Simulation Numérique et Analyse Physique d'un Jet Propulsif Contrôlé par des Injections Radiales

Nicolas Chauvet

▶ **To cite this version:**

Nicolas Chauvet. Simulation Numérique et Analyse Physique d'un Jet Propulsif Contrôlé par des Injections Radiales. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université de Poitiers, 2007. Français. NNT : . tel-00218268

HAL Id: tel-00218268

https://theses.hal.science/tel-00218268

Submitted on 25 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Pour l'obtention du Grade de

Docteur de l'Université de Poitiers

Faculté des sciences fondamentales et appliquées
(Diplôme national - arrêté du 30 mars 1992)

Ecole doctorale : Sciences Pour l'Ingénieur & Aéronautique

Spécialité : Mécanique des Milieux Fluides

Présentée par :

Nicolas CHAUVET

SIMULATION NUMÉRIQUE ET ANALYSE PHYSIQUE D'UN JET PROPULSIF CONTRÔLÉ PAR DES INJECTIONS RADIALES

Directeur de thèse : Laurent JACQUIN
Co-directeur de thèse : Jean-Paul BONNET

Soutenue le 3 décembre 2007 devant la Commission d'Examen composée de :

JURY

C. BAILLY	Professeur, Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
M. DEVILLE	Professeur, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne	Rapporteur
J.-P. BONNET	Directeur de recherche CNRS, LEA, Poitiers	Examinateur
S. DECK	Ingénieur de recherche, ONERA, Châtillon	Examinateur
L. JACQUIN	Directeur de recherche, ONERA, Meudon	Examinateur
J.-P. ROSENBLUM	Ingénieur, Dassault-Aviation, Saint-Cloud	Examinateur

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du Département d'Aérodynamique Appliquée de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales grâce au financement de l'ONERA.

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus profonde gratitude à Monsieur Sébastien Deck qui m'a permis de travailler sur un sujet aussi passionnant, m'a encadré durant plus de trois ans et m'a soutenu jusqu'à la fin. Je lui suis reconnaissant pour tous ses enseignements, pour sa confiance, sa patience et sa grande gentillesse.

Je remercie vivement Monsieur Laurent Jacquin qui a dirigé ce travail pour m'avoir fait partager sa passion de la mécanique des fluides tout en m'accordant une grande liberté dans mes investigations.

Merci également à Monsieur Jean-Paul Bonnet d'avoir accepté de co-diriger cette thèse.

Je remercie tous les membres du jury de m'avoir fait l'honneur d'assister à ma soutenance, en particulier Messieurs Michel Deville et Christophe Bailly qui ont bien voulu être rapporteurs de ce travail. Je remercie également Monsieur Jean-Pierre Rosenblum pour son avis d'expert industriel.

Malgré les très longs moments de doute, il me semble maintenant que la thèse est passée vraiment très vite. Je souhaite donc remercier très chaleureusement toutes les personnes de l'unité Missiles-Hypersonique-Lanceurs, dirigée à mon arrivée par Monsieur Patrick Champigny, qui ont rendu mon quotidien si agréable. En particulier, je remercie infiniment Pascal Denis qui m'a gentiment accueilli dans son bureau, avec qui j'ai passé d'excellents moments de fous rires ou d'autres plus sérieux et qui savait aussi me remonter le moral et me faire relativiser. Merci à Philippe Duveau, notre nouveau chef d'unité, dont la compétence technique, la bonne humeur et le dynamisme m'ont toujours impressionné. Merci à lui ainsi qu'à Paulo d'Espiney pour les longues conversations de math, de méca flu, de natation... Merci à Eric Garnier pour ses précieux éclairements sur la LES. Merci à tous mes compagnons thésards, Franck, Julien, Mathieu, P-E, Simon, Manu, pour nos discussions scientifiques ou pas, pour la bonne ambiance, pour les pauses café ou craquage de plombs. Plus généralement, je remercie tous les ingénieurs, techniciens et stagiaires que j'ai eu le plaisir de côtoyer au DAAP, DAFE ou DSNA. En particulier, merci à Laurent Escande du BE et à Pascal Molton du DAFE pour leur collaboration et leur amabilité. Je remercie également Monsieur Jean Delery pour ses conseils éclairés.

Je souhaite aussi remercier mes professeurs de mécanique des milieux continus, des solides et des fluides, Messieurs Lionel Buthaud et Jean Coirier qui m'ont réellement donné goût à ces disciplines ainsi que Monsieur Jacques Borée qui a su éveiller ma curiosité pour la turbulence.

Merci à Florent, Charlotte, Mathieu, Aude, Thibault, Laure, Sandrine, Pascal, Camille, Nicolas, Christian, Emiliano... qui parvenaient à me faire oublier momentanément ma thèse et à m'aérer l'esprit. Merci Florent d'avoir toujours été là quand j'avais le moral dans les chaussettes mais aussi pour toutes nos virées improvisées dont je garderai un souvenir impérissable.

Enfin, j'embrasse très fort mes Parents à qui je dois tout et j'adresse ma dernière pensée à mon cher Grand-Père qui m'a transmis, j'en suis sûr, sa détermination pour aller jusqu'au bout.

Liste des publications associées à la thèse

Revues à comité de lecture

N. Chauvet, S. Deck and L. Jacquin, Shock Patterns in a Slightly Under-Expanded Sonic Jet Controlled by Radial Injections, Physics of Fluids, Vol. 19, 048104, April 2007.

N. Chauvet, S. Deck and L. Jacquin, Numerical Study of the Mixing Enhancement in a Supersonic Round Jet, AIAA J., Vol. 45, No. 7, pp. 1675-1687, July 2007.

N. Chauvet, S. Deck and L. Jacquin, Zonal Detached Eddy Simulation of a Controlled Propulsive Jet, AIAA J., Vol. 45, No. 10, pp. 2458-2473, October 2007.

Colloques avec actes et comité de lecture

P. Molton, L. Jacquin, **N. Chauvet** and S. Deck, Mixing Enhancement in Under-expanded Jet : Part I, 41$^{\text{ème}}$ Colloque d'Aérodynamique Appliquée, AAAF, 20-22 Mars 2006, Lyon, France.

N. Chauvet, S. Deck, L. Jacquin and P. Molton, Mixing Enhancement in Under-expanded Jet : Part II, 41$^{\text{ème}}$ Colloque d'Aérodynamique Appliquée, AAAF, 20-22 Mars 2006, Lyon, France.

N. Chauvet, S. Deck, L. Jacquin and P. Molton, Experimental-Numerical Investigation of Mixing Enhancement in Under-expanded Jet, AIAA Paper 2006-4975, 42$^{\text{nd}}$ AIAA/ASME/ SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, 9-12 Juillet 2006, Sacramento, Californie.

Table des matières

Nomenclature **v**

INTRODUCTION **1**

1 Modélisation des écoulements turbulents **9**
1.1 Les équations de Navier-Stokes d'un fluide compressible 10
1.2 Ecoulements turbulents et équations de Navier-Stokes filtrées 11
1.2.1 Les trois classes d'échelles d'un écoulement turbulent 11
1.2.2 Filtrage RANS 12
1.2.3 Filtrage LES 14
1.2.4 Equations de Navier-Stokes filtrées 17
1.3 Fermeture des équations du mouvement 20
1.3.1 Lois d'état et lois de comportement 20
1.3.2 RANS, modèle de Spalart-Allmaras 22
1.3.3 LES, modèle de Smagorinsky 23
1.3.4 L'approche couplée RANS/LES 24
1.3.5 DES, modèle de Spalart-Allmaras 26
1.3.6 La transition mode RANS/mode LES ou le problème de la zone grise . . 27
1.3.7 ZDES, modèle de Spalart-Allmaras 28
1.4 Nouvelle longueur caractéristique de maille Δ_ω 29
1.4.1 Motivation 29
1.4.2 Formulation 31
1.4.3 Discussion de la nouvelle definition pour les écoulements turbulents 32
1.5 La simulation numérique : outil d'investigation de la physique 32

2 Résultats expérimentaux et numériques **35**
2.1 Objectif du chapitre 35
2.2 Campagne d'essais menée par le DAFE 36
2.2.1 Description du dispositif expérimental 36
2.2.2 Présentation et discussion des résultats expérimentaux 38
2.3 Jet canonique perturbé par tabs solides et fluides 43
2.3.1 Tuyères simplifiées et analogie tabs fluides/tabs solides 43
2.3.2 Influence du maillage sur la structure de choc du jet 44
2.3.3 Action des tabs solides et fluides sur le jet canonique 45
2.4 Mise en oeuvre des simulations de la configuration MARCO 49
2.4.1 Description des différents cas simulés 49
2.4.2 Mise au point de la simulation RANS 51
2.4.3 Mise au point de la simulation ZDES 53
2.4.4 Procédures de calcul retenues pour les simulations RANS et ZDES finales 56
2.5 Validation des simulations numériques RANS et ZDES 62

2.5.1 La structure de choc à l'intérieur du jet . . . 62
2.5.2 Champs de vitesse . . . 66
2.5.3 Comparaison des pressions statiques et totales sur l'axe . . . 67
2.5.4 Comparaison des pressions totales dans des coupes transverses . . . 70
2.6 Analyse de la nouvelle longueur caractéristique de maille Δ_ω . . . 71
2.6.1 Influence du Δ_ω sur les cisaillements turbulents . . . 71
2.6.2 Comportement du modèle ZDES muni de Δ_ω . . . 72
2.6.3 Influence de la discrétisation azimutale . . . 76
2.6.4 Résultats des ZDES avec les autres Δ . . . 77
2.7 Conclusion sur les résultats expérimentaux et numériques . . . 79

3 Structure des ondes internes du jet 83
3.1 Objectif du chapitre . . . 83
3.2 Ondes isentropiques et ondes de choc en écoulement plan . . . 84
3.2.1 Ondes isentropiques dans un écoulement supersonique plan . . . 84
3.2.2 Ondes de choc dans un écoulement supersonique plan . . . 99
3.3 Structures compressibles des jets supersoniques non-adaptés . . . 111
3.3.1 Structures de choc d'un jet supersonique plan . . . 111
3.3.2 Structures de chocs d'un jet sonique axisymétrique . . . 117
3.3.3 Structures à disque de Mach dans les jets sous-détendus . . . 126
3.3.4 Influence des conditions à la surface du jet . . . 129
3.3.5 Discussion sur le choc en lentille des jets soniques faiblement sous-détendu 135
3.4 Analyse des structures d'ondes internes aux jets MARCO . . . 136
3.4.1 Theorie des caractéristiques 3D . . . 136
3.4.2 Théorie des caractéristiques dans un plan de symétrie . . . 139
3.4.3 Application aux jets MARCO sans et avec contrôle . . . 144
3.4.4 Analyse des ondes dans les plans de symétrie des jets de référence . . . 148
3.4.5 Analyse des ondes dans les plans de symétrie des jets contrôlés . . . 149
3.5 Discussion du mélange par interaction des chocs internes . . . 151
3.6 Conclusion sur la structure des ondes internes . . . 151

4 Brassage tourbillonnaire : aspect stationnaire 155
4.1 Objectif du chapitre . . . 155
4.2 Description de la déformation externe du jet contrôlé . . . 156
4.2.1 Vue tridimensionnelle de la distorsion provoquée par l'injection radiale . . . 156
4.2.2 Evolution des tourbillons longitudinaux . . . 156
4.3 Analyse des tourbillons engendrés par les jets radiaux . . . 158
4.3.1 Phénoménologie tourbillonnaire d'un jet transverse débouchant d'une paroi 158
4.3.2 Description des structures tourbillonnaires du jet contrôlé . . . 171
4.4 Caractérisation du mélange . . . 184
4.4.1 Discussion phénoménologique sur le mélange . . . 184
4.4.2 Discussion sur les variables de caractérisation du mélange . . . 188
4.4.3 Paramètres de similitude . . . 189
4.4.4 Sur l'utilisation des variables (T_i, p_i) pour caractériser le mélange . . . 190
4.5 Etude paramétrique du mélangeur par injections radiales . . . 192
4.5.1 Paramétrisation de l'injection . . . 192
4.5.2 Cas simulés . . . 193
4.5.3 Critères d'estimation du mélange . . . 194
4.5.4 Influence des paramètres d'injection sur le mélange du jet . . . 201
4.6 Conclusion sur l'aspect stationnaire du brassage . . . 210

5 Brassage tourbillonnaire : aspect instationnaire **213**
5.1 Objectif du chapitre . . . 213
5.2 Effet de la dynamique instationnaire sur le champ moyen . . . 214
5.2.1 Comparaison des champs moyens ZDES et RANS/SARC . . . 214
5.2.2 Effet d'une sur-diffusion turbulente . . . 216
5.3 Dynamique des tourbillons longitudinaux . . . 220
5.3.1 Evolution moyenne des tourbillons longitudinaux . . . 220
5.3.2 Dégénerescence turbulente des tourbillons . . . 222
5.4 Existence de deux régimes de pénétration . . . 227
5.4.1 Oscillations de pression totale moyenne sur l'axe en injection faible . . . 228
5.4.2 Régimes de pénétration des injections fortes et des injections faibles . . . 229
5.4.3 Questions sur l'origine du régime de pénétration intermittente . . . 233
5.5 Evaluation plus précise de l'augmentation mélange . . . 239
5.5.1 Effet du contrôle sur les grandeurs moyennes . . . 239
5.5.2 Effet du contrôle sur l'activité du mélange . . . 240
5.5.3 Effet spécifique du contrôle à faible SPR . . . 248
5.6 Conclusion sur l'aspect instationnaire du brassage . . . 251

CONCLUSION et PERSPECTIVES **255**

Bibliographie **265**

A Evolution de la pression totale dans un turboréacteur **279**

B Méthode Numérique **281**
B.1 Méthode des volumes finis . . . 281
B.2 Discrétisation spatiale . . . 281
B.2.1 Discrétisation des flux d'Euler . . . 281
B.2.2 Discrétisation des flux visqueux . . . 285
B.3 Intégration temporelle . . . 286
B.4 Conditions limites : imposition du débit . . . 288

C Compléments sur la structure des ondes internes **293**
C.1 Equations des lignes de courant et des lignes de Mach dans une détente centrée de Prandtl-Meyer . . . 293
C.2 Polaires de chocs et de compression isentropique . . . 295
C.3 Enveloppe des ondes focalisant sur une rampe de compression . . . 296
C.4 Réflexion d'un choc sur une paroi rectiligne : légende . . . 298
C.5 Jet supersonique plan entouré d'un écoulement subsonique . . . 299
C.6 Corrélations sur le jet turbulent utilisées dans le modèle de Tam *et al.* . . . 302

D Compléments à l'analyse du brassage tourbillonnaire **305**
D.1 Définitions de l'excentrement et de l'orientation d'une distribution de vorticité . 305
D.2 Equation d'évolution du moment d'ordre 0 en écoulement laminaire . . . 306
D.3 Equation d'évolution du moment d'ordre 1 en écoulement laminaire . . . 307
D.4 Equation d'évolution de la circulation en champ fluctuant . . . 309
D.5 Equation d'évolution du moment d'ordre 1 en champ fluctuant . . . 309
D.6 Equation d'évolution de la pression d'arrêt isentropique . . . 310
D.7 Quelques précisions sur l'expansion de la pression génératrice . . . 311
D.8 Passage en coordonnées cylindriques . . . 314

E Clichés instantanés des jets sans et avec contrôle **315**

Nomenclature

A_3	section de sortie totale des jets de contrôle
A_r	valeur A_3 de référence $A_r = 20\text{mm}^2$
a	célérité du son
	ou rayon de dispersion d'une distribution plane de vorticité
b	écartement d'un doublet de tourbillons
C^-, C^+	lignes caractéristiques resp. descendantes et montantes dans un plan
c	excentrement d'une distribution plane de vorticité
c_v, c_p	capacités calorifiques resp. à volume constant et à pression constante
D	diamètre du col de la tuyère primaire
D_3	dynalpie des jets de contrôle
G	barycentre d'une distribution plane de vorticité
I_m^η	moment de vorticité d'ordre m exprimé au point η
M	nombre de Mach
M_c	nombre de Mach convectif
N	nombre d'injecteurs actifs
NPR	taux de détente du jet primaire ("Nozzle Pressure Ratio") NPR $= p_{i1}/p_0$
$\mathcal{P}$	nombre de pression de Busemann
Pr	nombre de Prandtl Pr $= \frac{\mu c_p}{\lambda}$
Pr_t	nombre de Prandtl turbulent $\text{Pr}_t = \frac{\mu_t c_p}{\lambda_t}$
p	pression statique
Q	débit de masse
$\overrightarrow{Q^F}$	vecteur flux surfacique d'énergie totale fluctuante
$\overrightarrow{q}$	vecteur flux surfacique de conduction de la chaleur
R	rapport des "vitesses effectives" d'un jet dans un écoulement transverse
Re	nombre de Reynolds (pour le jet Re $= \frac{U_j D}{\nu}$)
$\overline{\overline{S}}$	tenseur des taux de déformation = partie symétrique de $\overline{\overline{\text{grad}}}\,\overrightarrow{V}$
SPR	taux de détente des jets de contrôle ("Secondary Pressure Ratio")
	SPR $= p_{i3}/p_{i1}$
St	nombre de Strouhal (pour le jet St $= \frac{fD}{U_j}$)
s, n	coordonnées intrinsèques liées aux lignes de courant dans un plan de symétrie
s^-, s^+	abscisses curvilignes associées respectivement aux lignes C^-, C^+
T	température statique
U	norme de la vitesse
u, v, w	composantes cartésiennes de la vitesse
u, u_r, u_θ	composantes cylindriques de la vitesse
$\overrightarrow{V}$	vecteur vitesse
X, Y, Z	coordonnées cartésiennes liées à la maquette de l'arrière-corps
X, r, θ	coordonnées cylindriques liées à la maquette de l'arrière-corps
x^-, x^+	système de coordonnées curvilignes associé aux lignes C^-, C^+

α	angle de Mach
Δ_{max}	taille caractéristique de maille $\Delta_{max} = \max(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$
Δ_{vol}	taille caractéristique de maille basée sur son volume
Δ_ω	taille caractéristique de maille dépendant de la direction de la vorticité
$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$	tailles d'une cellule dans les trois directions locales du maillage
δ	angle de déviation d'un écoulement à travers un choc
φ	angle du vecteur vitesse avec l'axe de référence $\overrightarrow{X}$
Γ	circulation d'une distribution de vorticité
γ	rapport des capacités calorifiques $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$
λ	conductivité thermique moléculaire
λ_t	conductivité thermique turbulente (en RANS) ou sous-maille (en LES)
Λ	allongement des orifices d'injection $\Lambda = R\Delta\theta/\Delta x$ avec $R\Delta\theta$ la dimension orthoradiale et Δx la dimension longitudinale
μ	viscosité dynamique moléculaire
μ_t	viscosité dynamique turbulente (en RANS) ou sous-maille (en LES)
ν	viscosité cinématique moléculaire ou angle de déviation de Prandtl-Meyer
ν_t	viscosité cinématique turbulente (en RANS) ou sous-maille (en LES)
ψ^-, ψ^+	pentes locales resp. des lignes C^-, C^+ par rapport à $\overrightarrow{X}$
ρ	masse volumique
σ	angle d'un choc par rapport à l'écoulement amont
τ	variable de temps dans le référentiel en translation uniforme $U_0 \overrightarrow{X}$
$\overline{\overline{\tau}}$	tenseur des contraintes de viscosité moléculaire
$\overline{\overline{\tau}}^R$	tenseur des contraintes de Reynolds
$\overline{\overline{\tau}}^F$	tenseur des tensions fluctuantes
$\overline{\overline{\Omega}}$	tenseur des taux de rotation = partie antisymétrique de $\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}}\overrightarrow{V}$
$\overrightarrow{\Omega}$	vecteur rotation = vecteur dual de $\overline{\overline{\Omega}}$, i.e. tel que $\overrightarrow{\Omega} \times \overrightarrow{u} = \overline{\overline{\Omega}}.\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}$
$\overrightarrow{\omega}$	vecteur vorticité $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{V}$
Indices :	
$_0$	conditions de l'écoulement externe
$_1$	conditions du jet primaire
$_2$	conditions de l'écoulement de ventilation
$_3$	conditions des jets de contrôle
$_e$	conditions de sortie d'un jet
$_i$	conditions d'arrêt isentropique
$_j$	conditions d'adaptation d'un jet
Exposants :	
*	conditions critiques locales (i.e. où $M = 1$)
Sigles :	
DDES	Delayed Detached-Eddy Simulation
DES	Detached-Eddy Simulation
DES97	Detached-Eddy Simulation originale de Spalart-Allmaras (1997)
DNS	Direct Numerical Simulation
LES	Large-Eddy Simulation
(U)RANS	(Unsteady) Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulation
SA	modèle RANS de Spalart-Allmaras original
SACC	modèle RANS de Spalart-Allmaras avec correction de compressibilité
SARC	modèle RANS de Spalart-Allmaras avec correction de rotation
ZDES	Zonal Detached-Eddy Simulation

INTRODUCTION

Contexte de l'étude.

L'augmentation du mélange des fluides intéresse de nombreuses applications industrielles et plus particulièrement les systèmes propulsifs en aéronautique. En effet dans un turboréacteur, l'augmentation du mélange participe directement à l'amélioration des chambres de combustion, à l'augmentation de poussée des éjecteurs, ainsi qu'à la réduction du bruit et du rayonnement infrarouge émis par le jet propulsif. Ce dernier problème est à l'origine de l'étude présentée ici.

A la sortie de la tuyère, le jet est constitué d'un noyau potentiel chaud ($\sim 900K$) entouré d'une couche de mélange faisant l'interface avec l'air extérieur nettement plus froid. Ce cône potentiel représente la principale source de rayonnement infrarouge des avions de combats [256, 158, 208]. Par ailleurs, les missiles à capteurs infrarouges prolifèrent à cause de leur simplicité d'utilisation, leur faible coût et leur disponibilité. Ces "qualités" associées à la forte émissivité des jets propulsifs rendent les avions de combats très vulnérables : on estime [202] que plus de 80% des pertes aériennes subies lors des conflits modernes sont dues aux missiles à capteurs infrarouges. Ce problème concerne non seulement les avions militaires mais aussi les avions de transports civils, cibles potentielles des actions terroristes. Bien que les moyens de contre-mesure ne cessent d'être améliorés, les capteurs et les calculateurs embarqués à bord des missiles sont eux aussi de plus en plus sophistiqués et se laissent difficilement leurrer, c'est pourquoi il est primordial de diminuer directement les sources d'émission infrarouge.

Le cône potentiel contient des gaz rayonnants (principalement H_2O et CO_2) en fortes concentrations et à très hautes températures. Son volume est entièrement déterminé par l'expansion de la couche de mélange. Une manière de réduire la signature du jet consiste donc à accélérer le brassage du jet avec l'air extérieur. On estime par exemple [135] qu'une réduction de température de $100K$ dans un jet à $900K$ réduit sa signature infrarouge de 60%. Cependant, les jets propulsifs sont dans des régimes d'écoulements qui rendent difficile l'accroissement du mélange : les nombres de Reynolds sont élevés et les vitesses sont souvent supersoniques. Les nombres de Reynolds $\mathrm{Re} = \frac{U_j D}{\nu}$ ou $\mathrm{Re} = \frac{(U_j - U_0) D}{\nu}$ (U_j la vitesse du jet, U_0 la vitesse d'avancement et D le diamètre de la tuyère) élevés impliquent une faible cohérence des structures turbulentes sur lesquelles s'appuient certains amplificateurs de mélange. Concernant le deuxième point, l'expérience [188, 80, 97, 41] a montré que le mélange turbulent des couches de cisaillement est significativement réduit lorsque le niveau de compressibilité augmente. Ce dernier est usuellement mesuré à l'aide du nombre de Mach convectif $M_c = \frac{U_j - U_0}{a_j + a_0}$ [18, 188], rapport du demi-écart des vitesses de part et d'autre de la couche de cisaillement sur la vitesse du son moyenne, et il devient significatif approximativement lorsque $M_c \geq 0.6$. En pratique, le problème de la compressibilité de la couche de mélange concerne donc surtout les avions supersoniques à faible taux de dilution ou les avions à forts taux de dilution avançant à faible vitesse U_0 mais avec une vitesse de jet U_j assez élevée, comme lors du décollage.

Méthodes existantes d'augmentation du mélange des jets.

En raison de la multitude des applications concernées par le mélange, un nombre considérable de concepts a été proposé [100, 135].

Sans contrôle, les jets non axisymétriques sont connus pour avoir des capacités de mélange bien meilleures que leurs homologues axisymétriques, c'est pourquoi les avions dits "discrets" sont conçus avec des tuyères généralement aplaties et à bord de fuite non-rectiligne [263, 270, 204]. En particulier, les jets issus de tuyères rectangulaires permutent leur grand-axe et leur petit-axe en évoluant vers l'aval, c'est le phénomène d'"axis switching" décrit par Zaman [269]. Il est dû à deux mécanismes : d'une part, les contours de vorticité azimutale ω_t se déforment sous l'effet de leur propre induction[1] car les coins se déplacent plus vite à cause de leurs courbures plus élevées ; d'autre part, des paires de tourbillons secondaires longitudinaux (vorticité axiale ω_x) formés dans les coins de la tuyère se déplacent initialement vers l'intérieur en écrasant le grand-axe du jet, se réorganisent au centre en de nouvelles paires qui divergent dans la direction du petit-axe en le dilatant. Les dynamiques de ω_t et ω_x interagissent et accroissent le mélange des jets issus de tuyères à géométries complexes (voir la revue [135]). Les jets rectangulaires supersoniques peuvent de plus être soumis au phénomène de "screech" [205] qui amplifie de manière spectaculaire leur évasement et leur mélange. Le "screech" est une excitation auto-entretenue de la couche de mélange basée sur l'interaction des structures tourbillonnaires avec les chocs internes du jet supersonique, sur la remontée des ondes de pression ainsi générées dans l'écoulement extérieur subsonique et l'impact de ces ondes sur la lèvre de la tuyère. Il apparaît aussi dans les jets ronds mais provoque un mélange plus important dans les jets aplatis en excitant leur battement latéral. Toutefois, la très grande majorité des avions actuels est équipée de tuyères axisymétriques car elles possèdent de meilleurs rendements propulsifs et des solutions doivent être proposées pour ces géométries.

Parmi les concepts dont l'efficacité a été prouvée sur des "jets de laboratoire" axisymétriques, nombreux sont ceux qui ne pourront devenir opérationnels pour des raisons de perte de poussée et/ou de maintenance. C'est le cas notamment de l'aspiration coaxiale [244], des obstacles rigides [206] et des cordes vibrantes [254] traversant le jet de part en part, ou encore des volets vibrants [189]. Certains concepts sont aussi disqualifiés à cause de leurs conditions de fonctionnement. Par exemple pour être efficace, un excitateur acoustique doit d'abord avoir une puissance suffisante pour compenser les fluctuations turbulentes produites dans le turboréacteur (i.e. derrière la ou les chambre(s) de combustion, les turbines et les accroche-flammes de la réchauffe). L'intensité de la turbulence peut y atteindre 15% [207] alors qu'elle ne dépasse guère 0.5% en laboratoire.

Une tendance est de développer des actionneurs exerçant une perturbation périodique afin d'amplifier une instabilité primaire de l'écoulement. Beaucoup d'expériences ou de simulations directes ont démontré l'efficacité de ces méthodes sur des jets laminaires à faible nombre de Reynolds ($\mathrm{Re} = U_j D/\nu \sim 5.10^4$). Cependant, l'application de ces techniques aux jets turbulents à hauts nombre de Reynolds (i.e. $\mathrm{Re} \sim 10^7$) présentant des structures tourbillonnaires beaucoup moins cohérentes requiert des amplitudes de forçage élevées ("high-amplitude fluidic actuation" [89]). Généralement, cela se traduit sur la vitesse axiale par une perturbation de l'ordre de 15% de la vitesse d'éjection [54]. Dans la colonne de jet, le mode d'instabilité le plus amplifié dépend du profil de vitesse [169]. En début de jet, le profil de vitesse étant proche d'un créneau, les modes axisymétriques (ou variqueux) sont les plus amplifiés. Cette instabilité croit dans le sens

[1] La loi de Biot et Savart dit qu'une ligne tourbillonnaire $\mathcal{C}$ de circulation Γ induit en un point P une vitesse $\overrightarrow{V}$ telle que : $\overrightarrow{V}(P) = \int_{\mathcal{C}} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PM}} \times \Gamma(M)\, \overrightarrow{dl}}{4\pi \|\overrightarrow{\mathrm{PM}}\|^3}$, où M est un point courant de $\mathcal{C}$.

de l'écoulement[2] et conduit, par enroulement de la couche de cisaillement, à la formation de structures toroïdales dont la fréquence de passage f à la fin du cône potentiel est caractérisée par un nombre de Strouhal $\mathrm{St} = \frac{fD}{U_j} = \mathrm{St}^{pm}$ compris entre 0.3 et 0.5. C'est ce que l'on appelle communément le "mode préféré" d'instabilité de jet ("the preferred mode" [53]). Lorsque le jet atteint un état turbulent pleinement développé, son profil de vitesse est de forme gaussienne et le mode d'instabilité le plus amplifié devient alors le mode hélicoïdal (ou sinueux en 2D). L'excitation de ce deuxième mode semble être très efficace pour augmenter le mélange car son amplitude de déplacement est de l'ordre du diamètre du jet. On peut la provoquer par différents moyens (voir la revue de Da Silva et Métais [54]) comme par exemple deux fentes disposées de part et d'autre du jet et soufflant en opposition de phase [189, 89, 119]. Ce mode d'excitation dit de "flapping jet" fonctionne encore mieux sur les jets de section rectangulaire car, à débit fixé, ils présentent une épaisseur plus faible que les jets ronds. Da Silva et Métais [54] montrent, par des DNS et LES incompressibles, qu'une excitation à la fréquence St^{pm} provoque bien un accroissement du mélange mais que celui-ci est inhibé au-delà de $\mathrm{Re} \approx 10^3 - 10^4$. Une excitation au premier sous-harmonique $\mathrm{St}^{pm}/2$ permet de maintenir l'action du contrôle mais seulement jusqu'à $\mathrm{Re} \approx 2.5 \times 10^4$. Son principe est de favoriser le basculement des structures toroïdales après la fin du cône potentiel pour générer les tourbillons longitudinaux responsables du mélange du jet à partir de la région de transition [152]. Au-delà et jusqu'à $\mathrm{Re} \approx 5 \times 10^4$, une autre stratégie, dénommée "bifurcating jet" [56], combinant un forçage axisymétrique à la fréquence préférée St^{pm} et un battement au premier sous-harmonique $\mathrm{St}^{pm}/2$, permet de retrouver une augmentation du mélange significative. Les auteurs l'expliquent par le fait que l'excitation axisymétrique amplifie d'abord la cohérence des structures toroïdales formées autour du cône potentiel pour ensuite les exploiter dans le mode "flapping". Cependant, la transposition aux jets propulsifs compressibles n'est pas évidente. En effet, les simulations LES à $\mathrm{Re} \approx 3.6 \times 10^4$ de Maidi *et al.* [159] montrent que l'excitation en mode "bifurcating jet" permet d'obtenir l'évasement maximal (parmi les configurations testées) d'un jet subsonique à $M = 0.7$ mais qu'à $M = 1.4$, ils trouvent un évasement maximal avec une excitation en "flapping" au deuxième sous-harmonique $\mathrm{St}^{pm}/4$. Ceci provient du fait que lorsque le nombre de Mach convectif croît au-delà de ~ 0.6, les modes d'instabilités axisymétriques en incompressibles deviennent obliques [220] et donnent naissance à des structures cohérentes inclinées par rapport au plan normal à l'axe du jet. Dans les deux configurations contrôlées, l'amplitude d'excitation de la vitesse axiale représente 5% de la vitesse initiale du jet sur chaque mode (axisymétrique et battement) et conduit à une réduction de $\sim 27\%$ de la longueur du cône potentiel.

La seule application connue sur réacteur réel a été effectuée par Chenault *et al.* [37] avec un Pratt & Whitney JT8D. L'actionneur testé est constitué de deux blocs d'injecteurs radiaux soufflant en sens opposés et couvrant 90 deg chacun sur la circonférence du jet. L'action du dispositif est démontrée : l'augmentation du mélange maximale est encore obtenue pour une fréquence de pulsation $\mathrm{St} = 0.2 \sim \mathrm{St}^{pm}/2$; avec un débit injecté de 3% du débit primaire, la température adimensionnée $T^* = \frac{T - T_a}{T_j - T_a}$ (T_a, T_j, T températures ambiante, du noyau du jet et moyennée) est diminuée de 25 à 50% selon le régime moteur. Toutefois, il serait intéressant de connaître la perte de poussée occasionnée. En outre, l'efficacité de la dilution perçue dans le champ moyen ne garantit pas l'efficacité infrarouge car le champ instantané (à l'échelle du battement) que peuvent mesurer les capteurs infrarouges reste très cohérent. Par ailleurs, des calculs URANS [38] indiquent que le battement est considérablement réduit lorsqu'il existe un écoulement périphérique comme c'est le cas en vol. Au-delà de l'aspect séduisant des actionneurs instationnaires, il est indispensable d'estimer la complexité des mécanismes à mettre en oeuvre sur l'aéronef, leur poids, leur encombrement, leur coût de fabrication et de maintenance, leur tenue en fatigue, les répercussions des fluctuations de pression sur la cellule et leur consomma-

[2] Si l'écoulement extérieur est co-courant.

tion hydraulique ou électrique. De plus, l'excitation pulsée avec une grande amplitude et une faible fréquence [37] accroît non seulement le mélange mais aussi le niveau de bruit de 5 à 20dB suivant le débit et la fréquence d'injection.

Notons qu'une excitation forte peut être réalisée à un coût de contrôle très faible voire nul en plaçant le jet dans des conditions de bifurcation [185, 257, 203]. Par ailleurs, le concept MESPI ("Mixing Enhancement by Secondary Parallel Injection", [187]) se base sur un écoulement secondaire supersonique sur-détendu parallèle et de même sens que le jet propulsif ("co-flow") pour déstabiliser sa couche de mélange à l'aide de chocs internes produits naturellement de manière instationnaire. Ces deux stratégies sont très intéressantes mais ne semblent pas aisément adaptables à différentes conditions de vol.

Une autre méthode : l'introduction de vorticité longitudinale.

Une autre solution envisageable est de favoriser la formation de tourbillons longitudinaux [250, 235], ces derniers étant peu influencés par la compressibilité et le caractère fortement tridimensionnel de la couche de mélange aux forts nombres de Mach convectif [97, 81, 42]. De plus, les tourbillons longitudinaux apparaissent naturellement dans les couches de mélange des jets axisymétriques sous-détendus [138]. La vorticité longitudinale introduite au moyen de bords de fuite ondulés ou en lobes [12, 115], de chevrons [26, 7], de tabs solides [24, 219, 271, 11], ou d'injections de fluide secondaire [63, 69, 48] a déjà prouvé son efficacité en laboratoire et des solutions passives (lobes,chevrons) sont déjà en opération sur des moteurs existants. Zaman [270] explique la déformation des jets munis de tabs grâce à la dynamique ω_x des tourbillons longitudinaux contrarotatifs créés au niveau des perturbateurs solides. Pour l'avenir, le contrôle fluidique semble néanmoins plus attractif puisqu'il peut être adapté aux différentes conditions de vol. Ajouté à cela, il est sensé réduire la masse, le coût ainsi que la complexité mécanique même si un examen global doit confirmer ces avantages [231].

Davis [63] a étudié l'action de deux injections radiales soufflant en opposition de manière continue dans un jet primaire subsonique. Il a mis en évidence l'existence de deux régimes d'influence du contrôle. Le premier régime se produisant pour de faibles quantités de mouvement injectées, provoque un mélange rapide de la couche de mélange primaire sans altérer significativement l'écoulement moyen du jet. Le second régime, rencontré pour de fortes injections, entraîne lui une spectaculaire déformation du jet moyen. Collin *et al.* [48] ont examiné la région proche de l'interaction entre un jet secondaire supersonique et la couche de mélange d'un jet supersonique adapté à $M_j = 1.37$ pour de faibles rapports de débits et de quantités de mouvement. Ces auteurs ont remarqué que, dans ce régime, la pénétration du jet de contrôle est très intermittente et crée de grosses structures cohérentes. Selon eux, l'augmentation du mélange résulte de cette pénétration intermittente plutôt que de la génération de tourbillons longitudinaux contrarotatifs. De plus, ils montrent que le taux d'évasement de la couche de mélange est amplifié au voisinage de l'interaction des deux jets mais recouvre sa valeur naturelle en aval. Ainsi, dans le premier régime, l'injection secondaire n'a pas d'effet persistant sur la couche de mélange. L'étude de l'interaction d'un jet et d'une couche de mélange incompressibles aboutit à la même conclusion [144] et indique ainsi que la compressibilité n'a pas d'effet significatif sur les mécanismes majeurs mis en jeu lors de cette interaction, même si elle peut avoir un effet stabilisant, du moins jusqu'au nombre de Mach convectif testé $M_c = 0.5$.

L'étude expérimentale sur la maquette MARCO

Dans le cadre d'un programme de recherche sur la réduction de la signature infrarouge des jets propulsifs d'avion de combat, une étude expérimentale sur les propriétés du mélange d'un jet sous-détendu contrôlé par des injections radiales continues a été conduite dans la soufflerie S3Ch de l'ONERA Chalais-Meudon. L'étude expérimentale visait à évaluer l'applicabilité d'un dispositif similaire à celui testé par Collin *et al.* sur une maquette d'arrière-corps propulsif réaliste dénommée "MARCO". Les mesures ont permis d'estimer l'influence du taux de détente du jet ainsi que celles du nombre d'injections actives et de leur débit.

Objectifs, limitations et démarche de la thèse.

Cette thèse a pour but de fournir une vue plus approfondie du jet contrôlé issu de la maquette MARCO au moyen de simulations numériques et d'en compléter l'analyse physique.

L'étude est focalisée sur l'effet de plusieurs injections radiales ponctuelles et stationnaires sur un jet supersonique axisymétrique. Ce mode d'injection agit directement sur la couche de mélange entourant le cône potentiel et doit être clairement distingué des contrôles fluidiques visant à exciter les modes d'instabilité de colonne du jet vus précédemment. Ces derniers sont appliqués sur une large portion de la circonférence du jet et de manière instationnaire. Bien que la tendance en contrôle des écoulements soit d'appliquer des injections pulsées ou même des aspirations/soufflages alternés, notamment pour économiser ou annuler le débit injecté, les mécanismes qui permettent au soufflage stationnaire d'augmenter le mélange, et qui devraient a priori être moins difficiles à appréhender que ceux du soufflage instationnaire, ne sont pas encore complètement compris aujourd'hui et mérite donc que l'on s'y intéresse. De plus, le soufflage stationnaire peut avoir un intérêt en acoustique puisqu'une diminution du bruit rayonné a été constatée par Ibrahim *et al.* [119] sur un jet soumis à 12 injections stationnaires ponctuelles équiréparties en azimut.

La démarche a été d'utiliser différents niveaux de modélisation de la turbulence non seulement pour tirer partie respectivement de la rapidité des méthodes industrielles (RANS[3]) et de la meilleure prévision des méthodes plus coûteuses (RANS/LES) mais aussi pour permettre de mieux comprendre l'écoulement en supprimant artificiellement des phénomènes physiques. Plus globalement, cette thèse a pour ambition d'extraire les mécanismes physiques fondamentaux d'un écoulement dans une configuration appliquée en s'appuyant sur des modèles numériques intrinsèquement incomplets.

Les simulations les plus complètes pour reproduire les écoulements à grand nombre de Reynolds dans des configurations appliquées et abordables avec les moyens de calcul actuels sont les méthodes couplées ou hybrides RANS/LES. Parmi ces dernières, la "Detached-Eddy Simulation" proposée par Spalart *et al.* [241] a été pensée dans l'optique d'éliminer le recours à l'expertise nécessaire à tout calcul LES et de rendre cette méthode applicable en production au niveau industriel comme c'est le cas actuellement avec les méthodes RANS. La DES s'applique typiquement au cas des écoulements de paroi massivement[4] décollés car les couches limites attachées à traiter selon l'approche RANS et les zones de recirculation à résoudre en LES sont "clairement distinctes". En revanche, la DES ne permet pas de calculer les couches de mélange comme celles

[3]Les simulations RANS implicitement désignées ici sont celles utilisées en production dans l'industrie, étant entendu que des recherches sont encore menées sur la modélisation RANS.

[4]L'adverbe "massivement" est essentiel ici car il implique que la position du décollement ne dépend pas significativement du contenu turbulent de la couche-limite en amont.

entourant les jets car elle ne développe pas assez rapidement les fluctuations turbulentes. Plus généralement, aucune méthode de simulation n'est capable actuellement de restituer une couche cisaillée libre sans l'intervention explicite de l'utilisateur. Afin de mieux maîtriser le basculement du mode RANS au mode LES, Deck [67] a décliné une version zonale de la DES, notée ZDES. Shur *et al.* [229, 227, 228] ont proposé une méthodologie hybride RANS/LES zonale capable de prévoir le bruit émis par un jet d'avion de ligne. La simulation est conduite en deux étapes. D'abord, la couche limite est calculée par une approche RANS. Ensuite, le champ de viscosité turbulente obtenu est imposé dans le domaine adjacent à la paroi et un calcul LES est effectué. Comme le maillage est structuré et pour limiter le coût du calcul LES, Shur *et al.* ont diminué le nombre de points dans la couche limite (non résolue) du calcul LES. Enfin, la viscosité turbulente est imposée nulle dans tout le domaine LES pour réaliser effectivement une LES implicite (sans modèle sous-maille). Cette méthodologie possède donc une grande part d'empirisme.

Par rapport aux travaux numériques antérieurs limités à des configurations canoniques de jet ou demandant une intervention importante de l'utilisateur dans le processus de simulation, cette thèse vise dans un premier temps à reproduire numériquement le champ aérodynamique autour de la configuration appliquée MARCO sans et avec contrôle au moyen de simulations RANS et surtout ZDES basées sur le modèle à une équation de transport de Spalart-Allmaras. Au niveau de l'analyse physique, les cas de contrôle testés en soufflerie et reproduits dans les simulations peuvent être classés dans les deux régimes identifiés par Davis [63], i.e. à faible et à forte injections de quantité de mouvement. Par ailleurs, le jet propulsif étudié ici est supersonique sous-détendu[5], il contient donc des chocs dont la structure est modifiée par l'action des injections secondaires. Les derniers travaux publiés [11, 209] montrent que l'influence de perturbations appliquées à la périphérique du jet sur cette structure de choc est encore méconnue. Par contre, son influence sur le bruit rayonné a été prouvé par des mesures [209]. D'autre part, à partir des observations expérimentales de la configuration MARCO, il a été émis l'hypothèse que les chocs pourraient prendre part aux mécanismes d'augmentation du mélange lorsque les injections radiales sont activées. Une analyse théorique de la structure de choc interne au jet et de sa réponse à des perturbations azimutales a donc été proposée dans cette thèse. Enfin, une attention particulière est portée à l'analyse des tourbillons longitudinaux à partir des champs numériques et l'interprétation physique est supportée par des développements analytiques.

[5]Le régime de sous-détente caractérisé par une pression statique en sortie de tuyère supérieure à la pression statique extérieure est déterminé par le fonctionnement du moteur et les conditions de vol. Cela est expliqué en annexe A.

Le mémoire est organisé en cinq chapitres :

– chapitre 1 : présentation des approches RANS, LES, ZDES puis motivation, formulation et discussion d'une nouvelle longueur caractéristique de maille Δ_ω utilisée en mode LES ;

– chapitre 2 : présentation de la campagne expérimentale effectuée sur MARCO, mise en oeuvre des simulations RANS et ZDES, validation des résultats numériques et discussion des résultats fournis avec Δ_ω ;

– chapitre 3 : analyse des ondes internes et de la structure de choc du jet supersonique, influence du taux de détente, du caractère axisymétrique, de la vitesse d'éjection, de l'écoulement extérieur, de la viscosité puis effet des perturbations azimutales et enfin évaluation du mélange stationnaire par chocs internes ;

– chapitre 4 : analyse du brassage tourbillonnaire du point de vue stationnaire, formation des différentes structures tourbillonnaires moyennes, évolution des tourbillons longitudinaux, caractérisation du mélange, critères d'estimation du mélange et étude paramétrique sur les injecteurs et les conditions d'injection ;

– chapitre 5 : analyse du brassage tourbillonnaire du point de vue instationnaire, différence entre la diffusion turbulente et la résolution explicite de la dynamique des grandes échelles sur le champ moyen, dynamique turbulente et dégénérescence des tourbillons longitudinaux, mise en évidence de deux régimes de pénétration et évaluation de l'activité du mélange turbulent et du champ mélangé dans ces deux régimes.

Chapitre 1

Modélisation des écoulements turbulents

L'ensemble des simulations présentées dans ce mémoire a été effectué avec le code FLU3M (Guillen & Dormieux [99]) développé à l'ONERA. Ce code résout les équations de Navier-Stokes sur des maillages structurés multiblocs. Pour le calcul des écoulements turbulents à grand nombre de Reynolds, il offre deux alternatives : les équations de Navier-Stokes sont filtrées soit selon le formalisme "Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulation" (RANS) soit selon le formalisme "Large-Eddy Simulation" (LES). Le traitement de configurations appliquées mélant écoulements pariétaux et écoulements massivement décollés est possible grâce à l'utilisation d'une approche hybride de type "Detached-Eddy Simulation" (DES). Néanmoins, la DES originale n'est pas adaptée à la simulation de l'écoulement autour d'un arrière-corps propulsif (ceci est démontré au chapitre 2) pour laquelle sa version zonale, la "Zonal-DES" (ZDES), a été utilisée.

Lors de cette étude, deux problèmes ont conduit à réaliser deux nouveaux développements. Tout d'abord, la version originale de la ZDES présentait un retard au développement des instabilités dans la couche de mélange du jet et a justifié la définition d'une nouvelle longueur caractéristique du maillage Δ_ω intervenant dans le "modèle sous-maille" de la ZDES. Celle-ci a été implémentée et ses résultats sont comparés à l'expérience au chapitre 2. Puis, en raison des informations fournies par l'étude expérimentale, il a été nécessaire de coder une condition aux limites imposant un débit entrant.

L'implémentation de la méthode numérique et des modèles de turbulence dans le code FLU3M a été réalisées lors de travaux antérieurs (voir [192, 193, 68]), elle est juste résumée en annexe B et les détails de la condition de débit entrant y sont fournis. Brièvement, les choix numériques adoptées lors de cette étude sont les suivants. Les équations de Navier-Stokes sont discrétisées spatialement par un schéma volumes finis de type "cell-centered" d'ordre 2. Les flux convectifs sont exprimés selon le schéma de Roe. Pour les calculs RANS, la précision spatiale est étendue à l'ordre 2 par l'approche MUSCL. Pour les calculs ZDES, la précision spatiale atteint l'ordre 3 et est combinée à un senseur de Jameson pour satisfaire les conditions TVD sur les chocs. La correction de Harten est utilisée pour éviter les chocs de détente. Tous les termes diffusifs sont discrétisées par différence centrée d'ordre 2. L'intégration en temps est basée sur une formulation implicite de Gear d'ordre 2 et l'inversion du système linéaire est effectuée au moyen d'une factorisation LU-SGS. En raison des approximations faites durant l'étape implicite, l'algorithme de sous-itérations de Pulliam a été employé pour restituer la précision en temps.

Dans ce chapitre, les grandes lignes des filtrages RANS et LES (dans le cadre restreint de la méthode des volumes finis) ainsi que les fermetures des équations résultantes selon les approches RANS, DES et ZDES du modèle de Spalart-Allmaras sont rappelées. La motivation originelle de la définition d'une nouvelle longueur caractéristique de maille Δ_ω est expliquée, sa formulation détaillée et son application aux écoulements pleinement turbulents est discutée.

1.1 Les équations de Navier-Stokes d'un fluide compressible

Les équation de Navier-Stokes constituent un modèle d'écoulement de fluide continu compressible, visqueux et conducteur de chaleur, représentatif des écoulements rencontrés en aérodynamique classique. Les équations constitutives de ce modèle sont rappelées ici brièvement.

Tout d'abord, le fluide est gouverné par les équations du mouvement des milieux continus qui, sous forme conservative, s'écrivent :

Conservation de la masse : $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \overrightarrow{V}\right) = 0 \tag{1.1}$$

Bilan de quantité de mouvement : $$\frac{\partial \rho \overrightarrow{V}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\rho \overrightarrow{V} \otimes \overrightarrow{V}\right) = \overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) + \overrightarrow{f} \tag{1.2}$$

Bilan d'énergie totale : : $$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho E \overrightarrow{V}\right) = \operatorname{div}\left(\overline{\overline{\sigma}}.\overrightarrow{V} - \overrightarrow{q}\right) + \overrightarrow{f}.\overrightarrow{V} + r \tag{1.3}$$

avec $E = e + \dfrac{V^2}{2}$, où e est l'énergie interne

Dans cette étude, les forces volumiques $\overrightarrow{f}$ (pesanteur) et les sources de chaleur r sont négligées. L'équilibre du moment dynamique se traduit par la symétrie du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$. Celui-ci se décompose en une partie réversible $\overline{\overline{\sigma}}^R$ et une partie irréversible (dissipée) $\overline{\overline{\tau}}$. Pour un fluide divariant, on montre que la partie réversible se réduit à $\overline{\overline{\sigma}}^R = -p\overline{\overline{I}}$ où p est la pression thermodynamique.
Il n'y a que 5 équations scalaires générales pour 15 inconnues scalaires $\left(\rho, \overrightarrow{V}, e, p, \overline{\overline{\tau}}, \overrightarrow{q}\right)$. Dix équations scalaires sont donc nécessaires pour fermer le système différentiel : ce sont les lois de comportement. Pour lier les trois variables thermodynamiques (ρ, e, p), on adopte les lois d'état du gaz ideal :

$$p = \rho r T \quad \text{et} \quad e = c_v T \qquad \text{(où T est la température)} \tag{1.4}$$

avec $r = \frac{\mathcal{R}=8.314\ \text{J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}}{\mathcal{M}(\text{air})=29\ \text{kg.mol}^{-1}} = 287\ \text{J.kg}^{-1}.\text{mol}^{-1}$; $\gamma = 7/5$; $c_v = \frac{r}{\gamma - 1}$; $c_p = \frac{\gamma r}{\gamma - 1}$

L'hypothèse de fluide newtonien permet d'apporter les lois complémentaires pour déterminer le tenseur visqueux $\overline{\overline{\tau}}$ et le flux de chaleur $\overrightarrow{q}$:

loi de newton : $$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu\, \overline{\overline{S}} + \eta\, (\operatorname{div} \overrightarrow{V})\, \overline{\overline{I}} \tag{1.5}$$

loi de Fourier : $$\overrightarrow{q} = -\lambda\, \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, T \tag{1.6}$$

où $\overline{\overline{S}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} \overrightarrow{V} + \overline{\overline{\operatorname{grad}}}^T \overrightarrow{V}\right)$ est le tenseur des taux de déformation. La viscosité dynamique d'un gaz μ est reliée à la température par la loi de Sutherland :

$$\frac{\mu(T)}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T}{T_{ref}}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T_{ref} + 110.4}{T + 110.4} \tag{1.7}$$

où $\mu_{ref} = 1,711.10^{-5}\ \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ pour $T_{ref} = 273,16\ \text{K}$ représentent la viscosité et la température de référence pour l'air.
De plus, l'hypothèse de Stokes (partie sphérique du tenseur visqueux nulle) est supposée vérifiée, i.e. $3\eta + 2\mu = 0$. Le tenseur visqueux se réduit alors à sa partie déviatrice et ne représente donc que des forces de cisaillement :

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu\, \left(\overline{\overline{S}} - \frac{1}{3}(\operatorname{div} \overrightarrow{V})\, \overline{\overline{I}}\right) \tag{1.8}$$

La conductibilité thermique est déduite de la viscosité dynamique μ en supposant que le nombre de Prandtl P_r reste constant :

$$P_r = \frac{\mu c_p}{\lambda} \qquad \text{avec} \qquad P_r = 0.7 \quad \text{pour de l'air aux conditions standard} \tag{1.9}$$

1.2 Ecoulements turbulents et équations de Navier-Stokes filtrées

1.2.1 Les trois classes d'échelles d'un écoulement turbulent

Les écoulements de l'aérodynamique classique présentent des nombres de Reynolds élevés de l'ordre de $\mathrm{Re} = \frac{\rho V L}{\mu} \sim 10^6$ à 10^9 et transitionnent généralement vers un état turbulent. Celui-ci est caractérisé par des mouvements apparemment désordonnés et aléatoires qui sont répartis sur une très large gamme d'échelles spatiales et temporelles.

La turbulence se manifeste lorsque l'inertie du fluide est si grande que la dissipation visqueuse ne peut amortir les perturbations à une échelle macroscopique l_0. Ces perturbations tirent leur énergie de l'écoulement moyen et forment des fluctuations à grandes échelles l_0 qui possèdent alors trop d'énergie cinétique $\sim u_0^2$ pour être dissipées par la viscosité moléculaire ν dans leur temps de vie caractéristique l_0/u_0, autrement dit $\frac{l_0^2/\nu}{l_0/u_0} = \frac{u_0 l_0}{\nu} = \mathrm{Re}_0 \gg 1$. La turbulence agit donc comme un processus "naturel" de réorganisation de l'écoulement visant à créer les conditions pour lesquelles la viscosité moléculaire parvient à dissiper ce surplus d'énergie : c'est le concept de la cascade inertielle de Richardson-Kolmogorov [212, 136]. Dans l'hypothèse d'une turbulence à l'équilibre, l'énergie $\sim u_0^2$ injectée dans le champ fluctuant au niveau des grandes échelles l_0 est transférée intégralement vers des échelles d'agitation de plus en plus petites sans que la viscosité n'ait le temps d'intervenir. Le taux de transfert de l'énergie est donc constant $\varepsilon \sim \frac{u^2}{l/u} \sim \frac{u_0^2}{l_0/u_0} \sim \varepsilon_0$. Ce transfert d'énergie constant donne la forme bien connue à la densité spectrale d'énergie $E_\kappa(\kappa = 1/l) \sim \frac{u^2}{1/l} \sim \varepsilon_0^{2/3} \kappa^{-5/3}$ reproduite figure 1.1.

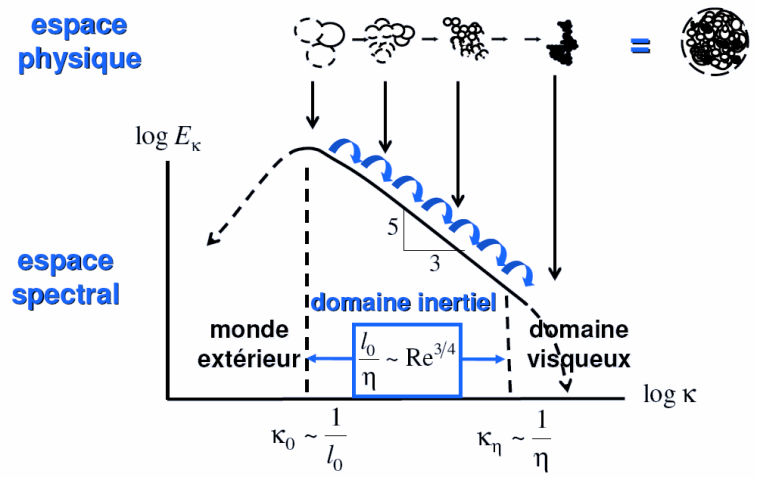


FIG. 1.1 – Spectre d'énergie de la turbulence isotrope et cascade inertielle [122].

La théorie de la cascade inertielle permet d'expliquer les distributions d'énergie non seulement dans une turbulence isotrope mais aussi dans les écoulements cisaillés [122]. Dans le cas d'une couche de mélange, c'est la différence de vitesse des écoulements cisaillés qui dimensionne l'énergie u_0^2 injectée dans la cascade. En diminuant, l'échelle d'agitation l porte moins d'énergie $u^2 \sim l^{2/3}$ mais la transfère d'autant plus vite. Ajouté à cela, le taux de cisaillement

$S \sim \frac{u}{l} \sim \frac{u_0}{l_0}\left(\frac{l}{l_0}\right)^{-2/3}$ s'accroît jusqu'à rendre le taux de dissipation visqueuse $\nu\left(\frac{u}{l}\right)^2$ commensurable avec le taux de transfert de l'énergie $\varepsilon_0 \sim \frac{u^2}{l/u}$ pour l'échelle minimale de fluctuation, l'échelle de Kolmogorov $\eta \sim l_0 \mathrm{Re}_0^{-3/4}$.

La plus petite échelle turbulente η reste néanmoins largement supérieure à l'échelle du libre parcours moyen des molécules l^*[1], i.e. $\frac{l^*}{\eta} \sim M_0 \mathrm{Re}^{-1/4} \ll 1$, sachant que le nombre Mach turbulent est $M_0 = u/a \ll \mathrm{Re}^{1/4}$. Les équations de Navier-Stokes sont donc toujours applicables et permettent de décrire l'intégralité de tout écoulement turbulent. Toutefois, la simulation numérique directe (ou "Direct Numerical Simulation", DNS) des écoulements à haut nombre de Reynolds (typiquement $\mathrm{Re} > 10^4$) est aujourd'hui irréalisable pour des raisons de stockage et de temps de calcul excessifs. En effet, l'évolution de chaque macro-échelle l_0 de la turbulence (inférieure aux dimensions de l'écoulement complet) pendant une durée de l_0/u_0 nécessite de calculer les 5 variables (ρ, u, v, w, p) sur $\left(\frac{l_0}{\eta}\right)^3 \sim \mathrm{Re}_0^{9/4}$ points pendant au moins $\sim \mathrm{Re}_0^{3/4}$ itérations (en prenant en compte le temps de vie des échelles de Kolmogorov η/v et les conditions de stabilité sur le $\mathrm{CFL}_{\max} = \frac{(v+a)\Delta t}{\eta}$, a la vitesse du son).

Pour les écoulements à haut nombre de Reynolds, les capacités informatiques actuelles ne permettent de calculer explicitement que les plus grandes échelles temporelles et spatiales (elles sont indissociables) du mouvement turbulent. Le filtrage RANS sépare formellement les échelles L du mouvement moyen des grandes échelles l_0 de la turbulence et le filtrage LES sépare formellement les grandes échelles l_0 des petites échelles η de la turbulence. Ces deux filtrages sont résumés dans la suite. Les équations de Navier-Stokes filtrées selon ces deux approches étant identiques sur la forme, elles sont toutes deux exposées plus tard dans la même section 1.2.4.

1.2.2 Filtrage RANS

1.2.2.1 Moyenne statistique et moyenne de Favre associée

Bien que formant un système déterministe, les équations de Navier-Stokes ont un comportement chaotique d'autant plus marqué que le nombre de Reynolds est élevé. Ce comportement est dû au terme de convection non-linéaire qui rend le système extrêmement sensible aux conditions initiales (pour Re grand). Ainsi toute incertitude même infinitésimale sur les conditions initiales peut conduire à un écoulement radicalement différent de celui issu des conditions initiales exactes au bout d'un temps long (sachant qu'un temps long à l'échelle de Kolmogorov η est court à l'échelle macroscopique l : $\frac{\eta/v}{l_0/u_0} \sim \left(\frac{\eta}{l_0}\right)^{2/3} \sim \mathrm{Re}_0^{-1/2}$). Au bout d'un certain temps dit "temps intégral", l'écoulement ayant subi un enchaînement de bifurcations se décorrèle des conditions initiales. L'hyper-sensibilité du système à grand Re vis-à-vis des conditions initiales, des conditions aux limites ou des propriétés du fluide incertaines donne aux écoulements turbulents leur caractère imprédictible et aléatoire. Ceci ajouté à la multitude d'échelles spatiales représentées figure 1.1 rend la turbulence terriblement coûteuse à calculer ; c'est le côté négatif. Le côté positif est que ce désordre est tellement grand qu'il peut être décrit globalement[2] de manière statistique, alors que le mouvement moyen reste explicitement calculé : c'est l'approche RANS.

Le première forme de filtrage, nommée "décomposition de Reynolds", sépare donc le mouvement moyen au sens statistique de l'ensemble des mouvements fluctuants de la turbulence.

[1] A posteriori, on a encore le droit de parler de viscosité moléculaire à l'échelle η car on a $l^* \ll \eta$.

[2] En fait pas tout à fait, cf. section 1.2.3

Toute grandeur aléatoire $f(\vec{X},t)$ est décomposée en une partie moyenne $< f >$ et une partie fluctuante f'. La quantité $< f >$ est une moyenne d'ensemble définie sur un grand nombre de réalisations de la variable $f(\vec{X},t)$ à la position $\vec{X}$ au temps t. De manière générale, l'écoulement moyen peut dépendre du temps et la moyenne d'ensemble est définie par :

$$< f > (\vec{x},t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f_k(\vec{x},t) \tag{1.10}$$

où N représente le nombre d'expériences "hypothétiques" au cours desquelles on mesure f et f_k représente la mesure de f au cours de la $k^{\text{ième}}$ expérience.
La partie fluctuante f' est simplement le complémentaire de f par rapport à sa moyenne d'ensemble $< f >$:

$$f =< f > +f' \tag{1.11}$$

On appelle "opérateur de Reynolds", un opérateur $< . >$ linéaire, commutant avec les dérivées spatiales et temporelles et vérifiant $<< f > g >=< f >< g >$ pour toutes variables aléatoires f et g. Un tel opérateur est idempotent (autrement dit un projecteur) $<< f >>=< f >$, ce qui implique dans (1.11) que $< f' >= 0$. L'ordre de grandeur des fluctuations est donc dans ce cas mesuré par l'écart-type $\sqrt{f'^2}$. La moyenne statistique est un opérateur de Reynolds.

La décomposition de Reynolds (1.11) s'applique facilement aux équations de Navier-Stokes incompressibles et ne fait apparaître qu'un seul terme de fluctuation respectivement le tenseur de Reynolds $-\rho < \overrightarrow{V}' \otimes \overrightarrow{V}' >$ à côté du tenseur des contraintes dans le bilan de quantité de mouvement et $\rho c_p < T' \overrightarrow{V}' >$ à côté du flux surfacique de conduction $\overrightarrow{q}$ dans le bilan d'énergie interne du mouvement moyen.
L'application de (1.11) aux équations de Navier-Stokes compressibles produit beaucoup plus de termes supplémentaires dans les équations du mouvement moyen (cf. Chassaing *et al.* [34]). Afin de se rapprocher de la forme des équations de base, la plupart des codes de calcul d'écoulements turbulents compressibles, dont FLU3M, sont basés sur la moyenne pondérée par la masse volumique, aussi appelée "moyenne de Favre" :

$$\widetilde{f} = \frac{< \rho f >}{< \rho >} \qquad \text{et la nouvelle partie fluctuante } f'' \text{ telle que :} \qquad f = \widetilde{f} + f'' \tag{1.12}$$

Il est important de noter que la moyenne de Favre n'est qu'un changement de variable et n'est pas un opérateur de Reynolds[3]. Par définition, on a :

$$< \rho f >=< \rho > \widetilde{f} \tag{1.13}$$

et en utilisant les propriétés de l'opérateur de Reynolds $< . >$, on obtient :

$$< \rho f g >=< \rho > \widetilde{f}\,\widetilde{g} + < \rho f'' g'' > \qquad \text{d'où} \qquad \widetilde{fg} = \widetilde{f}\,\widetilde{g} + \widetilde{f''g''} \tag{1.14}$$

En particulier, (1.14) permet d'exprimer le tenseur de Reynolds $\overline{\overline{\tau}}^R$ apparaissant dans l'équation de quantité de mouvement sous une forme analogue au cas incompressible :

$$\overline{\overline{\tau}}^R = -\left(< \rho \overrightarrow{V} \otimes \overrightarrow{V} > - < \rho > \widetilde{\overrightarrow{V}} \otimes \widetilde{\overrightarrow{V}} \right) = - < \rho > \widetilde{\overrightarrow{V}'' \otimes \vec{V}''} \tag{1.15}$$

[3]Plus précisément, la moyenne de Favre associée à un opérateur de Reynolds est bien idempotente mais ne commute pas avec les dérivations spatiales ou temporelles. En outre, la partie fluctuante f'' vérifie $< \rho f'' >= 0$ mais $< f'' > \neq 0$.

1.2.2.2 Filtrage temporel, hypothèse d'ergodicité et approche URANS

En pratique, on n'effectue pas N réalisations d'un écoulement mais on observe cet écoulement sur une certaine durée T. Si l'écoulement turbulent (donc strictement instationnaire) est établi, il est pertinent d'en prendre sa moyenne temporelle sur une durée T définie par :

$$\langle f \rangle_T(\overrightarrow{x}, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\overrightarrow{x}, \tau) d\tau \tag{1.16}$$

On a dit précédemment que l'écoulement turbulent reste corrélé sur l'échelle du temps intégral Θ. Dire que l'écoulement moyen est établi ou stationnaire revient à dire que pour tout $T \gg \Theta$, $(f)_T(\overrightarrow{X}, t)$ prend la même valeur quelque soit t.

D'autre part, lorsque l'on regarde un écoulement turbulent à petite échelle Λ[4] donc d'un temps intégral Θ petit[5] par rapport à notre temps de perception T, on a l'impression de voir le mouvement fluctuant dans son ensemble sans en distinguer le détail des structures turbulentes, comme si l'ensemble des $N \to \infty$ réalisations hypothètiques avaient le temps de se passer pendant la durée T : c'est l'"hypothèse d'ergodicité".

On montre (cf. Tennekes & Lumley [249]) que lorsqu'un écoulement moyen au sens statistique est stationnaire, la moyenne temporelle définie par (1.16) converge vers la moyenne statistique définie par (1.10) lorsque $T \to \infty$. De plus, l'erreur quadratique relative est proportionnelle à $\frac{\theta}{T}$ et au carré de l'intensité des fluctuations $\left(\frac{<f'^2>}{<f>}\right)^{1/2}$:

$$\frac{<(\langle f \rangle_T - <f>)^2>}{<f>} = 2\,\frac{\Theta}{T}\frac{<f'^2>}{<f>} \tag{1.17}$$

Lorsque l'écoulement moyen au sens statistique est instationnaire, la décomposition de Reynolds (1.11) est toujours strictement applicable et formalise ce que l'on appelle l'approche "Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes Simulation" (URANS). Si le temps caractéristique de l'instationnarité du champ moyen T_m est largement supérieur au temps intégral Θ de la turbulence, il existe une durée T telle que $\Theta \ll T \ll T_m$ et sur laquelle la moyenne temporelle $(f)_T(\overrightarrow{x}, t)$ sera représentative de la moyenne statistique $<f>(\overrightarrow{X}, t)$ sans trop dénaturer l'évolution temporelle du mouvement moyen[6]. C'est le domaine de validité de l'approche URANS. Par contre, si cette séparation des échelles temporelles n'est pas vérifiée, c'est le cas par exemple lorsque un actionneur haute fréquence excite l'écoulement, l'instationnarité du mouvement moyen et la dynamique de la turbulence peuvent entrer en interaction, ce que l'approche URANS ne permet pas de reproduire.

1.2.3 Filtrage LES

Même si la décomposition de Reynolds qui est aux fondements de l'approche RANS est strictement exacte, les termes qu'elle introduit dans les équations du mouvement doivent être modélisés et c'est cette modélisation qui rend l'approche RANS contestable. En effet, le tenseur de Reynolds ou le flux surfacique turbulent d'énergie totale représentent l'action globale de la turbulence respectivement sur la quantité de mouvement et l'énergie totale de l'écoulement moyen, depuis les grandes échelles l_0 jusqu'aux échelles dissipatives η. Une modélisation globale de la

[4] Pour être précis, il faut dire un écoulement dont l'échelle intégrale Λ est courte.

[5] En utilisant l'hypothèse de Taylor avec U l'échelle de vitesse du mouvement moyen, $\Theta = \Lambda/U$.

[6] A la différence d'un filtre "porte" en temps, le filtre "boîte" en temps $\langle . \rangle_T$ n'est pas idempotent si bien que strictement une coupure à T détériore un signal périodique à $T_m > T$.

turbulence suppose qu'elle ait un comportement universel indépendant de l'écoulement moyen. A la manière du mouvement moléculaire qui est modélisé par les lois de comportement dans le mouvement mésoscopique décrit par la mécanique des milieux continus, l'approche RANS vise à imiter les effets du mouvement fluctuant à l'aide de modèles de fermeture dans le mouvement moyen au sens statistique. La différence majeure est que la séparation nette des échelles $l^* \ll l_m$ (l_m échelle mésoscopique) dans le premier cas n'est pas vérifiée dans le second puisque les grandes échelles turbulentes doivent être commensurables avec les échelles du mouvement moyen pour en tirer leur énergie. Ces mécanismes d'injection de l'énergie dans la turbulence la rendent sensible à l'écoulement moyen, ce qui explique la multitude des modèles RANS tentant de les représenter.

Dans l'approche LES, cette dynamique des grandes échelles est explicitement calculée et la modélisation est repoussée au niveau des échelles inertielles l, telles que $l_0 \gg l \gg \eta$ (au milieu du spectre dessiné figure 1.1), à partir duquel la dynamique des mouvements fluctuant est supposée universelle selon la théorie de Richardson-Kolmogorov. Cette séparation des échelles est réalisée par le filtrage spatial décrit ci-dessous.

1.2.3.1 Filtrage spatial et moyenne de Favre associée

On se restreint pour commencer au filtrage homogène et isotrope appliqué sur un domaine non borné. Toute grandeur f de l'écoulement possède une distribution spatiale à chaque instant. A chaque instant t, les différentes échelles de variations spatiales de cette distribution sont représentées par la transformée de Fourier de $f(\overrightarrow{x}, t)$, notée $\widehat{f}(\overrightarrow{k}, t)$ avec $\overrightarrow{k}$ vecteur d'onde. Au niveau de l'introduction présentée ici, l'aspect tridimensionnel de l'espace n'apporte rien et on se restreindra à l'espace de dimension 1[7]. Séparer les grandes échelles des petites échelles spatiales par rapport à une longueur d'onde 2Δ revient à appliquer un filtre passe-bas $\widehat{G}$ de nombre d'onde de coupure $\kappa_c = \pi/\Delta$ à la fonction spectrale $\widehat{f}(k, t)$:

$$\widehat{\langle f \rangle} = \widehat{G}\ \widehat{f} \tag{1.18}$$

En notant G le noyau de convolution de $\widehat{G}$, la grandeur filtrée $\langle f \rangle$ s'exprime dans l'espace physique par le produit de convolution $G \star f$:

$$\langle f \rangle(x, t) = (G \star f)(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, t) G(x - \xi) d\xi \tag{1.19}$$

La partie fluctuante (au sens spatial) f' de f résulte directement de la décomposition $f = \langle f \rangle + f'$. Pour pouvoir être appliqué aux équations du mouvement, Sagaut [217] dit que l'opérateur de filtrage $\langle . \rangle$ doit vérifier trois propriétés : la conservation des constantes (G doit être normé), la linéarité (vérifiée par construction), la commutation avec les dérivation spatiale temporelle. Ainsi spécifié, un filtre LES n'est pas obligatoirement idempotent, ce qui implique que l'on n'a pas nécessairement $\langle f' \rangle = 0$. Trois filtres sont classiquement utilisés en LES : le filtre "boite" qui représente la moyenne spatiale sur une longueur donnée (c'est un sinus cardinal dans l'espace spectral), le filtre Gaussien qui est une fonction Gaussienne dans l'espace physique et dans l'espace spectral, et le filtre "porte" qui est un filtre passe-bas parfait dans l'espace spectral (sinus cardinal dans l'espace physique). Parmi ces trois filtres, seul le filtre "porte" est idempotent, c'est pourquoi on l'appelle aussi filtre "projecteur" en opposition au filtre Gaussien plus progressif.

Pour les écoulements compressibles, une moyenne de Favre est associée au filtre spatial $\langle . \rangle$

[7] L'extension des filtres unidimensionnels à la dimension 3 peut être effectuée simplement par des produits tensoriels de noyaux de convolution 1D.

de la même manière que pour la moyenne statistique $< . >$:

$$\widetilde{f} = \frac{\langle \rho f \rangle}{\langle \rho \rangle} \qquad \text{et la nouvelle partie fluctuante } f'' \text{ est telle que :} \qquad f = \widetilde{f} + f'' \tag{1.20}$$

Toutefois, comme les filtres LES ainsi définis ne sont pas obligatoirement idempotents, il en est de même pour la moyenne de Favre associée et les relations (1.14) et (1.15) ne sont plus satisfaites (sauf pour le filtre "porte").

1.2.3.2 Quelques remarques sur le filtrage spatial

Filtrage implicite. Une application rigoureuse de la théorie soutenant l'approche LES voudrait que le calcul de l'écoulement soit effectué sur une grille de largeur de maille Δ, et qui pourrait donc être porteur de nombres d'ondes $\kappa \leq \kappa_c = \frac{2\pi}{2\Delta}$ d'après le théorème de Shannon, puis que l'on applique un filtre passe-bas de coupure $\kappa_f \leq \kappa_c$. En pratique, cette manière de procéder est très coûteuse et on préfère utiliser tous les points du maillage pour avoir un nombre d'onde résolu maximal le plus grand possible sans appliquer explicitement de filtre. C'est alors le maillage qui joue le rôle de filtre implicite. On peut supposer que le maillage agit comme un filtre "porte" de coupure $\kappa_c = \frac{\pi}{\Delta}$, mais en réalité sa fonction de transfert est inconnue.

Maillage hétérogène et erreur de commutativité. Jusqu'ici nous avons supposé que le filtre spatial était uniforme (on se cantonne toujours au cas 1D). Pour des écoulements "réalistes", le coût de calcul impose au maillage d'être hétérogène pour s'adapter aux régions où l'écoulement subit de forts gradients, donc le filtrage implicite qui en résulte est aussi hétérogène. L'opération de filtrage spatial ne commute alors plus strictement avec l'opération de dérivation spatiale. L'étude des effets d'un filtrage hétérogène (et anisotrope en 3D) est assez récent et nous ne rentrerons pas dans les détails, le lecteur étant invité à consulter la revue de Sagaut [217]. Ghosal & Moin [96] ont modifié la définition originelle du filtre LES (qui requiert la commutativité stricte avec la dérivation spatiale) pour définir des filtres hétérogènes commutant au second ordre avec la dérivation spatiale et qu'ils baptisent "Second Order Commuting Filters" (SOCF). Ils montrent que sous les conditions SOCF, l'erreur de commutation $[A, B]\,\psi = A.(B.\psi) - B.(A.\psi)$ entre l'opérateur de filtrage $A = G\star$ et l'opérateur de dérivation spatiale $B = \frac{d}{dx}$ sur une fonction ψ exprimée sous forme normale $\psi(x) = \widehat{\psi}_k e^{ikx}$ s'exprime par :

$$\left[G\star, \frac{d}{dx}\right]\psi = -\alpha^{(2)}\delta^2 \left(\frac{\delta'}{\delta}\right)\frac{d^2\langle\psi\rangle}{dx^2} + O\left(k\delta\right)^4 \quad \text{avec} \quad \alpha^{(2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^2 G(\zeta) d\zeta \tag{1.21}$$

L'équation (1.21) montre que l'erreur de commutation est fonction du carré de la taille de maille locale $\delta(x)$ ainsi que de l'étirement des mailles $\frac{1}{\delta(x)}\frac{d\delta}{dx}(x)$ et de la dérivée seconde de la fonction $\psi(x)$. Ghosal & Moin en déduisent que l'erreur de commutation a une action dissipative dans les équations du mouvement. Nous nous arrêterons là sur ce sujet en signalant que l'effort de recherche concernant les schémas numériques peu dissipatifs peut devenir vain si les calculs sont effectués sur des maillages de configurations appliquées du fait de l'erreur de commutation entre les opérations de filtrage et de dérivation spatiaux.

