de la demande a suffit à remettre en cause la capacité de  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$  à garantir l'existence d'un plan de production équilibré pour la demande réelle.

On l'a vu, le problème statique est un problème  $\mathcal{NP}$ -difficile. Autrement dit trouver des configurations optimales pour la demande prévisionnelle  $\mathcal{I}_{ref}$  peut impliquer des efforts colossaux en temps de calcul. Et ce temps peut être considéré comme perdu si il revient à construire une configuration qui ne permet pas d'avoir un plan de production équilibré pour la demande réelle. Il nous paraît donc primordial de proposer une méthode qui permette de construire des configurations robustes : c'est-à-dire des configurations capables de garantir l'existence d'un plan de production équilibré malgré les incertitudes sur la demande.

### 7.3 Définition du critère de robustesse

Une configuration est robuste si elle permet de garantir l'existence d'un plan de production équilibré malgré les incertitudes sur la demande. Nous nous plaçons dans un contexte où le nombre d'instances est éventuellement infini. De plus nous décidons d'impliquer le décideur dans l'appréciation de la robustesse. Pour ces raisons nous utilisons la  $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse pour définir la robustesse d'une configuration.

**Définition II.3** Une configuration  $\mathcal{S}$  est robuste sur l'ensemble de demandes  $\mathcal{P}$ , relativement au critère de robustesse  $\lambda_1$  si elle vérifie la condition suivante :

$$\lambda_1(\mathcal{S}, z_{\mathcal{I}}, \mathcal{P}) \geq \mathcal{L}_\lambda \quad (3.18)$$

où  $z_{\mathcal{I}}$  mesure le taux d'équilibre des machines et où  $\mathcal{L}_\lambda$  évalue le taux d'équilibre dans le pire des cas (exigé ou garanti suivant le problème traité). Par exemple, si  $\mathcal{L}_\lambda = 100\%$ , cela veut dire que l'on exige l'équilibre strict de la charge des machines.

$z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$  est défini par :

$$z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}) = \frac{C_{min}}{C_{max}} \quad (3.19)$$

où  $C_{max}$  et  $C_{min}$  sont respectivement le temps de traitement de la machine la plus chargée et le temps de traitement de la machine la moins chargée. Si  $\{R, C_{max}, C_{min}, z_{eq}^*\}$  est une solution de  $PL_1(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ , alors  $z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S})$  peut être évalué par :

$$z_{\mathcal{I}}(\mathcal{S}) = 1 - \frac{z_{eq}^*}{C_{max}}$$

## 8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés au problème statique de la configuration d'un parc de machines parallèles partiellement multifonctions. Nous avons notamment démontré que ce problème est un problème  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort. Trouver une configuration optimale peut donc être très coûteux en temps. Nous avons tout de même proposé une heuristique à performance garantie pour résoudre ce problème. Cependant nous avons également vu qu'une faible incertitude

sur la demande peut remettre en cause la capacité de la configuration à garantir l'existence d'un plan de production équilibré. Ce qui avait pourtant été exprimé comme une contrainte très forte du problème.

Pour éviter cet écueil, il est donc primordial d'offrir un moyen de construire des configurations robustes au sens de la robustesse donnée dans la définition [II.3](#) : c'est l'objet du prochain chapitre.

## Chapitre 4

# Approche proactive pour la configuration d'un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions soumis à des incertitudes sur la demande : étape 1

## 1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous nous sommes intéressés à la configuration d'un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions en considérant que la demande était une donnée connue et fixée.

Nous avons proposé une heuristique à performance garantie basée sur la relaxation d'un programme linéaire en nombres entiers pour construire la configuration la moins chère qui permettait de répondre à une demande prévisionnelle avec un plan de production équilibré. Nous avons malheureusement montré que la performance de cette configuration optimale pouvait être remise en cause dès que la demande réelle s'éloignait, même de manière faible, de la demande prévisionnelle.

Le but de ce chapitre est de proposer des approches proactives au sens de la première partie de ce mémoire pour construire des configurations robustes au sens de la définition II.3. Pour que l'équilibre de la charge reste une contrainte pertinente nous partirons du principe que les machines sont des machines uniformes.

## 2 Définition et résolution de quelques problèmes de robustesse

La définition II.3 permet de mettre en évidence différents problèmes de robustesse dont la définition est liée à la connaissance dont nous disposons sur les grandeurs d'entrée du système, sur les perturbations et sur les performances que le décideur désire.

## 2.1 Premier problème : recherche de la garantie de performance offerte par une configuration

Imaginons qu'à l'étape 0, le décideur soit capable de définir précisément l'ensemble  $\mathcal{P}$  des demandes  $\mathcal{I}$  qui représente le risque qui doit être couvert par une configuration  $\mathcal{S}$ . Le premier problème de robustesse consiste à évaluer le taux d'équilibre garanti  $\mathcal{L}_\lambda$  offert par la configuration  $\mathcal{S}$  sur  $\mathcal{P}$ . La configuration  $\mathcal{S}$  peut être la solution courante ou encore une solution optimale (pour le problème statique du chapitre 4) pour la demande prévisionnelle.

Résoudre le premier problème de robustesse revient donc à répondre à la question suivante : « Étant donnée une configuration  $\mathcal{S}$ , quelle est sa garantie de performance  $\mathcal{L}_\lambda$  sur l'ensemble à couvrir des demandes  $\mathcal{P}$  telle que  $\lambda_1(\mathcal{S}, z_{\mathcal{I}}, \mathcal{P}) \leq \mathcal{L}_\lambda$  ? »

C'est donc le critère de robustesse  $\lambda_1$  qui permet d'évaluer la garantie de performance  $\mathcal{L}_\lambda$ . En ce sens  $\mathcal{L}_\lambda$  mesure le taux d'équilibre de la charge des machines dans le pire des cas sur  $\mathcal{P}$ .

Si  $\mathcal{P}$  est un ensemble explicite et fini de demandes, nous proposons un algorithme polynomial pour résoudre ce problème. Cet algorithme est décrit en pseudo-code dans ALG.1.

```

DÉBUT
Pour tout  $\mathcal{I} \in \mathcal{P}$  faire
     $\{R, C_{max}, C_{min}, z_{eq}^*\} \leftarrow PL_1(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ 
     $z_{\mathcal{I}}^* = 1 - \frac{z_{eq}^*}{C_{max}}$ 
Fin Pour
 $\mathcal{L}_\lambda \leftarrow \min_{\mathcal{I} \in \mathcal{P}}(z_{\mathcal{I}}^*)$ 
FIN

```

ALG. 1: Algorithme de recherche de la garantie de performance offerte par une configuration dans le cas où l'ensemble des demandes est explicite et fini

Dans le cas où l'ensemble  $\mathcal{P}$  n'est pas explicite ou dans le cas où l'ensemble  $\mathcal{P}$  n'est pas fini, le problème reste ouvert et nous ne proposons pas de méthode de résolution dans ce mémoire.

## 2.2 Deuxième problème : recherche du domaine des demandes pour lequel une configuration particulière est robuste

Le décideur définit maintenant le taux d'équilibre des machines  $\mathcal{L}_\lambda = 100\%$  que doit offrir la configuration  $\mathcal{S}$  : le plan de production doit être équilibré même dans le pire des cas. Le deuxième problème de robustesse consiste à évaluer l'ensemble des demandes  $\mathcal{P}$  que peut couvrir la configuration  $\mathcal{S}$  sans remettre en cause l'existence d'un plan de production équilibré.

Résoudre le deuxième problème de robustesse revient donc à répondre à la question suivante : « Étant donnée une configuration  $\mathcal{S}$ , quel est l'ensemble des demandes  $\mathcal{P}$  que peut couvrir la configuration, tel que  $\lambda_1(\mathcal{S}, z_{\mathcal{I}}, \mathcal{P}) = 100\%$  ? »

Répondre à cette question revient à répondre à la deuxième question de l'analyse de sensibilité présentée en section 4.1 du chapitre 2.

Rossi (2003) a déjà répondu à cette question dans le cadre particulier de l'industrie des semiconducteurs et plus précisément dans le cadre de la configuration d'un atelier de photolithographie qui était modélisé par un parc de machines parallèles partiellement multifonctions.

Nous présenterons ici la démarche sur un exemple et pour plus de détails, le lecteur pourra consulter (Rossi, 2003).

Nous considérons l'exemple académique suivant :

$$\left. \begin{array}{l} T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ V_P = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ V_M = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \\ \mathcal{I}_{ref} = \begin{bmatrix} 209 \\ 151 \\ 262 \\ 77 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow V = \begin{bmatrix} 30 & 45 & 20 \\ 0 & 9 & 4 \\ 12 & 0 & 8 \\ 18 & 27 & 12 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Nous considérons également la configuration  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$  définie dans le chapitre précédent :

$$\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour cette configuration, la machine 2 n'est pas qualifiée pour les produits de type 1 et 3. Ainsi la demande pour chacun de ces types de produit doit être entièrement réalisée sur les machines 1 et 3. Et pour éviter le déséquilibre du plan de production, le temps alloué aux machines 1 et 3 pour traiter les produits de type 1 et 3 doit être inférieur ou égal au temps alloué à la machine 2 pour produire les produits de types 2 et 4.

Cette contrainte peut être formulée de la manière suivante pour toute demande  $\mathcal{I}$  :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{I}(1)}{V(1,1) + V(1,3)} + \frac{\mathcal{I}(3)}{V(3,1) + V(3,3)} \leq \frac{\mathcal{I}(2)}{V(2,2)} + \frac{\mathcal{I}(4)}{V(4,2)} \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{\mathcal{I}(1)}{V_P(1)} + \frac{\mathcal{I}(3)}{V_P(3)} \right) \times \frac{1}{V_M(1) + V_M(3)} \leq \left( \frac{\mathcal{I}(2)}{V_P(2)} + \frac{\mathcal{I}(4)}{V_P(4)} \right) \times \frac{1}{V_M(2)} \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{\mathcal{I}(1)}{V_P(1)} + \frac{\mathcal{I}(3)}{V_P(3)} \right) \times V_M(2) \leq \left( \frac{\mathcal{I}(2)}{V_P(2)} + \frac{\mathcal{I}(4)}{V_P(4)} \right) \times (V_M(1) + V_M(3)) \end{aligned}$$

Et finalement la contrainte devient :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_1} \frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)} \times \sum_{j \in \mathcal{M}_1} V_M(j) \leq \sum_{i \in \overline{\mathcal{N}}_1} \frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)} \times \sum_{j \in \overline{\mathcal{M}}_1} V_M(j) \quad (4.2)$$

avec  $\mathcal{N}_1 = \{1, 3\}$ ,  $\mathcal{M}_1 = \{2\}$ ,  $\overline{\mathcal{N}}_1 = \{2, 4\}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_1 = \{1, 3\}$ .

On peut remarquer que  $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{M}_1 = \{(1, 2); (3, 2)\}$  est un rectangle de “0” dans  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$  (aux permutations de lignes ou de colonnes près).

On peut continuer à mener le même type de réflexions sur la matrice  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$  et obtenir trois autres contraintes.

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_2} \frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)} \times \sum_{j \in \mathcal{M}_2} V_M(j) \leq \sum_{i \in \overline{\mathcal{N}}_2} \frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)} \times \sum_{j \in \overline{\mathcal{M}}_2} V_M(j) \quad (4.3)$$

avec  $\mathcal{N}_2 = \{1, 2, 4\}$ ,  $\mathcal{M}_2 = \{3\}$ ,  $\overline{\mathcal{N}}_2 = \{3\}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_2 = \{1, 2\}$ .

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_3} \frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)} \times \sum_{j \in \mathcal{M}_3} V_M(j) \leq \sum_{i \in \overline{\mathcal{N}}_3} \frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)} \times \sum_{j \in \overline{\mathcal{M}}_3} V_M(j) \quad (4.4)$$

avec  $\mathcal{N}_3 = \{1\}$ ,  $\mathcal{M}_3 = \{2, 3\}$ ,  $\overline{\mathcal{N}}_3 = \{2, 3, 4\}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_3 = \{1\}$ .

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_4} \frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)} \times \sum_{j \in \mathcal{M}_4} V_M(j) \leq \sum_{i \in \overline{\mathcal{N}}_4} \frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)} \times \sum_{j \in \overline{\mathcal{M}}_4} V_M(j) \quad (4.5)$$

avec  $\mathcal{N}_4 = \{2\}$ ,  $\mathcal{M}_4 = \{1, 3\}$ ,  $\overline{\mathcal{N}}_4 = \{1, 3, 4\}$  et  $\overline{\mathcal{M}}_4 = \{2\}$ .

Comme précédemment,  $\mathcal{N}_2 \times \mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{N}_3 \times \mathcal{M}_3$  et  $\mathcal{N}_4 \times \mathcal{M}_4$  correspondent à des rectangles de “0” (toujours aux permutations de lignes ou de colonnes près) dans la matrice  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$ .

Rossi (2003) va plus loin en démontrant que l'ensemble des demandes  $\mathcal{P}$  que peut couvrir la configuration  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$  sans remettre en cause l'existence d'un plan de production équilibré est exactement égal à l'ensemble des demandes satisfaisant les contraintes (4.2), (4.3), (4.4), (4.5). Il généralise ce résultat pour toute configuration. Cependant trouver l'ensemble des contraintes pour un atelier de taille industrielle n'est pas aussi aisé que pour l'exemple académique (4.1). Cependant Rossi (2003) a démontré que comme pour l'exemple académique, chaque contrainte est associée à un rectangle maximal de “0”. Ainsi trouver tous les rectangles maximaux de “0” dans une configuration permet d'atteindre le domaine des demandes pour lequel cette configuration est robuste. Ceci peut être réalisé à l'aide de l'algorithme de Nourine et Raynaud (1999). Les auteurs ont démontré que l'algorithme est exponentiel.

Cependant, tel qu'il est défini pour l'instant, l'ensemble des demandes couvert par une configuration n'est pas explicite. C'est pour cette raison que Rossi (2003) a proposé d'utiliser un rayon de stabilité (au sens de la définition I.3 tirée de (Sotskov et al., 1998)) pour évaluer un sous-ensemble de  $\mathcal{P}$ . Étant donné une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$ , le rayon de stabilité évalue la distance minimale (au sens de la norme 1) de  $\mathcal{I}_{ref}$  aux frontières de  $\mathcal{P}$  défini par les contraintes issues des rectangles de “0”. Ce rayon de stabilité ne tient pas en une seule formule et nécessite une procédure de calcul détaillée dans (Rossi, 2003). On note ce rayon de stabilité  $\rho(\mathcal{S}, V, \mathcal{I}_{ref})$  ou  $\rho$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. Il évalue l'amplitude maximale d'une perturbation que peut supporter la configuration sans remettre en cause l'existence d'un plan de production équilibré. Il est intéressant de remarquer dès à présent que de par son calcul, le rayon de stabilité est fortement lié à la position des “1” et des “0” dans la matrice de qualification puisque le calcul du rayon de stabilité dépend directement des rectangles de “0”.

Ce rayon de stabilité permet de définir un ensemble  $\mathcal{P}_\rho$  :

$$\mathcal{P}_\rho = \{\mathcal{I} = \mathcal{I}_{ref} + \Delta\mathcal{I} \mid \|\Delta\mathcal{I}\|_1 \leq \rho\} \quad (4.6)$$

La figure 4.1 donne un exemple de voisinage  $\mathcal{P}_\rho$  dans le cas où il n'y a que deux types de produits et le rayon de stabilité est égal à 4.

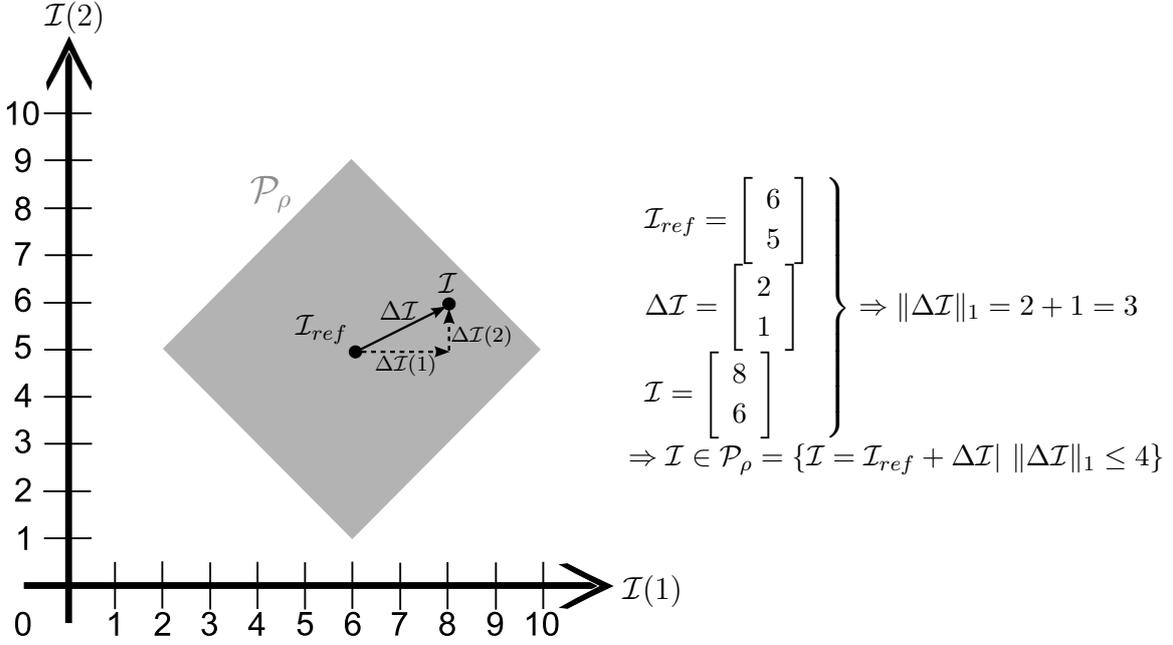


FIG. 4.1 – Exemple de voisinage  $\mathcal{P}_\rho$  dans le cas  $n = 2$  types de produit et  $\rho = 4$

Nous pouvons définir également une tolérance de la manière suivante :

$$tol(\mathcal{S}, V, \mathcal{I}_{ref}) = \frac{\rho(\mathcal{S}, V, \mathcal{I}_{ref})}{\sum_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{I}_{ref}(i)} \quad (4.7)$$

Cette tolérance évalue l'amplitude maximale d'une perturbation, en pourcentage du volume total de la demande  $\mathcal{I}_{ref}$ , que peut supporter la configuration  $\mathcal{S}$  sans remettre en cause l'existence d'un plan de production équilibré.

### 2.2.1 Application à l'exemple académique

Nous reprenons les caractéristiques de l'exemple académique (4.1) et nous considérons à nouveau la configuration  $\mathcal{S}_{\mathcal{I}_{ref}}^*$ . Pour cette configuration et d'après la procédure présentée dans (Rossi, 2003),  $\rho = 21,14$  et  $tol = 3,02\%$ . Ainsi, pour toute demande  $\mathcal{I}$  appartenant à  $\mathcal{P}_\rho$ , l'existence d'un plan de production équilibré est garanti. En dehors de  $\mathcal{P}_\rho$ , le traitement de la demande réelle peut être équilibré ou non.

### 2.2.2 Propriétés remarquables du rayon de stabilité

De par son lien avec les rectangles de "0" de la configuration, le rayon de stabilité a quelques propriétés remarquables.

**Propriété II.1** *Le rayon de stabilité est maximal pour  $\mathcal{S} = T$ .*

**Preuve :** si  $\mathcal{S} = T$  toutes les machines sont qualifiées pour tous les types de produits pour lesquelles il n'existe pas de contrainte technologique. Imaginons maintenant que l'on supprime une qualification. Cela veut dire que l'on rajoute un "0" dans la configuration  $\mathcal{S}$  : nous notons  $\mathcal{S}'$  la configuration résultante. Le fait d'avoir supprimé une qualification implique que, soit un nouveau rectangle de "0" est créé (et donc une nouvelle contrainte), soit un rectangle préexistant est agrandi (et donc une contrainte préexistante est modifiée et la frontière qui en découle se rapproche de la demande prévisionnelle). Le rayon de stabilité étant par définition la plus petite distance de la demande prévisionnelle aux frontières définies par les rectangles de "0", le rayon de stabilité de  $\mathcal{S}'$  ne peut être que inférieur ou égal au rayon de stabilité de  $\mathcal{S}$ . C'est donc bien pour la configuration  $\mathcal{S} = T$  que la capacité à trouver un plan de production équilibré malgré les perturbations sur la demande est le plus grand.  $\square$

**Propriété II.2** *Le rayon de stabilité est infini lorsque  $T = [1]$  ( $T$  ne contient pas de contrainte technologique) et que  $\mathcal{S} = T$ .*

**Preuve :** toutes les machines sont qualifiées pour tous les types de produit et il n'y a pas de contrainte technologique. Pour toute demande  $\mathcal{I}$ , il suffit d'équirépartir en temps les produits sur chaque machine. Un plan de production  $R$  équilibré peut être défini de la manière suivante :

$$R(i, j) = \frac{\frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)}}{\sum_{k \in \mathcal{M}} V_M(k)}$$

Nous allons tout d'abord vérifier que ce plan de production permet bien de produire la totalité de la demande  $\mathcal{I}$ . Pour tout type de produit  $i$ ,  $\mathcal{I}(i)$  est sensée être évaluée par :

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V(i, j) = \sum_{j \in \mathcal{M}} \frac{\frac{\mathcal{I}(i) \times V_P(i) \times V_M(j)}{V_P(i)}}{\sum_{k \in \mathcal{M}} V_M(k)} = \sum_{j \in \mathcal{M}} \frac{\mathcal{I}(i) \times V_M(j)}{\sum_{k \in \mathcal{M}} V_M(k)} = \mathcal{I}(i) \frac{\sum_{j \in \mathcal{M}} V_M(j)}{\sum_{k \in \mathcal{M}} V_M(k)} = \mathcal{I}(i)$$

Nous vérifions ensuite que le plan de production est bien équilibré. La charge temporelle de chaque machine  $j$  est définie par :

$$TWLoad(j) = \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)}}{\sum_{k \in \mathcal{M}} V_M(k)} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}(i)}{V_P(i)}}{\sum_{k \in \mathcal{M}} V_M(k)} = TWLoad$$

On retrouve la formule donnée par le lemme II.2.

Pour toute demande  $\mathcal{I}$ , il existe un plan de production équilibré satisfaisant la demande. Le rayon de stabilité est donc infini.  $\square$

### 2.3 Troisième problème : recherche d'une configuration robuste

Le décideur a défini, lors de l'étape 0, le taux d'équilibre à garantir  $\mathcal{L}_\lambda = 100\%$  ainsi que l'ensemble  $\mathcal{P}_\rho$  des demandes (au sens de l'équation (4.6)) qui doivent être couvertes par la configuration. Le troisième problème consiste à trouver une ou plusieurs configurations  $\mathcal{S}$  qui peuvent couvrir l'ensemble  $\mathcal{P}_\rho$  sans remettre en cause l'existence d'un plan de production équilibré.

Résoudre le troisième problème de robustesse revient donc à répondre à la question suivante : « Étant donné l'ensemble  $\mathcal{P}_\rho$  des demandes à couvrir, quelle est une configuration  $\mathcal{S}$  telle que  $\lambda_1(\mathcal{S}, z_{\mathcal{I}}, \mathcal{P}_\rho) = 100\%$  ? »

Ce problème peut se résoudre à l'aide de l'algorithme ALG.2.

```

DÉBUT
calculer  $\rho(T, V, \mathcal{I}_{ref})$  à l'aide de l'algorithme de Rossi (2003).
Si ( $\rho(T, V, \mathcal{I}_{ref}) \geq \rho$ ) Alors
    | une configuration robuste est  $\mathcal{S} = T$ .
Sinon
    | il n'existe pas de configuration robuste.
Fin Si
FIN

```

ALG. 2: Algorithme de recherche d'une configuration robuste pour  $\mathcal{P}_\rho$  fixé

Cet algorithme est exponentiel de par l'utilisation de l'algorithme de Rossi (2003) pour calculer le rayon de stabilité. L'algorithme de Rossi (2003) est lui-même basé sur l'utilisation de l'algorithme de Nourine et Raynaud (1999) qui est exponentiel. À notre connaissance il n'existe pas de méthode polynomiale pour calculer ce rayon de stabilité. Toutefois sur des configurations de taille industrielle, l'algorithme de Rossi (2003) retourne le rayon de stabilité en un temps très raisonnable (de l'ordre de la seconde).

Si l'algorithme ALG.2 ne retourne pas de solution robuste, il faut soit que le décideur revoit ses ambitions à la baisse pour  $\rho$ , soit qu'il envisage de demander au niveau stratégique d'investir dans une ou plusieurs nouvelles machines. Savoir les caractéristiques (contraintes technologiques, vitesse) de la machine sur laquelle investir est un problème intéressant qui reste ouvert.

## 2.4 Quatrième problème : recherche de la configuration qui couvre le plus grand ensemble de demandes

Le décideur n'a pu définir que le niveau de performance qu'il désirait ( $\mathcal{L}_\lambda = 100\%$  dans notre cas). Le quatrième problème consiste à trouver la configuration  $\mathcal{S}$  qui couvre le plus grand ensemble  $\mathcal{P}_\rho$  de demandes sans remettre en cause l'existence d'un plan de production équilibré.

Résoudre le quatrième problème revient à répondre à la question suivante : « Étant donné  $\mathcal{L}_\lambda = 100\%$ , quelle est la configuration  $\mathcal{S}$ , qui maximise  $\mathcal{P}_\rho$ , telle que  $\lambda(\mathcal{S}, z_{\mathcal{I}}, \mathcal{P}_\rho) = 100\%$  ? »

Pour résoudre ce problème il suffit d'utiliser la propriété II.1. La configuration la plus robuste est  $\mathcal{S} = T$ .

La configuration  $\mathcal{S} = T$  est la plus onéreuse puisqu'elle correspond à la configuration qui contient toutes les qualifications autorisées. Cette remarque nous conduit à nous intéresser à un nouveau problème de robustesse en tenant compte également des coûts de qualification pour la recherche de la configuration. Nous allons donc dès la prochaine section considérer un problème

bicritère dont l'enjeu est d'établir un compromis entre coût et robustesse pour la recherche de la configuration.

### 3 Définition et étude d'un problème de robustesse bicritère

#### 3.1 Définition du problème

**Définition II.4** *Le problème de robustesse bicritère peut être défini de la manière suivante : «étant données une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$ , la vitesse des machines  $V$ , trouver une configuration  $\mathcal{S}$  de coût  $C(\mathcal{S})$  minimum, qui maximise l'ensemble des demandes  $\mathcal{P}_\rho$  (c-à-d maximise  $\rho(\mathcal{S}, V, \mathcal{I}_{ref})$ ) sur lequel l'équilibre de la charge est garanti».*

Dans la suite de ce mémoire, nous ferons référence à ce problème par la dénomination *Configuration Minimale de Robustesse Maximale (CMRM)*.

#### 3.2 Étude de complexité

**Théorème II.3** *Le problème Configuration Minimale de Robustesse Maximale est  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort.*

**Preuve :** il suffit de relaxer le critère de maximisation de la robustesse pour retrouver le problème *Configuration Admissible de Coût Minimal (CACM)* du chapitre 4. D'après le théorème II.1, *CACM* est un problème  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort, donc *CMRM* l'est également.  $\square$

#### 3.3 L'approche $\epsilon$ -contrainte

T'Kindt et Billaut (2002) propose une topologie générale des problèmes d'optimisation multicritères avec les approches possibles de résolution. Lorsqu'un compromis entre les critères est autorisé et qu'il n'y a pas de poids pour chaque critère et lorsqu'une borne peut être donnée pour chacun des critères, une approche possible est l'approche  $\epsilon$ -contrainte. Cette approche consiste à optimiser un critère sachant que les autres sont bornés.

Nous nous intéressons au problème qui consiste à maximiser la robustesse alors que le coût de la configuration ne doit pas dépasser une certaine valeur fixée par le décideur : cette valeur peut être par exemple la valeur optimale issue du problème statique *Configuration Admissible de Coût Minimal* ou encore une contrainte qui exprime l'exigence du niveau stratégique.

Nous partons également du principe qu'un niveau de robustesse minimal est connu. Ce niveau de robustesse minimal peut être basé une fois de plus sur les exigences du niveau stratégique, ou encore sur des données statistiques ou encore sur le niveau de robustesse équivalent à la configuration optimale du problème statique *CACM*.

#### 3.4 À propos du compromis entre coût et robustesse

Nous cherchons dans cette section à illustrer le lien entre le coût de la configuration et son niveau de robustesse mesuré par  $\rho$ . En fait, deux configurations avec des coûts différents peuvent avoir le même niveau de robustesse, et inversement deux configurations avec le même coût peuvent avoir des niveaux de robustesse différents. Intuitivement le niveau de robustesse

est lié au coût de la configuration puisqu'on se doute que plus il y a de machines qualifiées et plus la configuration est capable de supporter les perturbations sur la demande. Cependant, comme nous allons le voir, le niveau de robustesse est avant tout solidement lié à la position des "1" et des "0" dans la configuration et donc au choix des qualifications. Naturellement, qualifier la machine la plus rapide pour le type de produit qui est le plus demandé est plus pertinent que qualifier la moins rapide pour le même type de produit.

