



Une nouvelle approche variationnelle du traitement d'images. ,Application à la coopération détection-reconstruction

Vincent Courboulay

► To cite this version:

Vincent Courboulay. Une nouvelle approche variationnelle du traitement d'images. ,Application à la coopération détection-reconstruction. Interface homme-machine [cs.HC]. Université de La Rochelle, 2002. Français. NNT: . tel-00214217

HAL Id: tel-00214217

<https://theses.hal.science/tel-00214217>

Submitted on 23 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

L3i - Laboratoire Informatique Image Interaction

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LA ROCHELLE

Spécialité : **INFORMATIQUE**

par

Vincent COURBOULAY

Titre :

**Une nouvelle approche variationnelle du traitement d'images.
Application à la coopération détection-reconstruction**

Soutenue le 25 Novembre 2002 devant le jury composé de :

<i>Rapporteurs :</i>	Françoise Prêteux	Professeur des Universités, Institut National des Télécommunications
	Jun Shen	Professeur des Universités, EGID - Université Bordeaux 3
<i>Examineurs :</i>	Nicolas Rougon	Maître de Conférences, Institut National des Télécommunications
	Pierre Courtellemont	Professeur des Universités, (<i>Directeur de thèse</i>) Université de La Rochelle - L3i
	Michel Ménard	Maître de Conférences, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de La Rochelle - L3i
	Michel Eboueya	Maître de Conférences, Université de La Rochelle - L3i
<i>Invité :</i>	Régis Vaillant	Ingénieur de recherche , General Electric Medical Systems

Remerciements

Entre ce que je pense, ce que je veux dire, ce que je crois dire, ce que je dis, ce que vous avez envie d'entendre, ce que vous entendez, ce que vous comprenez... il y a dix possibilités qu'on ait des difficultés à communiquer. Mais essayons quand même.
Bernard Werber.

Ce mémoire décrit les activités de recherches que j'ai menées durant ma thèse au sein du L3i.

Je tiens tout d'abord à remercier Madame Prêteux ainsi que Monsieur Shen d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je tiens aussi à adresser mes plus sincères remerciements à Monsieur Rougon qui a su me conforter dans les choix effectués et qui a accepté de présider mon jury. Je les remercie tous de m'avoir transmis un peu de leur expérience et accordé beaucoup de leur temps.

Je remercie Monsieur Vaillant, représentant General Electric, qui a toujours été de bon conseil et présent pour m'aider.

Je voudrais remercier mon directeur de thèse Mr Pierre Courtellemont, qui m'a permis de faire cette thèse. La confiance qu'il m'a témoignée, ses encouragements et ses qualités humaines m'ont aidé à mener à terme ce travail. Merci également à Mike Eboueya qui a toujours fait le lien entre le partenaire industriel et mon travail de recherche.

Michel, merci. Michel Ménard qui n'est pas seulement un bon encadrant scientifique, mais qui est un ami. Merci pour ta compétence et ta disponibilité permanente, merci de m'avoir fait aimer la recherche. Merci de nos discussions et de tes idées. Merci.

Mille mercis également à tous les membres du L3i, qui ont toutes et tous participé à faire de cette thèse une période mémorable. Je ne cite personne car vous avez toujours été importants pour moi.

Merci aux doctorants, avec qui nous avons passé d'excellents moments (merci Jam, Magic Fred et Fredo, Xtof, Patrick, Droopy, Titi, Manue, Mathilde, Sylvainmoussset ce serait du champagne, tanguy et tous les autres...).

Je garde celui qui est devenu un vrai ami comme on en a peu, Arunas. Merci de ta gentillesse, de ta compétence et surtout de ton amitié (merci aussi de m'avoir fait découvrir ton pays, la Lituanie).

Je ne saurais être complet si je ne remerciais pas ma famille. Merci à vous qui avez fait de moi ce que je suis. Je ne pourrai jamais vous rendre ce que vous m'avez donné. Merci à Cédric mon meilleur ami.

Merci Anne-Sophie, je t'aime.

Vincent

à ma famille
à Anne-Sophie

Table des matières

Table des figures	1
Notations principales	5
Introduction	7
1 Traitement d'images et approches physiques.	13
1.1 Introduction	13
1.2 Le traitement d'images comme élément de la vision	14
1.3 Principaux cadres théoriques du traitement d'images	17
1.3.1 La morphologie mathématique	17
1.3.2 La théorie psycho-visuelle	19
1.3.3 La reconnaissance des formes et des déformations	19
1.3.4 Les approches géométriques	19
1.3.5 Les méthodes dédiées à la résolution de problèmes inverses	20
1.3.6 Les approches statistiques	21
1.3.7 Les approches variationnelles et EDP	21
1.4 Principe de moindre action et formalisme lagrangien	22
1.5 Approches variationnelles, EDP et problèmes inverses en traitement d'images	26
1.5.1 Déconvolution	26
1.5.2 Restauration	28
1.5.3 L'espace multi-échelles	33
1.5.4 Les transformations morphologiques	36
1.5.5 La segmentation d'images	38
1.5.6 Les contours actifs géodésiques	38
1.5.7 La reconstruction	41

1.6	Des approches variationnelles vers un nouveau modèle d'analyse d'images bas-niveau	41
1.7	Conclusion	43
2	Traitement d'images bas-niveau et Information Physique Extrême	45
2.1	Introduction	45
2.2	Le système visuel humain et le traitement d'images bas niveau	46
2.2.1	Le système visuel humain (SVH) : une décomposition en tâches spécifiques	48
2.2.2	L'information visuelle et les champs récepteurs de la vision : sélec- tivité liée au filtrage	50
2.2.3	Interprétation récente des processus non cognitifs de la vision en terme de TIBN	51
2.3	TIBN et analyse multi-échelles : une approche unificatrice	52
2.3.1	Relation entre EDP et structure multi-échelles	53
2.3.2	Différentes dérivations de l'analyse multi-échelles	54
2.3.3	Les opérateurs de voisinage génériques	57
2.3.4	Synthèse des différentes approches axiomatiques et limitations . . .	58
2.4	Information physique extrême et information de Fisher	60
2.4.1	L'information de Fisher et la théorie de la mesure	61
2.4.2	L'EPI, un principe variationnel	62
2.4.3	Détermination de l'information intrinsèque J et de la ou des solutions	63
2.4.4	Interprétation du principe EPI	64
2.5	L'approche EPI et le traitement d'images bas niveau	67
2.5.1	Un modèle pour l'image et un scénario pour l'approche EPI	67
2.5.2	Solution générale du principe EPI	70
2.5.3	La dérivation de la structure d'image optimale	71
2.5.4	La dérivation des opérateurs de voisinage génériques	72
2.6	Dérivation de l'approche variationnelle pour la restauration d'images isotrope	74
2.7	De la diffusion isotrope à la diffusion anisotrope	75
2.8	Validation et interprétation du modèle	76
2.8.1	Hyperparamètres $\mathbf{A}$ et ϕ	76
2.8.2	Paramètre $\hbar$	80
2.8.3	Interprétations du modèle	83
2.8.4	Approximation du modèle	86

2.8.5	Évaluation de l'approche EPI	87
2.8.6	Conclusion concernant l'approche EPI	89
2.9	Perspective de prise en compte de l'appareil de mesure	89
2.10	Conclusion et contributions	91
3	Localisation et détection de stents dans des images rayons X bas contrastes	97
3.1	Introduction	97
3.2	Contexte médical et problématique	98
3.2.1	Modalités et caractéristiques de l'acquisition	99
3.2.2	Critères de détection des stents dans les images rayons X	100
3.3	Localisation de stents	101
3.3.1	Introduction	101
3.3.2	Détection de crêtes et de vallées dans une image	102
3.3.3	Algorithme de détection de stents utilisant la valeur des niveaux de gris locaux	107
3.3.4	Algorithme de détection des stents fondé sur un filtrage adapté . . .	110
3.3.5	Critères de comparaison des deux algorithmes et résultats	113
3.4	Détection des mailles du stent par mesure floue de la structure locale . . .	115
3.4.1	Intérêt de la caractérisation de la structure locale	115
3.4.2	Méthode de détection multi-locale floue	120
3.4.3	Résultats	124
3.5	Conclusion et contributions	128
4	Reconstruction de stents par approches variationnelles couplées	131
4.1	Introduction	131
4.2	Reconstruction de stent par collaboration analyse - synthèse	131
4.2.1	Introduction aux méthodes de reconstruction 3D	133
4.2.2	Les approches variationnelles en reconstruction	138
4.2.3	Deux exemples de reconstruction tomographique variationnelle sous contrainte	140
4.3	Coopération détection - reconstruction par approches variationnelles couplées	143
4.3.1	Approche formelle de la coopération détection - reconstruction par approches variationnelles couplées	143

4.3.2	Application de l'approche variationnelle couplée à la reconstruction tomographique de stent	144
4.3.3	Un algorithme de détection-reconstruction par EDP couplées	147
4.3.4	Résultats	149
4.4	Conclusion et contributions	153
Conclusion et Perspectives		157
A Publications associées à cette thèse		161
B Discrétisation des EDP		163
C Présentation du logiciel de localisation et de détection des stents		165
D Présentation du logiciel de simulation de projection		169
Bibliographie		171

Table des figures

1	Illusion d'optique.	8
1.1	Organisation du chapitre <i>Traitement d'images et approches physiques</i>	14
1.2	L'image comme support de communication.	15
1.3	Paradigme de Marr [105].	16
1.4	Relations entre diverses méthodes de traitement d'images.	18
1.5	Illustration du principe de moindre action.	24
1.6	Illustration du procédé de déconvolution.	27
1.7	Illustration de l'équation de la chaleur	29
1.8	Illustration de l'équation de Nordström.	31
1.9	Illustration d'opérations morphologiques.	37
2.1	Organisation du Chapitre <i>Traitement d'images bas-niveau et Information Physique Extrême</i>	46
2.2	Illusion d'optique.	47
2.3	Illustration des lois de la Gestalt.	48
2.4	Représentation classique des processus mis en jeu lors d'une procédure d'analyse d'image.	49
2.5	Modélisation du profil des champs récepteurs.	51
2.6	Roy B Frieden.	60
2.7	Sir Ronald Aylmer Fisher.	60
2.8	EPI et acquisition d'information associés à un processus physique.	65
2.9	Processus EPI.	66
2.10	Schéma résumant le compromis incertitude-imprécision.	69
2.11	Erwin Schrödinger.	72
2.12	Représentation de la relation profonde entre le traitement d'images par approche EPI et la vision humaine.	73
2.13	Point de vue classique de la structure multi-échelles comme une unique séquence d'images.	74
2.14	Nouveau point de vue de la structure multi-échelles comme une famille de séquence d'images.	75
2.15	James Clark Maxwell	78
2.16	Carte de potentiels.	80
2.17	Illustration de la diffusion guidée.	81

2.18	Max Planck.	81
2.19	Arthur Holly Compton.	81
2.20	Werner Heisenberg.	82
2.21	Illustration de l'influence du paramètre $\hbar$ par rapport à une diffusion du type équation 2.52.	83
2.22	Illustration de l'équation de continuité.	85
2.23	Illustration de la double indétermination concernant l'état d'un pixel et la structure de l'image.	87
2.24	Eugene Paul Wigner.	88
2.25	Paul Ehrenfest.	88
2.26	Représentation des deux interprétations de Schrödinger et de Heisenberg de l'interaction entre deux états.	90
2.27	Schéma connectant les implications possibles et avérées de l'approche EPI.	91
2.28	Chaîne de traitement d'image et EPI.	94
2.29	Comparaison entre l'approche EPI et les approches de TIBN existantes.	95
3.1	Organisation du chapitre <i>Localisation et détection de stents dans des images rayons X bas contrastes</i> et contributions.	99
3.2	Exemple de stents.	100
3.3	Imagerie IVUS et RX.	100
3.4	Exemples de projections longitudinale (gauche) et axiale (droite) d'un stent.	100
3.5	Trajectoires de rayons X.	101
3.6	Profil en niveaux de gris d'un stent sur une ligne d'image RX.	102
3.7	Résultat de l'élimination des pixels sélectionnés à l'étape 1.	108
3.8	Résultat d'une succession d'opérateurs morphologiques.	108
3.9	Illustration du principe de recherche par zones d'appariement.	110
3.10	Résultat de la décision par appariement de paramètres statistiques.	110
3.11	Image de référence.	111
3.12	Filtrage dans la direction verticale, qui est ici celle du stent.	112
3.13	Filtrage dans la direction horizontale, orthogonale à celle du stent.	112
3.14	Seuillage faible.	112
3.15	Seuillage correct.	112
3.16	Résultat sur une image de bonne qualité.	116
3.17	Résultat sur une image de qualité moyenne.	117
3.18	Résultat sur une image de mauvaise qualité.	118
3.19	Interface logicielle.	119
3.20	Équivalence entre descripteur de forme s et la forme de la surface autour $\mathbf{p}$	120
3.21	Fonctions d'appartenance floues.	121
3.22	Fonctions utilisées pour définir le degré d'appartenance à la forme considérée. L'abscisse est calculée par $(f - f_{>})/f$	123
3.23	Image RX de carotide stentée.	124
3.24	Résultat de l'application de détection des lignes de crêtes.	125
3.25	Résultat de l'application de détection des lignes de crêtes.	126
3.26	Résultat de l'application de détection des lignes de crêtes.	127

4.1	Organisation du chapitre <i>Reconstruction de stents par approches variationnelles couplées</i> et contributions.	132
4.2	Définition d'une projection en géométrie parallèle 2D.	134
4.3	Discrétisation de l'objet en 2D et 3D.	135
4.4	Définition d'un contour paramétré en 2D pour modéliser l'objet à reconstruire.	140
4.5	En prenant en compte les règles Gestaltiques, certains contours sont meilleurs que d'autres de par leur simplicité.	141
4.6	Processus d'acquisition bruitée de c représentation d'un même objet u . . .	143
4.7	Illustration de la modification par une transformation d'un objet initial en une nouvelle représentation.	144
4.8	Illustration dans un cadre tomographique de la problématique de détection sur les projections p_i d'un objet u	145
4.9	Illustration dans un cadre tomographique de la problématique de reconstruction d'un objet réel u à partir d'un objet de référence u_0	146
4.10	Champ de potentiel de déformation de la forme projetée.	147
4.11	Champ de potentiel de déformation de l'objet à reconstruire.	148
4.12	Illustration de la distance entre le contour de l'objet et des points d'attraction obtenus après un algorithme de détection.	148
4.13	Illustration du potentiel de déformation appliqué à l'objet.	150
4.14	Modélisation de stents.	151
4.15	Carte des potentiels de déformation 2D appliqués au stent initial droit. . .	152
4.16	A gauche, modèle de stent initiale, au centre stent à reconstruire, à droite résultat de la reconstruction après 3 itérations.	153
4.17	Résumé de l'ensemble des algorithmes déjà implantés pour la phase de reconstruction de stent par un système d'EDP couplée.	154
C.1	Capture d'écran d'un exemple d'aide proposé avec chaque traitement. . . .	165
C.2	Capture d'écran de l'interface générale du logiciel.	166
C.3	Capture d'écran sur la fenêtre de gestion de l'affichage de séquence vidéo et d'histogramme.	167
C.4	Capture d'écran.	167
D.1	A gauche, modélisation du stent initial, à droite, sa projection.	169
D.2	Exemple de projection de stent.	170
D.3	Exemple de projection de stent.	170

Notations principales

Dans cette thèse, les notations suivantes ont été utilisées :

Définition de l'image	
$\mathbb{R}$	ensemble des réels
$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$	vecteur de $\mathbb{R}^N$, ou point de l'image
$\mathbf{u}^t$	la transposée de u
x_i	i-ème composante du vecteur $\mathbf{x}$
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	produit scalaire $\mathbf{x}\mathbf{y}$
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N$	image initiale
$\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$	fonction intensité de l'image, fonction de $\mathbb{R}^N$ vers $\mathbb{R}$
$\mathbf{u}(\mathbf{x})$	image modifiée à partir de u_0
$\mathbf{v}(\mathbf{x})$	domaine de définition de l'image
Ω	frontière du domaine Ω
$\partial\Omega$	matrice de passage d'une image originale à une image modifiée
P	bruit contenu dans l'image
n	

Diffusion	
$E(u)$	énergie à minimiser en fonction d'une image u
$g(\cdot)$	représente une fonction de diffusion introduite par l'approche variationnelle de la diffusion

Opérateurs

L	notation générale d'un Lagrangien
$Du = \nabla u$	gradient de u
Δu	Laplacien de u
$Hu = D^2u$	hessien de u
$u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$	dérivées partielles d'ordres 1
$u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$	dérivées partielles d'ordres 2
t	paramètre temporel ou d'échelle
T_t	famille de transformation de paramètre $t \geq 0$
$curv(u)$	ensemble de niveaux
$div(u)$	opérateur divergence de la fonction u

Orientation

$\xi = \frac{\nabla u}{ \nabla u }$	vecteur normé dans la direction du gradient
η	vecteur normé dans la direction de lignes de niveaux pour une image $2D$
e_1	direction de courbure maximale
e_2	direction de courbure minimale
k_1	courbure maximale
k_2	courbure minimale

Information Physique Extrême et Notations Quantiques

e^2	erreur quadratique moyenne
p	densité de probabilité
$p = q^2$	amplitude de probabilité
ψ	amplitude de probabilité complexe
I	information de Fisher
J	information de Fisher intrinsèque
K	information physique extrême
c	constante de vitesse
$\hbar$	constante de diffusion
$\mathbf{A}$	potentiel vectoriel
ϕ	potentiel scalaire

Introduction

Je voudrais dire ici que j'aime la science. Et que je crois en la science. Ma vocation était d'être un chercheur. Trop longtemps, je n'ai su être qu'un savant. Savoir est le sommeil de l'intelligence. La véritable science, elle, est une aventure. Elle exige que nous soyons capable de ne plus rien savoir, afin de nous ouvrir au mystère du monde. Car le monde est bien plus vaste que notre savoir.

Denis Marquet.

Vous commencez à lire cette thèse, vous reconnaissez une à une les lettres, puis vous fabriquez un mot et une phrase que vous interprétez comme porteuse d'une certaine information. Si dans un document il manquait une lettre, voire un mot complet, vous seriez à même de retrouver le sens de la phrase, parfois sans même y penser. Vous corrigeriez d'éventuelles coquilles par simple réflexe.

Vous êtes entraîné à lire, comme vous êtes entraîné à voir.

Taciau tai parasyta lietuviskai, ir jus turite, kaip vaikas, skaityti raide po raides, idant sudetumete zodi, po to sakini.¹

Nous traitons les images comme nous traitons les mots : on extrait des informations clés que l'on *assemble* pour former une scène porteuse du maximum d'information possible. Depuis le développement massif des techniques d'imagerie (satellitaire, médicale, industrielle...), la généralisation de tâches systématiques a mis en lumière l'intérêt des techniques de traitement d'images (filtrage, restauration, segmentation, classification, reconstruction...). La difficulté de l'informatique est donc de décrire, à l'aide d'algorithmes, le moyen de résoudre un problème ou de faciliter sa résolution.

Le traitement d'images a dans un premier temps voulu tout traiter et tout comprendre par un processus *magique* ; les scientifiques en sont vite revenus et adoptent désormais une démarche cohérente dans laquelle la compréhension d'une image passe par plusieurs étapes [105].

La première étape consiste toujours en l'extraction d'informations pertinentes du contenu de la scène traitée. Cette extraction se fait, dans le cadre le plus général, **sans *a priori***, de manière locale et massivement parallèle. Cependant, l'exemple des illusions d'optique nous prouve qu'il nous est très difficile de voir sans *a priori*. Sur la Figure 1 nous sommes

¹Traduction : "Mais là, c'est écrit en Lituanien et vous devez lire, comme un enfant, une syllabe après l'autre, pour former un mot, puis une phrase". (Merci à Arunas Stockus pour la traduction)

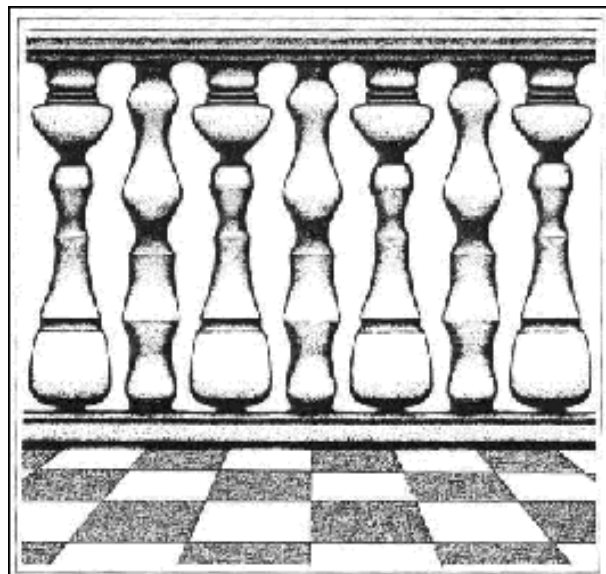


FIG. 1 – Illusion d'optique.

enclins à voir des colonnes plutôt que des corps de femmes, et pourtant elles "existent".

L'étape initiale de tout traitement est donc l'extraction d'informations élémentaires (géométrie, couleur, texture...) ceci s'effectuant de manière à **préparer leur interprétation** et ce, quelle que soit cette interprétation.

Une constante dans tout processus d'acquisition de données est le rôle essentiel joué par l'observateur. Les informations perçues par un myope ne seront pas les mêmes que celles obtenues par un presbyte.

Le travail exposé dans ce manuscrit est au coeur même des considérations précédentes. Cette thèse s'est déroulée dans un cadre applicatif parmi les plus contraignants en terme de pertinence et de validité des résultats : celui de l'imagerie médicale. Le problème de la relation entre la théorie et l'application est une question d'ordre épistémologique, la théorie se nourrissant de la pratique tout autant que la pratique de la théorie, les deux étant indissociables.

Cadre théorique et problématique

Le problème théorique que nous proposons de traiter dans cette thèse est celui de la définition d'un nouveau modèle et d'un cadre théorique associé au traitement d'images bas-niveau.

En effet, de plus en plus, les cloisons qui séparaient les diverses méthodes utilisées en traitement d'images deviennent perméables et des approches unificatrices voient le jour. Nous montrons que les techniques d'*équations aux dérivées partielles* (EDP) et variationnelles sont les plus à même de fédérer et d'unifier un grand nombre d'approches. Elles permettent de traiter au sein d'un formalisme unique et cohérent une large classe de problèmes dans les domaines du traitement d'images.

Pierre-Louis Lions [26] justifie la pertinence des EDP, en traitement d'images, par le fait même qu'elles sont performantes dans la modélisation du comportement moyen de systèmes à grand nombre de particules ou d'agents (particules en mécanique des fluides, agents en trafic routier ou en finance) et donc *a fortiori* pour les pixels en traitement d'images.

Le lien étroit qui existe entre approche par EDP et théorie physique, établi grâce au principe de moindre action et au formalisme Lagrangien, nous permet d'adopter un modèle physique. Ce cadre physique, et plus précisément quantique, couplé à des critères optimaux de compromis incertitude - imprécision, permet de trouver un formalisme général pour la modélisation d'un certain nombre de processus de traitement bas-niveau. Ce formalisme répond en tous points à des exigences d'efficacité et d'adaptation avec le problème considéré.

Ainsi dans ce manuscrit, notre objectif a été de développer une nouvelle approche du traitement d'images qui s'inscrit dans le cadre d'une théorie physique récemment développée par Frieden : l'*Information Physique Extrême* (EPI). Cette théorie vise à dériver les lois de la physique à partir, soit de l'optimisation, soit de l'annulation d'un transfert entre deux entités : l'information de Fisher portée par les observations I et l'information intrinsèque du système J . Les résultats obtenus se présentent sous une forme variationnelle conduisant à une solution optimale au sein d'un transfert d'information.

Nous utilisons ce principe, pour dériver différents espaces multi-échelles linéaire et non linéaire optimaux en terme de compromis incertitude-imprécision.

Enfin, compte tenu de l'introduction d'un *a priori* impliquant un processus linéaire ou non, favorisant les processus anisotropes, nous dérivons, par l'introduction de potentiels, la forme générale des EDP en traitement d'images anisotrope.

L'utilisation principale du traitement d'images bas-niveau reste la préparation et l'extraction d'informations en vue d'une analyse plus sémantique, comme la reconnaissance de forme ou la reconstruction d'objet. C'est dans ces deux contextes que nous plaçons notre modèle en vue de la détection et de la reconstruction d'objets médicaux dans des images en imagerie par rayons X (RX), et que nous précisons dans la section suivante. L'intérêt d'un formalisme variationnel dans un tel contexte de détection - reconstruction est de permettre, entre autre, la convergence contrôlée des processus de traitement d'images, mais aussi le choix de potentiels d'évolution adaptés à la problématique.

Cadre applicatif et problématique

Les sténoses coronariennes se trouvent au premier rang des pathologies cardio-vasculaires. Ce dépôt de graisse obstrue petit à petit artères ou vaisseaux sanguins et peut provoquer la mort. Une des thérapies possibles pour traiter cette pathologie, consiste à implanter un *stent* à l'endroit du rétrécissement. Les stents sont des prothèses métalliques qui sont placées par voie endo-vasculaire dans les coronaires pour en étayer les parois et forcer les vaisseaux à garder un diamètre nominal. Une complication qui apparaît fréquemment après ce traitement est celle de la resténose. Certaines études réalisées par en cardiologie

interventionnelle ont montré qu'un mauvais déploiement du stent est cause de resténose. Dans un certain nombre de cas, la qualité de déploiement du stent est évaluée en réalisant un examen de type IVUS (Intra Vascular Ultra Sound) invasif et coûteux, dont le but est d'obtenir une série de coupes transversales de l'intérieur des artères. Cette imagerie nécessite l'insertion d'un cathéter spécifique et l'interprétation des images est encore incertaine. Nous proposons d'obtenir une information équivalente à l'IVUS par reconstruction 3D des stents à partir d'images RX. Ainsi le praticien dispose de critères de décision quantifiables quant au déploiement correct du stent.

Cette reconstruction nécessite la détection du stent sur les projections RX. Nous scindons la détection des projections de stents en deux étapes successives. Premièrement, nous localisons grossièrement une zone focale où le stent doit se trouver, puis nous raffinons le processus afin de détecter de manière *floue* la projection.

Ce projet a été réalisé dans le cadre d'un partenariat entre General Electric Medical System et le laboratoire L3i de l'Université de La Rochelle. Il s'intègre dans la problématique fédératrice du consortium FISC (Fluides Imagerie Signal Cardio-vasculaire).

Organisation du manuscrit et contributions

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante :

- **État de l'art** : Nous présentons un état de l'art des différentes approches du traitement d'images bas-niveau et une vision unificatrice des approches variationnelles et par EDP vis-à-vis des premières. Dans ce contexte, nous mettons en relief, la pertinence du formalisme lagrangien et celle des principes de la physique classique comme outil de traitement de l'image.

L'utilité de ce chapitre est de montrer l'intérêt d'écrire sous forme variationnelle les principales méthodes de traitement d'images et de développer de nouveaux modèles.

- **Chapitre 2** : Nous présentons une nouvelle approche du traitement d'images bas-niveau. Celle-ci a pour cadre l'Information Physique Extrême. La première partie expose le fonctionnement du système visuel humain. Nous nous attachons à montrer l'analogie entre ce système visuel et la structure multi-échelles. Nous nous focalisons ensuite sur cette structure et faisons un état de l'art complet sur les manières de la dériver et les hypothèses associées. Nous évoquons également les limitations de l'ensemble des approches évoquées.

Dans un deuxième temps, nous présentons le cadre théorique formel que nous utilisons, à savoir le principe EPI. Nous expliquons l'origine d'un tel procédé et la dérivation des solutions générales. Nous proposons plusieurs interprétations du principe EPI afin de dégager la signification du modèle adopté.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous dérivons les équations fondamentales du traitement d'images bas-niveau grâce à cette théorie, en statuant que les processus sous-jacents doivent conserver le meilleur compromis incertitude-imprécision. Le ré-

sultat montre qu'il est optimal, au sens précédemment mentionné, de concevoir le traitement d'images dans le cadre de la mécanique quantique.

Les solutions identifiées nous permettent alors de retrouver un grand nombre de modèles existants, comme les opérateurs de voisinages génériques de Koenderink [82] ou des EDP de restauration (Mumford et Shah [114], Deriche [32], Nordström [118]...). Une interprétation des divers paramètres et hyperparamètres est proposée, ainsi qu'une interprétation et une approximation du modèle. Nous évaluons enfin notre approche et ses hypothèses par rapport aux autres approches mentionnées.

La contribution principale de ce chapitre est de donner la forme générale de l'équation d'évolution optimale, *i.e.* du modèle quantique que nous proposons. Nous développons aussi plusieurs interprétations permettant de mieux appréhender et comprendre l'intérêt de ce modèle.

- **Chapitre 3** : Ce chapitre présente la première partie de l'application développée dans le cadre de cette thèse, à savoir la localisation et la détection de stent sur des images RX bas contraste. Il expose tout d'abord le contexte médical et propose la démarche suivante :
 1. localisation du stent qui correspond à la détermination d'une fenêtre dans laquelle le stent peut se trouver. Dans cette section, nous proposons une nouvelle taxonomie des méthodes de détection de plis.
 2. détection du stent qui consiste à déterminer une probabilité pour un pixel d'appartenir à la projection du stent dans la fenêtre précédemment extraite. Pour cela, nous avons mis en place une procédure de détection de plis par critère multi-local flou.
- **Chapitre 4** : Ce chapitre expose la seconde partie de l'application, la reconstruction du stent. Celle-ci utilise les informations extraites sur les projections afin de reconstruire le stent sous contraintes. Nous présentons un rapide état de l'art des méthodes de reconstruction tomographique, puis nous nous focalisons sur les reconstructions variationnelles. Enfin, nous élaborons une procédure de reconstruction qui s'appuie sur une approche variationnelle couplant deux EDP et dérivant directement du chapitre 2. C'est cette dernière partie qui constitue l'application directe de notre modèle quantique.

La dernière partie contient la conclusion générale de cette thèse et présente un aperçu des perspectives ouvertes par notre travail.

Chapitre 1

Traitement d'images et approches physiques.

Il faut de l'imagination créative pour soulever de nouvelles questions ou de nouvelles possibilités pour regarder les problèmes sous un angle nouveau. Einstein.

1.1 Introduction

Ce chapitre présente quelques uns des différents cadres théoriques utilisés en traitement d'images. Nous nous focalisons principalement sur l'utilisation des EDP et des approches variationnelles.

Dans un premier temps, la section 1.2 présente le traitement d'images comme élément inhérent et indispensable à un domaine plus vaste, celui de la vision. La section 1.3 précise les méthodologies les plus souvent adoptées. L'utilisation des approches variationnelles et des EDP est ici particulièrement mise en évidence dans cette section. Le lien étroit entre approches par EDP et théorie physique est établi grâce au principe de moindre action et au formalisme lagrangien.

La section 1.5 représente la partie principale de ce chapitre. Elle est consacrée aux diverses utilisations des EDP en traitement d'images. Nous présentons les étapes de bas niveau (déconvolution et restauration) en montrant qu'il s'agit en fait de processus régis par une même équation avec cependant des conditions initiales opposées. Par la suite, nous évoquons une analyse de l'image dans son ensemble au travers la théorie multi-échelle et la morphologie mathématique. Nous indiquons le lien étroit qui existe entre ces deux dernières analyses.

Le cas de la segmentation, traité par des approches du type contours actifs, contours actifs géodésiques ou *levels-sets*, est abordé dans la continuité des sections précédentes.

La section 1.5.7 traite de la formulation des problèmes inverses. Elle montre qu'il existe un lien fort entre cette dernière et les théories physiques. La section 1.6 conclue ce chapitre en évoquant l'utilisation d'une approche variationnelle comme représentation pertinente du traitement d'images bas-niveau.

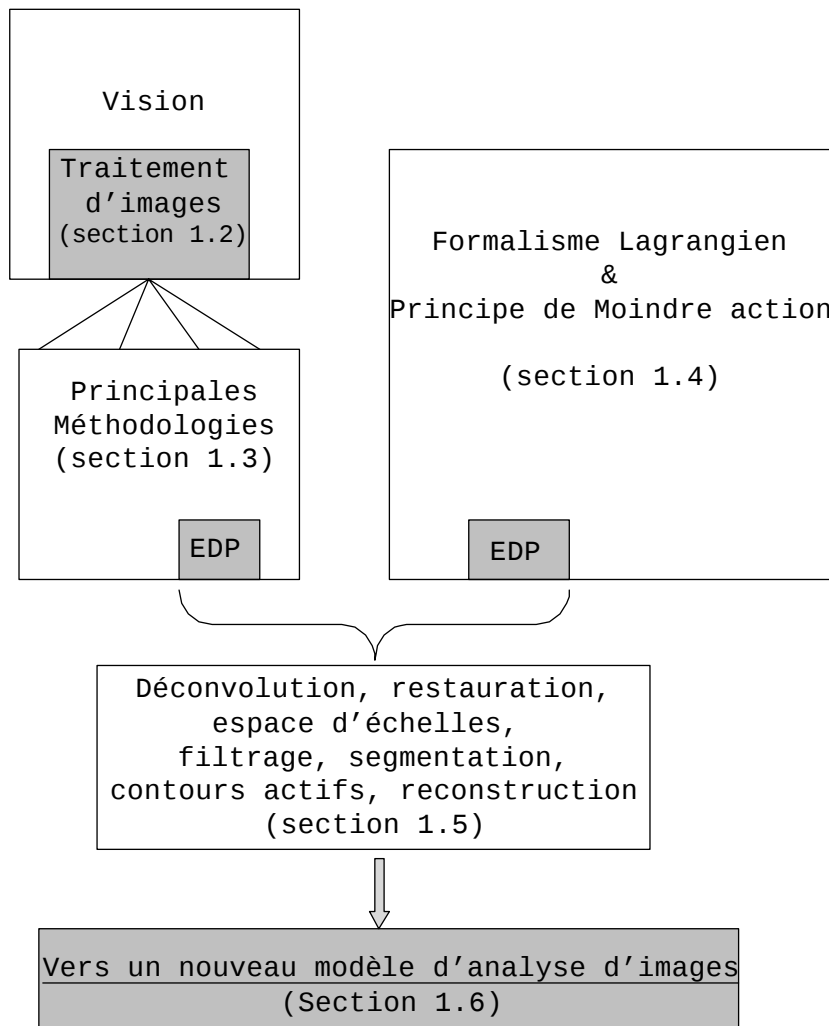


FIG. 1.1 – Organisation du chapitre *Traitement d'images et approches physiques*.

1.2 Le traitement d'images comme élément de la vision

Avec la parole, l'image constitue l'un des moyens les plus importants qu'utilise l'homme pour communiquer, transmettre des informations et apprendre. C'est un moyen de communication universel, présent depuis que l'homme a développé son intelligence. La quantité d'informations que peut contenir une image permet aux êtres humains de tout âge et de toute culture de se comprendre. C'est aussi le moyen le plus efficace pour communiquer ; chacun peut analyser l'image à sa manière, pour en dégager une impression et ainsi en extraire un certain nombre d'information (Figure 1.2). De ce fait, le traitement d'images est l'ensemble des méthodes et techniques opérant sur celles-ci dont l'objectif est soit d'améliorer l'aspect visuel de l'image soit d'en extraire des informations jugées pertinentes.

En 1975, Matheron [106] publiait un livre qui initiait ce qui allait devenir le traitement d'images numériques en France. Depuis, ce domaine a connu l'évolution que l'on sait et



FIG. 1.2 – Certaines images transmettent mieux que d'autres médias une information, un message ou une émotion.

est devenu un axe majeur de recherche. Mais le traitement d'images n'est pas un processus isolé. Il faut le voir comme élément à part entière d'un domaine encore plus vaste et complexe : **la vision**.

De nombreux ouvrages traitent de la vision. Notre objectif n'est pas de faire une étude de ce domaine, mais il est intéressant de voir la manière dont la science de la vision a su se structurer via des paradigmes. Thomas Kuhn définit un paradigme comme un ensemble de travaux de recherche dont les accomplissements sont *suffisamment sans précédent pour attirer durablement un groupe d'adhérents d'autres modes (compétiteurs) d'activité scientifique et qui laissent un nombre important de problèmes à résoudre pour ces adhérents* [90]. Le paradigme de David Marr a dominé la première partie des années 80 [105]. Depuis d'autres sont apparus, mais les travaux de Marr restent fondateurs. Ce dernier a en effet proposé le premier modèle unificateur de la vision. Il énonce des principes généraux qui s'appliquent à tous les systèmes visuels (selon lui et d'après les connaissances de l'époque) et une méthodologie de travail pour concevoir et produire des systèmes artificiels. Selon ce paradigme, l'information visuelle contenue dans une image peut être traitée selon trois concepts bien définis :

1. la notion de modules visuels accomplissant des fonctions perceptuelles bien distinctes telles que : détection de contours, des variations continues d'intensité lumineuse ou du mouvement, reconnaissance de texture, etc.
2. une hiérarchie de niveaux de représentation :
 - niveau 0 : l'image brute, représentée par l'intensité lumineuse en chacun de ses points.
 - niveau 1 : appelé première ébauche (*primal sketch*) ; ce niveau définit, à partir d'une ou de plusieurs images, un processus d'extraction de caractéristiques en

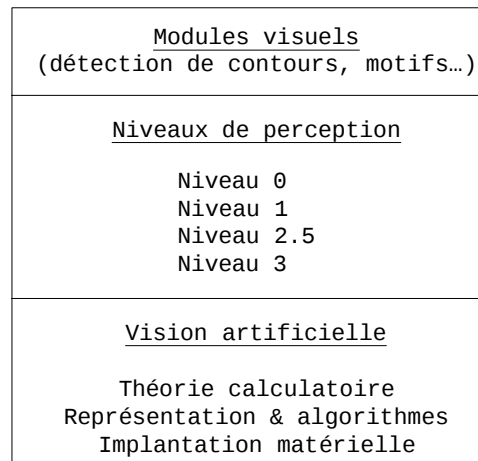


FIG. 1.3 – Paradigme de Marr [105].

- termes d'attributs bi-dimensionnels ;
- niveau 2.5D : il s'agit d'une représentation centrée sur l'observateur. Elle constitue l'entrée d'un certain nombre de processus plus ou moins indépendants qui calculent des propriétés tri-dimensionnelles locales relatives à la scène ; ces processus opèrent sur une séquence d'images (analyse du mouvement), sur une paire d'images (stéréovision) ou sur une seule image. Dans ce dernier cas, il s'agit de processus d'inférence qui utilisent des connaissances géométriques (analyse des contours), géométriques et statistiques (analyse des textures), photométriques (analyse des ombrages) ou colorimétriques (analyse des reflets) ;
 - niveau 3 (*3D model representation*) : cette description (hiérarchique) de la forme des objets définit une méthodologie de création de systèmes de vision artificielle. Il s'agit maintenant d'une représentation centrée sur la scène (la description ne dépend plus de la position de l'observateur).
3. méthodologie de création d'un système de vision artificielle :
- théorie calculatoire (*computational theory*) : quel est le but du calcul, pourquoi est-il approprié et quelle est la logique de la stratégie par laquelle il peut être mené à bien ?
 - représentations et algorithmes : comment cette théorie calculatoire peut-elle être implantée. Quelle sont les représentations pour les entrées et sorties et quel est l'algorithme pour la transformation ?
 - implantation matérielle : comment les représentations et algorithmes peuvent-ils être mis en oeuvre physiquement ?

En pratique, le paradigme de David Marr se traduit par trois étapes d'analyse : **le traitement d'images, la reconstruction de scène et la reconnaissance haut niveau**, le traitement d'images étant la pierre de base de tout système de vision. La diversité des images, la difficulté du problème, les origines variées des chercheurs, l'évolution de la puissance de calcul des ordinateurs, et un certain empirisme dans l'évaluation des résultats ont conduit à l'introduction d'une multitude d'algorithmes. Dans la section suivante,

nous recensons les principales classes de méthodes utilisées en traitement d'images.

1.3 Principaux cadres théoriques du traitement d'images

Recenser l'ensemble des approches développées est une tâche gigantesque. Établir un relevé des différents cadres théoriques semble plus restrictif mais plus pertinent. Dans chacun des cadres explicités ci-dessous, des exemples de procédures associées sont donnés.

- la morphologie mathématique (filtrages morphologiques, squelettisation, ligne de partage des eaux...),
- la théorie psycho-visuelle (Gestalt...)
- l'analyse bas niveau de formes et des déformations (théorie des groupes, géométrie différentielle...),
- les approches géométriques (géométrie projective, analyse/synthèse d'images...),
- les problèmes inverses (régularisation quadratique et semi-quadratique, maximum d'entropie...),
- les approches statistiques (modèles bayésien, Markovien, évidentiel, théorie de l'information...),
- les approches variationnelles (EDP, espace d'échelles, équation eikonale et chemins géodésiques, flot de courbure moyen, contours actifs...).

Depuis quelques années, les cloisons qui séparaient ces approches deviennent de plus en plus perméables et des formalismes unificateurs ont vu le jour, par exemple entre la morphologie mathématique et les méthodes par EDP [17], [72], [73] ou bien entre les problèmes inverses et les approches variationnelles [12]. L'ensemble de ces cadres font de plus en plus intervenir des outils et théories mathématiques, comme par exemple, les EDP, les ondelettes, l'analyse en composantes principales ou la théorie des fonctions à variations bornées. Ces modélisations mathématiques apportent des cadres théoriques puissants qui permettent un développement plus poussé des méthodes sous-jacentes, d'en voir les limites, les difficultés ou les nouvelles possibilités. Les outils mathématiques utilisés sont éclectiques : analyse de Fourier, distributions, géométrie différentielle et statistiques...

Dans la suite de cette section, nous allons brièvement expliciter la formulation générale (ou la philosophie) de ces principaux cadres théoriques, et nous focaliser sur les approches variationnelles et les EDP en indiquant leur caractère fédérateur.

1.3.1 La morphologie mathématique

La morphologie mathématique prend ses racines dans la théorie des treillis et la géométrie aléatoire. Créée par G.Matheron et J.Serra en 1964, elle a été présentée dans trois publications majeures :

- [106], qui porte sur les ensembles,
- [149] et [150], axées sur les transformations invariantes par translation est étendues au cadre des treillis.

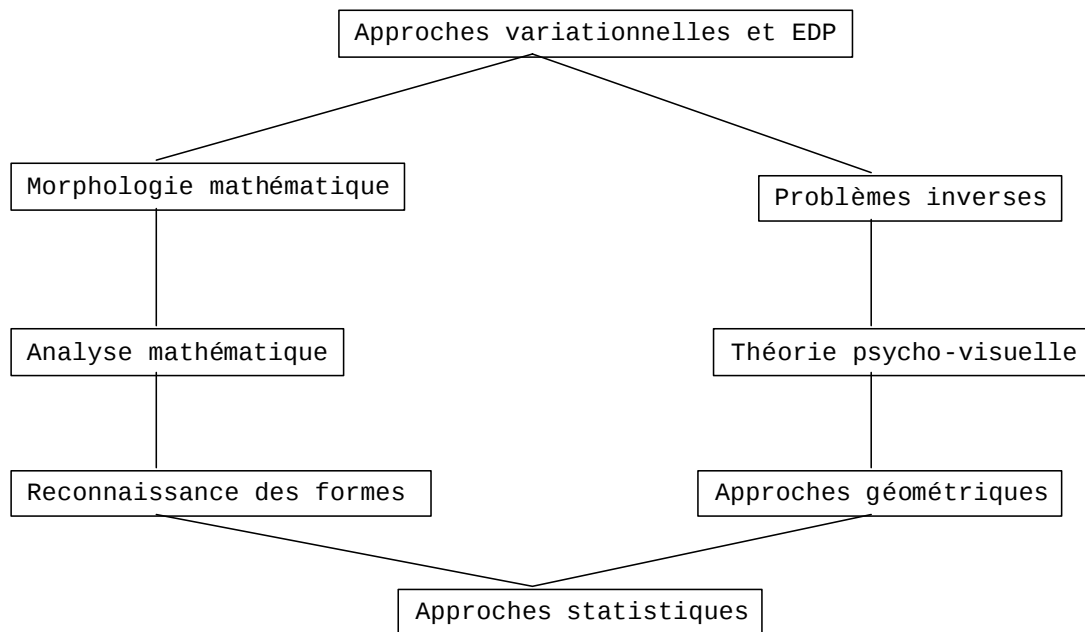


FIG. 1.4 – Les méthodes de traitement d'images présentées dans ce graphique possèdent toutes un lien direct ou indirect avec une ou plusieurs autres. Ainsi par transitivité, ces méthodes forment un cercle clos où chaque processus trouve sa place.

La morphologie mathématique est la science de la forme et de la structure, fondée sur des notions d'ensembles, de topologie et de géométrie. Ce domaine s'est établi comme une des méthodes les plus puissantes du traitement d'images s'appuyant sur une théorie mathématique complète. Depuis peu, la morphologie mathématique bénéficie du formalisme variationnel [103], ce qui permet de dégager un éclairage nouveau lié aux propriétés inhérentes à ce cadre théorique.

La morphologie mathématique repose sur des techniques non linéaires à base d'opérateurs sup (plus petit majorant) et inf (plus grand minorant). Ces deux opérateurs de base permettent de définir l'ensemble des opérateurs morphologiques existants. De plus, toute structure munie d'un ordre partiel $\leq$ et qui vérifie l'existence d'un supremum et d'un infimum est appelée treillis complet.

Le principe de base de la morphologie mathématique est de comparer les objets d'une image I à un objet B de référence, de taille et de forme données. Cet objet de référence s'appelle *l'élément structurant*. Les opérations de base sont la dilatation et l'érosion. La dilatation est habituellement définie en termes algébriques par l'addition de Minkowski de I et de B . L'érosion est l'opération duale, *i.e.* du complémentaire de la somme de Minkowski du complémentaire de I et de B . À partir de ces opérations élémentaires, on peut construire des outils plus avancés, tels que l'ouverture et la fermeture, la squelettisation, l'amincissement, l'épaississement, l'érosion ultime, l'ouverture par reconstruction, les filtres alternés-séquentiels ...

Dans le cadre du traitement d'images, les deux domaines de prédilection de la morphologie mathématique sont la segmentation d'image et le filtrage. Ce dernier se définit de

manière précise comme une *transformation croissante et idempotente* sur un treillis.

1.3.2 La théorie psycho-visuelle

La théorie la plus populaire est celle de la Gestalt [171], elle est vue comme une théorie de la connaissance, correspondant à un point de vue critique et réaliste, l'expérience et la phénoménologie devant être mises en relation. La description phénoménologique donnée, notamment par Kanizsa [76], peut être utilisée comme principe mathématique de genèse de la complétion amodale gérant les notions de courbures et d'énergie de déformation. Des chercheurs comme Bertalmio et Sapiro [10] ont récemment découvert comment le modèle gestaltique pouvait être implanté de manière opérationnelle en restauration d'image. La théorie de la Gestalt se définit donc comme une position scientifique, un paradigme en évolution. Cette théorie sera plus profondément abordée dans le chapitre 2.

1.3.3 La reconnaissance des formes et des déformations

Le problème que cherche à résoudre la reconnaissance des formes est d'associer une *étiquette* à une donnée. Celle-ci peut se présenter sous la forme d'un pixel si l'on travaille au plus bas niveau, ou tout autre objet plus complexe extrait des images comme par exemple des structures, attributs, primitives. Ces objets ont des interprétations différentes et prennent des formes mathématiques variées selon les cadres théoriques employés. Des méthodes générales ont été développées en reconnaissance des formes pour extraire automatiquement des informations des données d'intérêts afin de caractériser les classes de formes (*apprentissage*) et d'assigner automatiquement des données à ces classes (*reconnaissance*). Les méthodes de la reconnaissance de formes sont souvent regroupées selon les approches suivantes [38] :

- statistiques,
- syntaxiques,
- structurelles,
- hybrides (une combinaison des autres).

1.3.4 Les approches géométriques

Ces approches ont pour objectif d'extraire certaines primitives géométriques présentes dans une image [74]. Cette dernière est alors vue comme une surface 3D où la valeur de chaque pixel est associée à une hauteur, formant ainsi un relief. Une séquence typique d'extraction consiste en une suite d'opérations agissant sur des primitives de plus en plus complexes :

- extraction de primitives rudimentaires (arcs, segments) dans l'image d'intensité ;
- reconstruction du contour de l'objet à partir des caractéristiques précédentes et des propriétés locales de l'image. Cette reconstruction s'effectue aussi bien en 2D qu'en 3D. Cette étape peut s'écrire de manière élégante et efficace sous forme variationnelle [91] ;
- détermination d'attributs décrivant les relations topologiques, d'orientation et de distance entre objets d'une même scène ;

- mise en correspondance d'objets ou d'ensembles d'objets à partir d'images provenant de sources ou de modalités d'acquisition différentes.

1.3.5 Les méthodes dédiées à la résolution de problèmes inverses

Avant de parler de problèmes inverses, rappelons ce qu'est un problème bien posé au sens d'Hadamard [66].

Définition 1.3.1 *Un problème est dit bien posé si :*

1. *il existe une solution au problème*
2. *si une solution existe, alors elle est unique.*
3. *une faible perturbation des données entraîne une faible perturbation de la solution du problème non perturbé.*

Si au moins une de ces conditions n'est pas vérifiée le problème est dit mal posé.

L'existence et l'unicité sont les deux conditions classiques pour la résolution d'équation. L'unicité peut être obtenue par l'adjonction de contraintes supplémentaires pour réduire l'espace des solutions [130]. La dernière condition signifie qu'une petite perturbation sur les données observées n'entraîne qu'une petite erreur sur la solution. Malheureusement cette condition n'est jamais vérifiée pour la plupart des problèmes inverses du traitement d'images dont l'objectif principal est de retrouver les données initiales non bruitées qui ont conduit aux données mesurées et qui sont donc mal posées. On parle alors de problèmes inverses mal posés.

Le lien entre observations et quantités cherchées est direct, s'il s'agit de restauration d'images par exemple, mais ce lien est beaucoup plus complexe lorsqu'il s'agit par exemple de reconstruction tomographique, d'interprétation de données satellitaires ou d'inversion de systèmes évolutifs. Les méthodes permettant de régulariser un problème mal posé sous forme de problème bien posé sont appelées méthodes de régularisation.

Un problème inverse peut se formaliser sous la forme suivante.

Soit P une transformation linéaire permettant le passage d'une image originale u à une image acquise bruitée v par un modèle d'acquisition du type :

$$v = Pu + n \tag{1.1}$$

où n est un bruit généralement considéré comme gaussien de moyenne nulle. Le problème inverse consiste alors à retrouver u à partir de v . Un travail récent sur ce sujet peut être trouvé dans [12].

Dans ce travail, le principe d'une telle inversion consiste à ne plus essayer d'inverser l'opérateur P pour l'appliquer aux observations v mais plutôt de chercher une approximation de P^{-1} qui soit stable et de chercher une solution dans un ensemble de solutions admissibles. En prenant explicitement le bruit en compte, l'observation devient n^δ telle que $\|n - n^\delta\| \leq \delta$. Dans ce cas, on recherche une solution dans l'ensemble des solutions admissibles $\{v / \|Pv - n^\delta\| \leq \delta\}$. La solution est alors choisie suivant différents critères selon la méthode de régularisation, le principe étant d'obtenir la stabilité de l'opérateur inverse, c'est-à-dire une solution v proche du u idéal. La régularisation peut être appréhender dans

un cadre statistique ou stochastique selon que l'on utilise une fonction ou une distribution de probabilités. Dans le cadre déterministe, la régularisation classique est celle de Tikhonov [164].

1.3.6 Les approches statistiques

Les approches statistiques sont généralement utilisées en traitement d'images afin d'évaluer le plus fidèlement possible la valeur de certains paramètres associés à une primitive de l'image. La théorie de l'estimation statistique nécessite la connaissance d'une densité de probabilité associée, par exemple à une région de l'image, et d'une probabilité *a priori* sur les paramètres. Différentes méthodes permettent cette estimation selon l'information disponible *a priori* :

- la méthode du maximum de vraisemblance : on l'utilise lorsque l'on ignore la statistique suivie par le paramètre ou lorsque l'on suppose que le nombre de mesures est suffisamment important.
- la méthode du maximum *a posteriori* : elle requiert la connaissance de la loi *a priori* du paramètre à estimer. Elle permet dans certaines conditions d'obtenir une estimation plus fiable. On montre que sous certaines hypothèses l'*a priori* joue un rôle de régularisation.
- la méthode du risque bayésien : elle nécessite aussi la connaissance de la densité de probabilité du paramètre à estimer mais dépend en plus du choix d'une fonction de pondération de l'erreur commise.
- les champs de Markov : leur utilisation se base sur l'analogie entre images et systèmes mécaniques statistiques. Geman et Geman [55] ont proposé de restaurer une image en minimisant une énergie contenant un terme d'attache aux données et un terme correspondant à une loi de Gibbs. Le théorème d'Hammersley-Clifford permet alors de relier l'énergie à la distribution conditionnelle *a posteriori*.

1.3.7 Les approches variationnelles et EDP

Nous détaillons plus particulièrement ces approches car elles semblent être fédératrices des précédentes.

En effet, de manière générale, les EDP permettent de décrire l'évolution d'un système à grand nombre de *particules*. Elles jouent un rôle fondamental dans la modélisation de tels systèmes (particules en mécanique des fluides, agents en trafic routier ou en finance). Ainsi, si l'on utilise l'analogie proposée par Pierre-Louis Lions dans [26], les particules deviennent des pixels.

Si chaque problème de traitement d'images peut être traduit dans un énoncé où l'aspect évolutif d'un système entre en jeu, l'écriture variationnelle par EDP s'impose comme outil de modélisation.

Spécifiquement, la résolution des problèmes inverses s'effectue en stabilisant les problèmes mal posés à partir de techniques de régularisation. D'une manière plus générale, ces méthodes sont caractérisées par une solution qui réalise un compromis entre une fidélité aux données mesurées et une fidélité à une information *a priori*. Le choix de cet *a priori* est le

plus souvent qualitatif et détermine la façon selon laquelle va se réaliser la régularisation. Cette dernière se présente généralement sous la forme d'une fonctionnelle, d'un potentiel ou d'une fonction de coût, et forme avec le critère d'erreur par rapport aux données un principe variationnel imposé *a priori*. La restauration d'images [165], l'estimation du mouvement par analyse de flots optiques, le remplissage d'artefacts ("inpainting" [11]), l'analyse multi-échelles, la segmentation ou, dans le domaine de l'analyse de primitives de plus haut niveau, la classification [144] et les techniques de régression [108] en sont quelques exemples.

Ces approches permettent en traitement d'images et en vision de traiter des problèmes aussi bien linéaires que non linéaires dans un formalisme rigoureux et, bien souvent, avec des schémas numériques de résolution efficaces qui assurent le caractère bien posé du problème.

Pour le problème inverse 1.1, l'approche variationnelle classique [32] consiste à trouver u^* telle que l'énergie $E(u^*)$ suivante soit minimale :

$$E(u^*) = E_1(u) + \lambda E_2(u), \quad (1.2)$$

où $E_1(u)$ est un terme de fidélité aux données et $E_2(u)$ un terme de régularisation qui dépend généralement du gradient de u ou de la matrice des dérivées d'ordre supérieur.

$$E_1(u) = \phi_1(\|v - Pu\|^2) \quad (1.3)$$

$$E_2(u) = \phi_2(u) \quad (1.4)$$

Le problème de trouver une solution de 1.1 à partir de v est alors formulé comme celui de retrouver u telle que l'énergie $\tilde{E}(u)$ suivante soit minimum par rapport à u

$$\tilde{E}(u) = \frac{1}{2}\|v - Pu\|^2 + \lambda \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) d\Omega \quad (1.5)$$

où le premier terme de $\tilde{E}(u)$ est un terme d'attache aux données et où le second est lié à la contrainte de régularisation.

Dans le cas où la fonction de potentiel $\phi(.) = \phi(|\nabla u|) = |\nabla u|^2$ est quadratique, on se retrouve avec la régularisation dite de Tikhonov [164].

Bien évidemment ces présentations sont excessivement sommaires et ne traduisent que de manière minime l'étendu des travaux sous-jacents. Elles permettent cependant de faire ressortir l'apport grandissant des approches variationnelles en traitement d'images.

Les premières approches variationnelles trouvent leur origine dans la physique classique. La section suivante est ainsi consacrée à leur formalisme et à leur origine.

1.4 Principe de moindre action et formalisme lagrangien

La question de l'utilisation de la physique dans le traitement d'images n'est pas qu'une simple conjecture mais une réalité. On peut citer comme champs de la physique utilisés

par des processus de traitement d'images la mécanique des fluides [10], l'électromagnétisme [139], la mécanique de Newton [77] et la mécanique du point pour toute une série de modélisation d'objet.

La plupart de ces méthodes repose sur un principe vieux de quelques siècles : le principe de moindre action.

Pour un système donné, la question sous-jacente au principe de moindre action est la détermination des états intermédiaires que va prendre le système entre les deux instants x_1 et x_2 . Une première approche consiste à déterminer toutes les forces agissant sur ce système à un instant, puis à calculer la nouvelle position à un autre instant infiniment proche du précédent et à recommencer, construisant ainsi de proche en proche la suite constituée par les états du système.

Cette façon itérative de procéder peut être, dans certains cas particuliers, élégamment contractée en une équation différentielle qui permet de prédire, une fois résolue, la connaissance de l'ensemble des états.

Une autre manière de concevoir le problème, est de l'appréhender dans sa globalité. Si nous prenons le cas d'un système physique déterministe, la nature ne choisit qu'une seule évolution possible entre deux instants. Qu'est-ce qui distingue ce choix, cette trajectoire physique, de toutes les autres ? A cette question, on peut répondre qu'elle se distingue des autres par le fait qu'elle est solution de l'équation différentielle de la trajectoire avec les conditions initiales appropriées. Mais dans le cas, le plus courant, où nous ignorons les conditions initiales ou lorsque le problème ne peut être ramené à une équation différentielle, par quel moyen pouvons-nous alors distinguer la trajectoire physique (*i.e.* l'ensemble des états), de tous les *chemins* possibles ?