Filtrage spatial et moyenne statistique. En se basant sur l'hypothèse d'ergodicité, le champ moyen d'un écoulement turbulent calculé par une approche LES s'obtient en moyennant le champ résolu (i.e. échelles du mouvement moyen L et grandes échelles de la turbulence l_0). Ceci suppose implicitement que $\langle f'' \rangle_T = 0$ ou $\langle \langle \rho \rangle f'' \rangle_T = 0$, f'' étant la partie fluctuante par rapport à la moyenne de Favre associée à l'opérateur de filtrage $\langle . \rangle$ et $\langle . \rangle_T$ la moyenne temporelle définie par (1.16).

1.2.4 Equations de Navier-Stokes filtrées

Dans cette section, l'opérateur de filtrage $\langle . \rangle$ posséde les propriété d'un filtre LES défini précédemment (section 1.2.3.1) et les grandeurs fluctuantes f'' désignent la partie complémentaire des grandeurs "filtrées" au sens de la moyenne de Favre associée à $\langle . \rangle$. Comme la moyenne statistisque (ou avec l'hypothèse d'ergodicité, la moyenne temporelle) possède les propriétés d'un opérateur de filtrage LES, les équations du mouvement filtrées par $\langle . \rangle$ sont aussi valables pour l'approche RANS. En particulier, la propriété d'idempotence n'est pas nécessairement vérifiée par $\langle . \rangle$ selon la définition des filtres LES [217], c'est pourquoi elle est ici explicitement signalée lorsqu'on y a recours[8]. L'opération de filtrage appliquée aux équations (1.1,1.2,1.3) et l'utilisation de la moyenne de Favre associée permettent d'écrire les équations du mouvement filtré :

$$\text{(Masse)} \qquad \frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\langle \rho \rangle \widetilde{\overrightarrow{V}} \right) = 0 \tag{1.22}$$

$$\text{(QDM)} \qquad \frac{\partial \langle \rho \rangle \widetilde{\overrightarrow{V}}}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{div}}\left(\langle \rho \rangle \widetilde{\overrightarrow{V}} \otimes \widetilde{\overrightarrow{V}} \right) = \overrightarrow{\operatorname{div}}\left(-\langle p \rangle \overline{\overline{I}} + \langle \overline{\overline{\tau}} \rangle + \overline{\overline{\tau^F}} \right) \tag{1.23}$$

$$\text{(Energie)} \qquad \frac{\partial \langle \rho \rangle \widetilde{E}}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\langle \rho \rangle \widetilde{E} \widetilde{\overrightarrow{V}} \right) = \operatorname{div}\left(-\langle p \overrightarrow{V} \rangle + \langle \overline{\overline{\tau}}.\overrightarrow{V} \rangle - \langle \overrightarrow{q} \rangle - \overrightarrow{Q^F} \right) \tag{1.24}$$

où l'on a noté

- le tenseur des tensions fluctuantes : $\overline{\overline{\tau^F}} = -\langle \rho \rangle \left(\widetilde{\overrightarrow{V} \otimes \overrightarrow{V}} - \widetilde{\overrightarrow{V}} \otimes \widetilde{\overrightarrow{V}} \right)$ (1.25)
- le vecteur flux surfacique fluctuant d'énergie totale : $\overrightarrow{Q^F} = \langle \rho \rangle \left(\widetilde{E \overrightarrow{V}} - \widetilde{E} \widetilde{\overrightarrow{V}} \right)$ (1.26)

Ayant pour objectif d'écrire les équations du mouvement des grandes échelles (temporelles ou spatiales) d'un écoulement compressible, nous avons d'abord dû nous rabattre, à l'aide de la moyenne de Favre, sur les équations du mouvement d'un "écoulement équivalent" possédant les mêmes grandeurs volumiques ou conservatives (i.e. $\sim \langle \rho f \rangle$). On se contente alors pour l'"écoulement résolu" des équations du mouvement d'un écoulement ayant la même masse volumique $\langle \rho \rangle$, la même vitesse $\widetilde{V}$ que l'écoulement filtré avec la pondération par la masse sachant que l'énergie totale dite "résolue" n'est pas seulement celle du mouvement filtré. Si l'on suppose que le filtre est idempotent, le terme supplémentaire s'identifie à l'énergie cinétique fluctuante :

$$\widetilde{E} = \widetilde{e} + \frac{1}{2}\widetilde{\overrightarrow{V}^2} \underbrace{=}_{\substack{\text{si } \langle . \rangle \\ \text{idempotent}}} \underbrace{\widetilde{e} + \frac{1}{2}\widetilde{\overrightarrow{V}}^2}_{\substack{\text{énergie totale} \\ \text{du mouvement moyen}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\widetilde{\overrightarrow{V}''^2}}_{\substack{\text{énergie cinétique} \\ \text{fluctuante}}} \tag{1.27}$$

La définition de l'"énergie totale résolue" étant modifiée par rapport à une vraie énergie totale, les variables thermodynamiques de l'écoulement résolu sont modifiées en conséquence comme suit.

Les lois d'état de l'écoulement équivalent sont :

$$\langle p \rangle = \langle \rho \rangle r \widetilde{T} \quad \text{et} \quad \widetilde{e} = c_v \widetilde{T} \tag{1.28}$$

[8] Certains papiers traitant du formalisme LES compressible ne mentionnent pas l'hypothèse d'idempotence mais supposent quand même la validité "approximative" de la relation (1.14). La non-idempotence du filtre LES pose un sérieux problème de manipulation et d'interprétation des équations filtrées. Par exemple, en incompressible, la décomposition triple de Leonard [149] met en évidence le tenseur de Leonard $\overline{\overline{L}} = \langle \langle \overrightarrow{V} \rangle \otimes \langle \overrightarrow{V} \rangle \rangle - \langle \overrightarrow{V} \rangle \otimes \langle \overrightarrow{V} \rangle$ représentant des interactions entre les grandes échelles dans le tenseur sous-maille modélisé $\overline{\overline{\tau^F}}$.

Suivant la démarche de Lesieur & Comte [150], on décompose le tenseur des tensions fluctuantes en sa partie sphérique et sa partie déviatrice :

$$\overline{\overline{\tau^F}} = \underbrace{\overline{\overline{\tau^F}} - \frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\overline{\overline{\tau^F}}\right)\overline{\overline{I}}}_{\text{partie déviatrice } \overline{\overline{\tau^D}}} + \underbrace{\frac{1}{3}\mathrm{Tr}\left(\overline{\overline{\tau^F}}\right)\overline{\overline{I}}}_{\text{partie sphérique } -p^*\overline{\overline{I}}} \tag{1.29}$$

Dans le cas d'un filtre idempotent, $p^* = \frac{2}{3}\langle\rho\rangle\frac{\widetilde{\overrightarrow{V}''^2}}{2}$. Comme dans le bilan de quantité de mouvement RANS ou LES incompressible, il est alors "naturel" de définir une "macro-pression" :

$$\widehat{p} = \langle p\rangle + p^* = \langle p\rangle\left(1+\gamma M_F^2\right) \qquad \text{avec} \qquad M_F^2 = \frac{p^*/\langle\rho\rangle}{\gamma\langle p\rangle/\langle\rho\rangle} \underset{\text{idempotent}}{\overset{\text{si } \langle.\rangle}{=}} \frac{\widetilde{\overrightarrow{V}''^2}/3}{\gamma\langle p\rangle/\langle\rho\rangle} \tag{1.30}$$

d'où vient la notation p^*. En définissant une "macro-énergie interne" comme :

$$\widehat{e} = \widetilde{e} + \frac{3}{2}\frac{p^*}{\langle\rho\rangle} = c_v\left(\widetilde{T} + \frac{3}{2c_v}\frac{p^*}{\langle\rho\rangle}\right) \tag{1.31}$$

l'énergie totale résolue peut être réécrite, avec l'hypothèse d'idempotence du filtre, sous la forme classique :

$$\widetilde{E} = \widehat{e} + \frac{1}{2}\widetilde{\overrightarrow{V}^2} \tag{1.32}$$

Pour donner la forme classique à la seconde loi d'état, il est alors cohérent de définir une "macro-température" $\widehat{T}$ telle que :

$$\widehat{e} = c_v\widehat{T} \qquad \text{d'où} \qquad \widehat{T} = \widetilde{T} + \frac{3(\gamma-1)}{2}\frac{p^*}{\langle\rho\rangle r} = \widetilde{T}\left(1+\frac{3(\gamma-1)}{2}\gamma M_F^2\right) \tag{1.33}$$

La première loi d'état (1.28) devient alors dans l'écoulement résolu :

$$\widehat{p} = \langle\rho\rangle r\widehat{T} + \frac{5-3\gamma}{2}p^* \qquad \text{ou encore} \qquad \widehat{p} = \langle\rho\rangle r\widehat{T}\left(1+\frac{5-3\gamma}{2}\gamma M_F^2\right) \tag{1.34}$$

Nous reviendrons sur cette loi d'état de l'écoulement résolu et donnerons des lois de comportement pour $\overline{\overline{\tau^F}}$ et $\overrightarrow{Q^F}$ lors de la fermeture des équations, section 1.3.1.1. La reformulation des termes restants aux seconds membres des équations filtrées (1.23) et (1.24) est effectuée dans la section suivante.

Pour finir, notons que le passage d'un écoulement compressible ne retenant que les mouvements à grandes échelles à un écoulement équivalent (basé sur la moyenne pondérée par la masse) et enfin à un écoulement dit résolu n'est motivé que par le soucis de toujours se ramener aux équations de Navier-Stokes de base. Ceci s'explique, d'une part parce qu'au niveau pratique, on "sait" déjà implémenter numériquement les équations de base, et d'autre part parce qu'on a plus l'"habitude", lorsqu'on regarde le champ moyen, de discuter physiquement de la même manière que sur les équations de base (i.e. laminaires) en ajoutant au tenseur des contraintes et au vecteur flux surfacique de conduction de la chaleur l'action de l'écoulement fluctuant. Plusieurs chemins sont empruntés dans la littérature pour parvenir aux équations de l'écoulement résolu, on peut notamment mentionner le travail de Vreman [258]. L'approche de Lesieur & Comte [150], jugée plus synthétique, a été adoptée ici. Néanmoins, cette présentation ne prétend pas montrer la seule voie pour comprendre les effets de la compressibilité. Le lecteur pourra par exemple se reporter à une approche différente se passant de la moyenne de Favre et exprimant une décomposition non en deux mais en trois termes, comme présenté par Chassaing *et al.* [34].

1.2.4.1 Reformulation des équations filtrées

La forme conservative des équations du mouvement se prête bien à leur résolution numérique. Aussi, les équations du mouvement résolu (1.22,1.23,1.24) doivent être reformulées pour faire apparaître explicitement les variables conservatives ($\langle\rho\rangle, \langle\rho\rangle\widetilde{\overrightarrow{V}}, \langle\rho\rangle\widetilde{E}$) ou des fonctions des variables primitives ($\langle\rho\rangle, \widetilde{\overrightarrow{V}}, \langle p\rangle, \widetilde{T}$). Néanmoins, les opérations de "filtrage" effectuées précédemment ont produit des moments d'ordre 2 (i.e. $\widetilde{f.g}$) qui doivent être remplacés par certaines approximations pour permettre cette reformulation.

Par analogie avec la loi de comportement (1.8), le tenseur visqueux moyen $\langle\overline{\overline{\tau}}\rangle$ est assimilé à :

$$\langle\overline{\overline{\tau}}\rangle \approx 2\mu(\widetilde{T})\,\widehat{\overline{\overline{S}}} \qquad \text{avec} \qquad \widehat{\overline{\overline{S}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\widetilde{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial\widetilde{u_j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial\widetilde{u_k}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)\overrightarrow{e_i}\otimes\overrightarrow{e_j} \tag{1.35}$$

De même avec la loi de Fourier 1.6, le flux surfacique de chaleur moyen $<\overrightarrow{q}>$ est assimilé à :

$$\langle\overrightarrow{q}\rangle \approx -\lambda(\widetilde{T})\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\widetilde{T} \tag{1.36}$$

La puissance des forces surfaciques extérieures est elle aussi approchée à l'aide des variables du calcul :

$$\langle\overline{\overline{\tau}}.\overrightarrow{V}\rangle \approx 2\mu(\widetilde{T})\,\widehat{\overline{\overline{S}}}.\widetilde{\overrightarrow{V}} \tag{1.37}$$

Ces trois approximations ne sont pas rigoureusement démontrables et sont habituellement justifiées de deux manières suivant que l'on se place dans l'approche RANS ou LES. Bien que leurs principes de filtrage soient différents, leurs significations sont identiques : d'une part, les grandes échelles l_0 portent l'essentiel de l'énergie turbulente et sont donc supposées représenter l'action prédominante de la turbulence sur l'écoulement moyen, et d'autre part, cette action turbulente est supposée prédominante sur les tensions visqueuses et sur les échanges conductifs assurés par l'agitation moléculaire. En RANS, l'action prédominante des grandes échelles est contenue dans le tenseur des tensions de Reynolds $\overline{\overline{\tau}}^R$ et dans le vecteur de flux surfacique turbulent d'énergie totale $\overrightarrow{Q^F}$. En LES, l'action des grandes échelles est explicitement résolue.

1.2.4.2 Formulation vectorielle des équations de Navier-Stokes filtrées

Après simplification, les équations du mouvement (1.22),(1.23) et (1.24) de l'écoulement résolu peuvent s'écrire sous forme vectorielle comme :

$$\frac{\partial\overrightarrow{W}}{\partial t} + \frac{\partial\overrightarrow{F}_i}{\partial x_i} - \frac{\partial\overrightarrow{F}_i^d}{\partial x_i} = 0 \tag{1.38}$$

où $\overrightarrow{W}$, $\overrightarrow{F}_i$ et $\overrightarrow{F}_i^d$ sont les vecteurs des variables conservatives, des flux d'Euler et des flux diffusifs définis par :

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} \langle\rho\rangle \\ \langle\rho\rangle\widetilde{u_1} \\ \langle\rho\rangle\widetilde{u_2} \\ \langle\rho\rangle\widetilde{u_3} \\ \langle\rho\rangle\widetilde{E} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{F}_i = \begin{pmatrix} \langle\rho\rangle\widetilde{u_i} \\ \langle\rho\rangle\widetilde{u_1}\widetilde{u_i} + \widehat{p}\delta_{1i} \\ \langle\rho\rangle\widetilde{u_2}\widetilde{u_i} + \widehat{p}\delta_{2i} \\ \langle\rho\rangle\widetilde{u_3}\widetilde{u_i} + \widehat{p}\delta_{3i} \\ (\langle\rho\rangle\widetilde{E} + \widehat{p})\widetilde{u_i} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{F}_i^d = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mu(\widetilde{T})\widehat{S_{1i}} + \tau_{1i}^D \\ 2\mu(\widetilde{T})\widehat{S_{2i}} + \tau_{1i}^D \\ 2\mu(\widetilde{T})\widehat{S_{3i}} + \tau_{1i}^D \\ 2\mu(\widetilde{T})\widehat{S_{ij}}\widetilde{u_j} + \lambda(\widetilde{T})\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial x_i} + \widehat{Q^F}_i + P_i \end{pmatrix}$$

$$\text{avec la notation} \qquad \overrightarrow{P} = P_i\overrightarrow{e_i} = -\langle p\overrightarrow{V}\rangle + \widehat{p}\widetilde{\overrightarrow{V}} \tag{1.39}$$

1.3 Fermeture des équations du mouvement

1.3.1 Lois d'état et lois de comportement

Le système (1.38) de dimension 5 a bien un vecteur inconnu $W = \left(\langle\rho\rangle, \langle\rho\rangle\widetilde{u_1}, \langle\rho\rangle\widetilde{u_2}, \langle\rho\rangle\widetilde{u_3}, \langle\rho\rangle\widetilde{E}\right)$ de dimension 5 mais contient en plus des termes non-exprimés en fonction des composantes de W : $\overline{\overline{\tau^F}}$, $\overrightarrow{Q^F}$ et $\overrightarrow{P}$. Il reste à définir des lois de comportement pour fermer ces termes. En fait, nous avons fait la décomposition $\overline{\overline{\tau^F}} = -p^*\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau^D}}$. En mécanique des milieux continus, une décomposition (presque[9]) analogue du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ introduit la pression p coïncidant avec la pression thermodynamique et conduit à se reporter sur les lois d'état du gaz. Il en est de même ici. Une manière de déterminer le terme p^* est de lui consacrer une équation séparée comme proposé en LES par Yoshizawa [266]. Dans une approche LES, Lesieur & Comte [150] proposent une solution semblant séduisante qui est de négliger $\frac{5-3\gamma}{2}\gamma M_F^2$ dans la loi d'état (1.34) uniquement[10]. Il reste alors deux lois d'état :

$$\widehat{p} = \langle\rho\rangle r\widehat{T} \qquad \text{et} \qquad \widehat{e} = c_v\widehat{T} \tag{1.40}$$

qui sont formellement identiques aux lois de base (1.4) si l'on remplace p par p^* et T par $\widehat{T}$. Toutefois, les coefficient de diffusion μ et λ ont jusqu'ici été exprimés en fonction de $\widetilde{T}$. Lesieur & Comte [150] supposent donc implicitement de remplacer $\widetilde{T}$ par $\widehat{T}$ pour les raisons exprimées en fin de section (1.2.4.1).

Il convient à présent de préciser que l'on souhaite effectuer des simulations de type hybride RANS/LES, i.e. basée soit sur le formalisme RANS soit sur le formalisme LES suivant les régions de l'écoulement. Une revue récente des simulations hybrides a été écrite par Sagaut, Deck & Terracol dans la référence [218]. Deux caractéristiques propres à l'approche hybride sont d'une part que les calculs n'utilisent qu'un seul système d'équation du mouvement, ceci n'est pas un problème au niveau de l'implémentation puisque les 5 équations de bilan RANS et LES sont formellement identiques (cf. 1.2.4), et d'autre part que la solution résolue est continue à la jonction des zones traitées en RANS et en LES, par construction. Or, si l'on adopte le point de vue de Lesieur & Comte [150], à la jonction RANS/LES, l'énergie cinétique fluctuante contenue implicitement dans $\widehat{p}$ et $\widetilde{T}$ subit un saut (de l'énergie cinétique turbulente globale à l'énergie cinétique sous-maille ou inversement), ce qui n'est pas satisfaisant.

La solution la plus simple, généralement suivie, est de négliger tous les termes d'énergie cinétique fluctuante (RANS ou LES) devant les variables thermodynamique filtrées $\langle p\rangle$ et $\widetilde{T}$ dans (1.30) et (1.33), et on a alors les approximations :

$$\widehat{p} \approx \langle p\rangle \qquad \text{et} \qquad \widehat{T} \approx \widetilde{T} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{E} \approx c_v\widetilde{T} + \frac{1}{2}\widetilde{\overrightarrow{V''}^2} \tag{1.41}$$

qui offrent l'avantage de confondre l'écoulement équivalent et l'écoulement résolu, en particulier l'énergie totale résolue devient exprimable à l'aide des variables résolues suivant la forme de base. C'est donc avec cette dernière hypothèse que l'ensemble des discussions de ce mémoire seront menées. Il convient toutefois de préciser que les deux derniers points de vue exposés ici sont formellement identiques au niveau de l'implémentation et ne diffèrent que par l'interprétation de l'écoulement résolu.

[9] La décomposition n'est strictement analogue qu'avec l'hypothèse de Stokes.

[10] Lesieur & Comte [150] font remarquer que ce terme est nul pour un gaz mono-atomique $\gamma = 5/3$.

Enfin, la validité de cette hypothèse repose sur une approximation portant entièrement sur le Mach turbulent M_T :

$$\gamma \frac{\widetilde{\overrightarrow{V}''^2}/3}{\gamma\langle p\rangle/\langle\rho\rangle} = \frac{\gamma}{3} M_T^2 \ll 1 \qquad \text{avec} \qquad M_T^2 = \frac{\widetilde{\overrightarrow{V}''^2}}{\gamma\langle p\rangle/\langle\rho\rangle} \tag{1.42}$$

qui est raisonnable tant que le nombre de Mach de l'écoulement $M^2 = \frac{\widetilde{\overrightarrow{V}^2}}{\gamma\langle p\rangle/\langle\rho\rangle}$ n'est pas trop élevé.

1.3.1.1 Fermeture de l'équation de quantité de mouvement

Dans cette étude, la fermeture du tenseur des fluctuations $\overline{\overline{\tau^D}}$ est réalisée de manière similaire en mode RANS et mode LES en transposant l'ensemble {loi de Newton (1.5)+hypothèse de Stokes} :

$$\overline{\overline{\tau}}^D = 2\langle\rho\rangle\mu_t \, \widehat{\widehat{S}} \qquad \text{avec} \qquad \widehat{\widehat{S}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \widetilde{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u_j}}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial \widetilde{u_k}}{\partial x_k}\delta_{ij}\right) \overrightarrow{e_i} \otimes \overrightarrow{e_j} \tag{1.43}$$

Cette forme de fermeture est appelée "hypothèse de Boussinesq". Elle réduit la détermination du tenseur d'ordre 2, $\overline{\overline{\tau}}^D$, à celle du scalaire ν_t dite "viscosité cinématique turbulente" en RANS et "viscosité cinématique sous-maille" en LES. Comme toute fermeture, l'hypothèse de Boussinesq est beaucoup plus forte lorsqu'elle est appliquée en RANS que lorsqu'elle est appliquée en LES puisqu'elle doit représenter l'action de l'ensemble des échelles turbulentes et notamment les grandes échelles l_0 qui ne sont pas vraiment découplées du champ moyen. Pour la détermination de ν_t, il existe une multitude de modèles RANS et de modèles sous-maille dont le modèle à une équation de transport de Spalart-Allmaras en RANS et le modèle algébrique de Smagorinsky en LES décrits dans la suite.

Par ailleurs, notons qu'il existe en LES l'approche "Monotone Integrated Large-Eddy Simulation" (MILES) selon laquelle le tenseur sous-maille $\overline{\overline{\tau^D}}$ est retiré des équations du mouvement. Cette approche compte sur la dissipation de schémas numériques de capture de choc intrinsèquement dissipatifs pour mimer l'effet diffusif et dissipatif du tenseur sous-maille. Après le filtrage implicite, l'approche MILES représente la modélisation sous-maille implicite. En fait, si l'on dispose de schémas "trop" dissipatifs, la solution d'enlever la modélisation explicite peut parfois améliorer le résultat mais ne constitue pas une approche satisfaisante.

1.3.1.2 Fermeture de l'équation de l'énergie

Bien que $\overrightarrow{Q^F}$ représente le flux surfacique fluctuant de la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique et bien que $\overrightarrow{P}$ représente un terme de couplage entre les champs de vitesse et les champs de pression moyen et fluctuant, la somme de ces deux termes est modélisée, dans FLU3M comme usuellement, à la manière de la loi de Fourier (1.6) avec un nombre de Prandtl constant Pr_t :

$$\overrightarrow{Q^F} + \overrightarrow{P} = -\lambda_t \, \overrightarrow{\mathrm{grad}} \, \widetilde{T} \qquad \text{avec} \qquad \lambda_t = \frac{\mu_t c_p}{\mathrm{Pr}_t} \tag{1.44}$$

Pour de l'air à température ambiante, on pose $\mathrm{Pr}_t = 0.9$ en RANS et $\mathrm{Pr}_t = \mathrm{Pr} = 0.7$ en LES.

A partir de maintenant, les notations des différents filtres sont omises pour faciliter la lecture. Ainsi le vecteur $(\langle\rho\rangle, \widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \widetilde{u_3}, \langle p\rangle)$ sera dorénavant écrit (ρ, u_1, u_2, u_3, p) de même $\widetilde{T}$ sera simplement noté T.

1.3.2 RANS, modèle de Spalart-Allmaras

Le modèle empirique de Spalart-Allmaras *et al.* [238, 239] a été développé pour traiter les écoulements de couches minces attachées selon l'approche RANS. Ce modèle est basé sur l'unique équation de transport de la quantité $\tilde{\nu}$ confondue avec la viscosité turbulente $\nu_t = f_{v1}\tilde{\nu}$, excepté dans la zone tampon et la sous-couche visqueuse :

$$\frac{D\tilde{\nu}}{Dt} = \underbrace{c_{b1}\tilde{S}\tilde{\nu}}_{production} + \underbrace{\frac{1}{\sigma}\left[\mathrm{div}\left((\nu+\tilde{\nu}).\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \tilde{\nu}\right) + c_{b2}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \tilde{\nu})^2\right]}_{diffusion} - \underbrace{c_{w1}f_w\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2}_{destruction} \tag{1.45}$$

$$\text{avec} \qquad \tilde{S} = \|\overrightarrow{\omega}\| + \frac{\tilde{\nu}}{\kappa^2 d^2}f_{v2}, \qquad \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{u} \tag{1.46}$$

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1+\chi f_{v1}} \quad \text{où} \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu} \tag{1.47}$$

$$f_w = g\left(\frac{1+c_{w3}^6}{g^6+c_{w3}^6}\right)^{1/6}, \quad g = r + c_{w2}\left(r^6 - r\right) \quad \text{où} \quad r = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{S}\kappa^2 d^2} \tag{1.48}$$

$c_{b1} = 0.1355,\ c_{b2} = 0.622,\ \sigma = 2/3,\ \kappa = 0.41,\ c_{w1} = \frac{c_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1+c_{b2}}{\sigma},\ c_{w2} = 0.3,\ c_{w3} = 2,\ c_{v1} = 7.1$

La quantité $\tilde{S}$ est égale à $S = \|\overrightarrow{\omega}\|$[11] excepté dans la zone tampon et la sous-couche visqueuse. Les termes de production et de diffusion ont été calibrés de manière à reproduire les écoulements cisaillés libres. Dans le but de mimer l'effet de blocage de la paroi, les auteurs ont introduits le terme de destruction dont l'action est d'autant plus importante que la distance à la paroi d est faible. Sa décroissance dans la couche externe est accélérée grâce à la fonction de correction f_w. Les fonctions de correction f_{v1} et f_{v2}, dépendant seulement du rapport $\tilde{\nu}/\nu$, ont été créées afin de permettre aux quantités $\tilde{\nu}$ et $\tilde{S}$ de maintenir leur comportement de couche logarithmique jusqu'à la paroi, ceci pour des considérations numériques.

Le modèle implémenté dans FLU3M par Deck [65] est une version modifiée, destinée à traiter les écoulements à masse volumique variable :

$$\frac{D\rho\tilde{\nu}}{Dt} = \underbrace{c_{b1}\tilde{S}\rho\tilde{\nu}}_{production} + \underbrace{\frac{1}{\sigma}\left[\mathrm{div}\left((\mu+\rho\tilde{\nu}).\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \tilde{\nu}\right) + c_{b2}\rho(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \tilde{\nu})^2\right]}_{diffusion} - \underbrace{\rho c_{w1}f_w\left(\frac{\tilde{\nu}}{d}\right)^2}_{destruction} \tag{1.49}$$

Comme tout modèle de turbulence RANS, le modèle de Spalart-Allmaras n'est pas universel et il existe des corrections permettant d'améliorer ses prévisions dans certaines conditions particulières. Dans le cadre des travaux présentés ici, deux corrections ont été utilisées et sont notées respectivement SARC et SACC dans la suite de ce mémoire.

La "**correction de rotation**" a été créée par Morton *et al.* [174] pour limiter la diffusion turbulente excessive des tourbillons d'aile delta. Les auteurs se sont inspirés de la correction apportée par Daclès et Mariani [55] au modèle de Baldwin-Barth : au 2nd membre de l'équation de transport (1.49) est soustrait un terme de destruction qui s'active seulement lorsque le taux

[11] Dans les couches minces cisaillées, le module du cisaillement égale celui du rotationnel. Ce dernier a probablement été préféré pour des raisons numériques car, dans les écoulements d'aérodynamique externe pour lesquels le modèle a été conçu, le rotationnel est confiné aux couches minces, libres ou attachées, alors que le cisaillement, à une distance r éloignée du corps solide, est en $1/r^2$ en 2D ou $1/r^3$ en 3D.

de rotation $\|\overline{\overline{\Omega}}\| = \|\overrightarrow{\omega}\|/\sqrt{2}$[12] excède le taux de déformation $\|\overline{\overline{S}}\|$[13] :

$$\text{Destruction}_{(\text{SARC})} = 2.\sqrt{2}c_{b1}\rho\tilde{\nu}\max(\|\overline{\overline{\Omega}}\| - \|\overline{\overline{S}}\|, 0) \tag{1.50}$$

Dans le coeur des tourbillons, le terme de destruction dépasse le terme de production et réduit ainsi globalement la viscosité turbulente.

La "**correction de compressibilité**" introduite par Secundov [85] permet de mimer l'"effet stabilisant" de la compressibilité sur la turbulence au moyen d'un terme de destruction :

$$\text{Destruction}_{(\text{SACC})} = \frac{C_5\rho\tilde{\nu}^2}{a^2}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \qquad \text{avec } C_5 = 3.5 \tag{1.51}$$

que l'on peut interpréter comme un terme de destruction proportionnel au carré d'un nombre de Mach convectif M_c défini par (a vitesse du son) :

$$M_c^2 = \tilde{\nu}\sqrt{\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}}/a^2 \qquad \text{Destruction}_{(\text{SACC})} = C_5\rho\tilde{\nu}M_c^2\sqrt{\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}} \tag{1.52}$$

1.3.3 LES, modèle de Smagorinsky

Le modèle de Smagorinsky [234] du tenseur sous-maille est un modèle fonctionnel selon la terminologie employé par Sagaut [217], c'est-à-dire qu'il vise à reproduire l'action du tenseur sous-maille $\text{div}(\overline{\overline{\tau^D}})$ dans l'équation de quantité de mouvement sans nécessairement en avoir la même structure. Plus précisément, il repose sur les hypothèses suivantes [217] :

- L'action des échelles sous-maille sur les échelles résolues est essentiellement une action de nature énergétique, si bien que l'équilibre des transferts d'énergie entre les deux classes d'échelles seul est suffisant pour décrire l'action des échelles sous-maille.
- Le mécanisme de transfert d'énergie des échelles résolues vers les échelles sous-maille ("forward scatter") est analogue aux mécanismes moléculaires représentés par le terme de diffusion dans lequel la viscosité ν apparait (= hypothèse de Boussinesq). Le transfert d'énergie des échelles sous-maille vers les échelles résolues ("backward scatter") n'est pas pris en compte.
- Une échelle de longueur charactéristique l_0 et une échelle caractéristique de temps t_0 sont suffisant pour décrire les échelles sous-maille.
- Il existe une séparation totale entre les échelles sous-maille et les échelles résolues.
- L'écoulement est localement et à chaque instant dans le même équilibre spectral qu'une turbulence pleinement développée homogène et isotrope, il n'y a donc aucune accumulation d'énergie à une fréquence particulière et la forme du spectre d'énergie est invariante dans le temps :

$$E(k) = K_0\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \qquad \text{avec } K_0 = 1.4 \text{ la constante de Kolmogorov} \tag{1.53}$$

Avec ces hypothèses et en écoulement incompressible, le modèle de Smagorinsky donne l'expression de la viscosité sous-maille $\nu_{\text{sgs}} = \nu_t$ pour achever la détermination de $\overline{\overline{\tau^D}}$:

$$\nu_{\text{sgs}} = (C_s\Delta)^2\left(2\|\overline{\overline{S}}\|^2\right)^{1/2} \tag{1.54}$$

[12] On rappelle que le vecteur des taux de rotation $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}$ est le vecteur dual associé à la partie antisymétrique $\overline{\overline{\Omega}}$ de $\overline{\overline{\text{grad}}}\,\overrightarrow{V}$, et doit être distingué de la vorticité $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}$.

[13] Pour éviter de prendre en compte des effets de dilatation/compression, il serait peut être judicieux de remplacer le taux de déformation $\overline{\overline{S}}$ par sa partie déviatrice $\overline{\overline{S^D}}$.

où $\overline{\overline{S}}$ est le tenseur des taux de déformation résolu, 2Δ la longueur de coupure caractéristique du filtre (en filtrage implicite et avec le théorème de Nyquist, Δ est la taille de maille) et C_s est une constante. L'extension au cas compressible devrait logiquement faire intervenir uniquement la partie déviatrice de $\overline{\overline{S}}$ mais en pratique la formulation (1.54) est souvent conservée. Dans une turbulence homogène isotrope dont le spectre d'énergie est donné par (1.53), le taux de dissipation $< \varepsilon >$ s'exprime à l'aide de K_0 et $< (2\|\overline{\overline{S}}\|^2)^{1/2} >$ puis en l'égalant au taux de transfert d'énergie à travers la coupure $k_c = \Delta/\pi$, $< \overline{\overline{\tau^D}} : \overline{\overline{S}} >$, on obtient après quelques approximations la valeur de la constante C_s :

$$C_s = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}K_0\right)^{-3/4} \approx 0.18 \tag{1.55}$$

Il est à noter que cette valeur a été réajustée par certains auteurs (de $C_s \approx 0.1$ à 0.23) dans le cas d'écoulements cisaillés pour obtenir de meilleurs résultats. Il est à noter que baisser la valeur de C_s peut parfois compenser une "viscosité numérique" excessive bien qu'on ne puisse pas dire que celle-ci s'exprime par une relation de la forme (1.54) et augmenter sa valeur permet selon les auteurs de "remplacer" une sous-résolution du maillage.

Toutes les hypothèses du modèle de Smagorinsky sont contestables et se contredisent entre elles[14], c'est pourquoi il existe, comme en RANS, des modèles sous-mailles plus élaborés. Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter la littérature spécialisée [217]. Toutefois, le modèle de Smagorinsky est très simple à implémenter et a déjà donné des résultats satisfaisants, notamment avec le code FLU3M : écoulement de cavité [143], écoulement dans un étage complet de turbine basse-pression [210], contrôle du décollement sur une marche descendante [57].

1.3.4 L'approche couplée RANS/LES

Les modèles RANS et en particulier le modèle de Spalart-Allmaras ont largement prouvé leur capacité à reproduire les écoulements de couche limite attachée sous un gradient de pression modéré pour un coût de calcul abordable. Néanmoins, la plupart des modèles RANS ne parviennent pas à simuler des configurations plus complexes comme des écoulements cisaillés soumis à une forte compressibilité, à une forte courbure, et présentant de forts gradients de température. Même si quelques modèles dédiés arrivent à reproduire l'écoulement moyen de jets académiques, leur application à des jets réalistes contrôlés par des technologies nouvelles est donc discutable. L'approche LES généralement fermée par le modèle de Smagorinsky dans les calculs de configurations appliquées est supposée plus apte à reproduire ces écoulements complexes puisqu'elle résout explicitement les grandes échelles porteuses de l'essentiel de l'énergie cinétique fluctuante. Toutefois, les grandes échelles de la turbulence sont plus ou moins petites à l'échelle globale du mouvement. Prenons pour exemple deux cas bien distincts et caractéristiques des écoulements cisaillés : les couches de mélange libres et les couches limites attachées.

Dans les couches de mélange (cf. figure 1.3.4(a)), la différence des vitesses $\Delta U = U_2 - U_1$ fournit l'énergie cinétique injectée dans la cascade $u_0^2 \sim (\Delta U)^2$ et l'épaisseur de la couche de cisaillement représentative de la taille des grandes échelles du mouvement fluctuant $\delta(x) \sim l_0$ s'adapte pour que le taux d'énergie transféré aux petites échelles puisse être dissipé par la viscosité. Ces grosses structures résultent de l'instabilité primaire de Kelvin-Helmholtz et sont orientées selon l'envergure [15]. Une analyse des dimensions en présence permet de se rendre compte de

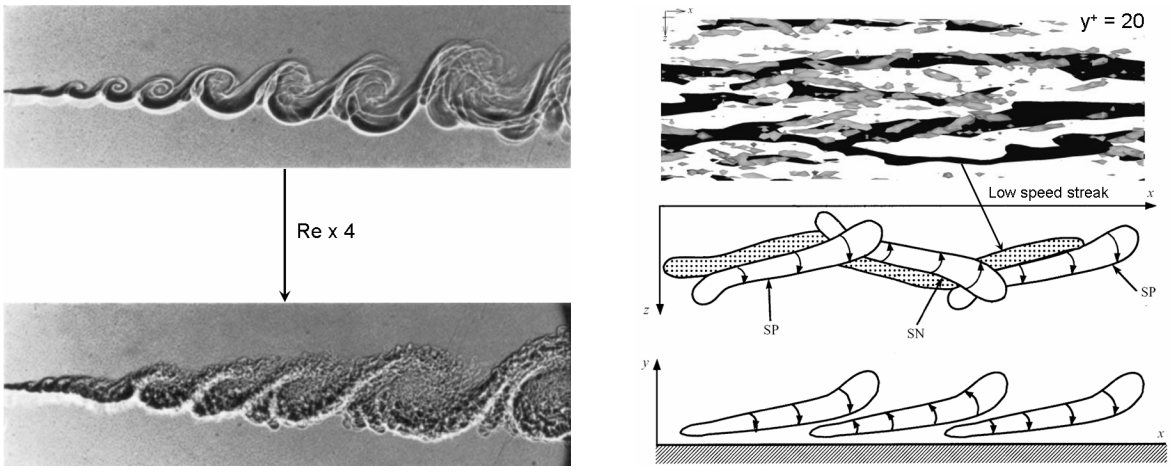
[14] En particulier, les axes principaux de $\overline{\overline{\tau^D}}$ forment des angles allant de 35 à 45 deg avec ceux de $\overline{\overline{S}}$ [110], et la séparation des échelles contredit la continuité du spectre d'énergie. De plus, si l'écoulement résolu est stationnaire mais cisaillé, le modèle de Smagorinsky introduit une action des échelles sous-maille non-justifiée.

[15] aux faibles nombre de Mach convectif $M_c < 0.6$. [220]

l'évolution linéaire de l'épaisseur $\delta(x) \sim \frac{\Delta U}{\overline{U}} x$. Expérimentalement, on mesure $\delta(x) \approx 0.05 \frac{\Delta U}{\overline{U}} x$. L'épaisseur de vorticité $\delta_\omega = \Delta U / \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{max}$ est une mesure communément utilisée. Elle est égale à $\delta_\omega = 0.68\ \delta_{90\%}$ dans un profil de vitesse en tangente hyperbolique ($\delta_{90\%}$ est l'épaisseur à 90% des vitesses extérieures). En pratique pour une simulation LES, on préconise les tailles de maille longitudinale et en envergure $\Delta x \approx \Delta z \approx \delta_\omega/2$ et $\Delta y \approx \delta_\omega/20$ à travers la couche de mélange.

Dans les couches limites attachées, (cf. figure 1.3.4(b)), le blocage constant de la vitesse à la paroi $y = 0$ limite les fluctuations normales $< v'^2 >$ et conduit les structures les plus énergétiques à s'orienter dans le sens longitudinal de l'écoulement. Celles-ci sont située dans la zone tampon (entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique) entre $y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu} \approx 5$ et 60. Au niveau de ces structures, c'est la vitesse de frottement $u_\tau = \sqrt{\tau/\rho}$ ($\tau = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0}$ le frottement pariétal) qui fixe l'échelle d'énergie cinétique injectée dans la cascade. En pratique pour une simulation LES, on préconise des tailles de maille longitudinale, transverse et en envergure respectivement de l'ordre de $\Delta x^+ \approx 50$, $\Delta y^+ \approx 1$ (à la paroi) et $\Delta z^+ \approx 15$ à 20. En comparaison, les tailles de mailles requises pour un calcul RANS sont plutôt de l'ordre de $\Delta x^+ \approx 500$, $\Delta y^+ \approx 1$ (à la paroi) et $\Delta z^+ \approx 1000$. Dans l'épaisseur de couche limite $\delta_{99\%}$, 30 à 50 points sont généralement nécessaires, contre seulement 30 typiquement en RANS.

Numériquement, si l'on prend une couche d'air cisaillée entre 0 et 100 m/s au bout de $L_x = 1\ m$, le nombre de Reynolds est égal à $\mathrm{Re} = \frac{100 \times 1}{1.5 \times 10^{-5}} \approx 7.10^6$. S'il s'agit d'une couche de mélange, son épaisseur de vorticité est de l'ordre de $\delta_\omega \approx 0.05 \times 0.68 \times \frac{50}{100/2} \approx 3.4\ cm$, donc les mailles doivent avoir localement pour dimensions $17 \times 1.7 \times 17\ mm$. S'il s'agit d'une couche limite pariétale, le coefficient de frottement est égal à $\tau / \frac{1}{2}\rho U^2 = C_f = 0.059/\mathrm{Re}^{0.2} = 0.0025$, la vitesse de frottement vaut alors $u_\tau = 3.6\ m/s$ et l'unité de paroi est $\nu/u_\tau = 4.2\ \mu m$. Les tailles de mailles requises à la paroi sont donc $0.2\ mm \times 4.2\ \mu m \times 0.08\ mm$. De plus, son épaisseur atteint seulement $\delta_{99\%} = 0.38 \times L_x/\mathrm{Re}^{0.2} = 1.6\ cm$.



(a) Dans la couche de mélange [28] (b) Dans la couche limite [224, 127]

FIG. 1.2 – Les grandes échelles de structures cohérentes dans deux formes canoniques d'écoulement cisaillé.

Cette petite application numérique montre clairement que les contraintes de calcul LES d'une couche limite sont beaucoup plus exigentes que celles d'une couche de mélange[16]. Aussi, le calcul LES d'une configuration appliquée comprenant des couches limites attachées est impossible avec les moyens informatiques actuels. Pour ces écoulements complexes, les seules méthodes prédictives applicables à l'heure actuelle sont les méthodes couplées ou hybrides RANS/LES [93, 229, 218]. Leur principe, d'un point de vue pratique, est de calculer explicitement la dynamique de toutes les structures turbulentes jusqu'aux échelles abordables par les calculateurs actuels, c'est-à-dire les écoulements détachés ou hors parois, et de se contenter de la prévision moyenne en temps des méthodes RANS dans les couches minces attachées. Dans les écoulements à hauts nombres de Reynolds où l'énergie cinétique est principalement portée par les grandes échelles, cette approche a donné des résultats très satisfaisants sur le champ moyen ainsi que sur les données instationnaires. La méthode hybride la plus largement implémentée est probablement la "Detached-Eddy Simulation" (DES) proposée à l'origine par Spalart *et al.* [241]. Parmi ses applications réussies ou encourageantes, on peut mentionner les écoulements turbulents autour de corps solides variés comme une marche descendante et un train d'atterrisage [243], une sphère [49], un F-15E à 65 degrés d'incidence [86], et plus récemment avec le code FLU3M, l'écoulement autour d'un profil hyper-sustenté [67], le tremblement sur un profil supercritique [66], l'écoulement interne dans un diffuseur d'entrée d'air en S [259] et des écoulements de culot axisymétriques [233].

1.3.5 DES, modèle de Spalart-Allmaras

La "Detached-Eddy Simulation" introduite par Spalart *et al.* en 1997, est une méthode hybride RANS/LES destinée à calculer les écoulements comportant à la fois des couches-limites attachées et des zones décollées. A la différence des méthodes de couplage RANS/LES, la DES en tant que méthode hybride, résout la turbulence par un seul ensemble d'équations dans tout le domaine de calcul, que la turbulence soit filtrée selon l'approche RANS ou l'approche LES[17]. Son implémentation est évidemment simplifiée par la similitude des équations filtrées suivant les deux approches. La DES originelle [241], nommée dans ce mémoire DES97, est basée sur le modèle RANS de Spalart-Allmaras décrit ci-dessus. L'idée suggérée par Spalart *et al.* [241] a été de modifier le terme de destruction de manière à réduire le modèle RANS à un modèle LES sous-maille dans les zones détachées de l'écoulement. Pour cela, les auteurs ont proposé de remplacer la distance d à la paroi la plus proche par la longueur $\tilde{d}$ définie par :

$$\tilde{d} = min\left(d, C_{DES}\Delta\right) \tag{1.56}$$

où Δ est la taille caractéristique de maille locale. Loin de la paroi $\tilde{d} = C_{DES}\Delta$, dans l'hypothèse où le terme de destruction équilibre celui de production (ce qui se produit, en particulier, si la viscosité turbulente ne varie plus au long du mouvement et si la diffusion d'une ligne de courant à l'autre est nulle, autrement dit, en régime établi, si la viscosité turbulente est homogène), la viscosité turbulente devient :

$$\nu_t = \frac{c_{b1}}{c_{w1}} C_{DES}^2 \Delta^2 \| \overrightarrow{\omega} \|^2 \tag{1.57}$$

La relation (1.57) est à rapprocher du modèle sous-maille de Smagorinsky (1.54) où le module du tenseur des taux de déformation $\|\overline{\overline{S}}\| = \sqrt{S_{ij}S_{ij}}$ (égal à celui du taux de cisaillement lorsque

[16] Du point de vue plus fondamental, on peut noter que la présence de la paroi dans l'écoulement cisaillé et l'effet bloquant qu'elle y produit ont une influence profonde sur la structure de l'écoulement turbulent alors qu'ils sont complètement transparents en écoulement laminaire. Comme élément de preuve, le taux de croissance d'une couche cisaillée laminaire est toujours proportionnelle à $\sim \sqrt{x}$ que celle-ci soit attachée ou non. Par contre, une couche cisaillé libre turbulente s'épaissit linéairement $\sim x$ alors qu'une couche limite turbulente croît en $\sim x^{0.8}$.

[17] Le raccord entre les deux modes de filtrage n'a pas jusqu'à présent reçu de justification formelle [218].

l'écoulement est incompressible) est remplacé par le module du tenseur des taux de rotation $\|\overline{\overline{\Omega}}\| = \sqrt{\Omega_{ij}\Omega_{ij}} = \sqrt{2}\|\overrightarrow{\Omega}\| = \|\overrightarrow{\omega}\|/\sqrt{2}$. On obtient ainsi une expression de la constante de Smagorinsky équivalente :

$$C_{eq}^2 = \frac{c_{b1}}{c_{w1}} C_{DES}^2 \tag{1.58}$$

La constante C_{DES} a été calibrée par Shur *et al.* [230] dans une turbulence homogène isotrope (THI) pour laquelle ils ont obtenu $C_{DES} = 0.65$. C'est la valeur implémentée dans FLU3M. Dans une THI incompressible, on a $< S_{ij}S_{ij} >=< \Omega_{ij}\Omega_{ij} >$, si bien que la constante de Smagorinsky équivalente donnée par la relation (1.58) est égale à $C_{eq} = 0.133$ proche de $C_s = 0.18$. Toutefois, en pratique, la valeur de cette constante n'est pas universelle puisque la dissipation numérique propre à chaque code de calcul vient s'ajouter à l'effet du modèle sous-maille.

Les formulations basées sur $\|\overline{\overline{S}}\|$ ou sur $\|\overrightarrow{\omega}\|$ sont faciles à implémenter et ont globalement montré des résultats satisfaisant dans des simulations LES d'écoulements cisaillés[18]. De manière plus générale, et comme l'indique le papier original [241], le modèle sous-maille se comporte comme un modèle dynamique par l'intervention de la dérivée particulaire et du terme de diffusion. Par construction, les auteurs ont choisi de définir Δ comme la plus grande des largeurs de maille dans les 3 directions du maillage structuré :

$$\Delta = \Delta_{max} = max\left(\Delta x, \Delta y, \Delta z\right) \tag{1.59}$$

de manière à ce que le modèle commute automatiquement du mode RANS dans les zones discrétisées par un maillage de type couche-limite, i.e. $d \ll \Delta = max(\Delta x, \Delta z)$ (y étant la direction normale à la paroi) au mode LES, loin des parois, i.e. $\Delta \ll d$.

La résolution de l'équation de transport de Spalart-Allmaras permet de déterminer la viscosité turbulente ou la viscosité sous-maille ν_t et de fermer l'équation du mouvement. Concernant l'équation de l'énergie (1.23), le modèle de diffusion (1.44) est complètement déterminé par un nombre de Prandtl constant, $\mathrm{Pr}_t = 0.9$, en mode RANS et en mode LES.

1.3.6 La transition mode RANS/mode LES ou le problème de la zone grise

Dès l'origine de la DES, une attention toute particulière a été portée, dans les écoulements pariétaux, à la région nommée "zone grise" où le modèle commute et où les fluctuations de vitesse, le "LES content" [240], ne sont pas encore suffisamment développées pour compenser la diminution des tensions turbulentes modélisées (la "modeled-stress depletion", MSD)[19]. Ceci peut conduire à des phénomènes non physiques, comme par exemple, la sous-estimation du frottement pariétal. Pour éviter ce problème, Spalart [237] a, dans un premier temps, publié un article didactique indiquant les spécificités du maillage à employer pour effectuer un calcul de type DES97. Un tel calcul exige donc a priori un certain degré d'expertise de l'écoulement à simuler. Afin de rendre la méthode moins empirique, Spalart *et al.* [240] ont proposé un modèle dérivé, baptisé "Delayed-DES" ou DDES, dans lequel la longueur $\tilde{d}$ dépend non seulement du

[18] Toutefois comme le modèle de Smagorinsky, le modèle sous-maille de la DES en mode LES révèle certaines inconsistances physiques. En particulier, dans une couche de cisaillement plane laminaire ou dans un écoulement stationnaire en rotation uniforme, la formulation basée sur le rotationnel donne une viscosité turbulente non-nulle.

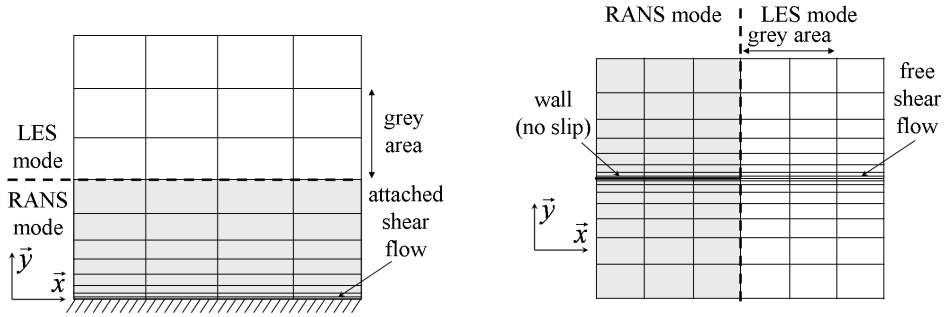
[19] Le modèle commute d'un mode à l'autre pour $d = d_s = C_{DES}\Delta$. Avec $\Delta = \Delta_{max}$, dans une couche limite $\Delta = max(\Delta x, \Delta z)$. Si le maillage de la couche limite est de type RANS, $max(\Delta x, \Delta z) \gg \delta$, où δ est l'épaisseur de couche limite. Un maillage appliqué à la DES97 doit satisfaire cette condition[237]. Si le maillage est trop fin, i.e. en x ou z, comme par exemple un maillage LES de couche limite ($\Delta x = 50, \Delta y = 1, \Delta z = 15$ à la paroi), le modèle commutera à $\Delta = max(\Delta x, \Delta z) << \delta$, i.e. à l'intérieur de la couche limite.

maillage $\Delta = \Delta_{max}$ et de la distance à la plus proche paroi d mais aussi de l'écoulement, par le biais d'une fonction de correction f_d :

$$\tilde{d} = d - f_d.max(0, d - C_{DES}\Delta) \tag{1.60}$$

$$\text{où} \qquad f_d(r_d) = 1 - \tanh\left([8r_d]^3\right) \qquad \text{avec} \qquad r_d = \frac{\nu_t + \nu}{\sqrt{U_{i,j}U_{i,j}}\kappa^2 d^2} \tag{1.61}$$

où r_d est un paramètre classiquement utilisé par les modèles RANS (notamment algébriques et SA) pour se repérer dans la couche-limite ($r_d \ll 1$ en dehors, $r_d = 1$ dans la zone logarithmique, $r_d > 1$ en proche paroi). Ainsi, en dehors de la couche limite $r_d \ll 1 \Rightarrow f_d = 1$, le modèle DDES est en mode DES97. Ailleurs, $f_d = 0$, le modèle est en mode RANS. Autrement dit, la DDES repousse la hauteur de commutation RANS/LES en dehors de la couche limite.



(a) "transversely induced MSD" (b) "longitudinally induced MSD"

FIG. 1.3 – Les deux formes de "modeled-stress depletion".

La situation décrite ci-dessus et schématisée figure 1.3.6(a) correspond à une sous-estimation des tensions modélisées (en mode LES) lors d'une commutation RANS→LES transversale à la direction de l'écoulement trop précoce (autrement dit une "transversely induced modeled-stress depletion"). C'est typiquement le cas qui peut se produire dans les simulations de décollement d'une couche limite. Cette situation est clairement à distinguer de celle où les tensions modélisées (en mode LES) sont sous-estimées lors d'une commutation RANS→LES dans le sens de l'écoulement (ou "longitudinally induced modeled-stress depletion") représentée figure 1.3.6(b). Ce cas peut se produire dans le calcul d'une couche cisaillée libre nécessairement issue d'une couche limite attachée (jets, sillages). La viscosité turbulente très forte issue de la couche limite calculée en mode RANS est convectée dans la couche de mélange et y amortit la croissance des instabilités si bien que lorsque le modèle commute en mode LES, la viscosité turbulente passe du niveau RANS au niveau beaucoup plus faible de la viscosité sous-maille alors que les fluctuations turbulentes ne sont pas encore suffisamment développées.

1.3.7 ZDES, modèle de Spalart-Allmaras

Pour éviter le problème de la zone grise, Deck a proposé une approche zonale de la DES97, appelé Zonal-DES ou ZDES [66, 67], dans laquelle les zones RANS et (DES) sont sélectionnées individuellement en forçant la valeur $\tilde{d}$ respectivement à d et $\tilde{d}$. Dans les régions RANS, le modèle est forcé de se comporter comme le modèle RANS, alors que dans les régions (DES), le modèle peut commuter du mode RANS au mode LES (ou inversement) au moyen de la relation (1.56). L'approche zonale est tout particulièrement bien adaptée pour traiter les écoulements cisaillés libres soumis à la "longitudinally induced modeled-stress depletion" (figure 1.3.6(b)). Elle a l'avantage de permettre à l'utilisateur de focaliser le raffinement du maillage dans les régions qui l'intéressent sans corrompre les propriétés de la couche-limite située en amont ou

en aval. Par exemple, dans les domaines (DES), le maillage est conçu pour obtenir des cellules presque cubiques. Dans ces régions, Deck a également suggéré d'adopter l'échelle de longueur caractéristique classiquement utilisée en LES et basée sur le volume des cellules :

$$\Delta = \Delta_{vol} = (\Delta_x \Delta_y \Delta_z)^{1/3} \tag{1.62}$$

De plus, les fonctions de correction en proche paroi du modèle RANS sont explicitement désactivées dans les zones (DES) en mode LES (mais pas en mode RANS) en posant [25, 66] :

$$f_{v1} = 1, \quad f_{v2} = 0, \quad f_w = 1 \tag{1.63}$$

Ce choix évite que les faibles niveaux de viscosité turbulente, typiques des régions LES, soient traités comme dans les couches limites. L'utilisation des relations (1.62) et (1.63) dans les régions (DES) justifie que la notation (DES) se distingue de DES97. De cette manière, la viscosité sous-maille ν_t en mode LES est gouvernée par l'équation de transport de ν_t comportant le terme de production calibré pour les écoulements cisaillés libres [239], à laquelle s'ajoute le terme de destruction qui ajuste ν_t en fonction de la résolution du maillage. De plus, comme $\Delta_{vol} \leq \Delta_{max}$, la commutation RANS→LES se produit plus rapidement que dans la version DES97 et le terme de destruction de la viscosité sous-maille est plus élevé. Dans l'hypothèse où la zone LES est correctement imposée par l'utilisateur, l'approche ZDES évite la "modeled-stress depletion" tout en favorisant le développement rapide des fluctuations turbulentes.

1.4 Nouvelle longueur caractéristique de maille Δ_ω

1.4.1 Motivation

L'application de la LES aux maillages hexahédriques structurés requiert des cellules aussi cubiques que possibles. Cependant, en pratique, les écoulements rencontrés par l'ingénieur, en particulier autour des tuyères de réacteur axisymétriques munis de chevrons, lobes ou actionneurs fluidiques, ne peuvent pas satisfaire ces exigences. L'anisotropie du maillage doit donc être prise en compte dans la définition de la viscosité sous-maille. Il est important de souligner le fait que l'approche zonale adoptée dans cette étude permet de modifier le modèle sous-maille actif en mode LES indépendamment de la résolution des couches limites attachées. Dans le cadre de la LES, de nombreux modèles sous-mailles dédiés aux maillages anisotropes ont été développés et sont résumés par Sagaut [217]. Un moyen simple de considérer l'anisotropie dans la viscosité sous-maille est de modifier directement la longueur caractéristique de maille Δ. Le modèle le plus courant en LES est celui proposé par Deardorff [64] et adopté par Deck [67] pour la ZDES, Δ_{vol}. Des extensions du modèle de Deardoff comptent notamment l'échelle de longueur choisie pour la DES97 [241], Δ_{max}, et une autre définie par :

$$\Delta = \sqrt{\left(\Delta_x^2 + \Delta_y^2 + \Delta_z^2\right)/3} \tag{1.64}$$

Par ailleurs, Scotti *et al.* [225] ont proposé une définition de Δ basée sur l'estimation du taux de dissipation d'une turbulence isotrope dans un maillage anisotrope.

Au tout début de la couche de cisaillement du jet contrôlé étudié dans le cadre de cette thèse, les tailles des cellules sont soumises à une très forte distorsion due à la distribution très resserrée des points provenant de la couche limite de la tuyère primaire ainsi qu'à l'inhomogénéité causée par le raffinement autour des injecteurs de contrôle. A la connaissance de l'auteur, toutes les définitions existantes de Δ dépendent de la taille des cellules dans la direction en envergure $\overrightarrow{z}$ de la couche de mélange. Si la répartition spatiale des points suivant $\overrightarrow{z}$ est inhomogène, par

exemple parce que la couche de mélange est contrôlée par des micro-actionneurs discrets, la viscosité sous-maille résultante sera inhomogène suivant $\overrightarrow{z}$ ce qui n'est physiquement pas justifié lorsque le contrôle est inactif. Dans le cadre plus général du calcul des couches de mélange, cette dépendance de la solution numérique vis-à-vis d'une taille de maille transverse arbitraire est indéfendable. Plus précisément, les instabilités primaires se développant dans une couche de mélange incompressible sont orientées dans la direction de l'envergure $\overrightarrow{z}$, comme l'illustre la figure 1.4.1.

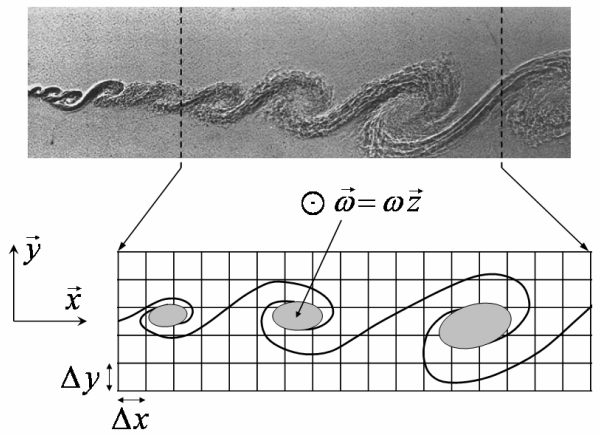


FIG. 1.4 – Schéma d'une couche de mélange turbulente alignée avec les axes du maillage.

Puisqu'en pratique, et tout particulièrement dans les couches de mélange axi-symétriques, la taille Δ_z est beaucoup plus grande que les deux autres Δ_x, Δ_y, les définitions classiques du Δ conduisent à une viscosité sous-maille excessive. Dans la couche de mélange du jet calculé avec Δ_{vol} présenté dans le chapitre suivant (2), il est montré que la déstabilisation et la création de structures tourbillonnaires sont alors retardées ce qui appuie les arguments avancés ici. A la fois les aspects d'anisotropie et d'inhomogénéité du maillage expriment la nécessité de créer une définition de Δ qui coupe cette dépendance vis-à-vis de la taille de maille transverse Δ_z en introduisant la notion de dépendance à l'écoulement.

Il est essentiel de souligner le fait que la modification de la longueur caractéristique de maille a bien pour objectif de corriger certains effets négatifs de l'anisotropie du maillage mais ne prétend en aucun cas se substituer à la modélisation sous-maille[20]. En particulier, on constate (voir chapitre 2) que cette modification permet de limiter un retard dans le développement des instabilités d'une couche de mélange calculée sur un maillage anisotrope, ce qui justifie a posteriori son action et son utilité. Dans la classe des modèles fonctionnels [217], il existe des senseurs structurels comme le modèle de sélection de David [61] qui inhibe le modèle sous-maille lorsqu'il "sent" à partir du champ résolu que la turbulence n'est pas encore développée (hypothèse de base des modèles fonctionnels). Le modèle de sélection permet ainsi d'éviter l'action stabilisatrice du tenseur sous-maille dans une zone de transition et favorise donc le développement des instabilités dans une couche de mélange. La modification de la longueur caractéristique de maille et le modèle de sélection ont des effets similaires (qualitativement) mais leurs philosophies sont bien différentes, d'ailleurs on peut a priori penser qu'ils pourraient être appliqués conjointement.

[20] A priori, Δ_ω pourrait d'ailleurs être utilisée dans n'importe quel modèle LES sous-maille basé sur une longueur caractéristique de maille.

1.4.2 Formulation

Dans une couche de mélange plane de direction $\overrightarrow{z}$ suivant l'envergure, comme représentée figure 1.4.1, la recommendation exprimée précédemment se traduit en la dépendance de Δ vis-à-vis de Δ_x et Δ_y uniquement, par exemple :

$$\Delta = \sqrt{\Delta_x \Delta_y} \tag{1.65}$$

Dans une couche de mélange arbitrairement orientée par rapport aux directions du maillage, la nécessité d'une définition invariante par changement de repère galiléen (cf. les règles que doit respecter tout modèle sous-maille [217]) rejète l'utilisation directe du vecteur vitesse mais autorise celle de certaines de ses opérations de dérivation spatiale. La vorticité $\overrightarrow{\omega}$ est une quantité toute désignée pour indiquer la direction en envergure de la couche de mélange. Ainsi, une nouvelle expression de Δ fut proposée telle que :

$$\Delta = \Delta_\omega = \sqrt{N_x^2 \Delta_y \Delta_z + N_y^2 \Delta_z \Delta_x + N_z^2 \Delta_x \Delta_y} \tag{1.66}$$

$$\text{avec} \qquad \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{u}; \quad \overrightarrow{\epsilon} = \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\left(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}\right); \quad \overrightarrow{N} = \frac{\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\epsilon}}{\| \overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\epsilon} \|} \tag{1.67}$$

Le vecteur normé $\overrightarrow{N}$, dont les composantes sont (N_x, N_y, N_z), donne l'orientation de $\overrightarrow{\omega}$. Le petit paramètre ϵ est là pour empêcher la division par zéro lorsque la vorticité s'annule. La valeur $\epsilon = 10^{-8}$ a été choisie dans la présente étude. Une autre formulation a aussi été envisagée :

$$\Delta = \sqrt{\left(\Delta_y \Delta_z\right)^{N_x^2} \left(\Delta_z \Delta_x\right)^{N_y^2} \left(\Delta_x \Delta_y\right)^{N_z^2}} \tag{1.68}$$

La formule (1.68) donne les mêmes résultats que (1.66) lorsque $\overrightarrow{\omega}$ est aligné avec une direction du maillage mais produit des variations plus brusques de Δ lorsque $\overrightarrow{\omega}$ se réoriente entre ces trois directions canoniques. De plus, elle est d'un coût de calcul plus élevé que (1.66) et n'a pas été retenue.

Une définition alternative et peut-être à étudier dans l'avenir serait d'utiliser non pas directement $\overrightarrow{\omega}$ dans la formule (1.66) mais sa partie fluctuante $\overrightarrow{\omega^*}$[21]. Cette formulation alternative permet de sensibiliser Δ_ω aux fluctuations uniquement et plus au champ moyen. En particulier, cette formulation serait plus appropriée dans le cas d'un écoulement en rotation uniforme $\overrightarrow{\Omega_0}$. Comme expliqué dans la section précédente, la nouvelle définition a été initialement proposée pour empêcher un développement différé des instabilités dans les couches de mélange et une transition ultérieure tardive vers la turbulence pleinement développée lorsque le calcul est effectué sur un maillage ne respectant pas la condition $\Delta z \approx \Delta x$ dans la région initiale de la couche de mélange. Au début d'une couche de mélange à faible nombre de Mach convectif ($M_c \leq 0.6$), les structures cohérentes sont essentiellement orientées dans la direction en envergure $\overrightarrow{z}$ [220], si bien que la direction de $\overrightarrow{\omega}$ dans la formule (1.66) la ramène à l'expression (1.65). Dans le cadre d'une modélisation zonale où la couche limite amont est maillée selon les exigences du mode RANS (i.e. en unités de paroi, $\Delta_x^+ \approx 500$, $\Delta_y^+ \approx 1$, $\Delta_z^+ \approx 1000$) et où la couche de mélange pleinement turbulente en aval doit respecter les dimensions du mode LES ($\Delta x \approx \Delta z \approx \delta_\omega/2$ et $\Delta y \approx \delta_\omega/20$), on a de toute manière :

$$\frac{\Delta_y}{\Delta_z} < \frac{\Delta_z}{\Delta_x} \qquad \text{d'où} \qquad \Delta_\omega = \Delta_{vol} \left(\frac{\Delta_y}{\Delta_z} \div \frac{\Delta_z}{\Delta_x} \right)^{1/6} < \Delta_{vol} \tag{1.69}$$

[21] Comme la partie moyenne statistique de $\overrightarrow{\omega}$, $< \overrightarrow{\omega} > (\overrightarrow{x}, t)$, n'est pas connue a priori au cours de la simulation, on pourrait utiliser une partie fluctuante $\overrightarrow{\omega^*}$ définie à l'aide de la décomposition $\overrightarrow{\omega}(\overrightarrow{x}, t) = [\overrightarrow{\omega}](\overrightarrow{x}, t) + \overrightarrow{\omega^*}(\overrightarrow{x}, t)$ où $[.]$ représente une moyenne locale en temps ou en espace.

ce qui produit une viscosité sous-maille plus faible et favorise bien le développement des instabilités. Dans la section suivante, le comportement de Δ_ω est discuté dans le cas d'un écoulement pleinement turbulent.

1.4.3 Discussion de la nouvelle definition pour les écoulements turbulents

Dans un maillage isotrope, $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z$, il est facile de vérifier que toutes les définitions sont équivalentes $\Delta_{max} = \Delta_{vol} = \Delta_\omega = \Delta_x$. En ce qui concerne la constante C_{DES}, elle a été calibrée à l'aide d'une THI [230] réalisée sur un maillage cartésien pour lequel $\Delta_\omega = \Delta_{max}$, donc il n'est pas nécessaire de la réévaluer. Indépendamment de la direction de la vorticité, on montre aisément que Δ_ω vérifie l'encadrement :

$$\min_{\alpha=x,y,z}(\Delta_\alpha) \leq \min_{\alpha\neq\beta}\sqrt{\Delta_\alpha\Delta_\beta} \leq \Delta_\omega \leq \max_{\alpha\neq\beta}\sqrt{\Delta_\alpha\Delta_\beta} \leq \max_{\alpha=x,y,z}(\Delta_\alpha) \tag{1.70}$$

Contrairement aux définitions vues précédemment, Δ_ω dépend de l'écoulement. Plus precisément, elle introduit la notion qu'en tout point de l'espace et du temps, si la vorticité n'est pas nulle, elle indique une direction particulière de l'écoulement. Si l'on considère un tourbillon localisé dont l'axe de rotation est $\overrightarrow{N}$, le mouvement de rotation est capturé par le maillage seulement si sa résolution est assez fine dans le plan normal à $\overrightarrow{N}$. En ce point et dans la direction $\overrightarrow{N}$ de la vorticité, ce sont les longueurs caractéristiques du maillage dans le plan normal à $\overrightarrow{N}$ qui déterminent la plus petite échelle de tourbillon qui peut être résolue. Ces longueurs sont intuitivement les seules longueurs caractéristiques qui doivent être prises en compte dans le filtre spatial et donc inclues dans la définition de Δ_ω. Comme la turbulence est instationnaire et tridimensionnelle par nature, $\overrightarrow{N}$ en une position donnée, se réoriente au cours du temps et désigne alors deux autres longueurs caractéristiques à chaque instant.
De manière concise, la définition Δ_{max} correspond à un filtre empêchant le calcul de résoudre les plus petites échelles de tourbillon que peut capter le maillage quelles que soient leurs orientations. A l'opposé, la définition Δ_ω autorise la résolution des plus petites structures tourbillonnaires qui peuvent être supportées par le maillage dans le plan normal à leur axe de rotation. La définition Δ_{vol} est à mi-chemin entre ces deux visions. On peut supposer que les trois définitions donnent statistiquement le même champ moyen si le maillage est suffisamment fin pour que les structures résolues à l'échelle Δ_{max} se trouvent dans la gamme inertielle. Toutefois, dans les applications pratiques, cette condition peut ne pas être vérifiée et dans ce cas, la définition Δ_ω peut permettre d'abaisser l'échelle de résolution à condition que le maillage puisse être adapté à la solution. Comme contre-exemple, une turbulence homogène isotrope ne peut être proprement résolue avec la définition Δ_ω (comme avec Δ_{max} ou Δ_{vol}) que sur un maillage isotrope. De même, le maillage où la couche de mélange est pleinement turbulente doit satisfaire $\Delta z \approx \Delta x$.

1.5 La simulation numérique comme outil d'investigation de la physique

Les applications aéronautiques et plus généralement beaucoup de problèmes industriels sont concernés par les écoulements subsoniques, transsoniques, voire supersoniques, à grand nombre de Reynolds et comprenant des parties attachées et décollées dans des domaines internes et externes. Dans le passé, alors que les outils informatiques n'étaient pas encore assez puissants, l'expérience était le seul moyen de comprendre la physique de ces écoulements, de tester et d'optimiser la forme d'objets ou d'engins en contact avec des écoulements turbulents. Toutefois, l'expérience souffre des effets de bords, du respect des lois de similitudes, notamment des nombres de Reynolds de vol, et du coût considérable que peuvent représenter les maquettes à géométries ou mécanismes complexes. En principe, les simulations numériques permettent de

traiter des conditions d'écoulement arbitraires et semblent ainsi être une alternative séduisante aux problèmes qui viennent d'être énumérés. Néanmoins, la simulation complète dans l'approximation des milieux continus, couramment appelée DNS pour "Direct Numerical Simulation", n'est toujours pas réalisable pour des écoulements industriels à cause de la limitation des ressources informatiques nécessaires au calcul de la large gamme des échelles turbulentes ainsi qu'aux échelles du mouvement moyen éventuellement instationnaire (forçage basse fréquence ou phase transitoire). Pour ces écoulements complexes, les seules méthodes prédictives applicables à l'heure actuelle sont les méthodes couplées ou hybrides RANS/LES [93, 229].

L'objet de l'étude présentée dans ce mémoire est d'expliquer les mécanismes qui permettent à des injections radiales d'augmenter le mélange d'un jet supersonique sous-détendu. Des campagnes expérimentales menées par le Département d'Aérodynamique Fondamentale et Expérimentale de l'ONERA fournissent les résultats de référence que l'on se propose d'expliquer. Afin d'avoir accès à l'ensemble du champ aérodynamique et d'étudier l'écoulement en détail, des simulations numériques complémentaires ont été réalisées dans le cadre de cette thèse. Ainsi, le premier objectif de la thèse, par ordre chronologique, a été de reproduire numériquement les résultats expérimentaux avec le plus de précision possible étant données les capacités de calcul actuelles de l'ONERA. Pour cela, la ZDES a été mis en oeuvre et a été associée avec la nouvelle longueur caractéristique de maille Δ_ω. La phase de reproduction numérique du jet contrôlé étant accomplie (avec un certain degrés de satisfaction, ici seul le champ moyen est vérifié, voir chapitre suivant), la simulation est utilisée comme un outil de filtrage des phénomènes physiques.

De toute manière, quelle que soit la méthode de simulation utilisée, il faut garder à l'esprit qu'elle ne constitue qu'une approximation du système réel que l'on veut étudier (même la DNS !). Nous avons vu dans ce chapitre que la LES compressible n'est pas exactement une méthode de simulation des grandes échelles mais plutôt une approximation mathématique dans laquelle on met les ingrédients que l'on souhaite pour reproduire l'évolution des grandes échelles. L'essentiel est de savoir si le niveau de complexité du modèle est suffisant pour reproduire les phénomènes physiques observés au moment de l'étude.

Dans cette optique, deux types de calculs ont été effectués : tout d'abord, des calculs RANS basés sur le modèle de Spalart-Allmaras permettent de créer un champ aérodynamique moyen dans lequel l'ensemble de la turbulence aurait uniquement une action diffusive isotrope (hypothèse de Boussinesq), puis des calculs ZDES basés sur le modèle de Spalart-Allmaras permettent de créer un champ aérodynamique instationnaire à l'échelle de temps l_r/u_r des échelles résolues, les échelles sous-mailles ayant uniquement une action diffusive isotrope.

Dans le chapitre suivant, les champs numériques ainsi produits sont comparés aux mesures expérimentales pour pouvoir ultérieurement faire l'objet d'une analyse physique de l'augmentation du mélange provoquée par les injections radiales.

