



HAL
open science

IDENTIFICATION DES PARAMETRES D'UNE LOI ELASTOPLASTIQUE DE PRAGER ET CALCUL DE CHAMPS DE CONTRAINTE DANS DES MATERIAUX HETEROGENES

Félix Latourte

► **To cite this version:**

Félix Latourte. IDENTIFICATION DES PARAMETRES D'UNE LOI ELASTOPLASTIQUE DE PRAGER ET CALCUL DE CHAMPS DE CONTRAINTE DANS DES MATERIAUX HETEROGENES. Mécanique [physics.med-ph]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2007. Français. NNT: . tel-00214302

HAL Id: tel-00214302

<https://theses.hal.science/tel-00214302>

Submitted on 24 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
— SCIENCES ET TECHNIQUES DU LANGUEDOC —

THÈSE

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2

SPÉCIALITÉ : MÉCANIQUE ET GÉNIE CIVIL
FORMATION DOCTORALE : MÉCANIQUE DES MATÉRIAUX ET DES MILIEUX COMPLEXES,
DES STRUCTURES ET DES SYSTÈMES.

IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES D'UNE LOI ÉLASTOPLASTIQUE DE PRAGER ET CALCUL DE CHAMPS DE CONTRAINTE DANS DES MATÉRIAUX HÉTÉROGÈNES

PAR

FÉLIX LATOURTE

Soutenue publiquement le 10 décembre 2007 devant le jury composé de :

Marc Bonnet	Directeur de Recherche CNRS	LMS Palaiseau	Rapporteur
François Hild	Directeur de Recherche CNRS	LMT Cachan	Rapporteur
Alain Cimetière	Professeur	Université de Poitiers	Examineur
Giuseppe Geymonat	Directeur de Recherche CNRS	LMGC Montpellier	Examineur
Michel Grédiac	Professeur	Université Blaise Pascal	Examineur
André Chrysochoos	Professeur	Université Montpellier 2	Directeur de thèse
Stéphane Pagano	Chargé de Recherche CNRS	LMGC Montpellier	Co-directeur de thèse
Bertrand Wattrisse	Maître de Conférences	Université Montpellier 2	Co-directeur de thèse

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier André Chrysochoos pour m'avoir accueilli dans son équipe et pour avoir accepté de diriger cette thèse, ainsi que pour les discussions animées qui n'ont pas manqué lorsque je partageais le bureau voisin du sien au Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de Montpellier. Je fus touché par sa gentillesse, sa disponibilité et sa proximité ainsi que par son intérêt pour ce travail. Je tiens en particulier à le remercier pour sa motivation et son enthousiasme constants à nous faire partager ses connaissances, son expérience et ses projets.

J'aimerais également faire part de ma profonde reconnaissance à Bertrand Wattrisse et Stéphane Pagano, pour avoir proposé ce sujet et pour m'avoir encadré avec un grand dévouement. Durant ces dernières années, ils m'ont accordé un soutien et une confiance sans failles. Toujours attentifs à mon travail, et ce jusque dans les moindres détails, ils m'ont également apporté de nombreuses ouvertures et perspectives. Sans leur aide si précieuse, je n'en serai pas arrivé à ce point : cela peut sembler naïf mais je tiens à le souligner ici. Au delà d'un travail d'encadrement, ils m'ont également témoigné d'une grande amitié, j'y fus fort sensible et cela n'a rendu cette thèse que plus agréable. Je garde, en particulier, un souvenir très chaleureux d'une soirée ayant suivi le banquet d'un congrès que nous avons passée à refaire le monde en compagnie de mes amis parmi les meilleurs, et particulièrement motivés.

Je tiens à présenter ma gratitude à Alain Cimetière pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, et à Marc Bonnet et François Hild pour avoir accepté de rapporter sur mon travail. Bien qu'il ait certainement nécessité un temps considérable et précieux, le travail des rapporteurs m'a apporté de précieux éclaircissements, d'un point de vue numérique comme expérimental. Je remercie également Michel Grédiac et Giuseppe Geymonat pour avoir examiné mon travail avec beaucoup d'attention.

Au cours des réunions du groupe de recherche GDR 2519 "Mesures de Champs et Identification en Mécanique des Solides", de nombreux membres m'ont fait part de leurs commentaires, éclaircissements ou de leur intérêt, et je les en remercie.

En pensant à cette thèse je ne peux qu'avoir une pensée émue pour Bruno Berthel, avec qui nous avons partagé un bureau pendant trois années trop vite écoulées, mais également un certain nombre de moments qui furent particulièrement agréables. Émilien Azéma, bien qu'il fut séparé de nous par quelques murs, n'en était pas moins présent. Je crois qu'un certain colloque passé à Scilla restera gravé comme un moment inoubliable de nos trois thèses respectives. Je ne voudrais pas oublier les thésards du laboratoire qui furent aussi des amis : Nicolas, Stéphane, Philippe, Étienne, Romain, Charles, tous les Vincents, Florent, Jana, Pierre, Anne, Marine, Amine, Silvère et j'en oublie, et également tous ceux dont la compagnie m'aura été des plus agréables, Thibault, Olivier, Bruno, Bob, Fahrang, Mumu, Gilles, Alain et Chantal pour le rayon de soleil tous les matins...

J'aurais aimé n'omettre personne dans cette liste de remerciements mais cela n'est pas chose facile, je pense aussi à tous ceux qui n'ont pas été avares en conseils et qui m'ont apporté leur aide dans ce travail, David Dureissex, Jean-François Dubé, Frédéric Dubois, Laurent Stainier, Vincent Huon, Franck Jourdan, Loïc Daridon, Giuseppe Geymonat, Christian Licht, Vincent Richefeu, Yann Monnerie. Merci également à Claude Blanzé et Samuel Forrest de m'avoir manifesté ouvertement leur intérêt.

En remontant quelques années en arrière, il me vient le souvenir des enseignants m'ayant donné l'envie de persévérer jusqu'à la réalisation d'une thèse. Très nombreux, je ne pourrais qu'en citer quelques-uns ici : Pierre-Alain Boucard, André Chrysochoos, Olivier Maisonneuve, Michel Poss, Christian Rey, Vincent Wendling, et je remercie particulièrement François Hild pour m'avoir encadré lors d'un stage à Nitrochimie qui fût certainement décisif dans mon parcours.

Merci enfin à tous mes très proches amis pour m'avoir soutenu durant ces années, Doulod, Hamid, René, Jay, Tib, Olive, Mathieu, Ben, Lulu, Rico, Ramses, Samy, R-no, Guillaume, Doudou, Antoine, Caille, Béné, Sido, Margot, Manoucher, merci à mes camarades musiciens et en particulier Guillaume et les Funky Tongues, merci à ma famille, mes parents et mes frères.

À Bee qui m'accompagne depuis quelques années, que je remercie ici pour son infinie patience.

"If you're not ready for everything, you're not ready for anything."
Paul Auster

Table des matières

Introduction générale	10
1 Mesures de champs, identification et modèles de plasticité	13
Introduction	14
1.1 Mesures de champs cinématiques en mécanique des solides	16
1.1.1 Mesures cinématiques par interférométrie	17
1.1.2 Mesures cinématiques non interférométriques	20
1.1.3 Mesure de champs cinématiques par tomographie	23
1.1.4 Filtrage des mesures	25
1.2 Méthodes d'identification appliquées à la mécanique des solides	27
1.2.1 Identification de propriétés mécaniques à partir de mesures à la frontière	27
1.2.2 Identification de propriétés mécaniques à partir de mesures dans le volume	32
1.3 Ecriture d'un modèle élastoplastique	45
1.3.1 Cadre de l'étude élastoplastique	45
1.3.2 Écriture tensorielle d'un comportement élastoplastique.	49

2	Présentation de la méthode d'identification utilisée	55
2.1	Application de la méthode d'erreur en relation de comportement à l'identification élastoplastique	56
2.1.1	Identification d'un tenseur de souplesse par l'erreur en relation de comportement	56
2.1.2	Choix et implémentation d'une méthode éléments finis appropriée	58
2.1.3	Résolution du problème d'identification élastoplastique	60
2.2	Algorithme de résolution	67
2.2.1	Algorithme élastique	68
2.2.2	Détection de la plasticité	73
2.2.3	Algorithme plastique	74
	Conclusion	76
3	Applications et résultats	79
3.1	Applications en élasticité	80
3.1.1	Essai de traction simple	80
3.1.2	Identification à partir d'un chargement hétérogène	82
3.1.3	Identification d'un matériau élastique hétérogène	89
3.1.4	Sensibilité au bruit de l'identification élastique	96
3.2	Estimation d'énergies mécaniques localement fournies pendant un essai de fatigue à grand nombre de cycles	104
3.2.1	Cadre de l'étude	104
3.2.2	Estimation d'une énergie dissipée	104
3.2.3	Éstimation de l'énergie mécanique fournie localement	105
3.2.4	Bilan d'énergie en fatigue	107
3.2.5	Résultats expérimentaux	108
3.2.6	Conclusion sur l'essai de Fatigue	111
3.3	Applications en plasticité	112
3.3.1	Identification d'une inclusion plastique	112
3.3.2	Identification sur un bicouche élastoplastique	115
3.3.3	Identification élastoplastique expérimentale	120

Introduction générale

Un enjeu important en mécanique est de pouvoir modéliser avec la plus grande précision le comportement d'un matériau. Des lois sont écrites pour décrire les comportements, reliant les causes et les effets de phénomènes mécaniques étudiés. La démarche de modélisation s'appuie la plupart du temps sur des observations expérimentales. Pour caractériser le comportement d'un matériau dans un cadre donné, la première étape consiste à choisir un modèle adéquat, tandis que la deuxième étape consiste à identifier les paramètres régissant ce modèle.

Pour cette identification, des essais mécaniques appropriés doivent être réalisés. Une approche traditionnelle se base sur l'étude de la réponse globale d'un système soumis à un chargement donné. Des cas simples et homogènes sont donc considérés pour permettre ce type d'étude, comme par exemple l'essai de traction simple ou de torsion pure. Le comportement d'une structure est alors interprété comme le comportement local d'un matériau.

Ces approches sont tout à fait justifiées dans des situations simples pour lesquelles le matériau est homogène, soumis à un chargement mécanique connu et où sa réponse est suffisamment régulière. Mais elles ne permettent pas de caractériser des matériaux hétérogènes ou encore des phénomènes se manifestant de façon localisée comme la striction, la fissuration, . . . Pour s'intéresser à de telles situations il est nécessaire d'accéder à des observations plus locales.

Les techniques de mesures de champs cinématiques [Sutton *et al.*, 1983; Bruck *et al.*, 1989] permettent d'obtenir des mesures de haute résolution. Des techniques de mesures tridimensionnelles de surface ont ensuite été introduites, avec le recours à de la stéréo-corrélation d'images numériques [Luo *et al.*, 1993]. Applicables à la mesure de situations mécaniques variées, ces techniques de corrélation d'images numériques (CIN, ou DIC pour *Digital Image Correlation*) peuvent être utilisées pour étudier des phénomènes locaux et transitoires, par exemple la propagation de bandes de Portevin-Le Chatelier [Tong, 1997]. À partir de ces informations plus locales, il devient alors possible de caractériser de façon plus fine et précise le comportement de matériaux.

La densité des champs mesurés par ces techniques expérimentales a permis d'aborder de nombreux problèmes dits "inverses", qui s'opposent aux problèmes dits "directs". En mécanique, le problème direct consiste à calculer la réponse mécanique d'un système connu, à partir de la connaissance des lois du modèle et du chargement appliqué. Le problème inverse consiste, quant à lui, à déterminer les paramètres d'un modèle mécanique pour un système dont on connaît une partie de la réponse à un chargement, en général connu lui aussi. La réponse est alors en partie mesurable grâce à des variables observables pouvant être par exemple le déplacement.

Les problèmes inverses qui ont pu être résolus à partir de mesures de champs cinématiques sont très diversifiés et traitent par exemple de la fissuration [Cuitino & Ortiz, 1996; Bastawros & Kim, 2000], de l'identification de paramètres de lois élastoplastiques [Mahnken & Stein, 1996] ou de variables d'endommagement [Claire *et al.*, 2002].

Cependant, encore peu de travaux existent pour identifier des paramètres de lois de comportement élastoplastique pour des matériaux hétérogènes. La possibilité de pouvoir traiter des situations hétérogènes a donc été une de nos principales motivations. L'homogénéité d'un matériau est dépendante de l'échelle d'observation : elle peut être réaliste pour des domaines d'observation suffisamment

étendus, tandis qu'à l'échelle de la microstructure les caractéristiques mécaniques peuvent être fortement hétérogènes (par exemple pour des polycristaux).

Pour ces raisons, nous avons donc fait le choix de nous intéresser à l'identification de propriétés de matériaux élastoplastiques hétérogènes. Notre étude porte sur des situations où l'hypothèse de contraintes planes s'applique, dans le cadre des petites perturbations. Une loi de Prager caractérisant un modèle élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire est identifiée. Pour cela une méthode spécifique a été développée, afin de tirer profit des champs cinématiques plans obtenus expérimentalement par corrélation d'images numériques. Elle a été appliquée à des situations numériques et expérimentales.

Cette méthode a également été appliquée, dans un cadre purement élastique, à l'identification de paramètres de matériaux élastiques hétérogènes. Des puissances mécaniques fournies localement ont alors pu être identifiées lors d'essais de fatigue à grand nombre de cycles. Cette puissance mécanique, estimée à partir des champs de déformation mesurés expérimentalement et des champs de contrainte obtenus par approche inverse, intervient alors dans un bilan total d'énergie réalisé pour différents cycles de l'essai de fatigue.

Afin de présenter le travail que nous avons accompli dans ces domaines, ce mémoire sera articulé autour de trois chapitres :

- le premier chapitre est consacré à un travail bibliographique dont l'objectif a été de rassembler des moyens expérimentaux de mesure de champs disponibles. Il regroupe également un certain nombre de méthodes inverses permettant l'exploitation de données expérimentales. Puis le modèle élastoplastique choisi pour l'identification sera présenté ;
- l'objet du second chapitre est une description détaillée des différents outils numériques qui ont été utilisés et développés pour répondre à l'objectif de l'identification élastoplastique locale ;
- le troisième chapitre présente les résultats obtenus à partir de situations numériques et expérimentales, concernant l'identification de propriétés élastiques homogènes et hétérogènes, élastoplastiques hétérogènes, ou encore la contribution à l'établissement de bilans d'énergie lors d'essais de fatigue à grand nombre de cycles.

Mesures de champs, identification et modèles de plasticité

Sommaire

Introduction	14
1.1 Mesures de champs cinématiques en mécanique des solides	16
1.1.1 Mesures cinématiques par interférométrie	17
1.1.2 Mesures cinématiques non interférométriques	20
1.1.3 Mesure de champs cinématiques par tomographie	23
1.1.4 Filtrage des mesures	25
1.2 Méthodes d'identification appliquées à la mécanique des solides	27
1.2.1 Identification de propriétés mécaniques à partir de mesures à la frontière	27
1.2.2 Identification de propriétés mécaniques à partir de mesures dans le volume	32
1.3 Ecriture d'un modèle élastoplastique	45
1.3.1 Cadre de l'étude élastoplastique	45
1.3.2 Écriture tensorielle d'un comportement élastoplastique.	49

Introduction

Dans les deux premières parties de ce premier chapitre consacré à un travail bibliographique, sont développés différents aspects liés à l'identification de paramètres associés à des modèles mécaniques. Ce problème, souvent qualifié de problème inverse [Bui, 1993], s'oppose au problème dit direct qui consiste à calculer la réponse d'un système mécanique, pour un chargement et une loi de comportement donnés (*cf.* tableau 1.1).

Type de problème	direct	inverse
Loi de comportement (LdC)	connue	connue
Paramètres de la LdC	connus	inconnus
Conditions aux limites	connues (Neumann, Dirichlet ou mixtes)	partiellement connues (et éventuellement surabondantes)
Champs cinématiques	inconnus	partiellement connus
Champs sthéniques	inconnus	inconnus

TAB. 1.1 – *Problème direct et problème inverse en mécanique*

Les problèmes inverses sont souvent assimilés à des problèmes mal posés, par opposition aux problèmes bien posés. Un problème mécanique bien posé au sens de Hadamard est d'une part un problème à solution unique dont l'existence est garantie. D'autre part, sa solution doit être peu sensible aux perturbations sur les données : c'est ce que l'on appelle la stabilité du problème. Les problèmes mécaniques bien posés les plus répandus sont par exemple les problèmes de Dirichlet, Neumann et ceux dits mixtes qui sont une combinaison de ces deux précédents problèmes.

Les champs sthéniques ne sont pas directement mesurables, mais dans certaines situations, il est possible de les estimer *via* des hypothèses sur la forme de l'état de contrainte. Cet état peut être supposé, dans des approches simples, uniaxial ou homogène, ou dans des cas plus généraux, comme étant une solution analytique d'un problème mécanique considéré.

Les essais expérimentaux s'appuyant sur ces hypothèses peuvent être qualifiés de "statiquement déterminés". Parmi ces essais, on utilise fréquemment dans les centres de recherche l'essai de traction uniaxial, sur des éprouvettes axisymétriques ou prismatiques. Les essais de torsion, cisaillement, flexion trois et quatre points sont également répandus. Certains problèmes plus complexes ont des solutions connues en élasticité *via* l'écriture de potentiels d'élasticité. Parmi eux figurent l'indentation d'un milieu semi-infini, l'essai de traction sur plaque trouée, l'essai brésilien. Pour la majorité des essais statiquement déterminés, l'identification des paramètres de la loi de comportement se fait directement à partir de la courbe force-déplacement, ou de couples force-déformation

Pour l'essai de traction simple, on considère un état de contrainte et un état de déformation homogène dans la partie utile de l'éprouvette. Les normes qui régissent cet essai (par exemple la norme internationale ISO 6892) précisent les dimensions réglementaires de l'éprouvette, ou encore les conditions d'alignement des axes d'amarrage de l'éprouvette. Cet essai est limité à des matériaux homogènes, dans une gamme de sollicitation restant faible pour ne pas faire intervenir de phénomènes de localisation ou de striction [Hill, 1958]. Pour des matériaux anisotropes, il est en général nécessaire de réaliser plusieurs essais pour différentes orientations, afin de faire travailler toutes les composantes de la relation de comportement que l'on cherche à caractériser. Pour limiter les rotations de l'échantillon, les axes d'anisotropie doivent alors être orientés parallèlement aux axes de sollicitation.

Depuis les premiers travaux de Sutton *et al.* [1983], les techniques de corrélation d'images numériques ont été développées de façon importante dans le but d'accéder à des mesures de champs cinématiques. Ces mesures fournissent une densité de points de mesure qui peut varier de quelques points à plusieurs dizaines de milliers de points, suivant le type de matériel de mesure et des capacités de traitement et de stockage. D'abord utilisées à des fins descriptives, elles commencent à être utilisées pour l'identification de propriétés matérielles, et des méthodes d'identification spécifiques sont actuellement développées afin de tirer le meilleur profit des champs très denses obtenus à partir de ces mesures.

Les méthodes le plus fréquemment rencontrées peuvent se séparer en deux catégories :

- La première catégorie regroupe des méthodes qui nécessitent des données mesurées sur la frontière du domaine d'intérêt [Bonnet, 1995; Badia & Dong, 1998]. Elles permettent de détecter des défauts (cavités, fissures...), ou encore des distributions de modules, des inclusions, à l'intérieur d'un domaine dont la frontière seule est observable.
- La deuxième catégorie est constituée de méthodes qui utilisent des données mesurées sur tout le domaine d'observation. À ces données viennent éventuellement s'ajouter une mesure des résultantes des efforts appliqués. Certaines de ces méthodes exploitent la richesse d'information issue des champs de mesure pour identifier, avec les résultats issus d'un seul essai, des paramètres de modèles anisotropes. D'autres utilisent des essais dans lesquels se développe une fissuration ou une localisation, dans le but d'identifier les paramètres d'un modèle de fissuration ou d'endommagement.

Le premier chapitre de ce mémoire s'articule autour de trois principales parties :

- L'objet de la première partie est de présenter un certain nombre de techniques de mesures de champs applicables à la mécanique expérimentale. Ces mesures rendent possible la résolution de certains problèmes d'identification et leur développement exerce une stimulation certaine quand à l'introduction de nouvelles méthodes d'identification. Ces mesures étant entachées d'un bruit expérimental, elles conditionnent par leur qualité les résultats de l'identification.
- Nous aborderons ensuite dans la deuxième partie les différentes stratégies adoptées dans la littérature pour aborder la problématique de l'identification à partir de mesures de champs. Une revue de ces méthodes est en cours de rédaction dans le cadre d'un article synthétisant le travail de benchmark réalisé au sein du GdR 2519 "Mesures de Champs et Identification en Mécanique des Solides". Nous essaierons d'insister plus particulièrement sur la présentation des méthodes ayant été appliquées à l'identification de comportement non-linéaires ou hétérogènes.
- La troisième partie de ce chapitre bibliographique sera consacrée à l'écriture du modèle de comportement élastoplastique que nous avons choisi d'identifier.

1.1 Mesures de champs cinématiques en mécanique des solides

Les techniques de mesures de champs cinématiques présentent un intérêt crucial en mécanique des solides, car elles permettent une description plus fine de ces champs que les mesures cinématiques traditionnelles. Ces dernières techniques peuvent correspondre à des mesures globales (obtenues par extensométrie ou par des comparateurs), ou encore à des mesures fournies en un nombre très limité de zones matérielles (jauges de déformation). Un des inconvénients de ces mesures traditionnelles est qu'elles nécessitent des hypothèses sur l'homogénéité des champs cinématiques, et qu'elles sont restreintes à l'identification de propriétés de matériaux supposés homogènes. D'autre part, elles sont obtenues avec contact et peuvent donc perturber la réponse de l'échantillon testé dans certains cas particuliers (comme celui des matériaux fragiles, des films minces, des matériaux réactifs, . . .).

L'utilisation de techniques d'imagerie permet, dans une certaine mesure, de dépasser certaines de ces limites. Ces techniques possèdent de nombreux avantages :

- Elles permettent de se placer à différentes échelles d'observation en changeant d'optique : des objectifs classiques permettent une observation à l'échelle du centimètre ou plus, tandis que des objectifs macrophotographiques permettent une observation à l'échelle du millimètre ou de la fraction de millimètre. Pour étudier des phénomènes à l'échelle du micromètre, il est nécessaire d'utiliser des optiques de type microscope (microscopes à longue distance focale par exemple), ou bien de travailler sur des images issues de microscopes électroniques à balayage.
- Ce sont des méthodes sans contact, moins intrusives que les mesures classiques. Des techniques de *speckle* (ou mouchetis) peuvent s'appliquer à des matériaux présentant un contraste naturel à la lumière. D'autres matériaux nécessitent d'être préparés pour pouvoir être analysés par cette technique, par exemple par le dépôt d'un marqueur de surface faiblement réactif (poudre, peinture, . . .). Certaines techniques de mesures de champs utilisent des figures d'interférence, et d'autres encore ont recours à des préparations par dépôt de grilles ou de divers types de marqueurs.
- Bien que l'intérêt de ces mesures soit de pouvoir traiter une classe plus vaste de situations expérimentales permettant l'identification, elles peuvent toutefois être utilisées lors d'essais traditionnels comme l'essai de traction simple : ces mesures peuvent alors permettre de vérifier la validité des hypothèses de régularité et d'homogénéité. Certains phénomènes parasites comme la flexion peuvent être détectés ou quantifiés, ce qui peut éventuellement permettre de contrôler ou corriger le dispositif expérimental.
- Enfin, ces méthodes permettent d'accéder directement aux conditions aux limites en déplacement.

Le plus souvent, les mesures optiques utilisent des ondes visibles. Elles sont donc tout particulièrement prédisposées à l'étude des surfaces, dans le cas de matériaux opaques. Néanmoins, certaines ont été étendues pour permettre des mesures dans le volume pour des matériaux transparents [Germaneau *et al.*, 2007]. D'autres méthodes comme la tomographie exploitent des rayonnements plus énergétiques (rayons X) et permettent alors, dans certaines conditions, de réaliser des mesures cinématiques à l'intérieur d'un volume complet, pour des matériaux présentant des variabilités d'absorption

de ces rayons.

Ces mesures de champs sont basées sur le suivi d'une signature optique locale (mouchetis, grille, . . .), donnant accès à une mesure "ponctuelle" intégrée sur un certain volume lié aux dimensions du motif retenu. Cette opération de moyenne correspond au premier filtrage de la chaîne de mesure.

Dans certains cas, il peut être souhaitable d'effectuer une opération de filtrage supplémentaire lorsque l'erreur expérimentale qui entache les mesures rend leur interprétation difficile. Le filtrage peut alors être purement géométrique, ou peut être permis grâce à la connaissance *a priori* de certaines informations sur le chargement, sur l'essai, sur le matériau, . . . Les problèmes inverses étant connus pour être mal posés, ils sont donc très sensibles aux perturbations sur la mesure, et un filtrage peut s'avérer intéressant voire nécessaire.

La sensibilité, la résolution, et la fréquence d'acquisition des capteurs optiques évoluent très rapidement, contribuant ainsi à l'amélioration des performances des mesures de champs. Les avantages de ces techniques sont nombreux, comme par exemple leur caractère faiblement intrusif qui a déjà été introduit. Mais la principale qualité de ces mesures est la densité de la mesure fournie, qui permet de rendre compte d'hétérogénéités ou de discontinuités à l'échelle d'observation.

L'objet des trois paragraphes suivants est de présenter brièvement les principales méthodes permettant de mesurer des champs de déplacement. Le premier paragraphe traite des méthodes interférométriques (qui reposent sur les variations spatiales de la phase d'une onde lumineuse), le second paragraphe traite des méthodes non interférométriques (qui reposent sur les variations spatiales d'une intensité lumineuse), puis les mesures obtenues par tomographie sont présentées dans le troisième paragraphe. Enfin, un quatrième paragraphe est consacré au filtrage des mesures expérimentales.

1.1.1 Mesures cinématiques par interférométrie

Les mesures par interférométrie reposent sur l'étude de franges d'interférences. Ces franges permettent de mesurer la différence de phase entre les ondes lumineuses relatives à un état initial et à un état déformé. Ces ondes lumineuses sont issues la plupart du temps d'une source de lumière cohérente de type laser. Ces franges d'interférences peuvent être obtenues en particulier par deux techniques différentes : l'interférométrie de moiré et l'interférométrie de speckle. Ces deux dernières techniques permettent de mesurer les déplacements dans le plan ou hors plan, mais elles permettent également de mesurer les déformations par une dérivation optique appelée *shearographie* [Yang *et al.*, 1995].

1.1.1.1 Interférométrie de moiré

L'interférométrie de moiré, ou interférométrie de réseau, est basée sur les propriétés de diffraction des réseaux. La surface de la structure que l'on étudie est recouverte d'un réseau collé par de la résine. Ce réseau est constitué d'un quadrillage régulier comportant typiquement un millier de lignes au millimètre pour chaque axe. Il possède généralement une épaisseur de l'ordre d'une dizaine de micromètres, ce qui reste suffisamment faible pour ne pas trop perturber la réponse mécanique de structures suffisamment rigides. La surface est éclairée par deux faisceaux laser d'angles incidents opposés par rapport à un plan normal à la surface de l'échantillon. Lorsque la structure se déforme,

des franges d'interférence apparaissent et leur écartement permet de calculer un déplacement (par démodulation de phase). L'image de ces franges est capturée à l'aide d'une caméra CCD. En orientant les faisceaux laser suivant deux directions x et y de la surface mesurée on obtient alors les deux composantes des déplacements dans le plan du réseau u_x et u_y , et éventuellement la composante hors plan u_z . De nombreux travaux dédiés aux développements et aux applications de cette méthode à des mesures cinématiques sont développés dans [Kang *et al.*, 1987; Dadkhah & Kobayashi, 1990; Shield & Kim, 1991; Zhong *et al.*, 2005; Lee *et al.*, 2006]. Une évolution de cette méthode est représentée sur la figure 1.1, où l'ajout d'un interféromètre de Michelson réglé en "coin d'air" permet une dérivation optique.

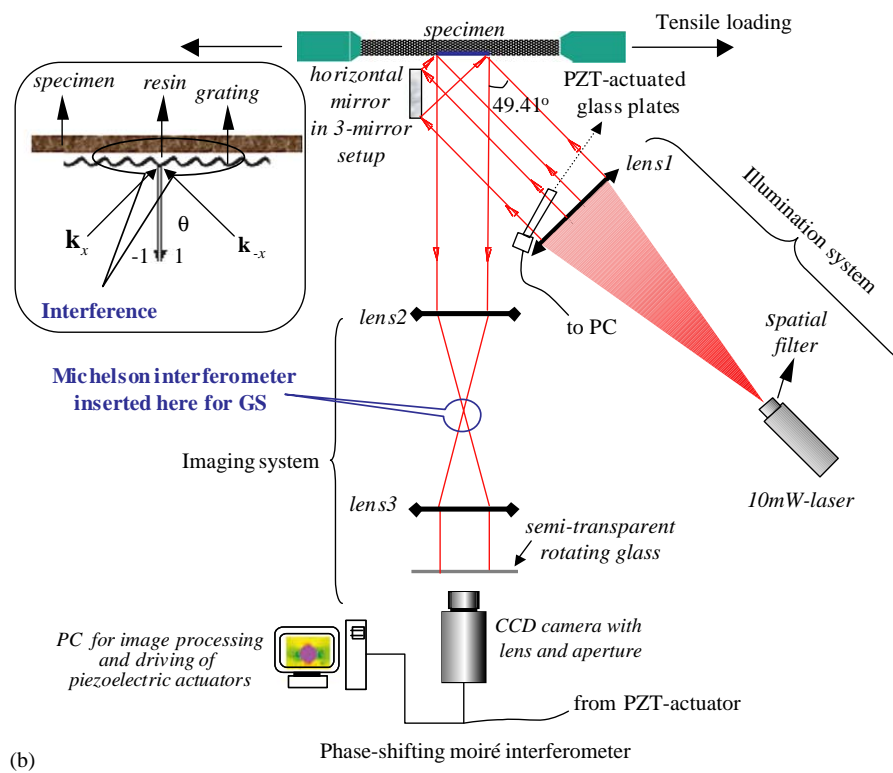


FIG. 1.1 – Interférométrie de moiré, d'après [Lee *et al.*, 2006]

L'avantage du moiré interférométrique est le nombre très important de franges qu'il est possible d'obtenir pour de très faibles déplacements, permettant une grande précision. En contrepartie, la sensibilité de cette méthode aux vibrations et autres perturbations atmosphériques est très grande. Le moiré interférométrique n'est également pas adapté à des mesures en grandes déformations. Une application de cette méthode à la mesure lors d'un essai de traction sur une éprouvette pré-entallée est donnée sur la figure 1.2. Le resserrement important des franges au voisinage de la fissure illustre les limitations de cette méthode lors de la mesure de déformations importantes.

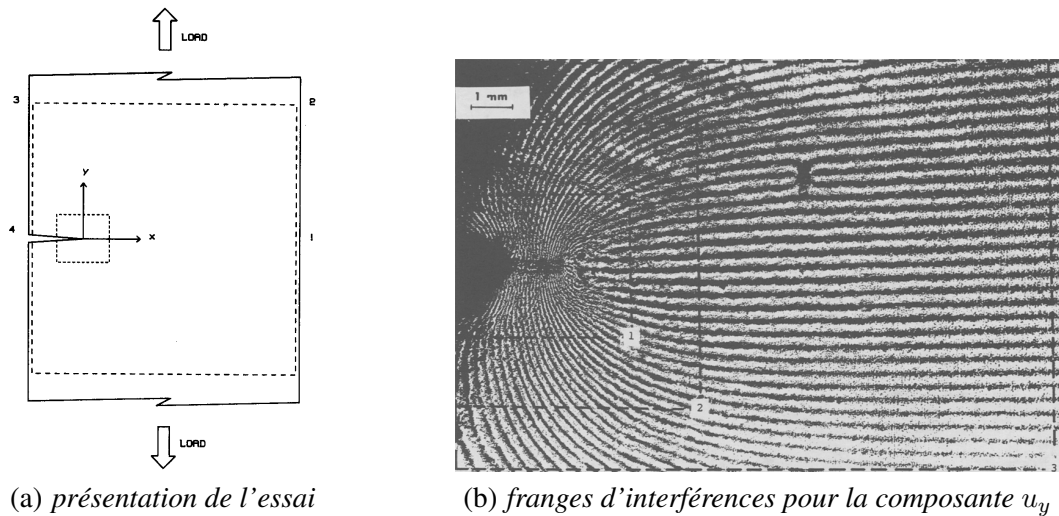


FIG. 1.2 – Franges d'interférences de moiré obtenues expérimentalement, permettant de mesurer la composante verticale du déplacement u_y , d'après [Kang et al., 1987]

1.1.1.2 Interférométrie de speckle

L'interférométrie de speckle, ou granularité laser, exploite les propriétés de diffusion lumineuse d'une surface rugueuse. Cette technique est présentée de façon complète dans les Techniques de l'Ingénieur [Smigielski, 2001]. L'interférométrie de speckle est souvent désignée par l'acronyme ESPI pour *Electronic Speckle Pattern Interferometry*. Lorsqu'on éclaire une surface par une source laser on observe une figure de diffraction d'aspect granulaire appelée speckle (pour tavelure, ou mouchetis), qui est liée à la rugosité de la surface (cf. figure 1.3).

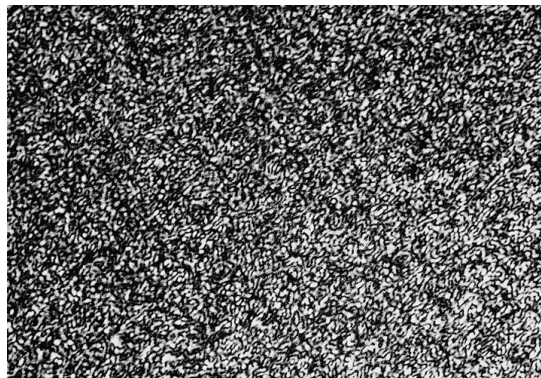


FIG. 1.3 – Figure de speckle, d'après [Smigielski, 2001]

Une des conditions pour obtenir un figure de speckle suffisamment contrastée, est que la rugosité soit supérieure à la longueur d'onde du laser. Le speckle se déplace en même temps que la surface et permet donc de suivre les déplacements, mais à la condition que l'état de surface de la face observée ne soit pas trop modifié par le processus de déformation.

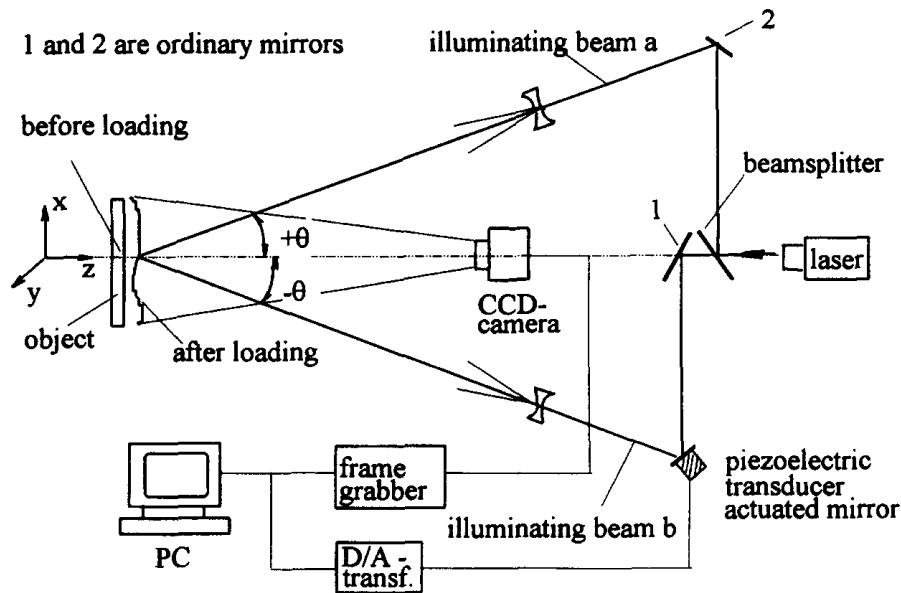


FIG. 1.4 – Interferométrie de speckle, d'après [Yang et al., 1995]

Le speckle interférométrique consiste alors à utiliser deux sources laser de manière à obtenir des franges d'interférence (cf. figure 1.4). Les franges, similaires à celles obtenues par interférométrie de moiré, sont alors suivies au cours de la sollicitation appliquée à la structure pour remonter jusqu'aux déplacements dans le plan. Lorsqu'on s'intéresse aux déplacements hors plan, ces derniers peuvent être isolés par un éclairage normal à la surface. La shearographie est également applicable à l'interférométrie de moiré.

1.1.2 Mesures cinématiques non interférométriques

Les techniques non interférométriques que nous allons présenter reposent principalement sur le suivi de marqueurs de surface :

- la méthode des grilles utilise le suivi de motifs réguliers déposés sur la surface d'observation,
- la granularité en lumière blanche utilise comme motif un mouchetis de peinture sur la surface à observer. Bien sûr certains matériaux (bois, mousses, bétons, ...) présentent des surfaces naturellement contrastées et ne nécessitent pas d'ajout de mouchetis. Un éclairage laser peut également être utilisé, dans ce cas le motif de speckle dépend de la rugosité de surface.

Nous allons maintenant aborder successivement la méthode de grille et la méthode de granularité.

1.1.2.1 Méthode de grille

Cette méthode, appelée également *object grating technique*, repose sur l'observation par une caméra CCD d'une grille éclairée en lumière blanche. Le pas de la grille varie du millimètre au micromètre et conditionne la résolution spatiale de la mesure. Cette grille peut avoir diverses formes

(maille, cercles, croix...). La grille doit être suffisamment contrastée par rapport à son support, et peut être gravée, imprimée, ou déposée par des procédés photolithographiques. L'application de la grille est très souvent une opération délicate qui conditionne la qualité des mesures. En mesurant la phase de l'intensité lumineuse sur la surface marquée, il est possible d'obtenir les déplacements par des algorithmes de démodulation de phase. Des algorithmes de dépliement de phase ou de corrélation d'images numériques (*cf.* §1.1.2.2) permettent de calculer des déplacements à partir des images acquises.

La méthode de grille a été utilisée pour des mesures à une échelle macroscopique [Chalal, 2005; Pannier, 2006, par exemple], ou à une échelle plus fine pour l'étude des déformations à l'échelle des grains d'un polycristal métallique [Liu & Fischer, 1997; Héripré *et al.*; Soppa *et al.*, 2001].

1.1.2.2 Méthodes de granularité

Les méthodes de granularité reposent sur le suivi de motifs, généralement aléatoires, présents sur la surface pour laquelle on souhaite mesurer des déplacements [Sutton *et al.*, 1983]. Ces motifs granulaires peuvent être obtenus par éclairage en lumière cohérente sur une surface de rugosité adéquate, ou obtenus par un mouchetis de peinture éclairés en lumière blanche. Ils peuvent également être déposés par photolithographie [Wissuchek *et al.*, 1996]. Cette dernière technique permet alors de contrôler de façon plus fine le motif déposé, en particulier la granulométrie moyenne, mais au prix d'une préparation plus délicate.

Ces motifs induisent une variation de l'intensité lumineuse sur la surface de l'échantillon. Cette intensité lumineuse est projetée, *via* un système optique, sur un capteur qui numérise le signal. Un soin particulier doit être apporté au positionnement de la caméra : dans le cas de mesures planes, l'alignement entre le plan focal de l'objectif et le plan de la surface à mesurer doit être ajusté. Pour cela, le dispositif expérimental utilisé dans le cadre de ce travail comporte un plateau de réglage composé de trois platines de rotation micrométriques, et de deux platines de translation (*cf.* figure 1.5).

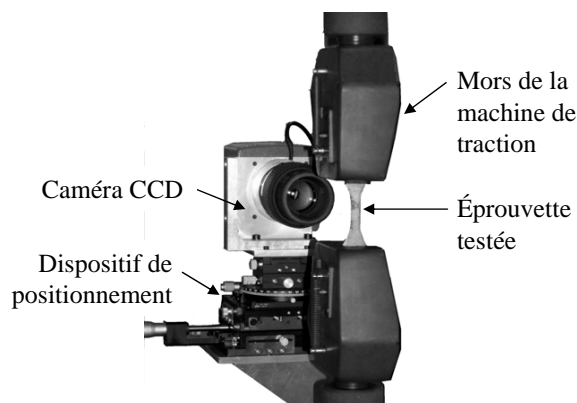


FIG. 1.5 – Exemple de dispositif expérimental de granularité en lumière blanche, pour un essai de traction uniaxial de référence

Basés sur une comparaison entre les enregistrements obtenus pour une configuration déformée et une configuration de référence, les algorithmes de corrélation d'images numériques permettent de mesurer les déplacements de la surface de l'échantillon.

Les méthodes classiques mesurent les déplacements dans le plan de la surface, mais il existe également des dispositifs de stéréocorrélation, qui par l'utilisation de deux caméras, mesurent un déplacement tridimensionnel de la surface observée [Luo *et al.*, 1993].

Les coordonnées spatiales \mathbf{x} permettent de parcourir une surface S testée. Un signal $f_1(\mathbf{x})$ de niveaux de gris est acquis pour une configuration initiale au temps t_1 , et un signal $f_2(\mathbf{x})$ est acquis pour une configuration déformée au temps t_2 . La transformation subie par la surface au voisinage d'un point quelconque est projetée sur une base de fonctions ξ plus ou moins riche (par exemple de fonctions affines, quadratiques, biquadratiques,...). Ainsi on détermine la transformation ξ_0 au voisinage $V_{\mathbf{x}_0}$ d'un point \mathbf{x}_0 en minimisant la quantité :

$$\xi_0 = \arg \min_{\xi} \|f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x} + \xi(\mathbf{x}))\|_{\mathbf{x} \in V_{\mathbf{x}_0}} \quad (1.1)$$

$$\text{avec } \|a\|_{\mathbf{x} \in V_{\mathbf{x}_0}} = \int_{V_{\mathbf{x}_0}} a^2 dS \quad (1.2)$$

Cette minimisation est effectuée en chacun des N points de mesure \mathbf{x}_i , associés à un voisinage $V_{\mathbf{x}_i}$, décrivant ainsi la surface mesurée S . Ces voisinages $V_{\mathbf{x}_i}$ doivent être de taille suffisante pour définir des motifs caractéristiques, mais rester petits pour offrir une bonne résolution spatiale. En faisant l'hypothèse que l'intensité moyenne évolue peu autour de $V_{\mathbf{x}_i}$, la recherche des transformations locales ξ_i prend la forme :

$$\forall \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_N, \quad \xi_i = \arg \max_{\xi} \left(\int_{V_{\mathbf{x}_i}} f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x} + \xi(\mathbf{x})) dS \right) \quad (1.3)$$

L'équation (1.3) représente un coefficient de corrélation, il existe de nombreuses autres formulations, pouvant par exemple être normées ou à moyenne nulle. Pour cette étude, le coefficient de corrélation est normé et s'écrit :

$$\xi_i = \arg \max_{\xi} \left(\frac{\int_{V_{\mathbf{x}_i}} f_1(\mathbf{x}) f_2(\mathbf{x} + \xi(\mathbf{x})) dS}{\sqrt{\int_{V_{\mathbf{x}_i}} f_1^2(\mathbf{x})} \sqrt{\int_{V_{\mathbf{x}_i}} f_2^2(\mathbf{x})}} \right) \quad (1.4)$$

Le coefficient de corrélation peut être calculé dans l'espace réel [Sutton *et al.*, 1983; Tong, 1997; Wattrisse, 1999; Wang & Cuitino, 2002] ou bien dans l'espace de Fourier afin d'utiliser les propriétés de la transformée de Fourier [Chevalier *et al.*, 2001; Hild & Roux, 2006a]. Un coefficient de corrélation possible pour la corrélation dans les espaces de Fourier peut s'écrire :

$$\xi_0 = \arg \max_{\xi} (TF^{-1} (TF(f_1(\mathbf{x})) \otimes \overline{TF}(f_2(\mathbf{x} + \xi)))) \quad (1.5)$$

où TF désigne la transformée de Fourier, \otimes désigne le produit de convolution, et où la transformation ξ est une translation pure.

1.1.3 Mesure de champs cinématiques par tomographie

La tomographie est une technique permettant d'obtenir une image tridimensionnelle du volume d'un objet à l'aide de rayons X. Cette technique a été initialement développée à la fin des années 1970 dans le cadre de l'imagerie médicale, pour les scanners tomographiques. Comme les méthodes optiques que nous venons de présenter c'est une mesure sans contact.

Le principe de la tomographie est d'utiliser un émetteur de rayons X qui tourne autour d'un objet en même temps qu'un récepteur. Le récepteur mesure l'intensité des rayons X qui ont traversé l'objet. La prise de vue peut durer entre une fraction de seconde à plusieurs heures selon le dispositif expérimental. Différentes dispositions géométriques sont présentées sur la figure 1.6. Pour une source ponctuelle associée à un capteur à une dimension, une translation verticale de l'objet par rapport à l'ensemble récepteur/émetteur est nécessaire (cf. figure 1.6a). Des capteurs matriciels suppriment la nécessité de cette translation (cf. figure 1.6b). L'utilisation de ces capteurs est par ailleurs bien adapté à l'éclairage parallèle, pour lequel la source d'éclairage est très éloignée de l'objet (cf. figure 1.6c).

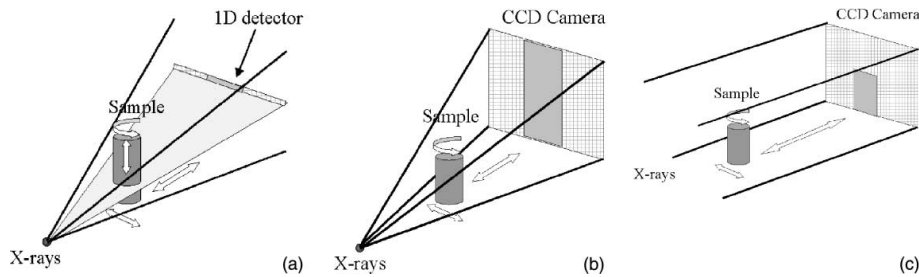


FIG. 1.6 – Différentes dispositions géométriques pour la tomographie, d'après [Salvo et al., 2003]

A partir de la série de données 2D acquises pour différentes orientations, une image 3D est reconstruite au moyen d'algorithmes spécifiques. L'intensité de chaque voxel de l'image 3D peut être reliée à un coefficient d'absorption radiologique local de l'objet. Il est courant de relier le coefficient massique¹ d'absorption μ/ρ d'un rayon traversant un matériau à n constituants à la constante d'Avogadro N_A , ainsi qu'à la section efficace s_i , la masse atomique A_i et la concentration pondérale w_i de chaque élément i [Thierry & Gerstenmayer, 2002] :

$$\frac{\mu}{\rho} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_i w_i$$

$$\text{avec } \left(\frac{\mu}{\rho} \right)_i = N_A \frac{s_i}{A_i} \quad (1.6)$$

L'absorption étant principalement fonction des masses atomiques et des concentrations de chaque constituant du matériau, l'on peut aisément identifier par tomographie des cavités, trous et fissures dans la matière.

¹où μ est le coefficient d'absorption surfacique, et ρ est la masse volumique

La principale difficulté de la tomographie est la reconstruction de l'image, qui se présente comme un problème inverse mal posé : il s'agit, pour chaque tranche de l'image, d'estimer l'absorption $\mu(x, y)$ à partir des projections $P_\theta(t)$ obtenues pour chaque orientation des rayons θ .

La résolution spatiale des méthodes de tomographie est d'une centaine de μm en moyenne. Elle peut descendre à quelques μm pour les microtomographes, et peut monter jusqu'à 1,4 mm pour des installations à très haute énergie. Les résolutions des capteurs peuvent par exemple être de 1024×1024 pixels et un millier de projections sont nécessaires en moyenne pour la reconstruction. La microtomographie par synchrotron (par exemple l'ESRF situé à Grenoble) offre un rayonnement monochromatique très cohérent, très énergétique qui fait apparaître "naturellement" des figures de diffraction soulignant les discontinuités du milieu. Ces figures permettent de faire une tomographie par contraste de phase beaucoup plus précise que la tomographie par absorption précédemment décrite.

Bien évidemment, ces mesures restent limitées à un certain nombre de matériaux présentant un contraste naturel aux rayons X, par exemple des polycristaux ou alliages hétérogènes, des mousses, ou encore des composites où la matrice diffère des fibres. Une autre limite de ces méthodes est due au temps d'acquisition d'une image qui peut être important, il faut alors prendre des précautions pour que la structure soit bien immobile lors de la mesure et limiter les phénomènes de vibrations. Le dispositif appliquant la sollicitation mécanique doit également offrir une accessibilité suffisante à la mesure qui doit pouvoir occuper une grande partie de l'environnement de l'objet à étudier.

