



Penser l'espace et les formes : l'apport des opérations effectuées dans l'analyse (géographie) et la production (architecture) d'espace et de formes à la définition et à la conceptualisation des notions d'espace et de forme (géométrie)

Marie-Pascale Corcuff

► **To cite this version:**

Marie-Pascale Corcuff. Penser l'espace et les formes : l'apport des opérations effectuées dans l'analyse (géographie) et la production (architecture) d'espace et de formes à la définition et à la conceptualisation des notions d'espace et de forme (géométrie). Géographie. Université Rennes 2, 2007. Français. NNT : . tel-00204573v1

HAL Id: tel-00204573

<https://theses.hal.science/tel-00204573v1>

Submitted on 15 Jan 2008 (v1), last revised 22 Jan 2008 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Rennes 2

Laboratoire Costel, UMR 6454 LETG CNRS et IFR CAREN

Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Bretagne

Equipe GRIEF

Marie-Pascale Corcuff
Penser l'espace et les formes

Thèse de doctorat en géographie

Composition du jury :

Hervé Regnauld (directeur)

professeur, Université de Rennes 2

Louis-Michel Nourry (co-directeur)

professeur, Ecole Nationale Supérieure d'architecture de Bretagne

Jean Duchesne (rapporteur)

professeur, Institut National d'Horticulture d'Angers

Anne Volvey (rapporteur)

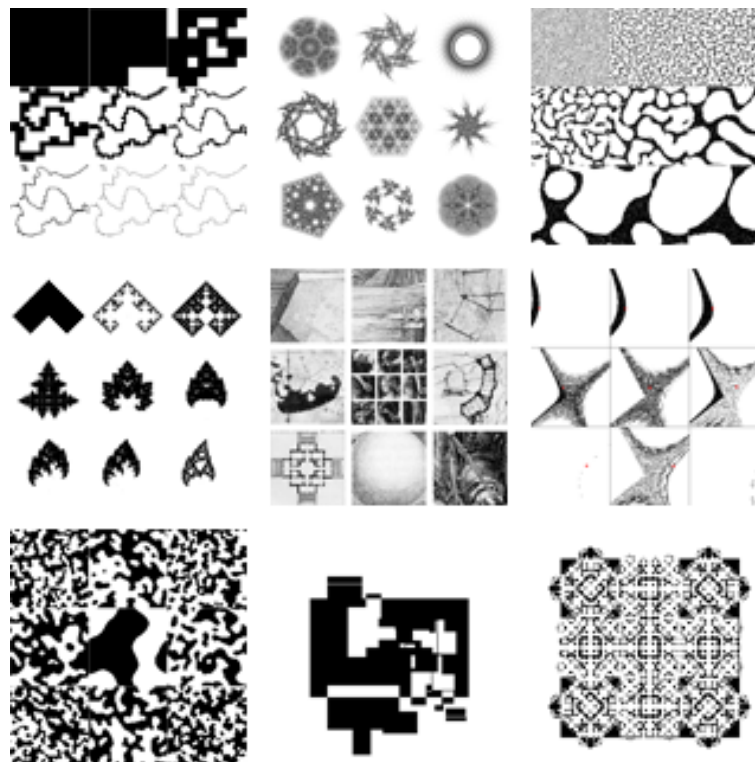
maître de conférences, Université d'Amiens

Laurence Hubert-Moy (examineur)

professeur, Université de Rennes 2

Antoine Leygonie (examineur)

maître de conférences, Université de Paris 8, architecte DPLG



*L'apport des opérations effectuées dans l'analyse (géographie)
et la production (architecture) d'espace et de formes
à la définition et à la conceptualisation
des notions d'espace et de forme (géométrie)*

Soutenance : le 26 novembre 2007 à l'Université de Rennes 2

Université de Rennes 2

Laboratoire Costel, UMR 6454 LETG CNRS et IFR CAREN

Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Bretagne

Equipe GRIEF

Thèse de doctorat en géographie

Marie-Pascale Corcuff

Penser l'espace et les formes

L'apport des opérations effectuées dans l'analyse (géographie) et la production (architecture) d'espace et de formes à la définition et à la conceptualisation des notions d'espace et de forme (géométrie)

Composition du jury :

Hervé Regnauld (directeur)

professeur, Université de Rennes 2

Louis-Michel Nourry (co-directeur)

professeur, Ecole Nationale Supérieure d'architecture de Bretagne

Jean Duchesne (rapporteur)

professeur, Institut National d'Horticulture d'Angers

Anne Volvey (rapporteur)

maître de conférences, Université d'Amiens

Laurence Hubert-Moy (examineur)

professeur, Université de Rennes 2

Antoine Leygonie (examineur)

maître de conférences, Université de Paris 8, architecte DPLG

Soutenance : le 26 novembre 2007 à l'Université de Rennes 2

Table des matières

Introduction	1
I Espace ou <i>anthropos</i>	8
I.1 Le monde perçu	9
I.1.1 L'expérience directe	9
La conscience du monde	9
La description	10
Une image du monde	11
Description et connaissances	13
Une énumération imprécise	15
Un monde perceptible par nos sens	18
I.1.2 Les sensations	19
Les cinq sens et les organes sensoriels	19
Sensations et affections	21
Rapport à l'intention	22
Stimuli et récepteurs	23
Un sixième sens ?	24
I.1.3 Les champs perceptifs	28
Les champs perceptifs entre phénomènes physiques et physiologiques	28
Champs perceptifs et langage	30
Relations entre champs perceptifs	31
Perception et effort	34
I.2 L'espace comme continu	37
I.2.1 Continu, parcours, coupure	37
Consistance ou complétude	37
Continu empirique	39
Parcours	42
Coupure	43
I.2.2 Dimension	47
Une définition par récurrence	47
Représentations	48
I.2.3 Variétés	51
Topologie	51
Fiction	53
Types de variétés	54
I.3 L'espace vécu	59
I.3.1 La matière ou l'espace haptique	59
Le parcours et le heurt ou la transparence et l'obstacle	59
Variétés et quasi-variétés	63

I.3.2 La lumière ou l'espace optique	68	Ranger, classer	107
Des surfaces sur les surfaces, et des lignes	68	II.2.3 Les projections	109
La perception des formes : la vue et le toucher	70	Le géographe, le peintre et l'architecte	109
I.3.3 La gravité ou l'espace orienté	72	Des machines à dessiner	110
La posture	72	L'ombre	112
La verticale, l'horizontale, la pente	72	La carte comme projection	113
La gauche et la droite, l'avant et l'arrière	73	II.3 Géométrie	114
Le nord, le sud, l'ouest, l'est	74	II.3.1 Mesure, échelle, proportion	114
Les mouvements	74	La ligne droite	114
Se perdre et se retrouver	75	Métrique	115
II Forme ou homo faber	76	Dénombrement et mesure	117
II.1 Topologie	77	Echelle	118
II.1.1 Formes de parcours	77	Proportion	120
Le geste et le déplacement	77	II.3.2 Manipulations, opérations, transformations	125
Le labyrinthe	77	Forme et géométrie	125
L'entrelacs	82	Formes géométriques	127
La trace du mouvement	83	Géométrisation	129
La promenade architecturale	85	Forme et transformation	130
Flux, diffusion	85	II.3.3 Vers les processus	131
II.1.2 Instauration de limites	87	Les montagnes ne sont pas des pyramides	131
Murs	87	Les formes naturelles résultent toutes d'un processus	131
Tracer les limites	89	Principe de similitude	133
Intérieur et extérieur, positif et négatif	90	Obéissance à une loi, opération et processus	135
II.1.3 Rapport à la matière	92	Des figures monstrueuses : la courbe de von Koch et le triangle de Sierpinski	136
Manipuler, transformer, fabriquer, construire	93	III Processus	141
Variétés	93	III.1 Espaces numériques	142
Découpage et assemblage	95	III.1.1 Des espaces discrets et contigus	142
Empreinte, moulage, forme et contre-forme	96	Continu et discret contigu	142
Complication des limites	97	Nombres	143
II.2 Réduction du nombre de dimensions	99	Image et bitmap	143
II.2.1 La coupe (ou section)	99	La numérisation	147
La coupe comme échantillonnage	99	III.1.2 L'espace numérique géométrique et projectif	149
Le plan comme coupe	100	Variétés	149
La carte comme coupe	101	Le calcul de la perspective	151
La coupe en géométrie	103	III.1.3 Algorithmes	155
II.2.2 Le discours	105	Instructions, variables, valeurs	155
L'art de la mémoire	105	Programme ou script	156
Production de texte et production de forme	106		

Vertige combinatoire	158
III.2 Processus de génération de formes	160
Premier interlude : une petite devinette	160
Second interlude : une carte du chaos	163
III.2.1 Systèmes de fonctions itérées (IFS)	166
Transformations contractantes et itération	166
Transformation du “mi-chemin”	168
Définition des IFS	171
IFS avec condensation	184
IFS sans et avec condensation, forme et contre-forme	188
IFS avec condensation et perspective	190
IFS et théorie du chaos	192
III.2.1 L-Systèmes	197
Contexte des L-systèmes	197
Définition des L-systèmes	197
L-systèmes et IFS	205
III.2.3 Automates cellulaires	208
Le “jeu de la vie”	208
AC linéaires	210
AC bidimensionnels	213
Mimétisme	217
AC stochastiques	219
AC dynamiques	221
III.3 De nouveaux espaces	227
III.3.1 Constitution de l’espace	227
Cartes de distances	227
Lutte pour l’espace	229
Polytopes réguliers	235
Pavage et processus	245
III.3.2 Une topologie et une géométrie augmentées	255
Mesure de la dimension : box-counting et structured walk	260
III.3.3 Thèmes et variations	263
Pli : lignes de côte, relief, silhouettes	264
Dispersion	271
Expérimentations formelles	275
Conclusion	282
Bibliographie	284
Table des illustrations	289

81 Planches sont insérées dans le cours du document.

Introduction

L'«espace» est une notion partagée par le sens commun, bien que plus particulièrement accaparée par les architectes et les géographes¹, qui s'en revendiquent spécialistes. Le sens de ce mot paraît clair à tout un chacun, comme celui du mot «temps». Le temps et l'espace constituent un couple d'évidences : le temps *passé*, des événements s'y déroulent ; les choses *se situent* dans l'espace. Cette conjonction-opposition de l'espace et du temps correspond à la dichotomie exprimée par les simples questions «où ?» et «quand ?» ; y répondre semble à la fois nécessaire et suffisant pour déterminer le cadre de nos actions. Le mot «espace» n'était sans doute pas aussi courant que des mots comme «lieu», «endroit», «emplacement», etc., qui répondent également à la question «où ?», avant que des expressions issues du jargon urbanistique («espaces verts»), législatif («espace fumeurs»), scientifique et technique («espace aérien», «espace vital»), etc., ne contaminent la langue du quotidien. On doit d'ailleurs remarquer que cette disjonction de l'espace et du temps n'est pas si claire que cela dans l'étymologie du mot «espace» : la première occurrence en français du mot «espace» signifie «laps de temps, durée»² ; cette ambiguïté subsiste dans des expressions comme «dans l'espace d'un an», «dans l'espace d'un éclair», et est déjà présente dans le sens du mot latin d'où est issu le mot espace, *spatium* : «champ de course, arène, étendue, durée».

Kant faisait de l'espace et du temps deux catégories *a priori*, et Bergson a pu dire que cette conception «diffère moins qu'on ne se l'imagine de la croyance populaire»³. Nous n'entendons pas nous opposer à ce point de vue, nous n'en avons d'ailleurs certainement pas les moyens intellectuels, mais il nous semble que puisque nous sommes du côté de ceux qui *font*, dans et avec l'espace, un point de vue plus pragmatique, peut-être plus naïf, permettait de se doter d'outils pour la compréhension et la création

¹ Nous excluons d'emblée le sens «aérospatial» de ce terme, même si bien sûr le sens du mot espace en astronomie n'est pas étranger à celui du quotidien.

² in WACE, *Chron. ascendante des ducs de Normandie*, 1160-74, éd. A. J. Holden, I, 1 (source : Centre national de Ressources Textuelles et Lexicales (<http://www.cnrtl.fr>) ; toutes nos références lexicales feront appel à ce portail)

³ Henri Bergson, *Essai sur les données immédiates de la conscience* [1927], Quadrige PUF, 1985, p. 69

des phénomènes spatiaux, des *formes* donc, et des processus qui mènent à ces formes.

Le mot «espace», tel qu'entendu par les architectes et les géographes, revêt pour eux des significations, et surtout peut-être des connotations, qui se rejoignent parfois, même si l'intronisation de ce mot dans les deux disciplines a sans doute suivi des parcours différents. Elles se rejoignent en tout cas pour opposer *espace* et *forme*, d'une manière qui peut sembler curieuse, puisque l'on est en droit de se demander ce que serait un espace sans formes (de même qu'un temps sans événements), et ce que seraient des formes qui ne seraient pas situées dans un espace. L'architecture et la géographie (si l'on peut personnifier ainsi ces deux disciplines) sont d'accord aussi en général pour opposer, ou du moins différencier fortement, «leur» espace à celui de la géométrie.

Privilégier l'espace pour les architectes cela peut tout simplement vouloir dire offrir pour le même prix des m² (et donc des m³) supplémentaires au détriment des finitions, voire du confort⁴. Cela peut aussi signifier refuser la partition traditionnelle en pièces fermées et, grâce à l'abandon des murs porteurs et au «plan libre», proposer une fluidité plus grande des déplacements et des regards. Dans un sens plus général, l'insistance sur l'espace est une réaction au formalisme, voire au «façadisme» ; il s'agit de privilégier l'espace intérieur, habitable, par rapport à l'apparence extérieure : c'est une tendance marquée de l'architecture moderne, même si de nombreux courants de l'architecture contemporaine ont renoué avec une forme de «façadisme» en s'intéressant de nouveau à l'enveloppe, en particulier à ses divers degrés de transparence.

Sigfried Giedion, dans *Espace, temps, architecture*, insiste sur cette notion d'espace, sans d'ailleurs vraiment la définir :

«Ce qui est commun à tous les pays, c'est une même conception de l'espace, correspondant à la sensibilité de l'époque autant qu'à sa tournure d'esprit. Ce n'est pas la forme indépendante et sans lien avec

⁴ C'est ce qu'offre par exemple Jean Nouvel avec ses logements Nemausus à Nîmes en 1987 : les habitants bénéficient de logements plus grands, à charge pour eux de poser, s'ils le désirent, les papiers peints, plinthes, moquettes, etc., et au prix aussi de matériaux industriels, et de circulations extérieures, entre autres.

son environnement qui caractérise l'universalité de l'architecture d'aujourd'hui, mais la disposition des objets dans l'espace, la conception même de l'espace. Il en a toujours été ainsi, jusqu'à nos jours, à toutes les époques créatrices. La conception actuelle de l'espace-temps, la manière dont les volumes sont disposés dans l'espace et dont s'établissent leurs rapports mutuels, l'interpénétration de l'espace extérieur et de l'espace intérieur, voilà les caractéristiques communes qui sont à la base de notre architecture."⁵

Bien que Walter Gropius, dans la préface du même ouvrage, emploie lui le mot "forme" :

"(...) cette tentative [la première exposition du Bauhaus organisée à Weimar] de porter à l'attention du public les multiples progrès réalisés dans le monde des formes (...)"⁶

Mais approfondir cette question nous entraînerait trop loin. Mentionnons toutefois le qualificatif que Le Corbusier appliquait à l'espace : *indicible*⁷ ; ce qui n'est pas sans faire penser à la dernière proposition du *Tractatus logico-philosophicus* de Wittgenstein :

"7- Ce dont on ne peut parler, il faut le taire."⁸

Les géographes ne sont pas en reste dans la mise en valeur du mot "espace", et dans la recherche d'une définition ; on trouve ainsi, par exemple :

"Ce livre, dirons-nous encore, est le fruit d'une insatisfaction ancienne devant certaines questions. La première concerne l'objet même du travail du géographe, et donne souvent lieu à d'interminables discussions sur ce qu'est la géographie. Dans le fatras de réponses, il est difficile de trouver autre chose que des affirmations tautologiques. Si ce n'est par ce que quelques géographes déclarent explicitement, mais par ce que beaucoup d'entre eux pratiquent, la géographie est ce que chacun

pense bon de faire, et par conséquent on peut dire qu'il y a autant de géographies que de géographes. (...) Le discours doit donc traiter de l'espace et non de la géographie, et pour cela il faut maîtriser la méthode, car parler d'objet sans parler de méthode peut être une manière d'annoncer un problème sans savoir l'énoncer. Il est donc essentiel de s'attacher à la partie ontologique du problème, de faire un effort d'interprétation du dedans pour parvenir à identifier la nature de l'espace et en trouver les catégories d'analyse. (...) Comme point de départ, nous proposons que l'espace soit défini comme un ensemble indissociable de systèmes d'objets et de systèmes d'actions. (...) Considérant l'espace comme un ensemble indissociable de systèmes d'objets et de systèmes d'actions, nous pouvons reconnaître ses catégories analytiques internes. Nous citerons ici, le paysage, la configuration territoriale, la division territoriale du travail, l'espace produit et productif, les rugosités et les formes-contenu."⁹

Il faut ici avouer que notre incursion dans la discipline géographique est assez récente et que c'est avec un certain étonnement que nous avons découvert, venant du monde de l'architecture, que la querelle entre "espace" et "forme" était aussi présente en géographie qu'en architecture. Au cours du colloque *Géopoint* 2004, justement intitulé "La forme en géographie", on a pu entendre lors des conférences et des débats des propos qui, en remplaçant le mot "géographie" par le mot "architecture", ne seraient pas déplacés dans des dialogues d'architectes :

"Et parce que les formes ne sont pas associées aux concepts habituels et évocateurs de la réalité géographique : les milieux, les régions, les paysages ; les géographes ont eu recours au terme plus neutre, plus anonyme d'espace. C'est pourquoi « espace » et « spatial » ont aujourd'hui envahi la géographie non pas comme des termes apportant un plus sur le plan de l'avancée conceptuelle mais comme un alibi, un paravent commode derrière lequel s'abrite une transformation majeure de la géographie. Celle-ci est « dédiée à l'analyse de la dimension spatiale de la société » (Lussault M. 1996). « L'espace est un agencement d'objets qui ne se réduisent pas à leur spatialité mais qui ne sont pas concevables sans elle ; ce n'est donc ni un contenant ni un principe indépendant mais une dimension de toute chose sociale. »

⁵ Sigfried Giedion, *Espace, temps, architecture 1. L'héritage architectural*, 1968 (préface de Walter Gropius), p. 23

⁶ Walter Gropius, in Sigfried Giedion, *op. cit.*, p. 8

⁷ Le Corbusier, "L'espace indicible", numéro spécial "Art" de la revue *Architecture d'Aujourd'hui*, 1946

⁸ Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus* [1918], Tel Gallimard, 1961, p. 107 ; un lapsus possible nous semble porteur : ce dont on ne peut parler, il faut le faire...

⁹ Milton Santos, *La nature de l'espace*, L'Harmattan, Paris, 1997, p. 10, 12, 13

(Levy J. 1996). En recourant sans limites, abusivement, au terme espace on l'a banalisé, lui retirant toute valeur conceptuelle.”¹⁰ ()

Nous ferons, pour expliciter à notre manière la notion d'espace, un pas de côté par rapport à ces querelles philosophiques, géographiques ou architecturales, en faisant appel tout particulièrement à Henri Poincaré. Ce mathématicien et physicien était aussi philosophe ; c'est l'un des derniers grands savants et penseurs universels, comme l'étaient tous les penseurs jusqu'au XX^e siècle (que l'on songe aux Grecs, mais aussi à Pascal, Leibnitz, etc., tout autant mathématiciens que philosophes, entre autres) et l'un des plus grands de la fin du XIX^e siècle et du début du XX^e. Moins universellement connu qu'Einstein¹¹, moins pittoresque sans doute, trop brillant élève¹², il a été un précurseur des théories les plus actuelles, en particulier la théorie du chaos¹³.

¹⁰ Philippe Pinchemel, “Des formes en géographie aux formes géographiques”, in *La forme en géographie* Actes du colloque Géopoint 2004 tenu à l'Université d'Avignon les 1^{er} et 2 juin 2004, 512 p. UMR ESPACE 6012 du CNRS – Groupe Dupont p. 17

¹¹ Récemment, un certain nombre d'ouvrages tendent à rendre justice à Poincaré, et pas seulement français (car les querelles de clochers et de nationalités jouent leur rôle dans la manière d'écrire l'Histoire, même celle des sciences...) ; voir en particulier : Peter Gallison, *Einstein's Clocks and Poincaré's Maps*, Hodder and Stoughton, 2003 [trad. fr. : *L'empire du temps : Les horloges d'Einstein et les cartes de Poincaré*, Robert laffont, 2005] ; sur la place de Poincaré dans la genèse de la théorie de la relativité, nous ne nous attarderons pas, car celle-ci n'a que peu d'incidences sur l'espace des architectes et des géographes.

¹² Henri Poincaré détient jusqu'à maintenant le record de la moyenne des notes obtenues au concours d'entrée à l'École polytechnique : il obtint 20 /20 aux trois épreuves de mathématiques, 19/20 en physique, mais 1/20 en dessin (Poincaré piètre dessinateur, voilà qui gâche un peu le tableau ! Nobody is perfect...).

¹³ De façon singulière, c'est grâce à une erreur présente dans le mémoire qu'il remit pour le *prix du roi Oscar* (le roi de Suède et de Norvège, passionné de mathématiques, avait fondé ce prix ; ce qui est d'ailleurs l'une des raisons invoquées pour le fait que le prix Nobel ne récompense pas de mathématiciens) sur le “problème des trois corps”, qu'il pensait avoir résolu, mais pour lequel il réalisa ensuite que son erreur n'était pas une simple erreur, mais révélait la nature même du problème, à savoir la *sensibilité aux conditions initiales* : et c'est ainsi

Henri Poincaré s'est interrogé sur l'espace, et ce surtout à travers la question, cruciale pour nous, de la *dimension* ; à plusieurs reprises, il a tenté de répondre à la question, ou plutôt de justifier l'affirmation, posée explicitement dans le dernier de ses ouvrages, *Dernières pensées*¹⁴ : à savoir “Pourquoi l'espace a trois dimensions” ; mais il avait déjà abordé ce thème dès *La science et l'hypothèse* en 1902, puis dans *La valeur de la science* en 1905 et dans *Science et méthode* en 1908¹⁵. La notion de *dimension*, ou du *nombre de dimensions*, ou encore de la *dimensionnalité* (car le mot “dimension” a parfois le sens de “taille”, et il ne faut pas les confondre) de l'espace se rencontre d'emblée dès que l'on aborde l'architecture : lors de nos études d'architecture, nos enseignants nous enjoignaient de “penser dans l'espace” ; un bon architecte est celui qui “voit dans l'espace” ; et cela veut dire penser, voir, dans les *trois dimensions* de l'espace, et non seulement dans les deux du plan. Et pourtant ces injonctions se heurtent à une aporie : nous vivons bien dans un espace tridimensionnel, mais nous ne voyons, nous ne représentons, en définitive, qu'en deux dimensions... Plus tard, nous avons rencontré des objets étranges, monstrueux, les *fractals*, qui avaient la particularité paradoxale, dérangeante, de s'écarter de la récurrence tranquille des dimensions 1, 2, 3 (voire plus), et d'exhiber une dimension non entière... Et ces objets géométriques d'un nouveau genre, qui semblaient si abstraits, décrivaient pourtant mieux les formes naturelles que les figures géométriques classiques ; et même, nous a-t-il semblé, pouvaient aussi rejoindre certaines préoccupations des architectes.

Avoir recours aux mathématiques, même s'il s'agit de géométrie, peut sembler un détour inutile pour qui a affaire, comme les géographes et les architectes, à l'espace concret, matériel, sensible. Nombreux sont ceux qui opposent l'espace des architectes et celui des géographes à l'espace abstrait, non humain, de la géométrie.

qu'est née l'idée d'*attracteur étrange*, et toute la théorie du chaos... Nous reviendrons sur cet attracteur découvert par Poincaré, et sur la “carte de Poincaré”, dans la partie III.2.

¹⁴ Flammarion, 1913

¹⁵ Tous ouvrages édités chez Flammarion.

Les mathématiques non humaines ? Cela serait étrange, puisqu'elles sont, sans aucun doute, une spécificité de l'esprit humain. Le monde est écrit en langage mathématique, selon Galilée :

“La philosophie [*au sens de science(s) de la nature*] est écrite dans ce livre gigantesque qui est continuellement ouvert à nos yeux (je parle de l'Univers), mais on ne peut le comprendre si d'abord on n'apprend pas à en comprendre la langue et à connaître les caractères dans lesquels il est écrit. Il est écrit en langage mathématique, et les caractères en sont des triangles, des cercles, et d'autres figures géométriques, sans lesquelles il est impossible d'y comprendre un mot. Dépourvu de ces moyens, on erre vainement dans un labyrinthe obscur.”¹⁶

Mais il ne l'est que pour nous, et il l'est pour nous tous. Il peut y avoir des expressions différentes des mathématiques dans les différentes civilisations, mais il ne peut y avoir des *réalités* mathématiques différentes, contradictoires entre elles : $1 + 1$ vaut toujours 2, si l'on a bien défini l'addition, et quels que soient les signes que l'on emploie pour écrire 1, +, = et 2. Les mathématiques sont toujours traduisibles d'une langue à une autre, elles sont le seul véritable langage universel.

Pourtant les mathématiques ont mauvaise réputation ; elles ne seraient qu'abstraction, réduction de la complexité du monde réel, jeu futile (même si on leur reconnaît des applications efficaces en physique, notamment) et abscons, voire alibi du libéralisme (en économie), de l'architecture moderne froide et inhumaine, et en tout cas cauchemar des cancre poètes (“Quatre et quatre huit / huit et huit font seize / et seize et seize qu'est-ce qu'ils font ? / Ils ne font rien seize et seize / et surtout pas trente deux”¹⁷). Mais des poètes, pourtant, ont aimé les mathématiques ; laissons la parole à Raymond Queneau qui, dans *Odile* (récit autobiographique qui raconte de manière décalée sa période de fréquentation des surréalistes), met dans la bouche de son narrateur, Roland Travy, double de lui-même en jeune mathématicien raté (même si Queneau lui-même entra à la Société

mathématique de France en 1948¹⁸) la diatribe suivante (Saxel “est” Aragon ; la scène se passe dans un café) :

“– Il n'existe pas qu'un seul monde, lui dis-je, celui que vous voyez ou que vous croyez voir ou que vous vous imaginez voir ou que vous voulez bien voir, ce monde que touchent les aveugles, qu'entendent les amputés et que reniflent les sourds, ce monde de choses et de forces, de solidités et d'illusions, ce monde de vie et de mort, de naissances et de destructions, ce monde où nous buvons, au milieu duquel nous avons coutume de nous endormir. Il en existe au moins un autre à ma connaissance : celui des nombres et des figures, des identités et des fonctions, des opérations et des groupes, des ensembles et des espaces. Il y a des gens, vous le savez, qui prétendent que ce ne sont là qu'abstractions, constructions, combinaisons. Ils veulent faire croire à une sorte d'architecture ; on prend des éléments dans la nature, on les raffine, on les polit, on les dessèche et l'esprit humain bâtit avec ces briques une demeure splendide, magistral témoignage de la puissance de la raison. Vous devez certainement connaître cette théorie, votre professeur de philosophie devait la soutenir : c'est bien la plus vulgaire qui soit. Une bâtisse, ils prennent la science mathématique pour une bâtisse ! On s'assure de la solidité des fondations avant de construire le rez-de-chaussée et le rez-de-chaussée fini on passe au premier étage puis au second et ainsi de suite sans qu'il y ait de motif pour que cela s'arrête. Mais en réalité les choses ne se passent pas ainsi ; ce n'est pas à l'architecture, à la maçonnerie qu'il faut comparer la géométrie ou l'analyse, mais à la botanique, à la géographie, aux sciences physiques même. Il s'agit de décrire un monde, de le découvrir et non de le construire ou de l'inventer, car il existe en-dehors de l'esprit humain et indépendant de lui. On doit explorer cet univers et dire ensuite aux hommes ce qu'on y a vu – je dis bien : vu. (...) Mais je vous ennuie peut-être ?

– C'est-à-dire que je ne vous suis pas très bien, répondit Saxel.

– Il faudrait que je vous donne des exemples.

– C'est peut-être compliqué.

– Non, pas du tout. Il y en a un qui traîne partout, celui des équations algébriques à une inconnue.

¹⁶ Galileo Galilei, *Il saggiaiore*, [en français : *L'Essayeur*, traduction par Christine Chauviré], les Belles Lettres, 1979 (Annales littéraires de l'Université de Besançon ; 234)

¹⁷ Jacques Prévert, “Page d'écriture”, in *Paroles* [1945], Folio Gallimard, 1976

¹⁸ Mais entra aussi comme Satrape au Collège de ‘Pataphysique en 1950, et bien sûr fonda, avec François Le Lionnais (qui était lui un mathématicien épris de littérature), L'Oulipo (OUvroir de LIttérature POtentielle) en 1960.

- Les équations, pouah, fit Saxel.
- Ah, ah ! contrefis-je, vous êtes sans doute de ceux, garçon un demi, qui se vantent de ne rien comprendre aux mathématiques, qui sont fiers de n’avoir pu franchir le pont-aux-ânes.
- Pour ma part, dit Saxel.
- Et vous ne vous en attristez pas ?
- Je devrais ?¹⁹

Il devrait, assurément ! Bien que nous ne partagions pas le mépris de Queneau (ou de son narrateur) pour l’architecture (l’architecture n’est pas que l’art de bâtir, elle n’est pas que l’art du maçon, elle est aussi et surtout *cosa mentale*), cette profession de foi nous permet de préciser le rapport qu’entretiennent à la fois les mathématiques, l’architecture et la géographie à l’invention (la fabrication, la construction) et la découverte (l’exploration, la description) de *mondes*. La géographie serait du côté de la découverte, l’architecture du côté de l’invention, les mathématiques, selon Queneau, et contrairement aux idées reçues, non du côté de l’invention mais de la découverte. Nous sommes prêts à le suivre, tant la mise en œuvre des processus mathématiques que nous verrons dans la partie III, qui à partir de règles simples génèrent des mondes de formes extraordinaires, relève plus de l’exploration de terres inconnues que de la construction d’un meccano. Mais nous voudrions aller au-delà de cette opposition, et essayer de la résoudre.

Car ces deux termes ne sont pas si antinomiques que cela : “invention” peut signifier “découverte”, c’est même l’un de ses sens les plus anciens (avant 1514²⁰ ; et en particulier pour les reliques²¹) ; “découverte” peut signifier “combinaison d’éléments existants en vue de construire, de mettre au point un instrument, un procédé, une technique (quasi-synonyme : invention)”²² : l’un des exemples donnés (“la découverte de la boussole”) figure aussi dans l’article “invention” (“l’invention de la boussole”)...

¹⁹ Raymond Queneau, *Odile*, Gallimard, 1937, pp. 26-29

²⁰ source : Centre national de Ressources Textuelles et Lexicales (<http://www.cnrtl.fr>)

²¹ Mais là, avec un peu de mauvais esprit, on peut imaginer que les reliques sont effectivement “inventées”...

²² source : Centre national de Ressources Textuelles et Lexicales (<http://www.cnrtl.fr>)

Newton a-t-il inventé ou découvert la gravitation universelle, Einstein a-t-il inventé ou découvert la relativité générale ? Le géographe se contente-t-il de “découvrir” un monde déjà là ? Ne parle-t-on pas de l’“invention” du Mont-Blanc²³, par exemple, qui n’avait pas attendu ses inventeurs pour exister sans doute, mais qui n’existe vraiment pour nous qu’une fois affecté d’un nom propre, précisément localisé sur une carte, et surtout atteint physiquement par l’homme ? Et d’un autre côté l’architecte se contente-t-il de construire des “bâtisses” qui tiennent debout, le projet d’architecture n’est-il pas un processus de découverte, tout autant que d’invention, tant les conséquences de certains postulats de départ peuvent être inattendues ? Nous préférons dire, en empruntant le concept à Nelson Goodman²⁴, que les mathématiques, la géographie, l’architecture, sont toutes (et elles ne sont pas les seules) des “manières de *faire des mondes*”, qu’il n’y a pas de *monde* en soi, et que ces manières-là ont toutes quelque chose à faire avec l’espace et les formes, qu’elles se nourrissent l’une l’autre, dans des enchevêtrements qui ne se réduisent pas à des rapports d’utilité : nous refusons de considérer la géométrie comme simple outil de représentation pour l’architecte et le géographe, de n’invoquer la géographie que pour l’inscription d’une architecture dans un site, de penser que les activités d’architecture et de géographie n’apportent rien à la géométrie.

Nous avons choisi, d’emblée, d’associer au mot “espace” le mot “forme” ; et d’y adjoindre rapidement le mot “processus”. Le titre de notre étude : “penser l’espace et les formes” devrait être corrigé au terme de sa lecture en “repenser l’espace et les formes à travers les processus”. Ayant défini l’espace, tout espace, comme *continu empirique doté de dimensions*, et l’“espace” plus particulièrement comme le continu du *déplacement*, en nous appuyant sur notre perception, et en nous plaçant dans le cadre des

²³ Laura et Giorgio Aliprandi, *L’invention du Mont-Blanc par les cartographes*, Musée dauphinois, 2000 ; Pierre Frey [dir.], *Eugène Viollet-Le-Duc L’invention du Mont-Blanc*, Pheljna edit. (Quaderni d’arte della Valle d’Aosta, 3), 1989 ; Philippe Joutard, *L’invention du Mont Blanc*, Gallimard/Julliard, 1986.

²⁴ Nelson Goodman, *Manières de faire des mondes*, Editions Jacqueline Chambon, 1992

contraintes de l'espèce humaine (dotée d'un certain système perceptif, et vivant sur la Terre, sous le soleil, et dans un certain champ gravitationnel), nous prendrons pour postulat que la *forme* est ce qui introduit une coupure dans ce continu du déplacement, ce qui crée un obstacle, une limite, aussi bien (mais pas forcément de la même façon) à la vue qu'au toucher. Mais un autre postulat important est que la forme ne peut être comprise uniquement par la perception, même active, que tout ce que l'homme a élaboré et conceptualisé au sujet de la forme est en grande partie issu de ce qu'il *fait* en matière de forme : fabriquer, construire (voire détruire), dessiner, etc. Et si bien des activités humaines ont affaire avec les formes, il nous a semblé que l'architecture et la géographie étaient parmi les plus riches de ce point de vue, d'abord parce qu'elles s'occupent des formes que l'homme habite, au sens large, et aussi parce que leurs objets (de la maison à la Terre) sont d'une échelle telle qu'elles ont dû élaborer des outils de représentation qui ont pu eux-mêmes contribuer à la conceptualisation de l'espace.

La définition du mot "forme" pose autant de problèmes que celle du mot espace. En anglais on dispose de deux mots "form" et "shape", ce qui permet de distinguer la forme et le contour. Partant du postulat qu'une forme est, comme nous l'avons dit, toute entité qui peut faire obstacle au déplacement, nous examinerons tout ce que cela implique comme possibilités (et en creux, comme impossibilités) pour l'homme, être qui vit dans un monde à trois dimensions, mais, y étant inclus, ne peut avoir affaire, en grande partie, qu'à deux dimensions, qu'à la surface des formes tridimensionnelles. Nous verrons comment les instruments de l'architecte et du géographe (pour simplifier, la règle et le compas) sont aussi les instruments conceptuels de la géométrie, et comment les opérations matérielles du travail sur la forme sont les prémices d'une conceptualisation de la géométrie. Nous finirons par cette aporie de la géométrie classique : toute forme naturelle est le résultat d'un *processus*.

Un *processus* est une suite d'opérations ; le mot processus est par exemple employé en ce sens en architecture dans l'expression "processus de conception". Nous donnons un sens plus restreint à ce terme : nous considérerons qu'un processus est, plus précisément, une suite

potentiellement infinie d'une même opération ; les mots-clés sont alors la *récurtivité* et l'*itération* ainsi que la notion d'*attracteur*. Nous bornons aussi notre intérêt aux processus de *génération de formes* ; et l'un des mots-clés est alors celui d'*auto-similarité*. Le processus, même en ce sens, n'est pas nouveau. Zénon d'Elée par exemple en a décrit un certain nombre, leur caractère paradoxal venant d'une mauvaise compréhension de l'infini, et de l'infinitésimal ; mais si on les reconsidère, on peut les interpréter comme des processus génératifs du segment. Archimède détermina une approximation de π grâce à un processus menant au cercle. Une bonne part de l'histoire des mathématiques a été celle d'une formalisation de ces processus (problèmes de la convergence de suites et des séries, etc.), mais ils ne menaient qu'à des objets mathématiques et géométriques connus jusqu'à ce que des mathématiciens comme Helge von Koch, ou Waclaw Sierpinski, entre autres, dès la fin du XIX^e siècle, en imaginent certains qui produisaient des objets "monstrueux" (au sens de la normalité mathématique), et surtout que Benoît Mandelbrot rapproche le résultat de ces processus de bon nombre de formes naturelles sur lesquelles la géométrie classique butait, et invente le mot, sinon le concept, de *fractal*.

Les processus imaginés par von Koch, Sierpinski, et les autres, ne pouvaient que rester confidentiels jusqu'à ce qu'une invention du XX^e siècle, l'ordinateur, permette de les mettre en œuvre facilement. On peut faire des fractals ou des automates cellulaires (autre type de processus) à la main (voire avec une photocopieuse), mais c'est fastidieux, alors que l'ordinateur, qui n'est pas très intelligent mais qui est rapide, peut mettre en œuvre un processus très facilement. Nous aborderons donc cet espace particulier qu'est l'espace numérique, celui dans lequel nous allons mettre en œuvre les processus, notre "terrain" en quelque sorte. Puis nous décrirons trois types de processus en particulier (les IFS, les L-systèmes et les automates cellulaires) ; enfin nous verrons en quoi ces processus permettent de redéfinir la géométrie, l'espace, les formes, et surtout en quoi ils permettent de générer et de simuler des formes originales. Sur ce dernier point, nous proposons quelques pistes plus ou moins développées ; il s'agit surtout d'exemplifier des *démarches*.

Un point important à souligner c'est que nous avons décidé d'exclure la ville, c'est-à-dire la géographie urbaine et l'urbanisme, de notre étude. Nous n'ignorons pas les travaux qui portent sur ce sujet, nous avons lu avec profit des ouvrages fondamentaux comme *La fractalité des structures urbaines*²⁵ de Pierre Frankhauser, ou *Fractal cities*²⁶ de Michael Batty et Paul Longley. Nous pouvons même dire que ces travaux ont été déterminants dans notre démarche. Mais nous avons décidé de restreindre notre champ d'investigation, déjà trop vaste, et à cheval sur la géographie et l'architecture, à la *géographie physique*, et même à la *géomorphologie*, d'une part, à l'*architecture*, exclusive de l'urbanisme, d'autre part. C'est un paradoxe au sens où la ville est un objet de choix pour l'application de processus génératifs, parce que, bien que production humaine, dans un certain sens la ville en tant que forme *se fait*, naît, croît, évolue, dépérit, se transforme, etc., comme les formes issues de processus naturels. Mais les travaux portant sur ce sujet sont nombreux, et nous ne voulions pas en rajouter ; et d'autre part, l'utilisation en particulier des automates cellulaires en géographie urbaine a donné lieu à des modèles si complexes, ou plutôt peut-être *compliqués*, qu'on n'y retrouve plus ce qui fait l'essence de tous les processus que nous exposerons : générer une certaine complexité, certes, une certaine imprévisibilité, mais *avec des règles simples*.

Nous voulions, en abordant ce travail, formuler, préciser, approfondir, discuter, un certain nombre d'hypothèses sur les notions d'*espace* et de *forme*.

Nous voulions essayer de valider l'hypothèse selon laquelle les opérations effectuées dans l'*analyse* de l'espace et des formes (c'est-à-dire la géographie) et dans la *production* de l'espace et des formes (c'est-à-dire l'architecture), ainsi que dans la *représentation* de l'espace et des formes, contribuent à la *définition* et à la *conceptualisation* de l'espace et des formes (c'est-à-dire la géométrie). Il ne s'agissait pas d'une recherche de

validation historiciste (comme pour le problème de l'œuf et de la poule, il est impossible de savoir ce qui a historiquement précédé), mais de détecter ce qui, dans les actions de l'homme confronté aux réalités de sa propre perception et de la matérialité du monde, induisait un *mode de pensée* sur l'espace et les formes.

Nous voulions relire les activités humaines d'analyse, de représentation, et de production de formes au regard, essentiellement, de la notion de *dimension*, notion qui nous semblait la plus propre à caractériser et identifier ces activités.

Nous voulions aussi rassembler, exposer et mettre en œuvre divers processus de génération de formes, qui sont souvent développés dans des champs très éloignés les uns des autres, et étrangers à l'architecture et à la géographie. Nous voulions montrer en quoi ces processus peuvent mener à une redéfinition de l'espace et des formes, à travers la notion de dimension.

Il était hors de question de tenter d'être exhaustif en abordant un champ si vaste. Nous espérons cependant avoir, sinon convaincu par notre argumentation, du moins fourni un certain nombre d'éléments de discussion.

Notre but est en grande partie pédagogique : nous souhaitons proposer aux étudiants en architecture, et en géographie, un nouveau regard sur l'espace et les formes, les inciter à regarder les formes en essayant d'imaginer et de mettre en œuvre des processus qui peuvent y mener.

Nous proposons en dernier lieu quelques exemples de mise en œuvre de processus de génération de formes, "appliqués" à la géomorphologie et à l'architecture. Ces expérimentations ne devraient pas être jugées tant par leurs résultats, que par l'exemple qu'elles donnent d'une démarche, d'un mode de pensée, comme des pistes à suivre, peut-être, du moins si l'on considère que le chemin de la pensée n'est pas univoque, qu'il peut y avoir des chemins de traverse, des détours, si, comme le disait Castoriadis, "penser, c'est entrer dans le labyrinthe"²⁷.

²⁵ Pierre Frankhauser, *La fractalité des structures urbaines*, Economica, 1994

²⁶ Michael Batty et Paul Longley, *Fractal cities A Geometry of Form and Function*, Academic Press, 1994

²⁷ "Penser (...) c'est entrer dans le labyrinthe alors qu'on aurait pu rester étendu parmi les fleurs." (Cornelius Castoriadis, *Les carrefours du labyrinthe*, Editions du Seuil, 1978)

I Espace ou *anthropos*



I D'après : Albrecht Dürer, *Adam et Eve*

I.1 Le monde perçu

I.1.1 L'expérience directe

La conscience du monde



1 Lac Memphrémagog

“La psychologie, comme toutes les autres sciences, ne peut avoir, semble-t-il, qu’un seul point de départ : le monde tel que nous le percevons, naïvement et sans esprit critique. La naïveté peut disparaître au fur et à mesure de nos progrès. Des problèmes peuvent se révéler qui n’apparaissent pas d’emblée. Afin de les résoudre, nous serons peut-être amenés à forger des concepts éloignés, du moins au premier abord, de l’expérience directe. Et malgré tout, il faut partir d’une image naïve du monde. Il n’est pas d’autre base, en effet, pour édifier une science.

Dans mon cas, qui pourrait être celui de bien d’autres, cette image naïve est, à l’heure actuelle, celle d’un lac bleu entouré de forêts obscures, de ce rocher gros et gris, dur et froid, que j’ai élu comme siège, celle du papier sur lequel j’écris, du bruit sourd que fait le vent remuant à peine les feuillages et de cette odeur forte qui vient des bateaux et de la pêche. Mais ce monde contient beaucoup plus que cette image : je ne sais pourquoi j’entrevois maintenant, et bien qu’il ne se confonde en rien avec le présent décor, tel autre lac bleu que je contemplai de ses rives, il y a quelques années de cela, dans l’Illinois. J’ai depuis longtemps l’habitude que surgissent des visions de cet ordre, lorsque je me trouve isolé. Et ce monde contient encore bien d’autres choses : par exemple, ma main et mes doigts, se déplaçant à peine sur le papier. Maintenant que j’arrête d’écrire et regarde de nouveau autour de moi, j’éprouve aussi une sensation de vigueur et de bien-être. Mais, un instant plus tard, je ressens au-dedans de moi-même comme une oppression singulière et qui va tendre à se constituer en un sentiment d’être pourchassé – j’ai promis de remettre ce manuscrit terminé, dans quelques mois d’ici.” (Wolfgang Köhler, *Psychologie de la forme*, Gallimard Folio Essais (1964 pour le texte, 2000 pour la présentation), pp. 11-12)

Même s’il ne s’agit pas ici, essentiellement, de psychologie de la forme, ni même de psychologie tout court, nous partagerons le point de vue de Wolfgang Köhler tel qu’il est exprimé dans les premières lignes de son ouvrage, et considérerons que nous ne pouvons, dans un premier temps, qu’examiner les choses telles qu’elles nous apparaissent, et donc commencer par nous intéresser au “monde tel que nous le percevons, naïvement et sans esprit critique”.

L’expérience décrite dans ce texte est effectivement analogue à celle que nous vivons en ce moment même, que nous vivons forcément à tout moment de notre existence éveillée, à savoir *la conscience du monde qui nous environne et dont nous faisons partie*. Nous pouvons vivre des circonstances exceptionnelles telles que des états de forte concentration ou de délire, par exemple, qui nous détachent partiellement de notre environnement et qui nous font l’ignorer, voire le transforment en nous confrontant à des hallucinations ; et bien sûr cette conscience du monde disparaît dans le sommeil. Mais la plupart du temps nous avons bien cette conscience, et cette *confiance* en l’existence du monde.

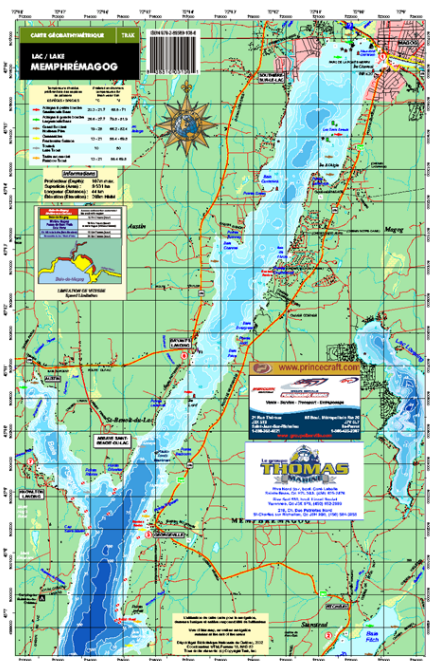
Nous tenons ce monde pour acquis, nous n'y prêtons pas attention, ou du moins nous ne prêtons attention qu'aux éléments de cet environnement qui ont une importance directement reliée à notre activité en cours ou à nos préoccupations. Mais, malgré cette conscience vague, indifférente, nous savons (ou nous croyons) que le monde autour de nous continue à exister dans sa totalité, son intégrité et sa constance, nous pourrions dire sa *consistance*, et toute sa complexité ; c'est d'ailleurs si un changement intervient dans la relative consistance de ce monde que notre attention sera attirée, comme par exemple lorsque la sonnerie d'un téléphone vient rompre, non généralement le silence, mais l'ensemble des sons qui participent au monde qui nous environne, que nous percevons vaguement mais auxquels nous sommes indifférents.

La description

L'expérience directe, nous la vivons, mais pour pouvoir en rendre compte, il faut bien trouver un moyen, à défaut de pouvoir transmettre directement notre état de conscience à nos interlocuteurs... Il faut donc en passer par la *description*. Nous aurions pu choisir toute autre description, comme il en existe dans tous les livres, de fiction ou autre. Nous pourrions aussi tout simplement nous arrêter un moment, prendre conscience du monde qui nous entoure et le décrire. Parmi toutes les descriptions qui auraient pu être choisies, le texte de Wolfgang Köhler présente l'intérêt d'être concis, tout en étant assez complet quant aux questions qui vont nous intéresser dans ce chapitre. Nous le prendrons donc comme un témoignage possible de l'expérience directe, tout en reconnaissant l'inflexion par rapport à celle-ci qu'implique l'intention même de décrire.

Car il peut y avoir un travers à utiliser la description : en effet l'*intention* de décrire nous met dans un état autre que celui d'indifférence qui est le nôtre en général à l'égard du monde qui nous entoure. Nous sommes *obligés* d'être attentifs, d'extraire de notre environnement des éléments significatifs, de chercher les mots qui nous sembleront le mieux rendre compte de ce que nous percevons. Il n'y a d'ailleurs même pas besoin d'aller jusqu'à vouloir décrire verbalement le monde pour activer cette attention particulière : lorsque nous visitons une ville étrangère, nous regardons différemment, plus attentivement, nous remarquons des détails qui nous échappent dans notre environnement quotidien. La description ne rend donc pas absolument compte de l'expérience directe commune, en ce que la conscience vague et indifférente du monde, qui est notre expérience vraie la plupart du temps, devient une observation plus précise et intentionnelle.

Mais la description, en-dehors du fait que nous ne pouvons nous en passer, est intéressante aussi en ce qu'elle est déjà une action, proprement humaine, nécessitant l'emploi d'un *langage*. Chacun peut décrire plus ou moins *son* monde, c'est un exercice courant dès l'école primaire ; mais c'est un exercice plus particulièrement pratiqué par les géographes, et dans une moindre mesure par les architectes. La géographie passe par l'élaboration de cartes :



2 Carte du lac Memphrémagog

“La géographie est une imitation graphique de la partie connue de la terre, considérée globalement, dans ses traits les plus généraux (1,1,1).” (Ptolémée, *Géographie*¹)

Mais parallèlement à l’élaboration de cartes, les géographes des siècles passés nous ont donné, essentiellement, des *descriptions* du monde connu à leur époque. Les architectes s’appuient eux presque uniquement sur des documents matériels ou graphiques (maquettes et plans), mais ils *décrivent* aussi leur ouvrage, si du moins l’on prend au mot le terme de *descriptif*, qui est l’une des pièces du dossier d’un projet. Comme il s’agit ici de s’attacher à ce que *font* les géographes et les architectes, et en quoi ce qu’ils font est une manière de *penser* l’espace et les formes, la description verbale constitue un premier pas dans la constitution de cette pensée.

Mais d’abord nous nous intéresserons à la description du monde perçu par tout un chacun, et nous verrons que le langage, d’ailleurs, n’est pas sans incidence sur la perception elle-même.

Une image du monde

Wolfgang Köhler se propose de décrire “le monde” tel qu’il le perçoit, mais tout de suite après il dit “partir d’une *image* naïve du monde”. Il assimile donc le monde et son image. C’est l’acception introduite par Bergson dans *Matière et mémoire* lorsqu’il évoque, en employant le pluriel, “cet ensemble d’images que j’appelle l’univers”².

Cela peut nous sembler étrange, tant nous sommes habitués dans le langage courant à distinguer la réalité de son image, à opposer l’image comme illusion, fabrication, reproduction (reflet dans un miroir, peinture, photographie, etc.) à la réalité tangible. Nous n’avons pas l’intention de polémiquer au sujet de l’opposition idéalisme-réalisme, ce qui excéderait largement notre propos. Nous admettons donc l’emploi du mot “image” comme englobant tout ce qui est perçu par nous, quelle qu’en soit l’origine ; après tout, les images, au sens habituel du terme, font aussi partie du monde que nous percevons.

Si l’on en extrait la part objective, l’auteur décrit l’“image” du monde qu’il perçoit en une seule phrase, suivie d’un “repentir” :

“ (...) cette image naïve est (...) celle d’un lac bleu entouré de forêts obscures, de ce rocher gros et gris, dur et froid, que j’ai élu comme siège, celle du papier sur lequel j’écris, du bruit sourd que fait le vent remuant à peine les feuillages et de cette odeur forte qui vient des bateaux et de la pêche. (...), [de] ma main et [de] mes doigts, se déplaçant à peine sur le papier. ”

Son évocation n’est donc pas que visuelle, mais comprend toutes les perceptions ; là aussi, il rejoint Bergson, qui écrit : “Me voici donc en présence d’images, au sens le plus vague où l’on puisse

¹ in Germaine Aujac, *Claude Ptolémée, astronome, astrologue, géographe Connaissance et représentation du monde habité*, CTHS, 1998

² Henri Bergson, *Matière et mémoire* [1939], Quadrige PUF, 1990, p. 12



3 Allen Edson,
Le temps est à l'orage Lac Memphrémagog
huile sur toile 1880

prendre ce mot, images perçues quand j'ouvre mes sens, inaperçues quand je les ferme."³ De nouveau nous admettons d'élargir l'acception du mot image, que nous limitons souvent au visuel, à tous nos sens : l'"image" du monde, qui *est* le monde pour nous, est multi-sensorielle, elle n'est pas limitée à sa part visuelle.

L'expérience directe mêle la conscience du monde extérieur (sensations et perceptions) et la présence continue de notre "monde intérieur" : l'auteur nous en fait part, sous deux modes, celui du souvenir :

"(...) je ne sais pourquoi j'entrevois maintenant, et bien qu'il ne se confonde en rien avec le présent décor, tel autre lac bleu que je contemplai de ses rives, il y a quelques années de cela, dans l'Illinois."

et sous un mode qui mêle sensations corporelles et ce qu'on pourrait appeler état d'esprit, voire état d'âme :

"(...) j'éprouve aussi une sensation de vigueur et de bien-être. Mais, un instant plus tard, je ressens au-dedans de moi-même comme une oppression singulière et qui va tendre à se constituer en un sentiment d'être pourchassé – j'ai promis de remettre ce manuscrit terminé, dans quelques mois d'ici."

On note que, alors que l'auteur ne dit pas "je" pour parler du monde extérieur, il emploie ce pronom personnel pour évoquer ses souvenirs et ses sentiments (ou "sensations", en un sens plus émotionnel que sensoriel ; voire ses "affections" pour employer le vocabulaire de Bergson). Ceci est significatif du double aspect de notre expérience : même si nous savons bien qu'en définitive tout se passe dans notre conscience, voire dans notre cerveau, il y a bien une rupture radicale entre le monde extérieur, dont nous faisons partie mais qui existe malgré nous, et surtout dont nous supposons qu'il existe de la même façon pour autrui, et notre monde intérieur, exclusivement personnel. C'est la différence marquée entre "il fait chaud" et "j'ai chaud".

Là aussi, on retrouve Bergson, qui, parmi toutes les images qui constituent l'univers, en distingue "une qui tranche sur toutes les autres en ce que je ne la connais pas seulement du dehors par des perceptions, mais aussi du dedans par des affections : c'est mon corps."⁴ Même si ce que nous éprouvons comme notre monde intérieur ne nous semble pas ne se référer qu'à notre corps, mais aussi à ce que nous appelons notre esprit : pensées, souvenirs, émotions.

L'ordre dans lequel l'auteur évoque l'image du monde va du plus extérieur (objectif) au plus intérieur (subjectif) ; il évoque d'abord le lac, les forêts, le rocher, le papier, le bruit, l'odeur. Notons que, faisant référence à cette première partie de sa description, Köhler emploie plus loin le mot "décor", et, à propos du souvenir d'un autre site analogue, le verbe "contempler". Son "expérience directe" est donc un peu particulière, visiblement préparée, un peu artificielle ; s'il s'est installé là pour écrire

³ *op. cit.*, p. 11

⁴ *op. cit.*, p. 11



4 Lac Memphrémagog



5 Lac Memphrémagog

c'était pour jouir d'un environnement agréable, ou du moins "descriptible", un "paysage" en somme...

L'auteur fait partie de cette image du monde, même s'il ne se décrit pas lui-même, si ce n'est par sa position (assis sur un rocher), par ses actions ("que *j'ai élu* comme siège" ; "le papier sur lequel *j'écris*"). Puis, un peu comme pour combler une lacune, il mentionne sa main et ses doigts, mais son corps entier est là, certainement, même s'il n'en voit qu'une partie ! On devrait d'ailleurs dire, non qu'il est *là*, mais qu'il est *ici*. Notre image du monde, propre à chacun d'entre nous, est perçue à partir de notre propre corps, et est donc totalement singulière, même si nous partageons avec les autres êtres humains, du moins il faut l'espérer, un seul et même monde.

S'il fait partie du monde, l'auteur rend compte de ce monde en tant que tel, et non en tant que perçu par lui, par l'intermédiaire de ses sens : il ne dit pas "je vois un lac bleu", ou "*j'entends* le bruit sourd du vent dans les feuillages". S'il fermait les yeux et se bouchait les oreilles, le lac serait toujours là, il serait toujours bleu, le vent continuerait à remuer à peine les feuillages et à provoquer ce bruit sourd : l'auteur en est convaincu, et nous aussi, à moins d'être particulièrement idéalistes (ou "introspectionnistes", comme les psychologues qu'il dénonce dans la suite de son ouvrage).

Description et connaissances

Lire et interpréter une description suppose que nous partagions avec l'auteur un certain nombre de connaissances, que nous sachions, dans le cas de la description de Wolfgang Köhler, plus ou moins précisément ce qu'est un lac, une forêt, un bateau, un rocher, etc., et même, après tout, à quoi ressemble quelque chose de bleu ou d'obscur. Les bateaux d'ailleurs, l'auteur ne les voit peut-être pas, il ne mentionne que l'odeur qui en parvient. Mais il sait certainement à quoi ils ressemblent. Mais nous, que voyons-nous quand nous pensons à un bateau, voyons-nous même quelque chose ? Selon le contexte, nous pouvons imaginer quelque chose de différent. Si la scène semblait située dans un grand port, nous pourrions imaginer des paquebots, des pétroliers, etc. ; si quelque chose nous indiquait que nous sommes en Afrique, nous pourrions imaginer des pirogues ; si nous étions dans un port breton, nous aurions une idée assez précise du type de bateaux de pêche qu'on y rencontre, et une image assez exacte nous viendrait à l'esprit. Mais nous sommes (ou du moins l'auteur est) au bord d'un lac, sans doute américain, et nous ne savons pas forcément quel type de bateau fréquente ces eaux-là.

De ce qu'il voit, l'auteur mentionne essentiellement un lac et des forêts. Nous savons tous, pensons-nous, ce qu'est un lac, ce qu'est une forêt, et même si nous ne nous sommes jamais trouvés dans ce type de paysage, nous avons pu en voir des représentations. Si nous supposons un homme qui a toujours vécu dans le désert, qui n'a jamais vu d'images de paysages d'autres contrées, sans doute, de proche en proche, en définissant un arbre, puis une forêt, et une grande étendue d'eau, nous pourrions lui faire imaginer cette scène, mais elle demeurera sans doute pour lui *incroyable*, au sens strict du terme.

Si l'auteur avait employé des mots que nous ne connaissions pas, par exemple en usant d'une langue étrangère, inventée, ou très scientifique, nous aurions plus de mal à suivre et partager sa description. Livrons-nous à un petit jeu, une variante de l'exercice oulipien⁵ S+7, qui consiste à remplacer tout substantif dans un texte par son successeur 7 substantifs plus loin dans un dictionnaire : on peut tricher, et c'est là tout le charme, ici on prendra le premier substantif à la suite du substitué qui n'éveille a priori aucune idée de forme particulière (cela peut varier évidemment suivant les lecteurs...). La description initiale devient :

“ (...) cette image naïve est (...) celle d'un lacertilien bleu entouré de forficules obscures, de ce rocou gros et gris, dur et froid, que j'ai élu comme siliques, celle du papion sur lequel j'écris, du bruit sourd que fait le vérate remuant à peine les feuillets et de cette odeur forte qui vient des batholites et du pécopteris. (...) ”

Nous sommes encore susceptibles d'imaginer une scène, parce que nous avons conservé les adjectifs qualificatifs. On peut aller un peu plus loin :

“ (...) cette image naïve est (...) celle d'un lacertilien blindé entouré de forficules obséquieuses, de ce rocou grotesque et grivelé, duvetueux et frugal, que j'ai élu comme siliques, celle du papion sur lequel j'écris, du bruit sournois que fait le vérate remuant à peine les feuillets et de cette odeur folle qui vient des batholites et du pécopteris. (...) ”

La structure descriptive est conservée, mais nous sommes bien en peine d'en produire une image. Ceci peut être un mécanisme poétique, lorsqu'il est manié par les oulipiens, bien que cette petite expérience n'en ait pas l'ambition.

A l'inverse un véritable écrivain, le poète Henri Michaux, peut, avec des mots tous explicites (à part quelques noms exotiques, mais comme on en trouve dans bien des descriptions “sérieuses”, et d'ailleurs le texte s'intitule “Notes de botanique”), des indications formelles précises, des comparaisons, des mesures, nous transporter dans un monde proprement inimaginable :

“Dans ce pays, il n'y a pas de feuilles. J'ai parcouru plusieurs forêts. Les arbres paraissent morts. Erreur. Ils vivent. Mais ils n'ont pas de feuilles.

La plupart, avec un tronc très dur, vous ont partout des appendices minces comme des peaux. Les *Barimes* semblables à des spectres, tout entiers couverts de ces voiles végétaux ; on les soulève, on veut voir la personne cachée. Non, dessous ce n'est qu'un tronc.

Il y a aussi, dans la forêt de *Ravgor*, de tous petits arbres trapus et creux et sans branches qui ressemblent à des paniers.

Les *Karrets* droits jusqu'à la hauteur de cinq ou six mètres, là tout à coup oblique, pointent et vous partent en espadon contre les voisins.

D'autres avec de grandes branches dansantes, souples comme tout, serpentine.

⁵ Plus précisément inventé par Jean Lescure, qu'il proposa lors d'une des premières réunions de l'OuLiPo, le 13 février 1961 (Jacques Bens, *Genèse de l'Oulipo 1960-1963*, Le Castor Astral)

D'autres avec de courts rameaux fermes et tout en fourchettes.

(...)

D'autres qui se tendent sous la pluie comme des courroies et grincent ; on se croirait dans une forêt en cuir.

(...)

Les Badèges ont des racines grimpantes. Une racine sort tout à coup, vient s'appuyer contre une branche d'un air décidé, l'air d'une monstrueuse carotte.

(...)” (Henri Michaux, *Mes propriétés, La nuit remue, Œuvres Complètes I*, Bibliothèque de La Pléiade, Gallimard, 1998, pp. 494-497)

Nous ne pouvons pas dire que nous manquions de quoi que ce soit pour nous représenter ces forêts ; nous pourrions pratiquement peindre ou sculpter la scène décrite. Mais nous sommes un peu comme l'homme du désert lisant la description de Köhler, ce texte ne nous renvoie à aucune forêt que nous ayons fréquentée (du moins que j'aie fréquentée), ni même à aucune forêt que nous pensions pouvoir exister : ce n'est certainement pas une telle forêt que nous avons “vue” quand Köhler a évoqué ses “forêts obscures”.

Une énumération imprécise

Une description est souvent une énumération. Le monde décrit par Köhler comprend des “choses”, des “objets” matériels (un lac, des forêts, un rocher, du papier, des bateaux, ...), qui sont “qualifiés” suivant des critères de couleur (bleu, gris), de luminosité (obscures), de température (froid), de résistance (dur), de taille (gros) et, presque sur le même plan, ce monde comprend aussi des “choses” immatérielles (bruit, odeur), elles-mêmes qualifiées (sourd, forte).

A part une très vague indication de taille (le gros rocher), il n'y a aucune indication de *forme* à proprement parler, ce qui, en ouverture d'une étude intitulée *Psychologie de la forme*, peut sembler étonnant. Si elles ne sont pas explicites, les indications de forme sont cependant sous-jacentes, sous-entendues par l'emploi de mots qui renvoient à des catégories de formes : le lac, les forêts, le rocher, les bateaux, etc., sont pour nous évocateurs de choses qui ont des formes particulières.

Le texte de Köhler contient très peu d'indications de positions ou de localisations (ce que l'on qualifie généralement de “spatial”) : le lac est “entouré” de forêts ; l'odeur “vient des bateaux”, mais il s'agit là plutôt d'une interprétation, comme d'ailleurs l'origine du bruit sourd (le vent remuant les feuillages) : ces *choses* immatérielles ont besoin d'une cause, et l'auteur la précise. En tant que faisant partie du monde, l'auteur est assis *sur* le rocher (du moins on peut l'imaginer, même s'il dit seulement qu'il l'a “élu comme siège”), et il écrit “sur” le papier ; plus encore, l'auteur est *quelque part* dans ce monde, même si cela est sous-entendu et peu précisé : rendre compte du monde implique d'y être.

Peu de précisions, donc, dans cette description, et en particulier concernant l'espace, c'est-à-dire la disposition des choses, leur configuration, leurs mesures relatives. C'est le cas de beaucoup de

descriptions, et Raymond Queneau s'est amusé à pousser à l'absurde ce que serait une description plus précise, dans *Les Fleurs bleues* :

“(…) il porte une casquette carrée semi-ronde ovale en drap orné de pois blancs. Le fond est noir. Les pois sont de forme elliptique ; le grand axe de chacun d’eux a six millimètres de long et le petit axe quatre, soit une superficie légèrement inférieure à dix-neuf millimètres carrés. La visière est faite d’une étoffe analogue, mais les pois sont plus petits et de forme ovale. Leur superficie ne dépasse pas dix-huit millimètres carrés. Il y a une tache sur le troisième pois à partir de la gauche, en comptant face au porteur de la casquette et au plus près du bord.” (Raymond Queneau, *Les Fleurs bleues*, *Romans II, Œuvres complètes III*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 2006, pp. 1044-5)

Où l’on voit qu’il serait bien fastidieux de décrire *précisément* et *exactement* le monde…

L’image du monde, si nous ne nous y arrêtons pas pour la décrire ou simplement y être attentifs, nous est donnée comme un tout ; devant la décrire, nous en extrayons des éléments auxquels nous associons des mots. Il est étonnant qu’en si peu de mots, avec si peu de précision et de détails, nous ne puissions malgré tout nous empêcher d’imaginer plus ou moins le paysage décrit par Köhler : sans doute les images que nous avons en tête fluctuent, sûrement elles sont différentes suivant le lecteur, et certainement toutes très différentes de la scène réelle, mais, et c’est là tout le pouvoir de la littérature (bien que l’auteur ne soit pas un écrivain, au sens créatif du terme), ces quelques mots évoquent quelque chose en nous.

Pourtant, quelles lacunes ! Nous ne savons pas si le ciel est clair ou nuageux (bien que le lac, lui-même bleu par réflexion sans doute, en soit une indication), il n’y a d’ailleurs pas de ciel dans le monde de l’auteur… Fait-il chaud ou froid, de quelle taille est le lac, l’auteur est-il tout au bord de ce lac, sur la rive, ou en retrait, voire en surplomb, etc. ? La description est courte, certes, et ces précisions-là pourraient être ajoutées. Mais jusqu’où faudrait-il aller pour rendre un compte exact de l’image du monde, pourtant perçue dans sa totalité et sa complexité en un temps très court ? Faudrait-il compter toutes les feuilles des arbres, et rendre compte de la forme exacte de chacune ? Et pourtant, si celles-ci étaient plus ou moins nombreuses, de formes différentes, l’expérience ne serait pas totalement identique…

Vanité de la description face à la complexité de l’image du monde, vanité de l’épuisement de la réalité… Raymond Roussel a tenté, dans un de ces coups de folie littéraires dont il a le secret (et le génie), d’épuiser la description d’une scène dans quelques-uns de ses textes, *La vue*, *Le Concert* et *La Source*⁶. Le principe est le même dans les trois textes : décrire minutieusement (le terme n’est pas assez fort) une image ; dans *Le Concert* c’est l’illustration d’un papier à lettres d’hôtel, dans *La Source*, celle de l’étiquette d’une bouteille d’eau minérale. Il s’agit dans *La Vue* d’une minuscule photographie (une “vue”) enchâssée au bout d’un porte-plume, détaillée en soixante-quatre pages, et

⁶ recueillis dans : Raymond Roussel, *La Vue*, Jean-Jacques Pauvert, 1963



6 Lac Memphrémagog

en alexandrins... La scène représente une plage, mais il nous décrit pour commencer “au loin, perdu parmi les vagues, un pêcheur” dans sa barque :

“(…)

Il a de gros sourcils épais couvrant des yeux
Encore illuminés, vifs ; sa barbe est inculte ;
Son apparence rude et rustique résulte
De son teint foncé, brun, hâlé par le soleil
Et par l’air ; son sourcil gauche n’est pas pareil
Au droit ; il est plus noir, plus important, plus dense
Et plus embroussaillé dans sa grande abondance.

(…)” (*op. cit.*, p. 11)

Sachant qu’il y a sur la mer également un yacht, plusieurs barques, d’autres bateaux, que chaque embarcation est décrite en détail ainsi que chacun de ses occupants, et qu’enfin la plage et ses abords subissent le même traitement, on se rend compte de l’énormité du défi. Il ne dénombre pas les grains de sable de la plage, mais presque... Les titres des livres de Roussel font partie de l’énigme⁷ que représente cet auteur auquel il faut toujours rendre “ce qui lui est (...) dû”, comme le reconnaît Michel Foucault⁸ ; ces trois textes n’ayant pas autant de succès auprès de l’exégèse critique que ceux qui relèvent du fameux “procédé”, leurs titres apparemment si banals n’ont pas soulevé de question, mais il n’est sans doute pas innocent que Roussel ait choisi d’intituler “La vue” un texte mettant si parfaitement en évidence, par l’absurde, l’inanité de l’ambition d’exhaustivité de la description de ce que nous offre ce sens si généreux.

Cette question n’est même pas qu’une question de description, de représentation. Nous avons face à nous, à tout moment, le monde dans toute sa complexité, nous n’en voyons pas une image simplifiée, mais pleine de détails que, si seulement nous avions le temps, nous pourrions dénombrer. Mais heureusement nous ne nous rendons pas compte de cette complexité, la plupart du temps... Parce que ce serait insupportable, s’il fallait réaliser que nous avons dans le cerveau, dans la mémoire, toutes ces informations, pour la plupart inutiles, nous serions comme le funeste Funes :

“D’un coup d’œil, nous percevons trois verres sur une table ; Funes, lui, percevait tous les rejets les grappes et les fruits qui composent une treille. Il connaissait les formes des nuages austraux de l’aube du trente avril mil huit cent quatre-vingt-deux et pouvait les comparer aux marbrures d’un livre en papier espagnol qu’il n’avait regardé qu’une fois et aux lignes de l’écume soulevée par une rame sur le Rio Negro la veille du combat du Quebracho. Ces souvenirs n’étaient pas simples ; chaque image

⁷ en effet, *Nouvelles Impressions d’Afrique* n’a que peu à voir avec l’Afrique, ni d’ailleurs avec les premières *Impressions d’Afrique*...

⁸ Michel Foucault, *Les Mots et les Choses*, Gallimard, 1966, préface p. 9 ; voir aussi, au sujet des poèmes de *La Vue*, “La surface des choses”, in : Michel Foucault, *Raymond Roussel*, Gallimard, 1963

visuelle était liée à des sensations musculaires, thermiques, etc. (...) Une circonférence sur un tableau, un triangle rectangle, un losange, sont des formes que nous pouvons percevoir pleinement ; de même Ireneo percevait les crins embroussaillés d'un poulain, quelques têtes de bétail sur un coteau, le feu changeant et la cendre innombrable, les multiples visages d'un mort au cours d'une longue veillée. Je ne sais combien d'étoiles il voyait dans le ciel." (Jorge-Luis Borges, *Funes ou la Mémoire*, in *Fictions, Œuvres complètes I*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1993, pp. 514-515)

Et pourtant, il faut bien que ce soit là, quelque part, puisque nous ne pouvons fonctionner dans ce monde que parce que nous nous y reconnaissons, et que d'ailleurs, parfois, nous sentons que quelque chose a changé, sans savoir dire quoi, quelque chose de minime, de presque imperceptible, dans un environnement que nous redécouvrons.

D'autant que le monde change, à tout moment, même "imperceptiblement", à chaque fraction de seconde. Le vent remue, certes "à peine" mais tout de même, les feuillages, et doit provoquer des rides légères sur l'eau du lac, et sans doute la luminosité n'est pas absolument constante... L'évocation de sons implique une certaine temporalité. On oppose souvent la description, qui serait de l'ordre de la spatialité, au récit, qui serait du côté de la temporalité. Mais, de même que le récit ne peut se passer totalement de spatialité, la description, non plus, ne peut se passer de la temporalité : ne serait-ce que parce qu'il faut bien que certaines choses *persistent* pour qu'on puisse les décrire... Même si nous faisons comme si la description était une image arrêtée, nous savons bien que cette instantanéité est impossible.

Un monde perceptible par nos sens

Le monde est là même si l'auteur de la description ferme les yeux ou se bouche les oreilles, mais s'il lui parvient, et même s'il ne le mentionne pas, c'est bien à travers ses organes sensoriels : les yeux, les oreilles, le nez, la peau... Sa description ne mentionne pas de saveur, donc le goût n'intervient pas, mais les autres sens : la vue, l'ouïe, le toucher, l'odorat, sont mis à contribution. L'auteur peut dire que le rocher est gris parce qu'il le voit, qu'il est dur et froid parce qu'il le touche et qu'il est gros, grâce à la vue et/ou au toucher...

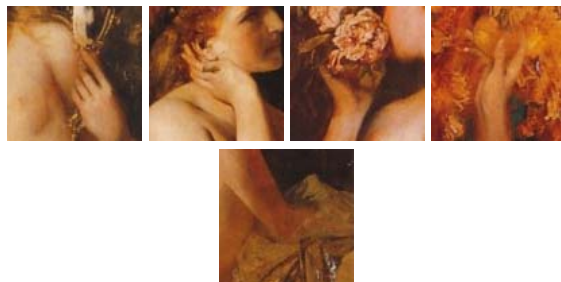
Nous allons donc maintenant nous arrêter sur ce qui nous met en rapport avec ce monde complexe : les sensations.



7 Lac Memphrémagog



8 Hans Makart *Les cinq sens*



9 Hans Makart *Les cinq sens* (détails)

I.1.2 Les sensations

Les cinq sens et les organes sensoriels

Chacun sait, depuis sa plus tendre enfance, que les sens sont au nombre de cinq : la vue, l'ouïe, l'odorat, le goût et le toucher. Si les quatre premiers sont effectivement bien spécifiques, le cinquième, le toucher, est plus complexe, et d'autre part certaines fonctions vitales de type sensoriel ne sont pas incluses dans cette liste, ce qui a amené les spécialistes à la modifier. Cependant nous commencerons par essayer de caractériser les cinq sens, tels qu'ils nous sont traditionnellement connus. Nous admettrons aussi que les sensations passent par des *organes sensoriels* spécifiques, qui ont une certaine configuration physiologique et possèdent des *récepteurs* particuliers qui réagissent à des *stimuli* issus du monde physique ; ces stimuli, traduits en influx nerveux étant ensuite traités par des zones spécifiques du cerveau. Ces assumptions sont confirmées par les expériences que nous pouvons faire en nous privant volontairement de l'usage de tel organe sensoriel (en fermant les oreilles ou en nous bouchant les oreilles, par exemple) ou par les études faites sur des personnes atteintes d'un handicap sensoriel partiel ou total ; même si ces deux types de connaissance sont radicalement différents : on ne peut s'ôter le souvenir de la vue, du monde perçu par la vue, simplement en fermant les yeux...

Les cinq sens correspondent *a priori* à des organes précis de notre corps : les yeux, les oreilles, le nez, la langue (bien qu'on parle du "palais" d'un gourmet) et la peau. Tous ces organes sont probablement le résultat, par l'évolution, d'une transformation et d'une sophistication de la peau et des nerfs qui s'y attachent. Ce qui est sûr c'est que tous nos organes sensoriels se situent plus ou moins à la surface de notre corps, en interface entre notre corps et le monde extérieur, la peau en étant l'exemple le plus absolu.

Si la vue, l'ouïe et l'odorat ont une véritable spécificité par rapport au toucher (on ne "touche" pas avec les yeux ou les oreilles, ou du moins pas avec la rétine ou le tympan, ni même avec la muqueuse du nez, organes bien protégés à l'intérieur d'un dispositif plus ou moins fermé), il n'en est pas vraiment de même pour le goût : la langue permet tout autant de "toucher" que de "goûter", elle est d'ailleurs mise à contribution de cette façon par l'enfant pour découvrir son environnement...

La peau enveloppe tout notre corps, devient muqueuse dans ses replis, l'"organe" du toucher est donc très diffus, même si le bout des doigts a une acuité particulière. Etant diffus, le toucher est aussi le sens auquel nous pouvons le plus difficilement échapper : nous pouvons "couper" nos autres organes du monde extérieur, fermer les yeux, nous boucher les oreilles, le nez, etc., mais comment isoler du monde extérieur la peau qui nous recouvre entièrement (les vêtements ou toute matière dont nous pouvons recouvrir notre corps faisant eux-mêmes partie du monde extérieur) ?

Lorsque nous fermons tous les organes sensoriels que nous pouvons, il reste ce que nous ressentons de façon interne de notre corps : nous entendons notre cœur, ou plutôt nous le "sentons" battre, nous



10 Antoine Watteau, *Musicien jouant du violoncelle*
Sanguine et pierre noire

ressentons nos mouvements de respiration, etc. Les sensations ressenties à l'intérieur de notre corps sont plutôt de l'ordre du toucher que de la vue, de l'ouïe, etc. Comme dirait Knock, ça nous "gratouille" ou ça nous "chatouille", ça nous chauffe ou ça nous pèse, mais ça n'est ni rouge ni sucré...

Le toucher est le sens le plus lié à toutes nos actions : nous *touchons* l'objet que nous sommes en train de fabriquer, et, si l'ouïe est indispensable pour vérifier un son, un musicien pourrait-il jouer du violon sans sentir dans sa main la tension de l'archet sur les cordes ? Mentionnons aussi le fait que l'homme, ainsi que la plupart des primates, utilise souvent la main, organe du toucher, pour amener à ses autres organes sensoriels les éléments de son environnement : pour goûter un fruit, pour sentir une fleur, écouter le son de la mer dans un coquillage, ou voir de près les détails d'un objet. Et c'est la main, du moins dans notre civilisation, qui est la seule partie du corps d'un inconnu que nous accepterons de toucher sans difficulté.

Le rapport qu'entretient notre corps au monde perçu par l'intermédiaire de nos organes sensoriels est différent suivant les sens : la vue, l'ouïe, l'odorat, sont des sens "à distance", le toucher (ou sens *tactile*), de façon tautologique, nécessite au contraire le *contact* ; le goût, qui est une sorte de toucher spécialisé, nécessite aussi le contact.

Il faut remarquer cependant que dans tous les cas, il faut bien que *quelque chose* arrive en contact avec l'organe sensoriel pour que nous percevions quelque chose : les objets visibles sont peut-être éloignés, mais les rayons de lumière qu'ils réfléchissent doivent bien parvenir à notre rétine pour que nous les voyions ; même dans ce cas, il y a donc une forme de contact, mais qui n'est pas ressentie comme tel, sauf si nous fixons le soleil, et ressentons la brûlure que cette lumière trop forte occasionne à la rétine. De la même façon, les vibrations de l'air ou les composantes chimiques qu'il transporte doivent bien parvenir jusqu'à notre tympan ou notre muqueuse nasale pour que nous entendions ou sentions quelque chose.

La vue ne nous livre que la part du monde qui appartient au champ visuel, en gros ce qui est devant nous, alors que l'ouïe et l'odorat sont accessibles à toutes les directions de l'environnement. D'un autre côté, la vue permet d'accéder à des objets très lointains, nonobstant leur réduction par la perspective, alors que l'ouïe et l'odorat sont plus limités (au maximum resp. quelques kilomètres, et quelques centaines de mètres). La vue peut être perturbée par l'air : la diffusion de Rayleigh fait que nous voyons le ciel bleu, la réfraction dans des couches d'air de températures différentes provoque des mirages, et un air chargé en gouttelettes ou poussières est moins transparent et donc réduit l'acuité visuelle ; mais en général, la vue est relativement indépendante de l'air, de son état, de ses mouvements, alors que l'ouïe et l'odorat en sont directement redevables, puisque l'air est le support physique de leurs données. Dans l'espace intersidéral, l'homme continue à voir, mais il n'entend, ni

ne “hume” plus (et de toutes façons, sans un équipement spécial qui recrée un environnement favorable, il ne peut plus vivre).

Sensations et affections

Le mot “sensation” a deux acceptions : la première, du domaine de la physiologie, celle qui nous retient ici, est celle de

“Phénomène par lequel une stimulation physiologique (externe ou interne) provoque, chez un être vivant et conscient, une réaction spécifique produisant une perception; état provoqué par ce phénomène. *Sensation gustative, olfactive, tactile, visuelle; sensation du goût, du tact, du toucher, de la vue. Sensation de chaud, de froid; sensation de faim, de soif; sensation d'acidité, d'aigreur, d'oppression, de picotement.*”⁹

La seconde :

“ État de conscience plus affectif qu'intellectuel; perception immédiate (d'un état physique ou moral). *Sensation agréable, délicieuse, exquise, enivrante, forte, subtile, vive; sensations violentes; sensation d'attente, de dégoût, d'écœurement, de fatigue; accroître, diminuer les sensations.*”

relève plus de la psychologie ; mais ce n'est sans doute pas par hasard que nous employons le même mot.

Les données sensorielles sont là essentiellement pour nous prévenir des dangers, ou des opportunités, de notre environnement. C'est pourquoi chaque sens a ses contreparties de désagréments, voire de douleurs. Le toucher est le plus affecté, puisque le danger mortel vient généralement d'un contact : avoir “mal” concerne plus particulièrement le sens du toucher. Bien sûr une lumière aveuglante “blesse” la vue ; un son trop fort ou perçant heurte les tympans ; le piment “brûle” la langue et l'œsophage ; mais les douleurs les plus fortes sont associées au toucher, comme les agressions qui s'attaquent à la peau, mais aussi forcément au corps qu'elle enveloppe et protège : coups, blessures, brûlures... En contrepartie, c'est par le toucher aussi que l'on connaît les plus grands plaisirs...

En deçà de la douleur, les données sensorielles sont susceptibles d'appréciation ; on trouve agréable ou désagréable telle couleur ou association de couleurs, tel son, telle saveur, telle texture, etc. Beaucoup de ces appréciations sont probablement apprises et culturelles : après tout, les animaux ne sont pas dégoûtés par l'odeur des excréments, ni même les très jeunes enfants... Certaines de ces appréciations peuvent être fonctionnelles : le sens du goût est probablement là pour nous avertir de la qualité nutritive de tel aliment, ou nous prévenir du danger que peut présenter l'ingestion de telle substance nocive ; d'où l'attrait pour le sucré, indice d'un aliment hautement énergétique, et la réticence à l'amer, souvent présent dans les poisons. Mais, au-delà de ces signaux primaires, toutes les civilisations humaines, depuis longtemps, ont développé tout un ensemble d'habitudes alimentaires,

⁹ portail lexical du Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales : <http://www.cnrtl.fr>

plus ou moins sophistiquées, qui éduquent notre sens du goût ; et l'on sait que tel aliment qui nous semble mauvais peut être très apprécié ailleurs, et réciproquement.

Rapport à l'intention

Chaque verbe sensoriel renvoie à ce qui peut sembler une “action” (après tout, nous pouvons toujours fermer les yeux et nous boucher les oreilles) : pour la vue et l'ouïe *voir* et *entendre*. Ces verbes ont un double sens : on peut dire “je vois”, pour dire qu'on a compris quelque chose ; “entendre” a longtemps signifié “comprendre”, il a gardé ce sens dans le mot “entendement”. On distingue pourtant généralement ces termes d'autres verbes plus “actifs”, en particulier pour la vue et pour l'ouïe : “regarder” s'oppose à simplement “voir”, comme “écouter” s'oppose à “entendre”, pour exprimer une volonté, une attention plus forte. Mais ces termes se retournent, on peut *regarder*, même intensément, sans rien *voir*, que ce soit une figure de géométrie qui ne nous livre pas la solution du problème, le lieu du crime où l'on ne trouve pas d'indices (même mis en évidence, comme la fameuse “lettre volée” d'Edgar Poe), ou les traces d'un désastre qu'on n'a pas vécu (“Tu n'as rien *vu* à Hiroshima”).

Les autres verbes sensoriels sont plus ambigus. Le français ne dispose pas vraiment de verbe spécifique à l'odorat : on dit *sentir* lorsque les anglophones précisent *to smell* ; il y a bien *hummer*, ou *flairer*, mais ces termes ne sont pas d'un emploi si courant. On dit *sentir* aussi pour le toucher, et c'est le même mot, très général, qui exprime toute sensation, voire toute émotion ; *sentir* est alors l'équivalent de *to feel*. Quant au verbe toucher, il peut renvoyer au tactile ou à l'émotion.

Le caractère volontaire ou non de la sensation distingue la vue et le toucher ; certes, je peux fermer les yeux, mais si j'ai les yeux ouverts je ne peux m'empêcher de voir tout ce qui est présent dans mon champ visuel, alors que toucher les objets qui me sont accessibles nécessite une action volontaire.

Quelque chose ou quelqu'un peut me toucher, ce qui n'est pas ressenti de la même façon que si je touche quelque chose ou quelqu'un : c'est le même contact, mais l'intention est absente. Je peux toucher mon propre corps, mais cette sensation est différente de celle que j'éprouve si un objet, ou surtout une autre personne me touche, parce que j'ai conscience à la fois des deux parties de mon corps qui se touchent : anecdotiquement, il est très difficile de se chatouiller soi-même ! Je peux voir aussi une partie de mon corps, mais si je peux toucher pratiquement toute la surface de mon corps, je ne peux pas la voir, sauf à user de miroirs... Les autres êtres vivants me voient aussi, de même qu'ils m'entendent, me sentent, mais je n'en ai pas vraiment conscience, ou plutôt j'en ai une conscience vague, sauf circonstances particulières. On parle de “contact visuel” lorsque deux personnes se voient (ou plutôt se regardent) mutuellement ; si je vois les yeux d'une autre personne, je sais qu'elle peut me voir, je peux même m'apercevoir par des signes infimes qu'elle me “voit” vraiment (il ne suffit pas qu'elle soit tournée dans ma direction), voire qu'elle me reconnaît, ou qu'elle me regarde.

Nous sommes des objets du monde pour les autres êtres vivants, pour leurs sens ; la plupart du temps, nous sommes de simples émetteurs passifs : on ne peut pas grand chose à son propre aspect, à son odeur, etc. ; sauf si l'on cherche à attirer l'attention par des gestes, des sons particuliers. Si nous sommes mis en présence d'une représentation de nous-mêmes telle que les autres nous perçoivent (si nous sommes filmés, enregistrés), il est bien connu que cette image, censée être celle que les autres perçoivent de nous, nous paraît bizarre, presque étrangère, nous met mal à l'aise ; même les acteurs ont du mal à se regarder dans leurs films, et nous-mêmes ne reconnaissons pas forcément notre propre silhouette, alors que nous identifions nos proches instantanément. Notre voix, en particulier, que nous percevons pourtant de l'intérieur, mais différemment, nous étonne lorsque nous l'entendons telle que les autres la perçoivent.

Stimuli et récepteurs

Chacun des quatre premiers sens, que les spécialistes qualifient actuellement de sens “spéciaux”, ou “spécialisés”, correspond physiologiquement à des récepteurs d'un type particulier : pour la vue, des récepteurs sensibles à la lumière (et particulièrement trois types de récepteurs sensibles aux longueurs d'onde correspondant en gros au rouge, au vert et au bleu ; ce qui fait de nous des êtres “trichromates”), ou *photorécepteurs* ; pour l'ouïe des récepteurs sensibles aux vibrations de l'air, et qui font partie des *mécanorécepteurs* ; pour l'odorat et le goût des récepteurs chimiques, ou *chimiorécepteurs*.

La machine complexe qu'est le corps humain combine ces récepteurs dans des dispositifs physiologiques sophistiqués aptes à nous permettre de capter telle ou telle émission particulière de notre environnement. L'œil est une machine optique permettant de concentrer les rayons lumineux (l'iris et le cristallin) et de les projeter sur une surface photosensible (la rétine), l'information ainsi recueillie étant transmise au cerveau via le nerf optique. Le pavillon de l'oreille, un peu de la même façon, permet de diriger les sons vers l'ensemble du dispositif (oreille moyenne et interne) qui amplifie et traduit ces vibrations en influx nerveux. Le nez et la bouche, enfin, sont les dispositifs qui permettent de mettre en contact les molécules avec les chimiorécepteurs de la muqueuse olfactive et des papilles de la langue.

Par le toucher nous recevons des stimuli de deux types, au moins, la pression et la température, mettant en jeu des *mécanorécepteurs* et des *thermorécepteurs*. Certains auteurs font même de la douleur (de type démangeaison) l'objet de récepteurs particuliers ; auquel cas il ne faudrait pas oublier les récepteurs du plaisir... D'autre part, on l'a vu, des sensations proches de celles du toucher, mais internes, existent aussi : on peut les grouper sous l'appellation de *sensations viscérales*... La sensibilité à la température, qui a son type de récepteur particulier, pourrait être assimilée à un sens spécial ; mais comme elle est combinée aux autres sensations tactiles, et qu'elle est ressentie aussi bien en externe qu'en interne, on préfère en général l'exclure des sens spéciaux. On peut donc, si l'on



11 Marcel Duchamp *Nu descendant un escalier*

aime les classifications, estimer qu'il n'y a que quatre sens spécifiques : la vue, l'ouïe, l'odorat, le goût ; et un ensemble de sensations que l'on groupe sous le nom de sensations *somatiques*, et qui incluent le toucher.

Enfin il faut remarquer que les stimuli, même s'ils sont plus spécialement traités par certains récepteurs, peuvent agir aussi sur d'autres : même si nous sommes aveugles, ou simplement si nous fermons les yeux, nous "sentons" la lumière du soleil sur notre peau, qui d'ailleurs y réagit en produisant des pigments¹⁰ ; et les sourds ressentent les vibrations sonores, en particulier les basses fréquences, dans tout leur corps.

Un sixième sens ?

Les physiologistes contemporains nous apprennent que nous disposons d'un "sixième" sens, ou plutôt d'un ensemble de sensations qu'ils regroupent sous le terme de *kinesthésie* et/ou de *proprioception*¹¹. Plus exactement, nous disposons d'un sens *externe* (c'est-à-dire de façon analogue aux cinq sens classiques, nous mettant en rapport avec le monde extérieur) : le sens de l'équilibre, et d'un sens ou ensemble de sens *internes* qui nous indiquent si notre corps est en train de se déplacer et où les différentes parties de notre corps sont situées les unes par rapport aux autres. La kinesthésie inclut le sens externe de l'équilibre, la proprioception concerne uniquement les sensations internes : le mouvement, et l'attitude du corps ou posture.

L'organe du sens de l'équilibre est le *vestibule*, situé dans l'oreille interne. C'est ce qui fait que certaines personnes souffrant de troubles de l'oreille ne sont pas de bons candidats aux vols interplanétaires, ou tout simplement sont malades en voiture... ou qu'ils auront du mal à garder leur équilibre les yeux fermés. L'appareil vestibulaire se constitue de trois canaux semi-circulaires, disposés orthogonalement dans les trois plans. Lorsque l'oreille est soumise à un mouvement, l'inertie de ce liquide rend ce mouvement détectable par des cellules ciliées, tout à fait similaires à celles de la cochlée. La disposition des trois canaux en trois plans orthogonaux permet de détecter la position angulaire de la tête dans toutes les directions possibles.

Les sensations d'attitude et de mouvement reposent sur des informations issues de récepteurs situés également dans l'oreille interne, mais aussi dans les muscles et les ligaments ; ces récepteurs sont très liés au sens du toucher dans son aspect "actif", ce que l'on appelle la perception tactilo-kinesthésique ou *haptique* (mot qui vient du verbe grec signifiant "toucher") et qui résulte de la stimulation de la peau résultant des mouvements actifs d'exploration de la main entrant en contact avec des objets. C'est ce qui se produit quand, par exemple, la main et les doigts suivent le contour d'un objet pour en

¹⁰ Cependant il faudrait préciser qu'il s'agit de longueurs d'onde de la lumière qui ne sont pas dans le domaine du "visible".

¹¹ Pour tout ce qui concerne la kinesthésie et la proprioception, source : Alain Berthoz, *Le sens du mouvement*, Editions Odile Jacob, Paris, 1997.

apprécier la forme. Dans ce cas, il s'ajoute nécessairement à la déformation mécanique de la peau celle des muscles, des articulations et des tendons qui résultent des mouvements d'exploration.

Les sensations kinesthésiques sont reliées à tous nos autres sens et en particulier à la vue : même si nous n'en sommes pas conscients, nos yeux sont constamment animés de micro-mouvements, ou *saccades*, qui leur permettent de “balayer” certaines zones du champ visuel et qui interviennent dans la perception de la spatialité ; les sensations, plus ou moins inconscientes, liées à l'accommodation (le mécanisme par lequel l'œil s'adapte à des éloignements différents par la déformation du cristallin), sont elles aussi de type kinesthésique : il s'agit en effet de l'action de muscles, les muscles ciliaires.

On peut donc, dans cette classification, considérer le toucher passif, sans exploration, comme le cinquième sens que nous connaissons (et qui nous informe sur la température, et dans une certaine mesure sur la dureté, par exemple), et en distinguer le toucher actif, exploratoire, qui, associé au système kinesthésique, fournit donc un “sixième” sens, qui contribue d'ailleurs fortement à notre perception de l'espace.

La perte ou le manque d'un sens peut provenir de la perte ou du manque à la naissance de l'organe sensoriel correspondant, ou bien d'un dysfonctionnement nerveux ou cérébral. Quelle qu'en soit la provenance, la cécité, la surdité, voire l'absence d'olfaction ou de goût sont assez connues, et ont été étudiées depuis longtemps. Nous savons que, même s'il s'agit de handicaps sévères, ces manques ou ces pertes, et même la cécité, n'empêchent pas un comportement “normal” du point de vue de la posture, de l'équilibre, du repérage dans l'espace ou des déplacements, etc., du moins quand la société elle-même ne vient pas y mettre des obstacles supplémentaires.

Mais qu'en est-il des sensations kinesthésiques ? D'abord, ses récepteurs ne sont pas localisés dans un organe spécifique, mais distribués dans tout le système musculaire, et dans la peau. Or, il est impossible de vivre sans peau, qui n'est pas que l'organe sensoriel du toucher, mais un organe vital d'échange : les grands brûlés ont comme moindre souci de perdre le sens du toucher... D'autre part, les enfants qui naissent avec un handicap moteur, et donc aussi avec un handicap kinesthésique, ne sont pas laissés à eux-mêmes ; étant pris en charge par la communauté humaine, et éduqués, ils peuvent compenser leur manque par cette communion avec la perception des autres. Et puis ils ne sont en général pas privés de tout mouvement : il reste en général au moins le mouvement des yeux, qui permet de construire la spatialité en rapport avec la vue.

Par ailleurs, si la perte ou le manque est d'origine cérébrale, il est possible que certaines affections qualifiées de “mentales”, certaines formes d'autisme grave, par exemple, soient liées à un dérèglement du système kinesthésique¹².

¹² cette hypothèse est émise par Alain Berthoz dans *Le sens du mouvement* : “L'autisme, une désagrégation de la cohérence ?”, pp. 103-105

De plus nous avons déjà signalé que, même si cela n'a rien à voir avec l'absence complète et innée de sensations, il est possible de simuler dans une certaine mesure la cécité ou la surdité simplement en occultant les yeux ou les oreilles ; par contre il est impossible de complètement occulter le sens du toucher. Il est même quasiment impossible de s'imaginer les conséquences d'une telle perte. La perte du sens du toucher peut subvenir cependant, par atteinte de la plupart des nerfs qui transmettent l'information sensorielle au système nerveux central. Gabriel Robles-De-La-Torre mentionne deux tels cas, et discute les conséquences d'un tel handicap. Ces patients n'ont pas perdu leurs capacités motrices, ni d'ailleurs les sensations de température ou de douleur, mais ils ont perdu le sens kinesthésique, et les dommages consécutifs sont importants, comme le mentionne l'auteur :

“Immediately after the loss, Mr. Waterman couldn't walk or stand upright. He could move his limbs, but couldn't control them in a precise way. When he wasn't looking at his limbs, he couldn't tell their position or whether they were moving. (...) Sometimes his arms would unwittingly hit him. When lying in bed, he could not feel his body or the bed itself. The resulting floating sensation was terrifying. (...) These days, to perform an action, Mr. Waterman must visually track the state of his body and environment, and exert an extensive, conscious effort to apply appropriate muscle force during the right duration to accomplish the task at hand. Decades after losing his sense of touch, Mr. Waterman must apply this visually guided, conscious effort to perform most purposeful actions. This goes on every moment of every day. Mr. Waterman compares this effort to running a daily marathon. Early on with his illness, when visual information was unexpectedly interrupted (as when lights go off) and he was standing up, Mr. Waterman immediately fell to the floor. This was because of his inability to supervise his body without sight. Years later, Mr. Waterman could avoid falling in such situations only by exerting an incredible, conscious effort to tense many of his muscles. Maintaining this effort during a few minutes resulted in a complete mental and physical exhaustion that required several days of rest for recovery.”¹³

Trad. : “Immédiatement après sa perte [du sens du toucher], Mr. Waterman ne pouvait pas marcher ni se tenir debout. Il pouvait bouger ses membres, mais ne pouvait pas les contrôler d'une manière précise. Quand il ne regardait pas ses membres, il ne pouvait pas dire leur position, ni si ils bougeaient. (...) Parfois ses bras le frappaient involontairement. Allongé dans son lit, il ne pouvait pas sentir son corps ni le lit lui-même. La sensation de flottement qui en résultait était terrifiante. (...) Aujourd'hui, pour effectuer une action, Mr. Waterman doit contrôler visuellement l'état de son corps et de l'environnement, et exercer un effort intense et conscient pour appliquer la force musculaire adéquate pendant la juste durée en vue d'accomplir la tâche en question. Des décades après avoir perdu le sens du toucher, Mr Waterman doit exercer cet effort conscient, guidé par la vue, pour accomplir la plupart des gestes. Cela arrive à tout moment de chaque jour. Mr Waterman compare cet effort à courir un marathon quotidien. Au début de sa maladie, quand l'information visuelle était

¹³ Gabriel Robles-De-La-Torre, “The Importance of the Sense of Touch in Virtual and Real Environments”, © 2006 IEEE

interrompue soudainement (comme quand les lumières s'éteignaient) et qu'il était debout, Mr Waterman tombait immédiatement par terre. C'était parce qu'il n'était pas capable de contrôler son corps sans la vue. Des années plus tard, Mr Waterman ne pouvait éviter de tomber dans de telles situations qu'en exerçant un effort conscient, incroyable, pour contracter de nombreux muscles. Maintenir cet effort pendant quelques minutes résultait en un épuisement mental et physique complet qui lui demandait plusieurs jours de repos pour s'en remettre."

Le seul monde que nous puissions vraiment concevoir est celui que perçoit l'être humain. Il est probable que les animaux qui disposent d'organes sensoriels différents du nôtre évoluent dans un monde différent. Certains animaux sont sensibles à des longueurs d'onde qui n'appartiennent pas au champ de la lumière dite "visible" parce qu'elle est visible pour nous, ou perçoivent les ultrasons, qui nous échappent, etc.¹⁴. Même parmi les humains, des différences notables peuvent exister, suivant les anomalies qui touchent tel ou tel sens. Il est de toutes façons très difficile de véritablement savoir ce que perçoit réellement une autre personne. Des êtres humains dont le système sensoriel est différent (déficient ou, peut-être, sur-efficient pour certains sens) ne perçoivent sans doute pas le monde de la même façon que le reste de l'humanité.

L'homme a développé toutes sortes d'instruments, d'appareillages, pour aller au-delà des limitations de ses organes sensoriels (et surtout de la vue). Les lentilles (lunettes, télescopes, microscopes, etc.) permettent de voir plus net, plus loin, plus gros : mais en définitive ce sont toujours nos yeux qui regardent. Les appareils qui permettent de capter les ondes qui sont hors du champ du visible (infrarouge, rayons X, etc.) traduisent cette réalité extra-sensorielle en images *visibles*. Le radar fonctionne un peu comme le système des chauves-souris (sauf qu'il s'agit d'ondes électromagnétiques, et non ultra-sonores), mais nous traduisons ses résultats en images (visuelles) sur un écran. Toute tentative pour nous sortir de notre condition sensorielle doit en revenir à un moment donné aux sens tels qu'ils sont, et donc à nos organes sensoriels.

Mais de la sensation à la perception, il y a un pas. La plaque ou la pellicule, justement dite "sensible" de l'appareil photo (c'est la même chose s'il s'agit de numérique) reçoit d'une façon équivalente (à peu de choses près) à la rétine les rayons de lumière, mais on ne peut pas dire qu'elle "perçoive" quoi que ce soit. Il faut bien qu'un être humain déchiffre cette photo pour qu'il y ait quelque chose de perçu.

¹⁴ " Les pigeons, qui sont tétrachromates, c'est-à-dire qui possèdent quatre types de pigments rétiniens alors que nous n'en avons que trois, distinguent des couleurs qui sont indifférentiables par nous." : Jean-Marc Lévy-Leblond, *Aux contraires L'exercice de la pensée et la pratique de la science*, Gallimard, 1996, p. 381.

I.1.3 Les champs perceptifs

“La perception commence au changement de sensation; d'où la nécessité du voyage.” (André Gide, *Paludes, Romans*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1958, p. 112)

En psychologie, la perception désigne l’“opération psychologique complexe par laquelle l'esprit, en organisant les données sensorielles, se forme une représentation des objets extérieurs et prend connaissance du réel”¹⁵. Dire que la sensation est première, et que la perception vient après, comme une opération, même inconsciente, de déchiffrement, est sans doute logique dans le cadre d’un exposé, mais certainement faux quant au fonctionnement réel de l’être humain. S’il fallait que le cerveau analyse continuellement les données qui lui sont transmises dans toute leur complexité pour en tirer des conclusions quant à la situation actuelle, et même si la transmission entre neurones est très rapide, ce serait tout de même très peu économe en temps.

Cependant nous admettrons pour l’instant ce postulat, et essayerons de comprendre comment l’on passe des sensations à ce que nous appellerons des *champs perceptifs*.

Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux caractéristiques du monde extérieur, du monde *objectif*, tel qu’il nous apparaît, comme un ensemble de choses (dont on a vu qu’elles pouvaient être matérielles ou immatérielles), d’*objets* dotés de *qualités*¹⁶.

Les champs perceptifs entre phénomènes physiques et physiologiques

Nous avons vu que les sens mettent en jeu des récepteurs distincts, qui réagissent à des stimuli distincts issus de l’environnement, les principaux étant :

- les photo-récepteurs (sensibles à la lumière) ;
- les mécano-récepteurs (qui réagissent à la pression, aux vibrations, etc.) ;
- les chimio-récepteurs (qui réagissent à des stimuli chimiques) ;
- les thermo-récepteurs (sensibles à la température).

Il faut bien distinguer la nature physique du stimulus d’une part, la nature physiologique du récepteur d’autre part, et ce que nous, enfin, en tant qu’êtres humains, percevons : la molécule NaCl a une certaine structure chimique, qui se trouve stimuler tel récepteur de nos papilles ; cela nous le savons ou nous ne le savons pas, peu importe ; ce que nous percevons, c’est une certaine saveur, la *saveur salée*, que nous intégrons dans le *champ perceptif* général des saveurs (si nous nous intéressons aux qualités), ou de *la* saveur (si nous nous intéressons à la catégorie) : ce que nous percevons est spécifique (c’est une saveur, ce n’est ni une couleur, ni une température, etc.), et nous y distinguons une forme particulière, un état particulier, que nous *qualifions* de “salé”.

Par la vue, tous les êtres humains, quelle que soit leur culture, et sauf à souffrir d’une anomalie grave, identifient un champ perceptif qu’ils nomment la *couleur*. Le stimulus physique est la lumière, et les

¹⁵ source : cnrtl

¹⁶ au sens de “qualités fondamentales des corps (sec, humide, chaud, froid).” (cnrtl)

récepteurs sont les cônes de la rétine qui sont sensibles à la *longueur d'onde* de cette lumière ; il faut remarquer que l'onde lumineuse est un phénomène vibratoire, donc temporel (sa longueur se ramène à une fréquence, ou nombre d'oscillations par seconde, le hertz), mais à une échelle de temps très fine, et nous ne la ressentons pas du tout comme telle, nous la percevons bien comme une couleur. Le champ perceptif de la couleur n'est ni une caractéristique physique des objets ou de la lumière, ni le mécanisme physiologique de la vision des couleurs, même s'il dépend des deux ; il est à l'*interface* entre les deux, et c'est à cet interface que nous nous intéressons ici. Il est utile de comprendre la nature physique de la lumière, et d'analyser la physiologie de tel ou tel système sensoriel, pour en mieux comprendre le fonctionnement, mais cela n'est pas toujours nécessaire pour analyser la perception: Young, dès 1801, avait déjà avancé l'hypothèse que la vision des couleurs nécessitait trois types de récepteurs, simplement par des expériences d'optique, alors que la découverte effective sur la rétine des cônes sensibles au rouge, au vert et au bleu, n'a été faite qu'en 1959.

De la même façon que nous l'avons vu pour la saveur et la couleur, d'autres champs perceptifs traduisent l'interaction entre stimuli et récepteurs particuliers : l'*odeur* est ce que nous percevons quand des molécules particulières atteignent les chimio-récepteurs de la muqueuse nasale ; le *son* est ce que nous percevons lorsque les vibrations de l'air agissent sur les mécano-récepteurs de l'oreille : comme pour la couleur, mais à une autre échelle temporelle, c'est une *fréquence* qui est traduite en une *hauteur* du son ; la *température* est ce que nous percevons lorsqu'une certaine agitation moléculaire interagit avec les thermo-récepteurs de la peau : encore une fois un phénomène physique temporel est traduit en autre chose : le "chaud" ou le "froid", etc. ; les mécano-récepteurs cutanés réagissent à la pression, et nous permettent de percevoir la *consistance* ("mou", "dur") des objets.

Nous pouvons retenir un aspect particulier d'un champ perceptif : la *clarté* (le fait d'être plus sombre ou plus clair) peut être extraite du champ perceptif général de la couleur. Après tout, il est concevable qu'un organisme, même doué d'une forme de vue, ne réagisse qu'à la clarté, c'est-à-dire à l'intensité de la lumière, et non aux longueurs d'onde (c'est d'ailleurs le cas de certaines personnes atteintes d'une forme de daltonisme sévère). Et nous pouvons donc aussi imaginer que ce que nous appelons couleur fait partie d'un champ perceptif plus large peut-être accessible à d'autres animaux, pour lesquels des longueurs d'onde invisibles pour nous deviendraient visibles (c'est effectivement le cas de certains oiseaux), même si nous ne pouvons absolument pas imaginer ce que seraient ces "couleurs".

De même, pour le son, nous pouvons extraire la hauteur du son, indépendamment de son intensité, et de son timbre. Dans une saveur, nous pouvons sans doute estimer l'amertume, indépendamment d'autres aspects. Par contre la température semble indécomposable, trop simple pour qu'on puisse en extraire une sous-qualité indépendante.

En mettant en œuvre les récepteurs kinesthésiques, nous accédons à de nouveaux champs perceptifs, comme le *poids* (“lourd”, “léger”), ou la *rugosité* (“lisse”, “rugueux”). Nous en arrivons là à des champs perceptifs ayant affaire avec la spatialité et la forme ; par l’intermédiaire de la vue et du toucher, mais aussi de la kinesthésie (c’est-à-dire du mouvement), nous évaluons la *taille* (“gros”, “petit”), et la *position* (“loin”, “près” ; “devant”, “derrière” ; etc) des objets. A ce stade de notre réflexion, nous assimilerons ces catégories à des champs perceptifs comme les autres.

La question de l’adéquation de notre perception avec le mécanisme physiologique a longtemps occupé les esprits : ainsi l’on a pu s’étonner que nous voyions “à l’endroit” alors que l’image sur la rétine est inversée... Cette question est évidemment absurde, et l’on n’a même pas à affirmer, comme on le lit parfois, que le cerveau “redresse” l’image : ce que nous voyons, ce n’est pas la copie de l’image de la rétine, pas plus que nous ne *goûtons* la forme particulière d’une molécule de sel...

Champs perceptifs et langage

La spécificité de tel ou tel champ perceptif se traduit par l’attribution de *mots* propres à ce champ : d’abord le nom lui-même du champ perceptif en tant que *catégorie* (comme la couleur) ; puis les mots *qualifiant* les objets du monde du point de vue de ce champ (comme les adjectifs de couleur : rouge, bleu, jaune, rose, violet, outremer, etc.) : des adjectifs *qualificatifs*.

Pour ce qui est de la spatialité, ou pour ce qui se confond à ce stade de notre réflexion avec la localisation, on constate que ce ne sont pas des adjectifs qualificatifs qui sont employés, mais des *adverbes* (loin, près ; devant, derrière ; etc.), qui sont eux-mêmes comme des traces de prépositions ou de locutions prépositives, parfois identiques (loin de, près de ; devant, derrière) ; les adjectifs eux-mêmes, quand ils existent, ne pouvant la plupart du temps que s’employer avec une préposition (entouré *par* ; posé *sur* ; etc.), comme si la spatialité ne pouvait s’envisager que comme un système de relations – ce qui est vrai, mais n’est-ce pas le cas de tous les champs perceptifs (un son n’est grave, un goût amer, un objet mou, etc., que par comparaison avec d’autres sons, d’autres goûts, d’autres consistances...) ?

Le langage coupe dans le champ perceptif pour y délimiter des “zones” aux contours flous. Il y a cependant un certain consensus sur les termes qualificatifs employés ; nous supposons en tout cas que quand nous disons “rouge”, nous nous faisons plus ou moins comprendre. Mais parfois ce consensus est vague : les anglophones ne qualifient-ils pas de “yellow” c’est-à-dire “jaune” (ou, plus techniquement “amber”, soit “ambre”, terme que nous n’employons guère couramment pour une couleur) le feu de la circulation que nous disons “orange” ; ils emploient aussi le mot “red” (rouge) pour qualifier une couleur de cheveux que, bien que nous la percevions bien comme tendant vers le rouge, nous qualifions plus prudemment de “roux” ; et l’on peut rencontrer des Bretons qui confondent souvent le bleu et le vert, comme si la non distinction lexicale du terme breton “glas”, qui

rouge vert bleu jaune
rouge vert bleu jaune

signifie aussi bien *vert* que *bleu*, en particulier pour la mer, avait laissé des traces dans une sorte d'atavisme de la perception...

Si l'on veut aller plus loin dans la précision, on utilisera un vocabulaire plus précis, technique ou scientifique, voire un codage, une échelle, mais alors on quitte le domaine de la simple perception. On peut sans doute décrire une couleur, ou un ensemble de couleurs en employant des termes courants, mais les spécialistes se réfèrent à des codifications qui leur permettent de communiquer sans trop d'erreur. On peut dire qu'un son est grave ou aigu, mais si l'on veut décrire un son de façon précise, on devra, en s'en tenant à sa hauteur, employer un code comme celui qui a été inventé par la musique occidentale : la note. Au-delà de chaud, froid, et de quelques autres termes, l'on manquera aussi de précision sauf à relever la température précise sur un thermomètre.

Pour l'instant, poursuivant notre enquête "naïve", nous nous en tiendrons aux mots du langage courant, tels que même un enfant sait les employer, tels en tout cas que ceux que nous avons rencontrés dans la description initiale de Wolfgang Köhler, et nous confondrons d'ailleurs "dire" et "percevoir" ("je dis que telle chose est rouge" est équivalent à "je perçois telle chose comme rouge").

Il existe des interactions entre des champs purement perceptifs et des champs cognitifs liés au langage. L'effet Stroop énonce qu'il est difficile d'énoncer rapidement et sans erreur la couleur d'un mot qui se trouve désigner une autre couleur (voir ci-contre).

Les mots désignant les qualités perceptives ont eux-mêmes un aspect visuel (pour les personnes non analphabètes en tout cas), et un son (ou plutôt un ensemble complexe de sons) que non seulement nous entendons, mais que nous émettons. On a pu remarquer par exemple que pour dire "grand" nous ouvrons plus grand la bouche que pour dire "petit" (cela marche aussi en anglais, avec "large" et "small"). Quand nous lisons une description qui mentionne un "ciel bleu", nous "voyons" un ciel bleu, et nous nous rappelons la perception pure de la couleur bleue, mais nous lisons aussi le mot "bleu", qui a une certaine graphie, et que nous prononçons intérieurement.

Relations entre champs perceptifs

La perception du poids peut être considérée de manière absolue, mais lorsque nous disons qu'une balle de tennis est légère alors qu'une balle de pétanque est lourde, ce que nous percevons, ce n'est pas tant le poids en tant que tel mais la *densité*. La densité semble une caractéristique physique complexe, puisqu'elle met en relation la taille (en toute rigueur, le *volume*) et le poids (en toute rigueur, et en termes de physiciens, la *masse*), mais en fait, dans notre vie courante, nous évaluons plutôt le poids en fonction de ce que nous attendons en terme d'une densité moyenne, ou en tout cas plausible par rapport aux autres caractéristiques de l'objet, qu'en tant que valeur absolue. L'affirmation incontestable comme quoi "un kilo de plumes est aussi lourd qu'un kilo de plomb" demande un petit temps de réflexion... Et un objet d'une densité proprement incroyable sera le signe d'un monde extra-terrestre :

“Dans son délire, il avait fait tomber de sa ceinture quelques pièces de monnaie et un cône de métal brillant, du diamètre d’un dé. C’est en vain qu’un enfant essaya de ramasser ce cône. Un homme put à peine le soulever. Je le tins quelques minutes dans la paume de ma main : je me rappelle que son poids était intolérable et qu’après avoir retiré le cône, la pression demeura. Je me rappelle aussi le cercle précis qu’il m’avait gravé dans la peau. L’évidence d’un objet tout petit et très lourd à la fois laissait une impression désagréable de dégoût et de peur. Un paysan proposa de le jeter dans le fleuve torrentueux ; Amorim en fit l’acquisition moyennant quelques pesos. Personne ne savait rien du mort, sinon « qu’il venait de la frontière ». Ces petits cônes très lourds (faits d’un métal qui n’est pas de ce monde) sont l’image de la divinité dans certaines religions de Tlön.” (Jorge-Luis Borges, *Tlön, Uqbar, Orbis Tertius*, in *Fictions, Œuvres complètes I*, Pléiade, Gallimard, 1993, pp. 465).

D’autre part, la perception du poids, pour rester dans ce champ perceptif, est évidemment liée à la capacité musculaire du sujet percevant. Un petit enfant trouve très lourds la plupart des objets que nous soulevons facilement. Nous-mêmes trouverons beaucoup plus lourd, à cause de la fatigue, notre sac à la fin d’une randonnée, même s’il a été objectivement allégé par l’ingestion d’aliments solides ou liquides qu’il contenait au départ !

Même si les champs perceptifs sont plus ou moins spécifiques à tel ou tel sens, dans la réalité les choses ne sont pas aussi simples. Nous ne sommes pas confrontés à de purs stimuli, mais à des phénomènes complexes. Prenons le goût ; lorsque nous mangeons un aliment, son goût, sa saveur, ce qu’en tant qu’être humain nous percevons, n’est pas que le résultat du stimulus chimique : un aliment a aussi une consistance, une texture, il peut être plus ou moins dur, voire liquide ; il a aussi une température, et son goût en est modifié... Les récepteurs chimiques du goût, présents dans les papilles de la langue, sont insérés dans un appareil physiologique complexe qui fait aussi intervenir les récepteurs mécaniques de la langue en tant que muscle, des muscles de la mâchoire, les récepteurs thermosensibles de la muqueuse de la langue et du palais, etc...

“ALEXANDRE. (...) Vous savez quand on mange froid, on sent le froid, pas le goût. Quand on mange chaud, on sent le chaud, pas le goût. Donc il faut manger tiède et mou.

Elle s’arrête de manger, elle rit.” (Jean Eustache, *La maman et la putain, scénario*, Editions Cahiers du cinéma, 1990, p. 45)

Sans compter que l’olfaction intervient dans la stimulation de l’appétit et même dans l’appréciation du goût (les aliments n’ont pas le même goût lorsqu’on a le nez bouché), et la vue également, dans une certaine mesure. De plus le goût, comme tout phénomène, n’est pas instantané : un aliment ou une boisson peut développer un goût différent durant les différentes phases de son ingestion.

La terminologie existe bien, spécifique à chaque champ perceptif ; mais le monde nous étant donné comme un tout, métaphoriquement, nous pourrions dire qu’une couleur ou un son est chaud(e), par exemple, même si nous savons bien que la couleur, le son et la température sont des champs perceptifs distincts. Il faut sans doute distinguer ce qui est de l’ordre de la métaphore, qu’elle soit

VOYELLES

*A noir, E blanc, I rouge, U vert, O bleu : voyelles,
Je dirai quelque jour vos naissances latentes :
A, noir corset velu des mouches éclatantes
Qui bombinent autour des puanteurs cruelles,*

*Golfes d'ombre ; E, candeurs des vapeurs et des tentes,
Lances des glaciers fiers, rois blancs, frissons d'ombelles ;
I, pourpres, sang craché, rire des lèvres belles
Dans la colère ou les ivresses pénitentes ;*

*U, cycles, vibrations divins des mers virides,
Paix des pâtis semés d'animaux, paix des rides
Que l'alchimie imprime aux grands fronts studieux ;*

*O, suprême Clairon plein des strideurs étranges,
Silences traversés des Mondes et des Anges ;
- O l'Oméga, rayon violet de Ses Yeux !*

VOCALISATIONS

*A noir (Un blanc), I roux, U safran, O azur :
Nous saurons au jour dit ta vocalisation :
A, noir carcan poilu d'un scintillant morpion
Qui bombinait autour d'un nidoral impur,*

*Caps obscurs ; qui, cristal du brouillard ou du Khan
Harpons du fjord hautain, Rois blancs, frissons d'anis ?
I, carmins, sang vomé, riant ainsi qu'un lis
Dans un courroux ou dans un alcool mortifiant ;*

*U, scintillations, rond divins du flot marin,
Paix du pâtis tissu d'animaux, paix du fin
Sillon qu'un fol savoir aux grands fronts imprima ;*

*O, finitif clairon aux accords d'aiguiseur,
Soupirs ahurissant Nadir ou Nirvâna :
O l'omeron, rayon violon dans son Voir !*

singulière à tel poète (songeons au sonnet *Voyelles*, d'Arthur Rimbaud, voir ci-contre (ainsi que sa "traduction" sans la lettre e par Georges Perec dans *La disparition*¹⁷)) ou qu'elle soit partagée par un grand nombre d'individus, mais qui est dans tous les cas un phénomène essentiellement culturel, avec les cas avérés de *synesthésie*¹⁸ : Olivier Messiaen disait avoir une véritable perception visuelle des sons, et d'autres musiciens aussi.. D'autre part, les apprentissages des divers champs perceptifs sont liés, et des dépendances, non neurologiques, mais résultant de l'habitude, peuvent finir par associer des champs perceptifs différents. Les déficients sensoriels développent à travers les sens qui leur restent des capacités qui semblent impossibles aux êtres humains "normaux", c'est-à-dire au fond handicapés de tous les sens en-dehors de la vue : lire avec les doigts nous semble un exploit inaccessible.

Le monde perçu nous est donné comme un tout, et nous effectuons donc constamment des relations entre les données, pourtant essentiellement différentes, qui nous en parviennent. L'analyse par catégorie sensorielle est même presque artificielle : les composantes du monde sont là avec toutes leurs qualités, quel que soit le sens par lequel elles nous parviennent. Les objets de notre environnement ont des caractéristiques relativement stables, et leur simple vue nous donne des indications sur leurs caractéristiques tactiles, par exemple, auxquelles nous pensons pouvoir nous fier. Ainsi c'est avec surprise que nous découvrons la souplesse d'un revêtement de cour de récréation d'une maternelle, dont l'aspect visuel proche de celui de l'asphalte nous faisait supposer qu'il était dur, et donc dangereux pour les enfants...

Enfin, nos perceptions interagissent avec nos émotions, et nous ne sommes pas des machines neutres enregistrant et traitant des informations en toute objectivité. Notre apprentissage perceptif, qui se déroule essentiellement dans la petite enfance mais se poursuit tout au long de notre vie, est intimement lié à notre environnement affectif. Pour toutes sortes de raisons, nous associons telle couleur, telle saveur, etc., à telle ou telle émotion. La "petite madeleine" de Proust est devenue un lieu commun, aussi nous citerons un autre passage de *La recherche du temps perdu*, qui est d'ailleurs presque entièrement fondée sur les relations entre perceptions et émotions :

"Alors, bien en dehors de toutes ces préoccupations littéraires et ne s'y rattachant en rien, tout d'un coup un toit, un reflet de soleil sur une pierre, l'odeur d'un chemin me faisaient arrêter par un plaisir particulier qu'ils me donnaient, et aussi parce qu'ils avaient l'air de cacher, au-delà de ce que je

¹⁷ Georges Perec, *La disparition*, Denoël, 1969, p. 125

¹⁸ d'après certains auteurs, d'origine neurologique, et confirmée par des tests scientifiques, la synesthésie "vraie" concernerait un pourcentage assez faible de la population (jusqu'à 5% pour les estimations les plus généreuses), mais elle serait difficile à évaluer car souvent ignorée des personnes affectées elles-mêmes, qui pensent "normales" leurs perceptions ; d'autres spécialistes émettent l'hypothèse que la synesthésie est un phénomène courant chez l'enfant, et que la séparation des champs perceptifs n'est due qu'à l'apprentissage.

voyais, quelque chose qu'ils invitaient à venir prendre et que malgré mes efforts je n'arrivais pas à découvrir. Comme je sentais que cela se trouvait en eux, je restais là, immobile, à regarder, à respirer, à tâcher d'aller avec ma pensée au-delà de l'image ou de l'odeur." (Marcel Proust, *Du côté de chez Swann, A la recherche du temps perdu I*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1954, p. 178)

Certains champs perceptifs correspondent à des phénomènes physiques que notre propre corps produit, d'autres non. Certes, notre corps a bien un aspect visuel, la surface de notre corps renvoie un certain nombre de couleurs, mais nous ne pouvons pas *produire* à volonté telle ou telle couleur, alors que nous produisons, volontairement, des sons. Cela a une incidence sur la perception. La hauteur d'un son que nous percevons n'est pas aussi abstraite que la perception d'une couleur, elle est ressentie dans notre corps comme une localisation, relativement précise, correspondant à l'"endroit" où nous placerions notre voix pour le produire. Pour mémoriser un air de musique, nous le chantonnons, ou nous le sifflons ; nul besoin d'émettre réellement un son, nous pouvons juste mobiliser notre appareil vocal en sourdine pour mimer "à l'intérieur" cette émission. Les musiciens expérimentés, pour lesquels l'instrument est devenu comme un prolongement de leur propre corps, ne passent peut-être pas par cette intériorisation¹⁹ mais pour les non-musiciens c'est bien le cas.

Si le corps ne produit pas de couleurs, par contre il *produit* des formes, non seulement il *a* une forme, mais il en produit par le mouvement. Nul besoin de laisser une trace, sous forme de dessin dans le sable ou de graffiti dans une caverne, le mouvement lui-même est une forme pour le corps, que ce soit le mouvement des yeux qui déchiffrent une image, ou le mouvement de la main qui suit un contour.

Perception et effort

Comment percevons-nous telle qualité perceptive, par exemple la température d'un objet ? Sans doute classons-nous la température que nous ressentons en touchant un objet dans un "champ", par rapport à d'autres températures que nous avons déjà éprouvées. Mais, plus précisément, on peut imaginer que nous évaluons, par rapport à notre propre température, l'effort, voire la souffrance, en tout cas le temps, que nécessiterait pour la partie du corps en contact avec l'objet, le fait d'atteindre cette température, de rétablir un équilibre entre cet objet et nous. Si l'écart est trop fort (vers le froid ou le chaud), nous n'attendrons pas très longtemps, car notre cerveau va nous signaler : "Risque de brûlure !". Mais dans d'autres cas, cet équilibre va être atteint, et nous montre la différence entre notre perception et le phénomène physique objectif : pensons au cas de la baignade dans une eau qui nous paraît froide au début, puis agréable, ou à celui de l'évaluation de la température d'un enfant fiévreux par le contact des lèvres sur le front.

Pour éprouver la dureté des objets, nous devons évaluer la *résistance* offerte à notre contact par les objets en question, ou plutôt l'effort musculaire que nous devons développer pour pouvoir, même

¹⁹ encore qu'on entende chanter Glenn Gould lui-même sur nombre d'enregistrements



12 Gian Domenico Tiepolo,
Main tenant une pierre
Sanguine et rehauts de blanc sur papier bleu

légèrement, déformer la surface des objets, et arriver ainsi à une situation d'équilibre, de contact parfait avec l'objet. Ce champ perceptif peut aller de la dureté "absolue", l'impénétrabilité totale, à la mollesse complète, la pénétrabilité totale, comme celle, la plupart du temps, de l'air, qui ne nous offre aucune résistance. Nonobstant les phases décrites par les physiciens (solide, liquide, gaz), dans notre vie quotidienne nous rencontrons des qualités de dureté que, dans une approche "naïve", nous pouvons classer dans un même champ : du beurre qui sort du frigo est "dur" (moins dur que du bois, mais dur quand même) ; au bout d'un certain temps, il est "mou", puis, s'il fait très chaud, il sera même "liquide" (c'est-à-dire pénétrable, même si un peu moins pénétrable qu'un gaz). Ce que nous évaluons c'est la difficulté d'enfoncer le couteau dans le beurre, la résistance qu'il offre, et surtout notre effort musculaire pour la vaincre. Bien sûr ce champ est plus complexe que cela, il offre des variétés comme le visqueux, le granulaire, le dur "cassant" et le dur "élastique", etc. Mais dans tous les cas ces consistances correspondent à l'évaluation d'un effort.

De la même façon que pour la dureté, quand nous soupesons un objet, nous évaluons l'effort musculaire nécessaire pour maintenir l'objet à une hauteur constante, voire l'effort nécessaire pour le soulever.

La rugosité fait intervenir un mouvement, même minime, sur la surface des objets. Ce que nous évaluons, c'est la difficulté musculaire à déplacer nos doigts sur la surface : si nous le faisons sans effort, c'est lisse, sinon c'est plus ou moins rugueux. Par la vue nous percevons aussi des textures, c'est-à-dire des zones de couleurs (en y incluant les luminosités) complexes, que nous ne pouvons identifier que par un balayage. L'œil est arrêté dans son exploration du champ visuel par des irrégularités, on ressent donc un effort pour balayer une zone texturée analogue à l'effort ressenti par le toucher. Les termes se rapportant à ces textures sont autant visuels que tactiles, il y a en effet un lien entre la rugosité et l'aspect des objets : un objet lisse est brillant, un objet rugueux est mat.

La question de la perception des formes conduit aussi à des champs perceptifs :

"Toute détermination morphologique, c'est-à-dire pré-géométrique, s'opère selon la gradualité qualitative de l'intuition sensible: surfaces plus ou moins polies, côtés, lignes ou angles plus ou moins grossiers, etc. (...) Par variation imaginaire, on peut obtenir des types morphologiques inexactes mais purs: le "rond", par exemple, sous lequel est construite l'idéalité géométrique du "cercle". (...) Mais le type "rond" n'en est pas moins doué, déjà, d'une certaine idéalité; il ne se confond pas avec la multiplicité des formes naturelles, qui lui correspondent plus ou moins dans la perception. Seule une visée imaginative peut l'atteindre dans sa pureté pré-géométrique. Mais cette pure idéalité est d'ordre sensible et on doit soigneusement la distinguer de la pure idéalité géométrique qui est, elle-même, déliée de toute intuitivité sensible ou imaginative." (Edmund Husserl, cité par Jacques Derrida, introduction à *L'origine de la géométrie* (avec une introduction de Jacques Derrida), Presses Universitaires de France - PUF; Édition : 3e éd (1 décembre 1999) p. 132-133)

Où l'on voit que ce qui se rapporte à la forme peut se rapporter à la *rugosité* ("surfaces plus ou moins polies"), à la *netteté* ("côtés, lignes ou angles plus ou moins grossiers"), et à l'appartenance à des types plus ou moins bien définis ("le rond"), dans lesquels peut intervenir une catégorie comme la *convexité*.

Pour évaluer la forme d'un objet par le toucher, à part le cas extrême où nous pouvons toucher toute la surface d'un objet avec notre peau (un petit objet enserré dans la main, par exemple, ou un berlingot dans la bouche...), et où d'ailleurs il est très difficile d'en évaluer la forme sans bouger, nous devons faire intervenir le *mouvement*, nous *parcourons* sa surface, ou nous le faisons tourner entre nos doigts, etc. Un point éloigné de l'objet nécessite d'étirer le bras pour l'atteindre. Pour reconnaître un contour, nous devons suivre ce contour du doigt. C'est par les comparaisons que nous faisons entre toutes ces sensations kinesthésiques que nous aurons une idée de la forme d'un objet.

Par la vue, si l'on a affaire à un volume, il est évident que nous n'en connaissons la forme qu'en le faisant se mouvoir, ou en bougeant nous-mêmes, puisque la vue ne nous offre qu'un aspect de cet objet. Même s'il s'agit d'un contour, que nous voyons complètement d'emblée, nos yeux effectuent de légers mais continuels mouvements pour suivre ce contour et le déchiffrer. Si ces contours sont les contours apparents d'objets (ces contours n'existent que pour notre vue), chaque mouvement de l'objet, ou chacun de nos propres mouvements, va nous offrir un contour différent (à moins qu'il ne s'agisse de cet objet très particulier qu'est la sphère), et c'est l'ensemble de ces contours que nous allons apprendre à assimiler à une forme particulière : il est bien connu que le nourrisson ne reconnaît pas son biberon si on le lui présente à l'envers... Cet apprentissage est tellement lointain et assimilé chez l'adulte que nous avons parfois du mal à nous persuader que nous ne *voyons* pratiquement jamais les faces d'un cube comme des carrés (mais uniquement comme divers quadrilatères) bien que nous *croyions* les voir (à raison, puisque les faces du cube sont bien carrées).

Nous sommes partis du monde perçu, ou plutôt de la description du monde perçu. Nous avons examiné par quels moyens nous percevions ce monde. Et nous avons identifié un certain nombre de champs perceptifs. Nous allons maintenant voir comment ces champs perceptifs sont structurés.

I.2 L'espace comme continu

I.2.1 Continu, parcours, coupure

Nous avons rencontré un certain nombre de champs perceptifs ; nous allons montrer qu'ils constituent tous des *espaces*, au sens général du terme. Ce concept a été énoncé par Henri Poincaré dans plusieurs de ses ouvrages²⁰ ; son objectif était de démontrer que l'espace, au sens restreint du terme, celui que l'on peut définir comme l'espace des localisations, ou encore, pour le mathématicien, l'espace des figures et des déplacements, celui qui correspond à notre perception de la *spatialité*, est tridimensionnel. Mais il se référait aussi à d'autres champs perceptifs, en particulier celui du poids, et il nous a semblé pertinent de généraliser ce qui n'était pour lui qu'un support d'explication, et de tenter de caractériser les champs perceptifs *en général* comme des espaces. Ce concept général d'espace rejoint ce que Wittgenstein appelle *espace d'états de choses possibles*, en s'appuyant en particulier sur l'espace des couleurs :

“2.013 – Chaque chose se trouve pour ainsi dire dans un espace d'états de choses possibles. Cet espace je puis le concevoir vide, mais non pas la chose privée d'espace.

2.0131 – L'objet spatial doit se trouver dans l'espace infini. (Le point dans l'espace est un lieu d'argument.)

La tache dans le champ de vision doit non pas nécessairement être rouge, mais avoir une couleur: elle est pour ainsi dire environnée de l'espace des couleurs. Le ton doit avoir une *hauteur*, l'objet du sens tactile une *dureté*, etc...

2.014 – Les objets contiennent la possibilité de tous les états de choses.

2.0141 – La possibilité de son occurrence dans un état de choses constitue la forme de l'objet.”
(Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, Tel Gallimard, 1961, p. 31)

Nous allons suivre son exemple, et nous intéresser tout particulièrement au champ perceptif de la couleur, ou des couleurs (suivant que l'on s'intéresse à la catégorie ou aux qualités).

Consistance ou complétude

Si nous nous intéressons à un certain champ perceptif, nous constatons que tout objet de notre perception est inscrit dans ce champ. Concernant le visible, et plus particulièrement la couleur, tout ce qui appartient à notre champ visuel a une certaine couleur ; bien sûr il y a des choses qui ne sont pas “colorées”, au sens trivial du terme, parce qu'elles sont noires, ou blanches, ou grises, mais ces non-couleurs sont elles-mêmes des couleurs, elles ne sont pas d'un autre ordre que les “couleurs” que nous acceptons d'emblée, nous sentons bien qu'elles en sont comme des variantes atténuées (atténuées du point de vue de la saturation, pour employer un terme technique), qu'elles mettent en jeu les mêmes outils sensoriels (la vue) et perceptifs ; bien sûr aussi, il y a des objets transparents, mais ce que nous

²⁰ Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse* Flammarion 1902 ; *La valeur de la science* Flammarion 1905 ; *Science et méthode* 1908 ; *Dernières pensées* Flammarion, 1913.

voyons dans ce cas, ce n'est pas "rien" (nous ne pouvons pas ne "rien" voir), mais les couleurs qui sont situées derrière ces objets. Notre champ visuel ne comporte pas de "trou" du point de vue du champ perceptif de la couleur.

"2.013 – Chaque chose se trouve pour ainsi dire dans un espace d'états de choses possibles. Cet espace je puis le concevoir vide, mais non pas la chose privée d'espace." (Ludwig Wittgenstein, *op. cit.*, p. 31)

Il n'en comporte pas non plus d'ailleurs du point de vue du champ perceptif des localisations. Où l'on voit de nouveau que la perception n'est pas une copie de l'appareil physiologique, puisque la rétine comporte elle un "point aveugle", ou même une zone aveugle, la tache de Mariotte, mais que notre champ visuel n'en comporte pas ; de même, les patients qui perdent la sensibilité d'une partie de la rétine dans la zone périphérique ne sont pas conscients de cette perte, jusqu'à ce qu'une voiture, par exemple, surgissant dans ce qui aurait dû être leur champ visuel, *mais qu'ils n'avaient pas vue*, manque les écraser ; ils ne l'avaient pas vue mais ils n'avaient pas non plus perçu un manque (le cerveau se chargeant de compléter leur champ visuel). A partir du moment où l'on voit, on voit forcément quelque chose *quelque part* (ne serait-ce que du noir)... De même, si on le touche, tout objet a une certaine température, une certaine dureté ; si on le soupèse, tout objet a un certain poids ; etc.

Inversement, nous ne pouvons pas concevoir, par exemple, une couleur qui n'entrerait pas dans le champ perceptif de la couleur tel que nous le connaissons, et ce même si nous n'avons peut-être pas jusqu'à présent concrètement vu toutes les couleurs possibles ; toute nouvelle couleur serait peut-être nouvelle pour nous, si nous ne l'avons jamais vue auparavant, mais sa perception sera du même ordre que celle des couleurs que nous avons déjà vues ; on peut même sans doute aller jusqu'à dire qu'à partir du moment où nous voyons les couleurs, nous pouvons imaginer toutes les couleurs possibles ; et qu'inversement, nous ne pourrions jamais imaginer des couleurs perçues par des animaux quadrichromates, de la même façon qu'un daltonien ne peut absolument pas imaginer les couleurs que nous voyons :

"Serait-il possible de découvrir une *nouvelle* couleur. (Après tout le daltonien est dans la même situation que nous, ses couleurs forment un système aussi complet que le nôtre ; il ne voit aucun créneau où viendraient s'insérer les autres couleurs.)" (Ludwig Wittgenstein, *Remarques philosophiques*, Tel Gallimard 1964, p. 115)

Bien sûr, si par accident, quelqu'un *devient* daltonien, il aura peut-être en mémoire des couleurs qu'il ne voit plus dans le monde qu'il perçoit, et il constatera donc ce manque. Malgré tout, toutes ses sensations visuelles entreront dans un espace complet de couleurs. Il n'en est pas des daltoniens comme pour nous lorsque nous voyons un film en noir et blanc, parce que nous savons qu'il existe d'autres couleurs, mais pas eux.

La perception consiste à mettre en relation différents états d'un même champ perceptif : on ne perçoit du rouge que parce qu'on a eu l'occasion de voir d'autres couleurs, d'insérer ce rouge dans un champ que l'on appelle couleur, et dont on sait très bien, d'une part, que des qualités comme la forme ou le poids, etc., n'ont rien à y voir, et d'autre part que même si le bleu n'est pas le rouge il appartient bien au même champ. Ce champ existe rarement seul : nous voyons rarement "du rouge", sauf peut-être quand il s'agit de lumière rouge, mais ce que nous voyons, ce sont des objets rouges, des objets qui ont d'autres qualités de surface et, plus généralement, de forme. D'autre part, même s'il s'agit de couleur "pure" (ou non identifiée à un objet, une tache rouge indéfinie), cette qualité ne peut être perçue que liée à l'étendue : un "point" rouge de l'espace, sans étendue et donc infiniment petit, ne sera pas perçu... Enfin, la perception est aussi liée aux variations dans le temps, et d'une façon assez paradoxale en ce qui concerne notre exemple : si la lumière varie, en tout cas dans une certaine mesure, nous continuerons à percevoir tel objet comme étant du même rouge, alors que des mesures exactes nous prouveraient que ce n'est pas la même couleur qui atteint notre rétine. Nous tenons à la persistance, à la constance, des qualités des objets du monde perçu.

La mise en relation induit une *comparaison*. Nous pouvons dire que telle couleur est identique à telle autre (perçues simultanément, ou successivement), ou qu'elle en diffère ; cette comparaison n'est en général pas absolue, mais repose plutôt sur une idée vague de ressemblance. En tout cas une telle comparaison ne marche qu'à l'intérieur d'un champ perceptif : deux objets peuvent se ressembler du point de vue de la couleur, mais être différents du point de vue de la dureté, par exemple, et vice versa. Cela peut déboucher sur un ordonnancement : nous pouvons dire que telle couleur est plus foncée qu'une autre, ou dire que tel orangé est plus rouge ou plus jaune que tel autre ; mais ça n'aurait sans doute pas de sens de se demander si tel orangé est plus bleu qu'un autre. Par contre, sans ambiguïté, nous pouvons dire que quelque chose est plus chaud, ou plus dur, ou plus lourd, qu'une autre chose.

Continu empirique

Un premier postulat est que, dans tout champ perceptif, nous pouvons trouver des éléments que nous ne pouvons pas distinguer, même si, objectivement, par la mesure, ils sont différents. Par exemple, dans le champ perceptif de la couleur, nous pouvons trouver des couleurs très légèrement différentes mais que nous ne pouvons pas distinguer. Nous pouvons constituer une "chaîne" de couleurs que nous ne pouvons pas distinguer deux à deux, bien que nous puissions parfaitement distinguer la première et la dernière (voir ci-contre). Nous dirons, suivant en cela Henri Poincaré, que ce champ perceptif constitue un *continu empirique*.

A vrai dire, Poincaré emploie l'expression de *continu physique*, pour le distinguer du continu mathématique ; mais cette expression reste elle-même ambiguë puisqu'elle pourrait laisser penser que l'on s'intéresse à la nature physique de la matière, de la lumière, ou de tout autre phénomène, ce qui



n'est pas le cas : la matière, ou la lumière, du point de vue de la physique, n'est pas vraiment continue. Il arrive toujours un moment où l'on va trouver un insécable, un "atome", même si aujourd'hui l'insécable se situe en-deçà de l'atome. Mais ce n'est pas la nature physique du monde qui nous est directement accessible. On se situe bien dans cet interface entre le monde physique en tant que tel et la physiologie de l'organisme, voire la psychologie de la perception. Nous optons donc pour l'expression "continu empirique, ou encore "continu perceptif".

Il faut distinguer aussi la notion de continu empirique de celle du continu *mathématique*. Le continu mathématique, par exemple l'ensemble des nombres réels ou des points de la droite (c'est en fait le même), est un continu absolu, jusqu'à l'infini : entre deux nombres réels quelconques, on peut toujours trouver un autre nombre réel. Ce continu en tant que tel est difficile à penser, et à représenter. Il est en quelque sorte l'idéal inatteignable du continu empirique, qui en constitue cependant le pré-modèle intuitif. Nous représentons cependant les continus empiriques par des continus mathématiques, ou plutôt, à présent, par des espaces discrets et contigus, les espaces numériques informatiques ; nous reviendrons sur ces questions plus loin.

Cette comparaison entre éléments du champ perceptif repose donc uniquement sur la perception : il ne s'agit pas de "mesurer" par un quelconque appareil la valeur de tel ou tel élément, mais de l'évaluer "à l'œil" (en tout cas pour la couleur ; par le sens correspondant pour tout autre champ perceptif). La capacité de discernement, et partant le seuil en dessous duquel il y aura "identité" de perception, varie suivant les individus : la résolution de tel ou tel continu empirique n'est pas forcément la même pour tout le monde, mais il arrive toujours un moment où deux points de ce continu sont indiscernables ; le seuil sera toujours atteint à un moment donné, cela est inhérent à notre système perceptif.

On peut tester la capacité de discernement par l'œil humain des couleurs telles qu'elles sont proposées par la plupart des systèmes informatiques ; cette capacité de discernement est dépendante du dispositif mis en œuvre : succession, simultanéité non contiguë, contiguïté²¹. Poincaré parlait en fait de l'exemple de la perception du poids²². Ce champ perceptif bien défini (nous pouvons facilement extraire de nos données sensorielles cette qualité, et nous pouvons l'abstraire de la spatialité) ne correspond pas à un récepteur particulier, mais est le résultat de l'évaluation de la force musculaire que nous devons opposer à la gravité. Nous pouvons trouver des poids assez proches pour que nous ne puissions pas les distinguer, et en former une chaîne empiriquement ou perceptivement "continue" dont nous pouvons pourtant facilement distinguer le premier et le dernier élément. Si nous sommes

²¹ cette expérience, comme beaucoup de ces expériences sur la couleur, est impossible à transcrire sur le papier.

²² Nous emploierons systématiquement, et incorrectement du point de vue du physicien, le terme de "poids" pour désigner ce qui en toute rigueur, est plutôt la "masse" d'un objet ; mais il s'agit de l'expérience courante, quotidienne, et même complètement dégagée de la mesure objective ; le terme de poids, d'usage courant, est donc plus adéquat.

particulièrement sensibles, ou si notre métier nous a conduits à avoir une excellence dans le soupesage, peut-être les éléments du continu devront être plus proches ; la résolution du continu empirique du poids n'est pas forcément la même pour tout le monde, mais il arrive toujours un moment où deux points de ce continu sont indiscernables.

Pour avoir une idée plus claire du continu du poids, on peut imaginer une expérience plus praticable. Supposons que nous tenions un bol, dans lequel sera versé, grain à grain, du sable fin, du sucre en poudre, ou toute matière granulaire de ce genre. Il est évident que nous ne percevrons pas la différence de poids entre deux temps de l'expérience séparés par l'ajout d'un grain. Par contre, nous distinguerons très facilement entre le bol vide et le bol rempli. Inversement, on peut retirer le sable grain à grain et passer continûment du bol rempli au bol vide. Le champ perceptif du poids constitue donc un continu empirique.

D'ailleurs, on peut très bien mener l'expérience avec une balance traditionnelle, avec une aiguille parcourant un cadran. Un tel dispositif "analogique" ne fait que transposer le continu perceptif kinesthésique du poids dans le continu perceptif visuel des positions de l'aiguille (voire le continu perceptif tactile de ces mêmes positions pour un aveugle). Pris deux à deux, et quitte à trouver des éléments encore plus proches, il y aura toujours des éléments pour lesquels nous ne pourrions pas discerner de différence dans la position de l'aiguille de la balance, dans le continu empirique visuel équivalent au continu empirique du poids.

On peut se persuader assez facilement que les autres champs perceptifs que nous avons définis constituent bien des continus empiriques : pour la température, par exemple, on peut même imaginer une expérience assez simple qui ferait varier continûment la température d'un objet, ou d'un liquide, de la même façon qu'avec le poids du bol de sucre. Certains champs perceptifs, bien que nous puissions nous persuader qu'il constituent bien des continus perceptifs, se prêtent moins bien à l'expérience, comme la dureté, par exemple, bien que l'exemple déjà mentionné du beurre dur au sortir du frigo, et qui ramollit à température ambiante puisse en être une.

Pour ce qui est de la spatialité, ou du moins des positions perçues, par exemple, visuellement (on pourrait aussi considérer le toucher), on peut montrer que nous ne pouvons distinguer des positions proches les unes des autres, et en constituer une chaîne dont nous distinguerons la première et la dernière. Notre acuité est particulièrement forte en ce domaine : on peut le montrer par une petite expérience (qui ne concerne que la position d'un point blanc sur un fond noir) : on ne distingue pas des positions proches si on intercale un écran noir entre deux positions, mais on les distingue fort bien si on les fait se succéder sans interruption²³.

²³ Même remarque que précédemment concernant les expériences sur la couleur.

L'hypothèse de la continuité permet d'aller plus loin en ce qui concerne la consistance : non seulement toute couleur, par exemple, appartient au champ perceptif de la couleur, mais elle peut être atteinte *par continuité* à partir de n'importe quelle autre couleur ; ce qui nous amène à la notion de *parcours*.

Parcours

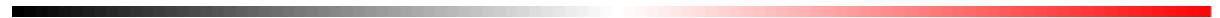
La notion de parcours est inhérente à la définition du continu, un *parcours* étant une *chaîne de sensations indiscernables* : nous avons déjà défini une telle chaîne. Cependant, allons un peu plus loin en explicitant un peu plus cette notion de parcours. Le mot “parcours” renvoie à la notion de *déplacement*, de *mouvement*; mais nous pouvons élargir l'emploi de la notion de parcours en considérant un *changement* de perception en général, le déplacement n'en étant qu'un cas particulier ; Merleau-Ponty parle lui de *transition insensible*.

L'espace de la couleur est parcourable : parcourir l'espace de la couleur consiste à faire varier une couleur continûment (au sens du continu empirique). Cette expérience est très facile à mener avec un ordinateur, ce qui nous donne un avantage sur Wittgenstein qui écrivait :

“Je n'ai jamais vu en fait une tache noire devenir de plus en plus claire jusqu'à être blanche puis rougir toujours plus jusqu'à devenir rouge; mais je sais que c'est possible car je puis me le représenter. Autrement dit j'opère avec mes représentations dans l'espace des couleurs et fais avec elles ce qu'il serait possible de faire avec les couleurs.” (Ludwig Wittgenstein, *Remarques philosophiques*, Tel Gallimard, 1964, p. 72):

Nous le pouvons ! Même si cela n'a pas d'importance, puisqu'il suffit de pouvoir l'imaginer...

Comme nous considérons l'espace de la couleur, et non celui de l'étendue, nous avons choisi de représenter un “point” de cet espace par un carré rempli de telle ou telle couleur. Parcourir l'espace de la couleur consiste à visualiser un “film” montrant ce carré changeant continûment (au sens du continu empirique) de couleur ; dans cette version papier, un “parcours” sera visualisé par une ligne de carrés de couleur ; le parcours imaginé par Wittgenstein est le suivant :



Mais l'on peut passer du noir au rouge, non seulement en suivant le parcours suggéré par Wittgenstein, mais en faisant devenir la tache noire de plus en plus bleue, puis en rougissant cette tache pour qu'elle devienne d'un rouge pur :



On pourrait trouver de nombreux autres chemins menant du noir au rouge.

Le “parcours” dans le continu empirique du poids, perçu à travers l’expérience du bol de sable, revient à l’ajout ou au retrait de sable, et est perçu comme un changement continu du poids (évalué comme un changement continu de l’effort nécessaire pour maintenir le bol).

Dans l’espace des positions, un parcours est de manière tautologique un déplacement, un mouvement : ce que nous percevons lorsque nous faisons se succéder des localisations proches, c’est un mouvement. Dans ce cas comme dans celui de l’espace des couleurs, nous avons le choix entre plusieurs parcours possibles entre deux points, alors que des champs perceptifs comme le poids, la température, etc., ne nous le permettent pas. Ceci est caractéristique de ce que nous appellerons la *dimension* de cet espace. Mais pour arriver à cette notion, nous devons d’abord en introduire une autre, celle de *coupure*.