Pour illustrer ces phénomènes, nous considérons les configurations suivantes admissibles pour l'exemple académique (4.1) :

$$\mathcal{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le tableau 4.1 donne le niveau de robustesse et le coût réduit des configurations  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{S}_3$ . Nous considérons que les coûts de qualification sont identiques. Le coût de la configuration est donc directement proportionnel au nombre de qualifications.

TAB. 4.1 – Liens entre coût et robustesse

	Configuration		
	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$
$C_r(\mathcal{S})$	90%	90%	60%
$\rho(\mathcal{S}, V, \mathcal{I}_{ref})$	21,14	100,56	21,14
$tol(\mathcal{S}, V, \mathcal{I}_{ref})$	3,02%	14,39%	3,02%

Dans la configuration  $\mathcal{S}_1$ , la machine 3 est qualifiée pour tous les types de produit alors qu'il s'agit de la machine la plus lente. Pour le même coût, il est plus logique de fournir une qualification supplémentaire à la machine 2 qui est la machine la plus rapide et en enlever une à la machine 3 comme dans la configuration  $\mathcal{S}_2$ . Bien que  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  aient le même coût (le coût réduit est égal à 90%) elles n'ont pas le même niveau de robustesse : le niveau de robustesse de la configuration  $\mathcal{S}_2$  est près de cinq fois plus important que celui de la configuration  $\mathcal{S}_1$ . Autrement dit, les variations (autour de  $\mathcal{I}_{ref}$ ) que peut absorber la configuration  $\mathcal{S}_2$  sans remettre en cause l'existence d'un plan de production équilibré sont cinq fois plus importantes pour un même coût.

Toujours dans la configuration  $\mathcal{S}_1$ , les produits de type 4 peuvent être fabriqués par toutes les machines alors que leur demande prédictive est moins de trois fois moins importante que la demande prédictive pour les produits de type 3 qui ne peuvent pas être fabriqués par la machine 2. Le coût de la configuration  $\mathcal{S}_1$  peut être réduit en supprimant deux qualifications pour les produits de type 4 sans dégrader le niveau de robustesse de  $\mathcal{S}_1$  comme dans la configuration  $\mathcal{S}_3$ .  $\mathcal{S}_3$  contient deux qualifications de moins pour le même niveau de robustesse.

De telles déductions sont aisées à pratiquer de manière empirique sur de petits exemples tels que celui-ci mais restent difficiles à appliquer sur des instances de tailles industrielles. Dans la prochaine section, nous proposons donc une méthode algorithmique pour surmonter cette difficulté.

## 4 Une approche $\epsilon$ -contrainte pour le problème *Configuration Minimale de Robustesse Maximale*

Nous cherchons à répondre à la question suivante : «étant donnés une demande prédictive  $\mathcal{I}_{ref}$ , la vitesse des machines  $V$ , et un coût maximal  $\mathcal{K}_{max}$ , quelle est la configuration  $\mathcal{S}$  qui maximise  $\rho(\mathcal{S}, V, \mathcal{I}_{ref})$  telle que  $C(\mathcal{S}) = \mathcal{K}_{max}$  ?»

### 4.1 Définition d'une PSE

Nous proposons une méthode du type Procédure par Séparation et Évaluation pour répondre à la question précédente. Le principe est le suivant. Partant de la configuration  $\mathcal{S}_0$  de coût maximal – toutes les machines qui peuvent être qualifiées le sont (c-à-d  $\mathcal{S}_0 = T$ ) –, des qualifications sont supprimées itérativement jusqu'à atteindre le coût  $\mathcal{K}_{max}$ . Puis l'opération est répétée jusqu'à ce que la configuration de coût  $\mathcal{K}_{max}$  la plus robuste soit obtenue. Un niveau de robustesse minimal désiré  $\rho_{min}$  est également donné.

### 4.2 Hypothèses

Nous nous plaçons dans le cas où les coûts de qualification sont identiques. Le coût d'une configuration est donc directement proportionnel au nombre de qualifications qui la composent et le coût  $\mathcal{K}_{max}$  peut être donné en nombre de qualifications.

### 4.3 Structure et définitions

La structure de l'arbre est défini comme suit :

- $\mathbf{G}$  est le niveau qui doit être atteint par la PSE pour que le coût  $\mathcal{K}_{max}$  soit respecté.
- Le **niveau de robustesse d'un candidat**  $(i, j)$  noté  $\rho(i, j)$  est le rayon de stabilité de la configuration courante pour laquelle la qualification  $(i, j)$  a été supprimée.
- $\rho_{min}$  est le niveau de robustesse minimal désiré.
- $\mathbf{tol}_{min}$  est la tolérance associée à  $\rho_{min}$ .
- $\rho_{max}$  est le meilleur niveau de robustesse atteint au niveau  $G$ . Il est initialisé à  $\rho_{min}$ .
- Un **candidat de niveau  $k$**  est une qualification  $(i, j)$  qui représente une  $k^{ieme}$  qualification qui peut être supprimée dans la configuration courante.
- Une **solution** est une configuration qui contient exactement  $\mathcal{K}_{max}$  qualifications et qui garantit un meilleur niveau de robustesse que  $\rho_{max}$ .
- Une **feuille** correspond à une configuration avec exactement  $\mathcal{K}_{max}$  qualifications.
- Un **niveau** regroupe un ensemble de nœuds. Les nœuds d'un niveau  $k$  correspondent à des solutions partielles qui ont exactement  $k$  qualifications supprimées.

## 4.4 Description de la PSE

### 4.4.1 Fonctionnement général

L'élément initial de la méthode est la configuration  $\mathcal{S}_0 = T$ . Pour l'exemple académique (4.1), cette configuration est :

$$\mathcal{S}_0 = T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ensuite  $G$  qualifications doivent être supprimées pour atteindre le coût  $\mathcal{K}_{max}$  autorisé. Ces suppressions vont être faites itérativement : une première qualification est supprimée puis une seconde etc. Une qualification ne devrait être supprimée que si la configuration résultante conduit à un niveau de robustesse supérieur à  $\rho_{max}$ . Cela signifie qu'une procédure de vérification doit être mise en place pour vérifier cette contrainte. Cependant nous avons vu que la procédure de calcul du rayon de stabilité passe par l'utilisation de l'algorithme de [Nourine et Raynaud \(1999\)](#) qui est un algorithme exponentiel. Cet algorithme a été amélioré dans [Aubry, 2004](#) en utilisant les caractéristiques de notre problème mais reste cependant exponentiel. Pour limiter l'effet de l'utilisation de la procédure de calcul du rayon de stabilité sur la PSE, nous avons décidé de n'appliquer cette procédure que pour certains niveaux déterminés dynamiquement : nous ferons référence à ces niveaux par la dénomination *niveaux de vérification*. Chaque niveau de vérification est séparé du suivant par un pas calculé dynamiquement que nous appelons *pas de vérification*. Lorsqu'un niveau entre deux *niveaux de vérification* est atteint, chaque candidat est évalué à l'aide d'un *indice de dégradation* qui mesure le risque de dégrader le niveau de robustesse de la configuration courante si la qualification correspondant au candidat est effectivement supprimée.

### 4.4.2 Séparation

À chaque niveau  $k$  de l'arbre, tous les candidats sont identifiés à partir des candidats du niveau précédent  $k - 1$ . Ces candidats sont ceux du niveau  $k - 1$  qui correspondent à des qualifications qui peuvent être supprimées au niveau  $k$  telles que la configuration résultante reste admissible (c-à-d. il reste une qualification par ligne et par colonne). Suivant que le niveau  $k$  est un niveau de vérification ou non, l'évaluation des candidats se fait de deux manières différentes pour choisir le « meilleur » candidat. Le candidat qui est choisi est retiré de la liste des candidats de niveau  $k$  et on poursuit la branche issue de ce candidat vers le niveau  $k + 1$ . Cette construction de l'arbre permet d'éviter les nœuds redondants : si le candidat  $(i_1, j_1)$  a été choisi au niveau  $k$ , il est supprimé de la liste de candidats du niveau  $k$  et n'apparaîtra donc jamais dans la liste des candidats du niveau  $k + 1$  et des niveaux suivants. Ainsi si les qualifications  $(i_1, j_1)$  et  $(i_2, j_2)$  ont été supprimées dans cet ordre elles ne pourront pas l'être dans l'ordre inverse.

### 4.4.3 Évaluation

Lorsqu'un niveau  $k$  est atteint, il y a deux possibilités d'évaluation des candidats.

1. Le niveau  $k$  est un *niveau de vérification* ou est égal à  $G$ . Le niveau de robustesse de chaque candidat de la liste des candidats de niveau  $k$  doit être évalué. Pour chaque candidat  $(i, j)$ , le niveau de robustesse de la configuration pour laquelle la qualification  $(i, j)$  a été supprimée est évalué. Si le niveau de robustesse obtenue est inférieur à  $\rho_{max}$ , la branche issue de ce

candidat est abandonnée. Une fois que tous les candidats ont été évalués, ils sont rangés par niveau de robustesse décroissant. Le «meilleur» candidat est le candidat qui implique le plus fort niveau de robustesse. La qualification correspondante est supprimée de la configuration courante. La branche issue de ce candidat est explorée.

Le prochain niveau de vérification est décidé à l'aide du *pas de vérification* qui est évalué par la valeur suivante notée  $p_{verif}$  :

$$p_{verif} = \max \left( 1; \left\lfloor \frac{\rho}{\rho_{max}} \times \frac{G}{n \times m} \right\rfloor \right) \quad (4.8)$$

où  $\rho$  représente le niveau de robustesse de la configuration courante. Dans cette formule  $\frac{G}{n \times m}$  représente le pourcentage de qualifications à supprimer alors que  $\frac{\rho}{\rho_{max}}$  mesure une sorte de marge de robustesse.

Le prochain niveau de vérification devient  $k + p_{verif}$ . Le premier niveau de vérification est initialisé à 1.

2. Le niveau  $k$  n'est pas un niveau de vérification. Les candidats du niveau  $k$  ne sont donc pas évalués par leur niveau de robustesse. Ils sont évalués à l'aide de l'*indice de dégradation* qui est représenté par  $val(i, j)$  :

$$val(i, j) = \frac{\mathcal{I}_{ref}(i) \times V_M(j)}{V_P(i)} \quad (4.9)$$

Plus  $val(i, j)$  est élevé plus le risque est grand de dégrader le niveau de robustesse de la configuration si la qualification  $(i, j)$  est supprimée. Les candidats sont rangés par *indices de dégradation* croissants. Le candidat avec le plus petit indice est considéré comme le meilleur.

Une borne supérieure pour le niveau de robustesse de chaque candidat est également calculée. Cette borne est la valeur minimum entre le niveau de robustesse de la ligne  $i$  et le niveau de robustesse de la colonne  $j$ . Le niveau de robustesse de la ligne  $i$  (resp. colonne  $j$ ) est le niveau de robustesse de la configuration où tous les "0" sont mis à "1" sauf ceux de la ligne  $i$  (resp. colonne  $j$ ) et où la qualification  $(i, j)$  a été supprimée. Cette approximation permet d'avoir une procédure polynomiale : le rayon de stabilité est déterminé par une unique contrainte liée à la ligne  $i$  (resp. colonne  $j$ ) car il n'y a plus qu'un unique rectangle de "0" dans la configuration et le rayon de stabilité est donc directement la distance à cette unique contrainte. Si la borne obtenue est inférieure à  $\rho_{max}$  alors la branche issue du candidat est abandonnée.

#### 4.4.4 Remontée dans l'arbre

Il existe deux raisons pour remonter dans l'arbre :

1. Le niveau  $G$  est atteint. La procédure retourne au niveau  $G - 1$  qui est considéré comme un *niveau de vérification*.
2. Il n'y a pas assez de candidats au niveau  $k$  pour atteindre le niveau  $G$ . Si le niveau de vérification antérieur était le niveau  $l$ , la procédure retourne au niveau  $\lfloor \frac{k+l}{2} \rfloor$  qui est considéré comme un niveau de vérification.

#### 4.4.5 Critère d'arrêt

La PSE est arrêtée quand il n'y a plus assez de candidat au niveau 1 pour atteindre le niveau  $G$  ou lorsqu'un temps d'exécution fixé par l'utilisateur est atteint.

### 4.5 Application à un exemple

Nous illustrons les principaux mécanismes de la PSE sur l'exemple suivant :

$$\left. \begin{array}{l} T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ V_P = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ V_M = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 \end{bmatrix} \\ \mathcal{I}_{ref} = \begin{bmatrix} 209 \\ 151 \\ 262 \\ 77 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow V = \begin{bmatrix} 30 & 45 & 20 \\ 0 & 9 & 4 \\ 12 & 18 & 8 \\ 18 & 27 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

Nous souhaitons que le coût de la configuration soit égal à  $\mathcal{K}_{max} = 6$ . Ce qui revient à dire qu'il faut supprimer  $G = 4$  qualifications dans la configuration  $\mathcal{S} = T$  pour atteindre  $\mathcal{K}_{max}$ . Nous posons  $tol_{min} = 5\%$  ce qui équivaut à vouloir un rayon de stabilité minimal de  $\rho_{min} = 34,95$ . On initialise  $\rho_{max} = \rho_{min}$ .

$$\text{La configuration initiale est } \mathcal{S}_0 = T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Au niveau 1 l'ensemble des candidats sont toutes les qualifications de  $\mathcal{S}_0$  qui si elles sont supprimées ne conduisent pas à une ligne ou une colonne vide dans la configuration  $\mathcal{S}$  résultante. L'ensemble des candidats de niveau 1 est ici  $\Gamma_1 = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (2, 2); (2, 3); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (4, 1); (4, 2)\}$ .

Le niveau 1 est par définition un niveau de vérification. Il faut donc évaluer chacun des candidats de  $\Gamma_1$ . Les niveaux de robustesse de chacun des candidats sont rangés dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{lll} \rho(1, 1) = 135,04 & \rho(1, 2) = 257,55 & \rho(1, 3) = 257,55 \\ & \rho(2, 2) = -98,07 & \rho(2, 3) = 27,62 \\ \rho(3, 1) = -135,82 & \rho(3, 2) = 100,57 & \rho(3, 3) = 151,11 \\ \rho(4, 1) = 182,52 & \rho(4, 2) = 257,55 & \end{array}$$

Les candidats (2, 2), (2, 3) et (3, 1) impliquent des niveaux de robustesse inférieurs à  $\rho_{max}$  ils sont donc éliminés de  $\Gamma_1$ .

Le « meilleur » candidat est celui qui a le niveau de robustesse le plus élevé. Il s'agit ici de (1, 2), (1, 3) et (4, 2). On choisit le premier de la liste à savoir (1, 2). La qualification (1, 2)

est donc supprimée de  $\mathcal{S}_0$  et on obtient la configuration  $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  avec son niveau de robustesse associé  $\rho = 257,55$ . Pour éviter d'explorer la même solution plusieurs fois le candidat  $(1, 2)$  est supprimé de  $\Gamma_1$ .  $\Gamma_1$  est donc maintenant égal à  $\{(1, 1); (1, 3); (3, 2); (3, 3); (4, 1); (4, 2)\}$ .

Nous évaluons le prochain niveau de vérification par  $p_{verif} = \max\left(1; \left\lfloor \frac{\rho}{\rho_{max}} \times \frac{G}{n \times m} \right\rfloor\right)$ .

Ici  $\frac{\rho}{\rho_{max}} \times \frac{G}{n \times m} = \frac{257,55}{34,95} \times \frac{4}{12} = 2,46$  et donc  $p_{verif} = 2$ . Le prochain niveau de vérification est donc  $1 + 2 = 3$ .

Nous passons maintenant au niveau 2 qui n'est pas un niveau de vérification. L'ensemble des candidats de niveau 2 sont à chercher parmi les candidats de  $\Gamma_1$  qui si ils sont supprimés dans  $\mathcal{S}$  ne conduisent pas à des colonnes ou des lignes nulles. Ici  $\Gamma_2 = \{(1, 1); (1, 3); (3, 2); (3, 3); (4, 1); (4, 2)\}$ .

Le niveau 2 n'est pas un niveau de vérification, les candidats  $(i, j)$  de  $\Gamma_2$  sont donc triés par  $val(i, j)$  croissant. ici  $val$  est donné par le tableau suivant :

$$val = \begin{bmatrix} 251 & & 167 \\ & 1179 & 524 \\ 154 & & 231 \end{bmatrix}$$

C'est donc le candidat  $(4, 1)$  qui est choisi ici. Mais nous évaluons également les candidats à l'aide d'une borne supérieure sur le niveau de robustesse.

Par exemple, pour le candidat  $(3, 2)$ , le niveau de robustesse de la ligne 3 est le niveau

de robustesse de la configuration  $S_{L3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  qui est égal à 100,57. Pour ce même

candidat, le niveau de robustesse de la colonne 2 est le niveau de robustesse de la configuration

$S_{C2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  qui est égal à 21,15. La borne supérieure du niveau de robustesse du candidat

$(3, 2)$  est donc 21,15. Cette borne supérieure étant inférieure à  $\rho_{max}$ , le candidat  $(3, 2)$  peut être supprimé de  $\Gamma_2$ .

On évalue tous les candidats avec leur borne supérieure de la même manière que nous venons de le faire avec  $(3, 2)$ . Seul le candidat  $(3, 2)$  a une borne supérieure qui permet de l'éliminer.

Nous passons ensuite au niveau 3 qui est un niveau de vérification. Nous adoptons donc la même démarche qu'au niveau 1 et nous continuons ainsi jusqu'à explorer la totalité de l'arbre.

## 4.6 Expérimentation

La PSE a été testée sur une centaine d'exemples. Chaque exemple est constitué d'une matrice de vitesse  $V$  et un vecteur demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$  générés de manière aléatoire. Un coût de

configuration maximum et un niveau de robustesse minimum sont également fixés.

Les exemples sont distribués comme indiqué dans le tableau 4.2. Il y a tout d'abord 54 exemples de taille académique : ce sont les exemples de type 1. Il y a ensuite les exemples de taille industrielle : ce sont les exemples de type 2. Ces exemples sont testés dans trois cas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Ces trois cas sont caractérisés par des coûts réduits maximaux autorisés respectifs de 33%, 50% et 66% et des tolérances minimales fixées respectivement à 10%, 15% et 20%. Ces données sont représentées dans les deux dernières colonnes du tableau 4.2.

Un temps limite d'exécution a été arbitrairement fixé à une heure. La PSE a été implémentée en langage C et a été testée sur un PC dont les caractéristiques sont les suivantes : RAM 512Mo, processeur Intel Pentium IV 2GHz.

Les résultats sont présentés dans les tableaux 4.3 et 4.4.

TAB. 4.2 – Caractéristiques des exemples

Type	Taille ( $n$ produits $\times$ $m$ machines)	Coût réduit maximal	Tolérance minimale
		$\frac{\kappa_{max}}{n \times m}$	$tol_{min}$
type 1	$4 \times 3 \rightarrow 9 \times 5$	50%	15%
type 2a	$10 \times 6 \rightarrow 50 \times 10$	33%	10%
type 2b	$10 \times 6 \rightarrow 50 \times 10$	50%	15%
type 2c	$10 \times 6 \rightarrow 50 \times 10$	66%	20%

TAB. 4.3 – Optimalité et tolérance minimale

Type	Pourcentage d'exemples résolus optimalement	Pourcentage d'exemples pour qui la tolérance minimale est atteinte
type 1	82%	83%
type 2a	0%	81%
type 2b	0%	89%
type 2c	0%	93%

Le tableau 4.3 donne le pourcentage d'exemples résolus de manière optimale dans la limite de temps imparti. Le Tableau 4.4 permet de mesurer la qualité des solutions obtenues en terme de tolérance obtenue et en terme de distance relative entre la tolérance obtenue et la tolérance minimale désirée.

Notre PSE ne permet pas de garantir que la solution obtenue est la solution optimale, notamment pour les exemples de taille industrielle. Cependant le tableau 4.3 montre que la méthode propose dans plus de 80% des cas une solution pour laquelle la tolérance obtenue est supérieure à la tolérance minimale désirée. Et nous pouvons voir dans le tableau 4.4, que la tolérance obtenue est au minimum 1,7 fois supérieure à la minimale désirée en moyenne. Cette performance est atteinte pour les exemples de type 2a. Pour les exemples de type 2b, la tolérance moyenne est de 41% (c-à-d 2,73 fois supérieure à la tolérance minimale désirée). Pour les exemples de type

TAB. 4.4 – Qualité des solutions

Type	Coût maximal $\mathcal{K}_{max}$	Tolérance de la meilleure solution			Tolérance de la meilleure solution divisée par la tolérance minimale		
		min.	moyenne	max.	min.	moyenne	max.
type 1	15%	0%	28%	76%	0	1,87	5,07
type 2a	33%	0%	17%	35%	0	1,7	3,5
type 2b	50%	0%	41%	65%	0	2,73	4,33
type 2c	66%	0%	67%	84%	0	3,35	4,20

2c la tolérance moyenne atteint 67% (c-à-d 3,35 fois supérieure à la tolérance minimale désirée). L'objectif est donc largement atteint.

Lorsque la PSE ne propose aucune solution qui atteint la tolérance minimale, il peut y avoir deux raisons :

1. Le coût maximal toléré est trop exigeant pour atteindre le niveau de robustesse minimal désiré.
2. Le temps d'exécution égal à une heure est trop petit.

Dans les deux cas, notre méthode est capable de mémoriser une configuration qui atteint le niveau de robustesse minimal mais avec un coût supérieur à celui autorisé. Au décideur d'accepter ou non cette proposition.

Notre PSE n'est pas toujours capable de trouver une solution optimale ou en tout cas de garantir que la configuration trouvée est optimale. Cependant, elle s'avère être un outil convaincant dans le cadre de l'aide à la décision puisqu'elle propose dans la plupart des cas une configuration atteignant largement les désirs de l'utilisateur. Le temps d'exécution fixé à une heure est plus que raisonnable dans la mesure où tous les calculs sont faits hors-ligne. Dans le contexte industriel des semiconducteurs, les configurations sont remises en cause une fois par mois ; sur l'échelle de un mois, une heure d'exécution semble raisonnable.

Nous nous sommes interrogés sur l'opportunité d'étendre le temps limite d'exécution à plusieurs heures mais il n'y a pas eu d'amélioration sensible sur les quelques exemples pour lesquels nous avons testé un temps d'exécution plus long.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité différents problèmes pour la configuration robuste d'un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions soumis à des incertitudes sur la demande. L'adjectif robuste renvoie ici à la capacité de la configuration à garantir l'équilibre de la charge.

Nous avons proposé des approches proactives pour résoudre ces problèmes et nous avons développé une PSE pour traiter le problème du compromis entre coût et robustesse. Les résultats ont démontré que notre méthode permet de répondre au problème de l'aide à la décision puisqu'elle propose des configurations répondant aux objectifs posés par le décideur.

---

Cependant le choix de l'équilibre de la charge n'est valide que dans le cadre de l'utilisation de machines uniformes. C'est pourquoi nous proposons dans le prochain chapitre d'étudier une autre performance : la garantie d'un temps de traitement limite par la configuration.



## Chapitre 5

# Une nouvelle performance pour l'atelier : analyse de sensibilité et études de robustesse

### 1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés à la configuration robuste d'un parc de machines parallèles partiellement multifonctions soumis à des incertitudes sur la demande. L'adjectif robuste renvoyait à la capacité de la configuration à garantir l'existence d'un plan de production équilibré malgré les incertitudes.

Nous avons cependant démontré que la contrainte d'équilibre de la charge des machines n'est pertinente que dans le cas où les machines sont uniformes : en pratique il est très rare que les machines le soient. De plus le choix de garantir cette performance trouvait sa source dans le contexte industriel très particulier duquel était issu le problème.

Pour traiter un problème plus général qui reste valide pour les machines non liées nous proposons dans ce chapitre d'utiliser une nouvelle performance qui reste pertinente dans le cas des machines non liées : garantir l'existence d'un plan de production tel que le temps de traitement est inférieur à une deadline  $\tilde{d}$  malgré des incertitudes sur la demande.

Ce chapitre présente une étude préliminaire basée sur une analyse de sensibilité de la configuration du parc de machines parallèles partiellement multifonctions ainsi que sur la définition de plusieurs problèmes de robustesse.

### 2 Définitions, hypothèses, et problème d'affectation

#### 2.1 Hypothèses et notations

Dans cette section, nous supposons que la matrice technologique  $T$ , que les vitesses des machines (non liées)  $V$  et qu'une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$  sont données. De plus, le décideur impose une deadline  $\tilde{d}$  qui représente une performance qu'il juge acceptable pour le temps de traitement de la demande.

**Définition II.5** Soit  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  l'ensemble des demandes qui peuvent être produites en moins de  $\tilde{d}$  unités de temps par la configuration  $\mathcal{S}$ .

Plus formellement,  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S}) = \left\{ \mathcal{I} \in \mathbb{R}_n^+ \mid C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}) \leq \tilde{d} \right\} \quad (5.1)$$

avec  $C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I})$  solution optimale du problème d'affectation de la section 2.2.

Nous supposons que  $\mathcal{I}_{ref}$  appartient à  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ . Si ce n'est pas le cas, il faudrait de toute évidence que le décideur revoit ses ambitions à la baisse et donc la valeur de  $\tilde{d}$  à la hausse.

On appelle  $(e_i)_{i \in \mathcal{N}}$  la base canonique de  $\mathbb{R}_n^+$ .

**Définition II.6** Soit  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I})$  le voisinage autour d'une demande  $\mathcal{I}$  défini par :

$$\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}) = \left\{ \mathcal{I}' = \mathcal{I} + \sum_{k \in \mathcal{N}} \alpha_k \cdot a_k \cdot e_k \mid \sum_{k \in \mathcal{N}} \alpha_k \leq 1 \wedge \alpha_k \geq 0, \forall k \in \mathcal{N} \right\} \quad (5.2)$$

**Définition II.7** Soit  $\mathcal{I}_{ref}^{a_k}$  le vecteur demande défini par :

$$\mathcal{I}_{ref}^{a_k} = \mathcal{I}_{ref} + a_k \cdot e_k \quad (5.3)$$

## 2.2 Problème d'affectation associé

Étant données une configuration  $\mathcal{S}$  et une demande  $\mathcal{I}$ , le problème d'affectation consiste à chercher un plan de production  $R$  qui minimise le temps de traitement de  $\mathcal{I}$  par la configuration  $\mathcal{S}$  : ce temps de traitement est classiquement noté  $C_{max}$ .

Le problème d'affectation peut être formulé ainsi : «Étant données une configuration  $\mathcal{S}$  et une demande  $\mathcal{I}$ , trouver un plan de production  $R$  qui minimise  $C_{max}$ ».

En utilisant les champs classiques de notation  $\alpha|\beta|\gamma$  de l'ordonnancement, ce problème est noté  $MPM|split|C_{max}$ .

Ce problème est facile dans la mesure où un plan de production optimal peut être trouvé à l'aide du programme linéaire suivant noté  $PL_3(\mathcal{S}, \mathcal{I})$  dérivé de (Lawler et Labetoulle, 1978).

$$PL_3(\mathcal{S}, \mathcal{I}) \begin{cases} \min(C_{max}) \\ \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V(i, j) = \mathcal{I}(i) & \forall i \in \mathcal{N} \quad (a) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) \leq C_{max} & \forall j \in \mathcal{M} \quad (b) \\ (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times R(i, j) = 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (c) \\ R(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (d) \end{cases} \quad (5.4)$$

$V(i, j)$ ,  $\mathcal{I}(i)$  et  $\mathcal{S}(i, j)$  sont des données alors que  $C_{max}$  et  $R(i, j)$  sont des variables. Nous notons ce problème  $PL_3(\mathcal{S}, \mathcal{I})$  pour montrer que les instances du problème sont  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{I}$ . Les autres données du problème sont supposées comme étant constantes tout au long de ce chapitre. L'ensemble des contraintes (5.4a) permet de vérifier que la demande  $\mathcal{I}$  est satisfaite. L'ensemble des contraintes (5.4b) garantit que la charge de chaque machine est inférieure au temps de traitement. L'ensemble des contraintes (5.4c) permet d'interdire l'affectation d'un produit à une machine lorsque la machine en question n'est pas qualifiée pour le type de produit en question. Enfin les contraintes (5.4d) définissent le domaine de variation de  $R$ .

Dans la suite du chapitre, nous noterons  $C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I})$  la solution optimale de  $PL_3(\mathcal{S}, \mathcal{I})$ . Si le couple  $(R, C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}))$  est une solution de  $PL_3(\mathcal{S}, \mathcal{I})$  alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}) = \max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) \right) \quad (5.5)$$

### 3 Résultats préliminaires

#### 3.1 $C_{max}^{\mathcal{S}}$ est une norme sur l'espace des demandes $\mathbb{R}_n^+$

Il est possible de démontrer que la fonction  $C_{max}^{\mathcal{S}} : \mathbb{R}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une norme. Pour ce faire, il suffit de démontrer que  $C_{max}^{\mathcal{S}}$  vérifie les propriétés de *séparation*, d'*homogénéité* et d'*inégalité triangulaire* (Golub et Loan, 1989).

