



HAL
open science

Contribution à la modélisation et à la commande des microsystemes capteurs non linéaires

Jonathan Soen

► **To cite this version:**

Jonathan Soen. Contribution à la modélisation et à la commande des microsystemes capteurs non linéaires. Automatique / Robotique. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2007. Français. NNT : . tel-00212256

HAL Id: tel-00212256

<https://theses.hal.science/tel-00212256>

Submitted on 22 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1

THÈSE

présentée pour obtenir

le grade de Docteur en Sciences de l'Université Joseph Fourier

Spécialité : Automatique-Productive

École Doctorale

Électronique, Électrotechnique, Automatique, Télécommunications, Signal

préparée au

Laboratoire d'Électronique et de Technologie de l'Information

et au

Laboratoire d'Automatique de Grenoble

par

Jonathan Soen

**Contribution à la modélisation
et à la commande
des microsystemes capteurs non linéaires**

Directeur de Thèse : Alina Voda

présentée et soutenue publiquement le 10 Juillet 2007

Composition du jury

M.	René-Louis Inglebert	Président	Polytech'Grenoble
M.	Nicolas Chaillet	Rapporteur	Laboratoire d'Automatique de Besançon
M.	Jean-Yves Fourniols	Rapporteur	LAAS-CNRS
M.	Didier Georges	Examineur	Gipsa-Lab, Département Automatique
M.	Christophe Kergueris	Invité	Tronics Microsystems
M.	Cyril Condemine	Encadrant CEA	CEA/LETI/DCIS
Mme.	Alina Voda	Directeur de Thèse	Gipsa-Lab, Département Automatique

Coordonnées :

Gipsa-Lab UMR 5216

Département Automatique (*Control Systems Department*)

Ex Laboratoire d'Automatique de Grenoble

ENSIEG, INPG, BP. 46

F 38402 Saint Martin d'Hères Cedex

France

Tel : +33.4.76.82.62.44

Fax : +33.4.76.82.63.88

CEA-Grenoble LETI

Laboratoire d'Électronique et de Technologie de l'Information

Département Conception et Intégration dans les Systèmes

Service Conception pour les Microtechnologies Emergentes

17, rue des Martyrs

38054 Grenoble Cedex

France

Tel : +33.4.38.78.37.29

Remerciements

Mes remerciements et ma gratitude se portent tout d'abord vers Alina Voda, maître de conférence et directeur de recherche au Gipsa-lab, département Automatique (*ex* Laboratoire d'Automatique de Grenoble) et vers Cyril Condemine, ingénieur de recherche au Laboratoire d'Electronique et de Technologie de l'Information (LETI), qui ont su encadré et orienté mon travail de recherche pendant ces trois années.

Je remercie également les autres membres du jury, en particulier M. Fourniols et M. Chaillet pour leur lecture attentive de ce manuscrit.

Parmi les différentes personnes que j'ai eu le plaisir de rencontrer au LETI, je tiens à remercier tout particulièrement Eric Colinet et Elisabeth Delevoye pour les discussions, scientifiques ou non, que nous avons pu avoir, et plus simplement pour leur présence.

Mes pensées se tournent ensuite vers mes collègues, Hélène, Stéphanie, Chady, Fabrice, Frédéric, Jean-Philippe, Jérôme, Nicolas, Patrick, Michel et, bien entendu, Cyril, Eric et Elisabeth, du Laboratoire Microsystèmes et Electronique Associée (LMEA).

Je remercie Marc Belleville, Hervé Fanet et Jean-René Lequepeys de m'avoir accueilli au sein du Service Conception pour les Microtechnologies Emergentes (SCME) du Département Conception et Intégration dans les Systèmes (DCIS) du LETI et je tiens à saluer les personnes du service SCME, mes collègues et amis stagiaires, doctorants et "externes". J'exprime également toute ma sympathie aux personnes du Département Intégration Hétérogène sur Silicium (DIHS) avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger : Valérie Nguyen, Philippe Andreucci, Laurent Duraffourg, Sébastien Hentz, Thomas et Najib.

Parmi les autres personnes qui ont compté pendant ces trois années, je tiens à remercier mes amis : la "bande à Damdam", la "bande à Guigui" et mes compagnons de montagne, et les autres. Ils se reconnaîtront.

Je remercie enfin ma famille, mes frères Antonin et Hugo et ma compagne Anne-Emmanuelle pour les encouragements et le soutien qu'ils m'ont apportés pendant ces années.

Table des matières

Remerciements	5
Symboles et notations	13
Introduction	31
I Introduction aux microsystemes et aux capteurs	35
1 Introduction aux microsystemes capteurs	37
1.1 Introduction aux microsystemes	37
1.2 Représentation d'un capteur en tant que système dynamique	39
1.3 Critères de performances des microsystemes capteurs	41
II Outils de l'automatique linéaire pour la conception de microsystemes capteurs asservis : Application à la conception d'un micro-accéléromètre asservi	43
2 Capteurs asservis et outils de l'automatique linéaire	45
2.1 Principe de mesure par capteurs asservis	45
2.2 Modélisation de la boucle d'asservissement	47
2.3 Analyse des fonctions de sensibilité pour un capteur asservi	49
2.3.1 Fonctions de sensibilité et performances d'un capteur asservi	50
2.3.2 Fonctions de sensibilité, marges de stabilité classiques et robustesse	51
2.4 Deux méthodes fréquentielles de synthèse de correcteurs linéaires	52
2.4.1 Placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité	52
2.4.2 Synthèse \mathcal{H}_∞	53
2.5 Identification	57
2.6 Observateurs appliqués aux capteurs asservis	57
2.7 Conclusion du chapitre 2	58

3	Accéléromètre passe-bas asservi	59
3.1	Introduction, objectifs et contributions	60
3.2	Accéléromètres, conversion analogique-numérique $\Sigma\Delta$ et accéléromètres $\Sigma\Delta$. . .	61
3.2.1	Généralités et principe de fonctionnement des accéléromètres linéaires . . .	61
3.2.2	Conversion analogique-numérique $\Sigma\Delta$	66
3.2.3	Micro-accéléromètres $\Sigma\Delta$	69
3.3	Description de l'architecture proposée	70
3.4	Présentation de la structure mécanique et modélisation physique	73
3.4.1	Description de la structure mécanique du micro-accéléromètre	74
3.4.2	Modélisation de la lecture capacitive	76
3.4.3	Modélisation de l'actionnement	80
3.5	Modèle pour la commande et contraintes sur les fonctions de sensibilité.	83
3.5.1	Obtention d'un modèle physique approché	83
3.5.2	Représentation du système pour la synthèse du correcteur	87
3.5.3	Définitions des contraintes sur les fonctions de sensibilité	88
3.6	Identification, synthèse du correcteur et performances de mesure du modèle de simulation	90
3.6.1	Identification sur le modèle de simulation	90
3.6.2	Synthèse du correcteur par placement de pôles	91
3.6.3	Evaluation des performances de mesure en boucle fermée d'après le modèle physique	93
3.6.4	Performances de mesure en simulation	94
3.7	Identification, synthèse du correcteur et performances de mesure du démonstrateur	100
3.7.1	Dispositif expérimental	100
3.7.2	Identification du modèle	101
3.7.3	Synthèse du correcteur et analyse des performances de l'asservissement . . .	102
3.7.4	Performances de mesure du démonstrateur	104
3.7.5	Conclusions concernant les résultats du démonstrateur	108
3.8	Réduction de l'erreur de mesure dynamique par observateur	109
3.8.1	Principe et formulation du problème	109
3.8.2	Structure du bloc de reconstruction de l'entrée $e(t)$	110
3.8.3	Fonction de transfert du filtre $K_\varepsilon(s)$	110
3.8.4	Synthèse de l'observateur $K_\varepsilon(s)$ par la synthèse \mathcal{H}_∞	111
3.8.5	Application au modèle de simulation de l'accéléromètre	112
3.9	Conclusion du chapitre 3	117

III Exploitation d'une non-linéarité mécanique dans les microsystèmes et nanosystèmes	119
4 Microsystèmes, résonateur et oscillateur de Duffing	121
4.1 Introduction	121
4.2 Non-linéarité de Duffing et microsystèmes résonants	122
4.3 Oscillations forcées de l'équation de Duffing amortie	123
4.4 Oscillations libres de l'équation de Duffing	128
4.5 Remarque sur une des propriétés des oscillateurs à base de résonateur de Duffing	129
4.6 Conclusion du chapitre 4	129
5 Principe de détection ou de génération de fréquence à base d'oscillateur de Duffing	131
5.1 Introduction	133
5.2 Présentation du système et modèle approché	133
5.2.1 Présentation du système	133
5.2.2 Modèle approché de la relation entrée-sortie	134
5.3 Mode de réalisation par micro-résonateur	138
5.3.1 Schéma de principe de l' <i>accéléromètre-Duffing</i>	138
5.3.2 Structure mécanique proposée	139
5.3.3 Schéma de principe pour l'électronique de lecture et d'actionnement . . .	140
5.3.4 Equation sans dimension	143
5.3.5 Rappel des hypothèses et des choix imposés (par construction)	143
5.3.6 Exemple de choix de paramètres et résultats de simulation	145
5.4 Conclusion du chapitre 5	148
Conclusion générale	153
Perspectives	155
Annexes	163
A Annexe de la partie I	163
A.1 Bande passante d'un capteur et bande utile pour la mesure	163
A.2 Définitions relatives aux performances des capteurs	163
B Annexes de la partie II	171
B.1 Compléments d'information sur la modulation $\Sigma\Delta$	171
B.2 Calcul des paramètres de l'équation de la dynamique de la masse sismique	175
B.3 Circuit de lecture capacitive	177

B.3.1	Modélisation du circuit de lecture du micro-accéléromètre	177
B.3.2	Non-linéarité de la lecture capacitive	179
B.3.3	Non-linéarités d'ordre pair et repliement dans les basses fréquences	180
B.4	Expression approchée de la force électrostatique de contre-réaction	182
B.5	Modélisation des incertitudes paramétriques	185
B.6	Synthèse \mathcal{H}_∞	188
B.7	Variation du facteur d'échelle avec la température	191
B.8	Mesure en boucle ouverte	192
B.9	Identification en boucle fermée pour la <i>synthèse de l'observateur</i>	194
C	Annexes de la partie III	197
C.1	Quelques méthodes pour l'étude de systèmes non linéaires	197
C.2	Méthodes des échelles de temps multiples (MTS - Multiple Time Scales)	199
C.3	Modèle approché de la relation entrée-sortie du système considéré dans le chapitre 5	200
C.4	Amélioration de la linéarité	209
C.5	Calcul de la dynamique d'une poutre résonante	211
C.6	Modélisation approchée pour l'obtention de formules analytiques pour le premier mode	216
C.7	Détail de la structure mécanique étudiée	219
C.7.1	Présentation et calculs préliminaires	219
C.7.2	Modèle à une dimension	220
C.7.3	Exemple de choix de paramètres	221
	Références bibliographiques	225
	Bibliographie personnelle	225
	Bibliographie de la première partie	227
	Bibliographie de la deuxième partie	229
	Bibliographie de la troisième partie	235

Symboles et notations du chapitre 1

Liste des principales notations

$\left. \begin{array}{l} \mathbf{A}(t) \\ \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}(t) \\ \mathbf{D}(t) \end{array} \right\}$	matrices de la représentation d'état (RE)
$G_{capt}(s)$	Fonction de transfert d'un capteur
$\mathbf{b}(t)$	Vecteur des entrées en bruit
$b_e(t)$	Bruit en entrée
$e(t)$	Somme de la grandeur à mesurer $p(t)$ et du bruit ramené à l'entrée $b_e(t)$
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$	Fonction vectorielle de l'équation d'état (RE)
$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$	Fonction vectorielle de l'équation de sortie (RE)
\mathbf{I}	Matrice identité
$\mathbf{p}_x(t)$	Vecteur des entrées en perturbation (RE)
$p(t)$	Grandeur physique à mesurer
t	Temps
$\mathbf{u}(t)$	Vecteur des entrées en commande (RE/ \mathcal{H}_∞)
$\mathbf{w}(t)$	Vecteur des entrées $[p(t) \mathbf{p}_x(t) \mathbf{b}(t) \mathbf{u}(t)]^T$ (RE)
$\mathbf{x}(t)$	Vecteur de l'état interne d'un système (RE)
$\dot{\mathbf{x}}(t)$	Dérivée par rapport au temps du vecteur de l'état interne
$\mathbf{y}(t)$	Vecteur des sorties (observations) (RE)
$y_C(t)$	Signal de sortie d'un capteur

Opérateurs et conventions de notations

T	Opérateur de transposition
$\mathcal{L}(\cdot)$	Opérateur de la transformation de Laplace
s	Variable complexe de Laplace

Symboles et notations du chapitre 2

Notations (signaux)

$p(t)$	Grandeur physique à mesurer
$[p_{min}; p_{max}]$	Etendue d'entrée du transducteur
$[y_{min}; y_{max}]$	Etendue de sortie du transducteur
$[y_T^-; y_T^+]$	Etendue de sortie du transducteur pour laquelle la courbe de réponse statique présente une linéarité suffisante
$u(t)$	Entrée en commande du capteur-actionneur
$p_{cr}(t)$	Action de la grandeur à mesurer $p(t)$ dans le domaine de la contre-réaction
$u_{cr}(t)$	Action de la commande $u(t)$ dans le domaine de la contre-réaction
$\varepsilon_{cr}(t)$	Action cumulée de l'entrée en commande $u(t)$ et de l'entrée en perturbation $p(t)$ dans le domaine de la contre-réaction
$y_T(t)$	Signal de sortie du transducteur
$e^*(t)$	Signal équivalent à la grandeur à mesurer $p(t)$, exprimé dans l'unité du signal de commande $u(t)$
$\varepsilon_m(t)$	Signal d'erreur entre la commande $u(t)$ et la grandeur à mesurer $p(t)$ / Erreur de mesure instantanée exprimée dans l'unité du signal de commande $u(t)$ (capteur asservi en simple boucle)
$b_{\varepsilon_m}(t)$	Bruit en entrée du transducteur (hors bruit de l'actionneur $b_{act}(t)$) ramené dans l'unité de la commande $u(t)$
$b_{act}(t)$	Bruit de l'actionneur
$b_{y_T}(t)$	Bruit additif en sortie du transducteur
$e_m(t)$	Sortie de mesure d'un capteur asservi
$r(t)$	Consigne relative au point de fonctionnement souhaité en boucle fermée
$b_e(t)$	Bruit en entrée du transducteur - somme du bruit $b_{\varepsilon_m}(t)$ et du bruit $b_{act}(t)$ ramené dans l'unité de la commande $u(t)$
$e(t)$	Signal équivalent à la somme du signal $e^*(t)$ et des bruits entrant au même endroit de la boucle ($b_e(t)$), exprimé dans l'unité du signal de commande $u(t)$
$\varepsilon_c(t)$	Erreur de consigne d'asservissement
$\mathbf{w}(t)$	Vecteur des entrées du procédé généralisé \mathcal{P} (hors signaux de commande)

$\mathbf{u}(t)$	Vecteur des entrées en commande du procédé généralisé \mathcal{P}
$\mathbf{z}(t)$	Vecteur des sorties contrôlées du procédé généralisé \mathcal{P}
$\mathbf{y}(t)$	Vecteur des sorties mesurées du procédé généralisé \mathcal{P}
$\tilde{b}_{y_T}(t)$	Entrée en bruit avant pondération par $W_b(s)$
$\tilde{p}(t)$	Grandeur physique à mesurer normalisée, avant pondération par $W_p(s)$
$\tilde{u}(t)$	Commande $u(t)$ après pondération par $W_u(s)$
$\tilde{\varepsilon}_m(t)$	Erreur de mesure $\varepsilon_m(t)$ après pondération par $W_m(s)$
$\tilde{\varepsilon}_c(t)$	Erreur de consigne $\varepsilon_c(t)$ après pondération par $W_c(s)$
$\hat{e}(t)$	Sortie de mesure d'un capteur asservi, après reconstruction par observateur

Notations (gains et fonctions de transfert)

$G_{p \rightarrow p_{cr}}$	Gain entre la grandeur physique à mesurer $p(t)$ et son action dans le domaine de la contre-réaction $p_{cr}(t)$
$G_{u \rightarrow u_{cr}}$	Gain entre la commande $u(t)$ et son action dans le domaine de la contre-réaction $u_{cr}(t)$
$G(s)$	Fonction de transfert d'un capteur-actionneur entre l'entrée en commande $u(t)$ et la sortie du transducteur $y_T(t)$
G_p	Gain entre la grandeur à mesurer $p(t)$ et son action équivalente $e^*(t)$ exprimée dans l'unité de la commande $u(t)$
$K(s)$	Fonction de transfert du correcteur
$\left. \begin{array}{l} \mathbf{KS}(s) \\ \mathbf{S}(s) \\ \mathbf{SG}(s) \\ \mathbf{T}(s) \end{array} \right\}$	Fonctions de sensibilité en boucle fermée
$K(z^{-1})$	Fonction de transfert d'un correcteur sous forme numérique
$R(z^{-1})$	Polynôme numérateur du correcteur $K(z^{-1})$
$S(z^{-1})$	Polynôme dénominateur du correcteur $K(z^{-1})$
$H_R(z^{-1})$	Polynôme correspondant aux parties fixes (imposées) du numérateur du correcteur
$H_S(z^{-1})$	Polynôme correspondant aux parties fixes (imposées) du dénominateur du correcteur
$R'(z^{-1})$	Partie du polynôme numérateur du correcteur solution de l'équation de Bezout
$S'(z^{-1})$	Partie du polynôme dénominateur du correcteur solution de l'équation de Bezout
$G(z^{-1})$	Fonction de transfert d'un capteur-actionneur sous forme numérique entre l'entrée en commande $u(t)$ et la sortie du transducteur $y_T(t)$
$A(z^{-1})$	Polynôme dénominateur de la fonction de transfert en z du procédé ($G(z^{-1})$)
$B(z^{-1})$	Polynôme numérateur de la fonction de transfert en z du procédé ($G(z^{-1})$)
$P(z^{-1})$	Polynôme caractéristique du système en boucle fermée

$P_D(z^{-1})$	Partie du polynôme caractéristique imposé, correspondant à la dynamique principale en boucle fermée
$P_F(z^{-1})$	Partie du polynôme caractéristique imposé, correspondant à la dynamique secondaire en boucle fermée
$\mathcal{P}(s)$	Procédé généralisé de la synthèse \mathcal{H}_∞ dans sa représentation sous forme de matrice de fonctions de transfert
$\mathcal{K}(s)$	Correcteur généralisé de la synthèse \mathcal{H}_∞ dans sa représentation sous forme de matrice de fonctions de transfert
$\mathcal{P}_{ij}(s)$	$i, j = 1, 2$. Sous-matrice du procédé généralisé $\mathcal{P}(s)$ (dans sa représentation sous forme de matrice de fonctions de transfert)
$\mathcal{P}_r(s)$	Système réel du procédé généralisé de la synthèse \mathcal{H}_∞ (dans sa représentation sous forme de matrice de fonctions de transfert)
$\mathbf{W}_w(s)$	Matrice de pondération sur les entrées (\mathcal{H}_∞)
$\mathbf{W}_z(s)$	Matrice de pondération sur les sorties (\mathcal{H}_∞)
$W_i(s)$	$i = b, p, c, m, u$. Fonctions de pondération sur les signaux correspondants (\mathcal{H}_∞)

Variables et opérateurs temporels et fréquentiels

t	Temps
s	Variable complexe de Laplace
q^{-1}	Opérateur de retard
z^{-1}	Variable complexe de la transformée en z
ω	pulsation

Opérateurs et autres notations

$\ \cdot\ _\infty$	Norme infinie
$F_l(\mathcal{P}, \mathcal{K})$	Opérateur de la Transformation linéaire fractionnelle
T	Opérateur de transposition
\mathcal{K}	Correcteur généralisé de la synthèse \mathcal{H}_∞
\mathcal{P}	Procédé généralisé de la synthèse \mathcal{H}_∞
\mathcal{P}_r	Système réel du procédé généralisé de la synthèse \mathcal{H}_∞
j	Variable complexe $j^2 = -1$
M_S	Valeur maximale du module de la fonction de sensibilité $\mathbf{T}(s)$
M_T	Valeur maximale du module de la fonction de sensibilité $\mathbf{S}(s)$

Acronymes

BP_{cap}	Bande Passante du Capteur
BP_{mes}	Bande Passante utile pour la Mesure
GM	Marge de gain (Gain Margin)
PM	Marge de phase (Phase Margin)
RST	Correcteur R-S-T
RS	Correcteur R-S
\mathcal{H}_∞	Méthode de synthèse de correcteur \mathcal{H}_∞

Symboles et notations du chapitre 3

Ces notations viennent compléter les notations du chapitre 2. Les principales équivalences entre les signaux du chapitre 2 et ceux du chapitre 3 sont indiquées dans la colonne *Not. chap. 2*.

Notations (signaux)

		<i>Not.</i>	
$\vec{a}(t)$	Accélération d'un objet par rapport à un référentiel galiléen ($GXYZ, t$)		
$\vec{a}_e(O, t)$	Accélération d'inertie d'entraînement d'un point O		
$\vec{F}_{ie}(O, t)$	Force d'inertie d'entraînement au point O		
$\vec{F}_{ic}(O, t)$	Force d'inertie de Coriolis		
$F_\gamma(t)$	Projection de la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(O, t)$ sur l'axe Ox	$p_{cr}(t)$	
$\gamma(t)$	Projection du vecteur accélération d'entraînement $\vec{a}_e(O, t)$ sur l'axe Ox	$p(t)$	
$\gamma_m(t)$	Accélération mesurée	$e_m(t)$	
$x(t)$	Déplacement de la masse sismique		
$F_{r,mec}(t)$	Force de rappel mécanique		
$F_{cr}(t)$	Force de contre-réaction	$u_{cr}(t)$	
$u(t)$	Signal de commande	$u(t)$	
$\Sigma F(t)$	Somme des forces s'appliquant sur la masse sismique	$\varepsilon_{cr}(t)$	
$e_{\Sigma\Delta}(t)$	Signal analogique en entrée d'un modulateur $\Sigma\Delta$		
$e'_{\Sigma\Delta}(t)$	Signal $e_{\Sigma\Delta}(t)$ normalisé par rapport à l'étendue de sortie du CNA de retour d'un modulateur $\Sigma\Delta$		
$y_{\Sigma\Delta}(k_2)$	Signal numérique en sortie d'un modulateur $\Sigma\Delta$, sortie du modulateur $\Sigma\Delta_{Lect}$ de l'accéléromètre et sortie de mesure en boucle ouverte		
$y_{\Sigma\Delta}(t)$	Signal bloqué correspondant à $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$		
$b_{q,\sigma}(t)$	Bruit de quantification associé au CAN d'un modulateur $\Sigma\Delta$		
$y_{\Sigma\Delta,BF}(k_2)$	Signal numérique en sortie du modulateur $\Sigma\Delta_{Act}$ et sortie de mesure en boucle fermée		
$y_{CAN}(k_1)$	Signal échantillonné à f_{s1} disponible pour la commande	$y_T(k_1)$	
$u_{CAN}(k_1)$	Signal de commande en sortie du correcteur	$u(k_1)$	

$e_{ident}(k_1)$	Entrée pour l'identification ($\equiv u_{CAN}(k_1)$)
$y_{ident}(k_1)$	Sortie pour l'identification ($\equiv y_{CAN}(k_1)$)
$e(k_1)$	Grandeur à mesurer ($\gamma(t)$) exprimée dans le domaine de la commande et perturbation à rejeter d'un point de vue asservissement
$e_m(k_1)$	Estimation de la perturbation en entrée $e(k_1)$
$F_{Bn}(t)$	Bruit brownien
$\gamma_{FBn}(t)$	Bruit brownien ramené en un bruit en accélération équivalent
$F_{Be}(t)$	Bruit en force généré par l'électronique
$C_n(t)$	Bruit de l'électronique de lecture capacitive (exprimé en capacité équivalente de bruit)
$\Delta C'(t)$	Variation de capacité normalisée par rapport au gain de lecture capacitive
$b_{y,n}(t)$	Bruit blanc de densité spectrale unitaire (lecture)
$b_{yT}(t)$	Bruit introduit par le circuit de lecture et conversion A/N
$u'(k_2)$	Signal de commande $u_{CAN}(k_1)$ échantillonné à f_{s2} (sortie du bloc d'interpolation)
$u'(t)$	Signal continu correspondant au signal de commande $u'(k_2)$
$u(k_2)$	Signal de sortie du modulateur numérique $\Sigma\Delta_{Act} \equiv y_{\Sigma\Delta,BF}(k_2)$
$b_u(t)$	Bruit observé en sortie du modulateur numérique $\Sigma\Delta_{Act}$
$b_{u,n}(t)$	Bruit blanc de densité spectrale unitaire (actionnement)
$b_{yT}(k_1)$	Bruit équivalent au bruit $b_{yT}(t)$, échantillonné à f_{s1}
$\hat{\varepsilon}_m(t)$	Estimation de l'erreur de mesure $\varepsilon_m(t)$
$\hat{e}(t)$	Signal de mesure après reconstruction
$\varepsilon_{\hat{e}}(t)$	Erreur de mesure après reconstruction
$w_{\varepsilon}(t)$	Entrée exogène du procédé généralisé $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ (synthèse de l'observateur \mathcal{H}_{∞})
$u_{\varepsilon}(t)$	Entrée en commande du procédé généralisé $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ (observateur \mathcal{H}_{∞})
$z_{\varepsilon}(t)$	Sortie contrôlée du procédé généralisé $\mathcal{P}_{\varepsilon}$ (observateur \mathcal{H}_{∞})

Listes des notations (gains et fonctions de transfert)

$G_{\Sigma F \rightarrow x}(s)$	Fonction de transfert entre l'entrée en force $\Sigma F(t)$ et le déplacement $x(t)$
K_{XY}	Gain du transducteur entre le déplacement $x(t)$ et la sortie $y_T(t)$
$K(z^{-1})$	Fonction de transfert d'un correcteur sous forme numérique
$G_{u \rightarrow y}(z^{-1})$	Fonction de transfert identifiée (en boucle ouverte) entre l'entrée en commande $u_{CAN}(k_1)$ et la sortie disponible pour la commande $y_{CAN}(k_1)$
$H_{F,D/I}(z^{-1})$	Fonction de transfert des filtres de décimation et d'interpolation
$G_{b,y}(s)$	Fonction de transfert entre un bruit blanc de densité spectrale unitaire $b_{y,n}(t)$ et le bruit $b_{yT}(t)$ total observé en sortie du circuit de lecture
$G_{b,u}(s)$	Fonction de transfert entre un bruit blanc de densité spectrale unitaire $b_{u,n}(t)$ et le bruit $b_u(t)$ total observé sur le signal de commande $u(k_2)$

$G_{u' \rightarrow y_{\Sigma\Delta}}(s)$	Fonction de transfert entre l'entrée en commande $u'(t)$ et la sortie du circuit de lecture capacitive $y_{\Sigma\Delta}(t)$
$W_\varepsilon(s)$	Fonction de pondération (synthèse de l'observateur \mathcal{H}_∞)
$G_{id,u \rightarrow y,BF}(z^{-1})$	Fonction de transfert identifiée en boucle fermée entre l'entrée en commande $u_{CAN}(k_1)$ et la sortie disponible pour la commande $y_{CAN}(k_1)$

Variables et opérateurs temporels et fréquentiels

k_1	Instant d'échantillonnage correspondant à la fréquence d'échantillonnage f_{s1}
k_2	Instant d'échantillonnage correspondant à la fréquence d'échantillonnage f_{s2}
f_{s1}	Fréquence d'échantillonnage du correcteur
f_{s2}	Fréquence d'échantillonnage associée aux modulateurs $\Sigma\Delta$
f_n	Fréquence naturelle du système masse ressort
$f_{s,NS}$	Fréquence d'échantillonnage de Nyquist-Shannon
f_B	Fréquence maximale de variation d'un signal

Autres notations

$(GXYZ, t)$	Référentiel galiléen
$Oxyz$	Repère fixe par rapport à l'objet, d'orientation donnée par l'accéléromètre
(Ox)	Axe sensible ou axe d'entrée d'un accéléromètre 1-axe
	Axe de déplacement de la masse sismique M
M	Masse sismique
$[A_{min} ; A_{max}]$	Etendue de sortie du CNA de retour d'un modulateur $\Sigma\Delta$
$[e_{min} ; e_{max}]$	Plage de variation du signal analogique $e_{\Sigma\Delta}(t)$ en entrée d'un modulateur $\Sigma\Delta$
$F_{cr,max}$	Pleine échelle d'actionnement en force
$\Sigma\Delta_{Lect}$	Modulateur $\Sigma\Delta$ analogique de la lecture capacitive
$\Sigma\Delta_{Act}$	Modulateur $\Sigma\Delta$ numérique (mise en forme de l'actionnement sur 1 bit)
$Decim$	Bloc d'adaptation de fréquence (filtre de décimation et sous-échantillonnage)
$Interp$	Bloc d'adaptation de fréquence (sur-échantillonnage et filtre d'interpolation)
P	Poutre de suspension de la masse sismique
E_1	Electrode fixe (lecture et actionnement vers les x négatifs)
E_2	Electrode fixe (lecture et actionnement vers les x positifs)
E_3	Electrode mobile (masse sismique)
V_{lect}	Différence de potentiel nécessaire à la lecture capacitive
V_{act}	Différence de potentiel nécessaire à l'actionnement électrostatique

Acronymes

$\Sigma\Delta$	‘Sigma - Delta’
<i>MEMS</i>	Microsystème électro-mécanique (Micro-Electro-Mechanical System)
<i>CAN</i>	Convertisseur Analogique Numérique
<i>CNA</i>	Convertisseur Numérique Analogique
<i>A/N</i>	Analogique vers Numérique
<i>N/A</i>	Numérique vers Analogique
<i>SOI</i>	Silicium sur isolant (Silicon On Insulator)
<i>FS</i>	Pleine échelle (<i>Full Scale</i>)
<i>SNR</i>	Rapport signal à bruit (Signal to Noise Ratio)
<i>SNDR</i>	Rapport signal à bruit plus distorsion (Signal to Noise and Distorsion Ratio)
<i>SQNR</i>	Rapport signal à bruit de quantification (Signal to Quantification Noise Ratio)
<i>THD</i>	Distorsion harmonique - non-linéarité (Total Harmonic Distorsion)
<i>FOM</i>	Facteur de mérite (<i>Figure Of Merit</i>)
<i>DR</i>	Dynamique de la mesure (<i>Dynamic Range</i>)
<i>BW</i>	Bande passante considérée pour le calcul du facteur de mérite <i>FOM</i>
<i>Power</i>	Puissance dissipée par le capteur (calcul du facteur de mérite <i>FOM</i>)

Unités / Constantes

g	Accélération due à la pesanteur ($g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$)
k_B	Constante de Boltzmann ($k_B = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$)
ε_0	Permittivité du vide ($\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$)

Constantes, Paramètres physiques et géométriques

γ_{max}	Pleine échelle (spécification)
m	Masse de la masse sismique
b	Coefficient d’amortissement
$b(x)$	Expression du coefficient d’amortissement en fonction de la position x pour le <i>MEMS</i>
b_0	Coefficient d’amortissement $b(x)$ pour $x = 0$
k_{mec}	Coefficient de raideur mécanique
D	Rapport de sous- ou sur-échantillonnage
k	Ordre des filtres de décimation et d’interpolation
T	Température
$C_{13}(x)$	Capacité formée entre les électrodes E_1 et E_3
$C_{23}(x)$	Capacité formée entre les électrodes E_2 et E_3
d_0	Entrefer nominal entre l’électrode 1 et l’électrode 3

d_1	Entrefer nominal entre l'électrode 1 et l'électrode 3
d_{13}	Entrefer entre l'électrode 1 et l'électrode 3
d_{23}	Entrefer entre l'électrode 2 et l'électrode 3
V_{13}	Différence de potentiel appliquée entre l'électrode 1 et l'électrode 3
V_{23}	Différence de potentiel appliquée entre l'électrode 2 et l'électrode 3
S	Surface en regard entre les électrodes
k_{eff}	Coefficient de raideur effective
$k_{elec,1}$	Coefficient de raideur électrostatique
$F_{elec}(x)$	Force électrostatique
T	Température
$F_{Bn,PSD}$	Densité spectrale de puissance associée au bruit brownien (force)
$\gamma_{n,Bn,PSD}$	Densité spectrale de puissance associée au bruit brownien ramenée en accélération
$\gamma_{n,Bn}$	Valeur efficace du bruit brownien ramenée en accélération, sur une bande passante de la mesure BP_{mes}
$C_{n,PSD}$	Densité spectrale de puissance associée au bruit de l'électronique de lecture capacitive
$\gamma_{n,Cn,PSD}$	Densité spectrale de puissance associée au bruit de l'électronique de lecture capacitive ramenée en accélération
$\gamma_{n,Cn}$	Valeur efficace du bruit $C_{n,PSD}$ ramenée en accélération, sur une bande passante de la mesure BP_{mes}
\mathcal{P}_ε	Procédé généralisé (synthèse de l'observateur \mathcal{H}_∞)

Symboles et notations des chapitres 4 et 5

Notations (signaux)

$y(t)$	Déplacement pour le modèle <i>Masse-ressort-amortissement</i> équivalent à la dynamique du résonateur
$u(\tau)$	Réponse du résonateur de Duffing (oscillations) / Variable de l'équation sans dimension
$a(\tau)$	Amplitude instantanée des oscillations $u(\tau)$
$\gamma(\tau)$	Déphasage instantané entre une excitation sinusoïdale et la réponse $u(\tau)$ de l'équation sans dimension
$\phi(\tau)$	Phase instantanée des oscillations $u(\tau)$
$\omega_\tau(\tau)$	Pulsation instantanée des oscillations $u(\tau)$
$p(\tau)$	Grandeur physique à mesurer ou entrée en commande du principe de détection ou génération de fréquence
$f_u(\tau)$	Signal d'auto-excitation
$G_u(\tau)$	Terme de modulation du signal $f_u(\tau)$
$\Delta a(\tau)$	Variation de l'amplitude instantanée $a(\tau)$ des oscillations $u(\tau)$
$\Delta \omega_\tau(\tau)$	Variation de la pulsation instantanée $\omega_\tau(\tau)$ autour de sa valeur à l'équilibre
$\gamma(t)$	Accélération
$x(t)$	Déplacement pour le modèle <i>Masse-ressort-amortissement</i> équivalent à la dynamique de la masse sismique

Variables et opérateurs temporels et fréquentiels, fonctions de transfert

t	Temps
τ	Variable associée au temps dans l'équation sans dimension
$G(s)$	Fonction de transfert entre l'entrée $p(\tau)$ et la variation d'amplitude $\Delta a(\tau)$

Autres notations

F_1, F_2	Solutions stables (<i>Focus</i>) de la réponse du résonateur de Duffing
S	Solution instable (<i>Saddle</i>) de la réponse du résonateur de Duffing

Constantes, paramètres physiques et géométriques, fonctions

$F_r(y)$	Expression de la force de rappel en fonction du déplacement y
m_{eff}	Masse équivalente à un modèle <i>Masse-ressort-amortissement</i>
b_{eff}	Amortissement équivalent à un modèle <i>Masse-ressort-amortissement</i>
k_1, k_2, k_3	Valeur des coefficients du développement limité de la force de rappel
$f_y \left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{dy(t)}{dt}, t \right)$	Second membre du modèle <i>Masse-ressort-amortissement</i>
$k_{mec,1},$	Composantes linéaires mécaniques et électrostatiques de la force de rappel
$k_{elec,1}$	
ω_0	Pulsation naturelle des oscillations libres de l'oscillateur harmonique associé au cas linéaire ($b_{eff} = 0, k_3 = 0$)
Ω_t	Pulsation d'excitation dans l'équation du modèle <i>Masse-ressort-amortissement</i>
Ω_τ	Pulsation d'excitation dans l'équation sans dimension
Y	Dimension caractéristique du système étudié
ε	Petit paramètre ($\varepsilon \ll 1$) introduit pour permettre la résolution de l'équation sans dimension
F_y	Amplitude de la force d'excitation dans l'équation du modèle <i>Masse-ressort-amortissement</i>
F_u	Amplitude de la force d'excitation dans l'équation sans dimension
$\varepsilon \cdot \alpha$	Paramètre de l'équation sans dimension associé à la non-linéarité k_3
$2 \cdot \varepsilon \cdot \mu$	Terme d'amortissement dans l'équation sans dimension
$a_0(\varepsilon),$	Constantes d'intégration relatives à l'amplitude des oscillations $a(\tau)$ et à la phase instantanée $\phi(\tau)$
$\phi_0(\varepsilon)$	
a_{ref}	Amplitude $a(\tau)$ des oscillations $u(\tau)$ pour $p(\tau) = 0$
G_{ref}	Gain nécessaire pour obtenir des oscillations $u(\tau)$ d'amplitude $a(\tau) = a_{ref}$ pour $p(\tau) = 0$ (chapitre 5)
$\mathcal{NL}(a)$	Fonction non linéaire liant l'amplitude $a(\tau)$ des oscillations à la pulsation instantanée $\omega_\tau(\tau)$ des oscillations.
β_a, β_p	Coefficients du modèle de la dynamique entre l'entrée $p(\tau)$ et la variation d'amplitude $\Delta a(\tau)$

Introduction

Introduction

Contexte

Les microsystemes micro-usinés sur silicium sont apparus au début des années 1980 et ont rencontré un intérêt grandissant ces deux dernières décennies, tant au niveau technique et scientifique qu'économique.

D'un point de vue économique, la demande en microsystemes capteurs est en constante augmentation (applications médicales, instrumentation physique, aéronautique, automobile, électronique grand public...). La possibilité de fabriquer ces capteurs en utilisant des techniques similaires à celles de la micro-électronique permet de fabriquer ce type de capteur en masse, de réduire leur taille et de faciliter leur intégration tout en réduisant les coûts de fabrication. D'un point de vue technique et scientifique, ces systemes sont *multi-physiques*. Leur conception nécessite l'interaction entre spécialistes de plusieurs disciplines. Par ailleurs, ces systemes sont complexes à traiter dans le sens où ils présentent des non-idéalités inhérentes à leurs petites dimensions et aux phénomènes mis en jeu - bruits, non-linéarités, effets de couplage, incertitudes de fabrication et sensibilité aux conditions de fonctionnement.

La recherche des hautes performances pour ces microsystemes suggère l'utilisation des méthodologies de l'automatique avancée - approche haut-niveau, solutions aux problèmes d'observation et de commande. Cependant, aujourd'hui, les études sur les microsystemes se focalisent principalement sur l'optimisation de la partie mécanique ou de la partie électronique. Cette remarque se vérifie notamment sur l'exemple des capteurs asservis, pour lesquels l'analyse *système* et la conception du système de commande est souvent rudimentaire.

Objectifs de la thèse

La thèse va aborder des problèmes liés aux non-linéarités dans les microsystemes. Dans un premier temps, l'objectif de cette thèse est d'introduire des outils de l'automatique pouvant s'appliquer à la conception des microsystemes asservis. Le but est ici de s'affranchir des non-linéarités. L'étude propose de tirer profit de méthodologies de l'automatique (identification, méthodes fréquentielles de synthèse de correcteurs linéaires et observateurs) pour la conception d'un micro-accéléromètre asservi [1, 3, 4].

Dans un deuxième temps, l'étude propose d'exploiter une non-linéarité dynamique fréquemment rencontrée dans les systèmes vibro-mécaniques et notamment dans les microsystemes, la non-linéarité de Duffing, pour mettre en œuvre un nouveau principe de détection.

Contributions de la thèse

Cette étude propose une formulation des problématiques de mesure et de commande pour les capteurs asservis, en s'appuyant sur les fonctions de sensibilité en boucle fermée (chapitre 2). Associée aux méthodes de synthèse fréquentielle de correcteurs linéaires et à l'approche *identification pour la commande*, cette formulation permet d'aborder le compromis robustesse/performances (mesure et commande) pour ce type de système.

L'application de cette formulation à la conception d'un micro-accéléromètre asservi constitue la deuxième contribution de cette thèse (chapitre 3). L'architecture des accéléromètres $\Sigma\Delta$ est ici repensée pour répondre à la problématique de la linéarité de la mesure et à celle de la robustesse vis-à-vis des incertitudes de modélisation. La traduction des performances de mesure en performances pour l'asservissement permet de concevoir un régulateur optimal pour l'architecture exposée.

Nous proposons enfin une ouverture vers le monde du non-linéaire en introduisant un nouveau principe de mesure. Ce principe exploite une non-linéarité mécanique qui pourrait être incontournable à l'échelle nanométrique (nano-poutres et nano-tubes de carbone).

Organisation du manuscrit

Le premier chapitre propose une brève introduction aux micro-systèmes et aux capteurs.

Le chapitre 2 présente la formulation de la problématique de commande des capteurs asservis et rappelle quelques outils de l'automatique - synthèse de correcteur, identification et observateurs.

Le chapitre 3 présente la conception d'un micro-accéléromètre. On y rappelle le principe de mesure accélérométrique, la conversion analogique-numérique $\Sigma\Delta$ et son adaptation électro-physique pour la mesure d'accélération. Afin de s'affranchir des incertitudes de modélisation et des incertitudes liées à la fabrication du *MEMS*, l'architecture des accéléromètres $\Sigma\Delta$ asservis est repensée : l'architecture proposée permet l'*identification* du modèle du procédé à asservir et la synthèse robuste d'un correcteur numérique (et programmable). Après une modélisation physique du capteur, les spécifications de performance de la mesure sont traduites en objectifs pour la commande. La méthodologie *identification du modèle* et *synthèse du correcteur* est validée en simulation et sur le démonstrateur. Les performances de mesure prévues à partir du modèle physique sont confirmées en simulation, tandis que le démonstrateur (premier silicium capteur et circuit) présentait, en 2005, des performances supérieures à l'état de l'art. On propose enfin une analyse des résultats qui permettra d'améliorer les performances actuelles de l'architecture.

Le chapitre 4 rappelle quelques origines physiques de la non-linéarité de Duffing dans les micro et nano-systèmes. Nous y présentons les caractéristiques principales du résonateur de Duffing autour de sa résonance primaire et celles de l'oscillateur de Duffing.

Le chapitre 5 présente un principe de détection exploitant ce type de non-linéarité. La modélisation de son comportement dynamique est abordée par la méthode des échelles de temps multiples et on propose une application à la mesure d'accélération.

Après une conclusion générale, nous proposons quelques perspectives pour la poursuite des travaux présentés dans ce manuscrit.

Les annexes proposent quelques compléments d'information intéressants pour la compréhension et détaillent quelques points non abordés dans le corps du manuscrit.

Les références bibliographiques sont classées de la manière suivante : les références personnelles, puis les références bibliographiques de chaque chapitre, classées dans l'ordre alphabétique du nom du premier auteur.

Première partie

**Introduction aux microsystemes et
aux capteurs**

Chapitre 1

Introduction aux microsystemes capteurs

Résumé

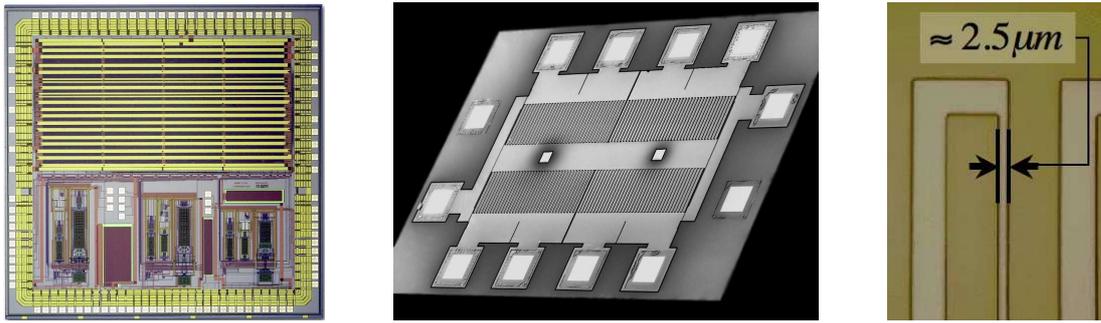
Nous proposons dans ce chapitre une brève introduction aux microsystemes et aux capteurs en tant que systemes dynamiques.

1.1 Introduction aux microsystemes

Généralités

Les micro et nanosystemes [6, 8] sont des objets composés d'un élément "physique" (mécanique, magnétique, optique, fluide...) interagissant avec une partie électronique (lecture et/ou actionnement). Ces deux parties peuvent ou non être intégrées sur le même support physique. On utilise le terme *microsysteme* lorsque la plus petite dimension caractéristique de l'élément physique est de l'ordre du micromètre et *nanosysteme*, lorsque celle-ci est de l'ordre du nanomètre - en pratique de l'ordre de la dizaine de nanomètres pour les structures mécaniques "nano"-usinées. A titre d'exemple, le micro-accéléromètre présenté dans le chapitre 3 est composé d'un élément mécanique et d'un circuit de lecture et de commande, de surfaces sensiblement égales à 20 mm^2 (figure 1.1). La plus petite dimension caractéristique de l'élément mécanique est la distance, d'environ $2,5 \mu\text{m}$, séparant les doigts de l'électrode mobile de ceux des électrodes fixes.

Ces systemes sont conçus pour réaliser une ou plusieurs fonctions spécifiques, comme la *mesure* d'une grandeur physique ou le *traitement d'information*. En général, leurs équivalents macrosystemes existent, mais la réduction de taille présente de nombreux avantages. Elle permet de faciliter l'intégration de la fonction visée et, puisque ces microsystemes peuvent être produits en masse, de réduire le coût de fabrication. A performance égale, la consommation est, en général, plus faible. La réduction de taille ouvre également le champ à de nouvelles applications - mesure *in vivo*, par exemple.



(a) Circuit de lecture et de correction (b) Photographie du MEMS Locadyn (c) Dimension caractéristique

FIG. 1.1 – Photographie ©Tronics Microsystems et LETI

Comme dans le monde macroscopique, d'un point de vue système, on peut distinguer trois grands types de fonctionnalités :

- Les microsystèmes *capteurs*, dont la fonction est de traduire une grandeur physique (température, pression, champ magnétique, accélération, composition chimique, ...) en un signal électrique exploitable. On peut également associer à cette catégorie les microsystèmes de récupération d'énergie ;
- Les microsystèmes *actionneurs* qui transforment un signal électrique en une action sur le système auquel ils appartiennent ou sur leur environnement (micro-miroirs, micro-pompes, têtes de lecture de supports optiques ou de disques durs, têtes d'impression...);
- Les microsystèmes de *traitement de l'information* ou de génération de signaux qui réalisent une opération sur un signal électrique ou une conversion de celui-ci en un autre signal électrique, grâce à l'élément physique - filtres micro-mécaniques, oscillateurs commandés (VCO) électro-mécaniques, pompes de charges, ...

Microsystèmes capteurs et cadre de la thèse

Cette thèse concerne principalement les microsystèmes de type *capteurs*. On s'intéresse en particulier aux aspects dynamiques et à l'interaction entre un élément physique mécanique et l'électronique intégrée associée.

Suivant l'application visée, la conception d'un capteur peut avoir plusieurs orientations. Notamment, lorsque l'on vise des *hautes performances de mesure*, une attention toute particulière doit être portée à l'étude et à la conception de l'architecture du capteur (MEMS et circuit). La solution finale peut alors avoir un coût non négligeable en termes de complexité, d'optimisation, de coût de fabrication et de consommation. Une approche opposée consisterait à concevoir une architecture minimaliste, mais peu coûteuse, en relâchant éventuellement les contraintes sur les performances, voire la fiabilité. La première partie de cette thèse concerne l'étude des microsystèmes-capteurs passe-bas asservis. La conception d'un micro-accéléromètre de ce type et à vocation hautes performances en terme de mesure y est présentée. Celui-ci pourrait être classé

dans la première catégorie. Dans une démarche opposée, la deuxième partie de la thèse propose une architecture simple exploitant une non-linéarité mécanique intrinsèque. L'effort est ici porté sur la présentation d'un concept original et sur la modélisation du comportement dynamique non linéaire associé à ce concept.

1.2 Représentation d'un capteur en tant que système dynamique

Un capteur est en général un système dont le signal de sortie est fonction de plusieurs signaux en entrée. La figure 1.2 propose une représentation de type *boîte noire* d'un capteur. Un capteur de mesure remplit sa fonction si sa sortie $y_C(t)$ est aussi proche que possible de la grandeur physique en entrée $p(t)$, quelles que soient les variations des autres entrées. Dans cette représentation, les signaux de *commande* $\mathbf{u}(t)$ sont connus et on fait la distinction entre les signaux inconnus de *perturbations*, notés $\mathbf{p}_x(t)$ (entrées exogènes), et de *bruits*, notés $\mathbf{b}(t)$. On considérera comme *bruit*, un signal inconnu, de nature essentiellement aléatoire, et comme *perturbation*, un signal inconnu correspondant à une grandeur physique qui pourrait être mesurée par ailleurs (pression, température...) et ayant une influence sur le signal de sortie, la *mesure* $y_C(t)$.

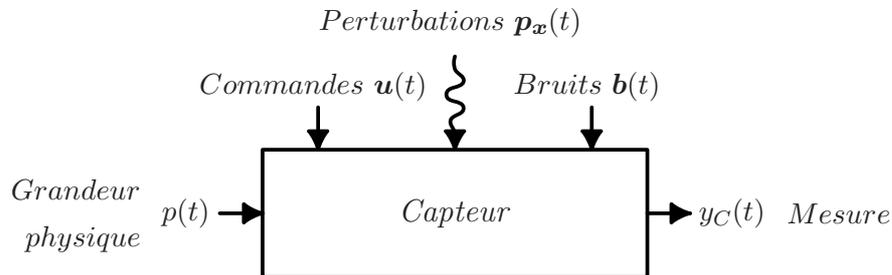


FIG. 1.2 – Représentation de type "boîte noire" d'un capteur

Un capteur est un système dynamique. Son comportement entrée-sortie peut, en général, être modélisé par une équation différentielle ou un système d'équations différentielles, qui pourra se mettre sous la forme d'une représentation d'état rappelée dans l'équation (1.1) (figure 1.3).

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) & a. \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t) & b. \end{aligned} \quad (1.1)$$

où :

- $\mathbf{x}(t)$ est le vecteur représentant l'état interne du système, ici le capteur ;
- $\mathbf{w}(t)$ est le vecteur des entrées du système. Celui-ci regroupe la grandeur physique à mesurer $p(t)$, les entrées en perturbation $\mathbf{p}_x(t)$, les différents bruits $\mathbf{b}(t)$ et les entrées en commande $\mathbf{u}(t)$ (moyen d'action sur le système).
- $\mathbf{y}(t)$ est le vecteur des sorties (des observations ou des mesures) : la ou les sorties du capteur ($\mathbf{y}(t)=y_C(t)$ sur le schéma de la figure 1.2).

- la fonction vectorielle $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$ représente la *dynamique* du système. L'équation (1.1.a) est appelée *équation d'état* ;
- la fonction vectorielle $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$ donne la relation entre les signaux disponibles en sortie et les états internes et/ou les entrées du système. L'équation (1.1.b) est appelée *équation de sortie*.

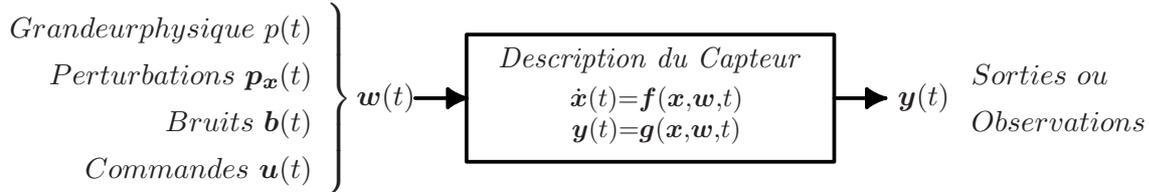


FIG. 1.3 – Représentation d'un capteur en tant que système dynamique, par une représentation d'état (représentation interne)

Dans le cas des systèmes linéaires¹, les fonctions \mathbf{f} et \mathbf{g} sont des fonctions linéaires (éventuellement variant dans le temps) des variables $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{w}(t)$, la relation (1.1) devient :

$$(\Sigma) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{w}(t) && a. \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \cdot \mathbf{w}(t) && b. \end{aligned} \quad (1.2)$$

ou encore :

$$(\Sigma) \quad \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}(t) & \mathbf{D}(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

où $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ et $\mathbf{D}(t)$ sont respectivement la matrice d'états, la matrice d'entrée, la matrice d'observation des états et la matrice d'observation des entrées.

Si le système est linéaire, invariant dans le temps et monovarié (une entrée - une sortie), le comportement entrée-sortie du capteur peut être représenté par une fonction de transfert :

$$\frac{Y_C(s)}{E(s)} = G_{capt}(s) = \mathbf{C} \cdot (s \cdot \mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (1.4)$$

où $Y_C(s) = \mathcal{L}(y_C(t))$ est la transformée de Laplace de la sortie $y_C(t)$, $E(s) = \mathcal{L}(e(t))$ est la transformée de Laplace de l'entrée $e(t)$. L'entrée $e(t)$ considérée ici est la somme de la grandeur à mesurer $p(t)$ et d'un bruit $b_e(t)$ en entrée (indiscernable), figure 1.4. Dans la suite, on considère qu'on pourra représenter le comportement entrée-sortie du capteur par un tel système, au moins autour d'un point de fonctionnement.

Nota bene : Pour simplifier les notations, les signaux seront toujours, par la suite, représentés sous forme temporelle. Dans certains schémas et certaines équations, la variable de Laplace s devra donc être associée à l'opérateur différentiel $\frac{d}{dt}$ [16].

¹ou lorsqu'une description du système linéarisé autour d'un point de fonctionnement est suffisante.

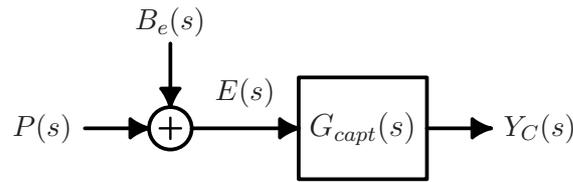


FIG. 1.4 – Représentation autour d’un point de fonctionnement d’un capteur par une fonction de transfert (représentation entrée-sortie, externe)

1.3 Critères de performances des microsystemes capteurs

Indépendamment de la grandeur à mesurer $p(t)$, du phénomène physique exploité par le capteur et de la nature du signal de sortie $y_C(t)$ (courant, tension ou mot numérique), plusieurs critères permettent de qualifier et de quantifier la *performance de la mesure* fournie par un capteur². Les microsystemes capteurs intégrant de plus en plus de fonctions et de traitements (télé-alimentation, stockage et transmission de la mesure, sortie numérique, auto-zéro, étalonnage/calibrage automatique, filtrage), ces capteurs se rapprochent des “appareils de mesure”. La plupart des critères de performance des appareils de mesures (étendue de mesure, seuil de mobilité, résolution, linéarité, dérives, bande passante, fidélité, exactitude) peuvent s’appliquer aux capteurs.

Par rapport à un capteur *idéal* (fonction de transfert unitaire et absence de bruit), la modélisation de la figure 1.4 rend compte de deux types d’*imperfections* : la présence d’un bruit $b_e(t)$ se superposant à la grandeur à mesurer $p(t)$ et la transformation du signal $p(t)$ par le filtrage opéré par la fonction de transfert $G_{capt}(s)$. Les conséquences de ce filtrage sont une bande passante finie, un gain (facteur d’échelle) fonction de la fréquence du signal $p(t)$ et une distorsion linéaire de phase (déphasage entre la grandeur à mesurer $p(t)$ et sa mesure $y_C(t)$ fonction de la fréquence du signal $p(t)$). Les définitions relatives à ces notions, ainsi que d’autres définitions de métrologie, sont reprises en annexe A. Dans la mesure du possible, elles correspondent au *Vocabulaire de la mesure* [5]. D’autres critères plus spécifiques à un type de capteur particulier peuvent être définis (voir [7], pour les capteurs inertiels).

A côté des performances liées à la qualité de la mesure, on peut associer à un capteur d’autres critères de performances, tels que l’encombrement, la consommation, le coût de fabrication, la durée de vie...

L’ensemble de ces critères détermine les applications et le marché potentiel d’un capteur.

²Ces critères peuvent éventuellement s’appliquer aux systèmes actionneurs ou aux systèmes de traitement de l’information.

Deuxième partie

Outils de l'automatique linéaire pour la conception de microsystemes capteurs asservis : Application à la conception d'un micro-accéléromètre asservi

Chapitre 2

Capteurs asservis et outils de l'automatique linéaire

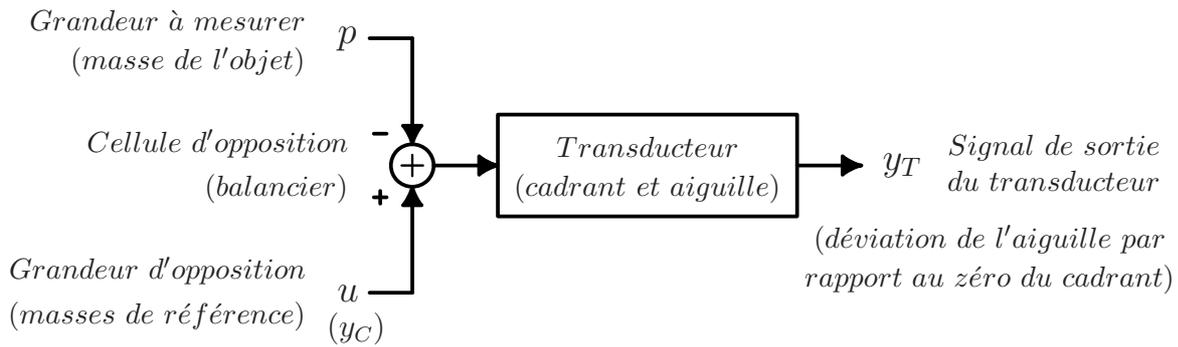
Résumé

Nous rappelons dans ce chapitre le principe de mesure des capteurs asservis. Nous présentons ensuite une mise en forme de la problématique en reliant les performances de mesure d'un capteur asservi aux fonctions de sensibilité du système bouclé, à savoir les différentes fonctions de transferts entre les différents signaux de la boucle. Nous proposons ensuite des outils de l'automatique linéaire pouvant s'appliquer à la conception de micro-systèmes capteurs asservis. Les deux principaux outils introduits ici sont l'identification et la synthèse de correcteur (la synthèse polynomiale de correcteur et la synthèse \mathcal{H}_∞). Ces outils seront utilisés pour la conception de l'asservissement du micro-accéléromètre en boucle fermée.

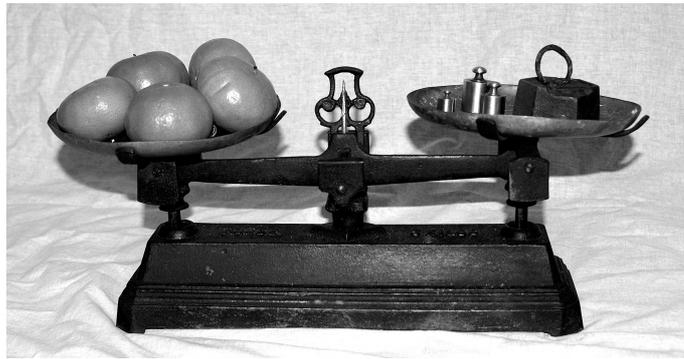
2.1 Principe de mesure par capteurs asservis

Les capteurs asservis mettent en œuvre le principe de mesure par la méthode dite de zéro [5], figure 2.1(a). Dans ce type de mesure, un transducteur¹ est fortement sensible à la grandeur à mesurer p et on dispose d'un moyen (entrée u) pour s'opposer à l'action de la grandeur p sur la sortie du transducteur y_T . Cette technique s'applique à une classe particulière de transducteurs, que l'on peut appeler *capteur-actionneur*. La mesure n'est plus le signal y_T issu du transducteur mais la valeur de la grandeur d'opposition u (s'il s'agit de grandeur de même nature) qui permet d'annuler le signal y_T . Le signal y_T en sortie du transducteur fournit alors une information sur l'erreur de mesure. La balance de Roberval, figure 2.1(b), est un exemple macrosystème de capteur mettant en œuvre ce principe. Dans ce cas particulier, la mesure est statique : la masse de l'objet ne varie pas dans le temps et on dispose d'un temps infini pour effectuer la mesure.

¹On fait ici la distinction entre un *transducteur* et un *capteur*. Le transducteur est un dispositif permettant de traduire les variations d'une grandeur d'intérêt en un signal exploitable. Le capteur est un dispositif fournissant une mesure de la grandeur d'intérêt.



(a) Mesure par la méthode dite de zéro



(b) Balance de Roberval

FIG. 2.1 – (a) Mesure par la méthode de zéro. (b) Exemple de la balance de Roberval.

La mise en place de ce principe peut avoir pour objectif de maintenir le transducteur dans une plage de fonctionnement où son comportement entrée-sortie (courbe de réponse statique) peut être considéré comme linéaire, figure 2.2, d'augmenter l'étendue de mesure du capteur ou encore de réduire certaines dérives - fluage, biais de sortie...

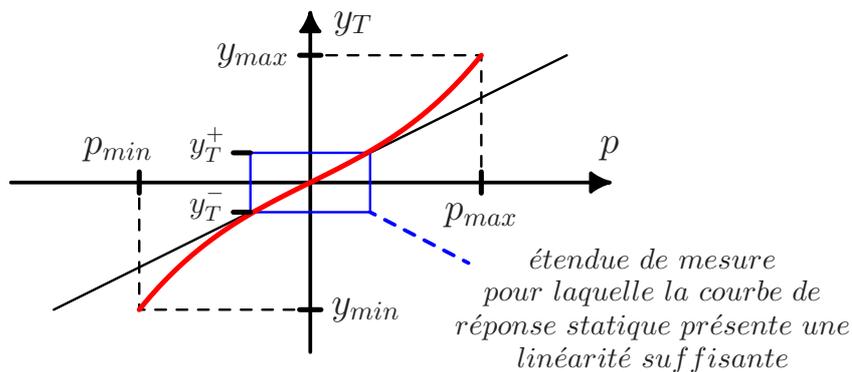


FIG. 2.2 – Exemple de courbe de réponse statique pour un transducteur non linéaire

Dans le cas d'une mesure dynamique, à savoir lorsque la grandeur à mesurer $p = p(t)$ varie continûment dans le temps, on introduit un système de correction dynamique ou correcteur. Le rôle de ce *correcteur* est de compenser, en temps réel, l'effet de la grandeur à mesurer $p(t)$ sur la sortie $y_T(t)$ grâce à l'entrée (commande) $u(t)$.

2.2 Modélisation de la boucle d'asservissement

Le capteur-actionneur est un système à deux entrées et une sortie. La figure 2.3 en donne une représentation dans le cas où les actions de la perturbation et de la commande sur le domaine de la contre-réaction (indices cr) sont linéaires et sans dynamique propre. Dans cette représentation, le bloc $G_{p \rightarrow p_{cr}}$ représente le gain entre le domaine de la grandeur physique à mesurer $p(t)$ et son action $p_{cr}(t)$ dans le domaine de la contre-réaction et $G_{u \rightarrow u_{cr}}$ celui entre le domaine de la commande $u(t)$ vers son action $u_{cr}(t)$ dans le domaine de la contre-réaction.

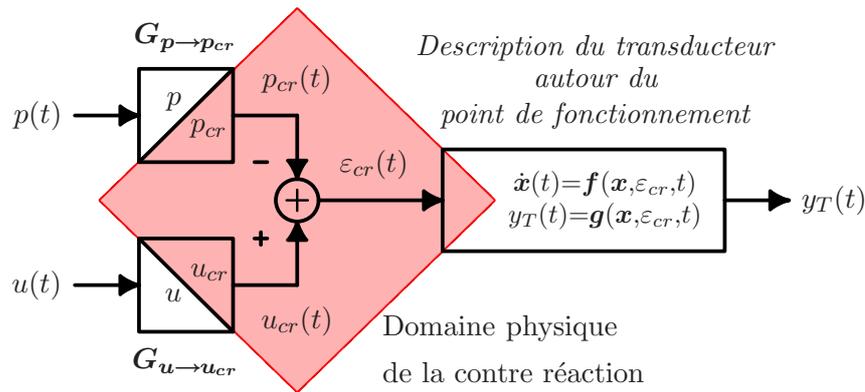


FIG. 2.3 – Représentation physique d'un capteur-actionneur autour d'un point de fonctionnement

On considère par la suite que la dynamique du transducteur vis-à-vis de ses entrées (grandeur à mesurer et commande) est suffisamment linéaire autour du point de fonctionnement choisi. Elle sera modélisée (figure 2.4) par une fonction de transfert $G(s)$ entre l'entrée en commande $u(t)$ et la sortie du transducteur $y_T(t)$ et une fonction de transfert $G_p \cdot G(s)$ entre la grandeur à mesurer $p(t)$ et la sortie $y_T(t)$, où $G_p = \frac{G_{p \rightarrow p_{cr}}}{G_{u \rightarrow u_{cr}}}$ est le gain entre la grandeur à mesurer $p(t)$ et son action équivalente $e^*(t)$ exprimée dans l'unité de la commande $u(t)$.

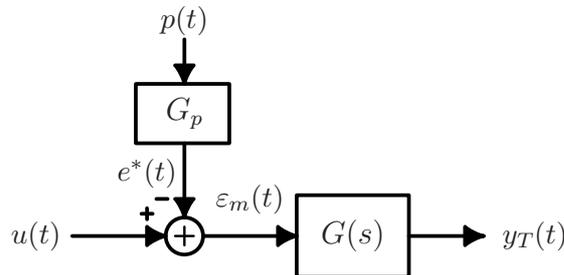


FIG. 2.4 – Représentation système du capteur-actionneur considéré

Le capteur asservi est représenté par le schéma de la figure 2.5, où les différentes entrées en bruit possibles sont introduites. Sur ce schéma², $p(t)$ est la grandeur physique à mesurer, $y_T(t)$ est la sortie du transducteur ; $b_{\varepsilon_m}(t)$ représente le bruit introduit en entrée du transducteur ramené dans l'unité du domaine de la commande $u(t)$, $b_{y_T}(t)$ représente le bruit introduit au niveau du signal de sortie du transducteur $y_T(t)$ et $b_{act}(t)$ est le bruit de l'actionneur ramené dans l'unité du domaine de la commande $u(t)$. Le signal $e_m(t)$ est la sortie de mesure du capteur bouclé³ et $u(t) = e_m(t)$ la commande de l'actionneur.

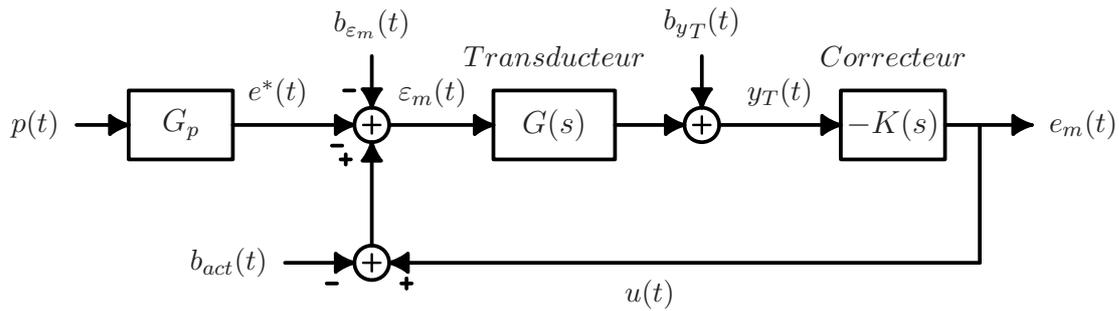


FIG. 2.5 – Capteur asservi - point de vue capteur

Cette représentation correspond à une vision capteur : la grandeur physique $p(t)$ apparaît en entrée du système et la mesure $e_m(t)$, en sortie. Ce même système peut être représenté par un schéma plus proche de la représentation classique des systèmes asservis. Pour cela, il suffit d'introduire, au niveau du signal $y_T(t)$, un signal de référence ($r(t) = cste$), correspondant au souhait d'asservir la sortie du transducteur autour d'un point de fonctionnement, et de faire apparaître cette référence comme entrée du système. On obtient ainsi le schéma de la figure 2.6.

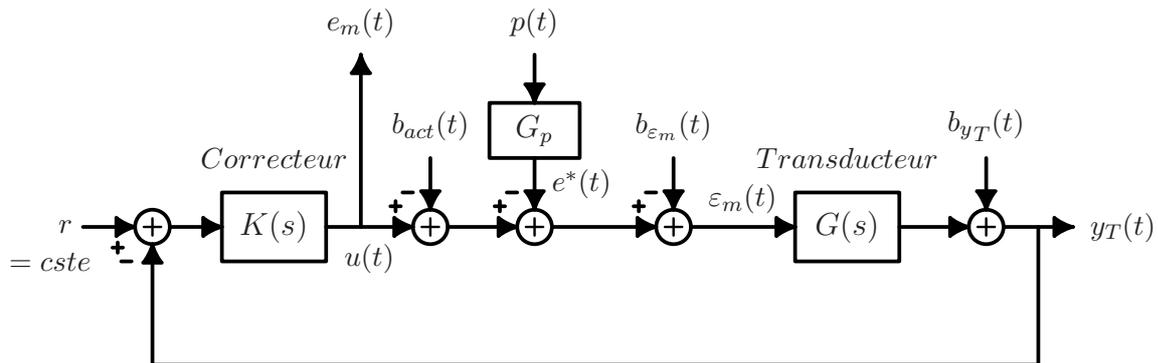


FIG. 2.6 – Capteur asservi - point de vue asservissement

²Les conventions de signe sont définies ainsi par souci de cohérence avec les schémas suivants, de même pour la notation * du signal $e^*(t)$.

³Sur la bande de fréquence où l'asservissement est performant, le signal $e_m(t)$ est une "estimation" correcte de $p(t)$, au gain G_p près.

Pour la problématique de l'asservissement du transducteur autour du point de fonctionnement, la grandeur physique à mesurer $p(t)$ apparaît comme une perturbation à rejeter par le système de correction : quelle que soit la valeur de la grandeur physique en entrée $p(t)$, le correcteur devra maintenir la sortie du transducteur $y_T(t)$ aussi près que possible du point de fonctionnement choisi ($r(t) = \text{constante}$).

En outre, le bruit d'actionnement $b_{act}(t)$ et le bruit en entrée $b_{\varepsilon_m}(t)$ entrent dans le système au même endroit que la grandeur physique à mesurer. Sans connaissance *a priori* sur ces bruits, il sera difficile de les dissocier du signal $e^*(t)$ représentant la grandeur à mesurer $p(t)$, au gain G_p près. Pour alléger les figures, on note $e(t)$ le signal bruité entrant à cet endroit de la boucle, figure 2.7, avec $e(t) = e^*(t) + b_e(t)$ et $b_e(t) = b_{act}(t) + b_{\varepsilon_m}(t)$.

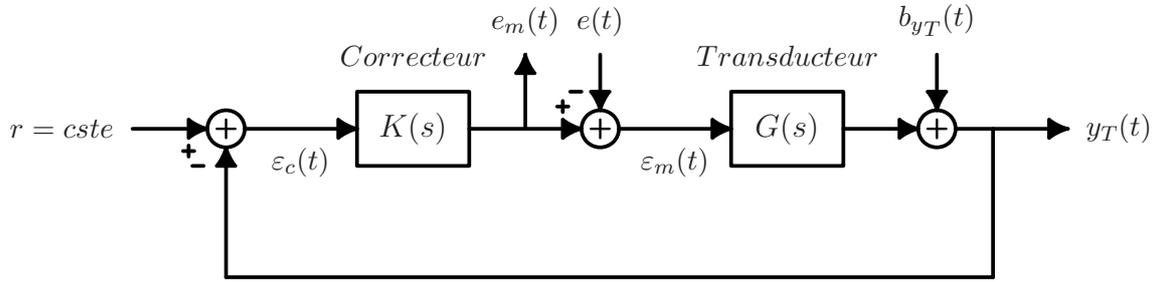


FIG. 2.7 – Capteur asservi - point de vue asservissement 2

2.3 Analyse des fonctions de sensibilité pour un capteur asservi

A partir du schéma de la figure 2.7, on peut écrire les équations reliant les différents signaux de la boucle (u , ε_c , ε_m et y_T) aux signaux d'entrée (r , e et b_{y_T}). On montre que quatre fonctions de transfert, appelées *fonctions de sensibilité*, permettent d'écrire ces équations. Ces quatre fonctions, dénotées \mathbf{S} , \mathbf{T} , \mathbf{GS} et \mathbf{KS} sont définies par :

$$\mathbf{S}(s) = \frac{1}{1 + K(s) \cdot G(s)}; \quad \mathbf{T}(s) = \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{GS}(s) = \frac{G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)}; \quad \mathbf{KS}(s) = \frac{K(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} \quad (2.2)$$

A l'aide de ces fonctions, les signaux u , ε_c , ε_m et y_T s'écrivent :

$$u(t) = \varepsilon_m(t) = \mathbf{T}(s) \cdot e(t) + \mathbf{KS}(s) \cdot (r(t) - b_{y_T}(t)) \quad (2.3)$$

$$y_T(t) = \mathbf{T}(s) \cdot r(t) - \mathbf{GS}(s) \cdot e(t) + \mathbf{S}(s) \cdot b_{y_T}(t) \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_c(t) = \mathbf{GS}(s) \cdot e(t) + \mathbf{S}(s) \cdot (r(t) - b_{y_T}(t)) \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_m(t) = -\mathbf{S}(s) \cdot e(t) + \mathbf{KS}(s) \cdot (r(t) - b_{y_T}(t)) \quad (2.6)$$

Les fonctions de sensibilité permettent de caractériser la stabilité d'un système bouclé et les performances d'un asservissement dans le domaine fréquentiel. Dans cette étude, les fonctions de sensibilité sont également utilisées pour caractériser, dans le domaine fréquentiel, certaines

performances de mesure pour les capteurs asservis. L'interprétation ci-dessous permet donc de traduire certaines performances de mesures en contraintes sur les fonctions de sensibilité à respecter lors de la synthèse du correcteur.

2.3.1 Fonctions de sensibilité et performances d'un capteur asservi

L'équation (2.3) montre que la fonction de transfert entre l'entrée $e(t)$, donc la grandeur physique à mesurer $p(t)$ au gain G_p près, et la sortie de mesure $e_m(t)$ est donnée par la fonction de sensibilité \mathbf{T} . Les *performances dynamiques du capteur* sont donc caractérisées par le module et la réponse en phase de cette fonction de transfert. D'autre part, le bruit $b_{y_T}(t)$ introduit en sortie du transducteur est mis en forme, en boucle fermée, par la fonction de sensibilité \mathbf{KS} . Pour réduire la contribution du bruit $b_{y_T}(t)$ sur la sortie de mesure $e_m(t)$, il faut donc minimiser⁴ le module de \mathbf{KS} sur la *bande passante* BP_{mes} d'intérêt pour la mesure, cette bande passante pouvant être différente de la bande passante BP_{capt} du capteur en boucle ouverte et/ou en boucle fermée, *c.f.* annexe A.

L'équation (2.3) montre également que la valeur (constante dans notre cas) du signal de consigne $r(t)$ est observée sur la sortie de mesure $e_m(t)$ avec un gain correspondant au gain statique de la fonction de sensibilité \mathbf{KS} . Le signal de consigne $r(t)$ peut donc éventuellement être utilisé pour régler le *zéro* [5] du capteur.

Les équations (2.4) et (2.5) montrent que les variations de $y_T(t)$ autour du point d'équilibre fixé par la consigne $r(t)$ et l'erreur de consigne $\varepsilon_c(t) = y_T(t) - r(t)$ sont liées aux variations de l'entrée de signal $e(t)$ par la fonction de sensibilité $-\mathbf{GS}$. Les contraintes de *performance de l'asservissement* du signal $y_T(t)$ en sortie du transducteur sont donc associées à cette fonction de sensibilité.

En particulier, la *performance en linéarité* d'un capteur asservi peut être liée à la *performance d'asservissement* [3, 4], [52]. Sur l'exemple de la courbe de réponse de la figure 2.2, la contrainte d'asservissement est définie par l'étendue de sortie du transducteur $[y_T^- ; y_T^+]$ présentant la linéarité souhaitée.

La grandeur $\varepsilon_m(t) = u(t) - e(t)$ (eq. 2.6) représente l'écart à un instant donné entre l'entrée $e(t)$ et le signal $e_m(t) = u(t)$ en sortie du capteur asservi⁵. La grandeur $\varepsilon_m(t)$ représente donc, au gain $1/G_p$ près, l'*erreur de mesure instantanée*, que l'on appellera également erreur dynamique. D'après l'équation (2.6), pour minimiser cette erreur, le module de la fonction de sensibilité \mathbf{S} doit être le plus faible possible sur la bande passante de mesure BP_{mes} . Il est possible de réduire cette erreur par un traitement hors-boucle de type filtrage en s'appuyant, par exemple, sur les techniques de reconstruction/estimation des signaux (paragraphe 2.6).

⁴En pratique, le gain du correcteur est important dans la bande de fréquence d'intérêt, de sorte que le gain de la fonction de sensibilité \mathbf{KS} est sensiblement égal à l'inverse du gain du procédé à asservir.

⁵Le signal $\varepsilon_m(t)$ n'est pas accessible car il correspond à la différence entre $e_m(t)$ et $e(t)$ dans le domaine physique (par exemple, la différence entre une force à mesurer et la force de contre-réaction).

2.3.2 Fonctions de sensibilité, marges de stabilité classiques et robustesse

Les marges de stabilité classiques, comme la marge de gain (GM) ou la marge de phase (PM), peuvent s'exprimer sous forme de contraintes sur les fonctions de sensibilité. Notamment, si la valeur maximale, pour toutes les fréquences, du module de la fonction de sensibilité $\mathbf{S}(s)$ est égale à une valeur M_S (soit la norme infinie $\|\mathbf{S}(s)\|_\infty = M_S$), on garantira [24] :

$$GM \geq \frac{M_S}{M_S - 1}; \quad PM \geq 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2 \cdot M_S}\right) \quad (2.7)$$

De manière similaire, la marge de gain et la marge de phase sont liées au maximum $M_T = \|\mathbf{T}(s)\|_\infty$ de la fonction de sensibilité \mathbf{T} par les relations :

$$GM \geq 1 + \frac{1}{M_T}; \quad PM \geq 2 \cdot \arcsin\left(\frac{1}{2 \cdot M_T}\right) \quad (2.8)$$

Pour garantir une marge de gain GM supérieure à 6 dB et une marge de phase PM supérieure à 30°⁶, il suffira, d'après (2.7), de satisfaire l'inégalité, ou contrainte, suivante :

$$M_S = \|\mathbf{S}(s)\|_\infty \leq 6 \text{ dB} \quad (2.9)$$

Cette contrainte garantit une certaine robustesse de l'asservissement. D'autres formulations permettent de garantir la robustesse d'un asservissement vis-à-vis des incertitudes paramétriques [10], voir chapitre 3.

Compromis performance / robustesse en stabilité

Il existe un compromis entre performance et robustesse en stabilité de l'asservissement, inhérent à tout système asservi [24]. Dans le cas où les contraintes imposées sur les fonctions de sensibilité ne sont pas compatibles avec le respect de ce compromis, les objectifs de performance et/ou de robustesse en stabilité devront être réajustés.

⁶Valeurs typiquement utilisées [16].

2.4 Deux méthodes fréquentielles de synthèse de correcteurs linéaires

Un certain nombre de méthodologies de synthèse de correcteur linéaire sont disponibles (synthèse LQG , synthèse par placement de pôles, synthèse \mathcal{H}_∞ , synthèse μ , ...). Deux méthodes basées sur les spécifications fréquentielles des performances de l'asservissement sont résumées ici : le placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité et la synthèse \mathcal{H}_∞ . De manière succincte, dans la première méthode, la synthèse du correcteur consiste à choisir les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée et à ajuster des parties fixes du correcteur afin de satisfaire les contraintes imposées sur les fonctions de sensibilité - performance, marges de stabilité, robustesse. Dans la procédure de synthèse \mathcal{H}_∞ , on inclut les contraintes sur les fonctions de sensibilité dans un modèle étendu du procédé à commander. La procédure fournit un correcteur et un critère caractérisant le respect des contraintes imposées (au sens de la norme \mathcal{H}_∞).