Coupure

Etant donné un continu, Poincaré introduit la notion de *coupure*. Une coupure est, soit un élément (un *point*), soit un sous-continu (une portion du continu qui est elle-même un continu, mais qui ne remplit pas tout le continu), qui interrompt le parcours, qui empêche d’aller d’un point en deçà à un point au-delà de ce que Poincaré appelle, donc, “coupure”. Lacan en a profité, de ce terme pas très bien choisi par Poincaré (et qui interroge plus son vocabulaire, sa psyché, que la topologie elle-même), pour ironiser sur cette vision “tranchante” de l’espace :

“Il y a en effet plusieurs façon d’aborder l’espace. La capture par la notion de dimension, c’est-à-dire par la coupure, est la caractéristique d’une technique de la scie.” (Jacques Lacan, *Le Séminaire, Livre XX: Encore*, Seuil, 1975, p. 119)

Poincaré aurait tout aussi bien pu employer d’autres termes (tout aussi antipathiques, peut-être, mais beaucoup moins blessants), comme *obstacle*, *empêchement* (si l’on envisage surtout le parcours, et ce qui l’arrête) ; *frontière*, *bord*, *limite*²⁴, *enveloppe* (si l’on envisage plutôt le continu, ou sous-continu lui-même). Le mot *frontière* est d’ailleurs le terme retenu de nos jours en topologie.

Comment visualiser une telle coupure, ou frontière, par un point de l’espace des couleurs? Prenons un parcours qui va du noir au blanc :

Pour montrer que tel gris constitue une coupure pour ce parcours, mettons ce gris en fond :

²⁴ Qui vient du mot latin *limes* qui signifie *frontière*...



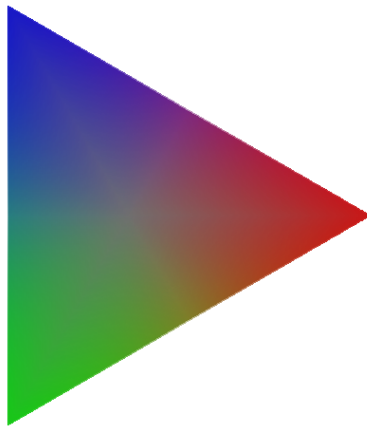
Nous voyons que le “film” du parcours se confond à un moment avec ce fond. Ce même gris peut aussi constituer une coupure pour un autre parcours, par exemple un parcours qui irait du bleu au jaune.



Ceci nous amène à préciser la notion de parcours. Jusqu’à présent, nous constituions le parcours par simple continuité : n’importe quel point indiscernable du point actuel pouvait devenir la cible prochaine du parcours. Mais on peut aller plus loin en introduisant la notion de *consigne* ; certes, si deux points sont vraiment indiscernables, nous ne pouvons pas induire le choix du point suivant. Mais maintenant que nous sommes assurés de la continuité d’un champ, ou d’un espace, nous pouvons légèrement changer la définition du parcours, en disant que nous nous déplacerons d’un point vers un point proche, mais *légèrement* différent, et ce en respectant telle ou telle consigne ; cette consigne empêche en particulier de revenir en arrière.

Si nous reprenons l’exemple du poids, et si nous n’introduisons pas la notion de consigne, il est possible que, par continuité empirique, nous restions indéfiniment coincés sur un point donné, ou que nous ne naviguions qu’entre quelques points très proches, par des allers-retours incessants. En fait, la découverte de la “chaîne” telle que nous l’avons exposée précédemment faisait apparaître comme un “*deus ex machina*” capable de guider la main de l’expérimentateur innocent ; et d’ailleurs il fallait bien que quelqu’un ajoute ou retire un grain de sable dans le bol soupesé par cette main innocente. Il n’est pas utile de rester dans cette ambiguïté. On admettra donc que nous sommes capables de suivre une consigne comme “rendre un poids de plus en plus lourd”, ou “assombrir une couleur” et de constituer un parcours de cette façon. Il faut remarquer que dans ce cas, nous ne revenons pas sur nos pas, et que si nous rencontrons un point déjà atteint, alors le parcours tourne en boucle (puisque la consigne amènera à recommencer le parcours exactement de la même façon).

Un sous-continu, en-dehors du point, qui se définit de lui-même, est un ensemble constitué par continuité empirique, mais qui de plus est “complet”, ce qui, dans l’espace de la couleur, peut se



produire de deux façons : un certain parcours qui va du noir au blanc (que l'on peut constituer empiriquement en partant du noir et en prenant comme consigne de parcours d'*éclaircir* la couleur en restant dans des gris) constitue un sous-continu parce qu'une fois arrivé au blanc on ne peut plus aller plus loin en respectant la même consigne : on est en fait arrivé au bord, à la frontière de l'espace même des couleurs ; et en repartant dans l'autre sens, on voit bien que le noir est lui aussi un "absolu" du point de vue de la consigne inverse qui est d'*assombrir* la couleur. Un parcours peut donc être un sous-continu complet si la consigne du parcours fait que l'on atteint des points indépassables avec la consigne donnée pour le parcours. Mais un parcours peut être complet d'une autre façon lorsque la consigne amène à parcourir une boucle.

Dans le continu du poids, les consignes ne sont pas multiples : on ne peut qu'*alléger* ou *alourdir*... En allégeant, on atteint une "limite" : on ne peut alléger un poids nul (ce poids nul constitue une frontière de l'espace du poids) ; en alourdissant, par contre, l'expérimentateur est arrêté par ses propres capacités musculaires, mais sait bien qu'il y a des poids plus lourds que ceux qu'il peut soutenir. Notre intuition (et peu importe que cela corresponde ou pas à la réalité physique) est que l'on pourrait continuer *indéfiniment*. Un parcours (et dans ce cas le parcours se confond avec l'espace lui-même) peut donc être complet sans rencontrer de frontière, ni se refermer en boucle : nous savons bien qu'en alourdissant, nous ne retomberons pas sur un poids plus faible déjà rencontré.

Pour l'espace des positions d'un point sur l'écran, on voit qu'un point peut constituer une coupure pour un parcours. Par ailleurs, on voit aussi qu'un parcours peut constituer un sous-continu complet en atteignant les bords de l'écran, ou bien en se refermant sur lui-même .

Par continuité, dans l'espace de la couleur, on peut constituer des sous-continus qui ne sont pas seulement des parcours, tout en n'étant pas l'espace total de la couleur lui-même ; si l'on se donne pour consigne, à partir d'une couleur quelconque, de lui associer de proche en proche toutes les couleurs qui ont la même qualité de "clarté", par exemple, on constituera un sous-continu (voir un exemple ci-contre) ; ce sous-continu n'est pas un simple parcours, mais n'est pas non plus l'espace total de la couleur.

Les continus peuvent être limités, bornés, ou pas ; et ils ne le sont pas forcément dans tous les "sens". La plupart des continus n'ont pas de limite finie, du moins dans un sens. Ils peuvent avoir une valeur "plancher" nulle, mais n'ont en général pas de valeur limite supérieure : le poids, la taille, en sont des exemples, nous pouvons toujours imaginer plus lourd, plus grand... La vitesse, telle que ressentie par le sens commun, est sans limite supérieure également ; on objectera que depuis Einstein, nous savons qu'il y a une limite supérieure à la vitesse, à savoir la vitesse de la lumière. Mais, en-dehors du fait que de toutes façons nous ne voyageons pas à ce genre de vitesse, Jean-Marc Lévy-Leblond montre

très clairement que cette limite, de même que le zéro absolu pour la température (et le “zéro absolu” du temps), est une fausse limite :

“Si la vitesse est limitée, que deviendra mon mouvement quand j'accélérerai après avoir atteint ce maximum? Si la température est limitée, que deviendra le corps que je refroidirai au-dessous du zéro absolu? Si le temps est limité, que s'est-il passé avant le Big Bang ? La seule façon d'éviter le paradoxe est alors d'affirmer que ces bornes ne peuvent pas être dépassées parce qu'elles ne peuvent pas être atteintes² [2. On se rappelle ce qu'en disait Pierre Dac: «Quand on dépasse les bornes, il n'y a plus de limites. »] ! Ce ne sont pas des frontières qui auraient un en deçà et un au-delà, mais des limites "asymptotiques" dont on peut se rapprocher, sans jamais parvenir à les rejoindre. (...) Ces limites finies ne sont donc finies qu'en apparence et de façon superficielle. Au fond, elles exhibent le caractère même de l'infini : l'impossibilité à l'atteindre.” (Jean-Marc Lévy-Leblond, *Aux contraires L'exercice de la pensée et la pratique de la science*, Gallimard, 1996, pp. 212-213)

Cette réflexion de physicien rejoint en fait le sens commun : le fini n'est pas plus “pensable” que l'infini, il l'est même moins parce que, s'il y a une limite, alors qu'y a-t-il au-delà de cette limite ?

Pour la couleur, par contre, l'espace semble bien borné de partout : nous ne pouvons imaginer ni un noir plus noir que le noir, ni un blanc plus blanc que le blanc, ni un rouge plus rouge que le rouge le plus pur...

Mais l'espace des couleurs (comme celui des positions) nous met aussi en présence de *boucles*, qui sont des parcours à la fois finis et illimités : nous pouvons passer du rouge, à l'orange, au jaune, au vert, au bleu, au violet, au rouge... et continuer notre voyage sans fin. Ce sous-continu est donc à la fois fini (nous restons dans une portion bornée de l'espace des couleurs, qui de toutes façons est borné en lui-même), et sans limite.

Cela nous persuade une fois de plus que ceci est une représentation de l'espace de la couleur, *tel que perçu par l'être humain*, et non la représentation de la réalité physique de la couleur. En effet, la lumière physique est une superposition d'ondes électromagnétiques de diverses longueurs d'onde. La luminosité correspond plus ou moins à l'amplitude de ces ondes ; la teinte correspond à une analyse des diverses longueurs d'onde, du moins celles qui se situent dans le “visible”. Le paradoxe c'est que ce que nous percevons comme teinte (les couleurs de l'arc-en-ciel) se referme sur soi (le rouge rejoint continûment le violet) alors que les longueurs d'onde correspondantes sont aux extrémités de l'intervalle des longueurs d'onde visibles. On voit bien par là que l'espace perceptif de la couleur n'est pas équivalent à la constitution physique de la lumière.

I.2.2 Dimension

Une définition par récurrence

Nous avons tous les éléments pour définir la *dimension* d'un continu, qui est bien la notion fondamentale, et celle qui permet de distinguer les "types" de continus.

Le mot "dimension" doit être utilisé avec précaution, parce que son sens "trivial" se confond avec la *taille*. Il ne s'agit évidemment pas de cela ici. Nous pourrions dire, pour être plus précis, "nombre de dimensions", ou "dimensionnalité", mais pour la fluidité de l'exposé, et sauf lorsqu'il y aura risque d'ambiguïté, nous emploierons ce terme de *dimension* dans son sens mathématique.

La définition de la dimension est une définition topologique (la topologie étant, pour simplifier, la géométrie sans la mesure) établie par *récurrence* :

- un point est de dimension 0 par définition ;
- un continu est de dimension 1 s'il peut être coupé par un point²⁵ ;
- un continu est de dimension 2 s'il peut être coupé par un continu de dimension 1
- un continu est de dimension 3 s'il peut être coupé par un continu de dimension 2
- etc.

Nous avons déjà rencontré un sous-continu de l'espace de la couleur qui est de dimension 1 : le sous-continu qui comprend tous les gris du noir au blanc est coupé par un certain gris, il est donc de dimension 1. A vrai dire, tous les parcours que nous avons exhibés sont de dimension 1 ; par définition même de la notion de parcours. Mais quelle est la dimension de l'espace de la couleur ?

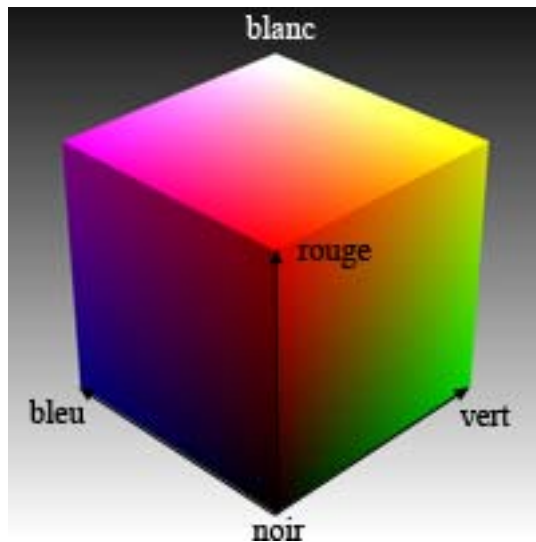
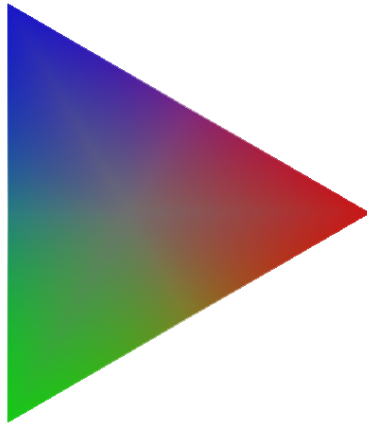
Nous avons déjà vu que la parcours du bleu au jaune pouvait être coupé par le gris :



Cependant nous pouvons trouver un autre parcours, un *détour* contournant ce point :



²⁵ En toute rigueur, il faudrait ajouter à chaque stade de la définition "par un point *ou par un ensemble fini de points*" (id. en remplaçant "point" par "continu de dimension n").



Nous pourrions multiplier les exemples, mais cela suffit pour démontrer que l'espace de la couleur est au moins de dimension 2. Maintenant, introduisons une coupure qui soit elle-même de dimension 1, c'est-à-dire une ligne : les valeurs de gris du noir au blanc constituent un tel sous-continu. Nous voyons bien que la ligne bleu-jaune ci-dessus ne sera jamais coupée par une valeur de gris.

Les lignes ne constituent pas des coupures pour l'espace de la couleur ; l'espace de la couleur est donc au moins de dimension 3. Il reste à montrer qu'il est de dimension 3, et non de dimension 4 ou plus. Il faut donc montrer que tout parcours est coupé par un continu de dimension 2, usuellement appelé une surface.

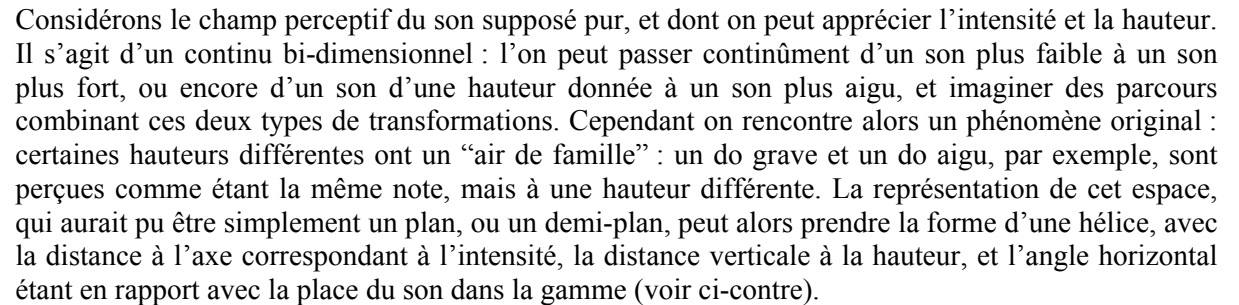
On peut s'en persuader en prenant un exemple facile à exprimer avec des mots : pour aller du noir au blanc, on ne peut pas *ne pas passer* par des couleurs toutes différentes, mais ayant la même clarté (par exemple le triangle ci-contre) : ces couleurs forment un continu de dimension 2 ; et donc l'espace de la couleur est bien tri-dimensionnel.

Le même type d'expériences peut être fait sur l'espace des localisations. Si l'on reprend l'exemple du point blanc sur l'écran noir, on voit facilement d'une part qu'il existe différents parcours possibles entre deux points, et d'autre part que cet espace est coupé par une ligne (fermée ou allant jusqu'aux limites de l'espace). Ce qui confirme le fait (que nous supputions, évidemment) que l'écran est de dimension 2. En expérimentant avec des positions "dans l'espace", on peut montrer que cet espace n'est pas coupé ni par un point ni par une ligne, mais l'est par une surface (fermée ou supposée illimitée).

L'espace perceptif du poids est de dimension 1. L'expérience du bol de sable le montre bien. Pour passer du plus léger au plus lourd, il n'y a qu'un chemin possible, on doit passer par un poids intermédiaire. L'espace de la température est, comme celui du poids, de dimension 1 : on ne peut passer continûment du froid au chaud qu'en passant par le tiède...

Représentations

Bien sûr, les expériences avec les couleurs sont reconstruites, et fondées, non sur l'expérience directe pure, mais sur le fait que nous savons bien maintenant que l'espace de la couleur est représentable par un volume tridimensionnel, même si la manière de faire cette représentation peut varier. On peut prendre comme vecteurs de base, le rouge R, le vert V et le bleu B, qui correspondent aux cônes de la rétine (ainsi qu'aux coordonnées génériques des couleurs par informatique), ou bien la luminosité L, la saturation S et la teinte T, qui correspondent mieux à notre perception (et qui sont également proposées aux utilisateurs de palettes graphiques). La forme de l'espace des couleurs, toujours tridimensionnel, n'est pas exactement la même dans les deux cas : un cube de base R V B, ou un double cône d'axe L, de coordonnées polaires S et T. Ce n'est pas très grave, dans la mesure où ces différentes représentations sont homéomorphes, c'est-à-dire topologiquement équivalentes.



Elargir la notion de dimension en introduisant l'idée de degré de liberté peut être dangereux ; le mot "dimension" est utilisé couramment sans aucune rigueur²⁶, simplement pour désigner un "aspect" d'un problème, un "point de vue" sur un sujet, une contrainte à prendre en compte, etc. ; on peut ainsi multiplier les "dimensions" d'un phénomène sans se rendre compte que ces "dimensions" n'en sont pas, parce qu'elles ne sont ni indépendantes, ni de même nature. D'un autre côté, réduire un phénomène complexe à une représentation unidimensionnelle, sous prétexte de pouvoir le mesurer, est tout aussi dangereux : le calcul du quotient intellectuel (QI) en est un exemple. Dans un autre ordre d'idée, on peut s'étonner de voir Pierre Schaeffer, ayant estimé que le son, dont il s'occupe, est un phénomène à 6 dimensions, affirmer :

49

“Or, nous ne voulons pas d'une classification à six dimensions, impraticable: nous voulons pouvoir la formuler dans le cadre d'une épure à deux dimensions: une feuille quadrillée devrait nous permettre de servir les musiciens dans l'embarras, sans subtilité inutile.” (Pierre Schaeffer, *Traité des objets musicaux*, Seuil, 1966, p. 436-7)

Réduire un phénomène complexe est possible, cependant, à condition de savoir ce que l'on perd, et d'être rigoureux dans cette réduction ; c'est bien ce que l'on fait avec le plan et la coupe d'un objet tridimensionnel : mais le plan sans la coupe ne suffit pas, et, pour un objet compliqué, il faudra même multiplier les plans et les coupes.

Il est bien connu aujourd'hui, depuis Einstein, que les scientifiques n'envisagent plus l'espace et le temps indépendamment, mais un modèle d'espace-temps à 4 dimensions. Cependant il faut remarquer, d'abord, que ce modèle n'a d'incidence que pour des mobiles dont la vitesse est proche de celle de la lumière, et que donc il n'est pas très pertinent d'imaginer qu'il doive être prise en compte dans notre vie quotidienne, ni dans la conception de l'espace architectural ; et sur ce point nous partageons l'opinion de Jean-Pierre Le Dantec²⁷ à propos de l'imprudence, pour le moins, manifestée par Giedion (et d'autres théoriciens de l'architecture moderne) , lorsqu'il affirme :

“En 1908, le grand mathématicien Hermann Minkowski (1864-1909) conçoit pour la première fois un univers à quatre dimensions dans lequel l'espace et le temps se fondent en un indivisible continuum. (...) C'est justement alors qu'en France et en Italie les peintres cubistes et futuristes créent en art l'équivalent du continuum espace-temps, en recherchant les moyens d'expression qui traduisent la sensibilité de leur époque.” (Sigfried Giedion *Espace, temps, architecture 1. L'héritage architectural*, p. 55)

Il n'y a d'ailleurs pas de raison de le prendre en compte pour l'analyse de l'espace géographique pour les mêmes raisons. D'autre part, le temps n'est pas une dimension comme une autre, puisqu'il n'y pas de réversibilité possible (et le modèle mathématique employé le met en évidence). Lorsque nous parlerons de *quatrième dimension* de l'espace, il ne s'agira pas du temps, il s'agira d'une dimension analogue aux trois autres.

²⁷ “ L'affaire de l'introduction de la “quatrième dimension temporelle” est, à cet égard, éclairante puisque si, comme le suggère Giedion, elle avait été inspirée par les théories d'Einstein concernant la relativité, elle supposait alors des déplacements de l'observateur à des vitesses proches de celle de la lumière, et l'usage d'un espace “courbe” (riemannien). Or les vitesses prises en compte demeurent (et de beaucoup) compatibles avec le newtonnisme, cependant que les exercices spatiaux supposés les intégrer n'utilisent que les points, droites et pans et le parallélisme de la géométrie classique.” (Jean-Pierre Le Dantec, *Dédale le héros*, Balland, 1992, note 31, p. 179)

I.2.3 Variétés

Topologie

La formalisation mathématique de ce que nous avons exploré perceptivement, empiriquement, jusqu'à présent, se fait dans cette branche des mathématiques qu'à l'époque de Poincaré (où c'était une science toute nouvelle) on appelait *analysis situs*, mais que l'on appelle maintenant (en passant du latin au grec) *topologie*. La topologie, qui peut être très complexe et très sophistiquée, et qui s'est développée tardivement dans l'histoire des mathématiques, correspond pourtant aux premiers stades de notre perception, comme l'ont montré les travaux de Piaget²⁸ ; les jeunes enfants sont dans un premier temps beaucoup plus sensibles aux caractéristiques topologiques (qu'ils ne nomment pas ainsi, évidemment) des formes, qu'à leurs caractéristiques géométriques : par exemple, un jeune enfant ne fera pas de distinction entre un carré et un cercle, qui sont toutes deux des lignes fermées, ou entre les surfaces qu'elles délimitent, mais les distinguera des mêmes surfaces trouées.

La topologie se situe en quelque sorte en amont de la géométrie : on a pu dire que c'était la géométrie sans la mesure, ce qui peut sembler un oxymoron, mais l'espace a des caractéristiques propres qui existent avant même que l'on ait défini une mesure, ou plus précisément, une *métrique*. Une géométrie (on ne peut plus dire *la* géométrie depuis Riemann et les autres) se définit à travers un certain groupe de transformations : par exemple, la géométrie euclidienne se définit à partir du *groupe*²⁹ des isométries, à savoir des *déplacements* (translation, rotation) et *antidéplacements* (en y ajoutant la symétrie de réflexion), en tant que considérant comme équivalentes les figures qui sont inchangées par ces transformations (elles sont alors superposables). La topologie est quant à elle fondée sur les *homéomorphismes* : la topologie considère comme équivalentes des figures transformées par étirement, rétraction, courbure, pli, froissement, etc., comme avec un matériau totalement élastique, mais interdit de trous ou de recoller la forme de départ : un bout de ficelle sera indifférencié quelles que soient les déformations qu'on lui fait subir, mais changera de nature si on le coupe en deux, ou au contraire si on recolle les deux extrémités : les déformations doivent être continues.

Cependant, la topologie s'intéresse aussi à ce que l'on obtient en faisant les opérations *a priori* interdites, c'est-à-dire *couper* et *coller* : nous verrons dans la partie II que ces opérations sont tout à fait courantes dans la production de formes (bien qu'elles portent souvent sur ce que nous appellerons des quasi-variétés).

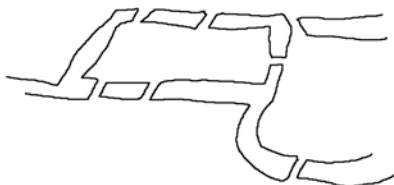
²⁸ cf Jean Piaget et Bärbel Inhelder, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, PUF, 1972

²⁹ Le mot "groupe" doit être entendu au sens mathématique du terme, i. e. un ensemble muni d'une certaine opération associative, et éventuellement commutative ($\rightarrow$ groupe commutatif, ou abélien), qui comprend un élément neutre et où chaque élément a un inverse ; l'ensemble des isométries, muni de l'opération de composition est un groupe commutatif dont l'élément neutre est l'identité.

La topologie appelle *variété* ce que nous avons appelé jusqu'à présent *continu* ou *sous-continu*. Elle s'intéresse à des notions très intuitives comme celles de *voisinage*, de *bord*, d'*intérieur* et d'*extérieur*, de *connexité* (c'est-à-dire de la propriété d'être "d'un seul tenant"), de *trou*, de *convexité* et de *concavité*, etc., c'est-à-dire à des propriétés très primaires de l'espace et des formes (mais propriétés qu'elle formalise très rigoureusement), propriétés qui sont aussi celles auxquelles s'intéressent, en premier lieu, la géographie et l'architecture.

Que la topologie se passe de la mesure, cela ne signifie pas qu'elle ne comprenne pas des notions reliées aux nombres : *mesurer* et *dénombrer* sont deux choses différentes. Et la topologie suffit à nous permettre de compter les choses, les objets : quelles que soient leur forme, leur taille, leur emplacement, etc., nous déterminons qu'il y a *un certain nombre* (entier) de "choses" séparées, c'est-à-dire en langage topologique, non *connexes* ; c'est même en fait la base de l'idée de numération. Et ceci est vrai pour les "choses" dans l'espace de l'étendue, comme pour les événements temporels : nous pouvons compter les coups de l'horloge parce que chaque coup constitue une forme temporelle fermée avec un début et une fin.

Pour une seule forme, qui comprend un intérieur, et donc un extérieur, nous constatons que nous devons franchir sa frontière un *nombre pair* de fois pour revenir à notre point de départ. Cela peut sembler évident (comme beaucoup de concepts topologiques) mais constitue cependant un théorème. Des théorèmes un peu plus sophistiqués permettent de savoir si l'on peut faire un parcours fermé en franchissant un nombre de ponts donnés (le fameux problème des ponts de Königsberg³⁰), ou encore déterminent le rapport entre le nombre de faces, d'arêtes, et de sommets d'un polyèdre ($f+a+s=2$). On peut citer aussi le problème du nombre de couleurs minimum nécessaire pour colorier n'importe quelle carte, problème dont l'énoncé est d'une simplicité extrême mais dont la résolution a nécessité énormément de travail³¹.



Le problème des ponts de Königsberg

³⁰ c'est en fait un problème de la théorie des graphes, mais celle-ci est incluse dans la topologie, ne dépendant d'aucune mesure ; c'est Euler qui a résolu le problème qui s'énonce ainsi : "Etant donné que la ville est construite sur deux îles reliées au continent par six ponts, et entre elles par un pont, trouver un chemin quelconque permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ". Le problème n'a d'ailleurs pas de solution, dans la disposition des ponts donnée ; la question n'est pas si compliquée que cela : le nombre de ponts au total n'est pas en cause, mais il faut que sur chaque île, ou chaque rive, il y ait un nombre *pair* de ponts qui accostent ; il faut bien pouvoir revenir après être parti...

³¹ le problème a été posé dès 1852 ; on a démontré rapidement que trois couleurs étaient insuffisantes, et que cinq sont suffisantes ; mais la conjecture des quatre couleurs ("Il est possible de colorier n'importe quelle carte avec seulement quatre couleurs distinctes, de sorte que deux régions limitrophes reçoivent deux couleurs



14 Le théorème des 4 couleurs

Les nombres dont il s'agit en topologie sont donc essentiellement les nombres entiers, à commencer par la dimension : étant récurrente, la définition de la dimension implique en effet qu'il s'agit d'un nombre entier.

Fiction

Il se trouve que notre espace est de dimension 3, qui est un nombre entier parmi d'autres... Cette dimension aurait pu être égale à 2, ou à 4, ou à n'importe quel autre nombre entier, et notre vie aurait été bien différente. Nous y sommes tellement habitués que nous n'y faisons pas attention, et nous ne sommes pas très conscients des possibilités et des limites de ce fait du hasard (ou de la nécessité ?). Dans l'Angleterre victorienne, il y a plus d'un siècle, un certain nombre d'auteurs ont voulu rendre plus conscients leurs lecteurs de ces particularités, et pour cela ont imaginé des mondes, des espaces de dimension différente de 3, le plus fameux d'entre eux étant Edwin A. Abbott avec son roman *Flatland : A Romance of Many Dimensions By A Square*³². Le principe de ces fictions est celui de l'analogie : se mettre dans la peau d'un être bidimensionnel permet de se rendre compte que ce que nous tenons pour acquis n'est qu'un cas particulier. Les êtres qui habitent *Flatland* (dont le narrateur, qui est un carré) sont des polygones, des triangles isocèles ou équilatéraux, et toute la série des polygones réguliers ; le propos de cette fiction très amusante n'est d'ailleurs pas que de didactique mathématique : elle s'attaque aussi aux préjugés de classe de la société victorienne et à sa misogynie. Plus un polygone a de côtés, plus son rang est élevé, et plus il a de pouvoir et d'intelligence ; la classe inférieure (le lumpen prolétariat, en quelque sorte) étant la masse de tous les triangles isocèles. Pour évaluer le rang d'un individu c'est donc très simple, il suffit de mesurer l'angle de la figure que l'on rencontre, le roi étant évidemment un cercle. Les femmes sont des triangles tellement aplatis qu'ils sont quasiment des segments, ce qui leur confère une intelligence et un pouvoir minimaux. Ce récit s'attaque aussi à l'obscurantisme : le narrateur "sort" de son monde bidimensionnel pour explorer l'espace 3D, mais à son retour, il est banni et jeté en prison pour avoir voulu évoquer cette possibilité d'un monde supérieur.

Certains auteurs de bande dessinée et de dessin animé ont exploité le caractère bidimensionnel (la feuille de papier, l'écran) du support de leur œuvre pour jouer sur les caractéristiques de cet espace : les *Shadoks* en sont un bon exemple.

Mais il n'y pas que les écrivains, les artistes, pour nous faire imaginer des mondes autres que le nôtre (ou encore pour avoir un autre point de vue sur notre monde) : la science est elle-même une forme de fiction :

distinctes") n'a pu être prouvée que par l'intervention de l'ordinateur (et encore, laborieusement), pour passer en revue tous les cas de figures possibles, ou en tout cas les 1200 cas critiques ; ce qui n'est pas très satisfaisant du point de vue de l'élégance théorique.

³² Edwin A. Abbott, *Flatland : A Romance of Many Dimensions By A Square* [1884], Dover Publications, 1992.

“Ainsi , comprendrons-nous mieux le jeu du réel et du fictif dans la pensée scientifique en donnant au mot “fiction” sa pleine signification concrète, que nous rend l’étymologie. Car le verbe *fingere* en latin ancien, avant que de prendre un sens abstrait (feindre, faire semblant, imaginer), renvoyait très directement à l’activité manuelle du potier et du sculpteur, ceux qui, dans la glaise, et de leurs doigts (*fingers*), modèlent des effigies, des *figures*. En ce sens, la science, elle aussi activité effective de modélisation, *est* fiction.” (Jean-Marc Lévy-Leblond, *Aux contraires L’exercice de la pensée et la pratique de la science*, Gallimard, 1996, p. 397)

Types de variétés

Une *variété* est caractérisée par sa dimension. En toute rigueur, une variété n’a pas de bord, ou son bord est rejeté à l’infini. On étendra éventuellement la définition à des *variétés à bord(s)*.

Nous avons défini la dimension des variétés par la coupure : une ligne constitue une variété de dimension 1 (puisque’elle est coupée par un point), un plan une variété de dimension 2 (puisque’il est coupé par une ligne). Notre espace est une variété de dimension 3.

Comme corollaire de la définition de la dimension à partir de la notion de coupure ou de limite, nous pouvons dire que le bord (frontière, limite, enveloppe) d’une région d’un espace de dimension n est une variété de dimension $n-1$: la frontière d’un morceau de ligne est constituée de deux points ; celle d’une région d’une surface (2D) est une ligne fermée (1D) ; celle d’un volume est une surface fermée. Mais nous rencontrons là un premier paradoxe : si la frontière d’un segment est bien constituée de deux points, la frontière d’un cercle (par exemple, ou de toute ligne fermée) n’existe pas (son bord est rejeté à l’infini)... De la même façon, la surface d’une sphère, ou toute surface fermée, n’a pas de frontière non plus. Par contre, nous ne rencontrons pas, et ne pouvons même pas vraiment imaginer, du moins en première approche, de volume qui n’ait pas de frontière ; à moins qu’il ne s’agisse de l’espace lui-même.

Il faut noter que l’on confond souvent la variété et la portion de l’espace de dimension supérieure dont elle est la frontière : si l’on distingue couramment (mais pas toujours) le cercle et le disque, quand on parle d’un carré, désigne-t-on son contour ou son intérieur ? Il est pourtant crucial de faire cette distinction. Si l’on cherche à définir par récurrence une famille de formes (en ayant introduit la notion de *distance*) en commençant par le cercle, comme ensemble des points du plan équidistants d’un centre³³, et qui est une *ligne*, on passe à son équivalent 2D qui est une sphère, mais la *surface* d’une sphère, c’est-à-dire l’ensemble des points de l’espace équidistants d’un centre. Son successeur dans la récurrence serait *l’ensemble des points de l’espace quadridimensionnel équidistants d’un centre*, qui



³³ On aurait d’ailleurs dû débiter en toute logique par deux points équidistants d’un “centre” sur une ligne... ensemble équivalent au cercle, mais que l’on pense rarement comme un cercle de dimension 0...

se trouve être une variété tridimensionnelle³⁴, mais qui n'a rien à voir avec ce que l'on entend usuellement par sphère, la "sphère" volumique, qui n'est que l'intérieur de la sphère bidimensionnelle.

Ce que nous voyons du cercle et de la surface de la sphère, c'est que ces variétés, sans bord (donc *illimitées*), mais ne s'étendant pas jusqu'à l'infini (donc *finies*, nous les voyons en entier), sont *fermées* (au contraire des lignes ou surfaces infinies, qui sont *ouvertes*), et qu'elles le sont parce qu'elles sont *courbes*. Nous ne pouvons pas imaginer comment une ligne pourrait se refermer sur elle-même sans se plier, se courber, et cela elle ne peut le faire que *dans* l'espace 2D ou 3D dans laquelle nous (parce que nous sommes des êtres 3D) la voyons plongée ; de la même façon la surface de la sphère, bornée et illimitée, est fermée, et cela est possible parce qu'elle est plongée dans un espace 3D, et qu'elle est courbe dans cet espace.

Le paradoxe d'une surface finie illimitée est facile à appréhender puisque la surface de la Terre est plus ou moins celle d'une sphère, et que nous savons bien que si nous voyageons assez longtemps en marchant droit devant nous, nous reviendrons à notre point de départ, sans jamais rencontrer le "bout du monde"... Mais nous sommes des êtres tridimensionnels, et, bien que nous soyons en grande partie attachés à la surface bidimensionnelle de la Terre, nous pouvons aussi la voir à *partir de* l'espace 3D, et observer qu'elle n'a pas de frontière parce qu'elle est courbe, et courbe au point de se refermer sur elle-même. Nous pouvons même *fabriquer* une surface fermée, par exemple en pliant une feuille de papier (une grossière approximation d'une surface) découpée de manière adéquate pour en faire un cube (la surface d'un cube) : nous pouvons plier cette feuille de papier parce que nous sommes des êtres tridimensionnels. Pour qu'une surface soit courbée, ou pliée, et donc fermée (ou d'ailleurs une ligne), nous voyons qu'elle doit être immergée dans un espace de dimension supérieure, c'est-à-dire pour une surface l'espace tridimensionnel. Mais comment un volume pourrait-il être "courbé" ou "plié" de cette façon, puisque nous ne pouvons pas concevoir un espace quadri-dimensionnel dans lequel il serait immergé ?

La seule variété tridimensionnelle *sans bords* est l'espace 3D lui-même. Mais est-il ouvert, et "plat", c'est-à-dire l'équivalent 3D d'une ligne ou d'un plan infinis, ou fermé, et donc "courbe" (mais

³⁴ variété d'ailleurs à l'origine d'un problème très complexe, la *conjecture de Poincaré* (à savoir "Toute variété de dimension 3 compacte et sans bord est homéomorphe à une sphère de dimension 3"), énoncée en 1904, mais qui, après avoir connu un grand nombre de preuves inexactes (y compris par Poincaré lui-même), n'a connu de solution que très récemment, en 2003 (après avoir été mise à prix un million de dollars en 2000 par l'Institut de Mathématiques Clay), par Grigori Perelman (qui a refusé la médaille Fields qui lui avait été décernée, ainsi d'ailleurs que le prix Clay...), solution approuvée par un groupe d'experts en 2006, soit plus d'un siècle après son énoncé...

rappelons que cette courbure s'effectue dans la quatrième dimension) ? A l'échelle de notre perception, et aussi de nos moyens de déplacement, il est plus plausible qu'il soit illimité : nous pouvons difficilement penser qu'en allant tout droit devant nous dans l'espace intersidéral nous reviendrons un jour ou l'autre à notre point de départ : c'est pourtant ce que signifie l'hypothèse d'un espace courbe. Pour le savoir, il faudrait, soit voyager assez loin pour revenir à son point de départ, soit accéder à la quatrième dimension, et "voir" la courbure de l'espace 3D.

A moins qu'il n'existe un moyen, local, de l'intérieur, de savoir si l'on appartient à une variété plate ou courbe ; en fait ce moyen existe :

"Mathématiquement, on peut montrer que l'exploration d'un voisinage aussi petit que l'on veut d'une surface permet de détecter la courbure de cette surface en ce point. Il suffit, par exemple, de mesurer (avec assez de précision) la circonférence d'un cercle centré sur ce point, et de la rapporter à son rayon. Ce rapport différera du π sacré, par un écart directement lié à la courbure locale. Plus généralement, on peut de même distinguer "de l'intérieur" le caractère courbe ou "plan" d'une variété à N dimensions – en tout cas, dès que cette dimensionnalité N est supérieure à l'unité : curieusement cette distinction locale du droit et du courbe n'est justement pas possible pour le cercle et la droite, mais le devient pour la sphère et le plan." (Jean-Marc Lévy-Leblond, *Aux contraires L'exercice de la pensée et la pratique de la science*, Gallimard, 1996, p. 66)

Les scientifiques penchent actuellement pour l'hypothèse d'un espace courbe, mais cela ne nous concerne pas beaucoup, car nous n'avons que peu de chances d'aller assez loin dans l'univers pour nous retrouver à notre point de départ : nous sommes un peu comme des fourmis bidimensionnelles sur une planète tellement immense qu'elles ne pourraient en faire le tour qu'en plusieurs milliards d'années.

La connexité traduit la caractéristique énoncée dans le langage courant d'être "d'un seul tenant". La connexité suppose la continuité, mais on peut avoir un ensemble composé de parties toutes continues, et qui ne soit pas connexe. La figure a ci-dessous montre un domaine du plan (en noir) qui est connexe, la figure b un domaine du plan (en noir aussi) composé de parties toutes connexes, mais qui n'est pas connexe dans sa totalité :



fig a :



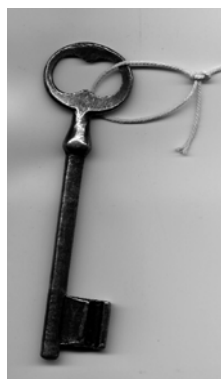
fig b :

La connexité implique que l'on peut parcourir par continuité tout un domaine, qu'il n'y a pas de points inatteignables. Un espace, et même une variété, à bord ou pas, est forcément connexe.

La connexité dite "simple" va plus loin : un domaine est "simplement connexe" si, non seulement il est connexe, mais encore "sans trou". Plus formellement, on dira que tout lacet y est réductible, continûment, à un point ; au fond, cette formalisation est assez intuitive : il faut imaginer que l'on se déplace en tenant une ficelle (comme Thésée), que l'on a attachée au point de départ (ou dont Ariane tient un bout), et qu'après un parcours quelconque, on revient à son point de départ : peut-on ou non, dans tous les cas, récupérer sa ficelle en tirant dessus ? Si la réponse est oui, le domaine est simplement connexe, il ne l'est pas dans le cas contraire.

Si l'on en reste au plan, ou à des domaines du plan, les choses sont assez évidentes : soit on a le plan complet, et il est simplement connexe, soit il y a un ou plusieurs trous dans le plan, et l'on a un domaine non simplement connexe. Le domaine de la figure a, bien que connexe, n'est pas *simplement connexe*. Par contre, chacune des composantes de la figure b est simplement connexe³⁵.

Mais pour les surfaces courbes, c'est plus subtil : la surface de la sphère est simplement connexe, mais celle du tore ne l'est pas (la ficelle passée dans le trou de la clé (qui est équivalente, topologiquement, à un tore) et nouée, ne pourra pas s'en échapper ; ce qui est pratique, d'ailleurs...).



³⁵ On a supprimé les lacs et mers intérieures...

On ne peut pas dire que la surface du tore, ou celle de la clé, soit “trouée”, elle est même fermée, sans bord ; mais par contre la région d’espace qu’elle délimite (le volume de la clé) l’est.

Le nombre de trous présents dans la région d’espace dont une variété est la frontière caractérise cette variété. On peut remarquer qu’un morceau de ligne d’un seul tenant ne peut encercler une portion de plan trouée : cette région comportera au moins deux bords ; par contre dès qu’on passe en deux dimensions, on peut avoir une variété trouée qui reste d’un seul tenant (connexe) : le tore est une telle variété. On distinguera les variétés par leur *genre*, qui est tout simplement le nombre de trous de la région d’espace qu’elles enferment (un bretzel, ou du moins sa surface, est de genre 3 ; un ballon de genre 0...).

Ces considérations peuvent sembler bien abstraites et éloignées des préoccupations des architectes et des géographes. Bien sûr, les aspects techniques mathématiques très élaborés des théories topologiques dépassent le cadre plus pragmatique, terre-à-terre, de ces praticiens de l’espace. Pourtant la topologie emploie des techniques et des termes très proches du vocabulaire à la fois des géographes et des architectes : cartes, atlas, projection, bord, enveloppe, intérieur/extérieur, etc.

I.3 L'espace vécu

Ce que l'on appellera ici espace "vécu" ne se réfère pas à l'expression employée, par exemple, par les sociologues, mais à la confrontation de l'homme et de son système perceptif avec les conditions matérielle de son existence : l'homme vit sur la Terre, confronté à la matière, éclairé par le soleil, soumis à la gravité. Ces conditions matérielles ont façonné notre perception, ou bien elles ne nous paraissent telles qu'elles sont que parce que nous avons ce système perceptif, peu importe. Le fait est que nous avons affaire à elles, et qu'elles construisent ce que nous appelons la perception de l'espace et des formes..

I.3.1 La matière ou l'espace haptique

Le parcours et le heurt ou la transparence et l'obstacle

Arrivons au postulat, ou au constat, qui portera toutes nos investigations : nous ne percevons l'espace que par les *formes* qui y établissent des *coupures*. L'espace est bien un continu empirique tridimensionnel, mais nous le constituons en quelque sorte, par rapport à la récurrence, à l'envers – non pas en allant du point à la ligne, puis à la surface, enfin au volume, mais en nous heurtant (c'est-à-dire en rencontrant une *coupure*, au sens de Poincaré) à des volumes, ou plutôt à leur surface. Nous pouvons affirmer que ce sont des volumes parce qu'ils sont enveloppés de surfaces, qui elles-mêmes sont coupables par des lignes, elles-mêmes coupables par des points.

En effet l'espace, tel que nous le percevons, tel que nous le vivons, n'est pas seulement la structure tridimensionnelle sous-jacente à notre perception, le "lieu" de la répartition de toutes les qualités du monde, mais se présente à nous *à travers* les formes, les objets, en particulier les objets solides, plus ou moins indéformables, à travers donc des "pleins" qui parsèment un "vide", des "formes" qui existent non pas *sur*, mais *dans* un "fond", un "rien", un néant. Nous n'avons pas à laborieusement reconstituer les trois dimensions de l'espace, par le point, la ligne, la surface, mais nous sommes mis d'emblée en présence des formes tridimensionnelles, qui instaurent par leurs enveloppes des coupures bidimensionnelles infranchissables : l'espace nous est donné comme tridimensionnel d'emblée.

Le *parcours* dans cet espace, c'est le déplacement, et ce qui empêche le parcours, ce qui entrave notre déplacement, ce sont les formes qui parsèment cet espace et *à l'intérieur desquelles* nous ne pouvons pas pénétrer.

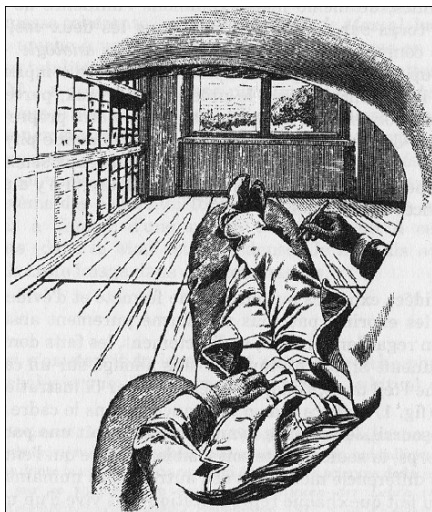
Nous nous heurtons à des objets ; en aucun cas nous ne pouvons franchir la surface de ces objets, mais nous pouvons, dans une certaine mesure parcourir leur surface : cette surface constitue donc une coupure entre là où nous sommes et ce qu'il y a au-delà, à l'intérieur de ces volumes. Une telle coupure est par exemple la surface du sol sur lequel nous nous tenons (mais aussi celle des murs, d'un rocher, etc.) ; ceci est vrai, que nous considérons aussi bien la vue que le toucher : voir c'est "se

heurter” à des surfaces *opaques*, comme toucher c’est se heurter à des surfaces *dures*. Et l’espace se constitue pour nous ainsi.

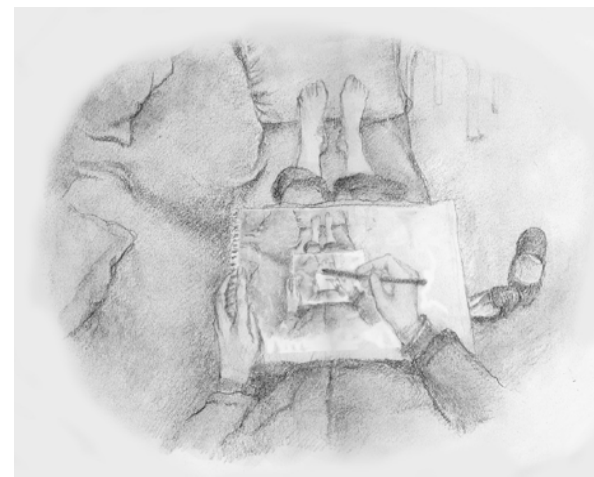
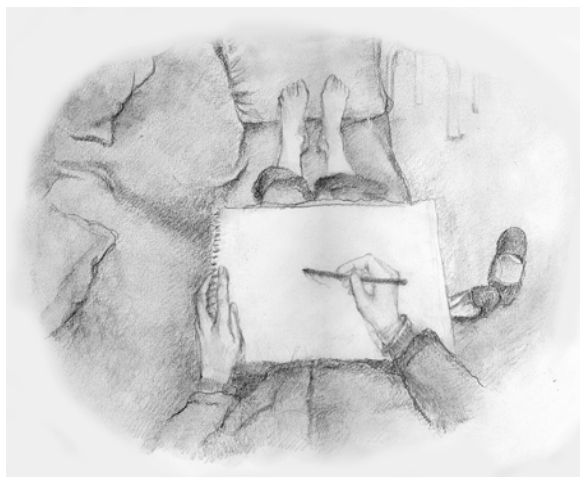
La notion de heurt est issue du toucher, mais elle n’est pas inadéquate à la vue: sans aborder pour l’instant la question de la projection des rayons lumineux sur la rétine, ce que l’on peut dire c’est que sont perçues par la vue les surfaces *sur lesquels les rayons lumineux rebondissent* ; et encore, simplement les surfaces qui sont les plus proches du centre de vision, de l’œil, et qui masquent les autres. Dans l’antiquité, on croyait que la vision résultait de rayons *issus de l’œil* et qui allaient heurter les objets et en quelque sorte révéler leur aspect ; cette conception est fausse, bien sûr, mais même si les rayons lumineux sont bien issus de la source de lumière, ils doivent se réfléchir sur les objets pour atteindre notre œil. La vue peut être considérée comme un toucher à distance, en assimilant les notions de transparence et d’obstacle (opaque) aux notions de parcours et de heurt, et nous permettent de percevoir l’espace comme continu “vide” dont les parcours (ou la transparence) sont “coupés” (empêchés) par des surfaces infranchissables ou opaques.

Ceci est mis en évidence lorsque l’on tente de reproduire ce que nous livre le champ visuel. Ernst Mach, dans son *Analyse des sensations*³⁶, nous livre un dessin assez connu, souvent repris, censé représenter le champ visuel de son œil gauche

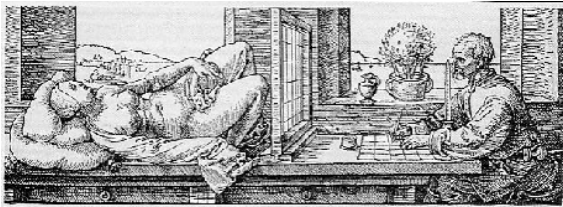
Nous avons refait cette expérience (en gardant les deux yeux ouverts, cependant) :



15 Ernst Mach, croquis



³⁶ Ernst Mach, *L'analyse des sensations Le Rapport du physique au psychique*, éd. Jacqueline Chambon, 1998

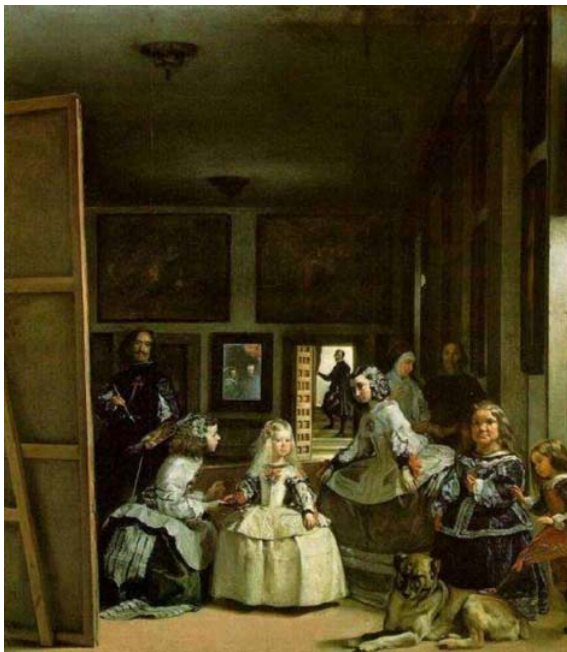


16 Albrecht Dürer, *Perspectographe à la femme couchée*

Si l'on veut rendre vraiment compte de la réalité de l'expérience, le bloc de dessin faisant partie du champ visuel, il y a forcément une mise en abyme (réalisée grâce à un logiciel de traitement d'image). Le dessin de Mach présente une grande différence avec notre expérience : il ne montre pas la feuille de papier sur laquelle il dessine, bien qu'il représente sa main tenant un crayon (dans une position qui ne semble pas très confortable, d'ailleurs). Cela lui permet d'éviter un écueil : en effet, soit la feuille est devant le champ visuel, et alors il faut effectuer une réduction assez drastique de ce que l'on voit (sinon la feuille recouvre tout le champ, ou une grande partie, et on ne dessinera que le blanc du papier et sa main...), soit la feuille est ailleurs, hors du champ visuel (et si elle est assez grande, il n'y aura pas à réduire autant), et alors il faut effectuer un va-et-vient entre son champ visuel et la feuille de papier³⁷.

Ceci est un problème bien connu des peintres ; sans pour l'instant aborder la question de la perspective, on peut remarquer que Dürer, dans l'un des dispositifs qu'il a représentés et qui servaient à "automatiser" la transcription dessinée du champ visuel, et que l'on appelle *perspectographes*, ne superpose pas ce qu'il voit en face de lui (qui est découpé par un cadre, et redécoupé pour une "mise au carreau") et ce qu'il dessine, posé sur la table devant lui. Sinon, il pourrait aussi dessiner directement sur du verre, ou sur du papier transparent : c'est d'ailleurs ce qu'il propose dans un autre dispositif sur lequel nous reviendrons plus tard.

De même, dans les *Ménines*, de Vélasquez, on voit bien que le tableau que le peintre est en train d'exécuter, et dont nous voyons l'envers du cadre, est positionné de côté par rapport au sujet, sujet (le couple royal) qui lui-même se reflète dans le miroir au fond³⁸ ; le peintre, lui, qui nous examine (nous, spectateurs, sommes à la place du sujet, nous faisons partie, nous sommes même au centre du champ visuel du peintre, nous sommes en quelques sorte le roi et la reine, le modèle du peintre), devra se tourner sur la droite pour transposer sur la toile ce qu'il voit. Comme la toile est très grande, on peut imaginer qu'il n'aura pas à réduire ce qu'il voit.



17 Diego Velasquez, *Les Ménines*

³⁷ à la réflexion, Mach ne représente pas la feuille de papier parce qu'elle est le résultat (d'où la position bizarre de la main) : c'est donc qu'au cours du dessin, c'est la feuille de papier qu'il a déplacée pour pouvoir voir ce qu'elle lui cachait... et qu'elle était assez grande pour couvrir tout son champ visuel. Ceci, qui n'est pas facile à réaliser, plus la prégnance des contours du visage, à notre avis reconstruite, nous fait mettre en doute l'authenticité du procédé de ce dessin...

³⁸ cette interprétation des *Ménines* est la plus courante, et c'est celle de Michel Foucault dans *Les Mots et les Choses* (op. cit., pp. 21-31) ; une variante, démontrée par une modélisation par ordinateur de l'espace représenté dans le tableau et proposée par Philippe Comar (in *La perspective en jeu* Découvertes Gallimard 138, 1992), consiste en ce que ce qui est reflété dans le miroir est le tableau que nous voyons de dos.



18 Norman Rockwell, *Triple autoportrait*

Par ailleurs, il faut remarquer que le tableau que nous pouvons voir au Prado (*Les Ménines*), et qui représente une scène comportant le peintre lui-même, l'arrière du tableau, et un certain nombre de personnages de la cour, n'est évidemment pas le tableau présent dans la peinture ; reste à savoir comment il a été peint. On peut imaginer que le mur en face du peintre porte un grand miroir, dans lequel se verraient les personnages présents dans le tableau (moyennant inversion de la scène si Vélasquez est droitier), ou que Vélasquez a utilisé, comme beaucoup de peintres, une chambre claire ; ou encore qu'il a fait poser tous les personnages présents dans la scène, un figurant prenant sa place (la finition de l'autoportrait - puisque c'est un autoportrait, en fin de compte – ayant pu être faite grâce à un miroir)

Ce même mécanisme, qui est d'autant plus important dans l'autoportrait, parce qu'il fait obligatoirement intervenir un miroir, a été mis en scène dans un registre plus léger par Norman Rockwell. Le décalage physique est souligné par la posture exagérément contorsionnée du peintre : le va-et-vient entre l'examen du miroir et la toile doit être fatigant ! D'autant qu'il faut à chaque fois reprendre exactement la pose. Mais Rockwell s'amuse dans ce tableau : ce qu'on voit représenté sur la toile diffère largement de ce que le peintre voit dans le miroir (pas de lunettes, pipe dans une autre position, visage plus jeune) ; on remarque aussi qu'au lieu de réduire, le peintre augmente au contraire la taille du visage. Et surtout, le tableau lui-même, comme pour *Les Ménines*, n'est pas le tableau représenté dans le tableau, mais montre toute la machinerie nécessaire, en principe, à un autoportrait. Le tableau entier n'a pas, sauf à imaginer un système de miroirs supplémentaires (où le peintre se verrait de dos), été exécuté de cette façon : il a été fait, soit d'imagination (et Rockwell est assez habile pour pouvoir réaliser cela), soit, probablement, à l'aide d'une photographie...

Le dessin de Mach donne une grande importance au cadrage de son champ visuel par son sourcil, son nez et sa moustache. Nous ne trouvons pas cela très réaliste. Peut-être si nous regardons quelque chose de très près, en tournant les yeux fortement vers le sourcil ou le nez, percevons-nous ces parties de notre visage, mais en général, non ; par contre, si l'on en porte, on voit les montures de ses propres lunettes, mais elles sont intérieures aux limites du champ visuel.

On peut dire que, et c'est un paradoxe, bien que notre champ visuel soit limité, nous ne voyons pas ces limites. Bien sûr, nous savons que nous ne voyons pas tout ce qui est potentiellement visible autour de nous ; nous pouvons déterminer plus ou moins, sans bouger les yeux, le moment (et donc l'emplacement) où un objet (par exemple nos mains) entre dans notre champ visuel. Mais nous ne voyons pas ce bord, car notre vision latérale est vague, et si nous déplaçons notre regard vers ce bord, nous déplaçons en même temps le centre de vision, et donc le bord lui-même ! Et qu'est-ce qu'un bord que nous ne pouvons jamais atteindre ?

D'autant plus que nous pouvons bouger les yeux, bouger la tête, tourner sur nous-mêmes : notre champ visuel est alors ressenti comme un continu sans limites, et qui se "recolle" dans toutes les directions, une *variété bidimensionnelle sans bord*.

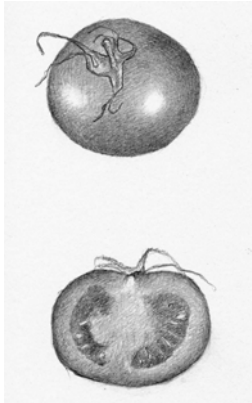
Cette conception du parcours et du heurt, évidente pour le toucher, et même pour la vue, peut dans une certaine mesure s'étendre aux autres sens, aux autres perceptions. Le flair de beaucoup d'animaux est beaucoup plus développé que le nôtre et contribue sans doute à leur "sens de l'espace". Les chauves-souris (et les dauphins) repèrent la position des obstacles, des proies, etc. en émettant des ultra-sons, et en analysant (par l'intermédiaire de leur système sensoriel et perceptif auditif) la réflexion de ces ondes : là aussi il y a parcours de l'onde ultra-sonore dans un milieu, l'air ou l'eau, et heurt sur une surface. Nous disposons nous aussi, par l'analyse (effectuée inconsciemment par notre système sensoriel et perceptif auditif) du décalage entre les ondes sonores reçues par chacune de nos deux oreilles, d'un outil d'évaluation de la position d'une source sonore. Nous percevons les différences produites par les surfaces sur la réverbération ou l'absorption des sons, et, tout simplement, sur la manière dont une configuration de surfaces va interrompre, plus ou moins, le cheminement de l'onde acoustique (à l'intérieur d'une maison, nous n'entendons les bruits du dehors qu'assourdis : c'est bien qu'un obstacle est venu couper ce parcours). Mais ce n'est pas l'ouïe qui nous sert prioritairement pour nous repérer dans l'espace ; d'autant que si la plupart des objets qui nous intéressent ont une consistance donnée, et un aspect visuel dès qu'ils sont éclairés, sans que nous ayons à émettre quoi que ce soit, ils n'émettent pas tous, et pas tout le temps, des sons (et d'ailleurs même la chauve-souris doit elle-même émettre des ultra-sons pour se repérer).

Variétés et quasi-variétés

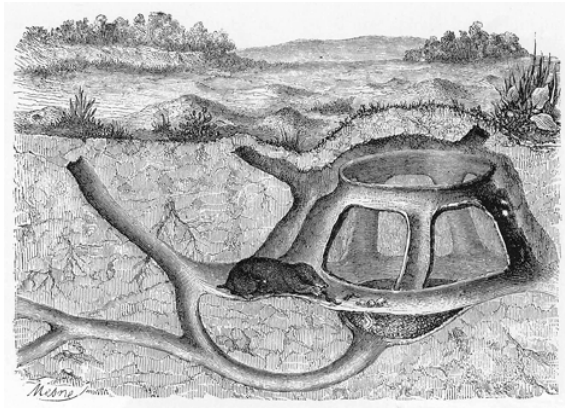
Nous ne pouvons jamais accéder à l'intérieur des volumes, nous vivons dans un espace, un monde, tridimensionnel, mais nous n'avons accès qu'aux *surfaces* des objets. Nous sommes en présence de corps plus ou moins solides que nous ne pouvons pénétrer ; leur enveloppe constitue un infranchissable. Bien sûr, nous pouvons, par exemple, casser un caillou, mais les morceaux que nous obtenons sont eux-mêmes des solides impénétrables, nous rencontrons de nouveau des surfaces infranchissables. De l'intérieur des objets, nous ne pouvons rien savoir, bien que nous puissions en construire une théorie :

““What about the inside of the brick ?” - and I would then point out that no one has ever seen the inside of a brick. Every time you break the brick, you only see a surface. That a brick has an inside is a simple theory which helps us understand things better.” (Richard P. Feynman, “Surely You’re Joking, Mr. Feynman!”, Norton & Company, 1985, p. 70)

Trad. ““Mais qu’en est-il de l’intérieur d’une brique ?” – et alors je faisais remarquer que personne n’a jamais vu l’intérieur d’une brique. Chaque fois que vous cassez une brique, vous voyez seulement



19 MPC, Tomate et Pêche dite “plate”
crayon, été 2007



20 Tunnels creusés par des taupes

une surface. Qu’une brique ait un intérieur est juste une théorie qui nous aide à comprendre mieux les choses.”

Ces surfaces auxquelles nous avons affaire sont toutes des surfaces fermées : il est inconcevable qu’il n’en soit pas ainsi, puisqu’elles sont les “bords” de volumes. Ce sont donc, au sens où nous l’avons défini plus haut, des *variétés bidimensionnelles*, elles n’ont pas elles-mêmes de *bords*. Il n’y a pas de surfaces “à bord” dans l’espace défini par les formes tridimensionnelles ; et comme des lignes, au sens strict, topologique, du terme, ne peuvent être que des bords de surfaces, il n’y a pas de lignes à proprement parler dans l’espace tel que nous l’envisageons ici. Et bien sûr, il y a encore moins de points, puisque ceux-ci seraient les bords (les extrémités) de lignes “à bords”, et s’il n’y a pas de lignes, il y a encore moins de lignes à bords...

Par contre, ces formes tridimensionnelles elles-mêmes peuvent être *non simplement connexes*, et ce de deux façons : soit en étant *trouées* (en conservant une seule enveloppe elle-même sans bord : le tore, le “bretzel”, etc.) ; soit en étant *creuses* (le blanc d’œuf dur, par exemple) ; dans ce dernier cas il faut casser l’objet pour savoir s’il y a un, ou plusieurs, creux. Et, de plus, il ne faut pas confondre le trou, qui troue de part en part, ni le creux autonome, qui est caché à l’intérieur de la forme, avec le repli, le creusement, qui se contente de générer des concavités, quelque compliquées qu’elles puissent être .

Les objets supposés creux nous intriguent, nous fascinent, par ce qu’ils peuvent révéler comme richesses intérieures, ou comme mystères (“Une noix, qu’y a-t-il à l’intérieur d’une noix, quand elle est fermée ?”). Couper un objet, même s’il n’est pas creux, est nécessaire pour en connaître (relativement) l’intérieur. Nous reviendrons là-dessus au point II.2.1.

La Terre est *trouée* d’une grande quantité de tunnels, naturels ou artificiels, creusés par l’eau, les animaux ou les hommes, mais nous avons du mal à savoir si elle est *creuse*, bien que cela ait alimenté les fantasmes de nombreuses générations. Tout ce que nous savons de l’intérieur de la Terre, nous ne le savons que de manière indirecte ; nos pauvres moyens ne nous permettent que d’égrotter un tout petit peu la croûte terrestre...

Jules Verne a beaucoup fantasmé sur la Terre comme corps troué : même sous la mer il y a ce tunnel sous l’isthme de Suez (*Vingt-mille lieues sous les mers*³⁹, II^{ème} partie, chap. V : “Arabian Tunnel”) que le capitaine Nemo a découvert et emprunte pour passer de la mer Rouge à la Méditerranée ; et bien sûr, la Terre elle-même est rêvée comme corps troué de part en part (*Voyage au centre de la Terre*⁴⁰).

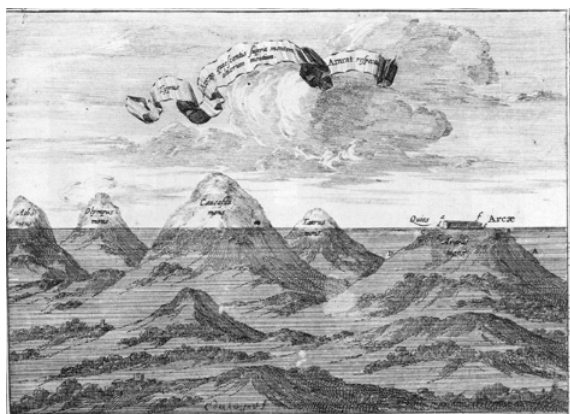
Notre corps, aussi, peut être considéré comme troué. Le système digestif le traverse de part en part puisque ce que nous ingérons par un orifice ressort, sous une autre forme, par un autre (sans entrer

³⁹ Le Livre de Poche N° 2033

⁴⁰ Le Livre de Poche N° 2029

dans les détails) : topologiquement, nous sommes donc un tore... Notre système respiratoire n'est qu'un repli arborescent (les bronches, les poumons), doublé d'un trou de type tunnel, si nous considérons que l'air peut entrer (et ressortir) par la bouche et par le nez ; le système génital féminin n'est aussi qu'un repli : les enfants sortent à travers l'orifice par lequel ils ont été conçus...

S'il n'y a que des corps solides tridimensionnels, éventuellement troués ou creux, et que les surfaces (vraies) n'en sont que les enveloppes, il y a par contre des *quasi-surfaces*, et même des *quasi-lignes*, voire des *quasi-points*. Une quasi-surface est un corps tridimensionnel, mais suffisamment mince pour jouer le rôle, pour nous, d'une surface : les feuilles, les pétales, sont des exemples de telles quasi-surfaces ouvertes, les coquilles d'œuf, les coques de noix, des exemples de quasi-surfaces fermées. La bulle de savon est sans doute l'exemple le plus parfait d'une quasi-surface fermée. Mais notre peau, déjà, est perçue comme telle, surtout quand il y a, pour une raison ou une autre, desquamation ; mais aussi la peau des autres animaux, celle des fruits, etc. De la quasi-surface fermée au corps creux, il n'y a qu'une question d'épaisseur : de la coquille d'œuf vide à la noix de coco, par exemple. Les quasi-surfaces peuvent mener à l'idée de strates : sous une quasi-surface, nous en rencontrons une autre, puis une autre, etc. Il y a aussi des quasi-lignes : les tiges des plantes, les cheveux, etc.. Et enfin il y a des quasi-points : tout objet suffisamment, petit, le grain de sable, par exemple, ou la goutte d'eau. L'homme fabrique beaucoup de quasi-variétés ; nous y reviendrons au point II.1.3.



21 Athanasius Kircher, *Arca Noe*, 1675

Nous vivons sur la Terre, et nous sommes même (par la gravité) en grande partie “collés” à sa surface : pour un très petit temps nous pouvons nous en détacher, en sautant, mais l'homme ne peut voler qu'en se harnachant à une machine (aile volante de Léonard de Vinci, dont on ne sait si elle a fonctionné, ballons, parapente, ULM) ou en étant *dans* une machine (avions)... La surface de la Terre, le sol, est la principale de ces surfaces infranchissables qui constituent notre espace. Bien sûr nous pouvons creuser, mais, comme on l'a déjà dit, cela ne nous confronte qu'à une nouvelle configuration de la surface.

Cette surface est compliquée, plissée, c'est le résultat de la tectonique des plaques, et c'est heureux, parce que si ce n'était pas le cas, notre milieu de vie serait un océan :

“If Earth were perfectly smooth, it would be covered everywhere with water to a depth of four kilometers. There might be life in that lonesome ocean, but there certainly wouldn't be baseball.”
(Bill Bryson, *A Short History of Nearly Everything*, Broadway Books, 2003, p. 248)

Trad. : “Si la Terre était parfaitement lisse, elle serait couverte partout par de l'eau d'une profondeur de quatre kilomètres. Il pourrait y avoir de la vie dans cet océan solitaire, mais il n'y aurait certainement pas de baseball.”

Cette surface, ce sol où nous vivons, est une surface illimitée, bien que finie, puisque la Terre est (plus ou moins) ronde. Toutes les formes terrestres, au-dessus ou en dessous (montagnes, gouffres, et toutes les formes intermédiaires), ne sont que des accidents de cette surface, ils n'en rompent pas la continuité. Même les formes vivantes y sont pour la plupart attachées : les plantes y sont en général enracinées, et peuvent être aussi considérées comme des appendices de cette surface ; à part les oiseaux et les insectes à ailes, et quelques autres animaux volants (tous ces animaux d'ailleurs le plus souvent doivent revenir au sol de temps en temps), les animaux ont toujours, comme nous, une partie de leur corps en contact avec le sol, et peuvent donc, du strict point de vue de la topologie, être considérés comme une simple altération (altération mouvante certes, mais connexe) de la surface de la Terre.

Bien sûr, ce n'est pas dans le vide, au sens physique, que nous vivons et que nous nous déplaçons, mais dans l'air, et plus précisément dans les plus basses couches de l'atmosphère. Mais cet air constitue, du point de vue de l'espace, un vide, parce que nous pouvons nous y déplacer relativement librement, l'air n'entrave pas nos déplacements.

Notre monde est "terraqué". L'eau recouvre la majeure partie de notre planète, essentiellement sous la forme des océans. L'eau n'est pas un milieu opposé à la vie et au déplacement, au contraire : des quantités énormes d'espèces s'y trouvent et y déploient leur propre perception de l'espace, sans doute assez différente de la nôtre. Mais nous autres êtres humains ne pouvons y évoluer qu'épisodiquement, et encore principalement à la surface, sauf à utiliser un équipement pour respirer.

Et, entre l'air, considéré comme "vide", et le "plein" constitué par les formes solides, il y a des intermédiaires : l'air lui-même lorsqu'il est tellement agité qu'il devient difficile de se déplacer, ou qu'il est chargé de gouttelettes d'eau ou de poussières et entrave la vue ; certaines végétations qui peuvent sembler impénétrables mais que nous traversons pourtant ; les sables, les boues, les tourbes, les marécages, où nous nous enfonçons plus ou moins ; et puis l'eau, dans ses différents états, qui constituent des milieux bien particuliers.

Nous percevons notre corps comme une forme tridimensionnelle fermée, de laquelle se détache progressivement le monde en tant que tel ; progressivement l'enfant apprend à distinguer les objets (y compris les personnes) de son propre corps. Ce que nous appellerons le *corps propre* est topologiquement un intérieur connexe (ou troué si l'on considère le trou du système digestif). Mais le corps propre ne se limite pas forcément aux limites matérielles de notre corps biologique : Le corps propre est un intérieur dont l'enveloppe, le bord, est la peau, auquel nous superposons d'autres enveloppes, des quasi-surfaces : nos vêtements, notre lit, la pièce où nous nous trouvons, l'immeuble

dans lequel elle se trouve ; ou encore le sac de couchage, la tente ; ou bien la caverne, la hutte ou la case ; ou encore la voiture, le train, l'avion...

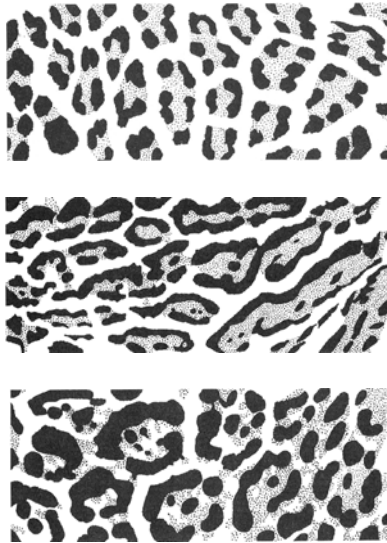
La conscience de notre corps propre nous permet de passer les portes sans avoir à chaque fois à évaluer le rapport entre notre propre largeur (et hauteur) et celle de l'ouverture. Si l'on transporte un objet encombrant, par contre, il faudra faire attention... Le corps propre peut s'étendre, comporter des appendices, des enveloppes qui le prolongent ; Maurice Merleau-Ponty cite plusieurs cas :

“Une femme maintient sans calcul un intervalle de sécurité entre la plume de son chapeau et les objets qui pourraient la briser, elle sent où est la plume comme nous sentons où est notre main [Head, *Sensory disturbances from cerebral lesions*, p. 188]. Si j'ai l'habitude de conduire une voiture, je l'engage dans un chemin et je vois que « je peux passer » sans comparer la largeur du chemin à celle des ailes, comme je franchis une porte sans comparer la largeur de la porte à celle de mon corps [Grünbaum, *Aphasie und Motorik*, p. 395].” (Maurice Merleau-Ponty, *Phénoménologie de la perception*, Tel Gallimard, 1945, p.178)

D'où le sentiment de puissance, sans doute, qui s'empare de l'humain dès qu'il devient automobiliste, et qui se retrouve avec un corps propre si véloce, et muni d'une carapace si solide ! Cette superposition d'enveloppes nous suit jusque dans la mort (tumulus, pyramides ; cercueil, caveau, voire chapelle funéraire).

Le corps propre se prolonge d'une façon plus immatérielle à notre environnement, qui ne constitue en général pas une enveloppe fermée matérielle mais plutôt un “intérieur” aux limites floues constitué par un *climat* au sens propre du terme (une température, une humidité, un mouvement de l'air, qui varient dans des limites qui nous sont familières), ou dans des sens figurés (des sons, des odeurs, etc., qui eux aussi évoluent dans des gammes auxquelles nous sommes habitués).

Immatérielle aussi, mais tangible, est cette distance que nous ressentons comme correcte par rapport aux autres êtres humains (voir : Edward T. Hall, *La dimension cachée*, Editions du Seuil, 1971) ; cette distance est éminemment variable : au sein d'une même culture, elle diffère suivant le lien affectif, l'intimité (nous allons jusqu'au contact avec nos proches ; nous préférons l'éviter avec un parfait étranger) et suivant les circonstances, le lieu (nous acceptons un contact fortuit dans une foule, un métro bondé, nous le considérons comme une agression dans un lieu désert) ; elle diffère bien évidemment d'une culture à l'autre.



22 Pelages de léopard, ocelot, jaguar



23 MPC, main, crayon, 1991.

I.3.2 La lumière ou l'espace optique

Des surfaces sur les surfaces, et des lignes

Dans l'espace haptique, tel que nous l'avons défini, il n'y a que des surfaces, et même des surfaces fermées, qui sont les enveloppes des formes tridimensionnelles matérielles.

Dans l'espace optique que nous allons envisager à présent, il y a des surfaces ouvertes, et des lignes qui entourent ces surfaces, et même des lignes ouvertes. Comme l'espace haptique n'était pas réservé au toucher, l'espace optique ne décrit pas que le fonctionnement de la vue, mais concerne aussi le toucher. Car les surfaces peuvent présenter des *motifs*, perceptibles par la vue ou le toucher : pour prendre l'exemple du corps, la peau peut présenter des taches, des grains de beauté, etc., qui définissent des variétés 2D à *bord*, et donc des contours visibles aussi bien que perceptibles par le toucher ; de tels motifs sont encore plus présents sur les pelages des animaux (taches de la girafe, du léopard, du zèbre, etc.), et peuvent se trouver aussi sur de nombreux objets de la nature. Le sol de la Terre, lui-même, présente de telles surfaces délimitées, et donc des contours (en principe fermés, même si nous ne pouvons pas forcément les voir ou les toucher en entier).

Ce qui est spécifique à la vue, c'est qu'elle nous fournit des contours (les "silhouettes" des objets), qui sont des lignes fermées. Ces contours n'appartiennent en général pas vraiment aux objets, et changent selon le point de vue, surtout si ces objets sont arrondis, non anguleux. Cependant, tous les objets ne sont pas ainsi, et peuvent présenter des arêtes qui leur sont propres (même si c'est la caractéristique, surtout, des objets fabriqués par l'homme), et qui seront perçues tant par le toucher que par la vue, comme une limite entre deux surfaces jointives, n'ayant pas la même orientation. Dans ce cas, il peut même se produire qu'une ligne existe réellement, qui ne soit pas fermée : par exemple, sur le corps, le pli entre les doigts quand on les écarte, ou les lignes de la main, ou le pli de l'aîne, etc., qui s'évanouissent ; ou des formes de relief, et, à plus petite échelle, les arêtes d'un caillou peu émoussé.

La vision comme perspective

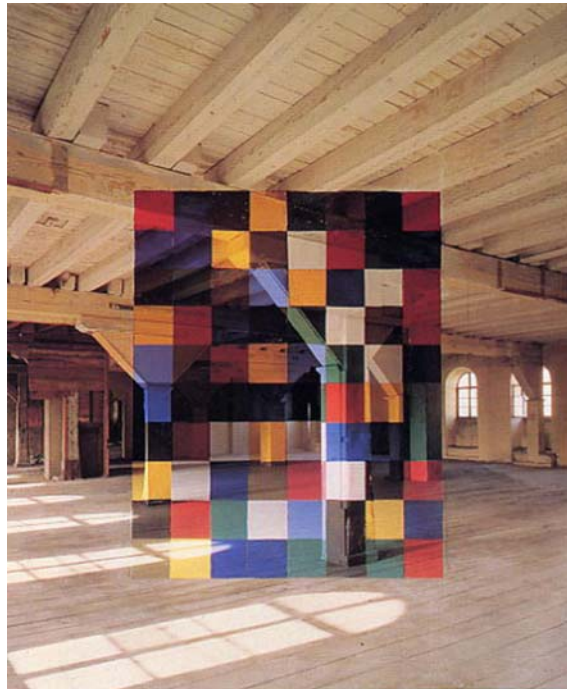
Mais ce qu'apporte essentiellement de nouveau la lumière par rapport à l'espace haptique, c'est la projection, et *la ligne droite* : la lumière se déplace en ligne droite, ou peut-être devrait-on dire plutôt que ce que nous appelons "ligne droite" est la façon dont se déplace la lumière. En effet, même les Anciens, avec leur conception des rayons visuels issus de l'œil, ne remettaient pas en cause ce postulat, que les rayons visuels, comme les rayons lumineux, sont *rectilinéaires*. Et Thalès n'aurait pas pu évaluer la hauteur de la Pyramide s'il n'avait pas supposé, d'abord, que l'ombre projetée par celle-ci et par le bâton-témoin, résultaient d'une projection suivant des lignes droites...

Que la vision résulte d'une projection, nous n'en sommes pas vraiment conscients. Le paradoxe essentiel c'est que la vue est une projection, mais que nous ne la percevons pas comme telle.

"47. Que rien ne nous frappe lorsque nous regardons autour de nous, nous déplaçons dans l'espace autour de nous, sentons notre propre corps, etc., voilà qui montre combien naturelles nous sommes justement ces choses. Nous ne percevons pas que nous voyons l'espace en perspective ou que l'image



24 Georges Rousse, Bercy, 1985.



25 Georges Rousse, Metz, 1994.

visuelle, vers ses bords, devient floue en quelque sens que ce soit. Cela ne nous frappe jamais et ne peut jamais nous frapper parce que c'est là la nature de la perception. Nous n'y réfléchissons jamais – ce qui est d'ailleurs impossible, car il n'y a pas de contre-forme opposée à la forme de notre monde.” (Ludwig Wittgenstein, *Remarques philosophiques*, Tel Gallimard, 1964, p. 78)

Rappelons encore une fois que ce que nous percevons par la vue, ce n'est pas l'image du monde qui se projette sur notre rétine, mais le monde lui-même : les psychologues de la perception ont répété à l'envi que nous voyons bien les assiettes rondes, alors que, sauf peut-être lorsqu'elles sont exposées au mur, et encore, l'image qui en est projetée sur notre rétine n'est presque jamais un cercle, mais une ellipse.

Même si n'en sommes pas conscients, le mécanisme de la vision consiste bien en une perspective, que nous pouvons simuler (c'est toute l'histoire de la peinture de la Renaissance) à condition de fixer le point de vue. En effet, dès que nous bougeons, le centre de la perspective change et la perspective n'est pas la même. La vision que nous avons de chacun de nos yeux est déjà légèrement différente (ce qui contribue à notre perception de la profondeur) et comme l'axe de la tête n'est pas situé dans l'œil, dès que nous tournons la tête, même sans bouger, le centre de la perspective se déplace.

Cependant, nous aimerions souligner que nous avons une assez grande tolérance à l'égard des distorsions de la perspective, et l'illustrer à l'aide des œuvres de deux peintres contemporains qui pratiquent ce que depuis la Renaissance l'on nomme l'*anamorphose* (c'est-à-dire une perspective paradoxale, qui doit être vue d'un point de vue très particulier), mais une anamorphose tridimensionnelle.

Georges Rousse peint sur les murs, les plafonds, les planchers, et même les objets qui peuvent se trouver dans une pièce, et prend une photographie d'un point de vue particulier ; de ce point de vue, on a l'impression de percevoir un objet tridimensionnel qui n'existe évidemment pas. La démarche de Georges Rousse implique la plupart du temps qu'il travaille dans des lieux destinés à la démolition ; c'est donc une œuvre éphémère, qui ne reste que par la photographie qu'il en prend (photographie de grand format et d'excellente qualité, d'ailleurs). Et il n'y a donc aucun moyen de savoir ce que l'on perçoit d'un autre point de vue, ni si l'illusion n'est due qu'à la photographie. La photographie gèle en effet la vision en un point de vue fixe, mais surtout unique : le fait de voir avec ses deux yeux, même en se plaçant au bon point de vue, détruirait-il l'illusion ? Nous avons eu l'occasion de voir une œuvre de Georges Rousse in situ, et de constater l'efficacité du dispositif. Contrairement à ce que nous croyions, l'auteur nous a expliqué qu'il n'utilisait pas un projecteur, mais que, ayant placé sa chambre photographique au point de vue choisi, il effectuait son travail “à la main et à l'œil”, ce qui semble une tâche ardue...



26 Felice Varini, Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Nancy.

Un autre artiste qui pratique le même genre d'anamorphose, Felice Varini, permet lui de confronter les différents points de vue sur l'œuvre, puisqu'il intervient dans des lieux habités, fréquentables, et ce même quotidiennement. L'une de ses œuvres constitue le "1%" artistique de l'école d'architecture de Nancy. Elle est peinte sur la structure d'un espace interne à une circulation. Nous pouvons confirmer que l'illusion est parfaite lorsque l'on est au bon point de vue, même si la photo est difficile à prendre, puisqu'il y a une vitre à cet endroit...

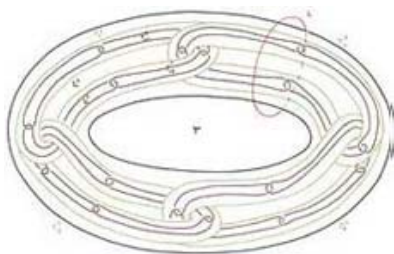
La perception des formes : la vue et le toucher

Nous avons donc deux espaces dans lesquels peuvent se percevoir les formes, l'espace haptique, essentiellement topologique, et l'espace optique, projectif. La plupart du temps les informations acquises par la vue sont corroborées par le toucher et réciproquement. On pourrait croire que si une distorsion apparaît entre les informations fournies par ces deux sens, c'est au toucher (comme saint Thomas) qu'on se fiera : le bâton qui apparaît brisé à la vue, du fait de la réfraction, lorsqu'il est en partie plongé dans l'eau, est avéré droit par le toucher. Il y a des illusions visuelles (il n'y a même que cela, en un sens, puisque la perspective déforme forcément), mais il y a peu d'illusions tactiles (et en tout cas elles ne sont pas de l'ordre de l'anamorphose). Pourtant les expériences menées par les psychologues de la perception ne corroborent pas cette intuition du primat du toucher⁴¹. Et, comme le sens du toucher est généralement peu exercé chez les humains non déficients visuels, la vue nous permet de reconnaître instantanément des objets que nous aurions du mal à identifier dans le noir ou les yeux bandés : c'est aussi que la vue ne nous livre pas que la forme des objets, mais, par la couleur, la façon dont ils réfléchissent la lumière, beaucoup d'autres composantes de leur *aspect*.

Le rapport entre la vue et le toucher dans la perception de l'espace, ou plutôt dans la reconnaissance des formes, mais ces deux questions sont souvent confondues, a beaucoup occupé les philosophes des Lumières, sous la forme du fameux "problème de Molyneux", qui peut s'énoncer ainsi : "Supposons un aveugle de naissance qui recouvre la vue ; parviendra-t-il à distinguer spontanément et instantanément, uniquement par la vue, une sphère d'un cube, qu'il sait distinguer par le toucher ?". Passons sur l'incongruité de la situation expérimentale telle qu'elle nous apparaît actuellement, voire la cruauté sous-jacente du traitement d'un malade auquel il est bien évident qu'il faudrait une acclimatation très progressive à la lumière, et qui aurait sans doute bien autre chose à faire qu'à distinguer une sphère d'un cube ; Mérian, l'un de ceux qui ont le plus sérieusement réfléchi à la question, n'allait-il pas jusqu'à proposer d'élever des enfants *dans le noir total* jusqu'à un certain âge, pour avoir le privilège de tenter l'expérience sur eux le jour où l'on déciderait de leur accorder l'usage de la vue⁴² ?

⁴¹ Irvin Rock, *La perception*, De Boeck & Larcier, 2001.

⁴² Il est vrai que, légèrement conscient des objections que l'on pourrait élever contre sa proposition, et surtout craignant de ne pas trouver de parents volontaires pour lui confier leurs enfants, il se justifiait en vantant la



27 Le collier d'Antoine



28 Nœuds "sauvages"



29 Nœud de Zuev convergent sur le collier d'Antoine

La supériorité du toucher sur la vue, c'est la fiabilité des informations concernant les formes et leurs mesures : un même objet, à condition que nous puissions le toucher, nous donnera toujours le même résultat ; les faces d'un cube sont bien carrées pour celui que le perçoit par le toucher. D'ailleurs, la cécité n'empêche pas la maîtrise de la géométrie, bien au contraire :

"Le lecteur peut se demander quelle puissance de visualisation de l'espace on doit avoir pour inventer des monstres tels que le collier d'Antoine ou le nœud sauvage de Zuev. Il sera peut-être surpris d'apprendre que ces deux mathématiciens sont totalement non voyants. Mais en fait, il n'y a ici rien d'étonnant, comme il n'y a rien d'étonnant au fait que presque tous les mathématiciens aveugles sont (ou ont été) géomètres. L'intuition de l'espace que nous avons, nous autres, voyants, est surtout basée sur l'image du monde qui se projette sur notre rétine ; c'est donc une image à deux (et non à trois) dimensions qui est analysée par notre cerveau. L'intuition de l'espace d'un non-voyant, par contre, provient surtout d'une expérience tactile et opérationnelle. Elle est autrement plus profonde – au sens propre comme au figuré !" (Alexei Sossinsky, *Nœuds Genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, 1999, pp. 36-37)

Le mathématicien Louis Antoine n'évoque pas son usage du sens du toucher en géométrie, mais expliqua un jour à ses étudiants : "En géométrie, j'ai un avantage sur vous. Vous voyez la figure, mais la figure tout entière ; moi, je vois la figure, mais je n'en retiens que la partie qui m'intéresse pour traiter la question."⁴³ La supériorité (discutable ?) de la vue sur le toucher est effectivement qu'elle fournit beaucoup d'emblée : des informations fausses, certes, mais plus nombreuses... Il faut qu'un objet soit proche pour que nous puissions le toucher, mais alors nous nous trompons peu à son sujet, nous pouvons voir la Lune et les étoiles, mais que de fausses suppositions n'ont-elles pas générées ! L'intérêt du toucher, souligné par Alexei Sossinsky, est aussi que l'expérience tactile est directement liée à l'expérience opérationnelle. Comme le mot l'indique, nous ne *manipulons* pas avec les yeux, mais bien avec les mains, avec lesquelles nous touchons.

qualité du traitement qui leur serait réservé, et le plaisir incomparable qu'ils éprouveraient le jour où ils recouvreraient la vue...

⁴³ à noter qu'on a donné le nom de ce mathématicien à l'un des amphis de Rennes I : né en 1888, agrégé de mathématiques en 1912, il perdit la vue en 1917 en recevant une balle ; il fut professeur de mathématiques pures à l'Université des Sciences de Rennes de 1925 à 1957. (sources : Publication de l'IRMAR, Univ. Rennes I, à l'occasion de la journée Louis Antoine, 18 nov. 1988)

I.3.3 La gravité ou l'espace orienté

La posture

Même dans le noir ou les yeux fermés, nous sentons ou nous percevons si nous sommes debout ou pas. Nous avons vu que cette sensation, ou perception, est dépendante de récepteurs *kinesthésiques* ou *proprioceptifs*. Cette perception est en grande partie inconsciente, elle nous paraît naturelle, et même venir de l'environnement, alors qu'elle est bien liée à des récepteurs stimulés par la gravité. La verticalité est une "qualité" inhérente à notre condition, non pas liée à la forme de notre corps (la tête en haut, les jambes en bas), mais à l'action de la gravité sur les récepteurs situés dans l'oreille interne, ainsi que sur les récepteurs musculaires, nos muscles intervenant continuellement pour maintenir la position debout (et l'on sait que c'est un apprentissage de plusieurs mois qui est nécessaire à l'enfant pour la maîtriser complètement), ainsi qu'aux récepteurs du toucher de la plante des pieds.

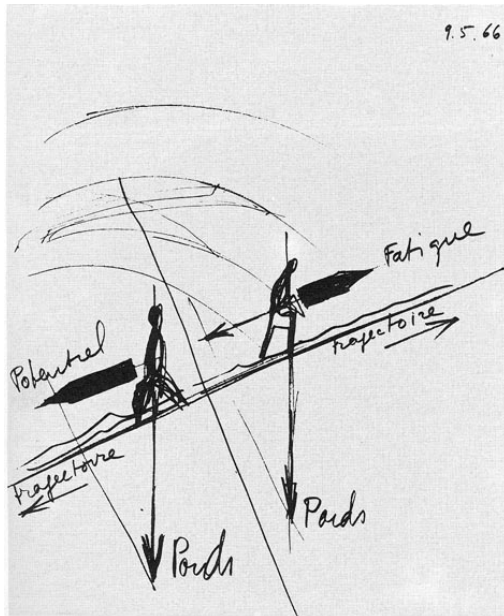
Nous sommes aussi conscients des différentes postures de notre corps, et c'est même là que le mécanisme se révèle le mieux : si l'on est allongé, même dans le noir, on sait qu'on est allongé, par les mêmes moyens que l'on sait qu'on est debout, par l'action de la gravité sur les différents récepteurs. Mais si une autre force que la gravité se manifeste, qui agit de la même façon sur ces récepteurs, alors c'est le résultat de cette action que je percevrai : c'est ainsi qu'on simule la gravité, et ses conséquences sur la perception des postures, en utilisant la force centrifuge, par exemple⁴⁴.

La verticale, l'horizontale, la pente

La verticale est inhérente à notre monde terrestre sujet à la gravité : nous la ressentons par la proprioception, mais nous la constatons aussi, et de la manière la plus exacte, par la chute d'un objet, ou le fil à plomb, qui garde en quelque sorte la trace d'une telle chute. L'horizontale (qui est un plan, alors que la verticale est un axe) se manifeste le plus parfaitement par la surface d'une étendue d'eau absolument calme, ce qui sera exploité dans le niveau à eau (composé d'un tube souple contenant de l'eau). D'autres manifestations naturelles de la verticale sont plus relatives, du moins dans le monde terrestre ou peu technicisé : les troncs d'arbres sont plus ou moins verticaux, mais les murs des immeubles moyenâgeux aussi, alors que dans le monde urbain moderne, les verticales exactes (ou en tout cas avec une faible marge d'erreur) abondent. De la même manière, nous pouvons rencontrer des surfaces terrestres relativement planes et horizontales, mais celles des planchers des constructions le sont généralement.

L'axe vertical détermine, avec le plan horizontal, un angle droit. Il faut tout de suite ajouter que ce début de repère constitué d'un plan et d'un axe n'a de validité que localement : bien entendu, ce que nous appelons axe vertical n'est qu'un représentant du faisceau d'axes convergents issus du centre de la Terre ; et le "plan" horizontal n'est qu'une approximation de la surface sphérique (ou presque

⁴⁴ cf Irvin Rock, *La perception*, De Boeck & Larcier, 2001, et Alain Berthoz, *Le sens du mouvement*, Editions Odile Jacob, Paris, 1997.



30 Claude Parent, *Entrelacs de l'oblique*, p. 27

sphérique) de la Terre (ou plutôt du géoïde que serait le globe terrestre s'il était uniformément couvert d'eau). Mais l'échelle de l'homme par rapport à celle de la Terre permet, la plupart du temps, de se contenter de cette approximation.

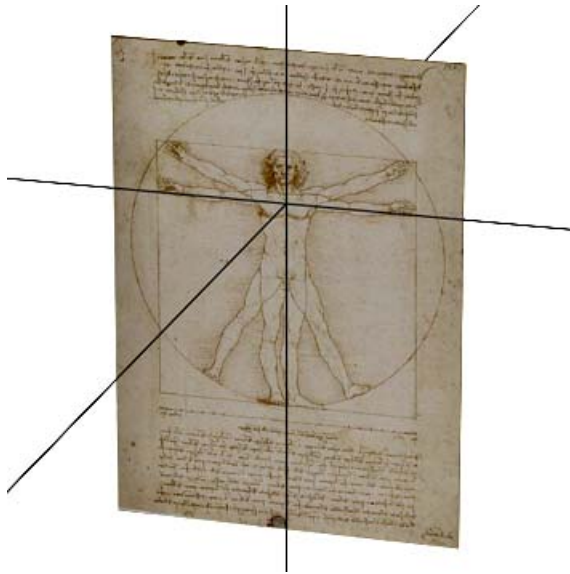
Si l'horizontalité se définit rigoureusement par la normalité avec la verticale, nous l'éprouvons plutôt comme l'élément minimal (ou nul, si l'on considère qu'elle peut être positive ou négative) d'un continu perceptif qui est la *pente*. Une surface horizontale est celle qui ne nous demande pas l'effort de monter ou de descendre. La pente d'un terrain est un élément majeur de détermination de nos déplacements à la surface de la Terre : les zones montagneuses constituent des barrières, des "coupures", pour le parcours terrestre. Et elles sont également peu habitables, parce que difficiles à cultiver, et de climat difficile. Mais nous avons déjà souligné le fait qu'il était heureux que la surface de la terre fût plissée, sinon nous serions sous l'eau ; la contrepartie évidente en est l'existence des montagnes...

La verticale est très déterminante pour le corps humain : l'homme se tient debout, et si d'autres animaux se rapprochent de la verticalité, c'est lui qui est le plus droit ; le schéma classique de l'évolution de l'être humain ne montre-t-il pas toujours clairement ce redressement ? L'axe vertical est déterminant aussi pour la pensée : le haut et le bas se distinguent très nettement dans notre esprit, et toutes les métaphores, dans tous les langages, valorisent le haut par rapport au bas. Lorsqu'il s'agit de doter notre monde tridimensionnel d'un repère, de passer de la topologie à la géométrie, il est donc naturel que ce soit l'axe vertical qui soit choisi en premier. Pourtant, si l'on considère la question des degrés de liberté, cet axe est le plus rétif : nous ne pouvons guère nous élever verticalement sans aide technique, hors le saut et la lévitation (réservée à un faible nombre d'êtres humains), et nous pouvons encore moins nous enfoncer dans le sol, qui se trouve la plupart du temps sous nos pieds... Mais c'est peut-être aussi cela qui donne tant de valeur à cet axe.

La gauche et la droite, l'avant et l'arrière

Si l'axe vertical est clairement défini, et le même pour tous les humains (du moins pour des humains relativement proches géographiquement), ainsi que le plan horizontal, perpendiculaire à cet axe, il n'en est pas de même de la détermination des deux axes de ce plan. Rien sur la surface de la Terre ne permet de privilégier une certaine direction. La solution consiste à lever la tête, et regarder le ciel, ou à s'intéresser à son propre corps.

Car notre corps présente très clairement une différenciation entre l'avant et l'arrière. Nous sommes des êtres mobiles, et notre corps est très marqué par cette propension à avancer ; plus bien sûr que les végétaux, qui sont fixés, et ne présentent en général pas de différenciation entre un avant et un arrière, mais plus aussi que nombre d'animaux : en particulier nos yeux sont très nettement en situation frontale, ce qui réduit notre champ visuel (mais améliore la vision de la profondeur), mais accentue notre axialité avant-arrière. Autant que le haut et le bas, nous distinguons nettement entre l'avant et



31 L'homme-repère...

l'arrière (ou devant et derrière) : devant c'est là où nous allons, ce que nous voyons ; derrière c'est d'où nous venons, ce que nous ne pouvons voir. Cet axe est souvent assimilé avec l'axe temporel ("en avant de" signifie "devant", "avant" est synonyme de "précédemment"), même s'il peut y avoir ambiguïté : "aller de l'avant", c'est envisager l'avenir, non le passé (qui est pourtant "avant").

L'axe avant-arrière étant ainsi déterminé, l'axe gauche-droite s'en déduit naturellement, d'autant que notre corps en est aussi porteur : nous avons deux mains, deux pieds, deux yeux, etc, un côté gauche et un côté droit. Notre corps présente la curieuse particularité d'être pratiquement symétrique suivant cet axe : la gauche et la droite se distinguent beaucoup moins l'une de l'autre que le haut et le bas, ou que l'avant et l'arrière. Bien sûr, il y a des droitiers et des gauchers (et en principe plus de droitiers que de gauchers), les organes ne sont pas tous symétriques, et la droite est privilégiée dans beaucoup de cultures au détriment de la "sinistre" gauche (mais pas dans toutes).

Notre corps constitue donc un repère tridimensionnel intuitif, d'autant qu'il est le plus "plan" des animaux terrestres : il dessine, les bras étendus, une croix, ce que montre évidemment le Christ en croix, mais aussi les représentations de l'homme telles que celle de Léonard de Vinci reprise de Vitruve. Il ne reste plus qu'à lui planter une lance dans la poitrine pour avoir un repère orthonormé...

Le nord, le sud, l'ouest, l'est

Mais ce repère, assez clairement défini, a l'inconvénient d'être, à part l'axe vertical, uniquement un repère local : l'homme transporte avec lui son repère, mais ce qui est à gauche, ou devant, pour l'un ne l'est pas pour l'autre. Difficile de se mettre d'accord dans ces conditions. On aurait pu imaginer adopter le repère local du chef, par exemple, mais celui-ci étant mobile, cela n'aurait pas été très pratique. Pour se mettre d'accord sur les deux axes horizontaux, les hommes ont donc observé le ciel, et constaté une certaine régularité dans ce qui s'y passe : le soleil se lève toujours du même côté et se couche de l'autre (mais pas toute l'année exactement au même endroit) ; dans l'hémisphère nord, les étoiles "tournent" autour d'une étoile fixe : il était possible alors de décider d'appeler "nord" la direction de cette étoile, et "sud" la direction opposée ; et d'appeler "est", et "ouest" les pôles de l'axe perpendiculaire, et les directions dans lesquelles le soleil se lève et se couche, ou à peu près.

Les mouvements

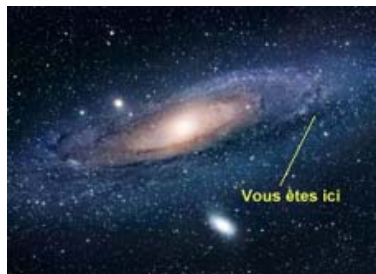
La gravité fait aussi que les choses se meuvent : les corps célestes paraissent tourner autour de la Terre (du point de vue de la perception, ce sont eux qui tournent vraiment) ; les choses tombent lorsqu'elles ne sont plus soutenues. La chute des corps, en ligne droite, est un exemple de translation ; le mouvement des corps célestes un exemple de rotation. La gravité suffit donc à définir les deux types de déplacements qu'étudiera fondamentalement la géométrie (tout déplacement pouvant se décomposer en rotation et translation).



32 Léonard de Vinci, *Articulations du membre inférieur*



33 Hergé, *On a marché sur la Lune*, Casterman, 1954, p. 5



34 Vous êtes ici...

D'autres mouvements se produisent bien sûr, qui ne sont pas dus à la gravité, qui se font même contre elle (le saut) mais on ne peut pas très longtemps y résister. La conquête n'a pas été si facile, surtout pour le "plus lourd que l'air".

Nous verrons plus loin que les instruments nécessaires et suffisants à la géométrie sont la règle et le compas (matérialisations de la translation et de la rotation). Si la ligne droite s'exemplifie par le rayon visuel (et donc par l'œil et la visée) et par le fil tendu (sous l'action de la gravité, ou d'un geste), nous pouvons trouver dans notre propre corps bien des "compas" naturels : l'angle des jambes (cette métaphore est utilisée en argot), et l'arpentage commence d'ailleurs avec le pas ; l'écartement du pouce et de l'index (qui sert couramment pour donner l'idée d'une petite longueur) ; celui des bras. Notre corps, à travers sa structure osseuse (rigide) et ses articulations (et par l'intermédiaire des muscles), est plus particulièrement apte à certains mouvements, qui consistent essentiellement en des rotations (limitées) autour de "rotules" (la hanche, le genou, le coup de pied, l'épaule, le coude, le poignet, les phalanges).

Le repos lui-même, le fait que les choses restent immobiles au sol, tiennent les unes sur les autres, est dû à la gravité. En apesanteur, les liquides ne restent pas sagement dans leur contenant... Toute construction est stable pour essentiellement deux raisons : la gravité, qui permet l'empilement, et la nature de l'espace : le fait que le triangle soit le seul polygone indéformable.

Se perdre et se retrouver

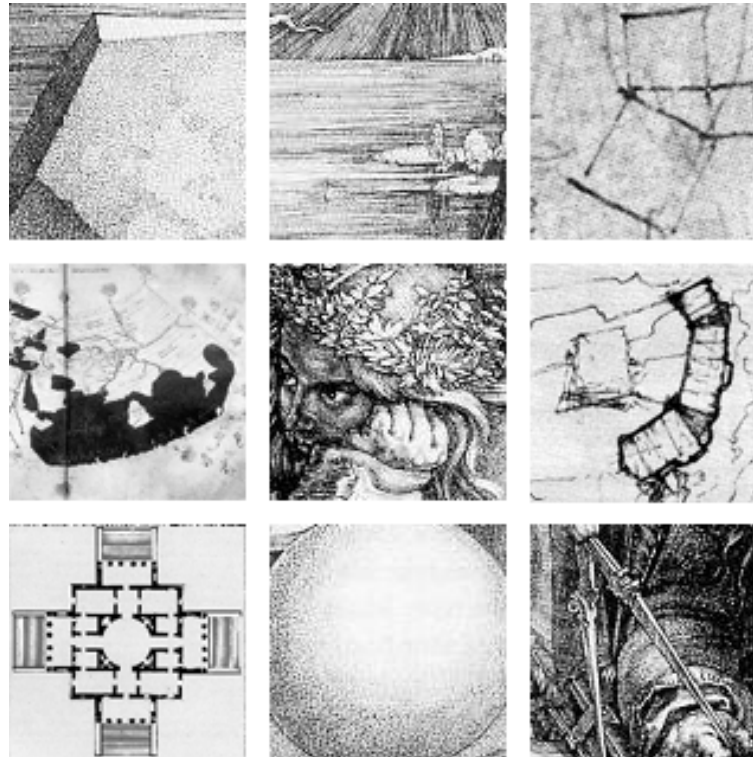
"(...) certains être prétendent avoir le sens de l'orientation. Ils en font l'objet d'une gloriole qui masque peut-être une ambivalence." (Gaston Bachelard *La terre et les rêveries du repos* Librairie José Corti 1948, p. 212)

Savoir où l'on est paraît de l'ordre de l'évidence : on est toujours *ici*, comme nous le rappellent judicieusement les plans d'orientation des villes ou des réseaux de métro... *Se perdre*, sauf si l'on perdu la raison, semble être impossible : la seule chose qui nous reste, si nous avons tout perdu, c'est nous-même.

Reste à savoir où l'on est *par rapport* au reste du monde, quelle que soit l'ampleur de ce monde. Il n'est en effet pas très utile de savoir que l'on est *ici*, si cet *ici* n'est pas là où l'on voudrait être ; on voudrait être ailleurs, mais par où faut-il aller pour y arriver ?

Nous ne pouvons pas aller beaucoup plus loin dans cette exploration des conditions matérielles de l'espace vécu. Déjà, nous avons dû faire allusion à ce que l'homme *fait* pour se représenter cet espace. Or cela va faire l'objet de la partie II, qui s'attache aux opérations et manipulations que l'homme effectue avec les formes.

II Forme ou homo faber



II D'après : Albrecht Dürer, *La mélancolie*

II.1 Topologie

II.1.1 Formes de parcours

Le geste et le déplacement

Une vision pragmatique de l'architecture pourrait faire croire que l'architecture n'a affaire qu'à la construction matérielle d'abris ; on réfère alors l'origine de l'architecture à la cabane. Nous y reviendrons au point II.1.3

Mais les deux mythes les plus importants, fondateurs de l'architecture, nous livrent curieusement uniquement des gestes, des mouvements, qui n'ont pas de trace matérielle immédiate : il s'agit du mythe de Dédale, dont le labyrinthe n'est au départ qu'une danse ; et de celui du *Templum*, geste des augures qui découpaient dans le ciel, avec un bâton, une fenêtre quadrangulaire. Considérons donc pour l'instant gestes et déplacements comme premiers termes du faire de l'homme, comme premiers termes, déjà, de fabrication de formes.

Ces formes en tant que telles, le labyrinthe, le rectangle (ou le carré), sont elles-mêmes archétypales pour l'architecture. Mais remarquons que la danse de Dédale est une forme de *parcours*, et le geste de l'augure une instauration de *limites*. Intéressons-nous d'abord aux formes de parcours.

Le geste est celui de la main, éventuellement prolongé d'un bâton ; le déplacement, au minimum, implique les pieds : "n'avoir jamais mis les pieds quelque part" c'est n'y être jamais allé. L'homme habite la Terre, il la "territorialise" en s'installant ici ou là, en y "mettant la main", mais aussi en parcourant la surface de la Terre : les pays lointains ont d'abord donné lieu à des *routes*, des *voies*, des *passages*, terrestres ou maritimes (la route des Indes, la découverte des Amériques comme nouvelle voie pour les Indes, le passage du nord-ouest, etc.) ; une montagne se maîtrise peu à peu par ses passages ; nous habitons petit à petit une ville en la parcourant en tous sens ; les nomades habitent un territoire fait de déplacements. Ces premières "routes" ne sont que des parcours, peu à peu inscrits sur les cartes, puis matérialisés, parfois, et uniquement sur la terre ferme, par les routes empierrées, macadamisées, ou encore par les voies ferrées.

Le labyrinthe

"Le concept de labyrinthe est (...) une sorte d'*archétype de l'espace*, c'est un modèle réduit qui s'applique, en principe, toutes les fois que la mobilité intervient et ce d'une façon suffisamment complexe pour échapper à l'entendement immédiat du sujet de cette mobilité. (...) Le concept de labyrinthe est donc bien une sorte de *forme canonique* architecturale exigeant une prise en compte théorique qui n'a pas encore été faite suffisamment." (Abraham A. Moles, Elisabeth Rohmer, *Psychologie de l'espace*, Casterman, 1978, p. 77)

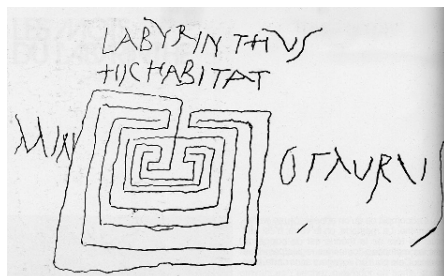
Il y a deux formes de labyrinthes, ce que les anglo-saxons relèvent plus systématiquement¹, puisqu'ils disposent de deux mots pour désigner ce que nous appelons la plupart du temps, dans les deux cas, et

¹ Encore qu'ils fassent eux aussi très souvent la confusion.

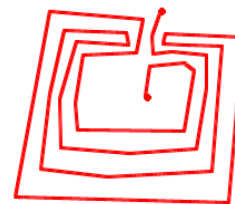
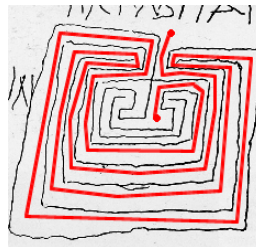
confusément, labyrinthe : *maze* et *labyrinth* ; le premier (*maze*) renvoie à un parcours complexe, comportant des embranchements, et pour lequel il est difficile de trouver son chemin pour en sortir ; le second (*labyrinth*) désigne un parcours simple, linéaire, “unicursal”, mais sinueux, pour lequel il n’y a pas de problème pour atteindre le centre, ni pour en ressortir. Dans les deux cas, cependant, l’important est de retenir qu’un labyrinthe est unidimensionnel, c’est une ligne, mais une ligne qui se replie (labyrinthe simple), ou qui se complexifie en réseau à embranchements (labyrinthe complexe), ce qui n’est possible que parce que cette ligne investit une surface, un espace de dimension 2.



35 Labyrinthe de Delos
Revers d'une tablette d'argile de Pylos

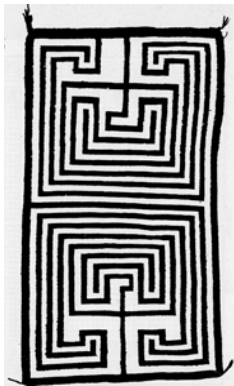


36 Labyrinthe tracé sur un pilier à Pompéi



Mais en français nous disposons aussi de deux mots : “labyrinthe” et “dédale” ; on peut donc, comme Patrick Conty², décider d’appeler *labyrinthe* le parcours unicursal, et *dédale* le parcours à embranchements. Mais c’est, paradoxalement quant au mythe, un labyrinthe simple (et non un dédale) qui est représenté en référence au mythe de Dédale : ce qui est illogique, puisque dans un tel labyrinthe, Thésée n’aurait eu nul besoin du fameux fil d’Ariane :

² Patrick Conty, *La géométrie du labyrinthe*, Question de N° 104, Albin Michel, 1996



37 Labyrinthe amérindien
(double couverture de
cheval)

Mais la mythologie n'est pas la logique, et c'est ce qui en fait la richesse. on retrouve ce schéma de labyrinthe unicursal "gravé sur des pièces de monnaie et sceaux crétois et incorporé dans des peintures grecques où des inscriptions l'identifient expressément eu dédale décrit par le mythe. On le retrouve sur des mosaïques romaines puis intégré dans l'architecture médiévale"³. Mais on le retrouve aussi chez les Celtes, les Scandinaves, chez les Indiens d'Amérique, et en Inde, entre autres.

Nous avons évoqué l'une des origines du mythe du labyrinthe de Dédale comme forme de danse :

Ainsi, les ruses du labyrinthe sont spatiales avant d'être matérielles, puisque son tracé reprend le dessin au sol de la danse rituelle que Dédale a conduite sur l'esplanade où il a été, par la suite, construit [Plutarque *Thésée*].” (Jean-Pierre Le Dantec, *Dédale le héros*, Balland, 1992 p. 81)

Il convient de remarquer que, si l'on se réfère au texte de Plutarque, on trouve pas vraiment confirmation de cette origine : d'abord, les sept jeunes garçons et les sept jeunes filles qui sont le tribut que Minos exige des Athéniens étaient, selon la fable, nous dit Plutarque⁴, “ou dévorés par le Minotaure dans le labyrinthe, ou condamnés à errer jusqu'à leur mort dans ce lieu, d'où ils ne pouvaient sortir.” (XV) “Mais, suivant Philochore, les Crétois ne conviennent pas de ce fait. Ils disent que le labyrinthe était une prison où l'on n'avait d'autre mal que d'être si bien gardé qu'il était impossible de s'en échapper.”(XVI) Donc, d'abord, le labyrinthe n'est plus forcément un lieu d'errance sans fin mais tout simplement une bonne prison... La suite de l'histoire est conforme à la tradition :

“Plusieurs historiens, d'accord en cela avec les poètes ; disent que, lorsqu'il fut arrivé en Crète, Ariane, qui avait conçu pour lui de l'amour, lui donna un peloton de fil, et lui enseigna le moyen de se tirer des détours du labyrinthe ; qu'avec ce secours, il tua le Minotaure, et se rembarqua sur-le-champ, emmenant avec lui Ariane et les jeunes enfants qu'il avait conduits en Crète.” (XIX)

Enfin, la danse rituelle existe bien ; cependant elle n'est pas exécutée par Dédale, mais par Thésée, et bien après l'épisode du labyrinthe :

“Thésée, étant parti de Crète, alla débarquer à Délos. Là, après avoir fait un sacrifice à Apollon et consacré une statue d'Aphrodite qu'Ariane lui avait donnée, il exécuta, avec les jeunes Athéniens qui l'accompagnaient, une danse qui est encore en usage chez les Déliens ; les mouvements et les pas entrelacés qui la composent sont une imitation des tours et des détours du labyrinthe.” (XXI)

Quoi qu'il en soit, cette figure du labyrinthe semble prégnante en Crète, aussi bien dans la danse que dans l'architecture

³ Patrick Conty, *La géométrie du labyrinthe*, Question de N° 104, Albin Michel, 1996, p. 21

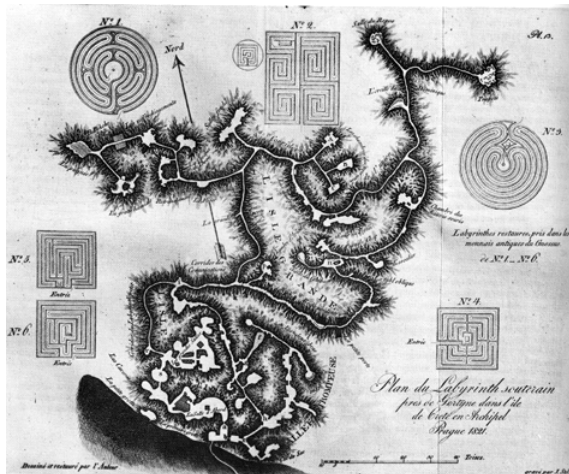
⁴ Plutarque, *Vie de Thésée*, source : <http://ugo.bratelli.free.fr/Plutarque/PlutarqueThesee.htm>



38 Labyrinthe de la cathédrale de Chartres
Labyrinthe “digital” de la cathédrale de Lucca



39 Brahmapoutre (Bangladesh)



40 Caverne crétoise de Gortyne

Ce sont des labyrinthes issus, après quelques vicissitudes⁵, de la mythologie crétoise que l’on trouve au sol de beaucoup de cathédrales. L’un des plus célèbres, celui de la cathédrale de Chartres, comportait en son centre une plaque de cuivre représentant Thésée, Dédale et le Minotaure⁶. Il fait douze mètres de diamètre, et le parcours est long de 150 mètres : on trouve là l’une des caractéristiques du labyrinthe, du point de vue de la question de la dimension : parvenir à loger un parcours (1D) le plus long possible dans une portion limitée du plan (2D). Le parcours était sans doute réellement effectué par les fidèles pour simuler un pèlerinage à Jérusalem (ces labyrinthes étaient souvent appelés “chemin de Jérusalem”) : debout ou à genoux, on ne sait, mais en tout cas il s’agit bien d’un parcours, d’un déplacement, au sens banal du terme. On trouve aussi des labyrinthes “digitaux” (rien à voir avec l’usage actuel, informatique, du terme), qui se “parcouraient” avec le doigt : on en trouve un à l’entrée de la cathédrale de Lucques (Lucca) en Italie ; on retrouve là le rapport entre le geste et le déplacement, et l’accent mis sur le tactile, ce labyrinthe étant gravé (un aveugle peut tout aussi bien parcourir ce labyrinthe).

Même simple, un labyrinthe doit comporter de fréquents changements de direction : une simple spirale, par exemple, n’est pas vraiment un labyrinthe. Le labyrinthe est une structure de désorientation.

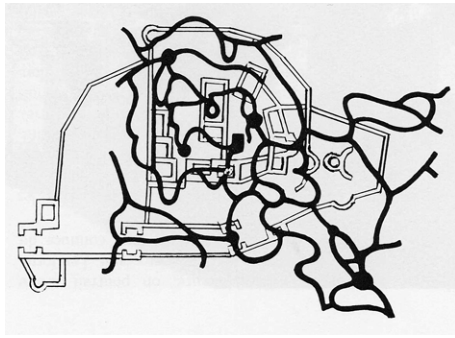
Un labyrinthe simple, ou complexe d’ailleurs, comporte donc des sinuosités, des “méandres”, ce qui est un terme emprunté à la géographie où il s’emploie pour les cours d’eau. La ligne droite est le plus court chemin d’un point à un autre, mais elle n’est pas la plus fréquente dans la nature, la sinuosité est plus souvent la règle. Comme un labyrinthe, un cours d’eau a un point d’entrée (sa source) et un point de sortie (son embouchure) ; cependant un labyrinthe se différencie du cours d’eau par le fait que non seulement il enferme un parcours dans une surface limitée, qu’il occupe le plus possible (ce qui n’est pas le cas, en général, du cours d’eau), mais encore que son point d’entrée est situé à la frontière de cette surface, et son point d’arrivée à l’intérieur (au centre, le plus souvent).

La signification des labyrinthes médiévaux pourrait être que le chemin de la vie, tout tortueux qu’il nous paraisse, aboutit toujours au même point, la mort. Le labyrinthe à embranchements alors nous propose une autre vision du temps, et de la vie, plus proche de celle exprimée dans “Le Jardin aux sentiers qui bifurquent”, de Borges : il n’y a pas un seul univers, un seul temps, nous faisons des choix à certains moments de notre vie, ou des choix sont faits par d’autres, qui nous conduisent, et les conduisent, sur tel ou tel embranchement ; mais les autres embranchements existent aussi, parallèlement. Il peut même arriver qu’ils convergent...

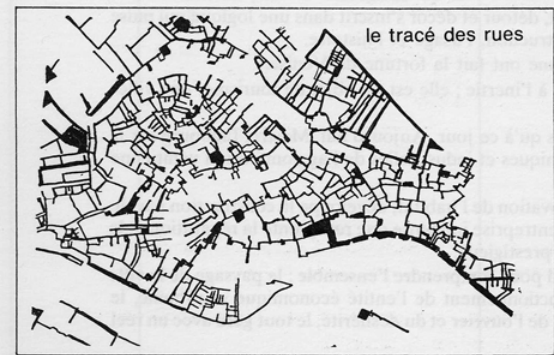
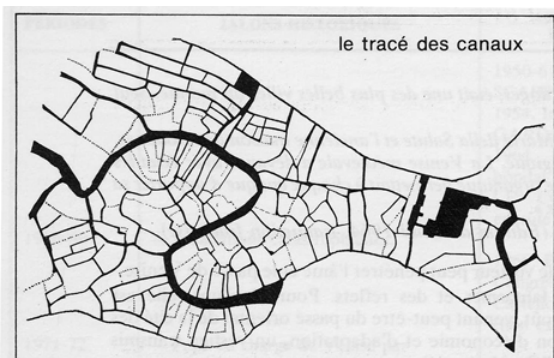
Cependant, dans un labyrinthe à embranchements, contrairement à la vie, on peut revenir sur ses pas ; c’est même le seul moyen de résolution de ces labyrinthes, et l’utilité du fil d’Ariane. Car un

⁵ Ce symbole païen du labyrinthe a disparu pendant le Haut Moyen Age pour n’être repris qu’au XII^e siècle.

⁶ Elle fut retirée en 1793 pour fondre des canons pour la république.



41 Souterrains du château de Pottenstein (Autriche)



42 Venise

labyrinthe complexe est un réseau ; ce qui n'enlève rien à son unidimensionnalité. C'est ainsi que l'on peut qualifier le réseau des voies d'une ville ancienne de labyrinthe, et même, par métonymie, de dédale...

Simple ou complexe, le labyrinthe est unidimensionnel, et s'inscrit dans un espace bidimensionnel ; il peut certes exister des labyrinthes qui se plient dans l'espace tridimensionnel, et que nous aborderons plus loin, mais la fatalité du labyrinthe réside dans notre inscription dans une bidimensionnalité obligée : un autre recours que le fil d'Ariane est alors de reconquérir notre tridimensionnalité potentielle, comme le montre la tentative d'Icare d'échapper au labyrinthe par la voie des airs (ce qui a mal fini, comme chacun sait, il s'est littéralement "brûlé les ailes"). Si nous pouvions en effet nous élever au-dessus du labyrinthe, alors sa solution serait évidente, même sans nous envoler : nous en verrions le tracé complet et nous en connaîtrions l'issue ; c'est pourquoi les labyrinthes les plus effrayants sont les galeries souterraines, galeries de mine, cavernes naturelles, souterrains de châteaux, égouts ou autres tunnels utilitaires qui existent sous les villes, etc. Chicago possède un réseau de tunnels, creusés dès 1901 par l'Illinois Telephone and Telegraph company, qui font à présent 62 miles (près de 100 kms), tous équipés de rails pour l'usage de locomotives électriques⁷ ; Rome a ses catacombes, et Paris aussi, dont certaines sont de véritables cimetières souterrains, mais d'autres sont d'anciennes carrières : tous ces lieux sont l'objet de légendes et de pratiques douteuses, même si la plupart des habitants les ignorent totalement⁸.

Enfin, n'oublions pas que le pire des labyrinthes n'est pas celui que l'on croit :

"Il l'attacha au dos d'un chameau rapide et l'emmena en plein désert. Ils chevauchèrent trois jours et il lui dit : « O Roi du Temps, Substance et Chiffre du siècle ! En Babylonie, tu as voulu me perdre dans un labyrinthe de bronze aux innombrables escaliers, murs et portes. Maintenant, le Tout-Puissant a voulu que je montre le mien, où il n'y a ni escaliers à gravir, ni portes à forcer, ni murs qui empêchent de passer. »

Puis il le détacha et l'abandonna au cœur du désert, où il mourut de faim et de soif." (Jorge-Luis Borges, "Les deux Rois et les deux Labyrinthes", in *L'Aleph*, *Œuvres Complètes I*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1993, p. 644)

⁷ Source : <http://www.chipublib.org/cpl.html> (site de la Chicago Public Library) ; l'auteur chicagoïte de romans policiers Sara Paretsky a situé l'un de ses romans, *Tunnel vision* (Penguin Books, 1995) dans ce réseau.

⁸ Pour en savoir plus : <http://www.catacombes.info/>; ce qui n'est pas une légende, c'est que Henri Poincaré, polytechnicien, mais aussi ingénieur des Mines, s'intéressait (comme beaucoup de ses collègues de l'Ecole des Mines) à ces lieux souterrains : il découvrit les (fausses) catacombes durant ses études, et aimait s'y rendre, comme des inscriptions le montrent.

L'entrelacs

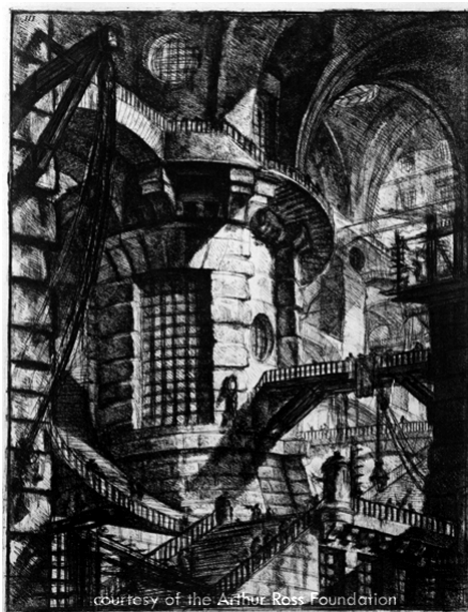
Un labyrinthe se déploie (ou se plie, plutôt) généralement sur une surface. Mais on peut imaginer un labyrinthe qui parcourt l'espace tridimensionnel : tel est l'entrelacs. Les rues, dans une ville plane, ne constituent pas un entrelacs, mais un réseau bidimensionnel, où les carrefours sont de simples points de jonction ; mais les villes qui se développent sur un site accidenté peuvent présenter des systèmes de voiries qui se "croisent" l'une au-dessus de l'autre sans se rencontrer ; et cela arrive aussi dans beaucoup d'autres villes, tout simplement par le jeu des ponts ou passerelles et des voies implantées sur les berges des cours d'eau, ou par la construction de rues ou passerelles surélevées, ou encore de tunnels piétons ou routiers.

Des architectures génèrent des entrelacs par leurs couloirs, leurs escaliers, leurs passerelles, etc. C'est un fantasme paradigmatique de l'architecture, et on le retrouve souvent en littérature ; on pense à Kafka, mais citons plutôt Primo Levi, dont le texte suivant nous semble très évocateur de la dimension onirique (voire cauchemardesque) de l'entrelacs architectural :

"Staryje Doroghi fut une surprise. Ce n'était pas un village ; ou plutôt il existait un minuscule village, au milieu des bois, tout près de la route, mais nous ne l'apprîmes que plus tard, comme nous apprîmes que son nom signifiait « Vieilles routes ». Mais le logement qui nous était destiné, à nous les mille quatre cents Italiens, était un unique et gigantesque édifice, isolé au bord de la route, au milieu de champs incultes et des premiers arbres de la forêt. Il s'appelait Krasnyj Dom, la Maison Rouge, et elle était en effet, sans lésiner, rouge, dedans comme dehors.

C'était une construction singulière, à la vérité, qui avait poussé sans ordre dans toutes les directions, comme une coulée volcanique. On ne savait pas très bien si c'était l'œuvre de plusieurs architectes en désaccord, ou d'un seul mais fou. Le noyau le plus ancien, désormais écrasé et étouffé par des ailes et des corps de bâtiment disparates et plus tardifs, consistait en un bloc à trois étages, subdivisé en petites chambres, sans doute d'ex-bureaux militaires ou administratifs. Autour il y avait de tout : une salle de conférences ou de réunions, une série de salles de classe, des cuisines, des lavoirs, un théâtre de mille places au moins, une infirmerie, une salle de gymnastique ; à côté de la porte principale, un débarras avec de mystérieux supports que nous prîmes pour un dépôt de skis. Mais là aussi, comme à Sloutsk, rien ou presque du mobilier ou des installations n'avait été laissé ; non seulement l'eau manquait mais les canalisations elles-mêmes avaient été arrachées ainsi que les fourneaux des cuisines, les chaises du théâtre, les bancs, les rampes des escaliers.

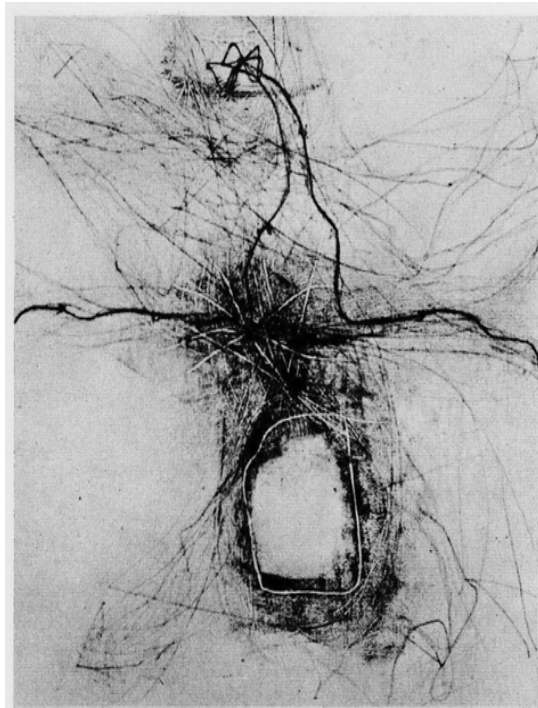
Dans la Maison Rouge, les escaliers étaient l'élément le plus obsédant. On en trouvait abondamment dans l'immense édifice : escaliers emphatiques et prolixes qui menaient à d'absurdes cagibis pleins de poussière et de bric-à-brac : d'autres, étroits et irréguliers, interrompus à moitié par une colonne dressée avec les moyens du bord et destinée à soutenir un plafond croulant ; des fragments d'escaliers boiteux, bicéphales, monstrueux, qui raccordaient des bâtiments aux niveaux variés. Méorable entre tous, le long d'une des façades montait un escalier cyclopéen, de quinze mètres de haut, au milieu d'une cour envahie par l'herbe, avec des marches larges de trois mètres et qui ne conduisait nulle part." (Primo Levi, *La trêve*, Bernard Grasset, 1966, pp. 163-4)



43 Giovanni Battista Piranesi,
Carceri d'Invenzione, dessin



44 Kolam et tracés Nahal



45 Fernand Deligny, *Lignes d'erre*

L'entrelacs c'est aussi, et d'abord, le *nœud* : un labyrinthe ne peut constituer un nœud, puisqu'il est attaché à une surface ; le nœud, qui est en lui-même une ligne, donc de dimension 1, ne peut exister que dans un espace de dimension 3 (au moins) : les habitants de *Flatland*, entre autres, ne peuvent pas être des marins, ou du moins ce seraient des marins d'un genre fort différent des nôtres...

Le nœud est une chose à la fois très simple, et fort compliquée : la topologie mathématique commence à s'y intéresser, mais ce sujet est très ardu⁹. Pourtant, le nœud, sous la forme de l'entrelacs, est une structure très répandue : on peut penser aux motifs celtiques, mais aussi aux kolams pratiqués en Inde, ou aux tracés nahals de l'île de Malekula (Nouvelles-Hébrides).

Ce sont le plus souvent des entrelacs, donc des parcours "noués", mais projetés sur une surface, tracés avec le doigt sur le sable (nahals), ou avec de la poudre de riz sur le sol humidifié (kolams), l'interruption de la ligne (quand elle est interrompue) signifiant le passage de la ligne imaginaire de l'entrelacs sous ou au-dessus de l'autre ligne.

Ces tracés ont des significations symboliques, voire initiatiques ; ils montrent aussi la dextérité exceptionnelle de leurs exécutants dans la maîtrise de ces tracés (qui doivent être exécutés d'un seul geste).

La trace du mouvement

"Erre : le mot m'est venu. Il parle un peu de tout, comme tous les mots. Il y va d'une "manière d'avancer, de marcher", dit le dictionnaire, de "la vitesse acquise d'un bâtiment sur lequel n'agit plus le propulseur" et aussi des "traces d'un animal".

Mot fort riche, comme on le voit, qui parle de marche, de mer et d'animal, et qui recèle bien d'autres échos : "errer : s'écarter de la vérité... aller de côté et d'autre, au hasard, à l'aventure".

J.-J. Rousseau le dit: "voyager pour voyager, c'est errer, être vagabond". C'est aussi "se manifester ça et là, et furtivement, sur divers objets, sourire aux lèvres". " (Fernand Deligny, cité par Françoise Bonardel, "Lignes d'erre", in *Cartes et figures de la Terre*, Centre Georges Pompidou CCI, 1980, p. 194)

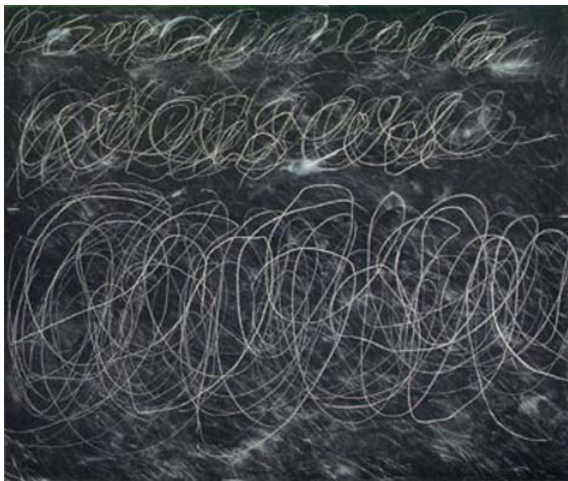
Il y a les parcours quotidiens qui inscrivent, peu à peu, leur trace dans ce qui deviendra des chemins ; nous pensons aussi aux *lignes d'erre*, ces traces des déplacements d'enfants psychotiques que Fernand Deligny recueillait patiemment.

Le dessin ne commence pas, forcément, par la volonté de représentation, ni même de symbolisation. Les premiers dessins d'enfants sont des "gribouillis" ; même adultes, quand nous essayons un stylo, c'est presque toujours un tel gribouillis que nous faisons ; même quand nous crayonnons inconsciemment pour occuper notre main dans une réunion ennuyeuse, le plus souvent, ce sont aussi

⁹ voir : Alexei Sossinsky, *Nœuds Genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, 1999



46 Alvar Aalto, *Rencontre sur un chemin villageois*



47 Cy Twombly, *Sans titre*

de telles lignes enchevêtrées qui sont produites. Il faut une certaine volonté et maîtrise pour dessiner ne serait-ce qu'une ligne droite, ou une figure géométrique, ou des lettres, et encore plus pour dessiner quelque chose de figuratif. Le dessin dans ses prémices est alors juste la trace d'un mouvement, du mouvement que nous pouvons faire sans réfléchir, en usant des degrés de liberté que nous laisse la position de notre main, de notre bras, de notre corps. Si seule la main bouge, nous restons dans une zone circonscrite de la feuille de papier, et forcément la ligne revient sur elle-même. Chacun, suivant sa particularité, et dans diverses conditions d'humeur, d'état d'esprit, produira des mouvements, et donc des lignes, plus ou moins anguleuses, mais il y a finalement peu de différences dans les gribouillis d'essais de stylos tels qu'on les trouve dans les rayons des papeteries.

On pourrait objecter que ceci n'est pas "dessiner" ; cependant, nous pensons que ces prémices persistent dans tout dessin ; bien sûr, les mouvements deviennent élaborés, sophistiqués, mais dessiner n'est pas faire une copie de ce que nous voyons, ni même de ce que nous concevons, par un ordre du cerveau à une main complètement servile, mais une adaptation de ce que fait la main, naturellement, de comment elle peut bouger, à des objectifs, par exemple, de représentation. L'apprentissage de la peinture chinoise consiste surtout à délier la main, à apprendre à libérer ses mouvements ; puis, comme par magie, ces mouvements se trouveront ressembler à des bambous, des rivières, des montagnes, des nuages...

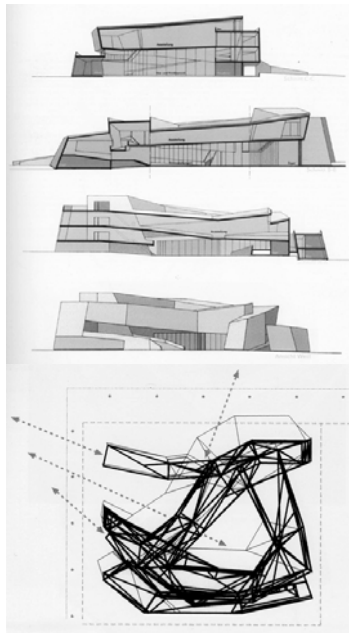
Le dessin, dans un sens large, est d'essence tactile, haptique, autant qu'optique. L'outil, le support, offrent des qualités de résistance différentes, qui influent sur le mouvement et sa trace : il suffit d'avoir dessiné avec un fusain, un crayon dur ou une plume, pour comprendre que le résultat, même si le sujet est le même, sera différent. Les techniques de la gravure offrent un éventail d'outils et de supports qui demandent à la main des efforts très différents, et donc des mouvements possibles très marqués : la façon dont on tient le burin, la pointe sèche, ou, d'une toute autre façon, le grattoir ou le brunissoir dans la technique de la manière noire, la résistance offerte par tel ou tel métal, ou bois (pour la gravure sur bois), induisent des gestes très différents, qui se réfèrent à des types d'attaque de la matière qui peuvent ressembler à tracer des sillons, creuser, écraser, caresser, etc. Mais ce qui peut sembler inhérent à la gravure peut être transposé au dessin proprement dit. Tous ces gestes différents n'induisent pas seulement des caractéristiques de techniques différentes, ils contribuent fortement à ce que l'on peut appeler le "style", celui d'une époque, et encore plus celui d'un artiste.

. Les croquis des architectes ne transmettent pas seulement les intentions architecturales du projet, ils portent aussi la marque de la main de l'architecte, de ses particularités de mouvement, de son assurance ou de son hésitation, de son goût pour le courbe ou pour l'anguleux.

Et puis, la trace du mouvement "à l'état brut" a connu sa consécration avec certains courants de peinture contemporaine, en particulier l'*action painting* dont Jackson Pollock est le plus illustre représentant, ou encore, plus proche de l'écriture, Cy Twombly.



48 Frank Lloyd Wright, Musée Guggenheim, New York



49 Stefan Jauslin, Mateja Vehovar, Anna Wimer, Pavillon suisse, Hanovre, 1997

La promenade architecturale

“Si le musée Guggenheim est une œuvre d’art, il l’est beaucoup plus au titre d’une forme à pratiquer dans une programmation méthodique de stimuli visuels égrenée au cours d’une descente en hélice qu’au titre d’une œuvre architecturale à voir au sens strict. ” (Moles Abraham A., Rohmer Elisabeth, Psychologie de l’espace, Casterman, 1978, p. 200)

C’est Le Corbusier qui a le plus mis en valeur le fait que l’architecture se parcourt, avec son concept de “promenade architecturale”¹⁰. Ce parcours met en jeu principalement la kinesthésie en offrant au “corps se mouvant” diverses modalités de déplacement : la rampe en est un élément fort, qui procure la possibilité de monter, ou de descendre, sans trop d’effort. La vue est également très sollicitée, la promenade offrant divers cadrages, points de vue, etc. L’arrivée à la chapelle de Ronchamp est aussi un exemple fort de promenade architecturale, que l’on peut rapprocher de l’accès au Parthénon, tel qu’Eisenstein l’a mis en scène dans ses écrits. Mais le couvent de la Tourette, par ailleurs, met en jeu une promenade plus intérieure, comme il se doit pour un lieu de recueillement, par exemple en proposant un dispositif qui occulte la vue tout en laissant passer la lumière.

Car l’idée de promenade architecturale n’est pas née par hasard au XX^{ème} siècle. Tout bâtiment se parcourt, depuis toujours (et cette idée d’assimiler une architecture à un parcours linéaire se trouvait dans “l’art de la mémoire”, dont nous parlerons au point II.2), mais la prise de conscience de l’importance de cet usage n’est pas indifférente à l’apparition, et à l’intégration dans la lecture de l’espace, du cinéma. Et il ne faudrait pas oublier Mallet-Stevens, à cet égard, qui a travaillé pour le cinéma autant que pour l’architecture, et de tous les dispositifs proprement cinématographiques présents, en particulier, dans la villa Noailles à Hyères.

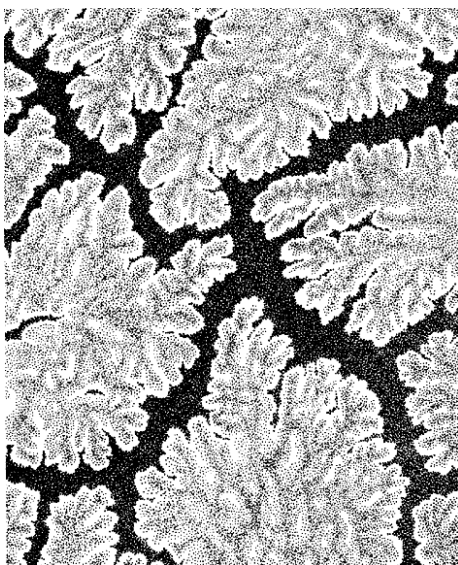
Si des villas, des bâtiments religieux, etc., proposent des promenades architecturales, c’est bien évidemment les musées qui en sont les plus clairs exemples : qu’est-ce qu’en effet qu’une visite de musée sinon une pure promenade architecturale ? Le labyrinthe (simple, il ne s’agit pas de perdre ses visiteurs) aurait pu être pris comme plan d’un musée ; beaucoup de scénographies muséales s’en approchent, mais c’est la spirale qui a inspiré le Guggenheim de New York (Frank Lloyd Wright), et, dans une version plane, le musée à croissance illimitée de Le Corbusier (non construit).

Flux, diffusion

Il n’y a pas que l’homme qui se déplace, ni même les animaux. Il y a aussi les éléments plus ou moins fluides de la Terre : les glaciers, les boues, l’eau, l’air. Tous ces déplacements, ou flux, génèrent des formes qui contribuent à la physionomie de la Terre.

Les principaux traits de la physionomie de la surface terrestre sont dus aussi à des mouvements : la tectonique des plaques, c’est-à-dire les mouvements lents de l’asthénosphère, visqueuse, et dont résulte la forme des continents et la forme générale des reliefs. Il y a aussi des “formes” qui ne sont que

¹⁰ Dont il faut remarquer qu’il est cité “en français dans le texte” par les auteurs anglo-saxons.



50 Lichens

la matérialisation, plus ou moins éphémère, d'un mouvement, d'un flux : les images satellites qui nous montre les nuages mettent en évidence les mouvements tourbillonnaires de l'air ; on peut voir aussi de telles images de courants océaniques et les cours d'eau, eux-mêmes, *sont* des écoulements visibles.

Mais un cours d'eau ne se contente pas de dessiner, de révéler, par son parcours, les lignes de plus forte pente d'un relief ; il contribue à le modifier, en accentuant certaines de ces lignes par l'érosion provoquée par son passage. Cette trace peut persister alors que le cours d'eau a disparu, ou, en tout cas, que son débit est devenu bien faible par rapport à l'ampleur de la vallée (exemple des canyons) ; les vallées glaciaires, également, sont des traces de l'écoulement en bloc des glaciers, emplissant tout le fond de la vallée et l'érodant par surcreusement.

Des formes sont produites aussi par la diffusion, la propagation, la prolifération, toutes sortes de façons qu'ont les fluides de s'immiscer dans des matières poreuses, filandreuses. C'est ce qui est utilisé dans l'aquarelle ou le lavis, en faisant se diffuser l'eau colorée, l'encre, dans le grain et les fibres du papier ; ces formes se rapprochent de formes géographiques, comme l'a noté Bachelard :

“Prenons une toute petite image que nous appellerons *l'enfant au buvard*. Le voici tenant en main le coin du papier onctueux, feutré, effiloché, il l'approche sournoisement de la tache d'encre (...). *L'enfant au buvard* assèche la mer Rouge. Le buvard maculé est la carte d'un continent, c'est la terre même qui vient d'absorber la mer. Et sans fin, l'écolier assis à son banc, mais parti cependant pour l'école buissonnière, pour les voyages de la géométrie dynamique, pour cette géographie rêvée qui le console de la géographie récitée, l'écolier rêvant travaille à la limite de deux univers : l'univers de l'eau et l'univers de la terre. Le rêve fait ainsi des eaux-fortes sur du papier mâché.” (Gaston Bachelard, *La terre et les rêveries de la volonté Essai sur l'imagination de la matière*, Librairie José Corti, 1947, pp. 76-77)

C'est aussi la manière dont les mousses, les lichens se propagent. Mais c'est aussi les façons qu'ont les installations humaines de se déployer sur la surface de la Terre : ne parle-t-on pas de ville diffuse, de prolifération urbaine, etc. ?

La Terre, du moins avant l'invention de l'avion, ne peut se parcourir, s'explorer, que *de proche en proche* ; et cette avancée se trouve confrontée à des milieux plus ou moins hostiles ou accueillants. Les cartes montrent cette diffusion, ou cette propagation, des terres connues, dans le blanc des *terrae incognitae*.

II.1.2 Instauration de limites

Ce qui est un parcours pour certaines conditions peut devenir une coupure, une limite pour d'autres : un cours d'eau est une forme de parcours pour le batelier, il est une limite pour le marcheur. Si nous étions dans un univers bidimensionnel, et que le marcheur ne puisse pas devenir nageur ou emprunter une barque, cela serait irrémédiable. Mais comme nous sommes tout de même dans un monde tridimensionnel, nous faisons des ponts, par exemple.

Un parcours est une ligne, qui peut sinuer, se plier, mais qui ne se referme pas forcément. La danse du labyrinthe ne circonscrit pas une surface. Mais le geste du *templum* découpe une "fenêtre" dans le ciel (où le passage d'oiseaux déterminait le destin, d'où les oiseaux de *bon* ou de *mauvais augure*), et ce geste sera transposé sur le sol pour définir l'enceinte du lieu sacré. Pour circonscrire une surface, une ligne doit se refermer, donc se courber, ou se plier.

Instaurer une limite, c'est définir un intérieur et un extérieur, un *ici* et un *ailleurs*.

Murs

"Mur ou partition constituent l'un des modes fondamentaux d'accès à l'appropriation de l'espace et, comme vu plus haut, la première idée que l'architecte a pour approprier l'espace, c'est de construire des murs (la Grande Muraille de Chine) mais elle n'est ni nécessaire (on peut approprier l'espace en-dehors de tout mur ou de toute frontière) ni suffisante (l'existence d'un mur n'établit l'appropriation que si celui-ci se clôt et constitue une forme fermée (...))." (Abraham A Moles., Elisabeth Rohmer, *Psychologie de l'espace*, Casterman, 1978 p. 61)



51 Shoji et noren

Dire que faire de l'architecture c'est *instaurer des limites dans l'espace* est presque de l'ordre de l'évidence. Il faut tout de même le redire, et ce dans le cadre de la définition que nous avons donnée au mot limite, ou coupure (bord, frontière, etc.) : ce qui empêche un parcours.

D'abord, ces coupures sont des infranchissables pour des types de parcours différents : ce qui est infranchissable pour le déplacement physique, ou pour le sens tactile, ne l'est pas forcément pour la vue, et réciproquement. Le verre est largement employé pour instaurer une telle barrière au déplacement mais pas à la vue, mais aussi les grillages, par exemple, alors que les *noren* japonais (ces bandes de tissu suspendues devant les ouvertures), ou encore d'autres sortes de rideaux (comme ces rideaux de lanières que l'on trouve beaucoup dans les pays méditerranéens), préservent plus ou moins l'intimité visuelle, tout en étant en un certain sens franchissables (moyennant une déformation) : l'expression "rideau de fumée" désigne un dispositif qui serait opaque mais complètement franchissable, dans la réalité, il n'est pas si facile à réaliser... Le dispositif employé par Louis Kahn dans son vestiaire pour la piscine du centre communautaire juif de Trenton est d'une simplicité remarquable : une chicane (un mur en U, et un autre mur qui pénètre en partie dans l'ouverture de ce U) empêche la vue des douches à partir de l'atrium, tout en permettant un accès complètement libre.



52 Buckminster Fuller *Projet de couverture de Midtown Manhattan*, 1960.

Mais instaurer une limite ne nécessite même pas de construire un mur : un fossé empêche, ou du moins limite fortement l'accès (que l'on songe aux douves des châteaux, ou aux fossés des parcs zoologiques), sans empêcher du tout la vue ; cependant, si l'on veut vraiment se protéger de toute intrusion, ou de tout danger, ce dispositif n'est généralement utilisé qu'en complément d'un rempart ou d'un grillage.

On désire généralement instaurer une limite au déplacement de l'air, ou à ce qui se sert de l'air pour se propager : le vent, la pluie, le son, le froid ou le chaud, les odeurs, etc. C'est bien le sens premier de l'architecture comme abri. L'architecture contemporaine a dans ses fantasmes celui d'une barrière idéale à tous les déplacements (aussi bien contre les intrus, les odeurs, le bruit, le froid, etc.), sauf à la vue : la maison Farnsworth de Mies van der Rohe est l'exemple-type de cet idéal de "cocon transparent". Dans les années 60, on a eu le rêve d'enfermer les villes sous un dôme de verre pour y créer un climat idéal (cf Buckminster Fuller *Projet de couverture de Midtown Manhattan*, 1960) ; ce fantasme ne s'est finalement que peu réalisé, seulement à très petite échelle¹¹ dans des villages de vacances.