Ce type d'images a été utilisé par exemple pour l'étude de l'endommagement de mousses métalliques et de composites à matrice métalliques [Buffière *et al.*, 1999; Maire *et al.*, 2001; Salvo *et al.*, 2003], ou encore pour l'étude de la propagation de fissures liées à des mécanismes de fatigue [Buffière *et al.*, 2001, 2005].

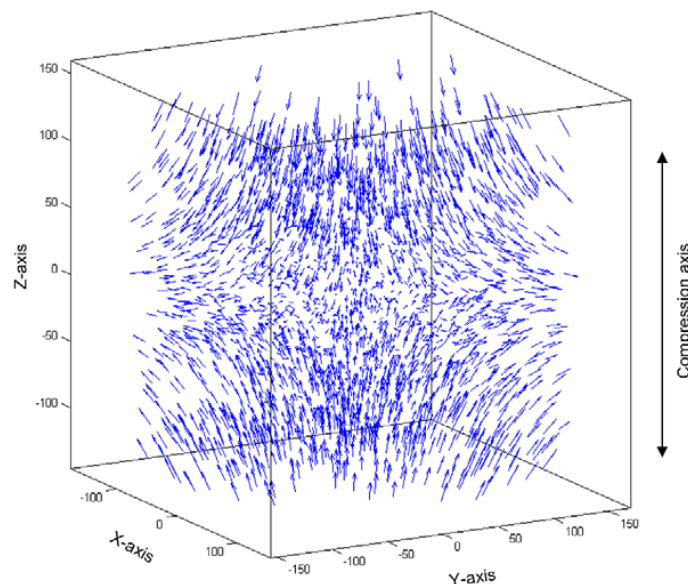


FIG. 1.7 – Champ de déplacement tridimensionnel obtenu pour la compression d'une éprouvette d'aluminium contenant des particules de tungstène, d'après [Nielsen *et al.*, 2003]. Les axes sont numérotés en pixels (taille de pixel $1.5 \times 1.5 \times 1.5 \mu\text{m}^3$)

Nielsen *et al.* [2003] ont obtenu des champs de déplacement et des gradients de déplacements plastiques pour un essai de compression sur une éprouvette spécialement préparée pour être mesurable par tomographie par absorption. L'éprouvette, réalisée à partir de poudres métalliques, est constituée principalement d'aluminium contient des particules de tungstène possédant une absorption des rayons X beaucoup plus importante. Un algorithme de suivi de marqueur permet de mesurer le déplacement de 2544 particules de tungstène (*cf.* figure 1.7).

1.1.4 Filtrage des mesures

La donnée cinématique qui intéresse plus particulièrement le mécanicien est la déformation. Certaines méthodes exploitent une dérivation optique et mesurent directement une déformation. Dans les autres cas, ces déformations peuvent être obtenues par une opération de dérivation numériques sur le champ de déplacement.

L'amplification du bruit, associée à cette dérivation, rend parfois difficile l'observation des phénomènes, et dans certaines situations l'amplitude du bruit peut être de loin supérieure à l'amplitude du signal "réel". C'est notamment le cas lorsque l'on s'intéresse à de faibles sollicitations pour lesquelles le dispositif de mesure n'est pas suffisamment sensible. A titre d'exemple, nous pouvons citer le cas du calcul de la dissipation à partir des mesures par caméra infrarouge lors d'essais de fatigue. Le recours à des techniques de filtrage est dans ce cas impératif, mais l'opération de filtrage doit toujours être réalisée avec précaution car un filtrage mal adapté ou trop accentué peut altérer l'information.

De nombreuses méthodes peuvent être appliquées pour réduire l'influence du bruit sur l'estimation des déformations. Nous avons choisi de ne présenter ici que deux approches, dont une première qui réalise un filtrage par approximation et que nous avons utilisé dans ce travail, et une autre, qui intègre dès l'étape de calcul de déplacement par corrélation d'images numériques des informations physiques supplémentaires sur la nature des déplacement, afin d'en régulariser la forme.

1.1.4.1 Projection du signal sur une base de fonction

Une première classe de méthodes de filtrage est basée uniquement sur les données mesurées (ici le déplacement \mathbf{u}^*). Elle consiste à interpoler le signal bruité sur une base de fonctions d'approximation pouvant par exemple être des fonctions polynomiales, ou encore trigonométriques. Ces méthodes consistent à rechercher la meilleure approximation des données au sens d'un écart donné, par exemple de moindres carrés.

Les fonctions polynomiales de type splines sont également adaptées à l'interpolation des données. La continuité du signal approximant peut alors être imposée jusqu'à un ordre spécifié. Les splines offrent de nombreuses possibilités. Elles permettent par exemple d'augmenter la richesse de description en augmentant le degré des polynômes les constituant, ou en raffinant le maillage sur lequel les polynômes viennent s'appuyer.

Ici, nous avons utilisé des B-splines approximantes cubiques pour l'exploitation de données obtenues expérimentalement. A partir d'un déplacement \mathbf{u}^* mesuré sur un ensemble de points $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ appartenant à une surface de mesure Ω , il est possible de calculer un déplacement \mathbf{u}_f en minimisant la quantité :

$$p \sum_{j=1}^n \left(\frac{\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_j) - \mathbf{u}_f(\mathbf{x}_j)}{\lambda_u} \right)^2 + (1-p) \int_{\Omega} (D^2 \mathbf{u}_f(x))^2 dS \quad (1.7)$$

\mathbf{u}_f étant ici une fonction polynomiale par morceaux de degré 3, de classe C^1 (*i.e.* continuellement dérivable) sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. La constante λ_u vaut 1mm. Le coefficient d'approximation p est compris entre 0 et 1. Pour $p = 1$, \mathbf{u}_f est alors la spline interpolante de \mathbf{u}^* aux points de contrôle \mathbf{x}_j . En donnant plus de poids à la minimisation de la seconde dérivée D^2 de \mathbf{u}_f (*i.e.* lorsque p s'approche de zéro), le déplacement \mathbf{u}_f devient de plus en plus régulier et s'écarte de plus en plus des données. Un compromis est donc nécessaire, *via* l'ajustement du paramètre de réglage p , entre :

- la régularité souhaitée de la fonction d'approximation,
- et la proximité souhaitée entre l'approximation et les données expérimentales.

La valeur de p optimale dépend de la qualité de la mesure : meilleure est la mesure, plus p peut être élevé. Un des principaux inconvénients de ce filtrage purement spatial est donc l'ajustement nécessaire du paramètre p qui possède peu de sens physique. L'application de cette méthode de filtrage dans le cadre de ce travail est détaillé dans le troisième chapitre, au paragraphe 3.1.4.1.

1.1.4.2 Filtrage mécanique

Une méthode plus élaborée consiste à prendre en compte les mesures mais également diverses informations relatives à la physique des phénomènes observés, qui sont ici mécaniques. Ces approches font par exemple appel aux lois de comportement, d'équilibre ou de fissuration.

Des techniques de filtrage se basent sur la connaissance de solutions analytiques à un problème connu. Par exemple, des lois de fissuration ont été utilisées pour interpréter les données mesurées par une approche intrégrée appelée I-DIC pour *integrated digital image correlation* ou CINI pour *corrélation d'images numériques intégrée* [Hild & Roux, 2006b]. L'algorithme de corrélation est modifié pour ne plus chercher le déplacement ξ arbitrairement mais sur une base de solutions choisies. Le développement de Taylor au premier ordre de l'équation (1.1) permet d'estimer le déplacement par :

$$\xi_0(\mathbf{x}) = \arg \min_{\xi(\mathbf{x})} \left(\int_S [f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x}) + \xi(\mathbf{x}) \cdot \nabla f_2(\mathbf{x})]^2 dS \right) \quad (1.8)$$

Le champ de déplacement ξ est ensuite considéré comme étant une combinaison linéaire de déplacements élémentaires \mathbf{U}_i choisis comme étant soit des mouvements de solide rigide, soit des déplacements solutions d'un problème mécanique donné. Les amplitudes a_i de cette combinaison sont obtenues en résolvant le système linéaire par développement de l'équation (1.8) sur la base choisie :

$$a_j \int_S [\mathbf{U}_i(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{U}_j(\mathbf{x})] : [\nabla f_1(\mathbf{x}) \otimes \nabla f_1(\mathbf{x})] dS = \int_S [f_1(\mathbf{x}) - f_2(\mathbf{x})] \nabla f_1(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.9)$$

Cette technique de filtrage est particulièrement robuste, car le nombre de paramètres recherchés est considérablement réduit par rapport à un problème d'identification traité en deux étapes distinctes

(une étape de filtrage des mesures puis une étape d'identification à partir des mesures filtrées). La prise en compte d'un résidu de filtrage permet d'apprécier l'adéquation de la modélisation de la transformation comme une décomposition sur la base des déplacements élémentaires \mathbf{U} par rapport à la situation donnée, ou peut encore renseigner sur des artefacts de mesure.

Pour l'application proposée dans [Hild & Roux, 2006b], Le voisinage d'une fissure est observé grâce à un microscope longue distance, pour un essai de flexion 4 points. La modélisation d'une fissure plane permet d'identifier d'une part les déplacements, d'autre part deux facteurs d'intensité des contraintes. La position de fissure la plus probable minimise le résidu de corrélation. Cette approche a également été développée en utilisant comme base de recherche une description de type éléments finis enrichis [Réthoré *et al.*].

Enfin, une autre technique de filtrage repose sur l'erreur en relation de comportement et sera présentée avec la méthode d'identification correspondante (*cf.* §1.2.2.4).

1.2 Méthodes d'identification appliquées à la mécanique des solides

Après avoir présenté diverses techniques de mesures de champs dans une première partie, des méthodes d'identification en rapport avec ces données, pouvant être cinématiques ou thermiques, sont ici présentées. La première catégorie de méthodes que nous allons présenter concerne les problèmes inverses principalement basés sur les mesures cinématiques à la frontière. Parmi ces méthodes, certaines n'utilisent pas directement les mesures de champs mais peuvent potentiellement en tirer profit. La deuxième catégorie de méthodes que nous allons présenter sont liées à des problèmes d'identification qui font intervenir des mesures sur l'ensemble du domaine étudié.

1.2.1 Identification de propriétés mécaniques à partir de mesures à la frontière

Nous présentons ici en particulier deux méthodes, l'une utilisant un écart en relation de comportement, l'autre utilisant un écart à la réciprocité. Cette première méthode possède un certain nombre de similitudes avec l'approche que nous avons utilisée (*cf.* chapitre 2). Elle sera donc présentée plus en détail dans cette partie bibliographique.

L'écart à la réciprocité a permis l'identification de fissures en élasticité statique et en élastodynamique. Des fissures peuvent également être identifiées en utilisant une méthode de gradient topologique qui sera présentée plus brièvement. Enfin un problèmes inverse à partir de mesures à la frontière, dit problème de Cauchy, sera présenté au travers d'une technique de régularisation intéressante.

1.2.1.1 Utilisation de l'erreur en relation de comportement

Une première méthode d'identification se base sur l'erreur en relation de comportement (*cf.* §1.2.2.4), introduite par Ladevèze & Leguillon [1983] pour les calculs d'erreur en éléments finis.

Cette méthode a également été utilisée par Kohn & McKenney [1990] pour identifier des conductivités électriques² à partir de mesures de bord, en s'inspirant des travaux mathématiques présentés dans [Calderon, 1980; Kohn & Vogelius, 1984, 1985; Kohn & Lowe, 1988]. Les conductivités sont supposées isotropes, le problème d'identification revient donc à la caractérisation d'un unique paramètre.

Une méthode similaire a été appliquée à l'identification de paramètres élastiques dans [Constantinescu, 1994]. Dans ce travail sont par exemple précisées les symétries qu'il est nécessaire de considérer pour l'identification, sur le tenseur d'élasticité de Hooke. Ces conditions dépendent de la nature des données du problème, et elles sont en particulier précisées pour des problèmes plans. L'identification est ici locale, appliquée à des problèmes plans, et le matériau choisi est élastique cubique. Un système matériel occupant un domaine Ω subit une série de N sollicitations indépendantes qui permettent de faire travailler chaque sous-domaine de la structure suivant les composantes de la loi de comportement que l'on souhaite identifier. Les données mesurées sont le déplacement et les efforts normaux sur la frontière de la structure. Ce type d'approche est particulièrement adapté à des modèles de comportement linéaires (de conductivité ou d'élasticité par exemple) pour lesquels le principe de superposition s'applique. Nous allons maintenant présenter les principales étapes de résolution du problème d'identification qui vient d'être présenté.

Notons \mathbf{C} le tenseur d'élasticité *a priori* hétérogène, \mathbf{u} le champ de déplacement, $\boldsymbol{\varepsilon}$ le tenseur de déformation et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur de contrainte. Notons également (φ_i, ξ_i) chacune des N distributions de couples force-déplacement imposées sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine Ω . Pour chaque mesure, le chargement est constitué d'efforts ponctuels normaux, de répartitions d'efforts paraboliques peu étendues, ou encore de couples de forces ponctuelles sur deux nœuds adjacents.

Notons $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ le vecteur des N champs de déplacements associés aux N sollicitations, et $\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{\sigma}_1, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N)$.

Le problème d'identification est de trouver une solution $(\mathbf{C}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\Sigma})$ au système d'équations :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_i = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}_i + \nabla^T \mathbf{u}_i) & , \text{ dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_i & , \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_i) = 0 & , \text{ dans } \Omega, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases} \quad (1.10)$$

vérifiant les conditions aux limites :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_i = \xi_i & , \text{ sur } \partial\Omega, \quad i = 1, \dots, N \\ \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n} = \varphi_i & , \text{ sur } \partial\Omega, \quad i = 1, \dots, N \end{cases} \quad (1.11)$$

Pour ce problème, l'erreur en relation de comportement I s'écrit :

$$I(\mathbf{C}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\Sigma}) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\sigma}_i - \mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i) \right|^2 d\Omega \quad (1.12)$$

Cette erreur est une norme de l'écart entre une contrainte statiquement admissible $\boldsymbol{\sigma}$ et la contrainte $\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ obtenue à partir de la loi de comportement. Cette norme a été choisie pour que le tenseur \mathbf{C} porte sur les termes en déplacement et en contrainte avec un poids similaire. Elle est minimisée avec $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ cinématiquement admissible et $\boldsymbol{\sigma}_i$ statiquement admissible. La méthode implicite à directions alternées (IDA), utilisée pour la résolution, comporte trois étapes :

²L'identification d'impédance électrique reste un sujet d'actualité, de nombreux articles à ce sujet sont présentés dans [Borcea, 2002]

1. à \mathbf{C} fixé, résoudre N problèmes de Dirichlet :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_i = \boldsymbol{\xi}_i & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.13)$$

2. à \mathbf{C} fixé, résoudre N problèmes de Neumann :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_i) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{n} = \boldsymbol{\varphi}_i & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.14)$$

3. à \mathbf{u}_i et $\boldsymbol{\sigma}_i$ fixés respectivement par les itérations (1) et (2), calculer \mathbf{C} en minimisant $I(\mathbf{C}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\Sigma})$.

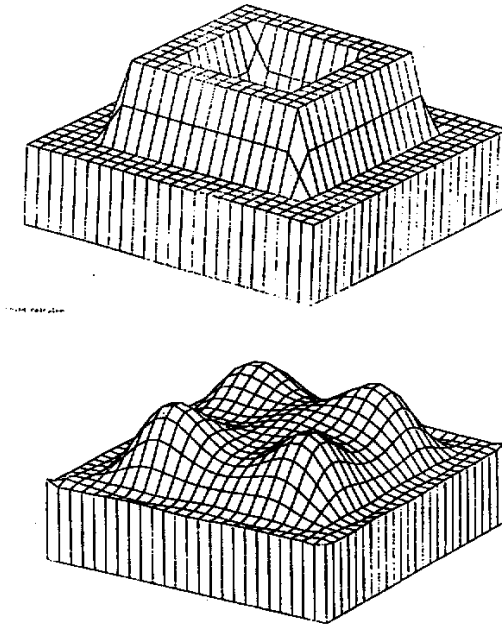


FIG. 1.8 – *Module de Young réel (en haut) et reconstruit après 15 itérations (en bas) pour une inclusion annulaire, d'après [Constantinescu, 1994]*

Sur la figure 1.8, on observe le résultat obtenu pour l'identification d'une distribution de modules de Young pour une inclusion annulaire, à partir de données simulées numériquement et non bruitées.

Les résultats obtenus en élasticité dans [Constantinescu, 1994] ont étendu l'identification de conductivités électriques obtenue quelques années auparavant par Kohn & McKenney [1990]. Cette méthode, qui nécessite un nombre important de données mesurées, n'a pas été directement appliquée à des situations expérimentales, mais une méthode similaire a permis l'identification de modules élastiques pour des plaques minces [Ikehata, 1993].

1.2.1.2 La méthode d'écart à la réciprocité

La méthode d'écart à la réciprocité, tout comme la méthode que nous venons de présenter, est basée sur une formulation variationnelle. Elle est inspirée des travaux de Calderon [1980] portant

sur la prospection de conductivités électriques. La méthode d'écart à la réciprocité tire son nom du théorème de réciprocité de Betti. Elle a été appliquée à l'identification de fissures [Andrieux *et al.*, 1997; Bui *et al.*, 2002].

Cette méthode est particulièrement bien adaptée à l'identification de défauts qui peuvent apparaître à l'intérieur d'une structure au cours de son chargement, car elle nécessite d'une part la connaissance du comportement élastique initial \mathbf{C} , et d'autre part que le comportement sur la frontière de la structure ne soit pas altéré. Nous allons maintenant présenter la formulation du problème de l'identification d'un module altéré \mathbf{C}^v satisfaisant la contrainte $\mathbf{C} = \mathbf{C}^v$ sur $\partial\Omega$.

Le problème d'identification de \mathbf{C}^v repose sur l'écriture du théorème de réciprocité de Betti, associé à un état adjoint (ou état virtuel) $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varphi})$ sur $\partial\Omega$. Pour un problème statique, l'écart à réciprocité $R(\mathbf{C}, \tilde{\varphi})$ s'écrit :

$$R(\mathbf{C}, \tilde{\varphi}) \equiv \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^v) : [\mathbf{C}^v - \mathbf{C}] : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\varphi \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\varphi} \cdot \boldsymbol{\xi}) dS \quad (1.15)$$

L'identification de \mathbf{C}^v repose sur l'équation suivante :

$$R(\mathbf{C}^v, \tilde{\varphi}) = 0 \quad \forall \tilde{\varphi} \quad (1.16)$$

Prenons maintenant l'exemple de l'identification de fissure plane, associée à une surface libre Γ incluse dans Ω . La condition $\mathbf{C} = \mathbf{C}^v$ sur $\partial\Omega$ impose que la fissure ne soit pas débouchante.

Le problème est alors réduit à l'identification de la surface Γ (un segment pour un problème 2D), au moyen de l'écart à la réciprocité donné par l'équation (1.15) qui peut être reformulé de la façon suivante :

$$R(\Gamma, \tilde{\varphi}) \equiv \int_{\Gamma} \llbracket \mathbf{u}^v \rrbracket \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\Omega} (\varphi \cdot \tilde{\mathbf{u}} - \tilde{\varphi} \cdot \boldsymbol{\xi}) dS \quad (1.17)$$

où $\llbracket \mathbf{u}^v \rrbracket$ représente le saut de déplacement au niveau de la fissure. Par le choix judicieux d'états adjoints $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\varphi})$, il est possible d'identifier une fissure plane, c'est à dire sa normale, sa position et son étendue [Andrieux *et al.*, 1997].

Un écart à la réciprocité instantané, introduit par Bui *et al.* [2002], a permis une extension de la méthode à des problèmes élastodynamiques plans. Pour ce type de problème il est possible de choisir comme états adjoints des ondes planes progressives de déplacement, dont on fait varier la direction. La fonctionnelle d'écart à la réciprocité est calculée en chaque instant, avec l'onde plane progressive comme champ adjoint. La fonctionnelle initialement nulle devient positive lorsque l'onde rencontre la fissure. Un résultat obtenu par cette méthode est présenté sur la figure 1.9, la fissure est représentée par un trait noir tandis que les traits en niveaux de gris représentent les fronts d'ondes plane progressive, le niveau de gris étant fonction de la valeur de la fonctionnelle. L'onde s'arrête lorsqu'elle rencontre la fissure, cette méthode permet ainsi d'identifier le domaine convexe affecté par la présence de la fissure, et bien qu'appliquée à des situations 2D elle est directement applicable à des situations 3D. L'identification de fissures pour des problèmes dynamiques a également été traitée dans [Andrieux & Bui, 2006].

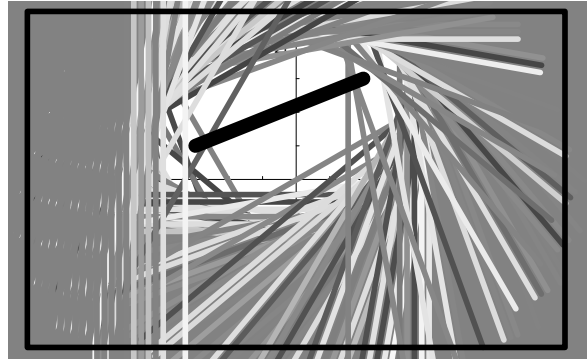


FIG. 1.9 – Identification du domaine convexe affecté par une fissure, d'après [Bui *et al.*, 2002]

1.2.1.3 Identification de cavités par une méthode de sensibilité du gradient topologique

La méthode du gradient topologique a été appliquée à l'identification de cavités pour des modèles plans dans [Bonnet *et al.*, 2001; Guzina *et al.*, 2003; Bonnet & Constantinescu, 2005]. Cette méthode se base sur l'écriture d'une fonctionnelle associée à un problème adjoint en élastodynamique ou en acoustique. Elle est appliquée à des calculs par éléments de frontière, et permet d'identifier une cavité ou une fissure dans un corps élastique. Dans le cas d'une cavité, l'identification permet de retrouver sa position et sa géométrie, tandis que dans le cas de fissures, la position et une déformation de la fissure sont identifiées.

La méthode du gradient topologique a été ensuite étendue à des problèmes elastodynamiques tridimensionnels dans [Bonnet, 2006], appliquée à l'identification de cavités de taille variable.

1.2.1.4 Une méthode de régularisation évanescence pour des problèmes de Cauchy

Dans [Cimetière *et al.*, 2001, 2002], une alternative à la régularisation de Tikhonov est proposée. Une technique de régularisation évanescence est introduite pour résoudre des problèmes inverses de Cauchy. Le problème est ici écrit comme un problème de type laplacien, de conduction isotrope de la chaleur en l'absence de sources volumiques. Le solide élastique possède des propriétés matérielles qui sont supposées connues, sa frontière est divisée en deux parties : une pour laquelle les conditions aux limites sont imposées (Γ_d), l'autre pour laquelle les mesures sont possibles (Γ_i). Ce problème est connu pour être mal posé au sens d'Hadamard. Les instabilités de la solution vis-à-vis de faibles perturbations sur les données peuvent être évitées par des techniques de régularisation [Tikhonov & Arsenin, 1977]. Le problème alors modifié permet la convergence vers des quasi-solutions pouvant être éloignées de la solution exacte. L'originalité de l'approche proposée par Cimetière *et al.* [2001] est que le terme régularisant tend vers zéro au fil des itérations de la méthode, et permet de converger vers la solution exacte.

Le problème de Cauchy s'écrit pour un domaine Ω de frontière $\Gamma = \Gamma_d + \Gamma_i$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad (1.18)$$

où φ et ψ sont deux fonctions données sur Γ_d , et u' est la dérivée normale de u . La méthode itérative à régularisation évanescence repose sur la construction d'une suite (u_p) convergeant vers la solution du problème inverse. La méthode est initialisée avec $u_0 = 0$, chacune des itérations $p + 1$ est solution du problème d'optimisation suivant :

Étant donné $c > 0$, trouver u_{p+1} dans H tel que :

$$f_p(u_{p+1}) \leq f_p(v), \quad \forall v \in H = \left\{ v \in H^{3/2}(\Omega) \mid \Delta v|_{\Omega} = 0 \right\} \quad (1.19)$$

avec $f_p(v) = \|v - \varphi\|_{H^1(\Gamma_d)}^2 + \|v' - \psi\|_{L^2(\Gamma_d)}^2 + c\|v - u_p\|_{H^1(\Gamma)}^2 + c\|v' - u_p'\|_{L^2(\Gamma)}^2$

Les deux premiers termes de $f_p(v)$ expriment l'écart aux données tandis que les deux derniers sont les termes de régularisation évanescence : ils tendent vers zéro lorsque la suite (u_p) converge.

Cette méthode a été appliquée à la reconstruction de fonctions analytiques pour des problèmes 2D en thermique, discrétisés par la méthode des éléments de frontière. Des problèmes de reconstruction similaires ont été abordés par minimisation d'une fonctionnelle énergétique dans [Andrieux *et al.*, 2005].

1.2.2 Identification de propriétés mécaniques à partir de mesures dans le volume

La catégorie de méthodes inverses que nous présentons ci-après tire profit des mesures de champs cinématiques qui procurent un nombre très important de points de mesure sur une surface d'observation. La plupart des mesures obtenues par les techniques optiques sont des mesures de surface, en conséquence les problèmes inverses utilisant ce type de mesure se réduisent la plupart du temps à des situations planes (par exemple des essais sur des plaques minces, et diverses situations pour lesquelles les hypothèses de contrainte ou de déformation planes s'appliquent). Ces situations permettent de prolonger les mesures de surface à des mesures sur tout le volume. Dans le but d'identifier des propriétés matérielles, ces mesures de champs peuvent être utilisées de différentes façons :

- couplées à des éprouvettes à géométrie complexe (par exemple des éprouvettes entaillées [Mahnken & Stein, 1996]), ou à des éprouvettes sollicitées de façon particulière (sollicitation biaxiale [Chevalier *et al.*, 2001], essai Isosipescu [Chalal *et al.*, 2004],...), ces mesures permettent d'identifier de façon simultanée plusieurs paramètres pilotant le comportement du matériau. L'utilisation de ce type d'éprouvette, ou de chargement, permet par ailleurs de se rapprocher de situations concrètes, en mettant en place des dispositifs expérimentaux appliquant des sollicitations mécaniques correspondant à des problématiques industrielles données,
- ces mesures sont particulièrement adaptées à l'étude de matériaux hétérogènes (alliages polycristallins présentant d'importants contrastes en terme de comportement [Hoc *et al.*, 2003], composites,...), ou encore de phénomènes locaux apparaissant lors des essais traditionnels sur les alliages métalliques, comme la striction, les bandes de Lüders,...

Une des méthodes inverses les plus naturelles permettant d'identifier des propriétés matérielles est la méthode du recalage par éléments finis, que nous allons présenter en premier lieu. Nous présenteront ensuite des méthodes inverses basées sur des formulations faibles du problème mécanique, la méthode des champs virtuels, la méthode de l'écart à l'équilibre, et la méthode de l'écart en relation de comportement.

1.2.2.1 Méthode du recalage par éléments finis

La méthode du recalage par éléments finis, introduite en mécanique des sols par Tarantola & Valette [1982] puis en mécanique des matériaux par Hendriks [1991], consiste à modéliser la situation expérimentale pour laquelle on souhaite identifier des propriétés matérielles par un calcul direct de type éléments finis. Bien que la plupart des méthodes de recalage utilisent des calculs de type éléments finis, il est également possible d'utiliser résultats issus de calculs par éléments frontières (par exemple, des paramètres d'un modèle orthotrope sont identifiés par un recalage d'une méthode par éléments de frontière dans [Huang *et al.*, 2004]).

La figure 1.10 représente le principe de cette méthode : à partir des chargements imposés (résultantes ou distributions d'effort au bord, et déplacements au bord) représentés par la variable u , on compare le champ de déplacement m mesuré au cours de l'expérience avec le champ de déplacement h simulé car un calcul direct (par éléments finis) à partir d'un jeu de paramètres θ pilotant la loi de comportement. Le jeu de paramètres initiaux θ_0 est choisi arbitrairement et est réactualisé à chaque itération de l'algorithme, tandis que H représente la matrice de sensibilité $\partial h / \partial \theta$. Cette matrice de sensibilité est nécessaire pour les méthodes de minimisation d'ordre 1 et permet le choix d'un nouveau jeu de paramètres θ à chaque itération. La méthode converge lorsque le résidu r est suffisamment faible.

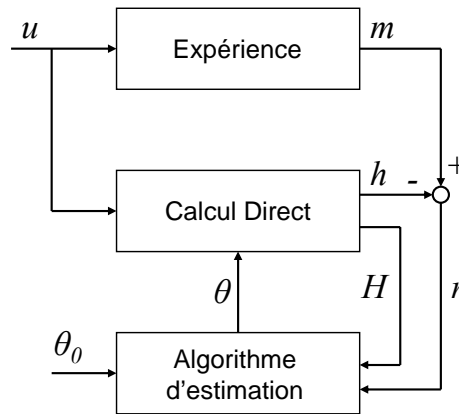


FIG. 1.10 – Schéma de principe de la technique de recalage, d'après Meuwissen *et al.* [1998]

La méthode du recalage consiste à obtenir θ minimisant la fonction coût J :

$$J(\theta) = (m - h(\theta))^2 \quad (1.20)$$

Cette fonction coût peut être régularisée de la façon suivante :

$$J(\theta) = (m - h(\theta))^T \mathbf{V} (m - h(\theta)) + (\theta_0 - \theta)^T \mathbf{W} (\theta_0 - \theta), \quad (1.21)$$

où \mathbf{V} et \mathbf{W} sont deux matrices de pondération définies positives, et le terme $(\theta_0 - \theta)^T \mathbf{W} (\theta_0 - \theta)$ est alors le terme qui régularise l'ajustement des paramètres θ à partir du jeu de paramètre initial θ_0 . La fonction coût est alors la somme de deux fonctions quadratiques. Il est courant de retenir $\mathbf{V} = \alpha \mathbf{I}$ et $\mathbf{W} = (1 - \alpha) \mathbf{I}$, \mathbf{I} étant la matrice identité, α étant alors un paramètre unique de régularisation.

Plusieurs algorithmes d'optimisation permettent de minimiser la fonction coût :

- les méthodes d'ordre zéro, qui ne nécessitent pas le calcul de la dérivée de la fonction coût, comme la méthode du simplexe, ou encore les méthodes génétiques,
- les méthodes d'ordre un, qui nécessitent le calcul de la dérivée de la fonction coût, comme la descente de gradient, ou l'algorithme de Levenberg-Marquardt,
- les méthodes d'optimisation sous contraintes.

Les méthodes d'ordre zéro sont les plus rapides à mettre en place mais en contrepartie leur convergence est moins rapide que les méthodes d'ordre un.

Nous allons maintenant présenter un certain nombre d'applications nous intéressant particulièrement, puisqu'elles traitent de l'identification de comportements élastoplastiques à l'aide des méthodes de recalage par éléments finis.

Identification de comportements élastoplastiques

L'étude de Mahnken & Stein [1996] porte sur l'identification d'une loi élastoplastique à écrouissage isotrope linéaire ou exponentiel, à partir d'un essai de traction monotone mené sur une éprouvette plane entaillée (cf. figure 1.11). Une grille est déposée au voisinage de l'entaille, les déplacements de la grille sont mesurés par corrélation d'images numériques.

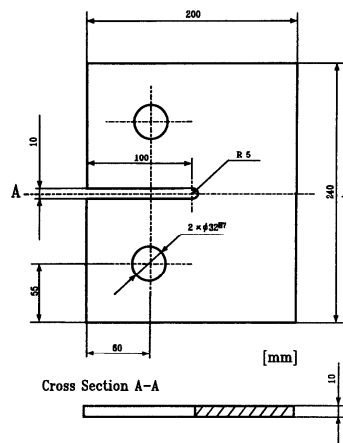


FIG. 1.11 – *Éprouvette entaillée utilisée par Mahnken & Stein [1996] pour l'identification des paramètres d'une loi élastoplastique*

Les travaux de Meuwissen *et al.* [1998] portent également sur l'identification d'une loi élastoplastique, à partir d'un essai de traction sur des éprouvettes d'aluminium dont la géométrie est représentée sur la figure 1.12. Pour cette étude, les paramètres élastiques ne sont pas identifiés, et sont tirés d'essais de traction uniaxiaux de référence. Un des intérêts notables de cette méthode est de montrer, à partir d'une erreur systématique sur le déplacement résiduel (noté r sur la figure 1.10), l'insuffisance du critère de von Mises. La considération d'un critère orthotrope de Hill est ainsi justifiée. La loi d'écrouissage isotrope considérée est une loi puissance de Nadai.

Plus récemment, des modèles élastoplastiques à écrouissage isotrope multilinéaire ou parabolique ont été identifiés en grandes déformations par Kajberg & Lindkvist [2004]. La méthode par

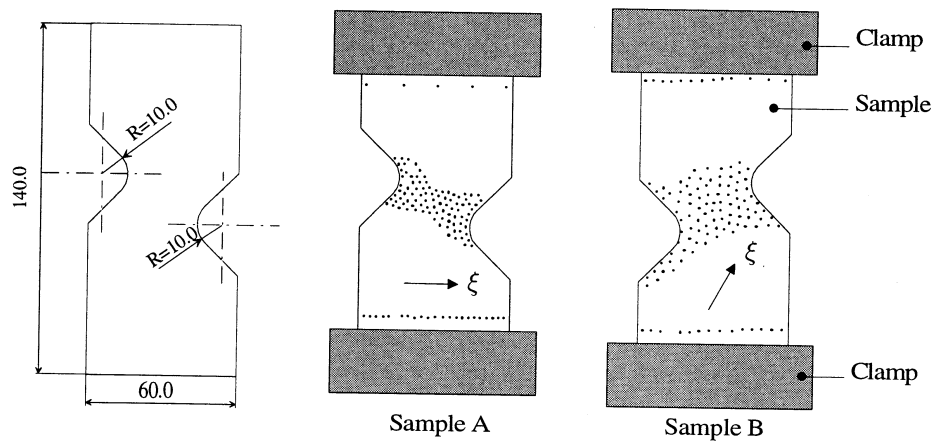


FIG. 1.12 – Deux éprouvettes utilisées dans [Meuwissen *et al.*, 1998], de même géométrie mais découpées suivant deux direction de laminages ξ différentes

éléments finis du calcul direct utilise un maillage auto-adaptif, les déplacements expérimentaux sont obtenus par corrélation d'images numériques.

La méthode du recalage par éléments finis, répandue en ce qui concerne l'identification de modèles élastoplastiques macroscopiques, commence à être utilisée pour l'étude de phénomènes microscopiques. Par exemple, Hoc *et al.* [2003] ont étudié un polycristal de fer afin d'identifier le comportement d'un monocristal. Dans ce cas, les monocristaux sont considérés comme étant identiques mais les différentes orientations de ces cristaux provoquent une réponse hétérogène de l'échantillon en terme de contrainte et de déformation. Une fois identifiée, la loi d'écrouissage permet à la fois d'obtenir un comportement du monocristal en accord avec les résultats de la littérature, un comportement macroscopique vérifié par la courbe force-allongement expérimentale, et enfin une l'évolution au cours de la sollicitation de l'orientation cristallographique, vérifiée par la comparaison entre les figures de pôles simulées par les paramètres identifiés, et la figure de pôle obtenue de façon expérimentale par EBSD (pour *Electron Back-Scattered Diffraction*). La figure 1.13b-c permet de constater la ressemblance tant qualitative que quantitative entre les champs de déformation obtenus expérimentalement et par simulation par éléments finis, à partir des paramètres du modèle identifié. La cristallographie du domaine d'étude est représentée sur la figure 1.13a, la zone d'étude fait $100 \mu\text{m}$ par $100 \mu\text{m}$ et comporte 87 grains.

Autres domaines d'application de la méthode de recalage

Les mesures de champs permettent d'identifier plusieurs paramètres d'une loi de comportement au cours d'un essai unique, à condition que le champ mesuré soit suffisamment complexe pour activer simultanément tous les différents paramètres de la loi de comportement que l'on cherche à identifier. Dans ce but, Chevalier *et al.* [2001] ont utilisé un dispositif expérimental de traction bi-axiale afin d'identifier le potentiel hyperélastique d'un matériau polymère en grandes déformations. Le Magorou *et al.* [2002] ont identifié un comportement viscoélastique anisotrope pour des panneaux de bois sollicités en flexion/torsion (voir également [Le Magorou *et al.*, 2003]).

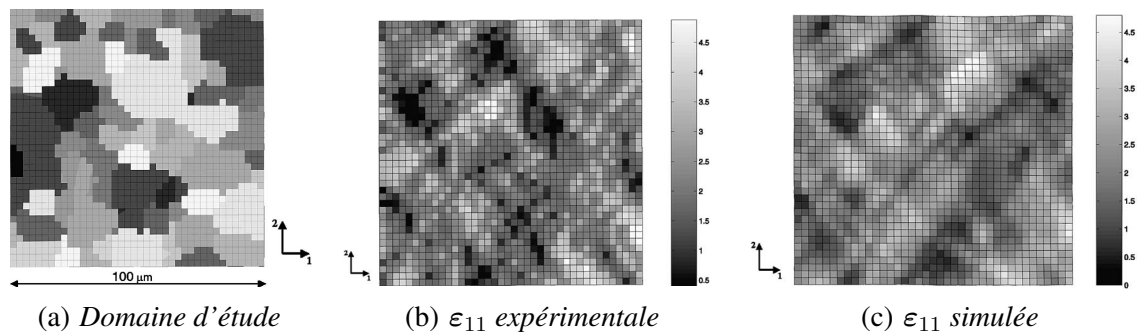


FIG. 1.13 – Comparaison entre la déformation transverse obtenue expérimentalement et par simulation, pour une même déformation axiale macroscopique de 2.5%, d'après [Hoc *et al.*, 2003]

La méthode des éléments de frontière, une alternative à la méthode des éléments finis, a été utilisée par Huang *et al.* [2004] pour le recalage. Des paramètres d'un modèle orthotrope sont alors identifiés.

Dourado *et al.* [2004] ont également appliqué la méthode du recalage à l'identification de propriétés élastiques orthotropes, en utilisant des algorithmes génétiques pour la minimisation de la fonction coût. Rikards *et al.* [1999]; Geers *et al.* [1999]; Milani & Nemes [2004] se sont également intéressés à la caractérisation de matériaux anisotropes. Araujo *et al.* [2000] appliquent une technique de recalage pour identifier l'endommagement de matériaux composites, leur étude est étendue dans [Santos *et al.*, 2003].

Citons encore comme différents domaines d'application une étude de piezoviscosité en lubrification [Molimard & Riche, 2003], l'identification de bimatériaux en plasticité [Yoshida *et al.*, 2002], l'identification de comportements plastiques localisant pendant l'érouissage et associés à un adoucissement macroscopiques [Koc & Stok, 2004], de comportements plastiques anisotropes associés à un critère de Hill [Khalfallah *et al.*, 2002], l'application à des situations de mise en forme [Gavrus *et al.*, 1996; Knockaert *et al.*, 2001], une identification de propriétés d'interfaces pour des composites [Yang *et al.*, 2004] ou pour des polycristaux métalliques [Lin *et al.*, 2004], des propriétés hyperélastiques de polymères [Laraba-Abbes *et al.*, 2003a,b] ou encore une caractérisation *in vivo* de la peau humaine [Hendriks *et al.*, 2006].

Limites de la méthode de recalage

Le problème d'identification par la méthode de recalage est mal posé, et de nombreux travaux ont concerné sa régularisation. Tikhonov & Arsenin [1977] figurent parmi les premiers à s'intéresser à ce problème, qui reste d'actualité. La régularisation du problème inverse a été abordée récemment dans [Hisada, 1995; Davies *et al.*, 1999; Idier, 2001; Kim & Nelson, 2004], on pourra par exemple y trouver des applications de la méthode de courbe-en-L (*L-curve* en anglais) pour déterminer le paramètre de régularisation optimal. Au paragraphe 1.2.1.4, nous avons déjà évoqué un des principaux inconvénients de la méthode de régularisation au sens de Tikhonov : la convergence vers des quasi-solutions.

La limite de ces techniques de régularisation ont incité de nombreux travaux portant sur l'identification au moyen de principes variationnels [Bonnet *et al.*, 2003] et possédant un plus fort sens mécanique.

1.2.2.2 Méthode des champs virtuels

La méthode des champs virtuels a été introduite dans [Grédiac, 1989; Grédiac *et al.*, 2002a]. Cette méthode repose sur le principe des travaux virtuels. En l'absence de forces volumiques extérieures, et pour un chargement surfacique \mathbf{T} sur une surface extérieure $\partial\Omega_f$ ce principe s'écrit :

$$-\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) d\Omega + \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}^* dS = 0, \quad (1.22)$$

où \mathbf{u}^* est le champ de déplacement virtuel et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)$ est la déformation associée au déplacement virtuel. L'équation (1.22) est valable pour tout champ virtuel \mathbf{u}^* cinématiquement admissible sur Ω .

L'identification à partir du principe des travaux virtuels repose sur l'écriture du tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de $\boldsymbol{\varepsilon}$ au moyen d'une loi de comportement. La déformation étant donnée par les techniques de mesures cinématiques, il s'agit ensuite de choisir de "bons" champs virtuels \mathbf{u}^* , c'est à dire des champs faisant travailler les paramètres de la relation de comportement que l'on souhaite identifier, et menant à l'écriture d'un système d'équations dépendant des paramètres du comportement pouvant être résolu.

Une première méthode a été de construire des champs virtuels par morceaux, les champs sont alors construits manuellement. Cette construction fait alors appel à des champs indépendants, judicieusement choisis afin de faire apparaître les paramètres à identifier dans le système d'équations découlant de l'équation (1.22) [Grédiac, 1989; Pierron & Grédiac, 2000]. Le nombre de champs virtuels est en général égal au nombre des paramètres élastiques que l'on cherche à identifier. Pour diminuer la sensibilité au bruit de mesure, une alternative aux champs virtuels par morceaux sont les "champs virtuels spéciaux" développés dans [Grédiac *et al.*, 2002b, 2003a]. Ils visent à rendre l'identifiabilité des paramètres recherchés la meilleure possible. Ces champs sont obtenus à partir d'une famille de polynômes, et dans [Grédiac *et al.*, 2002c] une précaution supplémentaire est développée, concernant le choix de champs virtuels ne faisant pas travailler la part inconnue des efforts extérieurs appliqués. La sensibilité de la Méthode des Champs Virtuels a été étudiée de façon approfondie dans [Avril *et al.*, 2004a].

Dans ce qui suit, nous analysons plus en détail deux types de problèmes, l'un portant sur l'identification d'un comportement élastique anisotrope, l'autre sur l'identification de comportement élastoplastique.

Identification de propriétés mécaniques anisotropes sur des composites

La méthode des champs virtuels utilisant des champs virtuels spéciaux a été appliquée à l'identification de comportements élastiques anisotropes dans [Grédiac *et al.*, 2003b; Grédiac, 2004; Avril

et al., 2004b]. L'identification est effectuée à partir d'un essai de flexion de type Iosipescu (cf. figure 1.14), et quatre paramètres d'une loi de comportement élastique orthotrope sont identifiés, en contrainte plane. Lors de cet essai les axes de symétrie de l'échantillon sont judicieusement orientés par rapport aux axes d'orthotropie de façon à permettre l'identification de tous les paramètres de la loi de comportement à partir de mesures cinématiques sur une surface.

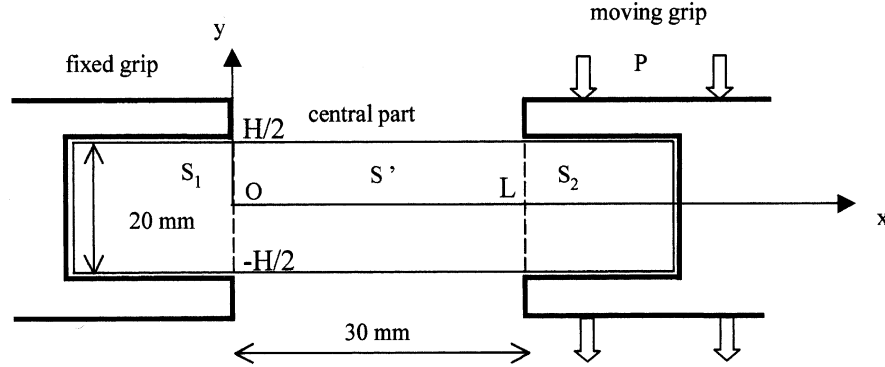


FIG. 1.14 – Dispositif de flexion de type Iosipescu, utilisé pour l'identification élastique orthotrope, d'après [Grédiac *et al.*, 2002c]

L'extension à l'élasticité endommageable a été réalisée par Chalal *et al.* [2004], en prenant en compte un paramètre d'endommagement supplémentaire. Cette étude est développée dans la thèse de Chalal [2005]. La loi de comportement prend alors la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Pour la loi de comportement orthotrope endommageable retenue pour cette étude, seul le module de cisaillement \tilde{C}_{33} s'endommage, s'écrivant alors en fonction du module de cisaillement non endommagé C_{33} et de la variable d'endommagement d :

$$\tilde{C}_{33} = (1 - d)C_{33} \quad \text{avec } d = \alpha \varepsilon_{xy}^2, \quad (1.24)$$

α étant une constante scalaire positive définissant la cinétique de l'endommagement. Pour un dispositif expérimental de type Iosipescu induisant des champs de déformations hétérogènes, la richesse du champ mesuré permet alors d'identifier :

- en premier lieu les quatre paramètres homogènes ($C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{33}$),
- puis pour chaque autre pas de chargement un paramètre d'endommagement local d affectant uniquement le module de cisaillement.

Identification de propriétés mécaniques élastoplastiques

La méthode des champs virtuels non linéaire a été introduite dans [Grédiac & Pierron, 2006]. Dans cet article, l'identification se fait à partir d'une simulation numérique sur une géométrie semblable à la figure 1.12. Un modèle de Prandtl-Reuss à écrouissage isotrope linéaire est retenu tant pour la simulation que pour l'identification. L'identification se fait à partir d'un chargement incrémental, chaque

pas étant associé à un champ de déplacement issu d'une simulation ou mesuré expérimentalement. Les paramètres élastiques sont supposés connus et ne sont pas identifiés. Pour chaque incrément, une procédure permet de considérer différents cas selon que le chargement est élastique, partiellement plastique, complètement plastique, où qu'une décharge élastique se produit. Pour chacun de ces différents cas, une écriture de la loi de comportement permet d'écrire une fonction coût dépendant des deux paramètres plastiques (module d'écrouissage H , contrainte d'écoulement σ_0) à partir de l'équation (1.22). Le principe des travaux virtuels est alors discrétisé en éléments finis, et l'on écrit l'équivalent d'un écart à l'équilibre de la structure (*cf.* §1.2.2.3) pour écrire la fonction coût suivante :

$$G_r(H, \sigma_0) = \sum_{p=1}^{n_p} g_{p,r}(k, \sigma_0) = \sum_{p=1}^{n_p} \left(\sum_{q=1}^{n_e} \boldsymbol{\sigma}(p, q) : \boldsymbol{\varepsilon}^{*(r)} S_q - W_{\text{ext}_p}^{*(r)} \right)^2, \quad (1.25)$$

pour n_p pas de chargements, n_e éléments finis, S_q désignant la surface de chaque élément q . Pour chaque pas de chargement p , la contrainte $\boldsymbol{\sigma}(p, q)$ s'écrit en fonction des paramètres plastiques, *via* la prise en compte de la situation de chargement. Cette écriture est rendue possible en utilisant la formulation du module tangent proposé dans [Deng & Rosakis, 1990]. L'indice r dénote le champ virtuel permettant d'exprimer cette fonction coût. Cette fonction est minimisée par une méthode du simplexe.

Des champs virtuels sont judicieusement choisis pour ne pas faire apparaître dans la puissance des efforts W_{ext} les composantes inconnues des résultantes extérieures. Seules les composantes connues des résultantes sont prises en compte ce qui permet de se passer d'hypothèses sur la répartition des contraintes sur les bords chargés.

Partant de paramètres élastiques connus, malgré un nombre très important de points de mesure (en l'occurrence disposés sur un maillage de 6000 éléments quadrangles), un unique pas de chargement ne permet pas d'identifier les paramètres plastiques simultanément. La prise en compte du chargement dans son intégralité (ici constitué de 12 pas i chacun associé à une fonction élémentaire $g_{i,r}$) est nécessaire pour l'identification de ces paramètres.

Pour la simulation présentée, la minimisation de chacune des fonctions coût élémentaires $g_{p,r}$ ne permet pas à elle seule d'identifier deux paramètres plastiques, pour les champs virtuels choisis. En effet la présence d'une vallée (*cf.* figure 1.15a) ne permet pas d'obtenir un minimum unique au problème de minimisation. Une rotation de cette vallée au fur et à mesure du chargement fait qu'au final la fonction coût $G_r(H, \sigma_0)$ possède une allure convexe (*cf.* figure 1.15b), qui laisse supposer l'unicité de la solution au problème de minimisation. Cette unicité est démentie par l'existence de minima locaux associés à une certaine sensibilité aux valeurs initiales.