Chapitre 2

L'arrière-corps propulsifs MARCO : résultats expérimentaux et numériques

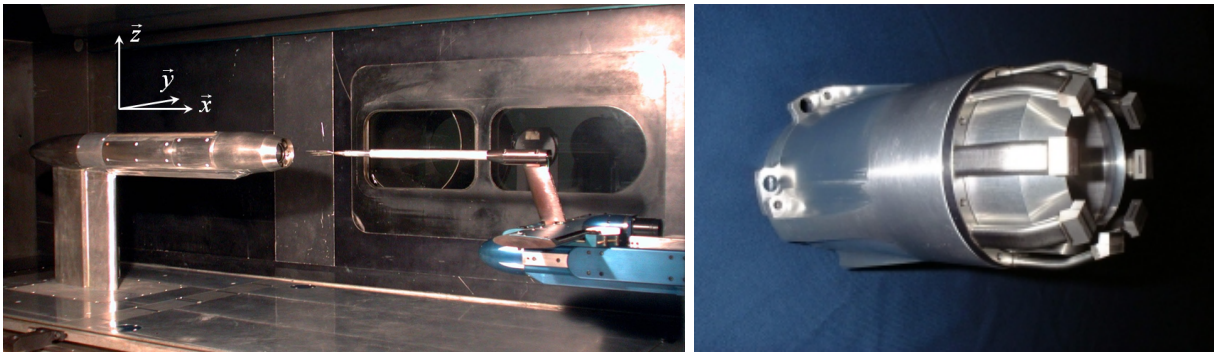
2.1 Objectif du chapitre

Dans le cadre d'un programme de recherche sur la réduction de la signature infrarouge des avions de combat, un dispositif d'augmentation du mélange du jet propulsif a été testé sur une maquette représentative d'un arrière corps d'avion de combat nommée "MARCO" pour "Modélisation d'ARrières COrps". Les essais ont été conduits par le Département d'Aérodynamique Fondamentale et Expérimentale (DAFE) de Chalais-Meudon et sont décrits dans la section 2.2. Le dispositif est composé d'actionneurs fluidiques semblables à ceux précédemment testés par Collin *et al.* [48] ou Davis [63]. Leur action peut être assimilée en première approximation à un effet d'obstacle, c'est pourquoi des calculs préliminaires ont d'abord été réalisés avec des simulations Euler et RANS sur une tuyère simplifiée munie de tabs rectangulaires similaires à ceux expérimentés par Bradbury & Khadem [24]. Ensuite, les tabs ont été remplacés par des injections radiales plus proches du moyen de contrôle utilisé sur MARCO (Section 2.3). Ne disposant pas de référence expérimentale pour valider ces premiers résultats numériques, la simulation des essais MARCO a été entreprise selon les approches RANS puis ZDES basées sur le modèle de Spalart-Allmaras. La section 2.4 détaille les phases de mise au point de ces deux types de simulation et permet de justifier les procédures de calcul adoptées par la suite. Des calculs RANS et des calculs ZDES avec la longueur caractéristique de maille originelle Δ_{vol} ainsi qu'avec la nouvelle Δ_ω ont été effectués. La section 2.5 valide ces trois types de simulation à l'aide des mesures expérimentales du champ moyen. Enfin, l'effet de la nouvelle longueur caractéristique de maille Δ_ω utilisée en ZDES est analysée plus en détails dans la section 2.6.

2.2 Campagne d'essais menée par le DAFE

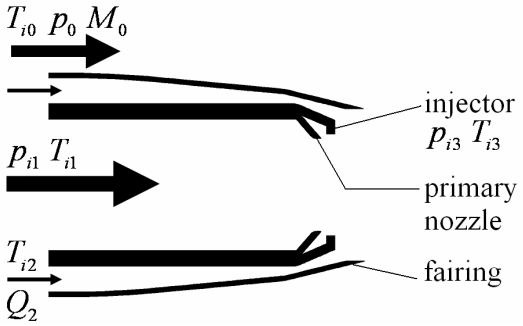
2.2.1 Description du dispositif expérimental

Les expériences ont été réalisées par le DAFE dans la soufflerie continue S3Ch au centre ONERA de Chalais-Meudon. La section d'essai est de forme carrée et a pour dimensions $0.78 \times 0.78m^2$. La maquette est représentative d'un arrière-corps d'avion de combat délivrant un jet primaire sonique entouré par un écoulement secondaire de ventilation annulaire. Celui-ci est monté sur un dard profilé. Les conditions à l'infini amont de l'écoulement externe sont $M_0 = 0.8$ pour le nombre de Mach et $p_0 = 0.66$hPa pour la pression statique. Le jet primaire est entièrement caractérisé par ses conditions génératrices $T_{i1} = 300K$ et p_{i1} =NPR$\times p_0$ (NPR : nozzle pressure ratio). Deux taux de détente ont été testés correspondant respectivement au régime de croisière basse-altitude (NPR=3.1) et au régime plein-gaz (NPR=5.0). L'écoulement de ventilation est déterminé par sa température totale $T_{i2} = 270K$ et son débit Q_2 égal à 3% du débit primaire Q_1. Plusieurs dispositifs de contrôle fluidiques ont été testés. Ils consistent en 8 injecteurs radiaux, parmi lesquels on peut activer un nombre arbitraire d'injecteurs. L'air injecté est froid $T_{i3} = 300K$ et son débit Q_3 varie de 1.4 à $3.7\%Q_1$. L'écoulement a été caractérisé au moyen de visualisations strioscopiques, de tomoscopies, de sondages de pression (statique et totale) et de température sur l'axe et dans le champ ainsi que par des PIV deux-composantes (uniquement pour les jets non-contrôlés). Les configurations testées ainsi que les mesures associées sont résumées respectivement dans les tableaux 2.1 et 2.2. Une description complète des campagnes expérimentales est disponible dans les références [172, 173].



(a) **Le dard monté dans la veine de la soufflerie S3Ch**

(b) **La couronne d'injecteurs entourant la tuyère primaire**



(c) **Nomenclature des conditions d'écoulement**

FIG. 2.1 – Montage expérimental de l'arrière-corps propulsif MARCO.

		→ |	→ |	→ ı	→＼
Configuration	Cn	V1	V1b	V1bp	V3b
nombre d'injections	0	8	4	4	4
A_3/A_1 (%)	0	2.6	1.3	0.65	1.3
allongement		10	10	5	10
incidence (deg)		0	0	0	45
NPR = 3.1	X	X	X	X	X
debit Q_3/Q_1 (%)		4	2.0 3.0 3.7	1.4	3.7
NPR = 5.0	X				X
debit Q_3/Q_1 (%)					3.7

TAB. 2.1 – Récapitulatif des configurations de contrôle et des conditions d'essais.

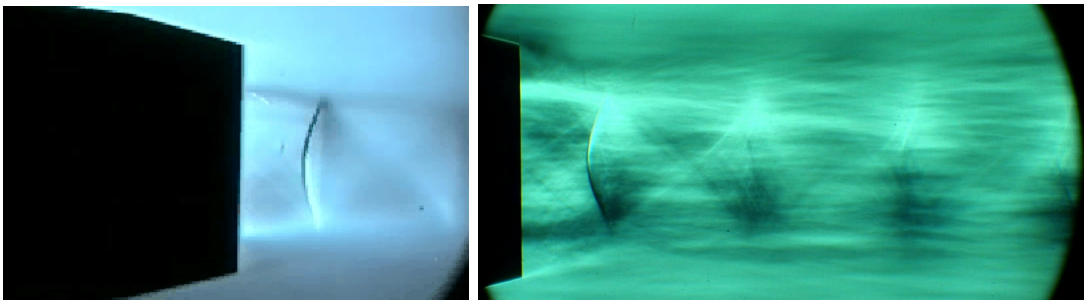
NPR jet primaire	injection secondaire	strios.	sondages axiaux	sondages génératrices	sondages plans trans.	PIV
3.1	aucune	X	X	X		X
	V1 4.0%	X		X		
	V1b 2.0%		X			
	3.0%		X			
	3.7%	X	X	X		
	V1bp 1.4%		X			
	V3b 3.7%		X		X	
5.0	aucune	X	X		X	X
	V3b 3.7%	X	X		X	

TAB. 2.2 – Récapitulatif des mesures disponibles.

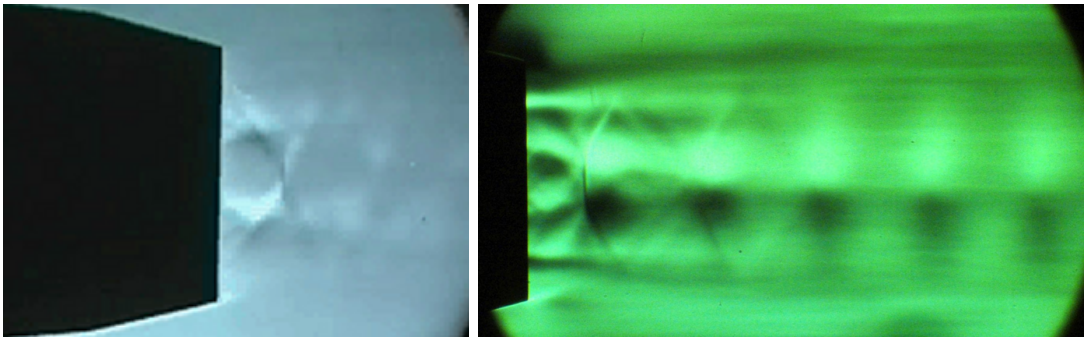
Dans le tableau 2.1, la configuration (Cn) est la configuration nominale de référence, c'est-à-dire sans contrôle. Quatre modèles de contrôle sont présentés dans ce mémoire. La forme des fentes d'injection et leur orientation par rapport au jet primaire sont schématisées en tête de chaque colonne. Tous les schémas sont à la même échelle. Ces différents actionneurs ont été testés aux deux régimes de détente du primaire (NPR) et pour différents débits relatifs Q_3/Q_1. La configuration (V1b) possède exactement les mêmes fentes d'injection que la configuration (V1) dans laquelle on a bouché alternativement un injecteur sur deux. La configuration (V1bp) est identique à la configuration (V1b) dans laquelle les deux quarts de fente situés aux extrémités ont été bouchés réduisant de moitié leur largeur et donc leur allongement. La configuration (V3b) est similaire à la configuration (V1b) dont on aurait tourné chaque fente d'injection de 45 deg suivant l'axe radial. Les sondages ont été effectués sur l'axe du jet $(O, \overrightarrow{X})$ (l'origine O étant au centre de la sortie de la tuyère primaire), selon 3 génératrices radiales ($\cos\theta\,\overrightarrow{Y} + \sin\theta\,\overrightarrow{Z}$, $\theta = 0, 90, 45, 22.5\,\text{deg}$), et dans des plans transverses complets à l'aide d'une sonde trident mesurant la pression totale[1], la pression statique et la température statique (cf. figure 2.1(a)).

[1]Conformément à l'usage des expérimentateurs, la "pression totale" désigne ici la pression d'arrêt mesurée par la sonde pitot derrière l'éventuel choc fort qu'elle provoque lorsque l'écoulement est supersonique. La "pression d'arrêt isentropique" d'une particule fluide désigne la pression statique que l'on obtiendrait si l'on ramenait cette particule à l'arrêt de manière isentropique, on la calcule à partir des mesures de pression totale et de pression statique (formule du pitot de Rayleigh [242]). Comme le choc fort parasite n'existe pas lorsqu'on examine un résultat de simulation numérique, les termes "pression totale" et "pression génératrice" désigneront dans la suite

2.2.2 Présentation et discussion des résultats expérimentaux

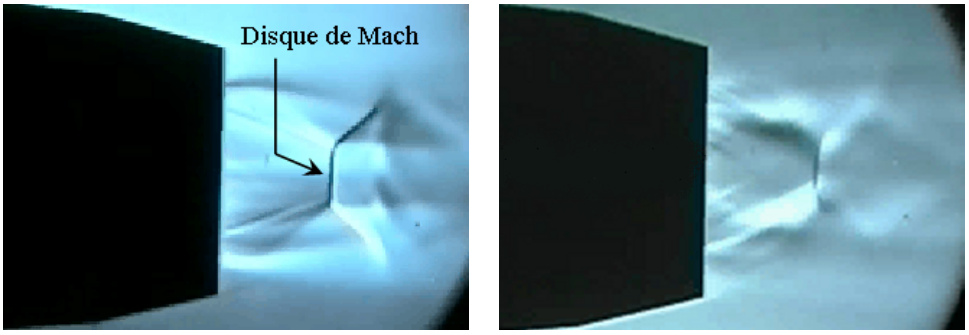


(a) Sans contrôle



(b) Avec 4 injecteurs actifs (V1b)

FIG. 2.2 – Strioscopies “classiques” du jet NPR=3.1 sans et avec contrôle.



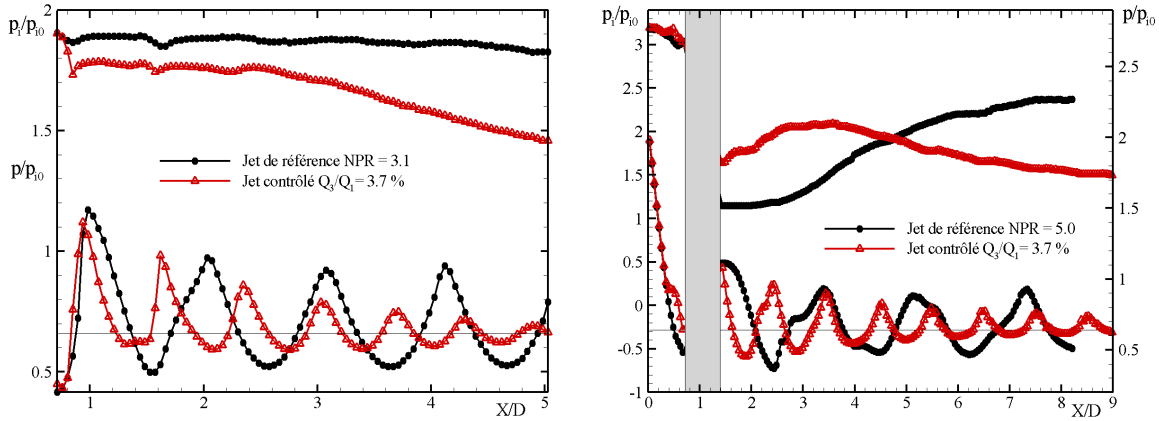
(a) Sans contrôle (b) Avec 4 injecteurs actifs (V3b)

FIG. 2.3 – Strioscopies “classiques” du jet NPR=5.0 sans et avec contrôle.

La figure 2.2 présente des strioscopies à long temps de pose réalisées suivant deux procédés distincts (pour les détails voir les rapports du DAFE [172]) dans le cas du jet de référence à NPR=3.1 (a) et dans le cas du jet contrôlé par 4 injecteurs droits (V1b) (b). Dans le jet de référence, on remarque un choc courbé, convexe dans le sens de l’écoulement, puis une succession d’ondes de détente et de compression se reproduisant quasi-périodiquement. Lorsque le contrôle est activé, la structure de choc dans le premier diamètre en aval de la tuyère change radicalement. La photographie 2.2(b) de gauche accentue plus les variations de masse volumique au centre du jet et laisse supposer que les injections radiales créent des chocs qui n’existaient pas dans le jet de référence. Les expérimentateurs ont alors émis l’hypothèse que ces chocs pourraient

la même notion que la “pression d’arrêt isentropique”.

interagir en donnant une image des gradients très hétérogène et participer à l'augmentation du mélange. Lorsque le jet sous-détendu possède une pression initiale plus forte, les chocs liés à sa non-adaptation sont plus violents. La figure 2.3 présente des strioscopies du jet fortement sous-détendu (NPR=5.0) sans contrôle (a) et avec le contrôle (V3b) (b). La structure de choc initiale présente des gradients plus contrastés que dans le cas NPR=3.1 et une organisation différente : un choc oblique (∼conique) converge vers l'axe et aboutit à un choc normal dit "disque de Mach" d'où repart un choc oblique s'éloignant de l'axe. De même qu'à NPR=3.1, l'activation des injecteurs dans le régime NPR=5.0 provoque une modification spectaculaire des ondes dans le jet. En revenant sur l'image de droite du jet contrôlé à NPR=3.1, figure 2.2(b), on constate que le train d'ondes suivant la structure de choc initiale se resserre suite à l'activation des injecteurs. De plus, on note que le jet semble s'évaser plus largement que dans le cas de référence.



(a) NPR = 3.1, contrôle V1b. (b) NPR = 5.0, contrôle V3b.

FIG. 2.4 – Pressions d'arrêt isentropique et pressions statique sur l'axe des jets faiblement sous-détendu NPR = 3.1 et fortement sous-détendu NPR = 5.0 sans et avec contrôle $Q_3/Q_1 = 3.7\%$.

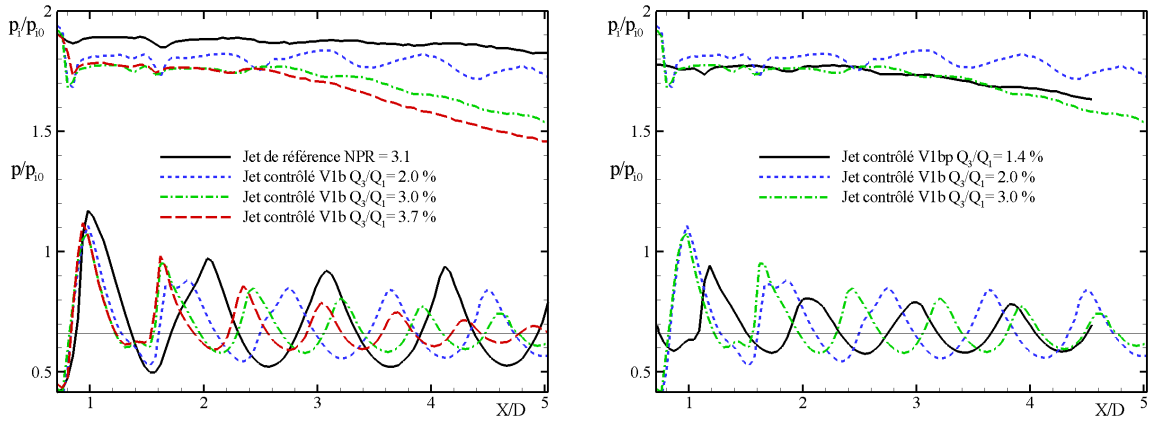
Afin de caractériser quantitativement la modification des ondes de pression internes au jet et d'estimer l'effet du contrôle sur le mélange, les mesures de pression statique et de pression d'arrêt isentropique ont été tracées pour le jet de référence et pour le jet contrôlé dans le régime NPR=3.1 figure 2.4(a) et dans le régime NPR=5.0 figure 2.4(b). Les pressions sont adimensionnées par la pression génératrice extérieure p_{i0} et la position longitudinale est adimensionnée par le diamètre du col de la tuyère primaire D. Sur la pression statique, on remarque que dans les deux régimes de sous-détente les oscillations spatiales (stationnaires) dues à la propagation des ondes de détente et de compression dans le jet se reproduisent périodiquement avec la même amplitude dans la zone observée. Dans les deux régimes, l'activation du contrôle s'accompagne d'une réduction de la période des oscillations ainsi que d'une atténuation assez rapide. Le premier front de gradient positif est très raide, il correspond au choc initial. On constate que celui-ci ne bouge pas significativement sous l'effet du contrôle. Concernant, la pression totale, elle reste constante dans le jet de référence à NPR=3.1 (fig. 2.4(a)) jusqu'à $X/D = 5$, indiquant qu'aucun mécanisme non-isentropique n'atteint encore l'axe du jet et donc que la couche de mélange ne s'est pas encore répandue jusqu'au centre du jet. Cette mesure permet d'affirmer que la région du jet isolée des phénomènes visqueux et turbulents de la couche de mélange, autrement qualifiée de "cône potentiel" pour un jet axisymétrique ou "région potentielle" de manière plus générale, se prolonge au-delà de 5 diamètres en aval de la tuyère. La chute de p_i observée à $X/D \approx 2.5$ lorsque les 4 injecteurs sont actifs permet de prouver l'efficacité de ce moyen de contrôle pour augmenter le mélange : le dispositif réduit la longueur du cône potentiel d'un facteur supérieur à 2.

Les effets de différents paramètres de contrôle ont ensuite été testés sur le jet à NPR=3.1 et sont illustrés par les mesures de pressions axiales, figure 2.5. Tout d'abord, le débit d'injection Q_3 a été ajusté à 2.0, 3.0, et 3.7% du débit primaire Q_1 en faisant varier la pression génératrice p_{i3}, graphe 2.5(a). Si l'on juge l'action du contrôle sur la structure des ondes internes et plus précisément la diminution de la longueur d'onde et l'amortissement des oscillations de pression statique sur l'axe, on constate que cette action est d'autant plus grande que le débit d'injection est grand. On note la même tendance avec la chute de pression totale sur l'axe excepté au débit $Q_3/Q_1 = 2.0\%$ pour lequel on observe une oscillation spatiale stationnaire de la p_i. Ce phénomène a été reproduit par plusieurs séries de mesures et constitue donc bien une caractéristique propre au jet contrôlé par 4 injections (V1b) à faible débit. En regardant plus globalement le niveau moyen de la p_i, on voit tout de même que la réduction de la région potentielle du jet est amplifiée aux forts débits d'injection.

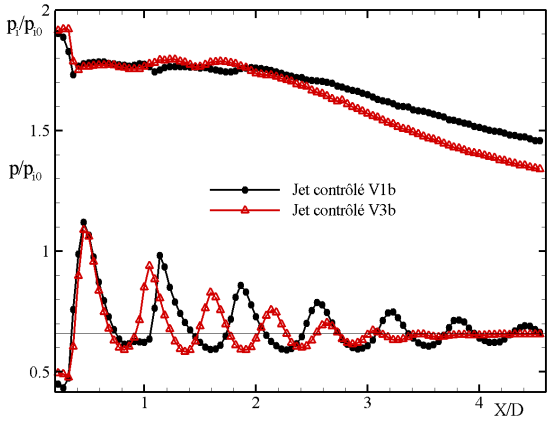
Dans le but d'estimer l'effet du débit, les expérimentateurs ont par ailleurs réduit la section de sortie des injecteurs tout en gardant les conditions génératrices constantes. Ainsi, de la configuration (V1b) à la configuration (V1bp), le débit passe de $Q_3/Q_1 = 3.0\%$ à 1.4%. Les résultats sont exposés figure 2.5(b). La conclusion des expérimentateurs est que le débit ainsi réduit diminue l'efficacité du dispositif. On peut dire que cette interprétation est erronée. Comme schématisé en haut du tableau 2.1, la configuration (V1bp) comporte des injecteurs d'un allongement deux fois plus petit que ceux de la configuration (V1b). L'effet de l'allongement doit donc être estimé avant de comparer les deux configurations à des débits différents. On peut toutefois tirer une information importante du graphe 2.5(b). Le cas (V1b) à $Q_3/Q_1 = 2.0\%$ a été superposé aux deux cas précédents. On constate sur l'évolution de la pression statique que l'atténuation des oscillations avec la (V1bp) avec $Q_3/Q_1 = 1.4\%$ est aussi importante qu'avec la (V1b) à $Q_3/Q_1 = 3.0\%$ mais que d'autre part les oscillations sont déphasées. En particulier, le choc initial est déplacé de $X/D \approx 1.0$ à environ 1.1. Ceci signifie que la structure de choc initiale et la propagation des ondes sont modifiées différemment selon les deux stratégies de contrôle. Si l'on regarde la pression totale, on remarque que les régions potentielles se terminent quasiment au même endroit alors que l'on injecte deux fois moins de débit avec la configuration (V1bp). Si l'on rapproche le débit de la configuration (V1b) de celle de la (V1bp) à $Q_3/Q_1 = 2\%$, on constate alors que c'est la configuration (V1bp) munie d'injecteurs plus allongés dans le sens de l'écoulement qui est plus efficace. De plus, dans ce cas la p_i ne présente pas d'oscillations.

Enfin, l'influence de l'orientation de la fente a été mise en évidence en comparant les configurations (V1b) et (V3b), graphe 2.5(c). Tant sur la pression statique que sur la pression totale, l'effet de donner une incidence à la fente (ici 45 deg) semble augmenter son action sur l'écoulement et notamment accroît le mélange du jet. Les expérimentateurs considèrent que ceci est un effet de "swirl", autrement dit d'un mouvement de rotation longitudinal dont l'impulsion serait fournie par la dissymétrie des injections à la manière d'un "vortex generator" fluide. Le résultat du test précédent, figure 2.5(b), permet d'interpréter cet effet d'incidence différemment : donner de l'incidence au fentes d'injection ramène leur grand axe vers la direction de l'écoulement primaire et peut donc être interprété comme une diminution de l'allongement de $\Lambda > 1$ vers $1/\Lambda < 1$.

Une cartographie du champ de vitesse longitudinale a été réalisée à partir de la PIV ("Particle Image Velocimetry", voir [172]) du jet de référence à NPR=3.1. On retrouve la structure de choc dans le champ proche déjà observée dans les strioscopies. Plus loin en aval, entre $X/D = 3.6$ et 7, la PIV permet de mettre en évidence l'organisation de l'écoulement en cellules à forte vitesse correspondant aux pics bas de pression statique mesurés sur l'axe (figure 2.4 ou 2.5(a)). Ces cellules quasi-périodiques sont étonnamment rondes et légèrement dissipées/diffusées en progressant vers l'aval.



(a) Effet du débit de contrôle Q_3/Q_1 (b) Effet de la section d'injection A_3



(c) Effet de l'incidence des injecteurs

FIG. 2.5 – Effets de différentes variations du contrôle sur la pression d'arrêt isentropique axiale et la pression statique axiale du jet faiblement sous-détendu NPR = 3.1.

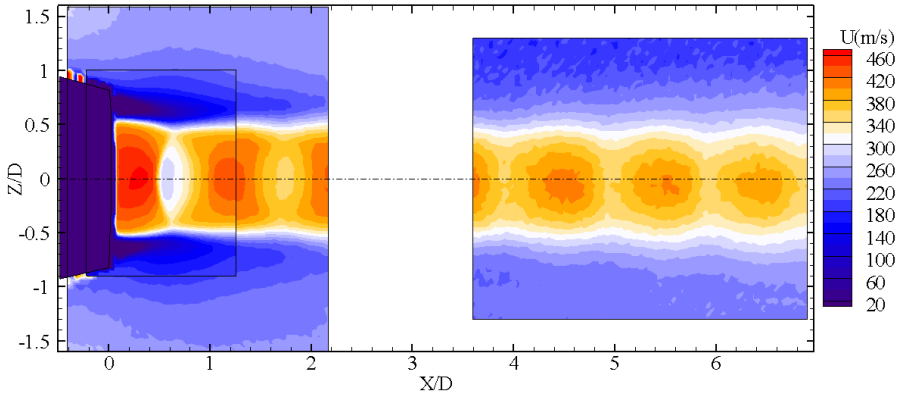
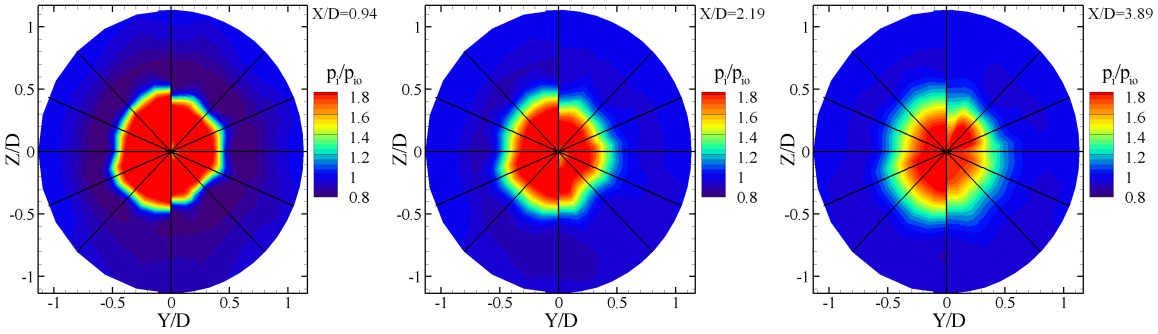
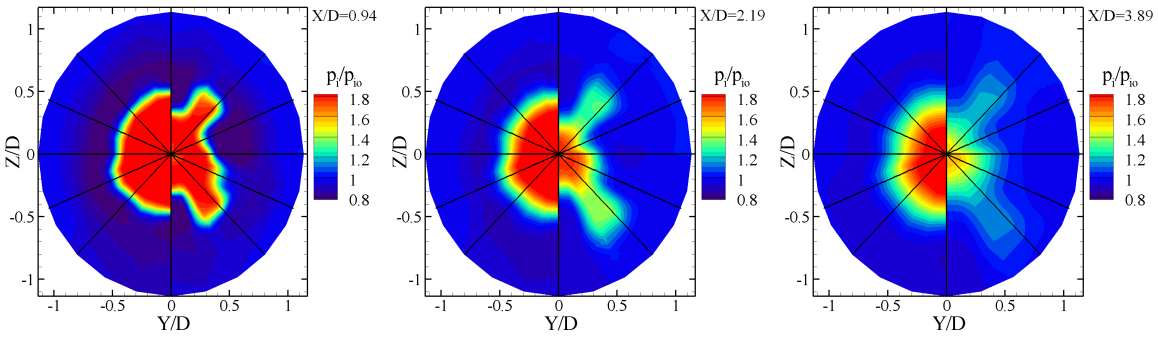


FIG. 2.6 – Champ PIV de vitesse longitudinale dans le jet de référence faiblement sous-détendu (NPR=3.1).

Pour finir, la figure 2.7 présente la distribution de pression totale dans les demi-plans transverses (toutes les configurations étant symétriques par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{Z})$) du jet de référence à NPR=3.1 sans contrôle, avec le contrôle V1 (8 injecteurs actifs) et avec le contrôle V1b (4 injecteurs actifs) au même débit $Q_3/Q_1 = 3.7\%$. Ces distributions ont été extrapolées à partir des sondages suivant les 4 génératrices (représentées par des segments noirs). Cette extrapolation peut paraître osée, néanmoins des visualisations tomoscopiques montrent bien que ces 4 génératrices sont placées suivant les directions les plus représentatives de la déformation des jets contrôlés. Les coupes de la figure 2.7(b) montrent que le dispositif à 4 injections radiales (suivant $\pm\overrightarrow{Y}$ et $\pm\overrightarrow{Z}$) provoque une déformation spectaculaire du jet axisymétrique qui aboutit à une forme cruciforme : les injections radiales repoussent l'interface du jet vers l'axe tandis que les régions du jet situées entre les injecteurs sont expulsées vers l'extérieur. On note que la pression totale est plus rapidement diffusée dans le plan (Y,Z) d'où une réduction de la région potentielle auparavant déduite de l'observation des mesures axiales (figure 2.4). L'examen de la figure 2.7(a) révèle qu'au même débit total l'injection sur 8 injecteurs est inefficace comparé à celle sur 4 injecteurs : les sillages des jets secondaires ne semblent pas pénétrer dans le jet primaire et la pression totale reste constante au coeur du jet.



(a) Jet de référence à gauche et jet contrôlé par le dispositif V1 à $Q_3/Q_1 = 3.7\%$ à droite



(b) Jet de référence à gauche et jet contrôlé par le dispositif V1b à $Q_3/Q_1 = 3.7\%$ à droite

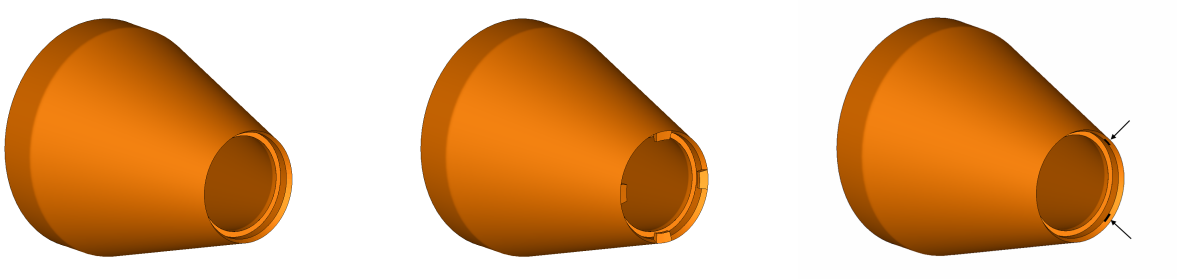
FIG. 2.7 – Pression d'arrêt isentropique dans trois demi-plans transverses aux jets faiblement sous-détendus (NPR = 3.1) sans et avec contrôle (pression extrapolée à partir des 4 génératrices).

En conclusion, les résultats expérimentaux ont clairement montré la capacité du contrôle par injections radiales à augmenter le mélange d'un jet issu d'une configuration réaliste d'arrière-corps d'avion de combat. De plus, le nombre, le débit et l'orientation des injecteurs ont été identifiés comme des paramètres déterminants dans l'optique d'optimiser l'efficacité du mélangeur. Enfin, ajouté au mécanisme des tourbillons longitudinaux responsable de la déformation du jet (cf. par ex. Zaman *et al.* [271]), les strioscopies montrent l'existence d'une structure de chocs internes complexe dont le rôle dans l'augmentation du mélange reste à éclaircir.

2.3 Simulations numériques d'un jet canonique perturbé par tabs solides et fluides

2.3.1 Tuyères simplifiées et analogie tabs fluides/tabs solides

Jusqu'au présent travail de thèse, aucun calcul tridimensionnel de l'arrière-corps propulsif MARCO, et a fortiori de la maquette munie du dispositif d'augmentation du mélange, n'avait encore été réalisé à l'ONERA. Comme décrit dans la section précédente, l'arrière-corps contrôlé (figure 2.1) est une configuration appliquée dans lequel l'écoulement est composé de 4 flux de vitesses très différentes, incluant des couches minces cisaillées attachées ou libres ainsi que des zones de recirculation. Afin de se familiariser avec l'écoulement d'un jet soumis à des perturbations azimutales tant sur le plan de la simulation que sur le plan de l'analyse physique, l'étude numérique a débuté sur une configuration simplifiée du cas expérimental MARCO.



(a) **Tuyère de référence** (b) **Tuyère à 4 tabs** (c) **Tuyère à 4 injections**

FIG. 2.8 – Tuyères canoniques de référence, avec 4 tabs solides et avec 4 injections.

Tout d'abord, le flux de ventilation a été supprimé. Ensuite s'est posé le problème du sillage de la tuyère et du dispositif perturbateur. Le jet principal étant sonique en sortie de tuyère, celle-ci est nécessairement convergente. D'autre part, l'air extérieur en mouvement à $M_0 = 0.8$ durant les essais de MARCO n'a pas pu être immobilisé dans la simulation (ou significativement ralenti ce qui aurait grandement simplifié l'étude du champ moyen) car la couche de cisaillement du jet est alors soumise à un gradient de vitesse tel que le calcul devient fortement instationnaire même en présence de la viscosité turbulente dans les calculs RANS. Aussi, l'angle de convergence à 45 deg de la tuyère principale de MARCO a été réduit pour éviter le décollement de l'écoulement extérieur. De plus, ce dernier a été ralenti à $M_0 = 0.6$ (p_{i0} réduite de 16%) pour empêcher la formation d'une poche transonique et la création d'un gradient d'entropie venant s'ajouter à celui de la couche limite au niveau de la courbure initiale de la tuyère joignant la partie cylindrique d'entrée du domaine de calcul à la partie convergente. Enfin, dans l'optique de simplifier la mise en oeuvre de la simulation et de décomposer la physique de l'écoulement, l'effet perturbateur des injections secondaires sur le jet principal a été réduit dans un premier temps au seul effet d'obstruction en remplaçant les jets secondaires par des tabs solides.

La tuyère de référence représentée figure 2.8(a) est donc formée d'une partie convergente à 14 deg prolongée par un support de tabs ou d'injecteurs. Le col semblable à celui de la configuration MARCO a un diamètre de $D = 44$mm, il est joint au convergent rectiligne par un arrondi de 3mm et se termine par un méplat de $2,781$mm. Le support de tabs est axisymétrique (i.e. de forme annulaire) pour limiter les zones de recirculation entre les tabs et il est quasiment tangent à la ligne de glissement d'un jet sous-détendu au même NPR qui serait émis par une tuyère convergente classique non équipée du support de tabs. Les perturbations présentées dans ce mémoire

consistent d'une part en 4 tabs équirépartis sur la circonférence et d'autre part en 4 injections fluides, voir respectivement les figures 2.8(b) et 2.8(c). Les tabs et les jets secondaires sont situés à $X/D = 11\%$ du col de la tuyère primaire comme sur la maquette MARCO. Pour bien montrer l'effet d'une perturbation azimutale sur le jet axisymétrique, des tabs parallépipédiques de 20 deg de large ont d'abord été simulés. Leur profondeur (radiale) de $h/D = 7\%$ est un compromis entre la volonté de créer une perturbation significative et celle de ne pas modifier la surface sonique du flux primaire[2]. Ensuite, la largeur de chaque tab a été réduite à 10 deg. Dans le cas des injections, chaque tab est remplacé par une petite tuyère sonique de même largeur 10 deg et de même épaisseur (suivant $\overrightarrow{X}$). Le débit total injecté est fixé à $Q_3/Q_1 = 2.5\%$ en ajustant la pression génératrice à $p_{i3}/p_{i1} = 2.48$. Tous les jets primaires et secondaires sont froids, i.e. à température génératrice ambiente $T_i = 300K$. Concernant les conditions du jet primaire, l'hypothétique "mélangeur à choc" reposant sur l'interaction des chocs doit avoir une action plus importante lorsque le jet est fortement sous-détendu, c'est pourquoi le taux de détente du jet simplifié a été choisi égal à NPR = 7. Dans ce cas, le jet de référence a une structure de choc en disque de Mach de topologie semblable à celle du jet produit par MARCO à NPR = 5.

Des calculs Euler et des calculs RANS avec le modèle de Spalart-Allmaras ont été effectués. Pour indication, les calculs Euler comptent approximativement 2.4 à $2.6.10^6$ cellules, les calculs Navier-Stokes sur tuyères avec tabs 4.8 à $8.0.10^6$ cellules, et les calculs Navier-Stokes des tuyères avec injections environ 8.10^6 cellules. Pour les tuyères avec tabs fins et avec injections, les plans (x,r) du maillage (en coordonnées cylindriques) sont resserrés autour des perturbateurs solides ou fluides. Les jets de contrôle sont calculés explicitement dans de petites tuyères au droit des orifices d'injection. Ceux-ci sont discrétisés en 10 cellules dans chaque direction (taille de mailles $\Delta x = 0.2\%D$,$\Delta\theta = 1$ deg). Toutes les couches limites sont calculées sauf dans les tuyères d'injection où une condition de glissement est appliquée.

2.3.2 Influence du maillage sur la structure de choc du jet

Une étude préliminaire a été conduite afin de déterminer une topologie de maillage structuré multibloc capable de reproduire les phénomènes physiques présents dans le jet axisymétrique supersonique perturbé par 4 tabs équirépartis en azimut avec un nombre de points raisonnables et avec le code FLU3M. La reproduction du disque de Mach s'est révélée être le critère décisif dans la stratégie de maillage sur l'axe du jet. Deux questions se posent lors de la conception d'un tel maillage :

- Peut-on placer des mailles dégénérées sur l'axe (i.e. réduire la face des cellules hexahédriques en contact avec l'axe à un segment) ?
- L'écoulement étudié comportant des plans de symétrie, peut-on réduire le domaine de calcul à l'aide de conditions de symétrie ?

Quatre topologies ont ainsi été testées sur le jet non perturbé (axisymétrique) à NPR=7.0 et sont regroupées dans le tableau 2.3.

La même procédure de calcul a été appliquée aux quatres maillages : un calcul Euler de 10000 itérations à CFL=10 permet d'évacuer une phase transitoire pour arriver à un régime établi. Le disque de Mach n'étant alors pas parfaitement propre (saut d'une maille d'une itération sur l'autre), le calcul Euler est ensuite moyenné sur 7000 itérations, le pas de temps global étant fixé à $2\mu s$ et résolu en 4 sous-itérations. Par ailleurs, d'autres procédures de calcul ont été entreprises (réduction du CFL, pas de temps global depuis le début du calcul, calculs Navier-Stokes) dans

[2]Le jet étant supersonique, une perturbation modérée a une distance finie du col peut avoir une influence nulle sur la surface sonique. Cette propriété de l'écoulement permet, en théorie, de contrôler le jet sans modifier le régime de fonctionnement du flux primaire du turboréacteur.

les topologies montrant un écoulement pathologique avec la première méthode, mais aucune n'a résolu les problèmes observés.

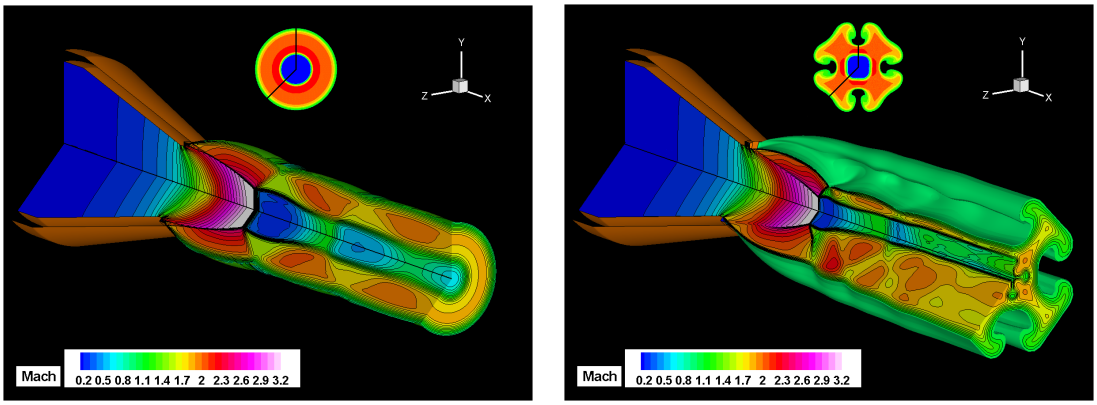
Description du maillage	Qualité du disque de Mach
Quartier 90 deg, mailles dégénérées sur l'axe	Mauvaise
360 deg, mailles dégénérées sur l'axe	Mauvaise
Quartier 90 deg, maillage en H sur l'axe du jet	Mauvaise
Maillage en H sur l'axe du jet entouré par un maillage en O	Bonne

TAB. 2.3 – Récapitulatif des maillages testés pour reproduire le disque de Mach.

Finalement, avec le code FLU3M, tant la dégénérescence des mailles sur l'axe de symétrie que les conditions de plan de symétrie détèriorent la solution numérique. En ce qui concerne le calcul du champ moyen (approche RANS avec modèle de Spalart-Allmaras) des jets, ces deux stratégies de maillage pourraient éventuellement être adoptées à condition de modifier la manière dont sont codées les conditions aux limites. Toutefois, dans le cadre de cette étude, un des objectifs est de calculer l'écoulement instationnaire au moyen de la méthode ZDES pour lequel les plans de symétrie n'existent pas. Aussi, le codage des conditions limites sur l'axe ou des plans de symétrie n'a pas été modifié. La seule topologie alors capable de capturer correctement la réflexion des chocs sur l'axe du jet est celle composée, au centre, d'un bloc en H, et autour, d'un maillage en O. Cette topologie O-H a ensuite été retenue pour toutes les calculs présentés dans ce mémoire.

2.3.3 Action des tabs solides et fluides sur le jet canonique

La figure 2.9 présente les vues 3D du jet de référence et du jet perturbé par 4 tabs solides de 20 deg de large calculés en RANS. La surface extérieure est l'iso-surface $M = 1$ et le jet est coupé selon deux demi-plans longitudinaux, l'un $(0, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y})$ vertical et l'autre $(0, \overrightarrow{X}, \overrightarrow{Z} - \overrightarrow{Y})$ oblique situés dans le jet perturbé, figure 2.9(b), respectivement dans le plan de symétrie à travers un tab et dans le plan de symétrie entre deux tabs. Dans ces deux demi-plans de coupe, les lignes iso-Mach ont été tracées. Vue de l'extérieur, la surface axisymétrique du jet de référence est drastiquement déformée par les tabs, elle est creusée dans leurs sillages et présente des lobes en forme de champignon dans les plans intermédiaires. Dans le cas de référence, figure 2.9(a), on reconnaît le choc droit ou disque de Mach où aboutit un choc oblique incident convergent et d'où partent une surface axisymétrique de cisaillement et un choc oblique réfléchi divergent. Ce dernier se réfléchit sur la périphérie du jet et donne lieu à une succession d'ondes de détente et de compression guidées entre la surface extérieure du jet et la surface de cisaillement issue du disque de Mach. Celle-ci s'adapte avec la pression de l'écoulement central en se dilatant et se contractant "périodiquement", tout en faisant apparaître sur l'axe des zones d'accélération et de détentes alternées. Dans le jet perturbé, figure 2.9(b), cette structure de nature compressible est fortement modifiée. Les traces du choc incident axisymétrique dans le cas de référence se différencient dans le plan des tabs et dans le plan intermédiaire. Pourtant, le disque de Mach reste étonnamment rectiligne et sa position axiale ne change pas de manière significative. Sa forme circulaire s'applatit en face des perturbateurs et s'approche ainsi d'un carré (voir la section représentée juste en aval du disque de Mach, figure 2.9(b)). La section du tube de courant qui en est issu évolue en aval vers une forme de trèfle dont les quatres feuilles sont déphasées de 45 deg par rapport aux diagonales du carré initial. Ceci rappelle le phénomène d'"axis-switching" décrit par Zaman [269] dans les jets issus de tuyères carrées. L'espace de propagation des ondes en aval du choc réfléchi étant très resserré dans les plans des tabs et très élargi dans les plans intermédiaires, les structures compressibles qui en résultent sont très différentes.



(a) Jet de référence (b) Jet perturbé par 4 tabs

FIG. 2.9 – Perturbation azimutale d'un jet axisymétrique.

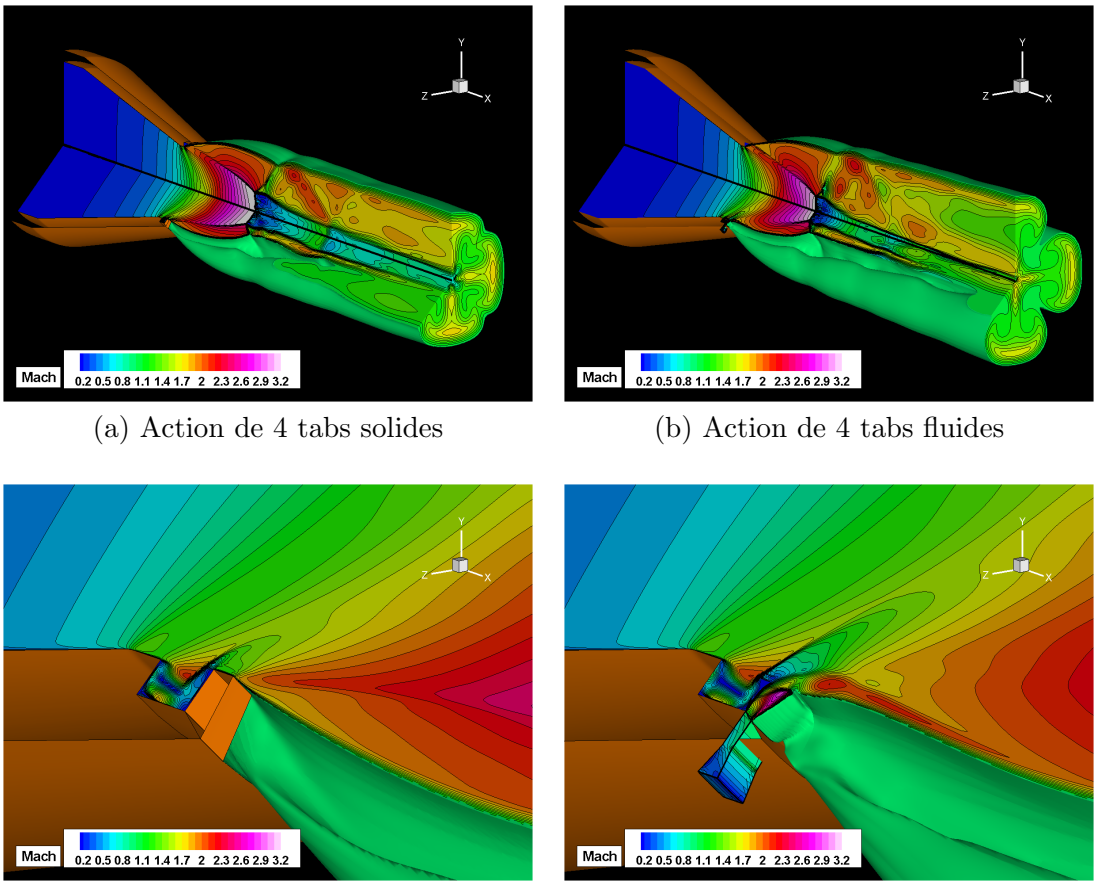
La figure 2.10 compare l'action de 4 tabs solides de 10 deg de large à 4 injections fluides de même largeur. Ces perturbations solides ou fluides sont orientées suivant les directions obliques $\pm(\overrightarrow{Y} \pm \overrightarrow{Z})$[3]. Dans les deux jets perturbés, on retrouve les caractéristiques relevées sur le jet contrôlés de la figure 2.9(b) tant sur la déformation de la surface externe du jet que sur la structure de ses ondes internes. Entre les deux cas présentés figure 2.10, l'amplitude de déformation de la surface externe suggère que la perturbation fluide est plus puissante que la perturbation solide, mais il est très probable qu'une déformation similaire aurait pu être obtenue en diminuant le débit d'injection. Les figures 2.10(c) et 2.10(d) présentent des grossissements de la région des perturbateurs solide et fluide. La première remarque est que le jet secondaire, figure 2.10(d), pénétrant initialement dans la direction perpendiculaire (ou presque) à l'écoulement principal, se comporte vis-à-vis de ce dernier comme un obstacle solide semblable au tab de la figure 2.10(c). Cet effet d'obstacle se traduit dans l'écoulement incident supersonique par la génération d'un choc fort détaché se courbant en raison de l'extension finie de l'obstacle pour devenir évanescent en aval. On constate aussi que le choc détaché n'est pas assez raide pour venir intercepter la surface sonique du jet principal. Regardons maintenant les différences. Sur le jet secondaire, on peut distinguer une portion initiale assez raide presque radiale puis une portion déviée à ≈ 45 deg dans le sens de l'écoulement principal et enfin une portion quasiment alignée avec le jet primaire. En raison de sa vitesse supersonique, le jet secondaire s'oriente dans la direction de l'écoulement incident $\overrightarrow{X}$ par à-coups à chaque impact des faisceaux internes d'ondes de détente et de compression sur sa frontière. La portion la plus raide, la plus semblable au tab solide de la figure 2.10(c) est plus petite mais sa portion oblique à ≈ 45 deg se prolonge plus vers l'intérieur du jet primaire et y crée un choc détaché plus long, plus persistent. En outre, on constate des différences dans la forme de la surface externe du jet primaire : elle diverge de l'axe du jet primaire dans 2.10(c) et converge dans 2.10(d). Dans le cas du tab solide, la surface sonique matérialisée figure 2.10(c) coïncide en bonne approximation avec les lignes de courant au début de la couche de mélange. L'écoulement primaire après avoir traversé le choc détaché continue son parcours tout droit, i.e. suivant $\overrightarrow{X}$, en passant sur la partie plate supérieure du tab[4] et y conserve une pression élevée. Lorsqu'il arrive au niveau de l'atmosphère extérieure à pression plus basse[5], il s'adapte en déviant vers l'extérieur tout en émettant un faisceau de détente vers

[3]Les perturbateurs solides et fluides de la figure 2.10 ont été tournés de 45 deg par rapport aux tabs de la figure 2.9(b)

[4]On aurait pu a priori imaginer que l'écoulement décolle au niveau de l'arête amont du tab et fasse apparaître un bulbe de recirculation sur la tête du tab, mais ce n'est pas le cas.

[5]Plus précisément, il existe une zone de recirculation du fluide extérieur en aval du tab. Comme la pression y

l'intérieur du jet primaire. Dans le cas de l'injection, figure 2.10(d), la surface initiale du jet primaire ne coincide plus avec la surface sonique puisque le jet secondaire est supersonique. Toutefois, on note que leurs formes sont similaires car les deux faces du jet secondaire sont quasiment parallèles à l'échelle considérée. La différence avec l'écoulement comportant le tab solide est que le fluide issu du jet secondaire ainsi que le flux primaire voisin de l'interface amont du jet secondaire sont initialement verticaux et ne peuvent se redresser d'un coup dans la direction $\overrightarrow{X}$. Pour l'écoulement secondaire supersonique, le virage se fait schématiquement (parce qu'en réalité l'écoulement est tridimensionnel et résulte de la compatibilité avec l'écoulement primaire) en deux coups à travers l'impact de deux faisceaux de détente successifs sur l'interface amont. Pour l'écoulement primaire localement subsonique, le virage se produit intrinsèquement de manière continue (au sens C^∞). Il en résulte que l'écoulement primaire ou secondaire ne se détend pas jusqu'à diverger de l'axe $(O, \overrightarrow{X})$ et continue localement à converger vers celui-ci. Les ondes de Mach émises vers l'intérieur du jet sont donc aussi différentes du cas avec tab solide et induisent une distribution de nombre de Mach différente.



(a) Action de 4 tabs solides

(b) Action de 4 tabs fluides

(c) Zoom sur un tab solide

(d) Zoom sur un tab fluide

FIG. 2.10 – Comparaison du jet perturbé par 4 tabs solides et du jet perturbé par 4 tabs fluides (situés sur les axes obliques).

La figure 2.11 montre les répartitions de pression totale dans des vues similaires à celles des figures 2.9(a), 2.10(a) et 2.10(b), et la figure 2.12 présente l'évolution longitudinale des pressions totales et des pressions statiques sur l'axe des trois jets. Globalement, on retrouve les tendances mesurées sur le jet à NPR=5 des essais MARCO : sur la pression statique, diminution de la

est encore plus basse qu'à l'infini amont, le raisonnement simplifié présenté ici est toujours valable.

période des oscillations et amortissement des pics et sur la pression totale, une portion initiale constante suivie d'une montée puis d'une chute. Toutefois, les oscillations de pression statique observées dans les jets canoniques perturbés ne produisent pas un schéma périodique comme dans la configuration MARCO, ce qui révèle une modification d'autant plus profonde de la structure des ondes internes. Concernant la pression totale, la figure 2.11 souligne la similitude entre le champ proche du jet sans contrôle et celui des jets perturbés. Dans les trois configurations, on note en effet la présence d'une structure égale ou semblable à un disque de Mach. En aval, deux écoulements se distinguent, un écoulement central à faible p_i et un écoulement périphérique à plus forte p_i, séparés par une surface de cisaillement. Lorsque cette surface de cisaillement atteint l'axe, la pression totale périphérique est "diffusée"[6] sur l'axe et se traduit par les branches montantes de la figure 2.12. Ensuite, lorsque la surface de cisaillement externe du jet atteint l'axe, c'est la pression totale plus faible de l'air extérieur qui est "diffusée" et qui provoque la chute de p_i sur la figure 2.12. On peut donc dire que le mélange du jet avec l'écoulement extérieur s'est propagé jusqu'à l'axe à partir du moment où la p_i commence à décroître, c'est-à-dire lorsque p_i est maximale. Ceci se produit à $X/D = 23|19|9$ respectivement dans le jet de référence, le jet contrôlé par tabs et le jet contrôlé par injections. Dans ce dernier cas, on distingue l'arrivée de la couche de cisaillement interne sur l'axe, cf. figure 2.11.

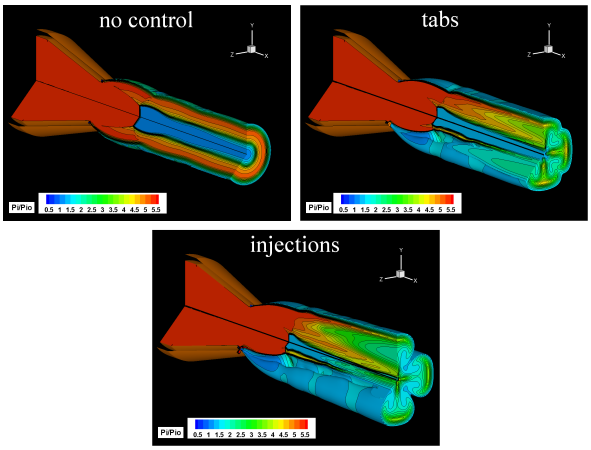


FIG. 2.11 – Distribution de p_i dans les jets.

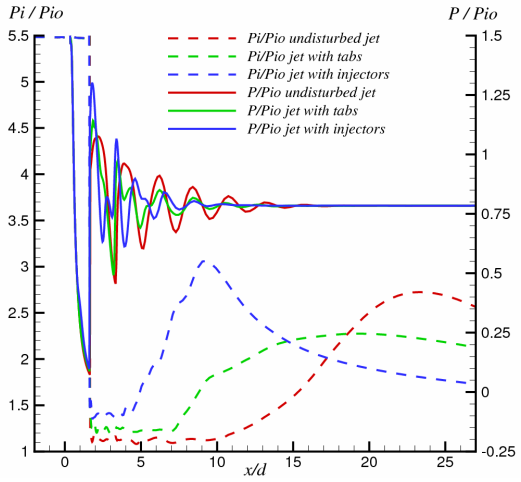


FIG. 2.12 – Pressions totales et statiques sur l'axe des jets.

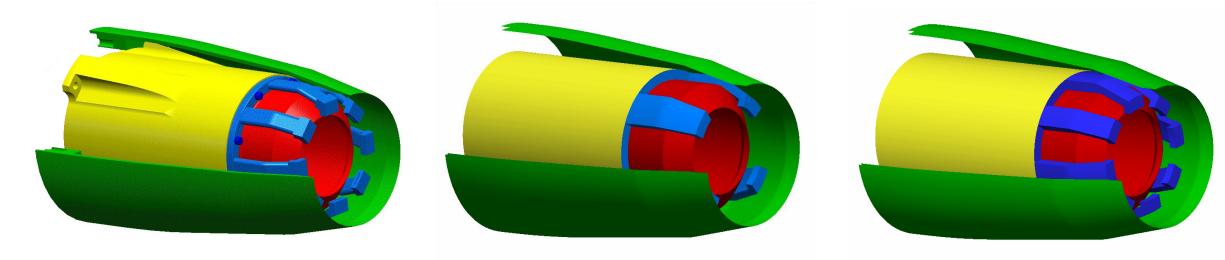
En conclusion, cette étude préliminaire réalisée sur une configuration simplifiée par rapport au cas d'étude MARCO a permis de déterminer une topologie de maillage pouvant capturer les deux conséquences majeures des perturbations azimutales sur le jet supersonique, à savoir, une forte déformation extérieure et une modification de la structure compressible interne. Sur cette configuration canonique, l'effet d'obstacle a été isolé en remplaçant les injections secondaires par des tabs solides. On constate à première vue que l'effet d'obstacle permet de reproduire les deux actions provoquées par l'injection radiale. Cependant, un examen plus approfondi met en évidence des différences entre ces deux types de perturbations. L'écoulement autour d'un tab étant fondamentalement différent de celui causé par une injection transverse (cf. par exemple [73] et [164]), l'analogie s'arrête ici. De plus, le besoin de confronter les résultats numériques à une référence expérimentale explique le passage aux simulations du cas appliqué MARCO.

[6] En fait, on ne peut pas exactement parler d'un processus de diffusion, ceci est discuté dans les chapitres suivants, en particulier dans la section 4.4.4.

2.4 Mise en oeuvre des simulations de la configuration MARCO

2.4.1 Description des différents cas simulés

Plusieurs calculs ont été nécessaires avant d'aboutir aux simulations RANS et ZDES finales de la configuration MARCO (représentée figure 2.13(a)). Ce sont uniquement ces dernières simulations qui sont comparées aux mesures expérimentales dans la section 2.5 et analysées sur le plan physique dans les chapitres suivants. Pour commencer, les simulations RANS avaient pour ambition de restituer le champ du jet de référence à NPR=3.1 et le champ du jet contrôlé par 4 injecteurs. Comme les maillages ont été réalisés au moyen de programmes Fortran, leur complexité géométrique a été étoffée par étapes. Ainsi, une première configuration (figure 2.13(b)) a été modélisée avec seulement 4 injecteurs solides, les parois des 4 injecteurs inactifs étant supposées avoir une influence négligeable sur le jet. Par la suite, le calcul du jet contrôlé par 8 injecteurs actifs a été entrepris et a nécessité la construction d'un modèle à 8 injecteurs solides. Hormis le nombre d'injecteurs, les configurations à 4 et 8 injecteurs solides se différencient par les parois latérales des injecteurs : elles sont dans des plans radiaux pour la première alors qu'elles sont parallèles pour la seconde. Cette modification rapprochant le modèle numérique de la maquette a été faite pour limiter l'obstruction du fluide entre les injecteurs. Les caractéristiques des maillages des différentes configurations MARCO présentées dans ce mémoire sont résumées dans le tableau 2.4. Les tableaux 2.5 et 2.6 résument respectivement les calculs de mise au point et les configurations utilisées dans les simulations finales. Ces tableaux sont commentés dans la suite.



(a) maquette CAO (b) modèle CFD 4 injecteurs (c) modèle CFD 8 injecteurs

FIG. 2.13 – Comparaison des modèles CFD au modèle CAO de la maquette MARCO.

Ref. maillage	Injecteurs solides	Injections maillées	Λ	nombre de mailles	mailles en azimut	calculs	
						type	configurations
M01	4	4	10.	8×10^6	128	RANS	tests
M02	8	4	10.	8×10^6	128	RANS	tests
M1	8	4	10.	8×10^6	128 (H)	RANS ZDES	F0,F1,F2,F4, F8,F9,F50,F51, C0,C1,C2 F0,F1
M2	8	8	10.	10.5×10^6	168 (H)	RANS ZDES	F0,F1,F3 F0,F1,F2
M3	8	4	2.5	8×10^6	128 (H)	RANS	F5
M4	8	4	1.0	8×10^6	128 (H)	RANS	F6
M5	8	4	0.5	8×10^6	128 (H)	RANS	F7

TAB. 2.4 – Récapitulatif des maillages des configurations MARCO.

Ref. calculs	Maillage	Injecteurs solides	Dard calculé	Entrée de ventilation	modélisation turbulence	schéma numérique
MPRANS1	M01	4	non	axisymétrique	RANS SARC	Minmod
MPRANS2	M01	4	non	axisymétrique	RANS SARC	Koren
MPRANS3	M01	4	non	axisymétrique	RANS SA	Minmod
MPRANS4	M01	4	non	axisymétrique	RANS SACC	Minmod
MPRANS5	M01	4	non	axisymétrique	SARC+SACC	Minmod
MPRANS6	M01	4	oui	axisymétrique	RANS SARC	Minmod
MPRANS7	M02	8	non	axisymétrique	RANS SARC	Minmod
MPRANS8	M01	4	non	axi. $Q_3 + 10\%$	RANS SARC	Minmod
MPZDES1	M2	8	oui	axisymétrique	ZDES (Δ_{vol})	Minmod
MPZDES2	M2	8	oui	4 trous	ZDES (Δ_{vol})	Minmod
MPZDES3	M2	8	oui	4 trous	ZDES (Δ_{vol})	Koren

TAB. 2.5 – Récapitulatif des calculs de mise au point des simulations RANS et ZDES.

Nom de la config.	jet primaire		injections secondaires						Type de calculs	Cas exp.
	NPR	T_{i1} (K)	SPR	T_{i3} (K)	Q_3/Q_1 (%)	N	A_3/A_r	Λ		
F0	3.1	300.	jet froid de référence pour NPR=3.1						RANS/ZDES	oui
F1			2.8	300.	3.7	4	1.	10.	RANS/ZDES	oui
F2			1.4	300.	2.0	4	1.	10.	RANS/ZDES	oui
F3			1.4	300.	3.7	8	2.	10.	RANS	oui
F4			5.6	300.	3.7	2	2.	10.	RANS	non
F5			2.8	300.	3.7	4	1.	2.5	RANS	non
F6			2.8	300.	3.7	4	1.	1.0	RANS	non
F7			2.8	300.	3.7	4	1.	0.5	RANS	non
F8			2.8	600.	3.7	4	1.	10.	RANS	non
F9			2.8	1200.	3.7	4	1.	10.	RANS	non
F50	5.0	300.	jet froid de référence pour NPR=5.0						RANS	oui
F51			2.8	300.	3.7	4	1.	10.	RANS	non
C0	3.1	1100.	jet chaud de référence pour NPR=3.1						RANS	non
C1			2.8	300.	3.7	4	1.	10.	RANS	non
C2			2.8	1100.	3.7	4	1.	10.	RANS	non

TAB. 2.6 – Récapitulatif des configurations représentées dans les simulations finales.

Nomenclature :

- NPR $= p_{i1}/p_0$ taux de détente du jet primaire ("Nozzle Pressure Ratio"), avec p_{i1} pression génératrice du jet primaire et p_0 pression statique extérieure
- T_{i1} température génératrice du jet primaire
- SPR $= p_{i3}/p_{i1}$ taux de détente des jets de contrôle ("Secondary Pressure Ratio"), avec p_{i3} pression génératrice des jets de contrôle et p_{i1} celle du primaire
- Q_3/Q_1 débit d'injection rapporté à celui du jet primaire
- N nombre d'injecteurs actifs
- A_3/A_r section de sortie totale des jets de contrôle rapportée à la référence $A_r = 20\text{mm}^2$
- $\Lambda = R\Delta\theta/\Delta x$ allongement des orifices d'injection, avec $R\Delta\theta$ la dimension orthoradiale et Δx la dimension longitudinale

2.4.2 Mise au point de la simulation RANS

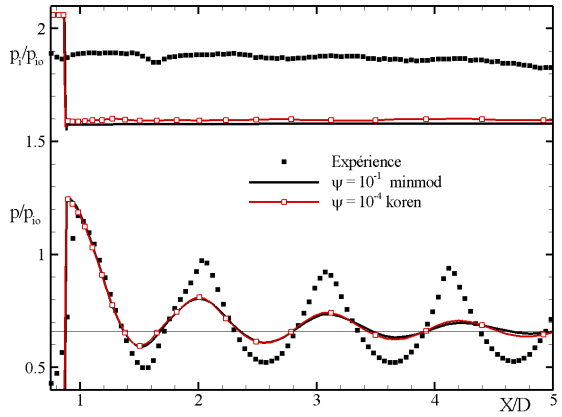
Afin d'identifier les paramètres qui affectent le développement du jet et qui doivent être pris en compte dans les calculs RANS, un modèle numérique du jet non-contrôlé a d'abord été choisi comme référence, puis l'influence de chaque élément pouvant en augmenter sa complexité a été évaluée. Les effets des différentes modifications sont observés sur les pressions axiales, figure 2.14.

Le modèle numérique de référence est noté MPRANS1 (pour Mise au Point RANS n°1) dans le tableau 2.5. Il est basé sur la géométrie à 4 injecteurs solides (figure 2.13(b)), son domaine s'étend 3D en amont de la section d'éjection (où D est le diamètre de sortie du flux primaire), 25D en aval, et 12D dans la direction radiale. Aucun profil de couche limite n'est appliqué à l'entrée de l'écoulement extérieur. La section d'entrée du flux de ventilation est annulaire et les couches limites internes du canal de ventilation ne sont pas discrétisées. Seules la couche-limite extérieure et la couche-limite du flux primaire reçoivent un maillage dédié ($y^+ \leq 1$, 3 points dans la zone linéaire, 30 points dans l'épaisseur de couche-limite). Le modèle de Spalart-Allmaras (SA) est utilisé avec la correction de rotation (RC) inspirée de la correction de Daclès-Mariani [55] pour inhiber la sur-diffusion des tourbillons longitudinaux créés par les injections radiales, l'ensemble du modèle est noté SARC dans le tableau 2.5. Le schéma numérique est le schéma de Roe étendu au second ordre par l'approche MUSCL et bridé par le limiteur minmod. Ce dernier est le plus robuste mais aussi le plus dissipatif des limiteurs. Le maillage comporte 8 millions de noeuds répartis en 304 points dans la direction longitudinale et 128 plans en azimut.

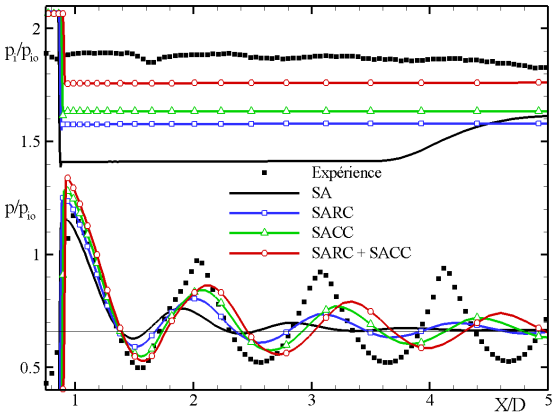
L'influence de la dissipation numérique est évaluée en comparant le calcul MPRANS1, utilisant le schéma de Roe étendu au 2$^{\text{nd}}$ ordre par l'approche MUSCL et bridé par le limiteur Minmod, au calcul MPRANS2, utilisant le schéma de Roe étendu au 3$^{\text{ème}}$ ordre par l'approche MUSCL ("third-order upwind-biased") et bridé par le limiteur Koren. Le calcul MPRANS2 possède donc globalement un schéma numérique moins dissipatif que le MPRANS1. On ne constate pas de différence significative entre les deux calculs, cf. figure 2.14(a), ce qui indique que la diffusion/dissipation numérique est négligeable par rapport à la diffusion/dissipation du modèle de turbulence.

L'influence de la modélisation de la turbulence est mise en évidence à travers certaines corrections du modèle original de Spalart-Allmaras. Les calculs MPRANS3, MPRANS1, MPRANS4, MPRANS5 ont été réalisés respectivement avec les modèles SA de base, SARC (SA avec correction de rotation), SACC (SA avec correction de compressibilité), et SARC+SACC (SA avec correction de rotation et correction de compressibilité). Les corrections ont des effets cumulatifs si bien que les calculs présentant les plus grandes viscosités turbulentes sont par ordre croissant SARC+SACC, SACC, SARC et SA. La figure 2.14(b) montre les résultats sur les pressions statiques tandis que la figure 2.14(c) met en valeur les conséquences sur les pressions totales sur l'axe du jet. On constate que plus la viscosité turbulente est élevée, plus les oscillations de pression statique sont amorties avec une pseudo-période d'autant plus grande et plus le cône potentiel se raccourcit. Les corrections du modèle SA ont des effets très puissants puisque le rapport des longueurs de cône potentiel entre SARC+SACC et SA atteint 2.5 ! Nous reviendrons sur l'effet significatif de la modélisation de la turbulence dans la section 5. En outre, on remarque que plus la viscosité turbulente est élevée, plus le choc initial se produit tôt, et plus la pression statique et la pression totale en aval sont faibles. Ces deux tendances apparemment contradictoires s'expliquent par le fait que plus la viscosité turbulente est élevée, plus l'écoulement en amont du choc est rapide (le nombre de Mach allant de $M = 1.73$ en SARC+SACC à $M = 2.08$ en SA) alors que plus la pression statique y est basse (entre $p/p_{i0} = 0.40$ et 0.24). Ceci résulte à la fois de l'épaississement de la surface de cisaillement du jet et de son équilibre qui dépendent

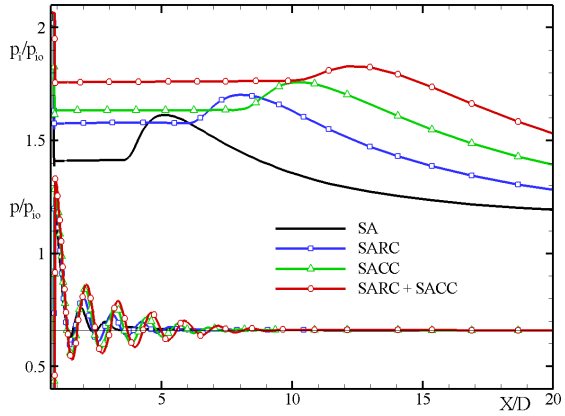
directement et indirectement de la viscosité turbulente.



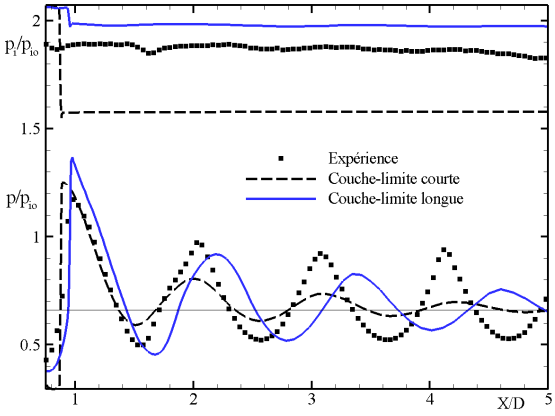
(a) Dissipation numérique



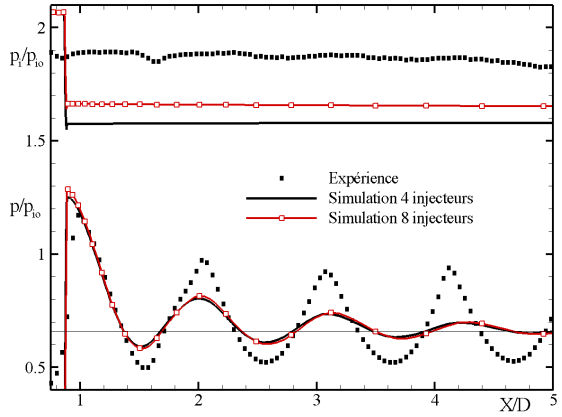
(b) Corrections du modèle SA jusqu'à 5D



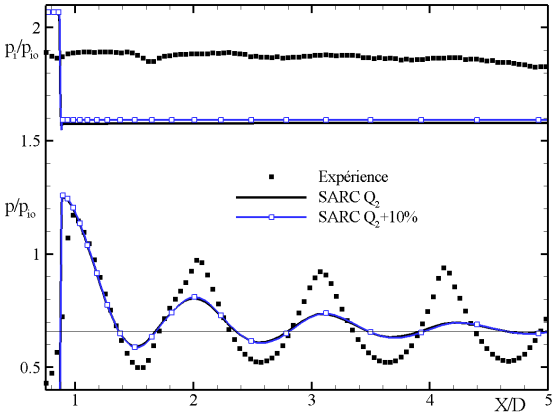
(c) Corrections du modèle SA jusqu'à 20D



(d) Couche-limite extérieure



(e) Nombre d'injecteurs



(f) Débit de la ventilation

FIG. 2.14 – Effet de différents paramètres sur les pressions totales et statiques sur l'axe du jet.

L'influence de la couche-limite extérieure est mise en évidence en comparant les résultats de MPRANS1 et MPRANS6 affichés figure 2.14(d). MPRANS1 calcule explicitement la couche limite sur la longueur 3D (D diamètre du col) de l'arrière-corps alors que MPRANS6 la calcule en plus sur toute la longueur du dard supportant l'arrière-corps (voir figure 2.1(a)) c'est-à-dire sur une longueur de 18D. La couche limite résultante au bout de la paroi extérieure est ainsi 3.9 fois plus épaisse et donne lieu en aval à une couche de cisaillement plus progressive (gradient transverse moins fort). La quantité de mouvement du fluide extérieure heurte alors l'interface du jet moins violemment et y impose donc une pression moins forte en aval du choc initial. Les courbes des pressions axiales montre que ce paramètre a une influence très importante sur le jet.

L'influence du nombre d'injecteurs solides est illustré figure 2.14(e) à l'aide des calculs MPRANS1 et MPRANS7 dans lesquels respectivement 4 et 8 injecteurs solides sont représentés. On note une différence plus marquée dans les courbes de pression totale que dans celle de la pression statique à cause du déplacement très sensible du choc fort.

L'influence du flux de ventilation a été évaluée en augmentant son débit de 10% entre les calculs MPRANS1 et MPRANS8. Le graphe 2.14(f) montre que le jet n'est pas significativement perturbé par une telle variation.