En 1744, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis pressentit que les phénomènes physiques répondraient à un principe premier, fondamental, selon lequel la nature choisissait toujours, entre toutes les possibilités qui s'offraient à elle, celle qui était la *plus efficace*. En l'occurrence, dans le cas du mouvement, cette efficacité s'exprimait par un minimum de vitesse pour un minimum de chemin parcouru. Il baptisa ce principe, *le principe de moindre action*.

Le formalisme lagrangien, qui permet de résoudre le problème précédemment énoncé, repose sur la considération de toutes les trajectoires *a priori* possibles du système entre les valeurs vectorielles $\mathbf{x}_1$ et $\mathbf{x}_2$, et de *choisir* une fonctionnelle S sur ces trajectoires (fonctionnelle d'action), de sorte que les trajectoires effectivement suivies sont celles qui extrémisent S . Soit un système de N particules, paramétrées par M coordonnées q_i ; $i = 1, \dots, M$. Pour toute trajectoire γ , on pose :

$$S[\gamma] = \int_{x_1}^{x_2} L(q_i(\mathbf{x}), \dot{q}_i(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (1.6)$$

où $\dot{q}_i$ est la dérivée de q_i . L est appelé *lagrangien*. On appelle *action* l'intégrale du lagrangien sur une trajectoire quelconque. La Figure 1.5 illustre le principe explicité plus haut.

Une fois un tel principe établi, la question qui subsiste est celle de la détermination de la solution. Celle-ci est calculée selon l'hypothèse que toute perturbation infinitésimale du système ne doit pas modifier cette solution. Ceci conduit à écrire que la variation de

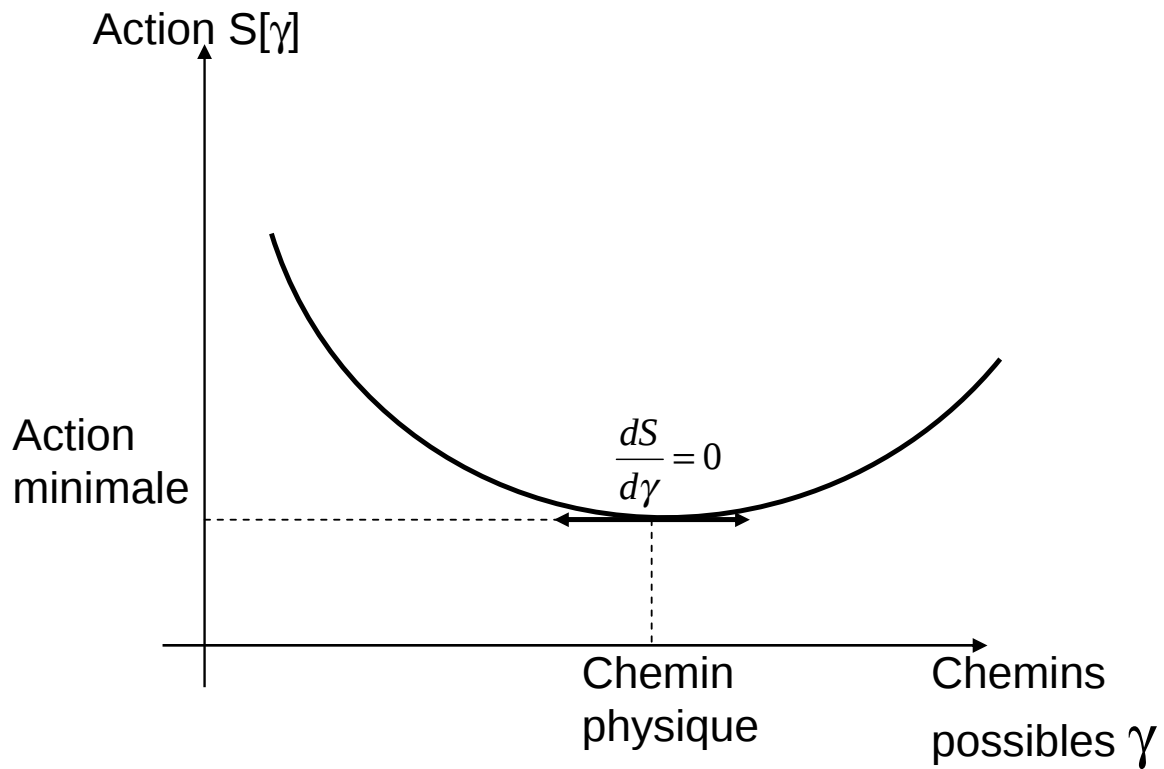


FIG. 1.5 – Illustration du principe de moindre action. Le graphe représente en abscisse l'ensemble des chemins possibles pour un système entre deux instants et en ordonnée l'action correspondante. L'action minimale correspond à la réalité physique du système.

l'action est nulle pour toute déviation infinitésimale du chemin physique. Autrement dit, comme montré sur la Figure 1.5 la dérivée de la fonctionnelle S doit être nulle. Cette condition d'annulation conduit à l'équation d'Euler-Lagrange suivante :

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma} = \mathbf{0} \implies \frac{d}{d\mathbf{x}} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \mathbf{0} \quad (1.7)$$

Cette approche, utilisée en physique depuis près de 200 ans, est l'un des moyens les plus puissants et efficaces, mais aussi l'un des plus élégants, pour résoudre ce type de problème. Cependant la question de savoir d'où les lagrangiens proviennent reste une énigme de la physique. Qu'est ce qui justifie leur existence si ce n'est la validation expérimentale des résultats qu'ils fournissent. Comme le dit Hubert Reeves :

En science, on jauge les notions à leur fertilité, les concepts étant admis à l'échelle de leur rentabilité.

Les lagrangiens en sont le meilleur exemple, ils sont construits pour répondre à des problèmes, et leur validité est uniquement confirmée par la pratique. Les exemples suivants montrent des lagrangiens et leur utilisation en physique.

Domaine d'application	Lagrangiens
Mécanique Newtonienne	$\frac{1}{2}m \left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - V$
Mécanique des fluides compressibles	$\frac{1}{2}\rho \left[\left(\frac{\partial q}{\partial t} \right)^2 - c^2 \nabla q \cdot \nabla q \right]$
Équation de diffusion	$-\nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - \dots$
Équation de Schrödinger	$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi \cdot \nabla \psi^* - \dots$
Équation électro-magnétique	$4 \sum_{n=1}^N \square q_n \cdot \square q_n - \dots$
...	...

Ainsi tout le problème est de choisir correctement la forme du lagrangien. De l'aveu même des plus grands scientifiques, la recherche se fait par *tâtonnements* [133], le mouvement étant un aller retour répétitif entre la définition du lagrangien et les validations physiques. Pour citer une des réflexions de [133] :

On y met tout ce qu'il faut pour obtenir ce que l'on veut.

La section suivante se veut un justificatif et un état de l'art concernant les approches variationnelles et les EDP en traitement d'images. Nous aborderons leurs utilisations selon les différentes tâches bas niveau que le traitement d'images comporte : segmentation, restauration, reconstruction.

Nous reviendrons aussi plus en détails sur certaines notions précédemment mentionnées.

Nous expliciterons aussi la problématique des problèmes inverses traités selon ce cadre théorique.

Afin de démontrer la pertinence des EDP en traitement d'images, nous considérons l'acquisition d'une image comme un processus d'observation, *i.e.* de mesures, d'une réalité physique. Le support de l'image se présente alors de façon discrète. D'après la théorie de l'information [152], une scène ne peut correctement se représenter que par un jeu de valeurs discrètes, les échantillons, que si les données ont été préalablement lissées. D'où la nécessité d'un processus de filtrage qu'une approche EDP permet d'établir. Dans la section suivante, nous présentons les approches variationnelles, les EDP et les problèmes inverses en traitement d'images.

1.5 Approches variationnelles, EDP et problèmes inverses en traitement d'images

Historiquement, l'utilisation des EDP remonte à Gabor, qui remarqua que la différence entre une image et la même lissée est proportionnelle au Laplacien [50]. Il définit alors une fonction k bornée spatialement telle que :

$$k_h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h} k\left(\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{h}}\right) \quad (1.8)$$

A noter que lorsque h devient petit, le processus de filtrage s'apparente à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u(0) = u_0. \quad (1.9)$$

Ainsi pour remonter à l'image initiale, Gabor inversa la processus, *i.e.* remonta dans le temps, ce qui donne l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u, \quad u(0) = u_{observée}. \quad (1.10)$$

Cette première tentative d'utilisation d'EDP s'avéra être ... un échec, le processus étant hautement instable. Mais l'essentiel était là, et fût ainsi définie la première EDP dans un processus de traitement d'images.

Dans les sous sections suivantes, nous effectuons un bilan des approches variationnelles utilisées en traitement d'images. Nous abordons ces différents aspects dans un ordre *naturel*, *i.e.* celui d'une complexité de tâche croissante. Nous commençons par des tâches de base telle que la restauration, pour finir par des processus plus complexes, comme la segmentation par contours actifs ou les problèmes inverses.

1.5.1 Déconvolution

Considérons tout d'abord la première étape de tout processus de traitement d'images, à savoir l'acquisition de celle-ci. Dans la majorité des cas, on utilise un système optique

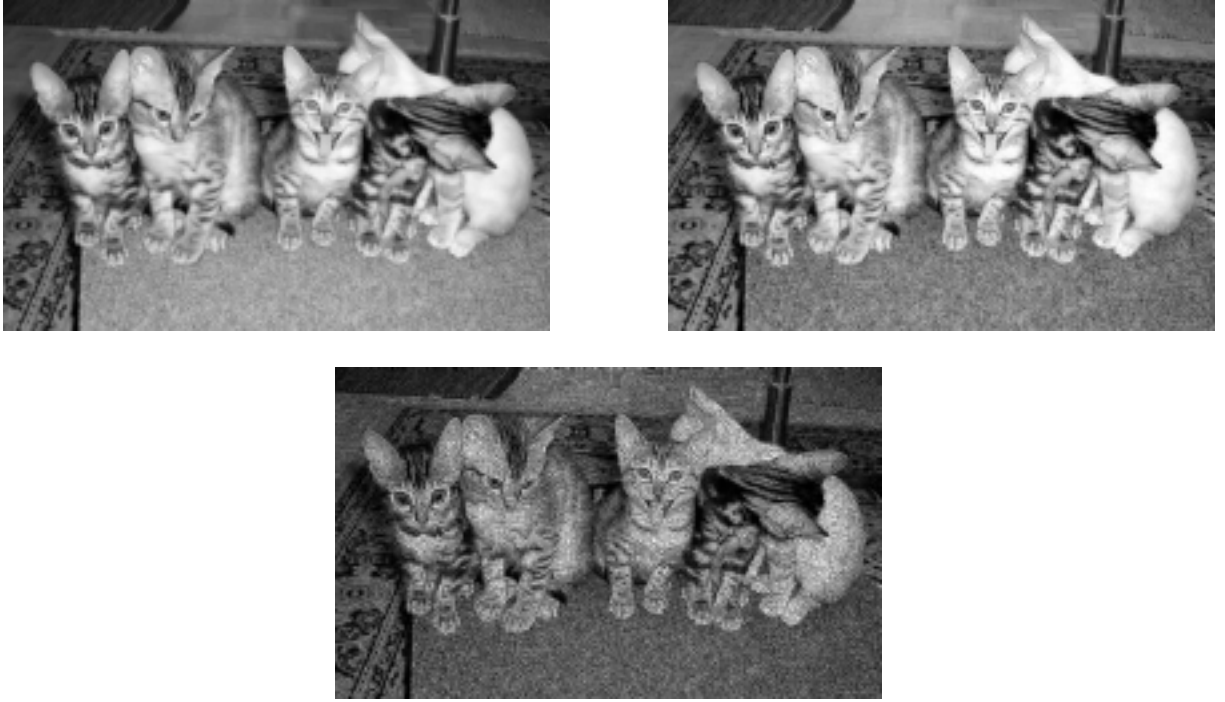


FIG. 1.6 – Illustration du procédé de déconvolution introduit par Gabor. En haut à gauche image originale A droite, image obtenue au bout de deux itérations. En bas, image obtenue après huit itérations.

possédant, par exemple, un jeu de lentilles (caméra, appareil photo...). Or, nous savons que la lentille joue le rôle de filtre passe-bas par rapport à la scène initiale, *i.e.* nous obtenons en sortie de l'acquisition une image filtrée plus floue que la scène elle-même. La première utilisation d'une EDP par Gabor [50] consista alors à essayer de retrouver ce qu'aurait du être l'image non lissée de la scène. Comme nous l'avons vu, cela équivaut à inverser l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u, \quad u(0) = u_{\text{observée}}. \quad (1.11)$$

Mais les résultats, bien qu'intéressants en début de processus, sont hautement instables à partir d'un certain nombre d'itérations (Figure 1.6).

Dans le but d'améliorer cette EDP, Rudin et Osher [143] [142], proposèrent de modifier légèrement l'équation inverse de la chaleur, celle-ci devenant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{sign}(\Delta u)|\nabla u|, \quad u(0) = u_{\text{observée}}. \quad (1.12)$$

De l'EDP parabolique mal posée de l'équation 1.10, l'équation 1.12 définit une EDP hyperbolique bien posée. Cette équation *pseudo-inverse* comprend comme terme de propagation le module du gradient de u affecté du signe du laplacien. Cette équation définit ce qu'on appelle un *filtre de choc*.

Une équation sensiblement similaire est celle proposée antérieurement par Kramer [88] :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\text{sign}(D^2 u(Du, Du))|\nabla u|, \quad u(0) = u_{\text{observée}}. \quad (1.13)$$

Une autre formulation de la déconvolution se présente sous la forme d'un problème inverse et est abordée section 1.5.7

1.5.2 Restauration

Une des applications primordiales du traitement d'images est la restauration puisque située au tout début de la chaîne d'acquisition. La restauration cherche à corriger les distorsions introduites lors des étapes d'acquisition et de transmission. Elle se place donc, de fait, après l'étape de déconvolution. Ce domaine est probablement celui qui a bénéficié le plus des avancées tant techniques, de par l'augmentation de la puissance de calcul, que de la recherche, de par l'utilisation de théories mathématiques. Cette étape est capitale pour la suite du processus de traitement d'images. Elle conditionne la qualité des post traitements, les erreurs en début de chaîne prenant une importance grandissante dans les étapes situées en aval.

Les approches variationnelles développées en traitement d'images bruitées incluent toujours un lissage dans le domaine spatial ou fréquentiel. La différence se présente dans le choix des critères à minimiser, *i.e.* d'une connaissance *a priori* que l'on décide d'introduire dans les données du problème. La première, et la plus simple opération de restauration d'images, est sans nul doute le filtrage passe-bas, *i.e.* une convolution. L'exemple le plus connu, de par ses propriétés et de linéarité, est la convolution par une gaussienne :

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} G_{\sqrt{2t}}(\mathbf{x} - \xi, t) u_0(\xi) d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (1.14)$$

où $G_{\sqrt{2t}}(\mathbf{x})$ est donnée par :

$$G_{\sqrt{2t}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{\mathbf{x}^2}{4t}}. \quad (1.15)$$

avec $2t = \sigma^2$, et σ l'écart type de la gaussienne.

La première EDP utilisée pour la problématique de la restauration, a été l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u(0) = u_0. \quad (1.16)$$

Les résultats sont facilement mis en oeuvre par l'utilisation de la convolution mentionnée précédemment (équation 1.14), avec un rôle identique pour le paramètre t dans les deux équations.

Cette EDP linéaire possède la propriété d'isotropie ; de plus, le résultat obtenu à un temps t_i peut être obtenu directement à partir de u_0 par une convolution avec une gaussienne de paramètre t_i . Cette EDP présente l'inconvénient majeur de lisser l'image de manière similaire. Cela ne pose aucun problème pour des zones homogènes mais les contours ne sont pas préservés. Rappelons que l'équation de la chaleur équivaut à un filtrage passe-bas spatial et fréquentiel. Les contours étant constitués de hautes fréquences, ils sont donc lissés. Le résultat de l'application de l'équation de la chaleur est visible Figure 1.7.



FIG. 1.7 – A droite, image obtenue après application de l'équation 1.9 jusqu'à $t = 8$ avec pour condition initiale l'image de gauche.

C'est pour pallier ce problème que furent développées les EDP anisotropes, de types diffusion anisotrope, l'objectif étant de lisser l'image sur les zones homogènes tout en préservant les contours. La première utilisation d'une telle démarche fut celle proposée par Perona et Malik [127]. Elle consiste à faire diffuser localement l'image avec une conduction inversement proportionnelle à son gradient : un gradient faible implique un fort lissage, un gradient fort, une faible diffusion. La formalisation d'une telle diffusion est la suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)\nabla u), \quad u(0) = u_0 \quad (1.17)$$

où $\phi()$ est une fonction décroissante. Par exemple [24] :

$$\phi(|\nabla u|) = e^{-(|\nabla u|/k)^2}$$

ou bien, en faisant une approximation au premier ordre de l'exponentielle précédente, on obtient :

$$\phi(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + (|\nabla u|/k)^2}$$

A noter que si l'on prend une fonction ϕ constante, nous retrouvons l'équation de la chaleur (Eq.1.9). En effet la divergence du gradient est équivalent au Laplacien ($\operatorname{div}(\nabla) = \Delta$). Mais cette approche, si elle est efficace dans de nombreux cas, possède le désavantage d'être inefficace dans les zones de fortes discontinuités, *i.e.* il n'y a pas de discontinuités sur les contours, ils ne sont pas débruités. Un second problème s'est avéré être d'ordre théorique. En effet, pour obtenir en même temps l'existence et l'unicité d'une solution, il a été montré que la fonction $\phi(|\nabla u|)$ doit vérifier la condition que $|\nabla u|\phi(|\nabla u|)$ soit non décroissante [21]. Si ce n'est pas le cas, l'équation 1.17 agit comme l'équation inverse de la chaleur pour une valeur de gradient supérieure à k . Une solution consiste à travailler avec une version lissée du gradient ; par exemple utiliser $\phi(|G_\sigma * \nabla u|)$ au lieu de $\phi(|\nabla u|)$, avec $G_\sigma *$ l'opération de convolution par une gaussienne d'écart-type σ . Au fur et à mesure de la diffusion, la réduction du bruit permet un lissage moins fort des gradients et donc une meilleure localisation des contours. Cette solution rend le problème bien posé au sens d'Hadamard.

Si les avantages de cette nouvelle équation ont été décrits ci-dessus, ces inconvénients sont les suivants :

- le lissage introduit un nouveau paramètre, à savoir la fonction de lissage ;
- cette équation n'a pas d'interprétation directe sous forme de dérivées secondes directionnelles, ni sous forme variationnelle.

Dans cette optique d'interprétation géométrique, une autre EDP a été introduite par Alvarez *et al.* dans [4].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(|\nabla G_\sigma * u|)|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \quad u(0) = u_0, \quad (1.18)$$

où g est une fonction non croissante qui tend vers 0 quand $|\nabla u|$ tend vers l'infini. L'équation peut s'interpréter comme un lissage anisotrope conditionnel le long des lignes de niveaux de l'image u . Le terme $|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ est en fait la dérivée seconde de u dans la direction orthogonale au gradient de u , le terme permettant de contrôler la vitesse de diffusion étant $g(|\nabla u|)$. Dans les zones où le gradient est faible ce terme est grand et permet un lissage dans la direction perpendiculaire au gradient. A l'inverse, dans les zones où le gradient est fort, le lissage est quasi nul. Un exemple de fonction g est tel que $g(|\nabla u|) = \frac{1}{|\nabla u|}$. Dans ce cas, l'équation 1.18 tend vers l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \quad (1.19)$$

Une autre approche est celle proposée par Nordström [118] qui, partant de l'équation de Perona et Malik, force la solution de l'EDP à rester proche de l'image initiale u_0 :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\phi(|\nabla u|)|\nabla u|) = \beta(u - u_0), \quad u(0) = u_0. \quad (1.20)$$

Avec cette formulation, il unifie les méthodes variationnelles de minimisation d'énergie ([55], [113]...) avec l'équation 1.17. Cependant, cette écriture introduit quand même un nouveau paramètre qui est le coefficient d'attache aux données noté β . Sous forme variationnelle, le problème de Nordström s'écrit :

$$E(u) = \beta \int_{\Omega} (u - u_0)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|) d\Omega \quad (1.21)$$

La Figure 1.8 illustre l'effet du filtrage anisotrope de Nordström.

Une des dernières évolutions des EDP utilisées en restauration, est celle consistant en l'utilisation de matrice (ou tenseur) de diffusion. Introduite en 1993 par Cottet et Germain [27] et largement reprise par Weickert [169], l'EDP s'écrit sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \operatorname{div}(D(\nabla u_\sigma) \nabla u) \\ u(0) &= u_0 \\ \langle D(\nabla u) \nabla u_\sigma, \mathbf{n} \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

$\mathbf{n}$ est la normale externe du domaine Ω , $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est fonction de l'estimateur de contour :

$$u_\sigma = (G_\sigma * \tilde{u}) \quad (1.23)$$

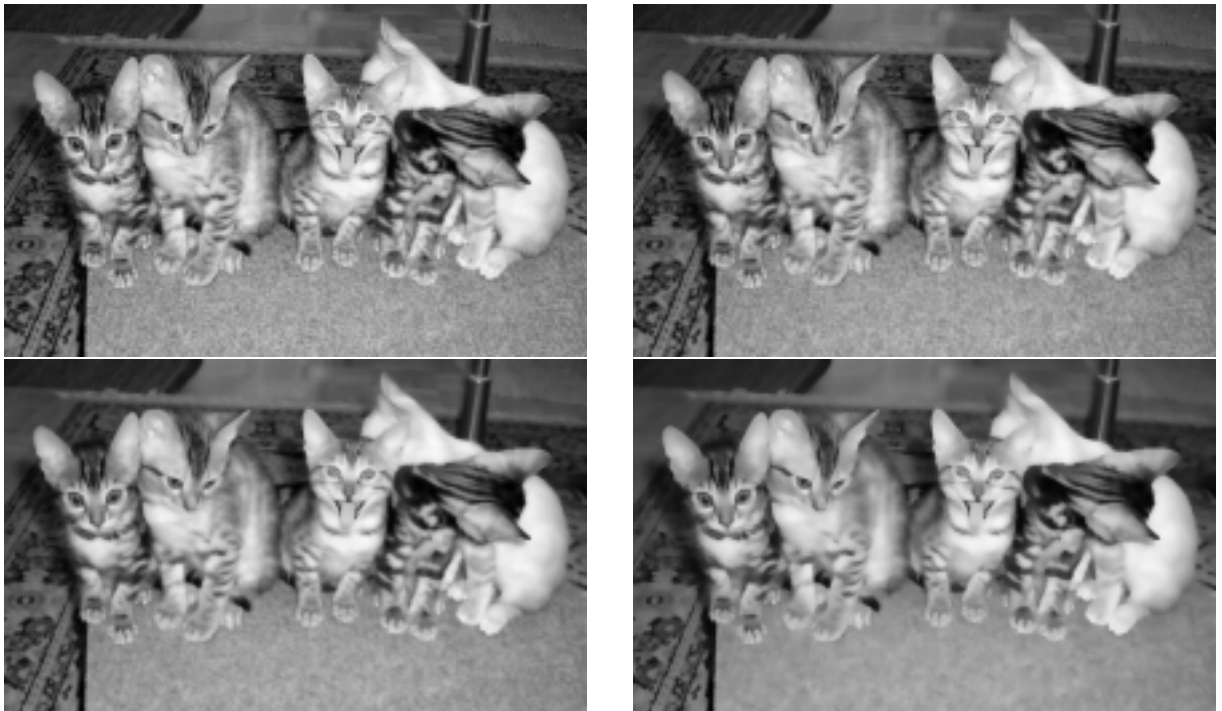


FIG. 1.8 – Équation de diffusion de Nordström : de haut en bas et de gauche à droite ($t = 0$, $t = 5$, $t = 10$, $t = 20$), l'image initiale évolue suivant l'EDP de Nordström (l'image originale étant présentée en haut à gauche).

$\tilde{u}$ étant une extension de u de Ω à $\mathbb{R}^n$.

Le choix de la matrice de diffusion D est dicté par le fait qu'elle doit posséder les mêmes valeurs propres que le tenseur de structure. Rappelons ici la définition d'un tenseur de structure.

Définition 1.5.1 Soit σ, ρ deux réels positifs, $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une image. Le tenseur de structure associé à l'image u est une matrice réelle $n \times n$ définie en tout point de $\mathbb{R}$ par le produit tensoriel

$$T_{\sigma,\rho}(u) = G_\rho * (\nabla_\sigma u \cdot \nabla_\sigma u^t) \quad (1.24)$$

où G_σ représente une fonction gaussienne centrée d'écart-type σ , $\nabla_\sigma u = G_\sigma * \nabla u$, u^t est la transposée du vecteur u .

Cette matrice est très utilisée pour extraire l'orientation locale de l'image, et a été appliquée avec succès pour extraire une information d'orientation dans des images contenant de nombreuses structures allongées et proches. Le tenseur de structure a pour effet de moyenner les orientations locales, c'est-à-dire les orientations du gradient mais pas les directions. Ainsi, des gradients opposés s'ajoutent au lieu de s'annuler.

Dans le cadre de la restauration des images, on se doit aussi de citer les travaux visant à préserver des formes spéciales tels les angles ou les jonctions multiples. Nitzberg et Shiota [117] proposent dans leur article de préserver les contours tout en rehaussant de manière privilégiée les coins et des jonctions en T .

La fin de cette section reprend principalement les résultats obtenus par Deriche dans [32] qui présentent une *approche variationnelle unificatrice*. Nous rappellerons les notations utilisées par Deriche.

Soit u , la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie sur le rectangle $\Omega = (0; a) \times (0; b)$, les valeurs de la fonction u représentant, par exemple, les intensités en niveau de gris de l'image u .

Soit P , l'opérateur linéaire permettant le passage de l'image originale u à l'image bruitée v par un modèle linéaire du type de l'équation 1.1. Comme nous l'avons vu, le problème est alors de retrouver u tel que l'énergie $E(u)$ définie par l'équation 1.5 soit minimum par rapport à u . On s'intéresse aux conditions que doit remplir la fonction $\phi(s)$ de la variable s qui représente la norme du gradient, afin que la minimisation de cette fonctionnelle puisse se faire avec un processus stable et convergent tout en préservant les discontinuités. Les conditions nécessaires sur les minima de l'énergie $E(u)$ sont données par les équations d'Euler-Lagrange associées à la fonctionnelle 1.5. Ces équations s'écrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} P^*(v - Pu) + \lambda \operatorname{div}(\phi'(|\nabla u|) \frac{\nabla u}{|\nabla u|}) &= 0, & (x, y) \in \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= 0, & (x, y) \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.25)$$

P^* étant l'opérateur adjoint de P , et $\mathbf{n}$ le vecteur unitaire normal le long du domaine Ω . Deriche montre alors que ces équations peuvent se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \phi''(|\nabla u|) u_{\xi\xi} + \frac{\phi'(|\nabla u|)}{|\nabla u|} u_{\eta\eta} \quad (1.26)$$

Auteurs	$\phi(s)$
Perona-Malik [127]	$-\frac{k^2}{2}(e^{-(s/k)^2} - 1)$
Perona-Malik [127]	$\frac{k^2}{2} \log(1 + (s/k)^2)$
Geman et Reynolds [57]	$\frac{(s/k)^2}{1+(s/k)^2}$
Tikhonov	$\frac{s^2}{2}$
Green [63]	$\log \cosh(\frac{s}{k})$
Rudin [141]	s
Aubert [5]	$\sqrt{1 + (s/k)^2} - 1$

TAB. 1.1 – Relation entre l'approche unificatrice de Deriche et des EDP existantes.

où les directions de la tangente et de la normale à la ligne de niveaux $u(x, y) = C$ sont données par $u_{\xi\xi}$ et par $u_{\eta\eta}$ respectivement.

Pour valider ce résultat, il relie cette équation aux approches classiques (cf. Tableau.1.1).

La restauration est ainsi (probablement avec les travaux sur l'espace multi-échelles, traités dans la section suivante) le domaine d'application le plus prometteur pour le traitement d'images par EDP.

1.5.3 L'espace multi-échelles

L'émergence de l'espace multi-échelle vient en fait d'un constat d'échec, celui de la difficulté de déterminer par des procédures automatiques, les structures, objets, lignes, ou contours. Si les Gestaltistes considèrent cette étape comme évidente, la mise en place de filtres de détection de contours par exemple, s'avère être une opération des plus complexes. La solution qui émergea fut alors de définir une approche globale de l'image, en filtrant l'image par des filtres passe-bas. Le raffinement qu'a apporté Witkin [172] a été celui de montrer l'importance de la notion d'échelle dans la détection de contour. Une analyse multi-échelles consiste donc à générer, par une EDP, un continuum d'images, afin de mettre en évidence les structures du niveau de première ébauche définie par Marr.

Nous présentons ici un certain nombre d'axiomes, principalement dus à Alvarez *et al.* [4], qui permet, en s'appuyant sur la théorie multi-échelles, d'unifier de nombreuses méthodes d'analyse d'images.

La vérification de telle ou telle famille d'axiomes conduit à différentes EDP.

Axiomes :

Définition 1.5.2 *On dira d'un espace multi-échelles qu'il est **pyramidal** s'il vérifie l'axiome de causalité.*

- **Axiome de causalité** : L'image à une échelle $(t + h)$ avec $t, h \geq 0$ peut être obtenue à partir de la version à l'échelle précédente t , sans utiliser l'image initiale u_0 . Cet axiome s'énonce alors formellement de la façon suivante :

Étant donné $t, h \geq 0$, il existe un opérateur de transition noté $T_{t,t+h}$ tel que, pour T_t un opérateur d'échelle et pour toute image u , on ait la relation suivante :

$$T_{t+h}(u) = T_{t,t+h}(T_t(u)), \quad T_0 = Id \text{ et } T_{t,t}(u) = u$$

Cet axiome est équivalent à une propriété de semi-groupe.

Définition 1.5.3 Soit $u(\mathbf{y}) = c + \langle \mathbf{p}, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle$.

$\mathbf{A} = Hu(\mathbf{x})$ est la matrice Hessienne $n * n$, $\mathbf{p} = \nabla u(\mathbf{x})$ est le gradient dans $\mathbb{R}^n$, $c = u(\mathbf{x})$ est une constante.

- *Axiome de comparaison locale* : L'axiome de comparaison ou encore le principe de maximum implique que l'image initiale est simplement lissée et non rehaussée, c'est-à-dire que si une image u est en tout point supérieure à une image v , elle le reste pour toute échelle. Cela se traduit par :

Si $u(x, y) \geq v(x, y)$ pour (x, y) appartenant à un voisinage d'un point (x_0, y_0) , alors on doit avoir $\forall t \geq 0$ et pour un h petit,

$$T_{t,t+h}(u(x_0, y_0)) \geq T_{t,t+h}(v(x_0, y_0))$$

- **Axiome de régularité** On dira d'un espace multi-échelle qu'il est **régulier** si il existe une fonction $F(\mathbf{A}, \mathbf{p}, a, \mathbf{x}, t)$ continue par rapport à $\mathbf{A}$, non décroissante, telle que : $\frac{(T_{t,t+h}(u) - u_0)(\mathbf{x}_0)}{h} \rightarrow F(\mathbf{A}, \mathbf{p}, a, \mathbf{x}_0, t)$ lorsque $h \rightarrow 0$.

- **Axiome d'invariance morphologique** : l'analyse doit commuter avec toute transformation croissante $f(\cdot)$ des niveaux de gris. Ceci traduit le fait que seule la notion d'ensemble de niveaux est importante. Cet axiome est lié d'une part à une indépendance de l'analyse multi-échelles de l'image en fonction du niveau d'intensité, mais aussi en fonction de transformations isométriques (translation, rotation) de l'image ou même de changement d'échelle ou de projection de l'image.

Soit une fonction croissante $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $\forall u$, on doit avoir :

$$T_{t,t+h}(f \circ u) = f \circ T_{t,t+h}(u)$$

Cette invariance morphologique est dite forte si cet axiome est respecté pour toute fonction $f(\cdot)$, croissante ou décroissante.

- **Axiome d'invariance euclidienne ou affine** : l'analyse doit être invariante pour toute transformation affine $F_{\mathbf{A},b}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x} + b)$, $\mathbf{A}$ matrice de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ et $b \in \mathbb{R}^2$, il existe h' tel que

$$F_{\mathbf{A},b} \circ T_{t,t+h'}(u) = T_{t,t+h}(u \circ F_{\mathbf{A},b}).$$

Dans le cas simple où A est une matrice orthonormale, l'invariance est euclidienne, alors que dans le cas d'une matrice A plus générale, l'invariance est affine. On dira de plus que l'invariance est forte si $h' = h$, sinon elle sera dite faible.

- **Axiome de linéarité** : l'opérateur $T_{t,t+h}$ doit être linéaire par rapport à ses arguments $T_{t,t+h}(au + bv) = aT_{t,t+h}(u) + bT_{t,t+h}(v)$.

Famille d'EDP :

La famille d'EDP la plus globale, que l'on retrouve également dans [4], est caractérisée par le théorème suivant [4] :

Théorème 1 *Si une analyse multi-échelles $T_t(u)$ satisfait les axiomes suivants :*

- de structure pyramidale,
- de comparaison locale,
- de régularité,

alors la solution $u_t = T_t(u)$ est une solution de viscosité de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(H(u), \nabla u, u, x, y, t), \quad (1.27)$$

où F est la fonction définie par le principe de régularité. On rappelle que $H(u)$ est le Hessian de u . Ce résultat fondamental montre le lien étroit entre les EDP et l'analyse multi-échelles.

Une famille d'EDP moins générale est obtenue par le théorème suivant :

Théorème 2 *Si une analyse multi-échelles $T_t(u)$ satisfait les axiomes suivants :*

- de structure pyramidale,
- de comparaison locale,
- de linéarité,
- d'invariance euclidienne,

alors la solution $u_t = T_t(u)$ est solution de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \quad u(0) = u_0. \quad (1.28)$$

Dans ce cas, la fonction F est définie comme la trace du Hessian de u .

Théorème 3 *Si une analyse multi-échelles $T_t(u)$ satisfait les axiomes suivants :*

- de structure pyramidale,
- de comparaison locale,
- de régularité,
- d'invariance morphologique,
- d'invariance euclidienne,

alors la solution $u_t = T_t(u)$ est solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| F \left(\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), t \right), \quad u(0) = u_0, \quad (1.29)$$

avec $F(s, t)$ une fonction non décroissante par rapport à s . Si l'on pose $F(s, t) = s \cdot t$, on retrouve les travaux d'Osher et Setian définis en [120] qui conduisent à la famille d'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), \quad u(0) = u_0. \quad (1.30)$$

La question de l'existence étant définie pour un certain nombre de jeux d'axiomes, on peut s'interroger sur l'unicité de ces solutions. Un des résultats fondamentaux, en terme d'unicité de solution vérifiant l'invariance par changement de niveaux de gris, par isométrie, par projection et par changement d'échelle est le suivant ?? :

Théorème 4 *Il n'existe qu'une seule analyse multi-échelles $T_t(u)$ satisfaisant les axiomes suivants :*

- de structure pyramidale,
- de comparaison locale,
- de régularité,
- d'invariance morphologique,
- d'invariance affine,

Cette analyse est effectuée par l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \left(t \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right)^{\frac{1}{3}}, \quad u(0) = u_0. \quad (1.31)$$

Cette expression est utilisée en pratique sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t^{\frac{1}{3}} (u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}u_x^2)^{\frac{1}{3}}, \quad u(0) = u_0. \quad (1.32)$$

Une fois mise en place l'analyse multi-échelle par approche EDP, nous allons dans la section suivante faire apparaître le lien entre les opérations morphologiques classiques et les EDP.

1.5.4 Les transformations morphologiques

Rappelons tout d'abord quelques définitions.

Définition 1.5.4 *Les opérateurs de dilatation et d'érosion d'un sous-ensemble $\mathbf{X} \subset \mathbb{X}$ par un élément structurant compact $\mathbf{B} \subset \mathbb{X}$ peuvent respectivement s'écrire*

$$D(\mathbf{X}) = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbf{B} + \mathbf{X}} u(\mathbf{y}) \quad (1.33)$$

$$E(\mathbf{X}) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathbf{B} + \mathbf{X}} u(\mathbf{y}) \quad (1.34)$$

En introduisant un paramètre t , on peut définir une famille d'opérateurs d'érosion et de dilatation multi-échelles.

Définition 1.5.5 *Soit B un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$. Soit $t \geq 0$ un paramètre d'échelle. On appelle dilatation, resp érosion, par un élément structurant $\mathbf{B}$ à une échelle t d'un sous-ensemble $\mathbf{X}$ de $\mathbb{R}^n$, les ensembles respectifs :*

$$D_t \mathbf{X} = \sup_{\mathbf{y} \in t\mathbf{B} + \mathbf{X}} u(\mathbf{y}) \quad (1.35)$$

$$E_t \mathbf{X} = \inf_{\mathbf{y} \in t\mathbf{B} + \mathbf{X}} u(\mathbf{y}) \quad (1.36)$$



FIG. 1.9 – Illustration d'une dilatation (à droite) et d'une érosion (à gauche) à partir de l'image du haut. La taille de l'élément structurant est 7 pour les deux opérations.

Définition 1.5.6 Soit $|\cdot|_{\mathbf{B}}$ la norme associée à un convexe fermé $\mathbf{B}$ définie de la façon suivante :

$$|\mathbf{x}|_{\mathbf{B}} = \sup_{\mathbf{y} \in \mathbf{B}} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (1.37)$$

A noter que si le sous-ensemble $\mathbf{B}$ est une boule euclidienne de rayon unité, cet opérateur désigne la norme euclidienne usuelle.

Une fois cette norme définie et en utilisant la formule de *Hopf-Lax* [94], nous pouvons écrire les deux théorèmes suivants décrivant l'opération de dilatation et l'érosion sous forme d'EDP :

Théorème 5 Soit $\mathbf{B}$ un sous-ensemble convexe contenant 0. Soit $u(\mathbf{x}, t) = D_t u_0(\mathbf{x})$, alors $u(\mathbf{x}, t)$ vérifie l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u|_{\mathbf{B}} \quad (1.38)$$

Théorème 6 Soit $\mathbf{B}$ un sous-ensemble convexe contenant 0. Soit $u(\mathbf{x}, t) = E_t u_0(\mathbf{x})$, alors $u(\mathbf{x}, t)$ vérifie l'EDP suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -|\nabla u|_{\mathbf{B}} \quad (1.39)$$

La démonstration de ces théorèmes se trouve dans [72]. La Figure 1.9 montre l'effet d'une dilatation et d'une érosion par un disque de taille 7.

1.5.5 La segmentation d'images

La segmentation d'images peut se définir comme la recherche des zones homogènes dans une image. L'homogénéité se caractérise en terme d'intensité, de couleurs, de textures ou au sens de mouvement, etc. Les travaux traduisant cette problématique sous forme d'EDP sont nombreux. On peut citer les travaux fondateurs de Pavlidis [125], mais aussi ceux de Geman et Geman [55]. A cause de sa généralité, nous présentons ici l'approche variationnelle de Mumford et Shah [113], [114].

Désignons par K l'ensemble des discontinuités de l'images et par $|K|$ leur longueur. La formulation suivante représente l'énergie à minimiser de manière non variationnelle.

$$E(u, K) = \beta \int_{\Omega} (u - u_0)^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega-K} |\nabla u|^2 d\mathbf{x} + \alpha |K| \quad (1.40)$$

La théorie de la segmentation multi-échelles [86], [111] a permis la généralisation de cette approche à la structure espace-échelle.

Soit K_0 la carte initiale des bords de régions d'une image u_0 . Les auteurs ont cherché à réaliser une séquence de segmentations multi-échelles K_t des bords de régions. Soit u_t , la séquence d'images filtrées dont K_t est l'ensemble des bords. On note $T_t K_0 = K_t$. L'algorithme qui résulte de cette axiomatisation est de type croissance de régions, le critère de fusion des régions étant celui de Mumford et Shah. La fusion doit conduire à la décroissante de l'énergie suivante :

$$E(u_t, K_t) = \int_{\Omega \setminus K_t} (u_t - u_0)^2 d\mathbf{x} + t |K_t| \quad (1.41)$$

L'intérêt principal de cet algorithme est qu'il n'utilise en principe qu'un seul paramètre, l'échelle t . Il fournit des résultats au moins aussi bons que les meilleurs et de plus il possède un support théorique et mathématique solide qui permet d'étudier quantitativement ses performances.

Ces algorithmes consistent plus ou moins à faire évoluer en fonction de l'échelle l'ensemble des contours des régions de l'image. Cela rappelle une évolution de type *contour actif*, que nous abordons dans la section suivante.

1.5.6 Les contours actifs géodésiques

Initialement introduits par Kass, Witkin et Terzopoulos dans [77], les *snakes* ou contours actifs, servent à déterminer les contours d'un objet. Soit $\mathcal{C}(q) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée. L'idée est d'associer une énergie à cette courbe. Un processus d'évolution doit permettre d'obtenir un *équilibre* entre régularité de $\mathcal{C}$ et ressemblance au contour de l'objet à détecter dans l'image. Cette énergie s'écrit :

$$E(\mathcal{C}) = \alpha \int_0^1 |\mathcal{C}'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |\mathcal{C}''(q)|^2 dq - \lambda \int_0^1 |\nabla u_0(\mathcal{C}(q))| dq, \quad (1.42)$$

où α, β, λ sont des constantes positives. Les deux premiers termes contrôlent le degré de régularité de la courbe (énergie interne E_{int}), le dernier est responsable de l'attraction de

la courbe vers les contours de l'image (énergie externe E_{ext}). De nombreux travaux ont été développés suite à cet article concernant l'introduction de nouveaux termes énergétiques, les schémas de résolution [107]... Ils peuvent cependant s'écrire sous la forme :

$$E(\mathcal{C}) = \int_0^1 L(\mathcal{C}(q))dq = \int_0^1 (E_{int}(\mathcal{C}(q)) + E_{ext}(\mathcal{C}(q)))dq, \quad (1.43)$$

où L représente le lagrangien.

Nous préférons cependant directement aborder les contours actifs géodésiques introduits par Caselles [20], qui représentent la dernière évolution des contours actifs.

Dans le cas particulier où $\beta = 0$, la solution de l'équation 1.42 est donnée par une géodésique dans un espace de Riemann définie à partir de u_0 .

Définition 1.5.7 *Les géodésiques entre deux points sont les courbes de longueurs minimales reliant ces deux points.*

Par exemple, la géodésique reliant deux points d'une sphère est un arc de grand cercle passant par ces deux points.

La longueur dépend de la structure dont on munit l'espace auquel appartiennent les points. Celui-ci peut être une surface d'un espace euclidien. Plus généralement, cet espace peut être une variété riemannienne ou lorentzienne, la longueur étant définie à partir d'une certaine métrique.

Définition 1.5.8 *Une métrique riemannienne consiste en la donnée, en chaque point d'un produit scalaire dont les coefficients sont des fonctions régulières des coordonnées locales.*

Le calcul des variations, *i.e.* la recherche d'extrema de fonctions définies sur des espaces pouvant être très complexes, est utilisé pour la détermination des géodésiques. Le principe consiste à assimiler la courbe à la trajectoire d'un point matériel. Nous allons donc ré-utiliser le principe de moindre action et le formalisme lagrangien défini section 1.4, et définissons

$$\mathcal{U}(\mathcal{C}) := -\lambda f(|\nabla u_0(\mathcal{C})|)^2,$$

posons $\alpha = \frac{m}{2}$, et L le lagrangien suivant :

$$L(\mathcal{C}) := \frac{m}{2}|\mathcal{C}'|^2 - \mathcal{U}(\mathcal{C})$$

Avant de dériver le résultat final, énonçons la définition d'un Hamiltonien et le théorème de Maupertuis (ou de moindre action).

Définition 1.5.9 *Un Hamiltonien noté $\mathbf{H}$ est utilisé pour exprimer l'énergie d'un système. En mécanique, il peut par exemple représenter la somme de l'énergie cinétique et potentielle d'un système. Ainsi, si le formalisme lagrangien permet de déterminer les trajectoires à l'aides des équations d'Euler-Lagrange, qui sont linéaires du second ordre, le formalisme hamiltonien permet lui de se ramener à des équations du premier ordre.*

Théorème 7 « Principe de Maupertuis » Les courbes $\mathcal{C}(q)$ appartenant à l'espace euclidien qui extrémisent l'Hamiltonien suivant :

$$H = \frac{p^2}{2m} + \mathcal{U}(\mathcal{C}),$$

avec $p := m\mathcal{C}'$, et qui ont une énergie E_0 conservative, sont géodésiques par rapport à une nouvelle métrique $(i, j = 1, 2)$

$$f_{ij} = 2m(E_0 - \mathcal{U}(\mathcal{C}))\delta_{ij},$$

Ce théorème indique qu'un problème de minimisation d'énergie est équivalent à trouver une courbe géodésique dans un espace riemannien. Autrement dit, cela revient à trouver la courbe qui minimise la distance pondérée entre elle et certains points. Cette distance se mesure dans l'espace de Riemann par la métrique f_{ij} .

Cette minimisation de distance se fait par l'EDP suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t} = f(u_0)\kappa \mathbf{n} - (\nabla f \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad (1.44)$$

avec $\mathbf{n}$, normale unitaire externe à u_0 , κ la courbure euclidienne. Le lien profond entre contours actifs géodésiques et EDP est donc ainsi mis en évidence.

Cette approche peut se reformuler en termes d'ensembles de niveaux (*level-Sets*). Initiée par Osher et Sethian en 1988 [120], la méthode des ensembles de niveau a connu depuis un fort succès. Il s'agit d'un schéma numérique simulant l'évolution d'une hypersurface soumise à une loi temporelle modélisée par une EDP. Simple, stable et gérant les changements de topologie, la méthode des *level sets* a été utilisée dans de nombreux domaines. On fait, par exemple, évoluer pour la détection de régions, d'objets, une courbe $\mathcal{C}$ définie comme un ensemble de niveau d'une image u_0 , *i.e.* coïncidant avec l'ensemble des points où $u_0 = \text{constante}$. u_0 est donc une représentation implicite de la courbe $\mathcal{C}$.

Cette représentation est libre de tout paramètre et donc intrinsèque à l'image ; elle est aussi indépendante de la topologie, dans le sens où différentes topologies du *level-set* 0 n'impliquent pas différentes topologies de u_0 . L'évolution de $\mathcal{C}$ peut ainsi être directement reliée avec l'évolution de u_0 par l'EDP :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= |\nabla u| \operatorname{div} \left(f(u_0) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \\ &= f(u_0) |\nabla u| \kappa + \nabla f(u_0) \cdot \nabla u, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \quad (1.45)$$

Cette évolution est équivalente à un front d'onde se propageant perpendiculairement à lui-même, avec une vitesse proportionnelle à la courbure κ , et à une métrique définie par f . Des résultats d'existence, d'unicité et de stabilité pour ce modèle d'évolution sont démontrés dans [20].

Comme nous l'avons indiqué, cette évolution est insensible au changement de topologie. Cette EDP permet de gérer de manière automatique les changements de topologie

du contour. En particulier, s'il existe plusieurs objets dans l'image, l'unique contour initial fermé et englobant les différents objets se scinde lors de son évolution, en autant de contours englobant les objets présents dans l'image. La méthode est aussi insensible à l'initialisation qui peut être très lointaine et très grossière. Le contour peut aussi se déformer pour s'ajuster sur les formes les plus compliquées, là où les *snakes* classiques échouent à cause de leur élasticité. Enfin cette EDP peut converger vers les contours de l'objet même lorsqu'il existe une grande variation de la norme du gradient le long des frontières de l'objet à détecter.

1.5.7 La reconstruction

La dernière utilisation des approches variationnelles que nous indiquerons concerne la problématique de la reconstruction d'objets à partir, par exemple, de projections. Cette problématique s'inscrit dans le cadre plus général des problèmes mal posés où le lien entre observations et quantités cherchées n'est pas direct. On peut citer entre autres le cas des thématiques applicatives où des systèmes d'acquisition permettent d'accéder à des données inobservables directement comme le scanner ou l'IRM en imagerie médicale. En effet, ces systèmes permettent de multiples examens non invasifs de l'intérieur du corps humain et fournissent de nombreuses informations extrêmement utiles à l'analyse et au diagnostic. Cependant, pour interpréter correctement les structures objets de l'analyse, il faut les *reconstruire*, *i.e.* les représenter dans une configuration naturelle, le plus souvent en trois dimensions. Un exemple de travaux montrant l'utilisation d'une approche variationnelle dans un problème de reconstruction 3D est celui de Teboul et al. [161], ou de Blanc-Feraud [12]. Dans le premier article, le modèle choisi est :

$$v = Pu + n,$$

où v est défini dans $\mathbb{R}^3$, et u dans $\mathbb{R}^2$. Une fois le problème posé, les auteurs dérivent les familles d'EDP déjà présentées.

1.6 Des approches variationnelles vers un nouveau modèle d'analyse d'images bas-niveau

Si nous prenons un peu de recul par rapport à tout ce que nous venons d'évoquer, la première question qui peut venir à l'esprit est : *pourquoi faisons nous cela ?* Pourquoi une telle modélisation du traitement d'images bas-niveau. La réponse que nous apportons est qu'il est capital d'alimenter en informations pertinentes et de maîtriser les systèmes de reconnaissance et/ou d'analyse situés en aval de la chaîne de traitement d'images. Par le simple fait que la compréhension d'une succession de processus s'arrête là où le premier élément nous échappe, le traitement d'images dans sa globalité peut être freiné par le manque de compréhension que nous avons sur ces premiers constituants.

Comme nous l'avons souligné, la majeure partie des traitements actuels bas-niveau repose sur une écriture variationnelle du problème :

$$E(u) = \int_{\Omega} |u(\mathbf{x}) - v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \lambda^2 \int_{\Omega} \phi(|\nabla u(\mathbf{x})|) d\mathbf{x}.$$

La difficulté principale réside dans la définition et dans l'écriture de cette fonctionnelle et principalement dans le terme de régularisation. On peut alors se poser les questions suivantes :

- existe-t-il un principe générant une théorie ou une axiomatique qui conduit à une écriture variationnelle pour un problème donné de traitement d'images ? Si la réponse est oui, nous pensons, compte tenu, des modèles généralement adoptés dans ce domaine (équation de viscosité, phénomène de diffusion,...) que la phase physique d'observation (ou d'acquisition de l'image) est intimement liée à ce principe.
- est-ce-que de ce principe, s'il existe, peut découler un nouveau modèle sous-jacent à l'analyse bas-niveau ? Si la réponse est positive, ce modèle doit faire appel aux techniques EDP.
- Quels sont les intérêts, pour la chaîne de traitement, de connaître le modèle sous-jacent à l'analyse bas-niveau de l'image ?

Ainsi parmi toutes les approches que nous avons citées concernant le traitement d'images, un grand nombre sont similaires et ne diffèrent que par la problématique dans laquelle elles sont utilisées. De plus un grand nombre se réfèrent à des problématiques de la physique. Équations de Navier-Stokes, phénomène de diffusion, principe de moindre action, lagrangien, contours géodésiques, équations de la chaleur ... sont autant de démonstrations que le traitement d'images s'inspirent grandement des théories physiques dans le souci d'obtenir des méthodes fiables, robustes et surtout maîtrisées.

On peut ainsi se rendre compte par ce dernier paragraphe que situer un problème de traitement d'images sous forme physique permet de dériver de manière théoriquement correcte des conditions sur les paramètres mis en jeu, afin d'assurer l'existence, l'unicité, la stabilité des solutions, ou les trois en même temps.

Nous devons attacher une profonde importance et une réflexion sérieuse sur le caractère physique de l'information à traiter. D'après les orientations données au GDR-ISIS (Information-Signal-Image-Vision) pour les années futures, ce point est **fondamental**. Pour des opérations aussi diverses que le filtrage, la segmentation ou la reconstruction, la nécessité de la définition et de l'exploitation de modèles physiques ont montré leur utilité et leur pertinence.

Si l'on cite les nouvelles orientations du *thème E* du nouveau GDR-ISIS (www-isis.enst.fr), les systèmes de traitements doivent notamment prendre en compte :

- la dimension radiométrique et géométrique (discrète ou continue),
- les relations topologiques entre entités,
- les sources d'informations complémentaires,
- le contrôle de performance en ligne et hors ligne,
- l'existence de plusieurs échelles d'analyse,
- la variabilité intrinsèque (caractère aléatoire ou imprécis) des images.

Une fois ces exigences énoncées, peut-on envisager d'établir au même titre que la vision et d'autres domaines, un modèle fédérateur du traitement d'images ? Que devrait vérifier un tel modèle ? Si l'on utilise la définition donnée dans [68], l'élaboration d'une

telle théorie scientifique nécessite trois étapes :

- énoncer la théorie, spécifier et élaborer les concepts de base : ces concepts doivent exprimer le cadre formel qui est à la base de la théorie,
- exprimer ces concepts sous forme mathématique,
- réaliser un ensemble expérimental qui permette de vérifier la théorie.

1.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelques uns des cadres formels du traitement d'images. Puis nous nous sommes concentrés sur les approches EDP et variationnelles. Nous les avons présentées comme fédératrices d'autres approches issues de différents cadres théoriques. Nous avons notamment souligné le fait

- que la déconvolution et la restauration ne sont qu'un seul et même processus évoluant en sens inverse.
- qu'il existe un formalisme commun reliant les opérations morphologiques et espace multi-échelles. La définition des opérateurs basiques sup et inf s'effectue au travers d'un espace multi-échelle, ce même espace pouvant être défini à partir de quelques axiomes.
- que le formalisme Lagrangien et le principe de moindre action permettent de dériver des EDP de traitement d'images,
- que les méthodes de segmentation classique ou par contours actifs sont la traduction en terme de processus de traitement d'images de méthodes évolutives dans des espaces géométriques complexes.

Nous avons illustré quelques résultats obtenus sur des images en niveaux de gris. Les résultats ne peuvent pas faire l'objet d'un quelconque comparatif, les méthodes recensées n'étant pas destinées à un objectif unique.

Il apparaît clairement à travers ce chapitre que les techniques par EDP et variationnelles, sont les plus à même d'unifier et fédérer un grand nombre d'approches. Elles permettent de traiter de manière plus stable et plus formalisée une large classe de problèmes dans les domaines de traitement d'images. Le formalisme physique permettant lui aussi de maîtriser et de comprendre les processus mis en jeu, il semble aussi intéressant d'inclure des réflexions purement physiques dans la résolution d'une problématique de traitement d'images.

Ainsi c'est en travaillant dans des cadres mathématiques ou physiques bien définis que l'on permet au traitement d'images d'atteindre un bon niveau de prédictibilité. Il peut donc être utilisé de façon fiable dans des applications réelles et interfacée avec d'autres composants au sein de systèmes complexes.

Nous proposons au chapitre suivant, une approche prenant en compte ces remarques. Elle aborde le traitement d'image bas-niveau selon un point de vue physique et dégage un certain nombre de liens entre le modèle adopté et le système visuel humain.

Chapitre 2

Traitement d'images bas-niveau et Information Physique Extrême

Regardez, regardez, personne ne sait voir.

Henri Matisse.

2.1 Introduction

Afin de dégager certaines caractéristiques essentielles du système visuel humain, nous présentons brièvement le cortex visuel humain et notamment ses liens avec le domaine du filtrage. Après une introduction générale sur la vision, nous discutons des relations profondes entre certaines procédures du traitement d'images et la psychophysique non cognitives de la vision.

Après avoir évoqué la vision non cognitive, la section 2.3 s'intéresse aux relations entre le traitement d'images bas-niveau et l'analyse multi-échelles. Un historique complet de l'obtention de la structure multi-échelles est proposé, avec une attention particulière pour l'axiomatisation d'Alvarez [4]. Cette section se conclue par une analyse des différentes approches et leurs limites.

Dans la section 2.4, le principe EPI (Extremal Physical Information) est introduit. Développé par Frieden [47], il permet de dériver les principales lois de la physique. Après avoir présenté la forme générale des solutions de l'EPI, différentes interprétations quant à cette approche sont proposées en section 2.4.4.

Dans la section 2.5, nous utilisons, à partir d'un scénario de mesure et d'acquisition de données, le principe EPI afin de déterminer le traitement d'images optimal au sens de ce principe et de l'extraction d'information. La fin de ce chapitre concerne la validation du modèle général dans le but de retrouver certaines EDP classiques. Nous étudierons aussi l'influence de certains paramètres présents dans le modèle général. Une évaluation de notre approche est proposée comparativement aux approches classiques.

Dans la section 2.8.3, diverses interprétations prospectives sont proposées. Enfin, dans les perspectives présentées, un modèle prenant en compte l'appareil de mesure est évoqué. La conclusion de ce chapitre résume le modèle de traitement d'images que nous propo-

sons, synthétise la différence entre notre approche et l'approche classique et présente de manière schématique les principales différences entre notre modèle et les approches de la littérature ou celles classiquement adoptées.

