



**HAL**  
open science

# Modélisation mathématique et numérique du poumon humain

Assia Soualah Alila

► **To cite this version:**

Assia Soualah Alila. Modélisation mathématique et numérique du poumon humain. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2007. Français. NNT: . tel-00207495

**HAL Id: tel-00207495**

**<https://theses.hal.science/tel-00207495>**

Submitted on 17 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI U.F.R SCIENTIFIQUE  
D'ORSAY

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

PRÉSENTÉE PAR

**Assia SOUALAH-ALILA**

POUR OBTENIR LES GRADES DE

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD XI  
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS**

Sujet de la thèse :

# Modélisation mathématique et numérique du poumon humain.

Soutenue le 06/12/2007, devant le jury composé de :

M	<b>François ALOUGES</b>	<b>Président de jury</b>
M	<b>Stéphane DESCOMBES</b>	<b>Examineur</b>
Mme	<b>Vivette GIRAULT</b>	<b>Rapporteur</b>
M	<b>Taïeb HADHRI</b>	<b>Examineur et responsable de cotutelle</b>
M	<b>Yvon MADAY</b>	<b>Invité</b>
M	<b>Bertrand MAURY</b>	<b>Directeur de thèse et responsable de cotutelle</b>
M	<b>Wolfgang WALL</b>	<b>Rapporteur</b>



*A maman et papa chéris.*  
*A Wided, Fayrouz et Radhouen.*



## Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Bertrand Maury pour avoir dirigé mes travaux avec talent durant ces années de thèse. Pour son appui, son énergie et ses compétences, je l'assure de ma profonde reconnaissance.

Je dois également beaucoup à Céline Grandmont qui m'a donné de nombreux conseils et qui m'a fait partager son expérience. L'enrichissante collaboration avec Céline Grandmont est en grande partie imputable au bon déroulement de cette thèse. Qu'elle trouve ici mes sincères remerciements.

J'exprime mes vifs remerciements à Jean Frédéric Gerbeau pour son implication dans les simulations tridimensionnelles de cette thèse, ainsi qu'à Leonardo Baffico.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Taïeb Hadhri pour m'avoir accueilli dans le Laboratoire d'Ingénierie Mathématique à l'Ecole Polytechnique de Tunisie, et pour la confiance qu'il m'a témoigné en acceptant cette responsabilité de cotutelle entre l'Université de Paris-Sud et l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis. Je le remercie également d'avoir accepté de faire partie de ce jury malgré son emploi du temps très chargé.

Ma reconnaissance va également à Vivette Girault et à Wolfgang Wall qui ont accepté de rapporter sur cette thèse. J'ai sincèrement apprécié leur intérêt pour mes travaux et les remercie du temps qu'ils ont mis à la lecture du manuscrit. Une pensée particulière pour Vivette Girault pour tous les précieux conseils qu'elle m'a prodigué pour améliorer le manuscrit, pour l'entretien qu'elle a bien voulu m'accorder et où j'ai pu mesurer à quel point son contact est enrichissant.

François Alouges, Stéphane Descombes et Yvon Maday m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie du jury. Je les en remercie chaleureusement.

Je remercie le Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Paris-Sud et toute l'équipe d'Analyse Numérique et EDP qui m'ont permis de passer des années de thèse très agréables et scientifiquement enrichissantes. Ma reconnaissance va plus particulièrement à François Alouges, Sébastien Martin, Laurent Di Menza, Sylvain Faure et Jacques Laminie.

En Tunisie, j'ai la chance de faire partie du Laboratoire d'Ingénierie Mathématique où règne une ambiance conviviale. J'ai une pensée particulière pour Lassaad El Asmi sans lequel cette thèse n'aurait peut-être pas vu le jour.

Je remercie également le gouvernement français et l'Institut Français de Coopération en Tunisie qui a financé cette thèse.

Un grand merci à Mahdi, Mohammed, Eduardo, Vahagn, Aline, Juliette, Christine, Karine, Adeline et Séverine, pour leur amitié, leur complicité et tous les moments partagés dans une belle ambiance de camaraderie.

Le bon déroulement de mon séjour en France doit beaucoup à Amigo, Sassa et Tonton Mongi, qui m'ont toujours aidée et soutenue, même dans les moments les plus difficiles.

Je termine enfin par ceux que je ne pourrais jamais remercier par des mots : je pense à vous mes chers parents, mes soeurs et mon frère.

Cher papoué, tes encouragements et ton soutien ne m'ont jamais fait défaut.

Doudou, Foufou et Rourou, merci pour tous les sms très originaux qui ont le don de me dérider même quand je fais ma tête des mauvais jours. Je remercie tout particulièrement

Docteur Wided Soualah (Doudou) pour sa collaboration passionnée à la rédaction du premier chapitre de cette thèse.

Merci maman : tu as si bien transmis à tes petits ta passion pour les études. Tu as toujours été mon soutien infailible durant ma scolarité. Sans toi je n'aurais pas eu le courage suffisant pour me lancer dans cette belle aventure. Cette thèse était notre projet commun, ce diplôme est le tien. Il n'est rien devant celui que tu as déjà : celui de la meilleure des mamans.

# Table des matières

---

---

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
---------------------	----------

---

---

<b>Chapitre 1</b>
-------------------

<b>Le poumon humain</b>
-------------------------

1.1	Introduction à la physiologie du poumon . . . . .	11
1.2	Architecture de l'appareil respiratoire pulmonaire . . . . .	11
1.2.1	La paroi thoracique et les muscles respiratoires . . . . .	11
1.2.2	Les voies aériennes . . . . .	12
1.3	La physiologie de la respiration . . . . .	14
1.3.1	Propriétés physiques du poumon . . . . .	14
1.3.2	La mécanique ventilatoire : inspiration/expiration . . . . .	15
1.4	Conclusion . . . . .	16

<b>Chapitre 2</b>
-------------------

<b>Conditions aux limites naturelles pour les équations de Navier-Stokes</b>
--

2.1	Introduction . . . . .	19
2.2	Conditions aux limites essentielles et naturelles . . . . .	19
2.3	Problème modèle . . . . .	20
2.4	Le laplacien et ses variantes . . . . .	21
2.4.1	Forme symétrisée du laplacien . . . . .	21
2.4.2	Forme standard du laplacien . . . . .	24

2.4.3	Forme vectorielle du laplacien . . . . .	27
2.5	Formes alternatives . . . . .	30
2.6	Conclusion . . . . .	31

<p><b>Chapitre 3</b>  <b>Conditions dissipatives pour l'écoulement de l'air dans l'arbre bronchique</b></p>
---

3.1	Introduction, motivations . . . . .	37
3.2	Les modèles . . . . .	38
3.2.1	Conditions dissipatives naturelles . . . . .	43
3.2.2	Conditions dissipatives essentielles . . . . .	44
3.3	L'écoulement dans un arbre dyadique . . . . .	46
3.3.1	Le problème modèle . . . . .	46
3.3.2	Notations . . . . .	46
3.3.3	Résistances et pressions globales . . . . .	47
3.3.4	Arbres dyadiques particuliers . . . . .	52
3.4	Simulations numériques . . . . .	53
3.4.1	Simulations tridimensionnelles des conditions dissipatives naturelles . . . . .	53
3.4.2	Simulations bidimensionnelles des conditions dissipatives essentielles . . . . .	56
3.4.3	Viscosité fictive . . . . .	58
3.5	Conclusion . . . . .	61

<p><b>Chapitre 4</b>  <b>Existence de solutions faibles et modélisation des acini</b></p>
---

4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes avec conditions dissipatives . . . . .	65
4.2.1	Position du problème . . . . .	66
4.2.2	Bilan d'énergie . . . . .	67
4.2.3	Formulation variationnelle . . . . .	69
4.2.4	Estimations a priori et principaux résultats . . . . .	71
4.3	Couplage avec les acini . . . . .	89
4.3.1	Le modèle . . . . .	89

---

4.3.2	Energie du système couplé global . . . . .	93
4.3.3	Existence de solution pour le problème couplé . . . . .	96
4.4	Conclusion . . . . .	105

<b>Chapitre 5</b>
-------------------

5.1	Introduction . . . . .	109
5.2	Le problème de Stokes stationnaire . . . . .	109
5.2.1	Formulation variationnelle . . . . .	109
5.2.2	Equivalence . . . . .	110
5.2.3	Existence et unicité . . . . .	111
5.3	Etude de l'opérateur de Stokes modifié . . . . .	114
5.3.1	Définition de l'opérateur . . . . .	115
5.3.2	Propriétés de l'opérateur . . . . .	115
5.4	Le problème de Navier-Stokes instationnaire . . . . .	117
5.5	Résultats avec l'opérateur de Stokes non modifié . . . . .	126
5.6	Conclusion . . . . .	128

<b>Chapitre 6</b>
-------------------

<b>Discrétisation en temps et tests numériques</b>
--

6.1	Introduction . . . . .	131
6.2	Discrétisation en temps . . . . .	131
6.2.1	Bilan d'énergie discret . . . . .	133
6.2.2	Formulation variationnelle semi-discrétisée . . . . .	139
6.3	Tests numériques . . . . .	141
6.3.1	Le couplage 2D/3D . . . . .	141
6.3.2	Les paramètres . . . . .	142
6.3.3	Les tests . . . . .	143
6.4	Conclusion . . . . .	150

**Annexe A**

**Le modèle de Weibel**

**157**

**Annexe B**

**L'écoulement de Poiseuille**

**161**

B.1 Ecoulement de Poiseuille . . . . . 163

B.1.1 Ecoulement de Poiseuille tridimensionnel . . . . . 163

B.1.2 Ecoulement de Poiseuille bidimensionnel . . . . . 165

**Annexe C**

**Le lemme de Gronwall**

**167**

---

**Bibliographie**

**171**

# Introduction



# Introduction

## Motivations

La modélisation mathématique est de plus en plus sollicitée par le monde de la santé pour résoudre des problèmes rencontrés en pratique médicale. De tels modèles sont utilisés pour une meilleure compréhension des fonctions physiologiques et peuvent aider à développer de nouvelles méthodes de diagnostic et de nouvelles techniques thérapeutiques. La modélisation du système respiratoire s'inscrit dans ce contexte, où par exemple, la mise en place d'un poumon numérique aiderait certainement à mieux comprendre certaines pathologies et guiderait mieux les stratégies curatives.

Ainsi, il existe un nombre important de modèles mathématiques, qui vont du modèle 0D au modèle 3D, et dont le degré de détail dépend essentiellement des quantités qu'on envisage de décrire (tels que la vitesse de l'air, la pression, le débit, le volume, la concentration d'oxygène, de dioxyde de carbone ...), et des pathologies auxquelles on s'intéresse (l'inhalation accidentelle de solide ou liquide, la crise d'asthme, l'emphysème, la fibrose, le cancer ...).

Une multitude de modèles 0D sont proposés dans lesquels le poumon est souvent décrit comme un simple compartiment contenant de l'air, connecté à la trachée. Dans ces modèles, il est principalement question de la relation pression/volume, comme c'est le cas par exemple dans [8] [11] [51] pour le régime statique et dans [1] pour le régime dynamique. La relation pression/volume proposée dans ces modèles, fait intervenir essentiellement deux paramètres : l'élastance et la résistance, et une manière de rendre ces modèles plus réalistes est d'introduire de la non linéarité en faisant par exemple dépendre l'élastance et la résistance du débit et du volume. Toutefois, même si ces modèles 0D aident à mieux comprendre le mécanisme de la respiration, ils ne peuvent pas fournir des informations précises en ce qui concerne les écoulements 3D dans des géométries réelles.

Des approches 3D ont été récemment proposées. On peut citer une multitude de travaux, par exemple [39] [19] [15] [36]. Ces approches permettent notamment de prendre en compte les effets inertiels dans la partie supérieure de l'arbre bronchique, de mettre en évidence l'influence de la géométrie sur la distribution des pressions et de traiter des cas d'asymétrie, et d'envisager une étude de dépôt d'aérosols administrés par inhalation ( voir par exemple [6]). Cependant, il faut noter que la complexité fractale de la géométrie de l'arbre, empêche la simulation de l'écoulement de l'air dans la totalité de l'arbre bronchique. De plus, la partie distale, environ à partir de la 7<sup>ème</sup> génération, ne peut pas être visualisée par les techniques d'imagerie médicale.

A cette difficulté s'ajoute le problème du choix de conditions aux limites adaptées aux phénomènes ventilatoires, sachant qu'à l'heure actuelle, l'essentiel des calculs se fait avec des conditions aux limites de Dirichlet. Pour les conditions en entrée (entrée de la trachée), le profil est mal connu, et change considérablement entre l'inspiration et l'expiration. En sortie le problème est différent, puisque (si l'on est allé assez loin, disons jusqu'à la génération 5 ou 6) l'écoulement est régi par les équations de Stokes, donc le profil est toujours le même. En revanche, la pression au niveau de l'endroit où l'on a tronqué est une véritable inconnue, ce qui rend l'utilisation de conditions de type Neuman délicates à paramétrer (on a autant de conditions aux limites à paramétrer que de sorties). Les conditions de

Dirichlet ne sont pas non plus très réalistes, puisque le poumon dans sa globalité n'est contrôlé que par un paramètre (force musculaire exercée par le diaphragme), et que les distributions de vitesse au niveau des différentes sorties du domaine ne sont pas connues dès que l'arbre n'est plus symétrique.

## Le modèle

L'approche que nous proposons est une approche multi-compartiments qui couple trois sous systèmes, où chacun est le siège d'une modélisation appropriée. L'arbre bronchique qui s'étend sur environ 24 générations, est divisé en trois zones distinctes :

- Une zone proximale qui correspond à la trachée et aux premières bronches où l'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes et où des simulations directes ont lieu.
- Une partie distale correspondant à la partie géométriquement complexe, localisée en aval de la partie proximale de l'arbre, et destinée à être condensée. Ceci est possible car la partie distale est composée d'un réseau de tubes de petits diamètres dans lesquels un écoulement de Stokes linéaire, visqueux, incompressible a lieu, régulé par les différences de pression entre entrées et sorties.
- Un dernier niveau qui correspond à la zone alvéolaire, où on propose les déplacements d'un piston comme modèle simplifié du diaphragme pulmonaire.

Ce modèle par compartiments fusionne le réalisme d'un modèle 3D et la simplicité d'un modèle 0D, puisque des simulations directes des équations de Navier-Stokes ont lieu dans les bronches proximales, tandis que les deux derniers niveaux sont condensés en une condition aux limites non standard à imposer aux sorties des ramifications de la partie proximale.

Le modèle que nous proposons répond aux attentes suivantes :

- Il évite le maillage de la partie géométriquement complexe de l'arbre en limitant les simulations directes des équations de Navier-Stokes aux premières bronches de l'arbre.
- Les conditions aux limites non standards prennent en compte d'une part la dissipation de l'énergie dans les bronches distales et d'autre part l'action musculaire du diaphragme.
- Les deux derniers niveaux sont condensés et ne font pas partie du domaine de calcul. Cependant, si on résout les équations de Navier-Stokes dans la partie supérieure de l'arbre avec ces nouvelles conditions aux limites, on peut ensuite toujours récupérer des informations sur la partie condensée, telles que les pressions, les débits, l'énergie dissipée.

Les travaux qui seront exposés par la suite contiennent différents apports qui complètent des travaux antérieurs ou proposent une nouvelle démarche dans la compréhension du fonctionnement du poumon humain. Cette thèse a été élaborée dans un vaste cadre mathématique incluant simultanément des éléments de modélisation, d'analyse d'équations aux dérivées partielles, d'analyse numérique et de calcul scientifique.

## Difficultés relatives à la modélisation

Le choix de *conditions aux limites adaptées à la mécanique ventilatoire* a été étudié et mis en oeuvre : en particulier, comme précisé ci-dessus, ces conditions prennent en compte d'une part la dissipation de l'énergie dans les bronches distales et d'autre part l'action musculaire du diaphragme. Nous désignerons justement ces conditions non standard par *conditions aux limites dissipatives*.

L'arbre bronchique étant composé d'une vingtaine de générations, des *conditions aux limites non standard* ont été modélisées afin de réduire les simulations directes des équations de Navier-Stokes aux quelques premières générations en condensant tout le reste de l'arbre.

Le *choix des paramètres* est un sujet très discuté dans la littérature relative à la physiologie pulmonaire. Par ailleurs, le modèle proposé présente un large éventail de paramètres qui permettent d'identifier et simuler des pathologies respiratoires.

## Difficultés relatives à l'analyse non-linéaire

L'étude réalisée concerne *un système ouvert* dans le sens où on ne contrôle pas le flux d'énergie cinétique rentrant au niveau de la trachée. La difficulté liée à l'analyse de ce système réside dans la perte de la propriété conservative du terme non linéaire des équations de Navier-Stokes, ce qui n'est pas le cas avec les conditions de Dirichlet. Le *contrôle du flux d'énergie cinétique* constitue une difficulté supplémentaire lors des estimations a priori.

On propose l'analyse mathématique du système pour deux types de conditions aux limites dissipatives, naturelles et essentielles : pour les *conditions naturelles*, un résultat d'existence locale en temps pour données petites en 2D. Pour les *conditions essentielles*, qui sont plus restrictives, on se restreint à un seul degré de liberté pour la trace des vitesses sur les sections d'entrée et de sorties, mais on contrôle plus facilement le flux d'énergie cinétique, permettant d'établir un résultat d'existence de solution locale pour données quelconques et globales pour données petites aussi bien en 2D qu'en 3D.

## Difficultés relatives à l'analyse numérique et au calcul scientifique

La *compléxité géométrique du domaine* ne permet pas d'effectuer des simulations des équations de Navier-Stokes dans tout l'arbre ; les efforts de modélisation exposés précédemment permettent alors de simuler les équations de Navier-Stokes dans un nombre restreint de générations au niveau des voies aériennes supérieures, l'écoulement dans les voies aériennes inférieures étant pris en compte par les conditions aux limites non standard. Ces conditions aux limites font intervenir les débits sur les multiples sorties du domaine et la forme bilinéaire qui en découle couple les degrés de liberté de toutes les sorties de l'arbre : en conséquence, la structure creuse de la matrice est modifiée. Encore une fois les *conditions dissipatives essentielles* permettent de parer à cette difficulté puisqu'elles peuvent être implantées facilement sur tout code de calcul standard.

## Plan

- **Chapitre 1** : On établit dans ce chapitre une brève description de la l'architecture de l'appareil respiratoire pulmonaire, ainsi que de la physiologie respiratoire. On se concentre notamment sur la description des voies aériennes et sur le rôle du diaphragme dans la mécanique ventilatoire.
- **Chapitre 2** : On fait dans ce chapitre l'état de l'art concernant les conditions aux limites impliquant la pression sur une partie du domaine de calcul. On présente une liste non exhaustive de ces conditions, tout en comparant les formulations variationnelles et les bilans d'énergie qui en découlent.
- **Chapitre 3** : Ce chapitre traite du couplage des deux premiers compartiments du modèle que nous proposons, c'est à dire la partie proximale qui s'étend sur environ les cinq ou six premières générations, siège des équations de Navier-Stokes, et la partie résistive destinée à être condensée, et qui s'étant environ jusqu'à la 17<sup>ème</sup> génération. On explique le calcul de la résistance globale équivalente qui intervient dans la condition au limite remplaçant la zone condensée.  
Le modèle est présenté pour les deux catégories de conditions aux limites dissipatives, naturelles et essentielles. On présente également des tests numériques validant ce couplage. Dans le cas des conditions naturelles des simulations 3D sont réalisées avec MISTRAL, alors que pour les conditions essentielles des simulations bi-dimensionnelles sont réalisées avec Freefem++.
- **Chapitre 4** : Dans ce chapitre on étudie tout d'abord l'existence de solutions faibles pour le couplage des deux premiers niveaux du modèle, toujours pour les deux catégories de conditions aux limites. Ensuite, on introduit la modélisation de la zone alvéolaire, et on traite l'existence de solutions faibles pour le modèle global. Pour le cas sans piston, on prouve l'existence de solutions locales en temps pour données quelconques et globales en temps pour données petites, pour les conditions dissipatives essentielles, et ceci aussi bien en dimension deux qu'en dimension trois ; alors que pour les conditions dissipatives naturelles, seul un résultat d'existence locale pour données petites et globale pour données encore plus petites, en dimension deux, est prouvé. Pour le cas du modèle global, c'est à dire avec piston, on prouve l'existence de solutions faibles locales en temps pour des données quelconques en ce qui concerne les conditions aux limites dissipatives essentielles, tandis que pour les conditions dissipatives naturelles, on obtient l'existence de solutions locales en temps pour données petites et toujours seulement en dimension deux.
- **Chapitre 5** : Dans ce chapitre, on s'intéresse exclusivement au cas des conditions dissipatives naturelles, et dans le cadre du couplage des deux premiers compartiments. Dans une classe de solutions plus régulières que celles étudiées dans le précédent chapitre, on prouve l'existence d'une unique solution locale en temps ainsi que l'existence d'une solution globale en temps pour données petites.
- **Chapitre 6** : On s'intéresse ici au problème couplé global dans le cas des conditions dissipatives essentielles. On propose une discrétisation en temps du problème et on établit un bilan énergétique à l'ordre 1 pour le problème régulier en espace et discrétisé en temps. Les simulations numériques du problème intégré, présentées dans ce chapitre, sont bi-dimensionnelles et réalisées avec Freefem++. Un travail

est fait autour du calage des paramètres afin que le modèle 2D respecte autant que possible les propriétés mécaniques de l'arbre respiratoire humain réel ; le modèle 2D n'étant qu'une étape vers le modèle 3D qui est envisagé pour de travaux futurs.

Nous tenons à souligner que les résultats des chapitres 4 et 5 sont le fruit d'une étroite collaboration avec Céline Grandmont.

Une partie de ce travail a fait l'objet de publications (voir [41] et [27] ) dont la substance est développée dans la thèse.



# Chapitre 1

## Le poumon humain

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction à la physiologie du poumon . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>1.2</b>	<b>Architecture de l'appareil respiratoire pulmonaire . . . . .</b>	<b>11</b>
1.2.1	La paroi thoracique et les muscles respiratoires . . . . .	11
1.2.2	Les voies aériennes . . . . .	12
	Les conduits supérieurs . . . . .	12
	Les conduits inférieurs . . . . .	13
	Les fonctions des conduits . . . . .	13
<b>1.3</b>	<b>La physiologie de la respiration . . . . .</b>	<b>14</b>
1.3.1	Propriétés physiques du poumon . . . . .	14
1.3.2	La mécanique ventilatoire : inspiration/expiration . . . . .	15
<b>1.4</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>16</b>

---



## 1.1 Introduction à la physiologie du poumon

La respiration est la fonction biologique qui inclut tous les phénomènes qui participent aux échanges d'oxygène et de gaz carbonique entre l'organisme et le milieu extérieur.

Selon la source de l'oxygène, on distingue deux types d'appareils respiratoires : les bronchies, adaptées à la respiration de l'oxygène dissout dans l'eau, et les poumons qui permettent de respirer l'air atmosphérique.

L'appareil respiratoire pulmonaire connaît une variation considérable de sa structure histologique et morphologique au sein des différentes espèces animales. Chez les mammifères - entre autres, l'espèce humaine - l'appareil respiratoire fonctionne comme un soufflet, un conduit de transport d'air et une surface d'échange gazeux. Il est constitué par les poumons dont la structure interne qui associe tissus pulmonaires et capillaires sanguins permet l'échange des gaz, annexés à un système de conduction de l'air constitué par les fosses nasales, le pharynx, le larynx, la trachée et les bronches.

## 1.2 Architecture de l'appareil respiratoire pulmonaire

L'appareil respiratoire comporte le diaphragme, la paroi de la cage thoracique, les poumons et les voies aériennes.

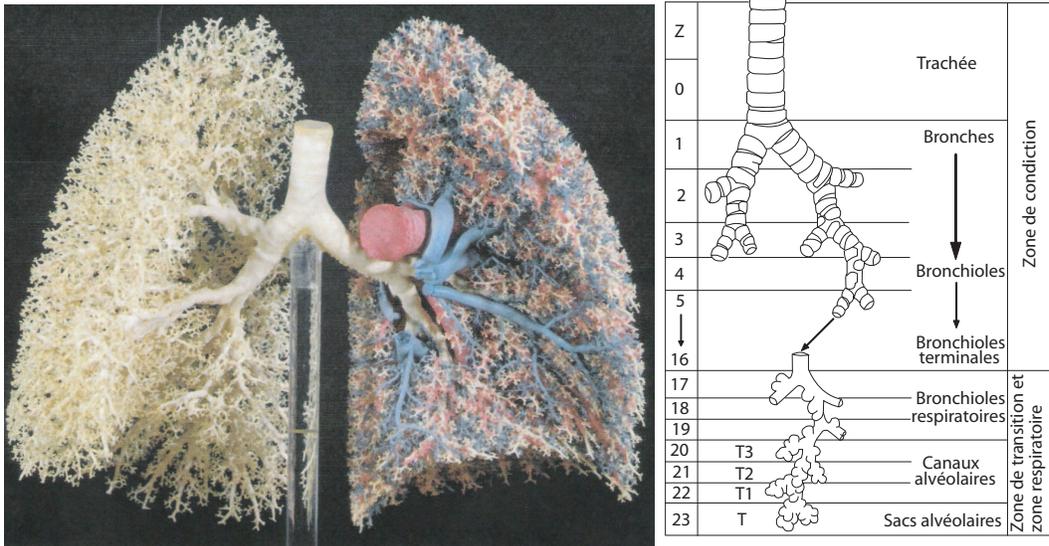
### 1.2.1 La paroi thoracique et les muscles respiratoires

La paroi thoracique se compose d'une charpente osseuse, et renferme les deux poumons qui sont disposés symétriquement de part et d'autre du médiastin, partie centrale de la cavité thoracique renfermant le coeur, la trachée, l'oesophage et d'importants vaisseaux sanguins (aorte, veines caves, etc...). La paroi thoracique est limitée par le sternum en avant, la colonne vertébrale en arrière et les côtes latéralement. Sur cette charpente s'insèrent les muscles qui fournissent la force et l'énergie nécessaires pour les mouvements respiratoires et l'écoulement des gaz dans les voies aériennes. Les modifications de la taille et du volume de la cage thoracique sont provoquées par des contractions du diaphragme et des muscles intercostaux.

Outre les muscles laryngés et pharyngés qui ne seront pas abordés ici, le principal muscle inspiratoire est le diaphragme : c'est une mince et large cloison musculaire séparant la cage thoracique et les poumons de la cavité abdominale. Caractéristique de tous les mammifères, elle est rudimentaire chez certains oiseaux. Chez l'homme, le diaphragme est attaché aux vertèbres lombaires, aux côtes inférieures et au sternum. Il a à peu près la forme d'une ellipse. Il est incliné vers le haut, plus haut à l'avant qu'à l'arrière. La contraction et l'expansion du diaphragme jouent un rôle important dans la respiration, au cours de l'inspiration, il se contracte, s'aplatit et permet l'augmentation du volume thoracique. En ce qui concerne les muscles expiratoires, le mécanisme se fait de la manière suivante : l'expiration au repos et chez un sujet sain est passive mais les muscles intercostaux et les muscles de la paroi abdominale interviennent au cours des mouvements respiratoires forcés.

## 1.2.2 Les voies aériennes

Les voies aériennes de l'appareil respiratoire peuvent être classées en deux parties : une partie de conduction et une partie d'échange. Dans ce qui suit, on décrit ces deux parties et on renvoie à l'annexe A pour des données sur les diamètres et les longueurs des conduits.



(a) Moulage d'un arbre bronchique humain effectué par E. R. Weibel [55]

(b) Ramification des voies aériennes des poumons humains par dichotomie régularisée depuis la trachée (génération  $z = 0$ ) jusqu'aux canaux et sacs alvéolaires (20 à 23 générations). Les 16 premières générations sont purement conductrices ; les voies aériennes de transition mènent à la zone respiratoire des alvéoles.

FIG. 1.1 –

### Les conduits supérieurs

Les conduits supérieurs sont des conducteurs de l'air, et correspondent à l'espace mort anatomique. Ils sont constitués par les cavités nasales et buccales, pharynx, larynx, trachée, bronches primaires de diamètres importants présentant des cartilages et des fibres musculaires lisses permettant d'en faire varier le diamètre. Les conduits supérieurs se terminent au niveau des bronchioles terminales ; ils assurent la conduction des gaz qui se fait par convection, comparable à l'écoulement d'un liquide dans un tuyau. Dans le système bronchique, trachée, bronches et bronchioles forment un arbre dichotomique. La trachée se subdivise en deux bronches principales, une pour chaque poumon, chacune se divisant en deux bronches segmentaires et ainsi de suite. Ainsi, l'arbre bronchique est formé d'une

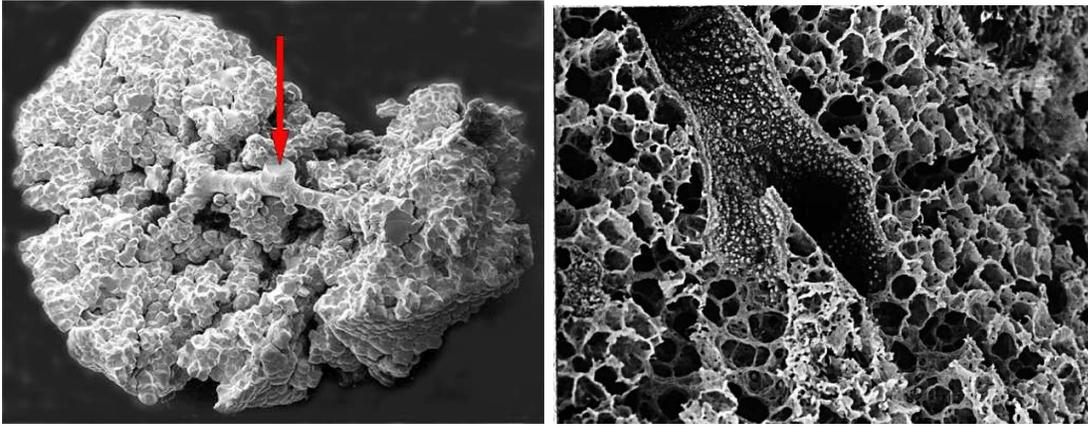
série de tubes ramifiés de plus en plus fins, courts et nombreux au fur et à mesure de leur pénétration dans le poumon. La décroissance exponentielle du diamètre des voies aériennes, qui se poursuit jusqu'au delà des bronches terminales (16<sup>ème</sup> génération), est compensée par la multiplication deux fois plus rapide de leur nombre, ainsi, la section totale des voies aériennes augmente rapidement. Cette augmentation, faite d'une arborescence dichotomique permet de considérer l'arbre bronchique comme une succession de générations formées d'une unité en "Y" qui correspondent à un segment bronchique et sa subdivision en deux. L'armature cartilagineuse des bronches leur confère une certaine rigidité qui permet de maintenir la lumière bronchique en cas d'hyperpression thoracique (expiration forcée). Leur possibilité de se contracter grâce aux muscles lisses modifie leur résistance à l'écoulement de l'air.

### Les conduits inférieurs

Les conduits inférieurs correspondent à la zone respiratoire des poumons, où se déroulent les échanges gazeux, ils commencent à partir de la 16<sup>ème</sup> ramification, à ce niveau, on note une disparition du cartilage et des muscles. Le transfert des gaz s'y fait par diffusion de façon comparable à la dilution d'un colorant dans l'eau. Constituée d'environ 3000 lobules limités par des septas fibreux, desservis par des bronchioles lobulaires qui donnent 3 à 4 générations de bronchioles intralobulaires, la dernière étant la bronchiole terminale ( $\simeq$  18<sup>ème</sup> génération), le territoire qui lui correspond est l'acinus (environ 30000 au total), un acinus correspond donc à environ 6 générations : de la 18<sup>ème</sup> à la 23<sup>ème</sup> ; les bronchioles terminales donnent naissance aux bronchioles respiratoires et aboutissent aux canaux alvéolaires et enfin aux sacs alvéolaires au total 200 à 600 millions d'alvéoles avec en moyenne 300 millions d'alvéoles. Ainsi, l'ensemble des acini représente une structure remarquablement adaptée aux échanges diffusionnels : un énorme volume étalé sur une très grande surface de très faible épaisseur puisque la distance entre les bronchioles terminales et les alvéoles les plus éloignées est inférieure à 8 mm. Les alvéoles constituent le principal constituant du parenchyme pulmonaire. La paroi des alvéoles est extrêmement mince (valeur moyenne de  $1\mu m$ ). Les capillaires sont en contact avec les alvéoles.

### Les fonctions des conduits

- Le déplacement de l'air ( par convection puis par diffusion).
- Le réchauffement de l'air jusqu'à la température corporelle, lors de son arrivée dans les poumons.
- L'humidification de l'air : il est donc saturé en vapeur d'eau, ce qui intervient dans la protection des tissus (l'épithélium broncho-alvéolaire) contre la dessiccation.
- La filtration et le nettoyage de l'air, grâce aux cellules ciliées et mucipares (cellules sécrétrices de mucus) qui forment une véritable barrière protectrice. Les particules de plus de  $6\mu m$  sont emprisonnées dans le mucus et évacuées par les mouvements rétrogrades des cils et sont finalement dégluties ou expectorées. Si elles font moins



(a) Acinus pulmonaire (sacs alvéolaires) ([55]). (b) Coupe d'un acinus pulmonaire. On voit une bronchiole terminale aboutissant sur les alvéoles (Lawrence Berkely National Laboratory Lung Lab Tour, [http://imglib.lbl.gov/ImgLib/COLLECTIONS/lung\\_tour.html](http://imglib.lbl.gov/ImgLib/COLLECTIONS/lung_tour.html)).

FIG. 1.2 – Acinus pulmonaire

de  $6\mu\text{m}$ , elles ne peuvent être remontées et sont lysées dans le poumon par les macrophages.

## 1.3 La physiologie de la respiration

### 1.3.1 Propriétés physiques du poumon

De par sa structure décrite précédemment le poumon se caractérise par différentes grandeurs physiologiques, en particulier :

- Elasticité : propriété d'un organe de revenir à sa forme initiale suite à une augmentation de pression. L'élasticité du poumon est due à la présence de fibres élastiques au niveau du parenchyme pulmonaire et elle a tendance à faire rétracter le poumon en s'opposant à son expansion lors de l'inspiration, l'activité des muscles inspiratoires tend alors à vaincre cette élasticité.
- Résistance :
  - résistances des voies aériennes : ce sont les résistances à l'écoulement de l'air dans ces voies. La résistance dépend du diamètre des voies aériennes, lui même variant en fonction du volume pulmonaire, on constate en effet que les résistances à l'écoulement sont plus faibles à l'inspiration (volume augmente donc diamètre augmente et résistance diminue). Elle dépend aussi de l'état de contraction de la paroi des conduits sous l'effet des muscles lisses.
  - résistances tissulaires : dues aux forces de frictions entre muscles respiratoires, feuillets de la plèvre, plèvre/poumons, plèvre/cage thoracique. Ces résistances tissulaires représentent 20% des résistances totales [53].

### 1.3.2 La mécanique ventilatoire : inspiration/expiration

La ventilation pulmonaire est un phénomène respiratoire de nature purement mécanique qui correspond à une contraction rythmique des poumons dont la fréquence est contrôlée par un centre nerveux spécialisé du cerveau dont l'activité est réglée entre autre par la saturation sanguine en oxygène. Le renouvellement de l'air alvéolaire se fait alors grâce à l'inspiration/expiration : au cours de l'inspiration, l'air atmosphérique entre dans les alvéoles alors qu'en cours d'expiration, il y a une sortie de l'air alvéolaire vers l'atmosphère. Si on représente le poumon d'une manière schématique (voir la figure 1.3) par un domaine  $\Omega(t)$  formé d'un conduit rigide unique de section d'entrée  $\Gamma_{in}$  débouchant sur un ballon déformable au cours du temps,  $\Gamma_a(t)$ , représentant le diaphragme, et si on désigne par  $\mathbf{u}$  la vitesse de l'air et par  $d$  le déplacement du diaphragme, alors en partant du principe de l'incompressibilité de l'air on a

$$\int_{\Omega(t)} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

et donc

$$\int_{\Gamma_a(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = - \int_{\Gamma_{in}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante du domaine. On suppose que  $\mathbf{u} = \partial_t d$  et on considère la loi de Poiseuille

$$P_a - P_{in} = R \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{/\Gamma_{in}}$$

où  $R$  est la résistance du conduit et  $P_{in}$  et  $P_a$  sont respectivement les pressions au niveau de  $\Gamma_{in}$  et  $\Gamma_a(t)$ . On a alors

$$\int_{\Gamma_a(t)} \partial_t d \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R} (P_{in} - P_a). \quad (1.1)$$

La direction du courant aérien dépend de la différence de pression entre l'alvéole et la bouche. L'inspiration débute par la contraction du diaphragme, la baisse de ce muscle entraîne une augmentation du volume thoracique par augmentation du diamètre vertical et du diamètre transversal de la cage thoracique ainsi que l'expansion du volume des poumons par l'intermédiaire du glissement des feuillets de la plèvre, et par la relation (1.1) la pression alvéolaire baisse jusqu'à la fin de l'inspiration (blocage limité par la taille de la paroi thoracique), et devient inférieure à la pression atmosphérique, un gradient de pression se crée et il s'en suit un passage d'air de l'atmosphère vers les alvéoles, jusqu'à ce qu'un équilibre entre les deux pressions s'établisse. L'inspiration est alors toujours active et c'est le diaphragme qui en est responsable alors que les muscles accessoires sont mis en jeu lors d'une hyperventilation (lutte contre une éventuelle augmentation des résistances à l'écoulement), d'où le danger de la paralysie du diaphragme. A la fin de l'inspiration, le diaphragme se relâche, les poumons se rétractent grâce à leur élasticité naturelle, la pression alvéolaire augmente et devient supérieure à la pression atmosphérique, il s'en suit une sortie de l'air des alvéoles. L'expiration, chez un sujet normal est toujours passive et plus longue que l'inspiration ( $\simeq 3$  secondes pour l'expiration contre  $\simeq 2$  pour l'inspiration), alors que l'expiration forcée est active et fait appel aux muscles expiratoires. En conclusion,

la ventilation pulmonaire est un phénomène rythmique, asymétrique au cours du temps, faisant intervenir un effet musculaire dont le principal acteur est le diaphragme au cours de l'inspiration d'où sa qualification de phénomène actif alors que l'expiration qualifiée de passive fait intervenir les forces de rappel élastiques étant à l'origine de la compression du volume pulmonaire.

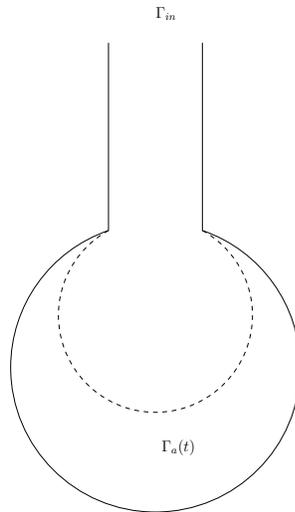


FIG. 1.3 –

## 1.4 Conclusion

Le poumon est globalement composé d'un squelette bronchique ayant la structure d'une arborescence dichotomique, enveloppé d'un parenchyme qui se comporte comme un milieu visco-élastique. Afin d'assurer son rôle d'apport d'oxygène et d'élimination du dioxyde de carbone, le poumon effectue des mouvements rythmiques d'inspiration et d'expiration dont la fréquence est réglée selon la saturation d'oxygène dans le sang par le système nerveux central, l'inspiration étant active et le diaphragme en est l'acteur principal, alors que l'expiration - passive - obéit à la nature élastique du parenchyme pulmonaire. Ces mouvements peuvent être alors assimilés à ceux d'un ressort tiré par une masse et qui revient à sa position initiale sous l'effet des forces de rappel élastiques. C'est dans ce sens que se fera la modélisation du fonctionnement dynamique des poumons dans le reste de ce travail.

# Chapitre 2

## Conditions aux limites naturelles pour les équations de Navier-Stokes

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2.2</b>	<b>Conditions aux limites essentielles et naturelles</b> . . . . .	<b>19</b>
<b>2.3</b>	<b>Problème modèle</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>2.4</b>	<b>Le laplacien et ses variantes</b> . . . . .	<b>21</b>
2.4.1	Forme symétrisée du laplacien . . . . .	21
2.4.2	Forme standard du laplacien . . . . .	24
2.4.3	Forme vectorielle du laplacien . . . . .	27
<b>2.5</b>	<b>Formes alternatives</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>31</b>

---



## 2.1 Introduction

L'une des motivations du travail présenté ici est la recherche de conditions aux limites pertinentes sur les multiples sorties du domaine, qui soient adaptées à la modélisation de la ventilation du poumon humain.

L'essentiel du calcul effectué à l'heure actuelle se base sur des conditions aux limites de Dirichlet pour la vitesse de l'air, voir par exemple Mauroy et al. [39], Perzl [45]. Toutefois, comme précisé dans le précédent chapitre, ce sont les déplacements du diaphragme qui pilotent essentiellement les mouvements respiratoires, il faut donc intégrer le gradient de pression entre la trachée et les alvéoles comme moteur de la respiration, ainsi que la force musculaire exercée par le diaphragme en tant que paramètre de contrôle dans les conditions aux limites. De plus, il suffit que l'arbre bronchique soit asymétrique, ou que la résistance à l'écoulement de l'une des bronches soit perturbée, suite par exemple à un rétrécissement de sa lumière, pour que la distribution de la vitesse au niveau des différentes sorties du domaine devienne inconnue. S'ajoute à ceci le fait que le profil de la vitesse change entre l'inspiration et l'expiration, notamment au niveau de la trachée.

Cette problématique s'inscrit dans un cadre plus général, qui est la recherche de formulations en terme de conditions aux bords faisant intervenir un gradient de pression, et qui conduisent à des problèmes bien posés. En effet, par opposition à la condition de Dirichlet classique, diverses conditions aux limites faisant intervenir la pression sur une partie du domaine de calcul, ont été proposées. Dans ce qui suit, on présente une liste non exhaustive de ces conditions, tout en essayant de préciser les motivations qui nous ont amenées à introduire un nouveau type de conditions aux limites intervenant dans le développement de notre modèle de l'arbre bronchique.

## 2.2 Conditions aux limites essentielles et naturelles

Les conditions les plus courantes qu'on peut prescrire sont de deux types *essentielles* ou *naturelles*, et il est important d'observer la différence de traitement entre ces deux types.

- Conditions essentielles : la vitesse est imposée, sur une partie ou l'ensemble de la frontière. Elle est explicitement imposée dans l'espace fonctionnel où l'on cherche la solution et les fonctions test sont nulles sur le bord concerné. On parle de conditions aux limites essentielles. Notons que si la vitesse  $\mathbf{u}$  est imposée sur l'ensemble de la frontière d'un domaine  $\Omega$ ,  $\mathbf{u}_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_0$ ,  $\mathbf{u}_0$  étant un champ donné, alors comme le champ est solénoïdal,  $\mathbf{u}_0$  doit nécessairement vérifier  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$ .
- Conditions naturelles : par opposition aux conditions aux limites essentielles, certaines conditions ne sont pas imposées explicitement dans l'espace fonctionnel où on cherche la solution, mais résultent de la formulation faible. Aussi est-il important de prendre en compte les degrés de liberté des fonctions tests aux bords dans ce cas. On parle de conditions aux limites naturelles. Ce type de conditions se rencontre souvent lors de la simulation numérique de problèmes d'écoulements qui requièrent de tronquer un domaine non borné en un domaine borné, conduisant alors à l'intro-

duction d'une frontière artificielle, comme c'est le cas, par exemple, pour certains écoulements autour d'obstacles, ou de domaines à coins, ou dans des tubes, conceptualisés dans des domaines non bornés, et où on introduit une frontière artificielle avec condition au bord naturelle afin de se concentrer sur un domaine d'intérêt local, en s'affranchissant des effets de bord.

## 2.3 Problème modèle

Afin de fixer les idées et de simplifier la présentation des différentes conditions aux limites, on se place dans le cadre d'un problème modèle. On considère un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 2, 3$ , de frontière  $\partial\Omega$ , localement lipschitzienne, représentant un canal. On suppose que  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_l \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , où  $\Gamma_l$  représente la paroi latérale du conduit, tandis que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  désignent les sections d'entrée et de sortie du conduit. On notera par  $\mathbf{n}$  la normale sortante de  $\partial\Omega$ ; comme  $\partial\Omega$  est localement lipschitz,  $\mathbf{n}$  est définie presque partout sur  $\partial\Omega$  ( voir la figure 2.1).

On s'intéresse à l'écoulement dans le canal  $\Omega$ , d'un fluide newtonien, visqueux, incompressible, de viscosité  $\mu$  et de densité  $\rho$  qu'on supposera égale à 1 afin d'alléger les notations. Les inconnues du problème sont la vitesse du fluide  $\mathbf{u}$  et sa pression  $p$ , solutions des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

représentant respectivement le bilan de quantité de mouvement et le principe de conservation de la masse. On impose sur la paroi latérale du canal la condition de non glissement suivante

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_l$$

qui correspond au fait que la paroi latérale  $\Gamma_l$  est supposée fixe, rigide et imperméable. Le système est à compléter avec une condition naturelle sur  $\Gamma_1$  et sur  $\Gamma_2$ , qu'on fera varier dans les sections suivantes.

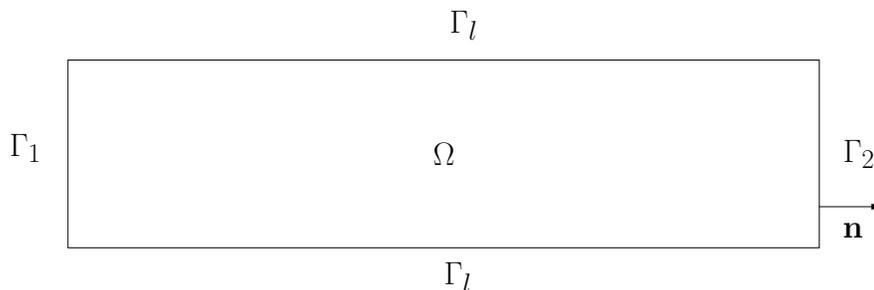


FIG. 2.1 – Domaine modèle

## 2.4 Le laplacien et ses variantes

Dans cette section, on élargit la perspective, en considérant sur  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  des conditions aux limites autres que la condition de Dirichlet en vitesse et qui soient légitimes dans le cadre d'une formulation faible : le choix des conditions aux bords est inclus implicitement, à travers le choix de la formulation variationnelle.

On aborde également le problème du traitement du terme de transport  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  (terme d'advection de la vitesse par elle-même). En effet, il est bien connu ( voir par exemple [24], [37] et [50]) que le problème de Navier-Stokes, stationnaire ou non stationnaire, avec condition de Dirichlet homogène sur toute la frontière, possède des solutions faibles - pas nécessairement uniques - pour tout nombre de Reynolds. L'argument standard pour ce résultat est basé sur "la propriété conservative" du terme non linéaire

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

qui est obtenue en intégrant par parties cette quantité et en utilisant  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} &= \int_{\Omega} \sum_i \mathbf{u}_i \sum_j \mathbf{u}_j \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_j \mathbf{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} |\mathbf{u}|^2 \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \\ &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + \int_{\partial\Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \end{aligned}$$

Dans le cas de bords  $\Gamma_i$  "libres", cette relation est remplacée par

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \sum_i \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

qui, généralement, ne permet pas de borner l'énergie dans le système sans une connaissance a priori de ce qui est un flux rentrant ou un flux sortant, et qu'un flux rentrant pourrait amener au domaine  $\Omega$  plus d'énergie cinétique que les quantités qui en sortent via les flux sortants, empêchant ainsi le contrôle du flux d'énergie cinétique dans  $\Omega$ . On peut suspecter que cette difficulté théorique peut être évitée simplement en changeant la formulation variationnelle du problème, c'est à dire en utilisant d'autres représentations variationnelles du terme de transport et du terme de diffusion.