Pour les deux méthodologies, si les contraintes de performance, stabilité et/ou robustesse sont incompatibles, les objectifs doivent être réévalués. Le compromis se fera par l'intermédiaire du choix des parties fixes du correcteur dans la méthode du placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité et, dans la procédure \mathcal{H}_∞ , par le choix des fonctions de pondérations, à savoir les contraintes sur les fonctions de sensibilité.

2.4.1 Placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité

La méthode de synthèse fréquentielle par placement de pôles avec calibrage des fonctions de sensibilité [14, 15, 16] considère un procédé à contrôler monovarié représenté par un modèle numérique $G(z^{-1})$ et un correcteur numérique de type RST . Dans une problématique de rejet de perturbation en entrée, on peut se ramener à une structure RS , qui se met sous la forme standard de la figure 2.8.

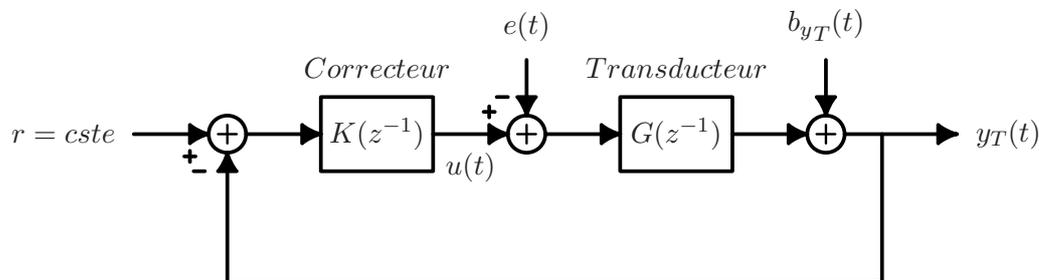


FIG. 2.8 – Représentation de la boucle d'asservissement sous forme numérique, pour la synthèse par placement de pôles

On considère alors un correcteur $K(z^{-1})$ sous la forme :

$$K(z^{-1}) = \frac{R(z^{-1})}{S(z^{-1})} = \frac{H_R(z^{-1}) \cdot R'(z^{-1})}{H_S(z^{-1}) \cdot S'(z^{-1})} \quad (2.10)$$

où les polynômes $H_R(z^{-1})$ et $H_S(z^{-1})$ sont des parties fixes du correcteur (choisies par le concepteur ou imposées par le système) et $R'(z^{-1})$ et $S'(z^{-1})$ sont les parties inconnues, calculées par l'algorithme de placement de pôles. On considère la fonction de transfert du procédé sous la forme :

$$G(z^{-1}) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})} \quad (2.11)$$

Dans ces conditions, le dénominateur de la fonction de transfert en boucle fermée (polynôme caractéristique du système bouclé) s'écrit :

$$P(z^{-1}) = H_S(z^{-1}) \cdot S'(z^{-1}) \cdot A(z^{-1}) + H_R(z^{-1}) \cdot R'(z^{-1}) \cdot B(z^{-1}) \quad (2.12)$$

Pour déterminer les coefficients des polynômes $R'(z^{-1})$ et $S'(z^{-1})$, on résout l'équation de Bezout (2.13) :

$$P(z^{-1}) = P_D(z^{-1}) \cdot P_F(z^{-1}) \quad (2.13)$$

où le polynôme $P_D(z^{-1})$ est choisi de manière à fixer la dynamique principale du système en boucle fermée (pôles dominants) ; $P_F(z^{-1})$ est un polynôme auxiliaire.

Une fois la dynamique principale en boucle fermée choisie (polynôme $P_D(z^{-1})$), le réglage du correcteur consiste⁷ à ajuster les parties fixes du correcteur $H_S(z^{-1})$ et $H_R(z^{-1})$ et le polynôme auxiliaire $P_F(z^{-1})$ afin de satisfaire les contraintes sur les fonctions de sensibilité.

2.4.2 Synthèse \mathcal{H}_∞

Dans la procédure de synthèse de correcteur \mathcal{H}_∞ , on considère la formulation du problème sous la forme standard (multivariable ou monovariable) [9, 10, 11, 24, 27] représentée par la figure 2.9.

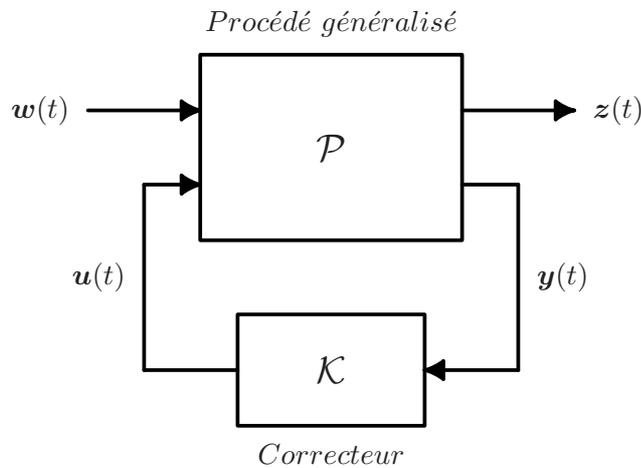


FIG. 2.9 – Représentation du problème \mathcal{H}_∞ sous forme standard

⁷La fonction de transfert du correcteur est obtenue grâce à l'éq. (2.10) après résolution de l'éq. (2.13).

Le bloc \mathcal{K} représente le correcteur et \mathcal{P} le procédé généralisé. Le procédé généralisé inclut le modèle du procédé à asservir $G(s)$ et les fonctions de pondérations, à savoir les descriptions fréquentielles des contraintes à respecter par les fonctions de sensibilité \mathbf{S} , \mathbf{T} , \mathbf{KS} et \mathbf{GS} .

Le vecteur des signaux d'entrée $\mathbf{w}(t)$ représente les entrées exogènes⁸ (références, perturbations, bruits, ...). $\mathbf{u}(t)$ est le vecteur de sortie du correcteur, le vecteur $\mathbf{y}(t)$ représente les sorties mesurées (erreur d'asservissement ou tout autre signal disponible pour la commande). Dans cette représentation, le vecteur $\mathbf{y}(t)$ est différent du signal de sortie du transducteur $y_T(t)$. Le vecteur $\mathbf{z}(t)$ représente les sorties contrôlées (erreur d'asservissement $\varepsilon_c(t)$, signal de commande $u(t)$, erreur de mesure $\varepsilon_m(t)$ dans notre cas, ... en général normalisées).

L'objectif global de la commande est de minimiser la norme \mathcal{H}_∞ de la matrice des fonctions de transfert entre les entrées $\mathbf{w}(t)$ et les sorties $\mathbf{z}(t)$. Le problème est alors de trouver un correcteur \mathcal{K} qui, basé sur les informations $\mathbf{y}(t)$, génère le signal de commande $\mathbf{u}(t)$ s'opposant à l'action de $\mathbf{w}(t)$ sur $\mathbf{z}(t)$. Les fonctions de pondérations sont introduites et construites de manière à donner plus d'importance à un signal sur une certaine plage de fréquence.

Soit une description $\mathcal{P}(s)$ de \mathcal{P} sous forme d'une matrice des fonctions de transfert entre les entrées (\mathbf{w} et \mathbf{u}) et les sorties (\mathbf{z} et \mathbf{y}) :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathcal{P}(s) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_{11}(s) & \mathbf{P}_{12}(s) \\ \hline \mathbf{P}_{21}(s) & \mathbf{P}_{22}(s) \end{array} \right] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

La matrice des fonctions de transfert entre \mathbf{w} et \mathbf{z} peut être donnée par la transformation linéaire fractionnelle (en éliminant \mathbf{y} et $\mathbf{u} : \mathbf{u} = \mathcal{K}(s) \cdot \mathbf{y}$) :

$$\mathbf{z} = F_l(\mathcal{P}, \mathcal{K}) \cdot \mathbf{w} \quad (2.15)$$

où

$$F_l(\mathcal{P}, \mathcal{K}) = \mathbf{P}_{11}(s) + \mathbf{P}_{12}(s) \cdot \mathcal{K}(s) \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}(s) \cdot \mathcal{K}(s))^{-1} \cdot \mathbf{P}_{21}(s) \quad (2.16)$$

Sous certaines hypothèses et conditions [12, 24] (observabilité, commandabilité, rang des sous-matrices de \mathcal{P} sous sa forme d'état, ...), l'algorithme de Glover-Doyle [11] permet d'obtenir la famille de correcteurs stables $\mathcal{K}(s)$ tel que :

$$\|F_l(\mathcal{P}, \mathcal{K})\|_\infty < \gamma \quad (2.17)$$

Un processus itératif permet ensuite de minimiser la valeur de la constante γ , qui représente le critère de respect des contraintes. Si les fonctions de pondérations correspondent bien aux objectifs de performances, de stabilité et de robustesse de l'asservissement et que la procédure

⁸Les mêmes entrées que sur le schéma de la figure 1.3, sans le signal de commande $u(t)$. De plus, on considère en général un vecteur d'entrée $\mathbf{w}(t)$ correspondant aux entrées physiques normalisées (par rapport à l'étendue d'entrée ou de sortie par exemple).

de synthèse \mathcal{H}_∞ converge vers une valeur de γ inférieure à un, les objectifs sont respectés. Si la valeur de γ est trop grande devant un, il faut déterminer quelles contraintes ne sont pas respectées en analysant les fonctions de sensibilité et définir, éventuellement, de nouveaux objectifs moins contraignants afin d'obtenir un compromis acceptable.

En reprenant le schéma de la figure 2.6, un capteur asservi pourra être décrit par la représentation \mathcal{P} de la figure 2.10. Sur cette représentation, on a attribué une fonction de pondération (W_i) à chaque signal de la boucle.

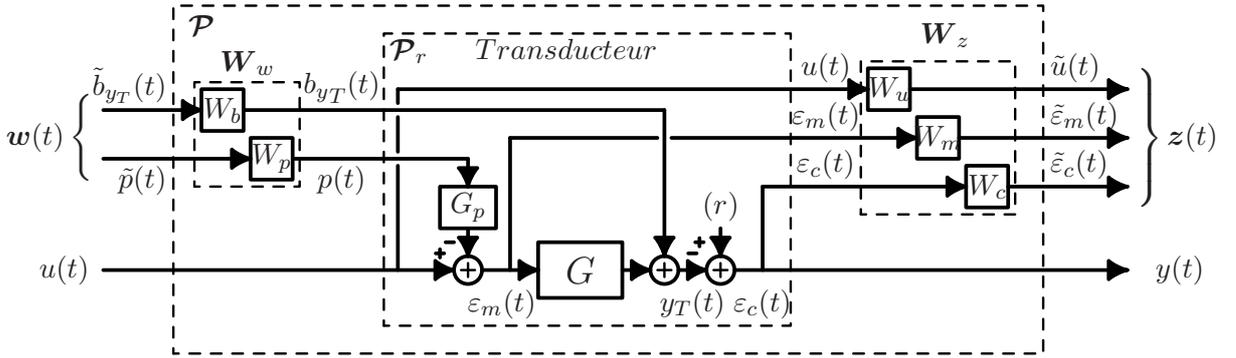


FIG. 2.10 – Description possible d'un procédé généralisé pour un capteur asservi

Les fonctions de pondération $W_b(s)$ et $W_p(s)$ permettent ici de normaliser les signaux en entrée $b_{yT}(t)$ (bruit observé en sortie du transducteur) et $p(t)$ (grandeur à mesurer). Les signaux normalisés correspondants sont notés $\tilde{b}_{yT}(t)$ et $\tilde{p}(t)$. Les fonctions de pondération en sortie $W_u(s)$, $W_m(s)$ et $W_c(s)$ permettent de fixer les objectifs de l'asservissement.

Sous cette forme, Le procédé généralisé \mathcal{P} peut être décrit par la matrice d'interconnexion (ici sous forme de fonction de transfert) :

$$\mathcal{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_z(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathcal{P}_r(s) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{W}_w(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

où \mathbf{W}_w et \mathbf{W}_z sont les matrices de pondération en entrée et en sortie :

$$\mathbf{W}_w(s) = \begin{bmatrix} W_b(s) & 0 \\ 0 & W_p(s) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{W}_z(s) = \begin{bmatrix} W_u(s) & 0 & 0 \\ 0 & W_m(s) & 0 \\ 0 & 0 & W_c(s) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

et $\mathcal{P}_r(s)$ désigne la matrice d'interconnexion du système réel (à savoir le système dont les signaux d'entrée et sortie correspondent aux signaux physiques) :

$$\begin{bmatrix} u \\ \varepsilon_m \\ \varepsilon_c \\ y \end{bmatrix} = \mathcal{P}_r(s) \cdot \begin{bmatrix} b_{yT} \\ p \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -G_p & 1 \\ -1 & G(s) \cdot G_p & -G(s) \\ -1 & G(s) \cdot G_p & -G(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{yT} \\ p \\ u \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

En utilisant la transformation linéaire fractionnelle (2.16) et les descriptions (2.18) à (2.20), on obtient en boucle fermée :

$$F_l(\mathcal{P}, \mathcal{K}) = \begin{bmatrix} -W_u(s) \cdot \mathbf{K}\mathbf{S}(s) \cdot W_b(s) & W_u(s) \cdot \mathbf{T}(s) \cdot G_p \cdot W_p(s) \\ -W_m(s) \cdot \mathbf{K}\mathbf{S}(s) \cdot W_b(s) & -W_m(s) \cdot \mathbf{S}(s) \cdot G_p \cdot W_p(s) \\ -W_c(s) \cdot \mathbf{S}(s) \cdot W_b(s) & W_c(s) \cdot \mathbf{G}\mathbf{S}(s) \cdot G_p \cdot W_p(s) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La suite de la mise en forme du problème consiste à définir les fonctions de pondération $W_i(s)$, $i = b, p, u, m, c$. Comme annoncé plus haut, les fonctions de pondération $W_b(s)$ et $W_p(s)$ sur les signaux d'entrée $b_{y_T}(t)$ et $p(t)$ peuvent être choisies de manière à normaliser les influences relatives de ces signaux sur le système. Considérons par exemple que les valeurs accessibles par la commande $u(t)$ soient limitées à l'étendue $[-1; 1]$, on peut alors choisir $W_p(s) = \frac{1}{G_p}$. Ainsi \tilde{p} et u auront la même influence sur la sortie y . De même, la fonction de pondération $W_b(s)$ peut être choisie de manière à donner une représentation fréquentielle du bruit $b_{y_T}(t)$ sur le signal de sortie du transducteur $y_T(t)$.

Pour définir les fonctions de pondération $W_u(s)$, $W_m(s)$ et $W_c(s)$, on considère le point suivant : si les objectifs sont compatibles et réalisables, le compromis entre performance et robustesse en stabilité conduit à un ensemble de fonctions de pondérations $W_i(s)$ pour lequel les itérations sur γ convergent vers une valeur inférieure à un. Soit, dans le cas où $W_p(s) = \frac{1}{G_p}$:

$$\|F_l(\mathcal{P}, \mathcal{K})\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -W_u(s) \cdot \mathbf{K}\mathbf{S}(s) \cdot W_b(s) & W_u(s) \cdot \mathbf{T}(s) \\ -W_m(s) \cdot \mathbf{K}\mathbf{S}(s) \cdot W_b(s) & -W_m(s) \cdot \mathbf{S}(s) \\ -W_c(s) \cdot \mathbf{S}(s) \cdot W_b(s) & W_c(s) \cdot \mathbf{G}\mathbf{S}(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1 \quad (2.22)$$

En particulier, on aura⁹ :

$$\|W_c(s) \cdot \mathbf{G}\mathbf{S}(s)\|_\infty \leq 1 \quad , \text{ soit } |W_c(j\omega) \cdot \mathbf{G}\mathbf{S}(j\omega)| \leq 1, \forall \omega \quad (2.23)$$

La synthèse du correcteur conduira donc à :

$$|\mathbf{G}\mathbf{S}(j\omega)| \leq |W_c(j\omega)|^{-1}, \forall \omega \quad (2.24)$$

Considérons maintenant qu'un des objectifs est de contraindre la sortie du transducteur $y_T(t)$ à ne pas prendre des valeurs supérieures à 1% de son excursion maximale y_{max} (figure 2.2, avec $y_T^+ = y_{max}/100$) et ceci au moins sur la bande passante de la mesure BP_{mes} . En terme de fonction de sensibilité, ceci revient à $|\mathbf{G}\mathbf{S}(j\omega)| \leq M_{\mathbf{G}\mathbf{S}} \text{ dB}, \forall \omega \in BP_{mes}$, avec $M_{\mathbf{G}\mathbf{S}} = 20 \cdot \log_{10}(y_T^+)$ puisque la fonction de transfert G est normalisée par rapport à la commande $u(t) \in [-1; 1]$. D'après (2.24), ceci est réalisé si l'on impose $|W_c(j\omega)| \geq -M_{\mathbf{G}\mathbf{S}} \text{ dB}, \forall \omega \in BP_{mes}$. Le choix des autres fonctions de pondération sera exposé sur l'exemple du micro-accéléromètre.

⁹On considère la condition relative au terme de la 3^{ème} ligne et 2^{ème} colonne de la matrice de fonctions de transfert de l'équation (2.22).

En général, la procédure de synthèse de correcteur \mathcal{H}_∞ conduit à des correcteurs d'ordre élevé. Une réduction d'ordre du correcteur [17, 21], suivi d'une vérification des fonctions de sensibilité est alors nécessaire.

Lorsque l'ordre du correcteur est fixé et que les objectifs sont tels qu'un compromis performance/stabilité/robustesse est nécessaire, l'obtention d'un correcteur satisfaisant conduit à un travail d'optimisation des fonctions de pondération dans le cas de la synthèse \mathcal{H}_∞ et d'une optimisation du placement des pôles dans la méthode du même nom.

2.5 Identification

La synthèse d'un correcteur performant et assurant la stabilité robuste d'un système requiert la connaissance d'un modèle entrée-sortie le plus représentatif possible du système réel ; or les microsystèmes impliquent des phénomènes physiques parfois difficiles à modéliser de manière précise (aspect fluide, effet de bord, couplages mécaniques ou électrostatiques). La fabrication des MEMS peut, elle, être sujette à des dispersions technologiques importantes, notamment lors des phases de prototypage. Enfin, le comportement dynamique des microsystèmes peut dépendre fortement des réglages finaux - tensions d'actionnement, tensions de lecture, Avant la fabrication et la caractérisation des microsystèmes, on ne dispose donc, en général, que d'un modèle approché.

Les méthodes d'identification permettent d'obtenir un modèle global du comportement entrée-sortie d'un système. Elle peuvent être appliquées aux capteurs asservis, en particulier aux microsystèmes, pour obtenir le modèle G utile pour la commande. Dans le cas des capteurs asservis (fig. 2.6), l'entrée à considérer pour l'identification est l'entrée en commande de l'actionneur $u(t)$. La sortie est le signal $y_T(t)$ disponible pour la commande. La procédure d'identification consiste, dans un premier temps, à appliquer en entrée un signal d'excitation donné (bruit blanc, Séquence Binaire Pseudo-Aléatoire, somme de sinus, ...) et à faire l'acquisition simultanée du signal d'excitation et de la réponse du système. Dans un deuxième temps, on détermine un modèle (structure et valeurs des paramètres) le plus représentatif du comportement observé, en s'appuyant sur les algorithmes d'identification [18, 19, 25] et des critères de validité associés.

2.6 Observateurs appliqués aux capteurs asservis

Le signal $\varepsilon_m(t)$ (fig. 2.7), représentant l'erreur de mesure instantanée, ne peut pas être rendu nul à cause du compromis entre performance et robustesse en stabilité inhérent à la boucle. Sans autre traitement, le signal de sortie du capteur asservi $e_m(t)$ représente une mesure de l'entrée $e(t)$ ¹⁰ qui est altérée par le filtrage opéré par le système "capteur asservi".

¹⁰soit la grandeur physique à mesurer $p(t)$ au gain G_p près.

Le signal $e(t)$ peut être reconstruit par un filtrage de type observateur à partir des signaux disponibles $u(t)$ et $y(t)$ [13, 26]. Dans ce cas, le rôle de la boucle est de maintenir la sortie du transducteur autour d'un point de fonctionnement pour lequel le comportement du capteur est suffisamment linéaire ; tandis que le filtrage hors boucle, figure 2.11, corrige la distorsion linéaire (amplitude et phase) opérée sur le signal $e(t)$ par la dynamique du capteur asservi. Dans le chapitre 3, on propose une approche utilisant la synthèse \mathcal{H}_∞ appliquée au système étendu $\{\text{capteur en boucle fermée} + \text{filtre de reconstruction}\}$ [23, 24].

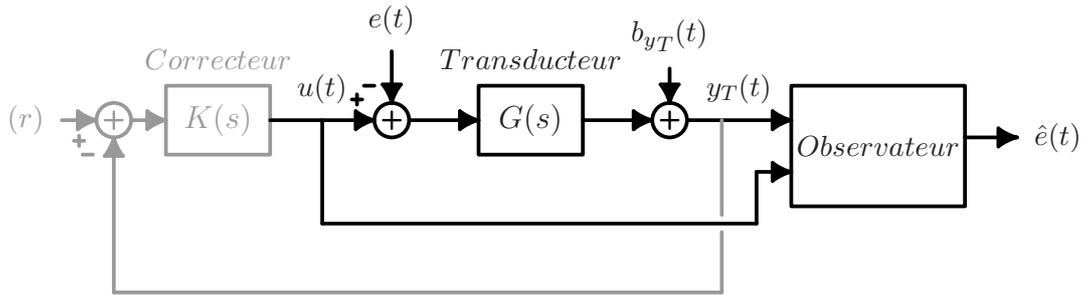


FIG. 2.11 – Capteur asservi avec reconstruction du signal $e(t)$ par observateur

2.7 Conclusion du chapitre 2

Après une formulation de la problématique de commande des capteurs asservis, nous avons rappelé deux méthodes fréquentielles pour la synthèse de correcteurs linéaires. Nous avons ensuite introduit l'intérêt des méthodes d'identification pour la commande et des techniques d'observation pour l'amélioration des performances de mesure. Ces techniques sont appliquées dans le chapitre 3 pour la conception d'un micro-accéléromètre asservi.

Chapitre 3

Accéléromètre passe-bas asservi

Résumé

Depuis le milieu des années 2000, différents capteurs de mesure d'accélération en boucle fermée mettent en œuvre le principe de modulation $\Sigma\Delta$ [29, 32, 35, 44, 45, 46, 47, 49]. Ces capteurs, composés d'une masse sismique micro-usinée sensible à l'accélération imposée et d'une électronique (intégrée ou non), permettent de réaliser directement la mesure et la conversion analogique-numérique de l'accélération. Une des limitations de ces architectures concerne les performances en linéarité de la mesure. Cette limitation peut être attribuée à un asservissement de la masse sismique rudimentaire. Dans ce chapitre, nous présentons une nouvelle architecture dont la conception s'appuie sur la formulation de la problématique de commande pour les capteurs asservis exposée dans le chapitre 2. Cette architecture intègre un correcteur numérique programmable (figure 3.1) et présente les entrées et sorties numériques nécessaires pour effectuer une identification robuste du comportement dynamique du capteur fabriqué (MEMS et électronique).

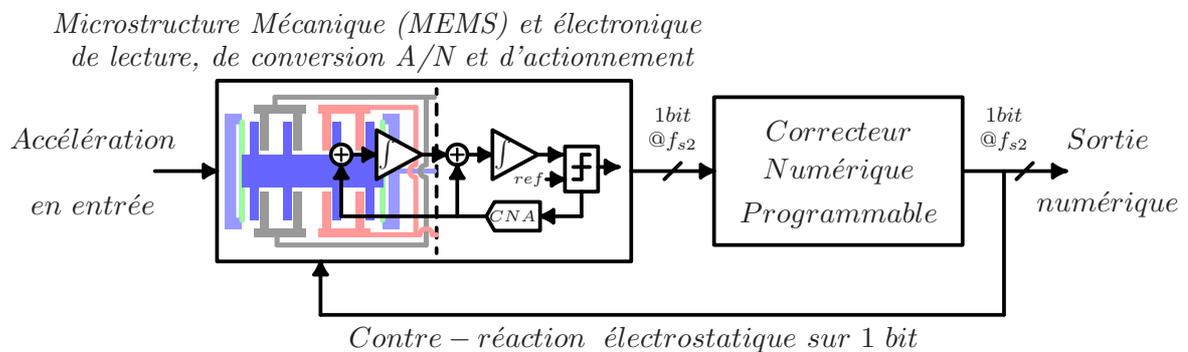


FIG. 3.1 – Architecture du microsystème accéléromètre en boucle fermée avec correcteur numérique

Bien qu'elle conduise à une augmentation de la complexité du circuit intégré, cette architecture présente plusieurs avantages. En particulier, l'aspect programmable permet, après identification, de synthétiser un correcteur réalisant un compromis performance/stabilité optimal. Ceci est essentiel si, comme dans le cadre de cette étude, le modèle précis du capteur n'est pas connu avant la conception du circuit intégré. La formulation de la problématique et les premiers résultats du démonstrateur sont présentés dans les articles [1, 3, 4]. Ces références sont ici complétées par une description plus précise des facteurs limitant les performances de mesure en boucle fermée. L'analyse des résultats proposée dans ce chapitre permettra, après vérification expérimentale de certaines hypothèses, d'améliorer de manière significative les performances en bruit du capteur actuel. D'autres améliorations sont proposées pour envisager les prochaines versions du capteur.

3.1 Introduction, objectifs et contributions

Ce chapitre présente les problématiques de mesure et de commande liées à la conception d'un micro-accéléromètre linéaire asservi particulier. L'élément physique sensible aux accélérations subies est une masse sismique micro-usinée sur un substrat silicium (SOI). Les performances de la mesure en boucle ouverte sont principalement limitées par la linéarité de la mesure. Ce défaut peut être corrigé en mettant en place le principe de mesure en boucle fermée décrit dans le chapitre précédent. L'objectif de l'étude est de proposer une architecture qui permette d'atteindre les performances de mesure rassemblées dans le tableau 3.1. Les principales contributions de ce chapitre sont la modélisation haut niveau du capteur, l'analyse des facteurs limitant les performances de mesure en boucle ouverte et la conception haut niveau du système de commande - spécifications des performances de l'asservissement, adaptation des signaux disponibles pour une commande efficace, spécifications des entrées et sorties nécessaires à l'identification et dimensionnement du correcteur.

Critère	Performance (FS)	Performance (g)
Type de sortie	numérique ($\Sigma\Delta$)	numérique ($\Sigma\Delta$)
Pleine échelle	$\gamma_{max} = \pm 10 g$	10 g
Bande passante (BP_{mes})	0 – 122 Hz	
Niveaux de bruit	$SNR \geq 100 dBFS$	100 μg (9 $\mu g/\sqrt{Hz}$)
Résolution sur BP_{mes}	$SQNR \geq 100 dBFS$ ($\simeq 16 bits$)	100 μg (9 $\mu g/\sqrt{Hz}$)
Linéarité	$THD \leq -100 dBFS$, soit 0,001 %	100 μg
$\Rightarrow SNDR$	$SNDR \geq 100 dBFS$	100 μg
Gamme de Température	0 – 85°C	
Gamme de pression	0,8 – 1,2 atm	

TAB. 3.1 – Spécifications initiales

Ce chapitre est découpé de la manière suivante :

- paragraphe 3.2 : Rappel du principe de mesure d'accélération, rappel du principe de conversion analogique-numérique $\Sigma\Delta$ et présentation de l'adaptation *électro-physique* à la mesure d'accélération (accéléromètres $\Sigma\Delta$);
- paragraphe 3.3 : Description de l'architecture proposée;
- paragraphe 3.4 : Présentation de la structure mécanique et modélisation physique du comportement dynamique du micro-accéléromètre;
- paragraphe 3.5 : Etablissement du modèle pour la commande et des contraintes sur les fonctions de sensibilité;
- paragraphe 3.6 et 3.7 : Résultats en simulation et résultats du démonstrateur;
- paragraphe 3.8 : Réduction de l'erreur de mesure dynamique par observateur;
- paragraphe 3.9 : Conclusion.

3.2 Accéléromètres, conversion analogique-numérique $\Sigma\Delta$ et accéléromètres $\Sigma\Delta$

3.2.1 Généralités et principe de fonctionnement des accéléromètres linéaires

Parmi les différents types de microsystemes capteurs, les capteurs inertiels (accéléromètres, gyromètres, magnétomètres) représentent une part importante du marché des microsystemes. Ces capteurs ont pour vocation de donner une information partielle sur l'attitude ou la trajectoire d'un objet en mouvement (accélération, vitesse de rotation, orientation par rapport au champ terrestre d'un point matériel de l'objet). Leur utilisation est en constante augmentation et pour un nombre croissant d'applications. Parmi ces applications, on trouve celles nécessitant la reconstruction complète d'une trajectoire (avionique, aérospatiale, automobile, systèmes médicaux, manettes de jeux). D'autres applications ne nécessitent que l'information partielle fournie par un type de capteur. Notamment, les capteurs d'accélération (accéléromètres, géophones, inclinomètres) peuvent être utilisés de manière indépendante. Ils peuvent fournir les mesures nécessaires pour des asservissements dans des systèmes plus complexes, par exemple de réduction de niveaux vibratoires (confort dans les habitacles de véhicules, stabilisation de plateformes de machines, asservissement de têtes de lecture, ...) ou être utilisés pour la surveillance de phénomènes et d'événements vibratoires ou de chocs (sismographe, surveillance d'ouvrage d'art, airbags, système de protection des têtes de lecture de disques durs, stabilisateur d'image et d'optique).

Les accéléromètres ne mesurent pas l'accélération $\vec{a}(t)$ d'un objet par rapport à un référentiel galiléen $(GXYZ, t)$ (ou considéré comme galiléen), figure 3.2(a). Ils permettent d'estimer l'accélération d'inertie d'entraînement $\vec{a}_e(O, t)$ au point de fixation O du capteur sur l'objet.

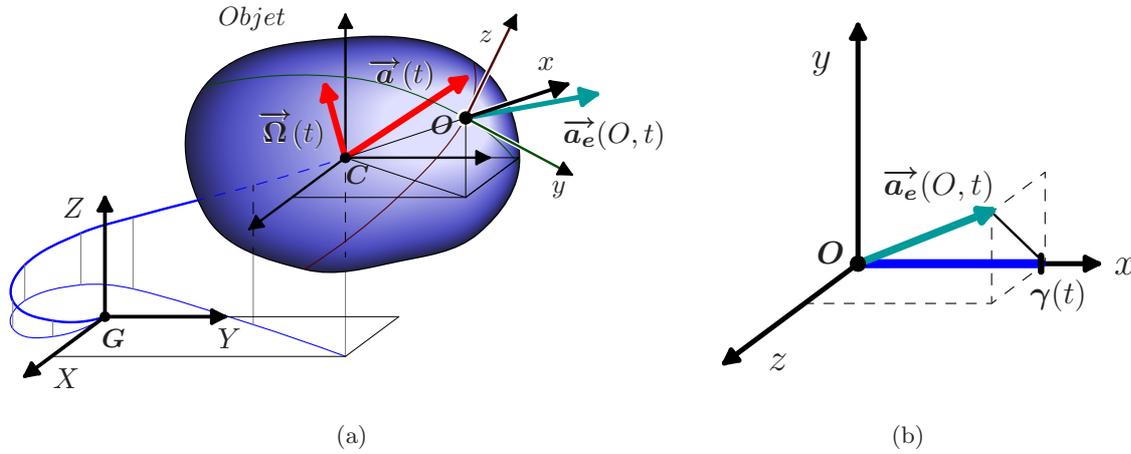


FIG. 3.2 – (a) Accélération $\vec{a}(t)$ d'un objet et accélération d'entraînement $\vec{a}_e(O, t)$ du point de fixation O du capteur. (b) Projection $\gamma(t)$ du vecteur accélération d'entraînement $\vec{a}_e(O, t)$ du point O sur l'axe Ox du repère $Oxyz$ fixe par rapport à l'objet - Ox étant par exemple l'axe sensible d'un accéléromètre 1-axe.

Cette accélération d'entraînement $\vec{a}_e(O, t)$ est exprimée dans un repère $Oxyz$ défini par l'orientation du capteur, par projection sur un, deux ou trois de ses axes, appelés *axes sensibles* ou *axes d'entrée*, figure 3.2(b). Le nombre d'accéléromètres et le nombre d'axes sensibles par accéléromètre nécessaires à la reconstruction de l'accélération $\vec{a}(t)$ de l'objet par rapport à un référentiel galiléen ou géocentrique (rôle des centrales inertielles) est fonction de la nature du mouvement de l'objet. En général, la reconstruction de l'accélération $\vec{a}(t)$ nécessite également les informations fournies par d'autres types de capteurs (gyromètres, magnétomètres).

Le capteur étudié dans ce chapitre est un accéléromètre 1-axe. On note $\gamma(t)$ la projection du vecteur accélération d'entraînement $\vec{a}_e(O, t)$ sur l'axe sensible (Ox) du capteur, figure 3.2(b). Par abus de langage, on appellera $\gamma(t)$, accélération.

Une des techniques pour capter l'information relative au vecteur accélération $\vec{a}_e(O, t)$ est de placer au point O de l'objet une masse d'épreuve M de masse m , puis de mesurer la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(O, t) = -m \cdot \vec{a}_e(O, t)$ [58] s'exerçant sur cette masse¹ - figure 3.3. Dans le cas de l'accéléromètre 1-axe de ce chapitre, on note $F_\gamma(t) = -m \cdot \gamma(t)$ la projection du vecteur force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}(O, t)$ sur l'axe sensible (Ox). De même, par abus de langage, on appellera $F_\gamma(t)$, *force d'inertie d'entraînement*.

Pour ce type de mesure, les microsystèmes présentent des avantages majeurs. Outre les aspects encombrement et consommation, leurs faibles dimensions permettent d'instrumenter un objet en limitant l'ajout de *masse capteur* qui pourrait perturber le comportement naturel de l'objet (*finesse* d'un appareil de mesure).

¹On fait ici l'hypothèse que la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}(O, t)$ est négligeable dans le cas d'un accéléromètre à deux ou trois axes sensibles utilisant une masse d'épreuve unique. Dans le cas d'un accéléromètre linéaire 1-axe, cette force ne travaille pas.

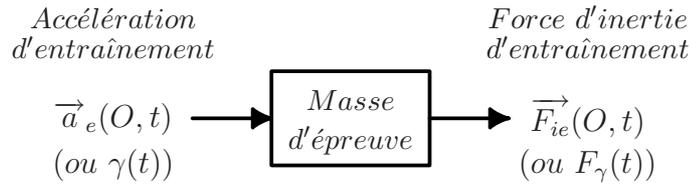
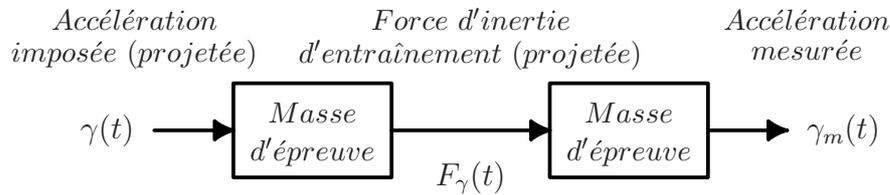
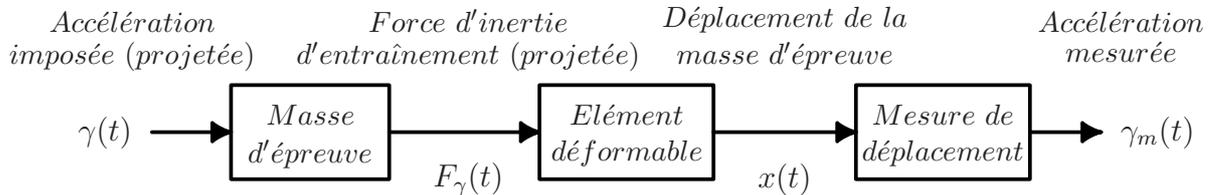


FIG. 3.3 – Principe des accéléromètres inertiels

La mesure de la force $F_\gamma(t)$ peut être réalisée [5],[34, 59] :

- de manière directe, figure 3.4 : accéléromètres à jauge de contrainte piézorésistive, piézo-électrique, ou de type corde/poutre vibrante ;
- ou de manière indirecte, figure 3.5 : la force est alors convertie en un déplacement $x(t)$ grâce à une structure mécanique pouvant subir une déformation élastique.


 FIG. 3.4 – Mesure directe de la force d'inertie d'entraînement $F_\gamma(t)$

 FIG. 3.5 – Mesure indirecte de la force d'inertie d'entraînement $F_\gamma(t)$

Les accéléromètres linéaires, figure 3.6, font partie de cette deuxième catégorie. Le mouvement de la masse d'épreuve, également appelée masse sismique, est alors régi par une équation différentielle semblable à celle d'un système *masse-ressort-amortissement* excité par la force d'inertie d'entraînement $F_\gamma(t)$:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b \cdot \dot{x}(t) + k_{mec} \cdot x(t) = -m \cdot \gamma(t) \quad (3.1)$$

où k_{mec} représente le coefficient de raideur associé à la force de rappel mécanique $F_{r,mec}(t) = -k_{mec} \cdot x(t)$ exercée sur la masse sismique et b représente le coefficient d'amortissement associé aux forces dissipatives.

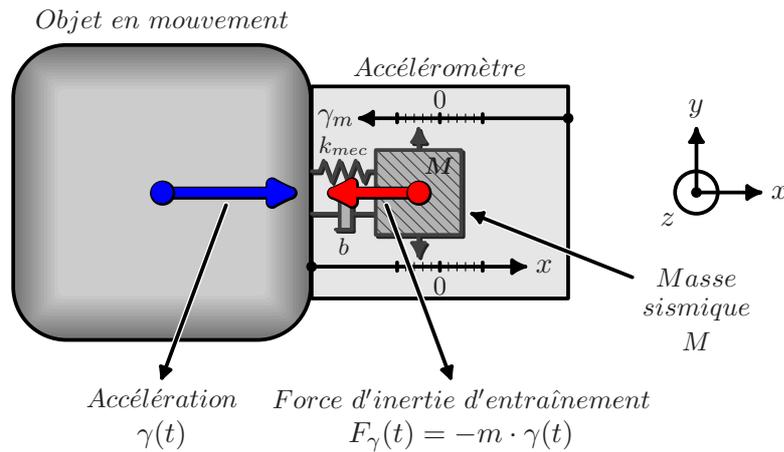


FIG. 3.6 – Principe de fonctionnement d'un accéléromètre linéaire

Pour les accélérations $\gamma(t)$ de fréquences inférieures à la fréquence de coupure $f_n = \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{k_{mec}}{m}}$ du système masse-ressort (3.1), on peut considérer qu'il y a, à chaque instant, équilibre entre la force d'inertie $F_\gamma(t) = -m \cdot \gamma(t)$ et la force de rappel $F_{r,mec}(t) = -k_{mec} \cdot x(t)$, $\gamma(t)$ et $x(t)$ étant de signes opposés. Ainsi, la mesure du déplacement $x(t)$ de la masse sismique M constitue un moyen de mesurer l'accélération $\gamma(t)$, figure 3.6.

Lorsque l'on peut agir sur le déplacement de la masse sismique par l'intermédiaire d'une force de contre-réaction $F_{cr}(t)$, figure 3.7, le capteur devient un capteur-actionneur. Il peut être représenté par le schéma de la figure 2.3 du précédent chapitre, rappelé sur la figure 3.8. On peut alors mettre en place le principe de mesure en boucle fermée, figures 2.4 et 2.5 et on parle d'accéléromètres linéaires asservis [6, 8], [34].

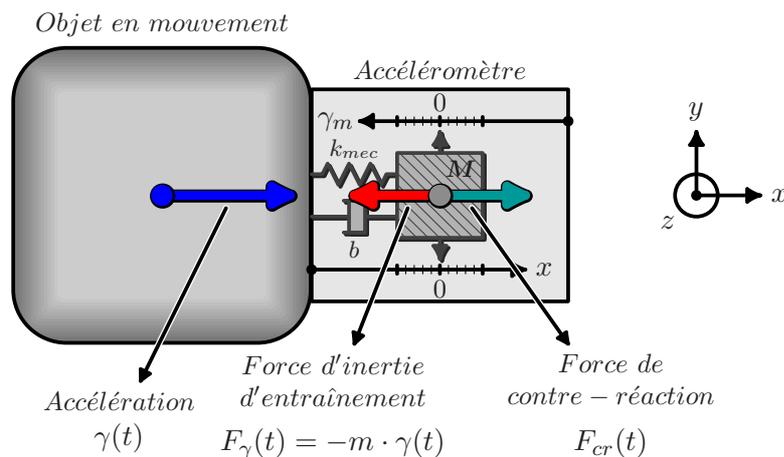


FIG. 3.7 – Accéléromètre linéaire capteur-actionneur

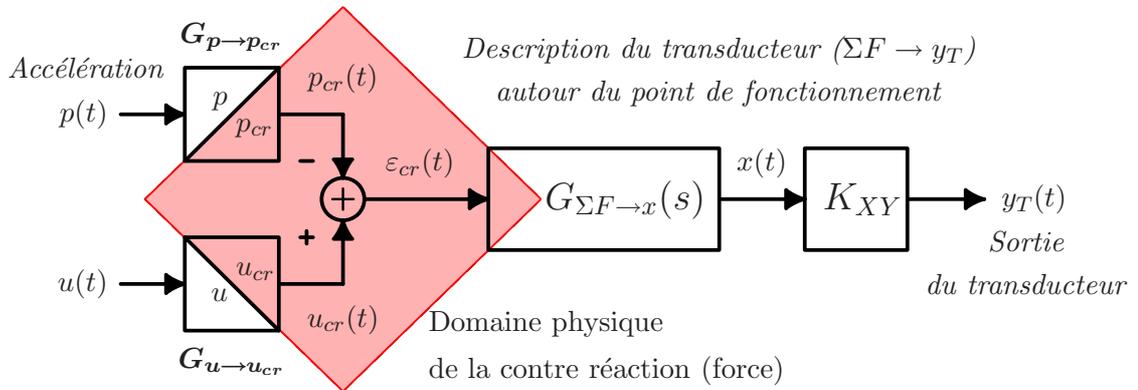


FIG. 3.8 – Représentation d’un accéléromètre *capteur-actionneur* autour du point de fonctionnement $x = 0$. L’entrée $p(t)$ est l’accélération $\gamma(t)$; $u(t)$ est la commande. $p_{cr}(t) = -F_\gamma(t) = m \cdot \gamma(t)$ et $u_{cr}(t) = F_{cr}(t)$ sont les signaux équivalents dans le domaine de la contre-réaction (forces). Le signal $\varepsilon_{cr}(t)$ représente la somme des forces $\Sigma F(t)$ appliquée sur la masse sismique M . La fonction de transfert $G_{\Sigma F \rightarrow x}(s)$ représente la dynamique de la masse sismique, équation (3.1). Le gain K_{XY} représente le gain du transducteur permettant de lire le déplacement $x(t)$; $y_T(t)$ est la sortie disponible pour générer la commande $u(t)$.

3.2.2 Conversion analogique-numérique $\Sigma\Delta$

Les convertisseurs $\Sigma\Delta$ [32, 57] sont composés d'un modulateur et d'un ou plusieurs filtres numériques, figure 3.9.

Le modulateur prend comme entrée le signal analogique $e_{\Sigma\Delta}(t)$ et fournit en sortie un signal numérique $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ codé sur un bit ou plus (généralement entre 1 et 4) à une fréquence d'échantillonnage élevée, notée ici f_{s2} . Le rôle principal du modulateur est de mettre en forme le bruit de quantification. Il repousse ce bruit en dehors de la bande passante d'intérêt pour la conversion, à savoir vers les hautes fréquences lorsque le signal utile est en basses fréquences (voir annexe B.1 pour plus de détails).

Le filtrage numérique réalise une moyenne (filtrage du bruit de quantification repoussé vers les hautes fréquences) et une décimation. Il permet d'obtenir un signal $y_{Filtre}(k_1)$ codé sur N bits à une fréquence plus faible, notée ici f_{s1} . En général, la fréquence f_{s1} correspond à la fréquence de Nyquist-Shannon $f_{s,NS}$ nécessaire à la conversion du signal $e_{\Sigma\Delta}(t)$, soit $f_{s,NS} = 2 \cdot f_B$ où f_B représente la fréquence de variation maximale du signal $e_{\Sigma\Delta}(t)$.

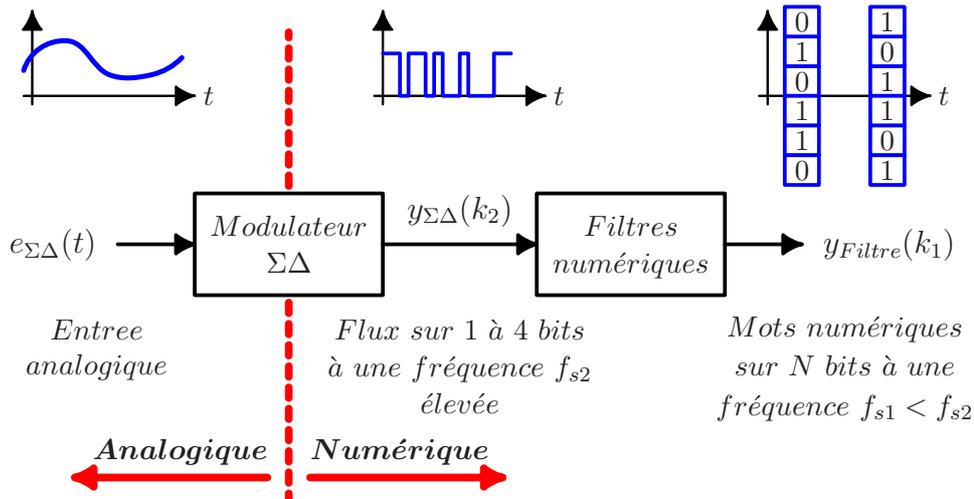
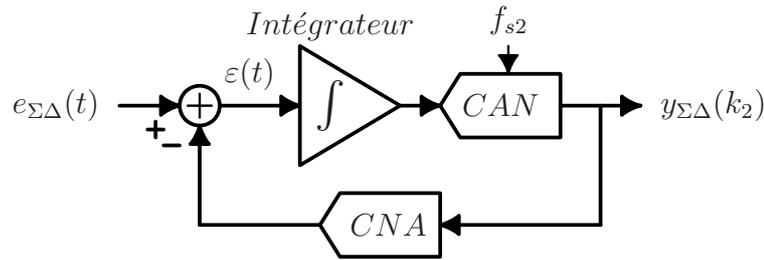


FIG. 3.9 – Conversion Analogique-Numérique par modulateur $\Sigma\Delta$

L'ordre d'un modulateur $\Sigma\Delta$ est défini par le nombre d'intégrateurs dont il est composé. Nous présentons dans le paragraphe suivant l'architecture de base d'un modulateur $\Sigma\Delta$ d'ordre 1. D'autres architectures sont possibles [32, 57].

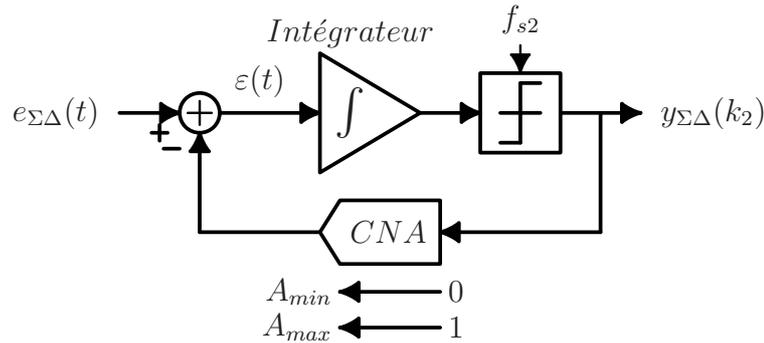
Le modulateur $\Sigma\Delta$ du 1^{er} ordre

Le schéma de la figure 3.10 représente un modulateur $\Sigma\Delta$ d'ordre 1. Ce modulateur fournit, à chaque instant k_2/f_{s2} , le signal $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ qui minimise le signal $\varepsilon(t) = e_{\Sigma\Delta}(t) - y_{\Sigma\Delta}(t)$ représentant l'erreur de conversion.


 FIG. 3.10 – Modulateur $\Sigma\Delta$ du 1er ordre

Le convertisseur analogique/numérique de la figure 3.10 (*CAN*) et le convertisseur numérique/analogique de la chaîne de retour (*CNA*) peuvent être sur 1 ou plusieurs bits. Cependant les convertisseurs numérique/analogique intégrés présentent en général une linéarité limitée. L'erreur de linéarité associée est assimilable à un bruit qui n'est pas mis en forme par le modulateur.

Les modulateurs avec *CAN* un bit (comparateur), figure 3.11, ne présentent pas cet inconvénient. Pour éviter la saturation du modulateur, l'étendue de sortie $[A_{min} ; A_{max}]$ du *CNA* de retour doit inclure la plage de variation $[e_{min} ; e_{max}]$ du signal analogique $e_{\Sigma\Delta}(t)$ en entrée.


 FIG. 3.11 – Modulateur $\Sigma\Delta$ du 1er ordre avec convertisseur A/N et N/A un bit

La figure 3.12(b) illustre l'allure de la sortie $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ pour une entrée $e_{\Sigma\Delta}(t)$ sinusoïdale, figure 3.12(a). En moyenne, la sortie $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ est représentative du signal $e_{\Sigma\Delta}(t)$ en entrée, figure 3.12(c).

Modèles linéaires associés aux modulateurs $\Sigma\Delta$

Les modulateurs $\Sigma\Delta$ peuvent être représentés par un modèle linéaire. Ce modèle permet de représenter la mise en forme du bruit de quantification (voir annexe B.1). La figure 3.13 représente le modèle classiquement associé à un modulateur d'ordre N : l'entrée $e'_{\Sigma\Delta}(t)$ représente ici l'entrée normalisée par rapport à l'étendue d'entrée du convertisseur ; le bruit $b_{q,\sigma}(t)$ est le bruit de quantification du *CAN*, figure 3.10. Il est mis en forme par une fonction de transfert passe-haut d'ordre N .

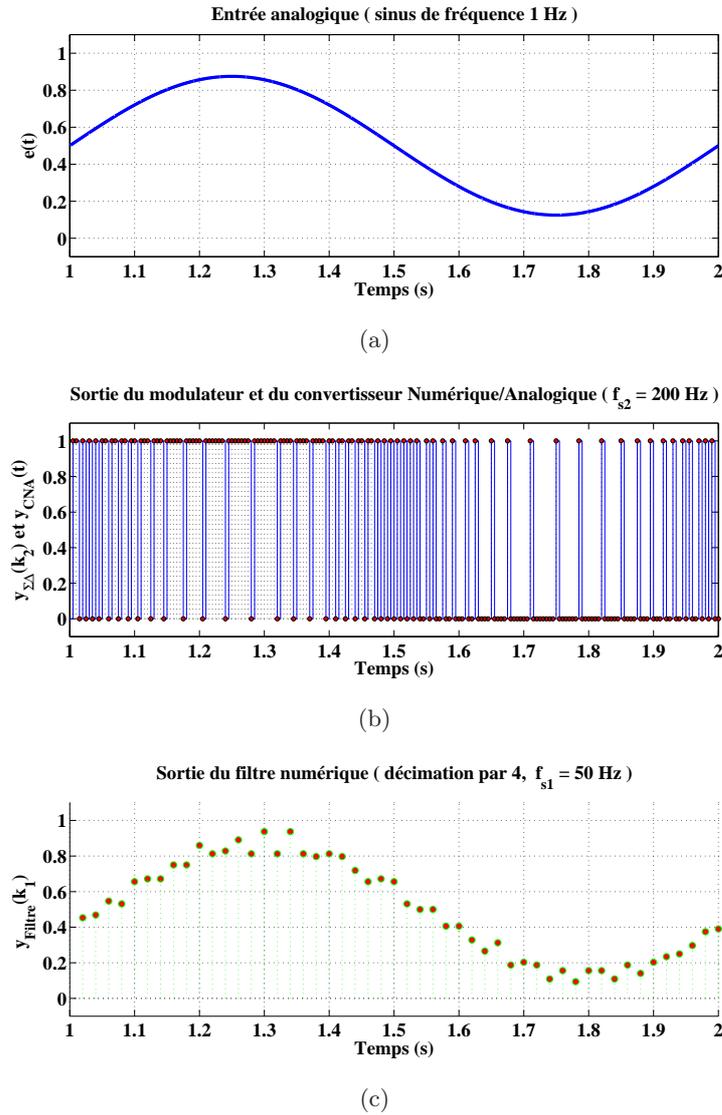


FIG. 3.12 – (a) Entrée analogique $e_{\Sigma\Delta}(t)$ sinusoïdale. (b) Sortie numérique sur $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ (points rouges) et signal en sortie du CNA de retour (ligne continue bleue) (c) Résultat $y_{Filtre}(k_1)$ d'un filtrage de décimation par 4.

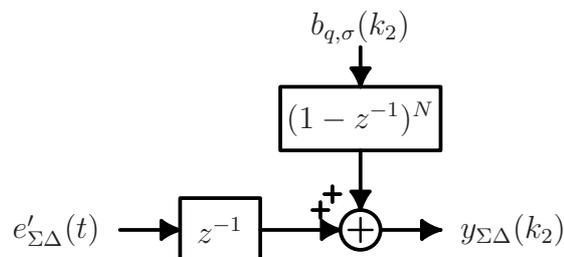


FIG. 3.13 – Modèle linéaire associé à un modulateur $\Sigma\Delta$ d'ordre N

3.2.3 Micro-accéléromètres $\Sigma\Delta$

Depuis le milieu des années 2000 [29, 45, 49], une solution élégante consistant à réaliser simultanément la mesure de l'accélération et sa conversion en un signal numérique est reprise dans différents travaux [35, 32, 44, 46, 47]. Les architectures proposées mettent en œuvre une adaptation *électro-physique* du principe de modulation $\Sigma\Delta$. La figure 3.14 présente le schéma de principe permettant de réaliser un modulateur $\Sigma\Delta$ “accélération vers numérique” du premier ordre.

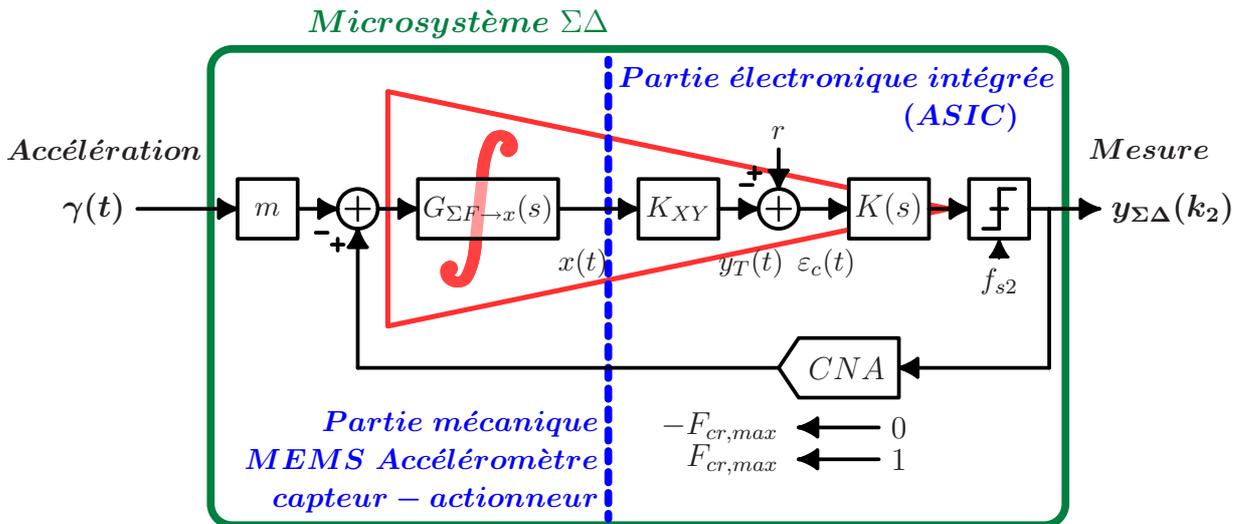


FIG. 3.14 – Adaptation *électro-physique* de la modulation $\Sigma\Delta$ pour la mesure d'accélération : le MEMS devient un élément actif du modulateur en réalisant en partie le rôle de l'intégrateur, figure 3.10.

La plupart du temps, le déplacement $x(t)$ est lu de manière capacitive et le retour $F_{cr}(t)$ se fait par force électrostatique. Des modulateurs $\Sigma\Delta$ d'ordre supérieur peuvent être réalisés. L'article [35] présente par exemple la réalisation d'un modulateur du cinquième ordre. Dans la littérature, le correcteur K (analogique ou numérique) introduit en général une action dérivée ou avance de phase pour assurer la *stabilité de la boucle du modulateur* $\Sigma\Delta$ réalisé. Il s'agit souvent d'un filtre numérique $K(z^{-1})$ de fonction de transfert $2 - z^{-1}$ [29, 49]. Peu de références détaillent la conception d'un correcteur réalisant une fonction de transfert autre que ce type de filtre pour des micro-accéléromètres $\Sigma\Delta$. On trouve par exemple des régulations de type PI dans les références [32, 45].

A notre connaissance, les principaux travaux proposant et détaillant des méthodologies de synthèse de correcteur de l'automatique moderne appliquées à l'étude de micro-accéléromètres (passe-bas) asservis sont ceux présentés dans les références [30, 31, 52, 51].

Dans le cadre de la coopération sur le projet Locadyn 3D², une approche par la commande optimale a été proposée [30, 31]. La reconstruction du vecteur d'état est réalisée par un filtrage de Kalman et le correcteur est synthétisé par la commande *LQG* - Linear Quadratique Gaussian. L'approche, validée en simulation, est orientée vers l'amélioration de la résolution de la conversion analogique numérique.

Les articles [52, 51] présentent la synthèse d'un correcteur par la méthode \mathcal{H}_∞ pour un accéléromètre à effet tunnel. Le correcteur du 3^{ème} ordre est réalisé en électronique analogique avec des composants discrets. Ce micro-accéléromètre ne met pas en œuvre la modulation $\Sigma\Delta$ et sa sortie de mesure est analogique. Bien que l'asservissement robuste du déplacement de la masse sismique soit un des objectifs principaux, l'erreur de linéarité mesurée est importante (5 %).

Nous proposons dans cette thèse une *architecture d'accéléromètre $\Sigma\Delta$ originale* et une *méthodologie de conception adaptée* (traduction des objectifs de performance, identification du modèle du procédé à asservir et synthèse du correcteur) afin de satisfaire l'ensemble des *spécifications sur les performances de mesure* présentées dans le tableau 3.1.

3.3 Description de l'architecture proposée

L'architecture proposée dans cette étude conserve les avantages de la modulation $\Sigma\Delta$ pour la lecture et l'actionnement. Par contre, le système de commande a été conçu avec pour objectif principal l'*asservissement performant et robuste du déplacement de la masse sismique*. Le schéma haut-niveau de l'architecture³ est donné dans la figure 3.15.

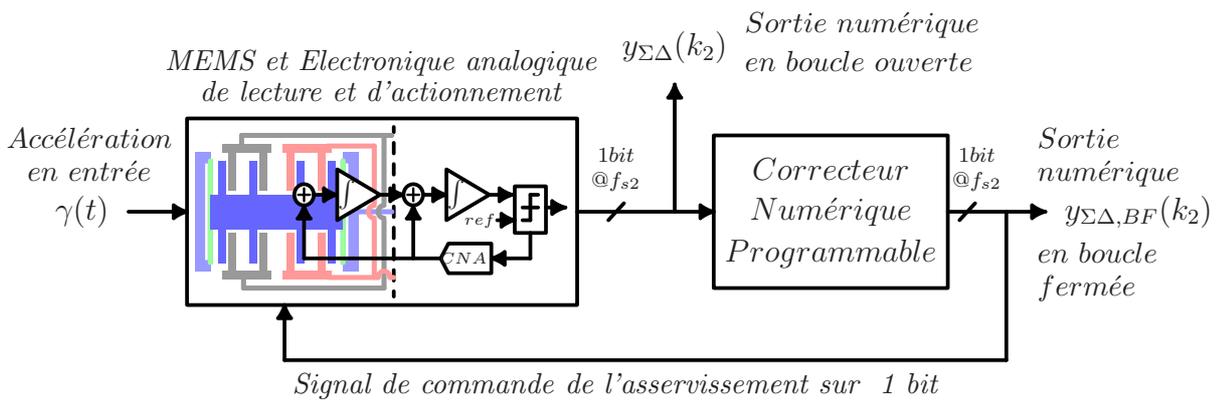


FIG. 3.15 – Architecture du micro-système accéléromètre asservi avec correcteur numérique

²Projet RMNT - Partenariat Tronic's Microsystems - LETI - Supélec.

³Le capteur peut être utilisé en boucle ouverte ou en boucle fermée. En boucle ouverte, l'électronique numérique dédiée à l'asservissement est désactivée. La sortie de mesure est alors le signal $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$.

Deux principales considérations ont orienté le choix de l'architecture du circuit intégré proposée. Tout d'abord, afin de proposer un compromis satisfaisant entre performance et stabilité, le correcteur doit être programmable. En effet, les dispersions technologiques inhérentes à la fabrication des MEMS lors de la phase de prototypage peuvent être importantes. De plus, le comportement dynamique du capteur dépend fortement du point de fonctionnement choisi - notamment des tensions de lecture et d'actionnement - paragraphes 3.4.3 et 3.5. Le correcteur est donc optimisé, après identification du comportement réel du capteur.

Le deuxième point concerne la fréquence de travail du correcteur. En effet, afin de proposer un système de commande numérique cohérent et permettant une identification robuste, la fréquence de travail du correcteur doit être adaptée au système à contrôler [16]. En général, on préconise une fréquence d'échantillonnage comprise entre 6 à 25 fois la fréquence correspondant aux pôles de la dynamique principale (ou la plus lente) du système à commander. Dans le cas du capteur considéré, la fréquence correspondant aux pôles de la dynamique principale est d'environ 1 kHz . Or, le signal noté $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ en sortie du modulateur $\Sigma\Delta$ de lecture ($2^{\text{ème}}$ ordre) est sur-échantillonné à $f_{s2}=250 \text{ kHz}$ ⁴.

Nous avons donc choisi d'intégrer un *Filtre de décimation*, figure 3.16, à la partie numérique de l'ASIC dédiée au correcteur (notée *correcteur numérique programmable* sur la figure 3.15). Ce filtre a pour rôle de diviser la fréquence d'échantillonnage par 4⁵ et de préparer la taille des mots pour un calcul numérique sur 32 bits. Il est constitué d'un filtre de fonction de transfert $H_{F,D/I}(z^{-1})$ ⁶, équation (3.2) et d'un échantillonneur à $f_{s1} = f_{s2}/4 = 62,5 \text{ kHz}$.

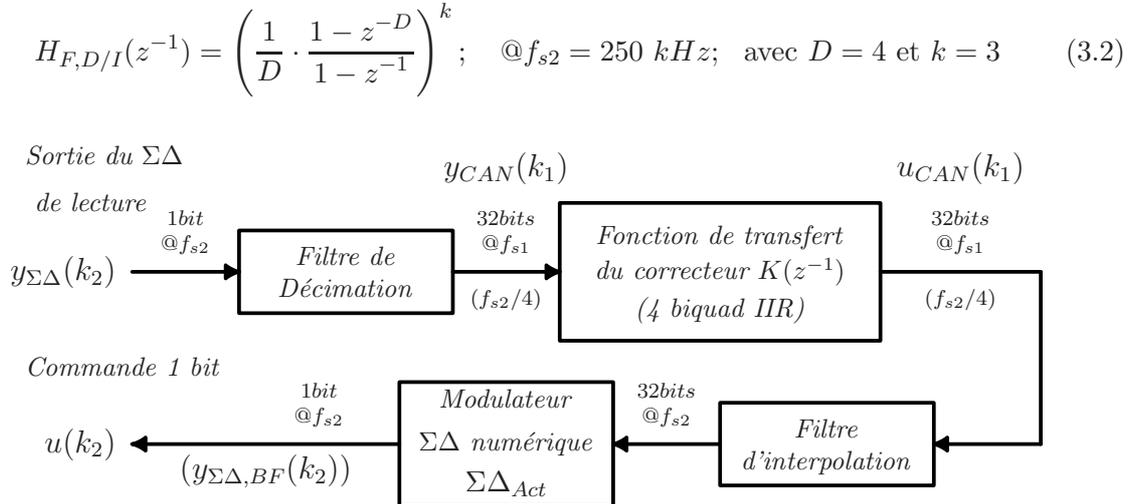


FIG. 3.16 – Architecture du correcteur numérique programmable de la figure 3.15

⁴Cette fréquence de sur-échantillonnage permet d'atteindre un rapport signal à bruit maximal théorique de 140 dB sur la bande passante de la mesure BP_{mes} pour la conversion A/N , équation B.6.

⁵Ce choix est un compromis entre fréquence d'échantillonnage optimale d'un point de vue asservissement et complexité/taille/consommation du circuit numérique.

⁶Sinus cardinal du 3^{ème} ordre [32]

Le correcteur $K(z^{-1})$ travaille donc à une fréquence $f_{s1} = f_{s2}/4 = 62,5 \text{ kHz}$. Le signal de commande $u_{CAN}(k_1)$ est ensuite reconverti en un signal d'actionnement $u(k_2)$ sur un bit à la fréquence originale ($f_{s2} = 250 \text{ kHz}$) par un *Filtre d'interpolation*⁷, suivi du modulateur $\Sigma\Delta$ numérique, noté $\Sigma\Delta_{Act}$. Le signal $u(k_2)$ en sortie du modulateur $\Sigma\Delta_{Act}$ correspond également à la sortie de mesure $y_{\Sigma\Delta,BF}(k_2)$ du capteur en boucle fermée.

Le schéma complet de l'architecture est présenté sur la figure 3.17. Sur ce schéma, l'ensemble $\{\text{modulateur de lecture } (\Sigma\Delta_{Lect}) \text{ et filtre de décimation } (Decim)\}$ peut être considéré comme un simple convertisseur analogique-numérique (entrée signal $y_T(t)$ et sortie $y_{CAN}(k_1)$) présentant une mise en forme de bruit particulière (bruit de quantification du modulateur $\Sigma\Delta$ analogique). De même, l'ensemble $\{\text{filtre d'interpolation } (Interp), \text{ modulateur d'actionnement } (\Sigma\Delta_{Act}) \text{ et } CNA \text{ 1 bit}\}$ de la figure 3.17 peut être considéré comme un convertisseur numérique-analogique (entrée $u_{CAN}(k_1)$ - sortie force $F_{cr}(t)$) présentant la mise en forme de bruit particulière du modulateur $\Sigma\Delta$ numérique.

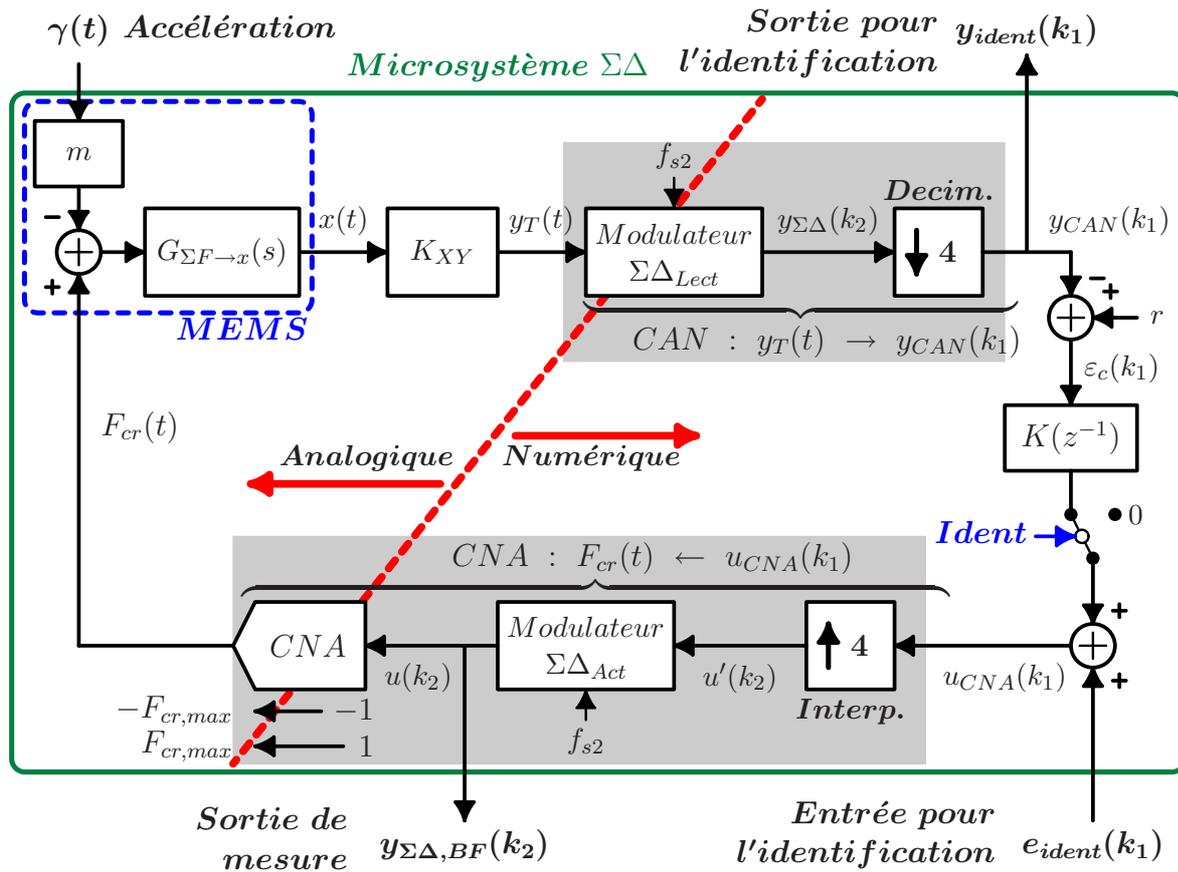


FIG. 3.17 – Schéma complet de l'architecture proposée

⁷Echantillonneur à f_{s2} , suivi d'un filtre d'interpolation du 3^{ème} ordre de fonction de transfert $H_{F,D/I}(z^{-1})$ identique à celle du filtre de décimation, équation (3.2).

Afin de synthétiser un correcteur adapté à l'élément mécanique réel et au point de fonctionnement choisi, le circuit présente les entrées et sorties ($e_{ident}(k_1)$ et $y_{ident}(k_1)$) nécessaires à l'identification du *procédé à asservir* vu par le correcteur, à savoir l'élément sensible mécanique et les parties électroniques nécessaires à la lecture et l'actionnement. La procédure d'identification permet d'obtenir un modèle à temps discret, noté $G_{id,u \rightarrow y}(z^{-1})$. Dans cette étude, l'identification est réalisée en boucle ouverte en ouvrant la boucle grâce au sélecteur noté *Ident* sur la figure 3.17. L'identification en boucle fermée est néanmoins possible.

D'un point de vue synthèse du correcteur, le modèle simplifié de l'asservissement à réaliser peut donc être représenté par le schéma de la figure 3.18 qui correspond à la figure 2.7 du chapitre précédant, sous forme échantillonnée.

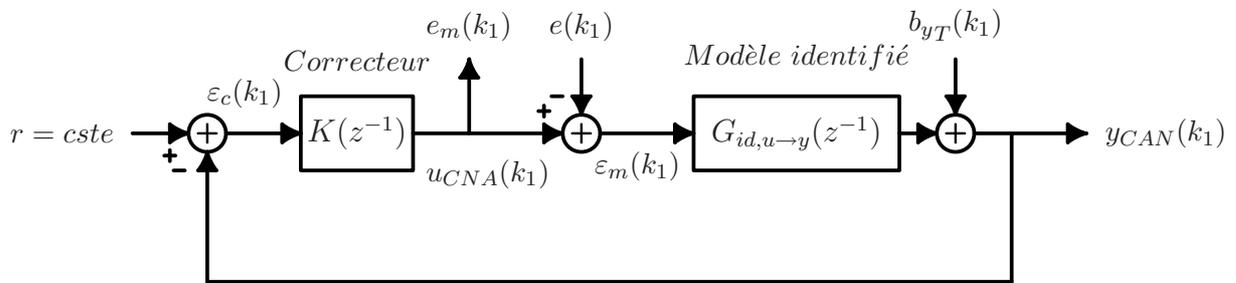


FIG. 3.18 – Représentation simplifiée de la boucle d'asservissement de l'accéléromètre

La principale approximation de ce modèle concerne les signaux $e(k_1)$ et $e_m(k_1)$ représentant respectivement, le signal équivalent à l'accélération $\gamma(t)$ à mesurer et la sortie de mesure $y_{\Sigma\Delta,BF}(k_2)$ (figure 3.17).

Le paragraphe 3.4 décrit le bloc nommé “MEMS et Electronique analogique de lecture et d'actionnement” de la figure 3.15. L'objectif est d'établir le modèle physique du capteur. Les étapes permettant ensuite de passer de la figure 3.17 à la figure 3.18 sont présentées dans le paragraphe 3.5.

3.4 Présentation de la structure mécanique et modélisation physique

On présente ici la structure micro-mécanique (MEMS) de l'accéléromètre considéré. Après un rappel du principe de détection capacitif, nous proposons un modèle haut niveau du circuit de lecture, ainsi qu'un modèle de l'actionnement électrostatique nécessaire à l'asservissement de la masse sismique.

3.4.1 Description de la structure mécanique du micro-accéléromètre

L'élément sensible étudié dans ce chapitre est un accéléromètre micro-usiné sur un substrat SOI, figure 3.19.

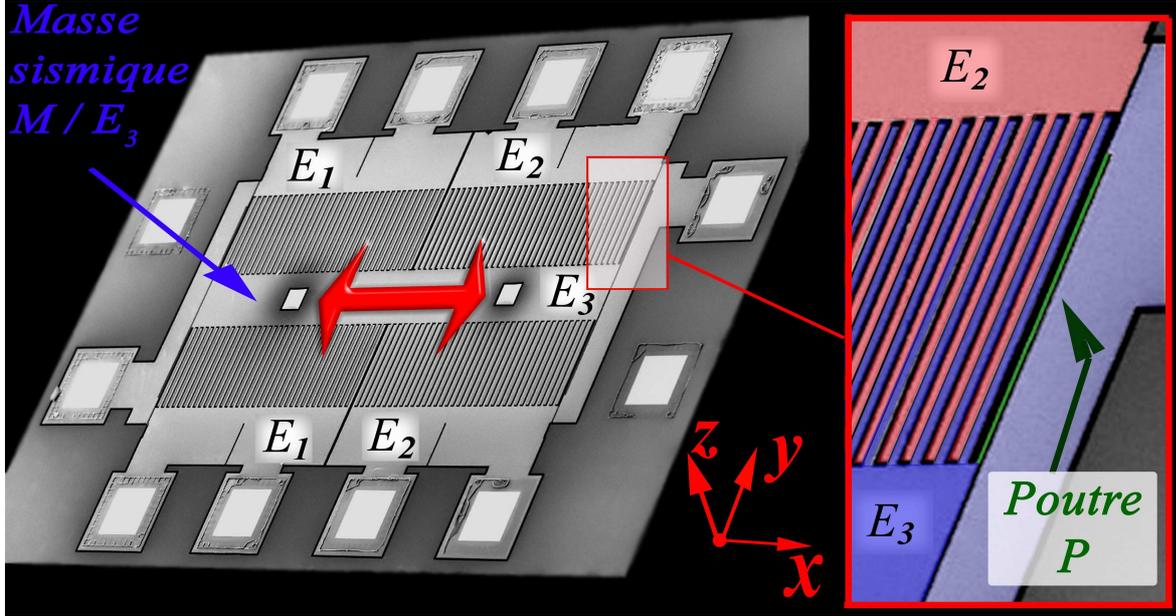


FIG. 3.19 – Photographie du MEMS Locadyn 3D. Photographie ©Tronic's Microsystem. L'encart en rouge montre le détail de la structure. La zone en surimpression bleue correspond à la masse mobile et ses électrodes en forme de peigne. Les bras de suspension sont représentés en vert. La partie visible de l'électrode fixe E_2 est en rouge. La zone bleu clair correspond à la prise de contact permettant de polariser la masse sismique, par l'intermédiaire des bras de suspension.

Il est composé d'une masse sismique mobile M suspendue et maintenue dans sa position centrale ($x = 0$) par quatre bras de suspension (poutre P , figure 3.19). La masse sismique est sensible aux forces inertielles appliquées dans la direction (Ox) (axe de déplacement autorisé par les bras de suspension). Des capacités de type peignes interdigités sont formées entre l'électrode E_3 correspondant à la masse sismique mobile M (figure 3.19) et les électrodes fixes E_1 et E_2 . Ces électrodes permettent de réaliser la lecture du déplacement $x(t)$ (paragraphe 3.4.2) et générer la force électrostatique $F_{cr}(t)$ de contre réaction (paragraphe 3.4.3).

La dynamique de la masse sismique est décrite par l'équation (3.3) qui correspond à l'équation (3.1) complétée par le terme associé à la force de contre-réaction $F_{cr}(t)$ et les bruits en force $F_{Bn}(t)$ et $F_{Be}(t)$:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b_0 \cdot \dot{x}(t) + k_{mec} \cdot x(t) = -m \cdot \gamma(t) + F_{cr}(t) + F_{Bn}(t) \quad (+F_{Be}(t)) \quad (3.3)$$

Le terme m est la masse totale suspendue (ensemble “masse M + doigts mobiles”), b_0 représente le coefficient d’amortissement dû à l’écrasement du film d’air⁸ entre les doigts fixes et les doigts mobiles [28, 42, 49], k_{mec} est la raideur mécanique associée à la force de rappel exercée par les quatre bras de suspension. Les formules utilisées pour le calcul des paramètres m , b_0 et k_{mec} sont données en annexe B.2.

Le bruit brownien $F_{Bn}(t)$ (ou bruit *thermo-mécanique*) correspond à la force fluctuante associée à toute résistance mécanique [37]. Ce bruit en force peut être modélisé par un bruit blanc de densité spectrale $F_{Bn,PSD} = \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot b}$ [N/ \sqrt{Hz}], où k_B est la constante de Boltzmann, T désigne la température et b l’amortissement.

Le bruit noté $F_{Be}(t)$ dans l’équation (3.3) correspond au bruit en force *généré par l’électronique* au travers des tensions de lecture et d’actionnement (bruit des alimentations notamment). Ce bruit ne sera pas quantifié dans cette étude. Il est donc indiqué ici entre parenthèse et sera omis par la suite.

Les figures 3.20(a) et 3.20(b) présentent schématiquement la configuration des peignes interdigités des électrodes E_1 , E_2 et E_3 , respectivement à l’équilibre mécanique ($\gamma(t) = 0$, $x = 0$) et hors équilibre ($\gamma(t) \neq 0$, $x \neq 0$). Sur ces schémas, un seul doigt des peignes de la masse sismique (électrode E_3) est représenté en vis-à-vis des peignes supérieurs et inférieurs des électrodes E_1 et E_2 (soit 2 doigts par électrode). La masse sismique de la structure réelle, figure 3.19, possède au total 160 doigts, soit 80 doigts par électrode.

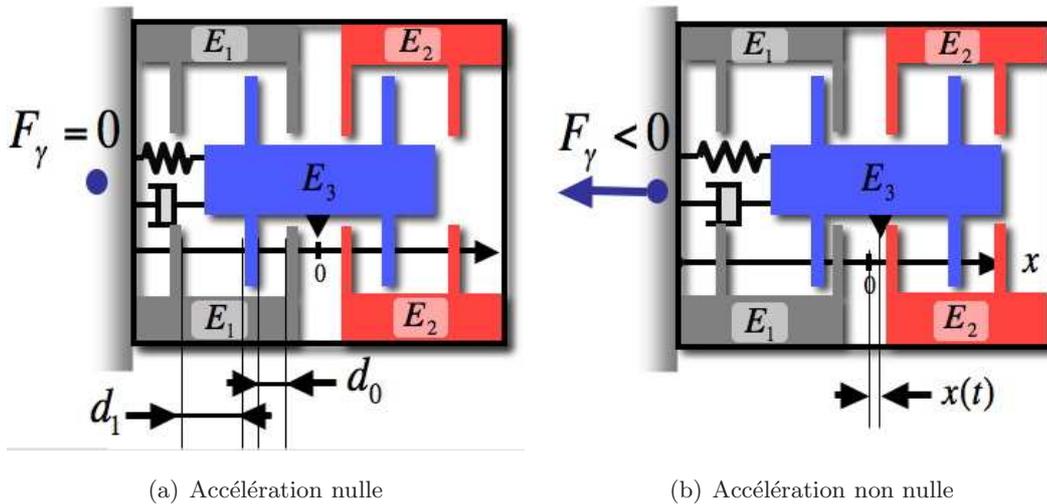


FIG. 3.20 – Représentation schématique de l’accéléromètre considéré en l’absence d’accélération (a) et pour une accélération non nulle (b).

