

**THESE DE DOCTORAT**

Spécialité : **INFORMATIQUE**

**PAR**

**Nicolas LICHIARDOPOL**

**E-mail : lichiar@club-internet.fr**

**SUJET : Echange total, diffusion et quelques résultats sur  
les itérés des graphes représentatifs des arcs**



## Remerciements

Les premiers remerciements vont d'abord à Claudine Peyrat, ma directrice de thèse, qui m'a beaucoup aidée par sa gentillesse, sa disponibilité et sa rigueur. Grace à elle aussi « my taylor is very rich ».

Je remercie aussi, Charles Delorme, venant de Paris, que j'ai connu à Marseille, et qui a accepté d'être rapporteur et puis Miguel Angel Fiol, venant de Barcelone, qui a accepté aussi d'être rapporteur.

Merci aussi à Johnny Bond, originaire comme moi du fin fond de la Roumanie, et qui a accepté de faire partie du jury et de le présider.

Merci encore à Ralph Klassing et à Michel Syska, qui ont accepté spontanément de faire partie du jury.

Je remercie Jean Claude Bermond, que j'ai connu à Marseille dans le cadre du D.E.A et dont la passion communicative m'ont décidé à poursuivre dans la théorie des graphes ainsi que Stéphane Perennes, qui a dirigé mon mémoire de D.E.A et avec qui j'ai travaillé fructueusement. Je n'oublie pas Naussica Marlin, qui a vérifié mon travail sur deux conjectures, et qui m'a aidé pour les formalités liées à la participation à une conférence.

Je suis très reconnaissant à Patrick Solé, voisin de palier, que j'ai bombardé de questions et de petits problèmes et qui a toujours été disponible.

Enfin, « last but no least », je remercie mon épouse, qui a fait preuve de beaucoup de patience, ce qui n'est pas évident quand on n'est pas dans le « milieu », et qui me remercie quand même d'avoir fini cette thèse.



## Table des matières

Introduction Générale .....	7
Chapitre I :Echange total dans un graphe non orienté.....	17
<i>Introduction</i> .....	19
<i>Total exchange in constant time</i> .....	21
<i>Retour sur une conjecture reliant le temps d'échange</i> <i>total et la connectivité d'un graphe</i> .....	45
Chapitre II : Echange total et graphes de Cayley.....	47
<i>Introduction</i> .....	49
<i>Concerning two conjectures on the set of fixed points of a</i> <i>complete rotation of a Cayley graph</i> .....	51
<i>Temps d'échange total minimum de certains graphes de</i> <i>Cayley rotationnels</i> .....	71
<i>Graphes de Cayley isomorphes construits sur des groupes qui ne</i> <i>sont pas isomorphes</i> .....	77
Chapitre III : Echange total dans un graphe orienté.....	79
<i>Introduction</i> .....	81
<i>Echange total dans un graphe orienté de de Bruijn</i> .....	83
Chapitre IV : Diffusion dans un graphe quelconque.....	87
<i>Introduction</i> .....	89
<i>Broadcast time and connectivity</i> .....	91
<i>Connected graphs with the same minimum degree and matching</i> <i>number, broadcast time of these graphs</i> .....	99
Chapitre V : Diffusion dans les graphes orientés et non orientés de de Bruijn.....	105
<i>Introduction</i> .....	107
<i>Minimum broadcast time of a binary de Bruijn graph</i> .....	109
Chapitre VI : Nombre de stabilité d'un graphe de de Bruijn, généralisation aux itérés des graphes représentatifs des arcs.....	117
<i>Introduction</i> .....	119
<i>Nombre de stabilité d'un graphe non orienté de de Bruijn</i> .....	123
<i>Independance number of iterated line digraphs</i> .....	147
Chapitre VII : Quasi centres et rayons des graphes de de Bruijn et de Kautz.....	159
<i>Introduction</i> .....	161
<i>Proof of a conjecture on the size of a quasi-center in an undirected</i> <i>de Bruijn graph. Radius of such a graph</i> .....	163
<i>Quasi centers and radius of a Kautz graph, proof of a</i> <i>conjecture of Bond</i> .....	171



## INTRODUCTION GENERALE

Cette thèse comporte sept chapitres. Dans les cinq premiers nous nous intéressons à deux modèles de communication : l'échange total et la diffusion. Dans les deux derniers chapitres, nous donnons des résultats inédits sur les graphes de de Bruijn et de Kautz et d'une manière plus générale sur les graphes représentatifs des arcs itérés .

Par échange total dans un réseau non orienté (gossiping), on entend tout processus de distribution de l'information de chaque processeur à tous les autres, via des processeurs qui sont reliés (ce qui implique la connexité du réseau). Il s'agit bien sûr d'une communication globale. Selon les conditions qu'on pose au départ, plusieurs modèles sont possibles. On peut déjà différencier les conditions full-duplex et half-duplex. Dans le premier cas, un processeur  $x$  peut envoyer un message à un processeur  $y$  et recevoir en même temps un autre message de  $y$ , dans le deuxième cas, la transmission se fait dans un sens seulement. Si pour chaque processeur  $x$ , on limite à un certain nombre  $k$ , le nombre des voisins pouvant recevoir un message de  $x$  à chaque phase de l'échange total, on parle de contrainte  $k$ -port, et si  $x$  peut envoyer des messages à tous ses voisins, on parlera alors de modèle  $\Delta$ -port. On peut aussi poser des contraintes sur le nombre de messages qu'un processeur peut envoyer à un même voisin au cours d'une phase du processus. La combinaison de toutes ces contraintes fournit beaucoup de types de communication. Ainsi le problème classique du gossiping tel qu'il a été défini dans le célèbre article de Hajnal, Milner et Szemerédi (Voir [9]), correspond à un modèle d'échange total full-duplex, 1-port dans lequel il n'y a pas de limitation au nombre de messages qu'un processeur peut envoyer.

Selon la manière dont on veut mesurer la dispersion des informations, on conçoit principalement deux modèles :

Dans le modèle à temps constant, la transmission d'un message d'un processeur à un autre « coûte » une étape, ce qui fait que dans ce modèle on ne tient compte d'aucun paramètre, la longueur du message par exemple n'intervient pas. Dans le modèle à temps linéaire, le temps de transmission d'un message dépend affinement de la longueur du message. Il est évident que le dernier modèle est plus précis surtout pour des messages de grande longueur, mais plus difficilement exploitable. Par contre pour des courts messages, la mesure en temps constant est très proche de la réalité.

Dans le modèle à temps constant, un certain échange total ayant été choisi, le temps minimum d'échange total d'un réseau (T.M.E.T), est le nombre minimum d'étapes nécessaires pour que chaque processeur dispose de tous les messages.

On trouvera des nombreux résultats concernant l'échange total dans [8] et [10].

**Dans le premier chapitre** nous allons travailler en temps constant avec une variante très peu étudiée à ce jour du modèle full-duplex  $\Delta$ -port . Nous donnons déjà la description complète du protocole :

- Initialement chaque processeur possède un message distinct de celui d'un autre processeur. La dispersion se fait en plusieurs étapes, à chacune d'elles, un processeur peut envoyer au

maximum un message à chacun de ses voisins. Un processeur peut envoyer au cours d'une étape, un même message à plusieurs de ses voisins et il pourrait tout aussi bien envoyer des messages différents à des voisins différents.

On trouvera quelques résultats concernant cet échange total dans [1] [15] et [16].

Le réseau sera assimilé à un graphe connexe non orienté.

Nous donnons une nouvelle borne inférieure du T.M.E.T  $gf_*(I, G)$  d'un graphe  $G$ , une borne compliquée mais performante puisqu'on peut en déduire :

$$gf_*(I, G) \geq \left\lceil \frac{v(G) - I}{\delta(G)} \right\rceil \text{ et } gf_*(I, G) \geq D(G), \text{ où } v(G), \delta(G) \text{ et } D(G) \text{ désignent le nombre de}$$

sommets, le degré minimum et le diamètre de  $G$ . Ces deux inégalités fournissent deux bornes inférieures connues (voir [1]).

Nous montrons que le temps d'échange total minimal d'un arbre  $G$  est  $v(G) - I$ , ce qui nous permet de prouver que le T.M.E.T d'un graphe  $G$  dont le degré minimal est 1, est aussi  $v(G) - I$ . Nous donnons aussi deux bornes supérieures dans le cas général.

Nous introduisons deux notions nouvelles que nous appelons multi arborescence et multi arborescence compacte. Nous utilisons ces notions pour définir le schéma d'un échange total, ce qui nous permet de visualiser le processus d'un échange et de déterminer le temps de réalisation de cet échange.

Enfin, nous donnons deux conjectures pour des nouvelles bornes supérieures du T.M.E.T. Dans la première nous affirmons que pour tout graphe connexe  $G$ , on a  $gf_*(I, G) \leq v(G) - \delta(G)$ . Dans la deuxième conjecture nous affirmons que pour tout graphe

connexe  $G$ , on a  $gf_*(I, G) \geq \left\lceil \frac{v(G) - I}{k(G)} \right\rceil$  où  $k(G)$  est la connectivité de  $G$ . Nous justifions

d'abord le bien-fondé de ces conjectures. En travaillant sur des schémas d'échange total, nous prouvons la première conjecture pour un graphe de Cayley quelconque et pour un graphe  $G$

vérifiant  $\delta(G) \geq \left\lceil \frac{v(G)}{2} \right\rceil + 2$ .

Nous prouvons la deuxième conjecture pour un graphe de Cayley cubique construit sur un groupe abélien.

Le gros de ce chapitre est en fait un article intitulé « **Total exchange in constant time** » et qui a fait l'objet d'une soumission à « Networks ». Dans une dernière et courte section nous renforçons les assises de la deuxième conjecture en la prouvant pour les graphes  $G$  d'ordre  $v$

et de connectivité  $k$  avec  $\frac{v-I}{2} \leq k < v-I$ .

**Le deuxième chapitre** concerne l'échange total dans les graphes de Cayley.

Nous rappelons, que si  $\Gamma$  est un groupe et si  $S$  est une partie génératrice de  $\Gamma$  ne contenant pas l'élément neutre  $I$  et telle que  $x \in S \Rightarrow x^{-1} \in S$ , le graphe de Cayley  $G = Cay(\Gamma, S)$  est le graphe dont l'ensemble de sommets est  $V(G) = \Gamma$  et dont l'ensemble des arêtes est  $E(G) = \{\{x, y\}; x^{-1}y \in S\}$ .

Nous rappelons, sur ces graphes, la notion de rotation complète et de point fixe d'une telle rotation.

Un graphe de Cayley  $G = Cay(\Gamma, S)$  avec  $|S| = d$  étant donné, une rotation complète de  $G$  est un automorphisme  $\omega$  de  $\Gamma$  tel que pour un certain arrangement  $s_0, \dots, s_{d-1}$  des éléments



de  $S$ , on ait  $\omega(s_t) = s_{t+1}$  pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ , l'indexation étant faite modulo  $d$ . Un élément  $x \in \Gamma$  est dit point fixe de  $\omega$ , si  $x \neq I$  et s'il existe  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  tel que  $\omega^i(x) = x$ .

Cette notion de rotation complète a été définie par J. C. Bermond, T. Kodate et S. Perennes dans [1] et par P. Fragopoulou et S.G. Akl dans [7].

Nous proposons d'abord un article accepté à « Discrete Mathematics » et intitulé « **Concerning two conjectures on the set of fixed points of a complete rotation of a Cayley digraph** », article faisant suite à un exposé à l'I.C.G.T. 2000 à Marseille.

Nous rappelons que pour des naturels  $p$  et  $k$  avec  $p \geq 3$ ,  $k > 0$ , la grille torique  $T.M(p)^k$  est le graphe  $Cay(\mathbb{Z}_p^k, S)$ , où  $S = \{s_0, \dots, s_{2k-1}\}$  avec  $s_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, s_{k-1} = (0, \dots, 0, 1)$  et  $s_{k+i} = -s_i$  pour  $0 \leq i \leq k-1$ . Il est facile de voir que l'application  $\sigma : \mathbb{Z}_p^k \rightarrow \mathbb{Z}_p^k$  définie par  $\sigma(x_0, \dots, x_{k-1}) = (-x_{k-1}, x_0, \dots, x_{k-2})$  est une rotation complète de  $T.M(p)^k$ .

J.C. Bermond, S. Perennes, T. Kodate dans [1] et N. Marlin dans [15], ont conjecturé que l'ensemble des points fixes de  $\sigma$  est stable et ne disconnecte pas  $T.M(p)^k$ . Nous prouvons cette conjecture, ce qui permet de prouver que le T.M.E.T. d'une grille torique  $T.M(p)^k$  est optimal. Les mêmes auteurs ont conjecturé que l'ensemble des points fixes d'une rotation complète d'un graphe de Cayley  $G$ , ne disconnecte pas  $G$ . Nous infirmons à l'aide d'un contre-exemple cette deuxième conjecture.

Dans la section suivante, un graphe de Cayley  $G = Cay(\Gamma, S)$  muni d'une rotation  $\omega$  étant donné (graphe de Cayley rotationnel), nous montrons que si l'ensemble  $F_\omega$  des points fixes de  $\omega$  est stable et ne disconnecte pas  $G$ , alors le temps d'échange total minimal de  $G$  est optimal c'est-à-dire égal à  $\left\lceil \frac{v(G)-1}{d} \right\rceil$ . Le résultat est connu (Voir [1]), mais la

démonstration que nous donnons est différente. Nous tenons là une condition suffisante pour que le T.M.E.T d'un graphe de Cayley rotationnel soit optimal et nous verrons à l'aide d'un exemple que cette condition n'est pas nécessaire.

Nous donnons un exemple de rotation dont l'ensemble des points fixes n'est pas stable. Nous donnons enfin un exemple de graphe de Cayley dont le T.M.E.T n'est pas optimal. Puis en partant du contre exemple de l'article, nous exhibons deux graphes de Cayley isomorphes, mais dont les groupes qui les définissent ne sont pas isomorphes.

**Dans le troisième chapitre**, nous faisons une étude plus sommaire de l'échange total dans un graphe orienté. Le protocole est le même que pour l'échange total dans un graphe non orienté à la différence près qu'un sommet peut transmettre des messages seulement à ses successeurs. Nous montrons que le T.M.E.T., d'un graphe orienté  $G$  est minoré par

$\left\lceil \frac{v(G)-1}{\delta_-(G)} \right\rceil$  où  $\delta_-(G)$  est le nombre minimum de prédécesseurs distincts de lui-même qu'un

sommet  $x$  peut avoir. Cela nous fournit une borne inférieure du T.M.E.T d'un graphe orienté  $G$ . Nous nous intéressons ensuite à l'échange total dans le graphe orienté de de Bruijn  $B(d, D)$ .

Pour  $d \geq 2$  et  $D \geq 2$ , le graphe de de Bruijn  $B(d, D)$  est le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de  $Z_d^D$  et dont les arcs sont les couples  $(x_1 x_2 \dots x_D, y_1 \dots y_{D-1} y_D)$  tels que  $x_2 \dots x_D = y_1 \dots y_{D-1}$ . Pour  $D = 1$ ,  $B(d, 1)$  est le graphe orienté complet (avec boucle à chaque sommet) à sommets dans  $Z_d$ . Le graphe de de Bruijn  $UB(d, D)$  est le graphe non

orienté sous-jacent au graphe  $B(d, D)$ . Nous montrons par récurrence sur le diamètre  $D$  de

$B(d, D)$ , qu'on a  $gf_*(1, B(d, D)) = \left\lceil \frac{d^D - 1}{d - 1} \right\rceil = d^{D-1} + \dots + 1$ , ce qui montre en particulier que

le T.M.E.T. d'un graphe orienté de de Bruijn est optimal

Nous faisons cela en définissant à partir de  $B(d, D)$  un graphe quotient isomorphe à  $B(d, D - 1)$  (voir [4] et [12]).

**Dans le quatrième chapitre** nous abordons le problème classique de la diffusion (broadcasting). C'est un processus de dissémination de l'information à partir d'un unique initiateur dont nous rappelons le protocole :

A l'étape 0 un sommet  $x$  d'un graphe  $G$  possède un message. A l'étape  $i$ , un sommet ayant déjà reçu ce message peut l'envoyer au plus à un de ces voisins et un sommet n'ayant pas le message peut le recevoir au plus une fois. Le but est bien sûr qu'au bout d'un certain nombre d'étapes tous les sommets aient reçu le message de  $x$ .

**Le temps de diffusion**  $b_G(x)$  du sommet  $x$  est le nombre minimum d'étapes nécessaires pour terminer la diffusion à partir de  $x$ . **Le temps minimum de diffusion**  $b_{\min}(G)$  du graphe  $G$  est le plus petit des nombres  $b_G(x)$  où  $x$  parcourt l'ensemble  $V(G)$  des sommets de  $G$ . **Le temps de diffusion**  $b(G)$  du graphe  $G$  est le plus grand des nombres  $b(x)$  où  $x$  parcourt l'ensemble  $V(G)$  des sommets de  $G$ .

On rappelle que pour tout sommet  $x$  de  $G$ , on a  $b(x) \geq \lceil \log_2 v(G) \rceil$ , ce qui implique bien sûr  $b(G) \geq \lceil \log_2 v(G) \rceil$ .

**Un graphe de diffusion** (broadcast graph, en anglais) est alors un graphe connexe  $G$  tel que  $b(G) = \lceil \log_2 v(G) \rceil$ .

On peut trouver les résultats les plus significatifs dans [8] et dans [10].

Nous proposons d'abord un article intitulé « **Broadcast time and connectivity** » et accepté à « Discrete Applied Mathematics ».

Nous montrons dans cet article que pour un graphe connexe  $G$  de connectivité  $k(G) = k$ , on a

$b(G) \leq \lceil \log_2 k \rceil + 1 + \left\lceil \frac{v - 2^{\lceil \log_2 k \rceil + 1}}{k} \right\rceil$ . Pour  $n \geq 4$ , nous définissons  $\theta(n)$  de la manière suivante :

On considère les uniques entiers  $m$  et  $a$ , avec  $m \geq 1$  et  $1 \leq a \leq 2^m$  tels que  $n = 2^m + a$ . Nous posons alors  $\theta(n) = 2^{m-2} + \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil$  si  $1 \leq a \leq 2^{m-1}$  et  $\theta(n) = a$  si  $2^{m-1} < a \leq 2^m$ . Nous montrons alors qu'un graphe  $G$  d'ordre  $v$  tel que  $k(G) \geq \theta(v)$  est un graphe de diffusion. Cela fournit beaucoup d'exemples non triviaux de graphes de diffusion.

La section suivante est un article soumis à « Journal of graph theory » et intitulé « **Connected graphs with the same minimum degree and matching number, broadcast time of these graphs** ». Pour  $\delta \geq 1$  nous caractérisons l'ensemble  $G_\delta$  des graphes  $G$  vérifiant  $\delta(G) = m(G) = \delta$  et  $v(G) \geq 2\delta + 2$ , où  $m(G)$  est le nombre maximum d'arêtes indépendantes de  $G$ , autrement dit le numéro de couplage de  $G$ . Nous prouvons ensuite que pour  $k \geq 1$ , les graphes  $G$  vérifiant  $k(G) = m(G) = k$  et  $v(G) \geq 2k + 2$ , sont exactement les graphes de  $G_k$ . Cela, combiné avec les résultats de l'article précédent, nous permet de déterminer la valeur exacte du temps de diffusion de ces graphes.

**Dans le cinquième chapitre**, après avoir précisé le protocole dans un graphe orienté, nous nous intéressons à la diffusion dans les graphes orientés et non orientés de de Bruijn et plus précisément à la diffusion dans les graphes de de Bruijn  $UB(2, D)$  et  $B(2, D)$ .

Nous prouvons que pour  $D \geq 2$ , on a  $b_{min}(UB(2, D)) \leq b(UB(2, D-1)) + 1$ , inégalité valable aussi pour les graphes orientés, et que pour  $D \geq 3$ , on a  $b_{min}(UB(2, D)) \leq b(UB(2, D-2)) + 2$ . Pour cela nous utilisons une construction d'un graphe binaire orienté de de Bruijn de diamètre  $D-1$  à partir du graphe orienté  $B(2, D)$ . Ce genre de construction est utilisée plusieurs fois dans la thèse.

**Dans le sixième chapitre** nous proposons deux articles.

Dans le premier, intitulé « **Nombre de stabilité d'un graphe non orienté de de Bruijn** », et soumis à « Discrete Mathematics », nous nous intéressons au nombre de stabilité  $\alpha(d, D)$  d'un graphe non orienté de de Bruijn  $UB(d, D)$ , notion très peu étudiée (En dehors des travaux de R.D Bryant, H. Fredricksen dans [5] et Y. Kikuchi, Y. Shibata dans [14], nous n'avons rien trouvé d'autre). Nous nous intéressons aussi à ce que nous appellerons le pseudo nombre de stabilité  $\alpha^*(d, D)$  de  $UB(d, D)$ , c'est-à-dire au cardinal du plus grand stable n'ayant pas de sommets à boucles.

Préalablement, nous définissons à partir de  $B(d, D)$  trois graphes quotient isomorphes à  $B(d, D-1)$ . La théorie sous-jacente (certains homomorphismes surjectifs) a été traitée dans [4] et dans [12], mais ces constructions sont originales et ce sont elles qui nous ont permis de déterminer la valeur exacte du T.M.E.T. du graphe  $B(d, D)$  (chapitre 3), d'obtenir des résultats sur le temps minimum de diffusion du graphe binaire  $UB(2, D)$  (chapitre 5) et surtout de prouver les conjectures du septième chapitre. Toujours en vue d'une utilisation ultérieure, nous caractérisons les homomorphismes d'un graphe  $B(d, D)$  dans un graphe  $B(d', D)$ . Nous pensons que cette caractérisation pourrait avoir d'autres applications, mais nous n'avons pas eu le temps d'approfondir.

Nous considérons après, pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 2$ , l'application  $\Psi_{d, D}$  de  $\mathbb{Z}_d^D$  dans  $\mathbb{Z}_d^D$  définie par  $\Psi_{d, D}(x_1 \dots x_D) = x_2 \dots x_D x_1$ . Pour un élément  $x$  de  $\mathbb{Z}_d^D$  nous notons  $\mathcal{C}(x)$  le circuit élémentaire  $x, \Psi_{d, D}^1(x), \dots, \Psi_{d, D}^m(x)$  du graphe  $B(d, D)$  où  $m$  est le plus petit des naturels non nuls  $n$  tels que  $\Psi_{d, D}^n(x) = x$ .

On note  $C_{d, D}$  l'ensemble des circuits ainsi définis et distincts des classes  $\mathcal{C}(i_{d, D}) = \{i_{d, D}\}$  où  $i_{d, D} = i \dots i$  pour  $i \in \mathbb{Z}_d$  (les sommets à boucle de  $B(d, D)$ ).

Clairement, les circuits de  $C_{d, D}$  forment une partition de l'ensemble des sommets à boucles de  $B(d, D)$ . On note  $c_{d, D}$  le cardinal de  $C_{d, D}$ . Nous notons  $C_{d, D, 0}$  l'ensemble des circuits de  $C_{d, D}$  d'ordre pair et  $C_{d, D, 1}$  l'ensemble des circuits de  $C_{d, D}$  d'ordre impair. Nous notons  $c_{d, D, 0}$  et  $c_{d, D, 1}$  les cardinaux respectifs de ces deux ensembles.

Il y a eu plusieurs travaux sur ces circuits (Voir par exemple [5] et [6]).

En nous servant de ces circuits nous montrons que pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 4$ ,  $D$  pair, on a

$$\alpha(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d, D, 1}}{2} \text{ et que } \alpha(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d, D}}{2} + 1 \text{ pour } d \geq 2, D \geq 3, D \text{ impair.}$$

Nous donnons ensuite un théorème, qui pour  $D$  premier impair, établit un lien entre les nombres de stabilité des graphes  $UB(2, D)$  et  $UB(d, D)$ , pour  $d \geq 2$ . Plus précisément nous prouvons que si  $\alpha(2, D) = \frac{(D-1)(2^D - 2)}{2D} + 1$  et s'il existe un stable de  $UB(2, D)$  dont le

cardinal est  $\frac{(D-1)(2^D - 2)}{2D} + 1$  et contenant un seul sommet à boucle, alors pour tout  $d \geq 2$

on a  $\alpha(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1$ ,  $\alpha^*(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D}$  et il existe un stable de

$UB(d, D)$  de cardinal  $\frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1$  ayant un seul sommet à boucle. Nous verrons

que le théorème s'applique pour  $D \in \{3, 5, 7\}$ , ce qui nous permet de donner les valeurs exactes des nombres de stabilité des graphes  $UB(d, 3)$ ,  $UB(d, 5)$  et  $UB(d, 7)$ . Ces résultats nous poussent à conjecturer que pour  $d \geq 2$  et  $D$  premier  $\geq 3$ , on a

$$\alpha(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1 \text{ et } \alpha^*(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D}.$$

Nous établissons par la suite, la valeur exacte du nombre de stabilité d'un graphe de de Bruijn de diamètre 2, plus précisément on prouve que  $\alpha(2, 2) = 2$ ,  $\alpha(3, 2) = 3$ ,  $\alpha(d, 2) = \frac{d^2}{4}$

pour  $d$  pair  $\geq 4$  et enfin que  $\alpha(d, 2) = \frac{d^2 - 1}{4}$  pour  $d$  impair  $\geq 3$ .

Nous démontrons ensuite que pour  $d \geq 2, D \geq 3$ , on a  $\alpha^*(d, D) \geq d\alpha^*(d, D-1)$  et  $\alpha(d, D) \geq d\alpha(d, D-1) - d$ . Dans le cas où  $d = 2$  nous améliorons en prouvant que pour  $D \geq 2$ , on a  $\alpha(2, D) \geq 2\alpha(2, D-1) - 1$ . En utilisant ce genre d'inégalités, nous déterminons les nombres de stabilité des graphes de de Bruijn  $UB(2, D)$ , pour  $D \leq 7$ .

En considérant  $UB(2, D)$  en tant que graphe dont l'ensemble des sommets est  $\{0, 1\}^D$  (ce qui revient à considérer 0 et 1 en tant qu'éléments de  $Z$  et non de  $Z_d$ ), nous définissons

l'application  $\Phi_D$  de  $\{0, 1\}^D$  dans  $Z$  par  $\Phi_D(x_1 \dots x_D) = \sum_{i=1}^D (-1)^{i+1} x_i$ . A l'aide de plusieurs résultats intermédiaires portant sur cette application, nous prouvons que pour  $m \geq 4$ , on a

$$\alpha^*(2, 2m) \geq 2^{2m-1} - \frac{C_{2m}^m}{2} + C_{2m-2}^{m-2} \text{ et } \alpha^*(2, 2m+1) \geq 2^{2m} - C_{2m}^m + 2C_{2m-2}^{m-2}.$$

Cela nous donne des bornes inférieures du nombre de stabilité qui améliorent celles de Y. Kikuchi et Y. Shibata données dans [14].

Cela nous permet de prouver que  $\lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(2, D)}{2^D} = \frac{1}{2}$ , ce qui veut dire que la proportion du

nombre de sommets d'un plus grand stable de  $UB(2, D)$  tend asymptotiquement vers  $\frac{1}{2}$ . Les

exemples utilisés pour la démonstration invalident une conjecture de R.D. Bryant et H. Fredericksen (voir [5]) affirmant qu'asymptotiquement, la taille de la plus grande partie de

$B(2, D)$ , stable et dominante à la fois (cover set), est égale au  $\frac{4}{9}$  du nombre total de sommets.

Nous généralisons ensuite, en prouvant que pour  $d$  pair  $\geq 2$ , on a  $\lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(d, D)}{d^D} = \frac{1}{2}$ . Ce sera là le principal résultat de l'article.

Le deuxième article s'intitule « **Stability numbers of iterated line digraphs** ». Il a fait l'objet d'un exposé à la 19-ème « British Combinatorial Conference » et doit être révisé pour publication dans un numéro spécial de « Discrete Mathematics ».

Rappelons que le graphe représentatif des arcs (line digraph) d'un graphe orienté  $G$  est le graphe orienté  $L(G)$  dont les sommets sont les arcs de  $G$  et dont les arcs sont les couples  $((x, y), (y, z))$  où  $(x, y)$  et  $(y, z)$  sont des arcs de  $G$ . Le  $m$ -ième graphe représentatif des arcs itéré, est le graphe orienté défini par  $L^1(G) = L(G)$  et par la relation de récurrence  $L^m(G) = L(L^{m-1}(G))$ .

Un stable dans un graphe orienté sera pour nous une partie de  $V(G)$  telle que deux sommets distincts de cette partie ne soient pas adjacents.

Nous prouvons que si  $G$  est un graphe orienté régulier de degré au moins 2 (sans arcs multiples), la proportion du nombre de sommets d'un plus grand stable de  $L^m(G)$  tend vers  $\frac{1}{2}$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$  (on remarquera que cela implique que le dernier résultat de l'article précédent est valable en fait pour tout  $d$ ). Pour cela nous passons par trois résultats déterminants :

Le premier résultat affirme que si  $G$  est un graphe représentatif des arcs, régulier de degré  $d \geq 2$ , on a  $\alpha(G) \leq \frac{v(G)}{2}$ .

Le deuxième résultat affirme que si  $H$  est un graphe représentatif des arcs, régulier de degré  $d \geq 2$ , pour un entier  $r$  tel que  $0 \leq r \leq d$ , il existe une application  $f$  de  $V(H)$  dans  $\{0, 1\}$  telle que pour chaque sommet  $x$ , exactement  $r$  successeurs de  $x$  aient 1 comme image par  $f$ . Nous justifions cela en utilisant le fait que deux sommets quelconques d'un graphe représentatif des arcs, ou bien ont exactement les mêmes successeurs ou bien n'ont aucun successeur en commun.

Le troisième résultat affirme que pour  $0 < x < 1$ , on a :  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m (C_m^n)^2 x^{2n} (1-x)^{2m-2n} = 0$ .

**Dans le septième et dernier chapitre** nous proposons deux articles.

Dans le premier, soumis à « Discrete Mathematics » et intitulé « **Proof of a conjecture on the size of a quasi-center in an undirected de Bruijn graph. Radius of such a graph** » nous prouvons une conjecture de J. Bond (voir [4]), affirmant que le nombre minimum de sommets d'un quasi-centre de  $UB(d, D)$  est  $d - 1$ . Cela nous permet de démontrer d'une façon immédiate que pour  $d \geq 3$ , l'excentricité de n'importe quel sommet  $x$  de  $UB(d, D)$ , c'est-à-dire la plus grande distance entre  $x$  et les autres sommets, est  $D$ , et donc que le rayon de  $UB(d, D)$  (la plus petite des excentricités) est  $D$ . Enfin, nous prouvons d'une autre manière que le rayon de  $UB(d, D)$  est  $D$ . Cela a déjà été prouvé dans [4] mais les deux démonstrations que nous donnons sont tout à fait différentes.

Enfin dans le deuxième article soumis aussi à Discrete Mathematics et intitulé « **Quasi-centers and radius of a Kautz graph, proof of a conjecture of Bond** », nous validons une

autre conjecture de J. Bond (voir [4]) affirmant que le rayon du graphe de Kautz  $UK(2, D)$  est  $D$ .

Finissons cette introduction, en précisant que pour un graphe non orienté  $G$ ,  $\vec{G}$  sera le graphe orienté symétrique obtenu en orientant dans les deux sens chaque arête de  $G$  et que pour un graphe orienté  $G$ , le graphe  $G'$  sous-jacent sera le graphe non orienté obtenu en enlevant les boucles et toutes les orientations.

**Note :** A moins que le contraire soit mentionné, les références des introductions des chapitres, sont celles de l'introduction générale.

## Références

- [1] J.C Bermond, T. Kodate, S. Perennes, Gossiping on Cayley Graphs by Packets, Proceedings of franco-japanese conference at Brest, *Lect. Notes in Comp. Sci., Springer Verlag*, 1120 (1995), pp. 301-305.
- [2] J.C Bermond, X. Muñoz, A. Marchetti-Spaccamela, Induced Broadcasting Algorithms in Iterated Line Digraphs, EUROPAR Aout 1996, Lyon, *Lect. Notes in Comp. Sci., Springer Verlag*, 1123 (1996), pp. 313-324.
- [3] J.C. Bermond, C. Peyrat, Broadcasting in de Bruijn networks, Proceedings of the 19th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, *Congressus Numerantium*, 66 (1988), pp. 267-282.
- [4] J. Bond, Grands Réseaux d'Interconnexion, Thèse de Doctorat, Univ. Paris-Sud, 1987
- [5] R.D. Bryant, H. Fredricksen, Covering the de Bruijn Graph, *Discrete Math.*, 89 (1991), pp 133-148.
- [6] S.W. Golomb, Shift Register Sequences, Aegean Park, Press, Laguna Hills, CA, 1982.
- [7] P. Fragopoulou, S.G. Akl, Spanning subgraphs with application to communication on a subclass of the Cayley-graphs-based networks, *Discrete Appl. Math.*, 83 (1998), pp. 79-96.
- [8] P. Fraignaud, E. Lazard, Methods and problems of communication in usual networks, *Discrete Appl. Math.*, 53 (1994), pp. 79-133.
- [9] A. Hajnal, E.C. Milner, E. Szemerédi, A cure for the telephone disease, *Canad. Math. Bull.* 15 (1972) pp. 447-450.
- [10] S.M Hedetniemi, S.T Hedetniemi, A. Liestman, A survey of gossiping and broadcastig in communication networks, *Networks*, 18 (1988), pp. 319-349.
- [11] C. Heuchenne, Sur une certaine correspondance entre graphes, *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 33 (1964), pp. 743-753.

- [12] M.C. Heydemann, R. Harbane, P. Tvrđik, Uniform homomorphisms of de Bruijn and Kautz networks, LRI, Univ. Paris-Sud, rapport de recherche n° 986, 1995.
- [13] M.C. Heydemann, J. Opatrny, D. Sotteau, Broadcasting and spanning trees in de Bruijn and Kautz networks, *Discrete Appl. Math.*, 37-38 (1992), pp. 297-317.
- [14] Y. Kikuchi, Y. Shibata, On the independent set of de Bruijn graphs, 2001 World SES Intern. Conf. On Algorithmic Th., Discr. Math., Systems and Controls, Cairns, Australia, Dec. 2001 in Topics in Applied and Theoretical Mathematics and Computer Science, ed. V.V Kluev and N. Mastorakis, WSEAS Press, pp. 117-122 (2001).
- [15] N. Marlin, Rotations complètes dans les graphes de Cayley, D.E.A, Univ. De Nice-Sophia Antipolis, 1996.
- [16] N. Marlin, Communications structurées dans les réseaux, Thèse de doctorat, Univ. de Nice-Sophia Antipolis, 2000.
- [17] S. Perennes, Bound on the broadcasting time of the de Bruijn and Butterfly networks, en préparation.





# **CHAPITRE 1**

## **ECHANGE TOTAL DANS UN GRAPHE NON ORIENTE**



## 1. Introduction

En complément de l'introduction générale, nous rappelons les bases historiques de la communication globale dans un réseau, autrement dit, le problème classique du gossiping (rumeur en français).

En 1972, A. Hajnal, E.C. Milner et E. Szemerédi ont publié le problème suivant attribué à D.W. Boyd :

**“There are  $n$  ladies, and each one of them knows an item of scandal which is not known to any of the others. They communicate by telephone, and whenever two ladies make a call, they pass on to each other, as much scandal as they know at the time. How many calls are needed before all ladies know all the scandal?”**

Cet énoncé est le célèbre problème du gossiping ou encore le problème du téléphone. On notera qu'ici chaque personne peut appeler qui elle veut, ce qui veut dire, en termes plus mathématiques, qu'on est dans un graphe complet.

C'est à partir de ce problème qu'on a appelé gossiping, ou échange total si on veut, le modèle de communication dont le protocole est le suivant :

- On est dans un réseau d'interconnexion et chaque processeur possède un message distinct des messages des autres sommets. A chaque étape deux processeurs  $x$  et  $y$  peuvent échanger leurs messages, autrement dit  $x$  peut transmettre à  $y$  tous les messages qu'il possède déjà et vice versa. Cette transmission mutuelle impliquant deux processeurs est nommée appel. Il est entendu bien sûr qu'au cours d'une même étape un processeur est impliqué en au plus un appel. Le but est bien entendu, qu'à un moment ou un autre, tous les processeurs connaissent tous les messages.

Dans ce modèle, les transmissions entre deux processeurs peuvent se faire dans les deux sens (modèle full duplex). A une étape quelconque, un processeur  $x$  peut transmettre à un seul des processeurs auxquels il est relié, mais par contre, le nombre de messages pouvant être transmis n'est pas limité.

A partir de là, en faisant varier ces contraintes, et bien d'autres encore, d'autres modèles de communication peuvent être conçus. Ce qui a été fait depuis les années 70.

Pour chacun de ces modèles, le **temps minimum d'échange total (T.M.E.T.)** sera alors le nombre minimum d'étapes nécessaires pour que chaque sommet dispose de tous les autres messages. Il s'agit d'une mesure en temps constant, la transmission d'un message d'un processeur à un autre processeur « coûte » une étape. Avec cette mesure, on ne tient compte d'aucun paramètre, la longueur du message, par exemple, n'intervient pas. Une mesure plus précise est la mesure en temps linéaire, ou le temps de transmission d'un message dépend affinement de la longueur du message, et éventuellement d'autres paramètres.

Nous allons maintenant remplacer « réseau d'interconnexion » par graphe connexe et processeur par sommet.

Pour introduire le modèle que nous allons étudier, nous pourrions poser le problème suivant :

**Dans un groupe de  $n$  individus, certaines personnes se connaissent, d'autres non, de manière à ce que de connaissance en connaissance on puisse aller d'une personne à n'importe quelle autre personne. Au départ chaque personne dispose d'un message spécifique. A chaque étape, une personne  $x$  peut envoyer des lettres à des personnes qu'il**

connaît et dans chacune de ces lettres, un seul des messages que  $x$  connaît déjà est révélé. Combien d'étapes au minimum sont alors nécessaires pour que chaque individu ait tous les messages ?

Il s'agit en fait d'un échange total, dont le protocole, un peu plus formalisé, est :

- **On est dans un graphe connexe. Initialement chaque sommet possède un message distinct de celui d'un autre sommet. La dispersion se fait en plusieurs étapes, à chacune d'elles, un sommet peut envoyer au maximum un message à chacun de ses voisins. Un sommet peut envoyer au cours d'une étape, un même message à plusieurs de ses voisins et il pourrait tout aussi bien envoyer des messages différents à des voisins différents.**

On note  $gf_*(I, G)$  le T.M.E.T. d'un graphe  $G$ . Nous rappelons maintenant les résultats principaux de ce chapitre.

Dans la section 2, qui est un article soumis à « Networks », nous rappelons d'abord les deux

inégalités  $gf_*(I, G) \geq \left\lceil \frac{v(G)-I}{\delta(G)} \right\rceil$  et  $gf_*(I, G) \geq D(G)$ , ce qui fournit deux bornes inférieures

déjà connues.

Nous montrons que le T.M.E.T. d'un arbre  $G$  est  $v(G)-I$  et cela nous permet de prouver que le T.M.E.T. d'un graphe  $G$  dont le degré minimum est  $I$ , est aussi  $v(G)-I$ .

Nous donnons deux bornes supérieures dans le cas général.

Nous introduisons les notions nouvelles de multi arborescence et multi arborescence compacte. Cela nous permet de définir le schéma d'un échange total, c'est-à-dire une visualisation du déroulement de l'échange.

Nous donnons deux conjectures pour des nouvelles bornes supérieures du T.M.E.T. d'un graphe.

La première affirme que pour tout graphe connexe  $G$ , on a  $gf_*(I, G) \leq v(G) - \delta(G)$ . La

deuxième conjecture affirme que pour tout graphe connexe  $G$ , on a  $gf_*(I, G) \leq \left\lceil \frac{v(G)-I}{k(G)} \right\rceil$ , où

$k(G)$  est la connectivité de  $G$ . Nous donnons bien sûr des résultats partiels sur ces conjectures.

Dans la section 3 de ce chapitre, qui est en fait un prolongement de la section 2, nous démontrons la deuxième conjecture pour les graphes  $G$  vérifiant  $\frac{v-I}{2} \leq k < v-I$ .

# Total exchange in constant time

Nicolas Lichiardopol\*  
E.S.S.I, Nice Sophia-Antipolis, France

---

## Abstract

In the following, we study the total exchange in constant time, a communication problem not much known. More precisely, we give new results on the minimum total exchange time of a graph. The new notions of multi-arborescence and compact multi-arborescence will be very useful. Two conjectures with several partial results will be given.

*Keywords :* Minimum total exchange time, multi-arborescences, scheme of a total exchange process, Cayley graphs

---

## 1. Introduction, basic notions and notation

We consider networks where initially each node has a distinct message. A global communication (gossiping) in such a network is the spreading process of the information from each node to all other nodes. Of course, a natural goal is to gossip as fast as possible.

According to physical constraints, several models are possible :  
If a node  $x$  can simultaneously send a message to  $y$  and receive an other message from  $y$ , the model is said to be full-duplex. Conversely, if a link can be used only in one direction at a time, the model is said to be half-duplex.

When any node  $x$  can communicate simultaneously with at most  $k$  neighbours the model is said to be  $k$ -port and when  $x$  can send messages simultaneously to all its neighbours, the model is said to be  $\Delta$ -port.

If each node can send simultaneously at most  $p$  messages to a given neighbour, we have a model  $p$   $k$ -port

The combination of these conditions yields a lot of gossiping models.

As far as time of transmission is concerned, two principal models are considered :

- In the constant time model, the transmission of a message from a node to one of its neighbours « costs » one step, whatever the length of the message.
- In the linear time model, the transmission time of a message depends linearly on

---

\* *E-mail address :* lichiar@club-internet.fr

the length of the message.

In this paper, we consider a not much known variant of the full-duplex  $I \Delta$ -port model called total exchange in [4] or total exchange in [2] or all to all personalised communication in [5]. We will use the second designation and the study will be made in constant time.

As usually the network is modeled by a connected graph.

In the second section, we define more precisely our total exchange model by describing its protocol. We define the essential notion of minimum total exchange time (M.T.E.T.) and we recall some known results (in particular two lower bounds of the M.T.E.T. of a graph).

In section 3 we give a new lower bound which is sometimes the most accurate one.

In section 4 we give the exact value of the M.T.E.T. of a graph of minimal degree  $l$ . We also give two upper bounds in the general case.

In section 5 we introduce two new notions that we call multi-arborescence and compact multi-arborescence.

In section 6 we show how to use the notions defined in section 5 to represent a total exchange process.

In section 7 we give two conjectures for new upper bounds of the M.T.E.T. of a graph. We prove these conjectures in some particular cases, for instance for Cayley graphs.

We consider only connected graphs (unless otherly stated).

For a graph  $G$  we note  $V(G)$  and  $E(G)$  the vertex set and the edge set of  $G$ . We note  $v(G) = |V(G)|$  and  $e(G) = |E(G)|$ .

We note  $deg_G(x)$  the degree of a vertex  $x$  and  $\delta(G)$  is the minimal degree of  $G$ .

The distance between two vertices  $x$  and  $y$  of  $G$  is noted  $d_G(x, y)$ . For  $x \in V(G)$  and  $W \subseteq V(G)$  we note :  $d(x, W) = \min(d(x, y), y \in W)$ .

We note  $D(G)$  the diameter of  $G$ .

We note  $k(G)$  (resp.  $\lambda(G)$ ) the vertex connectivity of  $G$  (resp. edge connectivity).

We will omit the subscript  $G$  when it is clear from the context.

When it is possible we keep the same notations for a digraph.

If  $G$  is an undirected graph,  $\vec{G}$  is the symmetric digraph obtained by replacing each edge  $xy$  by the couples  $(x, y)$  and  $(y, x)$ .

For a digraph  $G$ , the underlying graph is the undirected graph  $G'$  obtained from  $G$  by removing loops and orientations.

If  $T$  is an arborescence of root  $x$ , the height of  $T$  is

$$h(T) = \max(d_T(x, y), y \in V(T)).$$

For every  $i \in \{0, \dots, h(T)\}$ , the level  $L_i(T)$  is the set of vertices  $y$  such that  $d_T(x, y) = i$ .

For every  $i \in \{1, \dots, h(T)\}$ , the rank  $R_i(T)$  is the set of arcs  $(y, z)$  of  $T$  such that  $y \in L_{i-1}(T)$ .

If  $\Gamma$  is a group and if  $S$  is a generating subset of  $\Gamma$  no containing the identity  $I$  and such that :  $x \in S \Rightarrow x^{-1} \in S$ , the Cayley graph  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$  is the undirected graph defined by :  $V(G) = \Gamma$  and  $E(G) = \{\{x, y\}; x^{-1}y \in S\}$ .  
 $G$  is a connected regular graph of degree  $d = |S|$ .

For an integer  $n \geq 2$ , by considering the additive group  $\mathbb{Z}_2^n$ , the hypercube  $H(n)$  is the Cayley graph  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_2^n, S)$  where  $S = \{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ . Clearly  $H(n)$  is a regular graph of degree  $n$ , having  $2^n$  vertices.

## 2. Total exchange, description, known results

By total exchange, we mean the global communication model whose protocol is the following :

$G$  is a connected graph. Initially each vertex of  $G$  knows a message distinct from all other messages. At each step a vertex  $x$  may transmit to each of its neighbours, either its original message or a message previously received. We specify that  $x$  may send the same message to several neighbours or send distinct messages.

The goal of the process is that each node receives all the messages.

Any way of realizing such a dissemination is called a total exchange process (T.E.P).

The realization time  $t(M)$  of a total exchange process  $M$  is the number of steps necessary to fully inform all the vertices.

The minimum total exchange time (M.T.E.T.) of a graph  $G$  is the smallest of the  $t(M)$ , where  $M$  is any T.E.P on  $G$ .

As in paper [2] , we note  $gf_*(I, G)$  the M.T.E.T. of a graph  $G$ .

It is easy to see that for the complete graph  $K_n$ , we have  $gf_*(I, K_n) = 1$ .

Indeed during the first step, each vertex being linked to all other vertices, can receive all the messages and so after this first step all the vertices are fully informed.

We will sometimes restrict our attention to protocols respecting additional rules :

**Rule  $R_1$**  : Each vertex must receive exactly once each message.

**Rule  $R_2$**  : If initially or after a given step, a neighbour  $x$  of a vertex  $y$ , knows some messages unknown by  $y$ , then at the following step, either all these messages are sent to  $y$  by other neighbours of  $y$  or  $x$  sends one of these messages to  $y$ .

We can state that for a T.E.P on  $G$  respecting rule  $R_1$ , the total number of transmissions of messages is  $v(v-1)$ .

Indeed, each vertex receive exactly  $v-1$  messages and since they are  $v$  vertices the result is obvious.

It is also obvious that for a T.E.P respecting rule  $R_2$ , each vertex  $x$  sends at the first step its original message to all its neighbours.

We can state also that for any graph  $G$ , there exists a T.E.P  $M$  respecting rule  $R_2$ , such that  $t(M) = gf_*(I, G)$ .

In [2], J.C Bermond, S. Perennes and T. Kodate give the following results :

**Proposition 2.1** *For any graph  $G$ , we have :*

$$gf_*(I, G) \geq \left\lceil \frac{v(G)-1}{\delta(G)} \right\rceil.$$

**Proposition 2.2** *For any graph  $G$ , we have :*

$$gf_*(I, G) \geq D(G).$$

Thus, for a graph  $G$  of minimal degree  $l$ , proposition 2.1 yields :  $gf_*(I, G) \geq v-1$ .

The above propositions yields two lower bounds that we call lower bound 1 and lower bound 2.

In the same paper the authors also prove that lower bound 1 is achieved for a hypercube  $H(n)$  and a star-graph  $S(k)$ .

Supposing that some conjecture is true, they prove that lower bound 1 is also achieved for a toroidal mesh  $TM(p)^k$ . Recently this conjecture has been proved by the author (see [6]) and so, their assertion is valid.

We finish this section by noting that for a graph  $G$ , if  $G_I$  is a spanning subgraph of  $G$  we have :  $gf_*(I, G) \leq gf_*(I, G_I)$ . Knowing that an arc of  $\overrightarrow{G_I}$  is also an arc of  $\overrightarrow{G}$ , a T.E.P on  $G_I$  is also a T.E.P on  $G$  and then the result is obvious.

### 3. Lower bounds

We begin with a general result and its corollaries :

**Proposition 3.1.** *Let  $(V_1, V_2)$  be a partition of  $V(G)$  and let  $n$  be the number of edges between  $V_1$  and  $V_2$ . Let  $V'_1$ , be the set of vertices of  $V_1$  having neighbours in  $V_2$  and let  $V'_2$ , be the set of vertices of  $V_2$  having neighbours in  $V_1$ . Then :*

$$gf_*(I, G) \geq \max \left( \left\lceil \frac{|V_1|}{n} \right\rceil + \max_{x \in V_2 - V'_2} d(x, V'_2), \left\lceil \frac{|V_2|}{n} \right\rceil + \max_{x \in V_1 - V'_1} d(x, V'_1) \right)$$

**Proof.** Let us consider a total exchange process requiring  $gf_*(I, G)$  steps. The  $|V_1|$  original messages of  $V_1$ , must reach the vertices of  $V_2$  by using the  $n$  edges linking the vertices of  $V_1$  and  $V_2$ . Since at each step, at most  $n$  messages of  $V_1$  can cross the  $n$  edges, at least  $\left\lceil \frac{|V_1|}{n} \right\rceil$  steps are necessary and some message  $m$  reach  $V_2$  at the step



$$\left\lceil \frac{|V_1|}{n} \right\rceil.$$

This message  $m$  is in fact received by vertices of  $V_2'$  and since the others vertices of  $V_2$  must receive  $m$ , at least  $\max_{x \in V_2 - V_2'} d(x, V_2')$  additional steps are necessary and consequently :

$$gf_*(l, G) \geq \left\lceil \frac{|V_1|}{n} \right\rceil + \max_{x \in V_2 - V_2'} d(x, V_2').$$

Similarly we obtain :

$$gf_*(l, G) \geq \left\lceil \frac{|V_2|}{n} \right\rceil + \max_{x \in V_1 - V_1'} d(x, V_1') \text{ and the result follows.} \quad \square$$

It is easy to deduce  $gf_*(l, G) \geq \left\lceil \frac{\max(|V_1|, |V_2|)}{n} \right\rceil$ , which is easier to use but less tight.

Remark that by taking each time  $V_i$  equals to a single vertex, we obtain Propositions 2.1 and 2.2 as corollaries.

Another consequence is :

**Corollary 3.2.** *For every graph  $G$ , we have :*

$$gf_*(l, G) \geq \left\lceil \frac{v}{2\lambda} \right\rceil.$$

**Proof.** There is a subset  $A$  of  $E$ , having  $\lambda$  edges, such that  $G - A$  is not connected. It is known that  $G - A$  admits two connected components  $V_1$  and  $V_2$ . Of course,  $(V_1, V_2)$  is a partition of  $V$  and the number of edges between  $V_1$  and  $V_2$  is exactly  $\lambda$  (the edges of  $A$ ).

We have seen that  $gf_*(l, G) \geq \left\lceil \frac{\max(|V_1|, |V_2|)}{\lambda} \right\rceil$  and since  $\max(|V_1|, |V_2|) \geq \frac{v}{2}$ , we deduce the announced result.  $\square$

The lower bound of this corollary, will be called : lower bound 3.

We will now compare lower bounds 1, 2 and 3.

In [3], G. Chartrand and F. Harary proves that for integers  $k, \lambda$  and  $\delta$  verifying  $1 \leq k \leq \lambda \leq \delta$ , there exist graphs  $G$  with  $k(G) = k$ ,  $\lambda(G) = \lambda$  and  $\delta(G) = \delta$ .

In particular there exist graphs  $G$  such that  $2\lambda(G) < \delta(G)$ , and in this case, lower bound 3 is better than lower bound 1. There are also graphs  $G$  with  $\delta(G) < 2\lambda(G)$  and then lower bound 1 is better than lower bound 3.

There exist graphs  $G$ , such that  $D(G) < \left\lceil \frac{v(G)}{2\lambda(G)} \right\rceil$ . The hypercubes  $H(n)$  with  $n \geq 7$  are such examples. In this case lower bound 3 is better than bound 2.

On the other hand, there exist graphs  $G$  verifying  $\left\lceil \frac{v(G)}{2\lambda(G)} \right\rceil < D(G)$ . The hypercubes  $H(n)$  with  $n \leq 5$  are such examples and then lower bound 2 is better than lower bound 3.

We give now an example where bound 3 is better than both bounds 1 and 2 :  
Let  $\Gamma_n$ , be the graph of order  $2n$ ,  $n \geq 4$  obtained by adding a single edge between two copies of the complete graph  $K_n$ .

We have  $\delta(\Gamma_n) = n-1$ ,  $D(\Gamma_n) = 3$  and  $\lambda(\Gamma_n) = 1$ . Then :

$\left\lceil \frac{v(\Gamma_n)-1}{\delta(\Gamma_n)} \right\rceil = 3$ ,  $\left\lceil \frac{v(\Gamma_n)}{2\lambda(\Gamma_n)} \right\rceil = n$  and this prove that lower bound 3 is the best one. In fact, by proposition 3.1 we have  $gf_*(1, \Gamma_n) \geq n+1$ . But it is easy to describe a total exchange process using exactly  $n+1$  steps and then we can state that  $gf_*(1, \Gamma_n) = n+1$ .

Generally, lower bound 1 is better than lower bound 2, but the opposite can hold. Two examples show it :

Let us consider the graph  $G_1$  of Fig. 1 .

It is easy to see that  $D(G_1) = 4$  and  $\left\lceil \frac{v(G_1)-1}{\delta(G_1)} \right\rceil = 3$  and consequently lower bound 2 is better than lower bound 1.

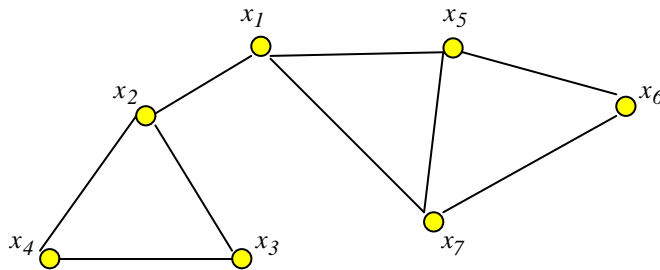


Fig.1 Graph  $G_1$

Let us consider now the graph  $G_2$  with 10 vertices of fig. 2 .

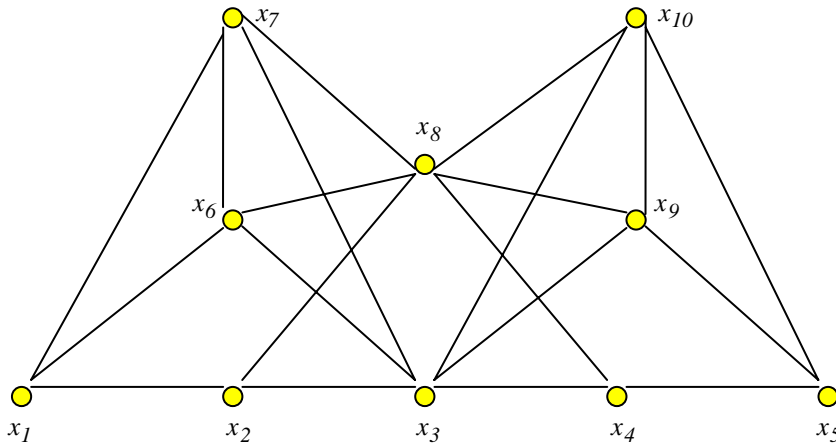


Fig. 2 Graph  $G_2$

Here we have  $D(G_3)=4$ ,  $\left\lceil \frac{v(G_3)-1}{\delta(G_3)} \right\rceil = 3$  and again bound 2 is sharper than bound 1.

We will see later that for  $G_2$ , the lower bound 2 is not reached, while for  $G_3$  this lower bound is reached.

#### 4. M.T.E.T. of a graph of minimal degree 1, upper bounds.

We start with two lemmas :

**Lemma 4.1.** *Let  $G$  be a tree and  $M$  be a total exchange process using  $T$  steps. Let  $y$  be a vertex of  $G$  and let  $x$  be a neighbour of  $y$ . Suppose that at the end of a step  $t$ ,  $x$  knows a message  $m$ . Then, at the end of the step  $t$ , either  $y$  knows  $m$ , or  $x$  is the only neighbour of  $y$  knowing  $m$ .*

**Proof.** Suppose that at the end of the step  $t$ ,  $y$  does not know the message  $m$ , but that a neighbour  $x_1$  of  $y$ , distinct of  $x$  knows this message

Let  $\omega$  be the originator of  $m$ . During the T.E.P,  $m$  follows two paths starting from  $\omega$ , one path ending at  $x$ , the other path at  $x_1$  and none using  $y$ . But as  $xy$  and  $x_1y$  are edges of  $G$ , assembling them with both paths, we obtain a cycle, which is impossible in a tree.