### 2.4.1 Forme symétrisée du laplacien

Pour un champ solénoïdal  $\mathbf{u}$ , on a

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}). \quad (2.2)$$

En effet, si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  sont deux champs de vecteurs définis sur  $\Omega$  et si  $\mathbf{u}$  est à divergence nulle alors

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} ({}^t\nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} &= \int_{\partial\Omega} (\nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \\
 &= \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \\
 &= \int_{\Omega} (\nabla\nabla \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} {}^t\nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v}.
 \end{aligned}$$

Comme le champ  $\mathbf{u}$  est à divergence nulle, le premier terme du second membre s'annule et on a

$$- \int_{\Omega} {}^t\nabla\mathbf{u} : \nabla\mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} ({}^t\nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.3)$$

d'où l'on déduit l'identité (2.2) annoncée ci-dessus.

Soit  $\mathbf{v}$  une fonction test de  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , en se basant sur l'identité (2.2), le produit scalaire euclidien avec la première équation du système de Navier-Stokes et une intégration par parties donnent

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\Omega} (\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{v} - \mu \int_{\partial\Omega} (\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

On introduit les espaces

$$X = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_l\}$$

$$\text{et } V = \{\mathbf{u} \in X, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}.$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\int_{\Omega} (\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) : {}^t\nabla\mathbf{v} = \int_{\Omega} (\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) : \nabla\mathbf{v},$$

ce qui implique

$$\int_{\Omega} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} (\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) : (\nabla\mathbf{v} + {}^t\nabla\mathbf{v}) - \int_{\partial\Omega} (\mu(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.4)$$

On peut considérer la condition aux limites essentielle (2.5a) et les conditions aux limites naturelles (2.5b) et (2.5c) suivantes

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \quad (2.5a)$$

$$\mu(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} = -p_1\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_1, \quad (2.5b)$$

$$\mu(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} = -p_2\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_2. \quad (2.5c)$$

La formulation variationnelle du problème à résoudre est alors

$$\left( \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\begin{aligned} \text{où on a posé } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) : (\nabla \mathbf{v} + {}^t \nabla \mathbf{v}), \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}, \\ \text{et } l(\mathbf{v}) &= - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} p_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned}$$

la coercivité de la forme bilinéaire étant garantie par l'inégalité de Korn [43]

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Remarque 2.4.1.** Rappelons qu'un fluide incompressible est dit newtonien si le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  s'exprime de la façon suivante

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{u}) - p \mathbf{Id},$$

où  $\mathbf{D}(\mathbf{u})$  est le tenseur des taux de déformations défini par

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}).$$

Les conditions (2.5b) et (2.5c) expriment donc le fait que la contrainte normale  $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  est prescrite. Cette condition résulte très souvent de l'hypothèse suivante : on considère que le milieu situé de l'autre côté de la frontière, qui peut être le même fluide ou bien un autre milieu comme le gaz dans le cas d'un écoulement à surface libre, est caractérisé par un tenseur des contraintes dit scalaire, c'est à dire limité à sa partie diagonale associée à une pression  $p_{ext}$  ; la condition prend alors la forme suivante

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mu (\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = -p_{ext} \mathbf{n} \quad (2.6)$$

et traduit l'équilibre du tenseur normal des contraintes de part et d'autre de la frontière.

**Remarque 2.4.2.** La condition (2.6) est très peu utilisée en pratique pour les problèmes à frontière fixe, bien qu'elle semble la plus naturelle des conditions. En effet, dans le cas où la frontière du domaine est fixe, la partie de la frontière sur laquelle la vitesse n'est pas imposée est une frontière fictive, puisque le même fluide visqueux se trouve de l'autre côté de cette frontière. La bonne condition serait d'imposer la continuité du tenseur normal des contraintes, en écrivant l'équilibre des forces sur l'interface, mais le tenseur normal des contraintes de l'autre côté de la frontière n'est pas connu, sa connaissance nécessite la résolution du même problème de Navier-Stokes sur un domaine strictement plus grand.

**Remarque 2.4.3.** Bilan énergétique :

En choisissant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  dans (2.4), le bilan d'énergie s'écrit, suite à une intégration par parties du terme convectif

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}|^2 = - \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}.$$

En tenant compte de la remarque 2.4.1, ceci s'écrit également

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 = -\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}|^2 - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

et établit que la variation de l'énergie cinétique du fluide est égale à la puissance dissipée au sein du fluide par les forces de viscosité, plus la puissance des forces extérieures en surface, moins le flux d'énergie cinétique à travers les sections  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

**Remarque 2.4.4.** Si une condition de Dirichlet nulle est imposée sur toute la frontière de  $\Omega$ , alors en tenant compte de (2.3) on aura

$$\int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u} : {}^t \nabla \mathbf{u} = 0,$$

et l'expression de la puissance dissipée est simplifiée comme suit

$$-\frac{\mu}{2} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}|^2 = -\mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2$$

## 2.4.2 Forme standard du laplacien

On s'intéresse à présent à la forme standard du laplacien  $\Delta \mathbf{u}$  qui est à la base de la formulation la plus communément utilisée. Le raisonnement développé ci-dessus, pour obtenir une formulation faible cohérente peut-être entièrement repris. Le produit d'une fonction test  $\mathbf{v}$  de  $C^\infty(\bar{\Omega})$  avec l'équation de quantité de mouvement du système de Navier-Stokes, et une intégration par parties, donnent

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \mu \int_{\partial\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} p \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

On introduit les espaces

$$X = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_l\}$$

$$\text{et } V = \{\mathbf{u} \in X, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

ce qui implique

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} - \int_{\partial\Omega} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.7)$$

On considère la condition aux limites essentielle (2.8a) et les conditions aux limites naturelles (2.8b) et (2.8c) suivantes

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \quad (2.8a)$$

$$\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -p_1 \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_1, \quad (2.8b)$$

$$\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -p_2 \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_2. \quad (2.8c)$$

La formulation variationnelle du problème à résoudre est alors

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\begin{aligned} \text{où on a posé } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}, \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}) \mathbf{w}, \\ \text{et } l(\mathbf{v}) &= - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} p_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

On peut se référer à Heywood et al. [32], où il est prouvé que le problème est bien posé et qu'il est équivalent à la recherche de  $\mathbf{u}$  et  $p$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -p_1 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_1, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -p_2 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right.$$

**Remarque 2.4.5.** On exprime  $\mathbf{u}_{/\partial\Omega}$  sous la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau \boldsymbol{\tau} + \mathbf{u}_n \mathbf{n}$  où  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\mathbf{n}$  sont respectivement la tangente et la normale sortante de  $\partial\Omega$ . Dans le cas où les sections  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2$  sont droites, comme c'est le cas dans notre problème modèle, en faisant le produit scalaire par  $\mathbf{n}$  et en intégrant la condition (2.8b) (2.8c) sur  $\Gamma_i$  on obtient

$$\int_{\Gamma_i} p = p_i |\Gamma_i| + \mu \int_{\Gamma_i} \partial_n \mathbf{u}_n.$$

Grâce à la contrainte sur la divergence  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  on a  $\mu \int_{\Gamma_i} \partial_n \mathbf{u}_n = -\mu \int_{\Gamma_i} \partial_\tau \mathbf{u}_\tau$ , qui s'annule grâce à la condition de non glissement sur la paroi latérale, il en découle

$$\frac{1}{|\Gamma_i|} \int_{\Gamma_i} p = p_i.$$

Ainsi, dans ce cas, les pressions  $p_i$  apparaissant dans la condition (2.8b) (2.8c), correspondent à la pression moyenne sur  $\Gamma_i$ .

**Remarque 2.4.6.** Les conditions (2.8b) et (2.8c) sont en pratique très communément utilisées, car elles sont naturelles d'un point de vue mathématique. Elles apparaissent naturellement dans la formulation variationnelle du problème si on ne prescrit aucune condition aux bords pour la vitesse à la sortie du domaine suggérant ainsi le nom de *condition de sortie libre*, ou *do-nothing boundary condition* en nomenclature anglo-saxonne. Elles n'ont pas de véritable justification physique, mais elles présentent néanmoins l'avantage d'être exactes dans le cas d'un écoulement de Poiseuille. En effet, si on considère le problème de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -p_1 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_1, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -p_2 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_2, \end{array} \right.$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont deux pressions constantes imposées respectivement en entrée et en sortie, on retrouve la solution de Poiseuille à pression constante sur chaque section du tube cylindrique et à vitesse invariante par translation le long de la direction génératrice du cylindre ( pour plus de détails, voir Maury [40]). On peut également se référer à Leone et al. [35] et Heywood et al. [32] qui ont simulé l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible à bas Reynolds, dans un canal en utilisant respectivement les conditions (2.8b)(2.8c) et (2.5b)(2.5c), et qui constatent que c'est la condition (2.8b)(2.8c) qui reproduit un écoulement à l'aspect le plus proche de l'écoulement de Poiseuille, notamment au voisinage de la sortie du canal. Voir aussi la figure (2.2) pour des simulations des équations de Stokes réalisées avec Freefem++ [20] respectivement avec les conditions (2.8b) (2.8c) et (2.5b) (2.5c). Observons qu'avec la condition (2.8b) (2.8c) on retrouve l'écoulement de Poiseuille alors qu'avec la condition (2.5b) (2.5c) le fluide semble voir le bord et s'échapper sur les côtés. Ceci peut s'expliquer par le fait que si on exprime  $\mathbf{u}_{/\partial\Omega}$  sous la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau\boldsymbol{\tau} + \mathbf{u}_n\mathbf{n}$ , on obtient pour les conditions (2.8b)(2.8c)

$$\partial_n \mathbf{u}_\tau / \Gamma_i = 0, \quad (2.9)$$

alors que pour (2.5b)(2.5c) on obtient

$$(\partial_n \mathbf{u}_\tau + \partial_\tau \mathbf{u}_n) / \Gamma_i = 0. \quad (2.10)$$

Ainsi, comme on le voit sur la figure 2.2, on a  $\partial_n \mathbf{u}_\tau > 0$  et  $\partial_\tau \mathbf{u}_n < 0$  sur la moitié supérieure du profil de vitesse en raison de la condition (2.10) et réciproquement sur la moitié inférieure. Gresho [28] présente également l'argument physique suivant pour confirmer ce choix de la condition aux limites (2.8b)(2.8c). Le tenseur normal des contraintes défini par

$$F = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} + \mu\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + \nabla \mathbf{u}_n\right)$$

a pour composantes normales et tangentielles

$$F_n = \mathbf{n} \cdot F = -p + 2\mu \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial n} \quad (2.11)$$

et

$$F_\tau = \boldsymbol{\tau} \cdot F = \mu\left(\frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial n} + \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial \tau}\right). \quad (2.12)$$

Par ailleurs, si on revient aux conditions (2.8b)(2.8c), et qu'on exprime  $\mathbf{u}_{/\partial\Omega}$  sous la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\tau\boldsymbol{\tau} + \mathbf{u}_n\mathbf{n}$ , on obtient

$$(p - \mu\partial_n \mathbf{u}_n) / \Gamma_i = p_i \quad (2.13)$$

et

$$\partial_n \mathbf{u}_\tau / \Gamma_i = 0. \quad (2.14)$$

Ainsi, pour de grands nombres de Reynolds, le terme  $2\mu \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial n}$  dans (2.11) tend à être petit comparé à  $p$  car  $\mu \simeq \frac{1}{Re}$ , où  $Re$  est le nombre de Reynolds, donc le facteur multiplicatif 1 ou 2 n'est pas important dans ce cas, et la condition (2.11) peut-être raisonnablement remplacée par (2.13).

**Remarque 2.4.7.** Bilan énergétique :

En choisissant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  dans (2.7), le bilan d'énergie s'écrit, suite à une intégration par parties du terme convectif

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 = -\mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 - \sum_{i=1,2} p_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

et établit que la variation de l'énergie cinétique du fluide est égale à la puissance dissipée au sein du fluide par les forces de viscosité, plus la puissance des forces extérieures en surface, moins le flux d'énergie cinétique à travers les sections  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Là encore la présence du flux d'énergie cinétique est à la base de difficultés supplémentaires pour la théorie d'existence de solutions. En conséquence, dans [32], l'existence d'une solution unique n'est prouvée, même en dimension deux, que pour une donnée suffisamment petite. Kračmar et al. [33] ont traité le cas de données générales en formulant le problème sous forme d'inégalités variationnelles incluant la majoration de l'énergie comme contrainte. Ceci laisse la question ouverte en ce qui concerne l'existence de solutions pour la formulation originale avec données générales. Une réponse positive est suggérée par les tests numériques qui ne montrent pas d'instabilité avec l'analogie discret de (2.8b)(2.8c) dans le cas de grands nombres de Reynolds, voir [32]

### 2.4.3 Forme vectorielle du laplacien

On se donne une fonction test  $\mathbf{v}$  de  $C^\infty(\bar{\Omega})$ . Multiplions le bilan de quantité de mouvement du problème de Navier-Stokes par  $\mathbf{v}$ , et intégrons sur  $\Omega$ . En se basant sur la forme vectorielle du laplacien

$$\Delta \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad (2.15)$$

l'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \\ & - \mu \int_{\partial \Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \nabla \cdot \mathbf{u} + \mu \int_{\partial \Omega} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla \times \mathbf{u} + \int_{\partial \Omega} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0. \end{aligned}$$

Les termes impliquant la divergence de  $\mathbf{u}$  s'annulent, puisqu'on cherche un champ à divergence nulle. On obtient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\partial \Omega} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla \times \mathbf{u} + \int_{\partial \Omega} p(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = 0.$$

Par ailleurs, concernant le terme non linéaire  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ , on a l'identité

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2 + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

ce qui donne, suite à une nouvelle intégration par parties

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} - \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \\ & + \mu \int_{\partial \Omega} (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \cdot \nabla \times \mathbf{u} + \int_{\partial \Omega} (p + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \end{aligned}$$

Pour obtenir une forme bilinéaire coercive, il suffit ou bien d'annuler les intégrales de bord, ou bien de les rendre indépendantes de  $\mathbf{u}$  et de les passer au second membre, ou bien de les rendre positives lorsque  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ . En procédant ainsi, on peut montrer que pour la partition  $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_l \cup \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2$ , il est raisonnable d'imposer les conditions aux limites suivantes

$$\mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \quad (2.16a)$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad (2.16b)$$

$$p + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 = p_1 \text{ sur } \Gamma_1, \quad (2.16c)$$

$$p + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 = p_2 \text{ sur } \Gamma_2. \quad (2.16d)$$

En introduisant les espaces

$$X = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \cup \Gamma_2\}$$

$$\text{et } V = \{\mathbf{u} \in X, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

la formulation variationnelle du problème s'écrit

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Omega} ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} + \mu \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) + \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} p_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (2.17)$$

Si on désigne par  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$ , le problème à résoudre est alors du type

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v}\right) + b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V,$$

$$\text{où on a posé } a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot (\nabla \times \mathbf{v}),$$

$$b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w},$$

$$\text{et } l(\mathbf{v}) = - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} p_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}.$$

La condition (2.16b) correspond à l'hypothèse suivant laquelle le fluide circule avec une vitesse normale aux sections du canal, d'où l'annulation de la composante tangentielle de la vitesse. L'écoulement est alors la conséquence du gradient de pression imposé entre les sections  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Notons que c'est la pression totale  $p + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$ , dite également pression de Bernoulli, qui est prescrite sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ .

On trouve dans la littérature plusieurs travaux qui s'intéressent au problème énoncé ci-dessus. Le problème a été étudié par Guermond et al. [30] dans le cas du problème de Poisson, puis généralisé au cas du problème de Stokes. Dans ce cas, le résultat d'existence repose sur le caractère coercif de la forme bilinéaire qui est assuré par le résultat d'équivalence des normes suivant [4]

$$\forall \mathbf{v} \in X, \quad c_1 \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \leq (\|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2)^{\frac{1}{2}} \leq c_2 \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Notons que la forme bilinéaire  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \nabla \times \mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{v}$  est V-coercive mais n'est absolument pas X-coercive, toutefois la V-coercivité est suffisante pour conclure que le problème est bien posé. Le problème a également été étudié dans le cas des équations de Navier-Stokes stationnaires par Conca et al. [16] et Bègue et al. [7], et pour l'analyse et l'implantation numérique du système le lecteur est invité à consulter [21], [17], [46], [47] et [9].

**Remarque 2.4.8.** Soulignons le lien entre la pression totale et la loi de Bernoulli. Cette loi, dans le cas d'un fluide parfait incompressible dont l'écoulement est supposé irrotationnel, c'est à dire dont la vitesse  $\mathbf{u}$  dérive à chaque instant d'un potentiel  $\varphi$ , est obtenue en intégrant l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = 0.$$

En réécrivant

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \left( \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right) + (\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u},$$

en utilisant le caractère irrotationnel du fluide et grâce à l'écriture sous forme de potentiel  $\mathbf{u} = \nabla \varphi$ , on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \nabla \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + p \right) = 0.$$

Ainsi, à chaque instant, la quantité

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} + p$$

est constante sur l'ensemble du domaine fluide.

**Remarque 2.4.9.** Bilan énergétique :

Le bilan énergétique obtenu en choisissant  $\mathbf{v} = \mathbf{u}$  dans (2.17) et en remarquant que  $((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$ , est le suivant

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \mu \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{u}|^2 = - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} p_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}.$$

Si la condition aux limites sur la pression totale  $p + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$  avait été remplacée tout simplement par la prescription de la pression statique  $p$ , en établissant le bilan énergétique on aurait obtenu

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \int_{\partial \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \mu \int_{\Omega} |\nabla \times \mathbf{u}|^2 = - \sum_{i=1,2} \int_{\Gamma_i} p_i \mathbf{u} \cdot \mathbf{n},$$

et on voit donc apparaître un terme supplémentaire  $\int_{\partial \Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  dans la formulation variationnelle, provenant de l'intégration par parties du terme non linéaire  $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})$ . Il

s'agit du flux d'énergie cinétique transporté à travers les sections  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .

Toutefois, comme

$$\int_{\partial\Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \int_{\Gamma_1} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Gamma_2} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

et si on assimile le canal à une bronche où l'écoulement peut être inspiratoire ou expiratoire, on ne peut pas contrôler le signe de cette quantité, puisque l'un des deux termes risque d'avoir "le mauvais signe", suivant qu'il s'agisse d'une inspiration ou d'une expiration. Ainsi, l'introduction de la pression totale présente l'avantage "d'absorber" ce terme non linéaire, et de faciliter par conséquent la théorie d'existence de solution, puisque tout se passe comme si on considère un problème aux données de Dirichlet homogène sur tout le bord du domaine.

**Remarque 2.4.10.** Si on se restreint au problème de Stokes, la condition naturelle - dans le sens où elle apparaît naturellement lors de la formulation variationnelle - à imposer en pression sur  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  serait la prescription de la pression statique et non pas la pression totale.

## 2.5 Formes alternatives

Il y a un grand nombre de choix de conditions aux limites naturelles en terme de pression, utilisées par la communauté numérique, sans un critère vraiment clair de la préférence de l'une par rapport aux autres. On ne peut s'empêcher de constater la diversité des combinaisons possibles des formes alternatives des termes diffusifs et convectifs. Ainsi, par exemple, à part les formes citées ci-dessus, une autre modification possible pour forcer la propriété conservative du terme de transport serait d'utiliser l'identité

$$\nabla \left( \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^t$$

et le terme de transport pourrait être écrit sous la forme

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})^t + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2,$$

ce qui conduit à une formulation variationnelle dans laquelle  $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v})$  serait remplacé par

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}) \tag{2.18}$$

alors que le terme  $\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$  serait absorbé par la pression.

Une forme alternative serait

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{v}) - \frac{1}{2} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{u}) \tag{2.19}$$

qui est légitime pour tout  $\mathbf{v} \in \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v}_{/\Gamma_i} = 0, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$  ( pour plus de détails, voir [24]). Noter que pour les deux cas on a, pour la nouvelle forme trilinéaire,  $\tilde{b}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ . Les conditions naturelles induites sont

– pour (2.11)  $\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \bar{p} \mathbf{n} = -p_i \mathbf{n}$  où  $\bar{p} = p + \frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$  est la pression de Bernoulli,

– pour (2.13)  $\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{2} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|^2 - p \mathbf{n} = -p_i \mathbf{n}$ ,

et les deux formulations induisent un comportement non physique au niveau des frontières d'entrée et de sortie ( voir [32]).

Pour une discussion plus détaillée des conditions aux limites, et pour une liste plus exhaustive des références, on se réfère à [28], et on en extrait les deux tableaux (2.1) et (2.2) pour un résumé des différentes combinaisons possibles.

## 2.6 Conclusion

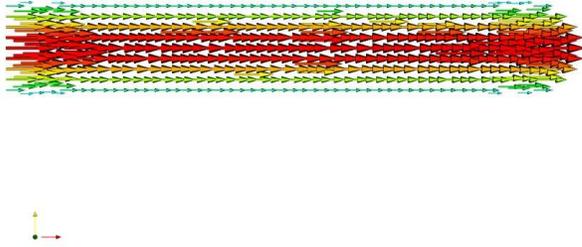
Pour la suite de ce travail et en ce qui concerne la modélisation de l'écoulement de l'air dans l'arbre bronchique, c'est la condition (2.8b)(2.8c) que nous adoptons, qui est probablement la plus recommandée ( voir [28] et [32]) d'un point de vue mathématique et numérique. Précisons cependant que dans notre modèle, la pression au niveau de l'endroit où on décide de tronquer sera une véritable inconnue du problème, ce qui rend l'utilisation de ce type de conditions délicat, puisqu'il y a dans ce cas autant de conditions aux limites à paramétrer que de sorties. De plus, cette condition aux limites sera modifiée de manière à intégrer le fait que l'arbre bronchique continue au delà de la génération où on décide de tronquer, et de manière à prendre en compte la dissipation d'énergie dans le reste de l'arbre.

Forme	Nom	Commentaires
$\nabla \cdot [\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}] = \Delta \mathbf{u} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$  et  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$	Forme symétrisée	-Communément utilisée pour la méthode des éléments finis, rarement utilisée pour la méthode des différences finies. -Permet d'aboutir à des conditions aux limites naturelles à signification physique dans le cas de véritables interfaces entre deux milieux, et prend en compte les forces visqueuses.
$\Delta \mathbf{u}$	Forme conventionnelle	-La plus couramment utilisée. -Aboutit à des conditions de sorties libres recommandées, exactes pour l'écoulement de Poiseuille.
$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}$  et $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$	Formulation div-rot	Aboutit à des conditions aux limites naturelles.
$-\nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla \times \mathbf{w}$	Formulation tourbillon	$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$ et $\nabla \cdot \mathbf{w} = 0$

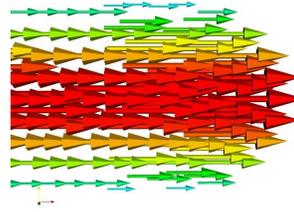
TAB. 2.1 – Formes alternatives pour le terme diffusif

Forme	Nom	Commentaires
$\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u})$ et $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$	Formulation divergence	-Conserve les moments lors de la discrétisation -Permet de mettre en place des conditions aux limites naturelles impliquant les flux des moments advectif.
$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla  \mathbf{u} ^2 - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}$	Forme advective/convective	-Communément utilisée. -Généralement ne conserve pas les moments ou l'énergie cinétique en discret.
$\mathbf{w} \times \mathbf{u}$	Formulation rotationnelle	- $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$ et $\frac{1}{2} \nabla  \mathbf{u} ^2$ est absorbé par la pression totale $p + \frac{1}{2}  \mathbf{u} ^2$ . -Conserve les moments et l'énergie cinétique en discret $(\mathbf{u} \cdot ((\nabla \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u})) = 0$ .
$\frac{1}{2} [\nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] =$ $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}(\nabla \cdot \mathbf{u})$	Forme symétrisée	-Forme moyennée de (1) et (2). -Conserve l'énergie cinétique en discret. -Plus adaptée que (3) pour l'utilisation des méthodes spectrales.

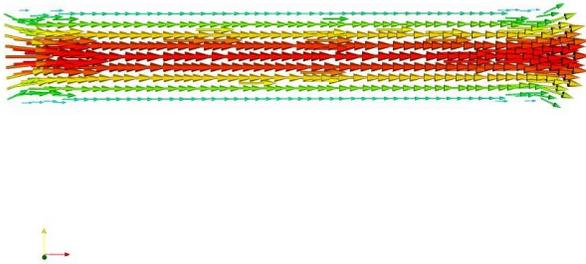
TAB. 2.2 – Formes alternatives pour le terme de transport



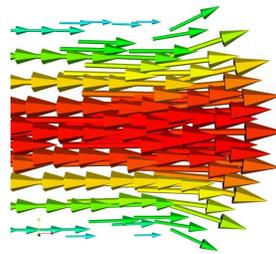
(a) Simulation avec Freefem++ d'un écoulement de Stokes dans un canal avec les conditions (2.8b) et (2.8c).



(b) Zoom sur l'écoulement au voisinage de la frontière de sortie.



(c) Simulation avec Freefem++ d'un écoulement de Stokes dans un canal avec les conditions (2.5b) et (2.5c).



(d) Zoom sur l'écoulement au voisinage de la frontière de sortie.

FIG. 2.2 – Tests réalisés avec Freefem++

# Chapitre 3

## Conditions dissipatives pour l'écoulement de l'air dans l'arbre bronchique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction, motivations</b> . . . . .	<b>37</b>
<b>3.2</b>	<b>Les modèles</b> . . . . .	<b>38</b>
3.2.1	Conditions dissipatives naturelles . . . . .	43
3.2.2	Conditions dissipatives essentielles . . . . .	44
<b>3.3</b>	<b>L'écoulement dans un arbre dyadique</b> . . . . .	<b>46</b>
3.3.1	Le problème modèle . . . . .	46
3.3.2	Notations . . . . .	46
3.3.3	Résistances et pressions globales . . . . .	47
	Calcul direct des résistances et des pressions globales . . . . .	49
	Calculs des résistances et des pressions globales par l'analogie électrique . . . . .	50
3.3.4	Arbres dyadiques particuliers . . . . .	52
	Cas particulier de l'arbre homogène . . . . .	52
	Cas particulier de l'arbre géométrique . . . . .	52
<b>3.4</b>	<b>Simulations numériques</b> . . . . .	<b>53</b>
3.4.1	Simulations tridimensionnelles des conditions dissipatives naturelles . . . . .	53
	Reconstitution analytique des débits . . . . .	54
3.4.2	Simulations bidimensionnelles des conditions dissipatives essentielles . . . . .	56
3.4.3	Viscosité fictive . . . . .	58
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>61</b>

---



### 3.1 Introduction, motivations

Ce chapitre est motivé par la recherche de modèles permettant de reproduire l'écoulement de l'air dans la totalité de l'arbre bronchique humain. Ce projet se heurte à deux principales difficultés :

- La difficulté de résoudre des équations aux dérivées partielles dans l'arbre bronchique qui provient du grand nombre de sorties du domaine de calcul, typiquement  $2^{23}$ , soit environ 8 millions de sorties. Par ailleurs, s'il est vrai que la reconstitution tridimensionnelle des premières générations de bronches à partir d'imagerie médicale est performante, la relative complexité géométrique du domaine subsiste à cause du grand nombre de sorties au bout de l'arbre bronchique, et même si on se limite à quelques générations, il reste délicat de réaliser des maillages de surfaces réalistes, basés sur des données mesurées in vivo [19]. Ainsi, il n'est pas envisageable de faire des simulations directes de l'écoulement via les équations de Navier-Stokes dans la totalité du domaine.
- Il faut prescrire sur les multiples sorties du domaine, des conditions aux limites pertinentes adaptées au phénomène ventilatoire.

L'approche que nous proposons consiste à distinguer dans l'arbre deux zones distinctes : une zone proximale qui correspond à la trachée et aux premières bronches où l'écoulement est gouverné par les équations de Navier-Stokes et où des simulations directes ont lieu, et une partie distale correspondant à la partie géométriquement complexe, localisée en aval de la partie proximale de l'arbre, et destinée à être condensée. Ceci est possible car la partie distale est composée d'un réseau de tubes de petits diamètres dans lesquels un écoulement de Stokes linéaire, visqueux, incompressible a lieu, régulé par les différences de pression entre entrées et sorties.

Ainsi, l'idée principale est de faire des simulations directes dans les bronches proximales (approximativement jusqu'à la 5<sup>ème</sup> génération) et de prendre en compte la partie distale des ramifications pulmonaires en utilisant une condition aux limites dissipatives appropriée. Dans notre contexte, les conditions aux limites en entrées et en sorties doivent répondre aux attentes suivantes :

- Un débit nul à travers la partie condensée ne doit pas être payé par une dissipation d'énergie.
- Le terme de forçage, "le moteur", doit être contenu dans ces conditions (durant un procédé d'inspiration normale, il y a un appel d'air vers le bas).

Les deux classes de conditions aux limites qu'on propose, basées sur des considérations de modélisation, sont faites de manière à remplir ces deux attentes.

On finit cette introduction en rappelant les notations utilisées dans ce qui suit. On utilisera les espaces de Sobolev standards (voir [2], [42]), tels que

$$H^m(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \partial^k v \in L^2(\Omega), \forall |k| \leq m\}$$

où  $|k| = \sum_{i=1}^d k_i$  avec  $(k_i)_{1 \leq i \leq d}$  des entiers non négatifs ( $d = 2$  ou  $3$ ) et

$$\partial^k v = \frac{\partial^{|k|} v}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_d} x_d}.$$

Cet espace est muni de la semi-norme

$$|v|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|k|=m} \int_{\Omega} |\partial^k v|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et est un espace de Hilbert pour la norme

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq k \leq m} |v|_{H^k(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire de  $L^2(\Omega)$  est noté  $(\cdot, \cdot)$ . La définition de ces espaces est étendue aux vecteurs avec les mêmes notations.

Rappelons que  $\mathcal{D}(\Omega)$  désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans  $\Omega$ ,  $\mathcal{D}(\Omega)'$  désigne l'espace dual de  $\mathcal{D}(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  coïncide avec  $C^\infty(\bar{\Omega})$ . On se réfère à [38] pour la définition des espaces d'ordre fractionnel tels que  $H^s(\Omega)$ , où  $s$  est un nombre réel. En particulier, on désigne par  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  l'espace des traces des fonctions de  $H^s(\Omega)$  sur la frontière  $\partial\Omega$  et par  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  son dual. La trace  $\gamma$  est une application continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  et il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \|\gamma \mathbf{v}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}.$$

Finalement, on rappelle l'inégalité de Poincaré valide dans le sous espace suivant de  $H^1(\Omega)$  : soit  $\Gamma$  une partie de  $\partial\Omega$  à mesure positive,  $|\Gamma| > 0$ , et soit

$$H_{0,\Gamma}^1(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega), \mathbf{v}|_{\Gamma} = 0, \}$$

alors, il existe une constante  $C$ , qui dépend uniquement de  $\Omega$  et  $\Gamma$ , telle que,

$$\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ainsi, on muni  $H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$  de la semi-norme  $\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} = |\mathbf{v}|_{H^1(\Omega)}$ .

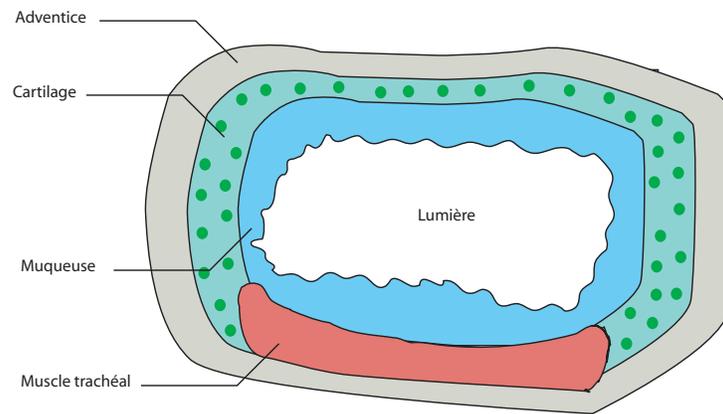
## 3.2 Les modèles

Nous précisons dans cette section les différents critères et considérations qui sont à la base du modèle.

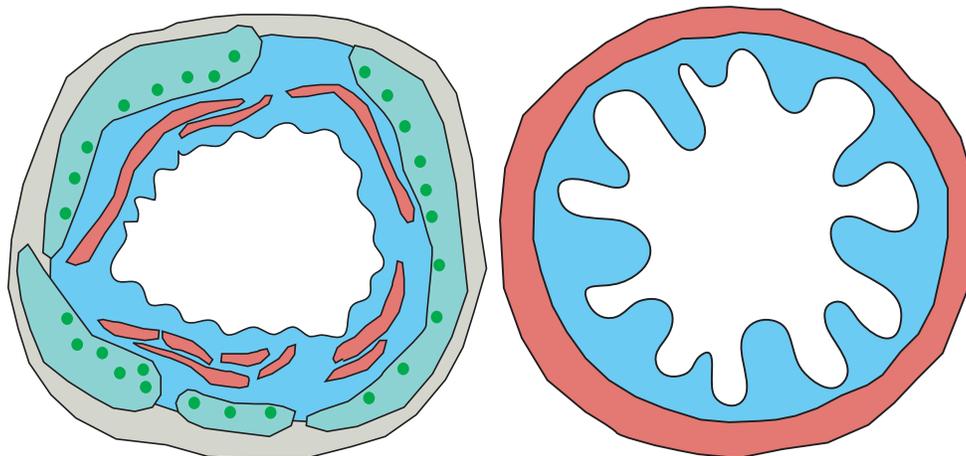
Tout d'abord, les vitesses qui varient en fonction de la localisation au niveau de l'arbre bronchique et qui, d'après Weibel [54], couvrent une gamme importante allant d'une vitesse quasi nulle au niveau des acini, jusqu'à quelques mètres par seconde au niveau de la trachée. L'amplitude de cette gamme dépend du régime respiratoire : en régime d'exercice, le nombre de Reynolds au niveau de la trachée atteint des valeurs importantes, jusqu'à 10000, alors qu'au repos, il est de l'ordre de 1000, ce qui correspond à une vitesse de l'ordre de  $1\text{ms}^{-1}$ . Les effets inertiels s'atténuent au fur et à mesure qu'on avance en profondeur dans l'arbre et l'écoulement peut être considéré comme linéaire à partir d'environ la 5<sup>ème</sup>

génération ( voir [54] ). Une telle répartition des vitesses est à la base de notre modèle en compartiments où l'écoulement dans les bronches proximales sera décrit par les équations de Navier-Stokes, tandis que dans la partie distale à régime lent on considère les équations de Stokes.

Une autre hypothèse importante pour notre modèle est la rigidité des conduits ; en effet, comme précisé dans le chapitre 1, on note, au niveau des bronches supérieures (primaires, extrapulmonaires), la présence d'un cartilage en forme de "fer à cheval". Au niveau des bronches intrapulmonaires, ce cartilage n'existe plus sous forme d'un arc de cercle, mais plutôt sous formes de petites plaques irrégulières, qui se chevauchent et encerclent complètement le conduit dans le cas des plus grosses bronches, ou isolées et rattachées par du tissu conjonctif et musculaire lisse dans le cas des petites bronches, jusqu'à disparition complète au niveau des bronchioles. La présence du cartilage tend donc à disparaître au fur et à mesure qu'on avance en profondeur dans l'arbre, notamment dans la zone médiane qui nous intéresse (voir figure 3.1).



(a) Coupe transverse de la trachée



(b) Coupe transverse d'une bronche

(c) Coupe transverse d'une bronchiole

FIG. 3.1 – Présence du cartilage

Nous gardons toutefois l'hypothèse de rigidité sur tous les conduits de l'arbre et on impose sur les parois latérales une condition de non glissement.

Finalement, également d'après Weibel [54], les bronches ont une forme cylindrique, légèrement cônique vers le bas de l'arbre, leur surface est annelée par la structure cartilagineuse qui recouvre les premières bronches. Les bronches proximales seront modélisées par des cylindres lisses et bien que la structure annelée crée des ondulations sur leur surface, l'effet sur le flux reste négligeable car les vitesses sont faibles le long des parois, ce qui est cohérent avec la condition de non glissement imposée sur la paroi latérale. Il en est de même des bronchioles malgré leur forme légèrement cônique, car ceci est néanmoins suffisamment faible pour être négligé en première approximation.

La géométrie que l'on considère est schématiquement représentée dans la figure 3.2. Le domaine  $\Omega$  correspond aux premières bronches.  $\partial\Omega$  est la réunion de la paroi latérale  $\Gamma_l$ , d'une section d'entrée unique qui correspond au nez, le larynx et l'entrée de la trachée, qu'on désignera par  $\Gamma_0$  et de multiples sorties  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Notons que  $\Gamma_0$  n'est une vraie entrée que pendant la phase inspiratoire, mais par souci de simplification, on utilisera toujours cette terminologie. La partie distale de l'arbre correspond à la réunion des domaines  $\tilde{\Omega}_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Il est à noter que chaque sous domaine  $\tilde{\Omega}_i$  a à son tour une structure géométrique dichotomique ramifiée. Dans chacun des sous-domaines  $\tilde{\Omega}_i$ , et grâce aux petits diamètres des sections des tubes, on suppose que l'écoulement dans les petites bronches est gouverné par la loi de Poiseuille. Cette loi est analogue à la relation électrique dans un réseau dans lequel le débit s'apparente à l'intensité tandis que la pression joue le rôle du potentiel électrique. Cette analogie est décrite en détail dans la section 3.3. Ainsi, dans le cas de l'arbre bronchique humain, on peut condenser la partie distale et représenter, sans perte de généralité, chaque sous domaine tronqué  $\tilde{\Omega}_i$  comme un tube unique où l'écoulement est gouverné par une loi de Poiseuille généralisé (on ne fait aucune hypothèse sur les sections des tubes). Voir la section 3.3 pour l'explication détaillée.

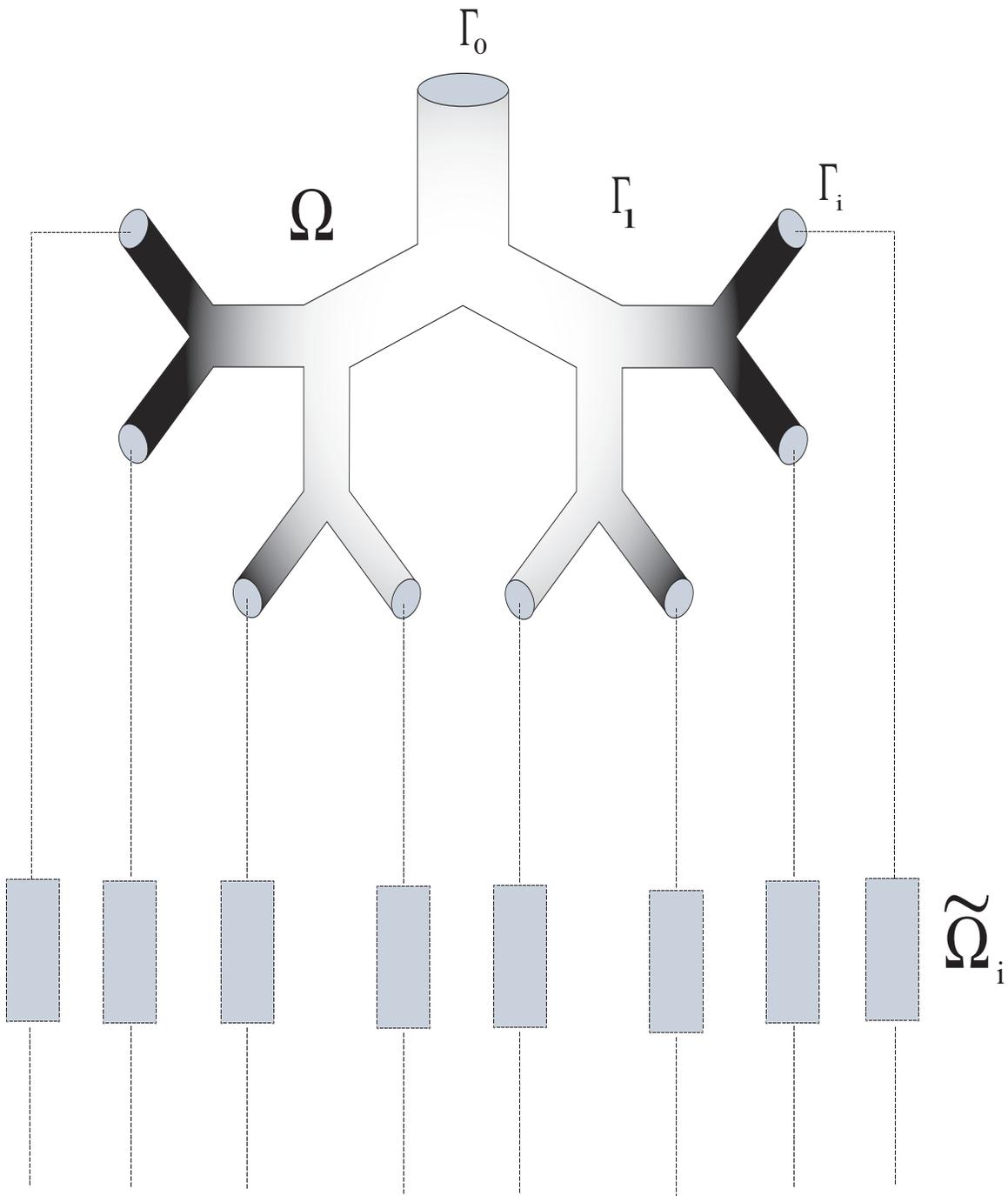


FIG. 3.2 – Le domaine

On suppose que la pression est uniforme au niveau de chacune des sorties  $\Gamma_i$  (on note  $\Pi_i$  les valeurs correspondantes), et on désigne par  $P_0$  la pression atmosphérique au niveau de  $\Gamma_0$ . Si on prescrit une condition naturelle, non dissipative, associée à la pression en entrée  $P_0$  et si on écrit simplement une contrainte de sortie libre au niveau de chaque sortie, le système qu'on considère au niveau du domaine  $\Omega$  s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -\Pi_i \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_i, i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

D'autre part, on suppose que l'écoulement dans  $\tilde{\Omega}_i$  est gouverné par les équations de Stokes avec conditions aux limites naturelles avec des pressions  $P_i$  qui correspondent à la pression au niveau des alvéoles associée à la  $i^{\text{ème}}$  bronche de l'arbre. Grâce à la linéarité du problème par rapport au saut de pression  $\Pi_i - P_i$ , il existe une constante  $R_i$  ("résistance" de chaque bronche  $i$  dont le calcul sera explicité dans la section 3.3) qui dépend de la géométrie, telle que

$$\Pi_i - P_i = R_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \quad (3.2)$$

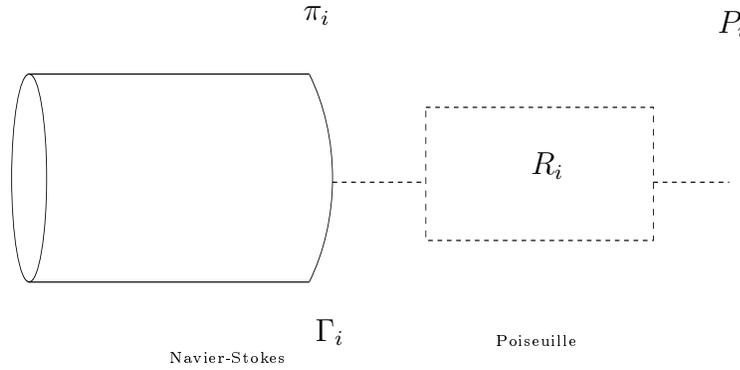


FIG. 3.3 –

On explicite cette approche dans les deux modèles suivants où on introduit deux catégories de conditions dissipatives : naturelles et essentielles.

**Remarque 3.2.1.** Notons le choix de la condition aux limites de type

$$\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P \mathbf{n}$$

et non pas

$$\mu(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P \mathbf{n},$$

choix justifié par le fait que la frontière  $\Gamma_i$  est fictive et que le fluide visqueux continue au delà de cette frontière. Voir le chapitre 2 pour une discussion plus détaillée sur ces conditions aux limites.

### 3.2.1 Conditions dissipatives naturelles

On élimine la pression de sortie  $\Pi_i$  en utilisant la relation (3.2), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_i \mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_i, \quad i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

L'avantage de cette approche consiste donc à se restreindre à résoudre le système des équations de Navier-Stokes avec la condition dissipative dans le domaine  $\Omega$  qui couvre juste les cinq ou six premières générations de bronches au lieu des 24 générations de l'arbre complet, tout en tenant compte de l'écoulement dans le reste de l'arbre.

Bien que l'intérêt principal de cette approche soit de séparer le domaine fluide en une partie Navier-Stokes (dans laquelle les effets inertiels du fluide ne peuvent être négligés) et une partie Stokes, nous nous contenterons de présenter ici l'approche dans le cas où l'écoulement sur l'ensemble du domaine de calcul est régi par les équations de Stokes. Ainsi le problème qu'on étudiera dans ce qui suit est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_i \mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

On se contentera d'introduire le modèle et la formulation variationnelle du problème ; le caractère bien posé du problème ainsi que la généralisation de l'étude au cas des équations de Navier-Stokes seront établis au chapitre 5.

On se propose d'exprimer (3.4) en une formulation variationnelle équivalente. Vue la condition aux limites de non glissement sur  $\Gamma_l$ , on choisit l'espace suivant pour la vitesse

$$H_{0,l}^1(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \mathbf{v}|_{\Gamma_l} = 0 \}$$

où  $d = 2, 3$ . Les conditions aux limites en entrée et sur les multiples sorties impliquent la pression ; la pression n'est donc pas définie à une constante additive près et l'espace en pression est

$$M = L^2(\Omega),$$

et d'une manière usuelle on définit l'espace des vitesses à divergence nulle

$$V = \{\mathbf{v} \in H_{0,l}^1(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

Noter que  $V$  est un espace de Hilbert comme fermé de  $H_{0,l}^1(\Omega)$ , qui l'est également comme fermé de  $H^1(\Omega)$ .

En faisant le produit scalaire de la première équation de (3.4) dans  $L^2(\Omega)$  avec une fonction test  $\tilde{\mathbf{u}} \in H_{0,l}^1(\Omega)$ , et en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\partial\Omega} (-\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + p \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in H_{0,l}^1(\Omega).$$

En prenant en compte les conditions aux limites, la formulation variationnelle du problème avec conditions de sorties naturelles dissipatives s'écrit : pour  $\mu$  et  $(R_i)_{i=1, N}$  donnés, et pour  $(P_i)_{i=0, N}$  données, trouver  $\mathbf{u} \in H_{0,l}^1(\Omega)$  et  $p \in M$  solutions de

$$\begin{cases} \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \\ -P_0 \int_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \sum_{i=1}^N P_i \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in H_{0,l}^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \forall q \in M. \end{cases} \quad (3.5)$$

### 3.2.2 Conditions dissipatives essentielles

On considère dans cette section des conditions plus restrictives, où les profils de vitesse sont imposés. On considère  $N + 1$  profils de vitesse paraboliques  $\mathbf{U}_i$ , dirigés suivant les normales  $\mathbf{n}_i$  aux sections d'entrée et de sorties, pour  $i = 0, \dots, N$ , qui sont données sur  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_N$ , respectivement, et on impose qu'il existe pour tout  $i$  un réel  $\lambda_i$  (négatif ou positif suivant que le fluide est rentrant ou sortant à travers les  $\Gamma_i$ ) tels que  $\mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i$  pour  $i = 0, \dots, N$ .

Rappelons qu'on désigne par  $H_{0,l}^1(\Omega)$  l'espace des fonctions de  $H^1(\Omega)$  à trace nulle sur la paroi latérale  $\Gamma_l$ . En vue de la condition  $\mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i$  impliquant la contrainte supplémentaire sur les profils de vitesse, on introduit comme espace fonctionnel pour la vitesse

$$Y = \{(\mathbf{u}, \Lambda) \in H_{0,l}^1(\Omega) \times R^{N+1}, \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i \text{ sur } \Gamma_i \quad i = 0, \dots, N\},$$

et l'espace de vitesse à divergence nulle

$$W = \{\mathbf{u} \in Y, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

qui implique que  $\sum_{i=0}^N \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} = 0$ . L'espace en pression est  $M = L^2(\Omega)$ .