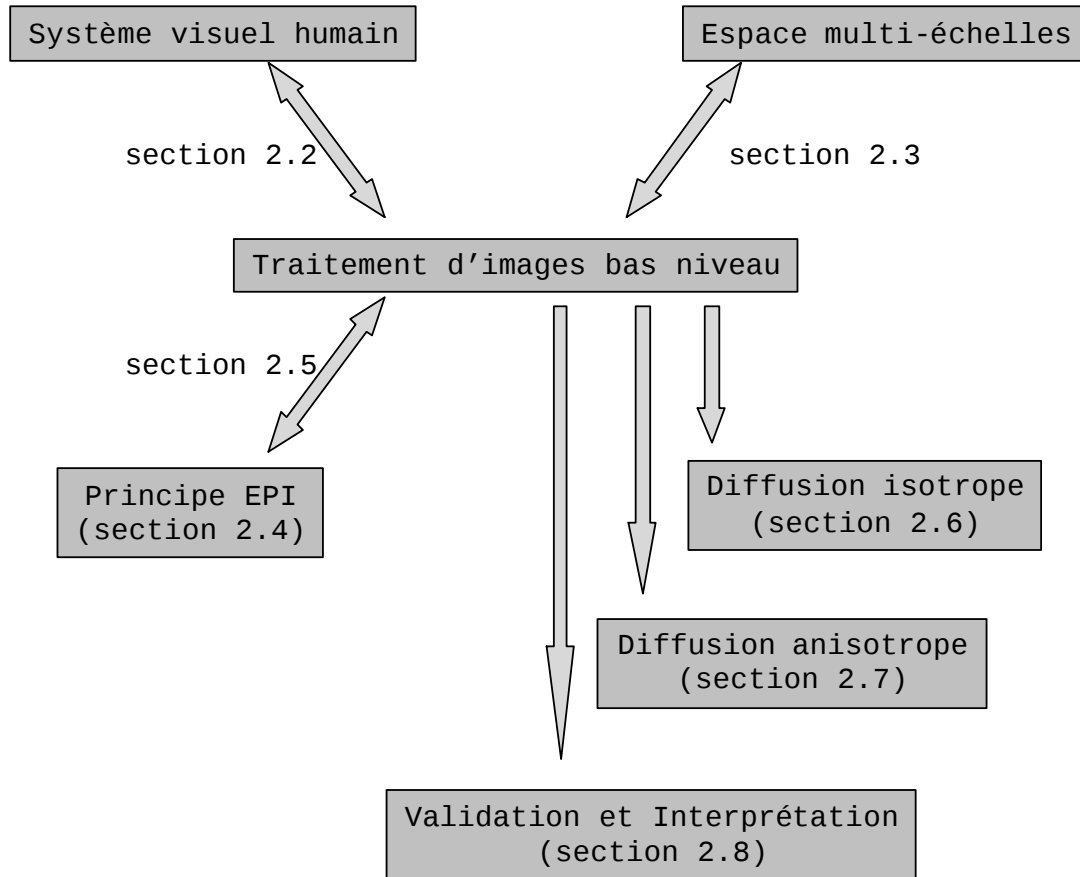


FIG. 2.1 – Organisation du chapitre *Traitement d'images bas-niveau et Information Physique Extrême*. Cette figure met en avant le rôle central que nous donnons au traitement d'images bas-niveau dans ce chapitre.

2.2 Le système visuel humain et le traitement d'images bas niveau

Regarder est infiniment plus complexe que nous ne l'imaginons. Le verbe *regarder* se différencie de *voir* par le fait même de comprendre sémantiquement le contenu de la scène d'intérêt. Nous mettons ainsi en jeu l'ensemble de nos connaissances dans le but de *regarder* le monde qui nous entoure. Le concept sous-tendu par le verbe *voir* ne met lui en jeu que des concepts purement physiologiques ; on peut voir sans comprendre la scène qui nous est présentée. Des études physiologiques ont montré que les zones cérébrales mises en jeu dans le souvenir d'une scène précise sont les mêmes que celles mises en jeu lors

de la vision concrète de celle-ci. Ainsi, *stricto sensu* on peut *regarder* une scène les yeux fermés, mais on ne peut la voir.

Si les magnétoscopes et appareils photographiques peuvent enregistrer des images, ils ne savent pas les interpréter ou les identifier. Seule l'aptitude de notre cerveau à traiter simultanément des quantités énormes d'informations nous permet de posséder une représentation visuelle explicite du monde qui nous entoure.

Grâce à notre expérience nous sommes à même de tirer les informations les plus pertinentes d'une scène afin de l'interpréter. Que percevons-nous sur la Figure 2.2 ? une coupe



FIG. 2.2 – Illusion d'optique illustrant l'effondrement décisionnel qui s'effectue au niveau cérébral, *i.e.* l'impossibilité de cohabitation simultanée de deux analyses pour une même image.

ou deux visages en vis-à-vis ?

Cet exemple illustre l'existence de deux processus bien distincts, à savoir le traitement de l'image et son analyse. Le premier processus conditionne le suivant en lui fournissant un maximum d'information afin de faciliter l'analyse. Dans les processus de traitement d'images, nous incluons l'extraction d'informations concernant la structure, les contours, les textures de l'image, etc. La seconde étape, celle d'analyse, constitue la phase de reconnaissance de formes.

Si nous reprenons l'exemple ci-dessus, nous réalisons à quel point les humains (et les animaux) sont de fantastiques machines à interpréter l'information sensorielle, à reconnaître des formes dans une image bruitée, ou tout simplement à détecter des alignements, des similarités ou des symétries. La théorie de la Gestalt propose diverses lois d'organisation pour la vision d'une image. Cette approche se propose d'organiser l'image selon certains critères comme par exemple :

- la proximité, la couleur, la brillance
- la connexité
- la similarité
- la taille
- l'environnement
- l'orientation
- la symétrie

– ...

Selon cette théorie, il y a une autonomie du voir par rapport au penser, ainsi il existe des illusions lorsqu'il y a conflits ou collaborations entre différentes lois (Figure 2.3)

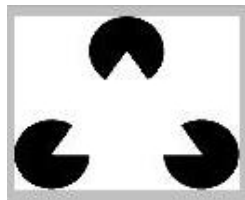


FIG. 2.3 – Illustration de la collaboration de certaines lois de la théorie de Gestalt, afin de créer un triangle.

Selon les psychologues de la Gestalt, l'application de ces règles se fait selon la loi de Prägnanz, introduite par Wertheimer, et présentée ainsi par Koffka en 1935 [87] :

Parmi plusieurs organisations géométriques possibles, celle qui sera effectivement considérée est celle qui débouche sur la forme la meilleure, la plus simple et la forme la plus stable. Ainsi, un ensemble de quatre points positionnés de telle sorte qu'ils constituent les quatre coins d'un carré sera vu comme un carré puisque c'est un meilleur arrangement que, par exemple, une croix ou un triangle avec un point extérieur. Le carré est une forme fermée, symétrique, qui selon les Gestaltistes est la plus stable.

La théorie de la Gestalt se révèle n'être en fait qu'une minimisation d'entropie [168]. Les algorithmes de traitement d'images développés jusqu'à ce jour sont très loin d'atteindre le niveau de performance humain, ou même de prendre en compte l'ensemble des informations que nous utilisons. Toutefois, en essayant de comprendre le type de modèles utilisés implicitement par le système visuel, on peut espérer les incorporer dans les algorithmes de traitement d'images.

La Figure 2.4 résume la chaîne de traitement d'images complète telle que nous la concevons. Elle présente un processus d'acquisition via un système optique. Vient ensuite une étape bas niveau visant à extraire de l'information ne nécessitant pas en général de connaissance *a priori*. Enfin vient un processus d'analyse, *i.e.* de reconnaissance de formes, où entrent en jeu un certain nombre d'*a priori* pouvant être relatifs à la forme, l'orientation, la taille, etc.

2.2.1 Le système visuel humain (SVH) : une décomposition en tâches spécifiques

² Pour commencer, il existe diverses méthodologies pour approcher le SVH. On peut en recenser trois principales :

²Cette section, s'inspire d'une conférence donnée par Y.Meyer à l'université de La Rochelle le 14 Décembre 2001 intitulée "Images et Vision ".

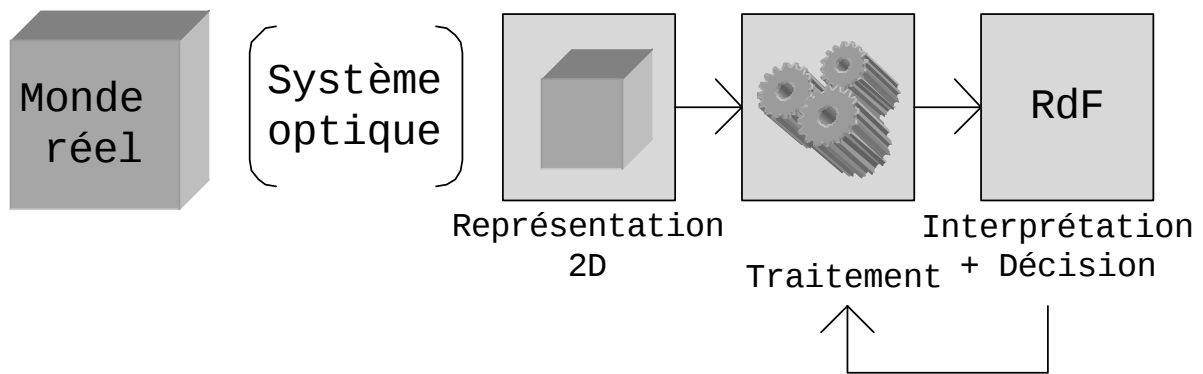


FIG. 2.4 – Représentation classique des processus mis en jeu lors d'une procédure d'analyse d'image.

- approche neurophysique : en rapport direct avec une étude anatomique des éléments participant à la vision ;
- approche psychophysique : en relation avec les propriétés fonctionnelles de la chaîne de traitement de la vision, (la psychophysique étant l'ensemble des lois qui relient les qualités mesurables de l'excitation à celles des sensations correspondantes) ;
- approche ingénierie : modélisation des divers éléments de la chaîne de traitement de l'information photonique.

D'un point de vue neurophysique, le système visuel est relativement *simple*. Deux yeux, deux nerfs optiques et 10^{11} neurones, chacun connecté à des milliers d'autres dans le cortex !

L'oeil est une chambre noire qui transforme les photons en impulsions électriques transférées via les nerfs optiques au cortex visuel puis interprétées par le cerveau. Il apparaît dès cette étude anatomique une question sous jacente : quel est le rôle respectif de chacun de ces éléments dans la compréhension d'une scène qui nous permet *sans réfléchir* de différencier un chat d'un chien alors qu'ils sont tous deux des animaux à poils possédant quatre pattes et une queue.

Pour pallier ce problème, une étude psychophysique s'est avérée indispensable. De nombreuses théories ont prévalu au cours des années voire des siècles passés. La théorie quasi philosophique de la dualité *perception/interprétation* a dominé le monde jusqu'aux années 1970. Selon celle-ci, l'image s'imprime sur la rétine comme sur une plaque photographique et l'impression laissée sur la rétine est comparée à d'autres impressions similaires et interprétées en fonction de celles-ci. On retrouvait déjà cette *vision* des choses chez Kant qui séparait la sensation (passive) de la compréhension (active). Cette théorie semblait s'être vue confirmée par diverses études démontrant l'existence physique d'une cartographie topographique du champ rétinien dans le cortex.

Néanmoins, les travaux qui ont permis à David Hubel de devenir prix Nobel de médecine en 1981 ont montré comment était traitée l'information visuelle dans le cortex visuel primaire, *i.e.* avant toute participation des fonctions cognitives du cerveau. Les travaux de Hubel et de ses collaborateurs ont permis de montrer que les cellules du cortex visuel primaires sont affectées à des tâches infiniment plus modestes, parcellaires, répétitives et

redondantes plutôt qu'à un rôle passif de transmetteur de l'image rétinienne. Certaines cellules sont responsables de la détection des contours et cela dans une orientation particulière pour chacune d'entre elles. D'autres sont dédiées à la détection de motifs périodiques, textures ou autres [34].

Ainsi, et contrairement à ce qui a pu être pensé, le cerveau n'utilise pas une représentation globale et unifiée de l'environnement visuel. Il ne peut pas se limiter à l'analyse des images qui sont projetées sur la rétine pour connaître ce qui est visible. Il doit construire ou plutôt reconstruire activement une représentation du monde visuel. Dès l'arrivée de la lumière sur la rétine et sa transformation en signaux électriques par les photorécepteurs, tout un ensemble de traitements spécialisés travaillant en parallèle entrent en action et décomposent l'information. Une décomposition de l'image en critères de forme, couleur et mouvement mais aussi, concernant l'organisation spatiale, en différents canaux fréquentiels (degrés de précision) est alors effectuée. C'est la combinatoire absolument inimaginable des neurones du cerveau qui nous permet d'apprendre et de nous spécialiser dans une compréhension globale du monde qui nous entoure, et ainsi reconnaître un chien d'un chat, et même un berger belge d'un berger allemand.

Le réseau de neurones fournit par apprentissage une compréhension du monde alentour, mais pour cela, il faut lui communiquer des informations pertinentes et précises, sinon notre vision du monde s'en trouverait biaisée. Quels sont donc le ou les types d'information fournis par le système visuel humain ³ ? Pour cela, nous devons nous pencher sur les travaux concernant les champs récepteurs de la vision (*receptive field* ou *RF* en anglais).

2.2.2 L'information visuelle et les champs récepteurs de la vision : sélectivité liée au filtrage

Les champs récepteurs de la vision peuvent se modéliser par des filtres que l'on retrouve dans le traitement d'images bas-niveau (TIBN).

- la différence de dômes,
- la différence de gaussienne
- le Laplacien d'une gaussienne.
- ...

Mais définissons tout d'abord ce que nous entendons par champs récepteurs de la vision et plus spécifiquement d'un neurone visuel :

champs récepteurs d'un neurone visuel : lieu où les points du champ visuel se projettent sur les récepteurs liés à ce neurone et les activent [128].

Ces champs récepteurs sont situés dans le cortex visuel primaire. Nous ne nous intéresserons ici qu'à un seul type de cellules, les cellules ganglionnaires X. Le champ récepteur de ces cellules a été modélisé par Rodieck et Stone, en 1965 [135], comme la différence de deux dômes puis en 1966 par Enroth-Cugel et Robson [42] comme la différence de deux gaussiennes (*DOG*) par une équation du type :

$$RF(x, y) = a.exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\pi\sigma^2}\right) - exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\pi a^2\sigma^2}\right) \quad (2.1)$$

³Nous incluons la vision animale qui dans un bon nombre de cas est meilleure en termes d'acuité et de précision mais dont le principe ne diffère pas de la vision humaine

Une autre façon de modéliser le profil de ces champs récepteurs est donnée par une fonction de Gabor de phase nulle à l'origine et représentée Figure 2.5 :

$$RF(x, y) = \cos\left(\frac{2\pi}{f}\sqrt{x^2 + y^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\pi\sigma^2}\right) \quad (2.2)$$

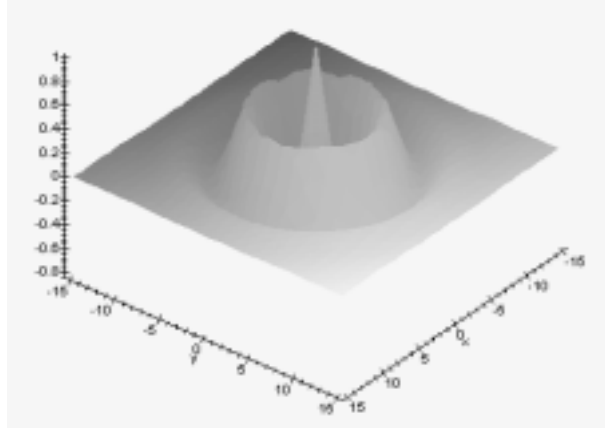


FIG. 2.5 – Modélisation du profil des champs récepteurs.

Ces cellules sont assimilables à des filtres passe-bande (fréquence spatiale). Un point notable est que leur réponse est fortement dépendante de la phase du stimulus. Ainsi, la réponse à un stimulus de fréquence accordée sur celle de la cellule mais en quadrature de phase avec celle-ci sera nulle. Cette analyse montre le lien étroit qu'il existe entre vision et les processus classiques de traitement d'images bas niveau (*TIBN*) fondé sur des bancs de filtres.

2.2.3 Interprétation récente des processus non cognitifs de la vision en terme de TIBN

Ce que nous appelons traitement d'images bas niveau se révèle n'être autre chose que la modélisation du triplet *yeux-nerfs optiques-cortex visuel primaire*. Entrent ensuite en jeu des processus d'intégration de connaissances *a priori* analogues au processus cognitifs du cerveau.

Comme nous venons de le décrire, certaines caractéristiques de la vision humaine se rapprochent de traitements classiques bas-niveau. Le modèle par filtrage s'est vu renforcé récemment par une étude fondée sur l'analyse en composantes indépendantes ou ICA [119]. **En effet, si les cellules du cortex visuel primaire sont affectées à des tâches spécifiques de reconnaissance de certaines structures géométriques, c'est peut-être parce que cette solution biologique au problème de la lecture d'une image est optimale en terme d'analyse des données, autrement dit qu'elle prépare au mieux l'analyse.** Il est naturel de penser qu'à la suite d'un processus d'évolution, la sélection naturelle ait conduit à une augmentation de la spécialisation du système visuel.

La complexité du monde qui nous entoure n'est peut-être qu'une illusion. Cet acte de foi est le point de départ de la science moderne. L'outil permettant de décomposer, de dissoudre cette complexité est l'analyse. L'analyse a pour but la recherche d'éléments simples.

Cette citation est due à Yves Meyer, un des pères des ondelettes. La question posée implicitement lorsqu'on regarde le problème de la vision non cognitive est la manière d'établir à partir d'un modèle scientifique l'allure des fonctions optimales d'analyse de scènes.

C'est pour cet objectif fondamental que les scientifiques ont fait appel à l'analyse en composantes indépendantes. Cette technique est fondée sur le concept intuitif de *contraste*. Pour accéder efficacement à l'information pertinente, il faut optimiser le contraste c'est-à-dire disposer de différents points de vue, à partir de directions les plus éloignées dans le but d'obtenir les informations les plus contrastées possibles les unes par rapport aux autres.

Des chercheurs ont alors appliqué un algorithme ICA à une base de données d'images naturelles de paysages anglais. Les fonctions de base obtenues se sont révélées être des ondelettes, et plus précisément des ondelettes de Gabor *i.e.* des fonctions de Gabor (équation 2.2) translatées en position puis modulées en fréquence. Ces ondelettes sont précisément les primitives qui sont détectées de façon privilégiée par le cortex visuel (cf. section 2.2.2) : l'ICA modéliserait donc l'analyse effectuée par les cellules rétinienne et le cortex visuel primaire. Cette modélisation rejoint les derniers travaux concernant le TIBN qui démontre la puissance de la théorie des ondelettes dans l'analyse d'image [26].

Un travail récent de Koenderink et Van Doorn [81] formalise la famille des champs récepteurs (en coordonnées cartésiennes) par la famille $\varphi_{pq}(x, y, \sigma)$ de gaussiennes et de leurs dérivées :

$$\varphi_{pq}(x, y, \sigma) = \frac{H_p(x)H_q(y)e^{-\frac{x^2+y^2}{4\sigma}}}{\sqrt{2^n \sigma p!q!}\sqrt{\pi}} \quad (2.3)$$

où $p + q = n$, et où H_n est le polynôme de Hermite ⁴.

La section suivante tente de décrire les démarches adoptées en traitement d'image pour optimiser l'analyse de scènes. Il semble utile de rappeler encore une fois que nous nous intéressons uniquement à des traitement bas niveau, c'est-à-dire sans connaissance *a priori* d'un quelconque modèle, contenu, orientation, ou tout autre information utile à la compréhension d'une scène.

2.3 TIBN et analyse multi-échelles : une approche unificatrice

Axioms and Fundamental Equations of Image Processing, c'est sous ce titre qu'est apparu en 1993 un article signé par Alvarez et al. [3]. Leurs travaux posent les fondements axiomatiques du TIBN. Nous présenterons dans un premier temps leur démarche et leurs

⁴Il est intéressant de noter que la fonction $\varphi_{1,0}$ n'est autre que le filtre de Canny et que les ondelettes de Gabor sont aussi descriptibles par cette famille.

résultats, puis en fonction de ceux-ci, ferons état des autres démarches menant aux mêmes conclusions. La question fondamentale qui a guidé leurs travaux est la suivante :

Comment, à partir des propriétés locales d'une image, et indépendamment du système d'acquisition et de toute connaissance *a priori*, peut-on obtenir une information robuste et fiable sur la forme des objets présents dans une scène ?

Cette question est la question qui va sous-tendre l'ensemble des travaux que nous expliciterons et présenterons. C'est la question à la base du TIBN.

Cependant, la majorité des traitements d'images ont pour but de fournir une version régularisée de l'image où l'information pertinente est préservée. Le paramètre essentiel pour transformer l'image originale en une image régularisée est le paramètre d'échelle [97]. Ce paramètre mesure le degré de régularisation de l'image, *e.g.* la taille du voisinage utilisé pour estimer l'intensité d'une image en un point donné.

La technique considérée par beaucoup d'auteurs comme une étape **nécessaire** dans le TIBN, est **l'analyse multi-échelles**. Cette dernière tend à fournir **une information délocalisée mais néanmoins plus sûre quant à la valeur du pixel dans l'image**. Dans la suite, une image en niveaux de gris sera modélisée par une fonction f bornée de $\mathbb{R}^N$ (la dimension de l'image étant quelconque, *i.e.* un signal monodimensionnel, une image 2D, un volume 3D...), $f(\mathbf{x})$ représentant le niveau de gris ou la luminance d'un point $\mathbf{x}$. On notera une séquence d'images résultant d'une analyse multi-échelles $u(t, \mathbf{x})$. On définit également une famille de transformations, *i.e.* d'opérateurs d'échelle, $(T_t)_{t \geq 0}$ qui, appliquée à une image initiale f , donne une famille d'images $u(t, x) = (T_t f)(x)$. A noter que $u(0, x) = f(x)$.

Les sections suivantes s'attachent à faire un état de l'art aussi complet que possible des démarches ayant permis de dériver des structures multi-échelles. A noter que l'axiomatisation d'Alvarez et al. fera l'objet d'une section spéciale.

2.3.1 Relation entre EDP et structure multi-échelles

Cette section présente principalement le résultat d'un théorème reliant les EDP et la formalisation mathématique de la structure multi-échelles.

Théorème 8 *Si une structure multi-échelles respecte l'axiome de causalité et de régularité locale, alors il existe des fonctions continues F telles que*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(D^2 u, Du, t) \quad (2.4)$$

La preuve de ce théorème peut, par exemple, se retrouver dans [3] ou [64]. L'axiomatique précédente permet donc de résumer, par le biais de ce théorème, le filtrage non linéaire par le choix d'une fonction F .⁵

⁵Il est aussi intéressant de noter que dans [64], les auteurs associent les solutions d'équations de viscosité à celles de la famille d'images générée par une analyse multi-échelles. Cette analogie avec ce domaine sera *reprise* par la suite mais dans un autre domaine de la physique.

2.3.2 Différentes dérivations de l'analyse multi-échelles

Historique des axiomatiques du traitement multi-échelles

Bien que peu connue l'axiomatique d'Iijima représente le premier travail sur le fondement théorique de la structure multi-échelles. Les travaux d'Iijima s'étalent de 1959 jusqu'aux années 70, et furent poursuivis par ses étudiants. Un historique de ses découvertes est présenté dans [170]. On y retrouve les premières axiomatiques proposées avant celle de 1971 qui marquent l'aboutissement de ces travaux. Cette dernière est fondée sur des principes physiques, qui consistent à rendre plus nette et donc moins floue une image acquise par un système optique [71]. Les deux hypothèses utilisées sont alors :

- le principe de conservation : la transformation appliquée à l'image f ne change pas l'énergie lumineuse. En d'autres termes, l'image satisfait l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} I = 0 \quad (2.5)$$

où I représente le flux d'énergie lumineuse, *i.e.* la dérivée de la luminance par unité de surface.

- le principe de perte maximale : le flux d'énergie est déterminé de telle manière que l'expression normalisée suivante soit maximale.

$$J(I) = \frac{\|I \nabla f\|^2}{I R^{-1} I^{-1}} \quad (2.6)$$

où la matrice définie symétrique positive R , représente un tenseur de diffusion.

Les deux principes précédents conduisent à l'équation de diffusion linéaire anisotrope :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \text{div}(R \cdot \nabla f) \quad (2.7)$$

De cette EDP dérive l'espace gaussien multi-échelles. Iijima appelle cette équation *the basic equation of figure*.

Un résultat particulièrement intéressant des travaux d'Iijima et de ses élèves est le suivant. L'invariance de l'équation (2.7) par des transformations affines est analogue à l'invariance des équations de Newton par changement de jauge de Galilée, ou encore à l'invariance des équations de Maxwell par la jauge de Lorentz.

Une autre axiomatique relativement ancienne est également développée par l'école japonaise en 1981. Otsu [121] considère une transformation d'une image f en une image $\tilde{f}$ par un noyau de filtrage, sous les hypothèses :

- de représentation de la transformation par un opérateur intégral linéaire,
- d'invariance en translation du résultat,
- d'invariance en rotation du noyau,
- de séparabilité du noyau.

Sous ces hypothèses, Otsu dérive comme seul et unique noyau, le noyau Gaussien :

$$G_{\sigma}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.8)$$

En 1983, Witkin [172] introduit dans la communauté occidentale le terme d'*espace multi-échelles* pour des signaux mono-dimensionnels. Ses travaux se fondent sur la non création d'extrema lors de la transformation d'un signal de base. L'approche proposée utilise une représentation arborescente pour suivre et identifier les structures intéressantes (points singuliers, extrema locaux...).

Une autre approche, développée en 1984 par Hummel [70], repose sur *le principe du maximum*, *i.e.* à chaque changement d'échelle, l'intensité maximum à l'échelle la plus grossière est toujours plus basse que celle à l'échelle la plus fine. Cet axiome conduit à l'équation de la chaleur comme transformation optimale lors d'une analyse multi-échelles.

Dans un article fondateur pour la communauté occidentale, Koenderink jette les bases de ce qui deviendra l'*analyse multi-échelles* [80]. L'ensemble de ses travaux repose sur le principe de **causalité** déjà exprimé plus haut. Koenderink donne aussi une démonstration de la validité de son approche en dimension deux et supérieure. En combinant la nécessité de causalité avec celle d'isotropie et d'homogénéité, il montra aussi que l'espace multi-échelles devait vérifier l'équation de diffusion. C'est dans cet article qu'il introduit aussi les notions d'échelles interne et externe. C'est un des premiers à mettre en avant la similarité des résultats avec ceux concernant le fonctionnement de l'oeil.

L'approche de Yuille et Poggio, présentée en 1986 dans [175], reprenant en partie celle de Koenderink, conduit aux mêmes résultats. Elle se fonde sur l'existence d'un noyau fournissant une famille d'images **régulières, causales, nulles à l'infini**, les transformations étant **invariantes par isométrie et changement d'échelle**.

Lors de la même année, Babaud et al. présentèrent dans [6] des résultats similaires. Leur étude beaucoup plus mathématique porte sur l'unicité du noyau gaussien comme générateur de l'espace multi-échelles optimal. Les hypothèses choisies par Babaud furent à peu de choses près les mêmes que Yuille et Poggio, à ceci près qu'ils choisirent **l'invariance du niveau de gris moyen** au lieu du noyau tendant vers un noyau plat à l'infini. Les résultats quant à eux se retrouvèrent être les mêmes, une fois de plus.

A partir de 1989, les travaux de Lindeberg ont cela d'important qu'ils fournissent un cadre théorique global dans un contexte discret à l'analyse multi-échelles comme domaine à part entière du TIBN. Une multitude d'articles peuvent servir de référence, citons entre autres [95], [96], [99], [97]. C'est dans ce dernier nommé *On the Axiomatic Foundations of Linear Scale-Space : Combining Semi-Group Structure with Causality vs. Scale Invariance*, que l'on retrouve les axiomatiques qu'il utilise. Ces travaux sont remarquables par le fait qu'ils ont directement débouché sur de nombreuses applications du traitement d'images.

Une autre approche reposant sur les invariants présents dans une image a été proposée en 1992 par Florack *et al.* dans [45]. Dans cet article, ils justifient la construction de l'espace multi-échelles par la nature même d'une image et de la **loi universelle de l'invariance d'échelle**. Cette loi peut être exprimée par :

Les lois physiques sont indépendantes du choix des paramètres fondamentaux

qui est encore équivalent à :

Toutes fonctions traduisant une observable⁶ doivent être indépendantes du choix de la dimension de l'unité choisie.

A noter qu'ils présupposent comme toutes les autres approches une absence totale de connaissance *a priori*.

En 1995, Pauwels *et al.* [124] prennent comme hypothèse l'existence de filtres linéaires et isotropes. En ajoutant deux conditions, la récursivité et l'invariance d'échelle, ils réduisent la collection de filtres possibles à une famille qui dépend essentiellement d'un paramètre déterminant la forme qualitative du filtre. Les filtres gaussiens correspondent à une valeur particulière de ce paramètre. Pour d'autres valeurs, les filtres montrent une configuration beaucoup plus complexes.

Une des dernières axiomatiques proposée dans la littérature est celle de Nielsen *et al.* [116] datant de 1996. Cette approche est originale par le fait qu'elle dérive la structure gaussienne à partir d'une fonctionnelle intégrant un terme d'attache aux données. Ceci est rendu possible grâce aux termes de régularisation de Tikhonov faisant intervenir la famille des dérivées de l'image.

L'axiomatique d'Alvarez *et al.*

Alvarez *et al.* présentent une série d'axiomes formels que doivent vérifier les traitements optimaux, en termes de fiabilité et de robustesse d'extraction d'informations, du TIBN. En fonction des axiomes choisis pour l'analyse, les solutions diffèrent (solutions isotropes, anisotropes...) Ils classent ces axiomes en trois catégories, que nous explicitons (on trouvera cependant dans [3] une traduction mathématique plus complète des différents axiomes présentés ici) :

- Axiomes hiérarchiques : portant sur la localité, la causalité, la récursivité et la régularité. Si l'on s'intéresse à l'axiome de récursivité, ce dernier énonce qu'une image, obtenue à une échelle $s + t$, peut être obtenue par application de l'opérateur T_s à l'image obtenue par T_t . Cela se traduit mathématiquement par un morphisme entre l'ensemble $\mathbb{T}$ des opérateurs muni de l'opérateur de composition $\circ$ et l'ensemble des réels muni de l'addition :

$$\forall s, t \geq 0, \forall f, T_0(f) = f \text{ et } T_s \circ T_t(f) = T_{s+t}(f) \quad (2.9)$$

Une version plus faible de cet axiome est l'axiome de *causalité*. Il suppose l'existence d'un opérateur de transition $T_{s+t,s}$ qui appliqué à T_s donne T_{s+t} . Cette axiome est également défini par Koenderink qui pose que chaque caractéristique de l'image doit trouver sa cause à une échelle inférieure.

⁶observable : Grandeur mathématique associée à toute grandeur physique. En physique quantique la mesure d'une grandeur physique ne peut donner qu'une des valeurs propres de l'observable. Cette propriété appelée "réduction de la fonction d'onde" contient l'idée que l'observation d'un système "filtre" une valeur parmi une multiplicité de possibilités. L'observable associée à l'énergie, par exemple, est l'Hamiltonien.

Alvarez et al. introduisent aussi la notion de *générateur* $A[u]$ associé à T_t :

$$A[u] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T_h(u) - u}{h} \quad (2.10)$$

qui peut être ainsi vu comme la dérivée de l'image par rapport à l'échelle.

Les axiomes de *régularité* et de *localité* assurent respectivement la continuité de l'opérateur T et la dépendance locale de T par rapport à u .

- Axiome de comparaison : cet axiome caractérise la nature du traitement. Autrement appelé *principe du maximum*, il conduit à un lissage de l'image mais pas à son rehaussement :

$$\forall t \geq 0, \forall f, g \quad f \leq g, \quad T_t(f) \leq T_t(g) \quad (2.11)$$

- Axiomes morphologiques : régissant les propriétés de conservation de la forme (invariance en rotation, en échelle...). Ces axiomes traduisent l'indépendance de l'analyse multi-échelles vis-à-vis de l'intensité de l'image au point x mais aussi de l'indépendance vis-à-vis de transformations isométriques (translations, rotations). L'invariance par décalage de niveaux de gris se traduit par le formalisme suivant :

$$\forall f, \forall C \in \mathbb{R}, T_t(0) = 0, T_t(f + C) = T_t(f) + C \quad (2.12)$$

2.3.3 Les opérateurs de voisinage génériques

Ces opérateurs proches, de par la procédure d'obtention, de l'axiomatique du traitement multi-échelles, méritent à ce titre d'être mentionnés. Ces opérateurs, définis par Koenderink dans [82], sont en fait les fonctions d'ouverture du système d'acquisition. Koenderink propose une formulation générale pour les définir. Elle repose sur la définition de l'invariance relative à l'échelle et d'une fonction d'ouverture primaire ψ_0 telle que :

$$\psi_0(\mathbf{r}, \sigma) = \varphi_0 \left(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{4\sigma}} \right) A(\mathbf{r}, \sigma) \quad (2.13)$$

où

$$A(\mathbf{r}, \sigma) = \frac{\exp \left(-\frac{\mathbf{r}\mathbf{r}}{8\sigma} \right)}{(\sqrt{8\pi\sigma})^D} \quad (2.14)$$

représente une fonction de fenêtrage, et

$$\varphi_0(\xi) = 2^{\frac{D}{2}} \exp \left(-\frac{\xi\xi}{2} \right) \quad (2.15)$$

un noyau gaussien indépendant de l'échelle (*i.e.*, $\xi = \mathbf{r}/\sqrt{4\sigma}$ est un paramètre spatial indépendant de l'échelle). D représente la dimension (2D, 3D, ...) de l'image.

La forme générale du noyau s'exprime alors de la façon suivante :

$$\psi_n(\mathbf{r}, \sigma) = \left(\frac{1}{\sqrt{4\sigma}} \right)^n \varphi_n(\xi) A(\mathbf{r}, \sigma) \quad (2.16)$$

Pour être solutions de l'équation de diffusion, les fonctions ψ_n doivent vérifier l'EDP :

$$\Delta\varphi(\xi) + ((2n + D) - \xi \cdot \xi)\varphi(\xi) = 0 \quad (2.17)$$

où $D = 1, 2$ ou 3 .

Notons que Koenderink associe le fait de retrouver l'équation de Schrödinger indépendante du temps à une *coïncidence heureuse*. Nous démontrerons plus tard qu'il n'en est rien. D_0 et D_n sont des exemples d'opérateurs génériques dans le cas mono-dimensionnel :

$$D_0(r, \sigma) = \frac{\exp\left(\frac{-r^2}{4\sigma}\right)}{\sqrt{4\pi\sigma}}. \quad D_n(r, \sigma) = \frac{d_n D_0(r, \sigma)}{dr^n} \quad (2.18)$$

Une des conclusions les plus intéressantes est sans doute celle-ci, [82] :

The result of the application of a n th-order operator on the image $I(r)$ is the value of $\frac{d^n(I \otimes D_0)}{dr^n}$... it represents the (exact) n th derivative of the blurred image illuminance. The neighborhood operators can be regarded as "blurred derivations".

2.3.4 Synthèse des différentes approches axiomatiques et limitations

Nous présentons une synthèse des différentes axiomatiques conduisant à la structure multi-échelles. Nous nous sommes inspirés des résultats présentés dans [170].

Ces approches définissent des cadres théoriques solides conduisant à une analyse optimale en terme de traitement d'images.

Nous expliquons cette diversité d'approches par le fait qu'elles ne s'appuient pas sur l'aspect physique de l'observation. Ce point de vue aboutit à considérer une image comme une réalisation aléatoire, sans origine, et donc à élaborer une série d'hypothèses mathématiques pour générer l'espace multi-échelles, alors qu'une image est avant tout une réalisation physique mettant en jeu une observation et un observateur. Nous pensons que ce que Romeny nomme *la physique de l'observation* [136] est un point clé du traitement d'image.

L'interprétation d'un objet diffère en effet, selon que l'on se place du point de vue des mathématiques ou de la physique. Dans le premier cas, les objets ne possèdent pas d'échelle, pas d'unité, alors que dans le second cas, celui d'une observation réelle, la compréhension de l'objet dépend de l'échelle choisie pour l'observer. Considérons une fonction mathématique, la notion de point est clairement définie par un jeu de coordonnées, les notions d'incertitude et d'imprécision n'ont pas leur place. En physique, les degrés de précision et de certitude dépendent de l'appareil servant à la mesure. Classiquement, le résultat de la mesure n'a de sens qu'accompagné de l'intervalle d'erreur directement relié à la résolution de l'appareil. Dans le cas de l'image, la résolution spatiale (*i.e.*, ouverture) est appelée par Koenderink *échelle interne ou inner scale* [80]. Selon Romeny, effectuer une observation physique signifie qu'une quantité physique est mesurée à l'aide d'un système d'acquisition

	I	O	H	K	Y	B	L	F	A	P	N
existence d'un noyau de convolution		✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	
propriété de semi-groupe							✓	✓	✓	✓	✓
localité									✓		
régularité					✓	✓	✓	✓	✓	✓	
générateur infinitésimal										✓	
principe de perte maximale	✓										
causalité				✓	✓	✓	✓				
principe de comparaison		✓	✓					✓	✓		
régularisation de Tikhonov											✓
invariance du niveau de gris moyen	✓	✓				✓	✓		✓	✓	
noyau plat à l'infini					✓			✓			
invariance par isométrie		✓			✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
homogénéité et isotropie				✓							
séparabilité		✓						✓			
invariance d'échelle					✓	✓		✓		✓	✓
valide en dimension	2	2	N	1,2	1,2	1	N	> 1	N	1,2	N

TAB. 2.1 – Résumé des différentes axiomatiques de l'analyse multi-échelles (I = Iijima, O = Otsu, H = Hummel, K = Koenderink, Y = Yuille et Poggio, B = Babaud et al., L = Lindeberg, F = Florack et al., A = Alvarez et al., P = Pauwels et al., N = Nielsen et al.)

et selon une certaine ouverture [136]. Lindeberg relève alors que *les problèmes majeurs du traitement d'images restent le choix de l'opérateur, son lieu d'application et sa dimension* [98].

Cependant, et malgré le fait même que l'oeil humain soit probablement un des meilleurs système de vision existant, aucune approche avant ces travaux, ne se base sur des hypothèses qui ont permis de *sélectionner* lors de notre évolution tels champs récepteurs plutôt que d'autres.

La notion d'évolution en fonction de l'échelle est elle même introduite de manière arbitraire. Rappelons que le terme $\frac{\partial u}{\partial t}$ présent dans l'équation d'évolution, *i.e.* l'équation de la chaleur, n'est introduit la plupart du temps que pour obtenir une solution à un problème de minimisation d'énergie.

Enfin, et ce malgré le nombre important d'analogies entre les résultats de TIBN et de la physique [71], [64], [140] (resp. mécanique classique, mécanique des fluides et électromagnétisme) très peu d'auteurs ont abordé le traitement d'images comme un problème de mesure pure.

C'est cet aspect que la deuxième partie de cette section s'attache à expliciter. Dans le prochain paragraphe, nous présentons l'outil théorique choisi, puis dans au paragraphe 2.5 nous présenterons notre approche du traitement d'images bas niveau.



FIG. 2.6 – Roy B Frieden : Actuellement professeur des sciences optiques à l'université d'Arizona. Il a développé dans le cadre de l'information physique extrême un nouveau paradigme pour la physique fondé sur l'information de Fisher.



FIG. 2.7 – Sir Ronald Aylmer Fisher, Généticien britannique (1890-1962) : Spécialiste de l'évolution, il appliqua les statistiques aux sciences de la vie. Il reprit les travaux de Gauss dans le domaine de l'estimation par le maximum de vraisemblance. Fisher a apporté une contribution considérable au domaine des statistiques paramétriques en y introduisant un certain nombre de concepts fondamentaux comme l'information de Fisher et la notion de statistique exhaustive (1922).

2.4 Information physique extrême et information de Fisher

The observer creates his or her local reality.

Cette phrase de B. Roy Frieden (cf. Figure 2.6) est extraite de *Physics from Fisher Information* [47] publié en 1998. Dans ce dernier, il définit et développe un principe unificateur de la physique, celui de l'**information physique extrême** ou EPI. La principale particularité de cette information est qu'elle introduit comme élément à part entière de la mesure, l'observateur effectuant cette mesure. L'utilisation de l'information de Fisher, plutôt que celle de Shannon ou de Boltzman, et la prise en compte de l'observateur permettent à Frieden de dériver les lois les plus connues de la physique, de la mécanique statistique à la mécanique quantique, de la thermodynamique à la gravité quantique. Ce chapitre s'organise de la manière suivante. Premièrement, nous présenterons l'information de Fisher et justifierons son utilisation pour notre problématique. Dans un second temps, nous aborderons le concept de l'**information physique extrême**. Enfin nous tenterons, selon différents points de vue, d'interpréter les résultats.

2.4.1 L'information de Fisher et la théorie de la mesure

L'information de Fisher (cf. Figure.2.7) représente la mesure de la qualité d'estimation d'un paramètre, mais elle mesure aussi l'état de désordre d'un système ou d'un phénomène et est donc, à ce titre, la pierre angulaire de la théorie physique.

Considérons l'estimation de c vecteurs $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ip})$, $i = 1, \dots, c$ de nature physique. Nous observons, comme *données intrinsèques* au phénomène, les vecteurs $y_i = v_i + x_i$, $i = 1, \dots, c$. Les fluctuations des données $(x_1, \dots, x_c)$ sont présumées caractériser **seulement** le phénomène sous mesure, x_i étant un p -vecteur. Elles apparaissent avec une probabilité indépendante de la position de v_i : $p_i(y_i/v_i) = p_i(x_i)$, $x_i = y_i - v_i$. Frieden montre que la précision de l'estimation des c paramètres v_i peut être mesurée par l'information de Fisher I qui possède des propriétés remarquables [49] (*i.e.*, cette information est une mesure du désordre relative à l'expérimentation).

L'erreur quadratique moyenne e^2 commise sur l'estimation des mesures v_i obéit à l'inégalité de Cramer-Rao :

$$e^2 I \geq 1 \quad (2.19)$$

où I représente l'information de Fisher. Cette inégalité exprime la relation entre I et l'erreur quadratique moyenne dans les données intrinsèques. Il s'agit donc de l'expression des incertitudes intrinsèques à la mesure. Cette inégalité montre que la qualité de l'estimation augmente (*i.e.* e diminue) comme I . I est ainsi une *métrique de l'estimation*, et peut donc être appelée *information*.

Nous allons maintenant introduire deux quantités $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{q}(\mathbf{x})$. La première exprime la densité de probabilité caractérisant les fluctuations de $\mathbf{x}$, la seconde telle que $p(\mathbf{x}) = q^2(\mathbf{x})$ exprime l'amplitude de probabilités. Nous définissons aussi les amplitudes complexes comme :

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{N}}(q_{2n-1} + iq_{2n}), \quad i = \sqrt{-1}, \quad n = 1, \dots, N/2, \quad (2.20)$$

telles que :

$$\sum_{n=1}^{N/2} \psi_n^* \psi_n = \frac{1}{N} \sum_n q_n^2 = p(\mathbf{x}) \quad (2.21)$$

A partir de ces notations, I peut s'écrire :

$$I[\mathbf{p}] = \sum_i \int dx_i \frac{1}{p_i(x_i)} \sum_v \left(\frac{\partial p_i(x_i)}{\partial x_{iv}} \right)^2, \quad (2.22)$$

ou si nous utilisons les amplitudes de probabilité $q_i(x_i)$:

$$I[\mathbf{q}] = 4 \sum_i \int dx_i \sum_v \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_{iv}} \right)^2 \quad \text{où} \quad (2.23)$$

- $q_i \equiv q_i(x_i)$ est la i^{me} amplitude de probabilité pour la fluctuation $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ de la mesure. Elles représentent les inconnues du problème : on note $\mathbf{q} \equiv (q_1, \dots, q_i, \dots, q_c)$;
- $q_i^2(x_i) \equiv p_i(x_i)$ représente la densité de probabilité de la fluctuation x_i .

$I[\mathbf{q}]$ est appelé information *intrinsèque*, puisqu'elle est une fonctionnelle des fonctions d'amplitude intrinsèques au phénomène mesuré. Sous certaines conditions, l'information I obéit au *I-théorème* :

$$\frac{dI(t)}{dt} \leq 0 \quad (2.24)$$

avec t le temps. Ce théorème peut s'interpréter, comme pour l'entropie de Boltzman, par une décroissance monotone de I avec le temps. A l'équilibre, $I = \min$. La solution à l'équilibre doit être la solution stationnaire qui atteint dans I le plus petit des minima parmi tous les minima possibles.

I mesure ainsi l'état physique du désordre d'un système, mais aussi la capacité à estimer un paramètre.

2.4.2 L'EPI, un principe variationnel

Si l'on considère un système ou un phénomène quelconque, caractérisé par des amplitudes $q_n(\mathbf{x})$, d'après l'équation (2.24), lorsque t tend vers l'infini, le système atteint un état stable et I un minimum, ce qui se traduit par le principe variationnel suivant :

$$\delta I[\mathbf{q}(\mathbf{x})] = 0 \quad (2.25)$$

On a supposé que les paramètres sont covariants.

Il n'existe cependant aucun procédé d'estimation de la loi que suit $\mathbf{q}(\mathbf{x})$. Frieden se demande alors comment injecter une information physique concernant le scénario de mesure sachant que la forme de I est définie. Son interrogation principale est alors "*how to do this from a physical (and not ad hoc) standpoint ?*" Quelle contrainte est imposée par la nature physique de la mesure ? Frieden modifie alors l'équation (2.25), et pose :

$$\delta(I[\mathbf{q}(\mathbf{x})] - J[\mathbf{q}(\mathbf{x})]) = 0 \quad , \text{ ou } \quad I - J = \text{Extrem}, \quad (2.26)$$

où J représente l'ensemble des contraintes imposées par le phénomène mesuré. J caractérise le processus physique. Notons que I et J sont des fonctionnelles à trouver. J , qui a la même unité que I , est appelée *information de Fisher intrinsèque*, sous-entendu, au phénomène mesuré. Autant l'information I a une forme définie, autant J est spécifique au processus étudié. Le rôle de l'observateur se caractérise par une mise en relation de la mesure et du processus. Il perturbe le phénomène qu'il souhaite mesurer. Il effectue un prélèvement d'information du processus vers l'espace des mesures. Cette hypothèse se traduit par l'axiome suivant :

axiome 1 : loi de conservation de l'information

$$\delta I = \delta J. \quad (2.27)$$

Si l'on considère l'équation 2.26, Frieden définit une nouvelle quantité K , qu'il nomme information physique :

$$K \equiv I - J. \quad (2.28)$$

K représente une information et plus précisément un manque ou une perte d'information. Déterminer $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ revient à déterminer $K[\mathbf{q}(\mathbf{x})]$ en tant qu'extremum.

$$K = I - J = Extrem. \quad (2.29)$$

Frieden identifie ce principe variationnel comme traduisant l'action de la mesure sur le processus physique considéré. Rien n'oblige à ce que I soit égal à J , ainsi on peut supposer un transfert partiel d'information tel que :

$$I - \kappa J = 0, \kappa \leq 1 \quad (2.30)$$

A partir de ces considérations, deux autres axiomes sont posés :

axiome 2 : existence de densités d'information $i_n(\mathbf{x})$ et $j_n(\mathbf{x})$ au niveau de chaque variable prise individuellement vérifiant :

$$I \equiv \int d\mathbf{x} \sum_n i_n(\mathbf{x}) \text{ et } J \equiv \int d\mathbf{x} \sum_n j_n(\mathbf{x}), \quad (2.31)$$

où $i_n(\mathbf{x}) = 4\nabla q_n \cdot \nabla q_n$, et où $i_n(\mathbf{x})$ dépend de la mesure du phénomène physique. Afin de vérifier l'équation 2.30, on doit vérifier aussi :

axiome 3 : vérification de la condition d'annulation au niveau de chaque variable :

$$i_n(\mathbf{x}) - \kappa j_n(\mathbf{x}) = 0, \forall \mathbf{x}, \forall n \quad (2.32)$$

En résumé le principe EPI de Frieden repose sur les axiomes 2.27, 2.31, 2.32. Le principe variationnel 2.29 et la condition d'annulation 2.30 dérivent directement de ces axiomes et représentent les composantes du principe EPI.

2.4.3 Détermination de l'information intrinsèque J et de la ou des solutions

Rappelons que la forme de I étant fixée, la fonctionnelle J détermine à elle seule la solution $\mathbf{q}$. Frieden souligne la nécessité de préciser des symétries du processus sous mesure. Comme type de symétrie, il cite des transformations unitaires, entre espaces conjugués, mais aussi une invariance de jauge ou encore une équation de continuité. Ces différents types d'invariance vont permettre de définir l'information J du système sous mesure. Ce principe d'invariance déterminant J , il détermine par défaut les solutions $\mathbf{q}$. Si la condition d'invariance sur J n'est pas suffisamment forte, le principe EPI ne pourra qu'approcher les solutions optimales.

L'approche EPI permet de déterminer J et κ (parfois fixé *a priori*). Frieden note que la solution résultante est toujours la plus simple possible. Cette simplicité n'est pas une nécessité, mais une conséquence de l'approche EPI. Le recours à des heuristiques principe de simplicité (i.e. le *rasoir d'Ockham* ou *principe de moindre action* : une hypothèse est

reçue vraie si elle est la plus simple explication disponible de l'évidence) ne sont donc pas mises en jeu.

Concernant le coefficient κ , on peut le voir comme une mesure de la qualité de transfert de l'information du phénomène mesuré J vers l'information de sortie I . Notons que si $\kappa < 1$, $\mathbf{q}$ ne sera qu'approché.

Frieden montre qu'en utilisant une transformation unitaire, *i.e.* $\kappa = 1$, le transfert d'information est total et la solution exacte. Il conclut donc par le fait que *l'existence d'une transformation unitaire semble être le cachet d'un résultat précis.*

Une fois l'ensemble des composantes de l'approche EPI clairement identifié, Frieden établit deux sorties possibles pour l'analyse EPI selon les deux conditions suivantes :

- condition a : le principe d'invariance n'est pas conditionné par l'égalité de l'équation (2.30), *i.e.* utilisation d'une transformation unitaire entre I et J . Il est conditionné par une équation de continuité.
- condition b : le principe est celui de l'équation (2.30).

Si l'on utilise la condition a , la solution doit vérifier les équations (2.29) et (2.30). Avec la condition b , nous obtenons deux solutions possibles qui sont respectivement les solutions des équations (2.29) et (2.30).

En conclusion, le principe EPI permet de trouver, pour un processus de mesure et un scénario associé, la loi qui définit les amplitudes de probabilités $\mathbf{q}$ qui gèrent le processus de mesure. On notera de plus que ces fonctions sont déterminées comme solutions de lagrangiens sans hypothèses *ad hoc*. La section suivante tente d'interpréter et/ou de justifier par différentes approches le principe EPI.

2.4.4 Interprétation du principe EPI

Le principe EPI comme un état de connaissance

Selon le principe EPI, il existe une séquence sous jacente à toute mesure d'un processus physique. La Figure 2.8 présente ce séquencement. A son origine, on trouve le *I-théorème*, cf. équation (2.24), l'existence d'une information intrinsèque J contenue dans le processus sous mesure et un principe d'invariance ou de symétrie.

Ces lois existent indépendamment de toute mesure physique. Au second échelon de la hiérarchie on retrouve les trois axiomes énoncés section 2.4.2. En dessous, on trouve le principe EPI proprement dit, et enfin le calcul, fonction du scénario de mesure choisi. Le principe EPI apparaît alors comme une mesure de l'état de connaissance des paramètres intrinsèques sous mesure.

Le principe EPI comme un processus physique

Le point de vue physique de l'EPI est sans nul doute celui qui nous intéresse le plus. Il fournit une représentation du processus physique en se servant de l'observation comme déclencheur de la mesure. Frieden mentionne que le déclenchement d'une mesure génère les lois de probabilités associées aux paramètres à mesurer. Comme conclusion, Frieden statue, en renversant les théories établies, que le monde est *créé* par les observations. La Figure 2.9 représente la vision de Frieden de son principe EPI et du transfert d'information

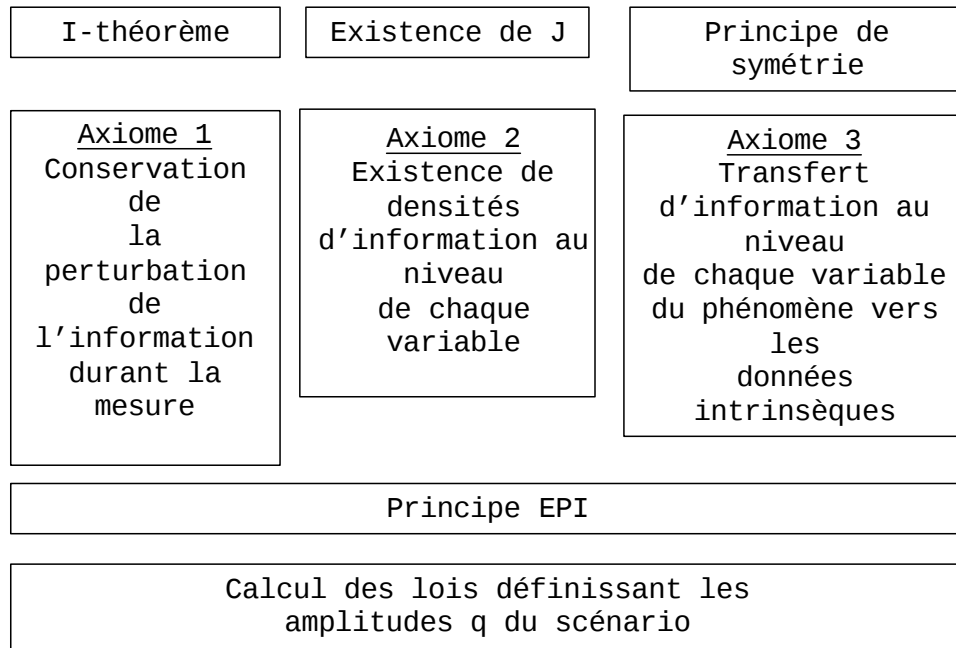


FIG. 2.8 – EPI et acquisition d'information associés à un processus physique.

entre le monde réel et les mesures effectives.

Le principe EPI comme *démon* de la nature

Cette vision, par exemple reprise dans des articles de Plastino ([19], [126]), est introduite par Frieden et Soffer [48]. Les lagrangiens classiques de la physique sont dérivés d'un *jeu* entre un observateur intelligent et la nature représentée par un démon, par analogie avec celui célèbre de Maxwell. Le gain associé à un tel jeu est le principe EPI lui-même, qui conduit au lagrangien et aux conditions physiques sous-jacentes au scénario.

Le scénario utilisé dans [48] est la mesure d'un processus physique afin de donner les informations les plus pertinentes possibles. Une fois la mesure initiée, l'information I est transmise de la nature, i.e. du *démon*, vers les données. L'observateur acquiert de l'information qui dès l'origine est présente dans le système, ou même dans l'esprit du *démon*. Cette information est celle que nous avons nommée l'information de Fisher intrinsèque J .

L'interprétation quantique du principe EPI

Frieden fournit une analogie quantique afin de justifier son approche. Il cite les travaux de Brillouin [16], qui décrivent une relation étroite entre l'information de Shannon et l'entropie de Boltzmann. En effet, lors d'une mesure d'un système isolé, une quantité d'information de Shannon est gagnée. De plus, l'acte même de la mesure, i.e. des interactions avec le système, implique l'augmentation de l'entropie. Brillouin conclut, d'après la seconde loi de la thermodynamique, que l'augmentation de l'entropie doit être supérieure ou égale au gain d'information. Cette équivalence existe de manière similaire dans

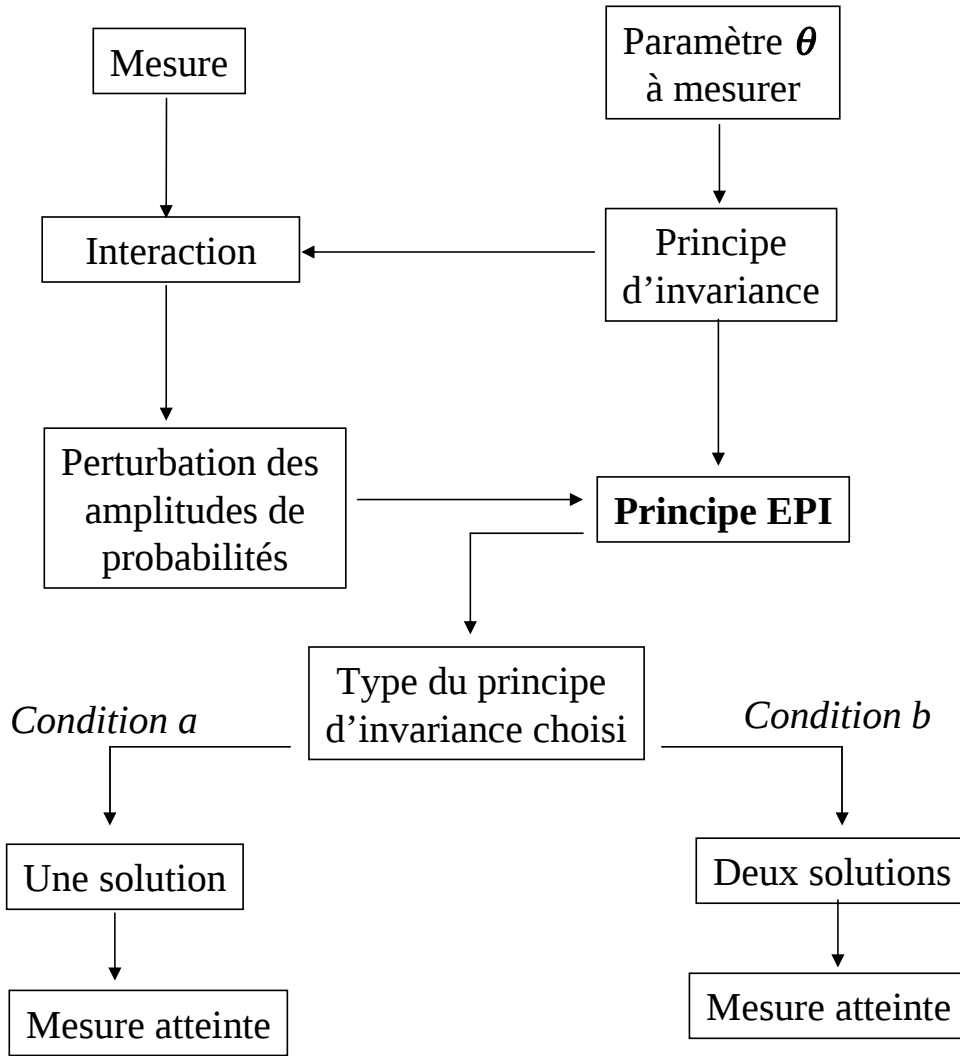


FIG. 2.9 – Enchaînement des procédures internes à l’approche EPI. La présence de deux conditions finales conduit à deux types de solutions.

l’approche EPI de par le transfert d’information entre I et J , explicité dans l’équation 2.30.