Consequently, if  $y$  does not know  $m$ ,  $x$  is the only neighbour of  $y$  knowing  $m$  and the result is proved.  $\square$

We need also :

**Lemma 4.2.** *Let  $M$  be a total exchange process on a tree  $G$ , using  $T$  steps and respecting rule  $R_2$ .*

For some edge  $xy$  of  $G$ , if  $y$  receives a message from  $x$  at the step  $t$ , where  $2 \leq t \leq T$ , then  $y$  has also a message from  $x$  at the step  $t-1$ .

**Proof.** The assertion is obvious for  $t=2$ .

Suppose that the assertion is true up to step  $t-1$ ,  $3 \leq t \leq T$  and let us study for  $t$ .

Suppose then, that the vertex  $y$  receives a message  $\alpha$  from  $x$  at the step  $t$ . Then,  $x$  has received  $\alpha$  at a step  $t_1 \leq t-1$ .

If  $t_1 < t-1$ ,  $x$  has  $\alpha$  at the end of the step  $t-2$ ,  $y$  does not have  $\alpha$  at the end of the same step, then by the previous lemma,  $x$  is the only neighbour of  $y$ , knowing  $\alpha$  at the end of step  $t-2$ . But as this T.E.P works according to rule  $R_2$ ,  $x$  sends a message to  $y$  at the step  $t-1$ , and consequently the assertion is verified for  $t$ .

If  $t_1 = t-1$ ,  $x$  has received  $\alpha$  from a neighbour  $z \neq y$ , at the step  $t-1$ . By induction hypothesis  $x$  has received a message  $\beta$  from  $z$  at the step  $t-2$ . Let  $w$ , be the originator of  $\beta$ . It is clear that  $w \neq y$ .

Suppose at first, that  $y$  receives  $\beta$  from a neighbour distinct of  $x$ . The itinerary of  $\beta$  from  $w$  to  $y$  and the itinerary from  $w$  to  $x$  assembled with the edge  $xy$ , will give two distinct paths from  $w$  to  $y$ , which is impossible in a tree.

Therefore  $y$  receives  $\beta$  from  $x$  and consequently, at the end of the step  $t-2$ ,  $x$  knows the message  $\beta$  but not  $y$ . Then, as previously, at the step  $t-1$ ,  $y$  receives a message from  $x$  (not necessarily  $\beta$ ). The assertion is again verified for  $t$  and consequently the assertion is true for every  $t$  verifying  $2 \leq t \leq T$ .  $\square$

An immediate consequence is :

**Corollary 4.3.** *If  $xy$  is an edge of  $G$  and if  $y$  receives a message from  $x$  at the step  $t \geq 2$ ,  $y$  receives a message from  $x$  at each of the previous steps.*

**Proof.** Induction from the previous lemma.  $\square$

We can now state :

**Proposition 4.4.** *If  $G$  is a tree we have :  $gf_*(1, G) = v-1$ .*

**Proof.** Let  $M$  be a T.E.P using  $gf_*(1, G)$  steps. During the step  $gf_*(1, G)$ , a vertex  $x$  sends a message to one of its neighbours  $y$ . By the previous corollary,  $y$  has received a message from  $x$  at each of the previous steps, and therefore  $y$  has received at least  $gf_*(1, G)$  messages of  $x$ . As, obviously,  $y$  must receive exactly  $v-1$  messages we have :  $gf_*(1, G) \leq v-1$

On the other hand, since  $\delta = 1$ , by proposition 2.1, we have :  $gf_*(1, G) \geq v-1$  and so, the result follows.  $\square$

We can give now an upper bound on the M.T.E.T. of any graph :

**Proposition 4.5.** *For every connected graph we have :  $gf_*(1, G) \leq v(G)-1$ .*

**Proof.** We know that any connected graph  $G$  admits a spanning tree  $H$ , and since  $gf_*(l, H) = v - l$ , there is a T.E.P using  $v - l$  steps. This T.E.P on  $H$ , is also a T.E.P on  $G$  and consequently we have :  $gf_*(l, G) \leq v(G) - l$ .  $\square$

Proposition 4.4, may be generalised as it follows :

**Proposition 4.6.** *For every graph  $G$  of minimal degree  $l$ , we have :*  
 $gf_*(l, G) = v - l$ .

**Proof.** This is an immediate consequence of propositions 4.5 and 2.1  $\square$

$M$  being a total exchange process on a graph  $G$ , for a vertex  $x$  and for  $t$  verifying  $0 \leq t \leq t(M)$ ,  $M_t(x)$  will be the set of messages known by  $x$  after the step  $t$ . Now we can give a new upper bound :

**Proposition 4.7.** *For every graph  $G$ , we have :*

$$gf_*(l, G) \leq \left\lceil \frac{v(v-l) - 2e}{k} \right\rceil + 1.$$

**Proof.** Let  $M$  be a T.E.P using  $T = gf_*(l, G)$  steps and respecting rule  $R_2$ .

Suppose at first, that at each step, there are at least  $k$  transmissions of messages. Since at the first step there are  $2e$  transmissions and since the total number of transmissions is  $v(v-l)$ , we deduce :  $2e + (T-1)k \leq v(v-l)$ , which imply the result.

Suppose now that there is a step which requires less than  $k$  transmissions. Let  $t$ , be the first of these steps. Let  $m$  be the number of transmissions during the step  $t$  and let  $l$  be the number of vertices receiving messages during this step.

Then we have :  $t \geq 2$  and  $l \leq l \leq m \leq k - l$ . Let  $A$ , be the set of vertices receiving messages during the step  $t$ .

First, we state that for  $x, y$  in  $V \setminus A$  we have :  $M_{t-1}(x) = M_{t-1}(y)$ .

Indeed, since  $|A| = l < k$ ,  $G - A$  is a connected graph and so, there is a path :  $(z_0 = x, \dots, z_j = y)$  containing only vertices of  $V \setminus A$ .

For  $0 \leq i \leq j-1$ , since the vertex  $z_{i+1}$  does not receive message at the step  $t$ , we have then :  $M_{t-1}(z_i) \subseteq M_{t-1}(z_{i+1})$  (otherwise, by rule  $R_2$ ,  $z_{i+1}$  would receive at least a message).

With the same reasoning we obtain :  $M_{t-1}(z_{i+1}) \subseteq M_{t-1}(z_i)$  and from both inclusions, we deduce :

$$M_{t-1}(z_i) = M_{t-1}(z_{i+1}) \text{ and this for } i \in \{0, \dots, j-1\}, \text{ hence } M_{t-1}(x) = M_{t-1}(y).$$

We state now, that for every  $x \in V \setminus A$ , we have  $M_{t-1}(x) = V$ .

Indeed, for every vertex  $y \in V \setminus A$ , we have  $y \in M_{t-1}(y)$ , hence  $y \in M_{t-1}(x)$  and then  $V \setminus A \subseteq M_{t-1}(x)$ .

Every vertex  $z \in A$ , has at least  $\delta - l + 1$  neighbours contained in the set  $V \setminus A$  and

since we have  $\delta - l + 1 \geq 2$ , there is a neighbour  $y \in V \setminus A$  of  $z$ ; since  $t \geq 2$ , we have  $z \in M_{t-1}(y)$ , hence  $z \in M_{t-1}(x)$  and consequently we have :  $A \subseteq M_{t-1}(x)$ .

Both inclusions imply :  $M_{t-1}(x) = V$ .

Suppose that there is a vertex  $z$  of  $A$  lacking at least  $\delta - l + 1$  messages at the end of step  $t - 1$ .

As  $z$  has at least  $\delta - l + 1$  neighbours belonging to  $V \setminus A$  and as at the end of the step  $t - 1$  all these neighbours had all the messages, during the step  $t$ , the vertex  $z$  will receive at least  $\delta - l + 1$  messages. But as each other elements of  $A$  receives at least a message during step  $t$ , we have at least  $\delta - l + 1 + l - 1 = \delta$  transmissions and since  $\delta > m$ , this is impossible.

Consequently at the end of the step  $t - 1$ , each vertex  $y$  of  $A$  lacks at most  $\delta - l$  messages. As  $y$  has at least  $\delta - l + 1$  neighbours in  $V \setminus A$ ,  $y$  receives all the missing messages during the step  $t$ . Therefore  $T = t$  and then :

$$2e + (T - 2)k \leq v(v - 1) - m, \text{ hence } T \leq \frac{v(v - 1) - 2e}{k} + l + 1 - \frac{m}{k}, \text{ and as } 0 < l - \frac{m}{k} < l,$$

we obtain the announced result.  $\square$

In the following, we call upper bound 1 the bound of Proposition 4.6 and upper bound 2 that of Proposition 4.7.

For a graph  $G$  with  $k \geq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil + l$ , we have  $\left\lceil \frac{v(v - 1) - 2e}{k} \right\rceil + l < v - l$ , which means that upper bound 2 is better than upper bound 1, but if  $k \leq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil - l$ , upper bound 1 is

better than upper bound 2.

Let us also note that for a complete graph and even for others graphs having a great size, the upper bound 2 is reached.

## 5. Multi-arborescences, compact multi-arborescences

In order to visualize total exchange processes, let us introduce a new notion :

**Definition 5.1.** A multi-arborescence (M.A) is a triplet  $\Omega = (V, T, \theta)$  where  $V$  is a finite set called vertex set of  $\Omega$ ,  $T$  is an arborescence and  $\theta$  is a surjective map from  $V(T)$  to  $V$ . The root of  $\Omega$  is  $\theta(r)$  where  $r$  is the root of  $T$ .

It is obvious that if  $\theta$  is a one to one map, we have a classical arborescence.

For instance, the set  $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ , the arborescence  $T$  of Fig. 3, the surjective map  $\theta$  defined by :

$$\theta(A_1) = x_1, \theta(A_2) = \theta(A_6) = \theta(A_8) = x_2, \theta(A_3) = \theta(A_7) = x_3 \text{ and } \theta(A_4) = \theta(A_5) = x_4$$

define a M.A  $\Omega$  of root  $x_1$ .

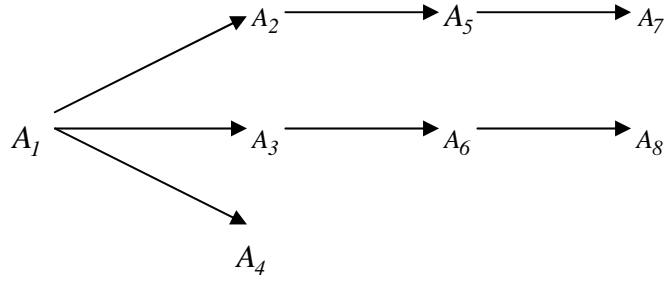


Fig. 3 Arborescence  $T$

In order to simplify notation and drawing, in the following we represent such a multi-arborescence  $\Omega$  as in fig. 4, that is, we directly replace every vertex  $u \in V(T)$  by  $\theta(u)$ .

We will now introduce some notation and definitions for a multi-arborescence  $\Omega = (V, T, \theta)$ .

Every arc  $(u, v)$  of  $T$  yields an arc of  $\Omega$ . If  $\theta(u) = \theta(v)$  the corresponding arc is said to be trivial otherwise non trivial.

The height  $h(\Omega)$  of  $\Omega$  will be the height of  $T$

For every  $i \in \{0, \dots, h(\Omega)\}$  the level  $L_i(\Omega)$  of  $\Omega$  will be  $\theta(L_i(T))$ . Remark that  $i \neq j$  does not imply  $L_i(\Omega) \cap L_j(\Omega) = \emptyset$ .

Similarly the rank  $R_i(\Omega)$  of  $\Omega$  is the set of arcs  $(\theta(u), \theta(v))$  with  $(u, v) \in R_i(T)$ . Once again  $i \neq j$  does not imply  $R_i(\Omega) \cap R_j(\Omega) = \emptyset$ . We note  $R'_i(\Omega)$  the subset of non trivial arcs of  $R_i(\Omega)$ . At last we note  $R(\Omega)$  the set of all arcs of  $\Omega$  and  $R'(\Omega)$  will be the set of non trivial arcs of  $\Omega$ .

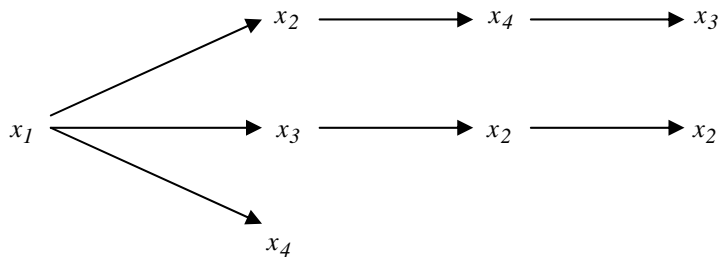


Fig. 4 Multi-arborescence  $\Omega$

For any multi-arborescence  $\Omega = (V, T, \theta)$ , we note  $U(\Omega)$  the undirected graph with vertex set  $V$  and such that there is an edge between  $x$  and  $y$  if  $(x, y)$  or  $(y, x)$  is a non trivial arc of  $\Omega$ . Note that  $U(\Omega)$  is a connected graph but not necessarily a tree. For that we give :

**Definition 5.2** A compact multi-arborescence is a multi-arborescence  $\Omega = (V, T, \theta)$

such that for every  $x \in V$ , the elements of  $\theta^{-1}(x)$  form a directed path in  $T$  (possibly reduced at a single vertex).

A compact multi-arborescence will be often abbreviated by *C.M.A.* . We can state :

**Proposition 5.3.** *If  $\Omega = (V, T, \theta)$  is a compact multi-arborescence, then  $U(\Omega)$  is a tree.*

**Proof.** Suppose that  $U(\Omega)$  is not a tree.

Then there is a cycle  $(z_1, \dots, z_m, z_{m+1} = z_1)$  in  $U(\Omega)$  and consequently there is a sequence :  $s = u'_1, u_2, u'_2, \dots, u_m, u'_m, u_{m+1}$  of vetices of  $T$  such that  $u_i \in \theta^{-1}(z_i)$  for each integer  $i$  verifying  $2 \leq i \leq m+1$ ,  $u'_i \in \theta^{-1}(z_i)$  for  $1 \leq i \leq m$  and such that  $u'_i u_{i+1}$  is an edge of  $T'$  for  $1 \leq i \leq m$ .

Since  $\Omega$  is a *C.M.A.*,  $u_i, u'_i \in \theta^{-1}(z_i)$  for  $2 \leq i \leq m$  and  $u_{m+1}, u'_1 \in \theta^{-1}(z_1)$ , there is in  $T$  a path between  $u_i$  and  $u'_i$  (for each  $i \in \{2, \dots, m\}$ ) and a path between  $u_{m+1}$  and  $u'_m$ . By inserting all these paths in the sequence  $s$ , we obtain a cycle in  $T$  which is impossible as  $T$  is a tree.

Consequently  $U(\Omega)$  is a tree. □

A spanning multi-arborescence of a graph  $G$ , is a multi-arborescence with the same vertex set as  $G$  and whose non trivial arcs are arcs of  $\vec{G}$ . It is easy to see that in any connected graph  $G$ , for any  $x \in V(G)$ , there is a spanning *C.M.A.* of  $G$  rooted at  $x$ .

If  $G$  is a graph,  $f$  an automorphism of  $G$  and  $\Omega$  a multi-arborescence such that  $U(\Omega)$  is a subgraph of  $G$ , we define the multi-arborescence  $f(\Omega)$  with  $V(f(\Omega)) = f(V(\Omega))$ ,  $h(f(\Omega)) = h(\Omega)$ ,  $R_i(f(\Omega)) = \{(f(a), f(b)); (a, b) \in R_i(\Omega)\}$  for  $1 \leq i \leq h(\Omega)$ . It's clear that if  $\Omega$  is rooted at  $x$ ,  $f(\Omega)$  is rooted at  $f(x)$  and that if  $\Omega$  is a *C.M.A.*,  $f(\Omega)$  will be a *C.M.A.* It is also clear that if  $\Omega$  is a spanning multi-arborescence,  $f(\Omega)$  is also a spanning multi-arborescence.

## 6. Scheme of a total exchange process. Examples

We will now see how to use multi-arborescences to describe total exchange processes.

Let  $M$  be a T.E.P on a graph  $G$ . For each  $x$  of  $V(G)$  we define a multi-arborescence  $\Omega_x$  rooted at  $x$ , in the following way :

- The height of  $\Omega_x$  is the number  $T_x$  of steps necessary to spread the original message  $m_x$  of  $x$ .
- The vertices of  $\Omega_x$  are those of  $G$ .



- For  $1 \leq i \leq T_x$ , the non trivial arcs of  $\Omega_x$  of rank  $i$  are the arcs  $(u, v)$  of  $\overline{G}$  such that  $u$  transmit the message  $m_x$  to  $v$  at the step  $i$ .

- The trivial arcs of  $\Omega_x$  of rank  $i$  are the couples  $(u, u)$  such that  $u$  sends  $m_x$  at a step  $i_1 \leq i$  and sends it again at a step  $i_2 \geq i + 1$ .

Obviously for every  $x \in V(G)$ ,  $\Omega_x$  is a spanning *M.A* of  $G$ . It is also obvious that for each given  $i \in \{1, \dots, t(M)\}$ , all the  $R'_i(\Omega_x)$ ,  $x \in V(G)$  are disjoint.

We call scheme of the total exchange process  $M$ , the family of the multi-arborescences  $\Omega_x$ ,  $x \in V(G)$ . It is easy to see that the maximum height of the  $\Omega_x$ ,  $x \in V(G)$  gives us the time  $t(M)$  of  $M$ . It is clear that if  $M$  respects the rule  $R_1$  this scheme is formed by *C.M.A.*.

Conversely, for a graph  $G$ , the construction of a family  $\Omega_x$ ,  $x \in V(G)$  of spanning *M.A* of  $G$  rooted at  $x$  such that for each  $i$  verifying  $1 \leq i \leq \max_{x \in V(G)} h(\Omega_x)$ , the sets  $R'_i(\Omega_x)$ ,  $x \in V(G)$  are disjoint, yields the scheme of a total exchange process  $M$ . Furthermore, it is clear that if all the  $\Omega_x$  are *C.M.A*,  $M$  respects the rule  $R_1$ .

For a graph  $G$ , the construction of such a schema gives us an upper bound of the M.T.E.T. of  $G$  and by using some additional arguments, it is sometimes possible to prove that this upper bound is the M.T.E.T. of the graph.

For instance, Fig. 5 describe the scheme of a total exchange  $M$  in  $G_1$  (see Fig. 1) with  $t(M) = 5$ .

So we have  $gf_*(1, G_2) \leq 5$ . Since  $D(G_2) = 4$ , we have:  $gf_*(1, G_2) \geq 4$ .

For  $1 \leq i \leq 7$  let us note  $m_i$  the original message of  $x_i$ .

We have  $d(x_3, x_6) = d(x_4, x_6) = 4$ .

Let us consider a minimal total exchange process  $M'$ . The messages  $m_3$  and  $m_4$  must reach  $x_6$ . Either one of these messages follows a path of length  $> 4$  and then  $gf_*(1, G_2) > 4$ , or both messages follow paths of length 4. In this case, both paths use the arc  $(x_2, x_1)$  and so, the vertex  $x_2$  must transmit  $m_3$  and  $m_4$  to  $x_1$ . As  $x_2$  may transmit only one message to  $x_1$  per step, again we will have  $gf_*(1, G_2) > 4$ .

Consequently  $gf_*(1, G_2) > 4$  and  $gf_*(1, G_2) = 5$  follows.

In Fig. 6, we give the scheme of a total exchange process  $M$  in  $G_2$  (see fig. 2) with  $t(M) = 4$ . Since  $D(G_3) = 4$  is a lower bound of  $gf_*(1, G_3)$  we deduce  $gf_*(1, G_3) = 4$ .

Let us consider now the cycle  $C_n = (0, 1, \dots, n-1, 0)$  of length  $n$  and let us put for  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j = i$  where  $i$  is the remainder of the division of  $j$  by  $i$ .

For  $0 \leq i \leq n-1$ , we define the *C.M.A*  $\Omega_i$  of height  $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$  rooted at  $i$ , as follows :

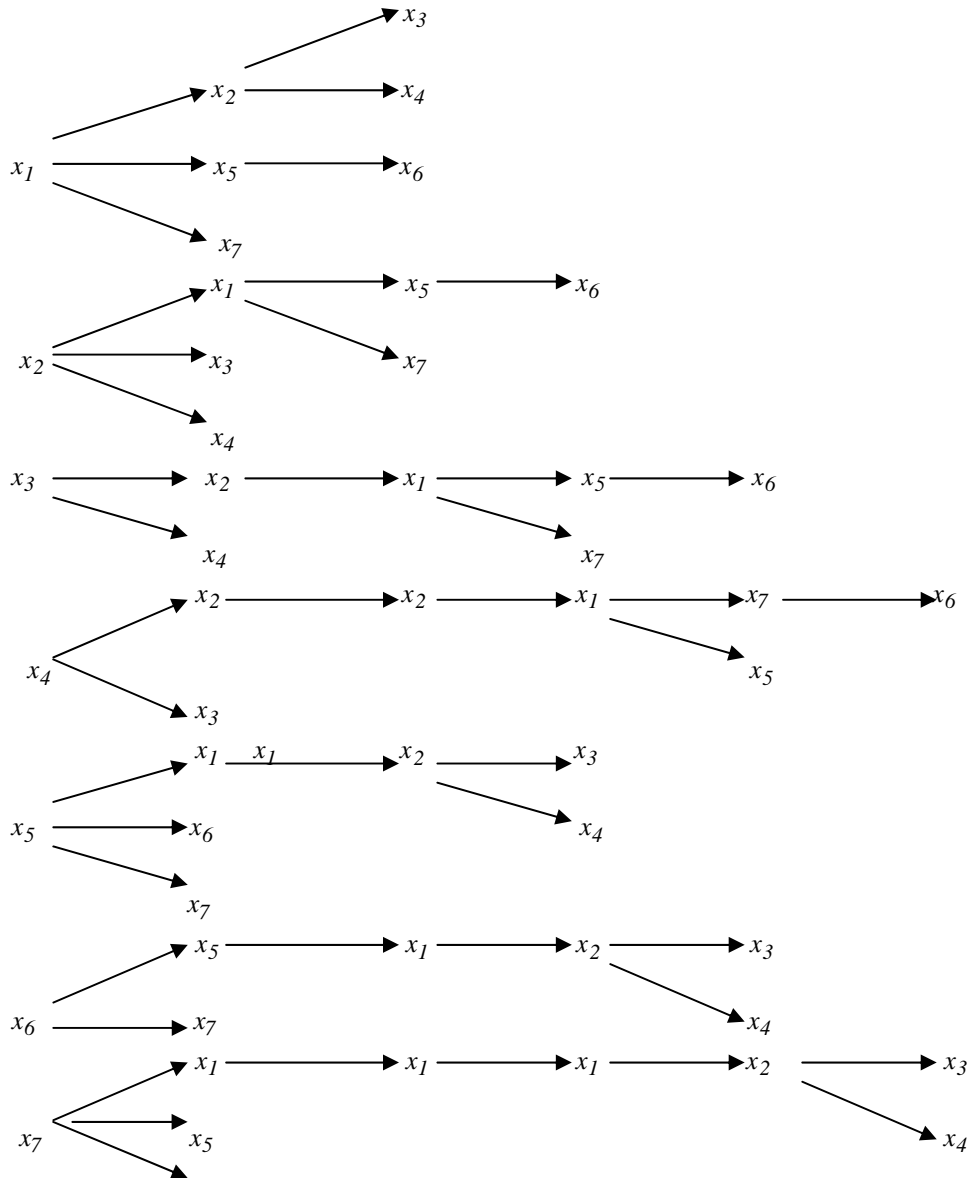
For  $l \leq m \leq \left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil - 1$ , the arcs of  $\Omega_i$  of rank  $m$  are the couples  $(i+m-1, i+m)$  and

$(i-m+1, i-m)$ . If  $n$  is an odd integer, the arcs of  $\Omega_i$  of rank  $\left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil$  are the couples

$\left(i + \left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil - 1, i + \left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil\right)$  and  $\left(i - \left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil + 1, i - \left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil\right)$  and if  $n$  is even, the only arc of rank  $\left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$  is the couple  $\left(i + \frac{n}{2} - 1, i + \frac{n}{2}\right)$ .

We have thus defined the scheme of a total exchange process using  $\left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil$  steps. Then,

$gf_*(l, C_n) \leq \left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil$  and by Proposition 2.1, we get  $gf_*(l, C_n) = \left\lceil \frac{n-l}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ .



$x_6$

Fig. 5 Scheme of a total exchange in  $G_I$

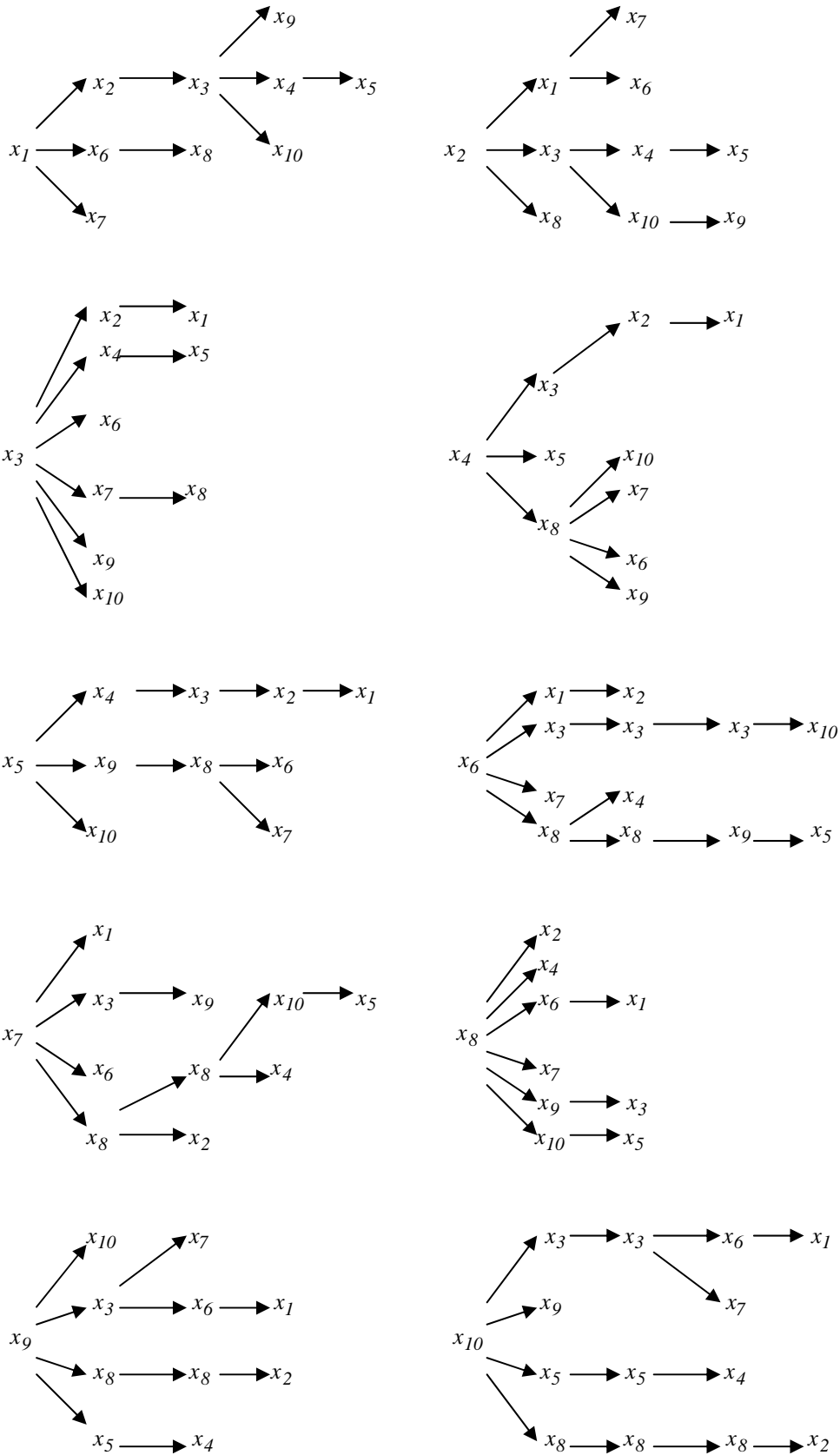


Fig. 6 Scheme of a total exchange in  $G_2$

## 7. Two conjectures and partial results

From the known results on classical graphs and multiple computations, we state at first the following conjecture :

**Conjecture 7.1** *For any connected graph  $G$  we have :  $gf_*(1, G) \leq v(G) - \delta(G)$ .*

Remark that this conjecture is compatible with lower bounds 1, 2 and 3. This is obvious for lower bounds 1 and 2, let us prove it for lower bound 3, that is, let us prove that for a graph  $G$  we have  $v(G) - \delta(G) \geq \left\lceil \frac{v(G)}{2\lambda(G)} \right\rceil$ . We will use the following lemma :

**Lemma 7.2** *For a graph  $G$  verifying  $\delta \geq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil$ , we have  $\lambda = \delta$ .*

**Proof.** Let  $A, B$  be a partition of  $V$  with  $a \leq b$  where  $a = |A|$  and  $b = |B|$ . Clearly  $1 \leq a \leq \delta$ .

Each vertex  $x \in A$  has at least  $\delta - a + 1$  neighbours in  $B$  and consequently there are at least  $a(\delta - a + 1)$  edges linking  $A$  and  $B$ . But since  $a(\delta - a + 1) \geq \delta$  for  $1 \leq a \leq \delta$ , there are at least  $\delta$  edges between  $A$  and  $B$ . This implies  $\lambda \geq \delta$  and since  $\lambda \leq \delta$  the result follows.  $\square$

Now we can prove the above inequality.

If  $\delta \leq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil - 1$ , we get  $v - \delta \geq v - \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil + 1 \geq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil$  and as  $\left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{v}{2\lambda} \right\rceil$ , the result follows.

If  $\delta \geq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil$ , it is easy to prove at first that  $v - \delta \geq \frac{v}{2\delta}$ , which implies  $v - \delta \geq \left\lceil \frac{v}{2\delta} \right\rceil$  and by the previous lemma we get  $v - \delta \geq \left\lceil \frac{v}{2\lambda} \right\rceil$ .

Clearly, this conjecture is true for a graph of minimal degree one and for a complete graph (in both cases we even have equality).

We now prove this conjecture in the particular case of Cayley graphs.

So, let  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$  be a Cayley graph with  $|S| = d$ .

For every  $a \in \Gamma$ , we consider the map  $\tau_a : \Gamma \rightarrow \Gamma$  defined by  $\tau_a(x) = ax$ .

We can easily verify that for each  $a \in \Gamma$ ,  $\tau_a$  is a graph automorphism.

We will say that an arc  $(x, y)$  of  $\tilde{G}$  has  $s \in S$  as generator if we have  $y = xs$ .

Now, an essential result :

**Lemma 7.3** *Let  $\Omega_1$  be a spanning M.A of  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$ , rooted at 1, such that for every  $i \in \{1, \dots, h(\Omega_1)\}$  the arcs of  $R'_i(\Omega_1)$  have distinct generators.*

*Then we have :  $gf_*(1, G) \leq h(\Omega_1)$ .*

**Proof.** Let us consider the family  $\Omega_a = \tau_a(\Omega_1)$ ,  $a \in \Gamma$ .

For each  $a \in \Gamma$ ,  $\Omega_a$  is a spanning multi-arborescence of  $G$  rooted at  $a$  and of height  $h(\Omega_1)$ .

Let us suppose that there exists  $i \in \{1, \dots, h(\Omega_1)\}$  and distinct elements  $u$  and  $v$  of  $\Gamma$  such that  $R'_i(\Omega_u) \cap R'_i(\Omega_v) \neq \emptyset$ .

Then, there exist arcs  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$  of  $R'_i(\Omega_1)$  such that :

$$(ux_1, uy_1) = (vx_2, vy_2), \text{ which implies : } x_1^{-1}y_1 = x_2^{-1}y_2.$$

This means that both arcs  $(x_1, y_1)$  and  $(x_2, y_2)$  have the same generator and then by definition of  $\Omega_1$ , we must have  $x_1 = x_2$  and  $y_1 = y_2$  but then we deduce  $u = v$ , a contradiction.

Consequently for each  $i \in \{1, \dots, h(\Omega_1)\}$  the arcs sets  $R'_i(\Omega_a)$ ,  $a \in \Gamma$  are disjoint.

Then the family  $\Omega_a$ ,  $a \in \Gamma$  is the scheme of a total exchange process  $M$  and we have  $t(M) = h(\Omega_1)$  hence  $gf_*(1, G) \leq h(\Omega_1)$ .  $\square$

We continue by :

**Lemma 7.4** *Let  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$  be a Cayley graph.*

*There is a spanning C.M.A  $\Omega_1$  of  $G$ , rooted at 1 and verifying :*

- (i)  $R'_1(\Omega_1) = \{(1, s) ; s \in S\}$
- (ii) *For every  $i \in \{1, \dots, h(\Omega_1)\}$  we have :  $R'_i(\Omega_1) \neq \emptyset$*
- (iii) *For every  $i \in \{1, \dots, h(\Omega_1)\}$ , the arcs of  $R'_i(\Omega_1)$  have distincts generators.*

**Proof.** We first remark that there exist C.M.A verifying conditions (i), (ii) and (iii) and such that  $U(\Omega)$  is a subgraph of  $G$ .

Indeed, the compact multi-arborescence of height 1 whose arcs are the couples  $(1, s)$  with  $s \in S$  is such an example.

Let  $\Omega_1$  be such a C.M.A with as many vertices as possible.

Suppose that  $V(\Omega_1) \neq \Gamma$ .

Since  $G$  is a connected graph, there is a vertex  $y \in \Gamma \setminus V(\Omega_1)$  having a neighbour  $x \in V(\Omega_1)$ .

Then, let  $\Omega'_1$ , be the C.M.A obtained from  $\Omega_1$  by possibly adding copies of  $x$  to the copy of  $x$  which is the farthest from the root 1, until level  $h(\Omega_1)$  is reached and

by creating a new rank by linking the last copy of  $x$  (copy of level  $h(\Omega_I)$ ) with  $y$ . This new *C.M.A* verifies conditions (i) (ii) and (iii) and since  $|V(\Omega'_I)| = |V(\Omega_I)| + 1$  this is contradictory with the definition of  $\Omega_I$ . Consequently, we have  $V(\Omega_I) = \Gamma$  and since the *C.M.A*  $\Omega_I$  verifies all required conditions, the assertion is proved.  $\square$

Now we can state :

**Proposition 7.5** *In a Cayley graph  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$  we have  $gf_*(1, G) \leq v(G) - \delta(G)$ .*

**Proof.** Let us put  $d = |S| = \delta(G)$ . If  $d = v - 1$  it is obvious as  $G$  is complete.

Suppose  $d < v - 1$ . Let  $\Omega_I$  be a spanning *C.M.A* of  $G$  rooted at  $I$  and verifying conditions (i), (ii) and (iii) of the previous lemma. Then we have  $h(\Omega_I) \geq 2$  and since  $|R'_i(\Omega_I)| \geq 1$  for  $2 \leq i \leq h(\Omega_I)$ ,  $|R_I(\Omega_I)| = d$  and  $|R'(\Omega_I)| = v - 1$  and since the  $R'_i(\Omega_I)$ ,  $1 \leq i \leq h(\Omega_I)$  are disjoint, we deduce :  $h(\Omega_I) - 1 \leq v - 1 - d$ . Therefore  $h(\Omega_I) \leq v(G) - \delta(G)$  and the result follows by Lemma 7.3.  $\square$

We will now prove that this conjecture is true for a graph  $G$  such that  $\delta \geq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil + 2$

(remark that such a graph is always connected).

Several intermediate results are necessary and we start by :

**Lemma 7.6** *Let  $G$  be a graph with  $\delta \geq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil + 2$ . Let  $(B, A)$  be a partition of  $V$  with  $|A| \leq |B|$ .*

*If  $|A| \geq 2$ , there exist at least  $v + 1$  edges between  $A$  and  $B$ .*

*If  $|A| = 1$ , there exist at least  $\left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil + 2$  edges between  $A$  and  $B$ .*

**Proof.** Let us note :  $|A| = a$  and  $|B| = b$ . It is easy to see that  $a \leq \delta - 1$ .

With the same reasoning used for lemma 7.2, we conclude that there are at least  $a(\delta - a + 1)$  edges between  $A$  and  $B = V \setminus A$ .

If  $a = 1$ , the assertion is obvious.

For  $2 \leq a \leq \delta - 1$  it is easy to prove that:  $a(\delta - a + 1) \geq 2(\delta - 1) \geq v + 1$  and so the assertion is proved also for  $|A| \geq 2$ .  $\square$

We state also :

**Lemma 7.7** *Let  $G$  be a graph with  $\delta \geq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil + 2$ .*

*Let  $(V_x, x \in V)$ , be a family of subsets of  $V$  not all equal to  $V$ , such that for each*

$x \in V$ ,  $V_x$  contains  $x$  and all its neighbours.

Let  $W$  be the non empty subset of  $V$  defined by :  $W = \{x \in V ; V_x \neq V\}$ .

Then there exists a family  $(u_x, x \in W)$  of distinct edges of  $G$  such that for each  $x \in W$ ,  $u_x$  joins an element of  $V_x$  to an element of  $V \setminus V_x$ .

**Proof.** We will use Hall's theorem.

For each  $x \in W$ , let  $F_x$  be the non empty set of edges between  $V_x$  and  $V \setminus V_x$ .

For a non empty set  $S \subseteq W$ , let us study the cardinality of  $\Gamma(S) = \bigcup_{x \in S} F_x$ .

If for some element  $y$  of  $S$  we have  $|V \setminus V_y| \geq 2$ , by the previous lemma we have

$$|F_y| \geq v + 1 \text{ and since } F_y \subseteq \Gamma(S) \text{ and } |S| \leq v, \text{ we deduce : } |\Gamma(S)| \geq |S|.$$

If for every vertex  $x \in S$  we have  $|V \setminus V_x| = 1$ , for each  $x \in S$ ,  $V \setminus V_x$  is a singleton  $\{a_x\}$ , which means  $V_x = V \setminus \{a_x\}$ .

If the  $a_x, x \in S$  are all equal to an element  $a$  of  $V$ , each vertex  $x \in S$  is not a neighbour of  $a$ . Then,  $|S| \leq v - \deg_G(a)$  and since  $v - \deg_G(a) \leq \deg_G(a)$ , we deduce  $|S| \leq \deg_G(a)$ , that is  $|\Gamma(S)| \geq |S|$ .

If there are vertices  $y$  and  $z$  such that  $a_y \neq a_z$ , we have :

$$|F_y \cup F_z| = |F_y| + |F_z| - |F_y \cap F_z| \quad \text{and} \quad \text{as} \quad |F_y| \geq \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor + 1, \quad |F_z| \geq \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor + 1 \quad \text{and} \\ |F_y \cap F_z| \leq 1 \text{ (because } F_y \cap F_z = \emptyset \text{ if } yz \text{ is not an edge of } G \text{ or } F_y \cap F_z = \{yz\} \text{ if } \\ yz \text{ is an edge of } G), \text{ we get : } |F_y \cup F_z| \geq 2 \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor + 1 \text{ which implies } |F_y \cup F_z| \geq v \text{ and as} \\ F_y \cup F_z \subseteq \Gamma(S) \text{ and } |S| \leq v, \text{ again we deduce : } |\Gamma(S)| \geq |S|.$$

In conclusion, for every non empty set  $S \subseteq W$ , we have  $|\Gamma(S)| \geq |S|$  and then by Hall's theorem there is a family  $(u_x, x \in W)$  of distinct edges with  $u_x \in F_x$  for each  $x$  in  $W$ , and so the result is proved.  $\square$

We continue by :

**Lemma 7.8** Let  $G$  be a graph with  $\delta(G) \geq \left\lfloor \frac{v}{2} \right\rfloor + 2$ .

There exists a family  $(\Omega_x, x \in V)$  of spanning C.M.A of  $G$  such that :

- (i) For each  $x \in V$ ,  $R_1(\Omega_x) = \{(x, y) ; xy \in E(G)\}$
- (ii) For each  $x \in V$  with  $h(\Omega_x) \geq 2$ , we have  $|R'_i(\Omega_x)| = 1$  for  $i \in \{2, \dots, h(\Omega_x)\}$ .
- (iii) For every integer  $i$  verifying  $1 \leq i \leq \max(h(\Omega_x), x \in V)$ , if  $y$  and  $z$  are distinct vertices such that  $R'_i(\Omega_y)$  and  $R'_i(\Omega_z)$  are defined, we have :  $R'_i(\Omega_y) \cap R'_i(\Omega_z) = \emptyset$ .

**Proof.** There are families  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_x, x \in V)$  of C.M.A such that  $U(\mathcal{A}_x) = G$  for  $x \in V$ , verifying conditions (i), (ii) and (iii) and verifying also the

condition :

(iv) For every  $y$  such that  $h(A_y) < \max(h(A_x), x \in V)$ , we have  $V(A_y) = V$ .

Indeed, the family  $A' = (A'_x, x \in V)$  where  $A'_x$  is the C.M.A of root  $x$  and of height  $l$  with  $R_l(A'_x) = \{(x, y); xy \in E(G)\}$  is such an example.

For such a family  $A = (A_x, x \in V)$  let us note :

$h(A) = \max(h(A_x); x \in V)$ . There is  $y \in V$  such that  $h(A) = h(A_y)$ .

Since  $|R'(A_y)| = \deg_G(y) + h(A) - l$  and since  $|R'(A_y)| \leq v - l$ , we deduce :

$h(A) \leq v - \deg_G(y)$  hence  $h(A) \leq v - \delta$ .

Consequently, there is a family  $\Omega = (\Omega_x, x \in V)$  verifying (i), (ii), (iii) and (iv) and such that  $h(\Omega)$  is the greatest possible.

Let us note  $W = \{x \in V; V(\Omega_x) \neq V\}$ . By definition of  $\Omega$  (condition (iv)) we have  $W \subseteq \{x \in V; h(\Omega_x) = h(\Omega)\}$ .

If  $W = \emptyset$ , each  $\Omega_x$  is a spanning C.M.A verifying (i), (ii) and (iii) and then the lemma is proved.

Suppose  $W \neq \emptyset$ . By lemma 7.7, there are distinct edges  $u_x = a_x b_x$ ,  $x \in W$  with  $a_x \in V(\Omega_x)$  and  $b_x \in V \setminus V(\Omega_x)$  for each  $x \in W$ . The couples  $(a_x, b_x)$ ,  $x \in W$  are also distincts.

Keeping all the C.M.A  $\Omega_x$  with  $x \notin W$ , and taking for each  $x \in W$  the C.M.A  $\Omega'_x$  obtained from  $\Omega_x$  by adding the couple  $(a_x, b_x)$  at the rank  $h(\Omega_x) + l = h(\Omega) + l$  (see also the proof of lemma 7.4), we obtain a new family  $\Omega' = (\Omega'_x, x \in V)$  of C.M.A verifying conditions (i), (ii), (iii) and (iv) and such that  $h(\Omega') = h(\Omega) + l$ . This is contradictory with the definition of  $h(\Omega)$ .

Consequently,  $W = \emptyset$  and the lemma is proved.  $\square$

Now we can state :

**Proposition 7.9** For every graph  $G$  verifying  $\delta \geq \left\lceil \frac{v}{2} \right\rceil + 2$ , we have :

$$gf_*(l, G) \leq v - \delta.$$

**Proof.** There is a family  $\Omega = (\Omega_x, x \in V)$  defined as in lemma 7.8.

Clearly this family is the scheme of a total exchange process  $M$  using  $h(\Omega)$  steps and since  $h(\Omega) \leq v - \delta$ , the result follows.  $\square$

Now, we give also a second conjecture :

**Conjecture 7.10** For every connected graph  $G$ , we have :

$$gf_*(l, G) \leq \left\lceil \frac{v(G) - l}{k(G)} \right\rceil.$$

We first remark that here also the conjecture is compatible with lower bounds 1, 2



and 3. This is obvious for lower bounds 1 and 3 and it is a little more difficult for lower bound 2.

Proposition 4.5 shows that this conjecture is true for a graph with vertex connectivity equal to  $l$ . It is also true for a cycle and for a complete graph (in both cases we even have equality)

This conjecture is probably more difficult to prove or disprove than conjecture 7.1, but it is also more interesting. If true, this conjecture implies that for any graph  $G$

having identical connectivity and minimum degree, we have  $gf_*(l, G) = \left\lceil \frac{v-l}{\delta} \right\rceil$

(which would be a strong result).

We will prove now that conjecture 7.10 is true for some Cayley graphs, more precisely :

**Proposition 7.12** *Let  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$  be a Cayley graph, with  $\Gamma$  an abelian group and  $d = 3$ .*

*Then :  $gf_*(l, G) = \left\lceil \frac{v-l}{3} \right\rceil$ .*

**Proof.** It is clear that either the three elements of  $S$  are of order 2 in  $\Gamma$ , or exactly one element of  $S$  is of order 2 in  $\Gamma$ .

In the first alternative, as  $G$  is either the complete graph  $K_4$ , or the hypercube  $H(3)$ , the result is obvious.

Let us consider the second alternative.

We can note  $S = \{\alpha, \beta, \beta^{-1}\}$  with  $\alpha = \alpha^{-1}$  and  $\beta \neq \beta^{-1}$ . As  $|\Gamma|$  being even, we can note  $v = 2n$ .

Let us note  $r = \left\lceil \frac{2n-l}{3} \right\rceil$ . We now distinguish two cases, whether the family  $(\alpha, \beta)$

is free or not.

**Case 1.** The family  $(\alpha, \beta)$  is free.

Necessarily  $\beta$  is of order  $n$  and we have  $\Gamma = \{1, \beta, \dots, \beta^{n-1}, \alpha, \alpha\beta, \dots, \alpha\beta^{n-1}\}$ .

First, suppose that 3 is a divisor of  $2n-l$  (which means  $r = \frac{2n-l}{3}$ )

Let  $A_i$ ,  $0 \leq i \leq r$  be the sequence of vertex sets defined by :

- $A_0 = \{1\}$ .
- $A_i = \left\{ \alpha\beta^{i-1}, \beta^i, \beta^{\frac{i+1}{2}} \right\}$  for every odd integer  $i$  verifying  $1 \leq i \leq r-2$ .
- $A_i = \left\{ \alpha\beta^{i-1}, \beta^i, \alpha\beta^{\frac{i}{2}} \right\}$  for every even integer  $i$  verifying  $2 \leq i \leq r-1$ .
- $A_r = \left\{ \alpha\beta^{r-1}, \beta^r, \alpha\beta^{\frac{r+1}{2}} \right\}$ .

Let us prove that :  $\bigcup_{0 \leq i \leq r} A_i = \Gamma$ .

Let  $x$  be an element of  $\Gamma$  and first, suppose that we have  $x = \beta^j$  with  $0 \leq j \leq n-1$ . For  $0 \leq j \leq r$ , clearly we have  $x \in A_j$ .

Suppose now  $r+1 \leq j \leq n-1$ . We have  $\beta^j = \beta^{-(n-j)} = \beta^{\frac{2(n-j)-1+1}{2}}$ . We can easily prove that :  $1 \leq 2(n-j)-1 \leq r-2$ . Therefore  $A_{2(n-j)-1}$  is well defined and clearly it contains  $x$ .

Suppose now that we have  $x = \alpha\beta^j$  with  $0 \leq j \leq n-1$ .

If  $0 \leq j \leq r-1$ , we have  $x \in A_{j+1}$ .

For  $j=r$ , we have  $x = \alpha\beta^{-(n-r)} = \alpha\beta^{\frac{r+1}{2}}$  and therefore  $x \in A_r$ .

For  $r+1 \leq j \leq n-1$ , we have  $x = \alpha\beta^{\frac{2n-2j}{2}}$ . It is no difficult to prove that we have  $2 \leq 2n-2j \leq r$ .

Therefore  $A_{2n-2j}$  is well defined and it contains  $x$ .

In all cases we have  $x \in \bigcup_{0 \leq i \leq r} A_i$  and consequently  $\bigcup_{0 \leq i \leq r} A_i = \Gamma$ .

We now define the sequence  $E_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  of couples by :

-  $E_1 = \{(1, \alpha), (1, \beta), (1, \beta^{-1})\}$ .

- For any odd integer  $i$  with  $3 \leq i \leq r-2$ ,

$$E_i = \left\{ \left( \beta^{i-1}, \alpha\beta^{i-1} \right), \left( \beta^{i-1}, \beta^i \right), \left( \beta^{\frac{i-1}{2}}, \beta^{\frac{i+1}{2}} \right) \right\}.$$

- For an even integer  $i$  with  $2 \leq i \leq r-1$ ,

$$E_i = \left\{ \left( \beta^{i-1}, \alpha\beta^{i-1} \right), \left( \beta^{i-1}, \beta^i \right), \left( \alpha\beta^{\frac{i-2}{2}}, \alpha\beta^{\frac{i}{2}} \right) \right\}.$$

-  $E_r = \left\{ \left( \beta^{r-1}, \alpha\beta^{r-1} \right), \left( \beta^{r-1}, \beta^r \right), \left( \alpha\beta^{\frac{r-1}{2}}, \alpha\beta^{\frac{r+1}{2}} \right) \right\}$ .

Note that each  $E_i$  is a set of arcs of  $\vec{G}$  having distinct generators and linking  $A_0 \cup \dots \cup A_{i-1}$  to  $A_i$ .

Then we can easily construct a spanning multi-arborescence  $\Omega_I$  of  $G$ , rooted at  $I$ , of height  $r$ , such that  $R'_i(\Omega_I) = E_i$  for  $1 \leq i \leq r$ .

By Lemma 7.3 and by Proposition 2.1, we deduce  $gf_*(I, G) = \left\lceil \frac{v-I}{3} \right\rceil$ .

Now, suppose that 3 is not a divisor of  $2n-1$ .

Let  $B_i$ ,  $0 \leq i \leq r$  be the sequence of vertex sets defined by :

-  $B_0 = \{I\}$ .

$$- B_i = \left\{ \alpha\beta^{i-1}, \beta^i, \beta^{\frac{i+1}{2}} \right\} \text{ for every odd integer } i \text{ verifying } 1 \leq i \leq r.$$

$$- B_i = \left\{ \alpha\beta^{i-1}, \beta^i, \alpha\beta^{\frac{i}{2}} \right\} \text{ for every even integer } i \text{ verifying } 2 \leq i \leq r.$$

As previously, let us prove that  $\bigcup_{0 \leq i \leq r} B_i = \Gamma$ .

Let  $x$  be an element of  $\Gamma$  and first suppose that we have  $x = \beta^j$  with  $0 \leq j \leq n-1$ .  
If  $0 \leq j \leq r$ , clearly we have  $x \in B_j$ .

Suppose now  $r+1 \leq j \leq n-1$ . We have  $\beta^j = \beta^{-(n-j)} = \beta^{-\frac{2(n-j)-1+1}{2}}$ . We can easily prove that  $1 \leq 2(n-j)-1 \leq r$ . So,  $B_{2(n-j)-1}$  is well defined and it contains  $x$ .

Suppose now that we have  $x = \alpha\beta^j$  with  $0 \leq j \leq n-1$ .

For  $0 \leq j \leq r-1$ , it is easy to see that  $x \in B_{j+1}$ .

For  $r \leq j \leq n-1$ , it is also easy to prove that  $B_{2(n-j)}$  is well defined and that it contains  $x$ .

In all cases we have  $x \in \bigcup_{0 \leq i \leq r} B_i$  and consequently  $\bigcup_{0 \leq i \leq r} B_i = \Gamma$ .

With analogous considerations we deduce again :  $gf_*(I, G) = \left\lfloor \frac{v-1}{3} \right\rfloor$ .

**Case 2.**  $(\alpha, \beta)$  is not a free family.

Then  $\Gamma$  is a cyclic group having  $\beta$  as generator and so,  $\Gamma = \{1, \beta, \dots, \beta^{2n-1}\}$ .

Furthermore  $\alpha = \beta^n$ .

We keep the same sequence of sets  $B_i$ ,  $0 \leq i \leq r$  previously defined.

Let us prove that here also we have  $\bigcup_{0 \leq i \leq r} B_i = \Gamma$ .

For  $x \in \Gamma$ , there is  $j \in \{0, \dots, 2n-1\}$  such that  $x = \beta^j$ .

For  $0 \leq j \leq r$  we have  $x \in B_j$ .

For  $r+1 \leq j \leq n-1$ , we have  $x = \alpha\beta^{\frac{2n-2j}{2}}$ . We can easily prove that  $2 \leq 2n-2j \leq r$ .  
So  $B_{2n-2j}$  is well defined and clearly  $x \in B_{2n-2j}$ .

For  $n \leq j \leq n+r-1$  we have  $x = \alpha\beta^{j-n}$ . It is easy to prove that  $B_{j-n+1}$  is well defined and then clearly :  $x \in B_{j-n+1}$ .

For  $n+r \leq j \leq 2n-1$  we have  $x = \beta^{\frac{2(2n-j)-1+1}{2}}$ . We can prove that  $B_{2(2n-j)-1}$  is well defined and then  $x \in B_{2(2n-j)-1}$ .

In all cases we have  $x \in \bigcup_{0 \leq i \leq r} B_i$  and consequently  $\bigcup_{0 \leq i \leq r} B_i = \Gamma$ .

Now, with analogous reasonings, we deduce  $gf_*(I, G) = \left\lfloor \frac{v-1}{3} \right\rfloor$ . □

## Acknowledgements

This paper owes much to mathematical and linguistic advices of Claudine Peyrat.

## References

- [1] C. Berge, Graphes, Gauthiers-Villars, 1983.
- [2] J.C Bermond, T.Kodate, S. Perennes, Gossiping on Cayley graphs by packets, Proceedings of franco-japanese conference at Brest, Lecture Notes in Comput. Sci, Springer Verlag, vol.1120 301-305.
- [3] G. Chartrand, F. Harary, Graphs with prescribed connectivities in « Theory of graphs » (P. Erdős and G. Katona eds.), Academic Press, New-York, 1968, 61-63.
- [4] P. Fragopoulou, S.G Akl, Spanning subgraphs with application to communication on a subclass of the Cayley-graphs-based networks, Discrete Appl. Math., 83 (1998), 79-96.
- [5] P. Fraignaud, E. Lazard, Methods and problems of communication in usual networks, Discrete Appl. Math., 53 (1994), 79-133.
- [6] N. Lichiardopol, Concerning two conjectures on the set of fixed points of a complete rotation of a Cayley digraph, I.C.G.T 2000 Marseille, to appear in Discrete Math.
- [7] L. Lovasz, M.D. Plummer, Matching Theory, North-Holland, 1986.
- [8] N. Marlin, Rotations complètes dans les graphs de Cayley, D.E.A, University of Nice Sophia-Antpolis, 1996

### 3. Retour sur une conjecture reliant le temps d'échange total et la connectivité d'un graphe $G$

Les notations sont celles de l'introduction générale.

Dans l'article précédent on avait estimé que pour tout graphe connexe  $G$ , on a :

$gf_*(l, G) \leq \left\lceil \frac{v-l}{k} \right\rceil$ . C'était la Conjecture 7.10 du dit article et on a vu qu'elle est vraie pour les graphes  $G$  dont la connectivité est  $v-l$  (les graphes complets en fait).

Dans ce qui suit, on va prouver cette conjecture pour les graphes  $G$  vérifiant  $\frac{v-l}{2} \leq k < v-l$ .

Cela revient à prouver en fait que pour un tel graphe  $G$ , on a  $gf_*(l, G) \leq 2$ .

Pour cela on va utiliser le résultat suivant qui est connu (voir par exemple [1])

**Proposition 1.** *Soit  $G$  un graphe  $k$ -connexe et soit  $A$  une partie de  $V(G)$  telle que  $|A| \leq |V \setminus A|$ .*

*Si  $|A| \leq k$ , il existe  $|A|$  arêtes indépendantes entre  $A$  et  $V \setminus A$ .*

Fixons un graphe  $G$  de connectivité  $k$  avec  $\frac{v-l}{2} \leq k < v-l$ .

Soit  $W$  l'ensemble des sommets  $z$  de  $G$  tels qu'il existe des sommets distincts de  $z$  qui ne sont pas voisins de  $z$ .  $G$  n'étant pas le graphe complet,  $W$  n'est pas vide.