L'application de cette méthode à des données expérimentales a été réalisée dans [Pannier, 2006], le modèle identifié comporte davantage de paramètres associés à une élasticité isotrope et un modèle à écrouissage isotrope non linéaire (modèle de Voce possédant un terme saturant exponentiel). Les paramètres sont supposés homogènes sur la structure. Différentes identifications sont menées pour des éprouvettes de différentes géométries induisant des champs de contrainte et déformation non homogènes. Des écarts parfois importants sont observés entre les valeurs des paramètres identifiés et les paramètres de référence. Sur la figure 1.16 sont représentées différentes courbes ; la première famille de courbes représentées en traits pleins sont le résultat des identifications réalisées

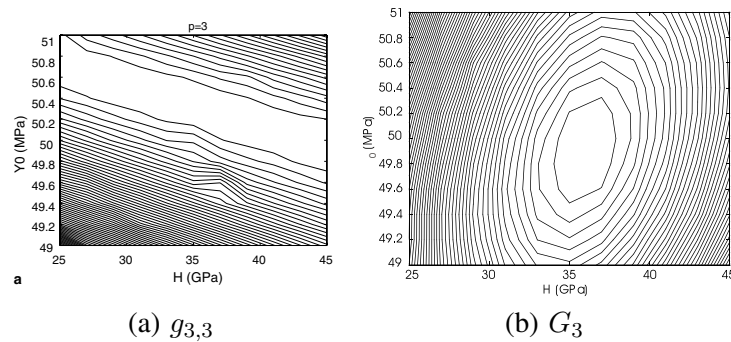


FIG. 1.15 – Comparaison entre la fonction coût élémentaire $g_{3,3}$ et la fonction coût globale G_3 , d'après [Grédiac & Pierron, 2006]

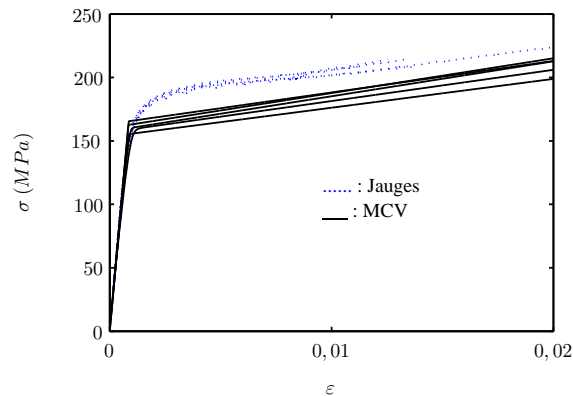


FIG. 1.16 – Comparaisons entre les courbes contrainte-déformation obtenues d'après la Méthode des Champs Virtuels, et les courbes contrainte-déformation obtenues par jauges de déformation lors d'essais de traction uniaxiale, d'après [Pannier, 2006]

à partir de six essais de traction sur une éprouvette en diabolo. Pour chaque essai quatre paramètres matériels sont identifiés par la Méthode des Champs Virtuels. L'autre famille de courbes représentées en traits pointillés a été obtenue par jauges de déformation pendant des essais de traction uniaxiale sur le même matériau. On peut alors constater sur cette figure que la raideur élastique, la limite d'élasticité et le module d'écroutissage sont bien identifiés, tandis que l'écroutissage identifié varie beaucoup plus rapidement que l'écroutissage mesuré par des jauges.

1.2.2.3 Méthode de l'écart à l'équilibre

La méthode de l'écart à l'équilibre a été introduite dans [Claire *et al.*, 2002] pour l'identification de champs d'un endommagement isotrope³, pour des essais de traction bi-axiale. Cette méthode a ensuite été étendue à l'identification de conductivités thermiques [Claire *et al.*, 2003]. Le comportement est élastique isotrope endommageable, les coefficients de Lamé endommagés s'écrivent en fonction

³Cette méthode permet également d'identifier des paramètres d'un endommagement anisotrope

des mêmes coefficients non endommagés (λ_0, μ_0) et de la variable scalaire d'endommagement $d(x)$:

$$\lambda(x) = \lambda_0(1 - d(x)) \quad , \forall x \in \Omega \quad (1.26)$$

$$\mu(x) = \mu_0(1 - d(x)) \quad , \forall x \in \Omega \quad (1.27)$$

Dans le cas d'un endommagement discontinu sur Ω , pour chaque normale \mathbf{n} associée à une discontinuité il est possible d'écrire :

$$\llbracket \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0. \quad (1.28)$$

Pour $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$, cette équation s'écrit :

$$\llbracket (1 - D)\{\lambda_0(\boldsymbol{\varepsilon}_{xx} + \boldsymbol{\varepsilon}_{xx}) + 2\mu_0\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}\} \rrbracket = 0 \quad (1.29)$$

$$\llbracket (1 - D)\{\mu_0\boldsymbol{\varepsilon}_{xy}\} \rrbracket = 0 \quad (1.30)$$

Cette formulation de l'équation d'équilibre est alors associée à une représentation de type éléments finis, l'endommagement est constant par élément et l'on écrit sur chaque frontière entre les éléments du domaine Ω des équations de saut d'équilibre (équation (1.29)). Ces équations ne font pas apparaître les forces extérieures, car l'on identifie avec cette méthode uniquement des variation par rapport à un état initial qui n'est pas recherché.

Cette écriture permet d'aboutir à un système linéaire qu'il suffit d'inverser (par une méthode de gradient conjugué, par exemple) pour obtenir une distribution d'endommagement. Pour illustrer les potentialités de cette méthode, la figure 1.17a représente le déplacement mesuré lors d'un essai de traction bi-axiale sur une éprouvette en croix réalisée en matériau composite. Ce champ mesuré a permis d'identifier un champ d'endommagement représenté sur la figure 1.17b. Le coin supérieur gauche de la zone d'étude, où l'endommagement est maximal, correspond à une zone fissurée de l'éprouvette.

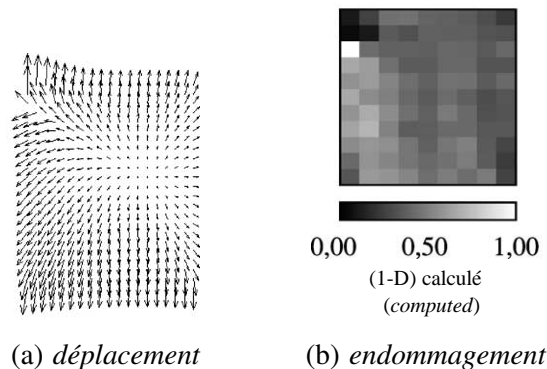


FIG. 1.17 – Champ de déplacement et champ d'endommagement identifié, d'après Claire et al. [2003]

Cette méthode a également été appliquée à l'identification de champs de propriétés élastiques pour des poutres micrométriques dans [?].

1.2.2.4 Méthode de l'écart en relation de comportement

l'ERC pour les problèmes directs

L'Écart en Relation de Comportement (ERC) a été introduite en élasticité par Ladevèze & Le-guillon [1983], cette méthode fait intervenir un calcul d'erreur induite par la méthode des éléments finis grâce à une approche duale reposant sur la résolution de deux problèmes directs : la résolution d'un problème en déplacement (*i.e.* problème de Dirichlet, résolu par la plupart des méthodes éléments finis classiques [Batoz & Dhatt, 1990]), et la résolution d'un problème en contrainte (*i.e.* problème de Neumann). Ces calculs d'erreur ont ensuite été étendus à des problèmes en dynamique vibratoire [Ladevèze *et al.*, 1994].

Plus récemment, une méthode d'erreur en dissipation a permis en premier lieu d'étendre les calculs d'erreur à des modèles élastoplastiques [Ladevèze & Moës, 1999] et élastoviscoplastiques [Ladevèze *et al.*, 1999].

Méthodes inverses utilisant l'ERC

Pour les problèmes inverses, l'erreur en relation de comportement (ou ERC) a tout d'abord été adaptée pour l'identification à partir de mesures à la frontières (*cf.* §1.2.1.1). Cette méthode a ensuite été utilisée pour identifier des propriétés matérielles élastiques isotropes dans [Geymonat *et al.*, 2002], en utilisant des données à l'intérieur du domaine. Ces deux approches utilisent une erreur formulée de façon légèrement différente, et sont minimisées différemment. La fonctionnelle d'ERC, notée ici \mathcal{F} , associée à la relation de comportement $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$, s'écrit :

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}) : \mathbf{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}) dS, \quad (1.31)$$

tandis que la fonctionnelle \mathcal{G} est associée à une relation de comportement formulée en souplesse ($\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma}$) :

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B} : \boldsymbol{\tau}) : \mathbf{B}^{-1} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{B} : \boldsymbol{\tau}) dS, \quad (1.32)$$

La convexité totale de la fonctionnelle \mathcal{F} et la convexité séparée de la fonctionnelle \mathcal{G} ont été démontrées dans [Geymonat & Pagano, 2003].

Dans [Bonnet *et al.*, 2003], il a été mis en évidence que pour un même cas test numérique d'identification de défaut, de meilleurs résultats sont obtenus à partir de l'ERC qu'à partir d'une méthode de recalage. Cela peut être la conséquence des propriétés de convexité de la fonctionnelle d'ERC, qui rendent intéressantes une méthode de relaxation⁴ pour minimiser \mathcal{F} ou \mathcal{G} . Ces deux fonctionnelles ne sont pas strictement convexes, l'unicité de la solution n'est donc pas assurée, et dans le cas d'une convexité séparée, l'existence de la solution n'est pas garantie. Insistons également sur le fait que dans cette application, la fonctionnelle dépend de deux variables non liées entre elles : le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur d'élasticité \mathbf{C} .

Une variante intéressante à la méthode de [Geymonat *et al.*, 2002] a été présentée dans [Calloch *et al.*, 2002], et utilisée pour des problèmes élastodynamiques dans [Feissel & Allix, 2007]. Cette

⁴méthode à deux étapes qui consiste à minimiser \mathcal{F} successivement par rapport à ses deux inconnues $\boldsymbol{\sigma}$ et \mathbf{A}

nouvelle méthode introduit un terme supplémentaire dans la fonctionnelle d'ERC afin de filtrer le bruit sur le champ de déplacement mesuré. Dans le cadre de l'élasticité quasi-statique, l'erreur en relation de comportement dite "modifiée" η s'écrit :

$$\eta(\mathbf{K}_{cs}, \mathbf{U}_c, \mathbf{U}_s) = \frac{\frac{1}{2}(\mathbf{U}_c - \mathbf{U}_s)^T \mathbf{K}_{cs} (\mathbf{U}_c - \mathbf{U}_s) + \frac{1}{2}(\mathbf{U}_c - \mathbf{U}_m)^T \mathbf{K}_{cm} (\mathbf{U}_c - \mathbf{U}_m)}{\mathbf{U}_m^T \mathbf{K}_m \mathbf{U}_m} \quad (1.33)$$

où \mathbf{K}_{cs} est une matrice de rigidité de type éléments finis faisant intervenir les coefficients élastiques cherchés, \mathbf{U}_s est le champ de déplacement cherché associé à un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et à un tenseur d'élasticité \mathbf{C} tous deux inconnus : $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}_s)$. Le champ de déplacement supplémentaire \mathbf{U}_c est plus ou moins proche des données suivant le poids donné par la matrice de pondération \mathbf{K}_{cm} au deuxième terme de la fonctionnelle. Il faut donc ajuster le poids donné au membre de gauche visant à ce que les champs \mathbf{U}_c et \mathbf{U}_s respectent au mieux la relation de comportement par rapport au poids donné au terme d'écart à la mesure. Cela permet un filtrage des données par la relation de comportement, le champ de déplacement filtré est alors ici le champ \mathbf{U}_c . Cette méthode a été appliquée à l'identification de propriétés élastiques homogènes pour un essai brésilien dans [Calloch *et al.*, 2002].

À partir de l'équation (1.31), une erreur en relation de comportement modifiée $\tilde{\mathcal{F}}$ peut s'écrire, pour un champ de déplacement de filtrage $\tilde{\mathbf{u}}$, un champ mesuré \mathbf{u}^* et un coefficient de pondération α :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{A}, \tilde{\mathbf{u}}) = \frac{(1 - \alpha)}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})) : \mathbf{A}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{u}})) dS + \frac{\alpha}{2} \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^*\|, \quad (1.34)$$

Conclusion sur les méthodes d'identification abordées

Des méthodes d'identification appliquées à des situations mécaniques variées ont été présentées. Des comportements pouvant être élastiques, élastoplastiques, orthotropes, ou endommageables sont identifiés pour des matériaux métalliques, composites, rocheux, ou encore le bois. Un des intérêts de ces méthodes réside dans la variété des échelles des systèmes mécaniques pouvant être observés, et tout particulièrement des échelles fines d'observation qui permettent l'étude de phénomènes microscopiques comme par exemple la plasticité cristalline ou la fissuration. Les méthodes de recalage sont flexibles et peuvent s'adapter à un très grand nombre de problèmes. D'autres méthodes sont plus spécifiques comme l'écart à la réciprocité pour l'identification de fissures ou l'écart à l'équilibre. Ces deux dernières méthodes font partie d'une famille de méthodes basées sur des principes variationnels dont font également partie la méthode des champs virtuels et la méthode d'erreur en relation de comportement [Bonnet *et al.*, 2003].

Grâce aux évolutions des techniques de mesure, les méthodes d'identification s'appliquent à des domaines de plus en plus nombreux. La microtomographie, bien que délicate à mettre en œuvre, est en constante évolution et offre un éventail d'applications qui n'ont pas toutes été abordées mais qui promettent des résultats très intéressants. Par ailleurs, un couplage de techniques de mesures cinématiques avec des mesures de température peut être employé afin d'étudier le comportement thermomécanique des matériaux, pour des phénomènes de fatigue, de striction, de changement de phase.

Cependant nous avons signalé le caractère mal posé des problèmes d'identification qui ne facilite pas l'exploitation de données expérimentales affectées d'un bruit de mesure. C'est un aspect essentiel des problèmes d'identification qu'il est nécessaire de prendre en compte pour mettre en place des méthodes d'identification adaptées et suffisamment robustes.

1.3 Ecriture d'un modèle élastoplastique

L'objet de cette partie est de présenter, dans un cadre mécanique, le modèle de comportement qui fait l'objet de la méthode d'identification développée.

Un premier paragraphe de cette partie sera consacré à une formulation générale des lois de comportement. Cette formulation s'inscrit dans le cadre des matériaux standards généralisés pour lesquels les lois de comportement dérivent d'un potentiel d'énergie libre et d'un potentiel de dissipation. Quelques modèles de plasticité parmi les plus courants seront alors présentés.

Le deuxième paragraphe est davantage consacré à l'écriture sous forme tensorielle d'un comportement élastoplastique sécant ou tangent. Ces tenseurs permettront l'écriture d'une relation de comportement plastique, pour des situations où l'hypothèse de contrainte plane s'applique. Ce paragraphe présente ainsi quelques fondations de la méthode d'identification que nous détaillerons dans la partie suivante.

1.3.1 Cadre de l'étude élastoplastique

1.3.1.1 Formulation générale des lois de comportement

L'écriture de lois de comportement va se faire ici à partir d'un cadre mécanique cohérent, celui des matériaux standards généralisés [Halphen & Nguyen, 1975; Germain *et al.*, 1983].

Choix des variables d'état

De façon générale, nous devons choisir les variables d'état α_k , pour $k = 1, \dots, N$, pouvant être des variables observables ou internes, afin de décrire le mieux possible les phénomènes mécaniques étudiés. Les lois de comportement mécanique relient alors ces variables. Dans ce qui suit, nous nous limitons à un cadre d'élastoplasticité isotherme à écrouissage cinématique et isotrope où les variables d'état sont :

- la déformation totale ε ,
- la déformation plastique ε_p ,
- la déformation plastique cumulée p .

La variable observable qui nous intéresse ici est la déformation totale, que l'on peut écrire dans le cadre des petites perturbations comme :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \quad (1.35)$$

Nous adopterons dans ce qui suit une décomposition additive du tenseur des déformations :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (1.36)$$

La déformation plastique ε^p sera une première variable interne permettant de décrire un écrouissage cinématique. L'écrouissage isotrope peut quant à lui être décrit par la déformation plastique cumulée p :

$$p = \int_0^t \left[\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}^p(\tau) : \dot{\varepsilon}^p(\tau) \right]^{1/2} \partial\tau \quad (1.37)$$

Potentiel thermodynamique

L'énergie libre ψ est décomposée en une partie élastique ψ_e et une énergie plastique ψ_p :

$$\psi(\varepsilon, \varepsilon^p, p) = \psi_e(\varepsilon - \varepsilon_p) + \psi_p(\varepsilon_p, p) \quad (1.38)$$

Les variables conjuguées de l'énergie libre s'écrivent :

$$\sigma^r = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = \rho \frac{\partial \psi_e}{\partial \varepsilon} \quad (1.39)$$

$$\mathcal{A}_{\varepsilon_p} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} = \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial \varepsilon_p} - \sigma^r \quad (1.40)$$

$$\mathcal{A}_p = \rho \frac{\partial \psi_p}{\partial p} \quad (1.41)$$

Le second principe de la thermodynamique permet d'écrire l'inégalité de Clausius-Duhem exprimant la dissipation intrinsèque d_1 en fonction des variables d'état et de la puissance des efforts intérieurs faisant intervenir la contrainte de Cauchy σ :

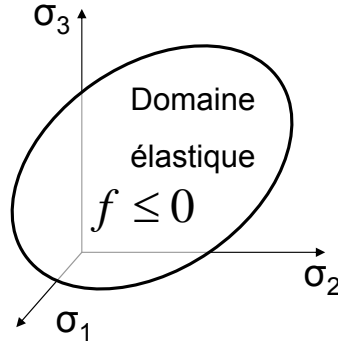
$$\begin{aligned} d_1 &= \sigma : \dot{\varepsilon} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k \geq 0 \\ d_1 &= \sigma : \dot{\varepsilon} - \sigma^r : \dot{\varepsilon} - \mathcal{A}_{\varepsilon_p} : \dot{\varepsilon}_p - \mathcal{A}_p \dot{p} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{soit ici : } d_1 = (\sigma - \sigma^r) : \dot{\varepsilon} + \left(\sigma - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_p} \right) : \dot{\varepsilon}_p - \rho \frac{\partial \psi}{\partial p} \dot{p} \geq 0 \quad (1.42)$$

Surface de charge et écoulement plastique

L'apparition de la plasticité se décrit généralement dans l'espace des contraintes à l'aide d'une fonction seuil associée à une surface d'écoulement, qui caractérise le domaine d'élasticité. Cette surface est représentée de façon schématique sur la figure 1.18 dans l'espace des contraintes principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Nous nous intéressons ici à des transformations plastiques à écrouissage cinématique et isotrope, pour lesquelles l'écoulement de cette surface peut être décrit par une contrainte cinématique de rappel \mathbf{X} et une variable d'écrouissage isotrope R . La fonction seuil f , nulle sur la surface d'écoulement et négative dans le domaine élastique, peut alors s'écrire au moyen d'un invariant des contraintes J à définir :

$$f = J(\sigma - \mathbf{X}) - R - R_0 \leq 0, \quad (1.43)$$

FIG. 1.18 – *Domaine élastique*

L'indicatrice de la fonction convexe f est associée au potentiel de dissipation dual φ^* , qui dépend par construction des forces thermodynamiques \mathcal{X} . Ces forces thermodynamiques sont obtenues d'après la forme de la dissipation intrinsèque d_1 . De plus, on admet en plasticité que les irréversibilités ne dépendent pas de $\dot{\varepsilon}$, ce qui d'après l'expression de d_1 implique que la contrainte irréversible $\sigma^{ir} = \sigma - \sigma^r = 0$. Traditionnellement, les paramètres de l'écroutissage sont directement reliés aux forces thermodynamiques, qui s'écrivent alors :

$$\mathcal{X}_{\varepsilon_p} = \mathcal{A}_{\varepsilon_p} = \sigma - \mathbf{X} \quad (1.44)$$

$$\mathcal{X}_p = \mathcal{A}_p = R \quad (1.45)$$

La dissipation d_1 se réécrit alors en fonction des paramètres d'écroutissage :

$$d_1 = (\sigma - \mathbf{X}) : \dot{\varepsilon}_p - R\dot{p} \geq 0 \quad (1.46)$$

Les flux thermodynamiques $\dot{\varepsilon}_p$ et \dot{p} associés respectivement aux forces $(\sigma - \mathbf{X})$ et $-R$ appartiennent alors au différentiel de l'indicatrice de la fonction f . En d'autres termes, les lois d'évolution s'écrivent en fonction du multiplicateur plastique $\dot{\gamma}$:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial (\sigma - \mathbf{X})} \\ \dot{p} = -\dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial R} \end{cases} \quad (\text{loi de normalité généralisée}) \quad (1.47)$$

1.3.1.2 Présentation de lois plastiques particulières

Dans ce qui suit, nous rappelons brièvement la forme des surfaces de charge associées à deux modèles classiques, qui sont des cas particuliers du modèle général précédent.

Écrouissage isotrope de Prandtl-Reuss

L'écrouissage isotrope consiste en une expansion isotrope de la surface de charge, exprimée par la variable d'écrouissage scalaire R . La fonction d'écrouissage s'écrit :

$$f = f(\boldsymbol{\sigma}, -R)$$

Une loi d'écrouissage isotrope couramment employée est la loi de Prandtl-Reuss, pour laquelle on suppose l'indépendance à la pression hydrostatique :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}_H} = 0 \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\sigma}_H = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I}$$

Le critère d'écrouissage est un critère isotrope de type Von Mises dépendant linéairement du deuxième invariant $J_2(\boldsymbol{\sigma})$ du tenseur des contraintes. En notant $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_H$ le déviateur des contraintes, l'invariant des contraintes $J_2(\boldsymbol{\sigma})$ s'écrit alors :

$$J_2(\boldsymbol{\sigma}) = (\mathbf{s})_{II} = \left(\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s} \right)^{1/2}$$

La loi d'écoulement s'écrit :

$$f = (\mathbf{s})_{II} - R - \sigma_0 \leq 0, \quad (1.48)$$

où σ_0 est la contrainte de limite élastique initiale.

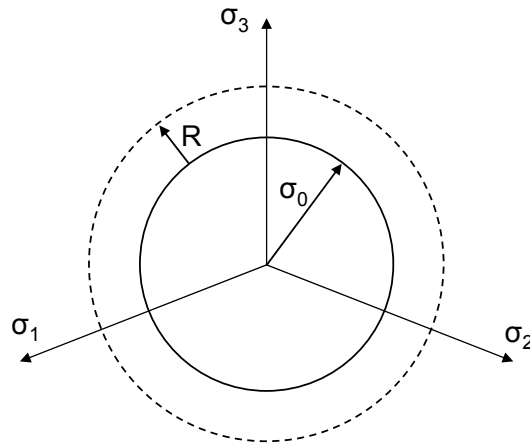


FIG. 1.19 – *Modèle d'écrouissage isotrope de Prandtl-Reuss dans l'espace des contraintes principales, limite d'élasticité initiale σ_0 et variable d'écrouissage isotrope R*

Sur la Figure 1.19 apparaissent deux surfaces d'écoulement, l'une en trait plein correspondant au domaine d'élasticité initial, l'autre en pointillés relative à un état écroui. La surface d'écoulement, dans le repère des contraintes principales, est un cylindre à base circulaire de génératrice parallèle à l'axe $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Projeté dans le plan déviatorique des contraintes ce cylindre est un cercle centré sur l'origine des contraintes dont l'augmentation du rayon traduit l'évolution de l'écrouissage.

Écrouissage cinématique

L'écrouissage cinématique consiste en une translation de la surface de charge. Cette translation est exprimée par la variable d'écrouissage \mathbf{X} , homogène à une contrainte. L'écrouissage cinématique de Prager fait intervenir la fonction de charge f suivante :

$$f = J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) - \sigma_0 \quad (1.49)$$

L'invariant des contraintes J peut être exprimé par exemple avec un critère de von Mises pour lequel $J(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}) = (s - \mathbf{X})_{II}$. Une schématisation de ce modèle est donnée sur la Figure 1.20

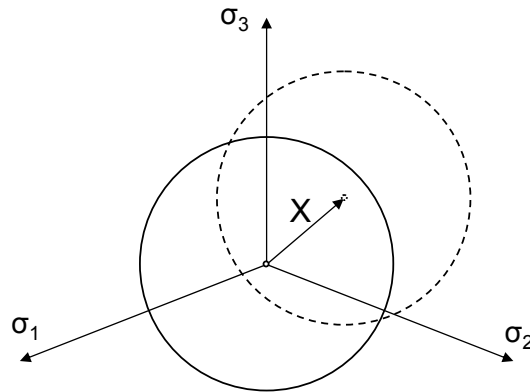


FIG. 1.20 – Modèle d'écrouissage cinématique de Prager associé à un critère isotrope de von Mises, variable d'écrouissage \mathbf{X}

1.3.2 Écriture tensorielle d'un comportement élastoplastique.

Avant de préciser le modèle élastoplastique qui sera retenu par la suite, rappelons que notre objectif est d'identifier un comportement élastoplastique local, sous l'hypothèse des contraintes planes. Pour une première approche, il apparaît d'avantage souhaitable d'obtenir une description localement fine d'un modèle de comportement simple (*i.e.* dépendant de peu de paramètres) et cela dans le but de détecter des éventuelles hétérogénéités qui apparaissent et se développent au cours du chargement.

Les deux modèles élastoplastiques les plus simples, adaptés à l'étude des matériaux métalliques, sont le modèle d'écrouissage isotrope linéaire de Prandtl-Reuss, et l'écrouissage cinématique linéaire de Prager, tous deux pouvant s'exprimer en fonction de deux paramètres plastiques :

- une limite d'élasticité σ_0 ,
- un module d'écrouissage k (*constant pour un écrouissage linéaire*).

Le modèle d'écrouissage cinématique linéaire de Prager a été choisi dans un premier temps comme modèle pour l'identification. Naturellement, ce modèle simple ne peut pas retranscrire toute la complexité du développement de la plasticité. L'objectif est ici de :

- mettre en place une méthode d'identification locale des paramètres de ce modèle,
- de caractériser ses performances pour l'identification. L'utilisation de modèles plus représentatifs du comportement réel des matériaux métalliques reste envisageable.

Nous allons donc décrire de façon tensorielle le comportement élastoplastique pour ce modèle.

1.3.2.1 Description instantanée du comportement élastoplastique tangent

L'écriture du modèle de Prager se fait ici en contraintes planes, et le tenseur de contrainte peut s'écrire sous forme vectorielle :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}$$

La fonction d'écoulement associée à ce modèle s'écrit

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}) = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X})_{II} - \sigma_0 = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}} - \sigma_0, \quad (1.50)$$

avec $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{X}$, et $\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Le modèle que nous avons choisi d'identifier peut être représenté synthétiquement par les quatre équations suivantes :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}_e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p), \quad (1.51)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{X}) = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}} - \sigma_0 \leq 0, \quad (1.52)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (1.53)$$

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{2}{3} k \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \quad (1.54)$$

où \mathbf{A}_e représente le tenseur d'élasticité.

De façon plus synthétique encore, le comportement peut alors être décrit par deux équations, l'une valable à l'intérieur du domaine élastique, l'autre à la frontière du domaine :

$$\boxed{\begin{array}{l} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A}_e \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour } f < 0 \\ \text{ou} \\ f = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \leq 0 \end{array} \right. \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{L} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad \text{pour } f = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} > 0. \end{array}} \quad (1.55)$$

L'écriture du tenseur tangent \mathcal{L} qui apparaît ci dessus est donc un point particulièrement important, qui va permettre d'exprimer la relation de comportement élastoplastique instantanée pendant l'érouissage. L'écriture du modèle qui va suivre se fait d'après [Simo & Hughes, 1998]. Nous pouvons écrire d'après les équations (1.51) et (1.53) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{A}_e \left(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\gamma} \frac{\mathbf{P} \boldsymbol{\xi}}{\sqrt{\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}}} \right). \quad (1.56)$$

Il reste alors à écrire le multiplicateur plastique en fonction de $\dot{\epsilon}$. En développant la relation de cohérence $\dot{f} = 0$, et en exprimant $\dot{\sigma}$ d'après l'équation (1.51) :

$$\dot{\gamma} = \frac{\sqrt{\xi^T \mathbf{P} \xi}}{(\xi^T \mathbf{P} \mathbf{A}_e \mathbf{P} \xi + \frac{2}{3} k \xi^T \mathbf{P} \mathbf{P} \xi)}. \quad (1.57)$$

\mathcal{L} s'écrit alors :

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathbf{A}_e - \frac{\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}}{1 + \beta}}, \quad (1.58)$$

avec

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{A}_e \mathbf{P} \xi}{\sqrt{\xi^T \mathbf{P} \mathbf{A}_e \mathbf{P} \xi}}, \quad (1.59)$$

$$\beta = \frac{2}{3} \frac{k \xi^T \mathbf{P} \xi}{\xi^T \mathbf{P} \mathbf{A}_e \mathbf{P} \xi}. \quad (1.60)$$

$$(1.61)$$

La formulation donnée par l'équation (1.55) est utile en cas de description continue d'un problème mécanique.

Étant donné le caractère discret de l'information expérimentale à notre disposition, une description incrémentale dans le temps du comportement est préférable. Pour cela nous formulons à nouveau les relations de comportement élastoplastiques sous forme incrémentale.

1.3.2.2 Description incrémentale du comportement élastoplastique

Le modèle de Prager, décrit précédemment de façon instantanée, peut s'écrire de façon incrémentale grâce à un schéma implicite (toujours d'après [Simo & Hughes, 1998]). Dans ce qui suit, pour le pas $n + 1$ par exemple, l'indice n fait référence à l'état en début de pas tandis que l'indice $n + 1$ fait référence à l'état en fin de pas. Le modèle de Prager s'écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{A}_e (\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p), \quad (1.62)$$

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{X}_{n+1} \quad (1.63)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\epsilon}_p^n + \Delta \gamma \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1}, \quad (1.64)$$

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{X}_n + \frac{2}{3} \Delta \gamma k \boldsymbol{\xi}_{n+1}, \quad (1.65)$$

$$f = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1}} - \sigma_0 \leq 0, \quad (1.66)$$

avec k le module d'érouissage constant. En combinant les équations (1.63) et (1.64), il vient :

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \Delta \gamma k} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{X}_n) \quad (1.67)$$

En combinant les équations (1.66) et (1.67) l'incrément de multiplicateur plastique $\Delta\gamma$ s'écrit :

$$\Delta\gamma = \frac{3}{2k} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha}{\sigma_0} - 1 \right) \quad (1.68)$$

avec

$$\alpha^2 = (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{X}_n)^T \mathbf{P} (\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \mathbf{X}_n)$$

Les équations (1.62) et (1.64) permettent d'écrire une relation liant $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$ via un module Ξ :

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \Xi (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) + \Xi \frac{\Delta\gamma}{1 + \frac{2}{3}\Delta\gamma k} \mathbf{X}_n \quad (1.69)$$

$$\text{où } \Xi = \left[\mathbf{A}_e^{-1} - \frac{\Delta\gamma(\sigma_0)}{1 + \frac{2}{3}k\Delta\gamma(\sigma_0)} \mathbf{P} \right]^{-1} \quad (1.70)$$

Cette équation se révèle être particulièrement intéressante lorsque l'on se trouve sur un pas plastique pour lequel l'écroûissage est initialement nul (*i.e.* $\mathbf{X}_n = 0$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_n^p = 0$). Dans ce cas l'on peut obtenir une écriture directe du tenseur élastoplastique sécant \mathbf{A}_p^s :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} = [\mathbf{A}_p^s]_{n+1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}), \\ [\mathbf{A}_p^s]_{n+1} = \Xi \text{ si } \mathbf{X}_n = 0 \text{ et } \boldsymbol{\varepsilon}_n^p = 0 \end{cases} \quad (1.71)$$

Dans les autres cas, il n'existe pas de relation explicite entre $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}$, mais il est possible d'écrire un tenseur élastoplastique tangent \mathbf{A}_p^t tel que $[\mathbf{A}_p^t]_{n+1} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}|_{n+1}$. Pour obtenir cette écriture, nous suivons la démarche présentée au paragraphe 1.3.2.1 et nous écrivons l'équation de cohérence $df_{n+1} = 0$ sous la forme :

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\xi}_{n+1} = 0 \quad (1.72)$$

Pour expliciter $d\boldsymbol{\xi}_{n+1}$ nous différencions l'équation (1.67) puis (1.62) ce qui permet d'écrire successivement :

$$d\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\Delta\gamma k} \left(d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - \frac{2}{3}\boldsymbol{\xi}_{n+1} k d\Delta\gamma \right) \quad (1.73)$$

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \Xi \left[d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \frac{d\Delta\gamma}{1 + \frac{2}{3}\Delta\gamma k} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1} \right] \quad (1.74)$$

Par combinaison des équations (1.72) et (1.73) l'équation de cohérence s'écrit :

$$d\Delta\gamma = \frac{3}{2k} \frac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbf{P} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1}} \quad (1.75)$$

ou encore, en explicitant $d\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ par l'équation (1.74) :

$$d\Delta\gamma = \frac{(1 + \frac{2}{3}\Delta\gamma k) \boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbf{P} \Xi d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}{(1 + \beta_{n+1}) \boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbf{P} \Xi \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1}} \quad (1.76)$$

$$\text{avec } \beta_{n+1} = \frac{2}{3} k \left(1 + \frac{2}{3}\Delta\gamma k \right) \frac{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1}}{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbf{P} \Xi \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1}} \quad (1.77)$$

Utilisant alors l'écriture de $d\Delta\gamma$ donnée par l'équation (1.76), nous reprenons l'équation (1.74) pour écrire :

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}|_{n+1} = \boldsymbol{\Xi} - \frac{\mathbf{N}_{n+1} \otimes \mathbf{N}_{n+1}}{1 + \beta_{n+1}}} \quad (1.78)$$

où le vecteur normal s'écrit :

$$\mathbf{N}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\Xi} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1}}{\sqrt{\boldsymbol{\xi}_{n+1}^T \mathbf{P} \boldsymbol{\Xi} \mathbf{P} \boldsymbol{\xi}_{n+1}}}$$

. Le tenseur $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}|_{n+1}$ est un tenseur tangent en fin de pas, et l'on considère ici, en première approximation, que le tenseur tangent incrémental lui est égal :

$$[\mathbf{A}_p^t]_{n+1} \approx \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{d\boldsymbol{\varepsilon}}|_{n+1} \quad (1.79)$$

Le tenseur \mathbf{A}_p^t peut donc être qualifié de pseudo-tangent.

1.3.2.3 Conclusion

Pour le modèle de Prager, nous sommes maintenant en mesure d'écrire différents tenseurs de rigidité relatifs au comportement élastoplastique :

- le tenseur $\boldsymbol{\Xi}$ (1.70), qui sous certaines conditions est un tenseur élastoplastique sécant (1.71),
- le tenseur élastoplastique pseudo-tangent $[\mathbf{A}_p^t]_{n+1}$ (1.78), s'écrivant en fonction de $\boldsymbol{\Xi}$, $\Delta\gamma$, $\boldsymbol{\xi}_{n+1}$, k et σ_0 .

Ces tenseurs vont permettre d'écrire une fonctionnelle d'écart en relation de comportement pour la plasticité.

Présentation de la méthode d'identification utilisée

Sommaire

2.1	Application de la méthode d'erreur en relation de comportement à l'identification élastoplastique	56
2.1.1	Identification d'un tenseur de souplesse par l'erreur en relation de comportement	56
2.1.2	Choix et implémentation d'une méthode éléments finis appropriée	58
2.1.3	Résolution du problème d'identification élastoplastique	60
2.2	Algorithme de résolution	67
2.2.1	Algorithme élastique	68
2.2.2	Détection de la plasticité	73
2.2.3	Algorithme plastique	74
Conclusion	76

2.1 Application de la méthode d'erreur en relation de comportement à l'identification élastoplastique

L'identification du comportement d'un matériau à partir du déplacement plan obtenu par corrélation d'images numériques est le problème qui sera abordé ici. En tout généralité, les mesures de surface dont nous disposons ne permettent pas d'identifier les propriétés du matériau dans un volume complet. C'est pour cette raison que nous traiterons le cas d'éprouvettes fines et plates pour lesquelles l'hypothèse de contrainte plane est réaliste. Sur chacun des incréments de déformation, trois composantes planes de la déformation sont mesurées, ce qui permet d'identifier localement trois paramètres matériels. Le paragraphe qui va suivre a pour objet la présentation du cadre choisi pour formuler et résoudre le problème d'identification d'un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire en petites perturbations.

2.1.1 Identification d'un tenseur de souplesse par l'erreur en relation de comportement

La méthode inverse mise en place s'appuie sur une formulation variationnelle d'erreur en relation de comportement, présentée au paragraphe 1.2.2.4. Pour plusieurs pas de chargements successifs, le champ de déplacement \mathbf{u}^* est mesuré sur le domaine Ω . Les résultantes des efforts \mathbf{R}_i sont connues sur des bords $(\Gamma_i^R, i = 1 \dots N_i)$ de Ω . Les bords libres $(\Gamma_j^F, j = 1 \dots N_j)$ sont tels que $(\cup_{i=1}^{N_i} \Gamma_i^R) \cup (\cup_{j=1}^{N_j} \Gamma_j^F) = \partial\Omega$ et $(\cup_{i=1}^{N_i} \Gamma_i^R) \cap (\cup_{j=1}^{N_j} \Gamma_j^F) = \emptyset$. Les forces volumiques sont négligées (devant l'amplitude des contraintes appliquées dans le cadre de cette étude).

Nous allons nous intéresser à deux types de formulation du problème mécanique : une formulation standard, et une formulation incrémentale. La formulation standard est associée à un pas de chargement global pour lequel la déformation est obtenue entre un état de référence non déformé et un état déformé. La formulation incrémentale est associée à un incrément de chargement pour lequel la déformation est calculée entre deux états déformés successifs.

Le problème de l'identification élastique consiste ainsi à obtenir le tenseur d'élasticité \mathbf{A}_e^s et la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ qui satisfassent l'équation d'équilibre (2.1), la relation de comportement (2.2) et l'équilibre global (2.3) pour un pas de chargement pour lequel il n'y a pas d'écrouissage. L'identification plastique consiste à obtenir, lors d'une transformation plastique, le tenseur plastique tangent \mathbf{A}_p^t et l'incrément de contrainte $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ vérifiant les équations (2.4, 2.5, 2.6) de la formulation incrémentale, appliquée sur un incrément plastique :

$$\text{Formulation standard} \\ \text{div } \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{A}^s \boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} \mathbf{R}_i = \int_{\Gamma_i^R} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j^F. \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\text{Formulation incrémentale} \\ \text{div } \Delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}^*) = \mathbf{A}^t \Delta\boldsymbol{\sigma} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \Delta\mathbf{R}_i = \int_{\Gamma_i^R} \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds, \\ \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j^F. \end{cases} \quad (2.6)$$

A l'intérieur du domaine élastique, le comportement est décrit par une matrice de souplesse élastique \mathbf{B}_e , pouvant être obtenue soit par la "formulation standard" soit par la "formulation incrémentale". En théorie, $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_e^s = \mathbf{B}_e^t$, avec \mathbf{B}_e^s le tenseur élastique sécant, et \mathbf{B}_e^t le tenseur élastique tangent. En pratique, pour utiliser des données servant à l'identification ayant un rapport signal sur bruit optimal nous opterons pour une formulation sécante pour l'identification des paramètres élastiques.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.3.2.2, dès l'apparition de la plasticité, le comportement associé au modèle de Prager peut être décrit soit par un tenseur élastoplastique sécant \mathbf{B}_p^s , ou un tenseur élastoplastique tangent \mathbf{B}_p^t .

Nous associons à la formulation standard la fonctionnelle \mathcal{G}_s , et à la formulation incrémentale la fonctionnelle \mathcal{G}_t :

$$\mathcal{G}_s(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}^s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) - \mathbf{B}^s : \boldsymbol{\tau})^T : \mathbf{B}^{s-1} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) - \mathbf{B}^s : \boldsymbol{\tau}) d\Omega \quad (2.7)$$

$$\mathcal{G}_t(\Delta\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}^t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}^*) - \mathbf{B}^t : \Delta\boldsymbol{\tau})^T : \mathbf{B}^{t-1} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}^*) - \mathbf{B}^t : \Delta\boldsymbol{\tau}) d\Omega \quad (2.8)$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)$ est la déformation associée au déplacement mesuré. Les champs de contrainte $\boldsymbol{\tau}$ et $\Delta\boldsymbol{\tau}$ appartiennent respectivement aux espaces Σ_{adm} et $\Delta\Sigma_{adm}$:

$$\Sigma_{adm} = \{ \boldsymbol{\tau} \text{ régulière et symétrique vérifiant (2.1) et (2.3)} \}, \quad (2.9)$$

$$\Delta\Sigma_{adm} = \{ \Delta\boldsymbol{\tau} \text{ régulière et symétrique vérifiant (2.4) et (2.6)} \}. \quad (2.10)$$

(par $\boldsymbol{\tau}$ régulière et symétrique nous entendons $\boldsymbol{\tau} \in (\mathcal{L}^\infty(\Omega))_{sym}^{2 \times 2}$, de même que pour $\Delta\boldsymbol{\tau}$).

Sous l'hypothèse des contraintes planes, en utilisant les notations de l'ingénieur, soit ξ l'espace des tenseurs de rigidité admissibles (élastique ou plastique) :

$$\xi = \{ \mathbf{B} \in (\mathcal{L}^\infty(\Omega))_{sym}^{3 \times 3} ; B_{ij} \text{ constant par morceaux, } \mathbf{B} \text{ défini positif} \} \quad (2.11)$$

La méthode d'identification est fondée sur des propositions qui ont été démontrées dans [Geymonat & Pagano, 2003], ces propositions peuvent s'écrire pour la fonctionnelle \mathcal{G}_s de la façon suivante :

- (i) $\mathcal{G}_s(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}_e^s) \geq 0, \forall (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}_e^s) \in \Sigma_{adm} \times \xi$
- (ii) $\mathcal{G}_s(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}_e^s) = 0 \Leftrightarrow (2.2)$ est vraie avec $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau}$ et $\mathbf{A}_e^s = \mathbf{B}_e^s$
- (iii) La fonctionnelle \mathcal{G}_s est séparément convexe sur $\Sigma_{adm} \times \xi$

Ces propriétés restent vraies pour la fonctionnelle $\mathcal{G}_t(\Delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}_e^t)$ avec $(\Delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}_e^t) \in (\Delta\Sigma_{adm}, \xi)$. Elles s'appliquent de la même façon aux fonctionnelles pastiques $\mathcal{G}_s(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}_p^s)$ et $\mathcal{G}_t(\Delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}_p^t)$ avec $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}_p^s) \in (\Sigma_{adm}, \xi)$ et $(\Delta\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}_p^t) \in (\Delta\Sigma_{adm}, \xi)$, respectivement.

Pour chaque comportement sécant ou tangent, le problème d'identification est alors équivalent à la minimisation de la fonctionnelle correspondante. La stratégie numérique de minimisation sera développée dans le paragraphe suivant.

2.1.2 Choix et implémentation d'une méthode éléments finis appropriée

Pour minimiser les fonctionnelles \mathcal{G}_s et \mathcal{G}_t , il faut en premier lieu définir une description de trois champs : les déplacements, les contraintes et les propriétés matérielles. Ces champs sont nécessaires au calcul des fonctionnelles et de leurs dérivées. Une solution est d'avoir recours à une méthode de type éléments finis [Batoz & Dhett, 1990]. La méthode que nous utilisons repose sur une formulation mixte, dont la spécificité est l'indépendance entre le champ de contrainte et le champ de déplacement (pour les méthodes éléments finis traditionnelles, le champ de contrainte est calculé via la relation de comportement après dérivation du champ de déplacement).

2.1.2.1 Interpolation en contrainte

Le champ de contrainte doit être équilibré, il vérifie donc l'équation (2.1) ou (2.4) selon le problème considéré. Une première méthode est d'imposer l'équilibre en ayant recours à des multiplicateurs de Lagrange lors de la détermination des contraintes. L'utilisation de ces multiplicateurs présente l'inconvénient d'augmenter considérablement la taille du système à résoudre pour le calcul de la contrainte, tout en détériorant le conditionnement.

Pour rendre le calcul de contrainte plus direct, nous avons choisi une formulation en contrainte utilisant les fonctions d'Airy, cette formulation est naturellement équilibrée [Germain, 1986]. Sur chaque élément du maillage, le potentiel d'Airy est choisi comme un polynôme de degré 3 :

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} x^i y^j \quad (2.12)$$

Les trois composantes de la contrainte sont dérivées de ce potentiel :

$$\tau_{xx}(x, y) = \varphi_{,yy} = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=2}^3 j(j-1) a_{ij} x^i y^{j-2} \quad (2.13)$$

$$\tau_{yy}(x, y) = \varphi_{,xx} = \sum_{i=2}^3 \sum_{j=0}^3 i(i-1) a_{ij} x^{i-2} y^j \quad (2.14)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\varphi_{,xy} = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 i j a_{ij} x^{i-1} y^{j-1} \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

Quel que soit le choix des a_{ij} , $div \tau = 0$. Sur chaque noeud "contrainte" (cf. figure 2.1), les inconnues sont $\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)$. Ce sont donc des inconnues formulées à partir du potentiel de contrainte.

Nous avons choisi ici un potentiel bicubique car il est associé à une richesse de description que nous avons jugée suffisante : les variations de la contrainte sont alors de degré 1 au minimum suivant chaque axe du repère principal du plan.

Notons que du fait de cette interpolation particulière, certaines contraintes ne sont pas continues d'un élément sur l'autre :

- la contrainte σ_{xx} est continue suivant l'axe x mais n'est pas continue suivant l'axe y ,
- la contrainte σ_{yy} est continue suivant l'axe y mais n'est pas continue suivant l'axe x ,
- La contrainte σ_{xy} est continue.

La continuité des contraintes peut être imposée par ailleurs, en utilisant par exemple des multiplicateurs de Lagrange. Bien que ces conditions de continuité supplémentaire aient été implémentées dans le code de calcul, leur utilisation n'a pas été nécessaire dans la suite de ce travail.

2.1.2.2 Interpolation des paramètres matériels

Les propriétés matérielles sont considérées comme étant constantes à l'intérieur de chaque élément du maillage. Nous avons choisi également d'avoir la possibilité de regrouper des éléments en sous-ensembles pour y fixer des propriétés matérielles constantes. Cette possibilité se montre particulièrement intéressante lorsque des zones matérielles étendues coexistent dans Ω (par exemple pour des aciers polycristallins à gros grains, matériaux composites...). Il est à remarquer qu'il serait possible d'opter pour une discrétisation matérielle plus fine, par exemple en introduisant des descriptions matérielles non plus constantes par éléments mais affines (ou éventuellement plus riches).

2.1.2.3 Interpolation en déplacement

Nous retenons comme données cinématiques les déplacements plutôt que les déformations. Cela réduit le traitement des données en amont de la procédure d'identification, et les déformations sont alors calculées par le code, dans chaque élément. Souhaitant, dans des applications expérimentales, utiliser toute la richesse du champ de déplacement obtenu par corrélation d'images numériques, nous avons choisi de travailler avec des éléments rectangulaires, les nœuds "déplacement" de l'élément contenant chacun deux inconnues : les valeurs de U^x et U^y . Nous nous intéressons à des interpolations polynomiales du déplacement :

- une première formulation envisagée a été d'utiliser un élément de type $Q4P1$, à quatre nœuds. Dans ce cas les déplacements sont donnés par :

$$U^x(x, y) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 u_{ij}^x x^i y^j \quad (2.17)$$

$$U^y(x, y) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 u_{ij}^y x^i y^j \quad (2.18)$$

et les déformations associées sont

$$\varepsilon_{xx}(x, y) = \sum_{j=0}^1 u_{1j}^x y^j \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y) = \sum_{i=0}^1 u_{i1}^y x^i \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_{xy}(x, y) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^1 u_{1j}^y y^j + \sum_{i=0}^1 u_{i1}^x x^i \right) \quad (2.21)$$

Pour cette interpolation, les déformations sont des polynômes de degré unitaire au plus, et dépendent de huit coefficients.