La convergence en maillage a été atteinte dans le sens azimutal sur les maillages M1 et M2 (resp. 128 et 168 points sur la circomférence) dans le cas de référence et le cas contrôlé par 4 injecteurs (cas F0 et F2, tableau 2.6). comme en témoignent les pressions axiales de la figure 2.15. La convergence du maillage dans la direction radiale est probablement atteinte étant donné le grand nombre de points provenant des couches limites attachées. La convergence en maillage dans la direction longitudinale n'a pas été vérifiée pour des raisons de coût de calcul.

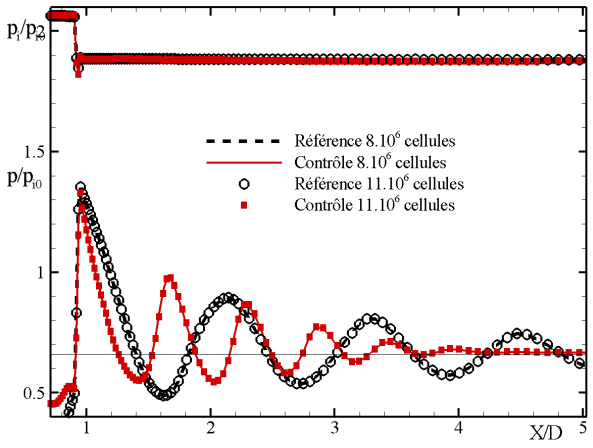


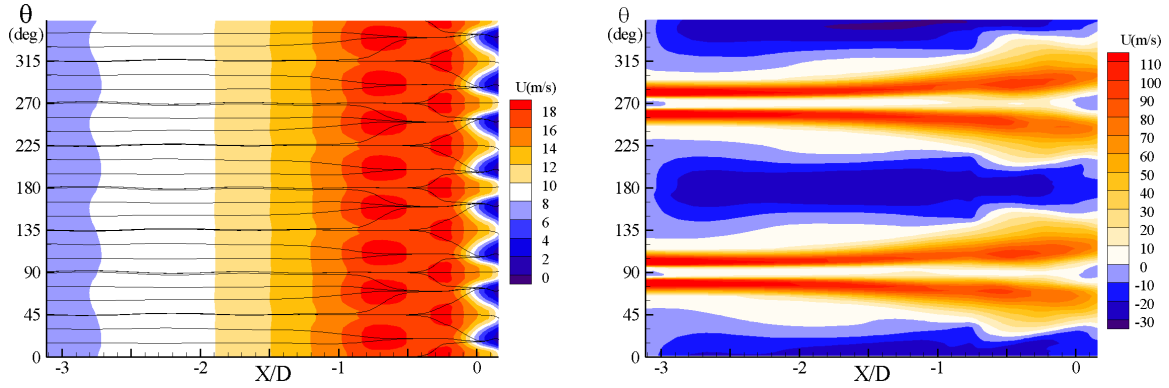
FIG. 2.15 – Convergence du calcul RANS vis-à-vis de la discrétisation azimutale (M1,M2).

2.4.3 Mise au point de la simulation ZDES

Les tests en ZDES ont été réalisés avec le dard et avec 8 injecteurs solides.

L'influence des conditions d'entrée de la ventilation est illustrée à l'aide des calculs MPZDES1 et MPZDES2. Dans les calculs RANS ainsi que dans MPZDES1, l'entrée de la ventilation est axisymétrique. En réalité sur la maquette testée en soufflerie, le flux de ventilation entre par 4 trous dont la surface cumulée représente à peine 6% de la section totale du canal

annulaire. C'est ce qui a été modélisé dans le calcul MPZDES2. La figure 2.16 présente le champ résultant de vitesse longitudinale moyenné en temps à mi-hauteur du canal de ventilation. On constate que le flux de masse initialement beaucoup plus concentré, dans le cas de l'entrée par 4 trous, ne se répartit pas du tout de manière homogène comme cela été implicitement supposé avant mais conserve une section de courant relativement limitée et fait apparaître, par effet visqueux, quatre larges zones de recirculations. A la fin du canal, l'écoulement entourant la région initiale du jet primaire comporte donc des zones co-courantes ($U > 0$) et des zones à contre-courant ($U < 0$).



(a) Entrée axisymétrique (b) Entrée par les 4 trous

FIG. 2.16 – Champs de vitesse longitudinale à mi-hauteur du canal de ventilation.

La réaction de la couche de mélange du jet primaire est mise en évidence, figure 2.17, au moyen du critère Q [126][7] : $Q = (\|\overline{\overline{\Omega}}\|^2 - \|\overline{\overline{S}}\|^2)/2$. Les iso-surfaces $Q/(a^*/D)^2 = 10$ y représentent les structures cohérentes de la couche de mélange. On remarque qu'elles sont quasi-toroïdales lorsque la condition d'entrée est annulaire et que l'axisymétrie est complètement brisée lorsque la ventilation est alimentée par les 4 trous. En raison des différences assez spectaculaires entre les deux écoulements de ventilation, un calcul RANS a été effectué avec une entrée par 4 trous : les résultats montrent que le calcul RANS n'y est pas sensible.

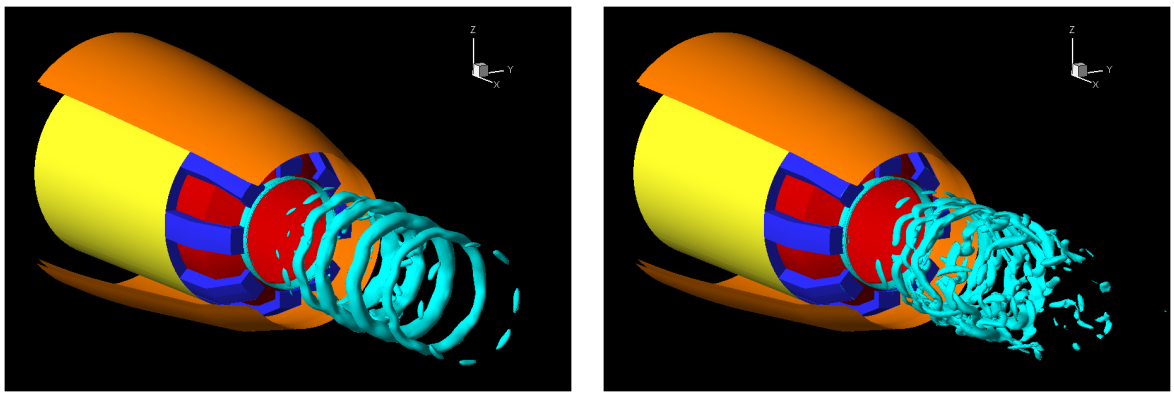


FIG. 2.17 – Structures tourbillonnaires mis en valeur par le critère $Q/(a^*/D)^2 = 10$ en fonction des conditions d'entrée de la ventilation.

[7] A l'origine le critère Q a été élaboré en écoulement incompressible [126]. En compressible, le tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{S}}$ contient à la fois les dilatations/compressions isotropes et les cisaillements (partie déviatrice $\overline{\overline{S^D}}$). Un équivalent compressible plus approprié ici serait donc $Q_C = (\|\overline{\overline{\Omega}}\|^2 - \|\overline{\overline{S^D}}\|^2)/2$. Dans la couche de mélange étudiée ici, les critères Q et Q_C donnent cependant le même résultat, c'est pourquoi Q est adopté dans la suite.

L'influence de la dissipation numérique est évaluée à l'aide des calculs MPZDES2 et MPZDES3. Le premier utilise le schéma de Roe étendu au 2nd ordre par l'approche MUSCL et bridé par le limiteur Minmod alors que le second utilise le schéma de Roe étendu au 3ème ordre par l'approche MUSCL ("third-order upwind-biased") et bridé par le limiteur Koren. Le calcul MPZDES3 possède donc globalement un schéma numérique moins dissipatif que MPZDES2. Contrairement aux calculs RANS, les calculs ZDES, et plus précisément les calculs en mode LES, sont très sensibles à la dissipation numérique car le modèle sous-maille est (normalement) peu diffusif. Ceci est démontré par le très mauvais accord entre les solutions MPZDES2 et MPZDES3 tracées figure 2.18.

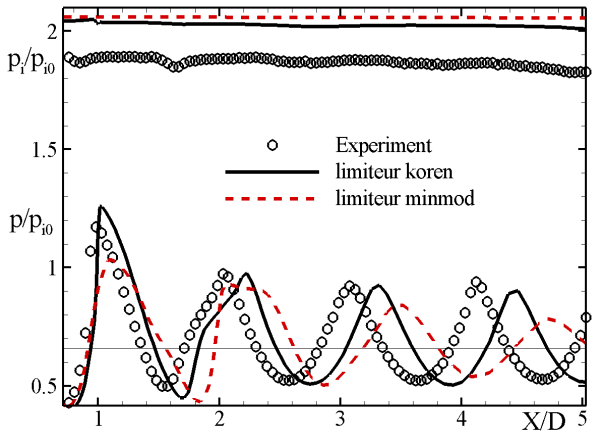


FIG. 2.18 – Effet de la dissipation numérique.

Quelques mots sur le calcul MPZDES1 : Même s'il apparaît indispensable d'imposer la géométrie réelle à l'entrée de la ventilation, il est intéressant de s'attarder un instant sur la solution quasi-axisymétrique donnée par le calcul MPZDES1. En regardant les iso-surfaces $Q = 0.5$ représentées en haut de la figure 2.19, on pourrait penser que le calcul MPZDES1 en raison de ses conditions limites quasi-axisymétriques et de sa forte dissipation numérique peut-être considéré comme représentatif d'un écoulement de jet à faible nombre de Reynolds : on remarque en effet des tourbillons toroïdaux dans sa partie initiale et des tourbillons longitudinaux plus loin en aval, apparemment similaires aux tourbillons longitudinaux créés par l'éclatement des structures axisymétriques en fin de cône potentiel.

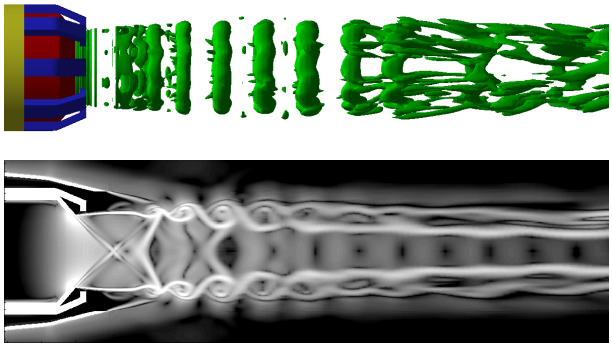


FIG. 2.19 – Structures tourbillonnaires dans le calcul MPZDES1 : $Q = 0.5$ en haut (les recirculations en aval de la ventilation ont été retirées), strioscopie numérique en bas.

L'examen d'une strioscopie numérique dans le plan de symétrie longitudinal (bas de la figure 2.19) montre que les structures toroïdales ne se développent pas suffisamment pour se répandre jusqu'à l'axe du jet. A la place, elles s'épuisent et se destructurent pour se réorganiser dans le sens axial mais seulement en périphérie du jet ; le coeur central reste isolé de l'extérieur (le cône potentiel se prolonge au-delà de la figure). De plus, le maillage bien que relativement fin dans la zone décrite ici est étiré vers l'aval pour des raisons évidentes de coût de calcul et a peut être une influence sur l'apparition des structures longitudinales. Cet exemple montre qu'il faut être très prudent dans l'interprétation des figures et illustre l'intérêt de diversifier les post-traitements.

2.4.4 Procédures de calcul retenues pour les simulations RANS et ZDES finales

2.4.4.1 Description des maillages

La construction du maillage est d'une importance majeure pour un calcul hybride RANS/LES car elle peut, si elle n'est pas réalisée avec soin, mener à des résultats aberrants sur le plan physique. Les simulations RANS sont moins sensibles au maillage mais nécessitent tout de même un nombre suffisant de points de calcul dans les zones à forts gradients. La géométrie de la maquette expérimentale a donc été reproduite en prenant en compte les enseignements donnés par l'ensemble des calculs précédents. Tout d'abord, les calculs sur configuration canonique ont mis en évidence la nécessité d'adopter un maillage régulier sur l'axe (bloc en H) pour capturer proprement la réflexion des chocs sur l'axe. Les calculs qui ont suivi ont souligné la sensibilité de la structure de choc interne à l'épaisseur de la couche de mélange sur le carénage externe. Cette dernière fixe l'étalement de la quantité de mouvement extérieure qui impacte la frontière du jet et la pression qui en résulte dans le jet. Il a alors été décidé de calculer la couche limite le long d'une paroi cylindrique longue de 15D (D le diamètre du col primaire) représentative de l'ensemble du dard porteur de l'arrière corps MARCO.

L'extension des domaines de calcul RANS ou ZDES sans et avec contrôle est de 12D dans la direction radiale, 18D en amont et 25D en aval de la sortie du primaire, voir figure 2.20. Toutefois, le maillage fin couvre seulement l'espace maximum sondé durant la campagne expérimentale, i.e. 9D en aval de l'arrière-corps. En raison de la formulation du code, chacun des 35 blocs composant le domaine de calcul sont constitués de cellules hexahédriques. Aussi, la difficulté a été de construire un maillage structuré qui combine les exigences RANS pour les couches limites attachées, des raffinements adaptés au niveau des singularités géométriques, i.e. les injecteurs solides et les jets secondaires, ainsi que des mailles aussi homogènes et isotropes que possibles dans les zones LES, i.e. le jet. En ZDES comme en RANS, le même maillage a été utilisé pour calculer la configuration de référence (F0) et les configurations contrôlées testées en soufflerie (F1,F2,F3), voir tableau 2.6. Comme signalé en début de cette section, les calculs RANS nécessitent eux aussi un nombre suffisant de points à la fois dans le coeur du jet primaire pour capturer les chocs et dans sa couche de mélange périphérique. Cette dernière est fortement distordue par les jets secondaires, c'est pourquoi on ne peut pas a priori concentrer des points autour de direction azimutales particulières. En RANS, les points sont donc aussi équirépartis dans la circonférence du jet. De plus, que ce soit en RANS ou en ZDES, les zones d'interaction des jets secondaires avec le jet primaire doivent faire l'objet d'une discrétisation assez fine. Toutes ces considérations justifient que, dans l'étude numérique du cas MARCO, les calculs RANS utilisent les mêmes formes de maillage que les calculs ZDES. Une vue écorchée du maillage 3D (M2) autour de l'arrière-corps est présentée figure 2.21 alors que la figure 2.22 montre des vues planes dans des sections transverses et longitudinales.

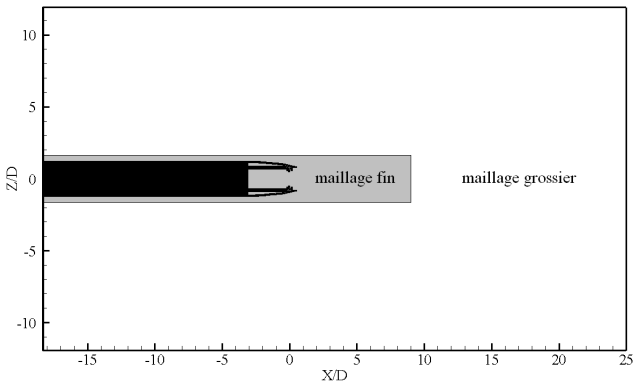


FIG. 2.20 – Domaine des calculs RANS et ZDES.

Chaque maillage est construit en 3 étapes à l'aide du mailleur multibloc structuré analytique Mesh3D [123] et à l'aide de programmes Fortran et shell scripts permettant d'automatiser le processus de maillage à partir des seuls paramètres géométriques de la maquette. Tout d'abord, l'axe du jet est discrétisé en un bloc en H. Celui-ci est ensuite entouré d'un bloc en O raccordant les points équirépartis du bloc en H sur sa face intérieure aux points resserrés près des injecteurs (figure 2.22(a)) ainsi qu'aux points équirépartis en azimut plus loin dans le jet (figure 2.22(b)). Le reste du maillage englobant toutes les parties solides a été élaboré en deux temps. Premièrement, un maillage plan de 9 blocs (voir figure 2.22(d)) est calculé par le programme Mesh3D pour fixer la distribution de points dans le plan de projection $(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{r})$ (environ 48000 points/plan), (X, r, θ) étant le système de coordonnées cylindriques. Les couches limites à l'intérieur de la tuyère primaire et le long du carénage extérieur comptent de 25 à 30 points et les tailles de leurs premières mailles à la paroi sont respectivement $y^+ = 0.5$ et $y^+ = 0.8$ ($\Delta r/D = 2.3 \times 10^{-5}$ et $\Delta r/D = 4.5 \times 10^{-5}$). Concernant le courant de ventilation, en raison de sa faible vitesse et pour économiser des points, ses couches limites n'ont pas été discrétisées aussi finement. Dans un second temps, un programme Fortran duplique ce maillage plan (x,r) en le faisant tourner autour de l'axe du jet $(O, \overrightarrow{X})$ tout en ajustant les positions azimutales dans les directions longitudinale et radiale afin d'adapter le maillage 3D aux flancs latéraux parallèles des injecteurs et de connecter le maillage adapté à l'arrière-corps et au dispositif de contrôle à la distribution de points homogène (en azimut) dans le jet.

Le volume occupé par le jet depuis le col de la tuyère primaire est discrétisé en 236 points dans la direction longitudinale et 172 points dans la direction radiale. Concernant la discrétisation en azimut, deux familles de maillages ont été construites. D'une part, les maillages (M1,M3,M4,M5) dont seules 4 injections sont maillées finement (10 cellules en azimut contre 4 dans les injections inactives) comportent 128 mailles en azimut et comptent au total 8 millions de cellules. D'autre part, le maillage (M2) qui possède 8 injections maillées finement, a 168 mailles en azimut et représente au total 10.5 millions de cellules. Le nombre de points dans la direction radiale est élevé à cause de la propagation du maillage structuré des couches limites. Néanmoins, tous ces points sont utilisés pour couvrir la couche de mélange qui est fortement distordue dans le cas contrôlé. Le jet sans contrôle s'étend radialement sur seulement 100 cellules. La section de sortie de chacune des injections est découpée en 6×10 cellules (taille $\Delta x/D = 2.7 \times 10^{-3}$, $\Delta r/D = 1.6 \times 10^{-2}$). Aucun raffinement particulier n'a été réalisé sur le premier choc pour trois raisons. D'abord, la distribution des points adaptée à la croissance de la couche de cisaillement est assez fine, conduisant à des cellules de longueur $1.6 \times 10^{-2} D$ sur le choc, ce dernier étant capturé sur 3 cellules. Ensuite, le maillage est construit de manière à pouvoir supporter plusieurs simulations de jet à NPR différents, i.e. pour différentes positions de choc. Enfin, cette

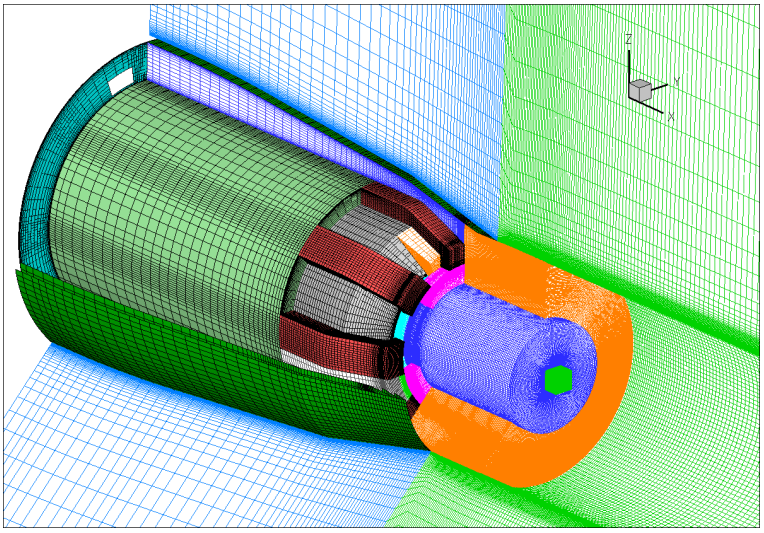
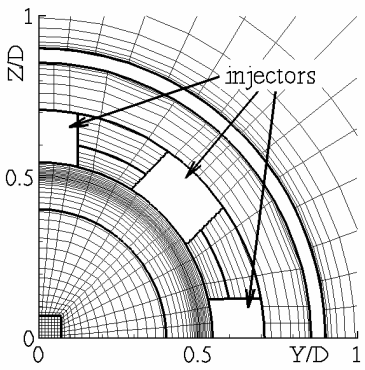
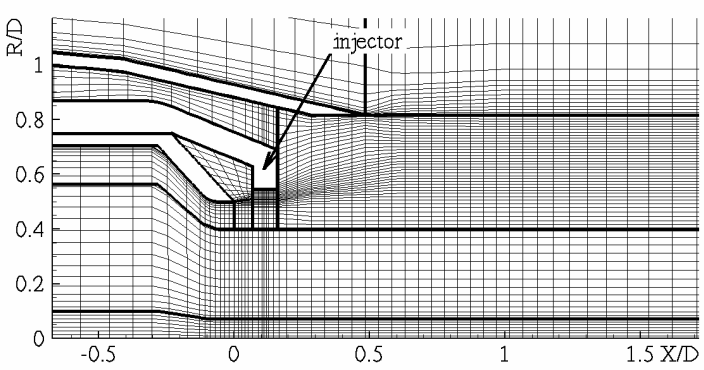


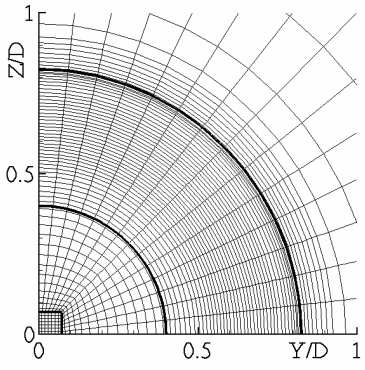
FIG. 2.21 – Ecorché du maillage 3D autour de l'arrière-corps muni des 8 injecteurs.



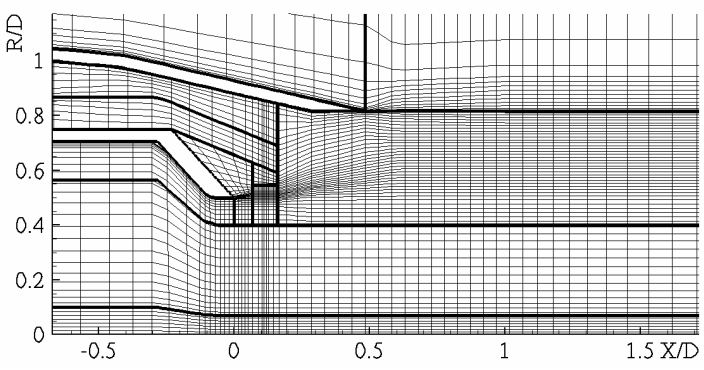
(a) **Plan transv. X/D=0.1**



(b) **Plan longitudinal à travers les injecteurs**



(c) **Plan transv. X/D=0.6**

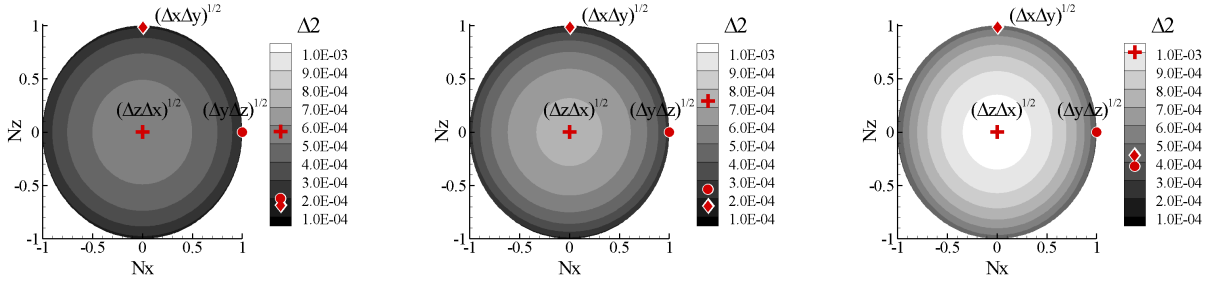


(d) **Plan longitudinal entre les injecteurs**

FIG. 2.22 – Détails du maillage dans des plans caractéristiques (une cellule sur trois est dessinée).

discrétisation spatiale est supposée être suffisante pour reproduire l'influence du choc sur les structures résolues de la couche de mélange. De plus, comme le maillage est structuré et que les chocs obliques se propagent vers l'aval, un raffinement de maillage dédié au choc aurait ajouté un nombre excessif de points. Cet argument a d'autant plus de poids que le choc peut être instationnaire et se déplacer sur une distance a priori inconnue sous l'action des structures tourbillonnaires de la couche de mélange. Pour finir, concernant les injections secondaires, on a préféré calculer des petites tuyères plutôt que d'imposer des conditions aux limites. De manière globale, aucune astuce numérique n'a été employée pour mimer l'effet des actionneurs ou des couches-limites (lois de paroi, fluctuations artificielles), ce qui est en accord avec la philosophie d'un outil numérique "utilisable en production" [229] visant à tester des technologies nouvelles dans les géométries les plus générales.

Pour en finir sur les maillages, la figure 2.23 présente les domaines de valeurs de Δ_ω en fonction des composantes N_x et N_z de la vorticité a priori inconnue ($N_y^2 = 1 - N_x^2 - N_z^2$) et précise l'encadrement donné par (1.70) dans le cas particulier du maillage (M2). Ces domaines tracés pour 3 points de (M2) sont représentatifs des différentes portions du maillage de la couche de mélange : juste en aval des injections à $X/D = 0.19$, dans le plan des injections (fig. 2.23(a)) où la résolution azimutale est fine et dans le plan intermédiaire (fig. 2.23(b)) où la résolution est plus grossière, et plus en aval à $X/D = 1.52$ où les mailles sont équiréparties en azimut. Depuis la couche limite de la tuyère primaire résolue en mode RANS jusqu'à la couche de mélange résolue en mode LES, l'écoulement traverse une "zone grise" dans laquelle le calcul doit générer des fluctuations (par des instabilités intrinsèques puisqu'aucun forçage n'est imposé ici). Quand la couche de cisaillement quitte la paroi de la tuyère, aucune fluctuation ne peut encore être capturée et $\overrightarrow{N}$ est aligné suivant la direction de la vorticité moyenne, i.e. selon l'envergure $\overrightarrow{z}$ (dans le trièdre $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ local aux mailles). Ceci est encore valable lorsque des tourbillons de la couche de mélange induits par l'instabilité de Kelvin-Helmoltz se développent. Sur les graphes 2.23(a) et 2.23(b), on peut alors vérifier qu'en raison de la stratégie de maillage adoptée $\Delta_\omega(\overrightarrow{N} = \overrightarrow{z}) = \sqrt{\Delta_x \Delta_y}$ est indépendant de l'azimut. On peut en outre remarquer qu'un basculement de ces tourbillons dans la direction longitudinale $\overrightarrow{X}$ ne modifie pas significativement la valeur de Δ_ω puisque $\sqrt{\Delta_y \Delta_z} \approx \sqrt{\Delta_x \Delta_y}$ dans le maillage M2. Cette particularité n'est plus vérifiée dans le maillage M1 plus hétérogène en azimut. Plus loin, à partir de $X/D = 0.6$, le maillage devient homogène dans la direction azimutale et on vérifie que la relation $\sqrt{\Delta_y \Delta_z} \approx \sqrt{\Delta_x \Delta_y}$ tient toujours car la couche de mélange est maillée conformément aux recommandations LES $\Delta_z \approx \Delta_x$. Au contraire, un basculement de la vorticité suivant la direction radiale $\overrightarrow{y}$ tend partout à augmenter Δ_ω car $\Delta_x, \Delta_z \gg \Delta_y$.



(a) **X/D=0.19, fin en azimut**

(b) **X/D=0.19, grossier en azimut**

(c) **X/D=1.52, homogène en azimut**

FIG. 2.23 – Les trois domaines de valeurs extrêmes de Δ_ω (en mm).

2.4.4.2 Procédure de calcul RANS

Les conditions génératrices (p_i, T_i) du jet primaire et des jets secondaires mesurées expérimentalement sont imposées en entrée des modèles numériques. Concernant le flux de ventilation, seuls la température génératrice T_{i2} et le débit-masse Q_2 ont été mesurés et sont imposés par la condition subsonique de débit entrant détaillée en annexe B. Etant données les informations expérimentales, le recours à la condition subsonique de débit entrant est la seule manière de restituer les conditions d'essai puisque l'écoulement dans le canal de ventilation impose une relation a priori inconnue entre le nombre de Mach et la pression statique en entrée. Comme l'influence de l'entrée de la ventilation sur 4 trous dans les calculs ZDES a été découverte après les derniers calculs RANS de la configuration MARCO, ceux-ci ont tous été réalisés avec une entrée axisymétrique. Toutefois, un calcul-test a montré que les résultats RANS ne sont pas modifiés avec une entrée par 4 trous. Une condition d'entrée-sortie basée sur les invariants de Riemann est imposée sur la frontière extérieure latérale du domaine et la frontière en aval de l'arrière-corps.

Tous les calculs RANS ont été effectués avec le modèle de Spalart-Allmaras. Georgiadis *et al.* [94] ont simulé l'écoulement autour d'une tuyère munie de lobes au moyen de plusieurs modèles de turbulence linéaires et non-linéaires et ont conclu que le modèle de Spalart-Allmaras donne des résultats en bon accord avec le champ de vitesse mesuré expérimentalement. Payne *et al.* [191] ont comparé ce modèle à d'autres modèles classiquement utilisés, le modèle $k-\epsilon$ bas Reynolds et le modèle $k-\omega$ de Wilcox, dans le cas d'un jet supersonique dans un écoulement transverse transonique : le modèle de Spalart-Allmaras donne des résultats satisfaisants sur la pression totale en aval et les mesures de vorticité. Comme la vorticité longitudinale joue un rôle-clé dans les écoulements étudiés ici, la correction de rotation (SARC) a été employée pour limiter une diffusion turbulente excessive des tourbillons. La couche de mélange du jet n'étant pas franchement compressible (Mach convectif allant de 0.64 à 0.23), on n'a pas eu recours a la correction de compressibilité (SACC). Le schéma numérique de Roe étendu à l'ordre 2 et bridé par le limiteur Minmod a été choisi pour sa robustesse dans le calcul des chocs.

Tous les calculs RANS ont été menés sur NEC-SX6 de la même manière : l'équivalent de 15 traversées de domaine (25D de long) sont effectuées en 10000 itérations[8] avec un pas de temps global de $\Delta t = 4\mu s$ ($\Delta t/(D/a^*) \approx 3.10^{-2}$) ce qui, à une vitesse de calcul de 1μs/itération/point, représente environ 23 heures de calcul. Ce temps de simulation est suffisant pour atteindre un état stationnaire. Dans l'écoulement de jet, l'état stationnaire est jugé atteint lorsque les pressions axiales n'évoluent plus dans le temps. La convergence en temps des efforts aérodynamiques sur l'arrière-corps arrivant beaucoup plus vite que l'établissement du jet (sur une longueur de 25D), elle ne constitue pas un critère suffisant.

2.4.4.3 Procédure de calcul ZDES1 et ZDES2

Dans le cas des calculs ZDES, la géométrie de l'entrée du flux de ventilation doit être représentative de celle de la maquette : l'écoulement entre dans le canal annulaire par 4 trous dont la section de passage est égale à 6% de la section totale du canal. Un de ces trous est visible figure 2.21. Les calculs ont été effectués sans aucune excitation artificielle et ont révélé malgré tout que la couche de cisaillement du jet était capable de développer une instabilité croissance menant à un jet apparemment turbulent. Se basant sur l'analyse de Wallace et Redekopp [260], Jacquin a suggéré [173] que le profil mixte jet-sillage causé par le flux de ventilation à très faible débit pourrait entretenir une instabilité absolue dans la région initiale du jet. Une analyse de stabilité plus proche des conditions d'essai est toutefois nécessaire pour confirmer cette hypothèse.

[8] Le calcul implicite étant réalisé sans sous-itération, l'écoulement transitoire n'a pas de signification physique.

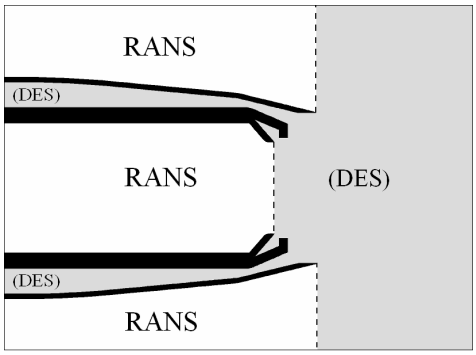


FIG. 2.24 – Attribution des zones RANS et des zones (DES) pour l'approche ZDES.

En particulier, l'influence du caractère non-axisymétrique du flux de ventilation (co-courant ou contre-courant suivant l'azimut) est à creuser. Par ailleurs, le bruit numérique ainsi que la phase transitoire peuvent déclencher des instabilités convectives dans la couche cisaillée du jet. Dans un calcul de type LES, la dissipation numérique doit être réduite le plus possible, c'est pourquoi le schéma de Roe étendu au $3^{\text{ème}}$ ordre hors des chocs et bridé par le limiteur de Koren a été utilisé. Les chocs rencontrés dans le jet sous-détendu à NPR = 3.1 étant relativement faibles, ce schéma est suffisamment robuste. L'affectation des zones RANS et des zones (DES) est schématisé figure 2.24 : en particulier, il est utile de mentionner que le calcul (DES) de l'ensemble du jet bascule quasi-immédiatement en mode LES après la paroi de la tuyère primaire, i.e. en 2 mailles soit à partir de $X/D = 1.10^{-2}$.

Deux types de simulations ZDES ont été réalisés : **les calculs ZDES menés avec l'échelle de longueur caractéristique du maillage originelle Δ_{vol} sont notés ZDES1 et ceux avec la nouvelle échelle Δ_{ω} sont notés ZDES2.**

Chaque calcul ZDES du jet de référence a été conduit en 3 étapes. Tout d'abord, un calcul RANS est réalisé avec le modèle de Spalart-Allmaras combiné à la correction de rotation (SARC) pour fournir un champ stationnaire initial au calcul ZDES. Ensuite, un calcul ZDES est lancé pour évacuer la viscosité turbulente RANS par convection et développer des structures turbulentes résolues. Cette phase transitoire de $T_{\text{physique}} = 10\text{ms}$ représentant 4 traversées de domaine (25D de long) est traitée en 10000 itérations avec un pas de temps de $\Delta t = 1\mu s$ ($\Delta t/(D/a^*) \approx 7.10^{-3}$) et 5 sous-itérations. La convergence du processus de sous-itération est vérifié par la chute d'un ordre de grandeur dans les résidus. On obtient un CFL maximum de $\text{CFL}_{max} = (u+a)\Delta t/\Delta x = 13$. Enfin, le calcul ZDES est poursuivi à partir de ce régime turbulent établi pendant 20ms $\approx 150(D/a^*)$ (≈ 7.5 traversées de domaine) pour calculer les moyennes de Reynolds des moments d'ordre 1 et 2. Le calcul ZDES a été prolongé à 120ms $\approx 900(D/a^*)$ afin de collecter suffisamment de signal pour réaliser ultérieurement une étude spectrale (non rédigée dans ce mémoire) et ne présente pas de différence significative dans les résultats exposés dans cette section. Chaque calcul ZDES du jet contrôlé est initialisé avec l'écoulement établi de la simulation ZDES correspondante du jet de référence. Chaque simulation ZDES représente 140 heures de calcul sur 1 processeur NEC-SX6 fonctionnant à 4 Gflops pour la phase transitoire et 280 heures supplémentaires pour obtenir un champ moyenné sur 20ms.

Dans la section suivante, les calculs RANS, ZDES1 et ZDES2 du jet de référence (F0) et du jet contrôlé (F1) sont validés par rapport aux mesures expérimentales.

2.5 Validation des simulations numériques RANS et ZDES

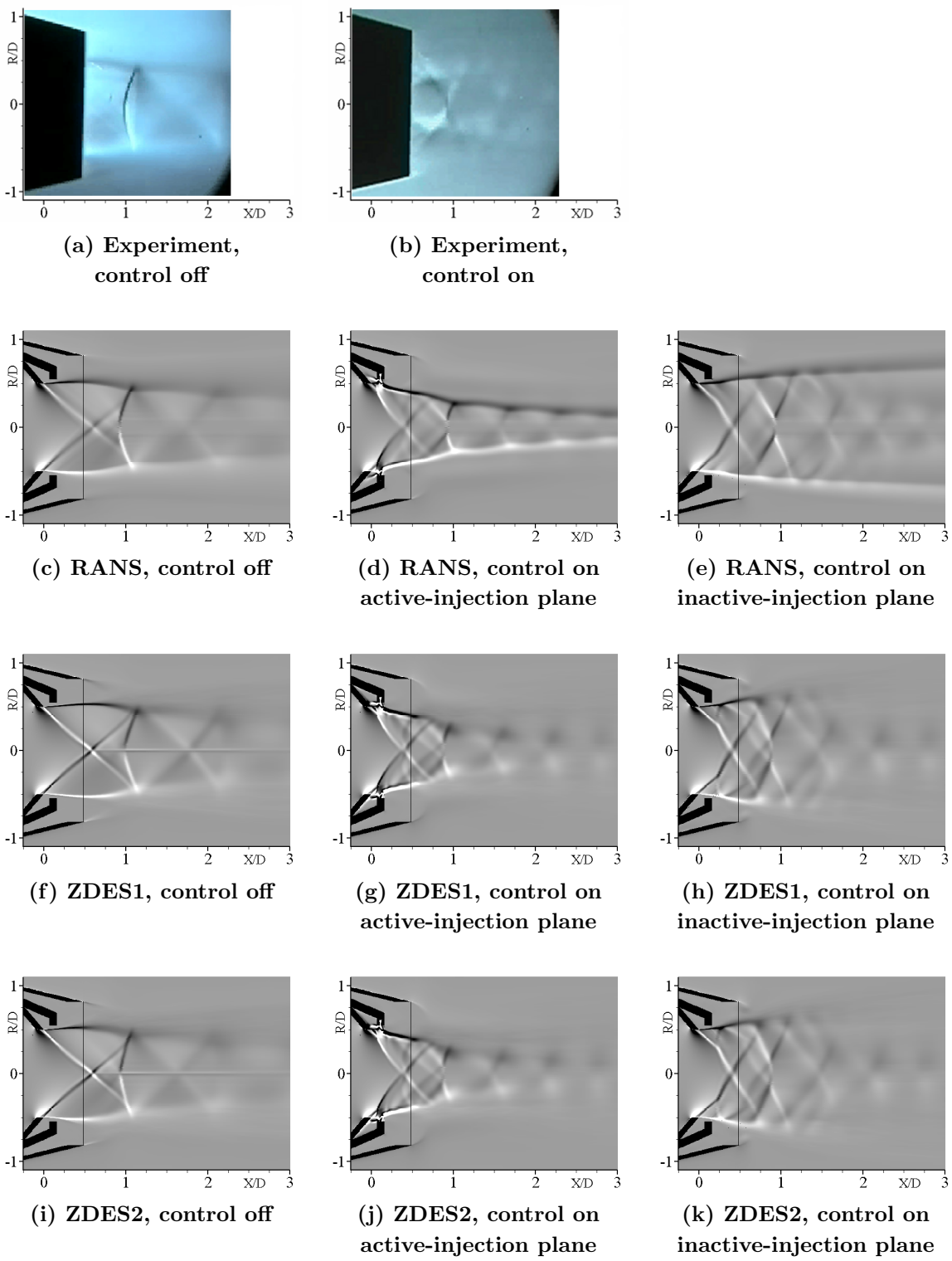
2.5.1 La structure de choc à l'intérieur du jet

2.5.1.1 Jet faiblement sous-détendu NPR=3.1

La figure 2.25 présente les strioscopies à couteaux horizontaux (gradient vertical de masse volumique) du champ moyen des jets sans et avec contrôle extraits de l'expérience, des calculs RANS et des calculs ZDES1 et ZDES2 (du haut vers le bas). Les jets de référence y sont disposés dans la colonne de gauche. L'axe du jet est $(O, \overrightarrow{X})$, l'origine O est placée au col, (X, Y, Z) sont les coordonnées cartésiennes attachées à la maquette et (X, R, Θ) sont les coordonnées cylindriques utilisées pour post-traiter les champs numériques. La photographie du jet contrôlé prise lors de l'expérience représente le plan (X, Z) dans lequel les injecteurs sont actifs. Pour les simulations, les images situées dans la colonne centrale de la figure 2.25 sont dans le plan de 2 injecteurs actifs, alors que celles disposées dans la colonne de droite sont dans le plan de 2 injecteurs inactifs.

Dans le jet de référence (sans contrôle) expérimental, on peut noter un choc en forme de lentille caractéristique des jets sous-détendus. Dans la littérature, ce choc est habituellement appelé "disque de Mach". Ceci sera discuté dans le chapitre 3. Dans la configuration particulière étudiée ici, ce choc est extrêmement sensible à l'évasement initial de la couche de mélange. Aussi, même si les mesures expérimentales ne donnent aucune information avant $X/D = 0.5$ à cause du masquage par le carénage extérieur, nous pouvons considérer que la simulation reproduit bien la croissance initiale de la couche de mélange si la lentille de choc a une forme similaire à celle observée dans l'expérience et si sa position axiale est correcte. Un examen plus poussé révèle que l'épaisseur de la couche cisaillée influence la confluence du flux de ventilation et de l'écoulement extérieur, plus précisément la topologie de leur lignes de courant, et donc la distribution de pression sur la surface du jet, conduisant à une modification de la réflexion des ondes internes au jet qui fixe la structure du choc. Le calcul RANS produit une couche cisaillée plus épaisse que la ZDES1 jusqu'au choc en lentille. L'épaisseur de la couche de mélange produite par la ZDES2 est proche de celle fournie par la ZDES1 jusqu'à la fin du carénage extérieur, à $X/D = 0.5$, puis croît rapidement pour se rapprocher de celle du calcul RANS. En conséquence, on peut voir que dans la ZDES1, le choc apparait légèrement plus en amont que dans les calculs RANS et ZDES2. Par ailleurs, dans tous les champs calculés, on remarque la présence d'une onde de Mach axisymétrique prenant son origine sur la lèvre de la tuyère primaire. Cette onde est une onde de compression due à la réflexion des ondes issue de la ligne sonique sur le méplat du col de la tuyère primaire (le comportement des ondes de Mach est détaillé au chapitre 3). Cette onde de forme conique est raide et lorsqu'elle arrive sur l'axe des écoulements ZDES, elle forme un disque de Mach de taille réduite. Il en résulte un tube de courant sur l'axe possédant une entropie plus élevée visualisé ici par les gradients transverses de masse volumique. Cette assertion a été vérifiée sur le champ de pression totale non présenté dans ce mémoire. L'onde de forme conique est faiblement visible sur la strioscopie de droite, figure 2.2(a), mais on ne distingue pas le tube central à faible entropie. Toutefois, celui-ci n'est pas supposé avoir une influence significative sur l'ensemble du champ aérodynamique puisque la chute de pression totale est faible et très localisée. Lorsque 4 injecteurs sont activés, le choc fort détaché en amont de chaque jet secondaire intercepte cette onde et empêche la formation du disque de Mach infinitésimal. En outre, tous les écoulements calculés présentent la succession d'ondes de détente et de compression typique des jets supersoniques non-adaptés.

Dans le cas contrôlé, tous les calculs reproduisent la structure de choc en diamant à 5 facettes visible dans le cliché expérimental (b). Cependant, les champs ZDES contiennent des ondes plus faibles qui n'apparaissent pas dans les résultats RANS. Ces dernières ne peuvent être identifiées



(a) Experiment, control off

(b) Experiment, control on

(c) RANS, control off

(d) RANS, control on active-injection plane

(e) RANS, control on inactive-injection plane

(f) ZDES1, control off

(g) ZDES1, control on active-injection plane

(h) ZDES1, control on inactive-injection plane

(i) ZDES2, control off

(j) ZDES2, control on active-injection plane

(k) ZDES2, control on inactive-injection plane

FIG. 2.25 – Strioscopies expérimentales et gradients verticaux de masse volumique issus des simulations RANS, ZDES1 et ZDES2.

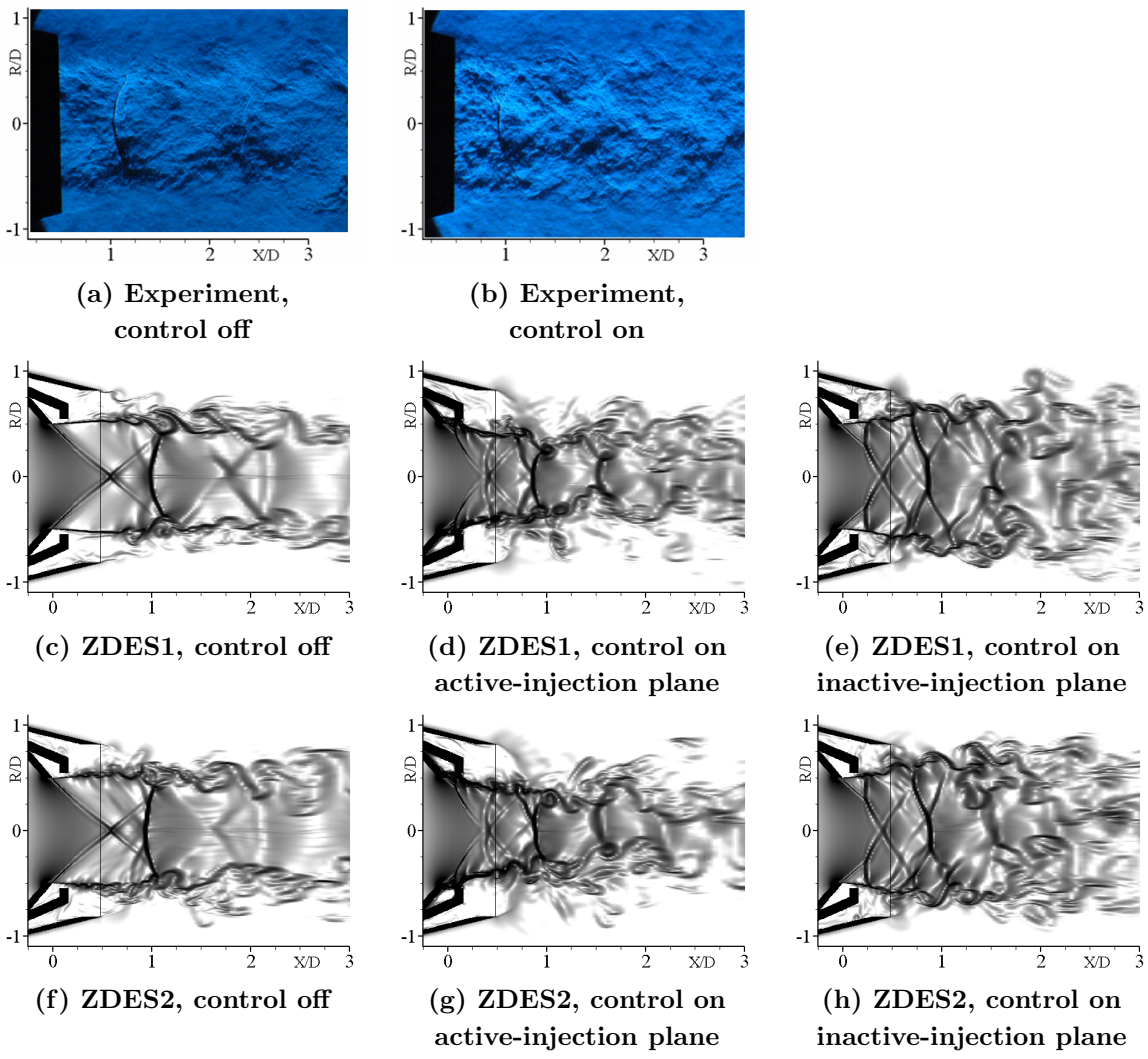
précisément dans les images expérimentales en raison du caractère tridimensionnel de l'écoulement. Contrairement aux jets de référence, les jets contrôlés simulés par les deux ZDES semblent identiques. Par contre, les champs RANS et ZDES exhibent des gradients différents à travers la couche de mélange à partir de la région d'impact du choc interne à $X/D \approx 0.75$. Ces gradients radiaux sont très accentués en RANS alors qu'ils sont beaucoup plus diffus dans les ZDES. Ce constat permet de penser que les échanges turbulents ainsi que la diffusion et la dissipation sont amplifiés dans les couches de mélanges produites par les ZDES. A cause de leurs gradients plus persistants, les images RANS mettent en évidence une distorsion beaucoup plus accentuée du jet contrôlé.

Les vues instantanées correspondantes sont exposées figure 2.26. En haut de la figure, les clichés expérimentaux mettent bien en évidence la nature turbulente des jets étudiés. Pourtant, la lentille de choc du jet de référence, figure 2.26(a), ne semble pas être significativement perturbée par les fluctuations de la couche de mélange et reste quasi-stationnaire. Quand les 4 injections sont activées, le jet semble s'étendre dans la direction radiale et le sillage des injections orthogonales au plan de la figure est à peine discernable. Concernant les résultats numériques, dans le jet de référence (figures 2.26(c) and 2.26(f)), on peut voir que la déstabilisation de la couche de mélange est retardée avec la ZDES1. Cela a été une des raisons de la nouvelle définition de Δ. Au contraire, la ZDES2 munie de Δ_ω produit une couche de mélange dans lesquelles les instabilités se développent plus tôt. Celles-ci sont par ailleurs mises en évidence par les ondes supersoniques instationnaires émises par la surface distordue de la couche de cisaillement. Ces ondes impactant le choc en lentille créent une stratification radiale d'entropie s'appuyant sur les trajectoires de l'écoulement et visibles à travers des bandes de masse volumique, figure 2.26(f). Ces bandes n'apparaissent évidemment pas dans le calcul ZDES1, puisque les structures tourbillonnaires qui en sont l'origine sont absentes. De plus, les structures des ondes par les ZDES1 et ZDES2 sont différentes en aval du choc en lentille. Un élément frappant qui est bien mis en avant par les vues 2.26(c) et 2.26(f) est la stationnarité du choc en position et en forme comparée au comportement très instationnaire de la couche de mélange.

Lorsque les injections radiales sont activées, (images au centre et à droite de la figure 2.26), l'organisation et la position des structures turbulentes change drastiquement. Ces dernières pénètrent plus profondément au coeur du jet (figures 2.26(d) et 2.26(g)) et s'éloignent plus loin de l'axe dans les plans des injecteurs inactifs (figures 2.26(e) et 2.26(h)). Ces images suggèrent une réduction du cône potentiel due à une amplification notable de la diffusion du jet. Consécutivement à la forte déformation du jet, les chocs sont plus perturbés par les structures de la couche de mélange que dans le jet de référence. Le caractère hautement tridimensionnel de cet écoulement est clairement illustré par les différences entre les plans des injecteurs actifs et les plans des injecteurs inactifs. Ceci indique qu'une interprétation physique de l'écoulement étudié ici à partir de strioscopies expérimentales intégrées est délicate. Cette complexité justifie le recours à une investigation numérique telle que celle effectuée ici.

2.5.1.2 Jet fortement sous-détendu NPR=5.0

La figure 2.27 montre l'effet de 4 injections radiales de type V1b (F51, tableau 2.6) sur la structure de choc du jet fortement sous-détendu. La configuration V1b n'a pas été expérimentée à NPR=5.0 et la configuration V3b n'a pas été calculée car le maillage structuré est trop compliqué. Les strioscopies obtenues par le calcul RANS ont été affichées ici pour montrer leur forte similitude avec la strioscopie expérimentale du cas V3b représentée figure 2.3(b). L'organisation des ondes est discutée en détail au chapitre 3.

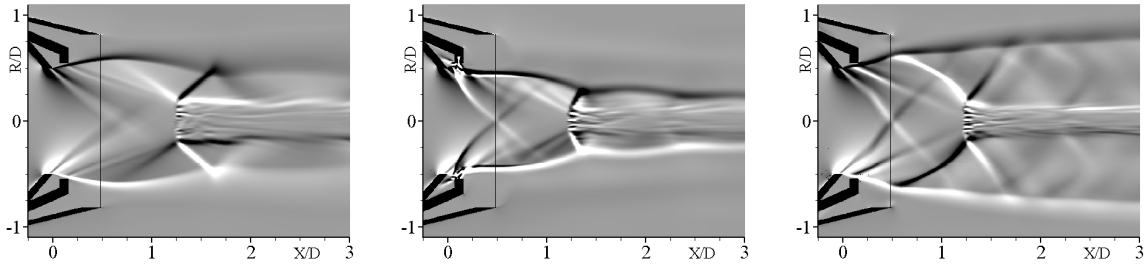


(a) Experiment, control off **(b) Experiment, control on**

(c) ZDES1, control off **(d) ZDES1, control on active-injection plane** **(e) ZDES1, control on inactive-injection plane**

(f) ZDES2, control off **(g) ZDES2, control on active-injection plane** **(h) ZDES2, control on inactive-injection plane**

FIG. 2.26 – Strioscopies instantanées expérimentales et norme du gradient de masse volumique des résultats numériques.



(a) Control off **(b) Control on active-injection plane** **(c) Control on inactive-injection plane**

FIG. 2.27 – Gradients verticaux de masse volumique dans le jet fortement sous-détendu (NPR=5.0) sans et avec contrôle issus des simulations RANS.

2.5.2 Champs de vitesse

Le champ de vitesse axiale du jet de référence est présenté figure 2.28 pour l'expérience (PIV) et les simulations RANS, ZDES1 et ZDES2. Le choc en lentille précédemment observé sur les strioscopies est de nouveau visible. Plus loin en aval, la PIV montre une succession de cellules rondes de vitesse élevée provoquées par le régime sous-détendu du jet. Le calcul RANS ne reproduit pas correctement ces motifs malgré un choc en lentille très proche de l'expérience. Au contraire, les deux ZDES sont en très bon accord avec la PIV : les cellules ont bien une forme ciculaire et sont placées aux mêmes positions. L'examen du champ de pression totale (non représenté ici) révèle la présence d'un tube de courant central en aval du choc en lentille enfermant une pression totale plus faible que l'écoulement périphérique du jet. Cette zone à plus faible p_i indique que le choc produit en RANS est légèrement plus fort au voisinage de l'axe. Par conséquent, dans la solution RANS, les particules fluides, approximativement soumises aux mêmes variations de pression statique qu'en ZDES durant leur convection sur l'axe, atteignent les pics de basse pression avec une vitesse plus faible qu'en ZDES. Ceci explique pourquoi les cellules RANS sont similaires à des cellules rondes mais avec un déficit de vitesse sur l'axe. Toutefois, la réflexion et la réfraction des faisceaux d'ondes de compression et de détente contre et à l'intérieur de la couche de mélange est aussi à prendre en compte. Par ailleurs, le tube à faible p_i provoqué par l'impact de l'onde conique sur l'axe du jet et déjà observé sur les strioscopies (figure 2.25(f) et (i)) est aussi visible sur la figure 2.28 sous la forme d'un pic de sous-vitesse sur l'axe. Si l'on regarde de plus près, on note certaines différences entre la ZDES1 d'une part et l'expérience et la ZDES2 d'autre part. En effet, en se concentrant sur les deux premières cellules, on peut remarquer que le choc de la ZDES1 est décalé en aval ce qui a pour effet de modifier l'allure de la fin de la seconde cellule (à $X/D \approx 2$) : dans les champs PIV et ZDES2, les contours de vitesse constante forment une courbe convexe, alors que dans le champ ZDES1, ils forment un triangle semblable à une "queue de poisson". Il est à noter que la PIV est connue pour rendre une image décalée du champ de vitesse si celui-ci présente de forts gradients longitudinaux à cause de l'inertie des particules d'ensemencement. Néanmoins, on peut admettre que la topologie globale du champ de vitesse est correctement reproduite. Ainsi, même si la position du choc donnée par la PIV ne permet pas de départager les simulations entre elles, la structure des ondes qu'elle nous fournit permet de montrer que la ZDES2 reproduit mieux le champ aérodynamique du jet de référence que la ZDES1.

Les profils de vitesse longitudinale ont été tracés figure 2.29 pour trois positions axiales $X/D = 0.94|2.19|3.89$. La vitesse est adimensionnée par la vitesse critique du flux primaire $a^* = 317m.s^{-1}$. Dans le jet de référence (haut de la figure), on constate un bon accord entre les calculs et l'expérience, excepté pour la ZDES1 à $X/D = 0.94$, voir figure 2.29(a). Le déficit de vitesse observé sur l'axe à $X/D = 0.94$ dans l'expérience, les calculs RANS et ZDES2 est dû à l'intersection du plan de sondage avec le choc en lentille. Ce déficit de vitesse n'est pas visible sur le profil ZDES1 car le choc est situé légèrement plus en aval. A $X/D = 3.89$, figure 2.29(c), c'est-à-dire dans la quatrième cellule, on peut remarquer un déficit de vitesse sur l'axe du profil RANS parce que la pression totale y est plus faible (cf. figure 2.28).
Les courbes au milieu et en bas de la figure 2.29 montrent les profils de vitesse aux mêmes abscisses dans le jet contrôlé respectivement dans les plans des injecteurs actifs et dans le plan des injecteurs inactifs. Dans ce cas, aucune différence significative n'est à remarquer entre les deux ZDES. L'excellente corrélation avec les profils expérimentaux démontre la capacité de la ZDES à reproduire la diffusion turbulente complexe du champ de vitesse qui caractérise un tel écoulement. A l'opposé, les profils RANS se démarquent par des gradients radiaux trop concentrés, tout particulièrement à $X/D = 3.89$, cf. figures 2.29(f) et 2.29(i). Ceci traduit une sous-estimation de la diffusion turbulente par les calculs RANS.

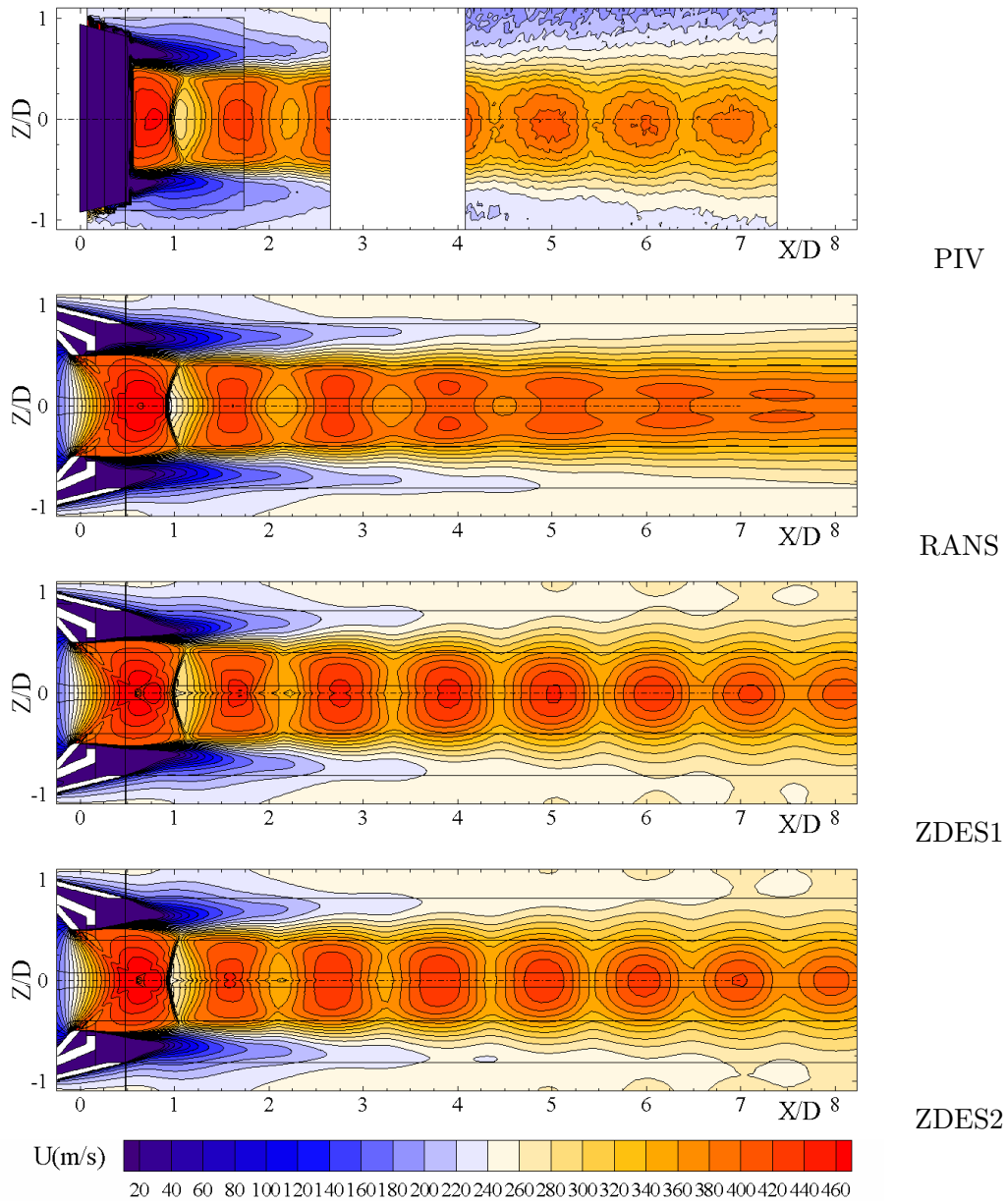
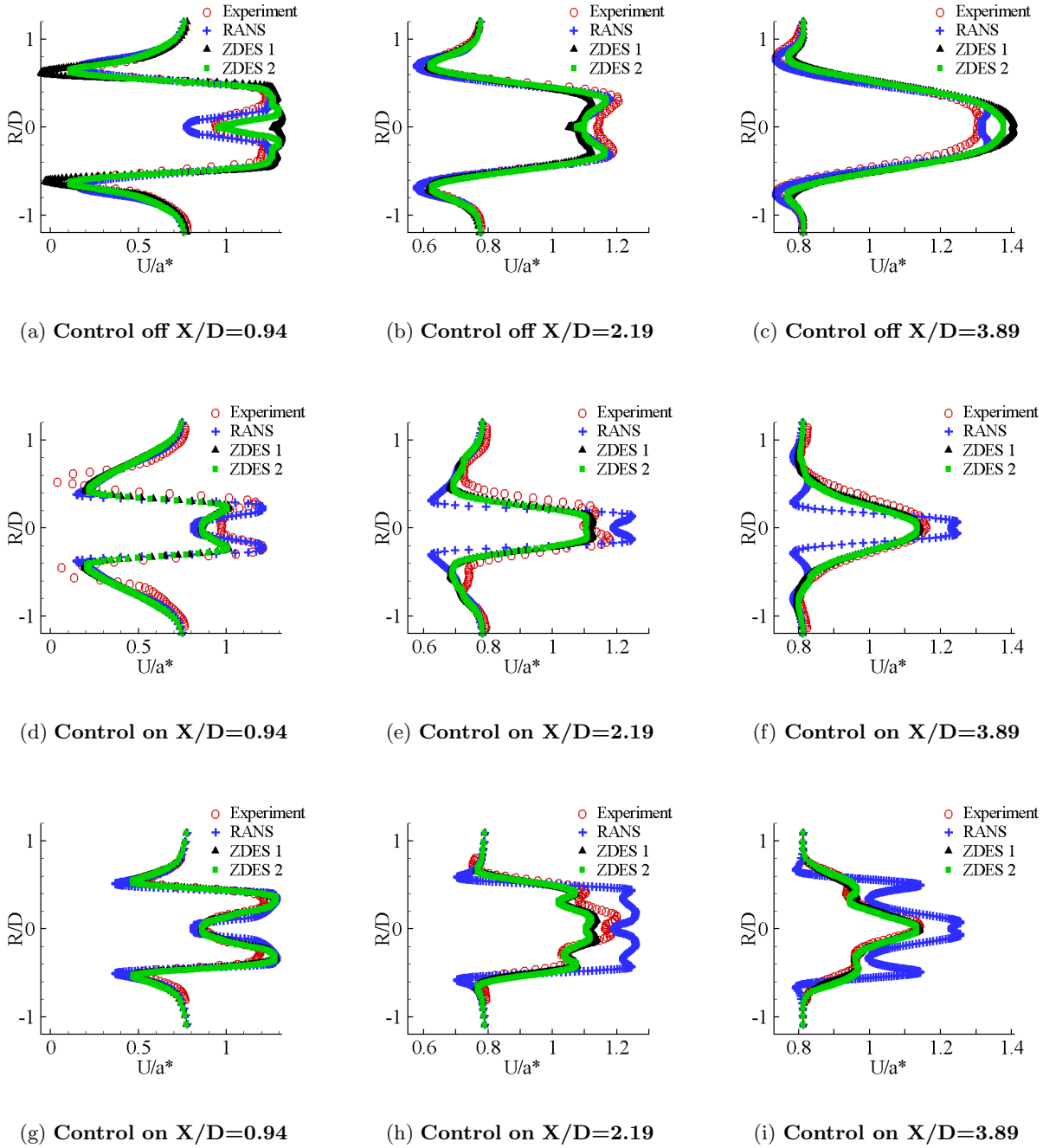


FIG. 2.28 – Comparaison des champs de vitesse axiale (de haut en bas : expérience, RANS, ZDES 1, ZDES 2).

2.5.3 Comparaison des pressions statiques et totales sur l'axe

Les pression statiques et les pressions totales sur l'axe du jet sont tracées sur la figure 2.30 dans le cas de référence (a) et le cas contrôlé (b). Elles sont adimensionnées par la pression totale extérieure p_{i0}. Dans le jet de référence, la pression statique oscille autour du niveau de la pression statique extérieure $p_0/p_{i0} = 0.66$. Dans l'expérience, on note que les pics de pression en aval du choc en lentille conservent une amplitude constante dans la région explorée. Toutefois, le calcul RANS atténue fortement les pics de pression et prévoit une période trop grande. Les méthodes ZDES donnent une meilleure prévision bien qu'une légère atténuation des pics soit toujours visible. La ZDES1 diffère de la ZDES2 par une amplitude plus forte des variations de la pression statique en aval du choc en lentille. On note aussi un comportement un peu étrange de la pression dans la première recompression. Cette variation correspond à



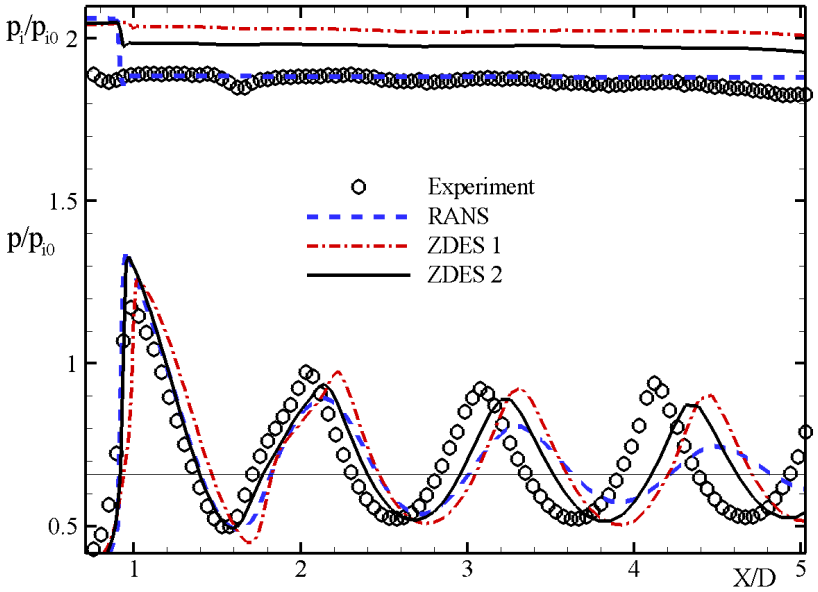
(a) **Control off X/D=0.94** (b) **Control off X/D=2.19** (c) **Control off X/D=3.89**

(d) **Control on X/D=0.94** (e) **Control on X/D=2.19** (f) **Control on X/D=3.89**

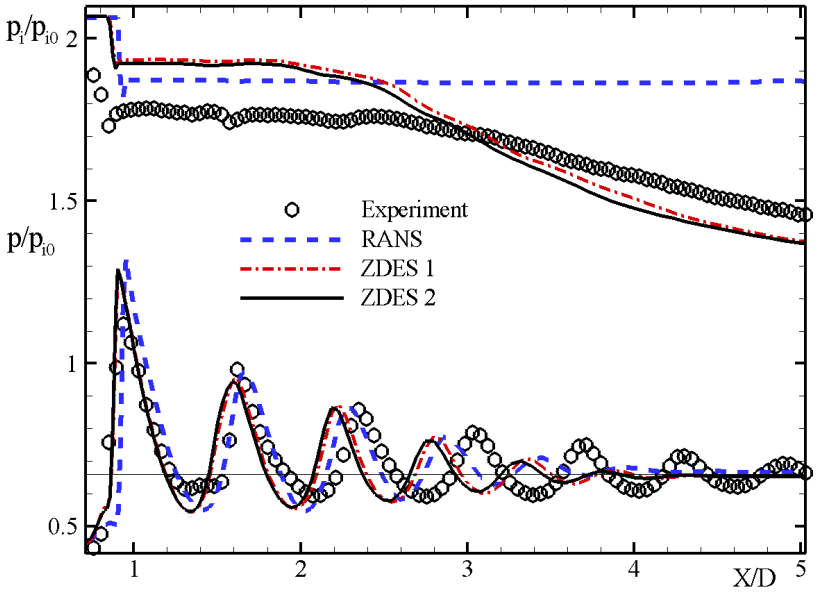
(g) **Control on X/D=0.94** (h) **Control on X/D=2.19** (i) **Control on X/D=3.89**

FIG. 2.29 – Profils de vitesse longitudinale u/a^* à travers le jet de référence (en haut) et le jet contrôlé dans le plan des injecteurs actifs, au centre, et dans le plan des injecteurs inactifs, en bas.

la forme en "queue de poisson" remarquée dans le champ de vitesse, figure 2.28. En outre, la pression d'arrêt mesurée dans le jet ($p_i/p_{i0} \approx 1.9$) est plus basse que celle mesurée dans la tuyère primaire ($p_i/p_{i0} \approx 2.0$) et adoptée comme condition-limite en entrée de toutes les simulations RANS, ZDES1, ZDES2. La pression d'arrêt a été mesurée par un capteur fixé à l'intérieur de la tuyère et aucune mesure complémentaire ne permet d'estimer un possible comportement non-isentropique entre ce capteur et la première position sondée sur l'axe du jet.



(a) Jet de référence



(b) Jet contrôlé

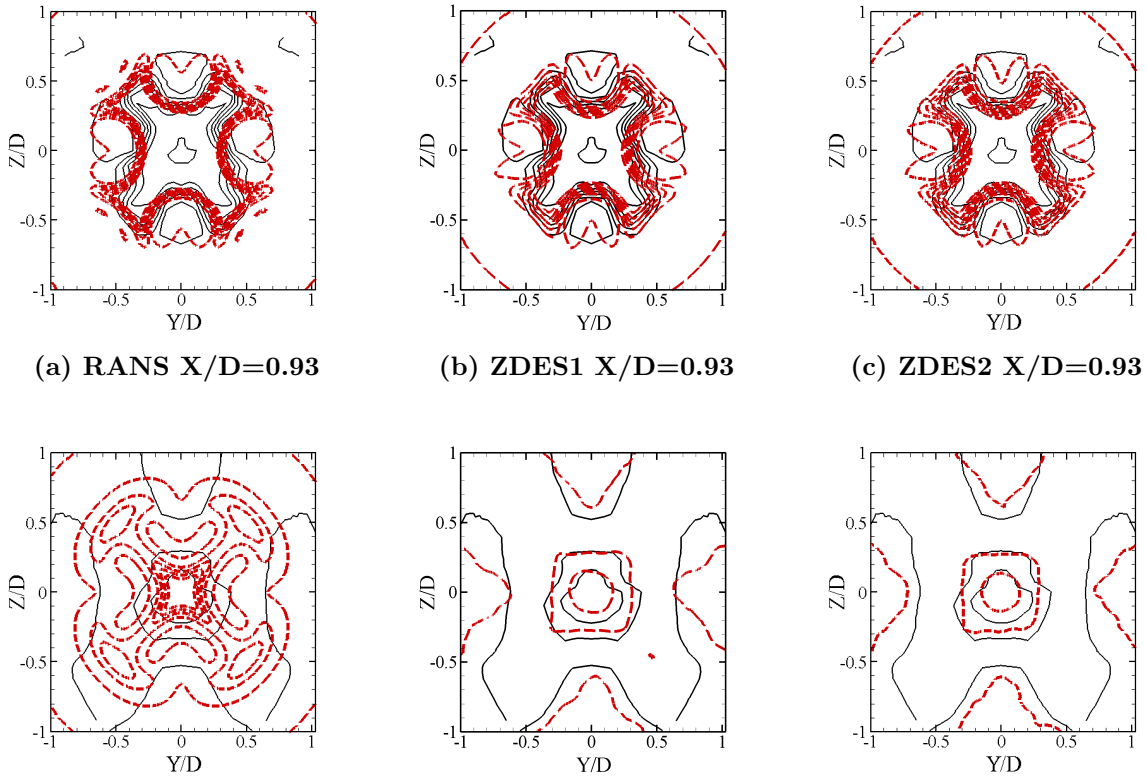
FIG. 2.30 – Comparaison des pressions axiales totales et statiques dans (a) le jet de référence et (b) dans le jet contrôlé.

Les mesures expérimentales disponibles ne permettent donc pas d'expliquer les différences dans la pression totale initiale[9]. La marche descendante subie par la pression totale en RANS est la marque du choc en lentille plus fort au voisinage de l'axe. Toutes les pressions totales affichées sont constantes jusqu'à la fin de la zone sondée, i.e. $X/D = 5$, indiquant que le cône potentiel s'étend plus loin en aval. On mesure respectivement dans les calculs RANS et ZDES (1 ou 2) les longueurs de cône potentiel de $9D$ et $5D$.

[9]De petites variations dans la p_{i1} du jet primaire ont été testées numériquement mais n'ont pas amélioré les résultats par rapport aux mesures expérimentales.

Lorsque le contrôle est activé (voir l'expérience matérialisée en symboles, figure 2.30(b), les oscillations de pression statique réduisent leur longueur d'onde et sont rapidement atténuées. La pression totale mesurée chute à partir de $X/D \approx 2.4$ et indique ainsi la fin du cône potentiel. Ceci est aussi visible dans la figure 2.29 où à $X/D = 2.19$, graphes 2.29(e) et 2.29(h), les variations radiales de vitesse traduisent l'existence d'ondes internes, alors qu'à $X/D = 3.89$, graphes 2.29(f) et 2.29(i), les profils de vitesse sont lissés, plus proche d'une forme gaussienne, consécutivement à l'amortissement turbulent des ondes internes. Toutes les simulations reproduisent qualitativement la diminution de la longueur d'onde ainsi que l'atténuation des pics de pression statique et sont quantitativement satisfaisantes. Concernant les pressions totales, les calculs RANS sur-estiment la longueur du cône potentiel à environ $5D$ alors que les deux ZDES donnent des résultats comparables, environ $2D$ plus proches de la valeur $2.4D$ obtenue par les mesures. Ainsi, bien que les calculs RANS sous-estiment globalement la diffusion turbulente, ils reproduisent bien l'effet global du contrôle.