Notons  $A_z$  l'ensemble des sommets de  $G$  distincts de  $z$  qui ne sont pas voisins de  $z$ . Comme on a  $\deg(x) \geq k \geq \frac{v-l}{2}$ , il est facile de prouver qu'on a  $|A_z| \leq |V \setminus A_z|$  et  $|A_z| \leq k$ .

On est dans les conditions de la Proposition 1, par conséquent, il existe une famille  $(x, \sigma_{z,x})$ ,  $x \in A_z$  de  $|A_z|$  arcs indépendants de  $\overline{G}$  allant de  $|A_z|$  à  $V \setminus A_z$  et comme un élément de  $A_z$  n'a pas  $z$  comme voisin, les  $\sigma_{z,x}$ ,  $x \in A_z$  sont tous distincts de  $z$  et donc des voisins du sommet  $z$ .

Considérons maintenant la famille  $\Omega_x$ ,  $x \in V$  de multi-arborescences compactes définie de la manière suivante :

- Si  $x \notin W$ ,  $\Omega_x$  est la multi-arborescence compacte de racine  $x$ , de hauteur 1 et dont les arcs non triviaux de rang 1 sont les couples  $(x, y)$  où  $y \in V$ ,  $y \neq x$ .
- Si  $x \in W$ ,  $\Omega_x$  est la multi-arborescence compacte de racine  $x$ , de hauteur 2, dont les arcs non triviaux de rang 1 sont les couples  $(x, y)$  où  $y$  est voisin de  $x$  et dont les arcs non triviaux de rang 2 sont les arcs  $(\sigma_{z,x}, z)$ ,  $x \in A_z$ .

Il est facile de voir que ces multi-arborescences compactes constituent le schéma d'un échange total dans  $G$ , réalisé en 2 étapes.

La conjecture est donc prouvée dans ce cas, et d'une façon plus précise, pour des graphes  $G$  de connectivité  $k$  avec  $\frac{v-1}{2} \leq k < v-1$ , on a  $gf_*(1, G) = 2$ .

## Références

- [1] B. Bollobas, Extremal Graph Theory, Academic Press, 1978.

## **CHAPITRE 2**

# **ECHANGE TOTAL ET GRAPHERS DE CAYLEY**





## 1. Introduction

Le point de départ de ce chapitre (et en fait de toute la thèse) est l'article de J.C. Bermond, T. Kodate et S. Perennes et intitulé « Gossiping on Cayley graphs by packets » (Référence [1]). On reprend en fait de façon plus complète un travail sur cet article fait par l'auteur dans le cadre du D.E.A et supervisé par J.C. Bermond et S. Perennes.

Rappelons d'abord quelques définitions :

Si  $\Gamma$  est un groupe et si  $S$  est une partie génératrice de  $\Gamma$  ne contenant pas l'élément neutre  $1$  et telle que  $x \in S \Rightarrow x^{-1} \in S$ , le **graphe de Cayley**  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$  est le graphe dont l'ensemble de sommets est  $V(G) = \Gamma$  et dont l'ensemble  $E(G)$  des arêtes est constitué des paires  $\{x, y\}$  telles que  $yx^{-1} \in S$ .

Un graphe de Cayley  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$  avec  $|S| = d$  étant donné, **une rotation complète de  $G$**  est un automorphisme  $\omega$  de  $\Gamma$  tel que pour un certain arrangement  $s_0, \dots, s_{d-1}$  des éléments de  $S$ , on ait  $\omega(s_t) = s_{t+1}$  pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ , l'indexation étant faite modulo  $d$ .

Un graphe de Cayley muni d'une rotation est dit **graphe de Cayley rotationnel**.

Un élément  $x \in \Gamma$  est dit **point fixe de  $\omega$** , si  $x \neq 1$  et s'il existe  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  tel que  $\omega^i(x) = x$ .

Pour  $k$  entiers  $p_1, \dots, p_k$  tous au moins égaux à 2, **la grille torique**  $TM(p_1, \dots, p_k)$  est le graphe  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_{p_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_k}, S)$  où  $S = \{s_0, \dots, s_{2k-1}\}$  avec  $s_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, s_{k-1} = (0, \dots, 0, 1)$  et  $s_{k+i} = -s_i$  pour  $0 \leq i \leq k-1$ .

Pour  $p \geq 2$ , **la grille torique uni dimensionnelle**  $TM(p)^k$  est la grille torique  $TM(p, \dots, p)$ .

Il est facile de voir que l'application  $\sigma: \mathbb{Z}_p^k \rightarrow \mathbb{Z}_p^k$  définie par  $\sigma(x_0, \dots, x_{k-1}) = (-x_{k-1}, x_0, \dots, x_{k-2})$  est une rotation complète de la grille torique  $TM(p)^k$ . Ce résultat figure dans [1].

**Le hypercube**  $H(k)$  est en fait la grille torique  $TM(2)^k$ .

Pour  $k \geq 2$ , **le graphe étoile symétrique**  $S(k)$  est le graphe  $\text{Cay}(\Sigma_k, S)$  où  $\Sigma_k$  est le groupe des permutations de  $\{1, \dots, k\}$  et  $S$  est l'ensemble des  $k-1$  transpositions échangeant  $1$  et  $i$  pour  $2 \leq i \leq k$ .

Il a été prouvé dans [1] que le hypercube et le graphe étoile symétrique sont des graphes rotationnels.

J.C. Bermond, T. Kodate, S. Perennes [1] de l'introduction générale, et N. Marlin dans [15] ont conjecturé que l'ensemble des points fixes de la rotation  $\sigma$  de la grille torique  $TM(p)^k$  ne disconnecte pas  $TM(p)^k$ .

D'une façon générale, ils ont conjecturé que l'ensemble des points fixes d'une rotation complète d'un graphe de Cayley  $G$ , ne disconnecte pas  $G$ .

Dans la **section 2** de ce chapitre, qui est un article accepté pour publication dans « Discrete Mathematics » (après avoir fait l'objet d'un exposé à l'I.C.G.T 2000 à Marseille), nous prouvons la première conjecture et invalidons la deuxième à travers une familles de graphes de Cayley rotationnels  $G_n$ ,  $n \geq 3$ .

Dans la **section 3**, nous montrons que si l'ensemble  $F_\omega$  des points fixes d'une rotation  $\omega$  d'un graphe de Cayley  $G = Cay(\Gamma, S)$  est stable et ne disconnecte pas  $G$ , alors le temps minimum d'échange total de  $G$  est optimal, c'est-à-dire égal à  $\left\lceil \frac{v(G)-1}{d} \right\rceil$ . Le résultat a été

déjà prouvé dans l'article [1], mais la démonstration que nous donnons est différente dans la forme. Cela permet aux auteurs de l'article [1] de prouver que les temps minimum d'échange totaux d'un hypercube et d'un graphe étoile symétrique sont optimaux. La validation de la première conjecture permet d'affirmer que le T.M.E.T. d'une grille torique  $TM(p)^k$  est aussi optimal.

En fait, la grille torique uni dimensionnelle, le hypercube et le graphe star-étoile, sont les seuls réseaux classiques pour lesquels on a obtenus les valeurs exactes de leur T.M.E.T..

Toujours dans la même section, nous montrons que le T.M.E.T. d'un graphe  $G_n$  est optimal, bien que l'ensemble des points fixes de la rotation  $\omega_n$  disconnecte  $G_n$ .

Nous donnons ensuite un exemple de graphe rotationnel dont l'ensemble des points fixes n'est pas stable.

En se basant sur les exemples considérés, nous conjecturons que le T.M.E.T. d'un graphe de Cayley rotationnel est optimal.

Nous exhibons par contre une famille de graphes de Cayley dont le T.M.E.T. n'est pas optimal.

Enfin dans la **section 4**, en partant du contre exemple de la section 2, nous exhibons deux graphes de Cayley isomorphes, mais dont les groupes qui les définissent ne sont pas isomorphes.

# Concerning two conjectures on the set of fixed points of a complete rotation of a Cayley digraph

Nicolas Lichiardopol

I3S-ESSI, BP 145, 06903 Sophia Antipolis, France

e-mail : lichiar@club-internet.fr

## Abstract

In 1996, N. Marlin and S. Perennes conjectured that the set  $F_\sigma$  of fixed points of some complete rotation  $\sigma$  of the toroidal mesh  $T.M(p)^k$  is not separating (that is  $F_\sigma$  does not disconnect  $T.M(p)^k$ ).

They also conjectured that the set  $F_\omega$  of fixed points of any complete rotation  $\omega$  of any Cayley digraph is not separating.

In this paper, we prove the first conjecture and disprove the second one.

*Keywords* : Cayley digraph, complete rotation, fixed points, separating set.

## 1 Introduction

In [1], J.C. Bermond, T. Kodate, S. Perennes consider a gossiping problem. They prove that for any Cayley digraph  $G$  with a complete rotation  $\omega$ , if the set  $F_\omega$  of fixed points of  $\omega$  is not separating and independent, then the minimum gossiping time of  $G$  is optimal.

J.C. Bermond, T. Kodate, S. Perennes and N. Marlin (see [4]) then proposed the following

conjectures :

Conjecture 1 : The set  $F_\sigma$  of fixed points of some complete rotation  $\sigma$  of the toroidal mesh  $T.M(p)^k$  is not separating.

Conjecture 2 : The set  $F_\omega$  of fixed points of any complete rotation  $\omega$  of a Cayley digraph is not separating.

In this paper, we prove Conjecture 1 and as  $F_\sigma$  is an independent set, this implies that the minimum gossiping time of the toroidal mesh is optimal. We also invalidate Conjecture 2.

The invalidating example for Conjecture 2, shows that even when the gossiping time of a rotational Cayley digraph is optimal, the set of fixed points may be separating.

## 2 Definitions and notation

**Definition 2.1** *Let  $\Gamma$  be a group and  $S$  be a generating set of  $\Gamma$  such that :*

-  $e \notin S$ ,  $e$  being the identity in  $\Gamma$ .

-  $s \in S \Leftrightarrow s^{-1} \in S$ .

*The associated Cayley digraph  $Cay(\Gamma, S)$  is the digraph whose vertices are the elements of  $\Gamma$  and whose arcs are the couples  $(x, sx)$  for  $x \in \Gamma$  and  $s \in S$ .*

With this definition,  $Cay(\Gamma, S)$  is a connected symmetric digraph ( in fact a strongly connected digraph). Therefore, we may also consider it as a connected regular undirected graph where each vertex has degree  $d = |S|$ .

If  $S = \{s_0, \dots, s_{d-1}\}$ , then for  $t \in \mathbb{Z}$ , we consider  $s_t = s_r$ , where  $r$  is the unique element of  $\{0, \dots, d-1\}$  such that  $t \equiv r \pmod{d}$ .

We now recall the definition of a toroidal mesh :

**Definition 2.2** For  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 3$  and  $k \in \mathbb{N}^*$ , the toroidal mesh  $T.M(p)^k$  is the Cayley digraph  $Cay(\mathbb{Z}_p^k, S)$ , where  $S = \{s_0, \dots, s_{2k-1}\}$  with :

$$s_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, s_{k-1} = (0, \dots, 0, 1) \text{ and } s_{k+i} = -s_i \text{ for } 0 \leq i \leq k-1.$$

The toroidal mesh  $T.M(p)^k$  is a regular digraph of degree  $2k$  with  $p^k$  vertices. Its diameter is  $k \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$  and its vertex connectivity is  $2k$ .

**Definition 2.3** Let  $G = Cay(\Gamma, S)$  be a Cayley digraph with  $|S| = d$ .

A complete rotation of  $G$  is a group automorphism  $\omega$  of  $\Gamma$  such that for some ordering  $s_0, \dots, s_{d-1}$  of the elements of  $S$ , we have  $\omega(s_t) = s_{t+1}$  for every  $t \in \mathbb{Z}$ .

Clearly, a rotation is a graph automorphism. A Cayley digraph with a complete rotation is called a rotational Cayley digraph.

The toroidal mesh  $T.M(p)^k$  is a rotational Cayley digraph. Indeed, the mapping  $\sigma : \mathbb{Z}_p^k \rightarrow \mathbb{Z}_p^k$  defined by  $\sigma(x_0, \dots, x_{k-1}) = (-x_{k-1}, x_0, \dots, x_{k-2})$  is a complete rotation of the Cayley digraph  $T.M(p)^k$  with  $\sigma(s_t) = s_{t+1}$  for  $t \in \mathbb{Z}$ .

**Remark :** if  $\omega$  is a complete rotation of a Cayley digraph  $G = Cay(\Gamma, S)$  with  $|S| = d$ , we have  $\omega^l(s_t) = s_{t+l}$  for  $l, t \in \mathbb{Z}$ . This implies  $\omega^d(x) = x$  for each vertex of  $G$ .

**Definition 2.4** Let  $G = Cay(\Gamma, S)$  with  $|S| = d$  and let  $\omega$  be a complete rotation of  $G$ .

An element  $x \in \Gamma$  is said to be a fixed point of  $\omega$ , if  $x \neq e$  and if there exists an integer  $i \in \{1, \dots, d-1\}$  such that  $\omega^i(x) = x$ .

We note  $F_\omega$  the set of fixed points of  $\omega$  and  $F'_\omega = F_\omega \cup \{e\}$ .

It is obvious that for any  $t$  in  $\{0, \dots, d-1\}$ ,  $s_t$  is not a fixed point.

For  $x \in F'_\omega$  let  $i = \min \{j \in \mathbb{N}^*; \omega^j(x) = x\}$ . Clearly,  $i < d$  and  $i|d$ .

For  $i \in \mathbb{N}^*$  we note  $W_{\omega,i} = \{x \in \Gamma; \omega^i(x) = x\}$ . Clearly,  $W_{\omega,i}$  is a subgroup of  $\Gamma$ ,  $W_{\omega,d} = \Gamma$

and  $F'_\omega = \bigcup_{i|d, i < d} W_{\omega, i}$ .

We can also verify that if  $x \in W_{\omega, i}$ , then for every  $l \in \mathbb{Z}$  we have  $\omega^l(x) \in W_{\omega, i}$ .

For more results, one can see [2], [4] and [5].

We now determine the sets  $W_{\omega, i}$  in the particular case of the toroidal mesh :

**Proposition 2.5** *For the toroidal mesh  $T.M(p)^k = \text{Cay}(\mathbb{Z}_p^k, S)$  with its complete rotation  $\sigma$  and for  $i|2k$ ,  $i < 2k$  :*

**a)** *If  $i$  is not a divisor of  $k$  (then  $2|i$ ), we have :*

$$W_{\sigma, i} = \left\{ (U, -U, \dots, U, -U, U); U \in \mathbb{Z}_p^{\frac{i}{2}} \right\} \text{ and therefore } |W_{\sigma, i}| = p^{\frac{i}{2}}.$$

**b)** *If  $i|k$  and if  $p$  is even, we have :*

$$W_{\sigma, i} = \left\{ (U, \dots, U); U \in \left\{ 0, \frac{p}{2} \right\}^i \right\} \text{ and therefore } |W_{\sigma, i}| = 2^i \text{ and } 2x = 0 \text{ for } x \in W_{\sigma, i}.$$

**c)** *If  $i|k$  and if  $p$  is odd, we have  $W_{\sigma, i} = \{0\}$  and so  $|W_{\sigma, i}| = 1$ .*

**Proof.** **a)** We can put  $i = 2j$ ,  $2k = l \times 2j$

Note that  $l$  is not even, as otherwise, we have  $2j|k$  that is  $i|k$  which is false by hypothesis.

Therefore we have  $k = (2m + 1)\frac{i}{2}$  with  $m \geq 1$  (because  $i < 2k$ ).

Consider now a vertex  $x \in W_{\sigma, i}$ .

We have  $x = (U_1, U_2, \dots, U_{2m+1})$ , where  $U_r \in \mathbb{Z}_p^{\frac{i}{2}}$  for  $1 \leq r \leq 2m + 1$ .

Since  $\sigma^i(x) = x$ , we have  $(U_1, U_2, \dots, U_{2m+1}) = (-U_{2m}, -U_{2m+1}, U_1, \dots, U_{2m-1})$ , hence

$$U_1 = U_3, \dots, U_{2m-1} = U_{2m+1} \text{ and also } U_1 = -U_{2m} \text{ and } U_2 = -U_{2m+1}.$$

This implies  $U_1 = U_3 = \dots = U_{2m+1} = -U_{2m}$  and  $U_2 = \dots = U_{2m}$ .

Then, by putting  $U_1 = U$ , we get  $x = (U, -U, \dots, U, -U, U)$  with  $U \in \mathbb{Z}_p^{\frac{i}{2}}$ .

Conversely, it is clear that every element  $x$  of this form is in  $W_{\sigma, i}$  and so, the assertion is proved.

**b)** As  $i|k$ , we note  $k = ji$ , with  $j \in \mathbb{N}^*$ .

Let  $x \in W_{\sigma,i}$ . We note  $x = (U_1, \dots, U_j)$ , with  $U_r \in \mathbb{Z}_p^i$  for  $1 \leq r \leq j$ . Then we have  $\sigma^i(x) = (-U_j, U_1, \dots, U_{j-1})$ .

Since  $\sigma^i(x) = x$ , we get  $U_1 = \dots = U_j$  and  $U_1 = -U_j$ . Then by putting  $U_1 = U$ , we get  $x = (U, \dots, U)$ , with  $U = -U$ , which means  $U \in \left\{0, \frac{p}{2}\right\}^i$ .

Conversely, it is easy to see that a vertex  $x$  of the above form is in  $W_{\sigma,i}$ . Consequently :

$$W_{\sigma,i} = \left\{ (U, \dots, U); U \in \left\{0, \frac{p}{2}\right\}^i \right\}$$

Obviously,  $|W_{\sigma,i}| = 2^i$  and  $2x = 0$  for  $x \in W_{\sigma,i}$ . So, the assertion is proved.

c) Obvious, because  $U = -U$  in  $\mathbb{Z}_p^i$  implies  $U = 0$ .

### 3 Proof of Conjecture 1

For integers  $p \geq 3$  and  $k \geq 1$ , let us consider the toroidal mesh  $TM(p)^k = Cay(\mathbb{Z}_p^k, S)$  with its complete rotation  $\sigma$ . We note  $\Gamma = \mathbb{Z}_p^k$ .

We must prove that the set  $F_\sigma$  of fixed points of  $\sigma$  is not separating.

By Proposition 2.5, if  $k = 1$  and if  $p$  is odd, we have  $F'_\sigma = \{0\}$  and  $F_\sigma = \emptyset$  and so  $F_\sigma$  is not separating ( $F'_\sigma$  is also not separating, because the vertex connectivity of a cycle is 2). If  $k = 1$  and if  $p$  is even, we have  $F'_\sigma = \left\{0, \frac{p}{2}\right\}$ ,  $F_\sigma = \left\{\frac{p}{2}\right\}$  and again  $F_\sigma$  is not separating (but no  $F'_\sigma$ ).

Thus, for  $k = 1$ , Conjecture 1 is true, and so we consider the case  $k \geq 2$ .

Several intermediate results are necessary. We start by :

**Proposition 3.1** *Let  $i, j$  be elements of  $\mathbb{N}^*$ .*

$W_{\sigma,i} - W_{\sigma,j} = \{x - y; x \in W_{\sigma,i}, y \in W_{\sigma,j}\}$  is a subgroup of  $\Gamma$ , invariant by  $\sigma$ .

**Proof.** Since  $W_{\sigma,i}$  and  $W_{\sigma,j}$  are subgroups of the abelian group  $\Gamma$  and since they are invariant by  $\sigma$ , this result is obvious. ■

We continue by :

**Proposition 3.2** *If  $x$  is an element of  $F'_\sigma$ , for every  $t \in \{0, \dots, 2k-1\}$  we have  $x + s_t \notin F'_\sigma$ .*

**Proof.** It is obvious for  $x = 0$ . Let us suppose  $x \neq 0$ .

Since  $x \in F'_\sigma$ , there exists  $i$ , a proper divisor of  $2k$ , such that  $x \in W_{\sigma,i}$ .

Let us suppose that there exists  $t_0 \in \{0, \dots, 2k-1\}$  such that  $x + s_{t_0} \in F'_\sigma$ . Then there exists an integer  $j$  verifying  $j|2k$ ,  $j < 2k$ , such that  $x + s_{t_0} \in W_{\sigma,j}$ .

Five cases may occur :

**Case 1.**  $p$  is odd.

Since  $x \neq 0$  and  $x + s_{t_0} \neq 0$  (otherwise we have  $x \notin F'_\sigma$ ),  $x$  and  $x + s_{t_0}$  are non null fixed points and by Proposition 2.5,  $i$  and  $j$  are not divisors of  $k$ .

Since we have  $x + s_{t_0} \in W_{\sigma,j}$  and  $x \in W_{\sigma,i}$ , we deduce  $s_{t_0} \in W_{\sigma,j} - W_{\sigma,i}$ .

Since  $s_t = \sigma^{t-t_0}(s_{t_0})$  and since  $W_{\sigma,j} - W_{\sigma,i}$  is invariant by  $\sigma$  then for every  $t \in \{0, \dots, 2k-1\}$  we have  $s_t \in W_{\sigma,j} - W_{\sigma,i}$  and therefore  $S \subseteq W_{\sigma,j} - W_{\sigma,i}$ .

This implies  $W_{\sigma,j} - W_{\sigma,i} = \mathbb{Z}_p^k$  and therefore  $|W_{\sigma,j} - W_{\sigma,i}| = p^k$ .

But  $|W_{\sigma,j}| = p^{\frac{j}{2}}$ ,  $|W_{\sigma,i}| = p^{\frac{i}{2}}$  and as the mapping  $\phi : W_{\sigma,j} \times W_{\sigma,i} \rightarrow W_{\sigma,j} - W_{\sigma,i}$  defined by  $\phi(u, v) = u - v$  is surjective, we have  $|W_{\sigma,j} - W_{\sigma,i}| \leq |W_{\sigma,j} \times W_{\sigma,i}|$  that is  $p^k \leq p^{\frac{i}{2} + \frac{j}{2}}$ .

Furthermore, as  $i$  and  $j$  are proper divisors of  $2k$ , both distinct from  $k$ , we have  $i < k$  and  $j < k$ , hence  $\frac{i}{2} + \frac{j}{2} < k$  and then  $p^{\frac{i}{2} + \frac{j}{2}} < p^k$ .

By transitivity, we obtain  $p^k < p^k$ , a contradiction.

**Case 2.**  $p$  is even,  $i$  and  $j$  are not divisors of  $k$ .

The same proof as that of Case 1 yields a contradiction.

**Case 3.**  $p$  is even,  $i|k$ ,  $j|k$ .

By Proposition 2.5.b, we have  $2x = 0$ ,  $2(x + s_{t_0}) = 0$ , hence  $2s_{t_0} = 0$ , which means  $2 = 0$  in  $\mathbb{Z}_p$ , impossible (as  $p > 2$ ).

**Case 4.**  $p$  is even,  $i$  is a divisor of  $k$  and  $j$  is not.



Then,  $2x = 0$  and  $x + s_{t_0} \in W_{\sigma,j}$  imply  $2(x + s_{t_0}) \in W_{\sigma,j}$  that is  $2s_{t_0} \in W_{\sigma,j}$ .

Since  $j$  is not a divisor of  $k$ , by Proposition 2.5.a we have :

$2s_{t_0} = (U, -U, \dots, U, -U, U)$  with  $U \in \mathbb{Z}_p^{\frac{i}{2}}$ , and since  $U \neq 0$  (because  $2s_{t_0} \neq 0$ ),  $2s_{t_0}$  contains at least three nonzero co-ordinates, which is a contradiction as  $2s_{t_0}$  contains exactly one nonzero co-ordinate.

**Case 5.**  $p$  is even ,  $i$  is not a divisor of  $k$  and  $j|k$ .

Same as Case 4 by exchanging the roles of  $x$  and  $x + s_{t_0}$ .

In all cases, we obtain a contradiction. Consequently, for every  $t \in \{0, \dots, 2k - 1\}$ , we can state  $x + s_t \notin F'_\sigma$ . ■

This proposition means that  $F'_\sigma$  is an independent set of  $T.M(p)^k$ .

For positive integers  $i$  and  $j$ , recall that  $i \vee j$  denotes the lowest common multiple of  $i$  and  $j$ .

The next two propositions concern the case  $p \neq 4$ .

**Proposition 3.3** *We suppose here  $p \neq 4$ .*

*Let  $t$  and  $t'$  be distinct elements of  $\{0, \dots, 2k - 1\}$  and let  $x \in \Gamma$ .*

*If there are naturals  $i, j$ , proper divisors of  $2k$  such that  $x + s_t \in W_{\sigma,i}$  and  $x + s_{t'} \in W_{\sigma,j}$ , then  $i \vee j = 2k$ .*

**Proof.** Let us note  $m = i \vee j$ . Since  $i|2k$  and  $j|2k$ , we deduce  $m|2k$ .

Let us suppose  $m < 2k$ . Since  $x + s_t \in W_{\sigma,i}$ ,  $x + s_{t'} \in W_{\sigma,j}$ ,  $i|m$  and  $j|m$ , we have  $x + s_t \in W_{\sigma,m}$ ,  $x + s_{t'} \in W_{\sigma,m}$  and this implies  $s_t - s_{t'} \in W_{\sigma,m}$ .

This is impossible if  $m$  is not a divisor of  $k$ , because an element  $x \neq 0$  of  $W_{\sigma,m}$  is of the form  $x = (U, -U, \dots, U, -U, U)$  with  $U \neq 0$ , and so it contains at least three nonzero co-ordinates, while  $s_t - s_{t'}$  contains at most two nonzero co-ordinates. If  $m$  is a divisor of  $k$ , by Proposition

2.5 we have  $2(s_t - s_{t'}) = 0$  and this implies  $4 = 0$  in  $\mathbb{Z}_p$ , which is impossible because  $p \neq 2$  and  $p \neq 4$ .

Consequently,  $m = 2k$  and  $i \vee j = 2k$ . ■

For  $x \in \Gamma$ , we note  $A_x = \{t \in \{0, \dots, 2k-1\}; x + s_t \in F'_\sigma\}$  and for  $t \in A_x$ ,  $i_t$  is the smallest of the integers  $j > 0$  such that  $x + s_t \in W_{\sigma, j}$ . Of course  $i_t$  is a proper divisor of  $2k$ .

For  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\varphi(n)$  is the Euler's totient of  $n$ . It is known that  $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$  (see [3]).

Now we can state :

**Proposition 3.4** *We suppose again  $p \neq 4$ .*

*If  $x$  and  $y$  are distinct elements of  $\Gamma$ , then there exists  $t_0 \in \{0, \dots, 2k-1\}$  such that:*

*$x + s_{t_0} \notin F'_\sigma$  and  $y + s_{t_0} \notin F'_\sigma$ .*

**Proof.** By Proposition 3.3, for  $t, t' \in A_x$ ,  $t \neq t'$ , we have  $i_t \vee i_{t'} = 2k$  and this implies  $i_t \neq i_{t'}$ .

If  $|A_x| \geq 2$ , we have also  $i_t > 1$  for every  $t \in A_x$ .

Suppose that  $|A_x| \geq k$ .

Since  $k \geq 2$ ,  $|A_x| \geq 2$  and then  $2k$  has at least  $k$  proper divisors distinct from 1.

It is easy to verify that for  $k \in \{2, 3\}$  this is impossible. And if  $k \geq 4$ , we have :

$$2k = \sum_{d|2k} \varphi(d), \text{ which implies } 2k \geq \varphi(2k) + \sum_{t \in A_x} \varphi(i_t).$$

Since  $\varphi(n) \geq 2$  for  $n \geq 3$ , we obtain  $2k \geq 2 + \varphi(2) + 2(k-1)$ , that is  $2k \geq 2k + 1$ , which is false.

So, we have  $|A_x| < k$  and also  $|A_y| < k$ , hence  $|A_x \cup A_y| < 2k$  and so  $A_x \cup A_y \subset \{0, \dots, 2k-1\}$ .

Consequently, there exists  $t_0 \in \{0, \dots, 2k-1\}$  such that  $t_0 \notin A_x \cup A_y$ , that is  $x + s_{t_0} \notin F'_\sigma$  and  $y + s_{t_0} \notin F'_\sigma$  ■

Both following results concern a particular case :

**Proposition 3.5** *We suppose here that  $p = 4$ . Let  $x \in \Gamma$  and  $t_0 \in \{0, \dots, 2k - 1\}$ .*

*If  $x + s_{t_0} \in W_{\sigma,k}$ , then we have  $x - s_{t_0} \in W_{\sigma,k}$ , and for every  $t \in \{0, \dots, 2k - 1\}$  such that  $k$  does not divide  $t - t_0$ , we have  $x + s_t \notin F'_\sigma$ .*

**Proof.** We can write  $x - s_{t_0} = x + s_{t_0} - 2s_{t_0}$  and since  $x + s_{t_0} \in W_{\sigma,k}$  and  $2s_{t_0} \in W_{\sigma,k}$ , we deduce  $x - s_{t_0} \in W_{\sigma,k}$ .

Let us suppose that for some  $t \in \{0, \dots, 2k - 1\}$  such that  $k$  does not divide  $t - t_0$ , we have  $x + s_t \in F'_\sigma$ . Then there exists  $j|2k$ ,  $j < 2k$  such that  $x + s_t \in W_{\sigma,j}$ .

If  $j|k$ , we have  $2(x + s_{t_0}) = 2(x + s_t) = 0$ , hence  $2(s_{t_0} - s_t) = 0$ . Since  $t \neq t_0$  and  $t \neq t_0 + k$  in  $\mathbb{Z}_{2k}$ , we deduce  $2 = 0$  in  $\mathbb{Z}_4$ , which is impossible.

If  $j$  is not a divisor of  $k$ , since  $2(x + s_{t_0}) = 0$ , we deduce :

$2(s_{t_0} - s_t) = 2(x + s_{t_0}) - 2(x + s_t) = -2(x + s_t) = 2(x + s_t)$ . Since  $x + s_t \in W_{\sigma,j}$ , we have  $2(s_{t_0} - s_t) \in W_{\sigma,j}$ .

Now this is impossible because  $2(s_{t_0} - s_t)$  has exactly two nonzero co-ordinates, while a nonzero element of  $W_{\sigma,j}$  has at least three non zero co-ordinates.

So,  $x + s_t \in F'_\sigma$  is not possible and consequently the result is proved. ■

We continue by :

**Proposition 3.6** *We suppose again  $p = 4$ . Let  $x \in \Gamma$  and  $t_0 \in \{0, \dots, 2k - 1\}$ .*

*If  $x + s_{t_0} \in F'_\sigma \setminus W_{\sigma,k}$ , we have  $|A_x| < k$ .*

**Proof.** We state that for every  $t \in A_x$  we have  $x + s_t \in F'_\sigma \setminus W_{\sigma,k}$ .

Indeed, if for an element  $t \in A_x$  we have  $x + s_t \in W_{\sigma,k}$ , then by Proposition 3.5 either  $x + s_{t_0} \in W_{\sigma,k}$  or  $x + s_{t_0} \notin F'_\sigma$  and both cases are excluded (by hypothesis).

For  $t, t' \in A_x$ ,  $t \neq t'$ , we have  $x + s_t \in W_{\sigma,i_t}$ ,  $x + s_{t'} \in W_{\sigma,i_{t'}}$  and  $i_t$  and  $i_{t'}$  are proper divisors of  $2k$  but not divisors of  $k$  (otherwise  $x + s_t \in W_{\sigma,k}$  or  $x + s_{t'} \in W_{\sigma,k}$ ).

Let us note  $m = i_t \vee i_{t'}$ .

It is clear that  $m$  is not a divisor of  $k$ . We have  $x + s_t \in W_{\sigma,m}$  and  $x + s_{t'} \in W_{\sigma,m}$ , hence  $s_t - s_{t'} \in W_{\sigma,m}$ . Again arguing on the number of nonzero co-ordinates, it is easy to conclude that for  $m < 2k$  this is not possible.

Consequently,  $m = 2k$  and  $i_t \vee i_{t'} = 2k$ . Then, as in the proof of Proposition 3.4, we obtain  $|A_x| < k$ . ■

Here is now a synthesis of three previous results:

**Proposition 3.7** *If  $p \neq 4$ ,  $k \geq 2$  and if  $x$  and  $y$  are distinct elements of  $\Gamma$ , there exists  $t_0 \in \{0, \dots, 2k - 1\}$  such that  $x + s_{t_0} \notin F'_\sigma$  and  $y + s_{t_0} \notin F'_\sigma$ .*

*This result also holds for  $p = 4$  and  $k > 2$ .*

**Proof.** For  $p \neq 4$ ,  $k \geq 2$ , the result is already proved.

For  $p = 4$  and  $k > 2$ , the two previous propositions imply that for  $x \in \Gamma$ , we have either  $|A_x| < k$  or  $|A_x| = 2$  and therefore  $|A_x| < k$ .

The remaining part may be proved as in the final part of the proof of Proposition 3.4. ■

This proposition is false for  $p = 4$  and  $k = 2$ . For example, if one takes  $x = (1, 2)$  and  $y = (2, 1)$ , one can easily verify that there exists no  $t_0$  such that  $x + s_{t_0} \notin F'_\sigma$  and  $y + s_{t_0} \notin F'_\sigma$ .

Before proving Conjecture 1, we give a slightly stronger result :

**Theorem 3.8** *For  $p \geq 3$  and  $k \geq 2$ ,  $F'_\sigma$  is not a separating set of the toroidal mesh  $T.M(p)^k$ .*

**Proof.** For  $p = 4$  and  $k = 2$ , we have  $F'_\sigma = \{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2)\}$  and it is easy to verify that this set is not separating.

Consequently, we now consider  $(p, k) \neq (4, 2)$ .

We only have to prove that the digraph  $T.M(p)^k - F'_\sigma$  is strongly connected. As  $G = T.M(p)^k$  is a symmetric digraph, we only have to prove that for distinct elements  $x, y$  of  $\Gamma \setminus F'_\sigma$ , there

exists a directed path in  $G - F'_\sigma$  from  $x$  to  $y$ , that is, a path using no vertex of  $F'_\sigma$ .

We prove it by induction on the distance  $m = d_G(x, y)$  between  $x$  and  $y$  (so,  $m \leq D(G)$ ).

For  $m = 1$  it is obvious.

For  $m = 2$ , if  $x$  and  $y$  are vertices of  $\Gamma \setminus F'_\sigma$  such that  $d_G(x, y) = 2$ , then there exists a directed path  $C = (x, x + s_{t_1}, x + s_{t_1} + s_{t_2} = y)$  of  $G$ .

If  $x + s_{t_1} \notin F'_\sigma$ ,  $C$  is a directed path in  $G - F'_\sigma$  and we are done.

Suppose now that  $x + s_{t_1} \in F'_\sigma$ . By Proposition 3.7, there exists  $t \in \{0, \dots, 2k - 1\}$  such that  $x + s_t \notin F'_\sigma$  and  $y + s_t \notin F'_\sigma$ , and since  $x + s_{t_1} \in F'_\sigma$ , by Proposition 3.2, we have  $x + s_{t_1} + s_t \notin F'_\sigma$ .

Then  $C_1 = (x, x + s_t, x + s_{t_1} + s_t, x + s_{t_1} + s_t + s_{t_2} = y + s_t, y)$  is a directed path in  $G - F'_\sigma$  and the assertion is proved for  $m = 2$ .

Let us suppose that the assertion is true up to  $m - 1$ ,  $3 \leq m \leq D(G)$  and let us prove it for  $m$ .

So, if  $d_G(x, y) = m$ , there exists a directed path :

$C = (x, x + s_{t_1}, x + s_{t_1} + s_{t_2}, x + s_{t_1} + s_{t_2} + s_{t_3}, \dots, x + s_{t_1} + s_{t_2} + s_{t_3} + \dots + s_{t_m} = y)$  of length  $m$ .

If  $x + s_{t_1} \notin F'_\sigma$ , since  $d_G(x + s_{t_1}, y) = m - 1$ , by induction hypothesis, there exists a directed path in  $G - F'_\sigma$  from  $x + s_{t_1}$  to  $y$ . If this path uses  $x$ , then we can extract from it a directed path in  $G - F'_\sigma$  linking  $x$  to  $y$ .

And if this path does not use the vertex  $x$ , by assembling it with the arc  $(x, x + s_{t_1})$ , we again obtain a directed path in  $G - F'_\sigma$  linking  $x$  to  $y$ .

If  $x + s_{t_1} \in F'_\sigma$ , by Proposition 3.2, we have  $x + s_{t_1} + s_{t_2} \notin F'_\sigma$ .

Since  $d_G(x, x + s_{t_1} + s_{t_2}) = 2$  and  $d_G(x + s_{t_1} + s_{t_2}, y) = m - 2$  then, by induction hypothesis, there exists a directed path  $C_1$  from  $x$  to  $x + s_{t_1} + s_{t_2}$  and a directed path  $C_2$  from  $x + s_{t_1} + s_{t_2}$  to  $y$ , both in  $G - F'_\sigma$ .

By assembling these paths (while possibly eliminating some vertices), we obtain a directed path in  $G - F'_\sigma$  linking  $x$  to  $y$  and the assertion is still verified. Being verified for  $m$ , the assertion holds for every  $m \leq D(G)$ , and the theorem is proved. ■

We now prove conjecture 1. :

**Theorem 3.9** *For  $p \geq 3$  and  $k \geq 1$ , the set  $F_\sigma$  of fixed points of the complete rotation  $\sigma$  does not disconnect the toroidal mesh  $T.M(p)^k$*

**Proof.** The case  $k = 1$  has already been studied. So, we consider  $k \geq 2$ . Let  $x, y$  be distinct elements of  $\Gamma \setminus F_\sigma$ .

If  $x \neq 0$  and  $y \neq 0$ ,  $x$  and  $y$  are in  $\Gamma \setminus F'_\sigma$  and by Theorem 3.8, there exists a directed path of  $G - F'_\sigma$  linking  $x$  to  $y$ . This path is also a path in  $G - F_\sigma$  and so,  $x$  and  $y$  are linked in  $G - F_\sigma$ .

If  $x = 0$ ,  $s_0 \in \Gamma \setminus F'_\sigma$  and  $y \in \Gamma \setminus F'_\sigma$  are linked by a path in  $G - F_\sigma$  and then, assembling with the arc  $(0, s_0)$ , we obtain a directed path in  $G - F_\sigma$  linking  $x$  to  $y$ .

Similar reasoning holds if  $y = 0$ .

So, we can link  $x$  to  $y$  in  $G - F_\sigma$  and consequently the theorem is proved.

## 4 Invalidation of Conjecture 2

We start with some results from number theory.

For  $p \in \mathbb{N}$ ,  $p \geq 2$  and  $a \in \mathbb{N}^*$ , we note  $Val_p(a)$  the greatest integer  $m$  such that  $p^m | a$ .

We note  $a \wedge b$  the greatest common divisor of  $a$  and  $b$ .

**Lemma 4.1** *Let  $a$  and  $b$  be integers with  $a \wedge b = 1$ .*

*If  $3|a - b$ , then  $Val_3(a^2 + ab + b^2) = 1$*

**Proof.** From  $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$  and the conditions of the lemma, it is easy to prove that while 3 divides  $a^2 + ab + b^2$ ,  $3^2$  does not. ■

**Lemma 4.2** For any  $k \in \mathbb{N}$  we have  $Val_3(2^{2 \times 3^k} - 1) = k + 1$ .

**Proof.** By using Lemma 4.1 with  $a = 2^{2 \times 3^{k-1}}$  and  $b = 1$ , it is easy to prove the assertion by induction on  $k$ . ■

**Proposition 4.3** For  $n \geq 1$  :

a)  $2^{2 \times 3^{n-1}} - 1 = 0$  in  $\mathbb{Z}_{3^n}$ .

b)  $2^{3^{n-1}} + 1 = 0$  in  $\mathbb{Z}_{3^n}$ .

c) For every  $l$  verifying  $1 \leq l < 2 \times 3^{n-1}$ , we have  $2^l - 1 \neq 0$  in  $\mathbb{Z}_{3^n}$ .

**Proof.** a) By Lemma 4.2, we have  $Val_3(2^{2 \times 3^{n-1}} - 1) = n$ .

This implies  $3^n | 2^{2 \times 3^{n-1}} - 1$  and so  $2^{2 \times 3^{n-1}} - 1 = 0$  in  $\mathbb{Z}_{3^n}$ .

b) We have  $2^{2 \times 3^{n-1}} - 1 = (2^{3^{n-1}} - 1)(2^{3^{n-1}} + 1)$ .

As  $2 \equiv -1 \pmod{3}$ , we get  $2^{3^{n-1}} \equiv (-1)^{3^{n-1}} \pmod{3}$  that is  $2^{3^{n-1}} \equiv -1 \pmod{3}$  and then  $2^{3^{n-1}} - 1 \equiv -2 \pmod{3}$ .

Consequently, 3 does not divide  $2^{3^{n-1}} - 1$ .

As by Proposition 4.3.a,  $3^n | (2^{3^{n-1}} - 1)(2^{3^{n-1}} + 1)$ , we deduce  $3^n | 2^{3^{n-1}} + 1$  and so we have  $2^{3^{n-1}} + 1 = 0$  in  $\mathbb{Z}_{3^n}$ .

c) Let  $d$  be the smallest of the integers  $m > 0$  such that  $3^n | 2^m - 1$ .

Since  $2 \equiv -1 \pmod{3}$ , we obtain  $2^d \equiv (-1)^d \pmod{3}$ , and  $2^d - 1 \equiv 0 \pmod{3}$  implies that  $d$  is even.

As usually we note  $\mathbb{Z}_{3^n}^*$  the multiplicative group of nonzero elements of  $\mathbb{Z}_{3^n}$ . We know that  $|\mathbb{Z}_{3^n}^*| = \varphi(3^n) = 2 \times 3^{n-1}$ .

As  $d$  is the order of 2 in  $\mathbb{Z}_{3^n}^*$ , by Cauchy's theorem we have  $d | 2 \times 3^{n-1}$  and then we get  $d = 2 \times 3^k$  where  $k \leq n - 1$ .

Since  $3^n | 2^{2 \times 3^k} - 1$  and  $Val_3(2^{2 \times 3^k} - 1) = k + 1$ , we deduce  $n \leq k + 1$ , hence  $k \geq n - 1$  and then  $k = n - 1$ . So,  $d = 2 \times 3^{n-1}$ .

Consequently, for  $1 \leq l < 2 \times 3^{n-1}$ , we have  $2^l - 1 \neq 0$  in  $\mathbb{Z}_{3^n}$  and the assertion is proved. ■

Now, for  $n \geq 3$ , we consider the additive group  $\Gamma_n = \mathbb{Z}_{3^n}$ .

For each  $a \in \mathbb{Z}$  we note  $\widehat{a}$  the class of  $a$  in  $\mathbb{Z}_3$  and  $\bar{a}$  the class of  $a$  in  $\mathbb{Z}_{3^n}$ .

It is clear that  $\theta_n : \bar{a} \rightarrow \widehat{a}$  define a surjective morphism from  $\mathbb{Z}_{3^n}$  into  $\mathbb{Z}_3$ .

We define the elements  $s_{n,i} \in \Gamma_n$ ,  $0 \leq i \leq 2 \times 3^{n-2} - 1$  by  $s_{n,i} = \overline{2^{3i}}$ .

For  $0 \leq i \leq 2 \times 3^{n-2} - 1$ ,  $0 \leq j \leq 2 \times 3^{n-2} - 1$ , with  $i < j$ , we have  $0 < 3(j-i) < 2 \times 3^{n-1} - 1$ .

By Proposition 4.3.c, we have  $2^{3j-3i} \neq 1$  in  $\mathbb{Z}_{3^n}$ , that is  $\overline{2^{3i}} \neq \overline{2^{3j}}$ .

Consequently, the elements  $s_{n,i}$ ,  $0 \leq i \leq 2 \times 3^{n-2} - 1$  are all distinct.

$s_{n,0} = \bar{1}$  is a generator of the group  $\Gamma_n$  and then  $S_n = \{s_{n,i}; 0 \leq i \leq 2 \times 3^{n-2} - 1\}$  is a generating set of  $\Gamma_n$

By using Proposition 4.3.b, for  $0 \leq i \leq 3^{n-2} - 1$  we have :

$$s_{n,i} + s_{n,i+3^{n-2}} = \overline{2^{3i}} + \overline{2^{3(i+3^{n-2})}} = \overline{2^{3i} (2^{3^{n-1}} + 1)} = \bar{0}.$$

Therefore  $s_{n,i+3^{n-2}} = -s_{n,i}$  and consequently  $s \in S_n \Leftrightarrow -s \in S_n$ .

Clearly  $\bar{0} \notin S_n$ . Therefore for  $n \geq 3$  we can define the Cayley digraph  $G_n = Cay(\Gamma_n, S_n)$ .

For  $0 \leq i \leq 2 \times 3^{n-2} - 1$  we have  $2^3 \equiv -1 \pmod{9}$ , whence  $2^{3i} \equiv (-1)^i \pmod{9}$ . So,  $s_{n,i}$  is of the form  $\overline{9k + (-1)^i}$  and moreover  $\theta_n(s_{n,i}) = (-1)^i$ .

The  $2 \times 3^{n-2}$  elements of  $S_n$  are of the form  $\overline{9k \pm 1}$  and since  $\mathbb{Z}_{3^n}$  contains  $2 \times 3^{n-2}$  elements of this type, we conclude that  $S_n$  is exactly the set of elements of the form  $\overline{9k \pm 1}$ .

For  $t \in \mathbb{Z}$ , we note  $s_{n,t} = s_{n,r}$ , where  $r$  is the unique element of  $\{0, \dots, 2 \times 3^{n-2} - 1\}$  such that  $t \equiv r \pmod{2 \times 3^{n-2}}$ . It is easy to prove that  $s_{n,t} = \left(\overline{2^3}\right)^t$ .

Let  $\omega_n : \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n$  be the mapping defined by  $\omega_n(x) = 2^3 x$ .



Clearly,  $\omega_n$  is a group automorphism and for  $t \in \mathbb{Z}$  we have :

$$\omega_n(s_{n,t}) = 2^3 \times \overline{2^{3t}} = \overline{2^{3(t+1)}} = s_{n,t+1}. \text{ Consequently, } \omega_n \text{ is a complete rotation of } G_n.$$

It is easy to prove that if  $i$  is a positive integer, then for every element  $x \in \Gamma_n$  we have

$$\omega_n^i(x) = 2^{3i}x.$$

Now, we characterize the fixed points of  $\omega_n$  :

**Proposition 4.4** *The set of fixed points of  $\omega_n$  is :*

$$F_{\omega_n} = \{\bar{x}; 0 < x \leq 3^n - 1, 3|x\}.$$

**Proof.** Let  $\bar{a}$  be an element of  $F_{\omega_n}$ .

There exists  $i \in \{1, \dots, 2 \times 3^{n-2} - 1\}$  such that  $\omega_n^i(\bar{a}) = \bar{a}$ , that is  $2^{3i}\bar{a} = \bar{a}$ .

This means that  $3^n | a(2^{3i} - 1)$ . As  $i \in \{1, \dots, 2 \times 3^{n-2} - 1\}$ , we get  $0 < 3i < 2 \times 3^{n-1} - 1$ .

Then, by Proposition 4.3.c, we have  $Val_3(2^{3i} - 1) < n$ , which implies  $3|a$ .

So, we have  $F_{\omega_n} \subseteq \{\bar{x}; 0 < x \leq 3^n - 1, 3|x\}$ .

Conversely, let  $\bar{a}$  be an element of  $\{\bar{x}; 0 < x \leq 3^n - 1, 3|x\}$ .

We have  $\bar{a} = 3\bar{b}$  with  $1 \leq b \leq 3^{n-1} - 1$  and  $\omega_n^{2 \times 3^{n-3}}(\bar{a}) = 2^{2 \times 3^{n-2}}\bar{a} = 3 \times 2^{2 \times 3^{n-2}}\bar{b}$ .

By Proposition 4.3.a, we have  $3^{n-1} | 2^{2 \times 3^{n-2}} - 1$ , which implies  $3^n | 3 \times 2^{2 \times 3^{n-2}}\bar{b} - 3\bar{b}$  and therefore

$3 \times 2^{2 \times 3^{n-2}}\bar{b} = 3\bar{b}$  that is  $\omega_n^{2 \times 3^{n-3}}(\bar{a}) = \bar{a}$ . Since  $2 \times 3^{n-3} < 2 \times 3^{n-2}$ ,  $\bar{a}$  is a fixed point and

therefore  $\{\bar{x}; 0 < x \leq 3^n - 1, 3|x\} \subseteq F_{\omega_n}$ .

Both inclusions imply our assertion. ■

With this proposition, it is clear that  $|F'_{\omega_n}| = 3^{n-1}$ .

It is also clear that  $F_{\omega_n} = \{\bar{x} \neq 0; \theta_n(\bar{x}) = \widehat{0}\}$ .

**Lemma 4.5** *Let  $\bar{u}$  and  $\bar{v}$  be distinct elements of  $\Gamma_n \setminus F'_{\omega_n}$ .*

*Let  $(\bar{u}, \bar{u} + s_{n,t_1}, \dots, \bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_m} = \bar{v})$  be a directed path from  $\bar{u}$  to  $\bar{v}$  using no vertex of  $F'_{\omega_n}$ . Then :*

- a)  $\theta_n(s_{n,t_1}) = \theta_n(\bar{u})$  and  $\theta_n(s_{n,t_m}) = -\theta_n(\bar{v})$ .
- b) If  $m \geq 2$ , for  $1 \leq i \leq m-1$  we have  $\theta_n(s_{n,t_{i+1}}) = -\theta_n(s_{n,t_i})$ .
- c) For  $1 \leq i \leq m$ , we have  $\theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_i}) = (-1)^i \theta_n(\bar{u})$ .

**Proof.** a) Since  $\bar{u} \notin F'_{\omega_n}$ , we have  $\theta_n(\bar{u}) \in \{-\widehat{1}, \widehat{1}\}$  and as  $\theta_n(s_{n,t_1}) \in \{-\widehat{1}, \widehat{1}\}$ , we have either  $\theta_n(s_{n,t_1}) = -\theta_n(\bar{u})$  or  $\theta_n(s_{n,t_1}) = \theta_n(\bar{u})$ .

The first equality implies  $\theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1}) = \widehat{0}$ , which is false by hypothesis. Consequently, we have  $\theta_n(s_{n,t_1}) = \theta_n(\bar{u})$ .

Similarly, we prove  $\theta_n(s_{n,t_m}) = -\theta_n(\bar{v})$ .

b) If  $m = 2$  it is obvious.

If  $m \geq 3$ , for  $2 \leq i \leq m-1$ , by Lemma 4.5.a we have  $\theta_n(s_{n,t_{i+1}}) = \theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_i})$  hence  $\theta_n(s_{n,t_{i+1}}) = \theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_{i-1}}) + \theta_n(s_{n,t_i}) = 2\theta_n(s_{n,t_i})$

This yields  $\theta_n(s_{n,t_{i+1}}) = -\theta_n(s_{n,t_i})$  and this is also true for  $i = 1$ .

c) If  $m = 1$  it is obvious.

If  $m \geq 2$ , for  $2 \leq i \leq m$ , we have :

$$\theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_i}) = \theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_{i-1}}) + \theta_n(s_{n,t_i}), \text{ hence}$$

$$\theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_i}) = 2\theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_{i-1}}).$$

This yields  $\theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_i}) = -\theta_n(\bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_{i-1}})$  and now the assertion can easily be proved by induction on  $i$ . ■

**Corollary 4.6** *Let  $\bar{u}$  and  $\bar{v}$  be distinct elements of  $\Gamma_n \setminus F'_{\omega_n}$ . Then :*

- a) *If  $\theta_n(\bar{u}) = -\theta_n(\bar{v})$ , any directed path of even length from  $\bar{u}$  to  $\bar{v}$  contains at least one vertex of  $F'_{\omega_n}$ .*
- b) *If  $\theta_n(\bar{u}) = \theta_n(\bar{v})$ , any directed path of odd length from  $\bar{u}$  to  $\bar{v}$  contains at least one vertex of  $F'_{\omega_n}$ .*

**Proof.** a) Let  $C = (\bar{u}, \bar{u} + s_{n,t_1}, \dots, \bar{u} + s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_{2m}} = \bar{v})$  be a directed path of even length going from  $\bar{u}$  to  $\bar{v}$ . Suppose that  $C$  does not contain any vertex of  $F'_{\omega_n}$

Then, by Lemma 4.5.c, we have  $\theta_n(\bar{v}) = (-1)^{2m}\theta_n(\bar{u})$ , that is  $\theta_n(\bar{v}) = \theta_n(\bar{u})$ , which is false by hypothesis. Consequently,  $C$  contains at least one vertex of  $F'_{\omega_n}$  and so the assertion is proved.

b) The proof is similar. ■

We finish with :

**Proposition 4.7** *Let  $\bar{v}$  be a vertex of  $G_n$  with  $v \equiv 4 \pmod{9}$  or  $v \equiv -4 \pmod{9}$ .*

*Any directed path from  $\bar{0}$  to  $\bar{v}$  contains at least one vertex of  $F_{\omega_n}$ .*

**Proof.** First, suppose that  $v \equiv 4 \pmod{9}$ . Then we have  $v = 9r + 4$  where  $r$  is an integer.

Suppose on the opposite, that there exists a directed path :

$C = (\bar{0}, s_{n,t_1}, \dots, s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_m} = \bar{v})$  from  $\bar{0}$  to  $\bar{v}$  using no vertex of  $F_{\omega_n}$ .

We know that the elements of  $S_n$  are of the form  $\overline{9k \pm 1}$  and so  $(\bar{0}, \bar{v})$  can not be an arc of  $G_n$ .

Consequently,  $m \geq 2$  and so  $C_1 = (s_{n,t_1}, \dots, s_{n,t_1} + \dots + s_{n,t_m} = \bar{v})$  is a directed path of length  $m - 1$  using no vertex of  $F'_{\omega_n}$  (because  $\bar{0}$  is not a vertex of  $C_1$ ).

For  $1 \leq i \leq m$ , we have  $s_{n,t_i} = \overline{9k_i + (-1)^{t_i}}$  and then we get :

$$\bar{v} = \overline{9(k_1 + \dots + k_m) + (-1)^{t_1} + \dots + (-1)^{t_m}}.$$

Two cases are possible

**Case 1 :**  $\theta_n(s_{n,t_1}) = \widehat{1}$ .

Then we have  $s_{n,t_1} = \overline{9k_1 + 1}$ . Since  $\theta_n(\bar{v}) = \widehat{1} = \theta_n(s_{n,t_1})$ , by Corollary 4.6.b,  $m - 1$  is even and so  $m$  is odd.

By Proposition 4.5.a, we have  $\theta_n(s_{n,t_2}) = \theta_n(s_{n,t_1}) = \widehat{1}$  and then  $s_{n,t_2} = \overline{9k_2 + 1}$ .

Furthermore, for  $i \geq 2$  we have  $\theta_n(s_{n,t_i}) = \widehat{1}$  if  $i$  is even and  $\theta_n(s_{n,t_i}) = -\widehat{1}$  if  $i$  is odd.

This means  $s_{n,t_i} = \overline{9k_i + 1}$  if  $i$  is even and  $s_{n,t_i} = \overline{9k_i - 1}$  if  $i$  is odd.

As  $m$  is odd, we deduce  $(-1)^{t_1} + \dots + (-1)^{t_m} = 1$  and then  $\bar{v} = \overline{9(k_1 + \dots + k_m) + 1}$ , a

contradiction with  $\bar{v} = \overline{9r + 4}$ .

**Case 2 :**  $\theta_n(s_{n,t_1}) = -\hat{1}$

Then  $s_{n,t_1} = \overline{9k_1 - 1}$ . Since  $\theta_n(\bar{v}) = \hat{1} = -\theta_n(s_{n,t_1})$ , by Corollary 4.6.b,  $m - 1$  is odd and so  $m$  is even .

By Proposition 4.5.a, we have  $\theta_n(s_{n,t_2}) = \theta_n(s_{n,t_1}) = -\hat{1}$  and then  $s_{n,t_2} = \overline{9k_2 - 1}$ .

Furthermore, for  $i \geq 2$  we have  $\theta_n(s_{n,t_i}) = \hat{1}$  if  $i$  is odd and  $\theta_n(s_{n,t_i}) = -\hat{1}$  if  $i$  is even.

This means  $s_{n,t_i} = \overline{9k_i + 1}$  if  $i$  is odd and  $s_{n,t_i} = \overline{9k_i - 1}$  if  $i$  is even.

As  $m$  is odd, we deduce  $(-1)^{t_1} + \dots + (-1)^{t_m} = -2$  and then  $\bar{v} = \overline{9(k_1 + \dots + k_m) - 2}$ , a contradiction with  $\bar{v} = \overline{9r + 4}$ .