- pour la deuxième formulation, un élément de type $Q9P2$ est utilisé. Dans ce cas les déplacements sont donnés par :

$$U^x(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 u_{ij}^x x^i y^j \quad (2.22)$$

$$U^y(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 u_{ij}^y x^i y^j \quad (2.23)$$

et les déformations associées sont

$$\varepsilon_{xx}(x, y) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^2 i u_{ij}^x x^{i-1} y^j \quad (2.24)$$

$$\varepsilon_{yy}(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^2 j u_{ij}^y x^i y^{j-1} \quad (2.25)$$

$$\varepsilon_{xy}(x, y) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^2 i u_{ij}^y x^{i-1} y^j + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=1}^2 j u_{ij}^x x^i y^{j-1} \right) \quad (2.26)$$

Pour cette interpolation, les déformations sont des polynômes de degré deux au plus, et dépendent de dix-huit coefficients.

Le fait d'avoir une description cinématique moins riche que la description en contrainte engendre des instabilités pour le calcul de la contrainte, ce qui n'est pas souhaitable pour la robustesse de la méthode inverse. L'élément $Q9P2$ est un bon compromis entre la richesse de description et la complexité de la formulation des déplacements. Ce choix permet une faible différence d'ordre de grandeur entre les variations de contrainte et les variations de déformation pour une loi de comportement constante sur chaque élément contrainte-déplacement. Le support géométrique de cet élément est illustré sur la figure 2.1.

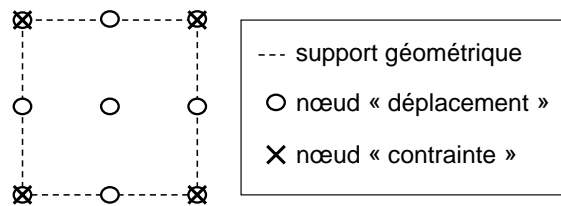


FIG. 2.1 – Élément mixte contrainte et déplacement

2.1.3 Résolution du problème d'identification élastoplastique

A partir des descriptions par éléments finis que nous venons de décrire dans le paragraphe 2.1.2, il est possible de calculer et minimiser les fonctionnelles \mathcal{G}_s et \mathcal{G}_t sur l'ensemble du domaine Ω . Une

méthode de relaxation est utilisée pour minimiser la fonctionnelle. Cette méthode consiste à minimiser successivement les fonctionnelles par rapport à leurs premiers et seconds arguments. Elle nécessite un champ de déplacement mesuré, des résultantes d'effort, ou encore des informations relatives aux bords libres. Les deux minimisations (*i.e.* par rapport au premier argument : minimisation "en contrainte" et par rapport au deuxième argument : minimisation "matérielle") sont exécutées de façon alternative jusqu'à la convergence. Les propriétés de convexité séparée des fonctionnelles assurent l'existence d'une solution à chacun des deux problèmes de minimisation.

2.1.3.1 Calcul de la contrainte

Le calcul de la contrainte sera identique en élasticité et en plasticité, que la formulation soit standard ou incrémentale. Il consiste à minimiser la fonctionnelle correspondante par rapport à son premier argument. Ci dessous, nous prendrons comme exemple le calcul de la contrainte dans le cas d'une formulation standard.

Respect de la relation de comportement

Nous calculons la contrainte ou l'incrément de contrainte par minimisation de la fonctionnelle \mathcal{G}_s .

$$\sigma = \text{Argmin}_{\mathcal{G}_s}(\mathbf{B}, \cdot) \quad (2.27)$$

Notons \mathbf{U} le vecteur contenant les inconnues nodales relatives à la contrainte $\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)$. La solution en contrainte s'obtient en résolvant le système $\mathbf{KU} = \mathbf{F}$ avec :

- \mathbf{K} le Hessien de \mathcal{G}_s calculé par rapport à \mathbf{U} ,
- \mathbf{F} le gradient de \mathcal{G}_s par rapport à \mathbf{U} , calculé au point $\mathbf{U} = 0$.

La résolution de ce système revient alors à vérifier l'équation (2.2), l'équation (2.1) étant systématiquement vérifiée d'après l'écriture des contraintes. Reste alors les conditions aux limites, sur-imposées au système par des multiplicateurs de Lagrange. Deux cas peuvent se présenter :

1. une résultante des efforts extérieurs est connue (*via* la cellule de force d'une machine de traction par exemple),
2. on dispose d'informations sur un bord du domaine libre d'efforts.

Nous pouvons également imposer des distributions d'efforts mais cela ne sera ni présenté ni utilisé dans la suite, car expérimentalement l'accès à de telles distributions est délicat, voire impossible.

Équilibre des résultantes d'efforts

On calcule la résultante \mathbf{R} sur un bord par sommation des résultantes élémentaires $d\mathbf{R}$ calculées sur chaque élément du bord considéré. Nous prenons dans ce qui suit l'exemple d'un bord vertical (*cf.* figure 2.2).

Sur ce bord, on calcule $\int \tau \cdot \mathbf{n} dx$ et on fixe arbitrairement pour l'exemple la normale extérieure $\mathbf{n} = \mathbf{x}$:

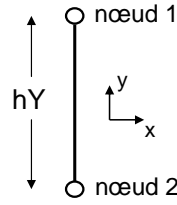


FIG. 2.2 – bord d'un élément contrainte

$$dR_x = [\varphi_{,y}]_1 - [\varphi_{,y}]_2 \quad (2.28)$$

$$dR_y = -[\varphi_{,x}]_1 + [\varphi_{,x}]_2 \quad (2.29)$$

Après sommation, l'expression de la résultante est très simple puisqu'elle ne fait intervenir que les nœuds extrêmes du bord chargé.

Équilibre des bords libres

L'équilibre des bords libres s'écrit $\boldsymbol{\tau}\mathbf{n} = 0$ en tout point du bord. Reprenons l'exemple du bord vertical donné sur la figure 2.2. Dans ce cas particulier,

$$\forall (x, y) \in \text{bord} : \tau_{xx} = 0 \text{ et } \tau_{xy} = 0 \quad (2.30)$$

Sur le bord, τ_{xx} est de degré unitaire et τ_{xy} de degré deux. Pour remplir la condition de bord libre, on écrit alors la nullité de τ_{xx} en deux points distincts, et la nullité de τ_{xy} en trois points distincts du bord, pour le premier élément du bord que l'on contraint. Pour les éléments suivants, il faut éviter les redondances car τ_{xy} est continue d'un élément sur l'autre. L'algorithme 1 présente la méthode retenue pour imposer l'équilibre d'un bord libre vertical de N_y éléments dans le cas d'un maillage régulier.

Pour i_e de 1 à N_y faire

$$\left. \begin{array}{l} \tau_{xx}^{i_e}(x, y_0 + (i_e - 1) \times hY) = 0 \\ \tau_{xx}^{i_e}(x, y_0 + i_e \times hY) = 0 \\ \tau_{xy}^{i_e}(x, y_0 + (i_e - 1) \times hY) = 0 \\ \tau_{xy}^{i_e}(x, y_0 + (i_e - 1/2) \times hY) = 0 \end{array} \right\}$$

Fin Pour

$$i_e \leftarrow N_y$$

$$\tau_{xy}^{i_e}(x, y_0 + i_e \times hY) = 0$$

Algorithme 1: Calcul de l'équilibre d'un bord libre vertical

2.1.3.2 Détermination des propriétés matérielles élastiques

Pour calculer les propriétés matérielles, on écrit la stationnarité de la fonctionnelle \mathcal{G}_s ou \mathcal{G}_t par rapport au tenseur de souplesse \mathbf{B} . Nous aborderons uniquement le cas du problème standard faisant référence à la fonctionnelle \mathcal{G}_s même si tout ce qui va suivre s'applique également à la fonctionnelle \mathcal{G}_t :

$$\mathbf{B} = \arg \min \mathcal{G}_s(\cdot, \boldsymbol{\tau}) \quad (2.31)$$

Le pas de chargement considéré pour l'identification des paramètres élastiques doit alors être complètement élastique. Dans [Constantinescu, 1994] est introduite la décomposition du tenseur élastique dans la base des tenseurs propres pour l'identification des paramètres élastiques. Si l'on ne fait aucune hypothèse sur les paramètres d'orientation du tenseur élastique, pour un modèle tridimensionnel 6 modules élastiques propres permettent de déterminer 6 paramètres de l'élasticité au plus, tandis que pour une modélisation plane 3 modules élastiques propres permettent de déterminer 3 paramètres de l'élasticité au plus.

Deux cas seront alors étudiés ici, selon que l'on considère un comportement élastique à symétrie cubique ou isotrope. L'identification de l'élasticité cubique sera présentée en premier lieu, l'élasticité isotrope en étant un cas particulier.

Élasticité à symétrie cubique

Pour un comportement élastique à symétrie cubique, en contrainte plane, en adoptant les notations $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})$, la loi de comportement $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_e \boldsymbol{\tau}$ prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{e1} & b_{e2} & 0 \\ b_{e2} & b_{e1} & 0 \\ 0 & 0 & b_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

avec $b_{e1} = 1/E$, $b_{e2} = -\nu/E$, $b_{e3} = 1/(2G)$. Le tenseur élastique est ensuite décomposé sur la base des tenseurs propres ce qui donne une écriture simple de l'identification des valeurs propres de ce tenseur :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_1 \\ \tilde{\varepsilon}_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_{e1} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{b}_{e2} & 0 \\ 0 & 0 & b_{e3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_1 \\ \tilde{\tau}_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_e = \mathbf{D}^T \mathbf{B}_e \mathbf{D} \quad (2.34)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.35)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\tau} \quad (2.36)$$

avec \mathbf{D} la matrice de passage permettant de diagonaliser le tenseur de souplesse \mathbf{B}_e , et $\tilde{\varepsilon} = (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \varepsilon_3)$, $\tilde{\tau} = (\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tau_3)$ sont les déformations et contraintes écrites dans la base propre de \mathbf{B}_e , respectivement.

La fonctionnelle élastique $\mathcal{G}_s^{(i)}$ peut alors s'écrire sur chaque sous-domaine ω_i :

$$\mathcal{G}_s^{(i)} = \int_{\omega_i} \left(\tilde{b}_{e1}^{(i)} \tilde{\tau}_1^2 + \tilde{b}_{e2}^{(i)} \tilde{\tau}_2^2 + b_{e3}^{(i)} \tau_3^2 + \frac{1}{\tilde{b}_{e1}^{(i)}} \tilde{\varepsilon}_1^2 + \frac{1}{\tilde{b}_{e2}^{(i)}} \tilde{\varepsilon}_2^2 + \frac{1}{b_{e3}^{(i)}} \varepsilon_3^2 - \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right) dS \quad (2.37)$$

Le système suivant permet de déterminer les valeurs propres en élasticité cubique $(\tilde{b}_{e1}^{(i)}, \tilde{b}_{e2}^{(i)}, \tilde{b}_{e3}^{(i)})$:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_s^{(i)}}{\partial \tilde{b}_{e1}^{(i)}} = 0 \Rightarrow (\tilde{b}_{e1}^{(i)})^2 = \frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_1^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_1^2 dS} \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_s^{(i)}}{\partial \tilde{b}_{e2}^{(i)}} = 0 \Rightarrow (\tilde{b}_{e2}^{(i)})^2 = \frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_2^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_2^2 dS} \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_s^{(i)}}{\partial b_{e3}^{(i)}} = 0 \Rightarrow (b_{e3}^{(i)})^2 = \frac{\int_{\omega_i} \varepsilon_3^2 dS}{\int_{\omega_i} \tau_3^2 dS} \quad (2.40)$$

Le tenseur d'élasticité étant défini positif ses valeurs propres $\tilde{b}_{e1}, \tilde{b}_{e2}, b_{e3}$ sont toutes strictement positives (ce qui implique ici $E > 0, G > 0, -1 < \nu < 1$). Les trois coefficients élastiques peuvent alors s'écrire en intégrant les expressions précédentes sur chacun des sous-domaine de calcul ω_i :

$$1/E^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_1^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_1^2 dS}} + \sqrt{\frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_2^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_2^2 dS}} \right) \quad (2.41)$$

$$\nu^{(i)} = -\frac{E^{(i)}}{2} \left(\sqrt{\frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_2^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_2^2 dS}} - \sqrt{\frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_1^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_1^2 dS}} \right) \quad (2.42)$$

$$G^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\int_{\omega_i} \tau_3^2 dS}{\int_{\omega_i} \varepsilon_3^2 dS}} \right) \quad (2.43)$$

Des trois équations précédentes, nous pouvons voir que des risques de division par zéro peuvent perturber l'identification des paramètres plastiques. Ce point sera détaillé dans le paragraphe 2.2.1.2 où nous détaillons comment ce problème a été contourné.

Voici le système d'équations précédent en fonction des contraintes et déformations écrites dans

la base d'origine pour le sous-domaine ω_i :

$$1/E^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\int_{\omega_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 dS}{\int_{\omega_i} (\tau_{xx} - \tau_{yy})^2 dS}} + \sqrt{\frac{\int_{\omega_i} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})^2 dS}{\int_{\omega_i} (\tau_{xx} + \tau_{yy})^2 dS}} \right) \quad (2.44)$$

$$\nu^{(i)} = -\frac{E^{(i)}}{2} \left(\sqrt{\frac{\int_{\omega_i} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})^2 dS}{\int_{\omega_i} (\tau_{xx} + \tau_{yy})^2 dS}} - \sqrt{\frac{\int_{\omega_i} (\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 dS}{\int_{\omega_i} (\tau_{xx} - \tau_{yy})^2 dS}} \right) \quad (2.45)$$

$$G^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\int_{\omega_i} \tau_{xy}^2 dS}{\int_{\omega_i} \varepsilon_{xy}^2 dS}} \right) \quad (2.46)$$

Élasticité isotrope

La situation est similaire à l'élasticité à symétrie cubique, mais avec $b_{e3} = \tilde{b}_{e1}$. La fonctionnelle élastique s'écrit alors :

$$\mathcal{G}_s = \int_{\Omega} \left(\tilde{b}_{e1} (\tilde{\tau}_1^2 + \tau_3^2) + \tilde{b}_{e2} \tilde{\tau}_2^2 + \frac{1}{\tilde{b}_{e1}} (\tilde{\varepsilon}_1^2 + \varepsilon_3^2) + \frac{1}{\tilde{b}_{e2}} \tilde{\varepsilon}_2^2 - \boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\varepsilon} \right) dS \quad (2.47)$$

Le système suivant permet de déterminer les propriétés élastiques isotropes localement :

$$\frac{\partial \mathcal{G}_s^{(i)}}{\partial \tilde{b}_{e1}^{(i)}} = 0 \Rightarrow (\tilde{b}_{e1}^{(i)})^2 = \frac{\int_{\omega_i} (\tilde{\varepsilon}_1^2 + \varepsilon_3^2) dS}{\int_{\omega_i} (\tilde{\tau}_1^2 + \tau_3^2) dS} \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_s^{(i)}}{\partial \tilde{b}_{e2}^{(i)}} = 0 \Rightarrow (\tilde{b}_{e2}^{(i)})^2 = \frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_2^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_2^2 dS} \quad (2.49)$$

Les deux coefficients élastiques s'écrivent alors :

$$1/E^{(i)} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\int_{\omega_i} (\tilde{\varepsilon}_1^2 + \varepsilon_3^2) dS}{\int_{\omega_i} (\tilde{\tau}_1^2 + \tau_3^2) dS}} + \sqrt{\frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_2^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_2^2 dS}} \right) \quad (2.50)$$

$$\nu^{(i)} = \frac{E^{(i)}}{2} \left(\sqrt{\frac{\int_{\omega_i} (\tilde{\varepsilon}_1^2 + \varepsilon_3^2) dS}{\int_{\omega_i} (\tilde{\tau}_1^2 + \tau_3^2) dS}} - \sqrt{\frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_2^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_2^2 dS}} \right) \quad (2.51)$$

Pour l'identification, un des avantages de l'élasticité isotrope sur l'élasticité cubique apparaît alors dans le système d'équations précédent : il n'est pas nécessaire d'avoir une déformation de cisaillement localement non nulle pour identifier tous les coefficients de la loi élastique sur chaque sous-domaine.

2.1.3.3 Détermination des propriétés matérielles plastiques

Concernant la détermination des propriétés matérielles plastiques, deux cas peuvent se présenter selon que l'on écrit un problème sécant ou tangent comme cela a déjà été abordé dans le paragraphe 1.3.2.2. L'écriture de ces deux situations fait également intervenir les paramètres élastiques. Comme

nous ne pouvons pas identifier plus de trois paramètres localement, nous avons choisi de dissocier l'identification des paramètres élastiques des paramètres plastiques. C'est donc seulement après avoir identifié des paramètres élastiques que les paramètres plastiques seront identifiés. Chacun de ces deux problèmes plastiques va maintenant être décrit, en particulier nous nous intéressons à la détermination de nos deux inconnues plastiques : le module d'érouissage k et la contrainte de limite élastique σ_0 , pour chacun de ces problèmes.

Problème sécant

Pour le problème sécant nous cherchons à déterminer le tenseur élastoplastique sécant \mathbf{B}_p^s , ce qui est possible lorsque la contrainte de rappel \mathbf{X}_n est nulle :

$$[\mathbf{B}_p^s]_{n+1} = \mathbf{\Xi}_{n+1} = \left[\mathbf{B}_e^{-1} - \frac{\Delta\gamma(\sigma_0)}{1 + \frac{2}{3}k\Delta\gamma(\sigma_0)} \mathbf{P} \right]^{-1} \quad (2.52)$$

Tout comme le tenseur élastique, le tenseur plastique sécant peut s'écrire en contrainte plane sous une forme similaire à celle du tenseur élastique :

$$\mathbf{B}_p^s = \begin{bmatrix} b_{ps1} & b_{ps2} & 0 \\ b_{ps2} & b_{ps1} & 0 \\ 0 & 0 & b_{ps3} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

L'équation (2.52) permet d'écrire chacune des trois valeurs propres de \mathbf{B}_p^s en fonction de k et σ_0 . Après diagonalisation de \mathbf{B}_p^s et en écrivant la stationnarité de \mathcal{G}_s par rapport aux valeurs propres de \mathbf{B}_p^s , nous obtenons les trois équations suivantes :

$$\frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_1^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_1^2 dS} = (b_{e1}^{(i)} - b_{e2}^{(i)}) + \frac{3}{2} K_p(k, \sigma_0, \tau) \quad (2.54)$$

$$\frac{\int_{\omega_i} \tilde{\varepsilon}_2^2 dS}{\int_{\omega_i} \tilde{\tau}_2^2 dS} = (b_{e1}^{(i)} + b_{e2}^{(i)}) + \frac{1}{2} K_p(k, \sigma_0, \tau) \quad (2.55)$$

$$\frac{\int_{\omega_i} \varepsilon_3^2 dS}{\int_{\omega_i} \tau_3^2 dS} = b_{e3}^{(i)} + 3K_p(k, \sigma_0, \tau) \quad (2.56)$$

avec :

$$K_p(k, \sigma_0, \tau) = \frac{1}{k} \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sqrt{\frac{1}{\omega_i} \int_{\omega_i} (\tau_1^2 - \tau_1\tau_2 + \tau_2^2 + 3\tau_3^2) dS}} \right)$$

Ces trois équations s'écrivent toutes en fonction de l'unique variable plastique $K_p(k, \sigma_0, \tau)$. Le couplage entre k et σ_0 rend alors impossible leur détermination simultanée en considérant uniquement le problème sécant associé au premier pas plastique.

Problème tangent

Le problème tangent peut être écrit de façon générale sur un incrément de chargement plastique, connaissant la contrainte de rappel \mathbf{X}_n calculée au pas précédent. Nous disposons d'une expression générale en plasticité incrémentale du tenseur élastoplastique tangent (cf. §1.3.2.2, équation (1.71)). L'écriture du tenseur n'étant pas triviale, la dépendance des trois équations de la plasticité n'a pas pu être démontrée.

Dans des situations simples (comme par exemple la traction uniaxiale), nous avons calculé numériquement la fonctionnelle associée au problème tangent, qui sera minimisée pour la détermination des paramètres plastiques. Une allure de la fonctionnelle est présentée sur la figure 2.3, pour une situation de traction simple sur un acier ($E = 200$ GPa, $\nu = 0.3$, $k = 10$ GPa, $\sigma_0 = 300$ MPa). Pour cette situation, la fonctionnelle présente une vallée qui rend impossible une identification du paramètre σ_0 . Dans ce cas, le problème tangent permet néanmoins l'identification du module d'écrouissage k .

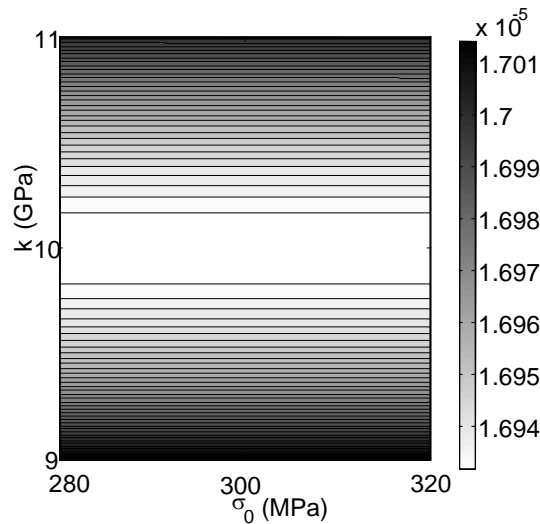


FIG. 2.3 – Allure de la fonctionnelle G_t en traction simple

2.2 Algorithme de résolution

Après avoir présenté quelques éléments théoriques sur l'identification du modèle élastoplastique de Prager, nous allons tenter de décrire de façon exhaustive dans cette partie la stratégie numérique qui a permis l'implémentation d'un code de calcul qui sera ensuite adapté à différentes situations numériques et expérimentales.

Le modèle élastique choisi comporte deux ou trois paramètres selon que l'on considère un modèle à symétrie isotrope ou cubique, respectivement. En contrainte plane, comme seulement trois paramètres du comportement peuvent être identifiés localement, nous avons choisi d'identifier les paramètres élastiques sur un premier pas de chargement qui sera donc supposé être purement élastique. L'algorithme de résolution élastique sera présenté en premier lieu.

Une fois les paramètres élastiques identifiés, il devient envisageable d'identifier les paramètres plastiques sur les pas de chargements suivants. Cette identification devient possible dès l'apparition d'un écoulement la plastique. Un algorithme de détection a donc été implémenté, il sera présenté dans un deuxième temps.

Enfin, une fois la plasticité détectée, les paramètres plastiques sont identifiés. La dépendance des équations plastiques évoquée précédemment a imposé la considération d'un algorithme particulier permettant l'identification des deux paramètres plastiques associés au modèle de Prager.

2.2.1 Algorithme élastique

Les algorithmes pour l'identification de propriétés élastiques hétérogènes cubiques ou isotropes seront présentés dans ce paragraphe. Les fonctionnelles $\mathcal{G}_s(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}_e)$ et $\mathcal{G}_t(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}_e)$ sont séparément convexes par rapport à leurs couples de variables respectifs, et le calcul élastique repose sur ces propriétés.

Nous avons retenu une stratégie de détermination des paramètres élastique séparée en deux étapes distinctes : Un "calcul élastique global" permet, dans un premier temps, de déterminer des paramètres élastiques homogènes sur le domaine d'observation. Ensuite, la détermination des paramètres élastiques locaux est réalisée dans deuxième étape appelée "calcul élastique local". L'intérêt de cette démarche est double :

- Le calcul élastique global converge rapidement vers les paramètres élastiques moyens, qui constituent une valeur initiale intéressante pour l'algorithme d'identification locale.
- Parfois, l'identification locale de paramètres élastiques est impossible sur certaines zones pour lesquelles l'énergie de déformation élastique est trop faible. L'étape préliminaire de calcul élastique global permet de disposer de paramètres "par défaut" pouvant être attribués à ces zones, dans le but de pouvoir estimer la contrainte dans ces zones faiblement déformées et contraintes.

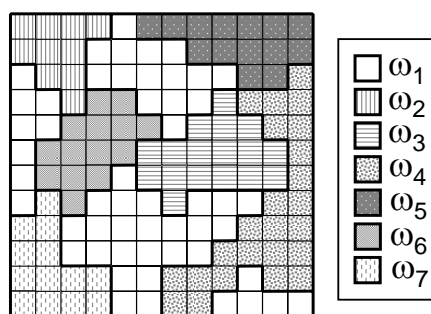


FIG. 2.4 – Illustration d'une décomposition en sous-domaines pour une identification à une échelle intermédiaire

Le calcul local se fait pour un découpage en sous-domaines d'identification donnés. L'échelle de description des propriétés matérielles la plus fine consiste à choisir autant de sous-domaines que d'éléments contrainte. Une échelle intermédiaire peut être intéressante lorsque l'on dispose d'informations sur les différentes zones matérielles qui coexistent dans Ω , cette échelle considère alors des

groupes d'éléments comme étant des sous-domaines ω_i . Un exemple d'un tel découpage est représenté sur la figure 2.4.

Le problème de minimisation étant identique quelle que soit la fonctionnelle utilisée, nous traiterons dans la suite le cas la fonctionnelle \mathcal{G}_s uniquement. Dans les différents algorithmes présentés par la suite, le calcul de la contrainte est qualifié de "global" tandis que le calcul de la souplesse est qualifié d'"explicite et local". En effet le calcul de la contrainte se fait en résolvant un système de type éléments finis présenté au paragraphe 2.1.3.1, tandis que le calcul de la souplesse se fait localement au moyen des équations (2.41) à (2.43) ou (2.50) et (2.51).

Nous allons maintenant présenter successivement le calcul élastique global et le calcul élastique local.

2.2.1.1 Calcul global des propriétés élastiques homogènes

L'algorithme 2 présente la stratégie retenue pour identifier des paramètres élastiques homogènes, ce qui constitue une étape préliminaire à l'identification élastique locale. Les itérations de la minimisation par relaxation sont stoppées lorsque le test sur la contrainte et la souplesse, $test_\tau$ et $test_B$ respectivement, satisfont les critères préalablement fixés δ_τ et δ_B , respectivement.

Le test de convergence sur la souplesse est défini dans l'Algorithme 2 avec $\|\bullet\|$ dénotant la norme 2 de \bullet . Rappelons que \mathbf{B}_{hom}^e s'écrivant de façon générale en contrainte plane $\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$, le test de convergence $test_B$ s'écrit :

$$(test_B)^2 = \frac{2(b_1^{j+1} - b_1^j)^2 + 2(b_2^{j+1} - b_2^j)^2 + (b_3^{j+1} - b_3^j)^2}{2(b_1^j)^2 + 2(b_2^j)^2 + (b_3^j)^2} \quad (2.57)$$

Le test de convergence sur la contrainte est défini à l'aide d'une norme sur la contrainte τ et non sur le potentiel d'Airy ϕ . Pratiquement, la convergence est testée entre les deux dernières itérations j et $j + 1$ sur un nombre fini N_p de points M_i sur le domaine Ω (5×5 points de test par élément contrainte) :

$$(test_\tau)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_p} \left[\left(\tau_{xx}^{j+1}(M_i) - \tau_{xx}^j(M_i) \right)^2 + \left(\tau_{yy}^{j+1}(M_i) - \tau_{yy}^j(M_i) \right)^2 + \left(\tau_{xy}^{j+1}(M_i) - \tau_{xy}^j(M_i) \right)^2 \right]}{\sum_{i=1}^{N_p} \left[\left(\tau_{xx}^j(M_i) \right)^2 + \left(\tau_{yy}^j(M_i) \right)^2 + \left(\tau_{xy}^j(M_i) \right)^2 \right]} \quad (2.58)$$

[chargement des données $\leftarrow u_x, u_y, \text{résultantes, bords libres}$]
[initialisation $\rightarrow \mathbf{B}_0, j \leftarrow 0$]
Tant que ($test_B > \delta_B$ **OU** $test_\tau > \delta_\tau$) **faire**
 $\tau_{j+1} = \arg \min \mathcal{G}_s(\cdot, \mathbf{B}_j^e) + \text{C.L.} \rightarrow \text{multiplicateurs de Lagrange}$
 $\mathbf{B}_{j+1}^e = \arg \min \mathcal{G}_s(\tau_{j+1}, \cdot) \text{ explicite}$
 $test_B = \frac{\|\mathbf{B}_{j+1}^e - \mathbf{B}_j^e\|}{\|\mathbf{B}_j^e\|} \quad test_\tau = \frac{\|\tau_{j+1} - \tau_j\|}{\|\tau_j\|}$
 $j \leftarrow j + 1$
Fait
[sorties]
 $\sigma, \mathbf{B}_{hom}^e (E_{hom}, \nu_{hom} (+G_{hom} \text{ si symétrie cubique}))$

Algorithme 2: Calcul élastique global

2.2.1.2 Calcul élastique local

Le tenseur d'élasticité est ici constant sur des sous-domaines d'identification ω_i , qui seront dans la suite les éléments du maillage. Une précaution doit être prise pour le calcul local. D'une façon générale, il n'est pas toujours possible d'identifier un paramètre localement si ce paramètre n'intervient pas dans l'énergie de déformation. Pour s'affranchir de ces problèmes d'identifiabilité des paramètres, un test sur la déformation locale permet de décider si l'identification locale est possible ou non.

Pour l'identification d'un matériau élastique isotrope, le test est défini localement sur chacun des N_ω sous domaines d'identification ω_i comme suit :

$$\|\varepsilon\|^{(i)} = \left(\frac{1}{\omega_i} \int_{\omega_i} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{xy}^2) dS \right)^{1/2} \quad (2.59)$$

si $\|\varepsilon\|^{(i)} > \delta_\varepsilon$ alors E et ν sont identifiés localement

Pour l'identification d'un matériau élastique à symétrie cubique, l'identification du module de cisaillement G est indépendante de l'identification du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν . Seule la déformation de cisaillement intervient pour cette identification (à ce sujet voir l'identification élastique à symétrie cubique sur l'essai brésilien, paragraphe 3.1.2). Deux tests doivent alors être employés :

$$\|\varepsilon\|_1^{(i)} = \left(\frac{1}{\omega_i} \int_{\omega_i} (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2) dS \right)^{1/2} \quad (2.60)$$

$$\|\varepsilon\|_2^{(i)} = \left(\frac{1}{\omega_i} \int_{\omega_i} (\varepsilon_{xy}^2) dS \right)^{1/2} \quad (2.61)$$

si $\|\varepsilon\|_1^{(i)} > \delta_{\varepsilon_1}$ alors E et ν sont identifiés localement

si $\|\varepsilon\|_2^{(i)} > \delta_{\varepsilon_2}$ alors G est identifié localement

Lorsque l'on choisit de ne pas identifier localement un paramètre matériel, la valeur identifiée lors du calcul global est affectée au sous domaine ω_i .

L'algorithme 3 présente le calcul local d'un matériau élastique isotrope, et l'algorithme 4 présente le calcul local d'un matériau élastique à symétrie cubique. Pour ce dernier calcul, l'identification locale de G et celle de E et ν sont découplées. Après avoir présenté les différents algorithmes utilisés pour le calcul des paramètres élastiques, une étape préliminaire à l'identification des paramètres plastiques sera abordée : il s'agit de la détection de la plasticité.

[chargement des données $\leftarrow u_x, u_y, \text{résultantes, bords libres}$]

[initialisation $\rightarrow \mathbf{B}_0, j \leftarrow 0$]

Tant que ($test_B > \delta_B$ **OU** $test_\tau > \delta_\tau$) **faire**

$\tau_{j+1} = \arg \min \mathcal{G}_s(\cdot, \mathbf{B}_j) + \text{C.L.} \rightarrow \text{multiplicateurs de Lagrange}$ *global*

Pour i **de** 1 **à** N_ω **faire**

Si ($\|\varepsilon\|_{local} > \delta_\varepsilon$) **Alors**

$\mathbf{B}_{j+1}^{(i)} = \arg \min \mathcal{G}_s(\tau_{j+1}^{(i)}, \cdot)$ *explicite & local*

Sinon

$\mathbf{B}_{j+1}^{(i)} = \mathbf{B}_{hom}^e$

Fin Si

Fin Pour

$test_B, test_\tau$

$j \leftarrow j + 1$

Fait

[sorties]

σ et $\forall i = 1 \dots N_\omega, \mathbf{B}_e^{(i)}(E^{(i)}, \nu^{(i)})$

Algorithme 3: Calcul élastique isotrope local

[chargement des données $\leftarrow u_x, u_y, \text{résultantes, bords libres}$]

[initialisation $\rightarrow \mathbf{B}_0, j \leftarrow 0$]

Tant que ($test_B > \delta_B$ **OU** $test_\tau > \delta_\tau$) **faire**

$\tau_{j+1} = \arg \min \mathcal{G}_s(\cdot, \mathbf{B}_j) + \text{C.L.} \rightarrow \text{multiplicateurs de Lagrange}$ *global*

Pour i **de** 1 **à** N_ω **faire**

$\mathbf{B}_{(i)}^{j+1} = \arg \min \mathcal{G}_s(\tau_{j+1}^{(i)}, \cdot)$ *explicite & local*

Si ($\|\varepsilon\|_1 < \delta_{\varepsilon_1}$) **Alors**

$(E^{(i)} = E_{hom}) \ \& \ (\nu^{(i)} = \nu_{hom})$

Fin Si

Si ($\|\varepsilon\|_2 < \delta_{\varepsilon_2}$) **Alors**

$G^{(i)} = G_{hom}$

Fin Si

Fin Pour

$test_B, test_\tau$

$j \leftarrow j + 1$

Fait

[sorties]

σ et $\forall i = 1 \dots N_\omega, \mathbf{B}_e^{(i)}(E^{(i)}, \nu^{(i)}, G^{(i)})$

Algorithme 4: Calcul élastique cubique local

2.2.2 Détection de la plasticité

Les paramètres de l'élasticité étant identifiés sur le premier pas de chargement, supposé purement élastique, ces paramètres sont alors considérés comme paramètres de "référence". Parmi les pas de chargement suivants, il s'agit maintenant de distinguer les pas élastiques des pas plastiques. Pour détecter les pas plastiques, une identification élastique est faite (via l'Algorithme 2), permettant de comparer le tenseur élastique \mathbf{B}_e ainsi obtenu avec le tenseur élastique de référence \mathbf{B}_e^r . Lorsque la différence est trop importante, le pas est considéré comme plastique. Il est possible de comparer les tenseurs sur le chargement complet (formulation standard, fonctionnelle \mathcal{G}_s) ou sur un incrément de chargement (formulation incrémentale, fonctionnelle \mathcal{G}_t). La figure 2.5 illustre cet algorithme de détection plastique, et les intervalles de tolérance représentés sont associés à l'application du test élastique $test_{ela}$ sur le module tangent.

La difficulté dans l'application de cette procédure est l'ajustement nécessaire du critère δ_e pour que des perturbations sur des mesures dans le domaine élastique ne soient pas interprétées comme de la plasticité.

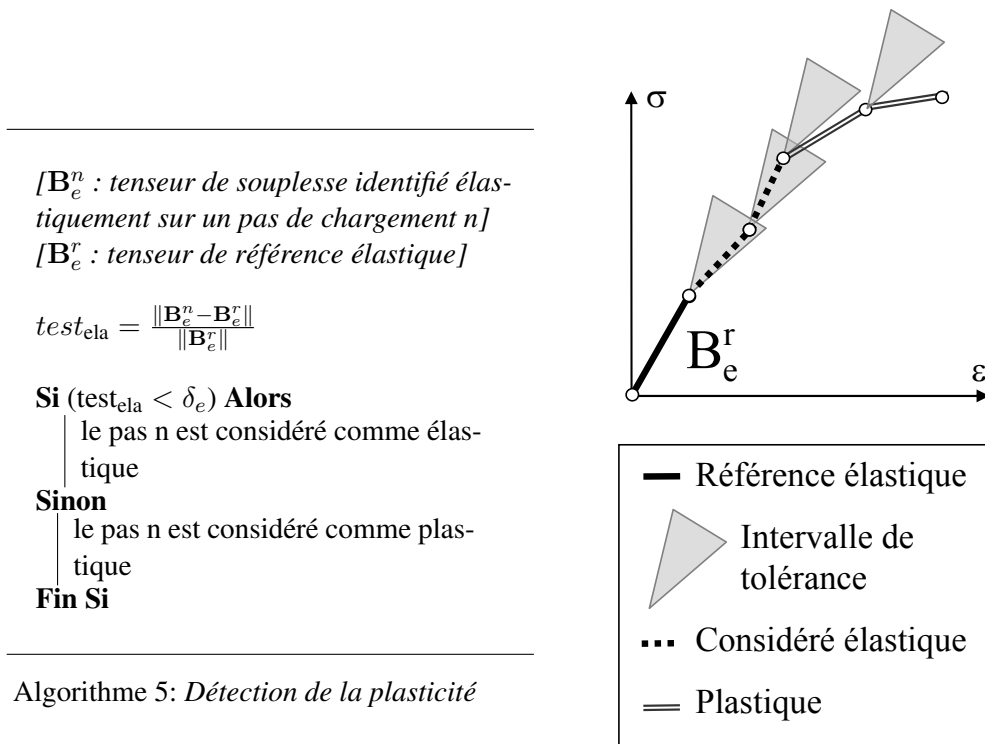


FIG. 2.5 – Illustration de la détection plastique

L'Algorithme 5 permet de prendre également en compte des décharges élastiques, dès lors que l'on considère le module tangent.

2.2.3 Algorithme plastique

Une fois le comportement élastique identifié, l'identification du comportement plastique peut être réalisée dès que l'apparition de la plasticité est détectée. Dans le paragraphe 2.1.3.3, nous avons présenté des résultats sur l'identifiabilité des paramètres plastiques.

L'algorithme itératif permettant d'identifier k et σ_0 nous a conduit à considérer deux pas de chargement successifs notés n et $n + 1$, tous deux plastiques. La situation idéale pour l'identification comporte trois pas de chargement, dont un premier pas purement élastique suivi de deux pas plastiques. Il est toutefois possible d'avoir plusieurs pas élastiques avant l'apparition de la plasticité. Les deux pas n et $n + 1$ sont représentés sur la figure 2.6, avec les modules tangents et sécants utilisés pour chacun de ces pas.

Sur le premier pas plastique n , il est intéressant d'écrire un problème sécant : cela permet de travailler avec des déformations plus importantes que pour le problème tangent. Des déformations importantes sont associées à un rapport signal sur bruit favorable pour l'identification. Comme c'est sur ce premier pas que la surface de charge est atteinte, c'est uniquement la contrainte de limite élastique σ_0 qui sera identifiée à partir d'une formulation sécante associée à la fonctionnelle \mathcal{G}_s .

Sur le second pas plastique $n + 1$, le module d'écroûissage k est identifié à partir de l'écriture d'un problème tangent associé à la fonctionnelle \mathcal{G}_t .

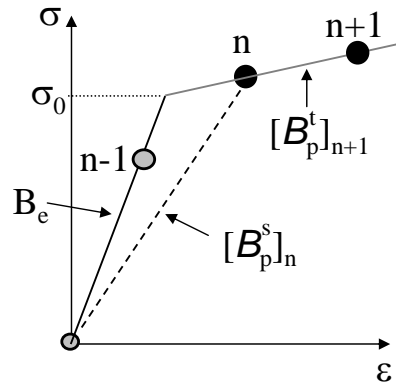


FIG. 2.6 – Courbe simple $\sigma - \varepsilon$

L'Algorithme 6 présente la résolution plastique. Une stratégie itérative et retenue, faisant intervenir les pas plastiques n et $n + 1$. L'initialisation comporte deux étapes, une étape élastique puis une étape plastique.

Les tenseurs élastoplastiques sécants et tangents dépendant de la contrainte, une difficulté intervient lors de la minimisation en contrainte des fonctionnelles \mathcal{G}_s et \mathcal{G}_t . En effet nous avons ici les relations suivantes :

$$\Delta \varepsilon = \mathbf{A}_p^t(\Delta \sigma) : \Delta \sigma \quad (2.62)$$

$$\varepsilon = \mathbf{A}_p^s(\sigma) : \sigma \quad (2.63)$$

Ce problème a été contourné en calculant les contraintes de façon itérative, pour le problème sécant :

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \text{Argmin}_{\mathcal{G}_s}(\mathbf{B}_p^s(\boldsymbol{\sigma}^{i-1}), \cdot) \quad (2.64)$$

où i représente le numéro de l'itération. De même pour le problème tangent :

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^i = \text{Argmin}_{\mathcal{G}_t}(\mathbf{B}_p^t(\Delta\boldsymbol{\sigma}^{i-1}), \cdot) \quad (2.65)$$

Les deux premières étapes de cet algorithme (*[Initialisation I]* et *[initialisation II]*) visent à obtenir une première estimation de la contrainte de rappel \mathbf{X}_n et de la limite d'élasticité σ_0 . Dans cette deuxième étape, l'approximation de la contrainte seuil est basée sur une contrainte de Von-Mises :

$$(\mathbf{s})_{II} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij} : s_{ij}} \quad (2.66)$$

$$\text{avec : } s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (2.67)$$

Notons que les deux étapes d'initialisation (I et II) se font sur le même incrément de chargement. La première étape, notée *Initialisation I*, permet de tester si il y a décharge élastique. Si oui alors le calcul plastique ne se fait pas. Le module tangent ainsi estimé sur une base de recherche élastique constitue la valeur initiale pour la deuxième étape, notée *Initialisation II*.

Lors de la deuxième étape d'initialisation on effectue un calcul de type plastique incrémental, pour lequel les paramètres plastiques ne sont pas identifiés. Le but est d'estimer un incrément de contrainte $\Delta\boldsymbol{\sigma}_n$ et le tenseur d'écoulement \mathbf{X}_n nécessaires lors de la première étape des *itérations plastiques*. La contrainte $\boldsymbol{\sigma}_n$ initiale est alors calculée comme $\boldsymbol{\sigma}_{n-1} + \Delta\boldsymbol{\sigma}_n$, $\boldsymbol{\sigma}_{n-1}$ étant identifiée lors du dernier pas élastique.

Les itérations plastiques permettent d'identifier les deux paramètres plastiques k et σ_0 . À chaque itération, le calcul plastique au pas $n+1$ permet de déterminer k , ensuite le calcul plastique au pas n permet de déterminer σ_0 . Pour déterminer k et σ_0 sur chacun de ces problèmes, la fonctionnelle plastique correspondante est directement minimisée par rapport au paramètre cherché, à l'aide d'une minimisation bornée par un algorithme de section dorée. Pour σ_0 , l'intervalle de recherche est fixé au pas n comme étant $[\boldsymbol{\sigma}_{n-1}, \boldsymbol{\sigma}_n]$, tandis que pour k on peut par exemple choisir l'intervalle $[0, E]$.

Après convergence de l'algorithme, on obtient les contraintes $\boldsymbol{\sigma}_n$ et $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, les contraintes de rappel \mathbf{X}_n et \mathbf{X}_{n+1} pour chacun des deux pas plastiques, le module d'écrouissage k , la contrainte de limite élastique σ_0 , le tenseur pseudo-tangent $[\mathbf{B}_p^t]_{n+1}$ au pas $n+1$, le tenseur sécant $[\mathbf{B}_p^s]_n$ au pas n .

Conclusion

Le deuxième chapitre a permis d'aborder le problème de l'identification élastoplastique pour un modèle de Prager appliqué à des problèmes plans. Selon que le comportement élastique est à symétrie isotrope ou cubique, quatre ou cinq paramètres du matériau sont alors identifiés localement. L'identification de ces paramètres est rendue possible par une fonctionnelle d'écart en relation de comportement qui exprime de façon variationnelle le problème élastoplastique. Les propriétés de convexité de cette fonctionnelle rendent intéressante une minimisation par relaxation présentant des avantages pour l'implémentation numérique. Cette dernière repose sur une méthode de type éléments finis, les propriétés matérielles peuvent alors être identifiées localement.

La principale difficulté de ce travail fût l'élaboration d'une procédure permettant l'identification des paramètres plastiques, l'identification simultanée de ces paramètres étant, en ce qui nous concerne, hors de portée. Cela a été démontré pour le problème élastoplastique sécant, et constaté dans des cas particuliers en ce qui concerne le problème tangent. Des travaux sont en cours afin de permettre la démonstration relative à la non identifiabilité simultanée des propriétés plastiques pour le problème élastoplastique tangent. D'autres travaux sur l'identification de propriétés élastoplastiques ont également présenté des problèmes d'identifiabilité similaires sans toutefois en expliquer l'origine [Grédiac & Pierron, 2006].

[chargement des données]

$u_x^n, u_y^n, u_x^{n+1}, u_y^{n+1}, \mathbf{B}_e^r$, résultantes pas n et $n + 1$

[Initialisation I]

[Calcul élastique pas n , formulation incrémentale]

$\min \mathcal{G}_t(\Delta\boldsymbol{\tau}_n, [\mathbf{B}_e^t]_n)$

estimation du module tangent $[\mathbf{B}_e^t]_n$

[Test sur décharge élastique]

Si $([\mathbf{B}_e^t]_n \approx \mathbf{B}_e)$ **Alors**

| STOP

Fin Si

[Initialisation II]

[Calcul plastique pas n , formulation incrémentale]

hypothèse : $\sigma_0 = (\mathbf{s}_{n-1})_{II}$

$\min \mathcal{G}_t(\Delta\boldsymbol{\tau}_n, [\mathbf{B}_p^t]_n^0)$

Estimation de \mathbf{X}_n

$i \leftarrow 1;$

[Itérations plastiques]

Tant que $(test_s > \delta_s$ **OU** $test_t > \delta_t)$ **faire**

[Calcul plastique pas $n + 1$, formulation incrémentale]

$\min_{(\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1})} \mathcal{G}_t(\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1}, [\mathbf{B}_p^t(\boldsymbol{\tau}_n^{i-1})]_{n+1}^{i-1})$

$\min_{(k)} \mathcal{G}_t(\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1}^i, [\mathbf{B}_p^t(\boldsymbol{\tau}_n^i, k)]_{n+1}^i)$

[Calcul plastique pas n , formulation standard]

$\min_{(\boldsymbol{\tau}_n^i)} \mathcal{G}_s(\boldsymbol{\tau}_n^i, [\mathbf{B}_p^s(\boldsymbol{\tau}_n^{i-1})]_n^{i-1})$

$\min_{(\sigma_0)} \mathcal{G}_s(\boldsymbol{\tau}_n^i, [\mathbf{B}_p^s(\boldsymbol{\tau}_n^i, \sigma_0)]_n^i)$

$$test_s = \frac{\|[\mathbf{B}_p^s(\boldsymbol{\tau}_n^{i-1})]_n^i - [\mathbf{B}_p^s(\boldsymbol{\tau}_n^{i-2})]_n^{i-1}\|}{\|[\mathbf{B}_p^s(\boldsymbol{\tau}_n^{i-2})]_n^{i-1}\|}$$

$$test_t = \frac{\|[\mathbf{B}_p^t(\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{i-1})]_{n+1}^i - [\mathbf{B}_p^t(\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{i-2})]_{n+1}^{i-1}\|}{\|[\mathbf{B}_p^t(\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{i-2})]_{n+1}^{i-1}\|}$$

$$test_\sigma = \frac{\|\boldsymbol{\tau}_n^i - \boldsymbol{\tau}_n^{i-1}\|}{\|\boldsymbol{\tau}_n^{i-1}\|}$$

$$test_{\Delta\sigma} = \frac{\|\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1}^i - \Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{i-1}\|}{\|\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{i-1}\|}$$

$i \leftarrow i + 1;$

Fait

[sorties]

$\sigma_n, \sigma_{n+1}, [\mathbf{B}_p^t]_{n+1}(k), [\mathbf{B}_p^s]_n(\sigma_0), \mathbf{X}_n, \mathbf{X}_{n+1}$

Applications et résultats

Sommaire

3.1 Applications en élasticité	80
3.1.1 Essai de traction simple	80
3.1.2 Identification à partir d'un chargement hétérogène	82
3.1.3 Identification d'un matériau élastique hétérogène	89
3.1.4 Sensibilité au bruit de l'identification élastique	96
3.2 Estimation d'énergies mécaniques localement fournies pendant un essai de fatigue à grand nombre de cycles	104
3.2.1 Cadre de l'étude	104
3.2.2 Estimation d'une énergie dissipée	104
3.2.3 Estimation de l'énergie mécanique fournie localement	105
3.2.4 Bilan d'énergie en fatigue	107
3.2.5 Résultats expérimentaux	108
3.2.6 Conclusion sur l'essai de Fatigue	111
3.3 Applications en plasticité	112
3.3.1 Identification d'une inclusion plastique	112
3.3.2 Identification sur un bicouche élastoplastique	115
3.3.3 Identification élastoplastique expérimentale	120

Une analyse de la littérature montre qu'un vaste champ de recherche et d'applications en rapport avec l'identification de paramètres de lois de comportement a été abordé ces vingt dernières années. Cette thèse a débuté peu après la création, en France, d'un groupe de recherche (GdR 2519) "Mesures de Champs et Identification en Mécanique des Solides". Une partie des applications qui seront présentées ici ont donc été directement inspirées par les travaux du groupe de travail "identification" de ce GdR, dont un des objectifs a été la comparaison de différentes méthodes d'identification entre elles. Cette comparaison concerne l'identification de lois de comportement élastiques linéaires isotropes ou orthotropes et utilise pour cela la même base de données expérimentales.