##### 3.1.1 Propriété de séparation

**Lemme II.4**  $C_{max}^{\mathcal{S}}$  vérifie la propriété de séparation :

$$C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I} = 0 \quad (5.6)$$

**Preuve.**  $C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I})$  mesure le temps de traitement minimum de la demande  $\mathcal{I}$  par la configuration  $\mathcal{S}$ . De manière triviale, ce temps de traitement est nul si et seulement si la demande l'est également.  $\square$

##### 3.1.2 Propriété d'homogénéité

**Lemme II.5**  $C_{max}^{\mathcal{S}}$  vérifie la propriété d'homogénéité :

$$\forall (\alpha, \mathcal{I}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_n^+ \quad C_{max}^{\mathcal{S}}(\alpha \mathcal{I}) = \alpha C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}) \quad (5.7)$$

**Preuve.** Nous montrons tout d'abord que si le couple  $(R, C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}))$  est une solution optimale de  $PL_3(\mathcal{S}, \mathcal{I})$  alors le couple  $(\alpha R, \alpha C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}))$  est une solution admissible de  $PL_3(\mathcal{S}, \alpha \mathcal{I})$ .

En effet la demande  $\alpha \mathcal{I}$  peut être produite en totalité par le plan de production  $\alpha R$  car pour tout  $i$  de  $\mathcal{N}$  nous avons :

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} (\alpha R(i, j) \times V(i, j)) = \alpha \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V(i, j) = \alpha \mathcal{I}(i)$$

Et le temps de traitement du plan de production  $\alpha R$  est égal par définition à :

$$\max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha R(i, j) \right) = \alpha \max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) \right) = \alpha C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I})$$

Démontrons maintenant par l'absurde que cette solution est également optimale.

Supposons qu'il existe un autre couple  $(R^*, C_{max}^*(\mathcal{I}))$  solution de  $PL_3(\mathcal{S}, \alpha \mathcal{I})$  telle que l'équation suivante soit vérifiée :

$$C_{max}^* < \alpha C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}) \quad (5.8)$$

$\frac{R^*}{\alpha}$  est un plan de production admissible pour  $\mathcal{I}$ . En effet la totalité de la demande  $\mathcal{I}$  peut être produite par ce plan de production car pour tout  $i$  de  $\mathcal{N}$  nous avons :

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} \frac{R^*(i, j)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \sum_{j \in \mathcal{M}} R^*(i, j) = \frac{1}{\alpha} (\alpha \mathcal{I}(i)) = \mathcal{I}(i)$$

Calculons maintenant le temps de traitement du plan de production  $\frac{R^*}{\alpha}$  que nous noterons  $\mathcal{T}(\frac{R^*}{\alpha}, \mathcal{I})$ . D'après l'équation (5.5) nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\left(\frac{R^*}{\alpha}, \mathcal{I}\right) &= \max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{R^*(i, j)}{\alpha} \right) \\ \Leftrightarrow \mathcal{T}\left(\frac{R^*}{\alpha}, \mathcal{I}\right) &= \frac{1}{\alpha} \max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} R^*(i, j) \right) = \frac{1}{\alpha} \cdot C_{max}^* \\ &\stackrel{(5.8)}{\Rightarrow} \mathcal{T}\left(\frac{R^*}{\alpha}, \mathcal{I}\right) < \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}) \\ &\Rightarrow \mathcal{T}\left(\frac{R^*}{\alpha}, \mathcal{I}\right) < C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}) \end{aligned}$$

Il existerait donc un plan de production pour  $\mathcal{I}$  qui permettrait d'avoir un temps de traitement inférieur au temps de traitement optimal, ce qui est impossible. L'hypothèse de départ est donc absurde et  $(\alpha \cdot R, \alpha \cdot C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}))$  est une solution optimale de  $PL_3(\mathcal{S}, \alpha \mathcal{I})$ .  $\square$

### 3.1.3 Inégalité triangulaire

**Lemme II.6**  $C_{max}^{\mathcal{S}}$  vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall (\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2) \in (\mathbb{R}_n^+)^2, \quad C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2) \leq C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}_1) + C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}_2) \quad (5.9)$$

**Preuve.** Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux plans de production, solutions optimales respectives de  $PL_3(\mathcal{S}, \mathcal{I}_1)$  et  $PL_3(\mathcal{S}, \mathcal{I}_2)$ . Un plan de production admissible pour  $PL_3(\mathcal{S}, \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)$  noté  $R_3$  peut être construit de la manière suivante :  $R_3 = R_1 + R_2$ .  $R_3$  est un plan de production admissible non nécessairement optimal, il en résulte donc que le temps de traitement résultant de  $R_3$  défini par  $\max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} R_3(i, j) \right) = \max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} (R_1(i, j) + R_2(i, j)) \right)$  est une borne supérieure pour  $C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)$ .

Nous pouvons donc écrire l'inégalité suivante :

$$C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2) \leq \max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} (R_1(i, j) + R_2(i, j)) \right) \leq \max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} R_1(i, j) \right) + \max_{j \in \mathcal{M}} \left( \sum_{i \in \mathcal{N}} R_2(i, j) \right)$$

Ce qui conduit exactement à l'équation (5.9).  $\square$

### 3.1.4 $C_{max}^{\mathcal{S}}$ est une norme

**Théorème II.4**  $C_{max}^{\mathcal{S}}$  est une norme sur l'espace des demandes  $\mathbb{R}_n^+$ .

**Preuve.** D'après les lemmes II.4, II.5, II.6,  $C_{max}^S$  vérifie les propriétés de *séparation*, d'*homogénéité* et d'*inégalité triangulaire* qui sont les propriétés qui permettent d'identifier une norme (Golub et Loan, 1989).  $\square$

### 3.2 $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ est un ensemble convexe

**Théorème II.5**  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  est un ensemble convexe.

**Preuve.** Soient  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$  deux demandes quelconques de  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ . Soient également  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres réels positifs tels que  $\alpha + \beta = 1$ . Pour démontrer que  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  est convexe, il suffit de démontrer que la demande définie par  $\alpha.\mathcal{I}_1 + \beta.\mathcal{I}_2$  appartient à  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ .

Par utilisation des propriétés d'homogénéité et d'inégalité triangulaire de la norme  $C_{max}^S$  (lemmes II.5 et II.6), il peut être établi que :

$$C_{max}^S(\alpha.\mathcal{I}_1 + \beta.\mathcal{I}_2) \leq \alpha.C_{max}^S(\mathcal{I}_1) + \beta.C_{max}^S(\mathcal{I}_2)$$

Or  $\mathcal{I}_1$  et  $\mathcal{I}_2$  appartiennent à  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ , donc  $C_{max}^S(\mathcal{I}_1) \leq \tilde{d}$  et  $C_{max}^S(\mathcal{I}_2) \leq \tilde{d}$  et par suite :

$$C_{max}^S(\alpha.\mathcal{I}_1 + \beta.\mathcal{I}_2) \leq \tilde{d}$$

Et donc par définition de  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ ,  $\alpha.\mathcal{I}_1 + \beta.\mathcal{I}_2$  appartient à  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ .  $\square$

## 4 Analyse de sensibilité de la configuration

### 4.1 Définition

Le problème d'analyse de sensibilité auquel nous nous intéressons consiste à répondre à la question 2 de l'analyse de sensibilité définie dans le chapitre 2 de ce mémoire : «dans quel voisinage de  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{S}$  reste-t-elle réalisable, avec une performance acceptable?».

Répondre à cette question consiste, dans notre contexte, à chercher le voisinage de la demande prévisionnelle tel que toutes les demandes peuvent être traitées en moins de  $\tilde{d}$  unités de temps où  $\tilde{d}$  représente la performance acceptable. Il est clair que, par définition de  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ , trouver  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  permet de répondre à cette question.

**Définition II.8** *Le problème d'analyse de sensibilité consiste à répondre à la question suivante : «étant données une configuration  $\mathcal{S}$ , une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$  et une deadline  $\tilde{d}$ , quel est l'ensemble  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  ?»*

### 4.2 Résolution approchée

Pour l'instant il nous est impossible de définir de manière explicite  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ . Nous proposons de chercher un sous-ensemble de  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  que nous pourrions évaluer de manière explicite.

**Lemme II.7** *Le voisinage  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$ , défini par la famille  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$  solution des programmes linéaires  $PLa_k(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}, \tilde{d})$ , définis à l'équation (5.10) est inclus dans  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ .*

**Définition II.9** Le programme linéaire  $PLa_k(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}, \tilde{d})$  s'écrit :

$$PLa_k(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}, \tilde{d}) \begin{cases} \max(a_k) & \\ \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V(i, j) = \mathcal{I}_{ref}(i) & \forall i \neq k \in \mathcal{N} \quad (a) \\ \sum_{j \in \mathcal{M}} (R(k, j) \times V(k, j)) - a_k = \mathcal{I}_{ref}(k) & (b) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) \leq \tilde{d} & \forall j \in \mathcal{M} \quad (c) \\ (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times R(i, j) = 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (d) \\ R(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (e) \end{cases} \quad (5.10)$$

$V(i, j)$ ,  $\mathcal{I}_{ref}(i)$ ,  $\mathcal{S}(i, j)$  et  $\tilde{d}$  sont des données alors que  $a_k$  et  $R(i, j)$  sont des variables. Nous notons ce problème  $PLa_k(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}, \tilde{d})$  pour montrer que les instances du problème sont  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{I}_{ref}$  et  $\tilde{d}$ . L'ensemble des contraintes (5.10a) et (5.10b) permet de vérifier que la demande  $\mathcal{I}_{ref}^{a_k}$  est satisfaite. L'ensemble des contraintes (5.10c) garantit que la demande  $\mathcal{I}_{ref}^{a_k}$  peut être traitée en moins de  $\tilde{d}$  unité de temps (la charge de chaque machine est inférieure au temps de traitement limite  $\tilde{d}$ ). L'ensemble des contraintes (5.10d) permet d'interdire l'affectation d'un produit à une machine lorsque la machine en question n'est pas qualifiée pour le type de produit en question. Enfin les contraintes (5.10e) définissent le domaine de variation de  $R$ .

La résolution de  $PLa_k(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}, \tilde{d})$  permet de répondre à la question suivante : «étant données une configuration  $\mathcal{S}$ , une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$  et une deadline  $\tilde{d}$ , quelle est la quantité additionnelle maximale  $a_k$  de produits de type  $k$  que peut traiter la configuration  $\mathcal{S}$  sans dépasser la deadline  $\tilde{d}$ ?»

**Preuve du lemme II.7.** Soit  $\mathcal{I}$  une demande quelconque de  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$ . Il existe une famille  $(\alpha_k)_{k \in \mathcal{N}}$  de réels positifs tels que  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{ref} + \sum_{k \in \mathcal{N}} \alpha_k \cdot a_k \cdot e_k$  et  $\sum_{k \in \mathcal{N}} \alpha_k \leq 1$ .

Soit  $\beta$ , le réel positif ou nul défini par  $\beta = 1 - \sum_{k \in \mathcal{N}} \alpha_k$ .

$$\mathcal{I} = \beta \cdot \mathcal{I}_{ref} + \sum_{k \in \mathcal{N}} \alpha_k \cdot (\mathcal{I}_{ref} + a_k \cdot e_k) = \beta \cdot \mathcal{I}_{ref} + \sum_{k \in \mathcal{N}} \alpha_k \cdot \mathcal{I}_{ref}^{a_k}.$$

Par définition de  $a_k$ ,  $\mathcal{I}_{ref}^{a_k} \in \mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ . De plus  $\mathcal{I}_{ref} \in \mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ .  $\mathcal{I}$  est donc une combinaison convexe d'éléments appartenant à  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  puisque  $\beta + \sum_{k \in \mathcal{N}} \alpha_k = 1$ . Par convexité de  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  (Théorème II.5),  $\mathcal{I}$  appartient également à  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ .  $\mathcal{I}$  étant un élément quelconque de  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$ , cela implique que  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref}) \subseteq \mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$ .  $\square$

$\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$  définit un sous-ensemble de  $\mathcal{P}_{\tilde{d}}(\mathcal{S})$  et permet donc une résolution approchée du problème d'analyse de sensibilité.

## 5 Études de robustesse

Le décideur souhaite que la configuration soit capable de garantir une deadline  $\tilde{d}$  au traitement de la demande malgré les incertitudes sur celle-ci. Une configuration est définie comme robuste si elle garantit l'existence d'un plan de production de durée inférieure à  $\tilde{d}$  unités de temps. Comme dans les deux chapitres précédents, nous nous plaçons dans un contexte où le nombre d'instances est éventuellement infini. On l'a vu, le décideur est directement impliqué puisque c'est lui qui

fixe une deadline à ne pas dépasser même dans le pire des cas. Nous utilisons donc à nouveau la  $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse pour définir la nouvelle robustesse d'une configuration.

### 5.1 Définition du critère de robustesse

Une configuration  $\mathcal{S}$  doit garantir sur un risque  $\mathcal{P}$  (qui représente toujours un ensemble d'instances éventuellement infini) que le temps de traitement de toute demande  $\mathcal{I}$  mesuré par  $C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I})$  est inférieur à la deadline  $\tilde{d}$ . La robustesse peut donc être définie comme suit.

**Définition II.10** *Une configuration  $\mathcal{S}$  est robuste sur l'ensemble des demandes  $\mathcal{P}$ , relativement au critère de robustesse  $\lambda_1$ , si elle vérifie la condition suivante :*

$$\lambda_1(\mathcal{S}, C_{max}^{\mathcal{S}}, \mathcal{P}) \leq \tilde{d} \quad (5.11)$$

### 5.2 Premier problème de robustesse : recherche du domaine des demandes pour lequel une configuration particulière est robuste

On cherche à répondre à la question suivante : «étant données une configuration  $\mathcal{S}$ , une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$  et une deadline  $\tilde{d}$ , quel est le voisinage de  $\mathcal{I}_{ref}$  tel que toutes les demandes peuvent être traitées en moins de  $\tilde{d}$  unités de temps ?»

Cette question équivaut exactement à la question du problème d'analyse de sensibilité présenté et partiellement résolu en section 4.

### 5.3 Deuxième problème de robustesse : recherche d'une solution robuste

Le décideur a défini une famille d'amplitudes de déviation  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$  qui définit une déviation maximale pour chacun des types de produits sur la demande prévisionnelle et il souhaite trouver une configuration  $\mathcal{S}$  capable de supporter cette famille d'amplitudes.

La famille d'amplitudes  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$  définit un ensemble du type  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$ . Résoudre le deuxième problème de robustesse revient à répondre à la question suivante : «étant donné l'ensemble des demandes à couvrir  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$ , quelle est une configuration  $\mathcal{S}$  telle que  $\lambda_1(\mathcal{S}, C_{max}^{\mathcal{S}}, \mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})) \leq \tilde{d}$  ?»

Ce problème est simple et il peut se résoudre à l'aide de l'algorithme polynomial ALG. 3.

```

DÉBUT
Pour  $k$  de 1 à  $n$  faire
    |  $a'_k \leftarrow PLa_k(T, \mathcal{I}_{ref}, \tilde{d})$ 
Fin Pour
Si  $(a'_k \geq a_k, \forall k \in \mathcal{N})$  Alors
    | une configuration robuste est  $\mathcal{S} = T$ .
Sinon
    | il n'existe pas de configuration robuste.
Fin Si
FIN

```

ALG. 3: Algorithme de recherche d'une configuration robuste pour  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$  fixé

Si il n'existe pas de solution robuste, il faut soit que le décideur revoit ses ambitions à la baisse pour les  $a_k$  qui ne vérifient pas les conditions d'existence d'une solution dans l'algorithme ALG. 3, soit qu'il envisage de demander au niveau stratégique d'investir dans une ou plusieurs nouvelles machines. Savoir les caractéristiques (contraintes technologiques, vitesse) de la machine sur laquelle investir est un problème intéressant qui reste ouvert.

#### 5.4 Troisième problème : recherche de la configuration qui couvre le plus grand ensemble de demandes du type $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$

Le troisième problème consiste à trouver la configuration  $\mathcal{S}$  qui couvre le plus grand ensemble du type  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$  sans remettre en cause l'existence d'un plan de production dont la durée totale n'excède pas  $\tilde{d}$  unités de temps.

Résoudre le troisième problème revient à répondre à la question suivante : «étant donnée une deadline  $\tilde{d}$ , quelle est la configuration  $\mathcal{S}$  qui maximise la famille  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$  telle que  $\lambda_1(\mathcal{S}, C_{max}^{\mathcal{S}}, \mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})) \leq \tilde{d}$ ?»

De manière assez triviale, la configuration qui offre le plus de libertés temporelles est la configuration  $\mathcal{S} = T$ , elle est donc également celle qui maximise l'ensemble des demandes qui peuvent être traitées en moins de  $\tilde{d}$  unités de temps. Et le plus grand ensemble  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$  est celui défini par la famille  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$ , solutions respectives des  $PLa_k(T, \mathcal{I}_{ref}, \tilde{d})$  pour tout  $k$  de  $\mathcal{N}$ .

La configuration  $\mathcal{S} = T$  est la configuration la plus onéreuse puisqu'elle correspond à la configuration qui contient toutes les qualifications autorisées. Ainsi, comme pour la performance d'équilibre de la charge, il est intéressant de tenir compte également des coûts de qualification pour la recherche de la configuration.

#### 5.5 Quatrième problème : recherche d'une configuration robuste la moins onéreuse

Nous souhaitons maintenant prendre en compte les coûts de qualification définis par la matrice  $K$ . Nous évaluons toujours le coût d'une configuration par  $C(\mathcal{S})$  défini dans l'équation

(3.3) du chapitre 4 de ce mémoire.

Le quatrième problème consiste à trouver la configuration la moins onéreuse mais qui permet de couvrir un ensemble de demandes du type  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$  défini par une famille  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$  désirée par le décideur. Ce dernier fixe également une deadline  $\tilde{d}$  que doit respecter la configuration pour toute demande de  $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})$ .

Résoudre le quatrième problème revient à répondre à la question suivante : «étant données une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$ , une deadline  $\tilde{d}$  et une famille  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$  représentant respectivement la déviation maximum pour chacun des types de produit, quelle est la configuration  $\mathcal{S}$  qui minimise  $C(\mathcal{S})$  telle que  $\lambda_1(\mathcal{S}, C_{max}^{\mathcal{S}}, \mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}(\mathcal{I}_{ref})) \leq \tilde{d}$ ?»

Dans la suite de ce mémoire, nous ferons référence à ce problème par la dénomination *Configuration  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$ -Robuste de Coût Minimal ( $C(a_k)RCM$ )*

### 5.5.1 $C(a_k)RCM$ est $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort

Nous allons démontrer dans cette section que le problème *Configuration  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$ -Robuste de Coût Minimal* est  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort. Pour ce faire nous allons utiliser une version simplifiée du problème  $C(a_k)RCM$  que nous noterons  $PS$ .  $PS$  peut être défini de la manière suivante : «étant données une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$  et une deadline  $\tilde{d}$ , trouver la configuration  $\mathcal{S}$  qui minimise  $C(\mathcal{S})$  et qui garantit qu'un plan de production existe pour  $\mathcal{I}_{ref}$  tel que  $C_{max}^{\mathcal{S}}(\mathcal{I}_{ref}) \leq \tilde{d}$ ».

$PS$  correspond au problème  $C(a_k)RCM$  défini par  $a_k = 0$ , pour tout  $k$  de  $\mathcal{N}$ .

**Théorème II.6** *Le problème Configuration  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$ -Robuste de Coût Minimal est  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort.*

**Preuve.** Considérons le problème  $PS$  défini par  $\tilde{d} = C_{max}^T(\mathcal{I}_{ref})$ . Résoudre le problème  $PS$  revient alors à trouver un plan de production optimal  $R$  à  $PL_3(T, \mathcal{I}_{ref})$ , tel que le nombre d'éléments non nuls soit minimisé, soit trouver la base la plus dégénérée de  $PL_3(T, \mathcal{I}_{ref})$ . La solution de  $PS$  serait alors définie de la manière suivante :  $\mathcal{S}(i, j) = 1$  si  $R(i, j) > 0$ ,  $\mathcal{S}(i, j) = 0$  sinon. Il a été montré dans (Rossi, 2007) que trouver la base la plus dégénérée à un programme linéaire est un problème  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort donc  $PS$  l'est et par suite  $C(a_k)RCM$  est un problème  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort.  $\square$

### 5.5.2 Formulation à l'aide d'un programme linéaire en nombres entiers

Nous proposons maintenant une formulation mathématique du problème  $C(a_k)RCM$ . Le problème peut être écrit comme le programme linéaire en nombres entiers suivant noté  $PLNE_2(\mathcal{I}_{ref}, \tilde{d}, (a_k)_{k \in \mathcal{N}})$  :

$$PLNE_2(\mathcal{I}_{ref}, \tilde{d}, (a_k)_{k \in \mathcal{N}}) \begin{cases} \min C(\mathcal{S}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{M}} K(i, j) \times \mathcal{S}(i, j) \\ \sum_{j \in \mathcal{M}} R^k(i, j) \times V(i, j) = \mathcal{I}_{ref}^{a_k}(i) & \forall (i, k) \in \mathcal{N}^2 & (a) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} R^k(i, j) \leq \tilde{d} & \forall (j, k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{N} & (b) \\ R^k(i, j) \times V(i, j) - \mathcal{S}(i, j) \times \mathcal{I}_{ref}^{a_k}(i) \leq 0 & \forall (i, j, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \times \mathcal{N} & (c) \\ \mathcal{S}(i, j) \in \{0, 1\} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} & (d) \\ R^k(i, j) \geq 0 & \forall (i, j, k) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \times \mathcal{N} & (e) \end{cases} \quad (5.12)$$

$V(i, j)$ ,  $K(i, j)$ ,  $\mathcal{I}_{ref}^{a_k}(i)$ ,  $\tilde{d}$  et  $(a_k)_{k \in \mathcal{N}}$  sont des données alors que  $\mathcal{S}(i, j)$  et  $R^k(i, j)$  sont des variables de décision.  $R^k$  représente le plan de production pour la demande  $\mathcal{I}_{ref}^{a_k}$ .

L'ensemble des contraintes (5.12a) garantit que la demande  $\mathcal{I}_{ref}^{a_k}$  est satisfaite et donc que la déviation maximum  $a_k$  sur le produit de type  $k$  est tolérée. L'ensemble des contraintes (5.12b) garantit que le plan de production  $R^k$  a une durée inférieure à  $\tilde{d}$  unités de temps. L'ensemble des contraintes (5.12c) interdit l'affectation d'un type de produit à une machine qui n'est pas qualifiée pour le type de produit en question. Les ensembles de contraintes (5.12d) et (5.12e) définissent les domaines de variation des variables de décision  $\mathcal{S}(i, j)$  et  $R^k(i, j)$ .

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié une nouvelle performance à garantir dans le cadre de la configuration robuste d'un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions soumis à des incertitudes sur la demande. Bien que des résultats intéressants ont été obtenus en ce qui concerne l'analyse de sensibilité et la résolution de premiers problèmes de robustesse, cette étude reste partiellement finalisée dans la mesure où il reste à développer une méthode de résolution pour le problème du compromis entre le coût de la configuration et son niveau de robustesse. Seule une modélisation mathématique a pour l'instant été proposée.

## Troisième partie

# Configuration robuste d'un système de production de services en énergie : un réseau de distribution d'électricité



## Chapitre 6

# Étude du problème statique : étape 0

### 1 Introduction

Dans le contexte de l'énergie, la dérégulation du marché implique des changements profonds des conditions de maîtrise de la sécurité de fonctionnement des réseaux. Cette évolution conduit notamment à exploiter les réseaux plus près de leurs limites physiques (Crappe, 2003). Si le système d'exploitation actuel reste flexible dans la mesure où la capacité des sources est grande devant la demande des usagers, cette marge ne pourra pas perdurer dans un contexte où la demande en énergie augmente rapidement.

L'enjeu des prochaines années sera entre autre d'exploiter des réseaux pour lesquels la puissance disponible tend à s'équilibrer avec la demande. Dans ce contexte, tenir compte des incertitudes sur la demande des usagers et sur la capacité des sources introduit des problèmes à fort enjeu. Les incertitudes sur la capacité des sources sont principalement dues aux nouvelles technologies de production d'énergie telle que l'utilisation des énergies renouvelables dont la production reste très fluctuante. Et la part de ces sources intermittentes dans la production va devenir de plus en plus importante. Les éoliennes peuvent par exemple se déconnecter du réseau pour des raisons de sécurité et créer des chutes de tension. Leur production d'énergie est de plus très liée aux conditions météorologiques. De la même manière, la production énergétique des cellules photovoltaïques dépend fortement de l'ensoleillement. Quand des chutes de tension interviennent, la solution la plus courante est de recourir au délestage de charges avec tout ce que cela implique comme désagréments pour l'utilisateur.

Le réseau de distribution d'électricité fait partie du processus complet de livraison de l'énergie vers l'utilisateur. Il s'interface entre le réseau de transport de l'énergie et l'utilisateur final comme décrit sur la figure 6.1. Le réseau de transport fonctionne en réseau maillé (il existe des cycles dans le graphe équivalent) et achemine l'énergie depuis les centres de production (thermiques, nucléaires, hydrauliques, éoliens, solaires) sous forme de haute et très haute tension vers les postes de transformation qui font le lien avec le réseau de distribution d'électricité. Le réseau de distribution d'électricité, qui fonctionne en réseau radial (il n'y a pas de cycle dans le graphe équivalent et chaque sommet n'a qu'un seul prédécesseur), achemine ensuite l'énergie sous forme de basse et moyenne tension vers les utilisateurs finaux.

Les réseaux de distribution ont été implantés il y a cinquante ans alors qu'il y avait peu d'utilisateurs. La capacité de production des sources était bien supérieure à la consommation et la

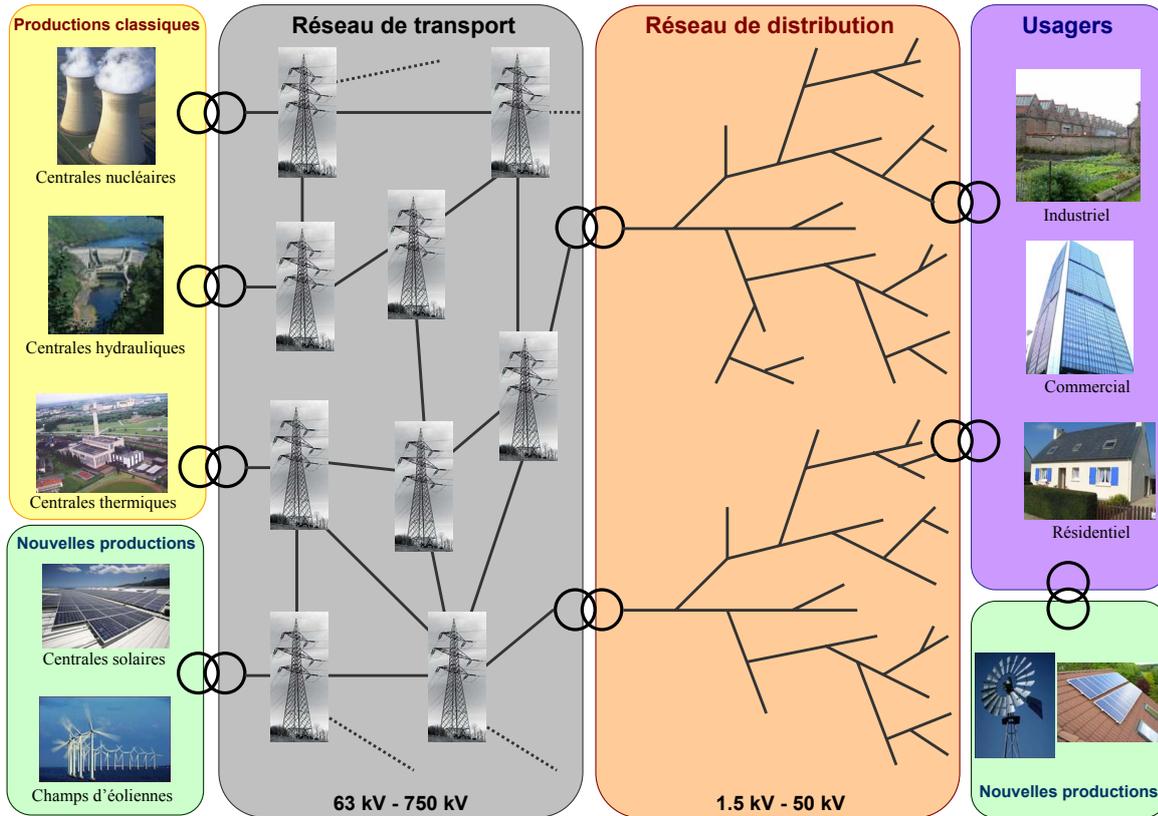


FIG. 6.1 – Filière énergétique : de la production de l'énergie électrique à sa distribution vers l'utilisateur

configuration des réseaux était alors très figée. Puis de plus en plus d'utilisateurs se sont connectés au réseau et le besoin d'avoir des configurations agiles s'est imposé.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons justement à la configuration des réseaux de distribution d'électricité en contexte certain.

Un réseau de distribution d'électricité est constitué de plusieurs sources, de lignes électriques, d'interrupteurs et d'utilisateurs comme sur la figure 6.2.