⁸On considère ici que les pertes dues à l’écrasement du film d’air (*squeezed-film damping*) sont prépondérantes pour le système considéré, à pression et température ambiantes. D’autres phénomènes dissipatifs peuvent également entrer en jeu : pertes dans les ancrages, pertes thermo-élastiques, pertes liées à la qualité des surfaces ou encore à la présence de non-linéarités [53, 60]. L’expression de l’amortissement est une fonction non linéaire du déplacement x . Pour l’établissement du modèle physique, nous considérons la valeur de l’amortissement pour $x = 0$.

3.4.2 Modélisation de la lecture capacitive

Le déplacement $x(t)$ de la masse sismique par rapport à sa position d'équilibre $x = 0$ est déterminé grâce à la lecture de la variation des capacités $C_{13}(x)$ et $C_{23}(x)$ formées respectivement entre les électrodes E_1 et E_3 et entre les électrodes E_2 et E_3 . Dans ce paragraphe, nous rappelons les formules associées au principe de transduction capacitive. Nous évaluons l'impact de la non-linéarité de la transduction capacitive sur les performances de l'asservissement à réaliser, puis nous proposons un modèle linéaire associé au circuit de lecture capacitive.

La lecture des capacités $C_{13}(x)$ et $C_{23}(x)$ nécessite l'application de différences de potentiel V_{13} et V_{23} entre les électrodes E_1 et E_3 et entre les électrodes E_2 et E_3 . L'application de ces différences de potentiel a une conséquence sur la dynamique du capteur. Ce point est traité dans le paragraphe 3.4.3.

Principe de lecture capacitive simple et lecture capacitive différentielle

Considérons tout d'abord, une électrode plane E_3 de surface S mobile selon l'axe Ox en regard d'une électrode fixe E_1 , figure 3.21(a).

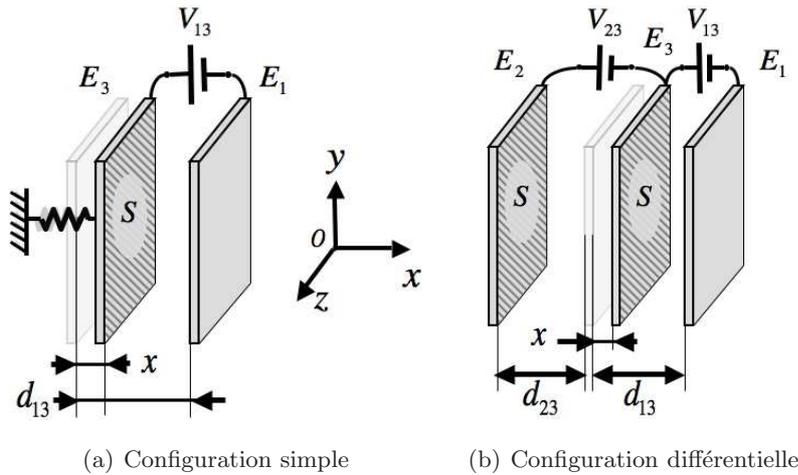


FIG. 3.21 – Détection capacitive

Les plans E_1 et E_3 sont séparés d'une distance $d_{13} - x$ (entrefer). Sous l'hypothèse des plans infinis ($S \gg (d_{13} - x)^2$)⁹, la capacité C_{13} formée entre les électrodes E_1 et E_3 est définie par :

$$C_{13}(x) = \varepsilon_0 \cdot S \cdot \left(\frac{1}{d_{13} - x} \right) \quad (3.4)$$

où ε_0 est la permittivité du vide.

La relation (3.4) liant la variation de la capacité C_{13} au déplacement x est non linéaire. Son développement limité autour de $x = 0$ est donné par :

$$C_{13}(x) \simeq \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{d_{13}} \cdot \left(1 + \frac{x}{d_{13}} + \frac{x^2}{d_{13}^2} + \frac{x^3}{d_{13}^3} + \frac{x^4}{d_{13}^4} + \dots \right) \quad (3.5)$$

⁹On trouve dans les articles [33, 36] des relations et/ou des références permettant d'approcher la formule de la capacité dans le cas où l'hypothèse des plans infinis n'est plus valable.

Afin d'obtenir une relation présentant une meilleure linéarité, on réalise en général une *lecture différentielle*, figure 3.21(b). Les variations des capacités $C_{13}(x)$ et $C_{23}(x)$ sont données par les relations (3.4) et (3.6). La variation différentielle de capacité $\Delta C(x) = C_{13}(x) - C_{23}(x)$ est donnée par l'équation (3.7).

$$C_{23}(x) = \varepsilon_0 \cdot S \cdot \left(\frac{1}{d_{23} + x} \right) \quad (3.6)$$

$$\Delta C(x) = \varepsilon_0 \cdot S \cdot \left(\frac{1}{d_{13} - x} - \frac{1}{d_{23} + x} \right) \quad (3.7)$$

Dans le cas d'un appariement exact des entrefers ($d_{13} = d_{23} = d_0$ pour $x = 0$), les composantes d'ordre pair du développement limité sont annulées, équation (3.8). Autour de la position $x = 0$, la lecture différentielle présente donc une meilleure linéarité que la lecture simple.

$$d_{13} = d_{23} = d_0 \Rightarrow \Delta C(x) \simeq \frac{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{d_0} \cdot \left(\frac{x}{d_0} + \frac{x^3}{d_0^3} + \frac{x^5}{d_0^5} + \dots \right) \quad (3.8)$$

Dans le cas d'un défaut d'appariement ($d_{13} \neq d_{23}$) pour la position d'équilibre mécanique $x = 0$, les termes d'ordre pair du développement limité ne s'annulent pas.

A noter également que la présence de non-linéarités d'ordre pair n'a pas seulement une influence sur la linéarité de la mesure. Ces termes entraînent également un repliement du bruit, notamment le bruit haute-fréquence, dans la bande passante de la mesure. Le phénomène, concernant aussi bien la lecture que l'actionnement, est brièvement abordé dans l'annexe B.3.3. Il est illustré en boucle fermée dans le paragraphe 3.6.3, figure 3.41.

Circuit de lecture capacitive

La fonction globale du circuit de lecture capacitive est représentée schématiquement par la figure 3.22. D'une part, il réalise la lecture différentielle $\Delta C(x, t) = C_{13}(x, t) - C_{23}(x, t)$ des capacités formées entre les peignes fixes des électrodes E_1 et E_2 et ceux de l'électrode mobile E_3 : la masse sismique, figure 3.20. D'autre part, il effectue la conversion analogique-numérique du signal $\Delta C(t)$ en un signal numérique $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$, à savoir le signal de sortie de la mesure en boucle ouverte, figures 3.15 et 3.17. Une description plus détaillée est proposée dans l'annexe B.3.

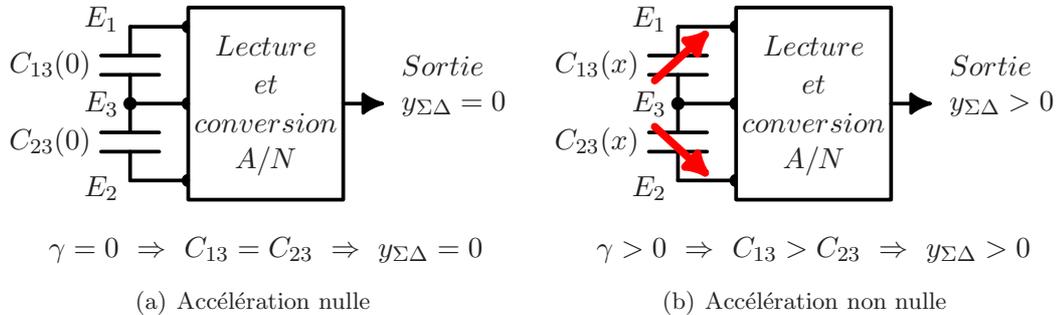


FIG. 3.22 – Représentation schématique du circuit électronique de lecture capacitive différentielle et de conversion analogique-numérique (A/N)

Modèle linéaire autour du point de fonctionnement

Autour du point de fonctionnement, le circuit de lecture capacitive peut être représenté par l'équation 3.10 et la figure 3.24, voir annexe B.3.

$$y_{\Sigma\Delta}(t) = K_{XY} \cdot x(t) + b_{yT}(t) \quad (3.10)$$

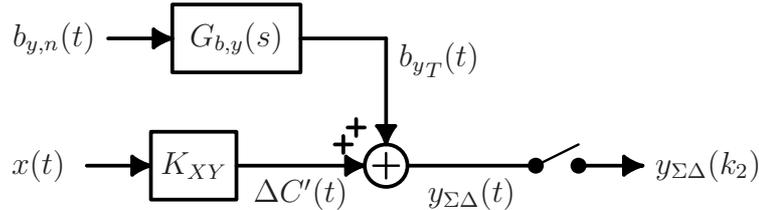


FIG. 3.24 – Modélisation haut niveau du circuit de lecture capacitive

où le gain K_{XY} représente le gain entre le déplacement x de la masse M et la sortie numérique $y_{\Sigma\Delta}$ du circuit de lecture. $G_{b,y}(s)$ représente la fonction de transfert entre un bruit blanc de densité spectrale unitaire $b_{y,n}(t)$ et le bruit $b_{yT}(t)$ introduit par le circuit de lecture capacitive. Le bruit $b_{yT}(t)$ inclut la contribution en bruit de l'électronique de lecture (capacité équivalente de bruit C_n) et la contribution du bruit de quantification $b_{q,\sigma}$ du modulateur $\Sigma\Delta$. La figure 3.25 présente l'allure de la fonction de transfert $G_{b,y}(s)$.

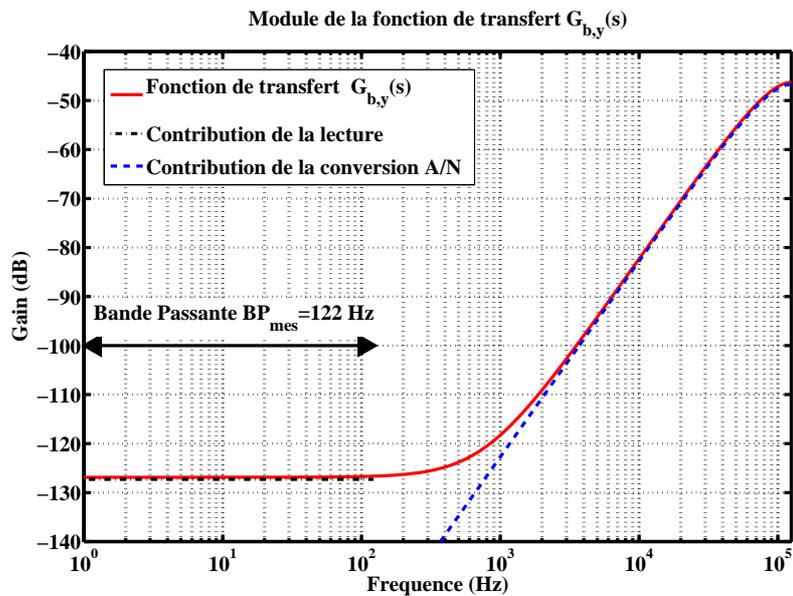


FIG. 3.25 – Fonction de transfert $G_{b,y}(s)$ et contributions du bruit de l'électronique et du bruit de quantification sur la sortie $y_{\Sigma\Delta}$

3.4.3 Modélisation de l'actionnement

L'application de différences de potentiel V_{13} et V_{23} entre les électrodes E_1 et E_3 et entre les électrodes E_2 et E_3 génère un champ de force électrostatique qui permet d'agir sur la masse sismique. Ce champ de force a un effet sur la dynamique de la masse sismique, même lorsque $V_{13}=V_{23}$. Nous rappelons dans ce paragraphe l'expression de la force électrostatique ainsi que l'effet *raideur électrostatique négative*. Enfin, nous proposons le modèle de l'actionnement électrostatique dans le cas du micro-accéléromètre.

Force électrostatique et raideur électrostatique

La figure 3.26(a) reprend la configuration des électrodes planes E_1 et E_3 de la figure 3.21.

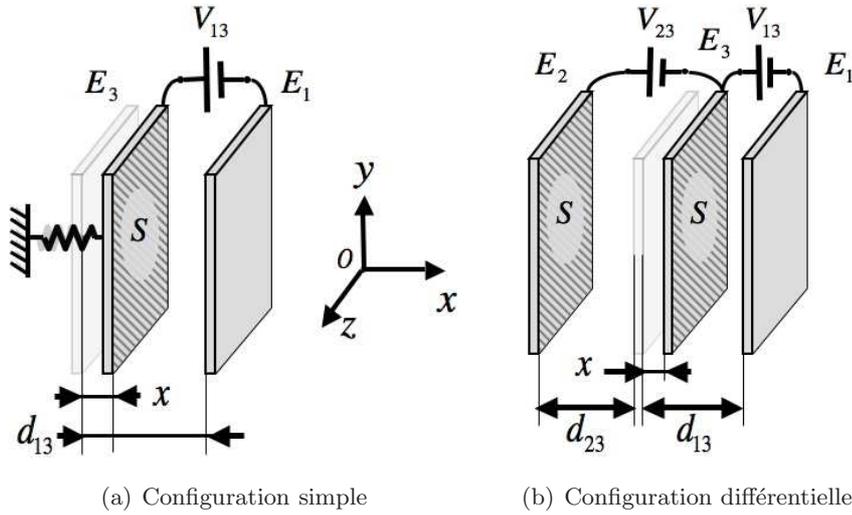


FIG. 3.26 – Détection capacitive

Sous l'hypothèse des plans conducteurs parallèles et de dimensions infinies ($S \gg (d_{13} - x)^2$), l'application d'une différence de potentielle constante V_{13} entre les électrodes E_1 et E_3 génère une force électrostatique attractive entre les plans E_1 et E_3 définie par [36] :

$$F_{elec}(x) = \frac{V_{13}^2}{2} \cdot \frac{dC_{13}(x)}{dx} \quad (3.11)$$

Considérons à présent la configuration de la figure 3.26 avec $d_{13} = d_{23} = d_0$ et des tensions $V_{13} = V_{23} = \Delta V$ identiques, la force électrostatique résultante appliquée sur l'électrode mobile E_3 vaut :

$$\begin{aligned} F_{elec}(x) &= \frac{\Delta V^2}{2} \cdot \frac{dC_{13}(x)}{dx} + \frac{\Delta V^2}{2} \cdot \frac{dC_{23}(x)}{dx} \\ &= \frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot \Delta V^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{(d_0 - x)^2} - \frac{1}{(d_0 + x)^2} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Soit :

$$F_{elec}(x) = \varepsilon_0 \cdot S \cdot \Delta V^2 \cdot d_0 \cdot \frac{x}{(d_0^2 - x^2)^2} \quad (3.13)$$

Cette force est positive pour $x > 0$ et négative pour $x < 0$. L'application des tensions $V_{13} = V_{23} = \Delta V$ génère donc une force électrostatique résultante sur l'électrode E_3 tendant à écarter celle-ci de sa position d'équilibre $x = 0$. Elle est comparable à une force de rappel non linéaire dont le coefficient de raideur $k_{elec}(x)$ est négatif ([40, 39, 49, 93], Farga-Marques :2005). Au premier ordre, on a :

$$F_{elec}(x) = -k_{elec,1} \cdot x \quad (3.14)$$

avec

$$k_{elec,1} = -\frac{\varepsilon_0 \cdot S \cdot \Delta V^2}{d_0^3} \quad (3.15)$$

où $k_{elec,1}$ désigne le coefficient de raideur électrostatique associé à la composante linéaire de la force électrostatique $F_{elec}(x)$ pour $V_{13} = V_{23} = \Delta V$.

Le terme de raideur *électrostatique* vient s'ajouter à la raideur mécanique k_{mec} dans l'équation (3.3). Il modifie donc la dynamique du capteur.

Un développement limité de l'expression (3.13) montrerait la présence de termes non linéaires d'ordre supérieur.

Actionnement électrostatique

En appliquant des tensions V_{13} et V_{23} différentes aux bornes des capacités C_{13} et C_{23} , on génère une force électrostatique $F_{elec,act}$ donnée par :

$$F_{elec}(x, V_{13}, V_{23}) = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{2} \cdot \left(\frac{V_{13}^2}{(d_0 - x)^2} - \frac{V_{23}^2}{(d_0 + x)^2} \right) \quad (3.16)$$

Soit à l'ordre 0 et en considérant les tensions V_{13} et V_{23} constantes :

$$F_{elec}(x, V_{13}, V_{23}) = \frac{\varepsilon_0 \cdot S}{2 \cdot d_0^2} \cdot (V_{13}^2 - V_{23}^2) \quad (3.17)$$

Pour une position x proche de zéro, on génère donc une force tendant à déplacer l'électrode E_3 vers les x positifs en imposant $V_{13} > V_{23}$, et inversement pour $V_{13} < V_{23}$. On peut donc agir sur le déplacement x de l'électrode E_3 en appliquant des différences de potentiel V_{13} et V_{23} adéquates. L'effet *raideur électrostatique* (développement à l'ordre 1) dépend de la stratégie adoptée pour réaliser l'actionnement et la lecture : tension de lecture et d'actionnement superposées (multiplexage en tension), phase de lecture et phase d'actionnement séparées dans le temps (multiplexage temporel), tensions appliquées sur des électrodes E_1 et E_2 disposant de peignes *moteurs* et de peignes dédiés à la lecture (multiplexage spatial), ...

Modèle linéaire approché de l'actionnement du micro-accéléromètre

Pour la stratégie d'actionnement retenue (multiplexage en tension), on peut proposer un modèle linéaire approché de l'actionnement par force électrostatique, équation (3.18) et figure 3.27, voir annexe B.4.

$$F_{cr}(u', x, t) \simeq K_u \cdot u'(t) - k_{elec,1} \cdot x(t) + K_u \cdot b_u(t) \quad (3.18)$$

où $u'(t)$ est un signal fictif représentant le signal $u'(k_2)$ (figure 3.17), sous forme analogique ; $b_u(t)$ est le bruit introduit par le modulateur $\Sigma\Delta_{Act}$.

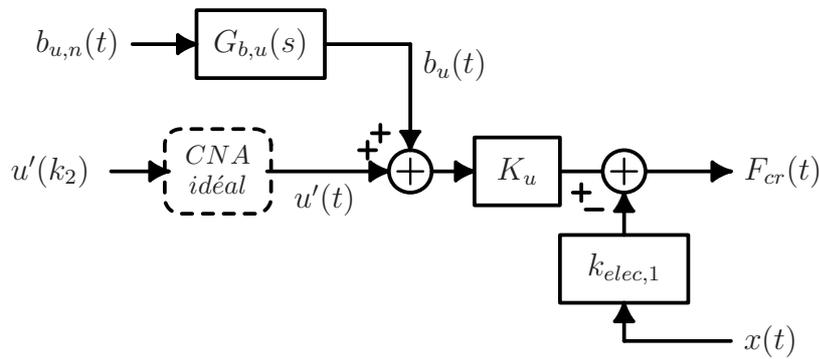


FIG. 3.27 – Modèle linéaire approché de l'actionnement du micro-accéléromètre

La fonction de transfert $G_{b,u}(s)$ représente l'équivalent sous forme continue de la fonction de transfert entre un bruit blanc $b_{u,n}(t)$ de densité spectrale unitaire et le bruit $b_u(t)$.

3.5 Modèle pour la commande et contraintes sur les fonctions de sensibilité.

Dans ce paragraphe, on assemble les modèles de l'actionnement, de la dynamique de la masse sismique et de la lecture capacitive afin de proposer un modèle physique du capteur. On présente ensuite les étapes permettant d'obtenir le modèle pour la commande, figure 3.28. Enfin, on exprime les *objectifs de performances* initiaux sous forme de *contraintes* sur les fonctions de sensibilité du système bouclé. Ces contraintes serviront de références pour la synthèse du correcteur en simulation - paragraphe 3.6 - et pour la synthèse du correcteur du démonstrateur - paragraphe 3.7.

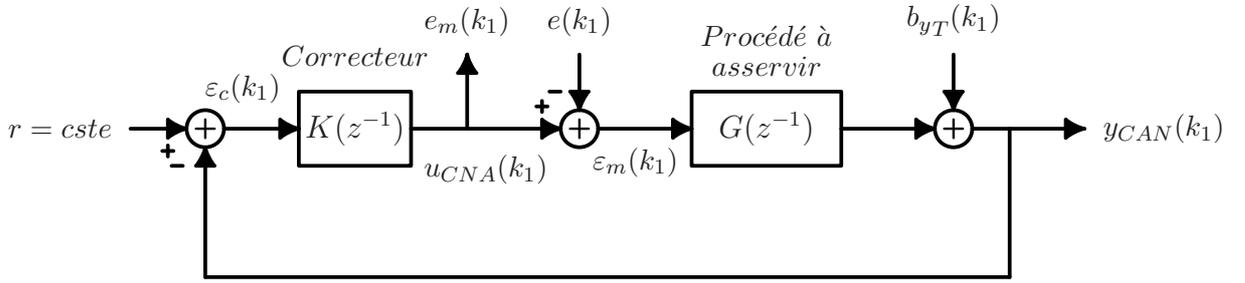


FIG. 3.28 – Représentation de la boucle d'asservissement pour la synthèse du correcteur

3.5.1 Obtention d'un modèle physique approché

Modèle linéaire approché entre le signal de commande u' et le signal de sortie $y_{\Sigma\Delta}$

En injectant le modèle linéaire approché de la force électrostatique, équation (3.18), dans l'équation initiale de la dynamique de la masse sismique, équation (3.3), on obtient la relation :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b_0 \cdot \dot{x}(t) + k_{mec} \cdot x(t) \simeq -m \cdot \gamma(t) + K_u \cdot u'(t) - k_{elec,1} \cdot x(t) + K_u \cdot b_u(t) + F_{Bn}(t) \quad (3.19)$$

Soit encore :

$$m \cdot \ddot{x}(t) + b_0 \cdot \dot{x}(t) + k_{eff} \cdot x(t) \simeq \Sigma F(t) \quad (3.20)$$

où :

$$k_{eff} = k_{mec} + k_{elec,1} \quad (3.21)$$

$$\text{et } \Sigma F(t) = -m \cdot \gamma(t) + K_u \cdot u'(t) + K_u \cdot b_u(t) + F_{Bn}(t) \quad (3.22)$$

Le coefficient k_{eff} représente la raideur effective du système *masse-ressort-amortissement* équivalent à la dynamique de la masse sismique, lorsque l'effet de la raideur électrostatique négative $k_{elec,1}$ est pris en compte. La somme des forces extérieures appliquées sur le système *masse-ressort-amortissement effectif* est notée $\Sigma F(t)$.

La fonction de transfert $G_{\Sigma F \rightarrow x}(s)$ entre l'entrée en force $\Sigma F(t)$ et le déplacement $x(t)$ de la masse sismique est donnée par :

$$G_{\Sigma F \rightarrow x}(s) = \frac{1}{m \cdot s^2 + b_0 \cdot s + k_{eff}} \quad (3.23)$$

L'effet de la raideur électrostatique négative sur la fonction de transfert $G_{F \rightarrow x}(s)$ est illustré sur la figure 3.29.

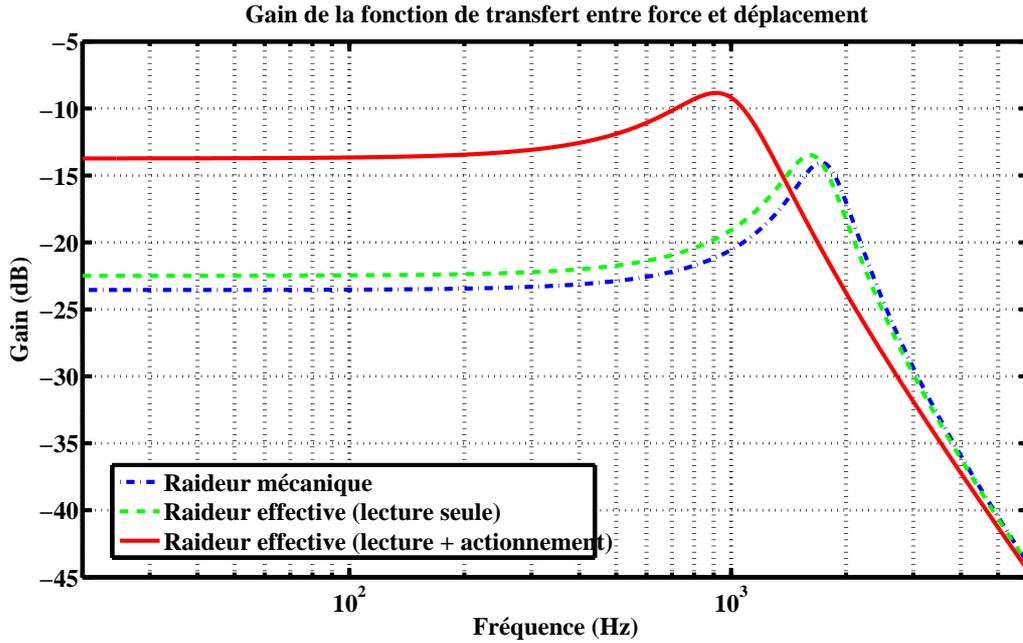
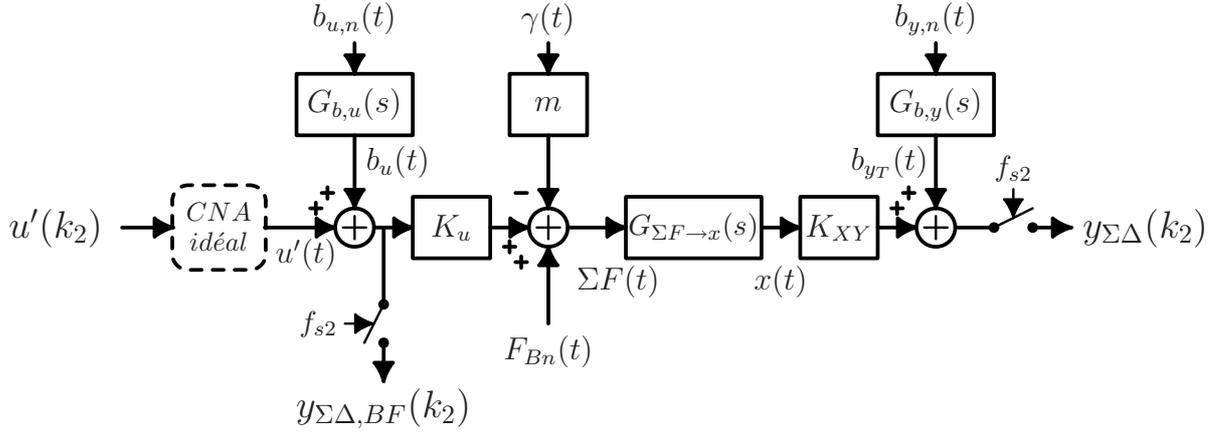


FIG. 3.29 – Effet de la raideur électrostatique sur la fonction du transfert $G_{\Sigma F \rightarrow x}(s)$. On présente sur cette figure, le module de la fonction de transfert en l'absence de tension (raideur mécanique seule) ainsi que ceux correspondant à la fonction de transfert $G_{\Sigma F \rightarrow x}(s)$ dans le cas de la mesure en boucle ouverte ($V_{lect} = 1,65 \text{ Volts}$, $V_{act} = 0$) et dans le cas de la mesure en boucle fermée ($V_{lect} = 1,65 \text{ Volts}$ et $V_{act} = 2,9 \text{ Volts}$).

Afin de compléter le modèle, on rappelle la relation liant le déplacement $x(t)$ au signal $y_{\Sigma\Delta}(t)$, soit la forme équivalente en temps continu au signal $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$, c.f. équation 3.10 et figure 3.24 :

$$y_{\Sigma\Delta}(t) = K_{XY} \cdot x(t) + b_{y_T}(t) \quad (3.24)$$

La figure 3.30 présente le modèle linéaire approché complet entre le signal de commande u' et le signal de sortie $y_{\Sigma\Delta}$.

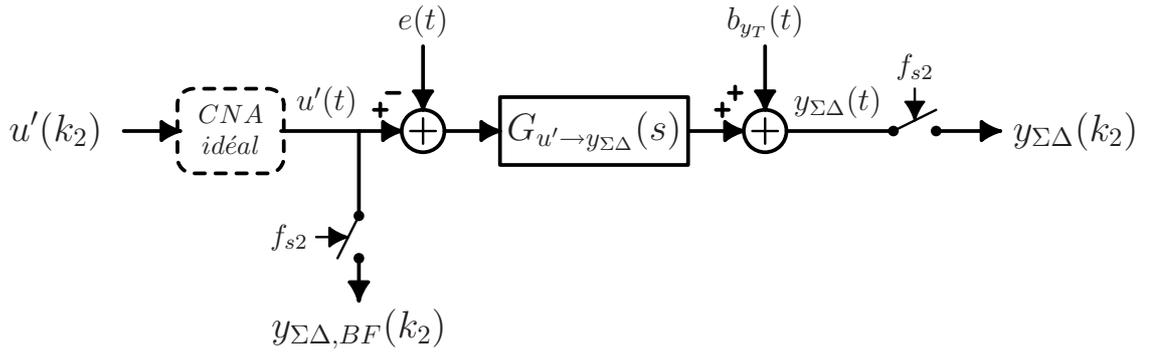

 FIG. 3.30 – Modèle approché entre le signal de commande u' et le signal de sortie $y_{\Sigma\Delta}$
Simplification du modèle linéaire approché $u' \rightarrow y_{\Sigma\Delta}$

Afin de simplifier le modèle de la figure 3.30, on pose :

$$G_{u' \rightarrow y_{\Sigma\Delta}}(s) = K_u \cdot G_{\Sigma F \rightarrow x}(s) \cdot K_{XY} \quad (3.25)$$

$$G_p = \frac{m}{K_u} \quad \text{et} \quad e(t) = G_p \cdot (\gamma(t) + \gamma_{FBn}(t)) \quad (3.26)$$

où $\gamma_{FBn}(t) = \frac{1}{m} \cdot F_{Bn}(t)$ représente la contribution en bruit brownien ramenée à l'entrée en accélération. Cette contribution est indissociable de l'accélération à mesurer. On considère également que le bruit $b_u(t)$ peut être négligé (pour l'obtention du *modèle pour la commande*¹⁰). La figure 3.31 présente le modèle simplifié ainsi obtenu.


 FIG. 3.31 – Modèle simplifié entre le signal de commande u' et le signal de sortie $y_{\Sigma\Delta}$

¹⁰Dans la bande passante de la mesure BP_{mes} , le bruit $b_u(t)$, à savoir le bruit introduit par le modulateur numérique d'actionnement $\Sigma\Delta_{Act}$, est négligeable : $SNR \simeq 140 \text{ dB}$. Cette approximation n'est pas valable en haute-fréquence. Elle est nécessaire pour obtenir un modèle simple.

Système en boucle fermée et simplifications supplémentaires

Afin de construire le modèle simplifié pour la synthèse du correcteur (figure 3.28), on remplace la portion de la boucle de l'architecture proposée comprise entre les signaux $u'(k_2)$ et $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ (figure 3.17) par le modèle approché développé ci-dessus - figure 3.31. On obtient alors le système en boucle fermée de la figure 3.32. Sur ce schéma, on a également remplacé les blocs d'adaptation de fréquence, noté *Decim* et *Interp* sur figure 3.17, par les opérations qu'ils réalisent - filtrage et ré-échantillonnage, *c.f* paragraphe 3.3.

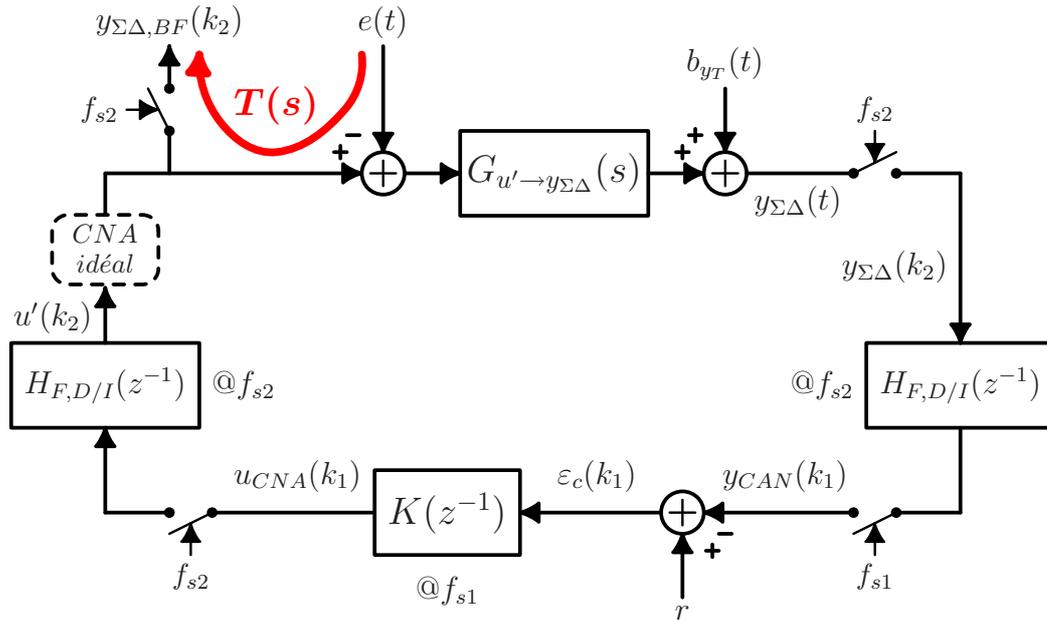


FIG. 3.32 – Modélisation approchée correspondant au schéma de principe de l'architecture proposée - figure 3.17.

Sur le schéma de la figure 3.32, les fonctions de transfert d'intérêt pour la *mesure* et pour la *commande* sont respectivement la fonction de sensibilité \mathbf{T} et la fonction de transfert entre la commande $u_{CNA}(k_1)$ et le signal $y_{CAN}(k_1)$ disponible pour la commande.

On peut donc considérer, sans perte de validité, le schéma de la figure 3.33 comme schéma de référence pour la synthèse de la commande.

Sur ce schéma, le signal à estimer $e(t) = G_p \cdot (\gamma(t) + \gamma_{FBn}(t))$ est représenté par le signal $e(k_1)$. La sortie de mesure $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ est représentée par le signal $e_m(k_1)$. La fonction de transfert entre l'entrée $e(k_1)$ à estimer et la sortie de mesure $e_m(k_1)$ est bien décrite par la fonction de sensibilité \mathbf{T} .

Les fonctions de transfert $H_{F,D/I}(z^{-1})$ des filtres numériques ont été remplacées par les fonctions de transfert équivalentes, notées $H_{F,D/I}(s)$, dans le domaine continu. La fonction de transfert entre la commande $u_{CNA}(k_1)$ et le signal $y_{CAN}(k_1)$ n'est donc pas modifiée par la transformation.

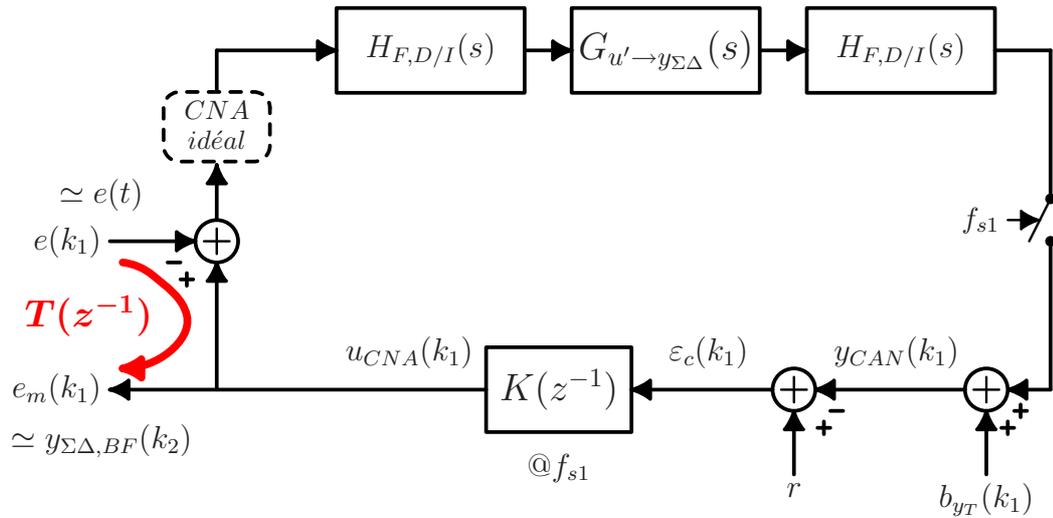


FIG. 3.33 – Représentation approchée du schéma de la figure 3.32 dans lequel l’entrée à estimer $e(t)$ et la sortie de mesure $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ sont représentées par des signaux discrets à la fréquence de travail du correcteur, $e(k_1)$ et $e_m(k_1)$ respectivement.

3.5.2 Représentation du système pour la synthèse du correcteur

On note :

$$G(s) = H_{F,D/I}(s) \cdot G_{u' \rightarrow y_{\Sigma\Delta}}(s) \cdot H_{F,D/I}(s) \quad (3.27)$$

et $G(z^{-1})$ la fonction de transfert correspondante échantillonnée à f_{s1} .

On obtient la représentation de l’asservissement de la figure 3.18, reprise ici sur la figure 3.34, en remplaçant le procédé entre le *CNA* et l’échantillonneur de la figure 3.33 par la fonction de transfert discrète $G(z^{-1})$.

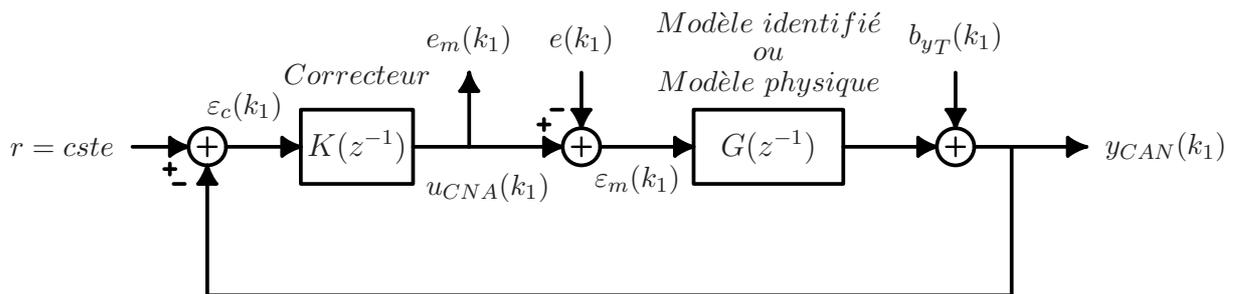


FIG. 3.34 – Représentation de la boucle d’asservissement pour la synthèse du correcteur

La synthèse du correcteur est réalisée en considérant le modèle identifié $G_{id,u \rightarrow y}(z^{-1})$ en boucle ouverte entre la commande $u_{CNA}(k_1)$ et le signal $y_{CAN}(k_1)$, plutôt que le modèle physique $G(z^{-1})$ - équation 3.27.

3.5.3 Définitions des contraintes sur les fonctions de sensibilité

Les contraintes sur les fonctions de sensibilité permettent de fixer les objectifs de performance de la boucle fermée, voir paragraphe 2.3. Ces contraintes servent de références pour le calcul des paramètres du régulateur par les méthodes de synthèse fréquentielle de correcteurs linéaires présentées dans le paragraphe 2.4. Les contraintes associées aux objectifs de performances pour l'asservissement du micro-accéléromètre considéré sont rassemblées dans le tableau 3.2 et représentées graphiquement sur la figure 3.35. Les considérations permettant de définir ces contraintes sont détaillées ci-dessous.

- Critère	Contrainte	Gamme de fréquence	Relation associée
1 - Marge de stabilité	$\ \mathbf{S}(z^{-1})\ _{\infty} \leq 6 \text{ dB}$	$[0 ; +\infty]$	(2.9)
2 - Marge de stabilité	$\ \mathbf{KS}(z^{-1})\ _{\infty} \leq 15 \text{ dB}$	$[0 ; +\infty]$	*
3 - Robustesse en stabilité	$ \mathbf{GS}(z^{-1}) \leq W_T'^{-1}(z^{-1}) $	$[0 ; +\infty]$	(B.41) et [10]
4 - Linéarité	$ \mathbf{GS}(z^{-1}) \leq -40 \text{ dB}$	BP_{mes}	(3.9)
5 - Erreur de mesure instantanée	$ \mathbf{S}(z^{-1}) \leq -100 \text{ dB}$	BP_{mes}	(2.6)
6 - Bruit issu du CAN	$ \mathbf{KS}(z^{-1}) \leq 0 \text{ dB}$	BP_{mes}	**
7 - Bruit issu du CNA	$ \mathbf{S}(z^{-1}) \leq 0 \text{ dB}$	BP_{mes}	**

TAB. 3.2 – Récapitulatif des contraintes sur les fonctions de sensibilité

Les contraintes 1 à 3 concernent la stabilité et la robustesse en stabilité. La première contrainte correspond à celle classiquement imposée sur la fonction de sensibilité \mathbf{S} pour assurer une marge de gain de 6 dB et une marge de phase de 30°, équation (2.9). La contrainte 2 concerne la fonction de sensibilité \mathbf{KS} . On restreint en général la norme infinie de cette fonction de sensibilité afin de réduire les sollicitations de l'actionneur. Nous avons fixé arbitrairement cette valeur à 15 dB. La contrainte 3 est introduite pour assurer la robustesse en stabilité vis-à-vis d'incertitudes paramétriques, *c.f.* annexe B.5. La fonction $W_T'^{-1}(z^{-1})$ est définie en considérant un modèle physique de variation des coefficients de raideur k_{eff} et d'amortissement b_0 en fonction de la température T et un modèle d'incertitude de type multiplicative inverse.

Les contraintes 4 à 7 sont liées aux *performances de la mesure* (paragraphe 2.3.1). Elles sont donc définies sur la bande de fréquence correspondant à la bande passante de la mesure BP_{mes} .

La contrainte 4 permet de garantir la linéarité de la mesure - paragraphe 3.4.2 (non-linéarité de la lecture capacitive), équation (3.9) et chapitre 2, équation (2.24). La contrainte 5 est une contrainte supplémentaire par rapport aux spécifications initiales (tableau 3.1). L'objectif de performance $|\mathbf{S}(z^{-1})| \leq -100 \text{ dB}$ sur la bande passante de la mesure correspond à une erreur de mesure instantanée ε_m ou erreur dynamique, *c.f.* paragraphe 2.3.1, de l'ordre de grandeur des performances en bruit et en linéarité visées.

Les contraintes 6 et 7 concernent la performance en bruit. Le modulateur $\Sigma\Delta$ numérique et le circuit de lecture capacitive introduisent des bruits $b_u(t)$ (figure 3.30) et $b_{y_T}(t)$ (figure 3.30 et 3.34) de puissances compatibles avec la résolution en bruit souhaitée dans la bande passante de la mesure (tableau 3.1). On propose de s'assurer que la boucle ne détériore pas les performances en bruit, en imposant que le module des fonctions de transfert **S** et **KS** soit inférieur à 1 dans la bande passante de la mesure. En pratique, la contrainte 6 est triviale (voir contrainte 5). Par ailleurs, le module de la fonction de transfert **KS** est égal, en basse fréquence, à l'inverse G^{-1} de la fonction de transfert du procédé. On ne peut donc agir sur cette fonction de transfert en basse fréquence. La contrainte 7 est donc donnée à titre indicatif.

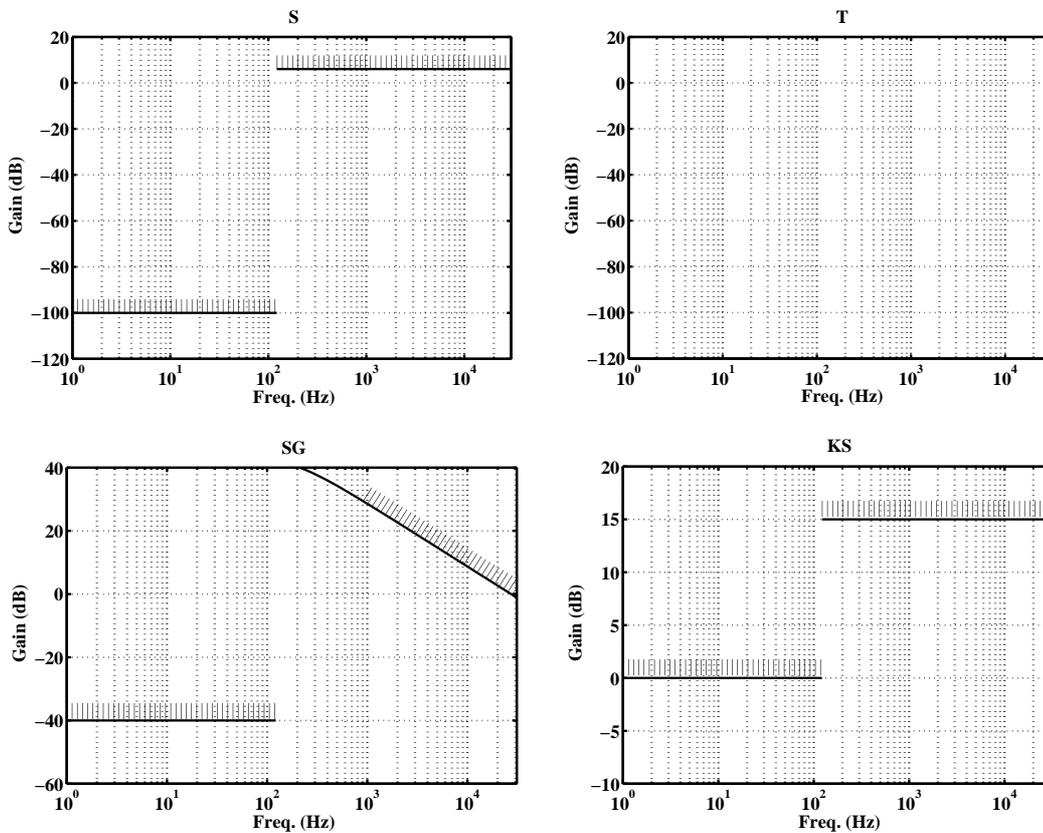


FIG. 3.35 – Contraintes sur les fonctions de sensibilité

Des contraintes supplémentaires pourront être ajoutées par la suite, notamment concernant la robustesse en performance et en stabilité vis-à-vis des incertitudes de fabrication du capteur et de l'électronique.

Les paragraphes 3.6 et 3.7 présentent les performances de commande et de mesure pour le modèle de simulation et pour le démonstrateur, après identification des modèles des procédés à asservir correspondant - fonction de transfert entre la commande $u_{CNA}(k_1)$ et le signal $y_{CAN}(k_1)$, paragraphe 3.3.

3.6 Identification, synthèse du correcteur et performances de mesure du modèle de simulation

3.6.1 Identification sur le modèle de simulation

Pour le modèle de simulation, l'identification n'est pas forcément indispensable car nous avons élaboré un modèle physique du comportement du capteur - paragraphe 3.5. Cette étape est cependant importante car elle permet de valider la méthodologie, en particulier l'aspect pratique de l'identification. Pour ce système, l'identification du comportement dynamique est délicate pour plusieurs raisons. On citera notamment la mise en forme particulière des bruits de quantification liée à la modulation $\Sigma\Delta$, la présence des non-linéarités de l'actionnement électrostatique et de la lecture capacitive ou encore les interactions possibles entre bruits et non-linéarités.

L'identification est réalisée en boucle ouverte (entrée $e_{ident}(k_1)$, sortie $y_{ident}(k_1)$) sur le modèle de simulation complet - figure 3.17 en incluant toutes les sources de bruit et toutes les non-linéarités du MEMS, de l'actionnement électrostatique et de la détection capacitive. Le signal d'excitation proposé est une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA) dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 3.3. Ce signal a été dimensionné ainsi afin qu'il présente au moins un échelon de niveau constant et de durée supérieure au temps de réponse du système [16], d'une part, et que d'autre part sa longueur et donc le temps de simulation ne soient pas prohibitifs .

Paramètre	Valeur
Fréquence d'échantillonnage	$f_{s_1} = 62,5 \text{ kHz}$
Nombre de registres	$n_R = 16$
Rapport de division de fréquence	$\kappa = 4$
Nombre de périodes	$N_{per} = 1$
Amplitude	$[-0,01 ; 0,01]$
Longueur (en nombre d'échantillons)	$L_{SBPA} = 262140$
Durée	$4,19 \text{ secondes}$

TAB. 3.3 – Caractéristiques de la SBPA

L'identification est réalisée sous Matlab. La meilleure estimation du comportement entrée-sortie du procédé vu par le correcteur est obtenue pour un modèle de type *erreur de sortie* avec trois zéros, quatre pôles et un retard pur. La figure 3.36 trace le diagramme de Bode de la fonction de transfert du modèle identifié $G_{id,u \rightarrow y}(z^{-1})$, équation (3.28), et celle du modèle physique $G(z^{-1})$, équation (3.27).

$$G_{id,u \rightarrow y}(z^{-1}) = \frac{0,0243 \cdot z^{-1} - 0,0716 \cdot z^{-2} + 0,0676 \cdot z^{-3}}{1 - 1,8101 \cdot z^{-1} + 0,4817 \cdot z^{-2} + 0,5494 \cdot z^{-3} - 0,2121 \cdot z^{-4}} \quad (3.28)$$

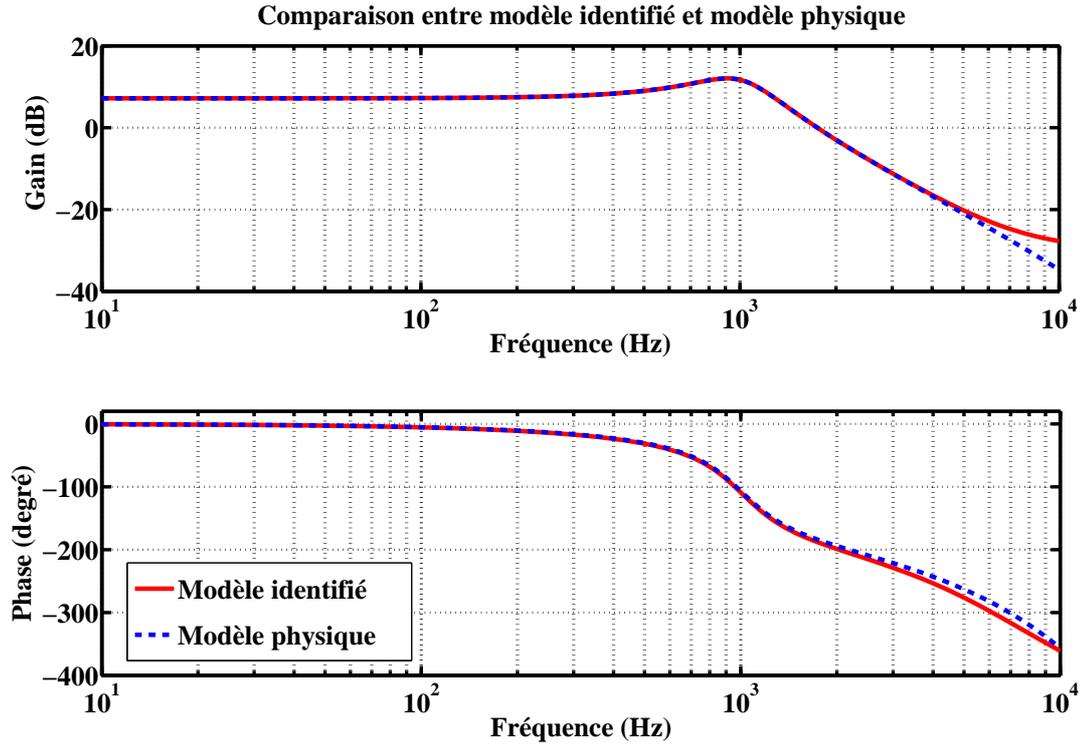


FIG. 3.36 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert du modèle $G_{id,u \rightarrow y}(z^{-1})$ identifié sur le modèle physique complet sous Simulink (courbes en rouge) et diagramme de Bode de la fonction de transfert du modèle approchée $G(z^{-1})$ (courbes en bleu), équation (3.27).

3.6.2 Synthèse du correcteur par placement de pôles

A partir du modèle numérique identifié $G_{id,u \rightarrow y}(z^{-1})$, équation (3.28), la synthèse par placement de pôles (*cf.* paragraphe 2.4.1) a été réalisée en imposant les choix suivants :

- **Pôles dominants** : ceux correspondant à la première fréquence de coupure du modèle en boucle ouverte, avec un amortissement de 0,8.
- **Parties fixes de \mathbf{H}_S** (afin de respecter au mieux les contraintes de linéarité et d'erreur de mesure instantanée) :
 - Un intégrateur, pour annuler l'erreur statique ;
 - Un filtre du deuxième ordre (fréquence naturelle : 60 Hz , amortissement : 0,1), pour étendre la bande passante de rejet ;
- **Pôles auxiliaires** (contrainte de stabilité sur \mathbf{S}) :
 - Quatre pôles réels (coefficient $\alpha = 0,25$, ordre de multiplicité 4) ;
 - Deux paires de pôles complexes conjugués (fréquence naturelle 1228,2 Hz (resp. 1310 Hz), amortissement 0,4 (resp. 1)) ;
- **Parties fixes de \mathbf{H}_R** (contrainte de stabilité sur \mathbf{KS}) : un premier ordre (coefficient $\alpha = -0,05994$)

Le correcteur (7^{ème} ordre) résultant correspond à celui présenté dans [3, 4]. Les diagrammes de Bode des fonctions de sensibilité associées sont tracés sur la figure 3.37, en bleu.

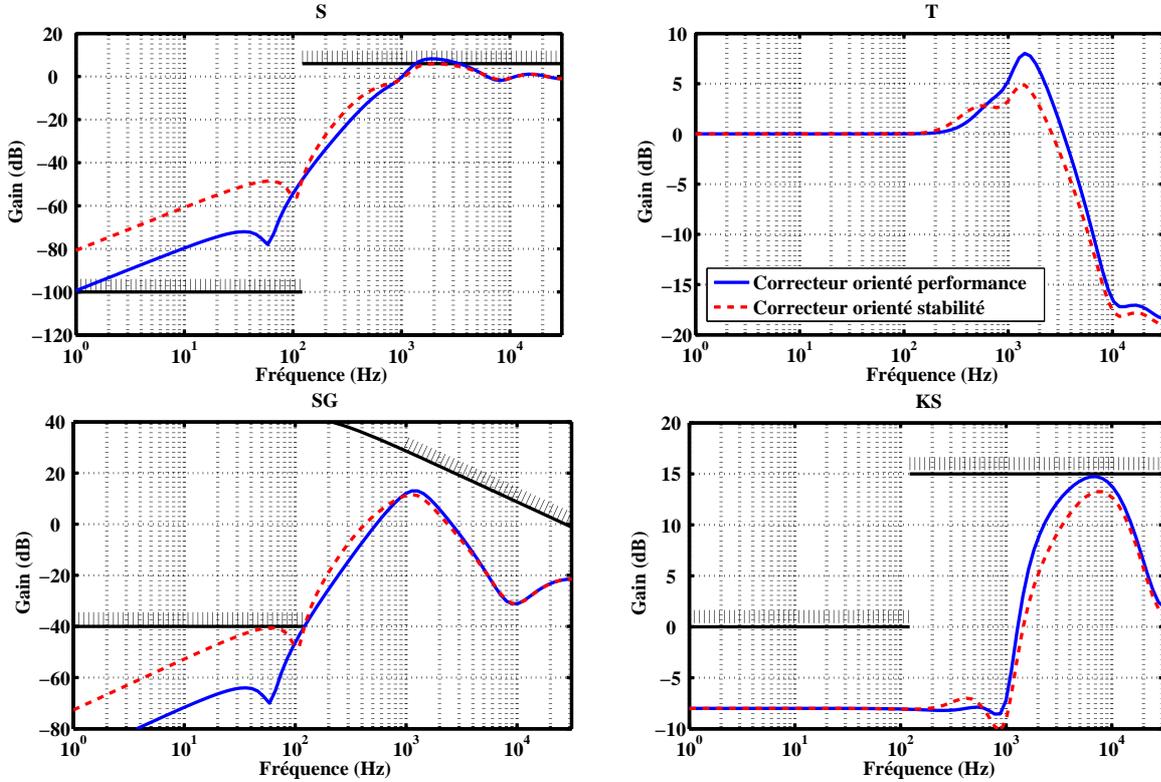


FIG. 3.37 – Fonctions de sensibilité résultantes pour la synthèse par placement de pôles. Placement de pôles orienté performance en bleu et orienté stabilité en courbes rouges discontinues

Par rapport aux objectifs fixés dans le tableau 3.2, le correcteur respecte les contraintes sur les fonctions de sensibilité **GS** et **KS** - linéarité, robustesse en stabilité et transferts des bruits. Le compromis performance-stabilité, inhérent à tout système bouclé, apparaît sur le diagramme de Bode de la fonction de sensibilité **S**. Le correcteur proposé (en bleu sur la figure 3.37 et [3, 4]) est axé sur la performance en rejet de perturbation, soit la réduction de l'erreur de mesure $\varepsilon_m(t)$. La marge de stabilité est réduite par rapport aux objectifs fixés ($\|\mathbf{S}(z^{-1})\|_\infty = 8 \text{ dB}$). Puisqu'il s'agit d'une marge, ce choix n'a pas de conséquence sur la fonctionnalité du capteur. Il est possible de synthétiser un correcteur respectant toutes les autres contraintes, hors contrainte de rejet, courbes en rouge sur la figure 3.37. Sur la bande passante de la mesure $[0 ; 122 \text{ Hz}]$, le maximum du module de la fonction de sensibilité **S**, caractérisant l'erreur de mesure dynamique $\varepsilon_m(t)$ maximale, est inchangé, équation (3.29). Sur la bande de fréquences $[0 ; 70 \text{ Hz}]$, la performance de rejet est cependant inférieure -48 dB au lieu de -72 dB .

$$\max_{f < 122 \text{ Hz}} |\mathbf{S}(s = 2 \cdot j \cdot f)| = -48 \text{ dB} \quad (3.29)$$

Pour ce capteur, la performance de la mesure est donc limitée par le compromis performance-stabilité et sa conséquence sur la réduction de l'erreur de mesure dynamique $\varepsilon_m(t)$. La synthèse \mathcal{H}_∞ permet d'atteindre des performances similaires, annexe B.6.

	Critère	Spécifications		Réalisé	
		Contraintes	Fréquences	Contraintes	Fréquences
1 - Stabilité	$\ \mathbf{S}(z^{-1})\ _\infty$	$\leq 6 \text{ dB}$	$\leq +\infty$	8 dB	$\leq +\infty$
2 - Stabilité	$\ \mathbf{KS}(z^{-1})\ _\infty$	$\leq 15 \text{ dB}$	$\leq +\infty$		✓
3 - Robustesse	$ \mathbf{GS}(z^{-1}) $	$\leq W_T'^{-1}(z^{-1}) $	$\leq +\infty$		✓
4 - Linéarité	$ \mathbf{GS}(z^{-1}) $	$\leq -40 \text{ dB}$	$\leq 122 \text{ Hz}$		✓
5 - Erreur de mesure instantanée	$ \mathbf{S}(z^{-1}) $	$\leq -100 \text{ dB}$	$\leq 122 \text{ Hz}$	-48 dB	$\leq 122 \text{ Hz}$
6 - Bruit (CAN)	$ \mathbf{KS}(z^{-1}) $	$\leq 0 \text{ dB}$	$\leq 122 \text{ Hz}$		✓
7 - Bruit (CNA)	$ \mathbf{S}(z^{-1}) $	$\leq 0 \text{ dB}$	$\leq 122 \text{ Hz}$		✓

TAB. 3.4 – Récapitulatif des contraintes spécifiées et performances de commande atteintes pour le modèle de simulation. Le symbole ✓ indique que la contrainte spécifiée est respectée.

3.6.3 Evaluation des performances de mesure en boucle fermée d'après le modèle physique

D'après le tableau 3.4, la linéarité de la mesure est assurée. On évalue dans ce paragraphe l'étendue de mesure, le niveau de bruit et l'erreur dynamique maximale, d'après le modèle physique (paragraphe 3.5).

Etendue de mesure

L'étendue de mesure est ici limitée par la valeur maximale de la force électrostatique qu'il est possible de générer, afin de s'opposer à la force d'inertie d'entraînement s'exerçant sur la masse sismique. En considérant la figure 3.30 et le fait que la commande $u'(k_2)$ soit limitée à l'intervalle $[-1 ; 1]$ (saturation du modulateur $\Sigma\Delta_{Act}$), on déduit que l'étendue de mesure vaut $\left[-\frac{K_u}{m} ; \frac{K_u}{m}\right]$, soit $[-80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ; 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}]$ ou $[-8, 2 \text{ g} ; 8, 2 \text{ g}]$. On note $FS = 8, 2$ la pleine échelle en g .

Niveau de bruit

La valeur efficace $\gamma_{n,eff}$ du bruit sur la sortie de mesure $y_{\Sigma\Delta,BF}$ est égale à la somme quadratique des contributions des différentes sources de bruit ramenées à l'entrée. On considère ici la contribution du bruit brownien, celle du bruit de l'électronique et la contribution des bruits de quantification.

- Bruit brownien

On considère ici l'expression du modèle de bruit brownien $F_{Bn,PSD} = \sqrt{4 \cdot k_B \cdot T \cdot b} [N/\sqrt{Hz}]$ [37], pour $T = 300 \text{ K}$ et $b = b_0$, soit la valeur de l'amortissement $b(x)$ pour $x = 0$ - *c.f.* annexe B.2. Dans ces conditions, la densité spectrale de puissance du bruit $F_{Bn,PSD}$ est égale à $2, 75 \text{ pN}/\sqrt{Hz}$. Ce bruit est ramené à l'entrée en accélération, équation (3.30).

$$\gamma_{n,Bn,PSD} = \frac{F_{Bn,PSD}}{m \cdot g} [g/\sqrt{Hz}]; \quad \gamma_{n,Bn} = \gamma_{n,Bn,PSD} \cdot \sqrt{BP_{mes}} [g] \quad (3.30)$$

La densité spectrale de puissance de bruit blanc équivalent en accélération $\gamma_{n,Bn,PSD}$ est estimée à $2,3 \mu g/\sqrt{Hz}$, soit une valeur efficace $\gamma_{n,Bn}$ sur la bande passante de la mesure $BP_{mes} = [0 ; 122 Hz]$ égale à $27 \mu g$ ($-110 dBFS$).

- Bruit de l'électronique de lecture capacitive

La capacité équivalente en bruit du circuit de lecture capacitive¹¹, figure B.10, a été estimée à $12,4 aF$ sur la bande passante de la mesure [50], soit $C_{n,PSD} = 1,12 aF/\sqrt{Hz}$. Ce bruit est ramené à l'entrée en accélération, équation (3.31).

$$\gamma_{n,Cn,PSD} = \frac{C_{n,PSD} \cdot k_{eff}}{K_{XC} \cdot m \cdot g} [g/\sqrt{Hz}]; \quad \gamma_{n,Cn} = \gamma_{n,Cn,PSD} \cdot \sqrt{BP_{mes}} [g] \quad (3.31)$$

Soit $\gamma_{n,Cn,PSD} = 1,5 \mu g/\sqrt{Hz}$ et $\gamma_{n,Cn} \simeq 17 \mu g$ ($-113,7 dBFS$) sur la bande passante de la mesure BP_{mes} .

- Bruit de quantification introduit par le modulateur numérique - $\Sigma\Delta_{Act}$

Ce bruit est négligeable. En effet, la valeur efficace du bruit blanc équivalent introduit par le modulateur $\Sigma\Delta$ peut être estimée à $-142 dBFS$, équation (B.5). De plus, ce bruit est mis en forme par la fonction de sensibilité \mathbf{S} , dont le module est inférieur à 1 sur la bande passante de la mesure - équation (3.29).

La valeur efficace $\gamma_{n,eff}$ du bruit sur la sortie de mesure $y_{\Sigma\Delta,BF}$ est donc égale à $33 \mu g$ pour une bande passante de $122 Hz$, soit environ $3 \mu g/\sqrt{Hz}$.

Erreur dynamique

La pleine échelle est $8,2 g$ et le maximum de la fonction de sensibilité \mathbf{S} est de $-48 dB$ sur la bande passante de la mesure, équation (3.29). L'erreur de mesure dynamique ε_m maximale est donc de $33 mg$. Cette erreur peut également être exprimée en terme de distorsion linéaire de gain (facteur d'échelle SF) et de phase en examinant la fonction de sensibilité \mathbf{T} (module et phase), figure 3.38

3.6.4 Performances de mesure en simulation

On retrouve, en simulation¹², les résultats attendus concernant le bruit en sortie et la linéarité de la mesure, figure 3.39. La valeur efficace $\gamma_{n,eff}$ du bruit sur la sortie de mesure $y_{\Sigma\Delta,BF}$ est de l'ordre de $20 \mu g$ pour une bande passante de $122 Hz$ - hors contribution du bruit brownien. L'erreur de linéarité est inférieure au niveau de bruit tant que l'actionnement est efficace, à savoir pour les accélérations inférieures à $3 g$. Cette valeur est inférieure à la valeur théorique ($8,2 g$) à cause de l'effet de saturation du modulateur numérique $\Sigma\Delta_{Act}$.

¹¹Incluant ici le bruit de quantification associé au modulateur de lecture $\Sigma\Delta_{Lect}$.

¹²Modèle complet : figure 3.17 en incluant la description physique du MEMS, de l'actionnement électrostatique et de la lecture capacitive. Le modèle du bruit brownien n'a pas été introduit dans ces simulations.

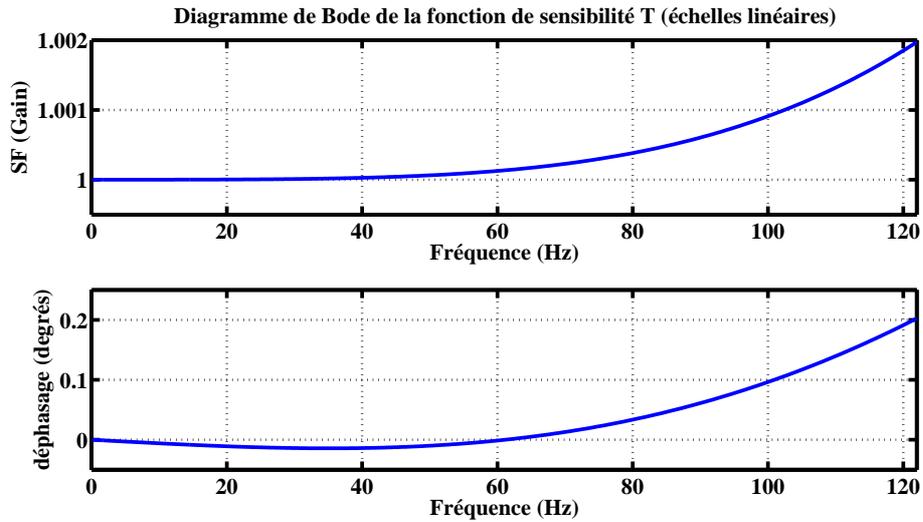


FIG. 3.38 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert T - échelles linéaires

Le tableau 3.5 résume les différents critères de performances considérés dans cette étude. En simulation, l'architecture proposée permet donc de répondre aux spécifications relatives au niveau de bruit et à l'erreur de linéarité. La gamme d'entrée nominale est de $3 g$. Ce tableau montre par ailleurs que le facteur limitant, pour l'accéléromètre considéré dans cette étude, est l'erreur dynamique. On peut réduire cette erreur de manière significative en considérant le traitement hors-boucle proposé dans le paragraphe 3.8.

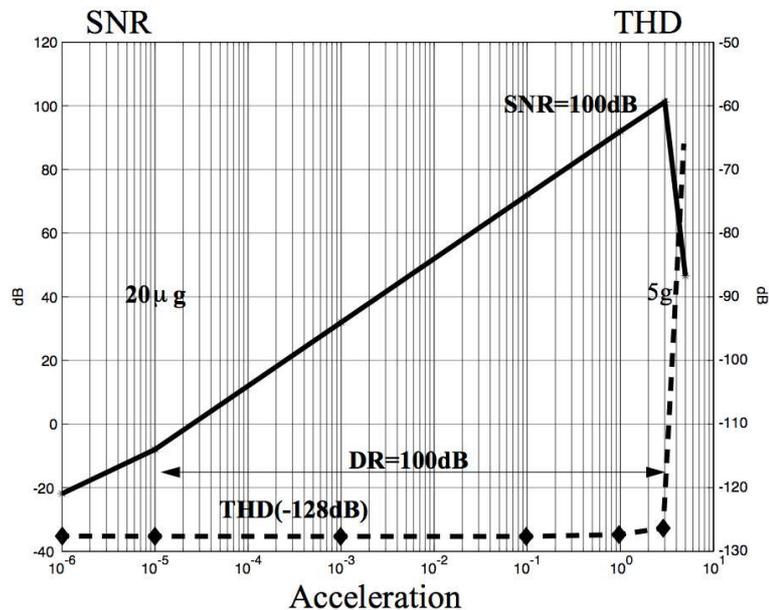


FIG. 3.39 – Performances de mesure caractérisées sur le modèle de simulation complet (hors bruit brownien) : Rapport signal à bruit (SNR - Signal to Noise Ratio) et distorsion harmonique (THD - Total Harmonic Distorsion), image de la non-linéarité de la mesure.

Critères	Unité	Spéc.	Th. BO	Th. BF	Sim. BF
1 - Gamme d'entrée maximale ^(a)	g	± 10	± 10	$\pm 8,2$	± 5
2 - Gamme d'entrée nominale ^(b)	g	± 10	$\pm 3^{(f)}$	$\pm 3^{(f)}$	± 3
3 - Bande passante maximale ^(c)	kHz	NS	$\simeq 2,5$	$\simeq 3,4$	$\simeq 3,4$
4 - Bande passante nominale ^(d)	Hz	122	122	122	122
5 - Niveaux de bruit	μg	≤ 100	$\leq 50^{(g)}$	$\leq 33^{(g)}$	$\leq 20^{(h)}$
6 - Résolution ^(e)	μg	NS	≤ 1	≤ 1	NE
7 - Erreur de linéarité maximale	μg	≤ 100	≤ 10000	≤ 10	≤ 4
8 - Dérive en température du facteur d'échelle ⁽ⁱ⁾	ppm/K	NS	$\simeq 90$	$\simeq 2$	NE
9 - Erreur dynamique maximale	mg	NS	$\simeq 205$	$\simeq 33$	$\simeq 33^{(j)}$

(a) : accélération maximale mesurable sans garantie sur les critères de performance spécifiées (en particulier la linéarité).

(b) : accélération maximale mesurable avec les performances spécifiées.

(c) : bande passante BP_{Capt} à -3 dB entre l'accélération en entrée et la sortie de mesure.

(d) : bande passante BP_{Mes} pour le calcul du bruit et de l'erreur de linéarité maximale.

(e) : résolution numérique équivalente en μg associée au bruit de quantification du modulateur $\Sigma\Delta$ de sortie.

(f) : définie arbitrairement pour pouvoir effectuer la comparaison avec les performances estimées en boucle fermée pour le modèle de simulation.

(g) : somme quadratique des contributions du bruit brownien et du bruit de l'électronique (hors quantification), en considérant une estimation du bruit brownien (paragraphe B.8) pour $T = 358$ K et la valeur de l'amortissement (B.9) pour le déplacement correspondant à une accélération de 3 g.

(h) : hors bruit brownien, figure 3.39.

(i) : hypothèse : électronique insensible à la température. *c.f.* annexes B.7 et B.8

(j) : [4], figure 12 : Sur la bande passante $[0 ; 122$ Hz], les fonctions de sensibilité identifiées sur le modèle complet sont identiques à celles attendues. L'erreur dynamique est donc identique à celle de l'estimation théorique (Th. BF).

Autres abréviations : NS - non spécifié; NE - non estimé

TAB. 3.5 – Spécifications initiales (Spéc.), prévisions théoriques des performances en boucle ouverte (Th. BO - *c.f.* annexe B.8) et en boucle fermée (Th. BF) et performances estimées en simulation pour le modèle complet (Sim. BF) -hors bruit brownien. Gamme de température : $0 - 85^\circ C$. Gamme de pression $0,8 - 1,2$ atm.

Conséquence d'un défaut d'appariement des peignes capacitifs

Dans ce paragraphe, on évalue de manière qualitative l'effet d'une entrée en force $b_F(t)$ (accélération ou bruit de l'actionnement, figure 3.40) sur la performance en bruit du capteur. On montre qu'un défaut d'appariement des peignes capacitifs peut conduire à une augmentation significative du niveau de bruit dans la bande passante de la mesure. On peut relier ce phénomène à un type d'erreur : l'erreur de rectification [7] - variation du biais de sortie (composante continue du bruit) sous l'effet d'une perturbation de type vibration.

Le mécanisme mis en jeu est une interaction entre le déplacement $x(t)$ de la masse sismique et les non-linéarités de la lecture capacitive et de l'actionnement électrostatique. La figure 3.40 présente schématiquement le processus de génération et de transfert d'un bruit $b_r(t)$ associé à la non-linéarité de la lecture capacitive. Un mécanisme analogue est associé à la non-linéarité de l'actionnement électrostatique.

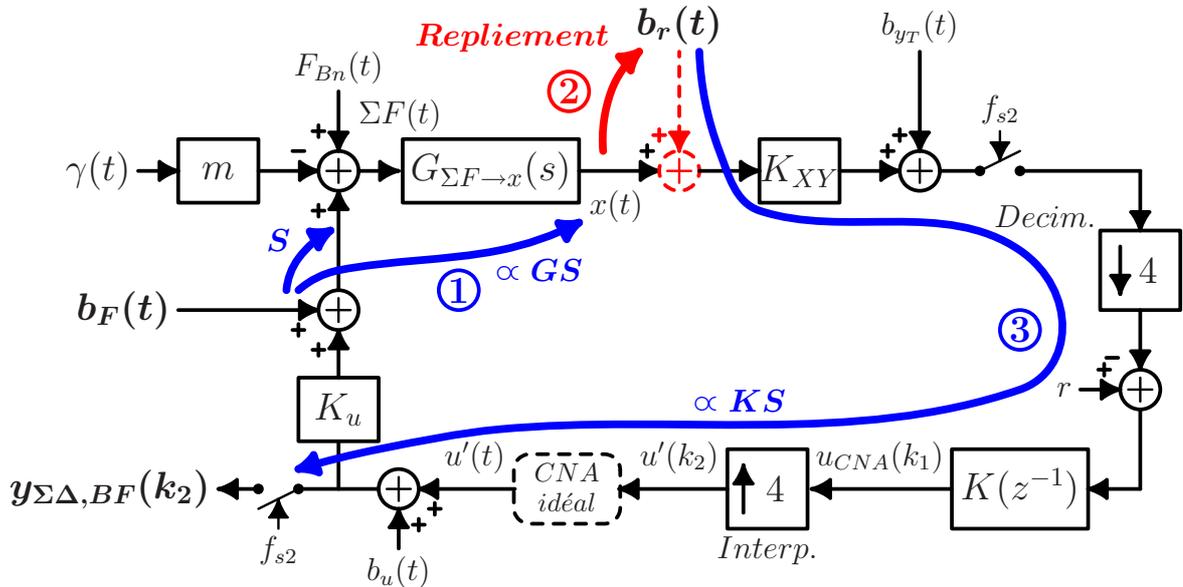


FIG. 3.40 – Processus de génération d'un bruit de repliement lié à la non-linéarité de la lecture capacitive :

- ① Le déplacement $x(t)$ de la masse sismique est lié à une entrée en force $b_F(t)$ par une fonction de transfert proportionnelle à la fonction de sensibilité GS ($GS/K_u/K_{XY}$).
- ② Les composantes haute fréquence du déplacement $x(t)$ sont repliées dans les basses fréquences par la non-linéarité de la lecture capacitive. On note $b_r(t)$ le bruit équivalent généré par ce repliement (voir paragraphe B.3.3).
- ③ Le bruit $b_r(t)$ est transmis sur le signal de sortie $y_{\Sigma\Delta, BF}(k_2)$ par une fonction de transfert proportionnelle à la fonction de sensibilité KS ($KS \cdot K_{XY}$).

Les simulations sur le modèle complet (figure 3.40, avec description physique du *MEMS*, de l'actionnement et de la lecture) confirment le rôle de la fonction de sensibilité \mathbf{GS} . Comme pour l'étude de la linéarité de la lecture capacitive (paragraphe B.3.2), le défaut d'appariement est modélisé par un décalage Δd de la position d'équilibre de la masse sismique.

On observe, en simulation, le spectre du signal de mesure $y_{\Sigma\Delta,BF}(k_2)$ pour trois types d'entrée en force $b_F(t)$:

- un bruit dont le spectre est inclus dans la bande passante de la mesure BP_{mes} , soit également la bande passante de rejet d'un point de vue asservissement. Ce bruit est centré sur 40 Hz .
- un bruit de spectre centré sur 1 kHz (fréquence correspondant au gain maximal de la fonction de sensibilité \mathbf{GS}).
- et un bruit de spectre hors bande passante du capteur, centré sur 4 kHz .

La figure 3.41 donne les spectres des entrées $b_F(t)$ et des sorties $y_{\Sigma\Delta,BF}(k_2)$ correspondant à ces trois cas, pour différents décalages Δd .

Les figures 3.41(f) et 3.41(b) montrent qu'une partie du bruit haute-fréquence introduit par le modulateur d'actionnement $\Sigma\Delta_{Act}$ est repliée dans la bande passante de la mesure ($BP_{mes} = [0; 122\text{ Hz}]$) en cas de défaut d'appariement des peignes capacitifs. Une accélération de spectre inclus dans la bande passante BP_{mes} ne conduit pas à une augmentation du bruit (comparaison entre figures 3.41(f) et 3.41(b), pour des valeurs identiques de décalage).

La figure 3.41(d) montre qu'une entrée en force (par exemple une accélération en dehors de la bande passante de mesure spécifiée) conduit à une augmentation significative du niveau de bruit.

Ce processus de repliement de bruit est certainement la cause de la dégradation des performances en bruit observée sur le démonstrateur, paragraphe 3.7.