Le problème avec ces nouvelles conditions aux limites, exprimées en fonction des multiplicateurs  $\lambda_i$  s'écrit : pour  $\mu$ ,  $(R_i)_{i=1, N}$  et  $(\mathbf{U}_i)_{i=0, N}$  donnés, et pour  $(P_i)_{i=0, N}$  données,

trouver  $(\mathbf{u}, \Lambda) \in Y \times \mathbb{R}^{N+1}$  et  $\mathbf{p} \in M$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \mathbf{p} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i & \text{sur } \Gamma_i, \quad i = 0, \dots, N, \\ \int_{\Gamma_0} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_0 = -P_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_0, \\ \int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_i = -P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - \lambda_i R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (3.6)$$

où  $\Lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_N)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$ .

D'une manière usuelle, on obtient alors la formulation variationnelle du problème avec conditions de sorties dissipatives essentielles, qui s'écrit : pour  $\mu$ ,  $(R_i)_{i=1, N}$  et  $(\mathbf{U}_i)_{i=0, N}$  donnés, et pour  $(P_i)_{i=0, N}$  données, trouver  $(\mathbf{u}, \Lambda) \in Y \times \mathbb{R}^{N+1}$  et  $\mathbf{p} \in M$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \lambda_i \tilde{\lambda}_i - \int_{\Omega} \mathbf{p} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ = -P_0 \tilde{\lambda}_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} - \sum_{i=1}^N P_i \tilde{\lambda}_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \quad \forall (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda}) \in Y, \\ \int_{\Omega} \mathbf{q} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in M. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

La formulation faible mixte du problème à résoudre est alors aussi du type :  $Y$  et  $M$  étant deux espaces de Hilbert,  $a$  et  $b$  deux formes bilinéaires respectivement sur  $Y \times Y$  et  $Y \times M$ ,  $l$  une forme linéaire sur  $Y$ , trouver  $\mathbf{u} \in Y$  et  $\mathbf{p} \in M$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + b(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{p}) = l(\tilde{\mathbf{u}}), \quad \forall (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda}) \in Y, \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in M, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

avec

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) &= \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \lambda_i \tilde{\lambda}_i, \\ b(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{q}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{q} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \\ l(\tilde{\mathbf{u}}) &= -P_0 \tilde{\lambda}_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} - \sum_{i=1}^N P_i \tilde{\lambda}_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

**Remarque 3.2.2.** Notons que les deux modèles, avec conditions aux limites naturelles et essentielles, ont la même formulation variationnelles et ne diffèrent que par l'espace fonctionnel correspondant au champ de vitesse, et que la première partie de  $Y$  est incluse dans  $H_{0,l}^1(\Omega)$  (voir (3.5) et (3.7)). Ainsi, dans le chapitre 5 pour prouver que le problème (3.7) est bien posé, la démarche sera analogue à celle adoptée pour (3.5).

## 3.3 L'écoulement dans un arbre dyadique

### 3.3.1 Le problème modèle

On s'intéresse ici à la zone médiane de l'arbre bronchique qui s'étend d'environ la 5<sup>ème</sup> ou 6<sup>ème</sup> génération (bronchioles) jusqu'à environ la 16<sup>ème</sup> ou 17<sup>ème</sup> génération (bronchioles terminales). Cette zone est caractérisée, comme cité ci-dessus, par l'absence d'effets inertiels et par les petits diamètres des conduits par rapport aux bronches primaires. On suppose que toute bronchiole se présente sous la forme d'un tube cylindrique rigide, excluant ainsi toute interaction entre le fluide et la paroi latérale. On suppose qu'un fluide visqueux, incompressible et non inertielle y circule. Les pressions sont supposées uniformes sur les deux sections d'entrée et de sortie qu'on désignera successivement par  $S_0$  et  $S_1$ . Dans un tel cas, les seules forces extérieures agissant sur le fluide sont caractérisées par les pressions  $P_0$  et  $P_1$ . Comme détaillé dans l'annexe B, dans chaque bronchiole, la linéarité de l'équation de Stokes assure l'existence d'une résistance  $R > 0$  vérifiant la loi de Poiseuille qui relie le gradient de pression  $P_0 - P_1$  au débit qu'on désigne par  $Q$

$$P_0 - P_1 = RQ. \quad (3.9)$$

Dans ce qui suit, l'idée consiste à exploiter la linéarité de (3.9) pour établir une loi de Poiseuille généralisée pour tout un arbre dyadique, dont chaque tube est traversé par un fluide obéissant à la loi de Poiseuille (3.9). On introduira ainsi les notions de pression globale équivalente et de résistance globale équivalente intervenant dans les conditions aux limites dissipatives établies dans la section 3.2, et permettant de condenser l'arbre dyadique en un conduit équivalent. Ce problème a été introduit dans [41] pour le cas d'un arbre dyadique quelconque et étudié dans [26] pour le cas particulier d'un arbre dyadique à résistances homogènes par génération. Nous reprenons d'ailleurs les notations et la démarche adaptée dans [26] afin de généraliser l'étude au cas d'un arbre dyadique à résistances non-constantes par génération.

### 3.3.2 Notations

On considère un arbre dyadique à  $N + 1$  générations  $g \in \{0, \dots, N\}$ , la génération 0 étant désignée comme la racine de l'arbre. On dira que l'arbre est de hauteur  $N + 1$ . Un tel arbre est défini par deux ensembles :  $X$  ensemble des noeuds qu'on désignera par  $X_k^l$ , excepté le noeud racine qu'on notera  $X_0$ , et un ensemble de branches  $B_k^l$  caractérisées chacune par une résistance  $R_k^l$ . Il s'agit d'une numérotation locale où l'indice  $k$  désigne la génération et permet donc de parcourir l'arbre en hauteur, tandis que  $l$  désigne la position au sein d'une génération  $k$  donnée et permet de parcourir la génération  $k$  en largeur ; ainsi, pour une génération  $k$  donnée,  $k \in \{0, \dots, N\}$ , pour tout  $l \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ ,  $R_k^l$  est la résistance de la branche située à la  $l^{\text{ème}}$  position de la génération  $k$ . Enfin, on remarquera que toute branche mère  $B_k^l$  bifurque en deux branches filles  $B_{k+1}^{2l}$  et  $B_{k+1}^{2l+1}$ .

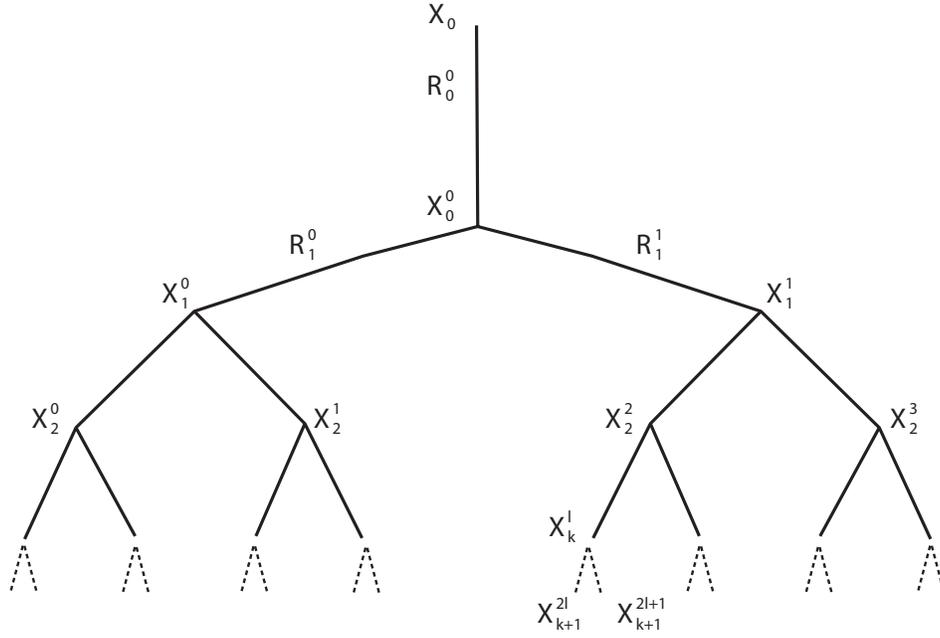


FIG. 3.4 –

### 3.3.3 Résistances et pressions globales

On suppose la pression au niveau du noeud racine nulle et on désigne par  $p_i$  et  $q_i$ ,  $i = 0, \dots, 2^N - 1$  les pressions et les débits correspondant respectivement aux sorties de l'arbre. Etant donné un ensemble de pression (respectivement de débits) au niveau des sorties, il est possible de trouver les débits (respectivement les pressions) correspondants. On introduit la définition suivante

**Définition 3.1.** Etant donnés deux entiers positifs  $i$  et  $j$  et leurs expressions binaires

$$i = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k 2^k, \quad j = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k 2^k, \quad \text{avec } \alpha_k, \beta_k \in \{0, 1\} \forall k,$$

on définit  $\sigma_{ij} = \inf\{k \geq 0, \alpha_l = \beta_l \forall l \geq k\}$  et  $\gamma_{ij} = \left\lceil \frac{i+2^N}{2^{\sigma_{ij}}} \right\rceil - 2^{N-\sigma_{ij}}$ .

On a alors le résultat suivant

**Proposition 3.2.** On considère un arbre dyadique caractérisé par les résistances de ses branches. En supposant que le noeud racine est à pression nulle, alors les pressions et les flux sont reliés par

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}\mathbf{q}, \quad \mathbf{A} = (A_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2^N - 1} \in \mathcal{M}_{2^N}(\mathbb{R}), \quad A_{ij} = \mathcal{R}_{N-\sigma_{ij}}^{\gamma_{ij}}$$

où  $\mathbf{p} = (p_i)_{i=0, \dots, 2^N - 1}$  et  $\mathbf{q} = (q_i)_{i=0, \dots, 2^N - 1}$  et  $\mathcal{R}_n^m$  est la résistance cumulée  $R_0^0 + \dots + R_{n-2}^{\lfloor \frac{m}{2^2} \rfloor} + R_{n-1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} + R_n^m$ , avec  $n \in \{0, \dots, N\}$  et  $m \in \{0, \dots, 2^n - 1\}$ .

**Preuve :**

La démarche pour prouver la proposition 3.2 est la même que celle développée dans [26]. On commence par remarquer que vue la linéarité de la relation entre  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$ , il suffit de calculer les vecteurs pressions associés à la base canonique de  $\mathbb{R}^{2^N}$ .

On considère tout d'abord le vecteur débit  $\mathbf{q} = (1, 0, \dots, 0)$ , ce qui correspond à la situation où tous les noeuds en sorties sont bouchés excepté le noeud  $X_N^0$  où un fluide est injecté. Par conservation du débit, à la racine le débit sortant vaut 1. Ainsi, à la racine de résistance  $R_0^0$ , le débit valant 1 et la pression au noeud racine  $X_0$  valant 0, on déduit de la loi de Poiseuille que la pression au noeud  $X_0^0$  vaut  $R_0^0$ . Comme il n'y a pas d'écoulement dans le sous arbre à droite issu de  $X_0^0$ , encore une fois grâce à la loi de Poiseuille, les pressions au niveau de ses sorties (c'est à dire aux noeuds  $X_N^i$ ,  $i = 2^{N-1}, \dots, 2^N - 1$ ) valent aussi  $R_0^0$ . Par un raisonnement analogue, la pression au noeud  $X_1^0$  est  $R_0^0 + R_1^0 = \mathcal{R}_1^0$  et il est de même de la pression au niveau des sorties du sous-arbre à droite issu du noeud  $X_1^0$ . En reprenant d'une manière récursive cette approche, on trouve que la pression aux noeuds  $X_2^0, X_3^0, \dots, X_N^0$  vaut respectivement  $\mathcal{R}_2^0, \mathcal{R}_3^0, \dots, \mathcal{R}_N^0$ . Par conséquent la pression à la sortie  $j \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$  est  $\mathcal{R}_{N-\sigma_{0j}}^{\gamma_{0j}}$ .

Le même argument peut être repris pour le vecteur débit  $\mathbf{q} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (1 étant à la  $i^{\text{ème}}$  position) pour lequel correspond le champ de pression

$$(\mathcal{R}_{N-\sigma_{i0}}^{\gamma_{i0}}, \mathcal{R}_{N-\sigma_{i1}}^{\gamma_{i1}}, \dots, \mathcal{R}_{N-\sigma_{i2^N-1}}^{\gamma_{i2^N-1}}).$$

Par conséquent, on obtient

$$p_i = \sum_{j=0}^{2^N-1} q_j \mathcal{R}_{N-\sigma_{ij}}^{\gamma_{ij}}.$$

□

**Remarque 3.3.1.** Comme on peut le voir sur la figure 3.5, la matrice  $A$  présente une structure particulière qui reflète la structure diadique de l'arbre, et chaque élément de la matrice apparaît comme la résistance cumulée des branches formant le chemin entre le noeud racine  $X_0$  et un noeud donné de l'arbre, d'où la définition 3.1 où  $N - \sigma_{ij}$  indique la profondeur du chemin et  $\gamma_{ij}$  l'orientation du chemin.

**Remarque 3.3.2.** Dans le cas d'une pression  $p_r$  non nulle au niveau du noeud racine, la relation entre les pressions et les débits aux sorties de l'arbre dyadique s'écrit également

$$\mathbf{p} = A\mathbf{q}, \quad A = (A_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2^N-1} \in \mathcal{M}_{2^N}(\mathbb{R}), \quad A_{ij} = \mathcal{R}_{N-\sigma_{ij}}^{\gamma_{ij}} \quad (3.10)$$

mais avec  $\mathbf{p} = (p_i - p_r)_{0 \leq i \leq 2^N-1}$  et  $\mathbf{q} = (q_i)_{0 \leq i \leq 2^N-1}$ .

Notons que le vecteur  $\mathbf{p}$  peut-être interprété comme le gradient de pression entre l'entrée et les multiples sorties de l'arbre et que la loi (3.10) est une généralisation de la loi de Poiseuille à l'arbre dyadique.

**Remarque 3.3.3.** La matrice  $A$  se présente sous la forme particulière suivante qui résulte de la superposition de matrices à structure en blocs comme illustré ci-dessous (voir figure 3.5), avec  $I_N^k \in \mathcal{M}_{2^{N-k}}(\mathbb{R})$  la matrice unité dont toutes les composantes sont égales à 1, pour  $0 \leq k \leq N$ .

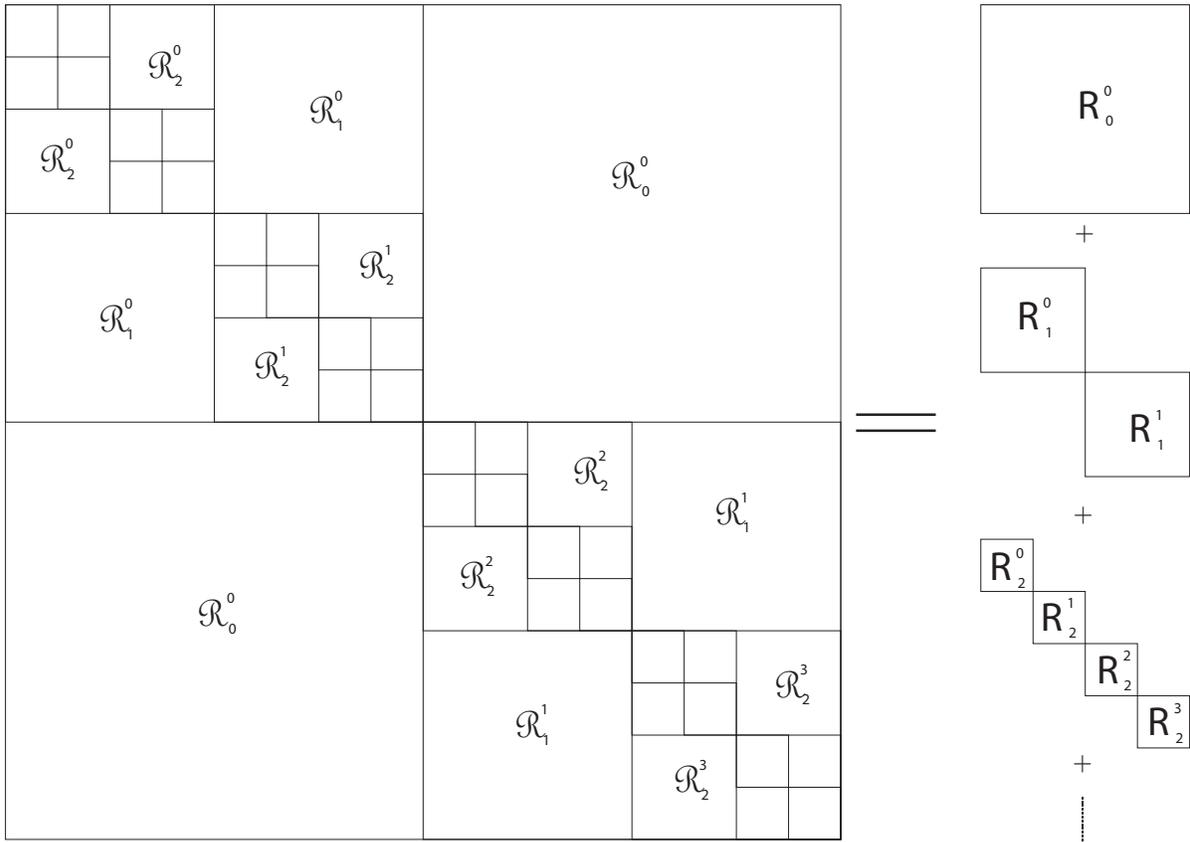


FIG. 3.5 –

**Proposition 3.3.** La matrice  $A$  est symétrique. De plus, si pour tout  $k \in \{0, \dots, N\}$  et pour tout  $l \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$  on a  $R_k^l > 0$ , alors la matrice  $A$  est définie positive.

**Preuve :**

Le résultat découle du caractère symétrique semi-positif des matrices  $I_N^k$ ,  $0 \leq k \leq N$  et

du caractère symétrique défini positif de la matrice  $\begin{bmatrix} R_N^0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_N^{2^N-1} \end{bmatrix}$ .  $\square$

### Calcul direct des résistances et des pressions globales

La matrice  $A$  étant inversible, on désigne par  $B = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2^N - 1}$  son inverse. Si on se donne les pressions à l'entrée et aux sorties de l'arbre, en résolvant le système  $A\mathbf{q} = \mathbf{p}$ , on exprime les débits à travers les sections de sorties

$$q_i = \sum_{j=0}^{2^N-1} b_{ij}(p_r - p_j), \quad 0 \leq i \leq 2^N - 1.$$

Par conservation de la masse, le débit à l'entrée de l'arbre qu'on désignera par  $q_r$  est alors

$$\begin{aligned} q_r &= \sum_{i=0}^{2^N-1} q_i \\ &= \sum_{i,j=0}^{2^N-1} b_{ij}(p_r - p_j) \\ &= p_r \sum_{i,j=0}^{2^N-1} b_{ij} - \sum_{j=0}^{2^N-1} \left( \sum_{i=0}^{2^N-1} b_{ij} \right) p_j. \end{aligned}$$

Si on désigne par  $R$  la quantité  $\left( \sum_{i,j=0}^{2^N-1} b_{ij} \right)^{-1}$  et par  $P$  l'expression  $R \sum_{j=0}^{2^N-1} \left( \sum_{i=0}^{2^N-1} b_{ij} \right) p_j$ , on aboutit à

$$Rq_r = p_r - P,$$

qui signifie que l'arbre dyadique à  $N + 1$  générations se comporte comme une branche unique à résistance globale équivalente  $R$  et à pression globale équivalente en sortie  $P$ , d'où la proposition suivante

**Proposition 3.4.** Etant donné un arbre dyadique à  $N + 1$  générations, caractérisé par ses résistances  $R_k^l$ ,  $0 \leq k \leq N$ ,  $0 \leq l \leq 2^k - 1$ , et étant donné le vecteur pression  $\mathbf{p}$  aux sorties de l'arbre, alors la résistance globale équivalente est

$$R = \left( \sum_{i,j=0}^{2^N-1} b_{ij} \right)^{-1}$$

et la pression globale équivalente en sortie est

$$P = R \sum_{j=0}^{2^N-1} \left( \sum_{i=0}^{2^N-1} b_{ij} \right) p_j$$

avec  $A^{-1} = (b_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2^N-1}$ .

### Calculs des résistances et des pressions globales par l'analogie électrique

En pratique, on évite de calculer l'inverse de  $A$ . On traite ce problème de bifurcation en utilisant pour la loi de Poiseuille les propriétés de son analogue électrique, la loi d'Ohm : la différence de pression correspond à la différence de tension, le débit à l'intensité électrique, et la résistance de l'écoulement à la résistance électrique. On a le résultat suivant

**Proposition 3.5.** En se plaçant au niveau d'une branche mère de résistance  $R_k^l$  bifurquant en deux branches filles de résistances respectives  $R_{k+1}^{2l}$  et  $R_{k+1}^{2l+1}$ , la résistance équivalente de cet arbre dichotomique à deux générations est

$$R_k^l + \left( \frac{1}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{1}{R_{k+1}^{2l+1}} \right)^{-1}$$

et la pression équivalente en sortie est

$$\left( \frac{1}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{1}{R_{k+1}^{2l+1}} \right)^{-1} \left( \frac{p_{k+1}^{2l}}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{p_{k+1}^{2l+1}}{R_{k+1}^{2l+1}} \right).$$

**Preuve :**

En observant que les branches filles sont branchées ensemble en parallèle et ensuite en série à la branche mère, on en déduit par analogie avec les circuits électriques que pour un arbre dichotomique à deux générations, la résistance équivalente est

$$R_k^l + \left( \frac{1}{R_{k+1}^{2l-1}} + \frac{1}{R_{k+1}^{2l}} \right)^{-1}.$$

Par ailleurs, dans les trois branches de l'arbre, l'écoulement est de type Poiseuille, on dispose du système suivant

$$\begin{cases} p_{k-1}^{[\frac{l}{2}]} - p_k^l &= q_k^l R_k^l, \\ p_k^l - p_{k+1}^{2l} &= q_{k+1}^{2l} R_{k+1}^{2l}, \\ p_k^l - p_{k+1}^{2l+1} &= q_{k+1}^{2l+1} R_{k+1}^{2l+1}, \end{cases}$$

et grâce à la conservation de la masse, on a

$$\begin{aligned} q_k^l &= q_{k+1}^{2l} + q_{k+1}^{2l+1} \\ &= \left( \frac{p_k^l - p_{k+1}^{2l}}{R_{k+1}^{2l}} \right) + \left( \frac{p_k^l - p_{k+1}^{2l+1}}{R_{k+1}^{2l+1}} \right) \\ &= p_k^l \left( \frac{1}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{1}{R_{k+1}^{2l+1}} \right) - \left( \frac{p_{k+1}^{2l}}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{p_{k+1}^{2l+1}}{R_{k+1}^{2l+1}} \right). \end{aligned}$$

En remplaçant  $p_k^l$  par  $p_{k-1}^{[\frac{l}{2}]} - q_k^l R_k^l$  on obtient

$$\left( R_k^l + \left( \frac{1}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{1}{R_{k+1}^{2l+1}} \right)^{-1} \right) q_k^l = p_{k-1}^{[\frac{l}{2}]} - \left( \frac{1}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{1}{R_{k+1}^{2l+1}} \right)^{-1} \left( \frac{p_{k+1}^{2l}}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{p_{k+1}^{2l+1}}{R_{k+1}^{2l+1}} \right)$$

d'où on identifie l'expression

$$R q_k^l = p_{k-1}^{[\frac{l}{2}]} - P$$

avec

$$R = R_k^l + \left( \frac{1}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{1}{R_{k+1}^{2l+1}} \right)^{-1}$$

étant la résistance équivalente et

$$P = \left( \frac{1}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{1}{R_{k+1}^{2l+1}} \right)^{-1} \left( \frac{p_{k+1}^{2l}}{R_{k+1}^{2l}} + \frac{p_{k+1}^{2l+1}}{R_{k+1}^{2l+1}} \right)$$

étant la pression équivalente. □

Afin de généraliser ces calculs à tout type d'arbre dichotomique assymétrique dissipatif à  $N + 1$  générations, l'algorithme consiste à commencer à partir des sorties et en utilisant la formule établie pour une bifurcation unité, remonter jusqu'à l'entrée de l'arbre dissipatif. La résistance globale d'un arbre dissipatif à  $N + 1$  générations sera tout d'abord calculée au niveau de la génération  $N$  pour  $2^{N-1}$  bifurcations unités. Ces résistances globales calculées à la génération  $N$  sont utilisées pour calculer les  $2^{N-2}$  résistances globales situées à la génération  $N - 1$ . Le même procédé est appliqué récursivement pour déterminer la résistance globale de tout l'arbre dissipatif. Les valeurs des résistances globales calculées à chaque génération sont stockées dans une matrice de taille  $N2^N$  initialement nulle exceptée la  $N^{\text{ème}}$  colonne, qui est remplie par les valeurs des résistances de la génération  $N$ . La pression globale est calculée d'une manière similaire une fois que la matrice des résistances est remplie car la détermination de la pression globale à une génération spécifique nécessite la connaissance des résistances globales correspondantes.

**Remarque 3.3.4.** L'énergie visqueuse dissipée dans la totalité de l'arbre à  $N + 1$  générations qui s'écrit comme la somme de l'énergie visqueuse dissipée dans chacune des branches de l'arbre, peut-être exprimée en fonction de la matrice  $A$ . En effet, si on désigne par  $E$  l'énergie totale dissipée par viscosité, on peut montrer par récurrence que

$$E = \mathbf{q}^t A \mathbf{q}.$$

### 3.3.4 Arbres dyadiques particuliers

#### Cas particulier de l'arbre homogène

Dans le cas d'un arbre homogène, c'est à dire caractérisé par des résistances constantes par génération  $R_0, R_1, \dots, R_N$ , la relation entre pressions et débits se réduit à

$$\mathbf{p} = A \mathbf{q}, \quad A = (A_{ij})_{0 \leq i, j \leq 2^N - 1} \in \mathcal{M}_{2^N}(\mathbb{R}), \quad A_{ij} = \mathcal{R}_{N - \sigma_{ij}}$$

où  $\mathcal{R}_n^m$  est la résistance cumulée  $R_0 + R_1 + \dots + R_{n-1} + R_n$ .

La matrice  $A$  dans ce cas est doublement stochastique à une constante multiplicative près : toutes les lignes et toutes les colonnes ont la même somme. Cette somme est à une constante multiplicative près égale à la résistance globale équivalente qui vaut dans ce cas

$$\sum_{k=0}^N \frac{R_k}{2^k}.$$

Finalement, précisons que la matrice  $A$ , dans ce cas particulier, admet la base de Haar comme base de vecteurs propres [26].

#### Cas particulier de l'arbre géométrique

Dans la littérature [54], les branchement dichotomiques de l'arbre sont sujets à une certaine dissymétrie dans les premières générations de branches qui s'adaptent à l'anatomie globale. En effet, les premières branches doivent contourner le coeur et divisent le poumon de façon assymétrique, en trois lobes à droites et deux lobes à gauche. En revanche, à partir de la génération 5 environ, l'arbre bronchique humain peut-être considéré

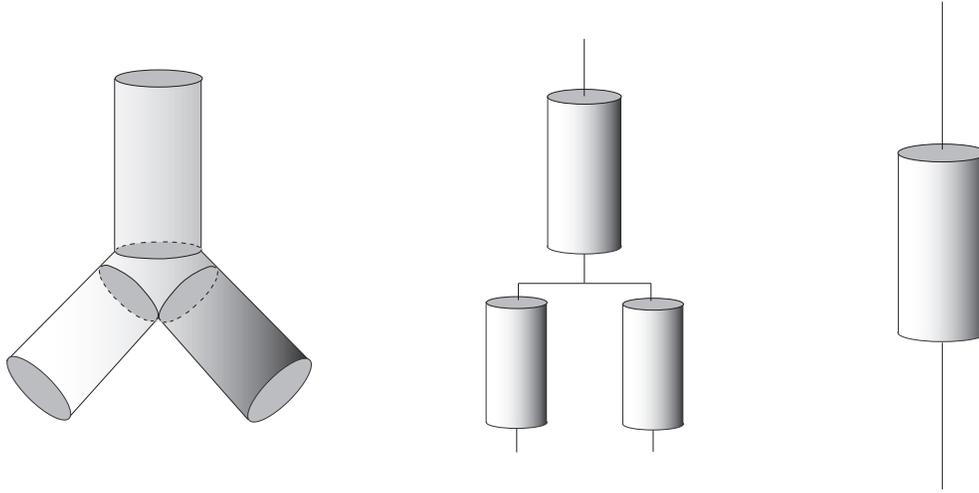


FIG. 3.6 – Résistance équivalente

comme un arbre homogène quasiment homothétique avec un rapport des longueurs d'une génération à la suivante proche de  $\lambda = 0.85$  ( voir [39]), ce qui implique que les résistances obéissent à la loi géométrique  $R_k = R_0 \alpha^k$  avec  $\alpha = \lambda^{-3} \simeq 1.63$  et dans ce cas la résistance globale équivalente se réduit à  $R_0 \sum_{k=0}^N \left(\frac{\alpha}{2}\right)^k$ .

### 3.4 Simulations numériques

Nous terminons ce chapitre par l'implantation effective sur machine des deux variantes de conditions aux limites dissipatives, naturelles et essentielles, établies dans ce chapitre.

#### 3.4.1 Simulations tridimensionnelles des conditions dissipatives naturelles

Pour ce qui est des conditions naturelles, on peut observer que la formulation (3.5) ne diffère de la formulation usuelle, correspondant à des conditions aux limites naturelles non dissipatives (voir chapitre 2, section 2.4.2), que par la présence de termes du type

$$\left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right).$$

Ces termes couplent les degrés de liberté en vitesse associés aux points de discrétisation d'une même section  $\Gamma_i$  pour  $i = 1, \dots, N$ , ce qui peut nécessiter des modifications importantes de la structure creuse de la matrice de rigidité si la résolution se fait par une méthode directe. Dans notre cas, on fait le choix d'une résolution par une méthode itérative où seul le produit matrice-vecteur est modifié.

Un solveur C++ en éléments finis auquel on se référera par MISTRAL, a été utilisé, en

collaboration avec J. F. Gerbeau<sup>1</sup>, qui en est l'auteur, pour des simulations dans un arbre tridimensionnel complet à quatre générations ainsi que dans l'arbre condensé correspondant formé par une bifurcation unique. Le maillage de l'arbre dissipatif condensé contient environ 1000 tétraèdres tandis que le maillage de l'arbre complet est approximativement composé de 4000 tétraèdres. Le fluide circulant aussi bien dans l'arbre complet que dans l'arbre condensé est newtonien de viscosité égale à 1. Des conditions d'entrée et de sorties libres sont appliquées pour l'arbre complet où les pressions sont données. Pour l'arbre condensé, on applique la même condition naturelle d'entrée libre au niveau de  $\Gamma_0$  mais au niveau des sorties ce sont des conditions aux limites dissipatives équivalentes à l'influence de la zone dissipative de l'arbre complet destinée à être condensée.

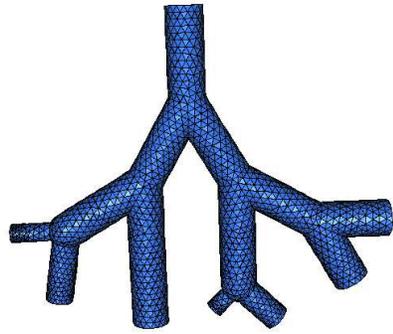
La simulation suivante a été réalisée avec une pression uniforme (la valeur imposée est de 10) à l'entrée et des conditions de sorties libres homogènes, pour l'arbre complet. Les résistances globales  $R_1$  et  $R_2$  correspondent toutes les deux aux arbres condensés en sorties et sont respectivement 15.8 et 14.2. Elles ont été calculées d'après la section 3.3. Elles sont de valeurs différentes à cause de l'asymétrie de l'arbre complet. Le champ de pression calculé numériquement avec MISTRAL dans l'arbre condensé et celui qui correspond à l'arbre complet (voir figure 3.7) sont qualitativement en bon accord. La différence de pression entre l'entrée et chacune des sorties est d'environ 7 dans l'arbre condensé et la valeur correspondante est qualitativement la même dans l'arbre complet. Nous comparons dans le tableau ci-dessous également, les débits au niveau des sections de tronquature, qui concordent avec une erreur relative de l'ordre de 2 % s'expliquant par la sous-estimation des zones de jonctions des bifurcations lors du calcul des résistances globales équivalentes (voir figure 3.6) ; s'ajoute à ceci le fait que toute incertitude sur les diamètres des bronches se traduit par une incertitude d'ordre 4 sur les résistances ( voir l'annexe B pour l'expression des résistances). Voir la figure 3.7 pour la comparaison des champs de vitesse entre l'arbre complet et l'arbre condensé.

	Débit en sortie (inf)	Débit en sortie (sup)
Arbre condensé	0.176	0.1895
Arbre complet	0.173	0.186

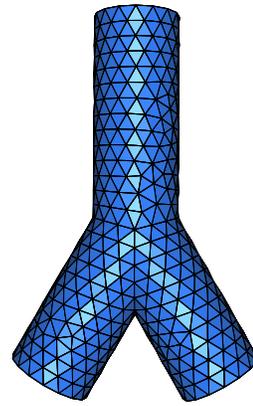
### Reconstitution analytique des débits

Puisque les pressions aux bouts de l'arbre complet sont supposées connues, il est possible de reconstruire les débits dans chaque bronche de la partie condensée de l'arbre complet en se basant sur les valeurs numériques des pressions calculées sur les sorties de l'arbre condensé et ceci grâce à la loi de Poiseuille. Les débits numériquement calculés sur les sorties de l'arbre complet et celles reconstituées analytiquement à partir des valeurs des pressions obtenues pour les sorties de l'arbre condensé sont tous deux présentés dans la figure 3.8. Quantitativement, les débits sur les sorties des bronches de l'arbre complet calculés numériquement et analytiquement sont les mêmes avec une erreur estimée à 5 %.

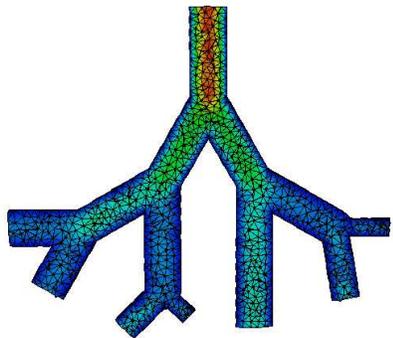
<sup>1</sup>INRIA



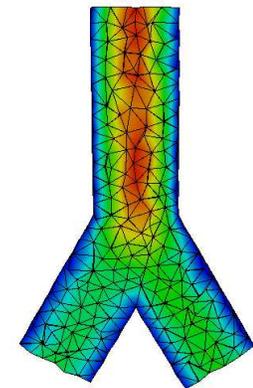
(a) Maillage de l'arbre complet



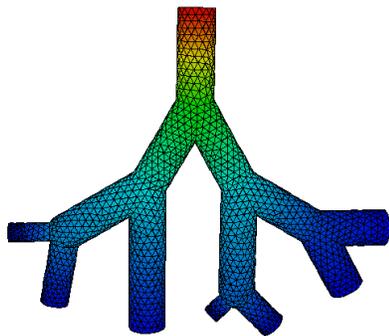
(b) Maillage de l'arbre condensé



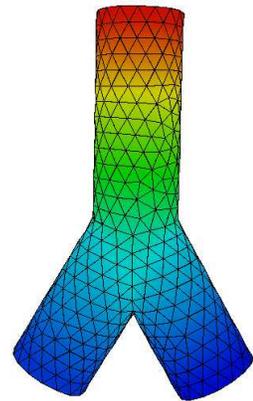
(c) Module du champ de vitesse dans l'arbre complet



(d) Module du champ de vitesse dans l'arbre condensé



(e) Champ de pression dans l'arbre complet



(f) Champ de pression dans l'arbre condensé

FIG. 3.7 – Comparaison entre arbre complet et arbre condensé pour les conditions naurelles dissipatives

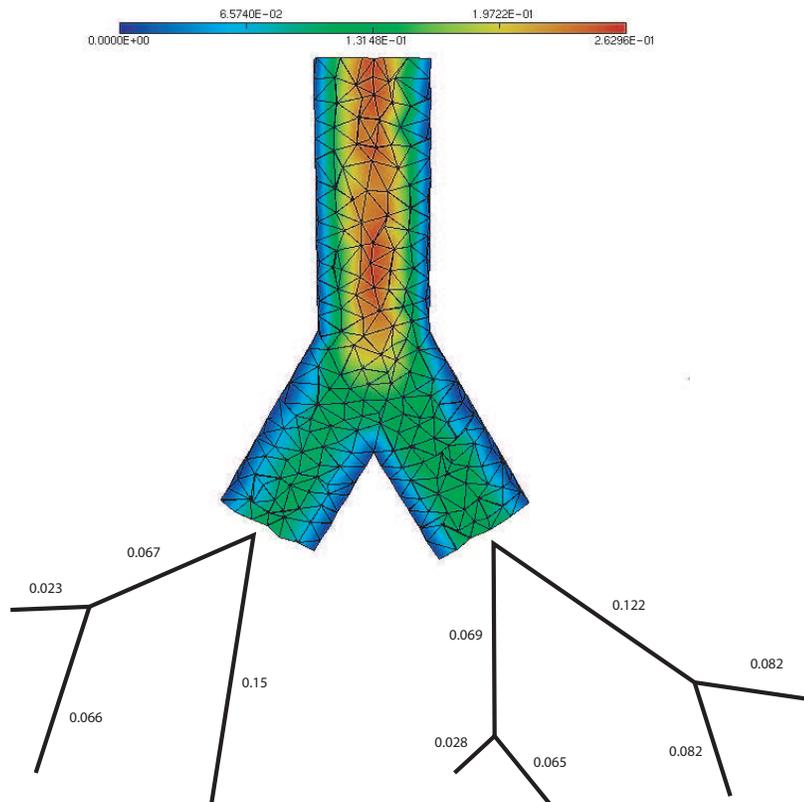


FIG. 3.8 – Reconstitution des débits

### 3.4.2 Simulations bidimensionnelles des conditions dissipatives essentielles

Pour ce qui est de la seconde approche avec conditions dissipatives essentielles, précisons que le principal intérêt de cette formulation est théorique, puisqu'elle permet d'obtenir des estimations a priori quand elles sont appliquées aux équations de Navier-Stokes, comme on le détaillera dans le prochain chapitre. En effet, le fait d'imposer la contrainte supplémentaire  $\mathbf{u}|_{\Gamma_i} = \lambda_i \mathbf{U}_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , revient à se limiter à un seul degré de liberté en vitesse pour l'entrée et chacune des sorties du domaine de calcul et aura pour effet de permettre le contrôle du flux d'énergie cinétique. Notons néanmoins qu'elles présentent également un intérêt numérique puisqu'elles peuvent être implantées simplement à partir d'un solveur standard, car on peut se ramener très simplement à un problème de contrôle optimal, les paramètres de contrôles étant les  $\lambda_i$  pour  $i = 0, \dots, N$ , liés par une contrainte de flux global nul, l'objectif étant le jeu de conditions dissipatives sur les sections  $\Gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

Le meilleur-solveur en éléments finis FreeFem++ ( voir [20]) a été utilisé pour faire des simulations aussi bien dans un arbre complet en dimension deux, à quatre générations, que dans l'arbre condensé correspondant à bifurcation unique. Le maillage de l'arbre dissipatif condensé contient 2200 triangles tandis que le maillage de l'arbre complet est approximativement composé de 16000 éléments. On commence par une simulation au niveau de

l'arbre 2D complet. Le fluide y circulant est à viscosité égale à 1. Les conditions aux limites appliquées en entrée et aux sorties sont libres non homogènes. Les contours des intensités de pression sont présentés dans la figure 3.10.

Ensuite, on réalise une simulation dans l'arbre condensé. A cause des termes de type

$$\left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right)$$

dont l'implantation directe et standard n'est pas prévue par Freefem++, on utilise une technique d'optimisation. On procède comme suit : d'abord, on considère un arbre condensé formé d'une unique bifurcation, dans lequel la sortie supérieure est fermée. Des profils paraboliques de vitesse sont appliqués à l'entrée et à la sortie inférieure. On résout le problème de Stokes associé à ces conditions aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u}_1 + \nabla p_1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_1 = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u}_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mathbf{u}_1 = 0 & \text{sur } \Gamma_2, \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{U}_0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mathbf{u}_1 = \alpha_1 \mathbf{U}_1 & \text{sur } \Gamma_1, \end{array} \right.$$

où  $\alpha_1 = -\frac{\int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}}{\int_{\Gamma_1} \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{n}}$ , afin de vérifier la condition de flux global nul, et on désigne par

$(\mathbf{u}_1, p_1)$  la solution (voir la figure 3.9). La simulation est alors réalisée pour le problème symétrique et ceci donne  $(\mathbf{u}_2, p_2)$ . En exprimant  $(\mathbf{u}, p)$  sous la forme de combinaisons

linéaires des problèmes intermédiaires  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^2 a_i \mathbf{u}_i$ ,  $p = \sum_{i=1}^2 a_i p_i + b$ , la linéarité du problème de Stokes permet de déduire que  $(\mathbf{u}, p)$  est solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_l. \end{array} \right.$$

Ensuite, on calcule  $(a_i)_{i=1,2}$  et  $b$  tels que  $(\mathbf{u}, p)$  soit solution du système

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_1 \mathbf{n} - R_1 \left( \int_{\Gamma_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_1, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_2 \mathbf{n} - R_2 \left( \int_{\Gamma_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right.$$

Ayant récupéré les valeurs de  $(a_i)_{i=1,2}$  et  $b$ , on peut trouver les multiplicateurs  $\lambda_i$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_0 = a_1 + a_2, \\ \lambda_1 = \alpha_1 a_1, \\ \lambda_2 = \alpha_2 a_2, \end{array} \right.$$

ce qui permet finalement de trouver  $(\mathbf{u}, p)$  solution du problème (3.6) par une simple résolution du problème de Stokes suivant avec condition de Dirichlet

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mathbf{u} = \lambda_0 \mathbf{U}_0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{U}_1 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \mathbf{u} = \lambda_2 \mathbf{U}_2 & \text{sur } \Gamma_2. \end{array} \right.$$

Les résistances globales  $R_1$  et  $R_2$  correspondant aux deux sorties de l'arbre condensé sont respectivement 126 et 139. Leur calcul s'est fait suivant la section 3.3 et dans le cas d'un écoulement de Poiseuille 2D. Ceci permet aussi de calculer la pression globale correspondant aux deux sorties de l'arbre condensé. Les contours des intensités de pression sont présentés dans la figure 3.10. Le tableau suivant donne les valeurs des débits et des pressions pour l'arbre condensé et l'arbre complet au niveau de la première bifurcation.

	Débit en sortie (inf)	Débit en sortie (sup)
Arbre condensé	0.129	0.142
Arbre complet	0.119	0.133

	Pression en sortie (inf)	Pression en sortie (sup)
Arbre condensé	2.885	3.321
Arbre complet	3.384	3.607

Les résultats obtenus dans l'arbre condensé et l'arbre complet sont relativement en bon accord, puisque il y a une erreur de 10 % entre les valeurs de pression et de vitesse. Cette erreur est essentiellement due à la mauvaise approximation géométrique de la zone de bifurcation, lors du calcul de la résistance équivalente du sous-arbre (voir la figure 3.6).

**Remarque 3.4.1.** Remarquons qu'avec ce procédé d'optimisation, il faut faire autant de calculs intermédiaires que l'arbre condensé compte de sorties. Toutefois, cette méthode qui consiste à exprimer le champ final comme combinaison linéaire des calculs intermédiaires, présente l'avantage de rendre possible l'implantation des conditions dissipatives essentielles sur tout code standard de calcul, puisque les calculs intermédiaires sont des résolutions du problème de Stokes avec conditions aux limites de Dirichlet sur l'ensemble de la frontière du domaine de calcul. De plus, comme on le détaillera dans le prochain chapitre cette approche présente également un intérêt théorique puisqu'elle sert à la construction d'une base de Galerkin lors de la recherche des solutions des équations de Navier-Stokes avec conditions dissipatives essentielles.

### 3.4.3 Viscosité fictive

Nous présentons dans ce qui suit une deuxième approche qui permet d'implanter une approche voisine des conditions aux limites dissipatives naturelles sur tout code standard de calcul : on peut prolonger le domaine de calcul  $\Omega$  sur une petite zone  $\omega_i$  au-delà de

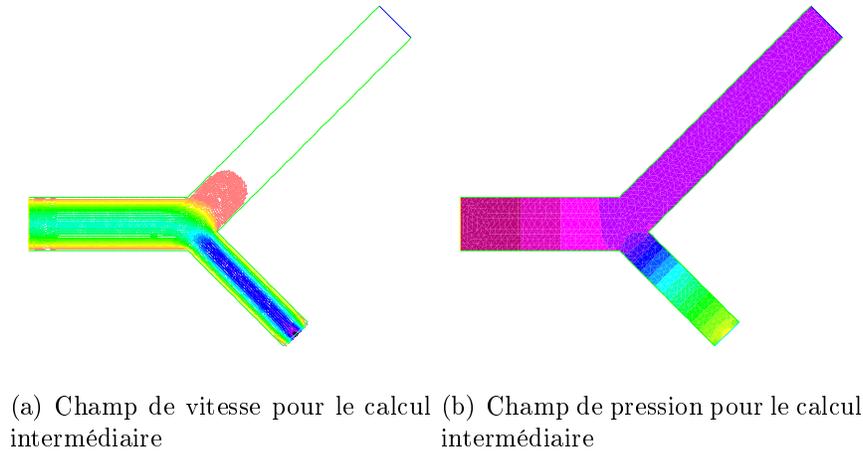


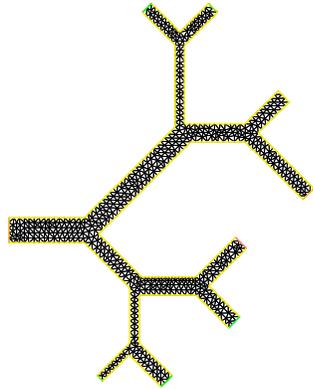
FIG. 3.9 – Problèmes intermédiaires

chaque sortie  $\Gamma_i$ , imposer les conditions de sortie libre au sens usuel à la sortie de  $\omega_i$ , et remplacer la viscosité du fluide dans ces domaines par une valeur fictive  $\tilde{\mu}_i$ , calée de telle sorte que la résistance du conduit  $\omega_i$  soit précisément la résistance du conduit condensé  $\tilde{\Omega}_i$ .

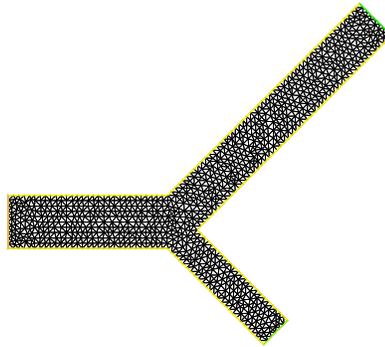
Afin de valider cette approche, des tests ont été réalisés avec Freefem++. Pour ce dernier code, les bronches de sorties de l'arbre condensé ont été prolongées par des tubes cylindriques, qui sont supposés remplis d'un fluide fictif à viscosité  $\tilde{\mu}$ . En utilisant encore une fois la loi de Poiseuille, la résistance de l'écoulement dans cette extension de longueur  $L$  et de diamètre  $D$  est  $R = 128\tilde{\mu}L/(\Pi D^4)$ . La valeur de  $\tilde{\mu}$  est choisie de manière à ce que  $R$  corresponde à la résistance équivalente de l'arbre condensé.