In both cases we have a contradiction, and consequently any directed path from  $\bar{0}$  to  $\bar{v}$  contains at least one vertex of  $F_{\omega_n}$ .

Suppose now that  $v \equiv -4 \pmod{9}$ .

Let  $C = (\bar{0}, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m = \bar{v})$  be a directed path from  $\bar{0}$  to  $\bar{v}$ .

Then  $C' = (\bar{0}, -\bar{v}_1, \dots, -\bar{v}_m = -\bar{v})$  is a directed path from  $\bar{0}$  to  $-\bar{v}$  and as  $-v \equiv 4 \pmod{9}$ , there exists an integer  $i \in \{1, \dots, m - 1\}$  such that  $-\bar{v}_i \in F_{\omega_n}$ . This implies  $\bar{v}_i \in F_{\omega_n}$  and consequently the directed path  $C$  contains at least one vertex of  $F_{\omega_n}$ . ■

We have proved that for  $n \geq 3$ , the set  $F_{\omega_n}$  of fixed points of the complete rotation  $\omega_n$  disconnects the Cayley digraph  $G_n$  and so Conjecture 2 is invalidated.

Moreover, we can prove that the minimum gossiping time of  $G_n$  is optimal, while the set  $F_{\omega_n}$  of fixed points of  $\omega_n$  is separating.

## Acknowledgements

I would like to thank Claudine Peyrat and the referees for their helpful comments.

## References

- [1] J.C Bermond, T. Kodate, S. Perennes, *Gossiping in Cayley graphs by packets*, in Conf. CCS95 (8th Franco-Japanese and 4th Franco-Chinese Conf. Combin. Compput. Sci. (Brest, July 1995)), Lecture Notes in Comput. Sci. Vol 1120, Springer Verlag, 1995, pp. 301-305.
- [2] B. Ducourthal, M.C Heydemann, *Cayley Graphs and Interconnection Networks*, Vol. N.A.T.O, A.S.L of Kluiver, Academic Publishers, 1997.
- [3] E. Landau, *Elementary number theory*, Chelsea Publishing Company, New York, 1966.
- [4] N. Marlin, *Rotations complètes dans les graphes de Cayley*, D.E.A of Nice-Sophia Antipolis University, France, 1996.
- [5] N. Marlin, *Communications structurées dans les réseaux*, Ph.D Thesis of Nice-Sophia Antipolis University, France, 2000.



### 3. Temps d'échange total minimum de certains graphes de Cayley rotationnels

On a vu que pour tout graphe connexe  $G$ , on a  $gf.(l, G) \geq \left\lceil \frac{v-l}{\delta} \right\rceil$ .

J.C Bermond, T. Kodate ont prouvé dans [1] que le temps d'échange total minimum d'un graphe de Cayley  $G = Cay(\Gamma, S)$ , muni d'une rotation complète  $\omega$  dont l'ensemble des points fixes ne disconnecte pas  $G$ , est optimal au sens de la borne inférieure sus citée, autrement dit ils ont prouvé que pour un tel graphe de Cayley  $G$ , on a  $gf.(l, G) = \left\lceil \frac{v-l}{d} \right\rceil$  où  $d = |S|$ .

Nous allons donner une preuve différente (dans la forme) de celle donnée dans [1].

Initialement nous considérons un graphe de Cayley  $G = Cay(\Gamma, S)$  muni d'une rotation complète  $\omega$ , sans aucune autre contrainte sur l'ensemble  $F_\omega$  des points fixes. Alors :

**Lemme 1.** Soit  $C_{G-F_\omega}(e)$  la composante connexe du graphe  $G-F_\omega$ , contenant l'élément neutre  $e$ . Soit  $S_0$  une partie stricte de  $C_{G-F_\omega}(e)$ , stable par  $\omega$  et contenant  $e$ . Alors :

- a) Il existe  $x \in S_0$  tel que  $s_0 x \in C_{G-F_\omega}(e)$  mais  $s_0 x \notin S_0$ .
- b) Pour un tel  $x$ , les  $s_i \omega^i(x)$ ,  $0 \leq i \leq d-1$  sont des éléments distincts de  $C_{G-F_\omega}(e) \setminus S_0$  et  $S_1 = S_0 \cup \{s_i \omega^i(x); 0 \leq i \leq d-1\}$  est une partie de  $C_{G-F_\omega}(e)$ , stable par  $\omega$  et de cardinal  $|A| + d$ .

**Démonstration.** Il est nécessaire d'abord de prouver que  $C_{G-F_\omega}(e)$  est stable par  $\omega$  :

On a vu que  $F_\omega$  est stable par  $\omega$ , ce qui implique que  $\Gamma \setminus F_\omega$  est stable par  $\omega$ .

Si  $z$  est un élément de  $C_{G-F_\omega}(e)$ , il existe un chemin dans  $G-F_\omega$  allant de  $e$  à  $z$  et l'image par  $\omega$  de ce chemin sera d'après ce qui précède, un chemin dans  $G-F_\omega$  allant de  $\omega(e) = e$  à  $\omega(z) \in \Gamma \setminus F_\omega$  et par conséquent on a  $\omega(z) \in C_{G-F_\omega}(e)$ , ce qui corrobore l'assertion.

Passons à la démonstration proprement dite :

- a) L'ensemble  $S_0$  étant une partie stricte de  $C_{G-F_\omega}(e)$ , il existe  $y \in C_{G-F_\omega}(e) \setminus S_0$ .  $C_{G-F_\omega}(e)$  étant connexe, il existe un chemin  $u_0 = e, \dots, u_k = y$  dans  $C_{G-F_\omega}(e)$ . L'ensemble des  $i$  dans  $\{0, \dots, k\}$  tels que  $u_i \notin S_0$  étant non vide, soit  $j$  le plus petit élément de cet ensemble. Puisque  $u_0 \in S_0$ , on a  $j \geq 1$  et par définition de  $j$ , on a  $u_j \notin S_0$ ,  $u_{j-1} \in S_0$ .

Comme  $u_{j-1}u_j$  est une arête de  $G$ , il existe  $m \in \{0, \dots, d-1\}$  tel que  $u_j = s_m u_{j-1}$ , d'où :

$$\omega^{d-m}(u_j) = \omega^{d-m}(s_m) \omega^{d-m}(u_{j-1}) \text{ soit } \omega^{d-m}(u_j) = s_0 \omega^{d-m}(u_{j-1}).$$

Puisque  $u_j \in C_{G-F_\omega}(e) \setminus S_0$ , on a  $\omega^{d-m}(u_j) \in C_{G-F_\omega}(e) \setminus S_0$  et si on pose  $x = \omega^{d-m}(u_{j-1})$ , puisque  $u_{j-1} \in S_0$ , on a  $\omega^{d-m}(u_{j-1}) \in S_0$ , ce qui nous fait  $x \in S_0$ ,  $s_0 x \in C_{G-F_\omega}(e)$  et  $s_0 x \notin S_0$ , l'existence est donc prouvée.

**b)** En sachant que  $s_i \omega^i(x) = \omega^i(s_0 x)$ , la preuve se fait sans problèmes.  $\square$

A partir de ce lemme on prouve facilement que si  $S_0$  est une partie stricte de  $C_{G-F_\omega}(e)$ , stable par  $\omega$ , on a  $|C_{G-F_\omega}(e)| \equiv |S_0| \pmod{d}$  et comme le singleton  $\{e\}$  est une telle partie, on a  $|C_{G-F_\omega}(e)| \equiv 1 \pmod{d}$ .

Par ailleurs, comme pour  $x \notin F_\omega$ ,  $x \neq e$ , les sommets  $\omega^i(x)$ ,  $0 \leq i \leq d-1$  sont tous distincts et de plus  $\omega^d(x) = x$ , on peut prouver aussi que  $|\Gamma \setminus F_\omega| \equiv 1 \pmod{d}$ .

Cela entraîne que si  $d$  ne divise pas  $|\Gamma| - 1$ , la rotation  $\omega$  admet des points fixes.

Nous pouvons maintenant prouver le résultat annoncé :

**Théorème 2.** Soit  $G = \text{Cay}(\Gamma, S)$  un graphe de Cayley admettant une rotation complète  $\omega$  telle que l'ensemble  $F_\omega$  des points fixes soit un stable de  $G$  ne disconnectant pas  $G$ .

Alors  $gf.(1, G) = \left\lceil \frac{v-1}{d} \right\rceil$ .

**Démonstration.** Comme  $\{e\}$  est une partie stricte de  $C_{G-F_\omega}(e)$ , stable par  $\omega$ , en utilisant le lemme précédent, il est facile de voir qu'on peut construire une suite  $S_0, \dots, S_p$  de parties de  $C_{G-F_\omega}(e)$ , stables par  $\omega$ , avec  $S_0 = \{e\}$ ,  $S_p = C_{G-F_\omega}(e)$  et telle que pour  $0 \leq i \leq p-1$  il existe  $x_i \in S_i$  tel que  $s_0 x_i \notin S_i$  et  $S_{i+1} = S_i \cup \{s_j \omega^j(x_i); 0 \leq j \leq d-1\}$ .

On a alors  $p = \frac{|C_{G-F_\omega}(e)| - 1}{d}$  (Cela montre que  $d$  est un diviseur de  $|C_{G-F_\omega}(e)| - 1$ ).

Avec l'hypothèse qu'on a faite, on a ici  $C_{G-F_\omega}(e) = \Gamma \setminus F_\omega$  et  $p = \frac{|\Gamma \setminus F_\omega| - 1}{d}$ .

On peut partager  $F_\omega$  en  $r = \left\lceil \frac{|F_\omega|}{d} \right\rceil$  parties  $S_{p+1}, \dots, S_{p+r}$  toutes de cardinal  $d$  sauf la dernière qui est de cardinal  $s \leq d$ .

Posons  $A_i = \{y_{i,0}, \dots, y_{i,d-1}\}$  pour  $p+1 \leq i \leq p+r-1$  et  $A_{p+r} = \{y_{p+r,0}, \dots, y_{p+r,s-1}\}$ .

$F_\omega$  étant un stable de  $G$ , pour  $p+1 \leq i \leq p+r-1$ , les éléments  $z_{i,j} = s_j^{-1} y_{i,j}$ ,  $0 \leq j \leq d-1$  sont des éléments de  $S_p$  et les éléments  $z_{p+r,j} = s_j^{-1} y_{p+r,j}$ ,  $0 \leq j \leq s-1$  sont aussi des éléments de  $S_p$ .

Considérons maintenant la multi arborescence compacte,  $\Omega_e$ , couvrant  $G$ , de racine  $e$ , de hauteur  $p+r$ , définie de la manière suivante :

Pour  $1 \leq i \leq p$ , les arcs non triviaux de rang  $i$  sont les arcs  $(\omega^j(x_{i-1}), s_j \omega^j(x_{i-1}))$  de  $\bar{G}$  avec  $0 \leq j \leq d-1$ . Pour  $p+1 \leq i \leq p+r-1$ , les arcs non triviaux de rang  $i$  sont les arcs



$(z_{i,j}, s_j z_{i,j})$ ,  $0 \leq j \leq d-1$  et enfin les arcs non triviaux de rang  $p+r$  sont les arcs  $(z_{p+r,j}, s_j z_{p+r,j})$ ,  $0 \leq j \leq s-1$ .

$\Omega_e$  est une M.A.C couvrante de  $G$ , de hauteur  $p+r$ , telle que deux arcs de même rang aient des générateurs distincts. D'après le **Lemme 7.3 de l'article 1**, on a  $gf.(I, G) \leq p+r$ , soit

$$gf.(I, G) \leq \frac{|I \setminus F_\omega| - 1}{d} + \left\lceil \frac{|F_\omega|}{d} \right\rceil, \text{ soit } gf.(I, G) \leq \left\lceil \frac{v-1}{d} \right\rceil.$$

Vu l'inégalité contraire, on déduit  $gf.(I, G) = \left\lceil \frac{v-1}{d} \right\rceil$ . □

Vu la conjecture prouvée dans l'article 2, le théorème précédent permet d'affirmer que le temps d'échange total minimal de la grille torique  $TM(p)^k$  est optimal. Précisons qu'on ne sait pas d'une façon générale si le T.M.E.T. d'une grille torique  $TM(p_1, \dots, p_k)$  est optimal ou non.

On rappelle que pour  $k \geq 2$ , le hypercube  $H(k)$  est le graphe de Cayley  $Cay(\mathbb{Z}_2^k, S)$ , où  $S = \{s_0, \dots, s_{k-1}\}$  avec  $s_0 = (1, 0, \dots, 0), \dots, s_{k-1} = (0, \dots, 0, 1)$ . Les auteurs de [1] prouvent que l'application  $\omega$  qui à un élément  $(x_0, \dots, x_{k-1})$  de  $\mathbb{Z}_2^k$  associe l'élément  $(x_{k-1}, x_0, \dots, x_{k-2})$  de  $\mathbb{Z}_2^k$  est une rotation complète dont l'ensemble des points fixes est stable et ne disconnecte pas  $H(k)$ , et de là, via le théorème 2, il déduisent que le T.M.E.T. de l'hypercube  $H(k)$  est optimal.

Nous rappelons encore que pour  $k \geq 2$ , le **graphe étoile symétrique**  $S(k)$  est le graphe  $Cay(\Sigma_k, S)$  où  $\Sigma_k$  est le groupe des permutations de  $\{1, \dots, k\}$  et  $S$  est l'ensemble des  $k-1$  transpositions échangeant 1 et  $i$  pour  $2 \leq i \leq k$ . Toujours dans [1], on a prouvé que l'application  $\omega$  qui à une permutation  $\pi$  de  $\Sigma_k$  associe la permutation  $\sigma^{-1}\pi\sigma$ , où  $\sigma$  est la permutation définie par  $\sigma(1) = 1$ ,  $\sigma(i) = i+1$  pour  $2 \leq i \leq k-1$  et  $\sigma(k) = 2$ , est une rotation complète dont l'ensemble des points fixes est stable et ne disconnecte pas  $S(k)$ , ce qui fait que le T.M.E.T. du **graphe étoile symétrique**  $S(k)$  est optimal.

Nous avons affirmé à la fin de la section 2 que le temps d'échange total minimum du graphe  $G_n$  est optimal, alors que l'ensemble des points fixes de la rotation  $\omega_n$  disconnecte  $G_n$  (ce qui veut dire en fait que la réciproque du théorème 2 est fausse)

Nous allons maintenant prouver cela.

Rappelons que pour  $n \geq 3$ ,  $G_n$  est le graphe  $Cay(\Gamma_n, S_n)$  où :

$$\Gamma_n = \mathbb{Z}_{3^n} \text{ et } S_n = \{\overline{2^{3i}}; 0 \leq i \leq 2 \times 3^{n-2} - 1\}.$$

On a vu que  $S_n$  est en fait l'ensemble des éléments de la forme  $\overline{9k \pm 1}$ .

On a vu aussi que l'application  $\omega_n : \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n$  définie par  $\omega_n(x) = 8x$  est une rotation complète de  $G_n$  et que l'ensemble des points fixes est  $F_{\omega_n} = \{\overline{x}; 0 < x \leq 3^n - 1, 3/x\}$ . On avait prouvé que l'ensemble  $F_{\omega_n}$  disconnecte  $G_n$ .

Maintenant dans ce qui suit on va identifier un entier relatif à sa classe dans  $\mathbb{Z}_{3^n}$ .

Le degré de  $G_n$  est  $2 \times 3^{n-2}$ , est il est alors facile de voir que la borne inférieure  $\left\lceil \frac{v-1}{d} \right\rceil$  est égale à 5.

Soit  $\Omega_0$  la M.A.C de racine 0 de hauteur 5, définie de la manière suivante :

Les arcs non triviaux de rang 1 sont les arcs  $(0, 9k+1)$  et  $(0, 9k-1)$  de  $\overrightarrow{G_n}$  avec  $0 \leq k \leq 3^{n-2} - 1$ .

Les arcs non triviaux de rang 2 sont les arcs  $(1, 9k+2)$  et  $(-1, 9k-2)$  de  $\overrightarrow{G_n}$  avec  $0 \leq k \leq 3^{n-2} - 1$ .

Les arcs non triviaux de rang 3 sont les arcs  $(2, 9k+3)$  et  $(-2, 9k-3)$  de  $\overrightarrow{G_n}$  avec  $0 \leq k \leq 3^{n-2} - 1$ .

Les arcs non triviaux de rang 4 sont les arcs  $(3, 9k+4)$  et  $(-3, 9k-4)$  de  $\overrightarrow{G_n}$  avec  $0 \leq k \leq 3^{n-2} - 1$ .

Les arcs non triviaux de rang 5 sont les arcs  $(-1, 9k)$  de  $\overrightarrow{G_n}$  avec  $1 \leq k \leq 3^{n-2} - 1$ .

Il est facile de voir que  $\Omega_0$  est une M.A.C couvrante de  $G_n$  telle que deux arcs de même rang aient des générateurs distincts. Comme tout à l'heure, on déduit  $gf.(1, G_n) \leq 5$ , ce qui implique  $gf.(1, G_n) = 5$ .

Cela montre bien que la réciproque du théorème 2 est fausse.

Comme on l'a dit  $G_n$  est un exemple de graphe de Cayley rotationnel dont l'ensemble des points fixes disconnecte  $G_n$ .

On va donner maintenant un exemple de graphe de Cayley rotationnel dont l'ensemble des points fixes n'est pas stable.

Prenons  $\Gamma = \mathbb{Z}_{99}$  et  $S = \{2^i; 0 \leq i \leq 29\}$ . On prouve facilement que  $S$  est une partie génératrice du groupe additif  $\Gamma = \mathbb{Z}_{99}$  puis que  $0 \notin S$  et  $s \in S \Leftrightarrow -s \in S$ .

On peut donc définir le graphe de Cayley  $G = Cay(\Gamma, S)$ .

Clairement l'application  $\omega: x \rightarrow 2x$  est une rotation de  $G$ . On montre facilement que l'ensemble  $F_\omega$  est constitué des classes de  $a$  avec  $3|a$  ou  $11|a$ . Les sommets 9 et 11 sont donc des points fixes de  $\omega$  et comme  $11 = 2 + 9$  dans  $\mathbb{Z}_{99}$ , 9 et 11 sont reliés dans  $G$  ce qui prouve bien que  $F_\omega$  n'est pas un stable de  $G$ .

Néanmoins  $F_\omega$  ne disconnecte pas  $G$ .

En effet par comptage on a  $|F_\omega| = 38$ . On obtient alors  $|\Gamma \setminus F_\omega| = 61$ .

On sait que  $|C_{G-F_\omega}(0)| \equiv 1 \pmod{30}$ .  $C_{G-F_\omega}(0)$  contient déjà 0 et les 30 éléments de  $S$ .

Il est facile de voir que les seules valeurs de  $n \in \{0, \dots, 29\}$  pour lesquelles 11 divise  $2^n - 5$  sont 4, 14 et 24. Or pour chacune de ces valeurs  $2^n - 5$  n'est pas divisible par 9 donc par 99 non plus. Cela veut dire que 5 n'est pas un élément de  $S$ . Par contre 5, qui n'est pas point fixe, est voisin de 1 qui est élément de  $C_{G-F_\omega}(0)$  et par conséquent 5 est dans  $C_{G-F_\omega}(0)$ .

$C_{G-F_\omega}(0)$  comporte au moins 32 sommets et vu la congruence on a  $|C_{G-F_\omega}(0)| = 61$ , ce qui veut dire  $C_{G-F_\omega}(0) = \Gamma \setminus F_\omega$  et donc  $F_\omega$  ne disconnecte pas  $G$ .

Avec ce résultat, en suivant le raisonnement de la preuve du Théorème 2 on peut arriver à prouver que le T.M.E.T. de  $G$  est optimal (égal à 4)

Malgré quelques essais, nous n'avons pas trouvé un exemple de graphe de Cayley rotationnel dont le T.M.E.T. n'est pas optimal. C'est pour cela que nous proposons :

**Conjecture 3.** Le T.M.E.T. d'un graphe de Cayley rotationnel  $G$  est optimal, c'est à dire égal à  $\left\lceil \frac{v(G)-1}{\delta(G)} \right\rceil$ .

Par contre on peut prouver qu'il existe des graphes de Cayley dont le T.M.E.T. n'est pas optimal.

En effet pour des naturels  $m$  et  $n$  avec  $m \geq 2$  et  $n \geq 1$ , considérons le graphe de Cayley  $G_{m,k} = Cay(\mathbb{Z}_{2m} \times \mathbb{Z}_k, S)$  où  $S = \{(0, x); x \in \mathbb{Z}_k \setminus \{0\}\} \cup \{(1, x); x \in \mathbb{Z}_k\} \cup \{(-1, x); x \in \mathbb{Z}_k\}$ .  $G_{m,k}$  est bien sûr régulier, comme tout graphe de Cayley, et on vérifie facilement que  $\delta(G_{m,k}) = 3k - 1$ .

En fait,  $G_{m,k}$  consiste en  $2m$  copies, à sommets dans  $\{i\} \times \mathbb{Z}_k$ ,  $0 \leq i \leq 2m-1$ , du graphe complet à  $k$  sommets, et où chaque sommet de  $\{i\} \times \mathbb{Z}_k$  est relié à chaque sommet de  $\{i-1\} \times \mathbb{Z}_k$  et à chaque sommet de  $\{i+1\} \times \mathbb{Z}_k$ , les  $i$  étant pris modulo  $2m$ .

Il est aisé de vérifier que  $D(G_{m,k}) = m$ . D'autre part, on a :

$$\left\lceil \frac{v(G_{m,k})-1}{\delta(G_{m,k})} \right\rceil = \left\lceil \frac{2mk-1}{3k-1} \right\rceil.$$

Il est facile de vérifier que pour  $k > 1$  et  $m \geq \frac{3k-2}{m-1}$  on a  $m-1 \geq \frac{2mk-1}{3k-1}$ , ce qui entraîne

$$D(G_{m,k}) > \left\lceil \frac{v(G_{m,k})-1}{\delta(G_{m,k})} \right\rceil \text{ et puisque } gf.(1, G_{m,k}) \geq D(G_{m,k}) \text{ (Proposition 2.2 de la section 2}$$

du premier chapitre), on déduit  $gf.(1, G_{m,k}) > \left\lceil \frac{v(G_{m,k})-1}{\delta(G_{m,k})} \right\rceil$ . Pour être plus précis, on peut prouver sans difficulté que  $gf.(1, G_{m,k}) = m = D(G_{m,k})$ .

Ce résultat n'affecte en rien la Conjecture 3 car un graphe  $G_{m,k}$  n'est pas rotationnel. En effet, il est facile à prouver que dans un graphe de Cayley rotationnel  $G = Cay(\Gamma, S)$ , tous les éléments de  $S$  ont le même ordre dans  $\Gamma$ . Or, il est clair que les éléments de la partie génératrice  $S$  de  $\mathbb{Z}_{2m} \times \mathbb{Z}_k$  n'ont pas tous le même ordre, ce qui fait que  $G_{m,k}$  n'est pas rotationnel.

## Références

[1] J.C Bermond, T. Kodate, S. Perennes, Gossiping on Cayley Graphs by Packets, Proceedings of franco-japanese conference at Brest, *Lect. Notes in Comp. Sci., Springer Verlag*, 1120 (1995), pp. 301-305.



#### 4. Graphes de Cayley isomorphes, construits sur des groupes qui ne sont pas isomorphes

Dans ce qui suit, on considère un naturel  $n \geq 3$ .

Pour un entier relatif  $a$ ,  $\hat{a}$ ,  $\bar{a}$  et  $\tilde{a}$  désignent les classes de  $a$  dans respectivement  $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{Z}_{3^n}$  et  $\mathbb{Z}_{3^{n-1}}$ .

On considère le graphe de Cayley  $G_n = \text{Cay}(\Gamma_n, S_n)$  où  $\Gamma_n$  est le groupe additif  $\mathbb{Z}_{3^n}$  et où  $S_n$  est l'ensemble des  $2 \times 3^{n-2}$  éléments de  $\mathbb{Z}_{3^n}$  de la forme  $\overline{9k \pm 1}$ . On a déjà vu ce graphe dans les sections 2.2 et 2.1.

On considère maintenant le groupe additif  $\Gamma'_n = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{3^{n-1}}$  et l'ensemble  $S'_n$  des éléments de  $\Gamma'_n$  de la forme  $(-\hat{k}, \overline{3k+1})$  ou  $(-\hat{k}, \overline{3k-1})$  avec  $0 \leq k \leq 3^{n-2} - 1$ .

Clairement  $(\hat{0}, \tilde{0}) \notin S'_n$ .

$(\hat{0}, \tilde{1})$  et  $(-\hat{1}, \tilde{4})$  sont des éléments de  $S'_n$ , le sous-groupe de  $\Gamma'_n$  engendré par  $(\hat{0}, \tilde{1})$  est d'ordre  $3^{n-1}$  et  $(-\hat{1}, \tilde{4})$  n'est pas dans ce sous-groupe. Par conséquent  $3^{n-1}$  est un diviseur strict de l'ordre du sous-groupe engendré par  $(\hat{0}, \tilde{1})$  et  $(-\hat{1}, \tilde{4})$  qui est à son tour diviseur de  $3^n$ , l'ordre du groupe  $\Gamma'_n$ . On déduit que l'ordre du sous-groupe engendré par  $(\hat{0}, \tilde{1})$  et  $(-\hat{1}, \tilde{4})$  est  $3^n$ , ce qui veut dire que ce sous-groupe est  $\Gamma'_n$ . Cela implique que  $S'_n$  est une partie génératrice de  $\Gamma'_n$ .

Enfin, on prouve facilement que  $s \in S'_n \Leftrightarrow -s \in S'_n$ .

On peut donc définir le graphe de Cayley  $G'_n = \text{Cay}(\Gamma'_n, S'_n)$ .

On remarquera que les groupes  $\Gamma_n$  et  $\Gamma'_n$  ne sont pas isomorphes, car le premier est cyclique et l'autre non.

Pour  $x \in \mathbb{Z}$ , on notera  $\mu_x$  l'unique élément de  $\{-4, \dots, 0, \dots, 4\}$  tel que  $x \equiv \mu_x \pmod{9}$ .

On considère maintenant l'application  $f : \Gamma_n \rightarrow \Gamma'_n$  définie par :

$$f(\bar{z}) = \left( -\overline{(z - \mu_z) \div 9}, \overline{(z + 2\mu_z) \div 3} \right) \text{ avec } 0 \leq z \leq 3^n - 1.$$

Nous allons prouver que  $f$  réalise un isomorphisme entre les graphes  $G_n$  et  $G'_n$ .

$f(\bar{z}) = f(\bar{z}_1)$  implique :

$$\overline{(z - \mu_z) \div 9} = \overline{(z_1 - \mu_{z_1}) \div 9} \text{ et } \overline{(z + 2\mu_z) \div 3} = \overline{(z_1 + 2\mu_{z_1}) \div 3}, \text{ d'où :}$$

$$3^3 \mid z - z_1 - (\mu_z - \mu_{z_1}) \text{ et } 3^n \mid z - z_1 + 2(\mu_z - \mu_{z_1}).$$

On déduit alors  $3^3 \mid 3(\mu_z - \mu_{z_l})$ , d'où  $9 \mid \mu_z - \mu_{z_l}$  et par conséquent  $\mu_z = \mu_{z_l}$ . Il s'ensuit alors  $3^n \mid z - z_l$  ce qui signifie  $\bar{z} = \bar{z}_l$  et  $f$  est injective. Comme de plus  $\Gamma_n$  et  $\Gamma'_n$  ont le même cardinal,  $f$  est bijective.

Soit  $\bar{z} \bar{z}_l$  une arête de  $G_n$ . On a

$$f(\bar{z}) - f(\bar{z}_l) = \left( \overline{(-z + z_l + \mu_z - \mu_{z_l}) \div 9}, \overline{(z - z_l + 2\mu_z - 2\mu_{z_l}) \div 3} \right).$$

Comme  $\bar{z} - \bar{z}_l \in S_n$ , on peut écrire  $z - z_l = 9k + 1$  ou  $z - z_l = 9k + 1$ .

Si  $z - z_l = 9k + 1$ , on déduit  $9 \mid \mu_z - \mu_{z_l} - 1$  et deux cas sont alors possibles :

Premier cas :  $\mu_z - \mu_{z_l} = 1$ .

$$\text{Alors } f(\bar{z}) - f(\bar{z}_l) = \left( \overline{(-9k - 1 + 1) \div 9}, \overline{(9k + 1 + 2) \div 3} \right) = \left( -\hat{k}, \widehat{3k + 1} \right).$$

$f(\bar{z}) - f(\bar{z}_l)$  est un sommet de  $S'_n$  et donc  $f(\bar{z})f(\bar{z}_l)$  est une arête de  $G'_n$ .

Deuxième cas :  $\mu_z - \mu_{z_l} = -8$ .

$$\text{Alors } f(\bar{z}) - f(\bar{z}_l) = \left( \overline{-k + 1}, \widehat{3k - 5} \right) = \left( \overline{-k - 2}, \widehat{3(k - 2) + 1} \right).$$

De nouveau  $f(\bar{z}) - f(\bar{z}_l)$  est un sommet de  $S'_n$  et donc  $f(\bar{z})f(\bar{z}_l)$  est une arête de  $G'_n$ .

Si  $z - z_l = 9k + 1$ , on a  $z_l - z = 9(-k) + 1$ . On est dans la situation précédente, par conséquent  $f(\bar{z}_l)f(\bar{z})$ , c'est-à-dire  $f(\bar{z})f(\bar{z}_l)$  est une arête de  $G'_n$ .

On a prouvé que si  $\bar{z} \bar{z}_l$  est une arête de  $G$ , alors  $f(\bar{z})f(\bar{z}_l)$  est une arête de  $G'_n$ .

Comme les graphes  $G_n$  et  $G'_n$  sont réguliers et de même degré, il est facile de prouver l'implication inverse.

L'application  $f$  est donc bien un isomorphisme de  $G_n$  sur  $G'_n$ .

Ces deux graphes sont donc bien isomorphes, alors que les groupes qui les définissent ne le sont pas.

Pour une vue d'ensemble des isomorphismes entre graphes de Cayley, on peut consulter avec profit [1], où des nombreuses autres références sont données.

## Références

[1] C.H. Li, On isomorphisms of finite Cayley graphs : a survey, *Discrete Math.*, 256 (2002), pp 301-334

## **CHAPITRE 3**

# **ECHANGE TOTAL DANS UN GRAPHE ORIENTE**





## 1. Introduction

Nous allons étendre la notion d'échange total à un graphe orienté.

Considérons donc un graphe orienté fortement connexe.

Par échange total dans  $G$ , on entend le modèle de communication totale dont le protocole est le suivant :

Initialement chaque sommet de  $G$  possède un message distinct des autres messages. A chaque étape, un sommet  $x$  peut transmettre à chacun de ses successeurs, ou son message originel ou un message précédemment reçu. Précisons que  $x$  peut très bien envoyer le même message à plusieurs de ses successeurs ou bien envoyer des messages distincts.

Le but de ce processus est bien sur qu'à la fin chaque sommet possède tous les messages.

**Le temps de réalisation  $t(M)$  d'un échange total  $M$** , est le nombre d'étapes au bout desquelles chaque sommet possède tous les autres messages.

**Le temps d'échange total minimum (T.M.E.T.) de  $G$**  est le plus petit des  $t(M)$  où  $M$  est échange total quelconque sur  $G$ .

Comme pour les graphes non orientés, on note  $gf_*(1, G)$  le T.M.E.T. de  $G$ .

**Pour un graphe orienté  $G$ , on note  $\delta'_+(G)$  le nombre minimum des successeurs propres d'un sommet et  $\delta'_-(G)$  le nombre minimum des prédécesseurs propres d'un sommet.**

On a alors :

**Proposition 1** Pour tout graphe orienté fortement connexe  $G$ , on a

$$gf_*(1, G) \geq \left\lceil \frac{v(G) - 1}{\delta'_-(G)} \right\rceil.$$

Ce résultat (le seul qu'on a vu pour les graphes orientés) figure dans la référence [1] de l'introduction générale.

La preuve est basée sur le fait qu'un sommet  $x$  ayant  $\delta'_-(G)$  prédécesseurs propres peut recevoir à chaque étape au plus  $\delta'_-(G)$  messages.

Dans cette proposition on ne peut pas remplacer  $\delta'_-(G)$  par  $\delta'_+(G)$  autrement dit, il existe des graphes orientés  $G$  fortement connexes tels que  $gf_*(1, G) < \left\lceil \frac{v(G) - 1}{\delta'_+(G)} \right\rceil$ .

Le graphe orienté  $G$  à quatre sommets  $a, b, c$  et  $d$  et dont les arcs sont les couples  $(a, b), (a, c), (b, a), (b, d), (c, d), (d, a), (d, b)$  et  $(d, c)$  est un tel exemple car  $\delta'_+(G) = 1$  et  $gf_*(1, G) = 2$ .

On peut visualiser un processus d'échange total sur un graphe orienté  $G$  de la même façon que pour un graphe non orienté. On précise quand même que les arcs non triviaux des multi arborescences d'un schéma sont des arcs de  $G$ .

**Ainsi, pour un graphe orienté  $G$ , la donnée d'une famille  $\Omega_x$  de multi arborescences couvrantes de racine  $x$ ,  $x \in V(G)$  fournit le schéma d'un échange total dont le temps de réalisation est la plus grande des hauteurs des multi arborescences  $\Omega_x$ .**

On va utiliser cela dans la section suivante pour déterminer le temps d'échange total d'un graphe de de Bruijn orienté.

## 2. Echange total dans un graphe orienté de de Bruijn.

Dans cette section, nous allons prouver que le T.M.E.T. d'un graphe orienté de de Bruijn est optimal au sens de la borne inférieure définie par la proposition 1 de l'introduction de ce chapitre.

Pour  $d \geq 2$  et  $D \geq 2$ , un élément  $(x_1, \dots, x_D)$  de  $\mathbb{Z}_d^D$  sera noté  $x_1 \dots x_D$ .

Le graphe orienté de de Bruijn  $B(d, D)$  est le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de  $\mathbb{Z}_d^D$  et dont les arcs sont les couples  $(x_1 x_2 \dots x_D, x_2 \dots x_D i)$  avec  $i \in \mathbb{Z}_d$ . Pour  $D = 1$ ,  $B(d, 1)$  est le graphe orienté complet (avec boucle à chaque sommet). Dorénavant on parlera du graphe de de Bruijn  $B(d, D)$  au lieu de graphe orienté de de Bruijn.

On sait que le graphe  $B(d, D)$  est régulier de degré  $d$  et que son diamètre est  $D$ . Les sommets à boucle de  $B(d, D)$  sont les éléments  $i \dots i$ ,  $i \in \mathbb{Z}_d$ .

L'existence des sommets à boucle, explique qu'on a  $\delta'_-(B(d, D)) = d - 1$ .

Nous allons maintenant définir à partir d'un graphe de de Bruijn  $B(d, D)$  avec  $D \geq 2$ , un graphe orienté isomorphe à  $B(d, D - 1)$ . C'est un résultat original qui fait partie d'une approche qui apparaîtra dans d'autres sections. C'est pour cela qu'on garde les notations qui apparaîtront ailleurs.

Soit  $R_2$  la relation définie sur  $\mathbb{Z}_d^D$  par :

$$x_1 \dots x_{D-1} x_D R_2 y_1 \dots y_{D-1} y_D \Leftrightarrow x_1 \dots x_{D-1} = y_1 \dots y_{D-1}.$$

$R_2$  est une relation d'équivalence et la classe d'équivalence d'un élément  $x = x_1 \dots x_{D-1} x_D$  est l'ensemble  $C_2(x) = \{x_1 \dots x_{D-1} i; i \in \mathbb{Z}_d\}$ .

Chaque classe comporte  $d$  éléments et donc le cardinal de l'ensemble  $A_2(d, D)$  de ces classes est  $d^{D-1}$ .

On définit maintenant le graphe orienté  $B_2(d, D)$  dont l'ensemble des sommets est  $A_2(d, D)$  et donc les arcs sont les couples de classes  $(C, C')$  tels qu'il existe des éléments  $a \in C$  et  $a' \in C'$  avec  $(a, a') \in \mathcal{A}(B(d, D))$ . Alors :

**Proposition 1.**  $B_2(d, D)$  est un graphe de de Bruijn isomorphe à  $B(d, D - 1)$ .

**Démonstration.** Si  $D = 2$ , il est facile de voir que  $B_2(d, 2)$  est le graphe orienté complet  $K_d^+$  tout comme  $B(d, 1)$  et donc  $B_2(d, 2)$  est bien isomorphe à  $B(d, 1)$ .

Supposons maintenant  $D \geq 2$ .

Considérons l'application  $g_2 : \mathbb{Z}_d^{D-1} \rightarrow A_2(d, D)$  définie par  $g_2(x_1 \dots x_{D-1}) = C_2(x_1 \dots x_{D-1} 0)$ .

Clairement  $g_2$  est injective et comme  $|\mathbb{Z}_d^{D-1}| = |A_2(d, D)|$ ,  $g_2$  est bijective.

Soient  $x = x_1 \dots x_{D-1}$  et  $y = y_1 \dots y_{D-1}$  deux sommets de  $B(d, D - 1)$ .

Si  $(x, y)$  est un arc de  $B(d, D - 1)$ . on peut poser  $y = x_2 \dots x_{D-1} i$  où  $i \in \mathbb{Z}_d$ .

Alors  $(x_1 \dots x_{D-1} i, x_2 \dots x_{D-1} i 0)$  est un arc de  $B(d, D - 1)$ . et puisque  $x_1 \dots x_{D-1} i$  et  $x_2 \dots x_{D-1} i 0$  sont des représentants respectifs des classes  $g_2(x)$  et  $g_2(y)$ , le couple  $(g_2(x), g_2(y))$  est un arc

de  $B_2(d, D)$ .

Réciproquement, supposons que  $(g_2(x), g_2(y))$  est un arc de  $B_2(d, D)$ .

Il existe alors  $i$  et  $j$ , éléments de  $\mathbb{Z}_d$ , tels que le couple  $(x_1 \dots x_{D-1} i, y_1 \dots y_{D-1} j)$  soit un arc de  $B(d, D)$ . Alors on a  $x_2 \dots x_{D-1} = y_1 \dots y_{D-2}$ , ce qui prouve que  $(x, y)$  est un arc de  $B(d, D-1)$ . L'application  $g_2$  est donc un isomorphisme et l'assertion est prouvée.  $\square$

Il est facile de voir que pour un arc  $(C, C')$  de  $B_2(d, D)$  il existe un unique élément  $x_{C, C'}$  de  $C$  tel que l'ensemble des successeurs de  $x_{C, C'}$  dans  $B(d, D)$  soit exactement les sommets de la classe  $C'$ .

On considère maintenant la relation  $R_1$  définie sur  $\mathbb{Z}_d^D$  par :

$$x_1 x_2 \dots x_D R_1 y_1 y_2 \dots y_D \Leftrightarrow x_2 \dots x_D = y_2 \dots y_D.$$

$R_1$  est une relation d'équivalence et la classe d'équivalence d'un élément  $x = x_1 x_2 \dots x_D$  est l'ensemble  $C_1(x) = \{i x_2 \dots x_D; i \in \mathbb{Z}_d\}$ .

Chaque classe comporte  $d$  éléments et donc le cardinal de l'ensemble  $A_1(d, D)$  de ces classes est  $d^{D-1}$ .

Il est facile de prouver que pour chaque classe  $C$  de  $A_1(d, D)$  il existe une unique classe  $f(C)$  de  $A_2(d, D)$  tel que pour chaque sommet  $x$  de  $C$  l'ensemble des successeurs de  $x$  dans  $B(d, D)$  soit exactement les sommets de la classe  $f(C)$ . Il est clair aussi que l'application  $f$  ainsi définie est bijective.

Après cette remarque essentielle, nous pouvons affirmer :

**Théorème 2.** Pour  $d \geq 2$  et  $D \geq 1$ , on a  $gf_*(1, B(d, D)) = \frac{d^D - 1}{d - 1}$ .

**Démonstration.** On va utiliser la récurrence sur  $D$ .

Il est clair que l'assertion est vraie pour  $D = 1$ .

Supposons que l'assertion soit vraie pour  $D-1$ ,  $D \geq 2$  et étudions pour  $D$ .

Par hypothèse de récurrence on a  $gf_*(1, B(d, D-1)) = \frac{d^{D-1} - 1}{d - 1}$  et puisque  $B_2(d, D)$  est

isomorphe à  $B(d, D-1)$ , on a  $gf_*(1, B_2(d, D)) = \frac{d^{D-1} - 1}{d - 1}$ .

Il existe donc un échange total  $M$  sur  $B_2(d, D)$  qui se fait en  $\frac{d^{D-1} - 1}{d - 1}$  étapes.

Soit  $\Omega_C$ ,  $C \in A_2(d, D)$  la famille de multi arborescences couvrantes de  $B_2(d, D)$  constituant le schéma de  $M$ . Chaque  $\Omega_C$  est de racine  $C$ . La hauteur maximum de ces arborescences est

$\frac{d^{D-1} - 1}{d - 1}$  et quitte à ajouter des arcs triviaux, on peut supposer que chacune des arborescences

$\Omega_C$  est de hauteur  $\frac{d^{D-1} - 1}{d - 1}$ .

Pour un certain rang  $r$  tous les arcs non triviaux du schéma, et ayant le rang  $r$  sont distincts et cela implique que les arcs de  $B(d, D)$  induits par tous ces arcs sont distincts.

Nous définissons maintenant la famille  $\Omega'_x$ ,  $x \in \mathbb{Z}_d^D$  de multi arborescences de  $B(d, D)$  de la manière suivante :

Pour  $x = ix_2 \dots x_D$  avec  $0 \leq i \leq d-1$ ,  $\Omega'_x$  est la multi arborescence de racine  $x$  et de hauteur

$$d \frac{d^{D-1} - 1}{d-1} + 1 = \frac{d^D - 1}{d-1}, \text{ telle que :}$$

- Les arcs de rang  $1$  sont les arcs  $(x, y)$  où les  $y$  sont les éléments de la classe  $f(C_i(x))$ .
- Pour  $i \frac{d^{D-1} - 1}{d-1} + 2 \leq r \leq (i+1) \frac{d^{D-1} - 1}{d-1} + 1$ , les arcs non triviaux de rang  $r$  sont les arcs de

$B(d, D)$  induits par les arcs non triviaux  $(C, C')$  de rang  $r - i \frac{d^{D-1} - 1}{d-1} - 1$  de la multi arborescence  $\Omega_{f(C_i(x))}$  du schéma de  $M$ .

- Pour les autres valeurs de  $r$  tous les arcs de rang  $r$  sont triviaux.

Il n'est pas difficile de voir que  $\Omega'_x$  est une multi arborescence couvrante de  $B(d, D)$ , de racine  $x$ . Vu la construction faite et les considérations faites sur les arcs non triviaux du schéma de  $M$ , il est clair que les arcs non triviaux de même rang des multi arborescences  $\Omega'_x$ ,  $x \in \mathbb{Z}_d^D$  sont tous distincts.

La famille  $\Omega'_x$ ,  $x \in \mathbb{Z}_d^D$  est donc le schéma d'un échange total  $M'$  sur  $B(d, D)$ , qui se fait en

$$\frac{d^D - 1}{d-1} \text{ étapes et cela implique } gf_*(1, B(d, D)) \leq \frac{d^D - 1}{d-1}.$$

D'après la Proposition 1 de l'introduction de ce chapitre, on a  $gf_*(1, B(d, D)) \geq \left\lceil \frac{d^D - 1}{d-1} \right\rceil$ , ce

$$\text{qui nous donne } gf_*(1, B(d, D)) \geq \frac{d^D - 1}{d-1}.$$

On déduit alors  $gf_*(1, B(d, D)) \geq \frac{d^D - 1}{d-1}$ , ce qui fait que l'assertion est vraie pour  $D$  et par conséquent elle est vraie pour tout  $D$ . □

On remarquera que ce théorème nous donne théoriquement le schéma d'un échange total sur  $B(d, D)$  qui se fait en temps optimal. Ce schéma est alors réalisable pour des petites valeurs de  $d$ .



## **CHAPITRE 4**

# **DIFFUSION DANS UN GRAPHE QUELCONQUE**





# 1. Introduction

Dans ce chapitre nous abordons la diffusion classique (broadcasting). Historiquement ce sont P. J Slater, E. Cockaine et S.T. Hedetniemi qui ont défini cette notion vers 1977.

Contrairement à l'échange total, c'est un processus de dissémination de l'information à partir d'un unique initiateur. Le protocole précis est le suivant :

**A l'étape 0 un sommet  $x$  d'un graphe connexe  $G$  possède un message. Au cours d'une étape  $i$ , un sommet ayant déjà reçu ce message peut l'envoyer au plus à un de ses voisins et un sommet n'ayant pas le message peut le recevoir au plus une fois. Le but est bien sûr qu'au bout d'un certain nombre d'étapes, tous les sommets aient reçu le message de  $x$ .**

**Le temps de diffusion**  $b_G(x)$  du sommet  $x$  est le nombre minimum d'étapes nécessaires pour terminer la diffusion à partir de  $x$ . **Le temps minimum de diffusion**  $b_{min}(G)$  du graphe  $G$  est le plus petit des nombres  $b(x)$  où  $x$  parcourt l'ensemble  $V(G)$  des sommets de  $G$ . **Le temps de diffusion**  $b(G)$  du graphe  $G$  est le plus grand des nombres  $b(x)$  où  $x$  parcourt l'ensemble  $V(G)$  des sommets de  $G$ .

On rappelle que pour tout sommet  $x$  de  $G$ , on a  $b(x) \geq \lceil \log_2 v(G) \rceil$ , ce qui implique bien sûr  $b(G) \geq \lceil \log_2 v(G) \rceil$ . **Un graphe de diffusion (broadcast graph)** est alors un graphe  $G$  tel que  $b(G) = \lceil \log_2 v(G) \rceil$ .

**Un graphe minimum de diffusion (minimum broadcast graph)** d'ordre  $n$  est un graphe de diffusion à  $n$  sommets et dont le nombre d'arêtes est le plus petit possible. Pour  $n \geq 1$ ,  $B(n)$  est le nombre d'arêtes d'un graphe minimum de diffusion.  $n \mapsto B(n)$  est la **fonction de diffusion**.

Il y eu beaucoup de recherches pour déterminer les valeurs de  $B(n)$ .

D'une manière générale on a prouvé que  $B(2^k) = k2^{k-1}$  et  $B(2^k - 2) = (k-1)(2^{k-1} - 1)$ .

On connaît aussi les valeurs de  $B(n)$  pour  $n$  allant de 1 à 22 et pour quelque autres petites valeurs de  $n$ . Le tableau ci-dessous donne ces valeurs.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$B(n)$	0	1	2	4	5	6	8	12	10	12	13	15	18	21

$n$	15	16	17	18	19	20	21	22	30	31	32	62	63	64
$B(n)$	24	32	22	23	25	26	28	31	60	65	80	155	162	192

Pour notre part, on a prouvé que pour  $m$  et  $n$  tels que  $\lceil \log_2 mn \rceil = \lceil \log_2 m \rceil + \lceil \log_2 n \rceil$ , on a :  $B(mn) \leq mB(n) + nB(m)$ . Ainsi, avec ce résultat, on obtient  $B(14) \leq 2B(7) + 7B(2)$ , soit  $B(14) \leq 23$ , ce qui n'est pas loin de la réalité. D'autres calculs nous font penser que ce résultat est intéressant (et améliorable en plus), mais malheureusement nous n'avons pas eu le temps d'approfondir. On y reviendra plus tard.

**La section 2** de ce chapitre est un article accepté à « Discrete Applied Mathematics ». Nous montrons d'abord dans cet article que pour un graphe connexe  $G$  de connectivité

$$k(G) = k, \text{ on a } b(G) \leq \lceil \log_2 k \rceil + 1 + \left\lceil \frac{v - 2^{\lceil \log_2 k \rceil + 1}}{k} \right\rceil.$$

Pour  $n \geq 4$ , nous définissons  $\theta(n)$  de la manière suivante :

On considère les uniques entiers  $m$  et  $a$ , avec  $m \geq 1$  et  $1 \leq a \leq 2^m$  tels que  $n = 2^m + a$ . Nous posons alors  $\theta(n) = 2^{m-2} + \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil$  si  $1 \leq a \leq 2^{m-1}$  et  $\theta(n) = a$  si  $2^{m-1} < a \leq 2^m$ . Nous montrons enfin qu'un graphe  $G$  d'ordre  $v$  tel que  $k(G) \geq \theta(v)$  est un graphe de diffusion. Cela fournit beaucoup d'exemples non triviaux de graphes de diffusion.

**La section 3** est article soumis à « Journal of graph theory ». Pour  $\delta \geq 1$  nous caractérisons l'ensemble  $G_\delta$  des graphes  $G$  vérifiant  $\delta(G) = m(G) = \delta$  et  $v(G) \geq 2\delta + 2$ , où  $m(G)$  est le nombre maximum d'arêtes indépendantes de  $G$ . Nous prouvons ensuite que pour  $k \geq 1$ , les graphes  $G$  vérifiant  $k(G) = m(G) = k$  et  $v(G) \geq 2k + 2$ , sont exactement les graphes de  $G_k$ . Cela, combiné avec les résultats de l'article précédent, nous permet de déterminer la valeur exacte du temps de diffusion de ces graphes.

## Broadcast time and connectivity

Nicolas Lichiardopol<sup>1</sup>

*13S, ESSI, 930, Route des Colles, BP 145, 06903 Sophia Antipolis, FRANCE*

---

### Abstract

First, we give an upper bound of the broadcast time of a graph, then a new sufficient condition to have a broadcast graph.

This condition will yield numerous broadcast graphs.

*Keywords :* Broadcasting, broadcast time, broadcast graph, connectivity.

---

### 1. Introduction, basic results

In this paper we deal with the classical problem of broadcasting (see [3] and [7] for surveys). We recall that the protocol is as follows :

At step  $0$  some node  $x$  of a connected graph  $G$  knows a message. At step  $i$ , any node having already received this message, may send it to one of its neighbors with the condition that all calls must use independent edges. The broadcast is completed when all nodes of  $G$  know the message.

Then the broadcast time  $b(x)$  of  $x$  is the minimum number of steps necessary to complete broadcasting from  $x$ .

The broadcast time  $b(G)$  of  $G$  is the greatest  $b(x)$ , where  $x$  is any element of the set  $V(G)$  of vertices of  $G$ .

Let  $v(G)$  be the order of  $G$ . We know that for every vertex  $x$  of  $V(G)$ , we have  $b(x) \geq \lceil \log_2 v(G) \rceil$ , and so  $\lceil \log_2 v(G) \rceil$  is a lower bound on the broadcast time of  $G$ .

---

<sup>1</sup> *E-mail address :* lichiar@club-internet.fr

A broadcast graph is a graph  $G$  such that  $b(G) = \lceil \log_2 v(G) \rceil$ .

All complete graphs are broadcast graphs, and there are broadcast graphs with fewer edges (minimum broadcast graphs).

However, no general characterization of broadcast graphs is known.

In this paper, we obtain a sufficient condition for a graph to be a broadcast graph which results from a new upper bound on the broadcast time of a graph  $G$ , involving the connectivity  $k(G)$  of  $G$ .

Clearly, in a graph  $G$ , if we have a sequence of  $r+1$  subsets  $A_0, \dots, A_r$  of  $V(G)$  with  $A_0 = \{x\}$ ,  $A_r = V(G)$ ,  $A_i \subset A_{i+1}$  for any  $i \in \{0, \dots, r-1\}$ , and such that for each  $i \in \{0, \dots, r-1\}$  there are exactly  $|A_{i+1}| - |A_i|$  independent edges between  $A_i$  and  $A_{i+1} \setminus A_i$ , we can define a broadcast from  $x$  using  $r$  steps.

We also need the following known result:

**Proposition 1.1.** *Let  $G$  be a  $k$ -connected graph and let  $A$  be a subset of  $V(G)$ , with  $|A| \leq |V(G) \setminus A|$ . Then:*

- a) *If  $|A| \geq k$ , there exist  $k$  independent edges between  $A$  and  $V \setminus A$ .*
- b) *If  $|A| < k$ , there exist  $|A|$  independent edges between  $A$  and  $V \setminus A$ .*

For definitions of connectivity and  $k$ -connectivity and for a proof of Proposition 1.1, see [2].

## 2. An upper bound on the broadcast time.

For integers  $n > 0$  and  $r > 0$ , we define  $a_{n,r} = \lceil \log_2 r \rceil + 1 + \left\lceil \frac{n - 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1}}{r} \right\rceil$ .

**Proposition 2.1.** *Let  $G$  be a connected graph of order  $v$ , and of connectivity  $k$ . Then :*  
 $b(G) \leq a_{v,k}$ .

**Proof.** First, let us suppose that  $k = 1$ . In this case  $a_{v,1} = v - 1$

As  $G$  is connected, for any proper non empty subset  $A$  of  $V(G)$ , there is a vertex in  $V(G) \setminus A$  having a neighbor in  $A$ . This implies that from any  $x \in V(G)$ , we can construct a broadcasting scheme using  $v - 1$  steps. Consequently  $b(G) \leq v - 1$ .

Now, let us suppose that  $k \geq 2$ . Let  $x$  be a vertex of  $G$ .

There exists an integer  $m$  such that  $2^m \leq k < 2^{m+1}$  ( $m = \lceil \log_2 k \rceil$ ).

For every  $i \in \{0, \dots, m-1\}$  we have  $2^i < k$  and  $2^i \leq k - 2^i$  hence  $2^i \leq v - 2^i$ .

Then by Proposition 1.1, for any set  $A$  having  $2^i$  vertices, there exist  $2^i$  independent edges between  $A$  and  $V(G) \setminus A$ .

Clearly, we can construct  $m+1$  vertex sets  $A_0, \dots, A_m$  such that:

- $A_0 = \{x\}$

- $A_0 \subset \dots \subset A_m$
- $|A_i| = 2^i$  for every  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ ,
- for each  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ , there are exactly  $|A_{i+1}| - |A_i| = 2^i$  independent edges between  $A_i$  and  $A_{i+1} \setminus A_i$ .

First, suppose that  $2^m \geq v - 2^m$ .

As  $2^m \leq k$ ,  $v - 2^m \leq k$ , and by Proposition 1.1, there are  $v - 2^m$  independent edges between  $A_m$  and  $V(G) \setminus A_m$ .

Therefore, there exists a broadcasting scheme from  $x$  using  $m+1$  steps, and for every vertex  $x$  of  $G$  we have  $b(x) \leq m+1$ . Consequently  $b(G) \leq m+1$ .

It is easy to verify that  $-1 < \frac{v - 2^{m+1}}{k} \leq 0$  and consequently  $\left\lceil \frac{v - 2^{m+1}}{k} \right\rceil = 0$ .

We obtain  $a_{v,k} = m+1$  and so, the assertion holds.

Suppose now that  $2^m < v - 2^m$ .

Since  $2^m \leq k$ , by Proposition 1.1, there are  $2^m$  independent edges linking  $A_m$  to  $V(G) \setminus A_m$ .

Let  $A'_{m+1}$  be the set of end points of all these edges and let  $A_{m+1} = A_m \cup A'_{m+1}$ .

Then  $|V(G) \setminus A_{m+1}| = v - 2^{m+1}$ .

Let  $s = \left\lceil \frac{v - 2^{m+1}}{k} \right\rceil$ .

For any vertex set  $A$  with  $|A| \geq k$ , Proposition 1.1 says that if  $|V(G) \setminus A| \geq k$  there exist  $k$  independent edges between  $A$  and  $V(G) \setminus A$ , and if  $|V(G) \setminus A| < k$  there exist  $|V(G) \setminus A|$  independent edges between  $A$  and  $V(G) \setminus A$ .

This implies that we can construct  $s$  sets  $A_{m+2}, \dots, A_{m+1+s}$  with  $A_{m+2} \subset \dots \subset A_{m+1+s}$ ,  $A_{m+1+s} = V(G)$  and such that for  $m+1 \leq i \leq m+s$  they are  $|A_{i+1} \setminus A_i|$  independent edges between  $A_i$  and  $A_{i+1} \setminus A_i$ .

So, we have constructed  $a_{v,k} + 1$  vertex sets  $A_0, \dots, A_{m+1+s}$  defining a broadcast from  $x$  using  $a_{v,k}$  steps. Therefore, for any vertex  $x$  of  $G$  we have  $b(x) \leq a_{v,k}$  and consequently  $b(G) \leq a_{v,k}$ .

This finishes the proof of Proposition 2.1. □

**Remark.** Proposition 2.1 implies  $D(G) \leq a_{v,k}$  where  $D(G)$  is the diameter of  $G$ .

We now give an example for which the bound of Proposition 2.1. is sharper than that of J. Hromkovic, R. Klasing, B. Monien and R. Peine.