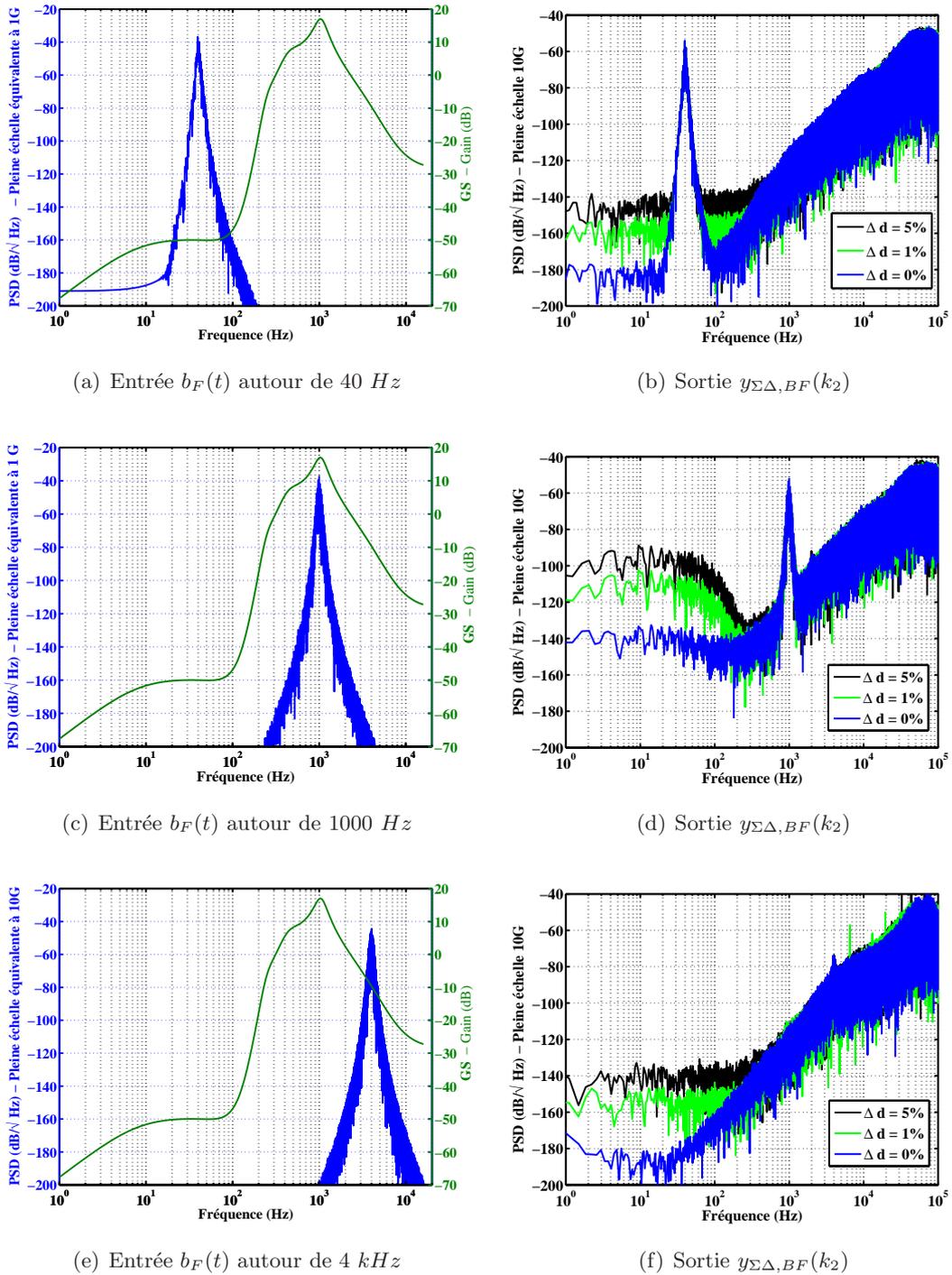


FIG. 3.41 – Spectres de la sortie de mesure $y_{\Sigma\Delta, BF}(k_2)$ (figures de droite) pour différents spectres d'entrée en force $b_F(t)$ (figures de gauche). Simulations du modèle complet hors bruit brownien et bruit de l'électronique pour des décalages Δd de la position d'équilibre mécanique de la masse sismique égaux à 0, 1 et 5% de l'entrefer nominal d_0 . Les figures de gauche donnent également le module de la fonction de sensibilité GS correspondant au correcteur utilisé.

3.7 Identification, synthèse du correcteur et performances de mesure du démonstrateur

3.7.1 Dispositif expérimental

Le capteur fabriqué par Tronics Microsystems et le circuit développé au LETI ont été montés sur la carte de test présentée en figure 3.42(a).

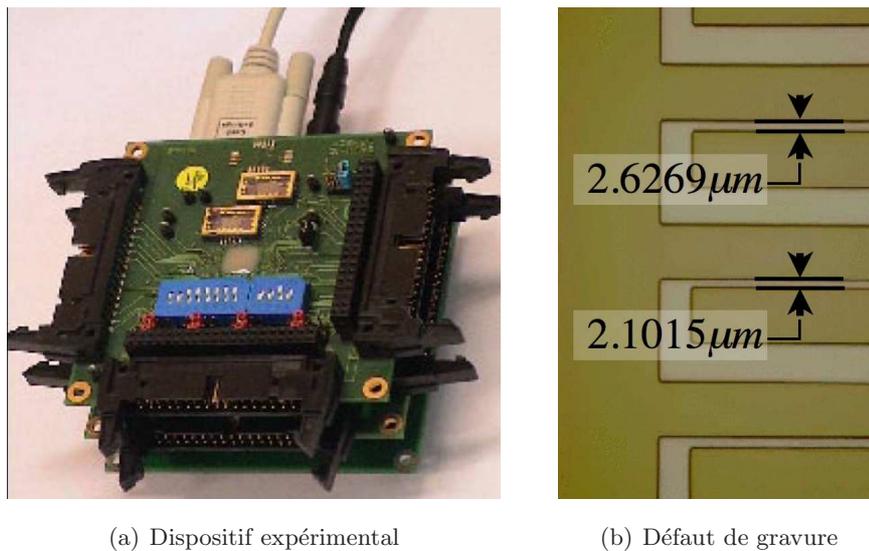


FIG. 3.42 – Dispositif expérimental et exemple de défaut du 1^{er} silicium de la structure mécanique (photographie ©Tronics Microsystems)

Pour ce démonstrateur, la tension maximale possible pour l'actionnement est plus faible que celle prévue pour le modèle de simulation. Ceci est attribué à une non-homogénéité des entreferes pour ce premier silicium capteur (figure 3.42(b)).

La figure 3.43 donne, pour un actionnement non symétrique, la courbe de variation de la capacité C_{13} (ou C_{23}) formée entre une électrode fixe et la masse mobile en fonction de la différence de potentiel V_{13} appliquée à ces bornes, figure 3.43 pour le démonstrateur. La tension de collage est d'environ 2,2 Volts pour le démonstrateur contre 2,7 Volts pour le modèle de simulation.

La tension symétrique d'actionnement V_{act} a donc été réduite de 2,9 Volts (simulation) à 2,5 Volts (démonstrateur).

Par ailleurs, les fréquences d'échantillonnage ont du être diminuées d'un facteur 2,85 pour permettre le bon fonctionnement du système. Ceci est principalement lié à des constantes de temps des pistes de la carte de test trop importantes. Pour le test, les modulateurs $\Sigma\Delta$ sont donc échantillonnés à 87,5 kHz et le correcteur travaille à 21,875 kHz (contre 250 kHz et 62,5 kHz respectivement en simulation).

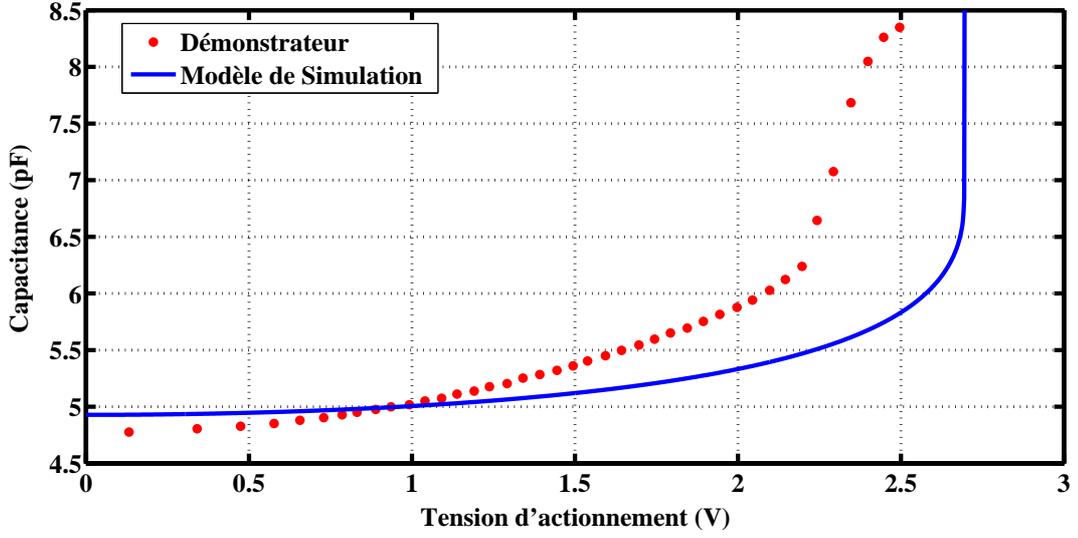


FIG. 3.43 – Tensions de collage pour le modèle de simulation (courbe bleue) et pour le démonstrateur (point rouges)

3.7.2 Identification du modèle

L'identification sur le démonstrateur s'est révélée plus délicate que sur le modèle de simulation. Sur le plan matériel, les paramètres de la séquence d'excitation ont du être réévalués pour que sa longueur soit compatible avec la capacité limitée de la carte d'acquisition. Sur le plan technique, les principales difficultés ont été les non-linéarités plus importantes du capteur, le gain d'actionnement plus faible et le niveau de bruit plus élevé que prévu. Le diagramme de Bode du modèle identifié, équation (3.32), est donnée en figure 3.44 - courbes rouges.

$$G_{id,u \rightarrow y}(z^{-1}) = \frac{0,001419 \cdot z^{-1} - 0,004678 \cdot z^{-2} + 0,01435 \cdot z^{-3} - 0,01809 \cdot z^{-4}}{1 - 1,998 \cdot z^{-1} + 1,406 \cdot z^{-2} - 0,5628 \cdot z^{-3} + 0,164 \cdot z^{-4}} \quad (3.32)$$

La réponse attendue d'après le modèle physique, équation (3.27), pour une tension d'actionnement $V_{act} = 2,5$ Volts est tracée en bleu. On rappelle également en noir la réponse du modèle étudié de simulation.

La réponse en phase du démonstrateur pour les fréquences supérieures à $1,5 \text{ kHz}$ est proche de celle attendue en théorie. L'effet des filtres de décimation et d'interpolation semble donc être identifié. En dehors de cette portion de courbe du diagramme de Bode, le modèle identifié est très éloigné du modèle physique. Les origines restent à déterminer - défaut d'appariement des capacités, bruit et non-linéarité trop importants, amortissement sous-évalué.

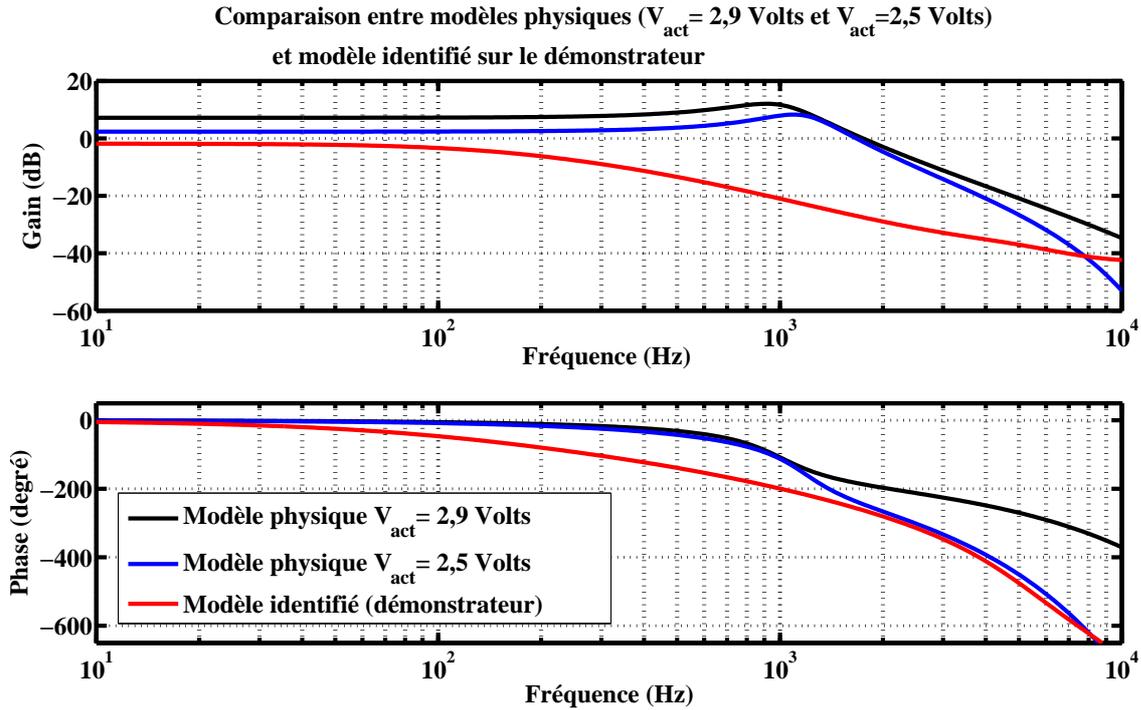


FIG. 3.44 – Diagramme de Bode du modèle identifié sur le démonstrateur et réponse attendue d’après le modèle physique pour 2,5 et 2,9 Volts

3.7.3 Synthèse du correcteur et analyse des performances de l’asservissement

A partir de ce modèle, la procédure de synthèse par placement de pôles permet d’obtenir, en boucle fermée, les fonctions de sensibilité en rouge de la figure 3.45.

Les performances de l’asservissement pour le démonstrateur sont décrites ci-dessous et rassemblées dans le tableau 3.6.

- Fonction de sensibilité SG :

La fonction de sensibilité SG présente une atténuation de 40 dB pour les fréquences inférieures à 35 Hz (contre 122 Hz en simulation). La linéarité de la mesure est donc assurée sur cette gamme de fréquence.

- Fonction de sensibilité S :

Par rapport au modèle de simulation, la bande de rejet de perturbation optimale est réduite à 25 Hz contre 70 Hz pour le modèle de simulation. Sur cette bande, l’atténuation est de 60 dB. Sur la bande de fréquence $[0 ; 35 \text{ Hz}]$, l’atténuation est de 40 dB.

- Fonction de sensibilité KS :

La fonction de sensibilité KS présente un gain supérieur à 1 pour les basses fréquences (2 dB). La boucle amplifie donc la contribution du bruit introduite par le circuit de lecture capacitive.

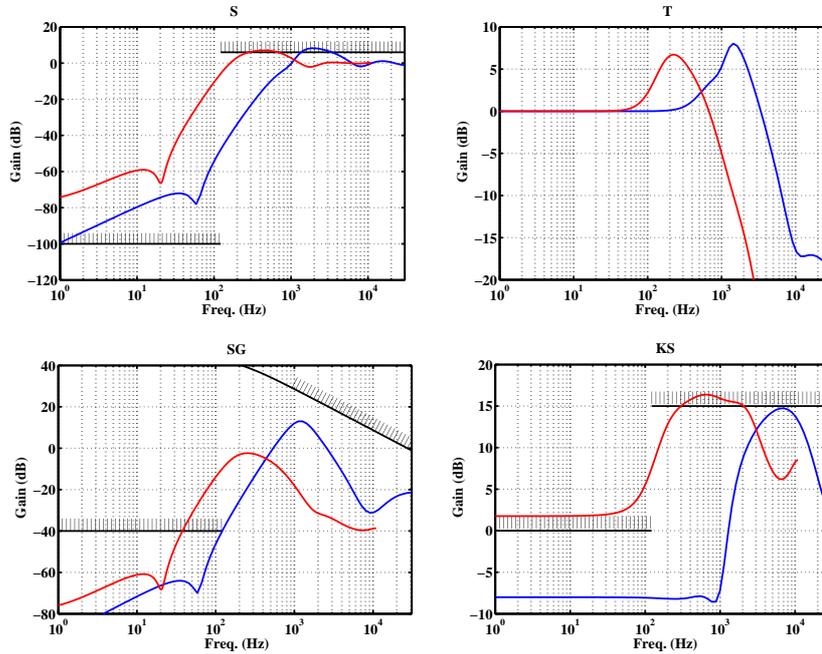


FIG. 3.45 – Fonctions de sensibilité pour le démonstrateur en rouge. Les fonctions de sensibilité en bleu correspondent à celles obtenues pour le modèle de simulation.

	Critère	Spécifications		Réalisé	
		Contraintes	Fréquences	Contraintes	Fréquences
1 - Stabilité	$\ \mathbf{S}(z^{-1})\ _{\infty}$	$\leq 6 \text{ dB}$	$\leq +\infty$		✓
2 - Stabilité	$\ \mathbf{KS}(z^{-1})\ _{\infty}$	$\leq 15 \text{ dB}$	$\leq +\infty$		✓
3 - Robustesse	$ \mathbf{GS}(z^{-1}) $	$\leq W_T'^{-1}(z^{-1}) $	$\leq +\infty$		✓
4 - Linéarité	$ \mathbf{gS}(z^{-1}) $	$\leq -40 \text{ dB}$	$\leq 122 \text{ Hz}$	✓	$\leq 35 \text{ Hz}$
5 - Erreur de mesure instantanée	$ \mathbf{S}(z^{-1}) $	$\leq -100 \text{ dB}$	$\leq 122 \text{ Hz}$	-40 dB	$\leq 35 \text{ Hz}$
6 - Bruit (CAN)	$ \mathbf{KS}(z^{-1}) $	$\leq 0 \text{ dB}$	$\leq 122 \text{ Hz}$	2 dB	$\leq 35 \text{ Hz}$
7 - Bruit (CNA)	$ \mathbf{S}(z^{-1}) $	$\leq 0 \text{ dB}$	$\leq 122 \text{ Hz}$	✓	$\leq 35 \text{ Hz}$

TAB. 3.6 – Récapitulatif des contraintes spécifiées et performances de commande atteintes pour le démonstrateur. Le symbole ✓ indique que la contrainte spécifiée est respectée.

3.7.4 Performances de mesure du démonstrateur

La figure 3.46 rappelle les sorties disponibles pour la mesure et l'analyse des performances du capteur.

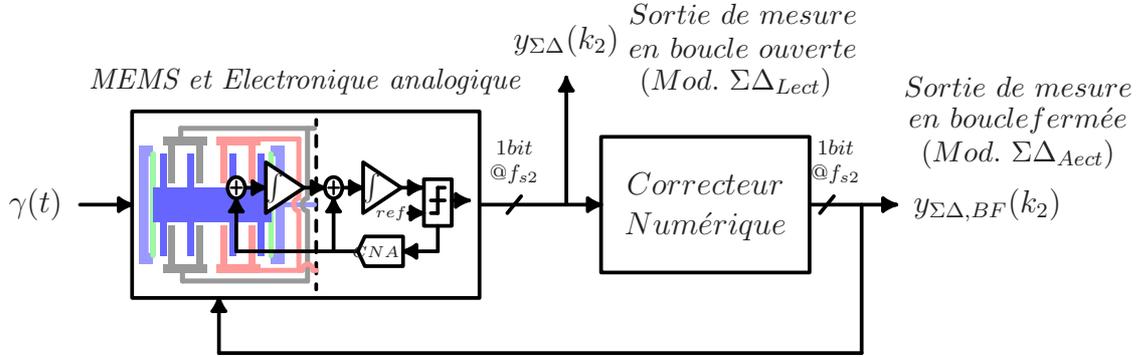


FIG. 3.46 – Sorties de mesure en boucle fermée $y_{\Sigma\Delta, BF}(k_2)$ et en boucle ouverte $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$

Le circuit de lecture¹³ a tout d'abord été testé seul (*MEMS* non connecté, mode test électrique). Le niveau de bruit mesuré est de $-108,2 \text{ dBFS}$ pour une bande passante de 50 Hz , soit $1,43 \text{ aF}/\sqrt{\text{Hz}}$ (pleine échelle $2,6 \text{ pF}$). Sa consommation est de $150 \mu\text{A}$ sous $3,3 \text{ Volts}$ [1]. Une comparaison de la performance du circuit de lecture seul, par rapport à l'état de l'art des circuits universitaires et commerciaux est donnée en figure 3.47. Cette comparaison considère le facteur de mérite suivant [64] :

$$FOM = \frac{4 \cdot k_B \cdot T \cdot DR^2 \cdot BW}{Power} \quad (3.33)$$

où k_B , T , DR , BW et $Power$ sont respectivement la constante de Boltzmann, la température, la gamme d'entrée, la bande passante et la puissance totale dissipée.

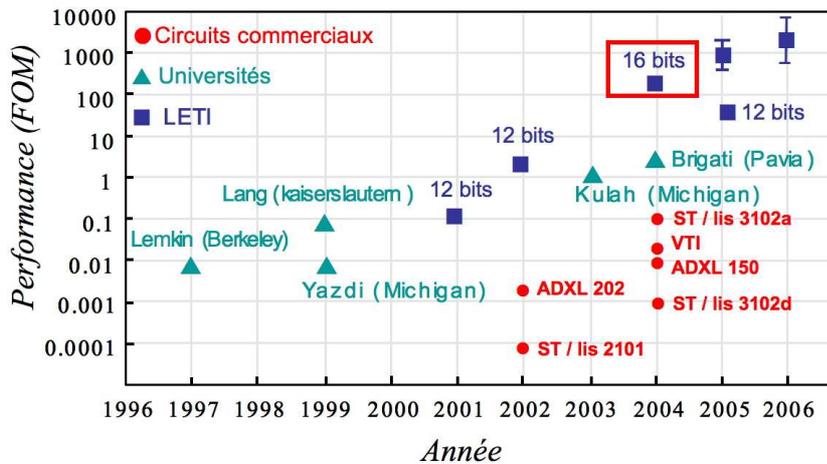


FIG. 3.47 – Comparaison des performances des circuits de lecture capacitave. Le circuit de cette étude est encadré en rouge

¹³NB : La conception du circuit ne fait pas partie des contributions de cette thèse.

Lorsque le capteur est connecté en boucle ouverte, le niveau de bruit mesuré sur la sortie $y_{\Sigma\Delta}$ du modulateur analogique $\Sigma\Delta_{Lect}$ passe de $-108,2 \text{ dBFS}$ à $-103,9 \text{ dBFS}$. Cette dégradation peut être attribuée aux capacités parasites de la carte de test, à une contribution du bruit brownien plus importante que prévue (-111 dBFS pour le modèle nominal approché) ou au bruit réfléchi [49]. La figure 3.48 donne le spectre de la sortie $y_{\Sigma\Delta}$ pour le capteur en boucle ouverte en l'absence d'accélération (capture d'écran sous Labview[®]).

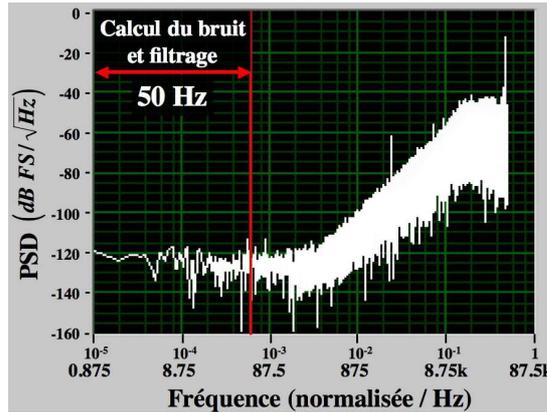


FIG. 3.48 – Démonstrateur en boucle ouverte. Sortie $\Sigma\Delta_{Lect}$. Accélération constante (0g).

La figure 3.49 donne les captures d'écran des sorties $y_{\Sigma\Delta,BF}$ et $y_{\Sigma\Delta}$ des modulateurs (numérique $\Sigma\Delta_{Act}$ et analogique $\Sigma\Delta_{Lect}$) en boucle fermée et en l'absence d'accélération.

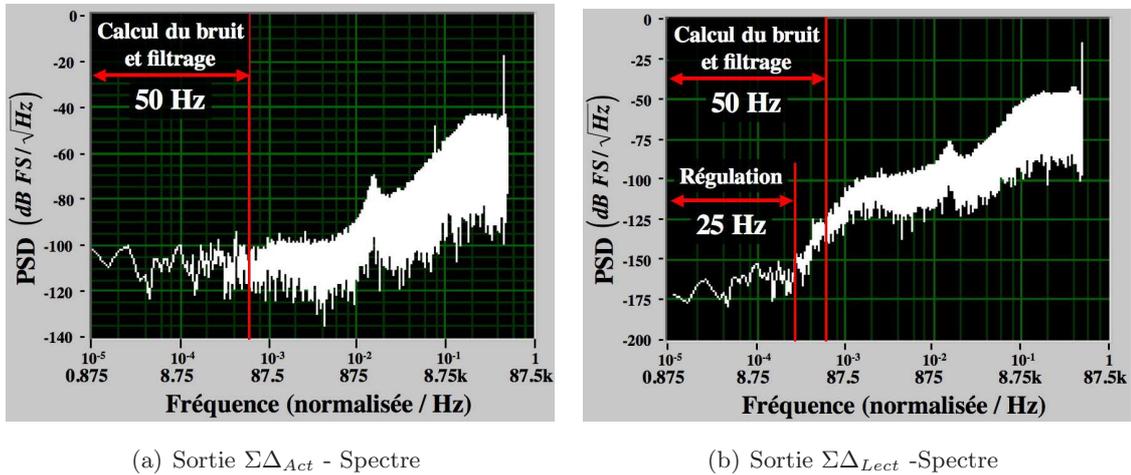


FIG. 3.49 – Signaux en sortie du démonstrateur en boucle fermée en l'absence d'accélération

En boucle fermée, le niveau de bruit mesuré sur le signal de sortie $y_{\Sigma\Delta,BF}$ du modulateur numérique $\Sigma\Delta_{Act}$ est de -88 dBFS (pleine échelle 10 g). Cette augmentation du niveau de bruit en boucle fermée a été observée pour d'autres accéléromètres asservis [35, 47]. Nous attribuons cette augmentation du niveau de bruit au processus de repliement de bruit présenté dans le paragraphe 3.6.3.

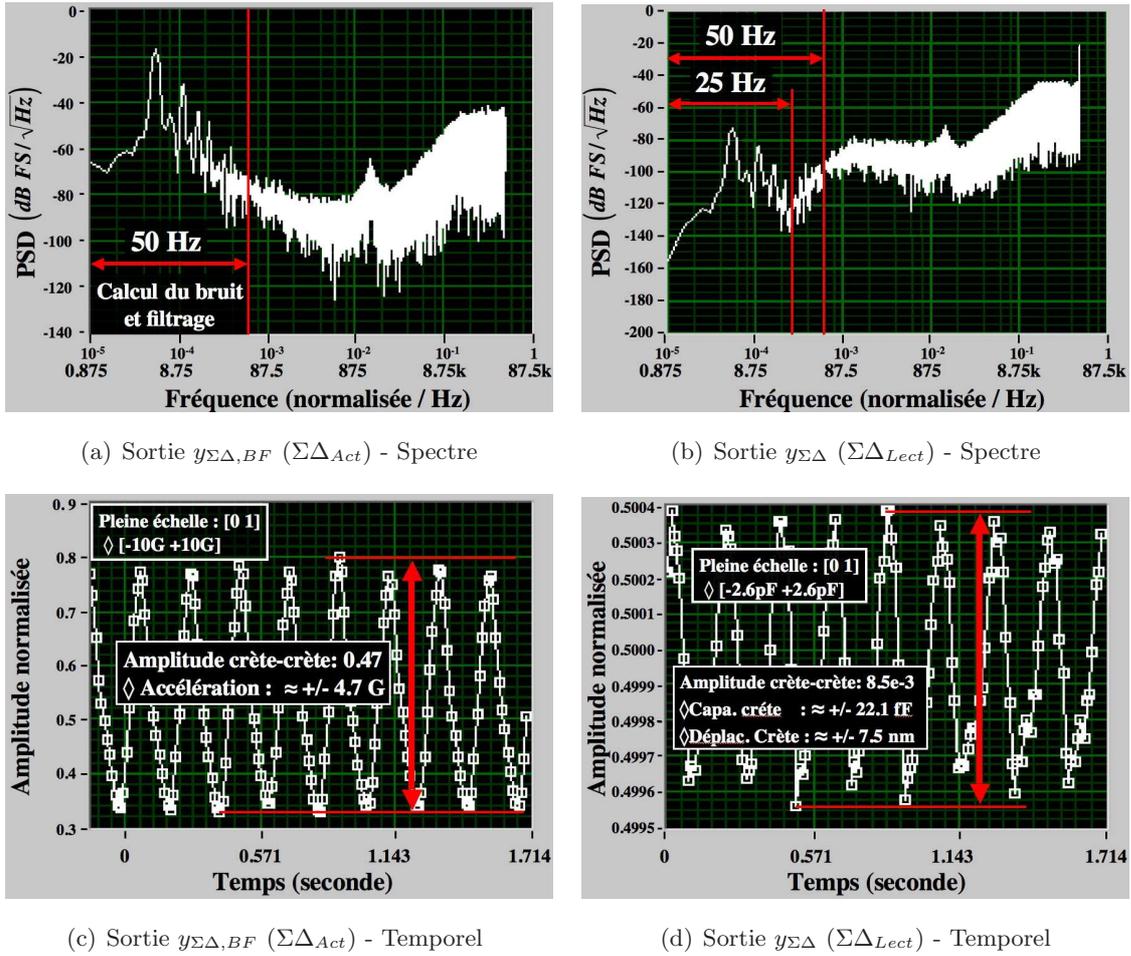


FIG. 3.50 – Signaux en sortie du démonstrateur en boucle fermée, accélération imposée à la main. La pleine échelle de l’affichage correspond à 10 g .

Hormis le niveau de bruit plus important, les spectres des sorties $y_{\Sigma\Delta, BF}$ et $y_{\Sigma\Delta}$ présentent un pic de bruit pour une fréquence d’environ 1 kHz - fig. 3.49(a) et 3.49(b). Ce pic n’est pas présent sur le spectre de mesure en boucle ouverte, fig. 3.48, ni sur les fonctions de sensibilité en boucle fermée, fig. 3.45. Il correspond par contre à la fréquence de résonance attendue pour le modèle nominal, fig. 3.44. L’hypothèse à privilégier pour expliquer la présence de ce pic est que le fonctionnement en boucle fermée modifie le comportement dynamique *entrée-sortie* du capteur - entrée $u_{CNA}(k_1)$, sortie $y_{CAN}(k_1)$. Si tel était le cas, la synthèse d’un correcteur adapté au comportement en boucle fermée permettrait d’améliorer les performances - bruit et bande passante. Cette hypothèse sera prochainement vérifiée en effectuant une identification en boucle fermée.

Il est également intéressant d’observer la différence entre la mise en forme du bruit sur le signal $y_{\Sigma\Delta}$ en sortie de lecture capacitive ($\Sigma\Delta_{Lect}$) en boucle ouverte (fig. 3.48) et la mise en forme du bruit sur cette même sortie en boucle fermée (fig. 3.49(b)). Dans la bande de fréquence où l’asservissement est optimal, à savoir $[0 ; 25 Hz]$, le régulateur fait en sorte qu’à chaque instant

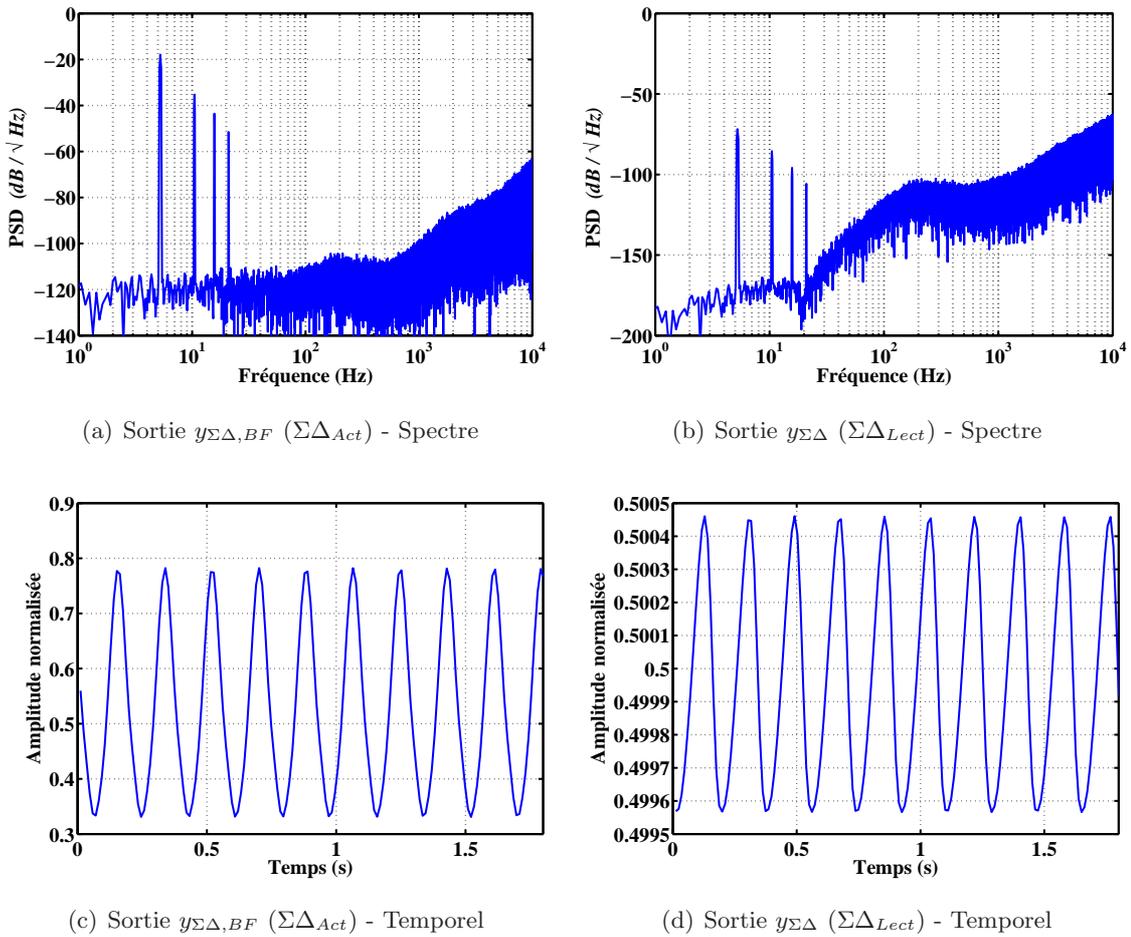


FIG. 3.51 – Simulation Matlab/Simulink à partir du modèle identifié et du correcteur synthétisé. Les densités spectrales des bruit injectés en entrée et sortie sont déduites des mesures effectuées sur le démonstrateur. De même, nous avons imposé une accélération semblable à celle imposée au démonstrateur.

le déplacement x de la masse sismique s'oppose au bruit $b_{y_T}(t)$ (figure 3.32) de l'électronique analogique de la lecture capacitive : les fluctuations du signal $y_{\Sigma\Delta}$ en sortie de lecture capacitive en boucle fermée sont nettement inférieures au propre bruit $b_{y_T}(t)$ de l'électronique.

La figure 3.50 donne les spectres et les allures temporelles de ces mêmes sorties en présence d'une entrée en accélération périodique (générée ici manuellement). On peut retrouver les mises en forme caractéristiques (hors pic à 1 kHz) et les allures temporelles de ces signaux en simulation (fig. 3.51).

3.7.5 Conclusions concernant les résultats du démonstrateur

Ce démonstrateur, premier silicium capteur et premier silicium circuit, présente en boucle fermée des performances bien placées par rapport à l'état de l'art des capteurs commerciaux en 2004, date à laquelle ont été effectuées ces mesures (tableau 3.7). Tout en présentant un facteur de mérite supérieur¹⁴, l'erreur de linéarité est 4 à 35 fois inférieure à celles des capteurs commerciaux considérés.

Société Réf. produit	AnalogDevice	MEMS IC	VTI	Cette étude		unité
	ADXL320	MXD7210	SCA320	<i>Sim</i>	<i>Dem</i>	
Type	OL	OL	OL	CL	CL	
Etendue de mesure (FS)	5	10	12	8	≥ 5	<i>g</i>
Nombre d'axes	2	2	1	1	1	
Bande passante (BP_{mes})	50	1	400	122	50	<i>Hz</i>
Bruit sur BP_{mes}	318	400	96	3	60	$\mu g/\sqrt{Hz}$
Non-Linéarité	0,2	1	1,7	0,001	0,01	%FS
Type de sortie	<i>analog</i>	<i>PWM</i>	<i>analog</i>	$\Sigma\Delta$	$\Sigma\Delta$	
Alimentation	3	5	3		3,3	<i>Volt</i>
Consommation	1,5	16	10		2,7	<i>mW</i>
Facteur de mérite	4,2	1	20		131,6	*

TAB. 3.7 – Etat de l'art des accéléromètres en 2005. Abréviations : *analog*=sortie analogique, *PWM* = modulation de largeur d'impulsion, $\Sigma\Delta$ = sortie numérique $\Sigma\Delta$ sur 1 bit, *Sim* = modèle de simulation, *Dem* = démonstrateur (1^{er} silicium). * : référence accéléromètre MEMS IC-MXD7210. Dans le cas des capteurs à sortie analogique, les niveaux de bruit ramenés à l'entrée incluent le bruit des filtres *RC* anti-repliement recommandés.

L'avantage premier de l'architecture proposée est d'avoir permis la synthèse d'un premier correcteur, malgré un comportement dynamique du capteur fabriqué éloigné de celui du modèle physique de simulation.

Le second avantage est de présenter deux sorties numériques $y_{\Sigma\Delta,BF}$ et $y_{\Sigma\Delta}$ haute résolution - rapport signal à bruit maximal théorique de 140 *dB* sur la bande passante de la mesure BP_{mes} (équation B.6). La première sortie, $y_{\Sigma\Delta,BF}$, est la sortie de mesure en boucle fermée (figure 3.17). On montre dans le paragraphe 3.8 que le second signal, $y_{\Sigma\Delta}$ (ou le signal équivalent $y_{CNA}(k_1)$ échantillonné à f_{s1}), peut être utilisé pour réduire de manière significative l'erreur de mesure dynamique $\varepsilon_m(t)$.

¹⁴Equation (3.33) modifiée en considérant la puissance dissipée divisée par le nombre d'axes plutôt que la puissance totale

3.8 Réduction de l'erreur de mesure dynamique par observateur

Le tableau 3.5 (ligne 9) montre que l'erreur de mesure dynamique $\varepsilon_m(t)$, figure 3.52, est environ 1000 fois plus importante que l'erreur aléatoire (niveaux de bruit - ligne 5). C'est donc le principal facteur limitant de l'architecture proposée. Cette erreur peut être corrigée en dehors de la boucle. La référence [30] propose la reconstruction de l'accélération par un filtre de Kalman étendu. Puisque $e_m(t) - \varepsilon_m(t) = e(t)$, figure 3.52, on propose dans ce paragraphe de reconstruire l'accélération en entrée en additionnant au signal $e_m(t)$, un signal de correction d'erreur $-\hat{\varepsilon}_m(t)$. L'estimation du signal de correction d'erreur $\hat{\varepsilon}_m(t)$ est obtenue par un observateur \mathcal{H}_∞ . Dans le domaine des microsystèmes, l'application de la synthèse \mathcal{H}_∞ pour la reconstruction d'un signal inconnu est également proposée dans les références [54, 55].

3.8.1 Principe et formulation du problème

On reprend ici le schéma de la figure 2.5, modifié en considérant la consigne d'asservissement $r(t)$ et la notation $e(t) = e^*(t) + b_e(t)$ avec $b_e(t) = b_{act}(t) + b_{\varepsilon_m}(t)$.

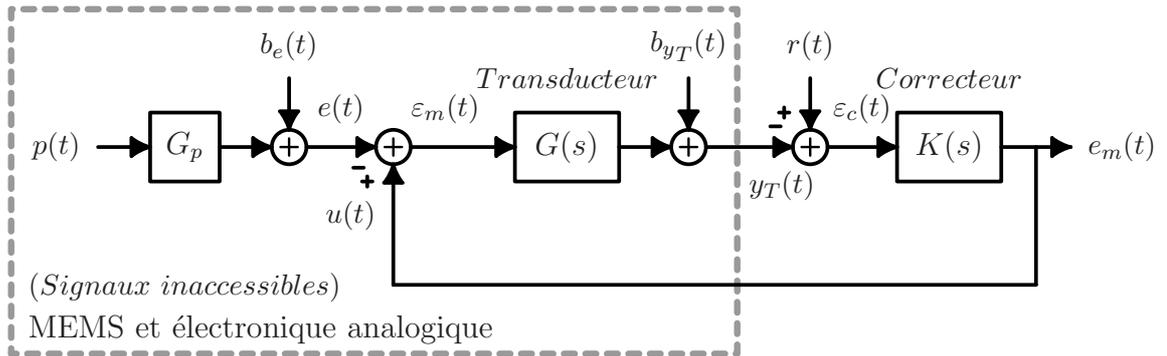


FIG. 3.52 – Capteur asservi - point de vue capteur

Les relations entre les entrées et les différents signaux de la boucle, équations (2.3-2.6), sont rappelées ici :

$$u(t) = e_m(t) = \mathbf{T}(s) \cdot e(t) + \mathbf{K}\mathbf{S}(s) \cdot (r(t) - b_{y_T}(t)) \quad (3.34)$$

$$y_T(t) = \mathbf{T}(s) \cdot r(t) - \mathbf{S}\mathbf{G}(s) \cdot e(t) + \mathbf{S}(s) \cdot b_{y_T}(t) \quad (3.35)$$

$$\varepsilon_c(t) = \mathbf{S}\mathbf{G}(s) \cdot e(t) + \mathbf{S}(s) \cdot (r(t) - b_{y_T}(t)) \quad (3.36)$$

$$\varepsilon_m(t) = -\mathbf{S}(s) \cdot e(t) + \mathbf{K}\mathbf{S}(s) \cdot (r(t) - b_{y_T}(t)) \quad (3.37)$$

3.8.2 Structure du bloc de reconstruction de l'entrée $e(t)$

On propose un bloc de reconstruction réalisant l'opération $\hat{e}(t) = e_m(t) - \hat{\varepsilon}_m(t)$, figure 3.53, où $\hat{\varepsilon}_m(t)$ est une estimation du signal $\varepsilon_m(t)$ (ce signal n'est pas accessible, figure 3.52). Le filtre de fonction de transfert $K_\varepsilon(s)$ réalise l'estimation $\hat{\varepsilon}_m(t)$ du signal $\varepsilon_m(t)$ à partir du signal $\varepsilon_c(t)$. Cette structure de reconstruction de l'entrée $e(t)$ est semblable à celle proposée dans les références [61, 62].

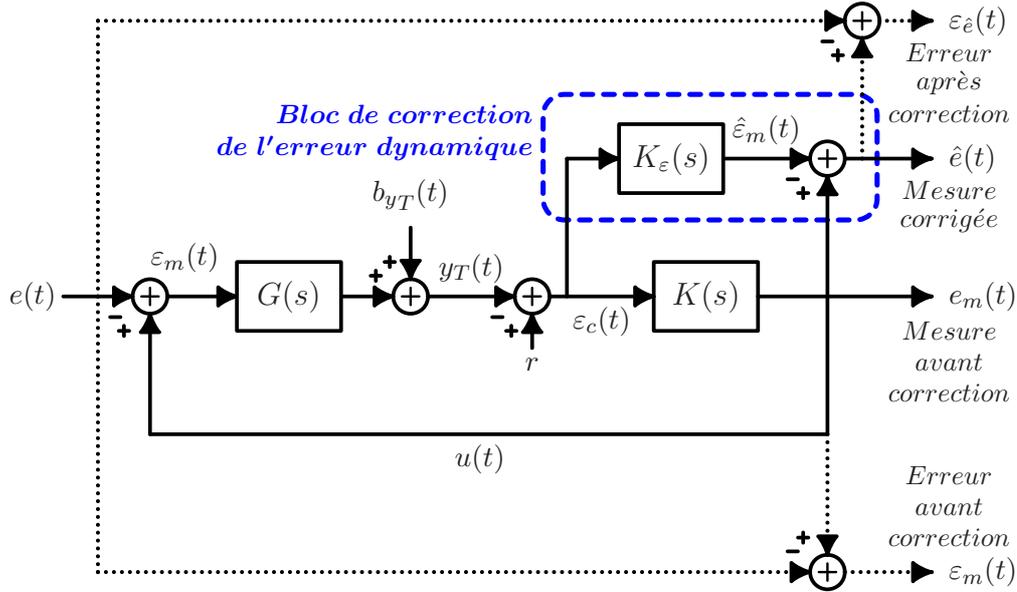


FIG. 3.53 – Structure du système de correction de l'erreur de mesure hors boucle. Le signal $e(t)$ étant inconnu, la construction des signaux d'erreur $\varepsilon_m(t)$ et $\varepsilon_{\hat{e}}(t)$ est indiquée par des lignes en pointillé.

3.8.3 Fonction de transfert du filtre $K_\varepsilon(s)$

La fonction de transfert du filtre $K_\varepsilon(s)$ à réaliser est $K_\varepsilon(s) = -G^{-1}(s)$ [62]. En effet, en écrivant les équations relatives au système de la figure 3.53 avec $K_\varepsilon(s) = -G^{-1}(s)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{e}(t) &= e_m(t) - \hat{\varepsilon}_m(t) = e_m(t) - K_\varepsilon(s) \cdot \varepsilon_c(t) \\ \hat{e}(t) &= (\mathbf{T}(s) + \mathbf{S}(s)) \cdot e(t) + (\mathbf{K}\mathbf{S}(s) + G^{-1}(s) \cdot \mathbf{S}(s)) \cdot (r(t) - b_{yT}(t)) \\ \hat{e}(t) &= e(t) + (\mathbf{K}\mathbf{S}(s) + G^{-1}(s) \cdot \mathbf{S}(s)) \cdot (r(t) - b_{yT}(t)) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Si la bande passante considérée pour la mesure BP_{mes} correspond à la plage de fréquence où l'asservissement est efficace, on a $\mathbf{S}(s) \ll 1$ et $K(s) \gg 1$, soit $\mathbf{K}\mathbf{S}(s) \simeq G^{-1}(s)$, par conséquent :

$$\mathbf{K}\mathbf{S}(s) + G^{-1}(s) \cdot \mathbf{S}(s) \simeq \mathbf{K}\mathbf{S}(s) \quad \forall \omega \in BP_{mes} \quad (3.39)$$

Soit :

$$\hat{e}(t) = e(t) + \mathbf{K}\mathbf{S}(s) \cdot (r(t) - b_{yT}(t)) \quad (3.40)$$

à comparer à la sortie de mesure initiale :

$$e_m(t) = \mathbf{T}(s) \cdot e(t) + \mathbf{K}\mathbf{S}(s) \cdot (r(t) - b_{yT}(t)) \quad (3.41)$$

La structure du bloc de correction et le choix $K_\varepsilon(s) = -G^{-1}(s)$ permettent donc de s'affranchir de l'effet de filtrage de la fonction $\mathbf{T}(s)$ sur l'entrée $e(t)$, sans dégradation des performances en bruit. Par contre, la fonction $G^{-1}(s)$ n'est en général pas réalisable (fonction de transfert non propre) [61]. Un filtre $K_\varepsilon(s)$ approchant la fonction de transfert $G^{-1}(s)$ peut être obtenu par la synthèse \mathcal{H}_∞ (paragraphe 3.8.4).

3.8.4 Synthèse de l'observateur $K_\varepsilon(s)$ par la synthèse \mathcal{H}_∞

On utilise ici la propriété que le correcteur central (fourni par l'algorithme de Glover-Doyle) a une structure d'observateur [12]. On considère donc la structure d'interconnexion, figure 3.54, associée au système de la figure 3.53 (synthèse du filtre $K_\varepsilon(s)$ uniquement). Pour simplifier le schéma, on considère le cas $r(t) = 0$ et on ne fait pas apparaître les entrées en bruit $b_e(t)$ et $b_y(t)$. Leurs influences ont été traitées dans le paragraphe précédent.

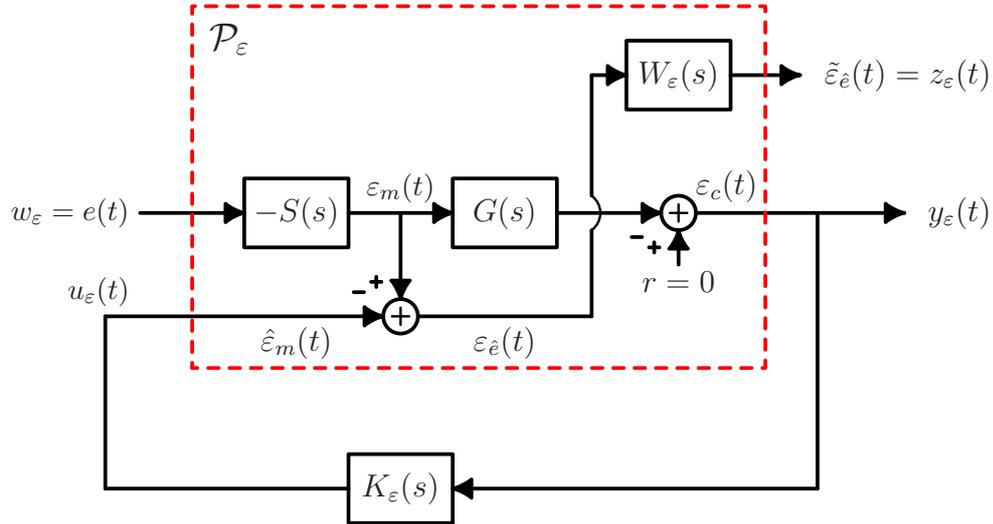


FIG. 3.54 – Structure d'interconnexion associée au système de la figure 3.53 pour la synthèse du filtre $K_\varepsilon(s)$

La matrice d'interconnexion du système est la suivante :

$$\begin{bmatrix} z_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -W_\varepsilon(s) \cdot \mathbf{S}(s) & W_\varepsilon(s) \\ \mathbf{S}\mathbf{G}(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_\varepsilon(t) \\ u_\varepsilon(t) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

où la fonction de pondération $W_\varepsilon(s)$ permet d'ajuster l'atténuation et la bande de fréquence de la réduction de l'erreur $\varepsilon_\hat{e}(t)$. En utilisant la transformation linéaire fractionnelle (2.16), on obtient en boucle fermée :

$$F_l(\mathcal{P}, \mathcal{K}) = W_\varepsilon(s) \cdot (K_\varepsilon(s) \cdot \mathbf{S}\mathbf{G}(s) - \mathbf{S}(s)) \quad (3.43)$$

Si elle converge, la synthèse \mathcal{H}_∞ fournit une fonction de transfert stable et réalisable $K_\varepsilon(s)$ tendant vers $G^{-1}(s)$ sur la bande de fréquence où la fonction de pondération $W_\varepsilon(s)$ présente un gain important.

3.8.5 Application au modèle de simulation de l'accéléromètre

La synthèse de l'observateur $K_\varepsilon(z^{-1})$ ne peut s'effectuer à partir du modèle $G_{id,u \rightarrow y}(z^{-1})$ identifié en boucle ouverte. En effet, le comportement dynamique entre l'entrée $u_{CNA}(k_1)$ et la sortie $y_{CAN}(k_1)$ est modifié par l'asservissement, y compris dans le cas du modèle de simulation. L'identification en boucle fermée du modèle $G_{id,u \rightarrow y,BF}(z^{-1})$ est proposée dans l'annexe B.9.

Pour la fonction de pondération imposée $W_\varepsilon(s)$, figure 3.55, les itérations de la synthèse \mathcal{H}_∞ convergent vers une valeur de γ égale à 1,07. Le correcteur central résultant est du 36^{ème} ordre. Il est réduit à un filtre $K_\varepsilon(z^{-1})$ du 13^{ème} ordre sans dégradation de performance.

La figure 3.55 donne également en bleu la fonction transfert entre l'entrée $\tilde{p}(t)$ et l'erreur $\varepsilon_\varepsilon(t)$ après reconstruction et, en rouge, la fonction transfert entre l'entrée $\tilde{p}(t)$ et l'erreur $\varepsilon_m(t)$, sans correction. D'après cette figure, l'erreur dynamique maximale peut être réduite de 60 dB sur la bande passante $BP_{mes} = [0 ; 122 \text{ Hz}]$.

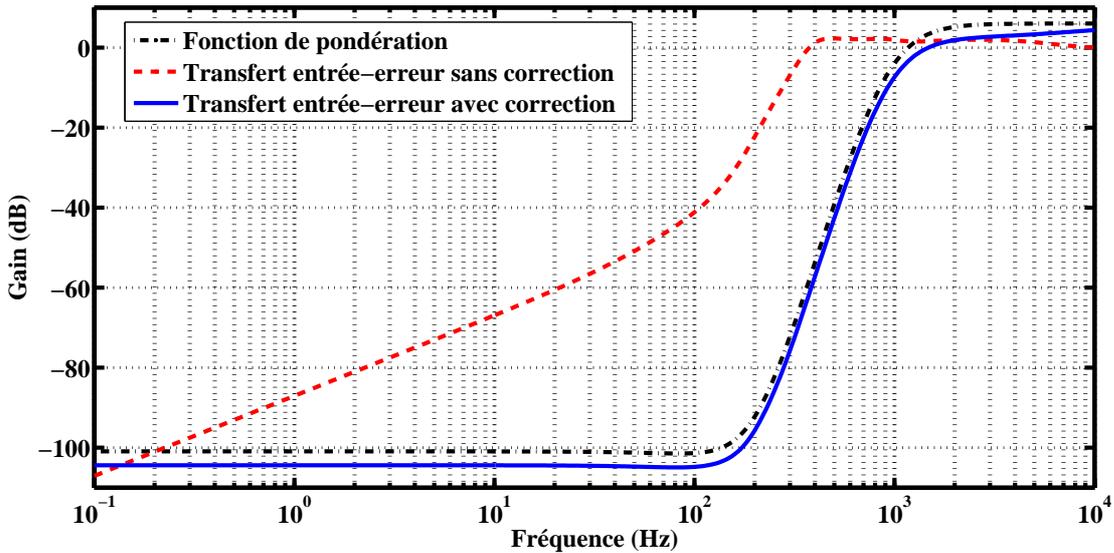


FIG. 3.55 – Fonction de transfert entrée-erreur avant correction en rouge, fonction de pondération pour la synthèse \mathcal{H}_∞ en noir et fonction de transfert entrée-erreur avec correction en bleu.

Le diagramme de Bode de la fonction de transfert de l'observateur $K_\varepsilon(z^{-1})$ est tracé en figure 3.56. Cette figure montre l'adéquation, sur la bande de fréquence fixée par $W_\varepsilon(s)$, entre la fonction de transfert $1/G_{id,u \rightarrow y,BF}(z^{-1})$ à réaliser *a priori* et celle du filtre $K_\varepsilon(z^{-1})$ obtenu.

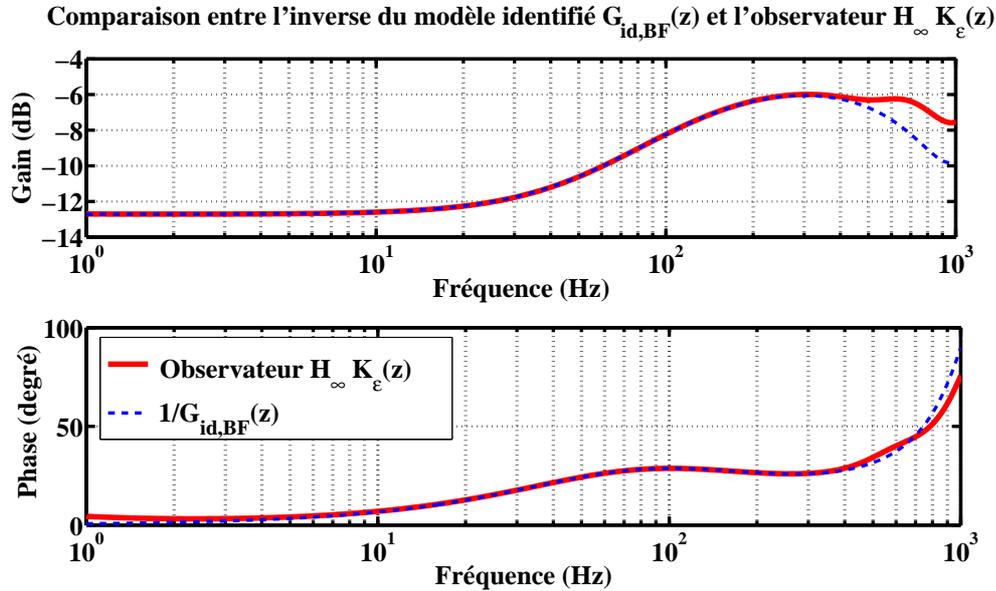


FIG. 3.56 – Diagramme de Bode de l'observateur $K_\varepsilon(z^{-1})$ obtenu par la procédure de synthèse \mathcal{H}_∞ et diagramme de Bode de l'inverse de la fonction de transfert du modèle identifié en boucle fermée.

Essai en simulation

On considère ici le schéma de simulation de la figure 3.57, correspondant au schéma de principe de la figure 3.53. Les sorties de mesure sans correction $e_m(t)$ et avec correction $\hat{e}(t)$ sont comparées à l'entrée en accélération imposée $p(t)$ après calibrage en statique. La figure 3.58 donne les spectres des erreurs de mesure dynamique sans correction $\varepsilon_m(t)$ et avec correction $\varepsilon_{\hat{e}}(t)$, pour une accélération $p(t)$ en entrée de type bruit blanc. Cette figure montre que la réduction d'erreur est moins importante que celle prévue par la figure 3.55. En effet, l'implémentation simulée ici n'est pas optimale : le schéma de la figure 3.53 ne tient pas compte de l'effet du filtre d'interpolation (*Interp*). On observe par contre une réduction de 20 dB de l'erreur dynamique sur une bande passante $[0 ; 90 \text{ Hz}]$.

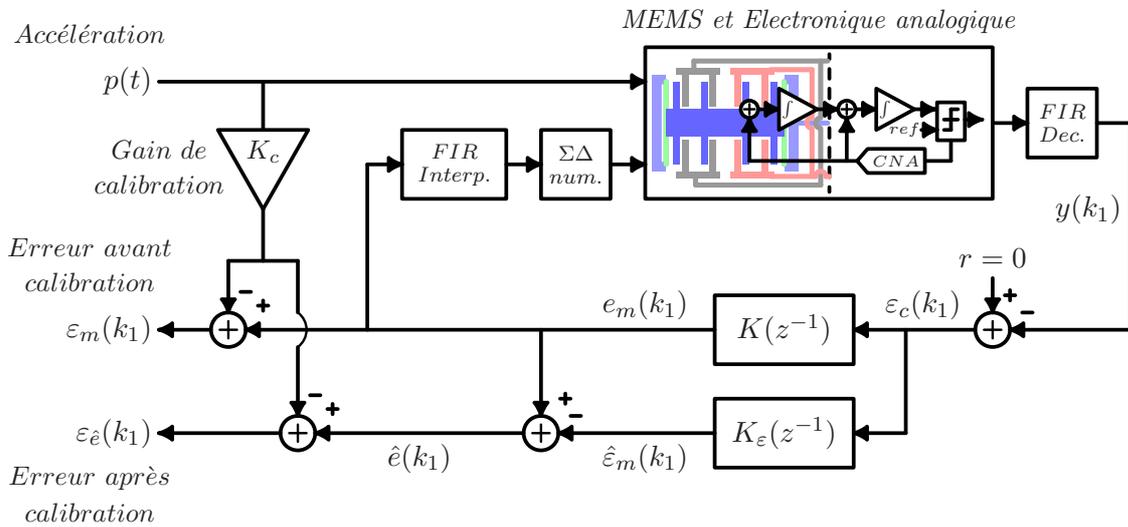


FIG. 3.57 – Système considéré pour la validation du bloc de correction avec synthèse \mathcal{H}_∞ de l'observateur $K_\varepsilon(z^{-1})$

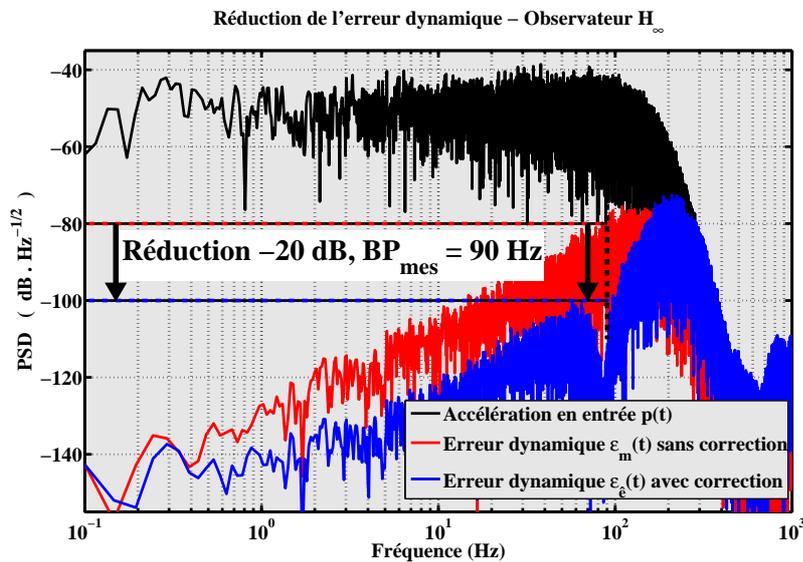


FIG. 3.58 – Réduction de l'erreur - filtre \mathcal{H}_∞ $K_\varepsilon(z^{-1})$. Entrée en accélération : bruit blanc sur $[0 ; 150 \text{ Hz}]$. Simulation du modèle complet de la figure 3.57, hors bruit brownien et bruit de l'électronique.

Perspectives d'amélioration pour la correction de l'erreur dynamique

La figure 3.59 propose une autre configuration du bloc de réduction de l'erreur dynamique. Dans cette configuration, le filtre de correction $K_{\varepsilon,id}(z^{-1})$ (filtre du 4^{ème} ordre, échantillonné à $f_{s2} = 250 \text{ kHz}$) est obtenu par identification fréquentielle [22]. Les performances sont meilleures : la réduction de l'erreur est de 40 dB, figure 3.60. Par contre, ce filtre est moins bien conditionné puisque l'échantillonnage est trop important par rapport à la dynamique à corriger. Ce point est mis en évidence sur la figure 3.61 : le lieu des pôles et des zéros du filtre $K_{\varepsilon,id}(z^{-1})$ dans le plan imaginaire est comparé à celui du filtre $K_{\varepsilon}(z^{-1})$ (échantillonné à f_{s1}). L'obtention d'un compromis entre ces deux configurations n'est pas développée ici et peut faire l'objet d'une extension de ces travaux.

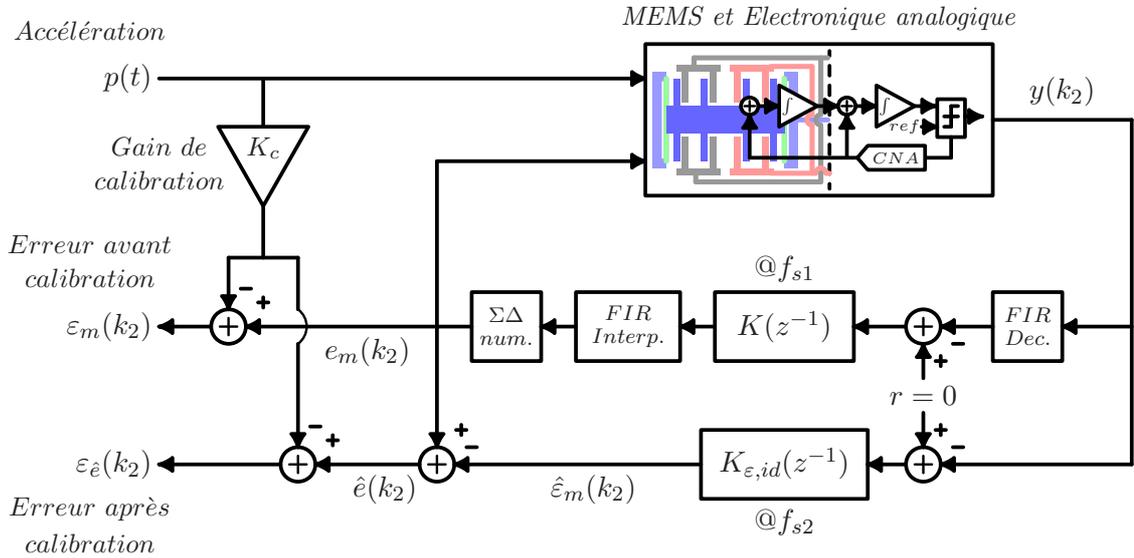


FIG. 3.59 – Configuration pour correction de l'erreur dynamique en utilisant les signaux de sortie des modulateurs $\Sigma\Delta$ échantillonnés à $f_{s2} = 250 \text{ kHz}$. Le filtre de correction $K_{\varepsilon,id}(z^{-1})$ est ici obtenu par identification fréquentielle.

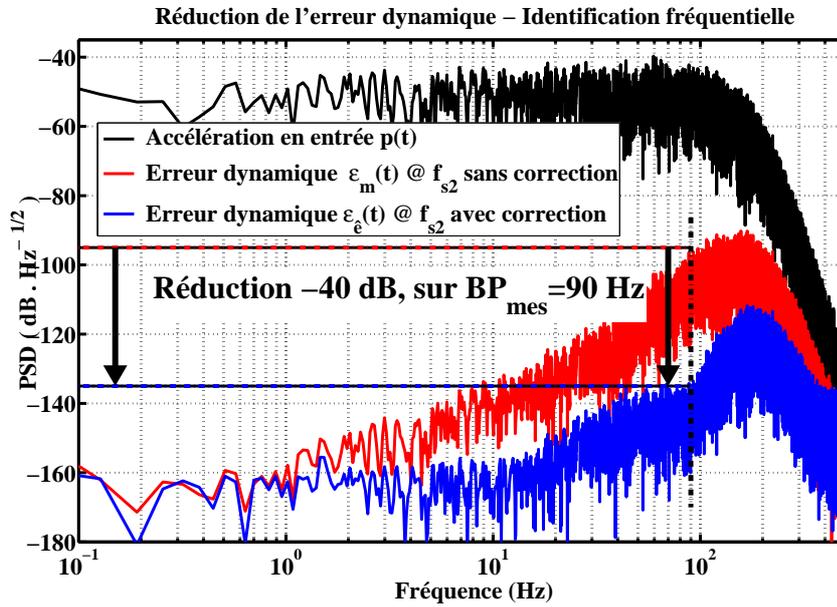
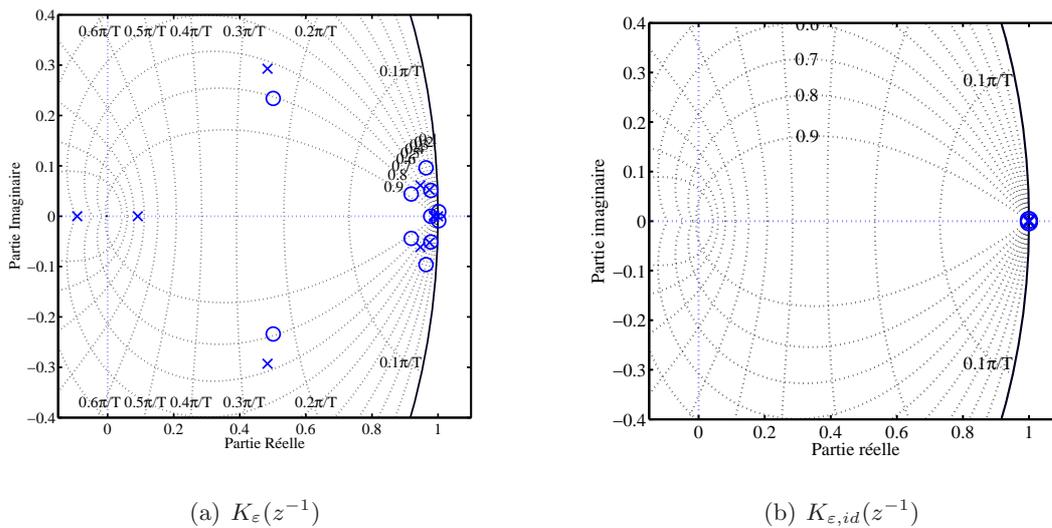


FIG. 3.60 – Réduction de l’erreur - filtre obtenu par identification fréquentielle. Dans cette simulation, le correcteur $K(z)$ correspond à celui synthétisé par placement de pôles. Entrée en accélération : bruit blanc sur $[0, 150 \text{ Hz}]$. Simulation du modèle complet de la figure 3.59, hors bruit brownien et bruit de l’électronique.



(a) $K_\varepsilon(z^{-1})$

(b) $K_{\varepsilon,id}(z^{-1})$

FIG. 3.61 – Lieu des pôles et des zéros des filtres $K_\varepsilon(z^{-1})$ et $K_{\varepsilon,id}(z^{-1})$ dans le plan imaginaire

3.9 Conclusion du chapitre 3

Ce chapitre présente l'étude d'un micro-accéléromètre passe-bas asservi. Après un rappel du principe de mesure mis en œuvre dans les accéléromètres $\Sigma\Delta$, on propose une architecture de système de commande s'appuyant sur la formulation du chapitre 2. Cette nouvelle architecture a l'avantage d'être très flexible. En effet, l'asservissement est réalisé grâce à un correcteur numérique entièrement programmable de sorte que les performances du capteur peuvent être adaptées en fonction du capteur réellement fabriqué et de l'application visée.

Deux méthodes de synthèse fréquentielle de correcteur sont proposées : la synthèse par placement de pôles et la synthèse \mathcal{H}_∞ . Ces deux méthodes permettent d'atteindre des performances similaires pour l'asservissement.

La robustesse en stabilité vis-à-vis des variations des paramètres avec les conditions de fonctionnement est abordée pour le modèle de simulation et pourra être étendue au démonstrateur après obtention d'une description des incertitudes sur les paramètres (dispersions technologiques, variations en fonction de la pression et de la température).

La faisabilité est montrée en simulation et validée sur le démonstrateur (premier silicium du circuit et du capteur). Les performances globales du démonstrateur (facteur de mérite incluant la résolution, la bande passante, et la consommation) sont supérieures à l'état de l'art des accéléromètres. L'erreur de linéarité est 4 à 35 fois inférieure à l'état de l'art.

Le démonstrateur présente actuellement un niveau de bruit équivalent en accélération de $60 \mu g/\sqrt{Hz}$ sur une bande passante de $50 Hz$. Après identification en boucle fermée et synthèse d'un correcteur mieux adapté, les performances du démonstrateur devraient se rapprocher de celles attendues en simulation, à savoir $3 \mu g/\sqrt{Hz}$ sur une bande passante de $122 Hz$ et une erreur de linéarité inférieure au niveau de bruit ($0,001 \%FS$).

Les performances en bruit pourront aussi être améliorées en adaptant la pleine échelle de la détection capacitive au déplacement maximal en boucle fermée. En effet, le circuit de lecture de ce démonstrateur a été conçu pour que le capteur puisse également fonctionner en boucle ouverte. La détection n'est pas donc optimale en terme de rapport signal à bruit pour un fonctionnement en boucle fermée.

On propose enfin une solution s'inspirant des techniques d'observation visant à améliorer les performances dynamiques du système (gain unitaire et déphasage le plus faible sur la bande passante). En simulation, elle permet de réduire l'erreur de mesure instantanée d'environ $40 dB$ sur la bande de fréquence $[0 ; 90 Hz]$.

Troisième partie

Exploitation d'une non-linéarité
mécanique dans les microsystemes et
nanosystemes

Chapitre 4

Microsystèmes, résonateur et oscillateur de Duffing

Résumé

Ce chapitre introduit quelques origines physiques de l'apparition de la non-linéarité dite de *Duffing* dans les systèmes vibro-mécaniques et en particulier dans les microsystèmes. Les caractéristiques principales du *résonateur* et de l'*oscillateur* de Duffing sont ensuite rappelées.

4.1 Introduction

On voit apparaître dans la littérature un nombre croissant d'articles proposant des principes de fonctionnement (mesure, traitement de l'information) non basés sur un fonctionnement linéaire. Il peut s'agir de systèmes proposant des principes d'amplification paramétrique [68, 75, 79, 81, 89, 97, 99, 100, 105, 112, 111] où d'exploitation de régimes essentiellement non linéaires, tels que les régimes chaotiques [69, 71, 88, 95, 101, 102, 106, 107].

Des études associent également certaines propriétés remarquables de systèmes biologiques particuliers à un principe de fonctionnement mettant en œuvre des oscillateurs non linéaires ou des couplages entre des oscillateurs non linéaires - oreille [73, 78, 87, 85, 86, 103, 104], locomotion [70, 84]. On notera également l'analogie parfois proposée entre le principe de fonctionnement de l'oreille et le principe de super-régénération (amplification paramétrique exploitant une instabilité). En particulier, ce principe a récemment été mis en œuvre pour la détection de signaux Ultra Wide Band [2].

On s'intéresse dans cette partie, à une équation différentielle particulière présentant une non-linéarité de type Duffing [72].

4.2 Non-linéarité de Duffing et microsystèmes résonants

Les équations de Duffing apparaissent dans les systèmes régis par une équation différentielle du deuxième ordre présentant un terme assimilable à une force de rappel non linéaire de la forme :

$$F_r(y) = k_1 \cdot y + k_3 \cdot y^3 \quad (4.1)$$

Cette non-linéarité est fréquemment rencontrée dans les microsystèmes [36], [65, 66, 67, 83, 91, 98, 108]. En particulier, on obtient ce modèle de force de rappel lorsque l'on approche la dynamique d'une poutre "encastrée-encastrée" par un modèle à une dimension correspondant au premier mode de flexion [65, 91, 96, 109, 108]. La résolution de l'équation de la poutre est rappelée en annexe C.

Les poutres "encastrées-encastrées" étant souvent utilisées comme élément de suspension des parties mobiles des MEMS, on peut retrouver ce type de non-linéarité dans les équations différentielles de structures plus complexes - accéléromètres, gyromètres. On la rencontre également dans les dispositifs dont le fonctionnement est basé sur une poutre en torsion. Le couple de rappel peut alors présenter un terme cubique [74].

Dans le cas d'une poutre encastrée-encastrée en flexion, l'équation différentielle régissant le déplacement $y(t)$ du point milieu pour le premier mode prend la forme :

$$m_{eff} \cdot \frac{d^2y(t)}{dt^2} + b_{eff} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + k_1 \cdot y(t) + k_3 \cdot y(t)^3 = f_y \left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{dy(t)}{dt}, t \right) \quad (4.2)$$

où m_{eff} représente le terme correspondant à la masse équivalente du modèle à une dimension, b_{eff} représente le terme d'amortissement correspondant aux différentes pertes (mécaniques, fluidiques ou électriques) et le terme $k_1 \cdot y(t) + k_3 \cdot y(t)^3$ représente la force de rappel non linéaire. Le second membre $f_y \left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}, \frac{dy(t)}{dt}, t \right)$ correspond à la force d'excitation imposée.

On considère dans cette étude que le coefficient de raideur k_1 est positif. Il englobe les différentes origines possibles de contributions (raideur mécanique équivalente $k_{1,mec}$, raideur électrostatique négative $k_{1,elec}$). Le coefficient k_3 , associé à la contribution non linéaire, peut être positif (ressort durcissant) [66, 67, 76, 77, 91, 94, 96, 98, 108, 110] ou négatif (ressort mollissant) [65, 80, 82, 90]. Son origine est d'ordre mécanique (allongement du plan médian, non-linéarité du module de Young) ou d'origine électrostatique [65, 93].

On rappelle dans les paragraphes suivants deux types de comportement pour ces systèmes. Dans le premier, le terme d'excitation est une force extérieure sinusoïdale de fréquence proche de la fréquence de résonance primaire [92] du résonateur. Ceci correspond au régime forcé du *résonateur* de Duffing. Dans le second cas, la force imposée est une force d'auto-excitation conduisant au régime libre de l'*oscillateur* de Duffing.

4.3 Oscillations forcées de l'équation de Duffing amortie

Dans le cas d'une excitation sinusoïdale, le second membre de l'équation (4.2) prend la forme :

$$f_y \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \frac{dy(t)}{dt}, t \right) = F_y \cdot \cos(\Omega_t \cdot t) \quad (4.3)$$

On a donc :

$$m_{eff} \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_{eff} \cdot \frac{dy(t)}{dt} + k_1 \cdot y(t) + k_3 \cdot y(t)^3 = F_y \cdot \cos(\Omega_t \cdot t) \quad (4.4)$$

Pour rendre l'équation sans dimension, on pose les changements de variables suivants [92] :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{m_{eff}}}; \quad \tau = \omega_0 \cdot t; \quad u(\tau) = \frac{y(t)}{Y}; \quad \varepsilon \cdot \alpha = \frac{k_3}{k_1} \cdot Y^2 \quad (4.5)$$

et

$$\Omega_\tau = \frac{\Omega_t}{\omega_0}; \quad 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu = \frac{b_{eff}}{m_{eff} \cdot \omega_0}; \quad F_u = \frac{F_y}{m_{eff} \cdot \omega_0 \cdot Y}; \quad (4.6)$$

L'équation (4.4) prend alors la forme classique de l'équation sans dimension du *résonateur* de Duffing amorti et excité sinusoïdalement :

$$\ddot{u}(\tau) + 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \dot{u}(\tau) + u(\tau) + \varepsilon \cdot \alpha \cdot u^3(\tau) = F_u \cdot \cos(\Omega_\tau \cdot \tau) \quad (4.7)$$

Les paramètres et variables des équations (4.5), (4.6) et (4.7) peuvent être définis de la manière suivante :

- ω_0 est la pulsation naturelle des oscillations libres de l'oscillateur harmonique associée au cas linéaire ($b_{eff} = 0$, $k_3 = 0$ dans l'équation (4.4));
- Y représente une dimension caractéristique du système étudié;
- $u(\tau)$ représente la variable de l'équation sans dimension associée à la variable $y(t)$;
- ε est un petit paramètre ($\varepsilon \ll 1$) introduit pour permettre la résolution de l'équation;
- $\varepsilon \cdot \alpha$ représente le paramètre de l'équation sans dimension associé à la non-linéarité k_3 ;
- Ω_τ représente la pulsation d'excitation dans l'équation sans dimension;
- $2 \cdot \varepsilon \cdot \mu$ représente le terme d'amortissement dans l'équation sans dimension;
- F_u représente l'amplitude de la force d'excitation dans l'équation sans dimension.

Quelques méthodes pour l'étude des systèmes non linéaires tels que celui décrit par l'équation 4.7 sont rassemblées dans le tableau C.1. On propose de considérer la méthode des échelles de temps multiples [92]. Cette méthode permet d'obtenir une solution asymptotique de l'équation (4.7) incluant l'aspect transitoire.

On montre qu'en première approximation [92] et pour Ω_τ proche de 1, la solution de l'équation sans dimension (4.7) peut s'écrire sous la forme :

$$u(\tau) = a(\tau) \cdot \cos(\Omega_\tau \cdot \tau - \gamma(\tau)) + O(\varepsilon) \quad (4.8)$$

où le régime transitoire en amplitude $a(\tau)$ et en phase $\gamma(\tau)$ (déphasage entre les oscillations $u(\tau)$ et la force d'excitation $F_u \cdot \cos(\Omega_\tau \cdot \tau)$) est décrit par le système d'équations :

$$(\Sigma_{trans}) \begin{cases} \dot{a}(\tau) = -\mu \cdot \varepsilon \cdot a(\tau) + \frac{1}{2} \cdot F_u \cdot \sin(\gamma(\tau)) \\ -a(\tau) \cdot \dot{\gamma}(\tau) = (\Omega_\tau - 1) \cdot a(\tau) - \frac{3}{8} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a^3(\tau) + \frac{1}{2} \cdot F_u \cdot \cos(\gamma(\tau)) \end{cases} \quad (4.9)$$

On observe alors la courbe de réponse *amplitude-fréquence* $a(\Omega_\tau)$, figure 4.1(b), caractéristique des oscillations forcées de l'équation de Duffing pour une amplitude d'excitation F_u donnée. La courbe de réponse en phase $-\gamma(\Omega_\tau)$ associée est donnée en figure 4.1(d). Sur ces courbes, les portions représentées en lignes discontinues rouges représentent les solutions instables de l'équation du résonateur de Duffing forcé (4.7). Pour les amplitudes d'excitation F_u et les fréquences d'excitation Ω_τ donnant naissance à trois solutions, seules deux sont stables. En fonction des conditions initiales, l'une ou l'autre est atteinte - branches supérieures ou branches inférieures sur les figures 4.1(b) et 4.1(d).

Ceci peut être observé en considérant l'évolution temporelle dans le plan de phase des variables $a(\tau)$ et $\gamma(\tau)$, figure 4.1(c). Cette évolution correspond au régime transitoire, équation (4.9), pour un couple amplitude et fréquence d'excitation particulier (F_u, Ω_τ) . Sur cette figure, la zone en gris correspond au bassin d'attraction de la solution stable, notée F_1 (*Focus*), de la branche supérieure et celle non grisée au bassin d'attraction de la solution stable, notée F_2 , de la branche inférieure. Le point selle S (*Saddle*) correspond à la solution instable.

En observant l'évolution des bassins d'attraction lorsque, à amplitude d'excitation F_u constante, on fait varier lentement la fréquence d'excitation Ω_τ , on montrerait que lorsque l'on balaye ces fréquences dans le sens croissant, les solutions stables de la branche supérieure sont privilégiées. Dans le cas contraire (fréquences Ω_τ décroissantes), les solutions stables privilégiées sont celles de la branche inférieure.