Partant d'un réseau maillé, configurer le réseau de distribution d'électricité consiste à ouvrir ou fermer les bons interrupteurs pour obtenir un réseau radial de manière à optimiser des objectifs tout en respectant des *contraintes électrotechniques* (cf. section 3).

Dans ce chapitre nous présenterons tout d'abord une modélisation courante des réseaux de distribution d'électricité par les graphes orientés. Nous aborderons ensuite les différentes contraintes électrotechniques auxquelles sont soumis les réseaux. Nous tenterons un rapprochement du problème statique à un problème classique de l'optimisation combinatoire puis nous nous intéresserons à la façon dont le problème de configuration en contexte certain a été étudié dans la littérature électrotechnique. Enfin nous évoquerons les incertitudes auxquelles sont soumis les réseaux de distribution d'électricité et le concept de robustesse que nous lui avons associé.

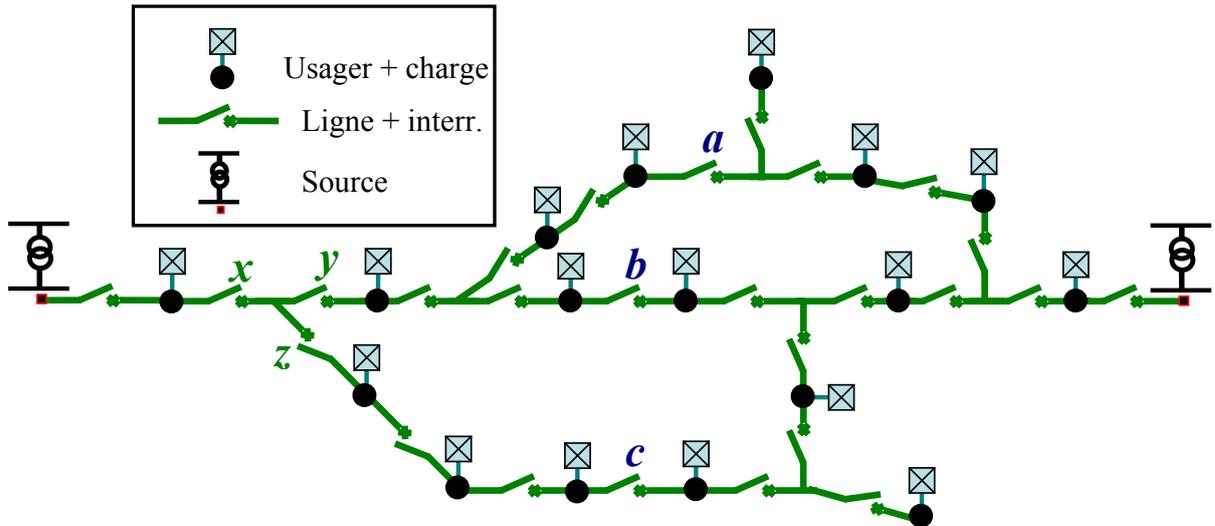


FIG. 6.2 – Un réseau de distribution d'électricité.

## 2 Modélisation à l'aide d'un graphe orienté

Le réseau de distribution d'électricité est constitué de  $m$  sources qui doivent desservir  $n$  usagers (résidentiels, commerciaux ou industriels). Nous utilisons les notations et définitions données dans (Ahuja et al., 1993) pour modéliser le réseau de distribution par un graphe orienté  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ . Nous distinguons de plus trois types de sommets qui ont des comportements différents dans le réseau. Cette typologie nous conduit à décomposer  $\mathcal{N}$  en trois sous-ensembles disjoints : les sommets usager de  $\mathcal{N}_c$ , les sommets jonction de  $\mathcal{N}_t$  et les sommets source de  $\mathcal{N}_s$  avec  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t \cup \mathcal{N}_s$ . Le réseau de la figure 6.2 est modélisé par le graphe de la figure 6.3. Pour cet exemple le réseau est composé de  $n = 17$  usagers notés de 1 à 17 dans l'ensemble  $\mathcal{N}_c$ , de  $t = 6$  sommets jonction notés de 18 à 23 dans l'ensemble  $\mathcal{N}_t$  et de  $m = 2$  sources notées 24 et 25 dans l'ensemble  $\mathcal{N}_s$ . Le sommet jonction 18 de la figure 6.3 représente le *point de jonction* entre les interrupteurs notés  $x$ ,  $y$  et  $z$  sur la figure 6.2. En pratique, les sommets jonction peuvent être considérés comme des usagers de charge nulle qui peuvent ne pas être desservis.

### 2.1 Modélisation des usagers et des points de jonction

Chaque sommet usager  $i$  de  $\mathcal{N}_c = \{1, \dots, n\}$  représente un usager avec sa charge. Chaque sommet jonction  $k$  de  $\mathcal{N}_t = \{n + 1, \dots, n + t\}$  représente un point de jonction. La *charge* des usagers et des points de jonction est représentée par un vecteur entier  $\mathcal{W}$  de taille  $n + t$  tel que  $\mathcal{W}(k) = 0$  pour tout  $k$  de  $\mathcal{N}_t$ .

### 2.2 Modélisation des sources

Chaque sommet source  $j$  de  $\mathcal{N}_s = \{n + t + 1, \dots, n + t + m\}$  représente une source d'énergie. Chaque source  $j$  est limitée en puissance par une *capacité*  $\mathcal{K}(j)$ .  $\mathcal{K}$  est un vecteur entier de taille  $m$ .

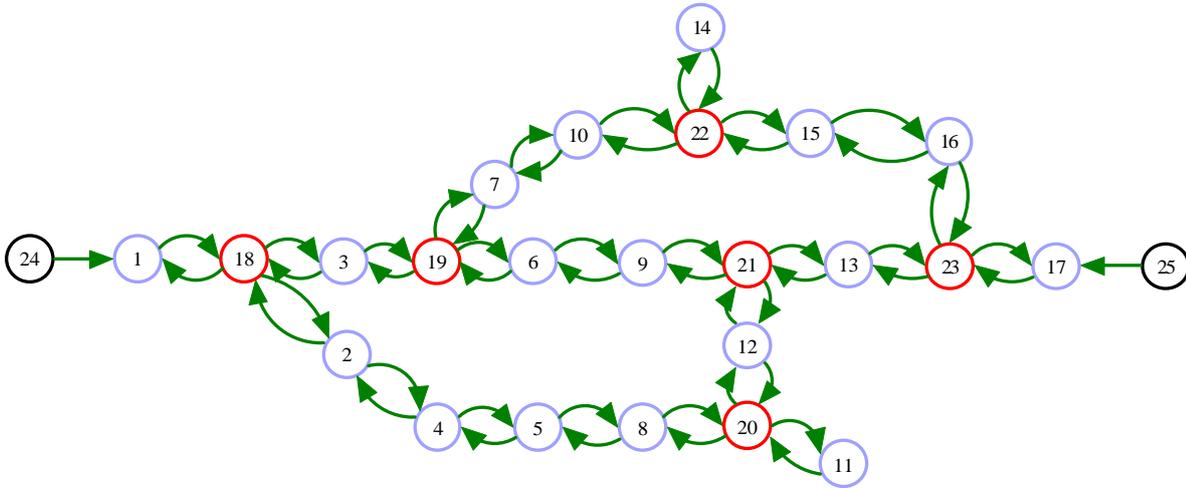


FIG. 6.3 – Modélisation par un graphe orienté du réseau de la figure 6.2.

### 2.3 Modélisation des lignes et de leurs interrupteurs

La structure du réseau de distribution est représentée par des arcs entre les sommets de  $\mathcal{N}$ . Chaque arc  $\mathcal{A}_k \in \mathcal{A}$ , avec  $\mathcal{A}_k = (i, j)$ , où  $(i, j) \in \mathcal{N}^2$ , représente une ligne électrique munie d'un interrupteur. Dans la mesure où la direction du flux d'énergie n'est pas prédéfinie et dépend de la source à laquelle la ligne est raccordée, chaque ligne électrique est modélisée par deux arcs opposés représentant les deux sens possibles du courant.

Pendant, un flux d'énergie ne peut pas se diriger vers une source, il ne peut donc pas y avoir d'arc dont le sommet final est une source. L'existence ou la non-existence d'un arc est modélisée par la *matrice d'adjacence* binaire  $\mathcal{H}$  de taille  $(n + t + m)^2$ . Si  $\mathcal{H}(i, j) = 1$  alors l'arc  $(i, j)$  de  $i$  vers  $j$  existe et si  $\mathcal{H}(i, j) = 0$ , il n'existe pas.

### 2.4 Configuration du réseau

La *configuration* du réseau de distribution d'électricité est modélisée par une matrice binaire de taille  $(n + t + m)^2$  notée  $\mathcal{S}$ .  $\mathcal{S}(i, j) = 1$  signifie que l'interrupteur représenté par l'arc  $(i, j)$  est fermé : le courant passe de  $i$  vers  $j$ .  $\mathcal{S}(i, j) = 0$  signifie que le même interrupteur est ouvert ou qu'il n'existe pas ( $\mathcal{H}(i, j) = 0$ ) : le courant ne passe pas entre  $i$  et  $j$ .

## 3 Contraintes

Configurer le réseau de distribution d'électricité revient à ouvrir ou fermer des interrupteurs tout en respectant des contraintes.

### 3.1 Contrainte de service des usagers

Nous considérons le réseau de distribution d'électricité comme un système de production de services. La contrainte de premier ordre à respecter par la configuration est donc une contrainte de service des usagers.

Chaque usager doit être desservi et le service concerne la totalité de sa charge demandée.

### 3.2 Contraintes électrotechniques

Les autres contraintes à respecter par la configuration sont des contraintes du type électrotechnique qui expriment les conditions d'exploitation et de sécurité du réseau.

- **Radialité du réseau** : il ne doit pas y avoir de cycle dans la solution et chaque sommet possède au plus un prédécesseur. Une configuration admissible est une forêt orientée du graphe dont les racines sont les sources.
- **Non-jonction des sources** : les sources doivent être disjointes en fonctionnement. Il ne doit donc pas exister de chaîne reliant deux sources dans une configuration admissible. Cette contrainte est toujours respectée dans la modélisation que nous avons proposée. Premièrement, par définition de la matrice d'adjacence  $\mathcal{H}$ ,  $\forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_s$ ,  $\mathcal{H}(i, j) = 0$  car il ne peut pas y avoir de flot qui arrive à une source, et donc pas de chemin dont le sommet d'arrivée est une source. Deuxièmement, la contrainte de radialité (un sommet ne peut avoir qu'un seul prédécesseur) garantit que deux sources ne desservent jamais le même usager.
- **Limite de puissance des sources** : chaque source ne peut fournir qu'une quantité limitée de puissance caractérisée par le vecteur de capacité  $\mathcal{K}$ .
- **Limite de capacité des lignes** : chaque ligne ne peut supporter qu'une quantité limitée de puissance. Chaque arc  $(i, j)$  est doté d'une capacité maximale de flot noté  $f_{max}^{i,j} = f_{max}^{j,i}$ .
- **Limitation des chutes de tension** : les chutes de tension doivent être limitées. Les chutes de tension s'accumulent au fur et à mesure de la circulation de l'énergie dans le réseau. Ainsi plus le sommet final d'une branche du réseau est éloigné de sa source, plus il y a de chutes de tension : celles-ci sont occasionnées par la consommation de l'énergie le long de la branche. Les sommets jonctions ne consommant pas d'énergie, ils n'occasionnent pas de chute de tension. Pour limiter les chutes de tension, la profondeur de chaque arbre (appartenant à la forêt solution) est bornée par un entier  $D_{max}$ .

## 4 Configuration admissible

Une configuration admissible (qui respecte les contraintes développées dans la section précédente) est une forêt orientée qui couvre tous les sommets usagers et dont les racines sont les sommets sources.

Illustrons ces desiderata sur l'exemple de la figure 6.2 complété par les données suivantes :

$$\begin{aligned}
 \forall i \in \mathcal{N}_c, \mathcal{W}(i) &= 1 \\
 \forall k \in \mathcal{N}_t, \mathcal{W}(k) &= 0 \\
 \forall j \in \mathcal{N}_s, \mathcal{K}(j) &= 10 \\
 D_{max} &= 10 \\
 \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2, f_{max}^{i,j} &= 10
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Une configuration admissible pour cet exemple est la forêt de la figure 6.4.

Cette configuration consiste à ouvrir les interrupteurs représentés par les arcs  $\{(5, 8); (8, 5)\}$ ,  $\{(6, 9); (9, 6)\}$  et  $\{(10, 22), (22, 10)\}$  (respectivement les interrupteurs  $a$ ,  $b$  et  $c$  de la figure 6.2) en maintenant les autres interrupteurs fermés. Notons qu'une configuration admissible ne préserve qu'un arc sur deux arcs symétriques (celui qui va dans le sens du flot).

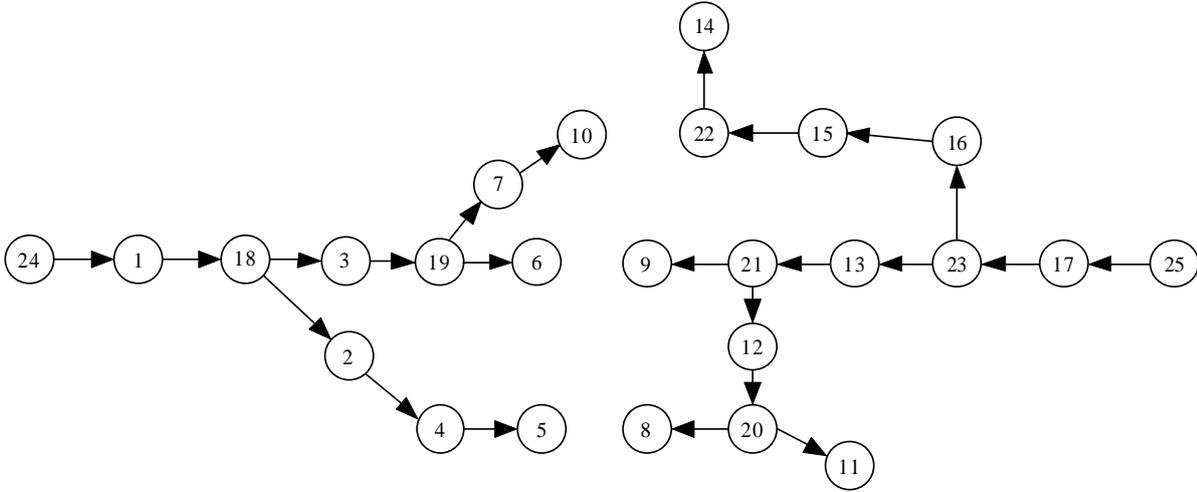


FIG. 6.4 – Une configuration admissible

## 5 Étude du problème en contexte certain : un état de l'art

Nous nous intéressons maintenant au problème de configuration en contexte certain. Nous considérons que toutes les données sont certaines et statiques. La résolution du problème classique conduit à répondre à la question suivante : «étant données la charge des usagers  $\mathcal{W}$ , la capacité des sources  $\mathcal{K}$  et la structure du réseau  $\mathcal{H}$ , quelle est la configuration  $\mathcal{S}$  qui optimise un critère  $Z$  tout en respectant les contraintes électrotechniques ?»

### 5.1 Critères d'optimisation classiques

Il existe dans la littérature plusieurs critères d'optimisation dans le contexte de l'énergie. On retrouve les plus courants dans (Thakur et Jaswanti, 2006) et nous n'en présentons que deux ici. Ce sont ceux que nous utiliserons dans la suite de ce mémoire : le critère des pertes Joule et le critère du coût des manœuvres. On peut toutefois en citer d'autres qui restent cependant moins répandus dans la littérature : maximisation de la fiabilité, minimisation des chutes de tension. . .

#### 5.1.1 Minimisation des pertes Joule

Les pertes Joule expriment la puissance perdue lors du passage du courant dans une ligne. Ce critère est de loin le critère le plus utilisé dans la littérature. Il est vrai qu'il constitue un problème critique puisque d'après (Thakur et Jaswanti, 2006), les pertes Joule représentent 20% à 30% de la production totale sur l'ensemble du réseau (transport + distribution).

Pour une configuration donnée le critère à minimiser  $Z_J(\mathcal{S}, \mathcal{I})$  des pertes Joules peut être défini comme suit :

$$Z_J(\mathcal{S}, \mathcal{I}) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} R_{ij} \times f_{\mathcal{S}}(i, j)^2 \quad (6.2)$$

avec  $R_{ij}$  qui mesure la résistance de la ligne  $(i, j)$  et  $f_{\mathcal{S}}(i, j)$  le flot traversant la ligne  $(i, j)$  pour la configuration  $\mathcal{S}$ .

### 5.1.2 Minimisation du coût des manœuvres

Une manœuvre est définie comme le passage de l'état ouvert à fermé (ou vice versa) d'un interrupteur. Le coût des manœuvres à effectuer pour atteindre une configuration finale à partir d'une configuration initiale doit être le plus petit possible. En effet les manœuvres sont parfois difficiles à réaliser sur le terrain et elles induisent des coûts de main d'œuvre qui sont loin d'être négligeables. Ce coût peut par exemple être proportionnel à la distance entre le centre de maintenance et le lieu de l'intervention. Le coût des manœuvres à minimiser  $Z_M(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_f)$  peut être défini comme suit :

$$Z_M(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_f) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{N}} K(i, j) \times |S_f(i, j) - S_i(i, j)| \quad (6.3)$$

avec  $\mathcal{S}_i$  la configuration initiale et  $\mathcal{S}_f$  la configuration finale.  $K(i, j)$  est le coût induit par la manœuvre de l'interrupteur  $(i, j)$ . La matrice  $K$  est une matrice réelle symétrique.

## 5.2 Rapprochement à un problème d'optimisation standard

La configuration d'un réseau de distribution d'électricité définit une forêt orientée du graphe dont les racines sont les sources de  $\mathcal{N}_s$ . Cette forêt a la particularité d'être couvrante pour une partie des sommets qui sont les sommets de  $\mathcal{N}_c$ . Les sommets de  $\mathcal{N}_t$  peuvent éventuellement ne pas appartenir à la solution.

On trouve dans la littérature de l'optimisation combinatoire un problème classique qui s'approche de cette problématique : le problème d'arborescence minimale de Steiner. Il est défini comme suit. Étant donné un graphe orienté  $G = (V, E)$ , un sommet  $s \in V$ , une fonction coût  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  sur l'ensemble des arcs et un sous-ensemble  $C$  de  $V$ , une arborescence de Steiner est un arbre de  $G$  de racine  $s$  qui couvre tous les sommets de  $C$ . L'ensemble des sommets  $T = V \setminus (C \cup \{s\})$  représente l'ensemble des sommets qui sont dits «de Steiner». L'appartenance d'un sommet de Steiner à une arborescence de Steiner est facultative. Le coût total d'une arborescence de Steiner est défini par la somme des coûts de ses arcs. Le problème classique d'arborescence minimale de Steiner consiste à trouver l'arborescence de Steiner de coût total minimum. Ce problème est réputé pour être  $\mathcal{NP}$ -difficile (Garey et Johnson, 1979).

Hsu et al. (2005) propose une variation de ce problème : le réseau minimal de Steiner. Ce problème est défini comme suit. Étant donné un graphe orienté  $G = (V, E)$ , une fonction coût  $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  sur l'ensemble des arcs et deux sous-ensembles  $S$  et  $C$  de  $V$ , un réseau de Steiner est une forêt de  $G$  qui couvre tous les sommets de  $C$  et dont les racines sont les sommets de  $S$ . L'ensemble des sommets  $T = V \setminus (S \cup C)$  représente l'ensemble des sommets de Steiner. Le problème du réseau minimal de Steiner consiste à trouver le réseau de Steiner de coût total minimum. Hsu et al. (2005) précisent que ce problème reste  $\mathcal{NP}$ -difficile. Remplaçons  $V$  par  $\mathcal{N}$ ,  $S$  par  $\mathcal{N}_s$ ,  $C$  par  $\mathcal{N}_c$ ,  $T$  par  $\mathcal{N}_t$  et enfin  $E$  par  $\mathcal{A}$  et la configuration du réseau de distribution d'électricité peut être vue comme un réseau de Steiner.

Cependant le problème de réseau de Steiner ne suffit pas à lui seul pour rendre compte du problème de configuration des réseaux de distribution d'électricité. Dans le problème de réseau de Steiner, le coût d'un arc est fixe, alors que dans notre problème le coût est lié au flot (l'énergie) qui le traverse. De plus, la loi de conservation du flot (la loi de Kirchhoff) doit être vérifiée. Cette loi peut être exprimée ainsi : l'énergie qui arrive à un sommet est égale à l'énergie qui repart du

sommet plus l'énergie consommée au sommet. En utilisant les variables de notre problème, cette loi s'écrit comme suit :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} f(i, j) - \sum_{k \in \mathcal{N}} f(j, k) = \mathcal{W}(j), \quad \forall j \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t \quad (6.4)$$

avec  $f(i, j)$  le flot traversant l'arc  $(i, j)$ .

Dans le cas du critère des pertes Joule le coût de l'arc  $(i, j)$  est égal à  $R_{ij} \times f(i, j)^2$ . Dans ce cas là, les pertes Joule sont considérées globalement pour le réseau mais sont négligées localement dans la loi de conservation du flot.

Pour prendre en compte le problème de configuration de réseau de distribution d'électricité dans sa globalité, il faut exprimer également :

1. la contrainte de limite de puissance des sources :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} f(j, i) \leq \mathcal{K}(j), \quad \forall j \in \mathcal{N}_s \quad (6.5)$$

2. la contrainte de capacité des lignes :

$$f(i, j) \leq f_{max}^{i,j} \times \mathcal{S}(i, j), \quad \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2 \quad (6.6)$$

Si  $\mathcal{S}(i, j) = 0$ , aucun flot ne doit circuler sur l'arc  $(i, j)$  puisque l'arc n'appartient pas à la solution. Si  $\mathcal{S}(i, j) = 1$ , le flot est limité par la borne  $f_{max}^{i,j}$ .

3. la contrainte de limitation des chutes de tension :

$$D(i) \leq D_{max} \quad (6.7)$$

avec  $D(i)$  la distance du sommet  $i$  à la source à laquelle il est connecté.

La contrainte de radialité du réseau est alors vérifiée par l'expression des contraintes de la loi de Kirchhoff, de la capacité des lignes et de la couverture des sommets usagers.

L'expression de ces contraintes et l'identification de la configuration à un réseau de Steiner va nous permettre de proposer une formulation mathématique du problème statique.

### 5.3 Formulation mathématique du problème

Nous proposons maintenant une formulation mathématique du problème statique pour un critère d'optimisation  $Z$  à minimiser quelconque. Le problème peut être écrit comme le programme

mathématique suivant noté  $PM(\mathcal{W}, \mathcal{K})$  :

$$PM(\mathcal{W}, \mathcal{K}) \left\{ \begin{array}{ll} \min(Z) & \\ \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathcal{S}_f(j, i) = 1 & \forall i \in \mathcal{N}_c \quad (a) \\ \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathcal{S}_f(j, k) \leq 1 & \forall k \in \mathcal{N}_t \quad (b) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} f(i, j) - \sum_{k \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} f(j, k) = \mathcal{W}(j) & \forall j \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t \quad (c) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} f(j, i) \leq \mathcal{K}(j) & \forall j \in \mathcal{N}_s \quad (d) \\ f(i, j) \leq f_{max}^{i,j} \times \mathcal{S}_f(i, j) & \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2 \quad (e) \\ D(j) = 0 & \forall j \in \mathcal{N}_s \quad (f) \\ D(j) \geq D(i) + 1 - (1 - \mathcal{S}_f(i, j)) \times D_{max} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_c \quad (g) \\ D(j) \leq D(i) + 1 + (1 - \mathcal{S}_f(i, j)) \times D_{max} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_c \quad (h) \\ D(j) \geq D(i) - (1 - \mathcal{S}_f(i, j)) \times D_{max} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_t \quad (i) \\ D(j) \leq D(i) + (1 - \mathcal{S}_f(i, j)) \times D_{max} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_t \quad (j) \\ D(i) \leq D_{max} & \forall i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t \quad (k) \\ \mathcal{S}(i, j) \leq \mathcal{H}(i, j) & \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2 \quad (l) \\ \mathcal{S}(i, j) \in \{0, 1\} & \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2 \quad (m) \\ f(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2 \quad (n) \\ D(i) \in \mathbb{N}^+ & \forall i \in \mathcal{N} \quad (o) \end{array} \right. \quad (6.8)$$

$\mathcal{W}(i)$ ,  $\mathcal{H}(i, j)$ ,  $\mathcal{K}(j)$ ,  $D_{max}$ ,  $f_{max}^{i,j}$  sont des données alors que  $\mathcal{S}_f(i, j)$ ,  $f(i, j)$  et  $D(i)$  sont des variables.  $f(i, j)$  évalue le flot sur l'arc  $(i, j)$ .  $D(i)$  évalue la profondeur du sommet  $i$  dans la solution.  $\mathcal{S}_f$  est la configuration finale du réseau : l'arc  $(i, j)$  appartient à la solution si et seulement si  $\mathcal{S}_f(i, j) = 1$ .

L'ensemble des contraintes (6.8a) garantit que chaque usager est desservi une et une seule fois. La contrainte de service des usagers est donc respectée. L'ensemble des contraintes (6.8b) garantit que chaque sommet jonction a au plus un prédécesseur.

L'ensemble des contraintes (6.8c) exprime la loi de Kirchhoff qui est la loi de conservation du flot dans le contexte de l'énergie électrique. Couplé avec les contraintes (6.8a) + (6.8b) + (6.8e), cela garantit que la contrainte de radialité est vérifiée.

L'ensemble des contraintes (6.8d) garantit que la contrainte de puissance des sources est vérifiée. L'ensemble des contraintes (6.8e) garantit que la contrainte de capacité des lignes est vérifiée. De plus cet ensemble de contraintes garantit qu'aucun flot ne circule sur l'arc  $(i, j)$  si l'arc  $(i, j)$  n'appartient pas à la solution (*i.e.*  $\mathcal{S}_f(i, j) = 0$ ).

L'ensemble des contraintes (6.8f) permet d'instancier la profondeur des sommets sources à 0 puisqu'ils sont les racines de la forêt que l'on cherche à obtenir. Les ensembles de contraintes (6.8g) + (6.8h) permettent de mettre à jour la profondeur des sommets usagers. Les ensembles de contraintes (6.8i) + (6.8j) permettent de mettre à jour la profondeur des sommets jonction : ils n'induisent pas de chute de tension, ils ont donc la même profondeur que leur prédécesseur. L'ensemble des contraintes (6.8k) garantit que la contrainte de limitation des chutes de tension est vérifiée.

L'ensemble des contraintes (6.8l) garantit que l'arc  $(i, j)$  n'appartient à la solution que s'il existe effectivement.

Les trois derniers ensembles de contraintes définissent les domaines de variation des variables

$\mathcal{S}_f(i, j)$ ,  $f(i, j)$  et  $D(i)$ .

On trouve des modèles proches de  $PM$  dans la littérature. Par exemple [Duan et Yu \(2003\)](#) proposent une formulation avec des contraintes non linéaires (mais faciles à linéariser). Ils travaillent de plus avec des puissances complexes et expriment la contrainte de radialité par l'intermédiaire des degrés des sommets. [Avella et al. \(2005\)](#), quant à eux, expriment la contrainte de limitation des chutes de tension en d'autres termes et ne considèrent qu'une source dans le réseau.

Le type de  $PM$  dépend directement du critère d'optimalité  $Z$ . Par exemple, si  $Z$  est le critère des pertes Joule  $Z_J$  alors  $PM$  devient un programme quadratique.

#### 5.4 Minimisation des pertes Joule : un état de l'art

Dans la mesure où le critère des pertes Joule est le critère le plus étudié dans la littérature pour la configuration des réseaux de distribution d'électricité, nous proposons un état de l'art des méthodes de résolution pour ce problème.

À notre connaissance, la littérature concernant le problème de minimisation des pertes Joule pour la configuration des réseaux de distribution d'électricité est peu développée dans le domaine de l'optimisation combinatoire.

On peut citer toutefois ([Avella et al., 2005](#)) qui traitent ce problème. Les auteurs définissent ce problème comme un problème d'arbre de Steiner avec flots en ajoutant les contraintes électrotechniques. Ils proposent un programme quadratique à variables entières similaire à  $PM(\mathcal{W}, \mathcal{K})$ . Les différences résident dans l'expression de la contrainte de limitation des chutes de tension et dans le fait qu'il n'y ait qu'une unique source. Avec XPRESS-MP, les auteurs testent leur modélisation sur six réseaux régulièrement traités dans la littérature électrotechnique et dont le nombre de sommets varie entre 10 et 69 et dont la densité varie entre 3% et 26%. Le temps d'exécution ne dépasse jamais 67 secondes.

Nous nous intéressons maintenant à la littérature électrotechnique qui est bien plus riche.

Cet état de l'art est basé notamment sur ([Nara et al., 2003](#)) qui recense les méthodes proposées entre 1988 et 2002 dans les revues *IEEE Transactions on Power Delivery* et *IEEE Transactions on Power Systems*. Nous avons complété l'étude de ([Nara et al., 2003](#)) par des articles plus récents qui traitent du même problème et des articles extérieurs aux deux revues citées précédemment. Cette étude est compilée dans le tableau 6.1 qui recense les années des travaux et le type de méthode utilisée.