In [5], they prove that  $(\Delta(G)-1)D(G)+1$  is an upper bound for  $b(G)$ , where  $\Delta(G)$  is the maximum degree of  $G$ .

For integers  $r \geq 3$  and  $k \geq 2$  it is easy to prove that there exists a graph  $G_{r,k}$  of order  $rk$  and of connectivity  $k$ .

It is clear that  $\lceil \log_2 k \rceil + 1 + \left\lceil \frac{rk - 2^{\lceil \log_2 k \rceil + 1}}{k} \right\rceil \leq \log_2 k + 1 + r$ .

It is clear also that  $(\Delta(G_{r,k}) - 1)D(G_{r,k}) + 1 \geq 2(k - 1) + 1$ . Clearly for  $k \geq r + 2$ , we have  $\log_2 k + 1 + r < 2(k - 1) + 1$ .

This implies  $a_{rk,k} < (\Delta(G_{r,k}) - 1)D(G_{r,k}) + 1$  and consequently, for the graphs  $G_{r,k}$  with  $k \geq r + 2$ ,  $a_{rk,k}$  is a better upper bound than  $(\Delta(G_{r,k}) - 1)D(G_{r,k}) + 1$ .

We now show that the bound of Proposition 2.1 is sometimes sharper than that of J.C Bermond and C.Peyrat concerning the undirected de Bruijn graphs  $UB(d, D)$ .

In [1], they prove that  $b(UB(d, D)) \leq \frac{(d+1)(D+1)}{2}$ .

It was also proved that for  $D \geq 2$  we have  $k(UB(d, D)) = 2d - 2$  (see [6]).

With our upper bound, we have  $b(UB(3,2)) \leq 4$ ,  $b(UB(4,2)) \leq 5$ ,  $b(UB(5,2)) \leq 6$ ,  $b(UB(6,2)) \leq 6$  and  $b(UB(7,2)) \leq 7$ .

With Bermond and Peyrat's upper bound, we have  $b(UB(3,2)) \leq 6$ ,  $b(UB(4,2)) \leq 7,5$ ,  $b(UB(5,2)) \leq 9$ ,  $b(UB(6,2)) \leq 10,5$  and  $b(UB(7,2)) \leq 12$ .

So, for all these graphs, our upper bound is better than the other, and it is even reached for  $UB(3,2)$  and  $UB(6,2)$ .

However, for  $D = 2$ , while our upper bound is better than that of Bermond and Peyrat, it is not as good as that of M.C Heydeman, J.Opatrny and D. Sotteau ([4]).

### 3. A sufficient condition to have a broadcast graph

For integers  $n$  and  $r$  with  $n \geq 4$  and  $1 \leq r \leq n - 1$ , we consider the number  $a_{n,r}$  already defined.

To prove the main theorem, we need several results.

**Lemma 3.1.** If  $n \leq 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1}$  we have  $\left\lceil \frac{n - 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1}}{r} \right\rceil = 0$ .

**Proof.** We have  $\log_2 r \geq \lceil \log_2 r \rceil$ , hence  $r \geq 2^{\lceil \log_2 r \rceil}$ . As  $n > r$ , we have  $n > 2^{\lceil \log_2 r \rceil}$ . Then  $n + r > 2 \times 2^{\lceil \log_2 r \rceil}$ , that is  $n + r > 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1}$ , hence  $\frac{n - 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1}}{r} > -1$  and since

$\frac{n - 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1}}{r} \leq 0$ , the result follows. □

Let  $\psi_n : \{1, \dots, n - 1\} \rightarrow N$  be the function defined by  $\psi_n(r) = a_{n,r}$ . Then:

**Lemma 3.2.** For each  $n \geq 4$ ,  $\psi_n$  is a decreasing function.

**Proof.** For  $r \in \{1, \dots, n - 2\}$ , two cases are possible:

**Case 1:**  $\lceil \log_2(r+1) \rceil = \lceil \log_2 r \rceil$ . Then we have:

$$\psi_n(r) = \lceil \log_2 r \rceil + 1 + \left\lceil \frac{n - 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1}}{r} \right\rceil \quad \text{and} \quad \psi_n(r+1) = \lceil \log_2 r \rceil + 1 + \left\lceil \frac{n - 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1}}{r+1} \right\rceil.$$

If  $n - 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1} > 0$ , we easily deduce  $\psi_n(r+1) \leq \psi_n(r)$ .

If  $n - 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1} \leq 0$ , by Lemma 3.1 we have  $\left\lceil \frac{n - 2^{\lceil \log_2 r \rceil + 1}}{r} \right\rceil = 0$  and consequently we have  $\psi_n(r+1) = \psi_n(r)$ .

**Case 2:**  $\lceil \log_2(r+1) \rceil = \lceil \log_2 r \rceil + 1$ .

Then, there exists an integer  $s > 0$  such that  $r+1 = 2^s$ . We get:

$$\psi_n(r) = s + \left\lceil \frac{n - 2^s}{2^s - 1} \right\rceil = s - 1 + \left\lceil \frac{n - 1}{2^s - 1} \right\rceil, \quad \psi_n(r+1) = s + 1 + \left\lceil \frac{n - 2^{s+1}}{2^s} \right\rceil = s - 1 + \left\lceil \frac{n}{2^s} \right\rceil.$$

As  $n > 2^s$ , we have  $\frac{n}{2^s} < \frac{n-1}{2^s-1}$  and this implies  $\psi_n(r+1) \leq \psi_n(r)$ .

In both cases we have  $\psi_n(r+1) \leq \psi_n(r)$  and so, the assertion holds.  $\square$

For the complete graph  $K_n$ , by Proposition 2.1, we have  $b(K_n) \leq \psi_n(n-1)$ , that is  $\lceil \log_2 n \rceil \leq \psi_n(n-1)$ . Consequently, for  $1 \leq r \leq n-1$ , we have  $\lceil \log_2 n \rceil \leq \psi_n(r)$ .

For  $n \geq 4$  there exist unique integers  $m$  and  $a$  with  $m \geq 1$  and  $1 \leq a \leq 2^m$  such that  $n = 2^m + a$ . Then, we define  $\theta(n)$  as follows :

$$\theta(n) = \begin{cases} 2^{m-2} + \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil & \text{if } 1 \leq a \leq 2^{m-1} \\ a & \text{if } 2^{m-1} < a \leq 2^m \end{cases}$$

It is easy to see that  $1 \leq \theta(n) \leq n-1$  and we can state :

**Proposition 3.3.** For  $\theta(n) \leq r \leq n-1$ , we have  $a_{n,r} = \lceil \log_2 n \rceil$ .

For  $1 \leq r < \theta(n)$ , we have  $a_{n,r} > \lceil \log_2 n \rceil$ .

**Proof.** We only need to prove that  $a_{n,\theta(n)} = \lceil \log_2 n \rceil$  and  $a_{n,\theta(n)-1} > \lceil \log_2 n \rceil$ .

Let  $n = 2^m + a$  with  $m \geq 1$  and  $1 \leq a \leq 2^m$ . Several cases are possible :

**Case 1:**  $1 \leq a \leq 2^{m-1} - 2$ . Then,  $\lceil \log_2 n \rceil = m+1$  and  $\theta(n) = 2^{m-2} + \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil$ .

It is easy to prove that  $2^{m-2} < \theta(n) < 2^{m-1}$ . Then  $\lceil \log_2 \theta(n) \rceil = m-2$ , hence :

$$a_{n,\theta(n)} = m-1 + \left\lceil \frac{2^m + a - 2^{m-1}}{2^{m-2} + \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil} \right\rceil, \text{ that is } a_{n,\theta(n)} = m-1 + \left\lceil \frac{2^{m-1} + a}{2^{m-2} + \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil} \right\rceil.$$

Clearly,  $1 < \frac{2^{m-1} + a}{2^{m-2} + \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil} \leq 2$ , and then  $a_{n,\theta(n)} = \lceil \log_2 n \rceil$ .

We have  $\theta(n) - 1 = 2^{m-2} + \left\lceil \frac{a-1}{2} \right\rceil$  and then :

$$a_{n,\theta(n)-1} = m-1 + \left\lceil \frac{2^m + a - 2^{m-1}}{2^{m-2} + \left\lceil \frac{a-1}{2} \right\rceil} \right\rceil = m-1 + \left\lceil \frac{2^{m-1} + a}{2^{m-2} + \left\lceil \frac{a-1}{2} \right\rceil} \right\rceil.$$

It is easy to prove that we have  $\frac{2^{m-1} + a}{2^{m-2} + \left\lceil \frac{a-1}{2} \right\rceil} > 2$ , hence  $a_{n,\theta(n)-1} > m+1$  that is

$$a_{n,\theta(n)-1} > \lceil \log_2 n \rceil.$$

**Case 2 :**  $a = 2^{m-1} - 1$ . Then,  $\lceil \log_2 n \rceil = m+1$  and  $\theta(n) = 2^{m-2} + \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil = 2^{m-1}$ .

We get  $a_{n,\theta(n)} = m + \left\lceil \frac{2^m + 2^{m-1} - 1 - 2^m}{2^{m-1}} \right\rceil = m+1 = \lceil \log_2 n \rceil$ . We also have :

$$a_{n,\theta(n)-1} = m-1 + \left\lceil \frac{2^m + 2^{m-1} - 1 - 2^{m-1}}{2^{m-1} - 1} \right\rceil = m-1 + \left\lceil 2 + \frac{1}{2^{m-1} - 1} \right\rceil = m+2$$
 and then it is clear

that we have  $a_{n,\theta(n)-1} > \lceil \log_2 n \rceil$ .

**Case 3 :**  $a = 2^{m-1}$ . Then,  $\lceil \log_2 n \rceil = m+1$  and  $\theta(n) = 2^{m-2} + \left\lceil \frac{a+1}{2} \right\rceil = 2^{m-1}$ .

We get :

$$a_{n,\theta(n)} = m + \left\lceil \frac{2^m + 2^{m-1} - 2^m}{2^{m-1}} \right\rceil = m+1 = \lceil \log_2 n \rceil.$$

We also have :

$$a_{n,\theta(n)-1} = m-1 + \left\lceil \frac{2^m + 2^{m-1} - 2^{m-1}}{2^{m-1} - 1} \right\rceil = m-1 + \left\lceil \frac{2^m}{2^{m-1} - 1} \right\rceil \text{ and as } \left\lceil \frac{2^m}{2^{m-1} - 1} \right\rceil \geq 3 \text{ we get}$$

$$a_{n,\theta(n)-1} > \lceil \log_2 n \rceil.$$

**Case 4 :**  $2^{m-1} < a < 2^m$ . Then,  $\lceil \log_2 n \rceil = m+1$  and  $\theta(n) = a$ . We get :



$$a_{n, \theta(n)} = m + \left\lceil \frac{2^m + a - 2^m}{a} \right\rceil = m + 1 = \lceil \log_2 n \rceil.$$

We also have :

$$a_{n, \theta(n)-1} = m + \left\lceil \frac{2^m + a - 2^m}{a-1} \right\rceil = m + \left\lceil \frac{a}{a-1} \right\rceil \text{ and since } \frac{a}{a-1} > 1 \text{ we deduce :}$$

$$a_{n, \theta(n)-1} > \lceil \log_2 n \rceil.$$

**Case 5 :**  $a = 2^m$ . Then,  $\lceil \log_2 n \rceil = m + 1$  and  $\theta(n) = a = 2^m$ . We get :

$$a_{n, \theta(n)} = m + 1 + \left\lceil \frac{2^{m+1} - 2^{m+1}}{2^m} \right\rceil = m + 1 = \lceil \log_2 n \rceil.$$

We also have:

$$a_{n, \theta(n)-1} = m + \left\lceil \frac{2^{m+1} - 2^m}{2^m - 1} \right\rceil = m + 2 \text{ and so } a_{n, \theta(n)-1} > \lceil \log_2 n \rceil.$$

So, we always have  $a_{n, \theta(n)} = \lceil \log_2 n \rceil$  and  $a_{n, \theta(n)-1} > \lceil \log_2 n \rceil$  and consequently the assertion is proved. □

Now we can give the main result :

**Theorem 3.4.** *A graph  $G$  of order  $v$  such that  $k(G) \geq \theta(v)$  is a broadcast graph.*

**Proof.** By Proposition 2.1, we have  $b(G) \leq a_{v, k(G)}$ . By Proposition 3.3, we have  $a_{v, k(G)} = \lceil \log_2 v \rceil$  and since  $b(G) \geq \lceil \log_2 v \rceil$ , the result follows. □

We give below a table of values of  $\theta(v)$  for  $4 \leq v \leq 20$ .

$v$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\theta(v)$	2	2	2	3	4	3	3	4	4	5	6	7	8	5	5	6	6

It is clear that the smaller  $\frac{\theta(v)}{v}$  is, the more interesting the values of  $\theta(v)$  are.

The best values of  $\theta(v)$  are obtained when  $v = 2^m + 2$ , with  $m \geq 2$ . Then we have  $\theta(v) = 2^{m-2} + 1 = \left\lceil \frac{v}{4} \right\rceil$ , and so any graph with connectivity  $\geq \left\lceil \frac{v}{4} \right\rceil$  yields a broadcast graph.

Finally, we conjecture that :

**Conjecture 5.** *For any pair  $(v, k)$  with  $v \geq 3$  and  $1 \leq k \leq v-1$  there exists a graph  $G_{v, k}$  of order  $v$  and of connectivity  $k$ , such that  $b(G_{v, k}) = a_{v, k}$ .*

This conjecture is true for the pairs  $(v, k)$  with  $k \geq \theta(v)$ .

It is easy to prove that this conjecture is also true for the pairs  $(v, 1)$  ( $G_{v,1}$  is a chain) and for the pairs  $(v, 2)$  ( $G_{v,2}$  is a cycle).

## Acknowledgements

I thank Claudine Peyrat and the referees for their useful remarks.

## References

- [1] J.-C. Bermond, C. Peyrat, Broadcasting in de Bruijn networks, Proceedings of the 19<sup>th</sup> Southeastern Conference on Combinatorics, Graph theory and Computing, Congressus Numerantium, 66 (1988), pp. 283-292.
- [2] B. Bollobas, Extremal Graph Theory, Academic Press, 1978.
- [3] S.M Hedetniemi, S.T Hedetniemi, A.L Liestman, A survey of gossiping and broadcasting in communication networks, Networks 18 (1988), pp. 319-349.
- [4] M.-C. Heydemann, J. Opatrny, D. Sotteau, Broadcasting and spanning trees in de Bruijn and Kautz networks, Discrete Appl. Math. 27-28 (1992), pp. 297-317.
- [5] J. Hromkovic, R. Klasing, B. Monien, R. Peine, Dissemination of information in interconnection networks (broadcasting and gossiping), in: F. Hsu, D.-Z. Du (Eds), Combinatorial Network Theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995, pp. 125-212.
- [6] C. Peyrat, Les réseaux d'interconnexion et leur vulnérabilité, PhD Thesis, University of Paris Sud, 1987.
- [7] J de Rumeur, Communications dans les réseaux de processeurs, Masson, 1994.

# Connected graphs with the same minimum degree and matching number, broadcast time of these graphs

Nicolas Lichiardopol

*13S,ESSI*

*930, ROUTE DES COLLES, BP 145*

*06903 SOPHIA ANTIPOLIS, FRANCE*

*E-mail: lichiar@club-internet.fr*

**Abstract :** In this paper we consider connected graphs having the same minimum degree and matching number. First we characterize these graphs and in a second part, we determine the broadcast time of some of these graphs.

## 1. Introduction

In this paper we consider connected simple graphs. For such a graph  $G$ , we note  $V(G)$  the set of its vertices,  $v(G)$  its order, that is the number of its vertices,  $E(G)$  the set of its edges and  $\delta(G)$  its minimum degree. For a vertex  $x$  of  $G$ ,  $d_G(x)$  is its degree and  $N_G(x)$  is the set of its neighbours. We simply note  $xy$  an edge  $\{x, y\}$  of  $G$ .

A set of edges of a graph  $G$  is called independent or a matching if no two edges have a common vertex. The matching number  $m(G)$  of  $G$  is the cardinality of any largest matching in  $G$ .

It is easy to see that for any graph  $G$ , we have  $m(G) \leq \left\lfloor \frac{v(G)}{2} \right\rfloor$ . As reference for this notion see [2].

The connectivity  $k(G)$  of  $G$  is the minimum number of vertices whose removal yields a disconnected graph.

It is well known that a connected graph  $G$  of minimum degree  $\delta \geq 1$  and of order  $v(G) \leq 2\delta$  has an Hamiltonian path and even an Hamiltonian cycle for  $\delta \geq 2$  (see [3]). In particular, for  $v(G) = 2\delta$ , if  $x_1, \dots, x_{2\delta}$  is such a path, the  $\delta$  edges  $x_1x_2, \dots, x_{2\delta-1}x_{2\delta}$  form a matching. Since  $m(G) \leq \delta$ , we get  $m(G) = \delta$ .

It is also known that a connected graph of minimum degree  $\delta \geq 1$  and of order  $v(G) \geq 2\delta + 1$  has a path with  $2\delta + 1$  vertices (see [4]). If  $x_1, \dots, x_{2\delta+1}$  is such a path, the  $\delta$  edges  $x_1x_2, \dots, x_{2\delta-1}x_{2\delta}$  form a matching. Consequently,  $\delta \leq m(G)$  and then, if  $v(G) = 2\delta + 1$ , we

also get  $m(G) = \delta$ .

Now, our question is “For given  $\delta \geq 1$ , are there other connected graphs  $G$  of minimum degree  $\delta$ , verifying  $m(G) = \delta$ ?”

The answer is yes and we prove it by characterizing them. It is clear that these graphs verify  $\nu(G) \geq 2\delta + 2$ . So, for each integer  $\delta \geq 1$ , we note  $\mathcal{G}_\delta$  the set of graphs  $G$  verifying  $\nu(G) \geq 2\delta + 2$  and  $m(G) = \delta(G) = \delta$ .

In the last section, for  $k \geq 1$ , we determine the broadcast time of all graphs of  $\mathcal{G}_k$ .

We deal with the classical problem of broadcasting whose protocol is the following :

At step 0, some node  $x$  of a connected graph  $G$ , knows a message. At a step  $i$ , any node having already received this message, may send it to one of its neighbours with the condition that all calls must use independent edges. The broadcast is completed when all nodes of  $G$  know the message.

Then the broadcast time  $b(x)$  of  $x$  is the minimum number of steps required to complete broadcasting from  $x$ .

The broadcast time  $b(G)$  of  $G$  is the greatest of the  $b(x)$ , where  $x$  travels the set  $V(G)$  of vertices of  $G$ .

For a survey of this notion, see [5] and [6].

## 2. Characterization of $\mathcal{G}_\delta$

For two disjoint sets  $A$  and  $B$  and for a set  $P$  of pairs of elements of  $A$ , we note  $G_{A,P,B}$  the graph whose vertex set is  $A \cup B$  and whose edge set is  $P \cup \{\{x, y\} ; x \in A, y \in B\}$ .

Note that such a graph is connected and that if  $P = \emptyset$ , it is a complete bipartite graph.

First, we state :

**Proposition 2.1.** *A graph  $G_{A,P,B}$  with  $|A| = \delta$ ,  $|B| \geq \delta + 2$  belongs to  $\mathcal{G}_\delta$ .*

**Proof.** Clearly, we have  $\nu(G_{A,P,B}) \geq 2\delta + 2$ ,  $\delta(G_{A,P,B}) = \delta$  and  $m(G_{A,P,B}) \geq \delta$

Since every edge of  $G_{A,P,B}$  has at least one extremity in  $A$  and since  $|A| = \delta$ , it is not possible to have more than  $\delta$  independent edges. So,  $m(G_{A,P,B}) \leq \delta$  and then  $m(G_{A,P,B}) = \delta$ .

Consequently  $G_{A,P,B} \in \mathcal{G}_\delta$ . ✎

Conversely, we have :

**Proposition 2.2.** *Let  $G$  be a graph of  $\mathcal{G}_\delta$ . Then there exist  $A, P, B$  with  $|A| = \delta$ ,  $|B| \geq \delta + 2$ , such that  $G = G_{A,P,B}$ .*

**Proof.** There exist  $\delta$  independent edges  $e_1 = x_1 y_1, \dots, e_\delta = x_\delta y_\delta$ . Let us note  $E' = \{e_1, \dots, e_\delta\}$  and  $V' = \{x_1, \dots, x_\delta, y_1, \dots, y_\delta\}$ . Let  $z_1, \dots, z_r$  be the vertices of the set  $C = V(G) \setminus V'$ . Since  $\nu(G) \geq 2\delta + 2$ , it follows  $r \geq 2$ .

It is clear that  $C$  is an independent set of  $G$  (otherwise we would have  $\delta + I$  independent edges), and since  $\delta(G) = \delta$  every vertex of  $C$  has at least  $\delta$  neighbours in  $V'$ .

In principle, two cases are possible :

**Case 1.** There exists a vertex of  $C$  which does not admit as neighbours both extremities of an edge of  $E'$ . Then, this vertex admits exactly  $\delta$  neighbours in  $E'$ , covering the  $\delta$  edges of  $E'$ .

Without loss of generality, we can assume that this vertex is  $z_I$  and that its neighbours are  $x_1, \dots, x_\delta$ .

We state that for any  $i$ ,  $2 \leq i \leq r$ , we have  $N_G(z_i) = \{x_1, \dots, x_\delta\}$ .

Indeed, suppose the opposite. Then  $z_i$  would admit a neighbour  $z \notin \{x_1, \dots, x_\delta\}$  and since  $z$  is not in  $C$ , it would exist  $j$ ,  $1 \leq j \leq \delta$  such that  $z = y_j$ . Then  $(E' \setminus \{x_j y_j\}) \cup \{z_I x_j, z_I y_j\}$  would be a set of  $\delta + I$  independent edges, impossible.

So, for any  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , we have  $N_G(z_i) = \{x_1, \dots, x_\delta\}$ . Then, for any  $i \in \{1, \dots, \delta\}$  we have  $N_G(y_i) \subseteq V'$ .

Suppose that  $y_i$  has a neighbour  $y_j$  (then  $j \neq i$ ). Then  $(E' \setminus \{x_i y_i, x_j y_j\}) \cup \{y_i y_j, x_i z_I, x_j z_I\}$  would be a set of  $\delta + I$  independent edges, which is impossible.

Consequently, for any  $i \in \{1, \dots, \delta\}$ , we have  $N_G(y_i) \subseteq \{x_1, \dots, x_\delta\}$  and since  $d_G(y_i) \geq \delta$ , we deduce  $N_G(y_i) = \{x_1, \dots, x_\delta\}$ .

Now, by taking  $A = \{x_1, \dots, x_\delta\}$ ,  $B = \{y_1, \dots, y_\delta, z_1, \dots, z_r\}$  and  $P = E(G(A))$ , we have  $G = G_{A,P,B}$ . So, in this case, the proof is given.

**Case 2.** For each vertex  $z$  of  $C$  there exists an edge of  $E'$  whose extremities are both neighbours of  $z$ .

For  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , let us note  $E'_i$  the set of the edges  $x_i y_i$  of  $E'$  such that  $\{x_i, y_i\} \subseteq N_G(z_i)$ .

By hypothesis, each of the sets  $E'_i$  is non empty.

The sets  $E'_i$ ,  $1 \leq i \leq r$ , are disjoint.

Indeed, suppose that there exists an edge  $x_n y_n$  of  $E'$  belonging to two sets  $E'_i$  and  $E'_j$ . Then  $(E' \setminus \{x_n y_n\}) \cup \{x_n z_i, y_n z_j\}$  would be a set of  $\delta + I$  independent edges, which is impossible.

This shows that for  $\delta = I$  this case cannot hold. So, we can consider  $\delta \geq 2$ .

Let us note  $|E'_i| = \lambda_i$  for  $1 \leq i \leq r$ . Without loss of generality, we can suppose  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_r$ .

For each  $i \in \{1, \dots, r\}$ , let us also note  $V'_i$  the set of the vertices forming the edges of  $E'_i$  and  $W'_i = V'_i \cup \{z_i\}$ .

Suppose that  $\bigcup_{1 \leq i \leq r} V'_i = V'$ . Then the sets  $W'_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  form a partition of  $V(G)$ . As  $G$  is connected, there exists an edge  $xy$  with  $x$  belonging to a set  $W'_i$  and  $y$  to an other set  $W'_j$ .

Three situations are possible :

**Situation 1.**  $x$  is an extremity of an edge  $xz$  of  $E'_i$  and  $y$  is an extremity of an edge  $yz'$  of  $E'_j$ .

Then  $(E' \setminus \{xz, yz'\}) \cup \{xy, zz_i, z'z_j\}$  is a set of  $\delta + I$  independent edges, impossible.

**Situation 2.**  $x = z_i$  and  $y$  is an extremity of an edge  $yz'$  of  $E'_j$ .

Then  $(E' \setminus \{yz'\}) \cup \{xy, z'z_j\}$  is a set of  $\delta + 1$  independent edges, impossible.

**Situation 3.**  $y = z_j$  and  $x$  is an extremity of an edge  $xz$  of  $E'_i$ .

Similarly, we prove that it is impossible.

Consequently, we cannot have  $\bigcup_{1 \leq i \leq r} V'_i = V'$  and this prove that if  $\delta = 2$  the case 2 is not possible. So,  $\delta \geq 3$  and  $\bigcup_{1 \leq i \leq r} V'_i \subset V'$  (strict inclusion).

Then, we have  $\lambda_1 + \dots + \lambda_r < \delta$ , hence  $2\lambda_1 < \delta$  and  $\delta - 2\lambda_1 > 0$

We state that  $z_1$  has no neighbour in  $\bigcup_{2 \leq i \leq r} V'_i$ .

Indeed, suppose that  $z_1$  has a neighbour  $x$  belonging to a set  $V'_i$  with  $2 \leq i \leq r$ . Then it would exist a vertex  $y \in V'_i$  such that  $xy$  is an edge of  $E'_i$ . Then  $(E' \setminus \{xy\}) \cup \{z_1x, yz_i\}$  would be a set of  $\delta + 1$  independent edges, which is impossible.

As  $C$  is independent,  $z_1$  has no neighbour in  $C$ . The  $2\lambda_1$  elements of  $V'_1$  are neighbours of  $z_1$ .

Since  $z_1$  has at least  $\delta$  neighbours, it follows that  $z_1$  has at least  $\delta - 2\lambda_1$  neighbours among the  $2\delta - 2\lambda_1 - \dots - 2\lambda_r$  vertices forming the edges of  $E' \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq r} E'_i$ .

If  $r \geq 3$  or if  $\lambda_1 < \lambda_2$ , clearly we have  $\delta - 2\lambda_1 > \frac{1}{2}(2\delta - 2\lambda_1 - \dots - 2\lambda_r)$  and then  $z_1$  would admit two neighbours, extremities of an edge of  $E' \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq r} E'_i$ . This edge would be an element of  $E'_1$ , which is absurd.

The only possibility is  $r = 2$  and  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Then  $z_1$  admits exactly  $\delta - 2\lambda_1$  neighbours  $a_1, \dots, a_s$  with  $s = \delta - 2\lambda_1$ , contained in the  $\delta - 2\lambda_1$  edges of  $E' \setminus (E'_1 \cup E'_2)$ .

Let  $a_1b_1, \dots, a_sb_s$  be the edges of  $E' \setminus (E'_1 \cup E'_2)$ .

With the same argument, we deduce that  $z_2$  admits exactly  $\delta - 2\lambda_1$  neighbours contained in the  $\delta - 2\lambda_1$  edges of  $E' \setminus (E'_1 \cup E'_2)$ .

Suppose that  $z_2$  has a vertex  $b_i$  as neighbour. Then  $(E' \setminus \{a_ib_i\}) \cup \{a_iz_1, b_iz_2\}$  would be a set of  $\delta + 1$  independent edges, which is impossible. So, the vertices  $b_i, 1 \leq i \leq s$ , are not neighbours of  $z_2$  and this implies that the  $\delta - 2\lambda_1$  neighbours of  $z_2$  contained in the  $\delta - 2\lambda_1$  edges of  $E' \setminus (E'_1 \cup E'_2)$  are  $a_1, \dots, a_s$ .

The vertex  $b_1$  has not neighbours in  $V'_1$ .

Indeed, suppose that  $b_1$  has as a vertex  $x$  of  $V'_1$  as neighbour. This vertex  $x$  is extremity of an edge  $xy$  of  $E'_1$  and then  $(E' \setminus \{xy, a_1b_1\}) \cup \{yz_1, a_1z_2, b_1x\}$  would be a set of  $\delta + 1$  independent edges, impossible.

Similarly, we prove that  $b_1$  has no neighbour in  $V'_2$ .

The vertex  $b_1$  has no neighbour among the vertices  $b_2, \dots, b_s$ .

Indeed, suppose that the vertex  $b_1$  has some vertex  $b_i, 2 \leq i \leq s$  as neighbour. Then  $(E' \setminus \{a_1b_1, a_ib_i\}) \cup \{b_ib_i, a_1z_1, a_iz_2\}$  would be a set of  $\delta + 1$  independent edges, impossible.

Since  $z_1$  and  $z_2$  are not neighbours of  $b_1$  either, we deduce  $N_G(b_1) \subseteq \{a_1, \dots, a_s\}$ . Then we get  $d_G(b_1) \leq \delta - 2\lambda_1 < \delta$  which is impossible.

We can conclude that the case 2 cannot hold. So only the case 1 is possible and the assertion is proved.  $\square$

It is easy to prove that a graph  $G$  of  $\mathcal{G}_\delta$  verifies  $m(G) = k(G) = \delta$ . It is also easy to see that a graph  $G$  verifying  $v(G) \geq 2\delta + 2$  and  $m(G) = k(G) = \delta$  is a graph  $G_{A,P,B}$  with  $|A| = \delta$ ,  $|B| \geq \delta + 2$ . So, we can conclude that  $\mathcal{G}_\delta$  is also the set of graphs  $G$  verifying  $v(G) \geq 2\delta + 2$  and  $m(G) = k(G) = \delta$ .

### 3. Broadcast time of graphs of $\mathcal{G}_k$ , $k \geq 1$ .

In [7], the author proves that for a graph  $G$  of order  $v$  and connectivity  $k$ , for any vertex  $x$  of  $G$ , it holds :  $b_G(x) \leq a_{v,k}$  where  $a_{v,k} = \lceil \log_2 k \rceil + 1 + \left\lceil \frac{v - 2^{\lceil \log_2 k \rceil + 1}}{k} \right\rceil$ .

For a given  $k \geq 1$ , we have seen that for any graph  $G$  of  $\mathcal{G}_k$ , we have  $k(G) = k$ . So, for a graph  $G$  of  $\mathcal{G}_k$ , of order  $v$ , for any vertex  $x$  of  $G$  we have  $b_G(x) \leq a_{v,k}$  and this implies  $b(G) \leq a_{v,k}$ .

This being established, we can state :

**Theorem 3.1** *Let  $G$  be a graph of  $\mathcal{G}_k$  of order  $v$ . Then :*

- a) *For every vertex  $x$  of  $G$ , we have  $b_G(x) = a_{v,k}$ .*
- b)  *$b(G) = a_{v,k}$ .*

**Proof.** a) Let us consider a broadcast from  $x$ . At any step, as long as the number of informed vertices is not greater than  $\delta$ , the number of the informed vertices at the next step can double at the most. As soon as the number of informed vertices exceeds  $k$ , at the next step, at most  $k$  vertices can be informed (otherwise this would mean that we have more than  $k$  independent edges). We deduce  $b_G(x) \geq \lceil \log_2 k \rceil + 1 + \left\lceil \frac{v - 2^{\lceil \log_2 k \rceil + 1}}{k} \right\rceil$  that is  $b_G(x) \geq a_{v,k}$ .

This implies  $b_G(x) = a_{v,k}$ .

b) The result is clear.  $\square$

It is known that for a graph  $G$  of connectivity  $k$  and of order  $v \geq 2k$ , if  $A, B$  is a partition of  $V(G)$  with  $|A| \geq k$  and  $|B| \geq k$ , there exist  $k$  independent edges linking vertices of  $A$  to vertices of  $B$  (see [1]). Then, for such a graph we have  $m(G) \geq k$  and if  $v = 2k$  or  $v = 2k + 1$ , clearly we have  $m(G) = k$ .

With the same reasoning that previously, we deduce that a graph  $G$  of connectivity  $k$  and of order  $v = 2k$  or  $v = 2k + 1$  verifies  $b(G) = a_{v,k}$ .

Again in [7], it was conjectured that for any couple  $(v, k)$  of integers with  $v \geq 3$  and  $1 \leq k \leq v - 1$ , there exists a graph  $G_{v,k}$  of order  $v$  and of connectivity  $k$ , such that

$b(G_{v,k}) = a_{v,k}$ . It was proved in the same paper that this conjecture is true for the couples  $(v, k)$  with  $v < 2k$  and we just prove it for the couples  $(v, k)$  with  $v \geq 2k$ . So, this conjecture is always true.

## References

- [1] B. Bollobas, Extremal Graph Theory, Academic Press, London, 1978
- [2] L. Lovasz and M.D. Plummer, Matching Theory, North-Holland, Amsterdam, 1986
- [3] G.A. Dirac, Some theorems on abstract graphs, Proc. London Math. Soc. 2 (3) (1952), 69-81
- [4] P. Erdős and T. Gallai, On maximal paths and circuits of graphs, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 10 (1959), 337-356.
- [5] P. Fraignaud and E. Lazard, Methods and problems of communication in usual networks, Discrete Appl. Math. 53 (1994), 79-133.
- [6] S.M Hedetniemi, S.T Hedetniemi and A. Liestman, A survey of gossiping and broadcasting in communication networks, Networks 18 (1988), 319-349.
- [7] N. Lichiardopol, Broadcast time and connectivity, to appear in Discrete Appl. Math.



## **CHAPITRE 5**

# **DIFFUSION DANS LES GRAPHEES ORIENTES ET NON ORIENTES DE DE BRUIJN**



## 1. Introduction

Le protocole de la diffusion dans un graphe orienté est le même que celui de la diffusion dans un graphe non orienté, sauf qu'un sommet ne peut transmettre un message qu'à un de ses successeurs.

On a beaucoup travaillé sur la diffusion dans un graphe de de Bruijn, orienté ou non. Rappelons que pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 2$ , le graphe orienté de de Bruijn  $B(d, D)$  est le graphe dont l'ensemble des sommets est  $\mathbb{Z}_d^D$  et dont les arcs sont les couples  $(x_1 x_2 \dots x_D, x_2 \dots x_D i)$  avec  $i \in \mathbb{Z}_d$ . Pour  $D = 1$ ,  $B(d, 1)$  est le graphe orienté complet  $K_d^+$  d'ordre  $d$  avec boucle à chaque sommet.

Le graphe non orienté de de Bruijn  $UB(d, D)$  est le graphe non orienté sous-jacent à  $B(d, D)$ , autrement dit le graphe obtenu en enlevant les orientations et les boucles de  $B(d, D)$ .

Les valeurs exactes de  $b(UB(d, D))$  et  $b(B(d, D))$  ne sont pas connues en général, mais on a déterminé plusieurs bornes inférieures et supérieures.

Ainsi, S. Perennes a prouvé dans [17] que  $b(UB(d, D)) \geq 1,4404D$ . Cette borne inférieure est bien sûr valable pour le cas orienté. J.C. Bermond, X. Munoz et A. Marchetti-Spaccamela ont prouvé dans [2] que  $b(B(d, D)) \leq D(\log_2 d + f(d))$  où  $d \mapsto f(d)$  est une fonction vérifiant

$$\log_2 \left( 1 + \frac{1}{d} \right) \leq f(d) \leq \frac{1}{2}.$$

Ces bornes sont les meilleures sauf dans le cas  $d = 2$  pour lequel J.C Bermond et C. Peyrat ont prouvé dans [3] que  $b(B(2, D)) \leq \frac{3(D+1)}{2}$ .

En ce qui concerne le graphe de de Bruijn orienté, il y a déjà la borne inférieure déjà donnée pour le cas non orienté.

Pour notre part, nous nous intéressons aux temps minimums de diffusion  $b_{min}(UB(2, D))$  et  $b_{min}(B(2, D))$  de  $UB(2, D)$  et  $B(2, D)$ .

Nous démontrons dans la deuxième et dernière section de ce chapitre que pour  $D \geq 2$ , on a  $b_{min}(UB(2, D)) \leq b(UB(2, D-1)) + 1$  et  $b_{min}(B(2, D)) \leq b(B(2, D-1)) + 1$  puis que pour  $D \geq 3$ , on a  $b_{min}(UB(2, D)) \leq b(UB(2, D-2)) + 2$ .

Pour cela nous utilisons une des trois constructions à partir de  $B(2, D)$  d'un graphe orienté isomorphe à  $B(2, D-1)$ . Ces constructions, pour  $d$  quelconque, ont été déjà utilisées et seront encore utilisées. La théorie complète se trouve dans la deuxième section du chapitre suivant.



# Minimum broadcast time of a binary de Bruijn graph

Nicolas Lichiardopol

I3S-ESSI, BP 145, 06903 Sophia Antipolis, France

e-mail : lichiar@club-internet.fr

## Abstract

In this paper, for  $D \geq 2$  we prove an inequality linking the minimum broadcast time of the binary De Bruijn graph  $UB(2, D)$  and the broadcast time of the binary De Bruijn graph  $UB(2, D - 1)$  and for  $D \geq 3$  we prove a second inequality linking the minimum broadcast time of  $UB(2, D)$  and the broadcast time of  $UB(2, D - 2)$ . For this, the essential tool will be the construction of a binary De Bruijn digraph of diameter  $D - 1$  from the binary De Bruijn digraph of diameter  $D \geq 2$ .

*Keywords* : De Bruijn graph, broadcast time, minimum broadcast time.

## 1 Introduction, Notation

In this paper we deal with the classical problem of broadcasting whose protocol is as follows :

At the step 0 some node  $x$  of a connected graph  $G$  knows a message. At the step  $i$ ,  $x$  or any node having already received this message may send it to one of its neighbours with the condition that all calls must use independent edges. The broadcast is completed when all nodes of  $G$  know the message.

Then the broadcast time  $b_G(x)$  of  $x$  is the minimum number of steps necessary to complete broadcast from  $x$ .

The broadcast time  $b(G)$  of  $G$  is the greatest  $b_G(x)$ , where  $x$  is any element of the vertex set  $V(G)$  of  $G$ .

The minimum broadcast time  $b_{min}(G)$  of  $G$  is the smallest  $b_G(x)$ , where  $x$  is any element of the vertex set  $V(G)$  of  $G$ .

Let  $V(G)$  be the order of  $G$ . We know that for any  $x$  of  $V(G)$ , we have  $b_G(x) \geq \lceil \log_2 v(G) \rceil$  and so  $\lceil \log_2 v(G) \rceil$  is a lower bound on the broadcast time of  $G$ .

Clearly, in a graph  $G$ , if we have  $r+1$  subsets  $S_0, \dots, S_r$  of  $V(G)$  with  $A_0 = \{x\}$ ,  $S_r = V(G)$ ,  $S_i \subset S_{i+1}$  for any  $i \in \{0, \dots, r-1\}$ , and such that for each  $i \in \{0, \dots, r-1\}$  there exists a set  $E_i$  of  $|S_{i+1}| - |S_i|$  independent edges between  $S_i$  and  $S_{i+1} \setminus S_i$ , we can define a broadcasting from  $x$  using  $r$  steps.

Conversely a broadcasting from  $x$  using  $r$  steps yields a sequence of  $r+1$  subsets  $S_0, \dots, S_r$  of  $V(G)$  with the above properties.

For more general results one can see [1] or [2] or [3]

We recall that for  $d \geq 2$  and  $D \geq 2$ , the De Bruijn digraph  $B(d, D)$  is the digraph whose vertex set is  $\mathbb{Z}_d^D$  and whose arcs are the couples of vertices  $((x_1, x_2, \dots, x_D), (x_2, \dots, x_D, i))$  with  $i \in \mathbb{Z}_d$ . For  $D = 1$ ,  $B(d, 1)$  is the complete digraph  $K_d^+$  of order  $d$  with loops at each vertex.

$B(d, D)$  is a strongly connected regular digraph of degree  $d$  and of diameter  $D$ .

The De Bruijn graph  $UB(d, D)$  is the underlying graph of  $B(d, D)$ .  $UB(d, D)$  is a connected undirected graph, its minimum degree is  $2d - 2$ , its maximum degree is  $2d$  and its diameter is  $D$ .

For an element  $i$  of  $\mathbb{Z}_2$ , we note  $\bar{i} = 1 - i$ . For a vertex  $x = (x_1, \dots, x_D)$  of  $UB(2, D)$ , we note  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_D)$ .

For  $D \geq 1$ , we note  $0_D = (0, \dots, 0)$  and  $1_D = (1, \dots, 1)$  the vertices with loop of  $B(2, D)$ .

There are also the only vertices of degree 2 of  $UB(2, D)$ .

We note  $A_D$  the element  $(a_1, \dots, a_D)$  with  $a_1 = 0$  and  $a_{i+1} = \bar{a}_i$  for  $1 \leq i \leq D - 1$ . We remark that  $(A_D, \bar{A}_D)$  and  $(\bar{A}_D, A_D)$  are both arcs of  $B(d, D)$ .  $A_D$  and  $\bar{A}_D$  are also the only vertices of degree 3 of  $UB(2, D)$ .

We note  $U_D$  the vertex  $(u_1, \dots, u_D)$  of  $UB(2, D)$  with  $u_1 = u_2 = 0$  and  $u_{i+2} = \bar{u}_i$  for  $1 \leq i \leq D - 2$  and  $V_D$  the vertex  $(v_1, \dots, v_D)$  of  $UB(2, D)$  with  $v_1 = 0, v_2 = 1$  and  $v_{i+2} = \bar{v}_i$  for  $1 \leq i \leq D - 2$ . It is easy to see that the sequence  $U_D, V_D, \bar{U}_D, \bar{V}_D, U_D$  is a directed cycle of  $B(2, D)$ .

It was proved in [4] that  $b(UB(2, D)) \geq 1.371D$ .

It is easy to prove that this inequality implies  $b(UB(2, D)) > b(UB(2, D - 1)) + 1$  for infinitely many integers  $D$ . The same inequality implies  $b(UB(2, D)) > b(UB(2, D - 2)) + 2$  for infinitely many integers  $D$ .

As for us, we will prove that  $b_{min}(UB(2, D)) \leq b(UB(2, D - 1)) + 1$  for  $D \geq 2$  and  $b_{min}(UB(2, D)) \leq b(UB(2, D - 2)) + 2$  for  $D \geq 3$ . In view of the above considerations, these results are not trivial.

## 2 De Bruijn digraph of diameter $D - 1$ defined from the De Bruijn digraph of diameter $D$

We consider  $D \geq 2$ . Let  $\mathcal{R}$  be the relation on  $\mathbb{Z}_2^D$  defined by :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y = x \text{ or } y = \bar{x}$$

Clearly  $\mathcal{R}$  is an equivalence relation and the class of some vertex  $x$  is  $\mathcal{C}(x) = \{x, \bar{x}\}$

Each class has 2 elements and therefore the set  $A'(2, D)$  of these classes has  $2^{D-1}$  elements.

We note  $B'(2, D)$  the digraph whose vertex set is  $A'(2, D)$  and whose arcs are the couples of classes  $(C, C')$  such that there exist  $a \in C$  and  $a' \in C'$  with  $(a, a') \in \mathcal{A}(B(2, D))$ .

Now, we state :

**Proposition 2.1**  *$B'(2, D)$  is a De Bruijn digraph isomorphic to  $B(2, D - 1)$ .*

**Proof.** It is easy to prove that if  $C$  is a class of  $A'(2, D)$ , for elements  $x = (x_1, \dots, x_D)$  and  $y = (y_1, \dots, y_D)$  of  $C$  we have  $(x_2 - x_1, \dots, x_D - x_{D-1}) = (y_2 - y_1, \dots, y_D - y_{D-1})$ .

Then we can define the map  $f_D$  from  $A'(2, D)$  into  $\mathbb{Z}_2^{D-1}$  by :

$f_D(C) = (x_2 - x_1, \dots, x_D - x_{D-1})$  where  $x$  is some element of  $C$ .

It is not difficult to prove that  $f_D$  realizes an isomorphism from  $B'(2, D)$  into  $B(2, D - 1)$  and so the assertion is proved. ■

We note  $U'(2, D)$  the underlying graph of  $B'(2, D)$ . Of course  $U'(2, D)$  is a De Bruijn graph isomorphic to  $UB(2, D - 1)$ .

These results were already proved by the author in [5] in a more general context.

A vertex  $x$  of  $UB(2, D - 1)$  can be identified with the class  $f_D^{-1}(x)$  of  $UB'(2, D)$ .

So, the vertices  $0_{D-1}$ ,  $1_{D-1}$ ,  $A_{D-1}$  and  $\bar{A}_{D-1}$  of  $UB(2, D - 1)$  are respectively the classes  $\{0_D, 1_D\}$ ,  $\{A_D, \bar{A}_D\}$ ,  $\{U_D, \bar{U}_D\}$  and  $\{V_D, \bar{V}_D\}$  in  $UB'(2, D)$ .

For  $D \geq 2$ , since  $x \rightarrow \bar{x}$  is an automorphism of  $B(2, D)$ , an arc  $(C, C')$  of  $B'(2, D)$  provides two independent arcs of  $B(2, D)$  linking  $C$  to  $C'$ . Then it is clear that  $m$  independent arcs  $(C_1, C'_1), \dots, (C_m, C'_m)$  of  $B'(2, D)$  provide  $2m$  independent arcs of  $B(2, D)$  linking  $C_i$  to  $C'_i$  for  $1 \leq i \leq m$ . Clearly, this result is valid for the De Bruijn graph  $UB(2, D)$ .



### 3 Minimum broadcast time of a De Bruijn graph

For convenience, we note  $b(UB(2, D)) = b_D$ ,  $b(UB'(2, D)) = b_{D-1} = b'_D$ , for a vertex  $x$  of  $UB(2, D)$ , we note  $b_{UB(2, D)}(x) = b_D(x)$  and for a vertex  $C$  of  $UB'(2, D)$  we note  $b_{UB'(2, D)}(C) = b'_D(C)$ . We can state :

**Proposition 3.1** *For  $D \geq 2$ , we have  $b_D(A_D) \leq b_{D-1}(0_{D-1}) + 1$*

**Proof.** It is easy to see that  $b_{D-1}(0_{D-1}) = b_{D-1}(1_{D-1}) = b'_D(C(A_D))$

Let us note  $b'_D(C(A_D)) = r$ .

There exists a sequence  $S_0, \dots, S_r$  of  $r+1$  subsets of  $A'(2, D)$  with  $S_0 = C(A_D)$ ,  $S_r = A'(2, D)$ ,  $S_i \subset S_{i+1}$  for any  $i \in \{0, \dots, r-1\}$ , and such that for each  $i \in \{0, \dots, r-1\}$  there exists a set  $E_i$  of  $|S_{i+1}| - |S_i|$  independent edges between  $S_i$  and  $S_{i+1} \setminus S_i$ .

Let  $S'_0, \dots, S'_{r+1}$  be the sequence of  $r+2$  subsets of  $\mathbb{Z}_2^D$  defined as follows :

$$S'_0 = \{A_D\}, S'_i = \bigcup_{C \in S_{i-1}} C, \text{ for } 1 \leq i \leq r+1.$$

Let us put  $E'_0 = \{A_D, \overline{A_D}\}$  and for  $1 \leq i \leq r$  let  $E'_i$  be the set of the edges of  $UB(2, D)$  induced by the edges of  $E'_{i-1}$ .

It is easy to see that  $S'_{r+1} = \mathbb{Z}_2^D$ ,  $S'_i \subset S'_{i+1}$  for any  $i \in \{0, \dots, r\}$  and that for  $i \in \{0, \dots, r\}$ ,  $E'_i$  is a set of  $|S'_{i+1}| - |S'_i|$  independent edges between  $S'_i$  and  $S'_{i+1} \setminus S'_i$ .

So, we have provided a broadcast from  $A_D$  using  $r+1$  steps. Consequently  $b_D(A_D) \leq r+1$  that is  $b_D(A_D) \leq b_{D-1}(0_{D-1}) + 1$ . ■

An immediate consequence is :

**Proposition 3.2** *For  $D \geq 2$ , we have  $b_{min}(UB(2, D)) \leq b(UB(2, D-1)) + 1$*

**Proof.** We have  $b_{min}(UB(2, D)) \leq b_D(A_D)$  and  $b_{D-1}(0_{D-1}) \leq b(UB(2, D-1))$  and then Proposition 3.1 implies this assertion. ■

We remark that in the broadcast from  $A_D$  of the proof of Proposition 3.1, at the first step,  $A_D$  transmits its message to  $\bar{A}_D$ . Now, we can state

**Proposition 3.3** *For  $D \geq 3$ , we have  $b_D(U_D) \leq b_{D-2}(0_{D-2}) + 2$*

**Proof.** Let us note  $b_{D-2}(0_{D-2}) = r$

By the proof of Proposition 3.1, we can define in  $UB(2, D-1)$  a broadcast from  $A_{D-1}$  using  $r+1$  steps such that at the first step,  $A_{D-1}$  transmits its message to  $\bar{A}_{D-1}$ . That means that we can define in  $UB'(2, D)$  a broadcast from the class  $C(U_D)$  using  $r+1$  steps and such that at the first step,  $C(U_D)$  transmits its message to the class  $C(V_D)$ .

Then, there exists a sequence  $S_0, \dots, S_{r+1}$  of  $r+2$  subsets of  $A'(2, D)$  with  $S_0 = C(U_D)$ ,  $S_1 = \{C(U_D), C(V_D)\}$ ,  $S_{r+1} = A'(2, D)$ ,  $S_i \subset S_{i+1}$  for any  $i \in \{0, \dots, r\}$ , and such that for each  $i \in \{0, \dots, r\}$  there exists a set  $E_i$  of  $|S_{i+1}| - |S_i|$  independent edges between  $S_i$  and  $S_{i+1} \setminus S_i$ .

Now, let  $S'_0, \dots, S'_{r+2}$  be the sequence of  $r+3$  subsets of  $\mathbb{Z}_2^D$  defined as follows :

$$S'_0 = \{U_D\}, S'_1 = \{U_D, V_D\}, S'_i = \bigcup_{C \in S_{i-1}} C, \text{ for } 2 \leq i \leq r+2.$$

Let us put  $E'_0 = \{U_D V_D\}$ ,  $E'_1 = \{U_D \bar{V}_D, V_D \bar{U}_D\}$  and for  $2 \leq i \leq r+1$  let  $E'_i$  be the set of the edges of  $UB(2, D)$  induced by the edges of  $E'_{i-1}$ .

It is easy to verify that all that provides in  $UB(2, D)$ , a broadcast from  $U_D$  running in  $r+2$  steps. Consequently  $b_D(U_D) \leq r+2$  that is  $b_D(U_D) \leq b_{D-2}(0_{D-2}) + 1$ . ■

This proposition implies :

**Proposition 3.4** *For  $D \geq 3$ , we have  $b_{\min}(UB(2, D)) \leq b(UB(2, D-2)) + 2$*

**Proof.** This is immediate.

The reasoning of the proof of Proposition 3.1 applies for a De Bruijn digraph  $B(2, D)$ . So we have  $b_{B(2,D)}(A_D) \leq b_{B(2,D-1)}(0_{D-1})$  and  $b_{\min}(B(2, D)) \leq b(B(2, D-1)) + 1$ .

On the other hand the proof of Proposition 3.3 does not apply for  $B(2, D)$  (because  $(U_D, \bar{V}_D)$  is not an arc of  $B(2, D)$ ).

We have seen that for infinitely many values of  $D$ , we have  $b_D > b_{D-1} + 1$  and then Proposition 3.1 implies that for these values of  $D$ , we have  $b_D(A_D) < b_D$ . From the result of [4] it is easy to prove that for infinitely many values of  $D$ , we have  $b_D > b_{D-2} + 2$  and then Proposition 3.3 implies that for these values of  $D$ , we have  $b_D(U_D) < b_D$ .

## References

- [1] P. Fraignaud, E. Lazard, Methods and problems of communication in usual networks, *Discrete Appl. Math.*, 53 (1994), pp. 79-133.
- [2] S.M Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A. Liestman, A survey of gossiping and broadcasting in communication networks, *Networks*, 18 (1988), pp. 319-349.
- [3] J. Hromkovic, R. Klasing, B. Monien, R. Peine, Dissemination of information in interconnection networks (broadcasting and gossiping), in *Combinatorial Network Theory*, D.Z. Du, D.F. Hsu (Eds.), Kluwer Academic Publ. (1996.)
- [4] R. Klasing, B. Monien, R. Peine, E.A. Stöhr, Broadcasting in butterfly and de Bruijn networks, *Discrete Appl. Math.* 53 (1994) No 1-3, 183-197.
- [5] N. Lichiardopol, Nombre de stabilité d'un graphe orienté de de Bruijn, submitted to *Discrete Math.*, 2003.



## **CHAPITRE 6**

# **NOMBRE DE STABILITE D'UN GRAPHE DE DE BRUIJN. GENERALISATION AUX ITERES DES GRAPHERS REPRESENTATIFS DES ARCS**



## Introduction

Ce long chapitre se compose de deux articles, le deuxième étant en partie la généralisation du premier.

**Dans le premier article**, soumis à « Discrete Mathematics », nous nous intéressons au nombre de stabilité  $\alpha(d, D)$  d'un graphe non orienté de de Bruijn  $UB(d, D)$ . Nous nous intéressons aussi à ce que nous appellerons le **pseudo nombre de stabilité  $\alpha^\bullet(d, D)$  de  $UB(d, D)$ , c'est-à-dire au cardinal du plus grand stable n'ayant pas de sommets à boucles.**

Préalablement, nous définissons à partir de  $B(d, D)$  trois graphes quotient isomorphes à  $B(d, D-1)$ . Ce sont ces constructions, originales, qui nous ont permis de déterminer la valeur exacte du T.M.E.T. du graphe  $B(d, D)$  (chapitre 3), d'obtenir des résultats sur le temps minimum de diffusion du graphe binaire  $UB(2, D)$  (chapitre 5) et surtout de prouver les conjectures du septième chapitre. Toujours à partir de ces constructions, d'autres pistes comme l'étude des cycles hamiltoniens, recherche de couplages, diffusion, sont possibles.

Toujours en vue d'une utilisation ultérieure, nous caractérisons les homomorphismes d'un graphe  $B(d, D)$  dans un graphe  $B(d', D)$ . Nous pensons que cette caractérisation pourrait avoir d'autres applications, mais nous n'avons pas eu le temps d'approfondir.

Nous considérons après, pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 2$ , l'application  $\Psi_{d, D}$  de  $\mathbb{Z}_d^D$  dans  $\mathbb{Z}_d^D$  définie par  $\Psi_{d, D}(x_1 \dots x_D) = x_2 \dots x_D x_1$ . Pour un élément  $x$  de  $\mathbb{Z}_d^D$  nous notons  $\mathcal{C}(x)$  le circuit élémentaire  $x, \Psi_{d, D}^1(x), \dots, \Psi_{d, D}^m(x)$  du graphe  $B(d, D)$  où  $m$  est le plus petit des naturels non nuls  $n$  tels que  $\Psi_{d, D}^n(x) = x$ .

On note  $C_{d, D}$  l'ensemble des circuits ainsi définis et distincts des classes  $\mathcal{C}(i_{d, D}) = \{i_{d, D}\}$  où  $i_{d, D} = i \dots i$  pour  $i \in \mathbb{Z}_d$  (les sommets à boucle de  $B(d, D)$ ).

Clairement, les circuits de  $C_{d, D}$  forment une partition de l'ensemble des sommets à boucles de  $B(d, D)$ . On note  $c_{d, D}$  le cardinal de  $C_{d, D}$ . Nous notons  $C_{d, D, 0}$  l'ensemble des circuits de  $C_{d, D}$  d'ordre pair et  $C_{d, D, 1}$  l'ensemble des circuits de  $C_{d, D}$  d'ordre impair. Nous notons  $c_{d, D, 0}$  et  $c_{d, D, 1}$  les cardinaux respectifs de ces deux ensembles.

Il y a eu plusieurs travaux sur ces circuits (Voir par exemple [5] et [6]).