Dans cette section, nous avons introduit le principe EPI, et relevé les tentatives de justifications de son utilisation dans l’observation des processus physiques. Dans la section suivante, nous allons appliquer ce principe au traitement de l’image et dériver le ou les lagrangiens décrivant le scénario d’acquisition d’image.

2.5 L'approche EPI et le traitement d'images bas niveau

2.5.1 Un modèle pour l'image et un scénario pour l'approche EPI

Cette section représente le coeur de notre travail car elle précise le scénario adopté pour une utilisation correcte de l'approche EPI dans sa description du TIBN. L'objectif est, dans un premier temps, de déterminer le processus d'évolution à partir d'une image f conduisant au filtrage linéaire optimal puis, dans un second temps de dériver la diffusion anisotrope, *i.e.* le filtrage anisotrope, à partir de contraintes générales.

Définissons tout d'abord l'objectif principal de tout système visuel :

L'objectif principal de tout système physique visuel, y compris l'oeil humain, est d'optimiser l'extraction d'un signal d'information contenu dans une représentation du monde perturbée par du bruit.

Soit une structure multi-échelles $u(\mathbf{x}, t)$ définie comme une fonction bornée réelle, générée à partir d'une image trois dimensions $f(x, y, z)$, perturbée par un bruit blanc additif non corrélé n . Le bruit traduit les fluctuations autour la vraie valeur pour chaque variable considérée.

Ce scénario se formalise de la façon suivante :

$$u(\mathbf{x}, t) = (f(\mathbf{x}) + n) \quad (2.33)$$

A ce point, il est important de préciser les notions d'*incertitude* et d'*imprécision* [13] :

- l'imprécision concerne le contenu de l'information et porte donc sur un défaut quantitatif de connaissance sur une mesure ;
- l'incertitude est relative à la vérité d'une information caractérisant sa conformité à la réalité.

Si l'on considère un système visuel, la position spatiale des pixels de l'image aura un certain degré d'imprécision, et la valeur de luminance un degré d'incertitude.

On considérera la valeur de la luminance du pixel comme précise. Chaque pixel peut être vu comme un élément élémentaire de masse unité. Le processus d'acquisition provoque certaines fluctuations quant aux données acquises. Une fois l'image obtenue, on peut considérer les fluctuations associées aux erreurs suivantes comme intrinsèques à celle-ci :

- localisation imprécises en (x, y, z) du phénomène mesuré ;
- incertitude sur les valeurs de luminance $u(x, y, z, t)$;
- incertitude enfin sur le processus d'évolution paramétré par t .

A partir de l'approche EPI, nous allons dériver l'ouverture optimale de la structure multi-échelles associée en se référant au problème physique dans sa globalité.

La première étape de l'approche EPI est de déterminer les paramètres à mesurer. Nous ne connaissons pas avec précision la position spatiale, ni avec certitude la luminance et le processus d'évolution associé. Notre approche se définit à partir d'un vecteur à quatre dimensions $\mathbf{x} = (i\mathbf{x}, ct)$, représentant la position spatiale et la valeur de luminance au cours du processus d'évolution. La valeur idéale $\mathbf{u}_{\text{opt}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t})$ subit des fluctuations dont les amplitudes de probabilité sont représentées par les $q_n(x_n)$ $n \in [1, N]$, $N = 4$. Le paramètre

c est une constante telle que ct représente l'extension spatiale de la valeur temporelle définie par t . c caractérise la *rapidité d'évolution* d'évolution de l'image suivant le paramètre d'échelle t . On note $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

Le choix de ces paramètres, nécessite quelques explications. En effet, le fait de mélanger coordonnées complexes et imaginaires aboutit à la possibilité d'obtenir une information I positive ou négative [47]. Si l'on choisit un vecteur de coordonnées spatiales réel et la coordonnée temporelle imaginaire, I est négative. C'est dans l'objectif d'obtenir une information positive que nous avons fait le choix précédent.

Les inconnues du problème sont donc les amplitudes de probabilités réelles $q_n(x_n)$, $n = 1, \dots, N$, *i.e.* les fluctuations des valeurs des variables associées aux coordonnées. Pour une manipulation plus aisée des équations, nous utiliserons les fonctions complexes ψ_n définies par l'équation (2.21). Cet artifice de calcul ne change en rien les résultats à suivre, mais, les équations obtenues permettent d'associer à chaque pixel une **fonction d'onde**.

Si l'on utilise son expression complexe, l'information de Fisher est donnée par :

$$I = 4Nc \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \int \int d\mathbf{r} dt \times \left[-(\nabla \psi_n)^* \cdot \nabla \psi_n + \left(\frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial t} \right)^* \frac{\partial \psi_n}{\partial t} \right]. \quad (2.34)$$

Comme précisé dans l'approche générale définie dans la section 2.4.3, la validation de l'approche EPI dépend de la détermination de l'information de Fisher bornée $J = J[\psi]$ représentant l'ensemble des contraintes. Frieden définit J directement par un principe d'invariance. Un résultat particulièrement intéressant de ces travaux est le suivant [47] :

... functional J be simply the re-expression of I in the conjugate space...

Hence, a unitary transform seems to be the hallmark of an accurate EPI output.

Nous travaillons dans le domaine spatial, l'espace conjugué "naturel" est le domaine fréquentiel. Le principe d'invariance par transformée de Fourier est donc pleinement justifié. L'hypothèse de Louis de Broglie permet en effet d'associer une onde à toute particule matérielle, même virtuelle, comme celle que nous venons de définir. La fréquence et la longueur d'onde de cette onde sont données par une généralisation des relations d'Einstein pour le photon :

$$\begin{aligned} E &= \hbar t \\ \mu &= \hbar \mathbf{r} \end{aligned} \quad (2.35)$$

où μ représente l'impulsion associée à un pixel et E son énergie. Ainsi, par analogie avec les coordonnées spatio-temporelles, nous définissons les coordonnées fréquentielles associées [148] :

$$(i\mathbf{r}, ct) \xleftrightarrow{T.F.} (i\mu/\hbar, E/\hbar). \quad (2.36)$$

La constante $\hbar$ est utile pour conserver l'homogénéité des unités. Cette analogie permet de dériver naturellement les calculs de l'approche EPI identiques à ceux rencontrés en mécanique quantique. Ainsi, la transformée de Fourier de ψ_n est :

$$\psi_n(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int \int d\mu dE \hat{\phi}_n(\mu, E) \exp(-i(\mu \cdot \mathbf{r} - Et)/\hbar) \quad (2.37)$$

avec $\hat{\phi}_n$ la transformée de Fourier de ψ_n . Notons que cette équation est bien unitaire :

$$\int \int d\mathbf{r} dt \psi_m^* \psi_n = \int \int d\mu dE \hat{\phi}_m^* \hat{\phi}_n, \forall (m, n). \quad (2.38)$$

Dans le cas où $m = n$, le théorème de Parseval donne :

$$\int \int d\mathbf{r} dt |\psi_n|^2 = \int \int d\mu dE |\hat{\phi}_n|^2, n = 1, 2. \quad (2.39)$$

Rappelons que I représente la quantité d'information des données spatio-temporelles traduisant le processus d'évolution.

J représente toutes les contraintes associées à la mesure et est déterminée par la représentation fréquentielle de I . Ce flux d'information entre I et J , évoqué section 2.4, se traduit par un transfert d'information entre la précision sur la localisation du vecteur luminance et la certitude quant à sa valeur, *i.e.* la dualité incertitude/imprécision au niveau pixel. Autrement dit, le filtrage effectué par un opérateur appliqué à l'image introduit une imprécision sur la position des pixels tout en rendant plus certaine la valeur de leur luminance (*cf.* schéma 2.10).

Après avoir déterminé I et J , nous sommes à même de dériver les termes de contrainte

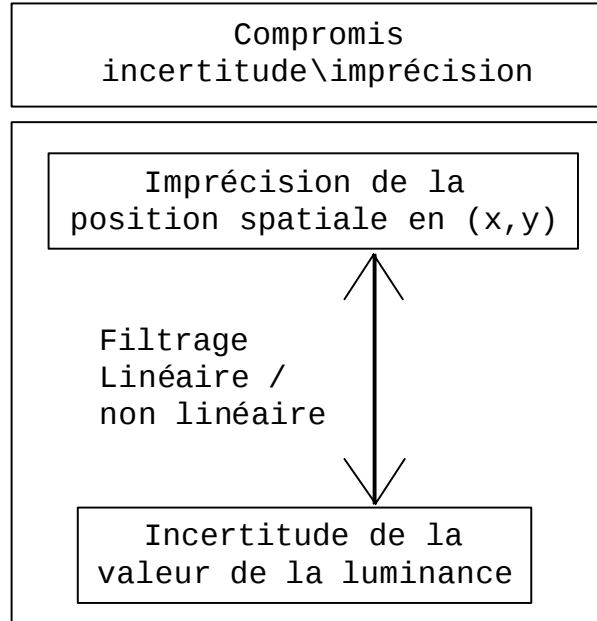


FIG. 2.10 – Schéma résumant le compromis incertitude-imprécision.

optimale et de rechercher la solution exacte des distributions inconnues du processus de mesure, *i.e.* le processus d'évolution optimal.

En différenciant l'équation 2.37, nous obtenons la correspondance suivante :

$$(\nabla \psi_n, \partial \psi_n / \partial t) \overset{T.F.}{\longleftrightarrow} (-i\mu \hat{\phi}_n / \hbar, iE \hat{\phi}_n / \hbar) \quad (2.40)$$

Le théorème de Parseval conduit aux égalités suivantes :

$$\int \int d\mathbf{r} dt (\nabla \psi_n)^* \cdot (\nabla \psi_n) = \frac{1}{\hbar^2} \int \int d\mu dE |\hat{\phi}_n(\mu, E)|^2 \mu^2 \quad (2.41)$$

et

$$\int \int d\mathbf{r} dt \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial t} \right)^* \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{1}{\hbar^2} \int \int d\mu dE |\hat{\phi}_n(\mu, E)|^2 E^2 \quad (2.42)$$

Leur utilisation directe dans l'équation 2.34, conduit à la formulation de I dans l'espace conjugué et finalement :

$$J \equiv I = \left(\frac{4Nc}{\hbar^2} \right) \sum_{n=1}^{N/2} \int \int d\mu dE |\phi_n(\mu, E)|^2 \left(-\mu^2 + \frac{E^2}{c^2} \right) \quad (2.43)$$

Ceci correspond au principe d'invariance pour le scénario donné. Avec un tel principe, l'hypothèse $\kappa = 1$ trouve sa justification [47].

Nous allons maintenant calculer la valeur de J dans le but de déduire la structure engendrée par l'approche EPI. Soit l'équation 2.43, le calcul de J donne :

$$I \equiv J = \frac{4N}{\hbar^2} \int \int d\mu dE P(\mu, E) \left(-\mu^2 + \frac{E^2}{c^2} \right) \quad (2.44)$$

avec :

$$P(\mu, E) \equiv c \sum_{n=1}^{N/2} |\phi_n(\mu, E)|^2. \quad (2.45)$$

En utilisant l'équation 2.39, nous sommes ainsi à même de déterminer l'information intrinsèque du système.

$$\begin{aligned} J &= (4Nc^3/\hbar^2) \int \int d\mu dE \sum_{n=1}^{N/2} \phi_n^* \phi_n \\ &= (4Nc^3/\hbar^2) \int \int d\mathbf{r} dt \sum_{n=1}^{N/2} \psi_n^* \psi_n \end{aligned} \quad (2.46)$$

et l'information physique vérifie :

$$K \equiv 4Nc \sum_{n=1}^{N/2} \int \int d\mathbf{r} dt \times \left[-(\nabla \psi_n)^* \cdot \nabla \psi_n + \left(\frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial t} \right)^* \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial t} \right) - \frac{c^2}{\hbar^2} \psi_n^* \psi_n \right]. \quad (2.47)$$

2.5.2 Solution générale du principe EPI

Dans cette section, nous nous focalisons sur l'optimisation de l'information physique donnée par l'équation 2.47, ainsi que sur la signification d'une telle solution. Celle-ci

doit vérifier l'équation d'Euler-Lagrange associée. Nous définissons donc le Lagrangien $\mathcal{L}$ comme :

$$\mathcal{L} = -(\nabla\psi_n)^* \cdot \nabla\psi_n + \left(\frac{1}{c^2}\right) \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right)^* \left(\frac{\partial\psi_n}{\partial t}\right) - \frac{c^2}{\hbar^2} \psi_n^* \psi_n \quad (2.48)$$

et l'équation d'Euler-Lagrange est :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{nx}^*} \right) + \frac{d}{dy} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{ny}^*} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{nz}^*} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{nt}^*} \right) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_n^*} \quad (2.49)$$

où

$$\psi_{ni}^* \equiv \frac{\partial\psi_n^*}{\partial i} \quad (2.50)$$

Après multiplication par $c^2\hbar^2$, le résultat est :

$$-c^2\hbar^2\nabla^2\psi_n + \hbar^2\frac{\partial^2\psi_n}{\partial t^2} + c^4\psi_n = 0, \quad n = 1, \dots, N/2. \quad (2.51)$$

Cette équation est **l'équation de Klein-Gordon sans champ** [148] qui exprime l'évolution optimale de la fonction ψ , fonction directement reliée à l'évolution optimale de l'image f . Rappelons encore que le critère d'optimalité repose sur l'utilisation du meilleur compromis incertitude/imprécision. Notons enfin que le traitement des variables spatiales et temporelles est dissocié. Ce faisant l'approche EPI n'est plus covariante. Ce critère est un des critères essentiels d'une utilisation théoriquement exacte. Néanmoins la validité et la robustesse de cette méthode permettent d'approcher les résultats par la limite non-relativiste de l'équation de Klein-Gordon ([47]-Appendice.G). La section suivante s'attache à retrouver, via l'approche EPI, la structure multi-échelles optimale.

2.5.3 La dérivation de la structure d'image optimale

A partir du dernier résultat du paragraphe précédent, nous sommes en droit d'appliquer un résultat classique de mécanique quantique démontrant que la limite non-relativiste de l'équation de Klein-Gordon est l'équation de Schrödinger non stationnaire :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2\psi \quad (2.52)$$

Nous retrouvons l'équation de propagation de la chaleur, formalisant les phénomènes classiques de diffusion.

Dans cette section, nous venons de démontrer que **la manière optimale d'extraire des informations d'un image bruitée sans connaissance *a priori* est de générer une structure multi-échelles à partir de l'équation de Schrödinger non stationnaire (Figure 2.11).**

Autrement dit, à chaque pixel de l'image est associée une fonction d'onde, évoluant selon l'équation de Schrödinger non stationnaire. Un cas particulier est l'équation de diffusion de la chaleur où l'évolution de la luminance varie alors selon la valeur du gradient de l'image au pixel considéré.

L'ouverture optimale à l'échelle t (*i.e.* le noyau du filtrage) correspond à la solution de l'équation de Schrödinger non stationnaire sans potentiel. Les solutions d'une telle



FIG. 2.11 – *Erwin Schrödinger, Physicien autrichien (1887-1961). A la suite de la découverte des quanta par Planck et de la dualité onde-corpuscule proposée par de Broglie, il développa la mécanique ondulatoire, en rupture avec la physique semi-classique de ses prédécesseurs. Il établit l'équivalence entre cette mécanique ondulatoire (1926) et la mécanique des matrices d'Heisenberg, développée un an plus tôt, marquant ainsi l'avènement de la mécanique quantique.*

équation sont classiquement la gaussienne et ses dérivées. Dans le cas 3D, la solution générale est :

$$\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{4t}} \right)^{p+q+r} \frac{H_p\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right) H_q\left(\frac{y}{\sqrt{4t}}\right) H_r\left(\frac{z}{\sqrt{4t}}\right) e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4t}}}{8\pi t \sqrt{2^{p+q+r} p! q! r! \pi}} \quad (2.53)$$

où $n = p + q + r$ (p, q et r entiers), et H_p est le polynôme d'Hermite d'ordre p . Il est utile de rappeler que le polynôme d'Hermite est de la forme :

$$(-1)^n H_n(x) e^{-x^2} = \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (2.54)$$

Comme le précise Frieden, la solution, donnant le minimum global de l'information de Fisher, $I[q_n]$, est la solution à l'équilibre (*i.e.* une solution gaussienne, dans notre cas). En effet, la présence du polynôme de Hermite dans la solution 2.53 crée des maxima et des minima (H_n admet $n + 1$ extrema), qui augmentent l'amplitude du gradient. Ainsi la solution générale de l'ouverture optimale en deux dimensions est :

$$\psi(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2t^2}} \quad (2.55)$$

Ainsi, on peut voir l'acquisition d'une scène et sa restauration comme l'extraction d'informations issues d'une famille d'images générées par l'équation ci-dessus. La Figure.2.12 représente ce point de vue.

2.5.4 La dérivation des opérateurs de voisinage génériques

Dans cette section, nous nous intéressons à l'image f et à la précision spatiale des pixels. Autrement dit, à une échelle donnée, *i.e.* quel que soit t , la solution de l'équation

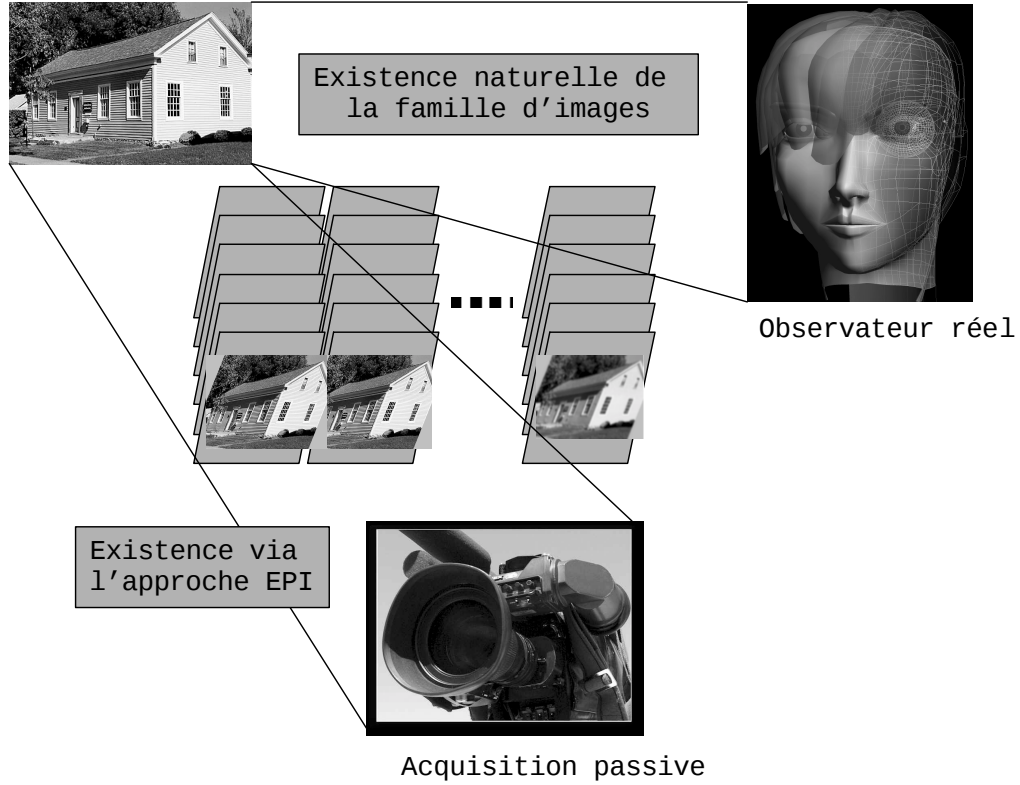


FIG. 2.12 – Représentation de la relation profonde entre le traitement d'images par approche EPI et la vision humaine.

de Klein-Gordon est l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$-\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2\psi(\mathbf{x}) = E\psi(\mathbf{x}) \quad (2.56)$$

où E est une constante. Cette équation fournit les mêmes solutions que celles obtenues par Koenderink dans [82], à savoir les opérateurs de voisinage génériques.

De plus, nous montrons que le résultat de Koenderink n'est pas, comme il l'écrit, une *coïncidence heureuse*, mais la directe expression du processus physique d'acquisition.

Une autre interprétation de ce résultat réside dans la représentation de l'image sur une base constituée des fonctions propres de l'équation de Schrödinger stationnaire, à savoir les gaussiennes et dérivées. Cette décomposition correspond à déterminer les états de l'image en chaque point. Ainsi les opérateurs de filtrages génériques sont en fait une représentation en états, *i.e.* opérateur propre en chaque pixel.

En considérant le produit de convolution, nous pouvons exprimer une telle opération de filtrage par :

$$u^{(n)} = f * \psi_n = f^{(n)} * \psi_0 \quad (2.57)$$

Ainsi, ces solutions peuvent être vues comme la génération d'un espace multi-échelles pour chaque dérivée de l'image. Ce concept renforce les résultats obtenus dans la section précédente. Nous proposons donc un lien entre le concept de génération d'espace

multi-échelles et celui du filtrage linéaire optimal. Le résultat d'une telle approche est que le filtrage linéaire optimal doit être vu comme la génération d'une famille de séquences d'images, chacune de ces séquences consistant en une structure multi-échelles générée à partir des dérivées de l'image initiale. Ainsi, le résultat d'un filtrage linéaire optimal doit être vu comme une famille de séquences d'images (Figure 2.14) plutôt qu'une séquence seule d'images (Figure 2.13).

On peut cependant différencier les opérateurs de voisinages génériques de la structure multi-échelles classique de par la stationnarité des EDP qui les caractérisent. Si nous devons donc différencier les opérateurs de voisinages génériques et l'espace multi-échelles, nous pouvons dire que les premiers seront plutôt utilisés en segmentation et les seconds en restauration. Les premiers étant un ensemble d'opérateurs locaux appliqués indépendamment sur l'image, cette notion étant à rapprocher de la notion de jets locaux, la structure multi-échelle crée un continuum d'images cohérent et globalement filtré.

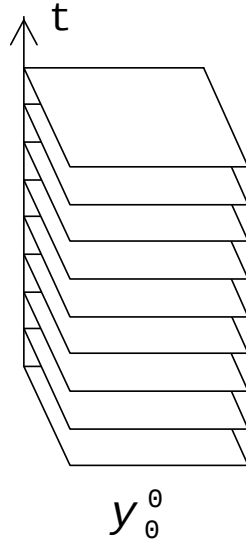


FIG. 2.13 – Point de vue classique de la structure multi-échelles comme une unique séquence d'images.

2.6 Dérivation de l'approche variationnelle pour la restauration d'images isotrope

Dans cette section, nous proposons de dériver la ou les fonctionnelles classiquement utilisées en traitement d'images pour la restauration. Nous nous limitons dans cette partie au processus isotrope.

Si nous considérons l'équation de Schrödinger sans champ comme la véritable équation d'évolution isotrope, la formulation variationnelle de cette dernière s'écrit :

$$E(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\psi)|^2 d\mathbf{x} \quad (2.58)$$

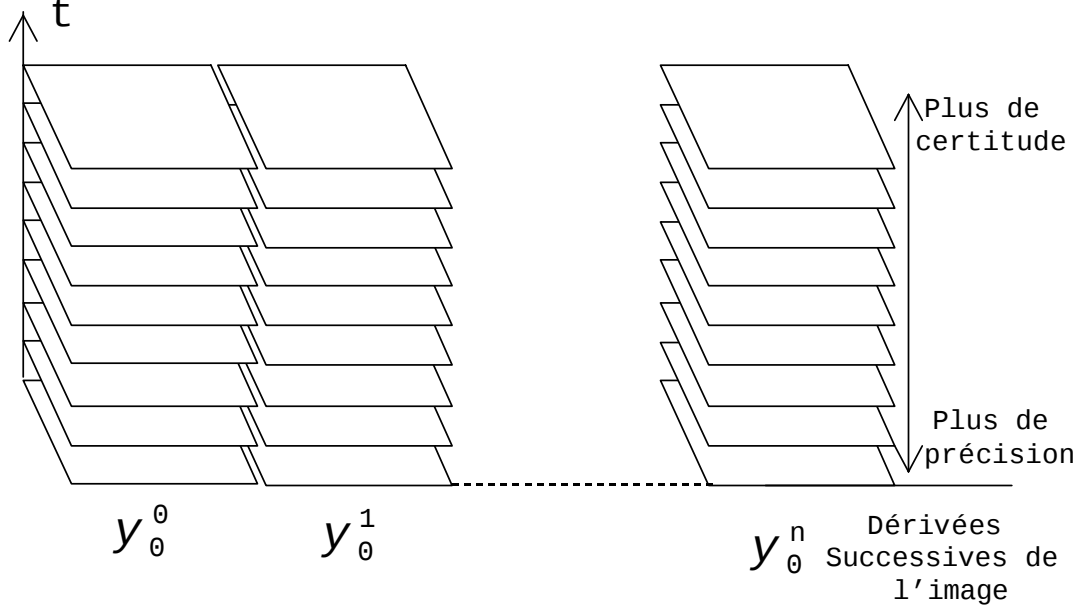


FIG. 2.14 – Point de vue proposé : une structure multi-échelles comme une famille de séquence d’images générée à partir des dérivées de l’image initiale.

Rappelons que nous avons minimisé l’équation (2.47) par les équations d’Euler-Lagrange. Nous avons donc directement accès à la formulation variationnelle non stationnaire qui est la même que celle explicitée plus haut.

Notons encore que cette équation stationnaire peut être étendue à une solution non stationnaire en considérant la solution stationnaire comme limite de la solution non stationnaire. On obtient alors comme équation de diffusion celle bien connue de la diffusion de la chaleur :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi \quad (2.59)$$

2.7 De la diffusion isotrope à la diffusion anisotrope

Le problème de la restauration d’image linéaire réside dans le fait que l’imprécision augmente à mesure que l’écart-type du filtrage gaussien s’accroît, autrement dit, l’image devient plus floue. C’est dans cet objectif qu’a été développée une diffusion dite anisotrope. Une étude globale de ces processus peut être trouvée dans [32].

Une des première approches a été proposée par Mumford et Shah [113]. Nous présentons une version simplifiée qui consiste à minimiser la fonctionnelle suivante afin d’obtenir une image restaurée :

$$E(\psi) = \beta \int_{\Omega} (\psi - f)^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega-K} |\nabla \psi|^2 dx, \quad (2.60)$$

Le premier terme représente le terme d’attache aux données, le second représente un terme de lissage isotrope. La minimisation de cette fonctionnelle conduit à la solution suivante

sur $\Omega - K$:

$$-\Delta\psi = \psi - f \quad (2.61)$$

Notre objectif ici est de retrouver l'ensemble des fonctionnelles utilisées en diffusion anisotrope. Soient⁷ :

$$\nabla \rightarrow \nabla - \frac{ie\mathbf{A}}{c\hbar} \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie\phi}{\hbar} \quad (2.63)$$

où e est une constante. Alors K devient :

$$\begin{aligned} K \equiv & 4Nc \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} \int \int d\mathbf{r} dt \\ & \times \left[- \left(\nabla + \frac{ie\mathbf{A}}{c\hbar} \right) \psi_n^* \cdot \left(\nabla - \frac{ie\mathbf{A}}{c\hbar} \right) \psi_n \right] \\ & + \left[\left(\frac{1}{c^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie\phi}{\hbar} \right) \psi_n^* \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie\phi}{\hbar} \right) \psi_n \right] \\ & - \left[\frac{c^2}{\hbar^2} \psi_n^* \psi_n \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Extrémiser K conduit à l'expression de l'équation de Schrödinger avec potentiels [47] :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = & - \frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 \psi + \frac{ie\hbar}{c} \nabla \cdot (\mathbf{A} \cdot \psi) \\ & + \frac{e^2 |A|}{2c^2} \psi + e\phi \cdot \psi. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Cette équation est bien sûr plus générale que la précédente.

2.8 Validation et interprétation du modèle

2.8.1 Hyperparamètres $\mathbf{A}$ et ϕ

Dans cette partie nous allons, à partir de l'équation 2.65 et d'un choix approprié des potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ , retrouver un certain nombre de fonctionnelles utilisées classiquement dans les processus anisotropes. Nous préciserons également la relation entre équations de Maxwell et diffusion anisotrope.

⁷Cette introduction de potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ , respectivement vectoriel et scalaire, est valide car la jauge reste covariante [47].

Fonctionnelle isotrope

Lorsque $\mathbf{A}$ et ϕ sont nuls, nous obtenons instantanément l'équation de la chaleur 2.59 et la fonctionnelle associée équation 2.58

$$E(\psi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\psi)|^2 d\mathbf{x}$$

Cela signifie que sans potentiel, l'évolution possède la propriété d'isotropie. La diffusion n'est contrainte par aucun champ, *i.e.* aucun voisinage.

Fonctionnelle de Mumford et shah

Prenons maintenant le cas où $\mathbf{A}$ est nul et $\phi.\psi = 2\beta(\psi - \psi_0)$, *i.e.* un champ purement scalaire.

L'invariance galiléenne (ou de translation) de l'équation de Schrödinger nous permettant de choisir une origine quelconque, soit ψ_0 , *i.e.* l'image initiale, cette origine. L'équation 2.65 se simplifie et donne :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 \psi + e\phi.\psi. \\ &= -\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 \psi + 2\beta(\psi - \psi_0). \end{aligned}$$

A partir de cette équation d'évolution, il est possible de revenir à la fonctionnelle associée. On retrouve alors la formulation de l'énergie associée à la fonctionnelle introduite par Mumford et Shah [113] :

$$E(\psi) = \beta \int_{\Omega} (\psi - \psi_0)^2 dx dy + \int_{\Omega-K} |\nabla \psi|^2 dx dy$$

Le terme $\psi - \psi_0$ fait référence à un terme d'attache aux données, *i.e.* l'image n'évolue pas seulement sous sa propre action mais un potentiel déterminé par le voisinage lui impose certaines contraintes d'évolution.

La signification de ces champs est simple : le champ scalaire impose une certaine ressemblance avec l'image originale ; c'est la différence euclidienne entre les valeurs de luminance du pixel de l'image courante et de celles de l'image originale qui régit l'évolution. Ce potentiel préserve une certaine similarité entre les images filtrées et l'image originale.

L'équation de diffusion Euclidienne généralisée comme équation de Maxwell

Sous cette formulation se cache l'expression générale suivante :

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} \text{ sur } \Omega \quad (2.66)$$

avec $\mathbf{J}$ champ de vecteur appelé flux de diffusion [139]. Si l'on prend comme champs de potentiel les grandeurs :

$$\phi.\psi = -e \frac{(\alpha^2 + \beta^2)}{2m^2} \psi \quad (2.67)$$

$$\mathbf{A}.\psi = -(\alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{t}) \quad (2.68)$$

avec $\mathbf{n} = \frac{\nabla\psi}{\|\nabla\psi\|}$ et $\mathbf{t} = \frac{\nabla^\perp\psi}{\|\nabla\psi\|}$.

Dans ce cas précis, le quadripotentiel $(\mathbf{A}, \phi)$ vérifie la jauge de Lorentz :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.69)$$



FIG. 2.15 – *James Clark Maxwell, Physicien écossais (1831-1879) On lui doit d'importantes contributions en thermodynamique. Ses travaux théoriques en électromagnétisme ont eu une influence considérable sur la physique au XIXème siècle. Ils constituent une étape capitale du développement de la théorie ondulatoire de la lumière et ouvrirent de plus la voie, après les vérifications expérimentales de Hertz, au développement de la radio.*

Le choix de ces notations résulte d'une volonté de rapprocher les résultats de cette section avec ceux de Rougon et Préteux [139].

Ainsi, nous pouvons nous appuyer sur leurs travaux pour tendre une passerelle entre les équations de Maxwell (Figure 2.15) et l'équation de diffusion Euclidienne généralisée. Les équations de Maxwell dérivent de l'équation de Klein-Gordon avec champs [158]. De plus, les travaux de Rougon relient l'équation de diffusion Euclidienne généralisée avec les équations de Maxwell. Ainsi, nous pouvons relier les équations de diffusion généralisées avec l'équation de Klein-Gordon en développant simplement l'équation (2.65), on obtient :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 \psi + \frac{ie\hbar}{c} \mathbf{A}(\nabla \psi) + \frac{ie\hbar}{c} (\nabla \mathbf{A}) \cdot \psi + e\phi \cdot \psi + \frac{e^2 |\mathbf{A}|}{2c} \psi. \quad (2.70)$$

Ce qui équivaut à :

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot \left[\left(-\frac{\hbar^2}{2} - \frac{ie\hbar}{c \|\nabla \psi\|} \right) \nabla \psi \right] \text{ sur } \Omega \quad (2.71)$$

où l'on identifie le vecteur de diffusion $\mathbf{J}$ de l'équation 2.66 avec le résultat de l'équation précédente pour obtenir :

$$\mathbf{J} = \left(-\frac{\hbar^2}{2} - \frac{ie\hbar}{c \|\nabla \psi\|} \right) \nabla \psi \quad (2.72)$$

Cette expression du flux de diffusion $\mathbf{J}$ peut s'écrire de manière analogue selon la forme générale présentée dans [140] à savoir :

$$\mathbf{J} = \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{t} = \lambda \nabla \psi \quad (2.73)$$

Dans ce cas précis, on peut traduire le potentiel $\mathbf{A}$ comme un potentiel de lissage de l'image le long des lignes de champs. Le choix de α et β permet de régler le degré de lissage du filtrage. Le potentiel ϕ quant à lui permet de compenser l'effet d'une des composantes apparaissant dans le développement de l'équation (2.65).

Formalisme général d'Alvarez *et al.*

Dans cette section, nous voulons nous référer à l'expression générale explicitée section 2.3.1. Partant de l'équation 2.70, nous la réécrivons sous la forme :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 \psi + \frac{ie\hbar}{c} \mathbf{A} \cdot (\nabla \psi) + \left(\frac{ie\hbar}{c} \text{div} \mathbf{A} + e\phi \right) \psi + \frac{e^2 |\mathbf{A}|}{2c} \psi. \quad (2.74)$$

A partir de cette expression, Deriche et Faugeras dérivent eux aussi l'ensemble des fonctionnelles de l'analyse multi-échelle [32].

On peut aussi écrire l'équation 2.70 sous la forme suivante :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \text{div} \left(-\frac{\hbar^2}{2} \nabla \psi + \frac{ie\hbar}{c} \mathbf{A} \cdot \psi \right) + \left(\frac{e^2 |A|}{2c^2} + e\phi \right) \psi. \quad (2.75)$$

Cette notation se rapproche de celle proposée par Nordström dans [118] :

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \text{div} \left(\phi'(|\nabla \psi|) \frac{\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \right) - 2\beta(\psi - \psi_0). \quad (2.76)$$

Cependant, cette équation est biaisée, *i.e.* elle ne considère pas l'ensemble de l'information pour prendre une décision sur la luminance du pixel considéré. Elle rejette les pixels les moins probables ou les plus éloignés. On peut interpréter le terme ϕ comme une fonction de rejet des valeurs aberrantes, c'est-à-dire une prise en compte partielle des informations. C'est l'introduction de ce terme de rejet qui ne permet de retrouver l'équation 2.76 à la limite, à partir de l'équation (2.75).

Illustration des significations possibles des potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ

Les potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ contraignent l'évolution de l'image. On identifie $\mathbf{A}$ comme un potentiel vectoriel agissant sur les coordonnées spatiales de l'image, alors que le potentiel scalaire ϕ agit lui comme une force s'appliquant le long de l'axe du paramètre d'échelle. La figure 2.16 à droite montre l'exemple d'une carte de potentiels que l'on peut choisir pour $\mathbf{A}$ afin de contraindre l'image à n'être lissée que dans les directions des lignes de champs. En effet cette image représente un ensemble discret de lignes de niveaux de l'image de gauche.

Le rôle du potentiel ϕ peut s'observer sur la figure 2.17. On voit une évolution sous contrainte d'un potentiel ϕ nul (image centrale), *i.e.* une diffusion isotrope, et une diffusion contrainte par un potentiel correspondant à la différence entre l'image diffusée et l'image originale (image de droite). Cette "attache" à l'image initiale de gauche est caractéristique des approches de diffusion anisotrope classique.

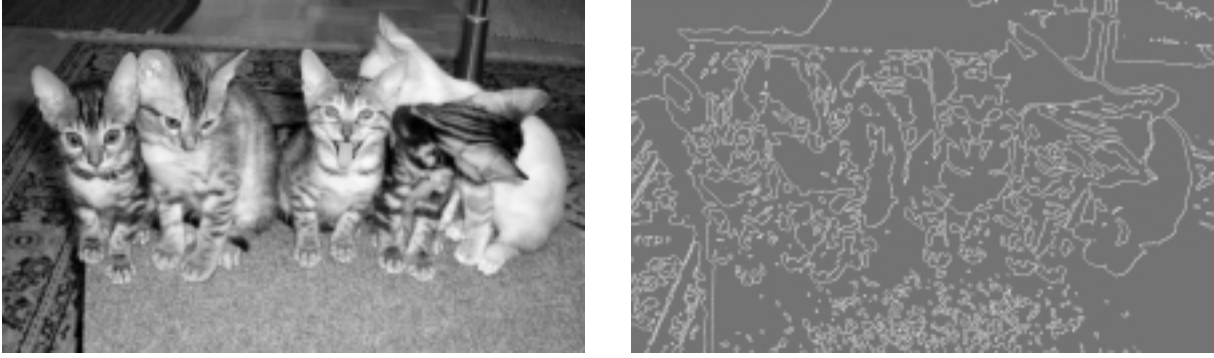


FIG. 2.16 – A droite, carte des potentiels établie à partir des lignes de niveaux de l'image de gauche.

2.8.2 Paramètre $\hbar$

Cette section aborde le rôle et le choix du paramètre $\hbar$ du modèle. Si dans la théorie quantique ce paramètre est une constante universelle, nous pouvons envisager de le faire varier dans notre modèle. Avant d'explicitier son rôle dans le domaine de l'image, nous allons le rappeler dans le domaine quantique.

Max Planck (Figure 2.18) définit cette constante universelle h ($\hbar = h/2\pi$), qui porte son nom, comme la valeur permettant de relier le quantum d'énergie E d'un rayonnement à sa fréquence ν selon la formule :

$$E = h\nu \quad (2.77)$$

Cette constante est aussi utilisée dans la relation d'indétermination de Heisenberg (Figure 2.20) énoncée de manière précise ci-dessous :

Définition 2.8.1 Principe d'indétermination de Heisenberg : *Si une mesure de la position est faite avec une précision Δx ; et si une mesure "simultanée" de la quantité de mouvement est faite avec une précision Δp ; alors le produit des deux incertitudes ne peut jamais être plus petit qu'un nombre de l'ordre de $\hbar$: En d'autres termes*

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (2.78)$$

De même, si l'énergie d'un système est mesurée avec une précision ΔE ; alors le temps caractéristique de l'évolution du système, Δt doit satisfaire

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar \quad (2.79)$$

Et de façon plus générale, si Δq est l'incertitude sur la mesure d'une coordonnée q , et Δp l'incertitude sur la mesure de sa quantité de mouvement conjuguée, alors

$$\Delta p \Delta q \geq \hbar \quad (2.80)$$

L'analogie que nous proposons afin d'explicitier le rôle de $\hbar$ dans notre modèle d'évolution optimale repose sur l'interprétation au niveau de l'image de l'équation.2.79. Nous



FIG. 2.17 – A gauche l'image initiale, à droite une image non contrainte. En bas et au centre une image contrainte par un potentiel ϕ correspondant à la différence entre l'image initiale et l'image diffusée.



FIG. 2.18 – *Max Planck, Physicien allemand (1858-1947). Il y a un siècle, il formulait l'hypothèse des quanta de lumière pour expliquer le rayonnement du corps noir et y introduisait la constante $\hbar$. C'est aujourd'hui l'une des quantités les plus utilisées dans les lois physiques.*

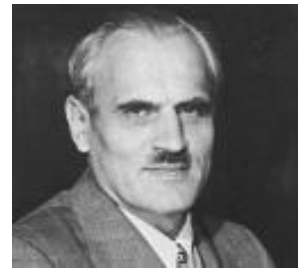


FIG. 2.19 – *Arthur Holly Compton, Physicien américain (1892-1962). Il étudia les rayons X et découvrit l'effet Compton de diffusion d'un faisceau de rayons X ou gamma à la traversée d'une "cible" composée d'atomes légers.*



FIG. 2.20 – *Werner Heisenberg, Physicien allemand (1901-1976). Il introduisit le modèle mathématique de la mécanique des matrices en physique quantique, retrouvant les principes de la mécanique ondulatoire de de Broglie grâce au formalisme des opérateurs. Ces opérateurs représentés par des matrices s'appliquent aux fonctions d'onde qui décrivent les systèmes microscopiques et permettent notamment des calculs sur les quantités observables lors des transitions atomiques. Sa découverte la plus connue fut celle des relations d'indétermination (1927), qui jouèrent un rôle important dans l'élaboration de la théorie quantique.*

raisonnons sur l'équation.2.52 qui possède l'avantage de ne faire intervenir que le paramètre $\hbar$.

Si l'on suppose que l'image est dans un état tel que son niveau d'énergie est parfaitement connu. Cet état traduit le fait que tous les pixels sont dans un état où aucun potentiel n'est susceptible de les faire évoluer tant en position spatiale qu'en luminance. Cela équivaut à :

$$\Delta E = 0. \quad (2.81)$$

Cela traduit le fait, d'après l'équation 2.79, que le système a un temps d'évolution infini

$$\Delta t \rightarrow \infty \quad (2.82)$$

et donc le système est dans un état stationnaire. On peut ainsi utiliser le paramètre $\hbar$ pour ralentir la diffusion de certains pixels lorsqu'un critère de stabilité est atteint (Figure 2.21).

Une autre justification du paramètre $\hbar$ est donné par l'équation physique suivante :

$$L \equiv \frac{\hbar}{mc}. \quad (2.83)$$

L représente la longueur d'onde réduite de Compton d'une particule (Figure 2.19).

Si l'on utilise l'équation reliant l'information de Fisher à mc ,

$$I = 4N \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2. \quad (2.84)$$

on obtient la relation :

$$I = \frac{4N}{L^2} \quad (2.85)$$

Si l'on se réfère à l'équation 2.19 (cf. [47], Chapitre.2), nous obtenons l'égalité entre e_{minimal} et L .

En conclusion, nous pouvons relier la résolution minimale L à l'incertitude minimale possible pour la particule. Appliqué au traitement d'images, nous obtenons le lien direct entre $\hbar$ et la résolution spatiale du problème, *i.e.* l'incertitude minimale possible pour le pixel. En pratique on prend $\hbar = 1$, ce qui correspond à une distance de 1 entre deux valeurs de luminance possible.

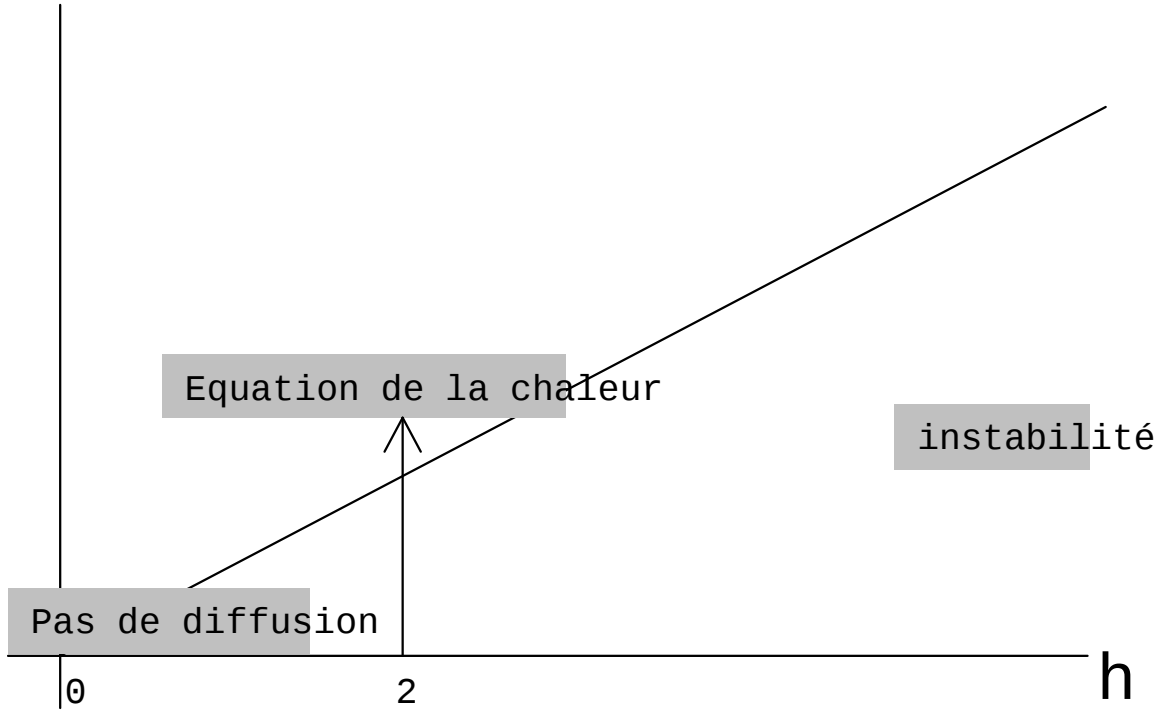


FIG. 2.21 – Illustration de l'influence du paramètre $\hbar$ par rapport à une diffusion du type équation 2.52.

2.8.3 Interprétations du modèle

Comme nous venons de le voir, le modèle obtenu traduit une vision "quantique" de l'image. Nous allons au cours de cette section interpréter ce point de vue à partir de la notion d'observation et, dans un second temps, selon la notion de mesure. Nous évoquerons ensuite les réflexions de Wigner, pour enfin terminer par une interprétation plus conceptuelle et purement quantique.

Une interprétation physique

Selon le scénario que nous avons adopté section 2.5, nous considérons chaque pixel comme possédant une valeur vraie "inaccessible" à laquelle est associée une valeur mesu-

rée. Ce scénario est identique à celui associé à la mesure des coordonnées de position, ou de vitesse, d'une particule. Selon le principe de superposition, nous considérons alors une image comme un système de N particules évoluant sous contrainte d'un quadripotiel $(\mathbf{A}, \phi)$.

Le point essentiel est l'absence de connaissance *a priori* : nous sommes dans les mêmes conditions que celles d'une mesure d'un phénomène naturel à l'échelle atomique. Nous comprenons alors pourquoi le formalisme quantique est le plus à même de traduire la physique du traitement d'images bas-niveau. En un sens, c'est cette condition qui *force* le système à ce comporter comme un système physique réel.

Une interprétation par densité et courant de probabilité

Dans cette section, nous allons discuter d'une interprétation en terme de courant et de densité de probabilité, et établir un lien avec le modèle hydrodynamique.

Soit $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ le module élevé à la puissance 2 de la fonction d'onde. Cette valeur est une densité de probabilité notée $\rho(\mathbf{r}, t)$:

$$\rho(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = \psi^*(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.86)$$

Soit un volume infinitésimal $d\mathbf{r}^3$ situé en $\mathbf{r}$. La probabilité de trouver à l'instant t la particule dans ce volume vaut :

$$d\mathcal{P}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)d\mathbf{r}^3 \quad (2.87)$$

Grâce au principe de correspondance, on peut définir un courant de probabilité quantique $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t)$:

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{2i} [\psi^* \nabla \psi - \psi (\nabla \psi)^*] \quad (2.88)$$

Si maintenant on utilise les équations 2.86, 2.88 et 2.52, nous pouvons dériver les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^* \psi + \psi^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\hbar}{2} ((\nabla^2 \psi)^* \psi - \psi^* (\nabla^2 \psi)) \\ &= \frac{i\hbar}{2} \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \\ &= -\nabla \bar{\mathbf{J}}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité est l'équation de conservation de la charge, qui se retrouve de la même manière en dynamique des fluides (Figure 2.22).

Dans l'approximation classique $\hbar \rightarrow 0$, $\psi(\mathbf{r}, t)$ décrit un fluide de particules classiques, sans interaction mutuelle : la densité et la densité de courant de ce fluide sont respectivement égales à la densité de probabilité $\rho(\mathbf{r}, t)$ et à la densité de courant $J(\mathbf{r}, t)$ de la particule quantique.

Rougon a déjà montré dans [140] une analogie entre un modèle de diffusion et des grandeurs électromagnétiques. Nous avons montré que notre modèle quantique permet de

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{cube} + \text{cube with arrows} = \odot$$

FIG. 2.22 – Illustration de l'équation de continuité.

dériver directement ce cadre théorique (section 2.8.1).

Nous venons donc de montrer le lien avec la dynamique des fluides.

Cette analogie permet de valider une fois de plus notre modèle quantique. Elle permet, en effet, d'y inclure un certain nombre de travaux de restauration utilisant le cadre théorique de la dynamique des fluides ([10], [109]).

L'interprétation neurophysique et quantique de Wigner

Le prix Nobel de physique de 1963, Eugène Wigner (Figure 2.24) a émis l'hypothèse, dans le cadre du paradoxe du chat de Schrödinger, que ce ne serait pas l'appareil de mesure, mais la conscience de l'observateur qui "déciderait" des réalités des choses. Le nerf optique achemine au cerveau une onde qui est une superposition des états possibles des éléments de l'image. C'est alors que la conscience, brutalement, fait cesser le double jeu, obligeant la situation à passer dans un état déterministe. Comment ? Ça, Wigner ne le dit pas. Mais cette superposition d'états se retrouve dans la structure même des solutions obtenues, par exemple au travers des opérateurs de voisinages génériques.

D'autres travaux, effectués dès les années 30 par Niels Bohr, établissent un parallèle entre la physique et l'étude des phénomènes psychiques. Dans [14], il écrit :

Car la nécessité, en mécanique atomique, de tenir compte de l'interaction entre instruments de mesure et objets observés manifeste une étroite analogie avec les difficultés rencontrées par l'analyse psychologique et provenant du fait que le contenu de conscience change inmanquablement aussitôt que l'on essaie de concentrer l'attention sur l'un de ces éléments.

C'est cette perturbation, causée par la mesure, qui a ébranlé le dogme de l'existence d'une «réalité extérieure indépendante de l'observateur», fondement de la science classique.

En remplaçant *conscience* par *image*, ces hypothèses donnent un autre point de vue de l'interprétation de l'EPI à l'image.

Une interprétation en terme de mesure quantique

Le phénomène de mesure est le processus au cours duquel l'instrument de mesure entre en interaction avec l'objet sur lequel on effectue la mesure. Ainsi on ne mesure pas les caractéristiques de l'état du système mais l'état dans lequel il se trouve après interaction

avec l'appareil de mesure. F.Balibar dans [8] établit, à partir de la mécanique quantique, un parallèle avec le traitement d'image que nous sommes donc à présent capables d'inverser. Il nous paraît pertinent de la citer lorsqu'elle fait référence à la célèbre expérience d'interférence des fentes d'Young :

La mesure de la position dans le plan de l'écran constitue en quelque sorte une analyse de cet état ; en d'autres termes métaphoriques, on peut considérer l'opération de mesure comme une opération de filtrage et l'instrument de mesure comme un filtre "en états" [...] son état avant la mesure contenait déjà l'un et l'autre de ces états.

Dans cette étude, nous avons procédé selon un processus inverse, et montré la pertinence du formalisme quantique pour le TIBN.

Une interprétation en terme d'indétermination d'états

Comme nous l'avons vu, le modèle proposé permet de faire cohabiter, dans une même analyse, différents états possibles de l'image. Dans des images représentant des scènes naturelles, il est parfois impossible de déterminer exactement si un pixel appartient à un contour ou à une zone homogène.

Il est également difficile de définir ce qu'est un bord, une frontière ; il existe une multitude de modèles, qui n'en sont néanmoins que des approximations. Un exemple qui résume ces deux indéterminations est celui présenté Figure 2.23. Quand peut-on dire qu'un pixel appartient à un nuage ou au ciel ? De même comment modéliser le bord d'un nuage. Cette indétermination d'états justifie l'utilisation du formalisme quantique.

2.8.4 Approximation du modèle

Le modèle que nous avons utilisé jusqu'ici est un modèle quantique. Nous savons également que dans le domaine de la physique une approximation de la mécanique quantique est la mécanique classique régie par les lois de Newton et plus particulièrement la deuxième présentée ci-dessous :

Définition 2.8.2 *Deuxième loi de Newton :*

Théorème du centre d'inertie : Dans un référentiel Galiléen, la somme des forces extérieures appliquées à un solide est égale au produit de sa masse par l'accélération de son centre d'inertie :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_g \quad (2.89)$$

Cette loi relie tout déplacement d'un point solide à la somme des forces agissant sur lui.

Pour passer de notre modèle quantique à une modélisation classique de déplacement des points nous utilisons le théorème d'Ehrenfest.

Théorème 9 Le théorème d'Ehrenfest *démontre que la moyenne des variables quantiques satisfait aux mêmes équations du mouvement que les variables classiques correspondantes dans la description classique.*



FIG. 2.23 – Illustration de la double indétermination concernant l'état d'un pixel et la structure de l'image.

A noter que pour passer de la mécanique quantique à la mécanique classique, il suffit de faire tendre $\hbar$ vers 0. On retrouve le fait qu'il n'y a pas de diffusion si $\hbar \rightarrow 0$, si chaque pixel n'est soumis à aucune force (Figure 2.21).

Ainsi, si nous considérons un ensemble de points soumis à certaines forces, leur évolution respectera la deuxième loi de Newton. Les fonctions d'ondes associées respecteront, elles, le modèle d'évolution quantique.

Du point de vue du traitement d'image, cette approximation de notre modèle peut trouver une application directe en considérant les méthodes de contour actif (*cf.* section 1.5.6) et Eq.2.89. En effet, ces dernières font évoluer un contour de départ en le soumettant à un ensemble de forces (force interne, externe, de rappel, de ballons...).

Si l'on cite un travail [129], dans lequel on utilise un modèle déformable pour reconstruire un stent à partir d'image IVUS (*cf.* Chapitre 3)

Deformable models are physics-based models that deform under the laws of Newton mechanics, in particular, by the theory of elasticity expressed in the Lagrange dynamics.

Cette modélisation classique peut donc être utilisée dans un processus de reconstruction [160]. Dans ce type de processus, la reconstruction évolue à partir d'un modèle initial vers l'objet à reconstruire sous contrainte de forces de contraintes.

2.8.5 Évaluation de l'approche EPI

Nous venons de voir que l'approche EPI permet de dériver un certain nombre d'approches variationnelles existantes. Dans ce paragraphe, nous allons résumer l'ensemble



FIG. 2.24 – *Eugene Paul Wigner (1902-1995). Physicien américain d'origine hongroise. Il contribua au développement de la théorie quantique de l'électromagnétisme (1928) ou électrodynamique quantique. Il développa la notion de champ local dans les milieux.*



FIG. 2.25 – *Paul Ehrenfest, physicien autrichien (1880-1933). Il contribua à la compréhension de la nature des photons. Il proposa entre autres un modèle de diffusion afin de mieux appréhender la seconde loi de la thermodynamique.*

des hypothèses inhérentes à cette approche et établir une liste des différences avec les approches vues au chapitre 2.3. Tout d'abord, rappelons l'ensemble des hypothèses de l'approche EPI :

- loi de conservation de l'information ;
- existence de densités d'information au niveau microscopique ;
- vérification de la condition d'annulation au niveau microscopique ;
- respect d'une transformation invariante entre les deux informations.

Ces axiomes permettent de dériver une structure qui respecte l'ensemble des hypothèses d'invariance émises par Alvarez *et al*, mais aussi la majorité des hypothèses présentées dans le Tableau 2.1.

Dans le Tableau 2.2, on s'aperçoit que l'ensemble des hypothèses des diverses approches ne sont, pour la plupart, que des conséquences directes des résultats de l'approche EPI. Le scénario choisi influe seulement au niveau de la séparabilité des variables.

Les axiomes EPI et le calcul qui en découle sont à relier par exemple pour l'isotropie ou l'anisotropie avec le choix des opérateurs définis équation (2.62). Un autre exemple est l'hypothèse de l'existence d'un noyau de convolution qui se retrouve dans l'approche EPI comme permettant l'obtention de la solution dans l'espace de sortie [47]. Le principe de causalité et d'autres sont la conséquence directe de l'expression de la solution.

Enfin, l'invariance galiléenne permettant d'initialiser le processus d'évolution par l'image originale dérive de la structure et de son équation d'évolution, si l'on se place dans le schéma de Heisenberg. Ce dernier fait évoluer l'observateur, *i.e.* la fonction de filtrage, plutôt que l'univers observé, *i.e.* l'image. Cette dernière interprétation est celle proposée par Schrödinger, Figure 2.26.

Hypothèses	Approche dans le cadre de l'EPI		
	Scénario choisi	Principe et Calcul EPI	Propriétés des solutions
existence d'un noyau de convolution		✓	
propriété de semi-groupe			✓
localité			
régularité			✓
générateur infinitésimal		✓	
principe de perte maximale			✓
causalité			✓
principe de comparaison			✓
régularisation de Tikhonov			✓
invariance du niveau de gris moyen		✓	
noyau plat à l'infini			✓
invariance par isométrie			✓
homogénéité et isotropie		✓	
séparabilité	✓		
invariance d'échelle		✓	

TAB. 2.2 – Comparaison entre les hypothèses des diverses approches et leur relation avec l'approche EPI.

2.8.6 Conclusion concernant l'approche EPI

Nous voyons ainsi qu'en fonction du choix des potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ choisis pour la diffusion, nous aboutissons à un certain nombre de résultats classiques du traitement d'images. Ceci montre que l'équation de Klein-Gordon avec champs, ou pour une utilisation plus aisée, celle de Schrödinger avec champs, représente un modèle assez général des processus de diffusion. Ce résultat est très important car on retrouve aussi bien l'équation isotrope de la chaleur, ainsi que la plupart des fonctionnelles utilisée à ce jour. Nous sommes parvenus à réduire le nombre de paramètres régissant les équations de diffusion au choix du quadripotentiel $(\mathbf{A}, \phi)$. Le schéma 2.27 résume les diverses implications dérivant de l'approche EPI. Nous venons de démontrer l'implication (1), (2) est démontrée par Frieden dans [47]. L'implication (3) est celle obtenue par Rougon et Prêteux dans [139]. L'implication (4) se dérive directement par l'approche EPI.