Une simulation a été réalisée avec Freefem++ dans l'arbre complet où les conditions d'entrée et de sorties libres non homogènes appliquées sont analogues à celles du précédent test. La même condition d'entrée est appliquée à l'entrée de l'arbre condensé et de l'arbre complet. Les viscosités virtuelles  $\tilde{\mu}_1$  et  $\tilde{\mu}_2$  correspondantes aux résistances globales  $R_1$  et  $R_2$  imposées pour le précédent calcul avec Freefem++ sont respectivement égales à 126 et 139. Les valeurs des pressions obtenues sur les sections de référence localisées au même niveau dans l'arbre complet et l'arbre condensé peuvent être comparées qualitativement. Les deux sections de référence choisies, appelées section 1 et section 2, sont localisées à l'interface entre la zone à viscosité unitaire et celles de viscosités  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . L'erreur entre la pression calculée au niveau des sections dans l'arbre complet et l'arbre condensé est de moins de 2 % comme illustré par le tableau suivant (Voir la figure 3.11 pour les maillages et la comparaison des champs de vitesse et de pression).

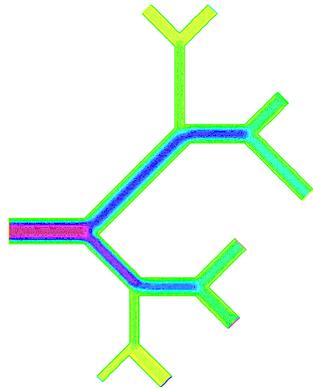
	Débit en sortie (inf)	Débit en sortie (sup)
Arbre condensé	0.13	0.143
Arbre complet	0.125	0.138



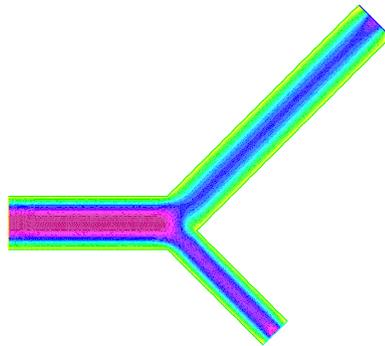
(a) Maillage de l'arbre complet



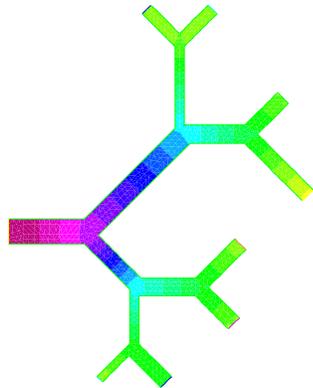
(b) Maillage de l'arbre condensé



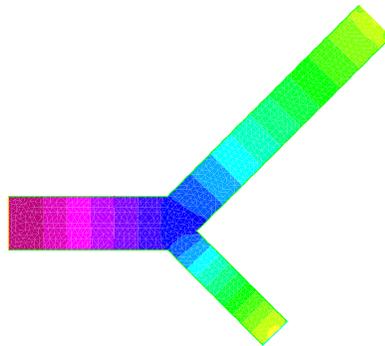
(c) Module du champ de vitesse dans l'arbre complet



(d) Module du champ de vitesse dans l'arbre condensé



(e) Champ de pression dans l'arbre complet



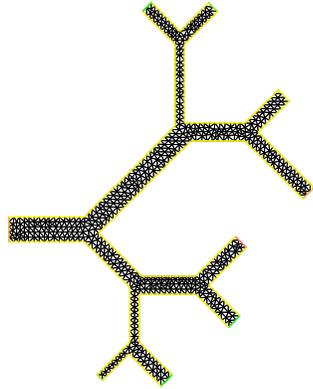
(f) Champ de pression dans l'arbre condensé

FIG. 3.10 – Comparaison entre l'arbre complet et l'arbre condensé pour les conditions dissipatives essentielles

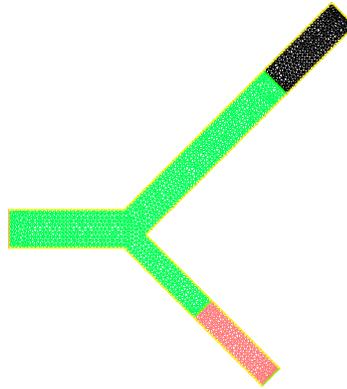
	Pression en sortie (inf)	Pression en sortie (sup)
Arbre condensé	3.462	3.759
Arbre complet	3.71	3.98

### 3.5 Conclusion

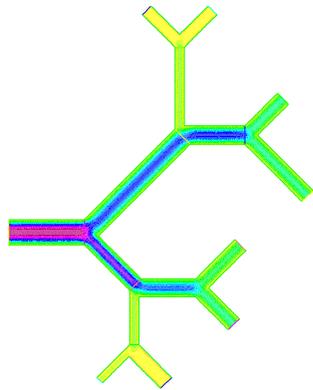
La multiplicité des cas test de simulation réalisés avec les deux codes d'éléments finis, les résultats prometteurs de comparaison entre l'arbre complet et l'arbre condensé correspondant sont très encourageants pour de futures études sur les conditions aux limites dissipatives. La simulation de l'écoulement de l'air dans les bronches proximales humaines reconstituées depuis la trachée à la 5<sup>ème</sup> génération basée sur l'imagerie médicale telle que la tomographie numérique combinerait des simulations des équations de Navier-Stokes dans les bronches proximales et conditions aux limites dissipatives qui prendraient en compte l'arbre pulmonaire distal complexe. La durée du calcul dans ce modèle de partie proximale avec conditions dissipatives serait significativement inférieure à celle dans l'arbre réaliste complet de la trachée à la 23<sup>ème</sup> génération et similaire à la durée de calcul dans l'arbre proximal avec conditions de sorties libres homogènes. Finalement, les conditions aux limites dissipatives pourraient être utilisées pour réaliser des simulations instationnaires complexes. Ainsi, simuler l'ouverture et la fermeture des alvéoles durant le cycle respiratoire en utilisant des sorties dissipatives transitoires serait possible.



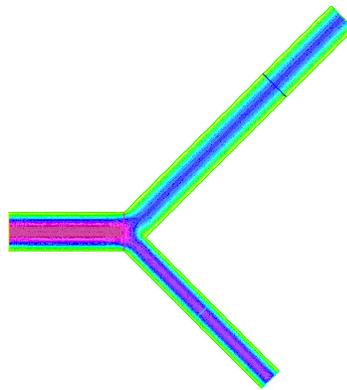
(a) Maillage de l'arbre complet



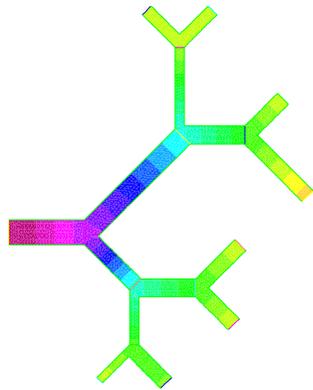
(b) Maillage de l'arbre condensé



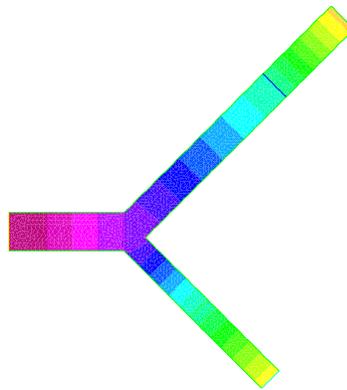
(c) Module du champ de vitesse dans l'arbre complet



(d) Module du champ de vitesse dans l'arbre condensé



(e) Champ de pression dans l'arbre complet



(f) Champ de pression dans l'arbre condensé

FIG. 3.11 – Comparaison entre l'arbre complet et l'arbre condensé pour l'approche avec viscosité fictive

# Chapitre 4

## Existence de solutions faibles et modélisation des acini<sup>2</sup>

### Sommaire

---

<b>4.1 Introduction</b>	<b>65</b>
<b>4.2 Solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes avec conditions dissipatives</b>	<b>65</b>
4.2.1 Position du problème	66
Conditions aux limites dissipatives naturelles	66
Conditions aux limites dissipatives essentielles	66
4.2.2 Bilan d'énergie	67
Conditions aux limites dissipatives naturelles	67
Conditions aux limites dissipatives essentielles	69
4.2.3 Formulation variationnelle	69
Conditions aux limites dissipatives naturelles	69
Conditions aux limites dissipatives essentielles	70
4.2.4 Estimations a priori et principaux résultats	71
Conditions aux limites dissipatives essentielles	71
Conditions aux limites dissipatives naturelles	84
<b>4.3 Couplage avec les acini</b>	<b>89</b>
4.3.1 Le modèle	89
4.3.2 Energie du système couplé global	93
Conditions aux limites dissipatives naturelles	93
Conditions aux limites dissipatives essentielles	95
4.3.3 Existence de solution pour le problème couplé	96
Conditions aux limites essentielles	97
Conditions aux limites naturelles	103
<b>4.4 Conclusion</b>	<b>105</b>

---

<sup>2</sup>Les résultats établis dans ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec Céline Grandmont (INRIA Rocquencourt).



## 4.1 Introduction

Ce chapitre se structure en deux parties : dans la première partie, on étudie le système des équations de Navier-Stokes avec conditions aux limites dissipatives naturelles ou essentielles. Dans la deuxième partie, ces modèles par compartiments sont enrichis en les couplant à une partie déformable qui correspond au parenchyme au sein duquel les alvéoles sont immergées. A ce niveau, on propose les déplacements d'un piston comme modèle simplifié des mouvements du diaphragme pulmonaire. Celui-ci à travers une pression alvéolaire qui agit sur les conditions aux limites dissipatives aux bouts de l'arbre tronqué, pilote l'écoulement de l'air dans les voies aériennes supérieures de l'arbre. Ainsi, les conditions aux limites imposées aux sorties de la zone supérieure de l'arbre prennent en compte aussi bien l'écoulement dans la zone intermédiaire que dans la partie inférieure siège des acini (approximativement entre les générations 17 et 24).

Dans la première partie du chapitre, c'est à dire sans piston, on établit, par une approche de type méthode de Galerkin, des résultats

- d'existence de solutions faibles en temps petit pour données quelconques, ainsi que l'existence globale en temps pour données petites, pour les conditions aux limites dissipatives essentielles,
- d'existence de solutions faibles en temps petit pour données petites pour les conditions aux limites dissipatives naturelles, et globales en temps pour données encore plus petites.

Dans la deuxième partie du chapitre, c'est à dire en considérant le couplage complet incluant le piston, on établit, toujours par une approche de type méthode de Galerkin, des résultats

- d'existence de solutions faibles en temps petit pour données quelconques, pour les conditions aux limites dissipatives essentielles,
- d'existence de solutions faibles en temps petit pour données petites pour les conditions aux limites dissipatives naturelles.

La méthode est la même pour les deux types de conditions aux limites : estimations a priori et obtention d'estimations supplémentaires afin d'obtenir la compacité de la suite de solutions approchées. Dans le cas des conditions dissipatives essentielles les résultats sont prouvés aussi bien en dimension deux qu'en dimension trois, cependant, dans le cas des conditions dissipatives naturelles, ils ne le sont qu'en dimension deux. Une autre démarche est utilisée au chapitre 5, uniquement dans le cas sans piston, pour généraliser ces résultats à la dimension trois. D'autre part, pour le cas avec piston, cette difficulté pourrait être surmontée si des conditions aux limites faisant intervenir la pression dynamique sont utilisées.

## 4.2 Solutions faibles pour les équations de Navier-Stokes avec conditions dissipatives

Dans cette première partie, on s'intéresse aux équations de Navier-Stokes avec conditions dissipatives aussi bien naturelles qu'essentielles.

### 4.2.1 Position du problème

Rappelons les deux modèles auxquels on s'intéresse.

#### Conditions aux limites dissipatives naturelles

Dans le cas de conditions aux limites dissipatives naturelles, le problème auquel on s'intéresse s'écrit comme suit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_i \mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n}, & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i \quad i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où les résistances  $R_i > 0$ , pour  $i = 1, \dots, N$ , ainsi que les pressions  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , sont données. La densité  $\rho$  est constante et donnée, ainsi que la viscosité  $\mu$ .

#### Conditions aux limites dissipatives essentielles

Le deuxième modèle auquel on s'intéresse, où les équations de Navier-Stokes sont couplées à des conditions aux limites dissipatives essentielles, est le cas particulier où l'on suppose que les profils de vitesse  $\mathbf{U}_i$  sont donnés dans  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Sur le plan de la modélisation, il pourrait être pertinent de considérer des profils susceptibles de changer au cours du temps (notamment au niveau de l'entrée/sortie  $\Gamma_0$ ), mais pour l'analyse mathématique nous considérons ici uniquement des profils indépendants du temps (typiquement profils de type Poiseuille). Rappelons que l'on désigne par  $\Lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_N)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  et que le problème s'écrit comme le système des équations de Navier-Stokes suivant avec des conditions aux limites qui prennent à présent

en compte la contribution des  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Le problème s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l, \\ \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i, \\ & i = 0, \dots, N, \\ \int_{\Gamma_0} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_0 = -P_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0, \\ \int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_i = -P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - \lambda_i R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2, & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i, \\ & i = 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Dans les sections 4.2.2 et 4.2.3 on établit les bilans d'énergie et les formulations variationnelles associés respectivement aux conditions aux limites naturelles et essentielles. Dans la section 4.2.4 on établit des estimations a priori et on prouve deux types de résultats d'existence pour les conditions aux limites dissipatives essentielles, existence de solution faible en temps petit pour données quelconques et existence de solution globale en temps pour données petites, alors que pour les conditions aux limites dissipatives naturelles on n'obtient que l'existence de solutions faibles en temps petit pour données petites et globales en temps pour données plus petites. Dans cette section on commencera par étudier le cas des conditions dissipatives essentielles qui sont certes plus restrictives, mais la contrainte supplémentaire  $\mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i$  sur les  $\Gamma_i$ , facilite le contrôle du flux d'énergie cinétique et les résultats établis sont valables aussi bien en dimension deux qu'en dimension trois. Ensuite, on étudie le cas des conditions dissipatives naturelles pour lequel les résultats ne sont prouvés qu'en dimension deux.

## 4.2.2 Bilan d'énergie

### Conditions aux limites dissipatives naturelles

Supposons que la solution du problème (4.1) existe et est assez régulière. Dans ce cas il est intéressant d'avoir une notion de bilan d'énergie. On désigne par  $E_{cf}(t)$ , l'énergie cinétique du fluide

$$E_{cf}(t) = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2.$$

On multiplie la première équation de (4.1) par  $\mathbf{u}$ . Après intégration par parties et utilisation de la condition d'incompressibilité et des conditions aux limites de (4.1) on obtient

$$\rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 + \sum_{i=0}^N P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (4.3)$$

On peut faire apparaître la dérivée en temps de l'énergie cinétique du fluide

$$\rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 = \frac{d}{dt} E_{cf}.$$

Par ailleurs, on a, pour  $i = 0, \dots, N$ ,

$$P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = P_i Q_i = -\mathcal{T}_{P_i},$$

où  $\mathcal{T}_{P_i}$  est la puissance développée par la force associée à la pression  $P_i$ ,  $\forall i = 0, \dots, N$ . En intégrant par parties le terme non linéaire on a

$$\rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \rho \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \rho \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Comme le champ de vitesse est à divergence nulle, on a

$$\rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \rho \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{F}_{cf},$$

où  $\mathcal{F}_{cf}$  désigne le flux d'énergie cinétique.

Finalement, on désigne par  $|\cdot|_{\mu,R}$  la norme induite par la forme bilinéaire positive suivante

$$a_{\mu,R}(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right).$$

A partir de (4.3) on a

$$\frac{d}{dt}(E_{cf}) = -\mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 - \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 - \rho \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - \sum_{i=0}^N P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n},$$

ce qui s'écrit aussi en utilisant les notations introduites ci-dessus

$$\frac{d}{dt}(E_{cf}) = -|\mathbf{u}|_{\mu,R}^2 - \mathcal{F}_{cf} + \sum_{i=0}^N \mathcal{T}_{P_i},$$

qui exprime la perte instantanée d'énergie cinétique du fluide comme puissance dissipée par viscosité du fluide aussi bien dans la partie proximale que dans la partie distale de l'arbre et comme flux d'énergie cinétique et comme puissance développée par les forces de pression de part et d'autre de l'arbre.

**Remarque 4.2.1.** La présence du terme du flux d'énergie cinétique  $\mathcal{F}_{cf}$  dont on ne connaît pas le signe empêche de borner l'énergie du système et introduit des difficultés supplémentaires pour établir des estimations a priori. On verra toutefois, dans la suite, que dans le cas particulier des conditions aux limites dissipatives essentielles, on peut surmonter cette difficulté en tirant profit du fait que les traces des vitesses sur les sections d'entrée et de sorties de l'arbre vivent dans un espace de dimension finie.

### Conditions aux limites dissipatives essentielles

Pour les conditions dissipatives essentielles la démarche est analogue à celle développée ci-dessus. En tenant compte du fait que

$$\mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i \text{ sur } \Gamma_i, \quad i = 0, \dots, N,$$

le flux d'énergie cinétique du fluide s'écrit

$$\mathcal{F}_{cf} = \frac{\rho}{2} \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \frac{\rho}{2} \sum_{i=0}^N \lambda_i^3 \int_{\Gamma_i} |\mathbf{U}_i|^2 \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n},$$

la contribution à la dissipation, qui provient de la partie résistive de l'arbre s'écrit

$$\sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^N R_i (\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2,$$

la puissance développée par les forces de pression

$$\mathcal{F}_{P_i} = -P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -P_i \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}, \quad i = 0, \dots, N,$$

et on a de la même manière le bilan

$$\frac{d}{dt}(E_{cf}) = -|\mathbf{u}|_{\mu,R}^2 - \mathcal{F}_{cf} + \sum_{i=0}^N \mathcal{T}_{P_i},$$

avec la contrainte supplémentaire  $\mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i$  sur  $\Gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

### 4.2.3 Formulation variationnelle

#### Conditions aux limites dissipatives naturelles

Soit  $\Omega$  le domaine borné de  $\mathbb{R}^d$  ( $d = 2$ , ou  $3$ ) introduit dans le précédent chapitre (voir la figure 3.2), dont la paroi latérale est notée  $\Gamma_l$ . On rappelle les espaces

$$H_{0,l}^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u}|_{\Gamma_l} = 0\},$$

$$V = \{\mathbf{u} \in H_{0,l}^1(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$$

muni de la norme  $H^1(\Omega)$ . On introduit également l'espace  $H$  suivant

$$H = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}.$$

On s'intéresse à l'étude du problème suivant : étant donnés

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &\in H, \\ P_i &\in L^2(0, T) \text{ pour } i = 0, \dots, N, \\ R_i &> 0 \text{ pour } i = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{4.4}$$

trouver  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  et  $p \in \mathcal{D}'(\Omega \times ]0, T[)$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_i \mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i \quad i = 1, \dots, N, \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0. & \end{array} \right. \quad (4.5)$$

Sous les hypothèses (4.4), nous appelons solution faible du problème (4.5), toute fonction  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  telle que

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^T \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) \\ & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \varphi(t) = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \tilde{\mathbf{u}} \varphi(0) - \int_0^T \left( \sum_{i=0}^N P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t), \\ & \forall \tilde{\mathbf{u}} \in V \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T]). \end{aligned} \quad (4.6)$$

### Conditions aux limites dissipatives essentielles

Dans cette section, on étudie le problème dans le cas particulier des conditions aux limites dissipatives essentielles. On suppose que les profils de vitesse  $\mathbf{U}_i$  sont donnés dans  $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ ,  $i = 0, \dots, N$ . Rappelons que l'on désigne par  $\Lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_N)$  un vecteur de  $\mathbb{R}^{N+1}$  et que l'on désigne par  $W$  l'espace fonctionnel suivant

$$Y = \{(\mathbf{u}, \Lambda) \in H_{0,l}^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{N+1}, \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i \text{ sur } \Gamma_i \quad i = 0, \dots, N\}.$$

On considère également l'espace des fonctions à divergence nulle

$$W = \{(\mathbf{u}, \Lambda) \in Y, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}.$$

Etant donnés

$$\begin{aligned} & \mathbf{U}_i \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i), \quad i = 0, \dots, N, \\ & \mathbf{u}_0 \in H, \\ & P_i \in L^2(0, T), \quad i = 0, \dots, N, \\ & R_i > 0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (4.7)$$

on veut trouver  $(\mathbf{u}, \Lambda) \in (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)) \times L^\infty(0, T)$  et  $p \in \mathcal{D}'(\Omega \times ]0, T[)$  vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l, \\ \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i, \\ & i = 0, \dots, N, \\ \int_{\Gamma_0} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_0 = -P_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0, \\ \int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_i = -P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - \lambda_i R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2, & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i, \\ & i = 1, \dots, N, \\ \mathbf{u}(0, x) = \mathbf{u}_0. & \end{array} \right. \quad (4.8)$$

En considérant des fonctions tests à divergence nulle, on obtient une formulation faible du problème, et on dira que  $\mathbf{u}$  est une solution faible de (4.8) sur  $[0, T[$  si

- $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$
- $\exists \lambda_i \in L^\infty(0, T)$  tel que  $\mathbf{u}_{/\Gamma_i} = \lambda_i \mathbf{U}_i$  p.p. t
- sous les hypothèses (4.7)  $(\mathbf{u}, \Lambda)$  vérifie

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) \\ & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1} \tilde{\Lambda}_{i+1} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \tilde{\mathbf{u}} \varphi(0) - \int_0^T \left( \sum_{i=0}^N P_i \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t), \\ & \forall (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda}) \in W \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T[), \text{ où } \Lambda = (\Lambda_i)_{1 \leq i \leq N+1} = (\lambda_i)_{0 \leq i \leq N} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N). \end{aligned} \quad (4.9)$$

#### 4.2.4 Estimations a priori et principaux résultats

##### Conditions aux limites dissipatives essentielles

La preuve des estimations a priori qu'on établit dans cette section repose essentiellement sur le fait que la trace du champ des vitesses sur les sections  $\Gamma_i$ , vit dans un espace de dimension finie du fait de la contrainte  $\mathbf{u}_{/\Gamma_i} = \lambda_i \mathbf{U}_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  et en raison du nombre fini de sorties  $\Gamma_i$ . En effet, pour borner le terme convectif non linéaire on utilise le lemme suivant

**Lemme 4.1.** Pour tout  $i \in \{0, \dots, N\}$  tel que  $\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \neq 0$ , il existe une constante  $C_i > 0$  telle que, pour tout  $(\mathbf{u}, \Lambda) \in W$  on a

$$|\lambda_i| \leq C_i \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)},$$

où  $W = \{(\mathbf{u}, \Lambda) \in H_{0,l}^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{N+1}, \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i \text{ sur } \Gamma_i \ i = 0, \dots, N, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$ .

**Preuve :**

En utilisant des arguments standards (voir [23]) on commence par montrer que

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_i))'} \leq C (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}), \quad \forall \mathbf{u} \in H_{div}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\},$$

où  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_i)$  désigne le sous-espace de  $H^{1/2}(\Gamma_i)$  formé des fonctions définies sur  $\Gamma_i$  et dont l'extension par 0 à  $\partial\Omega \setminus \Gamma_i$  appartient à  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ .

En effet, soient  $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  et  $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ . D'après la formule de Green on a

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} v = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} v.$$

Par densité de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  dans  $H^1(\Omega)$  et l'inégalité de Schwartz, on a pour tout  $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  et pour tout  $v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} v \right| &\leq \left| \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla v \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} v \right| \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Soit  $w$  un élément de  $H_{00}^{1/2}(\Gamma_i)$ . Il existe un relèvement  $v$  de  $H^1(\Omega)$  tel que  $v|_{\Gamma_i} = w$  et  $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|w\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_i)}$ , où  $C > 0$ . On a alors

$$\left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} w \right| \leq C (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}) \|w\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_i)}, \quad \forall w \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_i) \text{ et } \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

Ainsi,

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_i))'} = \sup_{\substack{w \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_i) \\ w \neq 0}} \frac{\left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} w \right|}{\|w\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma_i)}} \leq C (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}).$$

Par densité de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  dans  $H_{div}(\Omega)$ , on obtient

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_i))'} \leq C (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}), \quad \forall \mathbf{u} \in H_{div}(\Omega).$$

Or, pour  $(\mathbf{u}, \Lambda) \in W$  on a  $|\lambda_i| = \frac{\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_i))'}}{\|\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_i))'}}$ . Ainsi, en tenant en compte du fait que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , on aboutit à

$$|\lambda_i| \leq C_i \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \text{ où } C_i = \frac{C}{\|\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}\|_{(H_{00}^{1/2}(\Gamma_i))'}}.$$

□

**Proposition 4.2.** Sous les hypothèses (4.7), il existe un temps  $t^*$ ,  $0 < t^*$  suffisamment petit qui dépend des données et une constante  $C > 0$  qui dépend aussi des données tels que pour toute  $\mathbf{u}$  solution régulière de (4.8) on a

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,t^*;L^2(\Omega))}^2 + \mu \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,t^*;H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^{t^*} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C.$$

De plus, si on suppose que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\mu}{2\rho K} \quad (4.10)$$

et que

$$P_i \in L^\infty(0, \infty), \quad i = 0, \dots, N \text{ et } \tilde{P} = \sup_t \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \leq \frac{\mu^2}{2\sqrt{2}K K_2 C_1 C_2^2 \rho}, \quad (4.11)$$

où  $K$ ,  $K_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes qui seront définies dans ce qui suit, alors la solution vérifie

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\mu^2}{8\rho K^2},$$

et pour tout  $T$

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \mu \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^T \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C_T.$$

**Preuve :**

Le lemme 4.1 et en notant que si  $\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} = 0$  alors la contribution au flux d'énergie cinétique de la sortie  $\Gamma_i$  est nulle, nous permettent d'estimer le terme convectif non linéaire

$$\left| \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right| = \left| \sum_{i=0}^N (\lambda_i)^3 \int_{\Gamma_i} |\mathbf{U}_i|^2 (\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}) \right| \leq K_1 C_1^3 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^3$$

avec  $K_1 = \left( \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{U}_i|^2 |\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}| \right)$  et  $C_1 = \max_{0 \leq i \leq N} |C_i|$ . Noter que cette estimation repose sur le fait que la trace de la vitesse sur chaque  $\Gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , est supposée décrite par un seul degré de liberté. Cette estimation n'est pas vraie en général. On a aussi

$$\left| \sum_{i=0}^N P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right| = \left| \sum_{i=0}^N P_i \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right| \leq K_2 C_1 \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

avec  $K_2 = \left( \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}| \right)$ . En utilisant ces deux inégalités et le bilan d'énergie, on

obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i(\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 &\leq \frac{\rho}{2} C_1^3 K_1 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^3 \\
 &\quad + C_1 K_2 \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq C \left( \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^3 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=0}^N |P_i|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi, si  $P_i \in L^2(0, T)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , grâce au lemme C.4, il existe un temps  $t^*$ ,  $0 < t^*$ , suffisamment petit qui dépend des données et une constante  $C > 0$  qui dépend aussi des données tels que pour toute solution régulière de (4.8) on a

$$\frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2(t) + \mu \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^t (\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C \quad t \leq t^*$$

et alors toute solution régulière est bornée dans  $L^\infty(0, t^*; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, t^*; H^1(\Omega))$ . Noter, qu'en raison de la majoration obtenue pour le terme convectif non linéaire, cette estimation a priori n'est vraie qu'en temps suffisamment petit et il en découlera un résultat d'existence locale en temps pour données quelconques. Cependant, si les données sont suffisamment petites, on peut prouver que la solution reste dans une boule donnée, pour tout temps. En effet, en utilisant l'inégalité de Poincaré

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

combinée avec le lemme 4.1, on a l'inégalité suivante pour le terme non linéaire

$$\left| \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right| = \left| \sum_{i=0}^N (\lambda_i)^3 \int_{\Gamma_i} |\mathbf{U}_i|^2 (\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}) \right| \leq K_1 C_1^3 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^3 \leq K \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

avec  $K = K_1 C_1^3 C_2^2$ . De plus,

$$\left| \sum_{i=0}^N P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right| \leq K_2 C_1 C_2 \tilde{P} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)},$$

et par conséquent

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \frac{\mu}{2} - \frac{\rho}{2} K \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i (\lambda_i)^2 (\mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n})^2 \leq \frac{K_2^2 C_1^2 C_2^2}{2\mu} \tilde{P}^2.$$

Ainsi, sur tout intervalle de temps sur lequel  $\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\mu}{2\rho K}$ , on a

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{4C_2^2} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{K_2^2 C_1^2 C_2^2}{2\mu} \tilde{P}^2,$$

et par le lemme (C.1) on a

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\frac{\mu}{2\rho C_2^2} t} + \frac{K_2^2 C_1^4 C_2^4 \rho}{\mu^2} \tilde{P}^2 (1 - e^{-\frac{\mu}{2\rho C_2^2} t}).$$

Ainsi, si  $P_i \in L^\infty(0, T)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , et plus précisément, si  $\tilde{P}^2 \leq \frac{\mu^4}{8\rho^2 K_2^2 K^2 C_1^2 C_2^4}$  et si  $\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\mu}{2\rho K}$  alors

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\mu^2}{8\rho K^2}.$$

□

Dans ce qui suit on montre que le problème (4.8) admet au moins une solution et ceci par une approche de type Galerkin. Au vu de la proposition 4.2, on prouve deux types de résultats d'existence : localement en temps pour données quelconques et globalement en temps pour données suffisamment petites. Plus précisément, on a le théorème suivant

**Théorème 4.3.** Sous les hypothèses (4.7), il existe un temps  $t^*$ ,  $0 < t^*$  et une solution faible de (4.8) sur  $[0, t^*]$ . De plus, il existe une constante  $C > 0$  telle que la solution vérifie l'estimation suivante

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, t^*; L^2(\Omega))}^2 + \mu \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, t^*; H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^{t^*} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C.$$

De plus, si on suppose que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\mu}{2\rho K}$$

et que

$$P_i \in L^\infty(0, \infty), \quad i = 0, \dots, N \text{ et } \tilde{P} \leq \frac{\mu^2}{2\sqrt{2} K K_2 C_1 C_2^2 \rho},$$

alors il existe au moins une solution faible de (4.8) sur  $[0, \infty[$ . De plus, cette solution vérifie

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\mu^2}{8\rho K^2},$$

et pour tout  $T$

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \mu \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^T \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C_T.$$

La preuve de ces résultats d'existence est standard. On construit une suite de problèmes approchés  $(P_m)$ , chacun possédant une solution unique. Ensuite, comme les estimations d'énergie ne suffisent pas à passer à la limite dans la formulation faible, on prouve une estimation supplémentaire. En appliquant un résultat de compacité, on peut alors passer à la limite dans le système vérifié par la solution approchée prouvant ainsi l'existence d'au moins une solution faible.

**Méthode de Galerkin :**

Dans tout ce qui suit on suppose que  $\int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \neq 0, \forall i = 0, \dots, N$ , sachant que la généralisation de la preuve au cas  $\int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \forall i = 0, \dots, N$  et au cas où il existe au moins  $i_0$  telque  $\int_{\Gamma_{i_0}} \mathbf{U}_{i_0} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ , se fait sans problème, comme précisé dans la remarque 4.2.3. Cette hypothèse est raisonnable du point de vue de la modélisation ; également du point de vue de l'implantation numérique puisqu'on considère des profils paraboliques. On cherche à construire une base de Galerkin de l'espace

$$W = \{(\mathbf{u}, \Lambda) \in H_{0,l}^1(\Omega) \times \mathbb{R}^{N+1}, \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i \text{ sur } \Gamma_i \quad i = 0, \dots, N, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

où les  $\lambda_i, i = 0, \dots, N$  vérifient la condition de compatibilité.

On commence par considérer une base de Galerkin de l'espace

$$\{\mathbf{u} \in H_{0,l}^1(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}.$$

Cet espace étant séparable, il existe une suite  $\mathbf{w}_{1,0}, \dots, \mathbf{w}_{n,0}, \dots$ , de fonctions régulières nulles sur  $\Gamma_l$ , formant un ensemble libre et total de  $\{\mathbf{u} \in H_{0,l}^1(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$ . On considère alors l'espace vectoriel suivant  $\text{Vect}_{1 \leq i \leq m}(\mathbf{w}_{i,0}, \mathbf{0})$ ,  $\mathbf{0}$  étant le vecteur nul de taille  $N+1$ . L'idée consiste à compléter  $(\mathbf{w}_{i,0}, \mathbf{0})_{1 \leq i \leq m}$  avec une base adéquate de champs à divergence nulle, afin de construire une base de Galerkin de  $W$  qui prend en compte la contrainte  $\mathbf{u}_{/\Gamma_i} = \lambda_i \mathbf{U}_i, \forall i = 0, \dots, N$ .

$W$  est un sous espace vectoriel fermé de  $H_{0,l}^1(\Omega)^d \times \mathbb{R}^{N+1}$ . Pour les multiplicateurs  $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq N}$  il s'agit de trouver une base de  $\mathbb{R}^{N+1}$  telle que la contrainte de conservation du débit  $\sum_{i=0}^N \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} = 0$  soit vérifiée. Comme  $\lambda_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} = -\sum_{i=1}^N \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}$  et qu'en particulier  $\int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \neq 0$ , il s'agit d'un espace vectoriel de dimension  $N$ . On introduit ainsi les  $N$  problèmes auxiliaires suivants, qui consistent à trouver, pour tout  $1 \leq i \leq N$ , un champs de vitesse  $\mathbf{w}_i$  et un champ de pression  $p_i$  solution p.p.t de

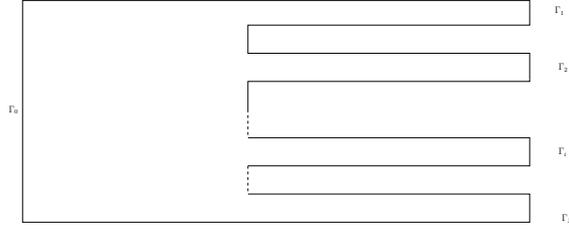
$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{w}_i + \nabla p_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w}_i = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mathbf{w}_i = 0 & \text{sur } \Gamma_j \quad j \neq i, j = 1, \dots, N, \\ \mathbf{w}_i = \mathbf{U}_0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mathbf{w}_i = \alpha_i \mathbf{U}_i & \text{sur } \Gamma_i, \end{array} \right. \quad (4.12)$$

où  $\alpha_i = -\frac{\int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}}{\int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}}$  est ainsi choisi afin de garantir la compatibilité avec la loi de conser-

vation de la masse. Comme  $\int_{\partial\Omega} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} = 0$ , ce problème est bien posé et admet une solution

unique  $(\mathbf{w}_i, p_i)$  dans  $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ .

On considère alors  $W_m = \text{Vect}_{1 \leq i \leq m}(\mathbf{w}_{i,0}, \mathbf{0}) \oplus \text{Vect}_{1 \leq i \leq N}(\mathbf{w}_i, f_i)$  où  $f_i = (1, \alpha_i \mathbf{e}_i) = (1, 0, \dots, \alpha_i, \dots, 0)$ ,  $(\mathbf{e}_i)_{1 \leq i \leq N}$  étant la base canonique de  $\mathbb{R}^N$ . Dans ce qui suit, pour alléger les notations, on note  $W_m = \text{Vect}_{1 \leq i \leq m+N}(\mathbf{w}^i, \Lambda^i)$ .



**Remarque 4.2.2.** Noter que le procédé de construction de l'espace vectoriel  $\text{Vect}_{1 \leq i \leq N}(\mathbf{w}_i, f_i)$  est similaire à la méthode adaptée pour implanter les conditions aux limites essentielles sur FreeFem++ (voir le chapitre 3).

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on définit  $(\mathbf{u}_m(t), \Lambda^m(t))$  solution dans  $W_m$  du système non linéaire  $(P_m)$  suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \cdot \mathbf{w}^j + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{w}^j + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_m : \nabla \mathbf{w}^j \\ + \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1}^m \Lambda_{i+1}^j \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) = - \sum_{i=0}^N P_i \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \quad \forall j = 1, \dots, m+N, \\ \int_{\Omega} (\mathbf{u}_m(0) - \mathbf{u}_0) \mathbf{w}^j = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m+N. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

**Lemme 4.4.** Le problème  $(P_m)$  admet une solution unique. De plus, l'estimation d'énergie suivante est vérifiée

$$\text{il existe } t^* \text{ indépendant de } m, \text{ tel que } \|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(0,t^*;L^2(\Omega))} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,t^*;H^1(\Omega))} \leq C,$$

où  $C$  est une constante qui ne dépend pas de  $m$ .

D'autre part, si les données vérifient (4.10), (4.11) alors

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\mu^2}{8\rho K^2},$$

et pour tout  $T$

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}_m\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \mu \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^T \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C_T.$$

**Preuve :**

Si on exprime  $(\mathbf{u}_m, \Lambda^m)$  dans la base  $W_m$  sous la forme  $(\mathbf{u}_m, \Lambda^m) = \sum_{i=1}^{m+N} u_{mi}(\mathbf{w}^i, \Lambda^i)$  et qu'on écrit le système  $(P_m)$  en terme des inconnues  $u_{mi}$ , on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \sum_{i=1}^{m+N} \frac{\partial u_{mi}}{\partial t} \int_{\Omega} \mathbf{w}^i \cdot \mathbf{w}^j + \rho \sum_{i,k=1}^{m+N} u_{mi} u_{mk} \int_{\Omega} (\mathbf{w}^i \cdot \nabla \mathbf{w}^k) \cdot \mathbf{w}^j + \mu \sum_{i=1}^{m+N} u_{mi} \int_{\Omega} \nabla \mathbf{w}^i : \nabla \mathbf{w}^j \\ + \sum_{i=1}^N R_i u_{m(i+1)} \Lambda_{i+1}^i \Lambda_{i+1}^j \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) = - \sum_{i=0}^N P_i \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}, \\ \sum_{i=1}^{m+N} u_{mi}(0) \int_{\Omega} \mathbf{w}^i \cdot \mathbf{w}^j = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}^j. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Les éléments de la base étant linéairement indépendants, le système équivalent est de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_{mi}}{\partial t} + \sum_{j,k=1}^{m+N} a_{ijk} u_{mj} u_{mk} + \sum_{j=1}^{m+N} b_{ij} u_{mj} = - \sum_{j=1}^{m+N} c_{ij}, \\ u_{mi}(0) = \sum_{j=1}^{m+N} d_{ij} \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{w}^j \end{array} \right. \quad (4.15)$$

où  $a_{ij}, b_{ijk}, c_{ij}, d_{ij} \in \mathbb{R}$ . Ce système de  $m+N$  équations différentielles à  $m+N$  inconnues et de  $m+N$  conditions initiales, possède une solution locale unique, c'est à dire qu'il existe  $t_m > 0$ , ( $t_m \leq T$ ) et  $\mathbf{u}_m$  vérifiant l'équation dans  $]0, t_m[$  et la condition initiale. Soit  $t \in ]0, t_m[$ . En multipliant la première équation de  $(P_m)$  par  $u_{mj}$  et en sommant en  $j$  de 1 à  $m+N$ , il vient que

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \cdot \mathbf{u}_m + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{u}_m + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_m : \nabla \mathbf{u}_m \\ & + \sum_{i=1}^N R_i (\Lambda_{i+1}^m)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) = - \sum_{i=0}^N P_i \Lambda_{i+1}^m \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

D'autre part, en multipliant la deuxième équation de  $(P_m)$  par  $u_{mj}(0)$  et en sommant en  $j$  de 1 à  $m+N$  il vient que

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}_m(0)|^2 = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_m \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}_0|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}_m(0)|^2$$

d'où

$$\int_{\Omega} |\mathbf{u}_m(0)|^2 \leq \int_{\Omega} |\mathbf{u}_0|^2.$$

En reprenant la démarche développée pour la proposition 4.2, on montre donc que

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_0^t \|\mathbf{u}_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \leq C \quad (4.17)$$

où  $C$  dépend de la donnée initiale, des pressions  $P_i$  et des profils  $\mathbf{U}_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ . La majoration étant indépendante de  $m$  et de  $t$ , on en déduit que  $t_m^* = t^*$ . Finalement, en reprenant les arguments développés dans la preuve de la proposition 4.2 on obtient les autres estimations.  $\square$

**Résultat de compacité :**

Le lemme 4.4 nous permet d'affirmer qu'il existe un élément  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$  et une sous suite  $\mathbf{u}_m$  telle que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; V) \\ \text{et} \\ \mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faible }^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H). \end{cases} \quad (4.18)$$

Si dans le problème  $(P_m)$  on avait considéré des équations de Stokes instationnaires, (4.18) aurait suffi pour passer à la limite. Par contre, dans notre cas, on a besoin d'un résultat de compacité pour passer à la limite dans le terme non linéaire de la formulation. En effet, comme  $\mathbf{u}_m$  converge faiblement vers  $\mathbf{u}$  dans  $L^2(0, T, V)$ , si on montre de plus que  $\mathbf{u}_m$  converge fortement vers  $\mathbf{u}$  dans  $L^2(0, T, H)$ , alors on peut passer à la limite dans le terme convectif. On commence par donner un lemme de compacité faisant intervenir la notion de dérivée fractionnaire. On se donne trois espaces de Hilbert  $B_0$ ,  $B$ , et  $B_1$  tels que  $B_0 \subset B \subset B_1$  et l'injection  $B_0 \rightarrow B$  est compacte. Si, en outre,  $\gamma > 0$  est un nombre donné, on définit

$$\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1) = \{\mathbf{u}/\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}, B_0), D_t^\gamma \mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}, B_1)\}$$

où  $D_t^\gamma \mathbf{u}$  est la dérivée fractionnaire d'ordre  $\gamma$  en  $t$  de  $\mathbf{u}$  définie comme la transformée de Fourier inverse de  $(2i\pi\tau)^\gamma \hat{\mathbf{u}}(\tau)$ .

Muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)} = (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}; B_0)}^2 + \|\tau|\tau|^\gamma \hat{\mathbf{u}}\|_{L^2(\mathbb{R}; B_1)}^2)^{\frac{1}{2}}$$

l'espace  $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$  est un espace de Hilbert.

De la même manière, on définit  $\mathcal{H}^\gamma(0, T; B_0, B_1)$ , espace des restrictions à  $[0, T]$  des fonctions de  $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; B_0, B_1)$ .

Le principal résultat concernant ces espaces est le lemme suivant dont une preuve se trouve dans [37] page 61.

**Lemme 4.5.** Pour tout  $\gamma > 0$ , l'injection de  $\mathcal{H}^\gamma(0, T; B_0, B_1) \rightarrow L^2(0, T; B)$  est compacte.

Dans ce qui suit l'idée consiste à appliquer ce lemme avec

$$B_0 = V, B_1 = H, \gamma = \frac{1}{4} - \varepsilon \text{ et } B = H.$$

En effet, on a le résultat suivant

**Lemme 4.6.** La suite  $\mathbf{u}_m$  est bornée dans  $\mathcal{H}^\gamma(0, T; V, H)$  pour  $0 \leq \gamma < \frac{1}{4}$ .

**Preuve :**

On note  $\bar{\mathbf{u}}_m$  le prolongement de  $\mathbf{u}_m$  par 0 en dehors de  $[0, T]$ , et  $\hat{\mathbf{u}}_m$  la transformée de Fourier de  $\bar{\mathbf{u}}_m$ . On veut montrer que  $\bar{\mathbf{u}}_m$  appartient à  $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; V, H)$ , ce qui nous permettra d'appliquer le lemme de compacité 4.5. Comme  $\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; V, H)$  est un espace de Hilbert pour la norme  $\|\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}^\gamma(\mathbb{R}; V, H)} = (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\mathbb{R}; V)}^2 + \|\tau|\tau|^\gamma \hat{\mathbf{u}}\|_{L^2(\mathbb{R}; H)}^2)^{\frac{1}{2}}$ , et comme on a déjà montré que  $\mathbf{u}_m$  reste dans un borné de  $L^2(0, T, V)$ , il suffit de montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{\mathbf{u}}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 < +\infty.$$

En reprenant le problème  $(P_m)$  avec le prolongement de  $\mathbf{u}_m$  par 0 en dehors de  $[0, T]$  et en prenant en compte les discontinuités en 0 et  $T$ , on a

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_m}{\partial t} \cdot \mathbf{w}^j + \rho \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}}_m \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_m) \cdot \mathbf{w}^j + \mu \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{u}}_m : \nabla \mathbf{w}^j + \sum_{i=1}^N R_i \bar{\Lambda}_i^m \Lambda_i^j \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 = \\ & - \sum_{i=0}^N \bar{P}_i \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - \rho \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_m(T) \cdot \mathbf{w}^j \delta_T + \rho \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_m(0) \cdot \mathbf{w}^j \delta_0, \end{aligned} \quad (4.19)$$

où  $\delta$  désigne la masse de Dirac. On applique la transformée de Fourier en temps, ensuite on multiplie ces équations par les coefficients de  $(\hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\Lambda}^m)$  dans la base de  $W_m = \text{Vect}_{1 \leq i \leq m+N}(\mathbf{w}^i, \Lambda^i)$  et on somme les  $m + N$  équations, ce qui nous conduit à

$$\begin{aligned} & \rho 2i\pi\tau \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 + \rho \int_{\Omega} \hat{G}(\tau) \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) + \mu \int_{\Omega} \nabla \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) : \nabla \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) + \sum_{i=1}^N R_i (\hat{\Lambda}_i^m(\tau))^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \\ & = - \sum_{i=0}^N \hat{P}_i(\tau) \hat{\Lambda}_{i+1}^m \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - \rho \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_m(T) \cdot \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) e^{-2i\pi\tau T} + \rho \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_m(0) \cdot \hat{\mathbf{u}}_m(\tau), \end{aligned} \quad (4.20)$$

où  $\hat{G}$  est la transformée de Fourier en temps du terme non linéaire  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ .

En remarquant que, grâce au lemme 4.1, on a

$$|\hat{\Lambda}_i^m(\tau)| \leq C_1 \|\hat{\mathbf{u}}(\tau)\|_{L^2(\Omega)},$$

et en prenant la partie imaginaire de l'égalité ci-dessus, on déduit que

$$\begin{aligned} |\tau| \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 & \leq C (\|\hat{G}_m(\tau)\|_{V'} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_V + \|\bar{\mathbf{u}}_m(T)\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \\ & + \|\bar{\mathbf{u}}_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N |\hat{P}_i| \left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right| \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Par continuité de la forme trilinéaire sur  $V$ , on a

$$\|G(\mathbf{u})\|_{V'} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

et donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{G}_m\|_{V'} dt \leq C \int_0^T \|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt \leq C,$$

on en déduit que

$$\|\hat{G}_m(\tau)\|_{V'} \leq C.$$

Par ailleurs, grâce à l'estimation du lemme 4.4, on a  $\|\mathbf{u}_m(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$  et comme  $\|\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ , on déduit de (4.21) que

$$|\tau| \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C (\|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{H^1(\Omega)} + \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}),$$

et comme  $H^1(\Omega)$  s'injecte continument dans  $L^2(\Omega)$

$$|\tau| \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{H^1(\Omega)}.$$

Or, pour  $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ , on observe que

$$|\tau|^{2\gamma} \leq C(\gamma) \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}}, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{\mathbf{u}}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{\mathbf{u}}_m\|_{H^1(\Omega)}}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} + C(\gamma) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tau| \|\hat{\mathbf{u}}_m\|_{H^1(\Omega)}}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}}.$$

On s'intéresse à la première intégrale du membre de droite. On a par l'inégalité de Schwartz

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|\hat{\mathbf{u}}_m\|_{H^1(\Omega)}^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1 + |\tau|^{1-2\gamma})^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{\mathbf{u}}_m\|_{H^1(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La première intégrale est convergente, pour  $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ . D'autre part, par l'inégalité de Parseval, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau = \int_0^T \|\mathbf{u}_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^2 dt < +\infty,$$

car on sait que  $\mathbf{u}_m$  reste bornée dans  $L^2(0, T; V)$ . De la même manière, on montre que la deuxième intégrale est convergente.  $\square$

### **Passage à la limite :**

Dans ce qui suit, afin d'alléger les notations, on notera  $\mathbf{u}_m$  toute sous suite de  $\mathbf{u}_m$ . Grâce à la relation de stabilité du lemme 4.4, on sait que

$$\mathbf{u}_m \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H),$$

ce qui nous permet d'affirmer qu'il existe un élément  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  et une sous suite de  $\mathbf{u}_m$ , notée de la même manière, telle que (4.18) soit vérifiée. D'autre

part, on vient de montrer dans le paragraphe ci-dessus que  $\|\mathbf{u}_m\|_{\mathcal{H}^{\frac{1}{4}-\varepsilon}(0,T;H_{0,l}^1(\Omega),L^2(\Omega))}$  est bornée, et donc par le lemme 4.5, il existe une sous suite, toujours notée  $\mathbf{u}_m$ , telle que

$$\mathbf{u}_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mathbf{u} \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.22)$$

Les convergences (4.18) et (4.22) nous permettent de passer à la limite dans  $(P_m)$ . En effet, soit  $\varphi$  une fonction  $C^\infty([0, T])$  avec  $\varphi(T) = 0$ . On multiplie la première équation du problème  $(P_m)$  par  $\varphi$  et on intègre par parties le premier terme

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^T \int_\Omega \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{w}^j \varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{w}^j \varphi(t) + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_m : \nabla \mathbf{w}^j \varphi(t) \\ & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1}^m \Lambda_{i+1}^j \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t) = \int_\Omega \mathbf{u}_{0m} \mathbf{w}^j \varphi(0) - \int_0^T \left( \sum_{i=0}^N P_i \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Par (4.18) on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega \mathbf{u}_m \mathbf{w}^j \varphi'(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_\Omega \mathbf{u} \mathbf{w}^j \varphi'(t) \\ & \text{et} \\ & \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_m : \nabla \mathbf{w}^j \varphi(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{w}^j \varphi(t). \end{aligned}$$

Grâce au lemme 4.1, on a une majoration uniforme de  $\Lambda^m$  dans  $L^\infty(0, T)$ ,  $i = 0 \dots N$ , ce qui permet de déduire qu'il existe un élément  $\Lambda \in L^\infty(0, T)$  est une sous suite notée  $\Lambda^m$  telle que

$$\Lambda^m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \Lambda \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0, T)$$

et on peut alors passer à la limite dans le terme

$$\int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1}^m \Lambda_{i+1}^j \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1} \Lambda_{i+1}^j \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t)$$

Par ailleurs, comme  $\mathbf{u}_m$  converge vers  $\mathbf{u}$  dans  $L^2(0, T; V)$  faiblement, et dans  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$  fortement, on peut passer à la limite dans le terme non linéaire, et on a

$$\int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{w}^j \varphi(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{w}^j \varphi(t).$$

Ainsi, par passage à la limite, (4.23) nous donne

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^T \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) \\ & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1} \tilde{\Lambda}_{i+1} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t) = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \tilde{\mathbf{u}} \varphi(0) - \int_0^T \left( \sum_{i=0}^N P_i \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t), \end{aligned} \quad (4.24)$$

pour tout  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda}) = (\mathbf{w}^j, \Lambda^j)$ ,  $\forall j = 1, \dots, m + N$ . Par linéarité, cette équation reste vraie pour tout  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda})$  combinaison linéaire finie des  $(\mathbf{w}^j, \Lambda^j)$  et par continuité, pour tout élément de  $W$ . En choisissant en particulier  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ , on voit que  $\mathbf{u}$  satisfait (4.8) au sens des distributions. Enfin, il reste à vérifier la condition initiale. Pour cela, on multiplie (4.8) par  $\tilde{\mathbf{u}}\varphi$  et on intègre en temps et en espace, on obtient

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}}\varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}_m) \cdot \tilde{\mathbf{u}}\varphi(t) + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}}\varphi(t) \\ & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1} \tilde{\Lambda}_{i+1} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(0) \tilde{\mathbf{u}}\varphi(0) - \int_0^T \left( \sum_{i=0}^N P_i \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t) \end{aligned} \quad (4.25)$$

et par comparaison avec (4.24) on a  $\int_{\Omega} (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}}\varphi(0) = 0$ . En choisissant  $\varphi$  telle que  $\varphi(0) = 1$ , alors

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in V,$$

ainsi  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  dans  $V'$ , mais aussi dans  $H$  puisque  $\mathbf{u}_0 \in H$ . En conclusion  $\mathbf{u}$  est solution faible de (4.8).

**Remarque 4.2.3.** Comme déjà annoncé ci-dessus, on s'est restreint au cas de profils  $\mathbf{U}_i$  vérifiant  $\int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \neq 0$ ,  $\forall i = 0, \dots, N$ , afin de garder la similitude avec l'approche numérique pour l'implantation des conditions aux limites essentielles sous FreeFem++ et en conformité avec l'argument de modélisation suivant lequel des profils de vitesse paraboliques est un choix adéquat. Toutefois, on peut généraliser la construction de la base de Galerkin de  $W$  au cas de profils quelconque comme suit :

Si  $\int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall i = 0, \dots, N$ , alors  $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tel que } \sum_{i=0}^N \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} = 0\}$  est de dimension  $N + 1$  et on considère alors les  $N + 1$  problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{w}_i + \nabla p_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w}_i = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mathbf{w}_i = 0 & \text{sur } \Gamma_j \quad j \neq i, \\ \mathbf{w}_i = \mathbf{U}_i & \text{sur } \Gamma_i, \end{array} \right. \quad (4.26)$$

pour tout  $i = 0, \dots, N$ .

Sinon, s'il existe  $i_0$  tel que  $\int_{\Gamma_{i_0}} \mathbf{U}_{i_0} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ , par exemple  $i_0 = 0$ , alors  $\{\Lambda \in \mathbb{R}^{N+1} \text{ tel que } \sum_{i=0}^N \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} = 0\}$

$\mathbf{n} = 0$  est de dimension  $N$  et on résout les  $N$  problèmes suivants

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu\Delta \mathbf{w}_i + \nabla p_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_i = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w}_i = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mathbf{w}_i = 0 & \text{sur } \Gamma_j \quad j \neq i, \\ \mathbf{w}_i = \beta_i \mathbf{U}_0 & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mathbf{w}_i = \mathbf{U}_i & \text{sur } \Gamma_i, \end{array} \right. \quad (4.27)$$

où  $\beta_i = -\frac{\int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n}}{\int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}}$ . On a  $\Lambda = (-\sum_{i=1}^N \beta_i \lambda_i, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$  et on considère comme espace d'approximation l'espace  $\text{Vect}_{1 \leq i \leq N}(w_i, f_i)$  où  $f_i = (\beta_i, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ .

### Conditions aux limites dissipatives naturelles

Dans ce qui suit, on étudie l'existence de solution pour le problème (4.6). La différence avec le cas précédent est que la preuve du théorème 4.3 repose complètement sur le fait qu'on travaille dans un espace de dimension finie pour la trace des vitesses compte tenu de la contrainte  $\mathbf{u}_{|\Gamma_i} = \lambda_i \mathbf{U}_i$  et du nombre fini de sections  $\Gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , ce qui a permis de contrôler le flux d'énergie cinétique. En l'absence de cet argument, pour le cas des conditions aux limites dissipatives naturelles, on prouve de nouvelles inégalités pour le terme convectif, basées sur des inégalités d'interpolation et d'injection de Sobolev, qui permettent d'établir des estimations a priori, mais uniquement en dimension 2.

**Remarque 4.2.4.** Rappelons l'injection de Sobolev suivante qui sera fréquemment utilisée dans ce qui suit : pour  $\mathbf{u} \in W^{m,p}(\Omega)$ ,  $m \geq 1$ ,  $1 < p < \infty$ , on a

$$\text{si } \frac{1}{p} - \frac{m}{d} = \frac{1}{q} > 0 \text{ alors } \|\mathbf{u}\|_{L^q(\Omega)} \leq C(m, p, d, \Omega) \|\mathbf{u}\|_{W^{m,p}(\Omega)}. \quad (4.28)$$

Dans ce qui suit, également, on renvoie à [38] pour les résultats concernant la théorie d'interpolation hilbertienne.

On a alors le lemme suivant

**Lemme 4.7.** Soit  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ . On a alors

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right| \leq \begin{cases} D_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 & \text{si } d = 2, \\ D_3 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{2}} & \text{si } d = 3. \end{cases} \quad (4.29)$$

**Preuve :**

Compte tenu du fait que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , on sait que  $\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{u}^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . Cela entraîne

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right| &\leq \frac{1}{2} \left( \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}^4 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^4(\partial\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

On cherche tout d'abord à estimer  $\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\partial\Omega)}$ . On a les inégalités de trace suivantes

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{(H^{\frac{1}{2}})'(\partial\Omega)} &\leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \text{ car } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \text{et } \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} &\leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

On en déduit alors par interpolation hilbertienne que

$$\|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Le traitement de la norme  $\|\mathbf{u}\|_{L^2(\partial\Omega)}$  se fera en fonction de la dimension de l'espace considéré.

En dimension 2, par l'inégalité de Sobolev (4.28), on a

$$\|\mathbf{u}\|_{L^4(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^{\frac{1}{4}}(\partial\Omega)},$$

par ailleurs, on sait que

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{\frac{1}{4}}(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)}$$

et par interpolation on obtient

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{\frac{3}{4}}(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{4}},$$

il en découle que

$$\|\mathbf{u}\|_{L^4(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{4}} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{4}}.$$

En dimension 3, par l'injection de Sobolev (4.28), on a

$$\|\mathbf{u}\|_{L^4(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

d'où

$$\|\mathbf{u}\|_{L^4(\partial\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)},$$

(ou bien  $\|\mathbf{u}\|_{L^4(\partial\Omega)} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^6(\partial\Omega)}^{\frac{3}{4}} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\partial\Omega)}^{\frac{1}{4}} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}$ ).

En conclusion

$$\left| \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right| \leq \begin{cases} D_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 & \text{si } d = 2, \\ D_3 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{2}} & \text{si } d = 3. \end{cases}$$

□

On prouve également l'estimation suivante

**Proposition 4.8.** Soit  $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)$  vérifiant  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , alors on a

$$\left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right| \leq C'_1 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

**Preuve :**

Soient  $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  et  $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ . D'après la formule de Green on a

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} v = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla v + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} v.$$

Par densité de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  dans  $H^1(\Omega)$  et l'inégalité de Schwartz, on a  $\forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$  et  $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} v \right| &\leq \left| \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla v \right| + \left| \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} v \right| \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Puisque la géométrie du domaine  $\Omega$  est telle que  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$  (non adjacents), on peut considérer un élément  $w$  de  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  tel que  $w|_{\Gamma_i} = 1$  et  $w|_{\Gamma_j} = 0 \quad \forall j \neq i$ . Il existe un relèvement  $v$  dans  $H^1(\Omega)$  tel que  $v|_{\partial\Omega} = w$  et  $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|w\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$  par continuité du relèvement, où  $C > 0$ . Par ailleurs, en tenant compte du fait que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = 0$ , on a

$$\left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right| \leq C_w (\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}), \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i} = 0.$$

Par densité de  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  dans  $H_{div}(\Omega) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega); \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}$ , cette inégalité reste vraie pour tout  $\mathbf{u} \in H_{div}(\Omega)$ . En particulier, pour  $\mathbf{u}$  tel que  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , on a

$$\left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right| \leq C'_1 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

□

Grâce à ces résultats et notamment au lemme 4.7 on peut alors prouver le théorème suivant

**Théorème 4.9.** Soit  $d=2$ . Sous les hypothèses (4.4), et pour données petites, il existe un temps  $t^*$  qui dépend des données,  $0 < t^*$  et une solution faible  $\mathbf{u}$  sur  $[0, t^*]$  de (4.5). De plus, il existe une constante  $C > 0$  qui dépend aussi des données telle que la solution vérifie

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(0, t^*; L^2(\Omega))}^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(0, t^*; H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^{t^*} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C.$$

Par ailleurs, si on suppose que

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\mu}{4\rho D_2}$$

et que

$$P_i \in L^\infty(0, \infty), \quad i = 0, \dots, N \text{ et } \tilde{P} = \sup_t \sum_{i=0}^N |P_i| \leq \frac{\mu^2}{4\sqrt{2}\rho D_2 C'_1 C_2^2},$$

alors la solution est définie sur  $\mathbb{R}^+$  tout entier et vérifie

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))}^2 \leq \frac{\mu^2}{32\rho D_2^2},$$

et, pour tout  $T$

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^T \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C_T.$$

**Preuve :**

En choisissant  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}$  dans (4.6) et en intégrant en temps, on obtient d'une manière classique

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \left| \sum_{i=0}^N P_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right|.$$

En dimension 2, d'après le lemme 4.7 on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 &\leq \rho D_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C'_1 \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} \rho \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\mu - \rho D_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}) \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C'_1 \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

Ainsi, pour tout intervalle de temps sur lequel  $\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\mu}{2\rho D_2}$ , on a

$$\rho \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C'_1 \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

et on peut alors appliquer le lemme de Gronwall C.3 ou C.4, ce qui prouve l'existence d'une solution locale en temps pour données petites.

Si on reprend le même raisonnement en faisant intervenir cette fois-ci l'inégalité de Poincaré et l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 &\leq \rho D_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &+ C_1' C_2 \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \rho D_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 &+ \frac{C_1'^2 C_2^2 \tilde{P}^2}{2\mu} + \frac{\mu}{2} \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2
 \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{\mu}{2} - \rho D_2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}\right) \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq \frac{C_1'^2 C_2^2 \tilde{P}^2}{2\mu}.$$

Ainsi, pour tout intervalle de temps sur lequel  $\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\mu}{4\rho D_2}$ , on a

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{4}\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_1'^2 C_2^2 \tilde{P}^2}{2\mu},$$

c'est à dire, grâce à l'inégalité de Poincaré

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{4C_2^2}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{C_1'^2 C_2^2 \tilde{P}^2}{2\mu},$$

et du lemme C.1 il découle que

$$\frac{\rho}{2}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\rho}{2}\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-\frac{\mu}{2\rho C_2^2}t} + \frac{\rho C_1'^2 C_2^4 \tilde{P}^2}{\mu^2} (1 - e^{-\frac{\mu}{2\rho C_2^2}t}).$$

Ainsi, si  $P_i \in L^\infty(0, T)$ ,  $i = 0, \dots, N$ , et plus précisément, si  $\tilde{P}^2 \leq \frac{\mu^4}{32\rho^2 D_2^2 C_1'^2 C_2^4}$  et si

$\|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\mu}{4\rho D_2}$ , alors

$$\frac{\rho}{2}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{\mu^2}{32\rho D_2^2}.$$

□

**Remarque 4.2.5.** Remarquons que le résultat d'existence d'une solution locale en temps est obtenu pour des données petites, et que le résultat d'existence d'une solution globale en temps est obtenu pour des données encore plus petites.

**Remarque 4.2.6.** Si on applique la même démarche que celle de la preuve ci-dessus au cas de la dimension 3, on aura alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 &\leq \rho D_3 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{2}} \\ &+ C'_1 \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et par l'inégalité de Young on obtiendra

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu\|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 &\leq \rho D_3 \left( \frac{\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}}{2} + \frac{\|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^5}{2} \right) \\ &+ C'_1 \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2}\rho\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \mu - \frac{\rho D_3}{2} \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^3 \right) \|\nabla\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left( \frac{\rho D_3}{2} + C'_1 \left( \sum_{i=0}^N |P_i| \right) \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

A ce niveau de la preuve, si on veut travailler sur un intervalle de temps sur lequel  $\left( \mu - \frac{\rho D_3}{2} \|\nabla\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^3 \right)$  est strictement positif, on voit que ceci implique que la solution soit dans  $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ .

## 4.3 Couplage avec les acini

### 4.3.1 Le modèle

On suppose qu'au niveau des acini, le poumon est représenté par une boîte remplie d'un matériau amorphe et incompressible représentant le parenchyme, dans lequel baigne l'ensemble des alvéoles. Cette boîte est connectée au reste de l'arbre à travers les bronchioles terminales qui débouchent sur les acini. Une paroi de la boîte est un piston mobile dans la direction  $(ox)$  (voir la figure 4.1) représentant l'action des muscles du thorax et notamment le diaphragme. On note par  $x(t)$  la position du piston au cours du temps. L'ensemble des forces mises en jeu est, la force musculaire qu'on désigne par  $f_{ext}$ , la force de rappel  $-kx$  où  $k$  désigne la constante de raideur du ressort et la force de pression  $f_P$ . D'après le principe fondamental de la dynamique, il en résulte que

$$m\ddot{x} = -kx + f_{ext} + f_P \tag{4.31}$$

où  $m$  est la masse du piston.

Dans ce qui suit on fait les deux hypothèses suivantes :

- On suppose qu'à chaque instant  $t$ , la pression est uniforme dans la boîte, ainsi

$$P_i = P \quad \forall i = 0, \dots, N,$$

et il en résulte que la force de pression  $f_P$  s'écrit

$$f_P = PS \tag{4.32}$$

où  $S$  est l'aire du piston.

- Tous les conduits de l'arbre, bronches et bronchioles, sont supposés rigides et le parenchyme est supposé incompressible ; ainsi, toute variation de volume dans les poumons n'est due qu'à la variation du volume des alvéoles suivant qu'elles se contractent ou se dilatent, et toute variation de volume au niveau de la trachée se traduit par la même variation de volume au niveau de la boîte, ce qui s'exprime par la relation suivante

$$S\dot{x} = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \tag{4.33}$$

D'après les relations (4.31) et (4.32), on peut exprimer la pression alvéolaire  $P$  au niveau de la boîte comme suit

$$P = \frac{1}{S}(m\ddot{x} + kx - f_{ext}), \tag{4.34}$$

ce qui s'écrit aussi, grâce à la relation (4.33), sous la forme

$$P = \frac{1}{S} \left( \frac{m}{S} \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + kx - f_{ext} \right). \tag{4.35}$$

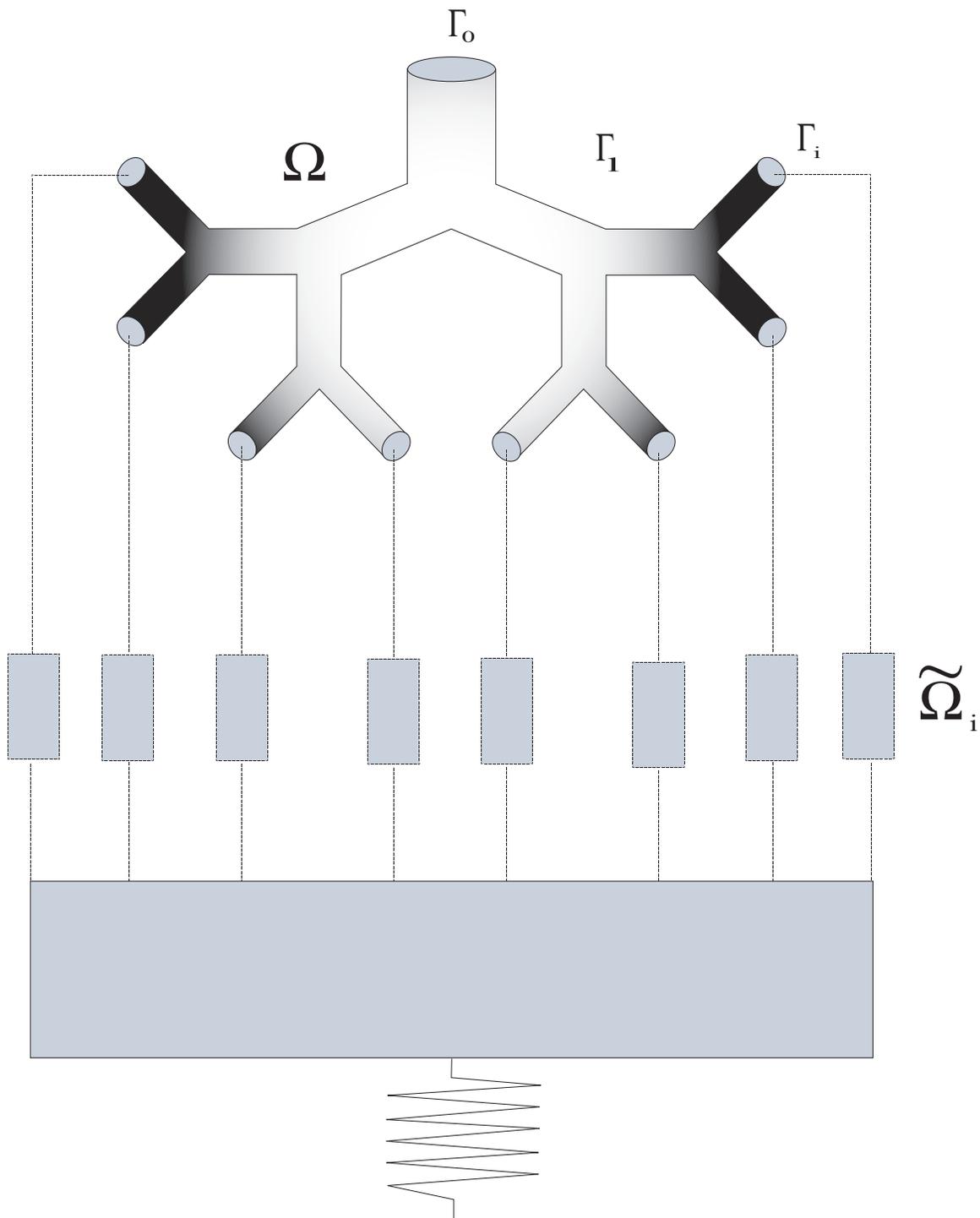


FIG. 4.1 – Le modèle complet

Le modèle intégré qui couple les trois niveaux de l'arbre bronchique s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P \mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i \quad i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (4.36)$$

où  $R_i > 0$  et la pression  $P$  est donnée par

$$P = \frac{1}{S} (m\ddot{x} + kx - f_{ext}) \quad (4.37)$$

et avec

$$S\dot{x} = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. \quad (4.38)$$

Ainsi, le terme dissipatif non local prend en compte l'écoulement dans les bronchioles, tandis que l'expression (4.37) de la pression décrit le comportement du système acini-parenchyme.

**Remarque 4.3.1.** L'hypothèse faite sur l'uniformité de la pression peut s'expliquer par la nature supposée incompressible du parenchyme, qui tend ainsi à uniformiser la répartition de la pression dans la boîte. Le cas d'une répartition non uniforme peut avoir lieu, par exemple, lors de l'impact non-pénétrant d'une balle sur le thorax, protégé par exemple par un gilet pare-balles. Ce qui donne lieu à une propagation d'ondes et des effets non locaux où la pression est plus importante au point de l'impact. On peut consulter par exemple [29] et [26] pour des modèles traitant ce cas.

**Remarque 4.3.2.** L'hypothèse de rigidité des conduits de l'arbre est maintenue malgré la présence non homogène du cartilage, comme détaillé dans le chapitre précédent. Précisons toutefois que la résistance globale équivalente peut-être modifiée de manière à prendre en compte des diminutions des diamètres des bronchioles et de manière à évoluer en fonction du temps en l'exprimant par exemple comme une fonction du déplacement du piston.

**Remarque 4.3.3.** Le comportement élastique du poumon est décrit par un seul degré de liberté. Toutefois, le modèle présente une large gamme de paramètres qui donnent la possibilité de modéliser diverses pathologies respiratoires : les résistances  $R_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , la constante de raideur  $k$ , la masse  $m$ , la surface  $S$  et la force musculaire  $f_{ext}$ . Par exemple, l'asthme en augmentant les valeurs des résistances, un emphysème en considérant de petites valeurs de la constante de raideur  $k$ , ou au contraire une rigidité comme dans le cas de fibrose pulmonaire, en prenant de grandes valeurs de  $k$ .

**Remarque 4.3.4.** Ce modèle peut être encore amélioré : les résistances peuvent être facilement modifiées de manière à varier en fonction de l'amplitude du piston, ce qui permettrait par exemple de prendre en compte la présence des muscles lisses qui tapissent les bronches. On peut également facilement intégrer au modèle la résistance aux déformations des tissus en rajoutant à l'expression de la pression dans la boîte un terme du type  $\alpha \dot{x}$  où  $\alpha$  est un coefficient qui mesure les forces de résistances à la déformation au sein du tissu de telle sorte que  $\alpha \dot{x}$  soit la puissance instantanée dissipée dans les tissus pulmonaires. Ces modifications peuvent être intégrées sans mettre en cause les résultats théoriques ni la mise en oeuvre numérique.

## 4.3.2 Energie du système couplé global

### Conditions aux limites dissipatives naturelles

Supposons que la solution du problème (4.36)(4.37)(4.38) existe et soit assez régulière. D'une manière analogue à la section 4.2.2, on désigne par  $E_{cf}(t)$  l'énergie cinétique du fluide. On introduit de plus les quantités énergétiques suivantes associées au système : l'énergie cinétique de la masse  $E_{cm}(t)$  et l'énergie potentielle du ressort  $E_{pr}(t)$

$$E_{cf}(t) = \frac{1}{2}\rho \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2, \quad E_{cr}(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad E_{pr}(t) = \frac{1}{2}kx^2$$

et l'énergie totale  $E(t) = E_{cf}(t) + E_{cm}(t) + E_{pr}(t)$ .

On a

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 + P_0 \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \\ & + P \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) = 0. \end{aligned}$$

En utilisant que la pression  $P$  est donnée par l'expression (4.34) et que par conservation du débit on a

$$\sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -Q_0,$$

on écrit que

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{u} + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 + P_0 \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \\ & - \frac{1}{S}(m\ddot{x} + kx - f_{ext}) \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) = 0, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dt} E_{cf} + \mathcal{F}_{cf} + |\mathbf{u}|_{\mu,R}^2 + P_0 \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) - \frac{1}{S}(m\ddot{x} + kx - f_{ext}) \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) = 0. \quad (4.39)$$

où on a conservé les mêmes notations que la section 4.2.2 en désignant par  $\mathcal{F}_{cf}$  le flux d'énergie cinétique et par  $|\mathbf{u}|_{\mu,R}^2$  la puissance dissipée par viscosité dans l'arbre. Par ailleurs, en utilisant (4.33) on a

$$-m\ddot{x}\frac{Q_0}{S} = m\dot{x}\dot{x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x} \right)^2 = \frac{d}{dt} E_{cm}$$

et

$$-kx\frac{Q_0}{S} = kx\dot{x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}kx \right)^2 = \frac{d}{dt} E_{pr}.$$

Egalement grâce à (4.33) on a

$$f_{ext}\frac{Q_0}{S} = -f_{ext}\dot{x} = -\mathcal{T}_{ext},$$

où  $\mathcal{T}_{ext}$  est la puissance développée par  $f_{ext}$ , et

$$P_0Q_0 = -P_0S\dot{x} = -\mathcal{T}_{P_0},$$

où  $\mathcal{T}_{P_0}$  est la puissance développée par la force associée à la pression  $P_0$ .

Finalement, si on reporte toutes les expressions dans (4.39), on déduit alors le bilan d'énergie suivant

$$\frac{d}{dt}(E_{cf} + E_{cm} + E_{pr}) = \mathcal{T}_{ext} + \mathcal{T}_{P_0} - |\mathbf{u}|_{\mu,R}^2 - \mathcal{F}_{cf}, \quad (4.40)$$

qui exprime la perte instantanée d'énergie totale comme puissance développée par la force extérieure agissant sur le ressort et la force de pression à l'entrée, comme puissance dissipée par viscosité du fluide aussi bien dans la partie proximale que dans la partie distale de l'arbre et comme flux d'énergie cinétique total.

**Remarque 4.3.5.** Dans le cas d'un système isolé, c'est à dire en l'absence d'une force extérieure au niveau du piston ( $f_{ext} \equiv 0$ ), si on provoque une expiration en lâchant le piston à partir d'une position initiale donnée, on peut alors montrer formellement, et en faisant certaines hypothèses raisonnables sur la forme de la solution, que l'énergie totale  $E(t)$  du système est décroissante. En effet, si on suppose que la pression  $P_0$  est évaluée comme étant la pression atmosphérique nulle, et comme  $f_{ext} \equiv 0$ , dans le bilan (4.40) il ne reste plus qu'à traiter le signe du flux d'énergie cinétique

$$\mathcal{F}_{cf} = \rho \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \rho \int_{\Gamma_0} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \rho \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}.$$

En effet, on désigne par  $S_1$  la surface de la section  $\Gamma_0$  et par  $S_2$  la surface cumulée des sections  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  et on note par  $\mathbf{u}_1$  la vitesse à travers la section  $\Gamma_0$ . Si on suppose qu'à l'issue de l'écoulement de Poiseuille dans la partie distale tronquée de l'arbre, les vitesses présentent un même profil  $\mathbf{u}_2$  au niveau des  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , alors la condition d'incompressibilité du fluide se traduit par

$$\mathbf{u}_1 S_1 = \mathbf{u}_2 S_2. \quad (4.41)$$

Par ailleurs, le flux d'énergie cinétique à travers  $\Gamma_0$  est homogène à

$$\mathbf{u}_1^3 S_1,$$

ainsi, grâce à (4.41) on obtient

$$\mathbf{u}_1^3 S_1 = \mathbf{u}_2^3 S_2 \left( \frac{S_2}{S_1} \right)^2.$$

Or, comme l'atteste le tableau du modèle de Weibel (voir l'annexe A), le rapport  $\frac{S_2}{S_1}$  est plus grand que 1, et on peut supposer alors dans ce cas particulier que le flux d'énergie cinétique à travers  $\Gamma_0$  est plus important que le flux à travers les  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Par ailleurs, comme il s'agit d'une phase d'expiration, donc avec un écoulement au niveau de  $\Gamma_0$  dirigé suivant la normale sortante, le flux d'énergie cinétique à travers  $\Gamma_0$  est positif, il en est alors de même du flux total  $\mathcal{F}_{cf}$ , d'où la déduction de la décroissance de l'énergie totale.

**Remarque 4.3.6.** Dans ce qui suit, on prouve l'existence d'une solution locale en temps petit qui dépend des données et pour données petites, du problème couplé. L'information supplémentaire sur la décroissance de l'énergie en phase expiratoire, combinée avec le caractère périodique de la ventilation, permet alors d'espérer un résultat d'existence d'une solution globale en temps pour données petites.

### Conditions aux limites dissipatives essentielles

Dans le cas des conditions aux limites dissipatives essentielles, le problème couplé aux acini s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l, \\ \mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i \quad i = 0, \dots, N, \\ \int_{\Gamma_0} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_0 = -P_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0, \\ \int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_i = -P \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - R_i \lambda_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i \quad i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (4.42)$$

avec

$$P = \frac{1}{S} (m\ddot{x} + kx - f_{ext})$$

et

$$S\dot{x} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} = -\lambda_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}.$$

On multiplie les équations de Navier-Stokes par  $\mathbf{u}$  et on intègre sur  $\Omega$  en tenant compte de la contrainte sur les profils  $\mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i$  sur  $\Gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i (\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 + P_0 \lambda_0 \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \right) \\ & + P \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) = 0, \end{aligned}$$

qui s'écrit en utilisant l'incompressibilité du fluide

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i (\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 + P_0 \lambda_0 \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \right) \\ & - P \lambda_0 \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \right) = 0, \end{aligned}$$

et grâce à l'expression de la pression  $P$  on a

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i (\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 + P_0 \lambda_0 \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \right) \\ & - \frac{1}{S} (m\ddot{x} + kx - f_{ext}) \lambda_0 \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \right) = 0. \end{aligned}$$

On identifie alors d'une manière analogue au cas des conditions dissipatives naturelles, les différentes quantités énergétiques du système couplé pour déduire le bilan suivant

$$\frac{d}{dt} (E_{cf} + E_{cm} + E_{pr}) = \mathcal{T}_{ext} + \mathcal{T}_{P_0} - |\mathbf{u}|_{\mu, R}^2 - \mathcal{F}_{cf}. \quad (4.43)$$

### 4.3.3 Existence de solution pour le problème couplé

Dans cette section on étudie le problème couplé aux acini aussi bien dans le cas des conditions aux limites essentielles dissipatives que dans le cas des conditions aux limites naturelles dissipatives. Comme dans le cas du modèle dissipatif sans piston, on commence par prouver dans le cas des conditions dissipatives essentielles un résultat d'existence de solution faible en temps petit pour données quelconques. Ensuite, on discute le cas des conditions dissipatives naturelles pour lequel on prouve l'existence d'une solution locale en temps pour données petites, et ceci seulement en dimension deux. L'approche par la méthode de Galerkin adoptée étant analogue à celle développée dans la section 4.2.4, dans les preuves des résultats de cette section, on se contentera de préciser le traitement des nouveaux termes relatifs à la modélisation des acini.

### Conditions aux limites essentielles

Dans le cas particulier des conditions aux limites dissipatives essentielles, le problème se met sous la forme : pour

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_i &\in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i), \quad i = 0, \dots, N, \\
(\mathbf{u}_0, x_0, x_1) &\in H \times \mathbb{R}^2 \text{ avec } Sx_1 = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \\
P_0 &\in L^2(0, T) \text{ et } f_{ext} \in L^2(0, T), \\
R_i &> 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad k, m \text{ et } S \text{ donnés,}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

trouver  $(\mathbf{u}, \Lambda) \in (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)) \times L^\infty(0, T)$  et  $p \in \mathcal{D}'(\Omega \times ]0, T[)$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\
\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\
\mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l, \\
\mathbf{u} = \lambda_i \mathbf{U}_i & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i, \\
& i = 0, \dots, N, \\
\int_{\Gamma_0} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_0 = -P_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0, \\
\int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_i = -P \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - R_i \lambda_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i, \\
& i = 1, \dots, N, \\
P = \frac{1}{S} (m \ddot{x} + kx - f_{ext}), & \\
S \dot{x} = \sum_{i=1}^N \lambda_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} = -\lambda_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}. &
\end{array} \right. \tag{4.45}$$

complété par les conditions initiales

$$(\mathbf{u}, x, \dot{x})_{/t=0} = (\mathbf{u}_0, x_0, x_1).$$

La formulation faible correspondante s'écrit : trouver  $(\mathbf{u}, \Lambda) \in (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)) \times L^\infty(0, T)$  tel que

$$\begin{aligned}
 & -\rho \int_0^T \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) \\
 & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1} \tilde{\Lambda}_{i+1} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t) - \frac{m}{S} \int_0^T \dot{x} \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi'(t) \\
 & + \frac{k}{S} \int_0^T x \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t) = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \tilde{\mathbf{u}} \varphi(0) \\
 & + x_1 \varphi(0) \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) - \int_0^T \left( P_0 \tilde{\Lambda}_1 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{f_{ext}}{S} \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t), \\
 & \forall (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda}) \in W \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T]).
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Encore une fois grâce au résultat du lemme 4.1 qui permet de contrôler les multiplicateurs  $\lambda_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , on a l'estimation a priori qui suit

**Proposition 4.10.** Sous les hypothèses (4.44), il existe un temps  $t^*$ ,  $0 < t^*$  (suffisamment petit) qui dépend des données et une constante  $C > 0$  qui dépend aussi des données tels que pour toute  $\mathbf{u}$  solution régulière de (4.45) on a

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, t^*; L^2(\Omega))}^2 + \frac{m}{2S^2} \left\| \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right\|_{L^\infty(0, t^*)}^2 + \frac{k}{2S^2} \left\| \int_0^t \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right\|_{L^\infty(0, t^*)}^2 \\
 & + \mu \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, t^*; H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^{t^*} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C.
 \end{aligned}$$

**Preuve :**

La preuve est analogue à celle de la proposition 4.2. Du bilan d'énergie, on peut déduire

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\mathbf{u}|^2 + \frac{m}{2} \frac{d}{dt} |\dot{x}|^2 + \frac{k}{2} \frac{d}{dt} |x|^2 \\
 & + \mu \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i (\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \\
 & \leq (|SP_0| + |f_{ext}|) |\dot{x}| + \frac{\rho}{2} K_1 C_1^3 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^3 \\
 & \leq C (|\dot{x}|^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^3 + |SP_0|^2 + |f_{ext}|^2).
 \end{aligned}$$

Ainsi, si  $P_0 \in L^2(0, T)$  et  $f_{ext} \in L^2(0, T)$ , on peut vérifier qu'il existe un temps  $t^*$ ,  $0 < t^* < T$  suffisamment petit qui dépend des données et une constante  $C > 0$  qui dépend aussi des données tels que pour toute solution régulière  $(\mathbf{u}, x)$  :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho}{2} \int_\Omega |\mathbf{u}|^2(t) + \frac{m}{2} |\dot{x}|^2(t) + \frac{k}{2} |x|^2(t) \\
 & + \mu \int_0^t \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^t (\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C, \quad t \leq t^*.
 \end{aligned} \tag{4.47}$$

□

**Remarque 4.3.7.** Grâce à l'estimation d'énergie de la proposition précédente on déduit que  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ , mais également que le débit au niveau de la section  $\Gamma_0$  est dans  $L^\infty(0, T)$ .

**Remarque 4.3.8.** Si on annule l'énergie potentielle du ressort en considérant le cas où  $k = 0$ , on obtient alors un résultat d'existence de solution globale en temps pour données petites. En effet, si on majore le terme non linéaire comme suit, toujours grâce au lemme 4.1 et à l'inégalité de Poincaré,

$$\left| \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \right| \leq K_1 C_1^3 C_2^2 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

et qu'on remarque que

$$|\dot{x}| = \left| \frac{\lambda_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}}{S} \right| \leq C |\lambda_0| \leq C_3 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 C_2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)},$$

alors, par conséquent

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \frac{m}{2} \frac{d}{dt} |\dot{x}|^2 + \left( \frac{\mu}{2} - \frac{\rho K}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \right) \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i (\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \\ & \leq \frac{C_3^2 C_2^2}{2\mu} (|SP_0|^2 + |f_{ext}|^2), \end{aligned} \tag{4.48}$$

où on pose  $K = K_1 C_1^3 C_2^2$ . Ainsi, sur tout intervalle de temps sur lequel  $\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\mu}{2\rho K}$ , on obtient,

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \frac{m}{2} \frac{d}{dt} |\dot{x}|^2 + \frac{\mu}{4C_2^2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \sum_{i=1}^N R_i (\lambda_i)^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq \frac{C_3^2 C_2^2}{2\mu} (|SP_0|^2 + |f_{ext}|^2),$$

et si on remarque que

$$\sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \geq C_4 \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 = \frac{2C_4 S^2 m}{m} |\dot{x}|^2$$

alors

$$\frac{\rho}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \frac{m}{2} \frac{d}{dt} |\dot{x}|^2 + A \left( \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 + \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 \right) \leq \frac{C_3^2 C_2^2}{2\mu} (|SP_0|^2 + |f_{ext}|^2),$$

où  $A = \min\left(\frac{\mu}{2\rho C_2^2}, \frac{2C_4 S^2}{m}\right)$ .

D'où, si  $P_0 \in L^\infty(0, T)$  et  $f_{ext} \in L^\infty(0, T)$ , et si

$$|SP_0|^2 + |f_{ext}|^2 \leq \frac{A\mu^3}{4C_3^2 C_2^2 \rho K^2}$$

et

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{m}{2} |x_1|^2 \leq \frac{\mu^2}{4\rho^2 K^2},$$

on peut vérifier, en utilisant (4.48), que la solution vérifie  $\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{m}{2} |\dot{x}|^2 \leq \frac{\mu^2}{8\rho K^2}$  pour tout temps.

**Remarque 4.3.9.** Si on fait appel à l'argument développé dans la remarque 4.3.5 suivant lequel l'énergie du système décroît si on annule la force  $f_{ext}$ , ce qui a lieu en phase expiratoire, et si on complète cet argument par le résultat d'existence locale en temps et l'aspect périodique de la ventilation (l'énergie totale du système retourne régulièrement à une valeur proche de zéro), alors on peut conjecturer l'existence de solution globale en temps pour données petites.

L'estimation a priori ci-dessus permet d'établir le résultat suivant

**Théorème 4.11.** Sous les hypothèses (4.44) il existe un temps  $t^*$ ,  $0 < t^*$  et une solution faible  $\mathbf{u}$  de (4.45) sur  $[0, t^*]$ . De plus, il existe  $C$  telle que la solution vérifie l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0, t^*; L^2(\Omega))}^2 + \frac{m}{2S^2} \left\| \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right\|_{L^\infty(0, t^*)}^2 + \frac{k}{2S^2} \left\| \int_0^t \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right\|_{L^\infty(0, t^*)}^2 \\ + \mu \|\mathbf{u}\|_{L^2(0, t^*; H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^{t^*} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C. \end{aligned} \quad (4.49)$$

**Preuve :**

On se contentera de reprendre les principales étapes de la preuve.

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on définit  $(\mathbf{u}_m(t), \Lambda^m(t))$  solution dans  $W_m$  du système non linéaire

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \cdot \mathbf{w}^j + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{w}^j + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_m : \nabla \mathbf{w}^j \\ + \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1}^m \Lambda_{i+1}^j \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) + \left( \frac{m}{S} \ddot{x} + \frac{k}{S} x \right) \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \\ = -P_0 \Lambda_1^j \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{f_{ext}}{S} \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right), \end{aligned} \quad (4.50)$$

complété avec la condition initiale  $\int_{\Omega} (\mathbf{u}_m(0) - \mathbf{u}_0) \cdot \varphi = 0$ ,  $\forall \varphi \in \text{Vect}(\mathbf{w}^i, \Lambda^i)_{1 \leq i \leq m+N}$ .

Ce système non linéaire à  $m+N$  équations à  $m+N$  inconnues possède une unique solution

sur un intervalle  $[0, t_m]$ . En reprenant la démarche pour l'estimation a priori, on montre qu'il existe  $t_m^*$  qui ne dépend que des données tel que pour tout  $t \leq t_m^*$  on a

$$\frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \int_0^t \|\mathbf{u}_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \frac{1}{2} k x_m^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_m^2 \leq C, \quad (4.51)$$

où  $C$  dépend des données initiales, des pressions  $P_i$  et des profils  $\mathbf{U}_i$ . La majoration étant indépendante de  $m$  et de  $t$ , on en déduit que  $t_m^* = T$  et que  $\mathbf{u}_m \in L^\infty(0, T; H) \cap L^2(0, T; V)$ . On note encore  $\bar{\mathbf{u}}_m$  le prolongement de  $\mathbf{u}_m$  par 0 en dehors de  $[0, T]$ , et  $\hat{\mathbf{u}}_m$  la transformée de Fourier  $\bar{\mathbf{u}}_m$ . On a

$$\begin{aligned} & \rho \int_{\Omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_m}{\partial t} \cdot \mathbf{w}^j + \rho \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}}_m \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}_m) \cdot \mathbf{w}^j + \mu \int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{u}}_m : \nabla \mathbf{w}^j + \sum_{i=1}^N R_i \bar{\Lambda}_i^m \Lambda_i^j \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \\ & + \left( \frac{m}{S} \ddot{x} + \frac{k}{S} \bar{x} \right) \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) = -\bar{P}_0 \Lambda_1^j \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \\ & + \frac{\hat{f}_{ext}}{S} \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) - \rho \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_m(T) \cdot \mathbf{w}^j \delta_T + \rho \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_m(0) \cdot \mathbf{w}^j \delta_0 \\ & - \frac{m}{S^2} (\bar{\Lambda}_1^m(T) \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}) \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \delta_T + \frac{m}{S^2} (\bar{\Lambda}_1^m(0) \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}) \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \delta_0. \end{aligned}$$

Quand on multiplie ces équations par les coefficients de  $(\hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\Lambda}^m)$  dans la base de  $W_m = \text{Vect}_{1 \leq i \leq m+N}(\mathbf{w}^i, \Lambda^i)$  et qu'on somme les  $m + N$  équations, ceci nous conduit à

$$\begin{aligned} & \rho 2i\pi\tau \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 + \rho \int_{\Omega} \hat{G}(\tau) \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) + \mu \int_{\Omega} \nabla \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) : \nabla \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) + \sum_{i=1}^N R_i (\hat{\Lambda}_i^m(\tau))^2 \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \\ & + \frac{m}{S^2} 2i\pi\tau (\hat{\Lambda}_1^m(\tau) \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n})^2 + k 2i\pi\tau |\hat{x}|^2 = -(\hat{P}_0(\tau) + \frac{\hat{f}_{ext}}{S}(\tau)) \hat{\Lambda}_1^m \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \\ & - \rho \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_m(T) \cdot \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) e^{-2i\pi\tau T} + \rho \int_{\Omega} \bar{\mathbf{u}}_m(0) \cdot \hat{\mathbf{u}}_m(\tau) \\ & + \frac{m}{S^2} \bar{\Lambda}_1^m(T) \hat{\Lambda}_1^m(\tau) \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \right)^2 e^{-2i\pi\tau T} - \frac{m}{S^2} \bar{\Lambda}_1^m(0) \hat{\Lambda}_1^m(\tau) \left( \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \right)^2 \end{aligned}$$

où  $\hat{G}$  désigne toujours la transformé de Fourier en temps du terme non linéaire  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ . En prenant la partie imaginaire de l'égalité ci-dessus, on déduit que

$$\begin{aligned} |\tau| \int_{\Omega} |\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)|^2 & \leq C [\|\hat{G}_m(\tau)\|_{V'} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_V + \|\bar{\mathbf{u}}_m(T)\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)} + \|\bar{\mathbf{u}}_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)} \\ & + (\hat{P}_0 + \frac{\hat{f}_{ext}}{S}) \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} \|\hat{\mathbf{u}}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}] + C \left( \int_{\Gamma_0} |\bar{\mathbf{u}}_m(T) \cdot \mathbf{n}| + \int_{\Gamma_0} |\bar{\mathbf{u}}_m(0) \cdot \mathbf{n}| \right) \int_{\Gamma_0} |\hat{\mathbf{u}}_m(\tau) \cdot \mathbf{n}|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{\mathbf{u}}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C(\gamma)$$

pour  $0 < \gamma < \frac{1}{4}$ . Par le théorème 4.5 de compacité, il existe donc une sous suite de  $\mathbf{u}_m$  telle que

$$\mathbf{u}_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mathbf{u} \text{ fortement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (4.52)$$

Par ailleurs, grâce aux estimations (4.51), on sait qu'il existe une sous suite de  $\mathbf{u}_m$ , telle que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H_{0,l}^1(\Omega)) \\ \text{et} \\ \mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faible }^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \end{cases} \quad (4.53)$$

Les convergences (4.53) et (4.52) nous permettent de passer à la limite dans (4.50).