Une limite peut être plus ou moins absolue : les *shoji* japonais, ces panneaux de papier translucide, laissent passer la lumière et les ombres, mais pas vraiment la vue. Elle peut être aussi asymétrique : les *moucharabiehs* permettent de voir de l'intérieur sans être vu. Elle peut être permanente ou temporaire : les portes et les fenêtres ne sont infranchissables que lorsqu'elles sont fermées, et elles sont de plus asymétriques : on ne peut pas ouvrir en général une fenêtre de l'extérieur, et le côté de la serrure où se trouve la clé détermine la possibilité d'ouvrir une porte close... Cette temporalité de la limite et de son annulation peut varier : un pont annule la coupure matérialisée par le cours d'eau le plus souvent de manière constante ; mais un pont tournant rétablit cette limite au passage d'un bateau, tandis que le pont-levis d'une forteresse, au contraire, ne s'abaissait pour annuler la coupure qu'à l'arrivée de visiteurs dûment agréés. La façon dont on module la temporalité de ces limites : en Occident on distingue nettement le mur et son ouverture, la porte s'ouvre par rotation autour d'un axe ; mais dans l'architecture traditionnelle japonaise, les cloisons peuvent s'enlever complètement, et les portes coulissent pour s'effacer discrètement dans les cloisons. Les différentes modalités induisent des comportements différents : on s'agenouille pour faire coulisser la porte au Japon ; en Afrique, en l'absence le plus souvent de porte "en dur", faute de pouvoir frapper à la porte, on frappe dans ses mains pour avertir de sa présence.

¹¹ au sens commun (et architectural) du terme...

Les limites dans une architecture peuvent se diversifier : on n'accueille pas dans sa chambre n'importe quel visiteur ; cette "limite" n'est pas matérielle, elle est seulement instaurée par les convenances et sera manifestée au visiteur par la façon de le guider chez soi. Mais dans sa "maison de verre", qui avait une double fonction de logement et de cabinet médical, et qui est beaucoup plus une "machine à habiter" que n'importe quel projet de Le Corbusier (même si c'est lui qui a inventé l'expression), comme l'entrée était commune pour la famille, les visiteurs privés, et les patientes (il s'agissait d'un gynécologue) Pierre Chareau a concrétisé cette différence des limites par un dispositif mécanique coulissant qui interdisait l'accès à l'escalier menant aux parties privées de la maison lorsque des patientes se présentaient.

Les limites peuvent aussi s'emboîter, se juxtaposer, se redécouper, etc... Nous aborderons plus avant ces configurations à travers le rapport à la matière.

Tracer les limites

Dans l'espace haptique il n'y a pas de lignes, et même dans l'espace optique, les contours visuels des formes tridimensionnelles ne sont des lignes qu'en tant que limites de surfaces distinctes pour la vue (ce qui est bien la définition topologique des lignes). La vue est très sensible aux seuils, aux discontinuités dans le continu du champ visuel ; c'est ce qu'elle traite comme étant la frontière de formes distinctes. Ce qui est remarquable c'est que ces seuils, nous les transcrivons dans le dessin "au trait" comme des *quasi-lignes*, qui ont une certaine épaisseur, bornant des surfaces qui peuvent garder la neutralité du blanc du papier ou du support quel qu'il soit. Et nous percevons, nous interprétons, ces dessins aussi bien, voire mieux que des photographies ou des dessins plus proches de la réalité.

Faire une carte, c'est entre autre autres choses tracer des limites. Certaines de ces limites sont des frontières de surfaces, plus ou moins perceptibles sur la surface de la Terre : limite entre la terre et l'eau, limite de tel type de végétation, etc. D'autres sont complètement immatérielles, même si une frontière, par exemple, même sans mur, peut se lire parfois sur les photographies aériennes. Des lignes fictives, comme les courbes de niveaux sont matérialisées par la construction de terrassements pour les rizières, par exemple.

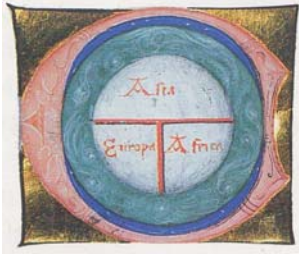
Beaucoup de problèmes se posent pour instaurer des limites : où commence telle montagne, où se termine telle plaine ? qu'est-ce qui délimite telle vallée ? sur quels critères distinguer les différents océans, et mers, alors qu'ils constituent, en-dehors de quelques rares mers intérieures, un espace connexe ? etc. Des règles ont été établies, s'appuyant sur une valeur plus ou moins arbitraire de pente, par exemple, mais s'il est relativement facile de déterminer un sommet, par définition unique, et de l'appeler (par exemple le Mont Blanc), il est plus difficile de déterminer jusqu'où s'étend son



53 Frontière Québec-Etats-Unis,
lac Memphrémagog



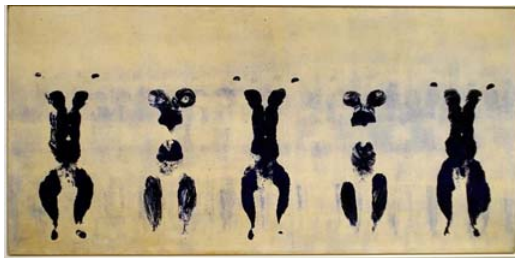
54 Rizières. Bali



55 Mappemonde, Miniature du XV^e siècle



56 Main négative, Grotte Chauvet
Main positive, Fuente del Salin



57 Yves Klein, *Anthropométrie sans titre* (ANT100)

influence (le *massif* du Mont Blanc, qui comprend un certain nombre de sommets secondaires). Les différents océans et mers ne sont apparus dans la toponymie que par l'exploration progressive du globe, et la remise en cause de la vieille croyance que la terre était entourée d'une seule grande rivière appelée Okeanos : il y a passage d'une conception topologique de l'entourage simple (la terre entourée par un seul océan), à une conception de partage entre des terres (continents, archipels, îles) et un océan certes connexe, mais suffisamment compliqué pour être divisé en plusieurs zones (les cinq océans majeurs : Pacifique, Atlantique, Indien, Arctique et Antarctique ; et les multiples mers) suivant les terres qui les avoisinent.

Intérieur et extérieur, positif et négatif

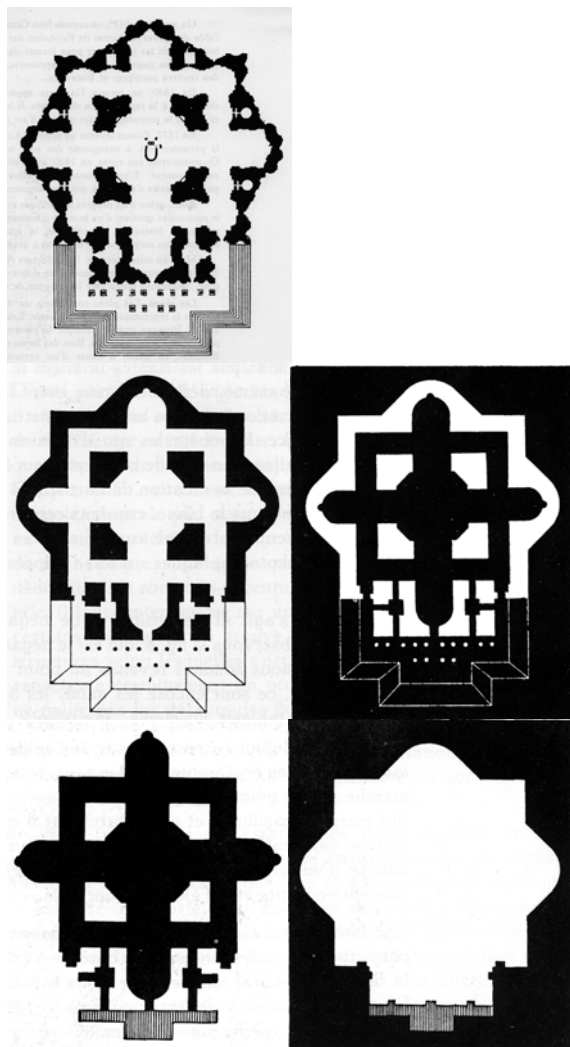
On trouve sur les parois de centaines de cavernes préhistoriques¹² des empreintes de mains : la plupart sont des "mains négatives" obtenues en projetant ou en soufflant un pigment sur une main posée, doigts écartés, sur la paroi (technique du pochoir) ; d'autres, moins nombreuses, les "mains positives" sont réalisées en appliquant la main enduite de colorant sur la paroi.

On peut s'interroger sur ce rapport de fréquences entre deux techniques dont la plus rare peut nous sembler, pourtant, la plus "naturelle" : quel enfant n'a pas plongé sa main dans un pot de peinture (ou tout simplement sali sa main d'une quelconque façon) avant d'en imprimer la trace sur un mur ou toute surface ? Une telle empreinte peut d'ailleurs arriver fortuitement : on aurait pu imaginer un homme préhistorique, la main couverte du sang de sa proie, l'essuyer sur la paroi de la caverne, et découvrir ainsi l'une des origines de la peinture... Origine rejouée par Yves Klein dans ses Anthropométries. Mais projeter un pigment (comment ? sans doute par la bouche) sur sa main posée, voilà qui indique encore une fois, paradoxalement, le raffinement que montraient nos ancêtres.

Cette invention, ancienne, du pochoir, s'inscrit dans la famille des activités qui *inversent* l'intérieur et l'extérieur d'une forme, qui pratiquent la *contre-forme*, dans ce cas l'intérieur et l'extérieur d'une forme 2D (la surface de contact entre la main et la paroi) ; forme et contre-forme partageant un même contour.

La contre-forme a donc quelque chose à voir avec la symétrie, même s'il faut bien la distinguer de celle-ci : il s'agit en fait plutôt de l'opération connue en théorie des ensembles sous le nom de *complémentation*, ou de *différence* : la contre-forme est le complément de la forme dans l'espace, ou encore la différence espace \ forme (lire « espace moins forme »).

¹² on en trouve dans les grottes de Pech Merle et Cosquer en France, de Cueva de Las Manos Pintadas en Argentine, mais en fait sur presque tous les continents : Amériques, Australie et Nouvelle-Guinée, Europe et Afrique du Nord (source : <http://www.kalimanthrope.com> et <http://www2.cnrs.fr/presse/journal/2596.htm> sur les recherches de Jean-Michel Chazine et son équipe à propos du sexe de ces mains)



58 Michel-Ange, *Projet de Saint Pierre de Rome*
Bruno Zevi, *plan simplifié ; négatif ; espace interne ; espace externe*

Bien sûr, dans la pratique, on ne peut pas obtenir la totalité de la contre-forme : il faudrait que le pochoir s'étende indéfiniment, ou que le moule envahisse l'espace entier. L'opération se fait donc dans une certaine portion de l'espace.

Une lecture de l'espace architectural emprunte à cette idée de forme et contre-forme ; on la trouve en particulier chez Bruno Zevi¹³, qui l'applique par exemple au projet de Michel-Ange pour Saint Pierre de Rome. L'architecture instaure des limites, et ces limites ont leurs propres limites : une limite *interne*, et une limite *externe*. La limite externe est celle du volume plein tel qu'il se sépare du vide, de l'espace externe ; la limite interne enveloppe le vide habitable de l'espace interne.

L'idée de forme et de contre-forme sera reprise dans le point suivant. Elle sera aussi mise à contribution dans quelques expérimentations formelles présentées en III.3.3, associée à des processus de génération de formes.

¹³ Bruno Zevi, *Apprendre à voir l'architecture*, Les Editions de Minuit, 1959

II.1.3 Rapport à la matière

“Enfants, nous étions peintre, modelleur, botaniste, sculpteur, architecte, chasseur, explorateur. De tout cela qu’est-il devenu ?” (Gaston Bachelard, *La terre et les rêveries de la volonté Essai sur l’imagination de la matière*, Librairie José Corti, 1947, p. 95)



59 Nid de guêpe d'Amérique du Sud (*Chartergus Globiventris*)

L'homme a manipulé la matière, l'a transformée, a fabriqué, construit, depuis l'origine. Il n'est pas le seul, les animaux construisent aussi, dans une certaine mesure : les oiseaux, les insectes sociaux, “construisent” leur nid, même s'il y a une différence notable, comme cela a été souvent signalé, entre l'abeille et l'architecte... Ces constructions sont parfois étonnantes, et on pourrait en effet penser qu'elles aient pu servir de modèle. Mais plus justement, et même si l'architecture, ni la construction, ne se réduisent pas à cela, les animaux comme les humains ont affaire à la matière, à des matériaux communs avec leurs caractéristiques propres, et sont amenés à les transformer pour leur usage suivant les lois qui régissent ces matériaux. Et ils sont soumis aux mêmes lois de l'espace : si les cellules des nids de d'abeilles ou de guêpes sont hexagonales, ce n'est pas par un dessein (ou dessin) volontaire de leur part, c'est simplement le résultat des forces de compression. L'homme est soumis de la même façon aux lois de la matière et de l'espace, même s'il est plus capable de les soumettre, et surtout de les comprendre.

Nous autres, êtres humains occidentaux du XXI^e siècle, ne fabriquons plus guère nous-mêmes nos ustensiles, nos outils, nos meubles, nous ne filons plus la laine, nous ne taillons plus ni ne cousons plus nos vêtements nous ne construisons plus de nos mains nos maisons... Le bricolage, le tricot, les “activités manuelles”, ne sont pratiqués que par certains. Il reste la cuisine, heureusement, même s'il existe aussi des plats tout préparés, pour nous mettre en contact avec la matière, sa manipulation, sa transformation : même si l'on n'est pas un grand chef, on peut faire bouillir de l'eau, voir les spaghetti durs, cassants, et droits devenir mous (enfin, pas trop, il faut l'espérer), courbes, sinueux, constater que le blanc d'œuf visqueux et transparent devient solide et opaque... Dans presque toutes les cultures, il y a la fabrication de crêpes, de galettes, etc., de ce que dans notre jargon topologique nous appelons des *quasi-surfaces* ; mais il est intéressant de comparer la confection des galettes de riz chinoises, extrêmement fines, à partir d'une boule de pâte assez consistante promenée sur la plaque chauffée, avec celle de nos crêpes et galettes traditionnelles, à partir d'une pâte presque liquide étalée à l'aide de la *rozell*.

Et puis il y a les jeux, qui souvent exemplifient de manière simple mais significative, nos rapports aux formes et à l'espace.



60 Le mythe de la cabane selon l'abbé Laugier

Manipuler, transformer, fabriquer, construire

Le troisième mythe originel de l'architecture, le plus évident, c'est celui de la *cabane*, de la maison primitive, de l'abri précaire, évoluant petit à petit vers des constructions plus sophistiquées. Mais chacun voit cette origine d'une manière différente, comme Joseph Rykvert le rapporte dans son livre *La Maison d'Adam au Paradis* ; celle de l'abbé Laugier est la plus caractéristique de l'idée de "cabane" :

« L'homme veut se faire un logement qui le couvre sans l'ensevelir. Quelques branches abattues dans la forêt sont les matériaux propres à son dessein. Il en choisit quatre des plus fortes, qu'il élève perpendiculairement et qu'il dispose en carré. Au-dessus, il en met quatre autres en travers ; et sur celles-ci, il en élève qui s'inclinent et qui se réunissent en pointe des deux côtés. Cette espèce de toit est couverte de feuilles assez serrées, pour que le soleil ni la pluie ne puissent y pénétrer ; et voilà l'homme logé. Il est vrai que le froid et le chaud lui feront sentir leur incommodité dans sa maison ouverte de toutes parts ; mais alors, il remplira l'entre-deux des piliers et il se trouvera garanti... » [M.-A. Laugier, *Essai sur l'architecture*, Paris, 1753, p. 2 sq.] (in : Joseph Rykvert, *La Maison d'Adam au Paradis*, Editions du Seuil, Paris, 1976, p. 47)

L'attachement à ce mythe a été très puissant dans la pensée occidentale sur l'architecture, jusqu'à y faire remonter l'origine des temples grecs, et surtout celle des cathédrales gothiques. Hegel lui-même y céda, quoique pas jusqu'au bout :

« Par leur réunion, les ramifications de tous les piliers forment la voûte de la cathédrale, de même que les branches supérieures des arbres d'une forêt se rejoignent pour former une voûte de verdure... Ceci ne veut cependant pas dire que l'architecture gothique ait pris pour modèles de ses formes les arbres et les forêts. » [Hegel, *Esthétique*, 1^{re} partie, chap. III ; trad. f., Paris, 1944, p. 86.]. » (in : Joseph Rykvert, *op. cit.*, p. 108)

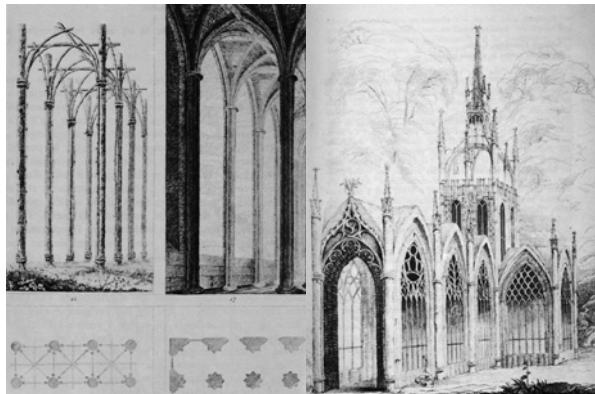
D'autres y croyaient assez, comme Sir James Hall, pour reconstruire en fagots de bois ce qu'ils pensaient être la cathédrale gothique primitive.

Nous n'allons pas reprendre toutes ces origines imaginées de l'architecture comme construction, souvent mises en avant par les architectes pour justifier leurs propres choix ; nous mentionnerons seulement certaines de ces variantes en relation avec telle manipulation que nous décrirons.

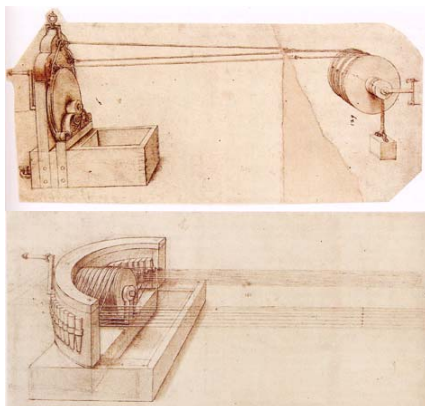
Variétés

Nous avons vu qu'en toute rigueur, il n'y avait, topologiquement parlant que des volumes, dont nous ne percevons que la surface. Mais nous avons introduit l'idée de quasi-variété, ces volumes si minces qu'ils peuvent être assimilés à des lignes, ou des surfaces. C'est beaucoup à travers ces quasi-variétés que l'homme agit avec, et sur la matière.

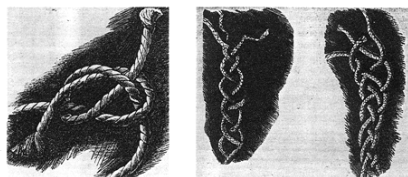
Pour fabriquer des objets qui seront des quasi-variétés d'un certain type, l'homme peut soit les découvrir presque déjà là dans la nature, ou transformer radicalement la matière. Pour faire des *lames*, on peut utiliser le métal, qui nécessite de le recueillir, de le fondre (éventuellement de réaliser des alliages), de le forger, etc. Mais l'homme a commencé par la pierre taillée. Casser (tailler, pour



61 La hutte gothique édifiée par Sir James Hall



62 Léonard de Vinci, *Machines pour fabriquer des cordes*



63 Gottfried Semper, *Nœuds et entrelacs*



64 Montage d'une tente khirghize

prendre un terme plus noble) suppose de se soumettre à une certaine logique de la matière. Pour la pierre taillée, l'homme préhistorique n'a pas pris n'importe quelle pierre, mais le silex, qui se fractionne selon des lois constantes et contrôlables, en formant des arêtes tranchantes¹⁴, qui se décompose effectivement en éclats. L'idée de la lame vient de là, mais la pierre n'est en lames que parce que l'homme a pensé à l'utiliser (peut-être par hasard au début, un silex qui est taillé "naturellement").

Si l'on reprend les variétés dans l'ordre de leur dimension, en laissant de côté les "points", on a d'abord les "lignes". Il y a les fibres qui existent en tant que telles dans la nature, mais qui peuvent être tressées (fabrication de lianes, ou de ficelles, cordes, etc.), cardées et filées (la laine, le coton), etc. Ou bien, en changeant radicalement de procédé, on fabrique du fil de fer en forçant un lingot de fer à travers une filière, d'abord à une seule perforation (époque romaine), puis d'orifices de taille décroissante (VIII^e siècle) ; les spaghetti déjà évoqués relèvent d'un procédé analogue...

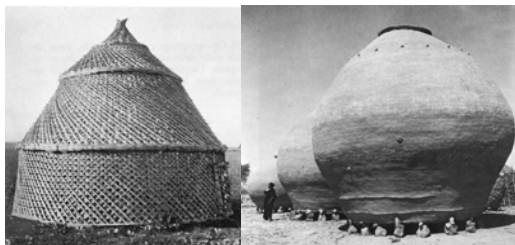
Les fils, de quelque sorte qu'ils soient, peuvent être utilisés en tant que tels : on a pu montrer l'importance du fil de fer pour la territorialisation de la prairie américaine, ou de la pampa argentine. Les filins, cordages, etc. servent à transmettre les forces de tension ; on ne reviendra pas sur leurs différents usages. Mais les fils peuvent aussi se nouer, simplement pour attacher, ou s'entrelacer, pour réaliser des "surfaces" : tissus, tricot, tressages, vanneries, cottes de maille, grillages, etc.

Gottfried Semper, architecte et professeur d'architecture, classait les activités de fabrication en mettant le *tissage* en premier, suivi de la *poterie*, la *charpente* et la *stéréotomie* (art du maçon) et insistait sur les nœuds et entrelacs. Il en déduisait que la tente représente la forme primaire d'habitation. Plus rigides, des lignes (des tiges, des branches) peuvent servir de support à une enveloppe : voir l'exemple des yourtes mongoles.

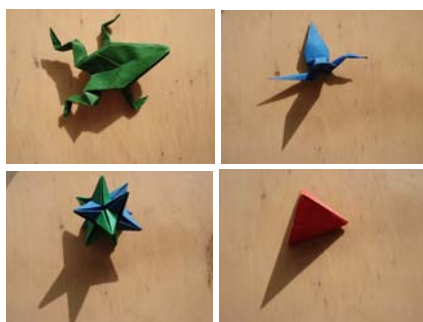
Des surfaces, on peut en obtenir à partir de fibres elles-mêmes emmêlées : le feutre s'obtient par foulage de fibres textiles (lin, chanvre, etc.), ou de poils d'animaux (laine, mais aussi poils de chèvres, de chameaux, lapins, etc. et même cheveux). Du point de vue de la dimension, on passe d'un volume (l'emmêlement des fibres) à une surface par aplatissage.

Mais des "surfaces", on peut en trouver toutes faites, ou presque : peau des animaux, feuilles, etc. ou les réaliser à partir de "lignes", comme nous venons de voir, ou encore les obtenir par une transformation de matière plus radicale : le papier provient de la fabrication d'une pâte par broyage de tissus, puis pressage (où l'on retrouve le feutre) ; le papyrus est fabriqué à partir de fines tranches de la tige de la plante, humidifiées, placées en couches et positionnées perpendiculairement les unes sur les autres et compressées et le parchemin est issu, plus simplement, du traitement de peaux d'animaux.

¹⁴ Cassure "conchoïdale" (qui a l'aspect d'une coquille), c'est-à-dire une cassure franche courbe et lisse.



65 Hutte marocaine et jarres géantes au Soudan



66 Origami



67 Tangram

Une “surface” peut être un contenant : paniers tressés, oualebasses que l’on évide ; le feutre sert aux nomades d’Asie Centrale depuis la préhistoire pour leurs yourtes. Mais d’autres peuples utilisent des tressages pour leur habitat, en les renforçant ou non avec de la terre. Si l’on considère le mur comme une “surface”, on voit toutes les manières qui existent pour constituer ces surfaces : tressage, feutrage (avec une armature d’éléments linéaires), moulage (terre banchée, béton), empilement d’éléments plus ou moins modulaires (pierres, briques)...

En tout cas, quelles que soient les techniques, retenons, que pour constituer une enveloppe, une “surface” doit être courbée ou pliée. Le papier, invention fondamentale s’il en est, ne sert pas que comme support d’écriture ou de dessin. Il peut être aussi plié : voir le jeu (ou l’art) japonais de l’*origami*, qui part toujours d’une feuille de papier carrée, et dans lequel on ne doit pas le découper, et du *kirikami*, qui inclut le découpage. Ces jeux sont exploités pédagogiquement dans la recherche formelle en architecture¹⁵. Au-delà de la pédagogie, le *pli* est très présent chez un certain nombre d’architectes contemporains ; mais il existe depuis toujours, pour une raison structurelle très simple : il est impossible de faire tenir une feuille de papier debout, mais si on la plie, même simplement en deux, cela devient possible (et ceci est valable aussi pour un voile de béton)...

Découpage et assemblage

Découper et assembler sont des actions essentielles sur les formes, selon les matières ou les objets. Le puzzle (*jigsaw puzzle*) en est le jeu archétypal, le principe poussé à l’absurde puisque ce qu’on doit assembler a été découpé exprès¹⁶. Le *tangram* se présente comme un carré découpé, mais le jeu ne consiste pas seulement à reconstituer ce carré (ce qui n’est pas si facile, déjà) mais à réaliser toutes sortes d’autres configurations :

La plupart du temps, on ne découpe pas pour réassembler, on n’assemble pas ce qu’on a découpé, ou alors en tout cas pas de la même façon... On peut découper, ou plutôt morceler pour avoir un matériau plus transportable, plus modulable (casser des cailloux) ; pour pouvoir le recomposer d’une autre façon, comme dans la mosaïque. On découpe le tissu pour le réassembler en un vêtement, mais en le réassemblant, on introduit des plis, des courbures, des trous, qui vont lui permettre d’envelopper un corps tri-dimensionnel, mais en laissant les ouvertures nécessaires.

On peut aussi assembler des éléments épars, soit glanés, recueillis, amassés : le patchwork qui permet d’utiliser des chutes de tissu, le pavage plus ou moins grossier des voies de circulation, les toitures en pierre de certaines régions ; soit fabriqués pour cela : toutes les briques, tuiles, les carreaux, bardeaux, etc., qui permettent une modularité.

¹⁵ voir en particulier : Sophia Vyzovoti, *Folding Architecture Spatial, Structural and Orgaizational Diagrams*, BIS Publishers, 2004

¹⁶ Sur le sujet du puzzle, on renvoie, évidemment, à Georges Perec, *La vie mode d’emploi*, Hachette, 1978



68 “Dons” de Friedrich Fröbel



69 Marcel Duchamp, *Feuille de vigne femelle*



70 Max Ernst, *Frottage*

Tous les jeux de construction consistent à assembler des éléments modulaires, parfois très simples et tous identiques (*Kapla*), parfois ayant évolué vers une telle diversité que l'on peut à peine parler de modularité (*Lego*, *Meccano*). Mais parmi tous ces jeux, nous retiendrons particulièrement ceux que l'on appelle les “dons” de Friedrich Fröbel, qui étaient plus que des jeux, puisqu'ils participaient de toute une philosophie pédagogique. On sait l'importance qu'ont eue ces “dons” dans l'apprentissage d'un certain nombre d'architectes, dont Frank Lloyd Wright¹⁷. Ce sujet mériterait un long développement en lui-même, que nous ne pouvons malheureusement pas nous permettre ici.

Empreinte, moulage, forme et contre-forme

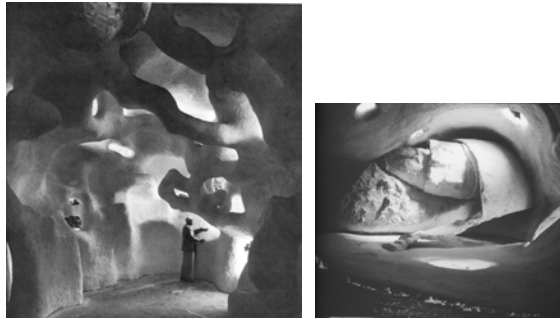
Le moulage est une activité du même type que le pochoir, qui inverse elle l'intérieur et l'extérieur (mais d'une forme 3D), qui crée une contre-forme de même enveloppe surfacique. Les Égyptiens, dès le XXIV^{ème} siècle avant J.-C., réalisaient des moulages en plâtre. La technique du moulage a été largement utilisée pour reproduire des objets tridimensionnels (des pièces de monnaie, en particulier) : de la forme à la contre-forme, de celle-ci à sa propre contre-forme, on en revient à l'original (avec quelque perte, cependant, du moins dans les techniques plus anciennes) : c'est la technique de la fonte des cloches et des canons, des statues ; jusqu'à la sculpture *Feuille de vigne femelle* de Marcel Duchamp, dont le moule est le corps lui-même.

Comme contre-forme, il y a aussi l'empreinte, l'empreinte des pas de l'homme, mais aussi celle des animaux qu'il s'agit d'interpréter (la chasse), l'empreinte qui reste des millénaires et qui nous apprend l'existence d'espèces disparues, l'empreinte qui s'inscrit dans la terre meuble, et qui reste comme un bas-relief dans la terre solidifiée, l'empreinte des morts de Pompéi qui a permis de reconstruire la forme de leurs corps. Et puis il y a cette technique de la pièce de monnaie qu'enfant nous couvrons d'une feuille de papier avant de frotter un crayon pour révéler les minces reliefs mis en valeur par le noir et le blanc. Max Ernst, fixant le plancher usé d'une auberge où il séjournait en Bretagne, décida de relever l'empreinte de cette matière en frottant à la mine de plomb un papier posé sur les lattes de bois. Il étendit ensuite ce procédé à d'autres textures et publia son premier recueil de frottages, *Histoires naturelles* en 1926.

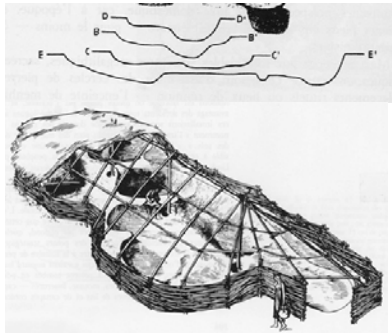
La tablette de cire (effaçable, d'où l'expression *tabula rasa*) était un support commun de l'écriture dans l'Antiquité. Si Platon (dans le *Théétète*) se référait plutôt à la cire dans laquelle on imprime un sceau (le châton d'une bague) pour donner une image de ce qui s'inscrit dans l'âme, Freud¹⁸ utilisait bien l'image de cette tablette de cire effaçable, dans sa version moderne de l'“ardoise magique” ou

¹⁷ Robert Mc Carter, *Frank Lloyd Wright A Primer on Architectural Principles*, Princeton Architectural Press, 1991 ; Norman Brosterman, *Inventing Kindergarten*, éditions Harr N. Abrams, 1997

¹⁸ Dans un article de 1925.



71 André Bloc, *Structure libre*, Meudon
Frederick Kiesler, *Endless House*



72 Habitation néolithique



73 Communauté rurale chinoise

wunderblock (bloc-note magique) que l'on offrait aux enfants, comme métaphore de l'oubli qui laisse malgré tout des traces.

Complication des limites

L'architecture instaure des limites, et au minimum une limite interne et une limite externe. Le cas particulier des grottes, des caves, des cavernes, présente une dissymétrie extrême entre ces deux limites : si l'interne est palpable, l'externe se confond en fin de compte avec la limite de la Terre elle-même :

“Le rêveur de cave sait que les murs de la cave sont des murs enterrés, des murs à une seule paroi, des murs qui ont *toute la terre* derrière eux.” (Gaston Bachelard *La poétique de l'espace* PUF 1957 p. 37)

Pourtant, si bien des mythes d'origine de l'architecture ont été inventés, ce dont nous sommes sûrs, c'est que nos ancêtres préhistoriques ont fréquenté les cavernes, ces replis de la Terre qui pouvaient les accueillir et les abriter. Au-delà de l'habitat troglodyte, persistant dans nombre de régions, certains architectes ont semble-t-il gardé la nostalgie de ces formes originelles, comme, en particulier, André Bloc, et Frederick Kiesler.

D'autres traces d'architecture préhistorique montrent de simples excavations dans le sol, qui devaient être couvertes de branchages. L'architecture peut consister en un simple remodelage de la surface terrestre, toute architecture l'est, en fin de compte.

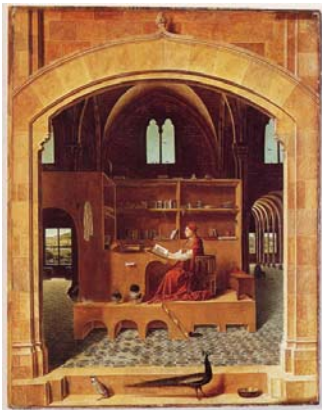
Hors le cas extrême de la caverne, la limite interne et la limite externe ne sont en général pas indépendantes, même si le jeu sur l'épaisseur variable du mur ou de la couverture (ce qui constitue l'interface entre ces deux limites) peut très bien générer une forme différente pour ces deux limites : le plafond voûté d'une église n'est pas la copie conforme de la ligne brisée du toit telle qu'elle est vue de l'extérieur.



74 Temple de radja rani, Bhubaneshvar, Inde



75 Fenêtres en porte-à-faux, Malte



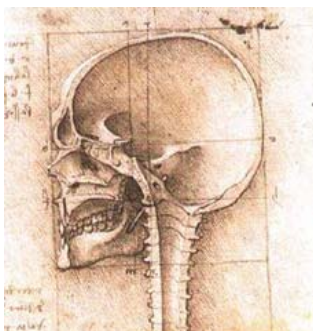
76 Antonello da Messina, *Saint Jérôme en prière*

Ces limites sont forcément pliées ou courbes, puisqu'elles sont par définition fermées (même si elles peuvent être interrompues pour permettre l'entrée et la sortie, bien sûr) pour pouvoir être la limite d'une portion d'espace tridimensionnel, mais elles peuvent encore se compliquer, se plisser, se plier, se recourber, de différentes manières : par adjonction de volumes supplémentaires (appentis, balcons, encorbellements, etc.) ou au contraire par creusement de renforcements (loggias, niches, etc.) ; elle peut se compliquer pour augmenter les capacités de défense d'une forteresse, par exemple, ou pour des raisons constructives, décoratives, etc. : cf. la surface extérieure d'une cathédrale gothique, ou d'un temple indien, etc.

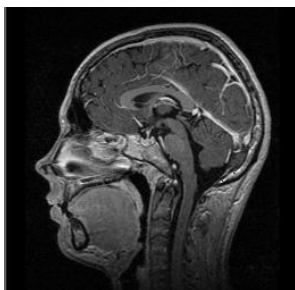
La limite interne se complique aussi par l'adjonction de protubérances, ou de renforcements : que sont les meubles, en fin de compte, sinon des complications de la surface des murs, des planchers, voire des plafonds ?

Enfin, les limites peuvent s'emboîter, se juxtaposer, etc.

Parmi toutes les opérations que nous avons évoquées, sans épuiser le sujet, nous retiendrons quelques opérations de base : le pli, le trou, la juxtaposition, et la forme/contre-forme. Nous les reprendrons en II.3 en ce qui concerne la géométrie. Nous avons vu que certaines opérations modifiaient la dimensionnalité de telle ou telle variété. D'autres types d'opérations, celles-là de représentation, réduisent également la dimensionnalité. Ce sont ces opérations que nous allons aborder à présent.



77 Léonard de Vinci, *crâne*, 1489



78 IRM de crâne

II.2 Réduction du nombre de dimensions

Il s'agira bien ici de réduction du *nombre de dimensions* (ou aurait pu dire réduction de dimension s'il n'y avait pas eu ambiguïté), et non de réduction de *taille*, la question de l'échelle, que nous traiterons en II.3.2. Le monde où nous vivons est tri-dimensionnel, mais nous ne pouvons avoir accès, en grande partie, et en tout cas visuellement, qu'à des représentations 2D de ce monde. C'est des moyens de réaliser cette réduction que nous traitons ici.

II.2.1 La coupe (ou section)

La coupe comme échantillonnage

La *coupe*, ou *section*, n'est pas à confondre avec la *coupure*, au sens de limite, même si elles partagent certains points communs. Couper, trancher, c'est bien créer une nouvelle limite, mais c'est le faire en révélant, ou pour révéler, quelque chose de la forme. Un effondrement naturel, ou le creusement d'une carrière, révèlent la structure géologique stratifiée, éventuellement plissée, du sous-sol ; scier un tronc perpendiculairement à son axe révèle le dessin concentrique des cernes de sa croissance ; couper un œuf dur en deux montre l'emboîtement de la sphère du jaune et de l'ovoïde du blanc.

Les dessins anatomiques de Léonard de Vinci, en particulier celui d'un crâne, montrent la force évocatrice de ce mode de représentation, qui n'implique pas que Léonard ait réellement scié en long un cadavre : la coupe, au-delà de l'action matérielle de trancher, est un des modes de représentation efficaces pour transcender notre condition inéluctable d'être tridimensionnels incapables de pénétrer vraiment, et surtout de *voir*, l'intérieur de la matière tridimensionnelle, c'est une surface, révélatrice de la nature d'un volume, à condition de savoir l'interpréter. L'imagerie par résonance magnétique prolonge la tentative de Vinci et de tous les anatomistes, avec l'avantage de pouvoir pratiquer cette coupe sur l'être vivant, sans dommage pour celui-ci...

La coupe nécessite un certain arbitraire : généralement on coupe un volume le long d'un plan, et non suivant une surface courbe ou pliée (bien que cela puisse se faire). Du point de vue de la réduction de dimension, cela consiste à *extraire* et à *fixer* la valeur d'une des composantes de la dimension, et à recueillir la variabilité des autres. On peut alors étendre la définition de la coupe à tout *échantillonnage* : fixer la valeur d'un certain nombre de composantes d'un continu n-dimensionnel, et recueillir la variabilité des autres. Gilles Deleuze a ainsi pu assimiler l'image cinématographique à une *coupe* (et non seulement à une projection) ; c'est une coupe temporelle¹⁹ qui extrait et fixe la valeur de la composante temporelle en des points arbitrairement choisis tous les 24^{èmes} de seconde. L'idée de "coupe" ne nécessite donc pas de couper par un *continu* de dimension inférieure (comme un

¹⁹ "Le plan, c'est l'image-mouvement. En tant qu'il rapporte le mouvement à un tout qui change, c'est la coupe mobile d'une durée." (Gilles Deleuze, *L'image-mouvement*, Les Editions de Minuit, 1983, p. 36)

volume, ou une surface se déployant dans l'espace, par un plan, ce qui est l'idée classique de la coupe), mais par exemple par un ensemble fini de points, ce qui la différencie essentiellement de la coupe.

Lorsque nous voyons un film, notre système perceptif reconstitue le continu de la durée malgré l'échantillonnage effectué par la caméra : à partir de cette coupe discontinue, nous reconstituons par *interpolation* un continu artificiel (mais satisfaisant la plupart du temps, sauf pour des détails comme les roues qui sont vues tourner à l'envers) ; même s'il est impossible (du point de vue logique), comme le plongeur qui sort de l'eau les pieds devant et remonte sur le plongoir, ce continu temporel artificiel nous paraît tout à fait analogue, du point de vue perceptif, à un continu réel (contradiction que nous résolvons généralement par le rire).

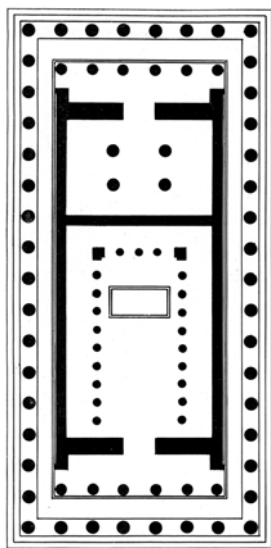
On peut généraliser encore, en affirmant que toute *numérisation* est une coupe ; il faut remarquer que la numérisation s'étend à des techniques bien antérieures aux numérisations informatiques :

“Remplacer ce qu'on appelle un système analogique par ce qu'on appelle un système numérique en articulant des étapes qui étaient séparées demande qu'on procède à des suppressions ; par exemple, quand on utilise un thermomètre numérique dont la graduation est en dixièmes de degrés, impossible de reconnaître une température qui serait entre 90 et 90,1 degrés. On trouve de semblables suppressions dans la notation musicale standard qui ne distingue pas de hauteur entre *do* et *do majeur* [ne devrait-ce pas être *do#* plutôt ?] ni de durée entre un soixante-quatrième de note et un cent-vingtième.” (Nelson Goodman, *Manières de faire des mondes*, Editions Jacqueline Chambon, 1992, p. 24)

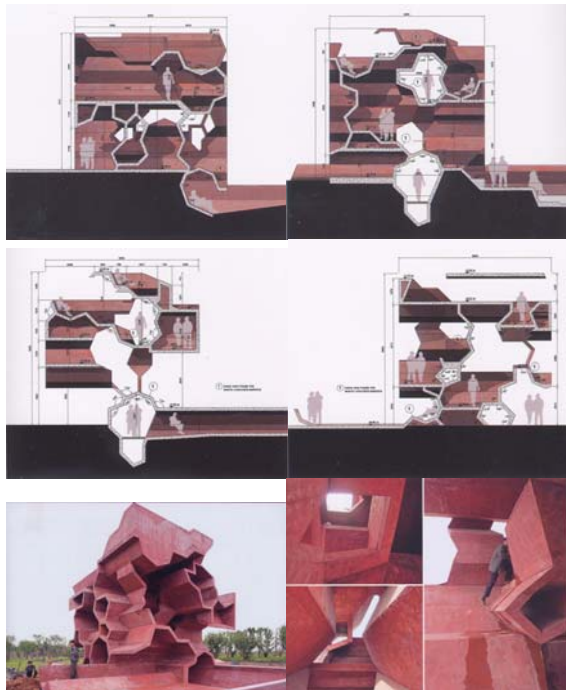
Dans les exemples donnés par Goodman, le continu envisagé est unidimensionnel (la température, la hauteur d'un son, la durée), et la coupe s'effectue selon un semis régulier de points. Pour reprendre l'exemple de la musique, on peut d'ailleurs aller plus loin, en remarquant qu'une *gamme* donnée, ou un morceau dans un *ton* donné, est un nouvel échantillonnage, une nouvelle coupe effectuée dans le continu de la hauteur du son, qui ne retient des douze tons de l'octave du clavier bien tempéré, par exemple que ceux correspondant (pour la gamme en *do majeur*) aux touches blanches du clavier. La coupe n'est donc pas qu'un moyen de représentation d'une réalité donnée, elle peut être un cadre de conception. Nous reviendrons sur ce point, quant aux formes architecturales, à propos des systèmes de proportions.

Le plan comme coupe

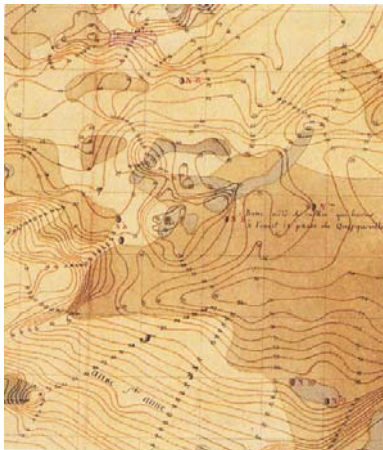
L'architecture représente ses objets par des sections : la “coupe”, que l'on appelle aussi “section”, selon un plan vertical, mais le “plan” aussi, qui n'est pas qu'une projection orthogonale. Alors qu'une projection (orthogonale ou centrale), ne rend compte que de la surface, la coupe, le plan, indiquent où il y a de la matière et où il n'y en pas : le “poché” rend encore plus évident cette préoccupation, même si l'on peut aussi employer le vide, le blanc, pour en rendre compte. Comme il s'agit de couper la matière, on ne peut mettre qu'un plan ou qu'une coupe au même endroit d'une feuille ; c'est pour



79 Le Parthénon, plan



80 Herzog & de Meuron, pavillon, parc d'architecture, Jinhua, Chine



81 Carte bathymétrique de la rade Cherbourg, 1789

pouvoir établir une communication entre ces documents forcément séparés, mais qui doivent se correspondre entre niveaux ou entre plans parallèles (et aussi pour permettre la reproduction des plans par diazographie, ou héliographie, qui nécessitait que l'original soit sur papier transparent), qu'on a employé le *papier calque* : le *calque* (de l'italien calco) désigne d'abord la reproduction d'un dessin (opération qui est de l'ordre de l'empreinte), en "calquant" l'original, et a donné son nom à la fois au papier lui-même, mais aussi au concept de "couche" d'information, sens qui a eu une fortune nouvelle dans les logiciels informatiques, au moment d'ailleurs où l'emploi du papier lui-même tombait plus ou moins en désuétude à cause de nouveaux moyens de reproduction, et de l'usage de l'informatique. Des conventions ont été instaurées : on coupe en principe à 1 m au-dessus du niveau représenté ; quant aux coupes proprement dites, on indique sur le plan le "trait de coupe" qui est la trace du plan par lequel on coupe. Ces sections se faisant le long de plans (bien que l'on puisse faire des coupes "en baïonnette", c'est-à-dire suivant une ligne brisée) sont évidemment adéquats à une architecture elle-même orthogonale : il est difficile de lire par le plan et la coupe une architecture irrégulière, chahutée ou organique (ou qui relève du pli, comme l'exemple ci-contre), ou alors il faut multiplier les plans de section. Une architecture régulière, par contre, peut se comprendre à l'aide d'un petit nombre de plans et de coupes. Lorsqu'elle suit un "ordre" architectural, on peut même déduire du plan des informations sur les volumes non représentés : dans l'architecture classique, l'épaisseur d'un mur sera plus ou moins fonction de sa hauteur (ou vice-versa).

La carte comme coupe

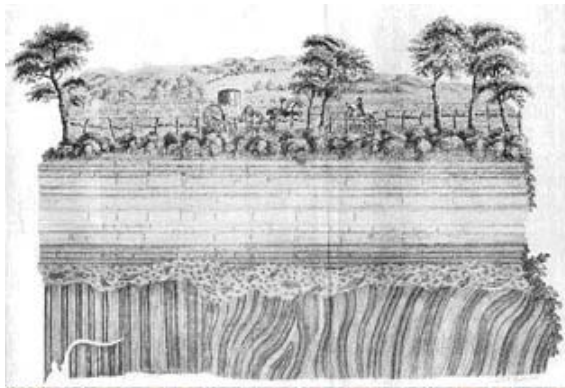
La carte géographique est, plus que le plan de l'architecte, essentiellement une projection orthogonale ; mais elle est une coupe ou plutôt un rassemblement de coupes, lorsque l'on considère les courbes de niveau (ou encore les lignes isobathes, etc.) : cependant, ces coupes sont des coupes de la *surface* de la terre, et non de la matière, du volume, contrairement donc aux sections architecturales ; sinon, d'ailleurs, on ne pourrait pas les mettre toutes sur le même document.

Bill Bryson attribue l'invention des courbes de niveau au mathématicien Charles Hutton, lors d'une expédition destinée à "mesurer" la masse d'une montagne pour déterminer la déflexion gravitationnelle : Newton avait conjecturé dans les *Principia* que si un fil à plomb était suspendu près d'une montagne, il serait légèrement dévié par la montagne, affecté par la masse de la montagne aussi bien que par celle de la Terre ; en mesurant précisément la déflexion, et en déterminant la masse de la montagne, on pourrait calculer la constante gravitationnelle universelle, *G*. Restait à trouver la montagne, et à la mesurer ! Après une tentative infructueuse au Pérou par Bouguer et La Condamine, l'astronome anglais Nevil Maskelyne passa en 1774 quatre mois sous la tente en Ecosse (la montagne adéquate ayant été déterminée comme étant dans les Highlands : Schiehallion, au-dessus du Loch Tay) pour diriger une équipe d'arpenteurs qui prirent toutes sortes de mesures difficiles à interpréter :

"The surveyors had covered a map with scores of figures, each marking an elevation at some point on or around the mountain. It was essentially just a confusing mass of numbers, but Hutton noticed that



82 Carte "d'état-major" de la Loire au sud-est de Blois



83 Non-conformité de Hutton, Jedburgh, Ecosse

if he used a pencil to connect points of equal height, it all became much more orderly. Indeed, one could instantly get a sense of the overall shape and slope of the mountain. He had invented contour lines." (Bill Bryson, *A Short History of Nearly Everything*, Broadway Books, 2003, p. 57)

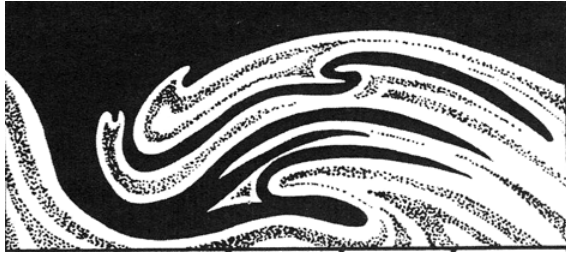
Trad. : "Les arpenteurs avaient couvert une carte avec des quantités de nombres, chacun marquant une altitude en quelque point sur ou autour de la montagne. C'était essentiellement juste une masse confuse de nombres, mais Hutton noya qu s'il connectait avec un crayon les points de même altitude, cela devenait beaucoup plus ordonné. Il pouvait avoir une idée de la forme globale et de la pente de la montagne. Il avait inventé les lignes de niveau."

Une autre paternité de l'invention de la courbe de niveau est attribuée au Français Ducarla²⁰ en 1771. Quelle que soit la légitimité de la parenté de la courbe de niveau, on peut dire d'abord que ce n'est pas qu'un moyen de représentation (mais aussi un outil de mesure, comme on l'a vu), et que c'est, en tant que moyen de représentation, un outil très innovant de lecture du relief. Avant cette invention on avait recours à des moyens plus subjectifs pour suggérer le relief, comme des hachures tracées dans le sens de la pente et d'autant plus serrées que la pente est plus forte. Ces moyens subjectifs peuvent subsister avec les courbes de niveau, mais celles-ci suggèrent le relief en elles-mêmes, et objectivement, par le fait qu'elles sont d'autant plus serrées que la pente est forte. Cependant elles nécessitent un important travail de relevé.

L'hypothèse de base de l'établissement des courbes de niveau est que la surface de la Terre est certes pliée, mais d'une façon en quelque sorte bijective avec le plan horizontal : chaque point de la portion de Terre que l'on relève correspond à un seul point de la carte. Les courbes de niveau ne s'intersectent jamais, elles ne peuvent rendre compte ni des porte-à-faux, ni des cavités. C'est aussi la raison pour laquelle ce moyen de représentation n'est adéquat, pratiquement, qu'à la géographie.

Mais la courbe de niveau n'est pas la seule incidence de la notion de coupe en géographie. On établit, en géologie et en géomorphologie, des coupes verticales, théoriques évidemment, puisqu'on peut difficilement véritablement couper dans le terrain. Mais d'abord il peut se trouver que des configurations de terrain (falaises, glissement de terrain) ou des actions humaines (carrières, excavations) mettent au jour des "coupes" réelles, sur lesquelles on peut lire la structure du sol et du sous-sol. James Hutton, l'un des précurseurs de la géologie moderne, conforta sa théorie plutoniste en observant un cas de non-conformité angulaire dans des couches géologiques révélées le long d'une falaise à Jedburgh, en Ecosse : des couches de schiste presque verticales sont surmontées par des couches horizontales de

²⁰ in : Françoise Minelle, *Représenter le monde Atlas, mappemondes, planisphères Terre rêvée, Terre retracée Du compas à l'ordinateur*, Cité des Sciences et de l'Industrie, Presses Pocket, 1992. Les querelles de clocher existent dans toutes les disciplines... Ducarla est par ailleurs l'auteur d'un mémoire sur la sensation du froid en haute montagne, mémoire sur lequel Lavoisier fit un rapport (<http://histsciences.univ-paris1.fr>) , et aussi un précurseur dans le domaine de l'énergie solaire (*Du feu complet*)



84 Theodor Schwenck, *Coupe transversale des Alpes au Simplon ; Coupe nord-sud à travers les Alpes orientales*



85 *Micro-plis isopaques* (échantillon scié)

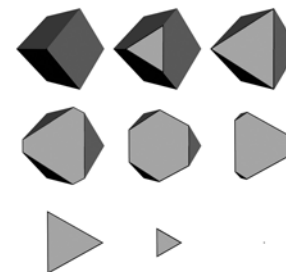
grès rose ; Hutton en déduisit qu'il avait dû y avoir plusieurs cycles, chacun impliquant le dépôt de sédiments sur les fonds marins, soulèvement et inclinaison, puis de nouveau dépôt de sédiments. On peut couper aussi des échantillons, sous forme de lames minces, de taille évidemment assez faible.

A défaut de coupes accidentellement produites, ou de micro-coupes, on effectue aussi des carottages, autre sorte d'échantillonnage, donc de coupe. Car de toutes façons, aucune mesure ne peut s'appliquer au continu spatial : les données météorologiques sont recueillies en des points précis, là où sont les stations météo, même si l'on peut densifier les points de mesure pour un objectif précis : on installera un réseau d'anémomètres en vue de l'installation d'un parc d'éoliennes, par exemple ; de même pour les données altimétriques, bathymétriques, etc. La carte réalise ensuite par interpolation de ces données un pseudo-continu en supposant que les valeurs s'établissent suivant des gradients raisonnables.

La coupe en géométrie

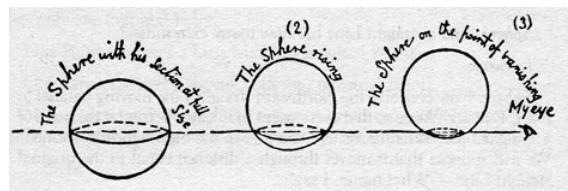
Couper un volume peut révéler sa complexité. Quoi de plus simple qu'un cube, avec ses six faces toutes carrées ? Pourtant, en le coupant, on peut découvrir d'autres figures géométriques :

- si on le coupe par une série de plans parallèles à l'une de ses faces, on ne trouve qu'une suite de carrés identiques
- si on le coupe perpendiculairement à la diagonale d'une de ses faces, on découvre, à partir d'un segment, une suite de rectangles de plus en plus carrés, puis de nouveau régressant vers un segment
- mais si on le coupe suivant des plans perpendiculaires à sa grande diagonale, on trouve un point, une suite de triangles équilatéraux, une suite d'hexagones, dont un régulier au milieu, puis retour vers le point par les triangles :



On pourrait découvrir ainsi sous un autre jour tout autre polyèdre, ou une sphère, bien que la suite des cercles ne soit pas un spectacle étonnant.

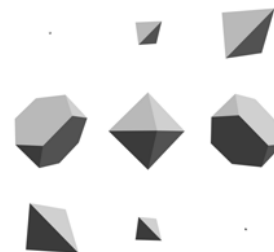
C'est ainsi que le narrateur de *Flatland* (qui vit, rappelons-le dans un espace 2D plan) reçoit la visite d'un être mystérieux, venu de la troisième dimension, et qui traverse son monde ; il voit un cercle (ce



86 La visite de la sphère à Flatland

qui est, dans ce monde, un personnage de haut rang), mais un cercle qui apparaît soudain de nulle part, et qui change de taille comme ne peut pas le faire un cercle. Lui-même (qui est un carré, rappelons-le, en visite à *Lineland*, un autre monde qui est lui unidimensionnel, devient un segment. Mais après tout, ne sommes-nous pas dans un monde tridimensionnel qui pourrait être un “plan de coupe” pour un espace à quatre dimensions ? Si un hypercube (l'équivalent d'un cube en quatre dimensions) venait à traverser notre espace, nous verrions successivement, suivant la direction qu'il aurait prise pour nous rendre visite :

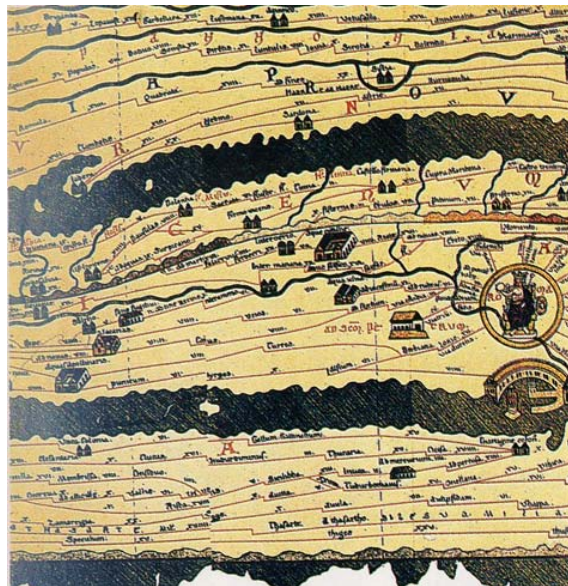
- un carré, puis une série de parallélépipèdes rectangles de taille variable (équivalents de la série de rectangles rencontrée dans le deuxième cas pour le cube)
- une série de prismes droits dont la base est la série de polyèdres (triangles et hexagone) rencontrée dans le troisième cas pour le cube
- une série de polyèdres (voir ci-contre) : un tétraèdre croissant en taille ; des polyèdres irréguliers à faces triangulaires et hexagonales ; un octaèdre ; des polyèdres irréguliers à faces triangulaires et hexagonales ; un tétraèdre décroissant en taille



Ce dernier cas, qui est le plus intéressant, nous permet de voir d'autres correspondances entre les polygones et les polyèdres : le tétraèdre est l'équivalent du triangle, ce qui est assez naturel ; les polyèdres irréguliers à faces triangulaires et hexagonales sont les équivalents des hexagones irréguliers ; l'octaèdre est l'équivalent de l'hexagone régulier. Ce dernier résultat est peut-être plus étonnant, mais nous aurons l'occasion de voir d'autres analogies entre l'hexagone et l'octaèdre plus loin.



87 Carte du Pays de Tendre



88 Table de Peutinger (rouleau de parchemin, 6,75 x 0,34 cm)

II.2.2 Le discours

Il peut sembler curieux de trouver le discours dans ce contexte de réduction de dimension. Cependant il nous a semblé que les structures langagières et textuelles relevaient bien de ces procédés. Nous avons souligné que le langage, déjà, effectue une coupe dans la réalité phénoménologique. Nous allons examiner d'autres rapports entre des types de discours et des formes

Le texte, l'écriture, le langage, entretiennent des rapports avec les formes. Le plus souvent il s'agit d'identifier un *discours*, un récit par exemple, avec un *parcours* : l'on songe aux récits de voyages, bien sûr, mais aussi au chemin de croix dans les églises, qui narre la Passion du Christ, ou au "chemin de Jérusalem" identifié au labyrinthe.

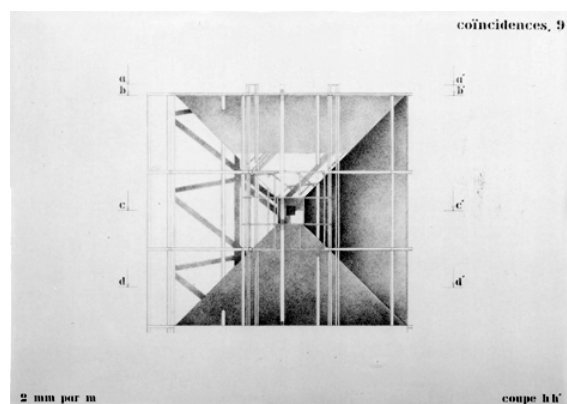
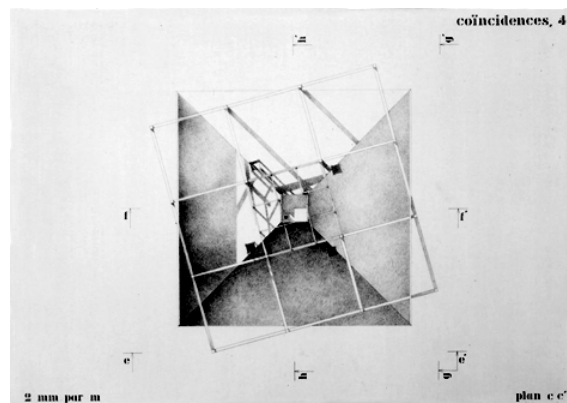
La "carte du Tendre" qui identifie la quête amoureuse (forcément linéaire, au final) à une géographie imaginaire. Au contraire certaines "cartes" miment la linéarité temporelle de l'itinéraire, au détriment de la spatialité ; des cartes anciennes, mais aussi ce que nous fournissent les logiciels

L'art de la mémoire

Un rapport étroit a existé entre l'architecture (et son parcours), et le discours, plus particulièrement l'art oratoire, depuis l'Antiquité et jusqu'à la Renaissance, c'est l'*Art de la Mémoire*, décrit dans l'important livre de Frances Yates :

"Il n'est pas difficile de saisir les principes généraux de la mnémonique. Le premier pas consistait à imprimer dans la mémoire une série de *loci*, de lieux. Le type le plus commun, sinon le seul, de système mnémonique de lieux était le type architectural. C'est Quintilien qui donne la description la plus claire du procédé³ (*Institutio oratoria*, XI, II, 17-22). Pour former une série de lieux dans la mémoire, il faut, dit-il, se rappeler un bâtiment, aussi spacieux et varié que possible, avec l'atrium, la salle de séjour, les chambres à coucher, les salons, sans omettre les statues et autres ornements qui décorent les pièces. Les images qui doivent rappeler le discours – comme exemple, on peut, dit Quintilien, utiliser une ancre ou une arme – sont alors placées en imagination dans les lieux qui ont été mémorisés dans le bâtiment. Cela fait, dès qu'il s'agit de raviver la mémoire des faits, on parcourt tous ces lieux tour à tour et on demande à leur gardien ce qu'on y a déposé. Nous devons penser à l'orateur antique qui parcourt en imagination son bâtiment de mémoire pendant qu'il fait son discours, et qui tire des lieux mémorisés les images qu'il y a placées." (Frances A. Yates, *L'art de la mémoire*, Editions Gallimard, 1975, pp. 14-15)

Pour comprendre ce dont il s'agit, il faut d'abord prendre conscience que l'écriture, la prise de notes, qui nous semblent les moyens les plus évidents pour mémoriser un discours, une argumentation, n'étaient pas si répandus que cela avant l'invention du papier : les supports étaient coûteux, rares, les tablettes de cire, qui étaient le support le plus répandu, ne portaient qu'un texte éphémère. Pour mémoriser leurs discours, les orateurs recouraient donc à un moyen qui peut nous sembler bien compliqué : s'imaginer parcourir une architecture, les différentes pièces correspondant aux points importants du discours, et contenant parfois (dans l'imagination de l'orateur) des images mnémotechniques renvoyant au contenu du discours.



89 MPC, *Coïncidences*, plan et coupe

Il y a un point curieux dans cette discipline de l'Art de la mémoire, c'est qu'une architecture, *a priori*, ne se parcourt pas de façon unicursale. Il est même assez rare que l'on puisse trouver un parcours qui ne revienne pas sur ses pas.

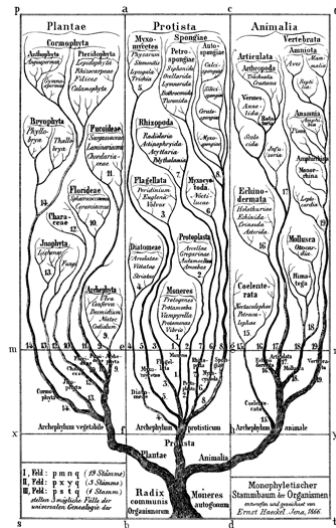
Production de texte et production de forme

Un texte (ce texte, par exemple) a une forme : en l'occurrence un emboîtement ternaire, qui peut rappeler notre propre projet d'architecture pour le concours *Le symbole France-Japon*¹ ; ce projet consistait en une structure orthogonale, cubique, divisée par 3, donc générant 27 sous-cubes dont celui du milieu était lui-même divisé par 3, et au centre exact de cette structure, on trouvait la maquette de la structure totale.

Il s'agit aussi, non seulement de la forme finale du texte (3 parties, composées de 3 sous-parties, elles-mêmes divisées en 3 points, composés de x paragraphes), mais de son processus de *formation* : où l'on retrouve la croissance locale (une phrase grossissant en paragraphe), la contiguïté (une énonciation donnant lieu à une autre énonciation placée à côté), la différenciation (une énonciation se divisant en deux ou plusieurs énonciation), etc.

La pensée est x-dimensionnelle, le texte semble obstinément uni-dimensionnel : les pages se suivent en ordre croissant, et dans chaque page les lignes, et dans chaque ligne les caractères... Admettons que le texte soit un espace, alors le parcours est la lecture : le fait de pouvoir proposer plusieurs lectures, plusieurs parcours à travers l'espace du texte montre (?) que le texte, a priori uni-dimensionnel, ne l'est peut-être pas fatalement.

¹ Concours organisé par Philippe Quéau (INA) en 1989, remporté par Patrick Berger. Voici ce qu'en dit Philippe Quéau (aujourd'hui responsable informatique de l'Unesco) : " Une des réalisations à laquelle j'ai attaché le plus d'efforts depuis quinze ans s'appelle « le Symbole France Japon ». (...) Le symbole [le projet de Patrick Berger] était d'extraire un grand socle de granit de Bretagne (vieux de plusieurs milliards d'années, un des sols les plus anciens de la planète) et de le transporter au Japon (au sol très récent). Un cadeau du Finistère occidental au Finistère oriental. Nous avons organisé deux concours d'architecture et trouvé le financement du monument choisi. Une première cérémonie grandiose a eu lieu au milieu de la mer intérieure du Japon, juste en face de Kobé, dans l'île sacrée d'Ayadji, l'« Ile des origines ». Malheureusement, à peine le premier morceau de granit déposé dans le sol nippon, en 1995, se déchaînait le fameux tremblement de terre de Kobé, avec l'épicentre à environ 2.000 mètres de la pierre. 17.000 morts ! Du coup, le projet s'est arrêté, au profit d'autres priorités. Aujourd'hui, le projet est en stand by. Le réussir serait aussi symbolique que le fut le don de la statue de la liberté de la France aux États-Unis." (<http://www.nouvellescles.com/>)



90 Haeckel, *Morphologie générale des organismes*

Ranger, classer

Découper l'espace, cela sert souvent pour y ranger des choses, et cela sert d'image pour des classifications plus abstraites.

L'image du casier avec des cases elles-mêmes subdivisées, etc. est souvent appelée table, et assimilée à l'image de l'arbre : l'arbre de l'évolution des espèces, mais aussi l'arbre des subdivisions du globe terrestre, ceux des subdivisions des différentes mesures, etc.

Si tout système emboîté peut être représenté par un arbre, il y a un certain danger à utiliser la structure de l'arbre sans précaution.

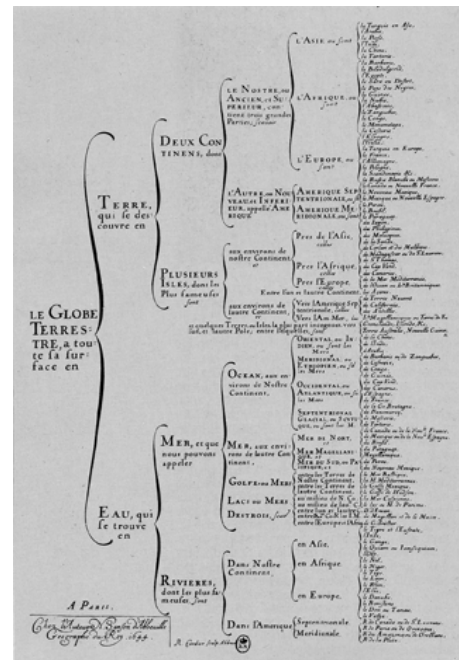
L'arbre généalogique (ou celui de l'évolution) constitue un archétype de la classification arborescente. Cependant, il présente un gros défaut : il suppose en effet que nos aïeux sont tous "séparés", ce qui est impossible si l'on effectue un petit calcul : nous avons $2 (= 2^1)$ parents, $4 (= 2^2)$ grands-parents, $8 (= 2^3)$ arrière-grands-parents, etc ; supposons un écart entre générations de 25 ans ; cela implique qu'il y a 75 ans, il fallait qu'il y ait au moins 8 individus différents sur la Terre (dont la moitié d'hommes et la moitié de femmes), ce qui ne pose jusque là aucun problème ; le problème surgit lorsque l'on poursuit le raisonnement jusqu'à, disons, il y a 1000 ans, c'est-à-dire il y a 40 générations ; à cette époque, nous devrions avoir (chacun, mais peu importe) en principe 2^{40} aïeux distincts ; or, $2^{40} = 2^{10 \times 4} = (2^{10})^4 = 1024^4 \approx 1000^4 = 1^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$ c'est-à-dire 1000 milliards d'individus, ce qui excède largement la population totale de la planète aujourd'hui, et à plus forte raison en l'an 1000 ! Où est l'erreur ? Elle réside dans le fait de supposer que tous nos aïeux sont distincts ; que l'arbre, en bref n'a pas de branches qui se rejoignent...

La classification, souvent arborescente, relève de la *taxinomie*. La géographie, comme toutes les sciences, pratique la taxinomie, mais elle pratique aussi la *toponymie*.

A quoi, à quelles entités donne-t-on des *noms propres* ? Aux êtres humains, d'abord, bien sûr ; à quelques animaux ; jamais aux plantes en tant qu'individus, bizarrement, même aux arbres, qui pourtant ont parfois une individualité et une longévité qui pourraient les assimiler à des êtres vivants dignes d'être proprement nommés²

Mais on donne des noms propres aux lieux, aux formes géographiques : aux cours d'eau, dont il est pourtant connu que leur eau n'est jamais la même, et dont le tracé lui-même peut être sujet à variations considérables ; aux massifs montagneux, aux montagnes, monts, collines, plateaux, vallées, etc. dans un enchaînement complexe de zones aux contours parfois flous ; aux installations humaines, hameaux, bourgs, villages, villes ; quartiers, rues, places, etc. Un nom propre est attribué aux bâtiments même, parfois, qui peut se référer à leur forme : la Maison Blanche, le Pentagone ; au nom

² il existe cependant quelques arbres qui ont atteint, dans certaines mythologies, cette dignité du nom propre : tel Yggdrasil, dans la mythologie nordique, frêne merveilleux qui relie le monde des morts, celui des vivants, et celui des dieux (ases)



91 N. Sanson *Table de géographie*



92 Atlas portugalensis dit "Atlas Miller", 1519

d'un propriétaire : l'hôtel Matignon ; ou au repérage dans une rue, elle-même ayant son nom propre : "10, Downing Street".

Le nom *propre* s'applique à ce qui a une individualité, une *identité*. Pour les êtres humains, cependant, le nom de famille s'appliquant à un ensemble, il ne suffit pas, et le prénom est nécessaire pour distinguer les individus d'une même famille. Malgré cela, il existe de nombreux Paul Martin par exemple. Pour les noms de lieux, de telles ambiguïtés se produisent aussi ; les noms de villages, de petits cours d'eau, existent en plusieurs exemplaires en France et il faut préciser le département pour lever l'ambiguïté ; même pour des villes importantes, une confusion peut se produire, surtout si l'on utilise la francisation pour parler des villes étrangères : quand on dit "Vienne", évoque-t-on la ville française ou la capitale de l'Autriche ? Et chacun sait qu'il y a, par exemple, plusieurs Paris aux Etats-Unis.

Une carte n'est rien, ou presque, sans toponymie, même si l'on recourait à des images, pour remplir les "trous" de la connaissance...

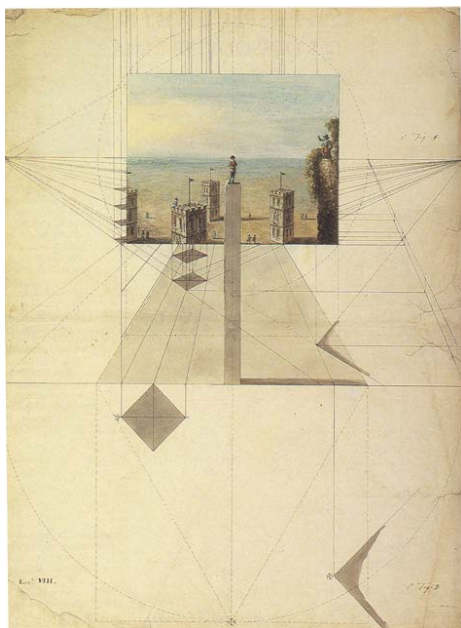


93 Johannes Vermeer, *Allégorie de la peinture*

II.2.3 Les projections

Le géographe, le peintre et l'architecte

“Une carte s’étale largement en toile de fond de l’*“Allégorie de la peinture”* de Vermeer, que domine cet intitulé emblématique inscrit en majuscules pour servir de leçon au peintre: DESCRIPTIO; et, de fait, un des traits qui lient le plus étroitement la peinture hollandaise à l’art de dépeindre, et cela quant au paysage, est le rapport qu’elle entretient traditionnellement avec la cartographie. Jamais peut-être, dans toute l’histoire de la peinture, nous disent les spécialistes de la période (cf notamment le beau chapitre de Svetlana Alpers, dans *L’art de dépeindre La peinture hollandaise au XVIIème siècle*, trad. française Jacques Chavy, Paris, Gallimard, 1990, p. 209s), les deux domaines ne se sont autant chevauchés. Des cartographes sont aussi peintres (l’art de Goetzius fait pont entre eux), de même que nombre de peintres ne sont pas indifférents aux techniques d’arpentage, landshap (paysage) désignant aussi bien ce que mesurait le géomètre que ce que l’artiste représentait; la pratique du mapping et du dessin unit également les deux. Dans les paysages cartographiés, les bâtiments, les villes avec leurs clochers, les moulins à vent, les bouquets d’arbres et jusqu’aux moindres replis du terrain sont autant de points de repère, formant le plan du site, qui sont minutieusement reportés; le tableau du “paysage” en est le relevé.” (François Jullien, *La grande image n’a pas de forme*, Editions du Seuil, 2003, p. 265)

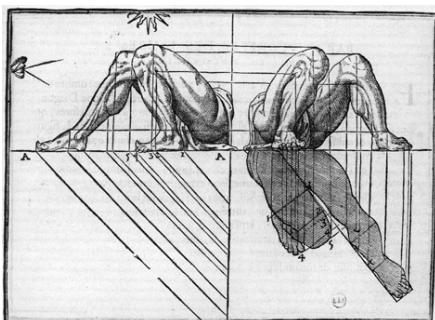


94 *Principes de perspective*

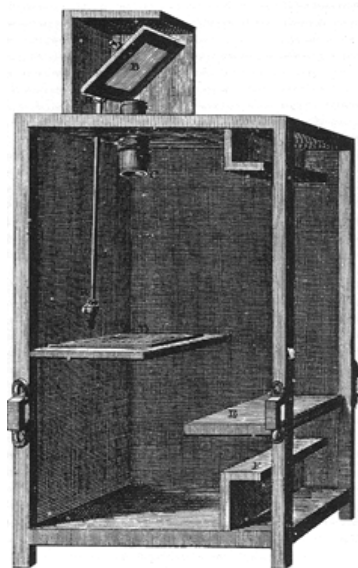
Projeter est utile aussi bien pour peindre que pour faire une carte, ou pour représenter un projet non encore réalisé ; l’art du peintre, du géographe et de l’architecte se rejoignent donc par certains aspects, même si leurs contraintes et leurs objectifs peuvent diverger dans certains cas. L’allégorie de la peinture, de Vermeer, rassemble ces trois disciplines : on y voit une carte au mur du fond, bien sûr le peintre est présent et, s’il n’y a pas de paysage dans le cadre, il y a deux types distincts d’objets de la représentation : des objets fabriqués, “architecturés” (les meubles, mais surtout la pièce elle-même, le pavage du sol), et des “objets naturels” ou dont la représentation pose le même type de problème (la femme modèle, mais aussi la tenture qui d’une certaine façon joue le rôle d’un paysage). Vermeer, on le sait, utilisait la chambre claire³, mais on trouve dans son tableau, si on laisse la carte de côté, des “objets” qui peuvent relever de la “construction légitime” (les surfaces de la pièce, les meubles, le pavage) et d’autres pour lesquels elle est de peu d’utilité (le corps humain, les tissus, dont il est pour le moins difficile de faire le plan).

Nous ne nous étendrons pas sur cette “perspective artificielle”, sur laquelle d’ailleurs il a été beaucoup dit, et écrit. Soulignons cependant une évidence : il ne peut y avoir une telle construction que si l’on dispose du géométral de ce que l’on veut représenter (plan, élévations) ; c’est la situation

³ Voir en particulier : Philip Steadman, *Vermeer’s Camera Uncovering the Truth Behind the Masterpieces*, Oxford University Press, 2001



95 Jean Cousin, *Particularités des jambes et cuisses raccourcies*



96 *Chambre obscure transportable*

idéale pour l'architecte, qui représente ce qui n'existe pas encore mais dont il élabore toutes les mesures. C'est par contre souvent sans intérêt pour représenter ce que l'on a sous les yeux (paysage, être humain, etc.) sauf à disposer d'une carte d'état-major, ou à relever laborieusement les projections orthogonales des objets...

Des machines à dessiner

Reproduire le mécanisme de la vision a été la grande affaire de toute l'histoire de la représentation du monde occidental ; les machines à dessiner retracent montrent l'évolution de cette tentative.

Le plus simple était sans doute de laisser faire la nature (c'est-à-dire en l'occurrence la lumière) et c'est toute l'histoire des chambres claires, qui mène à la photographie, et dont on sait que de nombreux peintres, comme Vermeer par exemple, et jusqu'à un van Gogh, y ont eu recours.

L'autre voie, c'est celle des perspectographes, et son aboutissement, nous le verrons, est la perspective calculée par ordinateur.

Nous avons vu déjà dit que la vision était le résultat d'une projection centrale, ou *perspective*. La perspective du peintre est donc valide, mais à condition de se placer au point exact qui correspond au centre de cette projection. Il faut reconnaître que cette fixation du point de vue est une contrainte forte pour le spectateur du tableau ; en toute rigueur, il ne faudrait pas bouger du tout, même pas tourner la tête, mais seulement éventuellement les yeux (en supposant que le centre de la rotation soit identique au centre de la projection)... Mais, pour le peintre, elle pose un autre problème : la distance à laquelle on peut regarder agréablement un tableau n'est pas celle à laquelle on peut le peindre confortablement... Si le peintre peint sur la toile directement, à longueur de bras (et même moins), il faudrait que le spectateur se trouve à cette même distance, c'est à dire le nez sur le tableau, pratiquement...

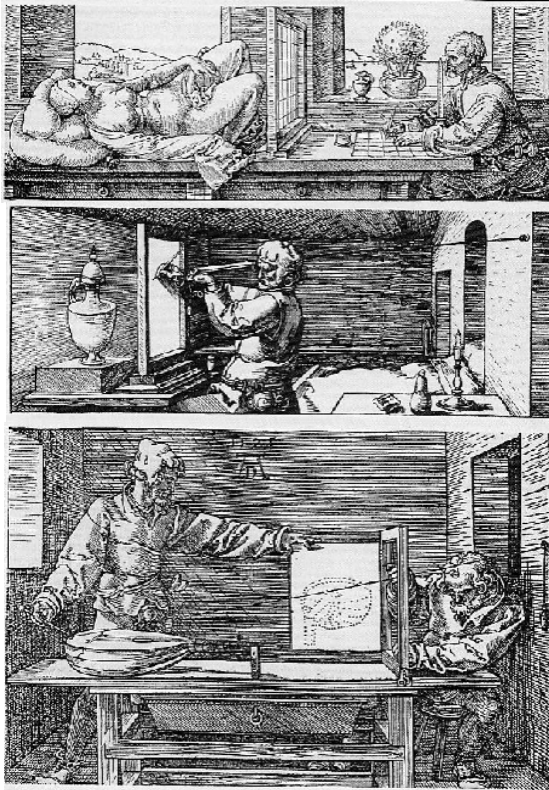
Dürer a résolu ce problème posé par la perspective, la fixation du point de vue à une distance correcte, dans trois dispositifs appelés perspectographes.

Dans le *perspectographe à la femme couchée* (Planche 1), l'œil est maintenu au sommet d'une sorte de petit obélisque, la distance ne pose pas de problème, puisque l'artiste dessine sur une feuille de papier quadrillée ce qu'il voit à travers une grille : il ne dessine pas directement sur une surface équivalente au tableau (le quadrillage sert à minimiser les erreurs de dessin). Ce type de perspectographe était très répandu à la Renaissance⁴, et a été utilisé pendant des siècles.

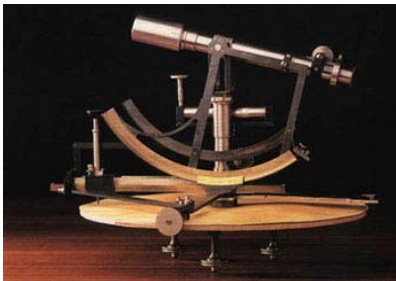
Dans le *perspectographe à la cruche* (Planche 1), par contre, le problème de la distance se pose, puisque l'artiste dessine sur une vitre qui joue le rôle exact du tableau (et dont le dessin sera sans doute retranscrit sur le support du tableau par la suite) ; à cette occasion, Dürer⁵ commence à

⁴ On le trouve chez Alberti et Léonard de Vinci.

⁵ En fait, la machine n'est pas de lui, mais de Jacob de Keyser ; mais nous l'inscrivons dans la logique des trois représentations de Dürer.



97 Albrecht Dürer,
*Perspectographes à la femme couchée, à la cruche
au luth*



98 Franz Schrader, *Orographe*

introduire la substitution du rayon visuel (immatériel) par le fil tendu (comme matérialisation de la ligne droite) : le point fixe est un anneau fixé au mur, y est attaché un fil de soie qui se prolonge par un viseur.

Dans le *perspectographe au luth* (Planche 2) le point fixe est également un anneau fixé au mur ; le fil qui y passe est terminé d'un côté par un pointeur, de l'autre par un contre-poids. Dürer remplace donc complètement le rayon visuel par le fil tendu. Les opérateurs (qui n'ont plus besoin d'être des artistes) se répartissent le travail : l'un pointe les sommets de l'objet à représenter, l'autre repère le point d'intersection (c'est ceci que l'opérateur de droite regarde attentivement, non l'objet à représenter) de ce pseudo rayon visuel avec le cadre, à l'aide de deux fils de soie ; puis, il faut enlever le fil, rabattre le volet, et noter l'emplacement du point d'intersection. Travail pénible, certes, mais la main d'œuvre n'était sans doute pas chère à l'époque ; et par ailleurs on ne sait si ce dispositif, appelé le *portillon de Dürer* a eu beaucoup d'utilisateurs.

Mais ce dispositif n'est pas tant intéressant pour son aspect utilitaire, que pour sa prémonition du calcul de la perspective, tel qu'il est programmé en informatique ; nous reviendrons sur cette question dans la partie III.1.

On peut observer le type d'objets que Dürer a utilisé pour exemplifier ses différentes machines, et voir si le sujet pourrait être autre chose, un paysage en particulier.

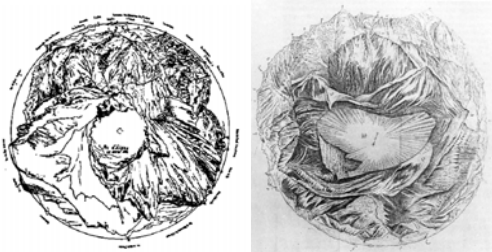
La *femme couchée* pourrait être un paysage, ce type de perspectographe a été beaucoup utilisé par les peintres paysagistes ; on note d'ailleurs que c'est la seule gravure où l'on voit un paysage par la fenêtre.

Le perspectographe à la cruche pourrait aussi à la rigueur être utilisé pour peindre un paysage, à condition de disposer d'un endroit pour fixer l'anneau ; visiblement, Dürer a installé son dispositif dans un atelier fermé.

Enfin, le perspectographe au luth, le "portillon" ne convient absolument pas pour un paysage ; il faut pouvoir tendre le fil jusqu'aux sommets de l'objet à représenter, ce procédé ne convient donc que pour des objets relativement petits, dotés d'une géométrie assez affirmée pour pouvoir pointer des sommets explicites.

Aucun des dispositifs ne convient pour représenter une architecture en projet, ou alors à condition d'en réaliser d'abord une maquette.

Le géographe est parfois aussi peintre, et alors il a les mêmes problèmes, et utilise les mêmes procédés, que tout peintre de paysage. Mais, même pour faire une carte, il doit parfois repérer des lieux qu'il ne peut atteindre, mais qu'il voit. S'il en fait un dessin perspectif, alors, c'est dans le but d'établir par la suite une carte précise de ces lieux ; dans ce contexte, on a aussi imaginé des machines



99 Franz Schrader, *Tour d'horizon du pic d'Algas*

100 *Vue circulaire des montagnes qu'on découvre du glacier du Buet*, gravure du XVIII^e siècle



101 Franz Schrader, *Carte du Mont-Perdu*

pour aider à exécuter un tel dessin (qui se doit d'être rigoureux, plus encore que pour le peintre) : tel est en particulier l'orographe, qui convient, comme son nom l'indique, à dessiner les montagnes.

Le principe est de se situer sur un point élevé, et de relever tout autour, d'abord la ligne d'horizon, qui se traduit en un cercle, puis des points significatifs du paysage (qui dans leur plus grande partie se trouvent à l'intérieur du disque cerné par la ligne d'horizon. Le résultat n'est là que pour aider à dresser une carte, mais on peut leur trouver, rétrospectivement, un certain intérêt graphique.

On attribue à Franz Schrader l'invention de l'orographe ; cependant il faut remarquer que l'on trouve ce genre de représentation dès le XVIII^e siècle ; l'idée du "tour d'horizon" est attribuée à Saussure, Schrader l'ayant automatisé.

L'ombre

L'ombre, nous l'avons déjà dit, réalise également une projection (à rayons parallèles, cependant, lorsqu'il s'agit de l'ombre du soleil) ; il est possible qu'elle ait contribué à l'histoire de la représentation. En tout cas, il semble qu'on s'en soit servi pour réaliser des anamorphoses.

La projection d'ombres peut permettre au plan d'architecture, qui n'est qu'une *coupe*, de suggérer la troisième dimension. Conventionnellement, on place la source de lumière au "nord-ouest" (ou plutôt en haut et à gauche de la feuille de papier) et à 45° en hauteur, ce qui permet aux ombres d'avoir une épaisseur qui correspond à la hauteur des éléments coupés : cette pratique des plans ombrés (qui s'étend aux sections et élévations) permet d'insuffler dans ces sections planes une suggestion de 3^{ème} dimension (voir ill. 89).

L'ombre n'est pas prise en compte par les architectes que pour la représentation. D'abord, on peut mentionner la pratique de l'héliodon, pour la détermination du "masque", c'est-à-dire des éléments environnants, situés au-dessus de la ligne d'horizon, et qui sont susceptibles de masquer le soleil à tel moment de la journée, à telle saison. La technique est un peu l'inverse de celle de l'orographe : pour l'orographe, on se situe sur un sommet, la plupart de l'environnement est sous la ligne d'horizon ; dans le cas de l'héliodon, les éléments masquant sont au-dessus de la ligne d'horizon, on les projette à l'intérieur du cercle d'horizon, et la silhouette obtenue, confrontée aux diagrammes de la course du soleil aux différentes saisons, permet de savoir quand le projet sera dans l'ombre⁶.

D'un point de vue plus conceptuel, l'ombre peut être un générateur de projet : le plus significatif à cet égard est sans doute la Tour des Ombres, ou Tour d'Ombres, de Le Corbusier pour Chandigarh, puisque ce "bâtiment" n'avait pour fonction que de générer des ombres, pour protéger du soleil, peut-être, mais encore plus pour célébrer ce qui constituait pour Le Corbusier l'essence même de

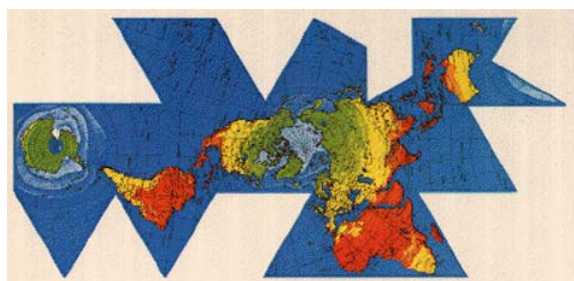
⁶ Il faut bien dire que cette technique, que nous avons apprise lors de nos études d'architecture, est un peu tombée en désuétude dans la mesure où les logiciels spécialisés en architecture proposent en général un "soleil" qui génère les ombres automatiquement selon les coordonnées du lieu, le jour et l'heure...

l'architecture, qui était pour lui, comme chacun sait : “Le jeu savant et magnifique des volumes sous la lumière”.

La carte comme projection

Si l'on n'a affaire qu'à une petite portion de la surface terrestre, et que le terrain est à peu près plat, la carte n'est pas une projection très compliquée, il s'agit juste de reporter les mesures prises sur le terrain sur une feuille de papier : c'est donc une réduction de taille, et non de *dimension*, au sens où nous employons le terme, un problème d'*échelle*, ce que nous verrons au point II.3, qui peut se ramener à un changement d'unité de mesure.

Mais si l'on veut représenter toute la Terre, ou une grande partie de celle-ci, on est confronté au problème de représenter une surface sphérique, c'est-à-dire à la fois courbe et fermée, sur une surface plane : cela nécessite une projection. Divers types de projection ont été imaginés, pour essayer de trouver un compromis entre différentes contraintes contradictoires : en particulier, on ne peut conserver à la fois les surfaces et les angles. Nous n'allons pas revenir sur toutes ces projections qui sont bien connues. La plupart consistent à projeter directement sur un plan tangent à la sphère du monde. Mentionnons juste la projection “dymaxion”, inventée (et brevetée) par Buckminster Fuller, et qui consiste à projeter sur un icosaèdre circonscrit à la sphère, puis à *déplier* l'icosaèdre.

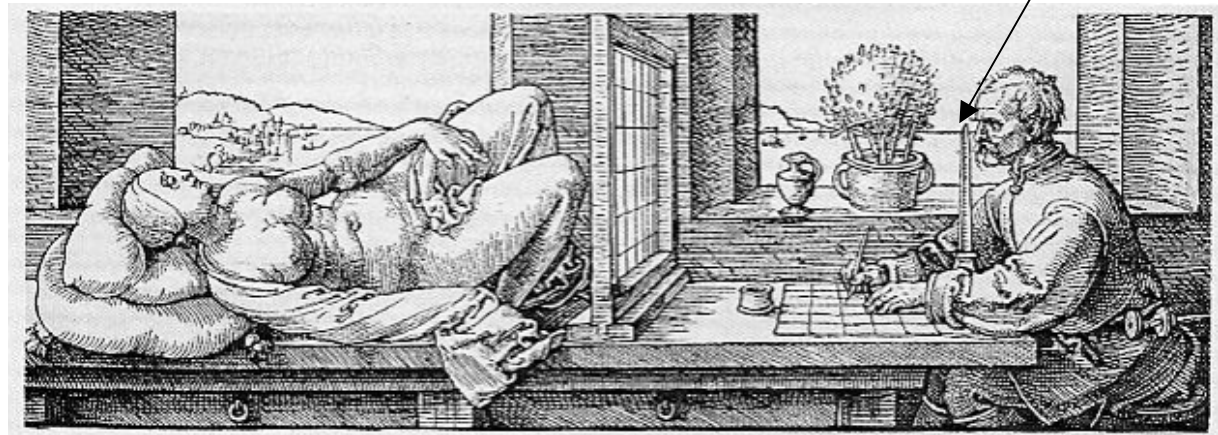


102 Dymaxion, privilégiant la connexité des océans, ou la quasi-connexité des continents

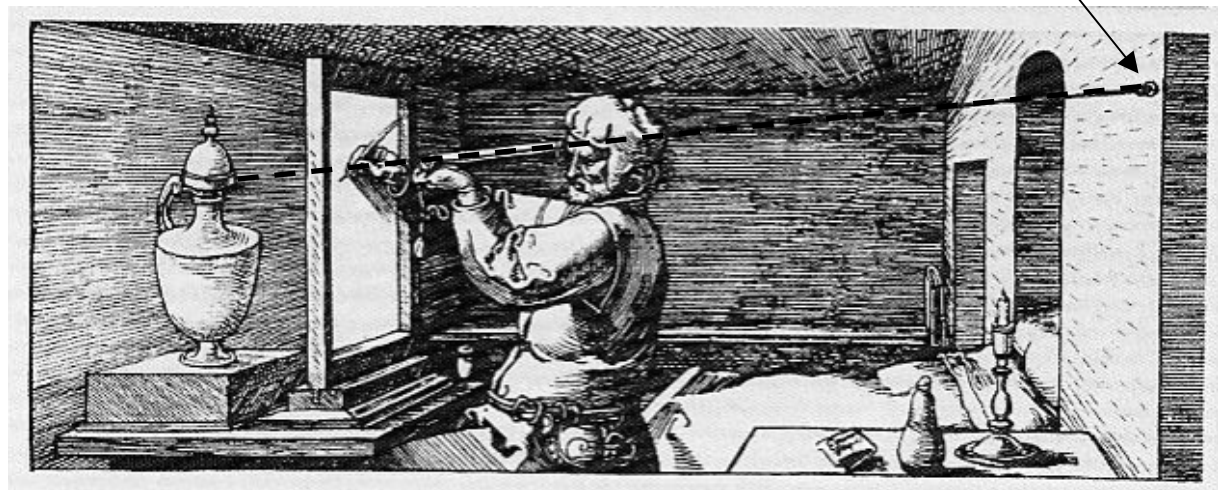
Un dernier mot concernant la projection, qu'il s'agisse des cartes ou de la perspective du peintre : cette opération semble de la manière la plus évidente relayer une *réduction de dimension*, pourtant nous voudrions soutenir l'idée qu'en réalité, ni dans la perspective du peintre, ni dans la carte, ce n'est vraiment le cas. En effet, ce ne sont pas *tous les points de l'espace* qui sont projetés sur une surface, mais seulement des points qui sont eux-mêmes à la surface des choses représentées. Si l'on voit aujourd'hui souvent des perspectives filaires réalisées par ordinateur, tel n'est pas le mécanisme de notre vision, ni celui de la perspective, ni de la carte. Les surfaces représentées sont peut-être déconnectées, courbées, pliées dans l'espace, mais ce sont des surfaces ; la projection n'effectue donc qu'une *transformation de surface à surface*, un “dé-pliage”, un déploiement, ou un aplatissage sur une surface plane (dans la plupart des cas) d'une ou plusieurs surfaces pliées ou courbées dans l'espace.

Machines à dessiner

La fixation du point de vue et la matérialisation du rayon visuel



Le tableau est trop loin, l'artiste reporte ce qu'il voit grâce au quadrillage



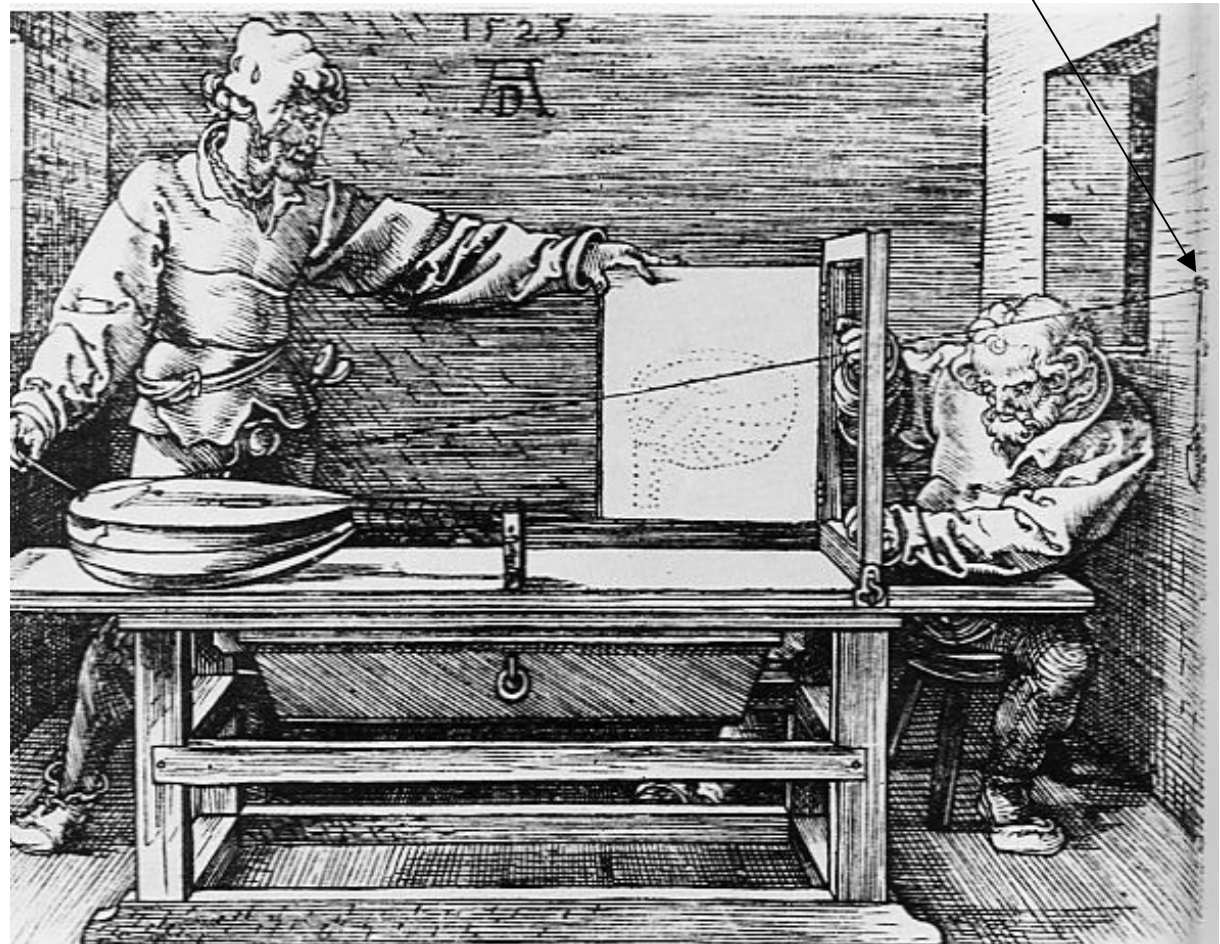
Le point fixe est trop loin du tableau; le rayon visuel est prolongé par un fil tendu

Albrecht Dürer,
Perspectographes à la femme couchée, à la cruche

in: Philippe Comar, *La perspective en jeu Les dessous de l'image*, Découvertes Gallimard 138, 1992, p. 105

Machines à dessiner

La fixation du point de vue et la matérialisation du rayon visuel



Le rayon visuel est matérialisé par le fil tendu, sous l'effet du contre-poids, entre le pointeur et l'anneau.

Dürer, *Perspectographe au luth*

in: Philippe Comar, *La perspective en jeu Les dessous de l'image*, Découvertes Gallimard 138, 1992, p. 105

II.3 Géométrie

Notre postulat est que l'homme ne perçoit la géométrie de la nature que parce qu'il conçoit, fabrique et représente :

“La nature est trop diffuse, ses stimuli trop puissants et trop en conflit pour être directement accessibles à l'esprit et à la sensibilité humaine. L'homme crée d'abord le cercle, que ce soit le plan d'un tipi ou le cercle de la danse de guerre, et ensuite il discerne des cercles et des processus cycliques partout dans la nature, dans la forme du nid des oiseaux, les tourbillons du vent et le mouvement des étoiles.” (Yi-Fu Tuan, *Espace et lieu La perspective de l'expérience*, in folio éditions, 2006, p. 113)

Nous n'avons pas l'intention de démontrer cette proposition, qui comme tout postulat, est posée pour permettre d'avancer ; sa démonstration est de toutes façons impossible :

“Cela ne revient pas à redire la théorie pragmatiste de l'origine des sciences pures d'après laquelle la pratique précède constamment le savoir, les choses construites de main d'homme détenant ou contenant le secret des spéculations abstraites à venir, comme si la suite et le système des théorèmes déployaient, mimaient, sublimaient, réordonnaient une histoire préalable et obscure d'actes et de geste: des faits, avant le droit, des ancêtres, adroits mais grossiers, faisaient sans savoir. Nous ne falsifierons ni ne vérifierons jamais ces jugements sur le passé, faux et vrai à loisir comme toute loi de l'histoire, le malheur ayant poussé à fondre l'éducation sur un arbitraire pareil. Rien ne prouvera ni n'infirmera jamais le pragmatisme, théorie de professeurs qui croient qu'inventer consiste à recopier excellemment un texte écrit par des mains calleuses ou que la découverte se réduit à l'interprétation. Non, la théorie ne se ramène point toujours à l'explication de ce qu'implique le travail manuel. Oui parfois, souvent non.” (Michel Serres, “Gnomon: les débats de la géométrie en Grèce”, in *Éléments d'histoire des sciences* (Michel Serres dir.), Bordas, 1989, pp. 77-78)

II.3.1 Mesure, échelle, proportion

La ligne droite

“Euclide donne de la droite une définition qui n'est pas très aisée à traduire. “La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points”. (...) Tannery, dans ses *Mémoires scientifiques*, discute en détails l'expression ἐξ ἴσου dont se sert Euclide et la rattache de façon très plausible à l'usage du cordeau. Il nous semble cependant qu'il y là davantage que le simple rappel d'une pratique concrète ou mieux, que cette pratique doit servir à suggérer quelque idée plus abstraite. Le cordeau, en effet, n'est en somme qu'une image pour exprimer une certaine propriété d'uniformité.” Jean-Blaize Grize, “Remarques sur la structure de la géométrie élémentaire”, in *L'épistémologie de l'espace* (études d'épistémologie génétique XVIII), Jean Piaget dir., PUF, Paris, 1966 (p. 65-66)

Au commencement, comme nous l'avons déjà dit, est la ligne droite. D'où peut venir l'idée de ligne droite ? La ligne droite existe dans le monde perçu, sous la forme du rayon lumineux (et du rayon visuel). Si l'on va vers où l'on regarde, on va en ligne droite. Et le rayon de lumière du soleil relie le sommet de la pyramide au sommet de l'ombre projetée en ligne droite. Mais cette conception de la ligne droite est bien abstraite et peu satisfaisante du point de vue de sa définition de plus court chemin d'un point à un autre : et pourquoi diable la lumière choisirait-elle le chemin le plus économe, après tout ? Par contre, si nous tendons une ficelle entre deux piquets (le "cordeau"), ou entre nos deux mains, nous voyons bien qu'il arrive un moment où nous économisons le plus de ficelle ; ce qui fait que la définition de la droite peut varier, d'ailleurs, parce qu'elle devient celle du "grand cercle" sur une surface sphérique, en employant la même méthode : d'où les itinéraires des avions, et l'imagination possible de la géométrie sphérique, et des géométries non euclidiennes.

La règle, "solidification" du fil tendu, est l'instrument qui *matérialise* la ligne droite. Mais, comme il y a des objets trop éloignés pour les atteindre par un fil tendu ou par une règle, le viseur est aussi utilisé pour déterminer la ligne droite qui passe par deux points.

Métrique

Pour définir une géométrie, après avoir défini, ou postulé, la ligne droite, il faut définir une *métrique*, c'est-à-dire une distance ; une fonction distance d entre points d'un ensemble est définie mathématiquement par quatre conditions :

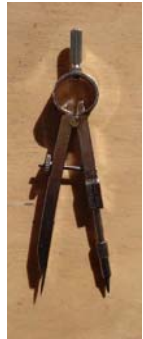
1. $d(A,B) \geq 0$
2. $d(A,B) = 0$ si et seulement si $A = B$ (séparation)
3. $d(A,B) = d(B,A)$ (symétrie)
4. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ (inégalité triangulaire)

La première condition, qui dit que toute distance est positive ou nulle n'est en fait pas indispensable, elle se déduit des trois autres. Les trois autres conditions correspondent bien à notre intuition de la distance entre deux points : la séparation dit que la distance d'un point à lui-même est nulle, et que si la distance entre deux points est nulle alors ces deux points sont confondus ; la symétrie exprime le fait que la distance de A à B est la même que celle de B à A ; l'inégalité triangulaire exprime le fait que si l'on a deux points A et B, et un troisième point C, alors, soit le point C est entre A et B, et la distance AB est égale à AC + CB, soit le point C n'est pas entre A et B, et le détour par C : AC + CB sera plus long que le chemin direct AB.

La distance euclidienne définie (sur le plan) par :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

répond bien évidemment aux critères énoncés. Cependant, à partir de ces conditions, on peut définir des distances qui ne soient pas la distance euclidienne, sans pour autant d'ailleurs s'aventurer dans les



103 Compas



104 Johannes Vermeer, *Le géographe*

géométries non-euclidiennes. Une distance très simple à définir, et qui n'est pas sans rapport avec le quotidien des citadins, la distance "Manhattan", se définit par :

$$d(A,B) = |x_B - x_A| + |y_B - y_A|$$

Cela revient à considérer comme distance entre deux points la longueur du trajet que doit effectuer un habitant d'une cité dont les rues forment une trame orthogonale (comme Manhattan effectivement, si du moins l'on exclut Broadway et les autres rues qui coupent obliquement le réseau).

C'est cependant la distance euclidienne qui correspond le mieux à notre intuition de la distance, du moins dans un espace sans obstacle, ce que l'on exprime par l'expression imagée de distance "à vol d'oiseau". N'étant pas des oiseaux, nous avons souvent des obstacles sur notre route, ou des contraintes de parcours, qui font que la distance "vécue" est rarement la distance euclidienne ; mais c'est justement parce que nous avons l'intuition de la distance euclidienne que nous ressentons la différence entre notre expérience et cette distance idéale.

Les distances "vécues", ne sont d'ailleurs pas de vraies distances au sens mathématique : si elles répondent en général au critère de séparation, elles ne sont pas toujours symétriques (il peut être plus long d'aller un endroit que d'en revenir, ou vice-versa), ni d'inégalité triangulaire (il est plus long d'aller "en ligne droite" de Rennes à Shanghai sans faire un détour par Roissy, du moins on peut le supposer) ; sans compter que les distances "vécues" ont une composante psychologique : un trajet peut paraître plus long à l'aller qu'au retour, ou réciproquement.

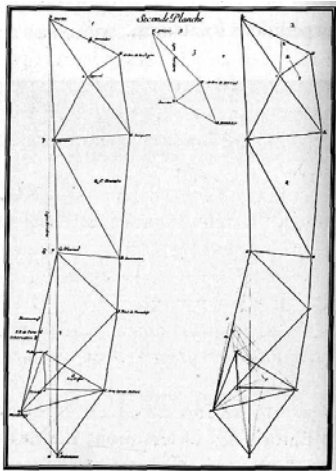
L'instrument de la métrique euclidienne, c'est le compas : l'ouverture du compas matérialise la distance entre deux points. La règle et le compas sont à la fois nécessaires et suffisants au géomètre.

Le compas est aussi l'instrument emblématique du géographe et de l'architecte :

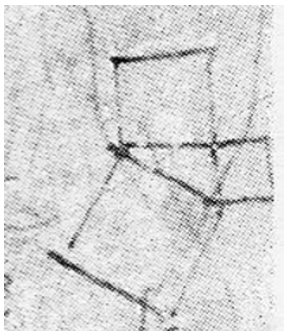


105 *La muse de l'architecture*

La règle leur est nécessaire aussi bien sûr ; mais cet instrument est sans doute trop fondamental pour être mentionné. Ou bien il prend d'autres formes : l'équerre ou le té, pour l'architecte sont des formes de règles où l'on a déjà (à l'aide d'un compas, forcément) associé une perpendiculaire ; le fil à plomb est une forme particulière de règle strictement réservée à la verticale. Les géographes ont utilisé des



106 La mesure d'un degré de latitude par l'abbé Picard



107 Léonard de Vinci, feuille d'études (détail)

instruments de visée qui exploitent la rectilinéarité des rayons visuels ; la triangulation nécessitant la règle et le compas.

Dénombrement et mesure

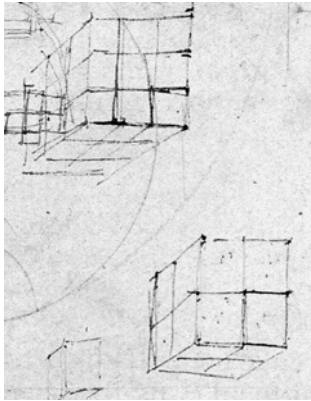
C'est que, dans la plupart des cas, ce qui se présente à nous comme une figure géométrique paraît avoir été compris comme un véritable objet concret : surface de terre, volume d'un fossé, briques d'un mur. Sans doute y a-t-il bien en quelque sorte mesure, report d'une unité, mais l'unité elle aussi reste un objet concret. On mesure le volume du mur en nombre de briques, celui du fossé en journées d'ouvriers, l'aire du champ en poids d'argent, selon ce qu'il peut rapporter." (Grize Jean-Blaize, "Remarques sur la structure de la géométrie élémentaire", in *L'épistémologie de l'espace* (études d'épistémologie génétique XVIII), sous la direction de Jean Piaget, PUF, Paris, 1966 p. 71-72)

Il ne faut pas confondre *compter*, ou *dénombrer*, et *mesurer*. Compter mène à l'idée de nombre entier, alors que mesurer mène au nombre rationnel, et même aux nombres irrationnels et transcendants. Compter est un absolu, l'unité (le nombre 1) n'est pas relative à une convention, alors que mesurer impose de définir une unité de mesure, mesurer c'est comparer.

Une bonne partie de l'histoire des mathématiques se trouve dans l'aporie du lien entre compter et mesurer. Et d'abord compter ses pas... Il se trouve que l'homme, entre autres caractéristiques physiques, marche, c'est-à-dire qu'il arpente le sol en un mouvement non pas continu, mais facilement décomptable (ce qui serait plus difficile s'il avait quatre pattes, ou si, comme le serpent, il sinuait continûment sur le sol...), et nous avons déjà parlé de l'analogie entre les jambes et le compas. Cela aurait donc été plus simple si on avait pu trouver la bonne unité de mesure, la bonne ouverture de compas, qui aurait été contenue un nombre entier de fois dans toute longueur. Malheureusement, il n'en est pas ainsi, et ce dès que l'on rencontre deux figures géométriques pourtant très simples à tracer à la règle et au compas : le carré, et le cercle (pour lequel on peut même se passer de la règle). Pour le carré, la mesure de la diagonale fait apparaître un nombre que, de quelque façon que l'on s'y prenne, on ne pourra jamais mesurer en fonction du côté, ni même d'une fraction du côté. Et c'est bien dommage, parce que cette diagonale est justement ce qui fournit le côté d'un carré deux fois plus grand en surface...

Pour le cercle, c'est encore plus grave, si l'on peut dire. Jamais l'on ne pourra trouver un nombre entier ou même fractionnaire par lequel reporter son diamètre pour mesurer sa circonférence.. Or, la diagonale du carré rapportée à son côté est égale à $\sqrt{2}$, ce nombre est un irrationnel (non fractionnaire), mais il reste "algébrique", c'est-à-dire qu'on peut l'obtenir par une construction à la règle et au compas. Alors que le périmètre d'un cercle rapporté à son diamètre est un nombre encore plus diabolique : π , un nombre irrationnel, non algébrique (*transcendant*), que l'on ne peut même pas obtenir par une telle construction...

Tout cela a beaucoup occupé les esprits : de la duplication du cube à la quadrature du cercle, en passant par la sécabilité des angles, et donc la construction des polygones réguliers...



108 Léonard de Vinci, *feuille d'études* (détail)

Suivant que les formes sont des variétés à 1, 2 ou 3 dimensions, on souhaitera mesurer, respectivement leur longueur, la longueur de leur périmètre et leur aire, et l'aire de leur surface et leur volume. Très tôt dans l'histoire des mathématiques, on s'est rendu compte qu'en prenant comme unité de mesure, par exemple le côté d'un carré, il était nécessaire de l'élever à la puissance 2 (au "carré") pour mesurer son aire (alors qu'il suffit de le multiplier par 4 pour mesurer son périmètre) ; ou encore, dans le cas du cube, qu'il fallait l'élever à la puissance 3 (au "cube") : les mots-mêmes par lesquels on désigne l'élévation à la puissance 2 ou 3 gardent les traces de cette opération ; au point qu'élever un nombre à une puissance supérieure à 3 semblait une opération absurde. Sans parler de l'opération inverse (l'extraction de la racine), qui revient à se demander quelle longueur doit avoir le côté d'un carré d'aire donnée (ou celui d'un cube de volume donné).

Echelle

"En cet empire, l'Art de la Cartographie fut poussé à une telle Perfection que la Carte d'une seule Province occupait toute une Ville et la Carte de l'Empire toute une Province. Avec le temps, ces Cartes Démesurées cessèrent de donner satisfaction et les Collèges de Cartographes levèrent une Carte de l'Empire, qui avait le Format de l'Empire et qui coïncidait avec lui, point par point. Moins passionnées pour l'Étude de la Cartographie, les Générations Suivantes réfléchirent que cette Carte Dilatée était inutile et, non sans impiété, elles l'abandonnèrent à l'Inclémence du Soleil et des Hivers. Dans les Déserts de l'Ouest, subsistent des Ruines très abîmées de la Carte. Des Animaux et des Mendians les habitent. Dans tout le Pays, il n'y a plus d'autre trace des Disciplines Géographiques." (Jorge-Luis Borges, *Histoire universelle de l'infamie/Histoire de l'éternité*, Paris, Union générale d'éditions, collection 10/18, 1994, (première édition française, 1951), p. 107)

L'échelle, en tant que "rapport existant entre les dimensions d'un objet et celles de sa représentation dans l'espace ou en plan"⁷, d'abord (disons-le d'emblée pour ne plus avoir à l'évoquer par la suite et ne pas être sujet à critique de part ou d'autre), est sujet de controverse entre les géographes, d'une part, et les architectes et la majorité de la population, d'autre part, au sujet de ce qu'on appelle "grande" ou "petite" échelle. Ce sont les géographes qui ont raison, bien sûr, de qualifier d'"à grande échelle" ce qui est représenté avec un grand facteur d'échelle (1/100 par exemple) et d'"à petite échelle" ce qui est représenté avec un petit facteur (1/100 000 par exemple). Les architectes, et le commun des mortels, même s'ils savent bien que 1/100 est plus grand que 1/100 000, s'intéressent peut-être plus à ce qui est représenté qu'au moyen de le faire et qualifierons de "grande échelle" ce qui est grand en soi, et de "petite échelle" ce qui est petit...

Il y a nécessité d'une échelle, d'abord, parce qu'il est impossible, aussi bien en architecture qu'en géographie, de représenter les objets dont on traite en leur conservant leur taille ; il faut forcément la réduire. Ce n'est pas forcément le cas dans d'autres domaines ; et dans certains autres, au contraire,

⁷ les "dimensions" en question sont la "taille" ; source

on doit l'augmenter (comme en biologie, souvent). Mais une carte à l'échelle 1:1 serait absurde et inutile.

Sauf pour de très petits ouvrages, l'architecte doit aussi en général travailler sur des documents "à l'échelle". Les tracés des tailleurs de pierre étaient effectués à grandeur réelle, et les architectes de la Renaissance effectuaient des maquettes à l'échelle 1 (mais dans un matériau moins noble que la réalisation finale, en bois plutôt qu'en pierre par exemple) pour présenter leurs projets (du moins en partie). On peut bien sûr soutenir l'idée que bien des bâtiments "historiques" de nos villes ne sont que des maquettes à l'échelle 1/1, puisqu'ils ont été complètement reconstruits à une époque ultérieure à leur construction originelle. Et l'on peut penser aussi à ces temples japonais périodiquement reconstruits depuis des siècles. Mais la question de ce qui est l'essence, et ce qui est la représentation, en architecture, nous emmènerait trop loin. Restons-en à l'idée banale que le bâtiment construit est l'objet de l'architecture, et tous les autres documents, graphiques ou matériels, voire textuels, en sont la représentation.

Philippe Boudon soutient que l'échelle est spécifique de l'architecture, qu'en particulier c'est l'échelle qui distingue l'espace architectural de l'espace géométrique : un objet serait "sans échelle" en géométrie, il en aurait obligatoirement une, propre, en architecture. Un cube géométrique est un cube quel que soit sa taille ; un objet architectural en forme de cube n'a pas le même sens suivant sa taille, son échelle : il peut s'agir d'une niche à chien, où l'on ne pourra pas entrer, d'une maison d'un seul étage, ou d'un immeuble ; ce n'est pas le même cube dans tous les cas.

Nous ne nous étendrons pas sur l'emploi extensif que fait Philippe Boudon du concept d'échelle (l'étendant, à partir de l'échelle au sens classique, qu'il qualifie d'échelle d'*extension*, à tous les champs de contraintes dans lesquels le projet architectural est engagé : échelle économique, de voisinage, etc.), remarquons cependant que l'échelle n'est pas absente de la géométrie ; un cube reste peut-être un cube quelle que soit sa taille, mais son volume croît comme le cube de son côté, c'est bien une question d'échelle, et c'est bien un problème de géométrie... Par contre, le choix d'une unité de mesure reliée au monde physique n'est pas de l'ordre de la géométrie, mais il n'est pas non plus réservé à l'architecture : en physique, en biologie, etc. ce choix est nécessaire aussi.

En géographie, le choix d'une unité de mesure est également crucial. Entre autres, il peut intervenir pour classer un objet d'études : l'île en est un exemple. On peut se demander dans quelles marges de taille une terre entourée d'eau est considérée comme une île d'un certain type :

"Bien qu'une île soit définie simplement comme "une terre entourée de tous côtés par les eaux", il faut distinguer au moins entre les *îles océaniques*, par exemple l'Elbe ou Ouessant, et les *îles continentales*: la Sicile, la Grande-Bretagne, Sumatra. Le seuil entre les deux catégories correspond au rapport $C/S=1/20$, ou 0,05, c'est-à-dire à 1 km de côtes pour 20 km² de surface (Doumengué). A

plus de 0,05, l'île a un climat nettement maritime: atténuation des amplitudes thermiques, humidité de l'air, force et fréquence des vents, avec les conséquences que l'on peut imaginer sur la météorisation et le tapis végétal. à moins de 0,05 le centre de l'île est continentalisé." (Jean Demangeot, *Les milieux "naturels" du globe*, Armand Colin, 1984, 1998, p. 282)

L'auteur sous-entend que l'unité de mesure est le kilomètre, sinon, en effet, le rapport C/S n'est pas suffisant : un rocher de 1 m de périmètre pour 20 m² de surface aura le même rapport C/S.

L'échelle se confond en partie avec la *proportion*, ou encore avec le *rapport* ; mais l'échelle s'applique plus spécifiquement au rapport entre l'objet et sa représentation, et en architecture, entre l'objet et l'être humain, voire entre l'objet et son environnement. On dira qu'une architecture est "hors d'échelle" si un grand immeuble est construit dans un quartier de petites maisons ou d'immeubles bas ; et on qualifiera aussi d'échelle inhumaine un espace trop grand ou trop petit pour la commodité de l'homme. Il peut arriver qu'un bâtiment soit grand, mais ne le paraisse pas, ou le contraire, ce qui peut constituer, par rapport à l'intention de l'architecte, une réussite, ou un raté. Alors que la proportion ou les proportions, concernent plutôt les rapports entre les parties de l'objet lui-même, ou entre les parties de l'objet et son tout.

Proportion

Nous avons évoqué, plus haut (II.2.1), en nous référant à Nelson Goodman, la numérisation comme coupe, comme échantillonnage, avec l'exemple de la notation musicale occidentale, et nous avons mentionné que les systèmes de proportion en architecture relèvent du même principe. Le Corbusier, dès la première page de son *Modulor*⁸, est clair sur cette analogie :

"Le son est un événement continu, conduisant sans rupture du grave à l'aigu (...).

On a pu, pendant des millénaires, faire usage du son pour chanter ou pour jouer et danser. Ce fut la première musique qui se transmettait oralement, sans plus.

Mais, un jour – six siècles avant J.-C. – quelqu'un s'inquiète de rendre transmissible pour toujours, l'une de ces musiques autrement que de bouche à oreille, donc de l'écrire. Il n'existait ni méthode ni instrument pour le faire. Il s'agissait de fixer ce son en des points déterminés, rompant ainsi sa parfaite continuité. Il fallait le représenter par des éléments saisissables, par conséquent découper le continu selon une certaine convention et en faire du gradué. Le gradué constituerait les échelons d'une échelle (artificielle) du son.

Comment sectionner la continuité du phénomène sonore ? Comment découper ce son selon une règle admissible par tous, mais surtout efficace, c'est-à-dire capable de souplesse, de diversité, de nuances et de richesse et pourtant simple et maniable et accessible ?

Pythagore résolut la question, prenant deux points d'appuis capables de rallier la sécurité et la diversité : d'une part l'oreille humaine – l'audibilité humaine (et non pas l'audibilité des loups, des

⁸ Le Corbusier, *Le Modulor*, Editions de l'Architecture d'Aujourd'hui, 2^{nde} édition, 1951

lions ou des chiens). D'autre part, les nombres, c'est-à-dire la mathématique (ses combinaisons) qui est elle-même fille de l'Univers." (Le Corbusier, *Le Modulor*, Editions de l'Architecture d'Aujourd'hui, 2nde édition, 1951, p. 15-16)

Le Corbusier nous livre dans ce texte à la fois la *nature* d'un système de proportions (un découpage dans le continu), les *raisons* de l'établissement d'un système de proportions (la transmission), et les *moyens* de l'établir (la perception humaine et les mathématiques).

Le Corbusier poursuit en constatant que ce qui a si bien réussi pour le son, pour la musique (les modes doriques et ioniques avec Pythagore, la gamme tempérée avec J.-S. Bach) et qui s'est perpétué pendant des siècles, n'a pas eu son équivalent pour "les choses visuelles, *les longueurs*" :

"Tout ce qui est bâti, construit, distribué en longueurs, largeurs ou volumes, n'a pas bénéficié d'une mesure équivalente à celle dont jouit la musique, - outil de travail au service de la pensée musicale."
(Le Corbusier, *op. cit.*, p. 16-17)

Nous n'allons pas exposer en détail le Modulor, ni les autres systèmes de proportion qui ont existé dans les siècles passés, ou qui ont été proposés plus récemment. Nous voudrions simplement exprimer quelques idées en rapport avec notre préoccupation quant à la question de la dimension. Car, si aucun système de proportions ne s'est imposé de façon universelle comme la gamme tempérée (quasiment universelle, du moins : il est évident qu'elle n'est pas en usage dans les musiques extra-européennes, et elle est remise en cause dans certains courants de musique contemporaine), c'est en grande partie parce que le son est un phénomène (du point de vue de sa hauteur) uni-dimensionnel, ce que les mesures de l'espace ne sont pas. De plus le son a ceci de particulier qu'il est non seulement uni-dimensionnel, mais périodique, les notes se retrouvent tous les 12 demi-tons ; ce que nous avons visualisé sous la forme d'une hélice au point I.2.2. Les notes sont des points extraits de ce continu ; nous pouvons les entendre simultanément, nous percevons certains intervalles comme harmonieux, d'autres comme dissonants ; ces intervalles peuvent être assimilés (plus ou moins) à des rapports de fréquences, mais en définitive, le découpage une fois défini est très simple : des points régulièrement espacés sur une hélice (ou même sur un cercle, si l'on assimile les notes de même nom).

Ce que Le Corbusier ne dit pas, c'est que le système musical de la gamme tempérée fonctionne en deux temps : d'abord le choix d'une unité de mesure (le demi-ton) et le privilège accordé à certains intervalles dans ce premier découpage, par exemple le mode majeur : do-ré ré-mi mi-fa fa-sol sol-la la-si si-do ou, en demi-tons : 2 2 1 2 2 2 1 ; ensuite d'autres intervalles peuvent être privilégiés comme "harmoniques", par exemple : do-mi mi-sol sol-do, soit 4 3 5.

Ramené à l'espace, ou en tout cas au plan (à la fois le plan comme espace 2D et le plan de l'architecte), un tel découpage en unités de mesure correspondrait tout simplement à un semis orthogonal régulier de points, à une trame régulière. Certains systèmes de proportions sont fondés sur un tel tramage. Mais il y a aussi des systèmes de proportions proposés sans définition d'une échelle de

mesure initiale. Les “ordres” classiques imposent ainsi des rapports entre base, hauteur de colonne et entrecolonnements, sans définir une unité de mesure absolue.

Palladio⁹ propose pour la longueur a et la largeur b d’une pièce ces rapports de proportion :

$$a/b : \quad 1 \quad 1+1/3 \quad 1+1/2 \quad 1+2/3 \quad 2 \quad \sqrt{2}$$

c’est-à-dire le carré (1), le double carré (2), et des rectangles dont les côtés sont dans des rapports fractionnaires (4/3, 3/2, 5/3); et le rectangle dont la longueur est égale à la diagonale du carré construit sur sa largeur : toutes proportions faciles à tracer avec le compas, d’ailleurs.

Si l’on met de côté $\sqrt{2}$, on peut ramener ces rapports à une unité de mesure commune qui serait 1/6 :

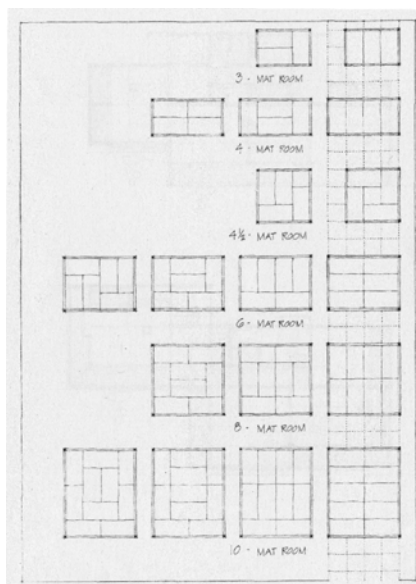
$$6 \quad 8 \quad 9 \quad 10 \quad 12$$

Où certains ont cru remarquer une analogie avec les rapports musicaux...

Ce qu’on peut remarquer en tout cas, c’est que entre 4/3 (1,33...) $\sqrt{2}$ (1,414...) et 3/2 (1,5), il n’est pas sûr qu’un œil non exercé voie vraiment une différence ; d’autant que la longueur et la largeur d’une pièce ne sont jamais perçues, sauf en plan, simultanément de manière objective.

L’architecture japonaise, avec le *ken*¹⁰, c’est-à-dire le module du tatami, qui est un double carré (mais qui peut parfois le diviser en deux) est fondée par construction sur un système de proportions lui-même fondé sur une unité de mesure. La particularité du *ken*, c’est d’être d’emblée *bidimensionnel* : on définit une pièce non par le rapport entre ses côtés, mais par le nombre de “tatamis” (dont la disposition peut varier, du moment que cela forme un rectangle) ; ce nombre est un entier, avec quelques cas où un demi-tatami est nécessaire.

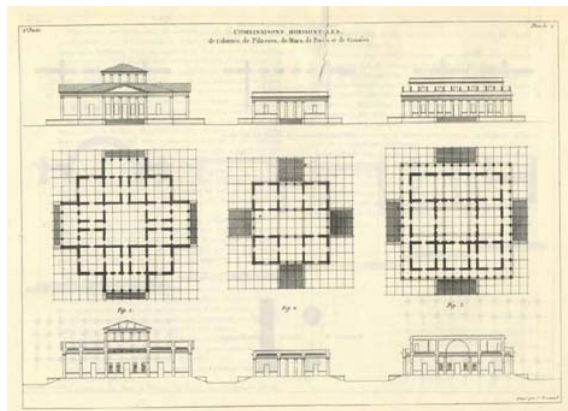
Le *ken* est un exemple de *module*, une de ses particularités étant d’être rectangulaire (double carré) ; il y a bien une trame orthogonale sous-jacente, mais recouverte par les assemblages divers de tatamis. Par ailleurs la taille du *ken* est intimement liée au corps humain : le tatami est aussi ce sur quoi l’on dort, il a juste la taille qu’il faut pour accueillir un corps humain allongé. Cette caractéristique est propre à la culture japonaise, dans laquelle le rapport au sol est très important, la plupart des activités (et le repos) se déroulant directement sur le sol.



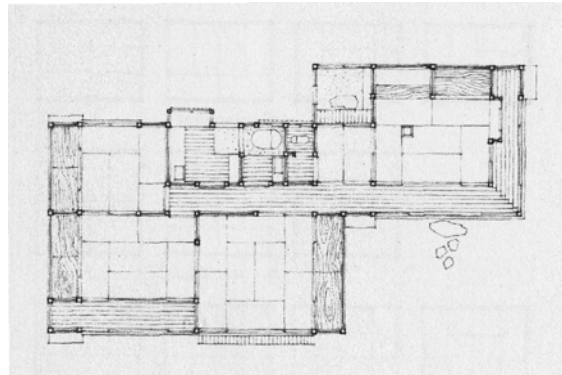
109 Le *ken*

⁹ Palladio *Les quatre livres de l’architecture* Arthaud 1980 ; mais on pourrait aussi se référer à Alberti, entre autres.

¹⁰ Le *ken* correspond à la longueur du tatami (qui fait donc 1x1/2 *ken*) ; il correspond aussi à l’intervalle entre deux poteaux de la structure. Il y a en fait deux méthodes de conception, selon que le *ken* détermine l’entre-axe des poteaux (et alors la taille des tatamis peut varier), ou que la taille des tatamis reste constante, et que la distance entre poteaux (et donc le *ken*) varie. (source : Francis D. K. Ching, *Form Space and Order* Van Nostrand Reinhold Company 1979.



111 J.-N.-L. Durand, “Combinaisons horizontales de colonnes, de pilastres, de murs, de portes et de croisées”



110 Mise en œuvre du ken

Chez nous, le sol accueille essentiellement les pieds, et les pieds de nos meubles ; en conséquence, la modularité du plan, quand elle existe, est rarement liée à la taille propre du corps humain.

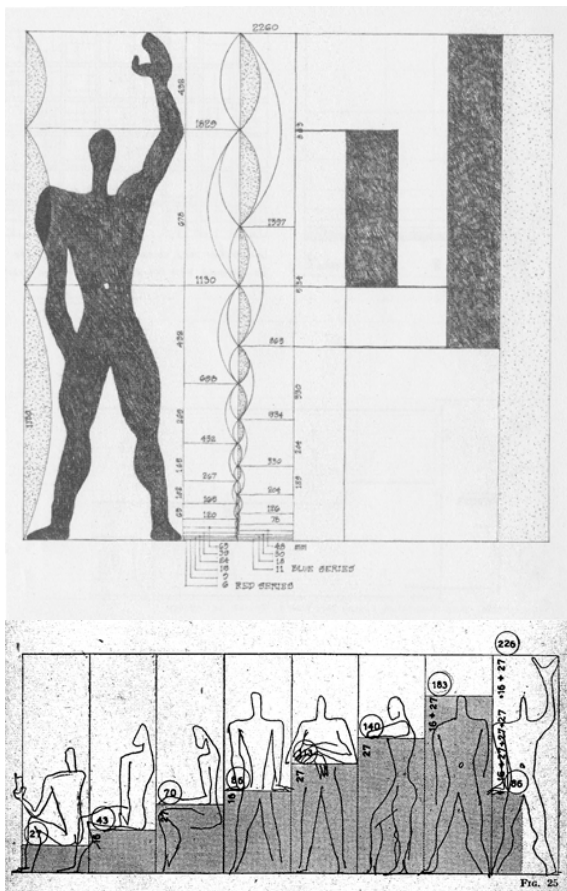
Un exemple d’une telle modularité, cette fois carrée, est donnée par les exemples didactiques de Jean-Nicolas-Louis Durand (1760-1834), professeur à l’école polytechnique. On y trouve une modularité surfacique, fondée sur le pavage carré du plan ; mais sans doute pas de prise en compte du corps humain. C’est plutôt un jeu de construction, ce qui n’enlève d’ailleurs rien à son intérêt ; on a déjà mentionné l’importance pour l’architecture moderne de ces types de jeux.

Bien d’autres systèmes de trames existent, que nous n’allons pas développer.

Revenons au Modulor. Le Corbusier, avec le Modulor, ne propose pas en fait un véritable *module*, qui se doit d’être fixe et unique, puisque son système est fondé sur une, ou plutôt deux, progression(s) de type Fibonacci (c’est-à-dire dont chaque membre est égal à la somme des deux précédents ; des arrondis sont faits dans certains cas) :

série dite “rouge” :	24	39	63	102	165	267	432	668	1130	1829
série dite “bleue” :	30	48	78	126	204	330	534	863	1397	2260

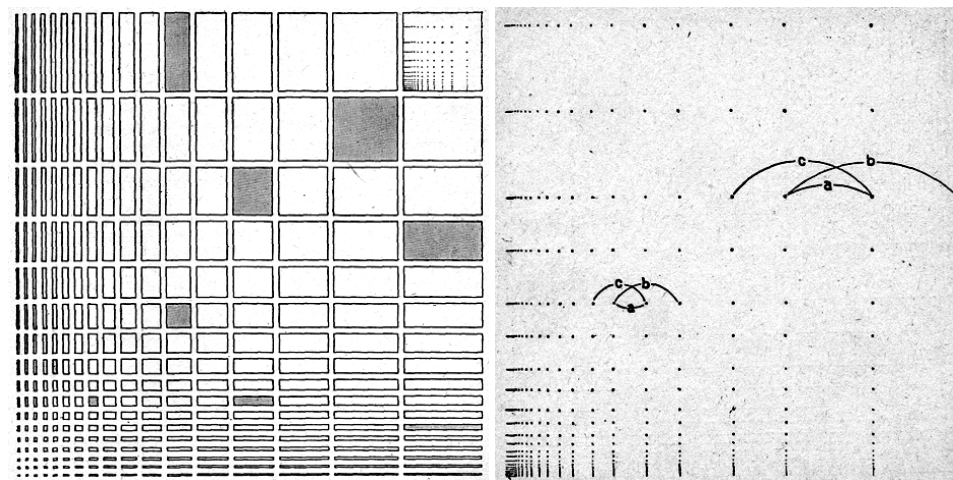
Ces nombres sont exprimés en centimètres ; bien que l’une des intentions de Le Corbusier ait été de concilier le système *métrique*, issu de la Révolution Française, et qu’il n’aimait pas parce que non fondé sur les mensurations humaines, et le système dit *impérial* (ou “pieds/pouces” ; système encore en vigueur en particulier en Amérique du Nord). Ils se déduisent de la taille de l’homme “normal” (1,83 m ; les autres apprécieront...), et la hauteur qu’atteignent les doigts de celui-ci lorsqu’il lève le



112 Le Corbusier, *Le Modulor*

bras (2,26 m : tous les plafonds des habitats corbuséens, sauf double hauteur ou autres cas particuliers, sont en principe à 2,26 m). D'autres occurrences dans chacune des séries correspondent à la hauteur de points particuliers du corps humain, ou à des éléments mobiliers accueillant ce corps. Les arrondis montrent l'ambiguïté du système (mais ils existent aussi dans la gamme "tempérée" ; sans parler de la "construction" géométrique sur laquelle Le Corbusier s'appuie, dont on a montré qu'elle était fautive¹¹...

Une autre source d'inspiration de Le Corbusier, pour refuser le principe de modularité classique (à unité de mesure fixe), a été la perception humaine liée à la perspective : nous ne voyons pas selon une trame à maille fixe, mais suivant une trame dont la maille diminue avec l'éloignement. Ce qui entretient des rapports avec les figures auto-similaires et fractales que nous aborderons plus loin. Observons juste pour l'instant les correspondances que Le Corbusier a marquées à différents endroits de son maillage (obtenu en prenant pour intervalles les échelons des suites définies plus haut) ce que nous qualifierons de rapports d'auto-similarité:



113 Le Corbusier, *Le Modulor*

¹¹ Cela dit, Le Corbusier, rigueur du Modulor ou pas, était un très grand architecte ; les poètes peuvent se permettre quelques libertés avec l'arithmétique et la géométrie...

II.3.2 Manipulations, opérations, transformations

Forme et géométrie

La forme, ce qui en fait l'objet de la géométrie, est ce qui est conservé par les isométries (indépendamment des autres qualités) et relativement par les similitudes (encore plus relativement par les affinités). En géométrie dite euclidienne, les isométries sont : la translation, la rotation et la réflexion¹². La translation et la rotation sont ce que l'on appelle les "déplacements" puisqu'ils conservent la forme. Cela correspond à notre perception et notre intuition de l'espace : qui pourrait croire qu'un objet est déformé sous le simple prétexte qu'il s'est déplacé ? Cela contreviendrait à ce que nous entendons par "déplacement" ; notre intuition s'appuie sur des objets solides, supposés justement indéformables :

"Qu'est-ce donc qu'une figure, objet même de la géométrie? C'est, dit Socrate dans le *Ménon*, "la limite jusqu'à laquelle s'étend le solide" et il insiste, dans le passage qui précède, sur le caractère limité et fini propre à toute figure. D'autre part, il ne faut pas sous-estimer, croyons-nous, le renvoi à l'objet, au solide, comme constituant de la définition. Il est hors de doute que, pour le géomètre grec, les figures sont reliées aux objets physiques. Si, selon, Proclus, Posidonius semble avoir assimilé les figures à leur contour, pour Euclide encore, la figure plane est "un morceau de plan". "Une figure est ce qui est contenu par une ou par des frontières." (Jean-Blaize Grize, "Remarques sur la structure de la géométrie élémentaire", in *L'épistémologie de l'espace* (études d'épistémologie génétique XVIII), sous la direction de Jean Piaget, PUF, Paris, 1966 p. 63)

Pourtant, notre intuition est en butte à deux paradoxes. D'abord, il faut remarquer qu'il serait tout à fait possible que notre monde, notre espace, soit différent de ce que nous supposons, et que les objets se déforment sans que nous le sachions, puisque nos instruments de mesure (qui sont eux-mêmes des objets du monde) subiraient la même déformation. Poincaré l'a très justement et à plusieurs reprises remarqué :

On a souvent observé que si tous les corps de l'univers venaient à se dilater simultanément et dans la même proportion, nous n'aurions aucun moyen de nous en apercevoir, puisque tous nos instruments de mesure grandiraient en même temps que les objets mêmes qu'ils servent à mesurer. Le monde, après cette dilatation, continuerait son train sans que rien vienne nous avertir d'un événement aussi considérable. (Henri Poincaré, *La valeur de la science*, Flammarion, 1905, p. 63)

C'est d'ailleurs ce qui est au fondement de la théorie (extrêmement contre-intuitive) de la relativité générale, mais cela ne concerne que des corps qui se déplaceraient avec une vitesse proche de celle de la lumière et, heureusement cela ne concerne pas notre quotidien.

Par ailleurs, cette intuition géométrique, largement partagée, et pas seulement par les mathématiciens, nous parvient, par la vue, de manière détournée ; lorsqu'un objet se déplace, nous devrions l'estimer

¹² On peut se reporter dès maintenant au point III.2.1, si l'on veut quelques rappels sur les isométries et plus largement les transformations linéaires et affines.

déformé, puisque la projection centrale qu'effectue la vue inscrit sur notre rétine une forme (2D) différente... Et pourtant, nous restons persuadés qu'il n'a fait que changer de place sans s'être déformé : c'est que la perspective, qui est bien le dispositif qui nous permet de voir, n'est pas l'objet de notre perception, c'est le monde, et les objets du monde, qui l'est.

L'autre type d'isométrie, qui est un anti-déplacement, la symétrie, autrement appelée la *réflexion*, est apparemment moins en prise avec notre intuition. Nous pouvons déplacer un objet et expérimenter la translation et la rotation ; mais nous ne pouvons pas matériellement effectuer une symétrie. Son autre nom, la réflexion, suggère que nous la rencontrons cependant : la réflexion dans un miroir plan (et si l'on n'en dispose pas, dans un plan d'eau) crée des formes, certes virtuelles, mais effectivement symétriques des formes qui s'y reflètent. Et puis surtout, nous rencontrons toutes faites de telles paires de formes symétriques l'une de l'autre, et ce pas plus loin que dans notre propre corps : nos deux mains, nos deux pieds, nos deux oreilles, par exemple ; avec l'impossibilité agaçante de ne pas pouvoir, par contre, tout simplement transformer une forme tridimensionnelle donnée en sa symétrique...

Si nous ne pouvons pas matériellement transformer une forme 3D en sa symétrique, nous la reconnaissons, peut-être par analogie avec celles qui nous sont familières, mais aussi nous pouvons expérimenter la symétrie avec des formes 2D (ou des quasi-surfaces en tout cas) : si nous ne pouvons pas transformer une main gauche en main droite, nous pouvons retourner un gant et, en supposant que l'envers est identique à l'endroit, nous obtenons alors un gant qui convient à la main opposée... Ce retournement ne peut s'accomplir que parce que nous disposons de trois dimensions ; pour "retourner" une main, il faudrait que nous disposions d'une quatrième dimension :

"6.3611 – Le problème kantien de la main droite et de la main gauche que l'on ne peut amener à se couvrir l'une l'autre existe déjà dans la surface plane, voire dans l'espace à une dimension où les deux

---O---X--X---O--- figures a et b ne peuvent se couvrir l'une l'autre sans être rejetées hors de cet espace. La main droite et la main gauche sont en réalité parfaitement congruentes. Et le fait qu'on ne puisse les amener à se couvrir l'une l'autre n'a rien à voir avec cela.

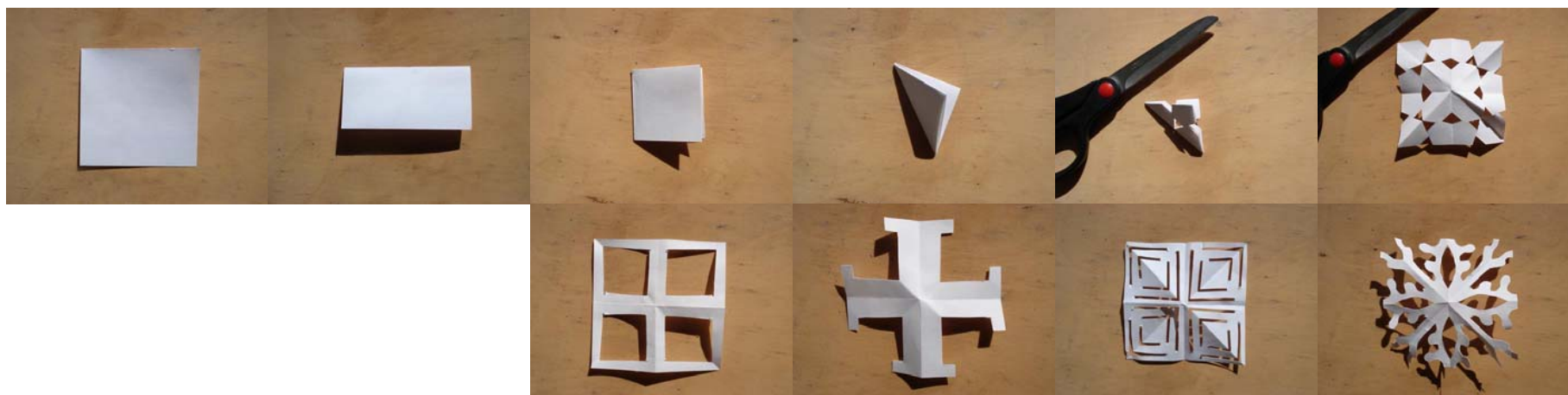
On pourrait mettre le gant de droite à la main gauche, si l'on pouvait le retourner dans l'espace à quatre dimensions." (Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, Tel Gallimard, 1961, p. 101)

Quant à la similitude, qu'est-ce qui nous en donne l'intuition ? On pourrait penser d'abord à la réduction, et l'accroissement, que subissent les formes apparentes des objets dans la projection que constitue la vision. Mais cela se heurte à l'objection maintes fois relevée, que nous ne voyons pas "en projection", mais, d'une certaine façon, "malgré" cette projection. Un objet éloigné est vu plus petit, mais nous ne le percevons pas comme plus petit mais comme plus loin... D'autres exemples de similitudes se présentent cependant à notre perception : la main de l'enfant est plus ou moins similaire à la main de l'adulte en plus petit ; tel fruit, telle feuille, tel animal, est plus petit ou plus grand suivant

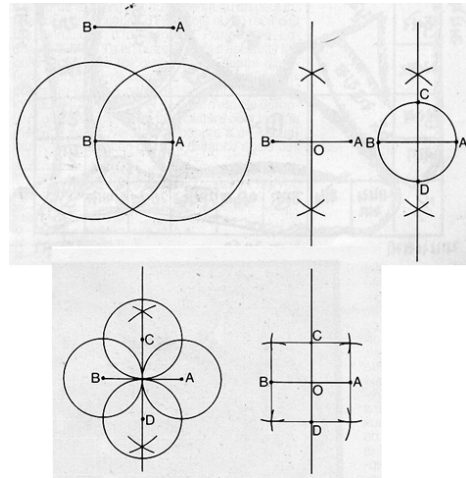
le moment de sa croissance... Un ballon se gonfle en conservant plus ou moins une forme similaire à elle-même.

Formes géométriques

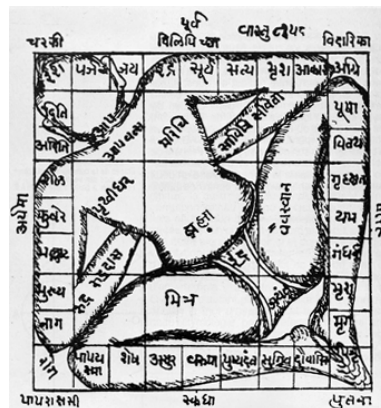
Parmi les formes, en général, et qui toutes se conservent par les isométries, tout en étant déplacées ou retournées, il y en a qui sont particulières parce qu'elles se conservent *vraiment* suivant certaines isométries. Le carré, en tant que forme, se conserve lorsqu'on le fait tourner autour de son centre de 90° , 180° , et 270° , et aussi quand on le retourne (symétrie) autour de ses deux médianes ou de ses deux diagonales. Bien sûr, s'il a des côtés de quatre couleurs différentes, on peut dire que ce n'est pas le même carré que l'on retrouve. Mais justement la géométrie ne s'intéresse qu'à la forme, indépendamment de toute autre qualité, et cette caractéristique-là se conserve. Est-ce que cet ensemble (plus précisément le groupe) de transformations qui le caractérise, le définit aussi, et surtout ne définit et ne caractérise que lui ? Malheureusement non : pour le montrer, il suffit de prendre une feuille de papier carrée et une paire de ciseaux, de plier la feuille suivant sa médiane, puis de nouveau suivant la médiane du rectangle obtenu, et enfin suivant la diagonale (ceci pour être sûr de conserver les symétries requises), puis de découper le motif que l'on désire ; déplaçons la feuille de papier, nous obtenons à chaque fois une forme qui présente la même invariance que le carré selon ses quatre rotations et ses quatre symétries :



C'est que le carré des géomètres n'est pas spécialement défini comme une surface, ni même comme l'enveloppe, ou la frontière de cette surface, ce n'est pas une "forme", mais une "figure" composée de quatre points, qui eux sont bien l'ensemble minimum conservé par le groupe des isométries du carré ;



114 La génération du carré, d'après un ancien traité d'architecture indien



115 Le Vastu Purusha mandala, d'après un ancien traité d'architecture indien

ces points étant supposés reliés par des segments de droite, ce qui forme un polygone (enveloppe convexe de l'ensemble des sommets). Cette conception de la figure a peut-être plus son origine dans l'astronomie que dans autre chose : c'est bien l'idée d'une constellation, dans le ciel il n'y a pas de lignes, encore moins de surfaces, mais seulement des points (les étoiles), que seule l'imagination humaine relie en lignes brisées :

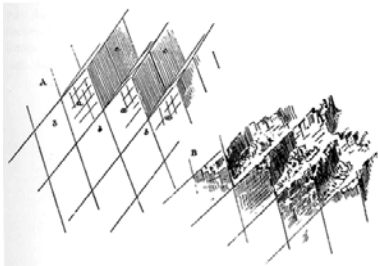
“Nul n'a jamais vu, ici ou là, Balance ou Bélier mais tout simplement un simplexe: jamais une image continue et floue, mais des clous juxtaposés. Comme si les modèles célestes restaient fidèles à la théorie des pythagoriciens pour lesquels toutes choses sont nombres. Les tout premiers schémas de géométrie arithmétique, où, par exemple, un carré se représente en quatre points, etc., ressemblent, vraiment, à des constellations; et réciproquement.” (Michel Serres, *Les origines de la géométrie*, Flammarion, 1993, p. 238)

Il faut remarquer, cependant, que les formes géométriques sont connues de toutes les civilisations humaines. Si l'on prend le carré, on le rencontre partout, de l'Afrique à l'Asie, en passant évidemment par l'Europe, et même son mode de construction par la règle et le compas. Du point de vue des isométries, la translation est ce que permet de réaliser la règle, la rotation ce qu'effectue le compas.