2.9 Perspective de prise en compte de l'appareil de mesure

La structure multi-échelles définie précédemment est *virtuelle*, autrement dit elle se situe en amont de toutes acquisitions. Une extension intéressante est la prise en compte dans l'application de l'EPI de l'appareil de mesure et notamment de l'interaction de celui-

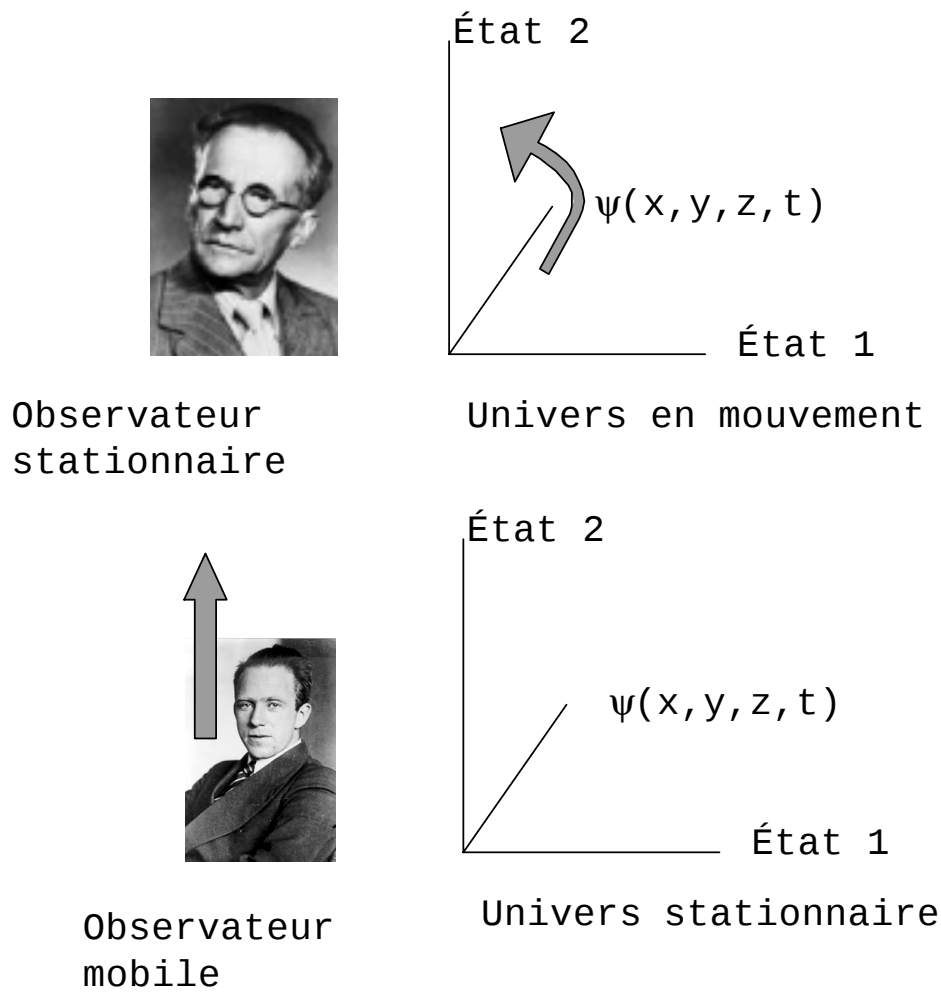


FIG. 2.26 – Représentation des deux interprétations de Schrödinger et de Heisenberg de l'interaction entre deux états.

ci avec le système sous observation. Cette interaction perturbe nécessairement l'état du système en question et plus la mesure est précise, plus cette perturbation est importante. Deux questions se posent alors :

- la première est comment prendre en compte la qualité de la mesure ou des données ?
- la seconde est comment insérer cette interaction dans le principe EPI ?

Autrement dit, comment l'acquisition affecte la fonction d'onde ψ prédite par l'EPI. Si l'on se réfère aux travaux de Frieden dans ce domaine, et si nous prenons pour hypothèses une loi additive de probabilité de bruit sur les mesures en log nous pouvons écrire une équation d'évolution de la fonction d'onde comme l'équation de Klein-Gordon modifiée

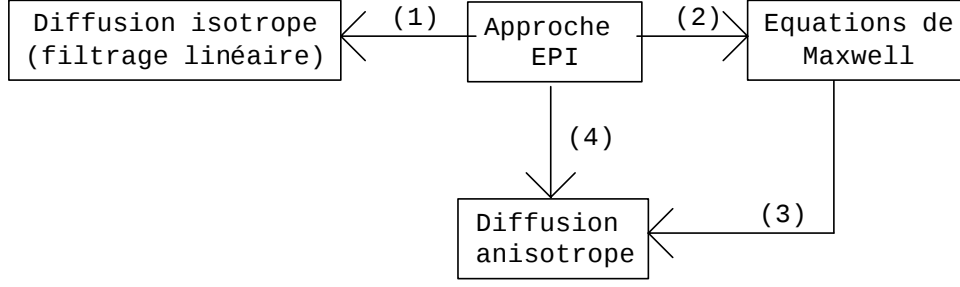


FIG. 2.27 – Schéma connectant les implications possibles et avérées de l'approche EPI.

suivante :

$$\begin{aligned}
 & -c^2\hbar^2 \left(\nabla - \frac{ie\mathbf{A}}{c\hbar} \right) \cdot \left(\nabla + \frac{ie\mathbf{A}}{c\hbar} \right) \psi + \\
 & \hbar^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{ie\phi}{\hbar^2} \right)^2 \psi + c^4\psi + \psi \sum_{m=1}^M \delta(t - t_m) [\beta_1 \ln w(\bar{r} - r) + \beta_2 \ln w^*(\bar{r} - r)] = 0 \quad (2.90)
 \end{aligned}$$

où β_1 et β_2 sont des constantes. t et t_m sont les instants de mesure. w est la loi de probabilité d'erreurs dues à l'appareil en relation directe avec sa fonction de transfert, et w^* son complexe. r représente la fluctuation autour de la vraie valeur et $\bar{r}$ la fluctuation perturbée par la mesure, ce que Frieden appelle la fluctuation quantique.

Il est intéressant de noter que cette équation, entre les instants de mesure, équivaut à l'équation 2.51. En effet la fonction $\delta(t - t_m)$ est nulle tout le temps, sauf aux instants t_m de mesure. Ce qui signifie que les perturbations ne sont introduites qu'à l'instant précis de la mesure.

2.10 Conclusion et contributions

Nous avons développé un nouveau modèle du filtrage linéaire et non linéaire pour la segmentation et la restauration d'images à l'aide de la théorie de l'information de Frieden. Nous avons notamment montré que la manière optimale (en terme d'analyse de données) d'extraire des informations d'une image bruitée sans connaissance *a priori* est de générer une structure multi-échelles à partir de la limite non-relativiste de l'équation de Klein-Gordon sans champ (i.e. équation de Schrödinger). Cette dernière exprime l'évolution optimale de la fonction d'onde et donc du processus multi-échelles associé. L'évolution de la structure s'effectue alors selon un compromis incertitude / imprécision. Cette approche représente une nouvelle manière de générer la structure de l'espace multi-échelles et des opérateurs de voisinages génériques.

L'équation de diffusion, comme représentation multi-échelles, est, dans notre cas, l'équation de Schrödinger sans potentiel et non pas l'équation de la propagation de la chaleur (même s'il s'agit formellement de la même équation) comme dans les approches classiques. L'ouverture optimale à l'échelle t (i.e., le noyau linéaire du filtrage) doit être solution de l'équation stationnaire associée. Celles-ci sont classiquement la gaussienne et ses dérivées.

Par application du I-théorème, seule la solution gaussienne est retenue. Nous apportons ainsi une nouvelle justification du noyau gaussien.

Ceci est cohérent avec les résultats obtenus par Koenderink sur les opérateurs de voisinage génériques. Les résultats de Koenderink ne résultent donc pas d'une *coïncidence heureuse*, mais de la directe expression du processus physique d'acquisition.

En résumé, l'approche proposée justifie l'unicité du noyau gaussien comme fenêtre d'ouverture optimale. Elle précise les liens entre les opérateurs de voisinage génériques et la structure multi-échelles de l'image en proposant une vision originale de l'espace multi-échelles, à savoir une famille de séquences d'images, chacune des séquences consistant en un espace multi-échelles généré à partir des dérivées de l'image initiale. La figure 2.28 illustre la place de l'approche EPI dans la chaîne de traitement d'images. On peut dériver la structure optimale à deux endroits différents, juste avant le système optique et juste après l'acquisition. Le scénario étant quasiment identique à savoir l'optimisation de l'extraction d'information présente dans le système initial. **A la sortie du principe EPI, on fournit au processus, l'ensemble des états possibles du système mesuré. Ainsi on possède l'ensemble des informations nécessaires à une extraction optimale d'information, dans notre cas l'optimalité est définie en terme de compromis incertitude-imprécision.**

Par rapport à la littérature existante, notre approche possède un certain nombre de propriétés intéressantes :

- contrairement aux travaux mettant en oeuvre des EDP, ([3, 114, 24, 22, 111, 118, 141, 127, 25]), elle découle d'un principe variationnel intégrant explicitement la variable d'évolution ;
- elle s'interprète en terme de flux d'information entre le système et les données⁸ ;
- elle génère un processus d'évolution sous la forme d'une EDP sous contrainte d'un quadripotentiel (elle rejoint par cet aspect les travaux de Rougon et Prêteux) ;
- elle extrait l'information grâce à des fonctions d'ondes ayant les caractéristiques d'ondelettes ;
- elle bénéficie de certains résultats de la mécanique quantique : notamment, le processus de résolution peut être approximé par les équations de Newton (théorème d'Ehrenfest) ou de la mécanique des fluides (ces modèles de résolution ont été récemment adoptés en restauration d'image) ; citons par exemple les travaux de Sapiro [146] qui trouvent ici une autre justification.

Nous proposons sur la figure 2.29 un schéma général résumant l'approche que nous avons introduite en comparaison avec les autres approches existantes.

Concernant maintenant les résultats eux mêmes, le scénario du TIBN, optimisant le couple imprécision-incertitude, conduit à l'équation stationnaire de Schrödinger avec

⁸Par cet aspect, notre travail diffère de ceux décrits précédemment par Koenderink, Yuille, Poggio, Babaud, Hummel, Florack, Lindeberg. En effet, le point de vue adopté pour générer l'espace multi-échelles est celui de l'information. L'analyse de la structure multi-échelles de l'image selon ce point de vue est d'ailleurs une voie de recherche en pleine expansion. Citons par exemple les travaux de Sparring et Weickert [155, 156]. Nous pensons que notre approche s'avère intéressante dans ce cadre, puisque l'information physique extrême *donne la raison* du principe variationnel sous-jacent à l'espace multi-échelles.

potentiel. Les données définissent l'observable, la mesure de cette observable donne les amplitudes de probabilité (vecteurs propres) associées à chacun des états (valeurs propres) (*i.e.*, chaque état est alors caractérisé par une fonction d'appartenance). Nous avons démontré que c'est le cadre de la théorie quantique qui est *choisi* par l'EPI. L'ignorance⁹ est alors relative à l'impossibilité de principe d'Heisenberg, à savoir qu'il est impossible d'attribuer une valeur unique à la fois au couple position et quantité de mouvement (imprécision-incertitude). Cette incertitude est représentée par une fonction d'onde témoignant du principe de superposition (l'état d'une particule juste avant la mesure est une superposition d'états). Elle traduit à la fois une imprécision relative à la position d'un individu et son incertitude quant à son appartenance à une classe. Les probabilités (modules des fonctions d'onde au carré) apparaissent, dans ce cadre, comme intrinsèques.

⁹Cette ignorance est par nature différente de celle rencontrée en mécanique classique.

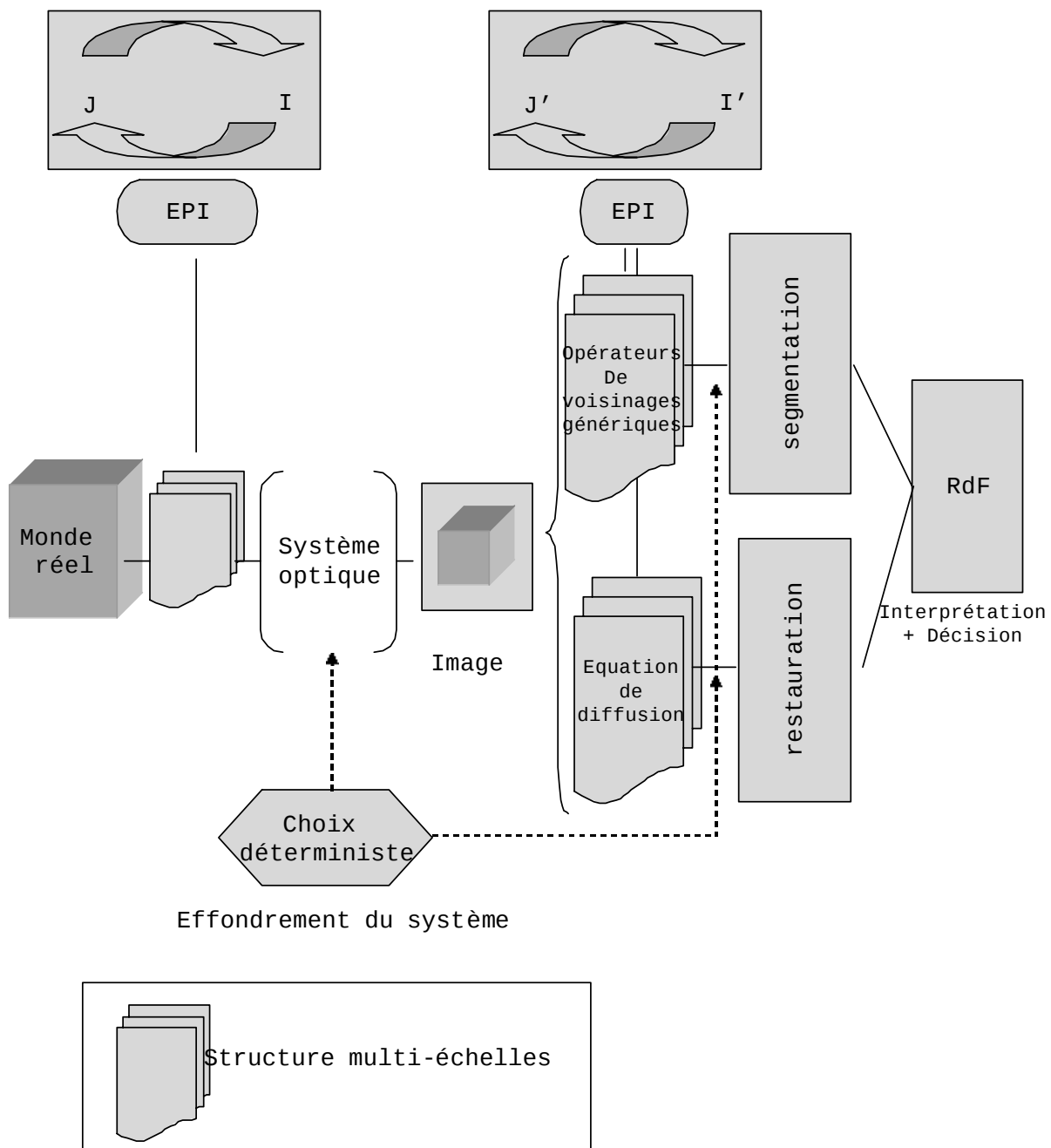


FIG. 2.28 – Chaîne de traitement d'image et EPI.

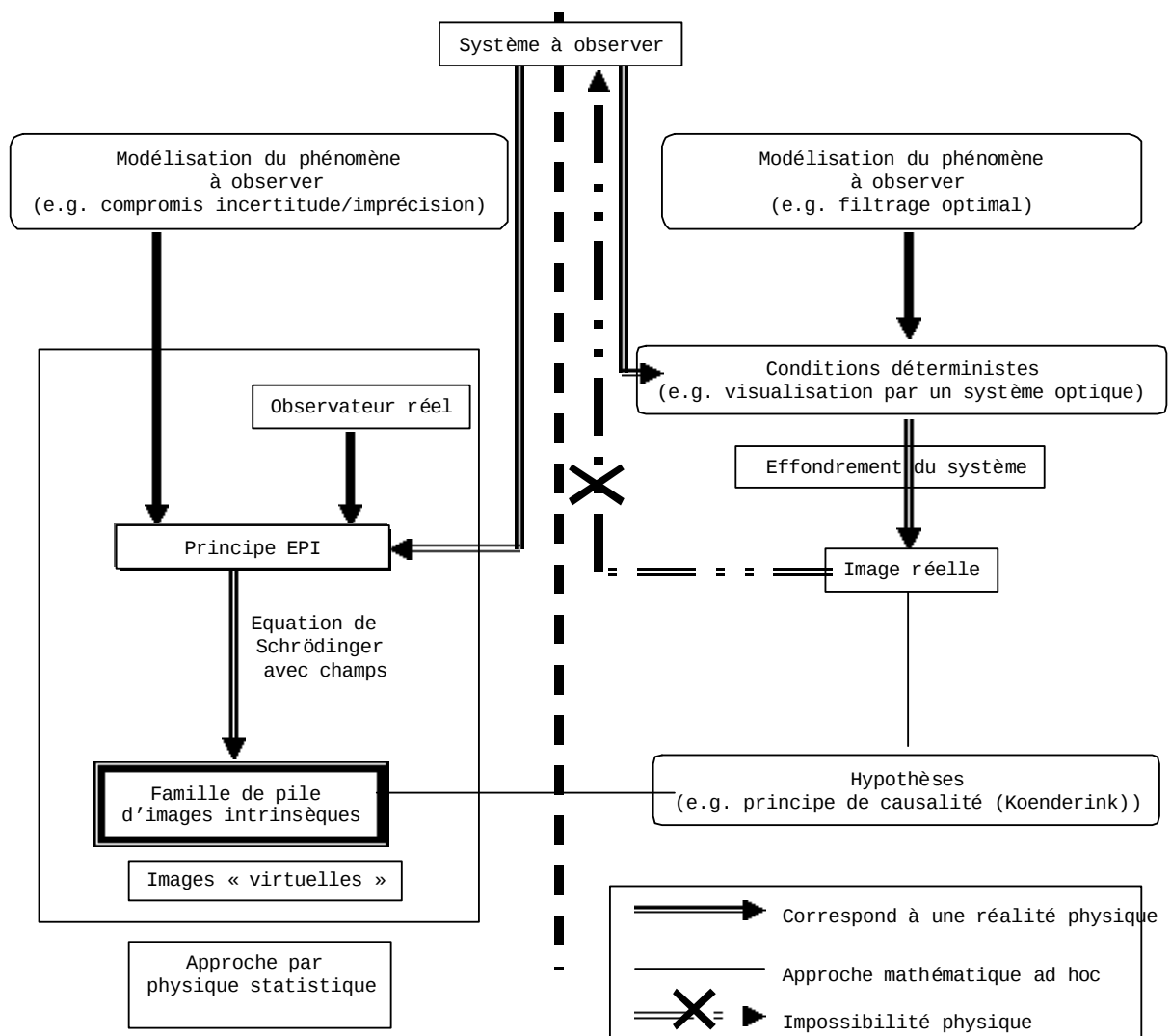


FIG. 2.29 – Comparaison entre l'approche EPI et les approches de TIBN existantes.

Chapitre 3

Localisation et détection de stents dans des images rayons X bas contrastes

La théorie, c'est quand on sait tout et que rien ne fonctionne. La pratique, c'est quand tout fonctionne et que personne ne sait pourquoi. Einstein

3.1 Introduction

Les deux chapitres suivants présentent les travaux applicatifs menés au cours de cette thèse dans un objectif médical précis, la détection et la reconstruction de stents à partir d'images rayons X bas-contrastes. Deux parties complémentaires se dégagent ; la première, objet de ce chapitre, concerne le traitement d'images bi-dimensionnelles, la seconde la reconstruction d'objets tri-dimensionnels.

Dans ces chapitres, nous adoptons deux approches différentes. Dans le premier, nous prenons en compte l'information contextuelle dont nous disposons. Dans le chapitre suivant, nous utilisons les résultats de la partie théorique pour développer un nouvel algorithme de reconstruction.

Le fait que l'on ne puisse pas utiliser le modèle quantique dans un objectif de détection de projections de stents provient de la nécessité d'incorporer des informations de trop haut niveau sémantique dans la chaîne de traitements. La détection d'un stent, impliquant de faire s'enchaîner des processus décisionnels, rendant beaucoup trop complexe la définition de quadri-potentiel adapté.

Ainsi, la volonté de ne pas utiliser d'informations contextuelles dans les premiers chapitres, s'expliquant par notre volonté de définir un modèle général de traitement de l'image, ne trouve pas d'utilisation évidente dans un cas de segmentation d'objet très précis.

Dans une approche similaire d'utilisation de conditions initiales précises, Deriche dans [30] ou Shen dans [153] ont optimisé un filtre afin de détecter un échelon dans un bruit. Ils ont utilisés comme critères de validation ceux proposés par Canny :

- une bonne détection : l’opérateur doit donner une réponse au voisinage d’un contour ;
- une bonne localisation : le contour doit être localisé avec précision ;
- une réponse unique : un contour doit provoquer une seule réponse de l’opérateur d’extraction ;

Dans les deux études précédemment mentionnées, une limitation importante repose sur le fait qu’ils ne prennent pas en compte les propriétés bidimensionnelles d’un contour (courbures, angles...) ou de l’objet, car ils utilisent la propriété de séparabilité.

Ainsi, dans ce chapitre, nous avons voulu utiliser les propriétés spatiales du stent et de sa projection, et avons été amenés à revenir à des méthodes plus pragmatiques et adaptées. Nous proposons donc, de ce fait, un état de l’art sur les différentes manières d’extraire des formes lorsque l’on possède un *a priori*, ainsi qu’une nouvelle taxonomie.

Ce chapitre présente donc dans la section 3.2 présente le contexte médical et le cadre applicatif de l’étude. Dans cette section, l’application médicale est présentée et les objectifs précisés. Les difficultés de segmentation des pixels appartenant à la projection du stent sur les images rayons X, obligent à scinder ce processus de segmentation en deux processus distincts.

Le premier de ces processus est indiqué dans la section 3.3. Il propose deux méthodes de localisation des stents sur une image. Celles-ci ne s’attachent pas à la détermination des pixels appartenant à la projection d’un stent, mais plutôt en la détermination d’une zone de focalisation où se trouve le stent. Ces deux méthodes pragmatiques résultent des connaissances *a priori* que l’on possède sur la forme à localiser.

Dans la section 3.4, la détermination de l’ensemble des pixels appartenant à la projection du stents, des bords ou de son maillage, est présentée comme le second processus de traitement d’images bi-dimensionnelles. L’algorithme que nous proposons est une détection multi-locale floue, où nous ferons apparaître l’intérêt des résultats optimaux précédemment mentionnés.

Ces traitements ont été implantés dans un logiciel que nous présenterons dans ce chapitre et en Annexe C.

3.2 Contexte médical et problématique

Le domaine cardio-vasculaire a connu une évolution certaine dans le traitement des pathologies cardiaques depuis l’utilisation de stents. Ainsi 15000 stents ont été posés en 1995, alors qu’on en compte deux fois plus en 1999 [15]. De géométrie cylindrique (c.f. Figure 3.2), son rôle est d’élargir les parois ayant subi un rétrécissement. Un état de l’art de cette technique est présenté dans [104]. Cependant, l’engouement créé par cette technologie doit être modéré par un certain nombre de facteurs. Le taux de resténose, c’est à dire le taux d’apparition d’un nouveau rétrécissement coronaire dû directement ou indirectement au stent, est de l’ordre de 30% [151]. On comprend alors l’intérêt des praticiens pour déterminer les paramètres qui interviennent dans l’apparition de ce phénomène. Une des conclusions précisées dans [104] montre que des paramètres intrinsèques au stent tels que sa géométrie, sa longueur, le motif de sa maille, ainsi que le matériau de sa surface, influent directement sur ce pourcentage. Il existe aussi des facteurs de re-

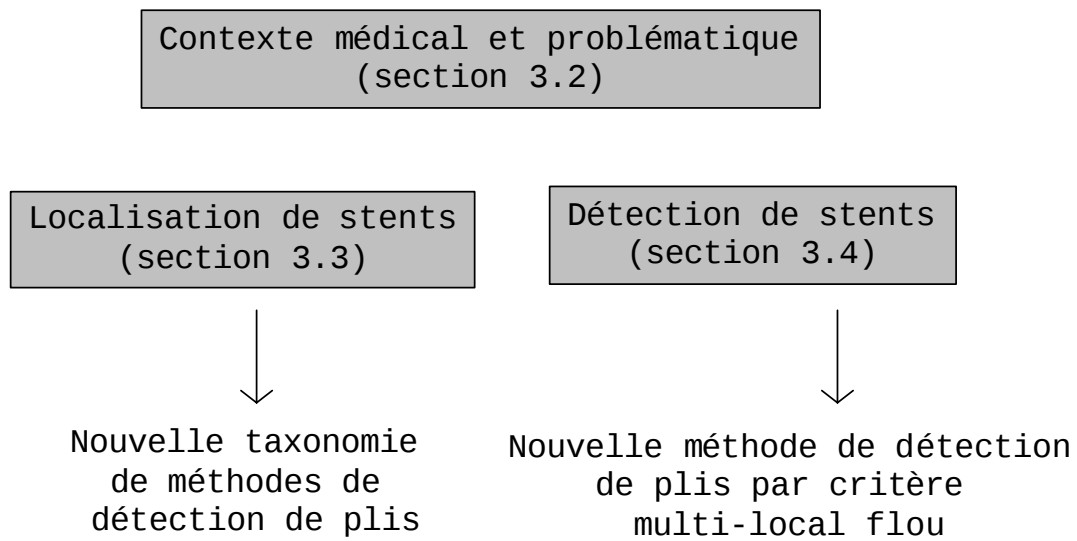


FIG. 3.1 – Organisation du chapitre *Localisation et détection de stents dans des images rayons X bas contrastes* et contributions.

sténose extrinsèques au stent comme l'état diabétique du patient. Un autre facteur qui est difficilement quantifiable par des études est le déploiement correct du stent lors de sa pose et l'évolution de ce déploiement tout au long de la vie du patient. L'évaluation de ce déploiement dépend entièrement de l'appréciation du praticien. Un consensus se dégage autour du fait qu'un stent correctement déployé se rapproche d'un cylindre droit. Cependant, l'environnement du stent telles sa courbure et celle du vaisseau stenté sont aussi à considérer. Le développement de méthodes permettant aux praticiens de vérifier le bon déploiement du stent semble donc indispensable dans la prévention des resténoses. L'apport d'une imagerie médicale de qualité est donc de plus en plus requis en vue d'une utilisation diagnostique. La validation d'une pose de stent est, à l'heure actuelle, uniquement réalisée par un examen de type IVUS (Intra Vascular Ultra Sound). Cet examen permet, sur une image de type ultrasonore, d'apprécier l'état du stent par une vue interne à l'artère (c.f. Figure 3.3).

Comme cet examen est invasif et cher, on ne peut le pratiquer systématiquement à chaque pose de stent. L'objectif de notre travail consiste à substituer à l'examen IVUS, un examen de type radiologique, à partir duquel nous souhaitons vérifier plus rapidement, de manière non invasive et moins onéreuse, la qualité de déploiement du stent.

3.2.1 Modalités et caractéristiques de l'acquisition

L'intérêt de la détection de stents sur des images rayons X réside dans le fait de pouvoir obtenir directement, pendant ou juste après l'intervention, les informations concernant le déploiement du stent. Nous sommes cependant tributaires des routines cliniques appliquées lors d'une angioplastie. Ces dernières consistent en l'alternance répétée de séquences d'images injectées, obtenues d'une part après injection d'un produit de contraste pour voir

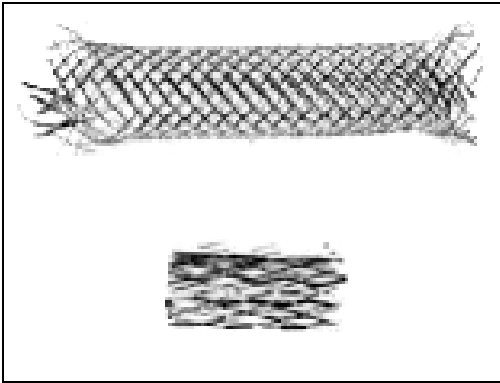


FIG. 3.2 – Exemple de stents.

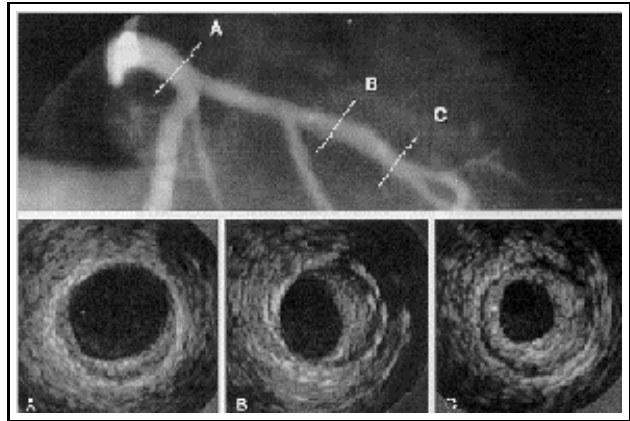


FIG. 3.3 – Bas : exemples de trois images obtenues par IVUS des coupes A, B et C. Haut : présentation du vaisseau examiné par imagerie RX après injection d'un produit de contraste.

le rétrécissement des vaisseaux et, d'autre part, de séquences d'images non injectées afin de voir le positionnement du stent. De plus, l'acquisition des images se fait, souvent en rotation de manière à ce que le praticien dispose du maximum d'informations relatives à la forme des vaisseaux. Les images intéressantes sont celles où le stent apparaît, *i.e.* le produit non injecté. Il est utile de noter que l'acquisition se fait de manière à ce que le stent apparaisse de manière longitudinale. En effet, la lecture de telles coupes est toujours plus porteuse d'information des relations spatiales sténose-stent.

3.2.2 Critères de détection des stents dans les images rayons X

Outre les modalités d'acquisition qui sont plus ou moins standard, il existe des facteurs variables relatifs aux stents eux-mêmes. De par leur structure de maillage, leur taille, leur matériau, ils peuvent induire des différences notables dans leurs projections rayons X. De ce fait nous devons simplifier notre modèle de stent de manière à ne pas être tributaire des stents employés. Ainsi nous définirons un stent par un objet à géométrie cylindrique observé longitudinalement (*cf.* Figure 3.4).

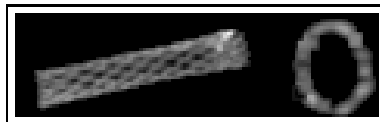


FIG. 3.4 – Exemples de projections longitudinale (gauche) et axiale (droite) d'un stent.

Nous n'émettrons ici aucune hypothèse quant à la structure des *struts*, *i.e.* les mailles du stent. Nous supposerons aussi que le stent est construit dans un matériau uniforme (or, acier, matériau composite...) dont la radio opacité, *i.e.* son contraste sur les images

rayons X, varie dans une plage commençant à la limite de la visibilité pour un observateur non entraîné. A partir de l'ensemble de ces hypothèses nous pouvons établir un modèle de ce que sera la projection de stent. Si nous considérons que chaque rayon X traversant les bords du stent rencontre plus de matière que celui qui coupe le stent en son milieu (cf. Figure 3.5), le profil d'un stent ressemblera à celui présenté sur la Figure 3.6.

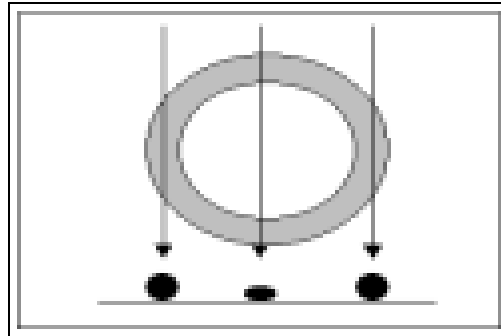


FIG. 3.5 – Trajectoires de rayons X donnant une atténuation plus forte sur les bords qu'au centre.

Dans les sections suivantes, nous allons mettre en oeuvre une chaîne de deux processus complémentaires pour la détection des pixels appartenant à la projection du stents sur les images rayons X. La première section est consacrée à la localisation du stent projeté, la seconde section, à la segmentation complète du stent projeté.

3.3 Localisation de stents

3.3.1 Introduction

A partir des considérations précédentes, l'image d'un stent sur une image aux rayons X se présente comme deux courbes approximativement *parallèles* de dimensions bornées (les largeurs et longueurs ne seront pas respectivement plus larges que la plus large des artères ni plus longues que le plus long des stents utilisés cliniquement), et dont le niveau de gris est inférieur à son environnement immédiat. Le problème se résume donc à la détection de deux plis *parallèles*.

Il est important de noter qu'à ce stade notre objectif de détection est de déterminer une zone se focalisant sur le stent et non pas l'ensemble des pixels de la projection du stent. En effet, une image rayons X classique présente une taille 512×512 ou 1024×1024 , un stent couvre une zone maximale de 50×50 pixels. Les risques de mauvaise segmentation du stent sont de beaucoup supérieurs si on traite l'image dans sa globalité plutôt que localement. Ainsi, nous avons décidé de scinder la détection de l'ensemble des pixels appartenant aux projections du stent en deux étapes ; la première détecte sur une image dans sa globalité une zone de focalisation, la seconde segmente le stent à partir d'un processus local s'appuyant sur l'aire d'intérêt.

C'est après cette seconde étape que, possédant les contours complets du stent, le praticien

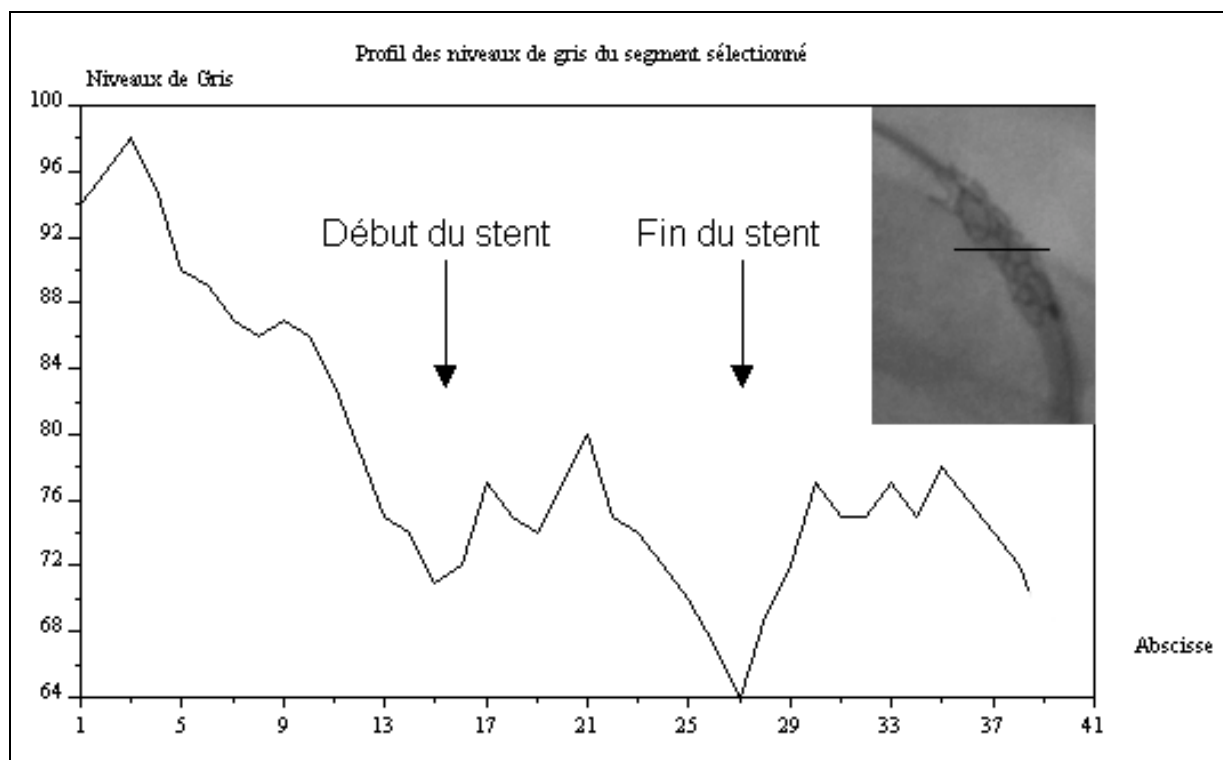


FIG. 3.6 – Profil en niveaux de gris d'un stent sur une ligne d'image RX.

sera à même après reconstruction de déterminer si le stent est correctement déployé (pas de maille non déployée, pas d'angle droit...).

Ce chapitre traite de la première étape et se décompose de la manière suivante. Dans la prochaine section, nous traitons de la problématique générale "détection de forme particulière" afin de déterminer les solutions envisageables. Les sections 3.3.3 et 3.3.4 sont consacrées aux algorithmes implantés et à leur justification. Les sections 3.3.5 présentent des résultats obtenus par ces deux méthodes, ainsi que les travaux associés lors d'étapes ultérieures et les perspectives de l'étude.

3.3.2 Détection de crêtes et de vallées dans une image

La détection de crêtes et de vallées dans une image a déjà fait l'objet de nombreux travaux comme nous le verrons par la suite. Les définitions des crêtes et vallées, réunies sous le terme de plis, seront mentionnées dans le paragraphe suivant ainsi que les principales méthodes de détection existantes. Cette section recense suivant deux taxonomies, les méthodes classiques de détection de plis, puis sélectionne les plus adaptées aux types d'images de notre base de données.

Terminologie et notations

Soit une fonction L où $\Omega \times \Sigma \rightarrow \Gamma; (\mathbf{r}; t) \rightarrow L(\mathbf{r}; t)$. Ω et Σ sont respectivement deux espaces bornés de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$ définissant l'espace des coordonnées et l'espace du paramètre régissant l'évolution (le temps ou l'échelle [99]). En pratique ces espaces seront discrétisés.

Nous allons maintenant introduire la notion de *jets locaux d'ordre n* de la fonction L au point $\mathbf{r} = (x, y)$ [131]. Ces jets locaux sont des fonctions qui approchent l'image sur le voisinage du point considéré et se représentent par une série de Taylor tronquée à l'ordre k au point $\mathbf{r}$. Ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} j_r^k &= L(x + \xi, y + \eta; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \right)^k L(\mathbf{r}; t) \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^i \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^{k-i} \frac{\xi^i \eta^{k-i}}{k!} \\ &\quad + o(\xi^{n+1}, \eta^{n+1}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Une fois ces définitions posées, intéressons nous à la définition et à la détection d'un pli. Ces deux notions sont indissociables tant la définition d'un pli, même si elle est intuitive au premier abord, est soumise à différentes interprétations au niveau mathématique. Eberly dans sa thèse [39] cite les points communs des nombreuses tentatives de définitions présentes dans la littérature ([166], [75], [137], [67], [28], [112], ...). A titre d'exemple, nous pouvons citer diverses définitions de plis :

- De Saint Venant : un pli est une ligne de pente maximale
- Eberly : lieux de hauteur maximale le long de la direction donnée par les valeurs maximales de la dérivée directionnelle à l'ordre deux

Koenderink rappelle toutes les controverses associées à ces tentatives [85], chaque méthode de détection s'apparentant quasiment à une définition particulière. Ainsi, les lignes issues à un point selle sont régulièrement sujettes à discussion, tout comme les surfaces possédant des points où les dérivées ne sont pas calculables.

Plus simplement, nous utiliserons pour définir les méthodes de détection de plis, une classification classique fondée sur les théories qu'elles utilisent. Rappelons enfin que, selon qu'il s'agisse d'un maximum ou minimum, un pli sera appelé ligne de crête ou vallée.

Taxonomie des algorithmes de détection de plis classés par caractéristiques géométriques

Cette taxonomie, la plus naturelle en plus d'être la plus populaire [101], [85] se divise en trois parties.

- Méthodes locales : un point est classé en fonction de la valeur du jet local d'ordre n , $j_r^n[L]$. La valeur de certains de ces jets locaux renseigne quant au degré de pliure d'une région. Ces fonctions, j_r^k , peuvent s'exprimer comme la troncature de la série de Taylor de la surface d'une image. Les méthodes de calcul de la matrice Hessienne

de la fonction L peuvent être incluses dans cette catégorie [40]. On peut aussi inclure les méthodes fondées sur le calcul de maxima positifs ou minima négatifs des courbes de niveau [163].

- Méthodes globales : ces méthodes emploient des propriétés de points éloignés les uns des autres pour classer un point comme un pli. La plus célèbre est certainement la méthode de la ligne de partage des eaux, qui crée des séparatrices sur l'image (crêtes et bassins versants). Un algorithme efficace peut être trouvé dans [167].
- Méthodes multi-locales : la classification d'un point dépend des valeurs des jets sur un voisinage particulier. Une des méthodes les plus intéressantes est celle décrite dans [101] qui emploie une analyse de tenseur de structures couplée à une mesure de confiance.

Taxonomie des algorithmes de détection de plis classés par cadre théorique

Ces détections de plis se fondent sur les divers supports théoriques des méthodes employées [157]. Cette taxonomie s'ordonne en quatre parties.

- **Approches fondées sur les niveaux de gris** : Les méthodes appartenant à cette catégorie utilisent les différences des niveaux de gris sur le voisinage du point considéré. Un exemple de méthode décrit dans [44] parcourt l'image à la recherche des maxima le long des lignes et des colonnes. A chaque maxima sont affectés deux attributs relatifs aux pixels appartenant au voisinage immédiat et une opération de seuillage achève l'algorithme. On trouvera d'autres références dans [110], [36], [54]. Un problème récurrent à ce type de méthodes est le nombre important de points qui satisfont aux critères utilisés [53]. Pour pallier ce problème, des algorithmes complexes et coûteux de temps de calcul doivent souvent être implémentés.
- **Approches par filtrage adapté** : ce filtrage s'effectue lorsque les formes des pliures à détecter (largeur, longueur) sont connues. La plupart de ces approches combinent de manière non-linéaire la sortie de filtres linéaires, qui se présentent souvent comme des dérivées de filtres Gaussiens. Ces filtres donnent des réponses maximales pour les caractéristiques spatiales pour lesquelles ils ont été conçus. Comme ces algorithmes n'estiment pas la direction des plis dans l'image, les filtres doivent être appliqués de nombreuses fois dans diverses orientations. Ces méthodes permettent néanmoins de détecter les points et plis de jonction. Une analyse théorique de ces méthodes se trouve dans [58].
On peut citer également les travaux de Deriche [30] et ceux de Shen [153].
- **Approches fondées sur la géométrie différentielle** : elles attribuent à un point $\mathbf{p} \in \Omega$ l'appartenance à un pli en fonction de la valeur des jets d'ordre n notés $j_p^n[L]$. La valeur de certains de ces jets fournit une indication quant au degré de pliure, ainsi que les valeurs utilisant le calcul des valeurs propres de la matrice Hessienne

de la fonction L [40]. On pourra aussi citer les algorithmes de calcul des minima négatifs / maxima positifs de la courbure κ des lignes de niveaux [163]. Lorsque la classification d'un point s'effectue en fonction de caractéristiques de l'image éloignées de ce point, on parle de méthodes globales.

On recense aussi des méthodes utilisant les propriétés locales de région autour du point considéré [102]. L'ensemble de ces méthodes requiert néanmoins, pour s'appliquer efficacement, une image non bruitée ou fortement régularisée, avec des courbes de niveaux bien définies.

- **Approches par modèles** : cette approche relativement récente, utilise une description globale des pliures (section de pli Gaussienne, en porte, parabolique, triangulaire ...). Les approches décrites dans [100] [89] supposent donc approximativement connue l'allure des plis recherchés. L'algorithme effectue une analyse multi-échelle qui consiste en un filtrage d'une image initiale par une série de filtres paramétrés par t (le plus connu étant le filtre gaussien). L'étape finale consiste en la sélection des plus fortes réponses car ces dernières correspondent aux plis désirés. Cette dernière méthode rencontre un vif succès depuis qu'un support mathématique théorique fort a été défini [99]. Les approches par modèles ne sont pas adaptées à la détection de petites structures. En effet, l'analyse multi-échelles présente l'inconvénient d'engendrer de nombreuses fausses détections aux échelles les plus basses.

Nous présentons un tableau dans lequel nous présentons chaque méthode précédemment citée. L'existence même de deux taxonomies différentes pour des méthodes ayant un but identique traduit bien leurs limites. Nous proposons dans la section suivante une nouvelle taxonomie qui englobe l'ensemble des méthodes précédemment citées.

Détection	locale	multi-locale	globale
par niveaux de gris	[53]		
par géométrie différentielle	[166], [137]	[101]	
par filtrage adapté	[58]		
par modèles		[100]	[167]

TAB. 3.1 – Cette table à deux entrées établit la double appartenance de chaque algorithme aux deux taxonomies précédemment citées.

Une nouvelle taxonomie fondée sur la dimension du voisinage

Dans cette section, nous employons un nouveau critère pour classer ces méthodes. Jusqu'à présent, nous avons traité de courbes de niveaux, d'approximation de surfaces, d'approche multi-échelles... Nous proposons maintenant de différencier ces méthodes de détection en fonction de la dimension du voisinage.

Nous proposons de définir quatre classes renvoyant à l'ensemble des méthodes citées ; du voisinage de dimension 0, *i.e.* un simple point, à un voisinage de dimension $(2 + 1)$, *i.e.* des méthodes multi-échelles. La notion de voisinage de dimension $(2 + 1)$ a été intro-

duite par Koenderink dans [84]. Nous présentons ici les quatre classes de notre taxonomie.

- Méthodes de voisinage de dimension 0 : Ces méthodes emploient un critère purement local pour classer un point comme un pli ;
- Méthodes de voisinage de dimension 1 : Nous incluons dans cette classe tous les algorithmes qui tiennent compte du comportement des points sur une ligne particulière (courbes de niveaux, lignes de pente...) ;
- Méthodes de voisinage de dimension 2 : Méthodes prenant en considération la géométrie de la surface de luminance autour du point considéré ;
- Méthodes de voisinage de dimensions $(2 + 1)$: le terme de dimension $(2 + 1)$ est préféré à celui de dimension 3, principalement parce que la troisième dimension n'est pas homogène avec les deux premières (le temps et l'espace ou l'échelle et l'espace). De plus, ces méthodes ne considèrent pas directement un voisinage à 3 dimensions. La conclusion est prise finalement en tenant compte du comportement sur la troisième dimension.

Cette taxonomie a l'avantage de proposer un critère de classification commun à chaque méthode. Le tableau 3.2 présente les méthodes de détection de crêtes et de vallées selon cette taxonomie.

Dimension du Voisinage			
0	1	2	2+1
Valeurs de niveaux de gris	Filtrage adapté Méthodes basées sur les jets d'ordre 1	Multi-locales Géométrie différentielle Méthodes fondées sur les jets d'ordre 2 et supérieur Inondation	Multi-échelles et Différentielle géométrie

TAB. 3.2 – Classification d'algorithme de détection de plis selon la dimension de voisinage.

De ces classes de méthodes, nous ne retenons que les deux premières pour les raisons suivantes. Les méthodes par modèles sont inutilisables à cause de la finesse des éléments recherchés, incompatible avec ce type d'approches. En ce qui concerne les méthodes de géométrie différentielle, les divers degrés de plisure obtenus sur notre jeu d'image ne nous ont pas permis d'obtenir des invariants fiables. De plus la grande variété de texture a lourdement pénalisé les résultats. Nous avons ainsi sélectionné deux types d'algorithmes parmi les classes restantes pour ensuite les comparer.

3.3.3 Algorithme de détection de stents utilisant la valeur des niveaux de gris locaux

Nous avons choisi de coupler deux méthodes. La première est statistique. Elle utilise les moments centrés d'ordre (p, q) donnés par :

$$m_{pq}^T = \frac{1}{T * T} \sum_{i=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{j=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x_i - x_g)^p (y_j - y_g)^q L(x + i, y + j) \quad (3.2)$$

m_{pq}^T est le moment centré d'ordre (p, q) calculé sur une fenêtre de taille T par T . Le couple (x_g, y_g) représente les coordonnées du barycentre des points considérés.

La seconde repose sur la morphologie mathématique. Nous n'explicitons pas ici son cadre théorique que l'on trouvera dans [149]. Ces méthodes ont été retenues plutôt que celles utilisant une estimation bayésienne ou les *champs de Markov* [61] pour leur exécution plus rapide. La finesse de la frontière du stent a , quant à elle, empêché tout pré-filtrage de l'image [122]. Quant aux contours actifs [77], ils sont trop sensibles à leur initialisation [33]. Les méthodes étant ainsi choisies, il existe plusieurs façons de les faire coopérer [78] : en parallèle, en série et de manière hybride.

Nous avons scindé notre démarche en quatre parties distinctes. En suivant la démarche ci-dessous, nous aboutissons à une implantation en série des méthodes utilisées :

- la sélection statistique et locale des candidats potentiels,
- l'élimination par opérateur morphologique,
- le calcul de paramètres statistiques,
- la décision par appariement de ces paramètres statistiques.

La sélection statistique des candidats potentiels

Nous avons précédemment montré que la projection du stent se caractérise par une frontière plus sombre que son environnement, *i.e.* une vallée sur l'image. Il en découle que la valeur de niveau de gris des pixels du bord du stent est inférieure à la moyenne locale donnée par le moment d'ordre $(0, 0)$ explicité dans l'équation m_{00}^T

La Figure 3.7 montre le résultat de la sélection des pixels de niveau de gris inférieur à la moyenne locale sur une fenêtre $(7 * 7)$ pixels. La taille de la fenêtre est un paramètre critique pour l'algorithme. La taille choisie est directement corrélée avec la taille de la région d'intérêt, approximativement $(5 * 2)$ pour l'étendue typique d'un bord de stent vertical, et $(2 * 5)$ pour un bord de stent horizontal. De ce fait, et puisque l'orientation du stent est inconnue, nous utilisons une fenêtre $(7 * 7)$ pour englober l'ensemble des différentes orientations possibles. Cette hypothèse a été vérifiée sur l'ensemble de la base d'images dont nous disposons.

L'élimination par analyse morphologique locale

Cette étape utilise la caractéristique de continuité de la projection du stent. Ainsi tout *pixel candidat* à l'appartenance à la projection du stent et se trouvant isolé (*i.e.* dont la valeur est inférieure à la moyenne) doit être éliminé. Pour ce faire, nous appliquons de manière itérative un opérateur morphologique local défini de la façon suivante :

Pour chaque pixel de valeur non nulle, nous comptons, sur une fenêtre centrée de taille trois par trois (de manière à être le plus local possible), le nombre de pixels non nuls. Si le total est inférieur à un seuil, nous mettons à zéro le pixel central. La Figure 3.8 représente le résultat de 7 applications successives de l'opérateur morphologique local défini ci-dessus, avec un seuil de 20% d'occupation du masque par des pixels de valeur non nulle. La taille de la fenêtre a été choisie de manière à éliminer le plus de bruit possible ; le bruit étant impulsif, une taille de 3*3 pixels est suffisante et cela quelle que soit la taille de l'image à traiter. Notons enfin que ce traitement, même s'il fait disparaître certains pixels de la projection du stent, en conserve suffisamment pour ne pas perdre l'information utile dans les dernières étapes de l'algorithme.

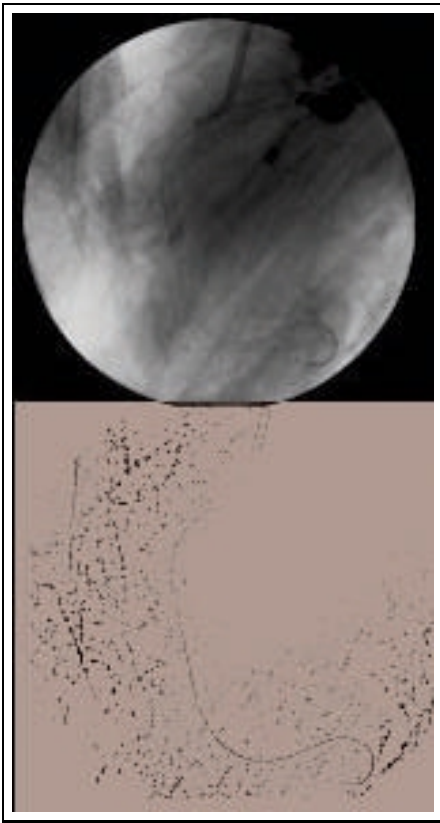


FIG. 3.7 – Résultat de l'élimination des pixels sélectionnés à l'étape 1.



FIG. 3.8 – Résultat d'une succession d'opérateurs morphologiques appliqués à l'image du bas agrandie de la Figure 3.7. Sur la partie inférieure droite de l'image reste le cathéter, sur la partie centrale on détecte le stent, sur la partie inférieure le guide. Enfin à gauche de l'image il s'agit de fausses détections.

Le calcul des paramètres statistiques

A la suite des deux traitements précédents, seuls restent les pixels représentatifs d'une frontière non isolée plus sombre que son voisinage. Dans cette phase, nous utilisons le critère de parallélisme des bords du stent. Pour utiliser ce critère nous calculons l'orientation privilégiée θ des frontières conservées à partir des m_{pq}^T . Ce calcul se fait par l'utilisation des moments d'ordres $(2, 0)$, $(0, 2)$ et $(1, 1)$ définis respectivement par les équations (3.4), (3.3) et (3.5). Notons que le barycentre a pour coordonnées : $(x_g, y_g) = (\frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{0,1}}{m_{0,0}})$.

$$m_{20}^T = \frac{1}{T * T} \sum_{i=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{j=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x_i - x_g)^2 L(x + i, y + j) \quad (3.3)$$

$$m_{02}^T = \frac{1}{T * T} \sum_{i=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{j=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (y_j - y_g)^2 L(x + i, y + j) \quad (3.4)$$

$$m_{11}^T = \frac{1}{T * T} \sum_{i=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sum_{j=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x_i - x_g)(y_j - y_g) L(x + i, y + j) \quad (3.5)$$

Ces trois moments sont nécessaires pour le calcul de l'orientation des frontières défini par l'équation :

$$\theta = \arctan \left((-1)^{m_{11}^T} \frac{m_{02}^T}{m_{20}^T} \right) \quad (3.6)$$

où θ représente l'orientation de la fenêtre d'étude.

La décision par appariement des paramètres statistiques

Une fois le paramètre θ déterminé, nous recherchons dans les directions perpendiculaires à θ la présence de frontières orientées dans le même sens (*cf.* Figure 3.9). Si deux frontières présentant la même orientation à $d\theta$ près, se retrouvent dans une zone pouvant inclure spatialement un stent, on conclura à la présence de celui-ci. Le résultat est fonction du seuil de $d\theta$. Le résultat de cet appariement est présenté sur la Figure 3.10. Le seuil $d\theta$ a été fixé égal à 30° . Ce seuil a été déterminé empiriquement sur un ensemble d'images afin de minimiser le risque de non détection.

Interprétation

Cette première méthode présente un avantage capital dans le domaine biomédical à savoir celui de présenter un taux de non détection faible. A l'inverse, la méthode présente un taux de fausses alarmes non négligeable. Cet inconvénient est inhérent à de nombreuses méthodes reposant sur les niveaux de gris. Rappelons ici que l'objectif premier est de déterminer une zone de focalisation sur le stent, et non pas l'ensemble des pixels de la projection du stent. Lors de la présentation des résultats (*cf.* section 3.4), nous détaillerons les étapes nécessaires à cette détection de zones de projection du stent, comme par exemple celle réalisant l'élimination des fausses alarmes.

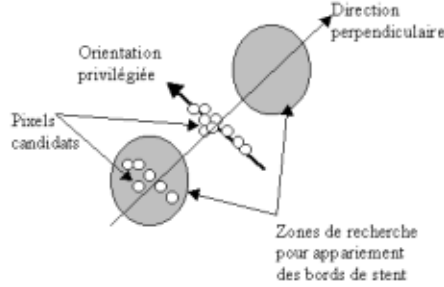


FIG. 3.9 – Illustration du principe de recherche par zones d'appariement.

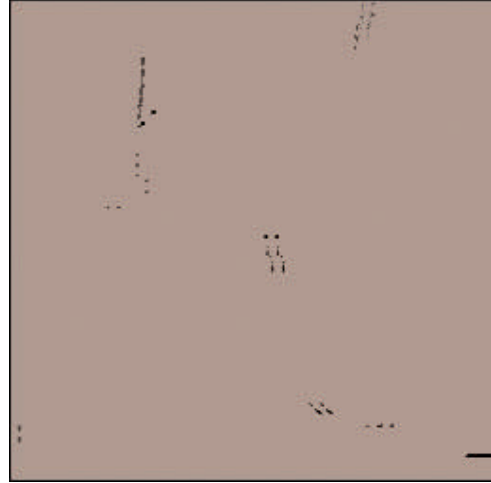


FIG. 3.10 – Résultat de la décision par appariement de paramètres statistiques.

3.3.4 Algorithme de détection des stents fondé sur un filtrage adapté

L'utilisation d'un filtrage adapté est une des approches les plus pragmatiques que l'on puisse trouver en traitement d'image. Elle suppose, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 3.3.2, une connaissance du profil recherché. Dans le cas qui nous intéresse, nous avons émis l'hypothèse d'une structure en forme de vallée (*cf.* Figure 3.6).

Filtre utilisé

Nous justifions tout d'abord la nature et le type de filtre utilisé, puis nous exprimons sa mise en oeuvre.

Le profil d'un bord de stent étant étroit nous avons décidé d'utiliser un filtre de largeur égale à quatre, et cela pour une image $512 * 512$. Ces considérations nous ont conduits à prototyper le filtre F_{stent}^{5*4} suivant :

1	1	1	1	1
-1	-1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1
1	1	1	1	1

Nous avons aussi implanté 7 autres filtres suivant les orientations $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{7\pi}{8}$. Nous obtenons par simple convolution des images comme celles présentées en Figure 3.13 et Figure 3.12.