2.5.4 Comparaison des pressions totales dans des coupes transverses



(a) RANS X/D=0.93 **(b) ZDES1 X/D=0.93** **(c) ZDES2 X/D=0.93**

(d) RANS X/D=3.89 **(e) ZDES1 X/D=3.89** **(f) ZDES2 X/D=3.89**

FIG. 2.31 – Lignes à pression totale constante (p_i/p_{i0} de 0.8 à 1.8 par pas de 0.2) dans les plans transverses des jets contrôlés à X/D=0.93 et X/D=3.89 (Mesures —, Simulations **- - -**).

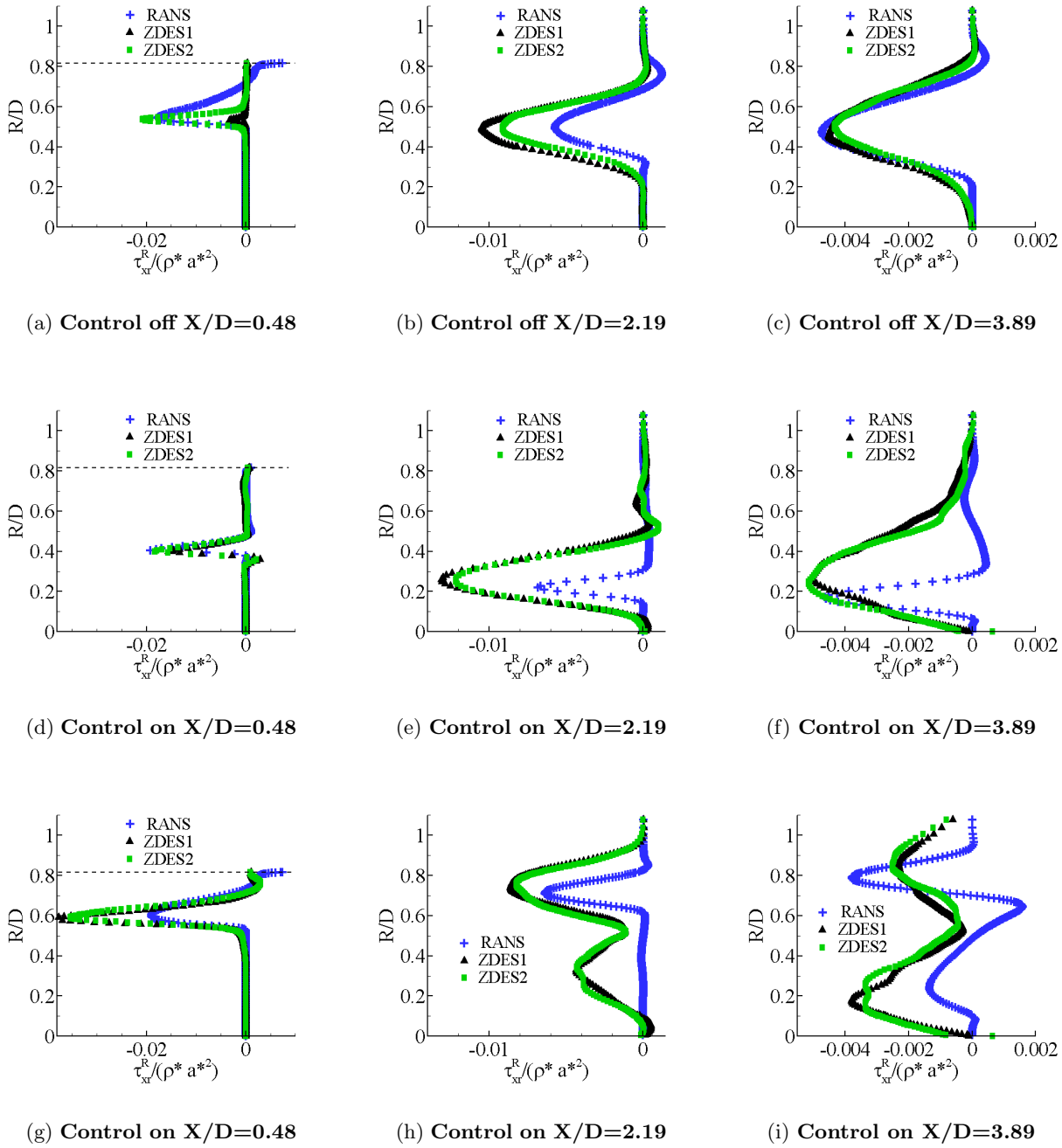
La figure 2.31 compare les distributions de pression totale issues des mesures expérimentales (les données représentées figure 2.7(b)) à celles obtenues numériquement dans les calculs RANS, ZDES1, et ZDES2. On remarque sur les vues en champ proche ($X/D = 0.93$) que les trois simulations donnent des résultats très similaires d'une part entre eux et d'autre part avec les

contours expérimentaux : les contours de p_i sont très resserrés en raison de la faible épaisseur de la couche de mélange initiale et prennent une forme en croix sous l'action des 4 injections radiales (soufflant suivant $\pm\overrightarrow{Y}, \pm\overrightarrow{Z}$). Au contraire, plus loin dans le jet ($X/D = 3.89$) les contours de p_i mesurée sont beaucoup plus écartés et indiquent une rapide diffusion de la pression génératrice du jet. Les calculs ZDES1 et ZDES2 donnent tous deux des résultats semblables à l'expérience alors que le calcul RANS présente encore des gradients de p_i assez élevés à cette abscisse ce qui supporte l'hypothèse d'une sous-estimation de la diffusion turbulente.

2.6 Analyse de la nouvelle longueur caractéristique de maille Δ_ω

2.6.1 Influence du Δ_ω sur les cisaillements turbulents

La tension de Reynolds de cisaillement dans le plan (x,r) adimensionnée $\tau_{xr}^R/(\rho^* a^{*2})$ (ρ^* étant la masse volumique critique) a été tracée figure 2.32 en trois position $X/D = 0.48|2.19|3.89$ pour le jet de référence (haut), le jet contrôlé dans le plan des injecteurs actifs (milieu) et dans le plan des injecteurs inactifs (bas). La tension de Reynolds τ_{xr}^R est ici définie comme la somme de la tension modélisée $\tau_{xr}^{RM} = \tau_{xr}^D = 2\rho\nu_t S_{xr}$ et de la tension résolue $\tau_{xr}^{RR} = -\rho < u'_x u'_r >$. Dans les courbes RANS, $\tau_{xr}^R = \tau_{xr}^{RM}$ puisque aucun mouvement fluctuant n'est explicitement résolu. A l'opposé, dans les deux ZDES, la part résolue constitue de manière prépondérente la tension de Reynolds puisqu'à $X/D = 2.19$, τ_{xr}^{RM} ne représente que 0.3% de τ_{xr}^R. Cependant, plus tôt à $X/D = 0.48$, $\tau_{xr}^{RM}/\tau_{xr}^R = 2.4\%$ en ZDES2 alors qu'en ZDES1, $\tau_{xr}^{RM}/\tau_{xr}^R$ s'élève jusqu'à 68%. Ces valeurs montrent qu'au début de la couche de mélange, la ZDES1 n'a pas encore suffisamment développé ses fluctuations. Autrement dit, la transition de la couche RANS aux grandes structures de la couche de mélange est retardée comme illustré dans les strioscopies instantanées figure 2.26(d). Ces valeurs concernent le jet de référence. Dans le cas où les injecteurs sont activés, les perturbations dans la couche de mélange semblent être excitées puisqu'à la même abscisse, la proportion des tensions modélisées diminue ($\tau_{xr}^{RM}/\tau_{xr}^R = 5.6\%$) en ZDES1 et reste sensiblement constante en ZDES2. Comme le suggère la structure des ondes internes, figure 2.28, la couche de mélange prévue par la ZDES2 semblent être plus proche de celle de l'expérience que celle prévue par la ZDES1. Sur le graphe 2.32(a), on peut voir que τ_{xr}^R est beaucoup plus faible en ZDES1 qu'en ZDES2. A $X/D = 0.48$, la ZDES1 souffre typiquement du phénomène de "longitudinally-induced modeled-stress depletion", les fluctuations qu'elle génère n'étant pas encore suffisamment puissantes pour compenser la chute de viscosité ν_t. La ZDES2, grâce à Δ_ω, diminue sa viscosité ν_t plus tôt ce qui a pour conséquence de diminuer la tension modélisée mais permet en même temps aux fluctuations résolues de croître suffisamment vite pour finalement remplir le "LES-content", i.e. produire l'énergie cinétique fluctuante des grandes échelles, à $X/D = 0.48$. Plus loin en aval, les proportions des tensions résolues en ZDES1 et ZDES2 deviennent comparables et il en est de même pour les tensions de Reynolds, voir les graphes à $X/D = 2.19$ et $X/D = 3.89$. Aucune différence significative entre les deux ZDES ne peut être remarquée dans le cas contrôlé non plus. En comparant le cisaillement turbulent RANS à celui produit par l'une ou l'autre des deux ZDES à partir de $X/D = 2$, on peut globalement conclure que le cisaillement turbulent et l'épaisseur de la couche de mélange sont sous-estimés bien qu'à $X/D = 3.89$ la valeur extrême $\tau_{xr}^R/(\rho^* a^{*2}) \approx -0.0045$ soit atteinte. La sous-estimation globale du mélange du jet, notamment des longueurs de cône potentiel, par le modèle RANS utilisé ici est donc un résultat évident. Sur le graphe 2.32(h), on peut noter la présence d'un pic négatif en ZDES mais pas en RANS. Ceci résulte de la désintégration plus rapide des lobes et des bandes de fluide les liant au coeur du jet comme on peut le voir sur les coupes transverses, figure 2.31. Cette désintégration se produit plus tard dans le jet RANS si bien que le pic de cisaillement négatif apparait plus loin, voir le graphe 2.32(i) à $X/D = 3.89$.



(a) **Control off X/D=0.48** (b) **Control off X/D=2.19** (c) **Control off X/D=3.89**

(d) **Control on X/D=0.48** (e) **Control on X/D=2.19** (f) **Control on X/D=3.89**

(g) **Control on X/D=0.48** (h) **Control on X/D=2.19** (i) **Control on X/D=3.89**

FIG. 2.32 – Tensions de Reynolds $\tau^R_{xr}/(\rho^* a^{*2})$ dans le jet de référence (en haut) et dans le jet contrôlé (dans le plan des injecteurs actifs, au milieu, et dans le plan des injecteurs inactifs, en bas).

2.6.2 Comportement du modèle ZDES muni de Δ_ω

Nous avons déjà vu dans les sections précédentes l'effet bénéfique du nouveau Δ sur le champ aérodynamique calculé par la méthode ZDES. Afin de visualiser plus précisément le comportement couplé de la ZDES et de Δ_ω, les composantes du vecteur directeur $\overrightarrow{N}$ de la vorticité, les valeurs des trois Δ, et la viscosité sous-maille normalisée par la viscosité moléculaire μ_t/μ ont été tracées, figure 2.34 pour deux positions axiales, $X/D = 0.19$ et 1.52, dans la couche

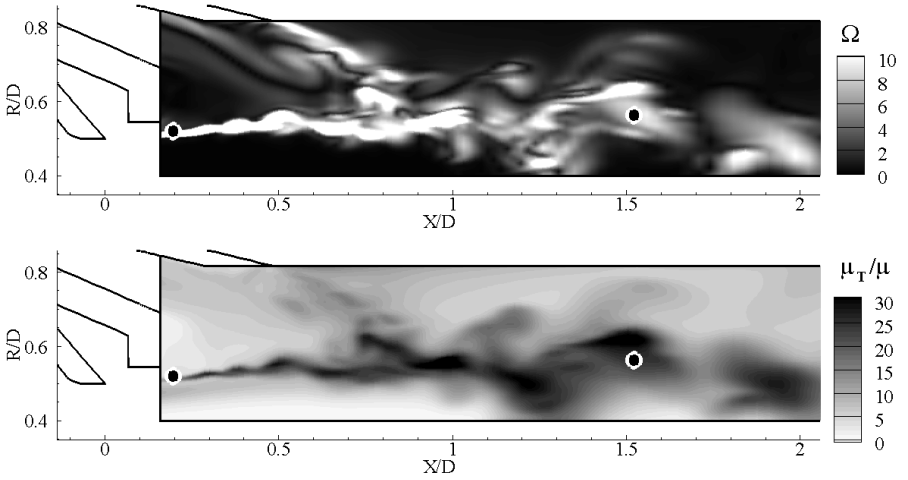
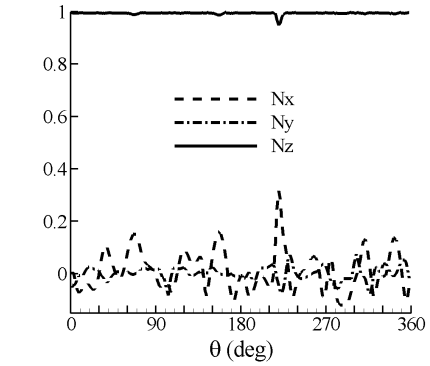


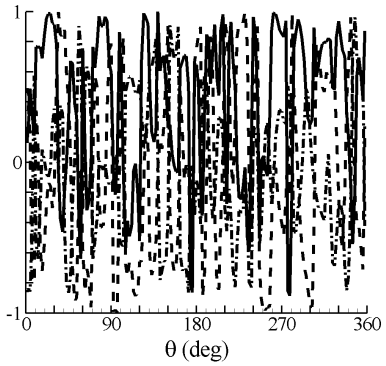
FIG. 2.33 – Position des points de mesures (X/D=0.19 et X/D=1.52) dans la couche de mélange du jet de référence, champ de vorticité Ω et champ de viscosité sous-maille μ_T/μ.

de mélange du jet de référence à un instant arbitrairement choisi. La première position est caractéristique de la région très proche et la seconde représente la couche de mélange pleinement turbulente (voir figure 2.33). Commençons par la région initiale. Le graphe 2.34(a) montre que les tourbillons mis en évidence par les figures 2.26(c) et 2.26(f) sont essentiellement orientés dans la direction de l'envergure $\overrightarrow{z}$. Par conséquent, Δ_ω a été défini de manière à être égal à $\sqrt{\Delta_x\Delta_y}$ et adopte donc la plus petite valeur des domaines de Δ_ω dans les régions maillées finement en azimut (sous les injecteurs) ou celles maillées plus grossièrement (entre les injecteurs) représentés figures 2.23(a) et 2.23(b). Grâce à la manière dont le maillage a été construit, cette valeur est constante en azimut comme on peut le vérifier sur le graphe 2.34(c). Δ_{max} et Δ_{vol} sont aussi représentés sur ce graphe et ont des valeurs supérieures à Δ_ω. De plus, on vérifie que comme prévu les valeurs de Δ_{max} et Δ_{vol} dépendent toutes deux de la position azimutale par le biais de la taille de maille en envergure $\Delta_z(\theta)$, ce qui n'est absolument pas justifié sur le plan physique. Il n'est alors pas étonnant de constater la même tendance dans les valeurs de μ_t : la ZDES2 présente une viscosité sous-maille faible et constante dans la direction circonférentielle alors que la ZDES1 restitue une viscosité sous-maille plus élevée en moyenne, figeant la couche de mélange et qui dépend en plus de la position azimutale. Plus loin en aval, à $X/D = 1.52$ (graphe 2.34(b)), on s'aperçoit que la vorticité n'a apparemment plus de direction privilégiée, même si une analyse statistique devrait être effectuée pour estimer les probabilités de ses différentes orientations. Aussi, la valeur prise par Δ_ω (figure 2.34(d)) fluctue entre les extrema, $\sqrt{\Delta_y\Delta_z} \approx 4.10^{-4}$ et $\sqrt{\Delta_y\Delta_z} \approx 1.10^{-3}$, du domaine de Δ_ω défini par (1.66) et représenté figure 2.23(c). Δ_{max} et Δ_{vol} sont à cette position $X/D = 1.52$ constants en azimut car le maillage y est invariant selon la direction circonférentielle. On constate que la valeur de Δ_ω fluctue autour de la valeur constante de Δ_{vol}, c'est pourquoi les valeurs de la viscosité sous-maille résultantes en ZDES1 et ZDES2, tracées figure 2.34(f), sont sensiblement identiques. Au contraire, la valeur de Δ_{max} est bien supérieure aux deux autres ce qui explique que la viscosité sous-maille résultante en DES97 ou DDES soit trop forte et empêche le développement des instabilités dans la couche de mélange. Le cas particulier qui vient d'être présenté montre bien l'avantage de l'invariance (relative) vis-à-vis de la distribution des points le long de la circonférence apporté à la ZDES2 par rapport à la ZDES1. Toutefois, il est indispensable d'insister sur deux points cruciaux (respectés sur le maillage M2) : lorsque la turbulence est pleinement développée, le maillage doit s'approcher de l'isotropie (dans une couche de mélange $\Delta_x \approx \Delta_z$) et de l'homogénéité ($\Delta_{x,y,z} \approx$ constant), et le nombre de points dans la direction en envergure doit être suffisant pour capturer les tour-

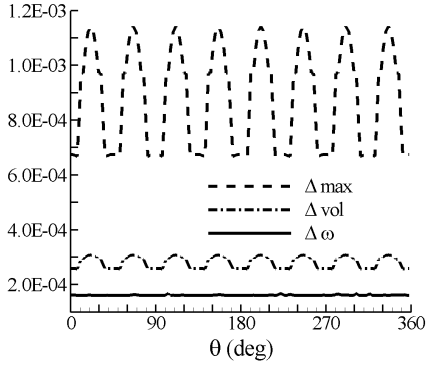
billons longitudinaux. Cette dernière remarque est d'autant plus importante dans les jets car au moment où les couches de mélange atteignent l'axe (fin du cône potentiel) les structures cohérentes s'orientent majoritairement dans la direction axiale et sont les principaux moteurs de l'entraînement turbulent en aval du cône potentiel [152].



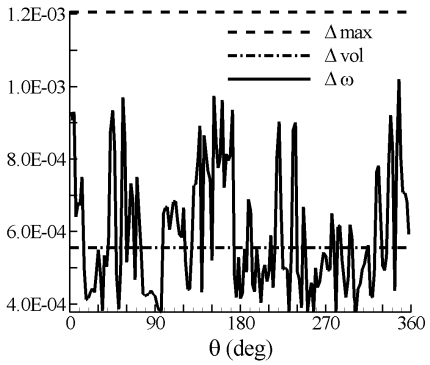
(a) X/D=0.19



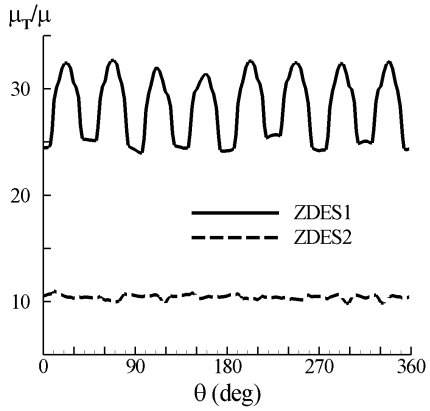
(b) X/D=1.52



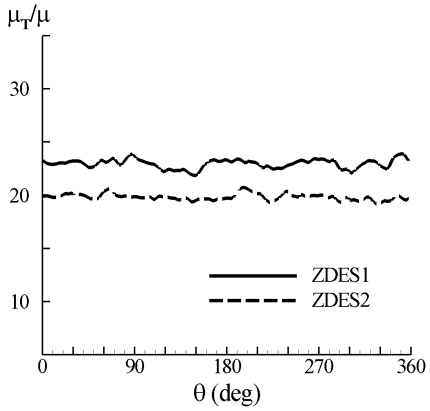
(c) X/D=0.19



(d) X/D=1.52

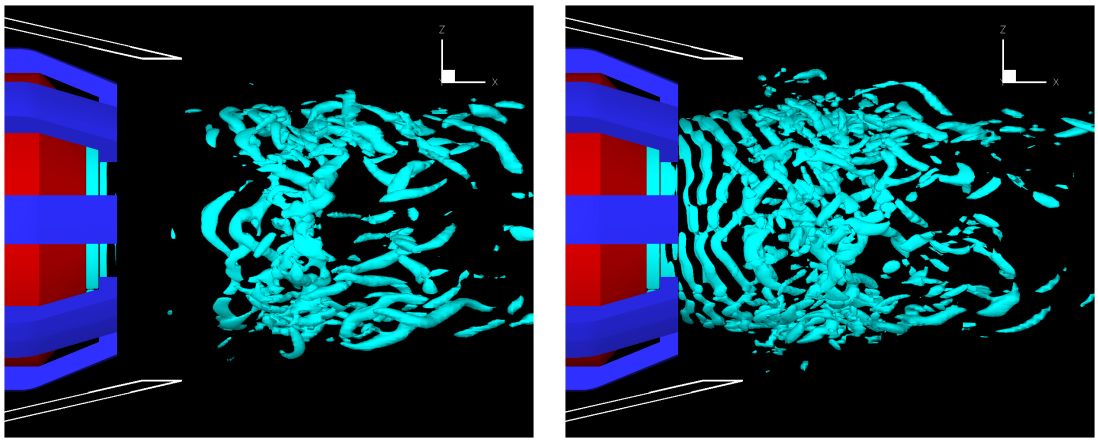


(e) X/D=0.19

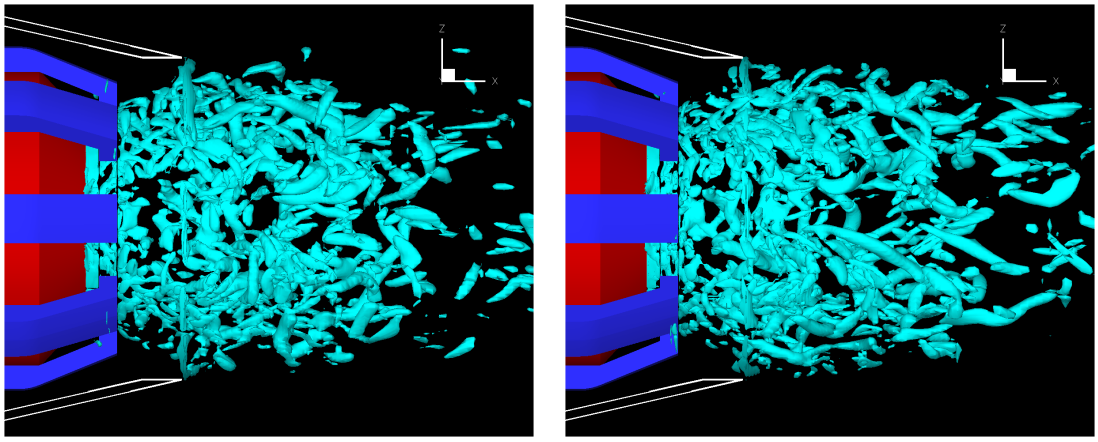


(f) X/D=1.52

FIG. 2.34 – Variations azimutales de la direction de la vorticité (en haut), Δ_{max}, Δ_{vol} et Δ_{ω} (au milieu) et μ_T/μ (en bas) à deux positions X/D=0.19 (à gauche) et X/D=1.52 (droite) de la couche de mélange (sans contrôle).



(a) Jet de référence ZDES1 (b) Jet de référence ZDES2

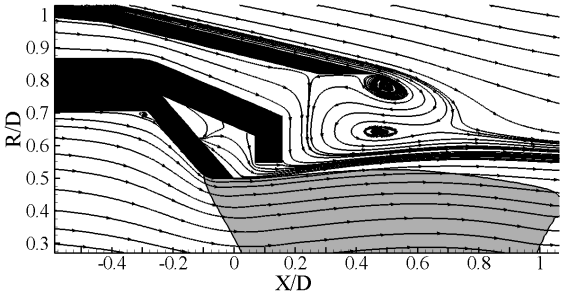


(c) Jet contrôlé ZDES1 (d) Jet contrôlé ZDES2

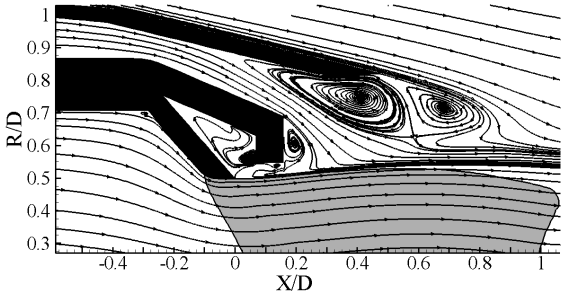
FIG. 2.35 – Iso-surfaces du critère $Q/\left(a^*/D\right)^2 = 50$).

La figure 2.35 illustre les structures cohérentes présentes dans la région initiale de la couche de mélange au moyen du critère Q [126] : $Q = (\|\overline{\overline{\Omega}}\|^2 - \|\overline{\overline{S}}\|^2)/2$, pour les deux ZDES. La valeur $Q/(a^*/D)^2 = 50$ a été choisie. En comparant les figures 2.35(a) et 2.35(b), le retard dans la transition de la couche de cisaillement est flagrant. Depuis le col de la tuyère jusqu'à l'extrémité du carénage extérieur, on peut clairement compter 4 rouleaux dans la ZDES2 alors qu'il n'y en a aucun dans la ZDES1. Ces rouleaux sont presque axisymétriques, bien que certaines directions obliques semblent se dégager de la vue 2.35(b). Selon les études théoriques [17] et expérimentales [188], une couche de mélange plane commence à être sensible aux effets de la compressibilité à partir de $M_c \approx 0.6$ qui est le nombre de Mach convectif au début de la couche de mélange étudiée ici. Sandham et Reynolds [220] ont montré que l'instabilité 2D dans le plan perpendiculaire à l'envergure est la plus amplifiée jusqu'à $M_c \approx 0.6$, et qu'au delà, ce sont les ondes obliques qui sont les plus amplifiées. Une analyse plus approfondie basée sur l'analyse statistique est nécessaire pour conclure sur la structure turbulente de la couche de mélange. Plus loin, on observe une topologie tourbillonnaire plutôt désordonnée à cause des bulles de recirculation instationnaires en aval du canal de ventilation, comme illustré sur la figure 2.36, et à cause de l'impact de l'écoulement extérieur. Les structures tourbillonnaires semblent être plus longitudinales qu'en amont. Plus en aval, la grande valeur du critère Q ne permet plus de capturer les tourbillons qui interagissent, diffusent et voient donc diminuer leur vorticité. Lorsque les injecteurs radiaux soufflent, la différence entre le champs ZDES1 et ZDES2 (resp. figures 2.35(c) et 2.35(d)) est bien moins marquée comme cela a déjà été souligné auparavant. Les quatre directions de soufflage

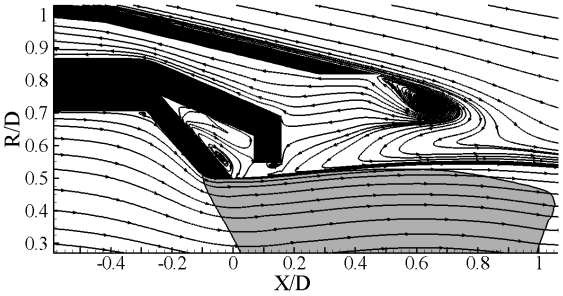
sont dans le plan des figures et normales à celui-ci. On constate que le dispositif d'injection augmente le nombre de structures turbulentes. De plus, il n'y a plus de structure tourbillonnaire axisymétrique comme dans le cas de référence et les tourbillons longitudinaux sont plus apparents que lorsque le contrôle est désactivé.



(a) Plan longitudinal $\theta = 90$ deg RANS



(b) Plan longitudinal $\theta = 90$ deg ZDES2

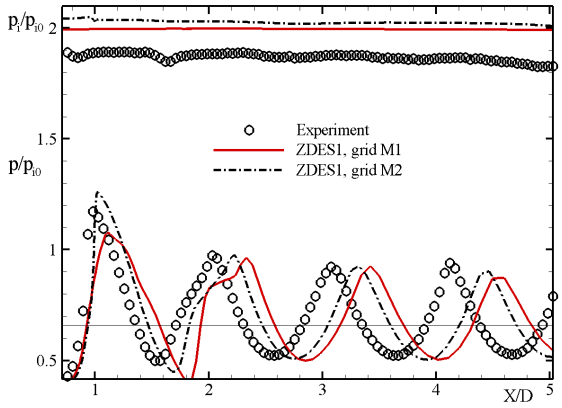


(c) Plan longitudinal $\theta = 180$ deg ZDES2

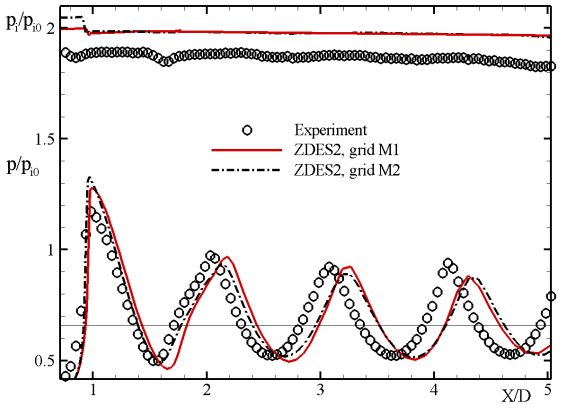
FIG. 2.36 – Topologies des lignes de courant dans le jet de référence selon les méthodes de calcul.

2.6.3 Influence de la discrétisation azimutale

L'effet d'une réduction de 169 à 129 points dans la direction azimutale est évaluée, figure 2.37, en comparant les pressions axiales obtenues respectivement sur les maillages M2 et M1 avec les deux longueurs caractéristiques de maille Δ_{vol} (ZDES1) et Δ_{ω} (ZDES2).



(a) Calculs ZDES1



(b) Calculs ZDES2

FIG. 2.37 – Effet de la discrétisation en azimut.

Il est avant tout utile de rappeler que les calculs RANS ont donné exactement les mêmes solutions sur les deux maillages (cf. figure 2.15). On remarque que le champ de la ZDES1, figure 2.37(a), est plus sensible à une réduction du nombre de points dans la circonférence que la ZDES2, figure 2.37(b). De plus, ce dernier graphe montre que la ZDES2 avec le maillage le plus fin a quasiment atteint la convergence en maillage relativement à la direction azimutale alors que ce n'est pas encore le cas avec la ZDES1. Conformément à ce qui a été dit dans les sections précédentes, le calcul ZDES2 se comporte en moyenne comme le calcul ZDES1 à partir du moment où le maillage est homogène en azimut et où les structures turbulentes n'ont plus une direction $\overrightarrow{z}$ privilégiée. Aussi, on note que entre le maillage M2 et le maillage M1, les pressions statiques de la ZDES1 conservent une pseudo-période à peu près constante comme dans le calcul ZDES2. Le décalage observé dans la ZDES1 sur les oscillations de pression obtenues sur M1 et M2 est entièrement dû à la différence des champs proches (approximativement pour $X/D \leq 2.4$). Cette différence est aussi notée avec le calcul ZDES2 mais de manière légèrement moins marquée. L'objectif de la nouvelle échelle Δ_ω qui était de minimiser la dépendance de la solution vis-à-vis de la discrétisation en envergure lorsque la couche de mélange transitionnelle est essentiellement 2D, est donc atteint.

2.6.4 Résultats des ZDES avec les autres Δ

Le jet de référence a été simulé en ZDES à l'aide des longueurs caractéristiques du maillage $\Delta_{max}, \Delta_{vol}, \Delta_\omega$ puis sans modèle sous-maille (en pratique, on annule ν_t en imposant $C_{DES} = 0$). Les pressions résultantes sur l'axe sont tracées figure 2.38 et les champs de viscosité turbulente/sous-maille sont exposés pour les trois Δ figure 2.39. On y distingue les zones RANS à forte viscosité turbulente en proche parois (de l'ordre de $\nu_t/\nu \approx 300$) des zones LES où la viscosité sous-maille est nettement plus faible.

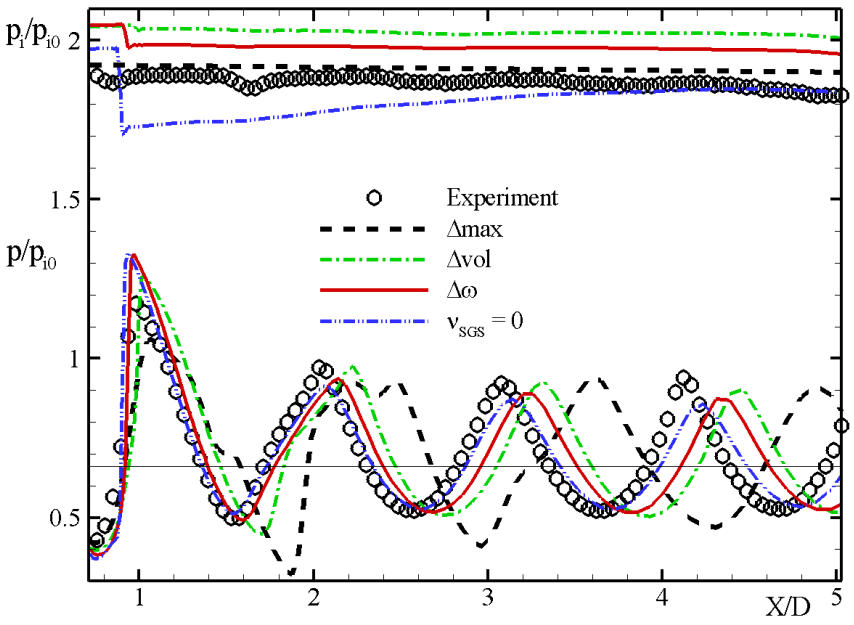


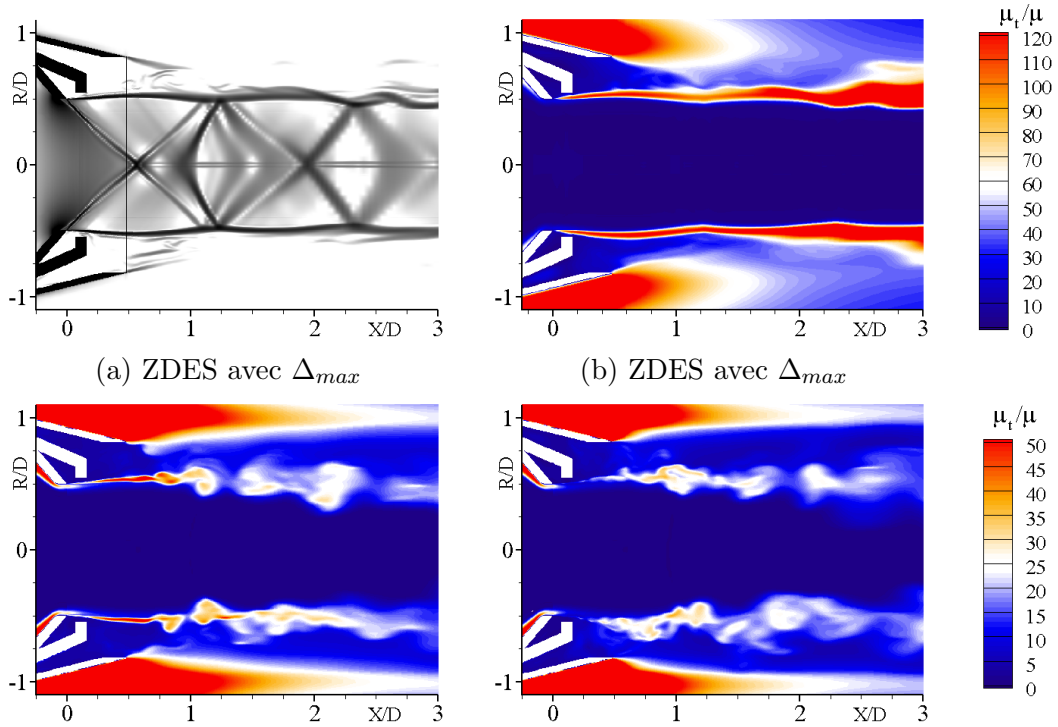
FIG. 2.38 – Pressions statiques et totales sur l'axe du jet de référence en fonction de la modélisation sous-maille.

La pression statique produite par la ZDES basée sur le Δ_{max} est en total désaccord avec celle mesurée lors des essais. La strioscopie numérique (figure 2.39(a)) montre très clairement que la

couche de mélange du jet ZDES(Δ_{max}) est quasiment stationnaire, elle ne transitionne pas du tout vers un état turbulent et ne construit donc aucune fluctuation pour compenser la diminution des tensions turbulentes modélisées : c'est le cas extrême de "longitudinally induced modeled-stress depletion". La figure 2.39(b) illustre l'origine de ce symptôme par une sur-estimation de la viscosité sous-maille qui stabilise trop la couche de mélange : on mesure, par exemple à $X/D = 0.5$, $\nu_t/\nu \approx 120|60$ et 30 pour les ZDES utilisant respectivement Δ_{max}, Δ_{vol} et Δ_ω. Dans la zone (DES) (qui en pratique commute vite en mode LES), ν_t est bien inférieure à une viscosité turbulente RANS mais aussi bien supérieure à une viscosité sous-maille permettant d'autoriser un développement suffisamment rapide des instabilités. Ces trois calculs ZDES dans lesquels la viscosité sous-maille représentative du niveau des tensions modélisées a été modifiée par le biais du Δ permettent de tirer deux enseignements.

Tout d'abord, en raisonnant sur le champ moyen statistique, le niveau de transition entre tensions modélisées et tensions résolues ne peut être ajusté de manière continue avec le modèle actuel de la DES ou de ses dérivées (DDES,ZDES). Ceci est en fait aisément compréhensible si l'on se souvient des hypothèses du modèle de Smagorinsky : celui-ci se base sur la loi inertielle d'une turbulence homogène isotrope en équilibre qui n'est plus du tout vérifiée lorsque l'échelle de filtrage $\sim \Delta$ est déplacée vers les échelles du mouvement moyen.

Par ailleurs, la ZDES utilisant Δ_{max} montre très clairement que toutes les stratégies DES basées sur cette longueur caractéristique de maille (i.e. DES97 et DDES) sont inapplicables pour le calcul de couches de mélange libres dans des configurations appliquées si ce n'est au prix d'un sur-dimensionnement du maillage et d'un coût de calcul non abordable à l'heure actuelle.



(a) ZDES avec Δ_{max} (b) ZDES avec Δ_{max}

(c) ZDES1 (Δ_{vol}) (d) ZDES2 (Δ_ω)

FIG. 2.39 – Effet du Δ sur le jet de référence : (a) strioscopie numérique du jet calculé avec Δ_{max}, viscosité turbulente/sous-maille dans le jet calculé avec (b) Δ_{max}, (c) Δ_{vol}, (d) Δ_ω.

Enfin, nous avons vu que l'emploi de la nouvelle longueur Δ_ω a pour conséquence de réduire la viscosité sous-maille et améliore la prévision de la couche de mélange (bien qu'une vérification basée sur des mesures expérimentales plus poussées serait nécessaire). Afin de tester l'effet d'une réduction du niveau des tensions modélisées, il est intéressant de regarder les résultats de la simulation ZDES où la viscosité sous-maille est annulée. Théoriquement, si la diffusion/dissipation numérique était nulle ou négligeable, les tensions modélisées devraient être indispensables pour représenter l'action des échelles sous-mailles sur le mouvement résolu et une annulation du tenseur sous-maille devrait en dégrader sa prévision. Or, les résultats de la figure 2.38 ne permettent pas de distinguer nettement la simulation ZDES avec Δ_ω de celle avec $\nu_t = 0$. Bien qu'on ne puisse pas la quantifier explicitement, ces résultats prouvent que, dans les calculs réalisés dans cette étude, la diffusion/dissipation numérique n'est pas négligeable par rapport à celle qui est modélisée. Comme cela a été dit dans le chapitre 1, l'idéal serait de réduire cette dissipation numérique à un ordre négligeable, mais en pratique, tant la robustesse du schéma indispensable au calcul des chocs que la déformation du maillage nécessaire au traitement des configurations appliquées rend cette tache très difficile. Toutefois, l'importance du modèle sous-maille et en particulier du Δ dans le mode LES de la ZDES est d'autant plus à souligner que la dissipation du schéma numérique sera diminuée.

2.7 Conclusion sur les résultats expérimentaux et numériques

L'ensemble des résultats expérimentaux et numériques ont été présentés dans ce chapitre.

Au niveau expérimental, plusieurs dispositifs d'augmentation du mélange par injections radiales ont été testés par le DAFE sur la maquette MARCO représentative d'un arrière-corps d'avion de combat. Les mesures de pression d'arrêt isentropique sur l'axe du jet prouvent que ce type de contrôle permet de diviser la longueur du cône potentiel d'un facteur supérieur à 2 avec un débit injecté de $Q_3/Q_1 = 3.7\%$. Le sondage de la pression totale dans des plans transverses met en évidence la déformation du jet induite par les tourbillons longitudinaux générés par les injections radiales et la plus grande diffusion latérale du jet. Par ailleurs, les mesures de pression statique ainsi que les vues strioscopiques montrent que l'activation des injections radiales modifie profondément les ondes de pression et les ondes de choc se propageant dans le jet supersonique. A partir de cette constatation, les expérimentateurs ont émis l'hypothèse que la structure de choc très complexe du jet contrôlé pourrait participer à l'augmentation de son mélange par le biais des interactions de chocs. Ce mécanisme hypothétique baptisé "mélangeur à choc" pourrait alors s'ajouter au mécanisme purement tourbillonnaire observé dans les jets munis de tabs solides [271] lorsque le jet possède une vitesse supersonique. Une analyse paramétrique a ensuite été réalisée. Il en ressort que l'action du dispositif mélangeur est d'autant plus grande que le débit injecté est élevé. On peut supposer que l'allongement des orifices d'injection a un effet non négligeable mais qui reste à clarifier. Des injections dont le grand-axe des orifices a une incidence de $\alpha = 45\,\text{deg}$ par rapport à l'axe du jet ont une action plus importante que lorsque $\alpha = 90\,\text{deg}$. Les expérimentateurs supposent qu'il s'agit d'un effet de "swirl". Ici, il a été émis l'hypothèse que cet effet pourrait plutôt être un effet d'allongement apparent de l'orifice.

L'étude numérique constituant ce travail de thèse a été initiée par des simulations de jets canoniques perturbés par des tabs solides puis par des injections radiales. Celles-ci confirment que la perturbation azimutale d'un jet supersonique sous-détendu produit très clairement deux phénomènes : d'une part, une distorsion spectaculaire de la surface extérieure semblable à celle constatée sur les jets subsoniques et d'autre part, une modification de la structure de choc interne. La comparaison des perturbations solides et fluides permet de dire d'abord que l'effet d'obstacle provoqué par les injections radiales est à première vue capable à lui seul de générer

les deux phénomènes de nature respectivement tourbillonnaire et compressible. Toutefois, un examen plus précis montre que les deux types de perturbations agissent de manière différentes et conduit à ne pas développer d'avantage l'étude de la perturbation solide.

La simulation des cas expérimentaux testés sur la maquette MARCO a été effectuée selon les approches RANS et ZDES avec les trois longueurs caractéristiques de maille $\Delta_{max}, \Delta_{vol}, \Delta_{\omega}$. Les mises au point de ces simulations révèlent que le modèle numérique doit être le plus proche possible de la réalité du point de vue des conditions limites (courant de ventilation, couche limite extérieure) et de la géométrie de la maquette (nombre d'injecteurs solides). Comme souligné sur le jet canonique, la topologie du maillage a en outre une influence déterminante sur la forme des réflexions des chocs sur l'axe de symétrie. Par ailleurs, les effets de la géométrie d'alimentation du flux de ventilation persistent jusqu'au niveau de la sortie du jet étudié. Les simulations montrent que si l'écoulement de ventilation réel à reproduire est axisymétrique, un dispositif comme une grille d'homogénéisation doit être ajouté à la maquette existante. Concernant la ZDES, les calculs prouvent que l'utilisation de Δ_{max} est inappropriée pour la simulation d'une configuration appliquée de jet. Les stratégies comme la DES97 [241] ou la DDES [240] ne peuvent donc reproduire un tel écoulement avec les capacités de calcul actuelles. De plus, comme cela a déjà été largement prouvé antérieurement à cette étude, la dissipation numérique est suffisamment faible dans les schémas numériques classiques pour ne pas avoir d'influence sur la solution RANS mais constitue encore un problème essentiel des méthodes faisant intervenir l'approche LES et pour lesquelles elle doit être réduite autant que possible.

Les résultats numériques RANS et ZDES (avec Δ_{vol} et Δ_{ω}) sont enfin comparés aux mesures expérimentales du champ moyen. La difficulté majeure dans la configuration de jet propulsif faiblement sous-détendu consiste à restituer la structure des ondes de chocs et des ondes isentropiques car celle-ci est très sensible à trois facteurs très intriqués : le champ de pression imposé par l'écoulement environnant (ventilation et atmosphère), l'évasement de la couche de mélange initiale et le champ turbulent lui-même. Ce dernier a une influence croissante puis prédominante lorsque l'écoulement progresse vers la fin du cône potentiel et vers le jet turbulent pleinement développé. Toutes les simulations RANS et ZDES reproduisent bien qualitativement le jet de référence et les deux phénomènes prépondérants consécutifs à l'activation du contrôle. Sur le plan quantitatif, le calcul RANS et la ZDES utilisant la nouvelle longueur caractéristique Δ_{ω} restituent bien la structure de choc en zone proche (i.e. $X/D \leq 2$). La ZDES originelle basée sur Δ_{vol} présente un retard au développement des instabilités dans la couche de mélange à cause d'une sur-estimation de la viscosité sous-maille. Ceci provoque une sous-estimation de l'évasement de la couche de mélange qui entraîne un décalage de la lentille de choc. Dans la zone lointaine (i.e. $X/D \geq 2$), le traitement de la turbulence joue un rôle prépondérant. Le calcul RANS sur-estime l'atténuation des ondes de pressions alors qu'il sous-estime la dissipation turbulente. Les calculs ZDES donnent des résultats similaires avec Δ_{vol} et Δ_{ω}, résultats très proches des mesures expérimentales. Concernant l'action du contrôle, les deux ZDES fournissent à la fois une bonne prévision de la longueur du cône potentiel et une bonne représentation des gradients dans les plans transverses. Comme les calculs RANS sous-estiment globalement la diffusion turbulente, les longueurs de cône potentiel du jet de référence et du jet contrôlé sont toutes deux sur-estimées. Néanmoins la réduction du cône potentiel causée par les actionneurs est bien reproduite par cette méthode.

Au niveau de la méthodologie, la longueur caractéristique de maille Δ_{ω} satisfait le cahier des charges fixé au chapitre 1 : la dépendance du calcul à l'échelle de maille en envergure est bien éliminée dans le cas où la couche de mélange présente clairement un caractère bidimensionnel comme c'est le cas dans la région initiale d'une couche cisaillée à faible nombre de Mach convectif

[220]. On constate sur les simulations que la couche de mélange résolue développe rapidement les instabilités initialement 2D et évolue bien par la suite vers un état turbulent 3D. Notons tout de même que la méthode ZDES avec Δ_ω est contrainte à satisfaire les règles de maillage LES dans la zone turbulente pleinement développée.

En conclusion, la méthodologie mise au point dans cette étude a permis de réaliser la première simulation de jet propulsif par une méthode hybride de type DES zonale. Cette méthodologie a de plus été appliquée au cas où des injections radiales sont utilisées pour augmenter le mélange et donne des résultats en bon accord avec le champ moyen expérimental.

Le travail de restitution des écoulements mesurés sur la maquette MARCO s'achève ici pour passer à la phase d'interprétation physique des résultats. Deux phénomènes prépondérants vont être analysés : la structure des chocs internes et la dynamique des tourbillons longitudinaux. L'analyse physique commence dans le chapitre suivant par l'étude des ondes isentropiques et des chocs apparaissant à l'intérieur des jets supersoniques, l'étude des mécanismes qui les modifient lorsque les jets secondaires sont activés et la vérification de l'hypothèse de "mélangeur à chocs" formulée lors de la campagne expérimentale.

Chapitre 3

Analyse de la structure des ondes internes du jet

3.1 Objectif du chapitre

Ce chapitre a pour objectif de déterminer si les injections radiales peuvent augmenter le mélange du jet supersonique par un processus stationnaire basé sur l'interaction des ondes de choc internes. Autrement dit, on souhaite :

1) savoir comment les injections radiales modifient la structure de choc moyenne du jet ;

2) estimer si cette modification de la structure de choc participe à l'augmentation du mélange.

A la connaissance de l'auteur, aucune étude de la structure de choc d'un jet supersonique soumis à des perturbations azimutales n'a jusqu'à présent été publiée. Les ondes jouent un rôle crucial dans l'organisation interne du jet contrôlé et font donc ici l'objet d'une analyse détaillée. Leur formalisme mathématique est celui de la théorie des caractéristiques. Celle-ci a d'abord été appliquée aux écoulements plans et axisymétriques[1] puis a été étendue aux écoulements tridimensionnels selon différentes méthodes (voir la revue détaillée de Holt [109]). Ces méthodes ont néanmoins été jugées trop complexes pour en tirer des interprétations physiques claires. Par ailleurs, on peut noter que le jet contrôlé étudié ici comporte des plans de symétrie, à travers et entre les injecteurs actifs, qui sont très représentatifs de la déformation occasionnée par les injections secondaires. C'est pourquoi on espère comprendre les grands traits de la structure de choc interne du jet contrôlé en expliquant l'organisation de l'écoulement dans ces plans de symétrie. Pour cela, la théorie des caractéristiques en écoulement stationnaire bidimensionnel plan a été étendue aux écoulements tridimensionnels comportant un plan de symétrie.

Le chapitre est donc articulé de la manière suivante. Tout d'abord, la section 3.2 rappelle les bases de la théorie des caractéristiques en écoulement plan et présente des exemples illustrant l'organisation des ondes, la formation des chocs et différentes topologies qu'ils peuvent adopter. La section 3.3 détaille les structures compressibles des jets plans et axisymétriques, supersoniques et soniques, sur-détendus et sous-détendus, montre l'influence de l'écoulement extérieur et les effets de la viscosité. La théorie des caractéristiques est ensuite adaptée, dans la section 3.4, aux écoulements tridimensionnels comportant un plan de symétrie. Les résultats précédents sont alors utilisés pour tenter d'expliquer l'organisation des jets testés sur la maquette MARCO. Enfin, une estimation du mélange provoqué par la modification de la structure de choc est effectuée, section 3.5, pour conclure sur l'existence de l'hypothétique "mélangeur à chocs".

[1] on se restreint ici aux écoulements stationnaires. Historiquement, la théorie a d'abord été appliquée aux écoulements compressibles monodimensionnels instationnaires (Courant et Friedrichs [51]).

Il est important de souligner que toute l'analyse présentée dans ce chapitre s'attache à décrire un mécanisme stationnaire puisque l'on cherche à comprendre comment les injections radiales peuvent modifier la structure de choc observée sur les strioscopies à long temps de pose et reproduite par des simulations RANS ou ZDES moyennées en temps.

3.2 Ondes isentropiques et ondes de choc en écoulement plan

3.2.1 Ondes isentropiques dans un écoulement supersonique plan

En écoulement supersonique, les ondes de pression sont portées par des surfaces caractéristiques qui ne sont définies dans la suite de ce chapitre que pour les systèmes régis par des équations hyperboliques sans phénomène de diffusion. Dans le jet que nous étudions, les diffusions visqueuse et thermique, moléculaire et turbulente, sont concentrées dans la couche de mélange et nous conviendrons de les négliger pour le moment. Cette section commence donc par l'analyse des ondes dans un fluide considéré comme non-visqueux et non conducteur de chaleur.

3.2.1.1 Les équations d'Euler du fluide parfait

Les écoulements compressibles de fluide parfait constituent un modèle continu de fluide selon lequel la puissance des efforts intérieurs est réversible. La connaissance du tenseur des contraintes se réduit alors à celle d'un seul scalaire p coïncidant avec la pression thermodynamique qui vérifie les équations d'état du gaz idéal (ou plus généralement d'un gaz divariant). De plus, le milieu étant non dissipatif, il n'a pas de variable interne, donc la dissipation intrinsèque est nulle. Ce modèle suppose aussi que le milieu ne comporte pas de source (ou puit) de chaleur et que les flux conductifs sont nuls. Ceci conduit à une dissipation thermique nulle. Avec la première propriété, ceci implique enfin que toute particule de fluide ayant une évolution continue conserve son entropie le long de sa trajectoire. (Pour plus de détails, consulter les ouvrages [46],[95]). L'évolution continue de ce modèle est formalisée par les équations d'Euler :

$$\text{Conservation de la masse :} \qquad \frac{D\rho}{Dt} + \rho.\mathrm{div}\,\overrightarrow{V} = 0 \tag{3.1}$$

$$\text{Bilan de quantité de mouvement :} \qquad \rho\frac{D\overrightarrow{V}}{Dt} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}p + \overrightarrow{f} \tag{3.2}$$

$$\text{Bilan d'enthalpie totale } H_i = h + \frac{V^2}{2} : \qquad \rho\frac{DH_i}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \overrightarrow{f}.\overrightarrow{V} \tag{3.3}$$

$$\text{Evolution isentropique :} \qquad \frac{DS}{Dt} = 0 \tag{3.4}$$

où l'on convient de noter la dérivée particulaire : $\frac{D.}{Dt} = \frac{\partial .}{\partial t} + \mathrm{grad}(.).\overrightarrow{V}$. L'équation (3.3) contient le bilan de l'énergie interne. Elle peut prendre différentes formes selon la variable d'état thermodynamique choisie et en la combinant avec l'équation de quantité de mouvement. Ainsi, elle est strictement équivalente à celle traduisant la conservation de l'entropie dans le cas d'une évolution continue. Ce système hyperbolique en temps traduit la nature propagative des ondes instationnaires. Nous nous cantonnerons ici aux propriétés des écoulement stationnaires $\partial./\partial t = 0$. De plus, nous négligerons les forces de volumes $\overrightarrow{f}$. En régime stationnaire et lors d'une évolution continue, chaque particule de fluide conserve donc à la fois son enthalpie totale H_i et son entropie S, et il ne reste qu'à déterminer sa vitesse $\overrightarrow{V}$ pour caractériser totalement son état $(\rho, \overrightarrow{V}, p)$[2].

[2]On adopte ici la notion d'"état du mouvement", ou "motion state", de Meyer [168] caractérisant à la fois l'état thermodynamique du fluide (ρ, p) et sa cinématique $\overrightarrow{V}$.

Le son et plus généralement les ondes de pression s'appuient sur le milieu matériel en mouvement pour se propager. En linéarisant les équations d'Euler autour d'un état de référence de vitesse $V_\infty \overrightarrow{x}$ franchement distinct de la célérité du son a_∞, et en supposant que le champ de vitesse est irrotationnel et plan, on met clairement en évidence deux modes de propagation, au sens eulérien, des perturbations dans l'écoulement en fonction du nombre de Mach de référence $M_\infty = V_\infty/a_\infty$:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{3.6}$$

(u, v) étant les composantes de la perturbation de vitesse. Tant que la vitesse est subsonique $M_\infty < 1$, ce système est elliptique : toute onde de pression, se propageant plus vite que ne se déplace le fluide, est diffusée dans toute les directions. Tout point dépend du reste de l'écoulement et a une influence sur celui-ci. Le problème subsonique stationnaire se résume à un problème de conditions aux limites. Lorsque la vitesse est supersonique $M_\infty > 1$, le système est hyperbolique : le fluide en amont d'une perturbation arrive plus vite sur elle que l'onde de pression qui en est émise ne se propage vers l'amont. Pour un observateur fixe, toute perturbation est donc piégée à l'intérieur d'un cône, appelé "cône de Mach", d'angle solide $\alpha_\infty = \arcsin(a_\infty/V_\infty)$ autour de la direction de l'écoulement. Ce cône définit en tout point de l'écoulement une zone de dépendance et une zone d'influence disjointes. Le problème supersonique stationnaire se résume alors à un problème de conditions initiales. Le caractère hyperbolique autorise en outre la présence de discontinuités dans l'écoulement. Lorsque ce sont les variables d'état elles-mêmes qui sont discontinues, on parle de "choc". En raison du caractère hyperbolique non-linéaire des équations d'Euler, des chocs peuvent apparaître dans un écoulement circulant sur des parois décrites par des fonctions continuement différentiables, i.e. sans discontinuité de pente.

Les écoulements de fluide parfait peuvent comporter deux types de surfaces de discontinuité. Les équations de Rankine-Hugoniot lient localement les propriétés du fluide de part et d'autre de ces surfaces (fixes en régime stationnaire) :

Conservation de la masse :	$m = \rho_0 V_{N0} = \rho_1 V_{N1}$	(3.7)
Bilan de quantité de mouvement normale :	$mV_{N0} + p_0 = mV_{N1} + p_1$	(3.8)
Bilan de quantité de mouvement tangentielle :	$m\overrightarrow{V}_{T0} = m\overrightarrow{V}_{T1}$	(3.9)
Bilan d'énergie totale :	$m(h_0 + V_0^2/2) = m(h_1 + V_1^2/2)$	(3.10)

où l'on a noté $V_N = \overrightarrow{V}.\overrightarrow{N}$ la vitesse normale à la surface et $\overrightarrow{V}_T = \overrightarrow{V} - V_N.\overrightarrow{N}$ la composante tangentielle de la vitesse. m est le flux surfacique de masse traversant la discontinuité. Si $m = 0$, la surface de discontinuité est une "surface de glissement" qui s'appuie sur des lignes de courant. Son équilibre se traduit seulement par la continuité normale de la pression $p_0 = p_1$. Les autres quantités (ρ, H_i, S), et en particulier V, de part et d'autre de la surface ne sont alors liées par aucune relation. Si $m \neq 0$, la surface de discontinuité est un "choc" au travers duquel la vitesse tangentielle est conservée, ainsi que l'enthalpie totale $H_i = h + V^2/2$. Seul l'écoulement normal subit le choc. A la difference d'une évolution continue, l'entropie subit un saut non nul, qui, d'un point de vue physique, est obligatoirement positif en vertu du 2^{nd} principe de la thermodynamique : c'est le choc de compression. De plus, la relation de Prandtl $V_{N0}.V_{N1} = a^*$ (a^* est la vitesse critique) découlant de (3.7) et (3.10) montre que $V_{N0} \geq a^*$ et $V_{N1} \leq a^*$[3].

[3]Le lecteur peut se reporter à la référence [242] pour toutes les formules de calcul du choc oblique résultant des relations (3.7) à (3.10).

Par ailleurs, les équations d'Euler sont invariantes par changement de signe de la vitesse. Cela signifie que si un champ (ρ, u, v, w, p, e) est une solution stationnaire continue d'écoulement non-visqueux, le champ $(\rho, -u, -v, -w, p, e)$ est aussi une solution qui représente l'écoulement se déplaçant en sens inverse. Autrement dit, l'évolution stationnaire d'un fluide parfait est "réversible"[4] tant qu'il n'existe pas de choc. Néanmoins, cette propriété ne dit absolument pas si l'écoulement inverse est stable, puisqu'elle s'appuie uniquement sur les équations stationnaires[5]. Cette propriété d'inversion du sens de circulation est brisée dès que l'écoulement comporte un choc à cause du 2^{nd} principe. Il est à noter que les équations de Navier-Stokes, elles, ne sont pas invariantes par un tel changement de variables, ce qui traduit la notion d'irréversibilité introduite par la viscosité.

3.2.1.2 Equations d'Euler intrinsèques planes

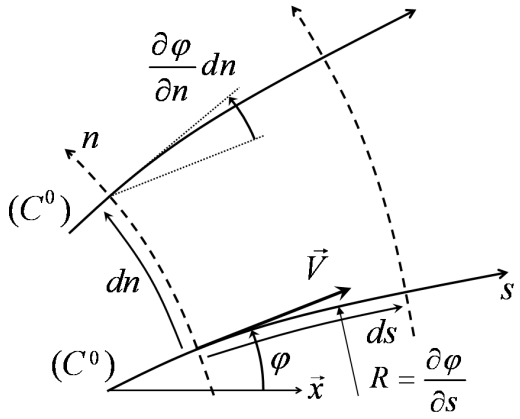


FIG. 3.1 – Définition des coordonnees intrinsèques planes.

On suppose désormais que l'écoulement est invariant suivant la direction $\overrightarrow{z}$. En coordonnées intrinsèques planes (s, n, z) (cf. figure 3.1) où le vecteur vitesse $\overrightarrow{V} = V\overrightarrow{s}$ est caractérisé par son module V et son orientation $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{s}) = \varphi$, les équations d'Euler s'écrivent :

$$\frac{1}{\rho V}\frac{\partial(\rho V)}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{3.11}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho V^2}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{1}{\rho V^2}\frac{\partial p}{\partial n} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial H_i}{\partial s} = 0 \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} = 0 \tag{3.15}$$

Le gaz étant supposé parfait, la définition de l'entropie $dS = c_v\,[dp/p - \gamma d\rho/\rho]$ et les équations (3.12),(3.15) permettent de lier les variations de ρ à celle de V le long de la ligne de courant :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s} = -M^2\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s} \tag{3.16}$$

[4]L'adjectif "réversible" est utilisé volontairement car cette notion est liée à la réversibilité thermodynamique.

[5]Par exemple, un écoulement supersonique entrant dans un convergent sans choc, passant le col à $M = 1$ et s'évacuant dans le divergent est la solution stationnaire inverse de celle d'un écoulement subsonique qui s'amorcerait au col. Le premier écoulement est instable alors que le second est stable [130].

Cette relation (valable aussi en 3D) permet de comprendre la différence essentielle entre les régimes subsonique et supersonique au niveau des transferts d'énergie. L'équation (3.16) est équivalente à une combinaison des équations de conservation de la masse, de l'entropie, et de l'enthalpie totale qui, en gaz parfait où on néglige les interactions intermoléculaires autres que les collisions, traduit la conservation de l'énergie cinétique totale {microscopique + macroscopique}. En régime subsonique, les variations relatives de vitesse macroscopique sont compensées par de petites variations relatives de la vitesse d'agitation moléculaire, traduite au niveau macroscopique par la variation de température, et en évolution isentropique par la variation de masse volumique. En régime supersonique, au contraire, les variations relatives de vitesse macroscopique sont compensées par d'importantes variations relatives de masse volumique. Aussi, on peut retenir qu'en régime subsonique, les variations relatives de flux surfacique de masse (ρV) sont dirigées par les variations relatives de vitesse V, alors qu'en régime supersonique, elles sont dirigées par les variations relatives de masse volumique ρ. Cette interprétation est intuitivement satisfaisante car le carré du nombre de Mach $M = V/a$ peut être interprété comme le rapport de l'énergie cinétique macroscopique $\sim V^2$ sur l'énergie cinétique microscopique $\sim a^2$ puisque la vitesse d'agitation moléculaire est de l'ordre de la vitesse du son a. Avec la conservation de la masse $(\rho V)A = cste$, ceci permet d'expliquer pourquoi un écoulement subsonique accélère dans une section convergente $dA/A < 0$, alors qu'un écoulement supersonique y décélère. Notons au passage que la relation (3.16) liant les variations relatives de masse volumique et de vitesse est monotone, le signe moins traduisant bien la notion de "compensation". Enfin, elle montre qu'à $M = 1$, le flux surfacique de masse atteint un point critique, qui est en fait un maximum global.

Les relations (3.12), (3.16) montrent que parmi les 3 scalaires ρ, V, p, il y en a 2 qui n'apportent aucune information supplémentaire sur l'évolution d'une particule au cours de son mouvement. Comme signalé plus haut, toute ligne de courant peut potentiellement être une ligne de glissement puisque les dérivées normales de ρ et V n'apparaissent pas dans les équations d'Euler, c'est pourquoi seule la pression p est indispensable dans les équations. Les 4 équations nécessaires et suffisantes à la résolution de l'écoulement s'écrivent donc :

$$-\frac{1-M^2}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{3.17}$$

$$\frac{1}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial n}+\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial h_i}{\partial s} = 0 \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial S}{\partial s} = 0 \tag{3.20}$$

Les équations (3.17),(3.18),(3.19),(3.20) sont valables aussi bien en subsonique qu'en supersonique. Tant que $M \neq 1$, on a les propriétés :

$$\frac{\partial p}{\partial s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{3.21}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \tag{3.22}$$

Lorsque $M = 1$, on a $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ traduisant la présence d'un col local au tube de courant infinitésimal.
En particulier, pour les mouvements incompressibles au sens $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial s} = 0$ (et non au sens plus restrictif $\rho =$ constante), les lignes isobares et les lignes ($\varphi =$ constante) forment un réseau de courbes orthogonales. Ceci n'est plus vrai lorsque ρ varie au cours du mouvement.

3.2.1.3 Equations de compatibilité en écoulement plan

On peut se demander si, connaissant les valeurs de (p, φ, H_i, S) sur une ligne, les équations (3.17),(3.18),(3.19),(3.20) permettent d'en déduire les valeurs sur une ligne voisine. C'est ce que l'on nomme le "problème de Cauchy". Inversement, on peut se demander s'il existe des lignes telles que le problème de Cauchy soit indéterminé. Si de telles lignes existent, certaines variables y vérifient nécessairement une équation différentielle ordinaire par rapport à l'abscisse curviligne, indiquant que leur variations sur ces lignes sont indépendantes des valeurs prises au voisinage. Quand elles existent, ces lignes sont appelées "lignes caractéristiques" (cf. Courant et Friedrichs [51]), "lignes de Mach", ou "ondes de Mach", et leurs équations différentielles sont appelées "relations de compatibilité". Une ligne est caractéristique vis-à-vis d'un ensemble de variables. Par définition, toute discontinuité d'une variable est nécessairement propagée le long des lignes caractéristiques associées. Cette propriété s'étend aux dérivées d'ordres supérieurs et conduit au résultat suivant : si deux régions adjacentes d'un écoulement sont décrites par des fonctions analytiques différentes, leur ligne de séparation est nécessairement une ligne caractéristique.
Dans le cas particulier où l'équation de compatibilité peut s'intégrer indépendamment de la position de la caractéristique, elle définit une fonction des variables associées uniforme dans tout l'écoulement que l'on nomme "invariant de Riemann".
Ainsi, les deux questions que l'on vient de poser se ramènent à la détermination des lignes caractéristiques. Les équations (3.19) et (3.20) montrent directement que les lignes de courants sont des lignes caractéristiques pour l'enthalpie totale H_i et l'entropie S. Reste à déterminer les lignes caractéristiques dont les variables associées sont des fonctions de la pression p et de l'orientation de la vitesse φ. Pour cela, on cherche une combinaison linéaire des équations (3.17) et (3.18) de manière à obtenir une équation dans laquelle les différentielles de toutes les variables présentes dans l'équation se combinent suivant une même et unique direction qualifiée de "caractéristique" correspondant à la pente locale de la ligne caractéristique. Cela revient à exprimer les équations (3.17),(3.18) dans un système de coordonnées $(\tilde{s}, \tilde{n})$ déduit du système de coordonnées intrinsèques (s, n) par une rotation d'angle χ et de trouver les valeurs de χ correspondant aux directions caractéristiques pour lesquelles les dérivées normales $\partial./\partial\tilde{n}$ sont indéterminées (cf. Meyer [168]). En pratique, le plus rapide est de prendre les 2 équations intrinsèques du mouvement (3.17) et (3.18), et d'y ajouter les 2 équations différentielles traduisant les évolutions respectives de p et φ supposées connues le long des lignes caractéristiques :

$$\frac{\partial p}{\partial \tilde{s}} = \cos\chi \frac{\partial p}{\partial s} + \sin\chi \frac{\partial p}{\partial n} \tag{3.23}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{s}} = \cos\chi \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \sin\chi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \tag{3.24}$$

On obtient donc un système linéaire à 4 équations, 4 inconnues $\frac{\partial p}{\partial s}, \frac{\partial p}{\partial n}, \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial n}$. L'indétermination du problème de Cauchy se traduit par l'annulation de son déterminant, lorsque χ est une direction caractéristique. Ceci ne se produit que si $M > 1$ lorsque $\chi = \pm\alpha$, où α est l'"angle de Mach" défini par :

$$\alpha = \arcsin(1/M) \tag{3.25}$$

Autrement dit, la vitesse normale aux lignes caractéristiques étant sonique, celles-ci constituent la trace de l'enveloppe conique des ondes sphériques de pression dans le plan. On définit ainsi deux familles de courbes caractéristiques : les caractéristiques descendantes (C^-) de vecteur directeur $\overrightarrow{s}^-$ tel que $(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{s}^-) = -\alpha$ et les caractéristiques montantes (C^+) de vecteur directeur $\overrightarrow{s}^+$ tel que $(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{s}^+) = +\alpha$ (voir figure 3.2).

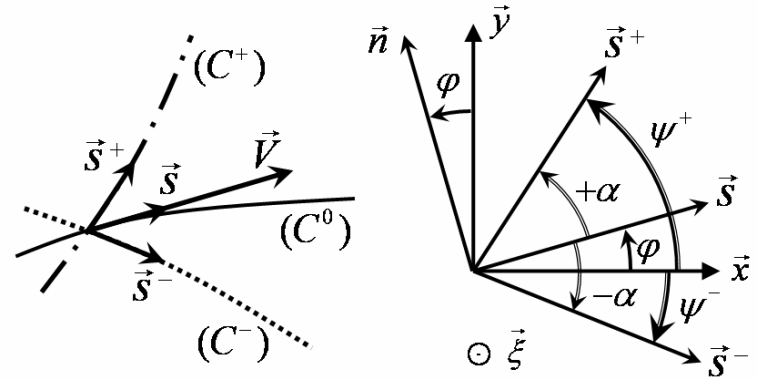


FIG. 3.2 – Définition des coordonnées liées aux lignes caractéristiques.

En exprimant la différentielle par rapport aux coordonnées caractéristiques, i.e. les abscisses curvilignes sur les lignes caractéristiques respectivement s^- et s^+,

$$(C^-): \quad \frac{\partial .}{\partial s^-} = \cos\alpha \frac{\partial .}{\partial s} - \sin\alpha \frac{\partial .}{\partial n} \tag{3.26}$$

$$(C^+): \quad \frac{\partial .}{\partial s^+} = \cos\alpha \frac{\partial .}{\partial s} + \sin\alpha \frac{\partial .}{\partial n} \tag{3.27}$$

dans les équations (3.17),(3.18), on obtient les relations de compatibilité :

$$(C^-): \quad \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s^-} - \frac{\partial \varphi}{\partial s^-} = 0 \tag{3.28}$$

$$(C^+): \quad \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s^+} + \frac{\partial \varphi}{\partial s^+} = 0 \tag{3.29}$$

3.2.1.4 Ecoulement plan isoénergétique et homentropique

Tant qu'il n'y a pas de choc, la pression génératrice définie par la relation isentropique

$$p_i = p\ \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\ M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3.30}$$

est constante sur chaque ligne courant, et y établit une bijection entre p et M. Si l'écoulement est isoénergétique ($H_i = constante$) et homentropique ($S = constante$), cette relation biunivoque entre p et M est uniforme dans tous l'écoulement et permet d'intégrer le terme de variation relative de pression en une fonction ν du nombre de Mach seulement, appelée "angle de déviation de Prandtl-Meyer" :

$$d\nu(p,M) = -\frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2}\frac{dp}{p} \text{ et } (3.30) \quad \Longrightarrow \quad d\nu(M) = \frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{dM}{M} \tag{3.31}$$

En choisissant $\nu(M=1)=0$, $d\nu$ s'intègre en :

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}(M^2-1)} - \arctan\sqrt{M^2-1} \tag{3.32}$$

On peut aussi exprimer ν en fonction de l'angle de Mach α :

$$\nu(\alpha) = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\arctan\left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\text{cotan}\alpha\right] + \alpha - \frac{\pi}{2} \tag{3.33}$$

En particulier, ν admet une limite finie en $M \to +\infty$:

$$\nu(M \to +\infty) = \frac{\pi}{2}\left[\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right] \quad \simeq 130\,\text{deg} \quad \text{pour } \gamma = 1.4 \tag{3.34}$$

Dans le cas d'un écoulement plan isoénergétique et homentropique, les équations de compatibilité peuvent être intégrées indépendemment de la géométrie de l'écoulement, pour donner à proprement parler des invariants de Riemann $J^{\pm 6}$ sur chaque ligne caractéristique :

$$(C^-): \quad \nu(M) + \varphi = J^- \tag{3.35}$$
$$(C^+): \quad \nu(M) - \varphi = J^+ \tag{3.36}$$

Dans un écoulement plan supersonique isoénergétique et homentropique, les conditions génératrices (p_i, T_i) sont homogènes, et seulement 2 variables, par exemple (M, φ) suffisent à décrire l'état du fluide (ρ, p, T, V, φ) en chaque point :

$$\frac{\rho}{\rho_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\,M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \tag{3.37}$$
$$\frac{p}{p_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\,M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{3.38}$$
$$\frac{T}{T_i} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\,M^2\right)^{-1} \tag{3.39}$$
$$\frac{V}{\sqrt{\gamma r T_i}} = M\,\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\,M^2\right)^{-1/2} \tag{3.40}$$

On peut alors définir 3 degrés croissants de complexité de l'écoulement plan isoénergétique et homentropique :

1. Le plus simple est l'écoulement uniforme caractérisé par un seul état (M, φ), les deux familles de caractéristiques ont chacune 1 invariant de Riemann constant dans toute la zone uniforme.
2. Ensuite, il y a l'écoulement à ondes simples pour lequel l'état (M, φ) est uniforme sur chaque ligne caractéristique d'une des 2 familles. Dans ce cas, l'état en un point ne dépend que d'une variable d'espace.
3. Enfin, dans le cas le plus général, l'écoulement a des états (M, φ) différents d'un point à tout autre point voisin. On dira alors que l'écoulement est à ondes non-simples. Dans ce cas, l'état en un point dépend des 2 variables d'espace.

A l'aide des équations de compatibilité (3.35),(3.36), on établit facilement les résultats suivants :
- l'état du fluide (M, φ) est uniforme sur une ligne caractéristique si et seulement si cette ligne est rectiligne ;
- une région est à ondes simples si et seulement si une famille possède des caractéristiques droites ;
- l'écoulement est à ondes simples si et seulement si, pour une des deux familles de lignes caractéristiques, l'invariant de Riemann est uniforme ;
- tout écoulement supersonique uniforme passe obligatoirement par une région à ondes simples

[6] Dans l'ensemble de ce chapitre, la notation $A^{\pm}$ sera largement utilisée pour dire que la quantité A est associé aux lignes caractéristiques (C^+) ou bien au (C^-). Lorsque plusieurs "$\pm$" ou "$\mp$" apparaissent dans une équation, celle-ci se lit soit avec tous les signes supérieurs soit avec tous les signes inférieurs.

avant de devenir à ondes non-simples ou avant de revenir continuement (au niveau des variables d'état) à un autre état uniforme ;
- plus généralement, si deux régions adjacentes d'un écoulement continu sont décrites par des fonctions analytiques différentes, leur ligne de séparation est nécessairement une ligne caractéristique ;
- la zone d'influence formée par une caractéristique droite et une ligne de courant sur laquelle 1 des 2 paramètres d'état est constant est uniforme.