Les figures qui se conservent suivant des groupes particuliers d'isométries sont les polygones (et polyèdres) réguliers et les pavages. Nous n'approfondirons pas cette question à présent parce qu'elle fera l'objet d'un développement en II.3.1. Ces figures ont été abondamment exploitées en décoration, en architecture, etc., sans compter toutes les connotations symboliques qui y sont attachées.



116 Elie de Beaumont, *Réseau pentagonal*



117 Eugène Viollet-Le-Duc, *Rhombôèdres*



118 Eugène Viollet-le-Duc, *Le Tacul du mont Blanc, les Grands Mulets*

Géométrisation

On a même cherché à retrouver les figures géométriques là où elles n'avaient sans doute pas de raison d'être ; nous citerons quelques exemples géographiques.

“ « Nos montagnes, a-t-elle dit [la géologie], ne sont pas jetées *au hasard, comme les étoiles dans le ciel* ; elles forment des systèmes où l'on trouve les éléments d'une ordonnance générale *dont les constellations ne présentent aucune trace.* » [Elie de Beaumont]” (Jules Michelet, *La mer* [1861], Folio Gallimard, 1983, p. 61)

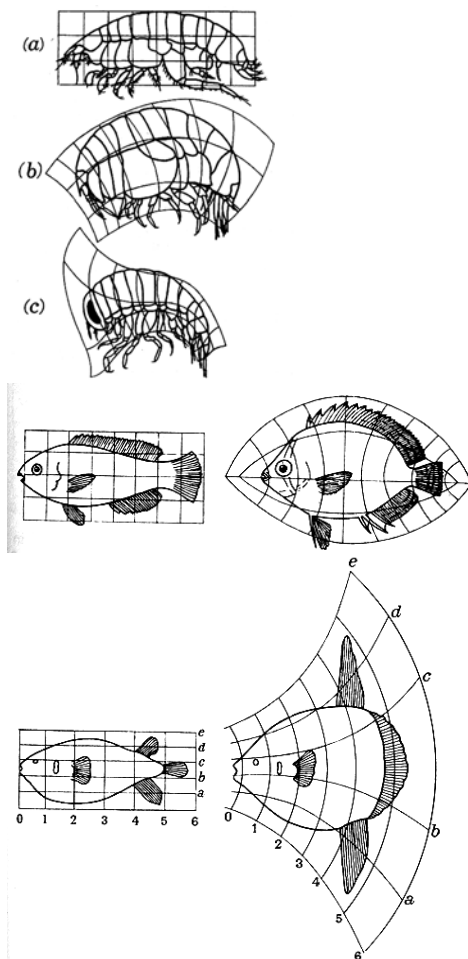
Elie de Beaumont, en effet, qui établit avec justesse que les montagnes n'ont pas toutes le même âge, imagina pour la structure globale du relief terrestre une structure géométrique un peu fantaisiste, le “réseau pentagonal” : il pensait que les déformations de l'écorce terrestre étaient alignées selon les grands cercles de la sphère, qui se coupaient pour former un réseau symétrique régulier, suivant la symétrie du dodécaèdre régulier (dont les faces sont des pentagones).

Dans le même ordre d'idée, mais à une autre échelle, Eugène Viollet-le-Duc croyait lui aussi à une géométrie sous-jacente aux reliefs :

“Il est fort heureux que la géométrie ait été inventée avant l'origine des mondes, car sans elle il eût été impossible de le former. Le hic était de revêtir un corps sphérique incandescent d'une croûte qui n'éclatât pas aussitôt refroidie. Paver la surface de cette sphère en fusion d'une infinité de cubes, c'était le moyen le plus simple, mais il présentait de graves dangers. Ainsi d'un cube on fait un rhomboèdre en formant de chacun des carrés qui composent ce cube un losange régulier, c'est-à-dire, dont la petite diagonale est égale à l'un des côtés – ainsi, à l'aide de ce solide qui n'est que la modification du cube, on peut former une croûte homogène, mais offrant des surfaces de glissement, au lieu de surfaces normales au centre de la sphère.” (in *Viollet-le-Duc et la montagne*, Glénat, 1993, p28)

Rappelons tout de même que si le rhomboèdre dont Viollet-le-Duc parle, qui est une déformation du cube selon sa grande diagonale, pave l'espace, il ne pave certainement pas la sphère...

Viollet-le-Duc nous a laissé, malgré ou grâce à sa vision “géométrisante” de la montagne, des peintures d'une grande précision, mais aussi, comme on dit, une grande sensibilité.



119 D'Arcy Thompson, *Transformations*

Forme et transformation

“Serait-il impossible d'étudier les transformations des formes animales (par exemple). mais “étudier” comment? J'entends: serait-il inutile de se représenter des transformations de formes animales? Et ce ne serait pourtant pas une branche de la zoologie. Alors ce serait une proposition mathématique (par exemple), que cette transformation transpose cette forme en cette autre (les formes et les transformations reconnaissables).” (Ludwig Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Gallimard, 1983, p. 200)

Nous ne savons pas si Wittgenstein connaissait les travaux de D'Arcy Thompson, il semble que non si l'on se fie à cette remarque. D'Arcy Thompson, dans *On Growth and Form*¹³, a effectivement introduit l'idée de *transformation* voire de *déformation* : ses figures montrant diverses espèces de poissons ou d'autres animaux se correspondant l'une l'autre par transformation de coordonnées sont souvent reproduites. Il faudrait d'ailleurs insister sur l'importance de ce livre, non seulement sur les biologistes et zoologistes, en particulier Stephen Jay Gould, mais aussi sur des chercheurs dans des domaines qui paraissent fort éloignés, comme Claude Lévi-Strauss :

“Dans l'ouvrage *De Près et de Loin*, le chapitre II (« Des qualités sensibles ») de la deuxième partie (« Les lois de l'esprit »), offre un ensemble de remarques très illuminantes sur la façon dont Claude Lévi-Strauss conçoit l'épistémologie du structuralisme et la situe dans l'histoire des idées. A une question de Didier Eribon concernant l'origine de la notion centrale de transformation :

« A qui l'aviez-vous empruntée ? Aux logiciens ? »,

Claude Lévi-Strauss répond en effet :

« Ni aux logiciens ni aux linguistes. Elle me vient d'un ouvrage qui a joué pour moi un rôle décisif et que j'ai lu pendant la guerre aux Etats-Unis : *On Growth and Form*, en deux volumes, de D'Arcy Wentworth Thompson, paru pour la première fois en 1917. L'auteur, naturaliste écossais, (...) interprétait comme des transformations les différences visibles entre les espèces ou organes animaux ou végétaux au sein d'un même genre. Ce fut une illumination, d'autant que j'allais vite m'apercevoir que cette façon de voir s'inscrivait dans une longue tradition : derrière Thompson, il y avait la botanique de Goethe, et derrière Goethe, Albert Dürer avec son *Traité de la proportion du corps humain*. » (p. 158-159)

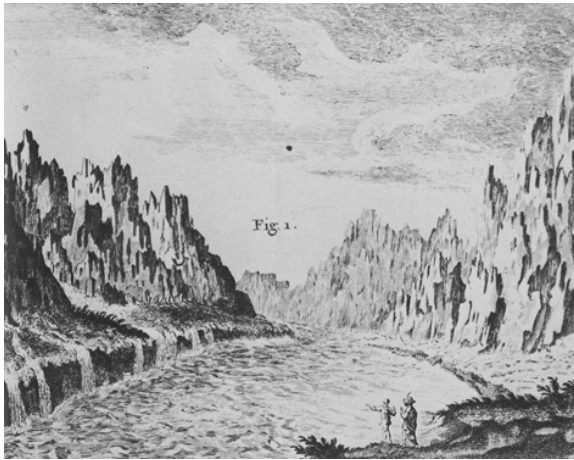
” (Jean Petitot, *Morphologie et esthétique*, Maisonneuve et Larose, 2004, p. 69)

Robert McCarter¹⁴ mentionne aussi, sans malheureusement approfondir cet apport, que le livre de D'Arcy Thompson était le “livre de chevet” du grand architecte Louis I. Kahn.

Les transformations de D'Arcy Thompson permettent de considérer les formes comment appartenant à un continu tel que nous l'avons défini dans la partie I, continu dont la dimension est le nombre de paramètres des transformations que nous décidons d'appliquer.

¹³ D'Arcy Wentworth Thompson, *Forme et croissance* [*On Growth and Form*, première publication en 1917], Seuil, 1994

¹⁴ Robert McCarter, *Louis I. Kahn*, Phaidon, 2005



120 Gravure de *L'Encyclopédie*, 1768

II.3.3 Vers les processus

Les montagnes ne sont pas des pyramides

On a vu la tentative de Viollet-le-Duc d'expliquer la structure des montagnes à l'aide de rhomboèdres. Son hypothèse ne l'empêchait pas d'avoir un regard très acéré sur le paysage, à la fois rigoureux, mais "réaliste", au sens où ses peintures nous semblent très proches d'une vision exacte, et en même temps très belle, de ces montagnes.

A d'autres époques, on a eu une vision beaucoup plus douteuse du même sujet. Ainsi, d'Holbach, dans *L'Encyclopédie*, a osé écrire : "Cet amas de pyramides ou de montagnes de glace ressemble à une mer agitée par les vents dont les flots auraient été subitement saisis par la gelée, ou plutôt on voit un amphithéâtre formé par un assemblage immense de tours ou de pyramides hexagones." (cité dans *Composer le paysage Constructions et crises de l'espace (1789-1992)* (Odile Marcel dir.), Editions Champ Vallon, 1989, p. 72)

Il paraît que d'Holbach n'était jamais allé sur place ; les voyages à la montagne n'étaient pas encore appréciés à l'époque. Il se fiait aux gravures telles que celles parues dans *L'Encyclopédie*, et qui montrent en effet des montagnes assez curieuses à nos yeux. On dessine ce que l'on veut bien voir.

La tentative de décrire les formes naturelles à l'aide des outils et des figures de la géométrie se heurte en fait à la réalité : pour paraphraser Benoît Mandelbrot, les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes ne sont pas des cônes, ni des pyramides, "hexagones" ou pas, etc.

Mesurer les formes naturelles se heurte aussi à une difficulté : par exemple mesurer la longueur d'un trait de côte suppose de connaître cette ligne à une certaine échelle. Si l'on adopte une échelle plus grande, une résolution des données plus fine, on obtient un autre résultat, et le problème est que cette suite de résultats ne converge pas, contrairement à ce qui se passe pour des courbes "normales".

Les formes naturelles résultent toutes d'un processus

Aucune forme naturelle n'a une forme achevée, définitive, statique : les êtres vivants naissent, croissent, vieillissent, meurent, et leur forme change tout le long de leur vie. D'Arcy Thompson, avant même d'aborder les transformations entre espèces que nous avons évoquées, a étudié ces processus en détails et en a rendu compte dans son livre *On Growth and Form*¹⁵. Cette transformation constante est régie, certes, par le code génétique de chacun de ces êtres, mais aussi par les contraintes de l'espace tel que nous l'avons défini, c'est-à-dire par la topologie, la géométrie, et par les forces en jeu (gravité et tension superficielle en particulier).

Ce processus de transformation de l'être vivant a un début et une fin : la naissance et la mort, pour l'animal, ou, plus précisément pour tous les êtres biologiques, la première cellule, unique, et la mort. La cellule elle-même doit bien apparaître, se *former*, un jour, elle a elle-même un temps de vie limité

¹⁵ *op. cit.*

(nous perdons tous les jours un certain nombre de cellules, tandis que d'autres apparaissent) ; il faudrait remonter aux molécules, aux atomes, qui composent ces cellules, pour décrire un processus complet : nous possédons dans notre corps des molécules qui ont existé avant nous, et qui persisteront après ; il faut même, puisque ces atomes, ces molécules, peuvent également se transformer, faire appel aux particules élémentaires pour trouver ce qui est inchangé dans ce processus continu : la recherche de l'atome, de l'insécable, n'est pas seulement la recherche de ce qui ne peut se diviser, se couper, mais c'est aussi la recherche de ce qui *persiste* à travers toutes les transformations, toutes les recombinaisons, du processus incessant qui, en fin de compte, *constitue* le temps.

Bien, sûr, certaines parties des êtres vivants conservent leur forme plus d'autres ; les os fossilisés (mais ils ne sont plus vivants) peuvent garder leur forme très longtemps. Toujours est-il qu'ils se sont formés au cours d'un processus.

Les formes naturelles non vivantes, "inorganiques", se transforment continuellement aussi : les montagnes ne sont pas telles qu'elles sont depuis l'origine des temps, elles se sont formées, puis érodées (et parfois ont subi de nouveau de grandes transformations) ; les rivières et les glaciers creusent leur lit ; la mer érode et transforme le littoral, etc. ; des dunes se construisent et s'effacent ; et même, à tout moment dans le ciel, les nuages se forment et se déforment...

Certaines de ces formes évoluent plus vite que d'autres, et nous sommes plus ou moins conscients de leur transformation suivant l'échelle temporelle de celle-ci par rapport à notre sentiment propre de la durée (qui est lié à notre laps¹⁶ de vie) : nous pouvons voir un nuage se déformer, même s'il est difficile d'en percevoir vraiment l'apparition ; nous voyons pousser les plantes, ou du moins nous en voyons des états différents à des moments assez rapprochés, plus ou moins rapprochés d'ailleurs (certains arbres ne nous paraissent pas beaucoup changer, mais les bambous poussent à une vitesse étonnante) ; nous constatons la croissance de nos enfants, bien que d'un jour sur l'autre, nous ne la voyions pas. Mais il n'a pas été aussi évident de se persuader que les montagnes, par exemple, n'étaient pas là de toute éternité. Au XVIII^{ème} siècle, une controverse (au sujet de la présence paradoxale de fossiles marins sur les montagnes) opposait encore les neptunistes, qui pensaient que les montagnes étaient là depuis toujours, mais que le niveau de l'océan avait varié, et les plutonistes, qui pensaient que c'étaient des mouvements (comme ils en observaient encore avec les volcans et les tremblements de terre) qui avaient modifié, et modifiaient encore, la surface de la terre¹⁷. Ces

¹⁶ mot emprunté au latin *lapsus* : "tout mouvement de glissement, d'écoulement, de course rapide", source : <http://www.cnrtl.fr>

¹⁷ "The Plutonists also raised awkward questions about where all the water went when it wasn't in flood. If there was enough of it at times to cover the Alps, then, where, pray, was it during times of tranquility, such as now ?" (Bill Bryson, *A Short History of Nearly Everything*, Broadway Books, 2003, p. 64-65) Trad. : "Les plutonistes soulevaient aussi des questions délicates à propos d'où allait toute cette eau quand elle n'était pas en crue. S'il y

questions se posent et sont difficiles à résoudre (la tectonique des plaques est une découverte très récente) en partie parce que l'échelle temporelle de ces phénomènes est incommensurable à la nôtre. Et la même remarque peut être faite au sujet de la théorie de l'évolution.

Certaines formes, qui sont des formes de mouvement, nous ont encore plus longtemps paru stables : la révolution de la Lune autour de la Terre, la rotation de la Terre sur elle-même, sa trajectoire elliptique autour du soleil, par exemple ; tous ces phénomènes nous ont même servi, nous servent encore au quotidien, à *mesurer* le temps. Or, la paléo-géologie, l'examen en particulier des "rhythmites" (les rhythmites sont des couches alternées de sable et de vase déposées au large des estuaires ayant de grands flux dus aux marées ; rappelons que les océans sont apparus sur la Terre il y a 4,5 milliards d'années) a montré qu'il y a 620 millions d'années, le jour faisait $21,9 \pm 0,4$ heures, et qu'il y avait $13,1 \pm 0,1$ lunaison par an et 400 ± 7 jours solaires par année¹⁸. Ce que nous appelons jour, année, n'avaient pas la même durée absolue il y a, par exemple, quelques dizaines de millions d'années, au temps qui nous semble relativement familier des dinosaures¹⁹. La Terre elle-même est apparue il y a 4,554 milliards d'années, elle disparaîtra un jour, mais le soleil lui-même a un âge (à peu près le même que la Terre, d'ailleurs, 4,6 milliards d'années), et une fin prévisible, estimée aujourd'hui à un âge de 10 milliards d'années... Mais ces phénomènes sont incommensurables, non seulement à notre durée de vie personnelle, mais à celle de l'espèce humaine, et même à celle de la vie sur Terre.

Principe de similitude

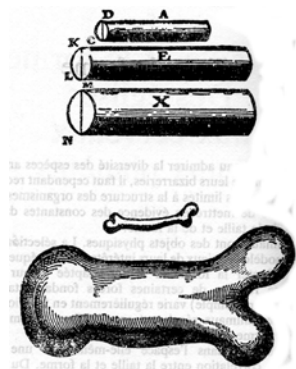
On considérera comme *croissance*, non seulement la croissance d'un spécimen de forme, mais la comparaison entre spécimens de taille différente ; pour les espèces vivantes, on comparera le jeune et l'adulte, la pousse et la plante à maturité, etc. ; mais aussi tel animal et tel autre plus grand, telle plante et telle autre plante plus grande.

La croissance d'une forme tri-dimensionnelle implique trois types de mesures, se référant chacune à une dimension, on dit aussi "puissance" différente : ses mesures linéaires, i. e. sa longueur, sa largeur, son rayon, etc. sur lesquelles on fonde la mesure de la croissance (si une forme est deux fois plus grande, c'est que ses mesures linéaires sont deux fois plus grandes) ; sa surface, qui est proportionnelle au *carré* (dimension ou puissance 2) de ses mesures linéaires ; et son volume, qui est

en avait assez à un moment pour couvrir les Alpes, alors, où, dites-moi, était-elle dans les périodes de tranquillité, comme maintenant ?"

¹⁸ source : wikipedia : Tidal acceleration

¹⁹ La rotation de la Terre sur elle-même ralentit graduellement, ce qui fait que la longueur du jour terrestre augmente d'à peu près 17 microsecondes par an, ce qui rallonge chaque jour terrestre d'une seconde tous les 60000 ans, d'une minute tous les quatre millions d'années, de quatre heures en un milliard d'années ; le jour ne faisait que 23 de nos heures au temps des dinosaures, il y a 65 millions d'années. Source : wikipedia : orbit of the Moon



121 Galilée, *Dessin*



122 Bourgeon initial d'un palétuvier et un fourré d'arbres adultes

proportionnel au *cube* (dimension ou puissance 3) de ses mesures linéaires. Croître homothétiquement, pour une forme, signifie qu'elle reste semblable (au sens de similitude géométrique) à elle-même, que sa surface croît comme le carré de sa longueur, et son volume comme le cube de ce nombre. Or, les forces et contraintes que subissent les formes n'agissent pas toutes sur les mêmes dimensions de mesures : la gravité agit sur le volume (dimension 3) ; la résistance d'une tige est fonction de l'aire de sa section (dimension 2) ; la quantité des échanges avec le milieu est proportionnelle à l'aire de la surface (dimension 2), etc.

Certaines formes croissent homothétiquement : les fruits croissent en conservant une forme plus ou moins semblable ; mais leur pédoncule, qui doit supporter leur poids (qui croît comme le volume, dimension 3), a une résistance proportionnelle à sa section (dimension 2) : le fruit finit par tomber, et d'ailleurs les plus gros fruits (les melons, les potirons etc.), poussent au ras du sol.

Dans la nature, et face à diverses forces et contraintes, la plupart des formes ne croissent pas homothétiquement. Galilée avait déjà remarqué que l'os d'éléphant n'est pas homothétique de celui de la souris ; les os doivent supporter des contraintes liées à la gravité (et proportionnelles au volume) : l'os d'éléphant est plus "compact", plus "épais", que celui de la souris. Ceci a une incidence sur la forme générale des individus : l'éléphant dans sa forme générale est plus compact, plus épais, aussi que la souris.

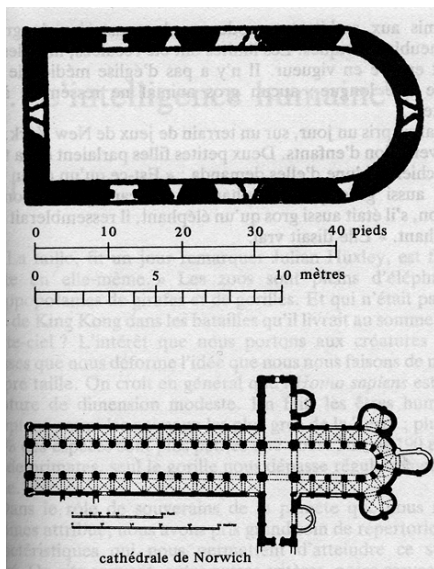
Mais d'autres contraintes peuvent faire aller dans l'autre sens. Les plantes, qui n'ont pas tant à lutter contre la gravité qu'à maintenir des échanges avec le milieu extérieur (l'air pour la partie supérieure, la terre pour les racines) vont se complexifier, augmenter leur surface par rapport à leur volume, par l'adjonction de branches, de racines.

Les deux phénomènes peuvent coexister, face à des contraintes contradictoires : l'éléphant est compact pour ne pas se casser les os sous son propre poids, mais il a de grandes oreilles aplaties, pour néanmoins augmenter les échanges avec l'air ; l'arbre adulte a développé des branches et des racines, ce qui augmente ses échanges avec le milieu, mais il a épaissi son tronc et ses branches, ce qui lui permet de rester debout. Ceci a des limites : un gros arbre pourra finir par s'effondrer ; l'éléphant doit trouver d'autres moyens de maintenir sa température, comme en s'aspergeant de boue.

Les animaux marins n'ont pas autant à lutter contre la gravité que les animaux terrestres ; D'Arcy Thompson, note :

"L'éléphant et l'hippopotame sont patauds parce que lourds, et un élan est nécessairement moins gracieux qu'une gazelle. Il est du plus haut intérêt, en revanche, de constater combien sont proches les proportions des squelettes — y compris les os des membres - d'un petit marsouin et d'une grande baleine ; cela résulte du fait que ces deux organismes sont presque totalement soustraits à l'action de la gravité." (D'Arcy Wentworth Thompson, [On Growth and Form, première publication en 1917] *Forme et croissance*, Seuil, 1994, p. 47)

On appelle "principe de similitude", les lois auxquelles sont soumises les formes suivant leur taille.



123 Eglise de Little Tey (17 m de long) et cathédrale de Norwich (135 m de long)

C'est dans un livre de vulgarisation de la théorie de l'évolution, *Darwin et les grandes énigmes de la vie*²⁰, par Stephen Jay Gould, que l'on trouve à deux pages de distance le dessin de Galilée et une illustration montrant deux églises médiévales de taille très différente. Les références à la nature, à l'organicité sont fréquentes en architecture, nous n'y reviendrons pas. Mais il n'est pas sûr que la question de la forme en fonction de la taille ait été étudiée suffisamment.

Obéissance à une loi, opération et processus

Un cercle peut être défini par une obéissance à une loi : tous les points qui sont équidistants d'un point appelé centre ; il peut être défini aussi comme le résultat d'une opération : tous les points obtenus par rotation d'un point autour d'un point appelé centre (ce que l'on fait lorsque l'on utilise un compas) ; il peut enfin être défini comme le résultat d'un processus : par exemple, comme la limite de la suite des polygones réguliers (inscrits dans le même cercle) de nombres de côtés successivement égaux par exemple à 3, 6, 12, etc. jusqu'à l'infini.

Une variante consiste à considérer que le cercle est compris entre deux polygones réguliers à n cotés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, et que cet encadrement tend à être de plus en plus "serré" : c'est de cette manière qu'Archimède détermina une approximation du rapport du périmètre au diamètre du cercle que l'on appelle π .



La recherche d'une valeur approximative pratique de ce nombre irrationnel a beaucoup occupé les esprits, comme l'on sait

L'idée de processus infini est aussi à l'œuvre dans le fameux paradoxe de Zénon d'Elée : une flèche n'atteint jamais sa cible puisque, avant cela, il faudrait qu'elle arrive à mi-chemin, et encore avant au milieu de cette première moitié de son parcours, etc. Ce qui est paradoxal puisque, en Gr  ce comme ailleurs, les flèches n'atteignent peut-être pas toujours leur cible prévue, mais elles arrivent tout de même bien toujours quelque part... Le paradoxe s'évanouit dès que l'on maîtrise un tant soit peu le calcul infinitésimal : traduit en termes mathématiques, et en supposant un mobile affecté de la vitesse $v = 1$, le problème traite tout d'abord de la convergence de la suite $1, 1/2, 1/4, \dots, 1/2^n$, etc. , n tendant vers l'infini, et de celle de la série $1/2 + 1/4 + \dots + 1/2^n + \text{etc.}$, n tendant vers l'infini (une

²⁰ Stephen Jay Gould, *Darwin et les grandes énigmes de la vie*, Points Sciences Seuil, 1979.

série est la somme des termes d'une suite). Or, il est facile (maintenant) de montrer que la première tend vers 0, et la deuxième vers 1.

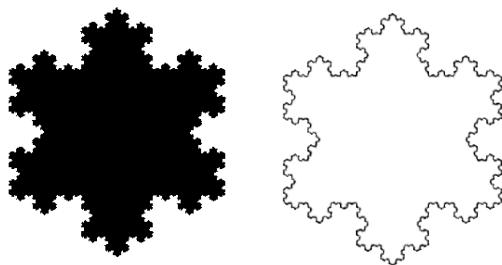
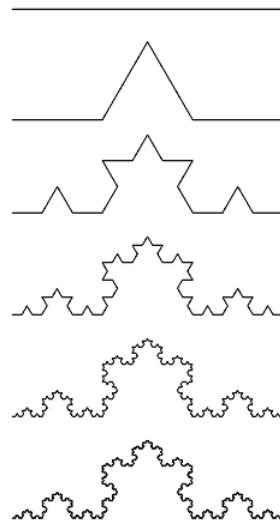
Encore qu'il faille faire attention ! Il est aisé en effet de croire montrer que $\sqrt{2} = 2$ par un raisonnement analogue : pour aller d'un point A à un point B situés aux extrémités de la diagonale d'un carré, je peux tout aussi bien aller par les côtés (en passant par C) : ce parcours est de longueur 2 ; mais je peux le remplacer par les deux parcours équivalents qui s'appuient sur les deux demi-diagonales, puis par les 4 parcours s'appuyant sur les quarts de diagonale, etc. La vision de la figure est en l'occurrence mauvaise conseillère : elle tend à nous faire croire qu'à la limite cette suite parcours est équivalente à la diagonale, et que comme à chaque étape la longueur de ce parcours en ligne brisée est égale à 2, la diagonale est elle-même de longueur 2. La détermination de la longueur de la diagonale du carré ayant occupé les esprits au moins autant que celle de π , cette question est importante (bien que personne n'ait prétendu que la longueur de la diagonale du carré de côté est égale à 2, parce qu'il est assez évident qu'elle ne l'est pas ; ce remplacement de la distance euclidienne par la distance dite "manhattan" choque nos esprits).

Alors, où est l'erreur dans ce cas ? Elle consiste à ignorer que, aussi petit que soit le segment de diagonale considéré, le détour par les côtés du carré est toujours plus long, et toujours dans le même rapport (qui se trouve être, justement $\sqrt{2}$). Pour la valeur de π , nous n'avons pas ce problème, parce que le rapport entre l'arc et sa corde n'est pas constant, mais diminue avec l'angle ; et même Archimède avait pris la précaution, non pas d'envisager la limite d'une seule série, mais d'*encadrer* le cercle par des polygones inscrits et circonscrits. Comme le périmètre du cercle est à la fois supérieur à celui du polygone extérieur (de manière évidente, puisque la ligne droite est le plus court chemin entre deux points), et inférieur à celui du polygone intérieur (pour la même raison), on est assuré de la convergence.

Une suite peut converger, ce qui veut dire qu'elle a une limite finie (ex : 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, ..., $1/2^n$ qui converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini) ; elle peut diverger, ce qui veut dire qu'elle tend vers l'infini (ex : 1, 2, 4, ..., 2^n qui tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini), ou elle peut ne pas converger, sans pour autant tendre vers l'infini (ex : 1, -1, 1, -1, ..., $(-1)^n$, qui oscille entre -1 et 1). Dans tous les cas où une suite ne diverge pas, nous dirons qu'elle possède un *attracteur*, cet attracteur pouvant être un unique point (limite), ou un ensemble plus complexe.

Des figures monstrueuses : la courbe de von Koch et le triangle de Sierpinski

La courbe de von Koch a été inventée par le mathématicien suédois Helge von Koch (1870-1924) ; il en est question dans un article paru en 1904, en français, intitulé "Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire" : le titre explicite bien la démarche, il s'agissait de prouver qu'il était possible de construire une courbe continue *non dérivable*, sujet qui



était l'objet de polémiques entre mathématiciens de l'époque²¹. Toutes les courbes *fractales* (le mot n'existait pas à l'époque) qui ont été inventées à la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e l'ont été pour ce même type de raisons, et n'ont eu aucune audience en-dehors d'un cercle assez fermé de mathématiciens avant d'être exhumées par Benoît Mandelbrot, mathématicien franco-américain né en Pologne (l'année même d'ailleurs de la mort de von Koch), et présentées au grand public dans son ouvrage *Les objets fractals Forme, hasard et dimension* (Flammarion, 1975).

La construction de la courbe de von Koch est souvent présentée en démarrant d'un triangle équilatéral : de chacun de ses côtés, on ôte le tiers central que l'on remplace par deux segments qui formeraient avec ce segment ôté un triangle équilatéral ; puis on fait subir le même traitement à tous les segments ainsi obtenus ; etc. jusqu'à l'infini. Nous présentons la construction en partant d'un simple segment, pour des raisons de cohérence avec les développements de notre troisième partie.

La construction de la courbe de von Koch est un *processus* : on ne peut pas définir cette courbe autrement qu'en décrivant une *itération infinie* d'opérations ; on peut aussi dire que ce processus est *récuratif*, c'est-à-dire que l'on pratique la même opération sur les résultats d'une certaine opération obtenus à l'étape précédente : en programmation, cela veut dire que l'on fabrique une fonction *qui s'appelle elle-même* (c'est en tout cas une manière de générer la courbe de von Koch, qui n'est d'ailleurs pas celle que nous mettrons en œuvre) ; la courbe de von Koch est auto-définie, chacune de ses parties est identique à la figure totale à l'échelle près : nous reviendrons longuement sur cette particularité, nommé *auto-similarité*, dans la partie III.

Pour l'instant, et en-dehors du fait qu'elle est à la fois continue et non dérivable (ce qui n'intéresse pas les non-mathématiciens), voyons ce que cette courbe a de *monstrueux* ; cela concerne sa longueur l , et la distance entre ses deux extrémités d (considérons les étapes n et $n+1$ de la construction) :

$$l_{n+1} = 4/3 l_n$$

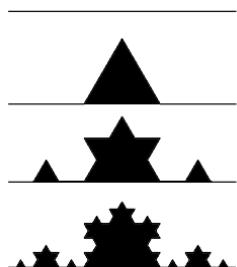
A chaque étape, la longueur de la courbe est multipliée par un nombre supérieur à 1 ; cela signifie que lorsque n tend vers l'infini, on a également :

$$l \rightarrow \infty$$

Alors que, par construction d reste constante.

Lorsque l'on présente la courbe de von Koch en démarrant avec un triangle équilatéral, obtient le contour ci-contre, qui entoure une portion de plan, et l'on peut considérer alors non seulement la longueur de son périmètre (qui tend vers l'infini, comme nous l'avons vu), mais aussi l'aire a de la surface enclose par ce contour ; on voit immédiatement que la surface enclose par cette ligne de

²¹ Ainsi Poincaré écrit : "Nous savons qu'il existe des *fonctions* continues dépourvues de dérivées. Rien de plus choquant pour l'intuition que cette proposition qui nous est imposée par la logique. Nos pères n'auraient pas manqué de dire : « Il est évident que toute *fonction* continue a une dérivée, puisque toute courbe a une tangente. »" (Henri Poincaré, *La valeur de la science*, Flammarion, 1905, p. 17)



longueur infinie est bornée, mais on peut conforter cette intuition par le calcul. Posons l'aire du triangle équilatéral de départ égale à 1, et regardons ce que l'on ajoute sur chaque côté de ce triangle à chaque étape : d'abord 1 triangle d'aire $1/9$, puis 4 triangles d'aire $1/81$, puis 16 triangles d'aire $1/(81 \times 9)$, etc. ; comme on ajoute cela sur les 3 côtés du triangle de départ, on a :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = a_0 + 3 (1/9)$$

$$a_2 = a_1 + 3 (4/81)$$

$$a_{n+1} = a_n + 3 (4^{n-1} / 9^n) = 1 + 3/4 \sum (4/9)^n$$

$\sum (4/9)^n$ est une série géométrique, de raison inférieure à 1 ; donc elle converge vers $1 / (1 - 4/9) = 5/9$; et l'aire totale du flocon de Koch est égale à $1 + 5/12$ (environ 1,41...).

L'important c'est que l'aire reste finie, alors que le périmètre tend vers l'infini : c'est ce qui fait du flocon de Koch un monstre aux yeux des mathématiciens.

La construction classique de la courbe de von Koch est un modèle de *complexification* ; mais on peut considérer ce processus de deux autres points de vue, comme un *pli*, et comme un processus de *croissance* (Planche 3)

Il a été, il sera encore, beaucoup question du *pli* dans ce travail, et comme nous considérerons la courbe de von Koch comme un archétype du pli récursif, il faut préciser cette notion : au sens strict, le pli implique que la longueur de la ligne ne change pas (c'est le processus montré au centre de la planche) ; cependant, à l'échelle près, les deux processus sont identiques. *Nous étendrons, dans toute la suite de ce travail, la définition du "pli", à des processus de complexification tels que celui de la courbe de von Koch, voire à des processus de croissance (comme celui montré à droite Planche 3).*

On peut comparer, pour les trois cas, d'une part l'évolution de la longueur propre l de la courbe, et d'autre part la distance d entre les extrémités de la courbe ; dans tous les cas $l / d = 4/3$:

complexification : l est multipliée par $4/3$ à chaque étape et tend vers l'infini ; d est constante ;

pli : l est constante ; d est multipliée par $3/4$ et tend vers 0

croissance : l est multipliée par 4 à chaque étape et tend vers l'infini ; d est multipliée par 3 à chaque étape et tend aussi vers l'infini (mais "moins vite", si l'on peut dire) ;

L'autre courbe "monstrueuse" que laquelle nous allons nous arrêter est le triangle de Sierpinski, du nom du mathématicien polonais Waclaw Sierpinski (1882-1969), qui la présenta dans un article (en français lui aussi, apparemment le français était la langue des mathématiciens à l'époque...) intitulé "Sur une courbe dont tout point est un point de ramification" en 1915. Sa préoccupation était purement mathématique, exprimée dans le titre de l'article.

En anglais on l'appelle Sierpinski *gasket*, c'est-à-dire *joint de culasse* de Sierpinski ; l'expression n'est pas très heureuse en français, même si l'analogie a sa valeur : un joint de culasse est une pièce métallique trouée, avec un trou principal et de plus petits trous autour.
Telle est en effet la construction du triangle de Sierpinski : on part d'un triangle (équilatéral) rempli, on ôte le triangle central, puis on effectue la même opération sur les 3 triangles restants, etc. :



Là aussi, on retrouve le même type de paradoxes que dans le cas de la courbe de von Koch : si le côté du triangle de départ vaut 1, le périmètre p de cette figure évolue de la façon suivante :

$$p_0 = 3$$

$$p_1 = 3 + 3/2$$

$$p_2 = 3 + 3/2 + 9/4$$

$$p_n = 3 + \sum (3/2)^n$$

Il s'agit d'une série géométrique de raison supérieure à 1; elle ne converge donc pas mais tend vers l'infini. Par contre, l'aire évolue ainsi :

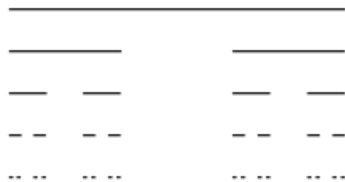
$$a_0 = \sqrt{3}/4$$

$$a_1 = 3/4 a_0$$

$$a_2 = 9/8 a_0$$

$$a_n = (3/4)^n a_0$$

$(3/4)^n$ est une suite géométrique, de raison inférieure à 1; elle tend donc vers 0, de même que l'aire de la figure.

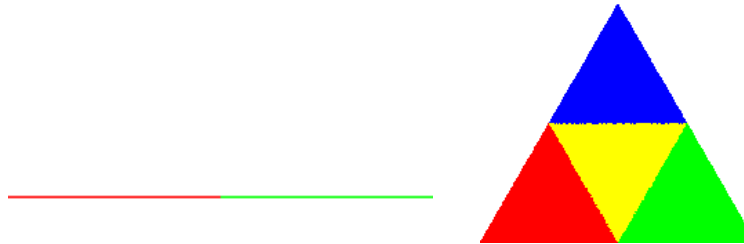
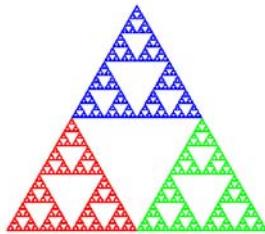


On peut faire beaucoup de variantes du triangle de Sierpinski, comme le *tapis* de Sierpinski (en partant du carré rempli), que nous verrons plus loin ; la “poussière de Cantor”, du nom du mathématicien allemand Georg Cantor (1845-1918), est une construction analogue fondée sur le segment auquel on ôte (sans le remplacer par rien) le tiers du milieu.

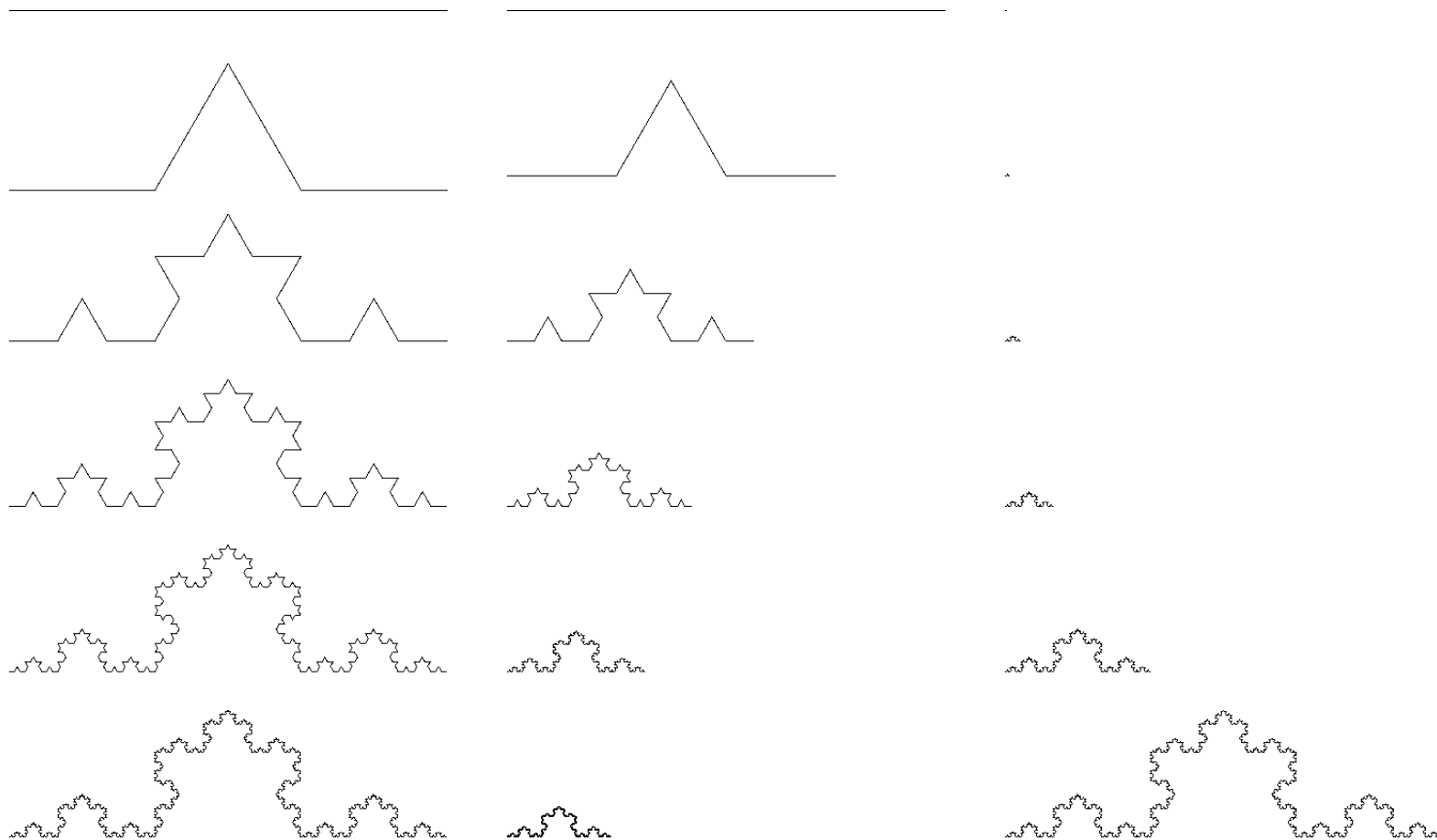


La caractéristique principale de ces deux figures, la courbe de von Koch et le triangle de Sierpinsky, et de leurs variantes, est l'auto-similarité : elles sont composées de figures identiques à elles-mêmes à l'échelle près.

Ce n'est d'ailleurs pas une caractéristique des figures fractales, puisque c'est le cas aussi du segment et du triangle équilatéral, par exemple :



Nous reviendrons en détail sur toutes ces questions, dans la partie III sur les processus.



La courbe de von Koch : construction classique (complexification) ; pli ; croissance

d = distance entre les extrémités l = longueur de la courbe (dans tous les cas $l/d = 4/3$)

$$l_{n+1} = 4/3 l_n \quad l \rightarrow \infty$$

d est constante

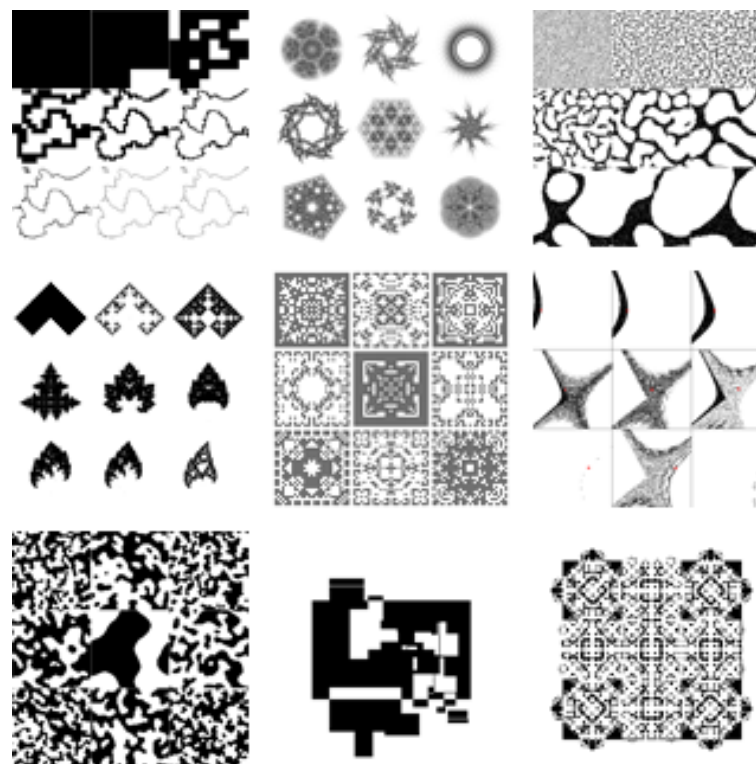
l est constante

$$d_{n+1} = 3/4 d_n \quad d \rightarrow 0$$

$$l_{n+1} = 4 l_n \quad l \rightarrow \infty$$

$$d_{n+1} = 3 d_n \quad d \rightarrow \infty$$

III Processus



III.1 Espaces numériques

Pour mettre en œuvre les processus de génération de formes que nous allons décrire, et même s'ils peuvent se concevoir en s'appuyant sur le monde matériel (ou du moins perçu) ou sur l'univers mathématique, il faut utiliser l'informatique. Notre "terrain" est donc l'espace numérique, ou plutôt les espaces numériques. Nous utilisons le logiciel 3DstudioMax, qui est un logiciel destiné à la modélisation et à la visualisation de scènes tridimensionnelles. Mais nous travaillons essentiellement à travers son langage de programmation, MaxScript, avec lequel il est aussi possible de générer des images, ou plutôt des *bitmaps*, simplement en affectant les pixels d'une certaine couleur : c'est cette fonctionnalité que nous utilisons en majorité.

III.1.1 Des espaces discrets et contigus

Continu et discret contigu

Un ensemble *discret*, au sens mathématique du terme est un ensemble d'éléments tous distincts, tous discernables. L'ensemble des nombres entiers naturels est un ensemble discret, chaque élément est distinct de son successeur. Ce n'est pas le cas de l'ensemble des nombres réels, puisque si l'on croit tenir le successeur d'un nombre réel, l'on sait qu'il y a encore un autre nombre entre eux.... Un synonyme de discret est d'ailleurs "dénombrable", ou discontinu. Le discret s'oppose donc *a priori* au continu.

Par ailleurs, la contiguïté, propriété de "ce qui touche à", de "ce qui est voisin de", sans intervalle, paraît être inhérente au continu. L'indiscernabilité que nous avons employée pour définir un continu est un autre mot pour la contiguïté : deux points de l'espace du poids se "touchent" lorsque, bien qu'objectivement différents (si nous les pesions avec une balance de précision), nous ne les distinguons pas. Mais on peut dire que deux nombres entiers successifs sont contigus aussi parce qu'ils se "touchent" d'une certaine façon : on ne peut pas insérer un autre nombre entier entre 2 et 3, par exemple. L'ensemble des nombres entiers est contigu ; par contre l'ensemble $\{1,2,5,7,8\}$ n'est pas contigu, parce qu'entre 2 et 5, et entre 5 et 7, il y a un "trou", un saut, et qu'on pourrait insérer des nombres entiers dans ces trous.

Le paradoxe, c'est que la *représentation* d'un continu empirique est un ensemble discret *et* contigu. Nous ne pourrions pas représenter un continu en tant que tel : pris deux à deux, tous ses éléments sont indiscernables. Le langage, déjà, opère une discrétisation dans le continu : léger, lourd, ou rouge, bleu, orangé, violet, ces mots pouvant être agrémentés de locutions permettant d'affiner la résolution de la discrétisation. La discrétisation contiguë correspond à notre *usage* de la mesure, avec le degré de précision exigé dans telle ou telle circonstance : une balance de cuisine discrétise tous les 5g, un pèse-personne tous les 100g. Dans les deux cas, l'instrument excède la précision de la sensibilité humaine : on ne peut pas distinguer entre 95g et 100g de sucre, ni entre deux enfants de 12,3 et 12,4 kg. D'une

autre côté, il serait gênant qu'une balance de cuisine discrétise tous les 100g, et inutile qu'un pèse-personne le fasse tous les 5g.

La représentation du continu empirique par un ensemble discret contigu est donc ce qui se passe avec une balance à affichage numérique : les nombres affichés ne sont pas les nombres réels (ils ne sont donc pas la "vraie" mesure du poids (ou de la masse) de l'objet), il y a toujours une limite aux décimales affichée. L'espace numérique, discret et contigu, du moment que la discrétisation excède la sensibilité humaine, est une bonne représentation du continu empirique.

Nombres

Les nombres des mathématiciens sont les nombres *réels*, dont font partie, par ordre de "difficulté", les nombres *entiers* (0, 1, 2, 3, etc.), les nombres *rationnels* (fractions dont le numérateur et le dénominateur sont tous deux des entiers : $2/3$, $22/7$, $23578/12785$, etc...), puis les "irrationnels" qui sont tous les nombres qui *ne peuvent pas* s'exprimer sous la forme d'un rapport d'entiers, parmi lesquels on trouve les nombres *algébriques*, c'est-à-dire racines d'un polynôme à coefficients entiers (comme $\sqrt{2}$, racine de $x^2 = 2$), et les nombres qui ne sont pas algébriques, et que l'on appelle *transcendants* (comme π). La plupart des nombres réels sont d'ailleurs des nombres transcendants. A toutes ces définitions et exemples, il convient bien sûr d'ajouter à la liste les mêmes avec le signe moins (négatifs).

A côté des nombres en eux-mêmes, il y a la question de leur représentation, de leur *écriture*. L'humanité a choisi depuis un certain temps de représenter les nombres en utilisant la base 10, c'est-à-dire les chiffres de 0 à 9. On a introduit un certain nombre de notations, comme la barre de fraction, ou comme le fait de mettre "en exposant" le nombre de fois que l'on multiplie un nombre par lui-même¹, ou des lettres grecques, comme π , qui permettent d'économiser le papier. Mais pour écrire "exactement" un nombre, il faut pouvoir l'écrire comme une suite de chiffres avec, éventuellement, une virgule (qui a un rapport avec l'exponentiation, puisque 1,234 et $1234 \cdot 10^{-3}$ sont des écritures différentes d'un même nombre) : c'est ce que l'on appelle le développement décimal d'un nombre. Ce développement peut être limité (1 ; 1,2 ; 413,23524), ou illimité ; dans ce deuxième cas, il est périodique (c'est-à-dire que les chiffres se répètent par séquences) si le nombre est rationnel, non périodique s'il est irrationnel. Les nombres "décimaux" sont ceux qui ont un développement décimal

¹ Notation particulièrement efficace si l'on en juge par cette histoire : "Il y a quelques années, Morellet a essayé de le décourager [d'écrire tous les chiffres d'une factorielle, en l'occurrence 76!] en lui apprenant que le nombre qui s'écrit 99^9 , c'est-à-dire neuf puissance neuf à la puissance neuf, qui est le plus grand nombre que l'on puisse écrire en se servant de trois chiffres, aurait, si on l'écrivait en entier, trois cent soixante-neuf millions de chiffres, qu'à raison d'un chiffre par seconde, on en aurait pour onze ans à l'écrire, et qu'en comptant deux chiffres par centimètre, le nombre aurait mille huit cent quarante-cinq kilomètres de long !" (Georges Perec, *La Vie mode d'emploi*, Hachette, 1978, p. 86).

limité ; aucun nombre irrationnel n'est un nombre décimal, mais un nombre peut ne pas être décimal tout en étant rationnel, et même très simple : $1/3$ (1 divisé par 3), nombre bénin s'il en est, s'écrit 0,33333333..., avec une infinité de 3 après la virgule (c'est un développement périodique puisque les 3 se répètent), et n'est donc pas un nombre décimal. On voit que cette notion dépend en partie de la base de numération choisie : $1/3$ s'écrit très simplement 0,1 en base 3. Toujours est-il que les nombres irrationnels ne peuvent eux s'écrire de manière finie dans aucune base de numération. Faut-il rappeler que les nombres irrationnels constituent l'immense majorité des nombres réels ?

Pour un ordinateur, la base de numération n'est pas la base 10, mais la base 2 ; tout nombre doit donc pouvoir s'écrire avec un nombre fini de 0 et de 1, plus éventuellement la virgule². On sait que les capacités de mémoire d'un ordinateur sont grandes, mais elles ne sont pas infinies, et donc pour beaucoup de nombres, on utilise une troncature ou une approximation. Même pour les nombres entiers, il existe une limite supérieure à la capacité de stockage d'un ordinateur.

Les entiers dans Maxscript sont compris entre $-2\,147\,483\,648$ et $2\,147\,483\,647$; les “flottants” sont compris entre $1,18 \times 10^{-38}$ et $3,40 \times 10^{38}$, avec une précision de $1/10^7$. On voit qu'on ne pourrait écrire le nombre de la population mondiale à l'aide d'un entier, ni le nombre d'atomes de l'univers (de l'ordre de 10^{60}) même avec un “flottant”... Ces limitations peuvent avoir des conséquences néfastes sur le fonctionnement de certains programmes (surtout les problèmes d'arrondi). Il ne faut surtout pas tenter d'extrapoler à partir de résultats obtenus dans cet espace numérique particulier et en tirer des conclusions sur les nombres réels, par exemple, du moins sans précautions.

Image et bitmap

Nous vivons dans un univers d'images, dont beaucoup sont aujourd'hui des images numériques ; nous prendrons la précaution de bien distinguer l'image, au sens général, de son homologue numérique, que nous appellerons *bitmap*. Il existe bien une semi-traduction : image “raster”, et une expression : “image matricielle”, mais le mot *bitmap* est plus rapide et plus explicite : un *bitmap* est un tableau (ou une matrice, ou encore une “carte” : *map*) de *pixels* (de *picture element*, élément d'image).

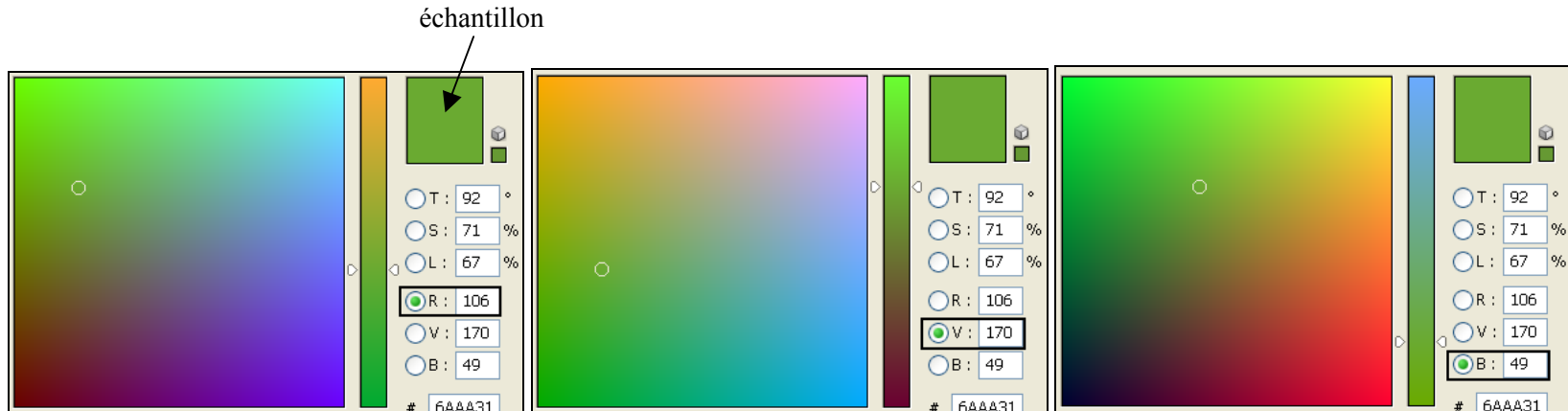
Un *bitmap* est fondé sur une trame orthogonale dont la largeur et la hauteur sont variables : 1024×768 pixels, par exemple. Chaque pixel est référencé dans cette trame par ses coordonnées. Les pixels se touchent, un *bitmap* est donc un espace 2D, fini, discret et contigu. La “résolution” est un rapport entre la taille du *bitmap* en pixels et sa taille sur le support sur lequel on le voit ; les pixels n'ont pas de “taille” en eux-mêmes, ils sont juste des éléments d'information avec des coordonnées ; mais si on visualise un *bitmap* sur un écran, le pixel aura la taille de l'élément de base de l'écran (entre 0,18 et

² en jargon informatique, on appelle ces représentations (approximations) des nombres réels, des nombres “flottants”, ou plus exactement en français des nombres “à virgule flottante”, c'est-à-dire tout simplement des nombres “à virgule” ; en anglais, le signe séparant la partie entière de la partie fractionnaire étant le point, l'expression est “floating point”.

0,66 mm suivant les écrans) et si on l'imprime, il aura la taille de l'élément de base de l'imprimante. La résolution s'exprime en "dpi" ou "ppp" (*dots per inch*, ou *points par pouce*) : généralement pour l'affichage sur un écran on utilise une résolution de 72 dpi, mais pour imprimer on passe à 300, 600, voire plus, dpi.

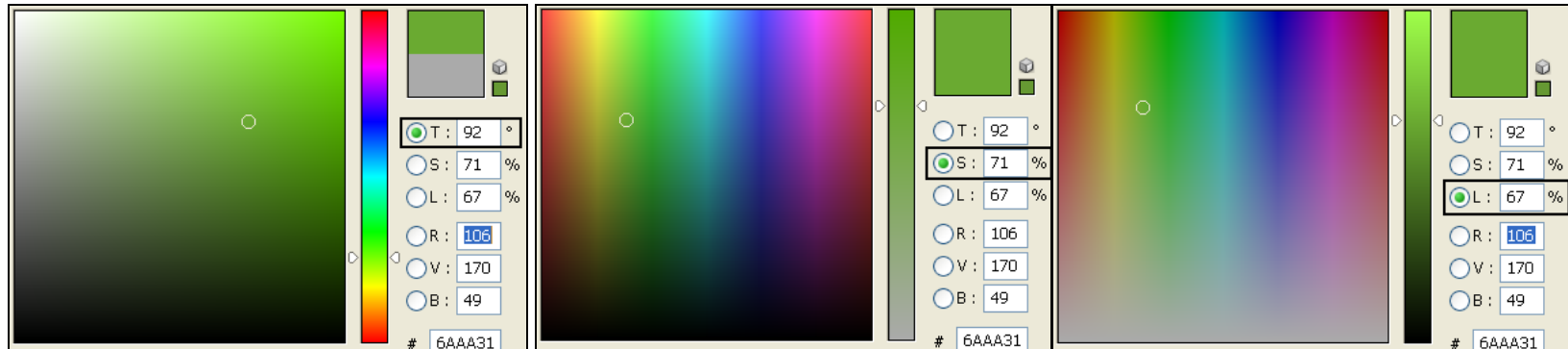
Un pixel est une un élément d'information de *couleur*, la couleur étant elle-même codée sur la base de trois composantes : le rouge, le vert et le bleu. Si les couleurs des pixels sont codées sur 24 bits (8 par composante de couleur), on a 2^{24} couleurs différentes possibles, soit 16777216, ce que l'on abrège le plus souvent en "16 millions de couleurs".

La plupart des logiciels dans lesquels on a affaire à la couleur proposent une "palette" interactive permettant de choisir et de modifier une couleur ; ils mettent en scène la position de la couleur dans l'espace des couleurs, la difficulté étant cet espace est, comme on l'a vu, tridimensionnel :



L'échantillon vert montré dans le carré a pour coordonnées (106 170 49) suivant le repère R V B, les coordonnées pouvant aller de 0 à 255. Chaque figure dispose l'espace des couleurs par rapport à la valeur de chaque coordonnée : la première montre dans le grand carré le sous-continu des couleurs pour R = 106 et V et B variant de 0 à 255 ; le rectangle en hauteur montre ce que donne la variation de R pour V et B fixes (170 et 49). La position de la couleur échantillon est indiquée dans ces deux "coupes" de l'espace des couleurs. Les deux autres figures sont analogues à la première mais en fixant respectivement V et B. On remarquera que les rectangles en hauteur sont identiques au côté de tel ou tel grand carré.

Le codage par le rouge, le vert et le bleu n'étant pas le plus intuitif (même s'il correspond en gros à nos propres photorécepteurs rétiniens), il existe des interfaces permettant de coder les couleurs selon d'autres critères : la teinte, la saturation et la luminosité, par exemple :



Le principe est le même que pour la palette RVB. La couleur-échantillon (la même) a maintenant le code (92 71 67) suivant la teinte, la saturation et la luminosité : T S L. Les valeurs des coordonnées sont exprimées en degrés (de 0 à 360) pour la teinte (ce qui renvoie au cercle des couleurs pures) ; les autres valeurs sont exprimées en pourcentages. la première figure montre la fixation de la teinte à la valeur 92 : le grand carré montre l'espace des couleurs de teinte 92 et de saturation et luminosité variables ; le rectangle en hauteur montre la variation de la teinte pour S = 71 et L = 67. Une même couleur peut être codée suivant ces deux systèmes de coordonnées (R V B) ou (T S L), voire d'autres : dans tous les cas, il faut (et il suffit de) trois coordonnées, l'espace des couleurs étant tridimensionnel, comme nous l'avons vu au chapitre I.

Un bitmap est donc, de deux façons, un ensemble discret contigu : du point de vue de la position des pixels, et du point de vue de leur couleur. Il se trouve que la résolution de cette discrétisation fait que notre perception de ces images numériques est quasiment identique à celle des images réelles : nous ne discernons pas deux pixels contigus parce qu'ils sont très proches (et très petits), nous ne discernons pas deux couleurs contiguës (dans l'espace de la couleur) non plus ; mais nous distinguons très bien deux pixels éloignés, et deux couleurs très différentes : le discret contigu est donc équivalent au continu empirique.

On peut restreindre si l'on veut l'espace des couleurs, pour obtenir un bitmap en niveaux de gris (en "noir et blanc", au sens photographique de l'expression) en donnant la même valeur à R V et B (ou en donnant à S la valeur 0, et à T une valeur quelconque et en faisant varier L), ou même un bitmap en

noir et blanc au sens strict en n'envisageant que des pixels noirs et des pixels blancs. On peut alors sans ambiguïté considérer une *forme* comme étant l'ensemble des pixels noirs, sur un *fond* blanc (ou l'inverse éventuellement). Nous utiliserons souvent cette version restreinte de bitmap.

Ce qui est important à retenir concernant la distinction entre image et bitmap, et ce pourquoi nous employons ce dernier terme, c'est qu'un bitmap est un ensemble *fini* de pixels, aux coordonnées entières.

La numérisation

On peut générer un bitmap en affectant une couleur à chaque pixel, à partir d'un calcul, ou bien on peut le produire à partir de la réalité : par *digitalisation*, ou *numérisation*, à l'aide d'un scanner, d'un appareil photo numérique, de tout appareil recevant des ondes du spectre visible ou non, ou de toute autre donnée (radar, etc.) traduite en nombres (et en définitive traduite en couleur visible pour nous).

Wittgenstein avait eu l'intuition de la numérisation comme procédé de description :

“Représentons-nous une surface blanche couverte de taches noires irrégulières. Et nous disons: Quelle que soit l'image qui en résulte, je puis toujours en donner la description approximative qu'il me plaira, en couvrant la surface d'un filet fin adéquat à mailles carrées et dire de chaque carré qu'il est blanc ou noir. De cette manière j'aurais [sic] donné une forme unifiée à la description de la surface. Cette forme est arbitraire car j'aurais pu tout aussi bien me servir d'un filet à mailles triangulaires ou hexagonales et obtenir un résultat non moins satisfaisant.” (Ludwig Wittgenstein, *Tractatus logico-philosophicus*, Tel Gallimard, 1961, p. 99)

Ce qu'il suggère est un cas particulier que nous avons signalé : un bitmap en noir et en blanc. Mais on peut aussi faire remonter l'origine de l'image numérisée à la mosaïque, la tapisserie, la peinture pointilliste, etc.

La plupart des images de la Terre que nous voyons aujourd'hui, en particulier les images acquises par satellite, sont des images numériques, dont la résolution est variable, et exprime la taille de la maille carrée qui se résout en un pixel (50 cm de côté par exemple).

Un bitmap résultant d'une telle acquisition de données, quelle qu'en soit la source, est généralement en couleurs, codées sur un nombre variable de bits, ou en niveaux de gris. L'utilisation de tels bitmaps nécessite d'y détecter et d'y reconnaître des *formes*. Or, la notion de *forme* peut être facilement définie pour un bitmap en noir et en blanc, comme l'ensemble des pixels noirs sur un fond blanc ; on peut en déduire l'aire de la forme (le nombre de pixels noirs), son contour (les pixels noirs qui ont un voisin blanc), sa connexité, etc. Mais pour un bitmap en couleurs, et même en niveaux de gris, la détection de formes n'est pas aussi immédiate.

On peut imaginer une structure analogue au bitmap, mais en 3D : un tableau d'éléments d'information repérés par trois coordonnées (x y z). Le nom a même été trouvé pour cet élément d'informations : le

voxel (pour *volumetric pixel*). Théoriquement, cela ne pose aucun problème. Par contre ce n'est pas encore un principe beaucoup employé pour la représentation d'objets tridimensionnels, sauf en *tomographie*, technique d'imagerie numérique utilisée principalement en imagerie médicale et en géophysique (exemples : IRM, tomographie sismique) ; en effet le stockage de l'information est énorme, et les techniques que nous allons présenter ci-dessous ont été optimisées, et même câblées, et sont satisfaisantes pour la plupart des applications. La *numérisation volumique* sous-entend une connaissance de la matière même, de l'intérieur des volumes : c'est pourquoi elle est utilisée dans des disciplines qui ont besoin de connaître et de représenter l'intérieur des volumes. Mais nous autres êtres humains ne voyons pas l'intérieur des volumes ; pour une représentation qui cherche à simuler notre perception, c'est seulement la surface des objets qui est envisagée.

III.1.2 L'espace numérique géométrique et projectif

Variétés

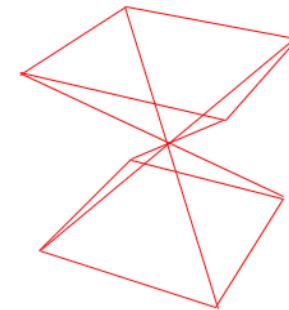
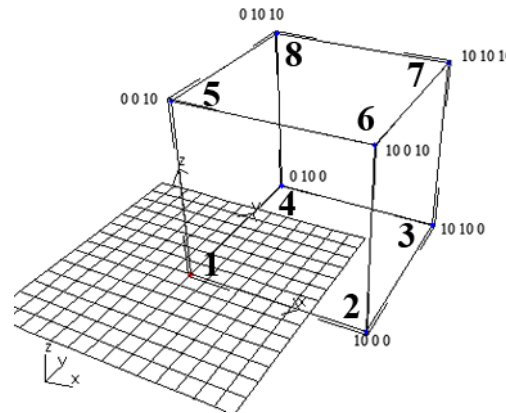
Dans l'espace numérique 3D de la plupart des logiciels de modélisation et de rendu, inversement à l'espace physique, il n'y a pas de "matière", il n'y a pas de "vrais" volumes, mais seulement des surfaces ; et encore, ces surfaces ne sont pas définies vraiment comme des surfaces (des continus de dimension 2), mais seulement à partir de *points* ou *sommets* (*vertex* ; *vertices*), qui eux-mêmes définissent des *faces* ou *facettes* 2D (et au passage des *arêtes* 1D). L'illusion de voir des objets comme nous les voyons dans la réalité est donnée par des calculs effectués sur ces points et les faces qui ont été définies à partir d'eux : un calcul de *perspective* (ou de toute autre projection), et surtout un remplissage des faces par des couleurs qui rendent compte de la couleur de l'objet et de la façon dont la lumière agit sur lui.

Un "objet" 3D est un ensemble de points (x y z), auquel on associe une "topologie", c'est-à-dire la manière dont ces points sont regroupés en faces.

Un cube peut être défini par ces 8 points :

1 : (0 0 0)	2 : (0 10 0)	3 : (10 10 0)	4 : (10 0 0)
5 : (0 0 10)	6 : (0 10 10)	7 : (10 0 10)	8 : (10 10 10)

A ces points il faut associer une certaine topologie, définir les faces, pour lever l'ambiguïté entre objets ayant les mêmes sommets :



Les “bonnes” faces sont définies comme les 6 quadruplets³ suivants :

1 : (1 2 3 4) 2 : (2 6 7 3) 3 : (3 7 8 4) 4 : (4 8 5 1) 5 : (1 5 6 2) 6 : (6 7 8 5)

Il ne suffit pas de regrouper les points, mais de les mettre dans l’ordre (pour bien définir la topologie de la face elle-même), et de “tourner” autour de la face toujours dans le même sens. Une face n’est pas seulement un groupe de points, mais c’est une structure orientée, avec un vecteur normal qui indique l’extérieur de la forme. Puisque nous ne voyons que l’extérieur des formes tridimensionnelles, il est important de distinguer les deux côtés de chaque face. C’est important aussi pour les calculs qui peuvent être faits sur ces faces.

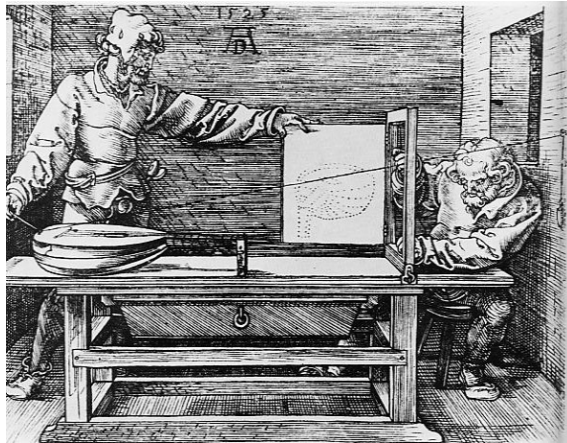
A côté des objets 3D comme le cube, il existe aussi des surfaces non fermées (des maillages) et des lignes, dont les sommets sont des points de l’espace 3D ; ces lignes peuvent servir à définir des objets 3D plus complexes, ou exister en elles-mêmes, auquel cas on leur donne une épaisseur pour qu’elles puissent être vues en 3D.

Sur les objets 3D, on peut effectuer toutes sortes de transformations, d’abord les transformations géométriques simples (translation, rotation, réflexion, homothétie), mais aussi des transformations plus complexes, et en particulier ce que l’on appelle les transformations booléennes (union, intersection, soustraction de volumes). Tout cela permet de modéliser des objets très complexes (voitures, avions, etc., mais aussi bien sûr des architectures). Certains logiciels sont plus spécialement adaptés à ce type d’objet (ArchiCAD pour l’architecture, par exemple) mais 3DStudioMax est un modéleur généraliste.

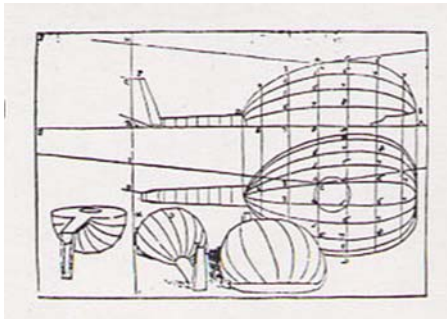
Après la phase de la modélisation, il y a toute la phase de rendu. Ceci implique de mettre en place des caméras (ce mot n’est pas réservé à l’animation, *camera* en anglais signifiant appareil photo), des lumières (qui peuvent être à rayons parallèles, comme le soleil, ou issus d’un centre), ainsi que des “matériaux”, c’est-à-dire des couleurs et des “textures” (généralement des bitmaps), mais aussi des manières de réagir à la lumière (matité, brillance, etc.), que l’on “applique” aux faces des objets. Toute cela peut être complété par des effets comme des effets atmosphériques (brouillards, etc.) et même des effets qui simulent les erreurs de la prise de vue réelle (flou lié à la focale par exemple).

Mais nous n’allons pas aborder toutes ces questions, nous allons seulement nous intéresser au calcul de la perspective, directement issu des “machines à dessiner” inventées dès la Renaissance.

³ En réalité, les faces sont systématiquement triangulées, de manière à éviter des “faces” qui ne seraient pas planes, et qui ne seraient pas convexes ; nous décrivons le cube comme composé de 6 faces carrées pour la simplicité de l’exposé.



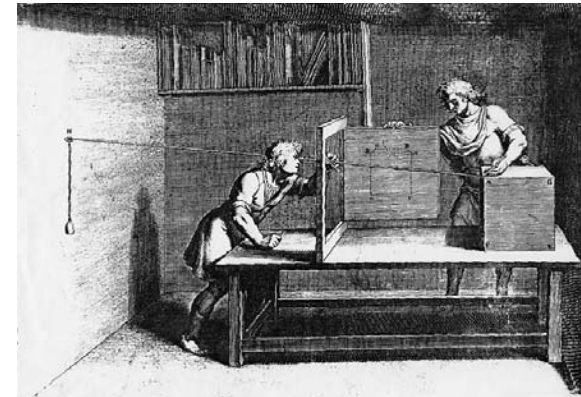
124 Albrecht Dürer, le “portillon”



126 P. Accolti, “Modélisation” du luth, 1625

Le calcul de la perspective

La perspective calculée par ordinateur reprend très exactement la procédure imaginée par Dürer dans son *perspectographe au luth*, le dispositif connu sous le nom de “portillon de Dürer”. Une autre gravure de la même époque, mais celle-là anonyme, est encore plus frappante pour un programmeur en informatique, parce que l’objet le plus souvent choisi pour mettre au point l’algorithme est justement un cube, comme dans cette gravure.



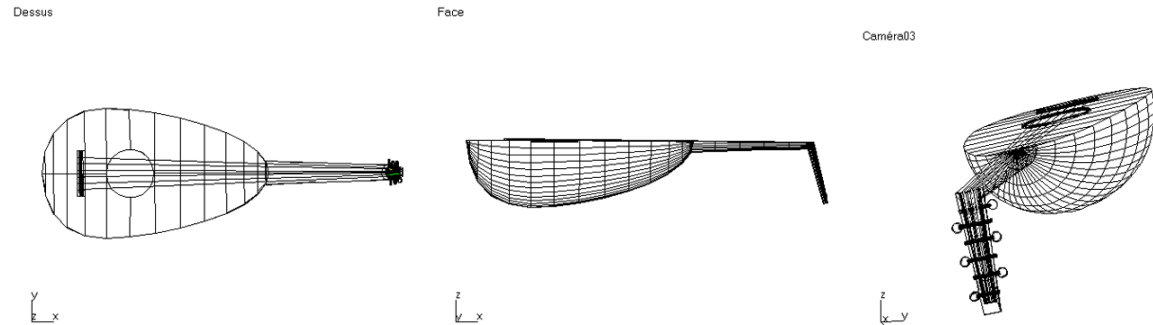
125 Variante du portillon de Dürer

La première étape de toute automatisé de la perspective, qu’il s’agisse d’ailleurs à la Renaissance de la *costruzione legittima* ou de la machine à dessiner de Dürer, comme du calcul par ordinateur à l’heure actuelle, est de déterminer les points significatifs d’un objet, les “sommets”, et les faces qui relient ces points, qui déterminent la topologie de l’objet. Cette “modélisation” nécessite de choisir parmi tous les points possibles du continu tridimensionnel, ou du moins du continu 2D qui constitue la surface de l’objet. Une telle modélisation peut être en grande partie arbitraire, il faut faire la part des choses entre l’adéquation à l’objet et l’efficacité de l’automatisation : trop peu de points ne rendront pas bien compte de l’objet ; trop de points nécessiteront un trop long temps de travail pour les opérateurs du “portillon” de Dürer, et trop de place en mémoire et de temps de calcul pour l’ordinateur.

Dans le cas du luth, on est aidé par le fait que c’est un objet fabriqué : le “corps” du luth est constitué de plaques de bois planes ou arrondies, qui induisent une modélisation assez naturelle :



127 Le volet du portillon



Le pointeur du dispositif de Dürer correspond à l'étape de détermination des coordonnées des points ; on note que dans le résultat visible sur le volet du portillon, les points sont isolés, ils ne sont pas reliés par des lignes, ne déterminent donc pas de faces. Cependant, cette détermination des faces, qu'il est indispensable de fournir à l'ordinateur, ne pose pas de problème au peintre : elle est naturelle pour notre système de perception.

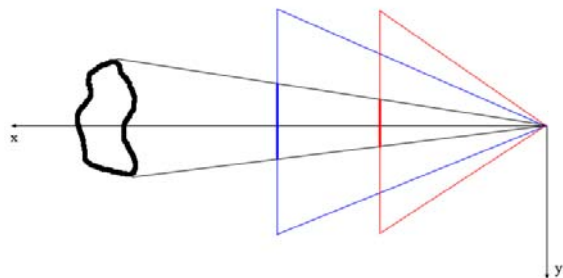
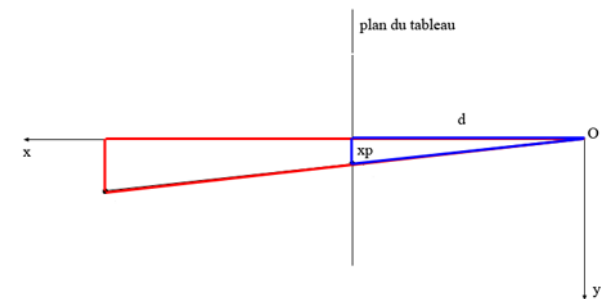
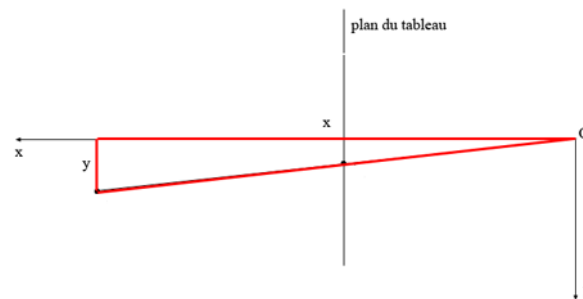
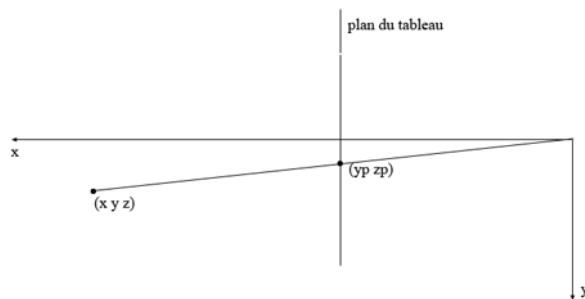
Le calcul de la perspective qui s'ensuit est très simple : pour tout point de l'espace 3D de coordonnées (x y z), il s'agit de calculer l'intersection de la droite qui lie ce point au point correspondant à l'œil de l'observateur (que l'on choisira de placer en (0 0 0) pour les calculs quitte à faire un changement de repère ensuite) avec le plan qui constitue le tableau.

Ce calcul est exactement ce que font les opérateurs du "portillon" en ajustant les fils de soie du cadre de façon à marquer l'intersection du fil tendu avec le plan du tableau⁴.

Cette intersection n'a plus que deux coordonnées puisqu'elle fait partie d'un plan ; pour déterminer chacune de ces coordonnées, il suffit de faire une simple règle de trois : si l'axe de la direction du regard est l'axe 0x, et que le plan du tableau est à la distance d de l'œil, alors les coordonnées (x_p z_p) du point résultant de la projection se déduisent des coordonnées (x y z) du point de l'objet par les formules :

$$\begin{aligned} y_p &= d \ y/x \\ z_p &= d \ z/x \end{aligned}$$

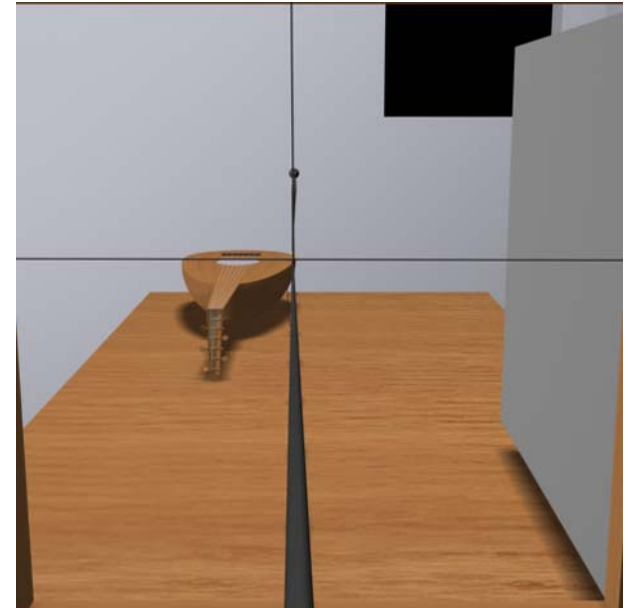
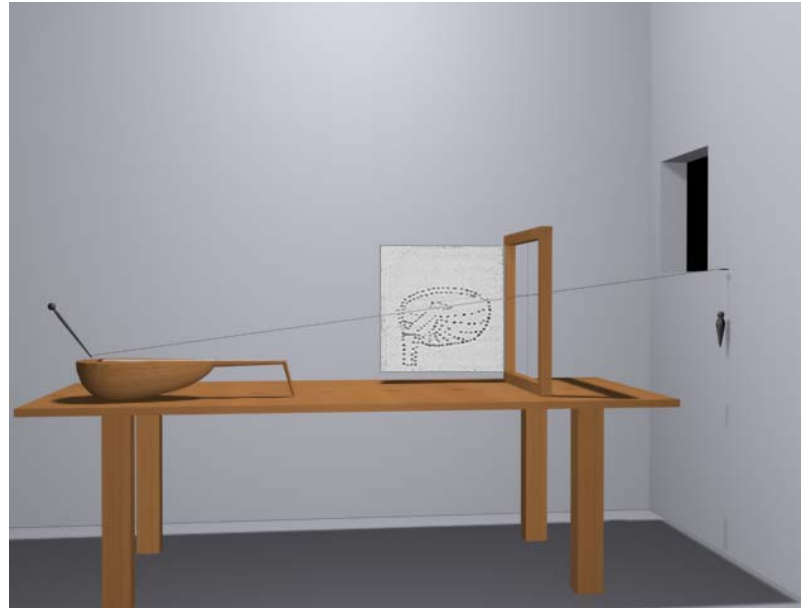
⁴ Il faudrait cependant faire remarquer que, lorsque l'on se réfère au texte de Dürer lui-même (Albrecht Dürer, *Géométrie*, Sources du savoir, Seuil, 1995), et contrairement à ce que supposent certains commentaires qui en sont faits à l'heure actuelle, les deux fils de soie ne sont pas resp. horizontal et vertical ; ils sont attachés à un point du montant, resp. horizontal et vertical, du cadre. Mais pour se croiser, il doivent donc être *obliques*.



La valeur de d est cruciale, ou plutôt le rapport entre cette valeur et la largeur du tableau, ou encore l'angle que fait la pyramide visuelle (dont la coupe est un triangle visuel) à sa pointe ; en effet la portion de tableau occupée par la projection d'un même objet occupera plus ou moins de place dans ce tableau selon que la distance focale est plus ou moins longue : c'est ce qu'en photographie, on désigne sous les termes respectifs de *longue* et *courte* focale (généralement exprimée en mm), ou, inversement, de télé-objectif (*petit angle*) et *grand angle* :

Ce n'est donc pas le calcul de la perspective qui est compliqué pour réaliser des images de synthèse : il est très facile et rapide pour un ordinateur de calculer la projection d'un grand nombre de points. Ce qui a posé le plus de problèmes aux programmeurs, c'est ce qui est le plus évident pour nous, c'est-à-dire l'*élimination des faces cachées*. Tous les points sont projetés, indépendamment de leur positions relatives par rapport à l'observateur. Il faut donc déterminer non seulement si des objets sont plus près de l'observateur que d'autres, mais encore s'ils le sont en totalité ou en partie, sans compter qu'un objet peut se cacher lui-même en partie. Nous ne traiterons pas de ces questions, nous voulions simplement rappeler que ce qui a été le plus difficile pour les peintres (parvenir à une perspective exacte géométriquement) est le plus facile pour les ordinateurs, et ce qui ne leur a jamais posé de problèmes (ne pas peindre ce qui est caché) en a posé beaucoup aux programmeurs...

Nous avons modélisé la scène représentée par Dürer, et son dispositif, pour vérifier si la trace des relevés que l'on voit sur le volet correspondait bien au dispositif tel que Dürer le montre :



L'image de droite est ce que l'on obtient en plaçant l'observateur (la caméra) à l'emplacement de l'anneau, avec une taille de tableau correspondant au volet ; on voit que la différence essentielle est une différence de focale, le problème que justement Dürer cherchait à résoudre dans ses dispositifs. L'anneau est trop près du portillon pour que Dürer obtienne l'image qu'il prétend obtenir, il faudrait repousser le mur de droite ; ou alors, modifier la scène elle-même, rapprocher le luth du portillon...

III.1.3 Algorithmes

L'idée d'algorithme est bien plus ancienne que l'informatique, bien sûr, et nous en pratiquons tous "à la main", ou au cerveau plutôt, par exemple quand nous effectuons une addition, une soustraction, une division, ou une multiplication, en les "posant" comme nous avons appris à le faire à l'école primaire. Au lycée, nous avons pu apprendre à extraire une racine carrée par un algorithme du même type. De nos jours, nous n'utilisons plus autant d'algorithmes, parce que si nous voulons connaître la racine carrée d'un nombre, nous appuyons sur la touche $\sqrt{}$ de notre calculette. Mais il faut savoir que si nous n'utilisons pas d'algorithmes, les calculettes et autres ordinateurs, eux, en utilisent : la valeur de $\sqrt{2}$ n'est pas produite par magie, et son calcul par ordinateur est finalement assez proche de la méthode laborieuse que nous employions naguère, en plus rapide. En effet, les ordinateurs ne sont pas très (ni même pas du tout) intelligents, mais ils calculent vite...

Nous n'allons pas inclure ici un cours de programmation, simplement donner quelques indications permettant de comprendre comment les programmes qui sont mis en œuvre dans les processus de génération de formes fonctionnent.

Instructions, variables, valeurs

On donne à l'ordinateur des *instructions* ; la majorité des instructions consistent à *affecter* une valeur à une variable ; dans le langage MaxScript cette affectation est transcrite à l'aide du signe "=" :

```
a = 2
b = 3
c = a+b
```

Avec un peu de chance, en tapant "c", on obtiendra la valeur "5".

Il y a aussi des "variables" plus sophistiquées, par exemple des tableaux, c'est-à-dire des listes de variables : `#( , , , )` ; dans MaxScript, il existe aussi des variables ou tableaux spécifiques : on peut ainsi travailler directement avec les couleurs, qui s'écrivent `color r v b` ou simplement `[r, v, b]` où r, v et b correspondent aux valeurs de rouge, de vert et de bleu de la couleur, ou encore avec les points du plan ou de l'espace : `[x, y]` et `[x, y, z]`.

Les variables peuvent être de type "nombre", mais aussi de type "caractère" ou "chaîne de caractères" ; c'est ce type de variable qui sera utilisé dans les L-systèmes.

Les variables et valeurs de type nombre peuvent être des entiers, ou des nombres à virgule flottante (des "flottants") ; MaxScript n'est pas un langage très exigeant en termes de définition des variables ; ainsi si l'on écrit :

```
a = 3
b = 2
c = a/b
```


on obtiendra pour c la valeur 1, et non la valeur 1,5 à laquelle on s'attendrait ; en effet, ayant écrit 3 et 2 comme des entiers, MaxScript considère que nous souhaitons effectuer la division entière de ces nombres. Pour avoir la réponse correcte, il aurait fallu écrire :

```
a = 3.0  
b = 2.0  
c = a/b
```

Si l'on pense à prendre cette précaution, MaxScript présente l'avantage de ne pas faire perdre de temps à définir précisément les types de variables comme l'exigent d'autres langages.

On peut effectuer toutes les opérations arithmétiques usuelles, et on dispose d'autres opérateurs et fonctions mathématiques. Opérateurs et fonctions peuvent se combiner, par un parenthésage approprié.

Programme ou script

On peut donner à l'ordinateur des instructions uniques, qu'il exécute immédiatement. Mais on peut aussi lui donner toute une suite d'instructions, ce que l'on appelle un *programme*, ou un *script*.

Si l'on ne pouvait qu'aligner des instructions à la suite les unes des autres, on serait très limité. C'est pourquoi il existe aussi des expressions de "contrôle de flot" (l'image est que la suite des instructions constitue un "flot", que l'on peut interrompre, ramifier, boucler, etc.) ; elles peuvent prendre différentes formes, mais qui se ramènent à eu près toutes à deux formes de base : la *boucle* et le *test*.

Une boucle permet de répéter (on parle plutôt d'"itération") une ou plusieurs instructions un certain nombre de fois. Un test permet de n'accomplir une instruction que sous certaines conditions ; ces conditions s'expriment par la valeur "vraie" ou "fausse" d'une proposition ; ce sur quoi portent ces conditions sont des *comparaisons* ; on dispose donc en plus des opérateurs arithmétiques, d'opérateurs comme : "inférieur à" (<), "égal à" (= , à ne pas confondre avec l'affectation de variables =), etc.

MaxScript intègre aussi un certain nombre de fonctions, dont un certain nombre concernent les objets 3D. Ainsi, pour créer un parallélépipède (une "boîte"), on écrira :

```
box()
```

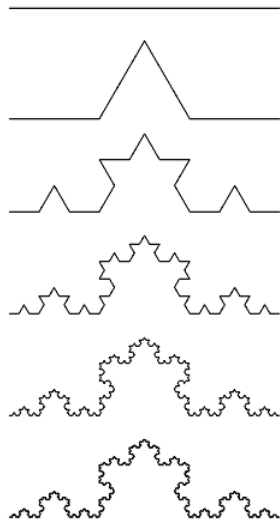
ou, si l'on veut donner des paramètres spécifiques (auxquels sinon sont attribuées des valeurs par défaut) :

```
box pos : [5,5,0] width :10 length : 10 height :10
```

qui créera le cube décrit plus haut pour le calcul de la perspective (le "pivot" d'une boîte, le point qui définit sa position, est situé au centre de sa face inférieure).

On peut aussi créer ses propres fonctions, avec ses propres paramètres.

Pour illustrer ces quelques notions de programmation exposées succinctement, et aussi pour mettre en œuvre la notion de récursivité, inhérente aux fractals, voici une fonction qui permet de créer une courbe de von Koch :



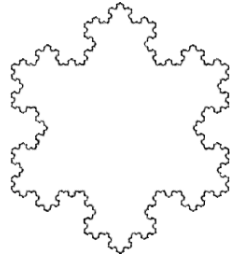
```
fn zig n
(
  if n=0 then avance l
  else
    (
      n=n-1
      l=l/3
      zig n
      gauche
      zig n
      droite
      droite
      zig n
      gauche
      zig n
      l=l*3
      n=n+1
    )
)
```

Les instructions “avance l”, “gauche” et “droite” renvoient à des fonctions définies ailleurs ; elles peuvent d’ailleurs être différentes, suivant qu’on représente la courbe dans un bitmap ou comme une ligne 3D.

La fonction “zig” s’appelle elle-même : c’est le principe de la récursivité. Sa structure mime la structure de la courbe de von Koch. “n” est ce que l’on appelle la profondeur la récursivité ; tant que cette profondeur n’est pas atteinte, la fonction ne dessine (ou ne crée) rien, elle enregistre en mémoire une “pile” croissante d’instructions qui ne seront *dépilées* que quand elle sera atteinte, c’est-à-dire quand n (qui est décrémenté à chaque appel de la fonction) sera enfin égal à 0.

Les images ci-contre montrent le résultat de la fonction pour, respectivement, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Cette fonction comprend un test (`if n=0 then avance l`), un certain nombre d’affectations de variables, mais pas de boucle.

Si l’on veut créer l’étoile de von Koch, avec la profondeur de récursivité 6, on écrira une boucle :



```
for i=1 to 3 do
  (
    zig 6
    droite
    droite
  )
```

Vertige combinatoire

Un espace numérique peut sembler pauvre par rapport à l'espace concret. Mais rappelons l'étonnante prodigalité de la notion de combinatoire : prenons une image constituée de 10 par 10 pixels, chaque pixel pouvant être seulement noir ou blanc ; le nombre d'images différentes possibles est donc égal à 2 (le nombre d'états possibles de chaque pixel) élevé à la puissance 100 (le nombre de pixels) ; or, ce nombre apparemment inoffensif, 2^{100} , se révèle redoutable si nous mesurons le temps qu'il faudrait pour visualiser toutes ces images différentes, à raison, disons, d'une par seconde :

$$2^{100} = 2^{10 \times 10} = (2^{10})^{10} \text{ or } 2^{10} = 1024 \sim 10^3 \text{ (moyen mnémotechnique pratique pour passer rapidement de base 2 en base 10)}$$

$$2^{100} \sim (10^3)^{10} = 10^{30} \text{ c'est-à-dire } 1\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$$

Or sachant qu'une journée ne fait que 24 heures, soit 84600 secondes, il faudrait de l'ordre de 10 000 000 000 (10 milliards) d'années pour passer en revue toutes ces possibilités ; rappelons que la Terre ne date que de 4,5 milliards d'années...

Parmi toutes les images possibles de 10 par 10 pixels noirs ou blancs, il y en a qui sont significatives, qui présentent une "forme", il y a même toutes les images significatives possibles à cette résolution : par exemple des formes géométriques, des chiffres, etc. :

■ + × □ 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Mais la plupart des résultats, si on laisse faire le hasard, ressembleront à cela :



La taille de l'échantillon choisi ne permet d'aller très loin, mais on peut étendre le principe aux bitmaps usuels, qui ont généralement plus de pixels, avec une couleur de pixel codée par trois nombres allant de 0 à 255 (soit $256 \times 256 \times 256 = 16\,777\,216$ couleurs) ; le nombre d'images possibles est alors, par exemple pour une image de 1024 par 768 pixels, ce qui n'a rien d'énorme (le moindre

appareil photo numérique fait mieux), de $16\,777\,216^{786432}$, autant dire un nombre unimaginable... mais non infini.

Cela rappelle l'histoire de la bibliothèque de Babel :

“Ce penseur observa que tous les livres, quelque divers qu'ils soient, comportent des éléments égaux : l'espace, le point, la virgule, les vingt-deux lettres de l'alphabet. Il fit également état d'un fait que tous les voyageurs ont confirmé : *il n'y a pas, dans la vaste Bibliothèque, deux livres identiques*. De ces prémisses incontestables il déduisit que la Bibliothèque est totale, et que ses étagères consignent toutes les combinaisons possibles des vingt et quelques symboles orthographiques (nombre, quoique très vaste, non infini), c'est-à-dire tout ce qu'il est possible d'exprimer, dans toutes les langues. Tout : l'histoire minutieuse de l'avenir, les autobiographies des archanges, le catalogue fidèle de la Bibliothèque, des milliers et des milliers de catalogues mensongers, la démonstration de la fausseté de ces catalogues, la démonstration de la fausseté du catalogue véritable, l'évangile gnostique de Basilide, le commentaire de cet évangile, le commentaire du commentaire de cet évangile, le récit véridique de ta mort, la traduction de chaque livre en toutes les langues, les interpolations de chaque livre dans tous les livres ; le traité que Beda ne put écrire (et n'écrivit pas) sur la mythologie des Saxons, ainsi que les livres perdus de Tacite.” (Jorge-Luis Borges, *La Bibliothèque de Babel*, in *Fictions, Œuvres complètes I*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1993, p. 494)

Si l'on veut s'amuser à calculer le nombre des livres de la bibliothèques de Babel, en prenant le nombre de caractères mentionné par Borges (soit 25), et en prenant des ouvrages de 1000000 caractères (ce qui est modeste) on voit qu'on arrive à $25^{1000000}$ livres, et ce nombre est, comme le dit Borges, “très vaste”, quoique non infini.

D'où un mauvais usage de l'aléatoire ; certes, toutes les images intéressantes possibles d'un certain format appartiennent à l'ensemble des combinatoires de pixels correspondant à ce format, mais la plupart sont “quelconques”. Comme on l'a vu, le nombre possibles d'images est véritablement énorme ; la proportion d'images qui contiennent ce que nous pourrions appeler des “formes” est extrêmement faible. La pire façon de générer des formes est donc d'en appeler uniquement à l'aléatoire, la probabilité de tomber sur une forme étant suffisamment faible pour pouvoir pratiquement être considérée comme nulle...

Mais il y a un bon usage de l'aléatoire : à partir du moment où l'on a établi des règles, on peut faire varier certains paramètres dans des marges prédéfinies, pour obtenir des résultats variés mais pas totalement quelconques. C'est ce bon usage que nous mettrons en œuvre dans certains des processus de génération de formes que nous allons voir à présent.

III.2 Processus de génération de formes

Premier interlude : une petite devinette

Considérons une petite devinette¹, qui fait appel aux mathématiques, mais aussi à la logique et même au langage : soit la phrase :

“Cette phrase comprend _ 0, _ 1, _ 2, _ 3, _ 4, _ 5, _ 6, _ 7, _ 8, _ 9.”

où les _ doivent être remplacés par des nombres, de manière à ce que la phrase soit vraie ; bien sûr les chiffres composant ces nombres doivent eux-mêmes être pris en compte pour la véracité de la phrase. On pourrait peut-être trouver un moyen “algébrique” et un raisonnement pour trouver une solution ; on peut déjà faire quelques constatations : on ne peut pas mettre le nombre “0” dans les espaces vides, puisque la phrase comporte déjà un chiffre de chaque sorte (mais il y a peut-être le nombre “10” qui comporte un 0) ; il est vraisemblable que le nombre placé devant “1” sera le plus élevé, puisqu’il figurera sans doute plusieurs fois, mais qu’il ne sera sans doute pas supérieur à 11.

Quoi qu’il en soit, ce n’est pas une telle méthode déductive que nous allons employer, mais une méthode plus “bête”, par tâtonnements, ou approximations successives, en essayant une “solution” (qui n’en est pas une) quelconque, et en la corrigeant jusqu’à ce que, peut-être, on aboutisse à une solution. On considérera donc les 10-uplets (_ , _ , _ , _ , _ , _ , _ , _ , _ , _) comme les éléments d’une suite, qui “converge” ou pas vers la solution de la devinette.

Essayons d’abord le 10-uplet (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) :

“Cette phrase comprend 1 0, 1 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

De toute évidence, cette phrase est fausse ; corrigeons-la, en comptant les chiffres, et réécrivons la phrase :

“Cette phrase comprend 1 0, 11 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

Cette phrase est encore fausse ; répétons cette opération :

“Cette phrase comprend 1 0, 12 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

Encore une fois :

“Cette phrase comprend 1 0, 11 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

Cette phrase est maintenant vraie ! Le 10-uplet (1, 11, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) ne peut que se transformer en lui-même.

Partons maintenant d’un autre 10-uplet : (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)

“Cette phrase comprend 0 0, 1 1, 2 2, 3 3, 4 4, 5 5, 6 6, 7 7, 8 8, 9 9.”

Rectifions-la successivement:

“Cette phrase comprend 2 0, 2 1, 2 2, 2 3, 2 4, 2 5, 2 6, 2 7, 2 8, 2 9.”

¹ Cet exemple de “phrase auto-référentielle” figure dans : Douglas Hofstadter, *Ma Thémagie*, InterEditions, 1988, p. 30

“Cette phrase comprend 1 0, 1 1, 11 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 12 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 11 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

Et nous voilà attirés vers le même 10-uplet (1, 11, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) ; mais aussi dans cette séquence :

“Cette phrase comprend 0 0, 0 1, 0 2, 0 3, 0 4, 0 5, 0 6, 0 7, 0 8, 0 9.”

“Cette phrase comprend 11 0, 1 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 12 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 11 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

Ou dans celle-ci :

“Cette phrase comprend 10 0, 10 1, 10 2, 10 3, 10 4, 10 5, 10 6, 10 7, 10 8, 10 9.”

“Cette phrase comprend 11 0, 11 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 13 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 11 1, 1 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 11 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

Nous semblons “aspirés” par ce 10-uplet quelle que soit notre supposition de départ ; c’est pour cette raison que nous l’appellerons un “attracteur”. Mais cela ne veut pas dire que cet attracteur soit la seule solution de cette énigme. Nous avons en fait eu de la chance avec nos points de départ : ils se situaient dans ce que l’on peut appeler l’*orbite* de cet attracteur.

Nous pouvons atteindre un autre attracteur en partant de (8, 9, 5, 3, 5, 4, 5, 8, 8, 5) :

“Cette phrase comprend 8 0, 9 1, 5 2, 3 3, 5 4, 4 5, 5 6, 8 7, 8 8, 5 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 1 1, 1 2, 2 3, 2 4, 5 5, 1 6, 1 7, 4 8, 2 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 6 1, 4 2, 1 3, 2 4, 2 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 3 2, 1 3, 2 4, 1 5, 2 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 3 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 3 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”

Nous avons été attiré par le 10-uplet (1,7,3,2,1,1,1,2,1,1). On vérifiera qu’on l’atteint aussi en partant par exemple de (8, 9, 5, 3, 5, 4, 5, 8, 8, 5).

Mais d’autres attracteurs peuvent se révéler plus complexes, et ne pas donner la solution de l’énigme ; supposons que nous soyons partis de (2,5,1,4,1,1,3,3,1) :

“Cette phrase comprend 2 0, 5 1, 1 2, 4 3, 1 4, 1 5, 3 6, 3 7, 3 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 5 1, 2 2, 4 3, 2 4, 2 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 6 1, 4 2, 1 3, 2 4, 2 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 3 2, 1 3, 2 4, 1 5, 2 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 3 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 4 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 3 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 3 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”

Cette fois, nous n’aboutissons pas à un attracteur constitué d’un unique point, mais à une phrase qui en appelle une autre, qui elle-même fait revenir à celle-ci ; il s’agit donc d’un attracteur “oscillant” entre deux points.

On trouve un autre oscillateur en partant de (1,8,1,1,2,1,3,5,1,2)

“Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 1 2, 1 3, 2 4, 1 5, 3 6, 5 7, 1 8, 2 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 6 1, 3 2, 2 3, 1 4, 2 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 6 1, 4 2, 2 3, 1 4, 1 5, 2 6, 1 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 3 2, 1 3, 2 4, 1 5, 2 6, 1 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 3 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 4 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 1 3, 2 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 4 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 1 3, 2 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”

Ou encore en partant de (4,3,9,5,9,4,5,1,6,9)

“Cette phrase comprend 4 0, 3 1, 9 2, 5 3, 9 4, 4 5, 5 6, 1 7, 6 8, 9 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 2 1, 1 2, 2 3, 3 4, 3 5, 2 6, 1 7, 1 8, 4 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 5 1, 4 2, 3 3, 2 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 2 2, 2 3, 2 4, 2 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 6 1, 5 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 1 2, 1 3, 1 4, 1 5, 2 6, 1 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 9 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 3 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 2 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 1 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 3 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”
 “Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 3 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”

Ou bien de (5,1,7,1,9,4,7,9,5,3) :

“Cette phrase comprend 5 0, 1 1, 7 2, 1 3, 9 4, 4 5, 7 6, 9 7, 5 8, 3 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 3 1, 1 2, 1 3, 2 4, 3 5, 1 6, 3 7, 1 8, 3 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 6 1, 2 2, 5 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 1 3, 1 4, 1 5, 2 6, 1 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 3 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 4 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 1 3, 2 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 3 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 2 3, 1 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 4 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 1 3, 2 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”

“Cette phrase comprend 1 0, 7 1, 4 2, 1 3, 1 4, 1 5, 1 6, 1 7, 2 8, 1 9.”

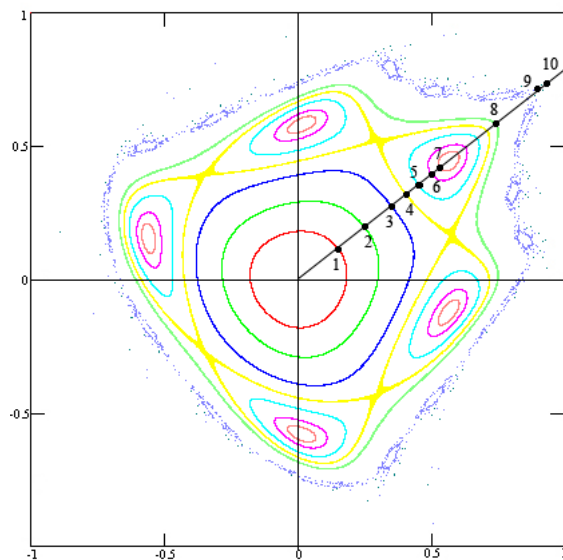
“Cette phrase comprend 1 0, 8 1, 2 2, 1 3, 2 4, 1 5, 1 6, 2 7, 1 8, 1 9.”

Cette devinette est assez éloignée de nos préoccupations de formes, mais elle met en jeu des concepts que nous allons développer : l’itération, la réécriture, l’attracteur.

Second interlude : une carte du chaos

Nous avons mentionné dans l’introduction au point I.1, à propos de Poincaré, qu’il avait été un précurseur de la théorie du chaos, en pensant, à tort, avoir résolu le “problème des trois corps”, et en ayant tenté (en vain) de rectifier son erreur. Le problème des trois corps est assez simple à énoncer : tout corps céleste, la Terre par exemple, est soumis à l’attraction universelle : la Terre tourne autour du soleil pour cette raison. Si l’on ne considère que le couple Terre-soleil, le calcul de la trajectoire de la Terre autour du soleil est assez facile, et chacun sait que la Terre décrit une ellipse dont on peut trouver l’équation grâce à la loi de la gravitation. Mais l’univers ne se réduit pas à ce couple, et tous les corps présents interviennent, dans une mesure plus ou moins forte, dans le calcul de cette trajectoire ; près de la Terre, il y a la lune, qui n’est pas négligeable, sans compter toutes les planètes du système solaire, etc... Mais contentons-nous de trois corps (d’où le nom du problème) ; les calculs vont sans doute être un peu plus compliqués, mais un mathématicien hors pair comme Poincaré se sentait capable de les mener à bien, et c’est ce qu’il croyait avoir fait...

Mais en fait, ce n’est pas que les calculs soient si compliqués que cela, c’est qu’ils ne mènent pas à une trajectoire proprement dite, comme nous allons le voir. Mais d’abord, définissons la “carte” imaginée par Poincaré. La trajectoire d’une planète est une courbe dans l’espace, qui n’est pas forcément facile à représenter : interceptons-la par un plan, et contentons-nous d’y inscrire le point d’intersection de la courbe avec le plan ; par exemple, pour la trajectoire elliptique de la terre, nous



aurons un point unique. La “carte” de Poincaré est donc une section, telle que nous l’avons définie plus haut. Nous allons mettre en œuvre ce procédé, pas exactement avec les formules utilisées par Poincaré, mais avec d’autres, assez proches, dues à Michel Hénon, et décrites par Ivar Ekeland². Elles ont l’intérêt de produire des images plus parlantes, tout en étant tout aussi pertinentes pour notre propos.

Comme nous allons établir une carte (2D), les formules que nous emploierons portent sur des couples de coordonnées. Il s’agit de partir d’un point donné (x_0, y_0) , et d’itérer la transformation suivante :

$$x_{n+1} = x_n \cos \alpha - (y_n - x_n^2) \sin \alpha$$

$$y_{n+1} = x_n \sin \alpha - (y_n - x_n^2) \cos \alpha$$

On obtient donc une suite de points : $(x_0, y_0) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow (x_2, y_2) \rightarrow \text{etc.}$

On prend généralement pour α la valeur $76,11^\circ$. On voit tout de suite, que quel que soit α d’ailleurs, le point $(0, 0)$ est un point fixe : $(0, 0) \rightarrow (0, 0) \rightarrow (0, 0) \rightarrow \text{etc.}$ Comme ceci correspond, disons, à la trajectoire actuelle de la Terre, c’est une bonne nouvelle ! Mais que se passerait-il si, pour une raison quelconque, la Terre s’éloignait, ne serait-ce qu’un peu de cette trajectoire ? Nous allons donc mettre en œuvre la même itération en partant cette fois de points différents de $(0, 0)$; nous prenons tous ces points sur la droite de pente 0,79, qui s’avère être un axe de symétrie pour tous les résultats, leurs coordonnées x sont égales à :

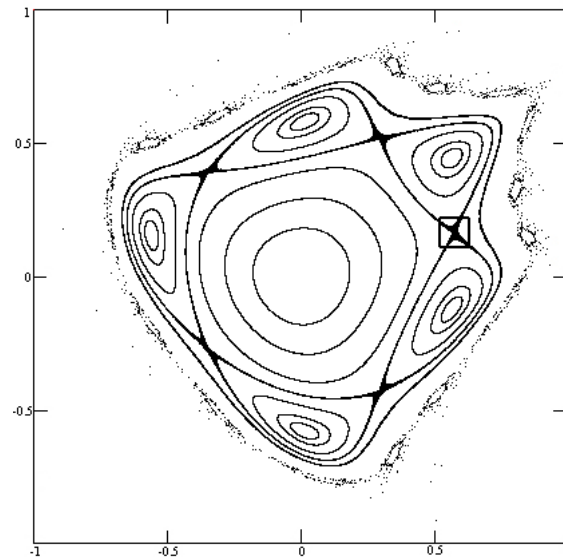
1 : 0,15 2 : 0,25 3 : 0,35 4 : 0,4045 5 : 0,45 6 : 0,5 7 : 0,53 8 : 0,74 9 : 0,9 10 : 0,93

L’orbite (l’ensemble des itérés) de chaque point est affectée d’une couleur particulière (voir ci-contre).

Tant qu’on est assez proche de $(0, 0)$, pour des valeurs de x jusqu’à 0,4 l’orbite trace une sorte de rond, qui devient un “patatoïde” ; aux alentours de 0,4 ce patatoïde devient croisé, puis se sépare en cinq plus petits patatoïdes, qui diminuent puis grandissent pour former à nouveau un patatoïde croisé. Ce patatoïde devient une sorte de pentagone bizarre. A partir de x à peu près égal à 0,9, ce patatoïde se désagrège, et très vite les points ne suivent plus une orbite visible, et sortent du cadre que nous nous sommes fixés.

A première vue on pourrait tirer les conclusions suivantes : pour une petite perturbation de départ, la trajectoire reste périodique, même si l’orbite n’est plus un point fixe ; il faut une grande différence dans les conditions initiales pour que l’orbite s’affole et que la planète s’éloigne vers les espaces interstellaires. Mais si l’on y regarde de plus près, on constate des phénomènes plus curieux ; explorons la zone de croisement d’un des patatoïdes croisés que nous avons rencontrés (**Planche 4**). Nous prenons cette fois des points de départ autour de $(0,575, 0,15)$ et nous visualisons un cadre de 0,1

² Ivar Ekeland, *Le calcul, l’imprévu Les figures du temps de Kepler à Thom*, Seuil, 1984

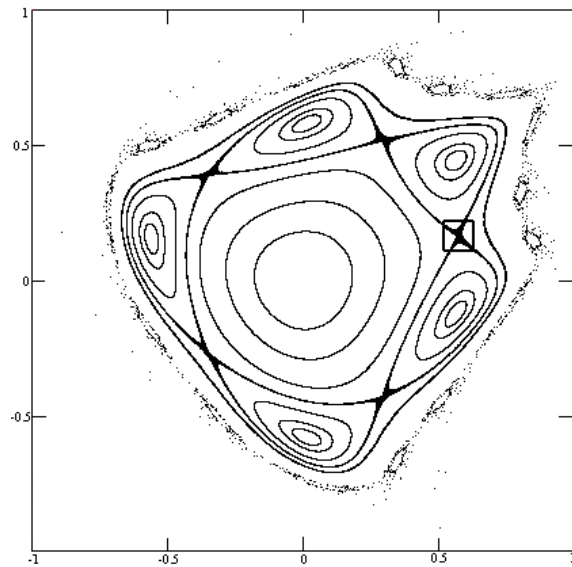


de côté centré en ces points (voir ci-contre). On voit alors un paysage complexe se déployer, partant d'une situation assez simple, pour devenir très complexe, puis redevenant plus simple.

Ces orbites complexes sont des "attracteurs étranges", leur structure révèle une complexité interne. Dans la suite des zooms que nous avons faits, nous voyons un saut brusque entre un attracteur complexe et un attracteur plus simple, par exemple entre l'avant-dernier et le dernier, qui correspondent aux points $(0,605 \ 0,15)$ et $(0,615 \ 0,15)$. On peut se demander comment se fait la transition. Si on regarde ce qui se passe entre les deux (**Planche 5**), en partant de $(0,610 \ 0,15)$, on trouve un attracteur assez semblable au premier, complexe. Si l'on poursuit la recherche de la transition, en raffinant de plus en plus l'intervalle, il se passe ce phénomène curieux : on ne trouve jamais (du moins nous n'avons pas trouvé, dans la limite de nos moyens ; nous sommes allé jusqu'à 8 chiffres après la virgule...) de phase de transition : soit l'attracteur est simple, soit il est complexe.

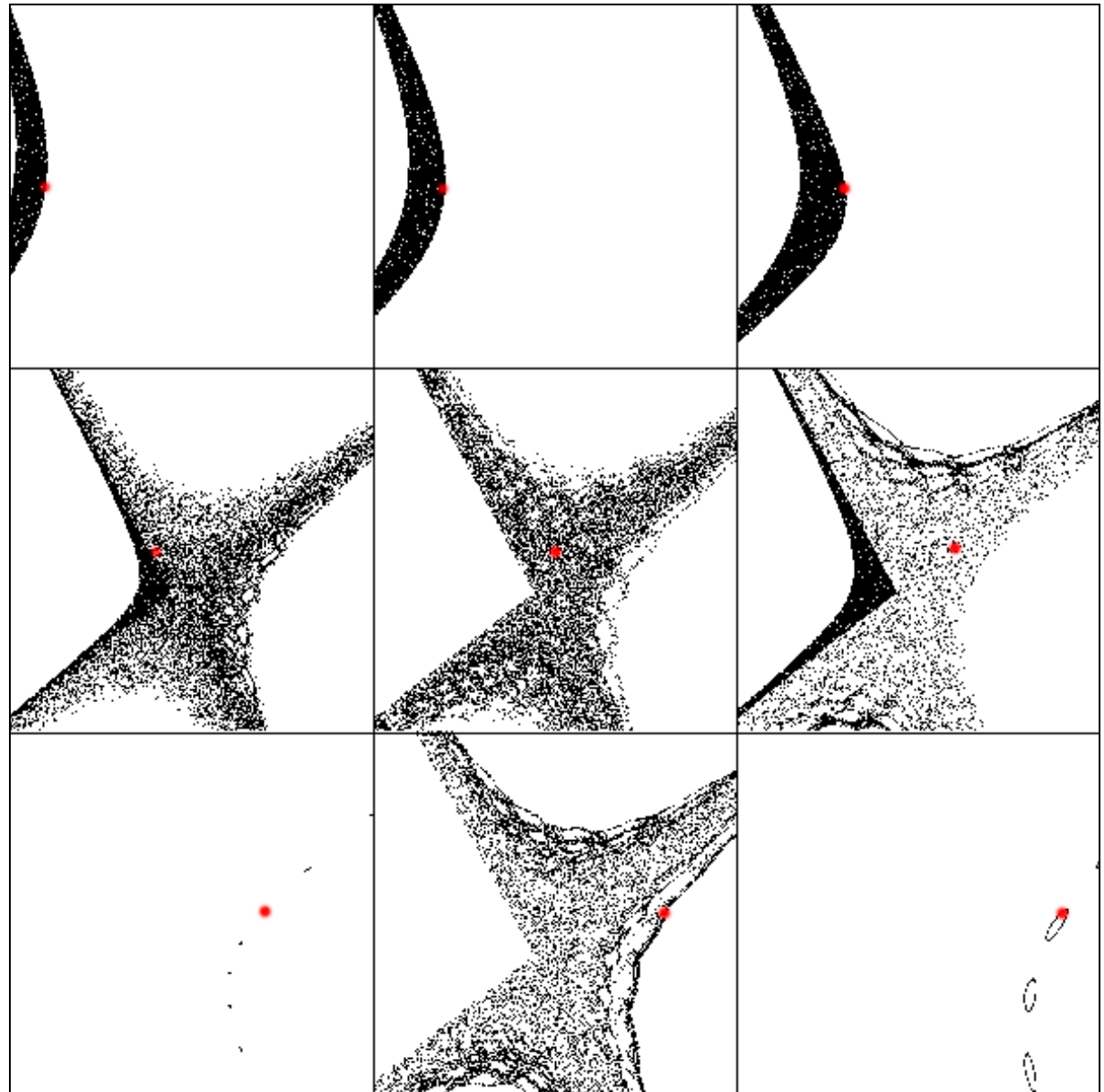
Carte de Poincaré (version Hénon)

Zoom sur les alentours du point (0,575 0,15)



Le point de départ de l'itération est marqué en rouge ;
valeurs de x :

0,535	0,545	0,555
0,565	0,575	0,585
0,595	0,605	0,615



Carte de Poincaré (version Hénon)

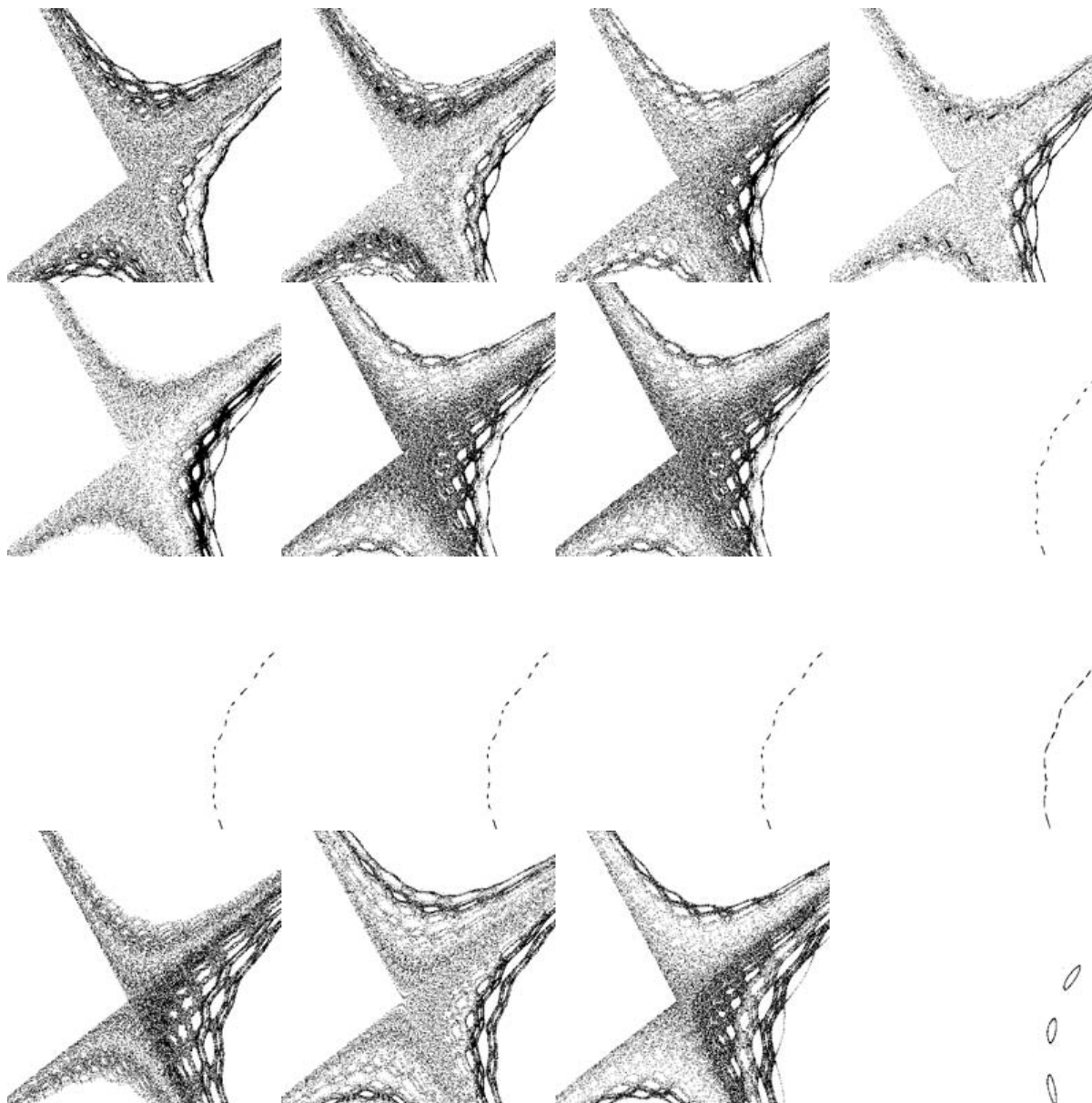
Zoom à la recherche de la transition entre les attracteurs des points $(0,605 \ 0,15)$ et $(0,615 \ 0,15)$ cf *Planche 4* ;
valeurs de x :

0,605 0,610 0,6104 0,61046

0,610469 0,6104693 0,61046931 0,61046932

0,6104694 0,61047 0,6105 0,61355

0,61356 0,61359 0,614 0,615



III.2.1 Systèmes de fonctions itérées (IFS)

Transformations contractantes et itération

Les IFS (Iterated Function system) sont des systèmes (c'est-à-dire des ensembles) de fonctions (ou de transformations) itérées ; ces transformations doivent être “contractantes”, c'est-à-dire que le résultat de la transformation doit être “plus petit” que ce dont on part. La théorie des IFS est due notamment à Michael Barnsley³, dont le livre *Fractals Everywhere* a un titre parlant : lorsque l'on se plonge dans cet univers, on a effectivement l'impression de voir des fractals partout ! Cette théorie est solidement appuyée sur des mathématiques très rigoureuses (et parfois ardues !) ; nous n'entrerons pas dans ces détails, nous en extrairons seulement ce qui en fait un outil puissant de génération de figures fractales. La théorie des IFS est une avancée dans la géométrie fractale, par ses capacités génératives, et par la généralisation et la systématisation qu'elle introduit dans cette géométrie (dont nous montrerons le rapport à la géométrie classique plus loin).

Même si l'on peut envisager toutes sortes de transformations, nous considérerons essentiellement les transformations *affines*, qui peuvent être définies comme des transformations *linéaires* suivies d'une *translation*. Nous allons donc pour commencer rappeler en quoi consistent ces transformations, et examiner ce que donne leur itération. Les IFS peuvent fonctionner en 3D (agir sur des points ou des portions de l'espace 3D) ; mais pour cette présentation, nous nous bornerons à des transformations en 2D.

Les transformations linéaires (en 2D) sont celles qui sont sous la forme générale :

$(x \ y) \rightarrow (x' \ y')$ avec :

$$x' = ax + by$$

$$y' = cx + dy$$

A toute transformation linéaire correspond ce que l'on appelle une *matrice* A :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Appliquer la transformation au point $(x \ y)$ revient à multiplier ce point par la matrice correspondante. Le *déterminant* de la matrice A : $\det(A) = ad - bc$, ou du moins sa valeur absolue, permet de “mesurer” l'effet de la transformation : les aires sont multipliées par ce nombre, donc augmentent (et les points “s'éloignent” les uns des autres) si $|\det(A)| > 1$, diminuent (et les points “se rapprochent” les uns des autres) si $\det(A) < 1$, et restent constantes si $|\det(A)| = 1$; les figures sont inversées si $\det(A)$ est négatif ; enfin si $\det(A) = 0$, tous les points résultant de la transformation se retrouvent sur une même droite (réduction de dimension). La translation qui, composée avec une transformation linéaire, permet d'obtenir une transformation affine, ne change rien à ses résultats.

³ Michael Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988

Une transformation “contractante”, si elle est une transformation affine, est donc telle que $-1 < \det(A) < 1$.

On peut montrer que toute transformation linéaire peut s’écrire sous la forme :

$(x \ y) \rightarrow (x' \ y')$ avec :

$$x' = (r_1 \cos \theta_1) x - (r_2 \sin \theta_2) y$$

$$y' = (r_1 \sin \theta_1) x + (r_2 \cos \theta_2) y$$

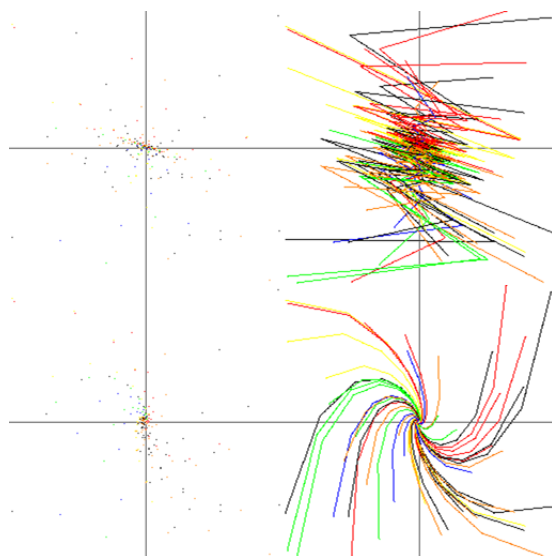
où θ_1 et θ_2 sont des angles, r_1 et r_2 des rapports d’homothétie, ce qui permet d’interpréter toute transformation linéaire comme la composition d’un certain nombre de transformations géométriques usuelles : rotation, homothétie, réflexion ; ou moins usuelles, mais tout aussi compréhensibles visuellement, comme la transvection. Dans les exemples montrés (on a choisi un portrait de Leibnitz, qui a beaucoup apporté à la théorie du déterminant d’une matrice) **Planche 6** on voit que les rotations (simples), les réflexions, et les transvections conservent les aires (le déterminant de la matrice correspondante est égal à 1) ; mais que les homothéties, bien sûr, non. Les transformations affines qui ne “déforment” pas les figures sont l’identité, les rotations (simples), les homothéties (simples), suivies d’une translation, composées éventuellement d’une réflexion : ce sont ce que l’on appelle les *similitudes*.

Dans la pratique, nous utiliserons comme transformations contractantes des transformations affines dont la part linéaire est telle que r_1 et r_2 sont tous les deux inférieurs à 1. Prenons comme exemples les transformations linéaires dont les paramètres sont :

$r_1 = -0,75$	$r_1 = 0,75$
$r_2 = 0,5$	$r_2 = 0,5$
$\theta_1 = 30^\circ$	$\theta_1 = 30^\circ$
$\theta_2 = 15^\circ$	$\theta_2 = 15^\circ$

Si l’on applique ces transformations à une ensemble de points, puis de nouveau au résultat, etc., on voit que l’attracteur de l’itération est un point fixe, le point (0,0) ; que la transformation soit inversante (noter le nez de Leibnitz qui pointe alternativement vers la gauche et vers la droite) (**Planche 7**), ou non (**Planche 8**).

Considérons maintenant ce qui arrive à des points isolés (25 points choisis au hasard) : voir ci-contre. Comme le nuage de points n’est pas très lisible (bien que le point conserve sa couleur lors de l’itération), matérialisons la trajectoire de chaque itération en reliant les transformés successifs par des segments. On voit que les transformés successifs de chaque point sont assez éloignés les uns des autres, mais qu’ils sont irrémédiablement attirés vers le point central. La première transformation est inversante, les trajectoires sont zigzagantes ; avec la deuxième transformation (partant des mêmes 25



Transformations linéaires

de gauche à droite et de haut en bas :

identité (image de référence)

rotation d'angle 30°

$$r_1 = r_2 = 1 ; \theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$$

rotation double d'angles 30° et 45°

$$r_1 = r_2 = 1 ; \theta_1 = 30^\circ ; \theta_2 = 45^\circ$$

homothétie de rapport 0,75

$$r_1 = r_2 = 0,75 ; \theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$$

homothétie double de rapports 0,5 et 0,75

$$r_1 = 0,5 ; r_2 = 0,75 ; \theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$$

réflexion par rapport à Ox

$$r_1 = -1 ; r_2 = 1 ; \theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$$

réflexion par rapport à Oy

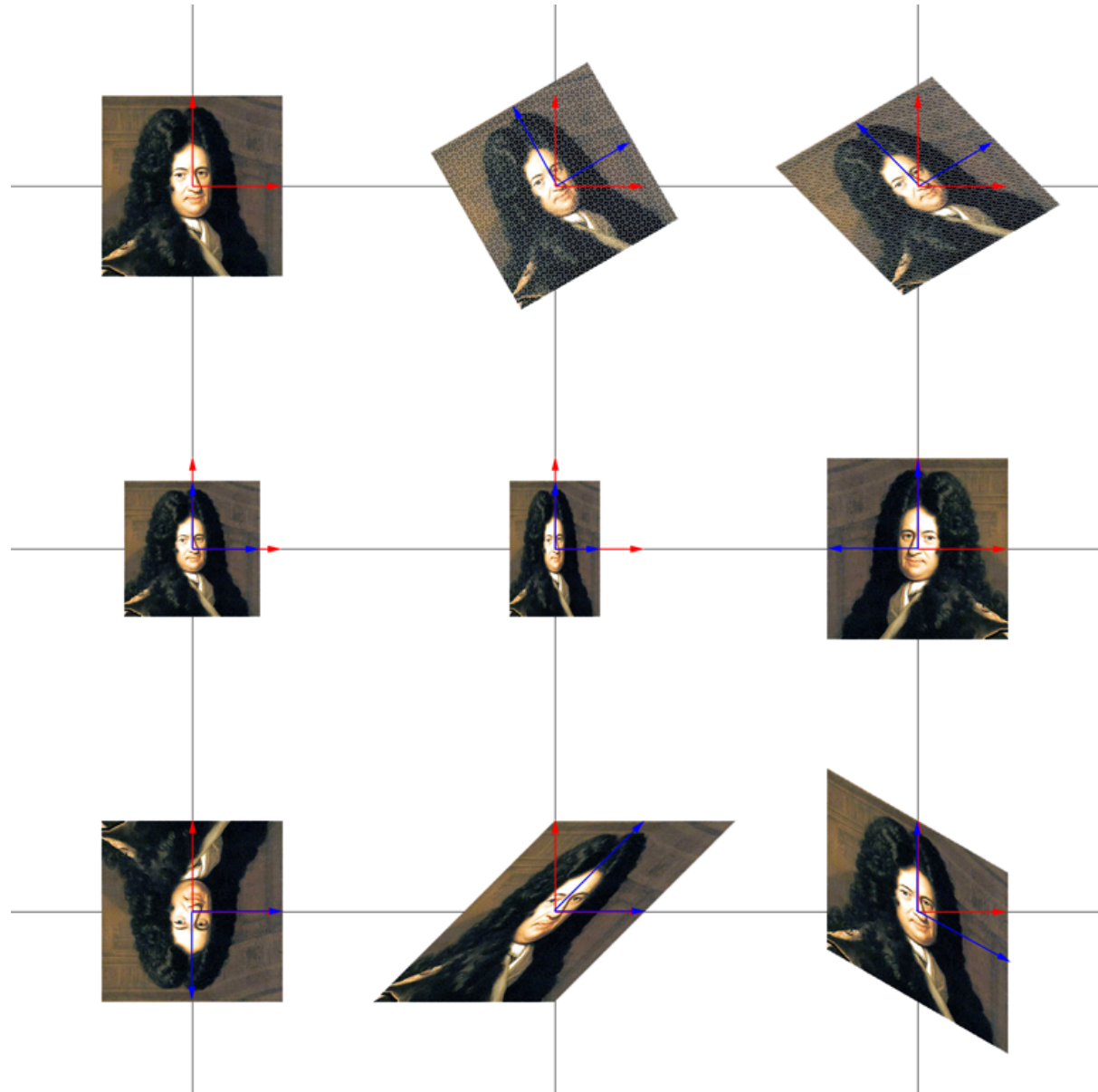
$$r_1 = 1 ; r_2 = -1 ; \theta_1 = \theta_2 = 0^\circ$$

transvection en x d'angle -45°

$$r_1 = 1 ; \theta_1 = 0 ; \theta_2 = -45^\circ ; r_2 = 1/\cos \theta_2$$

transvection en y d'angle -30°

$$\theta_1 = -30^\circ ; r_1 = 1/\cos \theta_1 ; r_2 = 1 ; \theta_2 = 0$$



Itération d'une transformation linéaire

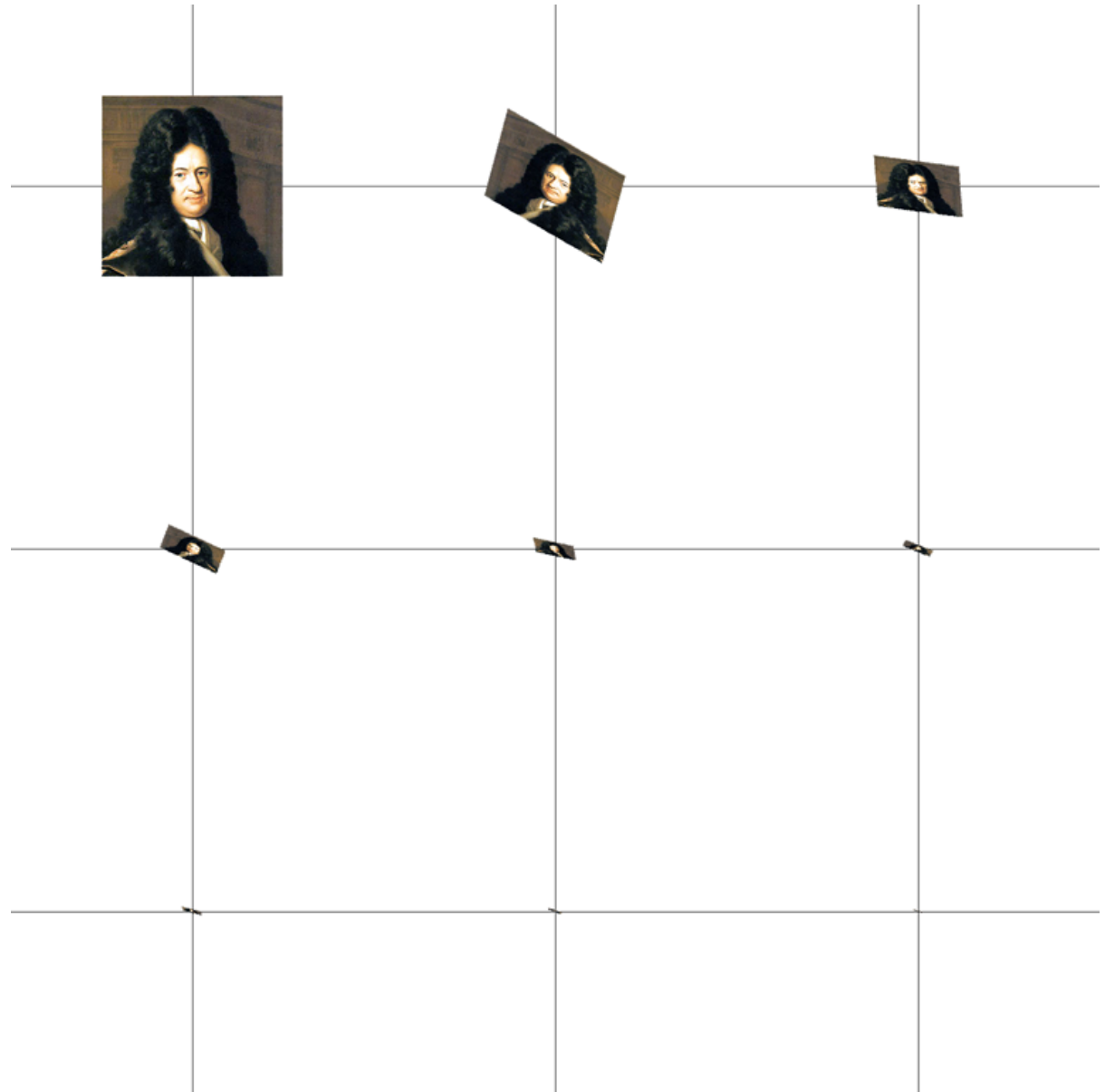
paramètres de la transformation linéaire :

$$r_1 = -0,75$$

$$r_2 = 0,5$$

$$\theta_1 = 30^\circ$$

$$\theta_2 = 15^\circ$$



Itération d'une transformation linéaire

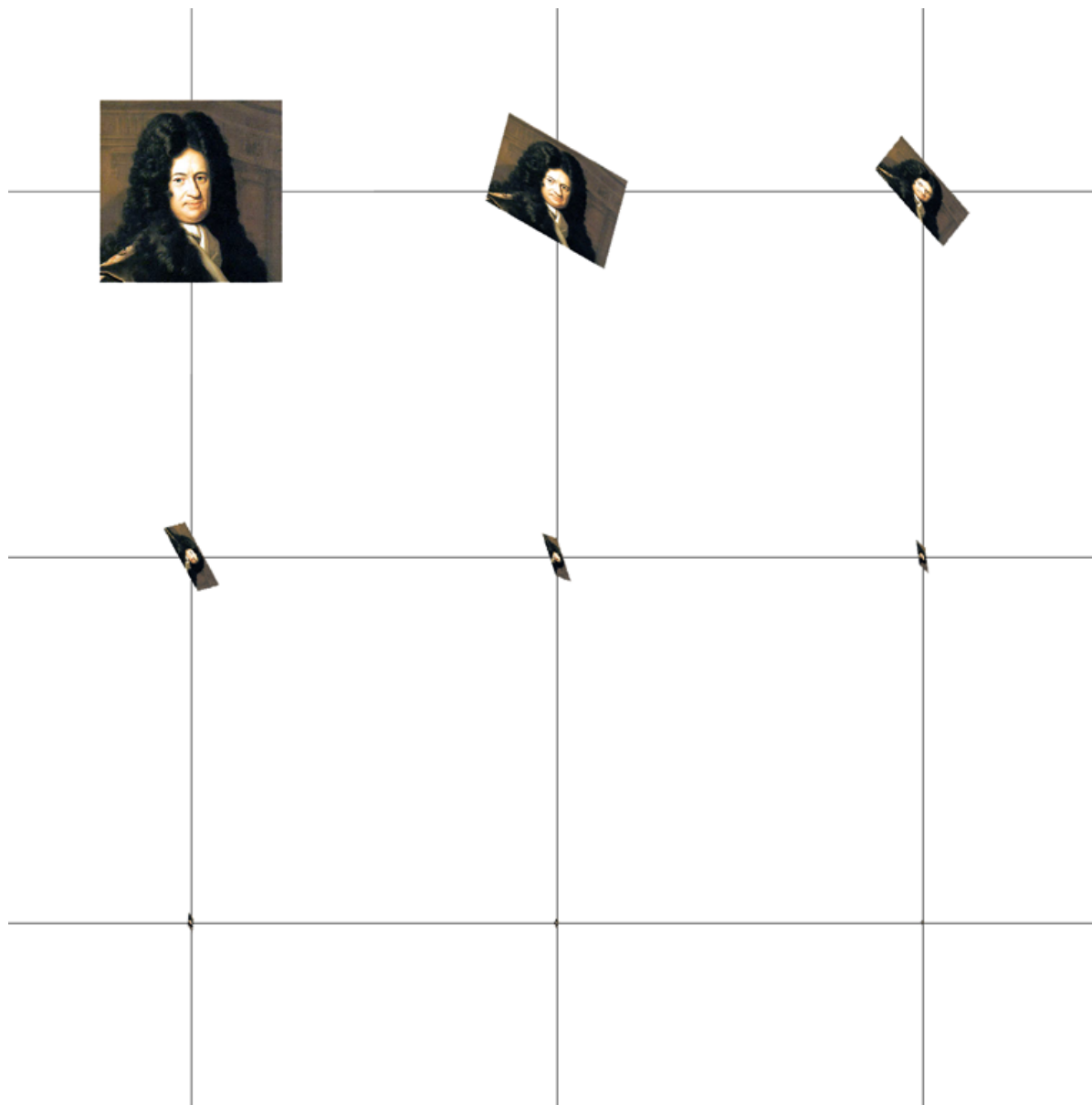
paramètres de la transformation linéaire :

$$r_1 = 0,75$$

$$r_2 = 0,5$$

$$\theta_1 = 30^\circ$$

$$\theta_2 = 15^\circ$$



points), on voit des trajectoires en spirale qui rendent encore plus évident l'attracteur de l'itération : le centre du repère.

Transformation du "mi-chemin"

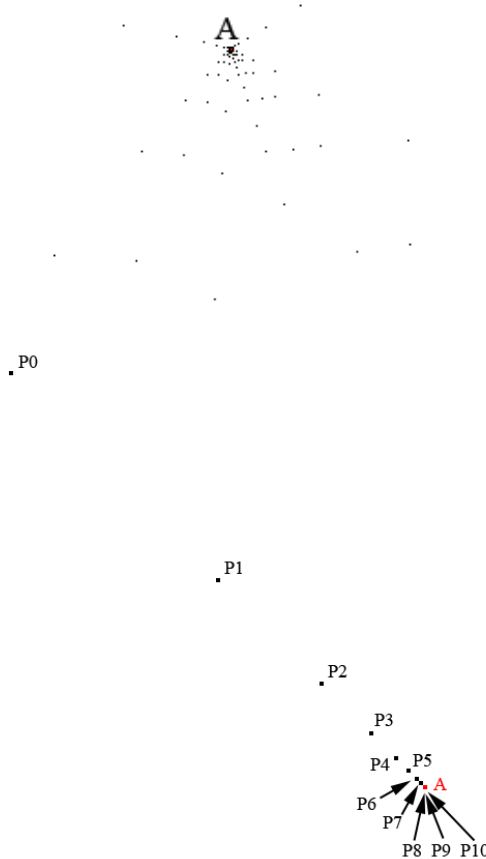
Maintenant considérons la transformation suivante : fixons un point A de coordonnées x_a et y_a et partons d'un point quelconque P (x y). Appliquons à P la transformation consistant à atteindre le point situé à mi-chemin de P et A ; puis appliquons la même transformation au résultat, etc.

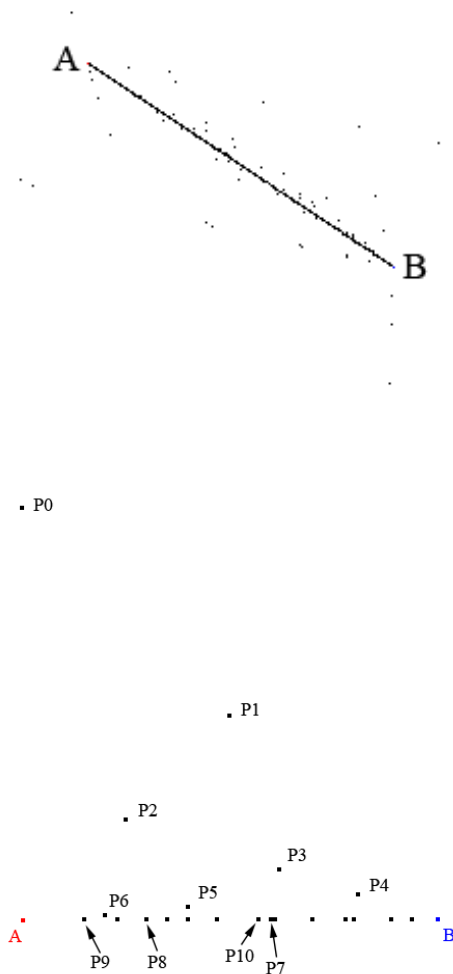
Sans surprise, tous les points convergent vers le point A. Il est temps néanmoins de faire une remarque importante concernant ces attracteurs : en toute rigueur, avec un nombre *fini* d'itérations, Zénon reprend ses droits, car l'attracteur *n'est jamais atteint*... Dans l'exemple, le point A a pour coordonnées (100 100) ; partons du point P0 : (0,0), et regardons les coordonnées des points successifs de l'itération :

P1 : (50 50)
P2 : (75 75)
P3 : (87,5 87,5)
P4 : (93,75 93,75)
P5 : (96,875 96,875)
P6 : (98,4375 98,4375)
P7 : (99,2188 99,2188)
P8 : (99,6094 99,6094)
P9 : (99,8047 99,8047)
P10 : (99,9023 99,9023)

Si l'on continue, les coordonnées vont se rapprocher de plus en plus de (100 100), mais jamais elles n'y seront égales. Mais, d'une part, on peut faire en sorte de s'approcher de (100 100) d'aussi près que l'on veut (si l'on se donne un écart de 0,0001 par exemple, on peut calculer le nombre d'itérations nécessaire pour y arriver, et ce nombre est fini), d'autre part, dès que la valeur des coordonnées excède 99,5, c'est le pixel (100 100) qui est colorié : visuellement, l'attracteur semble donc bien être atteint, même si, dans un espace continu (comme l'est P^2 , ou le plan réel), l'attracteur n'est jamais atteint en un nombre fini d'itérations. Par ailleurs, si l'on part du point (100 100) lui-même, la transformation le laisse inchangé : dans ce cas l'attracteur est bien atteint.

A présent, considérons deux points fixes A (x_a, y_a) et B (x_b, y_b) et appliquons *indifféremment* la transformation du mi-chemin vers A ou vers B, c'est-à-dire en en prenant une des deux au hasard, et

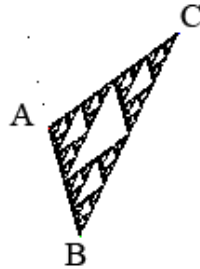




en recommençant sur le résultat (nous justifierons plus loin cette introduction de l'aléatoire dans le processus). Quel va être le résultat de l'itération ? Nous pouvons imaginer que les points vont être attirés par A, ou par B, et que ces deux points constituent un attracteur double ; ou bien que les points vont tous se retrouver attirés par le milieu de AB ; mais c'est un tout autre phénomène qui apparaît ; c'est le segment AB qui constitue l'attracteur de l'itération. Détaillons un peu ce nouveau processus ; pour plus de simplicité, prenons A (0 100) et B (100 100) : les points de AB ont donc tous leur coordonnée y égale à 100, leur coordonnée x prenant toutes les valeurs comprises entre 0 et 100. Partons de nouveau de P0 (0 0) ; les coordonnées des points successifs sont :

P1 : (50 50)
P2 : (25 75)
P3 : (62,5 87,5)
P4 : (81,25 93,75)
P5 : (40,625 96,875)
P6 : (20,3125 98,4375)
P7 : (60,1563 99,2188)
P8 : (30,0781 99,6094)
P9 : (15,0391 99,8047)
P10 : (57,5195 99,9023)
P11 : (78,7598 99,9512)
P12 : (89,3799 99,9756)
P13 : (94,6899 99,9878)
P14 : (47,345 99,9939)
P15 : (23,6725 99,9969)
P16 : (61,8362 99,9985)
P17 : (80,9181 99,9992)
P18 : (40,4591 99,9996)
P19 : (70,2295 99,9998)
P20 : (35,1148 99,9999)

On voit que dès le point P8, les itérés sont raisonnablement proches de l'attracteur, et qu'ils s'en approchent très rapidement (tout en occupant des places diverses le long du segment AB). Tout en gardant à l'esprit que l'attracteur n'est jamais véritablement atteint dans un espace continu, nous admettons dans toute la suite que ce que nous voyons apparaître comme figure, après les quelques premiers points, constitue une bonne approximation de l'attracteur d'un processus d'itération. Par



ailleurs, si nous partons d'un point appartenant à l'attracteur, par exemple le point (50 100), ou n'importe quel point du segment AB d'ailleurs, alors, ce point faisant déjà partie de l'attracteur, alors *tous les itérés en feront partie aussi* ; dans ce cas, nous obtenons un résultat qui est une partie de l'attracteur ; si nous avons suffisamment d'itérations, nous aurons assez de points pour obtenir une image correcte de l'attracteur.

Passons maintenant au même processus, mais en considérant trois points fixes A, B et C. Le résultat est étonnant : voilà qu'apparaît quelque chose qui ressemble au triangle de Sierpinski dont nous avons parlé en II.3.3. En effet, à part quelques points erratiques au début, les points sont "attirés" par un attracteur qui n'est plus un point fixe, ni un segment, mais une figure fractale homéomorphe au triangle de Sierpinski.

En variant l'emplacement des trois points fixes, on obtient une famille de figures qui sont des triangles de Sierpinski "déformés", le "vrai" apparaissant quand A, B et C sont les sommets d'un triangle équilatéral. Les résultats des transformations du mi-chemin à 1 point, à 2 points, et à 3 points (plusieurs variantes) sont rassemblés **Planche 9**.

Cela nous permet d'imaginer d'autres itérations en prenant comme points fixes de départ les sommets de polygones réguliers à 4, 5, 6, etc., jusqu'à 11 sommets (**Planche 10**). Au passage, nous rencontrons le carré rempli (posé sur la pointe) ; mais pour pouvoir mieux "lire" ces images qui deviennent un peu confuses, nous allons introduire deux moyens de représentation qui jouent sur la couleur du pixel.