Les huit filtrages effectués, nous disposons de huit images directionnelles. Chaque pixel de chacune de ces images contient une quantité d'information ne dépendant pas de la valeur du niveau de gris moyen de la zone, mais du contraste avec ses voisins. D'après

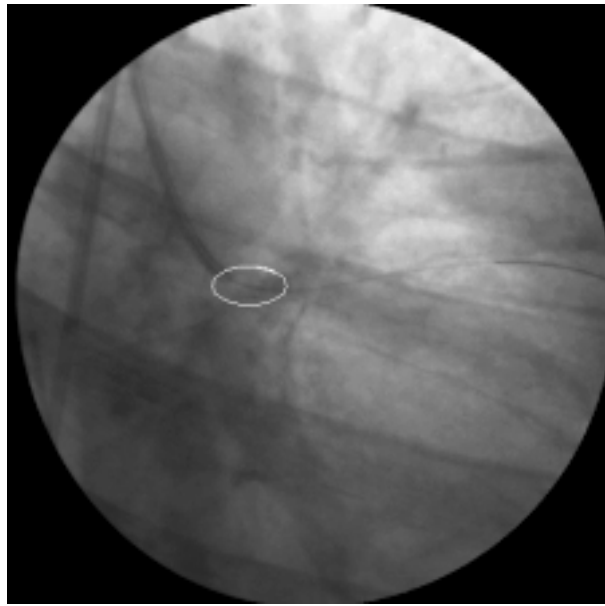


FIG. 3.11 – Image de référence pour la validation des résultats du filtrage adapté. Le stent est entouré artificiellement pour mieux le repérer sur l'image.

l'hypothèse de réponse maximale des pixels appartenant aux bords du stent, ces derniers se localiseront dans les zones de fortes valeurs de l'histogramme de l'image filtrée. L'étape suivante sera celle de la sélection de ces pixels. Nous devons donc procéder à un seuillage des images et choisir un critère de sélection du seuil.

Seuillage adaptatif

A ce stade, nous disposons des huit histogrammes correspondant aux huit images précédemment définies. Nous ne les normalisons pas pour en conserver toute la dynamique. Par hypothèse, la projection des bords du stent est représentée par des pixels possédant une forte réponse au filtre défini et orienté dans sa direction. La seconde hypothèse est celle de l'uniformité des réponses des pixels appartenant à la projection d'un bord de stent. C'est en partant de ces hypothèses que nous avons défini une procédure de seuillage adaptative afin d'extraire et d'isoler les projections de bord de stent des éventuelles réponses parasites. Notre objectif est de rechercher, parmi les plus fortes réponses, les pixels pouvant être appariés avec un minimum d'autres pixels présents dans la même image, selon le principe explicité section 3.3.3. Le critère de sélection du seuil ne sera donc pas le nombre brut de pixels restant après seuillage, mais le nombre de pixels pouvant être appariés. On peut associer à la valeur de la réponse une variable s , et n sera le nombre de pixels appariables dans l'image. De manière algorithmique, cela se traduit par la procédure suivante :

Soit s_0 un seuil égal à la plus forte valeur présente dans les histogrammes. Soit n_0 le nombre de pixels *appariables* dont la valeur est au dessus de ce seuil. Si n_0 n'est pas supé-

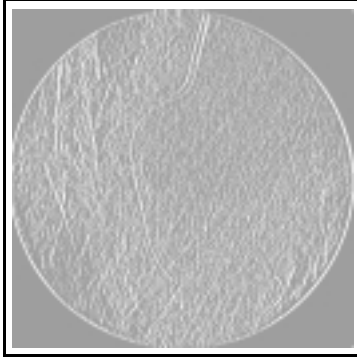


FIG. 3.12 – Filtrage dans la direction verticale, qui est ici celle du stent.

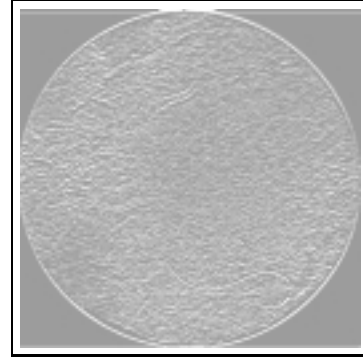


FIG. 3.13 – Filtrage dans la direction horizontale, orthogonale à celle du stent.

rieur à un seuil S , alors s_0 est diminué. On itère le processus jusqu'à trouver une valeur n_0 de pixels appariables supérieure à S . La recherche de tels points se fait sur les huit images simultanément.

Des exemples de résultats de cette procédure sont présentés en Figure 3.14 et Figure 3.15. Dans l'image de gauche, le nombre de pixels *appariables* est nul, dans l'image de droite il est beaucoup trop important. Le choix du paramètre S est crucial pour déterminer le degré de pertinence des réponses, sa robustesse permet cependant de le fixer après un jeu d'expérimentations. La variation de S influencera le rapport fausses alarmes / non détection. Par expérience ce seuil a été fixé à 120 pour une image $512 * 512$.



FIG. 3.14 – Seuillage faible : trop de pixels répondent au critère d'appartenance d'un pixel à un bord de stent.

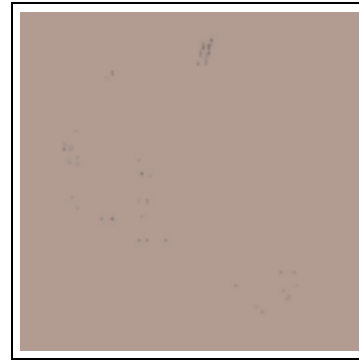


FIG. 3.15 – Seuillage correct : il persiste un nombre suffisant de pixels répondant au critère d'appartenance d'un pixel à un bord de stent.

3.3.5 Critères de comparaison des deux algorithmes et résultats

Dans ce paragraphe, nous exposons dans un premier temps les critères choisis afin de comparer les divers algorithmes, puis nous présentons les résultats associés. A notre disposition, nous avons un jeu d'une centaine de séquences d'images rayons X acquises avec un matériel General Electric (type LC+). Chaque séquence comporte en moyenne une trentaine d'images. L'objectif est de localiser la zone de présence de la projection du stent. Cependant, et comme nous l'avons indiqué dans la section 3.2.2, la qualité des images peut aller du stent nettement contrasté à un stent à peine visible. Nous avons scindé en deux notre base de données, en prenant pour paramètre discriminant la *netteté visuelle* des stents dans les images, autrement dit le contraste du stent. La notion de netteté dans les images médicales étant souvent *opérateur dépendant*, nous avons opté pour une partition subjective de la base de données, non formalisée mathématiquement, classifiée par un praticien entraîné. Ces deux catégories sont les suivantes :

- *les images sont de bonne et moyenne qualité* : le stent est correctement détecté après quelques secondes d'observation ;
- *les images sont de mauvaise qualité* : un observateur doit se concentrer et explorer attentivement l'image pour localiser le stent.

Les tableaux ci-dessous représentent, pour un échantillon d'une quarantaine d'images par catégorie, le taux de détection de la zone de présence de la projection du stent. Les paramètres de l'algorithme ont été déterminés afin d'obtenir une base de détection de 100% sur des images de bonne et moyenne qualité.

La comparaison des deux algorithmes a été faite à la fois sur le taux de non détection des stents sur des images de qualité inférieure et sur le taux de fausses alarmes présentes à la fin de l'algorithme. Une zone de détection correspond à une surface d'environ 50×50 pixels pour une image 512×512 . Le seuil déterminant le nombre de zones de fausses détections a été calculé de manière à minimiser ce dernier.

Ce critère de comparaison permet de retenir la méthode qui minimise le nombre de fausses alarmes et qui donne le meilleur taux de détection correcte sur les images de mauvaise qualité .

Le temps de calcul pour chaque algorithme est d'une vingtaine de secondes pour une image (512×512) sur un matériel type PC-PIII 800 MHz. Ce temps est relatif à la détection, sur une image complète, de l'ensemble des zones où un stent se projette potentiellement. Pour la première catégorie d'images, les deux types d'algorithmes ont une performance quasi similaire. De plus, lorsque l'on regarde en détail les origines des erreurs (fausses alarmes et stent non détecté) pour les deux méthodes, les zones détectées sont très souvent les mêmes. Ainsi, une coopération semble être inutile pour améliorer la qualité de la détection.

Pour le second type d'images, celles de mauvaises qualités, la seconde méthode est moins performante. En effet, si le contraste du stent est moindre, la solution consistant à détecter le bord du stent pixel par pixel semble plus robuste.

Nous présentons maintenant les résultats obtenus sur trois séquences de qualités diffè-

Types d'images	Taux de détection correcte	zones de fausses détections hors ensemble cathéter+guide
images de bonne et moyenne qualité	100 %	4
images de mauvaise qualité	80%	5

TAB. 3.3 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus par la méthode fondée sur les niveaux de gris.

Types d'images	Taux de détection correcte	zones de fausses détections hors ensemble cathéter+guide
images de bonne et moyenne qualité	100 %	3
images de mauvaise qualité	60%	4

TAB. 3.4 – Tableau récapitulatif des résultats obtenus par la méthode fondée sur un filtrage adapté.

rentes. En haut, sont présentées les images originales dans lesquelles les stents ont été encadrés. Les figures du centre représentent les résultats de la première méthode ; les zones de fausses détections hors cathéter et guide ont, elles aussi, été encadrées. Enfin les figures du bas représentent les résultats de la seconde méthode.

La Figure 3.19 présente l'interface du logiciel que nous avons développé afin d'inclure les algorithmes précédemment mentionnés. Nous présentons un nouvel exemple de résultat où sur une même image sont présents un stent réel et un stent synthétisé et projeté sur l'image. Les zones sont automatiquement calculées et affichées sur l'image de droite. Ce résultat utilise l'algorithme explicité section 3.3.4.

Une fois la localisation effectuée, il reste à détecter l'ensemble des pixels appartenant à la projection du stent. Dans la section suivante, nous abordons cette détection en utilisant des méthodes de géométrie différentielle floue. Nous utilisons aussi des résultats issus du chapitre concernant le filtrage optimal.

3.4 Détection des mailles du stent par mesure floue de la structure locale

3.4.1 Intérêt de la caractérisation de la structure locale

Nous venons de voir les diverses techniques existantes de détection de plis ainsi qu'une nouvelle taxonomie permettant de les regrouper. Dans notre problématique d'images bas contraste, nous ne pouvons en employer qu'un nombre limité. Le choix de ces quelques méthodes et des résultats associés a été évoqué précédemment. Le principal problème inhérent à ce genre de méthodes est le caractère trop *binnaire* des résultats. Les filtres proposés possèdent une structure fixe. C'est pour pallier les défauts de ces méthodes que nous nous sommes orientés vers l'utilisation d'un descripteur pour quantifier et qualifier les structures locales. Le premier descripteur a été introduit par Koenderink. Dans [83], il fournit un descripteur de forme qui associe les valeurs propres de la matrice Hessienne avec la géométrie locale de l'image, (Figure 3.20). Ce descripteur $\mathbf{s}_p$ est défini de la manière suivante :

$$\mathbf{s}_p = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \right), \quad (3.7)$$

où λ_1 et λ_2 sont les valeurs propres de la matrice Hessienne au point $\mathbf{p}$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2$. Ce descripteur varie entre -1 et 1. L'équation précédente peut être ré-écrite comme :

$$\mathbf{s}_p = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right)}{\sqrt{\left(\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \right) \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \right)^2}}. \quad (3.8)$$

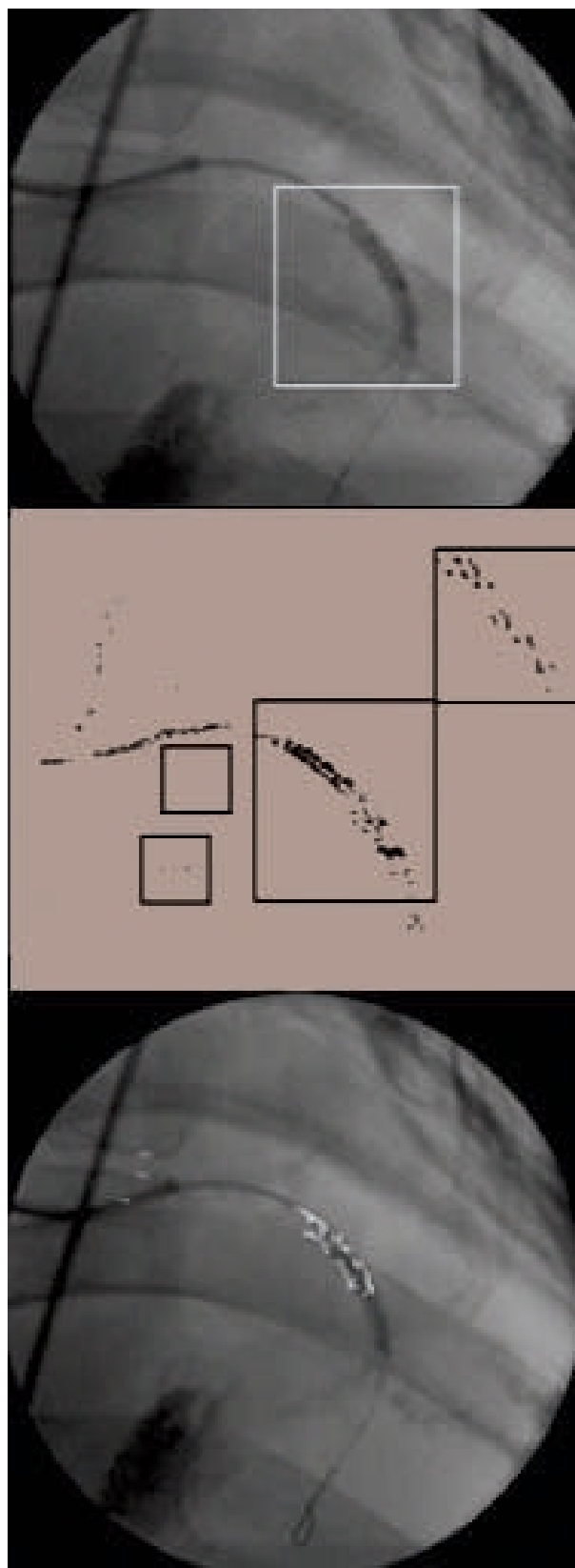


FIG. 3.16 – Résultat sur une image de bonne qualité.

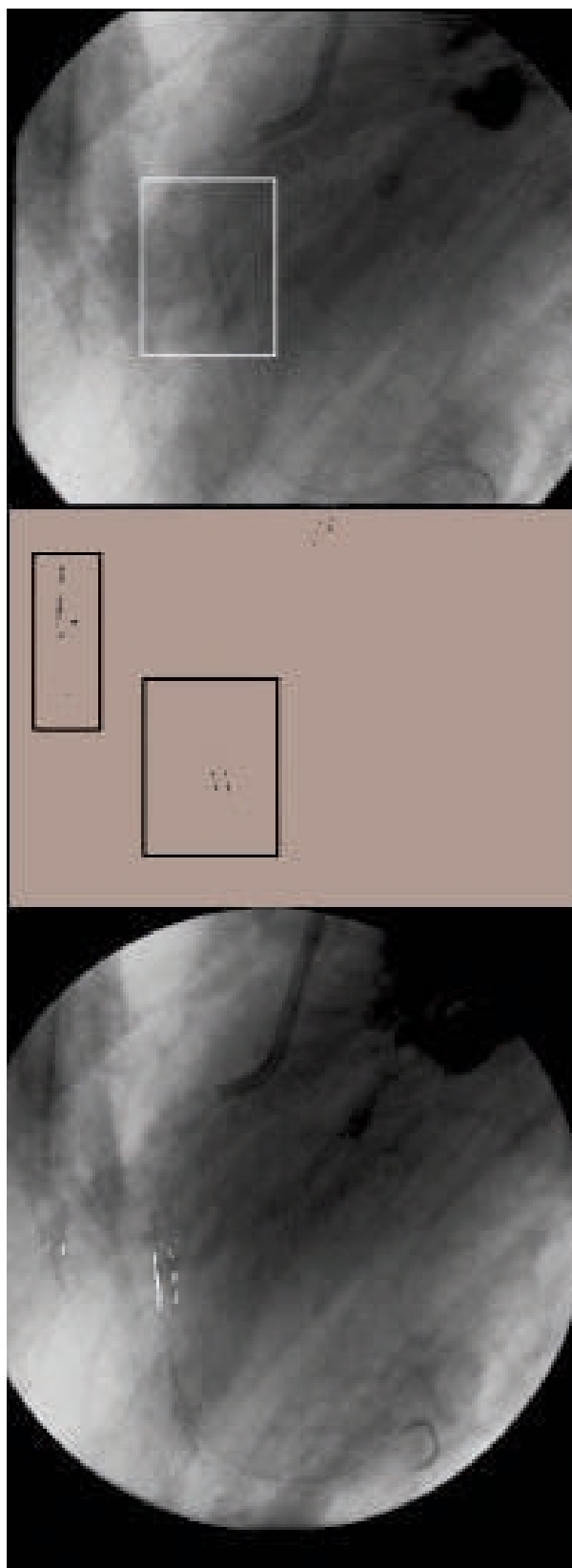


FIG. 3.17 – Résultat sur une image de qualité moyenne.

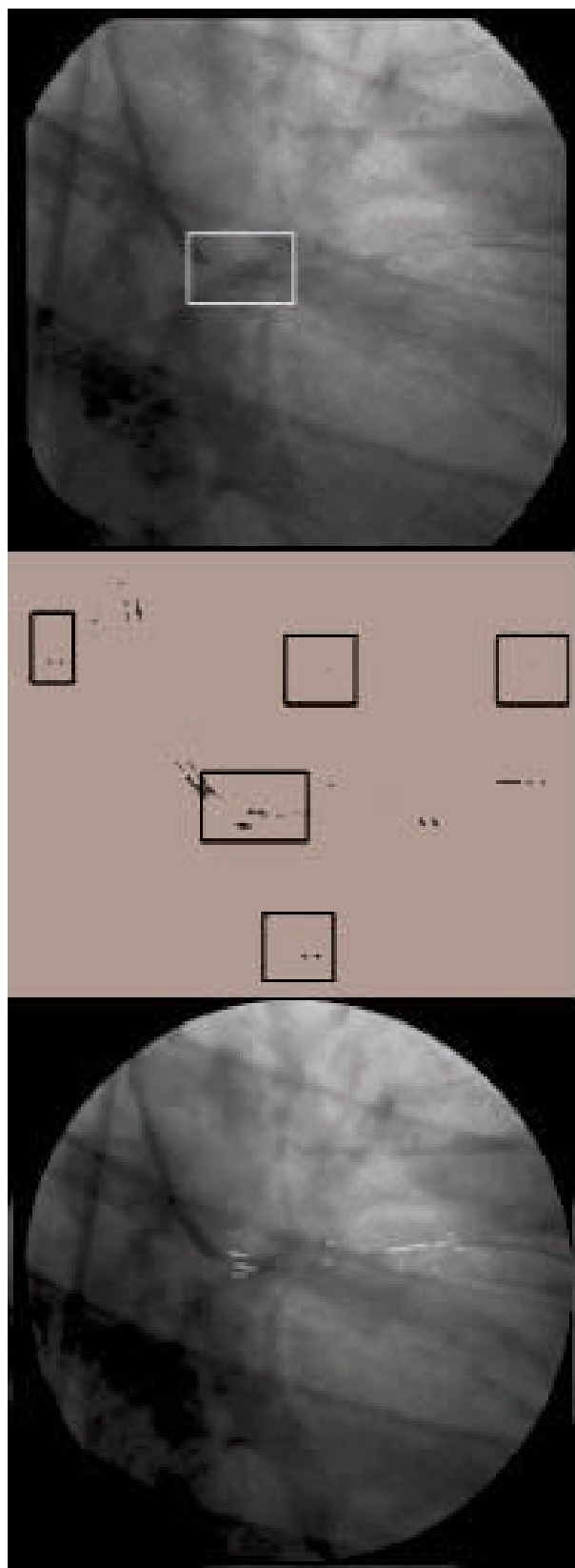


FIG. 3.18 – Résultat sur une image de mauvaise qualité.

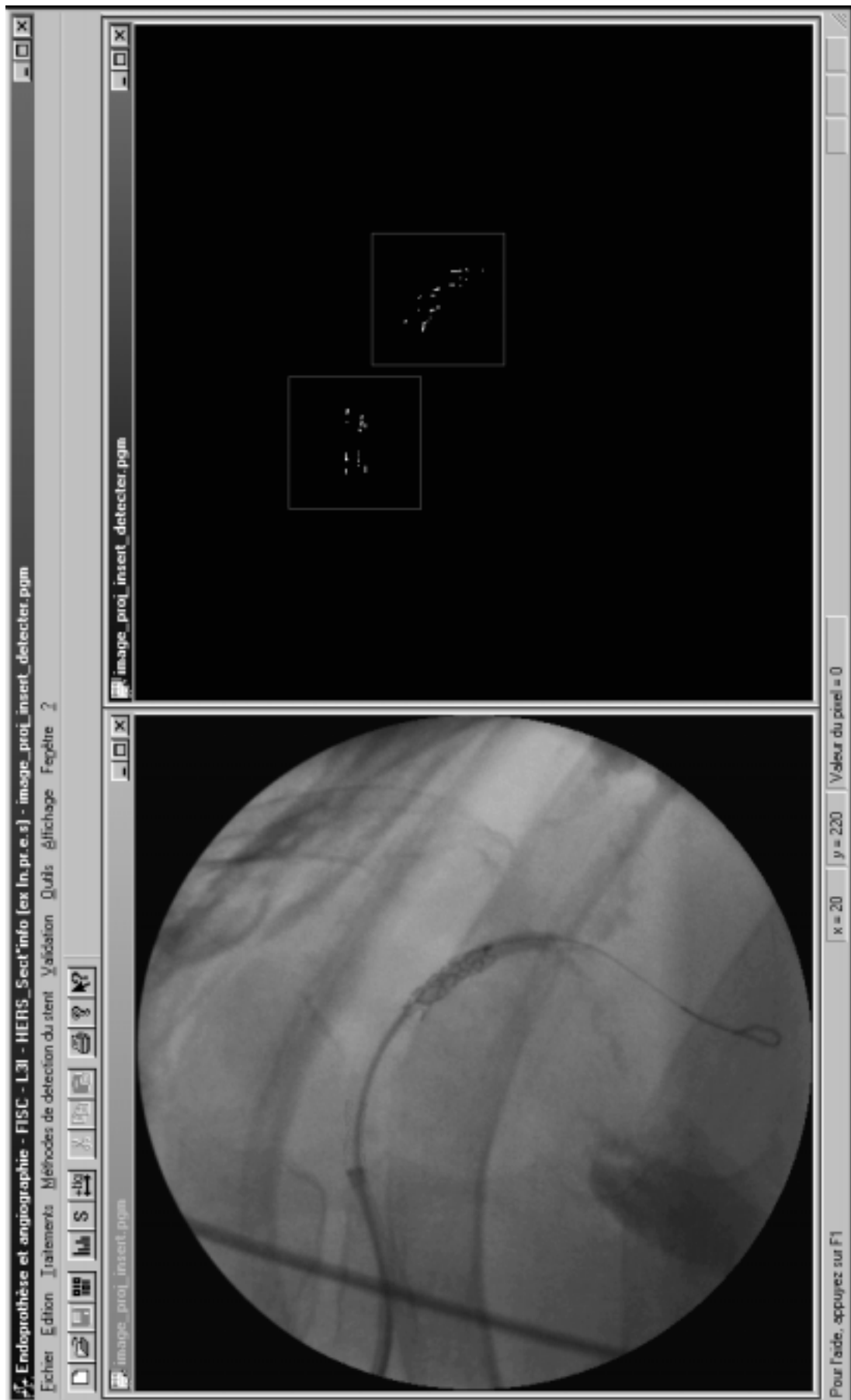


FIG. 3.19 – Interface du logiciel développé dans le but d'inclure les méthodes de localisation de stents.

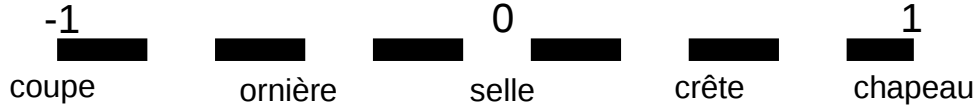


FIG. 3.20 – Équivalence entre descripteur de forme s et la forme de la surface autour $\mathbf{p}$.

λ_2	λ_1	Forme locale
N	N	bruitée, pas d'orientation privilégiée
L	H-	structure tubulaire claire
L	H+	structure tubulaire sombre
H-	H-	structure circulaire clair
H+	H+	structure circulaire sombre

TAB. 3.5 – Forme possible en 2D, en fonction des valeurs propres de la matrice Hessienne (H=haute, L=faible, N=bruitée habituellement petite, +/- indique le signe de la valeur propre). Les valeurs propres sont ordonnées de telle sorte que $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$.

3.4.2 Méthode de détection multi-locale floue

Néanmoins, deux limitations apparaissent dans l'utilisation de ce descripteur. La première est qu'il ne prend pas en compte les valeurs quantitatives des valeurs propres mais un rapport entre ces valeurs. Comme seconde limite, on notera son caractère trop local. Toutes ces raisons nous ont conduits à développer une méthode multi-locale floue tenant compte du voisinage autour de chaque point. Ce voisinage est orienté dans l'espace. Une pliure conserve, en effet, les mêmes propriétés le long de sa ligne de crête. Ainsi, la détection est plus robuste. Dans cette section, nous présentons donc une amélioration du descripteur de structures en introduisant la notion de flou. La définition de notre descripteur flou s'appuie sur les travaux [147] et [46]. Ceux-ci ont défini des critères relatifs aux valeurs qualitatives des valeurs propres. Le tableau 3.5 présente la partition introduite par le descripteur défini par Frangi dans [46].

Cette partition peut se traduire dans l'espace des valeurs propres par une partition en sous-ensembles flous dont chacun représente une zone d'appartenance à la forme locale. Nous avons construit cette décomposition. La difficulté revenait à définir les frontières de ces zones. Elles le furent par expérimentation sur une centaine d'images. Le problème de cette méthode vient du fait de l'uniformité des résultats induite par une telle partition. Deux points frontaliers de part et d'autre d'une frontière ont des valeurs différentes, à l'inverse deux points de la même zone mais éloignés en distance, ont la même valeur. Pour pallier à ce phénomène, nous avons construit une partition floue de l'espace des valeurs propres prenant en compte ses caractéristiques (*cf.* Figure 3.21).

Ainsi, chaque point se caractérise par un vecteur à 2 dimensions $\mathbf{x}_{\mathbf{p}} = (\mu_{\lambda_1}, \mu_{\lambda_2})$, dont chaque composante représente un degré d'appartenance à une forme, *i.e.* une zone

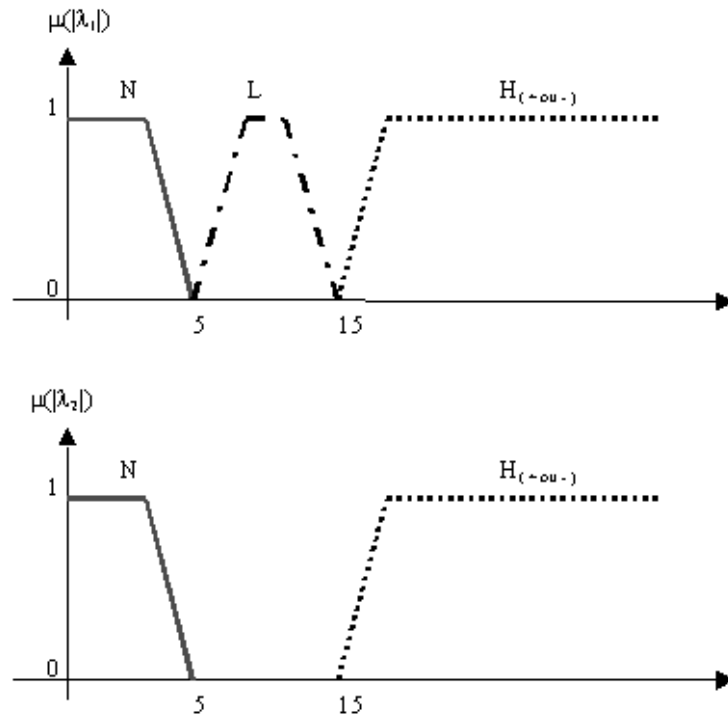


FIG. 3.21 – Fonctions d'appartenance floues relatives au Tableau.3.5 (H=haute, L=faible, N=bruitée habituellement petite, +/- indique le signe de la valeur propre). En abscisse, on indique les valeurs propres normalisées entre 0 et 100.

de l'espace (λ_1, λ_2) . Ces fonctions sont là encore déterminées par l'expérience sur une centaine d'images. Mais chaque point possède deux coordonnées dans cet espace, il a fallu se demander comment caractériser le degré d'appartenance d'un point à une zone. De plusieurs solutions nous avons décidé d'utiliser la plus simple, à savoir une T-norme. Pour les structures tubulaires sombres, le degré d'appartenance f est calculé comme suit $f = \min(\mu_{\lambda_1}(L_1), \mu_{\lambda_2}(L_2))$. Rappelons que nous nous sommes intéressés à une structure tubulaire sombre, cette structure conserve évidemment les mêmes propriétés sur une certaine longueur. Nous avons statué que la probabilité de retrouver les mêmes propriétés géométriques décroît en fonction de l'éloignement du point considéré. Pour une structure tubulaire, elle décroît plus rapidement perpendiculairement à la direction que le long de cette direction. A partir de ces considérations, nous pouvons définir la mesure multi-locale. En calculant l'orientation privilégiée de la forme tubulaire grâce aux vecteurs propres V_1 and V_2 associés respectivement à λ_1 and λ_2 , nous déduisons l'orientation θ comme suit :

$$\theta = \arctan\left(\frac{V_2[y]}{V_2[x]}\right). \quad (3.9)$$

où $V_2[y]$ and $V_2[x]$, représente les coordonnées y and x de V_2 .

Nous regardons ensuite les valeurs du descripteur le long de cette direction. Là encore, nous employons une mesure floue pour évaluer l'appartenance de la forme locale à la structure d'intérêt. Un point proche et le long de l'orientation éventuelle de la ligne de crête aura plus de poids qu'un autre plus éloigné. Ainsi un point aura d'autant plus d'importance et sera d'autant plus porteur d'information s'il est près du point considéré et orienté comme lui.

Définition de voisinage

Pour définir le voisinage, nous nous référons à la section 2.5.4. En effet, celle-ci nous permet de déterminer le voisinage selon un critère d'optimalité de compromis incertitude - imprécision. Le voisinage optimal pour une telle opération est donc le voisinage gaussien. Mais la question qui apparaît est comment définir l'échelle d'analyse, *i.e.* quel écart-type, doit on utiliser ? La solution que nous proposons d'adopter se fonde sur la définition d'un voisinage adaptatif orienté.

L'orientation est donnée par l'équation 3.9. Le voisinage adaptatif est directement relié à la forme recherchée par les écart-types de la gaussienne 2D. Nous nommerons ces écart-types σ_θ et $\sigma_{\theta^\perp}$ suivant respectivement la direction θ et $\theta^\perp$. Considérons une surface d'intérêt S , soit s son degré d'appartenance à la forme recherchée (entre 0 et 1). Le voisinage sera défini comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_\theta * f. \\ \sigma_y &= \sigma_{\theta^\perp} * f. \\ v[x][y] &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \left(\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right) \right) Rot_\theta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

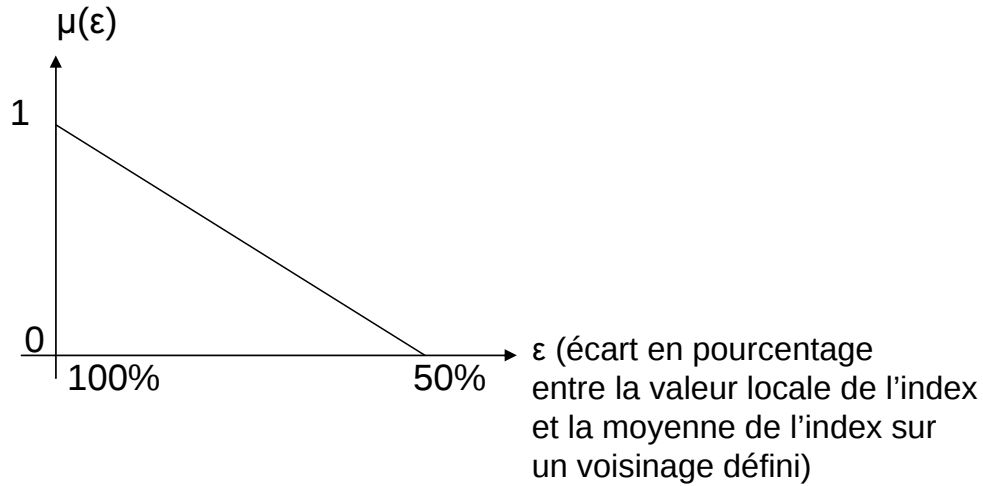


FIG. 3.22 – Fonctions utilisées pour définir le degré d'appartenance à la forme considérée. L'abscisse est calculée par $(f - \langle f \rangle) / f$

où $v[x][y]$ est le degré d'appartenance multi-locale et Rot_θ la matrice de rotation d'angle θ . Une fois ce voisinage défini, nous calculons la convolution entre ce voisinage et l'image au point considéré. Ensuite il suffit de seuiller l'image pour ne conserver que certaines pliures. Ce seuil est fixé d'après l'expert, en fonction du taux de fausses détections qu'il s'autorise. Cette procédure ressemble à celle proposée dans [117], à la différence que le noyau n'est pas proportionnel à la valeur du gradient mais à la forme de géométrie de l'image au point considéré et à la présence ou non d'un pixel appartenant à la projection du stent.

Une fois ce voisinage défini, nous calculons la moyenne des valeurs du descripteur pondéré par une valeur proportionnelle à leur distance avec le point considéré. Pour ce faire, nous employons là encore une mesure floue afin de caractériser le point considéré. La fonction floue est celle présentée sur la Figure.3.22. Cette fonction est définie par la différence entre la moyenne de descripteur et la valeur locale sur un voisinage. La section suivante traite de la définition du voisinage employé, représentant un paramètre critique de l'algorithme.

Dans cette section, nous avons utilisé deux informations déduites du chapitre 2 de manière à choisir les voisinages utilisés pour l'approche multi-locales :

- la forme du voisinage : servant à déterminer le noyau de convolution appliqué à l'image ;
- l'échelle de ce voisinage : nous avons en effet vu que l'échelle est une notion clé en traitement d'images, et qu'en se plaçant à la bonne échelle, elle permet d'extraire une meilleure qualité et quantité d'information.

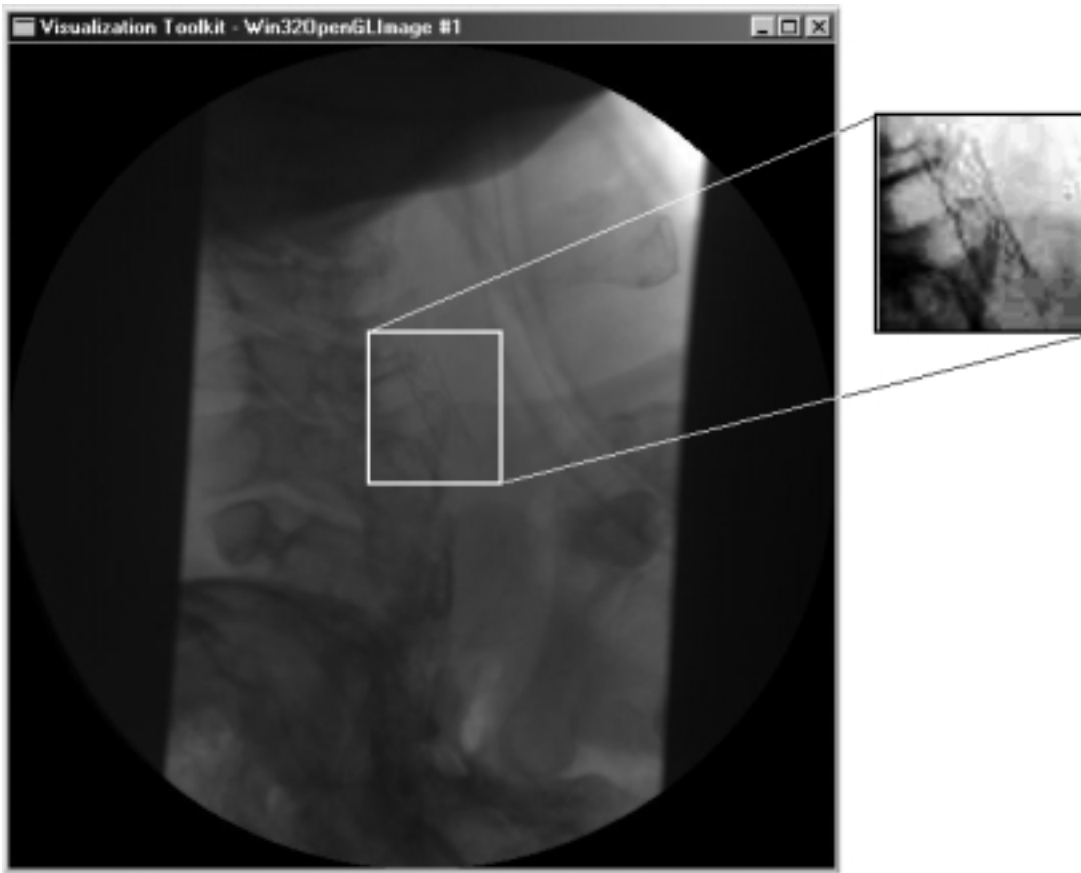


FIG. 3.23 – Image RX de carotide stentée. En image médaillon, la zone de présence du stent après rehaussement de contraste.

3.4.3 Résultats

Les résultats que nous présentons ici sont l'application de l'algorithme précédemment mentionné à des images de carotide stentée. Ces images présentent l'avantage de permettre la vision des struts (*i.e.* les mailles du stent).

Dans la plupart des cas présentés dans cette section, et afin de mieux visualiser les résultats, nous colorons en blanc les pixels détectés, mais cependant leur vraie valeur s'étalent sur une plage de 0 à 255.

Nous avons utilisé l'implémentation des filtres gaussiennes et dérivées présentées par Deriche dans [30].

La Figure 3.23 représente l'image originale. Les résultats bruts de détection de crêtes fines (*i.e.* quelques pixels de large), sont présentés Figure 3.24.

Les résultats sont directement reliés au choix des seuils des fonctions floues. Dans le cas précédent, ils ont été choisis de manière à sélectionner le maximum de points appartenant à la projection du stent. Dans le cas de la Figure 3.25, la plage des seuils a été réduite. Ainsi le résultat montre que seules les lignes de crêtes les plus marquées, *i.e.* les plus sûres, sont détectées. Enfin, en ce qui concerne le paramètre de la taille du voisinage, nous avons

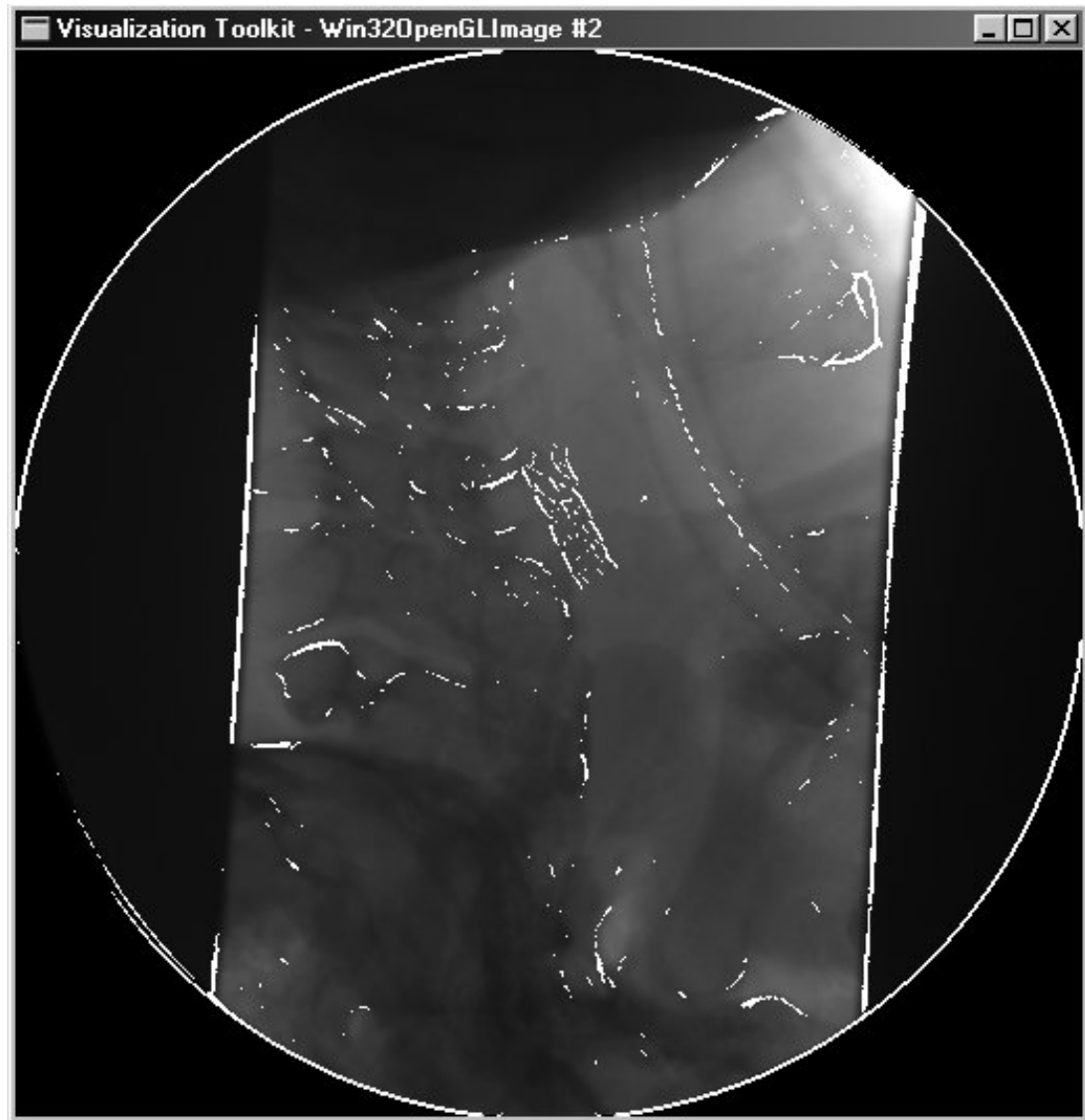


FIG. 3.24 – Résultat de l'application de détection des lignes de crêtes.



FIG. 3.25 – Résultat de l'application de détection des lignes de crêtes en réduisant la plage de seuils présentée Figure 3.21.

préférée choisir un voisinage réduit afin de détecter les struts de manière optimale, en effet, il arrive que les struts ne mesurent sur l'image que quelques pixels de long. Enfin, nous précisons que le schéma de discrétisation pour le calcul du hessien local est indiqué dans l'Annexe B.

Cet algorithme est appliqué sur l'ensemble de l'image, rappelons que dans un cadre d'utilisation normale, cet algorithme ne serait appliqué que dans une ou plusieurs zones préalablement définies.

Ainsi la détermination du temps de calcul dépend exclusivement du nombre de zones à déterminer. Il est d'environ cinq secondes pour une image (512×512) sur un matériel type PC-PIII 800 MHz. Le temps de calcul sur une image préalablement traitée comme celle présentée Figure.3.26 est de moins d'une seconde.

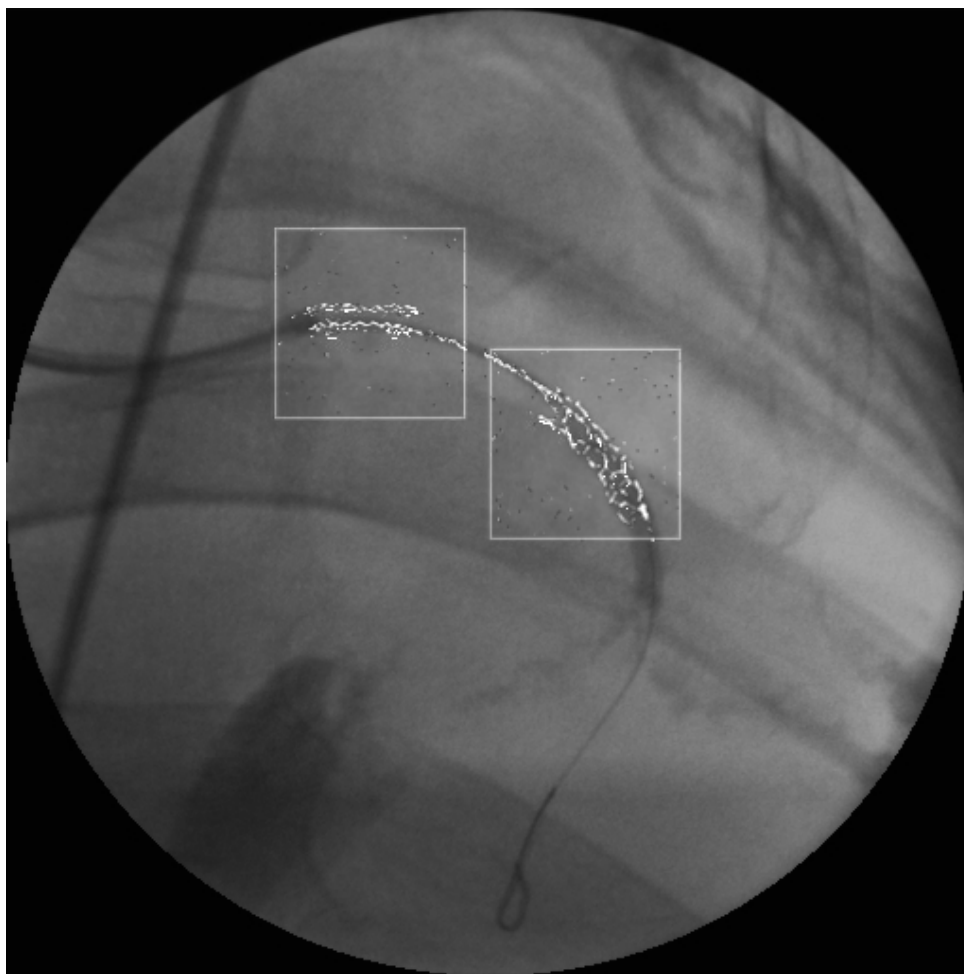


FIG. 3.26 – Résultat de l'application de détection des lignes de crêtes sur une image contenant un stent réel et un stent synthétisé.

3.5 Conclusion et contributions

Dans ce chapitre, nous avons principalement mis en avant deux processus de traitement d'images. Le premier consiste en la localisation du stent, le second en la détection des pixels appartenant à sa projection.

Dans un premier temps, nous avons comparé deux méthodes dites classiques en traitement d'images, l'une utilisant les niveaux de gris et l'autre un filtrage adapté. La première méthode, que nous avons utilisée, se focalise sur certains pixels définis en fonction de leur niveaux de gris par rapport au voisinage, calcule la primitive de la structure géométrique locale, en l'occurrence une ligne, puis conclut grâce à la présence d'une primitive supérieure, deux lignes parallèles, *i.e.* un stent.

La seconde méthode conduit directement à la détection d'une ligne pour conclure à la présence d'un stent. La seconde méthode paraît plus naturelle car elle utilise comme primitive géométrique du stent la structure géométrique locale d'une ligne.

Cependant si cette primitive est bruitée ou possède un faible contraste, nous avons vu qu'il est plus judicieux de considérer, comme pour la première méthode, une sous-primitive de la ligne, à savoir le pixel.

Dans un second temps, nous nous sommes focalisés sur la détection de pixels appartenant à la projection du stent. Nous avons développé un descripteur flou de mesure de la forme géométrique locale basé sur les valeurs propres de la matrice hessienne. Ces dernières donnent des informations quant à la déformation locale de l'image. Nous avons utilisé ces critères en les rendant plus robustes par une méthode utilisant le groupement d'informations provenant d'un voisinage optimal en terme d'incertitude - imprécision, *i.e.* défini à partir d'une gaussienne.

Ce descripteur flou nécessite l'utilisation de seuils, qui une fois choisie, ne nécessitent plus d'ajustement. Ces seuils sont adaptés à la forme locale que l'on souhaite extraire. Sur des images réelles et synthétiques, nous avons montré l'efficacité d'un tel descripteur tant au point de vue de la pertinence des résultats que de la rapidité du temps de calcul.

Cette démarche en deux étapes possède les avantages suivants :

- adaptation de l'algorithme à la tâche spécifique de reconnaissance des stents par des considérations pragmatiques afin de réduire le nombre de fausses alarmes et d'éviter toute non détection ;
- utilisation d'informations sur un voisinage optimal autour d'un pixel ;
- prise de décision par règle floue, permettant de conserver le caractère incertain du pixel quant à son appartenance à la projection du stent ;
- gain de temps en n'effectuant qu'un travail local de détection des struts ;

En ce qui concerne notre approche théorique, nous avons proposé :

- une nouvelle taxonomie des méthodes permettant la détection des lignes de crêtes ;
- un nouveau descripteur multi-local flou pour la caractérisation des formes locales ;

L'ensemble de ces algorithmes a été implanté dans le logiciel "Localisation & Détection de Stents" présenté en Annexe C développé au L3i pour General Electric.

Nous rappelons enfin que ce chapitre repose sur une utilisation directe d'informations contextuelles. Dans les deux premiers chapitres, la volonté de ne pas utiliser d'information initiale, nous a permis d'élaborer un cadre théorique, par la suite l'utilisation d'information se fait par l'introduction d'un quadri-potentiel. Ce chapitre se démarque donc par une volonté d'utilisation des données du problème conduisant à des approches plus classiques et à la nécessité d'algorithmes pragmatiques.

Enfin, nous pouvons noter que les traitements adoptés s'apparentent à du filtrage anisotrope, permettant d'envisager des perspectives de développement de quadri-potentiel adaptés à la détection de stent.

Dans le chapitre suivant, nous montrons comment l'utilisation du modèle défini section 2.4 trouve son utilité et sa pertinence.

Chapitre 4

Reconstruction de stents par approches variationnelles couplées

Soyons optimistes : la médecine a découvert beaucoup plus de remèdes qu'il n'y a de maux.

Alfred Capus.

4.1 Introduction

Ce chapitre complète le précédent, dans le sens où il s'attache à reconstruire le stent. Il présente une approche variationnelle permettant d'effectuer la reconstruction du stent. Cette approche utilise les résultats du chapitre 2.4.

Dans un premier temps, nous ferons un rapide état de l'art sur les méthodes existantes en reconstruction tomographique. Nous nous attacherons ensuite à mettre en avant les méthodes de reconstruction variationnelles et plus particulièrement à travers deux exemples précis.

Enfin, nous proposerons une nouvelle approche pour la reconstruction d'objet sous contrainte. Nous présentons enfin des résultats obtenus sur des stents synthétiques, mais avec des images réelles.

4.2 Reconstruction de stent par collaboration analyse - synthèse

Le scanner, inventé en 1972 par G.N. Hounsfield, a tout simplement révolutionné le diagnostic médical. Cette invention a non seulement permis à Hounsfield d'obtenir le prix Nobel de médecine en 1979, mais aussi de rapporter des millions de dollars à E.M.I. et aux autres fabricants de matériel ayant breveté le principe du scanner tomographique. L'invention d'Hounsfield a montré qu'il était désormais réalisable d'obtenir une reconstruction précise d'une *tranche* du corps du patient, à partir d'un grand nombre de projections. Radon avait lui démontré cela de manière théorique dès 1917 [132].

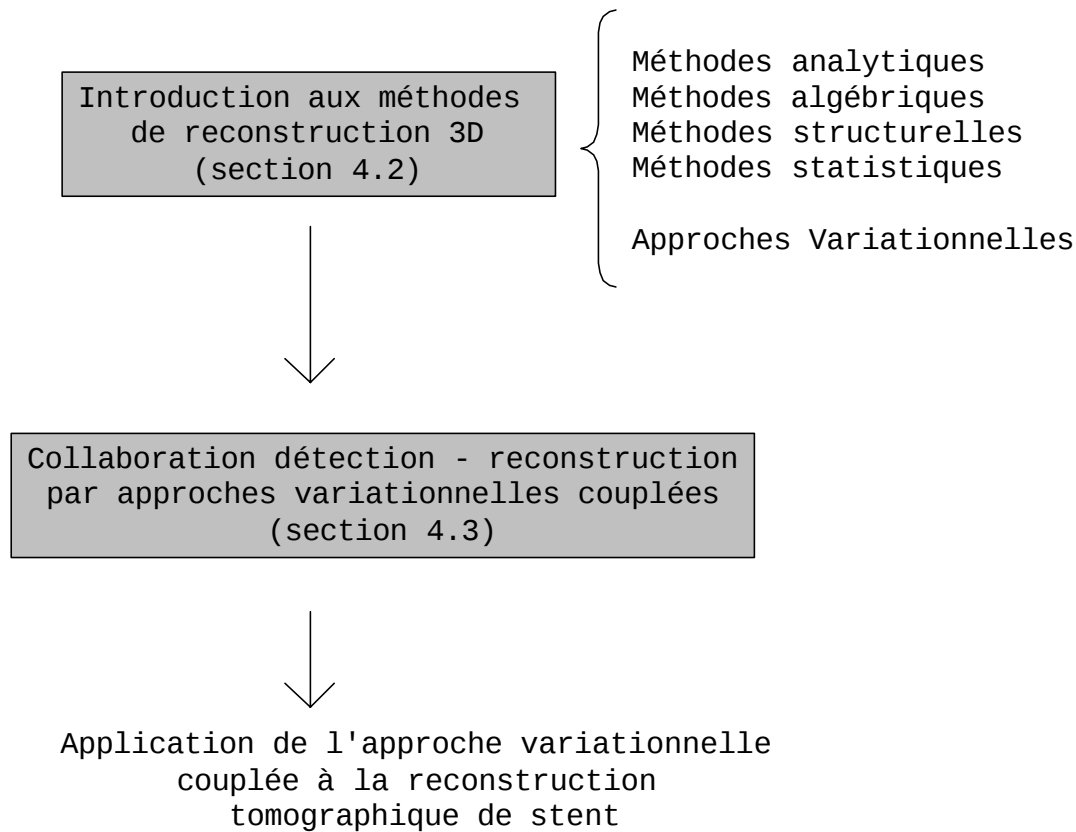


FIG. 4.1 – Organisation du chapitre *Reconstruction de stents par approches variationnelles couplées* et contributions.

Ainsi, depuis l'apparition des ordinateurs dans les années 70 et l'augmentation de la puissance de calcul de ces derniers, les méthodes de reconstruction se sont développées et répandues dans de nombreuses applications tant médicales qu'industrielles.

Mais deux techniques principales ont émergé il y a plus de vingt ans et sont actuellement encore les deux plus utilisées.

Les premières utilisent le théorème de coupe-projection, permettant d'obtenir les méthodes directes par rétro-projections filtrées [43]. Les secondes utilisent une approche itérative en résolvant un système d'équations linéaires, la méthode la plus utilisée de cette catégorie étant A.R.T. [60].

Cependant, la multiplicité des applications du scanner a favorisé à l'apparition de nombreux algorithmes de reconstruction. C'est pour cela, entre autres, que la littérature relative à la reconstruction d'images tomographiques est à la fois très abondante et très redondante. Nous proposons donc dans la section suivante un état de l'art des techniques de reconstruction regroupé en quatre classes. La section 4.2.2 présente elle une nouvelle classe de méthodes introduites récemment et reposant sur des approches variationnelles. Une fois présentées ces deux approches, nous mettons en évidence dans la section 4.2.3 l'écriture variationnelle d'un problème de reconstruction sous contrainte.

4.2.1 Introduction aux méthodes de reconstruction 3D

Les premières méthodes de reconstruction que nous abordons sont les méthodes analytiques, nous aborderons ensuite les méthodes algébriques. Ces deux classes de méthodes sont chacune à l'origine d'une méthode de reconstruction de référence. La fin de cette section sera consacrée aux méthodes structurales et statistiques. Nous montrerons les limites et les avantages de chacune de ces classes d'approches.

Les méthodes analytiques

Ces méthodes sont fondées sur une modélisation continue du problème direct exprimée en deux dimensions par l'équation suivante :

$$p_\theta(u) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - u) dx dy \quad (4.1)$$

La Figure 4.2 illustre cette l'équation¹⁰.

La droite en pointillé spécifiée par θ et u sur laquelle s'effectue la projection s'appelle le *rayon de projection*, et permet de définir la transformée de Radon d'une image.

Définition 4.2.1 *L'acquisition fournit $\{p_\theta(u)/\theta \in [0, \pi[\text{ et } u \in \mathbb{R}\}$ qui est exactement la transformée de Radon de l'image $f(x, y)$. Celle-ci se définit par l'application $\mathcal{R}f(x, y)$ telle que*

$$\mathcal{R}f(u, \theta) = p_\theta(u) = \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \theta - u \sin \theta, t \sin \theta + u \cos \theta) dt \quad (4.2)$$

où θ est le vecteur directeur de projection. La problématique de la reconstruction tomographique est l'identification de $f(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, à partir de $p_\theta(u)$, i.e. l'inversion de la transformée de Radon. Ce problème est mal posé.

Soit le théorème coupe-projection suivant :

Théorème 10 *Le théorème de coupe-projection établit une relation entre la transformée de Fourier bidimensionnelle $\mathcal{F}_2$ de la fonction $f(x, y)$ et la transformée de Fourier de sa transformée de Radon par rapport à u , à θ fixé :*

$$\mathcal{F}_\theta \mathcal{R}f(u, \theta) = \mathcal{F}_2 f(u \cos \theta, u \sin \theta) \quad (4.3)$$

qui peut encore s'écrire :

$$\mathcal{F}_\theta p_\theta(u) = \mathcal{F}_2 f(u \cos \theta, u \sin \theta) \quad (4.4)$$

La solution des méthodes analytiques est généralement recherchée sous la forme d'une fonction continue d'un espace de Hilbert, sur laquelle on est conduit à faire des hypothèses supplémentaires. Étant donné ce principe, la prise en compte de la géométrie d'acquisition est indispensable. Actuellement, on utilise de plus en plus une géométrie d'acquisition 3D, voire continue sur une trajectoire hélicoïdale. La qualité de reconstruction dépend du nombre de projections à disposition, ainsi que de la connaissance de la trajectoire

¹⁰Dans le cas d'une acquisition 3D conique, l'équation 4.1 devient plus complexe [51].