3.2.1.5 Faisceaux de compression/détente

L'objet de ce paragraphe est de clarifier les notions physiques à déduire d'un réseau de lignes caractéristiques. Autrement dit, que peut-on dire des propriétés locales d'un écoulement isoénergétique et homentropique lorsqu'on dispose d'une cartographie de ses lignes caractéristiques ?

Les pentes locales respectives des lignes caractéristiques, représentées sur la figure 3.2, sont :

$$(C^-): \quad \psi^- = \varphi - \alpha \tag{3.41}$$

$$(C^+): \quad \psi^+ = \varphi + \alpha \tag{3.42}$$

Prenons un faisceau de caractéristiques d'une même famille, disons de (C^+). Choisissons une caractéristique (C^-) traversant le faisceau de part en part. En se déplaçant sur (C^-), les différentielles de (3.35) et (3.42) permettent d'écrire :

$$d^-\psi^+ = -d^-(\nu - \alpha) = -\frac{d(\nu-\alpha)}{dM}\frac{\partial M}{\partial s^-}ds^- \tag{3.43}$$

De même, si on se déplace sur une (C^+) traversant un faisceau de (C^-), (3.36) et (3.41) impliquent que :

$$d^+\psi^- = +d^+(\nu - \alpha) = +\frac{d(\nu-\alpha)}{dM}\frac{\partial M}{\partial s^+}ds^+ \tag{3.44}$$

Or la fonction $(\nu - \alpha)$ du seul nombre de Mach M est strictement croissante en fonction de M :

$$\frac{d(\nu-\alpha)}{dM} = \frac{1}{M\sqrt{M^2-1}}\left[\frac{M^2-1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}+1\right] > 0 \quad \forall M \tag{3.45}$$

Donc lorsque le nombre de Mach augmente à travers un faisceau de (C^+) (resp. de (C^-)), $d^-\psi^+ < 0$ (resp. $d^+\psi^- > 0$). A l'opposé, lorsque le nombre de Mach diminue à travers un faisceau de (C^+) (resp. de (C^-)), $d^-\psi^+ > 0$ (resp. $d^+\psi^- < 0$). Et Réciproquement. Avec (3.38), on peut en tirer l'enseignement suivant :

Si en se déplaçant sur une caractéristique $(C^\mp)$, les tangentes des caractéristiques $(C^\pm)$ du faisceau que l'on croise divergent, alors la vitesse augmente et la pression diminue. Le faisceau est alors appelé "faisceau de détente". Si en se déplaçant sur une caractéristique $(C^\mp)$, les tangentes des caractéristiques $(C^\pm)$ du faisceau que l'on croise convergent, alors la vitesse diminue et la pression augmente. Le faisceau est alors appelé "faisceau de compression". Et réciproquement.

De plus, la fonction $\frac{d(\nu-\alpha)}{dM}$ est strictement décroissante par rapport à M, donc à $d^\pm M$ donné, $|d^\pm\psi^\mp|$ décroit en fonction de M.

L'évolution de l'orientation φ du vecteur vitesse est immédiate compte-tenu de la relation de

compatibilité sur la caractéristique sécante du faisceau : φ varie toujours de manière à tourner vers le(s) point(s) de concours des tangentes au faisceau.

On attire ici l'attention du lecteur sur le fait que la phrase "la vitesse augmente et la pression diminue" ne signifie pas "l'écoulement accélère tout en se détendant", car on se déplace sur une ligne caractéristique et non sur une ligne de courant. Ce qui est trompeur ici, c'est que la pression génératrice est constante sur les lignes caractéristiques comme sur les lignes de courant. Pourtant, le choix des définitions de faisceau de détente/compression est justifié comme ce sera démontré dans la partie suivante.

Cas particulier en écoulement en ondes simples : Comme l'état du fluide est uniforme sur chaque caractéristique droite, une particule se déplaçant sur une ligne de courant passe par exactement tous les états rencontrés par une caractéristique quelconque qui traverserait tout le faisceau, d'où le résultat bien connu :
Une particule traversant un faisceau de caractéristiques en ondes simples convergentes est ralentie et comprimée. Une particule traversant un faisceau de caractéristiques en ondes simples divergentes est accélérée et détendue.

Maintenant que l'on sait comment varient les propriétés d'un écoulement lorsqu'on se promène sur une caractéristique, regardons comment se déforme une caractéristique en fonction de l'état de l'écoulement. Pour cela, il suffit de dériver respectivement (3.28),(3.41) et (3.29),(3.42), pour obtenir les variations de pente de la caractéristique lorsqu'on se déplace dessus :

$$(C^-) : d^-\psi^- = -d^-(\nu+\alpha) = -\frac{d(\nu+\alpha)}{dM}\frac{\partial M}{\partial s^-}ds^- \tag{3.46}$$

$$(C^+) : d^+\psi^+ = +d^+(\nu+\alpha) = +\frac{d(\nu+\alpha)}{dM}\frac{\partial M}{\partial s^+}ds^+ \tag{3.47}$$

La fonction $(\nu+\alpha)$ n'est pas monotone. Sa dérivée première s'annule pour le nombre de Mach d'inflexion :

$$M_I = \frac{2}{\sqrt{3-\gamma}} \qquad M_I(\gamma = 1,4) \approx 1.58 \tag{3.48}$$

$$\frac{d(\nu+\alpha)}{dM}\begin{cases} < 0 \; si \; M < M_I \\ > 0 \; si \; M > M_I \end{cases} \tag{3.49}$$

Cela signifie que tant que $M < M_I$, la caractéristique sécante s'incurve de manière à s'éloigner des points de concours des tangentes du faisceau. Lorsque $M > M_I$, la caractéristique sécante s'incurve vers les points de concours des tangentes.

Ce résultat provient du fait que tant que $M < M_I$, les pentes des caractéristiques sont majoritairement gouvernées par les accélérations du fluide, alors que lorsque $M > M_I$, elles sont majoritairement commandées par les déviations de l'écoulement. A la limite sonique, l'écoulement accélère en courbant fortement les lignes caractéristiques $d\alpha/dM \to -\infty$, tout en ne déviant quasiment pas l'écoulement $|d\varphi/dM| = d\nu/dM \to 0^+$.

Les équations (3.46),(3.47) montrent aussi que comme le nombre de Mach $M(x,y)$ est une fonction continue de (x,y) dans tout écoulement sans discontinuité de contact ou de choc, les pentes $\psi^{\mp}$ sont continues le long des caractéristiques, i.e. les lignes caractéristiques ne comportent pas de rupture de pente.

Ajoutons que lorsque une ligne de courant traverse un faisceau de détente ($dM > 0$) à ondes simples $C^{\mp}$, sa déviation $d\varphi = d^{\pm}\varphi$ est toujours plus petite que l'ouverture du faisceau $d\psi^{\mp} = d^{\pm}\psi^{\mp}$ en valeur absolue :

$$|d^{\pm}\psi^{\mp}| = |d^{\pm}\varphi \mp d^{\pm}\alpha| = |\pm|d\varphi| \pm |d\alpha|| = ||d\varphi| + |d\alpha|| > |d\varphi| \tag{3.50}$$

La même observation se fait pour une ligne de courant traversant une faisceau de compression (sans choc).

3.2.1.6 Croisement de deux faisceaux d'ondes

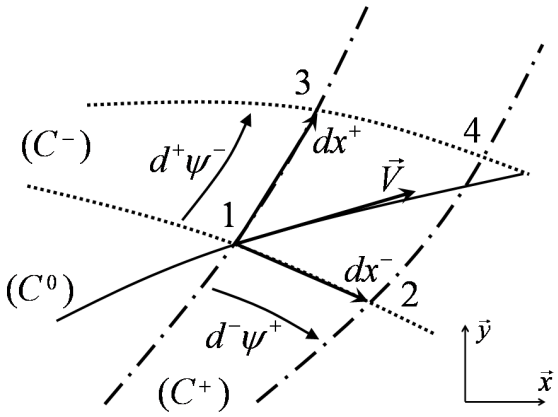


FIG. 3.3 – Schéma du croisement de deux faisceaux d'ondes de familles opposées.

Le but de cette partie est de comprendre les transferts d'informations lorsque deux faisceaux de caractéristiques de familles opposées se croisent. Pour cela, nous isolons une maille telle que schématisée sur la figure 3.3, formée de 4 points $\{1, 2, 3, 4\}$ reliés par 2 caractéristiques montantes (C^+_{12}) et (C^+_{34}) et deux caractéristiques descendantes (C^-_{13}) et (C^-_{24}). Remarquons que puisque nous disposons d'invariants de Riemann sur les caractéristiques, les variables φ et M sont comme des variables d'état au sens où leurs valeurs en un point ne dépendent pas du chemin suivi par les caractéristiques qui y passent. C'est pourquoi nous n'avons pas besoin de considérer une maille de dimension infinitésimale pour raisonner sur l'état de l'écoulement en ses 4 coins. Physiquement, les lignes caractéristiques propagent directement des ondes de pression et non des différences de vitesse (ou Mach) comme semble le montrer la fonction ν dans les équations (3.35),(3.36). C'est la raison pour laquelle nous utilisons ici le nombre de pression de Busemann $\mathcal{P}$[7] :

$$\mathcal{P}(M) = \mathcal{P}(1) - \nu(M) \tag{3.51}$$

toujours positif et lié de manière bijective à la pression statique p (p_i étant fixée) avec le même sens de variation. En combinant les équations de compatibilité, on obtient :

$$\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1 \tag{3.52}$$
$$\varphi_4 - \varphi_3 = \varphi_2 - \varphi_1 \tag{3.53}$$
$$\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1 \tag{3.54}$$
$$\varphi_4 - \varphi_2 = \varphi_3 - \varphi_1 \tag{3.55}$$

[7]Il est souvent convenu de prendre la constante $\mathcal{P}(1)$ égale à 1000. Un autre choix pourrait être $\nu(M \longrightarrow \infty)$.

Les équations (3.52) et (3.54) sont identiques ainsi que (3.53) et (3.55). Elles expriment la propriété suivante : le saut du nombre de pression $\mathcal{P}$ et le saut de l'angle d'orientation φ du vecteur vitesse à travers un faisceau d'onde est conservé le long du faisceau.

(s^-, s^+) ne forment pas un système de coordonnées curvilignes et en particulier leur dérivées partielles ne commutent pas. En adoptant un système de coordonnées curvilignes (x^-, x^+) défini par : $ds^\mp = h^\mp dx^\mp$, où $h^\mp$ sont les normes respectives des vecteurs de la base locale naturelle (cf. [46]), (3.52) à (3.55) peuvent être transcrits en termes différentiels :

$$d^- \left[d^+\mathcal{P}\right] = 0 \tag{3.56}$$
$$d^- \left[d^+\varphi\right] = 0 \tag{3.57}$$
$$d^+ \left[d^-\mathcal{P}\right] = 0 \tag{3.58}$$
$$d^+ \left[d^-\varphi\right] = 0 \tag{3.59}$$

avec la notation $d^\mp . = \partial./\partial x^\mp dx^\mp$[8]. Comme précédemment, les équations (3.56) et (3.58) sont identiques ainsi que (3.57) et (3.59), en raison de la commutativité des différentielles qui viennent d'être définies.

Les équations (3.56) et (3.58) justifient les définitions des faisceaux de détente/compression faites dans la partie précédente : puisque la variation du nombre de pression se conserve sur tout le faisceau, un faisceau de détente (resp. de compression) reste un faisceau de détente (resp. de compression) dans tout l'écoulement.
On peut alors définir la quantité $d^\pm\mathcal{P}$ pour un faisceau de $(C^\mp)$ comme l'"amplitude algébrique" de la détente, si $d^\pm\mathcal{P} < 0$, ou de la compression, si $d^\pm\mathcal{P} > 0$, car cette quantité se conserve tout le long du faisceau d'ondes, quelque soit la nature des faisceaux de la famille opposée. L'amplitude du faisceau peut s'exprimer, de manière totalement équivalente, en terme de déflection $d^\pm\varphi$ puisque $d^\pm\varphi = \mp d^\pm\mathcal{P}$, mais cela est moins pratique : un faisceau d'ondes de compression montantes est caractérisé par $d^-\varphi > 0$ alors qu'un faisceau d'ondes de compression descendantes par $d^+\varphi < 0$.

Les équations de compatibilité peuvent être manipulées de manière à faire apparaitre l'influence des états en (2) et (3) sur l'état en (4) relativement à (1). D'une part, les influences de même nature :

$$(\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1) = (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1) + (\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1) \tag{3.60}$$
$$(\varphi_4 - \varphi_1) = (\varphi_2 - \varphi_1) + (\varphi_3 - \varphi_1) \tag{3.61}$$

D'autre part, les influences mixtes :

$$(\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1) = (\varphi_3 - \varphi_2) \tag{3.62}$$
$$(\varphi_4 - \varphi_1) = (\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_2) \tag{3.63}$$

La relation (3.60) peut s'interpréter comme la superposition des ondes de pression provenant de (2) et (3) relativement à (1). Si l'on considère le cas particulier où le point (4) appartient à la ligne de courant (C^0) issue du point (1)[9], l'utilisation des relations (3.62) à (3.63) permet de comprendre l'évolution d'une particule dans son déplacement de (1) vers (4) en fonction

[8] En d'autres termes, si le long d'une (C_1^+), on se décale de $ds^- \overrightarrow{s}^-$, avec ds^- constant, on se décale d'une distance constante, alors que si on se décale de $dx^- \overrightarrow{x}^-$, avec dx^- constant, on tombe toujours sur la même (C_2^+) voisine.

[9] les points (1) et (4) sont sur la même ligne de courant ssi les débits passant à travers $[C_{12}^+]$ et $[C_{24}^-]$ sont égaux, $\int_1^2 \rho a(M) ds^+ = \int_3^4 \rho a(M) ds^-$.

des états aux points (2) et (3). La relation (3.62) peut alors être considérée comme la version intégrale supersonique de l'équation locale intrinsèque (3.17) que l'on peut résumer en conservation de la masse (les conservations de H_i et S étant implicites). La relation (3.63) peut, elle, être interprétée comme la version intégrale supersonique de l'équation locale intrinsèque (3.18) qui caractérise l'équilibre transverse de la ligne de courant soumis aux forces de pressions latérales. Cependant, les relations (3.62) et (3.63) sont plus générales que cela puisque le point (4) ne se situe pas obligatoirement sur la ligne de courant passant par le point (1).

Regardons maintenant comment évolue l'ouverture d'un faisceau de (C^+) donné par la formule (3.43) lorsqu'il traverse un faisceau de (C^-). L'ouverture ou fermeture du faisceau est proportionel(le) (au premier ordre) à la variation du nombre de pression à travers le faisceau de (C^+) :

$$d^-\psi^+ = -d^-(\nu-\alpha) \quad = \tfrac{d(\nu-\alpha)}{d\nu} d^-\mathcal{P} = -\left[1-\left(\tfrac{d\nu}{d\alpha}\right)^{-1}\right] d^-\mathcal{P} \tag{3.64}$$

En utilisant (3.33), on déduit :

$$\tfrac{d\nu}{d\alpha} = -\tfrac{2}{\gamma-1}\left(1+\tfrac{\gamma+1}{\gamma-1}\tan^2\alpha\right)^{-1} \tag{3.65}$$

$$d^-\psi^+ = \tfrac{\gamma-1}{2}\tfrac{1}{\cos^2\alpha} d^-\mathcal{P} \tag{3.66}$$

et avec la relation (3.58), on obtient la variation à la traversée du faisceau de (C^-) de l'ouverture du faisceau de (C^+) :

$$d^+\left[d^-\psi^+\right] = \frac{(\gamma-1)(\gamma+1)}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha}\left(1+\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\tan^2\alpha\right) d^-\mathcal{P}\; d^+\mathcal{P} \tag{3.67}$$

On peut faire de même pour la variation de pente du faisceau de caractéristiques descendantes (C^-) :

$$d^+\psi^- = -\frac{\gamma-1}{2}\frac{1}{\cos^2\alpha} d^+\mathcal{P} \tag{3.68}$$

et on obtient en raison de la commutativité des dérivées par rapport à x^- et x^+ :

$$d^-\left[d^+\psi^-\right] = -d^+\left[d^-\psi^+\right] \tag{3.69}$$

qui signifie que l'écartement que crée un faisceau d'ondes montantes sur un faisceau d'ondes descendantes et égal à celui que crée le faisceau d'ondes descendantes sur le faisceau d'ondes montantes. Il y a "réciprocité des ouvertures des faisceaux sécants".

Si on considère un faisceau montant de détente, d'aprés (3.66) $d^-\mathcal{P} < 0 \Rightarrow d^-\psi^+ < 0$, la relation (3.67) nous dit qu'un faisceau descendant de détente ($d^+\mathcal{P} < 0$) pincera le faisceau montant, $d^+\left[d^-\psi^+\right] > 0$, alors qu'un faisceau descendant de compression ($d^+\mathcal{P} > 0$) l'écartera, $d^+\left[d^-\psi^+\right] < 0$.

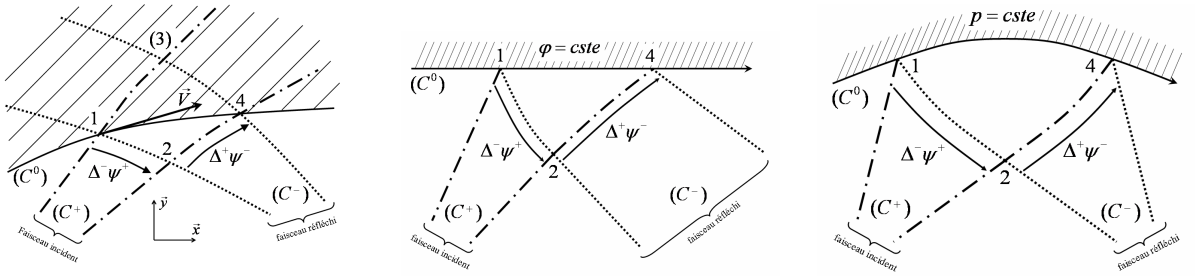
Le tableau (3.1) récapitule toutes les variations possibles. Comme la fonction $d^+\left[d^-\psi+\right]/d^-\mathcal{P}\; d^+\mathcal{P}(\alpha)$ est strictement croissante par rapport à α, en particulier $d^+\left[d^-\psi+\right]/d^-\mathcal{P}\; d^+\mathcal{P}(\alpha=0) = 0$ et $d^+\left[d^-\psi+\right]/d^-\mathcal{P}\; d^+\mathcal{P}(\alpha\to\pi/2) \to +\infty$, la relation (3.67) permet de dire que le côté du faisceau le plus écarté par le croisement d'un faisceau de la famille opposé correspond au nombre de Mach le plus faible.

	Ondes descendantes (C^-) de		Ondes montantes (C^+) de	
	détente	compression	détente	compression
amplitude	$d^+\mathcal{P} < 0$	$d^+\mathcal{P} > 0$	$d^-\mathcal{P} < 0$	$d^-\mathcal{P} > 0$
variation de pente	$d^+\psi^- > 0$	$d^+\psi^- < 0$	$d^-\psi^+ < 0$	$d^-\psi^+ > 0$
allure des tangentes	divergentes	convergentes	divergentes	convergentes
évolution de la pente lors d'un croisement avec un faisceau de :				
détente	$d^-\psi^- > 0$ si $M < M_I$ $d^-\psi^- < 0$ si $M > M_I$		$d^+\psi^+ < 0$ si $M < M_I$ $d^+\psi^+ > 0$ si $M > M_I$	
compression	$d^-\psi^- < 0$ si $M < M_I$ $d^-\psi^- > 0$ si $M > M_I$		$d^+\psi^+ > 0$ si $M < M_I$ $d^+\psi^+ < 0$ si $M > M_I$	
évolution de l'angle d'ouverture lors d'un croisement avec un faisceau de :				
détente	$d^-[d^+\psi^-] < 0$ fermeture	$d^-[d^+\psi^-] > 0$ ouverture	$d^+[d^-\psi^+] > 0$ fermeture	$d^+[d^-\psi^+] < 0$ ouverture
compression	$d^-[d^+\psi^-] > 0$ ouverture	$d^-[d^+\psi^-] < 0$ fermeture	$d^+[d^-\psi^+] < 0$ ouverture	$d^+[d^-\psi^+] > 0$ fermeture

TAB. 3.1 – Récapitulatif sur la courbure des ondes de Mach et l'ouverture des faisceaux d'ondes lors d'un croisement avec un faisceau de l'autre famille.

3.2.1.7 Réflexion des ondes de Mach

Les équations (3.35) et (3.36) permettent de calculer l'état d'un point (4), intérieur au domaine fluide $\mathcal{D}$ ou appartenant à une frontière de fluide sortant, à partir de la connaissance de l'écoulement en deux points (2) et (3) quelconques des caractéristiques respectivement montante et descendante passant par (4) (voir figure 3.3). Lorsque le point (4) est sur une frontière imperméable du domaine, i.e. sur une ligne de courant (C^0), par exemple comme sur la figure 3.4(a), l'information provenant du point (3) via la relation de compatibilité de la caractéristique descendante (3.35) est remplacée par une condition limite de la forme $f(p_0, \varphi_0) = 0$, où $p_0(s)$ et $\varphi_0(s)$ sont les distributions de pression et de direction de la vitesse le long de (C^0). Cependant, il est toujours possible d'imaginer un écoulement externe fictif (hachuré sur la figure 3.4(a)), continu avec $\mathcal{D}$ sur (C^0), permettant d'obtenir les mêmes conditions sur la ligne de courant-frontière. Dans le cas où (C^0) est une paroi plane (figure 3.4(b)), la condition limite se réduit



(a) **réflexion d'ondes et écoulement fictif**

(b) **réflexion sur ligne de courant isobare**

(c) **réflexion sur paroi rectiligne**

FIG. 3.4 – Schéma de la réflexion d'un faisceau d'ondes sur une ligne de courant.

à φ_0 = constante. D'après (3.63), la réflexion sur une paroi plane est équivalente au croisement d'un faisceau de même nature et de même amplitude absolue : $(\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1) = (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1)$. Dans le cas où ($C^0$) est une ligne de glissement isobare (figure 3.4(c)), p_0 = constante. D'après (3.60),

la réflexion sur une ligne de glissement isobare est équivalente au croisement d'un faisceau de nature opposée et de même amplitude absolue : $(\mathcal{P}_3 - \mathcal{P}_1) = -(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1)$. Lorsqu'une onde de Mach impacte une ligne de courant-frontière, l'onde de la famille opposée en repart forcément avec le même angle α. Les ondes de Mach (contrairement aux ondes de choc) se réfléchissent donc comme des rayons lumineux. La réflexion d'un faisceau d'ondes est, elle, plus complexe, car les ondes réfléchies doivent traverser les ondes du faisceau non encore réfléchies. La région d'interaction est délimitée sur la figure 3.4(a) par le triangle curviligne (124). Ayant introduit les faisceaux fictifs provenant du dessus de la ligne (C^0), il est alors possible d'utiliser les résultats concernant le croisement de faisceaux d'ondes (table (3.1)) pour prévoir comment le faisceau se réfléchit. En particulier, un faisceau de détente (resp. compression) impactant une paroi rectiligne se réfléchit en un faisceau de détente (resp. compression) plus fermé que le faisceau incident. De même, un faisceau de détente impactant une ligne de courant isobare se réfléchit en un faisceau de compression d'angle de fermeture égal à l'angle d'ouverture du faisceau incident.
Plus généralement, sur une paroi imposant la direction de l'écoulement, il suffit d'écrire :

$$(\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_2) \quad = (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1) - (\varphi_4 - \varphi_1) \tag{3.70}$$

pour se rendre compte que l'amplitude de déviation de la paroi $(\varphi_4 - \varphi_1)$ conditionne l'amplitude algébrique du faisceau réfléchi, et donc sa nature (compression ou détente). De même avec la variation de pression imposée sur une ligne de courant :

$$(\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_2) \quad = (\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1) - (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1) \tag{3.71}$$

Enfin, il est utile de noter que la réflexion d'un faisceau d'ondes d'amplitude $(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1)$ sur une ligne de glissement à variation de pression imposée $(\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1)$ est équivalente à la réflexion du même faisceau[10] sur une paroi imposant la déflexion

$$(\varphi_4 - \varphi_1) \quad = 2(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1) - (\mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_1) \tag{3.72}$$

et inversement.

3.2.1.8 La détente centrée de Prandtl-Meyer

La détente centrée de Prandtl-Meyer est un écoulement-modèle pour illustrer les notions présentées précédemment car on dispose d'une solution analytique qui permet d'avoir une vision géométrique de l'écoulement, alors que jusqu'à présent nous n'en avions qu'une vision topologique de ses états (p, φ). Prenons un écoulement uniforme (M_0, φ_0) de pression statique p_0 séparé d'un fluide immobile à pression $p_1 < p_0$ par une paroi haute jusqu'à un point O. L'écoulement s'adapte de p_0 à p_1 en passant à travers une détente centrée à ondes simples descendantes (C^-) nécessairement droites. Le système de coordonnées tout désigné ici est le système polaire (r, θ) de centre O et d'origine azimutale la première (C^-) du faisceau de détente. Dans ce système, les (C^-) sont les rayons repérés par l'azimut θ. L'équation d'un ligne caractéristique montante (C^+) issue du point $(r = r_0, \theta = 0)$ peut être paramétrée par le nombre de Mach (cf. Annexe C.1) :

$$r^+(M) \quad = \quad r_0 \frac{f^+(M)}{f^+(M_0)} \quad \text{avec} \quad f^+(M) = \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}{(M^2-1)^{1/4}} \tag{3.73}$$

$$\theta^+(M) \quad = \quad \varphi_0 + [\nu(M) - \nu(M_0)] - \arcsin(1/M) \tag{3.74}$$

[10] L'équivalence ne vaut que pour un faisceau incident donné, comme le terme $2(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1)$ le dit explicitement dans la relation (3.72).

De même, une ligne de courant issue du point $(r = r_0, \theta = 0)$ a pour équation paramétrique :

$$r^0(M) \quad = \quad r_0 \frac{f^0(M)}{f^0 + (M_0)} \quad \text{avec} \quad f^0(M) = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \tag{3.75}$$

et $\theta^0(M) = \theta^+(M)$. Un tel écoulement est représenté figure 3.5 pour un écoulement initial sonique $(M_0 = 1, \varphi_0 = 0)$ détendu jusqu'au vide (bien que l'hypothèse de milieu continu ne tienne plus du tout !).

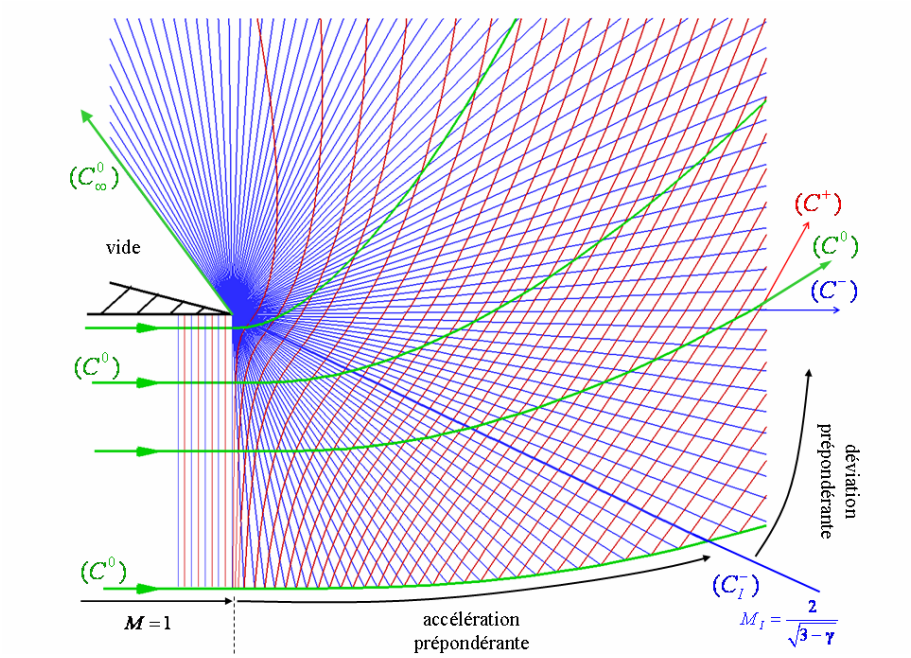


FIG. 3.5 – Réseau de caractéristiques et lignes de courant dans une détente centrée amenant un écoulement sonique à la pression nulle.

On distingue nettement la différence de courbure des caractéristiques montantes de part et d'autre de la caractéristique descendante (C_I^-) où $M = M_I$. Pour $M < M_I$, les lignes caractéristiques (C^+) sont principalement courbées vers le bas par la diminution de α i.e. l'accélération du fluide (figure 3.6(a)), alors que pour $M > M_I$, elles sont incurvées vers le haut sous l'action prédominante de la déviation des lignes de courant (figure 3.6(b)).

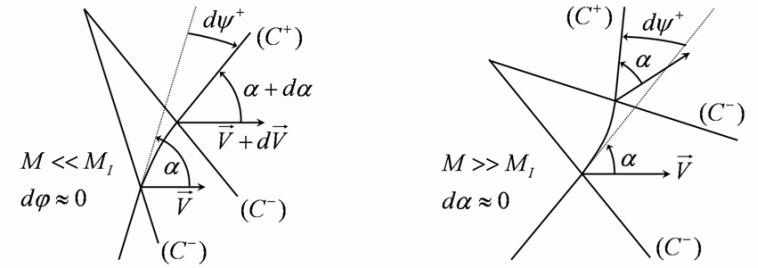


FIG. 3.6 – Schéma illustrant les deux régimes de déviation des lignes caractéristiques.

3.2.2 Ondes de choc dans un écoulement supersonique plan

3.2.2.1 Focalisation d'ondes, formation de chocs obliques et de lignes de vorticité

Le raisonnement conduisant aux équations de compatibilités suppose implicitement que les lignes caractéristiques d'une même famille ne se coupent pas[11]. Dans le cas contraire, les relations de compatibilité sont surabondantes pour déterminer un état (M, φ) unique au point de concours. Par exemple, le centre O d'une détente centrée est un point singulier puisqu'il possède une infinité d'états. Ceci ne pose pas de problème puisque O est sur la frontière du domaine fluide. Si l'on inverse le sens de l'écoulement d'une détente, on obtient une compression isentropique. La figure 3.7 illustre une telle compression, ralentissant un écoulement uniforme de $M_0 = 2.6$ à $M_1 = 1.52$. Le faisceau d'ondes de compression issu de la rampe peut être considéré comme la réflexion d'un faisceau d'ondes parallèles ($d\mathcal{P} = 0$) provenant de l'écoulement uniforme (0) sur la paroi incurvée selon la relation (3.72).

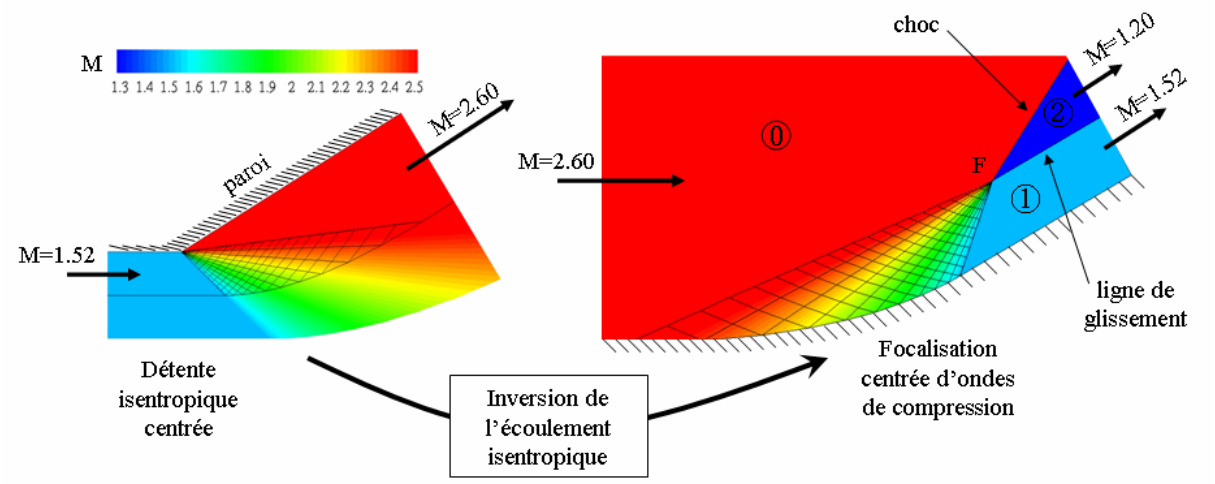


FIG. 3.7 – Inversion d'une détente centrée en compression isentropique centrée et focalisation des ondes en un point.

En ralentissant, l'écoulement s'échauffe et augmente alors la vitesse des ondes de pression. Les deux phénomènes coopèrent pour accélérer la propagation latérale des ondes au détriment de leur propagation dans l'axe de la vitesse amont et ouvrent ainsi le cône de Mach. De plus, cette tendance est amplifiée par la déviation de l'écoulement qui se traduit par un basculement du cône. Tout contribue donc à ce que les ondes de pression provenant de l'amont rattrapent les ondes de compression en aval et les "croisent", on dit qu'elles focalisent. Dans le cas particulier décrit par la figure 3.7, la focalisation des ondes se produit en un seul et unique point F. Au delà du point F, les ondes montantes (C^+) provenant de l'amont et de l'aval de la rampe de compression se croisent le long d'une ligne, dans ce cas rectiligne, au travers de laquelle l'écoulement est discontinu et subit un choc. La figure 3.8 illustre une propriété essentielle des chocs obliques avec écoulement aval supersonique : une onde de choc montante (resp. descendante) est touchée à la fois par des ondes montantes (resp. descendantes) provenant de l'amont et celles venant de l'aval. Ceci découle [125] d'une part du fait que la vitesse normale aux ondes de Mach est sonique et d'autre part du fait que la vitesse normale au choc est nécessairement supersonique en amont et subsonique en aval. Un choc, qu'il soit droit ou oblique, est donc influencé à la fois par (une partie de) l'écoulement amont et par (une partie de) l'écoulement aval[12].

[11] Explicitement, on doit supposer que le changement de variable $(x, y) \to (\tilde{s}, \tilde{n})$ est bijectif.

[12] En fait, c'est la non-compatibilité des conditions en amont et en aval du choc qui se confrontent au lieu du choc pour le former.

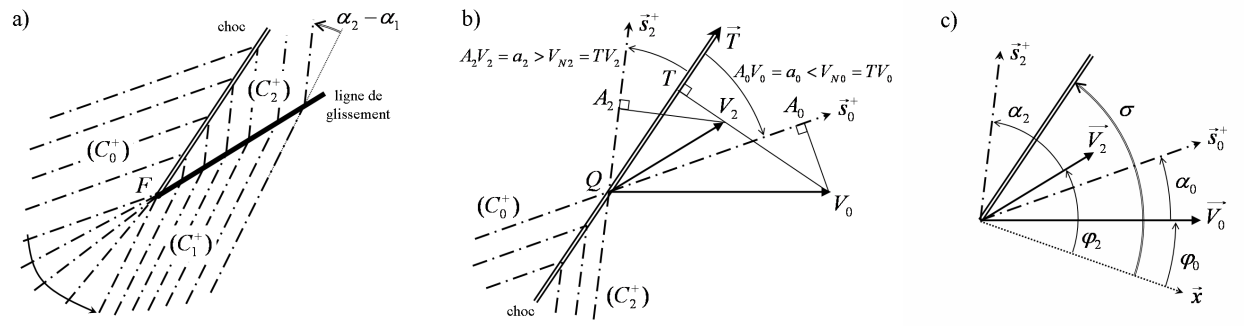


FIG. 3.8 – Ondes de Mach autour du choc oblique et de la ligne de glissement.

L'écoulement (2), qui a traversé le choc, a augmenté son entropie et a donc diminué sa pression génératrice (la température totale étant conservée à la travers du choc) alors que le fluide (1), ayant suivi la compression isentropique, a gardé la pression isentropique initiale. Pour que la ligne de glissement entre les écoulements (1) et (2) soit en équilibre, la pression doit nécessairement être continue à sa traversée, ce qui implique que l'écoulement (1), ayant une plus grande pression totale que (2), est plus rapide. Dans notre exemple (figure 3.7), les nombres de Mach en aval de la rampe sont respectivement $M_1 = 1.52$ et $M_2 = 1.20$, ce qui conduit avec une température génératrice de $T_i = 300K$, à une discontinuité de vitesse relative de $2|V_{T1} - V_{T2}|/|V_{T1} + V_{T2}| = 17\%$. Au niveau de la surface de glissement, les ondes de Mach subissent une discontinuité de pente $[\arcsin(1/M_2) - \arcsin(1/M_1)]$.

3.2.2.2 Equilibrage de la ligne de glissement par choc ou faisceau de détente

L'écoulement représenté sur la figure 3.7 est très particulier, puisqu'il suppose que pour la même déviation δ de l'écoulement amont, le choc impose le même saut de pression p_1/p_0 que la compression isentropique : l'"équilibre pression-déviation" de la ligne de glissement séparant les écoulements qui traversent d'un côté la compression isentropique et de l'autre le choc, est donc satisfait. Le graphe (p, φ) de la figure 3.9 montre la polaire des chocs incidents possibles à partir de l'écoulement amont ($M_0 = 2.6$) (courbe bleue), , ainsi qu'une portion de la polaire décrivant les compressions isentropiques à partir des conditions amont (courbe noire). Les grandeurs de référence sont celles de l'écoulement amont ($p_0, \varphi_0 = 0$). La configuration introduite ci-dessus correspond à une déviation $\delta_e \approx 29\,\text{deg}$. L'équilibre pression-déviation est représenté par le symbole ● situé à l'intersection de la polaire du choc incident et de la polaire isentropique .

En dehors de ce cas idéal, deux situations peuvent se produire :
a) Pour des déviations plus petites, $\delta < \delta_e$, la compression isentropique est plus forte que le choc ($p_1 > p_2$) et l'équilibre de la ligne de glissement est assurée par un faisceau d'ondes de détente descendantes centrées en F. L'écoulement inférieur (2) se détend isentropiquement suivant la courbe verte jusqu'à atteindre le point d'équilibre pression-déviation (3) avec l'écoulement (2).
b) Pour des déviations plus importantes, $\delta > \delta_e$, la compression est plus faible que le choc ($p_1 < p_2$) et l'équilibre de la ligne de glissement est assurée par une onde de choc descendante (portion de polaire de choc rouge) issue de F.

Cependant, on peut constater que les courbes du choc incident (portion choc faible) et de la compression isentropique sont quasiment confondues. Pour de faible déviations, les développements de Taylor des deux évolutions sont identiques jusqu'au $2^{\text{ème}}$ ordre compris. Pourtant, la comparaison des polaires (p, φ) (cf. Annexe (C.2)) montre que les évolutions par choc ou compression isentropique sont quasiment confondues pour des angles allant jusqu'à $\delta \approx 30\,\text{deg}$ et $M_0 \approx 3$.

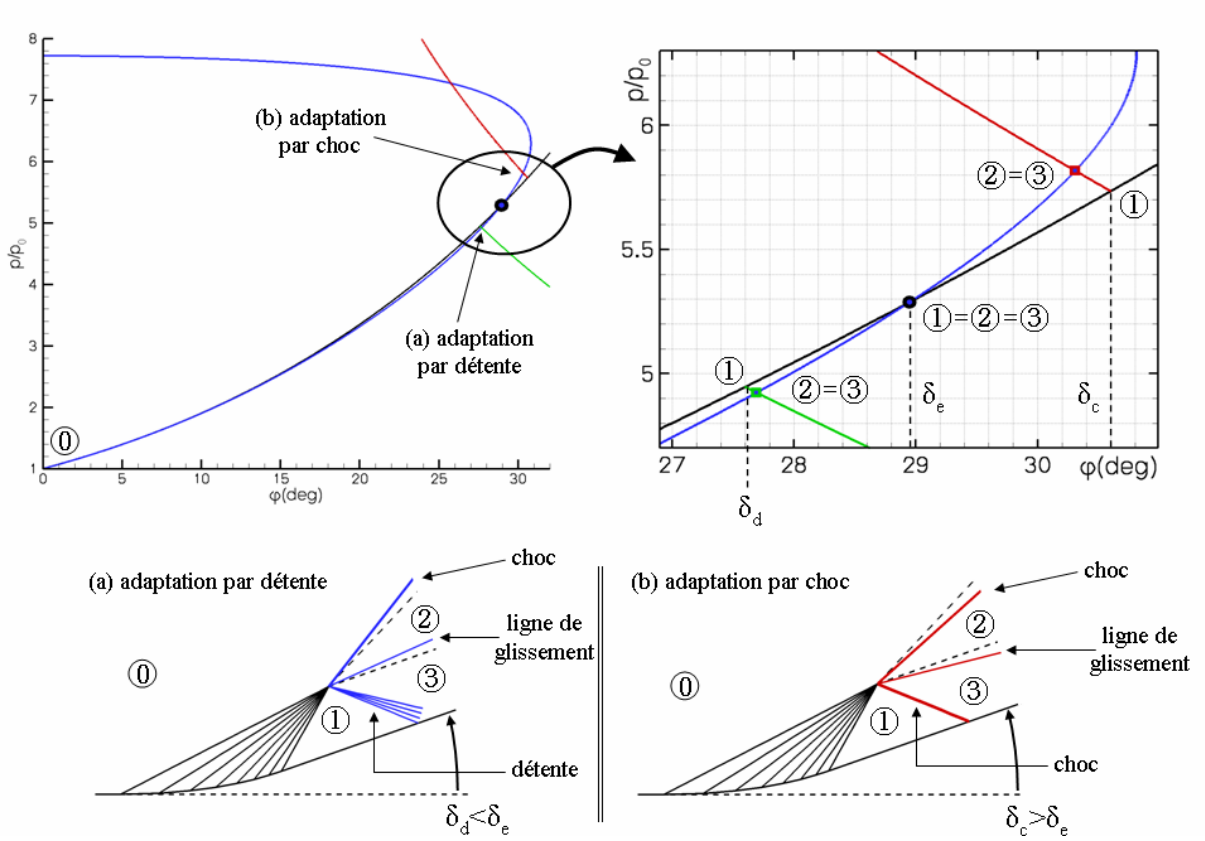


FIG. 3.9 – Focalisation et création de faisceaux de détente ou de chocs.

La détente ou la compression chargée d'équilibrer l'écoulement (1) avec (2) est donc en pratique négligeable pour $M_0 < 3$.

3.2.2.3 Focalisation des ondes de Mach et ondes de choc : généralisation

Dans le cas général, les ondes de compression admettent, si l'extension du domaine le permet, une enveloppe non dégénérée en un point unique F, comme cela vient d'être présenté. La figure 3.10 montre les ondes réfléchies (droites noires) sur une rampe à rayon de courbure constant R_0 amenant un écoulement uniforme $M_0 = 3$ jusqu'à la vitesse du son [13]. L'enveloppe de ces ondes simples (en rouge) possède un point de rebroussement R. On montre que R est situé sur la caractéristique (C_R^+) repérée par le nombre de Mach M_R, fonction de γ uniquement (pour $\gamma = 1.4$, $M_R \approx 1.33$) :

$$M_R = \sqrt{\left[(\gamma - 1) + \sqrt{\gamma^2 + \gamma + 1}\right]} \tag{3.76}$$

En fonction du nombre de Mach local, on peut distinguer deux modes de coalescence des ondes de compression :
a) pour $M > M_R$, le point de l'enveloppe se déplace, au cours de la compression, dans le sens de propagation des ondes qui coalescent (de E_0 vers R sur la figure 3.10),
b) pour $M < M_R$, le point de l'enveloppe se déplace dans le sens opposé aux ondes qui le forment (i.e. de R vers E_1), car, la vitesse se rapprochant de la célérité du son, l'ouverture du cône de Mach s'amplifie relativement à la déviation et à l'avancée de l'écoulement.

[13] Tous les développements analytiques de cette section ont été reportés en annexe C.3.

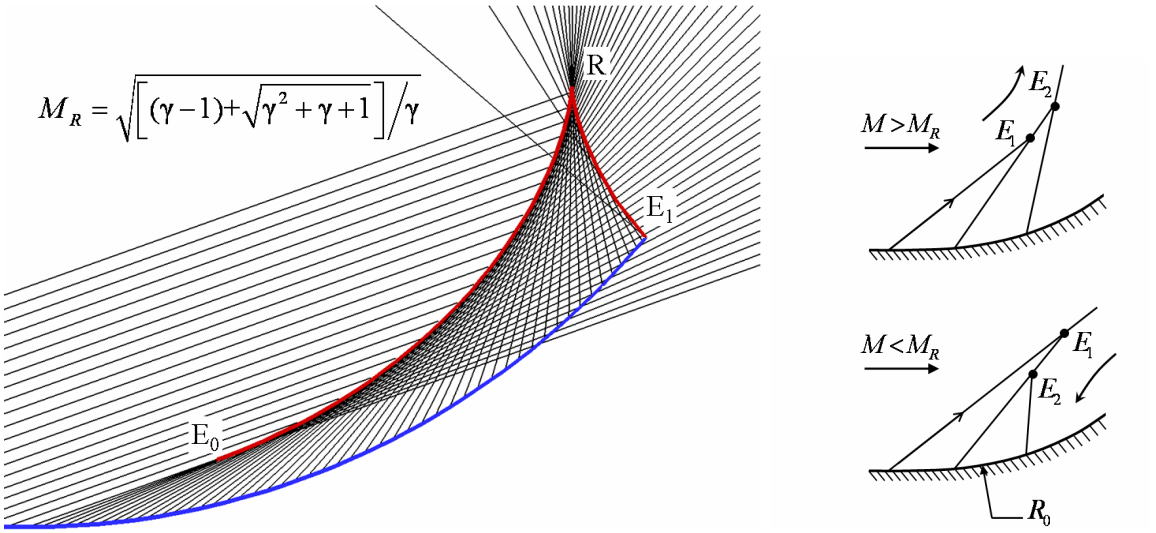


FIG. 3.10 – Enveloppe d'un faisceau d'ondes de compression simples sur une rampe à courbure constante et modes de coalescence.

Toutefois, cette enveloppe n'a pas d'existence physique. Le seul et unique point de l'enveloppe qui a une signification physique est le point asymptotique tel que toutes les caractéristiques de la même famille qui y aboutissent ont la même pente. Ce point, noté F et appelé "point de focalisation" du faisceau d'onde de compression, initie un choc dit de focalisation. Pour comprendre comment évolue ce choc à partir de F, il est nécessaire de revenir sur la vision générale du choc oblique.

En supposant que l'écoulement en aval du choc oblique est toujours supersonique, le choc peut être considéré comme un front de discontinuité assurant la compatibilité entre deux réseaux de caractéristiques de la même famille n'ayant pas les mêmes pentes, localement $\psi_0^+ = (\varphi_0 + \alpha_0)$ et $\psi_2^+ = (\varphi_2 + \alpha_2)$ pour le cas d'un choc montant et avec les notations de la figure 3.8. L'écoulement amont étant fixé, le choc est d'autant plus intense et plus redressé, i.e. p_2/p_0 et σ sont d'autant plus grands, que l'angle $\Delta\psi = (\psi_2^+ - \psi_0^+)$, formé par les caractéristiques en aval relativement à celles en amont, est grand. La pente du choc σ, rendant compatible les deux réseaux d'ondes, s'équilibre entre ψ_0^+ et ψ_2^+, comme il a été dit plus haut.

Dès la naissance du choc en F, le saut subit par l'entropie qui est convectée le long des lignes de courant (C^0), influence la propagation des ondes de Mach en aval (notamment les (C^+) sur la figure 3.10 qui ne sont alors plus des ondes simples), et donc leur enveloppe. Cependant, au voisinage de F, $\Delta\psi$ étant infiniment petit, le choc peut être assimilé à une compression isentropique au $3^{\text{ème}}$ ordre près, donc l'enveloppe donne, dans ce voisinage, la forme et la direction initiales du choc de focalisation. Ultérieurement, l'enveloppe formée par les ondes simples ou corrigée par les sauts d'entropie met en évidence l'existence du choc de focalisation, même si elle n'est pas confondue avec lui. En effet, le choc n'est pas dû à la coalescence des ondes qui forment l'enveloppe, puisqu'elles forment entre elles un angle $\Delta\psi$ infinitésimal. Le choc de focalisation apparaît car les ondes du faisceau de compression rencontrent les ondes de la même famille provenant de l'amont, si $M > M_R$, ou de l'aval, si $M < M_R$ est fini, avec un angle $\Delta\psi$ fini. En progressant à partir de F, le long de l'enveloppe, cet angle $\Delta\psi$ matérialisé par la caractéristique tangente à l'enveloppe et la caractéristique en amont, si $M > M_R$, ou en aval, si $M < M_R$, s'accroît et requiert l'existence d'un choc qui assure la compatibilité entre les deux réseaux d'ondes. Le choc de focalisation s'équilibre alors en se courbant vers le côté de l'enveloppe d'où

proviennent les ondes qui la forment.

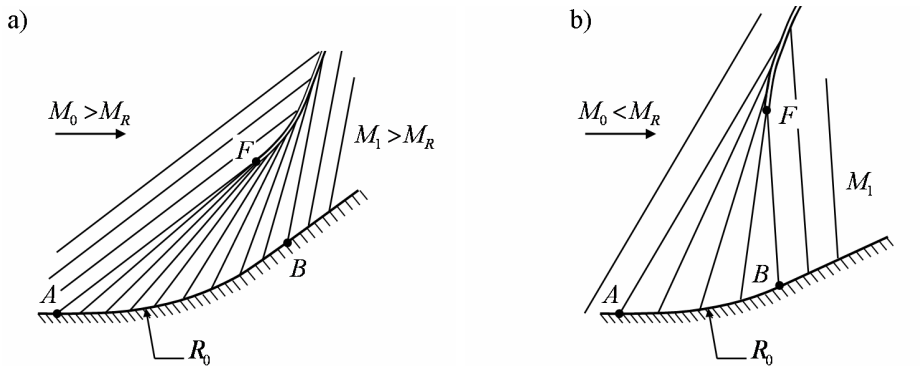


FIG. 3.11 – Schéma de la position du point de focalisation suivant le mode de coalescence.

Dans le cas où le nombre de Mach en fin de compression M_1 (en B sur la figure 3.11(a)) ne descend pas en dessous de M_R, la position du point de focalisation F est définie sur la première onde du faisceau de compression (AF) :

$$AF = R_0 \frac{2}{\gamma+1} \frac{M_0^2 - 1}{M_0^3} \tag{3.77}$$

Inversement, si $M_0 < M_R$ (figure 3.11(b)), F est positionné sur la dernière onde du faisceau de compression (BF) :

$$BF = R_0 \frac{2}{\gamma+1} \frac{M_1^2 - 1}{M_1^3} \tag{3.78}$$

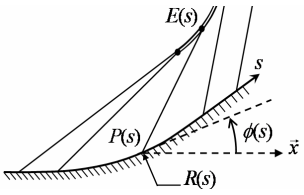
De manière plus générale, l'enveloppe (E) des ondes simples sur une rampe de compression quelconque, dont on connaît a priori la position, la pente $\phi(s)$ et la courbure $R(s)$ en tout point P repéré par l'abscisse curviligne s, a pour équations :

$$PE(s) = R(s) \frac{2}{\gamma+1} \frac{M^2(s) - 1}{M^3(s)} \left(1 + \frac{dR}{ds}(s) \sqrt{M^2(s) - 1} \right) \tag{3.79}$$

$$(\overrightarrow{PE}, \overrightarrow{x})(s) = \phi(s) + \arcsin(1/M(s)) \tag{3.80}$$

$$\text{avec} \quad M(s) = \nu^{-1}(\nu(M_0) - \phi(s)) \tag{3.81}$$

Notations pour la définition de l'enveloppe :



Le mode de coalescence des ondes est alors déterminé non seulement par le nombre de Mach local $M(s)$ mais aussi par l'évolution de la courbure de la rampe dR/ds. Sur cette enveloppe, seul le point de focalisation F a une signification physique et sa position sur la première ou la dernière onde du faisceau de compression suivant le mode de coalescence, est donnée par :

$$PF = R_P \frac{2}{\gamma+1} \frac{M_P^2 - 1}{M_P^3} \left(1 + \left(\frac{dR}{ds} \right)_P \sqrt{M_P^2 - 1} \right) \tag{3.82}$$

où P est le point de l'onde à la paroi (analogue de A ou B sur (3.11)(a) ou (b)).

Enfin, la pression statique $p_0 = p_{i0}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_0^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ subit à la traversée d'un choc incliné de σ par rapport à une direction fixe $\overrightarrow{x}$, un saut positif d'autant plus important que le nombre de Mach normal $M_{N0} = M_0\sin(|\sigma-\varphi_0|)$ est grand selon la relation (notations de la figure 3.8) :

$$\frac{p_2}{p_0} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_{N0}^2 - 1\right) \tag{3.83}$$

La focalisation non centrée des ondes de compression à partir d'un écoulement uniforme (p_{i0},T_{i0}, M_0), forme un choc incurvé vers l'amont (resp. vers l'aval) et s'accompagne donc, tant que l'écoulement reste supersonique, de l'émission d'ondes de compression (resp. de détente) de la famille opposée afin d'équilibrer les lignes de courant en aval, comme ce que décrit la figure 3.9.

3.2.2.4 Création de vorticité par les chocs

Alors que la température totale se conserve en passant le choc, la pression génératrice, elle, chute, corrélativement à l'augmentation d'entropie :

$$\frac{p_{i2}}{p_{i0}} = e^{-\frac{S_2-S_0}{R}} = \left[\frac{(\gamma+1)M_{N0}^2}{(\gamma-1)M_{N0}^2+2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[\frac{(\gamma+1)}{2\gamma M_{N0}^2-(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{3.84}$$

et cette perte croît avec M_{N0}, donc avec M_0 ou $|\sigma-\varphi_0|$.

Si l'écoulement en amont du choc est continu et que le choc ne comporte pas de rupture de pente, alors l'écoulement en aval est aussi continu, en raison de la continuité des relations de saut vis-à-vis des conditions amont (M_0,φ_0) et de l'angle du choc σ. En particulier, si l'écoulement en amont est uniforme, et que le choc est courbé, la relation (3.84) montre qu'un gradient d'entropie sera créé en aval, on parle de "couche d'entropie"(voir lignes pointillées sur les figures (3.12) (a) et (b)). Toujours dans l'hypothèse d'un écoulement continu, l'équation de Crocco (stationnaire, sans force de volume) lie la vorticité aux gradients de (S,H_i) :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{V} = T\overrightarrow{\mathrm{grad}}S - \overrightarrow{\mathrm{grad}}H_i \tag{3.85}$$

Sachant que (S,H_i) et (p_i,T_i) sont liés par $dS = c_p\frac{dT_i}{T_i} + R\frac{dp_i}{p_i}$ et $dH_i = c_p dT_i$, on peut exprimer la vorticité en fonction des gradients de (p_i,T_i).

D'autre part, toute discontinuité de T_{i0}, p_{i0}, M_0 ou φ_0 en amont du choc se prolonge en aval. Le rapport des nombres de Mach, sur les deux lignes de courant (C_a^0) et (C_b^0) de part et d'autre de cette surface de glissement, dépend uniquement de leur rapport de pression totale p_{ib}/p_{ia} et du niveau de détente sur, disons, la première ligne de courant p/p_{ia} :

$$\frac{M_b}{M_a}\left(\frac{p_{ib}}{p_{ia}},\frac{p}{p_{ia}}\right) = \sqrt{\frac{\left(p_{ib}/p_{ia}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(p_{ia}/p\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}{\left(p_{ia}/p\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}} \tag{3.86}$$

Le rapport des vitesses dépend, en plus, du rapport des températures totales :

$$\frac{V_b}{V_a}\left(\frac{p_{ib}}{p_{ia}},\frac{T_{ib}}{T_{ia}},\frac{p}{p_{ia}}\right) = \frac{M_b}{M_a}\left(\frac{p_{ib}}{p_{ia}},\frac{p}{p_{ia}}\right)\left(\frac{p_{ib}}{p_{ia}}\right)^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\left(\frac{T_{ib}}{T_{ia}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.87}$$

Donc de manière générale, toute non-uniformité $(p_{i0},T_{i0},M_0,\varphi_0)$ en amont d'un choc ou tout changement de sa pente σ modifie le cisaillement des lignes de courant et dans la même mesure

la vorticité[14] en aval. En particulier, dans un écoulement isoénergétique et homentropique, un choc non rectiligne crée obligatoirement de la vorticité. En dérivant les équations (3.8) et (3.10) et à l'aide de l'équation de Crocco (3.85), Carrière [125] a exprimé la vorticité ω_2 créée en aval d'un choc de courbure $\kappa = d\sigma/dt$ (t abscisse curviligne sur le choc et dans le même sens) dans un écoulement plan uniforme de vitesse (V_0, φ_0) :

$$\omega_2 = V_0\ \kappa\ \cos(\sigma - \varphi_0)\frac{(1-\epsilon)^2}{\epsilon} \quad \text{avec} \quad \epsilon = \frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{\tan(\sigma - \varphi_2)}{\tan(\sigma - \varphi_0)} \tag{3.88}$$

On constate, en effet, que la vorticité en aval du choc est d'autant plus grande que le choc est courbé, et qu'en particulier, elle s'annule pour un choc rectiligne $\kappa = 0$ ou pour un choc localement droit ($\sigma - \varphi_0 = \pi/2$).

Un choc formé dans un écoulement uniforme se courbe sous l'action de faisceaux d'ondes de compression ou de détente de la même famille situés en aval (cf. figures (3.12) (a) et (b)). L'autre moyen non-visqueux de générer de la vorticité dans un écoulement uniforme est de faire se rencontrer les chocs. Les figures (3.12) (c) et (d) illustrent les deux classes d'interaction de deux chocs, respectivement, de la même famille ou de familles opposées. Dans le premier cas (3.12)(c), on peut considérer que le premier choc permet d'introduire, à partir d'un écoulement uniforme, une discontinuité de (p_i, M, φ) en amont du second choc. Cette vision est aussi valable pour le second cas, mais seulement dans des conditions particulières. Suivant les angles des chocs et le nombre de Mach en amont, ces interactions donnent lieu à une des six topologies d'écoulement identifiées par Edney [77, 72].

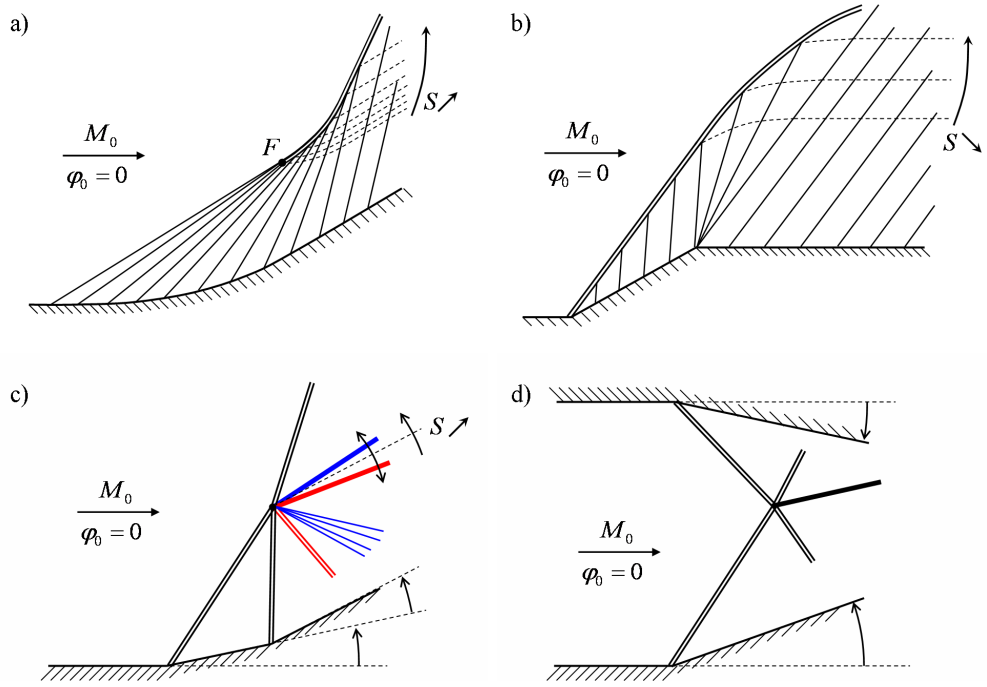
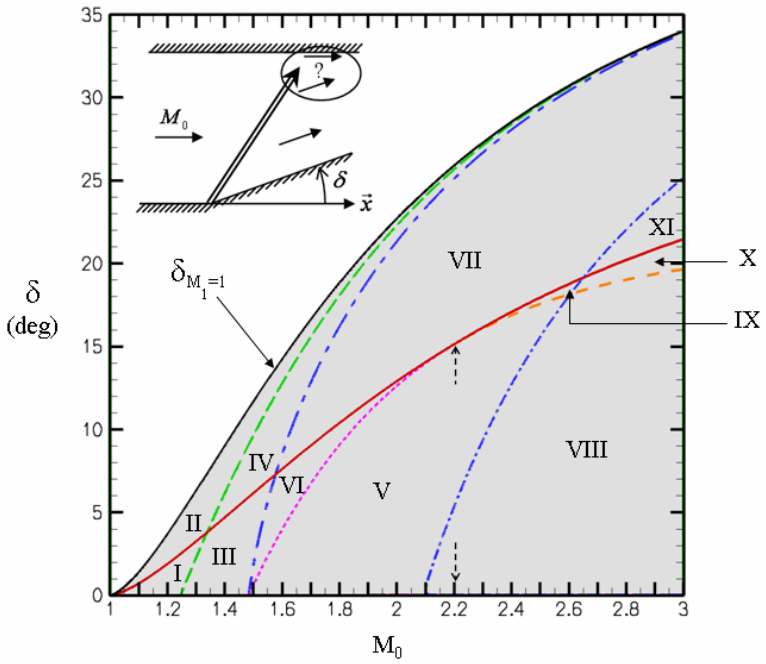


FIG. 3.12 – Interactions choc/choc ou choc/ondes et génération non-visqueuse de vorticité.

[14] Vorticité $\overrightarrow{\omega}$ au sens des distributions [156] : $\iiint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\omega} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2} \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}\, d\mathcal{V} + \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{N} \wedge \left(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}\right) d\mathcal{A}$, où $\mathcal{D}$ domaine incluant une surface de glissement $\mathcal{S}$ séparant $\mathcal{D}$ en $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$.

3.2.2.5 Réflexion d'un choc sur une paroi rectiligne

Lorsqu'un choc oblique s'approche d'une paroi, l'écoulement s'adapte localement pour adopter la même direction et un choc oblique de la famille opposée peut être émis si l'écoulement reste supersonique : on dit alors que le choc incident s'est réfléchi sur la paroi. La réflexion n'est cependant pas aussi simple que pour les ondes de Mach, et plusieurs configurations sont possibles. La figure 3.13 illustre le problème de la réflexion sur une paroi rectiligne d'un choc oblique montant, créé par un dièdre d'angle δ dans un écoulement uniforme (M_0).



Zones	Réflexions possibles
I	RR
II	NRI
III	RR, NRII
IV	NRII
V	RR, RMI
VI	RR, RMD
VII	RMD
VIII	RR, RMI, NRII
IX	RR, RMD
X	RR, RMD, NRII
XI	RMD, NRII

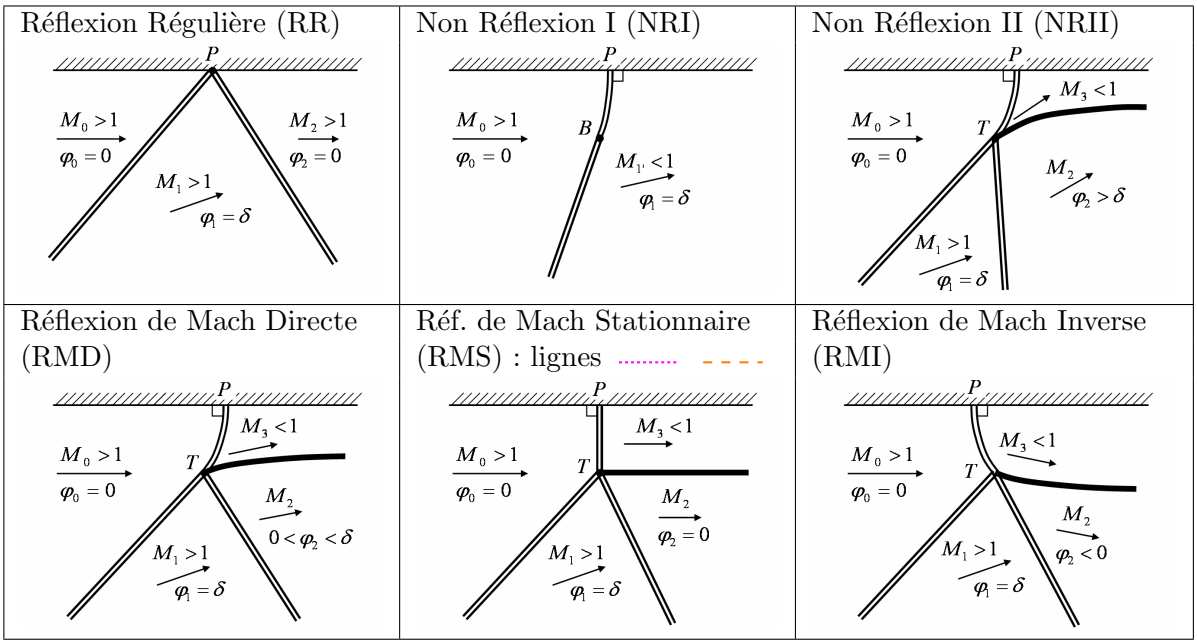


FIG. 3.13 – Schemas des topologies possibles de la réflexion d'un choc sur paroi plane.

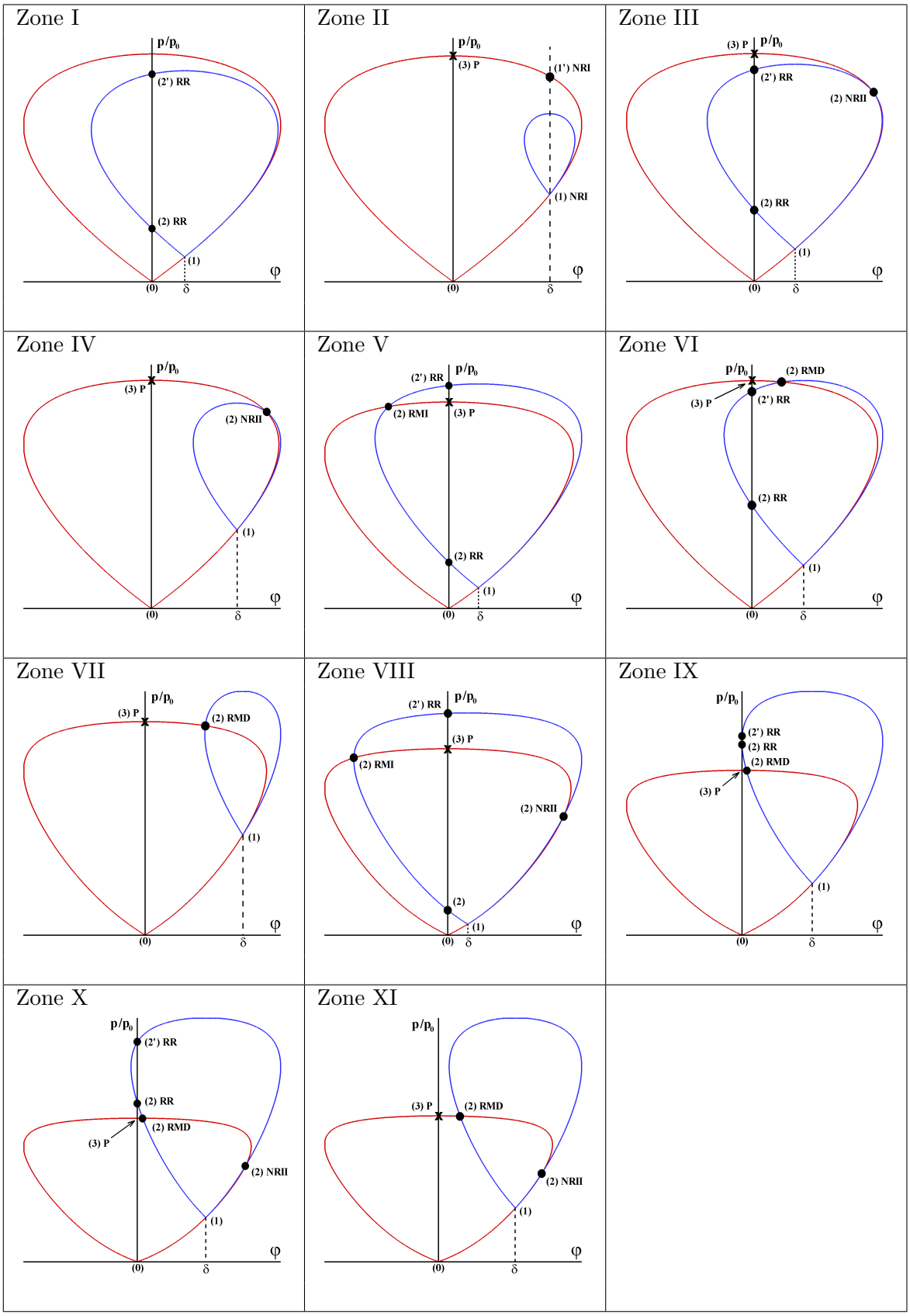


FIG. 3.14 – Polaires représentatives des 11 zones du plan (p, φ).

Ce problème est équivalent à celui de l'interaction de deux chocs symétriques de familles opposées[15]. Cette situation apparaît dans les jets supersoniques non-adaptés et nécessite donc une attention particulière. La forme de la réflexion dépend des mêmes paramètres (M_0, δ) que ceux qui caractérisent le choc incident. Une étude systématique des topologies de chocs possibles dans le plan (M_0, δ) a été menée à l'aide des polaires de choc (p, φ) de $M_0 = 1.001$ jusqu'à $M_0 = 3$, pour $\gamma = 1.4$ (détails en annexe C.4). Les résultats sont résumés sur la figure 3.13 et sont commentés brièvement à l'aide des polaires affichées dans la figure 3.14[16].

Tout d'abord, il ne peut exister de choc réfléchi que si l'écoulement (1) en aval du choc incident est supersonique $M_1 > 1$, ce qui dans le plan (M_0, δ) est représenté par l'aire grisée en dessous de la courbe —— $(M_1 = 1)$.
D'autre part, comme le montre la figure 3.8(b), un choc descendant ne peut être émis que si l'écoulement reçoit l'"ordre" de dévier sa direction de $\varphi_1 = \delta$ vers $\varphi_2 < \delta$, pour se ramener à un état (2) forcément représenté sur la partie gauche $\varphi < \delta$ de la polaire des chocs réfléchis —— .
Celle-ci est à présent notée (PRG).

Si (PRG) croise l'axe $\varphi = 0$, la "**réflexion régulière**" (RR), caractérisée par le point $\varphi_2 = 0$, est possible. La réflexion régulière, uniquement possible en dessous de l'angle de détachement $\delta_D(M_0)$ (courbe ——), est la seule topologie qui permet à l'écoulement uniforme (1) de se redresser "en bloc" suivant la direction de la paroi $(\vec{x})$ en émettant un choc rectiligne. L'écoulement est alors intégralement décrit par 3 états représentés par 3 points sur les polaires de choc (p, φ) (points $(0), (1), (2)$RR sur la figure 3.14). Lorsque (PR) croise l'axe $\varphi = 0$, il existe obligatoirement 2 points d'intersection correspondant respectivement à un choc faible et un choc fort. Dans la littérature, on invoque parfois (par ex. Li et Ben-Dor [151] ou Durand [74]) le "principe de production minimale d'entropie" pour écarter la solution choc fort. La position de l'auteur à ce sujet est, d'abord, qu'il n'existe pas à notre connaissance de preuve formelle de non-existence de la solution choc fort. Ensuite, la réflexion en choc faible est caractérisée par un écoulement (2)RR supersonique, alors que celle en choc fort est caractérisée par un écoulement $(2')$RR subsonique à une pression statique p'_2 plus forte. Comme le choc réfléchi possède une région de dépendance en aval, si l'on se donne les moyens d'imposer la pression p'_2 par des conditions aux limites appropriées, la solution choc fort sera sélectionnée. Ces conditions aux limites très particulières sont néanmoins difficiles à reproduire en laboratoire, contrairement à celles conduisant au choc réfléchi faible, ce qui explique probablement le fait qu'elle n'ait pas été mentionnée dans la littérature consultée.

Si (PRG) croise la portion chocs forts de la polaire —— des chocs possibles à partir de l'état (0), la "**réflexion de Mach**" est possible. L'intersection (2)RM ? dans le plan (p, φ) définit alors un état $(2) = (M_2, p_2, \varphi_2)$ caractérisant l'écoulement en aval du choc réfléchi ainsi qu'un état $(3) = (M_3 < 1, p_2, \varphi_2)$ caractérisant l'écoulement en aval d'un choc fort prenant sa source dans l'écoulement (0). Dans le plan physique, ces deux états ne représentent que les deux écoulements au voisinage d'un point T dit "triple", en raison du choc incident montant $(0 \to 1)$ qui y aboutit, et des deux chocs descendant $(1 \to 2)$ et montant $(0 \to 3)$ qui en partent. L'ensemble des états juste en aval du choc fort reliant, dans le plan physique, le point triple T à la paroi, est décrit par la portion (2)RM ? à $(3)P$ de la polaire (courbe ——) où $(3)P$ représente le choc droit à la paroi.
Si $\varphi_2 > 0$, la réflexion est appelée "**réflexion de Mach directe**", (2)RM ? = (2)RMD, alors

[15] Cette interaction de chocs symétrique est en fait le seul moyen expérimental de reproduire un plan de réflexion sans les effets de couche limite.

[16] Une telle étude précédemment effectuée par Hornung [111] a été retrouvée a posteriori. Cependant, une interprétation différente de certaines solutions est donnée ici.

que si $\varphi_2 < 0$, la réflexion est appelée "**réflexion de Mach inverse**", (2)RM ? = (2)RMI. Entre les deux, lorsque $\varphi_2 = 0$, on parle de "**réflexion de Mach stationnaire**", RMS. La RMS a été mise en évidence par Von Neumann pour expliquer la transition de RR vers RMD[108]. Cette forme de réflexion est la seule qui comporte 4 écoulements uniformes. Elle n'est possible que sur les courbes ..... et - - - - qui décrivent l'"angle de Von Neumann" $\delta_N(M_0)$.
La réflexion de Mach directe n'est possible que pour $\delta_N(M_0) < \delta < \delta_D(M_0)$, c'est-à-dire au-dessous de la ligne — · — et au-dessus des lignes ..... et - - - - . La réflexion de Mach inverse n'est possible que pour $\delta < \delta_N(M_0)$, c'est-à-dire au-dessous des lignes ..... et - - - - .