Jusqu'à présent nous calculions les coordonnées du point résultant de la transformation et nous colorions le pixel correspondant, quel qu'il soit, en noir. Nous allons maintenant différencier les résultats en affectant le pixel d'une couleur particulière suivant la transformation choisie (**Planche 11**). Cela nous permet de mieux comprendre la part de chaque transformation dans chacune des figures ; remarquons que seules les deux premières figures sont exemptes de recouvrements : cette particularité est importante, et pas seulement visuellement !

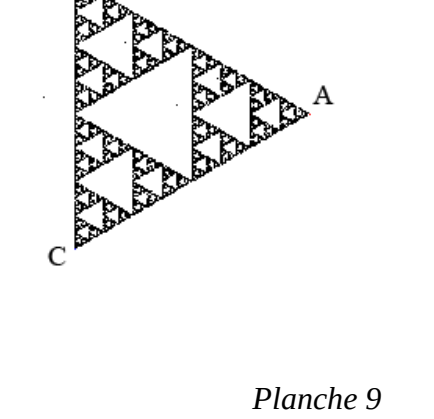
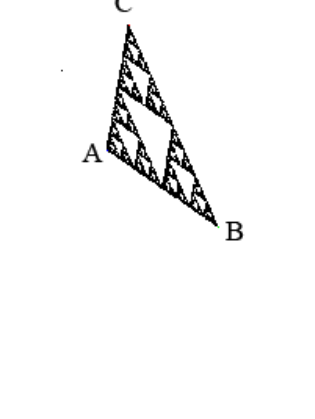
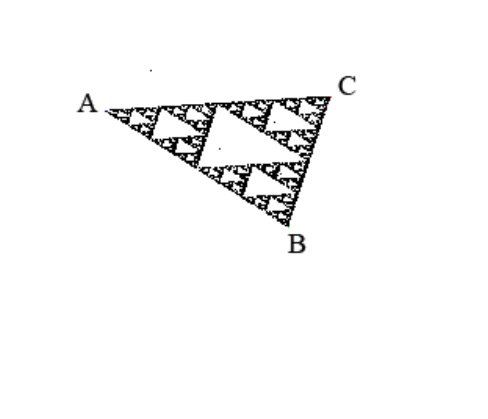
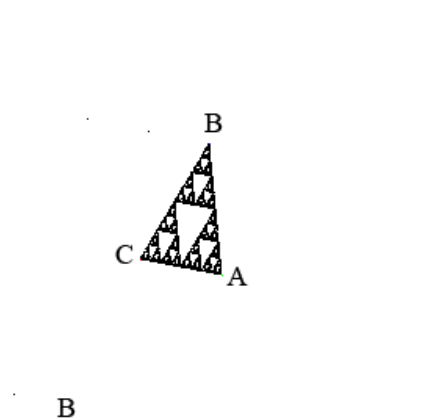
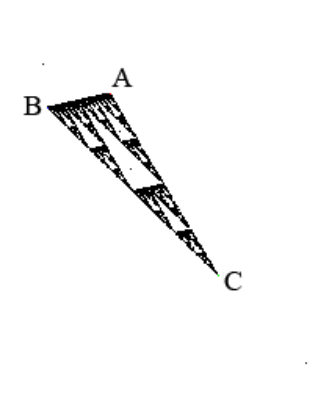
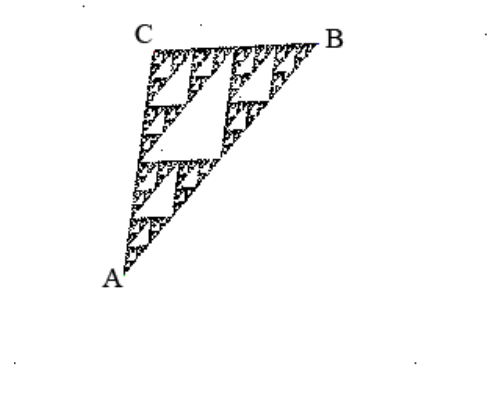
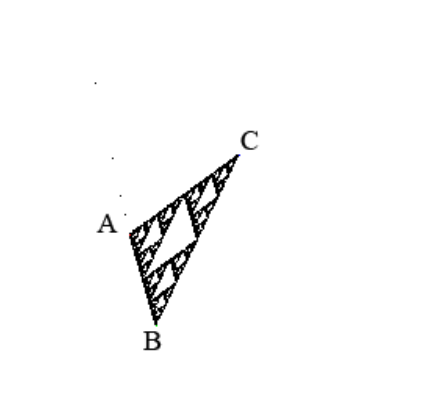
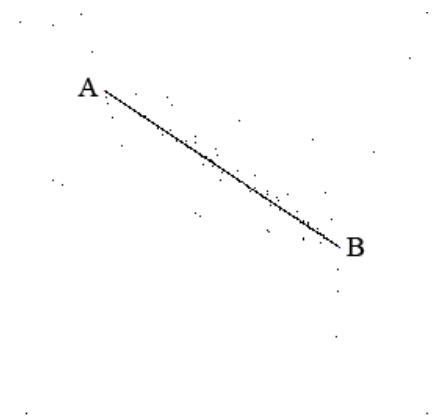
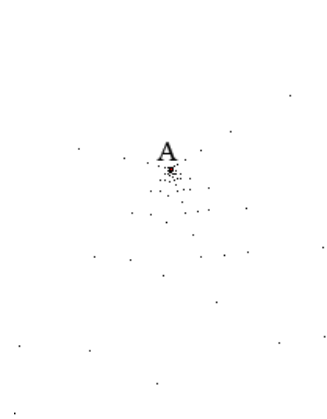
Par ailleurs il faut remarquer que les calculs se font dans l'espace des coordonnées en *nombres flottants* (à défaut de nombres réels), et que c'est le pixel (dont les coordonnées sont entières) qui approche le mieux cette valeur presque exacte qui est colorié. Le même pixel peut donc être choisi, et l'est d'ailleurs souvent, pour des résultats numériques différents. Nous allons maintenant tenir compte de ce fait, et visualiser le "poids" de chaque pixel, "mesurer" en quelque sorte sa probabilité d'être choisi ; pour cela, nous allons progressivement changer la couleur (ou plutôt le niveau de gris) du pixel, au lieu de le transformer brutalement du blanc au noir, ou du blanc à une couleur liée à la transformation comme précédemment (**Planche 12**). Cela met en évidence d'autres structures internes de ces figures (en particulier pour les figures à 5, 6, et 7 sommets), et, *a contrario*, l'homogénéité du carré rempli.

Transformation du “mi-chemin”

à un point A

à deux points A et B

à trois points A, B et C (avec variantes)



Transformation du “mi-chemin”

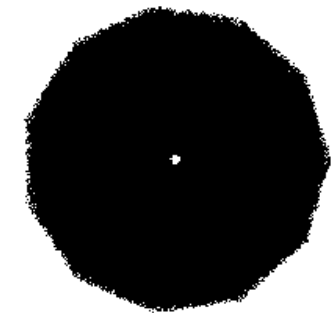
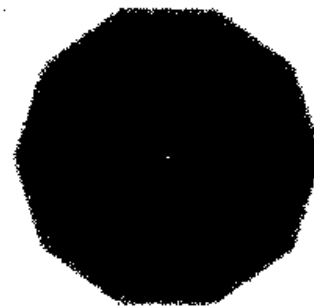
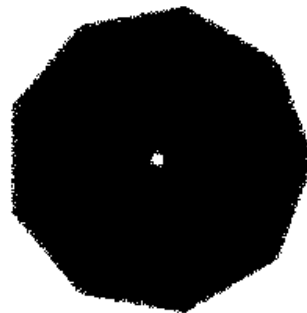
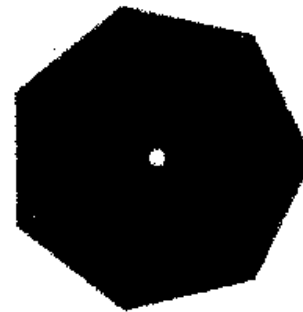
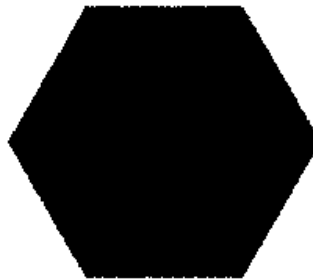
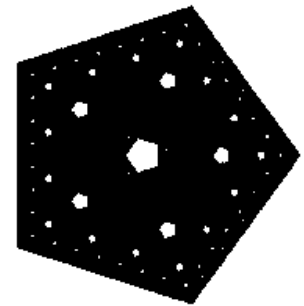
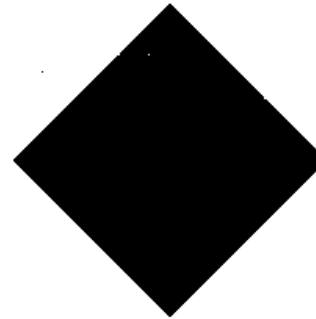
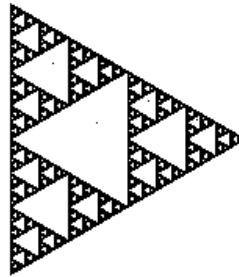
à

3, 4, 5,

6, 7, 8,

9, 10, 11

points (sommets de polygones réguliers)



Transformation du “mi-chemin”

à

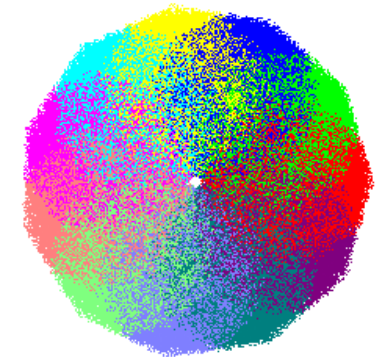
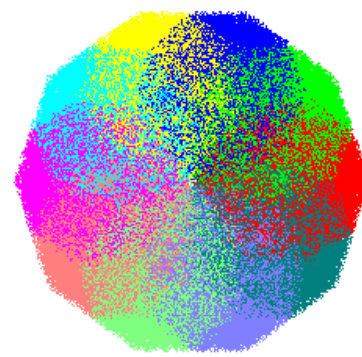
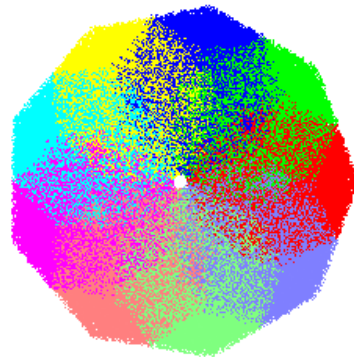
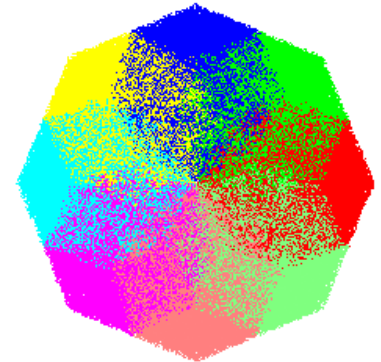
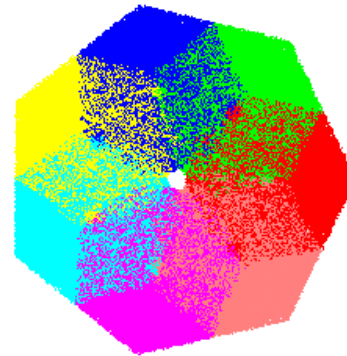
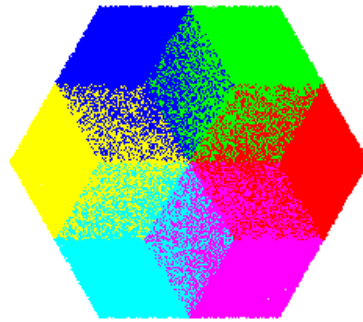
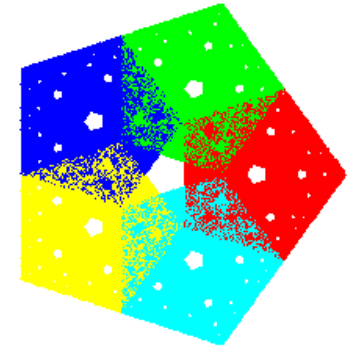
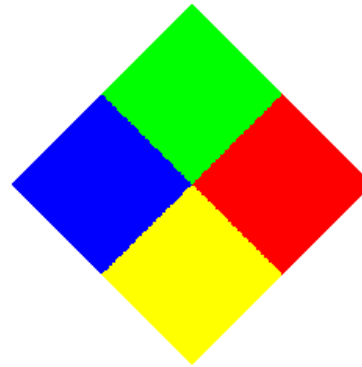
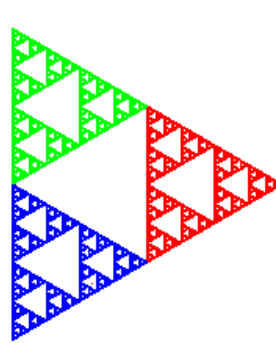
3, 4, 5,

6, 7, 8,

9, 10, 11

points (sommets de polygones réguliers)

La couleur du pixel dépend de la transformation
dont il est issu (donc du point qui détermine cette
transformation)



Transformation du “mi-chemin”

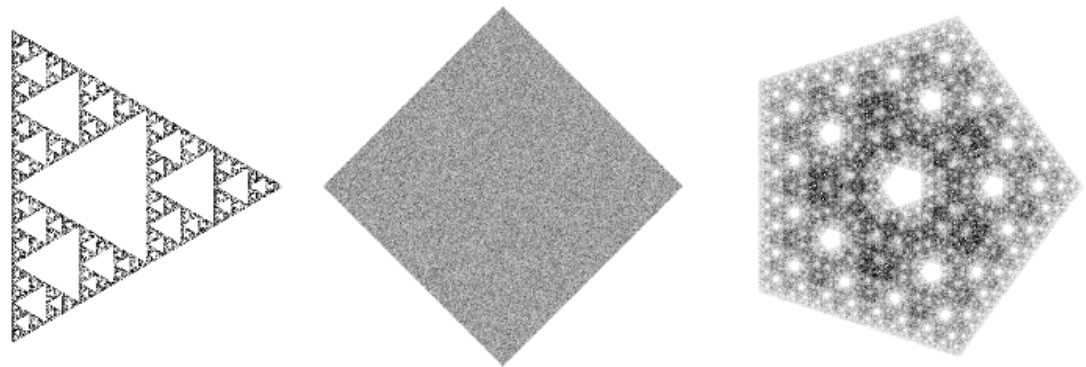
à

3, 4, 5,

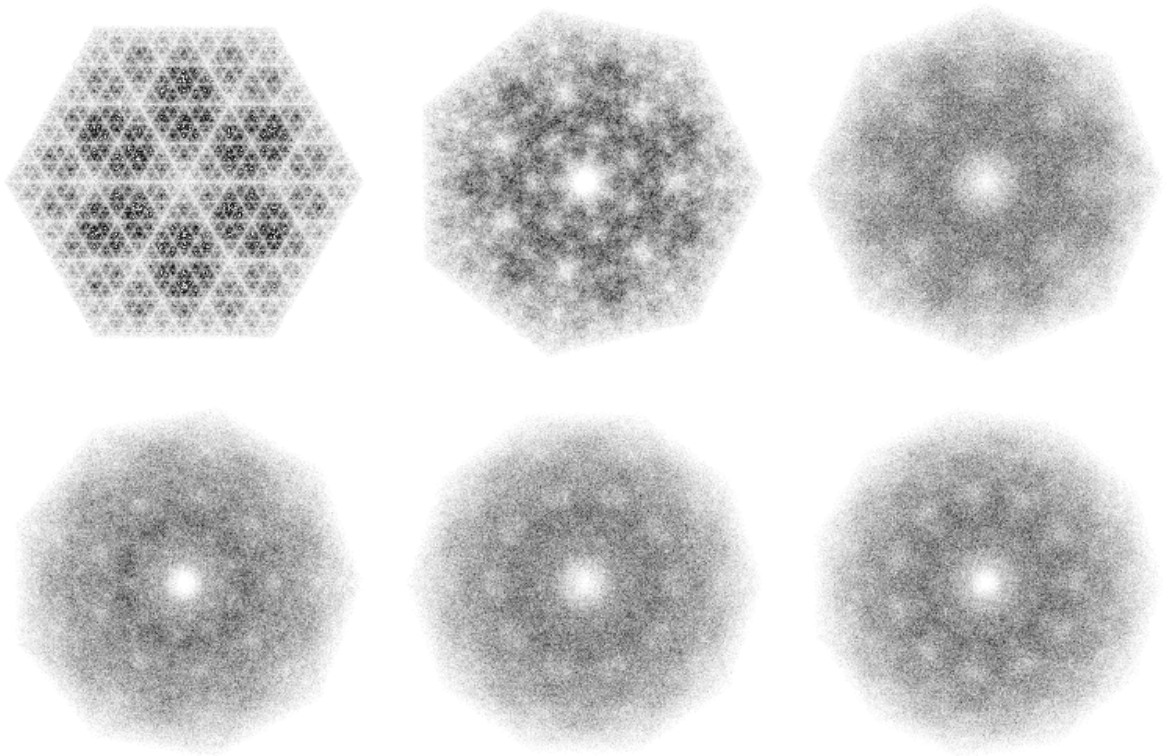
6, 7, 8,

9, 10, 11

points (sommets de polygones réguliers)



Le niveau de gris mesure la fréquence d’atteinte du pixel (500000 itérations)



Nous allons maintenant mieux expliciter cette transformation du “mi-chemin”, pour pouvoir la généraliser : elle n’est autre en effet qu’une *transformation affine* composée d’une homothétie suivie d’une translation ; en effet, les coordonnées du milieu de PA sont :

$$x' = (x + x_a)/2$$

$$y' = (y + y_a)/2$$

soit :

$$x' = x/2 + x_a/2$$

$$y' = y/2 + y_a/2$$

ce qui est l’écriture d’une homothétie de rapport 1/2, suivie d’une translation de vecteur $(x_a/2, y_a/2)$.

Ces processus que nous venons de mettre en œuvre sont en fait des IFS (*Iterated Function systems* ; systèmes de fonctions itérées) ; leurs attracteurs sont des fractals. Nous allons maintenant expliciter cette théorie.

Définition des IFS

Abordons maintenant la théorie des IFS à proprement parler.

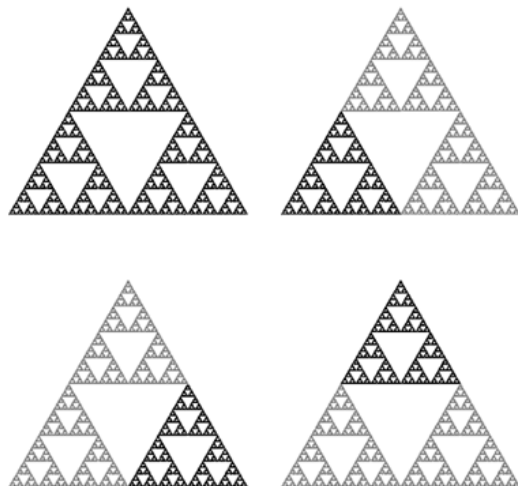
Revenons à nos figures historiques, le triangle de Sierpinski et la courbe de von Koch. Chacune semble issue d’un processus très différent : le triangle de Sierpinski est issu de “lacunes” récursives, la courbe de von Koch résulte de la complexification récursive d’un segment. Les IFS vont nous permettre de comprendre le mécanisme analogue qui est en fait mis en œuvre. Ce qui est commun à ces deux figures, c’est qu’elles sont auto-similaires : le triangle de Sierpinski est composé de trois figures semblables (deux fois plus petites) à lui-même ; la courbe de von Koch est composée de quatre figures semblables (trois fois plus petites) à elle-même.

La théorie des IFS énonce en particulier que *toute figure auto-similaire est l’attracteur d’un IFS dans les transformations sont les transformations qui transforment la figure totale en chacune de ses parties*. La mise en œuvre d’un IFS peut se faire suivant trois algorithmes :

- *systématique* : on part d’un point quelconque et on lui applique systématiquement toutes les transformations du système ; puis de même à chaque point obtenu, etc. (cet algorithme pose cependant quelques difficultés sur lesquelles nous reviendrons)
- *déterministe* : on applique l’ensemble des transformations à une portion quelconque du plan, puis au résultat obtenu, etc.⁴
- *chaotique* : on part d’un point quelconque et on lui applique l’une des transformations du système choisie au hasard ; puis on fait de même sur le résultat, etc.

C’est ce dernier algorithme, que Michael Barnsley appelle “chaos dance”, que nous avons appliqué dans la transformation du “mi-chemin”.

⁴ Il fait noter que l’algorithme systématique est aussi déterministe que le second ; nous reprenons la terminologie de Michael Barnsley, qui est celle adoptée dans toute la littérature sur ce sujet



Examinons maintenant le triangle de Sierpinski pour essayer de déterminer l'IFS dont il est l'attracteur : il est composé de trois figures qui peuvent se déduire de la figure totale par les transformations suivantes :

- une homothétie de rapport $1/2$
- une homothétie de rapport $1/2$ suivie d'une translation de vecteur $(1/2, 0)$
- une homothétie de rapport $1/2$ suivie d'une translation de vecteur $(1/4, \sqrt{3}/2)$

Ces valeurs sont obtenues en considérant que le centre du repère est situé au coin gauche du triangle, et que la longueur de son côté est égale à 1. Peu importe en fait, puisque le programme se charge éventuellement de recadrer et de redimensionner la figure ; ce qui compte c'est de rester cohérent entre les transformations.

Les transformations en jeu sont des transformations affines ; mieux, ce sont des similitudes ; ce sont même des similitudes très simples puisqu'elles ne comportent pas de rotation.

Nous avons déjà vu des exemples de mise en œuvre de l'algorithme chaotique avec la transformation du mi-chemin : les points “dansent” aléatoirement de point en point de l'attracteur, jusqu'à ce qu'on obtienne une image acceptable de celui-ci. Passons maintenant à l'algorithme déterministe, qui est plus spectaculaire. On part d'une portion quelconque du plan, d'un ensemble de points quelconques de ce plan, en fait un *bitmap* constitué de pixels blancs et noirs, les pixels noirs constituant la portion de plan sur laquelle agit l'IFS, et on fait agir sur chacun d'entre eux l'ensemble des transformations de l'IFS ; puis on recommence sur le bitmap obtenu, etc.

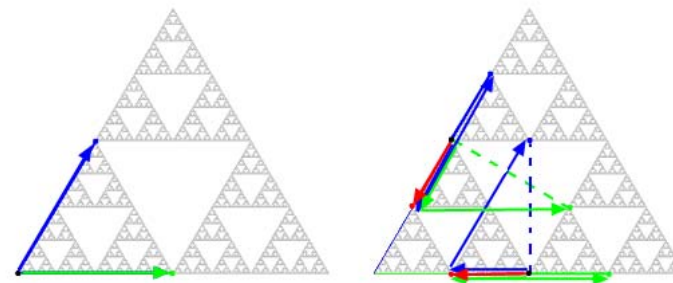
Voyons quelques exemples (**Planche 13**) : on peut partir d'un triangle équilatéral rempli, et l'itération reproduit le mécanisme classique de la construction du triangle de Sierpinski ; mais on peut tout aussi bien partir d'un triangle sur la pointe, d'un carré, d'un disque, d'un gribouillis, du portrait de Wacław Sierpinski... On peut aussi agir sur un bitmap coloré, comme dans le dernier exemple : on agit alors sur les pixels “non blancs”. Dans tous les cas, on aboutit à l'attracteur, même si la qualité de l'image finale peut être mauvaise, du fait de la résolution du bitmap considéré (ceux-ci font 200x200 pixels, ce qui n'est pas beaucoup). Cet algorithme n'est pas le plus efficace pour visualiser l'attracteur (il est lent, puisqu'il faut lire le bitmap en entier à chaque étape), mais il est le plus “parlant” sur ce que signifie le mot “attracteur”.

On peut aussi partir d'un bitmap comportant un seul pixel noir (**Planche 14**). L'attracteur n'apparaît que lentement. Dans ce cas, on simule en quelque sorte l'algorithme systématique : pour l'IFS du triangle de Sierpinski, les deux algorithmes sont à peu près équivalents, parce que les trois transformations du système sont de même “poids”, de même valeur absolue de déterminant. Pour des IFS où ce n'est pas le cas, il faudra “pondérer” chaque transformation, et ces deux algorithmes seront alors différenciés ; nous y reviendrons en temps voulu. Mais dans ce cas-ci, il n'y a aucune différence entre les images produites par les deux algorithmes, bien que les scripts soient très différents.

L'algorithme systématique nécessite de fabriquer l'“arbre” des transformations d'un point, et de calculer explicitement les coordonnées de tous les points à chaque étape : à l'étape 1, on a en principe 3 points, à l'étape 2, $3^2 = 9$ points, à l'étape n , 3^n points ; par exemple les images de la *Planche 14* correspondent aux étapes 0 à 8, elles comportent théoriquement respectivement 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187 et 6561 points⁵ ; il faut donc trouver le bon nombre d'étapes pour avoir un résultat lisible par rapport à la résolution de l'image tout en ayant un temps de calcul acceptable : au bout d'un moment, il est d'ailleurs inutile de poursuivre, puisque les points, aussi nombreux qu'ils soient, correspondent à un nombre limité de pixels.

Regardons ce que produisent vraiment les différents algorithmes (*Planche 15*) ; on part du point (0 0), situé dans l'attracteur, ce qui garantit que tous les points appartiennent à l'attracteur. L'arbre de l'algorithme systématique est plus complexe que ce que les images très régulières pourraient laisser penser.

Examinons de près le début de l'algorithme : on part du point (0 0) situé en bas à gauche du triangle ; on lui applique les trois transformations décrites plus haut (homothétie de rapport 1/2, suivie de resp. pas de translation, une translation de vecteur (1/2 0) et une translation de vecteur (1/4 $\sqrt{3}/2$) ; comme le point est en (0 0) l'homothétie le laisse inchangé ; la première transformation le laisse donc en place et les deux autres l'emmènent aux points resp. vert et bleu. Ces deux points subissent de même l'homothétie ; puis pas de translation (en rouge), et une translation de vecteur (1/2 0) en vert et de vecteur (1/4 $\sqrt{3}/2$) en bleu :



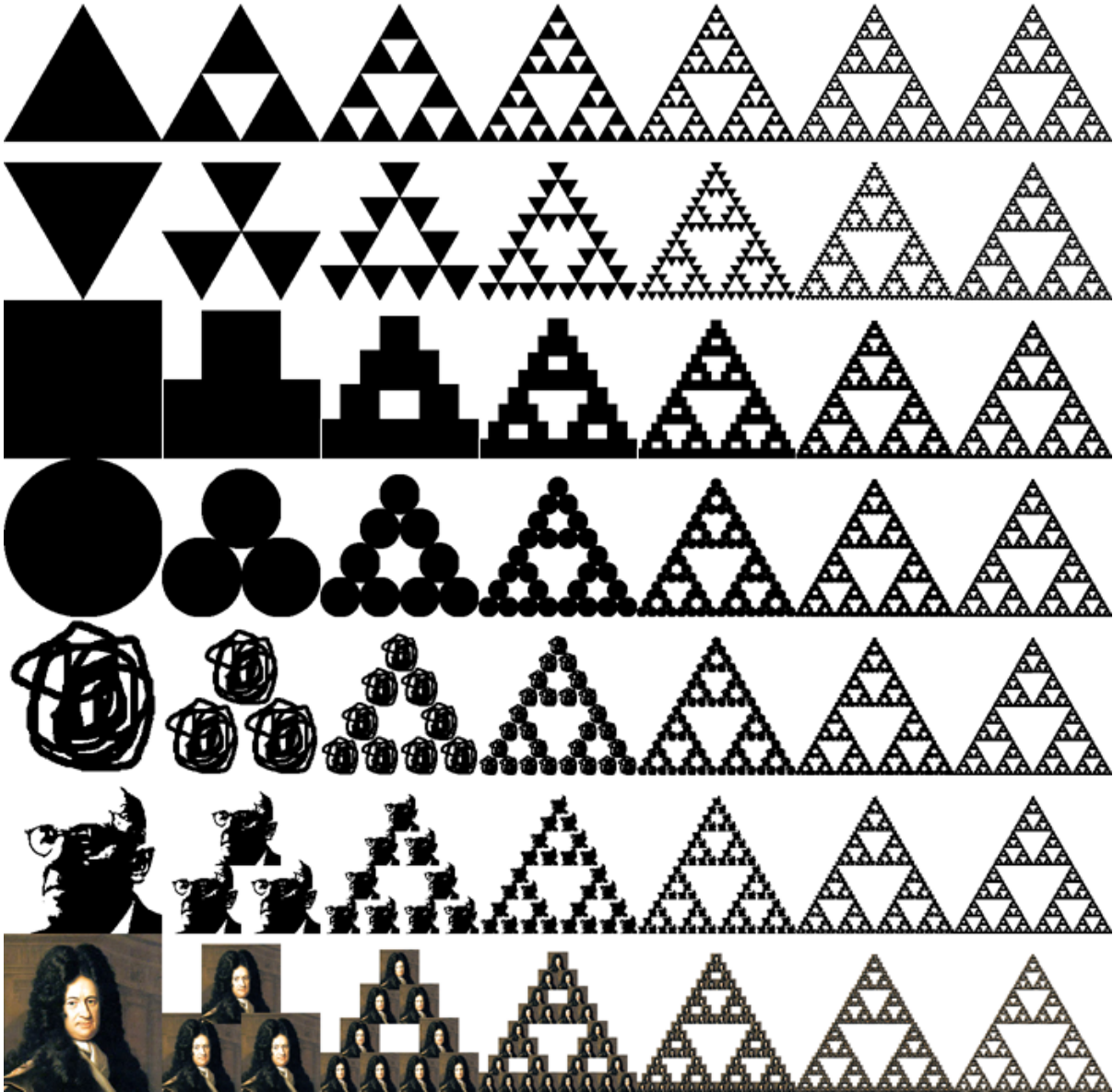
L'arbre finit par atteindre tous les points de l'attracteur, chacun de ses embranchements répartissant les nouvelles branches dans les trois “bassins” attracteurs, les trois composantes de l'IFS. L'algorithme chaotique quant à lui emprunte un chemin aléatoire dans cet arbre : comme les branches rencontrent les trois bassins attracteurs, il finit lui aussi par donner un bon aspect de l'attracteur. Nous pourrions être tentés de parcourir l'arbre de manière régulière, en prenant les transformations dans l'ordre : $w_1, w_2, w_3, w_1, w_2, w_3, w_1$, etc., mais cela ne marche pas, on tombe sur des trajectoires

⁵ Il faut noter cependant que certains points ont des coordonnées identiques.

IFS

Triangle de Sierpinski

Algorithme déterministe



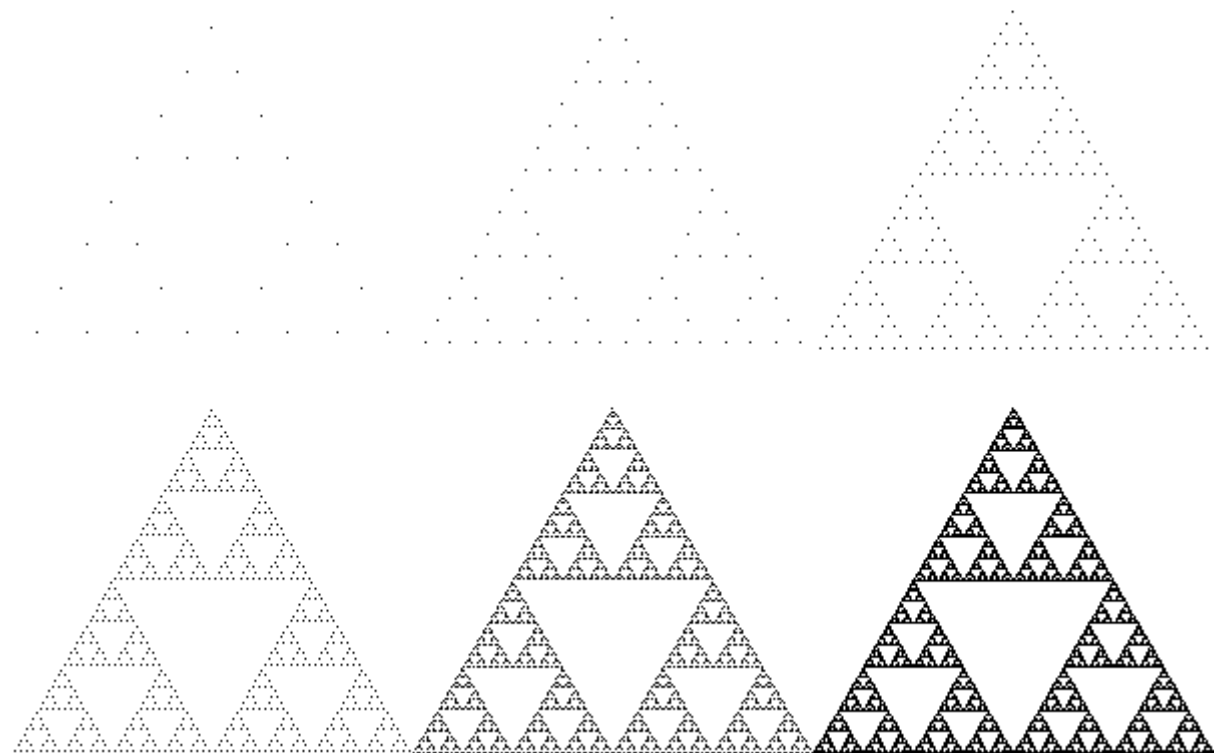
IFS

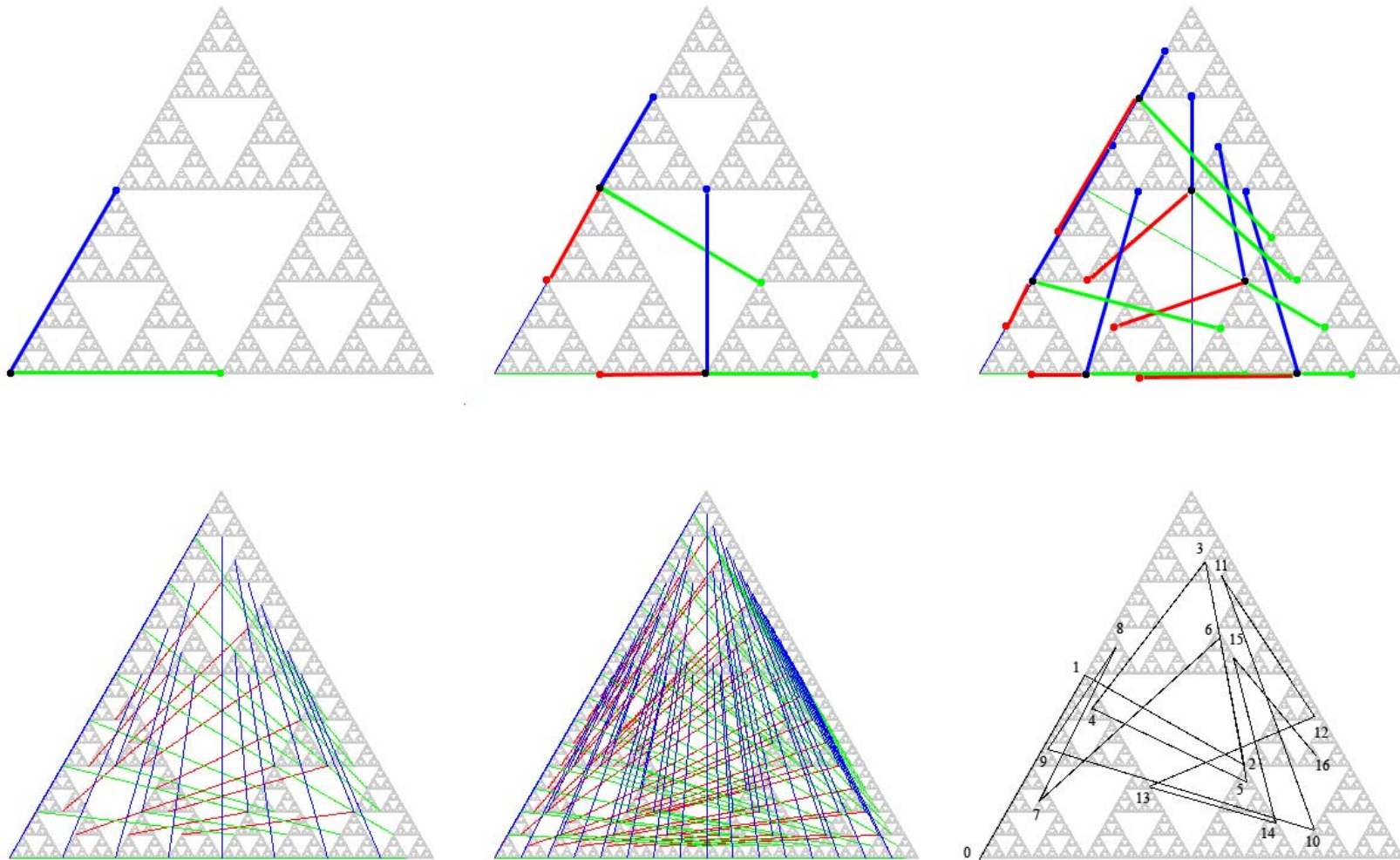
Triangle de Sierpinski

Algorithme déterministe (en partant d'un pixel unique)

ou

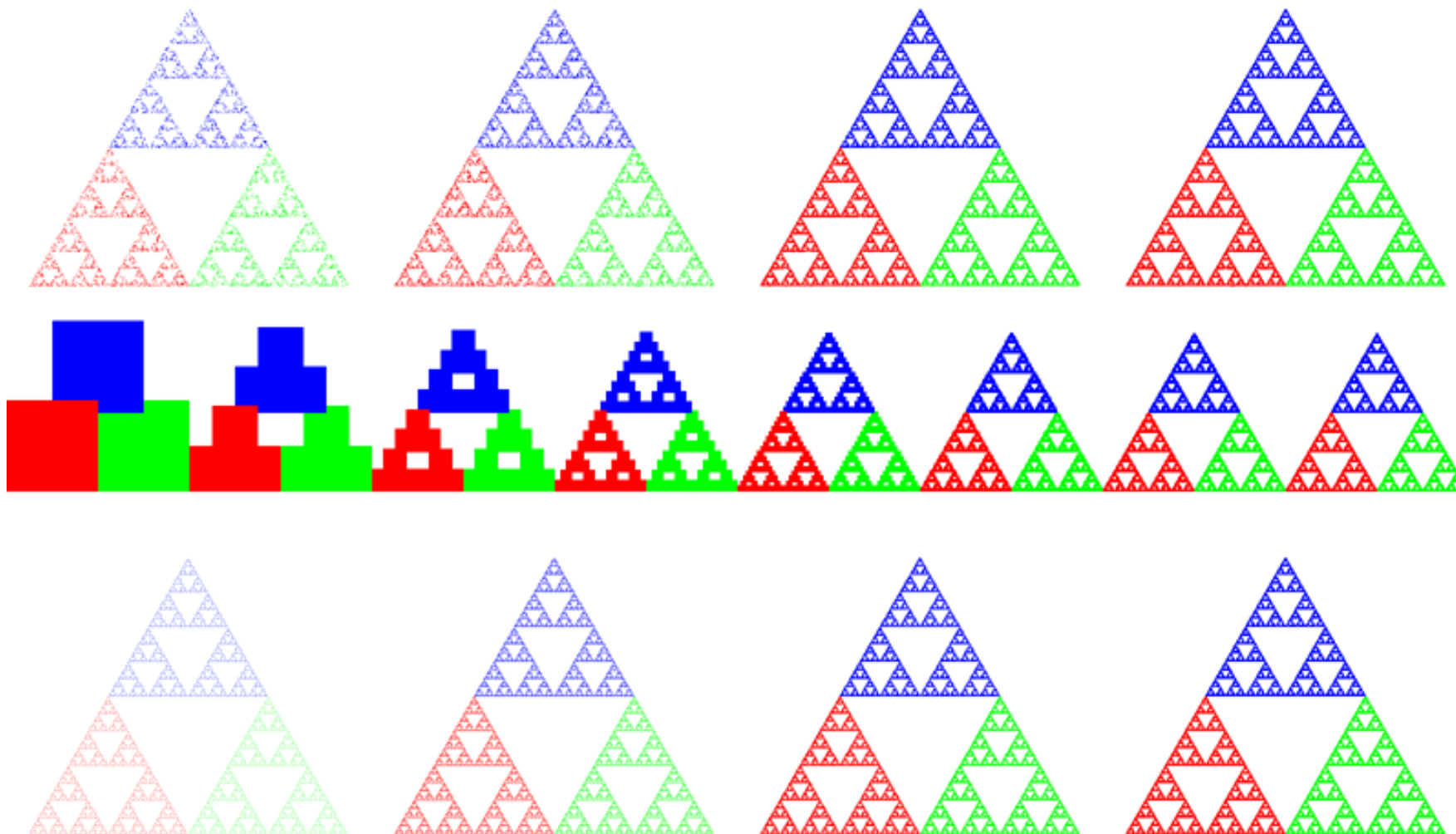
Algorithme systématique





L'arbre de l'algorithme systématique, et le début d'une trajectoire chaotique

On a détaillé le début de l'arbre de l'algorithme systématique, sachant que le point de départ (en bas à gauche du triangle) étant déjà dans la partie rouge de l'attracteur, le premier niveau n'a que deux branches ;



IFS colorés

- algorithme chaotique 5000, 10000, 50000, 100000 itérations (mais 4189, 6973, 13580, 14666 pixels sur $400 \times 400 = 160000$)
- algorithme déterministe : étapes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (28700, 21250, 16154, 12512, 9996, 8410, 7530, 7078, 6830 pixels sur $200 \times 200 = 40000$)
- algorithme systématique : étapes 7, 8, 9, 10 (2187, 6561, 19683, 59049 points calculés et 2187, 6561, 12360, 14591 pixels sur 160000)

périodiques (on tourne en rond entre trois mêmes points) : d’où la nécessité de l’algorithme chaotique. Il faut bien noter que cette introduction du hasard n’enlève rien à l’unicité et à l’intégrité de l’attracteur : ce n’est qu’un moyen de programmation, cela n’a rien à voir avec l’emploi de l’aléatoire pour générer des figures variées (genre d’emploi que nous verrons plus loin).

Dans la pratique, chaque algorithme a ses avantages et ses inconvénients : l’algorithme chaotique est le plus rapide, le plus facile à ajuster, on a rapidement une bonne intuition de la figure finale, même si ses résultats sont parfois un peu “brouillés” : c’est celui que nous utiliserons le plus souvent ; l’algorithme systématique produit les résultats les plus “propres”, mais il est un peu plus délicat à mettre en œuvre, nous ne l’utiliserons qu’à l’occasion ; l’algorithme déterministe est peu efficace en temps de calcul, ses résultats finaux sont acceptables, nous l’utiliserons surtout pour les étapes intermédiaires, qui peuvent être intéressantes en elles-mêmes.

Revenons un instant sur l’emploi de la couleur que nous avons déjà mis en œuvre pour la transformation du “mi-chemin” ; dans chacun des algorithmes, il suffit d’affecter chaque pixel transformé d’une couleur propre à cette transformation pour obtenir une décomposition en couleurs de la figure fractale (**Planche 16**). Profitons-en pour compter le nombre de pixels à chaque étape : on s’aperçoit que le nombre de pixels croît dans le cas des algorithmes chaotique et systématique, mais que ce nombre tend à plafonner lorsque l’attracteur est plus ou moins recouvert. Il est donc inutile d’aller trop loin dans les itérations.

Pour caractériser un IFS, et le fractal qui est son attracteur, on rassemblera les paramètres caractérisant les transformations qui le constituent sous la forme d’un tableau ; l’IFS dont le triangle de Sierpinski est l’attracteur est un IFS de similitudes, transformations composées d’une homothétie et d’une rotation suivies d’une translation ; le tableau de cet IFS se présente ainsi :



sierpinski	taux d’homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	1/2	0°	0	0
w2	1/2	0°	1/2	0
w3	1/2	0°	1/4	$\sqrt{3}/4$

Le triangle de Sierpinski est l’attracteur de cet IFS, mettre en œuvre cet IFS ne peut que mener au triangle de Sierpinski. Mais un fractal (ou toute figure auto-similaire) peut être l’attracteur de plusieurs IFS différents. Par exemple le triangle de Sierpinski est l’attracteur de cet autre IFS :



sierpinski bis	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	1/2	0°	0	0
w2	1/2	120°	1	0
w3	1/2	240°	1/2	$\sqrt{3}/2$

et d'ailleurs de nombreux autres IFS obtenus en combinant des rotations de 120°, 240° et des réflexions, et qu'il serait fastidieux d'énumérer... C'est sous cette forme, à peu près, d'IFS que le triangle de Sierpinski est apparu lors de la mise en œuvre de la transformation du "mi-chemin" ; tel ou tel IFS menant au même attracteur peut donner l'idée de générer différentes familles de fractals. Un IFS très proche de celui que nous avons mis en œuvre pour le triangle de Sierpinski :



sierpinski	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	1/2	0°	0	0
w2	1/2	0°	1/2	0
w3	1/2	0°	1/4	$\sqrt{3}/4$
w4	1/2	180°	3/4	$\sqrt{3}/4$

génère un triangle équilatéral rempli.

Cela nous montre que les fractals ne sont que des cas particuliers de figures auto-similaires ; nous reviendrons sur ce point, et sur la notion de dimension d'auto-similarité sous-jacente dans la partie III.3.

Les IFS permettent de générer n'importe quelle figure fractale, ou simplement auto-similaire. Prenons la courbe de von Koch ; pour trouver son IFS, il faut regarder comment elle se décompose en figures plus petites semblables à elle-même. Comme nous venons de le voir, il y a généralement plusieurs façons de le faire ; la plus classique consiste à considérer qu'elle est composée de 4 parties 3 fois plus petites, d'où le tableau :



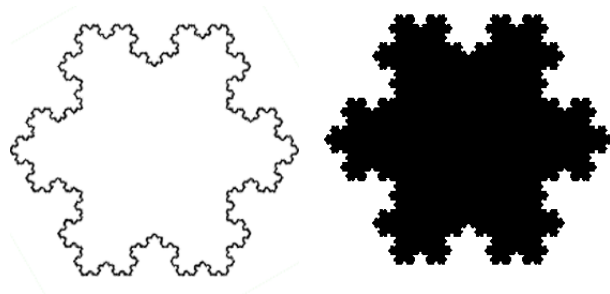
koch	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	1/3	0°	0	0
w2	1/3	60°	1/3	0
w3	1/3	-60°	1/2	$\sqrt{3}/6$
w4	1/3	0°	2/3	0

Mais la courbe de von Koch est aussi l'attracteur de cet autre IFS :



koch bis	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	$1/\sqrt{3}$	-150°	$1/2$	$\sqrt{3}/6$
w2	$1/\sqrt{3}$	150°	1	0

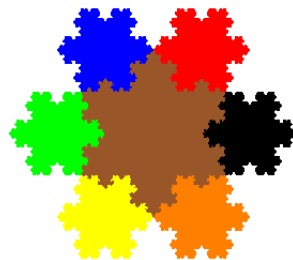
Cet IFS est plus simple, puisqu'il ne comporte que 2 transformations. On peut classer les figures fractales (ou simplement auto-similaires) suivant le nombre minimum de transformations que nécessite leur IFS, l'"ordre" de leur IFS, qui est au moins égal à 2.



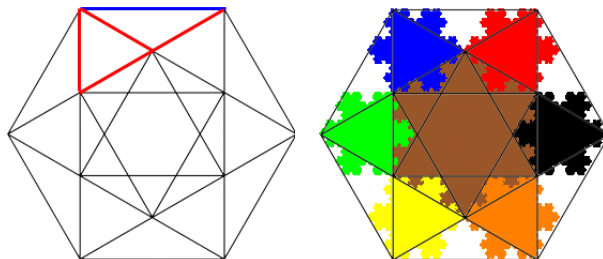
Nous n'allons pas nous appesantir trop longtemps dans le cadre des IFS sur la courbe de von Koch, qui est un *pli*, ce que nous verrons plutôt avec les L-systèmes ; disons simplement que si l'on veut simuler la construction classique de cette courbe à l'aide d'un IFS, il suffit de choisir l'algorithme déterministe et de partir d'un segment ; nous reviendrons plus loin sur cette façon de faire en traitant des rapports entre IFS et L-systèmes.

La courbe de von Koch est souvent présentée en démarrant la construction par un triangle équilatéral ; si l'on ne considère que la frontière de ce que l'on appelle alors le "flocon", l'"étoile" ou l'"île" de von Koch, il faut noter que cette figure n'est pas fractale, n'est en tout cas pas auto-similaire.

Par contre son intérieur l'est, il est l'attracteur de l'IFS :

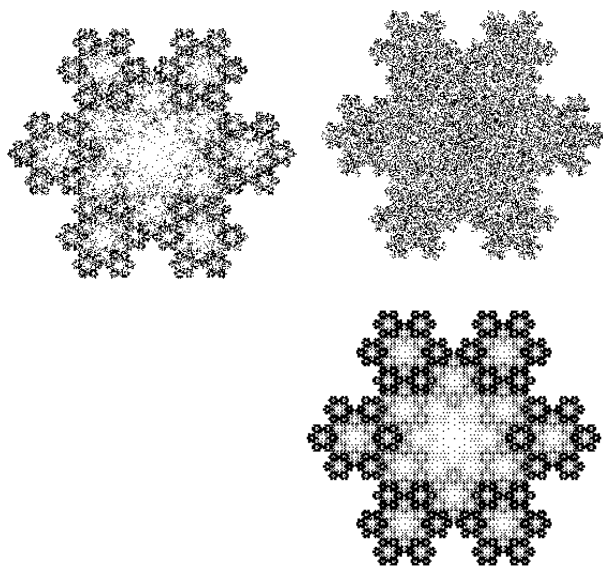


koch flocon	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	$1/3$	0°	1	0
w2	$1/3$	0°	$1/2$	$\sqrt{3}/2$
w3	$1/3$	0°	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$
w4	$1/3$	0°	-1	0
w5	$1/3$	0°	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$
w6	$1/3$	0°	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$
w7	$1/\sqrt{3}$	90°	0	0



La seule petite difficulté que comporte cette détermination est le calcul du taux d'homothétie du sous-flocon central. Le schéma ci-contre permet de guider cette recherche, il s'agit de trouver le rapport entre le côté d'un hexagone et celui de l'hexagone qui est inscrit dans l'hexagone croisé issu du premier hexagone. Cette construction a été explorée par les géomètres depuis longtemps. Ce rapport est celui du petit côté a (en rouge) au grand côté b (en bleu) du triangle rectangle dont l'hypoténuse

est égale à deux fois le petit côté ;il s'agit d'un triangle rectangle d'angles 30° et 60° : $a^2 + b^2 = (2a)^2$; $a^2 + b^2 = 4a^2$; $3a^2 = b^2$; $a = b/\sqrt{3}$. D'où le taux d'homothétie de w_7 .



Nous avons ici un IFS de similitudes, mais l'une de ces similitudes n'est pas de même "poids" que les autres : le déterminant de w_7 est égal à $1/3$, alors que celui de chacune des autres transformations est égal à $1/9$ (le flocon brun central a une aire 3 fois que grande que les autres). Si l'on ne tient pas compte de cette disparité, et que l'on applique l'algorithme chaotique de manière indifférenciée, on obtient, avec un faible nombre d'itérations (20000), la figure ci-contre à gauche. Même si elle n'est pas inintéressante, elle ne rend pas compte du véritable caractère auto-similaire de la figure.

Pour résoudre ce problème, dans l'algorithme chaotique, c'est très simple : il suffit d'attribuer à chaque transformation une probabilité proportionnelle à son poids, c'est-à-dire à la valeur absolue de son déterminant. On obtient alors (toujours avec 20000 itérations) la figure ci-contre à droite; et, après un nombre d'itérations plus important les figures, respectivement noire ou colorée, précédentes.

Pour l'algorithme systématique, c'est un peu plus compliqué ; si l'on ne tient pas compte de la différence de poids des transformations, on obtient la figure ci-contre. Pour résoudre ce problème, il faut "élaguer" les branches de façon à ce que le nombre d'utilisations de chaque transformation soit proportionnel à son poids ; cela nécessite des calculs compliqués (c'est une des raisons pour lesquelles nous n'employons pas généralement cet algorithme).

Pour l'algorithme déterministe, par contre, cette contrainte ne joue pas : par construction, le résultat de chaque transformation a une aire en rapport avec la valeur absolue de son déterminant, du moins si l'on part d'une portion de plan suffisamment grande (il y a des problèmes si l'on part d'un point, de la même façon qu'avec l'algorithme systématique).



128 *Black Spleenwort* ou
Capillaire noire



Les IFS sont très utiles pour générer des fractals connus, et pour fabriquer des familles très variées de fractals. Mais ils permettent aussi de tenter de déterminer l'IFS dont l'attracteur approchera le mieux une forme naturelle (à condition qu'elle soit plus ou moins auto-similaire).

L'un des exemples favoris de Michael Barnsley est la fougère appelée en anglais *black spleenwort*, en français la *capillaire noire* (*Asplenium adiantum nigrum*). La forme de cette fougère est assez nettement auto-similaire. Pour trouver l'IFS qui permettra de générer une figure fractale proche de la forme de cette fougère, il faut chercher les transformations (le plus petit nombre de transformations) qui contractent l'image totale en plus petites images, qui, par *collage*, reconstituent le mieux possible la forme totale.

On peut utiliser un logiciel de traitement d'image, comme Photoshop, pour effectuer cette recherche. On trouve qu'il faut trois transformations principales, plus une (une homothétie qui contracte très fortement en x) pour la tige. Les transformations en jeu ne sont pas des similitudes, mais des affinités ; les homothéties et les rotations ne sont pas identiques en x et en y : d'où deux taux d'homothétie (tx et ty), et deux angles de rotation (θ et φ), plus les deux composantes du vecteur de translation (e et f) :

black spleenwort	tx	ty	θ	φ	e	f
w1	0,85	0,85	-2,5°	-2,5°	0	1,6
w2	0,3	0,34	49°	49°	0	1,6
w3	0,3	0,37	120°	-50°	0	0,44
w4	0	0,16	0°	0°	0	0

La **Planche 17** montre la recherche de l'IFS, et sa mise en œuvre avec l'algorithme chaotique coloré, et l'algorithme déterministe, en partant d'un carré (noter que la transformation $w3$ implique une réflexion).

A partir de là, on peut essayer de faire des variantes de fractales de type "fougère" ; les figures obtenues ne ressembleront peut-être pas à des fougères, mais elles auront tout de même une allure de plante.

On peut d'abord garder la structure en quatre transformations (en comptant celle de la tige ; dans les exemples qui suivent la transformation qui produit la tige est $w1$, en rouge) :

Recherche de l'IFS pour "black spleenwort"

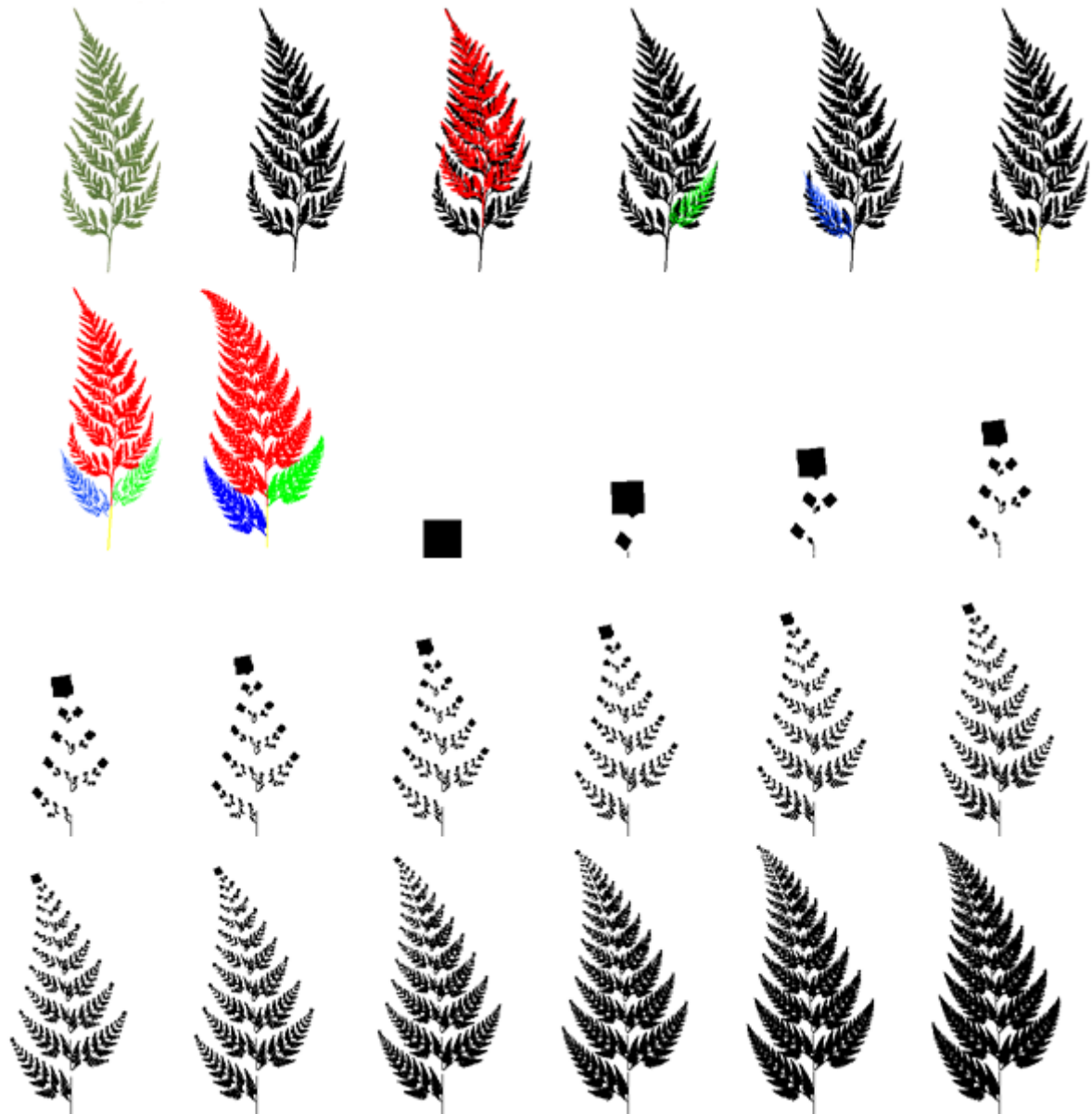
- nettoyage de l'image

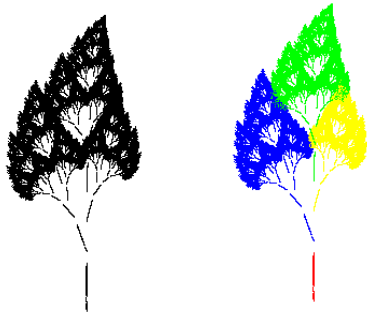
- détection et approximation des quatre transformations de l'IFS :

black spleenwort	a	b	c	d	e	f
w1	0,85	0,04	-0,04	0,85	0	1,6
w2	0,2	-0,26	0,23	0,22	0	1,6
w3	-0,15	0,28	0,26	0,24	0	0,44
w4	0	0	0	0,16	0	0

- mise en œuvre de l'algorithme chaotique coloré pour l'IFS

- mise en œuvre de l'algorithme déterministe en partant d'un carré

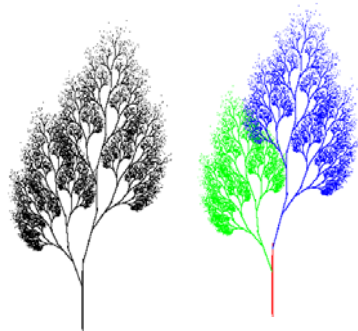




variante 1	tx	ty	θ	φ	e	f
w1	0,001	0,16	0°	0°	0	0
w2	0,6	0,6	-2,5°	-2,5°	0	3,2
w3	0,6	0,6	20°	20°	0	1,6
w4	0,45	0,45	165°	-15°	0	2,4

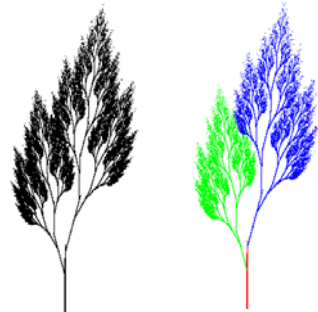
La transformation w4 est “inversante” par rapport à l’axe 0y (ses angles de rotation sont tels que leur différence est égale à 180°). Dans cette variante, les homothéties (à part celle de la tige) sont simples : les deux taux d’homothétie sont égaux.

En regardant ce résultat, et de “vraies” plantes, on se rend compte qu’on pourrait se limiter à deux transformations, plus celle de la tige :



variante 2	tx	ty	θ	φ	e	f
w1	0,001	0,24	0°	0°	0	0
w2	0,6	0,6	20°	20°	0	1,6
w3	0,8	0,8	165°	-15°	0	2,4

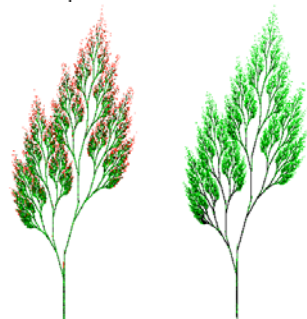
A part la tige, les transformations sont encore des similitudes (un seul taux d’homothétie, un seul angle de rotation (w3 est inversante))



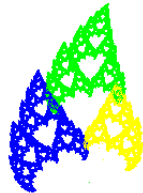
variante 3	tx	ty	θ	φ	e	f
w1	0,001	0,24	0°	0°	0	0
w2	0,55	0,6	15°	15°	0	1,6
w3	0,75	0,8	165°	-15°	0	2,4

Ici, on a des affinités (les taux d’homothétie en x et en y sont différents) ; il faut noter que les composantes en x des vecteurs de translation des trois transformations sont nuls : les trois sous-figures sont “empilées” l’une sur l’autre.

Pour finir, on a mis en œuvre l’algorithme chaotique pour cette variante en donnant à chaque pixel une couleur en fonction de sa probabilité d’atteinte : en faisant varier la gamme de couleurs, on peut obtenir des résultats tels que ceux ci-contre.



Maintenant revenons à notre première variante de fougère (qui ne ressemblait pas tellement à une fougère...), en abandonnant la transformation w1 (celle de la tige) et examinons la structure de son IFS :



variante 1 sans tige	tx	ty	θ	φ	e	f
w2	0,6	0,6	-2,5°	-2,5°	0	3,2
w3	0,6	0,6	20°	20°	0	1,6
w4	0,45	0,45	165°	-15°	0	2,4

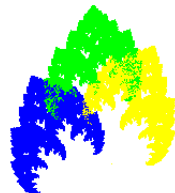
Les trois transformations sont des similitudes, de taux d'homothétie, respectivement 0,6 0,6 et 0,45, et d'angle de rotation, respectivement, 2,5°, 20° et -15° ; la dernière transformation est composée avec une symétrie d'axe Oy ; de plus ces transformations linéaires sont composées avec des translations de vecteurs respectivement (0 3,2) (0 1,6) et (0 2,4) ; il faut noter que la valeur absolue des composantes de ces vecteurs n'a pas d'importance, ce qui compte c'est leurs valeurs relatives.

Voyons ce que donnent des variations de ces taux d'homothétie et de ces angles ; d'abord, faisons en sorte que les trois taux d'homothétie soient égaux :



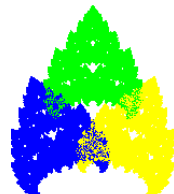
variation 1	tx	ty	θ	φ	e	f
w2	0,6	0,6	-2,5°	-2,5°	0	3,2
w3	0,6	0,6	20°	20°	0	1,6
w4	0,6	0,6	165°	-15°	0	2,4

Puis, prenons le même angle de rotation pour w3 et w4 et un angle nul pour w1 :



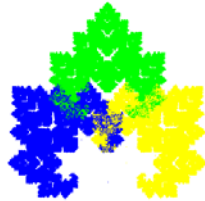
variation 2	tx	ty	θ	φ	e	f
w2	0,6	0,6	0°	0°	0	3,2
w3	0,6	0,6	20°	20°	0	1,6
w4	0,6	0,6	160°	-20°	0	2,4

Ensuite, donnons la même composante en y pour le vecteur de translation de w3 et w4 :



variation 3	tx	ty	θ	φ	e	f
w2	0,6	0,6	0°	-0°	0	3,2
w3	0,6	0,6	20°	20°	0	1,6
w4	0,6	0,6	160°	-20°	0	1,6

On voit apparaître une plus forte symétrie de la figure ; maintenant, jouons sur les angles de rotations de w_2 et w_3 ; fixons-les à 45° :



variation 4	tx	ty	θ	φ	e	f
w_2	0,6	0,6	0°	-0°	0	3,2
w_3	0,6	0,6	45°	45°	0	1,6
w_4	0,6	0,6	135°	-45°	0	1,6

On voit apparaître une figure qui constitue une bonne base pour des IFS de feuilles ; fixons maintenant la valeur de ces angles de rotation à 90° :



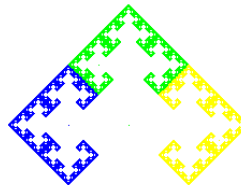
variation 5	tx	ty	θ	φ	e	f
w_2	0,6	0,6	0°	-0°	0	3,2
w_3	0,6	0,6	90°	90°	0	1,6
w_4	0,6	0,6	90°	-90°	0	1,6

Enfin, jouons sur la composante en y du vecteur de translation (en mettant la même pour toutes les transformations) :



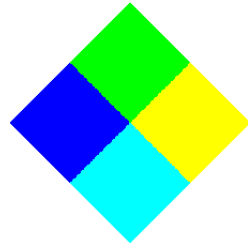
variation 6	tx	ty	θ	φ	e	f
w_2	0,6	0,6	0°	-0°	0	3,2
w_3	0,6	0,6	90°	90°	0	3,2
w_4	0,6	0,6	90°	-90°	0	3,2

On a presque un fractal régulier ; donnons aux taux d'homothétie une valeur de 0,5 :



variation 7	tx	ty	θ	φ	e	f
w_2	0,5	0,5	0°	-0°	0	3,2
w_3	0,5	0,5	90°	90°	0	3,2
w_4	0,5	0,5	90°	-90°	0	3,2

Et l'on obtient alors un fractal régulier "classique", qui est d'ailleurs une variante de deux figures auto-similaires non fractales, le carré :



variation 8	tx	ty	θ	φ	e	f
w2	0,5	0,5	0°	-0°	0	3,2
w3	0,5	0,5	90°	90°	0	3,2
w4	0,5	0,5	90°	-90°	0	3,2
w5	0,5	0,5	0°	180°	0	3,2

dont on aurait supprimé le sous-carré du bas ; ou le "L" :



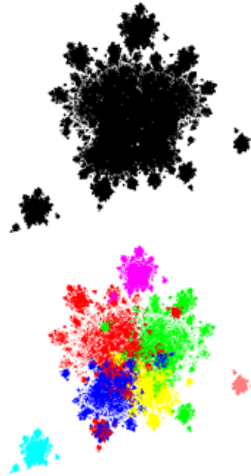
variation 9	tx	ty	θ	φ	e	f
w2	0,5	0,5	0°	-0°	0	3,2
w3	0,5	0,5	90°	90°	0	3,2
w4	0,5	0,5	90°	-90°	0	3,2
w5	0,5	0,5	0°	0°	0	1,6

dont on aurait également supprimé le "L" central.

Ce parcours à travers les IFS montre un mode d'expérimentation qui consiste à partir d'un fractal régulier, ou éventuellement d'une figure auto-similaire non fractale, mais dans tous les cas d'une figure symétrique, pour rechercher des variantes plus "organiques" ; on peut retracer le parcours menant à notre variante de fougère :



On voit bien comment certaines étapes de ce parcours pourraient mener vers des figures évoquant des feuilles, des sapins, etc.

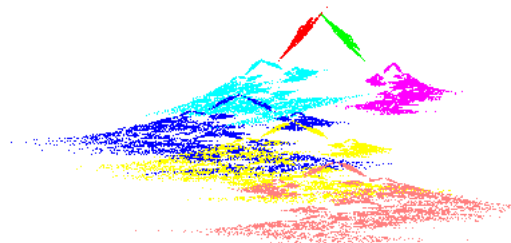


Comme le dit Michael Barnsley p. 108, un fractal typique n'est pas forcément "joli" ; ce gros "pâté" d'encre ci-contre est un fractal, ou du moins une figure auto-similaire, attracteur de l'IFS suivant :

tache	tx	ty	θ	φ	e	f
w1	0,65	0,65	40°	40°	-0,1	0,2
w2	0,55	0,55	150°	-30°	0,1	0,2
w3	0,45	0,45	170°	170°	-0,2	0
w4	0,35	0,35	180°	180°	0,1	0
w5	0,2	0,2	-2,5°	-2,5°	-0,7	-0,5
w6	0,25	0,25	0°	0°	0	0,7
w7	0,1	0,1	-20°	160°	0,7	0

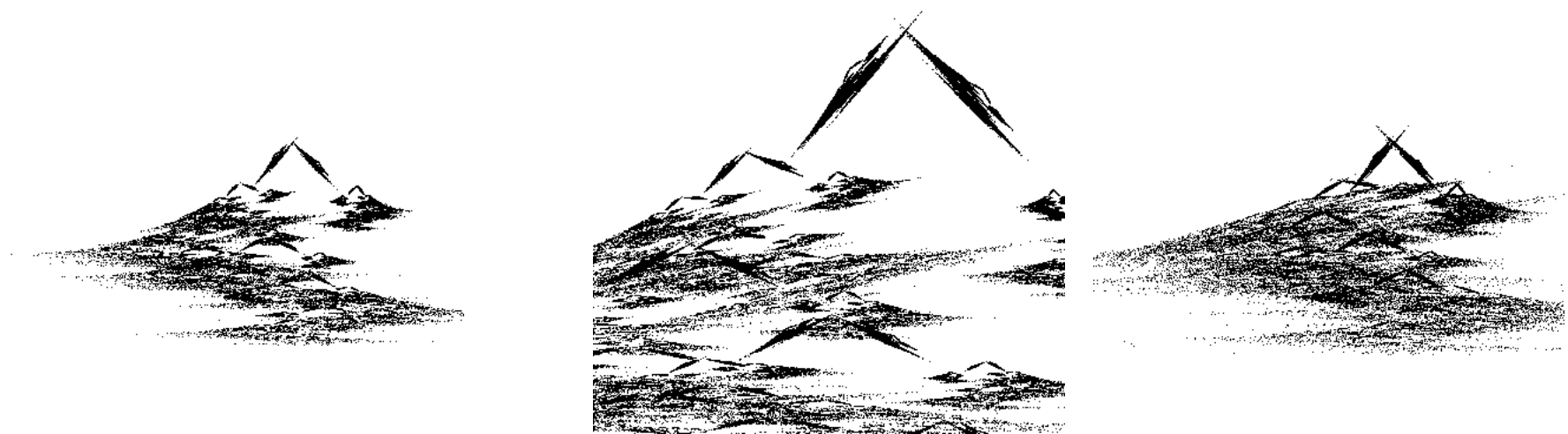
Cette potentialité des IFS à produire, sans aucun aléatoire, des résultats si divers, nous a donné l'idée de faire une petite expérience, sans prétention, sur quelque chose qui pourrait ressembler à un paysage. Cette expérience a d'ailleurs été suggérée par l'une des illustrations de Michael Barnsley (mais dont il ne donne pas le code).

On part de l'élément fort de ce "paysage" : une montagne à l'horizon. Cette montagne se traduit par les deux premières transformations de l'IFS ; par tâtonnement, on complète le tableau :



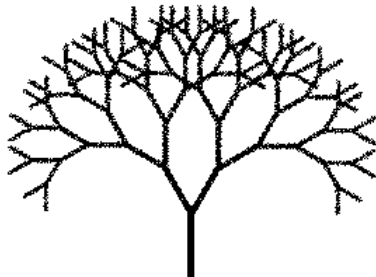
paysage	tx	ty	θ	φ	e	f
w1	0,15	0,04	50°	50°	-0,1	0,35
w2	0,15	0,04	-45°	-45°	0,25	0,3
w3	0,9	0,4	0°	0°	-0,6	-0,3
w4	0,95	0,4	0°	0°	-0,2	-0,5
w5	0,9	0,3	10°	10°	-0,4	0
w6	0,25	0,25	0°	0°	0,6	0
w7	0,9	0,4	0°	0°	0,2	-0,8

Ci-dessous la version en noir, un zoom, et un état antérieur de la recherche de l'IFS :



IFS avec condensation

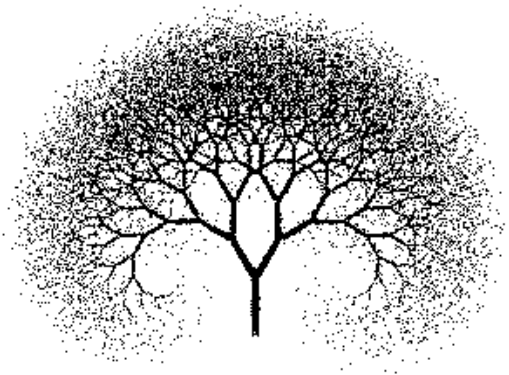
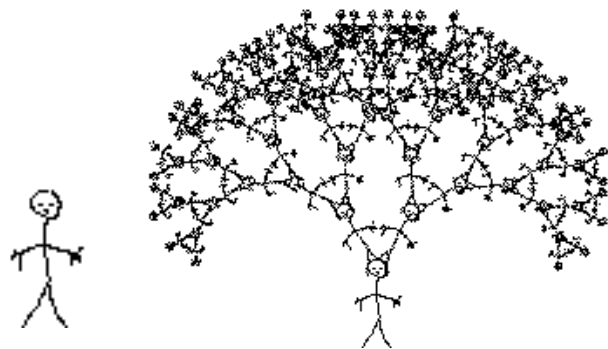
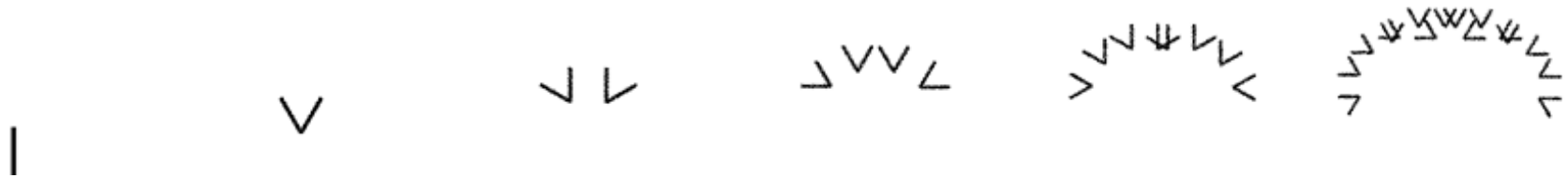
Il existe un type d'IFS un peu particulier, ou plutôt une manière de mettre en œuvre un IFS, que l'on appelle IFS "avec condensation" ; le plus simple c'est de considérer l'algorithme déterministe, et de ne pas effacer les images successives lorsque l'on applique les transformations. L'exemple le plus parlant est celui de l'arbre ; voici un IFS, traité avec condensation, et son résultat au bout de 6 itérations:



IFS avec condensation

arbre	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	0,85	30°	0	0,3
w2	0,85	-30°	0	0,3

On part d'un rectangle allongé (le tronc), et on lui applique les deux transformations ; on itère comme pour un IFS normal cette opération, mais, au contraire des IFS précédents, on ne dessine pas le résultat sur une feuille blanche, mais sur l'image précédente. Si l'on ne prend pas cette précaution, on obtient la suite d'images suivantes :

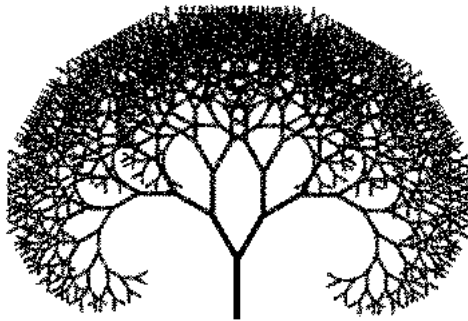


On voit qu’une autre solution consisterait à superposer les images successives de l’algorithme déterministe produites de façon classique.

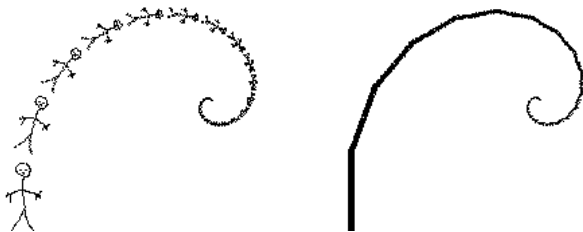
Les IFS avec condensation sont donc très simples, presque trop simples... Intellectuellement, ils sont moins satisfaisants, parce que l’image ne se crée pas d’elle-même, il faut décider de quoi on part, et, contrairement aux IFS normaux, ce choix garde son importance quel que soit le nombre d’itérations ; si l’on part de n’importe quoi, ce “n’importe quoi” reste jusqu’au bout (voir ci-contre)... Cependant, les IFS avec condensation présentent un certain intérêt ; nous reviendrons sur leur rapport avec certains types de L-systèmes, ainsi qu’avec les mécanismes de la perspective. En fait, ils correspondent à une intuition commune de la “fractalité”, qui est l’arborescence, ou encore la “mise en abyme” ; il importe néanmoins de bien observer que l’attracteur d’un IFS avec condensation *n’est pas* auto-similaire.

Si l’on veut produire un arbre de façon classique, on peut suivre l’exemple de la fougère et ajouter une transformation pour obtenir le tronc (cette transformation (w3) doit avoir deux taux d’homothétie différents, dont un très faible en x) :

arbre avec tronc	taux x	taux y	angle de rotation	translation x	translation y
w1	0,85	0,85	30°	0	0,3
w2	0,85	0,85	-30°	0	0,3
w3	0,015	0,2	0°	0	0



Si l'on compare ce résultat (produit avec l'algorithme chaotique) avec le résultat de l'IFS avec condensation, on voit que la structure est bien la même, mais poussée à la limite ; on peut d'ailleurs aller plus loin dans les itérations de l'IFS avec condensation, ce qui montre l'homologie de structure des deux IFS (voir ci-contre, 10 itérations).

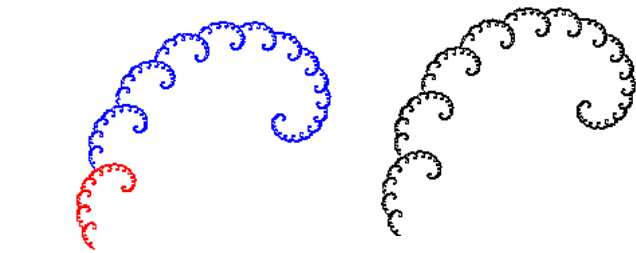


L'arbre est produit avec seulement 2 transformations, mais on peut faire encore plus simple ; si l'on ne garde qu'une des deux transformations, on obtient un IFS (avec condensation), pour une spirale (on est passé d'un angle de 30° à un angle de 20° ; l'IFS est appliqué à un rectangle allongé (ou gros trait) et à un bonhomme) :

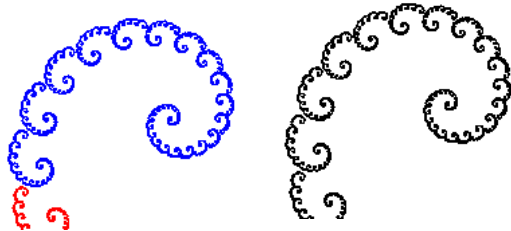
<i>IFS avec condensation</i>				
spirale	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	0,85	20°	0	0,3

Voilà sans doute l'un des plus simples IFS possibles, constitué d'une seule transformation, ce qui serait évidemment impossible avec un IFS normal ! On pourrait faire mieux en annulant l'angle de rotation : on obtiendrait alors un segment, mais un segment construit à la manière du parcours de la flèche de Zénon, par ajout de segments de plus en plus petits...

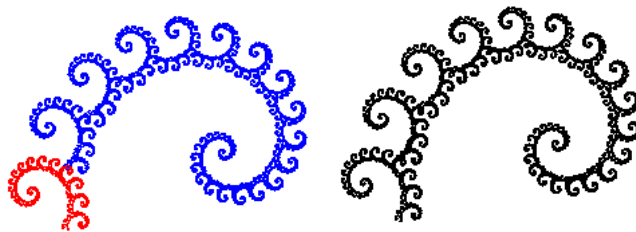
Cependant, si l'on cherche à produire des spirales avec de "vrais" IFS, en combinant deux transformations, dont la première fait subir à la figure telle ou telle rotation (éventuellement inversante) on obtient des figures plus intéressantes :



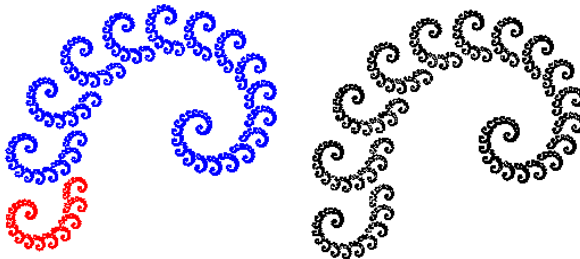
spirale var 1	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	0,3	-30°	0	0
w2	0,85	20°	0	0,15



spirale var 2	taux d'homothétie	angle x	angle y	translation x	translation y
w1	0,25	0°	180°	0	0
w2	0,9	20°	20°	0	0,15

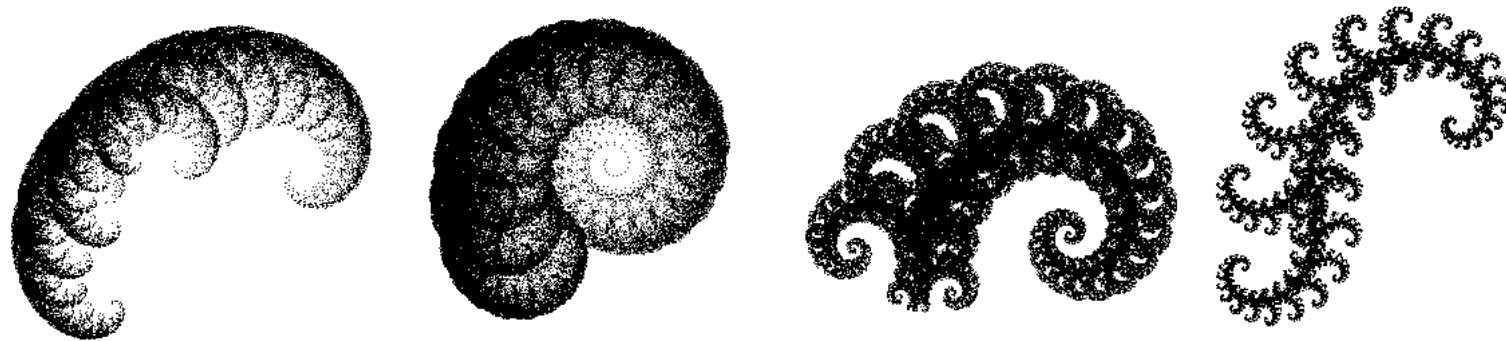


spirale var 3	taux d'homothétie	angle x	angle y	translation x	translation y
w1	0,3	-160°	180°	0	0
w2	0,9	20°	20°	0	0,15



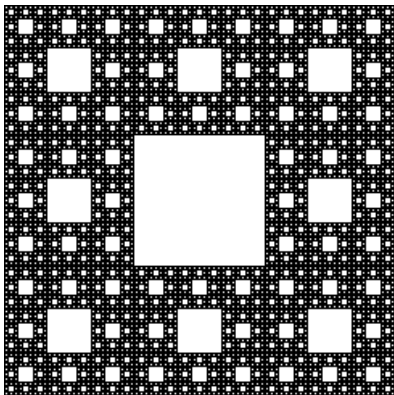
spirale var 4	taux d'homothétie	angle x	angle y	translation x	translation y
w1	0,25	0°	180°	0	0
w2	0,95	20°	20°	0	0,15

Et, en jouant sur les taux d'homothétie, on peut obtenir d'étranges créatures marines :



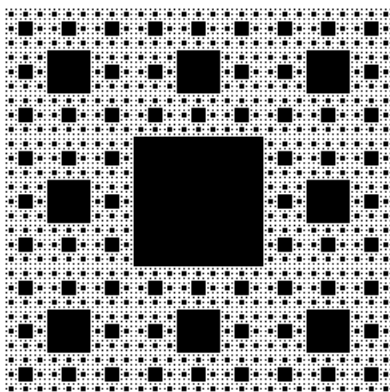
IFS sans et avec condensation, forme et contre-forme

Il existe une variante du triangle, appelée tapis de Sierpinski qui est fondée sur le carré, et dont l'IFS est le suivant :



tapis	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	1/3	0°	-1/3	-1/3
w2	1/3	0°	0	-1/3
w3	1/3	0°	1/3	-1/3
w4	1/3	0°	-1/3	0
w5	1/3	0°	1/3	0
w6	1/3	0°	-1/3	1/3
w7	1/3	0°	0	1/3
w8	1/3	0°	1/3	1/3

Si l'on considère les lacunes en elles-mêmes, on peut les obtenir à l'aide d'un IFS avec condensation dont le tableau est quasiment identique :



<i>IFS avec condensation</i>				
anti-tapis	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	1/3	0°	-3/2	-3/2
w2	1/3	0°	0	-3/2
w3	1/3	0°	3/2	-3/2
w4	1/3	0°	-3/2	0
w5	1/3	0°	3/2	0
w6	1/3	0°	-3/2	3/2
w7	1/3	0°	0	3/2
w8	1/3	0°	3/2	3/2

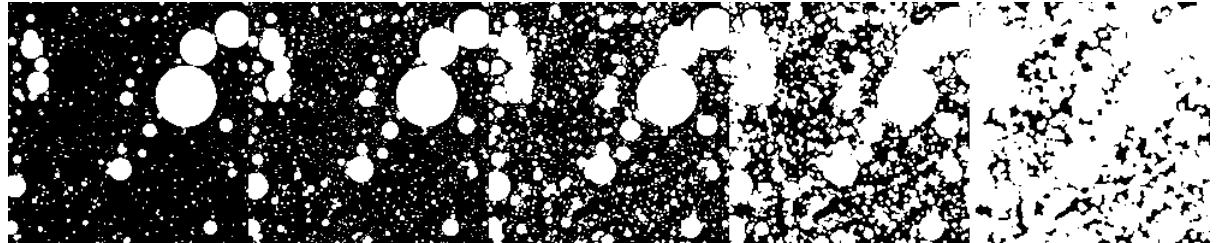
Cet *anti-tapis* est en quelque sorte la contre-forme du tapis de Sierpinski, et montre aussi qu'un "arbre" ne ressemble pas forcément à un vrai arbre (la structure de cette figure est en effet arborescente).

Cette façon de procéder, en mettant en valeur les lacunes, et en en faisant même l'objet de la forme, rejoint d'ailleurs la description classique du triangle de Sierpinski :

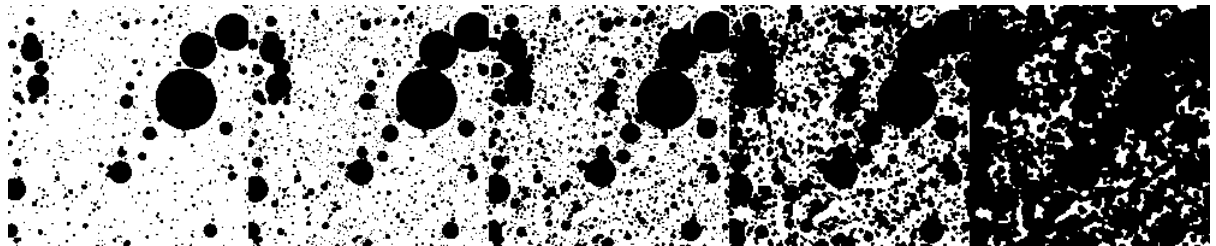


Benoît Mandelbrot a extrapolé à partir de cette procédure, en proposant d'autres formes de lacunes, par exemple des lacunes en forme de disque⁶ :

⁶ Benoît Mandelbrot, *Les objets Fractals*



Si l'on inverse le noir et le blanc, on met l'accent sur d'autres analogies :

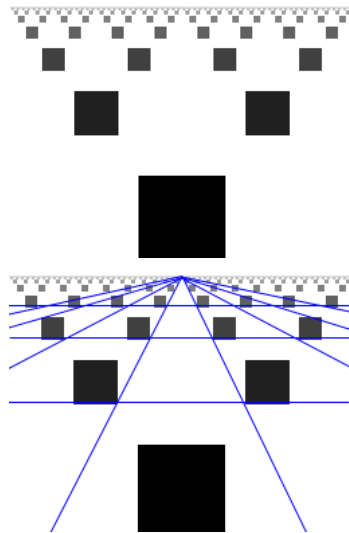


IFS avec condensation et perspective

Nous voudrions suggérer une piste d'investigation concernant les IFS avec condensation : leur rapport à la perspective. En effet, si l'on choisit comme transformation une homothétie suivie d'une translation, on obtient, par exemple en partant d'un carré, l'illusion d'une file de carrés identiques, mais *vus en perspective* (on a aussi joué sur le niveau de gris en fonction de la "distance", c'est-à-dire de l'étape de l'itération) :

<i>IFS avec condensation</i>				
pers carré 1	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	0,5	0°	0,25	0,37

En prenant deux telles transformations symétriques, on obtient l'illusion d'une configuration régulière de carrés, vue en perspective :

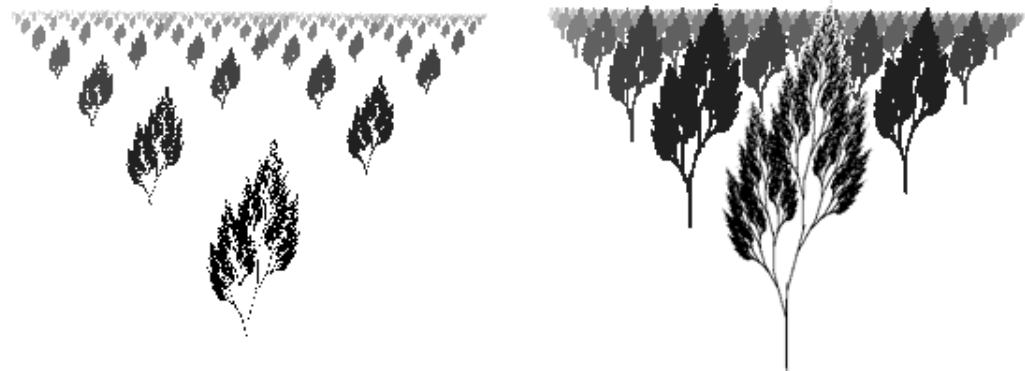


<i>IFS avec condensation</i>				
pers carré 2	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	0,5	0°	0,25	0,37
w2	0,5	0°	-0,25	0,37

Cela pourrait être la vision d'une série de carrés (posés debout) disposés selon une trame orthogonale, comme le met en évidence le schéma suivant ; le premier carré ne s'insère pas dans le réseau cependant. Il faut noter que l'attracteur du même IFS traité sans condensation est la ligne d'horizon.

Cette piste de recherche nécessiterait d'être approfondie ; pour terminer, nous proposons une variante, en partant d'une déjà produite avec un IFS, à deux échelles différentes :

<i>IFS avec condensation</i>				
pers arbres	taux d'homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	0,6	0°	-0,2	0,3
w2	0,5	0°	0,25	0,37



IFS et théorie du chaos

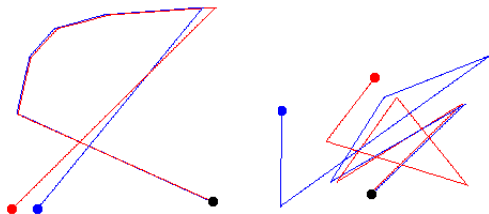
Nous avons commencé ce sous-chapitre par un interlude sur un modèle lié à la théorie du chaos. Nous allons maintenant évoquer un autre type de modèle lié à cette théorie et qui entretient des rapports avec les IFS.

Le modèle dont il s'agit est souvent appelé la “transformation du boulanger” ; il consiste en effet à s'inspirer de ce que fait un boulanger qui prépare de la pâte feuilletée (il s'agit donc d'un boulanger-pâtissier...) : il prend une boule de pâte, il l'aplatit⁷, il la replie, il l'aplatit de nouveau, il la replie, etc. Traduite en termes plus mathématiques, et appliquée à une portion de plan carrée (on fait donc une section verticale de la pâte, qu'on imagine très épaisse), cela consiste à transformer le carré de départ en un rectangle deux fois plus long et deux fois moins épais (homothétie de rapports 2 et 1/2), puis à couper ce rectangle en deux, et à mettre l'une des moitiés au-dessus de l'autre (en la retournant), et à recommencer sur le carré obtenu :



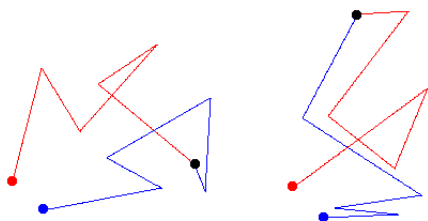
Cette transformation est un modèle de théorie du chaos parce que, bien que totalement déterministe, elle est un excellent modèle de création de désordre, d'aléatoire, elle est ce que l'on appelle “sensible aux conditions initiales”. On voit le résultat de l'application d'une telle itération sur le bitmap (200x200 pixels) du portrait de Leibniz, et sur un bitmap (200x200 pixels) en noir et blanc comportant une inscription (**Planche 18**); on voit l'effet “mélangeur” de cette transformation.

Pour mieux comprendre le principe de *sensibilité aux conditions initiales*, on peut “pister” deux pixels très proches, et voir ce qu'ils deviennent. Un peu comme sur une table de billard, les deux trajectoires, d'abord proches, s'éloignent irrémédiablement (voir ci-contre, après six itérations) ; donc, si l'on ne connaît la position d'un point que de façon approchée (et c'est toujours le cas), on ne peut être assuré de connaître son destin au-delà d'un certain temps. On peut affiner l'approximation, mais elle a toujours une limite ; et du coup la prédictibilité de l'événement atteint une limite elle-aussi, bien que le processus soit totalement déterministe.



⁷ pour la confection du kouign amann, ajouter à ce moment beaucoup de beurre et de sucre !

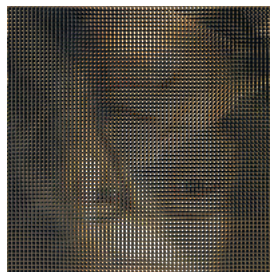
La transformation du boulanger n'est pas le seul processus "mélangeur" ; on peut en inventer beaucoup d'autres ; déjà on a une variante de la transformation du boulanger si l'on place la moitié de pâte au-dessus de l'autre sans la retourner ; une autre transformation, imaginée par Vladimir Arnold, et souvent appelée "le chat d'Arnold" parce qu'il avait pris une image de chat pour l'illustrer, implique la transformation affine appelée transvection.



L'une de ces transformations est appelée la transformation du "photomaton", et son nom se justifie de lui-même quand on voit le résultat : on en voit l'effet sur les mêmes bitmaps que précédemment **Planche 19**. Dans le cas de cette transformation, deux pixels très proches au départ suivent le plus souvent des trajectoires assez différentes dès le début (voir ci-contre).



La transformation du boulanger semble mélanger en général inexorablement le bitmap que l'on prend comme point de départ. Dès que l'on a atteint une dizaine d'itérations, le bitmap du portrait de Leibniz devient le bitmap ci-contre, et plus rien ne distingue (pour nous) deux résultats successifs (bien qu'ils soient tous différents) ; tous les pixels du bitmap d'origine sont présents dans chacun des bitmaps obtenu par l'itération de la transformation mais il y a, puisque le bitmap fait 200 x 200 pixels, 40000! (*factorielle* 40000, soit 40000 x 39999 x 39998 x etc. jusqu'à 1, c'est-à-dire beaucoup⁸...) façons de disposer ces pixels dans un bitmap, et il y a peu de chances que l'on tombe sur une image reconnaissable, et encore moins sur le portrait de Leibniz...



Pour la transformation du photomaton, le mélange semble moins total ; la plupart des images, même brouillées, laissent apparaître une sorte de trame sous-jacente (voir ci-contre, à gauche) ; on voit même apparaître une sorte de fantôme de Leibniz (à l'envers, en plus !) comme, ci-contre, à droite, à l'itération 14.

Cette "apparition" peut nous mettre sur la voie d'une compréhension du mécanisme à l'œuvre et d'un phénomène étrange (mais tout à fait explicable, comme nous le verrons) qui se passe avec ces deux transformations lorsque l'on choisit une taille de bitmap convenable.

En effet, appliquons la transformation du boulanger à un bitmap représentant toujours le portrait de Leibniz, mais faisant 256x256 pixels (**Planche 20**) : à la 17^{ème} itération, le portrait de Leibniz

⁸ pour mémoire, 10! vaut déjà 3628800, alors 40000!

réapparaît, identique à lui-même ! C'est le cas aussi évidemment si l'on part du bitmap représentant une écriture, toujours à condition qu'il fasse 256x256 pixels (**Planche 21**).

Avec la transformation du photomaton, un phénomène analogue se produit, toujours avec des bitmaps de 256x256 pixels, mais le retour au bitmap de départ est encore plus rapide, puisqu'il se produit à la 7^{ème} itération (**Planches 22 et 23**). Bien sûr, après le retour au bitmap de départ, le processus se reproduit, il est cyclique, ou périodique.

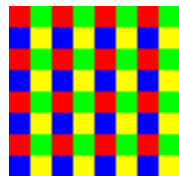
Nous expliciterons plus loin la raison de ce phénomène qui peut paraître étrange (et qui produit entre temps d'assez jolies images, surtout aux 5^{ème} et 6^{ème} itérations) mais d'abord, voyons le rapport avec les IFS.

Le carré est auto-similaire, et ce de multiples façons ; la Planche 24 montre quelques-unes des innombrables façons qu'a un carré d'être auto-similaire ; chacune détermine un IFS dont le carré est l'attracteur. Si l'on met en œuvre ces IFS, on obtient en définitive un carré ; mais si on applique l'algorithme déterministe au bitmap du portrait de Leibnitz, on obtient en première étape chacune des images de la **Planche 24**.

La première version d'auto-similarité du carré ressemble curieusement à la transformation du photomaton ; il est donc intéressant de voir si la mise en œuvre de l'IFS correspondant (que nous appellerons IFS "photomaton") produit les mêmes phénomènes que cette transformation. En fait, il n'en est rien ; les premières étapes ressemblent bien à celles de la transformation du photomaton, mais assez rapidement, le bitmap devient uniformément gris (dès la 7^{ème} itération), au lieu de revenir au portrait de Leibnitz, même dans le cas d'un bitmap de 256x256 pixels (**Planche 25**).

Pourtant, la définition de la transformation du photomaton et celle de l'IFS photomaton correspondant sont en théorie identiques : réaliser une homothétie de rapport 1/2, puis l'identité et 3 translations de vecteurs $(0 \ 1/2)$ $(1/2 \ 0)$ $(1/2 \ 1/2)$. Mais en fait la mise en œuvre est différente : prenons un carré de 2 x 2 pixels et voyons ce que devient chaque pixel dans chaque transformation :

- dans la transformation du photomaton, chaque pixel est envoyé dans le quart de bitmap correspondant à sa position (on ne lui applique que l'une des quatre transformations, choisie en fonction de ses coordonnées)
- dans l'IFS "photomaton", chaque pixel subit successivement les quatre transformations, mais les quatre pixels du carré de base ont les mêmes quatre pixels de destination ; ces pixels adoptent en définitive la couleur du dernier arrivé



Cette différence est mise en évidence si l'on part d'un bitmap test composé de pixels rouges, verts, bleus et jaunes, disposés en petits carrés jointifs (voir ci-contre un zoom d'une partie de ce bitmap) : si l'on applique la transformation du photomaton, on voit (**Planche 26**) que la première étape envoie tous les pixels rouges dans le "quart nord-ouest" (pour emprunter un langage géographique) du bitmap, tous les pixels verts dans le quart nord-est, tous les pixels bleus dans le quart sud-ouest, et

tous les pixels jaunes dans le quart sud-est, c'est-à-dire dans le quart correspondant à leur position dans le petit carré de base. Par contre, si l'on applique l'IFS correspondant à ce même bitmap, dès la première étape, le bitmap devient complètement jaune...

Ce mécanisme nous est caché quand nous partons du bitmap représentant le portrait de Leibnitz : après la première itération, nous voyons dans les deux cas 4 portraits plus petits ; mais dans le cas de la transformation du photomaton, tous les pixels sont présents, les 4 "images" sont différentes, elles proviennent de pixels proches mais différents, alors que dans l'IFS, on a quatre fois exactement le même bitmap, et on a perdu 3/4 des pixels...

Terminons en explicitant encore mieux ce type de transformations, en envisageant la transformation du boulanger avec les variantes suivantes ; les deux premières différences permettent de manipuler des nombres écrits en base 10, plutôt qu'en base 2, ce qui nous est plus familier (mais le même raisonnement se tiendrait en base 2 dans la transformation du boulanger classique) :

- le carré de départ est de côté égal à 1 : chaque point est repéré par deux coordonnées comprises entre 0 et 1 (comme 0,5 0,33 0,572319875 etc...) ; si l'on imagine ce carré coupé en 10 bandes horizontales, chaque bande comprend, respectivement, les points d'ordonnée comprises entre 0 et 0,1 ; entre 0,1 et 0,2 ; ce qui veut dire que la première décimale correspond à l'"étage" de la bande (-1)
- on va étaler le carré de façon à décupler sa largeur (au lieu de la doubler) et diviser sa hauteur par 10 (au lieu de la diviser par 2) ; on coupe le long ruban de pâte obtenu en 10 parties ; dans chaque partie la partie entière de l'abscisse est égale à, respectivement, 0, 1 2, etc, jusqu'à 9
- on superpose les 10 couches de pâte sans les retourner (et dans l'ordre)

Étaler la pâte consiste maintenant à multiplier par 10 l'abscisse x de chaque point, et à diviser par 10 son ordonnée y ; le point (0,352 0,576) devient par exemple (3,52 0,0576) : les chiffres de l'abscisse sont décalés vers la gauche d'un rang, ceux de l'ordonnée sont décalés vers la droite d'un rang.

Si l'abscisse du transformé est égale à 3,52, cela veut dire qu'il est dans la 4^{ème} partie de la pâte ; il sera donc transporté au 4^{ème} étage de la superposition de pâte, ce qui veut dire que le premier chiffre après la virgule de son ordonnée deviendra 3 (les autres chiffres restant inchangés) ; son abscisse se verra tronquée de sa partie entière ; le point se retrouve donc en (0,52 0,3576).

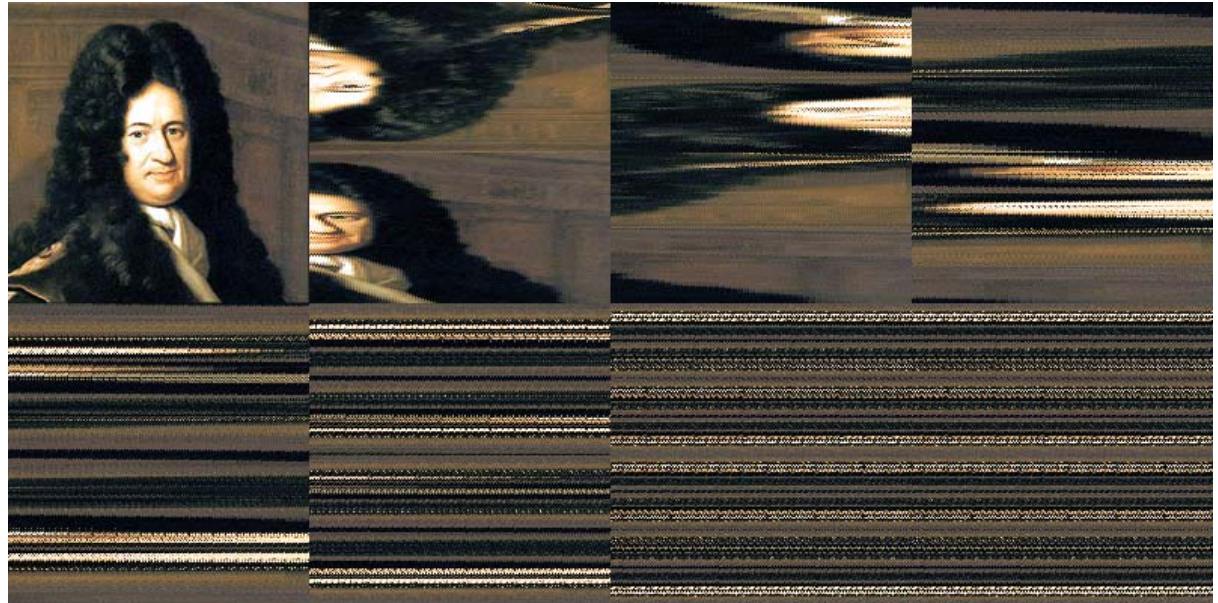
Cette transformation consiste donc à *retirer la première décimale de l'abscisse pour l'insérer comme première décimale de l'ordonnée* ; cette opération est appelée "décalage de Benoulli" selon le mathématicien suisse du XVII^{ème} siècle. Elle est donc connue depuis longtemps ; si l'on considère les nombres réels, le mélange est inéluctable ; en effet, la plupart des points auront une infinité non périodique de décimales ; il n'y a donc aucune chance de retrouver les coordonnées de départ.

Si l'on revient à la transformation du boulanger classique (base 2) sans retournement, et que l'on suit les coordonnées d'un point exprimées en base 2 dans un bitmap 64x64 pixels (les coordonnées vont de 0 à 63, ou de 000000 à 111111), on constate bien le décalage vers la gauche et vers la droite des

chiffres de l'abscisse et de l'ordonnée, mais on observe un phénomène supplémentaire : le premier chiffre de l'ordonnée provient bien du premier chiffre de l'abscisse précédente, ce qui suffit à bien définir l'ordonnée, mais qu'en est-il du dernier chiffre de l'abscisse ? S'il était toujours nul, l'abscisse deviendrait nulle elle aussi, et l'ordonnée la suivrait rapidement ; en fait on observe que ce chiffre provient, de manière symétrique, du dernier chiffre de l'ordonnée précédente. Cela s'explique très bien si l'on examine le script : les pixels sont traités différemment suivant la parité de leur ordonnée (le dernier chiffre 0 ou 1 n en est l'indice), si cette ordonnée est paire, l'abscisse devient bien égale à $2x$, si l'ordonnée est impaire, l'abscisse devient $2x+1$. C'est ce qui explique le fait que les bitmaps redeviennent périodiquement identiques à eux-mêmes.

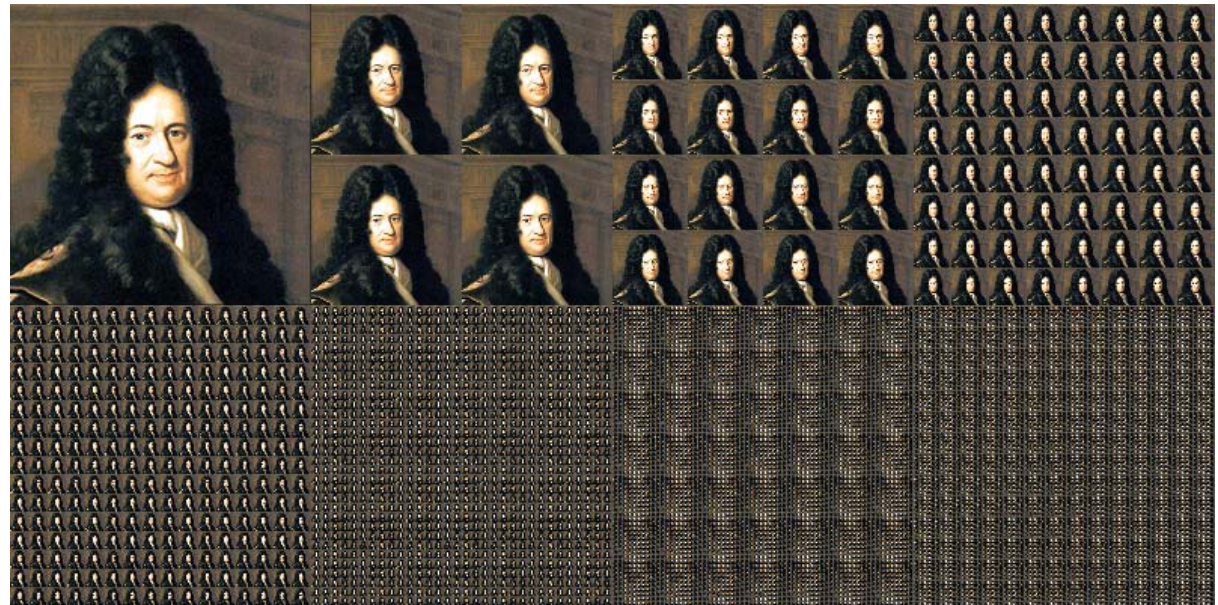
Transformation du boulanger

bitmaps 200x200 pixels



Transformation du photomaton

bitmaps 200x200 pixels



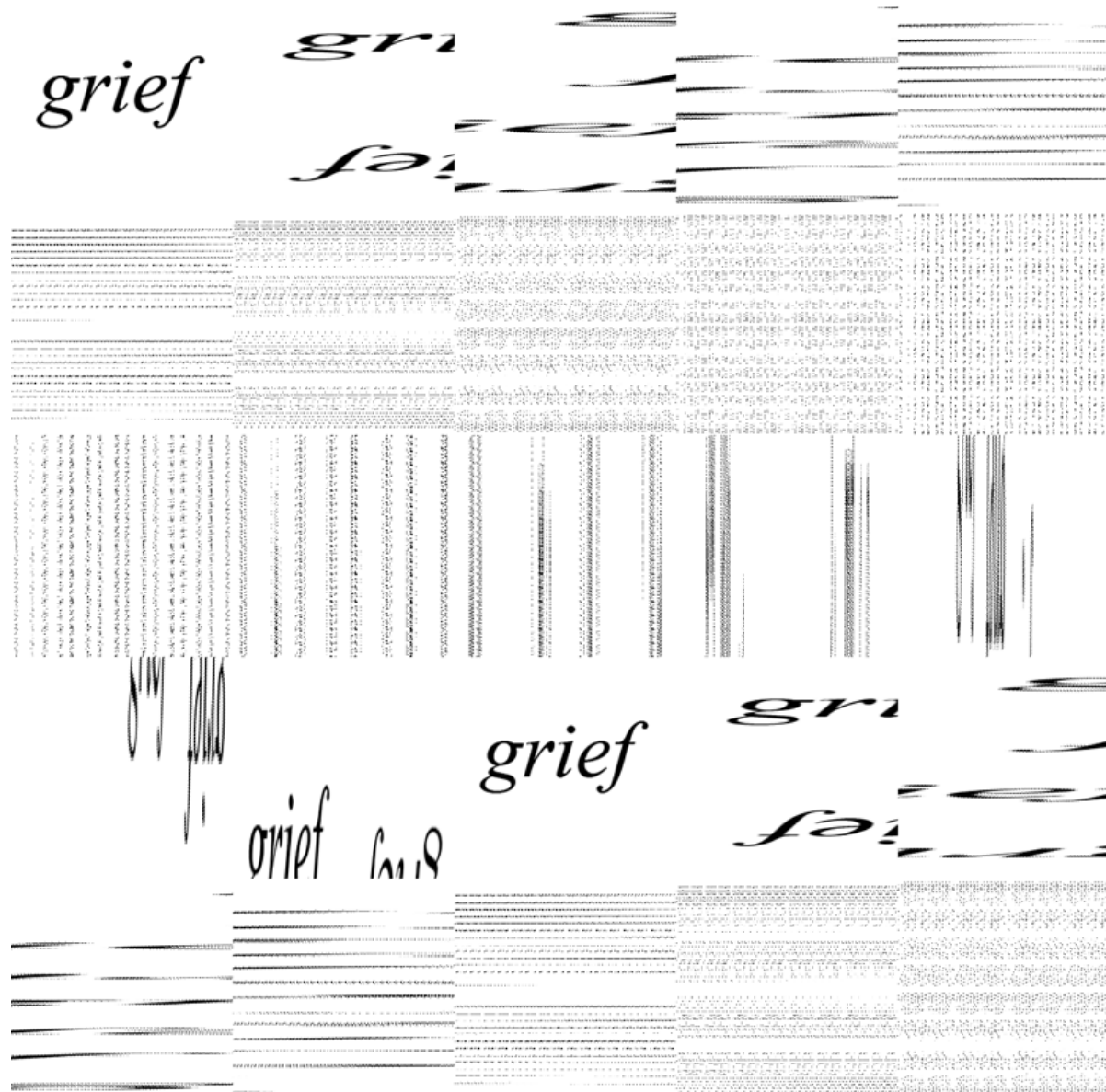
Transformation du boulanger

bitmap 256x256 pixels



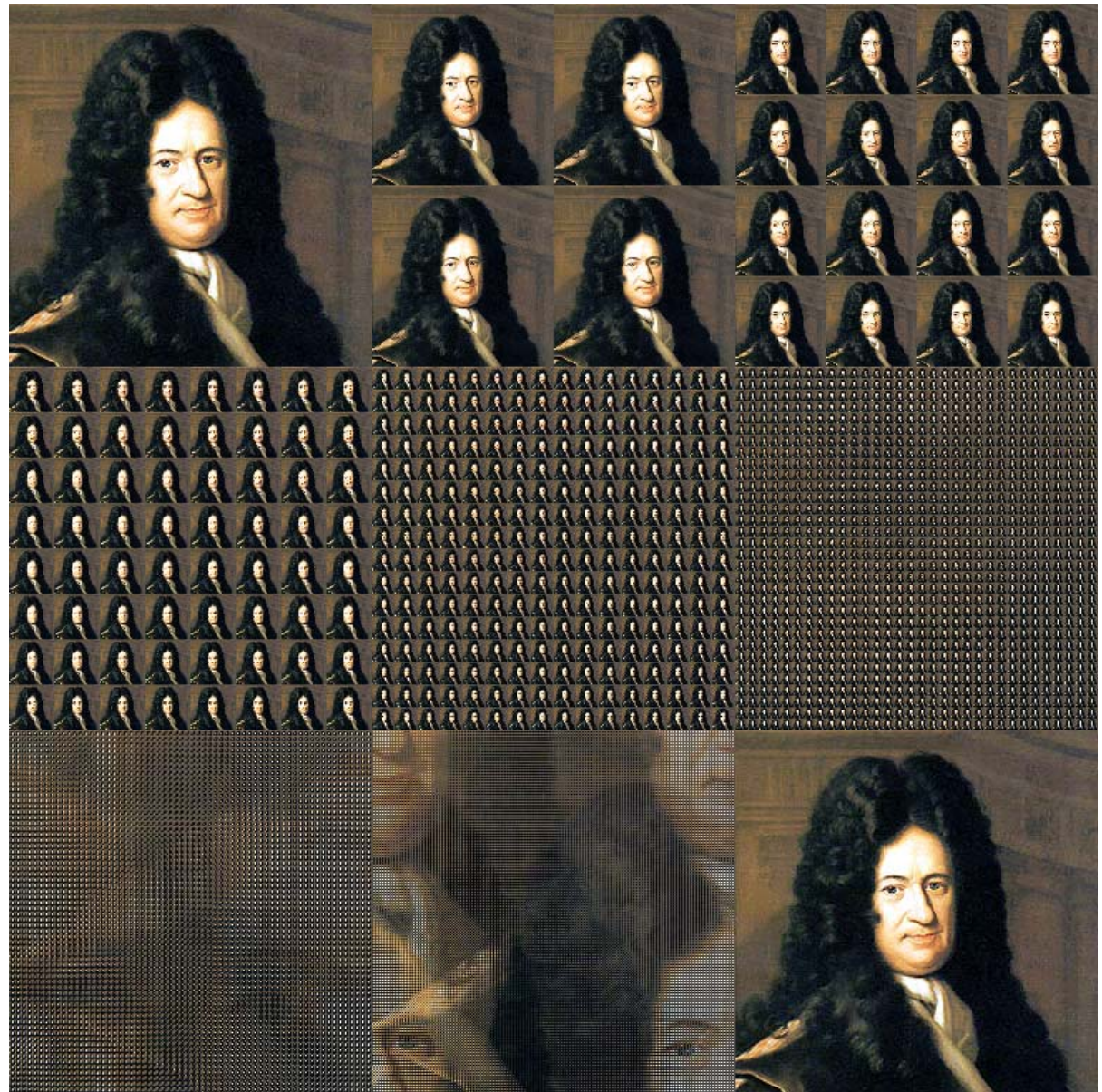
Transformation du boulanger

bitmap 256x256 pixels



Transformation du photomaton

bitmap 256x256 pixels



Transformation du photomaton

bitmap 256x256 pixels

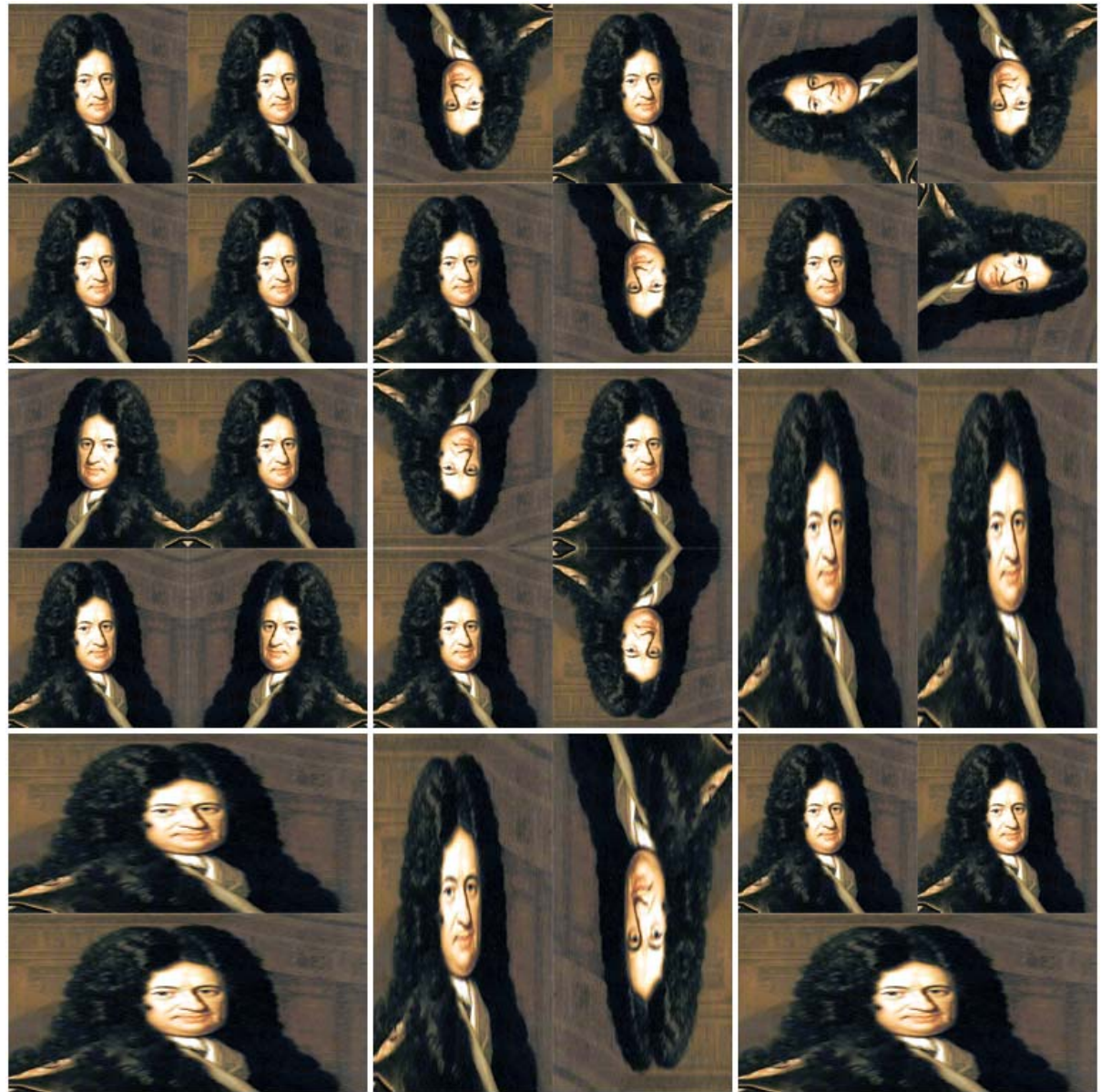
grief *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief*

grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*
grief *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief* *grief*

grief

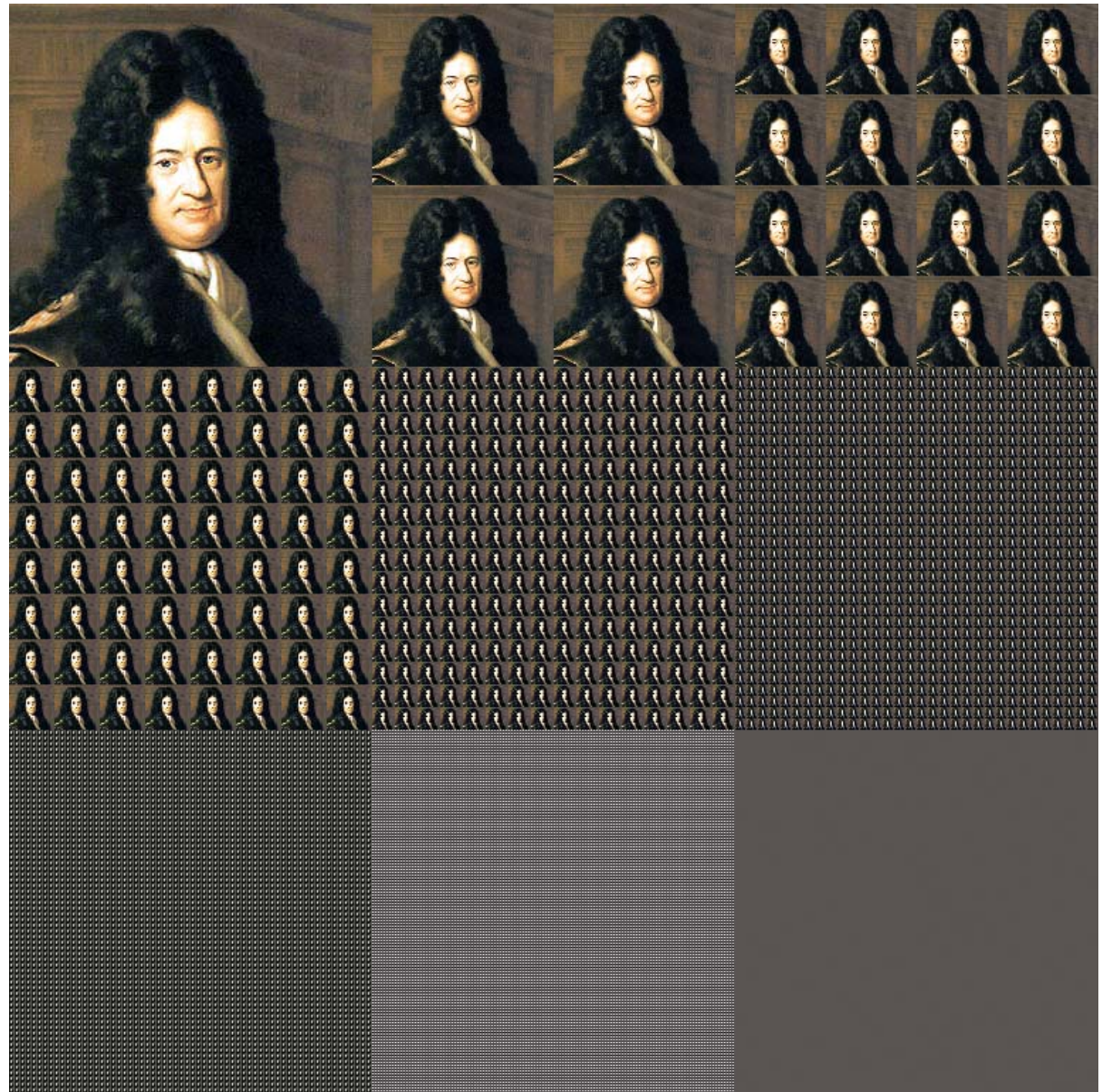
Auto-similarité du carré

Neuf dispositions (parmi une infinité) révélant l'auto-similarité du carré



IFS “photomaton”

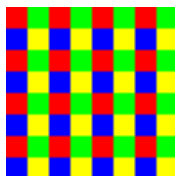
appliqué à un bitmap de 256x256 pixels



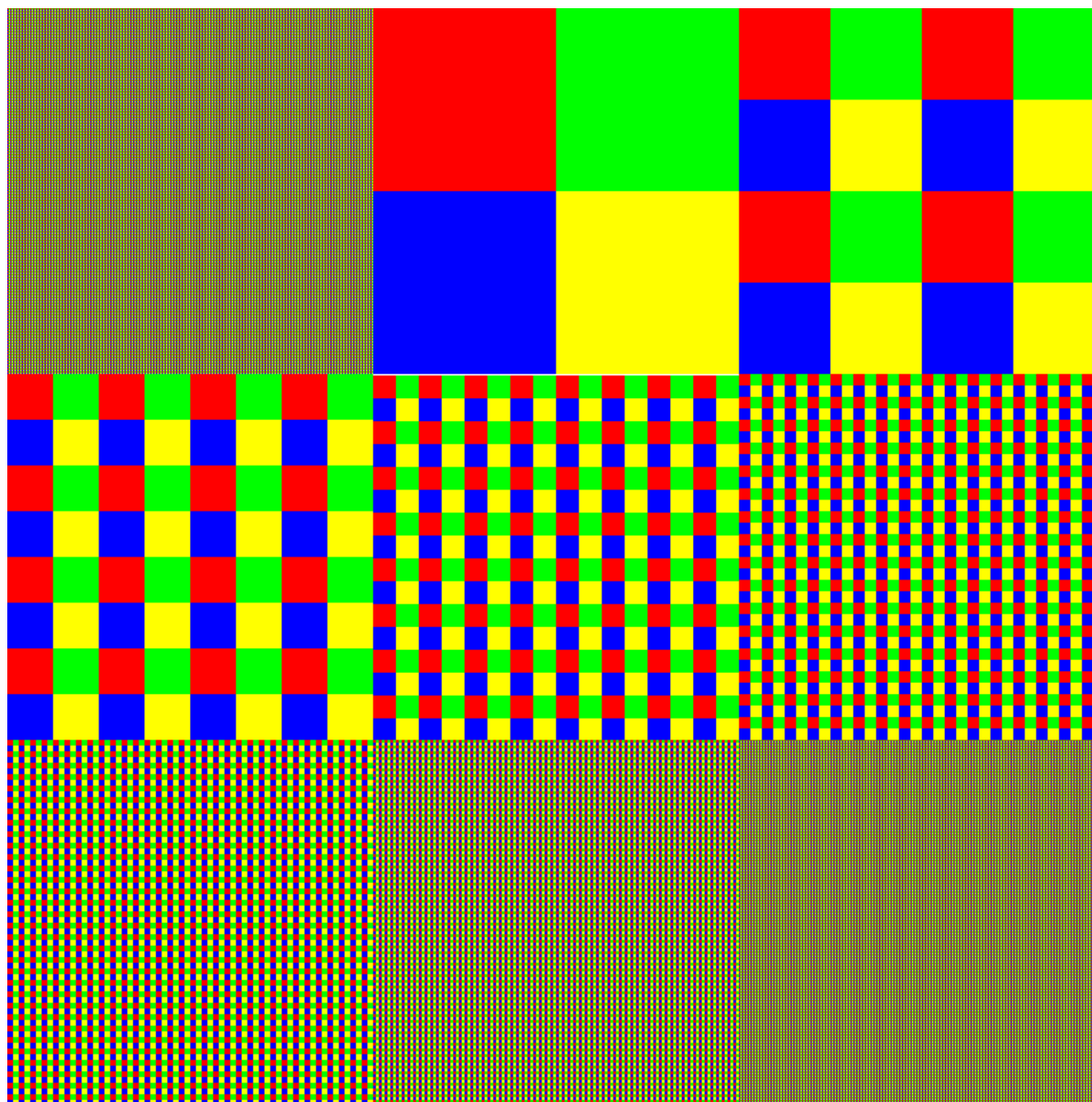
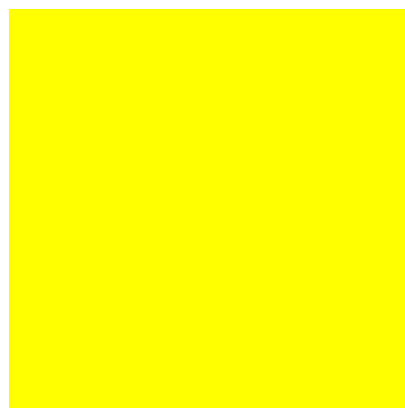
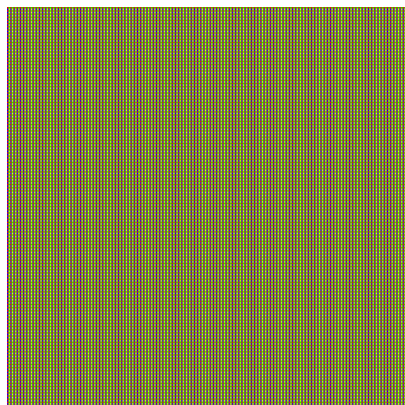
Transformation du photomaton

bitmap test 256x256 pixels

zoom :



IFS “photomaton” :



III.2.1 L-Systèmes

Contexte des L-systèmes

Les L-systèmes s'inscrivent dans le cadre plus large des *grammaires formelles*, dans lequel s'inscrivent aussi les *grammaires de formes*. L'ambiguïté de ces deux termes en français recouvre deux expressions assez distinctes en anglais : *shape grammar*, et *formal grammar*. Les “shape grammars” ou “grammaires de formes” ont été développées essentiellement dans le contexte de la conception architecturale (voire artistique) assistée par ordinateur ; nous y reviendrons plus loin. Les “formal grammars” ou “grammaires formelles” s'inscrivent elles dans le contexte de la linguistique et de l'informatique, ou encore de la théorie des langages et de la théorie de l'information : on parle aussi de *grammaires génératives*, formalisées par Noam Chomsky en 1956 avec la contribution de Marcel-Paul Schützenberger¹, qui travaillait dans le domaine de la médecine et de la biologie : comme on le voit, ces “grammaires” s'appliquent à des domaines a priori bien éloignés les uns des autres.

Tous ces modèles, quel que soit le champ où ils ont été développés, partagent les concepts de base que sont : un ensemble fini de *symboles*, des *règles de production* (ou de *dérivation*, ou encore de *réécriture*), et un *axiome* de départ. Nous verrons que les L-systèmes sont très pratiques pour formaliser les plis récurifs comme la courbe de von Koch, et c'est pour cela que nous les introduisons à présent. En effet, même si, comme nous l'avons vu, une telle courbe (comme toute courbe auto-similaire) peut être produite par un IFS, il est beaucoup plus facile de le faire avec un L-système ; mais l'intérêt des L-systèmes va bien au-delà.

Définition des L-systèmes

Les L-systèmes, ou Lindenmayer-systèmes ont été développés par le biologiste et botaniste Aristid Lindenmayer (1925-1989), à partir de 1968, pour étudier la croissance des plantes. Ses travaux, en collaboration avec Przemyslaw Prusinkiewicz, sont décrits dans *The Algorithmic Beauty of Plants*².

Un L-système est, dans sa version la plus simple, un ensemble $\{A, \omega, P\}$ où :

A est un ensemble de symboles (un *alphabet*)

ω est une chaîne de symboles de A (*axiome* ou *initiateur*)

¹ Marcel-Paul Schützenberger (1920-1996), docteur en médecine (1949) et en mathématiques (1953) est un scientifique français d'origine alsacienne ; il aurait inspiré à Boris Vian, qui était son ami, le “docteur Schutz” de *Et on tuera tous les affreux*. Il est intéressant de comparer les articles de Wikipedia en français et en anglais sur Schützenberger : l'article en anglais mentionne largement son anti-darwinisme (qui l'a même mené à un “combat de rue”) ; nulle référence à cet aspect de sa biographie dans l'article en français...

² Przemyslaw Prusinkiewicz & Aristid Lindenmayer, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag, 1990 ; ce livre est intégralement disponible en pdf à <http://algorithmicbotany.org/papers/abop/abop.pdf> (générosité éditoriale à souligner ! Mais attention, le fichier fait plus de 16 Mo...)

P est un ensemble de *règles de production* (ou de *dérivation*) définissant comment les symboles sont remplacés à chaque étape ; chaque règle est exprimée grâce à un *prédécesseur*, et un *successeur*, séparés par une flèche ($\rightarrow$)

Donnons tout de suite premier exemple, qui nous permettra de comprendre le mécanisme :

$A = \{a, b\}$

$\omega = "b"$

$P = \{p_1, p_2\}$ avec $p_1 : a \rightarrow ab$ et $p_2 : b \rightarrow a$

Voyons ce que fait ce L-système : L'axiome est "b" ; cela veut dire qu'on partira de cette simple lettre ; ensuite, de manière itérative, on applique les règles de dérivation adéquates :

b
a
ab
aba
abaab
abaababa
abaababaabaab
...

On voit que la chaîne de symboles croît très rapidement ; en fait la longueur de la chaîne suit la progression de la suite de Fibonacci : 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 etc., ce qui n'a rien d'étonnant d'ailleurs.

Cet exemple abstrait a, en le modifiant légèrement, une application dans la croissance d'une algue filamenteuse (*Anabaena catenula*), sur laquelle Lindenmayer travaillait à ses débuts. Pour mieux s'en convaincre, on peut se donner une interprétation visuelle des symboles a et b : les chaînes de symboles seront visualisées par les lignes de pixels, a sera par exemple un pixel rouge, b un pixel bleu ; on peut alors très facilement mettre en œuvre le processus en déduisant une ligne de pixels de la ligne précédente : on les placera l'une en-dessous de l'autre : cette visualisation est très proche des automates cellulaires linéaires que nous verrons au chapitre suivant :



On peut mettre en œuvre ce processus en "lisant" la couleur des pixels de la ligne précédente et en coloriant les pixels de la ligne suivante en conséquence : c'est ce que nous ferons pour les automates cellulaires. Mais on peut aussi traiter directement la chaîne de symboles (de caractères "a" et "b") et "traduire" la chaîne de caractères résultantes en pixels rouges ou bleus ; tous les langages de

programmation traitent très bien les chaînes de caractères, puisque, appelons-le, l'informatique graphique n'est pas apparue tout de suite (rappelons-nous les "images" faites avec des caractères imprimés...), alors que la manipulation des caractères et des chaînes de caractères est inhérente à l'informatique (les seuls entités que connaît vraiment un ordinateur sont des chaînes de 0 et de 1) ; cette méthode est beaucoup plus efficace, et nous l'emploierons massivement par la suite : c'est d'ailleurs l'intérêt principal des L-systèmes.

Passons maintenant aux types de L-systèmes que nous explorerons le plus ; A (l'alphabet) sera l'ensemble $\{F, +, -\}$; l'interprétation de ces trois symboles est la suivante :

F : avancer d'une longueur donnée l

+ : tourner à gauche d'un angle donné a

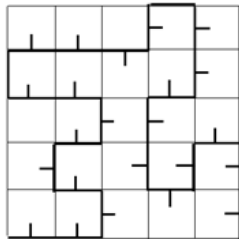
- : tourner à droite d'un angle donné a

Cette interprétation est fondée sur la logique du langage LOGO. le LOGO est un langage informatique issu de LISP, conçu en 1966 dans un laboratoire privé de Cambridge, le BBN, par Wally Feurzeig et Seymour Papert ; il a été popularisé sous sa forme ludique, destinée aux enfants, de la "tortue" : il s'agissait d'enseigner les concepts de l'algorithmique aux enfants à l'aide d'une tortue équipée d'un stylo, à laquelle on donnait des instructions simples permettant de dessiner des figures. Les instructions de base étaient "avancer", "tourner à droite", et "tourner à gauche" ; ce sont des instructions en effet très intuitives qui correspondent bien à la logique de déplacement d'un individu : par exemple, pour dessiner un carré, normalement, avec un langage classique, il faut déterminer les coordonnées des sommets du carré (du genre : (0,0), (0,100), (100,100), (100,0) ; ce qui demande quelques connaissances géométriques), puis les joindre par des segments ; par contre, avec LOGO, on va dire à la tortue d'avancer de tant, de tourner à gauche d'un angle droit, c'est-à-dire de 90° (ce qui est une notion géométrique, mais assez naturelle), d'avancer de la même longueur que précédemment, et de recommencer, jusqu'à rencontrer le point de départ. L'enfant se rend compte qu'il peut économiser ses instructions en demandant à la tortue de faire quatre fois la séquence "avancer ; tourner".

Surtout, cette méthode permet de généraliser le carré, et de découvrir comment tracer d'autres polygones réguliers (en modifiant l'angle dont on tourne), voire d'autres figures déduites (polygones étoilés, spirales, rosaces, etc.). Encore plus important, cette méthode permet très facilement la récursivité : tracer une courbe de von Koch devient un jeu d'enfant presque aussi facile que de tracer un triangle équilatéral.

Prenons donc comme exemple la courbe de von Koch, exprimée en termes de L-système ; on a une seule règle de production : $p : F \rightarrow F+F--F+F$

La mise en œuvre du processus de dérivation conduit à la production des chaînes de caractères suivantes :



$R \rightarrow -L+RR++R+L--L-R$ ($\alpha = 60^\circ$)

il s'agit de la "fractale de Gosper" ; enfin les règles :

$L \rightarrow LL-R-R+L+L-R-RL+R+LLR-L+R+LL+R-LR-R-L+L+RR-$

$R \rightarrow +LL-R-R+L+LR+L-RR-L-R+LRR-L-RL+L+R-R-L+L+RR$ ($\alpha = 90^\circ$)

gènèrent l'une des courbes de la famille des courbes que l'on appelle en anglais FASS curves : FASS est un acronyme pour space-Filling self-Avoiding Simple and Self-similar (remplissant l'espace, sans points doubles, simple, et auto-similaire). Le procédé (voir figure ci-contre) pour trouver ces courbes consiste à partir du pavage d'un carré, et à trouver un chemin entre les carrés du pavage, chaque élément du chemin correspondant à un carré, situé à gauche ou à droite ; on doit commencer le chemin à un bout d'un côté du grand carré, et le terminer à l'autre bout ; et bien sûr on doit rencontrer tous les carrés, et chacun une seule fois. Cela livre la première règle de dérivation (lire celle-ci et comparer avec le dessin) ; l'autre règle est l'inverse de la première (on commence par la fin, les L sont remplacés par des R et réciproquement ; les + sont remplacés par des - et réciproquement). Toutes ces contraintes, explorées par D. M. McKenna³, font que le plus petit pavage sur lequel on peut faire une telle construction est le pavage 5x5 ; mais on peut trouver d'autres pavages plus grands (7x7, 9x9), etc., pour lesquels McKenna a établi une typologie des courbes FASS produites.

Il y a un autre moyen de générer des courbes de type FASS. L'une des plus célèbres a été inventée (ou découverte ?) par le mathématicien allemand David Hilbert (1862-1943) dès 1891⁴. Pour la mettre en œuvre avec un L-système, il faut encore une fois modifier légèrement l'alphabet de base ; nous aurons à la fois les lettres F, L et R mais à la fin de la dérivation les lettres L et R ne seront pas prises en compte dans le tracé, elles servent seulement aux dérivations. Pour construire la courbe de Hilbert, on utilise les règles de dérivation suivantes :

$F \rightarrow F$

$L \rightarrow +RF-LFL-FR+$

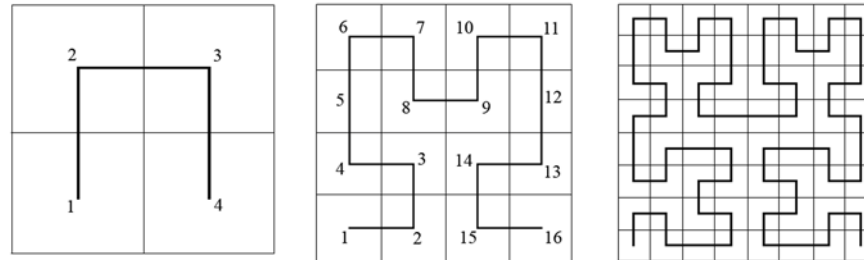
$R \rightarrow -LF+RFR+FL-$

(Planche 31)

Pour comprendre cette variante de L-système, on peut considérer les sommets de la ligne brisée, dont nous avons jusqu'à présent considéré envisagé les segments. La courbe de Hilbert peut se comprendre de la façon suivante :

³ D. M. McKenna, "SquaRecurves, E-tours, eddies and frenzies : Basic families of Peano curves on the square grid", in *Proceedings of the Eugene Strens Memorial Conference on Recreational Mathematics and its History*, 1989

⁴ David Hilbert, "Ueber stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück", *Mathematische Annalen*, 38:459-460, 1891



On prend un carré, que l'on partage en quatre ; et l'on joint les milieux des nouveaux carrés en faisant un U vers la droite, puis l'on repartage les carrés, et l'on recommence en faisant des U vers la gauche ou vers la droite de façon à pouvoir partir et arriver aux mêmes points que précédemment ; cette construction montre le caractère (à l'infini) auto-similaire de la courbe de Hilbert, sur lequel nous reviendrons.

La courbe de Hilbert va nous permettre d'introduire la troisième dimension. Jusqu'à présent, bien que nous ayons très bien pu imaginer des courbes qui se pliaient dans l'espace tri-dimensionnel, nous avons considéré des courbes qui se pliaient dans le plan ; les degrés de liberté de la "tortue" du Logo étaient ceux du parcours dans le plan : avancer (ou reculer), et tourner à droite ou à gauche. Mais il n'y a pas de raison de se cantonner à cela.

Pour passer en trois dimensions, il faut introduire une bon nombre d'éléments à notre alphabet ; avancer devant soi ne pose pas de problème, "F" peut être conservé tel quel ; mais pour ce qui est des degrés de liberté des rotations, il faut considérer trois plans de rotations, et pour chacun considérer les deux sens ; on dira donc à la tortue, non seulement de tourner autour de son axe vertical vers la droite ou vers la gauche : + et -, mais aussi de "plonger" autour de son axe gauche-droite vers l'avant ou vers l'arrière (mouvement correspondant au tangage d'un bateau) : & et ^, ou encore de "rouler" autour de son axe avant-arrière vers la gauche ou vers la droite (mouvement correspondant au roulis d'un bateau, d'où le verbe choisi) : / et |.

D'autre part, les deux lettres L et R ne suffisent plus ; il faut introduire quatre règles de substitution pour générer la courbe de Hilbert en 3D : A, B, C, D.

Les règles de dérivations commencent donc à être un peu plus compliquées ; celles qui génèrent la courbe de Hilbert en 3D sont les suivantes :

A $\rightarrow$ B-F+CFC+F-D&F^D-F+&&CFC+F+B//
 B $\rightarrow$ A&F^CFB^F^D^^-F-D^|F^B|FC^F^A//
 C $\rightarrow$ |D^|F^B-F+C^F^A&&FA&F^C+F+B^F^D//
 D $\rightarrow$ |CFB-F+B|FA&F^A&&FB-F+B|FC//

(Planche 31)

Enfin, un dernier type de L-systèmes, qui sont ceux plus spécialement développés par Lindenmayer (qui était, rappelons-le, un botaniste), implique d'introduire la notion d'embranchement. En effet, toutes les courbes que nous venons de voir sont unicursales ; mais les plantes, à partir d'un certains degré d'évolution, ne le sont généralement pas.

On introduit la notion d'embranchement en introduisant deux éléments d'alphabet nouveaux :

[: commence un embranchement

] : termine l'embranchement

Du point de vue de la programmation, cela implique de retenir en mémoire le point où commence l'embranchement, pour pouvoir y revenir à la fin de celui-ci.

Commençons par quelques exemples simples (**Planche 32**):

$$F \rightarrow F[+F]F[-F]F$$

$$a = 25,7^\circ$$

$$F \rightarrow F[+F]F[-F][F]$$

$$a = 20^\circ$$

Ces deux premiers exemples montrent la différence que peut générer la présence ou l'omission d'un simple embranchement.

Ces exemples restent très schématiques, même s'ils commencent à rendre compte avec justesse de la structure de certaines plantes. Pour aller plus loin, il faut passer en 3D ; nous avons vu avec la courbe de Hilbert ce que cela implique en termes de définitions des rotations. La **Planche 33** montre ce que peuvent donner de telles règles en 3D ; l'alphabet comporte à la base la lettre "A", dont la règle de dérivation définit la structure générale de la plante : on voit (par la présence de trois "A" dans la règle) que la structure d'embranchement de cette plante est ternaire, ce que l'on constate bien sur les images ; les autres lettres, "F", "S", "L", sont utilisées pour générer des feuilles ("f" renvoie à une fonction qui crée un polygone en forme de feuille). La **Planche 34** montre un exemple encore un peu plus élaboré : il y a apparition, non seulement de feuilles, mais de fleurs...

A l'aide des L-systèmes, Lindenmayer et Prusinkiewicz ont élaboré des modèles très sophistiqués de simulation de croissance de plantes, mettant en jeu des mécanismes véritablement à l'œuvre dans les plantes, comme le développement "acropète" (de la base vers le sommet) des feuilles et des fleurs, l'introduction de "signaux" simulant des indicateurs chimiques, l'influence du contexte, etc. Ce ne

sont pas du tout seulement des modèles de *représentation*, mais véritablement de *simulation* et de *génération*.

Comme la botanique ne fait pas vraiment partie de notre domaine d'étude, nous n'irons pas plus loin dans cette description des L-systèmes. Mentionnons juste une variante, les L-systèmes stochastiques, ou probabilistes $\therefore$ il s'agit de remplacer une règle par un nombre fini de règles affectées de probabilités. Par exemple, prenons le L-système suivant, qui est le premier L-système à embranchement que nous ayons rencontré :

$$\omega = F$$

$$F \rightarrow F[+F]F[-F]F$$

$$a = 25,7^\circ$$

et remplaçons l'unique règle par trois règles probabilistes :

$$\omega = F$$

$$r_1 : F \rightarrow F[+F]F[-F]F$$

$$r_2 : F \rightarrow F[+F]F$$

$$r_3 : F \rightarrow F[-F]$$

$$a = 25,7^\circ$$

en affectant à chaque règle r_1 , r_2 et r_3 une probabilité de $1/3$. A chaque fois que nous lançons le programme, une plante différente est générée, mais elles ont bien toutes un air de ressemblance :



L-systèmes et IFS

Il y a des rapports entre L-systèmes et IFS : nous avons vu certaines figures qui pouvaient être générées aussi bien par un IFS que par un L-système : la courbe de von Koch et le triangle de Sierpinski, en particulier.