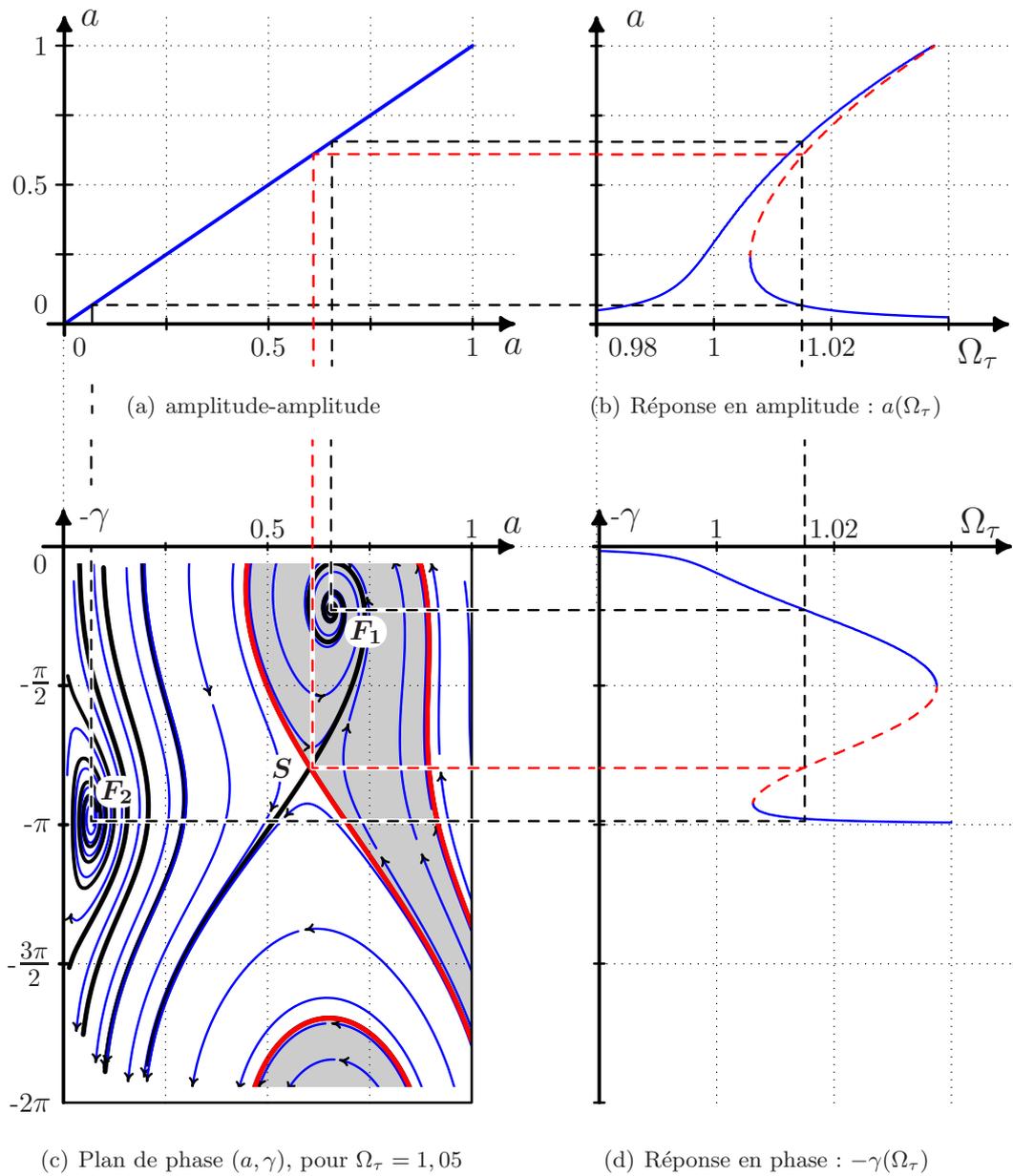


FIG. 4.1 – Courbe de réponse amplitude-fréquence, phase-fréquence et diagramme de phase de la réponse forcée de l'équation de Duffing amortie pour $\varepsilon \cdot \alpha = 0,1$, $\varepsilon \cdot \mu = 0,001$, $F_u = 0,002$; $\Omega_\tau = 1,015$.

La figure 4.2 donne l'évolution des courbes de réponse en amplitude $a(\Omega_\tau)$ et en phase $-\gamma(\Omega_\tau)$ en fonction de l'amplitude d'excitation F_u . Cette figure montre la transition entre le régime presque linéaire (amplitudes d'excitation F_u pour lesquelles il n'existe qu'une seule solution pour l'amplitude $a(\Omega_\tau)$) et le régime non linéaire (où deux solutions stables existent). Elle montre également que lorsque le maximum d'amplitude des oscillations est atteint, le déphasage $-\gamma(\Omega_\tau)$ vaut $\pi/2$, quelle que soit l'amplitude de la force d'excitation.

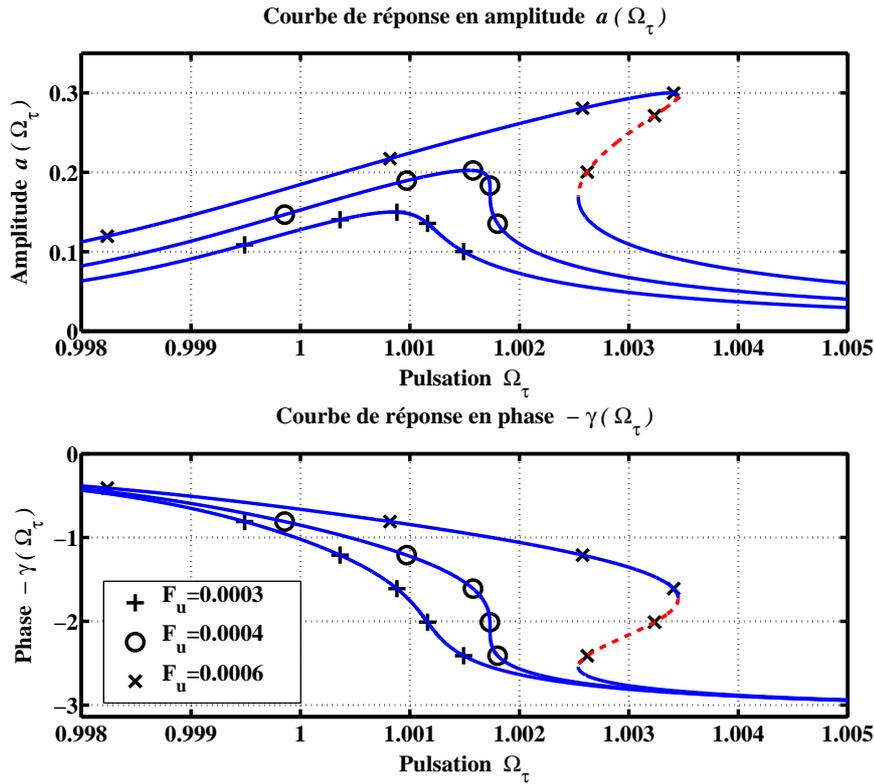


FIG. 4.2 – Courbe de réponse amplitude $a(\Omega_\tau)$ et en phase $-\gamma(\Omega_\tau)$ (en radians) pour différentes valeurs de l'excitation F_u

A titre d'illustration *microsystème* des différents points abordés, la figure 4.3 reprend des résultats de mesures effectuées sur un dispositif de type micro-miroir en torsion 4.3(a) (figures issues de [74]). En particulier, la courbe en bleu de la figure 4.3(b) donne l'amplitude des oscillations atteintes pour des fréquences d'excitation croissantes et décroissantes, montrant ainsi l'*hystérésis* de la courbe de réponse en amplitude.

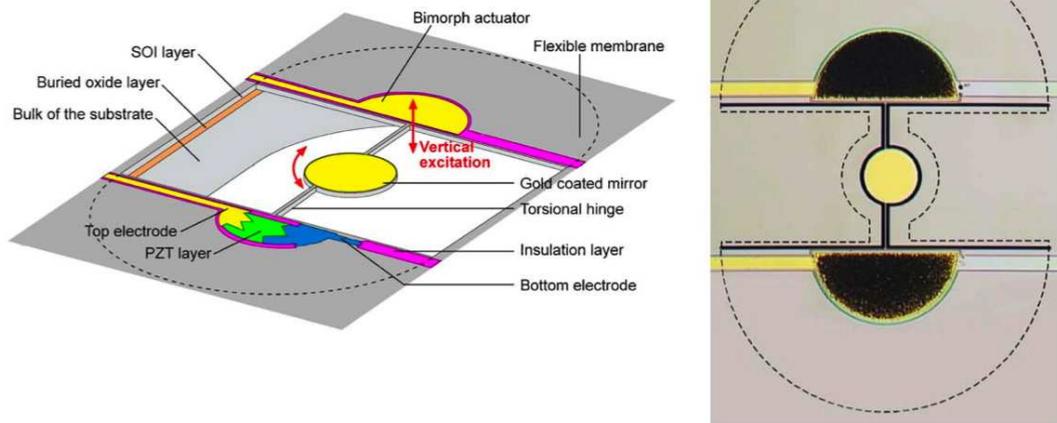


Fig. 2. Schematic and microscope view of the silicon micro-mirror with half-circular membrane piezoelectric bimorph actuators.

(a) Dispositif

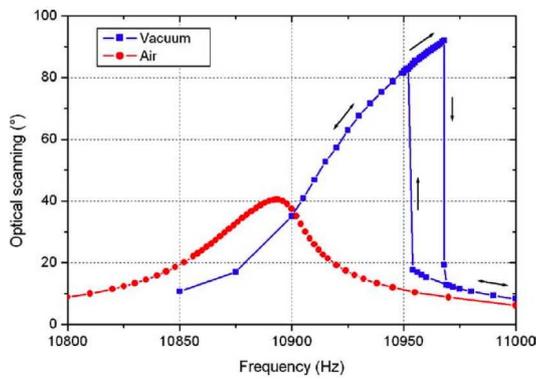


Fig. 16. Measured frequency response for chip B at $28.2 V_{pp}$.

(b) Réponse sous vide

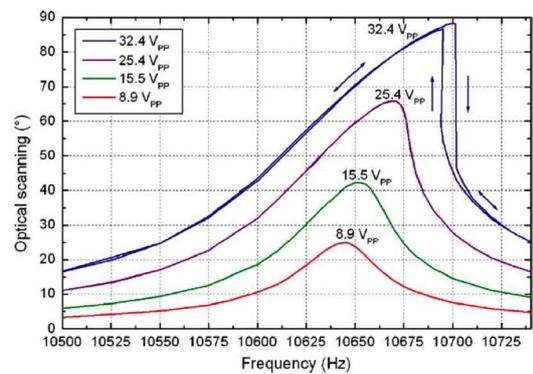


Fig. 12. Measured frequency response for chip A.

(c) Réponse à pression atmosphérique

FIG. 4.3 – Dispositif en torsion présentant une non-linéarité de type Duffing. Figures, photographie et légendes issues de [73]

4.4 Oscillations libres de l'équation de Duffing

Lorsque le second membre de l'équation correspondant au modèle physique (4.2) compense exactement et uniquement la force liée à l'amortissement b_{eff} , à savoir :

$$f_y \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \frac{dy(t)}{dt}, t \right) = b_{eff} \cdot \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.10)$$

on obtient l'équation :

$$m_{eff} \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + k_1 \cdot y(t) + k_3 \cdot y(t)^3 = 0 \quad (4.11)$$

En posant le même changement de variable que dans le cas du régime forcé (4.5), on obtient :

$$\ddot{u}(\tau) + u(\tau) + \varepsilon \cdot \alpha \cdot u^3(\tau) = 0 \quad (4.12)$$

L'équation (4.12) correspond à l'équation de l'*oscillateur* de Duffing. Différentes méthodes [92] permettent d'obtenir la solution approchée suivante de cette équation :

$$u(\tau; \varepsilon) = a_0(\varepsilon) \cdot \cos \phi(\tau; \varepsilon) + \frac{1}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_0^3(\varepsilon) \cdot \cos(3\phi(\tau; \varepsilon)) + O(\varepsilon^2 \tau) \quad (4.13)$$

avec

$$\phi(\tau; \varepsilon) = \phi_0(\varepsilon) + \tau + \frac{3}{8} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_0^2(\varepsilon) \cdot \tau - \frac{15}{256} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a_0^4(\varepsilon) \cdot \tau + O(\varepsilon^3 \tau) \quad (4.14)$$

où les constantes d'intégration $a_0(\varepsilon)$ et $\phi_0(\varepsilon)$ relatives à l'amplitude des oscillations et à la phase instantanée $\phi(\tau; \varepsilon)$ dépendent des conditions initiales $(\dot{u}(\tau), u(\tau))_{\tau=0}$ et de ε . D'après l'équation (4.14), la pulsation libre ω_τ des oscillations libres de l'équation de Duffing est égale à :

$$\omega_\tau = \frac{d}{d\tau} \phi(\tau; \varepsilon) \quad (4.15)$$

$$\Rightarrow \omega_\tau = \omega_\tau(\varepsilon, a_0) = 1 + \frac{3}{8} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_0^2(\varepsilon) - \frac{15}{256} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a_0^4(\varepsilon) + O(\varepsilon^3) \quad (4.16)$$

Cette relation montre que, contrairement à un oscillateur harmonique, la pulsation ω des oscillations libres de l'équation de Duffing dépend de l'amplitude a_0 des oscillations atteintes en régime établi.

La relation entre amplitude et fréquence des oscillations (4.16) a une conséquence importante pour les applications de type oscillateurs, à base de MEMS présentant une non-linéarité de type Duffing¹ : si l'on souhaite que la fréquence $\omega_0 \cdot \omega_\tau / (2 \cdot \pi)$ des oscillations soit stable, l'amplitude $a_0 \cdot Y$ des oscillations doit être contrôlée de manière précise [80].

Par contre, cette relation peut être intéressante pour des applications de type oscillateurs commandés en tension, par exemple. En effet, la présence de cette non-linéarité permet, si l'on dispose d'un moyen pour contrôler l'amplitude $a_0 \cdot X$ des oscillations, de faire varier la fréquence $\omega_0 \cdot \omega_\tau / (2 \cdot \pi)$ des oscillations libres. Cette remarque est mise à profit dans le chapitre 5.

¹ou encore les applications impliquant de tels oscillateurs.

4.5 Remarque sur une des propriétés des oscillateurs à base de résonateur de Duffing

Dans le paragraphe précédent, on a fait implicitement l'hypothèse que l'actionnement du résonateur mécanique est réalisé en imposant une force sinusoïdale déphasée de $\pi/2$ par rapport au déplacement $y(t)$ et dont l'amplitude d'excitation F_y est ajustée pour réaliser un gain de boucle unitaire² (en pratique saturation ou système de contrôle automatique de gain - AGC). En effet, on a considéré que la force d'excitation avait la forme :

$$f_y \left(\frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \frac{dy(t)}{dt}, t \right) = b_{eff} \cdot \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.17)$$

Ce choix semble naturel pour réaliser un oscillateur dans le cas où le résonateur est linéaire (k_3 et $\varepsilon \cdot \alpha$ nuls), puisqu'il s'agit du déphasage pour lequel :

- le gain entre la force d'excitation F_y et l'amplitude d'oscillation $a(\Omega_t)$ est le plus important ;
- la pente de phase $d\gamma(\Omega_t)/d\Omega_t$ est la plus importante.

On montre par contre qu'il existe un point de fonctionnement (amplitude $a(\Omega_\tau)$ et phase $-\gamma(\Omega_\tau)$) plus intéressant dans le cas des oscillateurs à base de résonateur de Duffing [76, 110]. La remarque fondamentale de ces travaux est que les courbes de réponse en amplitude $a(\Omega_\tau)$ et en phase $-\gamma(\Omega_\tau)$ (figure 4.2) présentent des inverses de pente $d\Omega_\tau/d\gamma$ et $d\Omega_\tau/da$ nulles, pour un déphasage imposé de $-2\pi/3$ et une force d'excitation correspondant à la force d'excitation critique (force à partir de laquelle deux solutions stables d'amplitude sont possibles pour le résonateur de Duffing).

On notera également ici que pour un résonateur de Duffing maintenu en auto-oscillation par un retour actif, la solution instable du résonateur devient stable car le déphasage entre la force d'excitation et les oscillations $u(\tau)$ est imposé. On peut donc atteindre chaque point de la courbe de réponse en amplitude (figure 4.2) en ajustant le déphasage de la chaîne de retour [76, 110].

4.6 Conclusion du chapitre 4

Après une introduction aux origines physiques de la non-linéarité de Duffing dans les micro-systèmes, nous avons rappelé une des caractéristiques principales du résonateur et de l'oscillateur de Duffing . Le résonateur de Duffing présente une courbe de réponse en amplitude et en phase fonction de l'amplitude de l'excitation. L'oscillateur de Duffing présente une pulsation de résonance fonction de l'amplitude des oscillations.

²Conditions de Barkhausen réalisées pour un déphasage de $\pi/2$ du résonateur.

Chapitre 5

Principe de détection ou de génération de fréquence à base d'oscillateur de Duffing

Résumé

Ce chapitre propose l'utilisation d'un résonateur de Duffing pour la synthèse de fréquence (VCO) ou pour réaliser un principe de détection par variation de fréquence. Le système proposé est comparable à un oscillateur permettant de réaliser une modulation de fréquence. On notera $p(\tau)$ l'entrée en commande. Dans le cas d'une application capteur, l'entrée $p(\tau)$ est la grandeur à mesurer et la sortie de mesure est la pulsation instantanée des oscillations en sortie de l'oscillateur, figure 5.1.

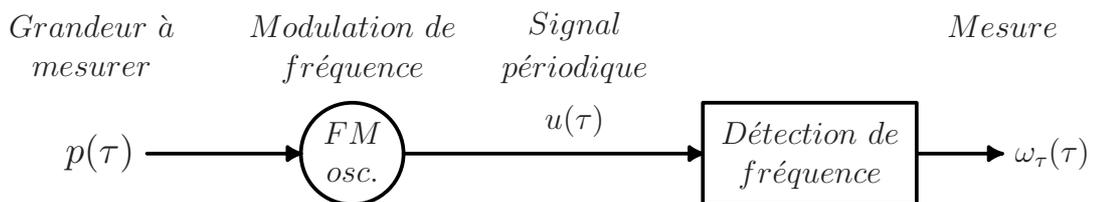


FIG. 5.1 – Mesure par variation de fréquence

La figure 5.2 présente le schéma de principe permettant de réaliser la modulation de fréquence à partir d'un oscillateur de Duffing. La modulation de la force d'auto-excitation $f_u(\tau)$ imposée au résonateur de Duffing - fonction de l'entrée $p(\tau)$ - entraîne la modulation de l'amplitude $a(\tau)$ des oscillations. La modulation de l'amplitude $a(\tau)$ est traduite en une modulation de la pulsation de résonance $\omega_\tau(\tau)$, équation (4.16).

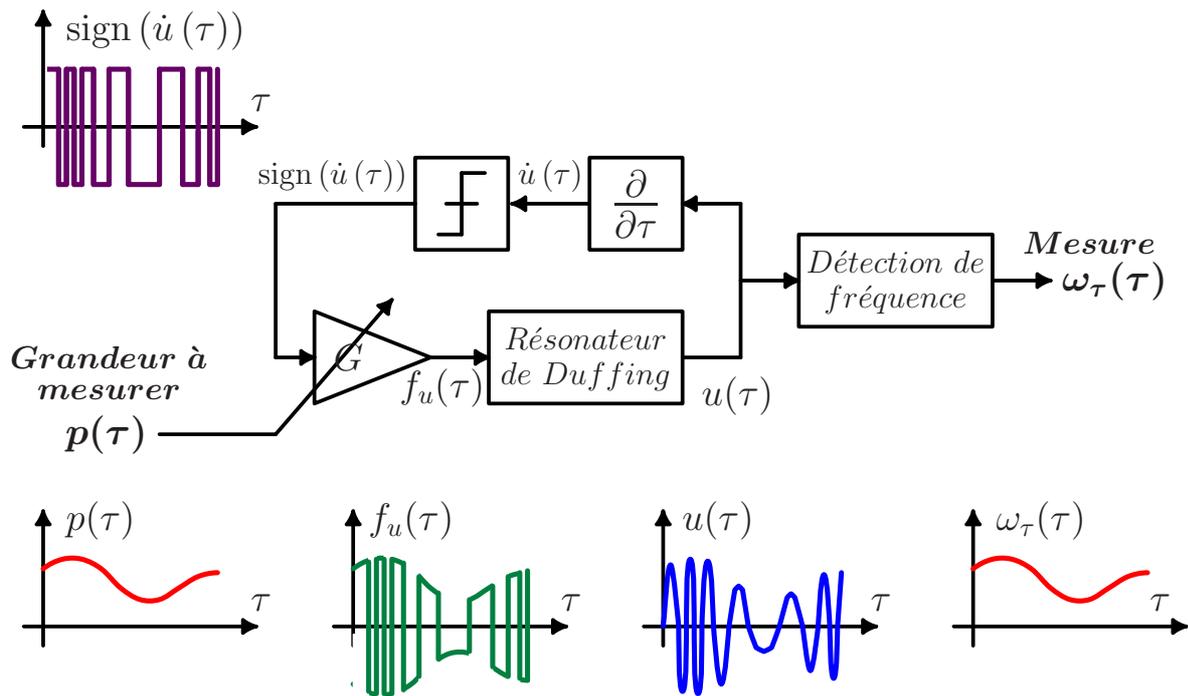


FIG. 5.2 – Principe de mesure par résonateur non linéaire

Le principe est appliqué à la réalisation d'un capteur d'accélération. Dans ce capteur, l'élément mécanique jouant le rôle du résonateur de Duffing est une micro-poutre ou une nano-poutre en grand déplacement. Dans le cadre de la mesure d'accélération, le principe est nouveau : bien que réalisant une modulation de fréquence comme dans le cas des accéléromètres vibrants¹ [59], le principe de fonctionnement est fondamentalement différent.

Le principe décrit dans ce chapitre présente un intérêt certain dans la course à la réduction d'échelle vers le nanomètre. En effet, pouvoir utiliser des nano-structures (nano-poutres et bientôt nano-tubes de carbone) en grands déplacements permettra d'extraire un signal électrique plus important que dans le cas où on se limite aux faibles déplacements pour rester dans un régime linéaire [96].

¹La modulation de fréquence dans les accéléromètres vibrants est obtenue par modulation de la tension N_0 appliquée dans l'axe du résonateur (voir les équations (C.61) et (C.105) de l'annexe C.5).

5.1 Introduction

L'utilisation d'un résonateur mécanique en régime non linéaire a récemment été introduit pour la mesure de champs magnétiques [140, 141]. Dans ces références, l'intensité du champ magnétique imposé vient moduler le coefficient de qualité effectif du résonateur électro-mécanique. L'amplitude $a(\tau)$ des oscillations $u(\tau)$ du résonateur mécanique est alors fonction de la grandeur à mesurer $p(\tau)$: le champ magnétique. La modulation de l'amplitude $a(\tau)$ est traduite en une modulation de la pulsation de résonance $\omega_\tau(\tau)$, équation (4.16). D'après l'auteur des références [140, 141], le système proposé serait la première application pratique d'un résonateur mécanique en régime non linéaire. Nous proposons dans ce chapitre une autre approche (modulation de la force d'auto-excitation) et une autre application pratique (mesure d'accélération).

Les applications du principe proposé ne se limitent pas à la simple mesure d'accélération. Nous traitons donc, dans un premier temps, le principe de base décrit par son équation sans dimension (paragraphe 5.2). Les observations relatives au comportement entrée-sortie du système pourront servir de références qualitatives pour le dimensionnement d'un système particulier. C'est l'approche proposée dans le paragraphe 5.3 qui présente l'adaptation du principe à la mesure d'accélération.

5.2 Présentation du système et modèle approché

Après une description plus précise du principe, nous proposons une solution approchée de l'équation différentielle non linéaire décrivant le système. Elle est obtenue par la méthode des échelles de temps multiples. Par rapport à l'article [141], nous nous intéressons à la fois à l'aspect statique de la réponse du capteur - courbe de réponse statique - et à l'aspect transitoire - dynamique du capteur.

5.2.1 Présentation du système

Le schéma du principe proposé est représenté par la figure 5.3. Comme introduit dans le résumé, le but est d'exploiter la relation entre l'amplitude $a(\tau)$ des oscillations et la pulsation de résonance $\omega_\tau(\tau)$ d'un oscillateur de Duffing, équation (4.16), en autorisant le système à réagir à une entrée extérieure $p(\tau)$ (commande ou grandeur à mesurer). L'amplitude $a(\tau)$ des oscillations $u(\tau)$ du résonateur de Duffing est libre et on réalise un oscillateur en imposant un déphasage de $\pi/2$ entre les oscillations $u(\tau)$ et le signal d'auto-excitation $f_u(\tau)$. Cette valeur de déphasage permet d'atteindre la valeur d'amplitude $a(\tau = \infty)$ maximale de la courbe de réponse en amplitude du résonateur quelque soit l'amplitude du signal d'excitation $f_u(\tau)$, figure 4.2. Le déphasage de $\pi/2$ est obtenu en introduisant une opération de dérivation.

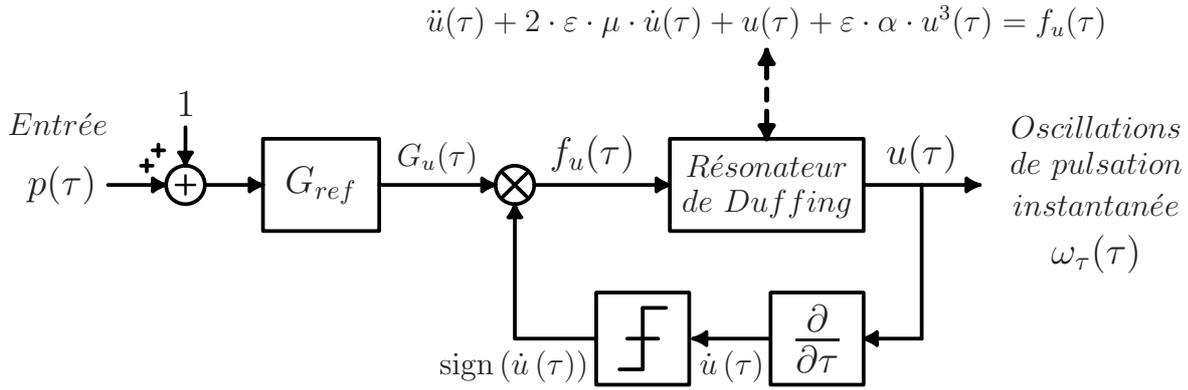


FIG. 5.3 – Schéma de principe du système étudié

On module ensuite l'amplitude $G_u(\tau)$ du signal d'auto-excitation $f_u(\tau)$ en fonction de l'entrée $p(\tau)$. Pour réaliser ceci de manière simple, on introduit un comparateur afin d'obtenir un signal $\text{sign}(\dot{u}(\tau))$ d'amplitude constante à la fréquence libre des oscillations $u(\tau)$. Le signal $\text{sign}(\dot{u}(\tau))$ est ensuite multiplié par le signal $G_u(\tau) = G_{ref} \cdot (1 + p(\tau))$, où G_{ref} est le gain nécessaire pour obtenir des oscillations $u(\tau)$ d'amplitude $a(\tau) = a_{ref}$ pour $p(\tau) = 0$ (l'amplitude a_{ref} des oscillations représente le point de fonctionnement choisi pour l'oscillateur). Le système considéré est décrit par l'équation différentielle non linéaire :

$$\ddot{u}(\tau) + 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \dot{u}(\tau) + u(\tau) + \varepsilon \cdot \alpha \cdot u^3(\tau) = G_u(\tau) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) \quad (5.1)$$

On considère les hypothèses suivantes :

- l'entrée $p(\tau)$ varie lentement devant les oscillations $u(\tau)$.
- les variations de l'entrée $p(\tau)$ sont telles que $|p(\tau)| < 1, \forall \tau$.
- les variations de l'amplitude $a(\tau)$ des oscillations $u(\tau)$ sont telles que $0 < a(\tau) < 1, \forall \tau$.

5.2.2 Modèle approché de la relation entrée-sortie

Bien que l'équation (5.1) présente des similitudes avec les équations du *résonateur* et de l'*oscillateur* de Duffing (équations (4.7) et (4.12)), il est nécessaire de résoudre cette nouvelle équation. L'objectif est d'obtenir un modèle du comportement dynamique du système (figure 5.3) entre l'entrée $p(\tau)$ et la pulsation instantanée $w_\tau(\tau)$ des oscillations $u(\tau)$. On montre dans l'annexe C.3 que la solution approchée de l'équation (5.1) est :

$$u(\tau) = a(\tau) \cdot \cos \phi(\tau) + O(\varepsilon) \quad (5.2)$$

La solution est obtenue en appliquant la méthode des échelles de temps multiples [92], avec comme hypothèse supplémentaire : $\varepsilon \cdot \mu \ll 1$. Les variations de l'amplitude $a(\tau)$ et la pulsation de résonance instantanée $w_\tau(\tau) = \frac{d\phi(\tau)}{d\tau}$ sont décrites par le système d'équation (5.3).

$$\left\{ \begin{array}{l} a(\tau) = a_{ref} + \Delta a(\tau); \\ \frac{d\Delta a(\tau)}{d\tau} \simeq -\varepsilon \cdot \mu \cdot \beta_a \cdot \Delta a(\tau) + \varepsilon \cdot \mu \cdot \beta_p \cdot a_{ref} \cdot p(\tau); \\ \beta_a > \beta_p \simeq 1 \\ \omega_\tau(\tau) = 1 + \frac{3}{8} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a^2(\tau) - \frac{15}{256} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a^4(\tau) + \frac{123}{8192} \cdot \varepsilon^3 \cdot \alpha^3 \cdot a^6(\tau); \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (a) \\ (b) \end{array} \quad (5.3)$$

Les expressions des paramètres constants G_{ref} , β_a et β_p sont fonction des paramètres originaux ε , α , μ et a_{ref} . Elles sont données dans l'annexe C.3, équations (C.52) et (C.54).

La relation entre l'entrée $p(\tau)$ et la sortie d'intérêt ω_τ peut donc être représentée schématiquement par la figure 5.4.

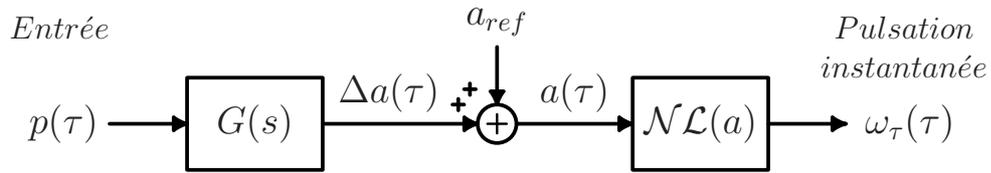


FIG. 5.4 – Relation entrée-sortie

La fonction de transfert $G(s)$ correspond à l'équation (5.3.a) et représente la dynamique du transducteur :

$$G(s) = \frac{\Delta A(s)}{P(s)} = \frac{a_{ref} \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \beta_p}{s + \varepsilon \cdot \mu \cdot \beta_a} \quad (5.4)$$

La fonction non linéaire $\mathcal{NL}(a)$ est la non-linéarité statique en sortie correspondant à l'équation (5.3.b).

On notera que la dynamique du transducteur dépend essentiellement du paramètre $\varepsilon \cdot \mu$, équation (5.4); tandis la non-linéarité statique en sortie, équation (5.3.b), ne dépend que du paramètre $\varepsilon \cdot \alpha$.

La figure 5.5 compare la courbe de réponse statique du système complet en simulation (équation (5.1) et figure 5.3) et celle correspondant au modèle approché - équation (5.3) et figure 5.4. La figure 5.6 compare les réponses transitoires du système et du modèle pour un échelon de consigne sur l'entrée $p(\tau)$. Enfin, la figure 5.7 présente le diagramme de Bode de la fonction de transfert du système complet et celle prévue par le modèle approché. La fonction de transfert du système complet est identifiée en simulation entre l'entrée $p(\tau)$ et la sortie $\omega(\tau)$, figure 5.3. La fonction de transfert du modèle approché correspond à l'équation (5.3) linéarisée autour du point de fonctionnement a_{ref} .

Ces différentes figures montrent que le modèle approché permet de prédire de façon satisfaisante le comportement entrée-sortie du système.

La sensibilité du système est d'autant plus importante que la non-linéarité de Duffing, représentée par le terme $\varepsilon \cdot \alpha$, est grande. Pour une étendue d'entrée $p \in [-0,8 ; 0,8]$ et une non-linéarité $\varepsilon \cdot \alpha = 15$, la pulsation de résonance varie d'environ $\pm 18\%$ autour de sa valeur pour $p = 0$. La non-linéarité de la courbe de réponse statique pourra être traitée par les techniques classiques, annexe C.4.

La dynamique du système (entre l'entrée $p(\tau)$ et la pulsation instantanée $w_\tau(\tau)$ des oscillations $u(\tau)$) est équivalente à un premier ordre de constante de temps $(\varepsilon \cdot \mu \cdot \beta_a)^{-1}$. Ainsi, pour les forts coefficients de qualité du résonateur ($\varepsilon \cdot \mu \ll 1$), le système se comporte comme un presque-intégrateur, soit :

$$\Delta\omega_\tau(\tau) \propto \int p(\tau) \cdot d\tau \quad (5.5)$$

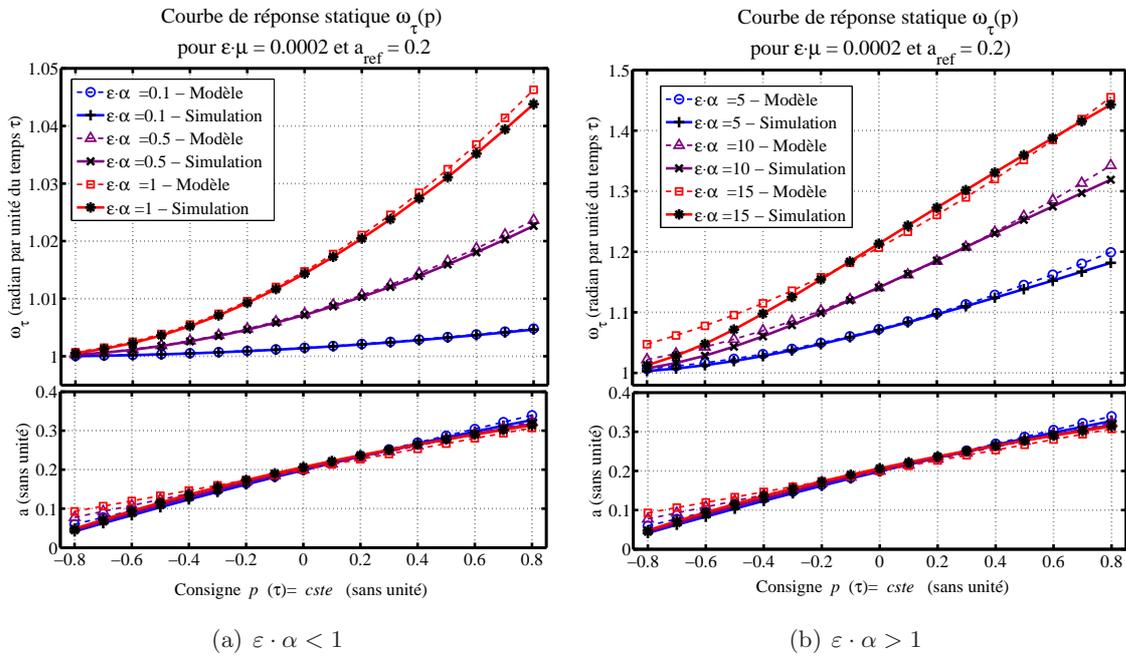


FIG. 5.5 – En haut : Courbe de réponse statique $\omega_\tau(p)$ pour $p \in [-0,8 ; 0,8]$, $a_{ref} = 0,2$, $\varepsilon \cdot \mu = 0,0002$ et différentes valeurs de $\varepsilon \cdot \alpha$. En bas, réponse en amplitude $a(p)$.

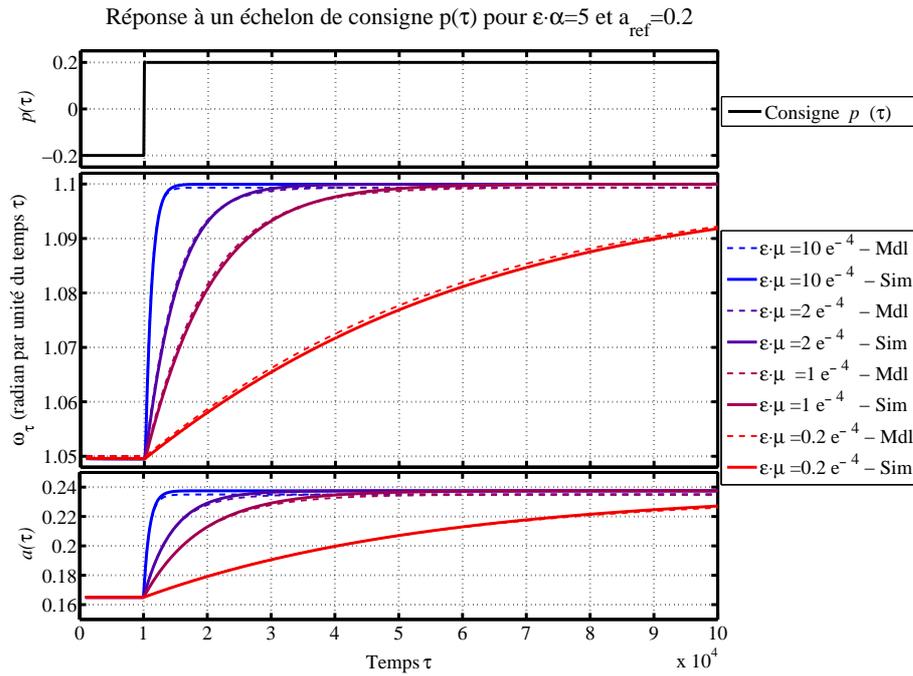


FIG. 5.6 – Réponse à un échelon de consigne $p(\tau)$. Lignes discontinues (*Mdl*) : réponse du modèle. Lignes continues (*Sim*) : réponse du système en simulation.

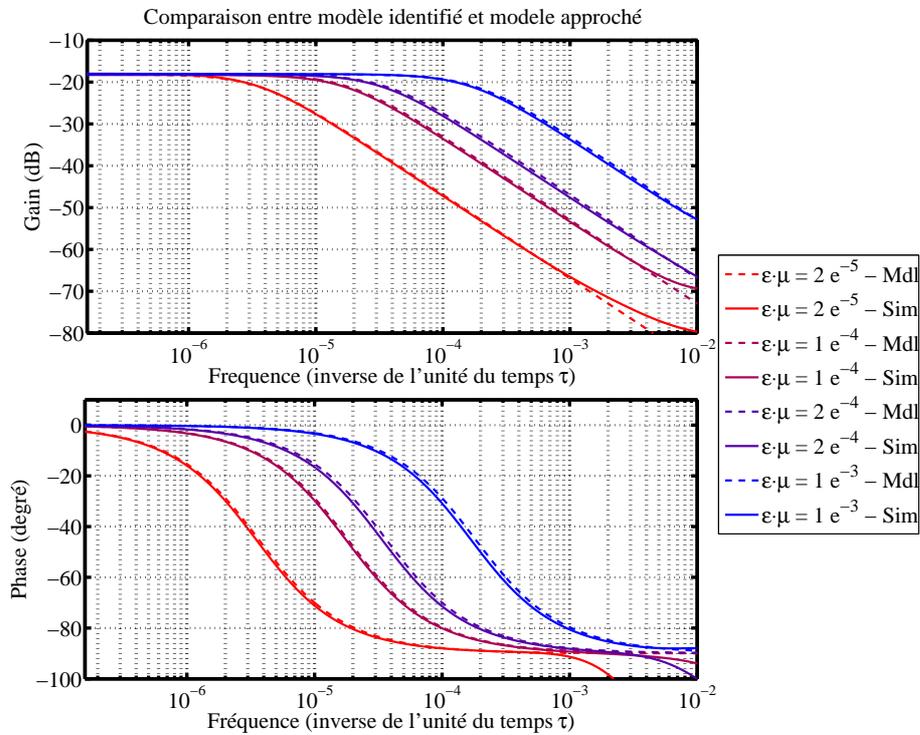


FIG. 5.7 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert entrée-sortie. Lignes discontinues (*Mdl*) : réponse du modèle. Lignes continues (*Sim*) : réponse du système identifiée en simulation.

5.3 Mode de réalisation par micro-résonateur

Ce paragraphe propose une implémentation sous forme de microsystème de l'équation étudiée. Nous l'appliquons ici à la réalisation d'un *accéléromètre-Duffing*. Le principe peut être adapté pour réaliser d'autres types de capteurs ou un oscillateur commandé en tension.

5.3.1 Schéma de principe de l'*accéléromètre-Duffing*

La figure 5.8 présente le schéma de principe de l'*accéléromètre-Duffing* proposé.

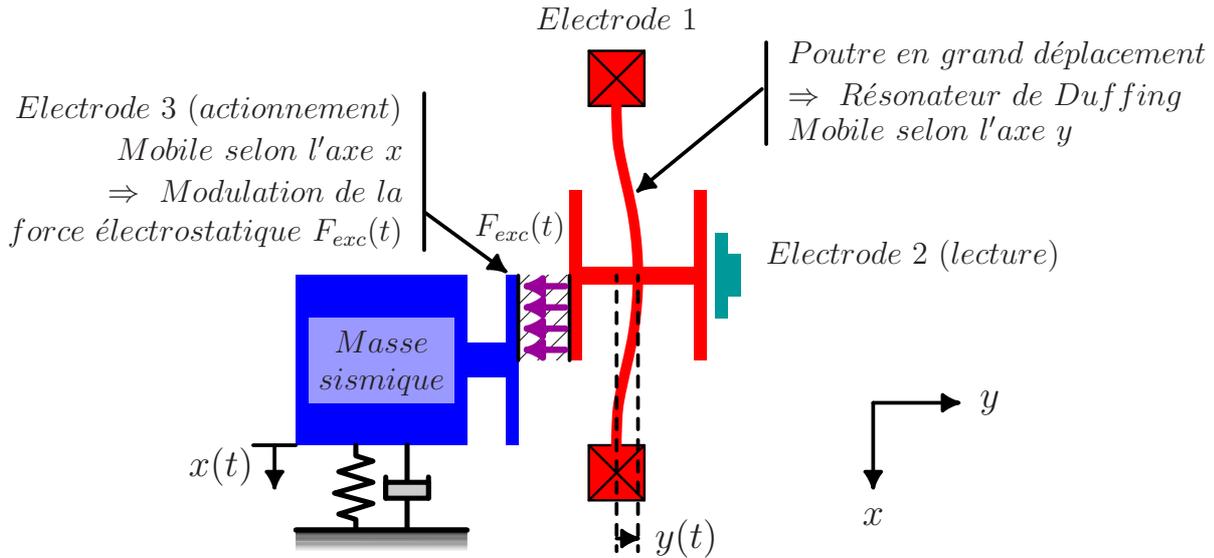


FIG. 5.8 – Schéma de principe de l'*accéléromètre-Duffing*

Le résonateur de Duffing de l'équation (5.1) est une micro-poutre ou nano-poutre en grand déplacement. Cette poutre se déplace selon l'axe des y . Son déplacement $y(t)$ est lu de manière capacitive, en déterminant la variation de la capacité formée entre l'électrode 1 (la poutre, mobile selon y) et l'électrode 2, fixe. L'électrode 3 est solidaire d'une masse sismique. Cette électrode est mobile selon l'axe des x et son déplacement $x(t)$ est proportionnel à l'accélération $\gamma(t)$ subie par la masse sismique selon l'axe des x . Cette électrode est utilisée pour imposer une force électrostatique d'auto-excitation $F_{exc}(t)$ sur la poutre. L'amplitude de cette force est proportionnelle à la surface de recouvrement entre l'électrode 1 (la poutre) et l'électrode 3. Elle est donc proportionnelle au déplacement $x(t)$ de l'électrode 3 et, par suite, à l'accélération $\gamma(t)$ subie par la masse sismique.

Le système de la figure 5.8 est ensuite rebouclé (entre l'électrode 2 et l'électrode 3) par une électronique présentée dans le paragraphe 5.3.3. Ainsi l'amplitude de la force électrostatique d'auto-excitation (signal carré de fréquence élevée) est modulée par l'accélération subie (modulation lente devant la fréquence des créneaux).

Les correspondances entre les signaux de l'équation (5.1) et ceux de l'*accéléromètre-Duffing*, figure 5.8 peuvent être définies comme ceci :

$$p(\tau) \iff x(t) ; \quad f_u(\tau) \iff F_{exc}(t) ; \quad u(\tau) \iff y(t)$$

5.3.2 Structure mécanique proposée

Afin de favoriser le premier mode de flexion du résonateur mécanique, on double la poutre, figure 5.9. De plus, on adopte une structure de type doigts non-interdigités multiples pour l'électrode d'actionnement (électrode 3), afin d'accroître la variation relative de surface de recouvrement lorsque l'électrode 3 se déplace d'une distance $x(t)$. On rend la structure symétrique en choisissant une géométrie identique du coté de la lecture.

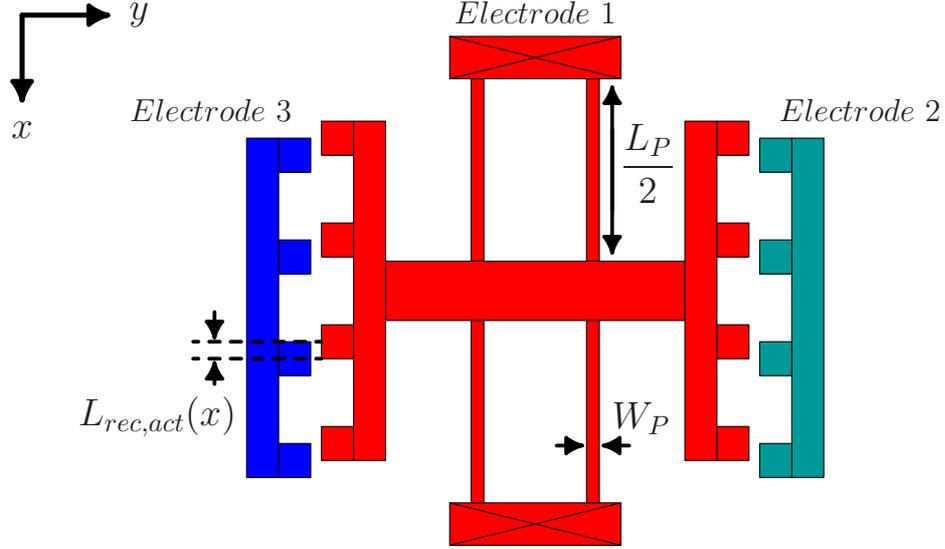


FIG. 5.9 – Structure mécanique

On obtient l'équation de la dynamique du résonateur correspondant au premier mode de flexion, c.f. annexe C, equation (C.114) :

$$m_{eq} \cdot \ddot{y}(t) + b_{eq} \cdot \dot{y}(t) + k_{mec,1} \cdot y(t) + k_{mec,3} \cdot y^3(t) = \frac{4}{3} \cdot F_{exc}(t) \quad (5.6)$$

où m_{eq} est la masse équivalente à un système masse-ressort-amortissement, $k_{mec,1}$ est la contribution linéaire de la force de rappel mécanique associée au premier mode et $k_{mec,3}$ sa contribution non linéaire.

$$m_{eq} = (m_P + \frac{8}{3} \cdot m_E); \quad k_{mec,1} = \frac{(2 \cdot \pi)^4 \cdot E \cdot I}{3 \cdot L_P^3}; \quad k_{mec,3} = \frac{E \cdot S}{3} \cdot \frac{\pi^4}{L_P^3} \quad (5.7)$$

où m_P est la masse totale d'une poutre, m_E est la masse d'une des deux électrodes déportées du résonateur, E désigne le module de Young, $I = W_P^3 \cdot T/12$ désigne le moment d'inertie et $S = W_P \cdot T$ est la section d'une poutre ; L_P , W_P et T étant la longueur, la largeur et l'épaisseur d'une des poutres.

D'autres structures mécaniques sont possibles : variation d'entrefer plutôt que variation de surface pour la modulation de la force d'excitation, structure de résonateur de type diapason.

5.3.3 Schéma de principe pour l'électronique de lecture et d'actionnement

Le schéma de principe de l'électronique permettant de lire le déplacement $y(t)$ et d'appliquer la force électrostatique $F_{exc}(t)$ est présenté sur la figure 5.10. Il est constitué d'un ampli de trans-impédance suivi d'un comparateur.

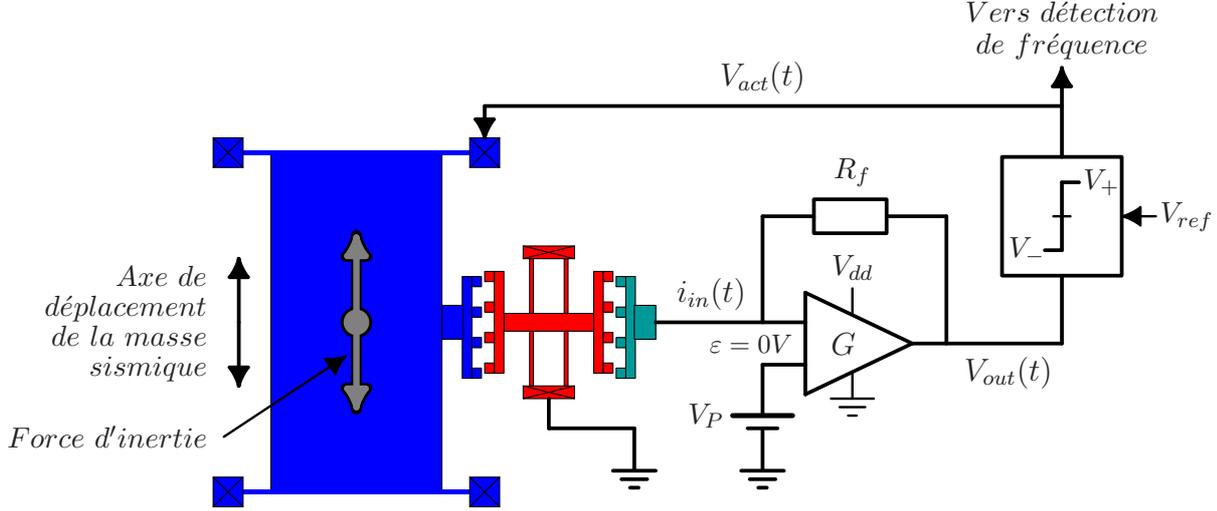


FIG. 5.10 – Schéma de principe pour l'électronique de lecture et d'actionnement

L'électrode 1 (la poutre) est reliée à la masse (0 Volt). L'électrode 2 (électrode fixe) est portée à un potentiel constant $V_{dd}/2$. Le courant $i_{in}(y, t)$ est alors donné par :

$$i_{in}(t) = \frac{dQ_{12}(y, t)}{dt} = \frac{d}{dt}(C_{12}(y, t) \cdot V_{12}) \quad (5.8)$$

$Q_{12}(y, t)$ est la charge de la capacité $C_{12}(y, t)$ à l'instant t , $C_{12}(y, t)$ étant la capacité variable formée entre l'électrode 1 et l'électrode 2. $V_{12} = V_{dd}/2$ est la différence de potentiel constante entre l'électrode 1 et l'électrode 2. Soit :

$$i_{in}(y, t) = \frac{V_{dd}}{2} \cdot \frac{dC_{12}(y, t)}{dt} + \underbrace{\frac{C_{12}(y, t)}{2} \cdot \frac{dV_{dd}}{dt}}_{=0} = \frac{V_{dd}}{2} \cdot \frac{\partial C_{12}(y, t)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t} \quad (5.9)$$

Les électrodes 1 et 2 sont considérées comme planes et de dimensions infinies, d'où :

$$C_{12}(y, t) = \frac{\epsilon_0 \cdot S_{12}}{e_{12} - y(t)}; \quad \frac{\partial C_{12}(y, t)}{\partial y} = \frac{\epsilon_0 \cdot S_{12}}{(e_{12} - y(t))^2} \quad (5.10)$$

où S_{12} et e_{12} sont respectivement la surface en regard et l'entrefer entre l'électrode 1 et l'électrode 2.

En considérant que l'amplificateur de trans-impédance réalise un gain R_{amp} et une polarisation de la sortie à $V_{dd}/2$, la tension $v_{out}(t)$ en sortie de l'amplificateur est définie par :

$$v_{out}(t) = R_{amp} \cdot i_{in}(t) + V_{dd}/2 = \frac{R_{amp} \cdot V_{dd}}{2} \cdot \frac{\partial C_{12}(y, t)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t} + V_{dd}/2 \quad (5.11)$$

On considère un comparateur dont de seuil est fixé à $V_{ref} = V_{dd}/2$ et de tension de sortie $V_+ = V_0/2 - V_{act}$ si $v_{out}(t) > V_{ref}$ et $V_- = V_0/2 + V_{act}$ si $v_{out}(t) < V_{ref}$, avec $V_0 \simeq V_{dd}$ et $V_{act} \leq V_{dd}/2$. Le comparateur fournit donc en sortie une tension d'actionnement $v_{act}(t)$ définie par :

$$v_{act}(t) = \frac{V_0}{2} - V_{act} \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial C_{12}(y, t)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(t)}{\partial t} \right) \quad (5.12)$$

Soit, puisque $\frac{\partial C_{12}(y, t)}{\partial y} > 0, \forall y(t)$, équation (5.10) :

$$v_{act}(t) = \frac{V_0}{2} - V_{act} \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t} \right) \quad (5.13)$$

Le schéma électrique permet donc de réaliser l'opération de dérivation du schéma de principe initial, figure 5.3. La non-linéarité de la lecture capacitive par variation d'entrefer est masquée par le comparateur.

La force d'excitation exercée sur la poutre est égale à la force électrostatique exercée par l'électrode fixe, plus la force électrostatique exercée par l'électrode de la masse sismique. Elle est définie par :

$$F_{exc}(x, y, t) = \frac{1}{2} \cdot (V_3 - V_1)^2 \cdot \frac{\partial C_{13}(x, y, t)}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot (V_2 - V_1)^2 \cdot \frac{\partial C_{12}(y, t)}{\partial y} \quad (5.14)$$

où V_1, V_2 et V_3 sont respectivement les potentiels des électrodes 1, 2 et 3. Ces potentiels sont définis par :

$$V_1 = 0; \quad V_2 = \frac{V_{dd}}{2}; \quad V_3 = v_{act}(t) \quad (5.15)$$

$C_{13}(x, y, t)$ est la capacité entre l'électrode 3 mobile selon l'axe Ox et l'électrode 1, mobile selon l'axe Oy . Soit en considérant la surface en regard $S_{13}(x, t)$ entre les électrodes 1 et 3 :

$$C_{13}(x, y, t) = \frac{\varepsilon_0 \cdot S_{13}(x, t)}{e_{13} + y(t)}; \quad \frac{\partial C_{13}(x, y, t)}{\partial y} = -\frac{\varepsilon_0 \cdot S_{13}(x, t)}{(e_{13} + y(t))^2} \quad (5.16)$$

En développant l'expression de la force électrostatique, équation (5.14), on obtient :

$$F_{exc}(x, y, t) = -\frac{V_0^2 + 4 \cdot V_{act}^2}{8} \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot S_{13}(x, t)}{(e_{13} + y(t))^2} + \frac{V_{dd}^2}{8} \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot S_{12}}{(e_{12} - y(t))^2} + \dots \\ + \frac{V_{act} \cdot V_0}{2} \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t} \right) \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot S_{13}(x, t)}{(e_{13} + y(t))^2} \quad (5.17)$$

On pose :

$$S_{13}(x, y, t) = S_{ref} + \delta S(x, t) \quad \text{avec} \quad S_{ref} = S_{13}(x = 0) \quad \text{et} \quad \delta S(x, t) < S_{ref} \quad (5.18)$$

Pour simplifier les équations, on pose également que par construction :

$$e_{13} = e_{12} = e; \quad (V_0^2 + 4V_{act}^2) \cdot S_{ref} = V_{dd}^2 \cdot S_{12} \quad (5.19)$$

L'expression de la force électrostatique devient :

$$F_{exc}(x, y, t) = \frac{V_{dd}^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot S_{12}}{8} \cdot \left(\frac{1}{(e - y(t))^2} - \frac{1}{(e + y(t))^2} \right) \quad (a)$$

$$- \frac{V_{dd}^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot \delta S(x, t)}{8 \cdot (e + y(t))^2} \quad (b) \quad (5.20)$$

$$+ \frac{V_{act} \cdot V_0}{2} \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t} \right) \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot S_{13}(x, t)}{(e + y(t))^2} \quad (c)$$

Après un développement limité à l'ordre 3 par rapport à y , le premier terme de l'expression ci-dessus (5.20.a) conduit à une force de rappel électrostatique négative et non linéaire [93] que l'on note $F_{elec,sym}(y, t)$:

$$F_{elec,sym}(y, t) = k_{elec,1} \cdot y(t) + k_{elec,3} \cdot y^3(t) + \dots \quad (5.21)$$

$$\text{avec } k_{elec,1} = \frac{V_{dd}^2 \cdot \varepsilon_0 \cdot S_{12}}{2 \cdot e^3}; \quad k_{elec,3} = V_{dd}^2 \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot S_{12}}{e^5} \quad (5.22)$$

Egalement après un développement limité à l'ordre 3, le second terme (5.20.b), noté $F_{elec,asym}(x, y, t)$, prend la forme :

$$F_{elec,asym}(x, y, t) = -\frac{V_{dd}^2 \cdot \varepsilon_0}{8 \cdot e^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{e} \cdot y(t) + \frac{3}{e^2} \cdot y^2(t) - \frac{4}{e^3} \cdot y^3(t) + \dots \right) \cdot \delta S(x, t) \quad (5.23)$$

Puisque le signal $y(t)$ correspond aux oscillations libres de l'oscillateur, les termes d'ordre pair en $y(t)$ de l'expression (5.23) introduisent des composantes d'excitation proches du continu (proportionnelles à $\delta S(x, t)$) et des composantes au double de la fréquence des oscillations. En première approximation, ces termes peuvent être négligés si le facteur de qualité de la structure est grand et si la structure ne présente pas de mode de résonance pour les fréquences égales au double de la fréquence de résonance du premier mode en flexion.

Les termes de l'équation (5.23) d'ordre impair conduisent à une force de rappel électrostatique négative, non linéaire et variable dans le temps. En première approximation et en considérant les expressions de $k_{elec,1}$ et $k_{elec,3}$ définies plus haut, équation (5.22), on a :

$$F_{elec,asym}(y, t) \simeq \frac{1}{2} \cdot (k_{elec,1} \cdot y(t) + k_{elec,3} \cdot y^3(t)) \cdot \delta S(x, t) \quad (5.24)$$

Pour éviter des phénomènes dynamiques non linéaires indésirables, nous choisirons des paramètres géométriques et électriques tels que :

$$k_{elec,1} \ll k_{mec,1}; \quad \text{et} \quad k_{elec,3} \ll k_{mec,3}; \quad (5.25)$$

Sous cette hypothèse, l'expression de la force électrostatique (5.20) se résume à :

$$F_{exc}(t) \simeq \frac{\varepsilon_0 \cdot V_{act} \cdot V_0}{2} \cdot \frac{S_{ref} + \delta S(x, t)}{(e + y(t))^2} \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t} \right) \quad (5.26)$$

En substituant (5.26) dans (5.6), on obtient :

$$m_{eq} \cdot \ddot{y}(t) + b_{eq} \cdot \dot{y}(t) + k_{mec,1} \cdot y(t) + k_{mec,3} \cdot y^3(t) = \frac{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot V_{act} \cdot V_0}{3} \cdot \frac{S_{ref} + \delta S(x, t)}{(e + y(t))^2} \cdot \text{sign} \left(\frac{\partial y(t)}{\partial t} \right)$$

(5.27)

5.3.4 Equation sans dimension

On pose les changements de variable classiquement associés à l'oscillateur de Duffing - chapitre 4, équations (4.5) et (4.6) :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{mec,1}}{m_{eq}}}; \quad \tau = \omega_0 \cdot t; \quad (5.28)$$

$$u(\tau) = \frac{y(\tau)}{e} \quad 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu = \frac{b_{eq}}{m_{eq} \cdot \omega_0} = \frac{1}{Q}; \quad \text{et} \quad \varepsilon \cdot \alpha = \frac{k_{mec,3}}{k_{mec,1}} \cdot e^2 \quad (5.29)$$

On pose également :

$$G_{u,sys}(\tau) = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot V_{act} \cdot V_0}{m_{eq} \cdot e^3 \cdot \omega_0^2} \cdot (S_{ref} + \delta S(x, \tau)) \quad (5.30)$$

On obtient alors l'équation sans dimension :

$$\ddot{u}(\tau) + 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \dot{u}(\tau) + u(\tau) + \varepsilon \cdot u^3(\tau) = G_{u,sys}(\tau) \cdot \frac{\text{sign}(\dot{u}(\tau))}{(1 + u(\tau))^2} \quad (5.31)$$

Du fait de la présence du terme $(1 + u(\tau))^{-2}$, cette équation n'est pas identique à l'équation initiale (5.1). La figure 5.11 montre la différence entre le terme d'excitation à la fréquence de résonance de l'équation initiale ($\text{sign}(\dot{u}(\tau))$) et celui de l'équation modifiée $\left(\frac{\text{sign}(\dot{u}(\tau))}{(1 + u(\tau))^2}\right)$ (5.31).

L'effet du terme correcteur $(1 + u(\tau))^{-2}$ n'est pas abordé de manière théorique dans cette étude. Il pourra faire l'objet d'une poursuite de ces travaux. On considère donc que dans une phase de pré-dimensionnement l'équation initiale est suffisante, à savoir :

$$\ddot{u}(\tau) + 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \dot{u}(\tau) + u(\tau) + \varepsilon \cdot u^3(\tau) = G_{u,sys}(\tau) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) \quad (5.32)$$

5.3.5 Rappel des hypothèses et des choix imposés (par construction)

- La dynamique du système est assimilable à celle du premier mode de flexion d'une poutre encastree-encastree, équation (5.6).

- Pour simplifier les équations, on pose que par construction, équation (5.19) :

$$e_{13} = e_{12} = e \quad (5.33)$$

et

$$(V_0^2 + 4 \cdot V_{act}^2) \cdot S_{ref} = V_{dd}^2 \cdot S_{12} \quad (5.34)$$

- La capacité formée entre les électrodes 1 et 2 peut être décrite par la formule associée aux plans conducteurs infinis, équation (5.10) ; de même pour la capacité formée entre les électrodes 1 et 3, équation (5.16), soit :

$$S_{ref} \gg e^2; \quad \text{et} \quad S_{12} \gg e^2 \quad (5.35)$$

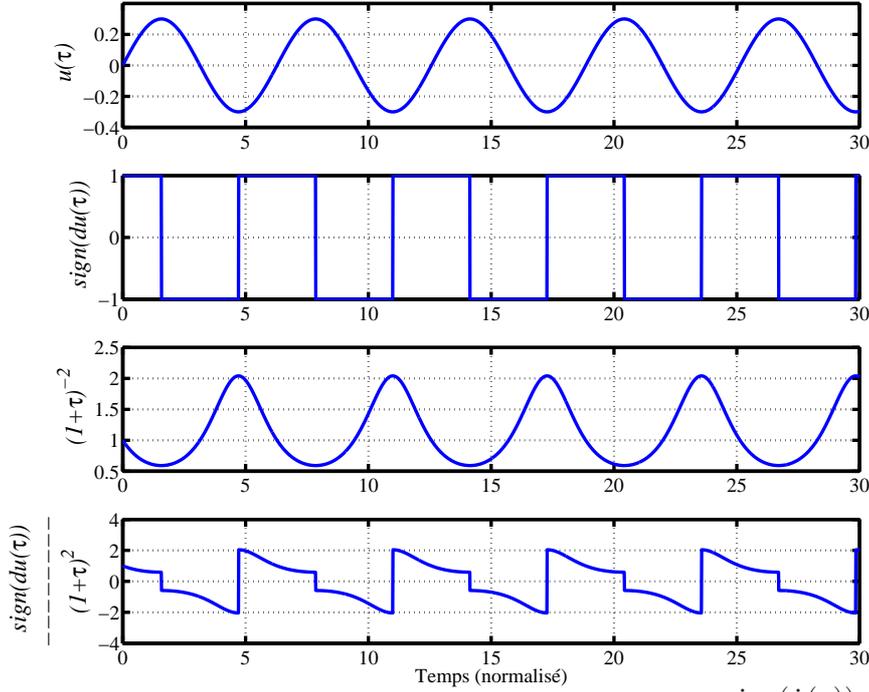


FIG. 5.11 – Formes d'onde des signaux $\text{sign}(\dot{u}(\tau))$, $(1 + u(\tau))^{-2}$ et $\frac{\text{sign}(\dot{u}(\tau))}{(1 + u(\tau))^2}$ pour $u(\tau) = \sin(\tau)$.

- Pour éviter des phénomènes dynamiques non linéaires indésirables, équation (5.25) :

$$k_{elec,1} \ll k_{mec,1} ; \quad \text{et} \quad k_{elec,3} \ll k_{mec,3} ; \quad (5.36)$$

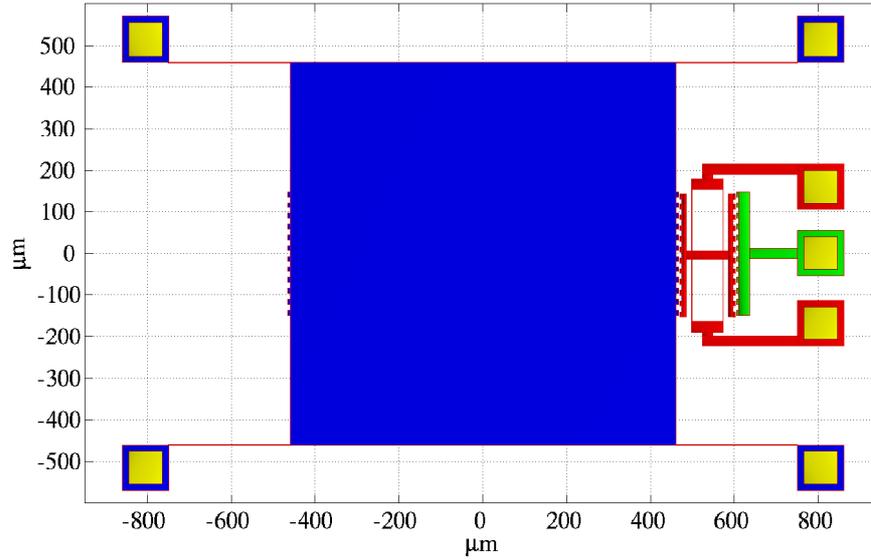
- Enfin, pour que le terme de modulation $G_{u,sys}(\tau)$ (équation (5.30)) du second membre de l'équation du système physique soit équivalent à celui de l'équation sans dimension ($G_{u,sys}(p, \tau) = G_u(p, \tau)$), le choix des paramètres doit vérifier :

$$\begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon_0 \cdot V_{act} \cdot V_0}{m_{eq} \cdot e^3 \cdot \omega_0^2} \cdot S_{ref} = G_{ref} & (a) \\ \frac{x(\tau)}{L_{ref}} = p(\tau); & (b) \end{cases} \quad (5.37)$$

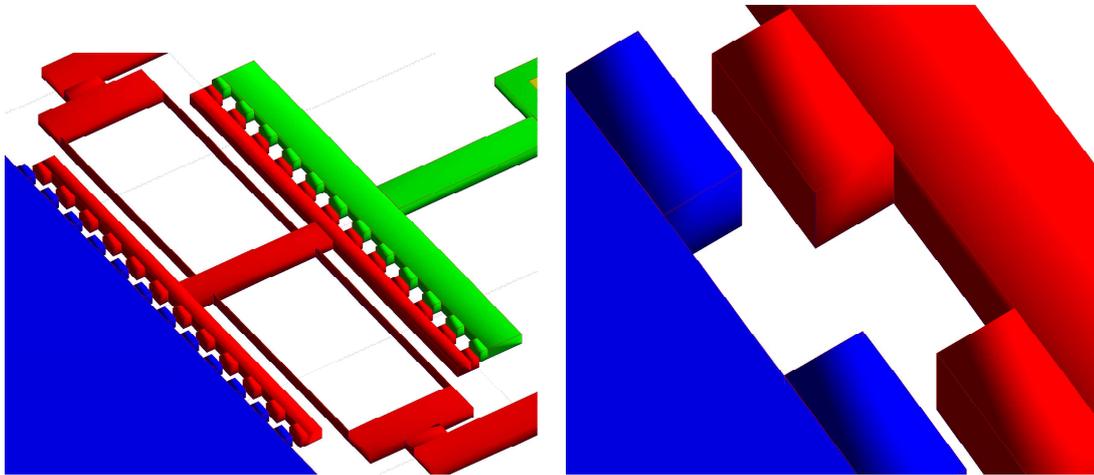
où L_{ref} est la longueur de recouvrement de la capacité C_{13} pour un déplacement de l'électrode mobile $x = 0$

5.3.6 Exemple de choix de paramètres et résultats de simulation

Un exemple de choix de paramètres géométriques et électriques est proposé dans l'annexe C.7.3. La figure 5.12 présente un aperçu de la structure mécanique.



(a) Structure complète



(b) Détail du résonateur

(c) Détail de la surface des doigts en regard

FIG. 5.12 – Aperçu de la proposition de structure mécanique

Les paramètres géométriques et électriques ont été choisis de manière à conduire aux valeurs de paramètre de l'équation sans dimension $\varepsilon \cdot \alpha = 15$ et $\varepsilon \cdot \mu = 2 \cdot 10^{-4}$ pour le résonateur. L'amplitude de référence a_{ref} des oscillations est fixée à 0,2. La variation maximale de l'amplitude vaut $\Delta a_{max} \simeq \pm 0,066$ pour une accélération constante correspondant à la pleine échelle (ici $FS = \pm 10 g$).

Pour ce choix de paramètres, le modèle prévoit une sensibilité d'environ 106 Hz/g , pour les accélérations de fréquence inférieure à $2,46 \text{ Hz}$ (tableau 5.1, figures 5.13 et 5.14). En simulation, on obtient une sensibilité de 144 Hz/g et une fréquence de coupure de $1,75 \text{ Hz}$. La différence entre modèle et simulation est liée à l'effet du coefficient $(1 + u(\tau))^{-2}$, équation (5.31).

	Formule	Modèle	Simulation	Unité
Fréq. de résonance (0 g)	$\omega_\tau(a_{ref}) \cdot \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi}$	9 975	10 200	Hz
Ampl. des oscillations (0 g)	$a_{ref} \cdot e$	600	653	nm
Ampl. des oscillations ($\pm 10 \text{ g}$)	$(a_{ref} \pm \Delta a) \cdot e$	400-800	358-905	nm
Facteur d'échelle	$\frac{\Delta a_{max}}{FS} \cdot \left. \frac{\partial \omega_\tau(a)}{\partial a} \right _{a_{ref}} \cdot \frac{\omega_0}{2 \cdot \pi}$	106	144	Hz/g
Erreur de linéarité		6,8	4,3	%FS
Fréquence de coupure f_c	$\beta_a \cdot \frac{\omega_0}{4 \cdot \pi \cdot Q}$	2,46	1,75	Hz

TAB. 5.1 – Comparaison entre modèle et simulation. Les caractéristiques associées au modèle sont déterminées à partir des équations (5.3), (5.28) et (5.29) avec un facteur de qualité de $Q \simeq 2500$ et des coefficients $\beta_a \simeq 1,5$ et $\beta_p \simeq 1$, annexe C.7.3. Les résultats de simulation (simulations temporelles sous Matlab-Simulink) considèrent l'équation (5.7) pour la dynamique du résonateur, l'expression (5.14) pour la force électrostatique et un modèle *masse-ressort-amortissement* pour la dynamique de la masse sismique - c.f. équation (3.1).

En fonction de l'application visée, la bande passante du capteur (fréquence de coupure f_c) peut être adaptée en réglant le rapport $\frac{\omega_0}{Q}$. On peut soit réaliser un accéléromètre *presque-intégrateur* (application mesure de vitesse hors composantes très basse fréquence), équation (5.5), en augmentant le facteur de qualité Q , soit augmenter la bande passante en augmentant la pulsation de résonance ω_0 du résonateur.

On remarque par ailleurs que la non-linéarité de la transduction *accélération vers variation de fréquence* est plus faible en simulation que celle prévue par le modèle, tableau 5.1 et figure 5.13. Ceci s'observait également sur les courbes de la figure 5.5(b).

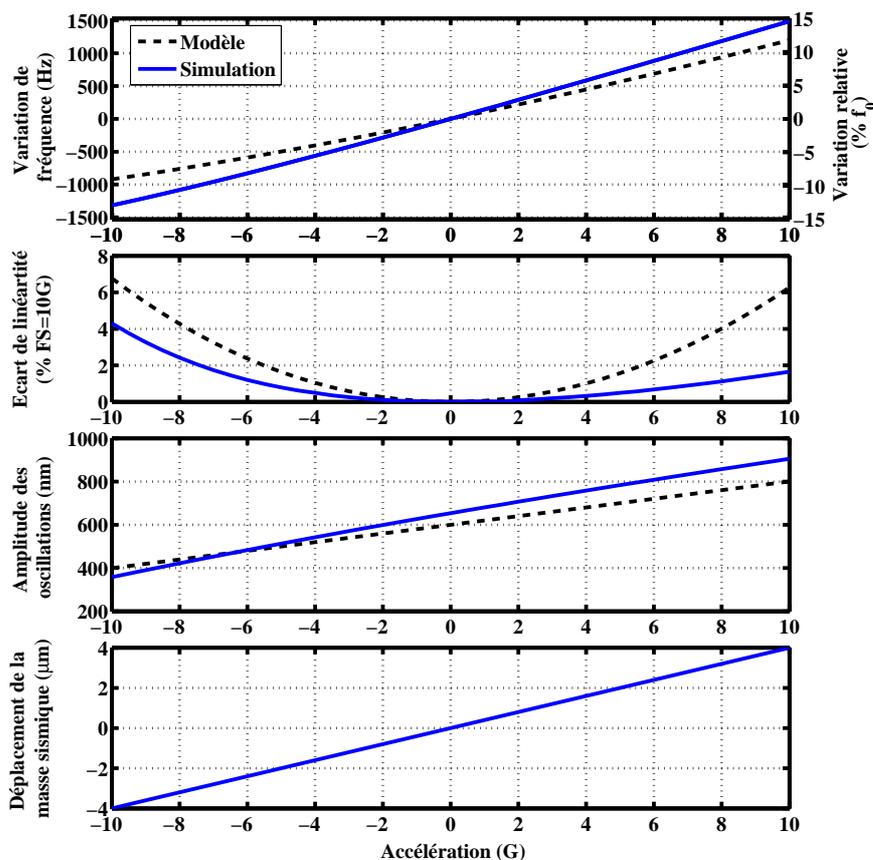
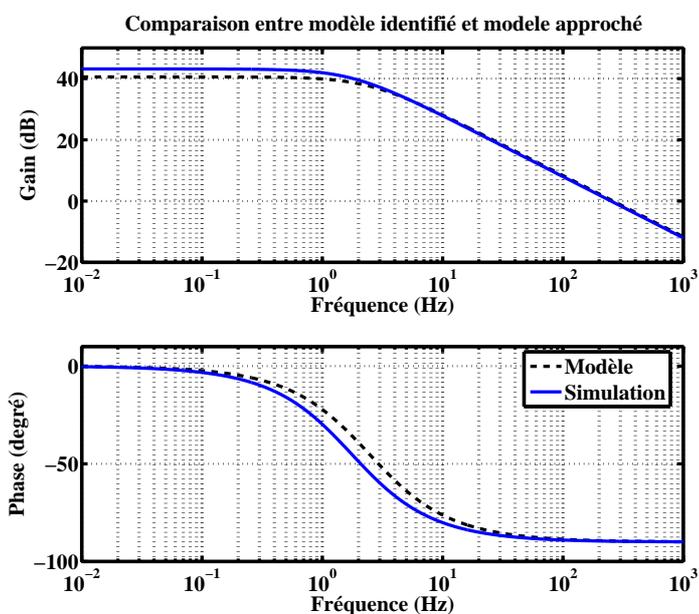


FIG. 5.13 – Courbe de réponse statique : comparaison entre modèle et simulation.

FIG. 5.14 – Diagramme de bode de la fonction de transfert entre l'accélération γ en entrée et la variation de fréquence $\frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} \cdot \omega_\tau$ des oscillations y du résonateur : comparaison entre modèle et simulation.

5.4 Conclusion du chapitre 5

Ce chapitre présente une voie d'exploration pour tirer parti d'un phénomène physique non linéaire fréquemment rencontré dans les micro et nano-résonateurs mécaniques, à savoir la non-linéarité de type Duffing. Alors que cette non-linéarité peut être pénalisante dans certaines applications (oscillateur de référence de temps [80], accéléromètres résonants *VBA*, gyromètres, détection de masse [96]), on propose ici de l'exploiter pour réaliser un principe de détection par modulation de fréquence ou un principe de génération de fréquence.

Une équation différentielle particulière présentant ce type de non-linéarité est proposée afin de réaliser la modulation de fréquence :

$$\ddot{u}(\tau) + 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \dot{u}(\tau) + u(\tau) + \varepsilon \cdot \alpha \cdot u^3(\tau) = G_u(\tau) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) \quad (5.38)$$

$$\text{avec } G_u(\tau) = G_{ref} \cdot (1 + p(\tau)) \quad (5.39)$$

Elle est résolue par la méthode des échelles de temps multiples afin d'obtenir un modèle approché du comportement entrée-sortie $\omega_\tau(\tau)$ en fonction de l'entrée $p(\tau)$. La sensibilité du système est d'autant plus importante que la non-linéarité de Duffing, représentée par le terme $\varepsilon \cdot \alpha$, est grande.

Cette caractéristique est particulièrement intéressante pour les résonateurs mécaniques (*MEMS* - *NEMS*) : à amplitude de déplacement constant, on montre, figure 5.15, que cette non-linéarité est d'autant plus importante que l'épaisseur vibrante est petite. Le principe tire donc profit de la réduction de taille.

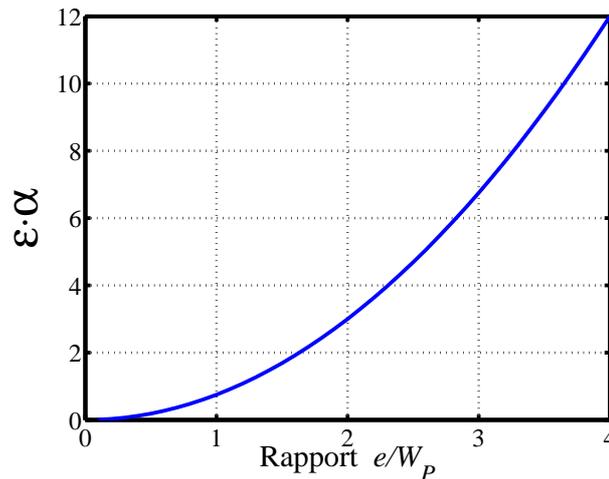


FIG. 5.15 – Effet de la réduction de l'épaisseur vibrante sur la non-linéarité de la force de rappel mécanique. Le paramètre de non-linéarité $\varepsilon \cdot \alpha$ est défini par l'équation (4.5), où les paramètres k_1 et k_3 sont donnés dans l'équation (5.7) et la dimension caractéristique Y correspond à l'entrefer e . La valeur de l'entrefer e détermine l'amplitude maximale possible pour le déplacement y du résonateur mécanique. À entrefer constant, le paramètre de non-linéarité $\varepsilon \cdot \alpha$ est proportionnel au carré de l'inverse de l'épaisseur vibrante W_P .

Pour les forts coefficients de qualité du résonateur ($\varepsilon \cdot \mu \ll 1$), le système se comporte comme un presque-intégrateur, équation (5.5). Il est donc possible de concevoir une structure mécanique réalisant simultanément une conversion en fréquence et une opération de *presque-intégration*.

On propose un mode de réalisation de l'équation traitée à partir d'un micro ou nano-résonateur. Dans le cas d'une mesure inertielle, la mise en œuvre de l'équation peut être représentée par le schéma de la figure 5.16.