RR,RMD,RMS,RMI sont les 4 formes de réflexions possibles d'un choc oblique sur une paroi rectiligne. En continuant l'analyse des polaires de choc, on s'aperçoit qu'il peut exister deux configurations pour lesquelles l'écoulement adapte localement sa direction sans émettre de choc réfléchi.
La première forme de ce que l'on nommera "non-réflexion", NRI, apparaît dans le domaine II du plan (M_0, δ). Sur la figure 3.14, Zone II, on voit qu'il n'existe pas d'intersection de la polaire des chocs réfléchis — · — ni avec la polaire —— des chocs possibles à partir de l'état (0) ni avec l'axe $\varphi = 0$. La solution proposée par Hornung [111] est que le choc incident se courbe jusqu'à devenir normal à la paroi, les états en aval de ce choc étant décrits par la portion de polaire (1)NRI à (3)P. Néanmoins, à la lumière de la figure 3.8(b), on peut affirmer qu'une telle solution n'est possible que si la paroi basse est convexe ($\delta(s)$ croissant) afin de courber le choc dans sa portion où son aval est supersonique à la manière de la figure 3.12(a). Si la paroi basse est rectiligne, seule la solution choc fort (1′)NRI permet d'obtenir un choc courbe devenant droit à la paroi grâce à l'influence vers l'amont de l'aval subsonique. C'est cette dernière solution NRI qui est représentée figure 3.13.
La deuxième forme de non-réflexion, NRII, est possible lorsque la partie droite de la polaire — · — des chocs possibles à partir de l'état (1) possède une intersection avec la polaire —— des chocs possibles à partir de l'état (0). Le choc (1) → (2)NRII créé à partir de l'état (1) est donc montant (figure 3.13, NRII) et accroît la pente de la vitesse φ avec la paroi haute. Si $M_2 > 1$, ce choc doit être provoqué par une rupture de pente $[\varphi(2\text{NRII}) - \varphi(1)]$ de la paroi basse. De plus, celle-ci doit nécessairement être convexe pour la même raison que dans le cas $M(1\text{NRI}) > 1$. Si $M_2 < 1$, une répartition de pression appropriée en aval peut provoquer ce choc oblique montant grâce à son influence vers l'amont.

L'ensemble de cette discussion a jusqu'ici été cantonnée à la description des différentes formes d'adaptation de l'écoulement lorsqu'un choc oblique arrive sur une paroi rectiligne ainsi qu'aux domaines (M_0, δ) dans lesquelles elles peuvent apparaître. La figure 3.13 en fait le bilan. On constate qu'il existe des valeurs (M_0, δ) pour lesquelles plusieurs formes d'écoulement sont possibles. Comme vient de l'illustrer le dernier exemple, ce sont alors les conditions aux limites en aval qui déterminent l'écoulement observé. Finalement, les paramètres qui définissent complètement la forme de la réflexion du choc oblique sont tant (M_0, δ) que les conditions aux limites en aval. Cette conclusion est étayée par plusieurs expériences et calculs numériques.

En particulier, dans les zones IX et X, les solutions RR et RMD sont toutes deux possibles. Dans ces deux zones, un phénomène d'hystérésis en angle (i.e. en faisant varier δ tout en maintenant M_0 constant) , d'abord supposé par Hornung *et al.* [112], a été mis en évidence expérimentalement par Chpoun *et al.* [40] et prouve que pour un couple de valeur (M_0, δ), les deux solutions sont possibles, celle observée étant déterminée par les conditions en aval. Le phénomène d'hystérésis en nombre de Mach a, en outre, pu être constaté numériquement par Ivanov *et al.* [120]. D'autre part, un phénomène d'hystérésis a été observé par Ben-Dor *et al.* [13] pour un choc oblique donné (i.e. (M_0, δ) fixés) en faisant varier la pression en aval.

La réflexion du choc oblique sur paroi rectiligne est un sujet qui a soulevé beaucoup de questions dont certaines ont reçu des réponses parfois arbitraires. Aujourd'hui, l'existence des solutions RR(2),RMD,RMI,RMS a été prouvée et acceptée en régime stationnaire, mais celle des solutions RR(2),NRI,NRII n'a pas encore été prouvée, ni réfutée. Aussi, cette section a volontairement été restreinte à l'identification des domaines (M_0, δ) où ces solutions sont possibles, suite à l'analyse stricte des polaires de choc, et laisse la question de leur apparition réelle dans ces domaines ouverte. Pour illustrer le fait qu'on ne doive pas écarter arbitrairement ces solutions, il est instructif de rappeler l'histoire de la réflexion de Mach inverse. En 1878, Mach [157] révéla expérimentalement l'existence de la réflexion qui porte son nom (RM). Soixante-dix ans plus tard, en 1945, Von Neumann proposa son critère de transition RR-RM, qui en particulier excluait l'existence de la RM pour $\delta < \delta_N$. Pourtant, en 1985, Takayama et Ben-Dor [247] mirent en évidence l'existence de la réflexion de Mach dite inverse pour $\delta < \delta_N$ en écoulement instationnaire. Depuis, aucune réflexion de Mach inverse ne fut observée en écoulement stationnaire, si bien que celle-ci fut assimilée à phénomène purement instationnaire, car elle était "considérée comme instable" en régime stationnaire. Ce n'est qu'en 1999 que Ben-Dor *et al.* [13] ont montré expérimentalement son existence dans un écoulement stationnaire lorsque la pression en aval devient suffisamment élevée. De plus, Ben-Dor *et al.* remarquèrent a posteriori que la réflection de Mach constatée en écoulement stationnaire par Azevedo [9] pour $\delta < \delta_N$, à partir des résultats expérimentaux obtenus dix-sept ans plus tôt par Hornung et Robinson [113], était probablement aussi une réflexion de Mach inverse.

Pour finir, la représentation des différentes zones de réflexions adoptées par Hornung [111] dans le plan (M_0, σ) (avec $\varphi_0 = 0$), et équivalente à celle de la figure 3.13, est affichée figure 3.15. Les numéros de zones se réfèrent au tableau et aux schémas de la figure 3.13.

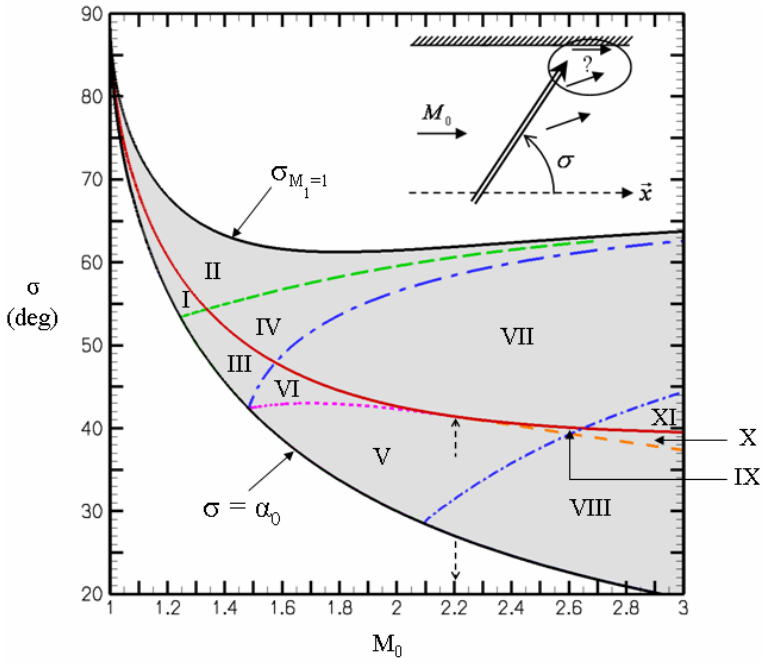


FIG. 3.15 – Formes de réflexions possibles dans le plan (M_0, σ) (pour $\gamma = 1.4$).

3.3 Structures compressibles des jets supersoniques non-adaptés

3.3.1 Structures de choc d'un jet supersonique plan

3.3.1.1 Introduction au jet supersonique plan

Les jets supersoniques se distinguent radicalement de leurs homologues subsoniques par leur capacité à évoluer indépendamment des conditions extérieures jusqu'à ce que l'écoulement atteigne les premières ondes en contact avec l'extérieur (indiquées par deux flèches, figure 3.16). Cette propriété leur permet d'être non "adaptés", c'est-à-dire d'avoir une pression statique de sortie p_e à la fois différente et découplée de la pression statique extérieure p_0. Pour commencer, on suppose que le jet débouche dans une atmosphère au repos. La pression ambiante p_0 est donc constante, en particulier sur les lignes de glissement délimitant le jet. Sur la figure 3.16, sont représentées les régions uniformes (zones blanches), les faisceaux d'ondes simples (zones en gris clair), et leurs régions de croisement à ondes non-simples (zones en gris foncé). Les zones en sur-pression, en équilibre, et en sous-pression relativement à p_0 sont respectivement symbolisées par "+","0","-".

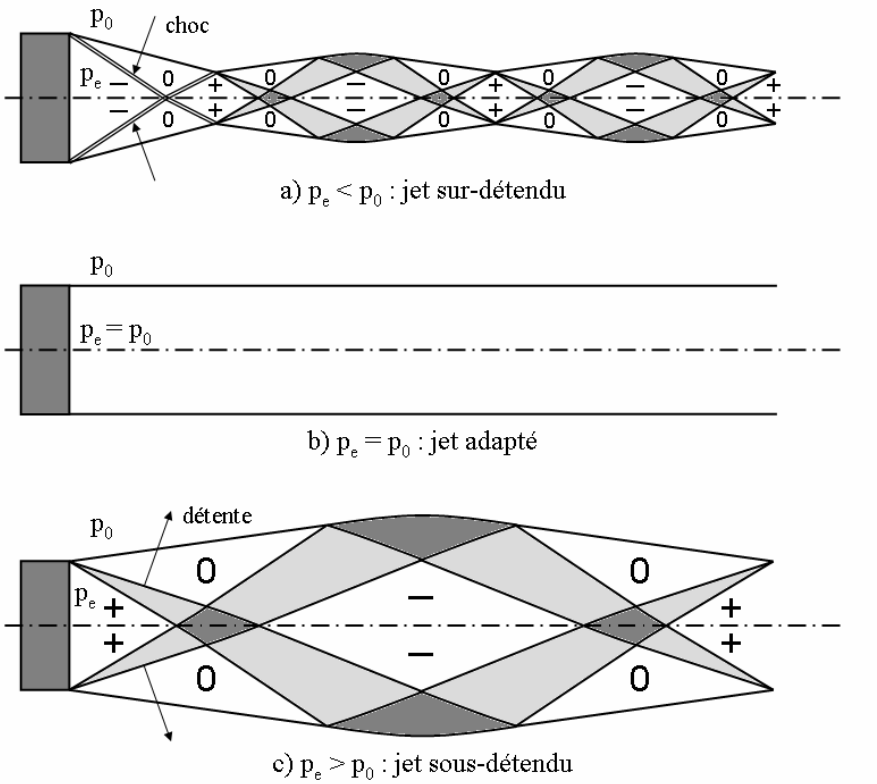


FIG. 3.16 – Schémas de jets supersoniques plans sur-détendu (a) adapté (b) et sous-détendu (c).

Dans le cas où $p_e > p_0$, figure 3.16(c), le jet est dit "sous-détendu". Afin d'assurer l'équilibre de la surface de glissement du jet, l'écoulement se ramène à la pression extérieure par le biais de faisceaux de détente. Cependant, ces faisceaux se propagent en aval puis se croisent sur l'axe du jet (ou de manière équivalente, se réfléchissent sur l'axe de symétrie) et le détendent une deuxième fois. Ensuite les faisceaux de détente continuent leur propagation et se réfléchissent sur la ligne de glissement isobare du jet en faisceaux de compression qui ramènent provisoirement le jet à la pression extérieure. Ces faisceaux de compression se croisent sur l'axe et compriment une deuxième fois le jet pour le ramener à la surpression initiale $p_e > p_0$. Les faisceaux de compression se réfléchissent enfin sur la ligne de glissement isobare du jet en faisceaux de détente, et

le même schéma se poursuit "indéfiniment" (enfin presque, voir paragraphe suivant). Les ondes de détente initiées sur la lèvre de la tuyère se réfléchissent donc à l'intérieur du jet comme dans un guide d'onde, et y dessinent alternativement des cellules de compression "+" et des cellules de détente "-".

Dans le cas d'un jet sur-détendu ($p_e < p_0$, figure 3.16(a)), le jet est ramené brutalement à la pression extérieure à travers des chocs initiés sur la lèvre de la tuyère, qui se croisent sur l'axe du jet et l'amènent ensuite à une condition de "sous-détente" (zone "+"). A partir de l'impact des chocs sur la frontière du jet, on retrouve donc la structure compressible du jet sous-détendu (sauf que...voir paragraphe suivant).

Un jet supersonique ne peut être uniforme que s'il est initialement uniforme et adapté ($p_e = p_0$, figure 3.16(b)).

Si l'on considère que le jet est constitué d'un fluide parfait, de capacités calorifiques spécifiques c_v et c_p fixées, sortant uniformément d'une tuyère à la pression p_e dans une atmosphère au repos à la pression p_0, alors la structure de l'écoulement compressible est entièrement déterminée par 2 paramètres :
- le nombre de Mach de sortie M_e ;
- le rapport des pressions statiques ("jet pressure ratio") JPR $= p_e/p_0$.

M_e caractérise l'état initial des ondes ($\psi^{\pm} = \pm\alpha = \pm\arcsin(M_e)$) et JPR $= p_e/p_0$ caractérise la perturbation initiale introduite sur la lèvre de la tuyère sous forme d'un faisceau d'ondes isentropiques ou de choc. Plus précisément, on définit, dans le cadre de cette étude, la "structure compressible" d'un jet supersonique comme étant l'ensemble du champ de nombre de Mach, et du champ de pression adimensionnée par p_0, en tout point du jet. Ce champ $(M, p/p_0)$ est entièrement représentatif des compressions et détentes isentropiques ainsi que des chocs qui apparaissent dans le jet.

Sur cette structure (M_e, JPR), l'écoulement est alors dimensionné par 3 grandeurs :
- le diamètre de sortie de la tuyère D_e, donnant l'échelle de longueur ;
- la pression génératrice p_i, donnant l'échelle de pression ;
- la température génératrice T_i, donnant les échelles de température et de vitesse (par ex. la vitesse au col est $a^* = \sqrt{2c_pT_i\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$).

Si l'on dispose des conditions génératrices (p_i, T_i) et du champ $(M, p/p_0)$ qui dépend uniquement de (M_e, JPR), l'état en tout point de l'écoulement s'obtient directement par application des formules isentropiques (3.37) à (3.40).

3.3.1.2 Evolution de la structure de choc d'un jet plan en fonction du JPR

On considère, pour le moment, le cas d'un jet franchement supersonique, c'est-à-dire $M_e \geq 1.2$ environ. La figure 3.16 présente une vision simplifiée des jets sur-détendus et sous-détendus. Hormis l'hypothèse de fluide parfait maintenue ici, la non-linéarité des équations d'Euler conduit les ondes des compressions, lorsqu'elles sont suffisamment fortes, à focaliser pour former des chocs. De plus, supposer le simple croisement des chocs sur l'axe équivaut à admettre que leur réflexion sur l'axe de symétrie est régulière, ce qui n'est pas toujours possible (cf. section réflexion de choc sur paroi rectiligne 3.2.2.5). La figure 3.17 montre l'effet du rapport de pression JPR $= p_e/p_0$ sur l'organisation des ondes internes d'un jet supersonique ($M_e = 1.45$) plan à travers les lignes iso-Mach : conformément aux schémas de la figure 3.16, on distingue les zones

d'écoulement pseudo-uniformes (on verra pourquoi elles ne sont pas exactement uniformes plus tard), les faisceaux d'ondes isentropiques à ondes pseudo-simples correspondant aux lignes iso-Mach quasi-rectilignes, ainsi que leurs zones d'interaction à ondes non-simples. Les chocs sont visibles grâce à la coalescence des lignes iso-Mach.

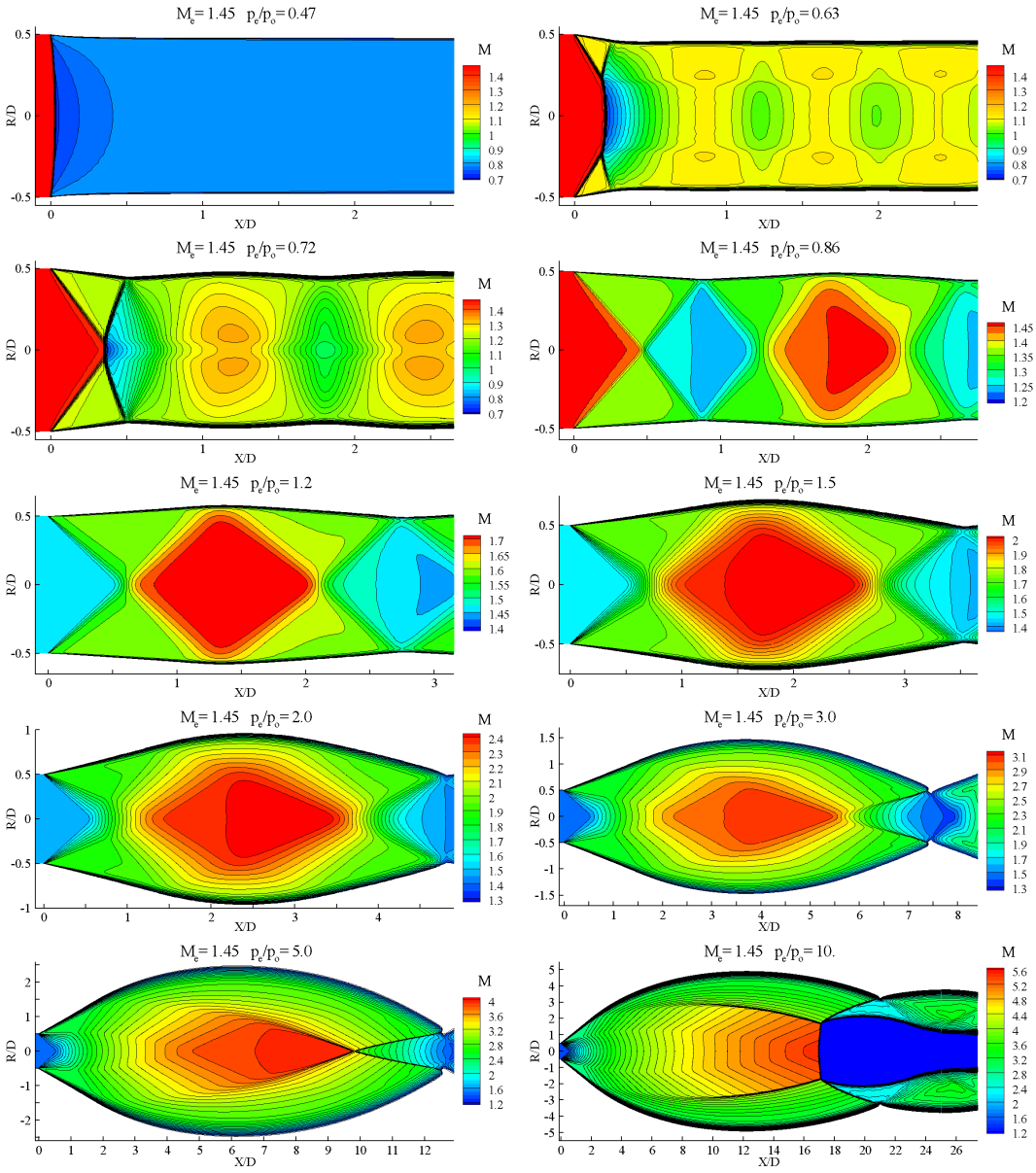


FIG. 3.17 – Effet du JPR $= p_e/p_0$ sur la structure de choc d'un jet supersonique plan.(Calculs RANS, $M_e = 1.45$, écoulement extérieur $M = 0.4$)

Quand JPR < 1, le jet est sur-détendu. Le premier problème à résoudre pour déterminer la structure des jets plans sur-détendus est de savoir comment se réfléchit le choc initié au niveau de la lèvre sur l'axe de symétrie du jet (on raisonne ici sur la moitié inférieure du jet). A la différence d'un choc créé par un dièdre (cf. figure 3.13), le choc généré dans un jet sur-détendu plan est entièrement déterminé par le JPR $= p_e/p_0$[17]. En augmentant le JPR, on se déplace sur l'axe $M_0 = M_e = 1.45$ du diagramme de la figure 3.15 dans le sens σ décroissant. Pour

[17] A une valeur p_0/p_e correspond un seul point de la polaire des chocs incidents, alors qu'à une valeur de la déviation δ correspond une solution choc fort et une solution choc faible.

les chocs faibles, cela est équivalent à se déplacer sur l'axe $M_0 = M_e = 1.45$ du diagramme de la figure 3.13 dans le sens δ décroissant. Au JPR = 0.47 correspond une déviation $\delta = 9\,\text{deg}$. Sur la figure 3.14, le choc fort (1')NRI de la zone II est donc sélectionné : ce choc est courbé par l'écoulement subsonique aval jusqu'à devenir normal sur l'axe (choc convexe) et il ne donne aucun choc réfléchi. Pour JPR = 0.63, on obtient la solution choc faible (1)NRI correspondante ($\delta = 9\,\text{deg}$) de la zone II. L'écoulement aval est supersonique mais aucun choc réfléchi n'est prévu par les polaires. Pourtant, on constate un choc partant d'un point triple et se propageant vers la frontière du jet. Ceci n'est pas expliqué. On constate une structure de type réflexion de Mach directe : la ligne de glissement issue du point triple converge vers l'axe de symétrie et le choc fort est convexe. Une telle réflexion est aussi constatée dans les jets axisymétriques pour lesquelles le choc fort est nommé "disque de Mach". Nous utiliserons désormais abusivement cette expression en écoulement plan. Lorsqu'on augmente le JPR, (JPR = 0.72, figure 3.17) on observe encore un disque de Mach dont la taille a néanmoins diminué. Pourtant, JPR = 0.72 se situe dans la zone IV où aucun choc réfléchi n'est encore prévu par les polaires (cf. solution NRII figures 3.13 et 3.14). Pour des JPR correspondant aux zones II et IV, le jet adopte une structure à disque de Mach typique de la solution RMD prévue par les polaires dans les zones VI,VII,IX,X,XI. A partir du disque de Mach, un tube de courant à forte entropie[18] occupe la partie centrale du jet. Ce tube central est séparé de l'écoulement périphérique du jet par une couche d'entropie et donc de cisaillement (l'enthalpie totale étant uniforme en amont). Si l'on augmente de nouveau le JPR, on passe dans la zone III où la réflexion régulière RR devient possible. C'est ce que l'on constate pour JPR = 0.86, figure 3.17.
Pour résumer, lorsqu'on augmente le JPR d'un jet sur-détendu plan, le choc formé sur la lèvre de la tuyère initialement choc fort devient choc faible. Ce dernier se réfléchit d'abord en formant un disque de Mach direct. Alors que JPR croît, le choc incident se redresse (σ diminue) et la taille du disque de Mach diminue. Lorsque σ atteint la valeur de Von Neumann σ_N, le disque de Mach est réduit à un point : le choc se réfléchit de manière régulière. Le choc incident continue à se redresser par élévation du JPR, jusqu'à devenir une onde de Mach $\sigma = \alpha_e$ à l'adaptation JPR = 1.

Quand JPR > 1, le jet est sous-détendu, il tente donc de s'adapter par un faisceau de détente. Au fur et à mesure que la surpression initiale croît, les faisceaux d'ondes simples s'ouvrent, en éclatant latéralement le jet tout en amplifiant la cellule sur-détendue (zone "-" figure 3.16(c)) (JPR = 1.2|1.5|2.0 figure 3.17). Il est "généralement admis" que pour les faibles JPR, les jets sous-détendus reproduisent périodiquement le schéma d'ondes décrit par la figure 3.16(c), mais qu'en pratique celui-ci est plus ou moins rapidement brouillé par les effets visqueux ou turbulents. Si l'on continue à augmenter le JPR, on constate que l'onde de compression issue de la réflexion du faisceau de détente sur la frontière isobare du jet focalise en formant un choc au voisinage de son point d'impact avec la ligne de glissement (JPR = 3.0 figure 3.17). Cette focalisation apparaît de plus en plus tôt, au fur et à mesure que JPR augmente, et vient à se produire avant que le faisceau de compression se soit réfléchi sur l'axe du jet (JPR = 5.0 figure 3.17). Le choc ainsi formé avant l'axe de symétrie s'y réfléchit d'abord de manière régulière. Enfin, si l'on poursuit l'élévation du JPR, le choc de coalescence ne se réfléchit plus de manière régulière mais donne lieu à un disque de Mach. Une analyse plus détaillée du disque de Mach apparaissant dans les jets sous-détendus fait l'objet de la section 3.3.3.

Remarque sur la possibilité d'une structure périodique. Nous revenons dans ce paragraphe sur l'existence de la structure périodique généralement admise pour les jets sous-détendus non-visqueux à faible JPR. La formation des chocs et les phénomènes diffusifs étant des processus irréversibles, ils sont naturellement exclus de la discussion. Dans le cas d'une tuyère produisant

[18] le saut d'entropie étant plus fort à la traversée d'un choc qu'à la traversée de plusieurs chocs pour la même pression en aval, en vertu du "triple-shock entropy theorem" [107]

un écoulement uniforme (M_e, p_e) en sortie, s'il existe une configuration de jet périodique, elle commence nécessairement par une détente centrée. Démontrons-le par l'absurde. Si la détente du jet sous-détendu n'est pas centrée sur une lèvre ponctuelle, la lèvre forme une sorte de petit divergent. Initialement, la ligne de courant qui deviendra la ligne de glissement du jet suit cette lèvre en se détendant progressivement de p_e à p_0 tout en émettant un faisceau de détente. Si on suppose que le jet résultant a une structure périodique, le faisceau d'ondes convergentes arrivant sur la ligne de glissement est le symétrique de la détente initiale. Par symétrie, la ligne de glissement du jet doit repasser par les pressions intermédiaires entre p_0 et p_j, or la ligne de courant doit rester isobare à p_0, d'où l'absurdité.
Pour déterminer, si une structure périodique est effectivement possible, il reste donc à savoir : 1) comment se réfléchit un faisceau de détente centrée sur un axe de symétrie, 2) Est-ce que le faisceau de détente réfléchi donne un faisceau de compression symétrique en se réfléchissant sur la ligne de glissement isobare ? La condition d'une réflexion symétrique est nécessaire à l'existence d'une structure périodique. Or la formation des chocs pour des JPR élevés semble indiquer que la réflexion sur la ligne de glissement isobare n'est pas symétrique.

Origine des chocs dans les jets sous-détendus. Pack [184] est le seul, parmi la littérature consultée, qui propose une explication de la formation des chocs dans les jets plans au moyen de la méthode des caractéristiques. Son explication est la suivante : "L'effet de l'interaction des ondes de détente issues des deux lèvres opposées est d'accroître la détente. En conséquence, les compressions qui résultent de leurs réflexions sur la limite libre du jet en sont d'autant plus intenses si bien que les caractéristiques correspondantes se coupent avant d'atteindre la ligne de glissement."

Toutefois, cette explication n'est pas satisfaisante. Avant tout, Pack ne précise pas de mesure quantifiant l'intensité de la détente qu'il prétend plus intense après réflexion. Précédemment, nous avons vu que l'angle d'ouverture du faisceau de détente était toujours diminué par la réflexion sur une paroi rectiligne (voir tableau récapitulatif 3.1). D'autre part, le saut de $\mathcal{P}$ ou φ à la traversée du faisceau de détente se conserve le long de celui-ci (cf. equations (3.56) à (3.59))[19]. Si l'on définit l'intensité de la détente par le saut de $\mathcal{P}$ ou φ à sa traversée rapporté à son angle d'ouverture, on peut dire que l'intensité d'un faisceau de détente est toujours amplifiée par une réflexion sur une paroi rectiligne ou de manière équivalente par le croisement de son faisceau symétrique.
Une explication différente est proposée ici : la formation des chocs dans les jets ne peut être due qu'à la réflexion non symétrique des ondes de détente en ondes de compression sur la ligne de glissement isobare. Ceci est justifié en se rappelant la propriété d'inversion des écoulements non-visqueux. Cette propriété nous dit que l'écoulement supérieur partant uniformément de la tuyère, traversant le faisceau de détente issu de la lèvre du haut, traversant le faisceau de détente issu de la lèvre du bas, peut être parcouru en sens opposé. Si l'on considère un jet dans lequel la réflexion du faisceau de détente sur la ligne de glissement isobare donne un faisceau de compression symétrique, alors on se donne les conditions de parcours de la première moitié de la cellule de détente-compression en sens opposé, ce qui démontre que l'écoulement retrouve, après traversée des deux faisceaux de compression, l'état initial qu'il avait en sortie de tuyère, quelque soit l'interaction des ondes sur l'axe du jet. La manière dont se réfléchissent les ondes sur une ligne de glissement isobare du point de vue géométrique est donc une question clé pour, d'une part, savoir si une structure périodique est possible, et d'autre part, comprendre l'origine des chocs dans les jets sous-détendus.

[19] Si l'on regarde le saut de pression statique $\delta p = p_i \frac{\gamma M^2}{\sqrt{M^2-1}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \delta\mathcal{P}$, on voit qu'il est d'autant plus faible que M est élevé.

La réflexion d'un faisceau d'ondes de détente montantes (faisceau encadré par (C_1^+, C_2^+) sur la figure 3.4(a)) sur une ligne de glissement isobare ((C_{14}^0) figure 3.4(a)) peut être interprétée comme le croisement d'un faisceau d'ondes de compression descendantes ((C_1^-, C_3^-) figure 3.4(a)) de même amplitude $|\mathcal{P}(3)-\mathcal{P}(1)| = |\mathcal{P}(2)-\mathcal{P}(1)|$. Suivant les résultats du tableau 3.1, l'évolution de l'angle d'ouverture du faisceau de compression fictif (C^-) lors du croisement avec le faisceau de détente (C^+) est une ouverture. Autrement dit, le faisceau de compression fictif voit son angle de convergence diminuer à la traversée du faisceau d'ondes descendantes. D'autre part, l'équation (3.67) nous a indiqué que le côté du faisceau le plus influencé par l'autre faisceau est celui où le Mach est le plus faible. Ceci signifie qu'à une distribution de détente $(\psi^+(s^-), s^- \in [12])$ incidente donnée, correspond une répartition de compression fictive $(\psi^-(s^+), s^+ \in [13])$ dont la convergence des ondes est d'autant mieux conservée à travers la zone d'interaction ((1243) figure 3.4) que le nombre de Mach est grand, i.e. que les ondes sont proches du début du faisceau de compression réfléchi. De plus, les premières ondes du faisceau de compression dispose d'une plus grande distance pour converger. En effet, on constate, figure 3.18, que les ondes du faisceau de compression commencent à focaliser sur la première onde du faisceau (rencontrée dans le sens de l'écoulement), ensuite le choc s'équilibre entre les directions des ondes de compressions et les ondes de la région uniforme en amont (voir plus spécialement le cas JPR = 5.0, à comparer à la figure 3.11(a)).

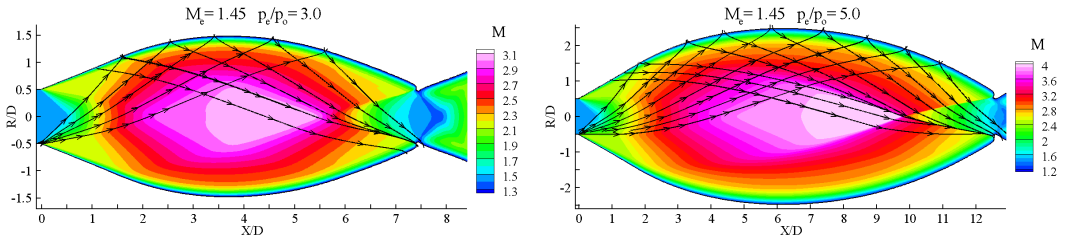


FIG. 3.18 – Focalisation des ondes de Mach dans les jets plans JPR = 3.0 et JPR = 5.0 de la figure 3.17.

A propos de la linéarisation Pour les jets faiblement sous-détendus JPR $\ll 1$, les équations d'Euler peuvent être linéarisées autour des conditions du jet adapté[20] dont le nombre de Mach est :

$$M_j = \left[\frac{2}{\gamma-1}\left[\mathrm{JPR}^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_e^2\right)-1\right]\right]^{1/2} \tag{3.89}$$

Les équations linéarisées (3.5) sont alors strictement équivalentes aux équations (3.17) et (3.18) à l'ordre 1. On voit alors immédiatement que la linéarisation revient à geler le réseau de lignes caractéristiques selon les directions $\psi^{\mp} = \mp\alpha_j$ avec $\alpha_j = \arcsin(1/M_j)$. Il n'est donc pas étonnant de faire dire à cette théorie que le jet reproduit indéfiniment et de façon strictement périodique les cellules de compression-détente. Cette théorie donne une valeur de la longueur des cellules de détente-compression (1 traversée des ondes de détente + 1 traversée des ondes de compression) valable pour les jets plans à faibles JPR :

$$\lambda/D = 2\sqrt{M_j^2-1} = 2\,\mathrm{cotan}(\alpha_j) \tag{3.90}$$

où D est le diamètre initial du jet.

[20]La méthode des petites perturbations, résumée en annexe C.5, a d'abord était appliquée par Prandtl [199] autour des conditions d'éjection, puis a été corrigée par Pack [183] en appliquant les conditions aux limites à la solution générale de l'équation du potentiel linéarisé.

3.3.2 Structures de chocs d'un jet sonique axisymétrique

3.3.2.1 Structure de chocs d'un jet plan sonique

Le paramètre M_e conditionne non seulement l'inclinaison initiale des ondes dans le jet mais aussi la manière dont les faisceaux interagissent : nous avons vu (section 3.2.1.6) que pour $M > M_I$, les ondes sont majoritairement courbées par la déviation du fluide, vers le point de concours des ondes sécantes, alors que pour $M < M_I$, elles s'incurvent majoritairement sous l'effet de l'accélération du fluide dans la direction opposée au point de concours des ondes sécantes. De plus, comme l'illustre la figure 3.19, lorsque M_e tend vers 1^+, les régions d'écoulement plan uniforme (en blanc) et celles à ondes simples (en gris clair) rétrécissent et disparaissent complètement à $M_e = 1$ pour ne laisser que les régions à ondes non-simples (en gris foncé).

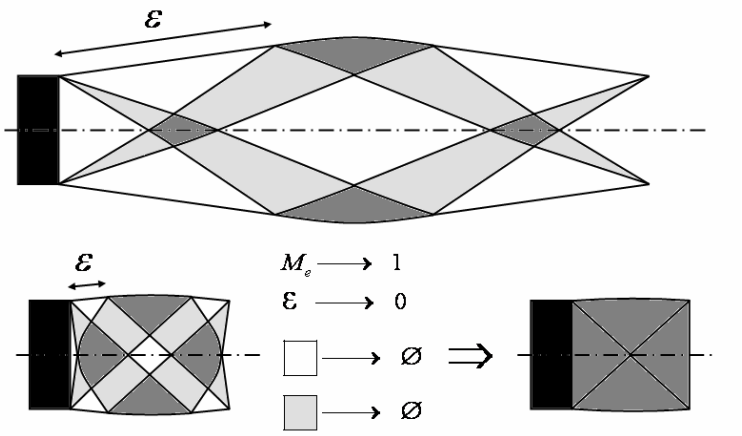


FIG. 3.19 – Schéma des ondes dans un jet plan proche de la vitesse du son $M_e \to 1$.

La figure 3.20 présente les champs du nombre de Mach dans un jet sonique $M_e = 1$ et un jet supersonique $M_e = 2$, tous deux sous-détendus au même taux JPR = 1.6. Dans le jet supersonique $M_e > 1$, on distingue nettement les trois types de région décrits dans la figure 3.19, notamment les zones quasi-uniformes séparées par les faisceaux d'ondes quasi-simples (dans lesquelles les iso-Mach matérialisent chaque onde). Ces zones découpent clairement le plan en régions triangulaires et losangiques. Dans le jet sonique $M_e = 1$, aucune de ces formes géométriques n'est décelable, ce qui se justifie par l'extension des ondes non-simples à toute la surface du jet. On constate que les zones de vitesse maximale en forme de losange dans le jet supersonique sont plutôt ($\sim$) circulaires dans le jet sonique. De plus, un choc convexe que nous qualifierons de "choc en lentille" apparaît en fin de la première cellule. Ce choc particulier est discuté dans la section 3.3.5.

Influence d'une ligne sonique courbée. La première hypothèse formulée pour décrire la structure du jet sous-détendu est d'avoir un écoulement amont uniforme. Pour obtenir un jet plan franchement supersonique et uniforme en sortie de tuyère, il suffit que celle-ci annule les ondes de détente émises après le col par une paroi adoptant la forme de la ligne de courant traversant le faisceau de détente en question comme s'il traversait un milieu uniforme. Ovsiannikov [181] a montré que l'on peut obtenir un écoulement sonique uniforme à condition d'utiliser une tuyère infiniment longue dont la pente de la paroi tend asymptotiquement vers 0[21]. De manière générale, il est possible grâce aux équations d'Euler (3.17) et (3.18) de relier l'évolution de $\varphi = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{V})$ le

[21]Comme signalé au début de ce chapitre, nous nous sommes placés dans l'hypothèse d'un fluide parfait. On peut appliquer les propos de cette section au cas d'un fluide visqueux à condition de décaler les parois de la tuyère de l'épaisseur de déplacement de la couche limite.

long d'une isobare (ou iso-Mach en écoulement homentropique et isoénergétique) à la courbure de la ligne de courant locale (cf. figure 3.21 pour l'orientation de $l_{M=1}$) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l_M} = -\frac{1}{||\overrightarrow{\text{grad}p}||}\left[\gamma p M^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 + \frac{1-M^2}{\gamma p M^2}\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)^2\right] \tag{3.91}$$

et en particulier le long de la ligne sonique, on a :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l_1} = -\frac{\gamma p}{||\overrightarrow{\text{grad}p}||}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)^2 \tag{3.92}$$

La relation (3.92) signifie que l'angle φ de la vitesse par rapport à l'axe de symétrie d'une tuyère amorcée est toujours décroissant lorsqu'on remonte la ligne sonique et peut être constant $\varphi = 0$ si et seulement si les lignes de courant sont rectilignes.

La figure 3.21(a) montre l'organisation de la ligne sonique ($M = 1$), de la ligne des cols (vitesse verticale nulle $v = 0$), et des lignes caractéristiques au voisinage d'un col à faible rayon de courbure. Seule la partie située au-dessus de l'axe de symétrie est dessinée. La figure 3.21(b) présente le cas d'un col à bord aigu typique des tuyères convergentes à parois minces. Dans les deux cas, l'écoulement dessiné est "bloqué", c'est-à-dire qu'il est suffisamment détendu pour qu'il existe une caractéristique provenant de la paroi convergente qui atteigne la ligne sonique sur l'axe. Sous cette condition, la ligne sonique est entièrement déterminée par la forme du convergent et ne dépend pas des conditions extérieures. En particulier, le débit étant déterminé par la forme de la ligne sonique, il est alors bloqué d'où le nom de la condition.

Un jet supersonique débouchant d'une tuyère simplement convergente (à parois terminales non-parallèles) ne peut pas être adapté et est nécessairement sous-détendu. Comme l'écoulement en sortie n'est pas uniforme, la définition du JPR devient ambigu et le taux de détente peut alors être caractérisé à l'aide du rapport de la pression génératrice p_{ij} du jet sur la pression statique extérieure p_0, ou "nozzle pressure ratio" : NPR $= p_{ij}/p_0$. Si l'écoulement est uniforme en sortie de tuyère, on a : NPR $= (1 + (\gamma-1)M_e^2/2)^{\gamma/(\gamma-1)}$JPR. Un jet supersonique issu d'une tuyère simplement convergente (à parois terminales non-parallèles) est donc caractérisé par NPR $> p_{ij}/p^* \approx 1.89$ pour $\gamma = 1.4$. Au niveau de la lèvre de la tuyère, l'écoulement s'adapte localement à la pression extérieure p_0 en déviant d'un angle $\Delta\varphi_0$ et en émettant un faisceau de détente centré d'intensité $\Delta\mathcal{P} = \Delta\varphi_0$ dans le jet. Une partie de ce faisceau impacte la ligne sonique (voir figure 3.21(b)) et détermine ainsi les conditions du "blocage sonique".

La figure 3.21(c) représente deux lignes caractéristiques réfléchies sur la ligne sonique. Bien que la forme de la ligne sonique dépende de la forme du convergent, la relation (3.92) permet de dire que l'on a toujours $\varphi_1 < \varphi_2$. De plus, les 3 relations de compatibilités sur les deux caractéristiques montantes (C^+_{13}) et (C^+_{24}) et sur la caractéristique descendante (C^-_{34}) et la condition isobare sur la ligne sonique ($\mathcal{L}_{12}$) : $\mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$ permettent d'écrire :

$$\varphi_4 - \varphi_3 = \mathcal{P}_4 - \mathcal{P}_3 = (\varphi_2 - \varphi_1)/2 > 0 \tag{3.93}$$

Le faisceau d'ondes montantes émis par la ligne sonique entre 1 et 2 quelconques est donc un faisceau d'ondes convergentes de compression. Lorsque ce faisceau impacte la ligne de courant (C^0) frontière du jet, on a donc :

$$(\mathcal{P}_5 - \mathcal{P}_3) + (\varphi_5 - \varphi_3) = \varphi_2 - \varphi_1 > 0 \tag{3.94}$$

Si la pression est imposée par un fluide ambiant au repos $\mathcal{P}_5 = \mathcal{P}_3$, la ligne de courant est incurvée vers l'extérieur du jet et un faisceau réfléchi de détente est renvoyé vers l'intérieur du

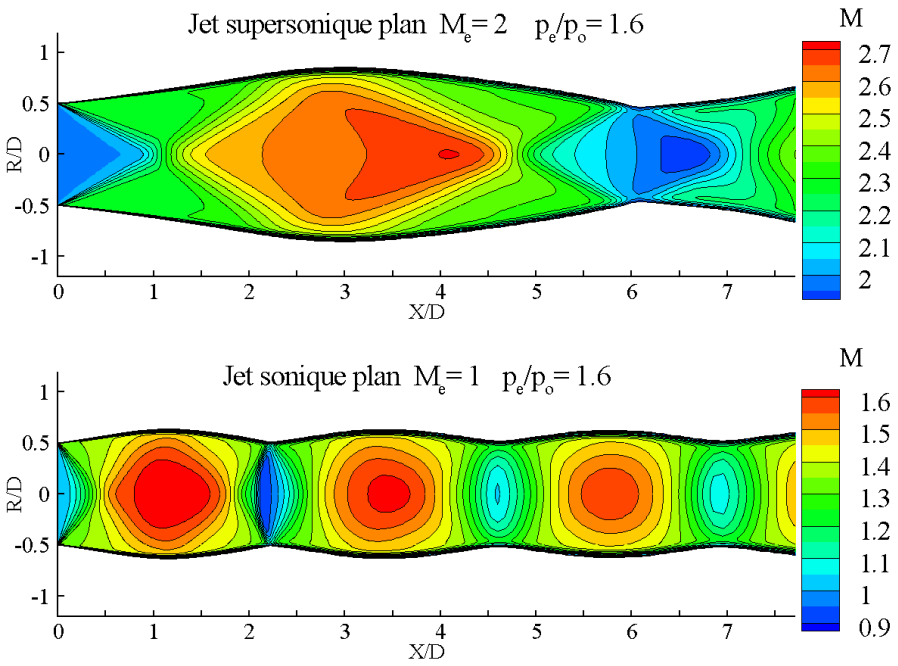
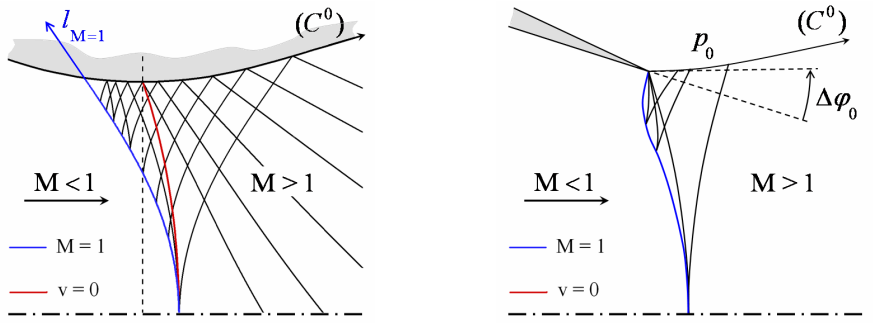


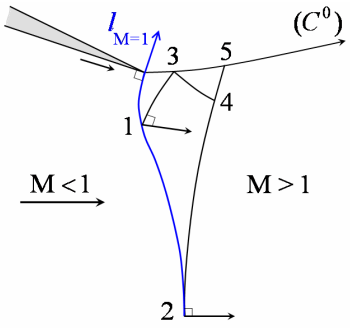
FIG. 3.20 – Surfaces iso-Mach dans des jets sous-détendus plans sonique $M_e = 1$ et supersonique $M_e = 2$.

jet. Si le col est suivi par une paroi rectiligne (méplat) $\varphi_5 = \varphi_3$, le faisceau de compression se réfléchit vers l'intérieur du jet.



(a) Col à faible courbure

(b) Col à bord aigu



(c) Schéma des lignes caractéristiques

FIG. 3.21 – Voisinage des lignes soniques.

3.3.2.2 Equations d'Euler et équations de compatibilité en écoulement axisymétrique

En écrivant les équation d'Euler en coordonnées cylindriques (x, r, θ) pour un écoulement axisymétrique d'axe $(O, \overrightarrow{x})$, puis en passant aux coordonnées intrinsèques (s, n) dans le plan de symétrie (x, r), les équations du mouvement prennent la forme :

$$-\frac{1-M^2}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\sin\varphi}{r} \tag{3.95}$$

$$\frac{1}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial n}+\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \tag{3.96}$$

Le terme source $(-\sin\varphi/r)$ dans l'équation de conservation de la masse (3.95) se retrouve en considérant une section annulaire $\delta A = 2\pi r \delta n$ de rayon r et d'épaisseur infinitésimale $\delta n \ll r$ constante[22]. Si cet anneau fluide diverge $\varphi > 0$ ou converge vers l'axe $\varphi < 0$, l'écoulement ayant avancé de ds dilate ou contracte la section de passage δA. Le taux de variation relative de δA :

$$\frac{1}{(\delta A)}\frac{\partial(\delta A)}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\sin\varphi}{r} \tag{3.97}$$

s'ajoute donc à l'équation plane de conservation de la masse (3.11). Ce terme s'interprète aussi comme le débit de masse sortant du plan (x, r) rapporté au débit entrant initialement dans l'anneau (cf. section 3.4.2). Les équations de conservation de l'entropie et de l'enthalpie totale le long des lignes de courant gardent évidemment leurs formes intrinsèques (3.14) et (3.15).

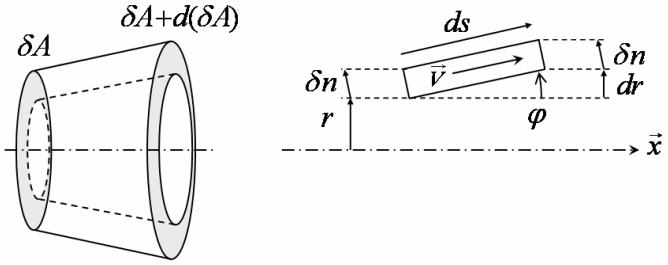


FIG. 3.22 – Illustration du terme source $\frac{\sin\varphi}{r}$ par un écoulement annulaire d'épaisseur infinitésimale δn constante.

En suivant la même démarche qu'en écoulement plan, on aboutit aux équations de compatibilité planes (3.28) et (3.29) auxquelles s'ajoute un terme source D_{axi} :

$$(C^-): \quad \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s^-}-\frac{\partial \varphi}{\partial s^-} = D_{axi} \tag{3.98}$$

$$(C^+): \quad \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s^+}+\frac{\partial \varphi}{\partial s^+} = D_{axi} \qquad \text{avec} \quad D_{axi} = -\tfrac{\sin\alpha\sin\varphi}{r} \tag{3.99}$$

Ce terme source D_{axi} rend les équations (3.98) et (3.99) dépendantes de la position des ondes dans l'espace. Aussi, il n'est pas possible d'en déduire des invariants de Riemann, c'est pourquoi la plupart des résultats démontrés en écoulement plan (section 3.2.1) ne sont plus applicables strictement. L'écoulement à ondes simples n'existe pas et le seul écoulement uniforme possible est forcément aligné avec l'axe de symétrie $(O, \overrightarrow{x})$, i.e. $\varphi = (\overrightarrow{V}, \overrightarrow{x}) \equiv 0$.

[22] En fixant localement la hauteur de passage du fluide δn dans le plan (x, r), on isole l'effet non-plan. On rappelle que l'effet de $\frac{1}{(\delta n)}\frac{d(\delta n)}{ds}$ dans le plan (x, r) est déjà représenté par le terme $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$.

3.3.2.3 Quelques particularités des écoulements axisymétriques

La présence de D_{axi} complique sérieusement le traitement analytique et nous nous limitons dans cette section à mettre en évidence des aspects exclusivement dus au caractère axisymétrique de l'écoulement au travers de quelques exemples.

Couplage de la pression et des dilatations/contractions de la section de passage. Une variation de pression $\mathcal{P}$ appliquée au bord d'un écoulement plan uniforme provoque la formation d'un faisceau de détente s'appuyant sur la frontière et accompagné d'une déviation $|\Delta_{plan}\varphi| = |\Delta\mathcal{P}|$. En écoulement axisymétrique, cette variation de pression $\mathcal{P}$ provoque aussi une déviation mais elle est plus faible qu'en plan $|\Delta_{axi}\varphi| < |\Delta\mathcal{P}|$ car elle est couplée au terme source $\sin\varphi/r$. Aussi, on constate souvent que les écoulements axisymétriques possèdent des angles φ moins élevés que leur homologues plans pour des écarts de pressions identiques. Pour la même raison, les lignes soniques aux cols des tuyères de révolution sont moins courbées que dans les tuyères planes. Par simple effet géométrique, si l'on compare le rayon final r_e/r_c d'une tuyère de révolution supersonique adaptée à M_e (r_c rayon du col) à la hauteur h_e/h_c d'une tuyère plane équivalente (h_c hauteur du col), on a $r_e/r_c = \sqrt{h_e/h_c} < h_e/h_c$. De la même manière, la variation relative du rayon d'un tube de courant axisymétrique $\delta r/r$ est 2 fois moins grande que la variation relative de l'épaisseur d'un tube de courant plan $\delta h/h$ soumis au même écart de pression infinitésimal δp.

Réalignement spontané avec l'axe de symétrie. Dans un écoulement supersonique, si l'on se donne les moyens de générer des conditions uniformes dans une section $\Sigma(s_0)$ d'un tube de courant séparé de l'axe de symétrie, i.e. $\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ pour $s = s_0$ et $n \in [n_1, n_2]$ avec $r(n_1) \neq 0$, alors il existe un voisinage de cette section $\Sigma(s_0)$ dans lequel l'écoulement est complètement indépendant des conditions latérales au tube de courant. Sur $\Sigma(s_0)$, l'équation (3.95) dit que le terme source crée une variation de pression longitudinale :

$$\frac{\partial p}{\partial s}(s_0) \quad = \quad -\frac{\gamma M^2 p}{M^2-1}\frac{\sin\varphi}{r} \tag{3.100}$$

Si on suppose que $\varphi > 0$, comme p est constante sur $\Sigma(s_0)$ et $\frac{\partial r}{\partial n}(s_0) > 0$, alors il apparaît un gradient transverse $\frac{\partial p}{\partial n}(s_0+\varepsilon) > 0$ dans une section voisine $\Sigma(s_0+\varepsilon)$ et donc d'après (3.96) $\frac{\partial \varphi}{\partial s}(s_0+\varepsilon) < 0$. En résumé, si l'on se donne les moyens de générer des conditions uniformes dans une section $\Sigma(s_0)$ d'un tube de courant séparé de l'axe de symétrie, un écoulement divergent ou convergent tend à se réaligner avec l'axe de symétrie, alors qu'il continuerait tout droit en plan[23].

Longueur d'onde d'un jet axisymétrique. Dans un jet supersonique uniforme de révolution faiblement sous-détendu à JPR $= 1+\varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$), si l'on suppose que les variations d'ordres supérieurs à $O(\varepsilon)$ sont négligeables, l'écoulement vérifie l'équation du potentiel linéarisé autour du nombre de Mach d'adaptation M_j (3.89) :

$$(1-M_j^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{3.101}$$

où Φ est le potentiel de la perturbation de vitesse. Le membre de droite, nul en écoulement plan, provient directement du terme source axisymétrique. En effectuant une séparation des variables x et r, puis en appliquant les conditions aux limites du jet, la solution de l'équation (3.101)

[23] L'hypothèse d'uniformité locale est primordiale ici. Par exemple, si l'on considère un écoulement conique, on a toujours $\frac{\partial\varphi}{\partial s} > 0$ quelque soit $\varphi \neq 0$.

s'exprime sous la forme d'une série (cf. Prandtl [199], Rayleigh [211], Pack [183]) :

$$\Phi(x,r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_r J_0(\xi_n r) \sin(\xi_n x/\sqrt{M_j^2-1}) \tag{3.102}$$

$$\text{avec} \quad A_n = -2\sqrt{M_j^2-1}(U_j - U_e)/\xi_n^2 J_1(\xi_n) \tag{3.103}$$

où J_0 (resp. J_1) est la fonctions de Bessel d'ordre 0 (resp. 1) de première espèce, $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ ses racines successives (non parfaitement périodiques), U_j la vitesse moyenne et U_e la vitesse d'éjection. La série (3.102) est uniformément convergente mais n'est pas strictement périodique (contrairement au jet plan). En choisissant de mesurer la pseudo-longueur d'onde λ comme la distance de la tuyère au premier minimum y de la frontière du jet, Pack [183] obtient :

$$\lambda/D \approx 1.22\sqrt{M_j^2-1} \approx 1.22 \ \text{cotan}(\alpha_j) \tag{3.104}$$

où D est le diamètre initial du jet. En comparant les relations (3.104) et (3.90), on voit que dans les mêmes conditions d'éjection (M_e, JPR), un jet axisymétrique possède une longueur d'onde $2/1.22 \approx 1.64$ fois plus petite qu'un jet plan. Ce rapport se vérifie bien dans les jets plan et axisymétrique présentés figure 3.23.

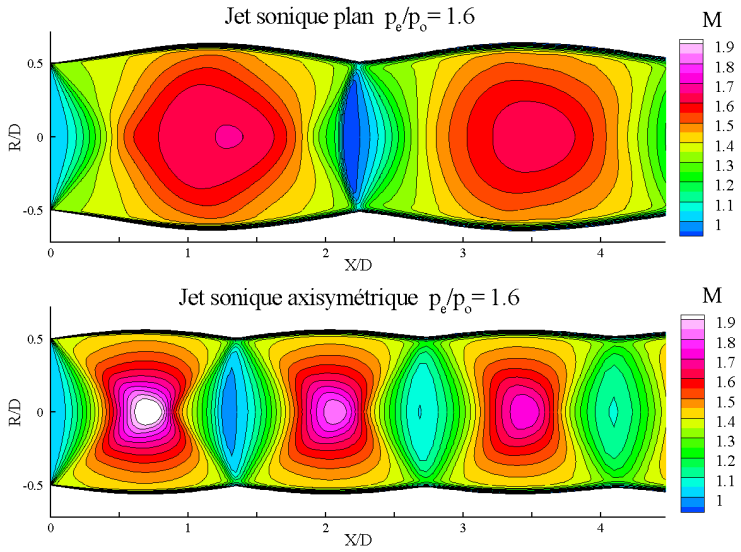


FIG. 3.23 – Comparaison des jets soniques plan et axisymétrique (calculs RANS).

Affaiblissement des chocs axisymétriques divergents. L'influence du terme source D_{axi} dans les régions continues de l'écoulement se répercute aussi sur la génération des chocs. Par exemple, un écoulement plan de nombre de Mach M_0 rencontrant un dièdre d'angle δ se réoriente en bloc par l'intermédiaire d'un choc d'angle σ_p alors qu'un écoulement axisymétrique uniforme équivalent (M_0, nécessairement d'orientation $\varphi = 0$) rencontrant un cône de demi-angle au sommet δ créera toujours un choc conique de demi-angle au sommet $\sigma_r < \sigma_p$. Dans le cas axisymétrique, l'écoulement dévie de $\varphi = 0$ à $\varphi = \delta$ en deux étapes : tout d'abord, le choc conique réoriente les lignes de courant de $\varphi = 0$ à $\varphi = \varphi_{int} < \delta$ (d'où $\sigma_r < \sigma_p$), puis la compression isentropique conique à lignes de courant divergentes $\varphi > 0$ termine la réorientation jusqu'à $\varphi = \delta$.

Focalisation accélérée des ondes de compression convergeant vers l'axe. Si l'on force un écoulement axisymétrique à converger vers l'axe, le terme source a tendance à renforcer

les faisceaux de compression et donc favorise leur focalisation. Prenons l'exemple d'un écoulement uniforme arrivant dans un convergent de rayon de courbure constant R_s sans rupture de pente (figure 3.24). Le convergent émet des ondes convergentes qui se propagent vers l'axe et peuvent focaliser avant de l'atteindre si la courbure de la paroi $1/R_s$ est assez forte.

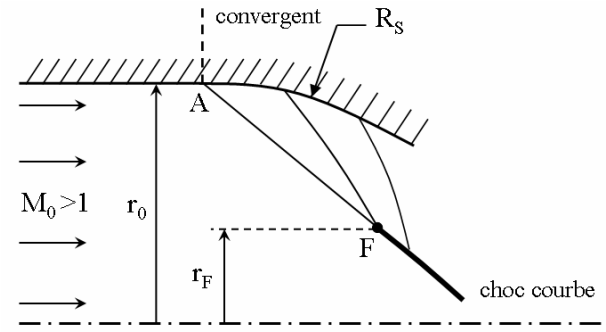


FIG. 3.24 – Ecoulement uniforme arrivant dans un convergent lisse.

Plaçons-nous d'abord dans le cas d'un écoulement plan. Si l'on se trouve dans le mode de coalescence de la figure 3.11(a), la distance du point de focalisation F à l'axe de symétrie s'obtient à l'aide de l'expression de AF (3.77) :

$$r_F = r_0 - AF \times \sin\alpha_0 = r_0 \left(1 - 2\frac{R_s}{r_0}\frac{M_0^2 - 1}{(\gamma+1)M_0^4}\right) \tag{3.105}$$

Dans le cas axisymétrique, la démonstration effectuée en plan ne peut plus s'appliquer et le calcul doit être mené avec les systèmes de coordonnées orthogonales liées à chaque famille de lignes caractéristiques. A partir des développements de Meyer [167], on déduit :

$$r_F = r_0 \left(1 - \frac{R_s}{r_0}\frac{M_0^2 - 1}{(\gamma+1)M_0^4}\right) \tag{3.106}$$

Le point de focalisation en écoulement axisymétrique est donc 2 fois plus proche de l'origine de la paroi courbée qu'en écoulement plan[24].

Raidissement des chocs axisymétriques convergents. La présence de l'axe de symétrie dans les écoulements axisymétriques se manifeste par la singularité en $1/r$ dans le terme source. Tant que l'écoulement est continu, D_{axi} possède un comportement régulier au voisinage de l'axe $\lim_{r\to 0}\frac{\sin\varphi}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ car $\lim_{r\to 0}\varphi = 0$. Lorsque l'écoulement comporte un choc se propageant vers l'axe, en aval l'angle de la vitesse φ peut se maintenir à une valeur éloignée de 0 très près de l'axe et y induire des valeurs très grandes du terme source provoquant des effets propres au caractère axisymétrique. Prenons l'exemple d'une entrée d'air de type Pitot avec des parois internes coniques. Celles-ci génèrent un choc oblique de révolution se propageant vers l'axe. Sous l'influence du terme source, l'écoulement convergeant ($\varphi < 0$) en aval du choc ne peut maintenir sa pression post-choc constante (comme en plan) et se comprime de manière isentropique. Ceci se traduit par le raidissement du choc oblique initié sur la lèvre de l'entrée d'air conduisant à un choc fort qui se courbe pour devenir normal à l'axe de symétrie. Ferri [84] a effectué une série de calculs d'une telle entrée d'air à différentes valeurs de l'angle interne δ pour un nombre de Mach incident de $M_0 = 1.6$. Le rapport du diamètre du choc fort sur celui de l'entrée d'air D'/D en fonction de δ a été reproduit figure 3.25.

[24] Les relations (3.105) et (3.106) disent aussi que le nombre de Mach supportant le mieux la courbure R_s sans créer de focalisation est $\sqrt{2}$.

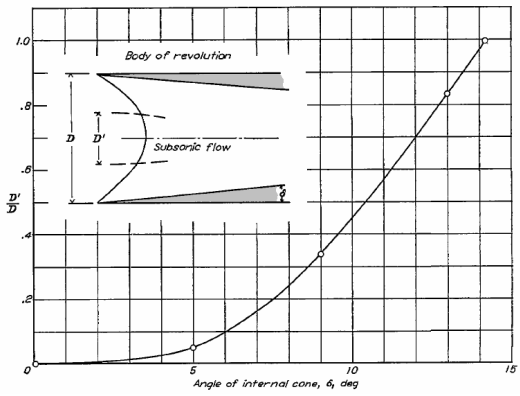


FIG. 3.25 – Raidissement du choc dans une entrée d'air Pitot axisymétrique [84].

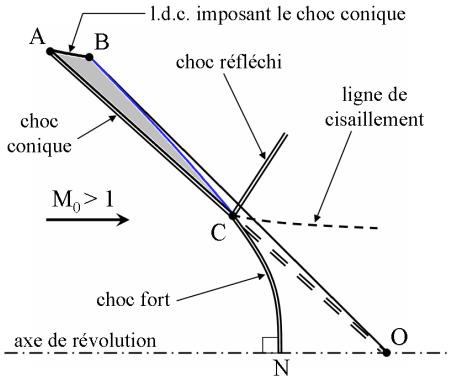


FIG. 3.26 – Ligne limite en aval d'un choc conique interne.

Impossibilité de la réflexion régulière sur l'axe de symétrie. Rylov [215] démontre que la réflexion régulière d'un choc oblique (RR, figure 3.13) est impossible sur un axe de symétrie et donne lieu à une réflexion de Mach comme illustré figure 3.26. Pour cela, il considère que, dans un voisinage de l'axe, l'existence d'un choc oblique quelconque impactant l'axe de symétrie en O se ramène à l'existence d'un choc conique de centre O à partir d'un écoulement incident uniforme. Un tel choc conique n'est possible que si l'écoulement en aval du choc est lui même conique[25]. Si l'on reconstruit la ligne de courant issue de A qui permet de maintenir le choc AO rectiligne, en calculant le réseau de caractéristiques à partir du choc OA, on aboutit à une ligne caractéristique descendante BC tangente au rayon OB appelé "limiting-line" [252] sur lequel les dérivées normales deviennent infinies. D'autre part, si l'on reconstruit le réseau de caractéristiques en partant de la ligne BC et du choc CO supposé rectiligne, on constate que les caractéristiques descendantes ainsi produites croisent la caractéristique descendante BC, ce qui n'est pas physiquement réalisable. L'écoulement conique est donc limité au triangle curviligne ABC et le choc AN n'étant plus conique après C devient forcément normal à l'axe en N.
Si les conditions d'écoulement concentrent le disque de Mach dans une région très proche de l'axe, il est prévisible que les moyens expérimentaux aient du mal à en mesurer l'existence. Aussi, de nombreuses photographies semblent indiquer la possibilité de la réflexion régulière en écoulement axisymétrique. Par ailleurs, Mölder [171] a montré que des calculs CFD effectués sur des maillages trop grossiers peuvent ne pas capturer un disque de Mach localisé et ainsi semblent prévoir une réflection régulière comme les expériences mentionnées précédemment. Toutefois, lorsqu'un maillage plus fin est employé dans les mêmes conditions d'écoulement, les calculs de Mölder [171] reproduisent bien un disque de Mach et confirment la théorie de Rylov.

3.3.2.4 Structures de choc d'un jet sonique axisymétrique

La figure 3.27 présente l'évolution de la structure interne d'un jet axisymétrique sonique sous-détendu débouchant uniformément d'une tuyère cylindrique à la pression p_e dans une atmosphère à la pression p_0 lorsque l'on augmente le taux de détente p_e/p_0. (Calculs RANS)

Légèrement au-delà de la condition d'adaptation JPR = 1, fig. 3.27($p_e/p_0 = 1.6$), on voit que le faisceau de détente s'appuyant sur la lèvre de la tuyère impacte la surface de courant limite du jet sur toute la longueur de la première cellule comme cela est schématisé pour le jet sonique

[25] Un écoulement conique de centre O est un écoulement axisymétrique invariant par homothétie de centre O.

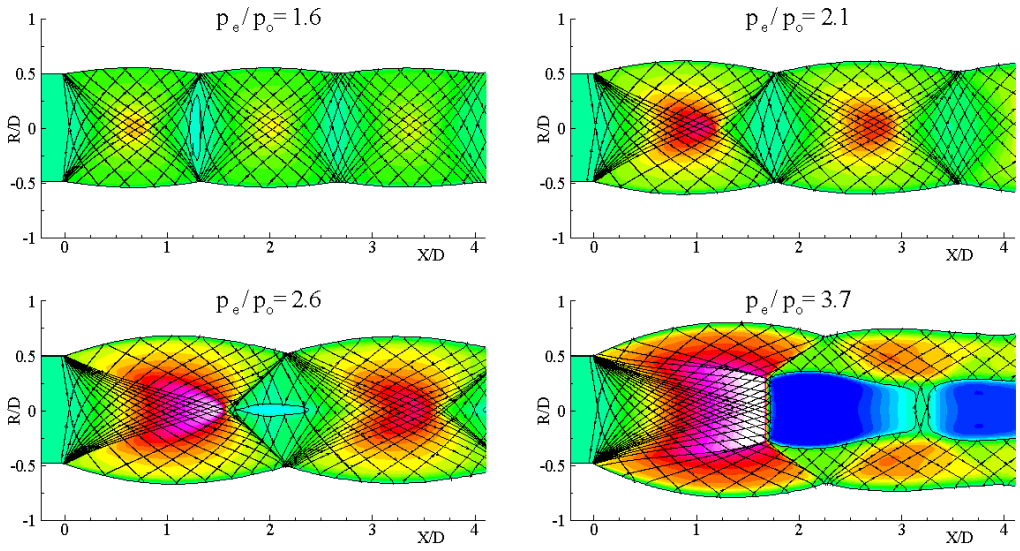


FIG. 3.27 – Effet du JPR sur la structure de choc d'un jet sonique sous-détendu axisymétrique.

plan, figure 3.19. Les lignes caractéristiques y sont fortement courbées dans le sens opposé aux centres de rotation de l'écoulement sous l'effet prépondérant de l'accélération (car initialement $M < M_I$, cf. figure 3.6(a)) auquel vient s'ajouter l'effet du terme source D_{axi}. A la fin de la première cellule, on note une lentille subsonique similaire à celle du jet sonique plan de la figure 3.23. La première cellule se reproduit ensuite de manière quasi-périodique (mais pas strictement) comme prévu par la théorie linéarisée (section 3.3.2.3).
Lorsqu'on augmente le taux de détente, le faisceau d'ondes convergentes créé par la réflexion des faisceaux de détente[26] sur la ligne de glissement du jet, focalise en fin de cellule, au voisinage de la frontière du jet, voir figure 3.27($p_e/p_0 = 2.1$). On constate que comme en écoulement plan (cf. section 3.3.1.2), la focalisation se produit le long de la première ligne caractéristique du faisceau d'ondes convergentes. Par contre, on peut noter une différence majeure entre le jet supersonique plan et le jet supersonique axisymétrique : le faisceau convergent n'apparaît qu'après l'impact du faisceau de détente issu de la lèvre sur la frontière isobare du jet plan alors qu'il se forme tout de suite après la détente initiale du jet axisymétrique. Le choc de focalisation est donc toujours plus précoce en jet rond qu'en jet plan. En jet rond, la première onde du faisceau de compression est la dernière onde du faisceau de détente. Toutefois, cette propriété est aussi vérifiée par le jet plan lorsque $M_e \to 1^+$, comme représenté figure 3.19.
Au fur et à mesure que le JPR croît, le point de focalisation apparaît de plus en plus tôt et se déplace donc vers l'axe. A JPR ≈ 2.6, le point de focalisation apparaît juste avant l'axe et comme la réflexion régulière y est impossible [215], il donne naissance à un petit disque de Mach, un choc réfléchi et une ligne de glissement. En aval, on remarque que l'écoulement subsonique se restreint à une région très limitée et redevient vite supersonique.
Si l'on augmente encore le JPR, l'éclatement du jet s'amplifie, le point de focalisation se produit de plus en plus tôt, l'angle (algébrique) σ du choc de focalisation par rapport à l'axe $\overrightarrow{x}$ augmente, le disque de Mach grossit et se déplace vers l'aval (voir figure 3.19($p_e/p_0 = 3.7$)). Corrélativement, le tube de courant issu du disque de Mach s'élargit. Au début, l'écoulement à

[26]Il est indispensable de préciser que le terme "faisceau de détente" est employé ici car il désigne le faisceau de caractéristiques initié sur la lèvre de la tuyère pour diminuer la pression de p_e à p_0, mais qu'il ne possède pas toutes les propriétés d'un "faisceau de détente plan". En particulier, le saut du nombre de pression $\mathcal{P}$ et le saut de l'angle d'orientation φ ne se conservent pas le long du faisceau. En plus du croisement avec les faisceaux de la famille opposée, le terme source influence le taux de convergence du faisceau.

l'intérieur du tube se réamorce et se désamorce par des chocs forts, mais lorsque le JPR devient très important, l'écoulement central reste subsonique. L'écoulement supersonique à la périphérie du jet se comporte lui comme un guide d'onde annulaire dans lequel se propage l'impulsion de pression générée en entrée par le choc réfléchi axisymétrique issu du disque de Mach.

3.3.3 Structures à disque de Mach dans les jets sous-détendus

La structure à disque de Mach présente dans les jets sous-détendus a été schématisée figure 3.28(a) afin d'en résumer les éléments essentiels : un choc incident FT formé par focalisation en F des ondes issues de la surface du jet se scinde au niveau du point triple T en un choc fort TN se courbant pour devenir normal à l'axe et en un choc réfléchi TR impactant la frontière isobare du jet (atmosphère extérieure au repos). A partir du point triple, une surface de glissement sépare l'écoulement central subsonique de l'écoulement périphérique supersonique. Cette structure apparaît en écoulement plan et en écoulement axisymétrique et reçoit le nom de disque de Mach ("Mach disk" ou encore "Mach stem"). Tous ces éléments sont visibles dans la strioscopie de la figure 3.28(b).

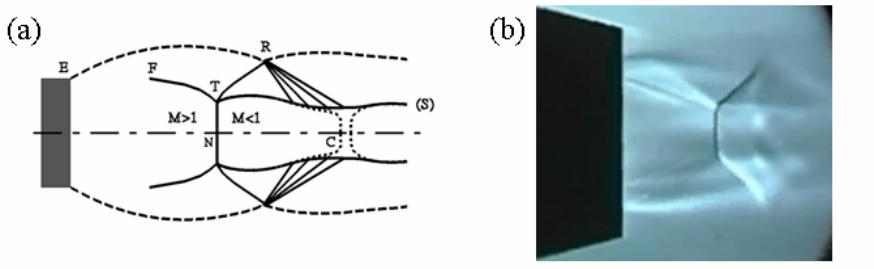


FIG. 3.28 – (a) Schéma du disque de Mach dans un jet sous-détendu et (b) strioscopie d'un jet à JPR=2.6 (MARCO sans contrôle à NPR=5).

Lorsque l'on augmente le JPR d'un jet présentant déjà un disque de Mach, on constate que l'éclatement du jet s'amplifie, le point de focalisation se produit de plus en plus tôt, l'angle (algébrique[27]) σ du choc de focalisation par rapport à l'axe $\overrightarrow{x}$ augmente et le disque de Mach grossit et se déplace vers l'aval. Ces tendances sont expliquées ci-dessous.

Sur la lèvre de la tuyère, au niveau du point de dégénérescence de la détente centrée, l'intégrale de l'équation de compatibilité axisymétrique (3.99) à travers la détente dégénère en l'intégrale de sa version plane (3.29), car l'intégrale de D_{axi} est nulle ($\Delta r \to 0$), et fournit la déviation initiale $\Delta\varphi_0$ de la ligne frontière du jet :

$$\Delta\varphi_0(\text{JPR}) = \mathcal{P}(M_e) - \mathcal{P}(M_j(\text{JPR})) \tag{3.107}$$

avec M_j(JPR) fonction croissante de JPR (relation (3.89)) et $\mathcal{P}(M)$ fonction décroissante de M (relation (3.51)). L'éclatement initial $\Delta\varphi_0$ est donc une fonction croissante du JPR et ne dépend pas de la géométrie plane ou axisymétrique de l'écoulement.

Concernant le déplacement du point de focalisation, le cas plan et le cas axisymétrique doivent être distingués. Dans un jet plan, lorsque le JPR augmente, c'est l'asymétrie de la réflexion du faisceau de détente sur la surface isobare du jet qui est supposée (dans cette thèse, aucune autre explication n'ayant été formulée dans la littérature consultée) être responsable de l'avancée du point de focalisation le long de la première onde de compression réfléchie. On rappelle que dans

[27] L'angle σ est négatif sur les figures 3.27 mais peut devenir positif lorsque le JPR est très fort.

le cas particulier où $M_e \to 1^+$, la réflexion du faisceau de détente débute dès le début de la surface du jet, i.e. juste derrière la dernière onde de détente. Dans un jet circulaire, lorsque le JPR augmente, $\Delta\varphi_0$ augmente et la tendance du terme source D_{axi} à ramener l'écoulement dans la direction de l'axe s'amplifie en courbant de plus en plus les lignes de courant divergentes vers l'intérieur du jet $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$. En fait, l'écoulement en fin de détente n'est pas uniforme comme en jet supersonique plan. La divergence $\varphi > 0$ de l'écoulement axisymétrique fait diverger les toutes premières ondes montantes qui traversent le faisceau de détente et se réfléchissent sur la frontière isobare du jet en ondes convergentes. La convergence de ces ondes réfléchies est accélérée lorsque $\Delta\varphi_0$ augmente et font remonter le point de focalisation le long de la dernière onde du faisceau de détente.