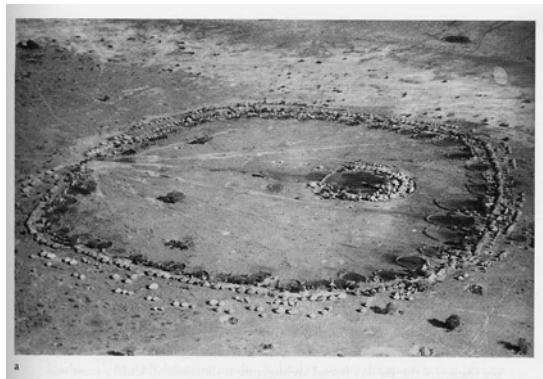
Pour “traduire” un L-système en IFS, il suffit de lire la règle de production en termes de transformations affines. Par exemple, pour les trois premiers L-systèmes de la *Planche 33*, on aura les IFS suivants :

F[+F]F[-F]F	taux d’homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	1/3	0°	0	0
w2	1/3	0°	0	1/3
w3	1/3	25,7°	0	1/3
w4	1/3	0	0	2/3
w5	1/3	-25,7°	0	2/3

F[+F]F[-F][F]	taux d’homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	1/2	0°	0	0
w2	1/2	0°	0	1/2
w3	1/2	20°	0	1/2
w4	1/2	0	0	1
w5	1/2	-20°	0	1

FF[-F+F+F][+F-F-F]	taux d’homothétie	angle de rotation	translation x	translation y
w1	1/2	0°	0	0
w2	1/2	0°	0	1/2
w3	1/2	22,5°	0	1
w4	1/2	0°	0,19	1,46
w5	1/2	-22,5°	0,10	1,96
w6	1/2	-45°	0	1
w7	1/2	-22,5°	-0,36	1,36
w8	1/2	0°	-0,55	1,82

La difficulté (pour le dernier) est de trouver les bonnes translations!



129 Ba-ila Stettlement

La **Planche 35** montre le résultat de l'algorithme systématique, en commençant par un segment ; on a ajusté les homothéties et les translations pour avoir un bon compromis entre croissance et complexification.

Bien sûr, si l'on utilise l'algorithme chaotique, le résultat est plutôt brouillé... Voir ci-contre la comparaison entre les résultats de l'algorithme déterministe portant sur un segment, et de l'algorithme chaotique.

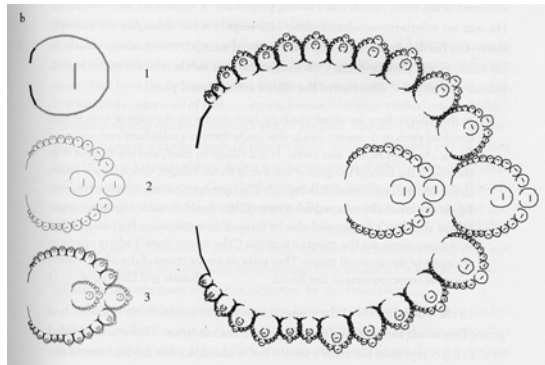
Les L-systèmes qui utilise l'alphabet où figurent des termes servant uniquement à des substitutions (L, R, X) sont plus difficiles à transcrire ; il faudrait sans doute utiliser une astuce comme l'homothétie produisant la tige de la fougère (voir plus haut) ; ou utiliser des IFS avec condensation. L'introduction de règles probabilistes est également difficile, voire impossible, sans parler des méthodes comme celle qui rendent compte de l'influence du contexte, etc.

D'un autre côté, on peut "traduire" certains IFS en L-systèmes, ou plutôt, certaines figures auto-similaires (comme la courbe de von Koch) sont aisément modélisables en L-systèmes. Mais il faut que l'auto-similarité soit de taux *fractionnaire* ; en effet, on ne peut pas traduire un taux d'homothétie irrationnel en règles de réécritures, qui doivent comporter un nombre entier de "F".

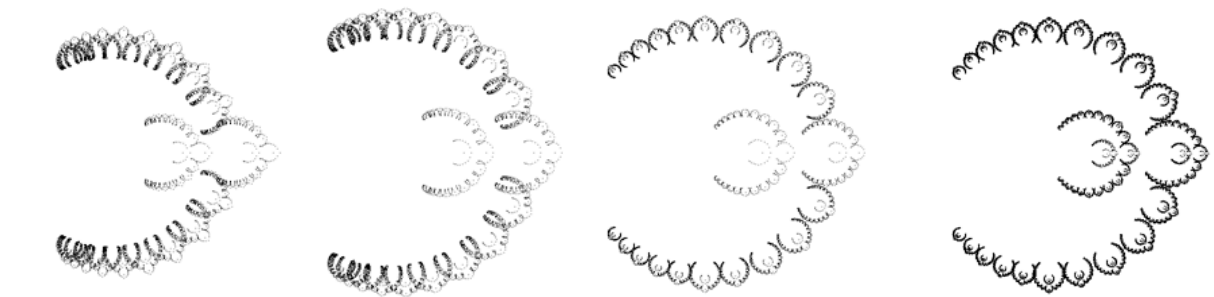
Un exemple va nous donner l'occasion de confronter L-systèmes et IFS. Il est tiré du livre de Ron Eglash, *African Fractals*⁵, dans lequel l'auteur relit les éléments des cultures africaines au regard de la notion de géométrie fractale. L'exemple en question concerne une construction qu'il nomme *ba-ila settlement*, un "village", dont la forme est très particulière.

L'auteur propose un processus génératif pour simuler cette implantation. Il ne donne pas le détail de sa mise en œuvre ; on peut supposer cependant, en examinant bien les figures, que le procédé employé est de type L-système (certains segments de la configuration de départ ne sont pas transformés) ; nous avons pour notre part décidé de chercher un IFS dont cette figure serait l'attracteur. Le nombre de transformations requises est élevé (22) et nous n'en donnerons pas le tableau : voici quelques étapes de la recherche des paramètres de l'IFS, et le résultat final de cette démarche :

⁵ Ron Eglash, *African Fractals Modern Computing and Indigenous Design*, Rutgers University Press, 1999



130 *Processus génératif proposé par Ron Eglash*



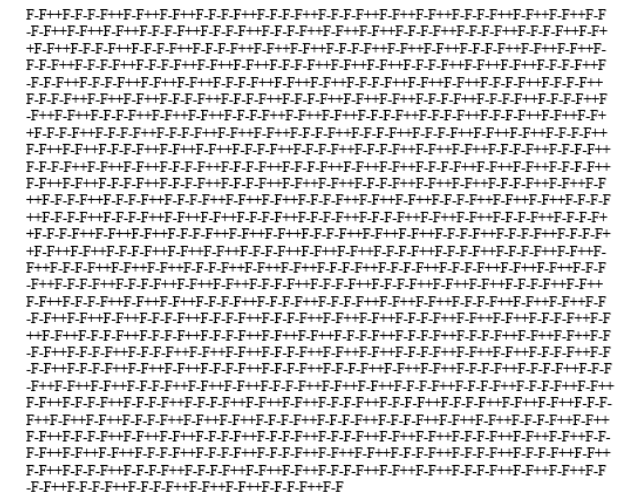
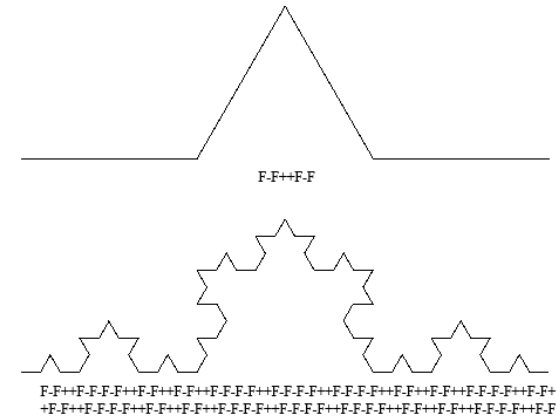
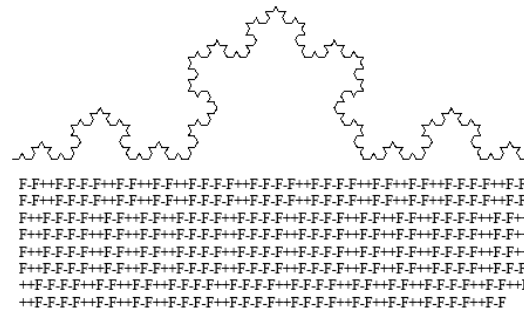
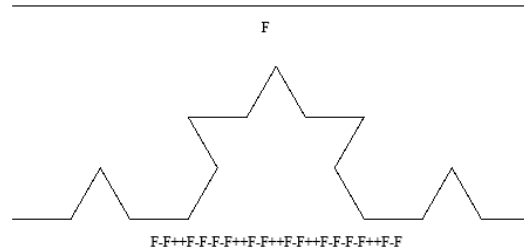
On voit que le résultat est relativement proche de celui proposé par Ron Eglash ; cependant, nous n'avons pas pris en compte les segments non transformés ; cela pourrait être effectué en ajoutant des transformations très contractantes dans une direction (c'est le même problème que pour les tiges des plantes).

En bref, on aura recours aux IFS ou aux L-systèmes selon les circonstances, selon les besoins. Ce sont des outils puissants de génération de formes fractales, mais qui ont chacun leurs particularités.

L-système pour la courbe de von Koch

$\omega : F$

$F \rightarrow F-F++F-F$



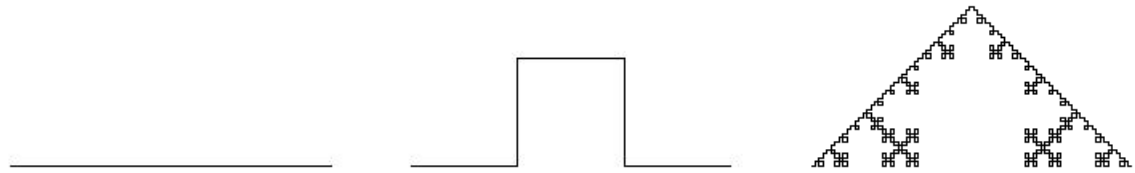
L-systèmes de plis

$\omega : F$

$F \rightarrow F+F-F-F+F$

$a = 90^\circ$

$n = 0 \quad n = 1 \quad n = 4$

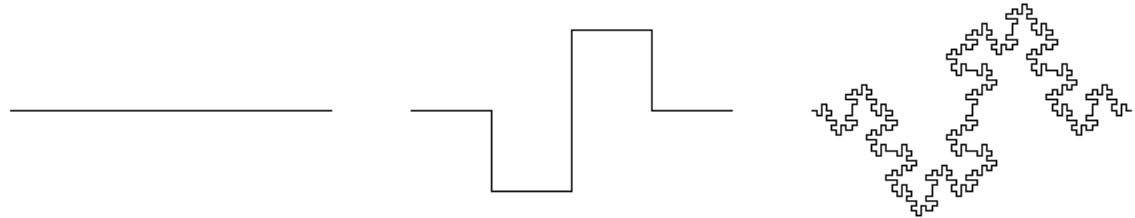


$\omega : F$

$F \rightarrow F-F+F+FF-F-F+F$

$a = 90^\circ$

$n = 0 \quad n = 1 \quad n = 4$



$\omega : F$

$F \rightarrow FF-F-F-F-FF$

$a = 90^\circ$

$n = 0 \quad n = 1 \quad n = 5$

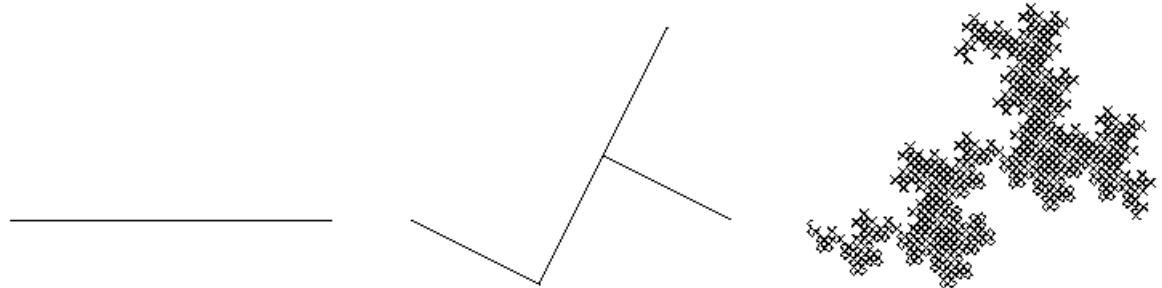


$\omega : F$

$F \rightarrow F-FF- -F-F$

$a = 90^\circ$ (nota: il faut introduire un angle de $26,26^\circ$ ($\arctg(0,5)$) au démarrage)

$n = 0 \quad n = 1 \quad n = 5$



L-systèmes d’“îles”

$\omega : F-F-F$
 $F \rightarrow F-F++F-F$
 $a=60^\circ$

$\omega : F+F+F$
 $F \rightarrow F-F++F-F$
 $a=60^\circ$

$\omega : F-F-F-F$
 $F \rightarrow F-F+F+FF-F-F+F$
 $a=90^\circ$

$\omega : F-F-F-F$
 $F \rightarrow F+F-F-F+F$
 $a=90^\circ$

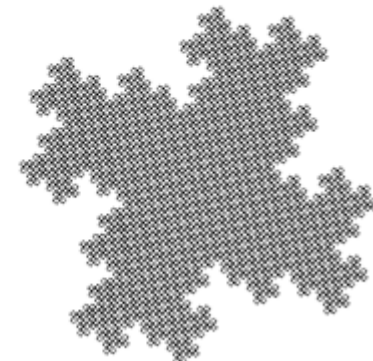
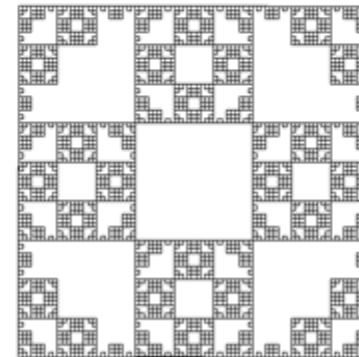
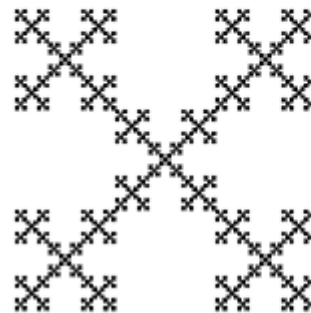
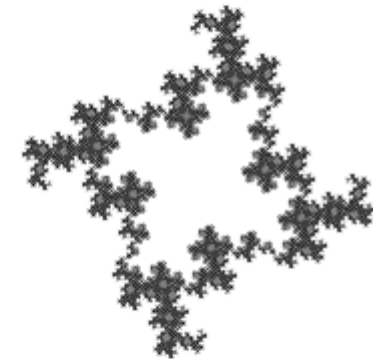
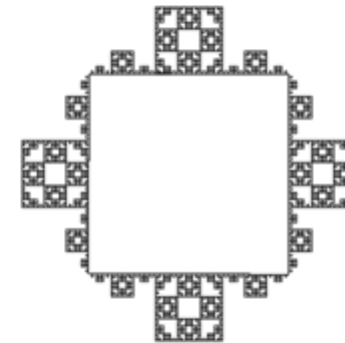
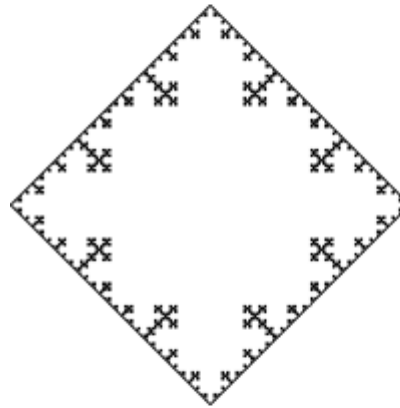
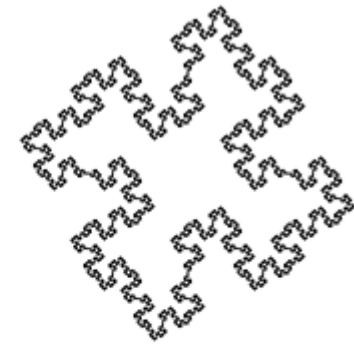
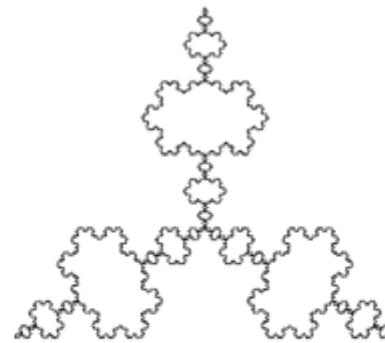
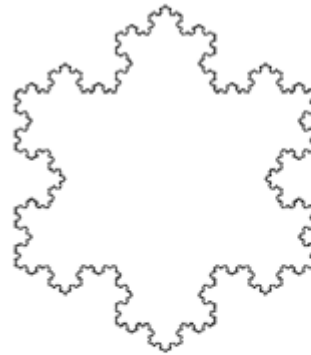
$\omega : F-F-F-F$
 $F \rightarrow FF-F-F-F-FF$
 $a=90^\circ$

$\omega : F+F+F+F$
 $F \rightarrow F-FF- -F-F$
 $a=90^\circ$

$\omega : F+F+F+F$
 $F \rightarrow F+F-F-F+F$
 $a=90^\circ$

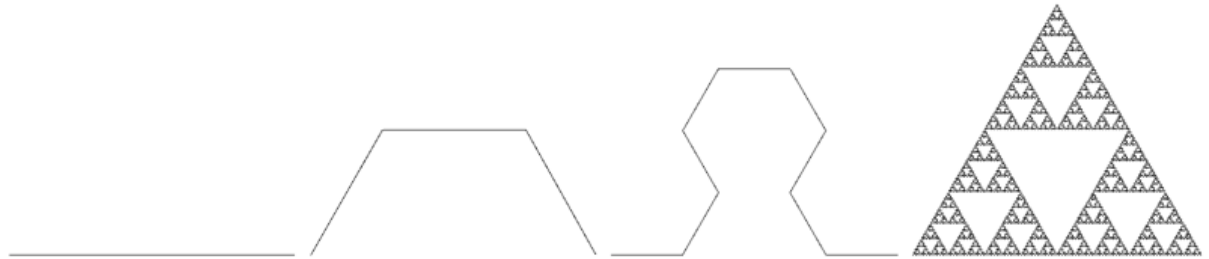
$\omega : F+F+F-F$
 $F \rightarrow FF-F-F-F-FF$
 $a=90^\circ$

$\omega : F+F+F+F$
 $F \rightarrow F-F+F+FF-F-F+F$
 $a=90^\circ$

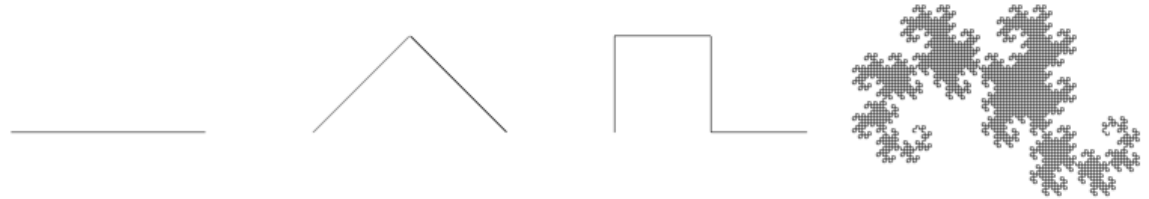


L-systèmes à deux lettres

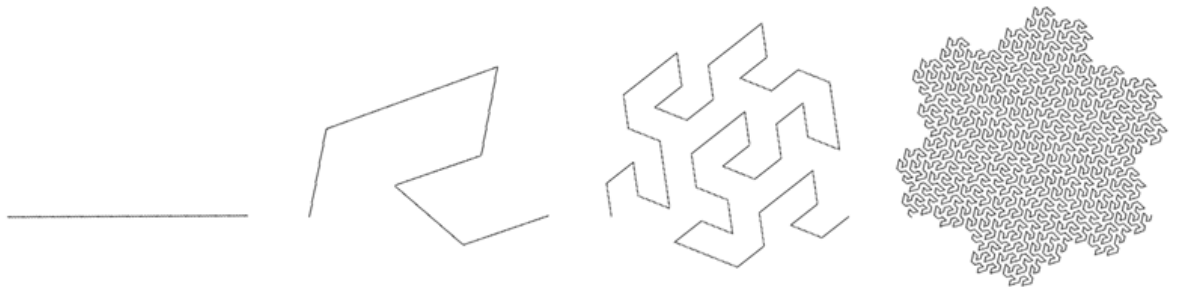
$L \rightarrow L+R++R-L--LL-R+$
 $R \rightarrow -L+RR++R+L--L-R$



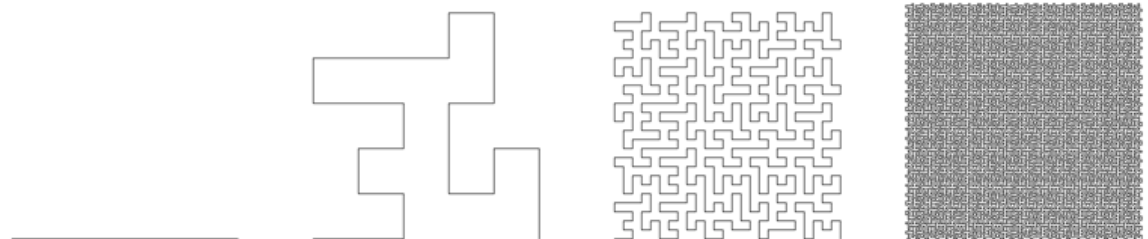
$L \rightarrow L+R+$
 $R \rightarrow -L-R$



$L \rightarrow L+R++R-L--LL-R+$
 $R \rightarrow -L+RR++R+L--L-R$



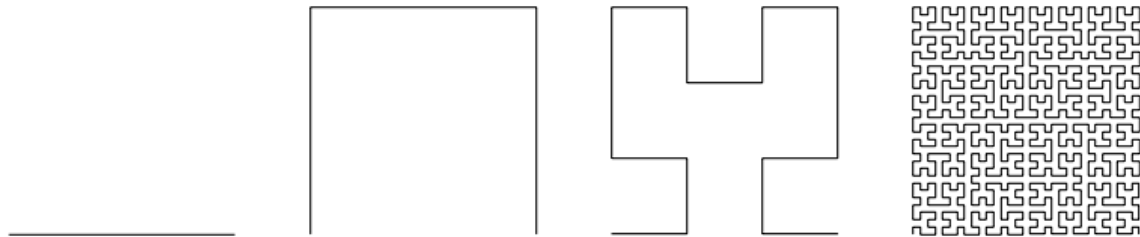
$L \rightarrow LL-R-R+L+L-R-RL+R+LLR-L+R+LL+R-LR-R-L+L+RR-$
 $R \rightarrow +LL-R-R+L+LR+L-RR-L-R+LRR-L-RL+L+R-R-L+L+RR$



Courbe de Hilbert

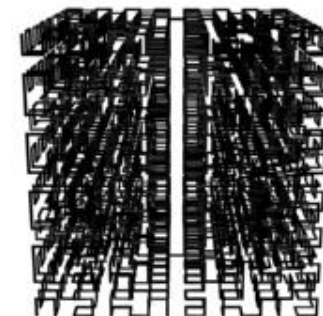
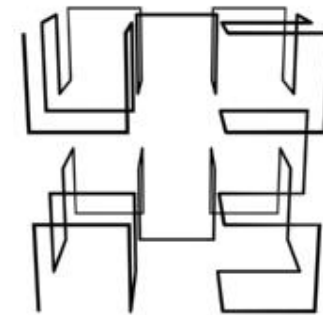
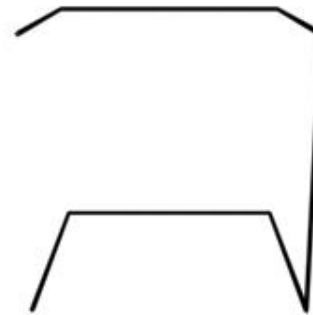
en 2D:

$\omega : F$
 $F \rightarrow F$
 $L \rightarrow +RF-LFL-FR+$
 $R \rightarrow -LF+RFR+FL-$



en 3D:

$\omega : A$
 $A \rightarrow B-F+CFC+F-D\&F^{\wedge}D-F+\&\&CFC+F+B//$
 $B \rightarrow A\&F^{\wedge}CFB^{\wedge}F^{\wedge}D^{\wedge\wedge}-F-D^{\wedge}|F^{\wedge}B|FC^{\wedge}F^{\wedge}A//$
 $C \rightarrow |D^{\wedge}|F^{\wedge}B-F+C^{\wedge}F^{\wedge}A\&\&FA\&F^{\wedge}C+F+B^{\wedge}F^{\wedge}D//$
 $D \rightarrow |CFB-F+B|FA\&F^{\wedge}A\&\&FB-F+B|FC//$



L-systèmes à embranchements

$\omega = F$
 $F \rightarrow F[+F]F[-F]F$
 $a = 25,7^\circ$
 $n = 5$

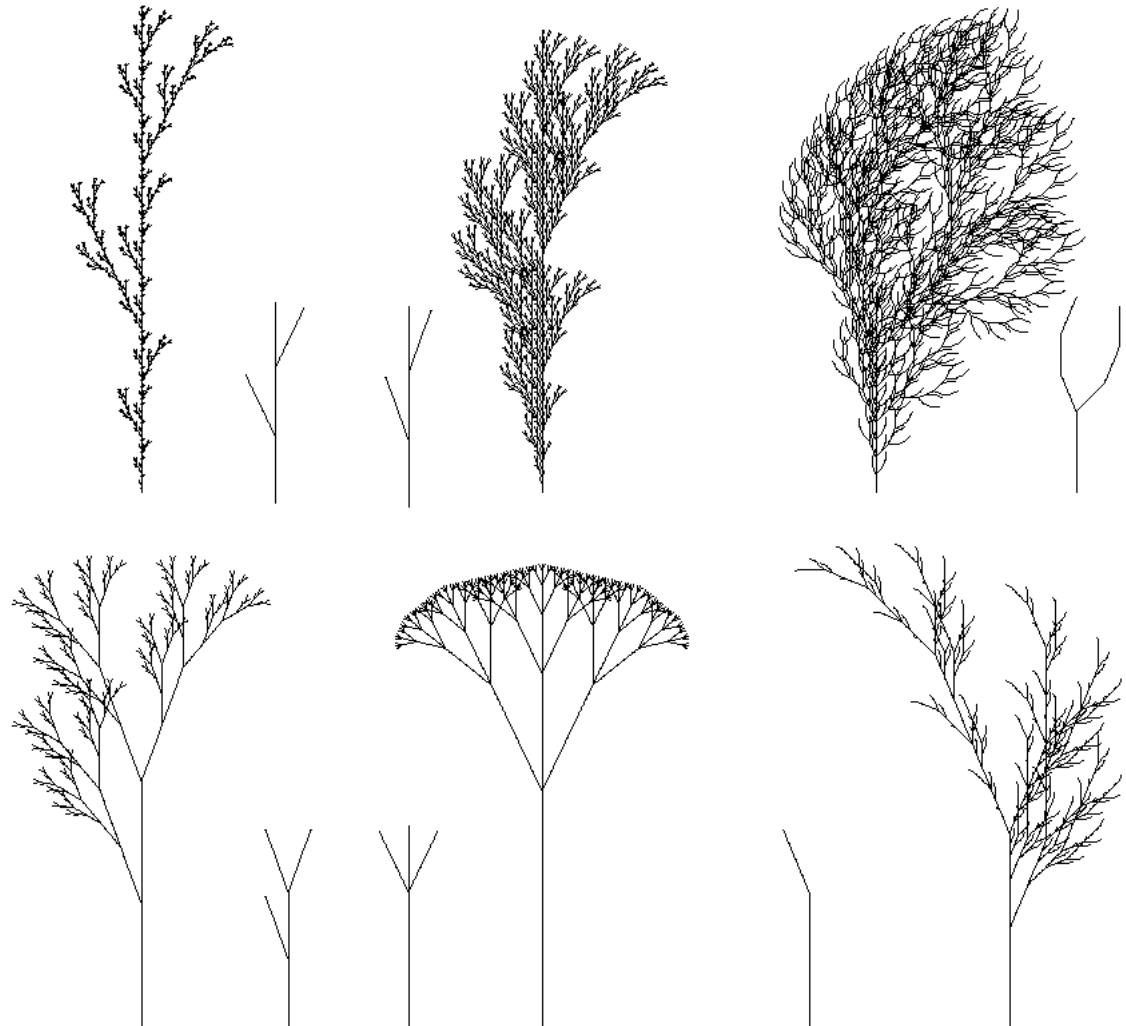
$\omega = F$
 $F \rightarrow F[+F]F[-F][F]$
 $a = 20^\circ$
 $n = 5$

$\omega = F$
 $F \rightarrow FF[-F+F+F][+F-F-F]$
 $a = 22,5^\circ$
 $n = 4$

$\omega = X$
 $X \rightarrow F[+X]F[-X]+X$
 $F \rightarrow FF$
 $a = 20^\circ$
 $n = 6$

$\omega = X$
 $X \rightarrow F[+X][-X]X$
 $F \rightarrow FF$
 $a = 25,7^\circ$
 $n = 6$

$\omega = X$
 $X \rightarrow F-[[X]+X]+F[+FX]-X$
 $F \rightarrow FF$
 $a = 25,7^\circ$
 $n = 5$



L-systèmes à embranchements en 3D

$\omega = F$

$A \rightarrow [&FL!A]+++++ [&FL!A]+++++ [&FL!A]$

$F \rightarrow S+++++F$

$S \rightarrow FL$

$L \rightarrow [-----&&////f++f++f]$

$a = 25,7^\circ$

$n = 7$



L-systèmes à embranchements en 3D

$\omega = A$

$A \rightarrow I[\&\&AG]--[-----L]^{\wedge}I[++L]-[\&AG]++AG$

$I \rightarrow FS[L][+++++L]FS$

$S \rightarrow SFS$

$L \rightarrow [\&\&f]$

$G \rightarrow [PW]$

$P \rightarrow FF$

$W \rightarrow w$

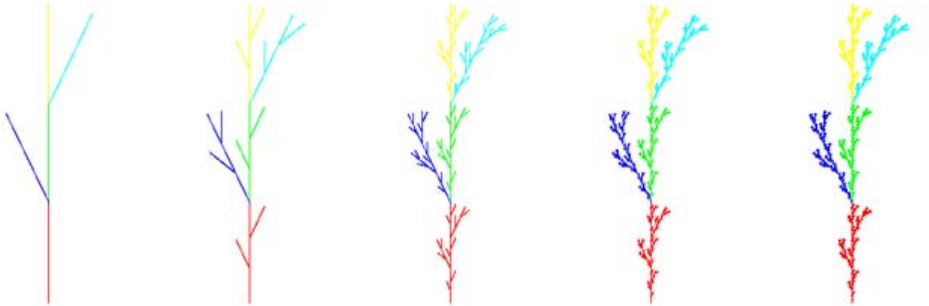
$a = 18^{\circ}$

$n = 6$

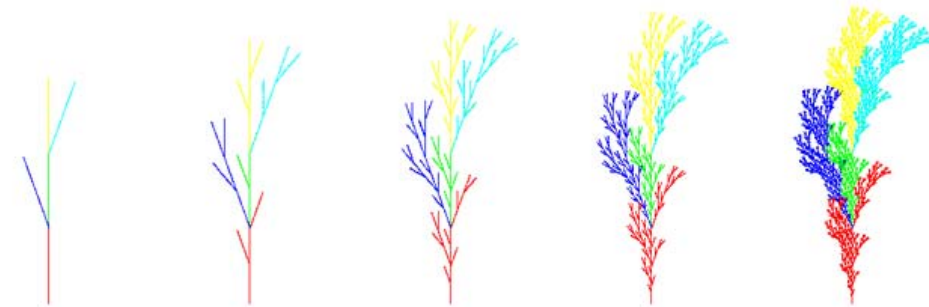


L-systèmes en IFS

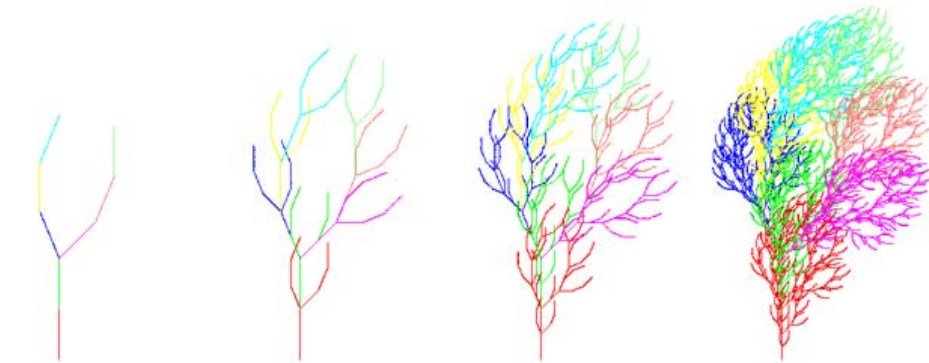
F[+F]F[-F]F	taux	angle	translation x	translation y
w1	1/3	0°	0	0
w2	1/3	0°	0	1/3
w3	1/3	25,7°	0	1/3
w4	1/3	0	0	2/3
w5	1/3	-25,7°	0	2/3



F[+F]F[-F][F]	taux	angle	translation x	translation y
w1	1/2	0°	0	0
w2	1/2	0°	0	1/2
w3	1/2	20°	0	1/2
w4	1/2	0	0	1
w5	1/2	-20°	0	1



FF[-F+F+F][+F-F-F]	taux	angle	tx	ty
w1	1/2	0°	0	0
w2	1/2	0°	0	1/2
w3	1/2	22,5°	0	1
w4	1/2	0°	0,19	1,46
w5	1/2	-22,5°	0,10	1,96
w6	1/2	-45°	0	1
w7	1/2	-22,5°	-0,36	1,36
w8	1/2	0°	-0,55	1,82



III.2.3 Automates cellulaires

Les automates cellulaires ont été inventés dans les années 1940 pour répondre à deux problèmes assez éloignés, la croissance des cristaux, d’une part, étudiée par Stanislaw Ulam, et la robotique et les systèmes auto-réplicatifs d’autre part, plus précisément la conception de robots qui se copieraient eux-mêmes à partir de pièces, explorée par John von Neumann ; Ulam et von Neumann étaient tous deux chercheurs à Los Alamos : leurs efforts conjugués débouchèrent sur le premier automate cellulaire, ou plutôt sur le “copieur et constructeur universel”. Plus tard, John Conway inventa le plus célèbre des automates cellulaires connu sous le nom de “jeu de la vie”, et que nous allons présenter plus loin ; plus récemment, Stephen Wolfram a proposé que des automates cellulaires très simples pouvaient expliquer les phénomènes physiques les plus complexes¹.

Si, par exemple en dimension 2, les IFS et les L-systèmes se développent *a priori* dans $\mathbf{R}^2$, c’est-à-dire dans un espace qui a la puissance du continu, et ne sont que *représentés*, la plupart du temps, dans un espace de type bitmap, et en tout cas calculés dans un espace *numérique*, c’est-à-dire en définitive dans un espace équivalent à Σ^2 , donc discret, les automates cellulaires (que nous abrègerons souvent en AC) évoluent *d’emblée* dans un espace discret, équivalent à Σ , Σ^2 , Σ^3 , etc. (ou dans d’autres espaces discrets). Comme les IFS et les L-systèmes, les AC sont des systèmes *dynamiques*, c’est-à-dire des processus temporels, évoluant selon un temps *discret* : on parlera d’étapes, ou de générations. Les AC peuvent être considérés comme des systèmes de réécriture, puisque l’état de l’automate est modifié suivant des règles précises à chaque étape, et que cet état peut être traduit par une chaîne ou une matrice de symboles, bien que, la plupart du temps, on assimile la cellule à un pixel, et l’AC à une grille de pixels, son état pouvant alors se lire comme un *bitmap*, la couleur de chaque pixel rendant compte de l’état de la cellule correspondante. Le destin d’un automate cellulaire est variable : il peut complètement disparaître, ou croître indéfiniment, ou encore aboutir à un attracteur.

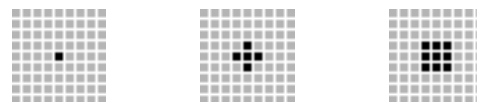
Ce qui est spécifique aux automates cellulaires, c’est la notion de *voisinage*. Les règles sont toujours strictement *locales*, même si dans certains cas le voisinage peut être plus étendu que dans d’autres. Cependant, une *forme globale* peut émerger, et c’est ce qui fait l’intérêt de ces modèles.

Le “jeu de la vie”

Commençons par un exemple, très connu, qui nous permettra de voir comment fonctionne un automate cellulaire. Le “jeu de la vie” se développe sur une grille 2D orthogonale : nous l’assimilerons à un bitmap : les cellules (les *éléments* de l’automate cellulaires) sont les pixels ; les cellules peuvent prendre deux *états* : la *vie* (pixel noir), et la *mort* (pixel blanc) ; on peut aussi dire qu’une cellule existe si elle vivante, et qu’il n’y pas de cellule, que la case correspondant est vide, si

¹ Stephen Wolfram, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002 (1197 pages, sans compter l’index!)

elle est morte. Sur une grille orthogonale, chaque pixel est entouré par 4 autres pixels (si l'on ne considère que les pixels adjacents, à gauche, à droite, au-dessus, en-dessous ; ou encore à l'ouest, l'est, au nord et au sud), ou par 8 pixels (si l'on y ajoute les pixels qui touchent le premier par le coin) : le premier type de *voisinage* est appelé *voisinage de von Neumann*, le second *voisinage de Moore* :



Le “jeu de la vie” utilise le voisinage de Moore (8 voisins). Reste à énoncer les règles de l'évolution de l'automate ; elles sont très simples : à chaque étape, on examine l'état de chaque cellule et de ses voisines et :

- une cellule naît si elle a exactement 3 voisines
- une cellule ne reste vivante que si elle a 2 ou 3 voisines : sinon elle meurt, d'isolement (0 ou 1 voisine), ou d'étouffement (de 4 à 8 voisines)

Pour terminer la description complète de l'automate, il faut définir l'*état de départ*. Comme premières configurations, parce qu'elles sont simples tout en donnant des résultats théoriquement intéressants, nous partirons des différentes formes composées de 5 pixels jointifs ; ces différentes configurations correspondent aux douze pentaminos, éléments d'un jeu de “casse-tête” (où il s'agit de reconstituer un rectangle ou différentes configurations connexes).

Voyons ce qui arrive aux pentaminos soumis aux règles du “jeu de la vie” (**Planche 36**): avec le premier (5 pixels en ligne), on obtient au bout de 6 générations un attracteur de type “oscillateur” : deux configurations de 12 pixels en croix et en carré qui se déduisent l'une de l'autre, un peu comme les 2 10-uplets qui se déduisaient l'un de l'autre dans la devinette que nous avons donnée en introduction. Cet oscillateur est atteint également, plus ou moins rapidement, par les pentaminos N° 2, 5 et 9 ; le pentamino N° 3 nous offre l'exemple d'une configuration qui disparaît au bout de 3 générations, de même que les pentaminos N° 6, 7, 8 et 9. Les pentaminos 4 et 12 aboutissent eux à une configuration qui s'auto-génère (c'est la même dans les deux cas, à une symétrie près) : un attracteur unique. Enfin, le pentamino N° 12 est particulier : au bout de 11 générations (c'est le nombre auquel nous nous sommes limités pour cette première exploration), son sort est indécidable : il n'a pas disparu, il n'est pas tombé dans l'orbite d'un attracteur, double ou unique ; il faut continuer pour savoir ce qu'il va devenir... Au bout de 200 générations, cet automate n'a pas disparu ; au passage, on voit émerger des attracteurs fixes (4 pixels en carré, par exemple), des oscillateurs (3 pixels alignés, alternativement horizontaux et verticaux : cet oscillateur s'appelle un “clignotant” et est l'élément de base de l'oscillateur croix-carré que nous avons déjà rencontré), des configurations



“jeu de la vie” appliqué aux pentaminos

1 : oscillateur											
2 : oscillateur											
3 : disparition											
4 : attracteur unique											
5 : oscillateur											
6 : disparition											
7 : disparition											
8 : disparition											
9 : oscillateur											
10 : disparition											
11 : devient stable après 1103 générations...											
12 : attracteur unique											

mortelles (2 pixels adjacents) ; mais ces configurations, même quand elles sont des attracteurs, ne perdurent pas forcément, parce qu’elles peuvent être “contaminées” par des pixels étrangers qui les atteignent ; nous voyons aussi apparaître une configuration “voyageuse”, un “planeur”, comme il est convenu de l’appeler, c’est-à-dire un groupe de cinq pixels (qui ne fait pas partie des pentaminos parce que l’un des pixels n’est lié que par un coin), qui se déplace. Ces attracteurs mobiles ne perdurent pas non plus lorsqu’ils apparaissent dans l’automate complet, pour la même raison que les autres attracteurs. En définitive, la configuration issue du pentamino N° 12 devient stable au bout de 1103 générations...

Le “jeu de la vie”, dans la grande famille des AC de dimension 2, fait partie d’un groupe particulier : les automates “totalistiques”, c’est-à-dire qu’on ne s’intéresse qu’au nombre total de voisins, et non à la position particulière de chaque cellule voisine par rapport à la cellule examinée. En 2D, on se limitera généralement à ces automates, parce que le nombre de configurations de voisinage est très élevé ; mais en une dimension, on peut être plus exhaustif, c’est ce que nous allons voir à présent.

AC linéaires

Nous allons maintenant examiner quelques automates linéaires ; leur espace est une ligne de pixels équivalente à Σ , une ligne de pixels de différentes couleurs correspondant à des états donnés, une ligne de pixels noirs et blancs dans le plus simple de cas (AC à deux états de cellules possibles) : cela ne semble pas présenter d’intérêt, du point de vue formel en tout cas. Cependant on représente généralement les automates linéaires en disposant les générations successives les une en-dessous des autres, ce qui finit par constituer une configuration 2D, dont la forme est donc discernable.

Dans un AC linéaire, chaque cellule n’a que deux voisins : son voisin de gauche et son voisin de droite. Si les états ne sont que deux (0 et 1), on peut donc “traduire” toutes les situations possibles de voisinage de la façon suivante :

000	001	010	011	100	101	110	111
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

soit 8 situations possibles (qui correspondent aux nombres de 0 à 7 écrits en base 2). Comme chaque situation de voisinage peut déboucher sur l’état 0 ou l’état 1, il y a $2^8 = 256$ règles possibles pour cet AC (qui est le plus simple que l’on puisse imaginer...). Pour les identifier, il y a un moyen très simple : il suffit de placer en-dessous de la série de situations de voisinage l’état consécutif de la cellule, par exemple :

000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	0	0	1	1	0	1

Cette nouvelle suite de 0 et de 1 peut se lire comme un nombre écrit en base 2 (et compris entre 0 et 255) ; on le traduit en base 10 : dans notre exemple $01001101_2 = 77_{10}$; on appellera donc cette règle la règle 70.

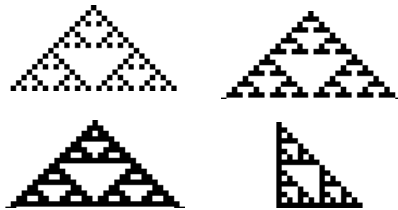
256 est un nombre encore abordable et nous pouvons examiner systématiquement les résultats obtenus en partant d'une cellule unique. On peut prévoir certains de ces résultats : la règle 255, ou, en base 2, 11111111, donne une suite de pixels tous noirs, de même que la règle 0, ou 00000000, qui ne donne que des pixels blancs. On peut aussi remarquer que certains automates seront symétriques, et d'autres non (selon que la transition à partir de 001 et de 100, et des autres situations de voisinage symétriques, est la même). Nous avons classé les évolutions de cet automate en trois groupes : d'abord on obtient des configurations que nous qualifions de "simples" (**Planche 37**) :

- espace tout blanc : disparition immédiate de l'automate, toutes les cellules meurent
- espace tout noir : il s'agit d'un attracteur "complet", toutes les cellules vivent
- des lignes noires et blanches horizontales se succèdent, ce qui forme des rayures : il s'agit d'un oscillateur "complet", toutes les cellules meurent et ressuscitent alternativement
- une ligne noire verticale sur fond blanc : il s'agit d'un attracteur ponctuel, la cellule de départ perdure et c'est la seule
- une ligne verticale blanche sur fond noir, ou une fine rayure sur fond noir ou rayé : il s'agit d'attracteurs "anti-ponctuels" (toutes les cellules sauf une perdurent) ou d'oscillateurs limités à deux ou trois cellules
- une ligne ou une fine rayure oblique à 45°, sur fond blanc, noir ou rayé, ou à 22,5°, sur fond rayé uniquement : il s'agit d'un "glisseur", l'attracteur ponctuel, ou anti-ponctuel, ou encore les deux ou trois cellules, se décalant d'un pixel vers la droite (resp. la gauche) à chaque génération (ligne à 45°), ou une génération sur deux (ligne à 22,5°)
- un triangle aux côtés à 45°, triangle noir sur fond blanc, ou triangle rayé ou quadrillé sur fond blanc, noir ou rayé ; parfois les deux moitiés du triangle sont différentes, parfois il n'y a qu'un demi-triangle ; ou encore (dans deux cas seulement, sur fond rayé) un triangle aux côtés à 22°5 : il s'agit d'attracteurs que l'on qualifiera de "croissants", soit que le nombre de cellules croissent vraiment, ou qu'une certaine configuration croisse dans l'automate

Les résultats de ce premier groupe ne montrent pas encore de motifs très élaborés. Leur intérêt théorique n'est cependant pas négligeable. Par exemple les lignes obliques permettent, lorsque l'on considère ces automates comme des "machines de Turing" (concept que nous ne développerons pas), de modéliser le décalage à gauche ou à droite du chiffre 1, ce qui est essentiel.

Les résultats des autres groupes sont rassemblés **Planche 38**.

Le deuxième groupe est constitué des triangles de Sierpinski : en effet, certaines règles de cet automate linéaire génèrent cette figure archétypique, et que nous avons déjà rencontrée maintes fois...



Le troisième groupe rassemble des configurations fractales autres que le triangle de Sierpinski : ces motifs sont particulièrement intéressants, car ils constituent des sortes de “hapax”² de cet automate, chaque image n’étant produite qu’une fois; si on poursuit le processus (**Planche 39**) 384 générations au lieu de 128, la structure fractale des figures 150 et 105 est confirmée ; la figure 169 montre mieux sa structure fractale si on effectue un décalage de chaque ligne (**Planche 40**).

Le quatrième et dernier groupe concerne des motifs complexes, apparemment chaotiques. Ces motifs sont tous des hapax ou des couples d’hapax symétriques. Si on poursuit plus longtemps le processus, on s’aperçoit de la véritable complexité de ces motifs (**Planches 41-44**).

Revenons enfin sur les règles qui engendrent des triangles de Sierpinski ; nous avons déjà dit que leur structure était légèrement différente suivant les règles. Si l’on agrandit le motif de base des textures générées par les règles 18, 26, 82, 90, 146, 154, 210 et 218, on obtient le premier motif ci-contre ; la règle 22 génère le deuxième, et la règle 126 le troisième ; la quatrième échantillon correspond à la règle 60.

On constate donc que, bien que la structure générale soit celle du triangle de Sierpinski, la texture fine est différente. Cela ne joue pas beaucoup sur le résultat final quand on part d’une cellule unique. Essayons maintenant une autre façon de mettre en œuvre cet automate linéaire, en partant d’une distribution aléatoire de cellules ; la densité de départ a été fixée à 1/10 (c’est-à-dire qu’il y a statistiquement une cellule vivante sur dix dans la ligne de départ) ; on part de la même distribution de cellules pour toutes les expérimentations ; la topologie de l’espace de l’automate est cylindrique (les bords gauche et droit se correspondent). On observe alors des comportements assez différents selon les règles :

- règles 90 et 165 (en négatif) (**Planche 45**) : il y a comme une superposition de triangles de Sierpinski ; l’automate s’éteint toujours à la 128^{ème} génération, même si l’on change la distribution aléatoire de départ, et quelle que soit sa densité
- règles 60, 102 (en symétrique), 153, 195 (en négatif) (**Planche 46**): là aussi, il y a superposition ; l’automate disparaît toujours à la 256^{ème} génération, même si l’on change la distribution aléatoire de départ, et quelle que soit sa densité
- règle 218 (**Planche 47**): le comportement de l’automate est très particulier, il aboutit à un attracteur multi-ponctuel
- règles 26, 82, 154, 167, 181, 210 (**Planche 48**): l’automate ne meurt pas ; l’attracteur est un glisseur, on le voit d’autant mieux que la densité de départ est forte

² “hapax : mot, forme dont on n’a pu relever qu’un exemple, en particulier, vocable n’ayant qu’une seule occurrence dans un corpus donné” (<http://www.cnrtl.fr/lexicographie>)

Automate cellulaire linéaire à 2 états

a	b	c
d	e	f
g	h	i
j	k	l
m	n	o
p	q	r

a : disparition (règles 0 8 32 40 64 72 96 104 128 136 160 168 192 200 224 232)

b : attracteur complet (règles 151 159 183 191 215 223 233 235 237 239 247 249 251 253 255)

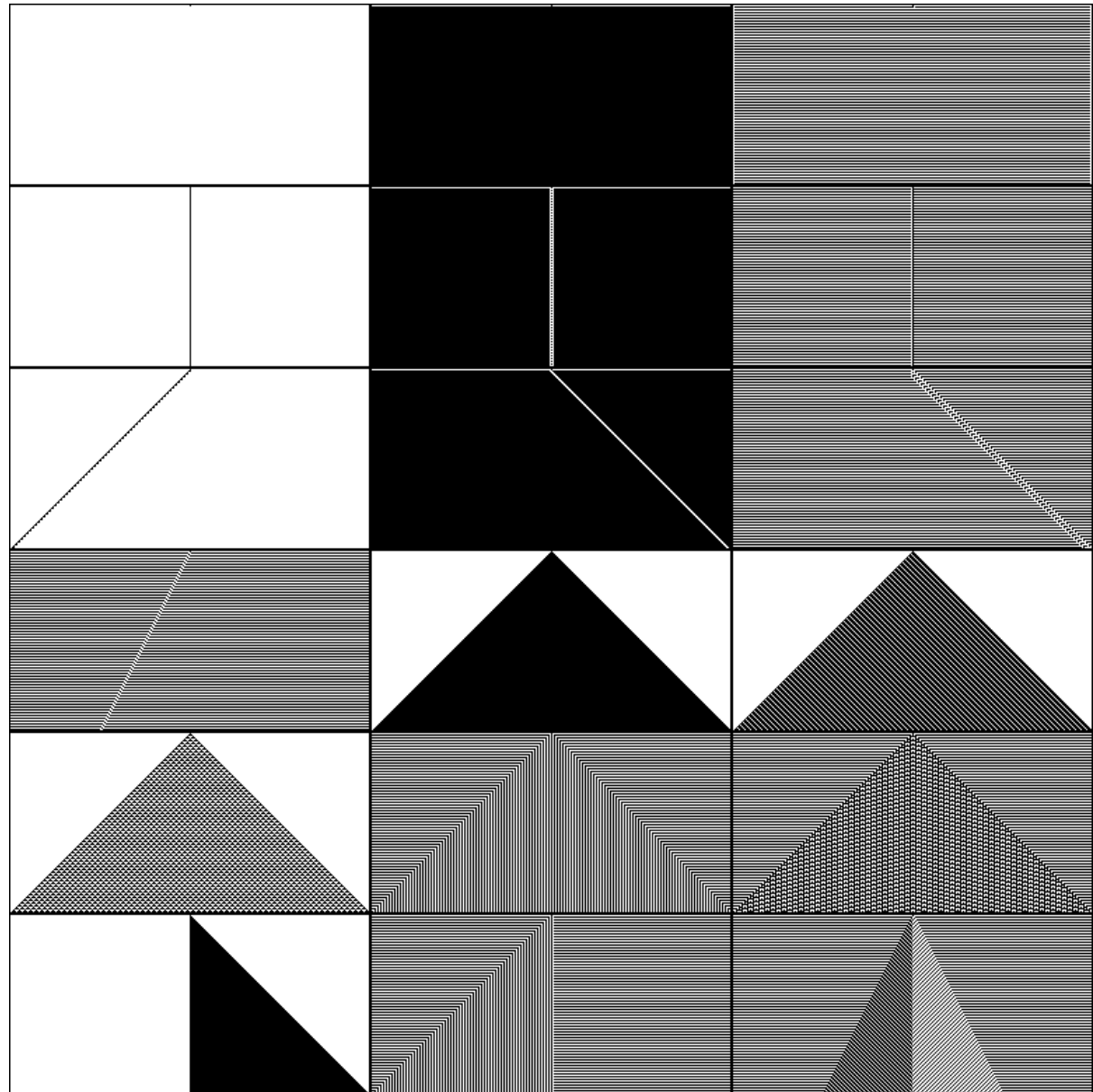
c : oscillateur complet (règles 7 19 21 23 31 35 63 87 5 119 127)

d : attracteur point (règles 4 12 36 44 68 76 100 108 132 140 164 172 196 204 228 236)

e f : attracteur ou oscillateur limité (règles 201 203 207 217 219 221 ; 1 5 29 33 37 51 71 91 123)

g h i j : glisseur (règles 2 6 10 14 16 20 24 34 38 42 46 48 52 56 66 74 80 84 88 98 106 112 116 120 130 134 138 142 144 148 152 162 166 170 174 176 180 184 194 202 208 212 216 226 234 240 244 248 ; 139 143 155 171 173 175 185 187 189 209 211 213 227 229 231 241 243 245 ; 9 11 15 41 43 47 65 81 85 97 107 111 113 117 121 125 ; 3 17 25 27 35 39 49 53 59 61 67 83 103 115)

k l m n o p q r : attracteur croissant (règles 13 50 54 58 62 69 77 79 94 109 114 118 122 131 133 141 145 147 158 163 177 178 179 186 190 199 214 222 242 246 250 254 ; 28 70 78 92 93 156 157 188 197 198 206 220 230 238 252 ; 57 99)



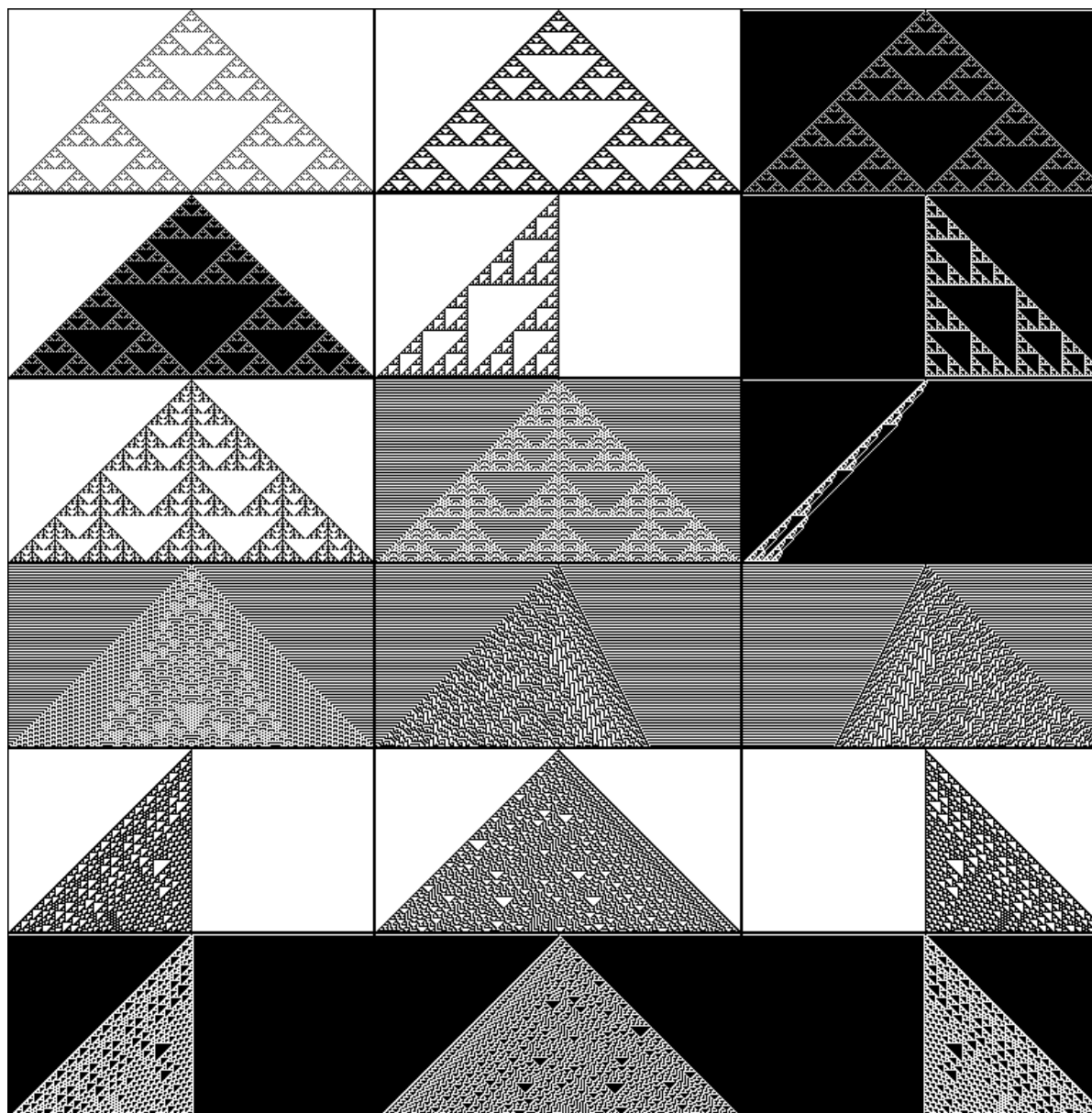
Automate cellulaire linéaire à 2 états

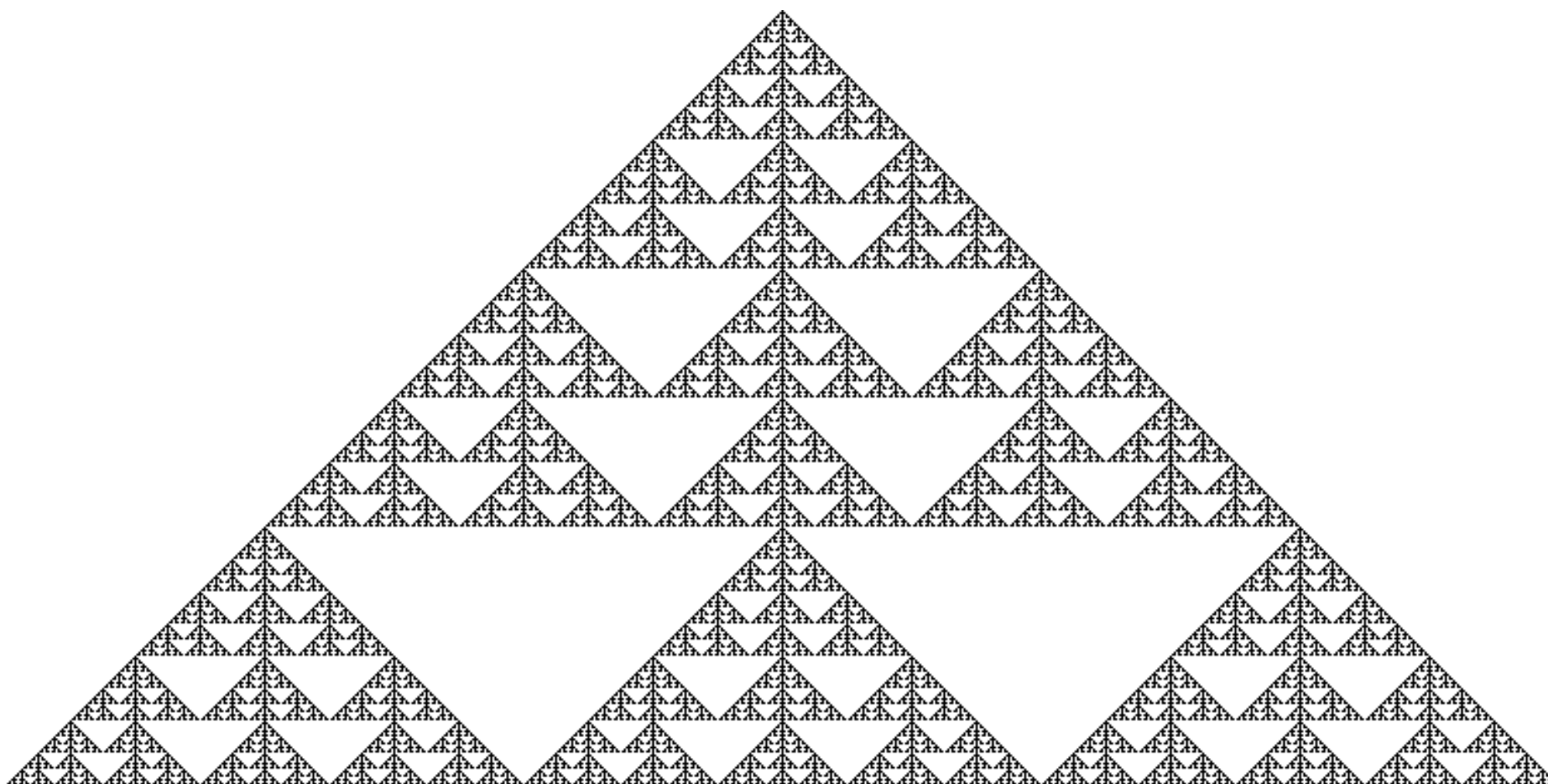
a	b	c
d	e	f
g	h	i
j	k	l
m	n	o
p	q	r

a b c d e f : triangles de Sierpinski (règles 18
22 26 82 90 126 146 154 210 218 ; 129 161
165 167 181 ; 182 ; 60 102 ; 182 195)

g h i j : autres configurations fractales (règles
150 ; 105 ; 169 225)

k l m n o p q r : motifs complexes (règles
73 ; 89 101 ; 45 75 ; 110 ; 30 86 ; 124 ; 137 ;
135 149 ; 193)





Automate cellulaire linéaire à 2 états

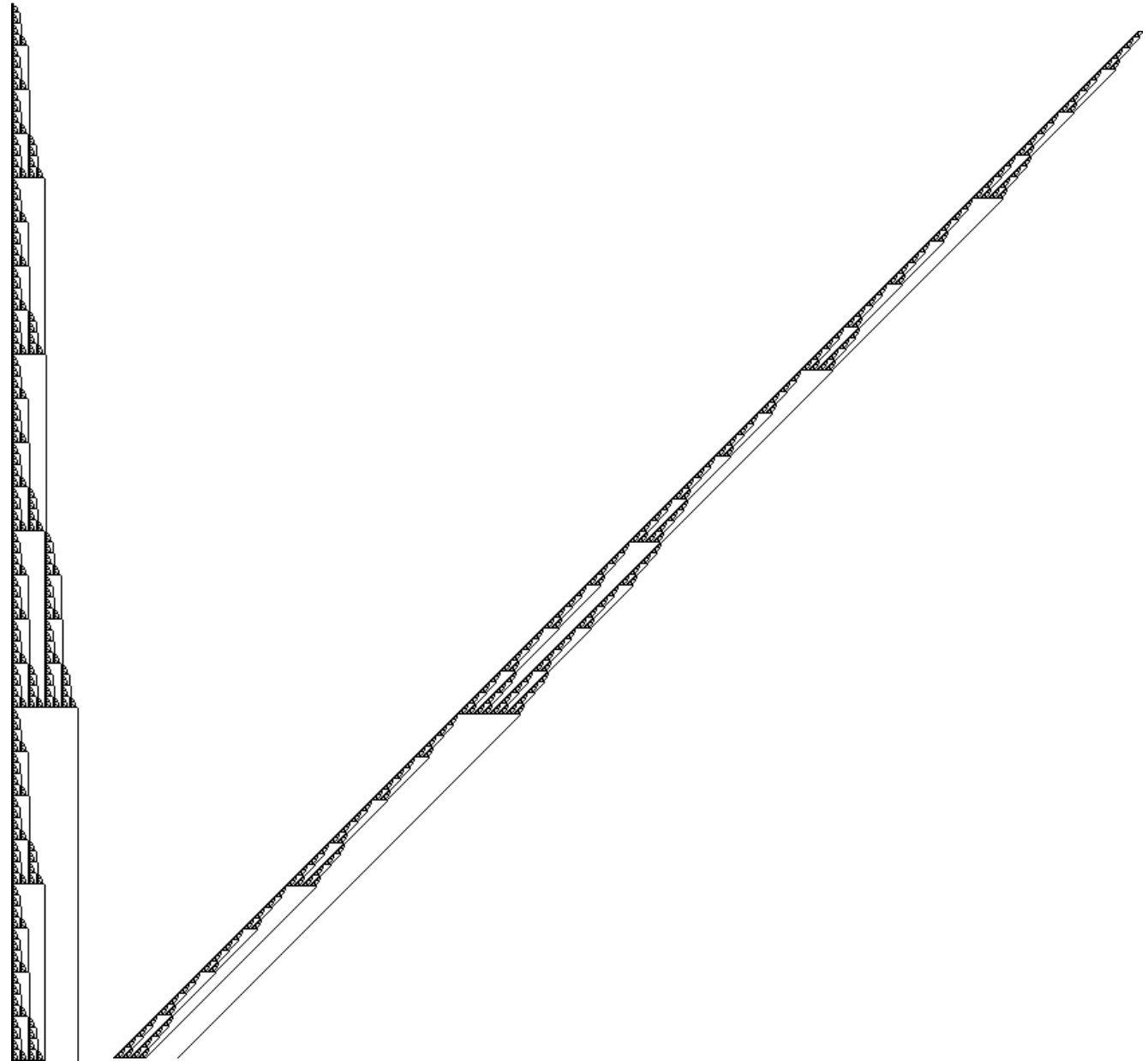
configurations fractales (règles 150 ; 105) 384 générations

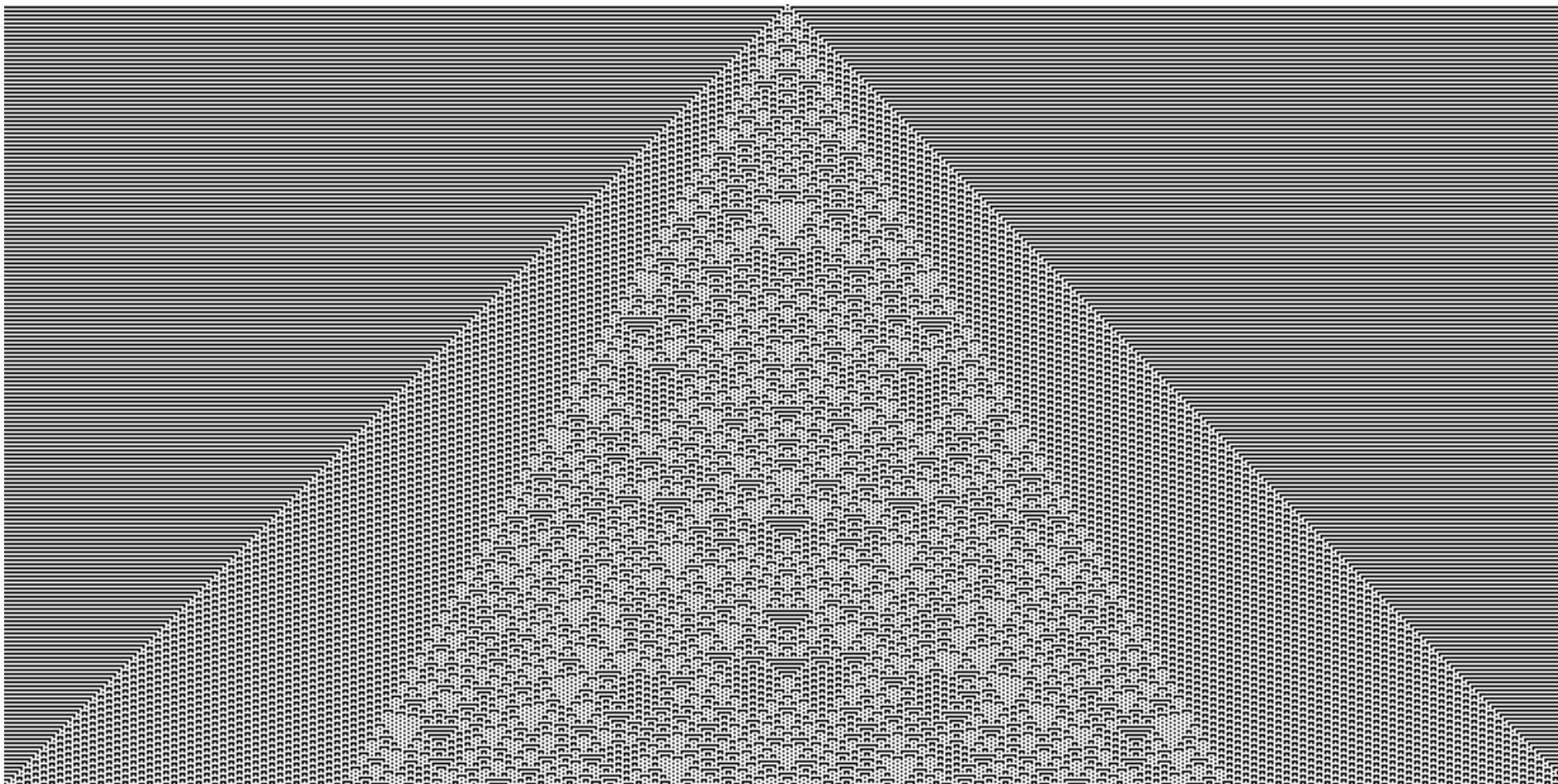
Automate cellulaire linéaire à 2 états

configuration fractale (règle 169)

768 générations

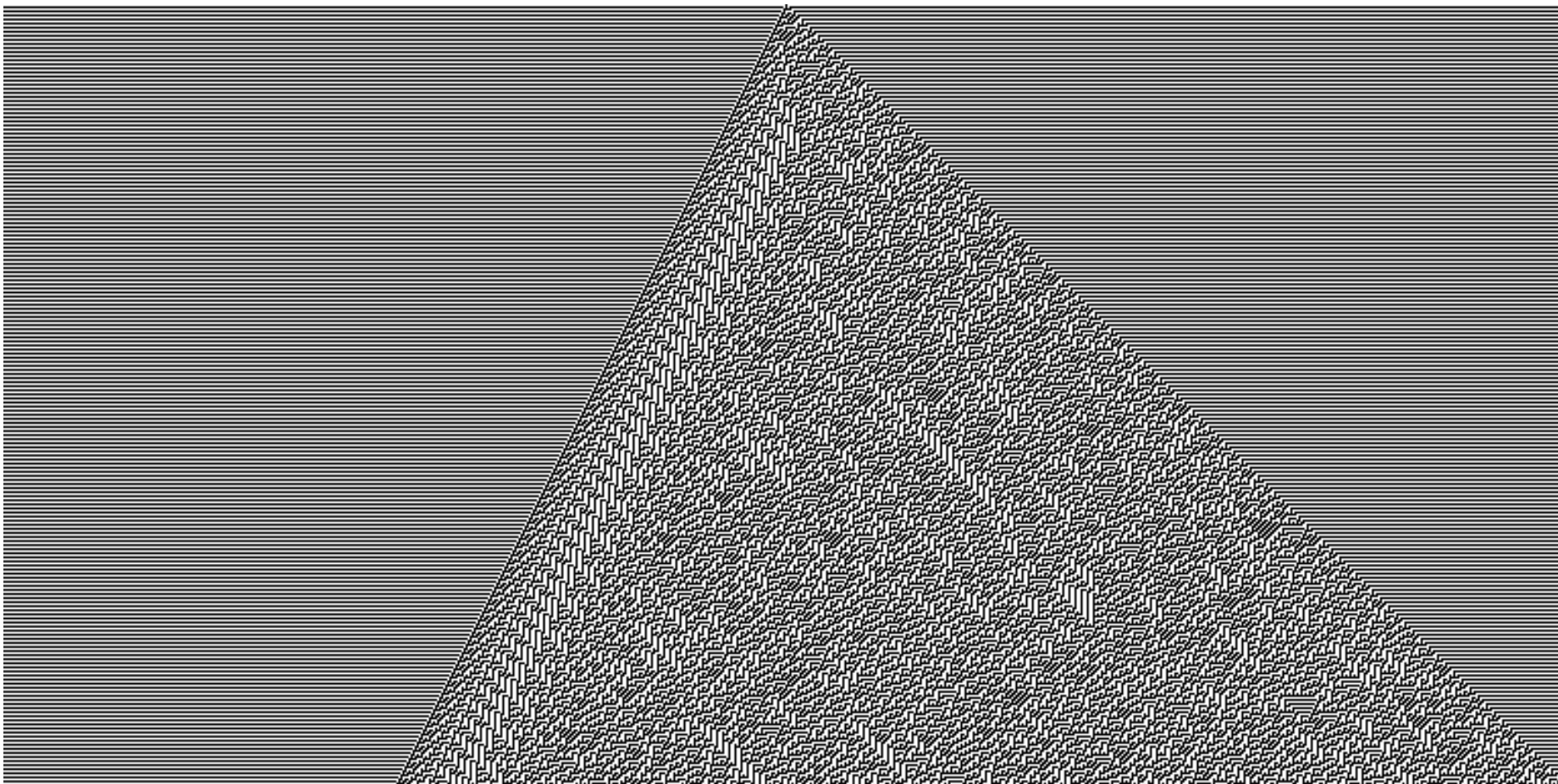
et avec décalage





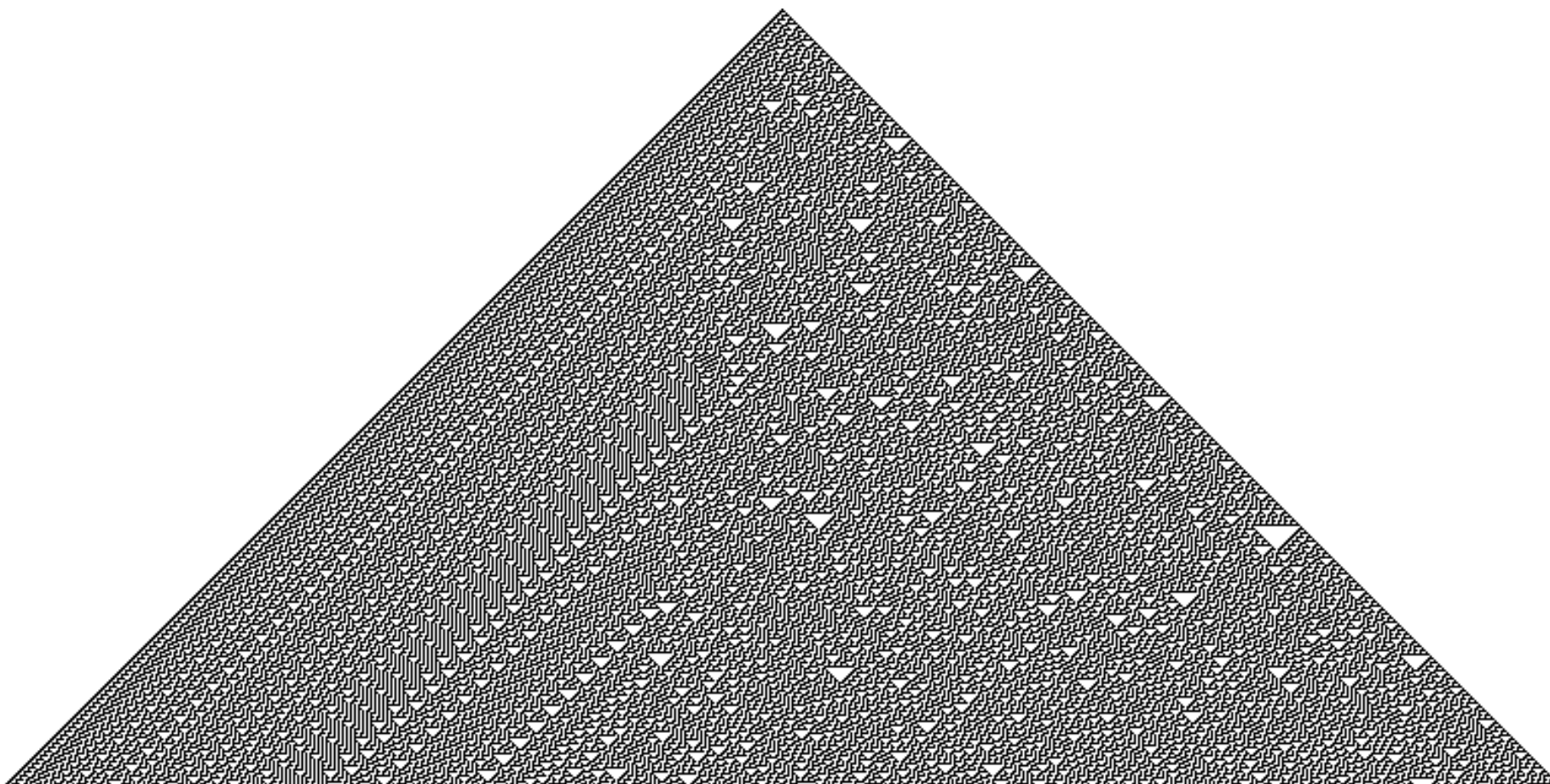
Automate cellulaire linéaire à 2 états

motif complexe (règle 73) 384 générations



Automate cellulaire linéaire à 2 états

motif complexe (règle 45) 384 générations



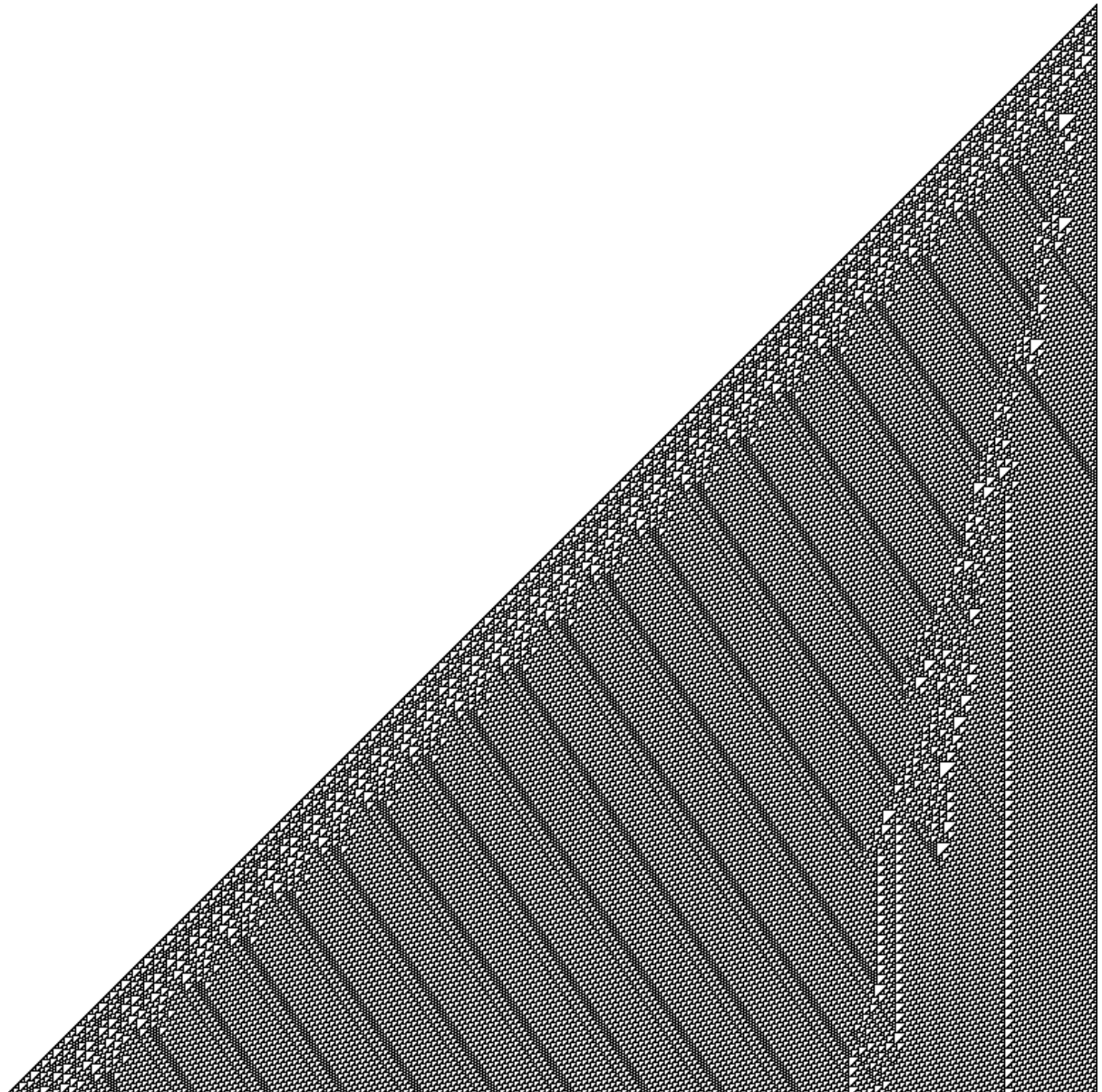
Automate cellulaire linéaire à 2 états

motif complexe (règle 30) 384 générations

Automate cellulaire linéaire à 2 états

motif complexe (règle 110)

768 générations



Règles “Sierpinski” appliquées à une distribution aléatoire de points

règle 90 (ou 165 en négatif)

a b c

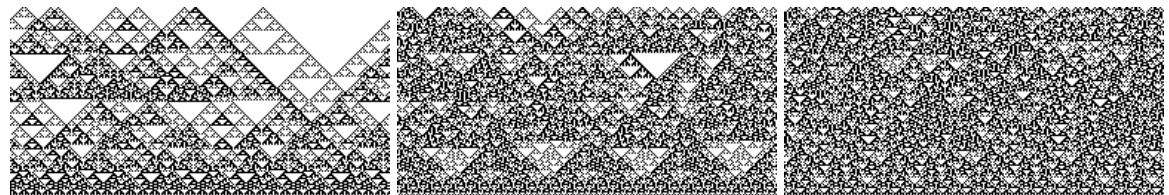
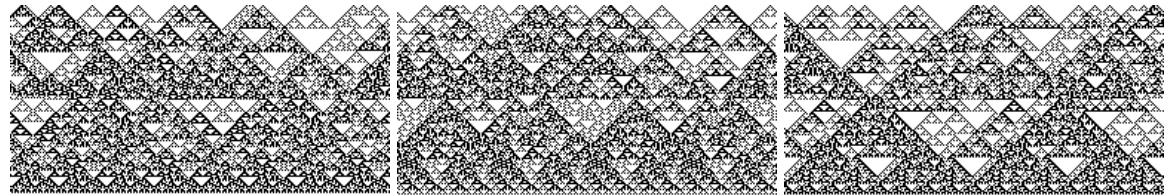
c d e

a b c : densité de départ 1/10

d : densité de départ 1/20

e : densité de départ 1/5

f : densité de départ 1/2



Règles “Sierpinski” appliquées à une distribution aléatoire de points

règle 60 (ou 102 en symétrique ; ou 153, 195 en négatif)

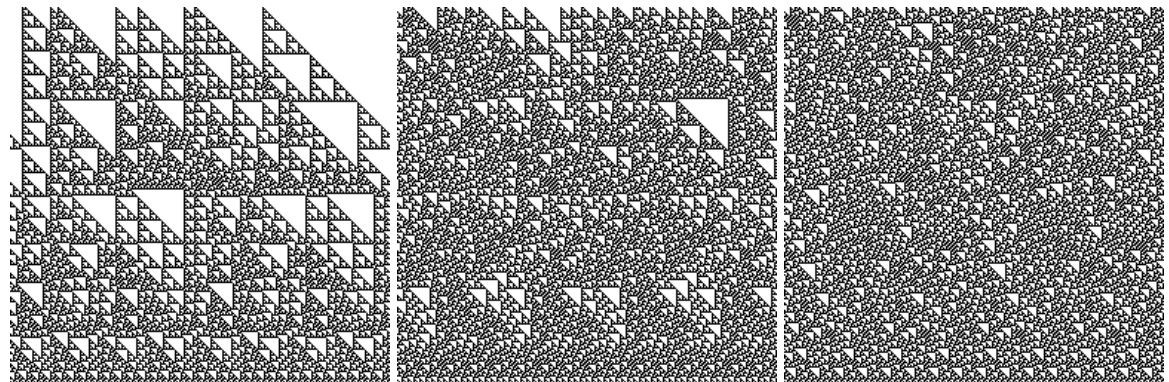
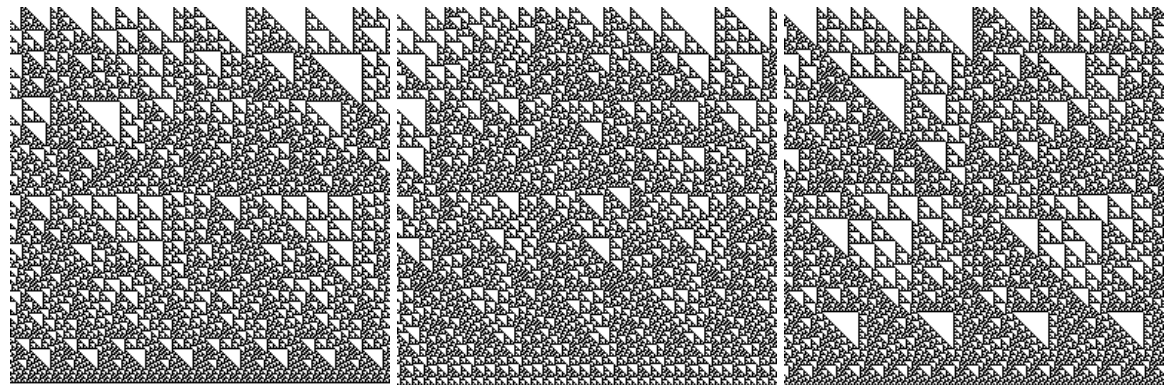
a	b	c
c	d	e

a b c : densité de départ 1/10

d : densité de départ 1/20

e : densité de départ 1/5

f : densité de départ 1/2



Règles “Sierpinski” appliquées à une distribution aléatoire de points

règle 60 (ou 102 en symétrique ; ou 153, 195 en négatif)

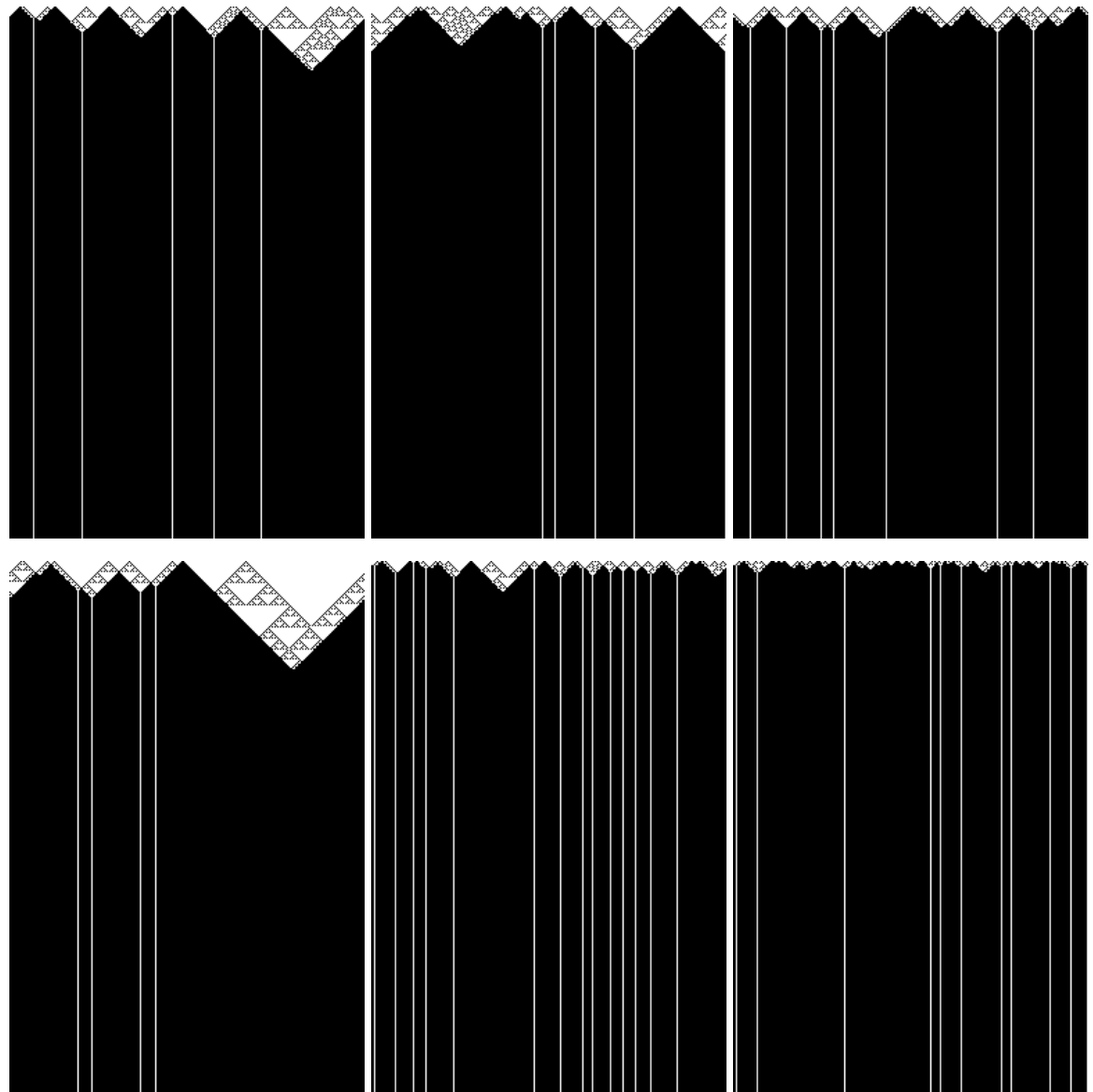
a	b	c
c	d	e

a b c : densité de départ 1/10

d : densité de départ 1/20

e : densité de départ 1/5

f : densité de départ 1/2



Règles “Sierpinski” appliquées à une distribution aléatoire de points

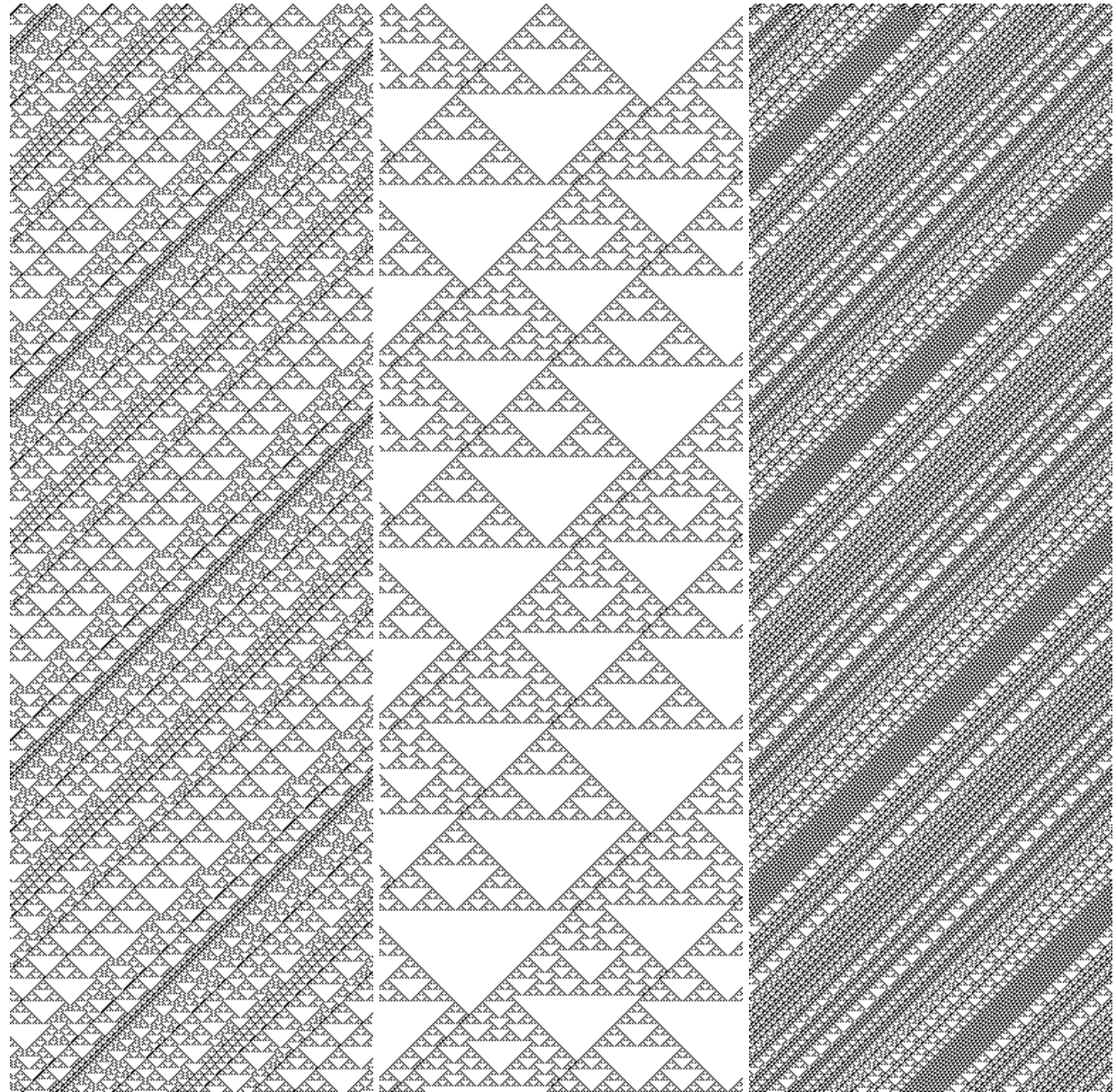
règle 26

a b c

a : densité de départ 1/10

b : densité de départ 1/50

c : densité de départ 1/2



Règles “Sierpinski” appliquées à une distribution aléatoire de points

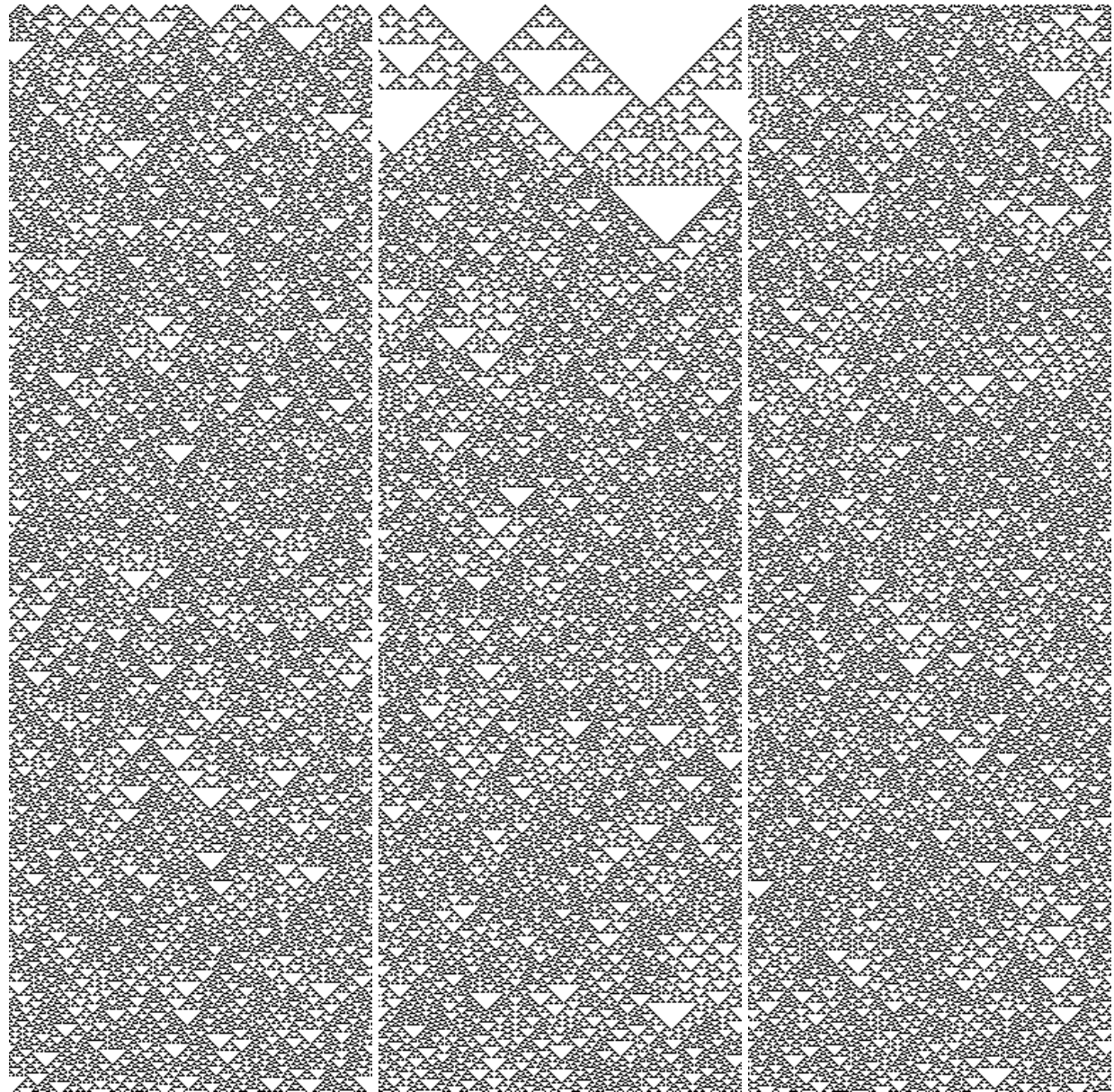
règle 18, 22, 126, 146, et 129, 161, 182 (en négatif)

a b c

a : densité de départ 1/10

b : densité de départ 1/50

c : densité de départ 1/2





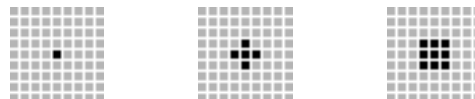
- règles 18, 22, 126, 146, et 129, 161, 182 (en négatif) (**Planche 49**): le motif “chaotique” qui s’installe est très cohérent, quelle que soit la densité de départ : on peut parler d’attracteur “stochastique”

Le motif obtenu dans ce dernier cas est assez proche de celui qui apparaissait dans le motif complexe de la règle 30, par exemple, mais en plus grand ; voir ci-contre l’échantillon 22 aléa, 30, 22 aléa réduit de moitié.

AC bidimensionnels

Le prolongement naturel des AC linéaires à deux états consiste à envisager un espace plan discret, équivalent à Σ^2 , dont la structure sous-jacente est un pavage carré ; on peut penser à un damier, un échiquier, ou plus encore à un plateau de jeu de go (*goban*). Chaque cellule occupe un emplacement équivalent à une case de l’échiquier, ou à une intersection de goban.

Si l’on veut faire le décompte, comme nous l’avons fait en une dimension, des automates cellulaires 2D à deux états, on doit d’abord choisir un type de voisinage, celui de von Neumann (4 voisins), ou celui de Moore (8 voisins) :



Si chaque cellule a 4 voisines, chacune de celles-ci pouvant prendre 2 états, il y $2^5 = 32$ configurations différentes, soit 2^{32} règles possibles (plus de 1 milliard) ; si chaque cellule a 8 voisines, le nombre de configurations passe à $2^9 = 512$, et le nombre de règles à 2^{512} , c’est-à-dire à un nombre de l’ordre de 10^{51} , soit un nombre écrit avec 1 suivi de 51 zéros, inexprimable et inimaginable...

Autant dire qu’il est exclu de vouloir explorer ce champ de possibles dans son exhaustivité. Pour réduire la complexité, on n’envisage en général que les AC totalistiques : on prend en compte le nombre de voisins sans s’occuper de leur emplacement précis. Pour 4 voisins, cela réduit le nombre de configurations à 10 (le nombre de voisines occupées peut être égal à 0, 1, 2, 3, ou 4 : 5 cas, et la cellule peut être occupée ou pas : 2 cas), et donc le nombre de règles à $2^{10} = 1024$; pour 8 voisins, on a 9 nombres de voisins différentes, donc 18 configurations distinctes, et donc $2^{18} = 524288$ règles possibles, ce qui fait encore beaucoup...

Voyons d’abord les AC à 4 voisins ; si l’on exprime le destin d’une cellule selon son nombre de voisins, et selon son état, un tableau typique d’un tel AC se présente ainsi (les éléments du tableau

donnent l'état futur de la cellule en fonction de son état présent (première colonne, en gras) et de son nombre de voisins (première ligne, en gras)) :

	0	1	2	3	4
0 →	0	0	0	1	0
1 →	0	0	1	1	0

On peut encore simplifier l'écriture en écrivant les deux lignes du tableau à la suite l'une de l'autre pour former un nombre binaire ; l'exemple ci-dessus s'écrira : 0001000110 ; puis transcrire ce nombre binaire en décimal, dans ce cas 70 ; cette règle aura donc comme code le nombre 70 ; toute règle à un code compris entre 0 et 1023. Le code exprimé en décimal est plus facile à lire et à retenir, mais le code binaire est plus explicite (on "voit" ce que devient la cellule) .

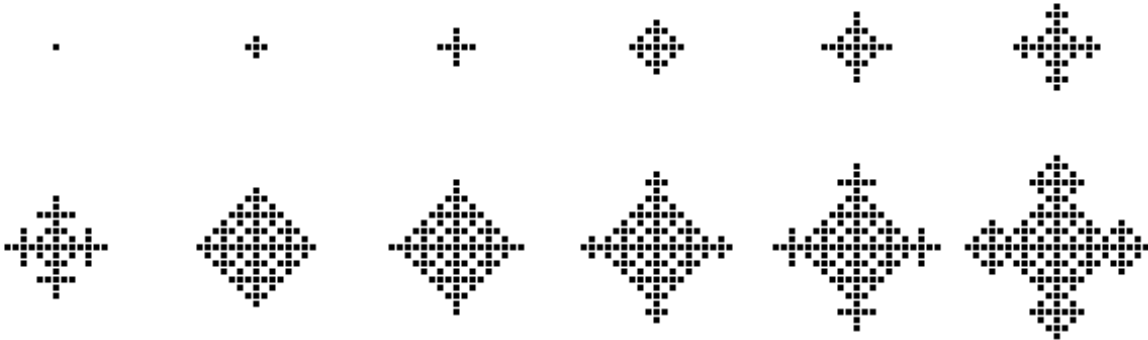
Nous n'allons bien sûr pas exposer le résultat des 1024 règles, d'autant que bon nombre de ces règles ne donnent rien d'intéressant (automate vide ou plein, en particulier). On peut choisir des codes par rapport à des intentions quant au destin de l'automate : par exemple, pour qu'un automate croisse strictement, il faut que les 5 derniers chiffres de son code binaire soient égaux à 1 ; 011111111 (511) est un tel code, il exprime le fait qu'aucune cellule noire (1) ne devient blanche (0), ou qu'aucune cellule ne disparaît, et qu'une cellule naît quel que soit son nombre de voisins (à condition que ce nombre soit non nul, ceci générant un automate trivial, complètement noir d'emblée). 010011111 (287) en est un autre, pour lequel aucune cellule ne disparaît, mais où une cellule n'apparaît que si elle a exactement un voisin. On peut parcourir tous les cas d'automates croissants sachant qu'il doit figurer un "1" en deuxième position, parce que si aucune cellule n'apparaît quand elle a un seul voisin, l'automate ne peut pas démarrer. Les codes seront donc de la forme 01xxx11111 :

0100011111 (287)
0100111111 (319)
0101011111 (351)
0101111111 (383)
0110011111 (415)
0110111111 (447)
0111111111 (511)

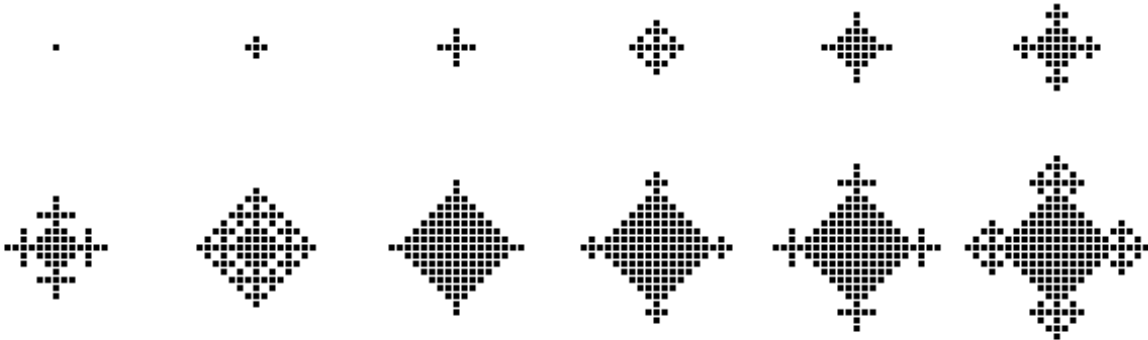
En fait, on constate qu'il y a trois formes de croissance distinctes, correspondant aux codes 287 et 351, aux codes 319 et 383, et aux codes 415, 447 et 511 respectivement. Les premières étapes de ces automates sont montrées **Planche 50**. Le troisième automate évolue très simplement : un carré (posé sur la pointe) qui grossit régulièrement ; les deux autres sont plus complexes, et on voit un

AC 2D à 4 voisins ; croissance stricte

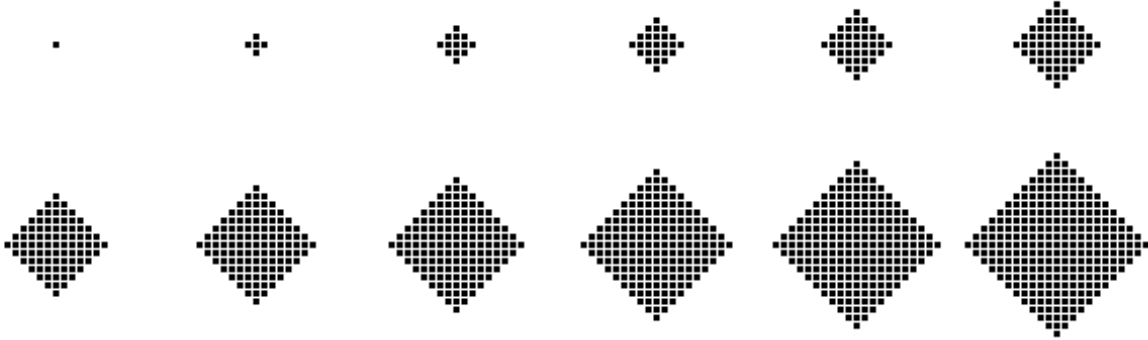
codes 287, 351



codes 319 et 383



codes 415, 447 et 511



AC 2D à 4 voisins ; croissance stricte

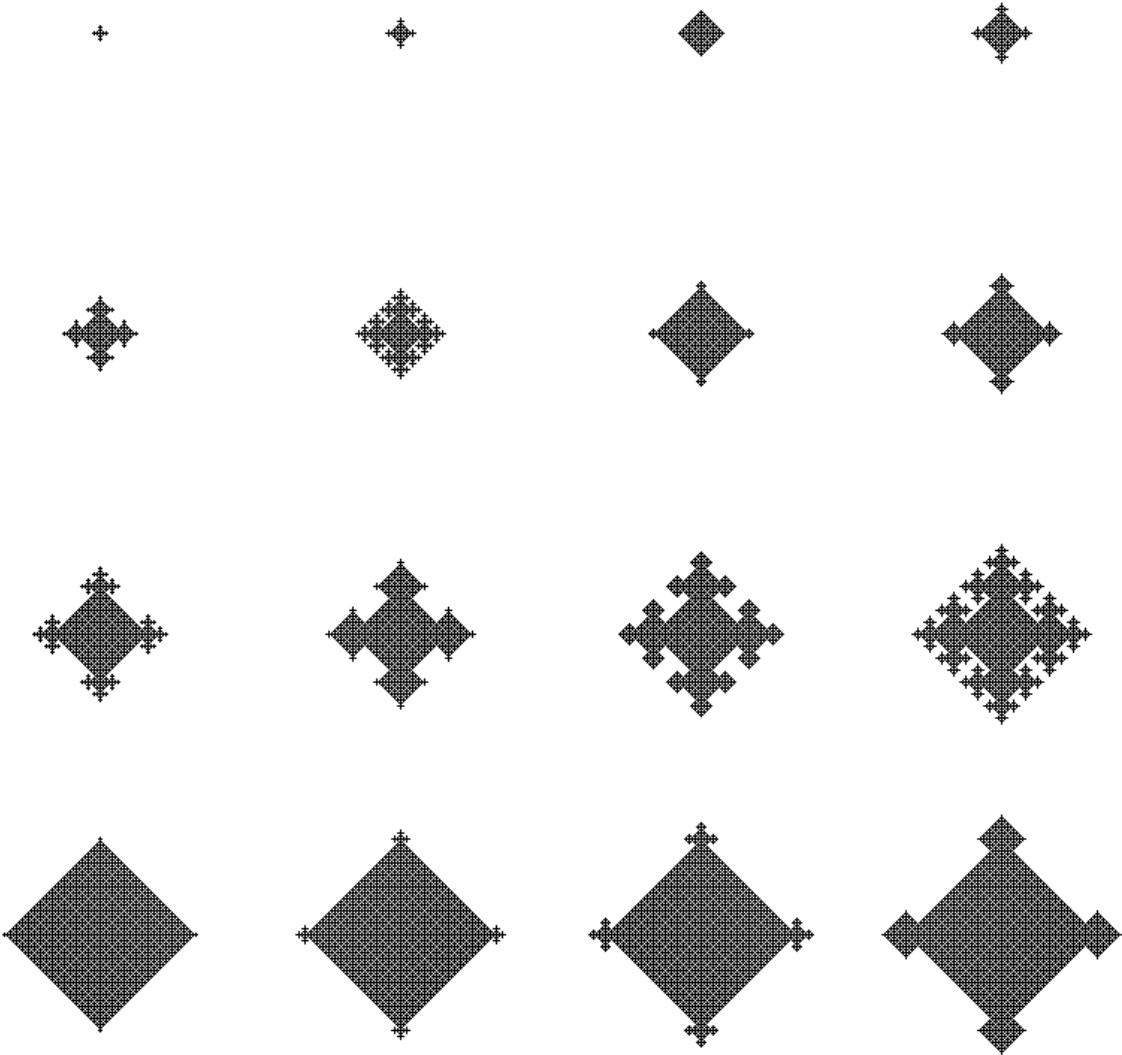
code 287, étapes :

5 15 20 25

30 35 40 45

50 55 60 65

70 75 80 85



AC 4 voisins ; croissance stricte

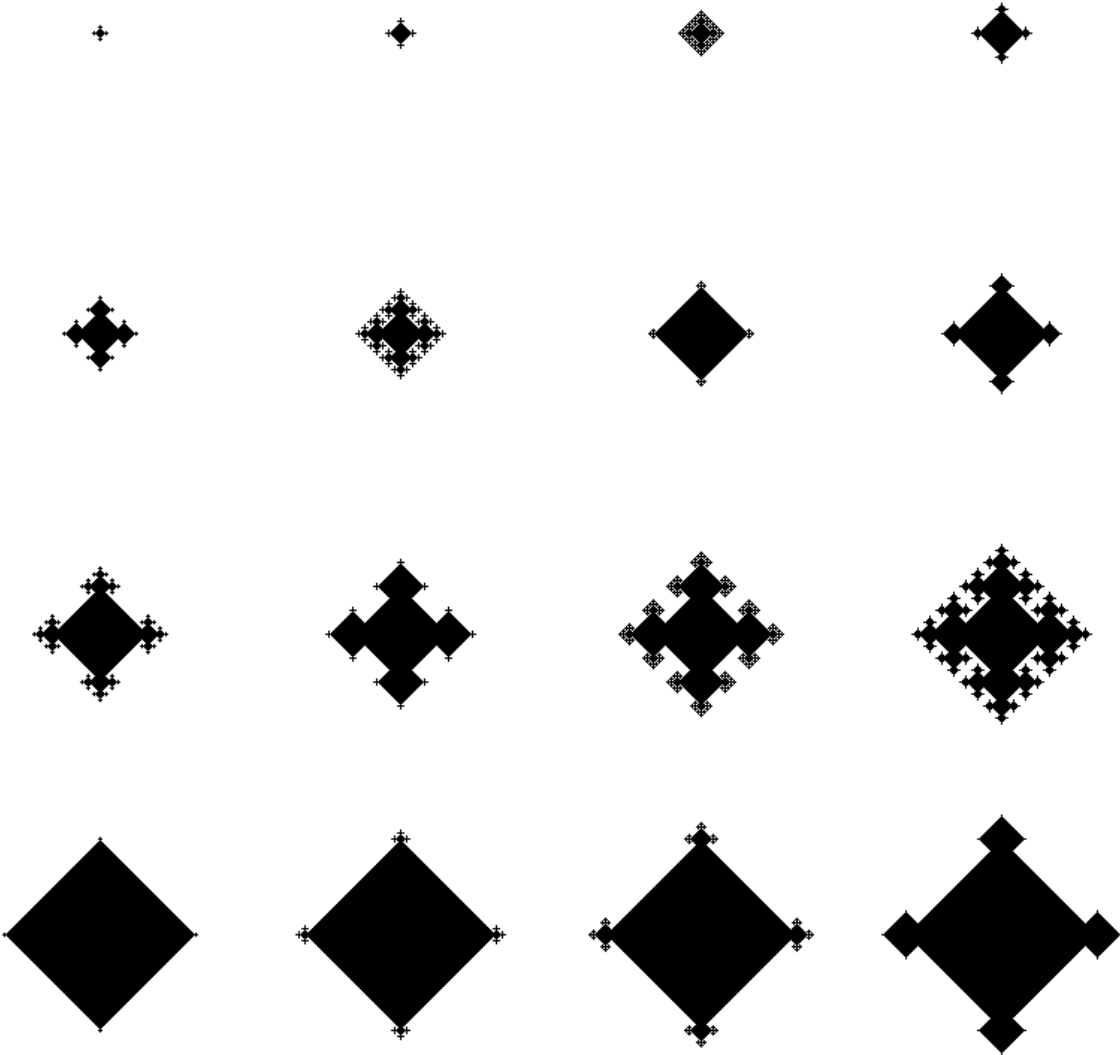
code 319, étapes :

5 15 20 25

30 35 40 45

50 55 60 65

70 75 80 85



AC 2D à 4 voisins

codes :

399, 365, 295, 409, 440, 410

411, 341, 279, 275, 311, 343

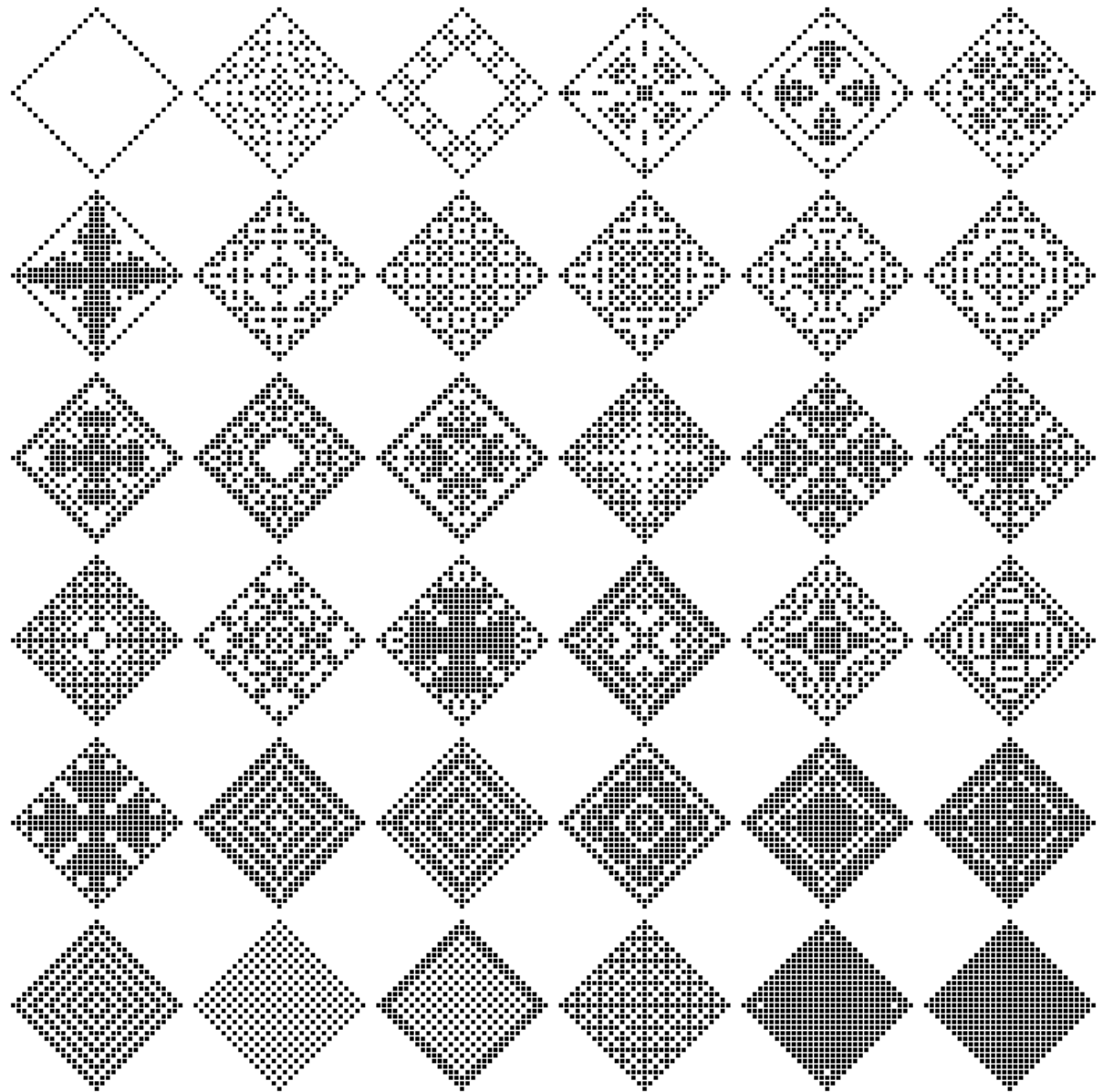
406, 402, 444, 312, 351, 380

316, 344, 379, 432, 315, 473

383, 400, 507, 407, 499, 468

465, 482, 478, 285, 503, 497

16^{ème} étape



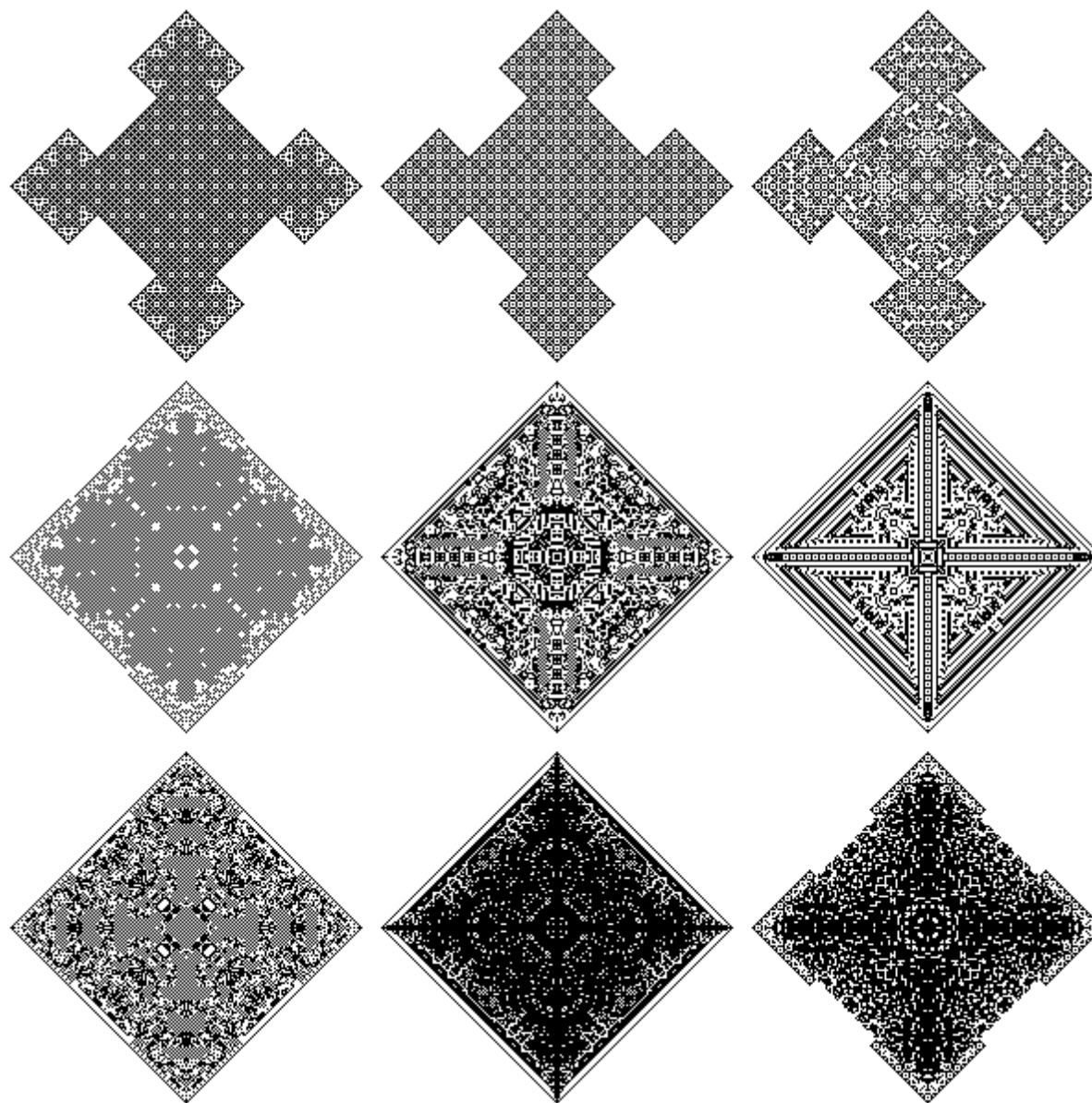
AC 2D à 4 voisins

codes :

275 279 343

365 409 440

410 411 311



AC 2D à 4 voisins ; croissance

code 341

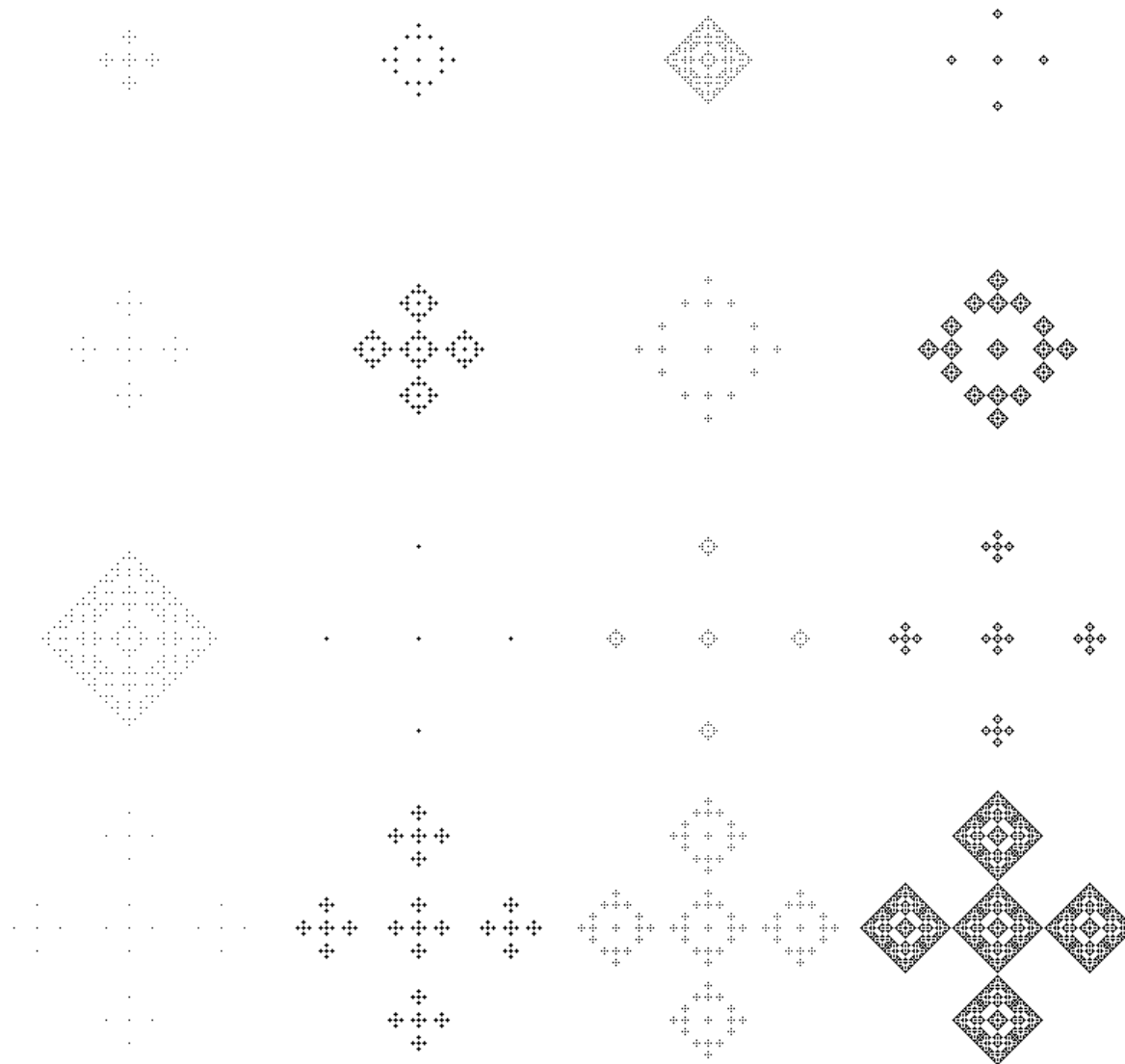
étapes :

25, 30, 35, 40

45, 50, 55, 60

65, 70, 75, 80,

85, 90, 95, 100



échantillonnage (toutes les cinq étapes) d'une évolution plus longue de ces automates **Planches 51 et 52** : cela permet de constater le caractère fractal de leur croissance.

Mais la plupart de ces automates, même s'ils croissent, ne croissent pas strictement, mais se complexifient aussi : des cellules disparaissent pendant que d'autres naissent. Quelques résultats sont montrés **Planche 53** et plus loin dans l'évolution **Planche 54**. Il faudrait pouvoir montrer non seulement ces résultats ponctuels (dans le temps) mais l'évolution complète de ces automates, parfois étonnante. A titre d'exemple, on peut voir un échantillonnage de l'évolution de l'automate 341 qui montre une évolution assez clairement fractale (comparer les étapes 80 et 100, ou 60 et 95 **Planche 55**).

Passons aux AC à 8 voisins, par exemple le jeu de la vie, qui est un AC totalistique dont nous rappelons les règles:

- une cellule naît si elle a exactement 3 voisines
- une cellule ne reste vivante que si elle a 2 ou 3 voisines : sinon elle meurt, d'isolement (0 ou 1 voisine), ou d'étouffement (de 4 à 8 voisines)

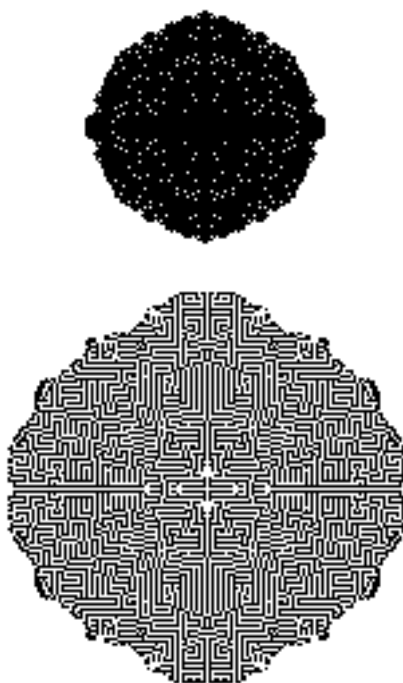
Nous pouvons exprimer ces règles sous la forme du tableau suivant, exprimant le destin de la cellule en fonction du nombre de voisins :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0 →	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1 →	0	0	1	1	0	0	0	0	0

Et cette règle peut s'exprimer sous la forme du nombre binaire à 18 chiffres 000100000001100000, soit le code 16480 (les codes vont de 0 à 524287). Il faut noter que cette règle ne donne rien lorsque l'on part d'une cellule unique, puisque la règle n'intègre pas la possibilité d'apparition d'une cellule lorsqu'elle n'a qu'un voisin.

Pour obtenir une croissance stricte à partir d'une cellule unique, il faut que les 9 derniers chiffres du code binaire soient égaux à 1 ; il faut aussi que le premier chiffre soit un 0, le deuxième un 1 : 01xxxxxxxx11111111 : cela fait encore 2^7 possibilités (128)...

Il existe en effet beaucoup de règles qui génèrent des processus de croissance stricte avec 8 voisins. Nous en voyons quelques-unes **Planche 56**. La dernière image correspond à la croissance régulière d'un carré. A part ce cas particulier, si l'on poursuit l'évolution, on observe souvent une croissance



fractale par les coins, parfois doublée d'une croissance par des carrés sur les côtés ; on voit quelques résultats après une centaine d'étapes **Planche 57**.

Si l'on ne souhaite pas une croissance stricte, le nombre de règles étant tellement grand, on ne peut produire que quelques échantillons parmi les centaines de milliers possibles ; on en voit **Planche 58** (16 étapes) et après une centaine d'étapes **planche 59**.

Parmi toutes ces règles, qui le plus souvent produisent des motifs carrés, on peut en trouver qui produisent d'autres types de formes. Stephen Wolfram (*op. cit.*) propose deux règles qui génèrent des formes arrondies, et une troisième qui en génèrent de plus organiques. Ces règles ne démarrent pas avec un pixel unique ; on part d'une rangée d'un certain nombre de pixels.

La première règle a pour code 000101000111111111 (20991), ce qui signifie qu'une cellule n'apparaît que si elle a exactement 3 ou 5 voisins. On part d'une rangée de 8 pixels ; on en voit le résultat après 100 étapes ci-contre.

La seconde règle a pour code 000100000111110000 (16880) : une cellule ne naît que si elle a exactement 3 voisins, elle disparaît si elle en a au moins 5, rien ne change dans les autres cas. Le résultat après 200 étapes est montré ci-contre.

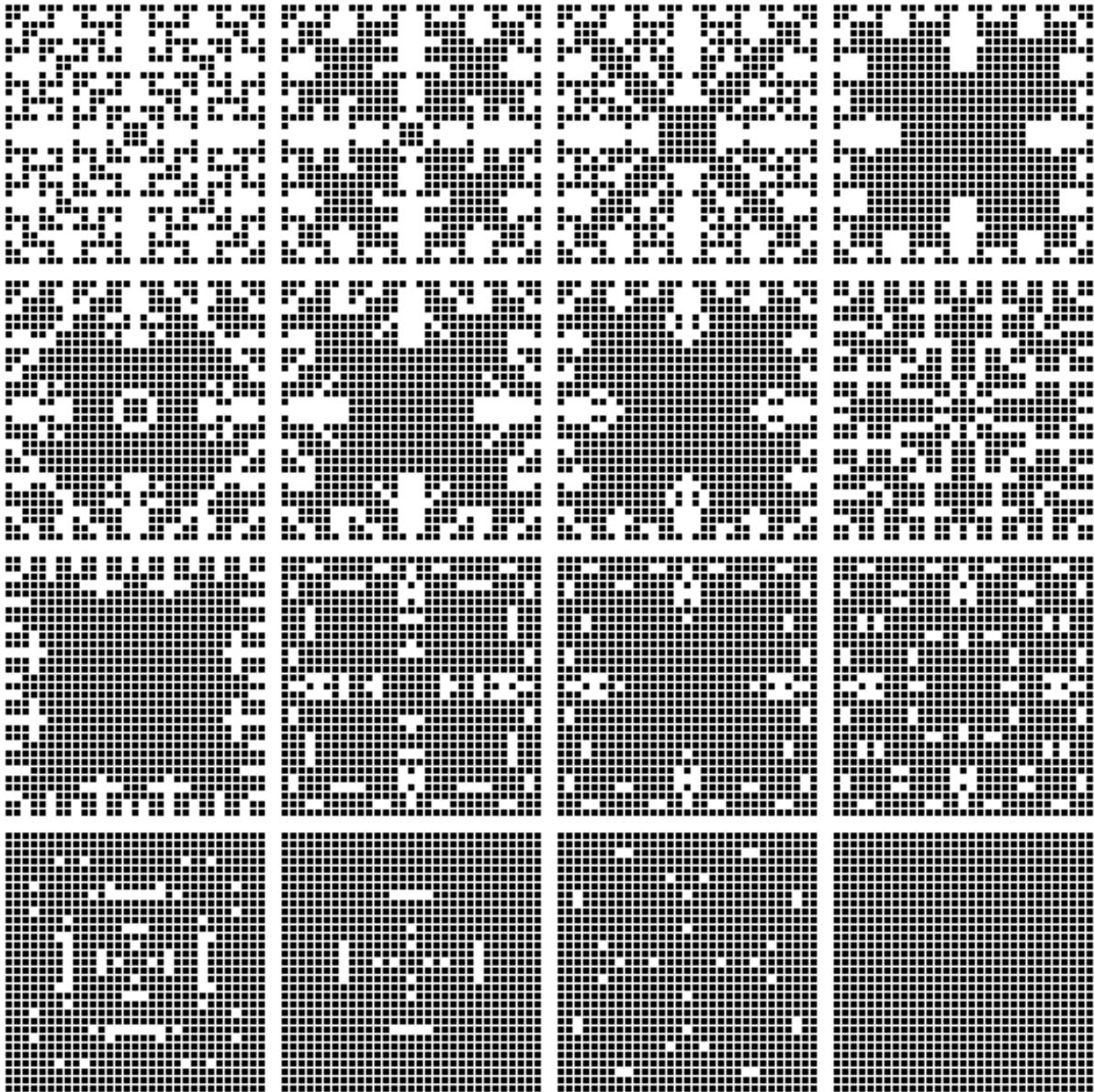
Ces résultats sont intéressants parce qu'ils montrent que la grille orthogonale sous-jacente de l'automate n'est pas forcément très sensible dans le résultat (bien que la symétrie du carré reste visible). C'est ce que nous constaterons aussi dans des exemples ultérieurs.

La troisième règle a pour code 000100000111111111 (16895) : une cellule apparaît si elle a exactement 3 voisins, rien ne change sinon. L'évolution est assez différente, selon le nombre de pixels constituant la rangée de départ : certains automates n'évoluent après un certain nombre d'étapes ; la **Planche 60** montre l'automate après 150 étapes, en variant le nombre de pixels de départ.

AC 2D à 8 voisins ; croissance stricte

codes

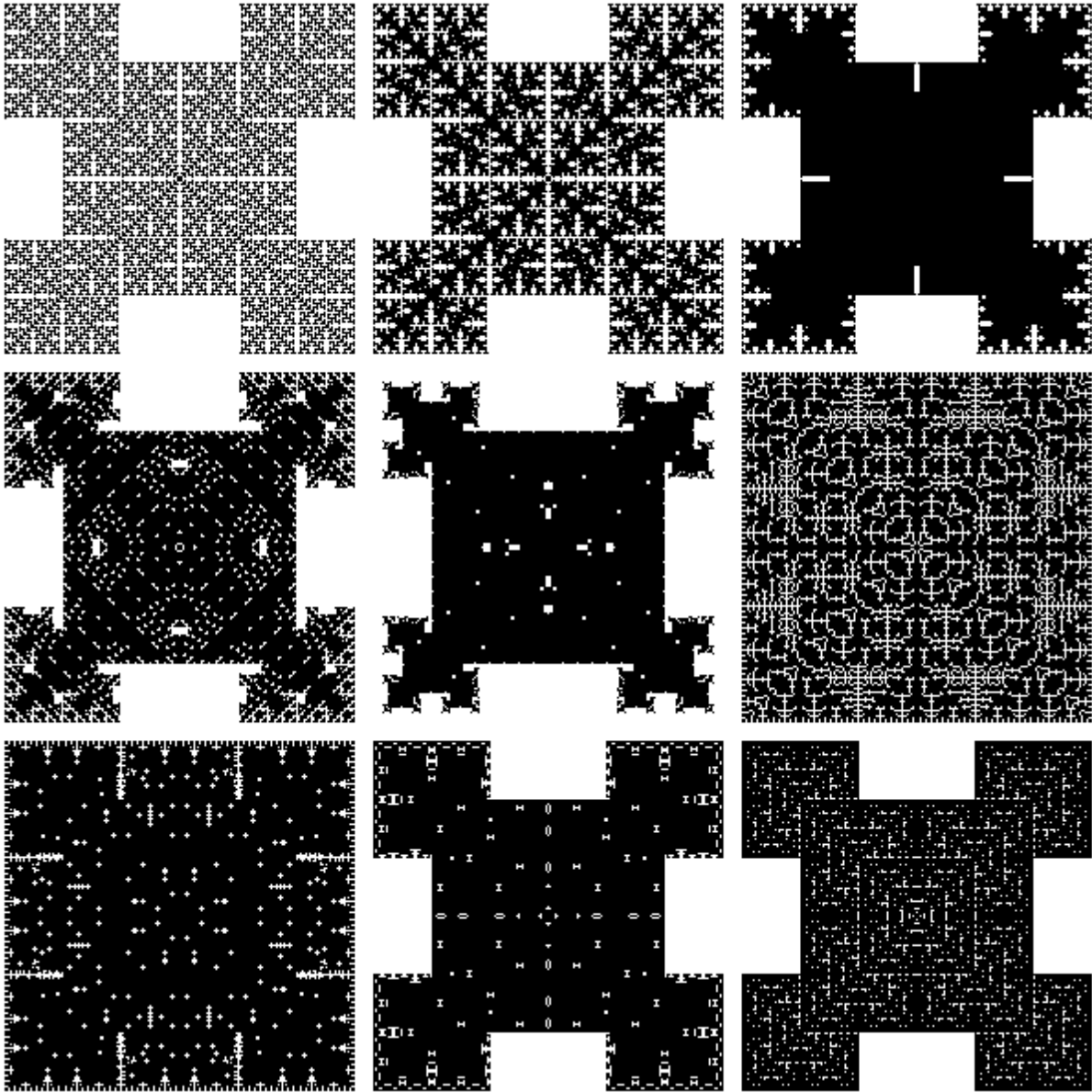
66047	68095	70143	73727
75775	77823	81919	83967
86015	100351	102351	102399
107007	100351	102399	104959
107007	109055	113151	115199



AC 2D à 8 voisins ; croissance stricte

codes :

66047	68095	73727
75775	77823	83967
86015	100351	107007

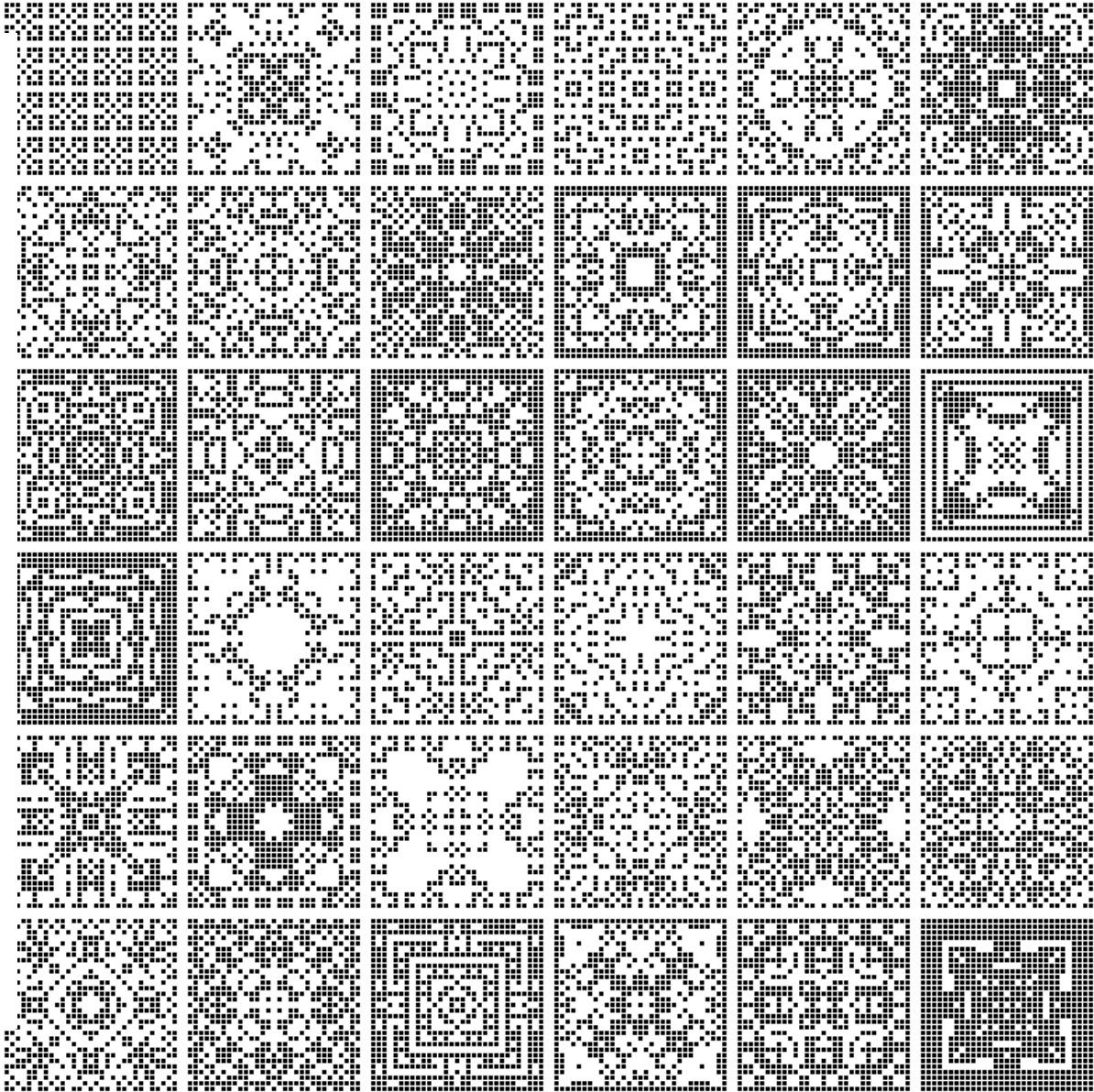


AC 2D à 8 voisins

codes :

66285 75009 77857 82149 84249 87502
88270 89278 93035 99881 99926 101797
102295 102866 108230 109872 113998 127075
130144 328604 328718 330801 335643 338291
339369 343498 344610 350332 345069 352908
353485 355462 362379 369376 370800 392673

16^{ème} étape



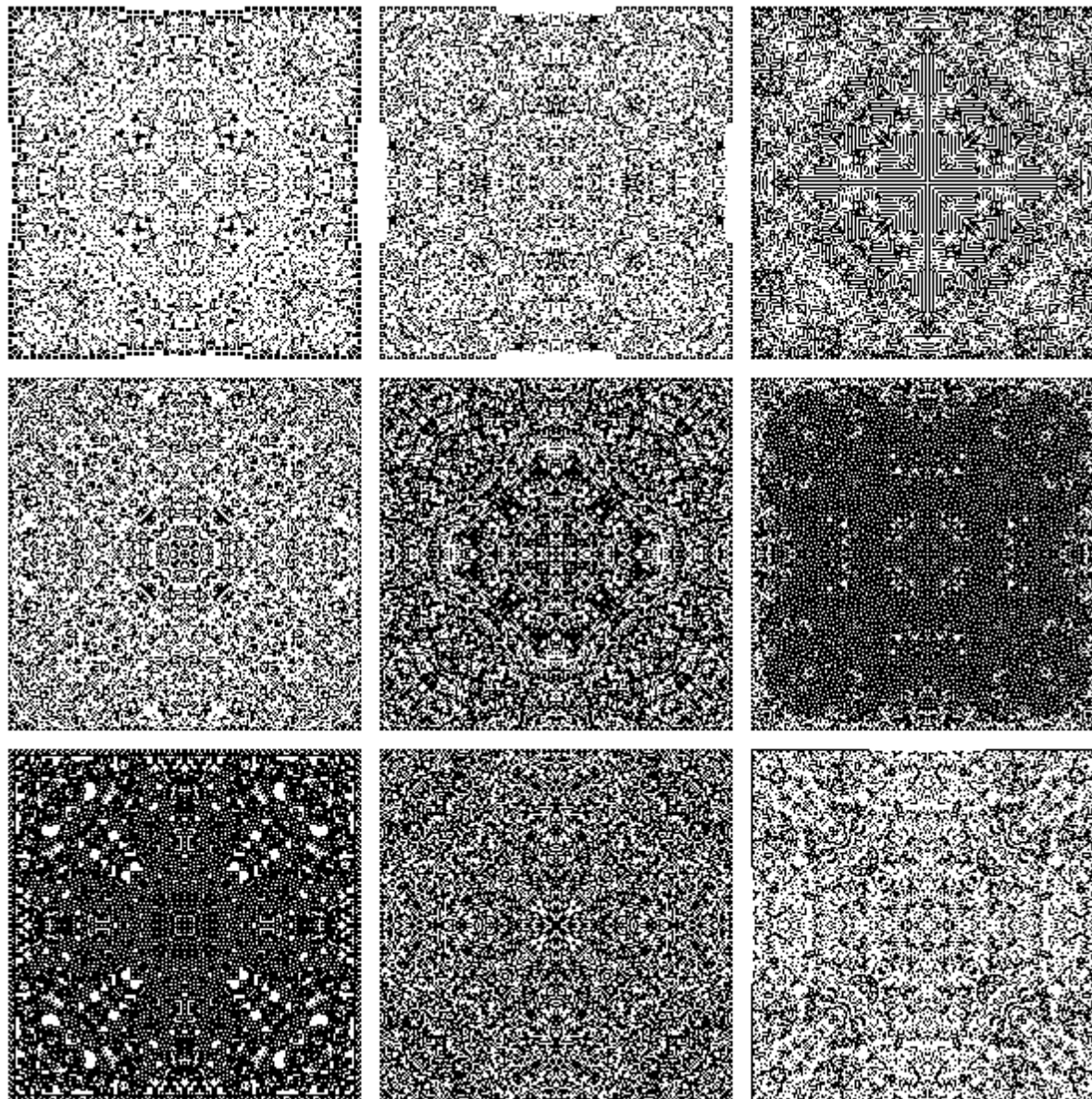
AC 2D à 8 voisins

codes :

75009 75857 82149

84249 87502 88270

89278 93035 99881

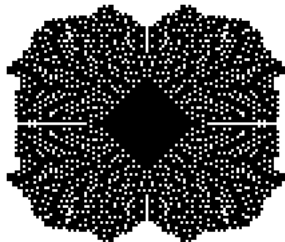
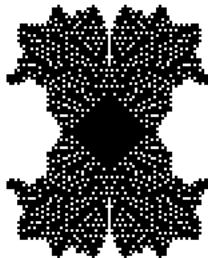
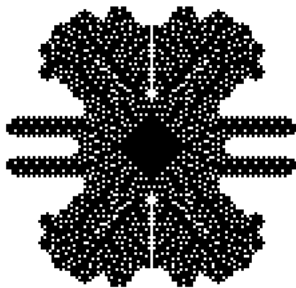
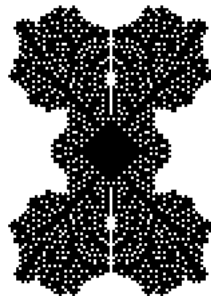
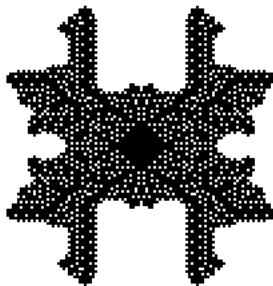
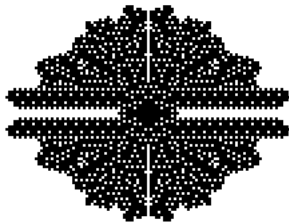
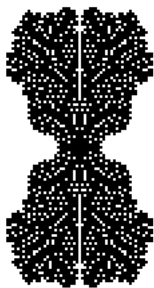


AC 2D à 8 voisins

code 16895

nombre de pixels de départ :

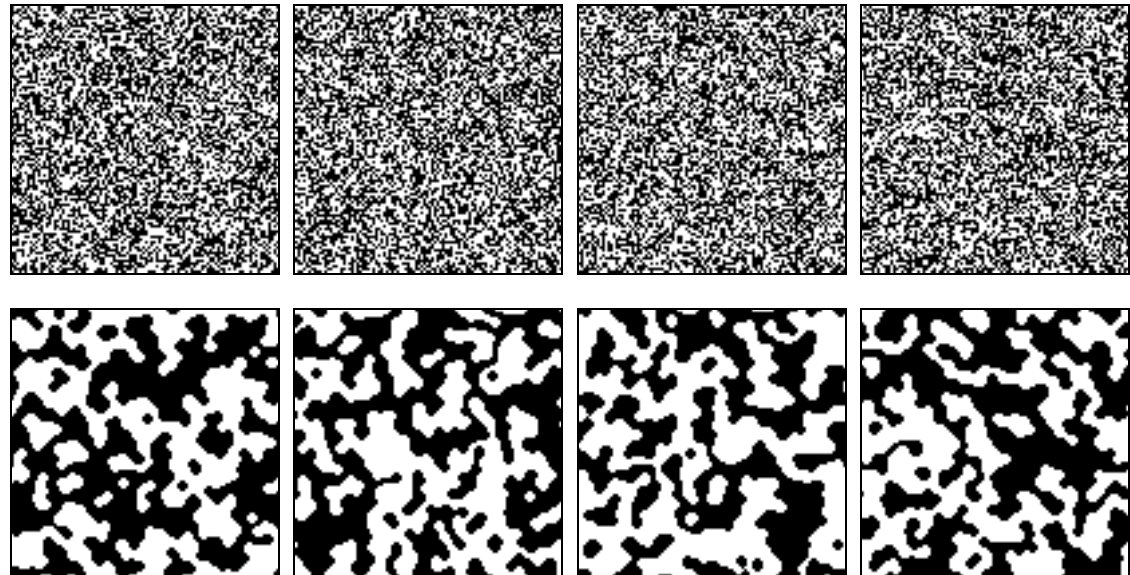
11	13	15
19	21	25
27	31	37



Mimétisme

Un cas particulier de règle consiste à attribuer à une cellule le destin qui est celui de la majorité de son voisinage (en comptant la cellule elle-même) : si elle a plus de cellules vivantes que mortes dans son voisinage, elle vit, sinon, elle meurt ; le code de cet AC est 000001111000011111. Il ne s'applique évidemment pas à une cellule unique (qui meurt immédiatement), mais à une distribution de cellules, et encore à condition que les cellules vivantes occupent la moitié de l'automate : si elles dépassent cette proportion, l'automate se remplit, si elles ne l'atteignent pas, il se vide inexorablement. Le mimétisme est fatal aux marginaux !