Ce sont [Merlin et Back \(1975\)](#) qui proposent pour la première fois le critère des pertes Joule dans la recherche de la configuration d'un réseau de distribution d'électricité. Ils ont proposé une *Procédure par Séparation et Évaluation* (PSE) pour résoudre le problème. Leur PSE consiste à partir du réseau maillé où tous les interrupteurs sont fermés. Puis des interrupteurs sont ouverts itérativement jusqu'à obtenir un réseau radial admissible. Et la procédure est répétée jusqu'à obtenir une configuration optimale.

Le tableau 6.1 montre clairement qu'entre 1988 et 1999, les méthodes privilégiées étaient les méthodes du type heuristique avec l'inconvénient majeur d'être éventuellement bloquées sur un optimum local.

TAB. 6.1 – Méthodes utilisées dans la littérature électrotechnique pour minimiser les pertes Joule et leur année de publication

Année	Algorithme génétique	Recuit simulé	Recherche tabou	Intelligence artificielle	Heuristique dédiée	Autres méthodes
1988					Aoki et al. Civanlar et al.	Liu et al.
1989					Baran et Wu Shirmohammadi et Hong	Liu et al.
1990		Chiang et Jumeau (1990a) Chiang et Jumeau (1990b)			Taylor et Lubkerman	Glamocanin
1991					Wu et al.	Wagner et al.
1992	Nara et al.				Chen et Cho Goswami et Basu	
1993					Broadwater et al. Hsu et al.	Chen et Cho Jung et al. Kim et al.
1995					Borozan et al. Peponis et al.	Sarma et Rao
1996		Jiang et Baldick			Fan et al. Roytelman et al. Wang et al.	Sárfi et al.
1997					Borozan et al. Borozan et Rajakovic Rudnick et al. Taleski et Rajicic Zhou et al.	
1998					Lin et Chin	
1999					McDermott et al.	
2000	Moussa et al.	Jeon et Kim	Jeon et Kim Mori et Ogita		Kashem et al. (2000a) Kashem et al. (2000b)	Morton et Mareels
2002	Zhu	Jeon et al.	Nara et al.			
2003	King et al. Duan et Yu					
2004		Jeon et Kim	Jeon et Kim Hayashi et Matsuki			
2005	Ramos et al. Prasad et al.	Batrinu et al.	Batrinu et al.	Batrinu et al. Su et al.		Schmidt et al. Ramos et al.
2006				Wang et Zhang		Jaswanti et Thakur Gomes et al.
2007			Zhang et al.			

Le domaine de l'électrotechnique a ensuite été sensible à l'avènement des métaheuristiques qui permettent justement d'éviter les optima locaux. Dès 2000, ce sont ces méthodes qui sont privilégiées dans la littérature avec des *algorithmes génétiques*, des *recuits simulés* et des *recherches tabou*. Ce sont les recherches tabou qui semblent les plus efficaces dans le compromis qualité/rapidité.

## 6 Mise en évidence des perturbations et de leur modélisation

À notre connaissance, dans les travaux réalisés jusqu'à présent, les perturbations qui peuvent survenir dans le réseau ne sont pas considérées a priori dans la recherche de configurations optimales. Une reconfiguration partielle est réalisée a posteriori suivant l'occurrence d'une perturbation. Cette reconfiguration consiste, la plupart du temps, à restaurer le service aux usagers ou le respect de contraintes qui ont été violées en minimisant les pertes Joule ou en minimisant le nombre de manœuvres. On peut trouver un état de l'art sur le problème de restauration du service aux usagers dans (Ćurčić et al., 1996). Plus récemment Shin et al. (2004) proposent un algorithme hybride entre un algorithme génétique et une recherche tabou pour restaurer le service aux usagers en tenant compte des pertes Joule. Duque et Murinigo (2006) proposent une recherche tabou pour restaurer le service aux usagers en minimisant les pertes Joule. Enfin Garcia et França (2007) proposent quant à eux une heuristique dédiée pour restaurer le service

aux usagers en minimisant le coût des manœuvres.

Cependant cette reconfiguration même partielle pose plusieurs problèmes. En effet d'une part elle n'est pas immédiate de part la complexité intrinsèque du problème : le calcul d'une nouvelle configuration optimale est difficilement envisageable en temps réel. Même en imaginant qu'une bonne solution puisse être trouvée très rapidement (ce qui semble suggéré par les travaux cités précédemment), la mise en place de cette reconfiguration implique une intervention humaine (parfois très éloignée du centre de maintenance) sur des interrupteurs qui ne sont pas tous commandables à distance. D'autre part le fait de reconfigurer implique de fermer et d'ouvrir des interrupteurs : ceci oblige à délester, même temporairement, des usagers pour éviter d'avoir un réseau maillé en fonctionnement. On peut toujours discuter de la tolérabilité de cette action dans le cadre d'un service payant. Quoiqu'il en soit ces points soulignent le fait que la reconfiguration en ligne a un coût qui est loin d'être négligeable. C'est pourquoi nous proposons de prendre en compte certaines perturbations a priori pour construire des configurations robustes. Cela nécessite de mettre en évidence les perturbations et de définir la robustesse d'une configuration.

## 6.1 Les perturbations

La réalité implique naturellement des perturbations, et ce constat est particulièrement vrai dans le contexte de l'énergie électrique. Un réseau de distribution d'électricité est naturellement soumis à des aléas et à des incertitudes.

### 6.1.1 Les aléas

Les aléas expriment l'occurrence d'un phénomène inattendu. On peut en distinguer au moins deux types dans le contexte qui nous intéresse :

- **Rupture de ligne** : lorsque les lignes sont enterrées, les ruptures de ligne peuvent être dues à des chantiers et une machine de chantier qui rompt un câble avec sa pelle par exemple. Lorsque les lignes sont aériennes, le poids de la neige, une voiture qui heurte un pylône ou une tempête peuvent être la cause de la rupture d'une ligne.
- **Perte de fonctionnalité d'un interrupteur** : comme tout mécanisme, un interrupteur peut être soumis à des défaillances qui occasionnent sa perte de fonctionnalité. Il peut par exemple rester bloqué dans une position, ce qui peut être particulièrement gênant dans une procédure d'urgence.

### 6.1.2 Les incertitudes

- **Incertitudes sur la capacité des sources** : l'introduction des nouvelles technologies de production d'énergie telles que les énergies renouvelables induisent des incertitudes sur la capacité de production du système. Les éoliennes peuvent se déconnecter du réseau et créer des chutes de tension. Leur production est très liée aux conditions météorologiques. La production des cellules photovoltaïques est dépendante de l'ensoleillement. Ces incertitudes se traduisent par une variation du vecteur  $\mathcal{K}$ .
- **Incertitudes sur les charges** : la charge des usagers varie dans la journée (repas, télévision, lessive), dans la semaine (soirée, week-end), et d'une saison à l'autre (chauffage, lumière). De plus le profil de la charge n'est pas le même suivant le type d'utilisateur (résidentiel, commercial, industriel). Ces incertitudes se traduisent par une variation du vecteur  $\mathcal{W}$ .

Nous l'avons déjà écrit en introduction, la dérégulation du marché engendre des bouleversements du point de vue du fonctionnement du réseau qui conduisent entre autre à exploiter le réseau de plus en plus près de ses limites physiques. Le système actuel reste très flexible dans la mesure où la capacité de production reste importante devant la charge consommée par les usagers. Cependant cette marge ne pourra pas perdurer dans un contexte où la charge des usagers évolue rapidement d'une part, et où le ralentissement de l'évolution de la capacité des sources d'énergie (liée à son prix et aux contraintes environnementales qui limitent sa production) se généralisent d'autre part. De ce point de vue les incertitudes sur la charge des usagers et sur la capacité des sources nous paraissent soulever un problème à plus fort enjeu. Les premiers prémices de ce constat sont déjà visibles puisque des blackouts surviennent de plus en plus souvent et pour éviter les blackouts, la seule solution actuelle est le délestage violent des usagers. En partant du principe que le réseau de distribution d'électricité est un système de production de services, ceci n'est pas tolérable. Nous nous efforcerons donc de considérer les incertitudes sur la charge des usagers et sur la capacité des sources pour nous diriger vers une méthode de construction de configurations capables d'éviter le délestage des usagers malgré les incertitudes. Cela va nécessiter de répondre aux questions suivantes :

- Comment prendre en compte les incertitudes ?
- Comment construire des configurations qui garantissent des performances malgré les incertitudes (quelles performances) ?
- Quelles performances garantir ?

## 7 **Prise en compte des incertitudes pour la configuration du réseau**

### 7.1 **Quelles performances garantir ?**

Nous avons vu que les incertitudes sur la capacité des sources et sur la charge des usagers pouvaient avoir comme conséquence de recourir au délestage de charges. Dès lors le critère des pertes Joule est-il toujours le critère le plus pertinent ? Si ce critère est très pertinent lorsque la marge entre la capacité des sources et la charge des usagers est telle que le délestage est anecdotique, il l'est beaucoup moins dans un contexte où la capacité des sources tend à s'équilibrer avec la charge des usagers. En effet les usagers risquent d'être délestés à la moindre chute de tension. Pourtant, un système de production de services se doit de garantir le service continuellement et donc dans notre contexte, le réseau de distribution d'électricité se doit de garantir le non-délestage des usagers. Là où, en contexte certain, le service aux usagers était une contrainte (cf. section 3.1), il devient une performance à garantir en contexte incertain. Cette performance peut être mesurée, pour une instance donnée et pour une configuration donnée, par le niveau de service aux usagers. On définit une instance  $\mathcal{I}$  par :

$$\mathcal{I}(i) = \begin{cases} \mathcal{W}(i) & i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t \\ \mathcal{K}(i) & i \in \mathcal{N}_s \end{cases} \quad (6.9)$$

On peut évaluer le niveau de service aux usagers pour une configuration  $\mathcal{S}$  par  $Z_{ns}(\mathcal{S}, \mathcal{I})$

défini de la manière suivante :

$$Z_{ns}(\mathcal{S}, \mathcal{I}) = \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}_c} \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathcal{S}(j, i)}{n} \quad (6.10)$$

avec  $\sum_{i \in \mathcal{N}_c} \sum_{j \in \mathcal{N}} \mathcal{S}(j, i)$  qui mesure le nombre d'utilisateurs desservis.

## 7.2 Définition de la robustesse

Nous cherchons à garantir un niveau de service aux utilisateurs même dans le pire des cas. Nous utiliserons une fois de plus la  $\mathcal{L}_\lambda$ -robustesse pour exprimer le besoin d'impliquer le décideur et se laisser la possibilité d'avoir une infinité d'instances.

**Définition III.1** Une configuration  $\mathcal{S}$  est robuste sur l'ensemble d'instances  $\mathcal{P}$  relativement au critère de robustesse  $\lambda_1$  si :

$$\lambda_1(\mathcal{S}, Z_{ns}, \mathcal{P}) \geq \mathcal{L}_\lambda \quad (6.11)$$

$\mathcal{L}_\lambda$  mesure, suivant les connaissances dont disposent le décideur, soit le niveau de service effectif dans le pire des cas, soit le niveau de service toléré dans le pire des cas par le décideur .

## 8 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés au problème statique de la configuration d'un réseau de distribution d'électricité. Nous avons modélisé le réseau à l'aide des graphes orientés puis nous avons proposé un état de l'art des méthodes de résolution pour ce problème.

Nous avons cependant mis en évidence l'intérêt de tenir compte des incertitudes sur la charge des utilisateurs et sur la capacité des sources dans le nouveau contexte de l'énergie. Plutôt que de considérer les perturbations à posteriori et reconfigurer le réseau suite à une perturbation pour restaurer le service aux utilisateurs, nous proposons dans le prochain chapitre de prendre en compte les incertitudes dès la construction de la configuration pour garantir le non-délestage des utilisateurs malgré les incertitudes : c'est-à-dire construire des configurations robustes au sens de la définition III.1.

## Chapitre 7

# Résolution des problèmes de robustesse : étape 1

### 1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté un nouveau problème de configuration de système de production : la configuration d'un réseau de distribution d'électricité. Nous avons également souligné l'importance de considérer les incertitudes sur la charge des usagers et sur les capacités des sources dans un contexte de dérégulation du marché, de croissance continue de la charge, de ralentissement de l'évolution de la capacité des sources et du caractère intermittent des nouvelles productions.

La configuration des réseaux de distribution d'électricité a déjà été très étudiée en contexte certain. Les perturbations étaient considérées a posteriori pour proposer une reconfiguration visant à restaurer le service aux usagers dans une situation d'urgence. Nous proposons dans ce chapitre de considérer les perturbations a priori pour construire hors ligne des configurations capables d'éviter ou en tout cas de retarder le délestage des usagers malgré les incertitudes sur la charge des usagers et sur la capacité des sources.

Le but final de ce chapitre sera de proposer une approche proactive pour construire des configurations robustes au sens de la définition III.1. Pour cela nous étudierons différents problèmes de robustesse issus de cette définition.

### 2 Hypothèses

Nous cherchons à prendre en compte uniquement les incertitudes sur la charge et sur la capacité des sources. Tout comme pour l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions, nous considérons que la structure du système de production est exempte de défaillances : nous étions partis du principe que les machines étaient toujours disponibles, nous partons ici du principe que les lignes et les interrupteurs sont toujours fonctionnels et que par suite la matrice  $\mathcal{H}$  est parfaitement connue et statique.

La capacité des sources en fonctionnement normal est connue et définie par le vecteur  $\mathcal{K}_{nom}$  qui représente une capacité nominale. Nous faisons l'hypothèse qu'une charge prévisionnelle des usagers est également connue. Elle peut être définie par les connaissances statistiques, ou encore par l'abonnement de chaque usager. Nous notons cette charge de référence  $\mathcal{W}_{ref}$ .

$\mathcal{K}_{nom}$  et  $\mathcal{W}_{ref}$  définissent une instance prévisionnelle  $\mathcal{I}_{ref}$  définie par :

$$\mathcal{I}_{ref}(i) = \begin{cases} \mathcal{W}_{ref}(i) & i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t \\ \mathcal{K}_{nom}(i) & i \in \mathcal{N}_s \end{cases} \quad (7.1)$$

Pour la suite de ce chapitre nous faisons l'hypothèse raisonnable que les lignes du réseau sont dimensionnées de telle sorte qu'elles peuvent supporter la plus grande capacité des sources (la contrainte de capacité des lignes est respectée dès lors que la contrainte de capacité des sources l'est).

### 3 Premier problème de robustesse : niveau de service offert par une configuration

#### 3.1 Définition

Nous imaginons qu'à l'étape 0, le décideur est capable de définir précisément l'ensemble  $\mathcal{P}$  des instances  $\mathcal{I}$  qui représente le risque qui doit être couvert par une configuration donnée  $\mathcal{S}$ . Le premier problème de robustesse consiste à évaluer le niveau de service offert  $\mathcal{L}_\lambda$  par cette configuration sur  $\mathcal{P}$ . La configuration peut être la configuration courante ou encore une configuration que le décideur souhaite évaluer avant de la mettre en œuvre.

Résoudre le premier problème de robustesse revient à répondre à la question suivante : «étant donnée une configuration  $\mathcal{S}$ , quel est le niveau de service  $\mathcal{L}_\lambda$  offert par cette configuration sur l'ensemble des instances  $\mathcal{P}$  tel que  $\lambda_1(\mathcal{S}, Z_{ns}, \mathcal{P}) \geq \mathcal{L}_\lambda$  ?»

$\mathcal{L}_\lambda$  mesure donc dans ce cas le niveau de service effectif pour la configuration  $\mathcal{S}$  dans le pire des cas.

#### 3.2 Hypothèse sur $\mathcal{P}$

Nous faisons l'hypothèse que le risque qui doit être couvert est défini par l'ensemble  $\mathcal{P}$  tel que

$$\mathcal{P} = \{\mathcal{I} | \mathcal{I}(i) \in [\alpha_i, \beta_i]\} \quad (7.2)$$

avec  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  parfaitement connus.  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont par exemple des seuils autour de  $\mathcal{I}_{ref}$ . Pour tout  $i$  de  $\mathcal{N}_t$ ,  $\alpha_i = \beta_i = 0$ .

#### 3.3 Identification au problème de sac-à-dos avec contraintes de précedence

Le premier problème de robustesse consiste à trouver le niveau de service offert par la configuration dans le pire des cas. Dans l'ensemble  $\mathcal{P}$  défini à l'équation (7.2), il est clair que le pire cas est défini par l'instance  $\mathcal{I}_{pc}$  telle que :

$$\mathcal{I}_{pc}(i) = \begin{cases} \beta_i & i \in \mathcal{N}_c \\ 0 & i \in \mathcal{N}_t \\ \alpha_i & i \in \mathcal{N}_s \end{cases} \quad (7.3)$$

Une configuration  $\mathcal{S}$  définit une forêt orientée comme sur la figure 7.1 qui représente une solution pour l'exemple du chapitre précédent. Cette solution définit une partition de l'ensemble des charges aux différentes sources. Dans chaque arbre de la solution, les charges ont des contraintes

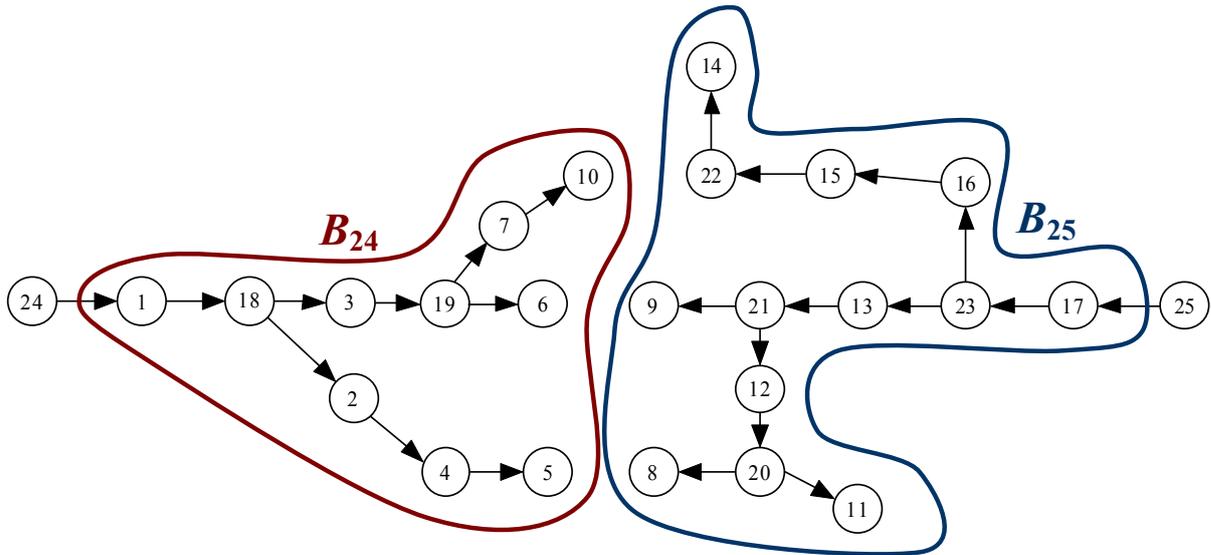


FIG. 7.1 – Une configuration admissible

de précedence définies par les arcs de chaque arbre. Chaque arbre étant indépendant des autres, on peut traiter les sources indépendamment les unes des autres. La configuration  $\mathcal{S}$  définit pour chaque source  $j$  de  $\mathcal{N}_s$  un ensemble de charges  $B_j$  qu'elle doit desservir. Les ensembles  $B_j$  représentent une partition de  $\mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t$  et sont tous disjoints. Dans la configuration de la figure 7.1,  $B_{24} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 10; 18; 19\}$  et  $B_{25} = \{8; 9; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 20; 21; 22; 23\}$ .

Le premier problème de robustesse revient à chercher le niveau de service maximum dans le pire des cas. Il revient donc à desservir pour chaque source  $j$ , le plus grand nombre d'usagers de  $B_j$  dans le cas où  $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{pc}$  de telle sorte que la capacité ne soit pas dépassée et que les contraintes de précedence définies par la configuration  $\mathcal{S}$  soient respectées. Dans la solution de la figure 7.1, l'usager 4 ne peut être desservi qu'à condition que l'usager 2 le soit également par exemple. La contrainte de limitation des chutes de tension (limitation de la profondeur de la forêt à  $D_{max}$ ) peut être vérifiée a priori en vérifiant la distance de chaque sommet à sa source. Si cette distance est supérieure à  $D_{max}$ , nous savons que ces sommets ne pourront pas être desservis. Nous augmentons alors artificiellement leur charge de telle sorte qu'elle soit supérieure au maximum des capacités des sources (si  $i$  est un tel sommet, nous posons  $\mathcal{I}_{pc}(i) = \max_{j \in \mathcal{N}_s} (\mathcal{I}_{ref}(j)) + \epsilon$ , avec  $\epsilon > 0$ ). Ainsi vérifier la contrainte de capacité des sources suffit pour vérifier la contrainte de limitation des chutes de tension.

Nous identifions la source  $j$  à un sac-à-dos de capacité  $\mathcal{I}_{pc}(j)$ , chaque usager ou sommet jonction  $i$  de  $B_j$  à un objet  $i$  et sa charge  $\mathcal{I}_{pc}(i)$  au volume de l'objet  $i$ . De plus nous définissons la fonction profit (notée  $p$ ) par  $p(i) = 1$  pour tout  $i$  de  $\mathcal{N}_c$  et  $p(i) = 0$  pour tout  $i$  de  $\mathcal{N}_t$ . Résoudre notre problème revient exactement à résoudre  $m$  problèmes indépendants de sac-à-dos avec contraintes de précedence où chaque sac-à-dos est une source  $j$ .

Dans (Garey et Johnson, 1979) le problème de sac-à-dos avec contraintes de précedence est classé parmi les problèmes  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort. Cette complexité devient  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens faible dès lors que les contraintes de précedence sont définies par un arbre, ce qui est le cas

dans notre problème.

### 3.4 Résolution du problème

#### 3.4.1 Formulation mathématique du problème

En se basant sur les travaux de la littérature portant sur le problème de sac-à-dos unique avec contraintes de précédence et notamment sa modélisation (Shaw et Cho, 1998; van der Merwe et Hattingh, 2006; You et Yamada, 2007), le premier problème de robustesse peut être écrit comme le programme linéaire en nombres entiers suivant noté  $PLNE_3(\mathcal{I}_{pc})$  :

$$PLNE_3(\mathcal{I}_{pc}) \left\{ \begin{array}{ll} \max \left( \mathcal{L}_\lambda = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_s} P_j}{n} \right) & \\ P_j = \sum_{i \in B_j} x(i) \cdot p(i) & j \in \mathcal{N}_s \quad (a) \\ \sum_{i \in B_j} x(i) \cdot \mathcal{I}_{pc}(i) \leq \mathcal{I}_{pc}(j) & j \in \mathcal{N}_s \quad (b) \\ x(i) \geq \mathcal{S}(i, j) \cdot x(j) & \forall (i, j) \in (\mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t)^2 \quad (c) \\ x(i) \in \{0, 1\} & \forall i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t \quad (d) \end{array} \right. \quad (7.4)$$

$\mathcal{I}_{pc}(i)$ ,  $p(i)$ ,  $B_j$  et  $\mathcal{S}(i, j)$  sont des données alors que  $x(i)$ ,  $P_j$  et  $\mathcal{L}_\lambda$  sont des variables de décision.  $x(i)$  est une variable binaire :  $x(i) = 1$  si et seulement si l'objet  $i$  de  $B_j$  est mis dans le sac  $j$  (l'utilisateur  $i$  est bien desservi par la source  $j$ ).  $P_j$  représente le profit rapporté par le sac  $j$  (le nombre d'utilisateurs desservis par la source  $j$ ).  $\mathcal{L}_\lambda$  est le profit total de l'ensemble des sacs : c'est aussi le niveau de service offert par la configuration  $\mathcal{S}$  dans le pire des cas.

L'ensemble des contraintes (7.4a) permet de mettre à jour le nombre d'utilisateurs affectés à la source  $j$  (le profit du sac-à-dos  $j$ ). L'ensemble des contraintes (7.4b) permet de vérifier la contrainte de capacité de chaque source (la capacité de chaque sac-à-dos). L'ensemble des contraintes (7.4c) permet de vérifier les contraintes de précédence imposées par la configuration  $\mathcal{S}$ . Les ensembles de contraintes (7.4d) définissent le domaine de variation des variables  $x(i)$ .

#### 3.4.2 Approches de résolution proposées dans la littérature du problème de sac-à-dos unique avec contraintes de précédence modélisées par un arbre

On retrouve dans la littérature plusieurs méthodes pour résoudre le problème de sac-à-dos unique avec contraintes de précédence modélisées par un arbre. Nous avons vu que le premier problème de robustesse revient à résoudre  $m$  problèmes indépendants de ce type.

Johnson et Niemi (1983) proposent un programme dynamique en  $O(nP^*)$  avec  $n$  le nombre d'objets et  $P^*$  la valeur optimale du profit. Cho et Shaw (1997) améliorent cette complexité en proposant un programme dynamique en  $O(nK)$  avec  $K$  la capacité du sac-à-dos. Ils résolvent en moins de 15 secondes des instances contenant 300 objets. Shaw et Cho (1998) proposent une PSE, mais plus performante en terme de temps de calcul que le programme dynamique proposé par (Cho et Shaw, 1997) grâce à une borne supérieure efficace basée sur l'amélioration de la borne obtenue par relaxation lagrangienne du programme linéaire. Ils résolvent en effet des instances contenant 500 objets en moins de 10 secondes. Enfin van der Merwe et Hattingh (2006) améliorent encore les performances temporelles de (Shaw et Cho, 1998) en proposant une modélisation du problème initial qui permet de le décomposer en sous-problèmes qui sont résolus

par un solveur de programmation linéaire classique. Ils résolvent des instances contenant 50000 objets en moins de 15 minutes.

## 4 Deuxième problème de robustesse : recherche de l'ensemble des instances couvert par une configuration

### 4.1 Définition

Le décideur fixe maintenant le niveau de service des usagers à 100% (*i.e.*  $\mathcal{L}_\lambda = 100\%$  : tous les usagers doivent être desservis). Le deuxième problème de robustesse consiste à évaluer l'ensemble des charges et des capacités  $\mathcal{P}$  que peut couvrir la configuration  $\mathcal{S}$  sans qu'il n'y ait jamais de délestage d'usagers.

Résoudre le deuxième problème revient donc à répondre à la question suivante : «étant donnée une configuration  $\mathcal{S}$ , quel est l'ensemble  $\mathcal{P}$  des instances que peut couvrir la configuration, tel que  $\lambda_1(\mathcal{S}, \mathcal{Z}_{ns}, \mathcal{P}) = 100\%$  ?»

Répondre à cette question revient à répondre à la deuxième question de l'analyse de sensibilité présentée en section 4.1 du chapitre 2 de la première partie de ce mémoire.

### 4.2 Résolution du problème

Répondre à la question précédente revient à rechercher les capacités et les charges telles que tous les usagers peuvent être desservis pour la configuration  $\mathcal{S}$ .

Comme dans le premier problème de robustesse, la configuration  $\mathcal{S}$  définit  $m$  ensembles  $B_j$  qui partitionnent  $\mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t$ .

Une charge  $\mathcal{W}$  est totalement desservie pour la configuration  $\mathcal{S}$  si et seulement si aucune capacité  $\mathcal{K}(j)$  n'est dépassée et que tous les sommets sont à une distance inférieure à  $D_{max}$  de la source par laquelle ils sont sensés être desservis d'après la configuration  $\mathcal{S}$ . Si il existe un sommet à une distance strictement supérieure à  $D_{max}$  alors l'ensemble  $\mathcal{P}$  est vide. Nous supposons dans la suite qu'il n'y a pas de sommet dans ce cas sinon le deuxième problème n'existe plus. Le deuxième problème de robustesse revient donc à chercher la charge  $\mathcal{W}$  qui peut être desservie totalement sans dépasser de capacité. Ce qui peut être résumé par :

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathcal{I} \left| \mathcal{I}(j) - \sum_{i \in B_j} \mathcal{I}(i) \geq 0, \forall j \in \mathcal{N}_s \right. \right\} \quad (7.5)$$

Ce résultat est trivial. Il va nous permettre cependant de mettre en place une mesure de robustesse de la configuration  $\mathcal{S}$ . Cette mesure de robustesse nous permettra de définir le troisième problème de robustesse.

### 4.3 Une nouvelle mesure de robustesse

En considérant l'instance prévisionnelle  $\mathcal{I}_{ref}$ , le deuxième problème de robustesse permet de mettre en évidence une marge de puissance pour chaque source que nous notons  $M_j(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  :

$$M_j(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) = \frac{\mathcal{I}_{ref}(j) - \sum_{i \in B_j} \mathcal{I}_{ref}(i)}{\mathcal{I}_{ref}(j)} \quad (7.6)$$

$M_j(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  mesure le pourcentage de déviation que peut supporter l'instance prévisionnelle  $\mathcal{I}_{ref}$  sans avoir besoin de recourir au délestage pour la configuration  $\mathcal{S}$ .  $M_j(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  mesure donc une robustesse pour chaque source.