En effet, soit  $\varphi$  une fonction  $C^\infty$  avec  $\varphi(T) = 0$ . On multiplie (4.50) par  $\varphi$  et on intègre par parties en temps le premier terme

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^T \int_\Omega \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{w}^j \varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m) \cdot \mathbf{w}^j \varphi(t) + \mu \int_0^T \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_m : \nabla \mathbf{w}^j \varphi(t) \\ & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1}^m \Lambda_{i+1}^j \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t) - \frac{m}{S} \int_0^T \dot{x}_m \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi'(t) \\ & + \frac{k}{S} \int_0^T x_m \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t) = \int_\Omega \mathbf{u}_{0m} \mathbf{w}^j \varphi(0) + \dot{x}_{0m} \varphi(0) \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \\ & - \int_0^T \left( P_0 \Lambda_1^j \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{f_{ext}}{S} \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Comme  $\mathbf{u}_m$  est à divergence nulle alors l'application  $\mathbf{u}_m \rightarrow \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n}$ , qui va de  $L^\infty(0, T; H_{div}(\Omega))$  dans  $L^\infty(0, T)$ , est continue pour la norme  $L^2$ , d'où

$$\dot{x}_m = \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} \rightharpoonup \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \text{ faible }^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$$

et

$$x_m \rightharpoonup x = x_0 + \int_0^t \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \text{ faible }^* \text{ dans } W^{1,\infty}(0, T).$$

Il en résulte que

$$\int_0^T \dot{x}_m \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi'(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T \dot{x} \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi'(t),$$

$$\int_0^T x_m \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi'(t) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_0^T x \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi'(t),$$

$$\dot{x}_{0m} \varphi(0) \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \dot{x}_0 \varphi(0) \left( \sum_{i=1}^N \Lambda_{i+1}^j \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right).$$

Ainsi, par passage à la limite, (4.54) nous donne

$$\begin{aligned}
 & -\rho \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}}\varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}\varphi(t) + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}}\varphi(t) \\
 & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1} \tilde{\Lambda}_{i+1} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t) - \frac{m}{S} \int_0^T \dot{x} \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi'(t) \\
 & + \frac{k}{S} \int_0^T x \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \tilde{\mathbf{u}}\varphi(0) \\
 & + x_1 \varphi(0) \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) - \int_0^T \left( P_0 \tilde{\Lambda}_1 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{f_{ext}}{S} \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t)
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

pour tout  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda}) = (\mathbf{w}^j, \Lambda^j)$ ,  $\forall j$ . Par linéarité, cette équation reste vraie pour tout  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\Lambda})$  combinaison linéaire finie des  $(\mathbf{w}^j, \Lambda^j)$  et par continuité, pour tout élément de  $W$ . En choisissant en particulier  $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$ , on voit que  $\mathbf{u}$  satisfait (4.45) au sens des distributions. Enfin, il reste à vérifier la condition initiale. Pour cela, on multiplie (4.45) par  $\tilde{\mathbf{u}}\varphi$  et on intègre en temps et en espace, on obtient

$$\begin{aligned}
 & -\rho \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}}\varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}}\varphi(t) + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}}\varphi(t) \\
 & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \Lambda_{i+1} \tilde{\Lambda}_{i+1} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 \right) \varphi(t) - \frac{m}{S} \int_0^T \dot{x} \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi'(t) \\
 & + \frac{k}{S} \int_0^T x \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(0) \tilde{\mathbf{u}}\varphi(0) \\
 & + x_1 \varphi(0) \left( \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) - \int_0^T \left( P_0 \tilde{\Lambda}_1 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} + \frac{f_{ext}}{S} \sum_{i=1}^N \tilde{\Lambda}_{i+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t)
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

et par comparaison avec (4.55) on a  $\int_{\Omega} (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}}\varphi(0) = 0$ . En choisissant  $\varphi$  telle que  $\varphi(0) = 1$ , alors  $\int_{\Omega} (\mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$ ,  $\forall \tilde{\mathbf{u}} \in V$ , ainsi  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  dans  $V'$ , mais aussi dans  $H$  puisque  $\mathbf{u}_0 \in H$ . En conclusion,  $\mathbf{u}$  est solution faible de (4.45).  $\square$

### Conditions aux limites naturelles

Sous les hypothèses suivantes

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u}_0, x_0, x_1) & \in H \times \mathbb{R}^2 \text{ avec } Sx_1 = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}, \\
 P_0 & \in L^2(0, T) \text{ et } f_{ext} \in L^2(0, T), \\
 R_i & > 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad k, m \text{ et } S \text{ donnés,}
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

il s'agit de trouver  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  et  $p \in \mathcal{D}'(\Omega \times ]0, T[)$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P \mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i, \\ & i = 1, \dots, N, \\ P = \frac{1}{S} (m \ddot{x} + kx - f_{ext}), \\ S \dot{x} = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \\ (\mathbf{u}, x, \dot{x})_{t=0} = (\mathbf{u}_0, x_0, x_1). \end{array} \right. \quad (4.58)$$

Sous les hypothèses (4.57) nous appelons solution faible de (4.58) toute fonction  $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  telle que

$$\begin{aligned} & -\rho \int_0^T \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi'(t) + \rho \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) + \mu \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \varphi(t) \\ & + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \right) \varphi(t) - \frac{m}{S} \int_0^T \dot{x} \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \varphi'(t) \\ & + \frac{k}{S} \int_0^T x \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \tilde{\mathbf{u}} \varphi(0) \\ & + x_1 \varphi(0) \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) - \int_0^T \left( P_0 \int_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + \frac{f_{ext}}{S} \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \varphi(t), \end{aligned} \quad (4.59)$$

$\forall \tilde{\mathbf{u}} \in V$  et  $\forall \varphi \in \mathcal{D}([0, T[)$ .

Dans le cas des conditions dissipatives naturelles, et d'une manière analogue au cas sans piston, on établit le résultat suivant

**Théorème 4.12.** Soit  $d=2$ . Sous les hypothèses (4.57), et pour données petites, il existe un temps  $t^*$  qui dépend des données,  $0 < t^*$  et une solution faible  $\mathbf{u}$  de (4.58). De plus, il existe une constante  $C > 0$  qui dépend aussi des données telle que la solution vérifie

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^\infty(0, t^*; L^2(\Omega))}^2 + \frac{m}{2S^2} \left\| \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right\|_{L^\infty(0, t^*)}^2 + \frac{k}{2S^2} \left\| \int_0^t \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right\|_{L^\infty(0, t^*)}^2 \\ & + \frac{\mu}{2} \|\nabla \mathbf{u}(t)\|_{L^2(0, t^*; H^1(\Omega))}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \int_0^{t^*} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C. \end{aligned}$$

**Preuve :**

La preuve repose sur les estimations établies pour le terme convectif dans le lemme 4.7 et reprend les étapes de la méthode de Galerkin dans la preuve du théorème 4.9.  $\square$

**Remarque 4.3.10.** En appliquant une force  $f_{ext}$  suffisamment petite et sur l'intervalle  $[0, t^*]$ , on a existence d'une solution locale en temps en phase inspiratoire. Comme déjà précisé dans la remarque 4.3.5, si on annule la force  $f_{ext}$ , on a décroissance de l'énergie en phase expiratoire. Si on laisse décroître l'énergie jusqu'à atteindre des données suffisamment petites pour reprendre une inspiration qui garantit encore une fois l'existence d'une solution locale en temps, alors grâce à la périodicité de la ventilation, on peut parler d'existence de solution globale pour données petites.

Une autre manière de procéder serait d'introduire une pression dynamique dans les conditions aux limites et proposer un nouveau modèle, proche de celui traité dans [25] qui s'écrirait

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0 \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} + \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}|^2 \mathbf{n} = -P \mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i \\ & i = 1, \dots, N \\ P = \frac{1}{S} (m \ddot{x} + kx - f_{ext}), & \\ S \dot{x} = \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = - \int_{\Gamma_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}. & \end{array} \right. \quad (4.60)$$

et pour lequel on s'affranchit de la contrainte du contrôle du flux d'énergie cinétique et où on procède d'une manière analogue aux conditions de Dirichlet pour l'existence des solutions.

Finalement, signalons qu'on peut reprendre en dimension deux, le même raisonnement que celui développé dans la remarque 4.3.8 et montrer que si  $k = 0$  alors on a l'existence de solution globale en temps pour données petites.

## 4.4 Conclusion

Le modèle multiéchelle proposé dans ce chapitre pour reproduire l'écoulement de l'air dans l'arbre bronchique, permet de contourner la complexité géométrique du système respiratoire tout en présentant un large spectre de paramètres qui peuvent permettre la modélisation de diverses pathologies respiratoires. Dans le cas des conditions aux limites dissipatives naturelles, l'existence de solution n'est prouvée que localement en temps et pour données petites, et en dimension deux. Pour ce type de conditions aux limites, l'exis-

tence de solutions globales fait l'objet du chapitre suivant, par une approche reposant sur l'étude des propriétés de l'opérateur de Stokes associé au problème couplé.

# Chapitre 5

## Solutions faibles globales pour les équations de Navier-Stokes avec conditions dissipatives naturelles<sup>3</sup>

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>109</b>
<b>5.2</b>	<b>Le problème de Stokes stationnaire</b>	<b>109</b>
5.2.1	Formulation variationnelle	109
5.2.2	Equivalence	110
5.2.3	Existence et unicité	111
<b>5.3</b>	<b>Etude de l'opérateur de Stokes modifié</b>	<b>114</b>
5.3.1	Définition de l'opérateur	115
5.3.2	Propriétés de l'opérateur	115
<b>5.4</b>	<b>Le problème de Navier-Stokes instationnaire</b>	<b>117</b>
<b>5.5</b>	<b>Résultats avec l'opérateur de Stokes non modifié</b>	<b>126</b>
<b>5.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>128</b>

---

<sup>3</sup>Les résultats établis dans ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec Céline Grandmont (INRIA Rocquencourt).



## 5.1 Introduction

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'étude des solutions du problème de Navier-Stokes avec conditions naturelles dissipatives dans une classe de solutions plus régulières que celles établies dans le précédent chapitre. On prouve l'existence d'une unique solution locale en temps mais également l'existence d'une solution globale pour données petites. Dans la section 5.2 on commence par étudier le problème dans le cas des équations de Stokes afin d'étudier, ensuite dans la section 5.3, les propriétés de l'opérateur de Stokes associé à la forme bilinéaire dissipative

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right),$$

ceci permet d'introduire une nouvelle norme associée à l'opérateur qui permettra d'établir des majorations uniformes des solutions approchées de Galerkin et d'établir le résultat d'existence globale, mais sous réserve de considérations particulières sur la géométrie du domaine considéré. Finalement, à la section 5.5, un deuxième résultat plus restrictif est établi dans le cas où l'opérateur de Stokes est associé à la forme bilinéaire

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}},$$

qui ne prend pas en compte le terme dissipatif de la formulation qui provient de la partie résistive de l'arbre.

## 5.2 Le problème de Stokes stationnaire

Dans cette section, on s'intéresse à l'étude du problème de Stokes stationnaire avec conditions aux limites dissipatives introduit dans le chapitre 3, où il s'agit de trouver  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$  et  $p \in L^2(\Omega)$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_0 \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_i \mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_i \quad i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

avec les pressions  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , les résistances  $R_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, N$  et la force volumique  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$  données.

### 5.2.1 Formulation variationnelle

On se propose d'exprimer (5.1) en une formulation variationnelle équivalente. Vue la condition aux limites de non glissement sur  $\Gamma_l$ , on choisit l'espace suivant pour la vitesse

$$H_{0,l}^1(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \mathbf{v}|_{\Gamma_l} = 0 \}$$

où  $d = 2, 3$ . Les conditions aux limites en entrée sur  $\Gamma_0$  et sur les multiples sorties  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  impliquent la pression; la pression n'est donc pas définie à une constante additive près et l'espace en pression est

$$M = L^2(\Omega),$$

et d'une manière usuelle on définit l'espace des vitesses à divergence nulle

$$V = \{\mathbf{v} \in H_{0,l}^1(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}.$$

Noter que  $V$  est un espace de Hilbert comme fermé de  $H_{0,l}^1(\Omega)$ , qui l'est également comme fermé de  $H^1(\Omega)$ .

En faisant le produit scalaire de la première équation de (5.1) dans  $L^2(\Omega)$  avec une fonction test  $\tilde{\mathbf{u}} \in X$ , et en appliquant la formule de Green, on obtient

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \int_{\partial\Omega} (-\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + p \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in H_{0,l}^1(\Omega).$$

En prenant en compte les conditions aux limites apparaissant dans (5.1), la formulation variationnelle du problème avec conditions de sorties naturelles dissipatives s'écrit : pour  $\mu$ ,  $(P_i)_{i=0, N}$ ,  $(R_i)_{i=1, N}$  et  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$  données, trouver  $\mathbf{u} \in H_{0,l}^1(\Omega)$  et  $p \in M$  solutions de

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \\ -P_0 \int_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \sum_{i=1}^N P_i \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in H_{0,l}^1(\Omega), \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \forall q \in M. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

### 5.2.2 Equivalence

On vient de montrer que toute solution  $(\mathbf{u}, p) \in H_{0,l}^1(\Omega) \times M$  de (5.1) est aussi solution de la formulation variationnelle (5.2). Réciproquement, si  $(\mathbf{u}, p)$  est solution du problème variationnel (5.2), en choisissant  $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on obtient la première équation de (5.1) au sens des distributions. La deuxième équation est équivalente à la contrainte d'incompressibilité. Bien sûr, le fait que  $\mathbf{u}$  appartienne à  $H_{0,l}^1(\Omega)$ , implique la condition de non-glissement sur la paroi  $\Gamma_l$ . Pour récupérer les conditions aux limites sur les  $\Gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ , on procède d'une manière standard et on multiplie la première équation de (5.1), qui est vraie dans  $L^2(\Omega)$  (car  $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ ), par  $\tilde{\mathbf{u}} \in H_{0,l}^1(\Omega)$  et on intègre par parties. En retranchant la formulation faible, il ne reste plus que des contributions au bord et on déduit les conditions aux limites sur  $\Gamma_i$  qui ont un sens dans  $(H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i))'$ . Ainsi, on a établi la proposition suivante

**Proposition 5.1.** Les problèmes (5.1) et (5.2) sont équivalents.

### 5.2.3 Existence et unicité

Le problème (5.2) est de type mixte. En effet, si on introduit les notations suivantes

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) &= \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right), \\ b(\tilde{\mathbf{u}}, q) &= - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \\ l(\tilde{\mathbf{u}}) &= -P_0 \int_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \sum_{i=1}^N P_i \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \end{aligned}$$

le problème (5.2) s'écrit sous la forme :  $H_{0,l}^1(\Omega)$  et  $M$  étant deux espaces de Hilbert,  $a$  et  $b$  deux formes bilinéaires respectivement sur  $H_{0,l}^1(\Omega) \times H_{0,l}^1(\Omega)$  et  $H_{0,l}^1(\Omega) \times M$ ,  $l$  une forme linéaire sur  $H_{0,l}^1(\Omega)$ , trouver  $\mathbf{u} \in H_{0,l}^1(\Omega)$  et  $p \in M$  solutions de

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + b(\tilde{\mathbf{u}}, p) = l(\tilde{\mathbf{u}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in H_{0,l}^1(\Omega), \\ b(\mathbf{u}, q) = 0, \quad \forall q \in M. \end{cases}$$

Ainsi, le fait que (5.2) soit bien posé, est la conséquence des propriétés suivantes : la coercivité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  sur  $V$ , la condition inf-sup sur  $H_{0,l}^1(\Omega) \times M$  pour la bilinéaire  $b(\cdot, \cdot)$  et la continuité de la forme linéaire  $l(\cdot)$ .

1. Coercivité de  $a$  sur  $V$  :

L'ellipticité de  $a$  est immédiate car les  $R_i$  sont positives et que  $mes(\Gamma_l) \neq 0$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \\ &\geq \mu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in H_{0,l}^1(\Omega). \end{aligned}$$

La forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  est coercive sur  $H_{0,l}^1(\Omega)$ , elle l'est donc aussi sur  $V$ .

2. Condition inf-sup :

La condition inf-sup est établie par la proposition suivante, dont la preuve sera détaillée plus loin

**Proposition 5.2.** Il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$\forall q \in M, \quad \sup_{\mathbf{v} \in H_{0,l}^1(\Omega)} \frac{1}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

3. Continuité de  $l(\cdot)$  :

On a

$$\begin{aligned}
 |l(\tilde{\mathbf{u}})| &\leq \left| \sum_{i=0}^N P_i \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right| + \left| \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right| \\
 &\leq \sum_{i=0}^N |P_i| \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq C \left( \max_{i=0, \dots, N} |P_i| + \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \right) \|\tilde{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $l(\cdot)$  définit bien un élément de l'espace dual de  $H^1(\Omega)$ .

Finalement, grâce à la théorie de Babuška-Brezzi ([5], [14]) sur les problèmes de type point-selle, on aboutit à la proposition suivante

**Proposition 5.3.** Le problème (5.2) est bien posé.

Dans ce qui suit on donne la preuve de la condition inf-sup énoncée dans la proposition 5.2 :

**Preuve :**

Soit  $q \in M$ . On décompose  $q$  sous la forme  $q = q^* + \bar{q}$  où  $\bar{q} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q$ . Ainsi,

$$q^* \in L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q = 0\},$$

et de plus on a

$$\int_{\Omega} q^* \bar{q} = 0 \text{ et donc } \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|q^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Comme  $q^* \in L_0^2(\Omega)$ , il existe  $\mathbf{v}^* \in H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^* = q^* \text{ et } \|\nabla \mathbf{v}^*\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta^*} \|q^*\|_{L^2(\Omega)} \quad (5.3)$$

où la constante  $\beta^*$  dépend seulement du domaine  $\Omega$  (voir [23]).

La technique utilisée dans [12] et [22] consiste à associer à  $\bar{q}$  un élément  $\bar{\mathbf{v}}$  adéquat et à exprimer  $\mathbf{v}$  comme une combinaison linéaire bien choisie de  $\mathbf{v}^*$  et  $\bar{\mathbf{v}}$ ,  $\mathbf{v} = \gamma \mathbf{v}^* + \bar{\mathbf{v}}$ . Ainsi

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} &= \int_{\Omega} (q^* + \bar{q})(\gamma \nabla \cdot \mathbf{v}^* + \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) \\
 &= \int_{\Omega} \gamma q^* \nabla \cdot \mathbf{v}^* + \int_{\Omega} q^* \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} + \int_{\Omega} \gamma \bar{q} \nabla \cdot \mathbf{v}^* + \int_{\Omega} \bar{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}.
 \end{aligned}$$

Comme  $\nabla \cdot \mathbf{v}^* = q^*$ , on a

$$\int_{\Omega} \gamma q^* \nabla \cdot \mathbf{v}^* = \gamma \|q^*\|_{L^2(\Omega)}^2 \text{ et } \int_{\Omega} \gamma \bar{q} \nabla \cdot \mathbf{v}^* = 0.$$

En ce qui concerne le terme  $\int_{\Omega} \bar{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}$ , on choisit  $\bar{\mathbf{v}}$  tel que

$$\int_{\Omega} \bar{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

En effet, on définit  $\bar{\mathbf{v}}$  par

$$\bar{\mathbf{v}} = |\Omega| \bar{q} \rho \mathbf{n}_0,$$

où  $\mathbf{n}_0$  est la normale sortante à la section  $\Gamma_0$  (ici on suppose pour simplifier que  $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$ ),  $\rho$  une fonction régulière, qui s'annule sur  $\partial\Omega \setminus \Gamma_0$  et satisfait

$$\int_{\Gamma_0} \rho = 1.$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} \bar{q} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = |\Omega| \bar{q}^2 \left( \int_{\Gamma_0} \rho \right) = \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Maintenant on a

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} = \gamma \|q^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} q^* \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad (5.4)$$

et il reste à minorer le terme croisé  $\int_{\Omega} q^* \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}$ . Par la définition de  $\bar{\mathbf{v}}$  et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q^* \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} &= |\Omega| \int_{\Omega} q^* \nabla \cdot (\bar{q} \rho \mathbf{n}_0) \\ &= |\Omega| \bar{q} \int_{\Omega} q^* \nabla \rho \cdot \mathbf{n}_0 \\ &\geq -|\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} \|q^*\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement, en choisissant  $\gamma = |\Omega| \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)}^2$  et en remplaçant dans (5.4), on obtient l'estimation

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} \geq \gamma \|q^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 - |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} \|q^*\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'inégalité  $a^2 + b^2 - ab \geq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$  nous permet de déduire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} &\geq \frac{1}{2} \left( |\Omega| \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)}^2 \|q^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\geq C_1 \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

où  $C_1 = \frac{1}{2} \min \left( |\Omega| \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)}^2, 1 \right)$ . Par ailleurs, grâce au choix de  $\gamma$ , à la propriété (5.3) et à l'expression de  $\bar{\mathbf{v}}$ , on a

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} &\leq |\gamma| \|\nabla \mathbf{v}^*\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \bar{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq |\Omega| \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} \left( \frac{\|\nabla \rho\|}{\beta^*} \|q^*\| + \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \|\bar{q}\| \right) \\ &\leq C_2 \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

où  $C_2 = |\Omega| \|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)} \left( \left( \frac{\|\nabla \rho\|_{L^2(\Omega)}}{\beta^*} \right)^2 + \frac{1}{|\Omega|} \right)^{1/2}$ .

Grâce aux estimations (5.5) et (5.6), on obtient la condition inf-sup avec  $\beta = \frac{C_1}{C_2}$ .  $\square$

**Remarque 5.2.1.** L'étude développée ci-dessus peut être reprise pour le problème de Stokes stationnaire avec conditions aux limites dissipatives essentielles. En effet, on remarque que les deux modèles, aussi bien avec les conditions naturelles que essentielles dissipatives, ont la même formulation variationnelle et ne diffèrent que par l'espace fonctionnel correspondant au champ de vitesse, et que  $Y \subset X$ .

Ainsi, pour prouver que le problème est bien posé, il suffit de vérifier la condition inf-sup. La démarche est en tout point analogue à celle adoptée dans le cas des conditions naturelles, excepté le choix de la fonction  $\rho$  qui, dans ce cas, ce fait comme suit

$$\rho = \lambda_0 \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}_0 \text{ où } \lambda_0 = \frac{1}{\int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n}_0},$$

ce qui garanti que  $\int_{\Gamma_0} \rho = 1$ .

La preuve de la condition inf-sup se généralise à tout profil de vitesse  $\mathbf{U}_i \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$  dès qu'il existe au moins  $i_0$  tel que  $\int_{\Gamma_{i_0}} \mathbf{U}_{i_0} \cdot \mathbf{n} \neq 0$ . Toutefois, c'est le cas des profils paraboliques qui est privilégié car il est plus pertinent du point de vue de la modélisation.

### 5.3 Etude de l'opérateur de Stokes modifié

Pour prouver l'existence de solutions pour le système des équations de Navier-Stokes, il est usuel de construire la solution comme limite d'approximations de Galerkin où la base de Galerkin est composée de vecteurs propres associés à l'opérateur de Stokes. On peut se référer par exemple à [48], [18], [50], [31] pour le cas de conditions aux limites de Dirichlet sur toute la frontière du domaine, et à [32] pour le cas de conditions aux limites mixtes, où une condition de Dirichlet est imposée sur une partie de la frontière du domaine tandis que des conditions d'entrée et de sorties libres sont imposées sur le reste de la frontière. Ici, au lieu de considérer des fonctions propres de l'opérateur de Stokes avec comme conditions aux limites des conditions de Dirichlet ou de Neumann, nous allons considérer les fonctions propres de l'opérateur de Stokes avec des conditions aux limites mixtes type Dirichlet et naturelles dissipatives. Ce qui revient à étudier l'opérateur associé à la forme bilinéaire sur  $V$ , qui prend en compte les termes dissipatifs de notre modèle, soit

$$a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right).$$

### 5.3.1 Définition de l'opérateur

Rappelons les notations des espaces suivants

$$H_{0,l}^1(\Omega) = \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega), \mathbf{u}|_{\Gamma_l} = 0\}$$

et

$$V = \{\mathbf{u} \in H_{0,l}^1(\Omega), \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\},$$

et on considère également  $H$  le complété de  $V$  par rapport à la norme  $L^2(\Omega)$ . L'espace  $V$  est dense dans  $H$  et l'injection de  $V$  dans  $H$  est continue.

On considère également la forme bilinéaire

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ telle que} \\ a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right), \quad (5.7)$$

$a$  est bilinéaire continue et coercive.

Le triplet  $\{V, H, a\}$  définit un opérateur  $A : D(A) \rightarrow H$  de la manière suivante

**Définition 5.4.** Soit

$$D(A) = \{\mathbf{u} \in V / \text{il existe } C \geq 0 \text{ telle que } |a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}})| \leq C \|\tilde{\mathbf{u}}\|_H \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in V\}.$$

C'est à dire que  $D(A)$  est l'ensemble des  $\mathbf{u} \in V$  tels que la forme linéaire  $\mathbf{v} \mapsto a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  définie sur  $V$ , est continue pour la topologie induite par  $H$  sur  $V$ .

En effet, si  $\mathbf{u} \in D(A)$ , la forme  $\mathbf{v} \mapsto a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  se prolonge de façon unique, par densité, en une forme linéaire  $l$  continue sur  $H$ .

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément de  $H$ , qu'on note  $A\mathbf{u}$ , tel que

$$l(\cdot) = (A\mathbf{u}, \cdot),$$

c'est à dire

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u} \in D(A), \mathbf{v} \in V.$$

La correspondance  $\mathbf{u} \mapsto A\mathbf{u}$  est linéaire et définit donc un opérateur linéaire  $A : D(A) \rightarrow H$  associé au triplet  $\{V, H, a\}$ ,  $D(A)$  étant muni de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_V + \|A\mathbf{u}\|_H.$$

### 5.3.2 Propriétés de l'opérateur

**Proposition 5.5.** L'opérateur  $A$  vérifie les propriétés suivantes

1.  $A \in \mathcal{L}(D(A), H)$  est bijectif.
2.  $A$  est autoadjoint.

**Preuve :**

1.  $A$  est surjectif :

Soit  $\mathbf{f} \in H$  et  $l(\tilde{\mathbf{u}}) = (\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}})$  forme linéaire continue sur  $H$ . Comme l'injection de  $V$  dans  $H$  est continue, on a

$$|l(\tilde{\mathbf{u}})| = |(\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}})| \leq \|\mathbf{f}\|_H \|\tilde{\mathbf{u}}\|_V \leq C \|\mathbf{f}\|_H \|\tilde{\mathbf{u}}\|_V.$$

La forme  $l$  est continue pour la topologie de  $V$ , donc par le théorème de Lax-Milgram [13], il existe un unique  $\mathbf{u} \in V$  tel que  $a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = (f, \tilde{\mathbf{u}})$ .

Mais  $l$  est aussi continue pour la topologie de  $H$ , donc  $\mathbf{u} \in D(A)$  et  $(A\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = (\mathbf{f}, \tilde{\mathbf{u}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in V$ , donc  $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$  puisque  $V$  est dense dans  $H$ .

$A$  est injectif :

Soit  $\mathbf{u} \in D(A)$ , alors

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq \alpha \|\mathbf{u}\|_V^2 \geq \frac{\alpha}{C^2} \|\mathbf{u}\|_H^2$$

où  $\alpha$  est la constante de coercivité. Par ailleurs, on a

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \|(A\mathbf{u}, \mathbf{u})\| \leq \|A\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{u}\|_H,$$

ainsi,

$$\|A\mathbf{u}\|_H \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{C} \|\mathbf{u}\|_H \quad \forall \mathbf{u} \in D(A),$$

donc  $A$  est injectif.

En conclusion  $A \in \mathcal{L}(D(A), H)$  est bijectif.

2. Soit  $\mathbf{u} \in D(A^*)$  où on désigne par  $A^*$  l'adjoint de  $A$ . On a  $A^*\mathbf{u} \in H$ , on peut alors utiliser le résultat d'existence pour le problème de Stokes pour trouver  $\mathbf{w} \in D(A)$  tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\mu \Delta \mathbf{w} + \nabla p = A^*\mathbf{u} & \text{dans } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{w} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{w} = 0 & \text{sur } \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} = -P_0\mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} = -P_i\mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } \Gamma_i, i = 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (5.8)$$

c'est à dire  $\mathbf{w} \in D(A)$  tel que  $A\mathbf{w} = A^*\mathbf{u} \in H$ .

Afin de montrer que  $\mathbf{w} = \mathbf{u}$ , on calcule  $(g, \mathbf{u} - \mathbf{w})$  pour  $g \in H$ .

Grâce au résultat d'existence pour le problème de Stokes il existe  $\tilde{\mathbf{u}} \in D(A)$  tel que  $A\tilde{\mathbf{u}} = g$ . Ainsi, comme l'opérateur  $A$  est symétrique on a

$$(g, \mathbf{u} - \mathbf{w}) = (A\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{u}) - (A\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{w}) = (\tilde{\mathbf{u}}, A^*\mathbf{u}) - (\tilde{\mathbf{u}}, A\mathbf{w}) = 0.$$

Comme  $g$  est arbitraire alors  $\mathbf{u} = \mathbf{w} \in D(A)$  et  $A\mathbf{u} = A^*\mathbf{u}$  et donc  $A$  est autoadjoint.

□

**Théorème 5.6.** L'inverse de l'opérateur  $A$  est compact dans  $H$ .

**Preuve :**

$A$  est un isomorphisme de  $D(A)$  dans  $H$ , alors  $A^{-1}$  existe. Par ailleurs, on a

$$\|\mathbf{u}\|_H \leq C\|\mathbf{f}\|_H,$$

c'est à dire,

$$\|A^{-1}\mathbf{f}\|_H \leq C\|\mathbf{f}\|_H.$$

Ce qui implique que  $A^{-1} : H \rightarrow D(A) \subset V$  est borné. Comme l'injection de  $V$  dans  $H$  est compacte, on conclut par le théorème de Rellich que  $A^{-1}$  est un opérateur compact sur  $H$ . □

Comme  $A$  est autoadjoint,  $A^{-1}$  l'est aussi.  $A^{-1}$  admet alors une suite de fonctions propres  $\mathbf{w}_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , orthogonale et complète dans  $H$  et dans  $V$ ,

$$A^{-1}\mathbf{w}_j = \alpha_j\mathbf{w}_j, \quad \mathbf{w}_j \in D(A), \quad \alpha_j \in \mathbb{R}^*$$

et donc

$$A\mathbf{w}_j = a_j\mathbf{w}_j \text{ avec } a_j = \frac{1}{\alpha_j}.$$

Comme  $A^{-1}$  est compact, d'après le théorème spectral pour les opérateurs compacts, l'ensemble des valeurs propres de  $A^{-1}$  est dénombrable et le seul point d'accumulation possible est zéro, d'où

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots, \quad a_j \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} +\infty.$$

## 5.4 Le problème de Navier-Stokes instationnaire

On s'intéresse à présent à l'étude du problème de Navier-Stokes instationnaire avec conditions dissipatives naturelles suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_l, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} = -P_0\mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_0, \\ \mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p\mathbf{n} = -P_i\mathbf{n} - R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} & \text{sur } ]0, T[ \times \Gamma_i, \\ & i = 1, \dots, N, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x). & \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Pour tout  $\tilde{\mathbf{u}} \in V$  on a

$$\rho \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) = - \sum_{i=0}^N P_i \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right). \quad (5.10)$$

On rappelle la forme bilinéaire suivante

$$a : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que} \\ a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = \mu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \tilde{\mathbf{u}}) + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right), \quad (5.11)$$

et on définit la forme trilinéaire suivante

$$b : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que} \\ b(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}) = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{u}}). \quad (5.12)$$

De plus, on pose

$$l(\tilde{\mathbf{u}}) = - \sum_{i=0}^N P_i \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \quad (5.13)$$

pour tout  $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega)$ .

Le problème à résoudre s'écrit alors : pour

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0 &\in V, \\ P_i &\in L^\infty(0, T), \quad i = 0, \dots, N, \\ R_i &> 0, \quad i = 1, \dots, N, \text{ donnés,} \end{aligned} \quad (5.14)$$

trouver  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; V) \cap L^2(0, T; D(A))$  et  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \in L^2(0, T; H)$  tel que pour tout  $t > 0$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \tilde{\mathbf{u}} \right) + a(\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) + \rho b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}}) = l(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in V \quad (5.15)$$

avec  $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0$ .

Notons que ce type d'approche multiéchelle est également utilisé pour la simulation des écoulements sanguins [44][49][52]. En particulier dans [49] l'existence de solutions est démontrée pour des conditions aux limites du type  $\mu \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - p \mathbf{n} = -P_i \mathbf{n} - R_i (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}$ , sous une condition de petitesse des résistances  $R_i$ . Nous allons reprendre les mêmes techniques de démonstration mais en nous affranchissant de ce type de condition grâce à l'opérateur  $A$  associé à la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  définie sur  $V$ . On établit alors le résultat suivant

**Théorème 5.7.** Soit  $\tilde{P} = \sup_t \sum_{i=0}^N |P_i|$ . Sous les hypothèses (5.14), il existe un intervalle de temps sur lequel le problème (5.15) admet une solution. De plus, si on suppose que la condition initiale et  $\tilde{P}$  sont suffisamment petites, alors la solution du problème existe

pour tout  $t > 0$ . Précisément, il existe des constantes  $A > 0$ ,  $B > 0$  et  $c_3 > 0$  telles que si

$$\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq \frac{1}{4B^2} \text{ et } \tilde{P}^2 \leq \frac{A\rho\mu^3}{B^2c_3^2}$$

alors  $\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq \frac{1}{4B^2}$  pour tout  $t$ .

Finalement, il existe un intervalle de temps sur lequel la solution est unique et dépend continuellement des données.

La difficulté ici est d'estimer le terme non linéaire. Pour cela nous allons supposer que

$$\sup_{\Omega} |\tilde{\mathbf{u}}| \leq c_1 \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|A\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}, \quad (5.16)$$

pour tout  $\tilde{\mathbf{u}} \in D(A)$ . L'inégalité (5.16) est prouvée par exemple dans [18], pages 38-39, pour le cas de conditions de Dirichlet sur toute la frontière du domaine (suffisamment régulier), et ceci aussi bien en dimension deux qu'en dimension trois. Elle repose en particulier sur le fait que  $D(A) = H^2(\Omega) \cap V$ . Le cas des conditions aux limites mixtes Dirichlet/dissipatives naturelles qui nous intéressent revient à considérer le cas des conditions aux limites mixtes Dirichlet/Neumann. Pour ce dernier cas, par contre, une preuve de (5.16) est établie dans [10] seulement dans le cas bidimensionnel et pour un domaine  $\Omega$  où la paroi latérale et les sections  $\Gamma_i$ ,  $i = 0, \dots, N$  sont suffisamment régulières et que les sections  $\Gamma_i$  et la paroi latérale forment des angles droits. Dans [32] et [49], l'inégalité (5.16) est admise dans le cas tri-dimensionnel, ce que nous supposons également. Nous allons également nous appuyer sur

$$\|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)} \leq c_2 \|A\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.17)$$

pour tout  $\tilde{\mathbf{u}} \in D(A)$ , qui elle découle du fait que

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = (A\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \|A\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|A\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il est alors possible d'estimer le terme non linéaire par

$$|b(\mathbf{u}, \mathbf{u}, A\mathbf{u})| \leq \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \|A\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|A\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}}.$$

Nous allons maintenant démontrer le résultat principal.

**Preuve :**

Le schéma de la preuve du théorème 5.7 est le suivant : on obtient tout d'abord des estimations a priori de l'approximation de Galerkin  $\mathbf{u}_m$  de la solution de (5.15) qui seront héritées par la solution quand  $m$  tend vers  $+\infty$ , prouvant ainsi l'existence d'une solution locale en temps. Ensuite, si les données initiales sont suffisamment petites, on prouve de nouvelles estimations a priori assurant l'existence d'une solution pour tout  $t > 0$ . Finalement, on prouve que, localement en temps, la solution limite est unique et dépend continuellement des données.

Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ , on définit l'approximation de Galerkin  $\mathbf{u}_m(t)$  comme solution dans  $\text{Vect}\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq m}$  du système non linéaire suivant

$$\begin{cases} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, \tilde{\mathbf{u}} \right) + a(\mathbf{u}_m, \tilde{\mathbf{u}}) + \rho b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, \tilde{\mathbf{u}}) = l(\tilde{\mathbf{u}}) & \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \text{Vect}\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq m}, \\ \int_{\Omega} (\mathbf{u}_m(0) - \mathbf{u}_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 & \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \text{Vect}\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq m}. \end{cases} \quad (5.18)$$

Ce système différentiel de  $m$  équations à  $m$  inconnues admet une solution unique sur un intervalle  $[0, t_m]$ .

### Estimations a priori et existence locale

On choisit comme fonction test dans la formulation variationnelle (5.18),  $\tilde{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}_m$ , ce qui est possible car  $A\mathbf{u}_m \in \text{Vect}\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq m}$ . On a alors

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, A\mathbf{u}_m \right) + a(\mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m) + \rho b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m) = l(A\mathbf{u}_m). \quad (5.19)$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}, A\mathbf{u}_m \right) &= \rho \left( A\mathbf{u}_m, \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \right) \\ &= \rho a \left( \mathbf{u}_m, \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \right) \\ &= \rho \mu \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \rho \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N R_i \frac{d}{dt} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} \right)^2, \end{aligned}$$

et

$$a(\mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m) = (A\mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m) = \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

il s'ensuit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \mu \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \rho \sum_{i=1}^N R_i \frac{d}{dt} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} \right)^2 + \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 = \\ -\rho b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m) - \sum_{i=0}^N P_i \int_{\Gamma_i} A\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

A ce niveau de la preuve, on fait appel à l'inégalité d'interpolation (5.16) pour tout  $\tilde{\mathbf{u}} \in D(A)$  et à l'inégalité de trace suivante pour tout  $\tilde{\mathbf{u}} \in \text{Vect}\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq m}$ ,

$$\left| \sum_{i=1}^n P_i \int_{\Gamma_i} A\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right| \leq c_3 \tilde{P} \|A\tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.20)$$

où  $\tilde{P} = \sup_{t \geq 0} \sum_{i=1}^n |P_i|$ , et qui découle de la proposition 4.8 (voir le chapitre 4) puisque  $A\tilde{\mathbf{u}}$  est à divergence nulle.

Grâce à ces deux inégalités, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\rho\mu\frac{d}{dt}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\rho\sum_{i=1}^N R_i\frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_i}\mathbf{u}_m\cdot\mathbf{n}\right)^2 + \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \rho|b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m)| + c_3\tilde{P}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ & \rho\sup|\mathbf{u}_m|\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + c_3\tilde{P}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ & \rho c_1\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} + c_3\tilde{P}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

aux deux termes du membre de droite, respectivement avec  $p = 4$  et  $q = \frac{4}{3}$ , puis  $p = 2$  et  $q = 2$ , on a alors

$$\frac{d}{dt}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^N R_i\frac{d}{dt}\left(\int_{\Gamma_i}\mathbf{u}_m\cdot\mathbf{n}\right)^2 + \frac{1}{\rho\mu}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{4\rho^3c_1^4}{\mu}\|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^6 + \frac{4c_3^2}{\rho\mu}\tilde{P}^2.$$

A ce niveau de la preuve, et afin d'appliquer le lemme C.4, on considère

$$\phi(t) = \|\nabla\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^N R_i\left(\int_{\Gamma_i}\mathbf{u}_m\cdot\mathbf{n}\right)^2$$

et

$$\psi(t) = \frac{1}{\rho\mu}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et soit

$$f(t) = \frac{4c_3^2\tilde{P}^2}{\rho\mu}.$$

L'inégalité ci-dessus s'écrit alors

$$\frac{d}{dt}\phi(t) + \psi(t) \leq \frac{4c_1^4\rho^3}{\mu}\phi^3(t) + f(t).$$

Par ailleurs, comme on a

$$\int_{\Omega}(\mathbf{u}_m(0) - \mathbf{u}_0) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in \text{Vect}\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq m},$$

et en choisissant  $\tilde{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}_m(0)$ , on obtient

$$(\mathbf{u}_m(0), A\mathbf{u}_m(0)) = (\mathbf{u}_0, A\mathbf{u}_m(0)),$$

c'est à dire,

$$a(\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_m(0)) = a(\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_0).$$

Or,

$$\mu \|\nabla \mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a(\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_m(0))$$

et par la continuité de la forme bilinéaire  $a(\cdot, \cdot)$  et l'inégalité de Poincaré, on a

$$a(\mathbf{u}_m(0), \mathbf{u}_0) \leq C \|\nabla \mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)},$$

il s'ensuit

$$\|\nabla \mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{\mu} \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}$$

et donc

$$\phi(0) = \|\nabla \mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_m(0) \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq C \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

où  $C$  est une constante générique.

Ainsi, par le lemme de comparaison pour les inéquations différentielles, il existe  $t^* \leq t_m$  ne dépendant que de  $\mathbf{u}_0$ , et une fonction  $F(t, \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)})$  solution de l'équation différentielle

$$F' = \frac{4c_1^4 \rho^3}{\mu} F^3 + f(t), \quad F(0) = C \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \text{ sur } [0, t^*[, \text{ ainsi que } \tilde{F}(t, \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}) \text{ tel que,}$$

pour tout  $t \in [0, t^*[$  on a

$$\phi(t) \leq F(t)$$

$$\text{et } \int_0^t \psi(\tau) d\tau \leq \tilde{F}(t),$$

c'est à dire,

$$\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} \right)^2 \leq F(t) \quad (5.21)$$

et

$$\frac{1}{\rho\mu} \int_0^t \|\mathbf{A}\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \tilde{F}(t). \quad (5.22)$$

Grâce à ces estimations, on peut alors également déduire une estimation pour  $\int_0^t \left\| \frac{d}{d\tau} \mathbf{u}_m \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau$ .

En effet, en choisissant  $\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}$  dans (5.18) on a

$$\begin{aligned} \rho \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}_m \cdot \nabla \mathbf{u}_m) \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} - (\mathbf{A}\mathbf{u}_m, \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}) - \sum_{i=0}^N P_i \left( \int_{\Gamma_i} \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \cdot \mathbf{n} \right) \\ &\leq \left( \rho \sup \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{A}\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + C\tilde{P} \right) \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \left( \rho c_1 \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{A}\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{A}\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + c\tilde{P} \right) \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\rho} \left( \rho c_1 \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{3}{2}} \|\mathbf{A}\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} + \|\mathbf{A}\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + c\tilde{P} \right)$$

et donc

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \tau} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq G(t).$$

### Passage à la limite

Pour tout  $t \leq t^*(\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)})$ , on a

$$\begin{aligned} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq CF(t, \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}), \\ \int_0^t \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C\tilde{F}(t, \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}), \\ \int_0^t \left\| \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \tau} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq G(t, \|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)}), \end{aligned} \quad (5.23)$$

ce qui permet de déduire que  $\mathbf{u}_m$  est bornée dans  $L^\infty(0, t^*, V) \cap L^2(0, t^*, D(A))$  et que  $\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t}$  est bornée dans  $L^2(0, t^*, H)$ .

Grâce aux estimations (5.23), on peut extraire une sous suite qu'on notera également  $\mathbf{u}_m$  telle que

$$\begin{cases} \mathbf{u}_m \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ faible } * \text{ dans } L^\infty(0, t^*; V) \\ \text{et} \\ \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \text{ faiblement dans } L^2(0, t^*; H). \end{cases} \quad (5.24)$$

Par ailleurs, grâce au lemme de compacité énoncé dans [37], page 57, on peut extraire de  $\mathbf{u}_m$  une sous suite qu'on note également  $\mathbf{u}_m$  telle que

$$\mathbf{u}_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \mathbf{u} \text{ dans } L^2(0, t^*; L^2(\Omega)).$$

On peut alors passer à la limite dans les termes de la formulation et le reste de la preuve se poursuit d'une manière classique, comme dans le chapitre précédent, pour montrer que  $\mathbf{u}$  vérifie (5.9) au sens des distributions et récupérer la condition initiale.

### Existence globale

On a déjà établi que

$$\begin{aligned} \frac{\mu\rho}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^N R_i \frac{d}{dt} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} \right)^2 + \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \\ \rho \sup_{\Omega} |\mathbf{u}_m| \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + c_3 \tilde{P} \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

La combinaison des inégalités (5.16) et (5.17) donne

$$\sup_{\Omega} |\mathbf{u}| \leq c_1 c_2^{\frac{1}{2}} \|A\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Il en découle que

$$\begin{aligned} & \frac{\mu\rho}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^N R_i \frac{d}{dt} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} \right)^2 + \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \rho c_1 c_2^{\frac{1}{2}} \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + c_3 \tilde{P} \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} \leq \\ & \rho c_1 c_2^{\frac{1}{2}} \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + \frac{c_3^2 \tilde{P}^2}{2} + \frac{1}{2} \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N R_i \frac{d}{dt} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} \right)^2 + \left( \frac{1 - 2\rho c_1 c_2^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}}{\rho\mu} \right) \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{c_3^2 \tilde{P}^2}{4\mu\rho},$$

ainsi, en utilisant l'inégalité (5.17) et le fait que  $|\int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}| \leq C \|\nabla \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)}$  pour tout  $\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega)$ , on obtient une inégalité différentielle du type

$$\frac{d}{dt} \phi + A(1 - B\sqrt{\phi})\phi \leq \frac{c_3^2 \tilde{P}^2}{4\mu\rho},$$

où on rappelle que  $\phi = \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n} \right)^2$ . Par conséquent, en supposant que  $\sqrt{\phi(0)} \leq \frac{1}{2B}$  et que  $\frac{c_3^2 \tilde{P}^2}{4\mu\rho} \leq \frac{A\mu^2}{4B^2}$ , en appliquant le lemme de Gronwall C.1 on obtient  $\sqrt{\phi(t)} \leq \frac{1}{2B}$  pour tout  $t$ .

### Unicité et dépendance continue par rapport aux données

On considère maintenant la question d'unicité et de la dépendance continue par rapport aux données. On prouve tout d'abord qu'il existe un intervalle de temps où la solution dépend continuellement des données en supposant l'unicité de la solution. Plus tard, on prouvera que l'unicité est vraie. Supposons alors, qu'il existe un intervalle de temps sur lequel la solution du problème (5.15) est unique. En particulier, on note  $\mathbf{u}_1$  la solution associée aux données  $(\mathbf{u}_0^1, P_i^1)$  ( $i = 0, \dots, N$ ) et de la même manière  $\mathbf{u}_2$  la solution associée aux données  $(\mathbf{u}_0^2, P_i^2)$  ( $i = 0, \dots, N$ ). Soient

$$\mathbf{w} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \text{ et } \delta\tilde{P} = \max_i |P_i^1 - P_i^2|.$$

On a

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t}, \tilde{\mathbf{u}} \right) + a(\mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}) + \rho b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \tilde{\mathbf{u}}) = l(\tilde{\mathbf{u}})$$

et

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t}, \tilde{\mathbf{u}} \right) + a(\mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}) + \rho b(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \tilde{\mathbf{u}}) = l(\tilde{\mathbf{u}}).$$

On soustrait les deux équations, et on choisit  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{w}$ , on a

$$\begin{aligned} \rho \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \mu \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \right)^2 &= -\rho (b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{w})) \\ &+ \sum_{i=0}^N (P_i^2 - P_i^1) \int_{\Gamma_i} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Or,

$$b(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{w}) - b(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}) = b(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{u}_2, \mathbf{w}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w}),$$

et

$$|b(\mathbf{u}_2, \mathbf{w}, \mathbf{w})| \leq \sup_{\Omega} |\mathbf{u}_2| \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}$$

et par l'inégalité de Hölder, on a

$$|b(\mathbf{w}, \mathbf{u}_2, \mathbf{w})| \leq \|\mathbf{w}\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}_2\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}\|_{L^3(\Omega)}$$

et

$$|b(\mathbf{w}, \mathbf{w}, \mathbf{w})| \leq \|\mathbf{w}\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}\|_{L^3(\Omega)}.$$

Rappelons que par injection de Sobolev on a les inégalités suivantes pour  $d = 2, 3$

$$\|\mathbf{u}\|_{L^6(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}$$

et

$$\|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)} \leq C \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}.$$

Suite à ces estimations et grâce aux inégalités de Young et de Poincaré, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\mu \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left( \sup_{\Omega} |\mathbf{u}_2| \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \frac{\mu}{3} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C \|\nabla \mathbf{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^4 \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\mu}{3} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{5}{2}} \\ &+ C \delta \tilde{P}^2 + \frac{\mu}{3} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, on a finalement

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left( \mu - C \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \right) \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \left( (\sup_{\Omega} |\mathbf{u}_2|)^2 + \|\nabla \mathbf{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^4 \right) \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ C \delta \tilde{P}^2 \end{aligned} \tag{5.25}$$

et donc, en supposant que  $\|\mathbf{u}_0^1 - \mathbf{u}_0^2\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla(\mathbf{u}_0^1 - \mathbf{u}_0^2)\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu}{2C}$ , sur tout intervalle de temps pour lequel  $\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu}{2C}$ , on a

$$\rho \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( (\sup |\mathbf{u}_2|)^2 + \|\nabla \mathbf{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^4 \right) \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \delta \tilde{P}^2.$$

Par conséquent, en appliquant le lemme de Gronwall, cela entraîne la dépendance continue par rapport aux données. En particulier, dès que  $\mathbf{u}_1|_{t=0} = \mathbf{u}_2|_{t=0}$  il existe un intervalle de temps où  $\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu}{2C}$  est vraie et dans ce cas on a

$$\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta\tilde{P}^2. \quad (5.26)$$

Pour prouver l'unicité, on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe deux solutions associées aux mêmes données, alors  $\delta\tilde{P} = 0$  et  $\mathbf{w}|_{t=0} = 0$  et par conséquent (5.26) implique que la solution est unique.