Pour pouvoir identifier des paramètres de lois élastoplastiques, l'identification préalable des paramètres élastiques est nécessaire. Nous avons vu dans le paragraphe 1.3.2.2 que les tenseurs associés au comportement élastoplastique s'écrivent en fonction des paramètres élastiques. L'identification des paramètres plastiques est donc tributaire de la réussite de l'identification de ces paramètres élastiques. Pour cette raison motivante, l'identification de paramètres élastiques occupe une part importante de ce chapitre. Une autre motivation a été la participation au GdR 2519, qui nous a conduit à identifier des propriétés élastiques isotropes ou à symétrie cubique, homogènes, pour un essai de traction simple et un essai brésilien. Ces premières études ont constitué un travail fondateur pour le reste de cette première partie, en particulier à partir d'une simulation numérique de l'essai brésilien.

Une deuxième partie de ce chapitre présente des résultats obtenus lors d'un essai de fatigue sur un acier Dual-Phase. Nous avons contribué à l'établissement de bilans d'énergie, pour cela une énergie mécanique localement fournie lors d'un cycle de fatigue est calculée par une méthode basée sur l'identification élastique. L'originalité de cette approche est que l'on ne cherche pas ici uniquement à identifier des propriétés matérielles, mais aussi à estimer des puissances mécaniques fournies localement. Cette estimation requiert en effet la construction d'un champ de contrainte et d'un champ de déformation tout au long d'un cycle d'hystérésis mécanique. Cette application permet de souligner que dans l'erreur en relation de comportement telle que nous l'avons appliquée, le champ de contrainte est une variable indépendante et c'est ce champ, associé à un matériau hétérogène, qui nous permet ici l'estimation d'une puissance mécanique. L'intérêt de cette approche est le nombre particulièrement réduit d'hypothèses fortes faites pour pouvoir déterminer la forme du champ de contrainte.

Enfin une dernière partie de ce chapitre sera consacrée aux résultats obtenus en élastoplasticité. Les résultats présentés sont particulièrement novateurs pour deux raisons : d'une part pour le nombre élevé de paramètres devant être identifiés pour un matériau hétérogène, d'autre part pour la difficulté à identifier un modèle non linéaire. C'est donc la résolution d'un problème particulièrement difficile qui est abordée dans cette partie. Une première caractérisation numérique de cette identification sera faite, puis des résultats obtenus à partir de données expérimentales, moins nombreux par manque de temps, seront présentés.

3.1 Applications en élasticité

3.1.1 Essai de traction simple

Dans le cadre de la participation au GdR 2519, un article écrit vise à comparer différentes méthodes d'identification entre elles. Cette comparaison concerne en particulier les résultats obtenus en identifiant des paramètres élastiques lors de diverses situations expérimentales. La plus simple de

ces situations est un essai de traction simple sur un alliage d'aluminium 2024. L'éprouvette est un barreau de section 4.8×4.8 mm. Deux paramètres élastiques sont identifiés, le module d'Young E et le coefficient de Poisson ν . Pour cet essai les champs de déplacements sont fournis par F. Hild du LMT Cachan. Les images de granularité sont prises au moyen d'une caméra 8-bit (1008×1016 pixels) munie d'un microscope longue distance, une surface de 2×2 mm est observée. Une série de 21 images a été prise au cours de l'ensemble du chargement de l'éprouvette. En complément des champs de déplacement et des mesures d'effort, des propriétés élastique de référence sont fournies. Celles-ci ont été obtenues par régression linéaire sur l'ensemble de l'essai de traction en mesurant la déformation par des jauges : $E_{\text{ref}} = 76 \pm 0.5$ GPa, $\nu_{\text{ref}} = 0.33 \pm 0.01$.

Pour la dernière image qui correspond à l'effort maximal F de 2003 N, le champs de déplacement est donné sur la figure 3.1. La composante u_x permet d'observer l'allongement du barreau tandis que la composante u_y permet d'observer sa contraction. Les champs étant donnés sur 15×15 points ils sont compatibles avec la méthode d'identification.

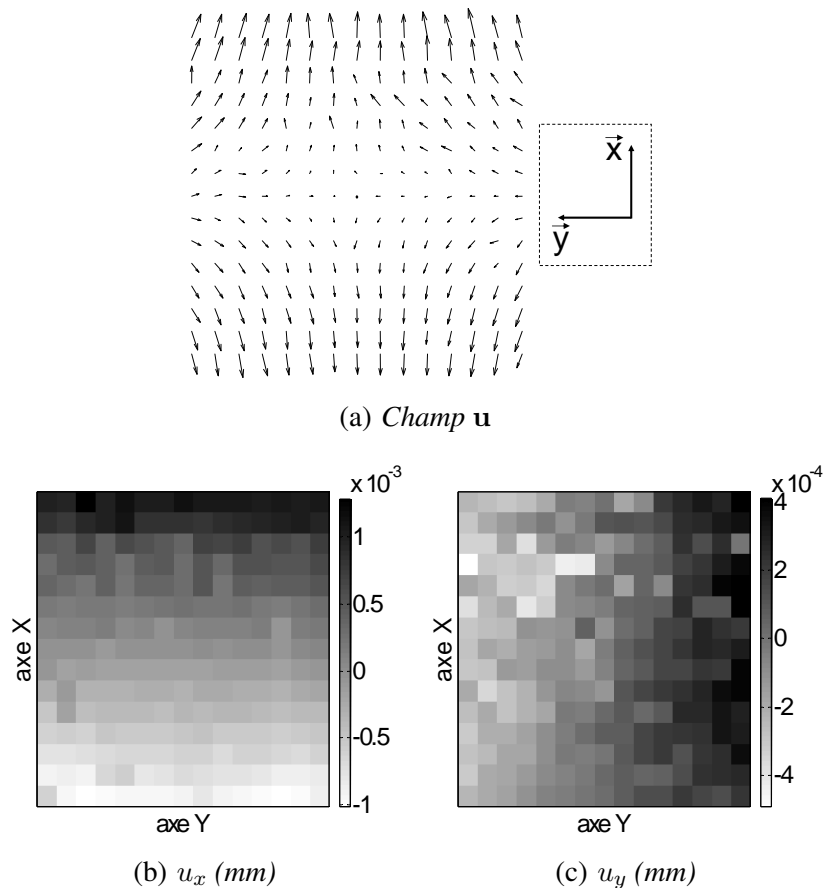


FIG. 3.1 – Composantes planes du déplacement pour $F = 2003$ N

Les résultats de l'identification des paramètres élastiques sont donnés sur la figure 3.2. Pour chaque image i , un jeu de paramètres (E_i, ν_i) a été identifié, que l'on peut alors comparer avec la valeur de référence reportée sur chacun des graphiques. Pour de faibles niveaux d'effort les paramètres identifiés sont assez éloignés des paramètres de référence mais l'identification s'améliore lorsque la force appliquée augmente. En effet, de façon générale, pour de faibles amplitudes de déformation

(dans le domaine élastique) le rapport signal sur bruit s'améliore avec le niveau d'effort.

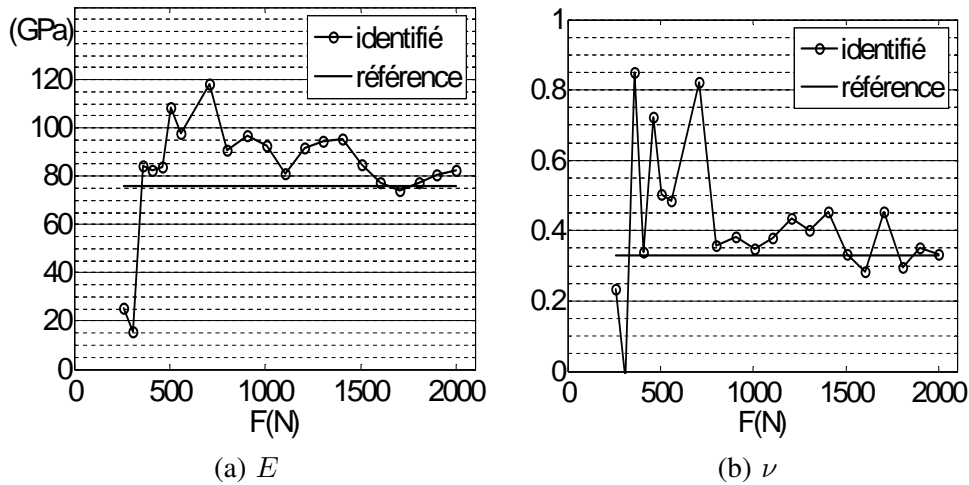


FIG. 3.2 – Valeurs des coefficients élastiques identifiées

En moyennant les 5 derniers résultats pour $i = \{17, \dots, 21\}$, les valeurs identifiées suivantes sont obtenues : $E_{id} = 78.3$ GPa, $\nu_{id} = 0.343$. En comparant ces valeurs avec les valeurs de référence fournies, l'erreur relative sur le module de Young est de 3% et l'erreur relative sur le coefficient de Poisson est de 4%. Les valeurs obtenues sont satisfaisantes et nous constatons qu'il est préférable sur ce type d'essai d'utiliser un nombre important de couples image-force. En effet d'une image sur l'autre les coefficients élastiques peuvent varier de façon importante. Cette variabilité est associée ici au bruit expérimental qui entâche les données et perturbe l'identification.

Pour conclure sur cet essai, des propriétés homogènes ont été identifiées à partir d'un essai de traction simple. Une comparaison entre différentes méthodes d'identification (en particulier la méthode des champs virtuels et la méthode du recalage par éléments finis) a ainsi pu être menée dans le cadre du benchmark organisé par les membres du GdR 2519. Les modules d'Young identifiés par les autres méthodes sont compris entre 70 et 75 GPa, et le coefficient de Poisson entre 0.3 et 0.36. Il y a donc une bonne concordance entre les résultats obtenus par ces différentes méthodes. Cette situation expérimentale n'a pas permis de montrer ici les principaux avantages de la méthode d'identification développée, permettant de calculer un champ de contrainte et une distribution de propriétés matérielles. Des situations permettant de mieux rendre compte de ce potentiel sont maintenant abordées.

3.1.2 Identification à partir d'un chargement hétérogène

Un autre essai proposé par le LMT¹ de Cachan dans le cadre du GdR 2519 est l'essai de compression diamétrale sur un disque. Cet essai appelé également "essai brésilien" est présenté sur la figure 3.3. Le disque composé de polycarbonate est supposé être élastique isotrope homogène, d'une épaisseur e de 9.87 mm et d'un diamètre D égal à 155.15 mm.

¹Le LMPF de Châlons-en-Champagne a également proposé des essais de type Iosipescu sur des composites, qui ne sont pas abordés ici car notre méthode d'identification n'a pas été adaptée à des matériaux anisotropes

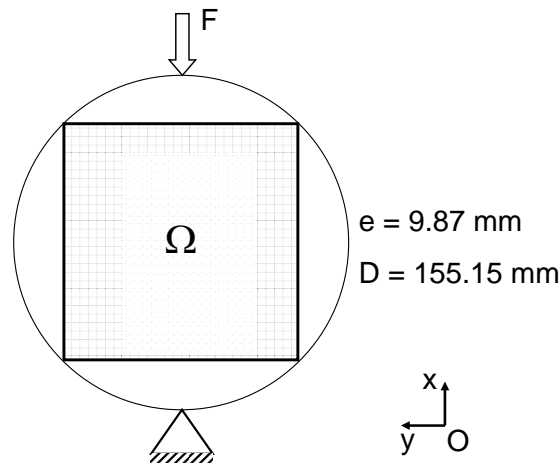


FIG. 3.3 – Description de l'essai brésilien

Une première étude est réalisée à partir de champs de déplacement simulés par le code de calcul par éléments finis Cast3M™. Cet essai hétérogène permet de tester les différentes procédures mises en place pour l'identification de distributions de propriétés élastiques. Dans un deuxième temps, les champs expérimentaux sont utilisés pour identifier des propriétés élastiques.

3.1.2.1 Identification à partir des données simulées

Le code de calcul par éléments finis Cast3M™ a permis de simuler en contraintes planes l'essai brésilien pour un chargement et une géométrie identiques à l'essai réalisé expérimentalement. Les propriétés matérielles ont été choisies proches de celles identifiées pour cet essai (cf. §3.1.2.2). Le module d'Young E vaut 2.38 GPa, le coefficient de Poisson ν vaut 0.38, et module de cisaillement G vaut 0.86 GPa. Les déformations simulées sont représentées sur la figure 3.4, celles-ci sont uniquement affichées sur le domaine d'intérêt Ω qui est carré.

En ce qui concerne l'identification, le matériau élastique est supposé hétérogène et de comportement élastique à symétrie cubique. Le domaine d'étude Ω a été maillé de façon régulière et contient 20×20 éléments.

L'essai brésilien est particulièrement pénalisant pour l'identifiabilité des trois coefficients (E, ν, G) : si l'on observe l'allure des champs de déformation donnés sur la figure 3.4, il apparaît que les quatre coins du domaine Ω ne sont presque pas chargés ce qui rend l'identification de tout coefficient délicate. Plus particulièrement, la composante de déformation ε_{xy} est très faible au voisinage des axes de symétrie horizontaux et verticaux du disque.

Cet essai est donc idéal pour illustrer au travers de résultats la nécessité d'utiliser la procédure de remplacement implémentée. Rappelons que cette procédure permet, lorsque l'identification d'un paramètre est localement impossible, d'imposer la valeur de ce paramètre par une valeur identifiée lors d'un calcul homogène préalable.

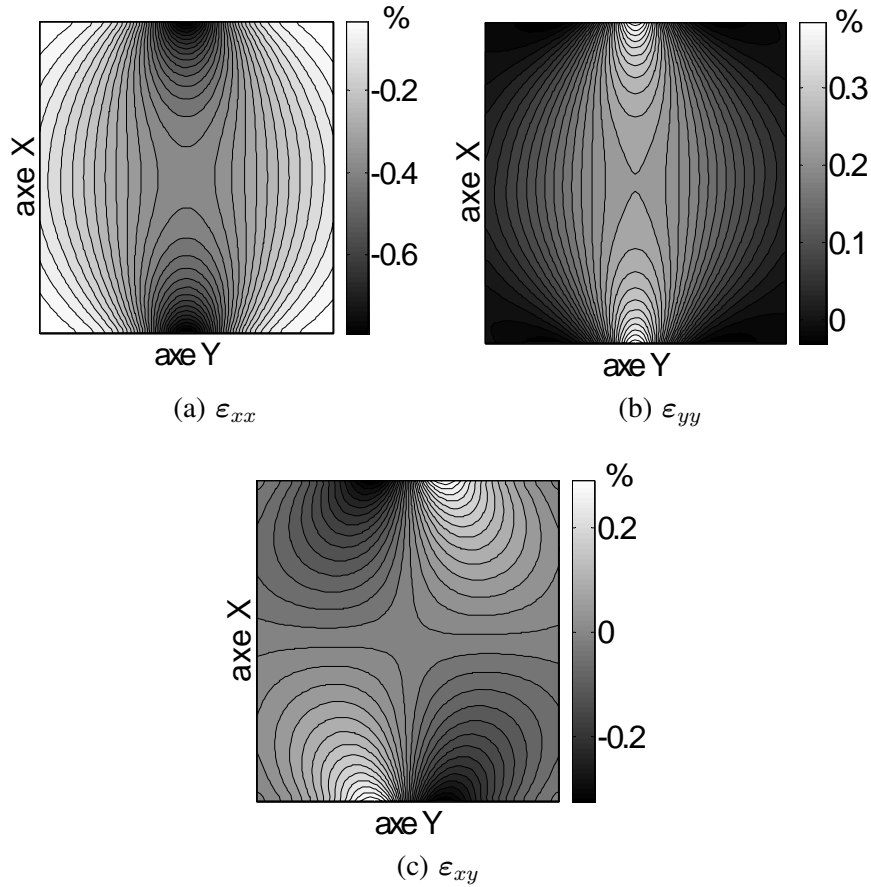


FIG. 3.4 – Composantes planes de la déformation du disque

La forme locale des coefficients (E, ν, G) permet de définir deux critères $\delta_{\varepsilon 1}$ et $\delta_{\varepsilon 2}$ s'appliquant à $\|\varepsilon\|_1$ et $\|\varepsilon\|_2$ (cf. équation (2.44)). Ces critères ont été choisis pour "garantir" une bonne identifiabilité locale de chacun des coefficients élastiques.

L'enjeu est maintenant de caractériser l'influence du choix de ces critères sur les valeurs des coefficients (E, ν, G) identifiées. Pour cela nous allons présenter les résultats de l'identification de propriétés élastiques cubiques sur l'essai brésilien pour trois couples de paramètres $(\delta_{\varepsilon 1}^i, \delta_{\varepsilon 2}^i)$, $i = 1, \dots, 3$, choisis convenablement. Ces paramètres déterminent l'étendue du domaine pour lequel l'identification locale sera effectuée, pour des critères trop faibles tout le domaine Ω est identifié localement tandis que des critères trop élevés feront qu'aucun sous-domaine ne sera identifié localement. Les trois couples choisis sont représentés sur la figure 3.5. Les critères apparaissent sous formes de lignes de niveau, leurs valeurs sont rappelées en dessous de chaque sous-figure. Précisons enfin que pour une meilleure visualisation de ces critères nous avons représenté les déformations $\|\varepsilon\|_1$ et $\|\varepsilon\|_2$ sous une forme locale, alors que le critère s'applique en fait à une forme intégrée sur chacun des éléments de ces déformations.

La figure 3.6 présente les trois coefficients d'élasticité identifiés pour le premier jeu de valeurs $(\delta_{\varepsilon 1}^1, \delta_{\varepsilon 2}^1) = (8 \times 10^{-4}, 3 \times 10^{-4})$. Pour ce jeu de valeurs, 91% du domaine Ω est exploité pour l'identification locale de E et ν , et 76% du domaine est exploité pour l'identification locale de G .

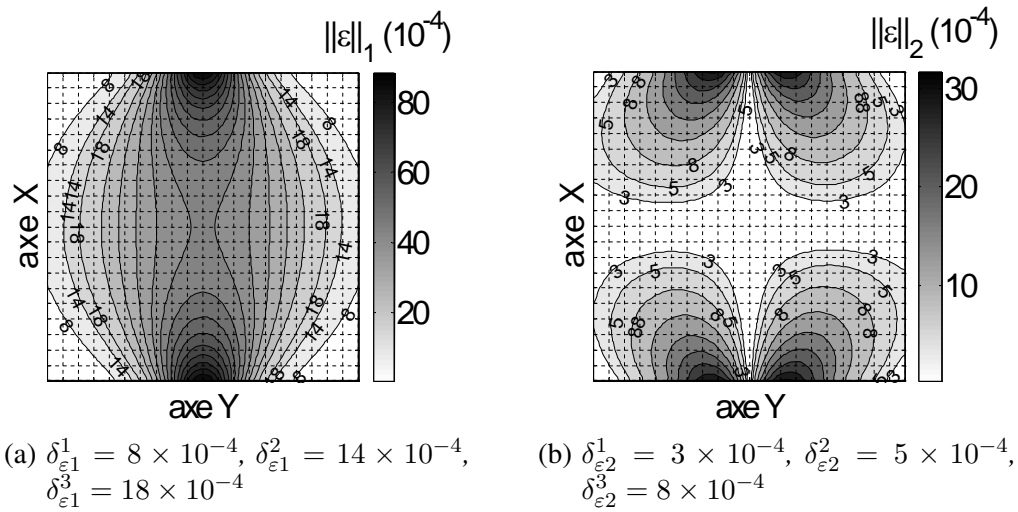


FIG. 3.5 – Critères en déformation pour l'identifiabilité des modules élastiques

Les principales erreurs se situent au niveau des bords du domaine Ω , à proximité des zones de remplacement. Insistons sur le fait que ces erreurs sont principalement localisées sur les zones les plus faiblement déformées (donc plus difficilement identifiables) et que la répercussion de ces erreurs sur les champs de contrainte est négligeable vu les faibles niveaux de déformation.

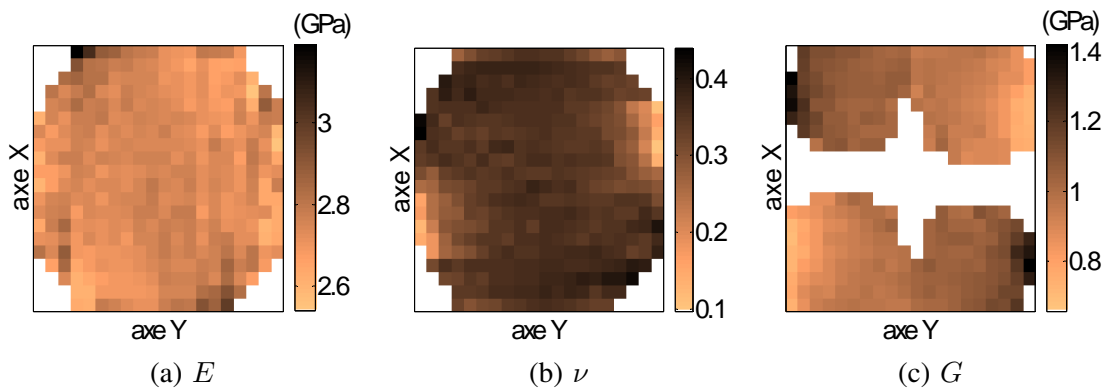


FIG. 3.6 – Coefficients élastiques identifiés pour le premier jeu de critère

Pour les deux autres jeux de valeurs suivants $(\delta_{\varepsilon_1}^2, \delta_{\varepsilon_2}^2)$ et $(\delta_{\varepsilon_1}^3, \delta_{\varepsilon_2}^3)$, les proportions de domaine identifié localement s'élèvent à (77%, 59%) et (70%, 40%), respectivement. Les figures 3.7, 3.8 et 3.9 présentent pour chaque coefficient élastique l'évolution des erreurs relatives de ce même coefficient en fonction du critère δ_ε employé. L'erreur présentée sur chaque coefficient α est une erreur relative telle que $e_\alpha(x, y) = |\alpha_{\text{ref}}(x, y) - \alpha_{\text{id}}(x, y)| / |\alpha_{\text{ref}}(x, y)|$, α_{ref} désignant la référence du paramètre α utilisée pour le calcul direct, et α_{id} désignant le paramètre identifié. L'erreur sur chaque coefficient élastique diminue lorsque la valeur δ_ε associée augmente. Cela souligne l'intérêt de la procédure de remplacement et de son utilisation.

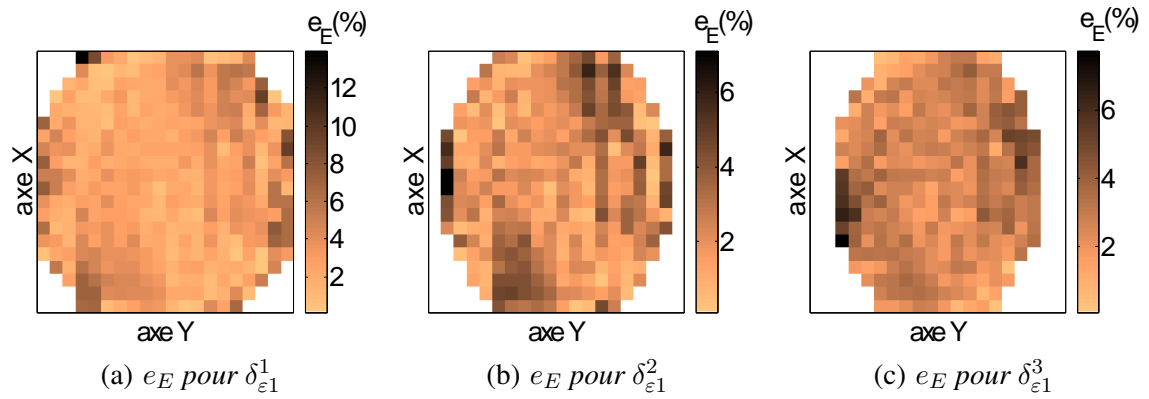


FIG. 3.7 – Évolution des erreurs e_E sur le module de Young E en fonction de δ_{ε_1}

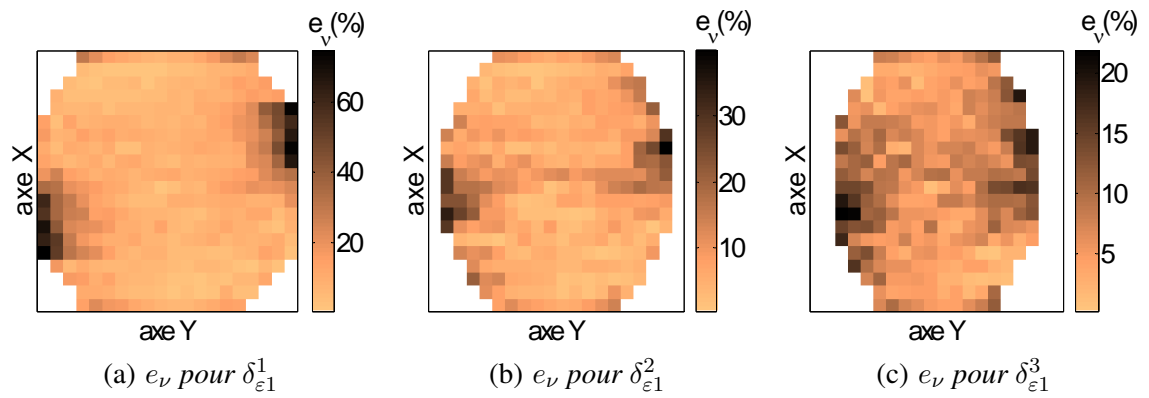


FIG. 3.8 – Évolution des erreurs e_ν sur le coefficient de Poisson ν en fonction de δ_{ε_1}

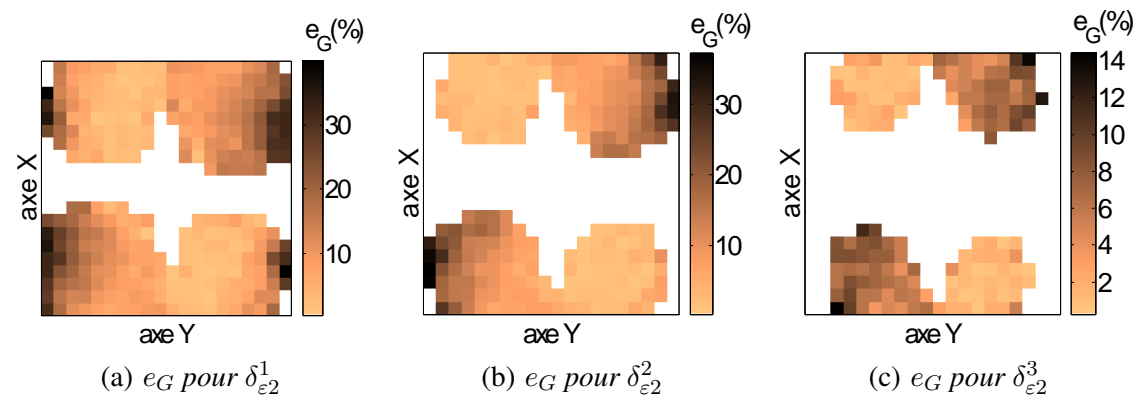


FIG. 3.9 – Évolution des erreurs e_G sur le module de cisaillement G en fonction de δ_{ε_2}

3.1.2.2 identification à partir des données expérimentales

Nous allons ici présenter l'identification de coefficients élastiques cubiques homogènes à partir de données expérimentales. Les champs de déplacement fournis par F. Hild contiennent 15×18 points de mesure, ces champs ont été obtenus par corrélation d'images numériques pour une zone de corrélation ayant une taille de 64 pixels. Ici, la faible densité du champ mesuré expérimentalement n'a pas permis d'identifier localement des propriétés élastiques, et le matériau est alors supposé homogène. Les propriétés mécaniques identifiées sont rappelées dans le Tableau 3.1.

La méthode inverse a été implémentée pour un maillage particulier, et nécessite donc des grilles de déplacement régulières de taille $(2 \times i + 1) \times (2 \times j + 1)$ pixels, i et j étant des entiers positifs. Les champs expérimentaux $(\mathbf{u}_x^{*1}, \mathbf{u}_y^{*1})$ sont interpolés pour obtenir des champs $(\mathbf{u}_x^{*2}, \mathbf{u}_y^{*2})$ donnés sur 13×13 points de mesure ce qui est compatible avec notre méthode d'identification.

La figure 3.10 permet de comparer le champ mesuré \mathbf{u}_x^{*1} avec le champ interpolé \mathbf{u}_x^{*2} , et l'allure globale du champ est inchangée. Les mêmes constatations peuvent être faites sur la composante \mathbf{u}_y (cf. figure 3.11).

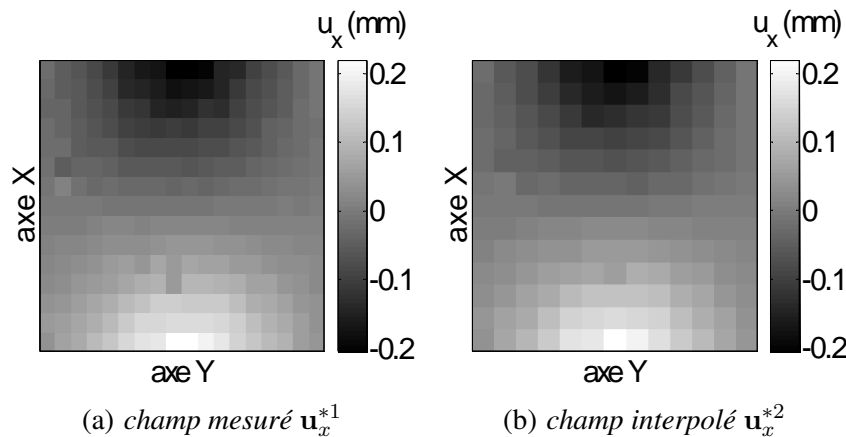
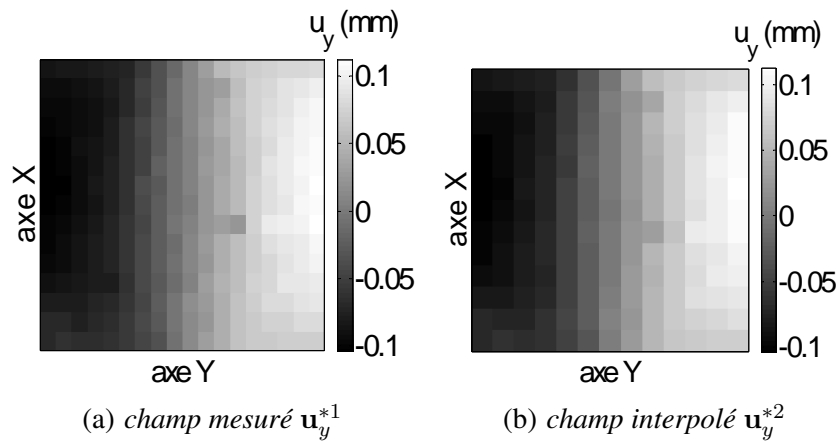
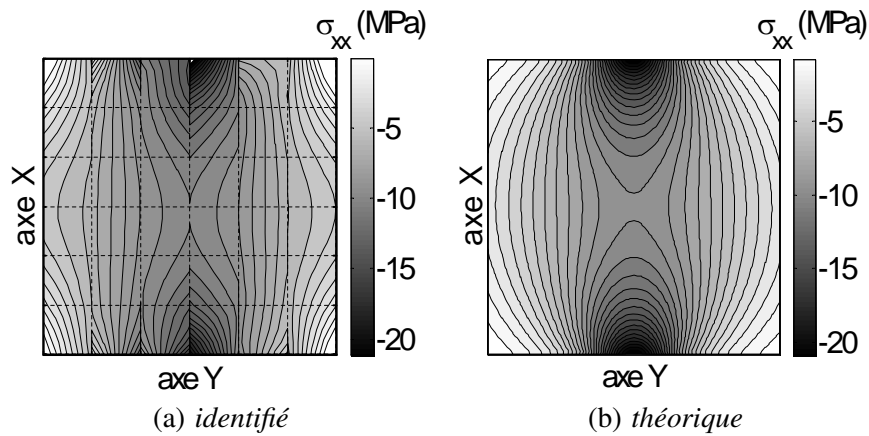
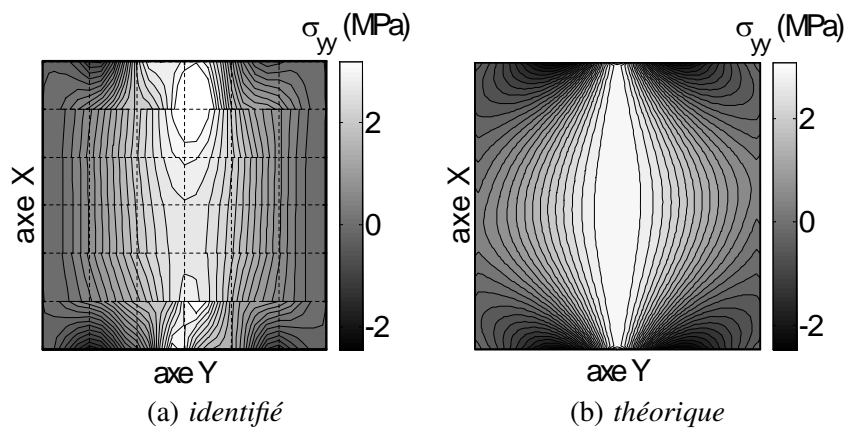


FIG. 3.10 – Influence de l'interpolation sur la composante \mathbf{u}_x

	E (GPa)	ν	G (GPa)
valeurs identifiées	2.67	0.43	0.93
valeurs de référence, d'après [Hild & Roux, 2006a]	2.53 ± 0.02	0.45 ± 0.01	non identifié

TAB. 3.1 – coefficients élastiques identifiés pour l'essai brésilien et valeurs de référence

Sur cet essai, il peut être intéressant de comparer les champs de contrainte identifiés et les champs de contrainte théoriques (obtenus avec un calcul par éléments finis pour le jeu de paramètres $E = 2.53$ GPa, $\nu = 0.45$). Les figures 3.12, 3.13 et 3.14 présentent pour chaque composante des contraintes une comparaison entre le champ identifié et le champ théorique. Sur ces trois figures, on peut observer une bonne concordance entre ces deux champs.

FIG. 3.11 – Influence de l'interpolation sur la composante u_y FIG. 3.12 – Champs de contraintes σ_{xx} identifiés et théoriquesFIG. 3.13 – Champs de contraintes σ_{yy} identifiés et théoriques

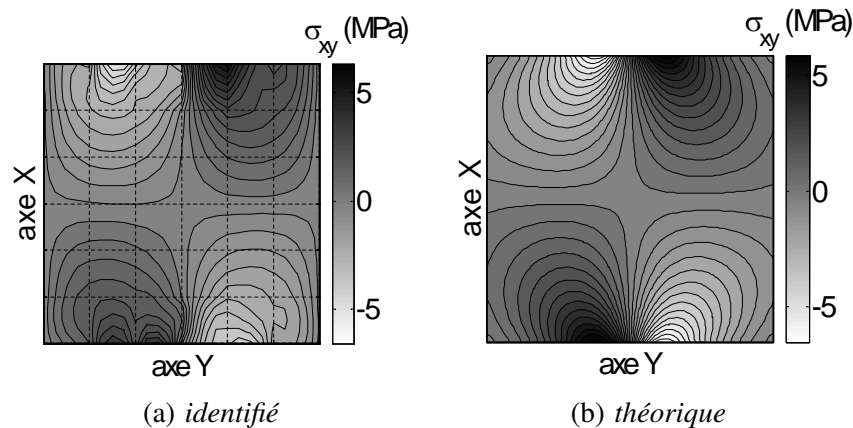


FIG. 3.14 – Champs de contraintes σ_{xy} identifiés et théoriques

3.1.2.3 Conclusion sur l'essai brésilien

L'essai brésilien est de toute évidence un essai difficile à interpréter sans avoir recours à des techniques de mesure de champ. Originellement introduit pour étudier le fendage du béton (grâce à l'extension perpendiculaire à l'axe de sollicitation), il permet ici d'exploiter une technique d'identification utilisant des mesures de champs : dans la mesure où le disque est déformé pour trois composantes indépendantes de la déformation, il est possible d'identifier des propriétés élastiques cubiques ce qui est impossible lors d'un essai uniaxial. Cet essai a permis d'établir ici une première caractérisation de la méthode d'identification qui a été développée.

Une solution analytique s'écrivant à partir de potentiels de Kolosoff-Muskhelichvili a été utilisée directement dans la formulation d'une méthode intégrée de mesure et d'identification dans [Hild & Roux, 2006a] pour traiter cet essai, de cette étude sont issues les valeurs de référence du Tableau 3.1.

Initialement introduit pour la réalisation d'un benchmark entre les participants du groupe de travail "identification" du GdR, l'essai brésilien a été ici utilisé de façon originale. En particulier, l'étude faite à partir de données simulées a permis de mettre en avant les difficultés posées par les champs hétérogènes lorsque l'on tente d'identifier localement des propriétés mécaniques n'étant pas sollicitées par le processus de déformation. Une procédure basée sur des critères en déformation permet dans ces cas extrêmes de pouvoir faire converger la méthode. Bien que des erreurs très localisées subsistent à des endroits peu déformés, l'identification locale a pu être menée avec succès dans le cas de simulations en l'absence de bruit.

3.1.3 Identification d'un matériau élastique hétérogène

Une des qualités de la méthode d'identification qui a été présentée est de pouvoir identifier les propriétés mécaniques de matériaux hétérogènes. Peu de tentatives d'identification ont été réalisées dans cette voie ([Constantinescu, 1994; Claire *et al.*, 2003]), et des études originales vont être présentées ici. Elles concernent la compatibilité des maillages, le contraste de propriétés ou encore la sensibilité au bruit de mesure pour l'identification de distributions de propriétés.

Pour étudier l'identification des propriétés de matériaux hétérogènes à partir de simulations numériques, deux différentes situations mécaniques ont été abordées, en contraintes planes. La première est celle d'un barreau en traction dans lequel se situe une inclusion dont les propriétés mécaniques sont différentes du reste du barreau (cf. figure 3.15). Par la suite cet essai sera désigné comme "essai de l'inclusion". La seconde situation concerne toujours un barreau en traction, cette fois ci constitué de deux parties juxtaposées de même surface et de propriétés mécaniques différentes (cf. figure 3.19). Cette situation sera désignée comme l'"essai sur le bicouche".

3.1.3.1 Essai de l'inclusion

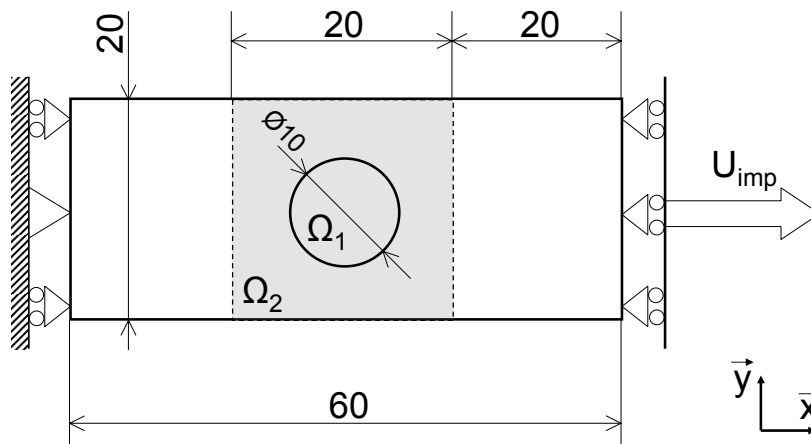


FIG. 3.15 – Essai de l'inclusion

dans Ω_1		dans Ω_2	
E_1	ν_1	E_2	ν_2
50 GPa	0.3	100 GPa	0.3

TAB. 3.2 – Valeurs de référence des paramètres élastiques

Description de l'essai

L'essai de l'inclusion a été initialement traité pour quantifier les performances de la méthode d'identification face à des situation hétérogènes. La méthode d'identification permet de mailler le domaine d'identification Ω de façon régulière à l'aide d'éléments rectangulaires. D'une façon générale, quel que soit le maillage choisi pour l'identification, les hétérogénéités ne pourront pas être retranscrites parfaitement. Elles seront interpolées au mieux suivant la description par éléments finis rectangulaires.

Ici, le contour géométrique circulaire de l'inclusion ne présente aucune concordance avec le maillage de la méthode d'identification (cf. figure 3.16). L'inclusion située sur Ω_1 et la matrice située sur Ω_2 sont toutes deux élastiques et isotropes.

Les propriétés élastiques de référence ont permis de réaliser une simulation de cet essai. L'inclusion possède un module d'Young de 50 GPa et un coefficient de Poisson de 0.3, et la matrice possède un module de Young de 100 GPa et un coefficient de Poisson de 0.3. Le Tableau 3.2 regroupe

les valeurs de des coefficients élastiques de référence qui doivent être identifiées. Le déplacement imposé U_{imp} vaut 0.6 mm soit 1% de la longueur totale du barreau.

Le domaine d'identification Ω a été discrétisé en 40×40 éléments, soit 6541 nœuds, tandis que le calcul direct comporte environ 13000 nœuds. Pour déterminer les valeurs de référence nécessaires pour le calcul de e_E et e_ν , lorsqu'un élément (i) (de surface ω_i) se trouve à la fois dans Ω_1 et Ω_2 , on calcule la valeur de référence de la propriété α par pondération :

$$\alpha_{ref}^{(i)} = \frac{1}{\omega_i} \int_{\omega_i} \alpha(x, y) dS \quad (3.1)$$

Le contour de l'inclusion a été tracé par rapport au maillage de l'identification sur la figure 3.16, ainsi que le module de Young de référence E_{ref} qui a été calculé sur le maillage. Le coefficient de Poisson ν_{ref} est constant sur Ω et vaut 0.3.

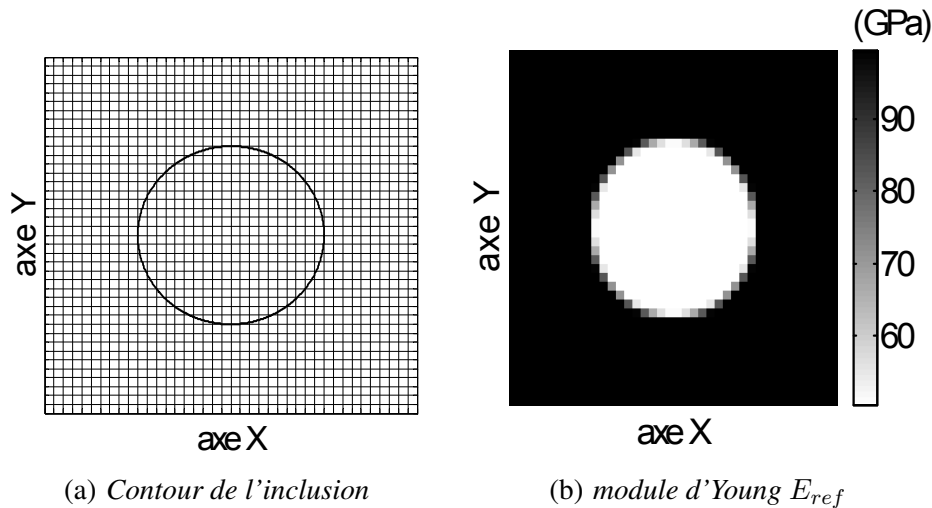
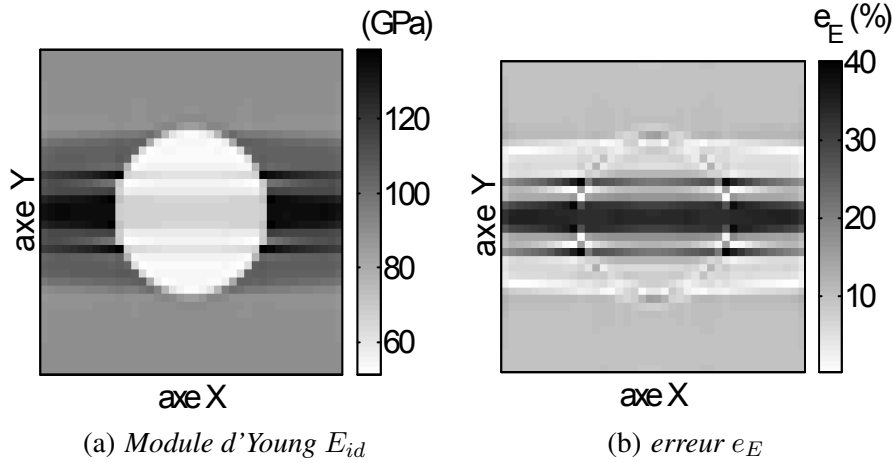
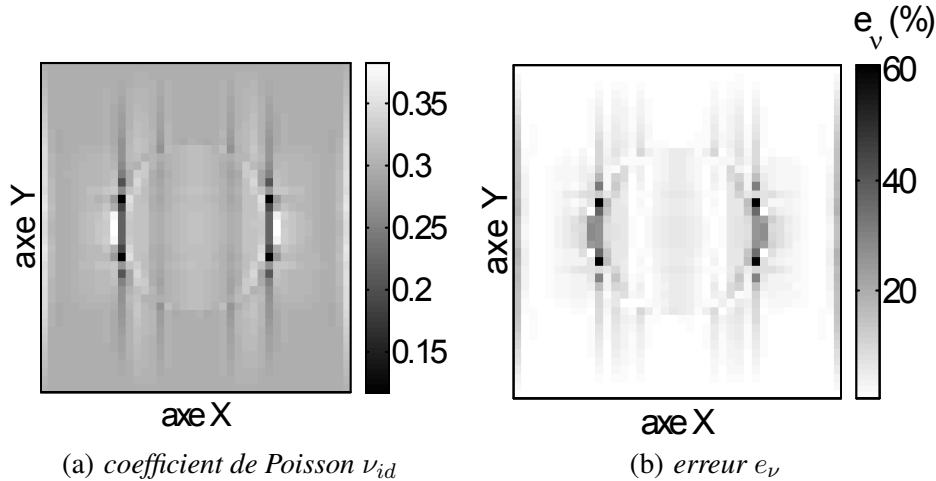


FIG. 3.16 – Contour de l'inclusion superposé au maillage de l'identification, et module d'Young de référence E_{ref}

Identification des propriétés élastiques

Le module de Young identifié ainsi que l'erreur relative pour l'identification sont représentés sur la figure 3.17. Le coefficient de Poisson ν_{id} identifié et l'erreur relative associée à son identification sont représentés sur la figure 3.18.

L'inclusion élastique apparaît nettement sur la figure 3.17. Bien que le maillage de l'identification soit constitué d'éléments carrés, on retrouve bien le contour circulaire de l'inclusion et le contraste de propriétés entre la matrice et l'inclusion est retrouvé. Ce résultat pourrait être sensiblement amélioré si l'on considère non plus les éléments de calcul comme sous domaines pour l'identification, mais des éléments regroupés en sous-domaines appartenant *a priori* à la matrice, à l'inclusion et à l'interface, suivant les résultats de l'identification locale par exemple.

FIG. 3.17 – Module d'Young E_{id} identifié et erreur e_E associéeFIG. 3.18 – coefficient de Poisson ν_{id} identifié et erreur e_ν associée

Les erreurs maximales que ce soit pour l'identification du module de Young ou du coefficient de Poisson (*cf.* figure 3.18) sont localisées au niveau du contour de l'inclusion pour les éléments les moins déformés. Le Tableau 3.3 regroupe les valeurs moyennes identifiées pour l'inclusion et pour la matrice, nous avons ici effectué les moyennes des valeurs pour les éléments de Ω strictement inclus dans l'inclusion Ω_1 ou strictement inclus dans la matrice Ω_2 .

On pourra remarquer que la raideur de l'inclusion Ω_1 est sur-estimée de 18% puisque la moyenne des modules d'Young de l'inclusion est de 59 GPa. L'erreur sur les autres propriétés moyennes est inférieure à 3% : les propriétés sont correctement identifiées en moyenne. Les erreurs maximales que ce soit pour l'identification du module d'Young ou du coefficient de Poisson (*cf.* figure 3.18) sont localisées au niveau du contour de l'inclusion, principalement sur les parties gauche et droite de ce contour qui sont les moins déformées. Ces erreurs ont tendance à se propager : pour le module d'Young on observe des bandes de raideur importante situées de part et d'autre de l'inclusion, orientées suivant l'axe de traction \mathbf{X} , tandis que pour le coefficient de Poisson ν on peut observer un étalement de

l'erreur autour des valeurs maximales.

dans Ω_1		dans Ω_2	
$\langle E_{id} \rangle$	$\langle \nu_{id} \rangle$	$\langle E_{id} \rangle$	$\langle \nu_{id} \rangle$
59 GPa	0.31	98 GPa	0.30

TAB. 3.3 – Moyenne des valeurs identifiées dans chacun des sous-domaines

Conclusion sur l'essai de l'inclusion

L'utilisation d'un maillage assez fin nous a permis d'identifier une inclusion élastique avec fidélité. Des erreurs sont localisées au niveau du contour de l'inclusion : c'est à cet endroit que :

- les déformations sont les plus faibles,
- les gradients de contrainte et de déformation sont les plus importants (la discontinuité des propriétés matérielles entraînant des discontinuités sur les champs), et qu'ils sont le plus difficilement retranscriptibles par le maillage de la méthode d'identification.