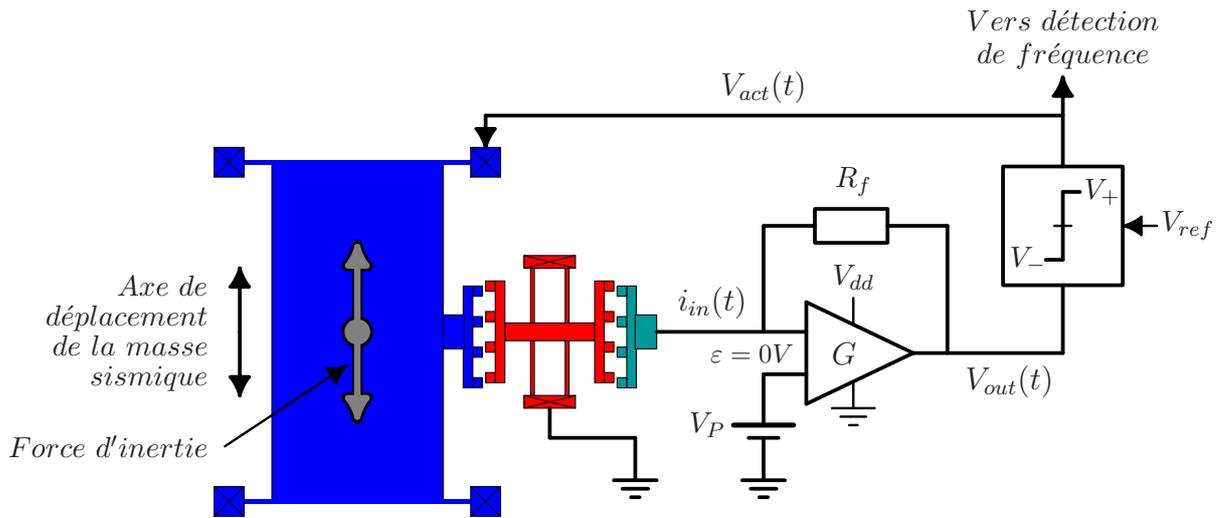


FIG. 5.16 – Mise en œuvre de l'équation dans le cas d'une mesure inertielle

Pour le choix de paramètres proposé, le dispositif présente en simulation une sensibilité de 144 Hz/g pour une fréquence centrale de 10 kHz et une étendue de mesure égale à $\pm 10 \text{ g}$.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés aux non-linéarités dans les microsystèmes en abordant leur conception par une approche *système*.

Dans une première partie, nous nous sommes focalisés sur l'utilisation des outils de l'automatique avec pour objectif principal l'amélioration de la performance en linéarité d'un micro-accéléromètre. Cette amélioration est obtenue en mettant en place un principe de mesure en boucle fermée. Après une formulation générale de la problématique de mesure et d'asservissement des capteurs asservis, nous avons proposé une architecture de correcteur pour le micro-accéléromètre adaptée à l'utilisation des outils retenus : l'identification et la synthèse par placement de pôles ou la synthèse \mathcal{H}_∞ . L'association *méthodologies de l'automatique et architecture adaptée* nous a permis de concevoir un asservissement performant et robuste. L'approche est validée en simulation et sur un premier démonstrateur. On montre également dans cette étude que les performances dynamiques du micro-accéléromètre sont limitées par le compromis performance/stabilité inhérent à tout système bouclé. Cette remarque s'applique éventuellement à d'autres types de capteurs asservis. Pour y remédier, nous proposons l'utilisation des techniques d'observation.

Dans un deuxième temps, nous avons proposé un système de type oscillateur, exploitant une non-linéarité de Duffing. Il peut être utilisé pour réaliser un principe de détection par modulation de fréquence ou pour la génération de fréquence (VCO). Après une description du principe et la présentation de l'équation différentielle non linéaire associée, nous avons utilisé la méthode des échelles de temps multiples afin d'obtenir un modèle de comportement entrée-sortie. La sensibilité du système est d'autant plus importante que la non-linéarité est grande. Cette particularité rend le principe attractif pour les structures mécaniques de dimensions nanométriques. Un exemple de micro-structure permettant de réaliser une mesure d'accélération est proposé.

Perspectives

Nous proposons tout d'abord quelques perspectives concernant le micro-accéléromètre asservi. Il s'agit essentiellement de voies à explorer pour son optimisation. Nous présentons ensuite quelques ouvertures concernant le principe de détection par oscillateur de Duffing.

Micro-accéléromètre asservi

Bien que les performances globales du premier démonstrateur soient supérieures à l'état de l'art, les premières mesures ont montré une différence importante entre le comportement prévu par le modèle de simulation et la réponse du démonstrateur. Les incertitudes inhérentes à la fabrication de la structure mécanique et les phénomènes non modélisés peuvent en partie expliquer cette différence. Nous pensons également que les non-linéarités et les bruits plus importants que prévus réduisent l'efficacité de l'identification en boucle ouverte. Ce point sera prochainement confirmé par une identification en boucle fermée. L'obtention d'un meilleur modèle devrait permettre d'améliorer les performances de l'asservissement et par suite les performances de mesure du capteur actuel.

Puisque le correcteur est programmable, des essais pourront être menés sur le démonstrateur pour des tensions d'actionnement plus importantes. L'augmentation des tensions d'actionnement et/ou de lecture conduit à une augmentation de la raideur électrostatique négative k_{elec} et donc à une réduction de la raideur effective k_{eff} de l'accéléromètre. Dans le cas limite ($k_{elec} \simeq k_{mec} \Rightarrow k_{eff} \simeq 0$), on devrait se rapprocher du comportement du système présenté dans la référence [41], où la raideur mécanique est physiquement nulle puisque la masse sismique (un disque) est en lévitation. Le fonctionnement en limite de stabilité pourrait permettre d'améliorer les performances du capteur ; la figure 5.17 montre quelques résultats préliminaires pour le micro-accéléromètre considéré dans cette thèse. L'analyse des fonctions de sensibilité prévoit en particulier une amélioration de la linéarité et une réduction de l'erreur dynamique. De plus, la contribution du bruit de l'électronique de lecture capacitive sur la sortie de mesure devrait être fortement réduite puisque, d'après l'équation (3.31), elle est proportionnelle à la raideur effective k_{eff} .

Cette figure montre par ailleurs que l'augmentation de l'ordre du correcteur est à envisager pour les prochains circuits.

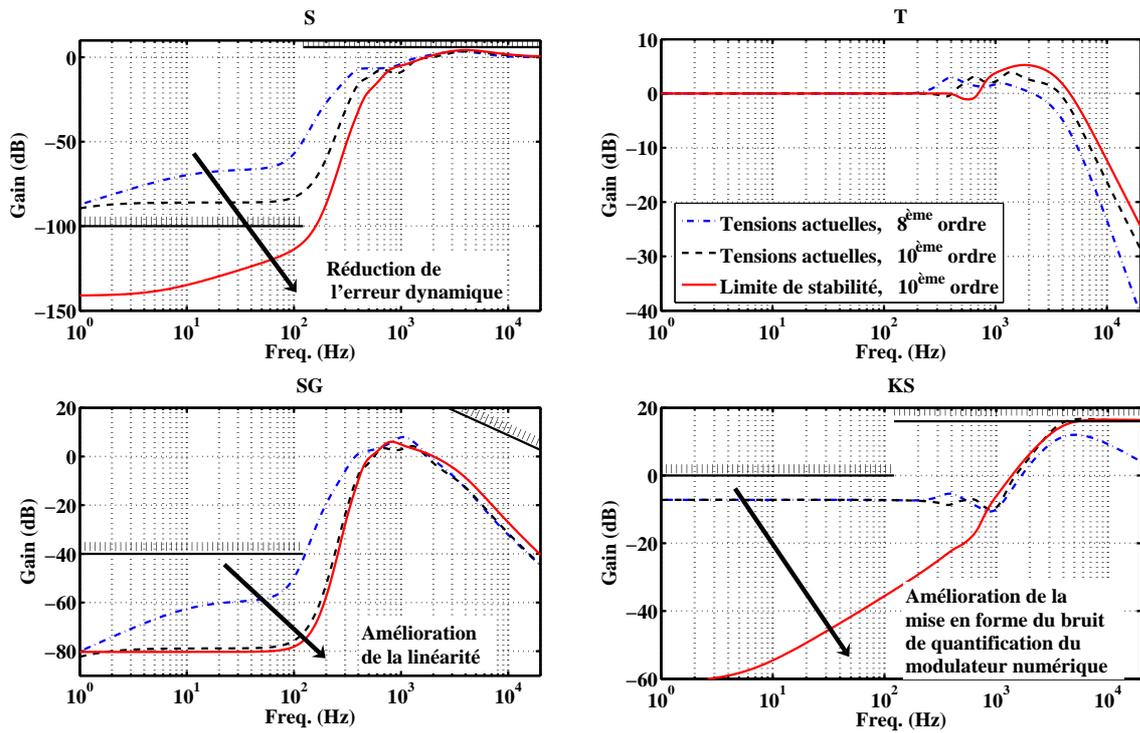


FIG. 5.17 – Fonctionnement en limite de stabilité électro-mécanique et/ou augmentation de l'ordre du correcteur : on considère ici le comportement d'un accéléromètre décrit par l'équation (3.25) avec $V_{lect} = 1,65V$ et $V_{act} = 2,9V$ (courbes discontinues) et $V_{lect} = 1,65V$, $V_{act} = 3,8V$ ($\Rightarrow k_{eff} = 0,015 N \cdot m^{-1}$, courbes continues). Les fonctions de sensibilité en bleu correspondent à la synthèse d'un correcteur du 8^{ème} ordre. Les fonctions de sensibilité en noir et en rouge correspondent à la synthèse d'un correcteur du 10^{ème} ordre. Le correcteur est optimisé pour chacun des trois cas considérés (synthèse \mathcal{H}_∞).

Le deuxième phénomène observé sur le démonstrateur est l'augmentation du niveau de bruit en boucle fermée. Nous avons attribué cette dégradation au mouvement résiduel de la masse sismique dans la bande de fréquence comprise entre la bande de fréquence où l'asservissement est optimal² ($\simeq BP_{mes}$) et la bande passante du capteur (BP_{capt}). Ce mouvement résiduel, dont l'origine peut être le bruit en force introduit par le modulateur $\Sigma\Delta$ d'actionnement ou bien une vibration hors-spécification ($f \geq BP_{mes}$), génère un bruit de repliement dans la bande passante de la mesure si la lecture capacitive présente des termes non-linéaires d'ordre pair.

²Pour le modèle de simulation, l'asservissement est optimal sur $[0; 70 Hz]$ (figure 3.37, fonction de sensibilité S et SG), pour une bande passante BP_{capt} du capteur d'environ $3,4 kHz$ (figure 3.37, fonction de sensibilité T). Pour le démonstrateur, l'asservissement est optimal sur $[0; 25 Hz]$, pour une bande passante BP_{capt} du capteur d'environ $800 Hz$ (figure 3.45).

Si les prochaines mesures confirment ce phénomène, une contrainte supplémentaire sur la fonction de sensibilité SG (\simeq fonction de transfert entre une entrée en force et le déplacement de la masse sismique) devrait permettre une amélioration des performances en bruit. Dans le cas contraire, on pourra envisager la conception d'un boîtier d'encapsulation du *MEMS* réalisant un filtrage mécanique passif des vibrations de fréquences supérieures à la bande passante de rejet de l'asservissement.

Pour la structure mécanique actuelle, le bruit brownien représente une contribution équivalente (ou légèrement inférieure) aux autres contributions en bruit ramenées à l'entrée. Cette contribution devra également être réduite dans les prochaines versions de l'architecture (augmentation de la masse de la masse sismique, réduction des forces dissipatives).

Principe de détection par oscillateur de Duffing

Le principe de détection par oscillateur de Duffing ouvre des perspectives couvrant des domaines plus larges.

Tout d'abord, nous nous sommes limités dans cette étude au modèle à une dimension associé au premier mode de flexion d'une poutre. L'aspect *Duffing* des structures mécaniques pourra être étudié de manière plus précise en incluant, par exemple, les contributions de l'ensemble des modes. Les modèles de comportement dynamique pourront être validés par des mesures sur des micro et nano-structures. On pourra notamment s'intéresser à l'influence de la géométrie et de la réduction de taille.

Les méthodes de résolution et les outils d'analyse des systèmes non linéaires font l'objet de nombreuses recherches et de discussions [170]. Nous avons choisi de résoudre l'équation du système par la méthode des échelles de temps multiples. D'autres méthodes pourraient se montrer plus performantes (obtention plus aisée du modèle ou meilleure validité du modèle).

Concernant l'évaluation du principe proposé, nous avons étudié l'influence des paramètres de l'équation sans dimension sur la courbe de réponse statique et sur la dynamique de la réponse. Cette première étape doit être complétée, notamment par l'évaluation de l'influence d'entrées en bruit dans la boucle de l'oscillateur. On pourra s'appuyer sur les travaux présentés dans les articles [76, 110],[141].

La structure mécanique exposée pour l'application à la mesure d'accélération est une proposition de principe à optimiser ou à repenser (variation d'entrefer plutôt que variation de surface pour la modulation de la force d'excitation, structure de résonateur de type diapason). Le modèle de comportement entrée-sortie est à affiner en fonction de la structure mécanique retenue.

Le principe exposé peut également être appliqué à d'autres types de mesure (voir [141] pour l'application d'un principe similaire pour la mesure de champs magnétiques).

Annexes

Annexe A

Annexe de la partie I

Cette annexe reprend les principaux critères de performance d'une mesure.

A.1 Bande passante d'un capteur et bande utile pour la mesure

La notion de bande passante est primordiale pour caractériser les performances d'un capteur. On distingue, figure A.1 :

- la bande passante du capteur BP_{cap} , à savoir la plage de fréquence pour laquelle un signal en entrée est observé en sortie avec un gain supérieur à une certaine valeur (en général 3 ou 6 dB inférieure au gain maximal de la fonction de transfert) ;
- et la bande passante utile pour la mesure BP_{mes} , à savoir la bande passante sur laquelle les calculs de bruits sont effectués et les erreurs du type erreur dynamique ou erreur de linéarité sont spécifiées.

La bande passante du capteur BP_{cap} est fixée par la conception du capteur et éventuellement par le choix du point de fonctionnement. La bande passante utile pour la mesure BP_{mes} est définie en fonction de l'application, sachant qu'il s'agit d'un compromis à trouver en fonction des différents critères de performances.

Concernant la bande passante du capteur, on peut distinguer deux types de capteurs : les capteurs capables de mesurer les signaux continus (passe-bas) et ceux ne le pouvant pas (passe-bande)

A.2 Définitions relatives aux performances des capteurs

Pour les capteurs incluant le continu et lorsque la grandeur à mesurer varie lentement dans le temps (système passe-bas et bande passante de la mesure très inférieure à la bande passante du capteur), la dynamique du capteur peut être négligée. Il est alors possible de définir des critères de performances statiques.

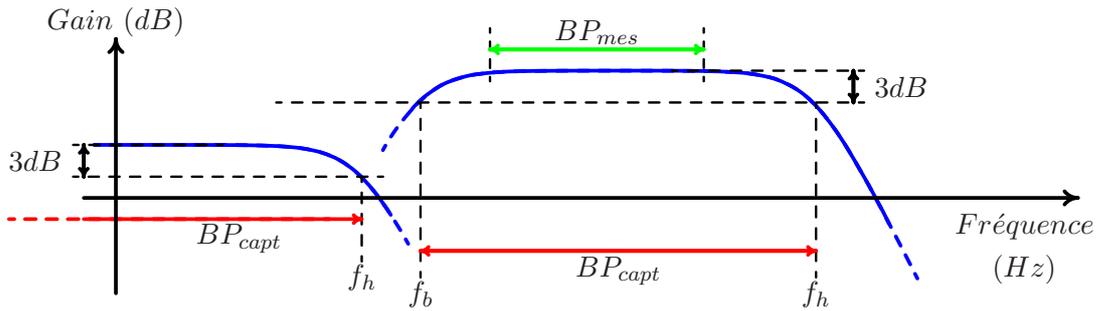


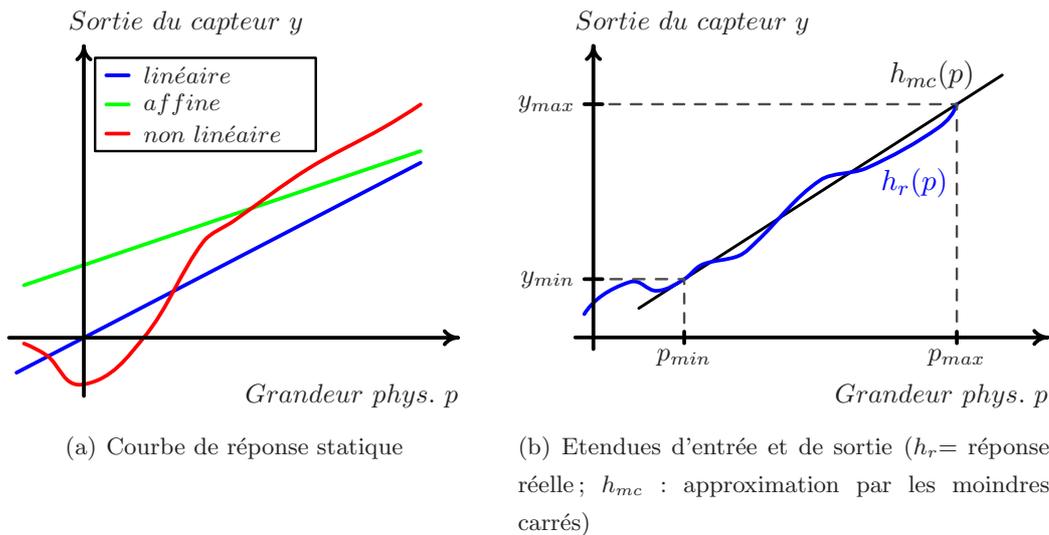
FIG. A.1 – Bande passante BP_{capt} d'un capteur passe-bas (sur la droite) ; Bande passante BP_{capt} du capteur et bande passante BP_{mes} de la mesure pour un capteur passe-bande

Courbe entrée-sortie ou courbe de réponse statique

La plupart de ces critères de performance peuvent être représentés à l'aide de la *courbe de réponse statique* (fig. A.2(a)), caractérisant la valeur moyenne de la sortie du capteur à l'équilibre (lorsque les transitoires sont passés) pour chaque valeur de la grandeur physique en entrée et dans les conditions nominales de fonctionnement du capteur. On notera $h_r(p)$ la fonction permettant de décrire la courbe de réponse statique. On pourra obtenir une description expérimentale de h_r par un ensemble fini de points $(p, h_r(p))$ en réalisant la mesure de la valeur moyenne du signal de sortie $y(t)$ pour un certain nombre de valeurs constantes de l'entrée p :

$$h_r(p) = \lim_{T_{acq} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{acq}} \cdot \int_0^{T_{acq}} y(t) \cdot dt \quad \text{avec } p = cste \quad (\text{A.1})$$

où T_{acq} représente la durée d'acquisition (finie en pratique).



(a) Courbe de réponse statique

(b) Étendues d'entrée et de sortie (h_r = réponse réelle ; h_{mc} : approximation par les moindres carrés)

FIG. A.2 – Courbes de réponse statique et étendues d'entrée et de sortie

La fonction $h_r(p)$ peut être linéaire, affine ou non linéaire (fig. A.2(a)). Puisque celle-ci est utilisée pour estimer la valeur de l'entrée à partir de la sortie mesurée, il faut au moins que la fonction $h_r(p)$ soit injective (sur l'étendue de la mesure).

Etendue de mesure, intervalle de mesure

L'*étendue de mesure* correspond à la plage de variation $[p_{min}, p_{max}]$ de la grandeur physique en entrée (fig. A.2(b)). L'*étendue de mesure nominale* est l'étendue de mesure pour laquelle les spécifications de performances annoncées sont respectées. L'*intervalle de mesure* correspond à la valeur absolue de la différence entre p_{max} et p_{min} .

Etendue de sortie, intervalle de sortie

L'*étendue de sortie* correspond à la plage de variation $[y_{min}, y_{max}]$ de la grandeur de sortie (fig. A.2(b)). L'*intervalle de sortie* correspond à la valeur absolue de la différence entre y_{max} et y_{min} .

Pleine échelle

La pleine échelle de mesure est définie par $FS = \max(p_{min}, p_{max})$

Sensibilité ou facteur d'échelle

On appelle *sensibilité* ou *facteur d'échelle* (*Scale Factor*) $SF(p)$ la pente de la courbe de réponse au point p .

$$SF(p) = \frac{\partial h_r(p)}{\partial p} \quad (\text{A.2})$$

Pour les capteurs conçus pour fournir une sortie proportionnelle à la grandeur à mesurer p , on détermine en général la droite $h_{mc}(p) = SF_{mc} \cdot p + y_0$ de meilleure approximation de h_r dans le sens des moindres carrés (indices mc : moindres carrés et r : réelle). Pour ces capteurs, la valeur estimée \hat{p} de la grandeur p est définie par la relation :

$$\hat{p} = \frac{y - y_0}{SF_{mc}} \quad (\text{A.3})$$

Linéarité

On définit la *linéarité* (ou écart de linéarité) d'un capteur comme l'écart maximal entre la courbe de réponse réelle $h_r(p)$ et son approximation par les moindres carrés $h_{mc}(p)$. Cet écart peut être exprimé en pourcentage de la pleine échelle de sortie, en pourcentage de l'intervalle de sortie [7]...

Dans ce manuscrit, l'écart de linéarité maximal δ_y est exprimé en pourcentage de l'intervalle de sortie correspondant à la meilleure approximation de $h_r(p)$ au sens des moindres carrés :

$$\delta_y = \max_{p \in [p_{min}, p_{max}]} \frac{|h_r(p) - h_{mc}(p)|}{SF_{mc} \cdot (p_{max} - p_{min})} \quad (\text{A.4})$$

On définit également l'écart de linéarité local :

$$\delta_y(p) = \frac{|h_r(p) - h_{mc}(p)|}{SF_{mc} \cdot (p_{max} - p_{min})} \quad (\text{A.5})$$

Un traitement de linéarisation ou de *compensation* de la non-linéarité, consistant à appliquer la fonction h_r^{-1} à y est éventuellement possible, mais il peut être délicat. En effet, trois principaux facteurs viennent limiter la capacité à estimer la grandeur physique en entrée : les dérives, l'hystérésis de la courbe et le bruit sur la mesure.

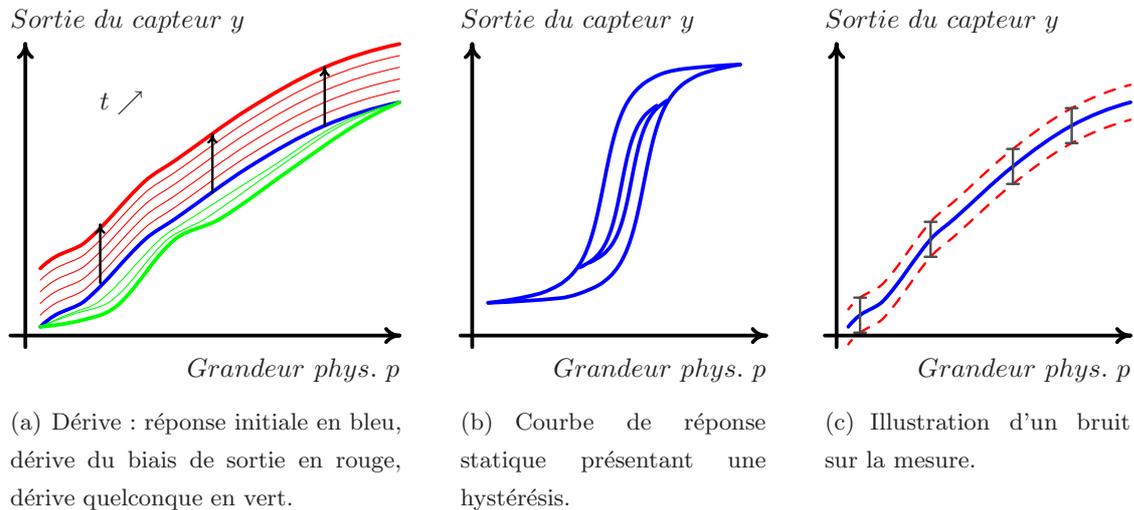


FIG. A.3 – Illustration sur la courbe de réponse statique des facteurs limitant la capacité à estimer une grandeur physique

Dérives

Les dérives sont les modifications de la courbe de réponse statique dans le temps. Ces modifications peuvent être dues à des changements à court terme des conditions de fonctionnement - perturbations n'apparaissant pas sur le modèle de la figure 1.4 : pression, température, humidité... On parle alors de sensibilité extrinsèque. Elles sont éventuellement compensables si l'on dispose d'une mesure et d'un modèle correct de l'influence de ces perturbations. D'autres dérives peuvent être dues à des phénomènes à plus long terme et sont éventuellement irréversibles - vieillissement, fatigue des structures, fluage, oxydation.

La dérive du biais de sortie est un type courant de dérive (fig.A.3(a), en rouge). La courbe de réponse est alors décalée verticalement d'une valeur identique pour toutes les valeurs de l'entrée. D'autres types de dérives peuvent également affecter un des paramètres déterminant la forme de la courbe de réponse (fig.A.3(a), en vert).

Hystérésis

La qualité de la courbe de réponse statique peut également être dégradée par des phénomènes donnant lieu à une hystérésis (utilisation de matériaux magnétiques, par exemple). La courbe est alors multivaluée (fig.A.3(b)).

Bruits sur la mesure

L'utilité de la courbe statique est compromise par la présence d'un bruit se superposant à la mesure - représenté ici par un intervalle d'incertitude sur la courbe de réponse statique (fig.A.3(c)).

Ce bruit peut avoir plusieurs origines. Il peut s'agir d'un bruit en entrée, de même nature que la grandeur physique à mesurer. Par exemple, l'agitation moléculaire crée une force de pression fluctuante sur les surfaces des structures mécaniques assimilable à un bruit et appelée bruit Brownien [37]. Lorsque l'on cherche à estimer une grandeur dont la nature est également une force sur ces structures (pression, accélération), ce bruit peut être modélisé comme un bruit en entrée.

Une partie du bruit observé en sortie est due à l'électronique de détection. Dans le cas des principes de mesure non bouclés, ce bruit peut être représenté par un bruit additif (ou multiplicatif) en sortie.

Suivant l'origine physique, le bruit peut avoir différentes distributions (densité de probabilité) et différentes colorations (répartition spectrale).

Pour une entrée p constante, le bruit en sortie est caractérisé par la valeur efficace (ou valeur quadratique moyenne) $b_{y,eff}(p)$ des fluctuations de la sortie $y(p)$ autour de sa valeur moyenne. Soit, puisque $h_r(p)$ représente la valeur moyenne de $y(p)$:

$$b_{y,eff}(p) = \sqrt{\lim_{T_{acq} \rightarrow \infty} \frac{1}{T_{acq}} \cdot \int_0^{T_{acq}} (y(p, t) - h_r(p))^2 \cdot dt} \quad (\text{A.6})$$

Que le bruit en sortie dépende ou non de la valeur de l'entrée p , on considère, comme valeur efficace caractéristique du bruit, la valeur efficace maximale du bruit sur l'étendue de mesure définie :

$$b_{y,eff}^2 = \max_{p \in [p_{min} \ p_{max}]} (b_{y,eff}^2) \quad (\text{A.7})$$

Pour réduire la valeur efficace du bruit observé en sortie de la chaîne de mesure, un filtrage des composantes du signal de sortie y en dehors de la bande passante d'intérêt est nécessaire. Au final, la valeur efficace du bruit sur la mesure dépendra donc du filtrage opéré en sortie (bande passante utile BP_{mes} choisie et atténuation hors bande).

On préfère en général donner une représentation fréquentielle du bruit en sortie sous forme d'une densité spectrale du bruit en sortie $P_{b_y}(f)$, exprimée en *(unité de la grandeur de sortie)²/Hz*. Ainsi, on laisse à l'utilisateur du capteur le soin de calculer la valeur efficace du bruit en fonction de la bande de mesure BP_{mes} d'intérêt pour l'application qu'il vise.

$$b_{y,eff}^2 = \int_{BP_{mes}} P_{b_y}(f) \cdot df \quad (\text{A.8})$$

Lorsque le bruit en sortie n'est pas blanc, la densité spectrale $P_{b_y}(f)$ dépend de la fréquence f . Dans ce cas, le bruit est en général représenté par une densité spectrale constante de bruit blanc équivalent $P_{bbe,y}$, valable pour des bandes passantes de mesure incluses dans un intervalle de fréquence maximal donné ($BP_{mes} \in [f_{min} ; f_{max}]$). On a alors l'approximation :

$$b_{y,eff}^2 \simeq BP_{mes} \cdot P_{bbe,y} \quad (\text{A.9})$$

Le bruit observé en sortie est en général ramené en entrée, sous la forme d'un bruit équivalent exprimé dans l'unité de la grandeur à mesurer, en divisant la puissance totale ou la densité spectrale du bruit en sortie par le carré de *sensibilité* S .

$$b_{p,eff}^2 = \frac{b_{y,eff}^2}{S^2} ; \quad P_{bbe,p} = \frac{P_{bbe,y}}{S^2} ; \quad (\text{A.10})$$

Seuil de mobilité

Le *seuil de mobilité*¹ est la plus grande variation de la grandeur physique à mesurer p qui ne provoque pas une variation perceptible en sortie. Ce seuil de mobilité peut avoir plusieurs origines. Il est notamment limité par la valeur efficace du bruit (fonction donc de la bande passante de mesure choisie) et le pas de quantification, lorsque la sortie est numérique.

Résolution (numérique)

Dans le cas de capteur avec sortie numérique, la résolution est égale au pas de quantification du signal de sortie. Par suite, on associe souvent au terme *résolution* la plus petite valeur d'une grandeur que l'on peut détecter sur une certaine bande passante (résolution en bruit).

Dynamique de mesure (Dynamic range)

La dynamique de mesure est le rapport entre l'intervalle de mesure et le seuil de mobilité.

¹Parfois appelé résolution (Définition IEEE pour les capteurs inertiels [7]) : La plus grande valeur de la variation minimale de l'entrée (pour les entrées supérieures au niveau de bruit) qui produit une variation en sortie égale à un pourcentage donné (au moins 50%) de la variation en sortie prévue par le facteur d'échelle nominal.

Justesse, fidélité et exactitude

Ces notions statistiques et issues de la métrologie caractérisent la fiabilité de la mesure fournie par un appareil de mesure, ici le “système capteur”. La *fidélité* d’un capteur est caractérisée par l’écart type des valeurs de la sortie, pour un certain nombre de mesures. La *justesse* caractérise l’écart de la valeur moyenne de sortie par rapport à la vraie valeur de la grandeur physique en entrée (valeur de référence : étalon). L’exactitude est la caractéristique qui combine les deux qualités précédentes.

On distingue également la *répétabilité* (mesures répétées sur une courte période de temps avec le même protocole, les mêmes conditions, par le même opérateur et avec le même capteur) et la *reproductibilité* (mesures répétées sur une période de temps longue avec le même protocole et les mêmes conditions, par des opérateurs différents et avec des capteurs différents).

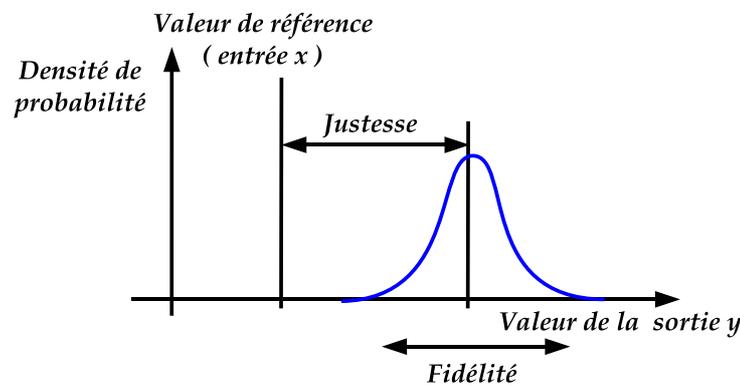


FIG. A.4 – Justesse et fidélité

Performances dynamiques des capteurs

Plusieurs caractéristiques sont liées à la fonction de transfert du capteur :

- le temps de réponse ;
- la réponse en gain sur la bande passante de la mesure : si le gain de la fonction de transfert associée au capteur n’est pas constant sur la bande passante, la *sensibilité* du capteur est fonction de la fréquence de variation de la grandeur en entrée ;
- la réponse en phase du capteur sur la bande passante de la mesure (à laquelle on associe la notion de distorsion de phase linéaire).

Annexe B

Annexes de la partie II

B.1 Compléments d'information sur la modulation $\Sigma\Delta$

Modèle linéaire associé à un comparateur

Le bruit de quantification associé à un comparateur peut être modélisé par un bruit additif $b_{q,\sigma}$, figure B.1(a), de variance σ^2 , equation (B.1). Ce modèle linéaire du comparateur permet d'approcher le comportement d'un modulateur d'un point de vue mise en forme du bruit de quantification.

$$\sigma^2 = \frac{\Delta^2}{12} \quad (\text{B.1})$$

où Δ est le pas de quantification du comparateur (ici $\Delta = 1$).

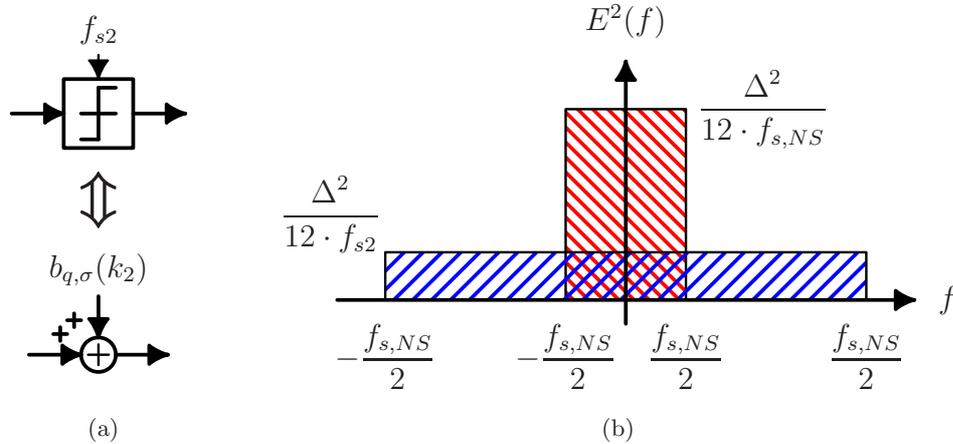


FIG. B.1 – (a) Modèle équivalent linéaire d'un comparateur . (b) Etallement de la densité spectrale de bruit par sur-échantillonnage.

La densité spectrale de puissance $E^2(f)$ du bruit de quantification vaut :

$$E^2(f) = \frac{\sigma^2}{f_{s2}} = \frac{\Delta^2}{12 \cdot f_{s2}} \quad (\text{B.2})$$

La densité spectrale de puissance $E^2(f)$ est donc inversement proportionnelle à la fréquence d'échantillonnage f_{s2} , equation (B.2) et figure B.1(b). Le principe de *sur-échantillonnage*, à savoir choisir une fréquence d'échantillonnage f_{s2} grande devant la fréquence de Nyquist-Shannon $f_{s,NS} = 2 \cdot f_B^1$, permet donc de réduire la puissance du bruit dans la bande de fréquence $[-f_B ; f_B]$, soit la bande passante utile pour la conversion analogique-numérique.

¹ f_B est la fréquence maximale du spectre du signal en entrée.

Modèle linéaire associé à un modulateur $\Sigma\Delta$ du 1^{er} ordre sur 1 bit

En considérant le modèle linéaire du comparateur (fig. B.1(a)) et un intégrateur sous forme échantillonnée, un modulateur $\Sigma\Delta$ du 1^{er} ordre (fig. B.2) peut être représenté par le modèle linéaire équivalent de la figure B.3.

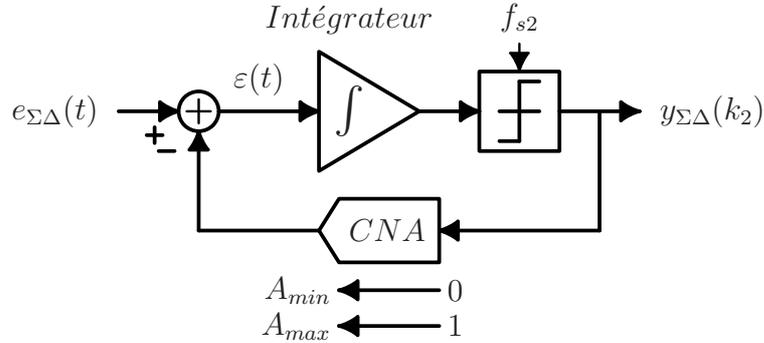
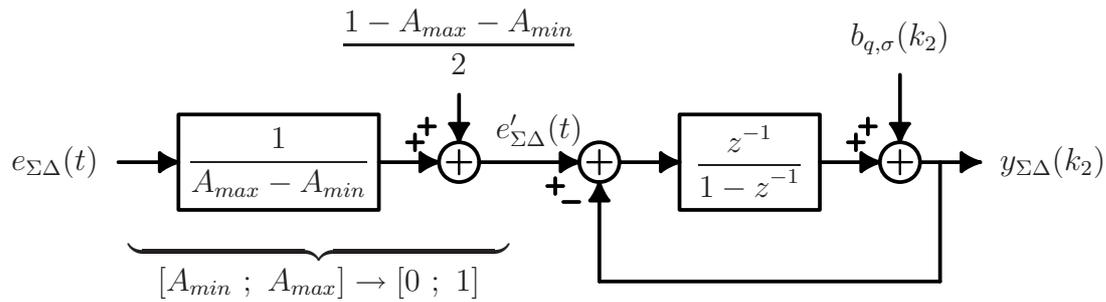

 FIG. B.2 – Modulateur $\Sigma\Delta$ du 1er ordre avec convertisseur A/N et N/A un bit


FIG. B.3 – Modèle linéaire associé à un modulateur du premier ordre

Sur ce schéma, le signal $e_{\Sigma\Delta}(t)$ est transformé en un signal $e'_{\Sigma\Delta}(t)$, afin de prendre en compte l'étendue de sortie $[A_{min}; A_{max}]$ du CNA de retour.

D'après ce modèle linéaire équivalent, la relation liant la sortie $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ à l'entrée $e'_{\Sigma\Delta}$ et au bruit $b_{q,\sigma}(k_2)$ s'écrit :

$$y_{\Sigma\Delta}(k_2) = z^{-1} \cdot e'_{\Sigma\Delta}(t) + (1 - z^{-1}) \cdot b_{q,\sigma}(k_2) \quad (\text{B.3})$$

Le bruit de quantification $b_{q,\sigma}(k_2)$ est donc *mis en forme* par une fonction de transfert passe-haut du premier ordre. Il est repoussé vers les fréquences hautes.

En conclusion, le *sur-échantillonnage* et la *mise en forme* du bruit de quantification $b_{q,\sigma}(k_2)$ permettent de réduire la puissance du bruit dans la bande de fréquence d'intérêt $[-f_B; f_B]$. En pratique, le modulateur du premier ordre avec CAN et CAN 1 bit présente également l'avantage d'être peu sensible aux imperfections possibles des éléments qui le composent - intégrateur, comparateur et réalisation de la soustraction. Il présente par contre un assez mauvais comportement vis-à-vis des signaux $e'_{\Sigma\Delta}(t)$ continus ou faiblement variables (notion de bruit de trame [32, 57], non exposée ici).

Conventions de notation

Les signaux d'entrée $e_{\Sigma\Delta}(t)$ utilisés par la suite seront centrés sur zéro et les sorties des CNA de sortie seront symétriques $([-A_{max} ; A_{max}])$. Par commodité, nous considérerons dorénavant que le signal $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ peut prendre les valeurs -1 et $+1$ (soit $\Delta = 2$) et que l'entrée normalisée vaut $e'_{\Sigma\Delta}(t) = \frac{e_{\Sigma\Delta}(t)}{A_{max}}$, figure B.4.

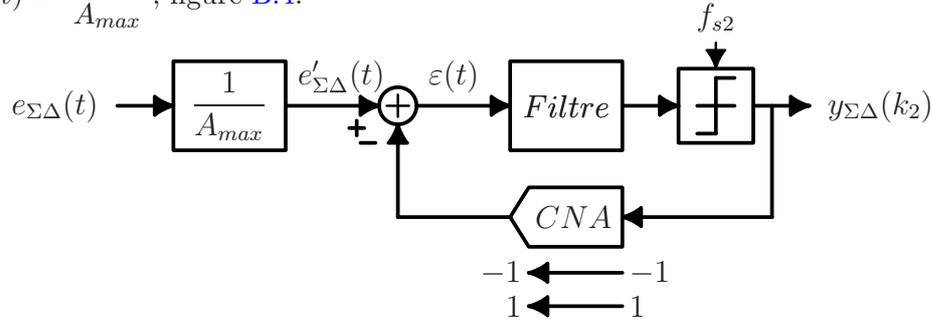
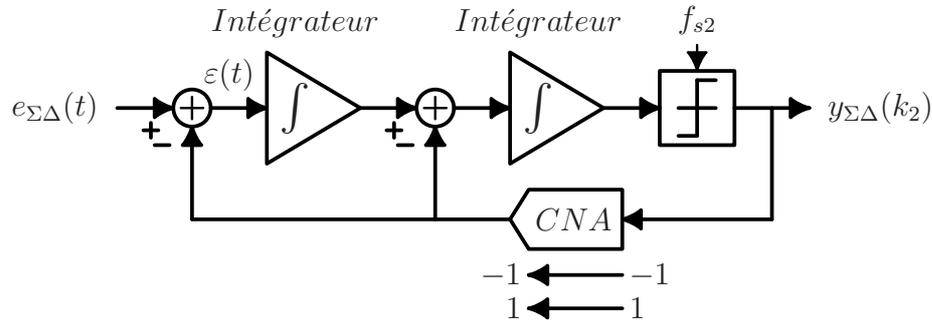


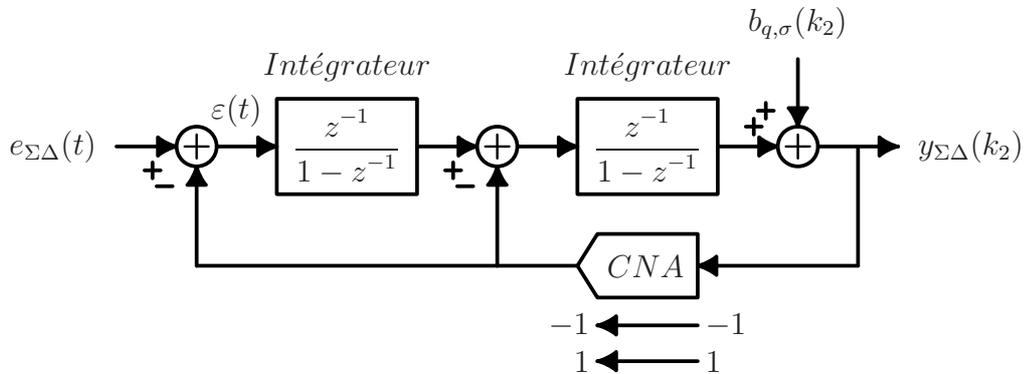
FIG. B.4 – Conventions de notation

Le modulateur $\Sigma\Delta$ du 2ème ordre

Le modulateur $\Sigma\Delta$ du 2^{ème} ordre (fig. B.5(a)) peut être représenté du point de vue mise en forme du bruit de quantification par son modèle équivalent linéaire, figure B.5(b).



(a) Schéma de principe d'un modulateur $\Sigma\Delta$ du deuxième ordre.



(b) Modèle équivalent linéaire associé à un modulateur du deuxième ordre.

FIG. B.5 – (a) Schéma de principe d'un modulateur $\Sigma\Delta$ du 2^{ème} ordre. (b) Modèle équivalent linéaire.

La relation (B.4) relie alors le signal de sortie $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$ à l'entrée $e'_{\Sigma\Delta}$ et au bruit $b_{q,\sigma}(k_2)$.

$$y_{\Sigma\Delta}(k_2) = z^{-1} \cdot e'_{\Sigma\Delta}(k_2) + (1 - z^{-1})^2 \cdot b_{q,\sigma}(k_2) \quad (\text{B.4})$$

Le modulateur du deuxième ordre peut être donc représenté de manière compacte par le schéma de la figure B.6.

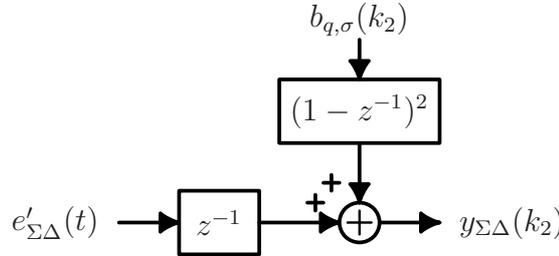


FIG. B.6 – Modèle linéaire associé à un modulateur du deuxième ordre.

Le bruit de quantification $b_{q,\sigma}(k_2)$ est mis en forme par une fonction de transfert passe-haut du deuxième ordre. Il est repoussé vers les fréquences hautes plus efficacement que dans le cas d'un modulateur du premier ordre, figure B.7. De plus, le phénomène de bruit de trame pour les entrées constantes et lentement variables est moins important dans le modulateur $\Sigma\Delta$ du 2ème ordre.

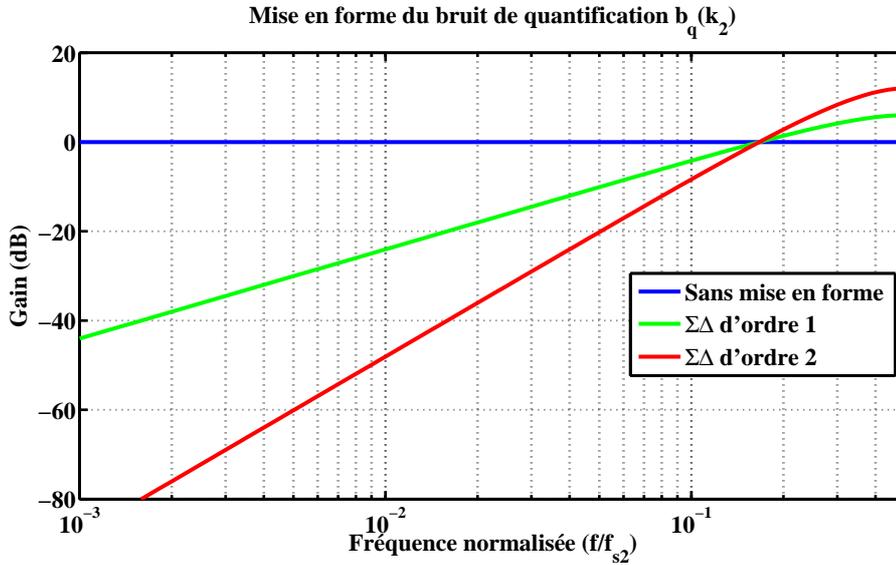


FIG. B.7 – Mise en forme du bruit de quantification des modulateurs $\Sigma\Delta$ du premier ordre et deuxième ordre - Fonctions de transfert entre le bruit de quantification $b_{q,\sigma}(k_2)$ et la sortie $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$, équation (B.3) et (B.4) .

On montre [32] que la puissance du bruit de quantification dans une bande de fréquence $[-fs_1 ; fs_1]$ ramenée à l'entrée pour un modulateur $\Sigma\Delta$ du 2^{ème} ordre est donnée par :

$$P_{Qn}(\Delta, R) = \frac{\Delta^2 \cdot A_{max}^2 \cdot \pi^4}{60 \cdot R^5} \quad [\text{unité de la grandeur d'entrée}]^2 \quad (\text{B.5})$$

où R est le rapport de sur-échantillonnage, $R = f_{s2}/f_{s1}$ - hypothèse : $f_{s2} \gg f_{s1}$ [32] .

Le rapport signal à bruit maximal théorique, à savoir pour une entrée sinusoïdale d'amplitude A_{max} , est donné par :

$$SNR(\Delta, R) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{15 \cdot R^5}{2 \cdot \pi^4} \right) \text{ dB} \quad (\text{B.6})$$

En pratique, le rapport signal à bruit maximal est atteint pour une amplitude du signal d'entrée inférieure à A_{max} - environ 80% [57].

B.2 Calcul des paramètres de l'équation de la dynamique de la masse sismique de l'accéléromètre

Le tableau B.1 rassemble les désignations des paramètres de l'accéléromètre Locadyn et quelques valeurs numériques.

Masse m

La masse considérée pour établir le modèle de la dynamique de la masse sismique est la masse totale suspendue :

$$m = \rho \cdot W_{SI} \cdot \left(L_{MS} \cdot l_{MS} + 2 \cdot n \cdot L_D \cdot l_D \right) \quad (\text{B.7})$$

La masse propre des poutres de suspension est ici négligée.

Raideur k_{mec}

La raideur mécanique considérée dans ce modèle est égale au coefficient correspondant à la composante linéaire de la force de rappel exercée par les poutres de suspension sur la masse sismique, soit :

$$k_{mec} = 4 \cdot E \cdot W_{SI} \cdot \left(\frac{l_P}{L_P} \right)^3 \quad (\text{B.8})$$

On peut retrouver cette expression en considérant le modèle approché (correspondant au premier mode de flexion) de la dynamique d'une poutre encastree-encastree. Ce modèle est rappelé dans l'annexe C.5.

Amortissement b

Le coefficient d'amortissement utilisé dans cette étude correspond au coefficient associé à la force dissipative due à l'écrasement de la couche d'air entre les doigts des électrodes fixes et ceux des peignes mobiles de la masse sismique (*squeezed-film*, [28, 42, 49]), soit :

$$b(x) = \alpha \cdot n \cdot \mu \cdot W_{SI}^3 \cdot (L_D - e_{MS-D}) \cdot \left(\frac{1}{(d_0 + x)^3} + \frac{1}{(d_0 - x)^3} + \frac{1}{(d_1 + x)^3} + \frac{1}{(d_1 - x)^3} \right) \quad (\text{B.9})$$

Le coefficient d'amortissement est une fonction non linéaire du déplacement x de la masse sismique. Pour le calcul des fonctions de transfert approchées, on considère dans cette étude sa valeur pour $x = 0$, soit :

$$b_0 = b(x = 0) = 2 \cdot \alpha \cdot n \cdot \mu \cdot W_{SI}^3 \cdot (L_D - e_{MS-D}) \cdot \left(\frac{1}{d_0^3} + \frac{1}{d_1^3} \right) \quad (\text{B.10})$$

TAB. B.1 – Paramètres du microaccéléromètre

Symboles	Descriptions (Valeur <i>unité</i>)
L_{MS}	Longueur de la masse sismique
l_{MS}	Largeur de la masse sismique
W_{SI}	Epaisseur d'épitaxie
n	Nombre de doigts par électrode (80)
L_D	Longueur des doigts
l_D	Largeur des doigts
L_P	Longueur des poutres de suspension
l_P	Largeur des poutres de suspension
e_{MS-D}	Espacements entre masse et doigts fixes selon Oy
$d_{0,1}$	Gaps au repos ($2,5 \mu m, 10 \mu m$)
V_{lect}	Hauteur des créneaux de tension de lecture ($1,65 V$)
V_{act}	Hauteur des créneaux de tension d'actionnement ($2,9 V$)
m	Masse de la masse sismique ($1,2 \cdot 10^{-7} kg$)
k_{mec}	Raideur mécanique ($\simeq 15,1 N \cdot m^{-1}$)
S	Surface des doigts en regard
b_0	Estimation du coefficient d'amortissement ($\simeq 4,6 \cdot 10^{-4} N \cdot s \cdot m^{-1}$)
K_{XC}	Gain déplacement vers variation de capacité ($\simeq 3 \cdot 10^{-6} F \cdot m^{-1}$)
C_{ref}	Capacité équivalente de retour du modulateur $\Sigma\Delta$ de lecture capacitive ($\simeq 2,610^{-12} F$)
$k_{eff,BO}$	Raideur effective en boucle ouverte ($13,3 N \cdot m^{-1}$)
k_{eff}	Raideur effective en boucle fermée ($4,8 N \cdot m^{-1}$)
K_u	Gain d'actionnement ($9,8 \cdot 10^{-6} N$)
μ_{air}	Coefficient de viscosité dynamique de l'air ($18,3 \cdot 10^{-6} Pa \cdot s$ ou $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$)
ρ	Masse volumique du Silicium ($2320 kg \cdot m^{-3}$)
E	Module de Young du Silicium ($170 GPa$)
α	Coefficient sans dimension lié à la géométrie des électrodes (0,43)

B.3 Circuit de lecture capacitive

B.3.1 Modélisation du circuit de lecture du micro-accéléromètre

En considérant la contribution du doigt de l'électrode E_1 le plus proche (distance d_0 , figure 3.20(a)) et la contribution du doigt de l'électrode E_1 le plus éloigné (distance d_1), la capacité $C_{13}(x)$ formée entre l'électrode E_3 (masse sismique M) et l'électrode fixe E_1 est définie par :

$$C_{13}(x, t) = n \cdot \varepsilon_0 \cdot S \cdot \left(\frac{1}{d_0 - x(t)} + \frac{1}{d_1 + x(t)} \right) \quad (\text{B.11})$$

où n est le nombre de doigts interdigités entre l'électrode E_1 et l'électrode E_3 ; S est la surface en regard entre un doigt de l'électrode E_1 et un doigt de l'électrode E_3 . De même, la capacité $C_{23}(x)$ formée entre l'électrode E_3 et l'électrode fixe E_2 est définie par :

$$C_{23}(x, t) = n \cdot \varepsilon_0 \cdot S \cdot \left(\frac{1}{d_0 + x(t)} + \frac{1}{d_1 - x(t)} \right) \quad (\text{B.12})$$

La fonction globale du circuit de lecture capacitive est représentée schématiquement par la figure B.8. Il réalise la lecture différentielle $\Delta C(x, t) = C_{13}(x, t) - C_{23}(x, t)$ et la conversion analogique-numérique du signal $\Delta C(t)$ en un signal numérique $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$, à savoir le signal de sortie de la mesure en boucle ouverte, figure 3.17. La lecture des capacités est réalisée par un montage à capacités commutées. Le schéma du circuit est disponible via Internet : fichier multimédia (transparents de la présentation) associé à l'article [1] et en libre accès au travers du site *IEEEExplore*. De manière succincte, le principe du fonctionnement est le suivant : les capacités $C_{13}(x, t)$ et $C_{23}(x, t)$ sont chargées tour à tour sous une différence de potentiel V_{lect} pendant un temps égal à une demi-période de la fréquence d'échantillonnage f_{s2} . La quantité de charge différentielle accumulée $\Delta Q(x, t) = \Delta C(x, t) \cdot V_{lect}$ est ensuite "comparée" à une quantité de charge de référence, soit $Q_{ref} = C_{ref} \cdot V_{lect}$, soit $Q_{ref} = -C_{ref} \cdot V_{lect}$ afin de réaliser le modulateur $\Sigma\Delta$ représenté par la figure B.9.

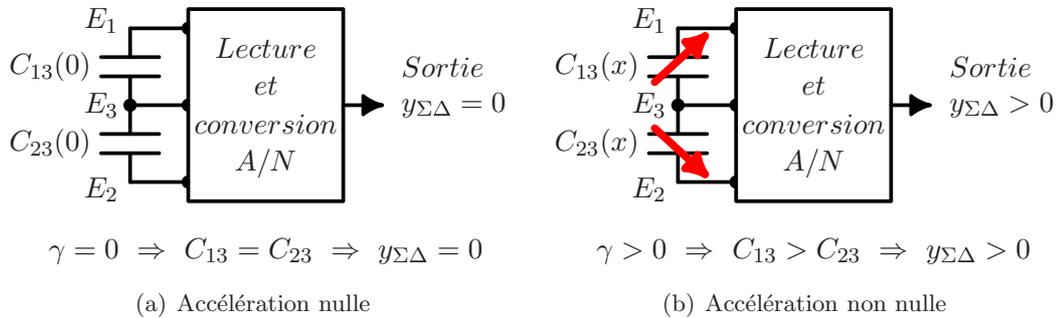


FIG. B.8 – Représentation schématique du circuit électronique de lecture capacitive différentielle et de conversion analogique-numérique (A/N).

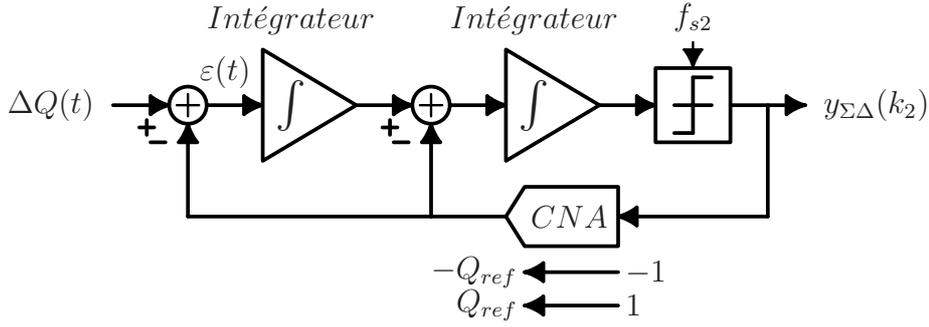


FIG. B.9 – Modulateur $\Sigma\Delta$ en charge

En considérant le gain K_{XC} de la transduction du déplacement x en variation de capacité ($K_{XC} = \left. \frac{\partial \Delta C(x)}{\partial x} \right|_{x=0}$), un bruit $C_n(t)$ représentant le bruit de l'électronique (hors bruit de quantification) ramené en capacité et le modèle équivalent linéaire du modulateur $\Sigma\Delta$ du deuxième ordre (fig. B.6), le circuit de lecture capacitive peut être modélisé par la figure B.10.

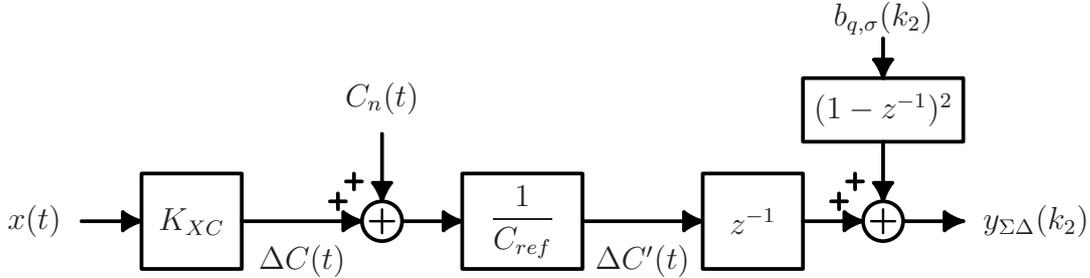


FIG. B.10 – Modélisation semi-physique du circuit de lecture capacitive.

En négligeant le retard d'une période correspondant à la fréquence d'échantillonnage $f_{s2} = 250 \text{ kHz}$ et en notant $y_{\Sigma\Delta}(t)$ le signal en temps continu représentant le signal numérique $y_{\Sigma\Delta}(k_2)$, le circuit de lecture capacitive peut être représenté par l'équation B.13 et la figure B.11.

$$y_{\Sigma\Delta}(t) = K_{XY} \cdot x(t) + b_{yT}(t) \quad (\text{B.13})$$

où le gain $K_{XY} = \frac{K_{XC}}{C_{ref}}$ représente le gain entre le déplacement x (en mètre) de la masse M et la sortie numérique $y_{\Sigma\Delta}$ (sans unité) du circuit de lecture. $G_{b,y}(s)$ représente la fonction de transfert entre un bruit blanc de densité spectrale unitaire $b_{y,n}(t)$ et le bruit $b_{yT}(t)$ total introduit par le circuit de lecture et conversion A/N. Le bruit $b_{yT}(t)$ inclut la contribution en bruit de l'électronique de lecture C_n et la contribution du bruit de quantification $b_{q,\sigma}$ du modulateur $\Sigma\Delta$.

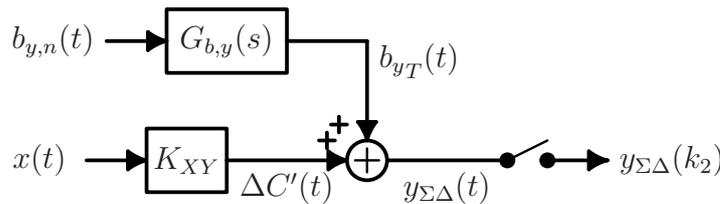


FIG. B.11 – Modélisation haut niveau du circuit de lecture capacitive.

B.3.2 Non-linéarité de la lecture capacitive

La figure B.12 illustre les conséquences de la non-linéarité de la détection capacitive par variation d'entrefer, équations (B.11) et (B.12), sur la linéarité de la relation entrée-sortie $y_{\Sigma\Delta}(x)$. Les définitions d'ordre métrologique utilisées dans ce paragraphe sont rappelées dans l'annexe A. On considère ici le cas nominal pour la lecture capacitive :

$$\begin{aligned} d_0(E_1E_3) &= d_0(E_2E_3) = d_0 \\ d_1(E_1E_3) &= d_1(E_2E_3) = d_1 \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

et le cas d'un défaut d'appariement des capacités de lecture : on considère ici un défaut équivalent à un décalage de la position d'équilibre de la masse sismique d'une distance Δd , soit :

$$\begin{aligned} d_0(E_1E_3) &= d_0 - \Delta d ; & d_0(E_2E_3) &= d_0 + \Delta d ; \\ d_1(E_1E_3) &= d_1 + \Delta d ; & d_1(E_2E_3) &= d_0 - \Delta d . \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Sur les figures, la distance Δd est ici exprimée en pourcentage de d_0 .

La partie supérieure de la figure B.12 présente la courbe de réponse statique $y_{\Sigma\Delta}(x)$ pour une gamme d'entrée $x \in [x_{min} = -d_0/3 ; x_{max} = d_0/3]^2$. La partie inférieure de cette figure trace la déviation $\delta_y(x)$ de la courbe de réponse statique $y_{\Sigma\Delta}(x)$ par rapport à la droite $h_{mc}(x)$ de meilleure approximation de $y_{\Sigma\Delta}(x)$ au sens des moindres carrés. Cette déviation est exprimée en pourcentage de l'intervalle de sortie correspondant à la droite $h_{mc}(x)$.

Dans le cas nominal, l'erreur de linéarité est de $\pm 3\%$ pour une étendue de sortie $[-1 ; 1]$, ce qui correspond à l'étendue de sortie du capteur en boucle ouverte. Ces graphiques montrent également le décalage du zéro de la sortie $y_{\Sigma\Delta}(x)$ et une augmentation de la non-linéarité de la courbe de réponse statique en cas de défaut d'appariement des capacités $C_{13}(x)$ et $C_{23}(x)$.

²La distance $\pm d_0/3$ correspond au déplacement x maximal de la masse sismique en statique avant collage de l'électrode E_3 sur une des électrodes fixes E_1 ou E_2 (*pull-in*) [43].

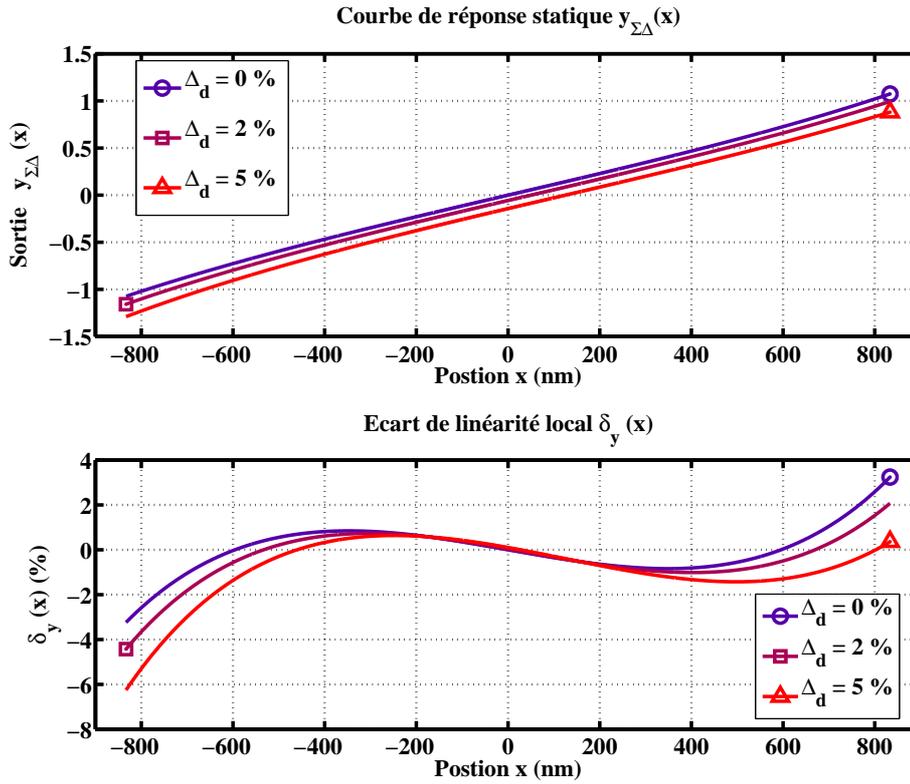


FIG. B.12 – En haut : courbe de réponse statique $y_{\Sigma\Delta}(x)$ pour une gamme d'entrée $x \in [x_{min} = -d_0/3; x_{max} = d_0/3]$. En bas : écart de linéarité local $\delta_y(x)$

B.3.3 Non-linéarités d'ordre pair et repliement dans les basses fréquences

On considère un système d'entrée $x(t)$ et de sortie $y(t)$ (représentant la lecture capacitive), sans dynamique et décrit par son développement limité autour du point $x = 0$, équation (B.16).

$$y(x) = f_{nl}(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i \quad (\text{B.16})$$

On s'intéresse à la génération de composantes dans les basses fréquences ($w < w_0$, où w_0 peut représenter la pulsation correspondant à la limite haute de la bande passante de la mesure) sur le signal de sortie $y(t)$ pour un signal d'entrée $x(t)$ décrit par :

$$x(t) = x_{BF}(t) + x_{HF}(t) \quad (\text{B.17})$$

où $x_{BF}(t)$ représente le signal $x(t)$ pour les fréquences inférieures à $2 \cdot \pi \cdot w_0$ et $x_{HF}(t)$ le signal $x(t)$ pour les fréquences supérieures à $2 \cdot \pi \cdot w_0$. On considère que l'amplitude du signal $x_{BF}(t)$ est suffisamment faible pour ne pas être affectée par la non-linéarité de la relation (B.16). Ceci sera vrai en boucle fermée, si l'asservissement est efficace sur la bande de fréquence $[0; 2 \cdot \pi \cdot w_0]$.

On considère alors qu'en première approximation la sortie $y(t)$ prend la forme :

$$y(t) = K_{XY} \cdot x_{BF}(t) + f_{nl}(x_{HF}(t)) \quad (\text{B.18})$$

et on cherche à déterminer l'impact du second terme sur les composantes de $y(t)$ en basses fréquences. On considère le signal $x_{HF}(t)$ sous la forme :

$$x_{HF}(t) = \sum_{i=0}^N G_i \cdot \cos(w_0 \cdot t + i \cdot \delta w \cdot t + \phi_i) \quad (\text{B.19})$$

où G_i , $w_0 + i \cdot \delta w$ ($\delta w \ll w_0$) et ϕ_i désignent l'amplitude, la pulsation et la phase de la composante spectrale i du signal $x_{HF}(t)$.

Les termes du développement (B.16) de puissances impaires créent des harmoniques et des produits d'intermodulation autour de la pulsation w_0 et autour des multiples impairs de cette pulsation, soit en dehors de la bande passante de la mesure. On s'intéresse donc aux termes d'ordre pair et en particulier à la non-linéarité d'ordre 2. Il s'agit ici d'apprécier au premier ordre et de manière qualitative l'influence de la non-linéarité de la relation (B.16). On calcule donc l'expression de $x_{HF}^2(t)$ pour x_{HF} défini par la relation (B.19). On n'effectuera pas le calcul pour les ordres supérieurs.

$$x_{HF}^2(t) = \left(\sum_{i=0}^N G_i \cdot \cos(w_0 \cdot t + i \cdot \delta w \cdot t + \phi_i) \right)^2 \quad (\text{B.20})$$

En développant l'expression et en regroupant les termes de pulsations égales, on obtient :

$$x_{HF}^2(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N G_i^2 + \sum_{k=0}^N \left(\sum_{l=0}^N G_l \cdot G_{l+k} \cdot \cos(k \cdot \delta w \cdot t - \phi_l + \phi_k) \right) + T.H.F \quad (\text{B.21})$$

où $T.H.F$ représente l'ensemble des autres termes du développement. Ces termes correspondent à des composantes de pulsations supérieures ou égales à $2 \cdot w_0$. L'expression de $T.H.F$ ne nous intéresse donc pas.

Le premier terme de l'équation (B.21) représente une composante continue, fonction de la puissance du signal $x_{HF}(t)$. Il correspond à l'erreur de rectification associée à la non-linéarité de la lecture capacitive. Le second terme de l'équation (B.21) représente un repliement des composantes hautes fréquences du signal $x(t)$ dans la bande passante de la mesure.

En conclusion, le signal $y_{BF}(t)$ correspondant aux composantes du signal $y(t)$ de pulsations inférieures à w_0 s'écrit sous la forme :

$$y(t)_{BF} = K_{XY} \cdot x_{BF}(t) + b_r(x_{HF}, t) \quad (\text{B.22})$$

où le bruit de repliement $b_r(x_{HF}, t)$ dépend du signal x_{HF} .

B.4 Expression approchée de la force électrostatique de contre-réaction

Dans cette étude, le mode d'actionnement est de type tout ou rien, à savoir :

- soit une différence de potentiel V_{act} entre l'électrode E_3 (masse sismique) et l'électrode fixe E_1 et une différence de potentiel nulle entre les électrodes E_3 et $E_2 \Rightarrow$ actionnement vers les x positifs ;
- soit une différence de potentiel V_{act} entre l'électrode E_3 (masse sismique) et l'électrode fixe E_2 et une différence de potentiel nulle entre les électrodes E_3 et $E_1 \Rightarrow$ actionnement vers les x négatifs ;

Le choix de l'actionnement vers les x positifs ou vers les x négatifs est fixé par la valeur de la sortie du modulateur numérique $\Sigma\Delta_{Act}$, figure 3.17. Pour réaliser simultanément la lecture et l'actionnement, le circuit superpose les différences de potentiel nécessaires à la lecture et celles nécessaires à l'actionnement (multiplexage en tension), figure B.13.

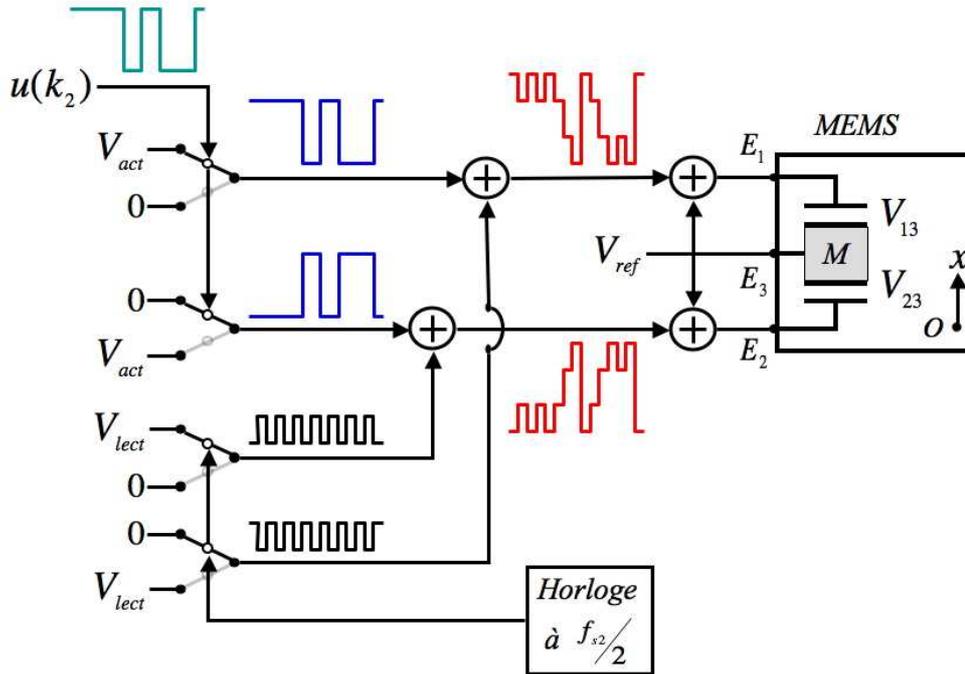


FIG. B.13 – Allure temporelle des différences de potentiel V_{13} et V_{23} appliquées pour réaliser simultanément la lecture capacitive et l'actionnement électrostatique.

En considérant la configuration des peignes interdigités du micro-accéléromètre (figure 3.20(a)), la force électrostatique de contre-réaction $F_{cr}(t)$ appliquée sur la masse sismique est décrite par :

$$F_{cr}(t) = \frac{n \cdot \epsilon_0 \cdot S}{2} \cdot \left(\frac{(V_{13}(t))^2}{(d_0 - x)^2} - \frac{(V_{13}(t))^2}{(d_1 + x)^2} - \frac{(V_{23}(t))^2}{(d_0 + x)^2} + \frac{(V_{23}(t))^2}{(d_1 - x)^2} \right) \quad (\text{B.23})$$

avec $V_{13}(t)$ et $V_{23}(t)$ définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{13}(t) = V_{Act} + V_{Lect} \text{ et } V_{23}(t) = 0 \quad , \text{ si } u(k_2) = 1 \text{ et } \frac{k_2}{2 \cdot fs2} < t < \frac{k_2 + 1}{2 \cdot fs2} \\ V_{13}(t) = V_{Act} \quad \text{ et } \quad V_{23}(t) = V_{Lect} \quad , \text{ si } u(k_2) = 1 \text{ et } \frac{k_2 + 1}{2 \cdot fs2} < t < \frac{k_2 + 2}{2 \cdot fs2} \\ V_{13}(t) = V_{Lect} \quad \text{ et } \quad V_{23}(t) = V_{Act} \quad , \text{ si } u(k_2) = -1 \text{ et } \frac{k_2}{2 \cdot fs2} < t < \frac{k_2 + 1}{2 \cdot fs2} \\ V_{13}(t) = 0 \quad \text{ et } V_{23}(t) = V_{Act} + V_{Lect} \quad , \text{ si } u(k_2) = -1 \text{ et } \frac{k_2 + 1}{2 \cdot fs2} < t < \frac{k_2 + 2}{2 \cdot fs2} \end{array} \right. \quad (\text{B.24})$$

Afin de proposer un modèle approché de l'action de la force électrostatique $F_{cr}(t)$ sur la masse sismique M , on considère la valeur moyenne \bar{u} de la commande $u(k_2)$ sur un nombre n_T d'échantillons, équation B.26, ainsi que l'expression $\overline{F_{cr}}$ de la valeur moyenne de la force électrostatique appliquée sur la masse sismique M , équation B.25.

$$\overline{F_{cr}(t)} = \frac{fs2}{n_T} \cdot \int_{T_0}^{T_0 + \frac{n_T}{fs2}} F_{cr}(t) \cdot dt \quad (\text{B.25})$$

$$\overline{u(k_2)} = \frac{fs2}{n_T} \cdot \int_{T_0}^{T_0 + \frac{n_T}{fs2}} u(k_2) \cdot dt \quad (\text{B.26})$$

On note $\bar{u} = \overline{u(k_2)}$, $\overline{F_{cr}} = \overline{F_{cr}(t)}$ et T_{s2} , la période $\frac{1}{fs2}$. Soit un grand nombre n_T de périodes T_{s2} , tel que les variations de la position x et de la commande $\overline{u(k_2)}$ soient négligeables entre un instant t_0 et l'instant $t_0 + n_T \cdot T_{s2}$. La sortie du modulateur $\Sigma\Delta$ numérique $u(k_2)$ sera en moyenne composée de n_1 échantillons à l'état haut et n_2 échantillons à l'état bas, avec n_1 et n_2 tels que $\overline{u(k_2)} \in [-1; 1]$:

$$\bar{u} = \frac{n_1 - n_2}{n_T} \quad ; \quad n_1 + n_2 = n_T \quad (\text{B.27})$$

On développe le calcul de la force de contre-réaction moyenne $\overline{F_{cr}(t)}$, équation B.25, à l'aide des expressions (B.23) et (B.24). L'expression de $\overline{F_{cr}(t)}$ résultante est fonction des paramètres n_1 et n_2 . On fait apparaître la commande moyenne \bar{u} en notant que, d'après l'équation (B.27) :

$$n_1 = \frac{1 + \bar{u}}{2} \cdot n_T \quad ; \quad n_2 = \frac{1 - \bar{u}}{2} \cdot n_T \quad (\text{B.28})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \overline{F_{cr}} &= \frac{1 + \bar{u}}{2} \cdot \frac{n \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{4} \cdot \left(\left(V_{Act}^2 + (V_{Act} + V_{Lect})^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{(d_0 - x)^2} - \frac{1}{(d_1 + x)^2} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. - V_{Lect}^2 \cdot \left(\frac{1}{(d_0 + x)^2} - \frac{1}{(d_1 - x)^2} \right) \right) + \dots \\ &- \frac{(1 - \bar{u})}{2} \cdot \left(\frac{n \cdot \varepsilon_0 \cdot S}{4} \cdot \left(V_{Act}^2 + (V_{Act} + V_{Lect})^2 \right) \cdot \left(\frac{1}{(d_0 + x)^2} - \frac{1}{(d_1 - x)^2} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. - \frac{n \cdot \varepsilon_0 \cdot S \cdot V_{Lect}^2}{4} \cdot \left(\frac{1}{(d_0 - x)^2} - \frac{1}{(d_1 + x)^2} \right) \right) \end{aligned}$$

On peut donner une expression approchée de la force électrostatique en calculant son développement limité par la formule de Taylor autour du point $(x = x_0 = 0, \bar{u} = \bar{u}_0)$. Soit $dx = x - x_0$ et $d\bar{u} = \bar{u} - \bar{u}_0$. On obtient :

$$\overline{F_{cr}}(\bar{u}, x) = \frac{n \cdot \varepsilon_0}{2} \cdot S \cdot \frac{d_1^2 - d_0^2}{d_0^2 \cdot d_1^2} \cdot (V_{Act}^2 + V_{Lect} \cdot V_{Act}) \cdot \bar{u} + \dots \quad (\text{B.29})$$

$$+ n \cdot \varepsilon_0 \cdot S \cdot \frac{d_0^3 + d_1^3}{d_0^3 \cdot d_1^3} \cdot (V_{Act}^2 + V_{Lect} \cdot V_{Act} + V_r^2) \cdot x + \dots \quad (\text{B.30})$$

$$+ \frac{3 \cdot n \cdot \varepsilon_0}{2} \cdot S \cdot \frac{d_1^4 - d_0^4}{d_0^4 \cdot d_1^4} \cdot (V_{Act}^2 + V_{Lect} \cdot V_{Act}) \cdot \bar{u}_0 \cdot x^2 + o(\|dx, d\bar{u}\|^2) + \dots \quad (\text{B.31})$$

Soit, au premier ordre (et $u_0 = 0$) :

$$\overline{F_{cr}}(\bar{u}, x, t) = -k_{elec} \cdot x(t) + K_u \cdot \bar{u}(t) \quad (\text{B.32})$$

$$\text{où } k_{elec} = -n \cdot \varepsilon_0 \cdot S \cdot \frac{d_0^3 + d_1^3}{d_0^3 \cdot d_1^3} \cdot (V_{Act}^2 + V_{Lect} \cdot V_{Act} + V_{Lect}^2) \quad (\text{B.33})$$

$$\text{et } K_u = \frac{n \cdot \varepsilon_0}{2} \cdot S \cdot \frac{d_1^2 - d_0^2}{d_0^2 \cdot d_1^2} \cdot (V_{Act}^2 + V_{Lect} \cdot V_{Act}) \quad (\text{B.34})$$

Sur le schéma de la figure 3.17, le signal le plus à même de représenter la valeur moyenne du signal d'actionnement \bar{u} est le signal $u'(k_2)$. On note $u'(t)$ le signal analogique équivalent au signal $u'(k_2)$. En ré-introduisant le temps t et le bruit de quantification associé au modulateur numérique $\Sigma\Delta_{Act}$ dans la relation (B.32), on peut proposer un modèle linéaire approché de l'actionnement par force électrostatique, équation (B.35) et figure B.14.

$$F_{cr}(u', x, t) \simeq K_u \cdot u'(t) - k_{elec,1} \cdot x(t) + K_u \cdot b_u(t) \quad (\text{B.35})$$

où $b_u(t)$ est le bruit observé en sortie du modulateur numérique $\Sigma\Delta_{Act}$ de la figure 3.17.