L'ensemble des marges de puissance permet de définir un niveau de robustesse global pour la configuration  $\mathcal{S}$ .

#### 4.4 Définition d'un niveau de robustesse global pour la configuration du réseau

Une mesure globale de robustesse pour une configuration donnée peut être définie par la marge minimale de délestage que l'on peut mesurer par  $M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  :

$$M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) = \min_{j \in \mathcal{N}_s} M_j(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) \quad (7.7)$$

$M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  est comprise entre 0 et 100%. Elle évalue un voisinage de  $\mathcal{I}_{ref}$  dans lequel il est garanti qu'aucune charge n'est délestée.

### 5 Troisième problème de robustesse : recherche de la configuration la plus robuste

#### 5.1 Définition

Le niveau de robustesse global donné à la section 4.4 nous permet de définir un troisième problème de robustesse. Il revient à trouver la configuration qui possède la plus grande marge minimale de délestage. Il consiste donc à répondre à la question suivante : «étant données la structure du réseau  $\mathcal{H}$ , l'instance prévisionnelle  $\mathcal{I}_{ref}$ , quelle est une configuration  $\mathcal{S}$  qui maximise la marge minimale de délestage  $M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  ?»

Dans la suite de ce mémoire, nous ferons référence à ce problème par la dénomination *Configuration à Marge de Délestage Maximale (CMDM)*.

#### 5.2 Étude de complexité

Le but de cette section est de démontrer que *CMDM* est un problème  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort.

**Théorème III.1** *Le problème Configuration à Marge de Délestage Maximale est  $\mathcal{NP}$ -difficile au sens fort même s'il n'y a pas de sommet jonction dans le réseau.*

##### 5.2.1 Preuve

La preuve utilise une transformation du problème 3-partition ([Garey et Johnson, 1979](#)).

**Réduction de *CMDM* au problème 3-partition** Une instance du problème 3-partition est définie par un nombre entier strictement positif  $E$  et un ensemble  $O$  de  $3m$  entiers  $\{o_i\}_{1 \leq i \leq 3m}$  tels que :

$$\begin{cases} \frac{E}{4} \leq o_i \leq \frac{E}{2} & (a) \\ \sum_{i=1}^{3m} o_i = mE & (b) \end{cases} \quad (7.8)$$

La question est : «l'ensemble  $O$  peut-il être partitionné en  $m$  sous-ensembles disjoints  $O_1, \dots, O_m$  tels que  $\sum_{o_i \in O_j} o_i = E$  pour  $j = 1, \dots, m$  ?»

Étant donnée une instance du problème 3-partition, une instance particulière du problème *Configuration à Marge de Délestage Maximale* est définie comme suit. Le réseau est composé de  $n = 3m$  usagers et de  $m$  sources. Il n'y a pas de point de jonction. Pour  $i = 1, \dots, 3m$  nous posons  $\mathcal{I}_{ref}(i) = o_i$ . Et pour  $j = 3m + 1, \dots, 4m$  nous posons  $\mathcal{I}_{ref}(j) = 2E$  (la capacité nominale des sources est identique pour chaque source).

La structure du réseau est définie par la matrice  $\mathcal{H}$  de la figure 7.2. On a donc  $i \in B_j \Leftrightarrow \mathcal{S}(j, i) = 1$ .

La question est : «existe-t-il une configuration  $\mathcal{S}$  telle que tous les usagers sont desservis et que la marge minimale de délestage est supérieure ou égale à 50% ?»

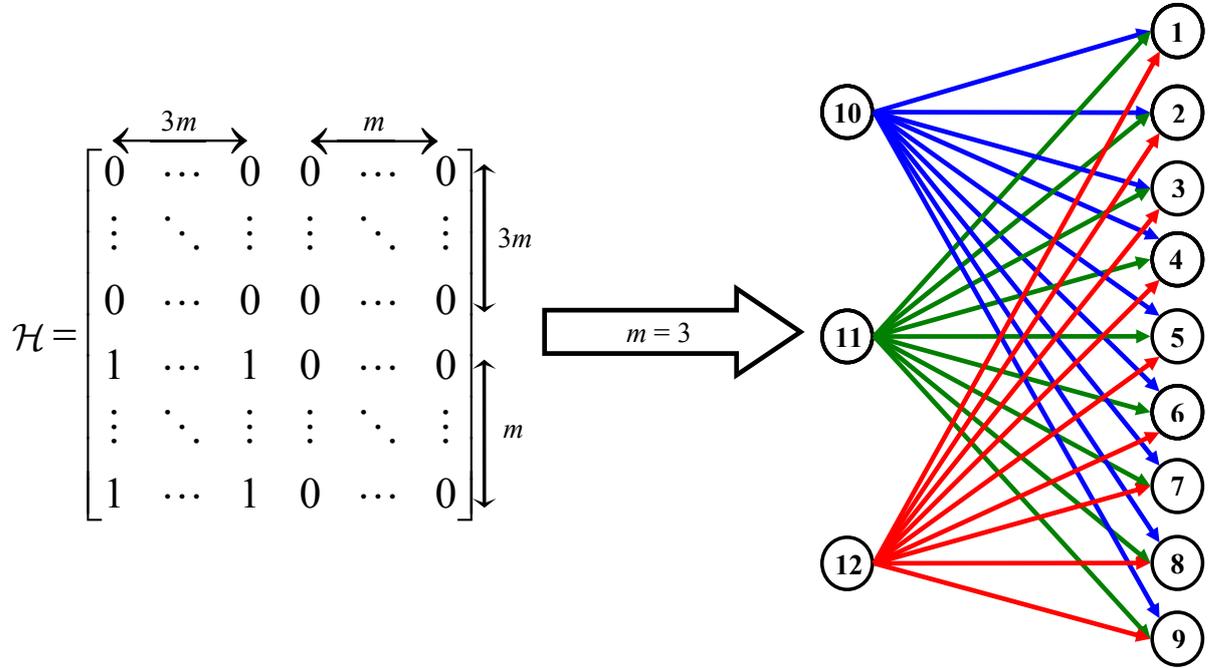


FIG. 7.2 – Matrice  $\mathcal{H}$  de *CMDM* réduit et le réseau correspondant lorsqu'il n'y a que trois sources

Par cette réduction, nous avons :

$$M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) = \min_{j \in \mathcal{N}_s} \frac{\mathcal{I}_{ref}(j) - \sum_{i \in B_j} \mathcal{I}_{ref}(i)}{\mathcal{I}_{ref}(j)} = \min_{j \in \mathcal{N}_s} \frac{2E - \sum_{i \in B_j} o_i}{2E}$$

Ce qui conduit à l'équation suivante :

$$M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) = \frac{2E - \max_{j \in \mathcal{N}_s} \left( \sum_{i \in B_j} o_i \right)}{2E} \quad (7.9)$$

⇒ **Identification de CMDM réduit au problème 3-partition**

Nous montrons tout d'abord que si le problème 3-partition a une réponse positive alors CMDM réduit a également une réponse positive.

Il existe une partition  $(O_j)_{1 \leq j \leq m}$  telle que :

$$\sum_{o_i \in O_j} o_i = E \quad (7.10)$$

La configuration  $\mathcal{S}$  est construite de la manière suivante à partir de la solution du problème 3-partition. Pour  $j = 1, \dots, m$  et pour  $i = 1, \dots, 3m$ ,  $\mathcal{S}(j + 3m, i)$  est mise à 1 si  $o_i \in O_j$ . Toutes les autres variables de  $\mathcal{S}$  sont mises à 0. Par construction de  $\mathcal{S}$ , l'équivalence suivante est vérifiée :

$$o_i \in O_j \Leftrightarrow i \in B_{j+3m}, \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (7.11)$$

Dans la mesure où tous les objets sont distribués parmi les ensembles  $O_j$ , tous les usagers sont desservis par la configuration  $\mathcal{S}$ .

Par utilisation des équations (7.9), (7.10) et (7.11), nous pouvons démontrer que la marge minimale de délestage est égale à 50% de la manière suivante :

$$M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) \stackrel{(7.9)}{=} \frac{2E - \max_{j \in \mathcal{N}_s} \left( \sum_{i \in B_j} o_i \right)}{2E} \stackrel{(7.11)}{=} \frac{2E - \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \left( \sum_{o_i \in O_j} o_i \right)}{2E} \stackrel{(7.10)}{=} \frac{2E - \max_{j \in \{1, \dots, m\}} (E)}{2E}$$

Ce qui conduit exactement à :

$$M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) = \frac{2E - E}{2E} = 50\%$$

Il existe donc une configuration  $\mathcal{S}$  telle que tous les usagers sont desservis et telle que la marge minimale de délestage est égale à 50%.

⇐ **Identification du problème 3-partition à CMDM réduit**

Nous montrons maintenant que si CMDM réduit a une réponse positive alors le problème 3-partition a également une réponse positive.

Il existe une configuration  $\mathcal{S}$  telle que tous les usagers sont desservis et telle que  $M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) \geq 50\%$ . Par utilisation de l'équation (7.9), cela signifie que l'égalité suivante est respectée :

$$\max_{j \in \mathcal{N}_s} \left( \sum_{i \in B_j} o_i \right) \leq E \quad (7.12)$$

Nous construisons la partition  $(O_j)_{1 \leq j \leq m}$  de la manière suivante. Pour  $j = 1, \dots, m$  et pour  $i = 1, \dots, 3m$ , nous plaçons l'objet  $o_i$  dans l'ensemble  $O_j$  si et seulement si  $\mathcal{S}(j + 3m, i) = 1$ . Par construction, les ensembles  $O_j$  sont disjoints et l'équivalence (7.11) est à nouveau vérifiée. Donc l'équation (7.12) peut s'écrire :

$$\max_{j \in \mathcal{N}_s} \left( \sum_{o_i \in O_j} o_i \right) \leq E$$

Cela implique que pour  $j = 1, \dots, m$ ,  $\sum_{o_i \in O_j} o_i \leq E$ . Ce qui signifie que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{o_i \in O_j} o_i \leq mE \quad (7.13)$$

Pendant tous les usagers sont desservis donc tous les objets  $o_i$  sont distribués et par utilisation de l'équation (7.8b) nous pouvons obtenir l'équation suivante :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{o_i \in O_j} o_i = mE \quad (7.14)$$

L'inégalité (7.13) devient donc une égalité. Ce qui signifie que nécessairement pour  $j = 1, \dots, m$ ,  $\sum_{o_i \in O_j} o_i = E$ .

L'ensemble  $O$  peut être partitionné en  $m$  ensembles disjoints  $(O_j)_{1 \leq j \leq m}$  tels que  $\sum_{o_i \in O_j} o_i = E$ .

□

### 5.3 Une borne supérieure sur la marge minimale de délestage

Nous proposons une borne supérieure sur la marge minimale de délestage.

Nous définissons  $M_{up}^1$  par l'équation suivante :

$$M_{up}^1 = \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(j) - \sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(j)} \quad (7.15)$$

**Lemme III.1**  $M_{up}^1$  est une borne supérieure sur la marge minimale de délestage.

Cette borne supérieure représente le cas où les marges de puissance sont toutes identiques.

**Preuve.** Nous allons utiliser une démonstration par l'absurde. Supposons qu'il existe une configuration admissible  $\mathcal{S}$  telle que  $M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) > M_{up}^1$ .

Cela implique que :

$$\begin{aligned} \forall j \in \mathcal{N}_s, \quad & \frac{\mathcal{I}_{ref}(j) - \sum_{i \in B_j} \mathcal{I}_{ref}(i)}{\mathcal{I}_{ref}(j)} > \frac{\sum_{k \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(k) - \sum_{l \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(l)}{\sum_{k \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(k)} \\ \Leftrightarrow \forall j \in \mathcal{N}_s, \quad & \mathcal{I}_{ref}(j) - \sum_{i \in B_j} \mathcal{I}_{ref}(i) > \mathcal{I}_{ref}(j) \times \left( \frac{\sum_{k \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(k) - \sum_{l \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(l)}{\sum_{k \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(k)} \right) \\ \Rightarrow \sum_{j \in \mathcal{N}_s} \left( \mathcal{I}_{ref}(j) - \sum_{i \in B_j} \mathcal{I}_{ref}(i) \right) & > \sum_{j \in \mathcal{N}_s} \left( \mathcal{I}_{ref}(j) \times \frac{\sum_{k \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(k) - \sum_{l \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(l)}{\sum_{k \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(k)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{j \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(j) - \sum_{j \in \mathcal{N}_s} \sum_{i \in B_j} \mathcal{I}_{ref}(i) &> \frac{\sum_{k \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(k) - \sum_{l \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(l)}{\sum_{k \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(k)} \times \sum_{j \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(j) \\ \Rightarrow \sum_{j \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(j) - \sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i) &> \sum_{k \in \mathcal{N}_s} \mathcal{I}_{ref}(k) - \sum_{l \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(l) \end{aligned}$$

Les deux membres de l'inégalité sont identiques, l'inégalité stricte est donc impossible et par suite l'hypothèse de départ est absurde.  $\square$

## 5.4 Résolution du problème

### 5.4.1 Formulation à l'aide d'un programme linéaire en nombres entiers

*CMDM* peut être écrit comme le programme linéaire en nombres entiers suivant noté  $PLNE_4(\mathcal{I}_{ref})$  :

$$PLNE_4(\mathcal{I}_{ref}) \left\{ \begin{array}{ll} \max(M_{min}) & \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{S}(i, j) = 1 & \forall j \in \mathcal{N}_c \quad (a) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} \mathcal{S}(i, j) \leq 1 & \forall j \in \mathcal{N}_t \quad (b) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} f(i, j) - \sum_{k \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} f(j, k) = \mathcal{I}_{ref}(j) & \forall j \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t \quad (c) \\ f(i, j) - \mathcal{I}_{ref}(j) \times \mathcal{S}(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_c \quad (d) \\ f(i, j) - sumW \times \mathcal{S}(i, j) \leq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2 \quad (e) \\ \mathcal{I}_{ref}(i) \times M_{min} + \sum_{j \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} f(i, j) \leq \mathcal{I}_{ref}(i) & \forall i \in \mathcal{N}_s \quad (f) \\ D(j) = 0 & \forall j \in \mathcal{N}_s \quad (g) \\ D(j) \geq D(i) + 1 - (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times D_{max} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_c \quad (h) \\ D(j) \leq D(i) + 1 + (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times D_{max} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_c \quad (i) \\ D(j) \geq D(i) - (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times D_{max} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_t \quad (j) \\ D(j) \leq D(i) + (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times D_{max} & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{N}_t \quad (k) \\ D(i) \leq D_{max} & \forall i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t \quad (l) \\ \mathcal{S}(i, j) \leq \mathcal{H}(i, j) & \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2 \quad (m) \\ \mathcal{S}(i, j) \in \{0, 1\} & \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2 \quad (n) \\ f(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N}^2 \quad (o) \\ M_{min} \geq 0 & \quad (p) \end{array} \right. \quad (7.16)$$

$\mathcal{H}(i, j)$ ,  $\mathcal{I}_{ref}(i)$ , et  $sumW$  sont des données alors que  $\mathcal{S}(i, j)$ ,  $f(i, j)$ ,  $M_{min}$  et  $D(i)$  sont des variables de décision.  $sumW = \sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)$ .  $\mathcal{S}(i, j)$  est une variable binaire. L'arc  $(i, j)$  appartient à la solution si et seulement si  $\mathcal{S}(i, j) = 1$ .  $f(i, j)$  mesure le flot qui traverse l'arc  $(i, j)$  et  $M_{min}$  est la marge minimale de délestage.

L'ensemble des contraintes (7.16a) garantit que chaque usager est desservi une et une seule fois. L'ensemble des contraintes (7.16b) garantit que chaque sommet jonction est desservi au plus une fois.

L'ensemble des contraintes (7.16c) exprime la loi de Kirchhoff. Couplé avec les contraintes (7.16a) + (7.16b) et avec le fait que les variables  $f(i, j)$  sont bornées, cela garantit que la contrainte de radialité est respectée.

Les ensembles de contraintes (7.16d) + (7.16e) permet de relier le flot  $f(i, j)$  à la position  $\mathcal{S}(i, j)$  de l'interrupteur de la ligne  $(i, j)$ .

L'ensemble des contraintes (7.16f) permet de mettre à jour la marge minimale de délestage  $M_{min}$ .

L'ensemble des contraintes (7.16g) permet d'instancier la profondeur des sommets sources à 0 puisqu'ils sont les racines de la forêt que l'on cherche à obtenir. Les ensembles de contraintes (7.16h) + (7.16i) permettent de mettre à jour la profondeur des sommets usagers. Les ensembles de contraintes (7.16j) + (7.16k) permettent de mettre à jour la profondeur des sommets jonction : ils n'induisent pas de chute de tension, ils ont donc la même profondeur que leur prédécesseur. L'ensemble des contraintes (7.16l) garantit que la contrainte de limitation des chutes de tension est vérifiée.

L'ensemble des contraintes (7.16m) garantit que l'arc  $(i, j)$  appartient à la solution si et seulement si il existe effectivement. Les ensembles de contraintes (7.16n), (7.16o), (7.16p) définissent le domaine de variation des variables de décision. De plus, l'ensemble des contraintes (7.16p) garantit que la contrainte de capacité des sources est respectée.

#### 5.4.2 Développement d'une métaheuristique : une recherche tabou

Nous avons également développé une métaheuristique pour résoudre le problème. Il s'agit d'une recherche tabou qui suit les étapes suivantes :

1. Rechercher une configuration  $\mathcal{S}$  admissible et initialiser la liste tabou à vide.
2. Trouver le voisinage (permutation des interrupteurs) de  $\mathcal{S}$  et évaluer chaque configuration voisine.
3. Choisir le meilleur élément dans ce voisinage sauf si la permutation correspondante est dans la liste tabou et qu'elle ne vérifie pas la condition d'aspiration (*i.e.* elle n'améliore pas la meilleure configuration trouvée jusque là).
4. Mettre à jour la liste tabou ainsi que sa longueur.
5. Si la condition d'arrêt n'est pas vérifiée retourner à l'étape 2. Sinon arrêter.

Ces différents points seront présentés plus en détail dans la suite de ce mémoire.

#### Hypothèses

Nous nous plaçons dans le cas où chaque source a une capacité nominale suffisante pour desservir l'ensemble des usagers et nous supposons que la profondeur maximale autorisée de la forêt est égale au nombre de sommets usagers ( $D_{max} = n$ ), ce qui permet que toute forêt couvrante est une solution admissible (problème facile). Nous pouvons donc relaxer les contraintes (7.16g), (7.16h), (7.16i), (7.16j), (7.16k) et (7.16l) dans  $PLNE_4(\mathcal{I}_{ref})$ . De plus nous partons du principe que les capacités nominales sont identiques. On peut résumer ces hypothèses par :

$$\begin{cases} \forall j \in \mathcal{N}_s, \quad \mathcal{I}_{ref}(j) = K > sumW \\ D_{max} = n \end{cases}$$

Faire ces hypothèses nous permet de proposer une méthode pour construire facilement des «bonnes» premières solutions sans avoir à vérifier la contrainte de capacité des sources et la contrainte de limitation des chutes de tension. De plus cela nous permet d'améliorer la borne supérieure définie à l'équation (7.15).

Nous définissons  $M_{up}^2$  par l'équation suivante :

$$M_{up}^2 = \frac{K - \left\lceil \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)}{m} \right\rceil}{K} \quad (7.17)$$

**Lemme III.2**  $M_{up}^2$  est une borne supérieure sur la marge minimale de délestage dans le cas où les capacités nominales des sources sont identiques.

**Preuve.** Dans le cas particulier de capacités nominales identiques, l'équation (7.15) s'écrit :

$$\begin{aligned} M_{up}^1 &= \frac{\sum_{j \in \mathcal{N}_s} K - \sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)}{\sum_{j \in \mathcal{N}_s} K} \\ \Leftrightarrow M_{up}^1 &= \frac{m.K - \sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)}{m.K} \\ \Leftrightarrow M_{up}^1 &= \frac{K - \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)}{m}}{K} \\ \Leftrightarrow \forall \mathcal{S}, \quad M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) &\leq \frac{K - \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)}{m}}{K} \\ \Rightarrow \forall \mathcal{S}, \quad \min_{j \in \mathcal{N}_s} \left( \frac{K - \sum_{i \in B_j} \mathcal{I}_{ref}(i)}{K} \right) &\leq \frac{K - \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)}{m}}{K} \\ \Rightarrow \forall \mathcal{S}, \quad \max_{j \in \mathcal{N}_s} \left( \sum_{i \in B_j} \mathcal{I}_{ref}(i) \right) &\geq \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)}{m} \end{aligned}$$

Or  $\mathcal{I}_{ref}$  étant un vecteur entier,  $\forall j \in \mathcal{N}_s$ ,  $\sum_{i \in B_j} \mathcal{I}_{ref}(i)$  est nécessairement une valeur entière et par suite le membre de droite peut être arrondi à l'entier supérieur sans remettre en cause l'inégalité.

On arrive donc à l'inégalité suivante :

$$\forall \mathcal{S}, \quad M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) \leq \frac{K - \left\lceil \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}_c \cup \mathcal{N}_t} \mathcal{I}_{ref}(i)}{m} \right\rceil}{K}$$

Et finalement nous arrivons à l'équation suivante :

$$\forall \mathcal{S}, \quad M(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) \leq M_{up}^2 \quad \square$$

### Recherche de la configuration initiale

La recherche de la configuration initiale pose déjà en soit un problème intéressant. Nous proposons une heuristique basée sur un algorithme glouton pour proposer une configuration admissible.

De manière schématique, l'algorithme glouton consiste à partir de la configuration pour laquelle tous les interrupteurs sont ouverts et de fermer à chaque tour un interrupteur de telle sorte qu'un nouvel usager ou un nouveau sommet jonction est affecté à un sommet source. On choisit l'interrupteur qui maximise la marge minimale de délestage. En cas d'égalité les interrupteurs sont départagés suivant trois règles qui définissent trois heuristiques :

1. L'interrupteur est choisi de manière aléatoire. Ce choix définit l'heuristique notée *H1*.
2. L'interrupteur est choisi suivant le nombre de sommets dits "voisins" (cf. définition III.2) qu'il offre à l'arbre auquel il est susceptible d'appartenir. Ce choix définit l'heuristique notée *H2*.
3. L'interrupteur est choisi suivant le nombre de sommets dits "atteignables" (cf. définition III.3) qu'il offre à l'arbre auquel il est susceptible d'appartenir. Ce choix définit l'heuristique notée *H3*.

Les règles proposées dans *H2* et *H3* privilégient les interrupteurs qui offrent le plus de possibilités en terme d'interrupteurs accessibles au tour suivant et éviter le plus possible de choisir un interrupteur susceptible de bloquer la progression d'un arbre.

Chacune de ces heuristiques est polynomiale.

**Définition III.2** *Un sommet voisin d'un arbre  $T$  est un sommet qui n'appartient à aucun arbre de la forêt courante et qui, suite à l'ajout d'un seul arc de  $\mathcal{A}$ , peut être atteint par l'arbre  $T$ .*

**Définition III.3** *Un sommet atteignable par un arbre  $T$  est un sommet qui n'appartient à aucun arbre de la forêt courante et qui, suite à l'ajout de plusieurs arcs de  $\mathcal{A}$ , peut être atteint par l'arbre  $T$ .*

### Voisinage d'une configuration

Le voisinage d'une configuration est l'ensemble des permutations de sommets finaux que l'on peut faire entre les arbres de la configuration.

Si nous reprenons l'exemple du chapitre précédent présenté sur la figure 6.3 et une configuration particulière de ce réseau présentée sur la figure 7.3, les sommets finaux de la solution sont les sommets 5, 6, 8, 9, 10, 11, et 14. Le voisinage de cette configuration est le voisinage  $\mathcal{V}$  défini de la manière suivante :

$$\mathcal{V} = \{(7, 10, 22) ; (6, 9, 21) ; (4, 5, 8) ; (20, 8, 5) ; (21, 9, 6) ; (15, 22, 16)\}$$

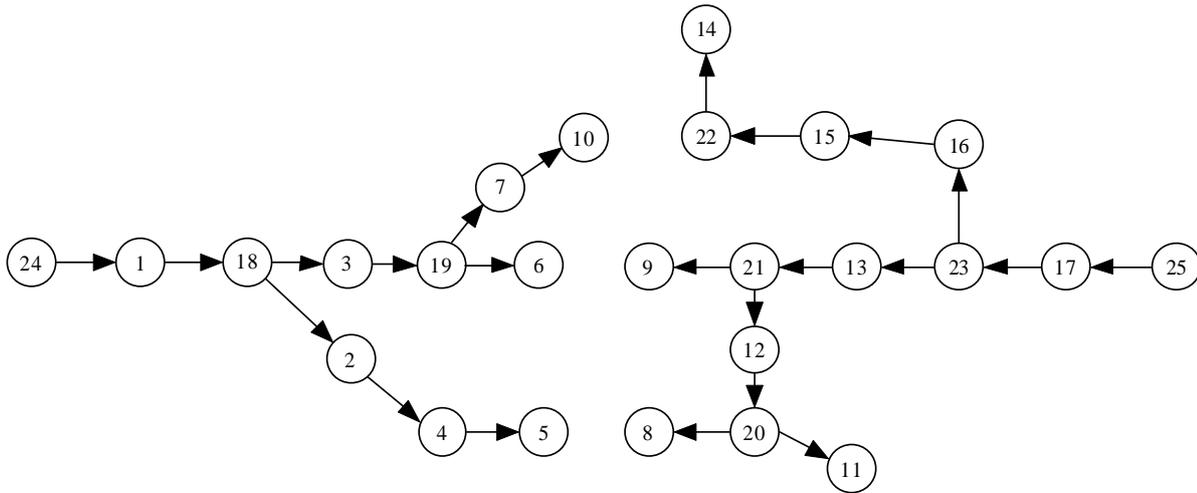


FIG. 7.3 – Une configuration admissible

où le triplet  $(i, j, k)$  signifie que l'on peut supprimer l'arc  $(i, j)$  dans la configuration et le remplacer par l'arc  $(k, j)$ .

Choisir le voisin  $(7, 10, 22)$  dans le voisinage  $\mathcal{V}$  revient à faire desservir le sommet 22 par la source 25 et non plus la source 24.

La recherche du voisinage peut se faire à l'aide d'un algorithme polynomial.

### Choix du meilleur élément de $\mathcal{V}$

Chaque triplet  $(i, j, k)$  de  $\mathcal{V}$  est évalué par la marge minimale de délestage qu'impliquerait le choix de ce triplet. On choisit le triplet qui offre la plus grande marge minimale de délestage sauf si le triplet en question appartient à la liste tabou et n'améliore pas la meilleure solution trouvée jusque là (condition d'aspiration).

### Mise à jour de la liste tabou et de sa longueur

Si c'est le triplet  $(i, j, k)$  qui est choisi dans le voisinage de la solution courante alors la liste tabou est enrichie du triplet  $(k, j, i)$  qui représente l'opération inverse.

La longueur  $\tau$  de la liste tabou est dynamique et est définie par  $\tau = 10\%(|\mathcal{V}|)$ .

### Condition d'arrêt

La recherche tabou est arrêtée suite à l'atteinte d'un temps limite d'exécution ou de la borne supérieure  $M_{up}^2$ .

#### 5.4.3 Expérimentation

Le programme linéaire en nombres entiers  $PLNE_4(\mathcal{I}_{ref})$ , les heuristiques  $H1$ ,  $H2$  et  $H3$  et les recherches tabou notées respectivement  $RT1$ ,  $RT2$  et  $RT3$ , suivant qu'elles se basent sur

l'heuristique  $H1$ ,  $H2$  ou  $H3$  pour rechercher la configuration initiale, ont toutes été testées sur le même panel de réseaux. Chaque exemple est constitué d'une matrice d'adjacence  $\mathcal{H}$  générée aléatoirement. La charge prévisionnelle  $\mathcal{W}_{ref}$  a également été générée aléatoirement, avec des valeurs réparties uniformément entre 1 et 5. La capacité nominale  $\mathcal{K}_{nom}$  a été fixée à  $sumW$  pour chacune des sources. Les exemples sont présentés dans le tableau 7.1. Il y a 135 exemples répartis équitablement en trois types définis par leur densité. Les réseaux des exemples de type 1 ont une densité moyenne de 15%, les réseaux des exemples de type 2 ont une densité moyenne de 32% et les réseaux des exemples de type 3 ont une densité moyenne de 49%. Pour chacun de ses types, le nombre d'utilisateurs varie entre 10 et 50 alors que le nombre de sources varie entre 2 et 6.

TAB. 7.1 – Caractéristiques des réseaux testés

Type	Nombre d'exemples	Taille du réseau			Densité moyenne $\frac{\text{nombre d'arcs}}{(\text{nombre de sommets})^2}$
		$n$ usagers	$t$ jonctions	$s$ sources	
type 1	45	10 → 50	0	2 → 6	15%
type 2	45	10 → 50	0	2 → 6	32%
type 3	45	10 → 50	0	2 → 6	49%

Le programme linéaire en nombres entiers  $PLNE_4(\mathcal{I}_{ref})$  a été implémenté en langage  $C$  à l'aide du logiciel libre *GNU Linear Programming Kit* (Makhorin, 2004). Pour  $PLNE_4(\mathcal{I}_{ref})$ , une durée d'exécution limite de une heure a été fixée.