Par ailleurs, de (5.25) et de l'inégalité de Poincaré, on peut écrire sur tout intervalle de temps pour lequel  $\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla \mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\mu}{2C}$

$$\rho \frac{d}{dt} \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \left( \frac{\mu}{2} - (\sup |\mathbf{u}_2|)^2 - \|\nabla \mathbf{u}_2\|_{L^2(\Omega)}^4 \right) \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\tilde{P}^2,$$

et donc par le lemme de Gronwall on voit que si  $\tilde{P} = 0$  et si  $\mathbf{u}_2(t)$  est petit, alors les petites perturbations  $\mathbf{w}(t)$  de  $\mathbf{u}_2(t)$  décroissent exponentiellement.  $\square$

**Remarque 5.4.1.** Grâce à la proposition 4.8 (voir chapitre 4), comme  $\mathbf{w}$  est à divergence nulle, on a pour  $i = 0, \dots, N$ ,

$$\left| \int_{\Gamma_i} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \right| \leq C \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Cette inégalité, combinée avec (5.26) permet de déduire en particulier que le débit sur les sections  $\Gamma_i$  est une fonction continue des pressions  $P_i$ ,  $i = 0, \dots, N$ .

## 5.5 Résultats avec l'opérateur de Stokes non modifié

Si on ne prend pas en compte le terme dissipatif  $\sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right)$  lors de la définition de l'opérateur  $A$ , et qu'on le définit juste en l'associant à la forme bilinéaire sur  $V$

$$\mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \tilde{\mathbf{u}},$$

alors, d'une manière analogue à [49] on aboutit au résultat suivant d'existence locale en temps sous une condition supplémentaire du type  $\mu - C \max_{1 \leq i \leq N} R_i > 0$ , ainsi qu'un résultat d'existence globale pour des données petites sous la même condition. Ce résultat est énoncé dans le théorème qui suit

**Théorème 5.8.** Soient  $\mu$  et  $R = \max_{i=1, \dots, N} R_i$  tels que

$$\kappa = \mu - 2Rc_2c_4 > 0.$$

Alors, il existe un intervalle de temps sur lequel la solution du problème existe. De plus, si on suppose que la condition initiale et les données aux bords sont suffisamment petites, précisément

$$\|\nabla \mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\kappa}{4c_1c_2^{\frac{1}{2}}} \text{ et } \tilde{P} < \frac{(\mu\kappa^3)^{\frac{1}{2}}}{(32c_2^3)^{\frac{1}{2}}c_1c_3},$$

alors, la solution du problème existe pour tout  $t > 0$  et vérifie l'inégalité

$$\|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} < \frac{\kappa}{4c_1c_2^{\frac{1}{2}}}.$$

Finalement, il existe un intervalle de temps sur lequel la solution est unique et dépend continuellement des données.

**Preuve :**

La preuve est en tout point analogue à celle du théorème 5.8, mise à part la contribution du terme dissipatif lors de l'estimation a priori

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\rho\mu \frac{d}{dt} \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \rho|b(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m, A\mathbf{u}_m)| + c_3\tilde{P}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^N R_i \left| \int_{\Gamma_i} (\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n}) \right| \left| \int_{\Gamma_i} (A\mathbf{u}_m \cdot \mathbf{n}) \right| \leq \\ & \rho \sup_{\Omega} |\mathbf{u}_m| \|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + c_3\tilde{P}\|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} + c_4R\|\nabla \mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)} \|A\mathbf{u}_m\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

□

**Remarque 5.5.1.** Eviter de prendre en compte le terme dissipatif

$$\sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right)$$

lors de la définition de l'opérateur  $A$ , a pour conséquence de restreindre la classe de solutions par la condition supplémentaire

$$\mu - 2Rc_2c_4 > 0,$$

où  $R = \max_i R_i$ , les résistances  $R_i$  correspondant aux résistances globales des domaines  $\tilde{\Omega}_i$  de l'arbre qui sont condensés. Cette condition supplémentaire, dont nous nous sommes affranchie ici, est délicate à interpréter suivant la nature du domaine  $\Omega$ . En effet, dans le cas de l'arbre bronchique humain et en se basant sur les données du modèle de Weibel (voir annexe A), plus on recule la zone où on décide de tronquer, c'est à dire, plus on réduit le nombre de générations de bronchioles condensées dans la partie distale du modèle et plus la résistance  $R$  est importante, tandis que si le domaine  $\Omega$  était un simple tube, on observe plutôt que la résistance  $R$  diminue plus la partie condensée est petite (c'est à dire plus le domaine de calcul  $\Omega$  est grand). Néanmoins, la condition sous laquelle nous obtenons

l'existence globale en temps à la section 5.4 fait également intervenir les résistances  $R_i$ . En effet, on a que  $R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n} \right)^2$  doit être suffisamment petit. Cependant cette condition fait également intervenir le flux de la condition initiale sur les sorties de l'arbre et donc lorsque  $R_i$  est grand nous obtenons malgré tout l'existence globale, à condition (entre autre) que les flux de la vitesse initiale à travers  $\Gamma_i$  soient suffisamment petits.

## 5.6 Conclusion

L'étude de l'opérateur  $A$  a permis d'établir l'existence de solution du problème (5.9) pour tout  $t > 0$ , pour des données petites. Rappelons toutefois que l'argument clé pour contrôler le terme non linéaire est l'inégalité (5.16) qui n'est démontrée qu'en dimension deux et pour des domaines à géométrie particulière.

Enfin, signalons qu'à l'heure actuelle, nous ne savons pas appliquer cette approche pour l'étude du modèle couplé intégré qui prend en compte les acini modélisés par un ressort de déplacement  $x(t)$  tel que décrit dans le chapitre 4, et ceci parce qu'on ne sait pas traiter les termes du type

$$\ddot{x} \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n},$$

ce qui reste en perspective pour de futurs travaux.

# Chapitre 6

## Discrétisation en temps et tests numériques

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>131</b>
<b>6.2</b>	<b>Discrétisation en temps</b>	<b>131</b>
6.2.1	Bilan d'énergie discret	133
6.2.2	Formulation variationnelle semi-discrétisée	139
<b>6.3</b>	<b>Tests numériques</b>	<b>141</b>
6.3.1	Le couplage 2D/3D	141
6.3.2	Les paramètres	142
6.3.3	Les tests	143
	Cycle respiratoire : poumons sains et simulation d'asthme	143
	Expiration forcée	146
	Prise en compte des effets inertiels	149
<b>6.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>150</b>

---



## 6.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la discrétisation en temps des équations de Navier-Stokes avec conditions dissipatives essentielles couplé à l'équation différentielle ordinaire modélisant le mouvement du diaphragme et du parenchyme pulmonaire, tel qu'il a été introduit dans le chapitre 4, section 4.3.2, problème (4.42). On propose une formulation du problème semi-discrétisée implicite faisant appel à la méthode des caractéristiques pour la discrétisation de la dérivée totale. On établit également un bilan énergétique à l'ordre 1 pour le problème régulier en espace et discrétisé en temps. Finalement, on illustre le comportement du modèle couplé par des simulations numériques bi-dimensionnelles.

## 6.2 Discrétisation en temps

On présente dans cette section un schéma de discrétisation en temps des équations de Navier-Stokes avec conditions aux limites dissipatives essentielles couplées au modèle des acini. Soit  $T > 0$ ; on introduit une partition de l'intervalle de temps  $[0, T]$  : soient  $t^0 = 0 < t^1 < t^2 < \dots < t^M = T$  où  $t^{n+1} - t^n = \delta t = \frac{T}{M}$  est le pas de temps correspondant. On propose de discrétiser le terme convectif par la méthode des caractéristiques (voir [47]); il s'agit d'un traitement lagrangien de la dérivée totale, dite aussi particulière  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ . Plus précisément, la trajectoire d'une particule fluide dans un écoulement ayant une vitesse  $\mathbf{u}(t, \cdot)$  et se trouvant à la position  $x$  au temps  $s$  est notée  $X(t, s; x)$ . La caractéristique est alors solution de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t}(t, s; x) = \mathbf{u}(t, X(t, s; x)) & t \in [0, s], \\ X(s, s; x) = x. \end{cases} \quad (6.1)$$

On note  $X^n(x) = X(t^n, t^{n+1}; x)$  et on utilise l'approximation suivante pour la dérivée totale en temps

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \simeq \frac{\mathbf{u}(t^{n+1}, x) - \mathbf{u}(t^n, X^n(x))}{\delta t}.$$

On note  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$  la vitesse et la pression approchées au temps  $t^{n+1}$  construites par récurrence à partir de la donnée initiale  $\mathbf{u}^0$  d'après le schéma suivant

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{1}{\delta t} \mathbf{u}^{n+1} - \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} &= \rho \frac{1}{\delta t} \mathbf{u}^n \circ X^n && \text{dans } \Omega, \\
 \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0 && \text{dans } \Omega, \\
 \mathbf{u}^{n+1} &= 0 && \text{sur } \Gamma_l, \\
 \mathbf{u}^{n+1} &= \lambda_i^{n+1} \mathbf{U}_i && \text{sur } \Gamma_i, i = 0 \dots N, \\
 \int_{\Gamma_0} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_0 &= -P_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} && \text{sur } \Gamma_0, \\
 \int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} - p^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_i &= -P^{n+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - R_i \lambda_i^{n+1} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 && \text{sur } \Gamma_i, i = 1 \dots N,
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

$$P^{n+1} = \frac{1}{S} \left( m \frac{x^{n+1} - 2x^n + x^{n-1}}{\delta t^2} + kx^{n+1} - f_{ext}^{n+1} \right), \tag{6.3}$$

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\delta t} = -\frac{Q_0^{n+1}}{S}, \tag{6.4}$$

où  $Q_0^{n+1} = \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}$ .

Grâce à la relation (6.4), la pression  $P^{n+1}$  s'exprime aussi en fonction du débit comme suit

$$P^{n+1} = \frac{1}{S} \left( -m \frac{Q_0^{n+1} - Q_0^n}{S \delta t} + kx^{n+1} - f_{ext}^{n+1} \right) \tag{6.5}$$

et le schéma peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{1}{\delta t} \mathbf{u}^{n+1} - \mu \Delta \mathbf{u}^{n+1} + \nabla p^{n+1} &= \rho \frac{1}{\delta t} \mathbf{u}^n \circ X^n && \text{dans } \Omega, \\
 \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= 0 && \text{dans } \Omega, \\
 \mathbf{u}^{n+1} &= 0 && \text{sur } \Gamma_l \\
 \mathbf{u}^{n+1} &= \lambda_i^{n+1} \mathbf{U}_i && \text{sur } \Gamma_i, i = 0 \dots N, \\
 \int_{\Gamma_0} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_0 &= -P_0 \int_{\Gamma_0} \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{n} && \text{sur } \Gamma_0, \\
 \int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{U}_i &= -P^{n+1} \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} - R_i \lambda_i^{n+1} \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{n} \right)^2 && \text{sur } \Gamma_i, i = 1 \dots N,
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$P^{n+1} = \frac{1}{S} \left( -m \frac{Q_0^{n+1} - Q_0^n}{S \delta t} + kx^{n+1} - f_{ext}^{n+1} \right), \tag{6.7}$$

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\delta t} = -\frac{Q_0^{n+1}}{S}. \tag{6.8}$$

### 6.2.1 Bilan d'énergie discret

Un bilan d'énergie discret à l'ordre 1 peut être établi formellement pour le problème régulier en espace et discrétisé en temps. Les résultats présentés ici et dans la section suivante sont obtenus formellement, dans le sens qu'on a besoin de faire des hypothèses de régularité sur les approximations relatives à l'algorithme de discrétisation en temps qu'on ne pourrait pas établir sous des hypothèses générales sur les données. Ces conditions sont les suivantes

(H) : Le champ de vitesse à une régularité  $C^2$ , et la norme  $C^2$  est bornée uniformément par rapport au pas de discrétisation en temps.

On s'intéresse au problème tel qu'il a été discrétisé dans la section 6.2, et on commence par énoncer le lemme suivant qu'on démontrera en fin de section.

**Lemme 6.1.** (Bilan d'énergie cinétique)

Sous l'hypothèse (H) on a

$$\rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \circ X^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \rho \frac{1}{2} \left( \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 + \int_{\Omega} |\mathbf{u}^n|^2 \right) - \delta t \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} + O(\delta t^2).$$

On introduit les énergies associées au problème discrétisé en temps :  
l'énergie cinétique du fluide

$$E_{c,f}^n = \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u}^n|^2,$$

l'énergie cinétique de la masse

$$E_{c,m}^n = \frac{1}{2} m \left( \frac{x^{n+1} - x^n}{\delta t} \right)^2,$$

l'énergie potentielle du ressort

$$E_{p,r}^n = \frac{1}{2} k (x^n)^2,$$

et l'énergie totale

$$E_T^n = E_{c,f}^n + E_{c,m}^n + E_{p,r}^n.$$

On note de plus

$$|\mathbf{u}^n|_{\mu,R} = \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^n|^2 + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} \right)^2,$$

$$\mathcal{F}_{c,f}^n = \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n},$$

$$\mathcal{T}_{ext}^n = f_{ext} \frac{x^{n+1} - x^n}{\delta t} \text{ et } \mathcal{T}_P^n = P_0 S \frac{x^{n+1} - x^n}{\delta t}.$$

La proposition suivante est vérifiée

**Proposition 6.2.** (Bilan d'énergie)

La perte d'énergie totale pour le problème discrétisé en temps est égale au premier ordre à la somme des énergies dissipées à chaque pas de temps, du flux d'énergie cinétique et des travaux des forces extérieures et de pression, c'est à dire

$$E_T^M = E_T^0 + \sum_{n=0}^M \delta t (\tau_{ext}^n + \tau_p^n) - \sum_{n=0}^M \delta t |u^n|_{\mu,R}^2 - \sum_{n=0}^M \delta t \mathcal{F}_{c,f}^n + O(\delta t).$$

**Preuve :**

En combinant (6.8) et (6.7) on a

$$P^{n+1} = \frac{1}{S} \left( -m \frac{Q_0^{n+1} - Q_0^n}{S \delta t} + kx^{n+1} - f_{ext}^{n+1} \right). \quad (6.9)$$

Ainsi, la condition aux limites sur  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$  devient

$$\begin{aligned} \mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^{n+1} \mathbf{n} &= -R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right) \mathbf{n} \\ &\quad - \frac{1}{S} \left( -m \frac{Q_0^{n+1} - Q_0^n}{S \delta t} + kx^{n+1} - f_{ext}^{n+1} \right) \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Maintenant, on multiplie la première équation dans (6.6) par  $\mathbf{u}^{n+1}$  et on intègre par parties :

$$\rho \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 + \delta t \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 - \delta t \int_{\partial\Omega} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \circ X^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \quad (6.10)$$

L'intégrale au bord s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - p^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \\
&= -P_0 Q_0^{n+1} - \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \\
&\quad - P^{n+1} \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \\
&= -P_0 Q_0^{n+1} - \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \\
&\quad - \frac{1}{S} \left( -m \frac{Q_0^{n+1} - Q_0^n}{S \delta t} + k x^{n+1} - f_{ext}^{n+1} \right) (-Q_0^{n+1}) \\
&= -P_0 Q_0^{n+1} - \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \\
&\quad - \frac{m}{S^2 \delta t} (Q_0^{n+1} - Q_0^n) Q_0^{n+1} \\
&\quad + \frac{k}{S} x^{n+1} Q_0^{n+1} - \frac{f_{ext}^{n+1}}{S} Q_0^{n+1}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

En remplaçant dans (6.10) on obtient,

$$\begin{aligned}
&\rho \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 d + \delta t \mu \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}^{n+1}|^2 + \delta t \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right)^2 \\
&+ \frac{m}{S^2} (Q_0^{n+1} - Q_0^n) Q_0^{n+1} - \frac{\delta t k}{S} x^{n+1} Q_0^{n+1} + \frac{\delta t}{S} f_{ext}^{n+1} Q_0^{n+1} + \delta t P_0 Q_0^{n+1} \\
&= \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \circ X^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1},
\end{aligned} \tag{6.12}$$

alors

$$\begin{aligned}
&\rho \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 + \delta t |\mathbf{u}^{n+1}|_{\mu, R} + \frac{m}{S^2} (Q_0^{n+1})^2 - \frac{\delta t k}{S} x^{n+1} \left( -\frac{S(x^{n+1} - x^n)}{\delta t} \right) + \frac{\delta t}{S} f_{ext}^{n+1} Q_0^{n+1} + \delta t P_0 Q_0^{n+1} \\
&= \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \circ X^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \frac{m}{S^2} Q_0^{n+1} Q_0^n,
\end{aligned} \tag{6.13}$$

d'où

$$\begin{aligned}
&\rho \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 + \delta t |\mathbf{u}^{n+1}|_{\mu, R} + \frac{m}{S^2} (Q_0^{n+1})^2 + k(x^{n+1})^2 + \frac{\delta t}{S} f_{ext}^{n+1} Q_0^{n+1} + \delta t P_0 Q_0^{n+1} \\
&= \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \circ X^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \frac{m}{S^2} Q_0^{n+1} Q_0^n + k x^{n+1} x^n.
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Maintenant, en utilisant  $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ,

$$\begin{aligned} \rho \int_{\Omega} |\mathbf{u}^{n+1}|^2 + \frac{1}{2}m \left( \frac{Q_0^{n+1}}{S} \right)^2 + \frac{1}{2}k(x^{n+1})^2 + \delta t |u^{n+1}|_{\mu,R}^2 &\leq \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \circ X^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \\ &+ \frac{1}{2}m \left( \frac{Q_0^n}{S} \right)^2 + \frac{1}{2}k(x^n)^2 \\ &- \delta t f_{ext}^{n+1} \frac{Q_0^{n+1}}{S} - \delta t P_0 Q_0^{n+1}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

De (6.8) on tire

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m \left( \frac{Q_0^{n+1}}{S} \right)^2 &= \frac{1}{2}m \left( -\frac{x^{n+1} - x^n}{\delta t} \right)^2 \\ &= E_{c,r}^{n+1} \\ &= \text{l'énergie cinétique discrète du ressort à } t^{n+1}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

et

$$\begin{aligned} -\delta t f_{ext}^{n+1} \frac{Q_0^{n+1}}{S} &= \delta t f_{ext} \frac{x^{n+1} - x^n}{\delta t} \\ &= \delta t \tau_{ext}^{n+1} \\ &= \text{le travail discret de } f_{ext} \text{ dans } [t^n, t^{n+1}], \end{aligned} \quad (6.17)$$

et

$$\begin{aligned} -\delta t P_0 Q_0^{n+1} &= \delta t P_0 S \left( \frac{x^{n+1} - x^n}{\delta t} \right) \\ &= \delta t \tau_p^{n+1} \\ &= \text{le travail discret de la force de pression associée à } P_0 \text{ dans } [t^n, t^{n+1}]. \end{aligned} \quad (6.18)$$

En combinant, on a :

$$\begin{aligned} E_{c,f}^{n+1} + E_{c,r}^{n+1} + E_{p,s}^{n+1} &= E_{c,f}^n + E_{c,r}^n + E_{p,s}^n + \delta t (\tau_{ext}^{n+1} + \tau_p^{n+1}) \\ &- \delta t |u^{n+1}|_{\mu,R}^2 - \delta t \mathcal{F}_{c,f}^n + O(\delta t^2), \end{aligned} \quad (6.19)$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} E_T^{n+1} &= E_T^n + \delta t (\tau_{ext}^{n+1} + \tau_p^{n+1}) \\ &- \delta t |u^{n+1}|_{\mu,R}^2 - \delta t \mathcal{F}_{c,f}^n + O(\delta t^2) \end{aligned} \quad (6.20)$$

où  $\delta t \mathcal{F}_{c,f}^n = \delta t \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \frac{\rho}{2} |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n}$ .

Et, par récurrence, l'énergie discrète totale au temps  $T = M\delta t$  satisfait

$$E_T^M = E_T^0 + \sum_{n=0}^{M-1} \delta t (\tau_{ext}^n + \tau_p^n) - \sum_{n=0}^{M-1} \delta t |u^n|_{\mu,R}^2 - \sum_{n=0}^{M-1} \delta t \mathcal{F}_{c,f}^n + O(\delta t).$$

□

Dans ce qui suit on donne la preuve du lemme 6.1 :

**Preuve :**

Afin de simplifier la présentation de la preuve, on se situe dans le cas d'un domaine  $\Omega$  qui présente la forme d'un simple tube de sections  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  (voir la figure 6.1). On parle d'inspiration ou d'expiration suivant que le flux rentre ou sorte de  $\Gamma_0$ . Le problème se pose notamment lors de l'expiration, car à partir d'une certaine position  $x$  à l'instant  $t^{n+1}$ , on risque de sortir du domaine en cherchant l'information au pied de la caractéristique. On introduit alors  $\tilde{X}^n$  la position de tronquature de la caractéristique à  $\Gamma_0$  lorsqu'elle dépasse la section d'entrée (intersection avec  $\Gamma_0$ ) et on désigne par  $\tilde{\delta t}$  l'écart entre  $x$  et  $\tilde{X}^n$ . Noter que  $\tilde{\delta t}$  dépend de  $x$ . On introduit

$$L_{\delta t} = \max_{x \in \Omega \text{ tq } x - \delta t \mathbf{u}^n \notin \Omega} d(x, \Gamma_0)$$

et on décompose le domaine  $\Omega$  en la réunion des deux sous-domaines  $\Omega_{\delta t}$  et  $\Omega_{\tilde{\delta t}}$  où  $\Omega_{\tilde{\delta t}}$  est de longueur  $L_{\delta t}$ . On a

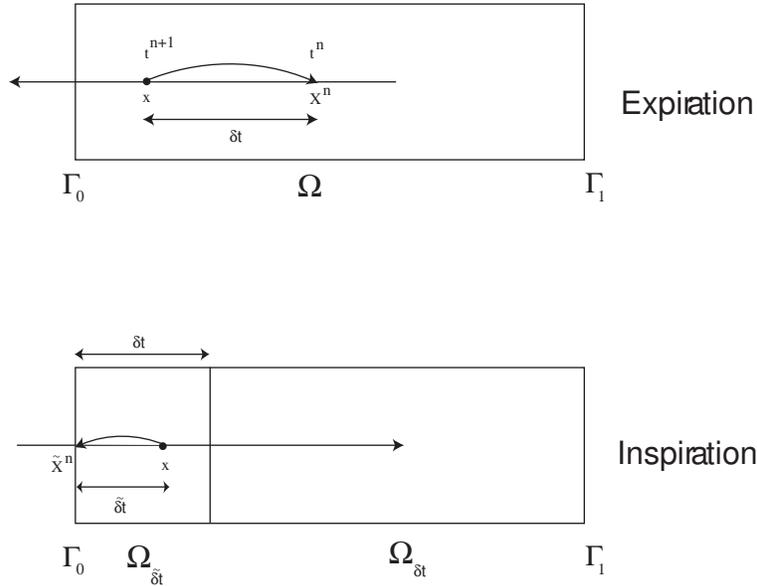


FIG. 6.1 – Caractéristiques

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \circ X^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= \int_{\Omega_{\delta t}} \mathbf{u}^n \circ X^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \int_{\Omega_{\tilde{\delta t}}} \mathbf{u}^n \circ \tilde{X}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} \\ &= \int_{\Omega_{\delta t}} \mathbf{u}^n(x - \delta t \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \int_{\Omega_{\tilde{\delta t}}} \mathbf{u}^n(x - \tilde{\delta t} \mathbf{u}^n) \cdot \mathbf{u}^{n+1}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

En développant, on a

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^n \circ X^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \int_{\Omega_{\delta t}} (\mathbf{u}^n - \delta t \nabla \mathbf{u}^n \mathbf{u}^n + O(\delta t^2)) \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \int_{\Omega_{\tilde{\delta t}}} (\mathbf{u}^n - \tilde{\delta t} \nabla \mathbf{u}^n \mathbf{u}^n + O(\tilde{\delta t}^2)) \cdot \mathbf{u}^{n+1}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \circ X^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= \int_{\Omega_{\delta t}} (\mathbf{u}^n - \delta t \nabla \mathbf{u}^n \mathbf{u}^n + O(\delta t^2)) \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \int_{\Omega_{\tilde{\delta t}}} (\mathbf{u}^n - \delta t \nabla \mathbf{u}^n \mathbf{u}^n + O(\tilde{\delta t}^2)) \cdot \mathbf{u}^{n+1} \\
 &+ \int_{\Omega_{\tilde{\delta t}}} (\delta t - \tilde{\delta t}) \nabla \mathbf{u}^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \delta t \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} + (\delta t - \tilde{\delta t}) \int_{\Omega_{\tilde{\delta t}}} \nabla \mathbf{u}^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} + O(\delta t^2).
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

Sous l'hypothèse (H) et puisqu'on intègre sur un petit domaine d'épaisseur  $\delta t$ , on a

$$\int_{\Omega_{\tilde{\delta t}}} \nabla \mathbf{u}^n \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} = O(\delta t),$$

alors

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^n \circ X^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \delta t \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} + O(\delta t^2).$$

Par ailleurs, comme  $\nabla \cdot \mathbf{u}^n = 0$ , une intégration par parties montre que

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^n = - \int_{\Omega} \frac{|\mathbf{u}^n|^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{u}^n + \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} \frac{|\mathbf{u}^n|^2}{2} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n},$$

et alors

$$\delta t \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^n - \delta t \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} = 0.$$

En rajoutant ce terme à (6.21) on a

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \circ X^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} - \delta t \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \\
 &\delta t \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^n - \delta t \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} + O(\delta t^2) \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} + \delta t \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n+1}) + \\
 &- \delta t \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} + O(\delta t^2).
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Dans la formulation variationnelle du problème (6.6) (6.7) (6.8), lorsqu'on choisit  $\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n$  comme fonction test, et sous l'hypothèse (H), on a  $\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)} = O(\delta t)$ . Ensuite, en utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \cdot (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n+1}) \leq C \delta t,$$

et alors

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}^n \circ X^n \cdot \mathbf{u}^{n+1} = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \delta t \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} |\mathbf{u}^n|^2 \mathbf{u}^n \cdot \mathbf{n} + O(\delta t^2). \quad (6.24)$$

□

### 6.2.2 Formulation variationnelle semi-discrétisée

Dans cette section on présente la formulation variationnelle des équations (6.6) (6.7) (6.8). Soit  $\tilde{\mathbf{u}} \in Z = \{\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega), \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_i} = 0, \exists \tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_i)_{0 \leq i \leq N}, \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\lambda}_i \mathbf{U}_i \text{ sur } \Gamma_i, i = 0, \dots, N\}$ . On multiplie la première équation dans (6.6) par  $\tilde{\mathbf{u}}$  et on intègre par parties :

$$\rho \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \delta t \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} + \delta t \int_{\Omega} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{p}^{n+1} - \delta t \int_{\partial\Omega} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} = \rho \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \circ X^n) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \quad (6.25)$$

L'intégrale au bord dans (6.25) peut être développée en utilisant (6.7)-(6.9) :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= \sum_{i=0}^N \int_{\Gamma_i} (\mu \nabla \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}^{n+1} \mathbf{n}) \cdot \tilde{\mathbf{u}} \\ &= - \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) - P_0 \int_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \\ &\quad - P^{n+1} \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \\ &= - \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) - P_0 \int_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \\ &\quad - \frac{1}{S} \left( -m \frac{Q_0^{n+1} - Q_0^n}{S \delta t} + kx^{n+1} - f_{ext}^{n+1} \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right). \end{aligned} \quad (6.26)$$

Par ailleurs, soit  $q \in L^2(\Omega)$ . On multiplie la deuxième équation dans (6.6) par  $q$  et on obtient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} q = 0.$$

Cette équation doit être vérifiée pour tout  $q \in L^2(\Omega)$ , en particulier  $q = 1$ . En appliquant alors la formule de Green dans ce cas, on a

$$Q_0^{n+1} = \int_{\Gamma_0} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} = - \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n}.$$

En prenant en compte cette égalité et le fait que

$$x^{n+1} = x^n - \frac{\delta t}{S} Q_0^{n+1},$$

et en remplaçant dans (6.25) on a

$$\begin{aligned}
 & \frac{\rho}{\delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \\
 & + \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) + \frac{1}{S^2} \left( \frac{m}{\delta t} + k\delta t \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \\
 & = \frac{\rho}{\delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \circ X^n) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - P_0 \int_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \left( \frac{m}{\delta t S^2} Q_0^n + \frac{k}{S} x^n - \frac{f_{ext}^{n+1}}{S} \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right).
 \end{aligned} \tag{6.27}$$

Ainsi, étant donnés  $x^n$ ,  $Q_0^n$ ,  $f_{ext}^{n+1}$ , il s'agit de résoudre à chaque instant  $t^{n+1}$  la formulation variationnelle mixte du problème semi-discrétisé implicite suivante : trouver, pour  $n \geq 0$ ,  $\mathbf{u}^{n+1} \in Z = \{\tilde{\mathbf{u}} \in H^1(\Omega), \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma_i} = 0, \exists \tilde{\Lambda} = (\tilde{\lambda}_i)_{0 \leq i \leq N}, \tilde{\mathbf{u}} = \tilde{\lambda}_i \mathbf{U}_i \text{ sur } \Gamma_i, i = 0, \dots, N\}$  et  $p^{n+1} \in L^2(\Omega)$  tels que,

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{u}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}) + b(\tilde{\mathbf{u}}, p^{n+1}) &= l^{n+1}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in Z, \\
 b(\mathbf{u}^{n+1}, q) &= 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega),
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

où

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{u}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}) &= \frac{\rho}{\delta t} \int_{\Omega} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \tilde{\mathbf{u}} + \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}^{n+1} : \nabla \tilde{\mathbf{u}} \\
 &+ \sum_{i=1}^N R_i \left( \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right) \\
 &+ \frac{1}{S^2} \left( \frac{m}{\delta t} + k\delta t \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mathbf{u}^{n+1} \cdot \mathbf{n} \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right),
 \end{aligned} \tag{6.29}$$

et

$$l^{n+1}(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{\rho}{\delta t} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^n \circ X^n) \cdot \tilde{\mathbf{u}} - P_0 \int_{\Gamma_0} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} - \left( \frac{m}{\delta t S^2} Q_0^n + \frac{k}{S} x^n - \frac{f_{ext}^{n+1}}{S} \right) \left( \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \right),$$

et

$$b(\mathbf{u}^{n+1}, q) = - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} q.$$

Ainsi, étant données une position et une vitesse initiale du piston  $x^0, \dot{x}^0$ , l'algorithme s'écrit en deux temps

– trouver, pour  $n \geq 0$ ,  $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in (Z \times L^2(\Omega))$  tel que,

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{u}^{n+1}, \tilde{\mathbf{u}}) + b(\tilde{\mathbf{u}}, p^{n+1}) &= l^{n+1}(\tilde{\mathbf{u}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in Z \\
 b(\mathbf{u}^{n+1}, q) &= 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega),
 \end{aligned}$$

– récupérer la valeur de  $Q_0^{n+1}$  et mettre à jour  $x^{n+1}$  par la relation

$$x^{n+1} = x^n - \frac{\delta t}{S} Q_0^{n+1}.$$

## 6.3 Tests numériques

Une particularité de la forme bilinéaire (6.29) est qu'elle couple toutes les sorties  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , ce qui n'est pas le cas par exemple dans [49] [52] où une modélisation multiéchelle analogue est utilisée pour la simulation des écoulements sanguins. L'implémentation numérique de la formulation (6.28) est réalisée avec Freefem++ [20] suivant le procédé décrit dans le chapitre 3.

### 6.3.1 Le couplage 2D/3D

On présente ici des tests numériques où des simulations directes des équations de Navier-Stokes sont réalisées sur un domaine bi-dimensionnel. Du point de vue de la modélisation, cette approche est critiquable, puisque l'arbre supérieur 2D ne peut pas reproduire toutes les propriétés de l'écoulement dans un arbre réel 3D. Toutefois, on a essayé de respecter autant que possible les propriétés mécaniques de l'arbre respiratoire humain. Des simulations dans un arbre tri-dimensionnel sont l'objet d'un futur travail avec L. Baffico <sup>4</sup>.

L'idée principale consiste à construire un arbre 2D équivalent à l'arbre 3D tel que les deux conditions suivantes soient satisfaites : les deux arbres ont la même résistance globale et l'arbre 2D reproduit la répartition des résistances de l'arbre 3D.

On se donne un arbre géométrique 3D à  $G$  générations dont les longueurs et les diamètres évoluent d'une génération à la suivante avec un rapport d'homothétie  $\lambda^{3D}$  :

$$\begin{aligned} l_{i+1} &= \lambda^{3D} l_i \quad i = 1, \dots, G, \\ d_{i+1} &= \lambda^{3D} d_i \quad i = 1, \dots, G, \end{aligned}$$

avec  $l_1 = 0.12m$  et  $d_1 = 0.018m$ , la génération 1 étant la trachée (voir les données de Weibel à l'annexe A).

On suppose la résistance  $R_i^{3D} = \frac{128\mu^{3D}l_i}{\pi d_i^4}$  d'une branche, constante par génération, la résistance équivalente  $R^{3D}$  s'écrit alors

$$R^{3D} = \sum_{i=1}^G \frac{R_i^{3D}}{2^{i-1}} = R_1^{3D} \sum_{i=1}^G \frac{1}{(2(\lambda^{3D})^3)^{i-1}}.$$

On se propose de construire un arbre 2D tel que l'écoulement à travers cet arbre reproduise les propriétés mécaniques de l'écoulement à travers l'arbre 3D décrit ci-dessus. On suppose également que les dimensions de l'arbre 2D évoluent avec un rapport d'homothétie  $\lambda^{2D}$  à partir d'un premier tube de dimension  $l_1 = 0.12m$  et  $d_1 = 0.018m$ . On a

$$R^{2D} = \sum_{i=1}^G \frac{R_i^{2D}}{2^{i-1}} = R_1^{2D} \sum_{i=1}^G \frac{1}{(2(\lambda^{2D})^2)^{i-1}},$$

<sup>4</sup>Laboratoire Nicolas Oresme, Université de Caen.

avec  $R_i^{2D} = \frac{12\mu^{2D}l_i}{d_i^3}$ . Afin que l'arbre 2D reproduire la répartition des résistances de l'arbre 3D, on pose

$$\lambda^{2D} = (\lambda^{3D})^{\frac{3}{2}}.$$

Sous l'hypothèse d'un écoulement de Stokes et grâce à la loi de Poiseuille, si on applique un même gradient de pression au bout des deux arbres 2D et 3D, et afin d'avoir un même débit lors du passage d'un arbre 3D à son représentant 2D, il faut que

$$R^{2D} = R^{3D}.$$

Comme  $\lambda^{2D} = (\lambda^{3D})^{\frac{3}{2}}$ , il suffit de se restreindre à l'égalité

$$R_1^{2D} = R_1^{3D},$$

ce qui est vérifié en posant

$$\mu^{2D} = \frac{32\mu^{3D}}{3\pi d_1},$$

où  $\mu^{3D} = 2 \cdot 10^{-5}$ .

Finalement, la densité est calée de manière à obtenir le nombre de Reynolds désiré.

### 6.3.2 Les paramètres

On considère les données suivantes

- $m$  : masse du piston, évaluée de manière à correspondre à la masse des poumons.
- $x$  : correspond aux déplacements du piston par rapport à la position d'équilibre au repos.  $x$  correspond à l'amplitude des mouvements du diaphragme et de la cage thoracique.
- $k$  : constante de raideur. Ce paramètre correspond à l'ensemble des forces de rappel qui interviennent lors d'une expiration non forcé pour ramener le diaphragme à sa position au repos.
- $S$  : aire du piston évaluée de manière à correspondre à la surface sur laquelle s'exerce la pression parenchymale, et telle que la quantité  $Sx_{max}$  soit de l'ordre de grandeur du volume d'air inspiré.
- $f_{ext}$  : terme de forçage extérieur qui correspond aux forces musculaires de la cage thoracique et notamment du diaphragme qui induisent l'inspiration.

On prend

$$m = 0.4, \quad S = 0.011, \quad k = 2, \quad f_{ext} = 0.1, \quad \mu = 4 \cdot 10^{-3}, \quad \rho = 50,$$

le choix de  $\rho$  correspond à un nombre de Reynolds de 500.

Le paramètre  $k$  est estimé indirectement comme suit, grâce à l'argument énergétique suivant : la variation de l'énergie entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  est égale au travail de la force entre ces deux instants. On choisit  $t_1$  et  $t_2$  le début et la fin d'une expiration, d'où

$$E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} pS\mathbf{u} = \int_{t_1}^{t_2} pQ_0 = \int_{t_1}^{t_2} RQ_0^2 = \frac{RV^2}{(t_2 - t_1)},$$

où  $V$  est le volume d'air mis en jeu et où  $R$  est la résistance équivalente à tout l'arbre,  $R = 1.8 \cdot 10^4$  d'après les données de Weibel (voir l'annexe A).

Par ailleurs  $E(t_2) - E(t_1) = \frac{1}{2} k x_{max}^2$ , d'où

$$k = \frac{2RV^2}{(t_2 - t_1)x_{max}^2},$$

alors  $k \approx 2 \text{ Nm}^{-1}$ .

Tous les tests présentés dans ce chapitre ont été réalisés avec le maillage représenté dans les figures 6.2 et 6.3.

### 6.3.3 Les tests

#### Cycle respiratoire : poumons sains et simulation d'asthme

Dans un premier temps on réalise un test numérique avec les conditions initiales  $x \neq 0$ ,  $\dot{x} = 0$  et avec  $f_{ext} = 0$ . On représente le déplacement  $x$  en fonction du temps. On observe sur la figure 6.4 que l'on est dans un cas l'amortissement pur et que le piston lâché à partir d'une position initiale distincte de la position de repos retrouve, en l'absence du terme de forçage sa position au repos sous l'effet des forces de rappel élastiques avec un temps de relaxation inférieur à  $2s$ .

En partant des observations faites sur ce premier test, on réalise un second test numérique simulant un cycle respiratoire, en modifiant la forme du terme de forçage. Les conditions initiales sont  $x = \dot{x} = 0$ . Le forçage  $f_{ext}$  est périodique de période  $5s$ , en créneau, avec une phase d'inspiration de  $2s$  durant laquelle  $f_{ext} = 0.1$  suivie d'une phase d'expiration passive de  $3s$  durant laquelle se terme est nul. On représente sur la figure 6.5 le déplacement  $x$  en fonction du temps. En phase inspiratoire le piston s'écarte de sa position au repos sous l'effet des forces musculaires et emmagasine de l'énergie cinétique au cours de son déplacement, ainsi lorsqu'on annule le terme de forçage en phase expiratoire le piston retrouve sa position au repos sous l'effets des forces de rappel élastiques.

Deux situations sont considérées : dans la situation I, les 8 sous arbres issus des  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , sont identiques, et chaque sous arbre est symétrique, c'est à dire que les résistances sont les mêmes dans chaque génération. La seconde situation est une perturbation de la première : l'une des résistances du sous arbre issu de  $\Gamma_5$  (voir figure 6.7) est multipliée par  $10^4$ , ce qui correspond à une bronche dont le diamètre est divisé par un facteur 10 et donc dont la lumière est quasiment obstruée.<sup>5</sup> Comme prévu, l'augmentation de la

<sup>5</sup>Chez les personnes tabagiques, le tabac paralyse les cils respiratoires causant d'une part une diminution de l'épuration de l'air entrant et d'autre part une stagnation du mucus, à l'origine d'une augmentation des résistances à l'écoulement de l'air.

La mucoviscidose est une maladie génétique, caractérisée par une mutation à l'origine d'un déséquilibre hydro-ionique qui fait que le mucus sécrété est trop visqueux, entraînant chez les enfants de grandes difficultés respiratoires suite à l'augmentation des résistances à l'écoulement à l'air.

Les difficultés respiratoires dues à l'augmentation des résistances sont bien illustrées au cours d'une crise d'asthme où trois mécanismes interfèrent : le bronchospasme, dû à la contraction des muscles lisses des bronches et entraînant une diminution de leurs diamètres, l'accumulation des mucus secondaire à la sécrétion de façon accrue par les cellules mucipares, et l'oedème de la paroi bronchique résultant de phénomènes inflammatoires. Le débit aérien est alors profondément altéré.

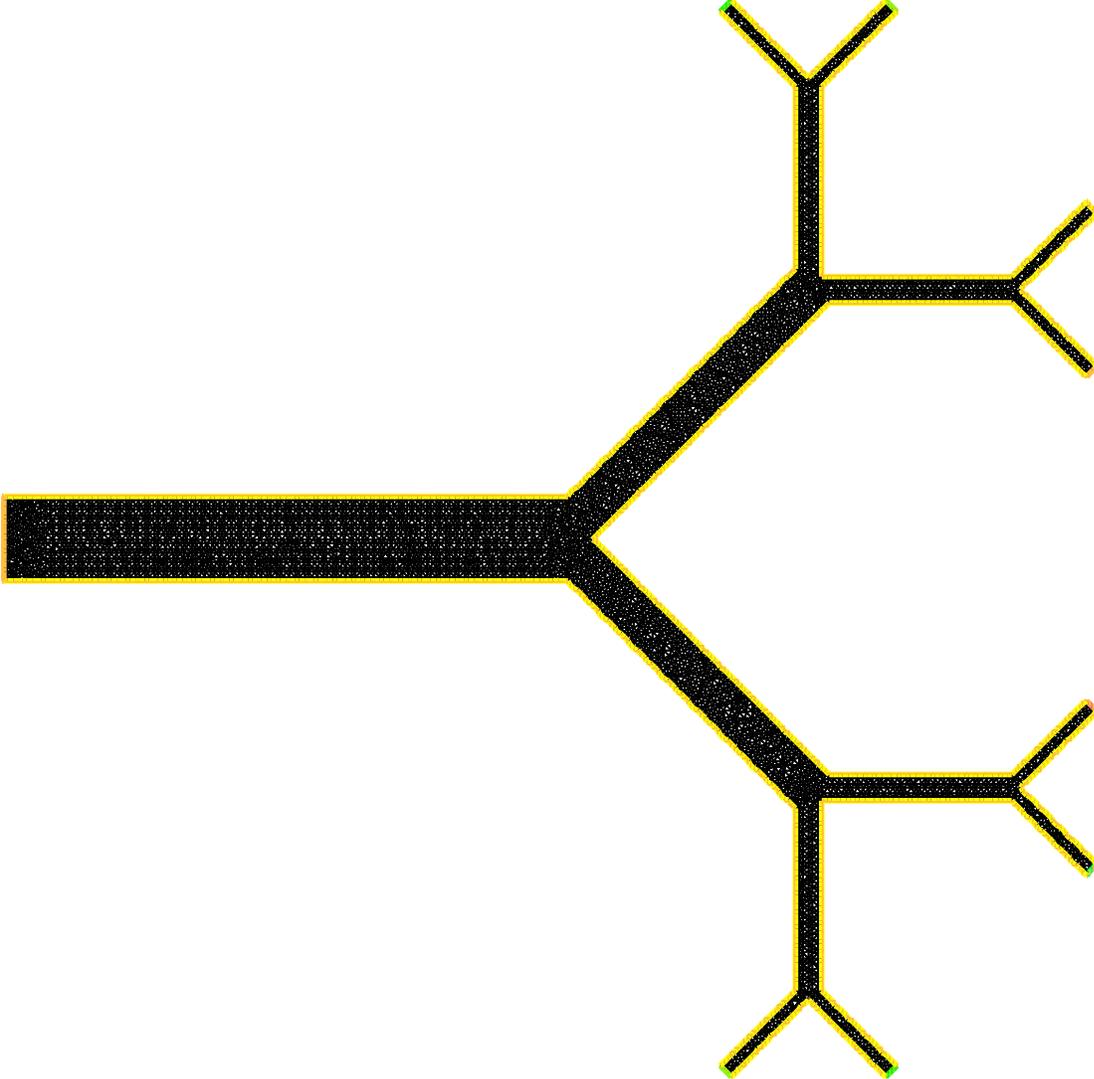
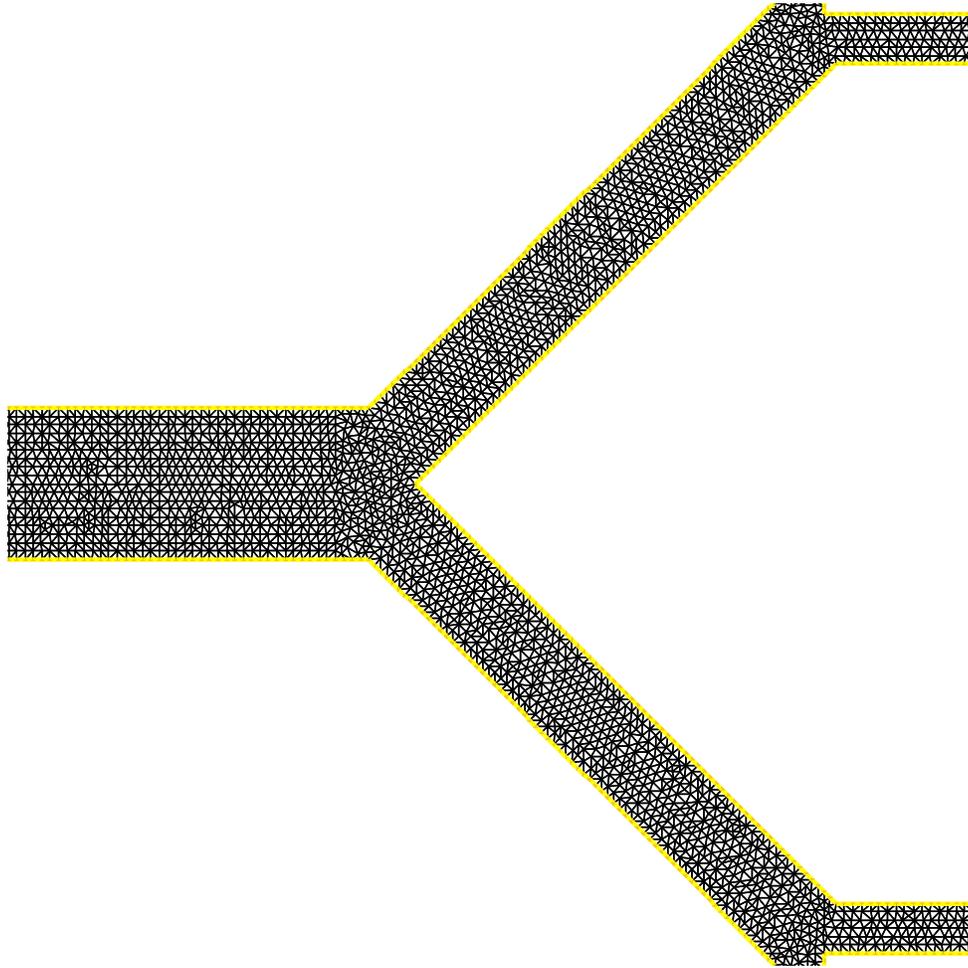
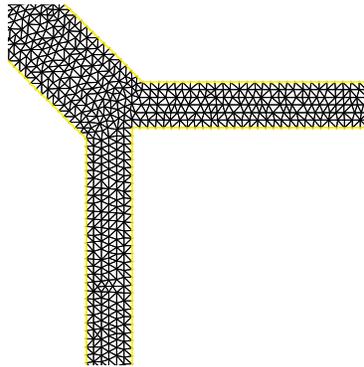


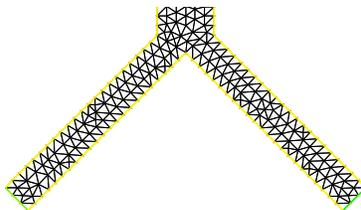
FIG. 6.2 – Maillage de la partie supérieure de l'arbre



(a)



(b)



(c)

FIG. 6.3 – Zooms sur le maillage des bifurcations

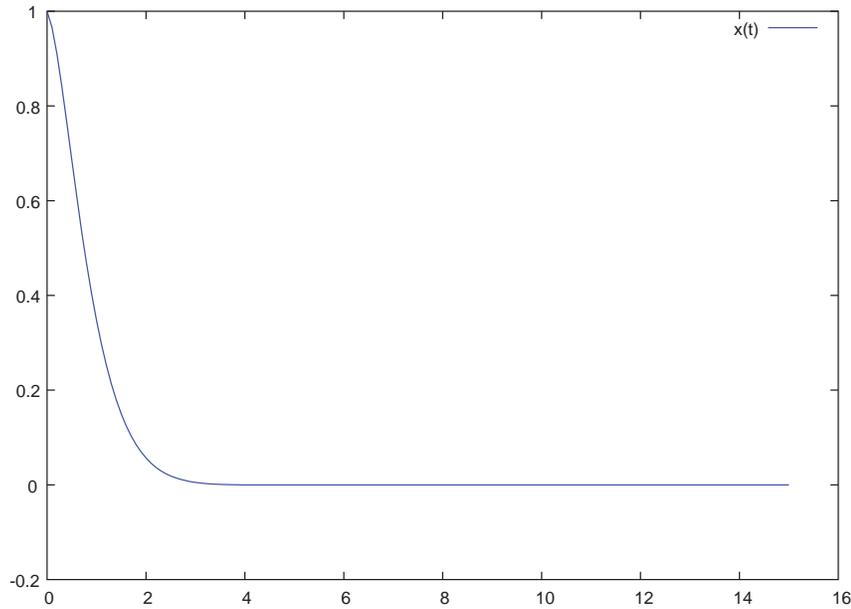


FIG. 6.4 – Cas sans terme de forçage

résistance conduit à une réduction de l'amplitude de ventilation. On représente dans la figure 6.6 les débits à travers les 8 sorties à un instant donné de la phase inspiratoire. La ligne continue horizontale correspond à la situation I : tous les débits sont identiques. La fonction en escalier correspond à la situation II : on peut vérifier que le débit global est réduit dans la situation perturbée, que le débit à travers toutes les sections a augmenté excepté à travers la sortie 5, où il est remarquablement moins important. Noter que la perturbation affecte d'une manière significative la sortie 6, et affecte moins la sortie 4. Ceci est dû au fait que les sorties 5 et 6 sont deux sorties voisines, alors que 5 et 4 ne le sont pas. Voir également la figure 6.8 pour le champ de pression dans le cas de la situation II.