En nous servant de ces circuits nous montrons que pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 4$ ,  $D$  pair, on a

$$\alpha(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d, D, 1}}{2} \text{ et que } \alpha(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d, D}}{2} + 1 \text{ pour } d \geq 2, D \geq 3, D \text{ impair.}$$

Nous donnons ensuite un théorème, qui pour  $D$  premier  $\geq 3$ , établit un lien entre les nombres de stabilité des graphes  $UB(2, D)$  et  $UB(d, D)$ , pour  $d \geq 2$ . Plus précisément nous prouvons

$$\text{que si } \alpha(2, D) = \frac{(D-1)(2^D - 2)}{2D} + 1 \text{ et s'il existe un stable de } UB(2, D) \text{ dont le cardinal est}$$

$$\frac{(D-1)(2^D - 2)}{2D} + 1 \text{ et contenant un seul sommet à boucle, alors pour tout } d \geq 2 \text{ on a}$$

$$\alpha(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1, \quad \alpha^\bullet(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} \text{ et il existe un stable de}$$

$$UB(d, D) \text{ de cardinal } \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1 \text{ ayant un seul sommet à boucle. Nous verrons}$$

que le théorème s'applique pour  $D \in \{3, 5, 7\}$ , ce qui nous permet de donner les valeurs exactes des nombres de stabilité des graphes  $UB(d,3)$ ,  $UB(d,5)$  et  $UB(d,7)$ . Ces résultats nous poussent à conjecturer que pour  $d \geq 2$  et  $D$  premier  $\geq 3$ , on a  $\alpha(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1$  et  $\alpha^*(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D}$ .

Nous établissons par la suite, la valeur exacte du nombre de stabilité d'un graphe de de Bruijn de diamètre 2, plus précisément on prouve que  $\alpha(2, 2) = 2$ ,  $\alpha(3, 2) = 3$ ,  $\alpha(d, 2) = \frac{d^2}{4}$  pour  $d$  pair  $\geq 4$  et enfin que  $\alpha(d, 2) = \frac{d^2 - 1}{4}$  pour  $d$  impair  $\geq 5$ .

Nous démontrons ensuite que pour  $d \geq 2, D \geq 3$ , on a  $\alpha^*(d, D) \geq d\alpha^*(d, D-1)$  et  $\alpha(d, D) \geq d\alpha(d, D-1) - d$ . Dans le cas où  $d = 2$  nous améliorons, en prouvant que pour  $D \geq 2$ , on a  $\alpha(2, D) \geq 2\alpha(2, D-1) - 1$ . En utilisant ce genre d'inégalités, nous déterminons les nombres de stabilité des graphes de de Bruijn  $UB(2, D)$ , pour  $D \leq 7$ .

En considérant  $UB(2, D)$  en tant que graphe dont l'ensemble des sommets est  $\{0, 1\}^D$  (ce qui revient à considérer 0 et 1 en tant qu'éléments de  $\mathbb{Z}$  et non de  $\mathbb{Z}_d$ ), nous définissons l'application  $\Phi_D$  de  $\{0, 1\}^D$  dans  $\mathbb{Z}$  par  $\Phi_D(x_1 \dots x_D) = \sum_{i=1}^D (-1)^{i+1} x_i$ . A l'aide de plusieurs résultats intermédiaires portant sur cette application, nous prouvons que pour  $m \geq 4$ , on a  $\alpha^*(2, 2m) \geq 2^{2m-1} - \frac{C_{2m}^m}{2} + C_{2m-2}^{m-2}$  et  $\alpha^*(2, 2m+1) \geq 2^{2m} - C_{2m}^m + 2C_{2m-2}^{m-2}$ . Cela nous donne des bornes inférieures du nombre de stabilité qui améliorent celles de Y. Kikuchi et Y. Shibata données dans [14].

Cela nous permet de prouver que  $\lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(2, D)}{2^D} = \frac{1}{2}$ , ce qui veut dire que la proportion du nombre de sommets d'un plus grand stable de  $UB(2, D)$  tend asymptotiquement vers  $\frac{1}{2}$ . Les exemples utilisés pour la preuve, invalident une conjecture de R.D. Bryant et H. Fredericksen (voir [4]) affirmant qu'asymptotiquement, la taille de la plus grande partie de  $B(2, D)$ , stable et dominante à la fois (cover set), est égale au  $\frac{4}{9}$  du nombre total de sommets.

Nous généralisons ensuite, en prouvant que pour  $d$  pair  $\geq 2$ , on a  $\lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(d, D)}{d^D} = \frac{1}{2}$ . Ca sera là, à notre avis, le principal résultat de l'article.

**Le deuxième article** a fait l'objet d'un exposé à la 19-ème « British Combinatorial Conference » et doit être révisé pour publication pour un numéro spécial de « Discrete Mathematics »

**Rappelons que le graphe représentatif des arcs (line digraph) d'un graphe orienté  $G$  est le graphe orienté  $L(G)$  dont les sommets sont les arcs de  $G$  et dont les arcs sont les couples  $((x, y), (y, z))$  où  $(x, y)$  et  $(y, z)$  sont des arcs de  $G$ . Le  $m$ -ième graphe représentatif des arcs itéré, est le graphe orienté défini par  $L^1(G) = L(G)$  et par la relation de récurrence  $L^m(G) = L(L^{m-1}(G))$ .**



**Un stable dans un graphe orienté sera pour nous une partie de  $V(G)$  telle que deux sommets distincts de cette partie ne soient pas adjacents.**

Nous prouvons que si  $G$  est un graphe orienté régulier de degré au moins 2 (sans arcs multiples), la proportion du nombre de sommets d'un plus grand stable de  $L^m(G)$  tend vers  $\frac{1}{2}$  quand  $m$  tend vers  $+\infty$  (on remarquera que cela implique que le dernier résultat de l'article précédent est valable en fait pour tout  $d$ ). Pour cela nous passons par trois résultats déterminants :

Le premier résultat affirme que si  $G$  est un graphe représentatif des arcs régulier de degré  $d \geq 2$ , on a  $\alpha(G) \leq \frac{v(G)}{2}$ .

Le deuxième résultat affirme que si  $H$  est un graphe représentatif des arcs, régulier de degré  $d \geq 2$ , pour un entier  $r$  tel que  $0 \leq r \leq d$ , il existe une application  $f$  de  $V(H)$  dans  $\{0, 1\}$  telle que pour chaque sommet  $x$ , exactement  $r$  successeurs de  $x$  aient 1 comme image par  $f$ . Nous justifions cela en utilisant le fait que deux sommets quelconques d'un graphe représentatif des arcs, ou bien ont exactement les mêmes successeurs ou bien n'ont aucun successeur en commun.

Le troisième résultat affirme que pour  $0 < x < 1$ , on a :  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m (C_m^n)^2 x^{2n} (1-x)^{2m-2n} = 0$ .



# Nombre de stabilité d'un graphe non orienté de de Bruijn

Nicolas Lichiardopol\*

13S, ESSI, 930, Route des collles, BP 145, 06903 Sophia Antipolis, France

---

## Abstract

In this paper, we give several exact values of the stability number of an undirected de Bruijn graph  $UB(d, D)$  and in the other cases, we establish pertinent lower and upper bound of this parameter. We show that asymptotically, if  $d$  is even, the proportion of the number of vertices of a greatest independent set of  $UB(d, D)$  is  $\frac{1}{2}$ .

## Résumé

Dans cet article, nous donnons plusieurs valeurs exactes du nombre de stabilité d'un graphe de de Bruijn non orienté  $UB(d, D)$  et dans les autres cas, nous établissons des bornes inférieures et supérieures pertinentes sur ce paramètre. Nous montrons qu'asymptotiquement, pour  $d$  pair, la proportion du nombre de sommets d'un plus grand stable de  $UB(d, D)$  est  $\frac{1}{2}$ .

*Keywords* : De Bruijn's graph, stability number, independent set

---

## 1. Introduction, notations

Dans cet article, nous nous intéressons au nombre de stabilité d'un graphe de de Bruijn non orienté  $UB(d, D)$ , notion très peu étudiée à ce jour.

Nous travaillons aussi avec ce que nous appelons le pseudo-nombre de stabilité, c'est à dire le cardinal du plus grand stable n'ayant pas de sommets à boucles.

Dans les deux premières sections nous donnons des résultats préliminaires.

Dans la section 2, à partir du graphe orienté de de Bruijn  $B(d, D)$ ,  $D \geq 2$ , nous construisons de trois façons des graphes orientés isomorphes à  $B(d, D - 1)$ . La théorie sous-jacente (certains homomorphismes surjectifs de  $B(d, D)$  dans  $B(d, D - 1)$ ) n'est pas nouvelle (voir [1] et [4]), mais les constructions en elles même, nous paraissent originales).

---

\* E-mail address : lichiar@club-internet.fr

Dans la section 3, nous caractérisons les homomorphismes d'un graphe de de Bruijn  $B(d, D)$  dans un graphe de de Bruijn  $B(d', D)$ .

En prenant  $d = d'$ , on peut retrouver la caractérisation déjà connue (voir [4]) des automorphismes de  $B(d, D)$ . Toutefois, nous pensons que le résultat général est lui, inédit.

En partant d'un homomorphisme surjectif de  $B(d, D)$  dans  $B(d', D)$ , nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble  $A$  de sommets de  $UB(d', D)$  soit un stable.

Dans la section 4, en travaillant sur certains circuits, on détermine une borne supérieure du nombre de stabilité  $\alpha(d, D)$  de  $UB(d, D)$ .

On verra que sous certaines conditions portant sur  $D$ , on peut établir un lien entre les nombres de stabilité de  $UB(2, D)$  et  $UB(d, D)$ , pour  $d \geq 2$ . Cela nous permettra de donner dans la section suivante les valeurs exactes des nombres de stabilité des graphes non orientés de de Bruijn de diamètres 3, 5 et 7.

Dans la section 5, nous donnons d'abord la valeur exacte du nombre de stabilité d'un graphe de de Bruijn non orienté de diamètre 2. Puis, en utilisant les résultats de la deuxième section, nous déterminons une minoration du pseudo-nombre de stabilité  $\alpha^*(d, D)$  de  $UB(d, D)$  à partir du pseudo-nombre de stabilité de  $UB(d, D - 1)$ . Nous donnons aussi une minoration de  $\alpha(2, D)$  à partir de  $\alpha(2, D - 1)$ . Tout cela, combiné avec les résultats de la section 4, nous permet de donner les nombres de stabilité des graphes  $UB(2, D)$ , pour  $D$  allant de 1 à 7.

Dans la dernière section, en utilisant les résultats de la section 3, nous déterminons pour  $d$  pair, une minoration de  $\alpha^*(d, D)$  à partir de  $\alpha^*(2, D)$ . Une minoration, moins précise, sera donnée aussi pour  $d$  impair.

Enfin, nous établissons une borne inférieure du pseudo-nombre de stabilité de  $UB(d, D)$ , une borne améliorant celles déjà connues.

On montrera aussi que pour  $d$  pair fixé, la proportion du nombre de sommets d'un plus grand stable de  $UB(d, D)$  tend asymptotiquement vers  $\frac{1}{2}$ . Ca sera là, le principal résultat de notre

article. La preuve donnée pour  $d = 2$  permet de réfuter une conjecture de R.D Bryant et H. Fredricksen (voir [2]) affirmant qu'asymptotiquement, la taille de la plus grande partie de  $B(2, D)$ , stable et dominante à la fois (cover set) est égale au  $\frac{4}{9}$  du nombre total des sommets.

Nous allons maintenant expliciter les notions et les notations utilisées par la suite. Nous donnons sans démonstration quelques résultats qu'on utilisera.

Pour un graphe  $G$ , orienté ou non, on note  $V(G)$  l'ensemble de ses sommets et  $v(G)$  le nombre de ses sommets (son ordre).

Nous considérons maintenant un 1-graphe orienté  $G$ , c'est à dire un graphe orienté tel que pour deux sommets  $x$  et  $y$ , il existe au plus un arc allant de  $x$  à  $y$ .

- On note  $A(G)$  l'ensemble de ses arcs. On note  $(x, y)$  un arc allant de  $x$  à  $y$ .

- Pour un  $x \in V(G)$ , tout sommet  $y$  tel que  $(x, y)$  est un arc de  $G$  est appelé successeur de  $x$ . Tout élément  $y$  tel que  $(y, x)$  est un arc de  $G$  est appelé prédécesseur de  $x$ .

- Un sommet  $x$  tel que  $(x, x)$  est un arc de  $G$  est appelé sommet à boucle.

- On appelle chemin orienté de  $G$ , toute succession de sommets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  telle que pour  $1 \leq i \leq n - 1$   $(x_i, x_{i+1})$  est un arc de  $G$ . Le nombre  $n - 1$  de ces arcs est la longueur de ce chemin orienté.

On appelle circuit de  $G$ , tout chemin orienté  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  tel que  $x_1 = x_n$ .

Un chemin orienté (ou un circuit) qui n'utilise pas deux fois le même sommet, est appelé chemin orienté (ou circuit élémentaire).

$G$  est maintenant un graphe non orienté simple, c'est à dire sans arêtes multiples et sans boucle.

- Deux sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents, s'ils forment une arête. Une telle arête sera notée  $\{x, y\}$ .

- On appelle chemin de  $G$ , toute succession de sommets  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  telle que pour  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\{x_i, x_{i+1}\}$  est une arête de  $G$ .

On appelle cycle de  $G$ , tout chemin dont les extrémités coïncident. On définit comme précédemment les notions de longueur, de chemin et cycle élémentaires.

- Un stable de  $G$  (ou un ensemble indépendant) est une partie  $S$  de  $V(G)$  telle que deux éléments quelconque de  $S$  ne soient pas adjacents. Le nombre de stabilité  $\alpha(G)$  de  $G$  est le cardinal du plus grand stable de  $G$ .

Si  $G$  est un graphe, orienté ou non, et si  $A$  est une partie de  $V(G)$ , on appelle arc ou arête de  $A$ , tout arc ou arête reliant deux sommets de  $A$ .

Un homomorphisme d'un graphe orienté  $G$  dans un graphe orienté  $G'$  est une application  $f$  de  $V(G)$  dans  $V(G')$  telle que :  $(x, y) \in A(G) \Rightarrow (f(x), f(y)) \in A(G')$ .

Un isomorphisme de  $G$  dans  $G'$  est une application bijective  $f$  de  $V(G)$  dans  $V(G')$  telle que :  $(x, y) \in A(G) \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in A(G')$ . Si  $G$  et  $G'$  sont le même graphe, on parlera d'automorphisme.

Les définitions sont analogues si  $G$  et  $G'$  sont non orientés.

Pour un naturel  $d \geq 2$ ,  $\mathbb{Z}_d$  désigne l'ensemble des entiers modulo  $d$ . Un élément  $i \in \mathbb{Z}$  sera identifié à sa classe dans  $\mathbb{Z}_d$ . Pour  $D \geq 1$ , un élément  $(x_1, \dots, x_D)$  de  $\mathbb{Z}_d^D$  sera noté  $x_1 \dots x_D$ .

Pour  $1 \leq r \leq D$ ,  $p_r$  désigne la projection définie par  $p_r(x_1 \dots x_r \dots x_D) = x_r$ . L'élément  $x_r$  est aussi appelé la  $r$ -ième coordonnée de  $x_1 \dots x_r \dots x_D$ .

Pour  $x = x_1 \dots x_i \dots x_D$  de  $\mathbb{Z}_d^D$ , on posera  $\bar{x} = (1 - x_1) \dots (1 - x_i) \dots (1 - x_D)$  et pour une partie  $A$  de  $\mathbb{Z}_d^D$ , on posera  $\bar{A} = \{\bar{x}; x \in A\}$ .

Pour  $x = x_1 \dots x_D$  et  $y = y_1 \dots y_D$  dans  $\mathbb{Z}_d^D$ , on pose  $x + y = (x_1 + y_1) \dots (x_D + y_D)$ .

On rappelle, que pour  $d \geq 2$ , et  $D \geq 2$ , le graphe orienté de de Bruijn  $B(d, D)$  est le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de  $\mathbb{Z}_d^D$  et dont les arcs sont les couples  $(x_1 x_2 \dots x_D, y_1 \dots y_{D-1} y_D)$  tels que  $x_2 \dots x_D = y_1 \dots y_{D-1}$ . Pour  $D = 1$ ,  $B(d, 1)$  est le graphe orienté complet  $K_d^+$  (avec boucle pour chaque sommet) à sommets dans  $\mathbb{Z}_d$ .

Le graphe de de Bruijn non orienté  $UB(d, D)$  est le graphe non orienté sous-jacent au graphe orienté  $B(d, D)$ .

Les sommets à boucle de  $B(d, D)$  sont les sommets  $i_{d,D} = i \dots i$ , avec  $i \in \mathbb{Z}_d$ .

Pour  $D \geq 2$ , les sommets de  $B(d, D)$  distincts des  $i_{d,D}$  et qui ont un même successeur et prédécesseur sont les sommets  $(i, j)_{d,D} = x_1 x_2 \dots x_D$  avec  $i \neq j$ ,  $x_1 = i$ ,  $x_2 = j$  et  $x_{m+2} = x_m$  pour  $1 \leq m \leq D - 2$  et le seul successeur et prédécesseur en même temps d'un sommet  $(i, j)_{d,D}$  est  $(j, i)_{d,D}$ . Ce sont les seuls sommets de degré  $2d - 1$  de  $UB(d, D)$ .

Le graphe de de Bruijn  $B(d, D)$  est aussi le graphe dont l'ensemble de sommets est  $\mathbb{Z}_d^D$  et dont les arcs sont les couples  $(x, y)$  tels que  $y - dx \in \{0, \dots, d-1\}$  et  $UB(d, D)$  sera alors le graphe non orienté sous-jacent.

Comme on a pu se rendre compte,  $\alpha(UB(d, D))$  sera noté  $\alpha(d, D)$  et le pseudo-nombre de stabilité (que nous avons déjà défini), sera noté  $\alpha^*(d, D)$ .

Nous rappelons enfin les résultats suivants :

- Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , on a :  $\sum_{k=0}^m C_m^k C_m^k = C_{2m}^m$ ,  $\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k C_m^{k+1} = C_{2m}^{m-1}$  et  $\sum_{k=0}^m C_m^k C_{m+1}^k = C_{2m+1}^m$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{C_{2n+1}^n}{2^{2n+1}} = 0$ .

Le premier résultat se montre facilement par un raisonnement combinatoire.

Le deuxième résultat, est une application immédiate de la formule de Stirling dont on pourra trouver une preuve dans [3].

## 2. Graphes de de Bruijn de diamètre $D - 1$ définis comme graphes quotients de $B(d, D)$

Pour  $d \geq 2$  et  $D \geq 2$ , on considère le graphe de de Bruijn orienté  $B(d, D)$  dont les sommets sont les éléments de  $\mathbb{Z}_d^D$ .

$R_I$  est la relation définie sur  $\mathbb{Z}_d^D$  par :

$$x_1 x_2 \dots x_D R_I y_1 y_2 \dots y_D \Leftrightarrow x_2 \dots x_D = y_2 \dots y_D$$

Il est facile de voir que  $R_I$  est une relation d'équivalence et que la classe d'équivalence de  $x = x_1 x_2 \dots x_D$  est l'ensemble  $C_I(x) = \{0x_2 \dots x_D, \dots, (d-1)x_2 \dots x_D\}$ .

Puisque chaque classe comporte  $d$  éléments, on déduit que l'ensemble  $A_I(d, D)$  de ces classes comporte  $d^{D-1}$  éléments.

On définit maintenant le graphe orienté  $B_I(d, D)$  dont l'ensemble de sommets est  $A_I(d, D)$  et dont les arcs sont les couples de classes  $(C, C')$  tels qu'il existe des éléments  $a \in C$  et  $a' \in C'$  avec  $(a, a') \in A(B(d, D))$ .

Nous affirmons alors :

**Proposition 2.1.**  $B_I(d, D)$  est un graphe orienté de de Bruijn isomorphe à  $B(d, D - 1)$ .

**Démonstration.** Si  $D = 2$ , il est facile de prouver que  $B_I(d, 2)$  est le graphe orienté  $K_d^+$  tout comme  $B(d, 1)$  et donc  $B_I(d, 2)$  est bien isomorphe à  $B(d, 1)$

Supposons maintenant  $D \geq 3$

Considérons l'application  $g_I : \mathbb{Z}_d^{D-1} \rightarrow A_I(d, D)$ , définie par :

$$g_I(x_2 \dots x_D) = C_I(0x_2 \dots x_D)$$

Clairement  $g_I$  est injective et comme  $|\mathbb{Z}_d^{D-1}| = |A_I(d, D)|$ ,  $g_I$  est bijective.

Soient  $x = x_2 \dots x_D$  et  $y = y_2 \dots y_D$  des éléments de  $\mathbb{Z}_d^{D-1}$ .

Si  $(x, y)$  est un arc de  $B(d, D-1)$  on peut poser  $y = x_3 \dots x_D i$  où  $i \in \mathbb{Z}_d$ .

Alors  $(0 x_2 \dots x_D, x_2 \dots x_D i)$  est un arc de  $B(d, D)$  et puisque  $0 x_2 \dots x_D$  et  $x_2 \dots x_D i$  sont des représentants respectifs des classes  $g_1(x)$  et  $g_1(y)$ , le couple  $(g_1(x), g_1(y))$  est un arc de  $B_1(d, D)$ .

Réciproquement supposons que  $(g_1(x), g_1(y))$  est un arc de  $B_1(d, D)$ .

Il existe alors  $i$  et  $j$ , éléments de  $\mathbb{Z}_d$ , tels que le couple  $(i x_2 \dots x_D, j y_2 \dots y_D)$  soit un arc de  $B(d, D)$ . Alors on a  $x_3 \dots x_D = y_2 \dots y_{D-1}$ , ce qui prouve que  $(x, y)$  est un arc du graphe  $B(d, D-1)$ .

Par conséquent :  $(x, y) \in A(B(d, D-1)) \Leftrightarrow (g_1(x), g_1(y)) \in A(B_1(d, D))$ .

L'application  $g_1$  est donc un isomorphisme et l'assertion est prouvée.  $\square$

On remarque que si  $(C, C')$  est un arc de  $B_1(d, D)$ , il existe  $b \in C'$  tel que pour tout élément  $x \in C$  on ait  $(x, b) \in A(B(d, D))$ .

On note  $UB_1(d, D)$  le graphe non orienté simple sous-adjacent à  $B_1(d, D)$ .  $UB_1(d, D)$  est évidemment isomorphe à  $UB(d, D-1)$ .

Notons que les sommets de  $B_1(d, D)$  qui ont une boucle sont les classes  $C_1(i_{d,D})$  où  $i \in \mathbb{Z}_d$ , que à l'intérieur de  $C_1(i_{d,D})$ , les seuls arcs de  $B(d, D)$  sont les couples  $(j i \dots i, i \dots i)$ , avec  $i \in \mathbb{Z}_d$  (et donc  $C_1(i_{d,D}) \setminus \{i_{d,D}\}$  est un stable de  $UB(d, D)$ ) et que toute autre classe est un stable de  $UB(d, D)$ .

Soit maintenant  $R_2$ , la relation définie sur  $\mathbb{Z}_d^D$  par :

$$x_1 x_2 \dots x_D R_2 y_1 y_2 \dots y_D \Leftrightarrow x_1 \dots x_{D-1} = y_1 \dots y_{D-1}$$

$R_2$  est une relation d'équivalence et la classe d'équivalence d'un élément  $x = x_1 x_2 \dots x_D$  est  $C_2(x) = \{x_1 \dots x_{D-1} 0, \dots, x_1 \dots x_{D-1} (d-1)\}$ .

Comme précédemment chaque classe comporte  $d$  éléments et donc le cardinal de l'ensemble  $A_2(d, D)$  de ces classes est  $d^{D-1}$ .

On définit maintenant le graphe orienté  $B_2(d, D)$  dont l'ensemble de sommets est  $A_2(d, D)$  et dont les arcs sont les couples de classes  $(C, C')$  tels qu'il existe des éléments  $a \in C$  et  $a' \in C'$  avec  $(a, a') \in A(B(d, D))$ .

On démontre comme précédemment que  $B_2(d, D)$  est un graphe de de Bruijn orienté isomorphe à  $B(d, D-1)$ .

Cette fois-ci, si  $(C, C')$  est un arc de  $B_2(d, D)$ , il existe  $a \in C$  tel que pour tout  $y \in C'$  on ait  $(a, y) \in A(B(d, D))$ .

On note  $UB_2(d, D)$  le graphe non orienté simple sous-adjacent à  $B_2(d, D)$ .  $UB_2(d, D)$  est évidemment isomorphe à  $UB(d, D-1)$ .

On remarque ici aussi, que les sommets de  $B_2(d, D)$  qui ont une boucle sont en fait les classes  $C_2(i_{d,D})$  où  $i \in \mathbb{Z}_d$ , que à l'intérieur d'une classe  $C_2(i_{d,D})$ , les seuls arcs sont les couples  $(i \dots i, i \dots ij)$  (et donc  $C_2(i_{d,D}) \setminus \{i_{d,D}\}$  est un stable de  $UB(d, D)$ ) et que toute autre classe est un stable de  $UB(d, D)$ .

Soit enfin  $R_3$ , la relation définie sur  $\mathbb{Z}_d^D$  par :

$$x R_3 y \Leftrightarrow \exists i \in \{0, \dots, d-1\}, y = x + i_{d,D}.$$

$R_3$  est une relation d'équivalence et la classe d'un élément  $x$  est :

$$C_3(x) = \{x + i_{d,D} ; 0 \leq i \leq d-1\}$$

Clairement, chaque classe comporte  $d$  éléments et donc l'ensemble  $A_3(d, D)$  de ces classes comporte  $d^{D-1}$  éléments.

On note  $B_3(d, D)$ , le graphe orienté dont l'ensemble de sommets est  $A_3(d, D)$  et dont les arcs sont les couples de classes  $(C, C')$  tels qu'il existe des éléments  $a \in C$  et  $a' \in C'$  avec  $(a, a') \in A(B(d, D))$ . Nous pouvons affirmer :

**Proposition 2.2.**  $B_3(d, D)$  est un graphe orienté de de Bruijn isomorphe à  $B(d, D-1)$ .

**Démonstration.** Si  $D = 2$ , il est facile de prouver que  $B_3(d, 2)$  est le graphe orienté  $K_d^+$  tout comme  $B(d, 1)$  et donc  $B_3(d, 2)$  est bien isomorphe à  $B(d, 1)$ .

Etudions maintenant le cas  $D \geq 3$

Il est facile de voir que si  $C$  est une classe de  $A_3(d, D)$ , pour tous éléments  $x = x_1 \dots x_D$  et  $y = y_1 \dots y_D$  de  $C$ , on a  $(x_2 - x_1) \dots (x_D - x_{D-1}) = (y_2 - y_1) \dots (y_D - y_{D-1})$ .

On peut alors définir l'application  $g_3$  de  $A_3(d, D)$  dans  $\mathbb{Z}_d^{D-1}$  par :

$g_3(C) = (x_2 - x_1) \dots (x_D - x_{D-1})$ , où  $x = x_1 \dots x_D$  est un représentant quelconque de  $C$ .

Pour  $z = z_1 \dots z_{D-1}$  dans  $\mathbb{Z}_d^{D-1}$ , en posant  $x = 0 z_1 (z_1 + z_2) \dots (z_1 + z_2 + \dots + z_{D-1})$ , il est facile de voir que  $z = g_3(C_3(x))$ . L'application  $g_3$  est donc surjective et comme les ensembles de départ et d'arrivée ont le même cardinal,  $g_3$  est donc bijective.

Soient  $C$  et  $C'$  deux sommets de  $B_3(d, D)$ .

Supposons que  $(C, C')$  est un arc de  $B_3(d, D)$ . Alors il existe  $x = x_1 \dots x_D$ , élément de  $C$  et  $y = y_1 \dots y_D$ , élément de  $C'$  tels qu'on ait  $(x, y) \in A(B(d, D))$ , ce qui veut dire en fait  $x_2 \dots x_D = y_1 \dots y_{D-1}$ . On déduit alors  $y_i - y_{i-1} = x_{i+1} - x_i$  pour  $2 \leq i \leq D-1$ .

Par conséquent, le couple  $((x_2 - x_1) \dots (x_D - x_{D-1}), (y_2 - y_1) \dots (y_D - y_{D-1}))$  est un arc de  $B(d, D-1)$ , soit  $(g_3(C), g_3(C')) \in A(B(d, D-1))$ .

Réciproquement supposons que  $(g_3(C), g_3(C')) \in A(B(d, D-1))$ .

Alors si  $x = x_1 \dots x_D$  et  $y = y_1 \dots y_D$  sont des représentants respectifs de  $C$  et de  $C'$ , le couple  $((x_2 - x_1) \dots (x_D - x_{D-1}), (y_2 - y_1) \dots (y_D - y_{D-1}))$  est un arc de  $B(d, D-1)$ , ce qui veut dire :  $y_2 - y_1 = x_3 - x_2, \dots, y_{D-1} - y_{D-2} = x_D - x_{D-1}$ . Cela implique :

$x_2 - y_1 = x_3 - y_2 = \dots = x_D - y_{D-1}$  et en posant  $x_2 - y_1 = i$ , on déduit :

$$y_1 + i = x_2, \dots, y_{D-1} + i = x_D.$$

$(x, y + i_{d,D})$  est donc un arc de  $B(d, D)$  et comme  $x$  et  $y + i_{d,D}$  sont des représentants respectifs de  $C$  et  $C'$ , le couple  $(C, C')$  est un arc de  $B_3(d, D)$ .

L'application  $g_3$  est donc est un isomorphisme et ainsi l'assertion est prouvée.  $\square$

Si  $(C, C')$  est un arc de  $B_3(d, D)$  il existe des éléments  $a \in C$  et  $a' \in C'$  tels que  $(a, a')$  est un arc de  $B(d, D)$  et alors pour tout  $i \in \mathbb{Z}_d$ , le couple  $(a + i_{d,D}, a' + i_{d,D})$  est un arc de  $B_3(d, D)$ , autrement dit il y a  $d$  arcs indépendants reliant un élément de  $C$  à un élément de  $C'$ .

On note  $UB_3(d, D)$  le graphe non orienté simple sous-jacent à  $B_3(d, D)$ .  $UB_3(d, D)$  est évidemment un graphe de de Bruijn non orienté, isomorphe à  $UB(d, D-1)$ .

Les sommets de  $B_3(d, D)$  qui admettent une boucle sont les classes distinctes des  $d$  éléments  $0 \dots 0, 0 1 \dots (D-1), \dots, 0 (d-1) \dots (D-1) \times (d-1)$ .

Il est facile de voir que les seules classes non stables dans  $UB(d, D)$  sont les  $d-1$  classes des éléments  $0 1 \dots (D-1), \dots, 0 (d-1) \dots (D-1) \times (d-1)$ . La structure des liens à l'intérieur de



ces classes est assez complexe, elle dépend de  $d$  (on peut prouver par exemple que si  $d$  est premier, toutes ces classes sont des circuits de longueur  $d$ ). Toutes les autres classes sont des stables de  $UB(d, D)$ .

### 3. Homomorphismes de $B(d, D)$ dans $B(d', D)$

Dans ce qui suit  $d, d'$  et  $D$  désignent des entiers avec  $d \geq 2, d' \geq 2$  et  $D \geq 1$ .

Pour une application  $g$  de  $\mathbb{Z}_d$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}$ , on définit l'application  $f_g$  de  $\mathbb{Z}_d^D$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}^D$  par :  
 $f_g(x_1 \dots x_D) = g(x_1) \dots g(x_D)$ .

Il est facile de prouver qu'on a :  $f_g = f_h \Leftrightarrow g = h$ .

Il est facile aussi de voir que  $f_g$  est injective si et seulement si  $g$  est injective (alors  $d \leq d'$ ) et que  $f_g$  est surjective si et seulement si  $g$  est surjective (alors  $d \geq d'$ ).

Clairement, pour  $y = y_1 \dots y_D$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}^D$ , on a  $|f_g^{-1}(y)| = |g^{-1}(y_1)| \times \dots \times |g^{-1}(y_D)|$ .

Ainsi, si  $d'$  est un diviseur de  $d$  et si  $|g^{-1}(0)| = \dots = |g^{-1}(d' - 1)| = \frac{d}{d'}$ , alors pour tout

élément  $y \in \mathbb{Z}_{d'}^D$ , on a  $|f_g^{-1}(y)| = \left(\frac{d}{d'}\right)^D$ .

Le résultat essentiel est :

**Proposition 3.1.** Pour une application  $g$  de  $\mathbb{Z}_d$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}$ ,  $f_g$  est un homomorphisme de  $B(d, D)$  dans  $B(d', D)$ .

**Démonstration :** Puisque l'assertion est claire pour  $D = 1$ , on suppose  $D \geq 2$ .

Soit  $(x, y)$  un arc de  $B(d, D)$ , avec  $x = x_1 \dots x_D$  et  $y = y_1 \dots y_D$ . On a alors :

$x_2 \dots x_D = y_1 \dots y_{D-1}$ , d'où  $g(x_2) \dots g(x_D) = g(y_1) \dots g(y_{D-1})$ . Le couple  $(f_g(x), f_g(y))$  est donc un arc de  $B(d', D)$  et l'assertion est prouvée.  $\square$

On a aussi :

**Proposition 3.2.** Pour tout homomorphisme  $\theta$  de  $B(d, D)$  dans  $B(d', D)$ , il existe une application  $g$  de  $\mathbb{Z}_d$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}$ , telle que  $\theta = f_g$

**Démonstration :** Pour chaque élément  $i \in \mathbb{Z}_d$ , on a  $(i_{d,D}, i_{d,D}) \in A(B(d, D))$  ce qui entraîne  $(\theta(i_{d,D}), \theta(i_{d,D})) \in A(B(d', D))$ .

Il existe par conséquent  $j \in \mathbb{Z}_{d'}$  tel que  $\theta(i_{d,D}) = j_{d',D}$ . En posant  $j = g(i)$ , on définit ainsi une application de  $\mathbb{Z}_d$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}$  et pour tout  $i \in \mathbb{Z}_d$  on a  $\theta(i \dots i) = g(i) \dots g(i)$ .

Nous allons prouver par récurrence que pour tout entier  $r \in \{1, \dots, D\}$  et pour tout élément  $x = x_1 \dots x_D$  on a  $p_r(\theta(x)) = g(x_r)$ .

L'assertion est vraie pour  $r = 1$ .

En effet, pour  $x = x_1 \dots x_D$ , il existe un chemin orienté de longueur  $D - 1$  allant de  $x_1 \dots x_1$  à  $x$ . En prenant les images par  $\theta$  des sommets de ce chemin, on obtient un chemin orienté de longueur  $D - 1$  allant du sommet  $g(x_1) \dots g(x_1)$  au sommet  $\theta(x)$ . Cela implique alors  $p_1(\theta(x)) = g(x_1)$  et l'assertion est bien vraie pour  $r = 1$ .

Supposons qu'elle soit vraie pour  $r - 1$ ,  $2 \leq r \leq D$ . Pour un sommet  $x = x_1 \dots x_r \dots x_D$ , le couple  $(x_1 \dots x_r \dots x_D, x_2 \dots x_r \dots x_D \ 0)$  est un arc de  $B(d, D)$ , ce qui implique que le couple  $(\theta(x_1 \dots x_r \dots x_D), \theta(x_2 \dots x_r \dots x_D \ 0))$  est un arc de  $B(d', D)$ . On a alors :

$$p_{r-1}(\theta(x_2 \dots x_r \dots x_D \ 0)) = p_r(\theta(x)).$$

Or par hypothèse de récurrence, on a  $p_{r-1}(\theta(x_2 \dots x_r \dots x_D \ 0)) = g(x_r)$ . On déduit alors  $p_r(\theta(x)) = g(x_r)$  et l'assertion est prouvée pour  $r$ . Par conséquent, elle est vraie pour tout  $r \in \{1, \dots, D\}$ . Autrement dit, pour tout  $x = x_1 \dots x_D$  dans  $\mathbb{Z}_d^D$ , on a  $\theta(x) = g(x_1) \dots g(x_D)$  et donc  $\theta = f_g$  □

Les deux résultats qui précèdent impliquent que le nombre des homomorphismes de  $B(d, D)$  dans  $B(d', D)$  est le nombre des applications de  $\mathbb{Z}_d$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}$ , soit  $(d')^d$ . Ils impliquent aussi que pour  $d' \leq d$ , le nombre des homomorphismes surjectifs de  $B(d, D)$  dans  $B(d', D)$  est aussi le nombre des applications surjectives de  $\mathbb{Z}_d$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}$ , soit  $\sum_{m=0}^{d'-1} (-1)^m C_d^m (d'-m)^d$ .

Nous continuons avec :

**Proposition 3.3.** *Soit  $\theta$  un homomorphisme surjectif de  $B(d, D)$  dans  $B(d', D)$ , et  $(a, b)$  un arc de  $B(d', D)$ .*

*Pour chaque  $x \in \theta^{-1}(a)$ , il existe  $y \in \theta^{-1}(b)$  tel que  $(x, y)$  est un arc de  $B(d, D)$ .*

**Démonstration :** D'après la proposition 3.3, il existe une application surjective  $g$  de  $\mathbb{Z}_d$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}$ , telle que  $\theta = f_g$ .

Si  $a = a_1 \dots a_D$ , on peut écrire  $b = a_2 \dots a_D \alpha$ , où  $\alpha \in \mathbb{Z}_{d'}$ .

Pour  $x = x_1 \dots x_D$  dans  $\theta^{-1}(a)$ , on a  $g(x_m) = a_m$  pour  $1 \leq m \leq D$ .

Pour  $\beta \in g^{-1}(\alpha)$ , en prenant  $y = x_2 \dots x_D \beta$ , le couple  $(x, y)$  est un arc de  $B(d, D)$  et comme  $y \in \theta^{-1}(b)$ , l'assertion est prouvée. □

Une conséquence importante, qu'on utilisera par la suite est :

**Proposition 3.4.** *Soit  $\theta$  un homomorphisme surjectif de  $B(d, D)$  dans  $B(d', D)$  et  $S$  une partie de*

*Alors  $S$  est un stable de  $UB(d', D)$  si et seulement si les seuls arcs de  $\theta^{-1}(S)$  sont les arcs des ensembles  $\theta^{-1}(i_{d', D})$ ,  $i_{d', D} \in S$ .*

**Démonstration :** Supposons que  $S$  est un stable de  $UB(d', D)$ . Si  $(x, y)$  est un arc de  $\theta^{-1}(S)$ ,  $(\theta(x), \theta(y))$  est un arc de  $S$ . Mais  $S$  étant un stable il existe un  $i_{d', D} \in S$  tel qu'on ait  $\theta(x) = \theta(y) = i_{d', D}$ . Alors  $(x, y)$  est un arc de  $\theta^{-1}(i_{d', D})$  et donc les seuls éventuels arcs de  $\theta^{-1}(S)$ , sont bien ceux cités.

Réciproquement, supposons que les seuls arcs de l'ensemble  $\theta^{-1}(S)$  sont les arcs des ensembles  $\theta^{-1}(i_{d', D})$ ,  $i_{d', D} \in S$ . Si  $S$  n'était pas un stable  $UB(d', D)$ , il existerait alors un arc  $(x', y')$  de  $S$  avec  $x' \neq y'$ . D'après la Proposition 3.3, il existerait alors  $x \in \theta^{-1}(x')$  et

$y \in \theta^{-1}(y')$  tel que  $(x, y)$  soit un arc de  $UB(d, D)$ . Cela serait contradictoire avec l'hypothèse et par conséquent  $S$  est un stable de  $UB(d', D)$ .  $\square$

En particulier, une partie  $S$  de  $\mathbb{Z}_{d'}^D$  n'ayant pas de sommet à boucle, est un stable de  $UB(d', D)$  si et seulement si  $\theta^{-1}(S)$  est un stable de  $UB(d, D)$ .

Remarquons encore que pour un sommet à boucle  $i_{d', D}$ ,  $\theta^{-1}(i_{d', D})$  engendre un sous-graphe de  $B(d, D)$  isomorphe à  $B(|g^{-1}(i)|, D)$ , où  $g$  est la surjection de  $\mathbb{Z}_d$  dans  $\mathbb{Z}_{d'}$  telle que  $\theta = f_g$ .

#### 4. Approche du nombre de stabilité par les circuits. Bornes supérieures

Pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 2$ ,  $\Psi_{d, D}$  désigne l'application de  $\mathbb{Z}_d^D$  dans  $\mathbb{Z}_d^D$  définie par :

$$\Psi_{d, D}(x_1 \dots x_D) = x_2 \dots x_D x_1.$$

On a clairement les résultats suivants :

- Pour tout  $x \in \mathbb{Z}_d^D$ , on a  $\Psi_{d, D}^D(x) = x$  (et donc  $\Psi_{d, D}$  est bijective).
- Si  $\Psi_{d, D}^m(x) = x$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a  $\Psi_{d, D}^{mn}(x) = x$ .
- La relation  $R$  définie par :  $x R y \Leftrightarrow$  il existe  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $y = \Psi_{d, D}^m(x)$ , est une relation d'équivalence.
- La classe d'équivalence  $\mathcal{E}(x)$  d'un élément  $x$  de  $\mathbb{Z}_d^D$  est constituée des sommets du circuit élémentaire  $x, \Psi_{d, D}^1(x), \dots, \Psi_{d, D}^m(x)$  du graphe  $B(d, D)$  où  $m$  est le plus petit des naturels non nuls  $n$  tels que  $\Psi_{d, D}^n(x) = x$ . Pour tout  $i \in \mathbb{Z}_d$ , on a  $\mathcal{E}(i_{d, D}) = \{i_{d, D}\}$ .

On note  $C_{d, D}$  l'ensemble des circuits ainsi définis et distincts des classes  $\mathcal{E}(i_{d, D})$ ,  $i \in \mathbb{Z}_d$ . Les ensembles de sommets de ces circuits forment bien sur une partition de l'ensemble des sommets sans boucle de  $B(d, D)$ . On note  $c_{d, D}$  le cardinal de  $C_{d, D}$ .

On note  $C_{d, D, 0}$ , l'ensemble des circuits de  $C_{d, D}$  d'ordre pair et  $c_{d, D, 0}$ , le cardinal de  $C_{d, D, 0}$ . On note aussi  $C_{d, D, 1}$ , l'ensemble des circuits de  $C_{d, D}$  d'ordre impair et  $c_{d, D, 1}$  le cardinal de  $C_{d, D, 1}$ .

Nous pouvons affirmer :

**Proposition 4.1.** *Si  $m$  est l'ordre d'un circuit quelconque  $C$  de  $C_{d, D}$ , on a  $m \mid D$ .*

**Démonstration :** Pour un élément quelconque  $x$  de  $C$ ,  $m$  est le plus petit des naturels non nuls  $n$  tels que  $\Psi_{d, D}^n(x) = x$ .

Il existe des naturels  $a$  et  $r$ , avec  $0 \leq r \leq m - 1$ , tels que  $D = ma + r$ .

L'égalité  $\Psi_{d, D}^D(x) = x$  devient  $\Psi_{d, D}^r(\Psi_{d, D}^{ma}(x)) = x$ , soit  $\Psi_{d, D}^r(x) = x$  et vu la définition de  $m$ , on a  $r = 0$  et donc  $m \mid D$ .  $\square$

Cette proposition implique que si  $D$  est impair, on a  $C_{d, D, 0} = \emptyset$  (et donc  $c_{d, D, 1} = c_{d, D}$ ) et que si  $D$  est une puissance de 2, on a  $C_{d, D, 1} = \emptyset$  (et donc  $c_{d, D, 0} = c_{d, D}$ )

On peut maintenant donner une borne inférieure du pseudo-nombre de stabilité :

**Proposition 4.2.** Pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 2$ , on a :  $\alpha^*(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d,D,1}}{2}$ .

**Démonstration :** Soit  $S$  un stable sans sommets à boucle et de cardinal  $\alpha^*(d, D)$ .

Comme le nombre de stabilité d'un circuit  $C \in C_{d,D}$  est  $\left\lfloor \frac{v(C)}{2} \right\rfloor$ , au plus  $\left\lfloor \frac{v(C)}{2} \right\rfloor$  éléments de  $C$  peuvent appartenir à  $S$ . Ces circuits étant de plus sommet disjoints, on déduit :

$$|S| \leq \sum_{C \in C_{d,D}} \left\lfloor \frac{v(C)}{2} \right\rfloor, \text{ soit } \alpha^*(d, D) \leq \sum_{C \in C_{d,D}} \left\lfloor \frac{v(C)}{2} \right\rfloor.$$

Alors, en sachant que  $\sum_{C \in C_{d,D}} v(C) = d^D - d$ , que  $\left\lfloor \frac{v(C)}{2} \right\rfloor = \frac{v(C)}{2}$  pour  $C \in C_{d,D,0}$  et que

$$\left\lfloor \frac{v(C)}{2} \right\rfloor = \frac{v(C) - 1}{2} \text{ pour } C \in C_{d,D,1}, \text{ on obtient } \sum_{C \in C_{d,D}} \left\lfloor \frac{v(C)}{2} \right\rfloor = \frac{d^D - d - c_{d,D,1}}{2}, \text{ d'où le}$$

résultat.  $\square$

Nous soulignons le fait que si cette borne supérieure est atteinte, un stable  $S$  sans sommets à boucle et de cardinal  $\alpha^*(d, D)$ , contient pour tout circuit  $C \in C_{d,D}$ , exactement  $\left\lfloor \frac{v(C)}{2} \right\rfloor$  éléments de ce circuit.

On remarquera encore que si  $D$  est impair, puisque  $c_{d,D,1} = c_{d,D}$ , on a :

$\alpha^*(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d,D}}{2}$ . En fait, on peut donner dans ce cas une borne supérieure plus grossière, mais plus facile à calculer :

**Proposition 4.3.** Pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 3$ ,  $D$  impair on a :  $\alpha^*(d, D) \leq \frac{d^D - d - \left\lfloor \frac{d^D - d}{D} \right\rfloor}{2}$ .

**Démonstration :** On vient de voir que  $\alpha^*(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d,D}}{2}$ . Chaque circuit de  $C_{d,D}$ ,

étant au plus d'ordre  $D$ , on déduit  $D c_{d,D} \geq d^D - d$ , d'où  $c_{d,D} \geq \left\lfloor \frac{d^D - d}{D} \right\rfloor$ , ce qui implique

le résultat.  $\square$

Si  $D$  est premier, les propositions 4.2 et 4.3 affirment la même chose, à savoir :

$$\alpha^*(d, D) \leq \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D}.$$

Il est clair qu'on a  $\alpha(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d,D,1}}{2} + d$ , mais nous allons améliorer cette borne.

Pour cela il est nécessaire d'introduire des notations supplémentaires :

Les entiers  $d \geq 2$  et  $D \geq 3$  étant fixés, pour  $i \in \mathbb{Z}_d$ ,  $j \in \mathbb{Z}_d$ ,  $i \neq j$ , on notera  $C'_{i,j}$  le circuit  $(i \dots ij, \dots, ji \dots i, i \dots ij)$ . Il est clair que ces circuits font partie de  $C_{d,D}$ , qu'ils sont sommets disjoints (cela ne serait plus vrai pour  $D = 2$ ), et qu'ils sont tous d'ordre  $D$ . Il est clair aussi que le nombre de ces circuits est  $d^2 - d$ .

On peut maintenant affirmer :

**Proposition 4.4. a)** Pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 4$ ,  $D$  pair, on a  $\alpha(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d,D,1}}{2}$ .

**b)** Pour  $d \geq 2$ ,  $D \geq 3$ ,  $D$  impair, on a  $\alpha(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d,D}}{2} + 1$

**Démonstration :** a) Soit  $S$  un stable de  $UB(d, D)$  de cardinal  $\alpha(d, D)$  et soit  $S'$  l'ensemble des sommets à boucle contenus dans  $S$ . Posons  $|S'| = r$ .

Si  $r = 0$ , le résultat est immédiat.

Supposons  $r \geq 1$ . Soit  $i \in \mathbb{Z}_d$  tel que  $i_{d,D} \in S'$ . Pour chaque circuit  $C'_{i,j}$ ,  $j \neq i$ , aucun des sommets  $i \dots ij$  et  $ji \dots i$  de ce circuit ne peut appartenir à  $S$  (car ils sont tous les deux adjacents à  $i_{d,D} \in S$ ) et alors au plus  $\frac{D}{2} - 1$  sommets de  $C'_{i,j}$  peuvent appartenir à  $S$ . On déduit alors :

$|S| \leq \frac{d^D - d - c_{d,D,1}}{2} + r - (d-1)r$ , soit  $\alpha(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d,D,1}}{2} - (d-2)r$ , d'où le résultat.

**b)** Nous allons d'abord considérer le cas  $d = 2$ .

On a vu que  $\alpha(2, D) \leq \frac{2^D - 2 - c_{2,D}}{2} + 2$ . Supposons qu'il y ait égalité.

Il existe alors un stable  $S$  de  $UB(2, D)$  de cardinal  $\frac{2^D - 2 - c_{2,D}}{2} + 2$ . Ce stable contient

obligatoirement  $0_{2,D}$  et  $1_{2,D}$  et pour chaque circuit  $C$  de  $C_{2,D}$ , exactement  $\frac{v(C) - 1}{2}$  éléments de  $C$  sont dans  $S$ .

On va montrer l'assertion  $(P_D)$  suivante :

"Pour tout  $r$ ,  $1 \leq r \leq \frac{D-1}{2}$ , les éléments  $A_r = \underbrace{01 \dots 01}_{2r \text{ bits}} 0 \dots 0$  et  $B_r = 0 \dots 0 \underbrace{10 \dots 10}_{2r \text{ bits}}$  sont dans  $S$ ".

Puisque  $0_{2,D} \in S$ , les éléments  $0 \dots 01$  et  $10 \dots 0$  du circuit  $C'_{0,1}$  ne sont pas dans l'ensemble  $S$ . Alors, les  $\frac{D-1}{2}$  éléments de  $C'_{0,1}$  qui appartiennent à  $S$ , doivent être contenus dans la chaîne  $P = (0 \dots 010, \dots, 010 \dots 0)$  de longueur  $D - 3$ . Or on sait que le nombre de stabilité d'une telle chaîne est  $\frac{D-3}{2} + 1 = \frac{D-1}{2}$ , qu'il existe un seul stable à  $\frac{D-1}{2}$  éléments et que ce stable contient les extrémités de cette chaîne.

On déduit par conséquent  $010 \dots 0 \in S$  et  $0 \dots 010 \in S$ , soit  $A_1 \in S$  et  $B_1 \in S$ . Cela veut dire déjà que l'assertion  $(P_3)$  a été démontrée.

Pour  $D \geq 5$ , l'assertion  $(P_D)$  sera prouvée par induction sur  $r$ .

On vient de voir que l'assertion est vraie pour  $r = 1$ .

Supposons qu'elle soit vraie pour  $r$ ,  $1 \leq r \leq \frac{D-1}{2} - 1$ , ce qui veut dire  $A_r \in S$  et  $B_r \in S$ .

$U_{r+1} = \underbrace{10\dots 100\dots 0}_{2(r+1) \text{ bits}}$  est un voisin de  $A_r$  et par conséquent  $U_{r+1} \notin S$ .

$V_{r+1} = 0\dots 0 \underbrace{01\dots 01}_{2(r+1) \text{ bits}}$  est un voisin de  $B_r$  et par conséquent  $V_{r+1} \notin S$ .

On voit facilement que  $V_{r+1}$  et  $U_{r+1}$  sont tous les deux sur un circuit  $C$  de  $C_{2,D}$  d'ordre  $D$ , que ce circuit est de la forme  $C = (V_{r+1}, B_{r+1}, \dots, A_{r+1}, U_{r+1}, \dots, Y, V_{r+1})$ , que le chemin de  $B(2, D)$  allant de  $B_{r+1}$  à  $A_{r+1}$  est de longueur  $D - 2r - 3$  et que le chemin de  $B(2, D)$  allant de  $U_{r+1}$  à  $Y$  est de longueur  $2r - 1$ .

Ce circuit doit contenir  $\frac{D-1}{2}$  sommets à répartir parmi les sommets de  $C$ , autres que  $V_{r+1}$  et  $U_{r+1}$ . Or, le chemin allant de  $U_{r+1}$  à  $Y$  peut contenir au plus  $r$  éléments de  $S$ . Alors le chemin allant de  $B_{r+1}$  à  $A_{r+1}$  contient au minimum  $\frac{D-1}{2} - r = \frac{D-2r-1}{2}$  sommets de  $S$ . En fait, il contient exactement  $\frac{D-2r-1}{2}$  sommets de l'ensemble  $S$  et de plus,  $B_{r+1}$  et  $A_{r+1}$  figurent parmi ces sommets, soit  $A_{r+1} \in S$  et  $B_{r+1} \in S$ . L'assertion est vérifiée pour  $r+1$ , par conséquent elle est vérifiée pour tout  $r$ ,  $1 \leq r \leq \frac{D-1}{2}$ .

L'assertion ( $\mathbb{P}_D$ ) est donc prouvée aussi pour  $D \geq 5$ , donc elle est prouvée pour tout  $D$  impair  $\geq 3$ .

En particulier, on a  $A_{\frac{D-1}{2}} \in S$ .

Il est clair que  $\bar{S}$  est un stable de  $UB(d, D)$  de cardinal  $\frac{2^D - 2 - c_{2,D}}{2} + 2$ . Avec le raisonnement précédent, on obtient  $A_{\frac{D-1}{2}} \in \bar{S}$ , d'où  $\bar{A}_{\frac{D-1}{2}} \in S$ , soit  $B_{\frac{D-1}{2}} \in S$ . On obtient une absurdité, car  $A_{\frac{D-1}{2}}$  et  $B_{\frac{D-1}{2}}$  qui sont reliés ne peuvent pas être tous les deux dans le stable  $S$ .

Cela veut dire que notre supposition est fausse et donc :

$\alpha(2, D) \neq \frac{2^D - 2 - c_{2,D}}{2} + 2$ , ce qui implique  $\alpha(2, D) \leq \frac{2^D - 2 - c_{2,D}}{2} + 1$ . La preuve est donc faite pour  $d = 2$ .

On retiendra que pour un stable de  $UB(2, D)$ , contenant les deux sommets à boucle, il existe au moins un circuit  $C$  de  $C_{2,D}$  tel que au plus  $\frac{v(C) - 1}{2} - 1$  éléments de  $C$  appartiennent à ce stable.

Considérons maintenant le cas  $d \geq 3$ .

Soit  $S$  un stable de  $UB(d, D)$  de cardinal  $\alpha(d, D)$  et soit  $S'$  l'ensemble des sommets à boucle contenus dans  $S$ . Posons  $|S'| = r$ .

Si  $r = 0$  ou si  $r = 1$ , le résultat est immédiat. Supposons  $r \geq 2$ .

Pour chaque paire  $\{i_{d,D}, j_{d,D}\}$  d'éléments de  $S'$ , le sous-graphe engendré par les sommets de  $\{i, j\}^D$  est isomorphe à  $UB(2, D)$ .  $S \cap \{i, j\}^D$  étant un stable de ce sous-graphe contenant les sommets  $i_{d,D}$  et  $j_{d,D}$ , il existe au moins un circuit  $C_{\{i,j\}}$  de  $C_{2,D}$  ( $C_{2,D}$  étant ici défini sur le

graphe de de Bruijn  $UB(2, D)$  d'alphabet  $\{i, j\}$ ) contenant moins de  $\frac{v(C_{\{i,j\}}) - 1}{2}$  sommets de

$S \cap \{i, j\}^D$ . Comme ces circuits sont sommet disjoints et comme ils font partie de  $C_{d,D}$  on déduit aisément  $\alpha(d, D) \leq \frac{d^D - d - c_{d,D}}{2} - C_r^2 + r$  et comme pour  $r \geq 2$  on a  $r - C_r^2 \leq 1$ , on déduit l'inégalité voulue.  $\square$

Les Propositions 4.3 et 4.4 seront utilisées dans la section suivante. On verra alors que les bornes supérieures données peuvent être atteintes.

Sous certaines conditions, on peut établir un lien entre  $\alpha(2, D)$  et  $\alpha(d, D)$ , plus précisément :

**Théorème 4.5.** *Supposons que pour un certain  $D$  premier  $\geq 3$ , on a*

*$\alpha(2, D) = \frac{(D-1)(2^D - 2)}{2D} + 1$ , et qu'il existe un stable  $S_2$  de cardinal  $\alpha(2, D)$  contenant un*

*seul sommet à boucle. Alors pour tout  $d \geq 2$ , on a :*

**a)**  *$\alpha(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1$  et il existe un stable  $S_D$  de cardinal  $\frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1$*

*et ayant un seul sommet à boucle.*

**b)**  *$\alpha^*(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D}$ .*

**Démonstration :** **a)** Quitte à utiliser l'isomorphisme  $x \mapsto \bar{x}$ , on peut supposer que le sommet à boucle appartenant à  $S_2$  est  $0_{2,D}$ .

$D$  étant premier impair, chaque circuit de  $C_{2,D}$  est de longueur  $D$  et contient exactement  $\frac{D-1}{2}$

éléments de  $S_2$  (sinon  $\alpha(2, D)$  n'aurait pas la valeur indiquée).