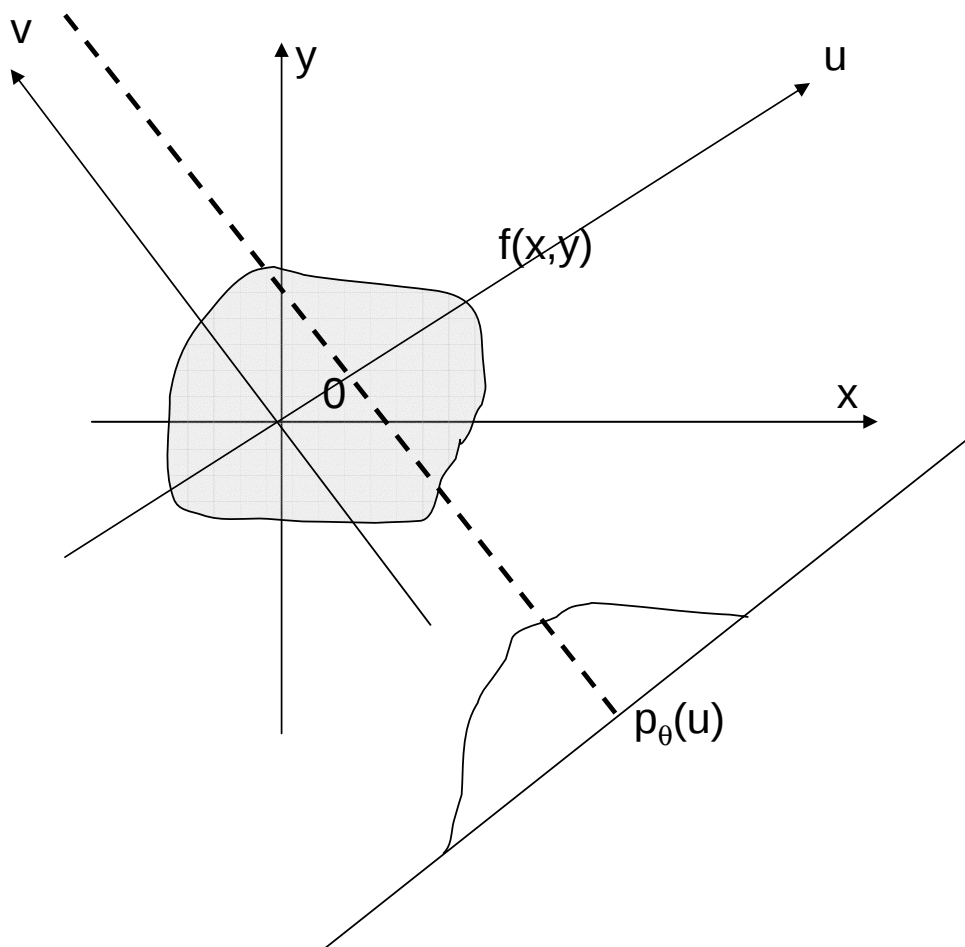


FIG. 4.2 – Définition d'une projection en géométrie parallèle 2D.

d'acquisition. Une bonne résolution des images acquises est aussi nécessaire. Dans le cas contraire, un grand nombre d'artéfacts apparaissent. Dans des conditions différentes de celles énoncées plus haut, d'autres méthodes se révèlent plus performantes.

Les méthodes algébriques

Les méthodes algébriques prennent en compte le caractère discret des données. Soit p_j ces données écrites sous la forme :

$$p_j = \mathcal{R}f(r, \theta)_j \quad (4.5)$$

où $(r, \theta)_j$ sont respectivement la distance et le vecteur de direction associé à la mesure j . j variant de 0 à m , où m est le nombre total de projections.

Si maintenant on décompose la fonction objet $f(\mathbf{x})$ sur une base finie de carré sommable

$h_i(\mathbf{x})$, on obtient alors :

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i h_i(\mathbf{x}) \quad (4.6)$$

C'est donc en regroupant les équations 4.5 et 4.6 que l'on peut écrire :

$$p_j = \sum_{i=1}^n f_i \mathcal{R}h_i(r, \theta)_j, \text{ j variant de 1 à } m \quad (4.7)$$

L'ensemble de ces relations peut s'écrire de façon matricielle :

$$\mathbf{p} = \mathbf{X}\mathbf{f} \quad (4.8)$$

où $\mathbf{p}$ est le vecteur des m composantes regroupant les mesures, $\mathbf{f}$ est un n -vecteurs des composantes de f_i et $\mathbf{X}$ une matrice $m * n$, dont les coefficients X_{ij} sont égaux à :

$$X_{ij} = \mathcal{R}f h_i(r, \theta)_j \quad (4.9)$$

Notons que les fonctions de bases les plus utilisées sont les fonctions indicatrices : soit sur des pixels carrés (*i.e.* $h_i = 1$ sur le pixel i et 0 ailleurs), soit sur des voxels cubiques en 3D (*cf.* Figure 4.3).

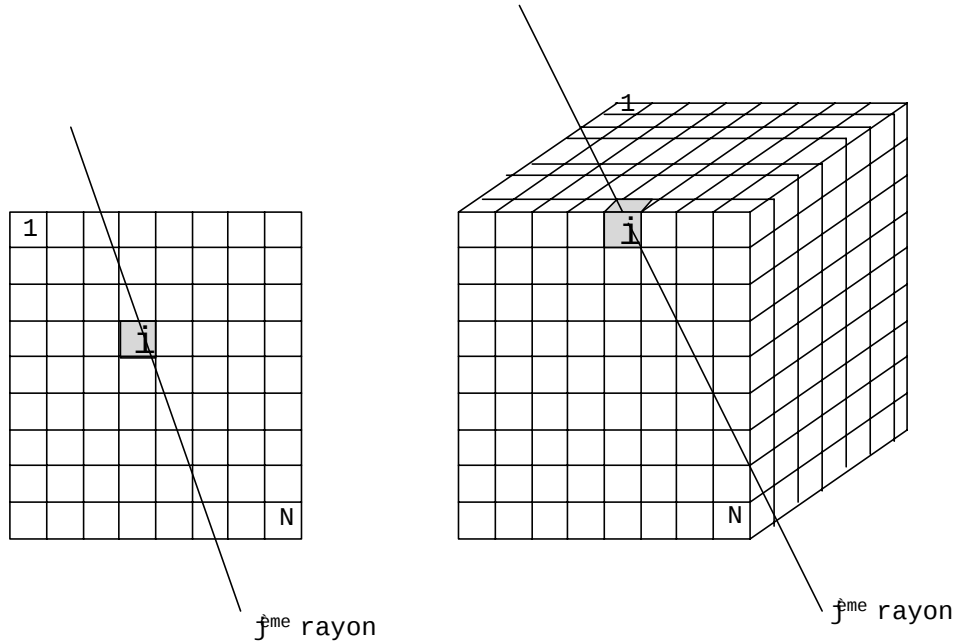


FIG. 4.3 – Discretisation de l'objet en 2D et 3D.

Ainsi la reconstruction se ramène à l'inversion d'un système linéaire énoncé plus haut. Les limites de ce type de méthodes sont d'ordres calculatoires. Par exemple, si on cherche à reconstruire un cube de 512 par 512, le système devient mal conditionné, non consistant à cause du bruit.

Malgré ces difficultés, ces méthodes possèdent de nombreux avantages. Parmi ceux-ci, leur formalisme très général, la prise en compte de phénomènes divers par la modification de l'opérateur $\mathcal{R}$.

La reconstruction, *i.e.* l'inversion du système, peut se faire par des méthodes classiques (inverses généralisées) ou par des méthodes de régularisation pour tenir compte du mauvais conditionnement du système, la méthode la plus utilisée étant ART.

Les méthodes structurelles

Dans ce troisième groupe de méthodes, on ne cherche pas à reconstruire uniquement les structures des objets d'intérêt. On peut reconstruire par exemple un nuage de point, de contours ou de surface en utilisant des considérations géométriques [162], [174], la théorie des graphes [159], ou des considérations de la vision artificielle [52].

Les méthodes statistiques

Les méthodes précédentes permettent d'introduire des contraintes sur les solutions ou sur les géométries d'acquisition. Malheureusement, ces solutions convergent vers une solution de moindres carrés, ce qui implique de réaliser uniquement des régularisations ou des filtrages linéaires sur f .

Les méthodes statistiques considèrent p et parfois f comme des variables aléatoires, auxquelles on affecte une loi de probabilité traduisant les incertitudes que l'on a sur les données (bruit, erreurs de modélisation) et aussi sur f pour les modèles Bayesiens.

Introduite initialement dans [154], l'estimation se faisait suivant un algorithme EM (*Expectation-Maximisation*). Le problème de la convergence vers un minimum local fût en partie résolu en formulant le problème de façon bayésienne en introduisant un *a priori* sur f . Connaissant $P(f)$ et la loi conditionnelle $P(p/f)$ donnée par la loi du bruit associée aux données, la probabilité $P(f/p)$ s'obtient par la règle de Bayes suivante :

$$P(f/p) = \frac{P(p/f)P(f)}{P(p)} \quad (4.10)$$

Pour trouver une solution unique déduite de cette loi de probabilité, différents estimateurs peuvent être utilisés, le plus employé étant le MAP (*Maximum A Posteriori*). Une extension importante de l'utilisation des méthodes bayésiennes a été proposée dans [56], où les auteurs proposent une modélisation par champs de Markov. Dans ces modélisations, les contraintes introduites sont non-linéaires, nécessitant donc des algorithmes stochastiques d'optimisation.

Nous présentons dans les Tableaux.4.1 et 4.2 un certain nombre d'algorithmes appartenant à chacune des classes présentées précédemment.

Ces quatre approches regroupent la quasi totalité des algorithmes de reconstruction tomographique. Néanmoins, nous allons aborder une nouvelle approche de la reconstruction apparue récemment : les méthodes variationnelles de reconstruction. La section suivante présente cette classe de méthodes.

Méthodes Analytiques	Méthodes Algébriques
Formule d'inversion de Denton [29]	Algorithme ART [69]
Rétro-projection Filtrée [65]	Algorithme ART par blocs [41]
Approximation multicoupe fan-beam [134]	Algorithme ART multirésolution avec support [138]
Algorithme TTR [115]	Algorithme de Kaczmarz [9]
Algorithme de Feldkamp [43]	Méthode SIRT [59]
Reconstruction 3D par transformée de Radon [62]	Décomposition en voxels sous contraintes [18]

TAB. 4.1 – Algorithmes de reconstruction appartenant à des méthodes analytiques et algébriques.

Méthodes Structurelles	Méthodes Statistiques
Méthodes géométriques [162], [123]	Estimateur de la variance minimale[173]
Méthode de la médiane [7]	Estimation bayésienne a maximum d'entropie [2]
Méthodes par vues orthogonales [159]	Algorithme de recuit simulé [79]
Reconstruction en en vision [52]	Reconstruction par modèles Markoviens [35]
	Méthodes adaptatives [23]

TAB. 4.2 – Algorithmes de reconstruction appartenant à des méthodes structurelles et statistiques.

4.2.2 Les approches variationnelles en reconstruction

Nous présentons une classe récente de méthodes de reconstruction tomographique sur un objet particulier. Ces dernières sont fondées sur une approche variationnelle, montrant une fois de plus l'importance de ce type de méthodes en traitement d'images. Nous présentons tout d'abord quatre classes de méthodes générales visant à reconstruire une forme plutôt qu'un volume complet [1], avant de présenter une approche générale de reconstruction tomographique sous forme variationnelle.

La discrétisation de l'équation projective

Comme nous l'avons vu, chaque projection peut s'écrire p_θ suivant l'équation 4.1. Si nous discrétisons chaque projection, l'objet f et l'opérateur de Radon $\mathcal{R}$, nous obtenons :

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{f} + \mathbf{n} \quad (4.11)$$

$\mathbf{n}$ représentant le bruit associé à la mesure. La solution de l'équation 4.11 est définie comme la minimum de l'expression :

$$J(\mathbf{f}) = \Delta_1(\mathbf{p}, \mathbf{R}\mathbf{f}) + \lambda \Delta_2(\mathbf{f}, \mathbf{f}_0) \quad (4.12)$$

où λ est un paramètre de régularisation, $\mathbf{f}_0$ est la solution *a priori*, Δ_1 et Δ_2 sont deux mesures de distances. Les choix les plus courants sont les suivants :

$$\Delta_1(\mathbf{p}, \mathbf{R}\mathbf{f}) = \mathcal{Q}(\mathbf{f}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{R}\mathbf{f}\|^2, \quad \Delta_2(\mathbf{f}, \mathbf{f}_0) = \Omega(\mathbf{f}) = \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_0\|^2 \quad (4.13)$$

Dans ce cas, le terme $J(\mathbf{f})$ peut s'interpréter comme le MAP où $\mathcal{Q}(\mathbf{f})$ est la fonction de vraisemblance et $\exp(\lambda\Omega(\mathbf{f}))$ la loi de probabilité *a priori*.

Cette approche pour résoudre le problème inverse sous la forme de l'équation 4.1 est cependant similaire à une méthode algébrique. Le coût de calcul est donc important. Ainsi l'utilisation d'autres fonctions $\Omega(\mathbf{f})$ a été envisagée afin de mettre en évidence des propriétés particulières de l'image. On peut ainsi citer les fonctions suivantes tirées de [1] :

– de type entropique :

$$\Omega(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^N v(f_j) \quad \text{avec} \quad v(x) = \{-x \log x, x \log x, \dots\} \quad (4.14)$$

– de type Markovienne :

$$\Omega(\mathbf{f}) = \sum_{j=1}^N \sum_{i \in \mathcal{N}_i} v(f_j, f_i) \quad (4.15)$$

avec les potentiels convexes suivants :

$$v(x, y) = \{|x - y|^m, -|x - y| \log(x/y), \log \cosh |x - y|, \sqrt{1 + |x - y|^2}, \dots\} \quad (4.16)$$

ou non convexes :

$$v(x, y) = \left\{ \min\{|x - y|^2, 1\}, \frac{-1}{1 + |x - y|^2}, \dots \right\} \quad (4.17)$$

La modélisation par passage à zéro d'une fonction évolutive

Cette approche consiste en la modélisation directe du contour D de l'objet à reconstruire en prenant en compte le passage par zéro d'une fonction évolutive $\nu(x, y, t)$:

$$\partial D(t) = \{(x, y) : \nu(x, y, t) = 0\} \quad (4.18)$$

Dans cette approche ν est assimilé à une surface ou un front d'onde et l'évolution du contour ∂D est perpendiculaire à la surface. L'évolution du contour vérifie :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right) = \alpha(x, y, t) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \quad (4.19)$$

Nous retrouvons ici l'approche des lignes de niveaux exposée section 1.5.6.

L'approche paramétrique

Si l'on parvient à paramétrer le contour de l'objet de la façon suivante, on peut écrire :

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^K d_k f_k(x - \alpha_k, y - \beta_k) \quad (4.20)$$

Soit ρ le vecteur qui paramétrise le modèle, tel que $\rho = \{d_k, \alpha_k, \beta_k, k = 1, \dots, K\}$ dont les paramètres définissent respectivement la pondération, les coordonnées du centre et les diamètres de la forme de base (cercles ou ellipses) (cf. Figure 4.4).

Il est alors simple de calculer le modèle des projections

$$p(r, \theta) = \phi(r, \theta, \rho) + n(r, \theta) \quad (4.21)$$

Cette approche a été utilisée par exemple dans [154]. La limite de ce modèle reste la paramétrisation, et le caractère non quadratique du critère à optimiser.

La modélisation du contour

Cette méthode revient à modéliser directement l'objet à reconstruire par une fonction $g(\rho)$. Soit la relation

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}(\mathbf{g}) + \mathbf{n} \quad (4.22)$$

La solution peut être définie comme le minimum de

$$J(\mathbf{g}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{R}(\mathbf{g})\|^2 + \lambda \Omega(\mathbf{g}) \quad (4.23)$$

On peut encore envisager de modéliser l'objet par une fonction linéaire par morceaux [1]. Les méthodes précédemment définies pour la minimisation de fonction peuvent ici encore être utilisées. Ces méthodes s'intéressent plus particulièrement aux contours de l'objet à reconstruire. Cependant, il est intéressant de noter que l'on peut mettre sous une forme variationnelle un problème de reconstruction tomographique général en ajoutant un terme de contrainte sur l'objet à reconstruire.

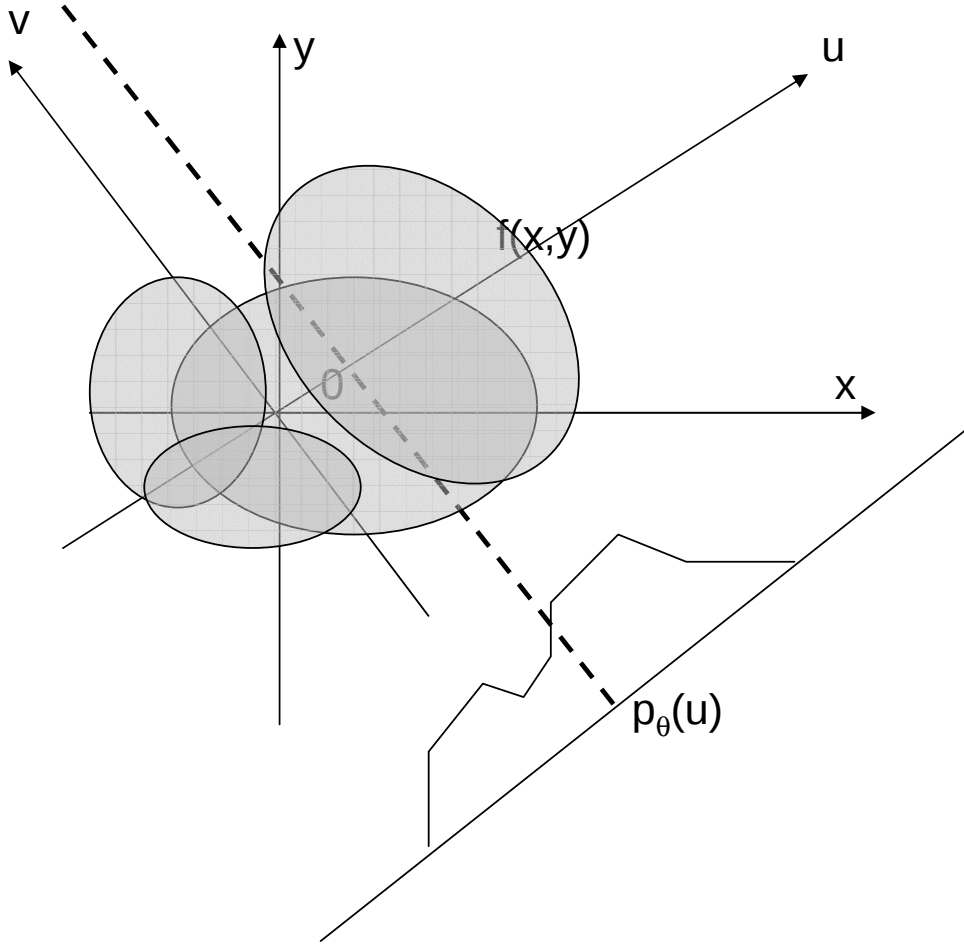


FIG. 4.4 – Définition d'un contour paramétré en 2D pour modéliser l'objet à reconstruire.

4.2.3 Deux exemples de reconstruction tomographique variationnelle sous contrainte

Dans cette section, nous présentons deux méthodes introduites très récemment qui utilisent des approches variationnelles. Ces algorithmes trouvent une justification dans le fait que la plupart du temps l'objet que l'on souhaite reconstruire possède certaines propriétés de continuité, rugosité, etc. Par exemple, si l'on dispose d'un nombre de points donnés, on peut y faire passer une infinité de courbes différentes. Cependant, et compte tenu des règles Gestaltiques 1.3, la courbe présentée en trait plein sur la Figure.4.5 est la plus naturelle donc la plus probable.

Nous présentons tout d'abord l'approche développée dans [91]. Elle expose une approche variationnelle de la reconstruction tomographique sous contraintes.

Kubic dans un premier temps discrétise et limite l'espace reconstruit $\mathbb{S}$, il transforme alors l'équation 4.2 en :

$$p_{ij} = \mathcal{R}f(\theta_i, u_j) = \int_{\mathbb{S}} f(t \cos \theta_i - u_j \sin \theta_i, t \sin \theta_i + u_j \cos \theta_i) dt \quad (4.24)$$

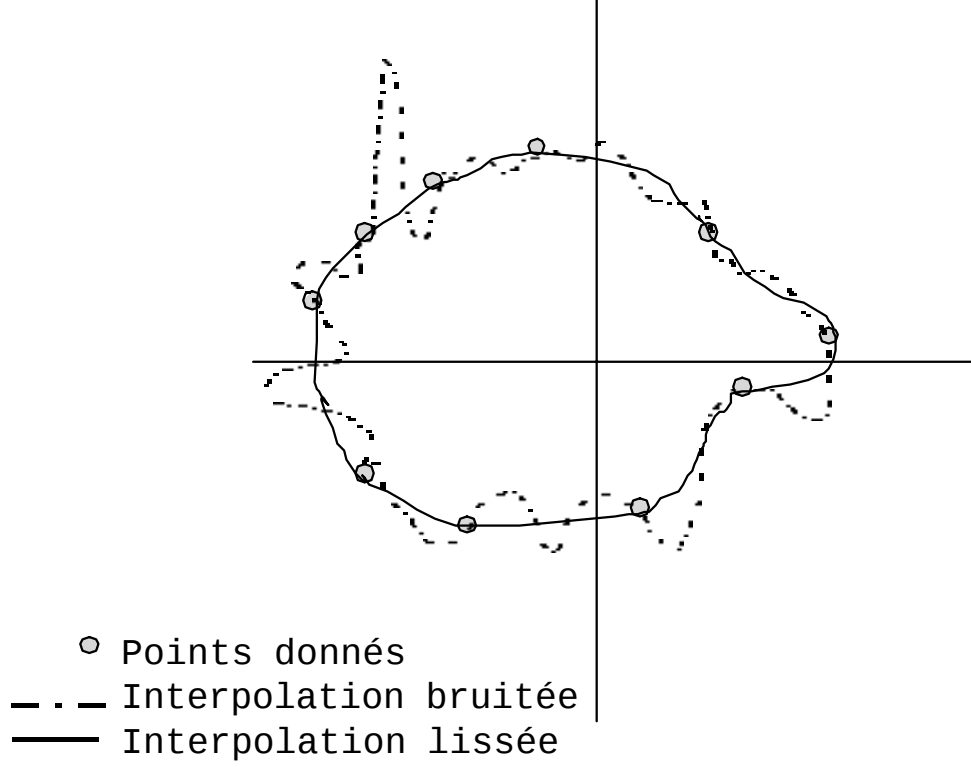


FIG. 4.5 – En prenant en compte les règles Gestaltiques, certains contours sont meilleurs que d'autres de par leur simplicité.

Dans [91], la contrainte utilisée force le contour de l'objet reconstruit à être une forme décrite par un polynôme de degré deux. Le terme de contrainte $J(f)$ (f étant le contour) est quantifié par la norme de Duchon [37] :

$$J(f) = \int \left(\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 \right) dx dy \quad (4.25)$$

On constate que si f est de la forme $a_1x + a_2y + a_3$, alors $J(f) = 0$. Kubic défini la forme bilinéaire suivante :

$$B(f, g) = \int \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (4.26)$$

telle que :

$$J(f) = B(f, f). \quad (4.27)$$

Le problème variationnel visant à minimiser J sous la contrainte de l'équation 4.24 peut être résolu en utilisant le principe des multiplicateurs de Lagrange :

$$J^*(f, \lambda) = J(f) + 2 \sum \lambda_{ij} (p_{ij} - \mathcal{R}f(\theta_i, u_j)) \quad (4.28)$$

où λ est le vecteur composé des multiplicateurs λ_{ij} . Le théorème de Lagrange nous permet de dire que f résout le problème de minimisation contrainte, s'il existe un vecteur λ tel que

(f, λ) est un point selle de J^* . Soit une petite perturbation g , si l'on calcule la variation d'ordre 1 de J^* par rapport à g , on obtient au point selle :

$$0 = J^*(f + g) - J^*(f) = 2B(f, g) - 2 \sum_{ij} \lambda_{ij} \mathcal{R}g(\theta_i, u_j) \quad (4.29)$$

Cela implique que :

$$B(f, g) = \sum_{ij} \lambda_{ij} \mathcal{R}g(\theta_i, u_j) \quad (4.30)$$

Si l'on suppose l'existence de fonctions φ_{ij} , que Kubic appelle *solutions fondamentales*, telles que

$$B(\varphi_{ij}, g) = \mathcal{R}g(\theta_i, u_j) \quad \text{pour tout } g, J(g) < \infty \quad (4.31)$$

alors, la fonction f suivante :

$$f = \sum_{ij} \lambda_{ij} \varphi_{ij} + a_1 x + a_2 y + a_3 \quad (4.32)$$

est solution du problème variationnel de reconstruction. Kubic montre que φ_{ij} peut s'écrire :

$$\varphi_{ij} = | -x \sin \theta_i + y \cos \theta_i - u_j |^3 / 12 \quad (4.33)$$

Les calculs plus complets de cette démonstration peuvent être trouvés dans [92] et [93].

La seconde méthode variationnelle de reconstruction que nous exposons ici est celle présentée dans [160]. L'idée principale de cette méthode est d'introduire une contrainte sur la variable modélisant les contours de l'image à reconstruire, afin d'obtenir un modèle moins bruité.

Cette méthode combine une reconstruction et une segmentation par contours actifs géodésiques. Le modèle utilisé représentera uniquement les discontinuités de l'image correspondant à des contours et non pas au bruit. Pour la résolution d'un tel problème, l'auteur utilise une EDP pour la segmentation et une EDP pour la reconstruction.

Le système obtenu est le suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= p - f + \lambda^2 \operatorname{div}(h(u) \nabla f) \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= g(|\nabla f|)(c + \operatorname{curv}(u)) |\nabla u| + \nabla g \cdot \nabla u \end{aligned} \quad (4.34)$$

La première équation correspond à une reconstruction de l'image f en effectuant un lissage isotrope dans les zones homogènes et anisotrope dans le cas contraire [23]. La seconde EDP dirige l'évolution d'un contour actif géodésique [20] fondée sur une carte des distance au contour de l'objet d'intérêt. L'évolution de l'algorithme consiste à résoudre de manière itérative le système défini précédemment, *i.e.* les deux EDP sont résolues alternativement.

4.3 Coopération détection - reconstruction par approches variationnelles couplées

L'approche que nous proposons consiste à faire collaborer deux EDP traduisant respectivement un processus de détection et de reconstruction. Nous présentons le cadre théorique général de cette approche. Nous présentons ensuite son application à la reconstruction tomographique.

4.3.1 Approche formelle de la coopération détection - reconstruction par approches variationnelles couplées

Posons tout d'abord le problème. Soit un objet u , et un ensemble d'acquisition de u , $P = (p_1, \dots, p_c)$ de nature physique. Soit R la transformation permettant de passer de u à P . Le processus se formalise de la même façon que celui présenté par l'équation 2.33 :

$$P = R(u) + n_1 \quad (4.35)$$

où n_1 représente le vecteur de bruit associé à la mesure.

Si maintenant nous nous intéressons à l'objet u uniquement, nous pouvons écrire que u s'écrit comme un objet u_0 transformé par un opérateur T 3D :

$$u = T(u_0) + n_2 \quad (4.36)$$

Les Figures 4.6 et 4.7 illustrent ces hypothèses de départ.

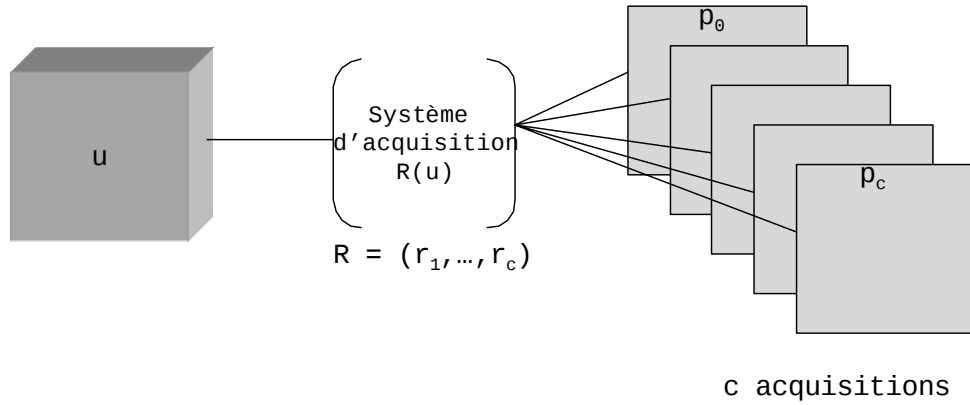


FIG. 4.6 – Processus d'acquisition bruitée de c représentation d'un même objet u .

L'objet u_0 représente l'*a priori* sur la forme de l'objet à reconstruire. En faisant référence au Chapitre 2, nous pouvons déduire que le processus optimal permettant d'obtenir la meilleure représentation de u et P est celui formulé par l'équation 2.65, à savoir l'équation de Schrödinger avec champs. Nous possédons donc un système d'EDP

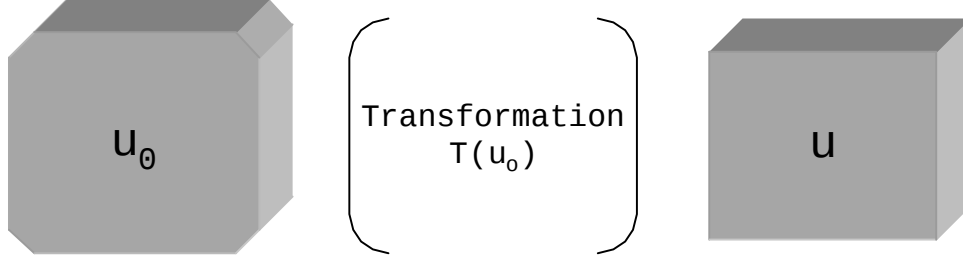


FIG. 4.7 – Illustration de la modification par une transformation d'un objet initial en une nouvelle représentation.

gérant l'évolution des acquisitions et de l'objet lui même. Ce système d'EDP couplé est celui présenté ci-dessous :

$$\begin{aligned} i\hbar_P \frac{\partial \psi_P}{\partial t} &= -\frac{\hbar_P^2}{2} \nabla^2 \psi_P + \frac{ie\hbar_P}{c_P} \nabla \cdot (\mathbf{A}_P \cdot \psi_P) + \frac{e^2 |\mathbf{A}_P|}{2c_P^2} \psi_P + e\phi_P \cdot \psi_P \\ i\hbar_u \frac{\partial \psi_u}{\partial t} &= -\frac{\hbar_u^2}{2} \nabla^2 \psi_u + \frac{ie\hbar_u}{c_u} \nabla \cdot (\mathbf{A}_u \cdot \psi_u) + \frac{e^2 |\mathbf{A}_u|}{2c_u^2} \psi_u + e\phi_u \cdot \psi_u \end{aligned} \quad (4.37)$$

Chaque variable ou potentiel peut être fixé indépendamment dans les deux EDP de manière à traduire le problème considéré (acquisition tomographique, photographique...) ou l'objet à reconstruire (modèle déformable, rigide, ...).

Puisque nous avons dérivé, dans la section 2.4, à partir de cette formulation, une grande partie des équations de diffusion, et puisqu'il existe une relation directe entre les EDP de diffusion et les contours actifs géodésiques [145], nous sommes, à même de retrouver le système d'EDP présenté par l'équation 4.34.

Dans la section suivante nous développerons de manière plus profonde l'utilisation de ce système d'EDP dans un cadre applicatif défini.

4.3.2 Application de l'approche variationnelle couplée à la reconstruction tomographique de stent

Précisons tout d'abord à quel niveau se situe la détection et la reconstruction dans un tel cadre applicatif. Soit un ensemble de projections noté $P = (p_1, \dots, p_c)$, où se trouve un stent noté u . La transformation permettant de passer de l'objet *stent* à sa représentation dans l'image projetée est noté R . Cette transformation est la composition d'une transformée de Radon classique (section 4.2.1) puis de la transformation explicitée section 3.4. La Figure 4.8 représente cette problématique. La Figure 4.9 traduit le processus de reconstruction d'un objet réel à partir d'un objet de référence. C'est la composition de ces deux problèmes qui nous permet de dériver l'approche variationnelle couplée.

Le principal centre d'intérêt réside alors dans un choix judicieux des potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ .

Le raisonnement que nous allons mener traduit parfaitement l'intérêt de coupler deux EDP. Premièrement, faisons le bilan de ce dont nous disposons :

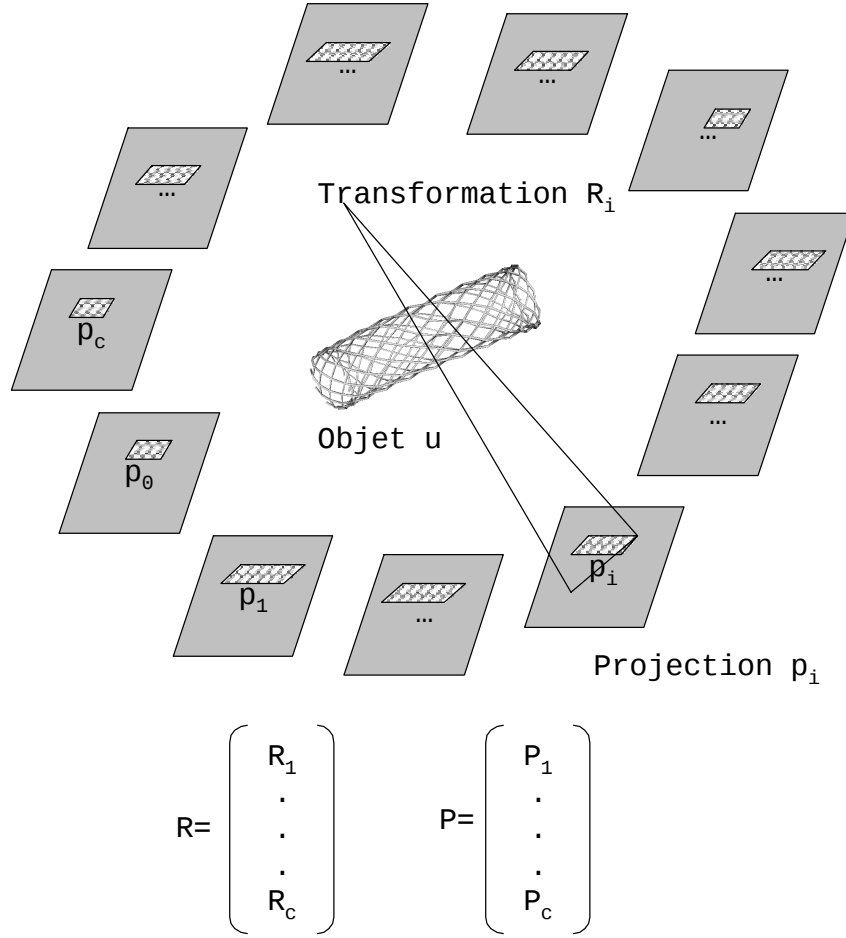


FIG. 4.8 – Illustration dans un cadre tomographique de la problématique de détection sur les projections p_i d'un objet u .

- un modèle de l'objet à projeter, *i.e.* nous savons que nous voulons reconstruire un stent ou tout du moins son enveloppe ;
- c projections sur lesquelles une carte de probabilité d'appartenance à la projection du stent existe ;
- la modélisation de l'acquisition nous permettant de projeter tout objet de manière synthétique *via* l'opérateur de Radon.

Ainsi, le processus que nous souhaitons mettre en place est le suivant :

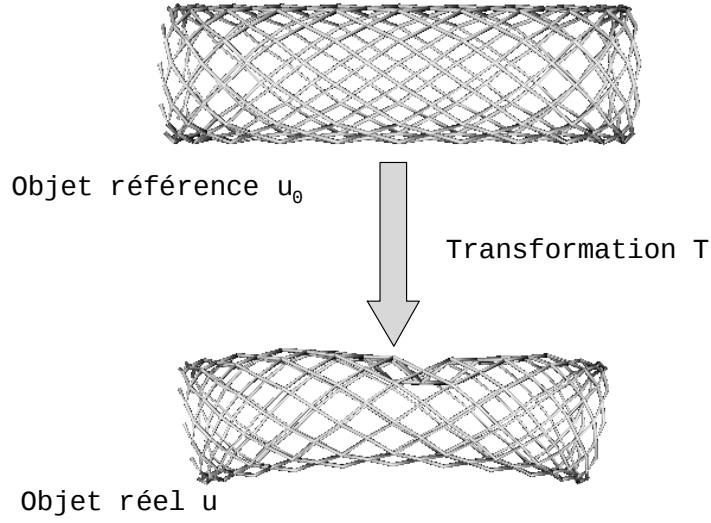


FIG. 4.9 – Illustration dans un cadre tomographique de la problématique de reconstruction d'un objet réel u à partir d'un objet de référence u_0 .

1. initialiser le processus à partir d'un objet de référence disposé grossièrement après le processus explicité section.3.3 ;
2. projeter cet objet synthétique sur une vraie projection i
3. déformer le contour de projection de l'objet de synthèse en fonction de la carte de présence du stent
4. rétropropager la déformation de la projection sur l'objet 3D
5. déformer l'objet en fonction des déformations de sa projection et des contraintes de ressemblance avec le stent initial
6. projeter cet objet sur une projection $i + n$
7. répéter à partir de 2 jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit respecté.

Plusieurs questions apparaissent alors de manière naturelle. La première réside dans le choix des potentiels de déformation, la seconde dans la manière de rétropropager la déformation obtenue sur les projections $2D$ vers l'espace $3D$.

Nous proposons d'utiliser pour le choix des potentiels, sur les projections $2D$, une contrainte du type *carte de distance* non signée comme évoquée dans de nombreuses publications [160] (*cf. Figure 4.10*).

En ce qui concerne l'objet $3D$, considérons le vecteur de déplacement v_{xy} obtenu au pixel p_{xy} sur une projection i . Nous créons un champ constitué par des vecteurs de déplacement identiques le long du rayon allant de la source X au même pixel (*cf. Figure 4.11*). Autrement dit, soit un pixel p_{xy} et soit le rayon provenant de la source r_{xy} qui atteint p_{xy} . Ce rayon sera alors défini comme support d'un ensemble de vecteur égaux v_{xy} qui

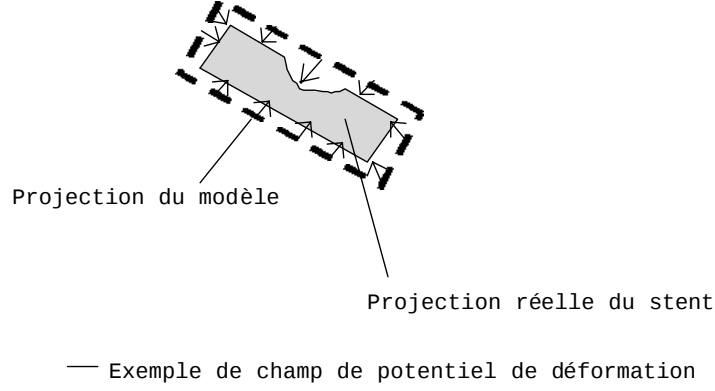


FIG. 4.10 – Champ de potentiel de déformation de la forme projetée.

constitueront le champ de déplacement $3D$

4.3.3 Un algorithme de détection-reconstruction par EDP couplées

Dans cette section, nous allons choisir et justifier le choix des potentiels présents dans chacune des deux EDP. Nous commençons par nous intéresser à la déformation de la projection du contour de l'objet de manière à l'attirer vers les contours détectés du stent. Nous nous focaliserons ensuite sur la déformation de l'objet dans un espace $3D$.

Mise en oeuvre de l'EDP de déformation de la projection

Les potentiels de cette équation devront être choisis pour attirer les contours de la projection de l'objet vers les pixels correspondant à la projection du stent à reconstruire, tout en conservant une forme proche de celle d'un stent.

Le potentiel $\mathbf{A}_p$ est directement associé à la manière dont la diffusion de l'EDP s'effectue. Comme nous ne disposons d'aucun *a priori* sur la modélisation de la diffusion, et que celle-ci s'effectue sur un nombre de points discrets, nous associons à $\mathbf{A}_p$ un potentiel nul, $\mathbf{A}_p = \mathbf{0}$.

Concernant maintenant le choix de ϕ_p , nous choisissons un potentiel ϕ_p tel que pour chaque projection :

$$\phi_p \cdot p_i(u) = 2\beta \xi(p_i(u)) \text{Dist}(p_i(u), \mu) + 2\gamma(p_i(u) - p_i(u_0)) \quad (4.38)$$

où $\xi(p_i(u))$ est une fonction de pondération dépendant directement du degré d'appartenance associée à la probabilité d'appartenir à la projection d'un stent. $\text{Dist}(p_i(u), \mu)$ représente la distance entre un pixel de la projection et le point possédant la plus forte probabilité d'appartenir à un stent dans une direction perpendiculaire au contour (cf. Figure 4.12).

Le premier membre de cette équation force la projection à se rapprocher de la projection

réelle, alors que le second membre oblige la projection de l'objet à garder une forme proche de celle du stent initial non déformé u_0 .

Les variables β et γ correspondent aux poids relatifs que l'on souhaite appliquer aux termes précédemment mentionnés.

L'EDP obtenue est alors la suivante :

$$i\hbar_P \frac{\partial p_i(u)}{\partial t} = -\frac{\hbar_P^2}{2} \nabla^2 p_i(u) + \phi_P \cdot p_i(u) \quad (4.39)$$

Nous discuterons de son implantation et des paramètres en section 4.3.4.

Mise en oeuvre de l'EDP de déformation de l'objet à reconstruire

L'objet $3D$ doit être déformé de telle manière que sa projection corresponde à la projection obtenue réellement. Pour la même raison que précédemment, nous choisissons ici un potentiel $\mathbf{A}_u$ nul. Concernant le potentiel ϕ_u , nous proposons une méthode afin de rétropropager l'erreur (*cf.* Figure 4.11). Le potentiel obtenu peut s'écrire de la même manière que précédemment :

$$i\hbar_P \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\hbar_P^2}{2} \nabla^2 u + \phi_u \cdot u \quad (4.40)$$

avec

$$\phi_u = 2\lambda(u - \nu(u_0 \circ T_{\vec{d}})) \quad (4.41)$$

Le potentiel $u_0 \circ T_{\vec{d}}$ correspond au modèle initial déformé par le champ de déformation $2D$ rétropropagé (*cf.* Figure 4.13).

Les paramètres λ et ν pondèrent respectivement le potentiel de ressemblance avec le stent initial dans l'équation Eq.4.40 et le potentiel rétropropagé.

4.3.4 Résultats

Dans une première approche, nous choisissons de prendre les paramètres $\hbar$ constants dans les différentes EDP.

En ce qui concerne les schémas numériques, nous n'avons fait, pour l'instant, aucune étude théorique quant à la convergence des équations 4.34.

Enfin, la discrétisation des EDP se trouve en Annexe B.

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats des différentes étapes de la reconstruction, ainsi que les modèles de stents déformés et à reconstruire. Nous montrons les résultats d'un algorithme de simulation de projection rayons X que nous avons développé. Enfin, nous présentons et commentons les images correspondant aux potentiels de déformation en deux dimensions.

Les modèles de stents adoptés et leur projection RX

Nous avons choisi de modéliser le stent à reconstruire comme un cylindre maillé tordu suivant son axe principal. Le stent servant à l'initialisation de l'étape de reconstruction

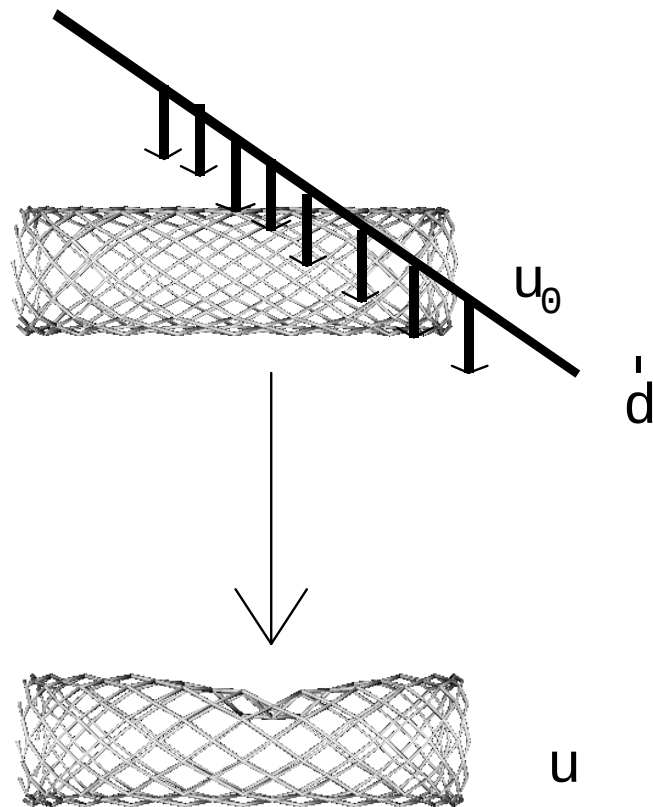


FIG. 4.13 – Illustration du potentiel de déformation appliqué à l'objet.

est un cylindre droit de dimension différente du précédent d'un facteur homothétique 1.3 (cf. Figure 4.14).

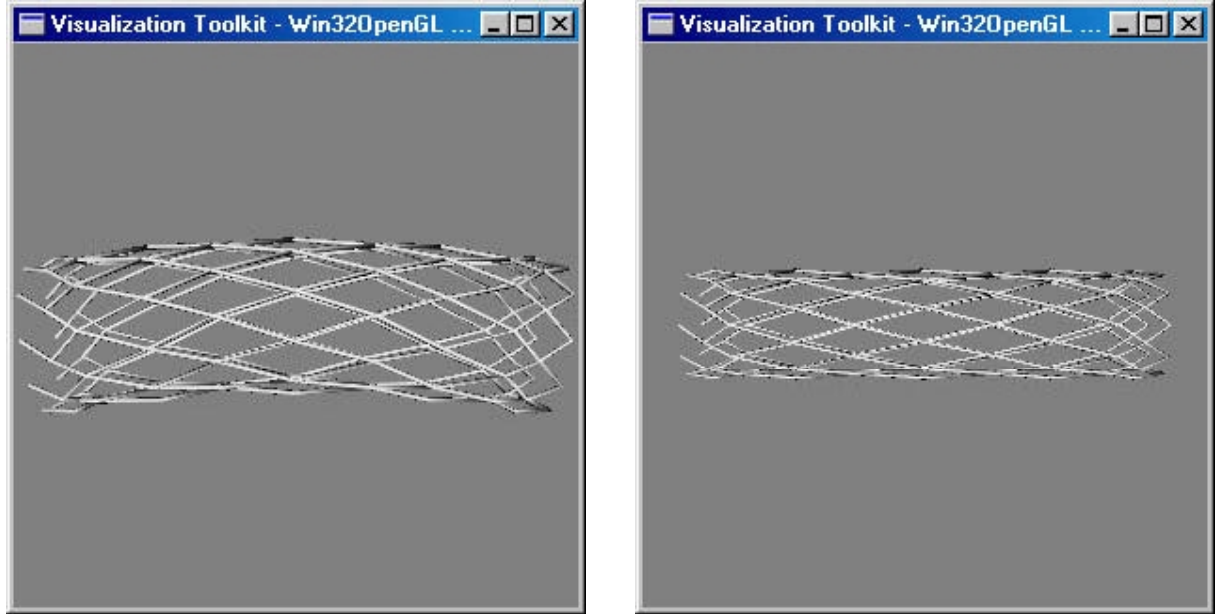


FIG. 4.14 – A gauche, modélisation du stent déformé à reconstruire, à droite, celle du stent initial servant à la reconstruction.

L'étape de simulation de projection rayons X utilise un algorithme d'inversion de matrice. Cela permet de définir les voxels ayant participé à la mesure du pixel de l'image rayons X. Cette étape a fait l'objet du développement d'un logiciel au sein du L3i, dont certaines captures d'écran sont présentées en Annexe D.

La carte de déformation deux dimensions

Cette carte a été obtenue en utilisant les algorithmes développés section 3.4. Le résultat final correspond à une image vectorielle dont les composantes sont les potentiels d'attraction projetés sur les axes d'abscisse et d'ordonnée de l'image. L'interprétation de cette carte n'est pas aisée. Cependant, on peut remarquer que les potentiels de déformation obtenus entre les stents présentés Figure 4.14, indiquent une plus forte présence dans les régions extrêmes. Cela s'explique par les déformations plus grandes aux extrémités du stents qu'en son centre où elles sont infimes.

De plus, le fait d'avoir introduit un rapport d'homothétie entre les deux stents indique des potentiels non uniquement présents sur un axe horizontal. La Figure 4.15 représente en niveau de gris inversé la norme de vecteur de déplacement calculée.

Dans un but de validation nous avons testé notre algorithme entre deux images identiques, le résultat obtenu montre une image vierge de tous vecteurs de déplacement.

Enfin nous avons retropropagé cette déformation dans l'espace en trois dimensions grâce



FIG. 4.15 – Carte des potentiels de déformation 2D appliqués au stent initial droit.

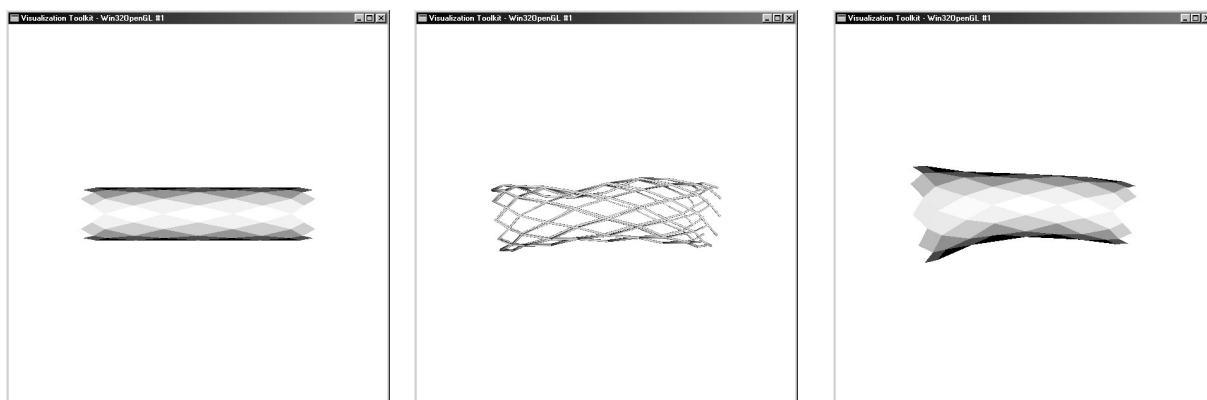


FIG. 4.16 – A gauche, modèle de stent initiale, au centre stent à reconstruire, à droite résultat de la reconstruction après 3 itérations.

au même type d'algorithme que celui utilisé pour la projection. Les déformations associées à cette retropropagation sont représentées Figure 4.16.

Le résultat présenté sur cette figure est un résultat très préliminaires. Il sont obtenus après trois itérations et en utilisant 18 projections sur une angulation totale de 180 degré. On observe une déformation correcte sur la droite du stent, alors que sur la gauche le processus diverge, et la résolution trop grossière ne permet pas de voir des déformations éventuelles concernant la mauvaise déformation locale du stent.

Déformation 3D, itérations et convergence

L'étude de la convergence et des schémas numériques ne faisant pas partie des objectifs de cette thèse, nous n'avons volontairement pas exploré ces voies de recherches, mais elles constituent des perspectives particulièrement intéressantes.

4.4 Conclusion et contributions

Cette section a fait l'objet de nombreux programmes développés en C sous environnement VTK (*Visualisation Tool Kit*) au L3i pour le compte de General Electric. Une synthèse des algorithmes existant se trouve Figure 4.17.

Dans ce chapitre, nous avons particulièrement mis en évidence un algorithme de reconstruction d'objet par un système d'EDP couplée. Nous avons présenté un état de l'art des méthodes de reconstruction tomographique en mettant en avant celle faisant intervenir des méthodes variationnelles.

Nous avons montré que ces méthodes pouvaient s'écrire sous la forme variationnelle générale définie dans le Chapitre 2.

Cette écriture nous permet de tirer pleinement parti de l'acquisition tomographique, ainsi que d'une contrainte de ressemblance avec un modèle d'objet à reconstruire. Chacune de ces deux sources d'information est traduite de manière algorithmique par une EDP unique.

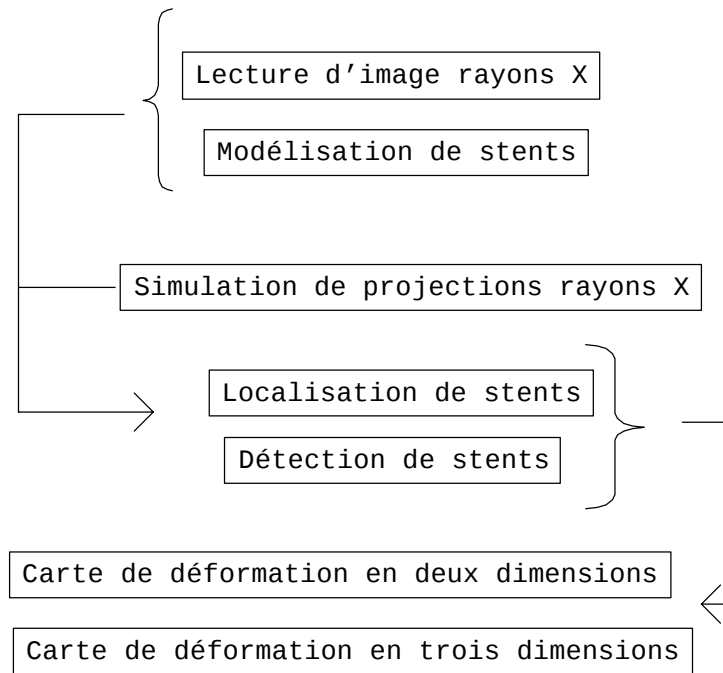


FIG. 4.17 – Résumé de l'ensemble des algorithmes déjà implantés pour la phase de reconstruction de stent par un système d'EDP couplée.

Dans un premier temps, nous avons utilisé une EDP afin de déformer les projections du modèle vers les projections réelles. Ce potentiel de déformation est proportionnel à une mesure de distance représentant l'écart entre la projection du modèle et un extrema de la détection de plis.

Cette distance est ensuite traduite de manière vectorielle et rétropropagée le long de la ligne correspondant au chemin physique des rayons X.

Comme indiqué dans les sections précédentes, aucune étude sur la convergence n'a pour l'instant été réalisée.

Cependant, des conclusions intéressantes peuvent déjà être tirées.

Nous avons montré que :

- les écritures variationnelles actuelles de reconstruction tridimensionnelle peuvent se mettre sous la forme générale que nous avons proposée dans le Chapitre 2 ;
- le couplage des EDP est un moyen de tirer parti de chaque information accessible sous une même écriture, mais avec des potentiels différents ;
- le choix de ces potentiels pourrait permettre de pondérer certaines contraintes, voire d'en utiliser de nouvelles (préférence de certaines formes géométriques...).

Enfin, nous rappelons que la seule présence d'informations *bas-niveau* (ressemblance à une forme, potentiel d'attraction...) nous a permis de traduire le problème de reconstruction

comme un problème variationnel, écrit sous un formalisme quantique. Ce chapitre se distingue donc du précédent dans lequel l'information nécessaire était "*équivalente*" à celle utilisée par un praticien, *i.e.* une information *haut-niveau*.

Conclusion et Perspectives

Tout le monde savait que c'était impossible. Puis un jour est venu un homme qui ne le savait pas. Et il l'a fait. Winston Churchill.

Le principal objectif de cette thèse a été d'aborder le problème du traitement d'images dans un cadre physique réaliste, prenant en compte l'interaction de l'observateur et du système, et de dériver des résultats optimaux au sens d'un meilleur compromis incertitude-imprécision.

Contributions et résultats

Dans le chapitre 1, nous avons présenté un état de l'art sur les différentes approches du traitement d'images bas-niveau. Nous avons montré qu'une vision par approches variationnelles et EDP peut être considérée comme unificatrice. Nous avons mis en avant l'intérêt du formalisme Lagrangien et celui des principes de la physique classique comme outil de traitement de l'image.

Enfin, nous avons précisé tout l'intérêt qu'il y a d'écrire sous forme variationnelle les principales méthodes de traitement d'images tout en développant de nouveaux modèles.

Dans le chapitre 2, après avoir montré tout l'intérêt des approches variationnelles et des EDP, nous avons proposé un nouveau cadre théorique afin d'unifier un grand nombre d'approches de traitement d'images. Ce cadre est celui de la mécanique quantique, que l'on dérive de manière optimale *via* le principe de l'Information Physique Extrême. On montre que l'équation de Klein-Gordon avec champs, et sa limite relativiste, l'équation de Schrödinger avec champs est l'EDP optimale, en terme de compromis incertitude-imprécision.

Grâce à cette équation, on retrouve la plupart des EDP classiquement utilisées en traitement d'images.

- l'équation de la chaleur ;
- les opérateurs de voisinages génériques ;
- la diffusion isotrope ;

- la diffusion anisotrope ;
- la structure multi-échelles ;
- les contours actifs géodésiques.

Nous avons interprété un paramètre et les hyperparamètres physiques de ce nouveau modèle variationnel.