Nous évaluons les différentes méthodes de résolution par différents indices :

- le temps de calcul,
- le caractère optimal ou approché de la solution obtenue,
- la distance relative par rapport au minimum entre la borne supérieure et la marge optimale si elle est connue (par  $PLNE_4$ ).

**Définition III.4** Nous définissons par  $R_{up}^*$  la distance relative de la marge minimale de délestage  $M$  obtenue par une méthode par rapport au minimum entre la borne supérieure  $M_{up}^2$  et la marge de délestage optimale  $M^*$  si elle est connue (donnée éventuellement par  $PLNE_4$ ). Plus formellement  $R_{up}^*$  est définie par l'équation suivante :

$$R_{up}^* = \frac{M^* - M}{M^*} \quad (7.18)$$

Lorsque  $M^*$  n'est pas connue, nous posons  $M^* = M_{up}^2$  dans l'équation (7.18).

Les résultats sont donnés dans le tableau 7.2.

Le temps d'exécution des recherches tabou a été fixé à une seconde (sans compter la recherche de la première solution). Au-delà, les résultats n'étaient pas améliorés pour la plupart des cas. Les tableaux de résultat montrent que pour  $PLNE_4$  et les trois heuristiques, le temps d'exécution augmente avec la densité du réseau. Par contre le temps d'exécution des recherches tabou diminue avec la densité du réseau.

TAB. 7.2 – Résultats pour les différentes méthodes

Méthode	Exemples	Optimalité	Temps d'exécution			$R_{up}^*$		
			min.	moy.	max.	min.	moy.	max.
$PLNE_4$	total	72%	0,032s	1031s	3600s	0%	3,55%	45%
	type 1	93%	0,047s	267s	3600s	0%	0,15%	3,53%
	type 2	71%	0,032s	989s	3600s	0%	3,82%	38,93%
	type 3	53%	0,047s	1837s	3600s	0%	5,71%	45%
$H1$	total	12%	0ms	0ms	0ms	0%	5,35%	50%
	type 1	20%	0ms	0ms	0ms	0%	7,7%	50%
	type 2	4%	0ms	0ms	0ms	0%	4,51%	35,82%
	type 3	13%	0ms	0ms	0ms	0%	3,87%	21,2%
$H2$	total	18%	0ms	1ms	1ms	0%	3,59%	42,69%
	type 1	24%	0ms	0ms	1ms	0%	4,03%	42,69%
	type 2	11%	0ms	1ms	2ms	0%	3,30%	12,46%
	type 3	18%	0ms	1ms	5ms	0%	3,73%	16,67%
$H3$	total	15%	0ms	1ms	14ms	0%	4,24%	42,69%
	type 1	22%	0ms	1ms	2ms	0%	5,24%	42,69%
	type 2	9%	0ms	1ms	6ms	0%	3,86%	14,29%
	type 3	13%	0ms	2ms	14ms	0%	3,53%	18,13%
$RT1$	total	49%	0ms	0,578s	1s	0%	2,8%	50%
	type 1	51%	0ms	0,644s	1s	0%	4,81%	50%
	type 2	40%	0ms	0,522s	1s	0%	1,9%	12,45%
	type 3	58%	0ms	0,467s	1s	0%	1,59%	12,13%
$RT2$	total	51%	0ms	0,586s	1,003s	0%	2,07%	42,69%
	type 1	47%	0ms	0,734s	1,001s	0%	2,78%	42,69%
	type 2	51%	0ms	0,534s	1,003s	0%	1,54%	12,45%
	type 3	55%	0ms	0,49s	1,003s	0%	1,87%	15%
$RT3$	total	53%	0ms	0,542s	1,008s	0%	2,02%	42,69%
	type 1	50%	0ms	0,601s	1,002s	0%	2,53%	42,69%
	type 2	44%	0ms	0,557s	1,007s	0%	1,66%	12,45%
	type 3	56%	0ms	0,469s	1,008s	0%	1,88%	14,27%

$PLNE_4$  trouve la solution optimale dans plus de 72% des cas et obtient des résultats particulièrement performants lorsque la densité du réseau est de l'ordre de 15%. Aucune des heuristiques proposées n'obtient de résultats équivalents en terme d'optimalité même si la recherche informée des heuristiques  $H2$  et  $H3$  améliorent sensiblement les résultats de  $H1$ .

Pour les exemples de type 2 et 3, si  $PLNE_4$  surclasse les autres méthodes en terme d'optimalité, elle ne les surpasse pas en terme de distance relative  $R_{up}^*$ . Ce qui veut dire que lorsque  $PLNE_4$  ne trouve pas la solution optimale elle s'éloigne plus de la borne supérieure que les autres méthodes.

L'utilisation de la recherche tabou améliore de manière importante les performances des heuristiques puisqu'on obtient des performances bien meilleures en terme d'optimalité (50% de solutions optimales pour les métaheuristiques). Pour les exemples de type 3, les recherches tabou obtiennent même des résultats équivalents à  $PLNE_4$  en terme d'optimalité. Mais surtout la distance relative  $R_{up}^*$  est plus faible pour les exemples de type 2 et 3 chez les recherches tabou

que chez  $PLNE_4$ .

Pour faire un bilan, si la densité du réseau est proche de 15%, nous conseillons d'utiliser  $PLNE_4$ . Pour des densités supérieures, l'utilisation de  $RT3$  semble la plus appropriée en terme de compromis temps/qualité. Quoiqu'il en soit le temps d'exécution des recherches tabou est tellement faible comparativement aux performances obtenues qu'il ne coûte rien de les lancer toutes pour garder ensuite la configuration la plus robuste parmi celles proposées.

Nous pouvons noter que la borne supérieure  $M_{up}^2$  est une borne efficace. En effet la borne supérieure est atteinte par  $PLNE_4$  dans 54% des cas : ce chiffre correspond au pourcentage de fois où la solution trouvée par  $PLNE_4$  (lorsqu'elle est optimale) atteint la borne supérieure. De plus la distance relative moyenne entre la borne supérieure et la solution optimale (si elle a été trouvée) est de 3,05%.

## 6 Interface entre le réseau de transport d'électricité et l'utilisateur

Au laboratoire G-SCOP, la problématique de l'énergie concerne plusieurs projets de recherche.

[Ha et al. \(2005, 2006b,a\)](#) travaillent notamment sur la gestion de l'énergie dans l'habitat en proposant des méthodes pour ordonnancer les tâches consommatrices d'énergie de l'utilisateur en fonction de la ressource d'énergie disponible de manière à assurer le compromis entre sa facture d'électricité et son confort personnel.

[Lu et al. \(2006a,b\)](#) travaillent quant à eux sur la prévention des blackouts dans les réseaux de transport d'électricité en délestant de manière intelligente avant l'occurrence d'un blackout pour éviter celui-ci. Leur travail consiste, lorsque des signes avant-coureurs de blackout sont détectés (chutes de tension ...), à donner des consignes de délestage aux gestionnaires des réseaux de distribution d'électricité en terme de puissance à libérer. Chaque gestionnaire doit alors délester cette puissance auprès des usagers qui sont desservis par le réseau dont il a la responsabilité.

Dans ce contexte, la méthode de [Ha et al. \(2005, 2006b,a\)](#) permet de maximiser le confort de l'utilisateur en libérant le maximum d'énergie pour le gestionnaire du réseau.

Il est intéressant de voir que les dernières méthodes proposées dans ce chapitre peuvent s'interfacer entre les travaux de ([Lu et al., 2006a,b](#)) et ceux de ([Ha et al., 2005, 2006b,a](#)).

Imaginons par exemple que les travaux de ([Ha et al., 2005, 2006b,a](#)) permettent de définir un confort minimal désiré par l'utilisateur et la charge de référence correspondante. Les consignes de délestage imposées par le réseau de transport peuvent être vues comme des perturbations sur les capacités nominales des sources du réseau de distribution. La méthode présentée en section 5 pour maximiser la marge minimale de délestage dans le réseau permet alors de retarder le moment où les consignes de délestage imposées par le réseau de transport vont dégrader le confort de l'utilisateur en dessous du confort minimal désiré.

## 7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité différents problèmes pour la configuration robuste d'un réseau de distribution soumis à des incertitudes sur la charge des usagers et sur la capacité des sources. L'adjectif robuste renvoie ici à la capacité de la configuration à garantir le service aux usagers malgré les incertitudes.

Pour chacun des problèmes, une étude de complexité a systématiquement été proposée ainsi qu'une méthode de résolution dédiée.

Pour le dernier problème de robustesse, le plus compliqué, nous avons construit deux méthodes de résolution efficace : l'une basée sur la formulation du problème par un Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE), la deuxième basée sur une recherche tabou. Pour des réseaux peu denses, le PLNE propose pour la quasi totalité des cas une solution optimale. Pour des réseaux plus denses, la recherche tabou offre les mêmes performances en terme d'optimalité que le PLNE mais en un temps beaucoup plus faible.

Cependant pour développer la recherche tabou, nous avons fait deux hypothèses fortes :

- capacité de chaque source suffisante pour desservir l'ensemble des usagers,
- contrainte de limitation des chutes de tension toujours respectée.

Il faudra dans l'avenir lever ces hypothèses et proposer des méthodes capables de prendre en compte ces contraintes.

# Conclusion générale

Les travaux que nous avons présentés dans ce document traitent de la configuration des systèmes de production de biens et de services en présence d'incertitudes. Pour ce faire, nous nous sommes volontairement inscrits dans le cadre défini par le groupe de recherche français «Flexibilité et Robustesse» du GOTHa (Groupe d'Ordonnement Théorique et Appliqué) qui a proposé, à travers notamment son ouvrage collectif (Billaut et al., 2005), de définir les concepts pour la prise en compte des perturbations en ordonnancement mais qui sont parfaitement généralisables à la recherche opérationnelle et à l'aide à la décision. L'un des concepts forts est le concept de *robustesse* qui consiste à vouloir offrir une garantie de performance à une solution sur un risque à couvrir. Alors que l'optimisation classique consiste à construire des solutions optimales sur des instances considérées comme certaines, l'optimisation robuste consiste à construire des solutions ayant des performances globales acceptables (mesurées par le critère de robustesse) sur un ensemble d'instances sans rechercher la seule meilleure performance locale (mesurée par le critère d'optimalité) sur chacune des instances.

Le concept de robustesse implique donc d'être capable de mesurer une performance globale à l'aide de critères de robustesse : ils ont été présentés dans la partie I de ce mémoire. Le caractère robuste d'une solution dépend notamment du critère de robustesse utilisé. Nous nous sommes également efforcés dans la partie I de ce mémoire de présenter un processus complet de résolution pour l'optimisation des problèmes soumis à des perturbations.

Cependant aucune méthode générale de synthèse de solutions robustes n'y est présentée pour une raison simple qui est qu'il n'en existe pas tout comme il n'existe pas de méthode générale de synthèse de solutions optimales en optimisation classique. En ce sens, la méthode de résolution dépend des perturbations prises en compte et de leur modélisation, du critère de robustesse (qui doit être pertinent) et de la performance à garantir face aux perturbations.

Nous nous sommes attelés dans cette thèse à développer des méthodes de résolution pour la configuration robuste de deux systèmes de production particuliers : un système de production de biens (partie II) et un système de production de services (partie III).

Le système de production de biens étudié dans la partie II est un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions soumis à des incertitudes sur la demande. Les travaux présentés dans cette partie s'inscrivent dans la ligne directe des travaux de thèse de Rossi (2003). Une des perspectives importantes qu'il avait soulevé dans son propre mémoire de thèse était le problème de la configuration robuste *ex-nihilo* : nous avons pris ce problème à bras le corps en proposant une méthode de construction de configurations robustes en maîtrisant les coûts de la configuration. L'adjectif «robuste» renvoie ici à la capacité de la configuration à garantir l'équilibre de la charge des machines malgré les incertitudes sur la demande.

Nous avons démontré que le domaine de pertinence de la performance d'équilibre de la

charge se limite aux machines uniformes. Nous avons donc proposé d'étudier une nouvelle performance à garantir valide également pour les machines non liées : garantir un temps de traitement prédéfini malgré les incertitudes sur la demande. Les travaux concernant cette nouvelle performance présentés dans ce mémoire sont des préliminaires basés notamment sur une analyse de sensibilité, la définition d'un critère de robustesse et la définition de quelques problèmes de robustesse liés à ce critère de robustesse.

Le système de production de services étudié dans la partie III est un réseau de distribution d'électricité soumis à des incertitudes sur la charge des usagers et la capacité des sources. Les travaux présentés dans cette partie ont principalement consisté en la modélisation du réseau et des perturbations, à la définition d'un critère de robustesse visant à mesurer la capacité de la configuration du réseau à garantir le service aux usagers malgré les perturbations et enfin à des méthodes de construction de configurations robustes. La performance de non-délestage des usagers répond à un contexte émergent où la capacité des sources tend à s'équilibrer avec la charge des usagers et où les nouvelles productions d'électricité telles que les éoliennes ou les cellules photovoltaïques créent des intermittences dans la production et donc des incertitudes sur la capacité de production de l'énergie.

Les travaux présentés dans ce mémoire forment un socle qui ouvre des perspectives intéressantes, à plus ou moins long terme.

## **Perspectives pour la configuration robuste de l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions**

### **1. Méthode de résolution pour la configuration d'un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions : garantie d'un temps de traitement prédéfini**

Nous sommes un peu restés sur notre faim à la clôture du chapitre 5 puisque seule une modélisation du problème qui consistait à répondre à la question : «étant donné un ensemble  $\mathcal{P}$  de demandes voisines d'une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$  et une deadline  $\tilde{d}$ , quelle est la configuration de coût minimal qui garantit l'existence d'un plan de production pour chacune des demandes  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{P}$  tel que le temps de traitement est inférieur à  $\tilde{d}$ ?» avait été proposée.

Une méthode de résolution devra être développée pour aller au bout de ce problème.

### **2. Utilisation de coûts de qualification généraux pour la configuration robuste de l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions**

Pour la configuration de l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions, nous avons considéré des coûts de qualification identiques bien que des coûts différents semblent plus proches de la réalité industrielle. Considérer des coûts différents implique que supprimer une qualification dans la Procédure par Séparation et Évaluation présentée dans le chapitre 4

---

n'a plus le même impact sur le coût global de la configuration qu'une autre qualification. Il apparaît donc que considérer des coûts de qualification différents permettrait de discriminer les qualifications.

## **Perspectives pour la configuration robuste du réseau de distribution d'électricité**

### **1. Lever d'hypothèses**

Dans le chapitre 7, pour développer une recherche tabou, nous nous sommes basés sur deux hypothèses fortes :

- la capacité de chaque source est suffisante pour desservir l'ensemble des usagers,
- la contrainte de limitation des chutes de tension est toujours respectée.

Pour résoudre le problème de configuration robuste des réseaux de distribution dans sa globalité, il faudra à tout prix lever ces hypothèses et développer des méthodes capables de prendre en compte les contraintes correspondantes.

### **2. Prise en compte de la priorité de certains usagers**

Dans la partie III de ce mémoire, nous avons considéré de manière simplificatrice que tous les usagers avaient le même droit sur le service en énergie. En réalité, il est clair qu'il est moins tolérable qu'un hôpital soit délesté plutôt qu'un particulier. Il faudrait prendre en compte cette réalité dans le critère de robustesse. On pourrait considérer que la marge de puissance d'une source qui dessert un hôpital doit être plus importante que les marges de puissances des autres sources en introduisant des poids par exemple. On pourrait également privilégier les configurations pour lesquelles un hôpital et une caserne de pompiers ne sont pas desservis par la même source.

### **3. «*Atteignabilité*» de la configuration du réseau de distribution d'électricité**

Les travaux présentés dans ce mémoire permettent de construire des configurations robustes des réseaux de distribution d'électricité. Pour appliquer ces configurations sur le terrain, cela nécessite de trouver une suite valide de manœuvres sur les interrupteurs pour passer de la configuration courante à la configuration robuste. En pratique il faut que la suite de manœuvres sur les interrupteurs ne transgresse pas de contraintes électrotechniques pour être valide. L'«*atteignabilité*» de la configuration robuste par une suite valide de manœuvres sur les interrupteurs depuis une configuration initiale n'a pas été prise en compte dans ce mémoire. Elle constitue une perspective intéressante de travail.

#### 4. Approche multicritère pour la configuration robuste du réseau de distribution d'électricité

L'approche proposée dans la partie III propose de construire des configurations robustes du réseau de distribution d'électricité. L'adjectif «robuste» fait ici référence à la capacité du réseau à garantir le service aux usagers malgré les perturbations. Le problème de configuration classique (sans perturbation) consiste à construire la configuration qui minimise les pertes Joule. Étant donné le contexte incertain, nous avons privilégié le non-délestage devant les pertes Joule, mais la résolution du problème de robustesse pose des questions intéressantes : «une solution robuste est-elle une solution dont les pertes Joule sont faibles?», «est-il possible de faire un compromis entre robustesse et pertes Joule?», «comment?».

Répondre à ces questions conduira à développer une approche multicritère.

#### 5. Approche lexicographique pour les marges de puissance des différentes sources

Dans le chapitre 7 de ce mémoire, nous avons proposé une méthode pour maximiser la marge minimale de délestage.

Considérons maintenant un réseau composé de trois sources avec des capacités nominales identiques. Nous supposons que les charges de référence sont unitaires. En pratique, la méthode proposée peut très bien construire une configuration avec des marges de puissance pour chacune des sources rangées dans  $M_1 = \{40\%, 40\%, 60\%\}$  ( $M_1(j)$  est la marge de puissance de la source  $j$ ). La marge minimale de délestage est donc de 40% pour cette configuration. Imaginons maintenant qu'une autre configuration existe avec des marges de puissance rangées dans  $M_2 = \{40\%, 50\%, 50\%\}$ . Pour cette deuxième configuration, la marge minimale de délestage est identique à celle offerte par la première configuration. Cependant la marge de robustesse de la deuxième source offrant la plus mauvaise marge de robustesse est meilleure : en ce sens, la deuxième configuration est préférable.

Il serait intéressant de considérer les marges de puissance dans leur globalité, et construire une méthode capable de proposer une configuration qui maximise la marge minimale de délestage puis la marge de puissance de la deuxième source, puis de la troisième source etc. Dans la littérature anglo-saxonne, on parle de *lexicographic max-min optimization* (Ogryczak et Śliwiński, 2007) ou de *max-min fairness* (Bashllari et al., 2007) pour identifier ce type de problème.

## Perspectives générales

### 1. Prise en compte des perturbations sur la structure du système de production

Dans les deux systèmes de production que nous avons étudiés, une hypothèse forte est faite que la structure du système est exempte de défaillances. Dans le cas de l'atelier de machines parallèles multifonctions, cela revient à supposer que les machines sont toujours disponibles et

---

dans le cas du réseau de distribution d'électricité cela revient à supposer que les lignes électriques et les interrupteurs sont toujours fonctionnels.

Évidemment la prise en compte de l'incertain ne peut pas se résumer aux perturbations externes (incertitudes sur la demande, sur la charge des usagers et la capacité des sources) il faut également prendre en compte les sources internes de perturbations (pannes de machine, ruptures de ligne, pertes de fonctionnalité d'un interrupteur).

Dans le cas de l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions, les outils présentés dans ce mémoire permettent de mesurer l'impact de la panne d'une machine sur la capacité de la configuration à assurer l'équilibre de la charge ou un temps de traitement prédéfini. Mais il convient de se poser la question de la pertinence de ces deux critères dans un tel cas. La garantie d'un temps de traitement prédéfini semble le critère plus pertinent ici.

Pour prendre en compte le risque de pannes on pourrait imaginer qu'une configuration doit garantir un temps de traitement prédéfini malgré la perte d'une machine. Si  $m$  est le nombre de machines, on pourrait appeler ce critère, le niveau de sécurité  $m - 1$ . On pourrait généraliser ce critère à la perte de  $p$  machines (niveau de sécurité  $m - p$ ).

Dans le cas du réseau de distribution d'électricité, la rupture d'une ligne dans une configuration donnée engendre irrémédiablement la perte du service pour quelques usagers. L'urgence ici est de desservir à nouveau le plus rapidement possible les usagers ayant subi la perte du service. Du point de vue de l'opérateur, cette reconfiguration doit être la moins onéreuse possible. Le coût de la reconfiguration pourrait être évalué par exemple par le coût des manœuvres sur les interrupteurs pondérés par un poids qui représenterait par exemple la distance entre le lieu d'intervention et le centre de maintenance. Pour prendre en compte la rupture de lignes de manière proactive, il faudrait proposer des configurations capables de subir facilement des manœuvres sur les interrupteurs quitte à accepter des dégradations de performances (des pertes Joule par exemple) lors de l'occurrence d'une rupture de lignes pour desservir les usagers délestés. L'adverbe «facilement» signifiant ici «de manière peu coûteuse».

## 2. Stabilité de la configuration

Les méthodes de résolution présentées dans ce mémoire sont des méthodes purement proactives et donc hors ligne. Les configurations proposées par ces méthodes garantissent des performances sur un ensemble d'instances valables sur une période particulière (un mois par exemple pour un atelier de photolithographie). Il serait intéressant de considérer le problème de stabilité de la configuration période par période : c'est-à-dire, maîtriser les coûts de reconfiguration lorsque le problème de configuration robuste sur plusieurs périodes successives est considérée.

## 3. Aspect dynamique de la reconfiguration

Les méthodes de résolution présentées dans ce mémoire sont des méthodes purement proactives alors que le processus complet de résolution des problèmes sous incertitudes présenté dans la partie I préconise également le développement d'une approche réactive en ligne en utilisant

l'information disponible sur la réalité. Les deux systèmes de production que nous avons considérés ont la particularité d'être des systèmes intrinsèquement flexibles même si la reconfiguration a un coût.

Dans le cas de l'atelier de machines parallèles partiellement multifonctions notre méthode proactive construit des configurations robustes sur un ensemble donné d'instances. En pratique que se passe-t-il si l'instance réelle ne fait pas partie de cet ensemble et que l'équilibre de la charge n'est plus garanti? Il faudra reconfigurer l'atelier pour garantir à nouveau cette performance. Comment proposer en temps réel une reconfiguration qui permet de garantir à nouveau l'équilibre de la charge et dont le coût reste raisonnable? On pourrait imaginer que cet aspect soit pris en compte dès la phase proactive en proposant des configurations à la fois robustes et flexibles : *i.e.* capables de supporter facilement une reconfiguration quitte à dégrader les performances. L'adverbe «facilement» fait ici référence au coût de reconfiguration (coûts de déqualification + coûts de qualification). Évidemment ces remarques restent valables pour la performance du temps de traitement prédéfini.

Dans le cas du réseau de distribution d'électricité, le même constat peut être fait. En pratique que se passe-t-il si la capacité nominale d'une source évolue (dû à un changement de configuration du réseau de transport par exemple)? La marge de délestage n'est plus la même et on peut être amené à reconfigurer le réseau pour garantir à nouveau la marge de délestage.

# Bibliographie

- Ahuja, R., Magnanti, T., et Orlin, J. (1993). *Network Flows : Theory, Algorithms, and Applications*. Prentice Hall, New Jersey. 95
- Allahverdi, A., Cheng, T., et Kovalyov, M. (2006). A survey of scheduling problems with setup times or costs. *European Journal of Operational Research*, in press, doi :10.1016/j.ejor.2006.06.060. 47
- Allahverdi, A., Gupta, J., et Aldowaisan, T. (1999). A review of scheduling research involving setup considerations. *OMEGA-The International Journal of Management Science*, 27 :219–239. 47
- Aloulou, M., Kalai, R., et Vanderpooten, D. (2005). Une nouvelle approche de robustesse :  $\alpha$ -robustesse lexicographique. *Bulletin du Groupe de Travail Européen Aide Multicritère à la Décision*, Series 3(12). 32, 41
- Aoki, K., Kuwabara, H., Satoh, T., et Kanezashi, M. (1988). An efficient algorithm for load balancing of transformers and feeders by switch operation in large scale distribution systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 3(4) :1865–1872. 103
- Aubry, A. (2004). étude de la configuration d'un parc de machines parallèles dans l'industrie des semi-conducteurs. Technical report, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, France. 73
- Aubry, A., Espinouse, M.-L., et Jacomino, M. (2006a). Robust load-balanced configuration with fixed costs for the parallel multi-purpose machines problem. In *IEEE Conference Proceedings of the 2006 International Conference on Services Systems and Services Management (ICSSSM'06)*, volume 2, pages 990–995, Troyes, France. 41
- Aubry, A., Espinouse, M.-L., et Jacomino, M. (2007a). Configuration d'un réseau de distribution d'électricité en contexte incertain. In *Proceedings of the Conférence Conjointe en Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision FRANCORO V / ROADEF'07*, pages 9–19, Grenoble, France. 41
- Aubry, A., Espinouse, M.-L., et Jacomino, M. (2007b). A max-min approach to delay load-shedding in power distribution networks despite source-capacity uncertainties. In *Proceedings of the International Network Optimization Conference 2007 (INOC'07)*, Spa, Belgium. 41
- Aubry, A., Espinouse, M.-L., Jacomino, M., et Mrozicki, P. (2005a). Compromis entre robustesse et coût pour la configuration d'un parc de machines parallèles partiellement multifonctions. In *Proceedings of the 3ème MANifestation des JEunes Chercheurs francophones dans le domaine des STIC, MAJECSTIC'05*, pages 331–338, Rennes, France. 41

- Aubry, A., Espinouse, M.-L., Jacomino, M., et Raison, B. (2006b). About configuration under uncertainty of a power distribution network. In *Proceedings of the 12th IFAC International Symposium on INFORMATION CONTROL problems in Manufacturing (IFAC-INCOM'06)*, volume 2, pages 990–995, Saint-Étienne, France. 41
- Aubry, A., Espinouse, M.-L., Jacomino, M., et Rossi, A. (2005b). Minimisation des coûts liés à la configuration robuste d'un parc de machines polyvalentes. In *6ème congrès de la société Française de Recherche Opérationnelle et d'Aide à la Décision, ROADEF'05*, pages 68–69, Tours. 41
- Aubry, A., Rossi, A., Espinouse, M.-L., et Jacomino, M. (2006c). Minimizing setup costs for parallel multi-purpose machines under load-balancing constraint. *European Journal of Operational Research*, in press, doi :10.1016/j.ejor.2006.05.050. 51, 55
- Avella, P., Villacci, D., et Sforza, A. (2005). A steiner arborescence model for the feeder re-configuration in electric distribution networks. *European Journal of Operational Research*, 164 :505–509. 102
- Baran, M. et Wu, F. (1989). Network reconfiguration in distribution systems for loss reduction and load balancing. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 4(2) :1401–1407. 103
- Bashllari, A., Nace, D., Gourdin, E., et Klopfenstein, O. (2007). The MMF rerouting computation problem. In *Proceedings of the International Network Optimization Conference 2007 (INOC'07)*, Spa, Belgium. 128
- Batrinu, F., Carpaneto, E., et Chicco, G. (2005). A unified scheme for testing alternative techniques for distribution system minimum loss reconfiguration. In *Proceedings of the International Conference on Future Power Systems 2005*. 103
- Billaut, J.-C., Moukrim, A., et Sanlaville, E. (2005). *Flexibilité et Robustesse en Ordonnancement*. Hermès Science, Paris, France. 15, 27, 29, 31, 39, 40, 45, 125
- Blazewicz, J., Ecker, K., Pesch, E., Schmidt, G., et Weglarz, J. (1996). *Scheduling Computer and Manufacturing Processes*. Springer-Verlag, Berlin, Germany. 50
- Borozan, V. et Rajakovic, N. (1997). Application assessments of distribution network minimum loss reconfiguration. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12(4) :1786–1792. 103
- Borozan, V., Rajicic, D., et Ackovski, R. (1995). Improved method for loss minimization in distribution networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, 10(3) :1420–1425. 103
- Borozan, V., Rajicic, D., et Ackovski, R. (1997). Minimum loss reconfiguration of unbalanced distribution networks. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 12(1) :435–442. 103
- Bourgade, V. (1998). *Sur l'Ordonnancement d'Ateliers en Ligne en Environnement Incertain et Imprécis*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France. 30
- Broadwater, R., Khan, A., Shaalan, H., et Lee, R. (1993). Time varying load analysis to reduce distribution losses through reconfiguration. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 8(1) :294–300. 103