### Expiration forcée

L'expiration forcée est utilisée en spirométrie pour apprécier les volumes d'air mobilisés et aider à distinguer les pathologies obstructives qui se traduisent par un rétrécissement du calibre des bronches qui freine le passages de l'air, tels que la bronchite chronique et l'emphysème, et les pathologies restrictives qui se traduisent par une diminution de la capacité pulmonaire, telles que la fibrose ou la destruction du tissu pulmonaire due par exemple à des séquelles de tuberculose. Dans ce contexte notre modèle peut simuler une expiration forcée, en modifiant lors de la phase expiratoire passive le terme de forçage  $f_{ext}$  en créneau, en choisissant une valeur constante négative pour ce terme lors des 3s d'expiration au lieu de l'annuler. Ainsi, l'expiration rendue active fait intervenir les forces musculaires et notamment le diaphragme pour chasser l'air. On représente sur la figure 6.9 le débit au niveau de la trachée en fonction du temps dans le cas d'une respiration normale

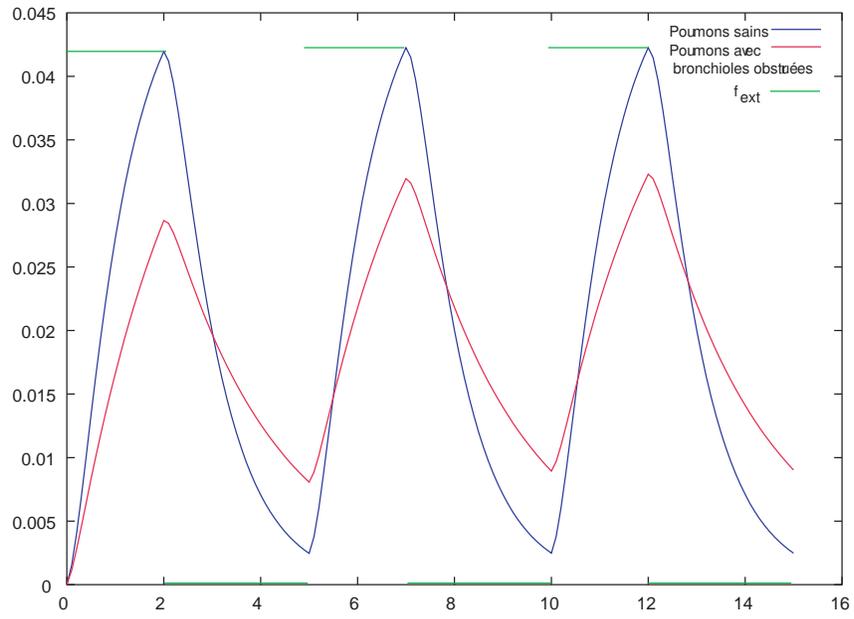


FIG. 6.5 – Simulation d'un cycle respiratoire

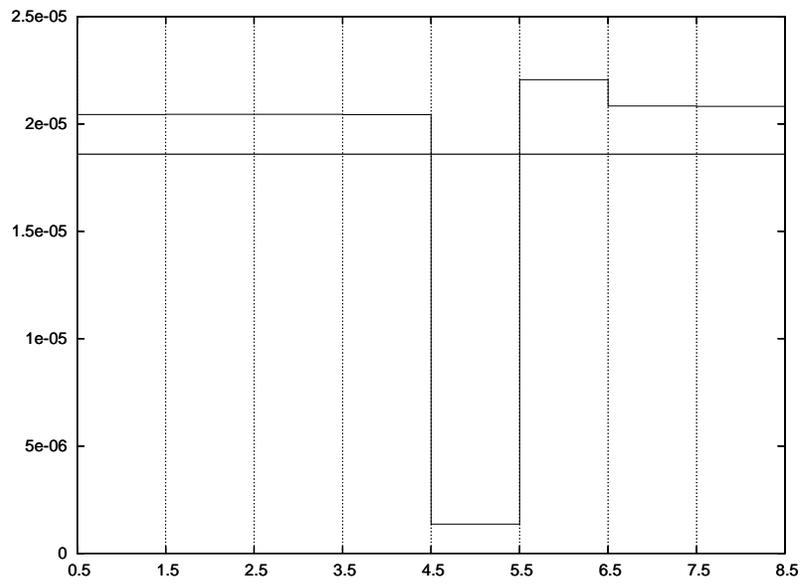


FIG. 6.6 – Comparaison des débits

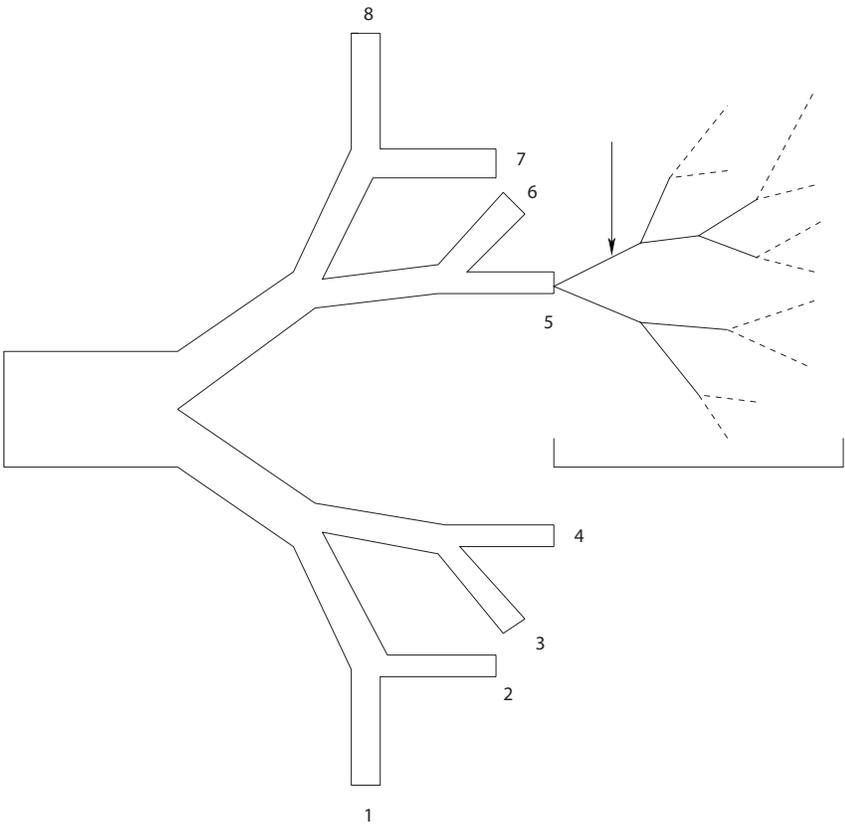


FIG. 6.7 – Perturbation des résistances

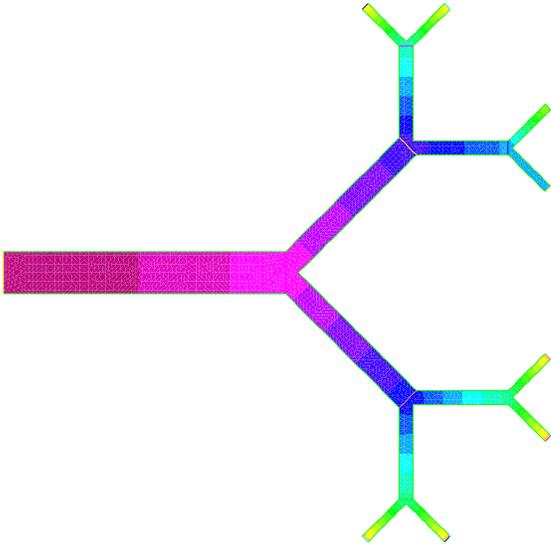


FIG. 6.8 – Champs de pression dans la situation II

où l'expiration est passive et dans le cas d'une inspiration normale suivie d'une expiration forcée ; comme prévu, on observe dans ce cas une augmentation du débit pendant la phase d'expiration forcée.

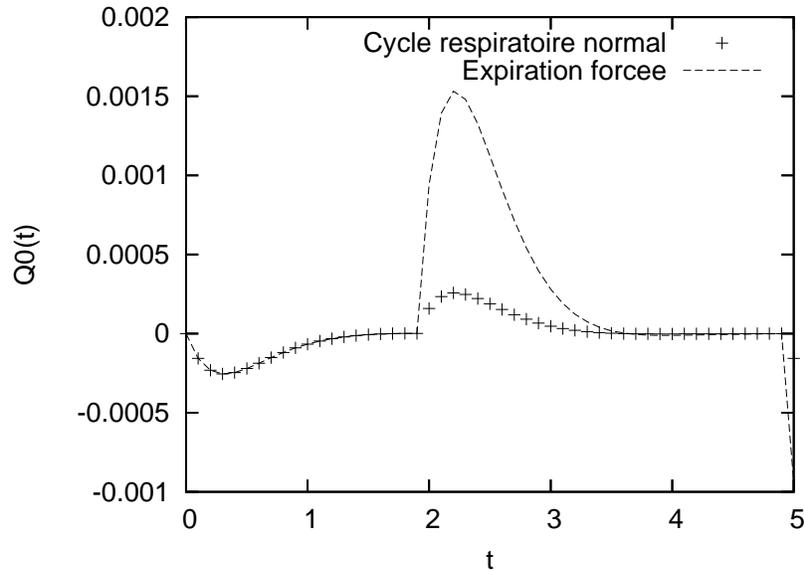


FIG. 6.9 – Expiration forcée

### Prise en compte des effets inertiels

Le test numérique réalisé dans cette section permet de mettre en évidence les différences des natures de l'écoulement entre les parties proximale et distale de l'arbre bronchique et notamment la présence des effets inertiels dans la partie supérieure de l'arbre, et de souligner la non symétrie des phénomènes inspiratoire et expiratoire. La géométrie considérée est une bifurcation 2D en forme de Y où le diamètre de la bronche mère est noté  $d_0$  tandis que les deux bronches filles ont un même diamètre  $d_1$ , et on suppose que les diamètres évoluent avec un rapport d'homothétie  $h$

$$d_1 = hd_0.$$

Deux catégories de tests bidimensionnels sont réalisées pour deux géométries différentes, suivant la valeur du rapport d'homothétie  $h$  des générations et ceci par rapport à la valeur critique  $h = 0.5$  solution de  $d_0 = 2hd_0$ .

Le raisonnement analogue en 3D se ferait autour de la valeur du rapport d'homothétie  $h = 0.7$  solution de  $S_0 = 2h^2S_0$ , où  $S_0$ ,  $S_1$  sont dans ce cas les surfaces des sections d'entrée et de sortie respectivement, avec  $S_1 = 2h^2S_0$ . En effet, pour un arbre bronchique humain, et d'après le modèle de Weibel (voir l'annexe A), la valeur  $h = 0.67$ , moyenne des rapports d'homothétie des quatre premières générations de l'arbre, est représentative de la partie proximale de l'arbre où il y a présence d'effets inertiels et qui est le siège

des simulations directes des équations de Navier-Stokes, tandis que  $h = 0.85$  représente la partie distale de l'arbre [39].

Pour les deux géométries, l'angle de la bifurcations entre les deux bronches filles est droit et le rapport longueur/diamètre d'une bronche est de 3 [39].

Comme on dispose des données géométriques sur les bifurcations on peut calculer leurs résistance équivalente globale comme détaillé dans le chapitre 3, on note  $R$  cette résistance. Par ailleurs, on résout dans les géométries représentées dans la figure 6.10 les équations de Navier-Stokes avec conditions d'entrée et de sorties libres, aussi bien en inspiration qu'en expiration. On désigne par  $Q_0$  le débit au niveau de la bronche mère et par  $\nabla p$  le gradient de pression appliqué de part et d'autre de la bifurcation. On fait varier le nombre de Reynolds et on représente dans la figure 6.11 l'évolution du rapport

$$\left| \frac{\nabla p}{Q_0} \right| R^{-1}$$

en fonction du Log du nombre de Reynolds.

Pour les bas nombres de Reynolds on observe que le rapport est proche de 1. Cette différence s'explique par la singularité géométrique concernant les zones de jonction des bifurcations qui n'ont pas été prises en compte lors du calcul de la résistance globale équivalente  $R$ . Pour les nombres de Reynolds élevés la valeur du rapport augmente en raison de la présence des effets inertiels qui s'ajoutent à la singularité géométrique. Dans ce cas on observe également une différence entre l'inspiration et l'expiration suivant que  $h < 0.5$  ou  $h > 0.5$ . En effet, dans le cas  $h < 0.5$  le rapport est plus important en inspiration qu'en expiration, et ceci s'explique par le fait que dans ce cas la section cumulée diminue d'une génération à une autre et donc en inspiration l'écoulement passe par un rétrécissement qui oppose une résistance à l'écoulement alors qu'en expiration il passe par un élargissement et la résistance à l'écoulement est moins importante. Le cas  $h > 0.5$  correspond à une bifurcation où la section cumulée augmente et le rapport est plus important en expiration qu'en inspiration (voir la figure 6.12 pour une représentation schématique).

## 6.4 Conclusion

Dans le modèle que nous proposons le comportement élastique du poumon est décrit par un seul degré de liberté. Toutefois, son principal intérêt est la condition aux limites dissipatives qui réduit les simulations directes des équations de Navier-Stokes aux premières générations de l'arbre bronchique tout en tenant compte d'une manière intégrée de l'écoulement dans le reste de l'arbre. De plus, ce modèle présente un large éventail de paramètres de contrôle tels que  $m$ ,  $k$ ,  $S$ ,  $f_{ext}$  et les résistances  $R_i$  dont la modification permet la simulation de pathologies telles que l'asthme ou l'emphysème. Finalement, des tests numériques dans une géométrie tridimensionnelles basée sur imagerie médicale est la perspective de travaux futurs.

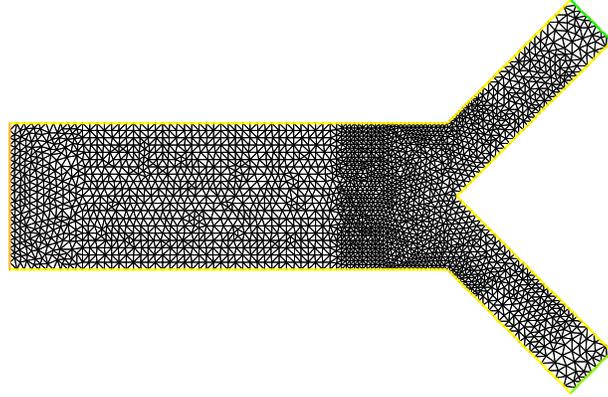
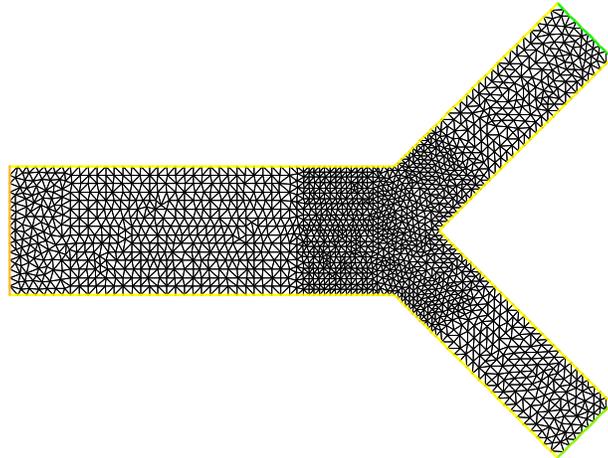
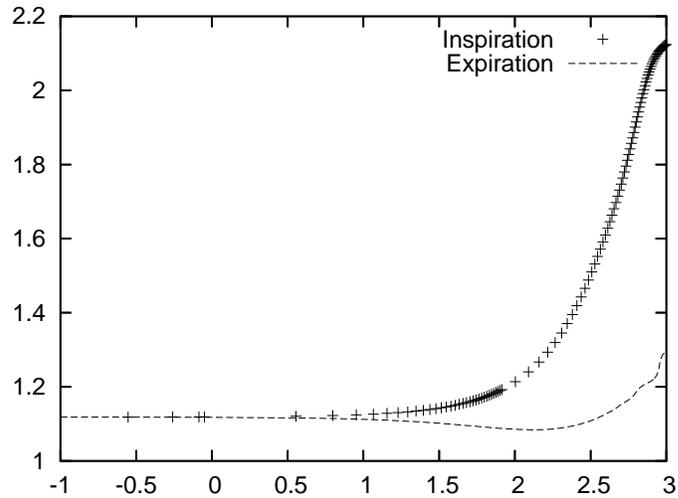
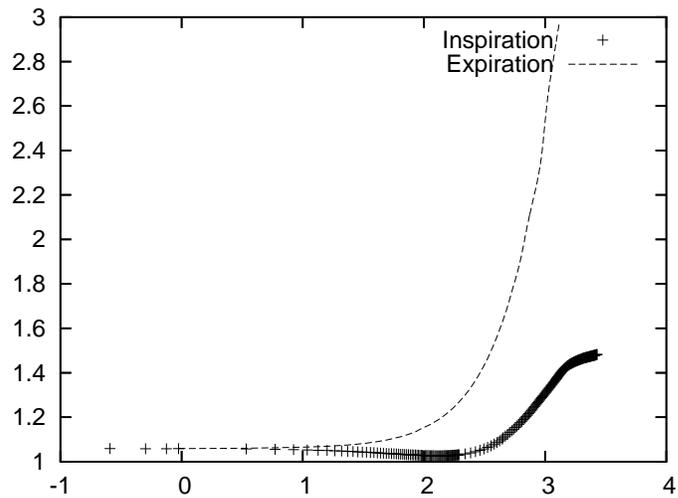
(a) Cas  $h < 0.5$ (b) Cas  $h > 0.5$ 

FIG. 6.10 – Maillages



(a)  $|\frac{\nabla p}{Q_0}|R^{-1}$  en fonction de  $\text{Log}(Re)$  pour  $h < 0.5$



(b)  $|\frac{\nabla p}{Q_0}|R^{-1}$  en fonction de  $\text{Log}(Re)$  pour  $h > 0.5$

FIG. 6.11 – Prise en compte des effets inertiels

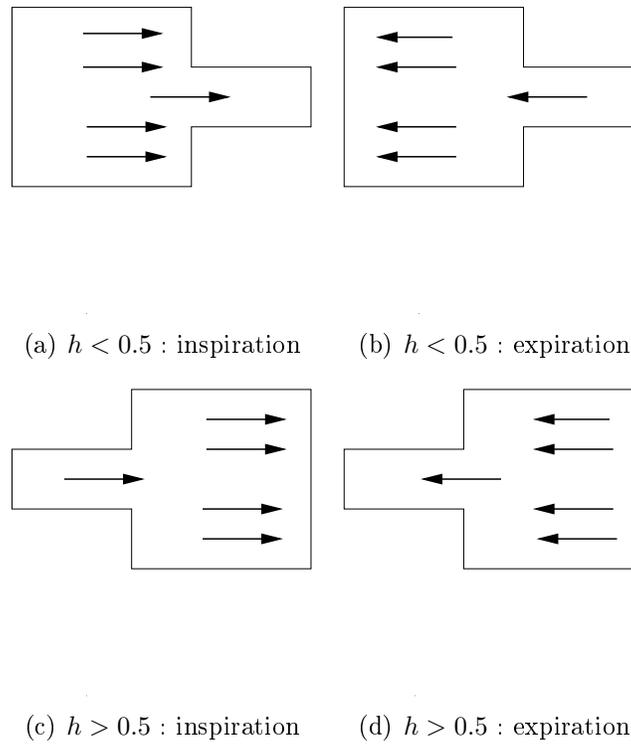


FIG. 6.12 – Représentation schématique de l'écoulement dans la bifurcation en fonction du rapport d'homothétie  $h$  et de la ventilation



# Annexes



# Annexe A

## Le modèle de Weibel



Génération	Nombre de branches	Diamètre (mm)	Longueur (mm)	Surface de la section totale des voies aériennes (cm <sup>2</sup> )
0	1	18	12.0	2.54
1	2	12.2	4.76	2.33
2	4	8.3	1.90	2.13
3	8	5.6	0.76	2.00
4	16	4.5	1.27	2.48
5	32	3.5	1.07	3.11
6	64	2.8	0.90	3.96
7	128	2.3	0.76	5.10
8	256	1.86	0.64	6.95
9	512	1.54	0.54	9.56
10	1024	1.30	0.46	13.4
11	2048	1.09	0.39	19.6
12	4096	0.95	0.33	28.8
13	8192	0.82	0.27	44.5
14	16384	0.74	0.16	69.4
15	32768	0.50	0.133	117.0
16	65536	0.49	0.112	225.0
17	131072	0.40	0.093	300.0
18	262144	0.38	0.083	543.0
19	524288	0.36	0.070	978.0
20	1048576	0.34	0.070	1743.0
21	2097152	0.31	0.070	2733.0
22	4194304	0.29	0.067	5070.0
23	8388608	0.25	0.075	7530.0

TAB. A.1 – Données de Weibel [54]



# Annexe B

## L'écoulement de Poiseuille

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Écoulement de Poiseuille . . . . .</b>	<b>163</b>
B.1.1	Écoulement de Poiseuille tridimensionnel . . . . .	163
B.1.2	Écoulement de Poiseuille bidimensionnel . . . . .	165

---



## B.1 Écoulement de Poiseuille

L'écoulement dans un tube de section circulaire est très fréquemment utilisé pour l'acheminement des fluides, depuis les tuyaux de chauffage central, les réseaux de distribution d'eau, jusqu'aux vaisseaux sanguins. Dans notre cas, cet écoulement est particulièrement adapté dans la partie distale de l'arbre bronchique, partie destinée à être condensée et dont le comportement sera synthétisé via la condition aux limites dissipative. Rappelons, comme précisé plus haut, que dans cette région de l'arbre qui s'étend à partir d'environ la 6<sup>ème</sup> génération, le flux  $y$  circulant peut-être considéré comme non-inertiel. Sous ces hypothèses de régime lent, dans des conduits de petits diamètres, il est possible d'obtenir simplement le profil de vitesse et le champ de pression comme solutions explicites des équations de Stokes.

### B.1.1 Écoulement de Poiseuille tridimensionnel

On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible, en l'absence de forces de masse, à travers un cylindre  $]0, L[ \times S$ , où  $S$  est une section circulaire de rayon  $r$ . On vérifiera qu'il existe une solution telle que la pression est constante dans chaque section du tube, et la vitesse est invariante par translation le long de la direction génératrice du cylindre (c'est à dire l'axe  $x$  dans notre cas, voir figure B.1).



FIG. B.1 – Le domaine

On considère le système de Stokes

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } ]0, L[ \times \partial S. \end{array} \right.$$

En prenant en compte l'expression de  $\mathbf{u}$  sous la forme  $\mathbf{u} = u_x \mathbf{e}_x + u_y \mathbf{e}_y + u_z \mathbf{e}_z$ , où  $\mathbf{e}_x = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{e}_y = (0, 1, 0)$  et  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ , et l'hypothèse suivant laquelle

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0$ , puisqu'on cherche une solution invariante suivant  $x$ , le système se réécrit

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ -\mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ -\mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } ]0, L[ \times \partial S. \end{array} \right. \quad (\text{B.1})$$

Sous l'hypothèse d'une solution suffisamment régulière, en dérivant par rapport à  $x$  la deuxième et troisième équation de (B.1) on obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y \partial x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial x} = 0.$$

Comme  $\mathbf{u}_x$  ne dépend pas de  $x$ , il s'en suit qu'il existe une constante  $\alpha \in \mathbb{R}$  telle que

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \alpha \quad \text{et} \quad -\mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial z^2} \right) = -\alpha.$$

Ainsi,

$$p = \alpha x + P(y, z).$$

Si on désigne par  $P_0$  la pression en  $x = 0$  et par  $P_1$  celle en  $x = L$ , on obtient

$$P(y, z) = P_0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{-(P_0 - P_1)}{L}$$

et donc l'expression explicite du champ de pression est

$$p = \frac{-(P_0 - P_1)}{L} x + P_0$$

Le système (B.1) se ramène à présent à

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial z^2} \right) = -\alpha \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ -\mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_y}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ -\mu \left( \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial z^2} \right) = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ \frac{\partial \mathbf{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} = 0 \quad \text{dans } ]0, L[ \times S, \\ \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } ]0, L[ \times \partial S. \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

Compte tenu de l'unicité de la solution d'un tel système [13], on a  $\mathbf{u}_y = \mathbf{u}_z = 0$ , et le système se réduit à résoudre

$$\begin{cases} -\mu\left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}_x}{\partial z^2}\right) = -\alpha & \text{dans } \omega, \\ \mathbf{u}_x = 0 & \text{sur } \partial\omega, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

où  $\omega$  est une section du cylindre.

Encore une fois, grâce à l'argument d'unicité de la solution d'un tel système, l'unique solution de (B.3) s'écrit

$$\mathbf{u}_x = \frac{(P_0 - P_1)r^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{(y^2 + z^2)}{r^2}\right).$$

Précisons que tous ces passages restent vrais si la section  $S$  était un domaine bidimensionnel de forme quelconque, excepté le dernier, où la solution explicite de (B.3) est donnée dans le cas d'une section circulaire.

En conclusion, on a

$$\mathbf{u} = \frac{(P_0 - P_1)r^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{(y^2 + z^2)}{r^2}\right) \mathbf{e}_x \text{ et } p = \frac{-(P_0 - P_1)}{L}x + P_0.$$

Ainsi, la vitesse est invariante par translation le long de l'axe du cylindre et que la pression est constante dans chaque section du tube. Observons également qu'il s'agit d'un profil de vitesse parabolique qui atteint sa vitesse maximale au centre du tube.

On s'intéresse à présent à l'expression du débit qu'on désigne par  $Q$ . Il s'agit du volume de fluide traversant une section transverse par unité de volume, d'où

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^r \int_0^{2\Pi} \frac{(P_0 - P_1)r^2}{4\mu L} \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) ds d\theta \\ &= \frac{\Pi r^4}{8\mu L} (P_0 - P_1). \end{aligned}$$

Ce résultat, souvent appelé *loi de Poiseuille*, montre que le débit est proportionnel au gradient de pression et inversement proportionnel à la viscosité dynamique du fluide. A noter également la forte dépendance par rapport au diamètre du tube. Cette dépendance en puissance quatrième du diamètre est une conséquence du profil parabolique de vitesse qui est lui même une conséquence de la condition de non glissement sur la paroi du tube. On désigne par résistance

$$R = \frac{8\mu L}{\pi r^4}.$$

### B.1.2 Ecoulement de Poiseuille bidimensionnel

On s'intéresse à présent au cas bidimensionnel et ceci en vue des tests numériques bidimensionnels qui vont être réalisés avec FreeFem++. Plus précisément, on considère un domaine  $]0, L[ \times ]-r, r[$ , dans lequel circule un fluide visqueux incompressible en

absence de forces de masse. D'une manière analogue à celle développée pour l'écoulement de Poiseuille tridimensionnel, on peut exprimer explicitement les champs de vitesse et de pression, solutions des équations de Stokes

$$\mathbf{u}(x, y) = \mathbf{U}_0 \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) \mathbf{e}_x \text{ et } p(x, y) = -\frac{2\mu\mathbf{U}_0}{r^2}x \quad (\text{B.4})$$

où  $\mathbf{U}_0$  est la vitesse maximale du fluide en entrée. On en déduit également une formule qui relie le débit  $Q$ , la viscosité  $\mu$ , la longueur du domaine et le saut de pression entre l'entrée et la sortie

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^r \int_0^{2\Pi} \mathbf{U}_0 \left(1 - \frac{s^2}{r^2}\right) dsd\theta \\ &= \frac{4}{3}r\mathbf{U}_0 \end{aligned}$$

qui, grâce à la relation (B.4) s'écrit également

$$Q = \frac{2r^3}{3\mu L}(P_0 - P_1).$$

On désigne par résistance

$$R = \frac{3\mu L}{2r^3}.$$

# Annexe C

## Le lemme de Gronwall



---

Nous présentons ici les différentes versions du lemme de Gronwall qui sont utilisées dans ce travail.

**Lemme C.1.** Soient  $\phi(t)$  une fonction régulière positive définie pour tout  $t \geq 0$  et  $a \neq 0$ . On suppose que

$$\phi'(t) \leq a\phi(t) + b,$$

alors on a

$$\phi(t) \leq \phi(0) \exp(at) + \frac{b}{a} (\exp(at) - 1).$$

En effet, en s'inspirant de la résolution de l'équation différentielle  $\phi'(t) = a\phi(t) + b$ , on multiplie l'inégalité par  $\exp(-at)$  et on déduit que

$$\frac{d}{dt} (\phi(t) \exp(-at)) \leq b \exp(-at),$$

d'où en intégrant

$$\phi(t) \exp(-at) - \phi(0) \leq b \int_0^t \exp(-as) ds,$$

et finalement

$$\phi(t) \leq \phi(0) \exp(at) + \frac{b}{a} (\exp(at) - 1).$$

Soulignons que pour cette version différentielle du lemme de Gronwall le signe de  $a$  est quelconque, tandis que sous sa forme intégrale que nous énonçons ci-dessous, intervient l'hypothèse  $a \geq 0$ .

**Lemme C.2.** Soient  $\phi(t)$  une fonction régulière positive définie pour tout  $t \geq 0$  et  $a$  une fonction à valeurs positives. On suppose que

$$\phi(t) \leq c(t) + \int_0^t (a(s)\phi(s)) ds,$$

alors on a

$$\phi(t) \leq c(t) + \int_0^t c(s)a(s) \exp\left(\int_0^s a(\tau) d\tau\right) ds.$$

L'idée de la preuve consiste à considérer

$$v(t) = \int_0^t a(\tau)\phi(\tau) d\tau.$$

On a alors grâce à l'inégalité initiale et à l'hypothèse  $a \geq 0$

$$v'(t) = a(t)\phi(t) \leq a(t)(c(t) + v(t)).$$

Ainsi,  $v(t)$  satisfait une inéquation différentielle avec  $v(0) = 0$ , on en déduit que

$$v(t) \leq \int_0^t c(s)a(s) \exp\left(\int_0^s a(\tau) d\tau\right) ds,$$

ce qui achève la démonstration.

Énonçons également une variante du lemme de Gronwall dont une preuve se trouve dans [3]

**Lemme C.3.** Soient  $a \in \mathbb{R}^+$  et  $g \in L^2(]0, T[)$  tels que  $g \geq 0$ . Si  $z(t)$  est continue de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^+$  et vérifie

$$z(t) \leq a + 2 \int_0^t g(s) \sqrt{z(s)} ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$z(t) \leq (\sqrt{a} + \int_0^t g(s) ds)^2 \quad \forall t \in [0, T].$$

Finalement, énonçons ce résultat sur les inéquations différentielles (voir [31])

**Lemme C.4.** Soient  $\phi(t)$ ,  $\psi(t)$  et  $f(t)$  des fonctions régulières positives définies pour tout  $t \geq 0$ . On note  $\phi(0) = \phi_0$  et on suppose

$$\phi'(t) + \psi(t) \leq g(\phi(t)) + f(t) \quad \text{pour } t \geq 0$$

où  $g$  est une fonction positive, continue lipschitz, définie pour  $\phi \geq 0$ . Alors on a

$$\phi(t) \leq F(t, \phi_0) \quad \text{pour } t \in [0, T(\phi_0)[$$

où  $F(\cdot, \phi_0)$  est la solution du problème  $F'(t) = g(F(t)) + f(t)$ ,  $F(0) \geq \phi_0$ , et  $[0, T(\phi_0)[$  est le plus grand intervalle sur lequel elle peut être prolongée.

De plus, si  $g$  est croissante, alors

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau \leq \tilde{F}(t, \phi_0)$$

où  $\tilde{F}(t, \phi_0) = \phi_0 + \int_0^t (g(F(\tau, \phi_0)) + f(\tau)) d\tau$ .

# Bibliographie

- [1] S. Abboud, O. Barnea, A. Guber, N. Narkiss, I. Brudermann, *Maximum expiratory flow-volume curve : mathematical model and experimental results*, Med. Eng. Phys., 17, No. 5, 332-336, 1995.
- [2] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [3] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation, une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*, Editions Ecole Polytechnique, 2005.
- [4] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, V. Girault, *Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains*, Math. Meth. App. Sci., Vol. 21, No 9, 823-864, 1998.
- [5] I. Babuška, *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numer. Math., 20, 179-192, 1973.
- [6] C. Baranger, L. Boudin, P. E. Jabin, S. Mancini, *A model of biospray for the upper airways*, ESAIM Proceedings, CEMRACS 2004, Vol. 14, 41-47, 2005.
- [7] C. Bègue, C. Conca, F. Murat, O. Pironneau, *A nouveau sur les équations de Stokes et de Navier-Stokes avec des conditions aux limites sur la pression*, C. R. Acad. Sc. Paris, 304, 1, 23-28, 1987.
- [8] W. Benish, P. Harper, J. Ward, J. Popovich, Jr., *A mathematical model of lung static pressure-volume relationships : comparison of clinically derived parameters of elasticity*, Henry Ford Hosp. Med. J., 36, No. 1, 44-47, 1988.
- [9] J. M. Bernard, *Spectral discretizations of the Stokes equations with non standard boundary conditions*, Jour. Sci. Comp., Vol 20, No. 3, 355-377, 2004.
- [10] H. Blum, R. Rannacher, *On the boundary value problem of the biharmonic operator on domains with angular corners*, Math. Meth. in the Appl. Sci., 2, 556-581, 1980.
- [11] J. M. Bogaard, S. E. Overbeek, A. F. M. Verbraak, C. Vons, H. T. M. Folgering, Th. W. van der Mark, C. M. Roos, P. J. Sterk and the Dutch CNSLD study group, *Pressure-volume analysis of the lung with an exponential and linear exponential model in asthma and COPD*, Eur. Respir. J. 8, 1525-1531, 1995.
- [12] J. M. Boland, R. A. Nicolaides, *Stability of finite element under divergence constraints*, SIAM J. Number. Anal., Vol. 20, No. 4, 722-731, 1983.
- [13] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [14] F. Brezzi, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers*, RAIRO, Anal. Num. R2, 129-151, 1974.

- 
- [15] J. R. Cebal, R. M. Summers, *Tracheal and central bronchial aerodynamics using virtual bronchoscopy and computational fluid dynamics*, IEEE Trans. Med. Imaging, 23, 8, 1021-1033, 2004.
- [16] C. Conca, F. Murat, O. Pironneau, *The Stokes and Navier-Stokes equations with boundary conditions involving the pressure*, Japan. J. Math., Vol. 20, No. 2, 279-318, 1994.
- [17] C. Conca, C. Pares, O. Pironneau, M. Thiriet, *Navier-Stokes equations with imposed pressure and velocity fluxes*, Int. J. Num. Meth. Fluids, Vol. 20, 267-287, 1995.
- [18] P. Constantin, C. Foias *Navier-Stokes equations*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, 1988.
- [19] C. Fetita, S. Mancini, D. Perchet, F. Prêteux, M. Thiriet, L. Vial, *An image-based computational model of oscillatory flow in the proximal part of tracheobronchial trees*, Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Vol. 8, No. 4, 279-293, 2005.
- [20] <http://www.freefem.org>
- [21] V. Girault, *Curl-conforming finite element methods for Navier-Stokes equations with non-standard boundary conditions in  $\mathbb{R}^3$* , Lecture Notes in Mathematics, Vol 1431 Springer Verlag, Berlin, 1990, 202-218.
- [22] V. Girault, H. Lopez, B. Maury, *One Time-step Finite Element discretization of the Equation of Motion of Two-fluid Flows*, Numerical Methods for Differential Equations, Vol. 22. 3, 680-707, 2006 .
- [23] V. Girault, P.-A. Raviart, *Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol 749 Springer Verlag, Berlin, 1979.
- [24] V. Girault, P. A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer, 1986.
- [25] C. Grandmont, Y. Maday, B. Maury, *A multiscale/multimodel approach of the respiration tree*, New Trends in Continuum Mechanics, 147-157, 2005.
- [26] C. Grandmont, B. Maury, N. Meunier, *A viscoelastic model with non-local damping. Application to the human lungs*, ESAIM : M2AN, Vol. 40, No. 1, 201-224, 2006.
- [27] C. Grandmont, B. Maury, A. Soualah, *Multiscale modelling of the respiratory track : a theoretical framework*, A paraitre dans Esaim : Proceedings, 2007.
- [28] P. M. Gresho, *Incompressible fluide dynamics : some fundamental formulation issues*, Annu. Rev. Fluid Mech., 23, 413-453, 1991.
- [29] Q. Grimal, S. Naïli, A. Watzky, *A hight-frequency lung injury mechanism in blunt thoracic impact*, Journal of Biomechanics, 38, 1247-1254, 2005.
- [30] J. L. Guermond, L. Quartapelle, *On sensitive vector Poisson and Stokes problems*, Math. Mod. Meth. App. Sci., Vol. 7, No. 5, 681-698, 1997.
- [31] J. G. Heywood, *The Navier-Stokes Equations : On the Existence, Regularity and Decay of Solutions*, Indiana Univ. Math. J., 29, 636-681, 1980.

- 
- [32] J. G. Heywood, R. Rannacher, S. Turek, *Artificial boundaries and flux and pressure conditions for the incompressible Navier-Stokes equations*, Int. J. Numer. Math. Fluids, 22, 325-352, 1996.
- [33] S. Kračmar, J. Neustupa, *Modelling of flow of a viscous incompressible fluid through a channel by means of variational inequalities*, Z. Angew. Math. Mech., 74, 6, 637-639, 1994.
- [34] O. A. Ladyzhenskay, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach, New York, 1969.
- [35] J. M. Leone, P. M. Gresho, *Finite element simulations of steady two-dimensional, viscous incompressible flow over a step*, J. Comput. Phys., 41, 1, 167-191, 1981.
- [36] S. Ley, D. Mayer, B. S. Brook, E. J. van Beek, C. P. Heussel, D. Rink, R. Hose, K. Markstaller, H. U. Kauczor, *Radiological imaging as the basis for a simulation software of ventilation in the tracheo-bronchial tree*, Eur. Radiol., 12, 9, 2218-2228, 2002.
- [37] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, 2002.
- [38] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
- [39] B. Mauroy, M. Filoche, J. S. Andrade Jr., B. Sapoval, *Interplay between flow distribution and geometry in an airway tree*, Phys. Rev. Lett., 90, 14, 2003.
- [40] B. Maury, *Notes de cours MIM, mécanique des fluides*, Université de Paris-Sud XI.
- [41] B. Maury, N. Meunier, A. Soualah, L. Vial, *Outlet dissipative conditions for air flow in the bronchial tree*, ESAIM : Proceedings, Vol. 14, 201-212, 2005 .
- [42] J. Nečas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson, Paris, 1967.
- [43] O. A. Oleinik, A. S. Shamaev, G. A. Yosifian, *Mathematical problems in elasticity and homogenization*, North Holland Publishing, 1992.
- [44] M. S. Olufsen, *Structured tree outflow condition for blood flow in larger systemic arteries*, Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol., 276, 257-268, 1999.
- [45] M. Perzl, *Development of 3D models for the simulation of fluid dynamics and particle transport in realistic airway geometries*, thèse de doctorat, 1998.
- [46] O. Pironneau, *Conditions aux limites sur la pression pour les équations de Stokes et de Navier-Stokes*, C. R. Acad. Sc. Paris, 303, 1, No. 9, 403-406, 1986.
- [47] O. Pironneau, *Méthodes des éléments finis pour les fluides*, Masson, Paris, 1988.
- [48] G. Prodi, *Theoremi di tipo locale per il sistema di Navier-Stokes e stabilità della soluzioni stazionarie*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 32, 374-397, 1962.
- [49] A. Quarteroni, A. Veneziani, *Analysis of a geometrical multiscale model based on the coupling of ODE's and PDE's for blood flow simulations*, Multiscale Model. Simul., Vol. 1, No. 2, 173-195, 2003.
- [50] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1979.

- [51] J. G. Venegas, R. S. Harris, B. A. Simon, *A comprehensive equation for the pulmonary pressure-volume curve*, J. Appl. Physiol., 81, No. 1, 389-395, 1998.
- [52] I.E. Vignon-Clementel, C.A. Figueroa, K.E. Jansen, C.A. Taylor, *Outflow boundary conditions for three-dimensionnal finite element modelling of blood and pressure in arteries*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195, 3776-3796, 2006.
- [53] J.B. West, *Respiratory Physiology-The Essentials*, Williams & Wilkins, Baltimore, 1974.
- [54] E. R. Weibel, *The pathway for oxygen. Structure and function in the mammalian respiratory system*, Harvard University Press, 1984.
- [55] R.G. Crystal, J.B. West, E.R. Weibel, P.J. Barnes, *The lung : scientific foundations*, Lippincott-Raven Press, Philadelphia, 1997.

# Modélisation mathématique et numérique du poumon humain

## Résumé

Nous proposons un modèle mathématique intégré du poumon dont l'approche globale repose sur une modélisation multibloc. En effet, on décompose en trois niveaux l'arbre bronchique qui s'étend sur vingt quatre générations de bronches allant de la trachée aux alvéoles. Au premier niveau (les six premières générations), a lieu un écoulement de Navier-Stokes, qui est simulé directement. Au deuxième niveau (de la génération sept à la génération dix sept), les flux à travers les bronches sont régis par la loi de Poiseuille. La linéarité de cette loi nous permet de condenser cette partie de l'arbre et de proposer des conditions aux bords dissipatives adaptées à la simulation de la ventilation et permettant d'éviter le maillage de cette partie géométriquement complexe. Le dernier niveau du modèle, prend en compte la partie distale de l'arbre qui est la zone alvéolaire. Elle est composée des acini, qui agissent comme un ensemble de petites pompes et dont l'effet macroscopique est le moteur même de la respiration. A ce niveau, on propose les déplacements d'un piston comme modèle simplifié des mouvements du diaphragme pulmonaire. Dans un premier temps, on se place dans le cadre particulier des équations de Stokes et on s'intéresse au couplage des deux premiers compartiments, dont la validité est illustrée par des tests numériques. On explique également le calcul de la résistance globale équivalente qui intervient dans le calcul de la condition aux limites qui remplace la zone condensée. L'étude est ensuite généralisée au cas des équations de Navier-Stokes. La difficulté réside dans le contrôle du flux d'énergie cinétique, on introduit alors une classe de conditions aux limites, qu'on désigne par dissipatives essentielles, pour lesquelles la trace du champ de vitesse sur les sections d'entrée et de sorties vit dans un espace de dimension fini, et pour lesquelles on prouve des résultats d'existence de solutions faibles locales en temps pour donnée quelconques et globales en temps pour données petites. Pour le cas de conditions dites dissipatives naturelles, c'est à dire sans contrainte sur la trace du champ de vitesse, on a existence de solutions faibles locales en temps pour donnée petites et globales en temps pour données plus petites, mais seulement en dimension deux. Cependant, on prouve pour ces conditions aux limites, que pour une classe de solutions plus régulières on a l'existence d'une unique solution locale en temps ainsi que l'existence d'une solution globale en temps pour données petites.

Pour le couplage global, incluant le piston, on prouve l'existence de solutions faibles locales en temps pour des données quelconques en ce qui concerne les conditions aux limites dissipatives essentielles, tandis que pour les conditions dissipatives naturelles, on obtient l'existence de solutions locales en temps pour données petites et toujours seulement en dimension deux.

Finalement, on propose une discrétisation en temps du problème global et on établit un bilan énergétique à l'ordre 1 pour le problème régulier en espace et discrétisé en temps. Nous présentons ainsi plusieurs simulations numériques bi-dimensionnelles correspondants aussi bien à un poumon sain que pathologique et notamment asthmatique.

# Mathematical and numerical modelling of the human lung

## Abstract

The aim of this thesis is to give a multi-compartment model of the human lung. We propose a decomposition of the respiratory tree into three stages : a proximal part, the trachea and the first generations of bronchial tubes (around the fifth or the sixth one). In this part, we make direct simulations of the Navier-Stokes equations. A medium part, corresponding to the complex geometrical part of the bronchial tree. This part is a network of tubes of low diameters and the flow is linear, viscous and incompressible, described by the Stokes equations and regulated by the pressure gradient between the inlets and the outlets. This makes it possible to condense this part and to replace it by an equivalent single tube. The last compartment corresponds to the alveolar part and we model the diaphragm action by a spring displacement.

We make direct simulations of Navier-Stokes equations in the upper part and condense the last two parts in a new boundary condition, so this multi-compartment approach avoids to mesh the complex geometrical part of the tree.

First of all, we study the coupling of the two first compartments in the particular case of Stokes equations, we explain how to give a condensed equivalent to the medium part and make numerical simulations to validate this coupling.

Then, we generalize the study to the Navier-Stokes equations. The main difficulty is to control the kinetic energy flux ; we introduce particular boundary conditions, dissipative essential conditions, and prove the existence of weak solutions, locally in time for large data, and globally in time for small enough data. In the context of natural boundary conditions, the existence of locally in time solutions for small data, and globally in time solutions for smaller data, are proved, but in the two-dimensional case only. However, if we handle with a more regular class of solutions, we prove the existence and uniqueness of a weak solution locally in time for large data, and the existence globally in time for small data.

For the global model including the spring we prove the existence of weak solutions, locally in time for large data in the case of essential boundary conditions, while we prove the existence of weak solutions, locally in time for small data in the two-dimensional case for the natural boundary conditions.

Finally, we give a time discretization of the globally coupled model and prove that the discrete energy balance is of order one. We present some two-dimensional simulations for both a healthy and an ill lung (asthma).