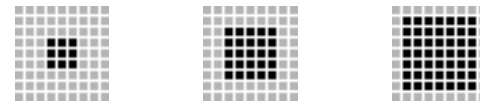
Cette distribution de départ doit être aléatoire ; par ailleurs, il faut tenir compte des bords de l'automate : on adoptera donc une topologie torique. Le résultat typique d'un tel automate est tel que les exemples ci-dessous (la première ligne montre les distributions aléatoires de départ, différentes mais peu discernables) :



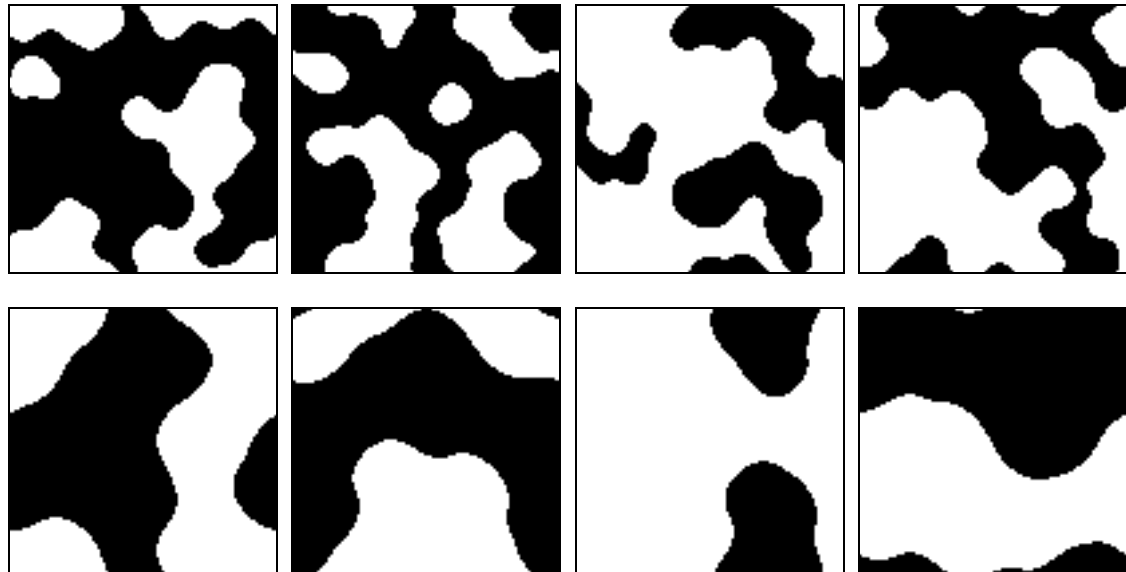
Ces résultats semblent se stabiliser, du moins les changements deviennent de moins en moins importants entre deux étapes de l'automate. On peut donc considérer les résultats obtenus après un nombre raisonnable d'étapes comme des attracteurs pour les distributions de départ. D'autre part, l'allure des motifs obtenus est de même "nature" : visuellement, ces motifs nous apparaissent

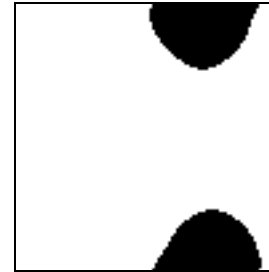
semblables, de même type ; nous verrons plus loin s’il est possible de caractériser cette “nature” des motifs de manière plus rigoureuse, mais nous pouvons déjà avancer l’idée d’“attracteur statistique” pour des évolutions qui aboutissent à des attracteurs tous différents, mais ayant des caractéristiques communes.

Pour cet automate, il est intéressant de considérer un voisinage plus grand que celui que nous avons envisagé jusqu’à présent : au lieu de considérer uniquement les 8 voisins immédiats, on peut tenir compte des cellules qui sont elles-mêmes voisines de celles-ci, etc. jusqu’à une “profondeur” donnée (profondeur 1, 2, 3) :



Avec les mêmes distributions aléatoires que précédemment, la mise en œuvre de l’automate avec un voisinage de profondeur 2 (40 itérations) et 3 (80 itérations) donne les résultats suivants :





Il faut noter que le temps de calcul progresse énormément avec la profondeur de voisinage : au lieu d'examiner l'état de 9 cellules avec une profondeur de 1, il faut examiner l'état de 25 cellules avec la profondeur 2, et celui de 49 cellules avec la profondeur 3 (le temps de calcul varie dans les mêmes proportions) ; comme de plus les changements deviennent plus lents par rapport au nombre d'itérations, il faut rester prudent quant au fait d'avoir véritablement atteint un attracteur quand on adopte une profondeur de voisinage élevée. C'est ainsi que la troisième distribution, si on pousse le nombre d'itérations jusqu'à 320, devient le motif placé en-dessous ; il faudrait aller encore plus loin, mais il est pensable qu'en définitive dans ce cas le blanc remporte le combat sur le noir... Peut-être est-ce le destin, mais à très long terme, de tous ces automates ; il faudrait disposer de moyens de calcul très nettement supérieurs à ceux dont nous disposons pour véritablement le savoir.

Quoi qu'il en soit, et pour en terminer avec cet automate, il est curieux de constater qu'un automate qui modélise une attitude locale de mimétisme d'une cellule par rapport à son voisinage aboutit à des motifs typiques de pelages d'animaux (voir ci-contre grenouille *dendrobatus tinctorius*, et génisse pie noire bretonne) que l'on explique justement souvent par le mimétisme !

AC stochastiques

Dans tous les exemples précédents, on parcourt l'automate systématiquement à chaque étape, on examine l'état de chaque cellule, et on le modifie en fonction des règles énoncées³. On peut aussi, avec les mêmes règles, parcourir l'automate aléatoirement, et appliquer les règles aux cellules ainsi rencontrée. Dans le premier cas, il faut avoir au moins deux bitmaps, l'un représentant l'automate au temps t , dont on se sert pour examiner l'état de chaque cellule et son voisinage, et l'autre représentant l'automate au temps $t+1$, où l'on affecte à chaque cellule son nouvel état, sinon les transformations

³ bien sûr, il faut avoir au moins deux bitmaps, l'un représentant l'automate au temps t , dont on se sert pour examiner l'état de chaque cellule et son voisinage, et l'autre représentant l'automate au temps $t+1$, où l'on affecte à chaque cellule son nouvel état, sinon les transformations des premières cellules examinées influeraient sur les suivantes...

des premières cellules examinées influeraient sur les suivantes... Par contre, dans le cas de ce que nous appellerons automates cellulaires stochastiques, cette précaution n'est pas nécessaire.

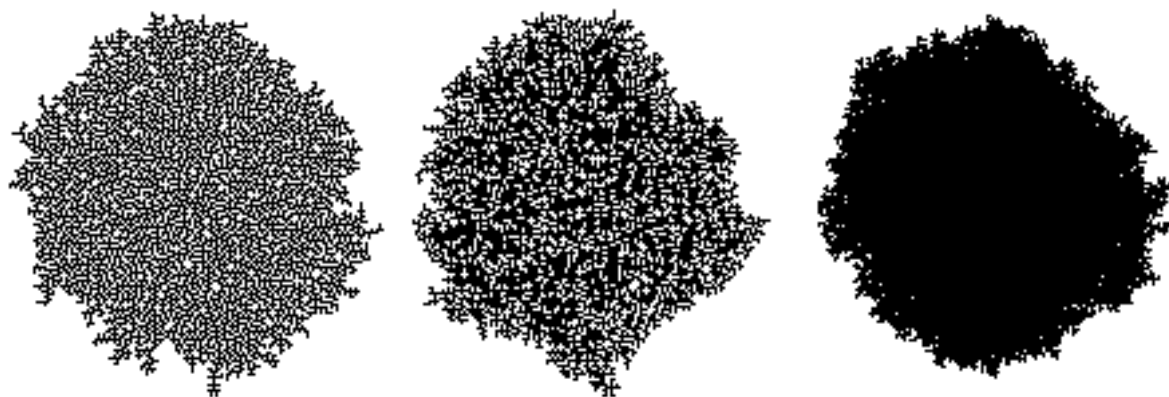
Nous avons noté, dans les AC à 4 voisins, trois types de règles qui génèrent une croissance stricte de l'automate ; nous en rappelons les codes :

0100011111 (287)

0100111111 (319)

0111111111 (511)

Nous les avons appliquées systématiquement, mais nous pouvons aussi voir ce que donne une version stochastique de l'automate muni des mêmes règles. Les résultats montrés ci-dessous correspondent à 100000 d'itérations, mais à, respectivement, 103518, 107382, et 130885 cellules. En effet, lors de l'exploration aléatoire de l'automate, on ne tombe pas forcément sur une cellule munie du bon nombre de voisins ; il faut d'ailleurs préciser que pour gagner du temps, on n'explore pas vraiment tout l'automate : on peut évaluer la zone qui est susceptible de comporter de bons candidats en voyant que l'amas de cellules croît globalement comme un disque, et en n'explorant qu'une portion de l'automate de rayon un peu plus grand que le rayon de l'amas.



Ces résultats présentent beaucoup d'analogies avec ceux d'autres automates, ceux-là "dynamiques", que nous verrons plus bas.

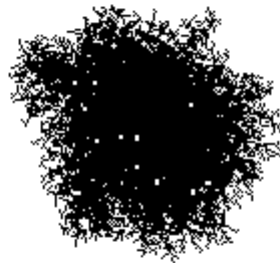
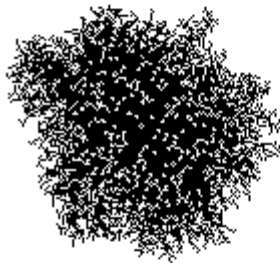
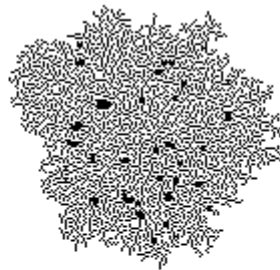
Si nous passons à des automates cellulaires à 8 voisins, nous avons beaucoup de règles amenant une croissance stricte ; nous avons repris les règles de la **Planche 57** pour leur appliquer une version stochastique (**Planche 61**). On voit différentes textures apparaître, dans le cadre d'une forme globalement arrondie, sauf dans les deux derniers cas, où l'amas garde une vague forme carrée ; c'est

**AC 2D stochastique 8 voisins
croissance stricte**

codes :

66047	68095	73727
75775	77823	83967
86015	100351	107007

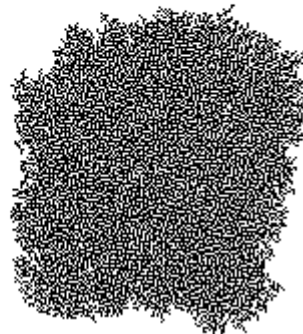
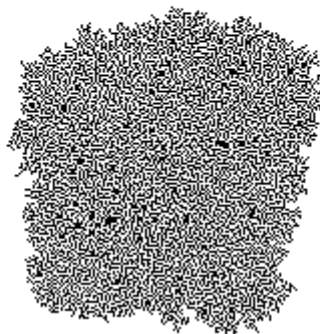
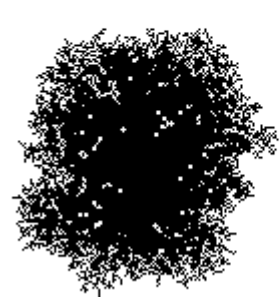
et 131071 :



nombre de cellules :

27664	28308	47213
51324	58420	48208
62888	61746	78692

et 126438



aussi le cas si l'on applique la règle "drastique" (une cellule apparaît quel que soit son nombre de voisins, non nul), et dont on voit le résultat sur la même planche.

AC dynamiques

Tout automate cellulaire est un système dynamique, puisqu'il évolue dans le temps ; cependant, nous qualifierons plus spécialement de *dynamiques* des modèles assimilables aux automates cellulaires, mais qui, au lieu d'envisager un simple changement d'état des cellules, permettent le *déplacement* de celles-ci dans l'espace de l'automate. Se déplacer consiste pour une cellule à occuper une case voisine, et à libérer celle qu'elle occupait : on peut donc interpréter ce déplacement comme un double changement d'état, ce qui permet de considérer que ces modèles font bien partie des automates cellulaires.

Ce déplacement aura généralement comme issue que la cellule arrête son déplacement, qu'elle "se fixe" quelque part, suivant des règles de voisinage : ce mécanisme répond lui aussi aux critères des automates cellulaires, dont le principe essentiel est la configuration du voisinage d'une cellule. Ce processus aboutira, soit à une *croissance*, soit à un *réarrangement*.

Mais restons-en au déplacement pour l'instant ; ce déplacement peut se faire de façon dirigée : on impose à la cellule d'aller toujours dans une direction donnée, ou aléatoire : la cellule se déplace sur n'importe la quelle des cases voisines ; dans ce cas, on peut pondérer cet aléatoire en donnant des probabilités différentes aux différentes cases.

On emploie le plus souvent le déplacement purement aléatoire, que l'on appelle alors souvent "errance" ou "randonnée"⁴ ; nous allons d'abord examiner ce déplacement en lui-même. Un tel déplacement est une des possibles simulations (discrète, et avec des pas égaux) du *mouvement brownien*, ce mouvement qui affecte des particules immergées dans un fluide du fait de leurs interactions avec les molécules de ce milieu : c'est le mouvement des grains de poussière dans un rayon de soleil, sans courant d'air. Pour cette "marche au hasard", on utilise le plus souvent le voisinage de von Neumann (4 voisins), le résultat étant similaire avec le voisinage de Moore, mais un peu plus long à calculer.

Typiquement, le comportement d'une cellule animée d'un tel mouvement, laisse une trace qui ressemble à ceci (10000 pas)

⁴ Rappelons que le mot "random", qui signifie "aléatoire" en anglais, a pour origine une version ancienne du mot français "randonnée".



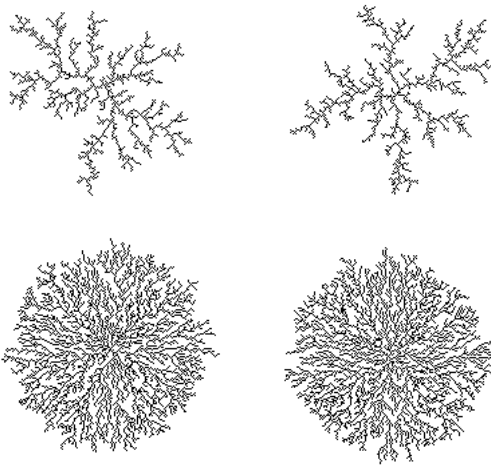
Rien d'étonnant à ce que l'on appelle parfois cette randonnée la "marche de l'ivrogne". On peut montrer que la structure sous-jacente de la grille (orthogonale ou autre) n'a pas beaucoup d'influence sur l'allure générale du résultat. Si l'on envisage la randonnée de plusieurs cellules (partant toutes du même point), on met en évidence le caractère gaussien du modèle ; l'amas qui se forme tend vers une forme arrondie, à la frontière de plus en plus lisse lorsque l'on augmente le nombre de cellules (2000 pas ; 10, 100, 1000, 10000, 100000 cellules lancées) :



Une petite modification de ce processus va nous fournir un premier modèle de croissance par AC dynamique, que nous appellerons *prolifération* : chaque cellule va effectuer une randonnée à partir d'un centre, mais, au lieu de fixer d'avance le nombre de pas, on la fera s'arrêter *dès qu'elle atteint la frontière de l'amas* ; exprimé autrement, la cellule effectue sa randonnée tant que la case sur laquelle elle se trouve est occupée, et s'arrête sur la première case vide qu'elle rencontre. La croissance produite est très régulière (500, 1000, 2000, 4000 cellules) :

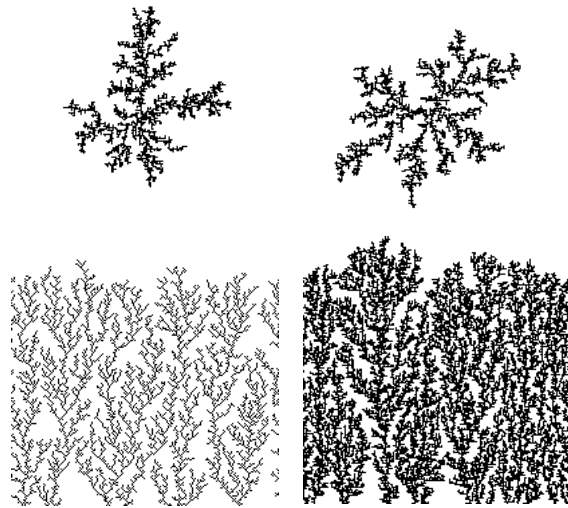


Au lieu de partir d'un seul centre, nous pouvons partir d'une distribution aléatoire de centres ; les cellules erreront à partir de chacun de ces centres en suivant la règle précédente. Une variante consiste à globaliser les cellules, et à faire partir les cellules émises de n'importe où dans la "colonie" ou le "stock" de cellules qui se constitue ainsi au fur et à mesure : on voit **Planche 62** la différence de comportement des deux processus appliqués à deux distributions aléatoires, l'une de densité 1/100 et l'autre de densité 1/1000 (il faut que les distributions soient de faible densité pour que le résultat soit intéressant) ; l'effet de mise en commun du stock de cellules susceptibles de constituer des points de départ est plus lisible dans le deuxième exemple : *les amas qui se constituent grossissent d'autant plus qu'ils sont plus gros* (parce qu'il y a une probabilité plus forte qu'un centre d'émission s'y trouve). Nous utiliserons ce modèle plus loin dans une expérimentation que nous avons intitulée "lutte pour l'espace".



Une autre manière de faire croître un motif à l'aide d'un automate cellulaire dynamique consiste à émettre des cellules à distance d'une cellule centre et à les faire errer jusqu'à ce qu'elle rencontre cette première cellule, puis l'amas en formation. Ce processus produit typiquement des résultats du genre de ceux que l'on voit ci-contre ; il est appelé DLA (*Diffusion-Limited Aggregation*) ou "agrégation limitée par la diffusion". Le modèle exact nécessite d'émettre les cellules à bonne distance de l'amas, et à les faire errer ; bien sûr, elles peuvent alors s'éloigner encore plus, et il faut alors les supprimer.

Ce processus est donc assez long et peu efficace ; mais si l'on essaie de gagner du temps, on obtient des résultats qui peuvent être intéressants, mais qui ne sont pas de vrais DLA. L'un des moyens de gagner du temps consiste à faire aller les cellules tout droit en direction du centre, au lieu de les faire errer, après qu'elles aient été émises d'une direction aléatoire. Ce faux DLA est beaucoup plus rapide et produit des résultats du genre de celui ci-contre : le motif est beaucoup plus touffu, mais toujours de type dendritique ; qu'il soit plus touffu s'explique aisément et permet de mieux préciser le vrai modèle DLA : les cellules ont plus de facilité à se glisser entre les branches de l'amas déjà



constituées, comme un homme sobre parcourt plus facilement un couloir, sans se cogner aux parois comme le ferait un homme saoul...

Une autre variante consiste à ne pas considérer les voisins de la cellule errante, mais simplement de regarder si, au pas suivant, elle irait sur une case déjà occupée ; cette variante pourrait sembler peu différente, mais en fait il peut arriver qu'une cellule ait une voisine, mais que l'errance l'emmène sur une autre case. Du coup, le résultat est plus touffu, aussi, mais dans un autre sens : il n'y a pas plus de branches, mais elles sont plus épaisses. Ce qui permet de gagner du temps dans cette variante, c'est qu'il n'y a pas à examiner l'état des 8 voisins de la cellule à chaque pas, mais seulement celui de la case qu'elle occuperait au pas suivant si elle continuait son errance.

Des variantes de DLA, ou de faux DLA, se présentent comme des croissances verticales, au lieu d'être centrifuges. On peut mettre en œuvre le modèle de décompte des voisins, ou le modèle de la case suivante, pour obtenir des résultats du type de ceux montrés ci-contre ;

Le modèle DLA et ses variantes simulent une quantité de phénomènes dendritiques qui se produisent dans des domaines très variés.

Les automates cellulaires dynamiques que nous avons vus jusqu'à présent induisent un phénomène de croissance : des cellules s'agrègent à des amas qui croissent continuellement. On peut aussi imaginer des automates cellulaires dynamiques qui induisent un *réarrangement* de cellules, sans croissance du nombre de cellules.

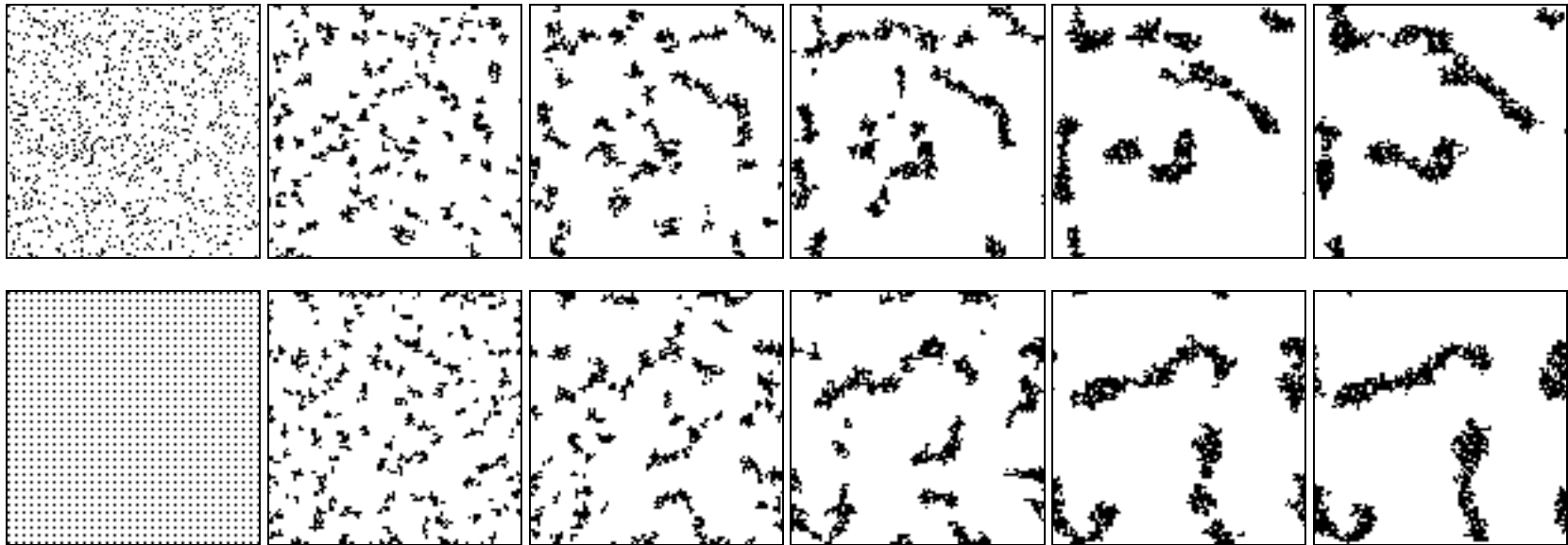
Le modèle de réarrangement que nous allons exposer peut être illustré par une métaphore animale : on imagine des termites qui sont en présence de brindilles ou autres particules, et qui se déplacent au hasard : dès qu'un termite rencontre une particule, il s'en empare, puis il reprend son errance, et s'arrête dès qu'il est bloqué par une autre particule ; il dépose alors la particule qu'il transportait, qui reste "collée" à l'autre particule.

On pourrait penser que toute cette activité erratique, sans plan défini, ne débouche sur rien : si les particules sont déposées au hasard au départ, elles seront toujours en désordre à l'arrivée, un autre désordre peut-être, mais un désordre tout de même . Mais en fait il n'en est rien.

L'automate cellulaire dont les règles sont décrites par le comportement des termites est à la frontière de ce que l'on appelle les "systèmes d'agents" : en effet la cellule qui joue le rôle de "termite" ne sera jamais visible, seules les "particules" le seront ; le "termite" est donc ce que l'on appelle un *agent*, un

“acteur”, dont seul le résultat de l’action compte. Cependant, ce modèle se programme comme un automate cellulaire ; de plus le comportement du “termite” est très simple, ne suppose pas d’interactions avec ses congénères, et n’est donc pas assez sophistiqué pour entrer dans la catégorie des “systèmes multi-agents” ; nous faisons donc entrer ce modèle dans la simple catégorie des automates cellulaires dynamiques.

On partira d’une distribution aléatoire de densité donnée ; il faut remarquer d’abord que l’on peut tout aussi bien partir d’une distribution régulière, cela ne change rien à l’allure du résultat. Voyons quelles sont les évolutions typiques de cet automate, appliqué d’abord à une distribution aléatoire, puis à une distribution régulière, de densité équivalente, de cellules⁵ :



On voit que le type de distribution de départ n’a pas d’influence sur le processus. Les résultats montrés ci-dessus correspondent respectivement à 10000, 30000, 50000, 70000, et 90000 itérations : chaque itération correspondant à l’errance du termite à la recherche d’une particule, puis à sa deuxième errance en vue de la déposer. Notons tout de suite que chaque itération nécessite un assez long temps de calcul, et qu’il faut beaucoup d’itérations pour arriver à un résultat stable ; même avec

⁵ Précisons que l’espace de l’automate est “torique” : lorsque le termite atteint un bord, elle se retrouve sur le bord opposé.

une faible taille de bitmaps (ceux-ci font 100x100 pixels), il faut de la patience pour arriver au bout ! Cette lenteur peut amener à des conclusions hâtives quant au résultat final du processus ; on pourrait croire que le résultat, pour cette densité (environ 1/10), est composé d'amas plus ou moins allongés, diversement disposés. Mais en fait il n'en est rien ; l'automate continue à évoluer, de plus en plus lentement, mais sûrement...

Après des expérimentations systématiques, nous croyons être en mesure de donner un tableau plus exact, et complet, du destin de cet automate. (**Planche 63**) A faible densité (0,1), on voit le plus souvent apparaître un petit amas arrondi, mais parfois c'est une strie ; à densité 0,2, une ou deux stries, horizontale(s), verticale(s) ou oblique(s) ; à densité 0,3, on voit soit une strie, plus épaisse que précédemment, soit un croisement de stries (noires, mais que l'on peut interpréter aussi comme la formation d'une lacune (d'un trou) arrondie ; cette formation de lacunes se poursuit aux densités supérieures ; à 0,9, la distribution apparaît pratiquement inchangée. Pour mieux mettre en évidence la formation d'amas, de stries, et de lacunes, on a mis à profit la topologie torique de l'automate, et regroupé par quatre les précédentes images (**Planche 64**).

Ce processus étant très lent, les observations précédentes ont porté sur des bitmaps 64x64 pixels ; le nombre d'itérations va jusqu'à 100 000 000 : le nombre d'itérations nécessaire est d'autant plus grand que la densité est forte, mais aussi augmente avec la taille des bitmaps ; nous présentons de plus une évolution d'une distribution de densité 0,25 en 256x256 pixels, qui, malgré 35000000 d'itérations (ce qui représente plusieurs jours de calculs), n'est probablement pas achevée ; mais cela permet de bien voir comment les lacunes se créent, se déforment, s'associent, etc. (**Planche 65**)

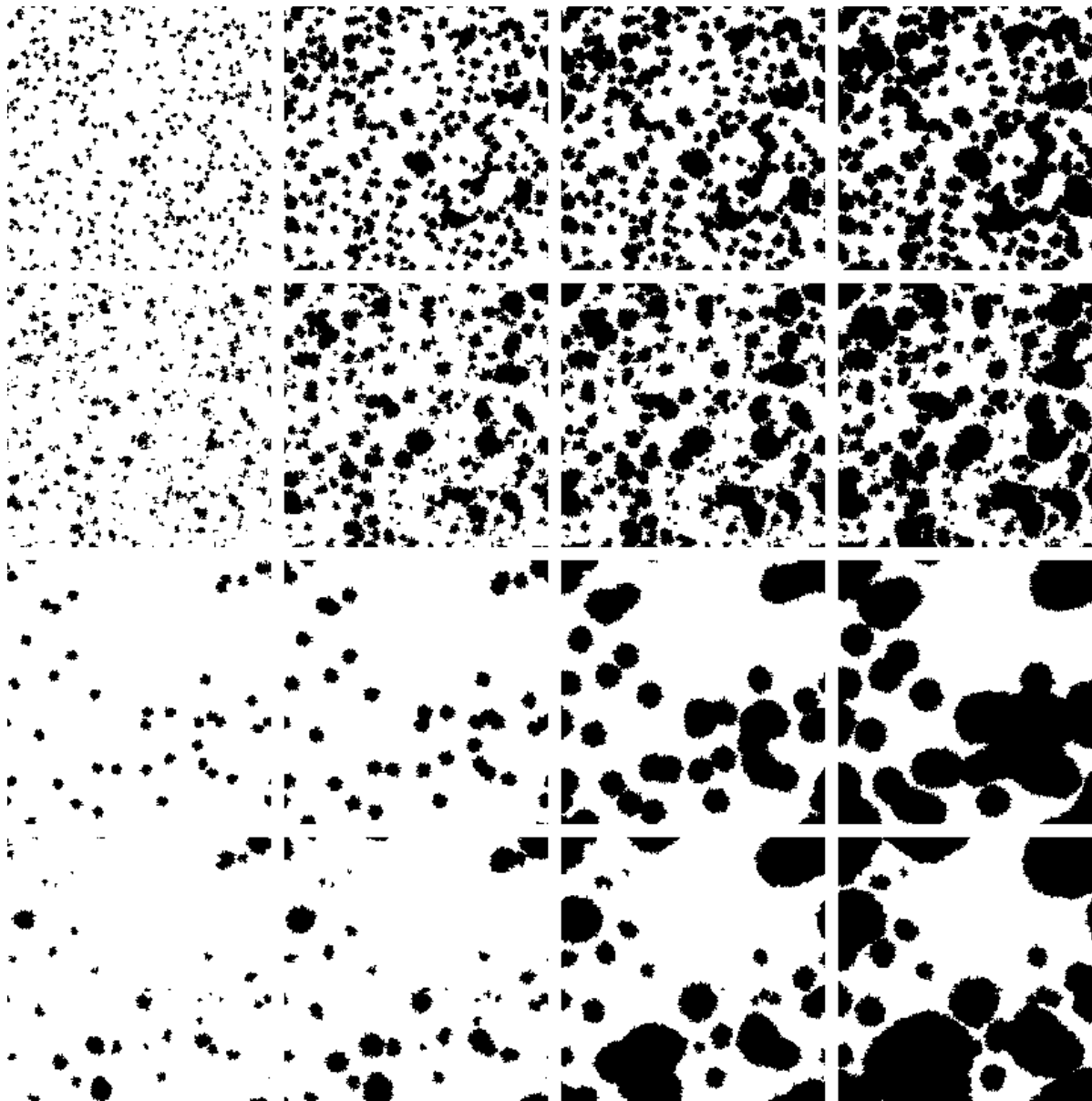
Prolifération

à partir d'une distribution aléatoire de cellules

- à partir de chaque cellule de la distribution initiale

densité : 1/100

- à partir d'une cellule quelconque du stock



- à partir de chaque cellule de la distribution initiale

densité : 1/1000

- à partir d'une cellule quelconque du stock

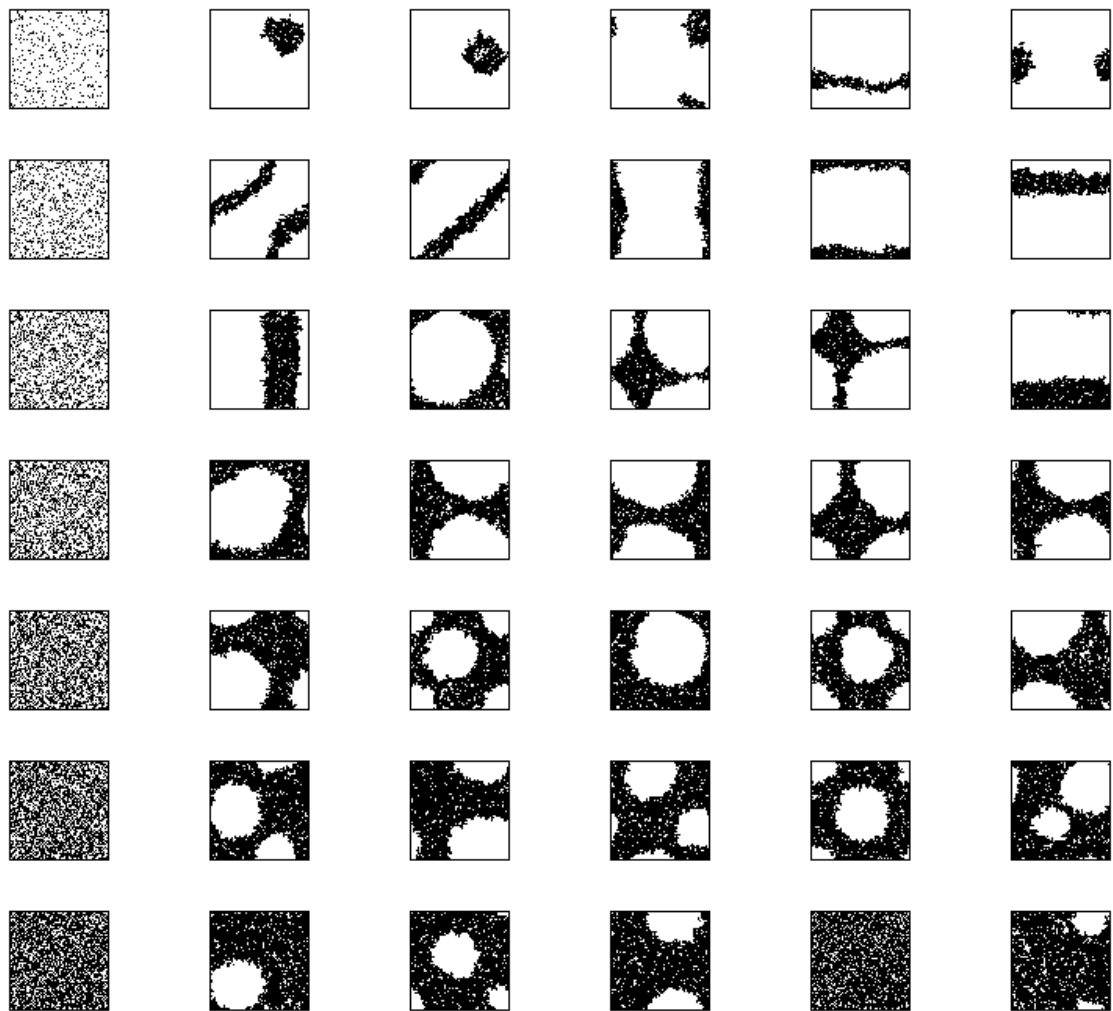
“termite”

64x64

densité :

- 0,1 (200000 itérations)
- 0,2 (300000 itérations)
- 0,3 (1000000 itérations)
- 0,4 (2000000 itérations)
- 0,5 (4000000 itérations)
- 0,6 (8000000 itérations)
- 0,7 (40000000 itérations)

0,8 (100000000)

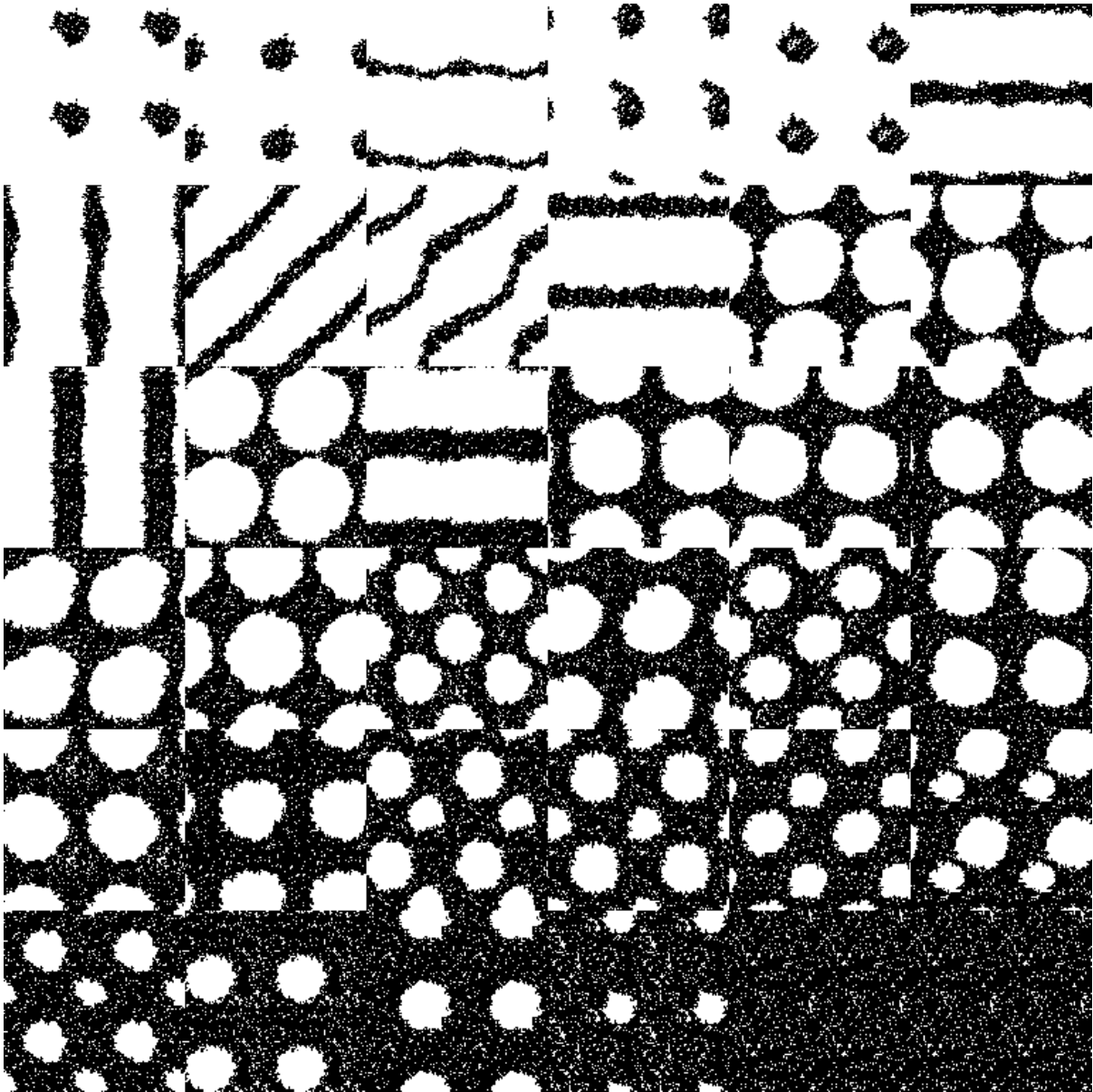


“termites”

64x64

densité :

0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2
0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3
0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4
0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,5
0,5	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
0,7	0,7	0,7	0,8	0,9	0,9

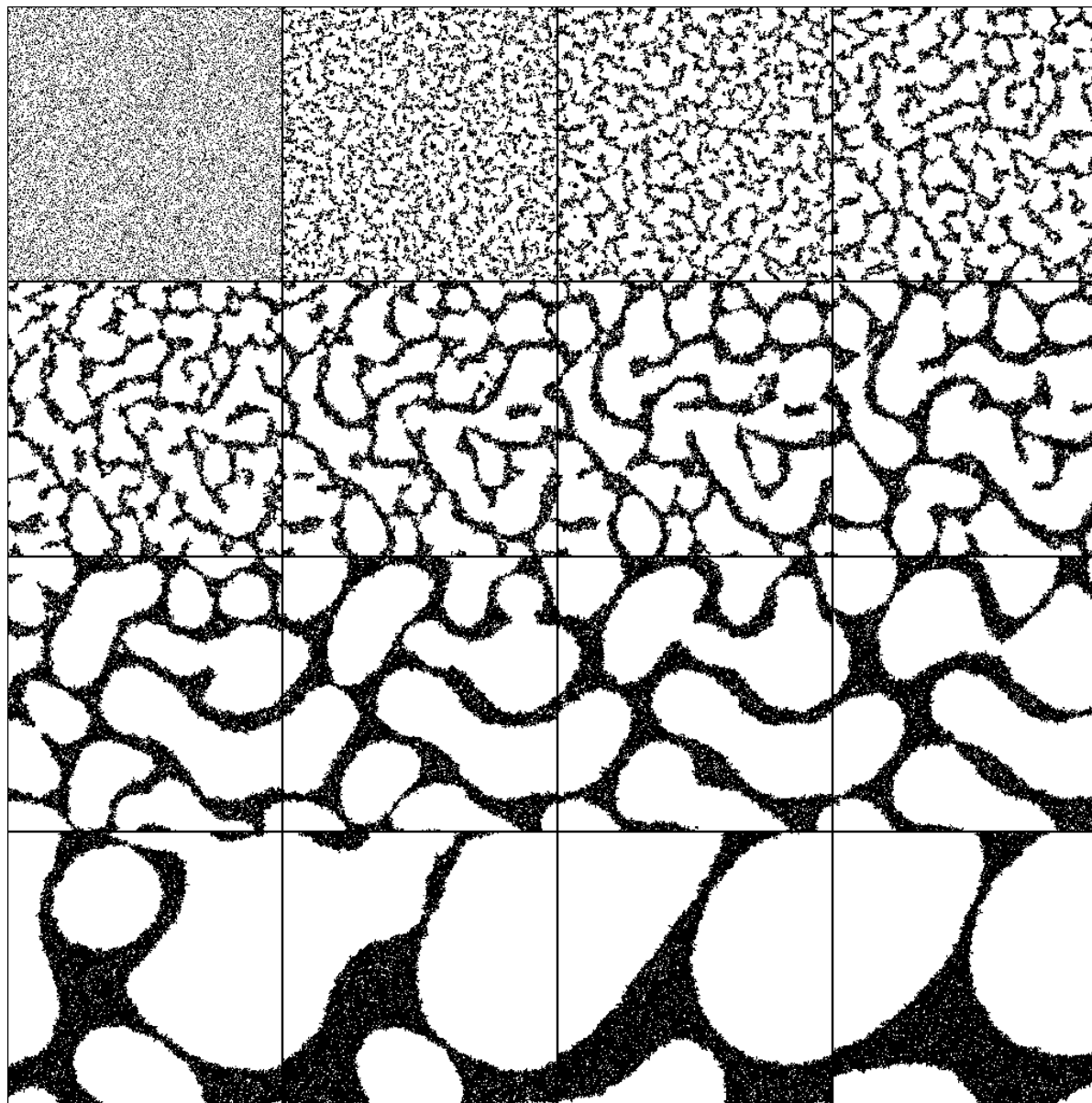


“termites”

256x256

densité 0,25

de 0 à 35000000 d'itérations



III.3 De nouveaux espaces

Les processus de génération de formes nous offrent un nouveau regard sur l'espace et sur les formes ; une notion aussi fondamentale pour la définition de l'espace que celle de *dimension* est remise en cause dans la mesure où l'on passe d'un nombre forcément entier, puisque défini par récurrence, à un nombre qui peut être fractionnaire, voire irrationnel. Cela ne remet pas en cause la topologie et la géométrie classiques, puisque cette appréhension de la dimension est cohérente avec celle que nous avons vue dans les deux premières parties ; nous dirons plutôt que nous disposons, grâce aux processus de génération de formes, d'une topologie et d'une géométrie *augmentées*, dans lesquelles les figures géométriques classiques coexistent avec des figures paradoxales au regard des outils géométriques anciens. Nous vivons donc aujourd'hui dans un espace qui reste euclidien, mais un espace euclidien *enrichi*.

Les opérations géométriques elles-mêmes se trouvent prolongées, dans le cadre de ce que nous appellerons le passage des *lois* aux *règles du jeu*. Nous le verrons à l'aide de quelques explorations concernant les pavages.

Enfin, nous proposons quelques expérimentations concernant des opérations formelles que nous avons décelées dans l'approche de la forme : le pli, le morcellement, la symétrie.

III.3.1 Constitution de l'espace

Cartes de distances

Cette expérimentation, qui dans un premier temps ne met pas en jeu de processus de génération de formes à proprement parler, est née d'une interrogation sur un certain sens du mot *espace* en architecture, à savoir l'accent mis sur le *vide*, par opposition au *plein*, sur ce qu'il y a *entre* les formes, plutôt que sur les formes elles-mêmes (cf partie II).

Nous avons eu l'idée de mettre en rapport les schémas qu'ont élaborés des auteurs comme von Meiss, Ching, etc., dans cette volonté de caractériser le *vide* de l'espace, avec un procédé appelé *carte de distances*, et employé dans une opération dite de *squelettisation* d'une image, en vue d'en obtenir des caractères morphologiques, dans le cadre du traitement de l'information contenue dans une telle image ; ce procédé est aussi utilisé en robotique.

Le procédé d'élaboration d'une carte de distances est très simple : étant donné un certain nombre de points, que nous appellerons centres pour les distinguer des autres points d'une image (ou plus exactement des autres pixels d'un bitmap), il s'agit de calculer la distance de chacun des autres pixels au plus proche de ces centres, et d'affecter le pixel en question d'un niveau de gris proportionnel à cette distance ; on peut faire aller les niveaux de gris du noir au blanc, ou du blanc au noir.

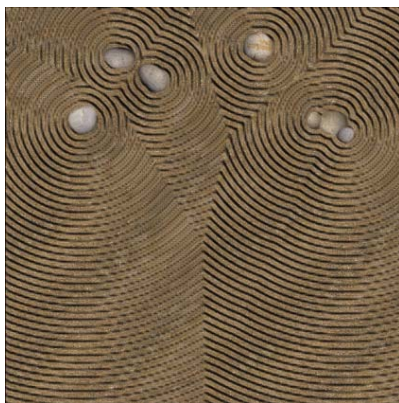
On peut voir le résultat de ce calcul appliqué à des ensembles de points disposés de différentes manières **Planche 66**. Des lignes blanches apparaissent, qui dessinent un “cloisonnement” de l’espace du bitmap ; il faut remarquer que ces lignes blanches sont lisibles aussi clairement du fait de notre système visuel, particulièrement sensible à de tels effets de seuil. Si l’on regarde de près une zone de cette “carte”, on constate que des pixels de même niveau de gris ne nous apparaissent pas tels, et qu’inversement nous apparaissent blanches (ou noires) des “lignes” de pixels qui sont en fait de niveaux de gris assez différents.

Le rapport de ces lignes apparaissant sur les cartes de distance avec les diagrammes de Voronoï a été souligné : rappelons qu’un diagramme de Voronoï (aussi appelé décomposition de Voronoï ou partition de Voronoï du nom du mathématicien russe Georgi Fedoseevich Voronoï (1868 - 1908) est une décomposition particulière d’un espace métrique déterminée par les distances à un ensemble discret d’objets de l’espace, en général un ensemble discret de points ; la définition en est donc quasiment semblable ; les cartes de distance sont donc un outil permettant de visualiser facilement, en 2D, ce que l’on appelle aussi les *cellules* de Voronoï, c’est-à-dire les portions de plan situées à la plus courte distance de tel ou tel *site* ou *germe* (autres termes pour *centre*)¹.

Par contre, à notre connaissance, aucun rapprochement n’a été fait entre ces cartes de distance avec la physique des tas de sable, ce que nous proposons ; il suffit en effet de traduire les niveaux de gris en altitudes pour simuler le résultat de l’écoulement de sable par des trous correspondants aux centres : il s’agit d’un “sable” dont la pente critique serait de 45°, mais on peut adapter le modèle à d’autres pentes si l’on veut. On en voit le résultat **Planche 67**. Les lignes de délimitation des cellules de Voronoï deviennent dans ce cas les *lignes de crête* de la disposition finale du sable après écoulement. Elles sont encore plus lisibles que les niveaux de gris des cartes de distances : il faut remarquer que ces lignes de crête ne sont évidemment pas horizontales.

Nous avons appliqué ces calculs aux configurations spatiales (définis en plan) définies par Francis D. K. Ching (**Planche 68**).

Avec la métaphore du sable, et l’exemple du jardin zen, nous avons eu l’idée de “ratisser” ce sable, en prenant tout simplement le sinus (à un coefficient près) de la distance (voir ci-contre ; on a rajouté des cailloux à l’emplacement des centres pour mieux suggérer un jardin zen) : dans cette visualisation, les

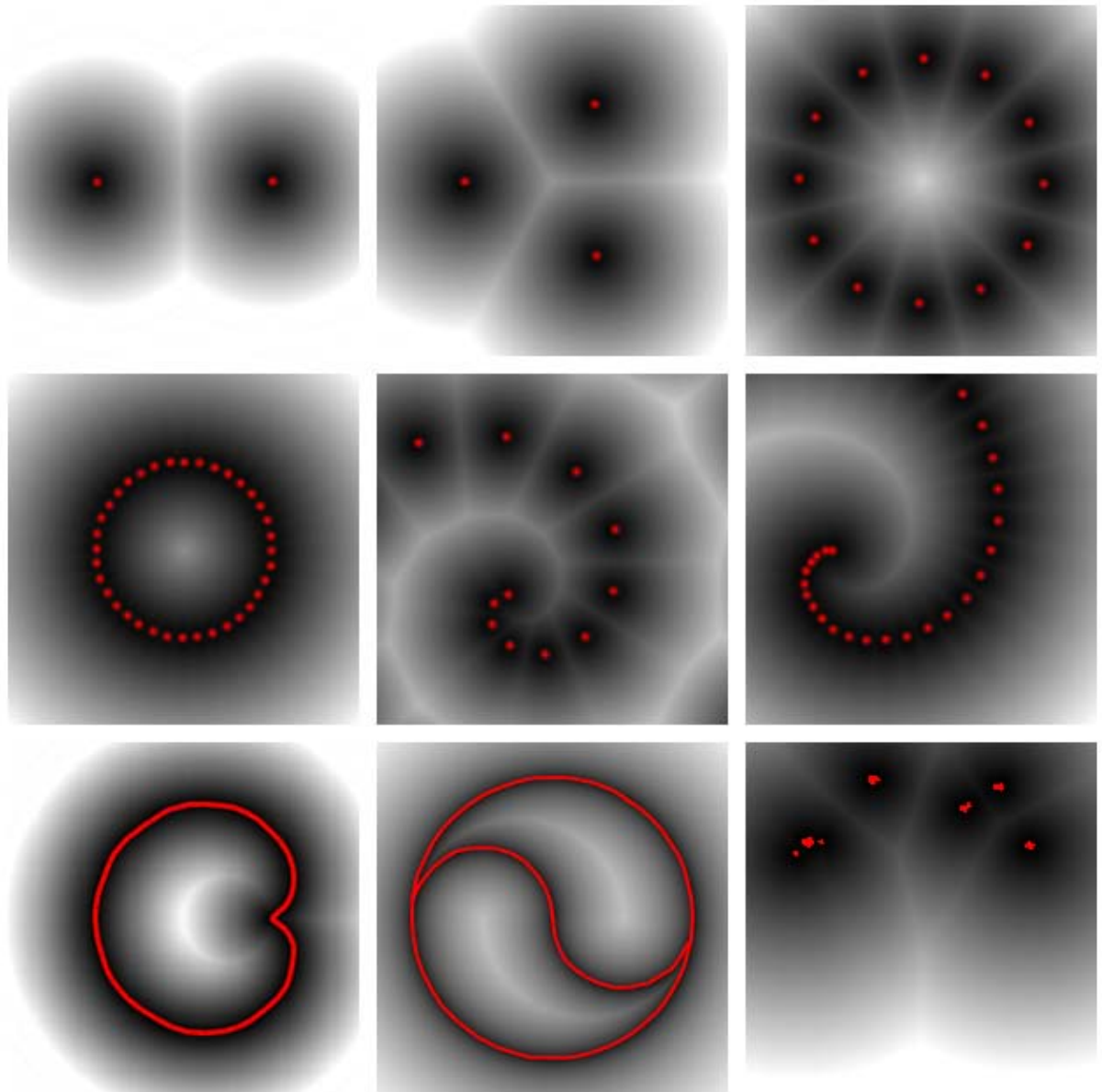


¹ L’usage informel des diagrammes de Voronoï remonte à Descartes en 1644. Dirichlet a utilisé des diagrammes de Voronoï en dimension 2 ou 3 dans son étude des formes quadratiques en 1850. Le physicien britannique John Snow a utilisé un diagramme de Voronoï en 1854 pour montrer que la majorité des personnes mortes dans l’épidémie de choléra de Soho vivait plus près de la pompe infectée de Broad Street que de n’importe quelle autre pompe. Les diagrammes de Voronoï qui sont utilisés en géophysique et en météorologie pour analyser des données de distributions spatiales (comme les mesures de chutes de pluie) sont appelés polygones de Thiessen du nom du météorologiste américain Alfred H. Thiessen. (source wikipedia : diagrammes de Voronoï)

cartes des distances

appliquées à diverses configurations de centres (en rouge)

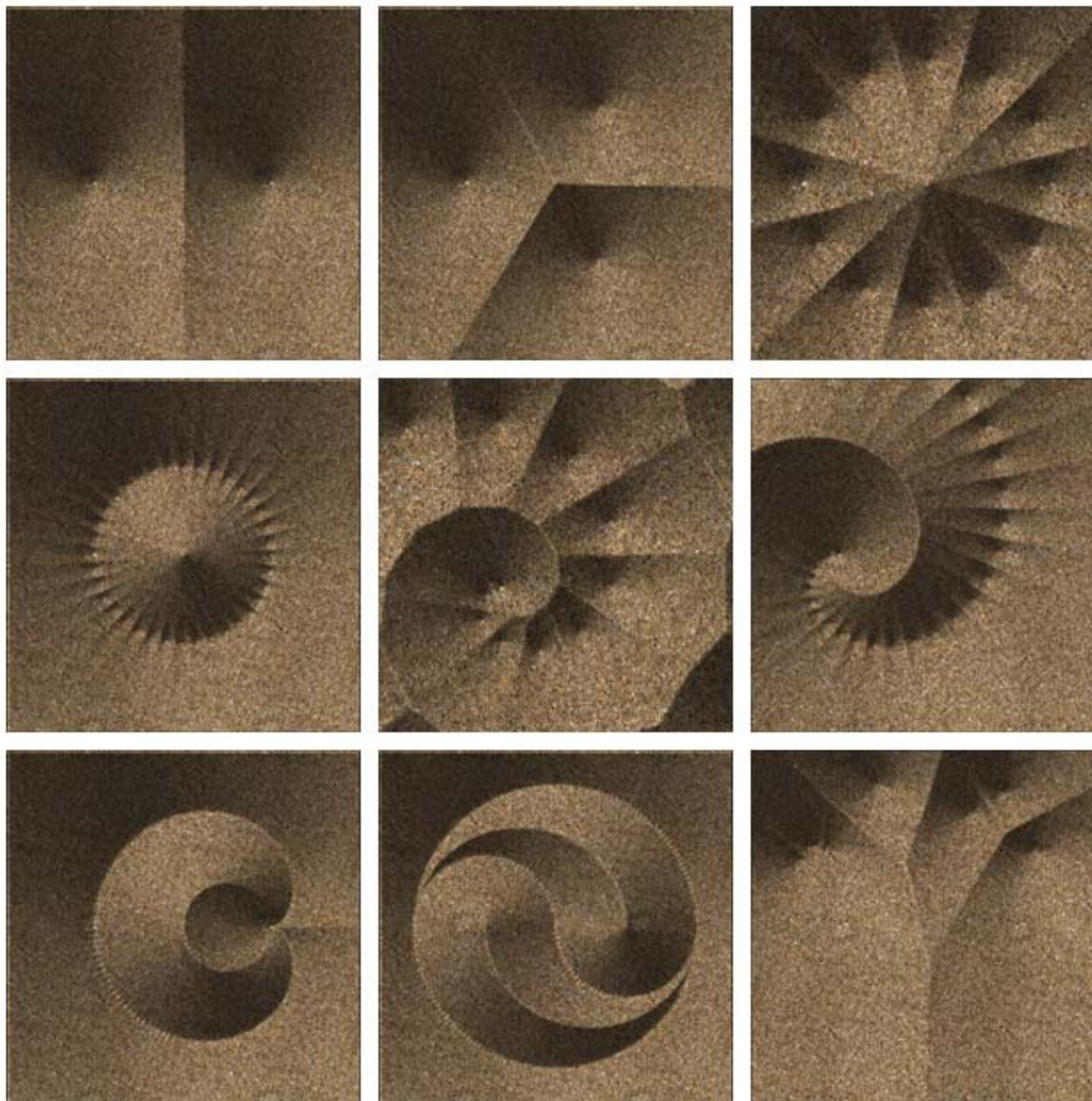
le niveau de gris correspond à la distance du pixel au plus proche des centres



“tas de sable”

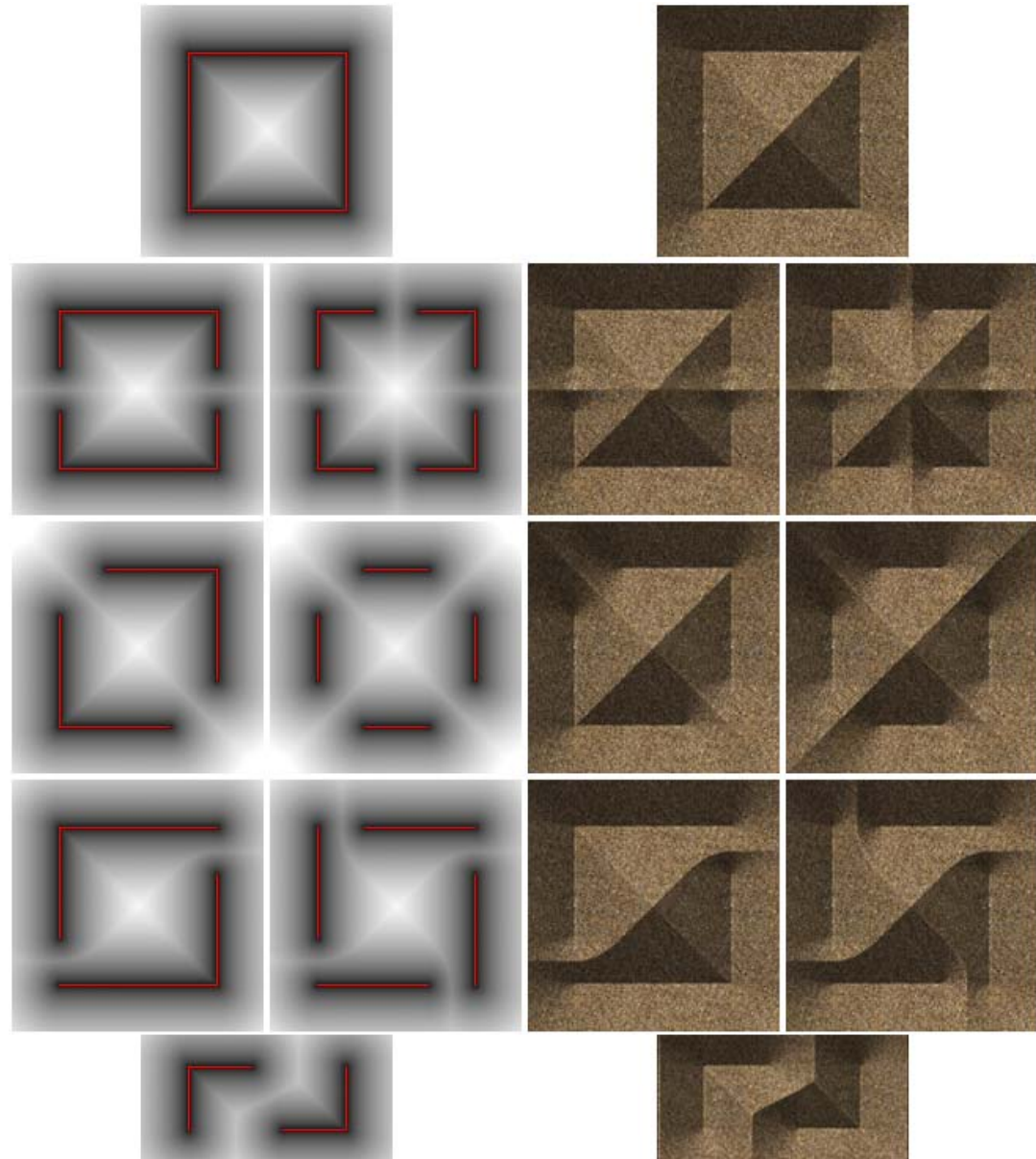
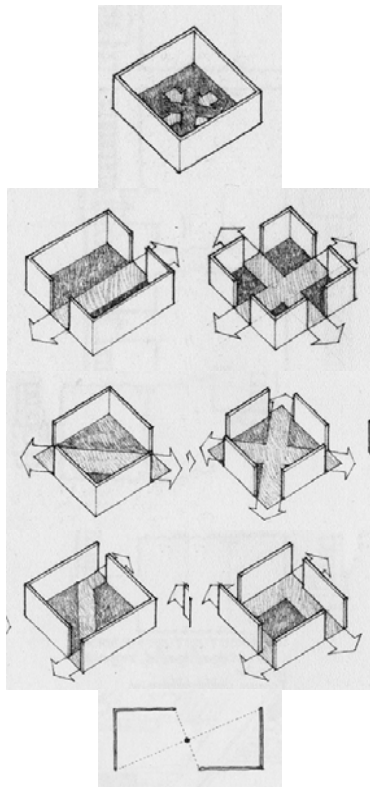
appliqués à diverses configurations de centres (les creux)

l'altitude correspond à la distance du point au plus proche des centres



Cartes des distances et “tas de sable”

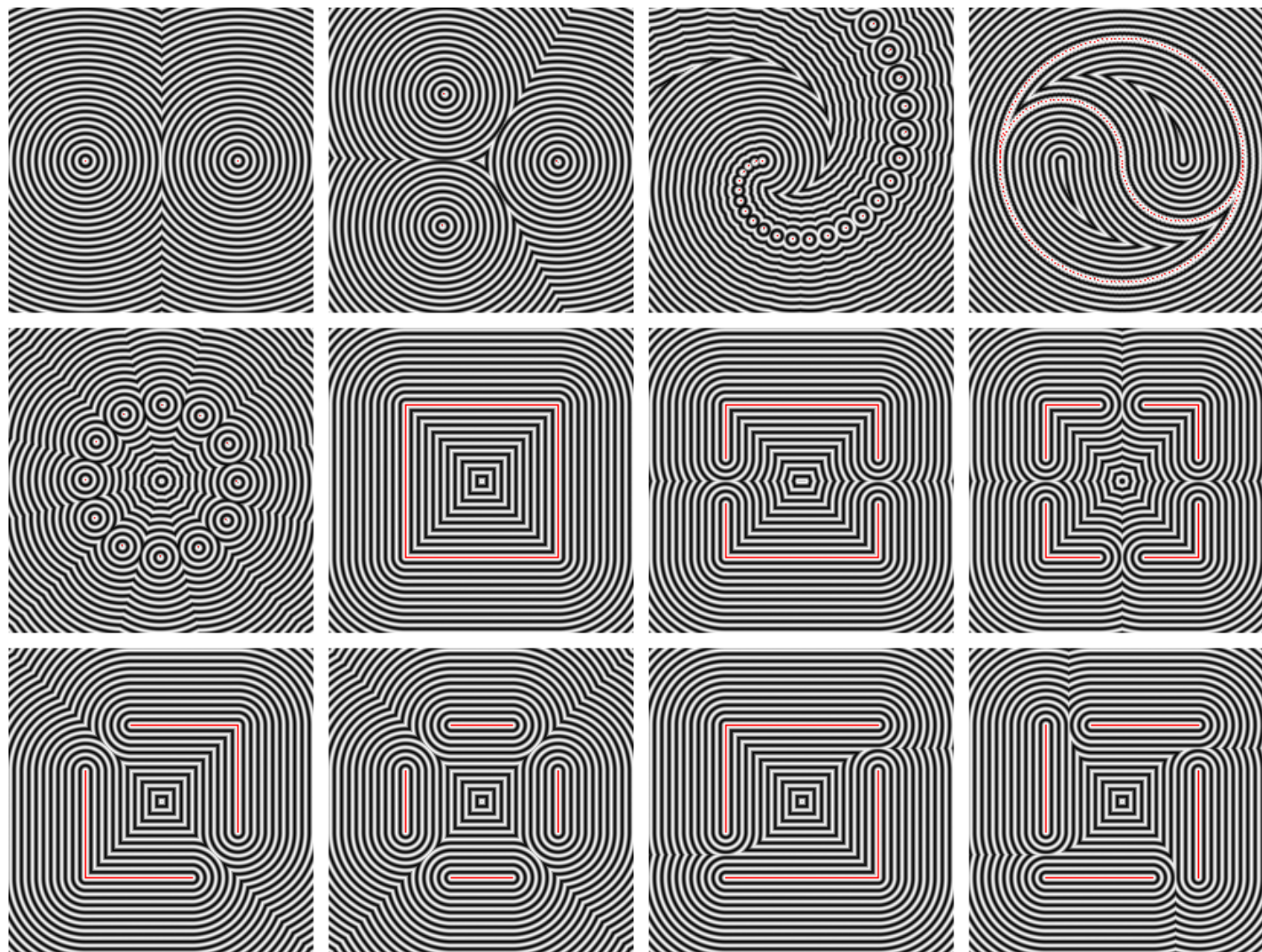
appliqués à des configurations fondées sur le carré

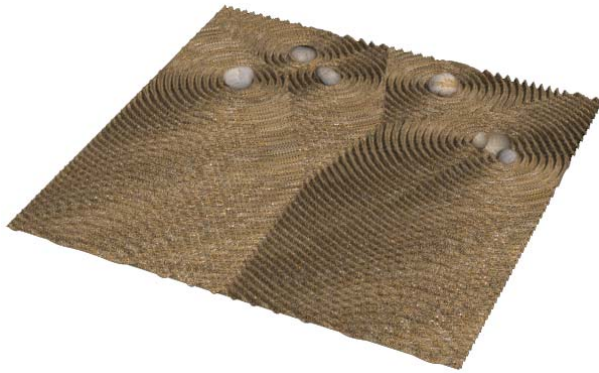


Francis D. K. Ching, *Form Space and Order* Van
Nostrand Reinhold Company 1979, p. 168, p. 151

Cartes des distances

variantes en sin d





lignes de seuil deviennent les lignes de confrontation entre des striations d'orientations différentes. Ce modèle se rapproche de la méthode utilisée en squelettisation d'une image (déterminant le squelette, ou axe médian), fondée sur l'analogie du feu de prairie : "soit une prairie couverte de manière homogène par de l'herbe sèche et Ω un ensemble de points de cette prairie. Au départ, tous les points du contour de Ω sont enflammés simultanément. Le feu se propage de manière homogène et s'étend à travers la prairie à une vitesse constante. le *squelette* de l'ensemble de points Ω (noté $\mathbf{MA}(\Omega)$) est défini comme le lieu des points où les fronts enflammés se sont rencontrés."² Nous avons appliqué ce nouveau principe à quelques configurations précédemment utilisées (**Planche 69**)

Lutte pour l'espace

Les cartes de distance ne sont pas à proprement parler un *processus* : elles rendent compte des propriétés d'un espace, elles sont statiques ; mais les deux analogies que nous avons rencontrées (l'écoulement du sable et le feu de prairie) suggèrent que leur résultat peut être obtenu avec un processus de génération de forme.

Nous avons donc essayé plusieurs automates cellulaires générant une croissance stricte :

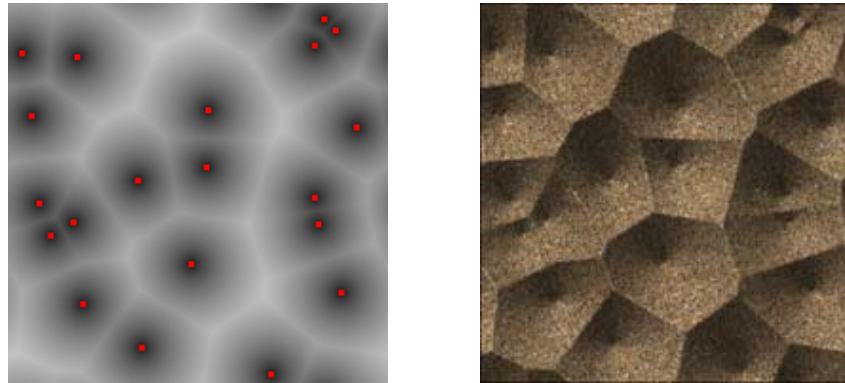
- l'AC statique répondant à la règle selon laquelle une cellule apparaît si elle a 1, 2 ou 3 voisins, et aucune cellule ne disparaît ; nous désignerons ce modèle sous le terme "addition" : l'amas de cellules croît par couronnes carrées concentriques
- la variante stochastique de l'AC précédent, que nous appellerons "propagation" : les conditions d'apparition d'une cellule sont les mêmes, mais l'automate est parcouru aléatoirement, et non systématiquement
- l'AC dynamique que nous avons appelé "prolifération" : une cellule erre à partir du centre et s'arrête dès qu'elle atteint la frontière de l'amas

Si on fait fonctionner ces processus à partir d'une cellule unique, on obtient ce genre de configurations :



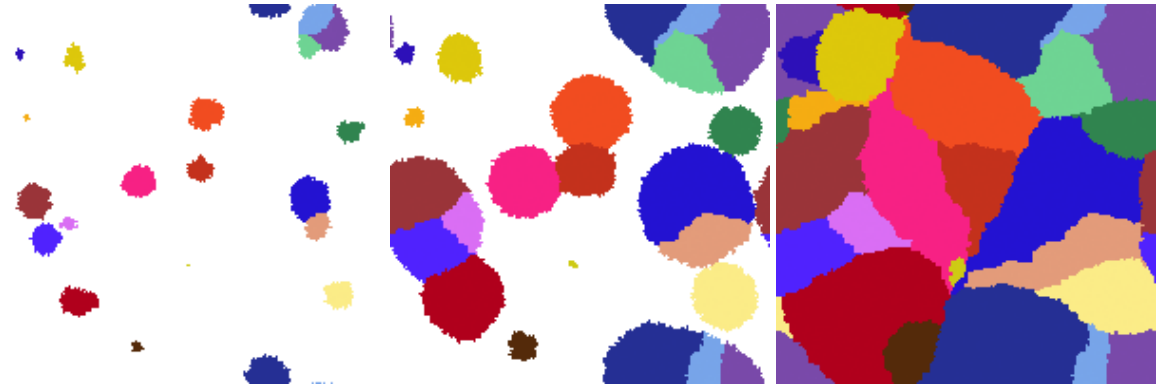
² source : wikipedia : squelettisation

Nous allons appliquer ces automates à une distribution aléatoire donnée de centres, dont nous allons d'abord établir la carte des distances, afin de pouvoir comparer les résultats :



Pour leur appliquer les automates cellulaires, les centres sont affectés chacun d'une couleur : les croissances de cellules adoptent la couleur du centre dont elles sont issues, ce qui génère des "territoires" aisément distinguables. Les différents modèles de croissance donnent les résultats visibles **Planche 70**; ces résultats ne sont pas très différents de la carte des distances : on en a fait une nouvelle version où les pixels ne sont pas affectés d'un niveau de gris, mais de la couleur du centre le plus proche ; de cette façon, les domaines propres à chaque centre sont encore plus lisibles.

Nous allons maintenant nous attacher à l'automate cellulaire "prolifération", et en modifier les règles comme nous l'avons déjà fait plus haut : on considère l'ensemble des cellules produites comme un ensemble, et l'on choisit de démarrer, non d'un centre, mais d'une cellule quelconque de la "colonie" :

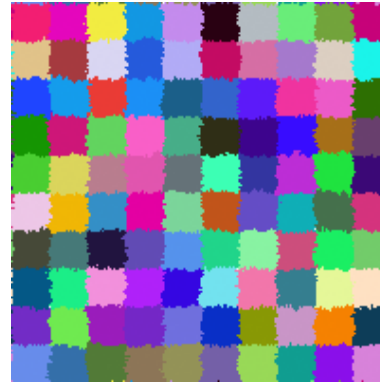


On voit que les territoires croissent de façon beaucoup plus inégale ; comme le choix de la cellule de départ de l'automate est aléatoire, chaque fois qu'on lance le programme, on a un résultat différent :

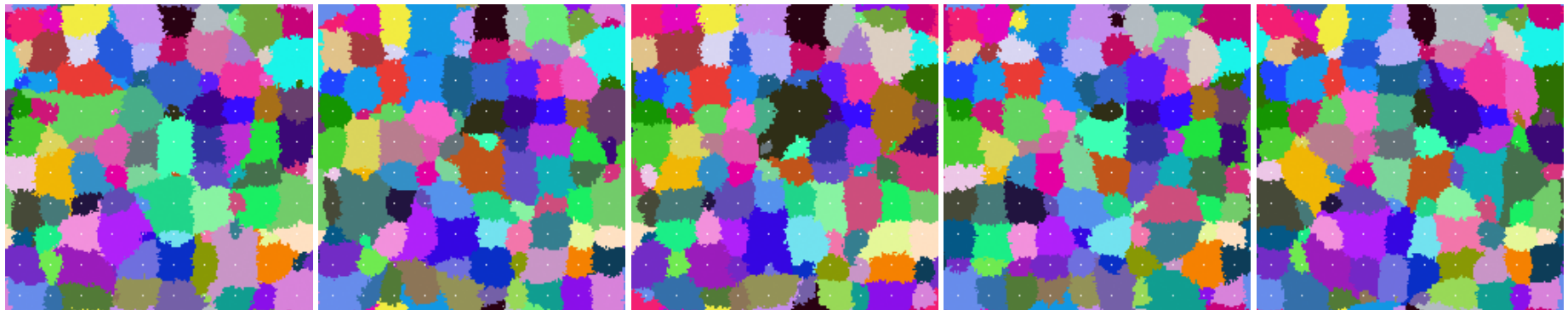


Si l'on regarde le destin du territoire orange au centre-haut de l'image, on voit qu'il a une forme, et une taille, très différentes dans les quatre cas.

Pour terminer cette expérimentation, nous allons appliquer l'automate "prolifération" à distribution régulière, orthogonale, de centres, pour pouvoir mieux comparer les évolutions ; sans surprise, le résultat est un patchwork grossièrement assimilable à un pavage carré ; tous les "territoires" obtenus sont sensiblement de la même forme (carrée) et de la même taille :



Par contre, si l'on met en œuvre la variante expérimentée sur la distribution aléatoire (nous l'appellerons “loi de la jungle”, on voit d’abord comment les territoires croissent inégalement (**Planche 71**) ; on a des évolutions différentes chaque fois qu’on lance le programme, mais chaque centre conserve son territoire malgré les avanies qui peuvent lui arriver :



On obtient des territoires de formes et de tailles variées ;
- des gros :



- des moyens :

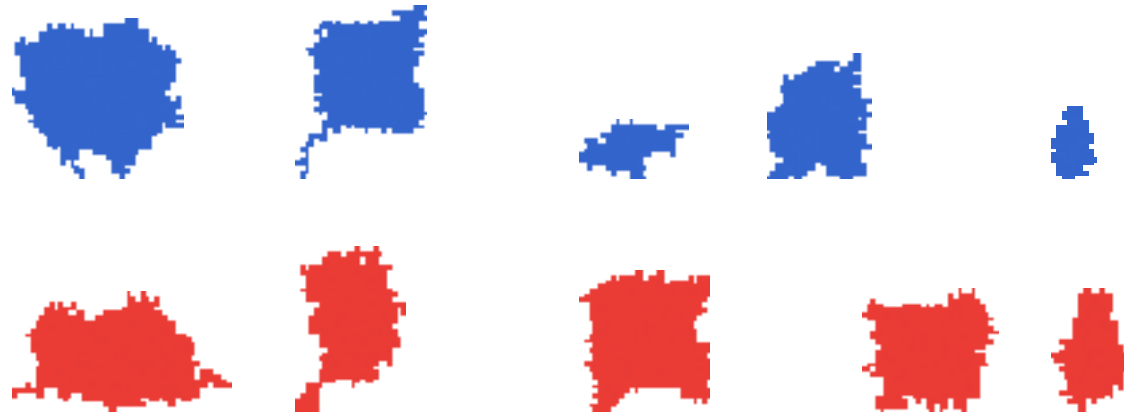


- des petits :



Le destin de tel ou tel territoire (repérable par sa couleur) est variable :





On peut encore aller plus loin dans l'inégalité, en modifiant encore, légèrement, les règles de l'automate ; maintenant, la cellule, qui part toujours de n'importe où dans l'ensemble de toutes les cellules, erre jusqu'à ce qu'elle émerge, comme précédemment, mais *elle a le droit d'émerger dans un amas d'une autre couleur* : l'invasion est permise, nous appellerons ce modèle "impérialisme" (ou pourrait évoquer aussi l'hégémonisme). La plupart du temps une couleur prend le dessus, mais après un très long temps (**Planche 72**) ; le processus est en effet très lent, surtout vers la fin. Parfois, une situation d'équilibre semble s'installer (**Planche 73**). Cette expérimentation, sans prétention, espère montrer

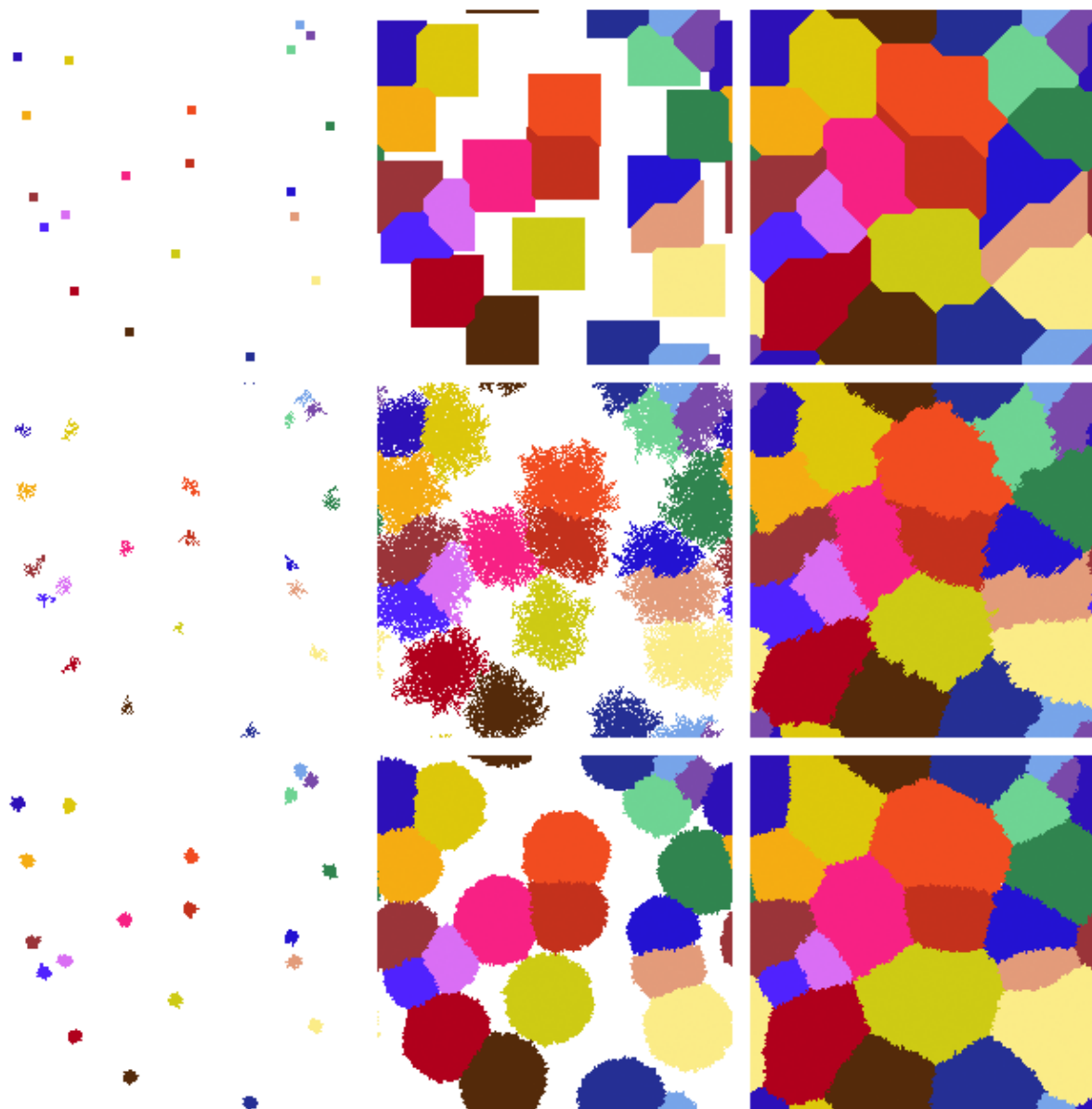
croissances

“addition”

“propagation”

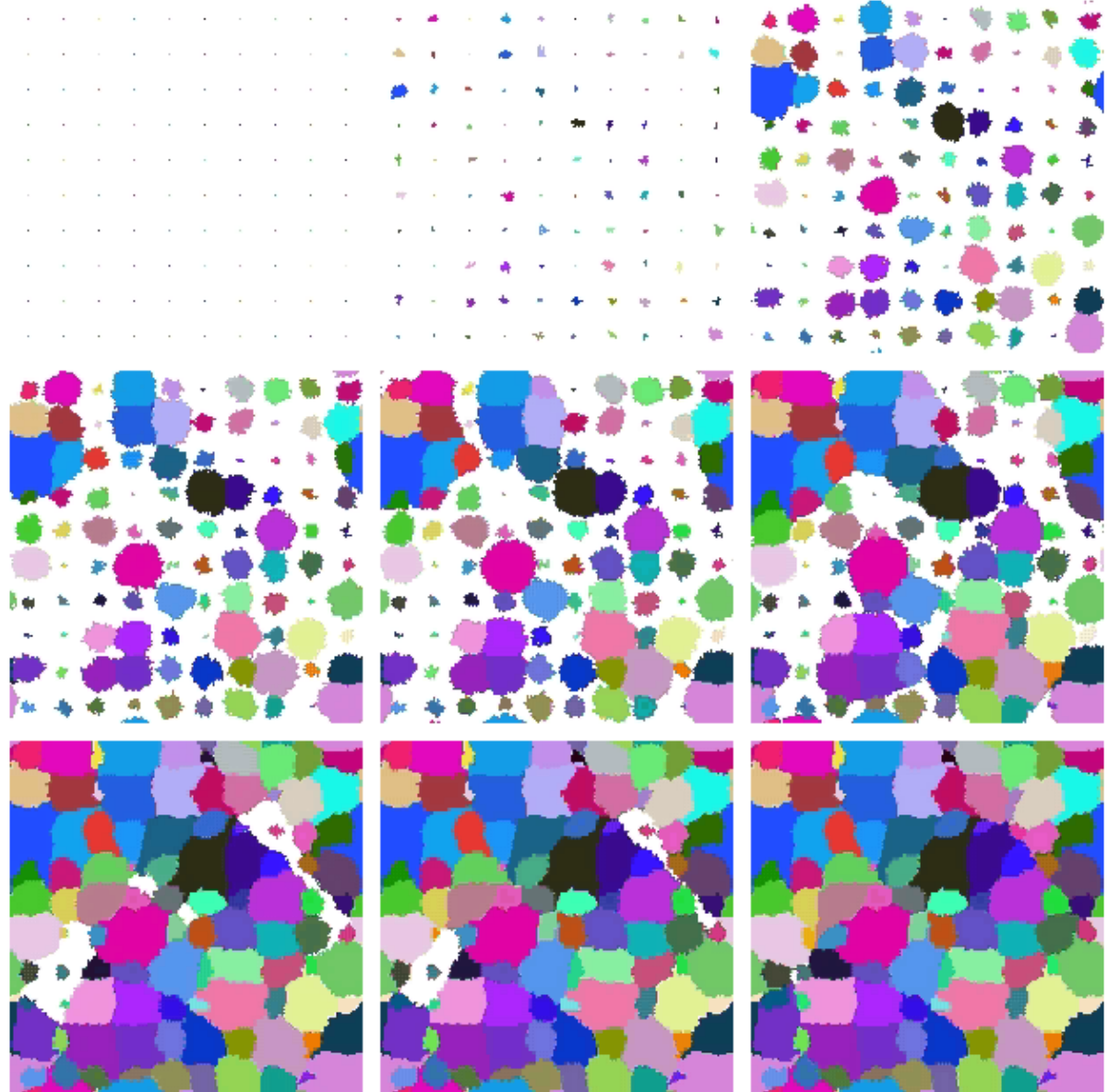
“prolifération”

et variante de la carte des distances :
(la couleur du pixel est celle du centre le plus proche)



“loi de la jungle”

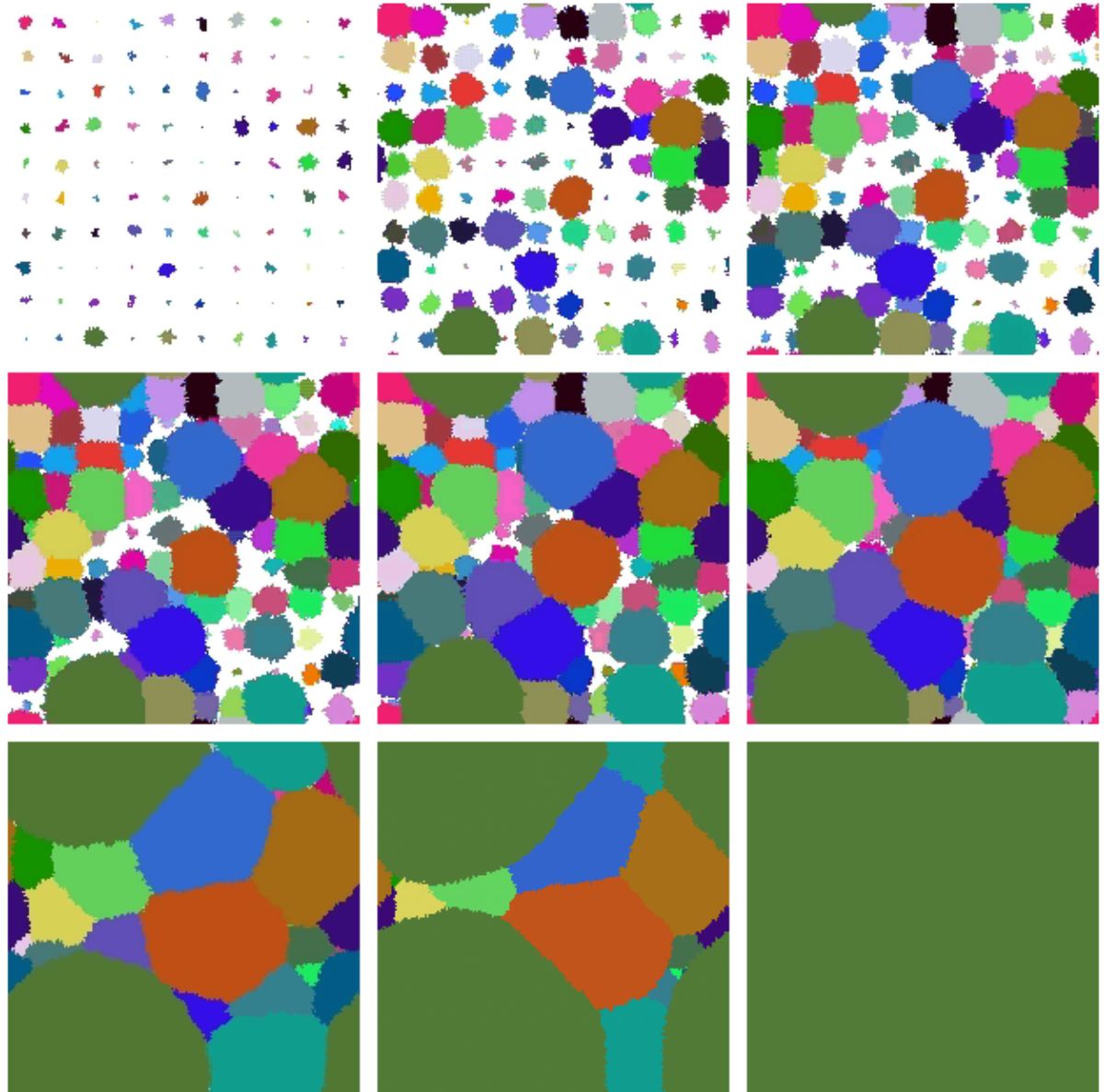
variante de prolifération
appliquée à une trame orthogonale



“impérialisme”

variante de prolifération
appliquée à une trame orthogonale

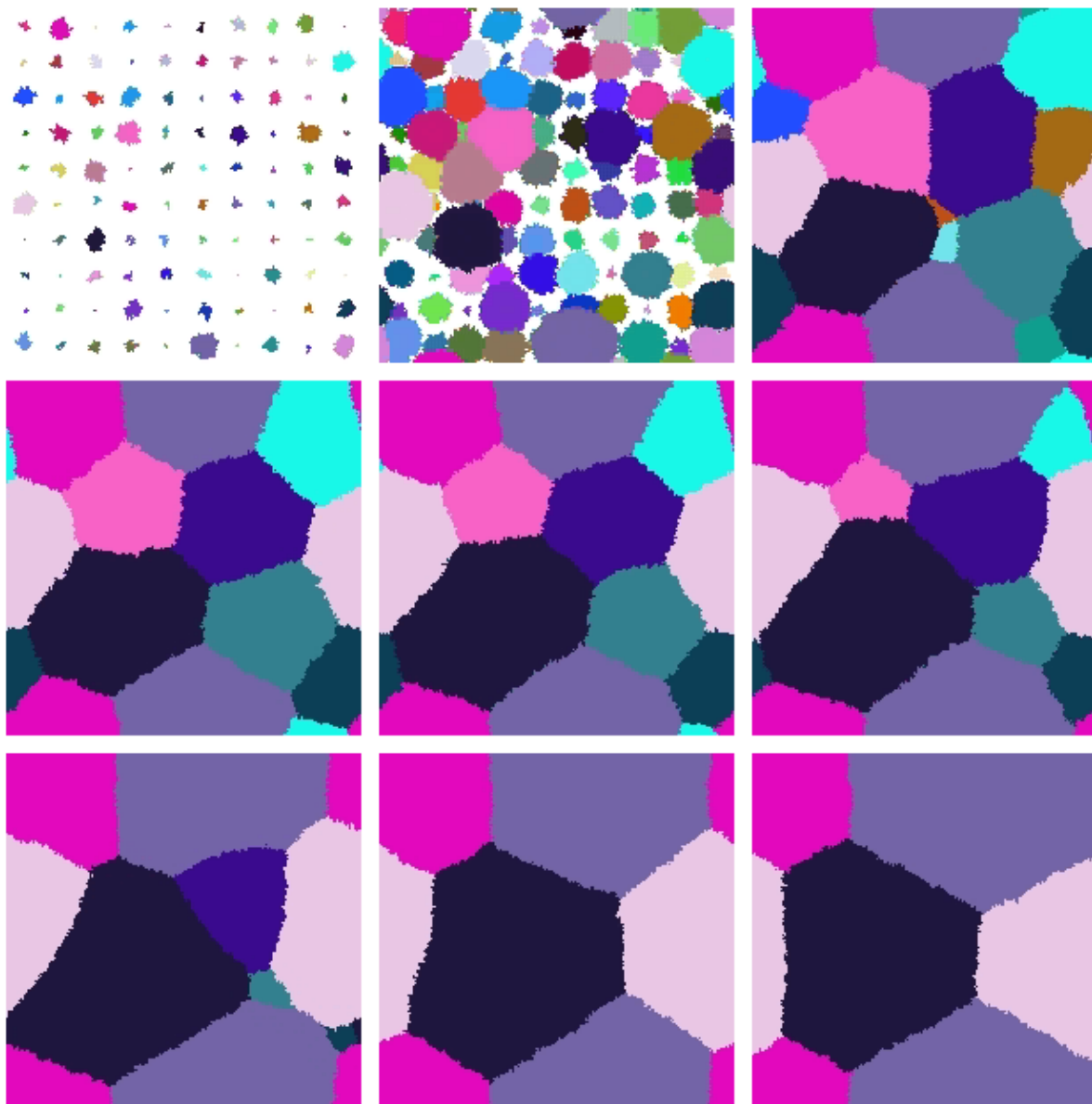
exemple 1



“impérialisme”

variante de prolifération
appliquée à une trame orthogonale

exemple 2

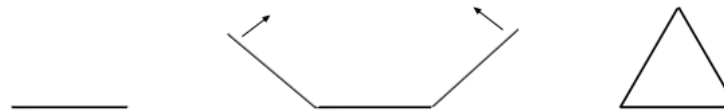


Polytopes réguliers

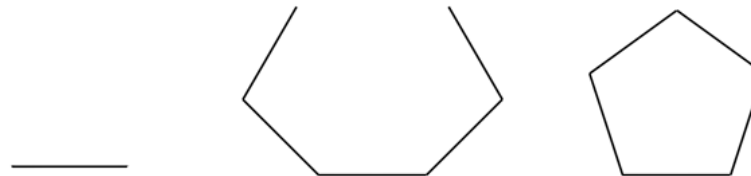
Les *polytopes* réguliers : polygones, polyèdres, etc., définissent un espace de dimension donnée. On peut déduire les polytopes d'une certaine dimension par rapport à ceux de la dimension inférieure de différentes façons ; nous avons choisi de construire les polytopes par le *pli*, le pli étant une opération fondamentale de la production de formes, comme nous l'avons vu dans la partie II.

N'importe quel enfant sait fabriquer un cube en découpant un patron dans un papier fort, et en pliant ce morceau de papier : à vrai dire, on ne fabrique pas un cube 3D de cette façon, mais seulement sa *surface* ; le pli est cependant un moyen d'accéder au moins à l'enveloppe d'un objet de dimension supérieure ; et surtout, nous *pouvons* plier une surface (ou la quasi-surface qu'est la feuille de papier) parce que nous vivons dans un espace 3D...

Mais commençons pas le commencement, c'est-à-dire par le pli du segment, en vue d'obtenir des polygones réguliers. Considérons un segment, et entourons-le de deux segments égaux : il n'y a qu'un moyen de le faire ; maintenant plions ces deux segments autour du premier jusqu'à ce qu'ils se rejoignent : nous obtenons un triangle équilatéral :



Ce jeu d'enfant peut se poursuivre en rajoutant un autre segment de part et d'autre, et en pliant de nouveau :



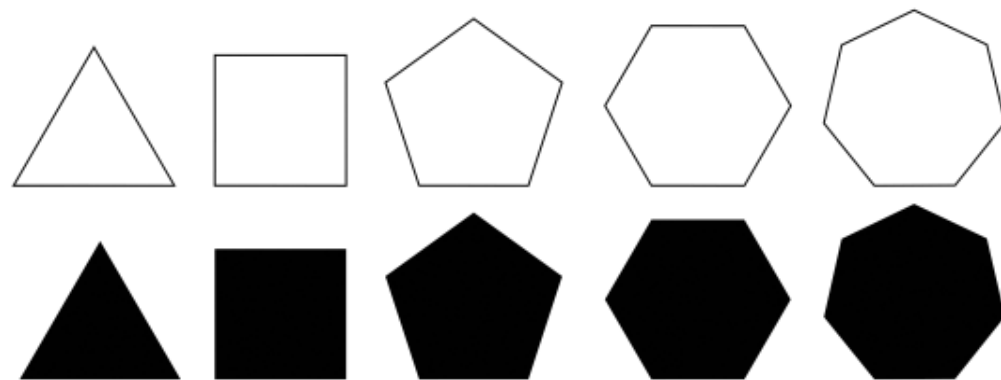
Nous obtenons un pentagone ; nous pouvons obtenir tous les polygones d'un nombre impair de côtés en rajoutant un segment de part et d'autre et en pliant ; à vrai dire, remarquons tout de suite que ces polygones (à part le triangle) ne sont réguliers que si nous imposons aux angles d'être égaux ; laissé à lui-même, ce pentagone aura plutôt tendance à ressembler à ceci :



En 2D, tout polygone est déformable à part le triangle ; c'est aussi une caractéristique de ce espace.
 Pour les polygones à nombre pair de côtés, il suffit de rajouter un segment, soit d'un côté au début de l'opération, soit pour refermer la figure à la fin :



Ainsi par le pli, nous pouvons passer de la dimension 1 à la dimension 2 :



etc...

Il faut préciser que ce “passage” n’est pas un vrai saut de dimension : le pli de la ligne consiste seulement à *circonscrire* une forme 2D, le contour est l’*enveloppe* du polygone et reste de dimension 1.

Cette présentation un peu laborieuse de la construction des polygones se justifie par les constructions analogues que nous allons faire en dimensions supérieures ; quoi qu’il en soit, dans cette construction, nous n’avons pas rencontré de contraintes particulières : nous pouvons construire, en pliant des segments autour d’un segment, un polygone d’un nombre quelconque de côtés.

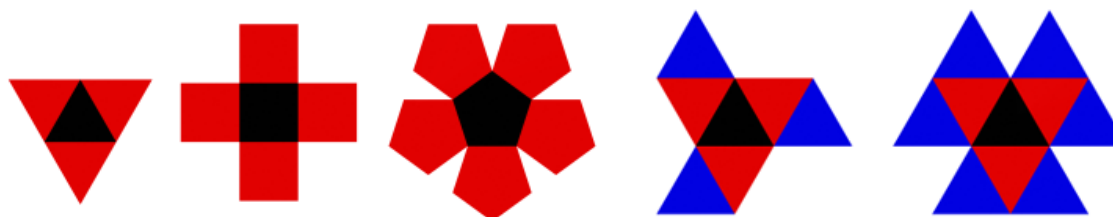
Si nous voulons transférer cette construction à la dimension supérieure, il faut se demander d’abord comment nous pouvons entourer un polygone (l’équivalent 2D du segment) avec d’autres polygones (**Planche 74**).

Commençons par le triangle : on peut l’entourer avec trois triangles adjacents ; si on les plie autour du premier, on obtient un *tétraèdre* ; de même, on peut placer 4 carrés autour d’un carré, et en pliant et en ajoutant un dernier carré pour fermer, on obtient un *cube* ; on peut aussi placer 5 pentagones autour d’un pentagone, mais en pliant on s’aperçoit que l’on obtient pas un polyèdre fermé ; qu’à cela ne tienne, rajoutons une couronne de pentagones adjacents aux cinq premiers, replions et rajoutons un couvercle : nous obtenons ainsi un dodécaèdre.

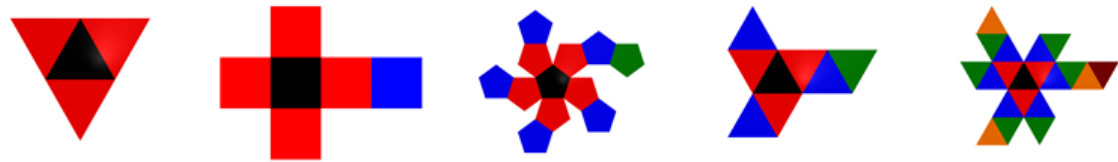
On pourrait croire qu’on peut continuer ainsi ; mais si on place 6 hexagones autour d’un hexagone, on n’a plus de place pour plier... Et en essayant avec des polygones à plus de côtés, on n’a même pas la possibilité de les placer sans qu’ils se chevauchent... Telle est la dure loi de l’espace 3D.

Mais nous pouvons encore faire d’autres choses en repartant du triangle : quand nous avons placé 3 triangles autour, nous avons pu voir qu’il restait beaucoup de “jeu” entre ces triangles ; en effet, on peut en rajouter 3 autres entre ceux-ci, plier, fermer, et obtenir un octaèdre ; et même, il y avait encore de la place pour en glisser 3 supplémentaires : et en rajoutant les triangles complémentaires de ceci pour en revenir à un triangle unique, on obtient l’icosaèdre.

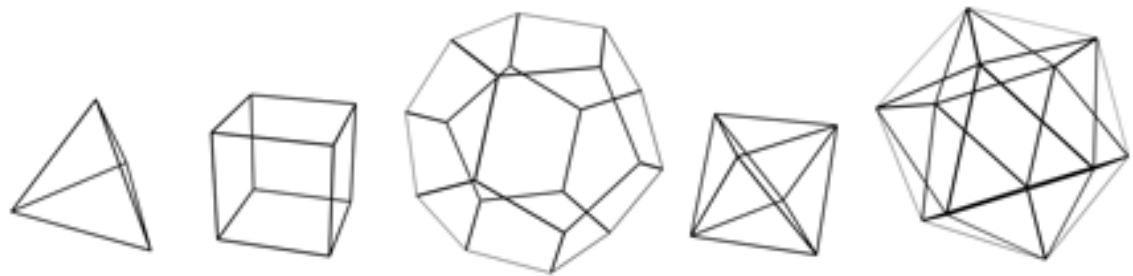
En résumé, les possibilités se résument à cinq :



qui génèrent les cinq polyèdres réguliers bien connus, dont les “patrons” sont :



Pour “voir” les polyèdres, qui sont tridimensionnels (même si on ne considère que leur surface, elle se “déploie” ou se plie dans l’espace 3D), il faut faire une perspective :

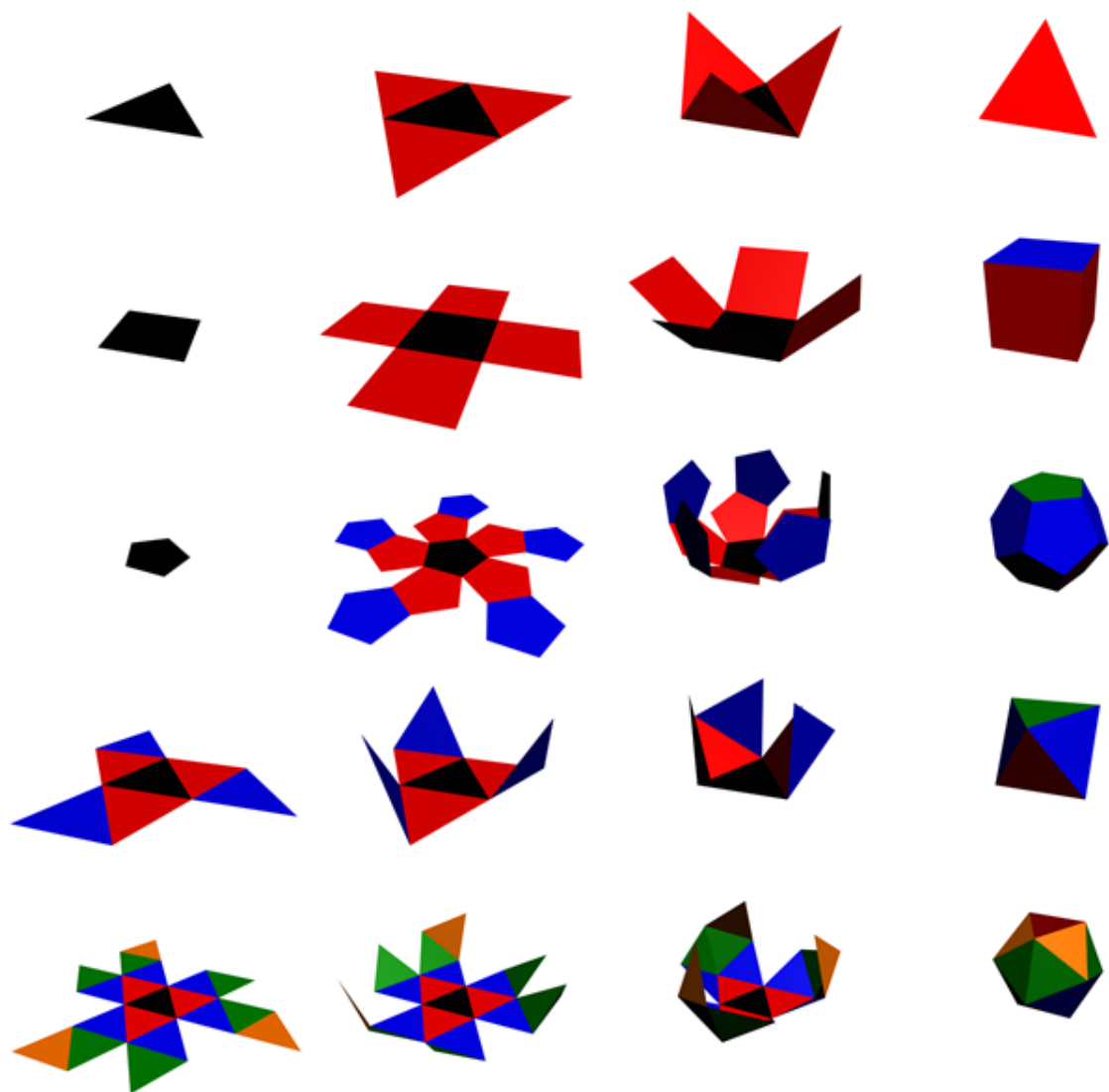


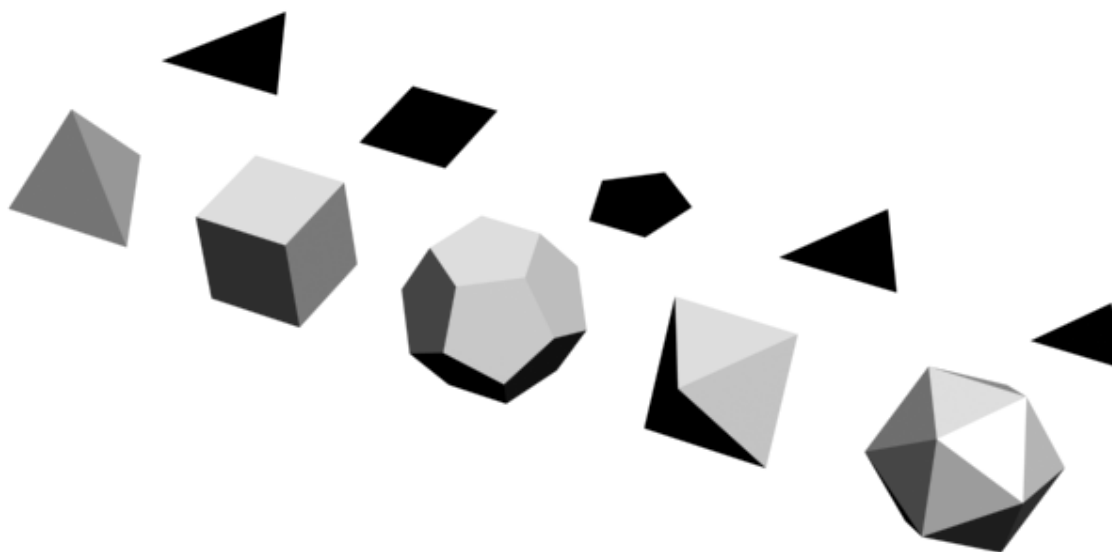
Une autre représentation combine l’intérêt du “patron” et de la connexité du polyèdre : il s’agit du “diagramme de Schlegel”. Un diagramme de Schlegel est en fait une perspective, prise de très près, avec un très grand angle focal (et en supprimant la face qui cache l’intérieur du polygone, si besoin est) ; les diagrammes de Schlegel des polyèdres réguliers sont :



En résumé, par le pli, nous passons des polygones 2D (certains polygones seulement) aux polyèdres 3D :

Des polygones aux polyèdres par le pli





Les polygones ne constituent bien sûr que l'*enveloppe* des polyèdres.

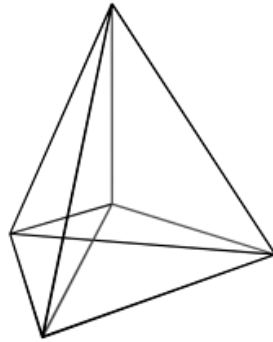
Passons maintenant à l'étape suivante : par le pli, voyager de la dimension 3 vers la dimension 4.

Pour fabriquer un polytope 4D, il faut partir d'un polyèdre, et voir comment on peut l'entourer par des polyèdres identiques, et ensuite "plier" ces polyèdres ; mais plier nécessite de disposer d'une dimension supplémentaire, ce qui est impossible avec les formes matérielles. Mais c'est tout à fait possible par le calcul... Ensuite, il faudra "voir" le résultat : il faudra donc, d'abord passer de la dimension 4 à la dimension 3 par une projection, ce qui n'est pas plus difficile à faire par le calcul que de passer de la dimension 3 à la dimension 2 ; on peut choisir toutes sortes de projections, nous choisirons la perspective équivalente au diagramme de Schlegel ; cette projection fournit un objet 3D, que nous visualiserons pas une perspective "normale".

Commençons donc par considérer le tétraèdre et voyons comment nous pouvons "coller" d'autres tétraèdres dessus ; c'est très facile, il suffit de coller un tétraèdre sur chacune de ses faces : cela nous fournit un "patron" pour le plus simple des polytopes 4D, appelé justement le "simplex" : son "patron" un tétraèdre entouré de tétraèdres :



Son “diagramme” de Schlegel est un tétraèdre, dans lequel s’insèrent 4 autres tétraèdres adjacents :



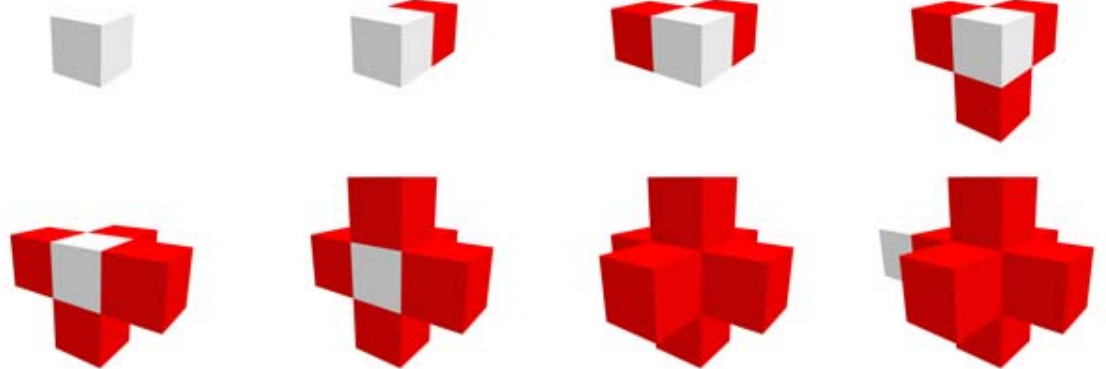
Ce qui donne le résultat complet ci-contre.

Le simplex est l’équivalent absolu du triangle, et du tétraèdre ; il existe un “simplex” dans toutes les dimensions, qui a, respectivement, 3 côtés en 2D, 4 faces en 3D, 4 “hyperfaces” en 4D, etc. C’est le plus simple des polytopes, sa construction permet de comprendre comment on peut construire d’autres polytopes 4D.

On peut en effet aussi partir du cube, coller un cube sur chacune de ses six faces, et plier : il faudra, comme pour le cube, rajouter un cube pour fermer ce que l’on appelle l’“hypercube”, dont le patron se fabrique ainsi :



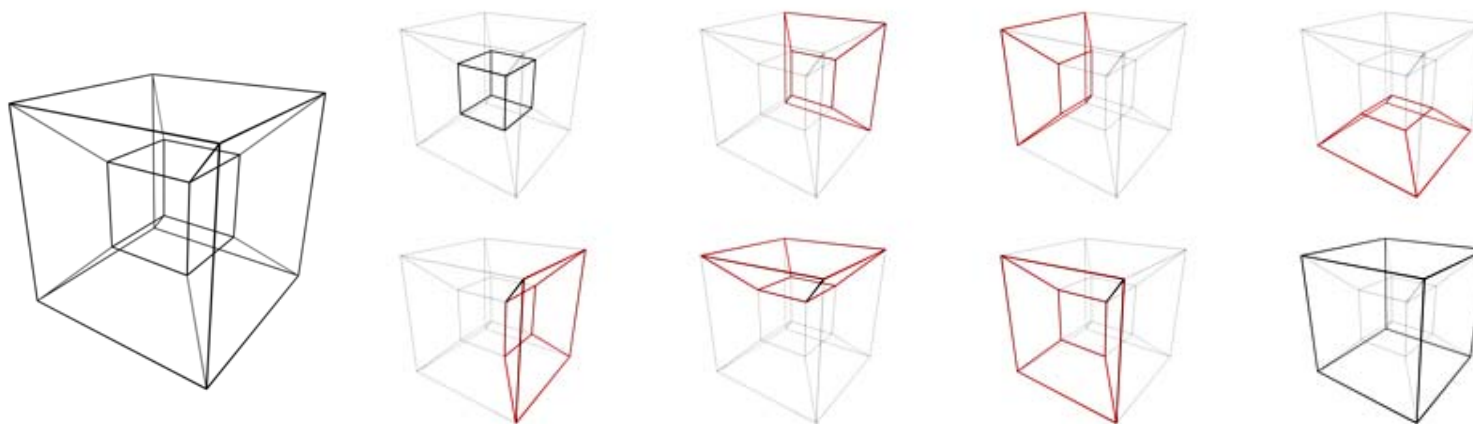
131 Salvador Dali, *Crucifixion*





132 Otto von Spreckelsen, *Arche de la Défense*

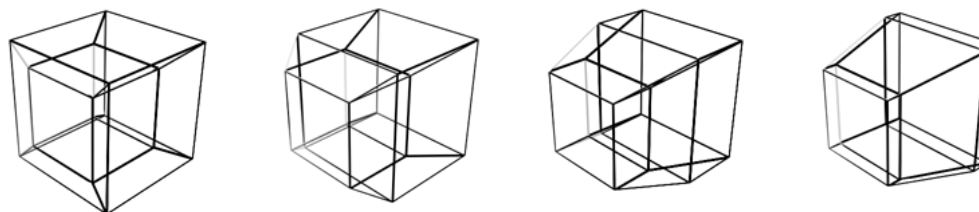
et dont le diagramme (4D) de Schlegel se compose de 6 cubes très déformés entourant un cube central, et formant aussi un cube extérieur :



Ce qui donne le diagramme complet de l'hypercube (voir ci-contre)

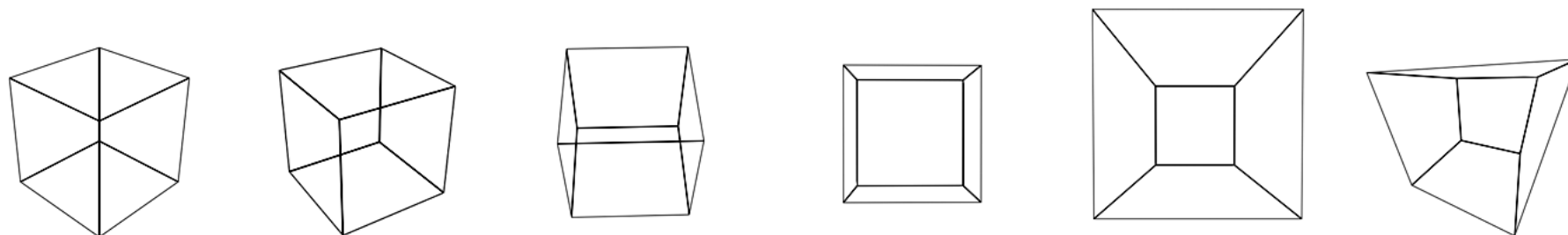
L'hypercube n'est pas le polytope 4D le plus simple, mais c'est le plus connu et le plus familier. On en trouve des réminiscences de son diagramme de Schlegel dans la "grande arche" de la Défense, mais Salvador Dali a préféré son "patron" pour une version personnelle de la crucifixion.

Profitons-en pour faire remarquer que le diagramme de Schlegel n'est qu'une projection 3D possible de ces objets 4D. Un hypercube peut tout aussi bien être représenté par ces objets 3D (entre autres) :



qui résultent d'une "rotation" dans P^4 ; et l'on peut aussi modifier la "focale" de la projection qui fait passer de 4D à 3D : c'est ce qui se produit avec le diagramme de Schlegel.

Cette modification de la projection 3D d'un hypercube est analogue au fait qu'on n'a pas *qu'une* projection 2D d'un cube, toutes celles-ci sont valables :

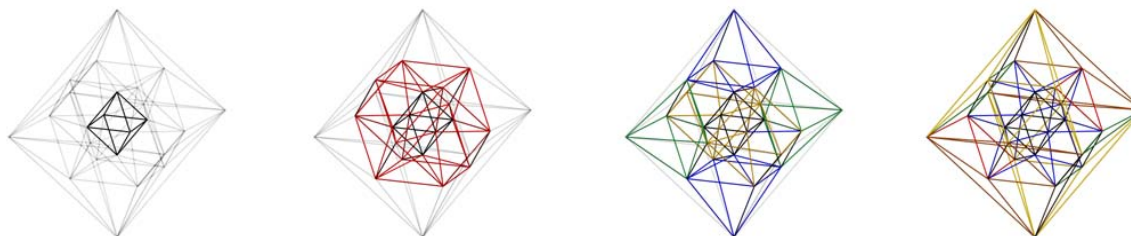
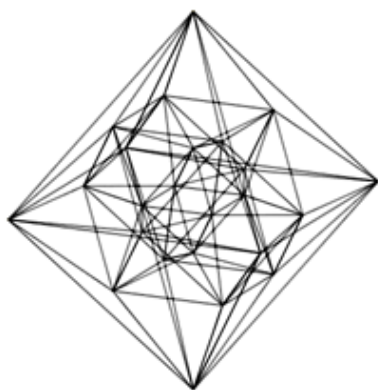


Des rotations du cube, des changements de focale, produisent des “déformations” de sa projection 2D (bien qu’il n’y ait à vrai dire pas de projection plus valide qu’une autre) ; mais nous en sommes peu conscients, sauf dans les cas extrêmes des figures de droite, parce que nous n’avons jamais vu un cube *qu’en* perspective, et que nous ne “voyons” pas vraiment la perspective en elle-même, mais tout simplement un cube...

Voyons si nous pouvons fabriquer un patron de polytope 4D à partir de l’octaèdre, c’est-à-dire coller des octaèdres sur les faces d’un octaèdre. C’est en effet possible, d’où le début de fabrication du patron :

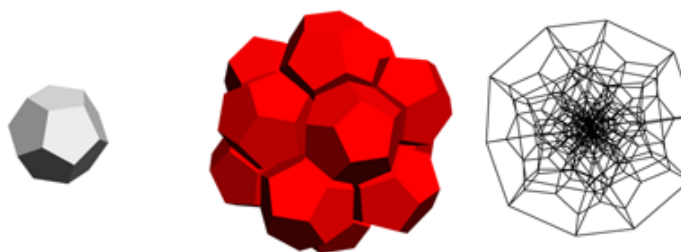


Les choses se compliquent un peu à partir de là, car ce polytope se compose en fait de 24 hyperfaces octaédriques : le premier au centre, les 8 qui l’entourent directement, 6 autres qui s’insèrent à la suite, puis de nouveau 8 octaèdres, enfin un dernier pour refermer le tout : $1+8+6+8+1 = 24$:

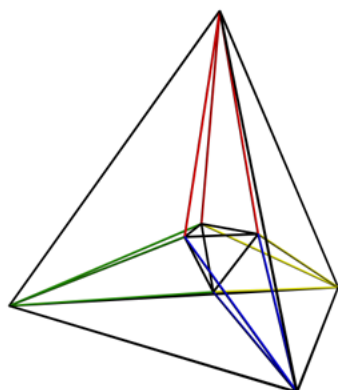


On appelle ce polytope “24-cell” en référence à son nombre d’hyperfaces.

Le dernier polyèdre sur lequel on peut envisager de construire un patron de polytope 4D est le dodécaèdre ; le polytope obtenu s’appelle “120-cell”, il est composé de 120 faces dodécaédriques, nous n’allons pas le détailler... Le début de son patron, et son diagramme de Schlegel sont :



On ne peut pas aller au-delà avec un nouveau polyèdre ; l’icosaèdre a des angles trop grands pour permettre de caser d’autres icosaèdres autour. Par contre, on peut revenir au tétraèdre et remarquer (comme nous l’avions fait pour le triangle), que l’on peut insérer 6 tétraèdres en plus des 4 tétraèdres adjacents au premier :

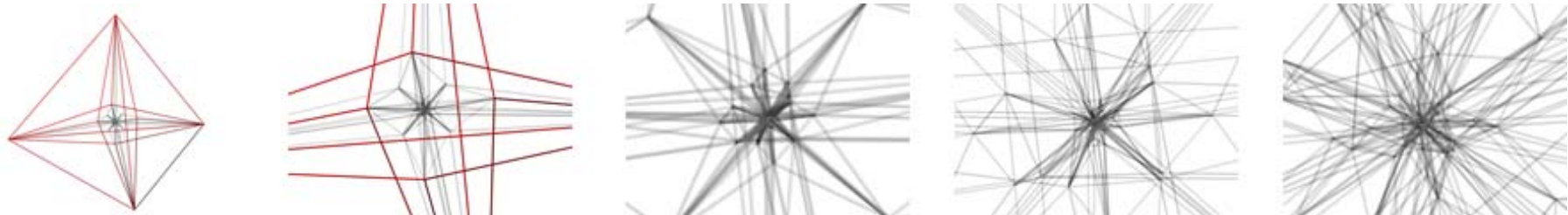


Ce polytope est relativement simple, il comprend $1+4+6+4+1 = 16$ hyperfaces tétraédriques ; il s’appelle donc le “16-cell”, son diagramme de Schlegel est montré ci-contre.

Enfin, on peut remarquer que les 6 tétraèdres que nous venons d’insérer laissent encore un peu de “jeu” pour en insérer d’autres :



Le polytope généré avec ce début de patron est le plus compliqué de tous les polytopes 4D ; il comporte 600 hyperfaces tétraédriques ! En effet il faut “empiler” $1 + 4 + 12 + 24 + 36 + 72 + 108 + 4 + 108 + 72 + 36 + 24 + 12 + 4 + 1$ tétraèdres pour obtenir le “600-cell” ; on ne peut le montrer (en montrer une projection 3D) en entier sans faire de zoom dans cet objet :



En résumé, il existe 6 polytopes réguliers en dimension 4 :

- à partir du tétraèdre : le simplex, le 16-cell, et le 600-cell
- à partir du cube : l'hypercube
- à partir de l'octaèdre : le 24-cell
- à partir du dodécaèdre : le 160-cell

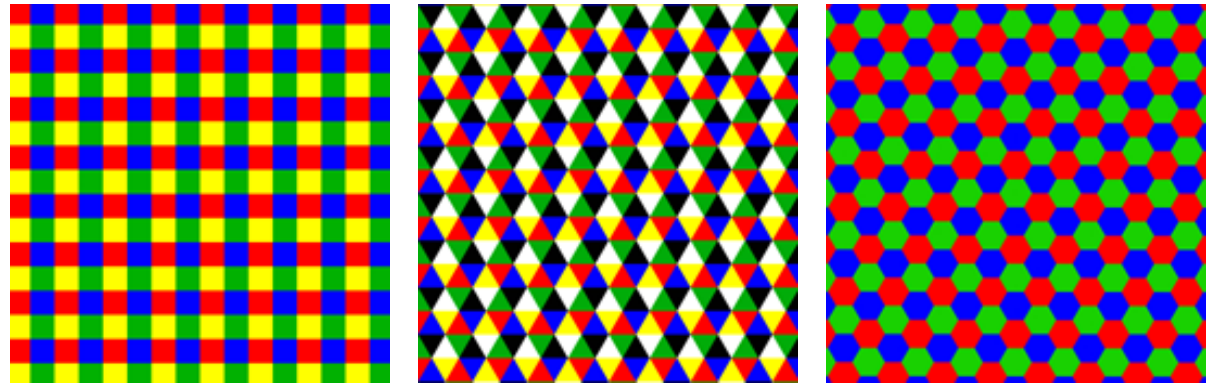
C'est très remarquable, parce que, s'il y a 5 polyèdres réguliers en 3D, il n'y a, dans toutes les dimensions supérieures à part la dimension 4, que 3 polytopes réguliers possibles : l'équivalent du simplex, l'équivalent du cube, et son dual (qui pour le cube est l'octaèdre).

Ceci nous montre la richesse de la notion d'espace en rapport à la notion de dimension, même sur un sujet qui semble très simples comme celui des polytopes réguliers.

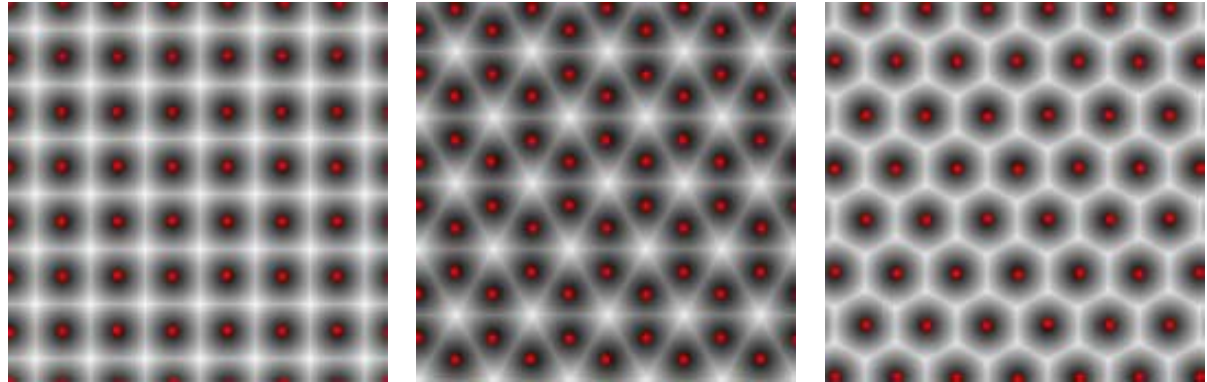
Ces constructions de polytopes par le pli présentent aussi l'intérêt de nous proposer, par les *patrons* de pliage, des configurations que nous allons exploiter en explorant l'idée de *pavage*.

Pavage et processus

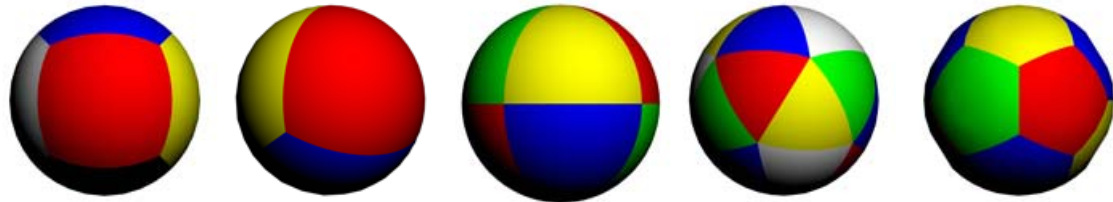
Le pavage régulier d'un espace est une caractéristique essentielle de cet espace. On parle rarement du "pavage" en une dimension : pourtant, paver la ligne consiste à la diviser en segments égaux (les segments peuvent être de longueur quelconque si la ligne est infinie) ; paver le cercle consiste à le diviser en arcs égaux (qui doivent être d'un angle égal à 360° divisé par un nombre entier). En 2D, par contre, le pavage est bien connu : si l'on s'en tient aux polygones réguliers, chacun sait que le plan peut être pavé uniquement par des carrés, des triangles ou des hexagones :



Ces pavages peuvent être obtenus en calculant les cartes de distance de centres disposés suivant une trame respectivement orthogonale, hexagonale, et triangulaire (voir ci-dessous) : cela met en évidence le caractère auto-dual du pavage carré, et la dualité des pavages, respectivement, triangulaire et hexagonal :



Si l'on veut paver la sphère, on ne peut le faire qu'avec le carré, le triangle et (à la différence du plan) le pentagone (ou plutôt les équivalents courbes de ces polygones), et de plus la taille de ces polygones est imposée : on ne peut paver la sphère qu'avec 6 carrés, 4, 8, ou 20 triangles, et 12 pentagones :



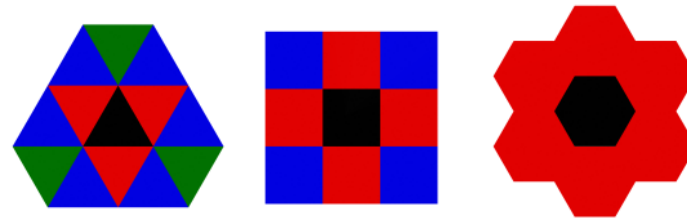
Ces pavages correspondent évidemment aux polyèdres réguliers.

En 3D, le polyèdre régulier avec lequel on peut paver l'espace est le cube.

La façon dont on peut le paver est donc spécifique d'un espace (sa dimension, son caractère plat ou courbe).

Le pavage est généralement considéré du point de vue du polytope de base, sans s'occuper de ce qu'il *construit* : on considère que le pavage remplit complètement l'espace (le plan, en 2D) ; en introduisant l'idée du pavage comme processus (de croissance ou de complexification), on peut voir ce que construit le pavage, vers quoi il tend, quel est l'*attracteur* de ce processus.

Les polygones susceptibles de paver le plan correspondent aux situations où l'on remplissait complètement l'espace autour du polygone de départ dans l'opération précédente, et où donc l'on ne pouvait pas plier :

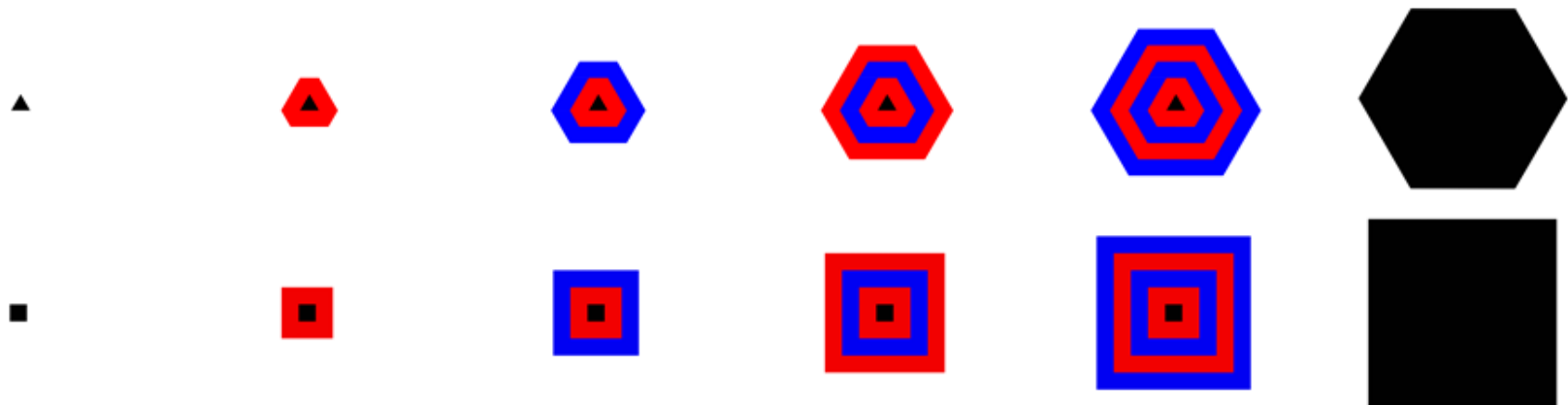


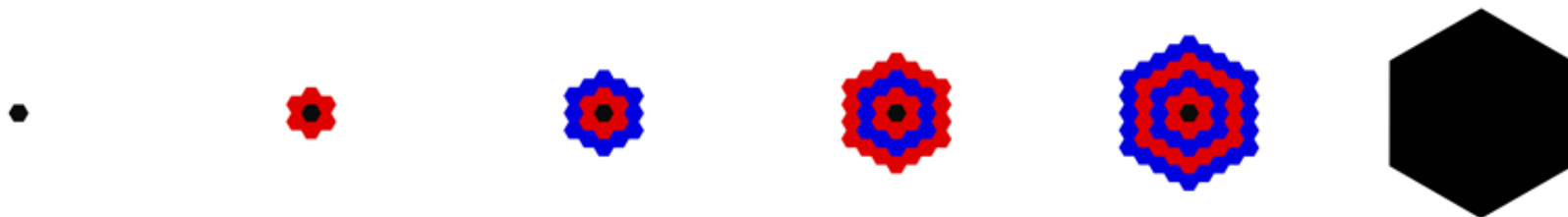
On ne peut pas paver avec le pentagone, parce qu'il reste de l'espace entre les pentagones adjacents au premier (ce qui permet de plier), et on ne peut pas paver avec l'heptagone, ni avec les polygones de plus de 7 côtés, parce que les heptagones adjacents se superposent (ce qui ne permet ni de plier ni de paver).

Nous allons considérer le pavage de différentes façons, en l'assimilant d'abord avec un automate cellulaire générant une croissance ; on considérera le voisinage uniquement par les côtés (voisinage de von Neumann), puis le voisinage par côtés et par coins (voisinage de Moore).

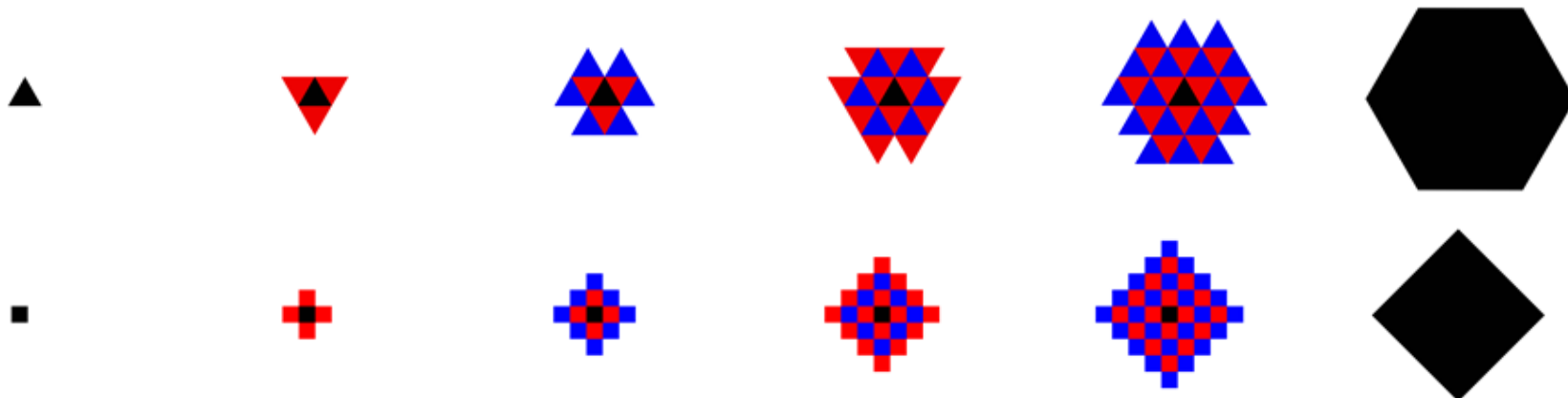
La règle selon laquelle une cellule apparaît lorsqu'elle touche un nombre quelconque de cellules produit, selon que l'on part d'un triangle, d'un carré ou d'un hexagone, les débuts d'évolution (on a alterné les couleurs suivant les étapes de l'évolution), et le destin à plus long terme :

- voisinage par côtés et coins :



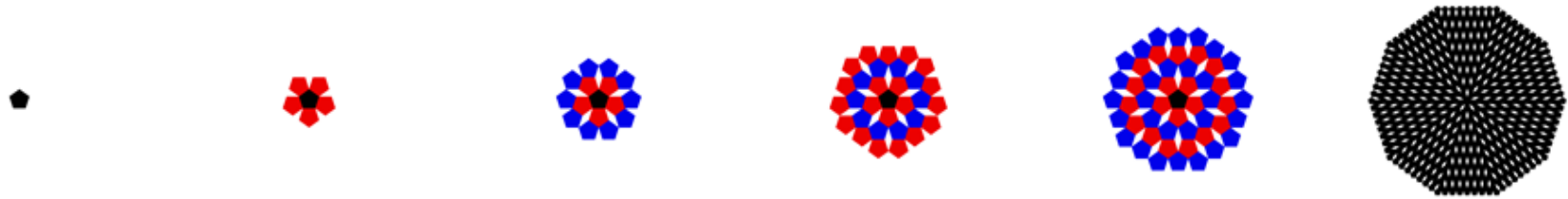


- voisinage par côtés uniquement (pour l'hexagone, cela ne change rien) :

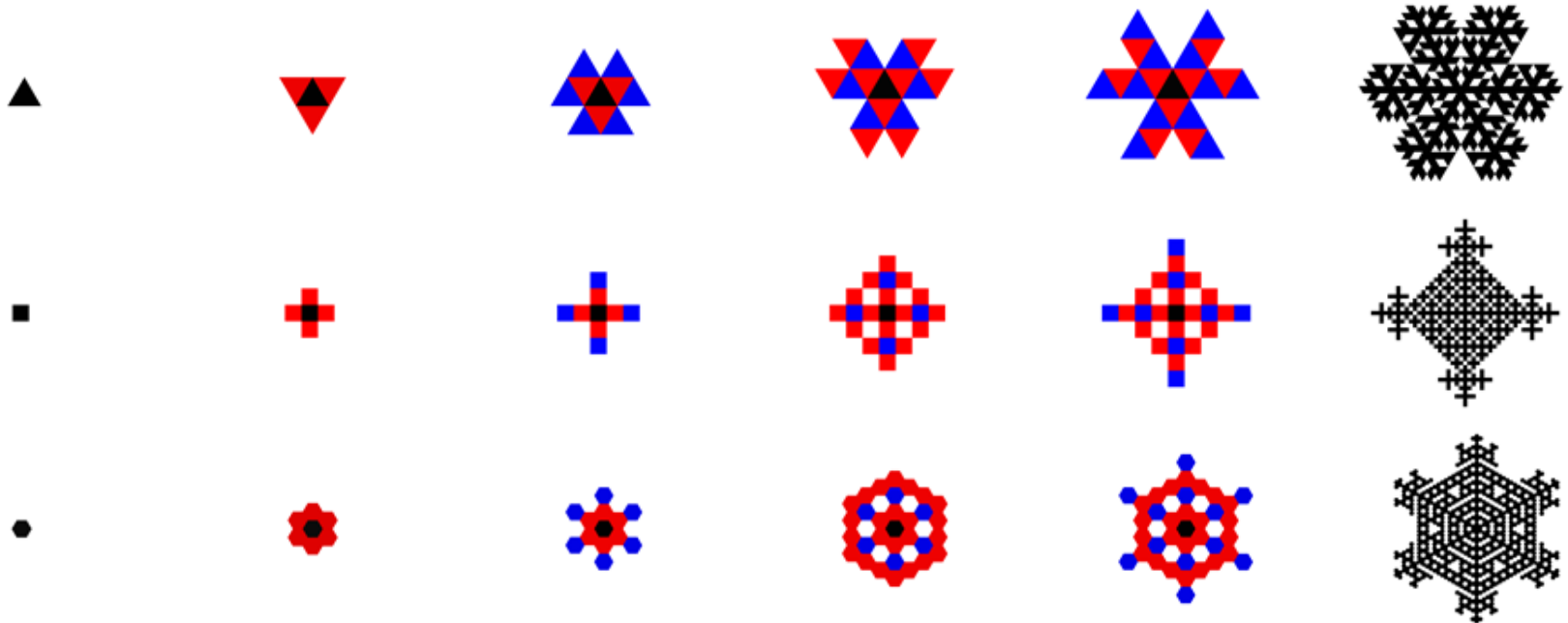


Dans tous les cas, ce processus conduit au pavage du plan, mais il est intéressant de voir de quelle manière progressive se produit ce pavage potentiellement infini, quelles sont les formes vers lesquelles tendent ces processus ; la croissance du triangle et de l'hexagone tendent toutes vers l'hexagone, tandis que celle du carré tend vers le carré, ou le carré posé sur la pointe.

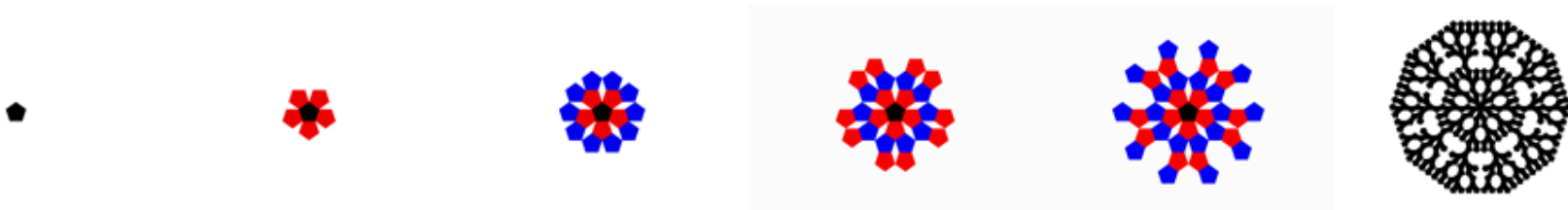
Pourquoi ne pas appliquer les mêmes processus de croissance au pentagone, même s'il n'est pas susceptible de paver le plan ? Voici ce que cela donne :



Cette fois, si on poursuit l'évolution, on obtiendra un pavage incomplet, lacunaire, du plan.
On peut aussi obtenir un pavage incomplet en partant du triangle, du carré, et de l'hexagone, mais en modifiant les règles de l'automate cellulaire : une cellule n'apparaît que si elle touche (en ne considérant que le voisinage par les côtés) une seule cellule de la génération précédente :



On peut d'ailleurs aussi appliquer cette même règle au pentagone :



Tout cela nous fournit un certain nombre de pavages complets ou incomplets ; on constate que les seuls “vrais” polygones susceptibles d’être atteints à la limite d’une telle croissance sont l’hexagone et le carré (éventuellement tourné de 45° par rapport au carré de départ), et non le triangle. Si l’on considère la notion de pavage non seulement du point de vue des polygones dont on peut partir, mais de ceux auxquels on peut *arriver*, alors on perd le triangle, ne restent que l’hexagone et le carré. Nous aimerions mettre ce résultat en rapport avec la notion d’auto-similarité ; examinons de ce point de vue les motifs de départ des pavages complets :

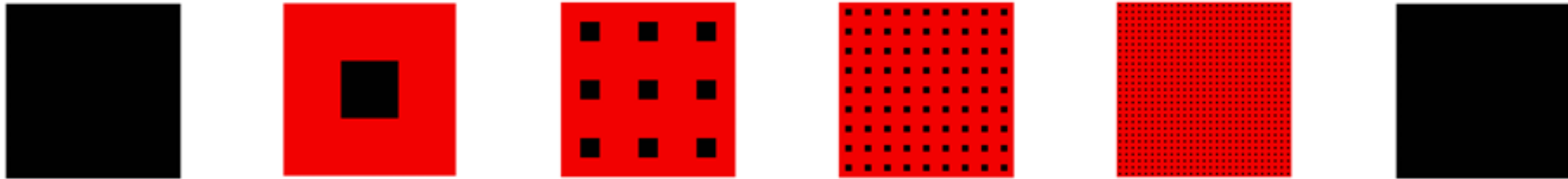


Le motif issu du carré est clairement auto-similaire : il est composé de 9 carrés 3 fois plus petits ; celui issu de l’hexagone ne l’est, aussi clairement, pas (nous avons déjà souligné ce point à propos des IFS) ; quant au motif issu du triangle, il l’est, à condition de remarquer que le triangle complet (noir et rouge) subit un demi-tour par rapport au triangle de départ (noir). Nous allons maintenant utiliser l’auto-similarité pour générer des pavages : cette auto-similarité peut être mise en œuvre comme un processus de croissance (comme dans les L-systèmes de croissance de plantes) ou comme un processus de complexification (comme dans les IFS). Appliquons ces deux principes au motif de départ du pavage par le carré ; il est composé d’un carré central entouré de 8 carrés égaux à celui-ci ; le processus de croissance consiste à *entourer* un motif (sans en modifier la taille) par 8 motifs égaux ; le processus de complexification est un IFS : il consiste à *remplacer* le motif par les 9 motifs 3 fois plus petits :

- croissance :



- complexification :

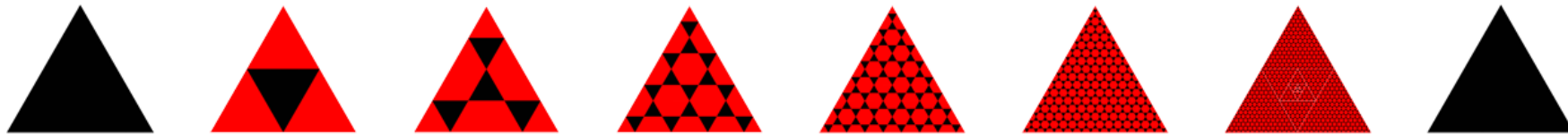


A l'échelle près, ces deux processus sont identiques dans ce cas, et mènent du carré au carré.
 Passons au triangle :

- croissance :

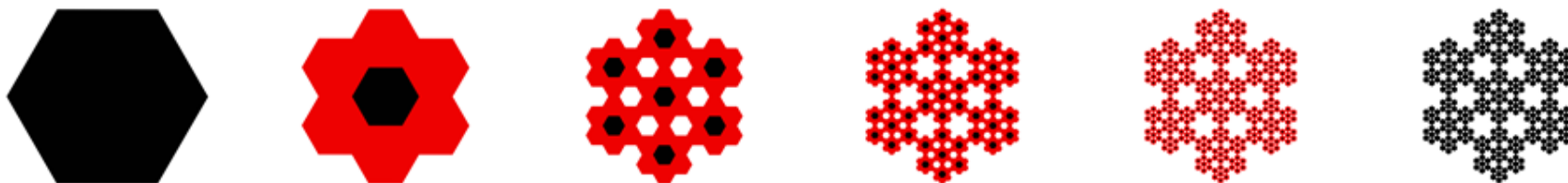


- complexification :



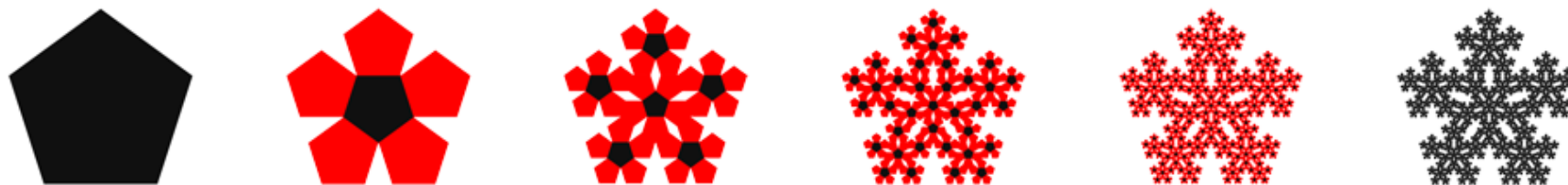
Là aussi on va du triangle au triangle, mais cette fois les deux processus ne se distinguent pas que par l'échelle mais aussi pas la réflexion, ou la rotation de 180° , qui alterne la disposition du triangle dans le processus de croissance ; cependant, à cette nuance près, les deux processus sont très proches. Désormais, nous ne montrerons que les processus de complexification, les processus de croissance étant difficiles à visualiser à cause des grandes différences de taille entre les étapes ; nous garderons cependant en mémoire que ces processus de complexification pourraient aussi être des processus de croissance.