Lorsque l'on essaie de raffiner le maillage utilisé pour l'identification, l'erreur ne diminue pas de façon significative. Il serait alors intéressant de pouvoir constater l'amélioration de l'identification par l'utilisation d'un maillage permettant de suivre géométriquement le contour de l'inclusion. Un maillage "optimal" pour l'identification pourrait alors être construit en se basant sur des observations portant sur les gradients de déformation.

D'autre part, on pourra remarquer ici que les erreurs sont localisées sur des bandes orientées suivant l'axe du chargement uniaxial appliqué. Des chargements plus complexes devraient permettre d'améliorer les résultats de l'identification.

3.1.3.2 Essais sur un bicouche élastique

Le barreau bicouche est constitué de deux matériaux juxtaposés, l'un constituant le domaine Ω_1 , et l'autre plus souple constituant le domaine Ω_2 . Par rapport à l'essai de l'inclusion, cette situation permet d'étudier plus précisément l'influence de la concordance entre le maillage de l'identification et les contours des hétérogénéités matérielles.

La figure 3.19 présente le barreau bicouche ainsi que le chargement mécanique lui étant appliqué. Les propriétés mécaniques du barreau sont données dans le Tableau 3.4. L'essai de traction sur le bicouche a été simulé grâce à un code de calcul par éléments finis avec un maillage régulier de 90×60 éléments sur Ω .

Influence du contraste

Dans un premier temps les propriétés élastiques ont été identifiées sur 10×10 éléments, en faisant coïncider la frontière entre Ω_1 et Ω_2 avec le maillage de l'identification. Seul varie ici le contraste de propriétés entre Ω_1 et Ω_2 . Onze identifications différentes pour différentes valeurs de contraste ont

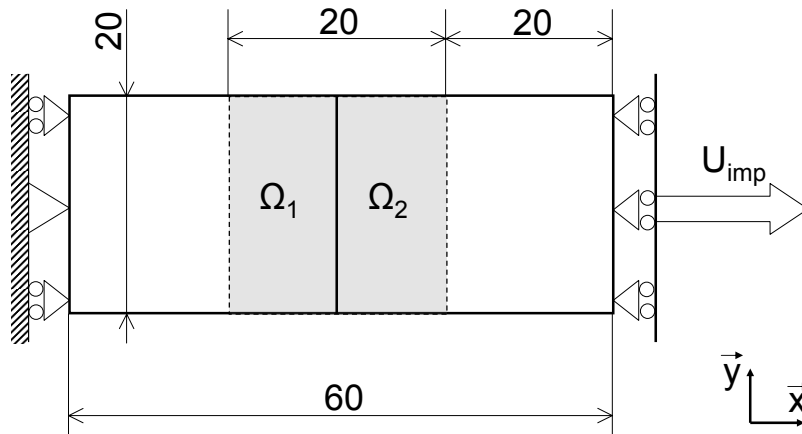
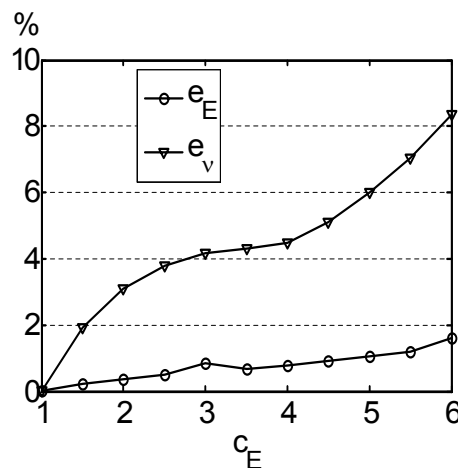


FIG. 3.19 – Essai sur le bicouche

été réalisées. Pour chacune de ces simulations, le coefficient de Poisson est homogène sur Ω , tandis que l'on fait varier le contraste $c_E = E_1/E_2$ entre 1 et 6. Pour interpréter ces simulations, on considère les moyennes des erreurs locales sur l'identification de chacun des deux paramètres élastiques : la moyenne $\langle e_E \rangle$ des erreurs relatives locales sur l'identification du module de Young E , et la moyenne $\langle e_\nu \rangle$ des erreurs relatives locales sur l'identification du coefficient de Poisson ν . L'évolution de ces deux erreurs en fonction du contraste c_E est représentée sur la figure 3.20. L'identification des coefficients élastiques se dégrade lorsque le contraste augmente. Cette tendance s'explique par l'augmentation des gradients sur les champs de déplacement et de contrainte au voisinage de l'interface entre les deux matériaux lorsque le contraste augmente. La méthode d'identification utilisant toujours le même maillage, ces gradients sont donc de plus en plus difficiles à approximer au fur et à mesure que le contraste s'accroît. Nous pouvons également remarquer que l'identification du coefficient de Poisson se dégrade davantage que celle du module d'Young.

FIG. 3.20 – Évolution des erreurs moyennes $\langle e_E \rangle$ et $\langle e_\nu \rangle$ en fonction du contraste c_E

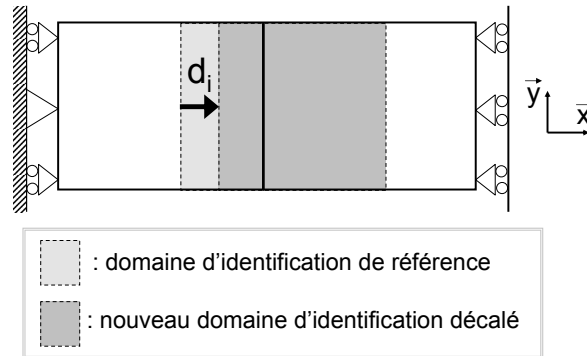


FIG. 3.21 – Décalage du domaine d'identification par rapport à la frontière

Influence de la compatibilité des maillages

Pour étudier l'influence de la compatibilité des maillages, une série d'identifications est effectuée. Pour les différents traitements de cette série, le domaine d'identification se translate par rapport à la frontière matérielle notée $\partial\Omega_{1,2}$ entre Ω_1 et Ω_2 . Sur la figure 3.21, nous avons appelé domaine d'identification de référence le domaine lequel la frontière $\partial\Omega_{1,2}$ coïncide avec le maillage de l'identification. La constante associée à la largeur d'un élément du maillage suivant l'axe X étant notée hX , pour chacune des i simulations le décalage d_i est donné par l'expression :

$$d_i = \frac{i}{20} \times \frac{hX}{2} \quad (3.2)$$

Ainsi, au décalage d_0 est associé le domaine d'identification de référence, tandis qu'au décalage d_{20} est associé le domaine pour lequel la frontière $\partial\Omega_{1,2}$ découpe les éléments du maillage en deux parts égales. 41 simulations ont été ensuite identifiées, pour $d_i = \{d_0 \dots d_{40}\}$. Les propriétés mécaniques du barreau sont identiques pour chacune de ces 41 simulations, et sont données dans le Tableau 3.4. Pour chacune des simulations, le domaine d'identification est discrétisé de la même façon en 10×10 éléments.

Les calculs précédents étaient faits avec une même valeur de référence pour les coefficients de Poisson de référence ν_1 et ν_2 . C'est également de cette façon que cette étude a été faite, dans un premier temps. Mais pour mieux faire ressortir l'influence de la compatibilité des maillages sur l'erreur sur l'identification de ν , nous avons affecté aux coefficients de Poisson de référence ν_1 et ν_2 des valeurs différentes.

E_1	ν_1	E_2	ν_2
200 GPa	0.3	100 GPa	0.5

TAB. 3.4 – Valeurs de référence des paramètres élastiques pour l'essai de compatibilité

La figure 3.22 représente l'évolution des erreurs moyennes sur les paramètres identifiés $\langle e_E \rangle$ et $\langle e_\nu \rangle$ en fonction du décalage d variant entre 0 et hX , hX valant ici 2 mm. Pour chacune des deux configurations extrêmes $d = 0$ et $d = hX$, une configuration idéale est atteinte où la frontière $\partial\Omega_{1,2}$ coïncide avec le maillage de l'identification. Le calcul des coefficient élastiques de référence

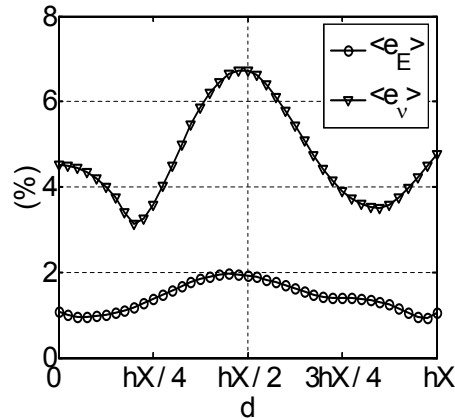


FIG. 3.22 – Évolution des erreurs moyennes $\langle e_E \rangle$ et $\langle e_\nu \rangle$ en fonction du décalage d

sur le domaine d'identification Ω se fait de la façon suivante : le bloc de 4×10 éléments situé à l'extrémité gauche de Ω doit être identifié comme Ω_1 , le bloc de 5×10 éléments situé à l'extrémité droite de Ω doit être identifié comme Ω_2 , tandis que la bande de 1×10 éléments qui chevauche la frontière $\partial\Omega_{1,2}$ se voit attribuée des propriétés de référence moyennées au prorata de la surface (de la même façon que pour l'inclusion).

La figure 3.22 présente l'erreur sur l'identification des paramètres élastiques qui est maximale pour $d \approx hX/2$. C'est pour cette valeur $hX/2$ que l'interface $\partial\Omega_{1,2}$ coupe les éléments en deux. L'évolution de $\langle e_E \rangle$ est assez régulière et la croissance de l'erreur se fait de façon monotone de chaque côté du maximum ce qui n'est pas le cas pour $\langle e_\nu \rangle$ qui présente des minimums locaux. En toute logique les résultats confirment l'importance d'utiliser, lorsque cela est possible, un maillage compatible pour l'identification de matériaux à discontinuités de propriétés matérielles.

3.1.4 Sensibilité au bruit de l'identification élastique

L'étude de sensibilité a été faite dans le cadre du test numérique sur le bicouche et comporte ici deux étapes. Dans un premier temps, nous avons tenté de caractériser un bruit sur les mesures expérimentales de déplacement avec une approche basée sur la génération d'images de synthèse. L'erreur ainsi caractérisée a permis de calibrer l'étude suivante, pour laquelle nous avons ajouté au déplacement simulé une perturbation aléatoire. Les propriétés matérielles sont rappelées dans le Tableau 3.5, la simulation de l'essai sur le bicouche est faite par un calcul éléments finis 2D en contraintes planes qui comporte 90×60 éléments Q1.

E_1	ν_1	E_2	ν_2
200 GPa	0.3	100 GPa	0.3

TAB. 3.5 – Valeurs de référence des paramètres élastiques pour l'étude de sensibilité au bruit

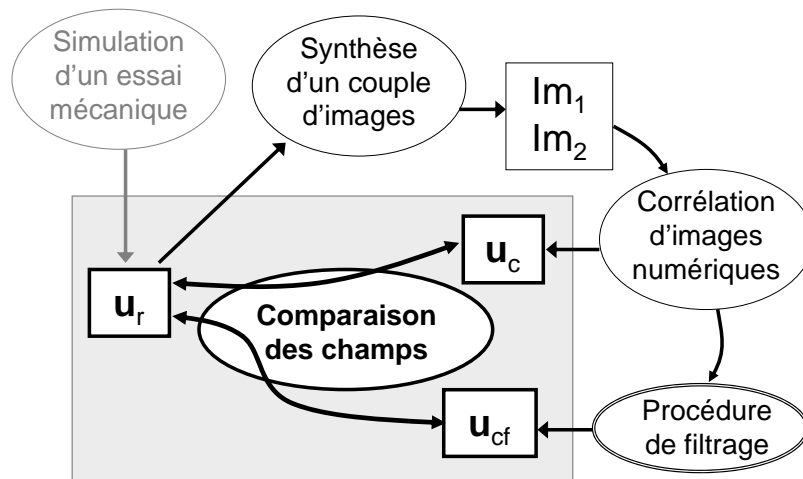


FIG. 3.23 – Procédure d'estimation du bruit de mesure expérimental

3.1.4.1 Estimation d'un bruit de mesure par corrélation d'images numériques

La figure 3.23 permet de présenter la démarche qui a été adoptée pour estimer un bruit de mesure expérimental. Le bruit qui est ainsi caractérisé prend uniquement en considération les erreurs liées au traitement des images numériques. Notre approche ne tient pas compte d'erreurs expérimentales associées à la prise d'images (distortions, variations de contraste et de la luminosité, bruit électronique, défaut de positionnement...). Nous allons maintenant détailler successivement trois étapes faisant partie de cette estimation, tout d'abord la synthèse d'images, ensuite la corrélation d'images numériques, et enfin la procédure de filtrage.

Synthèse d'un couple d'images

Pour cette étape, l'image de référence Im_1 est associée à la distribution d'un signal 2D d'intensité lumineuse, simulée sur la surface Ω par une distribution aléatoire de tâches gaussiennes de rayons et d'intensités également aléatoires. Les caractéristiques de l'image sont compatibles avec les caractéristiques du matériel que nous utilisons expérimentalement : résolution de 1024×1024 pixels et échantillonnage de l'intensité lumineuse sur 8 bits. L'image ainsi simulée est représentée sur la figure 3.24a. La génération de l'image Im_1 consiste à "intégrer" le signal analytique sur chaque pixel de l'image. L'image obtenue par simulation a été comparée avec une image obtenue expérimentalement. L'histogramme présenté sur la figure 3.24c permet d'observer la probabilité adimensionnelle n_a associée à l'intensité lumineuse n_I s'étendant sur 256 niveaux de gris. Pour l'image simulée Im_1 la répartition est mieux centrée et légèrement plus étendue que pour l'image expérimentale Im_{exp} . Le rayon d'autocorrélation moyen de l'image simulée est de 2.9 pixels, celui de l'image expérimentale est de 1.95 pixels ce qui est du même ordre de grandeur.

Le déplacement u_r est ensuite interpolé par les fonctions de forme de la méthode de calcul par éléments finis utilisée pour la simulation de u_r . Cela permet de travailler avec la déformation directement issue du calcul éléments finis sans faire d'approximation. Une seconde intensité lumineuse est calculée à partir de l'intensité lumineuse de référence et de la description continue du champ de

déplacement \mathbf{u}_r . Ce champ est alors appliqué à la position des tâches constituant l'image numérique Im_2 .

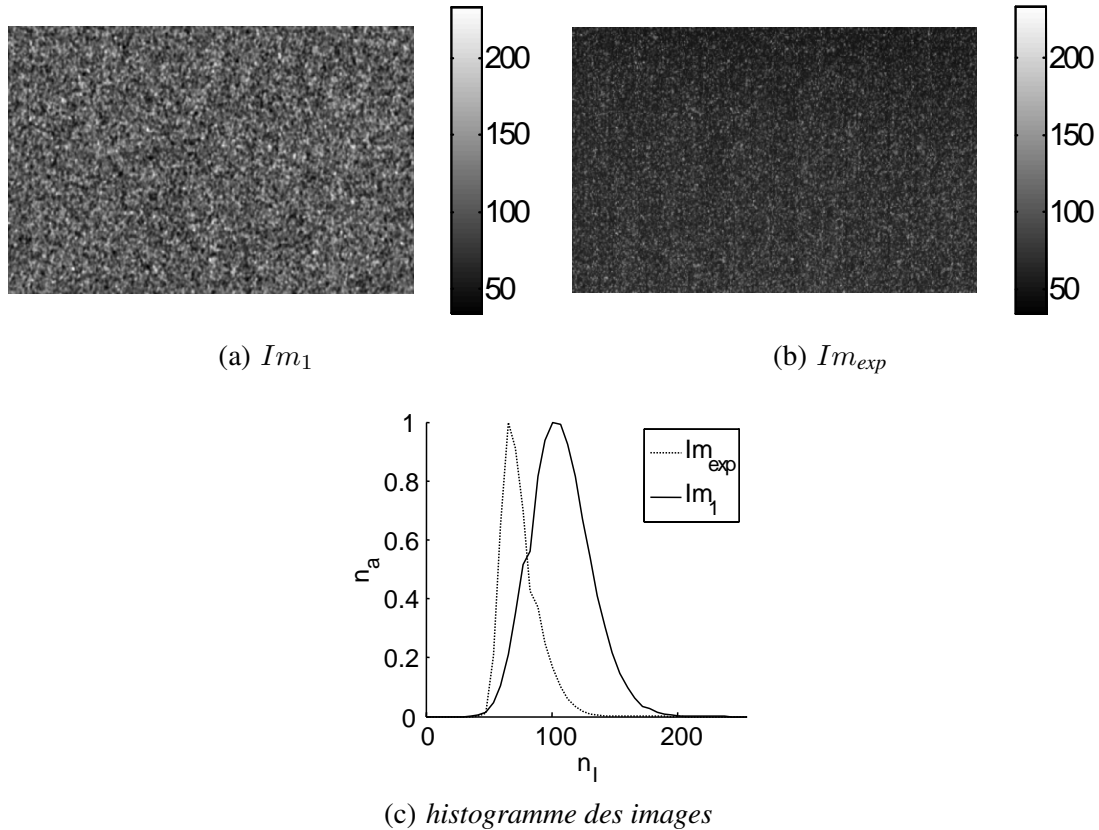


FIG. 3.24 – Comparaison de l'image de speckle de synthèse Im_1 avec une image de speckle expérimentale Im_{exp}

Corrélation d'images numériques

Un algorithme de corrélation dans l'espace réel est utilisé pour calculer le champ de déplacement \mathbf{u}_c à partir des images Im_1 et Im_2 sur un maillage fin de 122×121 nœuds, sur la base de transformations affines. Le coefficient de corrélation est ici une fonction normée de corrélation. Les zones de corrélation font 20×20 pixels, et les nœuds sont disposés tous les 5 pixels suivant chaque axe.

Procédure de filtrage

Le champ \mathbf{u}_c est volontairement calculé sur un maillage fin pour pouvoir appliquer ensuite un filtrage purement géométrique. Le champ filtré \mathbf{u}_{cf} est obtenu par la procédure de filtrage par splines approximantes appliquée à \mathbf{u}_r (cf. §1.1.4), avec ici $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}_r$ et $p = 5 \cdot 10^{-5}$.

Caractérisation d'erreurs

Les champs \mathbf{u}_r , \mathbf{u}_c et \mathbf{u}_{cf} calculés sur différents maillages fins sont ensuite projetés sur un même maillage plus grossier qui sera utilisé pour l'identification. Ce dernier maillage comporte 20×20 éléments $Q2_9$. Les figures 3.25, 3.26, 3.27 représentent respectivement les composantes ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{xy} des champs de déformation calculés à partir des champs de déplacement grâce à l'interpolation éléments finis de la méthode d'identification. Pour chacune de ces trois figures, nous avons comparé les champs de déformation suivants :

- $\varepsilon(\mathbf{u}_r)$ calculé par dérivation du champ de déplacement de référence \mathbf{u}_r ,
- $\varepsilon(\mathbf{u}_c)$ calculé par dérivation du champ de déplacement obtenu par corrélation d'images \mathbf{u}_c ,
- $\varepsilon(\mathbf{u}_{cf})$ calculé par dérivation du champ de déplacement obtenu par corrélation d'images puis filtrage \mathbf{u}_{cf} .

Les valeurs maximales de ces différentes déformations sont compatibles avec des déformations élastiques (dans le cadre de la plasticité des métaux), la valeur maximale étant de $2.7 \cdot 10^{-3}$ pour la composante de traction.

Il est intéressant de constater que la composante de traction ε_{xx} est la moins affectée par le bruit de corrélation. C'est en effet la composante présentant le plus de signal. On constate par ailleurs sur ces différentes figures que le filtrage permet de diminuer le bruit en faisant ressortir le signal de référence.

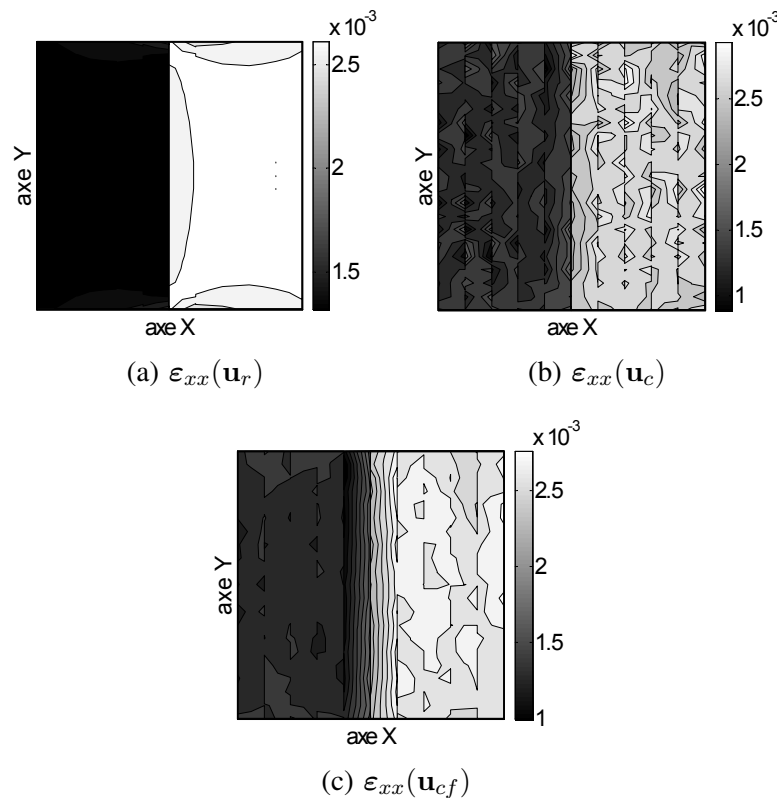


FIG. 3.25 – Composantes de traction des champs de déformation : (a) : champ de référence $\varepsilon(\mathbf{u}_r)$, (b) : champ après corrélation $\varepsilon(\mathbf{u}_c)$ et (c) : champ après corrélation puis filtrage $\varepsilon(\mathbf{u}_{cf})$

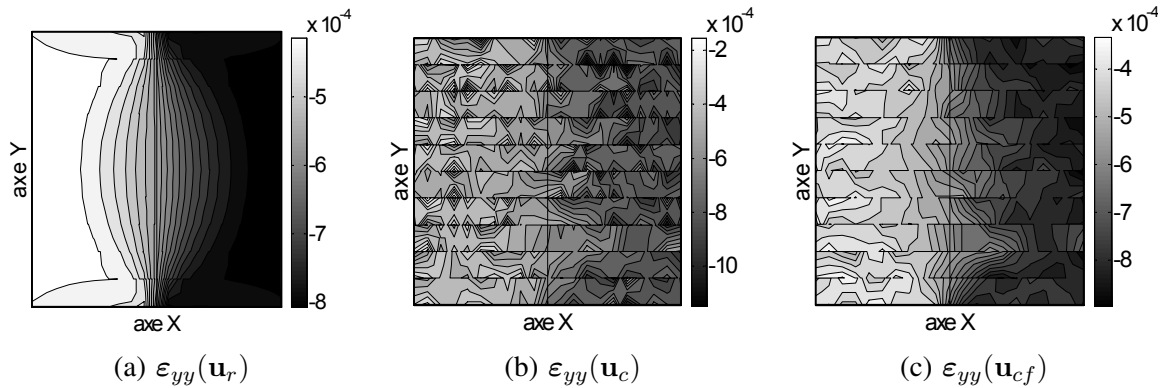


FIG. 3.26 – Composantes de contraction des champs de déformation : (a) : champ de référence $\varepsilon(\mathbf{u}_r)$, (b) : champ après corrélation $\varepsilon(\mathbf{u}_c)$ et (c) : champ après corrélation puis filtrage $\varepsilon(\mathbf{u}_{cf})$

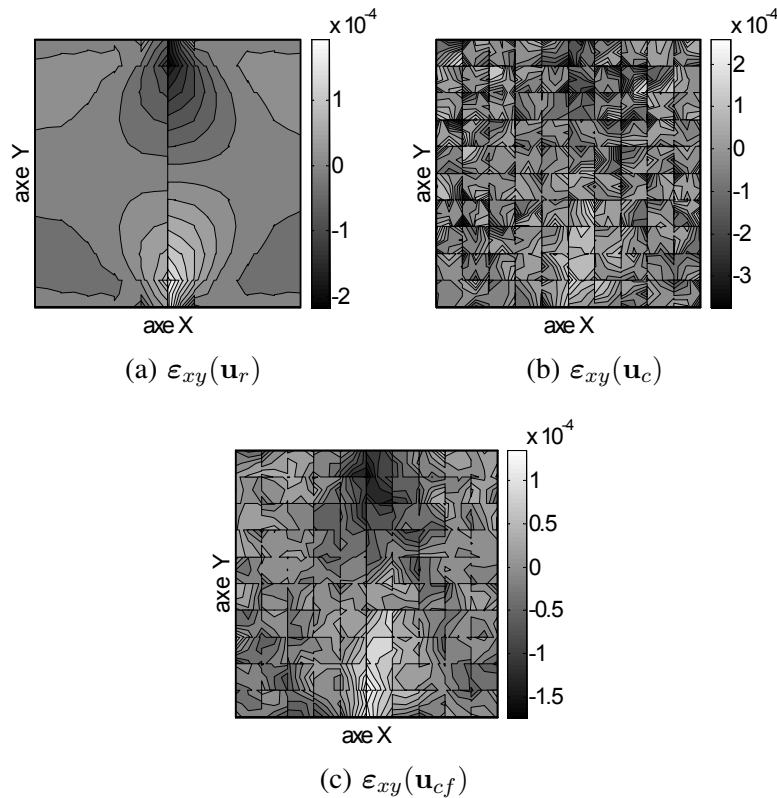


FIG. 3.27 – Composantes de cisaillement des champs de déformation : (a) : champ de référence $\varepsilon(\mathbf{u}_r)$, (b) : champ après corrélation $\varepsilon(\mathbf{u}_c)$ et (c) : champ après corrélation puis filtrage $\varepsilon(\mathbf{u}_{cf})$

Pour mieux caractériser la performance de la procédure de filtrage qui a été employée ici, la figure 3.28 présente des histogrammes de résidus d'erreur après corrélation, avec ou sans filtrage. L'erreur moyenne sur chaque composante de la déformation reste très proche de zéro après filtrage, tandis que l'écart type de l'erreur diminue nettement. Le filtrage est donc efficace et n'introduit pas de biais sur les mesures. Les erreurs moyennes ainsi que les écarts types figurent sur le Tableau 3.6. Ces

différentes erreurs restent faibles devant les valeurs de déformation (*cf.* figures 3.25a, 3.26a, 3.27a)

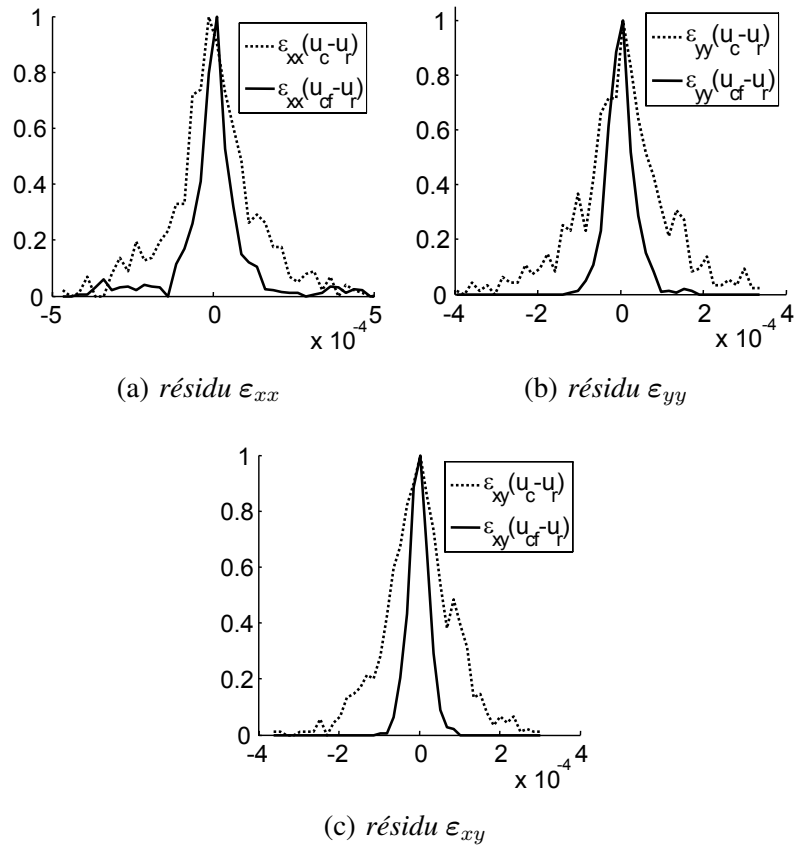


FIG. 3.28 – Histogrammes d’erreur sur les champs de déformation après corrélation et filtrage

	$\varepsilon_{xx}(\mathbf{u}_c)$	$\varepsilon_{xx}(\mathbf{u}_{cf})$	$\varepsilon_{yy}(\mathbf{u}_c)$	$\varepsilon_{yy}(\mathbf{u}_{cf})$	$\varepsilon_{xy}(\mathbf{u}_c)$	$\varepsilon_{xy}(\mathbf{u}_{cf})$
erreur moyenne	$6.63 \cdot 10^{-7}$	$2.77 \cdot 10^{-6}$	$2.35 \cdot 10^{-6}$	$1.62 \cdot 10^{-6}$	$-1.15 \cdot 10^{-6}$	$-1.18 \cdot 10^{-6}$
écart type	$1.40 \cdot 10^{-4}$	$1.18 \cdot 10^{-4}$	$1.12 \cdot 10^{-4}$	$3.66 \cdot 10^{-5}$	$8.90 \cdot 10^{-5}$	$2.57 \cdot 10^{-5}$

TAB. 3.6 – Différentes erreurs pour les déformations calculées à partir de corrélation d’images numériques, avec ou sans filtrage

Cette étude a donc permis d’obtenir les caractéristiques principales d’un bruit associé à la corrélation d’images numériques, ces caractéristiques ont contribué à définir les bornes de l’étude suivante qui porte sur la sensibilité au bruit de l’identification élastique.

3.1.4.2 Sensibilité de l’identification élastique vis-à-vis du bruit sur les mesures

Ce paragraphe porte sur la robustesse de notre méthode en élasticité. Un bruit blanc gaussien a été additionné aux données supposées exactes obtenues par le calcul éléments finis. L’amplitude de bruit est constante sur Ω . En adoptant la convention de notations $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy})$, un rapport de bruit r_{noise} sur la déformation est défini de la façon suivante :

$$r_{\text{noise}} = \max_{i=1 \dots 3} \left(\frac{\sup_{\Omega} |\varepsilon_i(\mathbf{u}_{\text{noisy}}^*) - \varepsilon_i(\mathbf{u}_{\text{ref}}^*)|}{\sup_{\Omega} |\varepsilon_i(\mathbf{u}_{\text{ref}}^*)|} \right) \quad (3.3)$$

où ε_i représente la i^{e} composante de la déformation. La déformation est calculée d'après le déplacement par les fonctions de forme éléments finis. Chaque composante est soit dérivée à partir du déplacement de référence donné par le calcul direct noté ici $\mathbf{u}_{\text{ref}}^*$, ou à partir du déplacement bruité $\mathbf{u}_{\text{noisy}}^*$. L'étude de sensibilité a été réalisée avec un rapport r_{noise} variant de 0 à 50%. La valeur maximale du rapport de bruit r_{noise} est associée à une amplitude crête-à-crête de 4×10^{-4} sur la mesure de déformation, ce qui est cohérent avec les valeurs données dans le Tableau 3.6. Les variations des erreurs absolues sur l'identification des paramètres élastiques E et ν augmentent linéairement par rapport au rapport de bruit (*cf.* figure 3.29). L'erreur maximale est d'environ 20 GPa pour le module d'Young, soit une erreur relative inférieure à 20%. Concernant le coefficient de Poisson, l'erreur maximale est de 0,07, soit une erreur relative de 24%. Pour le bruit maximal appliqué, 10 différents tirages de bruit ont été utilisés pour générer 10 champs de déplacement. Ces différents tirages ont permis d'estimer l'incertitude sur les paramètres identifiés (voir les barres verticales sur la figure 3.29 pour $r_{\text{noise}} = 50\%$).

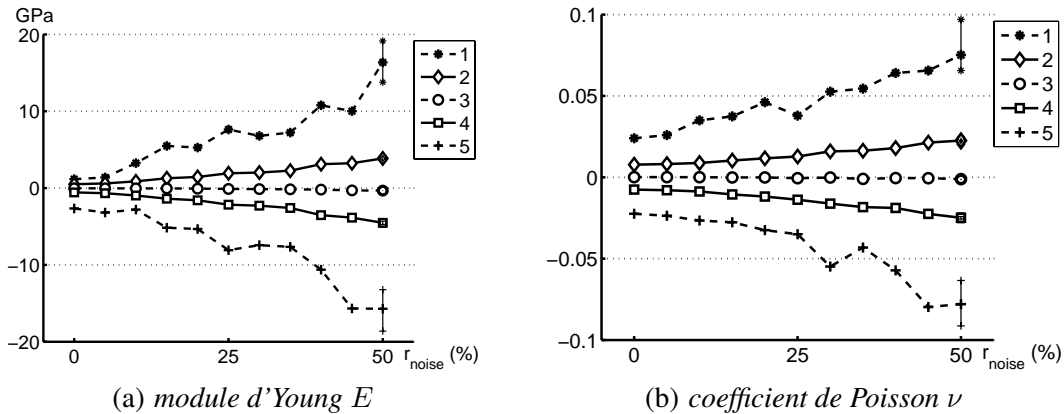
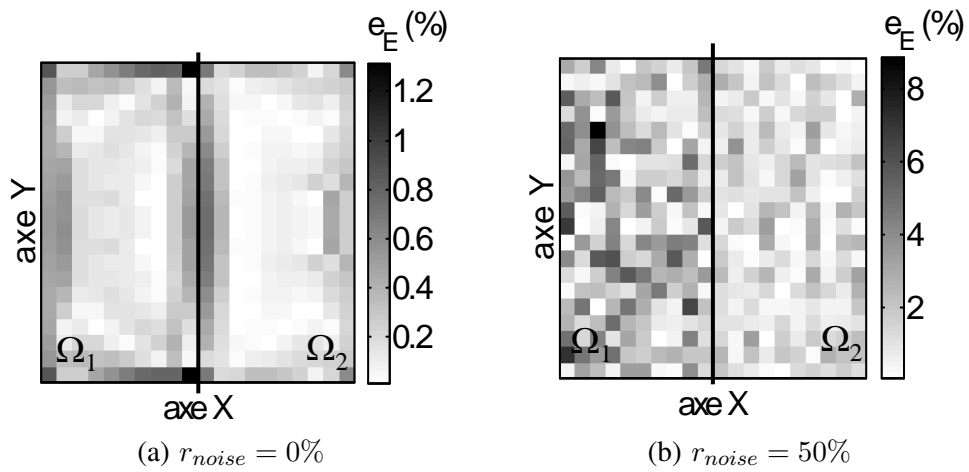
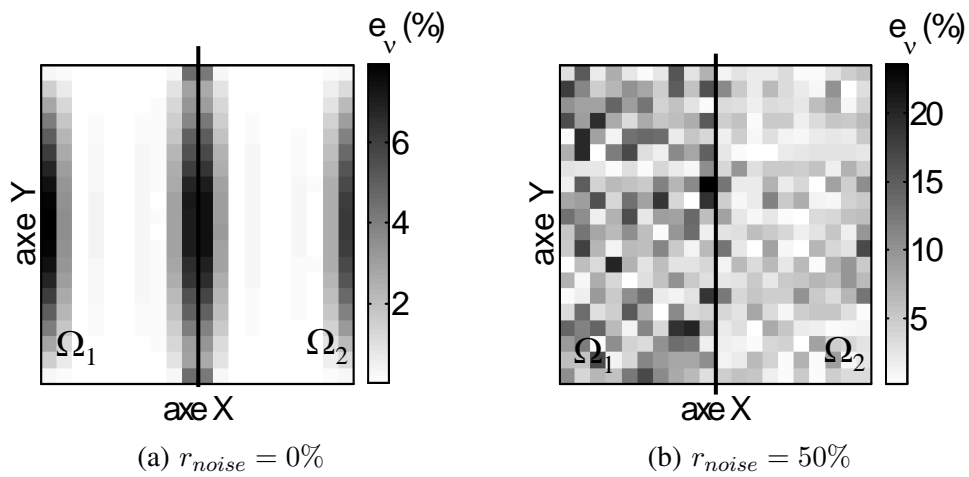


FIG. 3.29 – Erreurs associées à la détermination locale des paramètres élastiques : erreur maximale (1), erreur moyenne + écart type (2), erreur moyenne (3), erreur moyenne - écart type (4), erreur minimale (5)

La figure 3.30 représente les erreurs relatives obtenues sur chaque élément pour l'identification du module d'Young, sans bruit et pour le rapport de bruit maximal $r_{\text{noise}} = 50\%$. En l'absence de bruit l'erreur est principalement localisée à l'interface, de plus l'erreur maximale est très faible (1.3%). Pour $r_{\text{noise}} = 50\%$, l'erreur est plus élevée sur Ω_1 que sur Ω_2 , pour une erreur maximale de 9%. La dissymétrie de cette distribution peut être expliquée par un rapport signal sur bruit meilleur sur Ω_2 . Nous pouvons faire des remarques tout à fait similaires sur les répartitions d'erreurs en observant la figure 3.31 qui représente les erreurs relatives obtenues sur chaque élément pour l'identification du coefficient de Poisson de la même façon que la figure précédente. L'erreur e_ν maximale en l'absence de bruit est de 8%, tandis qu'elle est de 23% pour $r_{\text{noise}} = 50\%$. Les erreurs pour l'identification de ν sont donc plus importantes que pour l'identification de E .

FIG. 3.30 – Erreurs relatives sur le module de Young E identifiéFIG. 3.31 – Erreurs relatives sur le coefficient de Poisson ν identifié

3.2 Estimation d'énergies mécaniques localement fournies pendant un essai de fatigue à grand nombre de cycles

3.2.1 Cadre de l'étude

L'étude de la fatigue à grand nombre de cycles des métaux constitue un axe de recherche important de l'équipe Thm² du LMGC. Les phénomènes de fatigue sont analysés dans un cadre thermomécanique au travers de bilans d'énergie. En particulier, l'énergie calorimétrique est estimée *via* l'estimation de champs de température par thermographie infrarouge [Boulangier *et al.*, 2004; Berthel *et al.*, 2007]. Berthel *et al.* [2007] s'intéressent en particulier à l'estimation locale de l'amplitude des sources thermoélastiques et de l'énergie dissipée par cycle lors d'un essai de fatigue. Les essais de fatigue auxquels nous allons nous intéresser sont effectués sur des éprouvettes planes à faible épaisseur d'un acier dual phase DP600 fourni par ARCELOR, dont les caractéristiques dimensionnelles sont rappelées sur la figure 3.32. La zone d'étude de cette éprouvette fait ici 21 mm de long, 8 mm de large pour une épaisseur de 2,6 mm.

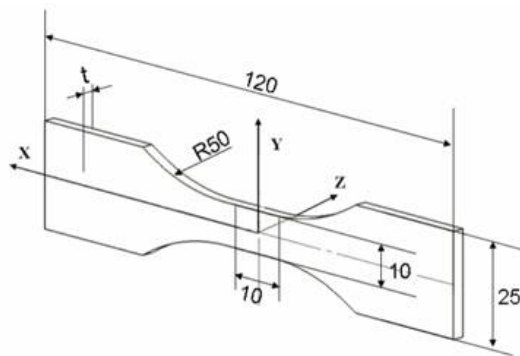


FIG. 3.32 – Dimensions de l'éprouvette utilisée pour les essais de fatigue

Lors d'un cycle de fatigue, l'énergie mécanique localement fournie aux éprouvettes peut être obtenue par exemple en considérant un état de contrainte homogène dans la partie utile de l'éprouvette. Nous allons détailler ici une procédure visant à évaluer l'énergie mécanique localement fournie aux éprouvettes de fatigue pour un cycle. Un des avantages de cette procédure basée sur la méthode inverse est d'utiliser un nombre d'hypothèses réduit sur la répartition des contraintes dans l'éprouvette.

En terme de bilan d'énergie, l'objectif final est d'accéder à l'énergie \mathcal{W}_s stockée par le matériau durant la fatigue et compléter ainsi le bilan d'énergie. Ce bilan énergétique ainsi construit constitue la base sur laquelle pourra être développée un modèle décrivant le comportement en fatigue de ce matériau. L'estimation d'énergies dissipées en fatigue a fait l'objet de la thèse de B. Berthel, et l'essentiel de la méthode employée pour cette estimation est ici brièvement rappelé.

3.2.2 Estimation d'une énergie dissipée

Ici la fatigue est considérée comme un processus dissipatif quasi-statique. Dans le cadre des matériaux standard généralisés, l'évolution du matériau est décrite au moyen de N variables d'état :

la température T , la déformation ε , et les $N - 2$ variables internes scalaires rassemblées en un vecteur $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{N-2})$. Pour une loi de diffusion isotrope de Fourier, l'équation de la chaleur s'écrit :

$$\rho c \dot{T} - \text{div}(K \nabla T) = d_1 + s_{the} + s_{ic} + r_{ext} \quad (3.4)$$

où ρ est la masse volumique, K la conduction du matériau, c la chaleur spécifique. Le terme de droite de l'équation (3.4) regroupe les différentes sources de chaleur pouvant être présentes lors d'un processus de déformation : d_1 est la dissipation intrinsèque, les sources de couplages thermomécaniques sont séparées en une source de couplage thermoélastique s_{the} et une source de couplage interne s_{ic} , et r_{ext} est la source volumique liée à l'apport de chaleur extérieure.

Des hypothèses qui ne seront pas détaillées ici permettent d'écrire l'équation de la chaleur sous une forme simplifiée, pour une éprouvette plane à faible épaisseur [Berthel *et al.*, 2007] :

$$\rho c \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\theta}{\tau_{th}} \right) - K \Delta \theta = d_1 + s_{the} \quad (3.5)$$

où $\theta = T - T_0$ représente les variations de température autour de l'équilibre, τ_{th} est une constante relative aux échanges thermiques par rapport aux faces de l'éprouvette, Δ est l'opérateur laplacien.

La particularité de la méthode utilisée par Berthel *et al.* [2007] est le choix d'un polynôme d'approximation de la température jouant à la fois un rôle de filtrage mais aussi de découplage entre les évolutions de la température induites par les sources thermoélastiques et les évolutions liées à la dissipation moyenne par cycle \tilde{d}_1 . Le choix des fonctions d'approximation utilisées pour le calcul de la température utilise certaines propriétés des sources de chaleur mises en jeu dans les phénomènes de fatigue : les sources thermoélastiques oscillent à une fréquence f_L identique à celle de l'excitation mécanique de l'éprouvette, avec une moyenne nulle sur un cycle, tandis qu'une dérive linéaire en température est sensée localement reproduire les effets éventuels de dérive de la température d'équilibre. Le polynôme d'approximation local s'écrit dans ce cas sous la forme :

$$\theta^{fit} = p_1(x, y) + t p_2(x, y) + p_3(x, y) \cos(2\pi f_L t) + p_4(x, y) \sin(2\pi f_L t) \quad (3.6)$$

La principale difficulté de l'estimation de la dissipation vient des très faibles intensités de dissipation qui sont environ mille fois plus faibles que l'amplitude des sources thermoélastiques. L'approximation locale au moyen des polynômes de l'équation (3.6) permet cependant de surmonter cette difficulté de nature physique.

3.2.3 Estimation de l'énergie mécanique fournie localement

Pour compléter le bilan d'énergie il faut ensuite estimer la puissance mécanique fournie à l'éprouvette. Cette puissance peut être estimée de façon globale et en observant la courbe macroscopique reliant la contrainte à la déformation au cours d'un cycle (*cf.* figure 3.33), pour une amplitude de chargement proche de la limite de fatigue du matériau. Le rapport de charge R_σ est égal au rapport des contraintes extremums : $R_\sigma = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = -1$. On peut remarquer sur la courbe $\sigma - \varepsilon$ macroscopique un cycle d'hystérésis mécanique. Il a été montré que ce phénomène est indépendant de la

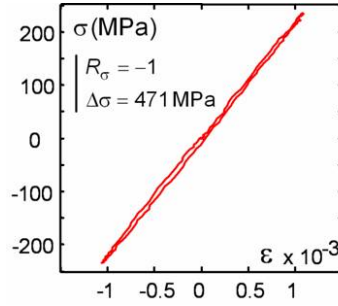


FIG. 3.33 – Exemple d'hystérésis mécanique

fréquence de sollicitation associée à une énergie mécanique fournie au matériau, pour l'acier étudié et la gamme de vitesse envisagée.

Dans le but d'établir un bilan énergétique local, l'aire d'hystérésis moyenne pour un cycle peut s'écrire :

$$A_h(x, y) = \int_0^{f_L^{-1}} \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(x, y, t) dt \quad (3.7)$$

Pour pouvoir calculer $A_h(x, y)$, il est donc nécessaire de calculer à chaque instant du chargement le champ de contrainte et le champ de déformation sur le domaine d'intérêt Ω . Au cours d'un cycle, une évolution du comportement du matériau, pouvant être associée à des mécanismes de microplasticité est à l'origine du cycle d'hystérésis mécanique.

L'originalité de la méthode mise en place afin d'estimer ici le champ de contrainte à chaque pas de la boucle d'hystérésis, est d'utiliser une procédure d'identification élastique pour estimer le module sécant. Ici, les paramètres du comportement identifiés ne sont pas utiles, mais c'est l'estimation de la contrainte qui permet le calcul de la puissance mécanique.

L'influence de la microplasticité a donc été prise en compte au travers de légers réajustements des paramètres élastiques, à chaque pas de chargement. L'hypothèse est que si cette microplasticité joue très légèrement sur ces caractéristiques, le modèle d'élasticité reste toujours valable pour calculer des contraintes. Cette identification repose donc sur la minimisation de la fonctionnelle d'erreur en relation de comportement élastique présentée au chapitre 2, à chaque pas de chargement durant un cycle.

$$\mathcal{G}_s^i(\boldsymbol{\tau}_i, \mathbf{B}_i^s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_i^*)) - \mathbf{B}_i^s : \boldsymbol{\tau}_i)^T : \mathbf{B}_i^{s-1} : (\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{u}_i^*) - \mathbf{B}_i^s : \boldsymbol{\tau}_i) d\Omega$$

Pour chaque temps t_i du cycle correspondant à un temps d'acquisition d'image CCD, $i = 1 \dots N_t$, un champ contrainte $\boldsymbol{\sigma}_i$ ainsi qu'un champ de tenseurs élastiques sécants \mathbf{C}_i sont identifiés. L'évaluation de l'aire d'hystérésis A_h se fait ensuite au moyen d'une intégration numérique en temps. En particulier, les évolutions de la contrainte et de la déformation sont linéarisées sur chaque pas de temps $[t_i, t_{i+1}]$ ce qui permet d'écrire la contrainte et la vitesse de déformation de la façon suivante :

$$\sigma(x, y, t) = \sigma_i(x, y) + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} (\sigma_{i+1}(x, y) - \sigma_i(x, y)) \quad (3.8)$$

$$\dot{\varepsilon}(x, y, t) = \frac{1}{t_{i+1} - t_i} (\varepsilon_{i+1}(x, y) - \varepsilon_i(x, y)) \quad (3.9)$$

L'aire d'hystérésis A_h s'écrit alors :

$$A_h(x, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_t-1} (\sigma_i(x, y) + \sigma_{i+1}(x, y)) : (\varepsilon_{i+1}(x, y) - \varepsilon_i(x, y)) dt \quad (3.10)$$

3.2.4 Bilan d'énergie en fatigue

Afin de réaliser un bilan d'énergie, nous comparons la dissipation mesurée par caméra IR avec l'énergie mécanique fournie déterminée à partir des images fournies par la caméra CCD.

La dissipation d_1 est déterminée sur un nombre important de cycles à une fréquence f_L de 30 Hz grâce à l'analyse calorimétrique présentée dans le paragraphe 3.2.2, pour un rapport de charge R_σ et une amplitude de chargement $\Delta\sigma$ donnés.