On va prouver l'assertion par induction sur  $d$ .

Par hypothèse l'assertion est vérifiée pour  $d = 2$ .

Supposons qu'elle soit vérifiée pour  $d - 1$  et étudions la pour  $d$ .

Soit  $g$  la surjection de  $\mathbb{Z}_d$  dans  $\mathbb{Z}_2$ , définie par  $g(0) = \dots = g(d-2) = 0$  et  $g(d-1) = 1$ .

Soit  $\theta = f_g$  l'homomorphisme associé.

Le sous graphe engendré par  $\theta^{-1}(0_{2,D})$  est  $UB(d-1, D)$  et par hypothèse de récurrence, il

existe un stable  $S_{D-1}$  de  $UB(d-1, D)$  de cardinal  $\frac{(D-1)[(d-1)^D - d + 1]}{2D} + 1$  et ayant un

seul sommet à boucle.

D'après la Proposition 3.4, les seules arêtes de  $\theta^{-1}(S_2)$  sont les arêtes de  $\theta^{-1}(0_{2,D})$ , ce qui implique que  $S_D = \theta^{-1}(S_2 \setminus \{0_{2,D}\}) \cup S_{D-1}$  est un stable de  $UB(d, D)$ .

On pose  $S'_2 = S_2 \setminus \{0_{2,D}\}$ .

Pour  $m$ ,  $1 \leq m \leq D-1$ , on note  $V_m$  l'ensemble des sommets de  $UB(2, D)$  qui comportent  $m$  zéros. On a  $|V_m| = C_D^m$  et pour un  $a \in V_m$ , on a  $|\theta^{-1}(a)| = (d-1)^m$ .

Les ensembles  $S'_2 \cap V_m$ ,  $1 \leq m \leq D-1$  réalisent une partition de  $S'_2$ .

Pour  $m$  vérifiant  $1 \leq m \leq D-1$  et pour  $a \in V_m$ , le circuit de  $C_{2,D}$  contenant  $a$  a tous ses sommets dans  $V_m$ . Par conséquent, l'ensemble  $V_m$  consiste en  $\frac{|V_m|}{D}$  circuits de  $C_{2,D}$  sommets

disjoints. Puisque pour chacun de ces circuits, il existe exactement  $\frac{D-1}{2}$  sommets dans  $S'_2$ , on

$$a |S'_2 \cap V_m| = \frac{(D-1)C_D^m}{2D}.$$

On déduit alors  $|\theta^{-1}(S'_2 \cap V_m)| = \frac{(D-1)C_D^m(d-1)^m}{2D}$ . Il s'ensuit :

$$|\theta^{-1}(S'_2)| = \sum_{m=1}^{D-1} |\theta^{-1}(S'_2 \cap V_m)| = \sum_{m=1}^{D-1} \frac{(D-1)C_D^m(d-1)^m}{2D} = \frac{(D-1)[d^D - (d-1)^D - 1]}{2D}.$$

On déduit alors  $|S_D| = |\theta^{-1}(S'_2)| + |S_{D-1}|$ , soit

$$|S_D| = \frac{(D-1)[d^D - (d-1)^D - 1]}{2D} + \frac{(D-1)[(d-1)^D - d + 1]}{2D} + 1, \text{ ce qui donne}$$

$$|S_D| = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1.$$

On a alors  $\alpha(d, D) \geq \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1$  et la Proposition 4.4.b implique alors

$$\alpha(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1. S_D \text{ étant un stable de cardinal } \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1 \text{ avec un}$$

seul sommet à boucle, l'assertion est prouvée pour  $D$ .

L'assertion est donc prouvée.

**b)** Le résultat est évident. □

Ce théorème n'a de l'intérêt que s'il existe des nombres premiers  $D$  pour lesquels les conditions requises sont vérifiées. On verra dans la section suivante que c'est le cas, ce qui nous permettra de donner quelques valeurs exactes du nombre de stabilité.

## 5. Valeurs exactes, bornes inférieures et supérieures du nombre de stabilité

Tout d'abord on s'occupe du cas  $D = 2$  :

**Proposition 5.1.** *On a  $\alpha(2, 2) = 2$  et  $\alpha(3, 2) = 3$ .*

*Pour  $d$  pair  $\geq 4$ , on a  $\alpha(d, 2) = \frac{d^2}{4}$ .*

*Pour  $d$  impair  $\geq 5$ , on a  $\alpha(d, 2) = \frac{d^2 - 1}{4}$ .*

**Démonstration :** Pour  $d = 2$  ou  $d = 3$ , on vérifie directement qu'on a  $\alpha(2, 2) = 2$  et  $\alpha(3, 2) = 3$ .

Supposons maintenant  $d \geq 4$ .

Soit  $A$  un stable de  $\mathbf{Z}_d^2$  de cardinal  $\alpha(d, 2)$ . Soit  $A_I$  la partie de  $A$  dont les éléments sont du type  $(a, a)$ . Posons  $|A_I| = r$ .

Posons aussi  $I = p_1(A \setminus A_I)$  et  $F = p_2(A \setminus A_I)$ .

$A \setminus A_I$  étant un stable ne contenant aucun élément du type  $(a, a)$ , on a  $I \cap F = \emptyset$ . Comme  $A$  lui même est un stable, les éléments de  $I$  ou de  $F$  ne peuvent pas être un des  $r$  éléments utilisés pour les sommets de  $A_I$ .

Il est clair qu'on a  $|A \setminus A_I| \leq |I| \times |F|$  et si on pose  $|I| = i$ , cela implique :



$|A \setminus A_I| \leq i(d-r-i)$ , d'où  $|A| \leq i(d-r-i) + r$ .

Si  $d$  est pair, il est aisé de voir qu'on a  $i(d-r-i) + r \leq \frac{(d-r)^2}{4} + r$  et  $\frac{(d-r)^2}{4} + r \leq \frac{d^2}{4}$ . On déduit  $|A| \leq \frac{d^2}{4}$ , soit  $\alpha(d, 2) \leq \frac{d^2}{4}$ .

Par ailleurs, on vérifie facilement que l'ensemble  $\left\{ (a, b); 0 \leq a \leq \frac{d}{2} - 1, \frac{d}{2} \leq b \leq d - 1 \right\}$  est un stable de  $UB(d, 2)$  de cardinal  $\frac{d^2}{4}$  et par conséquent  $\alpha(d, 2) = \frac{d^2}{4}$ .

Si  $d$  est impair, on vérifie sans problèmes qu'on a  $|A| \leq \frac{d^2 - 1}{4}$ , soit  $\alpha(d, 2) \leq \frac{d^2 - 1}{4}$ .

L'ensemble  $\left\{ (a, b); 0 \leq a \leq \frac{d-1}{2} - 1, \frac{d-1}{2} \leq b \leq d - 1 \right\}$  étant un stable de  $UB(d, 2)$  de cardinal  $\frac{d^2 - 1}{4}$ , on a bien  $\alpha(d, 2) = \frac{d^2 - 1}{4}$ . □

On vérifie facilement que  $\alpha^*(2, 2) = 1$  et  $\alpha^*(3, 2) = 2$  et donc dans ces cas particuliers le pseudo-nombre de stabilité n'est pas égal au nombre de stabilité. Par contre, pour  $d \geq 4$ , comme les deux ensembles exhibés dans la preuve de la Proposition 4.1 ne contiennent aucun des éléments du type  $(a, a)$ , on a  $\alpha^*(d, 2) = \alpha(d, 2)$ .

Les deux résultats qui suivent traitent le cas général.

**Proposition 5.2.** *Pour  $d \geq 2, D \geq 3$ , on a :  $\alpha^*(d, D) \geq d\alpha^*(d, D - 1)$ .*

**Démonstration :** Il existe dans  $UB_I(d, D)$ , un stable de cardinal  $\alpha^*(d, D - 1)$  et ne contenant aucune des classes  $C_I(i_{d,D})$ ,  $i \in \mathbf{Z}_d$ . Cela veut dire qu'il n'y a aucun arc entre deux classes distinctes de  $S'$  et aucun arc non plus entre deux éléments distincts d'une même classe de  $S'$ .

On déduit que  $S = \bigcup_{C \in S'} C$  est un stable de  $UB(d, D)$  de cardinal  $d\alpha^*(d, D - 1)$  et ne contenant aucun des sommets  $i_{d,D}$ ,  $i \in \mathbf{Z}_d$ . Par conséquent  $\alpha^*(d, D) \geq d\alpha^*(d, D - 1)$  et l'assertion est prouvée. □

**Proposition 5.3.** *Pour  $d \geq 3, D \geq 3$ , on a :  $\alpha(d, D) \geq d\alpha(d, D - 1) - d$ .*

**Démonstration :** Il existe dans  $UB_I(d, D)$ , un stable  $S'$  dont le cardinal est  $\alpha(d, D - 1)$ . Soit  $r$  le nombre des classes, sommets à boucle, contenues dans  $S'$ . Il existe alors  $r$  sommets à boucle  $X_1, \dots, X_r$  de  $UB(d, D)$ , tels que ces classes soient  $C_I(X_1), \dots, C_I(X_r)$ . Alors les ensembles  $C_I(X_i) \setminus \{X_i\}$ ,  $1 \leq i \leq r$ , sont des stables de  $UB(d, D)$ , les classes de  $S'$  distinctes des classes  $C_I(X_i)$ ,  $1 \leq i \leq r$  sont aussi des stables de  $UB(d, D)$ .

L'ensemble  $S'$  étant un stable de  $UB_I(d, D)$ , on déduit que  $S = \bigcup_{C \in S'} C \setminus \{X_1, \dots, X_r\}$  est un stable de  $UB(d, D)$ . Il s'ensuit alors  $\alpha(d, D) \geq |S|$ , soit  $\alpha(d, D) \geq d\alpha(d, D - 1) - r$ , d'où  $\alpha(d, D) \geq d\alpha(d, D - 1) - d$ . □

La proposition 5.3 est vraie aussi pour  $d = 2$ , mais on a mieux dans ce cas :

**Proposition 5.4.** *Pour  $D \geq 2$ , on a :  $\alpha(2, D) \geq 2\alpha(2, D - 1) - 1$ .*

**Démonstration :** On va travailler cette fois-ci dans le graphe  $UB_3(2, D)$ , isomorphe à  $UB(2, D-1)$ . Il existe dans  $UB_3(2, D)$ , un stable  $S'$  dont le cardinal est  $\alpha(2, D-1)$ .

Si  $S'$  ne contient aucun sommet à boucle, on a  $\alpha(2, D-1) = \alpha^*(2, D-1)$  et la preuve se déduit facilement de la Proposition 5.2 (on aurait même  $\alpha(2, D) \geq 2\alpha(2, D-1)$ ).

Si l'ensemble  $S'$  contient un seul sommet à boucle, quitte à considérer les images des éléments de  $S'$  par l'isomorphisme  $x \mapsto \bar{x}$ , on peut considérer que ce sommet est la classe  $C_3(0_{2,D}) = \{0_{2,D}, I_{2,D}\}$ .  $S = \bigcup_{C \in S'} C$  est alors clairement un stable de  $UB(2, D)$  avec  $2\alpha(2, D-1)$

sommets. Par conséquent,  $\alpha(2, D) \geq 2\alpha(2, D-1)$ , d'où le résultat.

Si  $S'$  contient les deux sommets à boucle, la seule classe dont les éléments sont reliés est  $C_3((0, I)_{2,D}) = \{(0, I)_{2,D}, (I, 0)_{2,D}\}$ . En prenant alors  $S = \bigcup_{C \in S'} C \setminus \{(0, I)_{2,D}\}$ , on obtient un

stable à  $2\alpha(2, D-1) - 1$  éléments, d'où le résultat.  $\square$

Pour  $d = 2$ , on a alors :

**Proposition 5.5.** Pour  $D \geq 2$ , on a :

a)  $2\alpha^*(2, D-1) \leq \alpha^*(2, D) \leq \frac{\alpha^*(2, D+1)}{2}$ .

b)  $2\alpha(2, D-1) - 1 \leq \alpha(2, D) \leq \frac{\alpha(2, D+1) + 1}{2}$

**Démonstration :** Les deux résultats se déduisent immédiatement des propositions 5.2 et 5.4  $\square$

On va donner maintenant les valeurs exactes de  $\alpha(2, D)$  et  $\alpha^*(2, D)$  pour  $1 \leq D \leq 7$ . Le graphe  $UB(2, D)$  est considéré chaque fois en tant que graphe à sommets dans  $\mathbf{Z}_2^D$ .

-  $\alpha(2, 1) = 1$  et  $\alpha^*(2, 1) = 0$

-  $\alpha(2, 2) = 2$  et  $\alpha^*(2, 2) = 1$

-  $\alpha(2, 3) = 3$  et  $\alpha^*(2, 3) = 2$  et  $S_3 = \{0, 2, 3\}$  est un stable de  $UB(2, 5)$  de cardinal maximum.

- D'après la Proposition 4.4.b, on a :  $\alpha(2, 5) \leq \frac{2^5 - 2 - c_{2,5}}{2} + 1$  soit  $\alpha(2, 5) \leq 13$

D'après la Proposition 5.5.b on a  $\alpha(2, 4) \leq \frac{\alpha(2, 5) + 1}{2}$ , d'où  $\alpha(2, 4) \leq 7$ . Or, on vérifie

facilement que  $S_4 = \{0, 2, 3, 12, 10, 11, 15\}$  est un stable du graphe  $UB(2, 4)$ . Par conséquent  $\alpha(2, 4) = 7$  et  $S_4$  est un stable de cardinal maximum.

La proposition 4.2 nous donne  $\alpha^*(2, 5) \leq 12$ . D'après la proposition 5.5.a, on a :

$\alpha^*(2, 4) \leq \frac{\alpha^*(2, 5)}{2}$ , ce qui implique  $\alpha^*(2, 4) \leq 6$ . Or on vérifie facilement que l'ensemble

$S_4^* = \{1, 4, 12, 5, 13, 7\}$  est un stable à 6 éléments sans sommets à boucle. Par conséquent  $\alpha^*(2, 4) = 6$ .

- On a vu que  $\alpha(2, 5) \leq 13$ . Or,  $S_5 = \{0, 2, 8, 6, 24, 10, 9, 25, 7, 22, 26, 30, 23\}$  est un stable de  $UB(2, 5)$  (voir Figure 1). Par conséquent  $\alpha(2, 5) = 13$  et  $S_5$  est un stable de cardinal maximum. Puisque  $\alpha^*(2, 5) \leq 12$  et  $S_5^* = S_5 \setminus \{0\}$  est un stable à 12 éléments sans sommets à boucles, on a  $\alpha^*(2, 5) = 12$ .

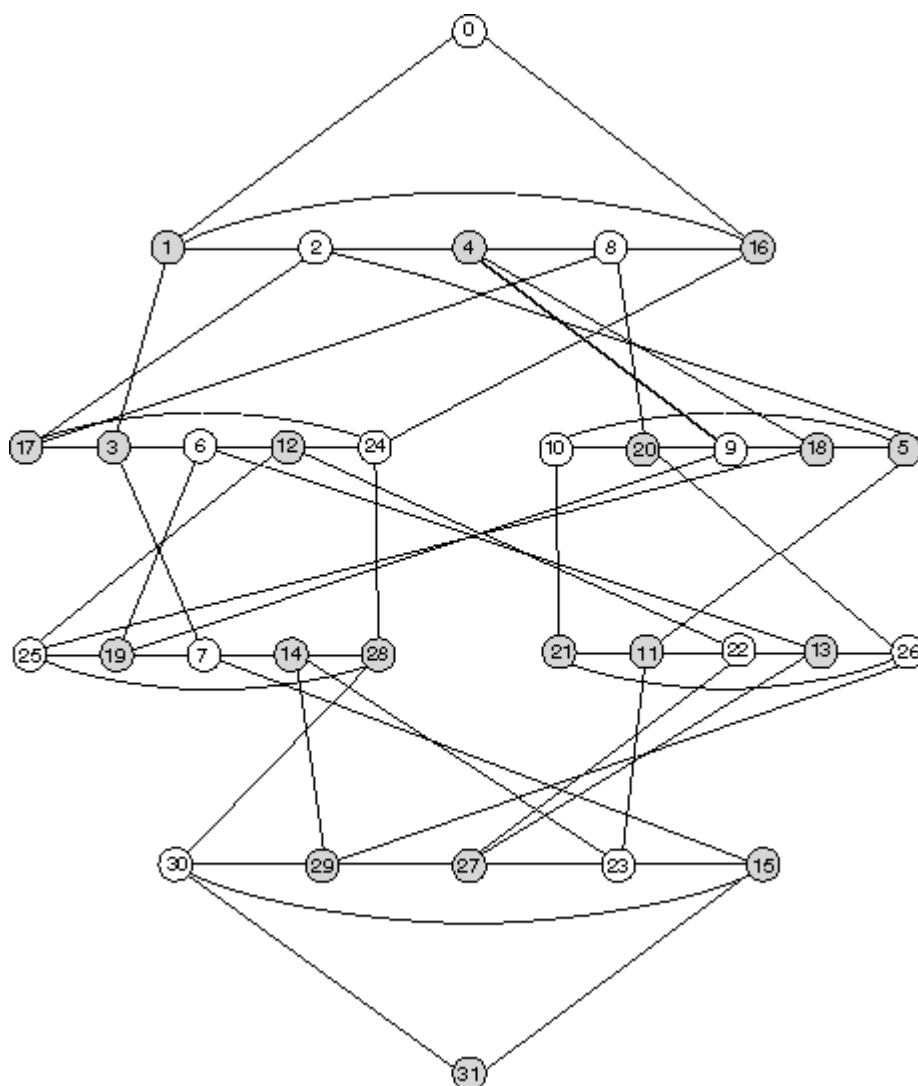


Figure 1: un stable maximum de UB(2,5)

- La Proposition 4.4.b nous donne  $\alpha(2, 7) \leq 55$ . Comme, par la Proposition 5.5.b on a  $\alpha(2, 6) \leq \frac{\alpha(2, 7) + 1}{2}$ , il s'ensuit  $\alpha(2, 6) \leq 28$ .

Or, on peut vérifier que l'ensemble  $S_6$  dont les éléments sont : 0, 2, 8, 48, 3, 12, 40, 34, 10, 18, 35, 14, 19, 13, 50, 11, 44, 42, 15, 60, 51, 46, 58, 43, 45, 59, 47, 63 est un stable de UB(2, 6) à 28 éléments. Par conséquent  $\alpha(2, 6) = 28$  et  $S_6$  est un stable de cardinal maximum.

Par la Proposition 4.2, on obtient  $\alpha^*(2, 7) \leq 54$  et par la Proposition 5.5.a, on obtient  $\alpha^*(2, 6) \leq \frac{\alpha^*(2, 7)}{2}$ . On déduit  $\alpha^*(2, 6) \leq 27$  et comme l'ensemble  $S_6^*$  dont les éléments sont 1, 4, 16, 48, 12, 17, 5, 20, 36, 49, 7, 28, 52, 19, 13, 37, 44, 21, 60, 51, 23, 29, 53, 45, 61, 55, 31 est un stable à 27 sommets sans boucle, on déduit  $\alpha^*(2, 6) = 27$ .

- On a vu que  $\alpha(2, 7) \leq 55$ . D'après la proposition 5.4, on a  $\alpha(2, 7) \geq 2\alpha(2, 6) - 1$ , soit  $\alpha(2, 7) \geq 55$ . On déduit  $\alpha(2, 7) = 55$ .

On a vu que  $\alpha^*(2, 7) \leq 54$ , et puisque  $\alpha^*(2, 7) \geq 2\alpha^*(2, 6)$ , soit  $\alpha^*(2, 7) \geq 54$ , on déduit  $\alpha^*(2, 7) = 54$ . On pourrait déterminer un stable de  $UB(2, 7)$  de cardinal maximum à partir de  $S_6$ , mais ce stable ne serait pas très intéressant, car il ne permet pas d'appliquer le Théorème 4.5 (parce qu'il a deux sommets à boucles).

Par contre, l'ensemble  $S_7$  dont les éléments sont : 0, 2, 8, 32, 3, 12, 48, 66, 10, 40, 72, 34, 9, 112, 67, 14, 104, 35, 13, 41, 74, 42, 49, 11, 44, 73, 76, 50, 15, 60, 113, 46, 114, 75, 43, 45, 106, 78, 58, 105, 108, 51, 77, 62, 115, 79, 47, 122, 107, 110, 59, 109, 126, 123, 111 est un stable de  $UB(2, 7)$  de cardinal maximum, ayant un seul sommet à boucle, ce qui permet d'appliquer le théorème en question.  $S_7^* = S_7 \setminus \{0\}$  est bien sûr un stable sans sommets à boucle et de cardinal maximum.

Nous remarquons encore qu'un stable de  $UB(2,6)$  de cardinal maximum, contient obligatoirement les deux sommets à boucles, car sinon on obtiendrait  $\alpha^*(2, 7) \geq 56$  (voir la démonstration de la proposition 5.4), ce qui est faux.

On revient au théorème 4.5, qui fournit :

**Théorème 5.6.** Pour  $d \geq 2$ , on a :

$$\alpha(d, 3) = \frac{d^3 - d}{3} + 1 \text{ et } \alpha^*(d, 3) = \frac{d^3 - d}{3}; \alpha(d, 5) = \frac{2(d^5 - d)}{5} + 1 \text{ et } \alpha^*(d, 5) = \frac{2(d^5 - d)}{5}$$

$$\alpha(d, 7) = \frac{3(d^7 - d)}{7} + 1 \text{ et } \alpha^*(d, 7) = \frac{3(d^7 - d)}{7}.$$

**Démonstration :** Les ensembles  $S_3$ ,  $S_5$  et  $S_7$  définis auparavant, vérifient les conditions du lemme 4.5, ce qui implique les résultats annoncés. □

Ce résultat nous incite à penser que :

**Conjecture 5.7.** Pour  $d \geq 2$  et  $D$  premier impair, on a :

$$\alpha(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D} + 1 \text{ et } \alpha^*(d, D) = \frac{(D-1)(d^D - d)}{2D}.$$

Pour démontrer cette conjecture, il suffirait de prouver que pour tout  $D$  premier impair, les conditions du théorème 4.5 sont satisfaites.

## 6. Nouvelles bornes inférieures, résultats asymptotiques

Dans ce qui suit,  $UB(2, D)$  sera considéré en tant que graphe dont l'ensemble des sommets est  $\{0, 1\}^D$ , autrement dit 0 et 1 seront considérés en tant qu'éléments de  $\mathbb{Z}$  et non de  $\mathbb{Z}_2$ .

On définit l'application  $\Phi_D$  de  $\{0, 1\}^D$  dans  $\mathbb{Z}$  par :

$$\Phi_D(x_1 \dots x_D) = \sum_{i=1}^D (-1)^{i+1} x_i.$$

$\Phi_D(x_1 \dots x_D)$  atteint son minimum quand les coordonnées de rang impair de  $x_1 \dots x_D$  sont égales à 0 et les coordonnées de rang pair sont égales à 1.

$\Phi_D(x_1 \dots x_D)$  atteint son maximum quand les coordonnées de rang impair de  $x_1 \dots x_D$  sont égales à 1 et les coordonnées de rang pair sont égales à 0.

Par conséquent  $\Phi_D(x_1 \dots x_D)$  varie entre  $-\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor$  et  $\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor$ .

Pour  $i$  positif et inférieur ou égal à  $\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor$ , l'élément de  $\{0, 1\}^D$  dont  $i$  coordonnées de rang impair sont égales à 1 et dont les autres coordonnées sont nulles, a  $i$  comme image par  $\Phi_D$ .

Pour  $i$  strictement négatif et supérieur ou égal à  $-\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor$ , l'élément de l'ensemble  $\{0, 1\}^D$  dont  $-i$  coordonnées de rang pair sont égales à 1 et dont les autres coordonnées sont nulles, a  $i$  comme image par  $\Phi_D$ .

Par conséquent, on a  $\Phi_D(\{0, 1\}^D) = \left\{ -\left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor, \dots, 0, \dots, \left\lfloor \frac{D}{2} \right\rfloor \right\}$ , ce qui veut dire que pour un naturel  $m \geq 1$ , l'image par  $\Phi_{2m}$  de  $\{0, 1\}^{2m}$  est  $\{-m, \dots, 0, \dots, m\}$ , et l'image par  $\Phi_{2m+1}$  de  $\{0, 1\}^{2m+1}$  est  $\{-m, \dots, 0, \dots, m+1\}$ .

On va donner trois résultats intermédiaires. Le premier est :

**Lemme 6.1.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

a) Pour  $x \in \{0, 1\}^{2m}$ , on a :  $x \in \Phi_{2m}^{-1}(i) \Leftrightarrow \bar{x} \in \Phi_{2m}^{-1}(-i)$ .

b) Pour  $x \in \{0, 1\}^{2m+1}$ , on a :  $x \in \Phi_{2m+1}^{-1}(i) \Leftrightarrow \bar{x} \in \Phi_{2m+1}^{-1}(1-i)$ .

**Démonstration :** a) Posons  $x = x_1 \dots x_{2m}$ . Alors

$x \in \Phi_{2m}^{-1}(i)$  équivaut à  $x_1 - x_2 + \dots + x_{2m-1} - x_{2m} = i$ , ce qui équivaut à  $(1 - x_1) - (1 - x_2) + \dots + (1 - x_{2m-1}) - (1 - x_{2m}) = -i$ , soit  $\bar{x} \in \Phi_{2m}^{-1}(-i)$ .

b) La démonstration est analogue. □

Cela entraîne que pour  $i$  vérifiant  $-m \leq i \leq m$ , on a  $|\Phi_{2m}^{-1}(i)| = |\Phi_{2m}^{-1}(-i)|$  et que pour  $i$  vérifiant  $-m \leq i \leq m+1$ , on a  $|\Phi_{2m+1}^{-1}(i)| = |\Phi_{2m+1}^{-1}(1-i)|$ .

**Lemme 6.2.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

a) On a  $|\Phi_{2m}^{-1}(0)| = C_{2m}^m$  et  $|\Phi_{2m}^{-1}(1)| = C_{2m}^{m-1}$ .

b) On a  $|\Phi_{2m+1}^{-1}(0)| = C_{2m+1}^m$ .

**Démonstration :** a)  $\Phi_{2m}^{-1}(0)$  est l'ensemble des  $x \in \{0, 1\}^{2m}$  qui ont  $k$  coordonnées de rang impair non nulles et  $k$  coordonnées de rang pair non nulles, et cela pour  $k$  variant de 0 à  $m$ . Il s'en suit :

$$|\Phi_{2m}^{-1}(0)| = \sum_{k=0}^m C_m^k C_m^k = C_{2m}^m.$$

$\Phi_{2m}^{-1}(1)$  est l'ensemble des  $x \in \{0, 1\}^{2m}$  ayant  $k$  coordonnées de rang pair non nulles, et  $k+1$  coordonnées de rang impair non nulles, et cela pour  $k$  variant de 0 à  $m-1$ . Il s'en suit :

$$|\Phi_{2m}^{-1}(1)| = \sum_{k=0}^{m-1} C_m^k C_m^{k+1}, \text{ soit } |\Phi_{2m}^{-1}(1)| = C_{2m}^{m-1}.$$

b) Puisque un élément de  $\{0, 1\}^{2m+1}$  a  $m+1$  coordonnées de rang impair et  $m$  coordonnées de rang pair,  $\Phi_{2m+1}^{-1}(0)$  est l'ensemble des  $x \in \{0, 1\}^{2m+1}$  qui ont  $k$  coordonnées de rang impair

non nulles et  $k$  coordonnées de rang pair non nulles, et cela pour  $k$  variant de  $0$  à  $m$ . Il s'en suit  $\left| \Phi_{2m+1}^{-1}(0) \right| = \sum_{k=0}^m C_m^k C_{m+1}^k = C_{2m+1}^m$ .  $\square$

Le troisième résultat intermédiaire est :

**Lemme 6.3.** Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ .

**a)** Si  $x \in \Phi_{2m}^{-1}(i)$  et  $y \in \Phi_{2m}^{-1}(j)$  sont adjacents dans  $UB(2, 2m)$ , on a :  $i + j \in \{-1, 0, 1\}$ .

**b)** Si  $x \in \Phi_{2m+1}^{-1}(i)$  et  $y \in \Phi_{2m+1}^{-1}(j)$  sont adjacents dans  $UB(2, 2m + 1)$ , on a :  $i + j \in \{0, 1, 2\}$ .

**Démonstration : a)** Posons  $x = x_1 \dots x_{2m}$  et  $y = y_1 \dots y_{2m}$ .

On a  $x_1 - x_2 + \dots + x_{2m-1} - x_{2m} = i$  et  $y_1 - y_2 + \dots + y_{2m-1} - y_{2m} = j$ .

Si  $y$  est un successeur de  $x$ , on obtient par addition :  $x_1 - y_{2m} = i + j$ , ce qui implique bien sûr  $i + j \in \{-1, 0, 1\}$ .

Si  $y$  est un prédécesseur de  $x$ , on obtient par addition :  $y_1 - x_{2m} = i + j$ , ce qui implique encore  $i + j \in \{-1, 0, 1\}$ .

**b)** Posons  $x = x_1 \dots x_{2m+1}$  et  $y = y_1 \dots y_{2m+1}$ .

On a  $x_1 - x_2 + \dots + x_{2m-1} - x_{2m} + x_{2m+1} = i$  et  $y_1 - y_2 + \dots + y_{2m-1} - y_{2m} + y_{2m+1} = j$ .

Si  $y$  est un successeur de  $x$ , on obtient par addition :  $x_1 + y_{2m+1} = i + j$ , ce qui implique bien sûr  $i + j \in \{0, 1, 2\}$ .

Si  $y$  est un prédécesseur de  $x$ , on obtient par addition :  $y_1 + x_{2m+1} = i + j$ , ce qui implique encore  $i + j \in \{0, 1, 2\}$ .  $\square$

On va donner maintenant des bornes inférieures très pertinentes :

**Théorème 6.4.** Pour  $m \geq 4$ , on a :

**a)**  $\alpha^*(2, 2m) \geq 2^{2m-1} - \frac{C_{2m}^m}{2} + C_{2m-2}^m$ .

**b)**  $\alpha^*(2, 2m + 1) \geq 2^{2m} - C_{2m}^m + 2C_{2m-2}^m$ .

**Démonstration : a)** Définissons les ensembles  $A$  et  $B$  par :

$$A = \Phi_{2m}^{-1}(1) \cup \dots \cup \Phi_{2m}^{-1}(m) \text{ et } B = \{x \in \Phi_{2m}^{-1}(0) ; p_1(x) = 0 \text{ et } p_{2m}(x) = 1\}.$$

Puisque pour  $i$  et  $j$  dans  $\{1, \dots, m\}$ , on a  $i + j \notin \{-1, 0, 1\}$ , d'après le lemme 6.3.a,  $A$  est un stable de  $UB(2, 2m)$ .

$B$  est aussi un stable de  $UB(2, 2m)$ .

En effet, l'existence d'un arc  $(x_1 \dots x_{2m}, y_1 \dots y_{2m})$  à extrémités dans  $B$ , entraînerait :

$$x_1 - x_2 + \dots + x_{2m-1} - x_{2m} = 0, \quad y_1 - y_2 + \dots + y_{2m-1} - y_{2m} = 0 \text{ et par addition cela donnerait } x_1 - y_{2m} = 0, \text{ soit } -1 = 0, \text{ ce qui est absurde.}$$

Un élément de  $A$  et un élément de  $B$  ne sont jamais reliés.

En effet, l'existence d'un arc  $(x, y)$  avec  $x = x_1 \dots x_{2m}$  dans  $A$  et  $y = y_1 \dots y_{2m}$  dans  $B$ , impliquerait  $x_1 - y_{2m} = \Phi_{2m}(x) + \Phi_{2m}(y)$ , soit  $x_1 - 1 = \Phi_{2m}(x)$ , soit  $\Phi_{2m}(x) \in \{-1, 0\}$ , ce qui est contradictoire avec la définition de  $A$ . L'existence d'un arc  $(x, y)$  avec  $x = x_1 \dots x_{2m}$  dans  $B$  et  $y = y_1 \dots y_{2m}$  dans  $A$ , donnerait  $x_1 - y_{2m} = \Phi_{2m}(x) + \Phi_{2m}(y)$ , soit  $-y_{2m} = \Phi_{2m}(y)$ , soit  $\Phi_{2m}(y) \in \{-1, 0\}$ , ce qui est de nouveau contradictoire.

On peut donc affirmer que  $S_{2m}^* = A \cup B$  est un stable de  $UB(2, 2m)$ .

Puisque  $|\Phi_{2m}^{-1}(i)| = |\Phi_{2m}^{-1}(-i)|$  pour  $1 \leq i \leq m$ , on déduit  $|A| = \frac{2^{2m} - |\Phi_{2m}^{-1}(0)|}{2}$ , soit  $|A| = 2^{2m-1} - \frac{C_{2m}^m}{2}$ .

Les éléments  $0 x_2 \dots x_{2m-1} 1$  de  $B$ , se caractérisent par  $0 - x_2 + \dots + x_{2m-1} - 1 = 0$ , soit  $x_2 - x_3 + \dots + x_{2m-2} - x_{2m-1} = -1$ .

Cela veut dire  $|B| = |\Phi_{2m-2}^{-1}(-1)|$ , soit  $|B| = |\Phi_{2m-2}^{-1}(1)| = C_{2m-2}^{m-2}$ .

Puisque  $A$  et  $B$  sont disjoints, il s'en suit  $|S_{2m}^*| = 2^{2m-1} - \frac{C_{2m}^m}{2} + C_{2m-2}^{m-2}$ . Comme  $S_{2m}^*$  n'a pas de sommets à boucles ( car ils sont dans  $\Phi_{2m}^{-1}(0) \setminus B$ ), le résultat se déduit tout de suite.

**b)** Considérons les ensembles  $A'$ ,  $B'$  et  $C'$  définis par :

$$A' = \Phi_{2m+1}^{-1}(2) \cup \dots \cup \Phi_{2m+1}^{-1}(m+1)$$

$$B' = \{x \in \Phi_{2m+1}^{-1}(1); p_1(x) = 0\} \cup \{x \in \Phi_{2m+1}^{-1}(1); p_1(x) = p_2(x) = 1 \text{ et } p_{2m+1}(x) = 0\}$$

$$C' = \{x \in \Phi_{2m+1}^{-1}(0); p_1(x) = p_{2m+1}(x) = 0 \text{ et } p_2(x) = 1\}.$$

Puisque pour  $i$  et  $j$  dans  $\{2, \dots, m+1\}$ , on a  $i+j \notin \{0, 1, 2\}$ , d'après le lemme 6.3.b,  $A'$  est un stable de  $UB(2, 2m+1)$ .

$B'$  est aussi un stable de  $UB(2, 2m+1)$ .

En effet, l'existence d'un arc  $(x_1 \dots x_{2m+1}, y_1 \dots y_{2m+1})$  à extrémités dans l'ensemble  $B'$ , entraînerait  $x_1 + y_{2m+1} = 2$  et alors  $x_1 = 1$  et  $y_{2m+1} = 1$ . Cela entraînerait  $x_1 = x_2 = 1$  et  $y_1 = 0$ , ce qui est faux puisqu'on devrait avoir  $x_2 = y_1$ .

Pour un sommet  $x \in C'$ , si  $y$  est un successeur de  $x$ , on a  $p_1(y) = 1$  et donc  $y \notin C'$ . Et si  $y$  est un prédécesseur de  $x$ , on a  $p_2(y) = 0$ , et donc on a encore  $y \notin C'$ . Cela veut dire que  $C'$  est un stable de  $UB(2, 2m+1)$ .

Puisque pour  $i$  dans  $\{2, \dots, m+1\}$ , on a  $i+1 \notin \{0, 1, 2\}$ , un sommet de  $A'$  n'a pas de voisin dans  $B'$ .

Un élément  $x = x_1 \dots x_{2m+1}$  de  $A'$ , n'a pas de successeur dans  $C'$ .

En effet, l'existence d'un tel successeur  $y = y_1 \dots y_{2m+1}$  dans l'ensemble  $C'$ , impliquerait  $x_1 + y_{2m+1} = \Phi_{2m+1}(x)$ , soit  $x_1 = \Phi_{2m+1}(x)$ , ce qui est impossible vu la définition de  $A'$ .

Un élément  $x = x_1 \dots x_{2m+1}$  de  $B'$ , n'a pas de successeur dans  $C'$ .

En effet, l'existence d'un tel successeur  $y = y_1 \dots y_{2m+1}$  dans l'ensemble  $C'$ , impliquerait  $y_1 = x_2$  et  $x_1 + y_{2m+1} = 1$ , soit  $x_2 = 0$  et  $x_1 = 1$ , ce qui bien sûr n'est pas possible.

Un élément  $x = x_1 \dots x_{2m+1}$  de  $C'$ , n'a pas de successeur dans  $A'$ .

En effet, l'existence d'un tel successeur  $y = y_1 \dots y_{2m+1}$  dans l'ensemble  $A'$ , impliquerait  $x_1 + y_{2m+1} = \Phi_{2m+1}(y)$ , soit  $y_{2m+1} = \Phi_{2m+1}(y)$ , ce qui est faux.

Un élément  $x = x_1 \dots x_{2m+1}$  de  $C'$ , n'a pas non plus de successeur dans  $B'$ .

En effet, l'existence d'un tel successeur  $y = y_1 \dots y_{2m+1}$  dans l'ensemble  $B'$ , impliquerait  $x_2 = y_1$  et  $x_1 + y_{2m+1} = 1$ , d'où  $y_1 = 1$  et  $y_{2m+1} = 1$ , ce qui n'est pas possible.

Tout cela montre que  $S_{2m+1}^* = A' \cup B' \cup C'$  est un stable de  $UB(2, 2m+1)$ .

Puisque on a  $|\Phi_{2m+1}^{-1}(i)| = |\Phi_{2m+1}^{-1}(1-i)|$  pour  $i$  variant entre les entiers  $2$  et  $m+1$  et  $|\Phi_{2m+1}^{-1}(0)| = |\Phi_{2m+1}^{-1}(1)|$ , on déduit :  $|A'| = \frac{2^{2m+1} - 2|\Phi_{2m+1}^{-1}(0)|}{2} = 2^{2m} - C_{2m+1}^m$ .

$\{x \in \Phi_{2m+1}^{-1}(1); p_1(x) = 0\}$  est l'ensemble des éléments  $0 x_2 \dots x_{2m+1}$  tels que :

$$0 - x_2 + \dots + x_{2m-1} - x_{2m} + x_{2m+1} = 1, \text{ soit } x_2 - x_3 + \dots + x_{2m} - x_{2m+1} = -1.$$

Le cardinal de cet ensemble est donc  $|\Phi_{2m}^{-1}(-1)| = |\Phi_{2m}^{-1}(1)| = C_{2m}^{m-1}$ .

$\{x \in \Phi_{2m+1}^{-1}(1) ; p_1(x) = p_2(x) = 1 \text{ et } p_{2m+1}(x) = 0\}$  est en fait l'ensemble des éléments  $11x_3 \dots x_{2m}0$  tels que  $1 - 1 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2m-1} - x_{2m} + 0 = 1$ , soit :  
 $x_3 - x_4 + \dots + x_{2m-1} - x_{2m} = 1$ .

Le cardinal de cet ensemble est donc  $|\Phi_{2m-2}^{-1}(1)| = C_{2m-2}^{m-2}$ .

$C'$  est l'ensemble des éléments  $01x_3 \dots x_{2m}0$  tels que

$0 - 1 + x_3 - x_4 + \dots + x_{2m-1} - x_{2m} + 0 = 0$ , soit  $x_3 - x_4 + \dots + x_{2m-1} - x_{2m} = 1$ .

Le cardinal de cet ensemble est donc  $|\Phi_{2m-2}^{-1}(1)| = C_{2m-2}^{m-2}$ .

On déduit :  $|S_{2m+1}^*| = 2^{2m} - C_{2m+1}^m + C_{2m}^{m-1} + C_{2m-2}^{m-2} + C_{2m-2}^{m-2} = 2^{2m} - C_{2m}^m + 2C_{2m-2}^{m-2}$ .

Comme  $S_{2m+1}^*$  n'a pas de sommets à boucles, le résultat se déduit tout de suite. □

On peut maintenant énoncer :

**Théorème 6.5.** On a  $\lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(2, D)}{2^D} = \frac{1}{2}$ .

**Démonstration :** Posons  $u_D = \frac{\alpha(2, D)}{2^D}$ .

Pour  $m \geq 2$ , la proposition 4.4.a implique clairement  $\alpha(2, 2m) \leq 2^{2m-1}$ , d'où  $u_{2m} \leq \frac{1}{2}$ .

Pour  $m \geq 4$ , le théorème 6.4.a implique  $u_{2m} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} + \frac{C_{2m-2}^{m-2}}{2^{2m}}$ .

On a donc pour  $m \geq 4$  :

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} + \frac{C_{2m-2}^{m-2}}{2^{2m}} \leq u_{2m} \leq \frac{1}{2}$  et comme  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{C_{2m}^m}{2^{2m}} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{C_{2m-2}^{m-2}}{2^{2m}} = 0$ , on déduit :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} u_{2m} = \frac{1}{2}.$$

Pour  $m \geq 4$ , la proposition 4.4.b et le théorème 6.4.b impliquent :

$$\frac{1}{2} - \frac{C_{2m}^m}{2^{2m+1}} + \frac{C_{2m-2}^{m-2}}{2^{2m}} \leq u_{2m+1} \leq \frac{1}{2} \text{ et là encore, on déduit } \lim_{m \rightarrow +\infty} u_{2m+1} = \frac{1}{2}.$$

On sait qu'une suite telle que les sous-suites des termes de rang pair et impair, aient la même limite, converge aussi vers cette limite commune.

Par conséquent :  $\lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(2, D)}{2^D} = \frac{1}{2}$ . □

Reconsidérons pour  $m \geq 4$ , l'ensemble  $S_{2m}^*$  défini dans la démonstration du théorème 6.4.a.

Pour  $x \in \Phi_{2m}^{-1}(i)$ , avec  $-m \leq i \leq -2$ , d'après le lemme 6.3.a, les voisins de  $x$  sont contenus dans  $\Phi_{2m}^{-1}(-1-i)$ ,  $\Phi_{2m}^{-1}(-i)$  et  $\Phi_{2m}^{-1}(1-i)$  et comme  $-1-i$ ,  $-i$  et  $1-i$  sont tous supérieurs ou égaux à  $1$ , ces voisins sont dans  $A = \Phi_{2m}^{-1}(1) \cup \dots \cup \Phi_{2m}^{-1}(m)$ .

Pour  $x = x_1 x_2 \dots x_{2m}$  dans  $\Phi_{2m}^{-1}(-1)$ ,  $x_2 \dots x_{2m} x_1$  est un voisin de  $x$  appartenant à  $\Phi_{2m}^{-1}(1)$  donc à  $S_{2m}^*$ .

Soit  $x = x_1 x_2 \dots x_{2m}$  dans  $\Phi_{2m}^{-1}(0) \setminus B$ .

Si  $x_1 = 1$ , on vérifie facilement que  $x_2 \dots x_{2m} \bar{x}_1$  est un voisin de  $x$  appartenant à  $\Phi_{2m}^{-1}(1)$  donc à  $S_{2m}^*$ .



Si  $x_1 = 0$ , on a  $x_{2m} = 0$  et on vérifie aisément que  $1x_1 \dots x_{2m-1}$  est un voisin de  $x$  appartenant à  $\Phi_{2m}^{-1}(1)$  donc à  $S_{2m}^*$ .

Tout cela montre que  $S_{2m}^*$  est un stable de  $UB(2, 2m)$  tel que tout sommet n'appartenant pas à  $S_{2m}^*$ , soit adjacent à au moins un sommet de  $S_{2m}^*$ .

Comme  $S_{2m}^*$  n'admet pas de sommet à boucle, cela montre que  $S_{2m}^*$  est un stable maximal de  $B(2, 2m)$  (c'est à dire un stable tel que l'ajout d'un sommet crée au moins un arc) tel que tout sommet n'appartenant pas à  $S_{2m}^*$  soit adjacent à au moins un sommet de  $S_{2m}^*$ .

Dans [2], R. D. Bryant et H. Fredricksen, ont conjecturé qu'asymptotiquement, le cardinal d'un tel ensemble de  $B(2, D)$  (Cover set) ne peut pas dépasser les  $\frac{4}{9}$  du nombre de sommets

de  $B(2, D)$ , soit  $\frac{4}{9} \times 2^D$ . Or, on a vu que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{|S_{2m}^*|}{2^{2m}} = \frac{1}{2}$ , ce qui réfute cette conjecture.

$S_{2m}^*$  s'identifie à un ensemble  $T'_{2m+1}$  de classes de  $B_3(2, 2m+1)$ . Il est alors facile de prouver que l'ensemble  $T_{2m+1} = \bigcup_{C \in T'_{2m+1}} C$  est un stable maximal de  $B(2, 2m+1)$ , de cardinal

$2 |S_{2m}^*| = 2^{2m} - C_{2m}^m + 2C_{2m-2}^{m-2}$  et tel que tout sommet n'appartenant pas à  $T_{2m+1}$ , ait au moins un voisin dans  $T_{2m+1}$ . Comme  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{|T_{2m+1}|}{2^{2m+1}} = \frac{1}{2}$ , la conjecture est de nouveau réfutée.

On remarquera que l'ensemble  $S_{2m+1}^*$  défini dans la preuve du théorème 6.4.a, est distinct de  $T_{2m+1}$ , a le même cardinal que  $T_{2m+1}$ , et possède toutes les propriétés citées de  $T_{2m+1}$ .

Nous allons maintenant traiter le cas où  $d \geq 2$  est quelconque. Nous énonçons d'abord :

**Théorème 6.6.** *Pour  $d$  pair  $\geq 2$  et pour  $D \geq 2$ , on a :*

$$\alpha^*(d, D) \geq \alpha^*(2, D) \times \left(\frac{d}{2}\right)^D.$$

**Démonstration :** Il existe un stable  $A$  de  $UB(2, D)$ , n'ayant pas de sommets à boucle, tel que  $|A| = \alpha^*(2, D)$ .

Soit  $g$  l'application de  $\mathbf{Z}_d$  dans  $\mathbf{Z}_2$ , définie par :

$$g(i) = 0 \text{ si } 0 \leq i \leq \frac{d}{2} - 1 \text{ et } g(i) = 1 \text{ si } \frac{d}{2} \leq i \leq d - 1.$$

D'après la proposition 3.4,  $f_g^{-1}(A)$  est un stable de  $UB(d, D)$ . Comme  $f_g^{-1}(A)$  n'a pas de sommets à boucle et comme  $|f_g^{-1}(A)| = |A| \times \left(\frac{d}{2}\right)^D$ , on a  $\alpha^*(d, D) \geq |A| \times \left(\frac{d}{2}\right)^D$ , soit

$$\alpha^*(d, D) \geq \alpha^*(2, D) \times \left(\frac{d}{2}\right)^D. \quad \square$$

On a aussi :

**Théorème 6.7.** *Pour  $d$  pair  $\geq 2$  et pour  $m \geq 4$ , on a :*

$$\mathbf{a) } \alpha^*(d, 2m) \geq \left(2^{2m-1} - \frac{C_{2m}^m}{2} + C_{2m-2}^{m-2}\right) \left(\frac{d}{2}\right)^{2m}.$$

$$\text{b) } \alpha^*(d, 2m + 1) \geq (2^{2m} - C_{2m}^m + 2C_{2m-2}^{m-2}) \left(\frac{d}{2}\right)^{2m+1}.$$

**Démonstration :** Ces assertions se démontrent très facilement à partir des Théorèmes 6.6 et 6.4. □

Asymptotiquement, cela donne :

**Théorème 6.8.** *Pour  $d$  pair  $\geq 2$ , on a :*

$$\lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(d, D)}{d^D} = \frac{1}{2}.$$

**Démonstration :** Cela se démontre facilement à l'aide de la Proposition 4.4 et du théorème précédent. □

Dans le cas où  $d \geq 2$  est impair, la démarche utilisée pour le Théorème 6.6, conduirait à une borne inférieure assez médiocre. Une borne plus pertinente est donnée par :

**Théorème 6.9.** *Pour  $d \geq 5$ , impair, on a :*

$$\alpha^*(d, D) \geq \frac{3(d^D - d^{D-6})}{7}.$$

**Démonstration :** En utilisant la valeur de  $\alpha^*(d, 7)$  donnée dans le théorème 5.6 et la proposition 5.2, le résultat est immédiat. □

Ce théorème, ne permet pas de prouver que pour  $d$  impair on a  $\lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(d, D)}{d^D} = \frac{1}{2}$ . Nous pensons néanmoins que cela est vrai.

## Références

- [1] I. Bond, Grands Réseaux d'Inteconnexion, Thèse de Doctorat, Université de Paris Sud, Orsay, 1987.
- [2] R.D Bryant, H. Fredricksen, Covering the de Bruijn graph, *Discr. Math.*, 89, 1991, 133-148.
- [3] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, Concrete Mathematics, Addison-Wesley, 1989.
- [4] R. Harbane, M.C Heydemann, P. Tvrđik, Uniform homomorphisms of de Bruijn and Kautz networks, C.N.R.S URA 410, Rapport de recherche n° 986, juin 1995.
- [5] Y. Kikuchi, Y. Shibata, On the independent set of de Bruijn graphs, 2001 World SES Intern. Conference on Algorithms Theory, Discrete Mathematics, Systems and Controls, Cairns, Australia, December (2001), in Topics in Applied and Theoretical Mathematics and Computer Science, ed. V.V Kluev and N.E Mastorakis, WSEAS Press, pp. 117-122 (2001).

# Independence number of iterated line digraphs

Nicolas Lichiardopol

I3S-ESSI, BP 145, 06903 Sophia Antipolis, France

e-mail : lichiar@club-internet.fr

## Abstract

In this paper we deal with the independence number of iterated line digraphs of a regular digraph  $G$ . We give pertinent lower bounds and give an asymptotic estimation of the ratio of the number of vertices of a largest independent set of the  $n$ -th iterated line digraph of  $G$ .

*Keywords* : line digraph, independent set, independence number.

## 1 Introduction, Notation

Initially, we were interested in the independence number of the De Bruijn digraphs. In [5], we have proved that asymptotically for a given even integer  $d \geq 2$ , the number of the vertices of a largest independent set of the de Bruijn digraph  $B(d, D)$  is one half of the number of vertices of  $B(d, D)$ . It is known that  $B(d, D)$  is the  $D - 1$ -th iterated line digraph of  $B(d, 1)$ .

In our paper, we generalize this result, more precisely, we prove that, asymptotically, for a regular digraph  $G$  of degree  $d \geq 2$  (even or not), the ratio of the number of vertices of a largest independent set of the  $n$ -th iterated line digraph  $L^n(G)$  of  $G$  is  $\frac{1}{2}$ .

Some notation and basic definitions are necessary.

We consider digraphs  $G$  without multiple arcs. We denote by  $V(G)$  the vertex set of  $G$  and by  $v(G)$  its cardinality. We denote by  $\mathcal{A}(G)$  the set of arcs of  $G$ . For an arc  $(x, y)$ ,  $x$  is the starting point and  $y$  is the ending point.

For  $x \in V(G)$ , a vertex  $y$  such that  $(x, y) \in \mathcal{A}(G)$  is a successor of  $x$ .  $N_G^+(x)$  is the set of successors of  $x$ . The outdegree  $d_G^+(x)$  of  $x$  is the number of successors of  $x$ . A vertex  $y$  such that  $(y, x) \in \mathcal{A}(G)$ , is a predecessor of  $x$ .  $N_G^-(x)$  is the set of predecessors of  $x$ . The indegree  $d_G^-(x)$  of  $x$  is the number of predecessors of  $x$ .

An element  $x$  of  $V(G)$  such that  $(x, x) \in \mathcal{A}(G)$  is called a vertex with loop and the arc  $(x, x)$  is a loop. We denote by  $V_L(G)$  the set of vertices with loop and  $v_L(G)$  its cardinality.

A regular digraph of degree  $d$  is a digraph  $G$  such that  $d_G^+(x) = d_G^-(x) = d$  for any  $x \in V(G)$ .

For a digraph  $G$ , the line digraph  $L(G)$  is the digraph whose vertex set is  $\mathcal{A}(G)$  and whose arcs are the pairs  $((x, y), (y, z))$  where  $(x, y)$  and  $(y, z)$  are arcs of  $G$ . Clearly, for each arc  $(x, y) \in \mathcal{A}(G)$ , we have  $d_{L(G)}^+((x, y)) = d_G^+(y)$  and  $d_{L(G)}^-((x, y)) = d_G^-(x)$ . It is also clear that  $V_L(L(G)) = \{(x, x); x \in V_L(G)\}$ .

For an integer  $n \geq 1$ , the  $n$ -th iterated line digraph is the digraph defined recursively by  $L^1(G) = L(G)$  and  $L^n(G) = L(L^{n-1}(G))$ .

$L^n(G)$  is also the digraph whose vertices are the walks of  $G$  of length  $n$  and whose arcs are the pairs  $(x_1 \dots x_{n+1}, y_1 \dots y_{n+1})$  of walks of length  $n$ , with  $x_2 \dots x_{n+1} = y_1 \dots y_n$ .

For a vertex  $x = x_1 \dots x_i \dots x_{n+1}$  of  $L^n(G)$ ,  $p_i(x) = x_i$  is the  $i$ -th coordinate of  $x$ .

It is easy to prove that for any  $n \geq 1$ , we have  $v_L(L^n(G)) = v_L(G)$ .

It is clear that for a regular digraph of degree  $d$ ,  $L^n(G)$  is a regular digraph of degree  $d$  with

$$v(L^n(G)) = v(G)d^n.$$

It is known that a line digraph  $G$  has the following property (P) :

- for vertices  $x$  and  $y$  of  $G$ , we have either  $N_G^+(x) = N_G^+(y)$  or  $N_G^+(x) \cap N_G^+(y) = \emptyset$ .

It was proved that a digraph is a line digraph if and only if it has property (P) (see [3]).

For  $d \geq 2$  and  $D \geq 2$ , the De Bruijn digraph  $B(d, D)$  is the digraph whose vertex set is  $\mathbb{Z}_d^D$  and whose arcs are the couples  $(x_1x_2\dots x_D, x_2\dots x_Di)$  with  $i \in \mathbb{Z}_d$ . The De Bruijn digraph  $B(d, 1)$  is the complete digraph  $K_d^+$  (with a loop in each vertex).  $B(d, D)$  is a regular digraph of degree  $d$ . The undirected De Bruijn graph  $UB(d, D)$  is the underlying graph of  $B(d, D)$ .

An independent set  $S$  of a digraph  $G$ , is a set of vertices such that there are no arcs between any two distinct elements of  $S$ . The independence number of  $G$  is the maximum cardinality of the independent sets of  $G$  and is denoted by  $\alpha(G)$ .

## 2 Results on regular line digraphs

Our first result is :

**Proposition 2.1** *For any regular line digraph  $H$  of degree  $d \geq 2$ , we have :*

$$\alpha(H) \leq \frac{v(H)}{2}.$$

**Proof.** Let  $S$  be an independent set of  $H$  with  $|S| = s = \alpha(H)$ .

If  $S$  does not contain vertices with loop, every vertex  $x$  of  $S$  has its neighbours in  $V(H) \setminus S$ .

Consequently there are  $2sd$  arcs between  $S$  and  $V(H) \setminus S$ . And since  $|A(H)| = dv(H)$ , we have  $2sd \leq dv(H)$  hence  $\alpha(H) \leq \frac{v(H)}{2}$ .

Now, suppose that  $S$  contains  $r$  vertices with loop and let  $S'$  be the set of these vertices.

Then there are  $2d(s - r) + (2d - 1)r = 2sd - r$  arcs having an extremity in  $S$ .

Let us consider the sets  $A(x) = (N_H^-(x) \setminus \{x\}) \times (N_H^+(x) \setminus \{x\})$  with  $x \in S'$ .

We state that for distinct vertices  $x$  and  $y$  of  $S'$ , we have  $N_H^-(x) \cap N_H^-(y) = \emptyset$ . Indeed, suppose  $u \in N_H^-(x) \cap N_H^-(y)$ . Since  $x \in N_H^+(x)$  and  $x \in N_H^+(u)$ , we have  $N_H^+(x) = N_H^+(u)$ . Since  $y \in N_H^+(u)$ , we have  $y \in N_H^+(x)$ , which is impossible (because  $S$  is independent). So,  $N_H^-(x) \cap N_H^-(y) = \emptyset$  and this implies  $A(x) \cap A(y) = \emptyset$ .