Nous pouvons appliquer un processus de complexification semblable à l'hexagone, même si celui-ci n'est pas auto-similaire :



Cette fois, on ne va pas de l'hexagone à l'hexagone, mais de l'hexagone à une figure fractale.

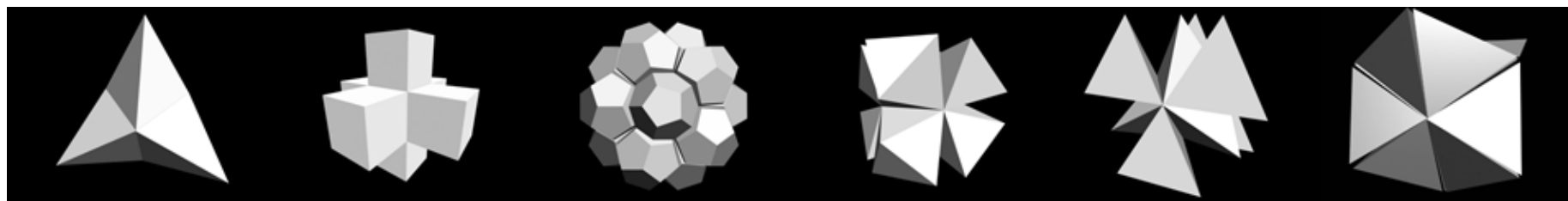
Enfin, on peut appliquer le même processus au pentagone, bien qu'il ne soit ni "paveur" ni auto-similaire :



Ce processus mène également du pentagone à une figure fractale.

On peut faire un bilan des figures auxquelles mènent ces différents pavages (**Planche 75**). Ce bilan n'est évidemment pas complet ; on peut imaginer d'autres processus de pavages incomplets. Mais cela donne une idée des formes vers lesquelles peuvent *tendre* ces types de processus.

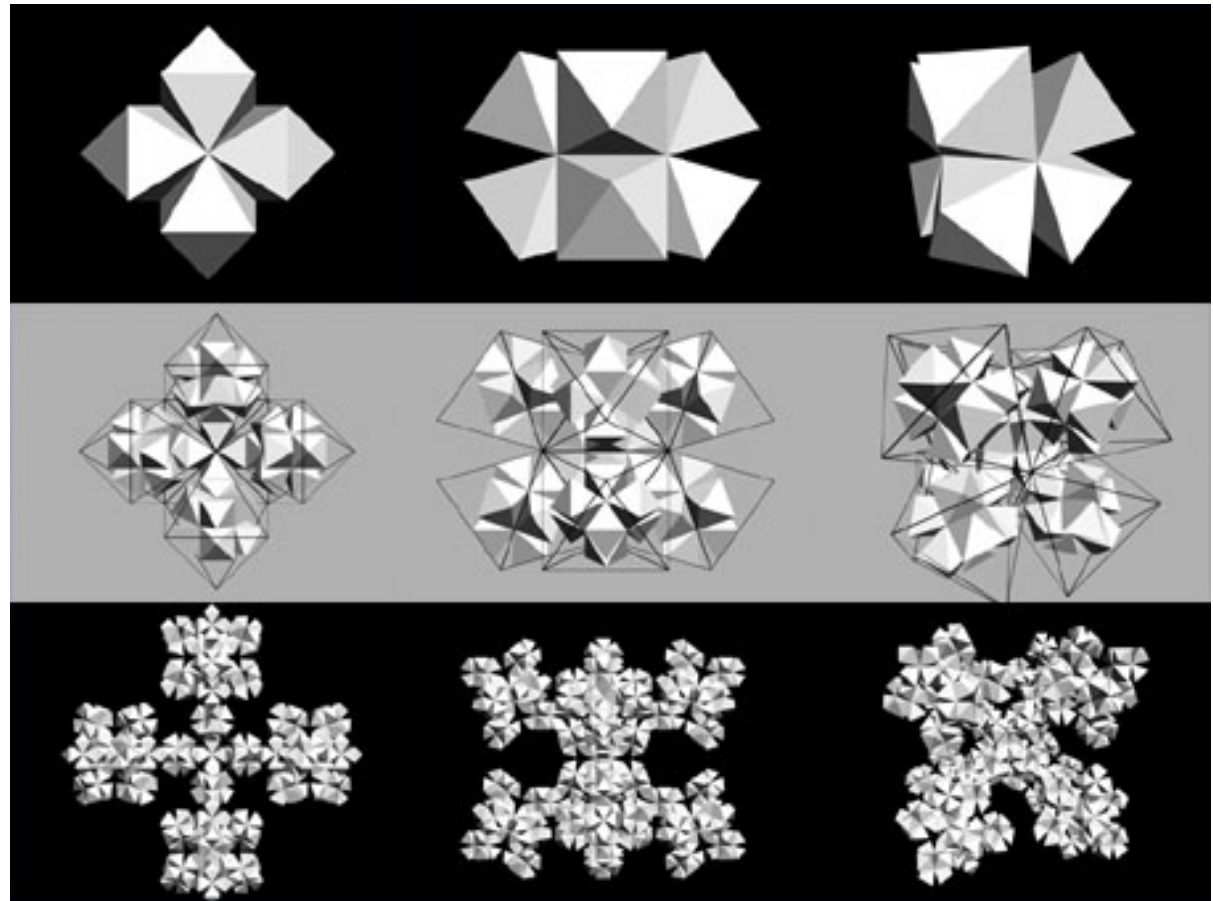
En 3D, nous ne donnerons que les pistes de départ. Le seul polyèdre avec lequel on peut paver complètement l'espace est le cube ; en effet regardons comment nous avons entouré chaque polyèdre par des polyèdres identiques pour générer les polytopes 4D ; nous avons d'abord envisagé le tétraèdre, le cube, et le dodécaèdre :



Autour du tétraèdre, nous avons pu placer 4, puis 10, et même 16 autres tétraèdres (figure 1, 5 et 6); mais ces derniers bouchent presque tout l'espace autour du tétraèdre central, sans le remplir complètement : cela exclut la possibilité de pavage complet. Autour du dodécaèdre, nous avons pu placer 12 autres dodécaèdres (figure 3), mais ceux-ci ne sont pas jointifs, et ne laissent pas la place pour en disposer d'autres : pas de pavage complet possible non plus. C'est le cas aussi pour les 8 octaèdres disposés autour d'un octaèdre (figure 4).

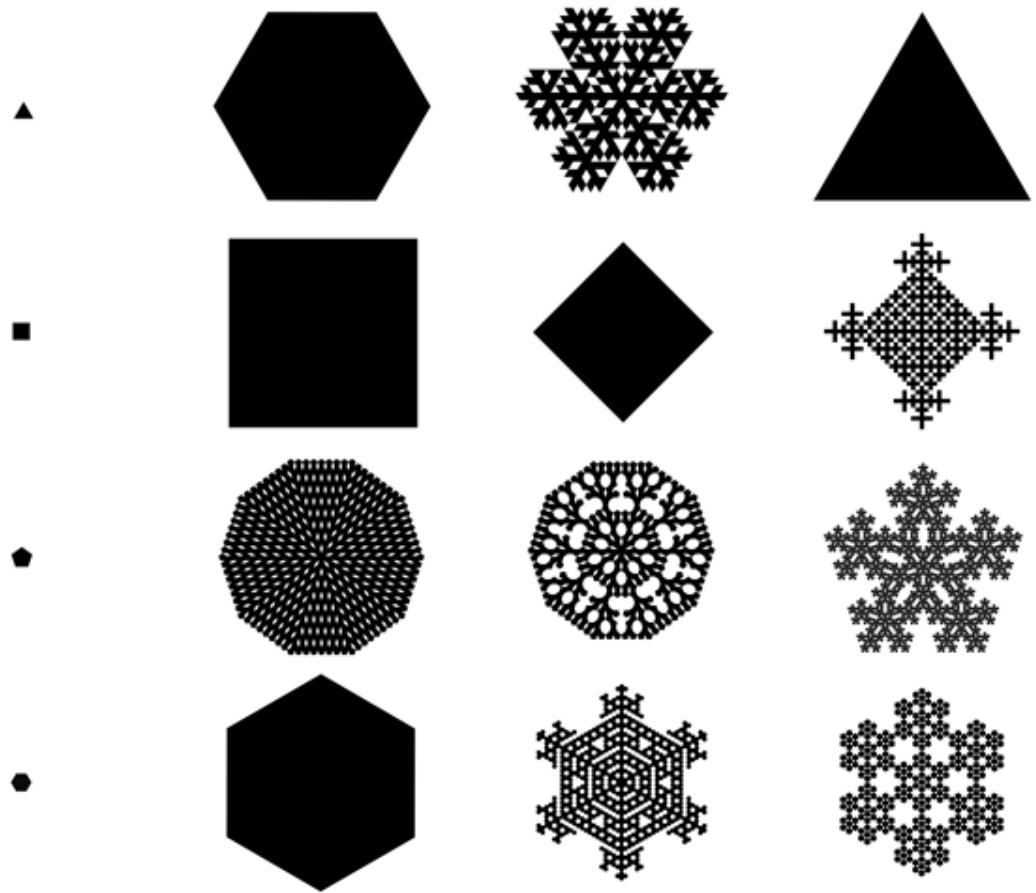
Ne reste donc que le cube : les 6 cubes collés sur les faces du premier cube laissent juste la place qu'il faut pour placer d'autres cubes et remplir complètement l'espace. Mais nous pouvons partir du cube et générer des pavages incomplets comme avec le carré.

Et nous pouvons aussi partir des autres patrons de pliage des polytopes, et générer des pavages 3D incomplets, ainsi que fractals. En voici un exemple en partant de l'octaèdre :



Ce “voyage” entre les dimensions à travers le pli et le pavage suggère des espaces intermédiaires entre la ligne et le plan, et entre le plan et l'espace 3D qui, comme le plan se génère par les trois pavages réguliers, et l'espace 3D par le pavage cubique, se généreraient par des pavages incomplets.

Bilan de pavages complets, incomplets, et
récursifs



III.3.2 Une topologie et une géométrie augmentées

La notion de dimension est une notion-clé de la topologie ; nous l'avons abondamment souligné dans les deux premières parties de ce travail. Et c'est une notion qui subit, avec les processus de générations de formes, une certaine altération ; une caractéristique des figures fractales est en effet d'avoir une dimension non-entière, alors que nous avons vu que la notion de dimension, définie par récurrence, impose qu'une dimension (ou nombre de dimensions) est fatalement un nombre entier.

Nous avons rencontré beaucoup de figures fractales, et la plupart d'entre elles, par construction, sont *auto-similaires* : rappelons que cela signifie qu'elles sont composées de **a** sous-figures **b** fois plus petites. Il faut noter que **a** est forcément un nombre entier, mais que **b** peut être un nombre réel quelconque.

En particulier, si une figure est l'attracteur d'un IFS, à partir de la décomposition d'une figure auto-similaire en parties semblables à la figure totale (qui correspond à son IFS), on peut, *à condition que ces parties soient "juste contiguës" (ou non connexes)*, calculer sa dimension d'auto-similarité de la façon suivante : si la figure comporte **a** sous-figures **b** fois plus petites, alors sa dimension est égale à :

$$d = \log a / \log b$$

Pour le triangle de Sierpinski, on a **3** sous-figures **2** fois plus petites, donc :

$$d = \log 3 / \log 2 = 1,58496\dots$$

Le triangle de Sierpinski est donc un fractal : sa dimension d'auto-similarité est non entière.

Mais cette dimension d'auto-similarité est-elle cohérente avec la notion de dimension topologique que nous avons définie dès la partie I ?

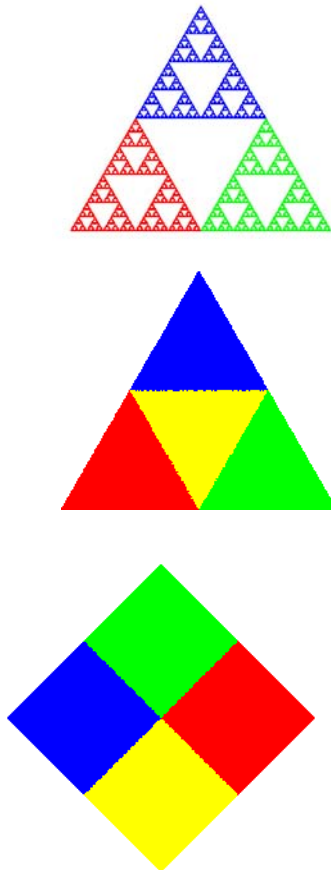
Voyons-le avec le triangle équilatéral rempli dont nous avons vu qu'il était auto-similaire, et donc nous avons défini l'IFS : le triangle équilatéral rempli est composé de **4** sous-figures **2** fois plus petites :

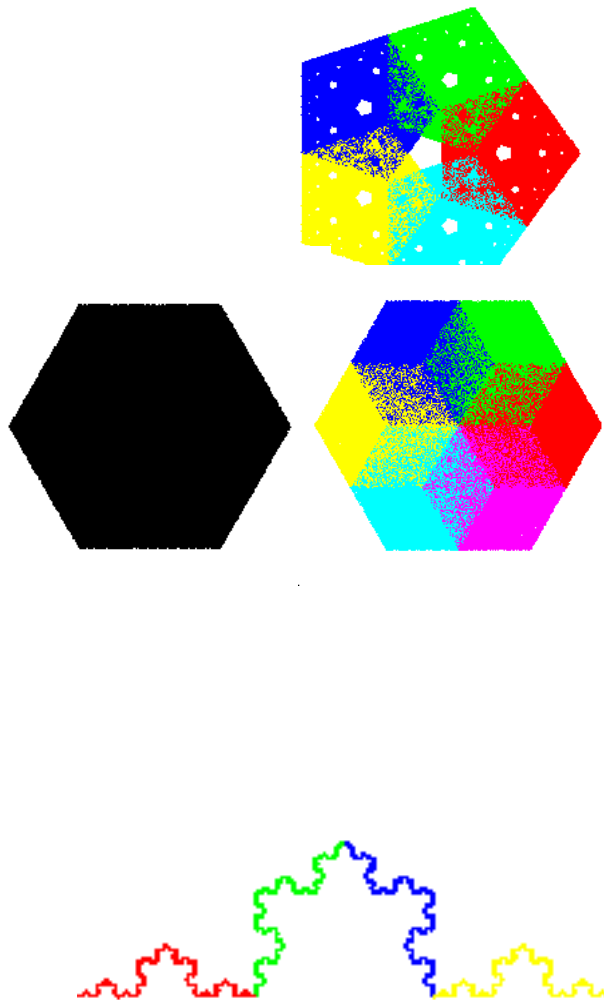
$$d = \log 4 / \log 2 = \log 2^2 / \log 2 = 2 \log 2 / \log 2 = 2$$

La dimension d'auto-similarité du triangle équilatéral rempli est égale à sa dimension topologique (c'est une portion de surface) ; les deux types de dimension sont donc cohérentes.

La condition du "juste contigu" restreint cependant cette méthode de calcul de la dimension. En explorant la transformation du "mi-chemin", et en prenant successivement 3, 4, 5, etc. points de départ, nous avons rencontré toute une famille de figures qui sont toutes attracteurs d'IFS constitués de 3, 4, 5, etc. homothéties de rapport 1/2 (voir **Planche 11**), et nous pourrions en conclure que la dimension d'auto-similarité de ces figures, qui semblent être composées, par construction de **3**, **4**, **5**, etc sous-figures **2** fois plus petites est respectivement : $\log 3 / \log 2$, $\log 4 / \log 2$, $\log 5 / \log 2$, etc. C'est vrai pour les deux premières figures : nous venons de le voir ; pour le triangle de Sierpinski et, pour le carré,

$$d = \log 4 / \log 2 = \log 2^2 / \log 2 = 2 \log 2 / \log 2 = 2$$





de la même façon que pour le triangle équilatéral rempli ; et cela mène à la même conclusion quant à la cohérence de la dimension d'auto-similarité avec la dimension topologique, puisque le carré est également une portion de plan, et donc de dimension 2

Mais ce n'est pas vrai pour les figures suivantes obtenues par la transformation du mi-chemin, par exemple celle obtenue avec 5 points de départ, parce qu'il y a superposition, recouvrement, partiels, des sous-figures, et qu'on ne peut donc pas calculer leur dimension de cette façon ; sinon on arriverait à des résultats qui ne seraient plus seulement paradoxaux, mais tout simplement absurdes... En effet :

$$\log 5 / \log 2 = 2,32193...$$

ce qui est supérieur à 2 ; et cela n'est plus du tout cohérent avec la dimension topologique...

De la même façon les valeurs suivantes, $\log 6 / \log 2 = 2,59496...$, $\log 7 / \log 2 = 2,80735$, $\log 8 / \log 2 = 3$, $\log 9 / \log 2 = 3,16922...$, $\log 10 / \log 2 = 3,32193...$, $\log 11 / \log 2 = 3,45943...$, n'ont aucun sens par rapport à la dimension topologique. Cela nous apprend quelque chose sur l'espace de dimension 2, où, de toutes façons, opèrent ces transformations itérées : le maximum de composantes auto-similaires que peut comprendre une figure dans cet espace est égal à 4 ; cela a des liens avec les possibilités de pavage, que nous aborderons un peu plus loin.

Cette question du "juste contigu" est cruciale dans des cas où l'algorithme chaotique montre un résultat qui pourrait sembler simplement auto-similaire ; par exemple pour la transformation du mi-chemin avec 6 points de départ, comme l'on voit ci-contre. On pourrait s'y laisser prendre et penser que l'hexagone est auto-similaire, composé de 6 hexagones 2 fois plus petits, ce qui n'est pas le cas, même si les hexagones 2 fois plus petits remplissent exactement l'espace de l'hexagone entier... L'algorithme qui attribue aux pixels une couleur spécifique par transformation permet de bien voir les superpositions : on peut constater que les zones de superposition correspondent, en surface, à 2 petits hexagones ; si on enlevait une "couche" de la superposition, on aurait donc $6 - 2 = 4$ hexagones 2 fois plus petits : et l'on retrouve la même formule que pour le triangle équilatéral et le carré, ce qui explique le fait que la figure complète (en noir) ne comporte pas de lacunes.

Dans le cas de ces figures, on part d'une figure de dimension 2 et on aboutit à une figure de dimension 2, ou de dimension inférieure à 2. Mais, par le pli récursif, on part de lignes (de dimension 1), et l'on obtient des "lignes" (dont nous avons vu dans la partie I qu'elles sont de dimension 1) de dimension supérieure à 1, voire égale à 2 ou 3.

Revenons à la courbe de von Koch et calculons sa dimension : nous avons vu, en la définissant comme l'attracteur d'un IFS, qu'on pouvait la considérer comme composée de 4 parties auto-similaires 3 fois plus petites ; sa dimension est donc égale à :

$$d = \log 4 / \log 3 = 1,26186...$$



Mais on peut aussi la considérer comme composée de **2** parties auto-similaires $\sqrt{3}$ fois plus petites, ce qui donne :

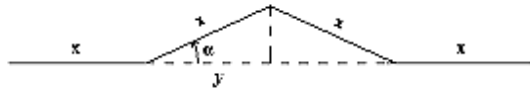
$$d = \log 2 / \log (\sqrt{3}) = \log 2 / \log 3^{1/2} = \log 2 / (1/2) \log 3 = 2 \log 2 / \log 3 \\ = \log 4 / \log 3 = 1,26186...$$

Soit le même résultat, heureusement!

Mais un segment est également auto-similaire; on peut le diviser en **2** segments **2** fois plus petits, ou en 3 segments 3 fois plus petits, ou en 4 segments 4 fois plus petits, etc... dans tous les cas, le nombre de segments est identique au “rétrécissement” subi par chaque segment et, dans tous les cas (prenons le premier), on a :

$$d = \log 2 / \log 2 = 1$$

Si l’on examine le calcul de la dimension de la courbe de von Koch, on constate que, si l’on décide qu’elle est composée de 4 parties égales, cette dimension dépend du taux de réduction de chaque partie, et en définitive est liée à l’angle de la “pointe” que l’on crée à chaque étape du processus sur chaque segment. L’angle de 60° correspond à la valeur de dimension que l’on a dite, mais on peut très bien choisir un autre angle, tout en gardant le principe de générer à chaque fois 4 segments au lieu d’1. Bien entendu, le taux de réduction n’est alors plus égal à $1/3$, et comme la dimension d’autosimilarité dépend directement, non seulement du nombre de copies réduites (qui reste égal à 4), mais de ce taux de réduction, la valeur de la dimension d’auto-similarité varie :



$$y = x \cos \alpha \\ 2x + 2y = 1 \\ 2x + 2x \cos \alpha = 1 \\ 2x (1 + \cos \alpha) = 1 \\ x = 1 / 2 (1 + \cos \alpha)$$

D’où la dimension d’autosimilarité de la courbe de von Koch généralisée:

$$d = \text{Log } 4 / \text{Log } (2 (1 + \cos \alpha))$$

On voit alors qu’en prenant pour α la valeur de 60° , on obtient bien $d = \text{Log } 4 / \text{Log } 3 = 1,26186...$; mais on peut faire varier α de 0° à 90° (au-delà, il y a recouvrement, et c’est un problème) : pour 0° , $d = \text{Log } 4 / \text{Log } 4 = 1$, et on obtient une ligne non fractale, mais pour 90° , $d = \text{Log } 4 / \text{Log } 2 = \text{Log } 2^2 / \text{Log } 2 = 2 \text{ Log } 2 / \text{Log } 2 = 2$, et on obtient une courbe paradoxale, puisqu’elle est de dimension 2. Elle remplit effectivement tout l’espace du triangle, c’est-à-dire toute une surface ; dire qu’elle la “remplit” doit être pris au sens fort : elle passe par *tous* les points de cette surface.

On peut aller continûment de la ligne non fractale (0° , $d = 1$) à la ligne qui remplit toute une portion de plan (90° , $d = 2$) ; voici quelques échantillons (**Planche 76**) :

$0^\circ : d = 1$
 $10^\circ : d = 1,00553\dots$
 $20^\circ : d = 1,02258\dots$
 $30^\circ : d = 1,05265\dots$
 $40^\circ : d = 1,09859\dots$
 $50^\circ : d = 1,1654\dots$
 $60^\circ : d = 1,26186\dots$
 $70^\circ : d = 1,40409\dots$
 $80^\circ : d = 1,6247\dots$
 $90^\circ : d = 2$

Nous avons rencontré, à l'occasion de la description des L-systèmes, des courbes qui remplissent une portion de plan, comme la courbe de von Koch pour un angle de 90° : la “courbe du dragon”, la fractale de Gosper, toutes les courbes FASS, et la courbe de Hilbert, dont une variante remplit même toute une portion d'espace (et dont la dimension est effectivement égale à 3).

Nous sommes allés continûment de la dimension 1 à la dimension 2 en faisant croître l'angle de la courbe de von Koch ; on peut aussi, remarquant que le triangle de Sierpinski est de dimension 1,58496... et le triangle rempli de dimension 2, trouver une méthode pour aller continûment de la dimension 1,58496... à la dimension 2. Nous allons l'illustrer avec une variante du triangle de Sierpinski fondée, non sur le triangle, mais sur le carré. Nous avons déjà remarqué que le carré rempli était auto-similaire, et qu'il l'était de multiples façons ; nous choisissons de le diviser en 9 carrés 3 fois plus petits ; sa dimension est donc, sans surprise :

$$d = \log 9 / \log 3 = \log 3^2 / \log 3 = 2 \log 3 / \log 3 = 2.$$

Le tapis de Sierpinski s'obtient en ôtant le carré du centre ; sa dimension est donc égale à :

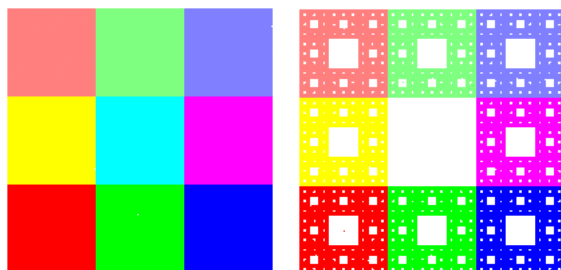
$$d = \log 8 / \log 3 = 1,89279\dots$$

On peut élaborer toute une suite de figures en faisant varier le taux d'homothétie t du carré du milieu de 0 à $1/3$; le calcul est un petit peu moins simple que dans le cas de la courbe de von Koch généralisée, parce que les 9 figures ne sont pas toutes de même taux d'homothétie ; mais on peut remarquer que l'on passe du tapis au carré en passant, pour la dimension, de $\log 8 / \log 3$ à $\log (8+1) / \log 3$; on a ajouté 1 carré 3 fois plus petit ; on peut généraliser en disant que, si l'on rajoute un carré qui est a fois plus petit, on aura :

$$d = \log (8+3/a) / \log 3$$

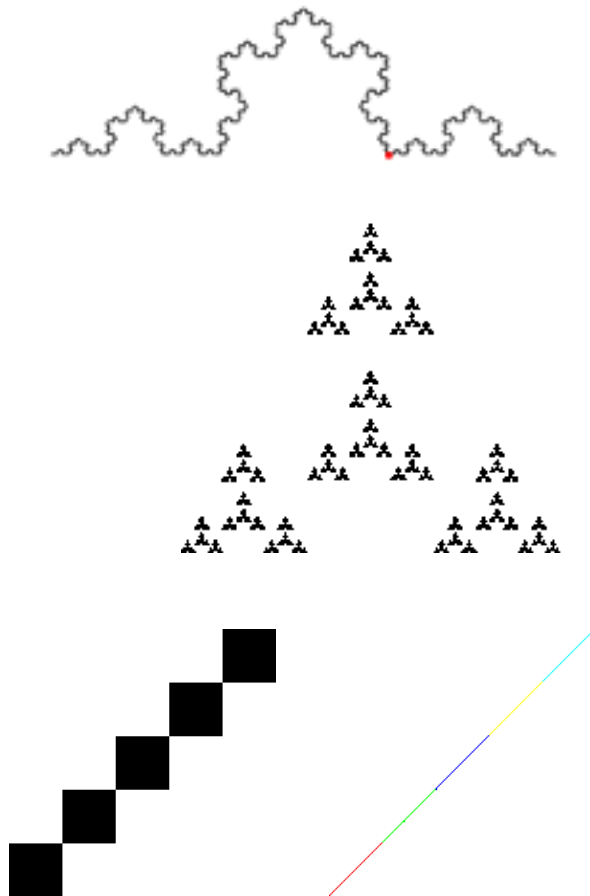
Si nous prenons des échantillons dont le taux d'homothétie varie de $1/24$ en $1/24$:

$$t = 0/24 : d = \log (8+3(0/24)) / \log 3 = 1,89279\dots$$



$$\begin{aligned}
t = 1/24 : d &= \log (8+3(1/24)) / \log 3 = 1,9069... \\
t = 2/24 : d &= \log (8+3(2/24)) / \log 3 = 1,9208... \\
t = 3/24 : d &= \log (8+3(3/24)) / \log 3 = 1,93449... \\
t = 4/24 : d &= \log (8+3(4/24)) / \log 3 = 1,94797... \\
t = 5/24 : d &= \log (8+3(5/24)) / \log 3 = 1,96126... \\
t = 6/24 : d &= \log (8+3(6/24)) / \log 3 = 1,97436... \\
t = 7/24 : d &= \log (8+3(7/24)) / \log 3 = 1,98727... \\
t = 8/24 : d &= \log (8+3(8/24)) / \log 3 = 2
\end{aligned}$$

On peut voir les résultats **Planche 77**.



Reste que la courbe de von Koch est bien, au sens topologique, une courbe de dimension 1, au sens où un point constitue une coupure (une frontière) pour cette courbe ; par exemple le point marqué en rouge ci-contre : même si l'on poursuit le processus de construction de la courbe jusqu'à l'infini, il faudra bien passer par ce point...

On doit relativiser d'ailleurs l'intérêt de la dimension fractale pour *caractériser* une figure ; en effet, on peut très bien imaginer des processus (des IFS, par exemple) qui permettent de générer des figures qui seront, comme la courbe de von Koch, composées de 4 figures 3 fois plus petites, et donc de même dimension fractale $\log 4 / \log 3$; une variante du triangle de Sierpinski nous en fournit un exemple (voir ci-contre) : on voit que cette figure (qui n'est pas topologiquement une courbe) est fort différente de la courbe de von Koch ! Les deux figures ont pourtant la même dimension d'auto-similarité...

Nous avons rencontré des figures de dimension égale et qui étaient très différentes, des "courbes" de dimension 2, ou même 3, des figures logiquement surfaciques et de dimension 2 ; mais on peut aussi fabriquer des "fractals", qui ont tout l'air de fractals mais qui sont de dimension 1. Pour cela, considérons le carré, et ses diverses décompositions auto-similaires : on peut découper un carré en 3x3 carrés, ou en 4x4 carrés, en 5x5 carrés, etc ; les petits carrés sont, respectivement, 3 fois, 4 fois, 5 fois, etc., plus petits que le grand. Si l'on prend, à chaque fois, respectivement 3, 4, 5, etc., petits carrés pour définir un IFS, la dimension d'auto-similarité de la figure sera de $\log 3 / \log 3$, $\log 4 / \log 4$, $\log 5 / \log 5$, etc. c'est-à-dire égale à 1 ; on en voit quelques exemples **Planche 78** . Cela s'explique fort bien puisqu'un cas particulier consiste à prendre les n petits carrés en diagonale, et que l'on aboutit bien à un segment, la diagonale du grand carré. Toujours est-il que le "calcul" de la dimension ne nous apprend pas grand chose sur le caractère de telle ou telle figure dans ce cas.

Variantes de la courbe de von Koch

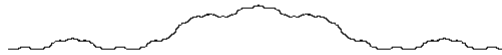
0° : $d = 1$

10° : $d = 1,00553\dots$



20° : $d = 1,02258\dots$

30° : $d = 1,05265\dots$



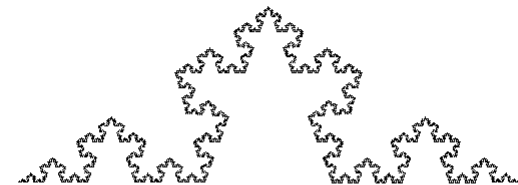
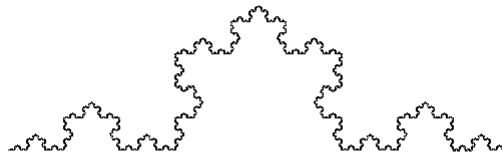
40° : $d = 1,09859\dots$

50° : $d = 1,1654\dots$



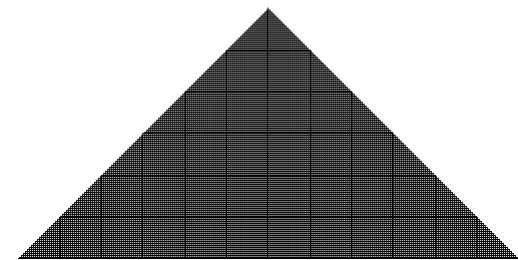
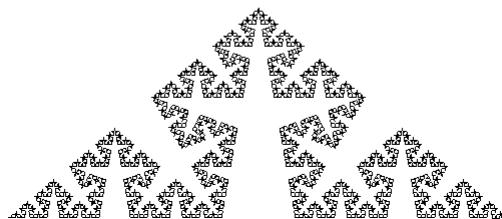
60° : $d = 1,26186\dots$

70° : $d = 1,40409\dots$



80° : $d = 1,6247\dots$

90° : $d = 2$



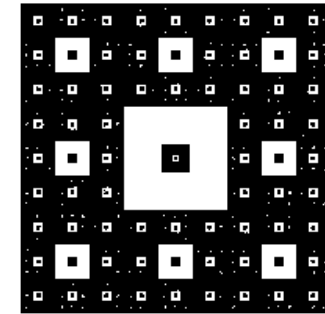
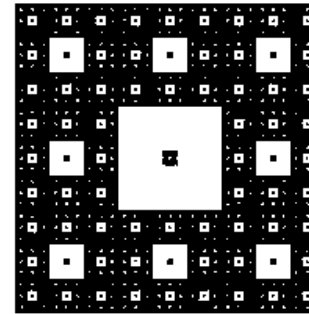
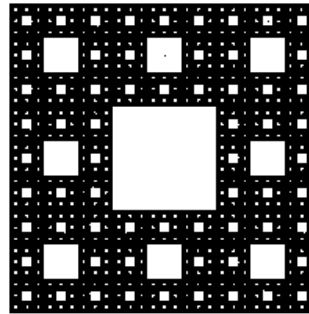
Variantes du tapis de Sierpinski

t est le taux d'homothétie du carré du centre

$t = 0/24 : d = 1,89279\dots$

$t = 1/24 : d = 1,9069\dots$

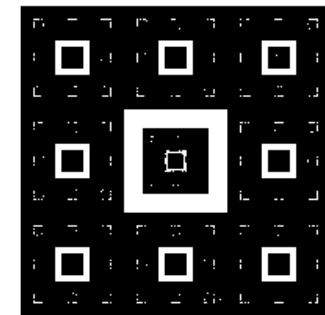
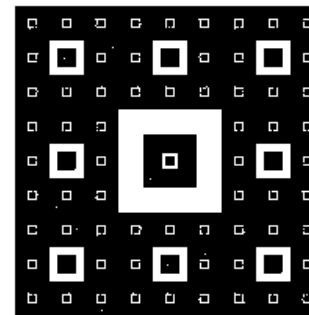
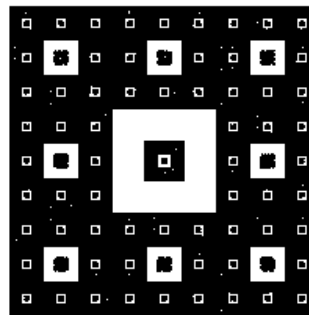
$t = 2/24 : d = 1,9208\dots$



$t = 3/24 : d = 1,93449\dots$

$t = 4/24 : d = 1,94797\dots$

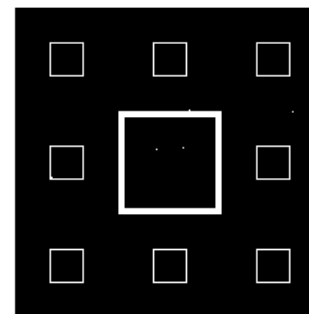
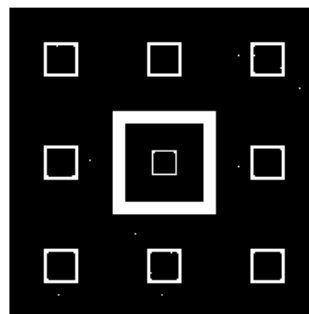
$t = 5/24 : d = 1,96126\dots$



$t = 6/24 : d = 1,97436\dots$

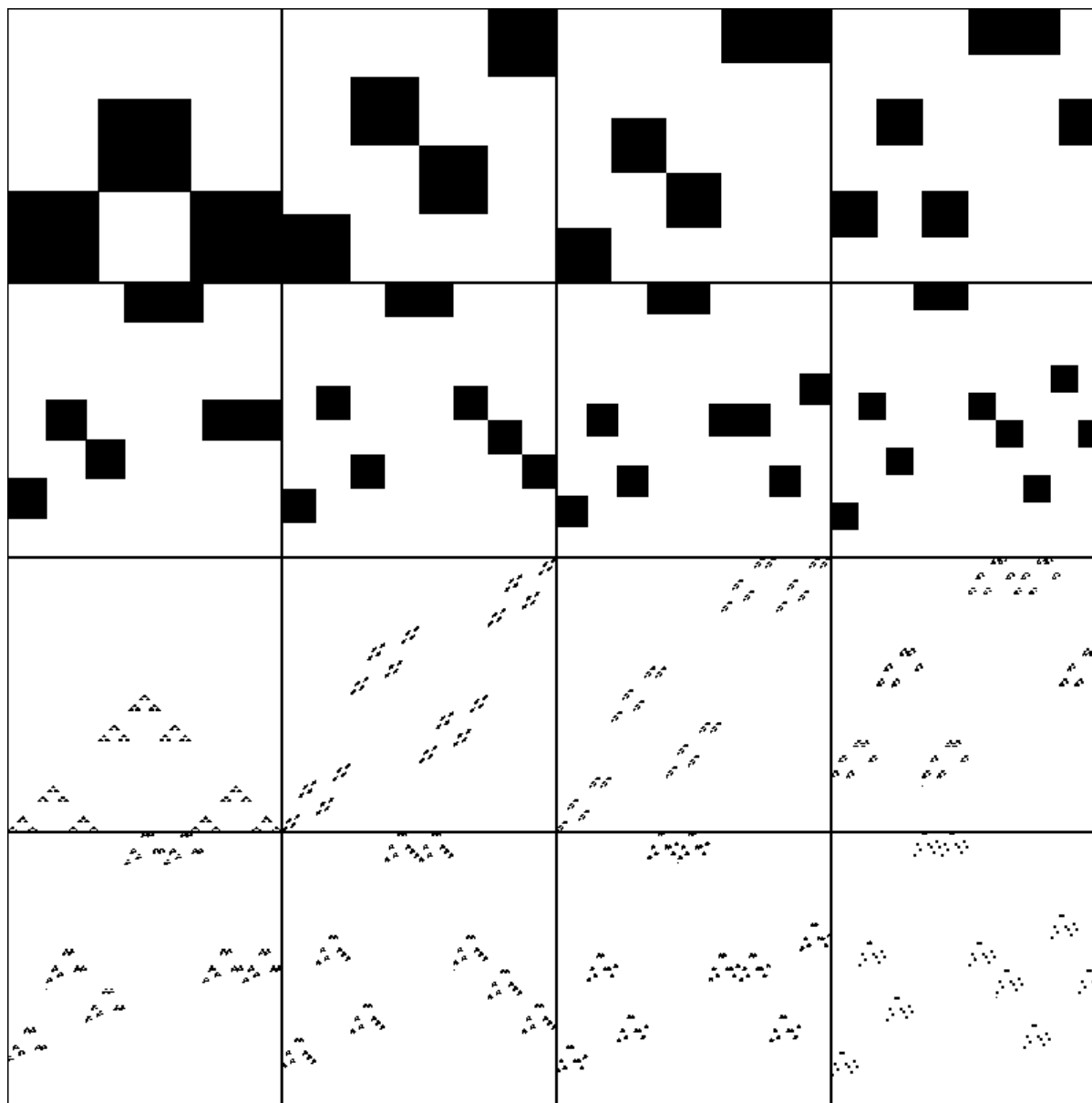
$t = 7/24 : d = 1,98727\dots$

$t = 8/24 : d = 2$



“tapis” généralisé de dimension 1

algorithme déterministe (étape 1)



algorithme chaotique (attracteur de l'IFS)

La dimension est un indicateur nécessaire, et permet de distinguer des figures d'une même famille ; mais elle est insuffisante en soi.

Mesure de la dimension : box-counting et structured walk

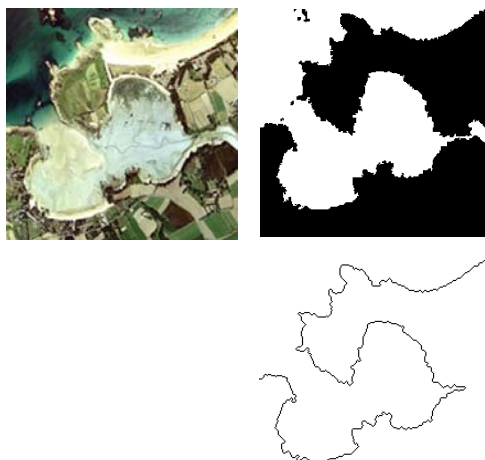
La question de la mesure de la dimension fractale ne sera pas traitée de manière très approfondie : cela demanderait une étude en soi, et nous ne pouvons l'aborder que rapidement dans le cadre de ce travail. Nous voulons simplement mettre l'accent sur le caractère analogique aux processus de génération de formes, et tout particulièrement au pli récursif et au pavage récursif, de ces méthodes. Ces méthodes fournissent des résultats chiffrés, que l'on peut aussi convertir en graphiques, mais surtout elles produisent des suites de figures, comme les processus de génération de formes, que l'on peut utiliser de manière qualitative pour comprendre la nature d'une forme, et imaginer des processus qui généreraient des figures similaires.

Il existe deux méthodes principales de mesure de la dimension fractale d'une figure quelconque : le "structured walk" et le "box-counting" ; si l'on est allergique à l'anglais, on peut traduire ces expressions mot à mot par "marche structurée" et "comptage de boîtes".

Le structured walk est analogue au pli récursif tel qu'il est mis en œuvre dans la courbe de von Koch ; cette méthode s'applique tout particulièrement aux lignes, par exemple les lignes ou traits de côtes. C'est d'ailleurs à une telle entité, la côte de la Bretagne plus précisément, que Benoît Mandelbrot (qui a trouvé son inspiration au moins autant dans la contemplation des cartes de géographie que dans les mathématiques elle-mêmes) se réfère pour expliquer cette méthode ; les côtes peuvent se distinguer et se caractériser, du moins théoriquement, à l'aide d'une telle mesure.

Nous illustrons le principe de cette méthode à l'aide d'un exemple que nous avons développé concernant une portion de la côte d'Emeraude : le secteur de l'île Besnard (dont il faut tout de suite préciser que, malgré son appellation usuelle, il ne s'agit pas d'une île, mais d'une presqu'île, reliée au continent par un tombolo). A partir de la photo aérienne numérique, nous avons déterminé les pixels appartenant à la terre (en noir) et ceux appartenant à la mer (en blanc). Cette étape pose d'ailleurs en elle-même un certain nombre de problèmes de deux type : les premiers tiennent à l'ambiguïté de lecture des pixels de la photo aérienne, les seconds à la volatilité (temporelle et spatiale) de la notion même de limite entre la terre et la mer.

Le trait de côte, dans notre démarche, est l'ensemble des pixels qui sont à la frontière de la zone noire et de la zone blanche.



La marche structurée consiste à mesurer cette ligne en utilisant une unité de mesure de plus en plus petite ; dans la pratique, cette unité est divisée par 2 à chaque étape ; on commence par une unité de 256, puis 128, etc. :



On trouve une suite de longueurs, en fonction de l'unité de mesure :

unité de mesure	256	128	64	32	16	8	4	2
longueur	230	478	612	701	738	812	889	951

Pour comprendre comment déduire la dimension de la ligne à partir de ces valeurs, reportons-nous à la courbe de von Koch, et envisageons les étapes de sa construction comme les étapes d'une mesure de sa longueur ; passer du segment à l'étape 1 de la construction, c'est comme mesurer la courbe à l'aide d'une unité de mesure 3 fois plus petite ; nous trouvons une longueur de 4, au lieu de 1 à l'étape initiale ; et la dimension était égale à $\log 4 / \log 3$. On déterminera donc une suite de valeurs d en divisant la longueur à chaque étape par la longueur à l'étape précédente, en prenant le logarithme de cette valeur, et en divisant ce logarithme par le logarithme de 2 (puisque les unités de mesure sont à chaque fois divisées par 2) :

unité de mesure	256	128	64	32	16	8	4	2
longueur	230	478	612	701	738	812	889	951
nb d'unités de mesure	0,9	3,7	9,6	21,9	46,1	101,6	222,1	475,4
		4,15	2,56	2,29	2,10	2,20	2,19	2,14
d		2,05	1,36	1,20	1,07	1,14	1,13	1,10

On voit que ces valeurs fluctuent ; si on exclut la première, qui n'est guère significative, on peut oser l'hypothèse de prendre la moyenne des autres valeurs ; on obtient alors 1,13. Si on voulait aller plus

loin dans ce type de mesure, il faudrait envisager la notion de multi-fractalité ; ce que nous n'aborderons pas.

L'autre méthode, le box-counting, est plus proche de la construction du triangle, ou encore mieux, du tapis de Sierpinski. Elle consiste à poser sur l'image un quadrillage, un pavage, de carreaux de plus en plus petits, et de compter les carreaux où il y a une portion de la figure mesurée. Appliquée à la même ligne de côte, cela donne (le bitmap fait 256x256 pixels, les carreaux font 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1 pixels de côté) :



Le calcul va maintenant porter sur le rapport du nombre de carreaux à une étape sur le nombre de carreaux à l'étape précédente ; le logarithme de ce rapport, divisé toujours par le logarithme de 2 (puisque les carreaux sont divisés par 2 à chaque étape), nous donnera une suite de valeurs de dimensions :

côté du carreau	128	64	32	16	8	4	2	1
nb d'unités de mesure	4	14	40	91	199	415	894	1427
		3,50	2,86	2,28	2,19	2,09	2,01	1,71
d		2,64	1,51	1,19	1,13	1,06	1,01	0,77

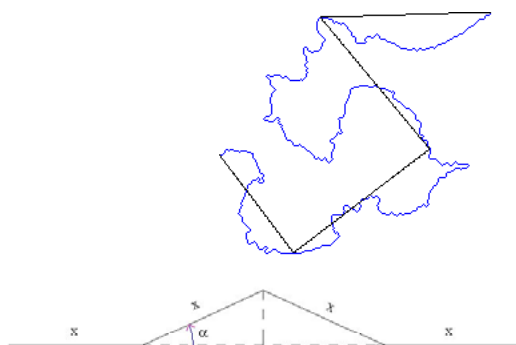
Si on fait la moyenne les valeurs significatives (en gras), on trouve 1,18.

Cette valeur n'est pas absolument égale à celle trouvée par l'autre méthode ; mais, encore une fois, nous n'attachons pas une valeur trop forte aux résultats chiffrés de ces mesures (d'autant qu'elles portent sur des bitmaps de petite taille, ce qui perturbe les évaluations) ; c'est plutôt le résultat visuel, la suite d'images produite, qui nous intéresse, et la suggestion de processus possibles de génération de formes (voir plus bas, dans la partie III.3.3)

III.3.3 Thèmes et variations

Nous proposons pour finir quelques expérimentations relevant, du moins apparemment, de la géomorphologie et de l'architecture. Dans ce dernier cas, nous avons préféré l'expression "expérimentations formelles" ; en effet nous n'avons jamais voulu prétendre que l'architecture se réduisait à la forme. Cependant, ces expérimentations formelles pourraient être s'intégrer à une démarche de projet complète, en fonction d'un programme déterminé.

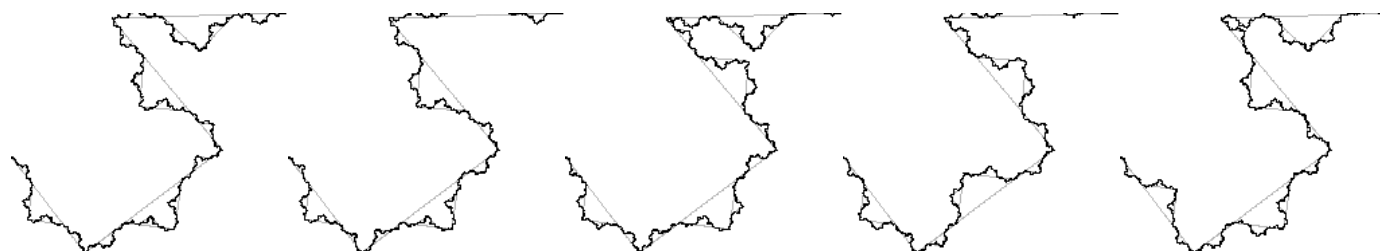
Pli : lignes de côte, relief, silhouettes



Nous avons relevé, en cherchant à mesurer la dimension de la ligne de côte de l'île Besnard, que ces processus de mesure pouvaient suggérer des processus génératifs. En nous référant aux résultats de la mesure par structured walk, nous avons fabriqué quelques “fausses” côtes à presqu'île, “pliant” une ligne, d'abord suivant une variante aléatoire de la courbe de von Koch, puis avec une variante aléatoire du “déplacement du point-milieu”. Pour rendre le résultat plus convaincant, nous ne sommes pas partis d'un segment, mais du pli généré à la première étape de la mesure.

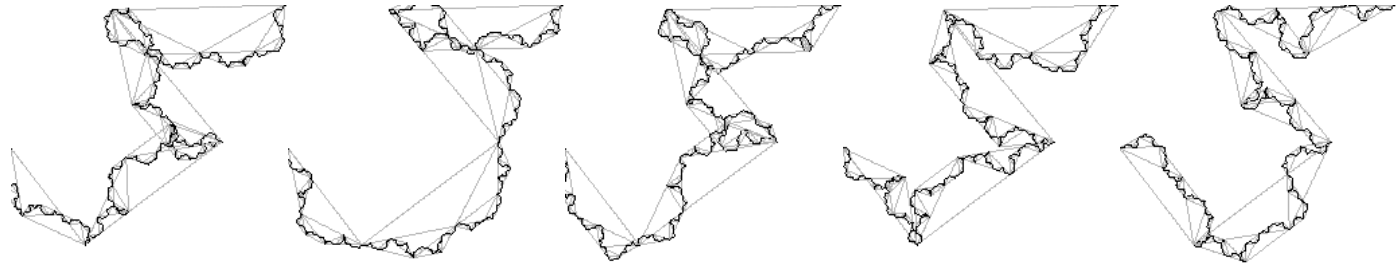
Dans les deux cas, la variante choisie correspond à la dimension fractale évaluée par la mesure. Pour la courbe de von Koch, on a vu que la dimension était liée à l'angle que fait la “pointe” formée sur chaque segment ; l'angle correspond à une dimension de 1,13 est égal à 45° .

Pour rendre aléatoire la procédure, on tire au sort de quel côté se fera la “pointe” à chaque étape ; voici quelques résultats de cette première méthode :



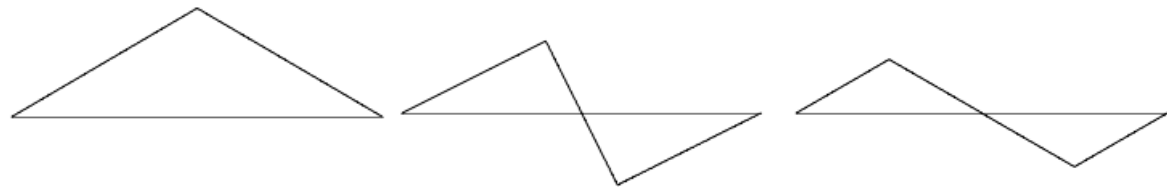
La deuxième méthode est un “pli” encore plus simple, puisqu'il consiste à déplacer (perpendiculairement) le milieu d'un segment. La dimension est également liée à l'angle α ; pour une dimension de 1,13, α doit être égal à 28° .

L'aléatoire est produit comme pour la courbe de von Koch, en tirant au sort le côté vers lequel le pli se fera ; voici quelques résultats :

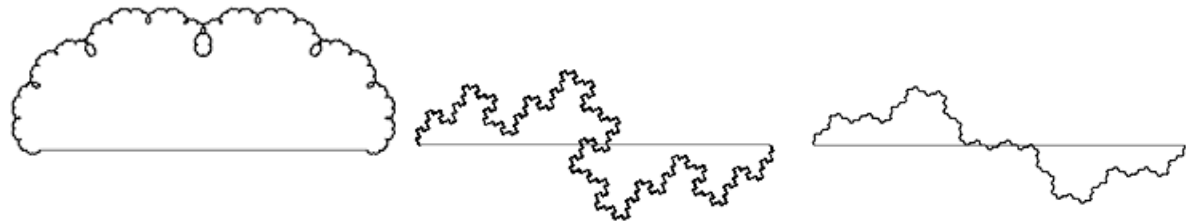


On a laissé dans les deux cas les traces des étapes de la construction ; on voit que la variante de la courbe de von Koch est plus “raide”, l’allure générale de la courbe n’est que peu affectée par la complexification, et la symétrie sous-jacente du procédé reste souvent visible. La variante du déplacement du point-milieu est plus convaincante ; la complexification se poursuit plus loin, la symétrie du pli de base est peu sensible ; il apparaît des pointes, des presqu’îles, et aussi des baies, assez ressemblantes à ce qui peut exister en réalité.

Pourtant, rappelons-le, la dimension des courbes produites par les deux méthodes est en principe la même. Cette petite expérimentation fait partie d’une étude systématique du pli que nous avons engagée ; on peut en effet plier un segment d’un grand nombre de façons différentes, selon en particulier le nombre de segments selon lequel on découpe le segment de départ, et l’angle, ou les angles qui produisent le pli. Voici quelques schémas de base, d’ordre 2, 3 et 4 :



Si l’on poursuit le processus (resp. 10, 8 et 6 itérations), on obtient des courbes d’allures assez différentes :



Le déplacement du point-milieu s'effectue, comme on l'a dit, perpendiculairement au segment dont il est issu. Nous allons maintenant examiner un autre type de pli, que les anglo-saxons nomment souvent, bizarrement, en français dans le texte, "blanc-manger" ; ce mot évoque sans doute pour eux quelque chose de plus précis que pour nous... En fait il s'agit d'un dessert à base de gélatine, dont la forme est surtout due au moule dans lequel on le prépare (sans cuisson).

Quoi qu'il en soit, ce pli ressemble beaucoup au déplacement du point-milieu, sauf que l'on déplace le point toujours *dans la même direction* (mais pas forcément le même sens), c'est-à-dire verticalement si le segment de départ est horizontal, ce que l'on choisit généralement ; bien sûr, le procédé est fractal, ce qui signifie que le déplacement est proportionnel à la taille du segment à partir duquel on l'effectue.

Dans sa forme régulière, ce pli a une première étape identique à celle du déplacement du point-milieu précédente, mais si l'on poursuit l'itération l'allure de la courbe est assez différente et peut évoquer, en effet, le dessert montré ci-contre ; ci-dessous étapes 1 :



Ce pli peut être interprété comme attracteur d'un IFS composé de deux transvections :

blanc-manger	a	b	c	d	translation x	translation y
w1	0,5	0	0,5	0,5	-0,5	0
w2	0,5	0	-0,5	0,5	0,5	0

Mis en œuvre avec l'algorithme déterministe, cet IFS donne le résultat suivant :

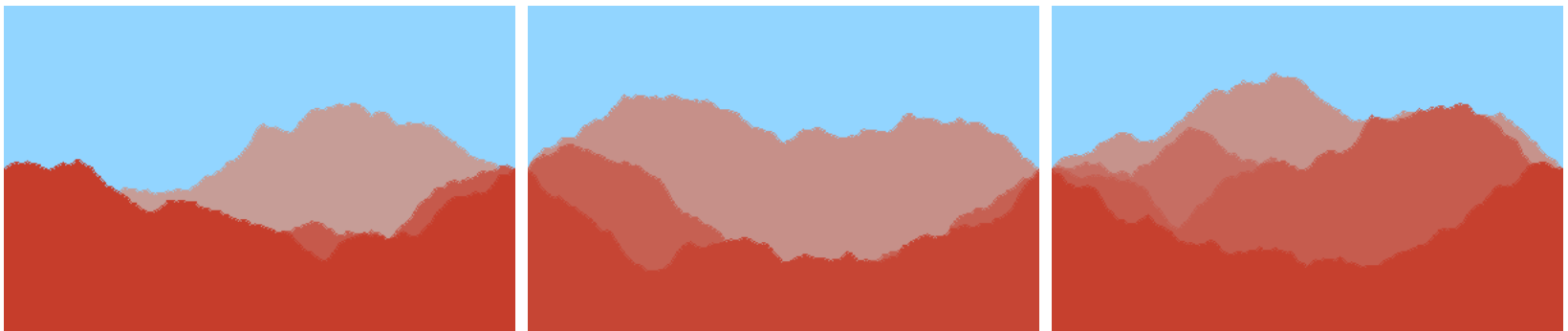


Cette allure n'évoque pas seulement un dessert léger, mais aussi, et surtout, plusieurs silhouettes de formes naturelles, de montagnes en particulier.

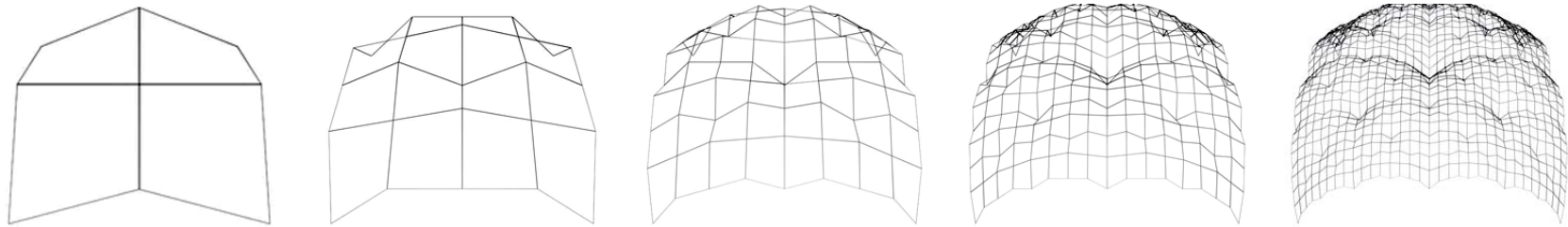
En introduisant de l'aléatoire dans l'ampleur du déplacement, qui peut être négatif ou positif, on peut obtenir des lignes qui ressemblent à ceci :



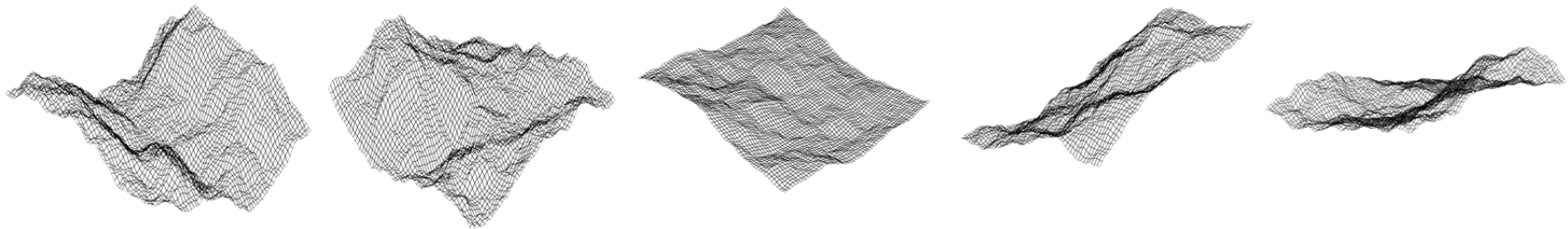
En superposant de telles lignes, et en remplissant les surfaces qu'elles délimitent, on peut obtenir des "paysages" montagneux assez convaincants :



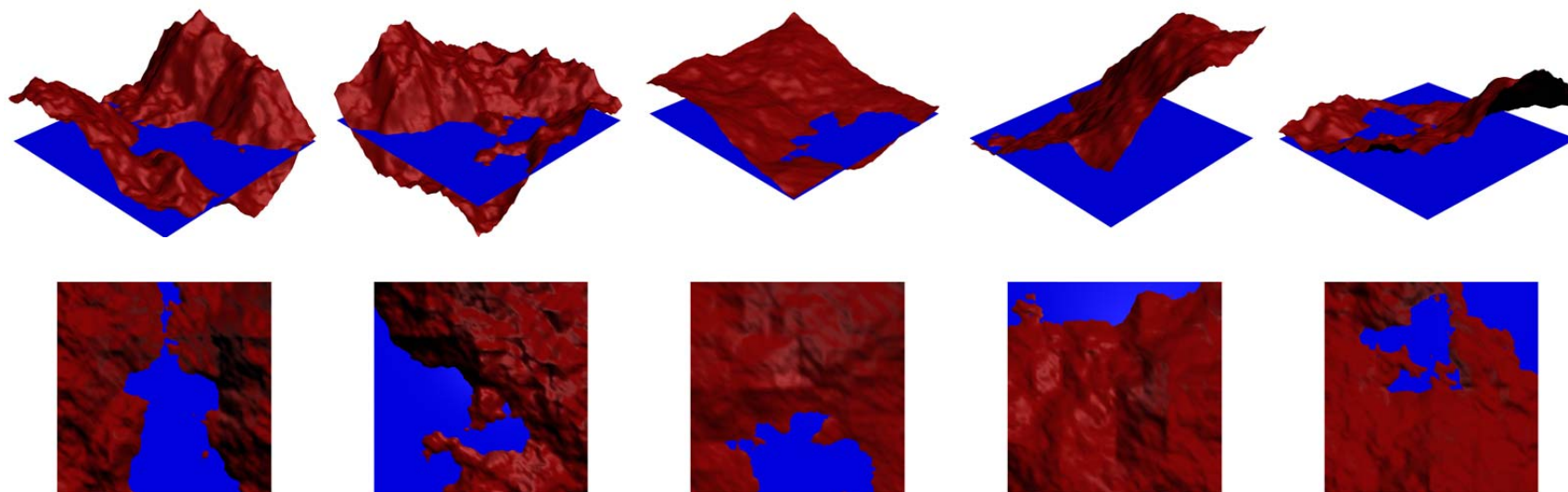
C'est d'ailleurs un processus très analogue, mais appliqué à maillage, qui permet le plus facilement de générer des "reliefs" fractals. Il consiste à considérer maillage carré, de le diviser en 4 carrés 2 fois plus petits, et de déplacer verticalement les sommets (au sens de vertex) des 4 carrés ; puis on divise les petits carrés, et on effectue sur les sommets des carrés obtenus la même opération. Si l'on n'introduit pas d'aléatoire, le résultat du processus est le suivant :



Avec l'introduction d'aléatoire dans l'ampleur, négative ou positive, du déplacement vertical, on obtient toutes sortes de surfaces, par exemple :



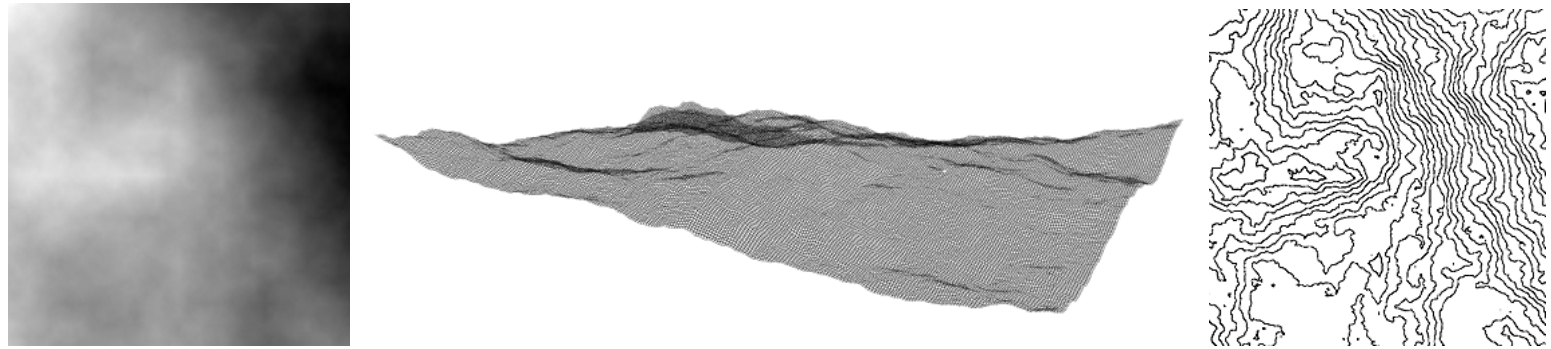
En affectant le maillage d'une couleur, et en introduisant un plan horizontal dont on fixera la hauteur en fonction du "relief", on obtient diverses configurations pouvant évoquer des littoraux :



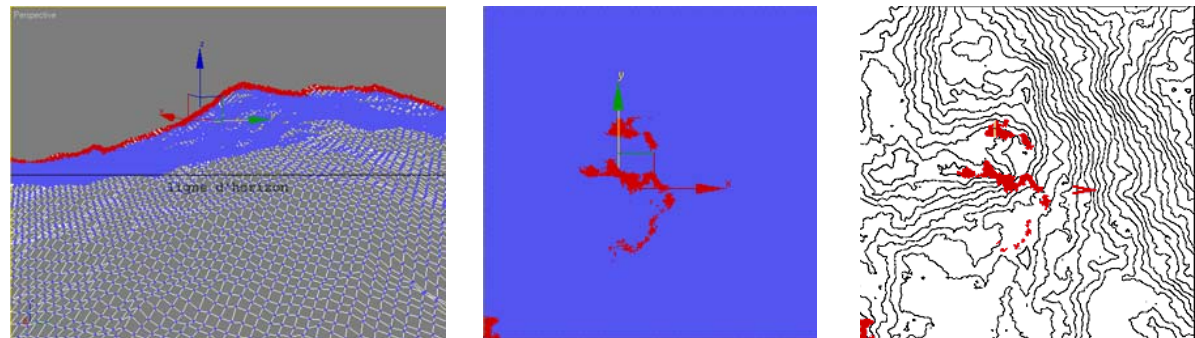
Si on anime la translation verticale du “plan d’eau”, on voit apparaître et disparaître îles, presqu’îles, abers ou rias, lagunes, etc...

En partant d’un tel relief fictif, nous avons mené une expérimentation sur la perception des lignes de crête subjectives : i. e., celles qui sont perçues d’un point de vue particulier, et qui ne sont pas forcément les lignes de crête objectives¹ du relief. Pour cela, nous avons d’abord produit un relief de la manière décrite précédemment ; ici, on l’a représenté en niveaux de gris correspondant à l’altitude, en perspective filaire, et en courbes de niveaux :

¹ la définition des lignes de crête propres à un relief, que nous n’aborderons pas, n’est pas sans poser un certain nombre de problèmes théoriques que l’on trouvera exposés à l’adresse suivante : <http://www.mathcurve.com/courbes3d/topographic/faite.shtml>



Nous ne donnerons pas le détail de cette expérimentation, nous nous contenterons d'en donner le principe : à partir d'une perspective générée selon un point de vue particulier, on sélectionne les sommets (au sens de vertex) du maillage qui constituent la ligne de crête subjective (la ligne qui se détache sur le ciel ("skyline"), à ne pas confondre avec la ligne d'horizon) ; cette sélection apparaît dans les autres fenêtres de visualisation, en particulier en vue de dessus :



Dispersion

Les expérimentations portant la dispersion sont nées d'une interrogation sur les processus à l'œuvre en géomorphologie lorsque des fluides en mouvement (l'air, l'eau : les vents, les courants) déplacent et accumulent des particules. Nous n'avons pas vraiment cherché à simuler ces phénomènes, mais essayé de voir si des automates cellulaires dynamiques, fondés eux aussi sur le déplacement de cellules, pouvaient générer des formes que nous pourrions rapprocher de formes naturelles générées par le vent ou les courants.

Nous avons exposé plus haut un certain nombre d'automates cellulaires dynamiques ; nous allons ici revenir sur le modèle que nous avons intitulé *prolifération*. Rappelons que dans ce modèle, on part d'une cellule unique, et que chaque nouvelle cellule effectue une randonnée à partir de ce centre, et s'arrête dès qu'elle atteint la frontière de l'amas en formation ; la croissance produite est globalement ronde :



Nous avons extrapolé à partir de ce modèle, en considérant l'ensemble des cellules de l'amas comme un stock ordonné de cellules (dans l'ordre de leur apparition), et en faisant démarrer l'errance des nouvelles cellules à partir d'une cellule quelconque de ce stock. C'est cette variante du modèle que nous avons mise en œuvre dans l'expérimentation que nous avons intitulée "lutte pour l'espace".

Cette fois, nous allons partir d'un état donné du modèle de prolifération, et modifier les règles en cours de route : à partir d'un certain moment, une cellule est supprimée pour toute nouvelle cellule qui apparaît (l'apparition de cellule suit les mêmes règles que précédemment) ; le modèle n'est plus un modèle de croissance puisque le nombre de cellules reste constant.

On a plusieurs possibilités pour décider quelle cellule disparaît et à partir de quelle cellule se fait la randonnée de la nouvelle cellule ; le stock de cellules étant ordonné suivant leur ordre d'apparition, on peut parler de "plus vieille" cellule ; nous avons donc essayé trois possibilités pour l'apparition et la disparition de cellules (stock de 1000 cellules ; étapes : 200, 500, 1000, 1500, 2000) :

- élimination de la plus vieille cellule et randonnée à partir de cette cellule :



- élimination d'une cellule quelconque et randonnée à partir de cette cellule :

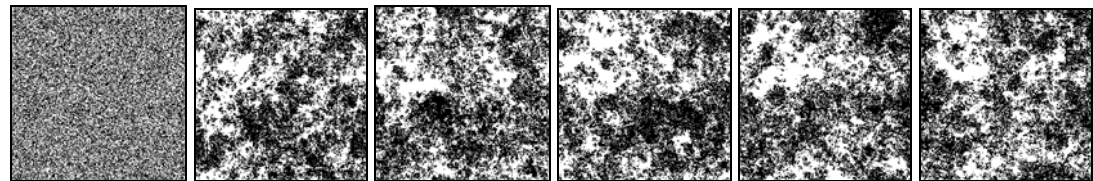


- élimination de la plus vieille cellule et randonnée à partir d'une cellule quelconque :

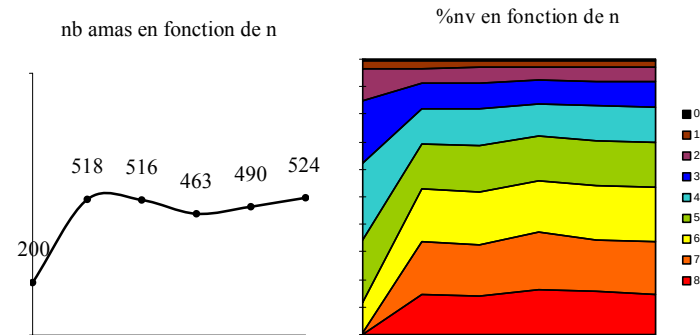


Les deux premiers choix simulent une sorte d'aérosol ; nous avons estimé que la troisième variante, que nous appellerons modèle de *dispersion*, offrait plus de potentiel pour une exploration plus approfondie.

On peut d'ailleurs très bien partir d'une configuration autre que celle issue du modèle de prolifération ; appliquée à une distribution aléatoire de pixels de densité donnée, le modèle réarrange les cellules de la façon suivante (densité 0,5 ; étapes : 0, 100000, 200000, 300000, 400000, 500000 ; topologie torique) :



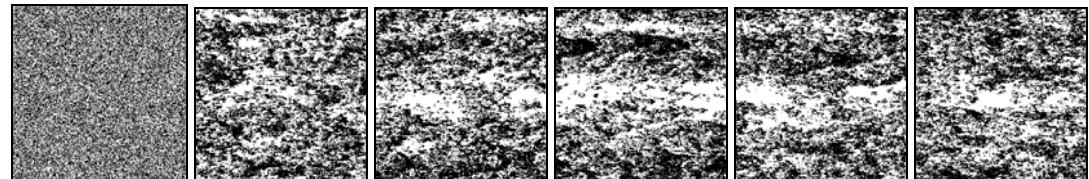
Il y a un constant réarrangement des cellules, mais la configuration conserve des caractéristiques qui, visuellement, semblent stables. Nous avons mis en place un certain nombre d'outils de mesure pour quantifier cette appréciation qualitative : entre autres, le nombre d'amas distincts, et le nombre de voisins par cellule :



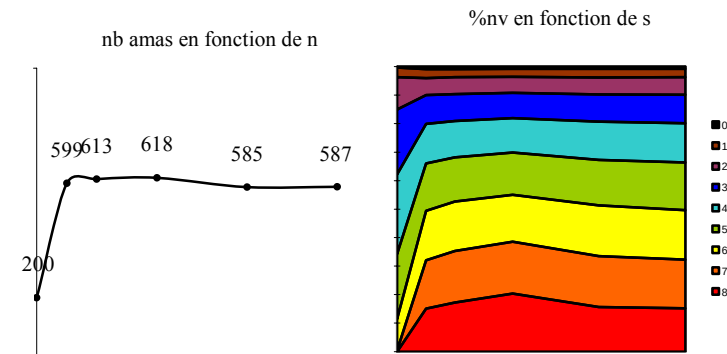
Le graphique du nombre de voisins indique en rouge le pourcentage de cellules qui ont 8 voisins, en orange le pourcentage de cellules ayant 7 voisins, etc. On constate bien l'installation d'une stabilité dans ces indicateurs.

Dans tous les automates cellulaires dynamiques que nous avons exposés, le déplacement des cellules est une randonnée, ou mouvement brownien, équiprobable : la cellule se déplace sur n'importe laquelle des cases qui lui sont voisines. Maintenant, nous allons rendre ce déplacement "directionnel" : une direction sera privilégiée, c'est-à-dire que la probabilité d'aller sur toutes les cases ne sera pas la même. Si nous appelons les quatre directions possibles (c'est le voisinage de von Neumann qui est utilisé pour le déplacement) ouest, nord, est et sud, nous donnerons une probabilité 5 l'est, une probabilité 1 au sud et au nord, et une probabilité 0 à l'ouest.

La dispersion "directionnelle" appliquée à la distribution aléatoire donne les résultats suivants (densité 0,5 ; étapes : 0, 100000, 200000, 300000, 400000, 500000 ; topologie torique) :



Et les indicateurs :



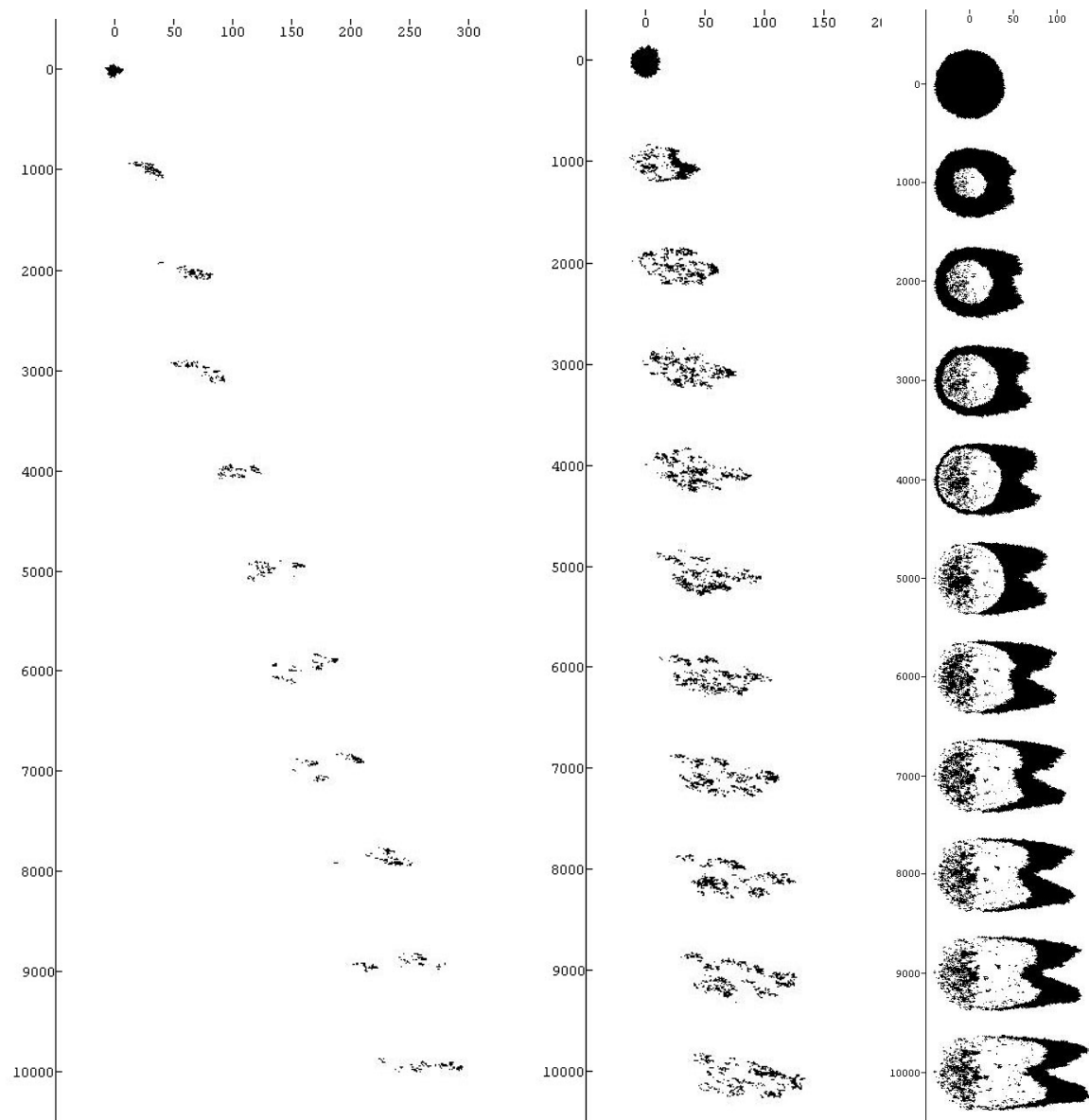
Le nombre d'amas a tendance à être un peu plus élevé, mais d'un autre côté les cellules isolées sont moins nombreuses².

Nous avons également repris la dispersion de stocks générés par prolifération, et introduit une direction privilégiée. Cette fois, nous n'imposons pas une topologie torique, les cellules peuvent errer (vers l'est) aussi loin qu'elles veulent (ou du moins aussi loin que le temps de calcul le permet). On voit **Planches 79, 80 et 81** quelques exemples de dispersion directionnelles de stocks de cellules.

² Nous avons fait des analyses plus poussées, qui portent non seulement sur le nombre d'amas, mais sur leurs tailles, mais nous n'avons pas la place de mettre ces études ici.

Dispersion de stock

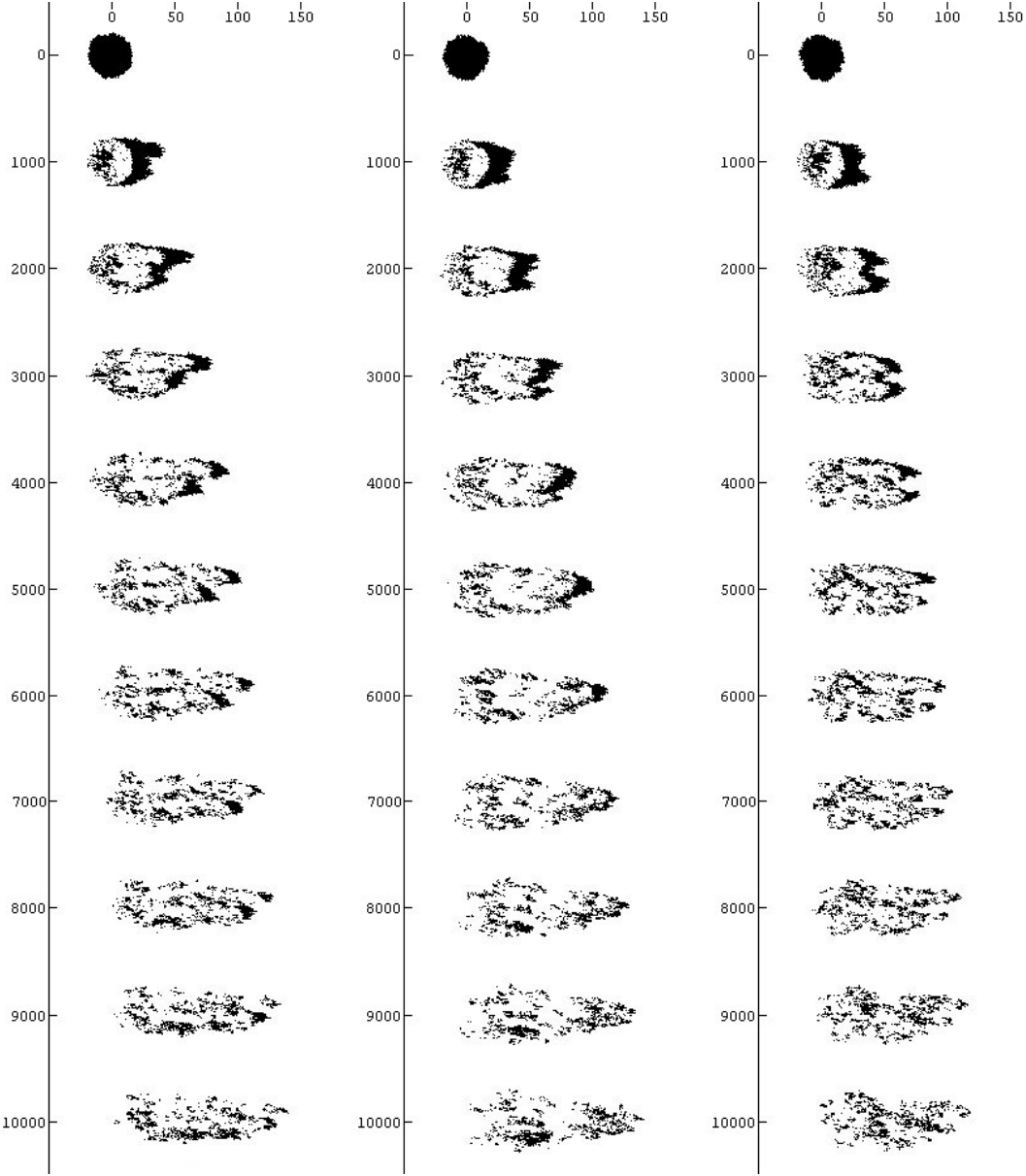
100, 500, 5000 cellules



Dispersion de stock

1000 cellules

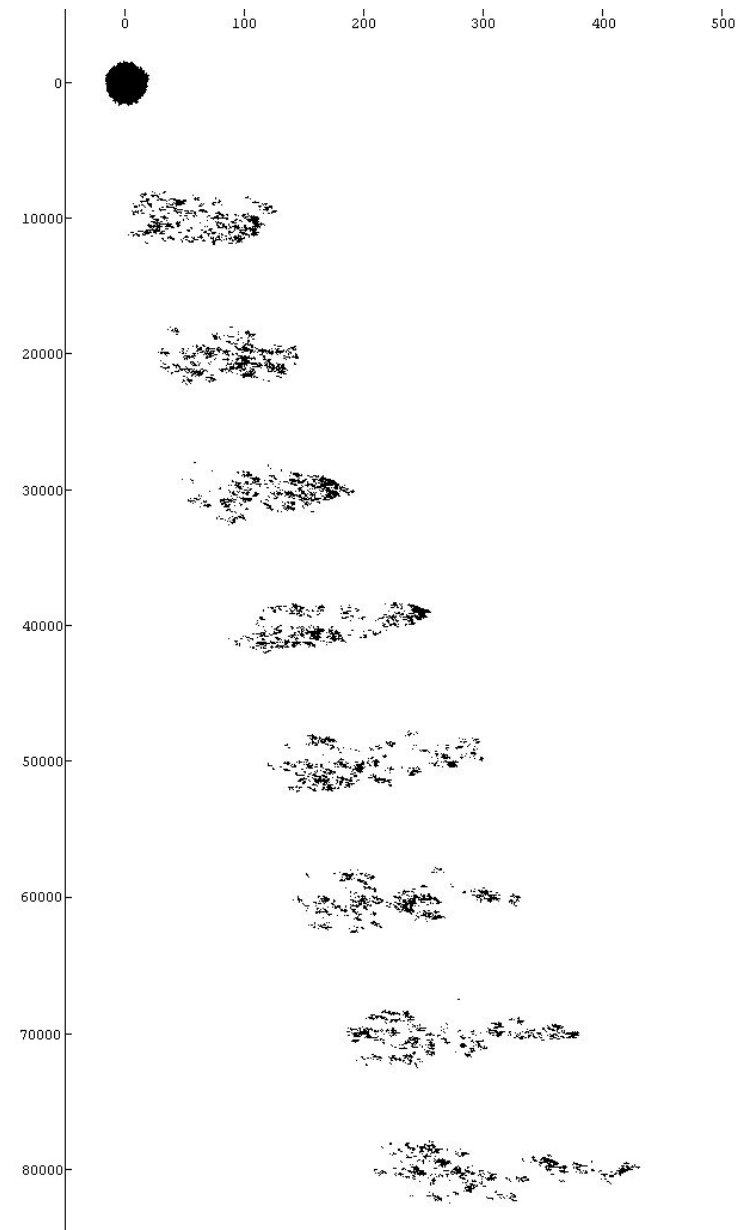
variantes



Dispersion de stock

1000 cellules

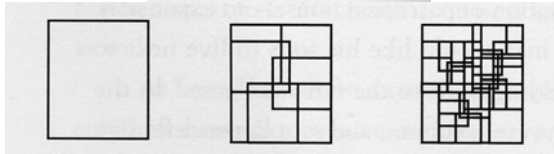
variante prolongée



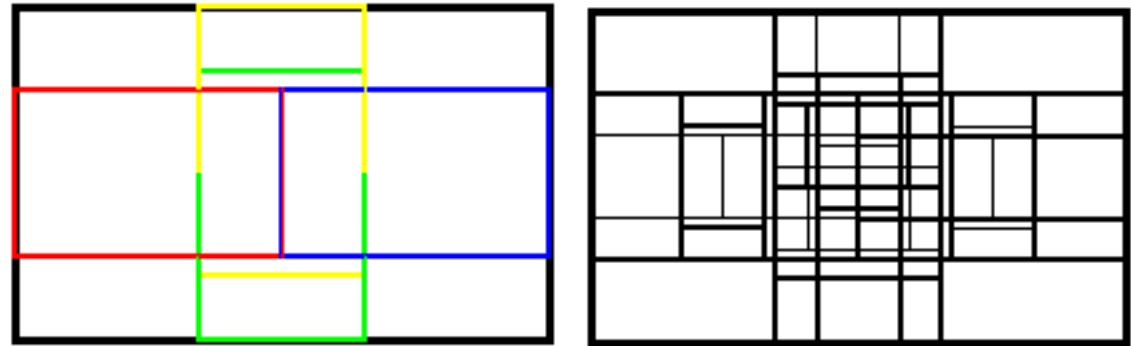
Expérimentations formelles

Nous avons déjà évoqué les travaux de Ron Eglash concernant l'architecture africaine. Un autre exemple donné par cet auteur nous a donné le germe d'une expérimentation, qui s'est éloignée assez rapidement du contexte choisi par Ron Eglash, cependant. Cet exemple (voir ci-contre) propose de partir d'un rectangle, et d'itérer l'adjonction de quatre autres rectangles plus petits à l'intérieur.

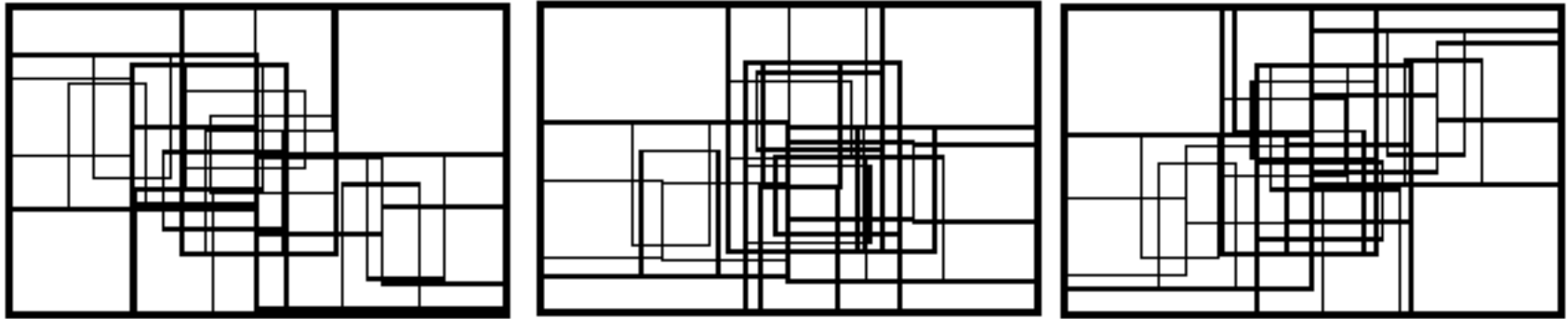
Nous partons de même d'un rectangle (mais d'un rectangle "d'or", ce qui place tout de suite l'expérience dans un autre contexte) auquel nous appliquons un IFS avec condensation de quatre transformations (des homothéties de rapport $1/2$, suivies de rotations et de translations de manière à conserver la symétrie du rectangle) :



133 Ron Eglash, *Processus génératif*



Puis, nous introduisons un peu de variations dans les transformations (les rectangles peuvent "glisser" le long des bords, mais leur taille reste dans le rapport $1/2$) :



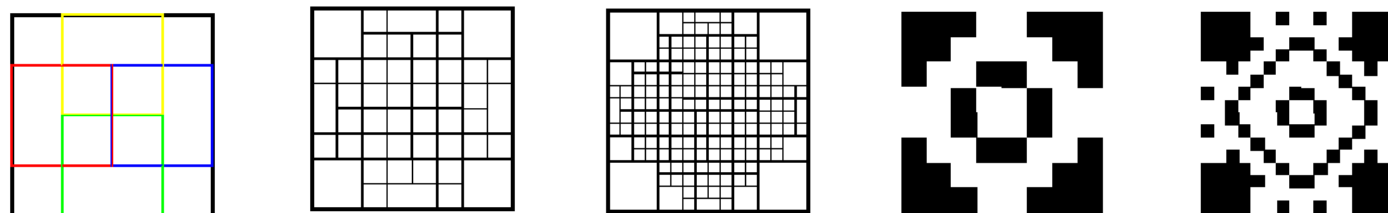
Enfin, nous jouons sur l'idée de *contre-forme* : au lieu de partir d'un *contour* rectangulaire, nous partons d'un rectangle *plein* noir ; mais à chaque étape la couleur sera inversée :



Ces images en noir et blanc peuvent être interprétées sous forme de volumes :

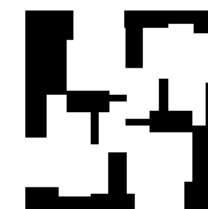
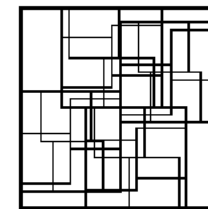
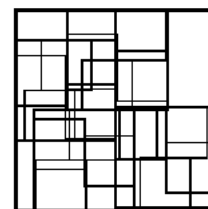
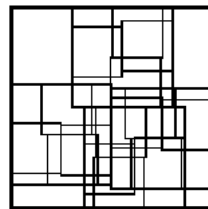


On peut adopter une démarche analogue à partir d'un carré :

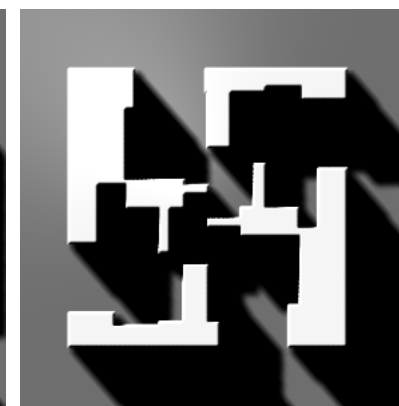
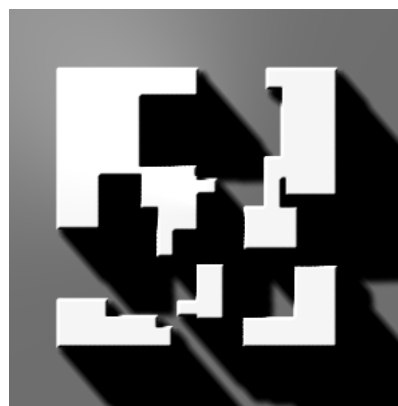


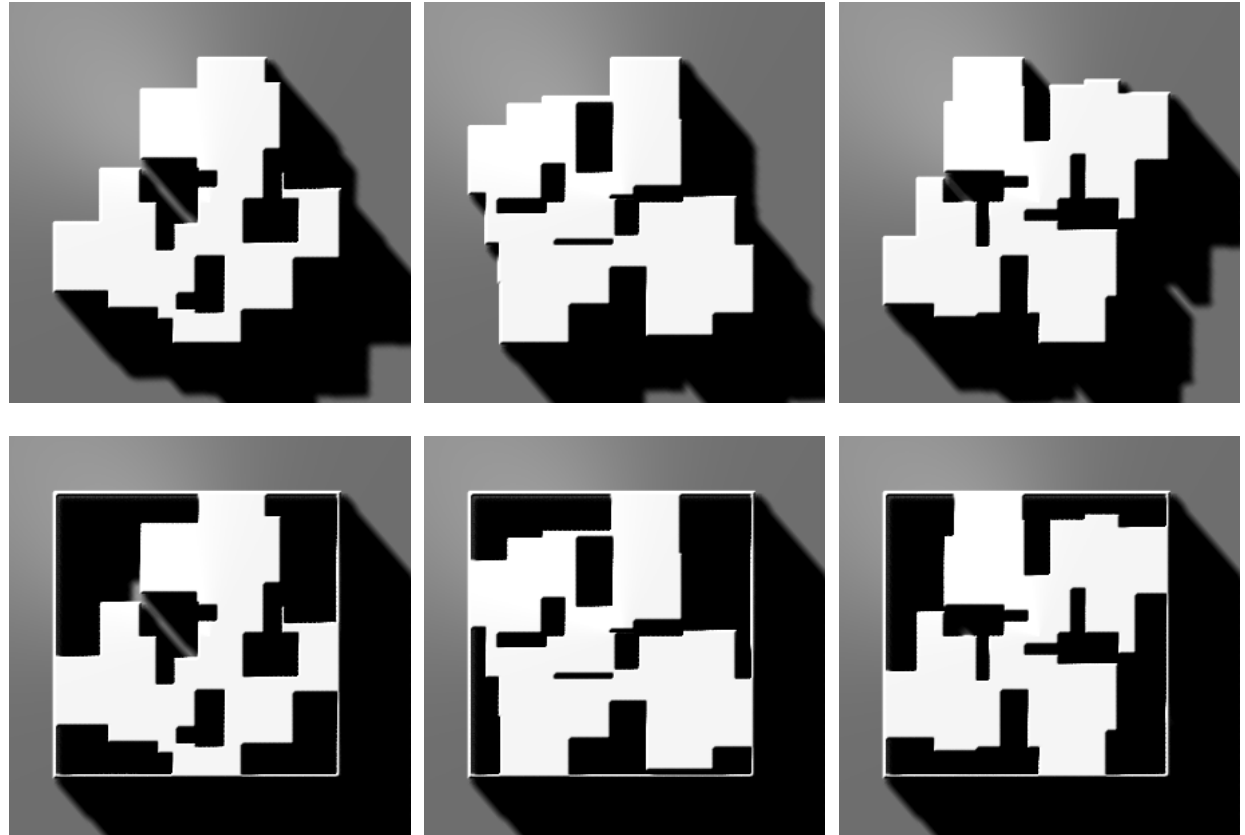
Les transformations choisies exploitent en fait la décomposition auto-similaire du carré en 16 carrés 4 fois plus petits. Ces premiers résultats sont déjà intéressants à confronter à certaines architectures.

Si on introduit de l'aléatoire, on peut obtenir :



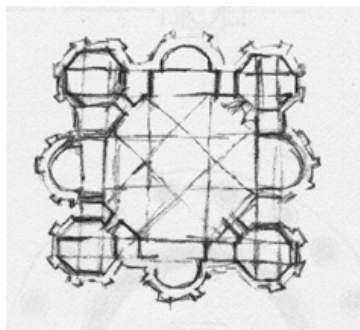
Et en volume, on obtient, en jouant sur la forme, la contre-forme, la clôture :



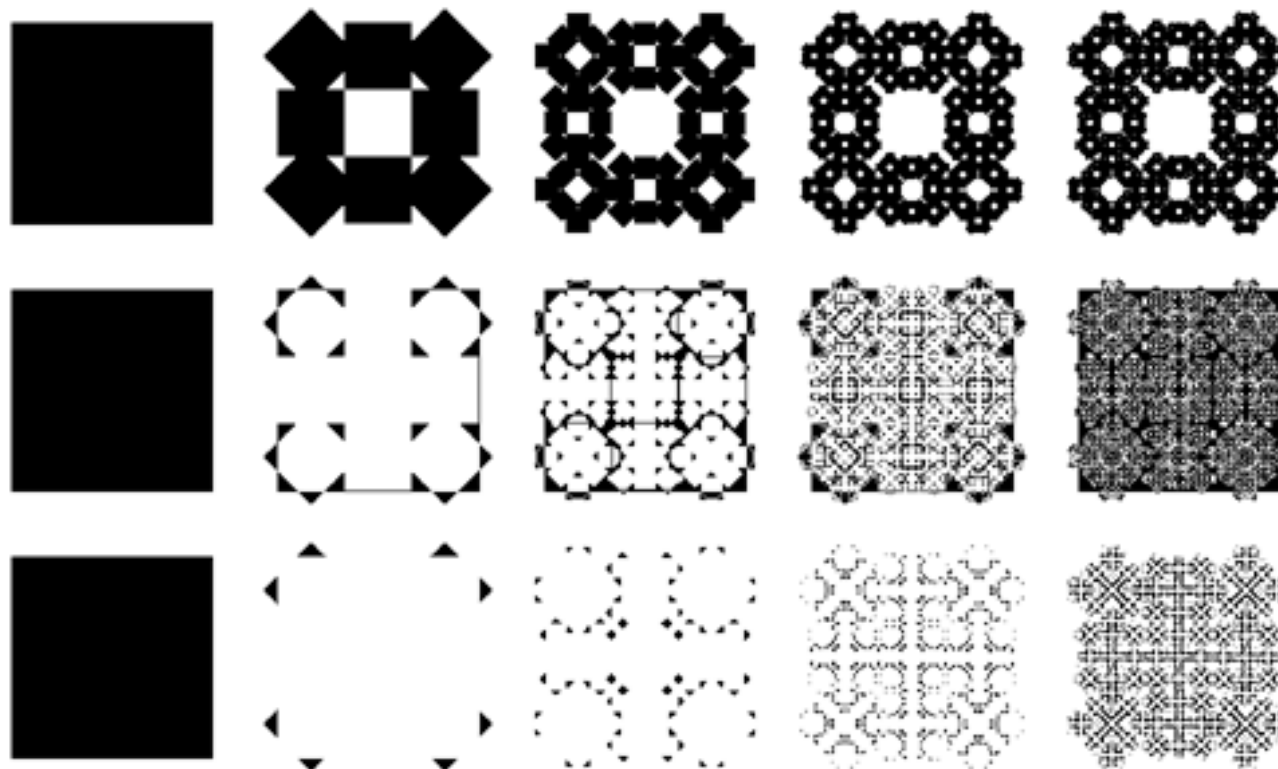


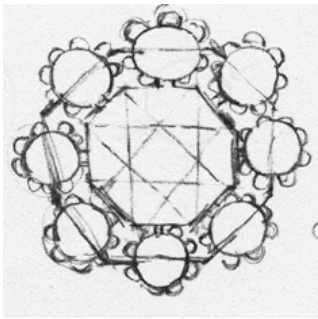
Ces dernières images suggèrent des architectures possibles. Rappelons toutefois qu'il ne s'agit que d'expérimentations formelles, sans recherche d'adéquation à un programme quelconque.

Pour terminer, nous proposons une série de variations sur des IFS symétriques, en passant de la symétrie du carré à celle de l'octogone ; ce qui nous place dans un tout autre contexte, qui est plutôt celui des architectes de la Renaissance :

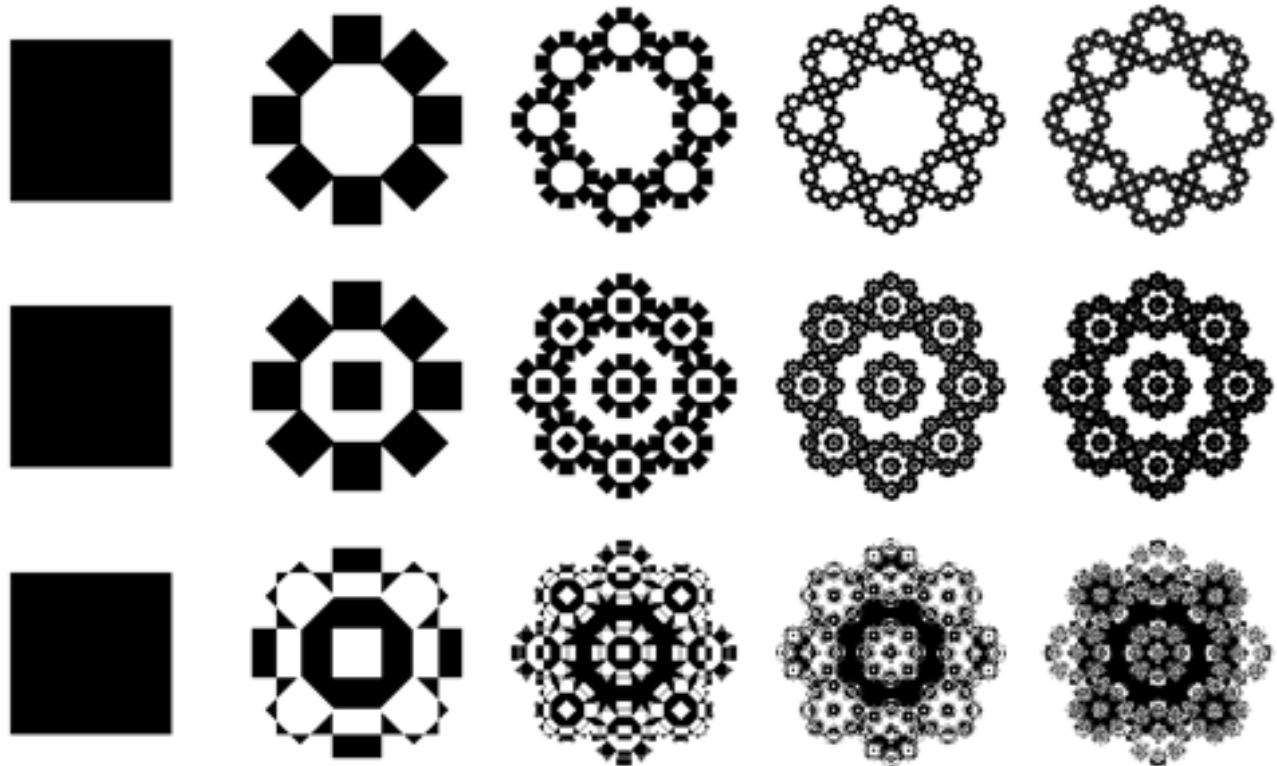


134a Esquisse d'après Léonard de Vinci





134b Esquisse d'après Léonard de Vinci



En conclusion, nous espérons que ces quelques expérimentations donnent une idée des potentialités de ces processus de génération de formes. Il est évident qu'il faudrait les confronter à des conditions de projet, c'est-à-dire à une programme, des contraintes constructives, etc.

Conclusion

Nous pensons avoir montré comment l'espace se constitue *par* les formes, et la *pensée* de l'espace par les manipulations et les opérations que l'homme, en particulier le géographe et l'architecte, effectue sur et avec les formes ; et nous espérons avoir fait avancer l'idée selon laquelle les processus de génération de formes contribuent à une nouvelle manière de penser l'espace et des formes, et augmentent les possibilités d'invention de formes.

Les manipulations sur les formes se résolvent en définitive à quelques opérations simples qui, mises en œuvre par la nature ou par l'homme, aboutissent à la très riche complexité et diversité des formes qui nous entourent. Nous avons dégagé l'importance de certaines de ces opérations, comme le *pli*, le *pavage*, ou la *forme / contre-forme*. Ces opérations sont mises en œuvre par l'homme dans ses constructions matérielles et peuvent aussi être détectées dans les processus qui mènent aux formes naturelles. Ces mêmes opérations, itérées récursivement, sont également au cœur des processus génératifs de formes.

Ces opérations ont été abordées ici d'une manière assez générale ; des études plus précises sont en cours. L'une des pistes de recherche concerne ce que l'architecte Peter Eisenman¹ appelle "diagramme", et les différentes opérations qu'il énumère et met en œuvre dans ses projets.

D'un point de vue théorique, on peut dire que la géométrie fractale n'est pas une géométrie alternative, comme les géométries non euclidiennes, mais que les processus fractals permettent d'envisager une géométrie *augmentée*, un nouveau cadre, dans lequel la géométrie classique est incluse. Nous avons essayé de préciser la notion de dimension fractale, dans la logique de notre investigation de la notion de dimension. Nous avons par ailleurs commencé à définir des outils permettant de caractériser une forme, complémentaires des outils maintenant classiques de détermination de la dimension fractale. Nous n'avons pas pu inclure ces

éléments dans ce travail, mais ils feront l'objet de développements ultérieurs.

Nous avons insisté sur l'importance du *faire* (*homo faber*) ; les processus de génération de formes, s'ils sont mis en œuvre par des ordinateurs, sont conçus et imaginés, *écrits*, par des êtres humains. L'intelligence et l'invention des ordinateurs ne sont que celles des êtres humains qui les programment. Nous avons voulu mettre en œuvre nous-même tous les processus présentés, parce que le seul moyen de véritablement les comprendre, c'est de les écrire, de les programmer.

L'informatique, surtout pour les architectes, n'est trop souvent qu'un substitut du dessin manuel : substitut frustrant, d'ailleurs, parce que, s'il permet effectivement de gagner du temps et d'accroître l'efficacité, il prive le dessinateur, entre autres, de la composante tactile du tracé sur le papier.

Mais l'informatique peut être utilisée autrement, comme la traduction d'une idée de *manipulation*, même si le relais de la main est pris par la machine ; le germe de l'idée est souvent un croquis, qui permet de poser les premières étapes du processus imaginé. Il s'agit ensuite de transcrire cette manipulation et de découvrir ce vers quoi elle mène.

Quitte à se tromper parfois, d'ailleurs ; en informatique plus encore qu'ailleurs, l'erreur est souvent positive, d'abord pour affiner sa compréhension, et aussi pour trouver des pistes auxquelles on n'avait pas pensé. Lancer un programme de génération de formes que l'on a écrit, c'est un peu comme semer une graine : bien sûr, on a le nom de la plante sur le sachet, et un modèle en photographie de la plante à maturité, mais tant d'imprévus peuvent arriver, et qui sait si une graine étrangère n'a pas été mise par erreur dans le sachet ? Sauf que dans le cas des processus génératifs le résultat arrive plus vite, heureusement !

Notre visée est en grande partie pédagogique, nous l'avons dit ; nous voudrions inciter à un nouveau *regard* sur l'espace et les formes. Mais ce regard ne doit pas être seulement passif, perceptif, voire analytique. Si l'homme *voit* les formes géométriques, telle est en tout cas notre conviction, c'est parce qu'il *fait* de la géométrie. De la même façon, pour véritablement voir les formes comme résultats de processus, il faut

¹ Peter Eisenman, *Diagram Diaries*, Universe Publishing, 2000

imaginer, écrire, mettre en œuvre de tels processus. Cela pose le problème de l'interface nécessaire à cette invention. S'il est naturel qu'un étudiant en architecture ou en géographie apprenne à dessiner, même avec des outils nouveaux, il ne l'est pas autant, sans doute, qu'il apprenne à programmer ; les architectes et les géographes n'ont pas à être informaticiens. L'apprentissage d'un langage de programmation est, selon notre expérience, de moins en moins intégrable à un programme pédagogique déjà chargé. D'autant que les logiciels usuels sont de plus en plus "transparents" et font oublier qu'ils résultent eux-mêmes d'une programmation, et que, d'autre part, ils comportent une grande quantité de fonctionnalités, dont la maîtrise constitue l'objectif de l'apprentissage de ce que l'on appelle l'informatique, du moins dans les écoles d'architecture.

Il existe bien des applications permettant de mettre en œuvre tel ou tel processus, qu'il s'agisse des IFS, des L-système, ou des automates cellulaires. Mais, d'une part ils sont le plus souvent spécifiques, et ne permettent pas le passage d'un domaine à un autre, sans parler du passage vers d'autres types de logiciels. Et, d'autre part, ils ne permettent pas toujours de comprendre, vraiment, le mécanisme en jeu.

Nous avouons n'avoir pas pour l'instant de solution à ce problème. Cela participera de la problématique des suites de ce travail.

Bibliographie

Cette bibliographie ne cherche pas à être exhaustive sur les sujets abordés. La plupart des ouvrages sont cités dans le texte. Tous les autres ont également été lus et ont contribué, d'une manière ou d'une autre, à la réflexion.

Cartes et figures de la Terre, Centre Georges Pompidou CCI, 1980
La forme en géographie Actes du colloque Géopoint 2004 tenu à l'Université d'Avignon les 1^{er} et 2 juin 2004, 512 p. UMR ESPACE 6012 du CNRS – Groupe Dupont
Viollet-le-Duc et la montagne, Glénat, 1993

Aalto, Alvar, *De l'œuvre aux écrits*, Editions du Centre Georges Pompidou, 1988
Abbott, Edwin A., *Flatland : A Romance of Many Dimensions By A Square* [1884], Dover Publications, 1992
Aliprandi, Laura et Giorgio, *L'invention du Mont-Blanc par les cartographes*, Musée dauphinois, 2000
Aristote, *Leçons de physique* (Livres I et II suivis d'extraits des autres livres), Pocket, 1990
Arnheim, Rudolf, *La pensée visuelle*, Flammarion, 1976 (*Visual thinking*, University of California Press, 1969)
Aujac, Germaine, *Claude Ptolémée, astronome, astrologue, géographe* *Connaissance et représentation du monde habité*, CTHS, 1998
Bachelard, Gaston, *La terre et les rêveries de la volonté Essai sur l'imagination de la matière*, Librairie José Corti, 1947
Bachelard Gaston, *La poétique de l'espace*, PUF, Paris, 1957
Bachelet, Bernard, *L'espace*, Que sais-je? N° 3293, PUF, 1998
Bak, Per, *Quand la nature s'organise Avalanches, tremblements de terre et autres cataclysmes*, Flammarion, 1999
Balmond, Cecil, *Informal*, Prestel Verlag, 2002
Barnsley, Michael, *Fractals Everywhere*, Academic Press, 1988
Batty, Michael et Longley, Paul, *Fractal cities A Geometry of Form and Function*, Academic Press, 1994

Beaune, Jean-Claude (dir.), *La mesure Instruments et philosophie*, Champ Vallon, 1994
Bens, Jacques, *Genèse de l'Oulipo 1960-1963*, Le Castor Astral
Bergson, Henri, *Essai sur les données immédiates de la conscience* [1927], Quadrige PUF, 1985
Bergson, Henri, *La pensée et le mouvant* [1938], Quadrige PUF, 1985
Bergson, Henri, *Matière et mémoire* [1939], Quadrige PUF, 1990
Bergson, Henri, *L'évolution créatrice* [1941], Quadrige PUF, 1986
Berque, Augustin et Sauzet, Maurice, *Le sens de l'espace au Japon Vivre, penser, bâtir*, éditions Arguments, 2004
Berque, Augustin, *Médiance De milieux en paysages*, Belin, 2000 (Reclus 1990)
Berthoz, Alain, *Le sens du mouvement*, Editions Odile Jacob, Paris, 1997
Besse, Jean-Marc, *Voir la Terre Six essais sur le paysage et la géographie*, Actes Sud/ENSP/Centre du Paysage, 2000
Besse, Jean-Marc, *Face au monde Atlas, jardins, géoramas*, Desclées de Brouwer, 2003
Borges, Jorge-Luis, *Œuvres complètes I*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1993
Boudon, Philippe, *Sur l'espace architectural*, Dunod, 1971
Boudon, Philippe, *Introduction à l'architecturologie*, 1992
Boudon, Philippe, *Echelle(s)*, Economica, 2002
Boudon, Philippe, *Conception*, Editions de la Villette, 2004
Boudon, Pierre, *Le paradigme de l'architecture*, Les Editions Balzac, 1992
Brisson, Jean-Luc (dir.), *Le jardinier, l'artiste et l'ingénieur*, les Editions de l'Imprimeur, 2000
Brosterman, Norman, *Inventing Kindergarten*, éditions Harr N. Abrams, 1997
Brusatin, Manlio, *Théorie de la ligne*, Champs Flammarion, 2002
Bryson, Bill, *A Short History of Nearly Everything*, Broadway Books, 2003
Cache, Bernard, *Terre meuble*, HYX, 1997
Carrega, Jean-Claude, *Théorie des corps la règle et le compas*, Hermann, 1981

- Castoriadis, Cornelius, *Les carrefours du labyrinthe*, Editions du Seuil, 1978
- Chauviré, Christiane, *Ludwig Wittgenstein*, Les contemporains, Seuil, 1989
- Ching, Francis D. K., *Architecture Space Form and Order*, Van Nostrand Reinhold Company, 1979
- Clément, Gilles, *Nuages*, Le rayon des curiosités, Bayard, 2005
- Cole, Alison, *La perspective*, Passion des Arts Gallimard, 1993
- Comar, Philippe, *La perspective en jeu*, Découvertes Gallimard 138, 1992
- Conty, Patrick, *La géométrie du labyrinthe*, Question de N° 104, Albin Michel, 1996
- Coster (de), Léon et Vranckx, Georges, *16 promenades dans Venise*, Editions Universitaires, 1987
- Crosby, Alfred W. *La mesure de la réalité*, Allia, 2003
- Dagognet, François, *Réflexions sur la mesure*, encre marine, 1993
- Dauphiné, André, *Les théories de la complexité chez les géographes*, Economica, 2003
- Deleuze, Gilles, *L'image-mouvement*, Les Editions de Minuit, 1983
- Deleuze, Gilles et Guattari, Félix, *Mille plateaux Capitalisme et schizophrénie*, Les Editions de Minuit, 1980
- Demangeot, Jean, *Les milieux "naturels" du globe*, Armand Colin, 1984, 1998
- Dumas, Robert, *Traité de l'arbre (essai d'une philosophie occidentale)*, Actes Sud, 2002
- Dürer, Albrecht, *Géométrie* (présentation et traduction de Jeanne Peiffer), Sources du savoir, Seuil, 1995
- Duvignaud, Jean, *Lieux et non lieux*, éd Galilée, 1977
- Eglash, Ron, *African Fractals Modern Computing and Indigenous Design*, Rutgers University Press, 1999
- Eisenman, Peter, *Diagram Diaries*, Universe Publishing, 2000
- Ekeland, Ivar, *Le calcul, l'imprévu Les figures du temps de Kepler à Thom*, Seuil, 1984
- Eustache, Jean, *La maman et la putain, scénario*, Editions Cahiers du cinéma, 1990
- Feynman, Richard P., "Surely You're Joking, Mr. Feynman!", Norton & Company, 1985
- Flake, Gary William, *The Computational Beauty of Nature Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptation*, MIT Press, 1998
- Fleury, Vincent, *Des pieds et des mains Genèse des formes dans la nature*, Flammarion, 2003
- Foucault, Michel, *Les Mots et les Choses*, Gallimard, 1966
- Foucault, Michel, *Raymond Roussel*, Gallimard, 1963
- Frankhauser, Pierre, *La fractalité des structures urbaines*, Economica, 1994
- Fritsch, Vilma, *La gauche et la droite Vérités et illusions du miroir*, Flammarion, 1967
- Frey, Pierre [dir.], *Eugène Viollet-le-Duc L'invention du Mont-Blanc*, Pheljna edit. (Quaderni d' arte della Valle d'Aosta, 3), 1989
- Galilei, Galileo, *Il saggiaiore*, [en français : *L'Essayeur*, traduction par Christine Chauviré], les Belles Lettres, 1979 (Annales littéraires de l'Université de Besançon ; 234)
- Gallison, Peter, *Einstein's Clocks and Poincaré's Maps*, Hodder and Stoughton, 2003 [trad. fr. : *L'empire du temps : Les horloges d'Einstein et les cartes de Poincaré*, Robert laffont, 2005]
- Galluzzi, Paolo, *Les ingénieurs de la Renaissance de Brunelleschi à Léonard de Vinci*, Cité des Sciences et de l'Industrie, 1995
- Gide, André, *Paludes, Romans*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1958
- Giedion, Sigfried, *Espace, temps, architecture 1. L'héritage architectural*, [pas d'éditeur mentionné], 1968 (préface de Walter Gropius)
- Goethe, *La forme des nuages d'après Howard suivi de Essai de théorie météorologique*, Ed. Premières Pierres, 1999
- Goodman, Nelson, *Manières de faire des mondes*, Editions Jacqueline Chambon, 1992
- Gould, Stephen Jay, *Darwin et les grandes énigmes de la vie*, Points Sciences Seuil, 1979
- Grabocz, Marta (dir.), *Les modèles dans l'art*, Presses Universitaires de Strasbourg, 1997
- Granet, Marcel, *La pensée chinoise*, Albin Michel, Paris, 1968
- Granger, Gilles-Gaston, *La pensée de l'espace*, Odile Jacob, 1999

- Hall, Edward T., *La dimension cachée*, Editions du Seuil, 1971
- Helmholtz (von), Hermann, *L'optique et la peinture* (Préface de Roberto Casati), énsba, 1994
- Herrmann, Wolfgang, *Gottfried Semper Architettura e teoria*, Electa, 1990
- Hofstadter, Douglas, *Ma Thémagie*, InterEditions, 1988
- Jedrzejewski, Franck, *Histoire universelle de la mesure*, Ellipses, 2002
- Jodidio, Philip, *Architecture in China*, Taschen, 2007
- Husserl, Edmund, *L'origine de la géométrie* (avec une introduction de Jacques Derrida), PUF, 1999
- Joutard, Philippe, *L'invention du Mont Blanc*, Gallimard/Julliard, 1986
- Jullien, François, *La grande image n'a pas de forme*, Editions du Seuil, 2003
- Kant, Emmanuel, *Géographie (Physische Geographie)*, Bibliothèque philosophique Aubier, 1993
- Kant, Emmanuel, *Œuvres philosophiques 1*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1980
- Köhler, Wolfgang, *Psychologie de la forme*, Gallimard Folio Essais, 1964 pour le texte, 2000 pour la présentation
- Lacan, Jacques, *Le Séminaire, Livre XX: Encore*, Seuil, 1975
- Le Bras, Hervé, *Essai de géométrie sociale*, Editions Odile Jacob, 2000
- Le Corbusier, "L'espace indicible", in : numéro spécial "Art" de la revue *Architecture d'Aujourd'hui*, 1946
- Le Corbusier, *Le Modulor*, Editions de l'Architecture d'Aujourd'hui, 1951
- Le Dantec, Jean-Pierre, *Dédale le héros*, Balland, 1992
- Leroi-Gourhan, André, *L'homme et la matière*, Albin Michel, 1943, 1961
- Levi, Primo, *La trêve*, Bernard Grasset, 1966
- Lévy-Leblond, Jean-Marc, *Aux contraires L'exercice de la pensée et la pratique de la science*, Gallimard, 1996
- Levi, Beppo, *En lisant Euclide la géométrie et la pensée scientifique*, Agone, 2003
- Lurçat, André, *Formes, composition et lois d'harmonie Eléments d'une science de l'esthétique architecturale*, Editions Vincent, Fréal & Cie, 1953
- Mach, Ernst, *L'analyse des sensations Le Rapport du physique au psychique*, éd. Jacqueline Chambon, 1998
- Mandelbrot, Benoît, *Les objets fractals Forme, hasard et dimension* Flammarion, 1975
- Marcel, Odile (dir.), *Composer le paysage Constructions et crises de l'espace (1789-1992)*, Editions Champ Vallon, 1989
- Matoré, Georges, *L'espace humain* (2^{ème} édition refondue), Librairie A. G. Nizet
- Mattauer, Maurice, *Les déformations des matériaux de l'écorce terrestre*, Hermann, 1973
- Mazur, Barry, *Imagining numbers (particularly the square root of minus fifteen)*, Penguin, 2003
- McCarter, Robert, *Franck Lloyd Wright A Primer on Architectural Principles*, Princeton Architectural Press, 1991
- McCarter, Robert, *Louis I. Kahn*, Phaidon, 2005
- Meiss (von), Pierre, *De la forme au lieu*, Presses polytechniques romandes, 1986
- Mérian, Jean-Bernard, *Sur le problème de Molyneux* suivi de *Mérian, Diderot et l'aveugle* par Francine Markovitz, Flammarion, 1984
- Merleau-Ponty, Maurice, *Phénoménologie de la perception*, Tel Gallimard, 1945
- Merleau-Ponty, Maurice, *Le primat de la perception et ses conséquences philosophiques*, éditions Cynara, 1989 (exposé devant la Société française de Philosophie 23 novembre 1946)
- Michaux, Henri, *Mes propriétés, La nuit remue*, Œuvres Complètes I, Bibliothèque de La Pléiade, Gallimard, 1998
- Michelet, Jules, *La mer* [1861], Folio Gallimard, 1983
- Minelle, Françoise, *Représenter le monde*, Cité des Sciences et de l'Industrie / Presses Pocket, 1999
- Mitchell, William J., *The Logic of Architecture Design, Computation, and Cognition*, MIT Press, 1990
- Moles, Abraham A. et Rohmer, Elisabeth, *Psychologie de l'espace*, Casterman, 1978
- Mound, Laurence, *Le royaume des insectes*, Les yeux de la découverte, Gallimard, 2003
- Parent, Claude, *Entrelacs de l'oblique*, Editions du Moniteur, Paris, 1981
- Parent, Claude, *Vivre à l'oblique*, L'aventure urbaine, 1970

- Paretsky, Sara, *Tunnel vision*, Penguin Books, 1995
- Péguy, Charles-Pierre, *Espace, temps, complexité*, Belin, 2001
- Perec, Georges, *La disparition*, Denoël, 1969
- Perec, Georges, *Espèces d'espaces*, Galilée, 1974
- Perec, Georges, *La vie mode d'emploi*, Hachette, 1978
- Perec, Georges, *Penser / Classer*, Hachette, 1985
- Petitot, Jean, *Morphologie et esthétique*, Maisonneuve et Larose, 2004
- Piaget, Jean (dir.), *L'épistémologie de l'espace* (études d'épistémologie génétique XVIII), PUF, Paris, 1966
- Piaget, Jean et Inhelder, Bärbel, *La représentation de l'espace chez l'enfant*, PUF, 1972
- Plutarque, *Vie de Thésée* (source : [http://ugo.bratelli.free.fr /Plutarque/PlutarqueThesee.htm](http://ugo.bratelli.free.fr/Plutarque/PlutarqueThesee.htm))
- Poincaré, Henri, *Dernières pensées*, Flammarion, 1913
- Poincaré, Henri, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, 1902
- Poincaré, Henri, *La valeur de la science*, Flammarion, 1905
- Poincaré, Henri, *Science et méthode*, Flammarion, 1908
- Prévert, Jacques, *Paroles* [1945], Folio Gallimard, 1976
- Proust, Marcel, *Du côté de chez Swann, A la recherche du temps perdu I*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1954
- Prusinkiewicz, Przemyslaw & Lindenmayer, Aristid, *The Algorithmic Beauty of Plants*, Springer-Verlag, 1990
- Queneau Raymond, *Les Fleurs bleues, Romans II, Œuvres complètes III*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, 1998
- Queneau, Raymond, *Odile*, Gallimard, 1937
- Reclus, Elisée, *Du sentiment de la nature dans les sociétés modernes*, Premières pierres, 2002
- Regnault, Hervé, *L'espace, une vue de l'esprit*, PUR, 1998
- Robles-De-La-Torre, Gabriel, "The Importance of the Sense of Touch in Virtual and Real Environments", © 2006 IEEE
- Rock, Irvin, *La perception*, De Boeck & Larcier, 2001
- Roussel, Raymond, *La Vue*, Jean-Jacques Pauvert, 1963
- Roux, Michel, *Géographie et complexité Les espaces de la nostalgie*, L'Harmattan, 1999
- Rowe, Colin, *The Mathematics of the Ideal Villa and Other Essays*, MIT Press, 1976
- Rudofsky, Bernard, *L'architecture insolite*, Tallandier, 1979
- Rykvert, Joseph, *La Maison d'Adam au Paradis*, Editions du Seuil, Paris, 1976
- Santos, Milton, *La nature de l'espace*, L'Harmattan, Paris, 1997
- Sapoval, Bernard, *Universalités et fractales*, Champs Flammarion, 1997
- Schaeffer, Pierre, *Traité des objets musicaux*, Seuil, 1966
- Schopenhauer, Arthur, *Philosophie et science*, Le livre de poche Classiques de la philosophie, 2001
- Schwenck, Theodor, *Le Chaos sensible*, Triades, 2005
- Serres, Michel, *Hermès V Le Passage du Nord-Ouest*, Les éditions de Minuit, 1980
- Serres, Michel (dir.), *Éléments d'histoire des sciences*, Bordas, 1989
- Serres, Michel, *Les origines de la géométrie*, Flammarion, 1993
- Slesin, Suzanne, Cliff, Stafford et Rozensztroch, Daniel, *L'art de vivre au Japon*, Flammarion, 1988 (photographies de Gilles de Chabaneix)
- Sossinsky, Alexei, *Nœuds Genèse d'une théorie mathématique*, Seuil, 1999
- Steadman, Philip, *Vermeer's Camera Uncovering the Truth Behind the Masterpieces*, Oxford University Press, 2001
- Stevens, Peter S., *Les formes dans la nature*, Editions du Seuil, 1978
- Strahler, Alan H., Strahler, Arthur N., *Modern Physical Geography*, John Wiley & sons, inc., 1992
- Thompson, D'Arcy Wentworth, *Forme et croissance* [On Growth and Form, première publication en 1917], Seuil, 1994
- Tuan, Yi-Fu, *Espace et lieu La perspective de l'expérience*, in folio éditions, 2006
- Verne, Jules, *Voyage au centre de la Terre*, Le Livre de Poche N° 2029
- Vyzovoti, Sophia, *Folding Architecture Spatial, Structural and Orgaizational Diagrams*, BIS Publishers, 2004
- Wade, David, *Li Dynamic Form in Nature*, Walker & Company, 2003
- Wittgenstein, Ludwig, *Remarques philosophiques*, Tel Gallimard 1964
- Wittgenstein, Ludwig, *Tractatus logico-philosophicus* [1918], Tel Gallimard, 1961
- Wittgenstein, Ludwig, *Leçons et conversations*, idées Gallimard, 1966

Wittgenstein, Ludwig, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Gallimard, 1983
Wittgenstein, Ludwig *Remarques sur les couleurs*, TER, 1983
Wittgenstein, Ludwig *Remarques mêlées*, TER, 1984
Wolfram, Stephen, *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002
Yates, Frances A., *L'art de la mémoire*, Editions Gallimard, 1975
Zevi, Bruno, *Apprendre à voir l'architecture*, Les Editions de Minuit, 1959

Table des illustrations

On distinguera les *figures* des *illustrations* : les figures ne sont pas référencées, elles sont décrites dans le texte et sont de l'auteur ; les illustrations comportent un titre et on en trouvera les références ci-dessous :

- 1 Lac Memphrémagog (©Thomas Revise / Anakrome.net)
- 2 Carte du lac Memphrémagog (<http://www.trackmaps.com>)
- 3 Allen Edson, Le temps est à l'orage Lac Memphremagog , huile sur toile, 1880
- 4 Lac Memphrémagog (©Thomas Revise / Anakrome.net)
- 5 Lac Memphrémagog (©Thomas Revise / Anakrome.net)
- 6 Lac Memphrémagog (Google Earth)
- 7 Lac Memphrémagog (©Thomas Revise / Anakrome.net)
- 8 Hans Makart, *Les cinq sens*, 1872-9, Galerie du Belvédère, Vienne (Autriche)
- 9 id. (détails)
- 10 Antoine Watteau, Musicien jouant du violoncelle,,Sanguine et pierre noire, Bildarchiv preussischer Kulturbesitz, Berlin
- 11 Marcel Duchamp, *Nu descendant un escalier*, 1912, huile sur toile, 146 x 89 cm, Musée des beaux-arts, Philadelphie.
- 12 Gian Domenico Tiepolo, *Main tenant une pierre*, Sanguine et rehauts de blanc sur papier bleu, Musée Correr, Venise
- 13 Le problème des ponts de Königsberg
- 14 Le théorème des 4 couleurs :
<http://www.mathsaharry.com/enigme26.htm>
- 15 Ernst Mach, *croquis* in Ernst Mach, *L'analyse des sensations Le Rapport du physique au psychique*, éd. Jacqueline Chambon, 1998
- 16 Albrecht Dürer, *Perspectographe à la femme couchée*, in Comar, Philippe, *La perspective en jeu*, Découvertes Gallimard 138, 1992
- 17 Diego Velasquez, *Les Ménines*, 1656, Musée du Prado, Madrid
- 18 Norman Rockwell, *Triple Self Portrait*, Curtis Publishing, Indianapolis, Post cover, 13 février 1960
- 19 MPC, *Tomate et Pêche dite "plate"*, crayon, été 2007

- 20 *Tunnels creusés par des taupes*, in Rudofsky, Bernard, *L'architecture insolite*, Tallandier, 1979
- 21 Athanasius Kircher, *Arca Noe*, 1675, Rudofsky, Bernard, *op. cit.*
- 22 *Pelages de léopard, ocelot, jaguar*, in Wade, David, *Li Dynamic Form in Nature*, Walker & Company, 2003
- 23 MPC, *main*, 1991.
- 24 Georges Rousse, Bercy, 1985.
- 25 Georges Rousse, Metz, 1994.
- 26 Felice Varini, Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Nancy
- 27 Le collier d'Antoine, in Publication de l'IRMAR, Univ. Rennes I
- 28 Nœuds "sauvages"
- 29 Nœud de Zuev convergent sur le collier d'Antoine
- 30 Claude Parent, *Entrelacs de l'oblique*, Editions du Moniteur, Paris, 1981, p. 27
- 31 *L'homme-repère...* (d'après Léonard de Vinci)
- 32 Léonard de Vinci, *Articulations du membre inférieur*, Royal Collection
- 33 Hergé, *On a marché sur la Lune*, Casterman, 1954, p. 5
- 34 *Vous êtes ici*, <http://www.astrosurf.com>
- 35 Labyrinthe de Delos, *Revers d'une tablette d'argile de Pylos (Musée archéologique national, Athènes, n°1287)*
- 36 *Labyrinthe tracé sur un pilier à Pompéi*, in *Cartes et figures de la Terre*, Centre Georges Pompidou CCI, 1980
- 37 *Labyrinthe amérindien* (double couverture de cheval), in Conty, Patrick, *La géométrie du labyrinthe*, Question de N° 104, Albin Michel, 1996
- 38 *Labyrinthe de la cathédrale de Chartres ; Labyrinthe "digital" de la cathédrale de Lucca*
- 39 Brahmapoutre (Bangladesh) : Google Earth
- 40 *Caverne crétoise de Gortyne*, in Rudofsky, Bernard, *L'architecture insolite*, Tallandier, 1979
- 41 *Souterrains du château de Pottenstein* (Autriche), in Rudofsky, Bernard, *L'architecture insolite*, Tallandier, 1979
- 42 *Venise, le tracé des canaux, le tracé des rues*, in de Coster, Léon et Vranckx, Georges, *16 promenades dans Venise*, Editions Universitaires, 1987

43 Giovanni Battista Piranesi, *Carceri d' Invenzione*, dessin, ca. 1780
 Courtesy of the Arthur Ross Foundation

44 *Kolam et tracés Nahal*

45 Fernand Deligny, *Lignes d'erre*, in *Cartes et figures de la Terre*, Centre Georges Pompidou CCI, 1980

46 Alvar Aalto, *Rencontre sur un chemin villageois*, voyage au Maroc, 1951, in Aalto, Alvar, *De l'œuvre aux écrits*, Editions du Centre Georges Pompidou, 1988

47 Cy Twombly, *Sans titre*

48 Franck Lloyd Wright, *Musée Guggenheim*, New York, 1957-59 (photo: Jim M. Golgstein jim-galleries.com)

49 Stefan Jauslin, Mateja Vehovar, Anna Wimer, *Pavillon suisse*, Hanovre, 1997

50 *Lichens*, in Wade, David, *Li Dynamic Form in Nature*, Walker & Company, 2003

51 *Shoji et noren*, in Slesin, Suzanne, Cliff, Stafford et Rozensztroch, Daniel, *L'art de vivre au Japon*, Flammarion, 1988 (photographies de Gilles de Chabaneix)

52 Buckminster Fuller *Projet de couverture de Midtown Manhattan*, 1960

53 *Frontière Québec-Etats-Unis*, lac Memphrémagog (Google Earth)

54 *Rizières*, Bali (Google Earth)

55 *Mappemonde*, Miniature du XV^e siècle, in Minelle, Françoise, *Représenter le monde*, Cité des Sciences et de l'Industrie / Presses Pocket, 1999

56 *Main négative*, Grotte Chauvet, *Main positive*, Fuente del Salin (<http://www.kalimanthrope.com>)

57 Yves Klein, *Anthropométrie sans titre (ANT100)*, 1960

58 Michel-Ange, *Projet de Saint Pierre de Rome*; Bruno Zevi, *plan simplifié; négatif; espace interne; espace externe*; in Zevi, Bruno, *Apprendre à voir l'architecture*, Les Editions de Minuit, 1959

59 *Nid de guêpe d'Amérique du Sud* (Chatergus Globiventris) in Laurence Mound, *Le royaume des insectes*, Les yeux de la découverte, Gallimard, 2003

60 *Le mythe de la cabane* selon l'abbé Laugier, in Rykvert, Joseph, *La Maison d'Adam au Paradis*, Editions du Seuil, Paris, 1976

61 *La hutte gothique* édifée par Sir James Hall, in Rykvert, Joseph, *La Maison d'Adam au Paradis*, Editions du Seuil, Paris, 1976

62 Léonard de Vinci, *Machines pour fabriquer des cordes*, in Galluzzi, Paolo, *Les ingénieurs de la Renaissance de Brunelleschi à Léonard de Vinci*, Cité des Sciences et de l'Industrie, 1995

63 Gottfried Semper, *Nœuds et entrelacs*, in Herrmann, Wolfgang, *Gottfried Semper Architettura e teoria*, Electa, 1990

64 *Montage d'une tente khirghize*, in Lurçat, André, *Formes, composition et lois d'harmonie Eléments d'une science de l'esthétique architecturale*, Editions Vincent, Fréal & Cie, 1953, (Tome I)

65 *Hutte marocaine et jarres géantes au Soudan*, in Rudofsky, Bernard, *L'architecture insolite*, Tallandier, 1979

66 *Origami*

67 *Tangram*

68 "Dons" de Friedrich Fröbel

69 Marcel Duchamp, *Feuille de vigne femelle*, 1950, Succession Marcel Duchamp/ADAGP

70 Max Ernst, *Frottage, Histoire naturelle*, 1926

71 André Bloc, *Structure libre*, Meudon; Frederick Kiesler, *Endless House*

72 *Habitation néolithique*, in Rudofsky, Bernard, *L'architecture insolite*, Tallandier, 1979

73 *Communauté rurale chinoise*, in Rudofsky, Bernard, *L'architecture insolite*, Tallandier, 1979

74 *Temple de radja rani*, Bhubaneshvar, Inde, XII^e, XIII^e siècles, in Lurçat, André, *Formes, composition et lois d'harmonie Eléments d'une science de l'esthétique architecturale*, Editions Vincent, Fréal & Cie, 1953

75 *Fenêtres en porte-à-faux*, Malte, in Rudofsky, Bernard, *L'architecture insolite*, Tallandier, 1979

76 Antonello da Messina, *Saint Jérôme en prière*, huile sur bois de tilleul, 46 x 36 cm, 1475

77 Léonard de Vinci, *crâne*, 1489, Royal Collection

78 *IRM de crâne*, source : <http://www.tsi.enst.fr>

79 *Le Parthénon*, plan

80 Herzog & de Meuron, *pavillon*, parc d'architecture, Jinhua, Chine

- 81** Carte bathymétrique de la rade Cherbourg, 1789, in Minelle, Françoise, *Représenter le monde*, Cité des Sciences et de l'Industrie / Presses Pocket, 1999
- 82** Carte "d'état-major" de la Loire au sud-est de Blois, in Minelle, Françoise, *Représenter le monde*, Cité des Sciences et de l'Industrie / Presses Pocket, 1999
- 83** Non-conformité de Hutton, Jedburgh, Ecosse, gravure de John Clerk, 1787
- 84** Theodor Schwenck, *Coupe transversale des Alpes au Simplon ; Coupe nord-sud à travers les Alpes orientales*, in Schwenck, Theodor, *Le Chaos sensible*, Triades, 2005
- 85** Micro-plis isopaques (échantillon scié), in Mattauer, Maurice, *Les déformations des matériaux de l'écorce terrestre*, Hermann, 1973
- 86** La visite de la sphère à Flatland, in Abbott, Edwin A., *Flatland : A Romance of Many Dimensions By A Square* [1884], Dover Publications, 1992
- 87** Carte du Pays de Tendre, XVII^e siècle, in Minelle, Françoise, *Représenter le monde*, Cité des Sciences et de l'Industrie / Presses Pocket, 1999
- 88** Table de Peutinger (rouleau de parchemin, 6,75 x 0,34 cm) in Minelle, Françoise, *Représenter le monde*, Cité des Sciences et de l'Industrie / Presses Pocket, 1999
- 89** MPC, Coïncidences, crayon, 1989
- 90** Haeckel, *Morphologie générale des organismes*, 1866, Berlin
- 91** N. Sanson *Table de géographie*, 1664, Bibliothèque Nationale, Paris
- 92** *Atlas portugais dit "Atlas Miller"*, 1519, in Minelle, Françoise, *Représenter le monde*, Cité des Sciences et de l'Industrie / Presses Pocket, 1999
- 93** Johannes Vermeer, *Allégorie de la peinture*, 1666-67, huile sur toile, 120 x 100 cm, Musée d'Histoire de l'Art, Vienne
- 94** *Principes de perspective*, dessin anonyme italien, ca. 1780, Victoria & Albert Museum, Londres
- 95** Jean Cousin, *Particularités des jambes et cuisses raccourcies*, in *Livre de portraiture*, 1571
- 96** *Chambre obscure transportable*, article "Dessin" de l'Encyclopédie
- 97** Albrecht Dürer, *Perspectographes à la femme couchée, à la cruche au luth*, in Comar, Philippe, *La perspective en jeu*, Découvertes Gallimard 138, 1992
- 98** Franz Schrader, *Orographe*
- 99** Franz Schrader, *Tour d'horizon du pic d'Algas*
- 100** *Vue circulaire des montagnes qu'on découvre du glacier du Buet*, gravure du VIII^e siècle, in *Composer le paysage Constructions et crises de l'espace (1789-1992)* (Odile Marcel dir.), Editions Champ Vallon, 1989
- 101** Franz Schrader, *Carte du Mont-Perdu*, (1914)
- 102** Dymaxion, privilégiant la connexité des océans, ou la quasi-connexité des continents (Dymaxion™ : Buckminster Fuller Institute, Santa Barbara, California, (c) 1938, 1967 & 1992. Tous droits réservés)
- 103** *Compas*
- 104** Johannes Vermeer, *Le géographe*, 1669, Städelches Kunstinstitut, Francfort-sur-le-Main
- 105** *La muse de l'architecture* (www.cgb.fr)
- 106** *La mesure d'un degré de latitude par l'abbé Picard* in Minelle, Françoise, *Représenter le monde*, Cité des Sciences et de l'Industrie / Presses Pocket, 1999
- 107** Léonard de Vinci, *feuille d'études* (détail), *Codex Atlanticus*, fol. 366 r
- 108** Léonard de Vinci, *feuille d'études* (détail), id
- 109** *Le ken*, in Ching, Francis D. K., *Architecture Space Form and Order*, Van Nostrand Reinhold Company, 1979
- 110** *Mise en œuvre du ken*, in *op. cit.*
- 111** J.-N.-L. Durand, "Combinaisons horizontales de colonnes, de pilastres, de murs, de portes et de croisées"
- 112** Le Corbusier, *Le Modulor*, Editions de l'Architecture d'Aujourd'hui
- 113** Le Corbusier, *Le Modulor*, id.
- 114** *La génération du carré*, d'après un ancien traité d'architecture indien, in *Cartes et figures de la Terre*, Centre Georges Pompidou CCI, 1980
- 115** *Le Vastu Purusha mandala*, d'après un ancien traité d'architecture indien, in *Cartes et figures de la Terre*, Centre Georges Pompidou CCI, 1980
- 116** Elie de Beaumont, *Réseau pentagonal* (© ENSMP)

117 Eugène Viollet-le-Duc, *Rhomboèdres*, in *Viollet-le-Duc et la montagne*, Glénat, 1993

118 Eugène Viollet-le-Duc, *Le Tacul du mont Blanc, les Grands Mulets*, 7 septembre 1869, Crayon, lavis violet, sur papier gris-vert, inscriptions à la plume, 20,6 x 27,9. Fonds Viollet-le-Duc

119 D'Arcy Thompson, *Transformations*, in D'Arcy Wentworth Thompson, *Forme et croissance* [*On Growth and Form*, première publication en 1917], Seuil, 1994

120 Gravure de *L'Encyclopédie*, 1768, in Joutard, Philippe, *L'invention du Mont Blanc*, Gallimard/Julliard, 1986

121 Galilée, *Dessin*, in Gould, Stephen Jay, *Darwin et les grandes énigmes de la vie*, Points Sciences Seuil, 1979

122 *Bourgeon initial d'un palétuvier et un fourré d'arbres adultes*, in Stevens, Peter S., *Les formes dans la nature*, Editions du Seuil, 1978

123 Eglise de Little Tey (17 m de long) et cathédrale de Norwich (135 m de long), in Gould, Stephen Jay, *Darwin et les grandes énigmes de la vie*, Points Sciences Seuil, 1979

124 Albrecht Dürer, le "portillon" (voir **97**)

125 *Variante du portillon de Dürer*, anonyme

126 P. Accolti, "Modélisation" du luth, 1625

127 Le volet du portillon (détail de **124** retouché)

128 *Black Spleenwort* ou *Capillaire noire* (Black Spleenwort, Smoth Rock Spleenwort. Plate 296 from Anne Pratt's *Flowering Plants, Grasses, Sedges and Ferns of Great Britain* c.1878. Shrewsbury Museums Service)

129 *Ba-ila Stettlement*, in Eglash, Ron, *African Fractals Modern Computing and Indigenous Design*, Rutgers University Press, 1999

130 *Processus génératif proposé par Ron Eglash*, id.

131 Salvador Dali, *Crucifixion*, Fondation Gala-Salvador Dali

132 Otto von Spreckelsen, *Arche de la Défense*, photo : Eric Pouhier

133 Ron Eglash, *Processus génératif*, in Eglash, Ron, *African Fractals Modern Computing and Indigenous Design*, Rutgers University Press, 1999

134a *Esquisse d'après Léonard de Vinci*, in Ching, Francis D. K., *Architecture Space Form and Order*, Van Nostrand Reinhold Company, 1979

134b *Esquisse d'après Léonard de Vinci*, id.

Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement la DAPA, le BRAUP, et tout spécialement Eric Lengereau, pour l'habilitation et le soutien accordés à l'équipe DIPAU, puis GRIEF, et pour l'octroi d'un congé pour études et recherches, sans lesquels je n'aurais pas pu effectuer ce travail.

Je remercie chaleureusement Hervé Regnauld et Louis-Michel Nourry pour leur confiance, l'intelligence de leurs conseils, et leur disponibilité.

Je remercie également les membres du jury d'avoir bien voulu accorder du temps à l'examen de ce travail.

Je remercie l'équipe COSTEL, et Vincent Dubreuil, de m'avoir accueillie.

Je remercie la direction de l'ENSAB, et son personnel, tout particulièrement le service reprographie et la documentation.

Il faudrait mentionner tous ceux, professeurs de mes années (éloignées...) d'études d'architecture, collègues des écoles d'architecture de Strasbourg et de Rennes, qui ont contribué, peut-être à leur insu, à l'élaboration de ma problématique ; mais je voudrais aussi remercier les étudiants en architecture de Strasbourg et de Rennes qui ont confirmé mon intuition qu'être enseignant c'est autant apprendre de ses étudiants que de tenter de leur apprendre...

Enfin, je remercie mes proches, qui ont eu la patience de supporter les sautes d'humeur que génère ce type d'entreprise.

MPC

Penser l'espace et les formes

L'apport des opérations effectuées dans l'analyse (géographie) et la production (architecture) d'espace et de formes à la définition et à la conceptualisation des notions d'espace et de forme (géométrie)

Résumé : A partir de la définition de tout espace comme continu perceptif, et l'introduction de la notion cruciale de dimension, la forme est envisagée comme ce qui permet notre perception de l'espace, en tant qu'établissant une coupure (frontière) dans l'espace des déplacements. Les opérations conceptuelles et matérielles sur les formes, opérations communes à l'ensemble des humains mais pratiquées plus particulièrement par le géographe et l'architecte, mènent aux concepts fondamentaux de la géométrie. Cependant ces opérations et ces concepts, qui ont efficacement régi notre conception de l'espace et des formes pendant des siècles, se révèlent impuissants à traiter certaines formes, en particulier bon nombre de formes naturelles. Des opérations il faut alors passer aux processus, dont les principes essentiels sont les notions d'itération et d'attracteur. Les processus génératifs de formes induisent de nouveaux concepts, comme l'auto-similarité, ou la dimension fractale, qui prolongent sans les contredire les concepts de la géométrie classique. De tels processus (IFS, L-systèmes, automates cellulaires), mis en œuvre dans l'espace numérique, montrent comment des règles simples et déterministes peuvent mener à des formes complexes et parfois imprédictibles, mais non quelconques. Ils offrent des potentialités nouvelles, tant dans l'analyse que dans l'invention des formes, en géographie comme en architecture, et contribuent à l'apprentissage d'un regard différent sur l'espace et les formes.

Mots clés : espace ; forme ; géomorphologie ; architecture ; géométrie ; processus génératifs ; géométrie fractale

Space and forms

Contribution of operations performed in the course of analysis (geography) and production (architecture) of space and forms to the definition and conceptualisation of notions of space and form (geometry).

Abstract: Starting from the definition of any space as a perceptive continuum, and after having introduced the crucial notion of dimension, form is considered as what enables our perception of space, by setting a cut (boundary) in the space of displacements. Conceptual and material operations dealing with forms, operations which are common to mankind as a whole, but are most often performed by geographers and architects, lead to the fundamental concepts of geometry. Yet these concepts, which have effectively governed our conception of space and forms for centuries, are unhelpful to handle some forms, especially many natural forms. Operations must be replaced by processes, the essential principles of which are the notions of iteration and attractor. Generative processes yield new concepts, like self-similarity and fractal dimension, which elaborate without contradiction the classical geometrical concepts. Such processes (IFS, L-systems, cellular automata), carried out in the digital space, show how simple and deterministic rules may lead to complex and sometimes unpredictable, though specific, forms. They offer new possibilities for analysis and for invention of forms in geography as well as in architecture, and contribute to teach a different way of looking upon space and forms.

Keywords: space ; form ; geomorphology ; architecture ; geometry ; generative processes ; fractal geometry