Le calcul de l'énergie mécanique est supposé indépendant de la fréquence de sollicitation. Nous sommes par ailleurs limités par la fréquence d'acquisition de la caméra CCD, donc pour une bonne estimation de l'énergie mécanique nous avons choisi de travailler à une fréquence f_L plus basse de 5.55×10^{-3} Hz pour le cycle mécanique. L'acquisition du cycle mécanique se fait immédiatement après chaque bloc de cycles permettant le calcul de la dissipation. Cela permet, pour la mesure de température, de s'affranchir de perturbations thermiques induites par la source lumineuse nécessaire pour l'acquisition par la caméra CCD.

L'acquisition CCD se fait sur une des faces de l'éprouvette sur laquelle un mouchetis de peinture a été déposé au préalable, tandis que l'acquisition IR se fait sur l'autre face de l'éprouvette recouverte de peinture noire mate.

À partir de ces énergies estimées, l'enjeu du bilan d'énergie que nous présentons est de comparer l'énergie mécanique localement fournie à l'éprouvette avec l'énergie mécanique dissipée. La dissipation \tilde{d}_1 est une puissance exprimée en $^{\circ}C \cdot s^{-1}$, nous définissons donc une puissance mécanique moyenne par bloc \tilde{A}_h homogène à \tilde{d}_1 :

$$\tilde{A}_h(x, y) = \frac{f_L A_h(x, y)}{\rho c} \quad (3.11)$$

Nous pouvons alors comparer l'énergie localement fournie et l'énergie dissipée. Connaissant l'expression analytique de l'interpolation de $\tilde{A}_h(x, y)$ en tout point du domaine d'étude, nous pouvons exprimer deux champs \tilde{A}_h et \tilde{d}_1 aux points (x_d, y_d) imposés par le traitement d'images infrarouges. Cela nous permet notamment d'exprimer une puissance stockée par le matériau moyenne par bloc notée \mathcal{W}_s :

$$\mathcal{W}_s(x_d, y_d) = \tilde{A}_h(x_d, y_d) - \tilde{d}_1(x_d, y_d) \quad (3.12)$$

3.2.5 Résultats expérimentaux

Le matériau testé est un acier dual phase DP600 fourni par la société Arcelor. C'est un acier au carbone laminé à chaud, contenant de la ferrite et de la martensite. Les proportions massiques (en %) des composés le constituant sont de 0.074 C, 0.84 Mn, 0.038 P, 0.002 S, 0.217 Si, 0.04 Al, 0.702 Cr, et de 0.005 N.

L'essai de fatigue a été effectué pour des blocs de cycles de différentes amplitudes de chargement $\Delta\sigma$ et pour un rapport de charge $R_\sigma = -1$, les différents blocs sont représentés sur la figure 3.34. Les blocs n°1 à n°5 et n°7 à n°11 comportent 2400 cycles tandis que le bloc n°6 est plus long et comporte 100,000 cycles. Les deux blocs auxquels nous allons nous intéresser sont les blocs n°5 et n°11, pour lesquels l'amplitude de contrainte est identique, et maximale. Bien que la sollicitation soit identique pour ces deux blocs, ceux-ci sont séparés par le bloc n°6 lors duquel l'état de fatigue de l'éprouvette évolue.

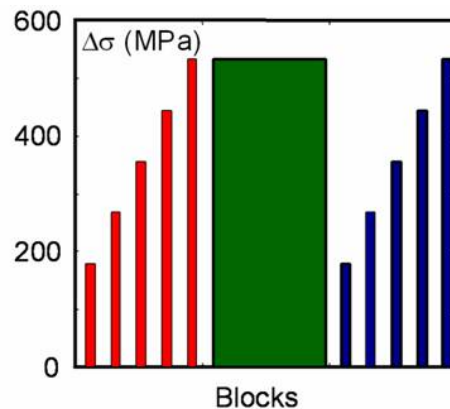


FIG. 3.34 – Blocs de cycles constituant l'essai de fatigue

Nous allons maintenant d'écrire l'évolution des paramètres élastiques identifiés au cours des cycles mécaniques. Pour le bloc 11, la courbe expérimentale de l'évolution de la force appliquée au cours du temps est représentée sur la figure 3.35.

Les paramètres élastiques sont déterminés sur 10×10 zones matérielles, l'évolution au cours de chaque cycle de leurs valeurs moyennes est donnée sur la figure 3.36. Il est intéressant de voir que pour les deux cycles associés aux blocs n°5 et n°11, l'identification des paramètres élastiques donne des résultats très similaires : l'évolution de l'état de fatigue entre les blocs n°5 et n°11 ne permet pas d'observer d'évolution notable de ces paramètres élastiques.

Naturellement, comme le montre la figure 3.37, l'identification des paramètres élastiques se dégrade lorsque la force appliquée F tend vers zéro : l'écart type sur les paramètres identifiés devient important alors qu'il diminue lorsque la force appliquée croît. La figure 3.38 permet de constater que même avec l'erreur importante sur les paramètres identifiés à effort nul, les champs de contrainte sont

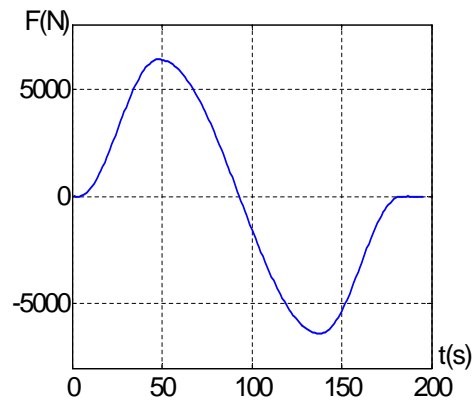


FIG. 3.35 – Force appliquée au cours du temps pour un cycle mécanique

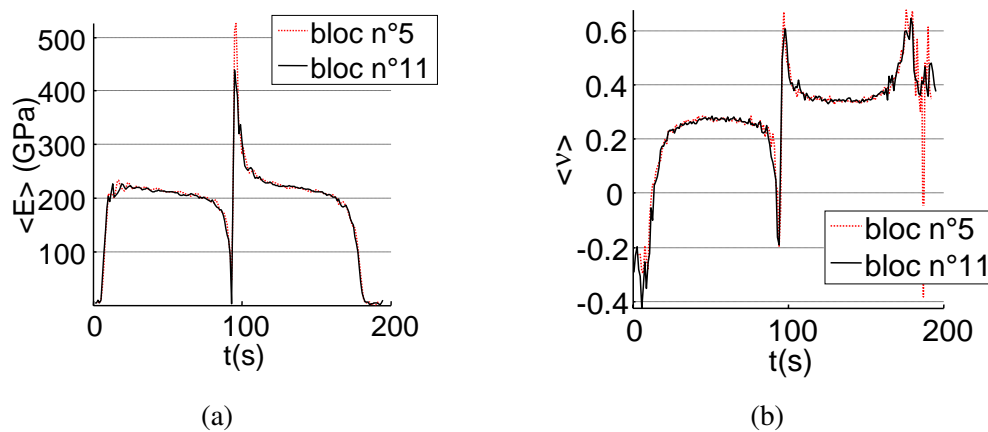


FIG. 3.36 – évolution des valeurs moyennes identifiées au cours des cycles mécaniques associés aux blocs n°5 et n°11 ; (a) : module d'Young moyen $\langle E \rangle$ et (b) : coefficient de Poisson moyen $\langle \nu \rangle$.

bien identifiés. Sur cette figure sont représentées les contraintes identifiées pour le bloc n°11 à effort maximal et à effort nul, au temps $t = 48s$ la force appliquée F est maximale et vaut $F_{\max} = 6385N$, au temps $t = 93s$ la force F est presque nulle et vaut $F_0 = 4N$. Pour l'effort F_0 , nous avons vu que les paramètres matériels sont mal identifiés mais cela n'altère pas l'estimation de la contrainte puisque celle-ci reste à des valeurs proches de zéro. Le champ de contrainte identifié à F_{\max} est quasiment uniaxial et l'on identifie même un léger cisaillement dû aux congés de raccordement de l'éprouvette.

Le calcul de la dissipation est fait sur une zone rectangulaire de 5.94 mm de large sur 15.84 mm de haut qui est réduite par rapport à la surface de la zone d'étude du calcul mécanique du fait de la taille des zones d'approximation. Les Figures 3.39 et 3.40 présentent les différentes puissances moyennes par bloc (puissance des efforts intérieurs, dissipation, taux d'énergie stockée) exprimées en $^{\circ}C.s^{-1}$ relatives aux blocs n°5 et n°11, respectivement.

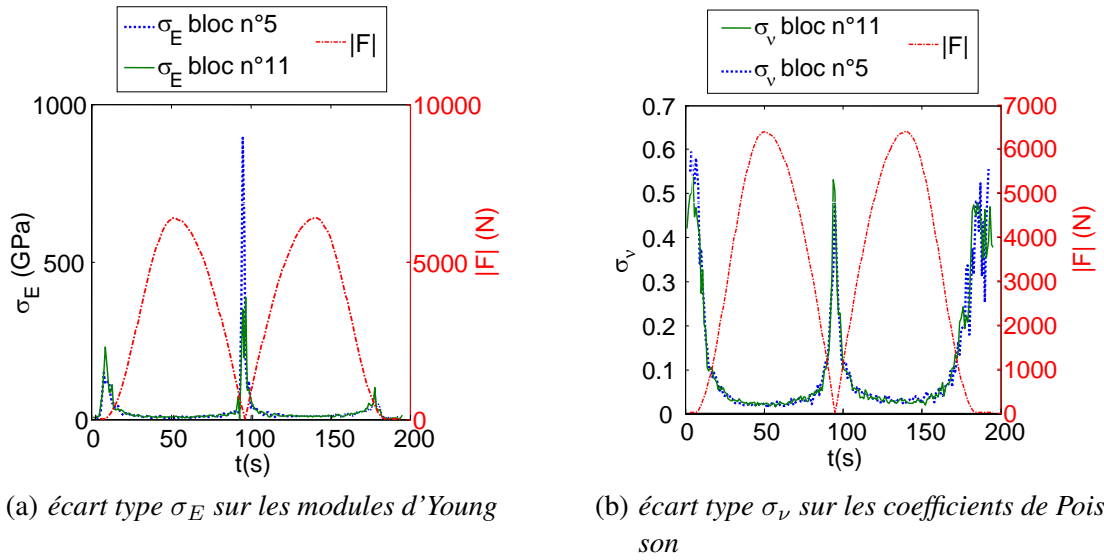


FIG. 3.37 – évolution des écarts types sur les paramètres identifiées au cours des cycles mécaniques associés aux blocs n°5 et n°11

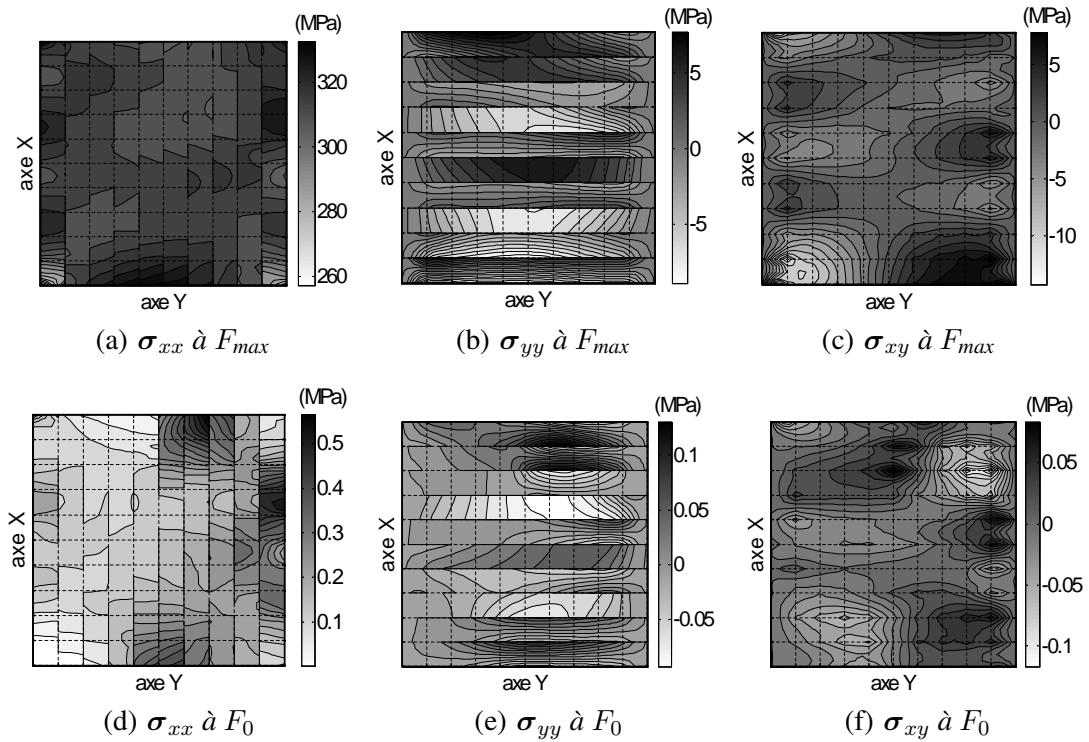
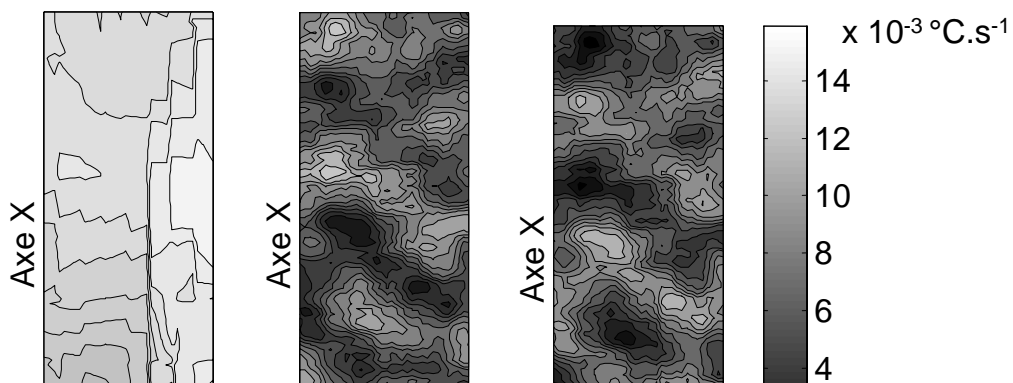


FIG. 3.38 – champs de contraintes identifiés au cours du bloc n°11 pour différents niveaux d'efforts appliqués



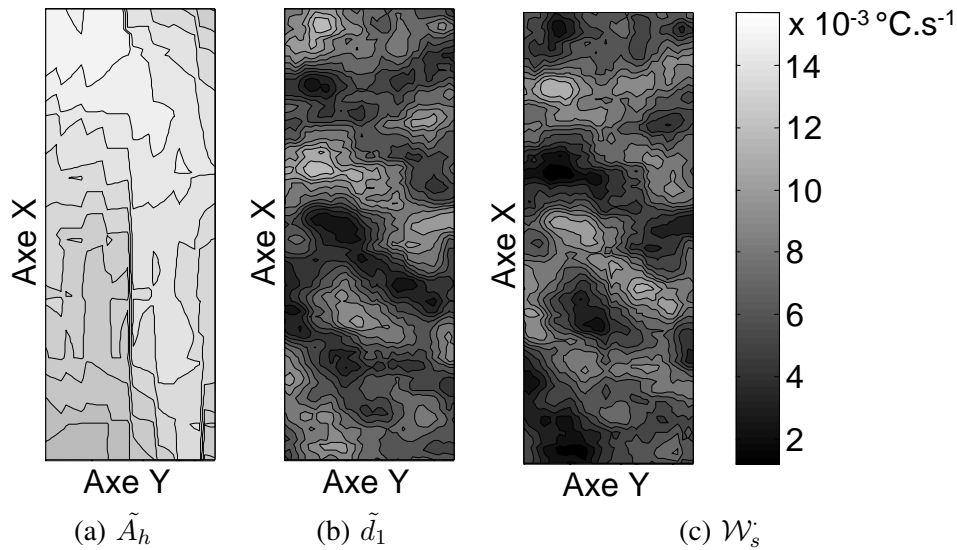


FIG. 3.40 – Puissances moyennes par bloc mises en jeu lors du bloc n°11 ; (a) : Puissance mécanique fournie \tilde{A}_h , (b) : Puissance dissipée \tilde{d}_1 , (c) : Puissance stockée \tilde{W}_s

3.2.6 Conclusion sur l'essai de Fatigue

Nous avons ici présenté la contribution apportée à l'établissement de bilans d'énergie en fatigue à grand nombre de cycles. Une approche inverse élastique a permis de déterminer des champs de contrainte au cours d'un cycle mécanique afin d'estimer une énergie mécanique localement fournie au cours d'un cycle de fatigue. L'originalité de cette méthode est de considérer les faibles variations d'un tenseur de comportement élastique sécant comme étant principalement dues aux mécanismes de microplasticité. La détermination du tenseur se fait en chaque pas de chargement au cours du cycle mécanique et localement puisque nous ne faisons pas d'hypothèses sur l'homogénéité du comportement élastique. Nous essayons ainsi de décrire le champ de contrainte avec la plus grande finesse en temps comme dans l'espace, pour estimer le mieux possible la puissance mécanique fournie localement.

3.3 Applications en plasticité

3.3.1 Identification d'une inclusion plastique

Un essai a été simulé, pour un barreau élastique en traction dans lequel est située une inclusion élastoplastique Ω_1 (cf. figure 3.41a). Les propriétés de référence choisies pour cet essai sont récapitulées dans le tableau 3.7.

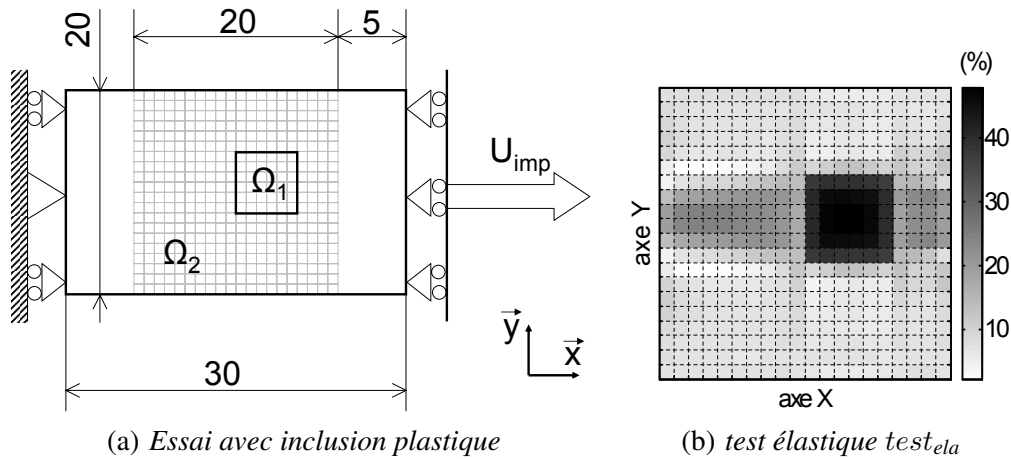


FIG. 3.41 – Présentation de l'essai avec l'inclusion plastique (a) et test pour la détection de la plasticité (b)

Ω_1				Ω_2	
E	ν	k	σ_0	E	ν
200 GPa	0.3	50 GPa	300 MPa	200 GPa	0.30

TAB. 3.7 – Paramètres de référence pour l'essai de l'inclusion élastoplastique

Les propriétés élastiques sont uniformes sur le barreau qui comporte une inclusion élastoplastique Ω_1 située dans une matrice purement élastique Ω_2 . La déformation du barreau est donc homogène jusqu'à ce que la plasticité intervienne. Le contour de l'inclusion est ici compatible avec le maillage de l'identification constitué de 20×20 éléments, tandis que le calcul direct comporte 60×60 éléments Q_1 sur le domaine d'identification $\Omega = (\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Le domaine Ω ne présente pas d'axe de symétrie car l'inclusion est légèrement excentrée.

Le chargement est constitué au total de trois pas, un premier pas purement élastique suivi de deux pas pour lesquels l'inclusion plastifie. Les propriétés élastiques sont identifiées avec des erreurs e_E et e_ν inférieures à 0.01%. Pour cette étude, aucune erreur sur l'identification élastique ne pourra donc être incriminée dans la détermination des paramètres plastiques.

Ce test numérique vise en particulier à caractériser la procédure de détection de la plasticité qui se fait dès le deuxième pas du chargement. Le test de détection $test_{ela}$ s'applique ici aux modules élastiques sécants identifiés à chaque pas à partir des déplacements globaux. Les résultats du test calculé au deuxième pas de chargement est représenté sur la figure 3.41b. Un critère $\delta_e = 30\%$

sur l'élasticité a permis d'identifier parfaitement les éléments qui plastifient. Le test de détection $test_{ela}$ fait apparaître des erreurs sur la détermination des paramètres élastiques de la matrice pour le deuxième pas. Ces erreurs se propagent de part et d'autre de l'inclusion sur une bande orientée suivant l'axe de sollicitation. Des erreurs similaires avaient été observées pour l'identification d'une inclusion élastique (cf. §3.1.3.1). Le critère δ_e doit donc être suffisamment important pour que les perturbations sur l'identification des propriétés élastiques dans Ω_2 ne soient pas interprétées comme de la plasticité.

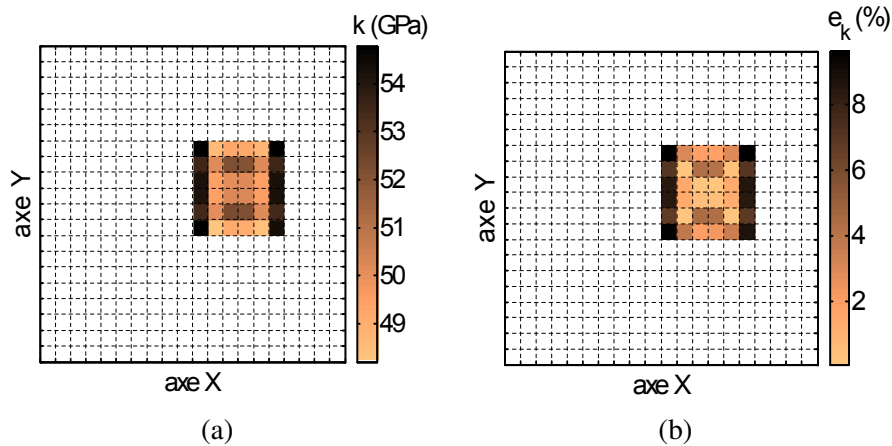


FIG. 3.42 – Module d'écroutissage k identifié (a) et erreur relative e_k associée (b)

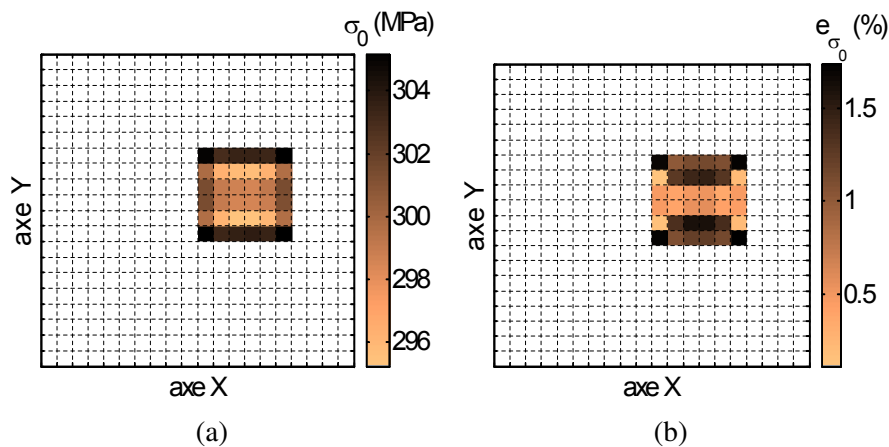


FIG. 3.43 – Contrainte de limite élastique σ_0 identifiée (a) et erreur relative e_{σ_0} associée (b)

La procédure d'identification associée à ce critère bien choisi a permis d'identifier le module d'écroutissage k présenté sur la figure 3.42 et la contrainte de limite élastique σ_0 présentée sur la figure 3.43. Ces deux figures illustrent également les erreurs relatives e_k et e_{σ_0} associées respectivement à l'identification de ces deux paramètres. Aucun bruit n'a été appliqué aux données simulées donc les erreurs restent faibles pour cette application avec une erreur e_k maximale valant 10% et une erreur e_{σ_0} maximale valant 1.7%. Ces erreurs maximales sont localisées aux quatre coins de l'inclusion, où les gradients de contrainte sont les plus élevés comme en attestent les figures 3.44, 3.45 et 3.46. Les champs de contrainte présentés sur ces figures correspondent au contraintes totales à la fin du second pas du chargement. Les champs de contrainte identifiés sont comparés aux champs de contrainte

de référence, faisant apparaître une bonne concordance pour chacune des trois composantes². Pour faciliter la comparaison, pour chaque composantes les amplitudes de niveaux de gris ainsi que les valeurs associées aux lignes de niveau sont identiques pour la contrainte identifiée et la contrainte de référence. Par ailleurs, sur tous les champs de contraintes présentés ici, qu'ils soient identifiés ou obtenus par calcul direct, nous avons représenté le maillage de la méthode d'identification.

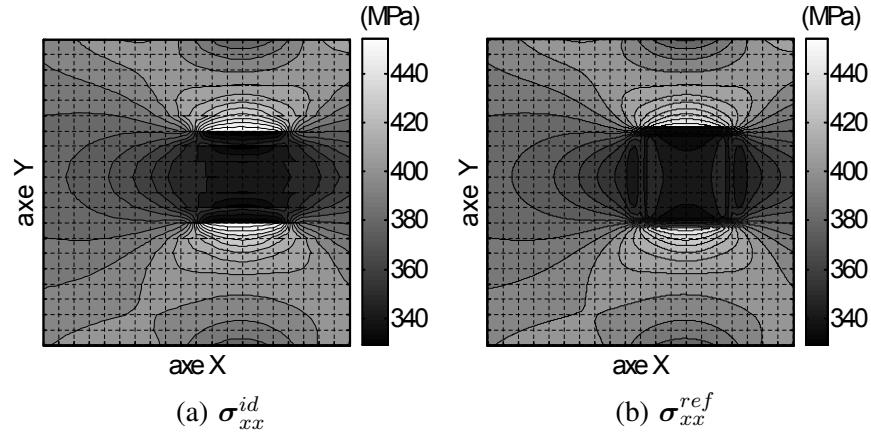


FIG. 3.44 – Contrainte de traction identifiée σ_{xx}^{id} (a) et contrainte de référence σ_{xx}^{ref} (b)

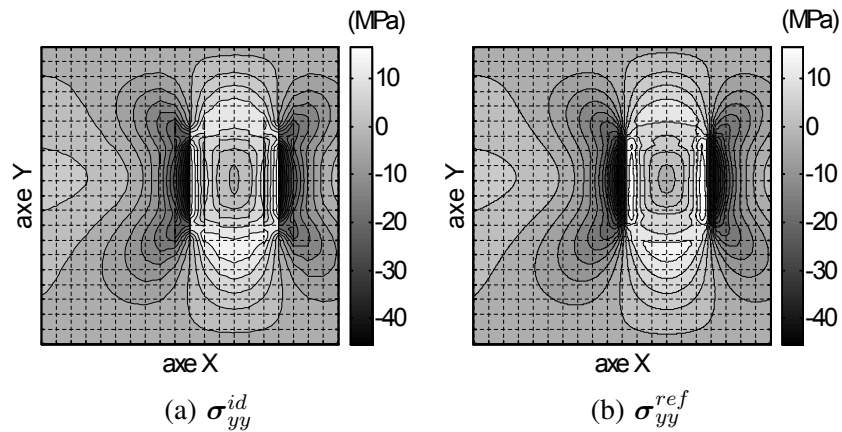


FIG. 3.45 – Contrainte de contraction identifiée σ_{yy}^{id} (a) et contrainte de référence σ_{yy}^{ref} (b)

²Les contraintes de référence calculées avec le code Cast3MTM comme des champs par éléments ont été converties en champs par points pour leur tracé

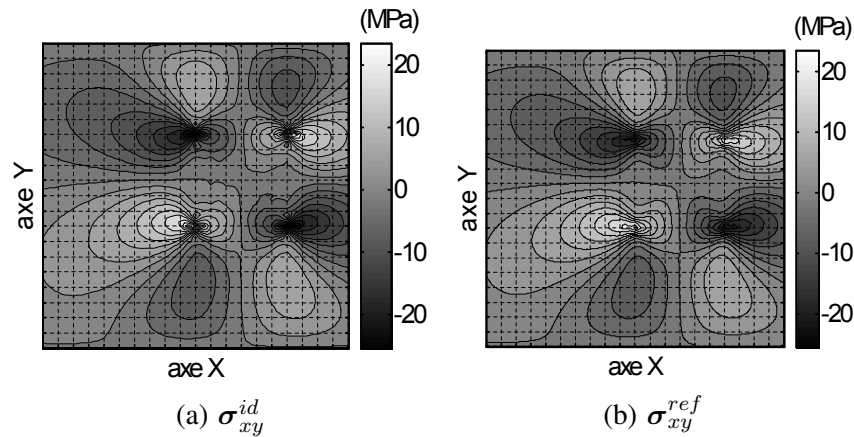


FIG. 3.46 – Contrainte de cisaillement identifiée σ_{xy}^{id} (a) et contrainte de référence σ_{xy}^{ref} (b)

Cet essai sur l'inclusion plastique permet de constater le fonctionnement de la procédure de détection locale de la plasticité. Après une détermination exacte du domaine plastique, les propriétés plastiques ont été calculées avec de faibles erreurs. De plus, les champs de contrainte identifiés en élastoplasticité sont très proches des champs de référence.

3.3.2 Identification sur un bicouche élastoplastique

L'identification de paramètres plastiques a été traitée de façon plus approfondie à partir de l'exemple du bicouche déjà traité en élasticité (*cf.* figure 3.19). Cette fois ci le sous-domaine Ω_1 est purement élastique tandis que le domaine Ω_2 est élastoplastique, avec des propriétés élastiques plus souples que celles de Ω_1 . Le modèle élastoplastique choisi est à écrouissage cinématique linéaire (module d'écrouissage k et contrainte de limite élastique σ_0), tandis que l'élasticité est isotrope (module d'Young E et coefficient de Poisson ν). Cet essai académique a été initialement traité pour caractériser la robustesse de la méthode d'identification élastoplastique locale.

Ω_1		Ω_2			
E	ν	E	ν	k	σ_0
200 GPa	0.3	100 GPa	0.30	10 GPa	300 MPa

TAB. 3.8 – Paramètres de référence pour l'essai de traction sur le bicouche élastoplastique

Pour pouvoir identifier tous les coefficients, nous avons appliqué un chargement monotone constitué de trois pas distincts sur le bicouche. Le chargement a été choisi de sorte que le domaine Ω_2 ne plastifie pas sur le premier pas, mais plastifie entièrement dès le deuxième pas. Les résultats de l'identification pour le premier pas de chargement ont été entièrement présentés dans le paragraphe 3.1.3.2 (le barreau bicouche élastique a des propriétés identiques et le chargement qui lui a été appliqué est identique au chargement appliqué pour le premier pas de la présente étude).

Nous avons caractérisé la multiaxialité de cet essai en calculant la distribution d'un rapport de multiaxialité entre les deux contraintes principales σ_I et σ_{II} , rapport que nous avons représenté sur la

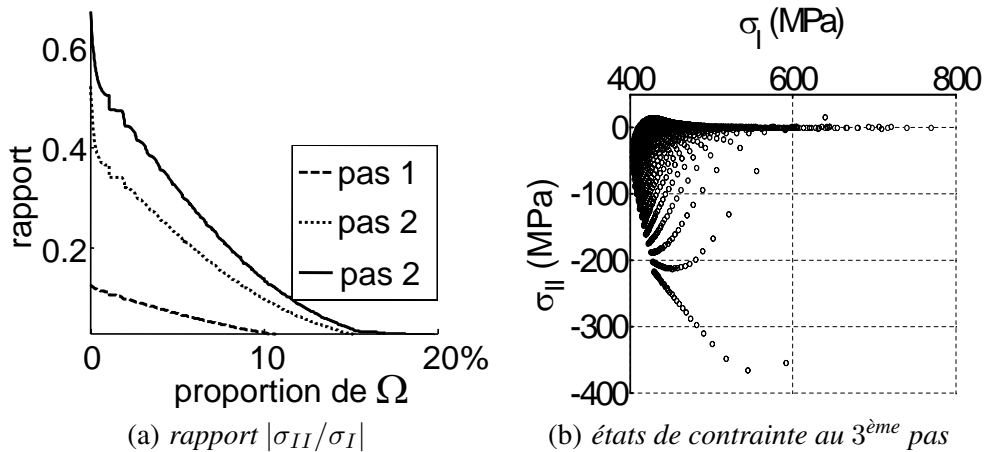
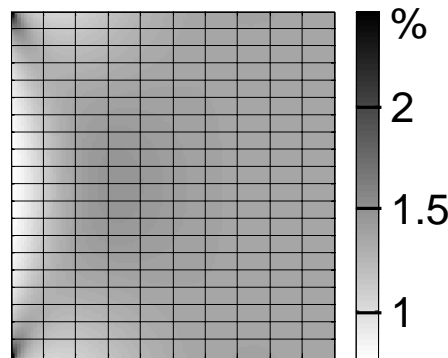


FIG. 3.47 – Multi-axialité de l'essai

figure 3.47a. Les valeurs de contrainte ont été obtenues aux points de Gauss de la simulation. Les trois courbes, associées aux trois pas de chargement, montrent que le rapport $|\sigma_{II}/\sigma_I|$ augmente avec le chargement : quand la plasticité se développe, le contraste de rigidité entre Ω_1 et Ω_2 augmente. Pour le troisième pas de chargement, le rapport de multi-axialité est supérieur à 0.3 pour plus de 5% de la structure, la distribution des états de contrainte est représentée sur la figure 3.47b.

Nous pouvons également remarquer que lors de cet essai, la structure ne plastifie pas uniformément : le domaine Ω_1 reste élastique tandis que la plasticité se développe de façon hétérogène sur Ω_2 . Nous avons représenté sur la figure 3.48 la déformation plastique sur Ω_2 pour le troisième pas de chargement, qui nous permet de constater la présence de concentrations de déformation plastique à proximité de l'interface et des bords libres du barreau. La déformation plastique $(\varepsilon_p)_{II}$ qui est représentée est une déformation plastique cumulée.

FIG. 3.48 – $(\varepsilon_p)_{II}$ sur Ω_2

L'étude que nous avons faite sur l'identification de propriétés élastoplastiques se scinde maintenant en deux parties : nous allons tout d'abord présenter l'identification de propriétés élastoplastiques pour l'essai bicouche en l'absence de bruit, puis nous étudierons l'influence du bruit sur l'identification des paramètres plastiques.

3.3.2.1 Résultats de l'identification élastoplastique sur l'essai bicouche

Les résultats présentés ici ont été obtenus à partir des déplacements simulés et aucun bruit n'a été ajouté. Les propriétés matérielles sont comme pour l'étude élastique identifiées sur 20×20 zones matérielles. Les valeurs choisies pour les critères δ_ϵ et δ_B valent 5% pour chacun. La plasticité est alors uniquement identifiée sur les éléments appartenant au domaine Ω_2 . En conséquence, l'interface entre les zones matérielles coïncidant parfaitement avec le maillage de l'identification, l'interface $\partial\Omega_{1,2}$ est parfaitement localisée.

La figure 3.49 illustre la distribution de la contrainte de traction σ_{xx} à la fin du premier pas plastique. La contrainte présentée sur la figure 3.49a est donnée par la résolution du problème direct, tandis que la contrainte donnée sur la figure 3.49b a été identifiée par la résolution du problème inverse. Nous pouvons remarquer une bonne similitude entre ces deux distributions, en particulier les gradients de contrainte sont bien retranscrits à proximité de l'interface.

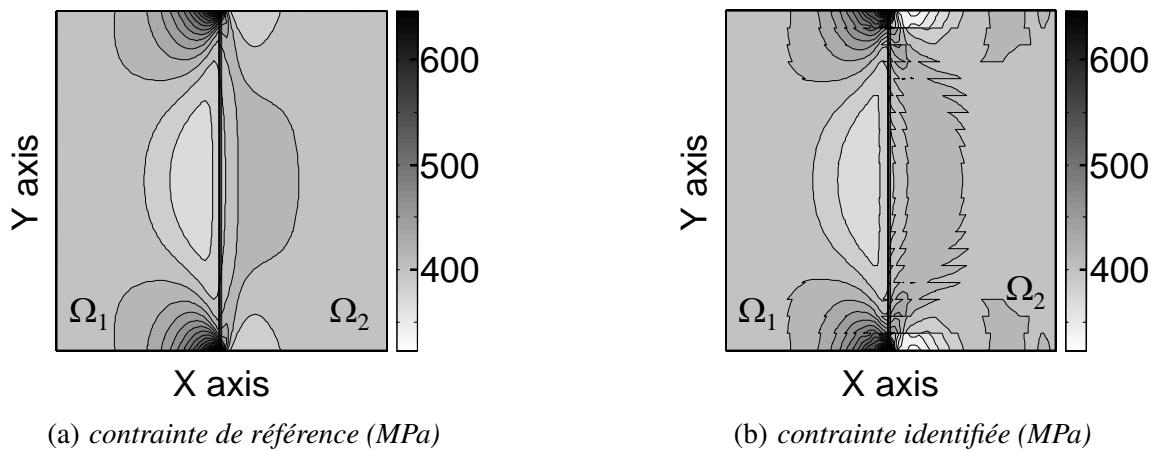


FIG. 3.49 – Comparaison pour le premier pas plastique ($n = 2$) entre la contrainte de traction donnée par le calcul direct (a) et la même composante donnée par la méthode d'identification (b).

La figure 3.50 présente la distribution des paramètres plastiques identifiés. Nous observons que les erreurs sur l'identification des deux paramètres est distribuée de façon aléatoire. L'erreur est plus élevée pour les éléments où la déformation plastique est faible et pour les éléments où les gradients de déformation sont importants. L'erreur maximale sur le module d'écroutissage k identifié est de 23%, ce qui correspond à 2.3 GPa et est comparable avec l'erreur qui a été obtenue pour l'identification du module de Young lorsqu'aucun bruit n'est ajouté aux données (*cf.* figure 3.29a). L'erreur maximale pour σ_0 est de 14% (*cf.* figure 3.50b).

La présence de gradients de déformation constitue une importante source d'erreurs pour l'identification. Le maillage utilisé pour l'identification étant plus grossier que celui utilisé pour le calcul direct, les champs de contrainte ne sont pas parfaitement retranscrits au voisinage de l'interface. Un raffinement de maillage de la procédure d'identification pourrait probablement réduire ce type d'erreur.

Une autre source d'erreur possible peut provenir du calcul direct, qui pourrait être moins précis dans la résolution de problèmes non linéaires. Dans ce cas, la procédure d'identification ne pourrait

pas être incriminée.

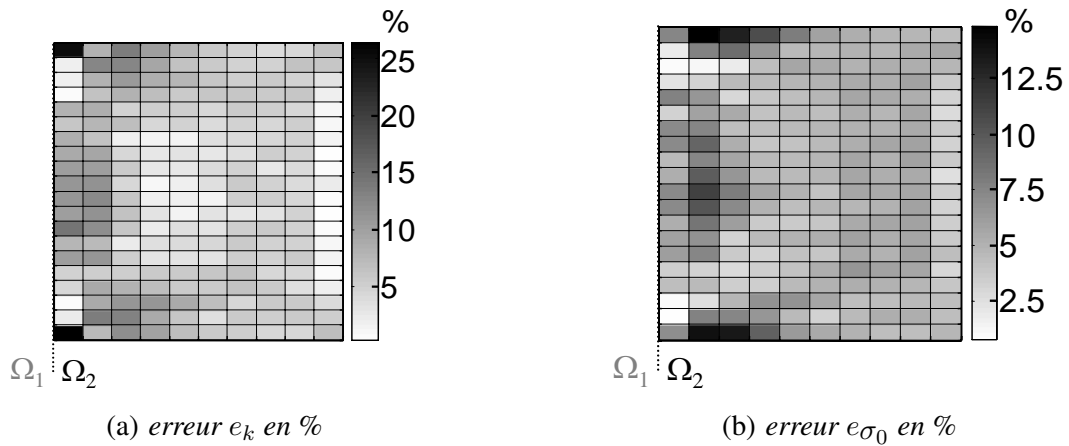


FIG. 3.50 – Erreurs relatives pour la détermination des paramètres plastiques représentées sur Ω_2 uniquement (les éléments du domaine Ω_1 ne sont pas représentés car ils ne sont pas identifiés comme plastiques).

Une étude de sensibilité par rapport à un contraste c_k entre le module de Young élastique et le module d'écroutissage a été réalisée pour l'essai sur le bicouche, pour les valeurs de référence données dans le tableau 3.9. Pour cette étude, les propriétés élastiques sont uniformes sur le barreau, seul le module d'écroutissage $k = E/c_k$ varie entre 10 et 100 GPa, pour les 10 calculs effectués lors de cette étude.

Ω_1		Ω_2				c_k
E (GPa)	ν	E (GPa)	ν	k (GPa)	σ_0 (MPa)	
200	0.3	200	0.30	$= (10 \times i)$	300	$= (20/i)$

TAB. 3.9 – Paramètres de référence pour l'étude de sensibilité au contraste c_k , pour chaque calcul i , $i = 1, \dots, 10$

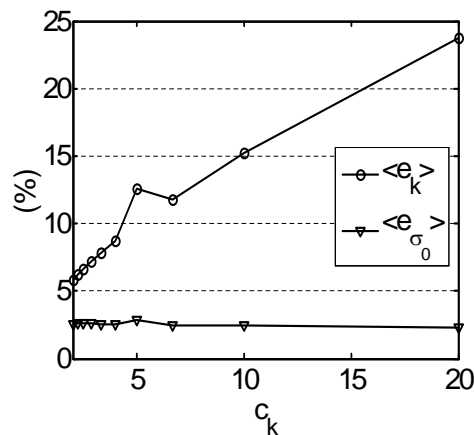


FIG. 3.51 – Erreur sur l'identification des deux paramètres plastiques en fonction du contraste c_k

Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure 3.51, et font apparaître une évolution quasiment linéaire entre le contraste c_k et l'erreur relative moyenne e_k sur l'identification du module d'écroutissage k . Les évolutions de l'erreur e_{σ_0} sont très faibles.

3.3.2.2 Influence du bruit

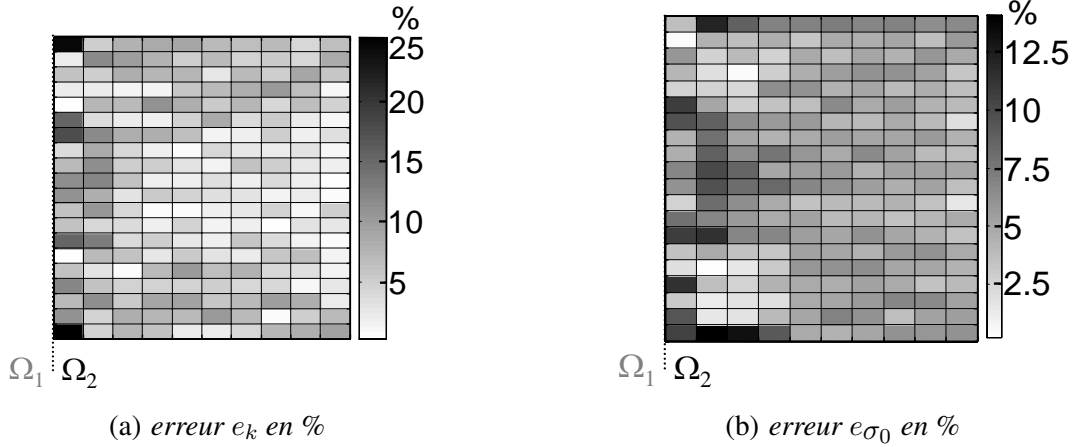


FIG. 3.52 – Erreurs relatives pour la détermination des paramètres plastiques identifiés à partir de données bruitées ($r_{noise} = 25\%$)

Une étude de sensibilité a été réalisée sur le bicouche, de façon similaire à l'étude fait dans le cas élastique. Pour chaque pas de chargement, un bruit blanc gaussien est ajouté aux incréments de déplacements simulés. Pour faciliter la comparaison avec l'étude élastique, nous avons adopté la définition suivante du rapport de bruit r_{noise} :

$$r_{noise} = \max_{i=1 \dots 3} \left(\frac{\sup_{\Omega} |\varepsilon_i(\Delta \mathbf{u}_{noisy}^*) - \varepsilon_i(\Delta \mathbf{u}_{ref}^*)|}{\sup_{\Omega} |\varepsilon_i(\Delta \mathbf{u}_{ref}^*)|} \right). \quad (3.13)$$

Sur chaque pas de chargement, nous ajoutons un champ de déplacement associé à un rapport de bruit r_{noise} variant de 0 à 50%. L'identification plastique est donc réalisée pour un jeu de paramètres élastiques identifiés à partir de données bruitées. L'erreur sur la détermination de ces paramètres élastiques sur lesquels se base l'identification plastique est donnée sur la figure 3.29. La figure 3.52 nous permet de constater que la distribution des erreurs sur les paramètres identifiés présente une allure similaire à la distribution obtenue en l'absence de bruit. Pour isoler l'influence du bruit de ce biais systématique constaté en l'absence de bruit, nous avons choisi de représenter sur la figure 3.53 les différences entre les valeurs identifiées pour des données bruitées et pour des données non bruitées. L'erreur associée au bruit imposé est distribuée aléatoirement dans l'espace, sa valeur moyenne est proche de zéro, et l'écart type augmente linéairement avec l'amplitude de bruit, comme nous avons déjà pu l'observer dans le cas élastique. Nous avons également, pour le rapport de bruit maximal, généré 10 champs de déplacements bruités associés chacun à un tirage de bruit appliqué aux données simulées par calcul direct. Cela a permis d'estimer des incertitudes sur l'identification des paramètres, représentées par des barres verticales sur la figure 3.53.

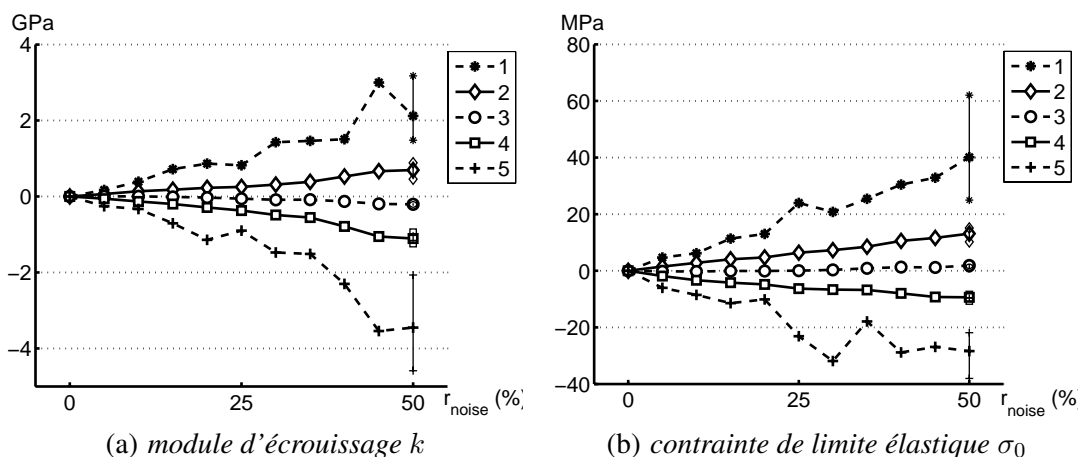


FIG. 3.53 – Erreurs associées à la détermination locale des paramètres plastiques : erreur maximale (1), erreur moyenne + écart type (2), erreur moyenne (3), erreur moyenne - écart type (4), erreur minimale (5)

3.3.3 Identification élastoplastique expérimentale

Les champs de déplacement expérimentaux ont été obtenus avec des techniques de corrélation d'images numériques. Une caméra CCD Camelia $8M^{TM}$ est associée à une optique macrophotographique de longueur focale égale à 200 mm pour mesurer avec une haute résolution une intensité lumineuse sur la surface de l'échantillon ($8 \cdot 10^6$ pixels et niveaux de gris échantillonnés sur 12 bits). Une table 3 rotations permet de disposer la caméra perpendiculairement à la surface de l'échantillon et celle-ci est maintenue fixe pendant l'essai.