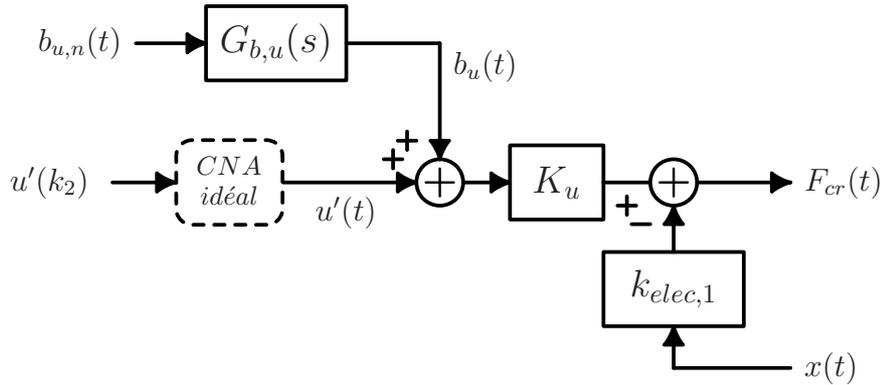


FIG. B.14 – Modèle linéaire approché de l'actionnement du micro-accéléromètre

La fonction de transfert $G_{b,u}(s)$ représente l'équivalent sous forme continue de la fonction de transfert entre un bruit blanc $b_{u,n}(t)$ de densité spectrale unitaire et le bruit $b_u(t)$.

B.5 Modélisation des incertitudes paramétriques

La procédure d'identification permet d'obtenir le modèle nécessaire à la synthèse d'un correcteur stable et performant :

- pour un couple (capteur+circuit) donné ;
- et dans les conditions expérimentales de l'identification (pression, température, tensions d'actionnement et de lecture).

Sans autre considération, on n'assure donc que la stabilité nominale et la performance nominale pour un unique couple "capteur+circuit". Pour assurer la robustesse en stabilité et en performance pour l'ensemble des accéléromètres fabriqués et quelles que soient les conditions de fonctionnement (dans les gammes spécifiées), il faut disposer d'une représentation des incertitudes sur le modèle.

Une fois le capteur et le circuit fabriqués, on pourra déterminer, par identification sur un certain nombre de couples capteur+circuit, l'ensemble non-structuré correspondant aux incertitudes liées aux dispersions technologiques, dans les conditions nominales de fonctionnement.

Les incertitudes paramétriques liées aux changements des conditions de fonctionnement (pression, température) peuvent, elles, être modélisées par un ensemble structuré de la forme :

$$\mathfrak{G} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{G}_{F \rightarrow x}(s) = \frac{1}{m \cdot s^2 + b(T, p) \cdot s + k_{eff}(T, p)} \quad ; \\ b_{min} \leq b(T, p) \leq b_{max}, \quad k_{eff, min} \leq k_{eff}(T, p) \leq k_{eff, max} \end{array} \right\} \quad (\text{B.36})$$

où $\tilde{G}_{F \rightarrow x}(s)$ représente la dynamique du capteur incertain. Les valeurs extrêmes des coefficients d'amortissement (b_{min} , b_{max}) et de raideur ($k_{eff, min}$ et $k_{eff, max}$) peuvent être obtenues de manière expérimentale ou à partir d'un modèle. Ce type d'incertitudes paramétriques est représenté (figure B.15) par une incertitude multiplicative inverse (feedback uncertainty around a nominal plant, [10]).

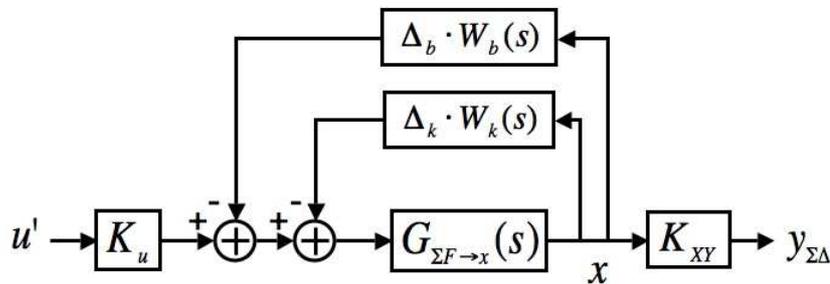


FIG. B.15 – Modélisation des incertitudes liées aux variations des coefficients d'amortissement et de raideur

Sur la figure B.15, $G_{\Sigma F \rightarrow x}(s)$ représente la fonction de transfert nominale, Δ_k et Δ_b sont des scalaires tels que $|\Delta_{b,k}| \leq 1$, $W_b(s)$ et $W_k(s)$ représentent les descriptions fréquentielles des

incertitudes paramétriques sur les coefficients b et k_{eff} .

Si l'on ne considère que les incertitudes liées à une variation de température, les coefficients d'amortissement b et de raideur k_{eff} varient conjointement. L'ensemble des fonctions de transfert prend alors la forme :

$$\mathcal{G} = \left\{ \tilde{G}_{\Sigma F \rightarrow x}(s) = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k_{eff}} : (b, k_{eff})_{Tmin} \leq (b, k_{eff})_T \leq (b, k_{eff})_{Tmax} \right\} \quad (\text{B.37})$$

Cet ensemble peut être représenté à l'aide d'une seule incertitude multiplicative inverse (fig. B.16).

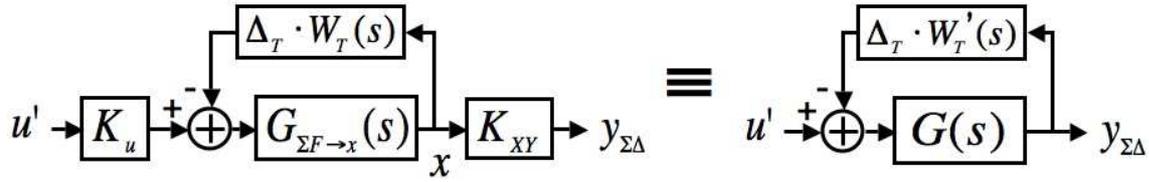


FIG. B.16 – Modélisation des incertitudes liées aux variations de température

Pour obtenir la description fréquentielle $W_T(s)$, nous proposons ici d'utiliser des modèles de variation de l'amortissement et de la raideur en fonction de la température afin de déterminer les couples $(b, k_{eff})_{Tmin}$ et $(b, k_{eff})_{Tmax}$.

Si l'on prend comme hypothèse que la variation du coefficient d'amortissement est principalement liée au changement de la viscosité de l'air μ_{air} avec la température, on aura :

$$b(T) = b(T_0) \cdot \frac{\mu_{air}(T)}{\mu_{air}(T_0)} \quad (\text{B.38})$$

Soit, en notant $b(T_0) = b_{nom}$ (nominal, pour $T_0 = 300K$) et en utilisant la loi de Sutherland [38, 63] :

$$b(T) = b_{nom} \cdot \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \cdot \frac{T_0 + T_S}{T + T_S} \quad (\text{B.39})$$

avec T_S , la constante de Sutherland ($T_S \simeq 111 K$). Soit $b(T = 0^\circ C) = 0,93 \cdot b_{nom}$ et $b(T = 85^\circ C) = 1,15 \cdot b_{nom}$. On majore donc la plage de variation du coefficient d'amortissement en choisissant $b(T) \in b_{nom} \pm 0,15 \cdot b_{nom}$.

En utilisant la relation (B.44), on montre par ailleurs que $k_{eff}(T = 0^\circ C) = 1,007 \cdot k_{eff,nom}$ et $k_{eff}(T = 85^\circ C) = 0,985 \cdot k_{eff,nom}$, soit $k_{eff}(T) \in k_{eff,nom} \pm 0,02 \cdot k_{eff,nom}$.

Puisque le coefficient d'amortissement augmente avec la température alors que le coefficient de raideur diminue avec la température, on prend [10] :

$$W_T(s) = 0,15 \cdot b_{nom} \cdot s - 0,02 \cdot k_{eff,nom} \quad (\text{B.40})$$

Soit pour le modèle de procédé $G(s)$ entre l'entrée de commande et la sortie du circuit de lecture :

$$W'_T(s) = \frac{0,15 \cdot b_{nom} \cdot s - 0,02 \cdot k_{eff,nom}}{K_u \cdot K_{XY}} \quad (\text{B.41})$$

La figure B.17 trace la fonction de transfert $G(s)$ pour différentes températures de fonctionnement ainsi que les fonctions de transfert du modèle de procédé incertain $\tilde{G}(s)$ (B.42) pour des valeurs de Δ comprises entre -1 (0°C) et 1 (85°C).

$$K_u \cdot \tilde{G}_{\Sigma F \rightarrow x}(s) \cdot K_{XY} = K_u \cdot \frac{G_{\Sigma F \rightarrow x}(s)}{1 + G_{\Sigma F \rightarrow x}(s) \cdot \Delta \cdot W_T(s)} \cdot K_{XY} \quad (\text{B.42})$$

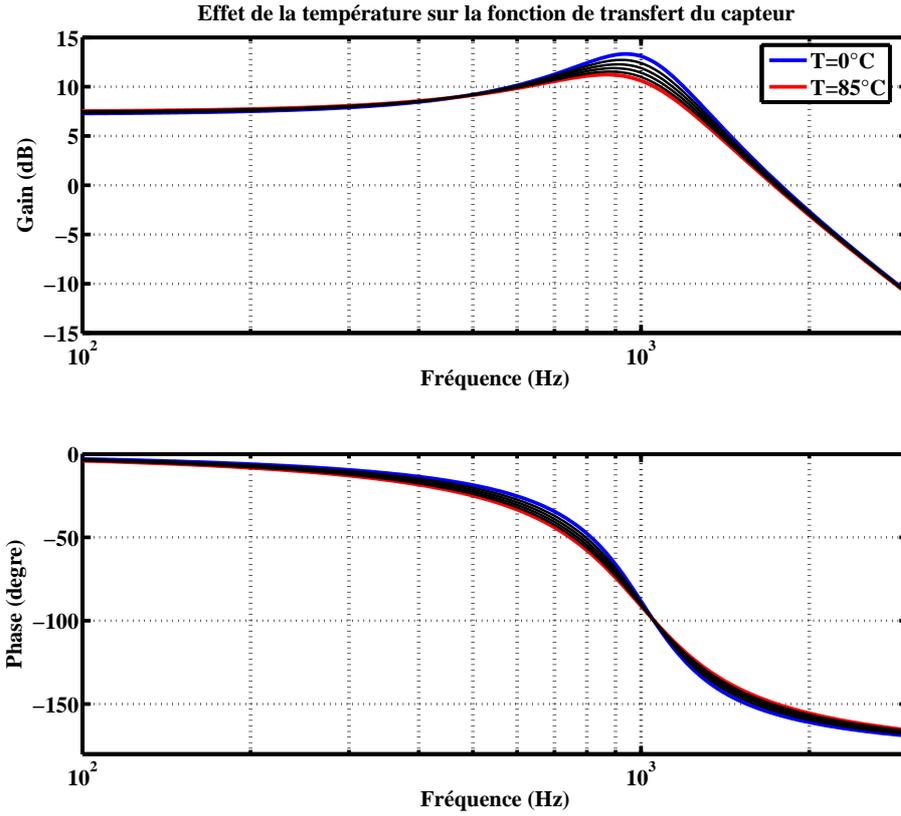


FIG. B.17 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert $K_u \cdot G(z) \cdot K_{XY}$ pour différentes températures de fonctionnement $T \in [0^\circ\text{C}, 85^\circ\text{C}]$ en noir. Limites de l'ensemble des fonctions décrites par la modélisation de l'incertitude en bleu et en rouge.

Dans le cadre de cette étude, la description des incertitudes, figure B.16 et équation (B.41) est utilisée pour assurer la stabilité robuste de l'asservissement dans la procédure de synthèse par placement de pôles. Elle pourra être utilisée ultérieurement pour assurer la performance robuste ou/et être adaptée à la synthèse μ [20, 24].

B.6 Synthèse \mathcal{H}_∞

La synthèse \mathcal{H}_∞ considère le modèle de procédé exposé dans le chapitre 1 (figure 2.10, rappelée en figure B.18), où $G(s)$ est la fonction de transfert en s équivalente à la fonction de transfert identifiée $G_{id,u \rightarrow y}(z^{-1})$. Le gain G_p correspond au gain statique entre l'entrée en accélération et la sortie en boucle ouverte ($G_p \simeq m/K_u$).

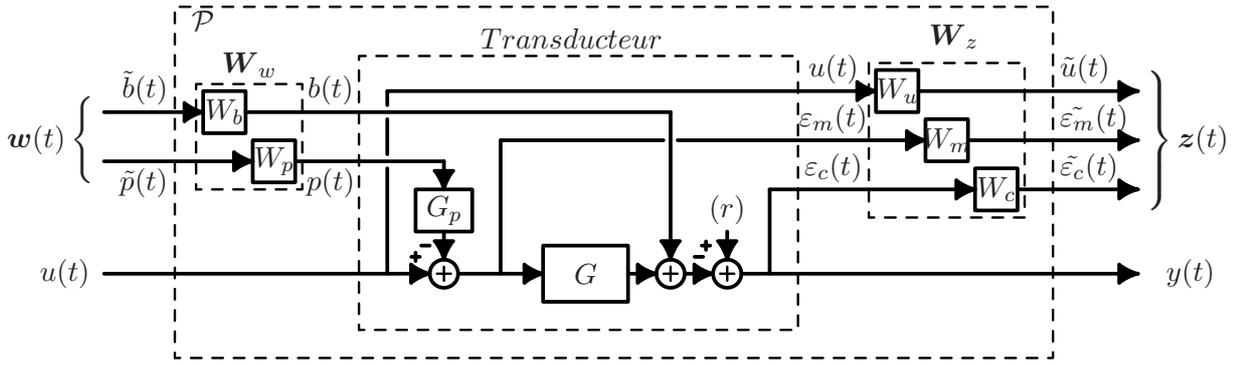


FIG. B.18 – Description du procédé généralisé considéré

Les fonctions de pondération W_p , W_b , W_u , W_m et W_c retenues sont données dans la figure B.19. Elles correspondent aux choix décrits dans les paragraphes suivants.

La fonction de pondération W_p correspond à la normalisation de l'entrée en accélération γ par rapport au signal de commande u . Son gain correspond donc à l'accélération maximale admissible ($FS = K_u/m = 8,2 g$), puisque la commande u est comprise entre -1 et 1. Ici, on ne fait pas d'hypothèse sur la répartition spectrale de l'accélération imposée. Une description plus réaliste pourra être utilisée en fonction de l'application visée. On a donc $W_p \cdot G_p = 1$. Ce choix implique, qu'après convergence des itérations vers une valeur de γ minimale, la procédure de synthèse \mathcal{H}_∞ fournit un correcteur tel que (voir chapitre 2) :

$$\|F_l(\mathcal{P}, \mathcal{K})\|_\infty = \left\| \begin{array}{cc} -W_u(s) \cdot \mathbf{K} \mathbf{S}(s) \cdot W_b(s) & W_u(s) \cdot \mathbf{T}(s) \\ -W_m(s) \cdot \mathbf{K} \mathbf{S}(s) \cdot W_b(s) & -W_m(s) \cdot \mathbf{S}(s) \\ -W_c(s) \cdot \mathbf{S}(s) \cdot W_b(s) & W_c(s) \cdot \mathbf{S} \mathbf{G}(s) \end{array} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (\text{B.43})$$

En basse fréquence, la fonction W_b correspond à la description du bruit introduit en sortie du procédé, soit la fonction de transfert $G_{b,y}(s)$, figure 3.25. Le réglage de la fonction de pondération W_b en haute fréquence est ici utilisé comme un moyen pour forcer l'algorithme à synthétiser un correcteur pouvant être réduit à un filtre d'ordre 8, sans perte de performance. La mise en forme $G_{b,y}(s)$ est rappelée à titre indicatif sur la figure B.19.

La fonction W_u correspond à la contrainte imposée sur les valeurs prises par la commande u . On impose $|W_u^{-1}| \leq 1$ sur BP_{mes} afin que le module de \mathbf{T} soit égal à 1 sur la bande passante de la mesure. Le réglage de W_u en haute fréquence est également utilisé comme un moyen pour obtenir un correcteur pouvant être réduit à un filtre d'ordre 8, sans perte de performance.

La fonction W_c correspond à la contrainte imposée pour respecter la linéarité. On souhaite donc que $|W_c^{-1}| \leq 0,01$ sur la bande passante de la mesure. On impose ici une contrainte plus importante (ici $|W_c^{-1}| \leq 0,004$, $f \leq 130$ Hz), afin de forcer l'algorithme à synthétiser un correcteur assurant la linéarité.

La fonction de pondération W_m est relative à l'erreur de mesure instantanée et à la marge de stabilité. Comme introduit dans le paragraphe relatif à la synthèse par placement de pôles, il n'est pas possible d'imposer (compromis performance/stabilité) une atténuation de 100 dB pour la fonction de sensibilité \mathcal{S} sur toute la bande passante de mesure ($BP_{mes} = [0 ; 122\text{Hz}]$).

On propose ici le choix :

- Performance : une partie de l'atténuation de la fonction \mathcal{S} sur la bande passante de mesure BP_{mes} est imposée par la contrainte sur la fonction de sensibilité $\mathcal{S}G$ - figure B.19, fonction de pondération W_c^{-1} . On propose d'imposer une action intégrale (presque intégrale) afin de minimiser l'erreur pour les fréquences inférieures à 10 Hz.
- Stabilité : on impose $\|W_m^{-1}\|_\infty \leq 2$ (6dB) afin de garantir $\|\mathcal{S}\|_\infty \leq 6$ dB.

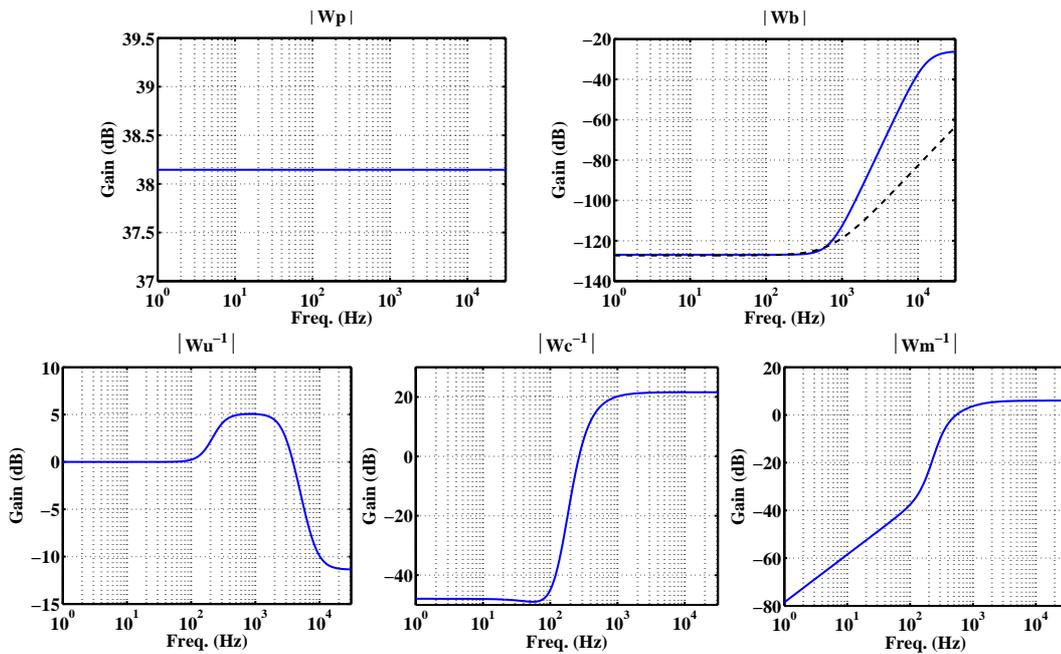


FIG. B.19 – Fonctions de pondération pour la synthèse \mathcal{H}_∞ . La fonction de transfert $G_{b,y}(s)$ est tracée en ligne discontinue noire.

La synthèse est réalisée sous Matlab en considérant le modèle identifié en simulation (figure 3.36), transformé en temps continu. Les itérations de la procédure de synthèse \mathcal{H}_∞ convergent vers une valeur de γ égale à 1,25. Le correcteur associé est du 45^{ème} ordre. Après réduction à un correcteur du 8^{ème} ordre et transformation en un modèle numérique à la fréquence de travail de circuit numérique, on obtient les fonctions de sensibilité données en figure B.20.

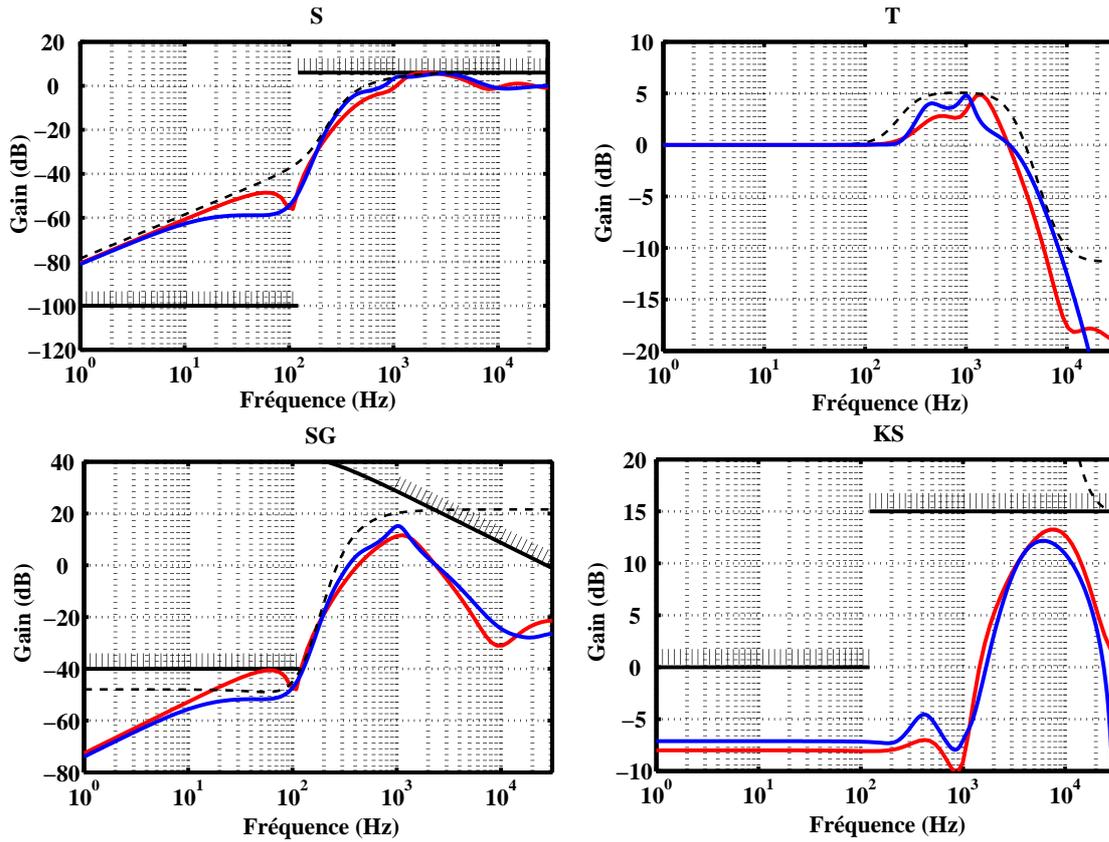


FIG. B.20 – Comparaison synthèse par placement de pôles (courbes rouges) et synthèse \mathcal{H}_∞ (courbes bleues). Les contraintes sur les fonctions de sensibilité sont données en noir et ha-chures pour le placement de pôles. Les lignes discontinues correspondent aux contraintes sur les fonctions de sensibilité liées au choix des fonctions de pondérations de la synthèse \mathcal{H}_∞ .

La synthèse \mathcal{H}_∞ et la synthèse par placement de pôles permettent donc d'atteindre des performances similaires pour le système considéré et l'ordre du correcteur imposé.

B.7 Variation du facteur d'échelle avec la température

Dans ce paragraphe, on considère uniquement une variation du facteur d'échelle due à la variation du module de Young avec la température. Le module de Young est un paramètre relativement incertain. S'il est difficile de prédire sa valeur exacte avant la fabrication du capteur, on considère en général que sa variation avec la température prend la forme :

$$E(T) \simeq E(T_0) \cdot \left(1 + \frac{\partial E}{\partial T} \cdot (T - T_0)\right) \quad (\text{B.44})$$

avec $E(T_0)$ correspondant au module de Young à une température donnée T_0 . Le coefficient en température ($TC = \frac{\partial E}{\partial T}$) est en général compris entre -60 ppm/K et -100 ppm/K [48].

En première approximation, le coefficient de raideur mécanique associé à la force de rappel exercée par les quatre bras de suspension est donné par :

$$k_{mec}(T) = 4 \cdot E(T) \cdot W_{si} \cdot \left(\frac{l_P}{L_P}\right)^3 \quad (\text{B.45})$$

où $E(T)$ est le module de Young du silicium, W_{si} est l'épaisseur d'épitaxie, L_P est la longueur des poutres de suspension, l_P est la largeur des poutres de suspension.

D'où :

$$k_{mec}(T) \simeq k_{mec}(T_0) \cdot \left(1 + \frac{\partial E}{\partial T} \cdot (T - T_0)\right) \quad (\text{B.46})$$

En boucle fermée, la fonction de transfert entre l'accélération et la sortie de mesure est donnée par :

$$G_{\gamma \rightarrow u}(s) = \frac{m}{K_u} \cdot \mathbf{T}(s) \propto \frac{K(s) \cdot G(s)}{1 + K(s) \cdot G(s)} \quad (\text{B.47})$$

Le facteur d'échelle est égal au gain statique de la fonction de transfert $G_{\gamma \rightarrow u}(s)$, soit :

$$SF \propto \frac{1}{K_u} \cdot G_{\gamma \rightarrow u}(\omega = 0) \propto \frac{K(\omega = 0) \cdot G(\omega = 0)}{1 + K(\omega = 0) \cdot G(\omega = 0)} \quad (\text{B.48})$$

avec, voir équation (3.25) :

$$G(s) \simeq K_u \cdot G_{\Sigma F \rightarrow x}(s) \cdot K_{XY} \quad (\text{B.49})$$

En faisant l'hypothèse que les gains K_u et K_{XY} sont indépendants de la température (tensions de lecture et d'actionnement stables en température et circuit de lecture faiblement sensible à la température), ainsi que le gain statique $K(\omega = 0)$ de la fonction de transfert du correcteur numérique, on obtient :

$$SF(T) \propto \frac{K(\omega = 0) \cdot G_{\Sigma F \rightarrow x}(\omega = 0; T)}{1 + K(\omega = 0) \cdot K_u \cdot G_{\Sigma F \rightarrow x}(\omega = 0; T) \cdot K_{XY}} \quad (\text{B.50})$$

où la dépendance du gain statique de la fonction de transfert $G_{F \rightarrow x}(s)$ à la température est introduite par la notation $G_{\Sigma F \rightarrow x}(\omega = 0; T)$.

On note $K(\omega = 0) = K_0$. Par ailleurs, le gain statique $G_{\Sigma F \rightarrow x}(\omega = 0; T)$ de la fonction de transfert $G_{\Sigma F \rightarrow x}(s)$, équation (3.23), est inversement proportionnel à la raideur effective en boucle fermée $k_{eff}(T)$. On écrit donc :

$$SF(T) \propto \frac{K_0/k_{eff}(T)}{1 + K_0 \cdot K_u/k_{eff}(T) \cdot K_{XY}} \quad (\text{B.51})$$

Soit, en considérant l'expression de la raideur effective k_{eff} , équation (3.21) pour une raideur mécanique k_{mec} définie par l'équation (B.46) :

$$SF(T) \propto 1 - \frac{k_{mec}(T_0)}{k_{eff} + K_0 \cdot K_u \cdot K_{XY}} \cdot \frac{\partial E}{\partial T} \cdot (T - T_0) \quad (\text{B.52})$$

Pour le système considéré $K_0 \cdot K_u \cdot K_{XY} \gg k_{eff}$, on a donc :

$$\frac{\partial SF}{\partial T} \simeq - \frac{k_{mec}(T_0)}{K(\omega = 0) \cdot K_u \cdot K_{XY}} \cdot \frac{\partial E}{\partial T} \quad (\text{B.53})$$

Dans le cas du modèle de simulation, le gain $K(\omega = 0)$ est infini (aspect intégrateur), la sensibilité du facteur d'échelle à la température est donc nulle. Si l'on considère la valeur minimale du gain du correcteur sur l'ensemble de la bande passante de la mesure, à savoir 40 dB à 122 Hz. On obtient alors une sensibilité $\frac{\partial SF(T)}{\partial T}$ inférieure à 2 ppm/K - hypothèse : électronique insensible à la température.

B.8 Mesure en boucle ouverte

Modélisation

Pour la mesure en boucle ouverte, la partie numérique de la figure 3.17 est désactivée. La tension de retour V_{act} est nulle. La raideur électrostatique $k_{elec,BO}$ vaut alors, voir équation (B.32) :

$$k_{elec,BO} = -n \cdot \varepsilon_0 \cdot S \cdot \frac{d_0^3 + d_1^3}{d_0^3 \cdot d_1^3} \cdot \Delta V_{lect}^2 \quad (\text{B.54})$$

La fonction de transfert entre l'entrée en force et le déplacement de la masse sismique est définie par :

$$G_{BO}(s) = \frac{1}{m \cdot s^2 + b \cdot s + k_{eff,BO}} \quad (\text{B.55})$$

$$\text{où } k_{eff,BO} = k_{mec} + k_{elec,BO} \quad (\text{B.56})$$

Le modèle du circuit de lecture capacitive est identique à celui en boucle fermée.

Facteurs limitant les performances de mesure en boucle ouverte

Bruit brownien (Estimation)

Puisqu'il s'agit d'un bruit en force entrant au même endroit que la force d'inertie F_γ à mesurer, la contribution du bruit brownien en boucle ouverte est identique à celle en boucle fermée, voir paragraphe 3.6.3.

Bruit de l'électronique

La capacité équivalente en bruit du circuit de lecture capacitive, figure B.10, a été estimée à $12,4 \text{ aF}$ sur la bande passante de la mesure [50], soit $C_{n,PSD} = 1,12 \text{ aF}/\sqrt{\text{Hz}}$. Ce bruit est ramené à l'entrée en accélération, équation (B.57).

$$\gamma_{n,Cn,PSD} = \frac{C_{n,PSD} \cdot k_{eff,BO}}{K_{XC} \cdot m \cdot g} [g/\sqrt{\text{Hz}}]; \quad \gamma_{n,Cn} = \gamma_{n,Cn,PSD} \cdot \sqrt{BP_{mes}} [g] \quad (\text{B.57})$$

Soit : $\gamma_{n,Cn,PSD} = 4,2 \mu\text{g}/\sqrt{\text{Hz}}$ et $\gamma_{n,Cn} \simeq 47 \mu\text{g} (rms) (-106 \text{ dBFS})$ sur la bande passante $[0 ; 122 \text{ Hz}]$.

Variation du facteur d'échelle (SF , annexe A) avec la température

Le facteur d'échelle en boucle ouverte est proportionnel au gain statique de la fonction de transfert du capteur, équation (B.55), il est donc inversement proportionnel à la raideur effective :

$$SF(T) \propto \frac{1}{k_{mec}(T) + k_{elec,BO}} \quad (\text{B.58})$$

soit, en considérant l'équation (B.46) :

$$SF(T) \propto 1 - \frac{k_{mec}(T_0)}{k_{mec}(T_0) + k_{elec,BO}} \cdot \frac{\partial E}{\partial T} \cdot (T - T_0) \quad (\text{B.59})$$

En considérant un coefficient de variation en température de -80 ppm/K et les valeurs numériques de $k_{mec}(T_0)$ et $k_{eff,BO}$ (Tableau B.1), on peut estimer que le coefficient en température du facteur d'échelle est de l'ordre $\frac{\partial SF(T)}{\partial T} = -90 \text{ ppm/K}$. Le facteur d'échelle subit donc une variation d'environ $\pm 0.4\%$ entre les températures extrêmes de la gamme de mesure, si le capteur est calibré pour une température en milieu de gamme. L'erreur est de l'ordre de 40 mg pour une accélération constante de 10 g , soit une erreur 400 fois supérieure à la résolution en bruit attendue.

Performances dynamiques

La figure B.21 trace le diagramme de Bode de la fonction de transfert entrée-erreur de mesure en boucle ouverte ($1 - G_{BO}(s)/G_{BO}(s=0)$). Cette courbe montre que pour un capteur calibré pour une accélération constante, l'erreur de mesure instantanée est de $205 \text{ mg} (-31, 35 \text{ dB})$ pour une accélération sinusoïdale de 10 g à 122 Hz .

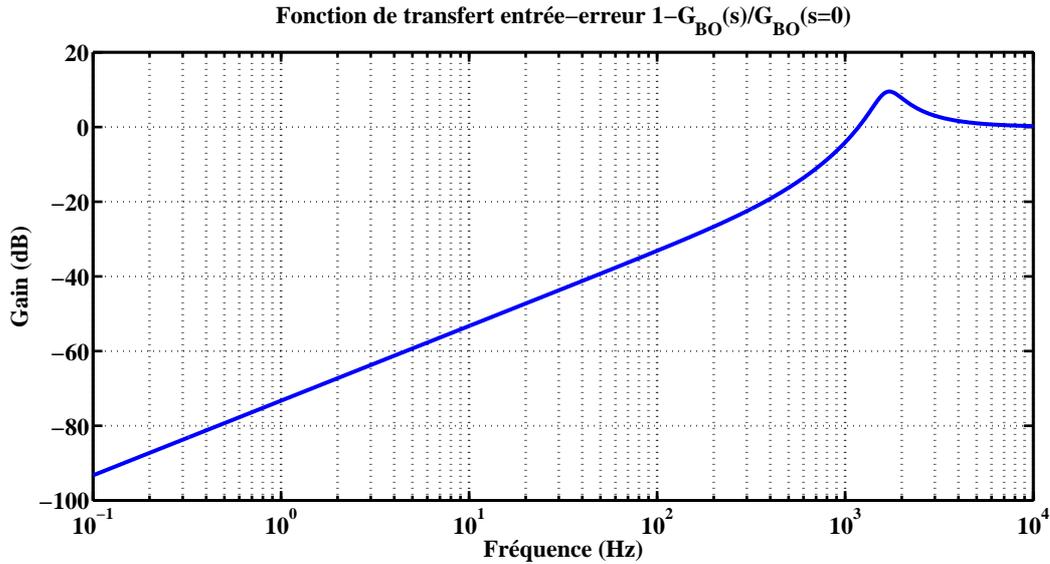


FIG. B.21 – Diagramme de Bode de la fonction de transfert entre l’entrée en accélération et l’erreur de mesure instantanée en boucle ouverte.

B.9 Identification en boucle fermée pour la *synthèse de l’observateur*

Le modèle entrée-sortie du capteur est ici identifié en boucle fermée suivant le schéma de la figure B.22 [16]. Le système est excité par un signal $e_{ident}(k_1)$. L’entrée et la sortie du modèle à identifier sont $u_{CNA}(k_1)$ et $y_{CAN}(k_1)$.

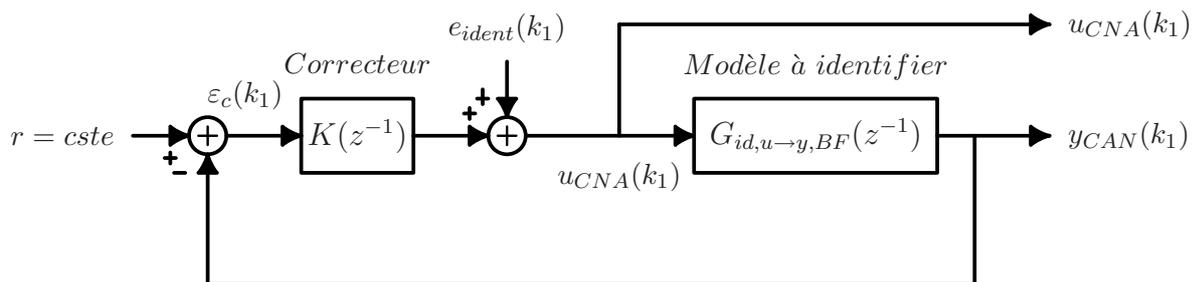


FIG. B.22 – Schéma pour l’identification en boucle fermée.

Il s’agit ici d’obtenir un modèle pour la synthèse de l’*observateur* et non pour la synthèse d’un meilleur *correcteur*. Le comportement dynamique du transducteur dépend fortement de la fonction de transfert du correcteur (effet des non-linéarités), le correcteur ne peut donc pas être modifié après l’identification pour la synthèse de l’observateur. Le correcteur³ doit donc respecter les contraintes de stabilité, de robustesse en stabilité, ainsi que la contrainte d’asservissement

³Afin d’introduire moins de dynamiques (pôles/zéros) dans la bande passante de la mesure, un nouveau correcteur a été synthétisé (\mathcal{H}_∞).

liée à la linéarité de la mesure (contrainte sur la fonction de sensibilité GS). Par conséquent, le signal d'excitation $e_{ident}(k_1)$ est rejeté de manière importante par la boucle et l'identification est délicate [16]. Pour l'identification sur le modèle de simulation, nous avons utilisé un signal d'excitation $e_{ident}(k_1)$ de type somme de sinus. La figure B.23 donne les diagrammes de Bode du modèle identifié en boucle ouverte et en boucle fermée.

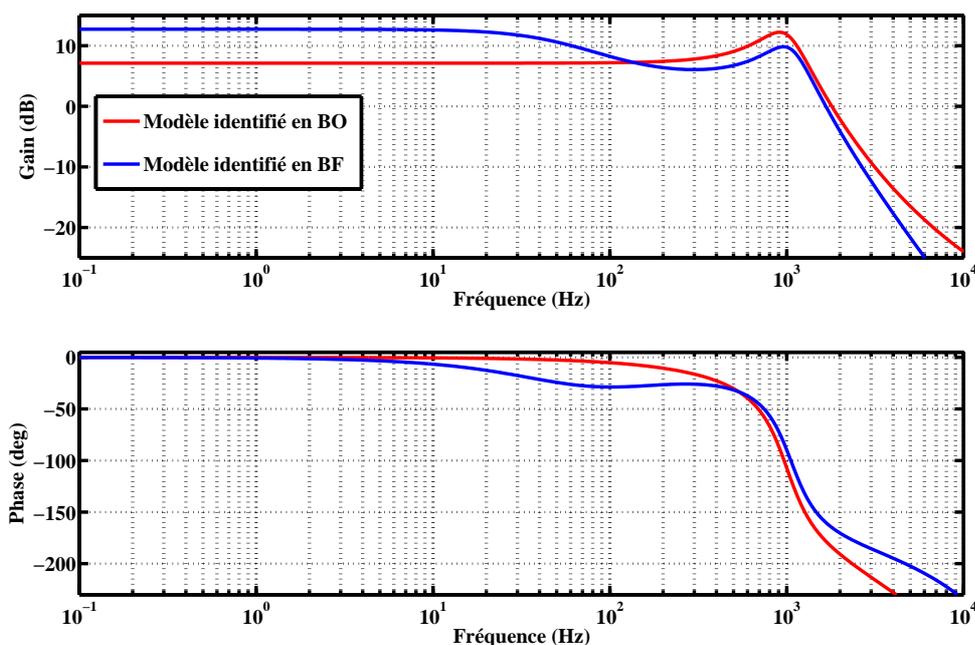


FIG. B.23 – Diagrammes de Bode du modèle identifié en boucle ouverte et de celui identifié en boucle fermée

La figure B.24 montre la réponse $y_{\Sigma\Delta}$ ⁴ du modèle de simulation⁵ pour une entrée en accélération $\gamma(t)$ de type bruit blanc, ainsi que les réponses ($y_{CAN}(k_1)$, filtrées) en considérant les modèles du transducteur identifiés en boucle ouverte et en boucle fermée .

⁴Sortie du modulateur analogique $\Sigma\Delta_{Lect}$, après un filtrage de décimation correspondant à la bande passante de la mesure.

⁵Modèle complet (figure 3.17) incluant les bruits et les non-linéarités. Simulation en boucle fermée.

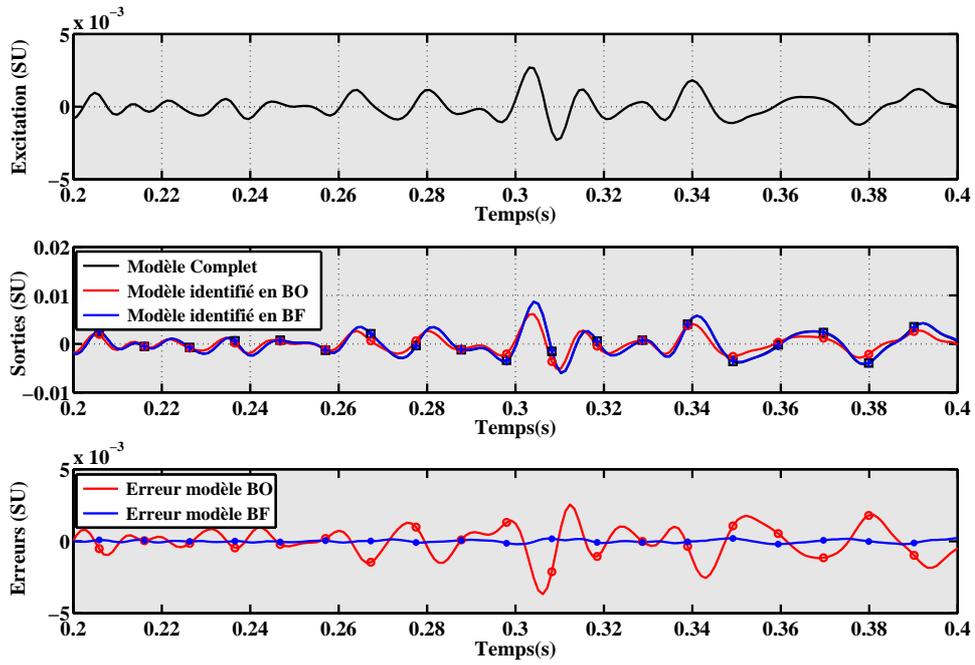


FIG. B.24 – Simulation temporelle du modèle complet et des modèles identifiés en boucle ouverte et en boucle fermée.

Annexe C

Annexes de la partie III

C.1 Quelques méthodes pour l'étude de systèmes non linéaires

TAB. C.1 – Récapitulatifs de méthodes pour l'étude de systèmes non linéaires

Méthodes	Références
MTS, perturbation, asymptotic expansion	[168], [113]
Application de MTS	[159], [138], [148], [167], [191], [165], [189]
Variational / variational perturbation theory	[135], [136], [173]
Hamiltonian, Eigenvalues, WKB	[179], [182], [149]
Shooting Approach	[116]
Harmonic balance	[137], [160]
Duffing-Harmonic oscillator / Newton's method and the HB method	[190], [158], [144]
Lindstedt-Poincaré / Linear Delta expansion	[120]
Linear Delta Expansion to the Lindstedt-Poincare method	[119], [121]
The Theory of Normal Forms	[187]
The field method approach	[152]
The coincidence degree theory	[174]
The dual state variable	[176]
Quasilinearization method	[163]
Renormalization group	[178]
Generalized extended Prolle-Singer procedure	[131]

TAB. C.2 – Dispositifs présentant une non-linéarité de type Duffing

Dispositifs	Références
Cantilever, beam, cable	[155], [122], [161]
Nano-tubes / nano-resonators	[172], [146], [180], [185], [153], [145], [125], [192], [127]
Stripline	[126]
NbN Superconducting Microwave Resonators	[114], [157]
Nano-resonator (torsion)	[133], [129], [130]
Shell	[177]
Other MEMS (soft Duffing)	[166], [123], [183], [184], [181]
Autre MEMS (hard Duffing)	[193], [134], [171]
Plasma	[151]

TAB. C.3 – Etudes d'intérêt et perspectives

Etudes d'intérêt et perspectives	Références
Fractal	[154]
Transition to Quantum	[150], [132]
Duffing	[162], [164]
Duffing, chaos/synchronisation	[128], [139], [186], [156], [175], [115], [142]
Applied chaos	[194]
Cryptography	[118]
Duffing and EEG	[147], [124]
Duffing and ear	[143]
Frequency modulation	[169]
Amplification	[117]

C.2 Méthodes des échelles de temps multiples (MTS - Multiple Time Scales)

Plusieurs techniques de type perturbations (l'uniformisation de la méthode directe, la méthode de Lindstedt-Poincaré, la méthode des échelles multiples, la méthode de variation des paramètres,...) sont présentées dans la référence [92]. Elle permettent d'obtenir la solution approchée (asymptotique) des équations différentielles (4.7) et (4.12) du chapitre 4. La méthode des échelles multiples ([92], page 123) est reprise ici. Cette méthode, tout comme celle de la variation des paramètres, permet de prendre en compte les aspects transitoires.

Dans cette méthode, on cherche la solution u en l'exprimant (*asymptotic expansion*) sur une "base de fonction" ψ_k (*asymptotic sequence*) d'un petit paramètre ε (< 1) :

$$u(\tau; \varepsilon) = \sum_{k=1}^N u_k(\tau) \cdot \psi_k(\varepsilon) \quad (\text{C.1})$$

La *séquence asymptotique* peut être la suite des puissances croissantes de ε^1 : $\psi_k(\varepsilon) = \varepsilon^k$, $k = 0..N$. Dans ce cas, on aura :

$$u(\tau; \varepsilon) = u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 \cdot u_2(\tau) + \dots \quad (\text{C.2})$$

Dans la méthode des échelles multiples, au lieu de considérer que u est une fonction d'un paramètre ε et d'une seule variable temporelle τ ($\Rightarrow u = u(\tau; \varepsilon)$), on autorise la solution u à dépendre du paramètre ε et des variables temporelles $\tau, \varepsilon \cdot \tau, \varepsilon^2 \cdot \tau, \varepsilon^3 \cdot \tau, \dots$ considérées indépendantes au cours de la résolution ($\Rightarrow u = u(\tau, \varepsilon \cdot \tau, \varepsilon^2 \cdot \tau; \varepsilon)$). Puisque ε est inférieur à 1, les variables associées aux constantes de temps $\varepsilon^n \cdot \tau$ (avec $n > 1$) varient plus lentement que τ . Par cet artifice, on peut dissocier les dynamiques lentes (transitoires, par exemple) des dynamiques rapides (oscillations et harmoniques), d'où le nom de la méthode *échelles de temps multiples* (*Multiple Time Scales*) On note :

$$T_0 = \tau; \quad T_n = \tau \cdot \varepsilon^n, \quad n = 1 \dots N \quad (\text{C.3})$$

où la valeur de N est fixée en fonction de l'approximation souhaitée. On considère u sous la forme :

$$u(\tau; \varepsilon) = u(T_0, T_1, T_2, \dots; \varepsilon) \quad (\text{C.4})$$

Puisque les nouvelles variables temporelles T_0, \dots, T_N dépendent de τ . Les opérateurs de dérivée exacte première et seconde, appliqués à u , doivent être remplacés par les opérateurs correspondants faisant intervenir les différentes dérivées partielles par rapport aux temps T_n .

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (\text{C.5})$$

¹Suivant le problème à résoudre, cette base peut ne pas être suffisante ([92], page 22).

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \varepsilon^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \dots \quad (\text{C.6})$$

Le changement de variable (C.4) transforme donc l'équation différentielle ordinaire initiale - par exemple (4.7) et (4.12) - en une équation aux dérivées partielles.

Pour les équations de Duffing considérées, on cherche donc u sous la forme :

$$u = u_0 + \varepsilon \cdot u_1 + \varepsilon^2 \cdot u_2 + \dots \quad (\text{C.7})$$

$$= u_0(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon \cdot u_1(T_0, T_1, T_2, \dots) + \varepsilon^2 \cdot u_2(T_0, T_1, T_2, \dots) + \dots \quad (\text{C.8})$$

En substituant (C.8) dans l'équation aux dérivées partielles associée à l'équation différentielle initiale et en égalisant les puissances de ε du terme de gauche et celle du terme de droite de l'équation obtenue, on obtient le système d'équations que doivent vérifier les fonctions $u_n(T_0, T_1, T_2, \dots; \varepsilon)$. Celui-ci est résolu en cherchant successivement les solutions u_0, u_1, \dots

C.3 Obtention d'un modèle approché de la relation entrée-sortie du système considéré dans le chapitre 5

Dans cette partie, on considère l'équation (C.9) :

$$\ddot{u}(\tau) + 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \dot{u}(\tau) + u(\tau) + \varepsilon \cdot \alpha \cdot u^3(\tau) = G_u(p, \tau) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) \quad (\text{C.9})$$

où ε, μ, α sont positifs. Le signal $G_u(p, \tau)$ est également positif. On note ici de manière explicite la dépendance p du signal $G_u(\tau)$, soit $G_u(p, \tau)$, afin de s'en rappeler le moment venu.

On cherche la solution de l'équation sous la forme :

$$u(\tau; \varepsilon) = u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 \cdot u_2(\tau) + \varepsilon^3 \cdot u_3(\tau) + O(\varepsilon^4) \quad (\text{C.10})$$

On choisit d'opérer un changement de variable temporelle, afin de séparer les dynamiques lentes des dynamiques rapides en posant :

$$T_0 = \tau; \quad T_n = \tau \cdot \varepsilon^n, \quad n = 0 \dots N \quad (\text{C.11})$$

où la variable temporelle T_0 est associée aux dynamiques rapides de la solution et $T_n, \quad n = 1 \dots N$ aux dynamiques plus lentes [92] .

On cherche alors les fonctions $u_i(\tau; \varepsilon)$ sous la forme :

$$u_i(\tau; \varepsilon) = u_i(T_0, T_1, T_2, \dots; \varepsilon) \quad (\text{C.12})$$

Les opérations de différenciation exactes deviennent des opérations de différenciations partielles :

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \cdot \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial}{\partial T_2} + \varepsilon^3 \cdot \frac{\partial}{\partial T_3} + O(\varepsilon^4) \quad (\text{C.13})$$

et

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2 \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \varepsilon^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial T_0 \partial T_2} + \frac{\partial^2}{\partial T_1^2} \right) + \varepsilon^3 \cdot \left(2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial T_2 \partial T_1} + 2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial T_3 \partial T_0} \right) + O(\varepsilon^4) \quad (\text{C.14})$$

Pour simplifier l'écriture, on pose :

$$D_n(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial T_n} ; \text{ et } D_i D_j(\cdot) = \frac{\partial}{\partial T_i} \cdot \left(\frac{\partial(\cdot)}{\partial T_j} \right) \quad (\text{C.15})$$

Pour prendre en compte l'hypothèse que la variation de la commande $G_u(p, \tau)$ est lente par rapport à la fréquence des oscillations, on pose [92] :

$$G_u(p, \tau) = \varepsilon^2 \cdot g(p, T_2) \quad (\text{C.16})$$

L'équation (C.9) devient :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left[\begin{array}{l} D_0^2 + 2 \cdot \varepsilon \cdot D_0 D_1 + \varepsilon^2 \cdot (2 \cdot D_0 D_2 + D_1^2) + \dots \\ + \varepsilon^3 \cdot (2 \cdot D_2 D_1 + 2 \cdot D_3 D_0) + O(\varepsilon^4) \end{array} \right]}_{\frac{d^2}{d\tau^2}} \times \underbrace{\left(\begin{array}{l} u_0 + \varepsilon \cdot u_1 + \varepsilon^2 \cdot u_2 + \dots \\ + \varepsilon^3 \cdot u_3 + O(\varepsilon^4) \end{array} \right)}_{u(\tau; \varepsilon)} + \dots \\ & + 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \underbrace{\left[\begin{array}{l} D_0 + \varepsilon \cdot D_1 + \varepsilon^2 \cdot D_2 \\ + \varepsilon^3 \cdot D_3 + O(\varepsilon^4) \end{array} \right]}_{\frac{d}{d\tau}} \times \underbrace{\left(\begin{array}{l} u_0 + \varepsilon \cdot u_1 + \varepsilon^2 \cdot u_2 + \dots \\ + \varepsilon^3 \cdot u_3 + O(\varepsilon^4) \end{array} \right)}_{u(\tau; \varepsilon)} + \dots \\ & + (u_0 + \varepsilon \cdot u_1 + \varepsilon^2 \cdot u_2 + \varepsilon^3 \cdot u_3 + O(\varepsilon^4)) + \dots \\ & + \varepsilon \cdot \alpha \cdot (u_0 + \varepsilon \cdot u_1 + \varepsilon^2 \cdot u_2 + \varepsilon^3 \cdot u_3 + O(\varepsilon^4))^3 = \varepsilon^2 \cdot g(p, T_2) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

En regroupant les termes proportionnels aux puissances de ε et en imposant que chaque coefficient des puissances de ε soit nul [92] on obtient le système d'équations :

$$(\Sigma) \begin{cases} D_0^2 u_0 + u_0 = 0 & (a) \\ D_0^2 u_1 + u_1 = -2 \cdot D_0 D_1 u_0 - 2 \cdot \mu \cdot D_0 u_0 - \alpha \cdot u_0^3 & (b) \\ D_0^2 u_2 + u_2 = \begin{pmatrix} -2 \cdot D_0 D_1 u_1 - 2 \cdot \mu \cdot D_0 u_1 - 3 \cdot \alpha \cdot u_0^2 \cdot u_1 - D_1^2 u_0 + \dots \\ -2 \cdot D_0 D_2 u_0 - 2 \cdot \mu \cdot D_1 u_0 + g(p, T_2) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) \end{pmatrix} & (c) \\ D_0^2 u_3 + u_3 = \begin{pmatrix} -2 \cdot \mu \cdot D_0 u_2 - 2 \cdot \mu \cdot D_1 u_1 - D_1^2 u_1 - 2 \cdot D_3 D_0 u_0 + \dots \\ -2 \cdot D_1 D_0 u_2 - 2 \cdot D_2 D_0 u_1 - 2 \cdot \mu \cdot D_2 u_0 - 2 \cdot D_2 D_1 u_0 + \dots \\ -\alpha \cdot (2 \cdot u_0^2 \cdot u_2 + u_0 \cdot u_1^2 + 2 \cdot u_1^2 \cdot u_0 + u_2 \cdot u_0^2) \end{pmatrix} & (d) \end{cases} \quad (C.18)$$

Puis on résout successivement (C.18.a), (C.18.b), (C.18.c) et (C.18.d).

Ordre ε^0 : Résolution de l'équation (C.18.a) :

On peut chercher u_0 , solution de l'équation (C.18.a), sous la forme :

$$u_0 = a \cdot \cos\phi \quad (C.19)$$

$$\text{avec } a = a(T_0, T_1, T_2, \dots); \quad \text{et } \phi = \phi(T_0, T_1, T_2, \dots) \quad (C.20)$$

L'expression de u_0 (C.19) est injectée dans l'équation (C.18.a) afin de déterminer les conditions sur a et ϕ . On obtient alors :

$$-2 \cdot D_0(a) \cdot D_0(\phi) \cdot \sin\phi + (1 - (D_0(\phi))^2) \cdot a \cdot \cos\phi = 0, \quad \forall\phi \quad (C.21)$$

$$\text{soit } D_0(a) = 0; \quad \text{et } D_0(\phi) = \pm 1 \quad (C.22)$$

On choisit arbitrairement $D_0(\phi) = 1$. A ce stade du développement, u_0 s'écrit :

$$u_0 = a \cdot \cos\phi \quad (C.23)$$

$$\text{avec } a = a_0; \quad \phi = T_0 + \phi_0 \quad (C.24)$$

où $a_0 = a_0(T_1, T_2, \dots)$ et $\phi_0 = \phi_0(T_1, T_2, T_3, \dots)$ représentent des constantes d'intégration par rapport à l'opérateur D_0 . Les dépendances de a_0 et ϕ_0 en T_1, T_2, \dots sont déterminées au cours de la résolution des équations (C.18.b) à (C.18.d). Afin d'exprimer ces dépendances, on écrit :

$$\begin{cases} \frac{da(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial a}{\partial T_0} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial \tau} + \frac{\partial a}{\partial T_1} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \frac{\partial a}{\partial T_2} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + \frac{\partial a}{\partial T_3} \cdot \frac{\partial T_3}{\partial \tau} + O\left(\frac{\partial T_4}{\partial \tau}\right) \\ \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial \phi}{\partial T_0} \cdot \frac{\partial T_0}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi}{\partial T_1} \cdot \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi}{\partial T_2} \cdot \frac{\partial T_2}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi}{\partial T_3} \cdot \frac{\partial T_3}{\partial \tau} + O\left(\frac{\partial T_4}{\partial \tau}\right) \end{cases} \quad (C.25)$$

Soit sur un court intervalle de temps $[\tau_0, \tau_0 + \tau]$ et en laissant les dérivées partielles $D_i a$ et $D_i \phi$ dépendre de l'origine de temps $\tau = \tau_0$ choisie :

$$a(T_0, T_1, T_2, \dots) = D_0 a + D_1 a \cdot T_1 + D_2 a \cdot T_2 + D_3 a \cdot T_3 + \text{constante}(\tau_0) \quad (C.26)$$

$$\phi(T_0, T_1, T_2, \dots) = D_0\phi + D_1\phi \cdot T_1 + D_2\phi \cdot T_2 + D_3\phi \cdot T_3 + O(T_4) + \text{constante}(\tau_0) \quad (\text{C.27})$$

On considère par la suite que les coefficients $D_i a$ et $D_i \phi$, $i = 1 \dots N$ ne dépendent pas des variables T_j , $j = 1 \dots N$.

Ordre ε^1 : Résolution de l'équation (C.18.b) :

Pour résoudre cette équation, on injecte u_0 (C.23) dans (C.18.b) et on cherche une solution particulière pour u_1 . Rappel de l'équation (C.18.b) :

$$D_0^2 u_1 + u_1 = -2 \cdot D_1 D_0 u_0 - 2 \cdot \mu \cdot D_0 u_0 - \alpha \cdot u_0^3 \quad (\text{C.28})$$

L'équation (C.28) est une équation aux dérivées partielles par rapport à la variable T_0 . Puisque l'on connaît la dépendance de la fonction u_0 (C.23) en T_0 , l'expression actuelle de la solution u_0 est suffisante pour déterminer la solution particulière de l'équation (C.28) relative au terme $-\alpha u_0^3$. Le terme $D_0 u_0$ peut être explicité comme suit :

$$D_0 u_0 = \frac{\partial}{\partial T_0} (a \cdot \cos \phi) = -a \cdot \sin \phi \quad (\text{C.29})$$

Par contre, le terme $-2D_1 D_0 u_0$ n'est pas connu explicitement. En effet, $a = A(T_1, T_2, \dots)$ et $\phi = T_0 + \Phi(T_1, T_2, \dots)$ dépendent de T_1 . En remarquant que $D_0 u_0$ peut être exprimé en fonction de a et ϕ et en utilisant les équations (C.26) et (C.27), on peut donner l'expression de $D_1 D_0 u_0$ en fonction de $D_1 a$ et $D_1 \phi$:

$$D_1 D_0 u_0 = \frac{\partial(D_0 u_0)}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial T_1} + \frac{\partial(D_0 u_0)}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial T_1} = -a \cdot \cos \phi \cdot D_1 \phi - \sin \phi \cdot D_1 a \quad (\text{C.30})$$

En remplaçant (C.23), (C.29) et (C.30) dans (C.28), on obtient :

$$D_0^2 u_1 + u_1 = 2 \cdot D_1 \phi \cdot a \cdot \cos \phi - \frac{3}{4} \cdot \alpha \cdot a^3 \cdot \cos \phi + (2 \cdot \mu \cdot a + 2 \cdot D_1 a) \cdot \sin \phi - \frac{1}{4} \cdot \alpha \cdot a^3 \cdot \cos(3\phi) \quad (\text{C.31})$$

Puisque l'équation (C.31) est une équation différentielle par rapport à T_0 et que $\phi = T_0 + \phi_0(T_1, T_2, T_3, \dots)$, les deux premiers termes conduisent à une solution particulière séculière ([92], *mixed-secular*), on doit donc imposer que les coefficients des fonctions $\sin \phi$ et $\cos \phi$ soient nuls pour que la solution ne diverge pas. Soit :

$$\begin{cases} 2 \cdot \mu \cdot a + 2 \cdot D_1 a = 0 \\ 2 \cdot D_1 \phi \cdot a - \frac{3}{4} \cdot \alpha \cdot a^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1 a = -\mu \cdot a \\ D_1 \phi = \frac{3}{8} \cdot \alpha \cdot a^2, \quad a \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.32})$$

La solution particulière de l'équation (C.31) sans terme séculier est :

$$u_1(\tau) = \frac{\alpha \cdot a^3}{32} \cdot \cos(3\phi) \quad (\text{C.33})$$

Ordre ε^2 : Résolution de l'équation (C.18.c) :

Rappel de l'équation (C.18.c) :

$$D_0^2 u_2 + u_2 = \begin{pmatrix} -2 \cdot D_0 D_1 u_1 - 2 \cdot \mu \cdot D_0 u_1 - 3 \cdot \alpha \cdot u_0^2 \cdot u_1 - D_1^2 u_0 + \dots \\ -2 \cdot D_0 D_2 u_0 - 2 \cdot \mu \cdot D_1 u_0 + g(p, T_2) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) \end{pmatrix} \quad (\text{C.34})$$

Pour exprimer le second membre de cette équation, on considère les expressions de u_0 (équation (C.23)), u_1 (équation (C.33)) et leurs dérivées par rapport aux opérateurs D_0 , D_1 et D_2 . Il faut également expliciter le terme $g(p, T_2) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau))$:

$$g(p, T_2) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) = g(p, T_2) \cdot \text{sign}(D_0 u_0 + \varepsilon \cdot (D_0 u_1 + D_1 u_0) + O(\varepsilon^2)) \quad (\text{C.35})$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} D_0 u_0 = -a \cdot \sin \phi \\ D_0 u_1 = -3/32 \cdot \alpha \cdot a^3 \cdot \sin(3 \cdot \phi) \\ D_1 u_0 = -\mu \cdot a \cdot \cos \phi - 3/8 \cdot \alpha \cdot a^3 \cdot \sin \phi \end{cases} \quad (\text{C.36})$$

Soit

$$D_0 u_0 + \varepsilon \cdot (D_0 u_1 + D_1 u_0) + O(\varepsilon^2) = \begin{pmatrix} -(a + 3/8 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a^3) \cdot \sin \phi + \dots \\ -3/32 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a^3 \cdot \sin(3 \cdot \phi) + \dots \\ -\varepsilon \cdot \mu \cdot a \cdot \cos \phi + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.37})$$

On considère par la suite que $\text{sign}(\dot{u}(\tau)) \simeq -\text{sign}(\sin \phi)$. D'après l'équation (C.37), ceci est vrai si $\varepsilon \cdot \mu \ll 1$ puisque $\alpha > 0$. D'autres conditions pourront apparaître lorsque le terme $O(\varepsilon^2)$ pourra être exprimé en fonction des solutions u_2 et u_3 .

En utilisant la fonction de description de la fonction signe pour une entrée sinusoïdale, on écrit alors $g(p, T_2) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau))$ sous la forme :

$$g(p, T_2) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) \simeq -g(p, T_2) \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin \phi + \frac{1}{3} \sin(3\phi) + \frac{1}{5} \sin(5\phi) + \dots \right) \quad (\text{C.38})$$

Dans ces conditions l'équation (C.34) devient :

$$D_0^2 u_2 + u_2 = \begin{pmatrix} (\mu^2 \cdot a + 15/128 \cdot \alpha^2 \cdot a^5 + 2 \cdot D_2 \phi \cdot a) \cdot \cos \phi + \dots \\ + (2 \cdot D_2 a - 3/4 \cdot \mu \cdot \alpha \cdot a^3 - 4/\pi \cdot g(p, T_2)) \cdot \sin \phi + \dots \\ + 21/128 \cdot \alpha^2 \cdot a^5 \cdot \cos(3 \cdot \phi) - 3/128 \cdot \alpha^2 \cdot a^5 \cdot \cos(5 \cdot \phi) + \dots \\ - (3/8 \cdot \mu \cdot \alpha \cdot a^3 - 4/3 \cdot g(p, T_2)/\pi) \cdot \sin(3 \cdot \phi) - 4/5 \cdot g(p, T_2)/\pi \cdot \sin(5 \cdot \phi) \end{pmatrix} \quad (\text{C.39})$$

Les premiers termes conduisent à des solutions séculières. On les annule pour obtenir les conditions sur $D_2 a$ et $D_2 \phi$:

$$\begin{cases} D_2 a = \frac{3}{8} \cdot \mu \cdot \alpha \cdot a^3 + \frac{2}{\pi} \cdot g(p, T_2) \\ D_2 \phi = -\frac{15}{256} \cdot \alpha^2 \cdot a^4 - \frac{\mu^2}{2}, \quad a \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.40})$$

La solution particulière de l'équation (C.39) est :

$$u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{21 \cdot \alpha^2 \cdot a^5}{1024} \cdot \cos(3 \cdot \phi) + \frac{\alpha^2 \cdot a^5}{1024} \cdot \cos(5 \cdot \phi) + \dots \\ + \left(\frac{3 \cdot \mu \cdot \alpha \cdot a^3}{64} + \frac{1}{6 \cdot \pi} \cdot g(p, T_2) \right) \cdot \sin(3 \cdot \phi) + \frac{1}{30 \cdot \pi} \cdot g(p, T_2) \cdot \sin(5 \cdot \phi) \end{pmatrix} \quad (\text{C.41})$$

Ordre ε^3 : Résolution de l'équation (C.18.d) :

Rappel de l'équation (C.18.d) :

$$D_0^2 u_3 + u_3 = \begin{pmatrix} -2 \cdot \mu \cdot D_0 u_2 - 2 \cdot \mu \cdot D_1 u_1 - D_1^2 u_1 - 2 \cdot D_3 D_0 u_0 + \dots \\ -2 \cdot D_1 D_0 u_2 - 2 \cdot D_2 D_0 u_1 - 2 \cdot \mu \cdot D_2 u_0 - 2 \cdot D_2 D_1 u_0 + \dots \\ -\alpha \cdot (2 \cdot u_0^2 \cdot u_2 + u_0 \cdot u_1^2 + 2 \cdot u_1^2 \cdot u_0 + u_2 \cdot u_0^2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.42})$$

On développe le second membre de cette équation en considérant les expressions de u_0 (C.23), u_1 (C.33) et u_2 (C.41) et leurs dérivées par rapport aux opérateurs D_0 , D_1 , D_2 et D_3 et on annule les termes séculiers.

Les conditions sur $D_3 a$ et $D_3 \phi$ pour annuler les termes séculiers sont :

$$\begin{cases} D_3 a = -\frac{11 \cdot \alpha \cdot a^2}{16 \cdot \pi} \cdot g(p, T_2) + \frac{9 \cdot \alpha^2 \cdot a^5 \cdot \mu}{512} \\ D_3 \phi = \frac{2 \cdot \mu}{\pi} \cdot \frac{g(p, T_2)}{a} + \frac{123 \cdot a^6 \cdot \alpha^3}{8192} + \frac{3 \cdot \mu^2 \cdot \alpha \cdot a^2}{8}, \quad a \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.43})$$

On ne cherchera pas ici la solution de l'équation (C.42). On se contente du développement de la solution $u(\tau; \varepsilon)$ à l'ordre ε^2 en gardant les conditions sur $D_3 a$ et $D_3 \phi$ issues du développement à l'ordre ε^3 [92].

Expression de la solution $u(\tau; \varepsilon)$:

La solution à l'ordre ε^2 est :

$$u(\tau; \varepsilon) = u_0(\tau) + \varepsilon \cdot u_1(\tau) + \varepsilon^2 \cdot u_2(\tau) + O(\varepsilon^3) \quad (\text{C.44})$$

avec

$$\begin{cases} u_0(\tau) = a \cdot \cos \phi \\ u_1(\tau) = \frac{\alpha \cdot a^3}{32} \cdot \cos(3\phi) \\ u_2(\tau) = \begin{pmatrix} -\frac{21 \cdot \alpha^2 \cdot a^5}{1024} \cdot \cos(3 \cdot \phi) + \frac{\alpha^2 \cdot a^5}{1024} \cdot \cos(5 \cdot \phi) + \dots \\ + \left(\frac{3 \cdot \mu \cdot \alpha \cdot a^3}{64} + \frac{1}{6 \cdot \pi} \cdot g(p, T_2) \right) \cdot \sin(3 \cdot \phi) + \frac{1}{30 \cdot \pi} \cdot g(p, T_2) \cdot \sin(5 \cdot \phi) \end{pmatrix} \end{cases} \quad (\text{C.45})$$

et a et ϕ définis (C.25) par :

$$\begin{cases} \frac{da(\tau)}{d\tau} = D_0 a + \varepsilon \cdot D_1 a + \varepsilon^2 \cdot D_2 a + \varepsilon^3 \cdot D_3 a + O(\varepsilon^4) \\ \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = D_0 \phi + \varepsilon \cdot D_1 \phi + \varepsilon^2 \cdot D_2 \phi + \varepsilon^3 \cdot D_3 \phi + O(\varepsilon^4) \end{cases} \quad (\text{C.46})$$

avec (C.22), (C.32), (C.40) et (C.43) :

$$\begin{cases} D_0 a = 0 ; & D_1 a = -\mu \cdot a ; & D_2 a = \frac{2}{\pi} \cdot g(p, T_2) ; \\ D_3 a = -\frac{11 \cdot \alpha \cdot a^2}{16 \cdot \pi} \cdot g(p, T_2) + \frac{9 \cdot \alpha^2 \cdot a^5 \cdot \mu}{512} ; \end{cases} \quad (C.47)$$

$$a \neq 0, \quad \begin{cases} D_0 \phi = 1 ; & D_1 \phi = \frac{3}{8} \cdot \alpha \cdot a^2 ; & D_2 \phi = -\frac{15}{256} \cdot \alpha^2 \cdot a^4 - \mu^2 ; \\ D_3 \phi = \frac{2 \cdot \mu}{\pi} \cdot \frac{g(p, T_2)}{a} + \frac{123 \cdot a^6 \cdot \alpha^3}{8192} + \frac{3 \cdot \mu^2 \cdot \alpha \cdot a^2}{8} . \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} \frac{da(\tau)}{d\tau} = \left(\begin{array}{c} -\varepsilon \cdot \mu \cdot a + \frac{2}{\pi} \cdot \varepsilon^2 \cdot g(p, T_2) + \dots \\ -\frac{11}{16 \cdot \pi} \cdot (\varepsilon \cdot \alpha \cdot a^2) \cdot (\varepsilon^2 \cdot g(p, T_2)) + \frac{9 \cdot \varepsilon \cdot \mu}{512} \cdot (\varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a^5) \end{array} \right) + O(\varepsilon^4) \\ \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = \left(\begin{array}{c} 1 + \frac{3}{8} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a^2 + \frac{15}{256} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a^4 + \frac{123 \cdot \varepsilon^3 \cdot \alpha^3 \cdot a^6}{8192} \\ + \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot \mu}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon^2 g(p, T_2)}{a} + \frac{3 \cdot \varepsilon^3 \cdot \mu^2 \cdot \alpha \cdot a^2}{8} - \varepsilon^2 \cdot \mu^2 \end{array} \right) + O(\varepsilon^4), \quad a \neq 0 \end{cases} \quad (C.48)$$

Soit en se rappelant la définition (C.16) :

$$\begin{cases} \frac{da(\tau)}{d\tau} = \left(\begin{array}{c} -\varepsilon \cdot \mu \cdot a - \frac{11}{16 \cdot \pi} \cdot (\varepsilon \cdot \alpha \cdot a^2) \cdot G_u(p, \tau) + \dots \\ + \frac{9 \cdot \varepsilon \cdot \mu}{512} \cdot (\varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a^5) + \frac{2}{\pi} \cdot G_u(p, \tau) \end{array} \right) + O(\varepsilon^4) \quad (a) \\ \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} = \left(\begin{array}{c} 1 + \frac{3}{8} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a^2 - \frac{15}{256} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a^4 + \frac{123 \cdot \varepsilon^3 \cdot \alpha^3 \cdot a^6}{8192} + \dots \\ + \frac{2 \cdot \varepsilon \cdot \mu}{\pi} \cdot \frac{G_u(p, \tau)}{a} + \frac{3 \cdot \varepsilon^3 \cdot \mu^2 \cdot \alpha \cdot a^2}{8} - \varepsilon^2 \cdot \mu^2 \end{array} \right) + O(\varepsilon^4) \quad (b) \\ a \neq 0 \end{cases} \quad (C.49)$$

Linéarisation de l'équation (C.49.a) autour d'un point de fonctionnement :

Afin d'établir les relations $\frac{\partial a(\tau)}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial \phi(\tau)}{\partial \tau}$ autour d'un point de fonctionnement défini par une amplitude d'oscillation a_{ref} donnée, on pose :

$$\begin{cases} a(\tau) = a_{ref} \cdot \left(1 + \frac{\Delta a(\tau)}{a_{ref}}\right) \\ G_u(p, \tau) = G_{ref} \cdot (1 + p(\tau)) \end{cases} \quad (C.50)$$

En substituant (C.50) dans (C.49) et en ne gardant que les termes linéaires en $\Delta a(\tau)$ et $p(\tau)$, on obtient :

$$\frac{da(\tau)}{d\tau} \simeq \begin{pmatrix} -\varepsilon \cdot \mu \cdot a_{ref} + \frac{9 \cdot \varepsilon^3 \cdot \mu \cdot \alpha^2 \cdot a_{ref}^5}{512} + \frac{2}{\pi} \cdot G_{ref} - \frac{11 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2}{16 \cdot \pi} \cdot G_{ref} + \dots \\ + \left(\frac{2}{\pi} \cdot G_{ref} - \frac{11 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2}{16 \cdot \pi} \cdot G_{ref} \right) \cdot p(\tau) + \dots \\ - \left(\varepsilon \cdot \mu + \frac{11 \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}}{8 \cdot \pi} \cdot G_{ref} - \frac{45 \cdot \varepsilon^3 \cdot \mu \cdot \alpha^2 \cdot a_{ref}^4}{512} \right) \cdot \Delta a(\tau) \end{pmatrix} \quad (C.51)$$

Afin que le gain G_{ref} corresponde au gain nécessaire pour obtenir l'amplitude a_{ref} lorsque $p(\tau) = 0$, on détermine l'expression de G_{ref} qui annule les termes constants de (C.51), soit :

$$G_{ref} = \frac{\varepsilon \cdot \mu \cdot a_{ref} \cdot \pi}{2} \cdot \frac{1 - \frac{9}{512} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a_{ref}^4}{1 - \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2} \quad (C.52)$$

En substituant (C.52) dans (C.51), on obtient la relation linéaire liant l'amplitude $a(\tau)$ à l'entrée $p(\tau)$:

$$\begin{cases} a(\tau) = a_{ref} + \Delta a(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}(\Delta a(\tau)) = \frac{da(\tau)}{d\tau} \simeq -\varepsilon \cdot \mu \cdot \beta_a \cdot \Delta a(\tau) + \varepsilon \cdot \mu \cdot \beta_p \cdot a_{ref} \cdot p(\tau) \end{cases} \quad (C.53)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \beta_a = \frac{1 + \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2 - \frac{45}{512} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a_{ref}^4 + \frac{97}{5351} \cdot \varepsilon^3 \cdot \alpha^3 \cdot a_{ref}^6}{1 - \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2} \\ \beta_p = \frac{1 - \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2 - \frac{9}{512} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a_{ref}^4 + \frac{99}{16384} \cdot \varepsilon^3 \cdot \alpha^3 \cdot a_{ref}^6}{1 - \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2} \end{cases} \quad (C.54)$$

Simplification de l'équation (C.49.b) :

La pulsation instantanée $\omega_\tau(\tau)$ des oscillations $u(\tau)$ étant définie par $\omega_\tau(\tau) = \frac{d\phi(\tau)}{d\tau}$, il n'est pas utile de linéariser l'équation (C.49.b). On peut par contre la simplifier en étudiant l'ordre de grandeur de ses trois derniers termes. En effet, en considérant l'hypothèse $\varepsilon\mu \ll 1$, on montre qu'ils peuvent être négligés.

La relation entre amplitude des oscillations $a(\tau)$ et pulsation instantanée $\omega_\tau(\tau)$ devient :

$$\omega_\tau(\tau) = 1 + \frac{3}{8} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a^2(\tau) - \frac{15}{256} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a^4(\tau) + \frac{123}{8192} \cdot \varepsilon^3 \cdot \alpha^3 \cdot a^6(\tau) \quad (\text{C.55})$$

Le développement à l'ordre 3 du terme relatif à la pulsation correspond à celui d'un oscillateur de Duffing classique [188].

Modèle approché final :

Rappel de l'équation initiale :

$$\ddot{u}(\tau) + 2 \cdot \varepsilon \cdot \mu \cdot \dot{u}(\tau) + u(\tau) + \varepsilon \cdot \alpha \cdot u^3(\tau) = G_u(p, \tau) \cdot \text{sign}(\dot{u}(\tau)) \quad (\text{C.56})$$

où $G_u(p, \tau) = G_{ref} \cdot (1 + p(\tau))$. En regroupant les équations (C.52), (C.53), (C.54) et (C.55), le modèle approché de l'équation (C.56) est décrit par :

$$u(\tau) = a(\tau) \cos\phi(\tau) + O(\varepsilon) \quad (\text{C.57})$$

$$\text{où } \begin{cases} a(\tau) = a_{ref} + \Delta a(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}(\Delta a(\tau)) \simeq -\varepsilon \cdot \mu \cdot \beta_a \cdot \Delta a(\tau) + \varepsilon \cdot \mu \cdot \beta_p \cdot a_{ref} \cdot p(\tau); \quad (\beta_a \gtrsim \beta_p \simeq 1) \\ \omega_\tau(\tau) = 1 + \frac{3}{8} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a^2(\tau) - \frac{15}{256} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a^4(\tau) + \frac{123}{8192} \cdot \varepsilon^3 \cdot \alpha^3 \cdot a^6(\tau) \end{cases} \quad (\text{C.58})$$

$$\text{et } \begin{cases} \beta_a = \frac{1 + \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2 - \frac{45}{512} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a_{ref}^4 + \frac{97}{5351} \cdot \varepsilon^3 \cdot \alpha^3 \cdot a_{ref}^6}{1 - \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2} \\ \beta_p = \frac{1 - \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2 - \frac{9}{512} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a_{ref}^4 + \frac{99}{16384} \cdot \varepsilon^3 \cdot \alpha^3 \cdot a_{ref}^6}{1 - \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2} \\ G_{ref} = \frac{\varepsilon \cdot \mu \cdot a_{ref} \cdot \pi}{2} \cdot \frac{1 - \frac{9}{512} \cdot \varepsilon^2 \cdot \alpha^2 \cdot a_{ref}^4}{1 - \frac{11}{32} \cdot \varepsilon \cdot \alpha \cdot a_{ref}^2} \end{cases} \quad (\text{C.59})$$

C.4 Amélioration de la linéarité

Pour rendre la relation entrée-sortie ($\omega_\tau(p)$) plus linéaire, on peut utiliser les techniques classiques :

- limitation de l'étendue de sortie (en boucle ouverte) ;
- lecture différentielle ;
- ou asservissement.

Concernant la dernière solution, trois stratégies peuvent être adoptées pour asservir la fréquence $\omega(\tau)$ autour d'un point de fonctionnement, en fonction des moyens d'action disponibles.

Asservissement dans le domaine physique de l'entrée $p(\tau)$

Dans ce cas, l'asservissement peut être représenté par la figure C.1. On retombe alors dans le cas de figure présenté dans les chapitres 2 et 3.