- 
- Brucker, P., Jurisch, B., et Krämer, A. (1997). Complexity of scheduling problems with multi-purpose machines. *Annals of Operational Research*, 70 :57–73. 45, 46
- Chen, C. et Cho, M. (1992). Determination of critical switches in distribution system. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 7(4) :1443–1449. 103
- Chen, C. et Cho, M. (1993). Energy loss reduction by critical switches. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 8(3) :1246–1253. 103
- Chiang, H. et Jumeau, R. (1990a). Optimal network reconfigurations in distribution systems. I. A new formulation and a solution methodology. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 5(4) :1902–1909. 103
- Chiang, H. et Jumeau, R. (1990b). Optimal network reconfigurations in distribution systems. II. Solution algorithms and numerical results. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 5(3) :1568–1574. 103
- Cho, G. et Shaw, D. (1997). A depth-first dynamic programming procedure for the tree knapsack problem. *INFORMS Journal on Computing*, 9(4) :431–438. 110
- Civanlar, S., Grainger, J., Yin, H., et Lee, S. (1988). Distribution feeder reconfiguration for loss reduction. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 3(3) :1217–1223. 103
- Crappe, M. (2003). *Stabilité et Sauvegarde des Réseaux Électriques*. Hermès Sciences, Paris, France. 93
- Ćurčić, S., Özveren, C., Crowe, L., et Lo, P. (1996). Electric power distribution network restoration : A survey of papers and a review of the restoration problem. *Electric Power Systems Research*, 35 :73–86. 103
- Dauzère-Pérès, S., Castagliola, P., et Lahlou, C. (2005). *Flexibilité et Robustesse en Ordonnement*, chapter 5. Hermès Science, Paris, France. 29
- de Werra, D. (1990). *Éléments de Programmation Linéaire avec Applications aux Graphes*. Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, Swiss. 56, 58
- Duan, G. et Yu, Y. (2003). Power distribution system optimization by an algorithm for capacitated steiner tree problems with complex-flows and arbitrary cost functions. *Electrical Power and Energy Systems*, 25 :515–523. 102, 103
- Duque, O. et Murinigo, D. (2006). Load restoration in electric distribution networks using a metaheuristic technique. In *IEEE Conference Proceedings of the IEEE MELECON 2006*, pages 1040–1043, Spain. 103
- Fan, J.-Y., Zhang, L., et McDonald, J. (1996). Distribution network reconfiguration : Single loop optimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(3) :1643–1647. 103
- Galand, L. et Spanjaard, O. (2007). Deux approches complémentaires pour un problème d'arbre couvrant robuste. In *Proceedings of the Conférence Conjointe en Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision FRANCORO V / ROADEF'07*, pages 129–137, Grenoble, France. 33, 34, 41

- Garcia, V. et França, P. (2007). Multiobjective service restoration in electric distribution networks using a local search based heuristic. *European Journal of Operational Research, in press*, doi :10.1016/j.ejor.2006.07.048. 103
- Garey, M. et Johnson, D. (1979). *Computers and Intractability : a Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company, New York, United States of America. 51, 99, 109, 112
- Glamocanin, V. (1990). Optimal loss reduction of distributed networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, 5(3) :774–782. 103
- Golub, G. et Loan, C. V. (1989). *Matrix Computation - Second Edition*. The John Hopkins University Press, Baltimore, USA. 83, 85
- Gomes, F., Carneiro, S., Pereira, J., Vinagre, M., Garcia, P., et de Araujo, L. (2006). A new distribution system reconfiguration approach using optimum power flow and sensitivity analysis for loss reduction. *IEEE Transactions on Power Systems*, 21(4) :1616–1623. 103
- Goswami, K. et Basu, S. (1992). A new algorithm for the reconfiguration of distribution feeders for loss minimization. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 7(3) :1484–1491. 103
- Graham, R., Lawler, E., Lenstra, J., et Kan, A. R. (1979). Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling : a survey. *Annals of Discrete Mathematics*, 5 :287–326. 50
- Ha, D., Ploix, S., Zamaï, E., et Jacomino, M. (2005). Control of energy consumption in home automation by ressource constraint scheduling. In *Proceedings of the 15th International Conference on Control System and ComputerScience*, Bucharest, Romania. 123
- Ha, D., Ploix, S., Zamaï, E., et Jacomino, M. (2006a). A home automation system to improve the household energy control. In *Proceedings of the 12th IFAC International Symposium on Information Control problems in Manufacturing (IFAC-INCOM'06)*, Saint-Étienne, France. 123
- Ha, D., Ploix, S., Zamaï, E., et Jacomino, M. (2006b). Tabu search for the optimization of household energy consumption. In *IEEE Conference Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Information Reuse and Integration, IEEE IRI 2006*, Hawaii, USA. 123
- Hayashi, Y. et Matsuki, J. (2004). Loss minimum configuration of distribution system considering n-1 security of dispersed generators. *IEEE Transactions on Power Systems*, 19(1) :636–642. 103
- Hitchcock, F. (1941). The distribution of a product from several sources to numerous localities. *Journal of Mathematics and Physics*, 20 :224–230. 56
- Hsu, T.-S., Tsai, K.-H., Wang, D.-W., et Lee, D. (2005). Two variations of the minimum steiner problem. *Journal of Combinatorial Optimization*, 9 :101–120. 99
- Hsu, Y., Yi, J., Liu, S., Chen, Y., Feng, H., et Lee, Y. (1993). Transformer and feeder load balancing using a heuristic search approach. *IEEE Transaction on Power Systems*, 8(1) :184–190. 103

- 
- Jaswanti et Thakur, T. (2006). Minimum loss configuration of power distribution system. In *IEEE Proceedings of the International Conference on Power Electronics, Drives and Energy Systems (PEDES'06)*, pages 1–6. 103
- Jeon, Y., Kim, J.-C., Kim, J., Shin, J., et Lee, K. (2002). An efficient simulated annealing algorithm for network reconfiguration in large-scale distribution systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 17(4) :1070–1078. 103
- Jeon, Y.-J. et Kim, J.-C. (2000). Network reconfiguration in radial distribution system using simulated annealing and tabu search. In *IEEE Conference Proceedings of the Power Engineering Society Winter Meeting 2000*, volume 4, pages 2329–2333. 103
- Jeon, Y.-J. et Kim, J.-C. (2004). Application of simulated annealing and tabu search for loss minimization in distribution systems. *Electrical Power and Energy Systems*, 26 :9–18. 103
- Jiang, D. et Baldick, R. (1996). Optimal electric distribution system switch reconfiguration and capacitor control. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(2) :890–897. 103
- Johnson, D. et Niemi, K. (1983). On knapsacks, partitions and a new dynamic programming technique for trees. *Mathematics of Operations Research*, 8 :1–14. 110
- Johnzén, C., Dauzère-Pérès, S., et Vialletelle, P. (2007). Flexibility measures for machine qualification management. In *Conférence Conjointe en Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision FRANCORO V / ROADEF'07*, pages 249–250, Grenoble, France. 49
- Jung, K., Kim, H., et Ko, Y. (1993). Network reconfiguration algorithm for automated distribution systems based on artificial intelligence approach. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 8(4) :1933–1941. 103
- Kalaï, R. (2006). *Une Nouvelle Approche de Robustesse : Application à Quelques Problèmes d'Optimisation*. PhD thesis, Université Paris Dauphine, Paris. 35, 41
- Kalaï, R., Aloulou, M., Vallin, P., et Vanderpooten, D. (2005). Robust 1-median location problem on a tree. In *Proceedings of the ORP3 (Euro Conference for Young Researchers and Practitioners)*, Valencia, Spain. 41
- Kalaï, R. et Lamboray, C. (2007).  $L'$  $\alpha$ -robustesse lexicographique : une relaxation de la  $\beta$ -robustesse. *Annales du LAMSADE n°7*, Paris, France. 34, 35, 41
- Kalaï, R. et Vanderpooten, D. (2006). Lexicographic  $\alpha$ -robust knapsack problem : Complexity results. In *IEEE Conference Proceedings of the 2006 International Conference On Services Systems and Services Management (ICSSSM'06)*, volume 2, pages 1103–1107, Troyes, France. 35, 41
- Kasana, H. et Kumar, K. (2004). *Introductory Operations Research : Theory and Applications*. Springer-Verlag, Berlin, Germany. 57
- Kashem, M., Ganapathy, V., Jasmon, G., et Buhari, M. (2000a). A novel method for loss minimization in distribution networks. In *IEEE Conference Proceedings of the International Conference on Electric Utility Deregulation and Restructuring and Power Technologies*, pages 251–256, London. 103

- Kashem, M., Jasmon, G., et Ganapathy, V. (2000b). A new approach of distribution system reconfiguration for loss minimization. *Electrical Power and Energy Systems*, 22 :269–276. 103
- Kim, H., Ko, Y., et Jung, K.-H. (1993). Artificial neural-network based feeder reconfiguration for loss reduction in distribution systems. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 8(3) :1356–1366. 103
- King, R. A., Radha, B., et Rughooputh, H. (2003). A real-parameter genetic algorithm for optimal network reconfiguration. In *IEEE Conference Proceedings of the International Conference on Industrial Technology (ICIT'03)*, volume 1, pages 54–59, Maribor, Slovenia. 103
- Kouvelis, P., Kurawarwala, A., et Gutiérrez, G. (1992). Algorithms for robust single and multiple period layout planning for manufacturing systems. *European Journal of Operational Research*, 63 :287–303. 34, 41
- Kouvelis, P. et Yu, G. (1997). *Robust Discrete Optimization and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands. 27, 29, 32, 33, 41
- Lawler, E. et Labetoulle, J. (1978). On preemptive scheduling of unrelated parallel processors by linear programming. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 25 :612–619. 82
- Lin, W. et Chin, H. (1998). A new approach for distribution feeder reconfiguration for loss reduction and service restoration. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 13(3) :870–875. 103
- Liu, C., Lee, S., et Venkata, S. (1988). An expert system operational aid restoration and loss reduction of distribution systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 3(2) :619–626. 103
- Liu, C., Lee, S., et Vu, K. (1989). Loss minimization of distribution feeders : Optimality and algorithms. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 4(2) :1281–1289. 103
- Lu, W., Bésanger, Y., Zamaï, E., et Radu, D. (2006a). Analysis of large scale blackouts and recommendations for prevention. *WSEAS Transactions on Power Systems*, 1. 123
- Lu, W., Bésanger, Y., Zamaï, E., et Radu, D. (2006b). Blackout : Description, analysis and classification. In *6th WSEAS Int. Conference on POWER SYSTEMS, PE'06*, Lisbon, Portugal. 123
- Mahjoub, A., Moukrim, A., et Sanlaville, E. (2005). *Flexibilité et Robustesse en Ordonnancement*, chapter 4. Hermès Science, Paris, France. 32
- Makhorin, A. (2004). GNU Linear Programming Kit. Available on [www.gnu.org/software/glpk/glpk.html](http://www.gnu.org/software/glpk/glpk.html). 121
- McDermott, T., Drezga, I., et Broadwater, R. (1999). A heuristic nonlinear constructive method for distribution system reconfiguration. *IEEE Transactions on Power Systems*, 14(2) :478–483. 103
- Merlin, A. et Back, H. (1975). Search for a minimum-loss operating spanning tree configuration for an urban power distribution system. In *Proceedings of the Fifth Power System Computation Conference (PSCC)*, pages 1–18, Cambridge, United Kingdom. 102

- 
- Miwa, T., Nishihara, N., et Yamamoto, K. (2005). Automated stepper load balance allocation system. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 18 :510–516. 49
- Mori, H. et Ogita, Y. (2000). A parallel tabu search based method for reconfigurations of distribution systems. In *IEEE Conference Proceedings of the Power Engineering Society Summer Meeting 2000*, volume 1, pages 73–78. 103
- Morton, A. et Mareels, I. (2000). An efficient brute-force solution to the network reconfiguration problem. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 15(3) :996–1000. 103
- Moussa, A., El-Gammal, M., Abdallah, E., et Attia, A. (2004). A genetic based algorithm for loss reduction in distribution systems. In *Proceedings of the International Conference on Future Vision and Challenges for Urban Development*, Cairo, Egypt. 103
- Muramatsu, M. et Tsuchiya, T. (1996). An affine scaling method with an infeasible starting point : Convergence analysis under nondegeneracy assumption. *Annals of Operations Research*, 62 :325–355. 58
- Nara, K., Mishima, Y., Gjyo, A., Ito, T., et Kaneda, H. (2002). Loss minimum re-configuration of distribution system by tabu search. In *IEEE Conference Proceedings of the IEEE/PES Transmission and Distribution Conference and Exhibition 2002 : Asia Pacific*, volume 1, pages 232–236. 103
- Nara, K., Mishima, Y., et Satoh, T. (2003). Network reconfiguration for loss minimization and load balancing. In *IEEE Conference Proceedings of the IEEE Power Engineering Society General Meeting 2003*, volume 4, pages 2413–2418. 102
- Nara, K., Schiose, A., Kitagawa, M., et Ishihara, T. (1992). Implementation of genetic algorithm for distribution systems loss minimum re-configuration. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(3) :1044–1051. 103
- Nourine, L. et Raynaud, O. (1999). A fast algorithm for building lattices. *Information Processing Letters*, 71 :199–204. 66, 69, 73
- Ogryczack, W. et Śliwiński, T. (2007). Lexicographic max-min optimization for efficient and fair bandwidth allocation. In *Proceedings of the International Network Optimization Conference 2007 (INOC'07)*, Spa, Belgium. 128
- Peponis, G., Papadopoulos, M., et Hatziargyriou, N. (1995). Distribution network reconfiguration to minimize resistive line losses. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 10(3) :1332–1342. 103
- Perny, P. et Spanjaard, O. (2003). An axiomatic approach to robustness in search problems with multiple scenarios. In *Proceedings of the 19th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pages 469–476, Mexico. 41
- Perny, P. et Spanjaard, O. (2006). A decision-theoretic approach to robust optimization in multivalued graph. *Annals of Operations Research*, 147 :317–341. 41
- Prasad, K., Ranjan, R., Sahoo, N., et Chaturvedi, A. (2005). Optimal reconfiguration of radial distribution systems using a fuzzy mutated genetic algorithm. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 20(2) :1211–1213. 103

- Ramos, E., Expósito, A., Santos, J., et Iborra, F. (2005). Path-based distribution network modeling : Application to reconfiguration for loss reduction. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(2) :556–564. 103
- Rossi, A. (2003). *Ordonnancement en Milieu Incertain, Mise en Œuvre d'une Démarche Robuste*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, France. 34, 41, 45, 65, 66, 67, 69, 125
- Rossi, A. (2007). Preuve de complexité pour une variante du problème de transport. In *Conférence Conjointe en Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision FRANCORO V / ROA-DEF'07*, pages 381–382, Grenoble, France. 89
- Rossi, A., Jacomino, M., et Espinouse, M.-L. (2004). étude de robustesse : Configuration d'un parc de machines partiellement multifonctions. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 34 :373–395. 41, 49
- Rossi, A., Jacomino, M., et Espinouse, M.-L. (2005). *Flexibilité et Robustesse en Ordonnancement*, chapter 3. Hermès Science, Paris, France. 41
- Roy, B. (2002). Robustesse de quoi et vis-à-vis de quoi mais aussi robustesse pourquoi en aide à la décision. *Bulletin du Groupe de Travail Européen Aide Multicritère à la Décision*, Series 3(6). 29
- Roy, B. (2005). *Flexibilité et Robustesse en Ordonnancement*, chapter 2. Hermès Science, Paris, France. 28
- Roytelman, I., Melnick, V., Lee, S., et Lugtu, R. (1996). Multi-objective feeder reconfiguration by distribution management system. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(2) :661–667. 103
- Rudnick, H., Harnisch, I., et Sanhueza, R. (1997). Reconfiguration of electric distribution systems. *Revista Facultad de Ingenieria*, 4 :41–48. 103
- Sárfi, R., Salama, M., et Chikhani, A. (1996). Distribution system reconfiguration for loss reduction : An algorithm based on network partitioning theory. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(1) :504–510. 103
- Sarma, N. et Rao, K. P. (1995). A new 0-1 integer programming method of feeder reconfiguration for loss minimization in distribution systems. *Electric Power Systems Research*, 33 :125–131. 103
- Schmidt, H., Ida, N., Kagan, N., et Guaraldo, J. (2005). Fast reconfiguration of distribution systems considering loss minimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(3) :1311–1319. 103
- Schrijver, A. (1998). *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley Interscience, Chichester, England. 58
- Shaw, D. et Cho, G. (1998). The critical-item, upper bounds, and a branch-and-bound algorithm for the tree knapsack problem. *Networks*, 31 :205–216. 110

- 
- Shin, D.-J., Kim, J.-O., Kim, T.-K., Choo, J.-B., et Singh, C. (2004). Optimal service restoration and reconfiguration of network using genetic-tabu algorithm. *Electric Power Systems Research*, 71 :145–152. 103
- Shirmohammadi, D. et Hong, H. (1989). Reconfiguration of electric distribution networks for resistive line losses reduction. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 4(2) :1492–1498. 103
- Snyder, L. (2006). Facility location under uncertainty : A review. *IIE Transactions*, 38(7) :547–564. 34, 41
- Sotskov, Y., Wagelmans, A., et Werner, F. (1998). On the calculation of the stability radius of an optimal or an approximate schedule. *Annals of Operations Research*, 83 :213–252. 32, 66
- Su, C.-T., Chang, C.-F., et Chiou, J.-P. (2005). Distribution network reconfiguration for loss reduction by ant colony search algorithm. *Electric Power Systems Research*, 75 :190–199. 103
- Taleski, R. et Rajicic, D. (1997). Distribution network reconfiguration for energy loss reduction. *IEEE transactions on Power Systems*, 12(1) :398–406. 103
- Taylor, T. et Lubkerman, D. (1990). Implementation of heuristic search strategies for distribution feeder reconfiguration. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 5(1) :239–246. 103
- Thakur, T. et Jaswanti (2006). Study and characterization of power distribution network reconfiguration. In *IEEE Conference Proceedings of the Transmission and Distribution Conference and Exposition (TDC'06)*, Latin America. 98
- T'Kindt, V. et Billaut, J.-C. (2002). *Multicriteria Scheduling : Theory, Models and Algorithms*. Springer-Verlag, Berlin, Germany. 50, 70
- Vaik, Z. (2005). On scheduling problems with multi-purpose machines. Technical report, Egerváry Research Group on Combinatorial Optimization, Hungary. 45, 46
- van der Merwe, D. et Hattingh, J. (2006). Tree knapsack approaches for local access network design. *European Journal of Operational Research*, 174 :1969–1978. 110
- Wagner, T., Chikhani, A., et Hackam, R. (1991). Feeder reconfiguration for loss reduction : An application of distribution automation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 6(4) :1922–1933. 103
- Wang, C.-R. et Zhang, Y.-E. (Dalian). Distribution network reconfiguration based on modified particle swarm optimization algorithm. In *IEEE Conference Proceedings of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*, pages 2076–2080, Dalian, China. 103
- Wang, J., Chiang, H., et Darling, G. (1996). An efficient algorithm for real-time network reconfiguration in large scale unbalanced distribution systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(1) :511–517. 103
- Wu, J., Tomsovic, K., et Chen, C. (1991). A heuristic search approach to feeder switching operations for overload, faults, unbalanced flow and maintenance. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 6(4) :1579–1586. 103

- 
- You, B. et Yamada, T. (2007). A pegging approach to the precedence-constrained knapsack problem. *European Journal of Operational Research*, 183 :618–632. 110
- Zhang, D., Fu, Z., et Zhang, L. (2007). An improved TS algorithm for loss-minimum reconfiguration in large-scale distribution systems. *Electric Power Systems Research*, 77 :685–694. 103
- Zhou, Q., Shirmohammadi, D., et Liu, W. (1997). Distribution feeder reconfiguration for operation cost reduction. *IEEE Transactions on Power Systems*, 12(2) :730–735. 103
- Zhu, J. (2002). Optimal reconfiguration of electrical distribution network using the refined genetic algorithm. *Electric Power Systems Research*, 62 :37–42. 103

# Table des figures

1.1	Entrées/Sorties d'un système de production avec sa structure interne. . . . .	22
1.2	Vision automatique de l'approche prédictive . . . . .	24
2.1	Système de production et sources de perturbations. . . . .	28
2.2	Vision automatique du processus complet de résolution . . . . .	40
3.1	Décomposition du problème statique en sous problèmes . . . . .	50
3.2	Exemple de voisinage $\mathcal{P}$ dans le cas $n = 2$ types de produit . . . . .	60
4.1	Exemple de voisinage $\mathcal{P}_\rho$ dans le cas $n = 2$ types de produit et $\rho = 4$ . . . . .	67
6.1	Filière énergétique : de la production de l'énergie électrique à sa distribution vers l'utilisateur . . . . .	94
6.2	Un réseau de distribution d'électricité. . . . .	95
6.3	Modélisation par un graphe orienté du réseau de la figure 6.2. . . . .	96
6.4	Une configuration admissible . . . . .	98
7.1	Une configuration admissible . . . . .	109
7.2	Matrice $\mathcal{H}$ de $CMDM$ réduit et le réseau correspondant lorsqu'il n'y a que trois sources . . . . .	113
7.3	Une configuration admissible . . . . .	120



# Liste des tableaux

2.1	Instances du problèmes $1//\sum C_j$ . . . . .	36
2.2	Solutions optimales et valeurs associées pour les différentes instances de $1//\sum C_j$ . . . . .	36
2.3	Performances des solutions sur les différentes instances du problème . . . . .	36
2.4	Valeurs des déviations pour chacune des instances et chacune des solutions . . . . .	37
2.5	Évaluation des critères de robustesse sur les différentes solutions . . . . .	37
2.6	Performances de la solution $\tilde{\mathcal{S}}$ . . . . .	37
2.7	Vecteur de désutilité pour les solutions $\mathcal{S}_1^*$ , $\mathcal{S}_2^*$ , $\mathcal{S}_3^*$ , $\tilde{\mathcal{S}}$ ainsi que la solution idéale fictive $\mathcal{S}^*$ . . . . .	38
2.8	Écart entre les vecteurs de désutilité des solutions et le vecteur de désutilité de la solution idéale fictive . . . . .	38
2.9	Solutions robustes suivant les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ . . . . .	39
2.10	Comparaison des différentes approches de robustesse et bibliographie associée . . . . .	41
3.1	Performance garantie par la relaxation suivant l'ordre de grandeur de $n$ par rapport à $m$ . . . . .	58
4.1	Liens entre coût et robustesse . . . . .	71
4.2	Caractéristiques des exemples . . . . .	77
4.3	Optimalité et tolérance minimale . . . . .	77
4.4	Qualité des solutions . . . . .	78
6.1	Méthodes utilisées dans la littérature électrotechnique pour minimiser les pertes Joule et leur année de publication . . . . .	103
7.1	Caractéristiques des réseaux testés . . . . .	121
7.2	Résultats pour les différentes méthodes . . . . .	122



# Liste des Algorithmes

1	Algorithme de recherche de la garantie de performance offerte par une configuration dans le cas où l'ensemble des demandes est explicite et fini . . . . .	64
2	Algorithme de recherche d'une configuration robuste pour $\mathcal{P}_\rho$ fixé . . . . .	69
3	Algorithme de recherche d'une configuration robuste pour $\mathcal{P}_{a_1, \dots, a_n}$ ( $\mathcal{I}_{ref}$ ) fixé . . . . .	88



# Annexes



## Annexe A

# Preuve des lemmes II.1 et II.2 de la partie II

Le lecteur trouvera dans cette annexe la preuve des lemmes II.1 et II.2.

### 1 Preuve du lemme II.2

Étant données une configuration admissible  $\mathcal{S}$ , une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$  et les données vitesses des machines uniformes  $V(i, j) = T(i, j) \times V_P(i) \times V_M(j)$ , le lemme II.2 dit que les machines uniformes garantissent que la charge temporelle commune aux machines est une valeur constante connue. Cette valeur est donnée par l'équation suivante :

$$TWLoad = \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)}}{\sum_{j \in \mathcal{M}} V_M(j)} \quad (\text{A.1})$$

Soit un plan de production  $R$  équilibré admissible pour  $\mathcal{S}$  qui satisfait  $\mathcal{I}_{ref}$ .  $R$  vérifie le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V_P(i) \times V_M(j) = \mathcal{I}_{ref}(i) & \forall i \in \mathcal{N} & (a) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) = TWLoad & \forall j \in \mathcal{M} & (b) \\ (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times R(i, j) = 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} & (c) \end{cases}$$

Ce système équivaut à :

$$\begin{cases} \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V_M(j) = \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)} & \forall i \in \mathcal{N} & (a) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) \times V_M(j) = V_M(j) \times TWLoad & \forall j \in \mathcal{M} & (b) \\ (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times R(i, j) = 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} & (c) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

D'après l'équation (A.2a) nous avons :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V_M(j) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)}$$

Et d'après l'équation (A.2b) nous avons :

$$\sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V_M(j) = \sum_{j \in \mathcal{M}} (V_M(j) \times TWLoad)$$

Les membres de gauche des deux dernières équations sont identiques donc nous obtenons finalement :

$$\sum_{j \in \mathcal{M}} (V_M(j) \times TWLoad) = \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)}$$

Ce qui conduit exactement à l'équation A.1.  $\square$

## 2 Preuve du lemme II.1

Étant données une configuration admissible  $\mathcal{S}$ , une demande de référence  $\mathcal{I}_{ref}$  et les données vitesses des machines uniformes  $V(i, j) = T(i, j) \times V_P(i) \times V_M(j)$ , le lemme II.1 dit que les machines uniformes garantissent que si un plan de production équilibré existe, il minimise le makespan.

D'après le lemme II.2, si un plan de production équilibré existe, le makespan est égal à :

$$TWLoad = \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)}}{\sum_{j \in \mathcal{M}} V_M(j)}$$

Nous allons montrer par l'absurde que cette valeur est aussi celle qui minimise le programme linéaire  $PL(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  défini par :

$$PL(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref}) \begin{cases} \min(C_{max}) \\ \sum_{j \in \mathcal{M}} R(i, j) \times V_P(i) \times V_M(j) = \mathcal{I}_{ref}(i) & \forall i \in \mathcal{N} \quad (a) \\ \sum_{i \in \mathcal{N}} R(i, j) \leq C_{max} & \forall j \in \mathcal{M} \quad (b) \\ (1 - \mathcal{S}(i, j)) \times R(i, j) = 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (c) \\ R(i, j) \geq 0 & \forall (i, j) \in \mathcal{N} \times \mathcal{M} \quad (d) \end{cases} \quad (A.3)$$

Supposons qu'il existe un couple  $\{R, C_{max}^*\}$  solution de  $PL(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  telle que  $C_{max}^* < TWLoad$ .

Par définition :  $C_{max}^* = \max_{k \in \mathcal{N}} \sum_{l \in \mathcal{M}} R(k, l)$ .

Ceci implique que :

$$\forall l \in \mathcal{M}, \sum_{k \in \mathcal{N}} R(k, l) < TWLoad$$

$$\stackrel{(A.1)}{\Rightarrow} \forall l \in \mathcal{M}, \sum_{k \in \mathcal{N}} R(k, l) < \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)}}{\sum_{j \in \mathcal{M}} V_M(j)}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \forall l \in \mathcal{M}, \sum_{k \in \mathcal{N}} R(k, l) \times V_M(l) < V_M(l) \times \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)}}{\sum_{j \in \mathcal{M}} V_M(j)} \\
&\Rightarrow \sum_{l \in \mathcal{M}} \sum_{k \in \mathcal{N}} (R(k, l) \times V_M(l)) < \left( \sum_{l \in \mathcal{M}} V_M(l) \right) \times \frac{\sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)}}{\sum_{j \in \mathcal{M}} V_M(j)} \\
&\Rightarrow \sum_{k \in \mathcal{N}} \sum_{l \in \mathcal{M}} (R(k, l) \times V_M(l)) < \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)} \tag{A.4}
\end{aligned}$$

D'après l'équation (A.3a), l'égalité suivante est respectée pour toute solution de  $PL(\mathcal{S}, \mathcal{I}_{ref})$  :

$$\sum_{l \in \mathcal{M}} R(k, l) \times V_M(l) = \frac{\mathcal{I}_{ref}(k)}{V_P(k)} \quad \forall k \in \mathcal{N}$$

En réinjectant cette égalité dans l'équation (A.4), nous obtenons :

$$\sum_{k \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(k)}{V_P(k)} < \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{\mathcal{I}_{ref}(i)}{V_P(i)}$$

Cette inégalité est impossible et l'hypothèse de départ est donc absurde.  $\square$





**Résumé :** Les travaux présentés dans ce mémoire apportent une contribution à la configuration des systèmes de production en contexte incertain. Les différents outils permettant d'appréhender l'incertain en optimisation sont d'abord présentés. Nous insistons plus particulièrement sur la notion de robustesse à travers l'approche utilisée dans le cadre de nos travaux. Nous présentons ensuite deux applications : la configuration d'un atelier de machines parallèles partiellement multifonctions soumis à des incertitudes sur la demande et la configuration d'un réseau de distribution d'électricité soumis à des incertitudes sur les caractéristiques de puissance. Pour chaque application, nous identifions les incertitudes prises en compte ainsi que les performances attendues. Nous proposons ensuite un critère de robustesse en adéquation avec cette problématique. Enfin des méthodes de résolution sont proposées pour appréhender les différents problèmes mis en évidence par ce critère.

**Mots clés :** Configuration, systèmes de production, optimisation, robustesse, incertitudes sur la demande.

**Abstract:** The configuration of production systems under uncertainties is considered in this thesis. First, the main tools used to handle uncertainty in optimisation are presented. The robustness notion is emphasized through our approach. Then, two applications are presented: the robust configuration of a parallel multi-purpose machines workshop under demand uncertainties and the robust configuration of a power distribution network under uncertainties on customers load and power sources capacities. For each application, the disturbances that are taken into account are identified as well as the performances to maintain despite these perturbations. Then a robustness criterion is defined to fit these applications. Finally resolution methods are designed to address the different robustness problems raised by this criterion.

**Keywords:** Configuration, production system, optimisation, robustness, demand uncertainties.