3.3.3.1 Présentation de l'essai réalisé

Nous avons choisi de réaliser une expérimentation reproduisant la simulation numérique du bicouche. L'éprouvette plate de type "dog-bone" est usinée dans une plaque d'épaisseur 2.5 mm d'un acier Dual Phase DP60 fourni par Arcelor. Le contraste de comportement est ici virtuellement généré par une hétérogénéité de la structure pour laquelle nous avons fait varier l'épaisseur : l'épaisseur de la zone pour laquelle $x \in [-28 \text{ mm}, 0]$ a été réduite de façon symétrique à 0.8 mm (cf. figure 3.54).

L'épaisseur de l'éprouvette est supposée être constante dans le plan d'observation par la procédure d'identification (*i.e.* 0.8 mm). Mais les variations d'épaisseur engendrent des variations de rigidité de structure, qui seront interprétées ici comme des hétérogénéités matérielles. Nous espérons alors identifier les propriétés de référence sur la partie fine de l'éprouvette, et des propriétés d'un matériau plus rigide sur la partie épaisse de l'éprouvette.

Le domaine identifié Ω est de forme carrée (20 mm \times 20 mm), centré sur l'éprouvette et maillé par 10×10 éléments carrés. Nous supposons ici un état de contrainte plane, négligeant les effets hors plan dus à la discontinuité d'épaisseur. Naturellement, les effets triaxiaux à proximité de l'interface vont affecter l'identification des paramètres du modèle.

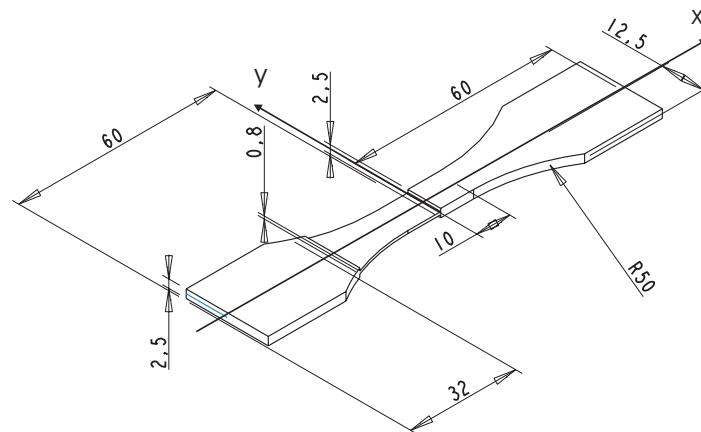


FIG. 3.54 – Géométrie de l'éprouvette (dimensions en mm)

Un essai préalable sur une éprouvette constituée du même acier, possédant une géométrie identique mais avec une épaisseur constante de 2.5 mm, a été réalisé pour obtenir les propriétés élasto-plastiques de référence du matériau. Le diagramme contrainte-déformation est représenté sur la figure 3.55. La première partie linéaire de ce diagramme permet d'identifier les paramètres élastiques de référence ($E = 207$ GPa, $\nu = 0.27$). À partir de ce diagramme nous obtenons également les paramètres suivant du modèle élastoplastique : $k = 5$ GPa, $\sigma_0 = 370$ MPa. Sur ce matériau, la réponse au début de l'écrouissage est relativement non-linéaire, et les valeurs des paramètres plastiques associés à un modèle à écrouissage cinématique linéaire sont très dépendantes des niveaux de déformation pour lesquels l'identification est réalisée. Pour cette raison nous avons localisé sur la figure 3.55 les trois niveaux de déformation utilisés pour déterminer les paramètres plastiques de référence.

L'identification locale a été ensuite réalisée sur l'éprouvette pour trois niveaux de déformation compatibles avec ceux utilisés pour la détermination des paramètres de référence.

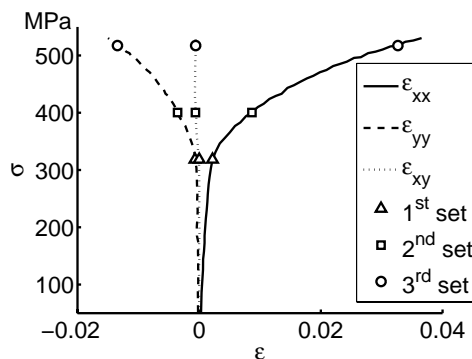


FIG. 3.55 – Diagramme contrainte-déformation pour un essai de traction simple sur un acier DP60

Les déplacements mesurés par corrélation d'images numériques (CIN) sont ensuite filtrés en utilisant la procédure décrite au paragraphe 1.1.4. L'efficacité de ce filtrage appliqué à cette situation expérimentale est présentée sur la figure 3.56 en termes de résidu sur la composante de traction du déplacement (U_x) associé au premier pas de chargement.

L'histogramme de filtrage, représenté sur la figure 3.56c est relatif au résidu de filtrage, défini

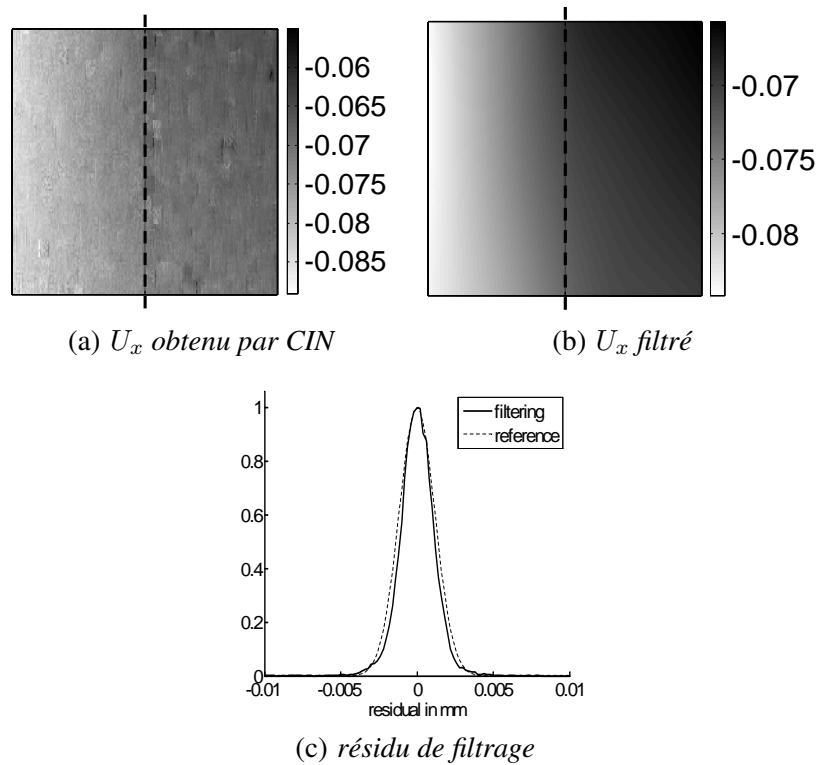


FIG. 3.56 – Filtrage du déplacement U_x obtenu par CIN

comme la différence entre déplacement mesuré et déplacement filtré. Nous avons représenté sur cette figure un histogramme gaussien de référence en trait pointillé, obtenu pour l'erreur moyenne et l'écart type de l'histogramme de filtrage. Les deux courbes coïncident bien l'une avec l'autre, et de plus l'histogramme de filtrage est bien centré autour de zéro, ce qui correspond à une erreur systématique de filtrage négligeable. L'écart type est de 1.2×10^{-3} mm, c'est à dire 6% de l'amplitude du déplacement. En apparence, un bruit gaussien a donc été retiré. Le rapport signal sur bruit augmente ensuite pour les pas de chargement suivants. Cela permet d'augurer que l'identification sera plus précise pour les paramètres plastiques que pour les paramètres élastiques.

3.3.3.2 Résultats de l'identification

Les résultats de l'identification des paramètres élastiques sont présentés sur la figure 3.57. L'interface entre la partie fine et la partie épaisse est représentée par un trait pointillé vertical divisant le domaine Ω en deux sous-domaines d'égale surface. Le maillage de la procédure d'identification a été ajusté afin de correspondre le plus précisément possible avec l'interface. Soit Ω_1 la partie gauche de Ω correspondant à la partie fine de l'éprouvette, et Ω_2 la partie plus épaisse située à droite de Ω .

Naturellement Ω_2 est faiblement déformée, les valeurs identifiées sur les quatre dernières colonnes de droite du maillage sont donc substituées (en appliquant la procédure de substitution détaillée dans le paragraphe 2.2.1.2). Les valeurs non identifiées ont été substituées par les coefficients homogènes identifiés sur Ω_2 .

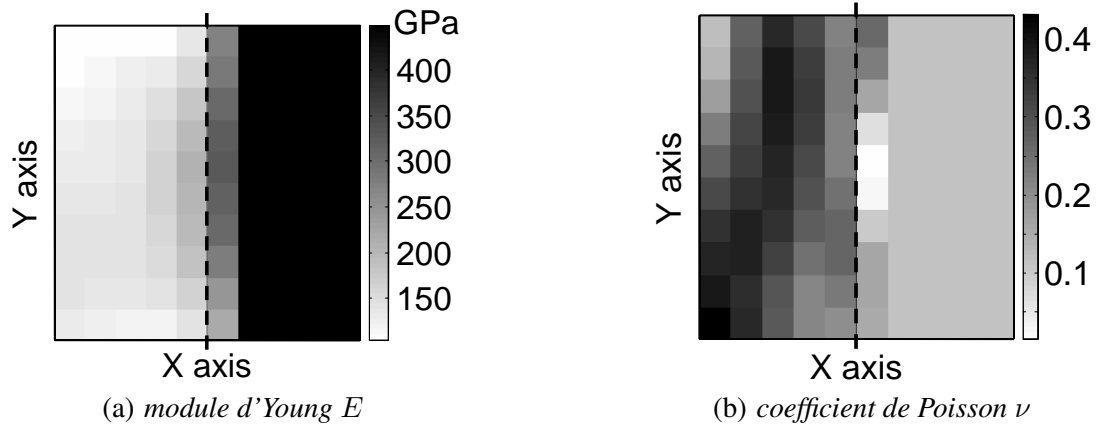
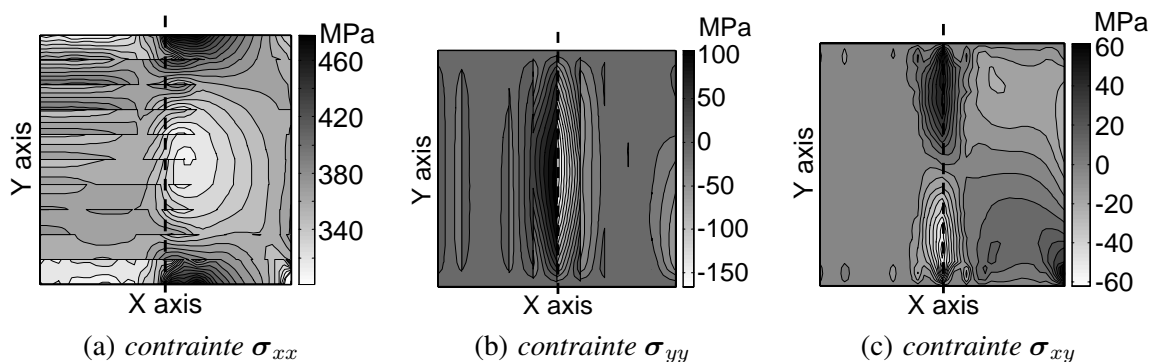


FIG. 3.57 – Propriétés élastiques identifiées

Concernant le module de Young E , les valeurs obtenues sur Ω_1 sont centrées autour de 150 GPa, ce qui est plus faible que les valeurs de référence obtenues lors de l'essai de traction simple de référence. Le premier pas est supposé être élastique, mais la déformation moyenne sur Ω_1 est ici presque deux fois supérieure à la valeur associée à la détermination des coefficients élastiques de référence. Il est fortement possible que le matériau ait très légèrement plastifié au premier pas. Dans cette zone, les coefficients identifiés sont faiblement dispersés et le module d'Young croît à proximité de l'interface. La première colonne de Ω_2 limitrophe de l'interface a été identifiée localement. Le module moyen pour cette colonne est 290 GPa, ce qui se situe entre la valeur attendue pour Ω_1 (207 GPa) et la valeur attendue pour Ω_2 (647 GPa, d'après la variation des épaisseurs de l'éprouvette).

Pour le coefficient de Poisson ν , les résultats sont plus dispersés. Néanmoins, la valeur moyenne identifiée sur le domaine Ω_1 (0.3) correspond bien à la valeur de référence (0.27). Sur les quatre dernières colonnes de Ω_2 , la valeur de substitution vaut 0.11, mais cette erreur peut s'expliquer par la composante de traction qui est très faible devant le bruit dans cette partie épaisse de l'éprouvette.

FIG. 3.58 – Composantes de la contrainte totale σ_n identifiée au deuxième pas

Les distributions de contraintes présentées sur la figure 3.58 sont obtenues pour le pas plastique $n = 2$, et correspondent au deuxième niveaux de déformation. La composante de traction de la déformation présente une valeur maximale calculée à environ 2%. Les champs de contrainte obtenus pour cette étude expérimentale sont très similaires à ceux obtenus lors de la simulation numérique.

En particulier, les composantes σ_{yy} et σ_{xy} sont localisées sur l'interface, et leurs évolutions spatiales sont réalistes. Les fortes concentrations de la composante σ_{xx} sont localisées aux deux extrémités de l'interface, tout comme le champ qui a été simulé (cf. figure 3.49).

Du fait de l'interpolation particulière des contraintes, σ_{xx} et σ_{yy} sont discontinues suivant les axes y et x , respectivement. Les principales discontinuités apparaissent lorsque la variation des propriétés matérielles d'un élément à l'autre est élevée.

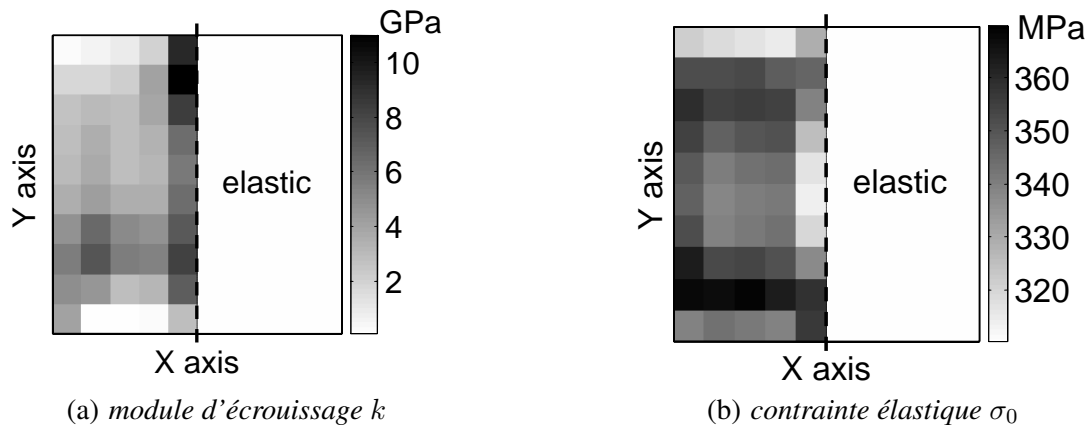


FIG. 3.59 – Identified plastic properties

Les distributions des propriétés plastiques sont représentées sur la figure 3.59. Ici, la forme de l'interface entre la zone plastique et la zone élastique coïncide avec le maillage utilisé par la procédure d'identification, et l'interface est parfaitement localisée. L'identification de la contrainte de limite élastique σ_0 donne des résultats très satisfaisants centrés autour d'une valeur moyenne de 340 MPa ce qui est inférieur de 8% à la valeur de référence. Le champ obtenu est presque symétrique par rapport à l'axe (Ox), cela est dû à la symétrie du champ de contrainte.

Le module d'érouissage k identifié est plus élevé que le module de référence à proximité de l'interface, où sa valeur moyenne est 8 GPa. Cela peut être dû au filtrage spatial, qui tend à homogénéiser les propriétés identifiées, ou encore aux effets triaxiaux au voisinage de l'interface. Les quelques éléments pour lesquels k est très faible sont les éléments où la contrainte est à peine supérieure à la contrainte de limite élastique (cf. figure 3.58). Dans ce cas, l'énergie de déformation plastique est trop faible pour permettre une identification précise des propriétés plastiques. partout ailleurs, le module k est relativement homogène et la valeur moyenne de 4 GPa correspond à la valeur de référence.

3.3.3.3 Conclusion sur l'identification expérimentale

Les résultats de cette identification sont encourageants. Cette expérience, pour laquelle les champs de déformation sont hétérogènes et pour laquelle la plasticité se développe de façon hétérogène, le contraste entre deux zones de rigidités apparentes différentes a été clairement identifié. De plus, la qualité de cette identification a été confirmée par la bonne concordance entre les propriétés identifiées localement sur l'éprouvette à deux épaisseurs, et les propriétés homogènes obtenues pour l'essai de traction de référence.

Conclusion et perspectives

Une des principales motivations du travail présenté ici a été l'identification de propriétés de matériaux élastoplastiques hétérogènes à partir de mesures de champs. Une méthode d'identification a donc été développée afin d'étendre une méthode initialement introduite dans [Geymonat *et al.*, 2002] pour l'identification de propriétés élastiques. Cette méthode variationnelle se base sur l'erreur en relation de comportement.

Les mesures cinématiques par corrélation d'images numériques que nous utilisons permettent d'accéder à un champ de déplacement plan. La méthode d'identification a donc été implémentée pour des problèmes plans, pour lesquels l'hypothèse de contrainte plane s'applique. Les propriétés matérielles sont alors identifiées dans un domaine plan, et non dans un volume complet, ce qui pourrait être une perspective intéressante pour cette méthode. Pour traiter ce problème, il faudrait par exemple mesurer des champs dans le volume complet. De telles mesures sont rendues possibles par des techniques de tomographie qui commencent à être utilisées lors d'essais mécaniques mais restent délicates à mettre en œuvre.

Pour pouvoir définir une erreur en relation de comportement élastoplastique, une description incrémentale de la plasticité a été nécessaire. Cette description est retenue par de nombreux codes de calcul par éléments finis qui traitent la plasticité avec un algorithme de retour radial. Cette étude a permis d'écrire des tenseurs sécants et tangents associés à un modèle de Prager. La fonctionnelle d'erreur en relation de comportement associée à ces tenseurs exprime alors de façon variationnelle le problème élastoplastique sur chaque incrément de chargement considéré. La minimisation de cette fonctionnelle séparément convexe se fait par une méthode de relaxation et s'appuie sur un calcul de type éléments finis dont la particularité est le recours à des fonctions d'Airy permettant au champ de contrainte de vérifier les équations d'équilibres sur chaque élément contraint. Pour l'instant, seuls des maillages réguliers et rectangulaires ont été considérés, mais une perspective intéressante consisterait à étendre l'implémentation éléments finis de cette méthode à des situations planes plus générales.

La principale difficulté de ce travail fût l'élaboration d'une procédure permettant l'identification des paramètres plastiques, l'identification simultanée de ces paramètres sur un seul pas de chargement plastique étant, dans notre cas, impossible. Cela peut sembler surprenant au premier abord car un seul pas de chargement élastique permet d'identifier trois valeurs propres élastiques tandis que dans notre

approche, un pas plastique est nécessaire pour chaque paramètre plastique à identifier. La dépendance des paramètres rendant l'identification simultanée impossible a été démontrée pour le problème élastoplastique sécant, et constatée dans des cas particuliers en ce qui concerne le problème tangent. Il serait alors intéressant de démontrer la non-identifiabilité simultanée des deux paramètres plastiques sur un unique incrément de chargement plastique pour lequel on écrit un problème tangent.

Un vaste champ d'application en rapport avec l'identification de paramètres de lois de comportement a été abordé dans ce mémoire. Par un heureux concours de circonstances cette thèse a débuté peu après la création d'un groupe de recherche GdR 2519 "Mesures de champs et identification en mécanique des solides". Une partie des applications qui ont été abordées ici ont donc été directement inspirées par les travaux du groupe de travail "identification" de ce GdR, dont un des objectifs a été la comparaison de différentes méthodes d'identification entre elles, pour l'identification de lois de comportement élastiques linéaires isotropes ou orthotropes. L'autre partie des application traitée de façon plus abondante dans ce mémoire aborde des situation plus spécifiques à notre méthode, dont la première particularité est de pouvoir identifier des comportements de matériaux hétérogènes, la seconde étant l'identification de lois de comportement élastoplastiques.

Pour pouvoir identifier des paramètres de lois élastoplastiques, l'identification préalable des paramètres élastiques est nécessaire. Pour cette raison fondatrice, l'identification de paramètres élastiques hétérogènes occupe une part importante du mémoire, et a permis de dégager des aspects intéressants de l'identification locale. Par exemple il a été possible de constater les effets de l'adéquation entre la maillage de l'identification et les contours des hétérogénéités matérielles dans le cas de l'essai sur le bicouche. Une autre application pour laquelle le maillage de l'identification n'est pas compatible avec les contours matériels est l'identification de propriétés élastiques en présence d'une inclusion circulaire. Pour cette application purement numérique des propriétés élastiques sont identifiées sur 40×40 éléments soit 3200 paramètres élastiques identifiés sur un unique pas de chargement.

Un autre aspect intéressant de l'identification locale est la sensibilité aux contrastes de propriétés matérielles. En toute logique les erreurs lors de l'identification augmentent avec le contraste. Le problème n'est pas l'augmentation du contraste en elle même mais l'augmentation des gradients sur les champs de déformation et de contrainte qui doivent être approximés avec la plus grande fidélité possible par la méthode d'identification. Pour limiter l'influence de ce type d'erreurs, il serait envisageable, tout comme cela est fait pour des calculs directs, de procéder à des remaillages automatiques ou manuels.

L'étude de l'identification locale a également fait ressortir que l'essai mécanique utilisé pour l'identification doit être compatible avec les paramètres que l'on souhaite identifier. Bien que cela puisse sembler être une évidence, de nouvelles difficultés apparaissent lorsque l'on passe de situations où l'on suppose l'homogénéité des paramètres à des situations hétérogènes. Dans des situation hétérogènes il peut arriver que quelques éléments ne soient pas assez déformés pour permettre l'identification, mais la procédure de remplacement permet de contourner cette difficulté comme cela a été présenté avec l'essai brésilien.

La procédure d'identification élastique a également permis d'établir des bilans d'énergie en fatigue à grand nombre de cycles. Des champs de contrainte sont identifiés au cours d'un cycle mécanique afin d'estimer une énergie mécanique localement fournie au cours d'un cycle de fatigue. L'originalité de cette méthode est de considérer les faibles variations d'un tenseur de comportement sécant, principalement dûes à des mécanismes de microplasticité, comme des faibles variation d'un

tenseur élastique. La détermination du tenseur élastique se fait en chaque pas de chargement au cours du cycle mécanique et localement puisque nous ne faisons pas d'hypothèses sur l'homogénéité du comportement. Nous essayons ainsi de décrire le comportement avec la plus grande finesse en temps comme dans l'espace. La méthode permet d'identifier des champs de contraintes associés à un matériau hétérogène. Une première étude mettant en jeu des bilans énergétiques de ce type en fatigue a été publiée au cours de cette thèse [Chrysochoos *et al.*, 2007].

Bien qu'étant constituées d'une même nuance d'acier, les éprouvettes de fatigue montrent dès le début des essais de fatigue une dissipation et une réponse mécanique hétérogène. Un état initial hétérogène peut expliquer les phénomènes de localisation et l'apparition de fissures lors de l'essai mécanique de fatigue. Sans chercher à caractériser tous les mécanismes responsables de l'hétérogénéité de la réponse de l'éprouvette, la méthode d'identification permet toutefois de prendre en compte ces irrégularités dans l'estimation de la puissance mécanique fournie localement. Cette estimation a pu être comparée à l'estimation de la puissance dissipée au travers d'un bilan énergétique permettant d'accéder à l'énergie stockée par le matériau. Ces bilans énergétiques ont été menés pour quelques cycles isolés au cours de l'essai de fatigue, mais une des perspectives serait de réaliser ce type de bilan pour davantage de cycles d'un même essai, afin de caractériser l'évolution du matériau par des approches énergétiques. Il serait également intéressant de comparer l'énergie bloquée lors d'un essai de traction monotone jusqu'à rupture avec l'énergie bloquée jusqu'à rupture pour un essai de fatigue à grand nombre de cycles.

Des résultats sur l'identification élastoplastique variés ont été présentés et ont fait l'objet d'une publication [Latourte *et al.*, 2007]. Des identifications à partir de données obtenues numériquement ont été présentées et ont permis de caractériser la méthode. Nous nous sommes intéressés à un essai comportant une inclusion plastique, soulignant le fonctionnement de la détection de la plasticité, et à l'essai du bicouche élastique-élastoplastique. Ces essais académiques ont donné de bons résultats confirmant les tendances déjà observées dans des situations élastiques : les erreurs sur l'identification des paramètres de la loi de comportement sont souvent maximales là où la discrétisation par éléments finis de la méthode inverse ne permet pas de retranscrire assez finement dans l'espace les gradients sur les champs de contrainte ou sur le champ de déformation plastique. Une source d'erreur également importante vient des zones trop faiblement déformées qui perturbent l'identification.

Un essai expérimental a ensuite été traité de façon à reproduire le cas test du bicouche élastoplastique déjà caractérisé de façon numérique. Les résultats de l'identification expérimentale sont encourageants. L'identification expérimentale a pu être réalisée pour une discrétisation du domaine d'identification assez fine de 10×10 éléments et a permis d'identifier localement 220 coefficients (dont 100 coefficients plastiques) à partir de trois pas de chargement d'un unique essai.

Une extension intéressante de la méthode d'identification serait d'étendre l'identification élastoplastique à des lois d'écrouissage comportant davantage de paramètres comme par exemple des lois comportant un terme exponentiel rendant compte de la saturation du durcissement observée pour les aciers.

Une perspective ambitieuse serait de s'intéresser à la plasticité cristalline, la mise en oeuvre serait alors certainement difficile du fait de la complexité du comportement de la microstructure. Il serait par exemple possible, dans une étape préliminaire à l'identification, de déterminer par EBSD la cristallographie de l'échantillon. Le maillage utilisé pour l'identification pourrait dans ce cas s'appuyer sur le contour des grains mesurés. Pour cette approche plus microscopique, la zone observée serait

certainement petite par rapport à la taille de l'éprouvette ce qui implique une connaissance incomplète des conditions aux limites : la résultante des efforts extérieures n'étant connue que globalement. Peut être serait il alors nécessaire de recourir à deux mesures, une macroscopique pour déterminer les conditions aux limites de l'approche microscopique, grâce à l'estimation d'un champ de contrainte global, et une mesure plus microscopique pour l'identification de propriétés hétérogènes à l'échelle des grains.

Bibliographie

- Andrieux S. & Bui H. D. « Écart à la réciprocité et identification de fissures en thermoélasticité isotrope transitoire ». *C. R. Mécanique*, 334 :225–229, 2006.
- Andrieux S., Abda A. B., & Bui H. D. « Sur l'identification de fissures planes via le concept d'écart à la réciprocité en élasticité ». *C. R. Acad. Sci.*, 324 :1431–1438, 1997.
- Andrieux S., Abda A. B., & Baranger T. N. « Data completion via an energy error functional ». *C. R. Mécanique*, 333 :171–177, 2005.
- Araujo A., Soares C. M., de Freitas M. M., Pedersen P., & Herskovits J. « Combined Numerical-Experimental Model for the Identification of Mechanical Properties of Laminated Structures ». *Composite Structures*, 50 :363–372, 2000.
- Avril S., Grédiac M., & Pierron F. « Sensitivity of the virtual fields method to noisy data ». *Computational Mechanics*, V34(6) :439–452, Novembre 2004a.
- Avril S., Pierron F., & Grédiac M. « Evaluation de l'identifiabilité d'une loi de comportement anisotrope par la méthode des champs virtuels ». *Proceedings Colloque Photomécanique*, pages 57–64, 2004b.
- Badia A. E. & Dong T. H. « Some remarks on the problem of source identification from boundary measurements ». *Inverse Problems*, 14 :883–891, 1998.
- Bastawros A. & Kim K.-S. « Experimental analysis of near-crack-tip plastic flow and deformation characteristics (I) : Polycrystalline aluminium ». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :67–98, 2000.
- Batoz J.-L. & Dhatt G. *Modélisation des structures par éléments finis, volume 1. Solides élastiques*. . 1990.
- Berthel B., Wattrisse B., Chrysochoos A., & Galtier A. « Thermographic Analysis of Fatigue Dissipation Properties of Steel Sheets ». *Strain*, 43(3) :273–279, 2007.

- Bonnet M. « Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 :John H. Argyris Memorial Issue. Part I, July 2006.
- Bonnet M. « Quelques contributions aux méthodes d'équations intégrales et à l'étude de problèmes inverses en mécanique des solides ». Mémoire d'HDR, Université Paris VI, 1995.
- Bonnet M. & Constantinescu A. « Inverse problems in elasticity ». *Inverse Problems*, 21(2) :R1–R50, 2005. ISSN 0266-5611.
- Bonnet M., Burczynski T., & Nowakowski M. « Sensitivity analysis for shape perturbation of cavity or internal crack using BIE and adjoint variable approach ». *International Journal of Solids and Structures*, 39 :2365–2385, 2001.
- Bonnet M., Bui H. D., & Constantinescu A. « Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité ». *Mécanique & Industries*, 4(6) :687–697, 2003.
- Borcea L. « Topical review : Electrical impedance tomography ». *Inverse Problems*, 18 :R99–R136, 2002.
- Boulanger T., Chrysochoos A., Mabru C., & Galtier A. « Calorimetric analysis of dissipative and thermoelastic effects associated with the fatigue behavior of steels ». *International Journal of Fatigue*, 26(3) :221–229, Mars 2004.
- Bruck H., Neill S. M., Sutton M., & Peters W. « Digital image correlation using Newton-Raphson method of partial differential correction ». *Journal of Experimental Mechanics*, pages 261–267, 1989.
- Buffière J. Y., Maire E., Cloetens P., Lormand G., & Fougères R. « Characterization of internal damage in a MMCp using X-ray synchrotron phase contrast microtomography ». *Acta Materialia*, 47(5) : 1613–1625, Mars 1999.
- Buffière J.-Y., Savelli S., Jouneau P. H., Maire E., & Fougères R. « Experimental study of porosity and its relation to fatigue mechanisms of model Al-Si7-Mg0.3 cast Al alloys ». *Materials Science and Engineering A*, 316(1-2) :115–126, Novembre 2001.
- Buffière J.-Y., Proudhon H., Ferrié E., Ludwig W., Maire E., & Cloetens P. « Three dimensional imaging of damage in structural materials using high resolution micro-tomography ». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B : Beam Interactions with Materials and Atoms*, 238(1-4) :75–82, Août 2005.
- Bui H. D., Constantinescu A., & Maigre H. « Numerical identification of linear cracks in 2D elastodynamics using the instantaneous reciprocity gap ». *Inverse Problems*, 20 :993–1001, 2002.
- Bui H. *Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux*. 1993.
- Calderon A. P. « ON AN INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM ». In Meyer W. H. & Raupp M. A., editors, *Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physics, Rio de Janeiro*, pages 65–73. Sociedade Brasileira de Matematica, 1980.

- Calloch S., Dureisseix D., & Hild F. « Identification de Modèles de Comportement de Matériaux Solides : Utilisation D'essais et Calculs ». *Technologies et Formations*, 2002.
- Chalal H. *Identification numérique et expérimentale de lois de comportement non-linéaires de matériaux composites à partir de mesures de champs cinématiques*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Centre de Châlons en Champagne, 2005.
- Chalal H., Meraghni F., Pierron F., & Grédiac M. « Direct Identification of the Damage of Composite Materials Using the Virtual Fields Method ». *Composites : Part A* 35, pages 841–848, 2004.
- Chevalier L., Calloch S., Hild F., & Marco Y. « Digital Image Correlation Used to Analyze the Multiaxial Behavior of Rubber-Liked Materials ». *Euro. J. Mech. A/Solids*, 20 :169–187, 2001.
- Chrysochoos A., Berthel B., Latourte F., Pagano S., Wattrisse B., & Weber B. « Local energy approach to steel fatigue ». *Strain*, 2007.
- Cimetière A., Delvare F., Jaoua M., & Pons F. « Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization ». *Inverse Problems*, 17 :553–570, 2001.
- Cimetière A., Delvare F., Jaoua M., & Pons F. « An inversion method for harmonic functions reconstruction ». *Int. J. Therm. Sci.*, 41 :509–516, 2002.
- Claire D., Hild F., & Roux S. « Identification of damage fields using kinematic measurements ». *Comptes Rendus Mécanique*, 330(11) :729–734, Novembre 2002.
- Claire D., Roux S., & Hild F. « Identification de conductivités thermiques et de propriétés élastiques locales par analyse de champs Identification of thermal conductivities and elastic properties by field analyses ». *Mécanique & Industries*, 4(6) :655–665, 2003.
- Constantinescu A. *Sur l'identification des modules élastiques*. Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, 1994.
- Cuitino A. & Ortiz M. « Three-dimensional crack-tip fields in four-point-bending copper single-crystal specimens ». *J. Mech. Phys. Solids*, 44 :863–&, 1996.
- Dadkhah M. S. & Kobayashi A. S. « Further studies on the HRR field of a moving crack, an experimental analysis ». *International Journal of Plasticity*, 6 :635–650, 1990.
- Davies A. J., Dixon L. C. W., Roy R., & van der Zee P. « Regularisation and the inverse problem ». *Advances in Engineering Software*, 30(8) :557–562, Août 1999.
- Deng X. & Rosakis A. J. « Negative plastic flow and its prevention in elasto-plastic finite element computation ». *Finite Elements in Analysis and Design*, 7(2) :181–191, Novembre 1990.
- Dourado N. M., Xavier J. C., & Morais J. L. *On the Identification of Linear Elastic Mechanical Behaviour of Orthotropic Materials Using Evolutionary Algorithms*. Springer Netherlands, 2004.
- Feissel P. & Allix O. « Modified constitutive relation error identification strategy for transient dynamics with corrupted data : The elastic case ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(13-16) :1968–1983, Mars 2007.

- Gavrus A., Massoni E., & Chenot J. L. « An inverse analysis using a finite element model for identification of rheological parameters ». *Journal of Materials Processing Technology*, 60(1-4) :447–454, Juin 1996.
- Geers M. G. D., de Borst R., & Peijs T. « Mixed numerical-experimental identification of non-local characteristics of random-fibre-reinforced composites ». *Composites Sciences and Technology*, 59 : 1569–1578, 1999.
- Germain P. *Mécanique*, volume 1 of *Cours École Polytechnique*. Ellipses, 1986.
- Germain P., Suquet P., & Nguyen Q. S. « Continuum thermodynamics ». *ASME Transactions Series E Journal of Applied Mechanics*, 50 :1010–1020, Decembre 1983.
- Germaneau A., Doumalin P., & Dupré J. C. « Full 3D Measurement of Strain Field by Scattered Light for Analysis of Structures ». *Experimental Mechanics*, 47(4) :523–532, Août 2007.
- Geymonat G. & Pagano S. « Identification of Mechanical Properties by Displacement Field Measurement : A Variational Approach ». *Meccanica*, 38 :535–545, 2003.
- Geymonat G., Hild F., & Pagano S. « Identification of Elastic Parameters by Displacement Field Measurement ». *C.R. Mécanique*, 330 :403–408, 2002.
- Grédiac M. « The use of full-field measurement methods in composite material characterization : interest and limitations ». *Composites : Part A*, 35 :751–761, 2004.
- Grédiac M. « Principe des travaux virtuels et identification ». *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 309 :1–5, 1989.
- Grédiac M. & Pierron F. « Applying the Virtual Fields Method to the identification of elasto-plastic constitutive parameters ». *International Journal of Plasticity*, 22(4) :602–627, Avril 2006.
- Grédiac M., Toussaint E., & Pierron F. « L'identification de Propriétés Mécaniques de Matériaux Avec la Méthode Des Champs Virtuels, Une Alternative Au Recalage Par Éléments Finis ». *C.R. Mécanique*, 330 :107–112, 2002a.
- Grédiac M., Toussaint E., & Pierron F. « Principe de la methode des champs virtuels avec champs speciauxPrinciple of the virtual fields method with special virtual fields ». *Mécanique & Industries*, 4 :679–686, 2003a.
- Grédiac M., Toussaint E., & Pierron F. « Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 1–Principle and definition ». *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) :2691–2705, Mai 2002b.
- Grédiac M., Toussaint E., & Pierron F. « Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 2–Application to in-plane properties ». *International Journal of Solids and Structures*, 39(10) :2707–2730, Mai 2002c.
- Grédiac M., Toussaint E., & Pierron F. « Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method. 3. Application to the bending rigidities of anisotropic plates ». *International Journal of Solids and Structures*, 40(10) :2401–2419, Mai 2003b.
- Guzina B. B., Fata S. N., & Bonnet M. « On the stress-wave imaging of cavities in a semi-infinite solid ». *International Journal of Solid and Structures*, 40 :1505–1523, 2003.

- Halphen N. & Nguyen Q. S. « Sur les matériaux standards généralisés ». *J. Mech. Theor.*, 14(39), 1975.
- Hendriks F., Brokken D., Oomens C., Bader D., & Baaijens F. « The relative contributions of different skin layers to the mechanical behavior of human skin in vivo using suction experiments ». *Medical Engineering & Physics*, 28(3) :259–266, Avril 2006.
- Hendriks M. *Identification of the mechanical behavior of solid materials*. Thèse de Doctorat, Eindhoven University of Technology, Eindhoven, The Netherlands, 1991.
- Hild F. & Roux S. « Digital Image Correlation : from Displacement Measurement to Identification of Elastic Properties - a Review ». *Strain*, 42(2) :69–80, 2006a.
- Hild F. & Roux S. « Measuring stress intensity factors with a camera : Integrated digital image correlation (I-DIC) ». *Comptes Rendus Mecanique*, 334(1) :8–12, Janvier 2006b.
- Hill R. « A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, ». *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 6 :236–249, 1958.
- Hisada T. « Recent Progress in Nonlinear FEM-Based Sensitivity Analysis ». *JSME international journal. Series A, Solid mechanics and material engineering*, 38(3) :301–310, 1995. ISSN 09148809.
- Hoc T., Crepin J., Gelebart L., & Zaoui A. « A procedure for identifying the plastic behavior of single crystals from the local response of polycrystals ». *Acta Materialia*, 51(18) :5477–5488, Octobre 2003.
- Hériprié E., Dexet M., Crepin J., Gelebart L., Roos A., Bornert M., & Caldemaison D. « Coupling between experimental measurements and polycrystal finite element calculations for micromechanical study of metallic materials ». *International Journal of Plasticity*, In Press, Corrected Proof :–.
- Huang L., Sun X., Liu Y., & Cen Z. « Parameter identification for two-dimensional orthotropic material bodies by the boundary element method ». *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28(2) :109–121, Février 2004.
- Idier J. *Approche bayésienne pour les problèmes inverses*. Hermes Science, 2001.
- Ikehata M. « An inverse problem for the plate in the Love-Kirchhoff theory ». *SIAM J. APPL. MATH.*, 53 :942–970, 1993.
- Kajberg J. & Lindkvist G. « Characterisation of materials subjected to large strains by inverse modelling based on in-plane displacement fields ». *International Journal of Solids and Structures*, 41 (13) :3439–3459, Juin 2004.
- Kang B. S., Kobayashi A. S., & Prost D. « Stable crack growth in aluminium tensile specimen ». *Experimental Mechanics*, pages 234–245, 1987.
- Khalfallah A., Bel Hadj Salah H., & Dogui A. « Anisotropic parameter identification using inhomogeneous tensile test ». *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(6) :927–942, 2002.
- Kim Y. & Nelson P. A. « Optimal regularisation for acoustic source reconstruction by inverse methods ». *Journal of Sound and Vibration*, 275(3-5) :463–487, Août 2004.

- Knockaert R., Chastel Y., & Massoni E. « Experimental and numerical determination of texture evolution during deep drawing tests ». *Journal of Materials Processing Technology*, 110(3) :300–311, Avril 2001.
- Koc P. & Stok B. « Computer-aided identification of the yield curve of a sheet metal after onset of necking ». *Computational Materials Science*, 31(1-2) :155–168, Septembre 2004.
- Kohn R. & McKenney A. « Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography ». *Inverse Problems*, 6 :389–414, 1990.
- Kohn R. & Vogelius M. « Determining conductivity by boundary measurement ». *Commun. Pure Appl. Math.*, 37 :289–298, 1984.
- Kohn R. & Vogelius M. « Determining conductivity by boundary measurement : II. Interior results ». *Commun. Pure Appl. Math.*, 38 :643–667, 1985.
- Kohn R. & Lowe B. « A variational method for parameter identification ». *Math. Modelling and Numer. Anal.*, 22 :119–158, 1988.
- Ladevèze P. & Leguillon D. « Error estimates procedures in the finite element method and applications ». *SIAM J. Numer. Anal.*, 20(3), 1983.
- Ladevèze P. & Moës N. « Adaptive control for finite element analysis in plasticity ». *Computers & Structures*, 73(1-5) :45–60, Octobre 1999.
- Ladevèze P., Nedjar D., & Reynier M. « Updating of finite element models using vibration tests ». *AIAA J.*, 32 :1485–1491, 1994.
- Ladevèze P., Moës N., & Douchin B. « Constitutive relation error estimators for (visco)plastic finite element analysis with softening ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176 (1-4) :247–264, Juillet 1999.
- Laraba-Abbes F., Jenny P., & Piques R. « A new ‘tailor-made’ methodology for the mechanical behaviour analysis of rubber-like materials : I. Kinematics measurements using a digital speckle extensometry ». *Polymer*, 44(3) :807–820, 2003a.
- Laraba-Abbes F., Jenny P., & Piques R. « A new ‘Tailor-made’ methodology for the mechanical behaviour analysis of rubber-like materials : II. Application to the hyperelastic behaviour characterization of a carbon-black filled natural rubber vulcanizate ». *Polymer*, 44(3) :821–840, 2003b.
- Latourte F., Chrysochoos A., Pagano S., & Wattrisse B. « Elastoplastic behavior identification for heterogeneous loadings and materials ». *Experimental Mechanics*, 313, Sp Iss : Inverse Problems ; Espinosa et al, 2007.
- Le Magorou L., Bos F., & Rouger F. « Identification of constitutive laws for wood-based panels by means of an inverse method ». *Composites Science and Technology*, 62(4) :591–596, Mars 2002.
- Le Magorou L., Bos F., & Rouger F. « Identification de lois de comportement élastique et viscoélastique par mesure de champs ». *Mécanique & Industries*, 4(6) :673–677, 2003.
- Lee J.-R., Molimard J., Vautrin A., & Surrel Y. « Diffraction grating interferometers for mechanical characterisations of advanced fabric laminates ». *Optics & Laser Technology*, 38(1) :51–66, Février 2006.

- Lin X., Kang Y. L., Qin Q., & Fu D. « Identification of Interfacial Parameters in a Particle Reinforced Metal Matrix Composite Al6061-10Al₂O₃ by Hybrid Method and Genetic Algorithm ». *Computational Materials Science*, 2004.
- Liu Y. L. & Fischer G. « In situ measurement of local strain in a metal matrix composite by the object grating technique ». *Scripta Materialia*, 36(10) :1187–1194, Mai 1997.
- Luo P., Chao Y., Sutton M., & Peters W. « Accurate measurement of three-dimensional deformations in deformable and rigid bodies using computer vision ». *Experimental Mechanics*, 33(2) :123–132, Juin 1993.
- Mahnken R. & Stein E. « A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136(3-4) :225–258, Septembre 1996.
- Maire E., Babout L., Buffière J. Y., & Fougères. R. « Recent results on 3D characterisation of microstructure and damage of metal matrix composites and a metallic foam using X-ray tomography ». *Materials Science and Engineering A*, 319-321 :216–219, Decembre 2001.
- Meuwissen M. H. H., Oomens C. W. J., Baaijens F. P. T., Petterson R., & Janssen J. D. « Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method ». *Journal of Materials Processing Technology*, 75(1-3) :204–211, Mars 1998.
- Milani A. & Nemes J. « An intelligent inverse method for characterization of textile reinforced thermoplastic composites using a hyperelastic constitutive model ». *Composites Science and Technology*, 64 :1565–1576, 2004.
- Molimard J. & Riche R. L. « Identification de Piézoviscosité En Lubrification ». *Mécanique & Industries*, 4 :645–653, 2003.
- Nielsen S. F., Poulsen H. F., Beckmann F., Thorning C., & Wert J. A. « Measurements of plastic displacement gradient components in three dimensions using marker particles and synchrotron X-ray absorption microtomography ». *Acta Materialia*, 51(8) :2407–2415, Mai 2003.
- Pannier Y. *Identification de paramètres élastoplastiques par des essais statiquement indéterminés : mise en oeuvre expérimentale et validation de la méthode des champs virtuels*. Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Centre de Châlons-en-Champagne, 2006.
- Pierron F. & Grédiac M. « Identification of the through-thickness moduli of thick composites from whole-field measurements using the Iosipescu fixture : theory and simulations ». *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(4) :309–318, Avril 2000.
- Réthoré J., Hild F., & Roux S. « Extended digital image correlation with crack shape optimization ». *Int. J. Numer. Methods Engrg.(in press)(doi : 10.1002/nme. 2070)*.
- Rikards R., Chate A., Steinchen W., Kessler A., & Bledzki A. K. « Method for identification of elastic properties of laminates based on experiment design ». *Composites : part B*, 30 :279–289, 1999.
- Salvo L., Cloetens P., Maire E., Zabler S., Blandin J. J., Buffière J. Y., Ludwig W., Boller E., Bellet D., & Josserond C. « X-ray micro-tomography an attractive characterisation technique in materials science ». *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section B : Beam Interactions with Materials and Atoms*, 200 :273–286, Janvier 2003.

- Santos J. A. D., Soares C. M., Soares C. M., & Maia N. « Structural Damage Identification : Influence of Model Incompleteness and Errors ». *Composite Structures*, 62 :303–313, 2003.
- Shield T. & Kim K. « Diffraction theory of optical interference moiré and a device for production of variable virtual reference gratings : A moiré microscope ». *Experimental Mechanics*, 31(2) : 126–134, Juin 1991.
- Simo J. & Hughes T. *Computational Inelasticity*. Springer-Verlag, 1998.
- Smigielski P. « Interférométrie de speckle ». *Techniques de l'Ingénieur*, R 6 331 :1–10, 2001.
- Soppa E., Doumalin P., Binkele P., Wiesendanger T., Bornert M., & Schmauder S. « Experimental and numerical characterisation of in-plane deformation in two-phase materials ». *Computational Materials Science*, 21(3) :261–275, Juillet 2001.
- Sutton M., Wolters W., Peters W., Ranson W., & McNeill S. « Determination of displacements using an improved digital correlation method ». *Image and Vision Computing*, 1(3) :133–139, Août 1983.
- Tarantola A. & Valette B. « Generalized Nonlinear Inverse Problems Solved Using the Least Squares Criterion ». *Reviews of Geophysics and Space Physics*, 20 :219–232, 1982.
- Thiery C. & Gerstenmayer J. « Tomographie à rayons X ». *Techniques de l'Ingénieur*, P 950 :1–24, 2002.
- Tikhonov A. N. & Arsenin V. Y. *Solutions to Ill-Posed Problems*. New York : Winston-Wiley, 1977.
- Tong W. « Detection of plastic deformation patterns in a binary aluminum alloy ». *Experimental Mechanics*, 37(4) :452–459, Decembre 1997.
- Wang Y. & Cuitino A. M. « Full-field measurements of heterogeneous deformation patterns on polymeric foams using digital image correlation ». *International Journal of Solids and Structures*, 39 (13-14) :3777–3796, 2002.
- Wattrisse B. *Etude Cinématique Des Phénomènes de Localisation Dans Des Aciers Par Intercorrélation D'images*. Thèse de Doctorat, Université de Montpellier2, 1999.
- Wissuchek D., Mackin T., De Graef M., Lucas G., & Evans A. « A simple method for measuring surface strains around cracks ». *Experimental Mechanics*, 36(2) :173–179, Juin 1996.
- Yang L. X., Steinchen W., Schuth M., & Kupfer G. « Precision measurement and nondestructive testing by means of digital phase shifting speckle pattern and speckle pattern shearing interferometry ». *Measurement*, 16(3) :149–160, Novembre 1995.
- Yang Y., Lin X., & Qin Q. « Inverse/Genetic Method and its Application in Identification of Mechanical Parameters of Interface in Composite ». *Composite Structures*, 66 :449–458, 2004.
- Yoshida F., Urabe M., Hino R., & Toropov V. V. « Inverse approach to identification of material parameters of cyclic elasto-plasticity for component layers of a bimetallic sheet ». *International Journal of Plasticity*, 19 :2149–2170, 2002.
- Zhong Z., Shi X., & Wong K. « Measurements of deformations and strains of a Si-epoxy-FR4 structure during thermal testing ». *NDT & E International*, 38(8) :719–725, Decembre 2005.