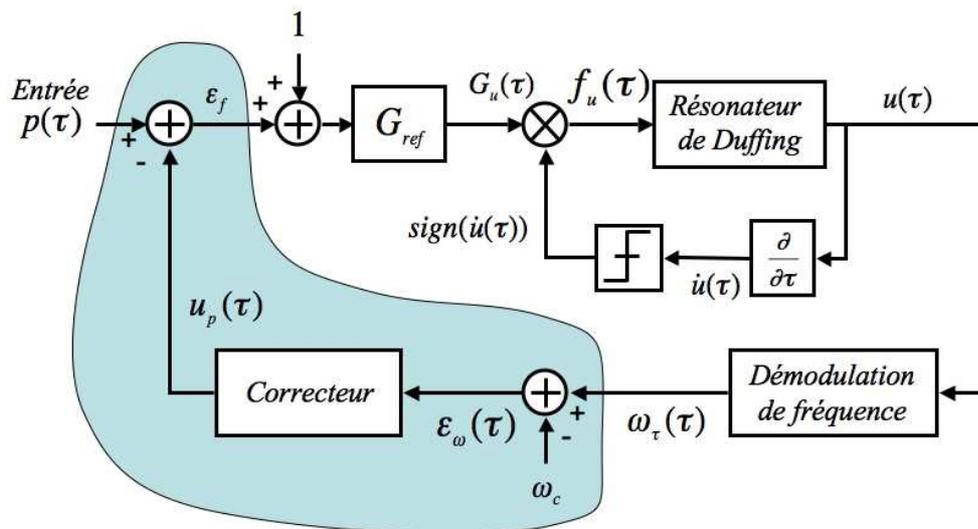


FIG. C.1 – Asservissement dans le domaine physique de l'entrée $p(\tau)$

Asservissement par modulation de l'amplitude de la force d'excitation $f_u(\tau)$

Si l'on ne peut pas contre-réactionner l'entrée $p(\tau)$, on peut maintenir la pulsation de résonance autour d'un point de fonctionnement en agissant sur l'amplitude de la force d'excitation $f_u(\tau)$, figure C.2.

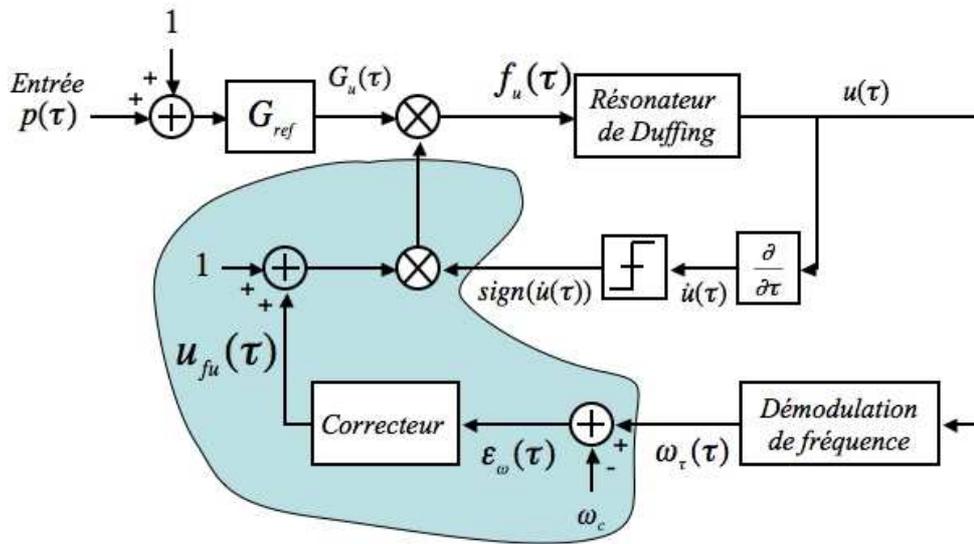


FIG. C.2 – Asservissement dans le domaine de l’amplitude de la force d’excitation $F_u(\tau)$

Asservissement modulation de la phase de la force d’excitation $f_u(\tau)$

Puisque la fréquence de résonance dépend également du déphasage de la boucle [76], on peut également maintenir la pulsation de résonance autour d’un point de fonctionnement en agissant sur ce paramètre, figure C.3.

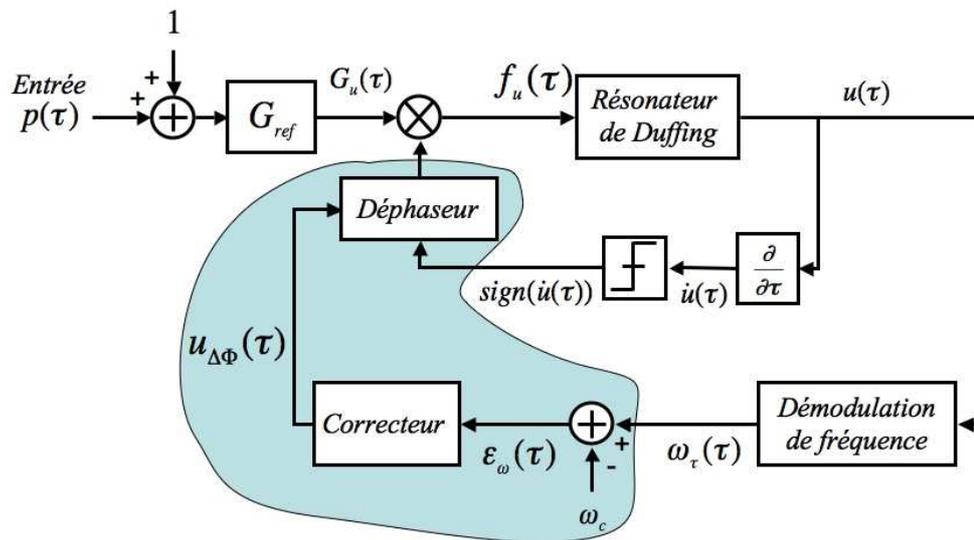


FIG. C.3 – Asservissement modulation de la phase de la force d’excitation $F_u(\tau)$

C.5 Calcul de la dynamique d'une poutre résonante

Formulation du problème

On considère une poutre encastrée-encastrée soumise à une pression $f(x, t)$ (fig. C.4).

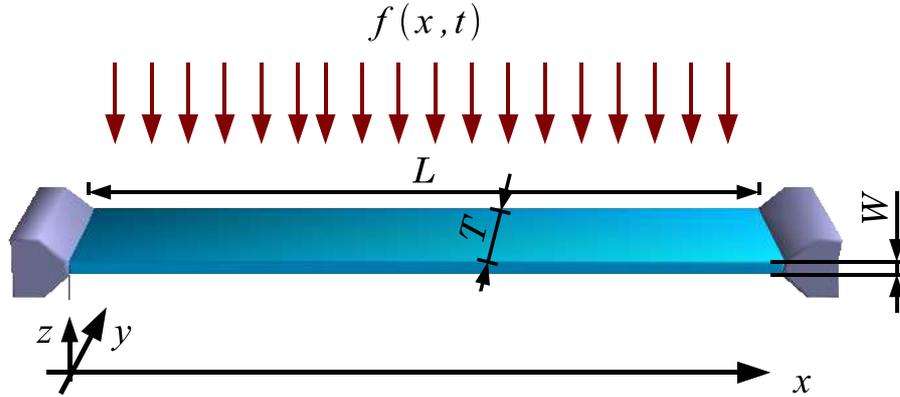


FIG. C.4 – Vue schématique d'une poutre encastrée-encastrée

L'élongation transverse $w(x, t)$ est régie par l'équation du mouvement :

$$E \cdot I \cdot \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - N(w, t) \cdot \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + c \cdot \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (\text{C.60})$$

où x est la position dans la direction de la longueur de la poutre, $S = W \cdot T$ et $I = W^3 \cdot T/12$ sont la surface et le moment d'inertie de la section transversale, E est le module d'Young, c représente un coefficient d'amortissement linéaire, t est le temps, ρ est la masse volumique, L , W et T sont la longueur, la largeur et l'épaisseur de la poutre, $f(x, t)$ est la force de pression surfacique. Le terme $N(w, t)$ est décrit par :

$$N(w, t) = \frac{E \cdot S}{2 \cdot L} \cdot \int_0^L \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx + N_0 \quad (\text{C.61})$$

N_0 est la tension appliquée dans l'axe de la poutre.

Pour une poutre de type encastrée-encastrée, les conditions aux limites sont données par :

$$w(0, t) = w(L, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}; \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (\text{C.62})$$

Dans un premier temps, on cherche une base de fonctions correspondant aux modes propres de déformation de la poutre. L'équation aux dérivées partielles (C.60) sera ensuite transformée en un système d'équations différentielles ordinaires.

Obtention de la base de fonctions correspondant aux modes propres de la poutre

On cherche les solutions $w(x, t)$ de l'équation (C.60) sous la forme :

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^n w_i(x, t) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \cdot \phi_i(x) \quad (\text{C.63})$$

Les dépendances spatiales (dans la direction x) et temporelles ont ici été dissociées. On choisit ici de prendre $\phi_i(x)$ sans dimension et $u_i(t)$ de la dimension d'une longueur (dans la direction y). On souhaite que l'ensemble des $\phi_i(x)$ forme une base orthonormée de vecteurs propres de l'opérateur $\frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4}$, n correspondant à la dimension de la base. Sur cet espace, la norme sera associée au produit scalaire :

$$\langle f_1(x) | f_2(x) \rangle = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot dx \quad (\text{C.64})$$

Les valeurs propres λ_i^4 de l'opérateur $\frac{\partial^4(\cdot)}{\partial x^4}$ satisfont :

$$\frac{\partial^4 \phi_i(x)}{\partial x^4} = \lambda_i^4 \cdot \phi_i(x) \quad (\text{C.65})$$

Les fonctions solutions de (C.65) sont de la forme :

$$\phi_i(x) = A_i \cdot \cos(\lambda_i x) + B_i \cdot \sin(\lambda_i x) + C_i \cdot \text{ch}(\lambda_i x) + D_i \cdot \text{sh}(\lambda_i x) \quad (\text{C.66})$$

Les constantes A_i , B_i , C_i et D_i peuvent s'exprimer en fonction de conditions aux limites de l'encastrement. Dans le cas d'une poutre encastree-encastree, on obtient le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} w(0, t) = 0 \\ w(L, t) = 0 \\ \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{array} \right. , \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_i(0) = 0 \\ \phi_i(L) = 0 \\ \left. \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \end{array} \right. , \quad \forall i \quad (\text{C.67})$$

$$\Leftrightarrow (\Sigma) : \left\{ \begin{array}{l} A_i + C_i = 0 \quad (a) \\ A_i \cdot \cos(\lambda_i \cdot L) + B_i \cdot \sin(\lambda_i \cdot L) + C_i \cdot \text{ch}(\lambda_i \cdot L) + D_i \cdot \text{sh}(\lambda_i \cdot L) = 0 \quad (b) \\ B_i + D_i = 0 \quad (c) \\ -A_i \cdot \sin(\lambda_i \cdot L) + B_i \cdot \cos(\lambda_i \cdot L) + C_i \cdot \text{sh}(\lambda_i \cdot L) + D_i \cdot \text{ch}(\lambda_i \cdot L) = 0 \quad (d) \end{array} \right. \quad (\text{C.68})$$

En réinjectant les conditions (a) et (c) dans les équations (b) et (d), le système d'équations se réduit à :

$$(\Sigma') : \left\{ \begin{array}{l} A_i \cdot \cos(\lambda_i \cdot L) + B_i \cdot \sin(\lambda_i \cdot L) - A_i \cdot \text{ch}(\lambda_i \cdot L) - B_i \cdot \text{sh}(\lambda_i \cdot L) = 0 \\ -A_i \cdot \sin(\lambda_i \cdot L) + B_i \cdot \cos(\lambda_i \cdot L) - A_i \cdot \text{sh}(\lambda_i \cdot L) - B_i \cdot \text{ch}(\lambda_i \cdot L) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{C.69})$$

soit :

$$(\Sigma') : \begin{pmatrix} \cos(\lambda_i \cdot L) - ch(\lambda_i \cdot L) & \sin(\lambda_i \cdot L) - sh(\lambda_i \cdot L) \\ -\sin(\lambda_i \cdot L) - sh(\lambda_i \cdot L) & \cos(\lambda_i \cdot L) - ch(\lambda_i \cdot L) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (C.70)$$

Pour ce système d'équations linéaires (Σ') :

- soit le déterminant associé à (Σ') est non nul et il existe une solution unique (ici $(A_i, B_i) = (0, 0), \forall i$);
- soit le déterminant est nul. Le système se ramène alors à une seule équation. Dans ce cas, soit il n'existe aucune solution, soit il existe une infinité de couples (A_i, B_i) solutions.

Le couple solution $(A_i, B_i) = (0, 0)$ ne convient pas car il ne permet pas de construire une base orthormée. On cherche donc les conditions nécessaires pour que le déterminant associé à (Σ') s'annule. Soit :

$$\begin{bmatrix} \left(\cos(\lambda_i \cdot L) - ch(\lambda_i \cdot L) \right) \cdot \left(\cos(\lambda_i \cdot L) - ch(\lambda_i \cdot L) \right) + \dots \\ - \left(\sin(\lambda_i \cdot L) - sh(\lambda_i \cdot L) \right) \cdot \left(-\sin(\lambda_i \cdot L) - sh(\lambda_i \cdot L) \right) \end{bmatrix} = 0 \quad (C.71)$$

Pour ce faire, les valeurs propres λ_i doivent donc satisfaire l'équation :

$$\cos(\lambda_i \cdot L) \cdot ch(\lambda_i \cdot L) = 1 \quad (C.72)$$

Cette équation admet une infinité de valeurs propres solutions λ_i , la base de vecteurs propres est donc infinie. Les valeurs propres λ_i peuvent être obtenues en résolvant l'équation de manière numérique. Pour chaque λ_i , le couple (A_i, B_i) solution de (Σ') respecte l'équation :

$$B_i = -\frac{\cos(\lambda_i \cdot L) - ch(\lambda_i \cdot L)}{\sin(\lambda_i \cdot L) - sh(\lambda_i \cdot L)} \cdot A_i \quad (C.73)$$

L'équation (C.66) devient :

$$\phi_i(x) = A_i \cdot \psi_i(x) \quad (C.74)$$

avec

$$\psi_i(x) = \cos(\lambda_i \cdot x) - \frac{\cos(\lambda_i \cdot L) - ch(\lambda_i \cdot L)}{\sin(\lambda_i \cdot L) - sh(\lambda_i \cdot L)} \cdot \sin(\lambda_i \cdot x) - ch(\lambda_i \cdot x) + \frac{\cos(\lambda_i \cdot L) + ch(\lambda_i \cdot L)}{\sin(\lambda_i \cdot L) - sh(\lambda_i \cdot L)} \cdot sh(\lambda_i \cdot x)$$

On peut vérifier que les vecteurs propres $\phi_i(x)$ forment bien une base orthogonale. Celle-ci est orthonormée si on prend :

$$A_i = (\langle \psi_i(x) | \psi_i(x) \rangle)^{-1/2} \quad (C.75)$$

Transformation de l'équation aux dérivées partielles (EDP) en un système d'équations aux dérivées ordinaires (EDO)

En utilisant les équations (C.63) et (C.65), on peut réécrire l'EDP (C.60) sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n \left[E \cdot I \cdot \lambda_i^4 \cdot w_i(x, t) - N(w) \cdot \frac{\partial^2 w_i(x, t)}{\partial x^2} + c \cdot \frac{\partial w_i(x, t)}{\partial t} + \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 w_i(x, t)}{\partial t^2} \right] = f(x, t) \quad (\text{C.76})$$

$$\sum_{i=1}^n \left[E \cdot I \cdot \lambda_i^4 \cdot \phi_i(x) \cdot u_i(t) - N(w) \cdot \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} \cdot u_i(t) + c \cdot \phi_i(x) \cdot \dot{u}_i(t) + \rho \cdot S \cdot \phi_i(x) \cdot \ddot{u}_i(t) \right] = f(x, t) \quad (\text{C.77})$$

où $\dot{u}_i(t)$ et $\ddot{u}_i(t)$ représentent les dérivées premières et secondes de $u_i(t)$ par rapport au temps.

En projetant (C.77) sur la base des vecteurs propres orthogonaux $\phi_i(x)$ (méthode de Galerkin), on obtient le système de n équations :

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \left[\begin{array}{l} E \cdot I \cdot \lambda_i^4 \cdot \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot u_i(t) + \dots \\ - N(w) \cdot \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} \cdot \phi_j(x) \cdot u_i(t) + \dots \\ + c \cdot \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot \dot{u}_i(t) + \dots \\ + \rho \cdot S \cdot \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot \ddot{u}_i(t) \end{array} \right] \cdot dx = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f(x, t) \cdot \phi_j(x) \cdot dx, \quad \forall j \leq n \quad (\text{C.78})$$

En décomposant les termes de l'intégrale et en utilisant le fait que $N(w)$ ne dépende pas explicitement de x , on obtient :

$$\sum_{i=1}^n \left[\begin{array}{l} E \cdot I \cdot \lambda_i^4 \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot \int_0^L \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot dx \right] \cdot u_i(t) + \dots \\ - N(w) \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot \int_0^L \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} \cdot \phi_j(x) \cdot dx \right] \cdot u_i(t) + \dots \\ + c \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot \int_0^L \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot dx \right] \cdot \dot{u}_i(t) + \dots \\ + \rho \cdot S \cdot \left[\frac{1}{L} \cdot \int_0^L \phi_i(x) \cdot \phi_j(x) \cdot dx \right] \cdot \ddot{u}_i(t) \end{array} \right] = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f(x, t) \cdot \phi_j(x) \cdot dx, \quad \forall j \leq n \quad (\text{C.79})$$

En utilisant l'orthonormalité de la base, on obtient :

$$\left[\begin{array}{l} E \cdot I \cdot \lambda_j^4 \cdot u_j(t) + c \cdot \dot{u}_j(t) + \rho \cdot S \cdot \ddot{u}_j(t) + \dots \\ - N(w) \cdot \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} \middle| \phi_j(x) \right\rangle \cdot u_i(t) \end{array} \right] = \langle f(x, t) | \phi_j(x) \rangle, \quad \forall j \leq n \quad (\text{C.80})$$

Ce système d'équations peut se mettre sous la forme matricielle :

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U}(t) + \tilde{\mathbf{N}}(\mathbf{U}, t) + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{U}, t) \quad (\text{C.81})$$

avec

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = E \cdot I \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & \lambda_n^4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = c \cdot \mathbf{I}_n, \quad \mathbf{M} = \rho \cdot S \cdot \mathbf{I}_n \quad (\text{C.82})$$

avec \mathbf{I}_n , la matrice identité de dimension n .

$$F(U, t) = \begin{pmatrix} \langle f(x, t) | \phi_1(x) \rangle \\ \langle f(x, t) | \phi_2(x) \rangle \\ \vdots \\ \langle f(x, t) | \phi_n(x) \rangle \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{N}(U, t) = N(w, t) \cdot \mathbf{G} \cdot U(t), \quad (\text{C.83})$$

$$\text{où} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} \middle| \phi_1(x) \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial^2 \phi_n(x)}{\partial x^2} \middle| \phi_1(x) \right\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left\langle \frac{\partial^2 \phi_1(x)}{\partial x^2} \middle| \phi_n(x) \right\rangle & \dots & \left\langle \frac{\partial^2 \phi_n(x)}{\partial x^2} \middle| \phi_n(x) \right\rangle \end{pmatrix} \quad (\text{C.84})$$

Le nombre d'opérations pour le calcul numérique des coefficients de cette matrice peut être réduit en notant que la matrice est symétrique. En effet, en utilisant l'intégration par partie et en tenant compte des conditions aux limites de l'encastrement, on montre que :

$$\forall i, j \leq n, \quad \frac{1}{L} \cdot \int_0^L \frac{d^2 \phi_i(x)}{dx^2} \cdot \phi_j(x) \cdot dx = -\frac{1}{L} \cdot \int_0^L \frac{d\phi_i(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi_j(x)}{dx} \cdot dx \quad (\text{C.85})$$

Le vecteur $N(U, t)$ peut être explicité en fonction du vecteur $U(t)$ et de la matrice \mathbf{G} . Pour ce, on peut exprimer la tension $N(w, t)$ en fonction de l'allongement de la poutre :

$$N(w, t) = E \cdot S \cdot \frac{\Delta L(t)}{L} + N_0 \quad (\text{C.86})$$

avec

$$L + \Delta L(t) = \int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dw(x, t)}{dx} \right)^2} \cdot dx \quad (\text{C.87})$$

Pour un faible allongement, on obtient :

$$L + \Delta L(t) = \int_0^L \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{dw(x, t)}{dx} \right)^2 \right] \cdot dx \Leftrightarrow \Delta L(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \left(\frac{dw(x, t)}{dx} \right)^2 \cdot dx \quad (\text{C.88})$$

L'équation (C.86) devient donc :

$$N(w, t) - N_0 = \frac{E \cdot S}{2 \cdot L} \cdot \int_0^L \left(\frac{dw(x, t)}{dx} \right)^2 \cdot dx = \frac{E \cdot S}{2 \cdot L} \cdot \int_0^L \left(\sum_{i=1}^n u_i(t) \cdot \frac{d\phi_i(x)}{dx} \right)^2 \cdot dx \quad (\text{C.89})$$

$$N(w, t) - N_0 = \frac{E \cdot S}{2 \cdot L} \cdot \int_0^L \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i(t) \cdot \frac{d\phi_i(x)}{dx} \cdot \frac{d\phi_j(x)}{dx} \cdot u_j(t) \cdot dx \quad (\text{C.90})$$

Soit :

$$N(w, t) = \frac{E \cdot S}{2} \cdot U^T(t) \cdot \mathbf{G} \cdot U(t) + N_0 \quad (\text{C.91})$$

On trouve alors pour $\tilde{N}(U, t)$ la forme matricielle :

$$\tilde{N}(U, t) = \frac{E \cdot S}{2} \cdot \left(U^T(t) \cdot \mathbf{G} \cdot U(t) + N_0 \right) \cdot \mathbf{G} \cdot U(t) \quad (\text{C.92})$$

L'équation complète de la dynamique de la poutre sous forme matricielle devient :

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{U}(t) + \mathbf{C} \cdot \dot{U}(t) + (\mathbf{K} + N_0 \cdot \mathbf{G}) \cdot U(t) + \frac{E \cdot S}{2} \cdot \left(U^T(t) \cdot \mathbf{G} \cdot U(t) \right) \cdot \mathbf{G} \cdot U(t) = F(U, t) \quad (\text{C.93})$$

Dans cette équation le premier terme du membre de droite correspond à l'inertie de la poutre. Le deuxième terme correspond aux forces dissipatives (éventuellement non linéaires dans un modèle plus complet $\mathbf{C} = \mathbf{C}(U, \dot{U}, t)$), le troisième aux forces de rappel linéaires (le terme N_0 pouvant être dépendant du temps, notamment dans le cas des accéléromètres vibrants). Le dernier terme correspond à une force de rappel non linéaire. L'influence de celui-ci sera détaillée plus loin dans le cas où l'on ne considère que le premier mode.

C.6 Modélisation approchée pour l'obtention de formules analytiques pour le premier mode

Equation du mouvement associée au premier mode

Dans le paragraphe précédent, les valeurs propres λ_i sont obtenues de manière numérique. Le modèle résultant de l'application de la méthode de Galerkin est donc numérique, puisque la base des fonctions est exprimée en fonction des λ_i . Dans le cas où l'on se satisfait d'un modèle représentatif du premier mode uniquement, il est possible d'obtenir un modèle analytique approximatif. En effet, on peut approximer la déformée associée au premier mode en cherchant une fonction $\phi_1(x)$ de la forme :

$$\phi_1(x) = A\psi_1(x) = A \cdot (1 - \cos(2 \cdot \pi \cdot x/L)) \quad (\text{C.94})$$

avec

$$A = \sqrt{\langle \psi_1(x) | \psi_1(x) \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (\text{C.95})$$

En déroulant le calcul décrit précédemment, on obtient pour le premier mode [96] :

$$\left[\begin{array}{c} \ddot{u}_1(t) + \frac{c}{\rho \cdot S} \cdot \dot{u}_1(t) + \dots \\ + \frac{E \cdot I}{3 \cdot \rho \cdot S} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \right)^4 \cdot \left(1 + \frac{N_0 \cdot L^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I} \right) \cdot u_1(t) + \dots \\ + \frac{E}{18 \cdot \rho} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \right)^4 \cdot u_1^3(t) \end{array} \right] = \frac{1}{\rho \cdot S} \langle f(x, t) | \phi_1(x) \rangle \quad (\text{C.96})$$

avec

$$\begin{aligned} \langle f(x,t) | \phi_1(x) \rangle &= \frac{1}{L} \cdot \\ \int_0^L f(x,t) \cdot \phi_1(x) \cdot dx, \\ w(x,t) &\simeq w_1(x,t) = u_1(t) \cdot \phi_1(x) \\ \text{et } \phi_1(x) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.97})$$

Expression du second membre de (C.96) dans le cas d'une force ponctuelle exercée au point milieu

On considère ici le second membre de l'équation (C.96) :

$$\langle f(x,t) | \phi_1(x) \rangle = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L f(x,t) \cdot \phi_1(x) \cdot dx \quad (\text{C.98})$$

La force ponctuelle s'écrit sous la forme :

$$f(x,t) = F(t) \cdot \delta(x - L/2) \quad (\text{C.99})$$

On obtient :

$$\langle f(x,t) | \phi_1(x) \rangle = \frac{1}{L} \cdot \int_0^L F(t) \cdot \delta(x - L/2) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(1 - \cos \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{L} \right) \right) \cdot dx \quad (\text{C.100})$$

$$\langle f(x,t) | \phi_1(x) \rangle = \frac{2}{L} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot F(t) \quad (\text{C.101})$$

Modèle 1D équivalent masse ressort

En substituant (C.101) dans (C.96), on obtient :

$$\left[\begin{array}{l} \ddot{u}_1(t) + \frac{c}{\rho \cdot S} \cdot \dot{u}_1(t) + \frac{E}{18 \cdot \rho} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \right)^4 \cdot u_1^3(t) + \dots \\ + \frac{E \cdot I}{3 \cdot \rho \cdot S} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \right)^4 \cdot \left(1 + \frac{N_0 \cdot L^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I} \right) \cdot u_1(t) \end{array} \right] = \frac{2}{\rho \cdot S \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot F(t) \quad (\text{C.102})$$

Soit $z_M(t)$ le déplacement du point milieu de la poutre :

$$z_M(t) = u_1(t) \cdot \phi_1(L/2) = 2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot u_1(t) ; \quad u_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot z_M(t) \quad (\text{C.103})$$

Soit en remplaçant dans (C.102) :

$$\left[\begin{array}{l} \ddot{z}_M(t) + \frac{c}{\rho \cdot S} \cdot \dot{z}_M(t) + \frac{E}{18 \cdot \rho} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \right)^4 \cdot \frac{3}{8} \cdot z_M^3(t) + \dots \\ + \frac{E \cdot I}{3 \cdot \rho \cdot S} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi}{L} \right)^4 \cdot \left(1 + \frac{N_0 \cdot L^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I} \right) \cdot z_M(t) \end{array} \right] = \frac{1}{\rho \cdot S \cdot L} \cdot \frac{8}{3} \cdot F(t) \quad (\text{C.104})$$

$$m \cdot \ddot{z}_M(t) + L \cdot c \cdot \dot{z}_M(t) + \frac{(2 \cdot \pi)^4 \cdot E \cdot I}{3 \cdot L^3} \cdot \left(1 + \frac{N_0 \cdot L^2}{4 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I} \right) \cdot z_M(t) + \frac{E \cdot S}{3} \cdot \frac{\pi^4}{L^3} \cdot z_M^3(t) = \frac{8}{3} \cdot F(t) \quad (\text{C.105})$$

Soit, pour $N_0 = 0$:

$$m \cdot \ddot{z}_M(t) + c_{eq} \cdot \dot{z}_M(t) + k \cdot z_M(t) + k_{nl} \cdot z_M^3(t) = \frac{8}{3} \cdot F(t) \quad (\text{C.106})$$

avec

$$k = \frac{(2 \cdot \pi)^4 \cdot E \cdot I}{3 \cdot L^3} ; \quad k_{nl} = \frac{E \cdot S}{3} \cdot \frac{\pi^4}{L^3} \quad (\text{C.107})$$

Modèle 1D équivalent masse-ressort avec masse supposée ponctuelle au point milieu

On considère une masse ponctuelle m_E centrée en $L/2$, figure C.5.

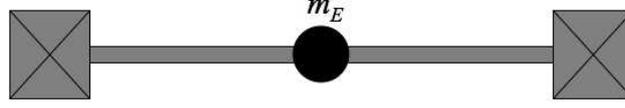


FIG. C.5 – Poutre encadrée-encadrée avec masse ponctuelle centrée

L'équation masse-ressort-amortissement peut être obtenue de deux manières. Soit on considère que l'action de la masse m_E est équivalente à une force $F_{inertie}(t) = -m_E \cdot \ddot{z}_M(t)$. Dans ce cas, on remplace $F(t)$ dans (C.106) par $F'(t) = F(t) - m_E \cdot \ddot{z}_M(t)$ et on obtient :

$$\left(m + \frac{8}{3} \cdot m_E\right) \cdot \ddot{z}_M(t) + c_{eq} \cdot \dot{z}_M(t) + k \cdot z_M(t) + k_{nl} \cdot z_M^3(t) = \frac{8}{3} \cdot F(t) \quad (\text{C.108})$$

Soit on considère une masse volumique non constante $\rho'(x) = \rho + m_E/S \cdot \delta(x - L/2)$ et, dans le déroulement du calcul, on corrige le terme d'inertie à partir de l'équation (C.79). On retrouve alors le même résultat.

C.7 Détail de la structure mécanique étudiée

C.7.1 Présentation et calculs préliminaires

La figure C.6 présente le détail de la structure mécanique. Le descriptif des paramètres est donné dans le tableau C.4.

La masse de la navette vaut :

$$m_S = \rho \cdot T \cdot (L_S \cdot W_S + L_E \cdot (W_{E,act} + W_{E,lect}) + n_{act} \cdot L_{D,act} \cdot W_{D,act} + n_{lect} \cdot L_{D,lect} \cdot W_{D,lect}) \quad (\text{C.109})$$

Pour que la structure soit symétrique d'un point de vue masse, on impose que la masse suspendue de la poutre (électrode 1) coté actionnement et celle coté lecture soient toutes les deux égales à une masse m_E . Soit :

$$m_E = m_S/2 \quad (\text{C.110})$$

et la condition :

$$L_E \cdot W_{E,act} + n_{act} \cdot L_{D,act} \cdot W_{D,act} = L_E \cdot W_{E,lect} + n_{lect} \cdot L_{D,lect} \cdot W_{D,lect} \quad (\text{C.111})$$

La surface de recouvrement S_{12} entre l'électrode 1, coté lecture, et l'électrode 2 vaut :

$$S_{12} = n_{lect} \cdot L_{rec,lect} \cdot T \quad (\text{C.112})$$

La surface de recouvrement $S_{13}(x)$ entre l'électrode 1, coté actionnement, et l'électrode 2 vaut :

$$S_{13}(x) = n_{act} \cdot L_{rec,act}(x) \cdot T \quad (\text{C.113})$$

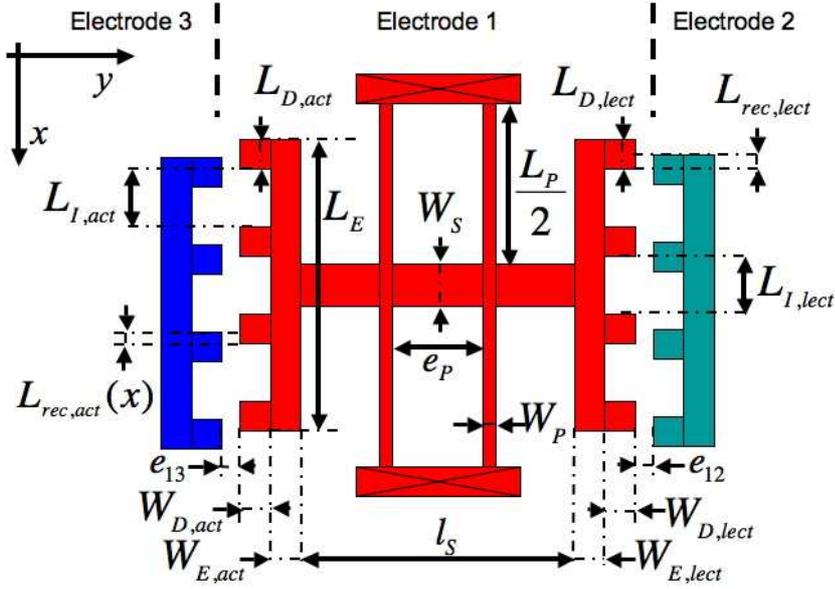


FIG. C.6 – Schéma détaillé de la structure mécanique. Les dimensions ne sont pas à l'échelle et les nombres n_{act} et n_{lect} de doigts des électrodes d'actionnement et de lecture ne sont pas définis. Sur ce schéma $n_{act}=n_{lect}=4$.

C.7.2 Modèle à une dimension

On considère les masses des électrodes m_E comme des masses ponctuelles ramenées aux points milieux des deux bras de suspension (figure C.7, hypothèse 1). La somme des forces électrostatiques $F_{exc}(t)$ exercées par l'électrode fixe et l'électrode mobile est également considérée comme une force ponctuelle ramenée au centre de la structure. On simplifie encore le schéma en le remplaçant par une poutre équivalente unique sur laquelle s'exerce la moitié de la force électrostatique (figure C.7, hypothèse 2).

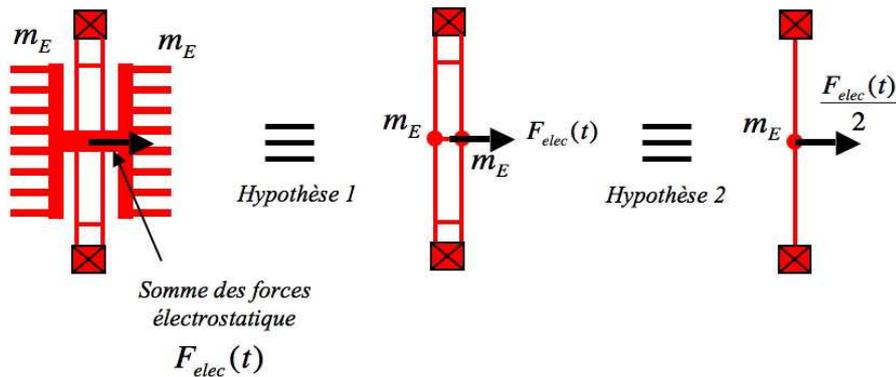


FIG. C.7 – Obtention d'un modèle approché de la dynamique du résonateur

Soit en reprenant l'équation (C.108) :

$$\left(m + \frac{8}{3} \cdot m_E\right) \cdot \ddot{z}_M(t) + c_{eq} \cdot \dot{z}_M(t) + k \cdot z_M(t) + k_{nl} \cdot z_M^3(t) = \frac{4}{3} \cdot F_{exc}(t) \quad (C.114)$$

C.7.3 Exemple de choix de paramètres

TAB. C.4 – Descriptif des paramètres géométriques

Symbole	Désignation	Valeur
<u>Paramètres du résonateur</u>		
T	Epaisseur de la structure	$8 \mu m$
L_P	Longueur d'une poutre du résonateur	$300 \mu m$
W_P	Largeur des poutres du résonateur	$670 nm$
e_P	Distance inter-poutre	$74 \mu m$
L_S	Longueur de la navette	$100 \mu m$
W_S	Largeur de la navette	$20 \mu m$
L_E	Longueur d'une électrode de la poutre	$298 \mu m$
x	Position de l'électrode mobile (électrode 3 / masse sismique) par rapport à sa position de référence	
$W_{E,act}$	Largeur de l'électrode d'actionnement	$10 \mu m$
$L_{D,act}$	Longueur d'un doigt de l'électrode d'actionnement	$12 \mu m$
$W_{D,act}$	Largeur d'un doigt de l'électrode d'actionnement	$6 \mu m$
n_{act}	Nombre de doigts de l'électrode d'actionnement	12
$L_{ref,act}$	Longueur de recouvrement entre un doigt de l'électrode d'actionnement coté masse sismique et un doigt de l'électrode d'actionnement coté poutre pour $x = 0$	$8 \mu m$
$W_{E,lect}, \dots$	<i>Valeurs identiques pour les paramètres de l'électrode coté lecture</i>	
$e_{12} = e$	Entrefer entre électrode de la poutre et électrode fixe	$3 \mu m$
$e_{13} = e$	Entrefer entre électrode de la poutre et électrode mobile	$3 \mu m$
<u>Paramètres de la masse sismique</u>		
C_{MS}	Longueur d'un coté de la masse sismique	$920 \mu m$
$W_{P,MS}$	Largeur poutre de suspension masse sismique	$1,2 \mu m$
$L_{P,MS}$	Longueur poutre de suspension masse sismique	$290 \mu m$
$W_{E,act,MS}, \dots$	<i>Valeurs des paramètres des doigts de la masse sismique (électrode mobile) identiques à celles de l'électrode de la poutre du coté actionnement</i>	
$X_{MS/Res}$	Décalage selon l'axe (Ox) entre les doigts de la masse sismique et ceux de l'électrode du résonateur pour $x = 0$	$4 \mu m$
<u>Paramètres de l'électrode fixe</u>		
$W_{E,act,EF}, \dots$	<i>Valeurs des paramètres des doigts de l'électrode fixe identiques à celles de l'électrode de la poutre du coté actionnement</i>	
$X_{EF/Res}$	Décalage selon l'axe (Ox) entre les doigts de l'électrode fixe et ceux de l'électrode du résonateur	$4 \mu m$

TAB. C.5 – Valeurs électriques/mécaniques calculées ou imposées

Symbole	Désignation	Valeur
k_{MS}	Raideur équivalente au modèle à 1 dimension de la dynamique de la masse sismique	$0,39 N \cdot m^{-1}$
m_{MS}	Masse de la masse sismique	$15,6 \cdot 10^{-9} kg$
$f_{0,MS}$	Fréquence de résonance de la masse sismique	$788 Hz$
FS_{Acc}	Pleine échelle en accélération	$10 g$
x_{max}	Déplacement maximal de la masse sismique	$4 \mu m$
V_{dd}	Tension d'alimentation	$3,3 Volts$
$V_0/2$	Tension de polarisation en sortie de comparateur	$1,64 V$
V_{act}	Tension d'actionnement	$0,1 Volts$
$k_{mec,1}$	Coefficient de la composante linéaire de la force de rappel mécanique	$0,66 N \cdot m^{-1}$
$k_{mec,3}$	— — — — — non linéaire de la force de rappel mécanique	$1,1 \cdot 10^{12} N \cdot m^{-3}$
$k_{elec,1}$	— — — — — linéaire de la force de rappel électrostatique	$1,4 \cdot 10^{-3} N \cdot m^{-1}$
$k_{elec,3}$	— — — — — non linéaire de la force de rappel électrostatique	$3 \cdot 10^8 N \cdot m^{-3}$
m_{eq}	Masse suspendue équivalente au modèle 1 dimension du résonateur	$243 \cdot 10^{-12} kg$
f_0	Fréquence de résonance du résonateur linéaire équivalent ($\omega_0/2/\pi$)	$8,26 kHz$
Q	Facteur de qualité du résonateur	$2\,500 S. U.$
y_{max}	Amplitude maximale des oscillations du résonateur	$800 nm$
y_{ref}	Amplitude des oscillations du résonateur en l'absence d'accélération	$600 nm$
C_{ref}	Capacité de lecture C_{12} pour $y = 0$	$2,25 fF$
ΔC_{max}	variation maximale de la capacité de lecture	$\pm 0,151 fF$
a_{ref}	Amplitude normalisée des oscillations pour $x = 0$	$0,2 S. U.$
Δp_{max}	Variation maximale de l'entrée p	$0,5 S. U.$
Δa_{max}	Variation maximale de l'amplitude a	$0,0666 S. U.$
$\varepsilon \cdot \alpha$	Paramètre relatif à la non-linéarité de l'équation sans dimension	$15 S. U.$
$\varepsilon \cdot \mu$	Paramètre relatif à l'amortissement de l'équation sans dimension	$2 \cdot 10^{-4} S. U.$
β_a	Coefficient lié à la dynamique de la réponse en amplitude	$1,486 S. U.$
β_p	Coefficient lié à la dynamique de la réponse en amplitude	$0,994 S. U.$

Références bibliographiques

Bibliographie personnelle

- [1] C. Condemine, N. Delorme, J. Soen, J. Durupt, J. P. Blanc, M. Belleville, and A. Besancon-Voda, *A 0.8ma 50hz 15 bits snr $\delta\sigma$ closed-loop 10g accelerometer using an 8th-order digital compensator*, ISSCC'05 - The 2005 IEEE International on Solid-State Circuits Conference - Digest of Technical Papers, 2005, pp. 248 – 249.
- [2] M. Pelissier, D. Morche, and J. Soen, *A new pulse detector based on super-regeneration for UWB low power applications*, The 2006 IEEE International Conference on Ultra-Wideband. Waltham, MA, USA, September, 2006, pp. 639–644.
- [3] J. Soen, A. Voda, and C. Condemine, *Control strategy for measurement performance enhancement of a micromachined accelerometer*, 16th IFAC World Congress, Praha, 2005.
- [4] ———, *Controller design for a closed-loop micromachined accelerometer*, Control Engineering Practice **15** (2007), no. 1, 57–68.

Bibliographie de la première partie

Bibliographie du chapitre 1

- [5] J. C. Courtier and P. Giacomo, *Traité Mesures et Contrôle : Vocabulaire de la mesure (R113)*, Techniques de l'Ingénieur (2003), 1–15.
- [6] M. Elwenspoek and R. Wiegerink, *Mechanical microsensors*, no. ISBN-3-540-67582-5, Springer, 2001.
- [7] IEEE, *IEEE std 528-2001 - standard for inertial sensor terminology*, IEEE Aerospace and Electronic Systems Society, 2001.
- [8] S. D. Senturia, *Microsystem design*, no. ISBN-978-0-7923-7246-2, Kluwer Academic Publishers, 2001.

Bibliographie de la deuxième partie

Bibliographie du chapitre 2

- [9] R. Y. Chiang and M. G. Safonov, *Robust control toolbox - user's guide*, The MathWorks, 1998.
- [10] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum, *Feedback control theory*, Maxwell Macmillan Intern. Editions, 1992.
- [11] J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, and B. Francis, *State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems*, IEEE Transactions on Automatic Control **34** (1989), 831–847.
- [12] P. V. N. Gade, *Performance enhancement and stability robustness of wing/store flutter suppression system*, Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1998.
- [13] R. E. Kalman, *A new approach to linear filtering and prediction problems*, Journal of Basic Engineering, ASME Transactions, Part D **82** (1960), 35–45.
- [14] I. D. Landau, http://landau-bookic.lag.ensieg.fr/french/index_fr_fonctions.php (ppmaster.m).
- [15] I. D. Landau, R. Lozano, and M. M'Saad, *Adaptive control*, Springer-Verlag, London, 1997.
- [16] Ioan Doré Landau, *Commande des systèmes - conception, identification et mise en œuvre*, vol. ISBN 2-7462-0478-9, Hermès Science, 2002.
- [17] A. J. Laub, M. T. Heath, C. C. Paige, and R. C. Ward, *Computation of system balancing transformations and other applications of simultaneous diagonalization algorithms*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC** (1987), no. 32, 115–122.
- [18] L. Ljung, *System Identification - Theory for the User*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2nd edition, 1999.
- [19] L. Ljung and T. Glad, *Modeling of dynamic systems*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1994.
- [20] W. M. Lu, K. Zhou, and J. C. Doyle, *Stabilisation of uncertain linear systems : An LFT approach*, IEEE Transactions on Automatic Control **41** (1996), no. 1.
- [21] B. Moore, *Principal component analysis in linear systems : Controllability, observability, and model reduction*, IEEE Transactions on Automatic Control **AC** (1981), no. 26, 17–31.

- [22] R. Pintelon and J. Schoukens, *System identification : A frequency domain approach*, no. ISBN 0-7803-6000-1, IEEE Press, Piscataway, NJ, 2001.
- [23] D. Simon, *Optimal state estimation : Kalman, \mathcal{H}_∞ , and nonlinear approaches*, no. ISBN-10 : 0471708585, Wiley-Interscience, 2006.
- [24] S. Skogestad and I. Postlethwaite, *Multivariable feedback control : Analysis and design*, vol. ISBN-13 978-0-470-01167-6 (HB), John Wiley and Sons, Ltd, 2005.
- [25] T. Söderström and P. Stoica, *System identification*, Prentice Hall International, London, 1989.
- [26] R. F. Stengel, *Optimal control and estimation*, Dover Publications, New York, 1994.
- [27] K. Zhou, J. Doyle, and K. Glover, *Robust and optimal control*, Prentice-Hall International, Inc., 1995.

Bibliographie du chapitre 3

- [28] C. Acar and A. M. Shkel, *Nonresonant micromachined gyroscopes with structural mode-decoupling*, IEEE Sensors Journal **3** (2003), no. 4, 497–506.
- [29] B. E. Boser and R. T. Howe, *Surface micromachined accelerometers*, IEEE Journal Of Solid-State Circuits **31** (1996), no. 3, 366–375.
- [30] E. Colinet, *Nouvelles architectures et méthodes de conception de microsystèmes $\Sigma\Delta$ et de microsystèmes résonants*, Ph.D. thesis, Université Paris XI - Orsay, 2005.
- [31] E. Colinet, J. Juillard, S. Guessab, and R. Kielbasa, *Resolution enhancement of a sigma-delta micro-accelerometer using signal prediction*, Proceedings of the 2004 International Conference on MEMS, NANO and Smart Systems (ICMENS'04), 2004, pp. 409–413.
- [32] C. Condemine, *Contributions à la conception de microsystèmes sigma-delta asservis*, Ph.D. thesis, INSA Lyon, 2001.
- [33] N. Delorme, M. Belleville, and J. Chilo, *Inductance and capacitance analytic formulas for ulse interconnects*, Electronics letters **32** (1996), no. 11, 996–997.
- [34] A. Deval and A. Ivon, *Traité Mesures et Contrôle : Accélération (R1812)*, Techniques de l'Ingénieur (1992).
- [35] Y. Dong, M. Kraft, C. Gollasch, and W. Redman-White, *A high-performance accelerometer with a fifth-order sigma-delta modulator*, J. Micromech. Microeng. **15** (2005), S22–S29.
- [36] A. Farga Marquès, R. Castellò Costa, and A. M. Shkel, *Modelling the electrostatic actuation of MEMS : state of the art 2005*, Tech. report, University of California at Irvine, 2005.
- [37] T. B. Gabrielson, *Mechanical-thermal noise in micromachined acoustic and vibration sensors*, IEEE Transactions on electron devices **40** (1993), no. 5, 903–909.
- [38] R. K. Gupta and S. D. Senturia, *Pull-in time dynamics as a measure of absolute pressure*, Proc. of the IEEE., 10th Intern. Workshop on MEMS (1997), 290–294.
- [39] M. Handtmann, *Dynamische regelung mikroelektromechanischer systeme (mems) mit hilfe kapazitiver signalwandlung und kraftrückkoppelung*, Ph.D. thesis, Technischen Universität München, 2004.
- [40] M. Handtmann, R. Aigner, A. Meckes, and G. K. Wachutka, *Sensitivity enhancement of mems inertial sensors using negative springs and active control*, Sensors and Actuators A (2002), no. 97-98, 153–160.
- [41] R. Houlihan and M. Kraft, *Modelling squeeze film effects in a mems accelerometer with a levitated proof mass*, J. Micromech. Microeng. **15** (2005), 893–902.
- [42] X. Jiang, *Capacitive position-sensing interface for micromachined inertial sensors*, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 2003.

- [43] V. Kaajakari, *Pull-in voltage in electrostatic microactuators*, <http://www.kaajakari.net/>
- [44] T. Kajita, U. K. Moon, and G. C. Temes, *A noise shaping accelerometer interface circuit for two-chip implementation*, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Budapest, Hungary, May 21-23, 2001, pp. 1581–1586.
- [45] M. Kraft, *Closed-loop digital accelerometer employing oversampling conversion*, Ph.D. thesis, Coventry University, School of Engineering, UK., 1997.
- [46] H. Kulah, J. Chae, N. Yazdi, and K. Najafi, *Noise analysis and caractérisation of a sigma-delta capacitive microaccelerometer*, IEEE Journal of Solid-State Circuits **41** (2006), no. 2, 352–361.
- [47] H. Kulah and K. Najafi, *A low noise switched-capacitor interface circuit for sub-micro gravity resolution micromachined accelerometers*, ESSCIRC, 2002.
- [48] T. A. Lauderdale and O. M. O'Reilly, *Modeling MEMS resonators with rod-like components accounting for anisotropy, temperature, and strain dependencies*, International Journal of Solids and Structures **42** (2005), 6523–6549.
- [49] M. A. Lemkin, *Micro accelerometer design with digital feedback control*, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 1997.
- [50] LETI-DSIS-SCME, *Rapport interne*, Tech. report, CEA-LETI, 2005.
- [51] C. H. Liu and T. W. Kenny, *A high-precision, wide-bandwidth micromachined tunneling accelerometer*, Journal of MicroElectroMechanical Systems **10** (2001), no. 3, 425–433.
- [52] C. H. Liu, H. K. Rockstad, and T. W. Kenny, *Robust controller design via μ -synthesis for high-performance micromachined tunneling accelerometer*, Proceedings of the 1999 American Control Conference, San Diego, June 1999, pp. 247–252.
- [53] P. Mohanty, D. A. Harrington, K. L. Ekinci, Y. T. Yang, M. J. Murphy, and M. L. Roukes, *Intrinsic dissipation in high-frequency micromechanical resonators*, Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics) **66** (2002), no. 8, 085416 – 15.
- [54] M. Napoli, B. Bamieh, and K. L. Turner, *A capacitive microcantilever : Modelling, validation, and estimation using current measurements*, Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control **126** (2004), 319–326.
- [55] M. Napoli, C. Olroyd, K. L. Turner, and B. Bamieh, *A novel observer based sensing scheme for the displacement of electrostatically actuated microcantilevers*, IEEE Sensors 2004, The 3rd IEEE Conference on Sensors, Vienna, Austria, 24-27 Oct, 2004.
- [56] C. T. C. Nguyen, *Micromechanical signal processor*, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 1994.
- [57] S. R. Norsworthy, R. Schreier, and G. C. Temes, *Delta-sigma data converters : Theory, design and simulation.*, vol. ISBN 0-7803-1045-4, Wiley - IEEE Press, 1996.

- [58] J. P. Pérez, *Mécanique - Fondements et applications*, no. ISBN : 2-225-82916-0, Masson, 1997.
- [59] J. C. Radix, *Traité Mesures et Contrôle : Accéléromètres inertiels (R1930)*, Techniques de l'Ingénieur.
- [60] S. Reid, G. Cagnoli, D. R. M. Crooks, J. Hough, P. Murray, S. Rowan, M. M. Fejer, R. Route, and S. Zappe, *Mechanical dissipation in silicon flexures*, 22nd Texas Symposium on Relativistic Astrophysics at Stanford University, Dec. 13-17, vol. 1222, 2004, pp. 1–6.
- [61] A. Tesfaye, H. S. Lee, and M. Tomizuka, *A sensitivity optimization approach to design of a disturbance observer in digital motion control systems*, IEEE/ASME Transactions on mechatronics **5** (2000), no. 1, 32–38.
- [62] M. Tomizuka and C. C. Wang, *Design of robustly stable disturbance observers based on closed-loop consideration using \mathcal{H}_∞ optimization and its applications to motion control systems*, Proceeding of the 2004 American Control Conference, Boston, Massachusetts June 30 -July 2, 2004, pp. 3764–3769.
- [63] F. M. White, *Viscous fluid flow*, 2nd edition, MacGraw-Hill, 1991.
- [64] L. Yao, M. Steyaert, and W. Sansen, *1V 88dB 20kHz modulator in 90nm CMOS*, ISSC Digest of technical papers, February, 2004, pp. 80–81.

Bibliographie de la troisième partie

Bibliographie du chapitre 4

- [65] E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, and M. I. Younis, *Dynamics of an electrically actuated resonant microsensors*, Proc. of the Int.conf on MEMS, Nano and Smart Systems(ICMENS'03) (Computer Society, ed.), 2003.
- [66] J. S. Aldridge and A. N. Cleland, *Noise-enabled precision measurements of a duffing nanomechanical resonator*, Physical review letters **94** (2005), no. 156403, 1–4.
- [67] R. Almog, S. Zaitec, and E. Buks, *High intermodulation gain in a micromechanical duffing resonator*, arXiv :con-mat/0511587 v1 23 Nov 2005 (2005), 1–3.
- [68] R. Baskaran and K. L. Turner, *Mechanical domain coupled mode parametric resonance and amplification in a torsional mode micro electro mechanical oscillator*, Journal of Microelectromechanical systems **13** (2003), 701 – 707.
- [69] C. Cruz-Hernández and H. Serrano-Guerrero, *Cryptosystems based on synchronized Chua's circuits*, 16th IFAC World Congress, Praha, 2005, 2005.
- [70] T. L. Daniel and M. S. Tu, *Animal movement, mechanical tuning and coupled systems*, The Journal of Experimental Biology **202** (1999), 3415–3421.
- [71] F. Davide, M. Andersson, M. Holmberg, and I. Lundström, *Chaotic chemical sensing*, IEEE Sensors Journal **2** (2002), no. 6, 656–662.
- [72] G. Duffing, *Erzwungene schwingungen bei veränderlicher eigenfrequenz und ihre technische bedeutung*, Fried. Wieweg & Sohn, Braunschweig, 1918.
- [73] V. M. Eguiluz, Y. Ospeck, A. J. Hudspeth, and M. O. Magnasco, *Essential nonlinearities in hearing*, Physical Review Letters **84** (2000), no. 22, 5232–5235.
- [74] F. Filhol, E. Defaÿ, C. Divoux, C. Zinck, and M. T. Delaye, *Resonant micro-mirror excited by a thin-film piezoelectric actuator for fast optical beam scanning*, Sensors and Actuators A : Physical **123-124** (2005), 483 – 489.
- [75] G. M. Gale, F. Hache, and M. Cavallari, *Broad-bandwidth parametric amplification in the visible : femtosecond experiments and simulations*, Selected Topics in Quantum Electronics, IEEE Journal of **4** (1998), no. 2, 224 – 229, 1077-260X.

- [76] D. S. Greywall, B. Yurke, P. A. Busch, A. N. Pargellis, and R. L. Willet, *Evading amplifier noise in nonlinear oscillators*, Physical Review Letter **72** (1994), no. 19, 2992–2995.
- [77] A. Husain, J. Hone, H. W. Ch. Postma, X. M. H. Huang, T. Drake, M. Barbic, A. Scherer, and M. L. Roukes, *Nanowire-based very-high-frequency electromechanical resonator*, Applied Physics Letters **83** (2003), no. 6, 1240 – 1242.
- [78] A. Kern and R. Stoop, *Nonlinear dynamics of cochlear information processing*, NDES, 2004, pp. 190–193.
- [79] S. Krylov, I. Harari, and Y. Cohen, *Stabilization of electrostatically actuated microstructures using parametric excitation*, Journal of Microelectromechanical Systems (2005), no. 15, 1188–1204.
- [80] S. Lee and C. T. C. Nguyen, *Influence of automatic level control on micromechanical resonator oscillator phase noise*, IEEE International Frequency Control Symposium and PDA Exhibition, jointly with the 17th European Frequency and Time Forum (2003), 341–349.
- [81] R. Lifshitz and M. C. Cross, *Response of parametrically driven nonlinear coupled oscillators with application to micromechanical and nanomechanical resonator arrays*, Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics) **67** (2003), no. 13, 134302 – 12.
- [82] Y. W. Lin, S. Lee, Z. Ren, and C. T. C. Nguyen, *Series-resonant micromechanical resonator oscillator*, IEDM 03, 2003, pp. 961–964.
- [83] N. Mahmoudian, M. Rastgaar Aagaah, G. Nakhaie Jazar, and M. Mahinfalah, *Dynamics of a Micro Electro Mechanical System (mems)*, International Conference on MEMS, NANO and Smart Systems (ICMEMS 2004), 2004.
- [84] S. Mojon, *Using nonlinear oscillators to control the locomotion of a simulated biped robot*, Master’s thesis, EPFL - BIRG, 2004.
- [85] L. Moreau, E. Sontag, and M. Arcak, *Feedback tuning of bifurcations*, Systems and Control Letters **50** (2003), 229–239.
- [86] ———, *How feedback can tune a bifurcation parameter towards its unknown critical bifurcation value*, Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii USA, december, 2003, pp. 2401–2406.
- [87] L. Moreau and E. D. Sontag, *Balancing at the border of instability*, Physical Review E **68** (2003), no. 02090, 1–4.
- [88] K. Murali, S. Sinha, and I. R. Mohamed, *Chaos computing : experimental realization of nor gate using a simple chaotic circuit*, Physics Letters A **339** (2005), 39–44.
- [89] M. Napoli, R. Baskaran, K. L. Turner, and B. Bamieh, *Understanding mechanical domain parametric resonance in microcantilevers*, IEEE-0-7803-7744-3/03/ (2003), 169–172.

-
- [90] M. Napoli, Z. Wenhua, K. L. Turner, and B. Bamieh, *Characterization of electrostatically coupled microcantilevers*, *Microelectromechanical Systems*, *Journal of* **14** (2005), no. 2, 295 – 304, 1057-7157.
- [91] A. H. Nayfeh and M. I. Younis, *Dynamics of MEMS resonators under superharmonic and subharmonic excitations*, *Journal of Microelectromechanical Systems* (2005), 1840–1847.
- [92] A.s H. Nayfeh, *Introduction to perturbation techniques*, Wiley Classics Library, 1993.
- [93] C. T. C. Nguyen, *Micromechanical signal processor*, Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 1994.
- [94] C. T. C. Nguyen and R. T. Howe, *An integrated CMOS micromechanical resonator high-Q oscillator*, *IEEE Journal of Solid-State Circuits* **34** (1999), no. 4, 440–455.
- [95] L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, and D. J. Mar, *Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications*, *Chaos* **7** (1997), no. 4, 520–541.
- [96] H. W. Ch Postma, I. Kozinsky, A. Husain, and M. L. Roukes, *Dynamic range of nanotube- and nanowire-based electromechanical systems*, *Applied Physics Letters* **86** (2005), no. 22, 223105 – 3.
- [97] J. F. Rhoads, S. W. Shaw, K. L. Turner, and R. Baskaran, *Tunable mems filters that exploit parametric resonance*, To appear in the *Journal of Vibration and Acoustics* (2005), 1–19.
- [98] J. F. Rhoads, S. W. Shaw, K. L. Turner, J. Moehlis, B. E. Demartini, and W. F. Zhang, *Nonlinear response of parametrically-excited mems*, 2005 ASME International Design Engineering Technical Conferences, 20th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Long Beach, California, 2005.
- [99] D. Rugar and P. Grütter, *Mechanical parametric amplification and thermomechanical noise squeezing*, *Physical Review Letter* **67** (1991), no. 6, 699–702.
- [100] S. W. Shaw, J. F. Rhoads, and K. L. Turner, *Parametrically excited mems oscillators with filtering applications*, 10th Conference on Nonlinear Vibrations, Stability, and Dynamics of Structures (Blacksburg, Virginia.), 2004.
- [101] C. P. Silva, *Introduction to chaos and its potential applications (slides)*, 2003 IEEE IMS Workshop, Philadelphia, June 9s, 2003.
- [102] M. I. Sobhy and A. R. Shehata, *Chaotic algorithms for data encryption, methods of attack and counter measures.*, 2003 IEEE IMS Workshop, Philadelphia, June 9, 2003.
- [103] E. D. Sontag, *Some new directions in control theory inspired by systems biology*, *Syst. Biol.* **1** (2004), no. 1, 9–18.
- [104] R. Stoop, *Auditory two-tone suppression from a subcritical hopf cochlea*, *Physica A* **351** (2005), 175–183.

- [105] K. L. Turner, R. Baskaran, and Z. Wenhua, *Using nonlinear dynamics for performance enhancement in resonant micro and nano-scale devices*, Decision and Control, 2003. Proceedings. 42nd IEEE Conference on, vol. 3, 2003, pp. 2650 – 2651 Vol.3.
- [106] G. Wang, D. Chen, J. Lin, and X. Chen, *The application of chaotic oscillators to weak signal detection*, IEEE Trans. in Industrial Electronic **46** (1999), no. 2, 440–444.
- [107] C. Williams, *Efficient chaotic communications over radio channels - slides*, Non-linear Dynamics and Bifurcations Workshop (IMS2003), 2003.
- [108] M. I. Younis, *Modeling and simulation of microelectromechanical systems in multi-physics fields*, Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2004.
- [109] M. I. Younis, E. M. Abdel-Rahman, and A. H. Nayfeh, *A reduced-order model for electrically actuated microbeam-based MEMS*, Journal Of Microelectromechanical Systems **12** (2003), no. 5, 672–680.
- [110] B. Yurke, D. S Greywall, A. N. Pargellis, and P. A. Busch, *Theory of amplifier-noise evasion in an oscillator employing a nonlinear resonator*, Physical Review A **51** (1995), no. 5, 4211–4229.
- [111] W. Zhang, R. Baskaran, and L. T. Kimberly, *Nonlinear behavior of a parametric resonance-based mass sensor*, Proceedings of IMECE 2002, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, New Orleans, Louisiana, November 17-22, vol. 33261, 2002, pp. 1–5.
- [112] W. Zhang and K. L. Turner, *Frequency-tuning for control of parametrically resonant mass sensors*, Journal Vacuum Science Technology A **23** (2005), no. 4, 841–845.

Bibliographie du chapitre 5

- [113] I. H. Abdel-Halim Hassan, *The asymptotic expansion and numerical verification method for linear and nonlinear initial value problem*, Applied Mathematics and Computation **180** (2006), 29–37.
- [114] B. Abdo, E. Segev, O. Shtempluck, and E. Buks, *Unusual nonlinear dynamics observed in NbN superconducting microwave resonators*, Institute of Physics Publishing, Journal of Physics, Conference Series, 7th European Conference on Applied Superconductivity **43** (2006), 1346–1349.
- [115] R. Aguilar-lópez and R. Martínez-Guerra, *Chaos suppression via observer based active control scheme : Application to duffing’s oscillator*, Chaos, Solitons and Fractals **32** (2007), 1887–1897.
- [116] S. Ai and S. P. Hastings, *A shooting approach to layers and chaos in a forced duffing equation*, arXiv :math.DS/0105043v1, 5 may 2001 (2001), 1–42.
- [117] R. Almog, S. Zaitsev, O. Shtempluck, and E. Buks, *Signal amplification in a nanomechanical duffing resonator via stochastic resonance*, arXiv :cond-mat/0611049v1 - 2 Nov 2006 (2006).
- [118] G. Álvarez Marañón, L. Hernández Encinas, F. Montoya Vitini, and J. Muñoz Masqué, *Cryptanalysis of anovel cryptosystem based on chaotic oscillators and feedback inversion*, arXiv :nlin.CD/0311042v1 - 20 Nov 2003 (2003).
- [119] P. Amore and A. Aranda, *Presenting a new method for the solution of nonlinear problems*, arXiv :math-ph/0303042v1 - 18 Mar 2003 (2003).
- [120] ———, *Improved Lindstedt–Poincaré method for the solution of nonlinear problems*, Journal of Sound and Vibration **283** (2005), 1115–1136.
- [121] P. Amore and A. Raya, *Comparison of alternative improved perturbative methods for nonlinear oscillations*, arXiv :math-ph/0412060v1 - 17 Dec 2004 (2004).
- [122] H. N. Arafat and A. H. Nayfeh, *Non-linear responses of suspended cables to primary resonance excitations*, Journal of Sound and Vibration **266** (2003), 325–354.
- [123] R. L. Badzey, G. Zolfagharkhani, A. Gaidarzhy, and P. Mohanty, *A controllable nanomechanical memory element*, Applied Physics Letters **85** (2004), no. 3587.
- [124] G. K. Bergey and P. J. Franaszczuk, *Epileptic seizures are characterized by changing signal complexity*, Tech. report, Johns Hopkins University School of Medicine.
- [125] E. Buks and M. L. Roukes, *Metastability and the casimir effect in micromechanical systems*, Europhys. Lett. **54** (2001), no. 2, 220–226.
- [126] E. Buks and B. Yurke, *Dephasing due to intermode coupling in superconducting stripline resonators*, arXiv :quant-ph/0511033v2 - 4 Nov 2005 (2005).

- [127] ———, *Mass detection with nonlinear nanomechanical resonator*, arXiv :quant-ph/0606081v4 -5 Jul 2006 (2006).
- [128] H. Cao, J. M. Seoane, and Miguel A. F. Sanjuán, *Symmetry-breaking analysis for the general helmholtz–duffing oscillator*, *Chaos, Solitons and Fractals*, in press (2006), 1–16.
- [129] H. B. Chan, V. A. Aksyuk, R. N. Kleiman, D. J. Bishop, and Federico Capasso, *Nonlinear micromechanical casimir oscillator*, arXiv :quant-ph/0109046v2 - 21 Sep 2001 (2001).
- [130] ———, *Quantum mechanical actuation of microelectromechanical systems by the casimir force*, *Science* **291** (2001), 1941–1943.
- [131] V. K. Chandrasekar, S. N. Pandey, M . Senthilvelan, and M. Lakshmanan, *A simple and unified approach to identify integrable nonlinear oscillators and systems*, arXiv :nlin.SI/0511003v1 - 15 Nov 2005 (2005).
- [132] V/ Chua, *Cubic-quintic duffing oscillators*, (2003).
- [133] A. N. Cleland and M. L. Roukes, *A nanometre-scale mechanical electrometer*, *Nature* **392** (1998), 160–162.
- [134] W. O. Davis, O. M. O’Reilly, and A. P. Pisano, *On the nonlinear dynamics of tether suspensions for mems*, *Transactions of the ASME* **126** (2004), 326–331.
- [135] C. Depassier and B. Rafael, *Variational calculation of the period of nonlinear oscillators*, arXiv :nlin.PS/0409003v1 - 1 sep 2004 (2004).
- [136] M. C. Depassier and J. Mura, *Variational approach to a class of nonlinear oscillators with several limit cycles*, arXiv :nlin.CD/0103034v1 22 Mar 2001 (2001).
- [137] J. F. Dunne and P. Hayward, *A split-frequency harmonic balance method for nonlinear oscillators with multi-harmonic forcing*, *Journal of Sound and Vibration* **295** (2006), 939–963.
- [138] H. G. Enjieu Kadji and R. Yamapi, *General synchronization dynamics of coupled van der pol–duffing oscillators*, *Physica A* **370** (2006), 316–328.
- [139] D. Ghosh, A. R. Chowdhury, and P. Saha, *On the various kinds of synchronization in delayed duffing-van der pol system*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, in press (2006), 1–14.
- [140] D. S. Greywall, *Patent us 7042213 b2 : Magnetometer having an electromechanical resonator*, *Patents*, 2004.
- [141] D.S. Greywall, *Sensitive magnetometer incorporating a high-Q nonlinear mechanical resonator*, *Measurement Science and Technology* **16** (2005), 2473–2482.
- [142] A. M. Harb, A. A. Zaher, A. A. Al-Qaisia, and M. A. Zohdy, *Recursive backstepping control of chaotic duffing oscillators*, *Chaos, Solitons and Fractals*, in press (2006), 1–7.

-
- [143] C. Heneghan, S. M. Khanna, A. Flock, M. Ulfendahl, L. Brundin, and M. C. Teich, *Investigating the nonlinear dynamics of cellular motion in the inner ear using the short-time fourier and continuous wavelet transforms*, IEEE Transactions On Signal Processing **42** (1994), no. 12, 3335–3352.
- [144] H. Hu, *Solutions of the duffing-harmonic oscillator by an iteration procedure*, Journal of Sound and Vibration **298** (2006), 446–452.
- [145] X. M. H. Huang, *Ultrahigh and microwave frequency nanomechanical systems*, Ph.D. thesis, California Institute of Technology, 2004.
- [146] X. M. H. Huang, X. L. Feng, C. A. Zorman, M. Mehregany, and M. L. Roukes, *VHF, UHF and microwave frequency nanomechanical resonators*, New Journal of Physics **7** (2005), no. 247, 1–15.
- [147] L. Ingber, R. Srinivasan, and P. L. Nunez, *Path-integral evolution of chaos embedded in noise : Duffing neocortical analog*, arXiv :nlin.CD/0001047 -24 Jan 2000 (2000).
- [148] J.C. Ji, *Nonresonant hopf bifurcations of a controlled van der pol–duffing oscillator*, Journal of Sound and Vibration **297** (2006), 183–199.
- [149] K. Josi and S. Peles, *Synchronization in networks of general, weakly nonlinear oscillators*, J. Phys. A : Math. Gen. **37** (2004), 11801–11817.
- [150] I. Katz, A. Retzker, R. Straub, and R. Lifshitz, *Classical to quantum transition of a driven nonlinear nanomechanical resonator*, arXiv :cond-mat/0702255/v1 - 9 Feb 2007 (2007).
- [151] B. E. Keen and W. H. W. Fletcher, *Nonlinear plasma instability effects for subharmonic and harmonic forcing oscillations*, J. Phys. A : Gen. Phys. **5** (1972), 152–165.
- [152] I. Kovacic, *Adiabatic invariants of oscillators with one degree of freedom*, Journal of Sound and Vibration **300** (2007), 695–708.
- [153] H. Krömmel, A. Erbe, A. Tilke, S. Manus, and R. H. Blick, *Nanomechanical resonators operating as charge detectors in the nonlinear regime*, Europhysics Letters **50** (2000), no. 1, 101–106.
- [154] A. P. Kuznetsov and J. V. Sedova, *On features of scaling in Duffing oscillator under action of impulses with random modulation of parameters*, arXiv : 0611040 (2006).
- [155] W. Lacarbonara, H. N. Arafat, and A. H. Nayfeh, *Non-linear interactions in imperfect beams at veering*, International Journal of Non-Linear Mechanics **40** (2005), 987 – 1003.
- [156] S. A. Lazzouniabb, M. Siewe Siewe, F.M. Moukam Kakmeni, and S. Bowong, *Slow flow solutions and chaos control in an electromagnetic seismometer system*, Chaos, Solitons and Fractals **29** (2006), 988–1001.
- [157] J. C. Lee, W. D. Oliver, K. K. Berggren, and T. P. Orlando, *Nonlinear resonant behavior of the dispersive readout scheme for a superconducting flux qubit*, arXiv :cond-mat/0609561v1 - 22 Sep 2006 (2006).

- [158] C. W. Lim, B. S. Wu, and W. P. Su, *Higher accuracy analytical approximations to the duffing-harmonic oscillator*, Journal of Sound and Vibration **296** (2006), 1039–1045.
- [159] J. Liu, D. T. Martin, K. Kadirvel, T. Nishida, M. Sheplak, and P. Brian Mann, *Nonlinear identificaiton of a capacitive dual-backplate MEMS microphone*, International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, September 24-28, Long Beach, CA, USA, 2005.
- [160] L. Liu, J. P. Thomas, E. H. Dowell, P. Attar, and K. C. Hall, *A comparison of classical and high dimensional harmonic balance approaches for a duffing oscillator*, Journal of Computational Physics **215** (2006), 298–320.
- [161] P. Malatkar, *Nonlinear vibrations of cantilever beams and plates*, Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2003.
- [162] P. Malatkar and A. H. Nayfeh, *Calculation of the jump frequencies in the response of s.d.o.f. non-linear systems*, Journal of Sound and vibration **254** (2002), no. 5, 1005 – 1011.
- [163] V. B. Mandelzweig and F. Tabakin, *Quasilinearization approach to nonlinear problems in physics with application to nonlinear odes*, arXiv :physics/0102041 - 27 Aug 2001 (2001).
- [164] V. Marinca and N. Herişanu, *Periodic solutions of duffing equation with strong non-linearity*, Chaos, Solitons and Fractals, in press (2006), 1–6.
- [165] C. Mayol, R. Toral, and C. R. Mirasso, *On the derivation of amplitude equations for nonlinear oscillators subject to arbitrary forcing*, arXiv :cond-mat/0312077v1 - 2 Dec 2003 (2003).
- [166] R. M. C. Mestrom, R. H. B. Fey, J. T. M. van Beek, K. L. Phan, and H. Nijmeijer, *Nonlinear oscillations in mems resonators*, EM, 2006.
- [167] F. M. Moukam Kakmeni, S. Bowong, C. Tchawoua, and E. Kaptouom, *Dynamics and chaos control in nonlinear electrostatic transducers*, Chaos, Solitons and Fractals **21** (2004), 1093–1108.
- [168] B. Mudavahhu, *Singular perturbation techniques, the multiple scales, averaging, renormalization group and invariante condition methods*, University of Washington, Departement of Applied Mathematics, Seattle, WA 98195-2410, USA, 2000.
- [169] O. Narayan and J. Roychowdhury, *Analyzing oscillators using multitime PDEs*, IEEE Transactions on circuits and systems I : Fundamental theory and applications **58** (2003), no. 7, 894–903.
- [170] Ali Hasan Nayfeh, *Resolving controversies in the application of the method of multiples sacles and the generalized method of averaging*, Nonlinear Dynamics **40** (2005), 61–102.

-
- [171] M. Pandey, K. Aubin, M. Zalalutdinov, R. B. Reichenbach, A. T. Zehnder, R. H. Rand, and H. G. Craighead, *Analysis of frequency locking in optically driven mems resonators*, Journal of microelectromechanical systems **15** (2006), no. 6, 1546–1554.
- [172] S. J. Papadakis, A. R. Hall, P. A. Williams, L. Vicci, M. R. Falvo, R. Superfine, and S. Washburn, *Resonant oscillators with carbon-nanotube torsion springs*, Physical Review Letters **93** (2004), no. 14, 146101 – 4.
- [173] A. Pelster, H. Kleinert, and M. Schanz, *High-order variational calculation for the frequency of time-periodic solutions*, arXiv :math-ph/0208032v2 - 1 Oct 2002 (2002), 9 pages.
- [174] L. Peng, *Existence and uniqueness of periodic solutions for a kind of duffing equation with two deviating arguments*, Mathematical and Computer Modelling **45** (2007), 378–386.
- [175] Alexander N. Pisarchik and Rider Jaimes-Reategui, *Intermittent lag synchronization in a nonautonomous system of coupled oscillators*, Physics Letters A **338** (2005), 141–149.
- [176] A. Posta and W. Stuiver, *Modeling non-linear oscillators : a new approach*, International Journal of Non-Linear Mechanics **39** (2004), 897–908.
- [177] R. B. Reichenbach, M. Zalalutdino, K. L. Aubin, R. Rand, B.H. Houston, J. M. Parpia, and H. G. Craighead, *Third-order intermodulation in a micromechanical thermal mixer*, Journal of Microelectromechanical Systems **14** (2005), no. 6, 1244–1245.
- [178] T. Risler, J. Prost, and F. Julicher, *Universal critical behavior of noisy coupled oscillators*, arXiv :cond-mat/0409468v1 - 17 Sep 2004 (2004).
- [179] D. H. Santamore, H. S. Goan, G. J. Milburn, and M. L. Roukes, *Anharmonic effects on a phonon number measurement of a quantum mesoscopic mechanical oscillator*, arXiv :quant-ph/0410039v1 - 5 Oct 2004 (2004).
- [180] V. Sazonova, Y. Yaish, H. Ustunel, D. Roundy, T. A. Arias, and P. L. McEuen, *A tunable carbon nanotube electromechanical oscillator*, Nature **431** (2004), 284–287.
- [181] G. Sebald, L. Lebrun, and D. Guyomar, *Modeling of elastic nonlinearities in ferroelectric materials including nonlinear losses : Application to nonlinear resonance mode of relaxors single crystals*, IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control, **52** (2005), no. 4, 596–603.
- [182] A. D. Speliotopoulos, *The general structure of eigenvalues in nonlinear oscillators*, J. Phys. A : Math. Gen. **33** (2000), 3809–3823.
- [183] C. Stambaugh and H. B. Chan, *Noise activated switching in a driven, nonlinear micromechanical oscillator*, arXiv :cond-mat/0504791v2 - 26 Sep 2005 (2005).
- [184] ———, *Supernarrow spectral peaks near a kinetic phase transition in a driven, nonlinear micromechanical oscillator*, arXiv :cond-mat/0509667v1 - 26 Sep 2005 (2005).

- [185] H. X. Tang, X. M. H. Huang, M. L. Roukes, M. Bichler, and W. Wegscheider, *Two-dimensional electron-gas actuation and transduction for gaas nanoelectromechanical systems*, Applied Physics Letters **81** (2002), no. 20, 3879–3881.
- [186] G. Wang and S. He, *A quantitative study on detection and estimation of weak signals by using chaotic duffing oscillators*, IEEE Transactions on circuits and systems- 1 : Fundamental Theory and Applications **50** (2003), no. 7, 945–953.
- [187] W. H. Warner and P. R. Sethna, *A generalization of the theory of normal forms*, arXiv :chao-dyn/9510014v1 - 23 Oct 1995 (1995).
- [188] Y. Weissman, *A contribution to the theory and practice of multiple time scales expansion of nonlinear oscillators*, J. Phys. A : Math. Gen. **12** (1979), no. 10, 1699 – 1709.
- [189] P. Wofo, R. Yamapi, and J. B. Chabi Orou, *Dynamics of a nonlinear electromechanical system with multiple functions in series*, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation **10** (2005), 229–251.
- [190] B. S. Wu, W. P. Sun, and C. W. Lim, *An analytical approximate technique for a class of strongly non-linear oscillators*, International Journal of Non-Linear Mechanics **41** (2006), 766 – 774.
- [191] X. Yang, W. Xu, Z. Sun, and Y. P. Xu, *Responses of strongly non-linear oscillator parametrically excited by random narrow-band noise*, Applied Mathematics and Computation **171** (2005), 885–899.
- [192] S. Zaitsev, R. Almog, O. Shtempluck, and E. Buks, *Nonlinear dynamics in nanomechanical oscillators*, Proceedings of the 2005 International Conference on MEMS, NANO and Smart Systems (ICMENS) (IEEE, ed.), 2005.
- [193] W. Zhang and K. L. Turner, *Nonlinear dynamics of micro impact oscillators in high frequency mems switch application*, Transducers 2005, The 13th international conference on solid-state sensors and actuators, Coex, Seoul, Korea, June 5-9, 2005.
- [194] W. Zhang and B. R. Xiang, *A Duffing oscillator algorithm to detect the weak chromatographic signal*, Analytica Chimica Acta, in press (2007), 1–5.

Résumé :

Les microsystèmes sont des systèmes dynamiques multi-physiques. Leurs caractéristiques spécifiques, liées à leur petite dimension et aux phénomènes associés, nécessitent des études approfondies. Les méthodologies de l'automatique peuvent apporter des solutions nouvelles pour l'optimisation de ces systèmes. Dans ce contexte, ce travail de recherche s'intéresse plus particulièrement aux non-linéarités dans les microsystèmes capteurs.

La première partie de cette thèse est consacrée à la conception d'un micro-accéléromètre asservi à sortie numérique. L'objectif principal de l'asservissement est l'amélioration de la linéarité de la mesure. L'étude s'attache à la modélisation du comportement dynamique du capteur en prenant en compte l'effet des non-linéarités (lecture capacitive et actionnement électrostatique) et à l'analyse des performances globales de la mesure (aspect dynamique, transfert de bruit et non-linéarité). Le circuit réalisant l'asservissement est conçu de manière à permettre l'utilisation d'outils de l'automatique avancée : l'identification pour la commande et la synthèse robuste de correcteur. L'architecture présentée est validée en simulation et sur un démonstrateur.

Dans une deuxième partie, ce travail de recherche propose d'exploiter la non-linéarité dite de Duffing afin de réaliser un principe de détection original. Cette non-linéarité d'origine mécanique est fréquemment rencontrée dans les microsystèmes. Les résultats présentés ouvrent des perspectives nouvelles pour l'utilisation de structures mécaniques de dimensions nanométriques.

Mots-clés : *modélisation, identification, commande, micro-/nano-systèmes, MEMS, accéléromètre, non-linéarités, Duffing.*

Abstract :

Microsystems are multi-physic and dynamic systems. Their specific characteristics, related to their small size and the associated physical phenomena, require deep studies. The methodologies related to control theories can bring interesting solutions for the optimization of this kind of systems. In this framework, this thesis focuses more particularly on microsensors nonlinearities.

The first part of this thesis is devoted to the design of a closed-loop micromachined accelerometer with digital output. The main goal of the feedback is here to enhance the sensor's linearity. This study focuses on the modelling of the MEMS dynamics, including the effects of the nonlinearities (capacitive readout and electrostatic force feedback), and on the analysis of the sensor's performance (dynamic aspect, noise transfer and linearity). The integrated circuit ensuring the force feedback is designed in order to allow the use of advanced control tools such as identification for control and robust controller synthesis. The proposed architecture is validated on the simulation model and on a first prototype.

The second part of this thesis introduces a novel sensing principle based on Duffing's nonlinearity. This type of nonlinearity, which is observed in many mechanical microstructures, is here turned into an advantage. First simulations display interesting perspective for the use of nanometre-scale mechanical structures.

Keywords : *modeling, identification, control, micro-/nano-systems, MEMS, accelerometer, nonlinearities, Duffing.*