For a pair  $(u, v)$  of  $A(x)$ , since  $(u, x)$  and  $(x, v)$  are arcs of  $H$  and since  $S$  is independent,  $u$  and  $v$  are in  $V(H) \setminus S$ . We have seen that  $N_H^+(x) = N_H^+(u)$  and since  $v \in N_H^+(x)$ , we deduce  $v \in N_H^+(u)$  and so  $(u, v)$  is an arc with both extremities in  $V(H) \setminus S$ .

Consequently, we have  $r(d - 1)^2$  new arcs of  $H$  and then :

$$2sd - r + r(d - 1)^2 \leq dv(H) \text{ and since } (d - 1)^2 \geq 1, \text{ again we deduce } \alpha(H) \leq \frac{v(H)}{2}.$$

So, the result is proved. ■

**Proposition 2.2** *Let  $H$  be a regular line digraph of degree  $d$ . Let  $r$  be an integer satisfying  $0 \leq r \leq d$ . Then, there exists a map  $f$  from  $V(H)$  into  $\{0, 1\}$ , such that for any  $x \in V(H)$ ,  $r$  vertices of  $N_H^+(x)$  have 1 as image and the other  $d - r$  vertices of  $N_H^+(x)$  have 0 as image.*

**Proof.** Since  $H$  has property (P) and since every vertex  $x$  has exactly  $d$  predecessors and  $d$  successors, there exists a partition  $V_1, \dots, V_p$  of  $V(H)$  with  $|V_1| = \dots = |V_p| = d$ , such that for each vertex  $x$  of  $H$  there exists  $i \in \{1, \dots, p\}$  such that  $N_H^+(x) = V_i$ .

Clearly, we can define a map from  $V(H)$  into  $\{0, 1\}$  such that  $|V_i \cap f^{-1}(1)| = r$  for  $i$  in  $\{1, \dots, p\}$ . This means  $|N_H^+(x) \cap f^{-1}(1)| = r$  for any vertex  $x$  of  $H$ , and so the result is proved. ■

Note that the result does not necessarily hold if  $H$  is not a line digraph.

We denote  $F_r(H)$  the set of functions  $f : V(H) \rightarrow \{0, 1\}$  such that for any  $x \in V(H)$ ,  $r$  vertices of  $N_H^+(x)$  have 1 as image and the other  $d - r$  vertices of  $N_H^+(x)$  have 0 as image.

We denote  $F(H) = \bigcup_{0 \leq r \leq d} F_r(H)$ .

It is easy to see that for a function  $f \in F_r(H)$ , we have :

$$|f^{-1}(1)| = \frac{v(H)}{d}r \text{ and } |f^{-1}(0)| = \frac{v(H)}{d}(d - r).$$

It is clear that if  $f \in F(H)$ , the function  $1 - f$ , defined by  $(1 - f)(x) = 1 - f(x)$ , belongs to  $F(H)$ , more precisely  $f \in F_r(H) \Leftrightarrow 1 - f \in F_{d-r}(H)$ .

### 3 Lower bounds on $\alpha(L^n(G))$ , asymptotic study

Before we announce the main results, some notation and results are necessary.

**Theorem 3.1** For  $0 < x < 1$ , we have :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k}^2 x^{2k} (1 - x)^{2m - 2k} = 0.$$

The proof which follows, shorter than our initially proof, was suggested by one of the referees.

We begin by :

**Lemma 3.2** For  $0 < x < 1$ , We have :  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \binom{m}{w_m} x^{w_m} (1 - x)^{m - w_m} = 0$ , where  $w_m = \lfloor (m + 1)x \rfloor$  for  $m \in \mathbb{N}^*$ .

**Proof.** We can write  $(m + 1)x = w_m + r_m$  with  $0 \leq r_m < 1$ , and then  $x = \frac{w_m + r_m}{m + 1}$ .

We denote  $b_m = \binom{m}{w_m} x^{w_m} (1 - x)^{m - w_m}$ . We have :

$$b_m = \binom{m}{w_m} \left( \frac{w_m + r_m}{m + 1} \right)^{w_m} \left( \frac{m - w_m + 1 - r_m}{m + 1} \right)^{m - w_m}, \text{ that is}$$

$$b_m = \frac{m!}{w_m!(m - w_m)!} \times \frac{(w_m + r_m)^{w_m} (m - w_m + 1 - r_m)^{m - w_m}}{(m + 1)^m}.$$

By Stirling formula (see [2] for proofs), we know that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$ .

Let us denote  $U_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}}$ .

It is easy to prove that  $\lim_{m \rightarrow +\infty} w_m = +\infty$  and  $\lim_{m \rightarrow +\infty} m - w_m = +\infty$ .

Consequently, we have  $\lim_{m \rightarrow +\infty} U_{w_m} = 1$  that is  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{w_m!}{\left(\frac{w_m}{e}\right)^{w_m} \sqrt{2\pi w_m}} = 1$  and

$\lim_{m \rightarrow +\infty} U_{m-w_m} = 1$  that is  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{(m-w_m)!}{\left(\frac{m-w_m}{e}\right)^{m-w_m} \sqrt{2\pi(m-w_m)}} = 1$

This implies that the sequence  $b_n$  is equivalent when  $m \rightarrow +\infty$  to the sequence

$$v_m = \frac{\left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m}}{2\pi \left(\frac{w_m}{e}\right)^{w_m} \left(\frac{m-w_m}{e}\right)^{m-w_m} \sqrt{w_m(m-w_m)}} \times \frac{(w_m+r_m)^{w_m} (m-w_m+1-r_m)^{m-w_m}}{(m+1)^m}$$

that is :

$$v_m = \sqrt{\frac{m}{2\pi w_m(m-w_m)}} \times \frac{m^m}{(m+1)^m} \times \frac{(w_m+r_m)^{w_m}}{w_m^{w_m}} \times \frac{(m-w_m+1-r_m)^{m-w_m}}{(m-w_m)^{m-w_m}}$$

We have  $\frac{m^m}{(m+1)^m} < 1$ . We have also

$$\frac{(w_m+r_m)^{w_m}}{w_m^{w_m}} \leq \left(1 + \frac{1}{w_m}\right)^{w_m} \quad \text{and} \quad \frac{(m-w_m+1-r_m)^{m-w_m}}{m-w_m^{m-w_m}} \leq \left(1 + \frac{1}{m-w_m}\right)^{m-w_m} \quad \text{and}$$

as

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{w_m}\right)^{w_m} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m-w_m}\right)^{m-w_m} = e, \quad \text{the sequences } \frac{(w_m+r_m)^{w_m}}{w_m^{w_m}}$$

and  $\frac{(m-w_m+1-r_m)^{m-w_m}}{(m-w_m)^{m-w_m}}$  are bounded.

As  $\frac{m}{w_m(m-w_m)} = \frac{m}{(mx+x-r_m)(m(1-x)-x+r_m)}$ , clearly, we have :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m}{w_m(m-w_m)} = 0.$$

It follows  $\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m = 0$ , hence  $\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = 0$ . So, the lemma is proved.  $\blacksquare$

Now, we can prove Theorem 3.1 :

For fixed  $x$ ,  $0 < x < 1$  and for  $0 \leq k \leq m$ , we denote  $F_k = \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}$ .

Let us put  $\varphi(m) = \max_{0 \leq k \leq m} F_k$ . We have :



$\sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k}^2 x^{2k} (1-x)^{2m-2k} \leq \varphi(m) \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k}$  that is :

$$\sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k}^2 x^{2k} (1-x)^{2m-2k} \leq \varphi(m).$$

We have  $\frac{F_{k+1}}{F_k} = \frac{(m-k)x}{(k+1)(1-x)} < 1$  for  $k > (m+1)x - 1$  and  $\frac{F_{k+1}}{F_k} > 1$  for  $k < (m+1)x - 1$ .

This means that the maximum of  $F_k$  is reached for  $k = \lfloor (m+1)x \rfloor = w_m$ .

Consequently,  $\varphi(m) = F_{w_m}$  and by Lemma 4.1, we have  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \varphi(m) = 0$ , which implies

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq n \leq m} \binom{m}{n}^2 x^{2n} (1-x)^{2m-2n} = 0. \text{ So, Theorem 3.1 is proved.}$$

Let  $G$  be a regular digraph of degree  $d \geq 2$  and let us denote  $H = L(G)$ .

We fix an integer  $r$  satisfying  $1 \leq r \leq d-1$  and an element  $f$  of  $F_r(H)$ .

For an integer  $n \geq 1$ , we define  $\Psi_{H,f,n} : V(L^n(H)) \rightarrow \mathbb{Z}$  by

$$\Psi_{H,f,n}(x_1 \dots x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i \leq n+1} (-1)^{i+1} f(x_i).$$

It is clear that  $\Psi_{H,f,n}(x)$  is minimum when the coordinates in odd rows of  $x$  have 0 as image

by  $f$  and the coordinates in even rows have 1 as image and that  $\Psi_{H,f,n}(x)$  is maximum when

the opposite holds. Consequently,  $\Psi_{H,f,n}(x)$  goes from  $-\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$  to  $\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$ .

It is clear that if  $n$  is odd, for  $x \in V(L^n(H))$  we have  $\Psi_{H,f,n}(x) = -\Psi_{H,1-f,n}(x)$  and that if

$n$  is even, for  $x \in V(L^n(H))$  we have  $\Psi_{H,f,n}(x) = 1 - \Psi_{H,1-f,n}(x)$ .

**Lemma 3.3** *Let  $m \geq 2$  be an integer. For  $0 \leq i \leq m$ , we have :*

$$a) |\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(i)| = \frac{v(H)}{d} \sum_{0 \leq k \leq m-i} \binom{m}{k} \binom{m}{k+i} r^{2k+i} (d-r)^{2m-2k-i}.$$

$$b) |\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(-i)| = |\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(i)|.$$

**Proof.** a) For  $0 \leq k \leq m-i$ , let us denote by  $A_{i,k}$  the set of vertices  $x = x_1 \dots x_{2m}$  of

$L^{2m-1}(H)$  such that exactly  $k+i$  coordinates of  $x$  in odd rows have 1 as image by  $f$  and

exactly  $k$  coordinates of  $x$  in even rows have 1 as image by  $f$ .

Clearly the  $A_{i,k}$ ,  $0 \leq k \leq m - i$  are disjoint and  $\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(i) = \bigcup_{0 \leq k \leq m-i} A_{i,k}$

Let us consider first  $1 \leq i \leq m - 1$  (which implies  $m \geq 2$ ).

For  $0 \leq k \leq m - i - 1$  the number of vertices  $x_1 \dots x_{2m}$  of  $A_{i,k}$  with  $f(x_1) = 1$  is :

$$\frac{v(H)}{d} r \binom{m-1}{k+i-1} r^{k+i-1} (d-r)^{m-k-i} \binom{m}{k} r^k (d-r)^{m-k}, \text{ that is}$$

$$\frac{v(H)}{d} \binom{m-1}{k+i-1} \binom{m}{k} r^{2k+i} (d-r)^{2m-2k-i}.$$

The number of vertices  $x_1 \dots x_{2m}$  of  $A_{i,k}$  with  $f(x_1) = 0$  is :

$$\frac{v(H)}{d} (d-r) \binom{m-1}{k+i} r^{k+i} (d-r)^{m-k-i-1} \binom{m}{k} r^k (d-r)^{m-k}, \text{ that is}$$

$$\frac{v(H)}{d} \binom{m-1}{k+i} \binom{m}{k} r^{2k+i} (d-r)^{2m-2k-i}. \text{ Then, for } 0 \leq k \leq m - i - 1, \text{ we deduce :}$$

$$|A_{i,k}| = \frac{v(H)}{d} \binom{m}{k} \binom{m}{k+i} r^{2k+i} (d-r)^{2m-2k-i} \text{ and it easy to see that this last equality is true}$$

also for  $k = m - i$ .

Consequently, for  $1 \leq i \leq m - 1$  we have :

$$|\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(i)| = \frac{v(H)}{d} \sum_{0 \leq k \leq m-i} \binom{m}{k} \binom{m}{k+i} r^{2k+i} (d-r)^{2m-2k-i}.$$

In a similar way, one can prove that the result holds for  $i \in \{0, m\}$ .

b) It is clear that if  $\Psi_{H,f,2m-1}(x) = -i$ , we have  $\Psi_{H,1-f,2m-1}(x) = i$  and so

$\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(-i) = \Psi_{H,1-f,2m-1}^{-1}(i)$ . By the proof of part (a), we have

$$|\Psi_{H,1-f,2m-1}^{-1}(i)| = \frac{v(H)}{d} \sum_{0 \leq k \leq m-i} \binom{m}{k} \binom{m}{k+i} (d-r)^{2k+i} r^{2m-2k-i}. \text{ It is easy to prove that :}$$

$$\sum_{0 \leq k \leq m-i} \binom{m}{k} \binom{m}{k+i} (d-r)^{2k+i} r^{2m-2k-i} = \sum_{0 \leq k \leq m-i} \binom{m}{k} \binom{m}{k+i} r^{2k+i} (d-r)^{2m-2k-i}.$$

This implies  $|\Psi_{H,1-f,2m-1}^{-1}(i)| = |\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(i)|$ , hence  $|\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(-i)| = |\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(i)|$ . ■

The following result is essential:

**Lemma 3.4** *If  $x \in \Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(i)$  and  $y \in \Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(j)$  are adjacent in  $L^{2m-1}(H)$ , we have*

$$i + j \in \{-1, 0, 1\}.$$

**Proof.** Let  $x = x_1 \dots x_{2m}$  and  $y = y_1 \dots y_{2m}$ .

We have  $f(x_1) - f(x_2) + \dots + f(x_{2m-1}) - f(x_{2m}) = i$  and

$$f(y_1) - f(y_2) + \dots + f(y_{2m-1}) - f(y_{2m}) = j.$$

If  $y$  is a successor of  $x$ , by adding, we obtain

$$f(x_1) - f(y_{2m}) = i + j, \text{ which implies } i + j \in \{-1, 0, 1\}.$$

If  $y$  is a predecessor of  $x$ , by adding, we obtain  $f(y_1) - f(x_{2m}) = i + j$ , which again implies  $i + j \in \{-1, 0, 1\}$ . ■

Now, we can give pertinent lower bounds :

**Theorem 3.5** *Let  $m \geq 2$  be an integer and let us denote*

$$N(m, d, r) = \frac{1}{2}d^{2m} - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k}^2 r^{2k} (d-r)^{2m-2k} + \sum_{k=0}^{m-2} \binom{m-1}{k} \binom{m-1}{k+1} r^{2k+2} (d-r)^{2m-2k-2}.$$

*Then :*

$$a) \alpha(L^{2m}(G)) \geq v(G)N(m, d, r).$$

$$b) \alpha(L^{2m+1}(G)) \geq dv(G)N(m, d, r).$$

**Proof.** Let us define sets  $A_m$  and  $B_m$ , by :

$$A_m = \Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(1) \cup \dots \cup \Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(m), \text{ and}$$

$$B_m = \{x \in \Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(0); f(p_1(x)) = 0, f(p_{2m}(x)) = 1\}.$$

Clearly,  $A_m$  and  $B_m$  are disjoint. Since for  $i$  and  $j$  in  $\{1, \dots, m\}$ , we have  $i + j \notin \{-1, 0, 1\}$ ,

Lemma 3.3 implies that  $A_m$  is an independent set of  $L^{2m-1}(H) = L^{2m}(G)$ .

$B_m$  is also an independent set of  $L^{2m}(G)$ .

Indeed, the existence of an arc  $(x_1 \dots x_{2m}, y_1 \dots y_{2m})$  with extremities in  $B_m$  would imply

$$f(x_1) - f(x_2) + \dots + f(x_{2m-1}) - f(x_{2m}) = 0, f(y_1) - f(y_2) + \dots + f(y_{2m-1}) - f(y_{2m}) = 0 \text{ and}$$

by addition, we would have  $f(x_1) - f(y_{2m}) = 0$ , that is  $-1 = 0$ , which is false.

A vertex of  $A_m$  and a vertex of  $B_m$  are not linked.

Indeed, suppose that there exists an arc  $(x, y)$  with extremities in  $A_m$  and  $B_m$ .

By denoting  $x = x_1 \dots x_{2m}$  and  $y = y_1 \dots y_{2m}$ , we get :

$$f(x_1) - f(y_{2m}) = \Psi_{H,f,2m-1}(x) + \Psi_{H,f,2m-1}(y).$$

If  $x$  is in  $A_m$  and  $y$  is in  $B_m$ , we have  $f(x_1) - 1 = \Psi_{H,f,2m-1}(x)$ , hence  $\Psi_{H,f,2m-1}(x) \in \{-1, 0\}$ , which is false. And if  $x$  is in  $B_m$  and  $y$  is in  $A_m$ , we get  $-f(y_{2m}) = \Psi_{H,f,2m-1}(y)$ , again false.

We conclude that  $A_m \cup B_m$  is an independent set of  $L^{2m}(G)$ .

Since  $|\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(-i)| = |\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(i)|$  for  $1 \leq i \leq m$ , we deduce

$$|A_m| = \frac{v(G)d^{2m} - |\Psi_{H,f,2m-1}^{-1}(0)|}{2}.$$

The elements  $x_1 \dots x_{2m}$  of  $B_m$  are characterized by :

$$f(x_1) = 0, f(x_{2m}) = 1 \text{ and } f(x_2) - f(x_3) + \dots + f(x_{2m-2}) - f(x_{2m-1}) = -1.$$

By Lemma 3.2b, we deduce that  $|B_m| = r(d-r)|\Psi_{H,f,2m-3}^{-1}(1)|$ , let

$$|B_m| = v(G)r(d-r) \sum_{0 \leq k \leq m-2} \binom{m-1}{k} \binom{m-1}{k+1} r^{2k+1} (d-r)^{2m-3-2k}.$$

Since  $A_m \cup B_m$  is independent, we have  $\alpha(L^{2m}(G)) \geq |A_m \cup B_m|$  and the assertion is proved.

b) We have  $L^{2m+1}(G) = L^{2m}(H)$ . By applying the previous conclusion, the result follows.

■

This theorem yields in fact  $d-1$  lower bounds of  $\alpha(L^n(G))$  and we conjecture that the best lower bound is provided by  $r = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor$

Now we can give the main result :

**Theorem 3.6** *For a regular digraph  $G$  of degree  $d \geq 2$ , we have :*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(L^n(G))}{v(L^n(G))} = \frac{1}{2}.$$

**Proof.** For  $m \in \mathbb{N}$  and  $1 \leq r \leq d-1$ , from Theorem 3.4 and Proposition 2.1 we deduce :

$$v(G) \left( \frac{1}{2} d^{2m} - \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k}^2 r^{2k} (d-r)^{2m-2k} \right) \leq \alpha(L^{2m}(G)) \leq \frac{v(L^{2m}(G))}{2}, \text{ hence}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{0 \leq k \leq m} \binom{m}{k}^2 \left( \frac{r}{d} \right)^{2k} \left( \frac{d-r}{d} \right)^{2m-2k} \leq \frac{\alpha(L^{2m}(G))}{v(L^{2m}(G))} \leq \frac{1}{2}.$$

By Theorem 3.1, we have  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{0 \leq n \leq m} \binom{m}{n}^2 \left(\frac{r}{d}\right)^{2n} \left(\frac{d-r}{d}\right)^{2m-2n} = 0$ . It follows that :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(L^{2m}(G))}{v(L^{2m}(G))} = \frac{1}{2}.$$

Similarly one can prove that  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(L^{2m+1}(G))}{v(L^{2m+1}(G))} = \frac{1}{2}$ .

Consequently, we have  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(L^n(G))}{v(L^n(G))} = \frac{1}{2}$ . ■

A cover set of a digraph  $G$  is an independent set  $S$  of  $G$  with no loops and such that any vertex in  $V(G) \setminus S$  has at least one neighbour in  $S$ . We denote by  $\alpha'(G)$  the maximum cardinality of the cover sets of  $G$ .

It is not difficult to prove that for a regular digraph  $G$  of degree  $d \geq 2$ ,  $A_m \cup B_m$  is a cover set of  $L^{2m}(G)$  ( $A_m$  and  $B_m$  being the sets defined in the proof of Theorem 3.4).

As for Theorem 3.5, this implies that  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha'(L^n(G))}{v(L^n(G))} = \frac{1}{2}$ .

In particular, this disproves a conjecture of R.D. Bryant and H. Fredricksen (see [1]) stating that asymptotically, the number of the vertices of a cover set of the binary de Bruijn digraph  $B(2, D)$ , cannot exceed  $\frac{4}{9}$  of the total number,  $2^D$ , of vertices of  $B(2, D)$ . This conjecture had already been disproved by the author in [4].

## acknowledgements

I would like to thank Claudine Peyrat and the referees for their helpful comments.

## References

- [1] R.D. Bryant, H. Fredricksen, *Covering the de Bruijn graph*, Discrete Math., 89, 1991, 133-148.
- [2] R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison Wesley, 1989.

- [3] C. Heuchenne, *Sur une certaine correspondance entre graphes*, Bull. Soc. Roy. Sci; Liege, 33 (1964), 743-753.
- [4] N. Lichiardopol, *Nombre de stabilité d'un graphe non orienté de de Broujn*, submitted to Discrete. Math., 2003.

## **CHAPITRE 7**

# **QUASI CENTRES ET RAYON DES GRAPHES DE DE BRUIJN ET DE KAUTZ**





## 1. Introduction

Dans sa thèse (voir [4]), J. Bond a proposé trois conjectures portant sur les graphes de de Bruijn et de Kautz.

**La première conjecture** affirme que le rayon d'un graphe non orienté de de Bruijn  $UB(2, D)$  est  $D-1$ .

**La deuxième conjecture** affirme que le nombre minimum de sommets d'un quasi-centre de  $UB(d, D)$  est  $d-1$ .

**La troisième conjecture** affirme que le rayon du graphe non orienté de Kautz  $UK(2, D)$  est  $D$ .

De leur côté, J.C Bermond, J. Bond, S. Rudich, M. Santha, W. Fernandez de la Vega pensent dans leur article (référence [1] des sections suivantes) que le nombre minimum de sommets d'un quasi-centre de  $UK(d, D)$  est  $d$ , ce qui fait **une quatrième conjecture**.

Rappelons qu'un **quasi-centre** d'un graphe  $G$  est un ensemble  $S$  de sommets de  $G$  tel que pour tout sommet  $x$  de  $G$ , le minimum des distances de  $x$  au sommets de  $S$  est plus petit que le diamètre  $D(G)$  et que le **rayon de  $G$**  est le minimum des excentricités des sommets de  $x$ , l'**excentricité d'un sommet  $x$**  étant la plus grande des distances entre  $x$  et les autres sommets de  $G$ .

**Dans le premier article**, soumis à « Discrete Mathematics », nous montrons la deuxième conjecture. La technique utilisée est basée sur la construction à partir d'un graphe orienté de de Bruijn  $B(d, D)$ , avec  $D \geq 2$ , d'un graphe orienté isomorphe à  $B(d, D-1)$ . Cette construction, avec deux autres constructions, a été décrite dans le premier article du chapitre 6. La validité de cette deuxième conjecture implique d'une manière assez évidente que pour  $d > 2$ , le rayon du graphe de de Bruijn  $UB(d, D)$  est  $D$ , résultat qui avait déjà été prouvé par J. Bond dans sa thèse.

**Dans le deuxième article**, soumis depuis peu à « Discrete Mathematics », nous démontrons la quatrième conjecture, puis la troisième conjecture. La technique utilisée est similaire à celle utilisée pour le premier article, dans le sens que nous définissons à partir d'un graphe orienté de Kautz  $UK(d, D)$ , avec  $D \geq 2$ , un graphe orienté isomorphe à  $UK(d, D-1)$ . La validité de la quatrième conjecture implique, cette fois-ci pour  $d \geq 2$ , que le rayon du graphe  $UK(d, D)$  est  $D$ , ce qui du coup valide la troisième conjecture. La aussi le résultat avait déjà été prouvé pour  $d > 2$ .

Il reste la première conjecture qui a résisté à tous nos efforts. On pourra se rendre compte que le fait qu'avec des outils semblables, on puisse prouver la troisième conjecture mais pas la deuxième conjecture est due au fait que  $UK(d, D)$  n'admet pas des sommets à boucle, alors que  $UB(d, D)$  en admet.



# Proof of a conjecture on the size of a quasi-center in an undirected de Bruijn graph. Radius of such a graph

Nicolas Lichiardopol

I3S-ESSI, BP 145, 06903 Sophia Antipolis, France

e-mail : lichiar@club-internet.fr

## Abstract

J. Bond in [2] and J.C Bermond, J. Bond, S. Rudich, M. Santha, W. Fernandez de la Vega in [1] conjectured that a quasi-center in an undirected de Bruijn graph  $UB(d, D)$  has cardinality at least  $d - 1$ .

They also proved that for  $d \geq 3$ , the radius of  $UB(d, D)$  is  $D$ .

In this paper, first we prove this conjecture and then we prove in new ways that for  $d \geq 3$  the radius of  $UB(d, D)$  is  $D$ .

*Keywords* : De Bruijn graph, quasi-center, radius, walk.

## 1 Introduction, notation

Let  $G$  be a connected graph. The distance  $d(x, y)$  between two vertices  $x$  and  $y$  of  $G$  is the length of a shortest path between them. For a set of vertices  $S$  and a vertex  $x$ ,  $d(S, x)$

is the minimum of the distances between  $x$  and any vertex of  $S$ . The eccentricity  $e(x)$  of  $x$  is the maximum of the distances  $d(x, y)$  where  $y$  belongs to the vertex set  $V(G)$  of  $G$ . The diameter  $D(G)$  of  $G$  is the maximum of the eccentricities of the vertices. The radius  $R(G)$  of  $G$  is the minimum of the eccentricities.

A set  $S$  of vertices is called a quasi-center if for every  $x \in V(G)$ , we have  $d(S, x) < D(G)$ .

In a strongly connected digraph  $G$ , the distance  $d(x, y)$  from  $x$  to  $y$  is the length of a shortest directed path from  $x$  to  $y$ . The diameter  $D(G)$  is the maximum length of shortest directed paths.

For an integer  $d \geq 2$ ,  $\mathbb{Z}_d$  is the set of the integers modulo  $d$ . For  $D \geq 1$ , an element  $(x_1, \dots, x_D)$  of  $\mathbb{Z}_d^D$  is noted  $x_1 \dots x_D$ .

For  $d \geq 2$  and  $D \geq 2$ , the de Bruijn digraph  $B(d, D)$  is the digraph whose vertex set is  $\mathbb{Z}_d^D$  and whose arcs are the couples  $(x_1 x_2 \dots x_D, y_1 \dots y_{D-1} y_D)$  such that  $x_2 \dots x_D = y_1 \dots y_{D-1}$ .

The de Bruijn digraph  $B(d, 1)$  is the complete digraph  $K_d^+$  (with a loop at each vertex).

For  $i \in \mathbb{Z}_d$ , we note  $i_{d,D} = i \dots i$ . There are the vertices with loop of  $B(d, D)$ .

We recall that  $B(d, D)$  is a strongly connected regular digraph of degree  $d$  and of diameter  $D$ .

The undirected de Bruijn graph  $UB(d, D)$  is the underlying graph of  $B(d, D)$ . We recall that  $UB(d, D)$  has  $D$  as diameter. The notation which follows is that of [5] :

A walk of length  $m$  of  $UB(d, D)$  is a sequence  $X_1, \dots, X_{m+1}$  of vertices of  $UB(d, D)$  such that  $X_{i+1}$  is a neighbour of  $X_i$  for  $1 \leq i \leq m$ .

A L-walk of length  $m$  of  $UB(d, D)$  is a walk  $X_1, \dots, X_{m+1}$  such that  $X_{i+1}$  is a successor of  $X_i$  in  $B(d, D)$  for  $1 \leq i \leq m$ .

A R-walk of length  $m$  of  $UB(d, D)$  is a walk  $X_1, \dots, X_{m+1}$  such that  $X_{i+1}$  is a predecessor of  $X_i$  in  $B(d, D)$  for  $1 \leq i \leq m$ .

A LR-walk of length  $m$  is a walk  $X_1, \dots, X_{m+1}$  such that there exists  $i$ ,  $1 < i < m + 1$  such that  $X_1, \dots, X_i$  is a L-walk and  $X_i, \dots, X_{m+1}$  is a R-walk.

## 2 De Bruijn digraph of diameter $D - 1$ defined from $B(d, D)$

Let us consider for  $d \geq 2$  and  $D \geq 2$  the de Bruijn digraph  $B(d, D)$ .

$\mathcal{R}$  is the relation defined on  $\mathbb{Z}_d^D$  by :  $x_1x_2\dots x_D \mathcal{R} y_1y_2\dots y_D \Leftrightarrow x_2\dots x_D = y_2\dots y_D$ .

It is easy to see that  $\mathcal{R}$  is an equivalence relation and the equivalence class of  $x = x_1x_2\dots x_D$  is the set  $C(x) = \{ix_2\dots x_D; i \in \mathbb{Z}_d\}$ . We note  $A(d, D)$  the set of the equivalence classes.

We note  $B_1(d, D)$  the digraph whose vertex set is  $A(d, D)$  and whose arcs are the couples of classes  $(C, C')$  such that there exist elements  $a \in C$  and  $a' \in C'$  with  $(a, a')$  arc of  $B(d, D)$ .

The author proved in [3] that  $B_1(d, D)$  is a de Bruijn digraph isomorphic to  $B(d, D - 1)$ .

Let us remark that the vertices with loop of  $B_1(d, D)$  are the classes  $C(i_{d,D})$  where  $i \in \mathbb{Z}_d$ .

We note  $UB_1(d, D)$  the underlying graph of  $B_1(d, D)$ . Clearly,  $UB_1(d, D)$  is isomorphic to  $UB(d, D - 1)$ .

Now, we give an essential result :

**Lemma 2.1** *If  $P = X_1, \dots, X_{m+1}$  is a LR-walk of length  $m$  of  $UB(d, D)$ , we have :*

$d(C(X_1), C(X_{m+1})) \leq m - 2$  in  $UB_1(d, D)$ .

**Proof.** There exists  $i$ ,  $1 \leq i \leq m - 1$  such that  $X_i$  and  $X_{i+2}$  are both predecessors of  $X_{i+1}$ . We have then  $C(X_i) = C(X_{i+2})$ .

If  $i = 1$ ,  $C(X_3), \dots, C(X_{m+1})$  is a walk of length  $m - 2$  of  $UB_1(d, D)$  and consequently  $d(C(X_1), C(X_{m+1})) \leq m - 2$ .

If  $i = m - 1$ ,  $C(X_1), \dots, C(X_{m-1}) = C(X_{m+1})$  is a walk of length  $m - 2$  of  $UB_1(d, D)$  and consequently  $d(C(X_1), C(X_{m+1})) \leq m - 2$ .

If  $2 \leq i \leq m - 2$ ,  $(C(X_1), \dots, C(X_{i-1}), C(X_{i+2}), \dots, C(X_{m+1}))$  is a walk of length  $m - 2$  of  $UB_1(d, D)$  and consequently  $d(C(X_1), C(X_{m+1})) \leq m - 2$ .

So, the assertion is proved. ■

Clearly the result applies for any walk containing a LR-walk.

### 3 Quasi-center of an undirected de Bruijn graph

Now, we can prove the conjecture already stated. So :

**Theorem 3.1** *The size of a quasi-center of a de Bruijn graph  $UB(d, D)$  is greater than or equal to  $d - 1$ .*

**Proof.** The case  $d = 2$  is trivial. So, we consider  $d \geq 3$ . We will prove the assertion by induction on  $D$ .

Clearly it is true for  $D = 1$ . Let us prove it for  $D = 2$ .

So, let  $S$  be a quasi-center of  $UB(d, 2)$ .

If each  $j \in \mathbb{Z}_d$  appears as the second component of a vertex of  $S$ , we have  $|S| \geq d$  and we are done.

Suppose that there exists  $b \in \mathbb{Z}_d$  which is not the second component of a vertex of  $S$ . Each vertex  $bi$  which is not in  $S$  has a successor  $ia_i$  in  $S$ . Let us note  $\Omega = \{i \in \mathbb{Z}_d; bi \in S\}$ . If  $\Omega = \emptyset$  or if  $\Omega = S$ , we get  $|S| \geq d$  and we are done.

In the other cases the sets  $\{bi; i \in \Omega\}$  and  $\{ia_i; i \notin \Omega\}$  are included in  $S$  and can have at most one common element. This implies  $|S| \geq d - 1$ . So, the assertion is true for  $D = 2$ .

Suppose that the assertion is true for  $D - 1$ ,  $D \geq 3$  and let us study for  $D$ .

Let  $S = \{X_1, \dots, X_s\}$  be a quasi-center of  $UB(d, D)$ .

Let us note  $S' = \{C(X_1)\} \cup \dots \cup \{C(X_s)\}$ .

Suppose that  $s \leq d - 2$ . By induction hypothesis,  $S'$  is not a quasi-center of  $UB_1(d, D)$  and therefore there exists a class  $C(W)$  such that  $d(S', C(W)) = D - 1$ . Let us note  $W = w_1 \dots w_D$  and let us consider the set  $B = \{W_i; 0 \leq i \leq d - 1\}$  where  $W_i = w_2 \dots w_D i$ .  $B$  is the set of the successors of  $W$ . For a vertex  $W_i$ , for every  $X \in S$  we have  $d(X, W_i) \geq D - 2$  (otherwise we would have  $d(S', C(W)) \leq D - 2$ , which is impossible).

For each vertex  $W_i$ , there is at least a vertex  $X$  of  $S$  such that  $d(X, W_i) \leq D - 1$ .

Since  $S$  has at most  $d - 2$  elements and  $B$  has  $d$  elements, there exists a vertex  $Y = y_1 \dots y_D$  of  $S$  and two vertices  $W_m$  and  $W_n$  of  $B$  such that  $d(Y, W_m) \leq D - 1$  and  $d(Y, W_n) \leq D - 1$ .

Suppose that there exists a third vertex  $W_r$  with  $d(Y, W_r) \leq D - 1$ . Then, we have :

$$D - 2 \leq d(Y, W_m) \leq D - 1, D - 2 \leq d(Y, W_n) \leq D - 1 \text{ and } D - 2 \leq d(Y, W_r) \leq D - 1.$$

Consequently, there exist three paths  $P_m, P_n$  and  $P_r$ , the first one from  $W_m$  to  $Y$  the second one from  $W_n$  to  $Y$  and the third one from  $W_n$  to  $Y$ , all of length  $D - 2$  or  $D - 1$ .

Suppose that one of these paths is not direct in  $B(d, D)$ . Then we would have a walk from  $W$  to  $Y$  of length  $D - 1$  or  $D$ , containing a LR-walk. By lemma 2.1, we would get  $d(C(Y), C(W)) \leq D - 2$ , impossible. So, these three paths are direct. Then two of them,  $P_m$  and  $P_n$  for example, have the same length. If this length is  $D - 2$ , we get  $w_D m = y_1 y_2 = w_D n$ , hence  $m = n$ , which is false, and if this length is  $D - 1$ , we get  $m = y_1 = n$ , again false.

Now, suppose that there does not exist such a vertex. Then for each vertex of  $B \setminus \{W_m, W_n\}$ , there exists a vertex of  $S \setminus \{Y\}$  such that the distance between these two vertices is at most  $D - 1$ .

Since  $B \setminus \{W_m, W_n\}$  has  $d - 2$  elements and  $S \setminus \{Y\}$  has at most  $d - 3$  elements, we deduce that there exist a vertex  $U = u_1 \dots u_D$  of  $S \setminus \{Y\}$  and two vertices  $W_p$  and  $W_t$  of  $B \setminus \{W_m, W_n\}$ ,

such that  $d(U, W_p) \leq D - 1$  and  $d(U, W_t) \leq D - 1$ . As previously, we deduce that there exist two paths  $P_p$  and  $P_t$  the first one from  $W_p$  to  $U$  the second one from  $W_t$  to  $U$ , both of length  $D - 2$  or  $D - 1$ , and these paths are direct. So the paths  $P_m, P_n, P_p$  and  $P_t$  are all direct and of length  $D - 2$  or  $D - 1$ .  $P_m$  and  $P_n$  can not have the same length (otherwise we would get  $m = n$ ), the paths  $P_p$  and  $P_t$  neither. Then, we can suppose that the lengths of  $P_m, P_n, P_p$  and  $P_t$  are respectively  $D - 2, D - 1, D - 2$  and  $D - 1$ .

Then, we deduce  $w_D m = y_1 y_2, n = y_1, w_D p = u_1 u_2$  and  $t = u_1$ . It follows  $w_D = y_1 = u_1$ , hence  $n = t$ , which is false.

All this shows that the assumption  $s \leq d - 2$  is false and so, we have  $s \geq d - 1$ . The assertion is true for  $D$  and consequently, it is verified for any integer  $D \geq 1$ . ■

Clearly the bound  $d - 1$  is not attained for  $D = 1$ , but we can prove that this bound is reached for  $D \geq 2$ .

For this we consider the set  $S = \{0\dots 0i; i \in \mathbb{Z}_d, i \neq 0\}$  of the successors of  $0_{d,D}$  (example provided by C. Peyrat). Clearly  $d(S, 0_{d,D}) < D$ . For a vertex  $x$  of  $UB(d,D)$  distinct from  $0_{d,D}$  and not in  $S$ , there exists a directed path from  $0_{d,D}$  to  $x$  of length  $m \in \{2, \dots, D\}$ . The second vertex  $y$  of this path is a vertex of  $S$  and it verifies  $d(y, x) \leq m - 1 < D$ , which implies  $d(S, x) < D$ . So,  $S$  is a quasi-center of cardinality  $d - 1$  and so, this bound is reached.

## 4 Radius of $UB(d, D)$

It is known that for  $d \geq 3$ , the radius of  $UB(d, D)$  is  $D$  (see [2] or [1]). We give here two new proofs of this fact, both based on the results of sections 2 and 3.

The first proof is an immediate consequence of Theorem 3.1.

Indeed, since  $1 < d - 1$ , for any vertex  $x$  of  $UB(d, D)$  the singleton  $\{x\}$  is not a quasi-center.



This means  $e(x) = D$ , hence  $R(UB(d, D)) = D$ .

The second proof does not require Theorem 3.1 and uses the induction on  $D$ .

We must prove that for any vertex  $x$  of  $UB(d, D)$ , we have  $e(x) = D$ .

The assertion is trivially true for  $D = 1$ .

The assertion is also true for  $D = 2$ .

Indeed, for any vertex  $x = ij$  of  $UB(d, 2)$ , there exists an element  $m$  of  $\mathbb{Z}_d$  distinct from  $i$  and  $j$ . It is easy to see that  $d(ij, mm) = 2$  and so  $e(x) = 2$ .

Let us suppose that the assertion is true for  $D - 1$ ,  $D \geq 3$  and let us study for  $D$ .

Let  $x = x_1x_2\dots x_D$  be a vertex of  $UB(d, D)$ .

By induction hypothesis, there exists a class  $C(W)$  such that  $d(C(x), C(W)) = D - 1$ . Let us note  $W = w_1\dots w_D$  and let us consider the set  $B = \{W_i; 0 \leq i \leq d - 1\}$  where  $W_i = w_2\dots w_Di$ .  $B$  is the set of successors of  $W$ . For each vertex  $W_i$  we have  $d(x, W_i) \geq D - 2$  (otherwise we would have  $d(C(x), C(W)) < D - 1$ ).

For  $0 \leq i \leq d - 1$ , let  $P_i$  be a path from  $W_i$  to  $x$  of length  $d(x, W_i)$ .

Let us put  $E = \{i; d(x, W_i) < D\}$ . For each element  $i \in E$ , we have  $d(x, W_i) = D - 2$  or  $d(x, W_i) = D - 1$  and as in the proof of Theorem 3.1, we deduce that the paths  $P_i$ ,  $i \in E$  are direct. Suppose that  $E$  contains three elements  $m$ ,  $n$  and  $r$ . Then two of paths  $P_m$ ,  $P_n$  and  $P_r$  have the same length. Without loss of generality, we can suppose that  $P_m$  and  $P_n$  are these paths. Then we get  $m = n$ , which is false. Consequently,  $|E| \leq 2$  and since  $d \geq 3$ , we deduce that there exists a vertex  $W_p$  such that  $d(x, W_p) = D$  and then  $e(x) = D$ .

The assertion is true for  $D$  and consequently it is verified for any integer  $D \geq 1$ .

I. Bond has conjectured in [2] that the radius of the binary de Bruijn graph  $UB(2, D)$  is  $D - 1$ . We think that the tools here developed may be useful for prove or disprove this conjecture.

## 5 Acknowledgements

Many thanks to Claudine Peyrat, who attentively has looked my manuscript and has detected an important error (which I corrected).

## References

- [1] J.C Bermond, J. Bond, S. Rudich, M. Santha, F. de la Vega, *The radius of graphs on alphabets*, 2000, To appear in Graphs and Combinatorics
- [2] I. Bond, Grands réseaux d'interconnexion, Ph.D Thesis of Paris-sud University, Orsay, 1987
- [3] N. Lichiardopol, *Nombre de stabilité d'un graphe non orienté de de Bruijn*, Submitted to Discr. Mathematics, 2003
- [4] C. Peyrat, Private Communication
- [5] M. Syska, Communications dans les architectures à mémoire distribuée, Ph.D Thesis of Nice Sophia-Anipolis University, 1992

# Quasi-centers and radius of a Kautz graph, proof of a conjecture of Bond

Nicolas Lichiardopol

I3S-ESSI, BP 145, 06903 Sophia Antipolis, France

e-mail : lichiar@club-internet.fr

## Abstract

J. Bond in [2] and later J.C Bermond, J. Bond, S. Rudich, M. Santha and W. F de la Vega in [1], conjectured that the radius of the Kautz graph  $UK(2, D)$  is  $D$ . In this paper we prove this conjecture as a consequence of a new result on the minimum size of a quasi-center in a general Kautz graph  $UK(d, D)$ .

*Keywords* : Kautz graph, quasi-center, radius.

## 1 Introduction, notation

Let  $G$  be a connected graph.

**The distance**  $d(x, y)$  between two vertices  $x$  and  $y$  of  $G$  is the length of a shortest path between them.

For a set of vertices  $S$  and a vertex  $x$ ,  $d(S, x)$  is the minimum of the distances between  $x$  and any vertex of  $S$ .

**The eccentricity**  $e(x)$  of  $x$  is the maximum of the distances  $d(x, y)$  where  $y$  belongs to the

vertex set  $V(G)$  of  $G$ .

**The diameter**  $D(G)$  of  $G$  is the maximum of the eccentricities of the vertices.

**The radius**  $R(G)$  of  $G$  is the minimum of the eccentricities.

A set  $S$  of vertices is called a **quasi-center** if for every  $x \in V(G)$ , we have  $d(S, x) < D(G)$ .

For an integer  $d \geq 2$ ,  $\mathbb{Z}_d$  is the set of the integers modulo  $d$ . For  $D \geq 1$ , an element  $(x_1, \dots, x_D)$  of  $\mathbb{Z}_d^D$  is noted  $x_1 \dots x_D$ .

For  $d \geq 2$  and  $D \geq 2$ , the de Bruijn digraph  $B(d, D)$  is the digraph whose vertex set is  $\mathbb{Z}_d^D$  and whose arcs are the couples  $(x_1 x_2 \dots x_D, y_1 \dots y_{D-1} y_D)$  such that  $x_2 \dots x_D = y_1 \dots y_{D-1}$ . The de Bruijn digraph  $B(d, 1)$  is the complete digraph  $K_d^+$  (with loop in each vertex).

The undirected de Bruijn graph  $UB(d, D)$  is the underlying graph of  $B(d, D)$

For  $d \geq 2$  and  $D \geq 2$ , the Kautz digraph  $K(d, D)$  is the subdigraph of  $B(d+1, D)$  induced by the set  $\Omega_{d,D}$  of the vertices  $x_1 \dots x_D$  verifying  $x_i \neq x_{i+1}$  for  $1 \leq i \leq D-1$ . The Kautz digraph  $K(d, 1)$  is the complete digraph  $K_{d+1}^*$  (without loops).

$K(d, D)$  is a strongly connected regular digraph of degree  $d$  of diameter  $D$ . Its order is  $d^D + d^{D-1}$ .

The Kautz graph  $UK(d, D)$  is the underlying graph of  $K(d, D)$ . Its maximum degree is  $2d-1$  and its diameter is  $D$ .

A walk of length  $m$  of  $UK(d, D)$  is a sequence  $X_1, \dots, X_{m+1}$  of vertices of  $UK(d, D)$  such that  $X_{i+1}$  is a neighbour of  $X_i$  for  $1 \leq i \leq m$ .

A L-walk of length  $m$  of  $UK(d, D)$  is a walk  $X_1, \dots, X_{m+1}$  such that  $X_{i+1}$  is a successor of  $X_i$  in  $K(d, D)$  for  $1 \leq i \leq m$ .

A R-walk of length  $m$  of  $UK(d, D)$  is a walk  $X_1, \dots, X_{m+1}$  such that  $X_{i+1}$  is a predecessor of  $X_i$  in  $K(d, D)$  for  $1 \leq i \leq m$ .

A LR-walk of length  $m$  of is a walk  $X_1, \dots, X_{m+1}$  such that there exists  $i, 1 < i < m + 1$  such that  $X_1, \dots, X_i$  is a L-walk and  $X_i, \dots, X_{m+1}$  is a R-walk.

The author proved in [3] that a quasi-center of a de Bruijn graph  $UB(d, D)$  has at least  $d - 1$  elements. Initially this was a conjecture in [2] and in [1].

In this paper, we will prove that a quasi-center of a Kautz graph  $UK(d, D)$  has at least  $d$  vertices. This will imply that the radius of  $UK(d, D)$  is  $D$ , which will validate the conjecture of Bond stating that the radius of  $UK(2, D)$  is  $D$ .

## 2 Kautz digraph of diameter $D - 1$ defined from $K(d, D)$

Let us consider for  $d \geq 2$  and  $D \geq 2$  the Kautz digraph  $K(d, D)$ .

$\mathcal{R}$  is the relation defined on  $\Omega_{d,D}$  by :  $x_1x_2\dots x_D \mathcal{R} y_1y_2\dots y_D \Leftrightarrow x_2\dots x_D = y_2\dots y_D$ .

It is easy to see that  $\mathcal{R}$  is an equivalence relation and the equivalence class of  $x = x_1x_2\dots x_D$  is the set  $C(x) = \{ix_2\dots x_D; i \in \mathbb{Z}_{d+1}, i \neq x_2\}$ . We note  $R_{d,D}$  the set of the equivalence classes.

We note  $K_1(d, D)$  the digraph whose vertex set is  $R(d, D)$  and whose arcs are the couples of classes  $(C, C')$  such that there exist elements  $a \in C$  and  $a' \in C'$  with  $(a, a')$  arc of  $K(d, D)$ .

It is easy to prove that the mapping  $g : \Omega_{d,D-1} \rightarrow R_{d,D}$  defined by :

$g(x_2\dots x_D) = C((x_2 + 1)x_2\dots x_D)$  provides an isomorphism between  $K(d, D - 1)$  and  $K_1(d, D)$ .

So,  $K_1(d, D)$  is a Kautz digraph isomorphic to  $K(d, D - 1)$ .

We note  $UK_1(d, D)$  the underlying graph of  $K_1(d, D)$ . Clearly,  $UK_1(d, D)$  is isomorphic to  $UK(d, D - 1)$ .

Now, we give an essential result :

**Lemma 2.1** *If  $P = X_1, \dots, X_{m+1}$  is a walk of length  $m$  of  $UK(d, D)$  containing a LR-walk, we have :*

$$d(C(X_1), C(X_{m+1})) \leq m - 2 \text{ in } UK_1(d, D).$$

**Proof.** There exists  $i$ ,  $1 \leq i \leq m - 1$  such that  $X_i$  and  $X_{i+2}$  are both predecessors of  $X_{i+1}$ . We have then  $C(X_i) = C(X_{i+2})$ .

If  $i = 1$ ,  $C(X_3), \dots, C(X_{m+1})$  is a walk of length  $m - 2$  of  $UB_1(d, D)$  and consequently  $d(C(X_1), C(X_{m+1})) \leq m - 2$ .

If  $i = m - 1$ ,  $C(X_1), \dots, C(X_{m-1}) = C(X_{m+1})$  is a walk of length  $m - 2$  of  $UB_1(d, D)$  and consequently  $d(C(X_1), C(X_{m+1})) \leq m - 2$ .

If  $2 \leq i \leq m - 2$ ,  $C(X_1), \dots, C(X_{i-1}), C(X_{i+2}), \dots, C(X_{m+1})$  is a walk of length  $m - 2$  of  $UB_1(d, D)$  and consequently  $d(C(X_1), C(X_{m+1})) \leq m - 2$ .

So, the assertion is proved. ■

### 3 Quasi-center of a Kautz graph

We state

**Theorem 3.1** *The size of a quasi-center of a Kautz graph  $UK(d, D)$  is greater than or equal to  $d$ .*

**Proof.** We will prove the assertion by induction on  $D$ .

Clearly it is true for  $D = 1$ . Let us prove it for  $D = 2$ .

So, let  $S$  be a quasi-center of  $UK(d, 2)$ .

If each  $j \in \mathbb{Z}_{d+1}$  is the second component of a vertex of  $S$ , we have  $|S| \geq d + 1$  and we are done.

Suppose that there exists  $b \in \mathbb{Z}_{d+1}$  which is not the second component of a vertex of  $S$ . Each

vertex  $bi$  (Then  $i \neq b$ ), which is not in  $S$  has a successor  $ia_i$  in  $S$ .

Let us note  $\Omega = \{i \in \mathbb{Z}_{d+1} \setminus \{b\}; bi \in S\}$ . If  $\Omega = \emptyset$  or if  $\Omega = \mathbb{Z}_{d+1} \setminus \{b\}$ , we get  $|S| \geq d$  and we are done.

In the other cases the sets  $\{bi; i \in \Omega\}$  and  $\{ia_i; i \in \mathbb{Z}_{d+1} \setminus \{b\}, i \notin \Omega\}$  are disjoint subsets of  $S$ . This implies  $|S| \geq d$ . So, the assertion is true for  $D = 2$ .

Suppose that assertion is true for  $D - 1$ ,  $D \geq 3$  and let us study for  $D$ .

Let  $S = \{X_1, \dots, X_s\}$  be a quasi-center of  $UK(d, D)$ .

Let us note  $S' = \{C(X_1)\} \cup \dots \cup \{C(X_s)\}$ .

Suppose that  $s \leq d - 1$ . By induction hypothesis,  $S'$  is not a quasi-center of  $UK_1(d, D)$  and therefore there exists a class  $C(W)$  such that  $d(S', C(W)) = D - 1$ . Let us note  $W = w_1 \dots w_D$  and let us consider the set  $B = \{W_i; 0 \leq i \leq d - 1, i \neq w_D\}$ , where  $W_i = w_2 \dots w_D i$ .  $B$  is the set of successors of  $W$ . For a vertex  $W_i$ , for every  $X \in S$  we have  $d(X, W_i) \geq D - 2$  (otherwise we would have  $d(S', C(W)) \leq D - 2$ , which is impossible).

For each vertex  $W_i$ , there is at least a vertex  $X$  of  $S$  such that  $d(X, W_i) \leq D - 1$ .

Since  $S$  has at most  $d - 1$  elements and  $B$  has  $d$  elements, there exists a vertex  $Y = y_1 \dots y_D$  of  $S$  and two vertices  $W_m$  and  $W_n$  of  $B$  such that  $d(Y, W_m) \leq D - 1$  and  $d(Y, W_n) \leq D - 1$ .

Then, we have :

$$D - 2 \leq d(Y, W_m) \leq D - 1 \text{ and } D - 2 \leq d(Y, W_n) \leq D - 1.$$

Consequently, there exist two paths  $P_m$  and  $P_n$ , the first one from  $W_m$  to  $Y$  the second one from  $W_n$  to  $Y$  and both of length  $D - 2$  or  $D - 1$ .

Suppose that one of these paths is not direct in  $K(d, D)$ . Then we would have a walk from  $W$  to  $Y$  of length  $D - 1$  or  $D$  and containing a LR-walk. By lemma 2.1, we would get  $d(C(Y), C(W)) \leq D - 2$ , impossible. So, these two paths are direct. If they have the same length, we get  $m = n$ , which is false. If they have distinct lengths, we can suppose that the length of  $P_m$  is  $D - 2$  and the length of  $P_n$  is  $D - 1$ . Then, we get  $w_D m = y_1 y_2$  and  $n = y_1$ ,

hence  $n = w_D$ , which is false

All this shows that the supposition  $s \leq d - 1$  is false and so, we have  $s \geq d$ . The assertion is true for  $D$  and consequently, it is verified for any integer  $D \geq 1$ . ■

Clearly the bound  $d$  is not attained for  $D = 1$ , but we can prove that this bound is reached for  $D \geq 2$ .

For this we consider the set  $S = \{a_2 \dots a_D i; i \in \mathbb{Z}_{d+1} \setminus \{a_D\}\}$  of the successors of a vertex  $a = a_1 \dots a_D$ . Clearly  $d(S, a) < D$ . For a vertex  $x$  of  $UK(d, D)$  distinct from  $a$  and not in  $S$ , there exists a directed path from  $a$  to  $x$  of length  $m \in \{2, \dots, D\}$ . The second vertex  $y$  of this path is a vertex of  $S$  and it verifies  $d(y, x) \leq m - 1 < D$ , which implies  $d(S, x) < D$ . So,  $S$  is a quasi-center of cardinality  $d$  and so, this bound is reached.

## 4 Radius of $UK(d, D)$

We will prove in two ways that for  $d \geq 2$  and  $D \geq 1$ , the radius of the Kautz graph  $UK(d, D)$  is  $D$ .

The first proof is an immediate consequence of Theorem 3.1.

Indeed, since  $1 < d$ , for any vertex  $x$  of  $UK(d, D)$ , the singleton  $\{x\}$  is not a quasi-center. This means  $e(x) = D$ , hence  $R(UK(d, D)) = D$ .

The second proof is more difficult and uses the induction on  $D$ .

We must prove that for any vertex  $x$  of  $UK(d, D)$ , we have  $e(x) = D$ .

The assertion is trivially true for  $D = 1$ .

The assertion is also true for  $D = 2$ .

Indeed, for any vertex  $x = ij$  of  $UK(d, 2)$ , there exists an element  $m$  of  $\mathbb{Z}_{d+1}$  distinct from  $i$  and  $j$ . It is easy to see that  $d(ij, im) = 2$  and so  $e(x) = 2$ .



Let us suppose that the assertion is true for  $D - 1$ ,  $D \geq 3$  and let us study for  $D$ .

Let  $x = x_1x_2\dots x_D$  be a vertex of  $UK(d, D)$ . By induction hypothesis, there exists a class  $C(W)$  such that  $d(C(x), C(W)) = D - 1$ . Let us note  $W = w_1\dots w_D$  and let us consider the set

$B = \{W_i; 0 \leq i \leq d - 1, i \neq w_D\}$ , where  $W_i = w_2\dots w_Di$ .  $B$  is the set of successors of  $W$ . For each vertex  $W_i$  we have  $d(x, W_i) \geq D - 2$  (otherwise we would have  $d(C(x), C(W)) < D - 1$ ).

For  $0 \leq i \leq d - 1$ , let  $P_i$  be a path from  $W_i$  to  $x$  of length  $d(x, W_i)$ .

Let us put  $E = \{i; d(x, W_i) < D\}$ . For each element  $i \in E$ , we have  $d(x, W_i) = D - 2$  or  $d(x, W_i) = D - 1$  and as in the proof of Theorem 3.1, we deduce that the paths  $P_i$ ,  $i \in E$  are direct. Suppose that  $E$  contains two elements  $m$  and  $n$ . Then the paths  $P_m$  and  $P_n$  are direct. If they have the same length, we get  $m = n$ , which is false. If they have distinct lengths, we get  $m = W_D$  or  $n = W_D$ , again false. Consequently,  $|E| \leq 1$  and since  $d \geq 2$ , we deduce that there exists a vertex  $W_p$  such that  $d(x, W_p) = D$  and then  $e(x) = D$ .

The assertion is true for  $D$  and consequently it is verified for any integer  $D \geq 1$ .

This result was already proved for  $d \geq 3$  (see [2] or [1]). For  $d = 2$ , the result was only conjectured in the cited papers.

## References

- [1] J.C Bermond, J. Bond, S. Rudich, M. Santha, F. de la Vega, The radius of graphs on alphabets, 2000, to appear in Graphs and Combinatorics.
- [2] I. Bond, Grands réseaux d'interconnexion, Ph.D Thesis of Paris-sud University, Orsay, 1997.
- [3] N. Lichiardopol, Proof of a conjecture on the size of a quasi-center in an undirected de Bruijn graph. Radius of such a graph, Submitted to Discr. Mathematics, 2003.