- le potentiel $\mathbf{A}$ est un potentiel vectoriel contrôlant, par exemple par les lignes de niveaux de l'image, les processus de diffusion dans le domaine spatial, c'est un potentiel de contrainte spatiale pondérant le gradient isotrope ;
- le potentiel ϕ est un potentiel scalaire qui gère le processus d'évolution de l'image selon l'axe du paramètre d'échelle ;
- le paramètre $\hbar$ est quant à lui relié directement à la résolution minimale du problème. Il permet de définir l'incertitude minimale possible sur le pixel.

Nous avons interprété et justifié de diverses manières le principe EPI lui-même, ainsi que les solutions obtenues. Nous avons proposé sur le principe et les solutions les interprétations suivantes :

- interprétation physique : marquée par l'absence de connaissance *a priori* : comme dans le cas d'une mesure d'un phénomène naturel à l'échelle atomique. Le formalisme quantique traduit la physique du traitement d'images bas-niveau. En un sens c'est cette condition qui *force* le système à se comporter comme un système physique réel ;
- interprétation par densité de courant de probabilité : nous avons discuté d'une interprétation en terme de courant et de densité de probabilité, en établissant un lien étroit avec le modèle hydrodynamique ;
- interprétation neurophysique : Wigner a émis l'hypothèse que ce ne serait pas l'appareil de mesure, mais la conscience de l'observateur qui "déciderait" des réalités des choses. Il s'agirait d'une superposition d'états qui se retrouveraient dans la structure même des solutions obtenues, par exemple au travers des opérateurs de voisinages génériques ;
- interprétation en terme de mesure quantique : en utilisant un chemin inverse que celui utilisé en mécanique quantique, nous avons montré l'intérêt de ce domaine en traitement d'image ;
- interprétation en terme d'indétermination d'états : nous avons montré que notre modèle permet de faire cohabiter, dans une même analyse, différents états possibles de l'image.

Dans les chapitre 3 et 4, nous nous sommes attachés à la reconstruction de stents à partir d'images rayons X bas contraste. Cette reconstruction a été précédée de deux étapes.

Premièrement, nous avons, à partir d'algorithmes pragmatiques, localisé le stent. Nous avons proposé une nouvelle taxonomie de méthodes de détection de forme, qui prend en considération le voisinage utilisé afin de déterminer la forme. Cette taxonomie présente l'avantage de regrouper l'ensemble des méthodes de détection de forme.

Dans un second temps, nous avons détecté l'ensemble des pixels appartenant à la projection du stent. Étant donné l'incertitude sur cette appartenance, nous avons proposé de

quantifier l'appartenance à une certaine forme par un index multi-local flou. Cet index se calcule sur des considérations de géométrie différentielle et prend en compte des informations appartenant à un voisinage que l'on démontre optimal, grâce au Chapitre 2.

Enfin, nous avons proposé une nouvelle méthode de reconstruction d'objet sous contrainte. Si nous disposons de la forme générale de l'objet à reconstruire, nous avons mis en place une approche par EDP couplée, qui reconstruit de manière itérative l'objet. Cette méthode présente les avantages suivants :

- les contraintes utilisées sont des contraintes de ressemblance de forme et de projection, entre le modèle reconstruit et l'objet réel, permettant ainsi d'éviter les artéfacts habituels en reconstruction tomographique ;
- elle facilite la comparaison entre l'objet reconstruit et l'objet à reconstruire inaccessible par essence ;
- elle relève d'une formulation générale entrant dans le cadre des approches variationnelles ;
- elle repose sur un choix de potentiels *naturels* par rapport à la problématique ;
- elle permet l'obtention directe d'un objet en trois dimensions autorisant d'en extraire directement des informations sur le déploiement de l'objet.

Perspectives

De nombreuses perspectives tant théoriques qu'applicatives sont envisageables à l'issue de ce travail.

Dans un premier temps, nos objectifs à court terme sont de valider sur d'autres images les algorithmes de reconstruction, d'en améliorer les performances tant en termes qualitatifs qu'en termes de performance des schémas numériques, ainsi que d'en préciser la convergence. Nous espérons aussi fournir des informations quantifiées sur le déploiement comme par exemple le degré de torsion ou les éventuels écrasements de mailles. Nous souhaitons aussi prendre en compte l'environnement direct du stent, i.e. le vaisseau, afin de déterminer les contraintes exercées aux extrémités du stent sur ce dernier. Enfin, la collaboration détection-reconstruction, à la base de notre processus, doit trouver de nouvelles applications comme par exemple dans le domaine du contrôle qualité.

Au niveau de la diffusion anisotrope, les perspectives directes qui découlent de cette étude sont la détermination de nouveaux potentiels $\mathbf{A}$ et ϕ . Cela permettra de restaurer des formes particulières (coins, jonctions...) ou plus complexes (union de formes...), et l'appliquer directement à la restauration-détection de stents.

On peut aussi envisager d'adapter les variables $\hbar$ et c en fonction du degré de restauration souhaité et des caractéristiques de la zone de l'image traitée.

De manière plus générale, nous souhaitons utiliser le modèle quantique dans d'autres domaines de la chaîne de traitement d'images, comme par exemple la reconnaissance de forme, la coalescence, etc.

Enfin, comme nous l'avons indiqué section.2.9, la prise en compte de l'appareil de mesure

devrait permettre de compléter le modèle et de définir, en fonction de ce dernier, des équations adaptées au système optique.

Finalement, j'espère que ce travail aura contribué à une compréhension nouvelle et peut-être plus complète du filtrage anisotrope et de l'extraction d'information. Je souhaite aussi qu'elle ait montré l'importance de l'observateur dans le processus de traitement d'images, ainsi que des modèles de la physique quantique comme outil de description du traitement d'images.

Annexe A

Publications associées à cette thèse

Revue

- M. Ménard, V. Courboulay and P.A. Dardignac. Possibilistic and probabilistic fuzzy clustering : unification within the frame of the non-extensive thermostatics. *Pattern Recognition à paraître*.
- V. Courboulay, J. Desfieux, M. Ménard, M. Eboueya, P. Courtellemont, R. Vaillant, and D. Coisne. Stent detection on low contrast X-ray images : Comparaison between two segmentation methods. *ITBM, Innovation and Technology in biology and medicine, Journal of biomedical Engineering à paraître*

Conférences internationales

- V. Courboulay, M. Ménard, M. Eboueya, and P. Courtellemont. Une nouvelle approche du filtrage linéaire optimal dans le cadre de l'information physique extrême. *RFIA. 13ième congrès Francophone de Reconnaissance des Formes et d'Intelligence Artificielle*. pages 897-905, 2002.
- V. Courboulay, M. Ménard, M. Eboueya, and P. Courtellemont. Fuzzy Multi-local Image Relief Classification. *In Fuzz-IEEE, IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Hawaii, May 2002.
- V. Courboulay, M. Ménard, M. Eboueya, P. Courtellemont, R. Vaillant, and D. Coisne. Détection multi-locale floue sur des images très faible contraste. Application à la présentation de stents sur des images rayons X injectés. *In LFA, Mons, Belgique* pages 137-144, 26-27 Novembre 2001.
- V. Courboulay, M. Ménard, M. Eboueya, P. Courtellemont, R. Vaillant, and D. Coisne. Fuzzy Multi-Local Image Relief Classification. *In QCAV'2001-IEEE*, Le

Creusot 21-23 Mai 2001.

- V. Courboulay, M. Ménard, M. Eboueya, P. Courtellemont, R. Vaillant, and D. Coisne. Stent detection on low contrast X-ray images par Comparaison between two segmentation methods. *In NNESMED'01*, Grèce 20-22 June 2001.
- V. Courboulay, M. Ménard, M. Eboueya, P. Courtellemont, R. Vaillant, and D. Coisne. Stent detection for presentation by overlay in injected x-ray cardiac images. *In SPIE International Symposium on Medical Imaging*, San Diego 17-22 February, 2001.

Conférences nationales

- V. Courboulay, M. Ménard, M. Eboueya, P. Courtellemont, R. Vaillant, and D. Coisne. Détection de stents dans les images rayons X bas contrastes par coopération d'opérateurs statistiques et morphologiques. *In Dixième Forum des Jeunes Chercheurs en Génie Biologique et Médical*, volume 1496, pages 70-71, 2000.

Annexe B

Discrétisation des EDP

La première discrétisation importante est celle permettant le calcul du Hessien dans la section.3.4. Nous avons utilisé celle présentée dans [31]. Nous ne donnerons que le filtrage monodimensionnel, par propriété de séparabilité, il est aisé de retrouver le filtrage bidimensionnel. Les résultats qui nous intéressent sont les suivants :

- Discrétisation du filtre gaussien d'ordre 0 (i.e. un *lissage*) au quatrième ordre :

$$g_\alpha(x) = (1.68\cos(0.6318(x/\sigma)) + 3.735\sin(0.6318(x/\sigma)))e^{-1.783(x/\sigma)} \\ - (0.6803\cos(1.997(x/\sigma)) + 0.2598\sin(1.997(x/\sigma)))e^{-1.723(x/\sigma)}$$

- Discrétisation du filtre gaussien d'ordre 1 au quatrième ordre :

$$fdg_\alpha(x) = (-0.6472\cos(0.6719(x/\sigma)) - 4.531\sin(0.6719(x/\sigma)))e^{-1.527(x/\sigma)} \\ - (0.6494\cos(2.072(x/\sigma)) + 0.9557\sin(2.072(x/\sigma)))e^{-1.516(x/\sigma)}$$

- Discrétisation du filtre gaussien d'ordre 2 au quatrième ordre :

$$sdg_\alpha(x) = (-1.331\cos(0.748(x/\sigma)) + 3.661\sin(0.748(x/\sigma)))e^{-1.24(x/\sigma)} \\ - (0.3225\cos(2.166(x/\sigma)) - 1.738\sin(2.166(x/\sigma)))e^{-1.314(x/\sigma)}$$

Le calcul du Laplacien est alors donné par :

$$\nabla^2 v(x, y) = sdg_\alpha(x)g_\alpha(y) + sdg_\alpha(y)g_\alpha(x),$$

et la matrice Hessienne H par :

$$\begin{pmatrix} \nabla_x^2 v & \nabla_x \nabla_y v \\ \nabla_y \nabla_x v & \nabla_y^2 v \end{pmatrix}$$

Ainsi à partir des discrétisation précédemment indiquées, nous sommes à même de calculer, sur une image pixelisée, la matrice Hessienne, ainsi que les valeurs et vecteurs

propres.

En ce qui concerne les équations d'évolution, comme par exemple le système d'EDP couplée suivant :

$$\begin{aligned} i\hbar_P \frac{\partial p_i(u)}{\partial t} &= -\frac{\hbar_P^2}{2} \nabla^2 p_i(u) + \phi_P \cdot p_i(u) \\ i\hbar_P \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\hbar_P^2}{2} \nabla^2 u + \phi_u \cdot u \end{aligned}$$

avec

$$\phi_u = 2\lambda(u - (u_0 + \nu \vec{d}))$$

et

$$\phi_P \cdot p_i(u) = 2\beta \xi(p_i(u)) \text{Dist}(p_i(u), \mu) + 2\gamma(p_i(u) - p_i(u_0))$$

Soit le vecteur v , le vecteur gradient ∇v peut être écrit, en discret, de la manière suivante :

$$\nabla v_{ij} = (v_{i,j+1} - v_{ij}, v_{i+1,j} - v_{ij}).$$

L'opérateur divergence s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \nabla^2 v_{ij} &= \text{div}(\nabla v_{ij}) \\ &= v_{i+1,j} + v_{i,j+1} + v_{i-1,j} + v_{i,j-1} - 4 * v_{ij}. \end{aligned}$$

Ces résultats ont été utilisés pour implanter les algorithmes mentionnés dans les chapitres précédent.

Annexe C

Présentation du logiciel de localisation et de détection des stents

Cette annexe présente quelques captures d'écran du logiciel développé dans le but de localiser et détecter des stents dans des images rayons X bas contraste. Dans la Figure.C.2 nous présentons un aperçu général du logiciel. Dans les Figure.C.3 et Figure.C.4, nous présentons deux captures d'écran plus réduites, une de la gestion de la vidéo et l'autre du choix de l'algorithme à choisir.

L'intégration des diverses composantes du logiciel a été réalisée sous Visual C++. A noter qu'une aide associée à chaque traitement a été intégrée de manière à faciliter la prise en main du logiciel, cf. Figure.C.1

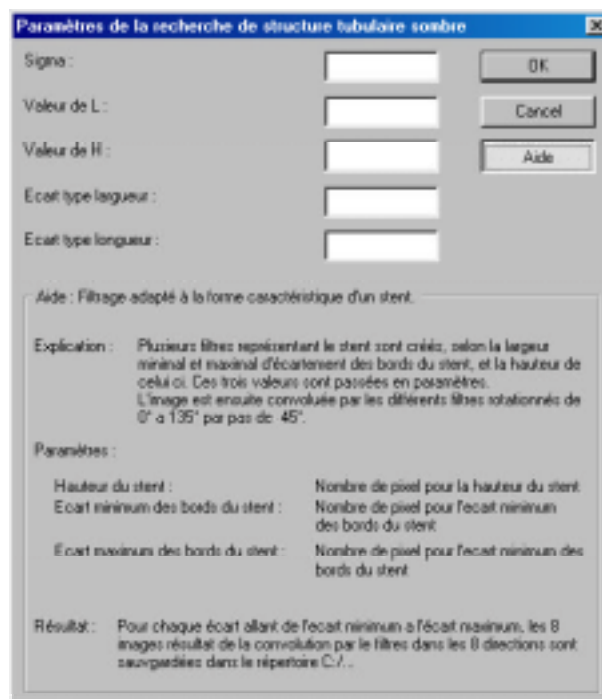


FIG. C.1 – Capture d'écran d'un exemple d'aide proposé avec chaque traitement.

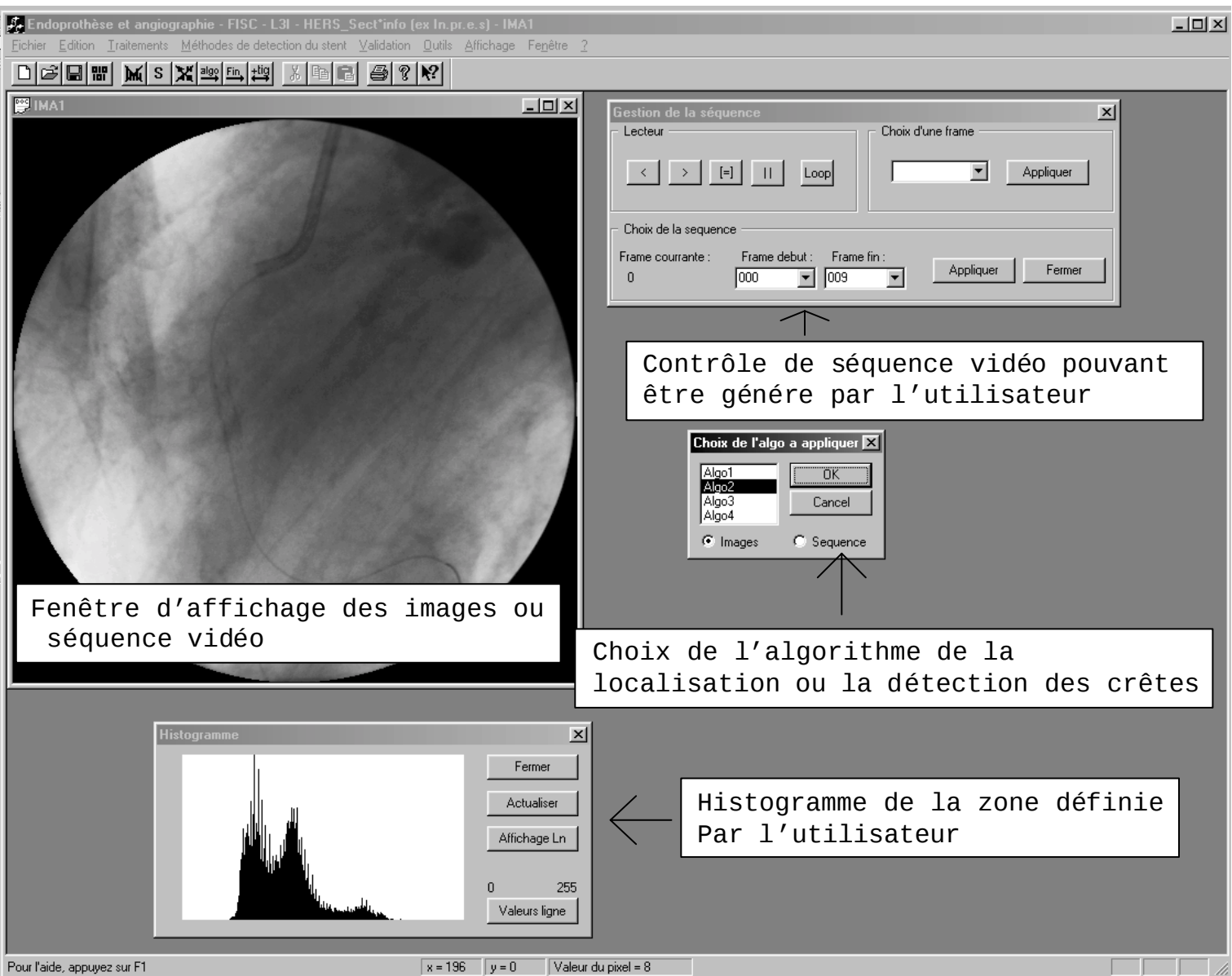


FIG. C.2 – Capture d'écran de l'interface générale du logiciel.

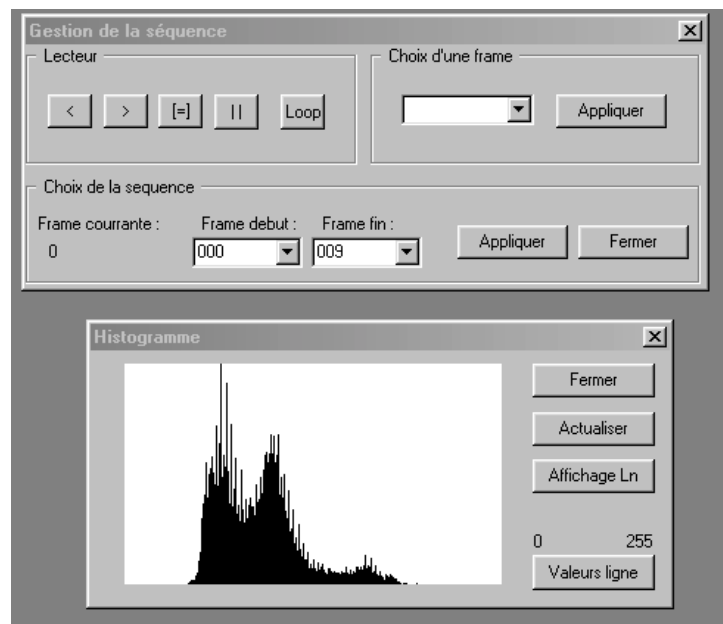


FIG. C.3 – Capture d'écran sur la fenêtre de gestion de l'affichage de séquence vidéo et d'histogramme.

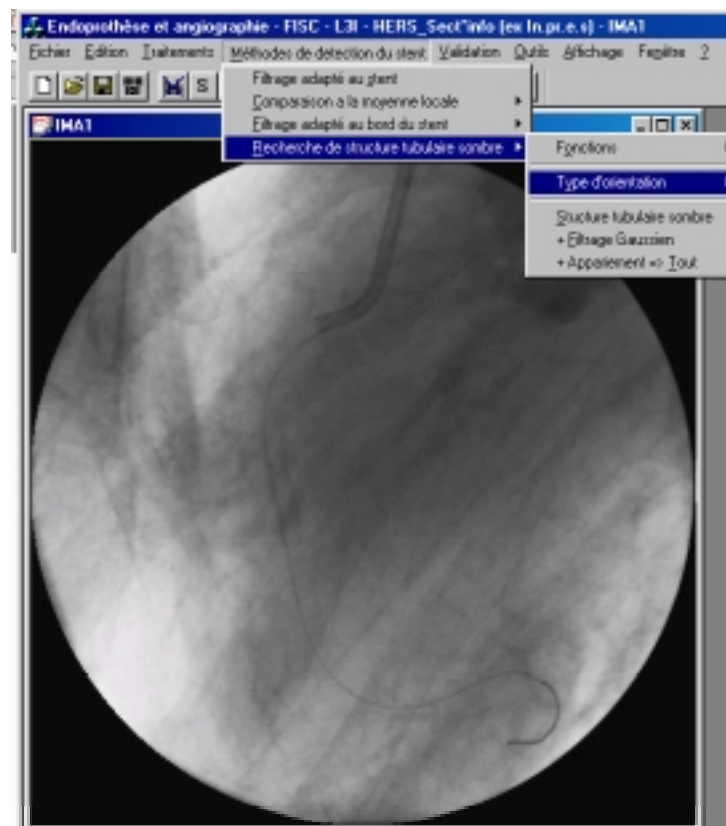


FIG. C.4 – Capture d'écran.

Annexe D

Présentation du logiciel de simulation de projection

Dans cette annexe, nous présentons des résultats de l'algorithme de simulation de projection rayons X que nous avons développé.

Dans la Figure.D.1, nous montrons un stent et sa projection simple.

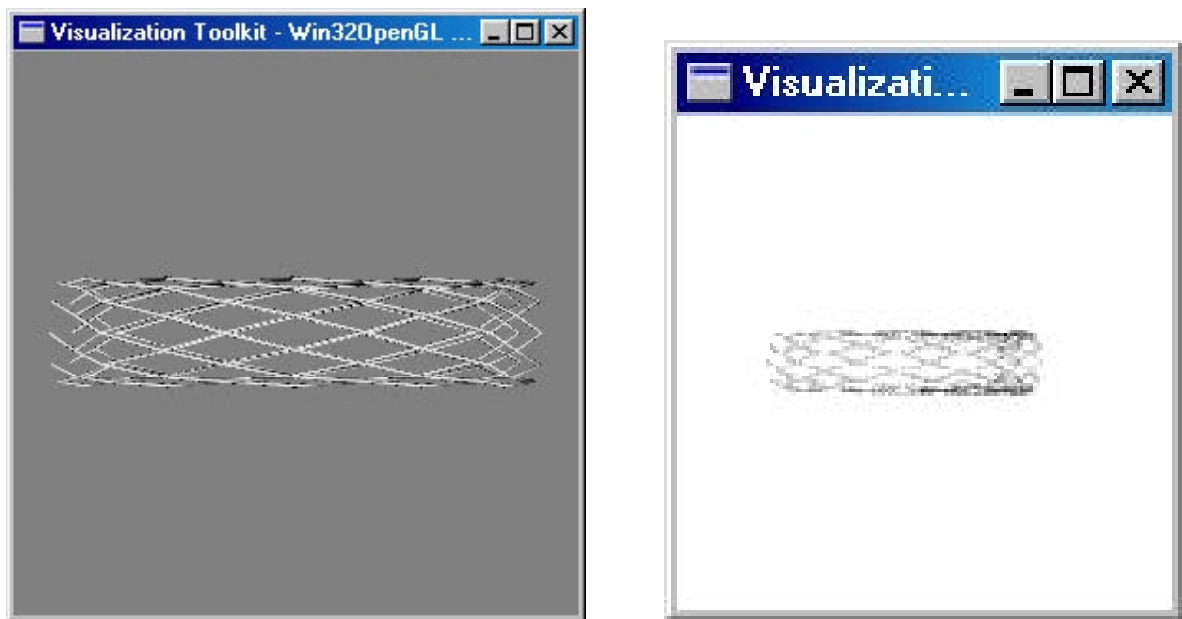


FIG. D.1 – A gauche, modélisation du stent initial, à droite, sa projection.

Dans les figures suivantes, nous montrons des projections de stents dans des images rayons X réelles. Ces projections de stents ont pu être insérées grâce aux matrices de projections des acquisitions réelles. Nous avons également pu choisir leur emplacement et orientation ainsi que leur rapport homothétique.

Le stent situé en haut de l'image est un stent synthétisé, celui du milieu de l'image est un vrai.



FIG. D.2 – Exemple de projection de stent.



FIG. D.3 – Exemple de projection de stent.

Bibliographie

- [1] Mohammad-Djafari A.. « Binary polygonal shape image reconstruction from a small number of projections ». *ELEKTRIK*, 5 :127–138, 1997.
- [2] Mohammad-Djafari A.. « Maximum d'entropie et problèmes inverses en imagerie ». *Traitement du Signal*, 11 :87–116, 1994.
- [3] L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P-L. LIONS, et J-M. MOREL. « Axioms and Fundamental Equations of Image Processing ». *Arch. Rationnal Mech. Anal.*, 123 :199–257, 1993.
- [4] L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P.L. LIONS, et J.M. MOREL. « Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (ii) ». *Arch. Rationnal Mech. Anal.*, 29(3) :845–866, 1992.
- [5] G. AUBERT et L. LAZAROIA. « A variational method in image recovery. ». Technical Report TR 423, URA 168 du CNRS, Laboratoire J-A Dieudonné, Université de Nice Sophia-Antipolis, Juin 1995.
- [6] J. BABAUD, A. P. WITKIN, M. BAUDIN, et R. D. DUDA. « Uniqueness of the Gaussian kernel for scale-space filtering ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(1) :26–33, Janvier 1986.
- [7] Z. BAI, P.R. KRISHNAIAH, C.R. RAO, P.C. REDDY, Y.N. SUN, et L.C. ZHAO. « Reconstruction of the left ventricle from two orthogonal projections based on theorems of equal divisors curves ». Technical report, University of Pittsburgh, 1986.
- [8] F. BALIBAR. « La probabilité sans sujet ». *Hors-série Sciences et Avenir, L'empire des probabilités*, (128) :60–66, Octobre/Novembre 2001.
- [9] H. H. BARRETT et W. SWINDELL. *Radiological Imaging : The Theory of Image Formation, Detection and Processing*, volume 2. Ed. Academic Press, 1981.
- [10] M. BERTALMIO, A. L. BERTOZZI, et G. SAPIRO. « Navier-Stokes, Fluid Dynamics, and Image and Video Inpainting ». In *IEEE CVPR, Hawaii, USA*, Décembre 2001.
- [11] M. BERTALMIO, G. SAPIRO, V. CASELLES, et C. BALLESTER. « Image Inpainting ». In *Proceedings of SIGGRAPH 2000, New Orleans, USA*, Juillet 2000.
- [12] L. BLANC-FERAUD. « Sur quelques problèmes inverses en traitement d'image ». Habilitation à Diriger des Recherches - Spécialité : Sciences Pour l'Ingénieur, Université de Nice-Sophia Antipolis, Juillet 2000.
- [13] I. BLOCH. « Fusion de données, ensembles flous et morphologie mathématique en traitement d'images. Application à l'imagerie médicale cérébrale et cardio-vasculaire multimodalités ». Habilitation à Diriger des Recherches, ENST Paris, 1995.
- [14] N. BOHR. *Physique atomique et connaissance humaine*. Gallimard, Coll. "Folio-Essais", 1991.

- [15] J.J.R.M BONNIER. « In-Stent restenosis in Coronary Vessels ». *Proceedings ETC'99, Paris*, 679–682, Mai 1999.
- [16] L. BRILLOUIN. *Science and Information Theory*. Academic Press, 1962.
- [17] R. BROCKETT et P. MARAGOS. « Evolution equations for continuous-scale morphological filtering ». *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(12) :3377–3385, 1994.
- [18] H. BUONOCORE, W.R. BRODY, et A. MACOVSKI. « A natural pixel decomposition for two dimensional image reconstruction ». *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 28 :69–78, 1981.
- [19] M. CASAS, A. PLASTINO, et A. PUENTE. « Fisher information and the inference of wave functions for systems of unknown Hamiltonian ». *Physics Letters A*, 248 :161–166, November 1998.
- [20] V. CASELLES, R. KIMMEL, et G. SAPIRO. « Geodesic Active Contours ». *International Journal of Computer Vision*, 22(1) :61–79, Février 1997.
- [21] F. CATTÉ, T. COLL, P.L. LIONS, et J.M. MOREL. « Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (i) ». *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 29(1) :182–193, Février 1992.
- [22] A. CHAMBOLLE et P.L. LIONS. « Image recovery via total variation minimization and related problems ». *Numerische Mathematik*, 76 :167–188, 1997.
- [23] P. CHARBONNIER, G. AUBERT, M. BLANC-FERRAUD, et M. BARLAUD. « Two deterministic half quadratic regularization for computed imaging ». In *Proc. IEEE International Conference Image Processing, Austin-TX*, volume II, 168–172, Novembre 1994.
- [24] P. CHARBONNIER, M. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT, et M. BARLAUD. « Deterministic edge-preserving regularization in computer imaging ». *IEEE Transactions on Image Processing*, 6 :298–311, 1997.
- [25] C. CHESNAUD, P. RÉFRÉGIER, et V. BOULET. « Statistical Region Snake-Based Segmentation Adapted to Different Physical Noise Models ». *IEEE Transactions Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21 :1145–1157, 1999.
- [26] Ouvrage COLLECTIF. *Université de tous les savoirs : Les Mathématiques*, volume 13. Odile Jacob (Collection Poches), mai 2002.
- [27] G. COTTET et L. GERMAIN. « Image processing through reaction combined with non-linear diffusion ». *Mathematics of Computation*, 61(204) :659–67, 1993.
- [28] CROWLEY, J. AND PARKER, A.. « A representation for shape based on peaks and ridges in the difference of low-pass transform ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6 :156–170, 1984.
- [29] R. V. DENTON, B. FRIEDLANDER, et A. J. ROCKMORE. « Direct Three-Dimensional Image Reconstruction for Divergent Rays ». *IEEE Transactions on Nuclear Science*, NS-26(5) :4695–4703, 1979.
- [30] R. DERICHE. « Using Canny's criteria to derive a recursively implemented optimal edge detector ». *International Journal of Computer Vision*, 167–187, 1987.
- [31] R. DERICHE. « Recursively implementing the Gaussian and its derivatives ». Technical Report 1893, INRIA, 1993.
- [32] R. DERICHE et O. FAUGERAS. « Les EDP en traitement des images et vision par ordinateur ». Technical Report 2697, INRIA, 1995.

-
- [33] T. DESCHAMPS. « *Curve and Shape Extraction with Minimal Path and Level-Sets techniques. Applications to 3D Medical Imaging.* ». PhD thesis, Université Paris-Dauphine, 2001.
 - [34] Hubel D.H. et Wiesel T.N.. « Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex ». *Journal of Physiology*, 160 :106–154, 1962.
 - [35] J.M. DINTEN. « *Tomographie à partir d'un nombre limité de projections, régularisation par des champs markoviens* ». Thèse de Doctorat, Université Paris XI, 1990.
 - [36] M. R. DOBIE, P.H. LEWIS, et M.S. NIXON. « Curvilinear network extraction from remotely sensed images ». *MVA'94 IAPR Workshop on Machine Vision Applications, Kawasaki, Japan*, 123–126, 1996.
 - [37] J. DUCHON. *Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces in Constructive Theory of Functions of Several Variables*. W. Schempp and K. Zeller Eds, Berlin, Springer Verlag edition, 1977.
 - [38] R. DUDA, P. HART, et D. STORK. *Pattern Recognition*. Wiley-Interscience, second edition edition, 2000.
 - [39] D. EBERLY. « *Geometric methods for analysis of ridges in N-Dimensional images* ». PhD Thesis, University of North Carolina at Chapel Hill, 1994.
 - [40] R EBERLY, R GARDNER, B MORSE, S PIZER, et C SCHARLACH. « Ridges for Image Analysis ». *Journal of Mathematic Imaging and Vision*, 4 :384–396, Décembre 1994.
 - [41] P.P.B. EGGERMONT et G.T. HERMAN. « Iterative algorithm for large partitioned linear sytems with applications to image reconstruction ». *Linear Algebra and its Applications*, 40 :37–67, 1981.
 - [42] C. ENROTH-CUGELL et J.G. ROBSON. « The contrast sensitivity of retinal ganglion cells of the cat ». *Journal of Physiology*, 187 :517–552, 1966.
 - [43] L.A. FELDKAMP, L.C. DAVIS, et J.W. KRESS. « Practical cone beam algorithm ». *Journal Optical Society of American*, 1(6) :612–619, 1984.
 - [44] M. A. FISCHLER et H. C. WOLF. « Linear delineation ». *Computer Vision and Pattern Recognition*, 351–356, 1981.
 - [45] L.M.J. FLORACK, B.M. ter HAAR ROMENY, J.J. KOENDERINK, et M.A. VIERGEVER. « Scale And The Differential Structure Of Images ». *IVC*, 10 :376–388, 1992.
 - [46] A.F. FRANJI, W.J. NIESSEN, K.L. VINCKEN, et M.A. VIERGEVER. « Multi-scale vessel enhancement filtering ». volume 1496, 130–137, 1998.
 - [47] B. R. FRIEDEN. *Physics from Fisher Information*. Cambridge University Press, 1998.
 - [48] B. R. FRIEDEN et B. SOFFER. « Lagrangians of physics and the game of Fisher-information transfer ». *Physical Review E*, 3(52) :2274–2286, Septembre 1995.
 - [49] B.R. FRIEDEN. « Fisher information as a measure of time ». In *Astrophysics and Space Sciences*. 244 :387-391. Kluwer Academic Publishers, 1996.
 - [50] D. GABOR et P. C. J. HILL. « Television bandwith compression by contour interpolation ». *IEE Proceedings*, 108(39) :303–315, Mai 1961.
 - [51] T. H. GABOR. *Image Reconstruction From Projections*. Academic Press, 1980.
 - [52] M. GARREAU, J.L. COATRIEUX, R. COLLOREC, et C. CHARDENON. « A knowledge based approach for 3D reconstruction and labelling of vascular network from biplane angiographic projections ». *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 10(2) :122–131, 1991.

- [53] D. GEMAN et B. JEDYNAK. « Shape recognition and twenty questions ». Technical Report 2155, INRIA-Rocquencourt, 1993.
- [54] D. GEMAN et B. JENYDAK. « An active testing model for tracking roads in satellite images ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18 :1–14, Janvier 1996.
- [55] S. GEMAN et D. GEMAN. « Stochastic relaxation, Gibbs distribution and the Bayesian restauration of images ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6 :721–741, 1984.
- [56] S. GEMAN et MCLURE. « Bayesian Image Analysis : an application to single photon emission tomography ». *Proceedings of the American Statistical Association*, 12–18, 1985.
- [57] S. GEMAN et G. REYNOLDS. « Constrained Restoration and the Recovery of discontinuities. ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14 :367–383, 1992.
- [58] G. GERIG, G. SZÉKELY, et T. KOLLER. « Mustererkennung, Informatik aktuell », Chapitre Line Finding in 2D and 3D by multi-valued non-linear diffusion of features maps, 289–296. S.J.Pöppel and H.Handels, 1993.
- [59] P. GILBERT. « Iterative methods for the three dimensional reconstruction of an object from projections ». *Journal Theori Biol.*, 36 :105–117, 1972.
- [60] R. GORDON, R. BENDER, et Herman G.T.. « Algebraic Reconstruction Technique (ART) for 3 Dimensional Electron Microscopy and X-Ray Photography ». *Journal Theor. Biol.*, 29 :471–481, 1984.
- [61] Y. GOUSSARD. *From Pixel to Structure*. Editions de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 1997.
- [62] P. GRANGEAT. « Mathematical framework of cone beam reconstruction via the first derivative of the Radon transform ». In *Herman G.T. Louis A.K. Natterer F. Eds, Mathematical Methods in Tomography, Lectures Notes in Mathematics, Springer Verlag, n°1497*, 66–97, 1987.
- [63] P.J. GREEN. « Bayesian Reconstruction From Emission Tomography Data Using A Modified EM Algorithm. ». *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 9 :84–93, 1990.
- [64] F. GUICHARD et Morel J.M.. « IPAM GBM Tutorials. Image Analysis and PDE's ». Technical Report, Février 2001.
- [65] G.T. GULLBERG. « The reconstruction of fan beam data by filtering the back-projection ». *Computer Graphics and Image Processing*, 10 :30–47, 1979.
- [66] J. HADAMARD. « Lectures on Cauchy's problem in linear partial differential equations ». Technical Report, Yale University Press, New Heaven, 1923.
- [67] R. HARALICK. « Ridges and valleys in digital imaging ». *CVGIP*, 22 :28–38, 1983.
- [68] R. HORAUD et O. MONGA. *Vision par Ordinateur, Outils fondamentaux*. Hermès, 1995.
- [69] G.M. HOUNSFIELD. « A method and apparatus for examination af a body by radiation such as X or Gamma ». *Patent Specification n°1283915*, 1972.
- [70] R. A. HUMMEL et B. C. GIDAS. « Zero Crossings and the Heat Equation ». Technical Report 111, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, Mars 1984.
- [71] T. IJIMA. « Basic equation of figure and observationnal transformation ». *System, Computer, Controls*, 2(4) :70–77, 1971.

-
- [72] P. JACKWAY. « Morphological Scale-Space ». In *International Conference on Pattern Recognition, Amsterdam, Netherlands*, volume C, 252–255, 1992.
 - [73] P. JACKWAY et R. DERICHE. « Scale-space properties of the multi-scale morphological dilatation-erosion ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(1) :38–51, 1996.
 - [74] B. JAHNE, H. HAUSSECKER, et P. GEISSLER. *Handbook of Computer Vision and Applications : Slipcased*. Academic Press, 1999.
 - [75] C. JORDAN. « Sur les lignes de faite et de Thalweg ». *C.R.* 75, 625–627, 1023–1025, 1872.
 - [76] G. KANIZSA. *La grammaire du Voir*. Editions Diderot, Paris, 1998.
 - [77] M. KASS, A. WITKIN, et D. TERZOPOULOS. « Snakes : Active contour models ». *International Journal of Computer Vision*, 1 :321–331, 1988.
 - [78] C.D. KERMADE. « *Segmentation d'images : recherche d'une mise en œuvre automatique par coopération de méthodes* ». Thèse, Université de Rennes 1, 1997.
 - [79] S. KIRKPATRICK, C.D. GELATT, et Vecchi M.P.. « Optimization by simulated annealing ». *Science*, 220(4598) :671–680, 1983.
 - [80] J.J. KOENDERINK. « The Structure of Images ». *Biological Cybernetics*, 50 :363–370, 1984.
 - [81] J.J. KOENDERINK et A.J. VAN DOORN. « Receptive field Families ». *Biological Cybernetics*, 63 :291–297, 1990.
 - [82] J.J. KOENDERINK et A.J. van DOORN. « Generic Neighborhood Operators ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(6) :597–605, Juin 1992.
 - [83] J.J. KOENDERINK et A.J. VAN DOORN. « Surface shape and curvature scales ». *Image and Vision Computing*, 10 :557–565, 1992.
 - [84] J.J. KOENDERINK et A.J. VAN DOORN. « Two-Plus-One-Dimensional Differential Geometry ». *Pattern Recognition Letters*, 15(5) :439–443, May 1994.
 - [85] J.J. KOENDERINK et A.J. VAN DOORN. « *Advances in Imaging and Electron Physics, Vol. 103* », Chapitre The Structure of Relief, 65–150. Academic Press, 1998.
 - [86] G. KOEPFLER, C. LOPEZ, et J-M. MOREL. « A multi-scale algorithm for image segmentation by variational method ». *Siam Journal of Numerical Analysis*, 31(1) :282–289, 1994.
 - [87] K. KOFFKA. *Principles of Gestalt Psychology*. Lund Humphries, London, 1935.
 - [88] H.P. KRAMER et J.B. BRUCKNER. « Iterations of a non-linear transformation for enhancement of digital images ». *Pattern Recognition*, 7 :53–58, 1975.
 - [89] K. KRISSIAN. « *Traitement multi-échelles : Applications à l'imagerie médicale et à la détection tridimensionnelle de vaisseaux* ». Thèse, INRIA, Sophia Antipolis, Janvier 2000.
 - [90] T.S. KUHN. *La structure des Révolutions Scientifiques*. Trad. Française, Paris : Flammarion, 1972.
 - [91] J. KYBIC, T. BLU, et M. UNSER. « Variational Approach to Tomographic Reconstruction ». *SPIE on Medical Imaging 2001 : : Image Processing (MI'2001). Proceedings of SPIE, San Diego CA, USA*, 4322, février 2001.
 - [92] J. KYBIC, T. BLU, et M. UNSER. « Generalized Sampling : A variational Approach. Part I - Applications ». *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50 :1965–1976, 2002.
 - [93] J. KYBIC, T. BLU, et M. UNSER. « Generalized Sampling : A variational Approach. Part II - Theory ». *IEEE Transactions on Signal Processing*, 50 :1977–1985, 2002.

- [94] P. LAX. « Numerical solution of partial differential equation ». *Am. Math. Mon.*, 72 :74–84, 1965.
- [95] T. LINDBERG. « Scale Space for Discrete Images ». In *Scandinavian Conference on Image Analysis 89, Oulu*, 1098–1107, juin 1989.
- [96] T. LINDBERG. « Discrete Derivative Approximations with Scale-Space Properties : A Basis for Low-Level Feature Extraction ». *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 3(4) :349–376, 1993.
- [97] T. LINDBERG. « On the Axiomatic Foundations of Linear Scale-Space : Combining Semi-Group Structure with Causality vs. Scale Invariance ». In *ISRN KTH*, 1994.
- [98] T. LINDBERG. « Scale-Space Theory : A Basic Tool for Analysing Structures at Different Scales ». *Applied Statistic*, 21(2) :224–270, 1994.
- [99] T. LINDBERG. *Scale-Space Theory in Computer Vision*. Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [100] T. LINDBERG. « Edge detection and ridge detection with automatic scale selection ». *Computer Vision and Pattern Recognition*, 465–470, 1996.
- [101] A.M. LOPEZ, F. LUMBRERAS, J. SERRAT, et J.J. VILLANUEVA. « Evaluation of Methods for Ridge and Valley Detection ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(4) :327–335, April 1999.
- [102] D. LÓPEZ, M. Lloret et J. SERRAT. « Multilocal Creaseness Based on the Level Set Extrinsic Curvature ». Technical Report 26, Centre de Visió per Computador, Dept. d’Informàtica, Universitat Autònoma de Barcelona, 1997.
- [103] P. MARAGOS. « Algebraic and PDE approaches for multi-scale image operators with global constraints : reference semi-lattice erosions and levelings ». In *ScaleSpace01*, 2001.
- [104] J. MARCO et A. BLACK. « A perspective on the coronary stenting of coronary stenting ». *Proceedings ENDOVASCULAR THERAPY COURSE : CORONARY AND PERIPHERAL*, 110–137, Mai 1999.
- [105] D. MARR. *Vision : A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information*. W.H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [106] G. MATHERON. *Random Sets and Integral Geometry*. Wiley, New York, 1975.
- [107] T. MCINERNEY et D. TERZOPOULOS. « Topology adaptive deformable surfaces for medical image volume segmentation ». *MedImg*, 18(10) :840–850, October 1999.
- [108] M. MENARD. « Contribution à la modélisation de l’information de son ambiguïté, incertitude et imprécision en reconnaissance des formes et analyse d’images. Application à la vision et à l’imagerie cardiovasculaire ». Habilitation à Diriger des Recherches. Spécialité : Génie informatique, automatique et traitement du signal, L3i - Université de la Rochelle, Mai 2002.
- [109] J. MONTEIL et A. BEGHDAI. « A new interpretation and improvement of the nonlinear anisotropic diffusion for image enhancement ». *IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(9) :940–946, Septembre 1999.
- [110] P. MONTESINOS et L. ALQUIER. « Perceptual organization of thin networks with active contour functions applied to medical and aerial images ». *13th International Conference on Pattern Recognition, Vienne, Autriche*, 1 :647–651, 1996.

-
- [111] J.M. MOREL et S. SOLIMINI. « Segmentation of images by variational methods : a constructive approach. ». *Revue Mathématique de l'Université de calcul de Madrid*, 1 :168–182, 1988.
 - [112] B.S. MORSE, S.M. PIZER, et A. LIU. « Multiscale Medial Analysis Of Medical Images ». *Image and Vision Computing*, 12(6) :327–338, July 1994.
 - [113] D. MUMFORD et J. SHAH. « Boundary detection by minimizing functionals ». In *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition CVPR*, 22–26. IEEE Computer Society Press, 1985.
 - [114] D. MUMFORD et J. SHAH. « Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. ». *Communication on Pure and Applied Mathematics.*, 42 :577–684, 1989.
 - [115] O. NALCIOGLU et Z.H. CHO. « Reconstruction of 3D objects from cone beam projections ». *Proceedings of the IEEE*, 66(11) :6–18, Novembre 1978.
 - [116] M. NIELSEN, L.M.J. FLORACK, et R. DERICHE. « Regularization, Scale-Space, And Edge-Detection Filters ». In *European Conference on Computer Vision, Cambridge, UK*, 70–81, Avril 1996.
 - [117] M. NITZBERG et T. SHIOTA. « Nonlinear Image Filtering with Edge and Corner Enhancement ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(8) :826–833, Août 1992.
 - [118] N. NORDSTRÖM. « Biased anisotropic diffusion - A unified regularization and diffusion approach to edge detection ». *Image and Vision Computing*, 4(8) :318–327, 1990.
 - [119] B. OLSHAUSEN et D. FIELD. « Sparse coding with an overcomplete basis set : A strategy employed by V ». *Vision Research*, (37) :3311–3325, 1997.
 - [120] S. OSHER et Setian. J.. « Fronts propagating with curvature dependent speed : algorithms based on the Hamilton-Jacobi formulation ». *Journal of Computational Physics*, 79 :12–49, 1988.
 - [121] N. OTSU. « *Mathematical studies on feature extraction in pattern recognition* ». Phd thesis n° 818 (in japanese), Electrotechnical Laboratory, 1981.
 - [122] OUVRAGE COLLECTIF, COORDONNÉ PAR : J.P. COCQUEREZ ET S. PHILIPP. *Analyse d'images : Filtrage et Segmentation*. Masson, 1996.
 - [123] J. PARK, D. METAXAS, et A. YOUNG. « Deformable Models With Parameter Functions : Application to Heart-Wall Modeling ». In *Computer Vision and Pattern Recognition 94, Seattle, Washington*, 437–442, 1994.
 - [124] E.J. PAUWELS, L.J. VAN GOOL, P. FIDDELAERS, et T. MOONS. « An Extended Class of Scale-Invariant and Recursive Scale Space Filters ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 17(7) :691–701, Juillet 1995.
 - [125] T. PAVLIDIS. « Segmentation of pictures and maps through functional approximation ». *Computer Graphics and Image Processing*, 1 :360–372, 1972.
 - [126] F. PENNINI et A. PLASTINO. « Fisher's information measure in a Tsallis' nonextensive setting and its application to diffusive processes ». *Physica A : Statistical and Theoretical Physics*, 247 :559–569, Décembre 1997.
 - [127] P. PERONA et J. MALIK. « Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12 :629–639, 1990.

- [128] J. PERRIN. « *Perception de la profondeur et du mouvement : application à l'ergonomie des interfaces homme-machine en téléopération* ». PhD thesis, 1996.
- [129] R. PETIA, C. CAÑERO, J.J. VILLANUEVA, Mauri J., et E. NOFRERIAS. « 3D Reconstruction of a Stent by Deformable Models ». *Visualisation, Imaging, and Image Processing, IASTED - Marbella*, 417–422, Septembre 2001.
- [130] T. POGGIO, V. TORRE, et C. KOCH. « Computational Vision and Regularization Theory ». *Nature*, 317 :314–319, 1985.
- [131] T. POSTON et I. STEWART. *Catastrophy Theory and its Applications*. Pitman, London, 1978.
- [132] J. RADON. « Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre integraly erte längs gewisser Manning faltigkeiten ». *Ber. Verb. Saechs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys.*, 69 :262–277, 1917.
- [133] H. REEVES. *La Première Seconde*. Points, 1995.
- [134] R. ROBB. « *Three-dimensional biomeical imaging X-ray computed tomography : Advanced systems and applications in biomedical research anf diagnostic* », volume 1, Chapitre 5. Boca Raton, Florida, CRC Press Inc., 1985.
- [135] R.W. RODIECK et J. STONE. « Analysis of receptive fields of cat retinal ganglion cells ». *Journal of Neurophysiology*, 28 :833–849, 1965.
- [136] T.H ROMENY. « Introduction to Scale-Space theory : Multiscale Geometric Image Analysis ». Technical Report ICU-96-21, Utrecht University, 1996.
- [137] R. ROTHE. « Zum Problems des Talwegs ». *Sitz. ber. d.Berliner Math.*, 51–69, 1915.
- [138] A. ROUGEE, K HANSON, et D. SAINT-FÉLIX. « Comparison of 3D Tomographic Algorithms for Vascular Reconstruction ». *Proc. SPIE 914, Newport Beach, CA*, 397–405, février 1988.
- [139] N. ROUGON et F. PRETEUX. « Controlled Anisotropic Diffusion ». In *IS&T/SPIE'95 - Nonlinear Image Processing VI*, volume 2424, 329–340. Berger, M.O. and Deriche, R. and Herlin, I. and Jaffré, J. and Morel, J.-M., Février 1995.
- [140] N. ROUGON et F. PRÊTEUX. « Geometric Maxwell equations and the structure of diffusive scale-spaces ». In *Proceedings SPIE Conference on Morphological Image Processing and Random Image Modeling*, volume 2528, 151–165, 1995.
- [141] L. RUDIN et S. OSHER. « Total variation based image restoration with free local constraints ». In *proceedings of the International Conference on Image Processing (ICIP), Austin, Texas*, 1 :31–35, novembre 1994.
- [142] L.I. RUDIN. « *Images, Numerical Analysis of Singularities and Shock Filters.* ». Thèse, California Institute of Technology, 1987.
- [143] L.I. RUDIN, S. OSHER, et E. FATEMI. « Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms ». *Physica D*, (60) :259–269, 1992.
- [144] C. SAMSON. « *Contribution à la classification d'images satellitaires par approche variationnelle et équations aux dérivées partielles* ». PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, 2000.
- [145] G. SAPIRO. « From active contours to anisotropic diffusion ; Connections between basic PDE's in image processing ». In *Proceedings IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, 1 :477–480, Lausanne, Suisse, Septembre 1996.
- [146] G. SAPIRO et V. CASELLES. « Contrast enhancement via image evolution flows ». *Graphical Models and Image Processing*, 59 :407–416, 1997.

-
- [147] Y. SATO, S. NAKAJIMA, H. ATSUMI, T. KOLLER, G. GERIG, S. YOSHIDA, et R. KIKINIS. « 3D multi-scale line filter for segmentation and visualization of curvilinear structures in medical images ». *CVRMed-MRCAS'97, Lecture Notes in Computer Science*, 1 :213–222, 1997.
 - [148] L. I. SCHIFF. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, 2nd edition, 1955.
 - [149] J. SERRA. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, 1982.
 - [150] J. SERRA, G. MATHERON, F. MEYER, M. JOURLIN, B. LAGET, F. PRÊTEUX, et M. SCHMITT. *Image Analysis and Mathematical Morphology*, volume Vol-II : Theoretical Advances. Academic Press, London., 1988.
 - [151] P.W. SERRUYS, E. SOUSA, J. BELARDI, et AL. « Benestent II trial : subgroup analysis of patient assigned either to angiographic and clinical follow-up or clinical follow-up alone ». *Circulation*, page 653, 1997.
 - [152] C. E. SHANNON. « A mathematical theory of communication ». *Bell System Technical Journal*, 27 :379–423 and 623–656, Juillet and October 1948.
 - [153] J. SHEN et S. CASTAN. « An optimal linear operator for edge detection ». *Conference on Vision and Pattern Recognition, Miami, Florida, USA*, 109–114, Juin 1986.
 - [154] L.A. SHEP et Y. VARDI. « Maximum likelihood reconstruction for emission tomography ». *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1 :122–135, 1982.
 - [155] J. SPORRING et J.A. WEICKERT. « On Generalized Entropies and Scale-Space ». In *ScaleSpace97, Utrecht, the Netherlands*, Juillet 2-4 1997.
 - [156] J. SPORRING et J.A. WEICKERT. « Information Measures in Scale-Spaces ». *IEEE Transaction on Information Theory*, 45(3) :1051–1058, 1999.
 - [157] C. STEGER. « *Unbiased Extraction of Curvilinear Structures from 2D and 3D Images* ». Thèse, München, Techn. Univ. UTZ, 1998.
 - [158] D. SWEESTER. « Introduction to Relativistic Quantum Mechanics ». Technical Report, 1998.
 - [159] A. TALEB-AHMED. « *Etude des techniques de représentation 3D d'objets biologiques à partir d'acquisitions radiographiques X et IRM : applications en neuroradiologie et morphogénèse céphalique* ». Thèse de Doctorat, Université de Lille, 1992.
 - [160] S. TEBOUL. « *Reconstruction et Segmentation d'Images : Approches Variationnelle et EDP Couplées* ». Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1999.
 - [161] S. TEBOUL, L. BLANC-FÉRAUD, G. AUBERT, et M. BARLAUD. « Variational approach for edge-preserving regularization using coupled PDE's. ». *IEEE Transactions on Image Processing*, 7(3) :387–397, Mars 1998.
 - [162] J.P. THIRION. « Segmentation of tomographic data without tomographic reconstruction ». *IEEE Transaction on Medical Imaging*, 11(1) :102–110, 1992.
 - [163] J.P. THIRION et GOURDON.A. « Computing the Differential Characteristics of Isointensity Surfaces ». *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 61 :190–202, Mars 1995.
 - [164] A.N. TIKHONOV. « The Regularization of Ill-Posed Problems ». *Dokl. Akad. Nauk., SSR* 153(1) :49–52, 1963.
 - [165] D. TSCHUMPERLE et R. DERICHE. « Orthonormal Vector Sets Regularization with PDE's and Applications ». *International Journal of Computer Vision*, 50(3) :237–252, December 2002.

- [166] De Saint VENANT. « Surfaces à plus grande pente constitués sur des lignes courbes ». *Bulletin de la société de Philosophie et de Mathématiques de Paris*, 1852.
- [167] L. VINCENT et P. SOILLE. « Watersheds in Digital Spaces : An Efficient Algorithm Based on Immersions Simulations ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 13 :583–598, Juin 1991.
- [168] S. WATANABE. *Pattern Recognition : Human and Mechanical*. Wiley-Interscience, 1985.
- [169] J. WEICKERT. « Scale-space propoerties of non-linear diffusion filtering with a diffusion tensor ». Technical Report No. 110, Laboratory of technomathematics, University of Kaiserslautern, Germany, Octobre 1994.
- [170] J. WEICKERT, S. ISHIKAWA, et A. IMIYA. « Scale-space has been discovered in Japan ». Technical Report DIKU-TR-97/18, DIKU, Department of Computer Science - University of Copenhagen, Denmark, Août 1997.
- [171] M. WERTHEIMER. « Experimentelle Studien über das Sehen von Bewegung. ». *Zeitschrift für Psychologie*, 61 :161–265, 1912.
- [172] A. WITKIN. « Scale Space Filtering ». In *Proceedings International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, Karlsruhe, Germany, 1019–1023, 1983.
- [173] S.L. WOOD et M. MORF. « A fast implemenation of a minimum variance estimator for computerized tomography image reconstruction ». *IEEE Transactions Biomedical Engineering*, 28(2) :56–68, 1981.
- [174] R.L. YANG. « *Traitement numérique des angiogrammes : Vidéodensitométrie et reconstruction d'images en 3D à partir de deux projections orthogonales.* ». Thèse, CNAM, Paris, 1989.
- [175] A.L. YUILLE et T.A. POGGIO. « Scaling Theorems for Zero-Crossings ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 8(1) :15–25, Janvier 1986.

Résumé

Vincent Courboulay
L3I, Université de La Rochelle,
Avenue Michel Crépeau, 17042 La Rochelle Cedex 1, France.

Dans cette thèse, nous élaborons, dans le cadre méthodologique de la physique quantique, un cadre variationnel générique en traitement d'images bas niveau, fondé sur le principe de l'Information Physique Extrême. Nous utilisons cet outil, récemment développé, pour dériver, entre autres, la théorie des espaces d'échelles, et retrouver des diffusions linéaires et non linéaires classiques. Cette approche permet d'être optimal au sens d'un compromis entre imprécision des mesures et incertitude sur le phénomène mesuré. A ce nouveau modèle variationnel on associe l'équation de Klein-Gordon avec champs, ou en limite, celle de Schrödinger avec champs.

L'application associée concerne la détection et la reconstruction de prothèses coronaires, autrement appelées *stents*, à partir d'images rayons X.

Notre méthode s'apparente à une méthode de reconstruction 2D-3D orientée forme. En effet, nous couplons deux équations de Schrödinger avec champs. Cette écriture nous permet de tirer pleinement parti de l'acquisition tomographique, ainsi que d'une contrainte de ressemblance avec un modèle d'objet à reconstruire. Chacune de ces deux sources d'information est ainsi traduite de manière algorithmique par une équation de Schrödinger.

Afin de déterminer un potentiel d'attraction du modèle 2D vers la projection du stent, nous avons développé un nouveau descripteur multi-local flou de la surface de luminance d'une image, ainsi que deux algorithmes pragmatiques de détection et de localisation de pixels appartenant à la projection du stent.

Mots-clés : Axiomatisation du traitement d'images, Information Physique Extrême, information de Fisher, espaces d'échelles, diffusion, modèle quantique, reconnaissance de formes, coopération détection-reconstruction, imagerie médicale, stent.

Abstract

In this thesis, we have developed a variational framework for low level image processing based on the Extreme Physical Information. We have used this method, recently developed, in order to provide an axiomatic fundament for scale-space or diffusion. This method allows to be optimal in terms of compromise uncertainty - inaccuracy about the measured system. We derive, in the quantum framework, the Klein-Gordon and the Schrödinger equation with fields as new model of image.

The application we have focused on, is stent detection and reconstruction, stent is a coronary prothesis. The method we have adopted, is 2D-3D shape oriented, actually, we have coupled two Schrödinger equations in order to reconstruct the shape of the stent. Our goal is to extract the maximum of information located in X rays images. In order to develop a field to guide reconstruction, we develop a multi local shape index and two pragmatic algorithms to detect stent projection on X rays images.

Keywords : Image processing axiomatisation, Extreme Physical Information, Fisher information, scale-space, diffusion, quantum model, pattern recognition, reconstruction, medical imaging, stent.