Que l'on soit en jet plan ou axisymétrique, l'ensemble du faisceau de détente est uniquement déterminé par le rapport p_e/p_0. Lorsque l'on passe d'un taux de (JPR) à un taux plus élevé (JPR + ΔJPR), l'ensemble du faisceau de détente du jet à (JPR) est présent à l'identique dans le jet à (JPR + ΔJPR) auquel se rajoute une portion de faisceau divergent supplémentaire. Le choc de focalisation se forme pour assurer la compatibilité entre d'une part les caractéristiques descendantes du faisceau de détente et d'autre part les caractéristiques descendantes réfléchies par la surface du jet. Ce choc aussi appelé choc d'interception ("intercepting shock") s'équilibre entre les deux réseaux de caractéristiques. Lorsque JPR croît, la divergence accentuée des ondes de détente $\frac{\partial\psi^-}{\partial s^+} > 0$ tend à accroître l'angle algébrique du choc σ alors que la convergence amplifiée des ondes réfléchies $\frac{\partial\psi^-}{\partial s^+} < 0$ tendent à le courber vers l'intérieur du jet.

Enfin, le bord du disque de Mach T se positionne par construction sur le choc d'interception FT. Celui-ci étant déjà déterminé par les mécanismes décrits précédemment, si l'on admet que le disque de Mach est quasiment rectiligne, sa taille $2r_T$ est donc uniquement fonction de sa position longitudinale.

D'intenses recherches ont été menées sur les jets fortement sous-détendus en raison des nombreuses applications pratiques comme les fusées ou missiles à hautes altitude [3]. Cependant, beaucoup d'études [3, 261, 154, 52, 148] s'appuient sur des simplifications applicables uniquement à très forts JPR (≥ 10). Crist *et al.* [52, 62] ont montré expérimentalement que la position et la taille du disque de Mach sont toutes deux proportionnelles à $\sqrt{\text{NPR}}$. Certaines études ont fourni des lois empiriques intéressantes pour les jets modérément sous-détendus. Pour un jet sonique débouchant dans un air au repos, Adamson et Nicholls [4] ont trouvé que la position du disque de Mach pouvait être prévue avec une bonne approximation en supposant que la pression en aval du disque de Mach est égale à la pression extérieure p_0. Pour cela, ils ont utilisé la distribution de nombre de Mach sur l'axe calculée par Owen et Thornhill [182] étant donné qu'elle est invariante de la tuyère jusqu'au choc[28]. La valeur de la pression en aval du disque de Mach a par la suite été réajustée [179] à $1.3p_0$. Eastmann et Radtke [76] ont prétendu obtenir de meilleurs résultats en supposant que la position du disque de Mach coïncide avec le minimum de pression en aval du choc incident. Bowyer *et al.* [23] ont suggéré que la pression derrière le disque de Mach courbe soit constante et que le choc de Mach soit normal à la ligne de courant arrivant sur le point triple. Tous ces critères empiriques sont locaux et ne sont basés sur aucune loi physique. En particulier, ils ne prennent pas en compte la dépendance du disque de Mach vis-à-vis de l'écoulement subsonique en aval soulignée par les expériences de Polyboyarinov [196]. Afin de combler cette lacune, Abbett [1] a proposé une théorie fondée sur l'hypothèse que l'écoulement du jet en aval du disque de Mach peut être considéré comme composé d'un tube central quasi-monodimensionnel s'appuyant sur le contour du choc fort et d'un écoulement

[28] Comme c'est une zone qui ne "voit" pas l'influence de l'extérieur, elle est parfois nommée "blind region" [140].

périphérique supersonique axisymétrique calculé par la méthode des caractéristiques. L'équilibre non-visqueux de la surface de glissement correspond localement à la continuité normale de la pression et celle de la direction de la vitesse en chacun de ses points. L'écoulement central initialement subsonique est aussi supposé accélérer au-delà de la vitesse du son (ce qui au passage n'est applicable qu'en dessous d'un certain taux de détente). Sous ces premières hypothèses, Abbett avance que le point triple se place sur le choc d'interception de manière à ce que l'écoulement central devienne sonique dans une section minimum du tube de courant central et lorsque celui-ci possède des lignes de courant parallèles à l'axe (ce que Abbett appelle un "smooth throat"). Des comparaisons avec les expériences de Love [155] valident la théorie du "throat-like choking" [1, 88]. Cette dépendance du disque de Mach vis-à-vis du col de ré-amorçage du tube central avait été introduite auparavant par Peters et Phares [194] dans un modèle de jet un peu plus grossier. De plus, Chang et Chow [33] soulignent que même si la théorie du "throat-like choking" explique le phénomène majeur fixant la position et le rayon du disque de Mach, l'influence de la vorticité générée par la courbure des chocs doit être prise en compte pour obtenir des résultats précis.

Pour finir, les figures 3.29 et 3.30 présentent une vue rapprochée au voisinage des points triples obtenus par calculs RANS respectivement en jet plan et en jet axisymétrique. Dans les deux cas, 3 points voisins de T ont été sondés et reportés dans le diagramme pression-déviation. Sur la polaire de choc de l'écoulement incident (1), on retrouve les conditions (2) derrière le choc faible incident FT ainsi que les conditions (3) derrière le choc fort TN. Tant dans l'écoulement plan que dans l'écoulement axisymétrique, on constate que la déviation de (1) vers (3) est positive, autrement dit, il s'agit d'une réflexion de Mach inverse (RMI, figure 3.13). Lorsque le maillage axial est suffisamment fin (figure 3.29), le disque de Mach a bien une forme convexe dans le sens de l'écoulement.

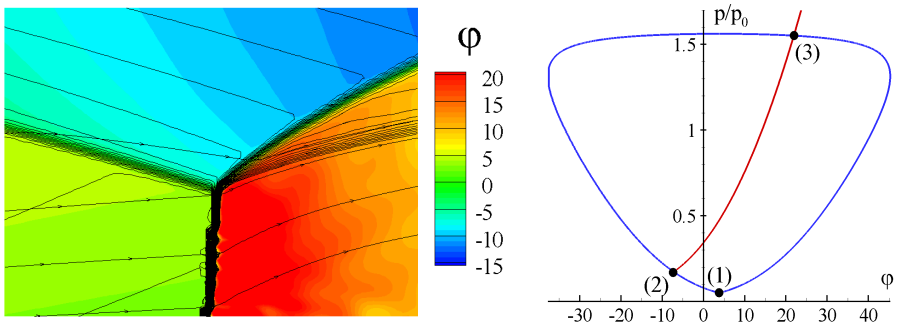


FIG. 3.29 – Zoom sur le point triple du jet plan JPR=10 de la figure 3.17.

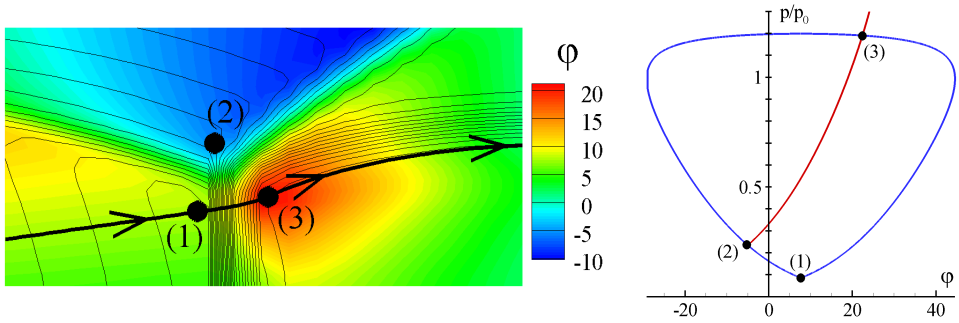


FIG. 3.30 – Zoom sur le point triple du jet axisymétrique JPR=3.7 de la figure 3.27.

Le nombre de points considérable nécessaire pour capturer une courbure aussi faible explique qu'elle n'ait pas été remarquée dans les travaux antérieurs. Le calcul 3D axisymétrique étant beaucoup plus coûteux (128 plans en azimut) un tel raffinement n'a pu être réalisé et le choc est parfaitement aligné avec le maillage. Par contre, la déviation (1)-(3), elle, est bien marquée. Dans tous les calculs de jet sous-détendu avec disque de Mach réalisés dans cette thèse, les déviations (1)-(3) indiquent une réflexion de Mach inverse. Ceci prouve que la structure interne d'un jet fortement sous-détendu peut générer "naturellement" le gradient de pression nécessaire à l'existence du disque de Mach inverse précédemment obtenu "artificiellement" par Ben-Dor *et al.* [13].

Effet d'un petit divergent sur la structure de choc. Même si les mécanismes de focalisation sont différents dans les jets plans et les jets axisymétriques, la formation du disque de Mach dépend directement du taux de détente p_e/p_0 imposé au niveau de la lèvre de la tuyère. La température en aval de ce choc fort est beaucoup plus élevée que dans le reste du jet et constitue un point chaud aisément détectable par des capteurs infra-rouges. Le NPR $= p_{ij}/p_0$ de la tuyère étant fixé, il est possible d'éliminer le disque de Mach en ajoutant un divergent dont le contour est adaptée au NPR. Toutefois, si l'on considère que NPR $= 5$, un tel divergent ne peut, en raison de sa longueur, être monté sur un avion conçu initialement avec une tuyère simplement convergente. Une solution alternative est d'ajouter une portion divergente courte permettant d'espacer les détentes entre le col et l'extérieur. Notons que ce divergent n'a pas du tout l'ambition d'adapter le jet puisque la totalité de la détente de p_e (de la tuyère sans divergent) à p_0 est émise dans le jet. Cette solution est illustrée par la figure 3.31 : le disque de Mach d'un jet sonique uniforme sous-détendu à NPR $= 7$ est considérablement réduit par un simple divergent conique d'une longueur égale au rayon de la tuyère initiale.

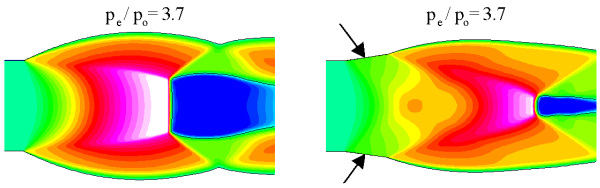


FIG. 3.31 – Effet d'une paroi divergente (indiquée par les flèches) sur le disque de Mach.

3.3.4 Influence des conditions à la surface du jet

Pour finir cette introduction au jet supersonique plan ou axisymétrique, l'influence des conditions limites agissant sur la frontière du jet est ici mise en évidence par quelques exemples. Jusqu'à présent, on supposait que le jet était non visqueux et traversait un milieu au repos. La pression statique imposée par le fluide extérieur sur sa ligne de glissement était donc supposée constante. Comme la surface d'un jet non adapté est non rectiligne, tout mouvement du fluide à sa périphérie y induit une répartition de pression non homogène : la surface de glissement n'est plus isobare. A ce stade, nous pouvons préciser que tous les calculs de jet canonique uniforme exposés dans ce chapitre ont été réalisés en RANS, donc avec des effets visqueux, et avec un écoulement extérieur à $M_0 = 0.6$. Ce nombre de Mach a été réduit, mais la surface du jet résultante était instable et aucune solution stationnaire ne pouvait être obtenue dans ce cas.
L'influence d'un écoulement extérieur supersonique est d'abord illustrée dans la section 3.3.4.1 par la solution des petites perturbations proposée par Kawamura [132]. Afin d'évaluer l'influence d'un écoulement extérieur subsonique, les développements analytiques exposés par Pack [183] concernant un jet supersonique débouchant dans une atmosphère au repos sont étendus dans

la section 3.3.4.2. Ces deux cas restreints au jet plan permettent d'avoir un premier aperçu des effets de l'écoulement extérieur. Toutefois, contrairement à ce qui est souvent admis, la transposition au jet axisymétrique n'est pas systématique, son traitement analytique est plus délicat et n'est pas exposé ici. L'influence de l'écoulement extérieur sur un jet axisymétrique est illustrée grâce à des simulations numériques RANS effectuées sur une large plage de vitesses.

3.3.4.1 Jet plan entouré d'un écoulement extérieur supersonique

Kawamura [132] propose une solution séduisante au problème du jet plan supersonique débouchant à M_e à la pression p_e dans un écoulement supersonique M_0 de pression p_0, dans le cas d'une faible non-adaptation $(p_e - p_0) \ll p_0$. Pour cela, il note tout d'abord que l'équilibre de la ligne de glissement supérieure au niveau du point d'impact Q d'une onde incidente IQ issue de l'intérieur du jet (cf. figure 3.32) conduit à l'émission d'une onde QT transmise vers l'extérieur et d'une onde QR réfléchie vers l'intérieur. La linéarisation des équations de compatibilité planes (3.28) et (3.29) donne :

$$\text{à travers une } C^- : \qquad \Delta\varphi = -\frac{\lambda}{p_0}\Delta p \tag{3.108}$$

$$\text{à travers une } C^+ : \qquad \Delta\varphi = +\frac{\lambda}{p_0}\Delta p \qquad \text{avec} \qquad \lambda = \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2} \tag{3.109}$$

En considérant l'équilibre pression-déviation (resp. $\Delta_T p = \Delta_I p + \Delta_R p$ et $\Delta_T \varphi = \Delta_I \varphi + \Delta_R \varphi$) de la surface de glissement QB, on arrive à des relations analogues à celles des rayons optiques transmis et réfléchis sur une interface de réfraction :

$$\begin{aligned}
&\text{perturbation incidente :} && \Delta_I p \,; \quad \Delta_I \varphi \\
&\text{perturbation transmise :} && \Delta_T p = \frac{2\lambda_e}{\lambda_e + \lambda_0}\Delta_I p \,; \quad \Delta_T \varphi = \frac{2\lambda_0}{\lambda_e + \lambda_0}\Delta_I \varphi \\
&\text{perturbation réfléchie :} && \Delta_R p = \frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_e + \lambda_0}\Delta_I p \,; \quad \Delta_R \varphi = -\frac{\lambda_e - \lambda_0}{\lambda_e + \lambda_0}\Delta_I \varphi
\end{aligned} \tag{3.110}$$

Les équations (3.110) montrent que :
- l'onde transmise est toujours de même nature (compression ou détente) que l'onde incidente ;
- l'amplitude ($\Delta_T p$ ou $\Delta_T \varphi$) de l'onde transmise est inférieure en valeur absolue à celle de l'onde incidente ssi $\lambda_0 < \lambda_e$[29] ;
- l'onde réfléchie est de même nature que l'onde incidente ssi $\lambda_0 < \lambda_e$;
- l'amplitude ($\Delta_R p$ ou $\Delta_R \varphi$) de l'onde réfléchie est toujours inférieure en valeur absolue à celle de l'onde incidente.

Cette dernière propriété implique que toute perturbation introduite dans un jet supersonique entouré par un écoulement supersonique est atténuée au fur et à mesure des réflexions.

Les différents états du jet schématisé figure 3.32 vont maintenant être représentés dans le diagramme $p - \varphi$. Chaque fois que l'état (n') du jet est mis en contact avec l'état (n) de l'écoulement extérieur, l'état résultant $(n+1)$ vérifie :

$$p_{n+1} = p_n + \Delta p_n = p_{n'} + \Delta p_{n'} \tag{3.111}$$

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n + \Delta\varphi_n = \varphi_{n'} + \Delta\varphi_{n'} \tag{3.112}$$

avec à l'ordre 1 (cf. équations (3.108) et (3.109) :

$$\text{à travers la } C^+ \text{ transmise à l'extérieur :} \qquad \Delta\varphi_n = +\frac{\lambda_0}{p_0}\Delta p_n \tag{3.113}$$

$$\text{à travers la } C^- \text{ réfléchie à l'intérieur :} \qquad \Delta\varphi_{n'} = -\frac{\lambda_e}{p_0}\Delta p_{n'} \tag{3.114}$$

[29] La fonction $\lambda(M)$ est maximale en $M = \sqrt{2}$.

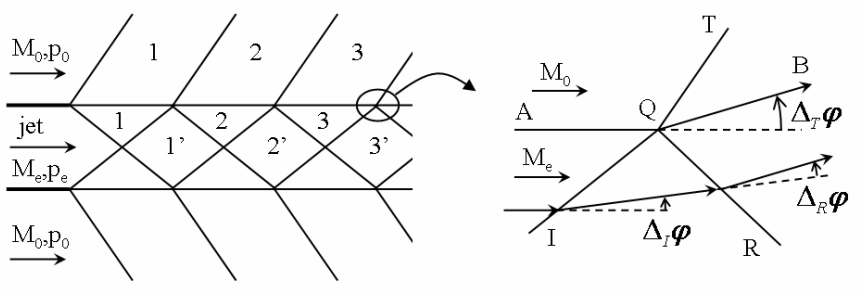


FIG. 3.32 – Approche linéarisée du jet supersonique entouré par un écoulement supersonique.

Les 4 équations précédentes signifient que dans le diagramme $p-\varphi$, le point $(n+1)$ se situe à l'intersection de la droite de pente $-\frac{\lambda_e}{p_0}$ passant par le point (n') et de la droite de pente $+\frac{\lambda_0}{p_0}$ passant par (n). L'onde descendante (C^-) faisant passer le jet de l'état (n') à l'état $(n+1)$ se réfléchi sur l'axe de symétrie en une onde montante (C^+) redressant le jet dans la direction $\varphi = 0$ dans l'état $(n+1')$. Le point $(n+1')$ se situe donc dans le diagramme $p-\varphi$ à l'intersection de la droite de pente $+\frac{\lambda_e}{p_0}$ passant par le point $(n+1)$ et de l'axe $\varphi = 0$. Dès que le jet est non-adapté, deux situations sont à distinguer (cf. figure 3.33) :
- Si $\lambda_e < \lambda_0$ alors la nature de l'onde réfléchie en Q est toujours opposée à celle de l'onde incidente. Le jet oscille donc autour de la pression p_0 tout en s'en rapprochant à cause des "fuites" de pression à chaque réflexion d'onde sur la frontière.
- Si $\lambda_e > \lambda_0$ alors l'onde réfléchie en Q est toujours de même nature que l'onde incidente. Le jet se ramène donc de manière monotone de la pression d'éjection p_e à la pression extérieure p_0.
Dans les deux cas, la convergence vers p_0 est d'autant plus rapide que λ_0 et λ_e sont proches (pour $\lambda_0 = \lambda_e$ et $pe > p_0$ on retrouve l'écoulement d'une tuyère divergente adaptée).

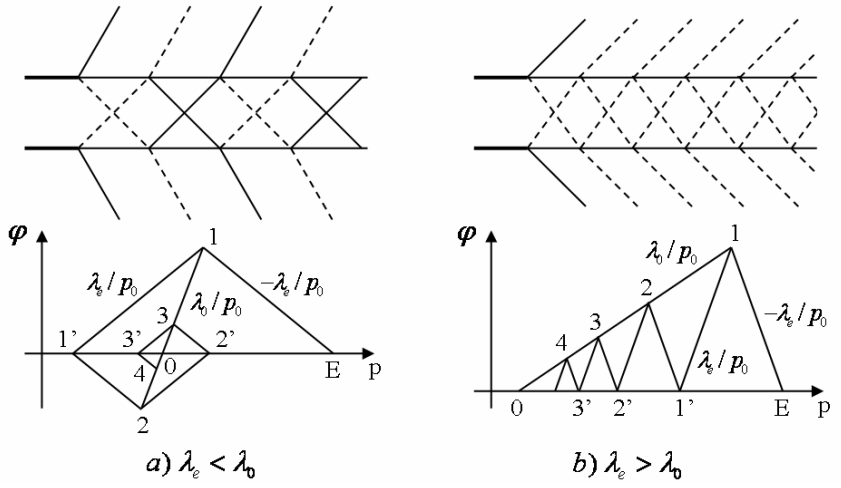


FIG. 3.33 – Les régimes de sous-détente ($p_e > p_0$) d'un jet supersonique dans un écoulement supersonique (ondes de détente en pointillés, ondes de compression en traits continus).

Notons enfin que Kawamura [132] propose de prendre la condition de sortie (M_e, p_e) comme état de référence du jet. En fait, il serait peut être plus judicieux de prendre l'état (M_j, p_0) adapté à la pression extérieure comme l'a suggéré Pack [183] dans le cas du jet sortant dans un air au repos. Une autre approche pourrait être de re-linéariser à partir de chaque état (n) ou (n'). Cependant, dans le cadre des petites perturbations, les différences sont d'ordre 2.

3.3.4.2 Jet plan entouré d'un écoulement extérieur subsonique

Afin d'estimer l'effet d'un écoulement extérieur subsonique, nous nous plaçons encore dans le cadre d'une faible non-adaptation $(p_e - p_0)/p_0 = \varepsilon \ll 1$. Ceci permet de supposer, en première approximation, que les perturbations d'ordres supérieurs à $O(\varepsilon)$ sont négligeables et permet d'étendre la théorie du potentiel linéarisé déjà appliquée au cas du jet $M_j > 1$ débouchant dans une atmosphère au repos $M_0 = 0$ (Prandtl [199], Pack [183]) au cas où le fluide extérieur se déplace à une vitesse subsonique $0 \leq M_0 < 1$. Une solution générale a été trouvée dans l'hypothèse où $M_0 \to 0$. Les calculs ont été reportés dans l'annexe C.5 et les résultats sont commentés dans cette section[30].

La figure 3.34 présente le champ de perturbation de pression p_1 dans un jet faiblement sous-détendu autour de la condition d'adaptation $(M_j = 1.4, p_0)$ ainsi que la forme de sa frontière obtenue par intégration de la pente $\varphi_1(x, y = 1)$. Le nombre de Mach de l'écoulement extérieur varie de $M_0 = 0$ à $M_0 = 0.3$ alors que le rapport p_e/p_0 est fixé[31]. Lorsque l'atmosphère est au repos, on retrouve la solution de Pack [183] aisément calculable à la main puisqu'un seul faisceau d'onde (dégénérant par la linéarisation en une onde de pente $\text{asin}(1/M_j)$) adapte initialement le jet de p_e à p_0 et se propage ensuite par réflexions successives dans le tube de courant. Dès que le fluide extérieur se met en mouvement à $M_0 < 1$, les changements de pente de l'interface avec le jet provoque des variations de pression qui, contrairement au cas où $M_0 > 1$, se propagent en amont et en aval et l'incurve : les portions montantes $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y = 1) > 0$ deviennent convexes (relativement à $\overrightarrow{y}$) et les portions descendantes $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x, y = 1) < 0$ deviennent concaves. Ceci s'explique de la manière suivante.
Comme l'écoulement extérieur est subsonique, la pression sur la frontière est maximale dans les creux et minimale sur les bosses (cf. solution linéaire de la paroi ondulée). Le long de la frontière, il y a donc un gradient de pression négatif sur les portions montantes joignant les creux aux bosses qui ne peut être compensé dans le jet que par l'émission d'ondes de détente provoquées par la courbure de la ligne de glissement vers le haut. A l'inverse, le long de la frontière, il y a un gradient de pression positif sur les portions descendantes joignant les bosses aux creux qui ne peut être compensé dans le jet que par l'émission d'ondes de compression provoquées par la courbure de la ligne de glissement vers le bas.

Ainsi, l'écoulement extérieur dissymétrise les cellules périodiques de détente-compression au premier ordre. Dans chaque cellule, les détentes ainsi que les compressions sont initialement plus faibles mais terminent plus fortes. Les extrema de pressions résultants sont donc amplifiés et ce d'autant plus que la vitesse subsonique extérieure est élevée.
De plus, les ondes de détente émises par une portion montante de la surface de cisaillement se propagent vers l'axe, s'y réfléchissent en ondes de détente, impactent la portion descendante adjacente sur laquelle est appliqué un gradient de pression positif, s'y réfléchissent en ondes de compression qui se réfléchissent sur l'axe et viennent impacter la portion montante suivante. Ce faisceau de compression se cumule donc à la compression imposée par l'écoulement extérieur et brise la périodicité des cellules de détente-compression observée à l'ordre 1 lorsque $M_0 = 0$.
Enfin, comme les compressions se traduisent par des faisceaux convergents dans l'écoulement non-linéarisé, on peut conjecturer que leur amplification provoquée par l'écoulement subsonique extérieur le long de l'axe du jet est un facteur de focalisation, i.e. de création des chocs internes.

[30] L'influence d'un écoulement extérieur subsonique sur la pseudo-longueur d'onde $2\pi/k_N$, équation (C.38), avait déjà été écrite par Pai [186] mais aucune solution analytique complète n'a été trouvée dans la littérature consultée.

[31] Fixer le taux de détente p_e/p_0 revient à fixer l'écart initial de vitesse $(U_e - U_j)/U_j$, cf. Annexe C.5. Ce dernier a été choisi égal à 50% pour générer une déformation visible de la surface du jet, la pression adimensionnée $p_1/(2\rho_j U_j(U_j - U_e))$ étant indépendante de ce rapport.

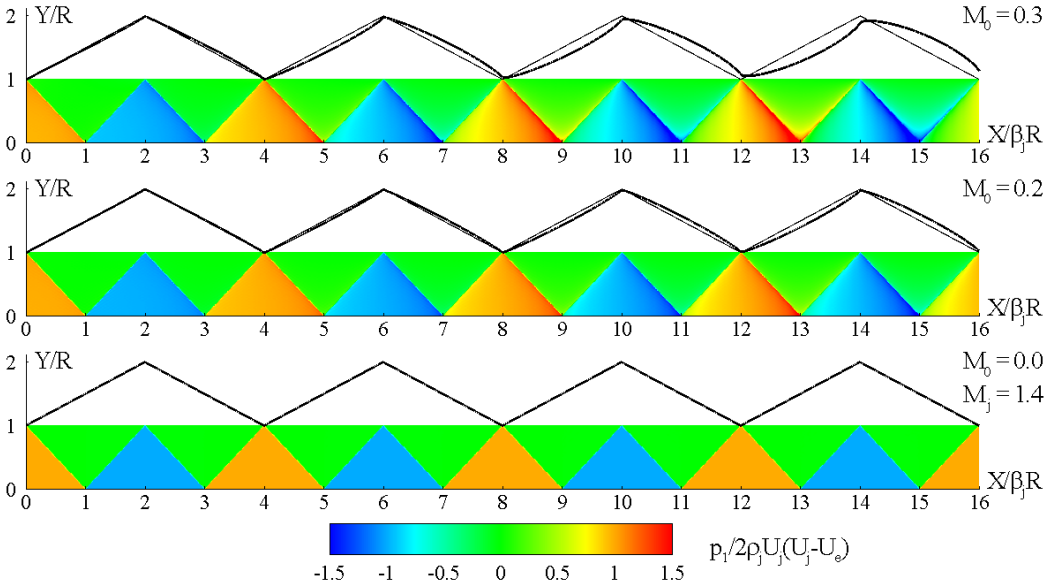


FIG. 3.34 – Influence de l'écoulement extérieur sur la pression et la forme d'un jet plan faiblement sous-détendu dans l'hypothèse des petites perturbations.

3.3.4.3 Influence de l'écoulement extérieur sur un jet axisymétrique

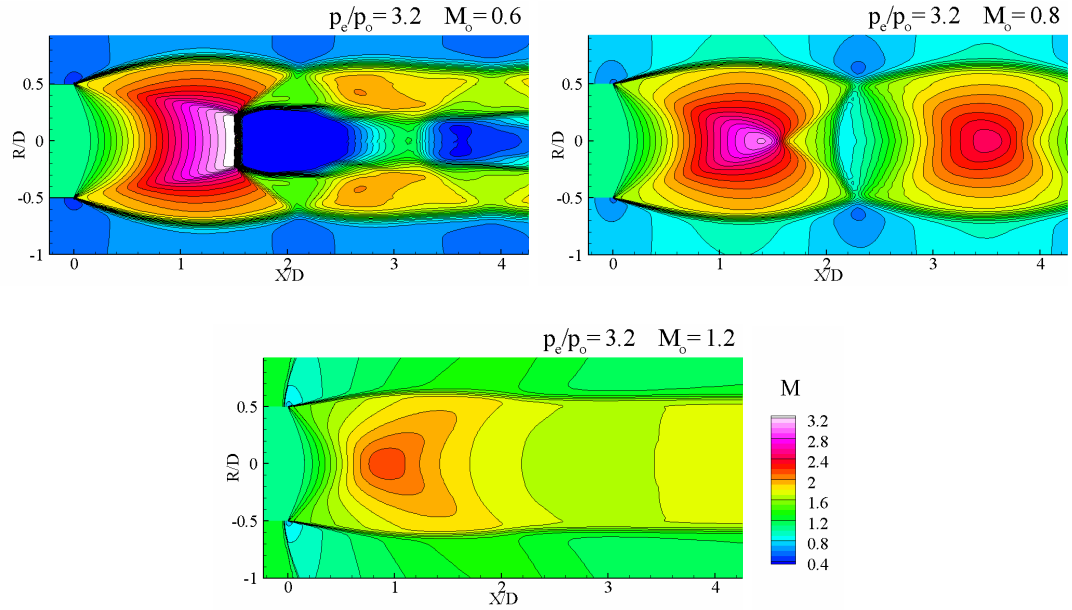


FIG. 3.35 – Influence de l'écoulement extérieur sur la structure de choc du jet.

Le traitement analytique du jet axisymétrique étant plus ardu, des exemples issus de calculs RANS sont présentés figure 3.35. Le jet est initialement sonique uniforme et son taux de sous-détente est maintenu constant égal à JPR $= p_e/p_0 = 3.2$. A faible nombre de Mach extérieur, $M_0 = 0.6$, ce rapport de pression est assez fort pour générer une structure à disque de Mach. Au fur et à mesure que la vitesse extérieure augmente, le jet s'ouvre moins et sa structure interne change comme si l'on diminuait son taux de sous-détente. Si l'on suppose que l'organisation de l'écoulement est invariant par rapport à M_0, la pression appliquée sur la surface du jet est proportionnelle à $\rho_0 U_0^2 = \gamma_0 p_0 M_0^2$. Comme p_0 est fixée, la pression appliquée sur le jet augmente

avec M_0 et diminue le taux de détente perçu initialement par le jet. Le jet s'ouvre donc moins et sa structure de choc change. Toutefois, comme le montrent les deux sections précédentes, la distribution de pression résultant de l'équilibre de la surface de glissement dépend de M_0 si bien que l'augmentation de M_0 ne peut pas être simplement transposée en la diminution d'un taux de détente effectif. A $M_0 = 0.8$, le disque de Mach a complètement disparu et laisse place à un choc en lentille semblable au cas faiblement sous-détendu $p_e/p_0 = 1.6$ sans écoulement extérieur (cf. figure 3.27). A $M_0 = 1.2$, le jet ne comporte plus du tout de choc et devient quasiment adapté à partir de $X/D \approx 4$. Ces trois cas assez différents montrent la grande influence de l'écoulement extérieur sur la structure interne du jet.

3.3.4.4 Influence de la diffusion visqueuse sur la structure compressible

L'interaction de la turbulence avec les ondes de pression est un vaste sujet d'investigation. Aussi, cette section n'a pour seul ambition que de montrer les effets les plus marquant de la turbulence sur la propagation des ondes de Mach à l'intérieur du jet supersonique, en assimilant son action à une diffusion visqueuse (hypothèse de Boussinesq).
L'application de la théorie linéaire (cf. section 3.3.4.1) permet de comprendre qu'une onde arrivant sur une couche cisaillée donne naissance à une infinité de faisceaux transmis et réfléchis. Les ondes isentropiques ou de choc initiées au début d'un jet non-adapté sont donc réfléchies mais aussi réfractées lors de leur propagation. La réfraction des ondes est en outre altérée par les effets thermiques, i.e. la conduction et la dissipation visqueuse (voir l'étude numérique de Dash *et al.* [59]).

Tam *et al.* [248] remarquent que pour représenter l'écoulement d'un jet faiblement non-adapté, Prandtl [199] et Pack [183] ont linéarisé les équations d'Euler autour d'un jet à profil de vitesse rectangulaire ("the vortex-sheet vortex model"). Ils notent que dans un jet réel turbulent une couche de mélange se substitue à la surface de glissement du modèle Eulerien et que deux phénomènes supplémentaires doivent alors être pris en compte :
- d'une part, l'épaississement de la couche de mélange se traduit par une évolution longitudinale du profil de vitesse initialement rectangulaire discontinu vers un profil Gaussien,
- d'autre part, la turbulence interagit avec les ondes de pression au sein de la couche de mélange et réduit leur intensité.

Afin de reproduire l'effet de l'évolution spatiale du profil de vitesse sur la propagation des ondes dans un jet faiblement non-adapté, Tam *et al.* [248] proposent de linéariser les équations de Navier-Stokes autour du champ moyen $(\rho_j, u_j, v_j, p_0)(x, r)$ d'un jet rond turbulent adapté à la pression externe p_0. Le champ de vitesse moyen (u_j, v_j) est déterminé par les mesures expérimentales de Eggers [78], Birch & Eggers [15], Lau *et al.* [145, 146] (ces corrélations ont été reportées dans l'annexe C.6) puis ρ_j en est déduit par la relation de Crocco. Afin de modéliser l'interaction des ondes avec la turbulence, les auteurs utilisent le modèle de viscosité turbulente ν_t et supposent que le nombre de Reynold turbulent $\mathrm{Re}_T = \frac{u_c b}{\nu_t}$ est constant. Comme le problème du jet turbulent fait intervenir deux échelles très différentes, la longueur d'onde des oscillations de pression et l'échelle beaucoup plus longue d'évasement de la couche de mélange, Tam *et al.* s'appuient sur des développements asymptotiques multi-échelles et baptisent leur méthode "multiple-scales shock-cell model". Après calculs, ils constatent que lorsque Re_T est diminué tout en conservant le même champ aérodynamique, les oscillations de pressions sont atténuées mais leur pseudo-période ne change pas. De plus, le nombre de Reynolds le plus approprié pour le calcul des ondes de pression est le même que celui qui permet d'obtenir le meilleur accord du calcul du champ moyen avec les données expérimentales.

Plus tard, Choi et Lele [39] ont obtenus des résultats similaires à l'aide des équations de stabilité parabolisées ("Parabolized Stability Equations" ou PSE) basées sur le champ moyen fourni par des calculs Navier-Stokes parabolisés ("Parabolized Navier-Stokes" ou PNS) couplés à un modèle de turbulence v2f. Pour les détails concernant la méthodologie, le lecteur est invité à consulter la référence [39]. Les ondes stationnaires sont associées au modes propres des équations PSE dont la fréquence est nulle. La figure 3.36 montre l'évolution du 1er mode spatial de la pression axiale lorsque la viscosité turbulente est réduite (du cas 1 au cas 4) tout en figeant le champ aérodynamique. En accord avec l'étude de Tam *et al.*, Choi et Lele montrent donc que la viscosité turbulente amortit les oscillations de pression mais ne les déphase pas. La figure 3.37 présente l'évolution du 1er mode spatial de la pression axiale calculé avec une viscosité nulle lorsque le profil de vitesse est de plus en plus diffusé (du cas 1 au cas 3). Ces courbes montrent que la diffusion du gradient de vitesse, d'une part, diminue la période des oscillations et, d'autre part, les atténue mais dans une moindre mesure que la viscosité. Par ailleurs, les études de Tam *et al.* [248] et de Choi et Lele [39] s'accordent pour dire que les modes d'ordre élevé ne sont présents que dans la zone proche du jet et sont vite atténués en aval.

Finalement, on peut retenir que l'action diffusive de la turbulence se répercute directement sur la propagation des ondes dans le jet et indirectement par l'intermédiaire de la diffusion du profil de vitesse moyenne : la diffusion turbulente provoque essentiellement un amortissement de l'amplitude des ondes ; la diffusion du profil de vitesse se traduit par un amortissement plus modéré des ondes mais réduit surtout leur pseudo-longueur d'onde.

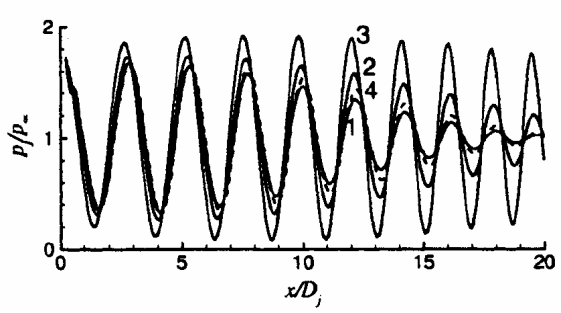


FIG. 3.36 – Effet de la viscosité [39].

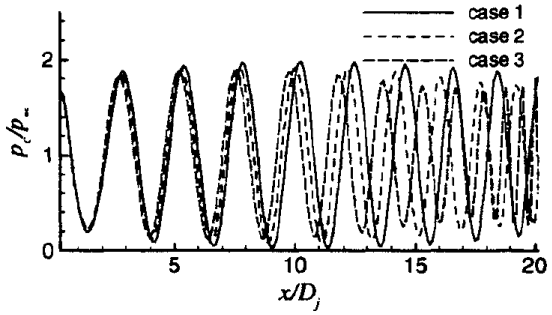


FIG. 3.37 – Effet du profil de vitesse [39].

3.3.5 Discussion sur le choc en lentille des jets soniques faiblement sous-détendu

Nous avons vu que lorsque les jets soniques sont faiblement sous-détendus, il apparaît un choc de forme convexe, baptisé "choc en lentille". Cette topologie de choc a été observée lors de l'expérience réalisée sur le banc MARCO (cf. figure 2.2), dans des simulations de jet sonique plan et axisymétrique, ainsi que dans le jet propulsif d'avions réels sous certaines conditions de vol. Le calcul d'un jet sonique plan initialement uniforme (voir figure 3.20) permet d'affirmer que ce choc n'est ni dû à une ligne sonique courbée ni à la géométrie axisymétrique. On peut alors supposer que c'est la non-linéarité de l'écoulement transonique qui en est l'origine. Cependant, aucune des simulations présentées dans ce mémoire ne restitue le cas d'un jet plan parfaitement non-visqueux à ligne de glissement isobare. Aussi, les effets visqueux ainsi que les effets de l'écoulement extérieur jouent probablement un rôle dans l'apparition du choc en lentille mis en évidence lors de cette étude. Pour isoler les facteurs à l'origine du choc en lentille, il est nécessaire d'effectuer le calcul d'un jet sonique plan limité par une ligne de glissement isobare parfaite, ce qui n'a pas été fait dans le cadre de cette thèse.

3.4 Analyse des structures d'ondes internes aux jets MARCO

Dans la première partie de ce chapitre, la théorie des caractéristiques a été utilisée pour décrire le comportement des écoulements supersoniques plans. L'extension de cette théorie à la géométrique axisymétrique, bien qu'ayant fait ses preuves en tant que méthode de calcul, s'est avérée inapplicable en tant que méthode d'analyse du champ aérodynamique. D'autre part, les résultats expérimentaux et numériques ont montrés que l'introduction de perturbations azimutales dans la partie initiale du jet axisymétrique rend l'écoulement tridimendionnel. Un des deux buts de ce chapitre étant d'identifier les mécanismes tridimensionnels qui modifient la structure des chocs internes au jet, la théorie des caractéristiques 3D a d'abord été étudiée dans l'espoir de pouvoir l'utiliser par la suite comme outil d'analyse de l'écoulement.

3.4.1 Theorie des caractéristiques 3D

3.4.1.1 Equations d'Euler en coordonnées polaires 3D

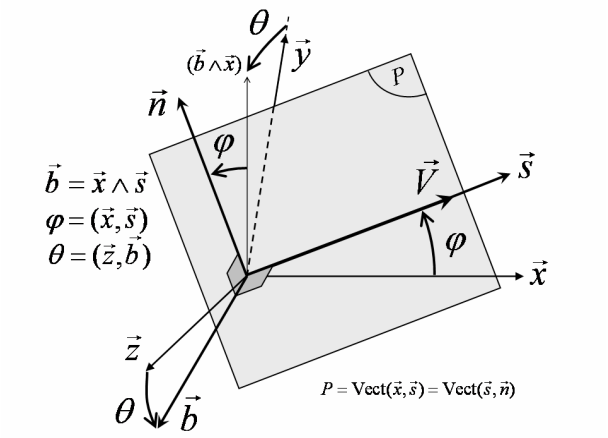


FIG. 3.38 – Définition des coordonnées polaires 3D.

Les équations d'Euler en coordonnées polaires 3D (s, n, b)[32] (voir figure 3.38) s'écrivent [125] :

$$-\frac{1-M^2}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s}+\frac{\partial \varphi}{\partial n}+\sin\varphi\frac{\partial \theta}{\partial b} = 0 \quad (3.115)$$

$$\frac{1}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial n}+\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \quad (3.116)$$

$$\frac{1}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial b}+\sin\varphi\frac{\partial \theta}{\partial s} = 0 \quad (3.117)$$

La conservation de l'enthalpie totale (3.19) et de l'entropie (3.20) le long des lignes de courant ont naturellement les mêmes équations qu'en écoulement plan. L'équation (3.115) représente la conservation de la masse, les hypothèses d'écoulement isentropique et isoénergétique étant implicites. Les équations (3.116) et (3.117) expriment, quant à elles, l'équilibre des forces centrifuges et des gradients transverses de pression suivant les directions transverses respectives $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{b}$. Dans le cas particulier de l'écoulement plan (x, y), $\theta = 0$ de sorte que (3.115) et (3.116) se simplifient respectivement en (3.17) et (3.18). Dans le cas particulier de l'écoulement axisymétrique, $\partial\theta/\partial b = 1/r$ et $\partial\theta/\partial s = 0$ de sorte que (3.115) et (3.116) deviennent respectivement (3.95)

[32] Contrairement à ce que les notations semblent suggérer, (s, n, b) n'est pas, de manière générale, le système de coordonnées intrinsèques 3D formé de la tangente, de la normale, et de la binormale à la ligne de courant.

et (3.96). Dans ces deux cas particuliers, (s, n, b) est confondu avec le système de coordonnées intrinsèques lié aux lignes de courant.

3.4.1.2 Equations de compatibilité 3D

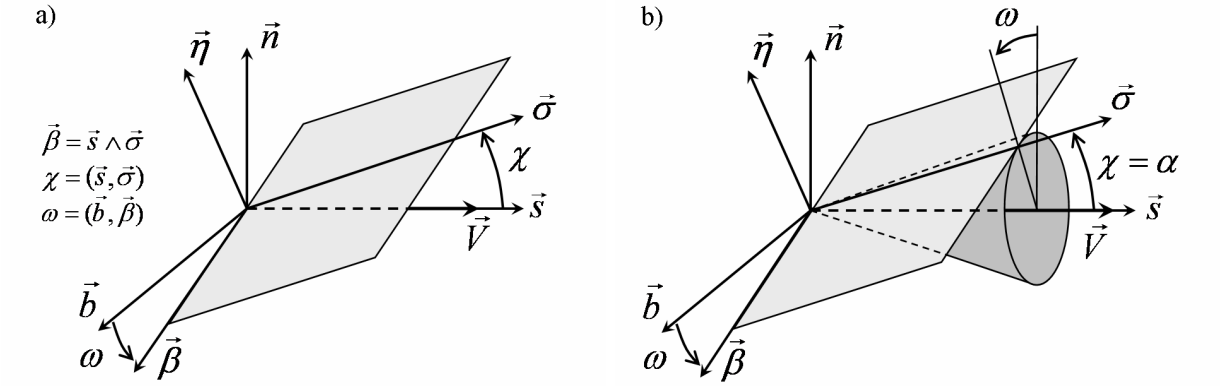


FIG. 3.39 – (a) Définition des coordonnées liées au plan Π, (b) cône de Mach, plan caractéristique, et direction bicaractéristique.

Pour trouver les surfaces caractéristiques et les équations de compatibilité associées aux équations d'Euler 3D, on suit la même démarche qu'en écoulement plan, dans l'espace. On considère une surface plane Π repérée par deux vecteurs unitaires normaux $(\overrightarrow{\sigma}, \overrightarrow{\beta})$, tels que $(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{\sigma}) = \chi$ et $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{\beta}) = \omega$, voir figure 3.39. On note $\overrightarrow{\eta}$, la normale unitaire au plan qui forme une base $(\overrightarrow{\sigma}, \overrightarrow{\eta}, \overrightarrow{\beta})$ orthonormée directe. Les dérivées partielles dans ce plan $\Pi(\chi, \omega)$ s'expriment en fonction des dérivées polaires [125] :

$$\frac{\partial .}{\partial \sigma} = \cos\chi \frac{\partial .}{\partial s} + \sin\chi\cos\omega \frac{\partial .}{\partial n} + \sin\chi\sin\omega \frac{\partial .}{\partial b} \tag{3.118}$$

$$\frac{\partial .}{\partial \beta} = -\sin\omega \frac{\partial .}{\partial n} + \cos\omega \frac{\partial .}{\partial b} \tag{3.119}$$

ce qui, lorsqu'on les applique aux trois variables p, φ, θ, permet de définir 6 équations venant s'ajouter aux 3 équations (3.115),(3.116),(3.117). On obtient alors un système de 9 équations dont les 9 inconnues sont les dérivées spatiales de p, ϕ, θ par rapport à (s, n, b). Le plan $\Pi(\chi, \omega)$ est caractéristique si ce système est indéterminé, autrement dit, si son déterminant est nul, ce qui arrive seulement si $M > 1$ lorsque $\chi = \arcsin(1/M) = \alpha$.

Pour obtenir la condition de compatibilité, on exprime les dérivées spatiales des équations (3.115),(3.116),(3.117) dans le système (σ, η, β), avec $\chi = \alpha$:

$$\frac{\partial .}{\partial s} = \cos\alpha \frac{\partial .}{\partial \sigma} - \sin\alpha \frac{\partial .}{\partial \eta} \tag{3.120}$$

$$\frac{\partial .}{\partial n} = \sin\alpha\cos\alpha \frac{\partial .}{\partial \sigma} + \cos\omega\cos\alpha \frac{\partial .}{\partial \eta} - \sin\omega \frac{\partial .}{\partial \beta} \tag{3.121}$$

$$\frac{\partial .}{\partial b} = \sin\alpha\sin\omega \frac{\partial .}{\partial \sigma} + \sin\omega\cos\alpha \frac{\partial .}{\partial \eta} + \cos\omega \frac{\partial .}{\partial \beta} \tag{3.122}$$

puis on effectue la combinaison linéaire :

$$\sin\,\alpha\ (3.115) + \cos\,\alpha\,\cos\,\omega\ (3.116) + \cos\,\alpha\,\sin\,\omega\ (3.117)$$

pour finalement arriver à la condition de compatibilité le long d'une direction dite "bicaractéristique" $\overrightarrow{\sigma}$ déterminée par $(\chi = \alpha, \omega)$ (voir figure 3.39(b)) :

$$\frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2}\frac{\partial p}{\partial \sigma} + \cos\omega\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} + \sin\omega\sin\varphi\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} \quad = \quad \sin\alpha\sin\omega\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \sin\alpha\sin\varphi\cos\omega\frac{\partial \theta}{\partial \beta} \quad (3.123)$$

On vérifie bien que la condition de compatibilité ne fait pas intervenir la dérivée normale au plan caractéristique $\Pi(\chi = \alpha, \omega)$, $\partial./\partial\eta$, ce qui traduit l'indétermination du problème de Cauchy dans cette direction.
Par ailleurs, on retrouve les équations de compatibilité planes ou axisymétriques, le long des caractéristiques montantes C^+ et descendantes C^- respectivement pour $\omega = 0$ et $\omega = \pi$.

En supposant que l'on connaisse l'état de l'écoulement dans un plan Π_0 non caractéristique et à condition de pouvoir évaluer les dérivées normales à la direction bicaractéristique $\partial./\partial\beta$ qui figurent au second membre de (3.123), il suffit d'exprimer (3.123) suivant 3 directions bicaractéristiques quelconques pour déterminer les 3 inconnues (p, φ, θ) en un point Q situé dans un voisinage aval du plan Π_0. Théoriquement, on peut choisir autant de directions bicaractéristiques supplémentaires que l'on souhaite pour déterminer l'état en Q, le nombre minimal requis étant de 3 au total, puisque celles-ci sont des combinaisons linéaires des 3 équations générales (3.115),(3.116),(3.117). Numériquement, les erreurs de calcul conduisent à utiliser une méthode de type moindres carrées pour résoudre le système surabondant ainsi formé. Des variantes de la méthode de calcul par caractéristiques 3D (Sauer, Thornhill, Butler) concernent essentiellement le choix des directions bicaractéristiques et le mode de calcul des dérivées transverses $\partial./\partial\beta$. D'autres variantes (Coburn et Dolph, Holt, Bruhn et Haack, Schaetz, Albrecht et Urich, Sauer) sont partiellement ou totalement basées sur des lignes non caractéristiques.

En particulier, Butler [29] a montré que l'on pouvait se passer du calcul des dérivées $\partial./\partial\beta$ en exprimant la condition (3.123) suivant les 4 directions bicaractéristiques $(\omega_i = (i-1)\pi/2, i = 1, 2, 3, 4)$ puis en les combinant linéairement :

$$\begin{gathered}(3.123)_1 - (3.123)_3 \\ (3.123)_2 - (3.123)_4 \\ (3.123)_1 + (3.123)_2 + (3.123)_3 + (3.123)_4 - \sin\alpha(3.115)\end{gathered}$$

On obtient ainsi un système de 3 équations qui ne comportent plus que des dérivées suivant les 4 directions bicaractéristiques $(\overrightarrow{\sigma}_i)_{i=1,4}$ et suivant la ligne de courant. La figure 3.40 représente les repères polaires associés aux directions indiquées par Butler.

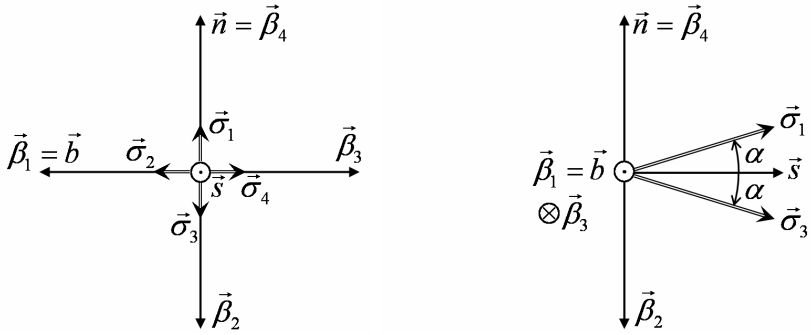


FIG. 3.40 – Schéma des repères associés aux directions indiquées par Butler.

On vérifie aisément que la combinaison $((3.123)_1 - (3.123)_3))$ (resp. $((3.123)_2 - (3.123)_4)$) est équivalente à l'équation de quantité de mouvement transverse (3.116) (resp. (3.117)). D'autre

part, $\sum_{i=1}^{4}(3.123)_i$ est équivalente à la conservation de la masse (3.115). Chacune des équations générales (3.115),(3.116),(3.117) peut donc être exprimée en fonction des variations le long des 4 caractéristiques de Butler ($\overrightarrow{\sigma}_i, i = 1, 4$).

De manière générale, la théorie des caractéristiques 3D se révèle trop compliquée pour pouvoir analyser un écoulement totalement tridimensionnel. Dans le cas particulier d'un jet rond contrôlé par 4 injections radiales équiréparties en azimut (et sans dérapage) sur les 8, l'écoulement possède 8 plans de symétrie de deux types : les plans des injecteurs actifs et les plans des injecteurs inactifs. On va donc s'appuyer sur cette particularité géométrique afin de rendre la théorie des caractéristiques exploitable pour analyser le jet contrôlé dans ses plans de symétrie.

3.4.2 Théorie des caractéristiques dans un plan de symétrie

Nous présentons dans cette section les équations du mouvement dans un plan de symétrie en partant des équations d'Euler classiques. Ainsi, le lecteur pourra comprendre comment sont établies les équations servant à l'analyse du jet contrôlé, indépendamment de la théorie générale 3D introduite précédemment. Le lien entre ces relations et les équations polaires 3D est établi en fin de section.

3.4.2.1 Equations d'Euler dans un plan de symétrie

Pour commencer, on considère un plan de symétrie ($z = 0$) auquel on associe le système cartésien (x, y, z). Toutes les dérivées normales au plan $\partial./\partial z$ sont nulles, exceptées celles des vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{z}$:

$$\frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathcal{X} \in \{\rho, u, v, p\} \tag{3.124}$$

$$w = 0 \quad \text{mais} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \neq 0 \quad \text{en général} \tag{3.125}$$

Les équations d'Euler (3.1),(3.2) se simplifient alors en :

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.126}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.127}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{3.128}$$

On reconnaît les équations planes avec un terme supplémentaire $\rho\frac{\partial w}{\partial z}$ qui représente le débit-masse volumique sortant par les faces $z = 0^{\mp}$. En passant aux coordonnées intrinsèques planes (s, n, z), les équations dans le plan de symétrie deviennent :

$$\frac{1}{\rho V}\frac{\partial(\rho V)}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.129}$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho V^2}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{3.130}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{1}{\rho V^2}\frac{\partial p}{\partial n} \tag{3.131}$$

avec $\varphi = (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{V})$. Comme en écoulement plan, le système formé des 3 équations (3.129),(3.130),(3.131) peut être réduit à 2 équations :

$$-\frac{1 - M^2}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.132}$$

$$\frac{1}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \tag{3.133}$$

Les équations de conservations de l'enthalpie totale et de l'entropie gardent la même forme qu'en écoulement plan (resp. (3.19) et (3.20)).

3.4.2.2 Conditions de compatibilité dans un plan de symétrie

En suivant la même démarche qu'en écoulement plan, on obtient deux familles de lignes caractéristiques (C^-) et (C^+) localement tangentes aux vecteurs $\overrightarrow{s}^-$ et $\overrightarrow{s}^+$ définis par $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{s}^-) = -\alpha$ et $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{s}^+) = +\alpha$, dont les équations de compatibilité associées sont :

$$(C^-): \quad \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s^-} - \frac{\partial \varphi}{\partial s^-} = D \tag{3.134}$$

$$(C^+): \quad \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s^+} + \frac{\partial \varphi}{\partial s^+} = D \tag{3.135}$$

où D représente le terme source lié au débit transverse (orthogonal) au plan de symétrie :

$$D = -\sin\alpha\,\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.136}$$

En reprenant ce raisonnement à partir des coordonnées cylindriques (x, r, θ), le terme source s'exprime comme la somme du terme de débit orthoradial axisymétrique $D_{axi} = -\frac{\sin\alpha \sin\varphi}{r}$ et d'un terme de débit orthoradial non-axisymétrique $D_{na} = -\frac{\sin\alpha}{r}\frac{1}{V}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$:

$$D = -\frac{\sin\alpha}{r}\left(\sin\varphi + \frac{1}{V}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) \tag{3.137}$$

D (resp D_{na}) est positif quand le débit transverse rentre dans la tranche plane $[-dz, +dz]$ d'épaisseur infinitésimale $dz \to 0^+$, i.e. $\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial z} < 0$ (resp. le quartier $\theta = 0^\mp$, $+\frac{1}{V}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} < 0$).

3.4.2.3 Reformulation des équations du mouvement

On souhaite maintenant exprimer le comportement de l'écoulement à partir de la propagation de ses ondes, comme nous l'avons fait en écoulement plan (cf. section 3.2.1.6). Afin d'exprimer le taux de convergence/divergence des faisceaux d'ondes, on se place dans le système de coordonnées lié aux lignes caractéristiques (s^-, s^+)[33]. En rappelant que les pentes des lignes caractéristiques $C^\mp$ sont mesurées par les angles $\psi^\mp = \varphi \mp \alpha$, on définit par :

- $\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+}$ le taux de divergence des ondes descendantes,
- $\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-}$ le taux de convergence des ondes montantes.

Conformément à la figure 3.2, si $\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+} > 0$ (resp.< 0), les ondes descendantes divergent (resp. convergent). De même, si $\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-} > 0$ (resp. < 0), les ondes montantes convergent (resp. divergent).

Pour passer localement du système (s, n) à (s^-, s^+), il suffit de noter que pour $M \neq 1$, on a (cf. figure 3.1) :

$$\overrightarrow{s} = \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\overrightarrow{s}^- + \overrightarrow{s}^+\right) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{n} = \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\overrightarrow{s}^+ - \overrightarrow{s}^-\right) \tag{3.138}$$

Ainsi, les dérivées partielles dans les deux systèmes sont reliées par :

$$\frac{\partial .}{\partial s} = \mathrm{grad}(.).\overrightarrow{s} = \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{\partial .}{\partial s^-} + \frac{\partial .}{\partial s^+}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial .}{\partial n} = \mathrm{grad}(.).\overrightarrow{n} = \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\frac{\partial .}{\partial s^+} - \frac{\partial .}{\partial s^-}\right) \tag{3.139}$$

[33] (s^-, s^+) ne forme pas un système de coordonnées curvilignes contrairement à (x^-, x^+) abondamment utilisé en écoulement plan.

Equation du mouvement tangentielle. Les accélérations et ralentissements du fluide sont gouvernés par la conservation de la masse (3.132), le bilan de quantité de mouvement tangentielle (3.133), et la conservation de l'entropie (3.15) (ou de manière équivalente par (3.132),(3.14),(3.15)). Tant que le fluide a une évolution continue, la pression totale (3.30) se conserve le long des lignes de courant, d'où :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{\sqrt{M^2-1}} \frac{1}{\gamma M^2 p} \frac{\partial p}{\partial s} \tag{3.140}$$

D'autre part, en appliquant les relations (3.139) à α et φ, on a :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s^-} + \frac{\partial \alpha}{\partial s^+}\right) \tag{3.141}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s^+} - \frac{\partial \varphi}{\partial s^-}\right) \tag{3.142}$$

Enfin, l'introduction de (3.141) et (3.142) dans l'équation de conservation de la masse (3.132) conduit à la relation :

$$\frac{1}{\gamma M^2 p}\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{(\gamma+1)M}\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-} - \frac{\partial \psi^-}{\partial s^+} + 2D\right) \tag{3.143}$$

L'équation (3.143) décrit l'évolution de la pression le long d'une ligne de courant : des faisceaux d'ondes incidentes (C^-) et (C^+) convergentes (respectivement $\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+} < 0$ et $\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-} > 0$) ainsi qu'un débit transverse rentrant $D > 0$ contribuent à accroître la pression d'une particule (et donc à la ralentir) au cours de son mouvement $\frac{\partial p}{\partial s} > 0$[34]. L'évolution opposée est évidente.

Equation du mouvement normale. On suit ici la même démarche pour déterminer l'évolution de la direction de l'écoulement à l'aide de l'équation de quantité de mouvement normale (3.133). Dans l'hypothèse d'un écoulement isoénergétique et homentropique, la pression génératrice se conserve d'une ligne de courant à une autre, d'où :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{\sqrt{M^2-1}} \frac{1}{\gamma M^2 p} \frac{\partial p}{\partial n} \tag{3.144}$$

et en introduisant les relations déduites de (3.139) :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial s^-} + \frac{\partial \varphi}{\partial s^+}\right) \tag{3.145}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial n} = \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial s^+} - \frac{\partial \alpha}{\partial s^-}\right) \tag{3.146}$$

dans l'équation de quantité de mouvement normale (3.133), on obtient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\sqrt{M^2-1}}{(\gamma+1)M}\left(\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-} + \frac{\partial \psi^-}{\partial s^+}\right) \tag{3.147}$$

L'équation (3.147) décrit la courbure des lignes de courant : en un point de l'écoulement, un faisceau d'ondes montantes convergentes $\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-} > 0$ ou un faisceau d'ondes descendantes divergentes $\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+} > 0$ contribuent à courber la ligne de courant dans le sens direct $\frac{\partial \varphi}{\partial s} > 0$. L'évolution opposée est évidente.

[34]De ce fait, les faisceaux d'ondes convergentes peuvent toujours être qualifiés de "faisceaux de compression", dans le sens où ils contribuent à augmenter la pression sur les lignes de courant mais ne l'impliquent pas forcément à cause du débit transverse.

3.4.2.4 Interprétations des nouvelles équations du mouvement

Une première interprétation des équations du mouvement en termes de convergence/divergence d'ondes de Mach a été donnée lors de leur établissement. Une autre interprétation en est proposée ici afin de décrire, par la suite, l'écoulement du jet contrôlé.

Effet du débit entrant sur la convergence des ondes. Si l'on considère le cas d'un écoulement possédant un plan de symétrie dans lequel il existe une section $s = s_0$ d'un tube de courant où l'écoulement est localement uniforme ($\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0$), alors les équations du mouvement se réduisent à :

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\gamma M^2}{M^2-1}\left(-\frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{3.148}$$

et

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-} = -\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+} = \frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{M^2-1}D \tag{3.149}$$

L'équation (3.148) nous dit qu'un débit entrant dans le plan de symétrie d'un écoulement supersonique dont les lignes de courant sont canalisées (φ imposé) induit une compression et donc un ralentissement de l'écoulement. En effet, dans une tranche $[-dz, +dz]$, l'écoulement reçoit une masse supplémentaire $\left(-2\rho\frac{\partial w}{\partial z}dz\right)$ par unité de longueur parcourue qu'il doit faire passer à travers une section $4\Delta y dz$ constante. Son seul recours est alors d'augmenter ρV en ralentissant l'écoulement supersonique. L'équation (3.149) exprime la convergence des ondes provoquée par l'apport transverse de fluide. Inversement, au voisinage aval d'un écoulement axisymétrique divergent ($\varphi > 0$) localement uniforme dans une section $s = s_0$ d'un tube de courant, le terme de débit sortant axisymétrique $D = -\sin\alpha \sin\varphi / r < 0$ tend à faire diverger les ondes montantes et descendantes.

Réflexion des ondes sur une paroi. Comme cela a déjà été dit dans la section 3.2.1.7, la réflexion d'un faisceau d'ondes descendantes (C^-) sur une ligne de courant (C^0) peut être interprétée comme son croisement avec un faisceau d'ondes (C^+) fictif. La figure 3.41 illustre une telle situation. Après passage de la zone d'interaction (1243), le faisceau fictif devient le faisceau d'ondes (C^+) réfléchi. L'équation (3.147) permet d'exprimer localement[35] le taux de convergence du faisceau (C^+) réfléchi $\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-}$ en fonction du taux de divergence du faisceau (C^-) incident $\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+}$ et de la courbure de la ligne de courant $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$:

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-} = -\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+} + \frac{(\gamma+1)M}{\sqrt{M^2-1}}\frac{\partial \varphi}{\partial s} \tag{3.150}$$

En considérant qu'une paroi impose la direction de la vitesse en tout point de la ligne de courant (C^0), la relation (3.150) formalise le fait qu'un faisceau incident convergent $\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+} < 0$ ainsi qu'une paroi convexe $\frac{\partial \varphi}{\partial s} > 0$ contribuent à faire converger le faisceau réfléchi $\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-} > 0$.

[35] Si l'on considère un faisceau incident de largeur Δs^- non-nulle comme représenté sur la figure 3.41, l'angle d'ouverture $\Delta^- \psi^+ = \frac{\partial \psi^+}{\partial s^-}\Delta s^-$ que décrit l'équation 3.150 est celui du faisceau fictif avant croisement avec le faisceau incident, i.e. $\Delta \psi^+ = \psi_2 - \psi_3$. De plus, sur la figure 3.41, Δs^+ est lié à Δs^- de façon à conserver le débit entre [13] et [34]. Cependant, lorsqu'on se restreint à une analyse locale, $\Delta s^- \to 0^-$, alors $\Delta s^+ \to 0^-$, et le taux de convergence du faisceau fictif $\frac{\Delta \psi^+}{\Delta s^+} = \frac{\partial \psi^+}{\partial s^-}$ entre 1 et 2 tend vers celui du faisceau réfléchi entre 3 et 4.

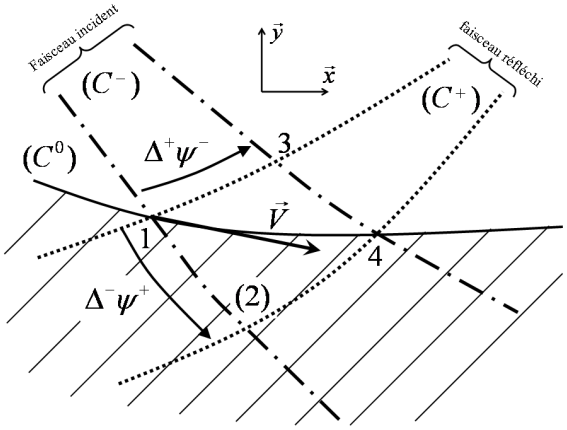


FIG. 3.41 – Schéma de réflexion d'un faisceau d'ondes (C^-) et écoulement fictif.

Réflexion des ondes sur une ligne de glissement. De manière analogue, l'équation (3.143) permet d'exprimer la convergence des ondes réfléchies sur une ligne de glissement (C^0) le long de laquelle on impose la pression :

$$\frac{\partial\psi^+}{\partial s^-} = \frac{\partial\psi^-}{\partial s^+} - 2D + \frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{1}{Mp}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{3.151}$$

La relation (3.151) montre que la divergence du faisceau d'ondes incident $\frac{\partial\psi^-}{\partial s^+} > 0$, un débit transverse sortant $D < 0$, ou un accroissement de la pression le long de (C^0) contribuent à faire converger le faisceau réfléchi $\frac{\partial\psi^+}{\partial s^-} > 0$.

Les relations (3.150) et (3.151) permettent de retrouver la réflexion des ondes en écoulement plan pour lequel $D = 0$. Lorsque $D \neq 0$, on constate que le terme de débit transverse, disons entrant $D > 0$, provoque la convergence des ondes quand les lignes de courant sont canalisées (φ imposé) alors qu'il contribue à leur divergence lors de la réflexion sur une ligne de glissement isobare (p =constante). Cette apparente contradiction est levée en rappelant que la direction des ondes $\psi^{\mp} = \varphi \mp \alpha$ est entièrement gouvernée (en écoulement homentropique et isoénergétique) par la direction de la vitesse φ et la pression p. Dans le cas où les lignes de courant sont canalisées dans une direction, $D > 0$ provoque la convergence des ondes à l'intérieur du domaine. Sur ses bords où $\varphi = 0$, les ondes de compression (dans le cas où $D > 0$) se réfléchissent sans que D n'intervienne (cf. (3.147)). Dans le cas où les ondes se réfléchissent sur une ligne de glissement isobare ($\frac{\partial p}{\partial s} = 0$), tout débit de fluide sortant par les côtés du plan $D < 0$ contribue à courber la ligne de glissement vers le haut $\frac{\partial\varphi}{\partial s} > 0$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{2\sqrt{M^2-1}}{(\gamma+1)M}\frac{\partial\psi^-}{\partial s^+} - \frac{2\sqrt{M^2-1}}{(\gamma+1)M}D + \frac{\sqrt{M^2-1}}{\gamma M^2 p}\frac{\partial p}{\partial s} \tag{3.152}$$

Cette réaction de la ligne de glissement pour conserver le gradient de pression imposé est telle qu'elle tend à faire converger les ondes réfléchies selon la relation (3.150).

3.4.2.5 Lien avec la théorie 3D

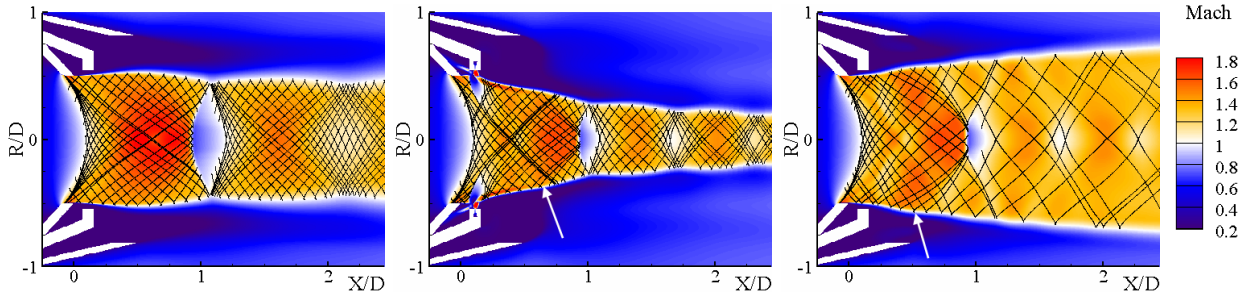
Si (x, y) est un plan de symétrie de normale $\overrightarrow{z}$, alors on a en coordonnées polaires 3D :

$$\theta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial b} = \frac{\partial p}{\partial b} = 0 \quad \text{d'où} \quad \sin\varphi\frac{\partial\theta}{\partial b} = \frac{1}{V}\frac{\partial}{\partial b}(V\sin\varphi\tan\theta) = \frac{1}{V}\frac{\partial w}{\partial z}$$

et les équations du mouvement 3D (3.115,3.116,3.117) se confondent avec les équations (3.132,3.133).

3.4.3 Application aux jets MARCO sans et avec contrôle

L'ensemble des éléments exposés depuis le début de ce chapitre est maintenant utilisé pour comprendre l'organisation des ondes de Mach et la formation des chocs dans les jets testés sur la configuration MARCO sans et avec injections radiales. Plus précisément, on souhaite expliquer les images strioscopiques issues des simulations RANS du jet de référence et du jet contrôlé faiblement sous-détendus (NPR=3.1), figures 2.25(c,d,e) du chapitre 2, celles-ci étant plus lisibles que les strioscopies expérimentales à cause du caractère tridimensionnel de l'écoulement. La configuration contrôlée (cas F1) comporte 4 injecteurs actifs parmi les 8. Les lignes de Mach (intersection des conoïdes de Mach avec le plan de symétrie) ont été tracées, figure 3.42, dans un plan de symétrie longitudinal du jet de référence à NPR=3.1 et pour le jet contrôlé dans un plan de symétrie passant à travers deux injecteurs actifs et dans un plan de symétrie passant à travers deux injecteurs inactifs. Les lignes caractéristiques (C^+) (resp. (C^-)) ont été obtenues en traçant des lignes de courant à partir d'un champ de vecteurs déduit du champ de vitesse $\overrightarrow{V}$ par rotation de l'angle de Mach local $\alpha = \arcsin(1/M)$ (resp. $-\alpha$). Ces plans sont de plus colorés par le nombre de Mach.



(a) jet de référence (b) jet contrôlé plan des injecteurs actifs (c) jet contrôlé plan des injecteurs inactifs

FIG. 3.42 – Contours du nombre de Mach et lignes de Mach dans le jet sans et avec contrôle à NPR = 3.1.

Afin d'expliquer la forme du réseau de lignes caractéristiques de la figure 3.42, tous les termes de l'équation (3.151) ont été représentés sur la figure 3.43 :

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-} = \underbrace{\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+}}_{d\Psi^-/ds^+} + \underbrace{(-2D_{axi})}_{\text{Axi.Tr.}} + \underbrace{(-2D_{na})}_{\text{NA.Tr.}} + \underbrace{\frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{1}{Mp}\frac{\partial p}{\partial s}}_{\text{P. Term}} \tag{3.151}$$

On rappelle que ces grandeurs n'ont de sens que dans les régions supersoniques de l'écoulement. Les termes sources Axi.Tr. et NA.Tr. singuliers en $r = 0$ n'ont pas été calculés sur l'axe.

En haut de la figure 3.43, le taux de convergence des ondes montantes $\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-}$ en un point (x, r) quelconque du plan de symétrie se déduit directement du taux de divergence des ondes descendantes $\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+}$ au point $(x, -r)$ par symétrie autour de l'axe du jet $(O, \overrightarrow{x})$:

$$\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-}(x, r) = -\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+}(x, -r) \tag{3.153}$$

Si l'on regarde les ondes descendantes, on remarque que le taux de divergence $(\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+} > 0)$ des ondes qui impactent la couche cisaillée inférieure prend des valeurs très élevées et qu'il en est de même pour le taux de convergence $(\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+} > 0)$ des ondes réfléchies sur la couche cisaillée supérieure. Ceci peut s'interpréter en écoulement plan. Tout d'abord, en raisonnant sur

un écoulement homentropique et iso-énergétique et en reprenant le schéma du croisement de deux faisceaux d'ondes, figure 3.3, on s'aperçoit que si l'onde montante est divergente et l'onde descendante est convergente, comme c'est le cas dans la couche cisaillée représentée dans le demi-plan $R/D > 0$, alors $M_3 < M_2$: les couches supérieures (i.e. à l'extérieur du jet) sont plus lentes que les couches inférieures (à l'intérieur du jet). Ceci isole le lien entre le cisaillement pur[36] et les ondes de Mach. En outre, le cisaillement pur provoque une déviation des lignes de courant, $\varphi_4 < \varphi_1$, qui est compensée par le rotationnel inclu dans la couche mince de cisaillement ($\Omega = S$ si couche rectiligne). On peut aussi l'exprimer en disant que l'effet du cisaillement pur tend à créer une différence de pression statique $p_2 < p_3$ (car $\mathcal{P}_2 < \mathcal{P}_3$ et p_i constante) qui est compensée par le gradient de pression génératrice normal à la couche mince $p_{i2} > p_{i3}$. En particulier, si la couche mince cisaillée est rectiligne alors l'effet du rotationnel (ou du gradient de p_i) double le gradient normal de vitesse prévu par le raisonnement homentropique.

L'équation (3.151) a été établie pour un écoulement de fluide parfait, iso-énergétique et homentropique. Cette hypothèse n'est évidemment plus vérifiée lorsque l'écoulement est visqueux, conducteur de chaleur et comporte des chocs comme c'est le cas dans nos calculs RANS. Aussi, pour vérifier le domaine de validité de l'équation (3.151), la différence (notée Δ) entre le membre de droite et le membre de gauche a été calculée dans les trois plans de symétrie et est représentée sur la dernière ligne de la figure 3.43 avec la même échelle de valeurs que les différents termes de l'équation. On constate que l'égalité (3.151) est bien vérifiée dans la majeure partie de la région initiale du jet calculée en RANS et qu'elle n'est plus valable seulement dans 3 types de régions confinées :
- les chocs qui brisent l'hypothèse d'écoulement isentropique et rendent les dérivées spatiales indéfinies (au niveau numérique, ils donnent des dérivées spatiales très grandes),
- les couches de mélange où l'hypothèse d'écoulement homentropique et iso-énergétique n'est plus valable,
- les lignes soniques où le calcul numérique des taux de convergence/divergence des ondes nécessite une résolution spatiale trop grande ($\alpha \to \pi/2$).
Il est surprenant de noter que l'égalité (3.151) est toutefois conservée assez profondément dans les couches de mélange.

Les résultats du jet fortement sous-détendu à NPR=5.0 sont aussi exposés car ils ont l'avantages de montrer des phénomènes identiques mais amplifiés grâce aux nombres de Mach supersoniques plus élevés. Un post-traitement identique a été appliqué dans les mêmes plans de symétrie (voir figure 3.44) et correspondent aux strioscopies présentées par la figure 2.27 du chapitre 2. On peut remarquer que l'écoulement dans le prolongement en aval du disque de Mach présente des gradients positifs et négatifs élevés. Ceci est dû au fait que le disque de Mach n'est pas parfaitement stationnaire, oscille sur une maille dans la direction longitudinale et crée des couches d'entropies différentes (cisaillées). Comme la zone de dépendance du disque de Mach est entièrement issue de la portion de la couche de mélange située entre le convergent et les injecteurs, ce phénomène est probablement causé par la faible instationnarité des recirculations confinées dans ces régions. Cependant il n'altère en rien la discussion menée sur l'écoulement moyen.

Nous allons maintenant discuter des éléments essentiels composant les structures compressibles des jets de référence et des jets contrôlés précédemment observés sur les strioscopies.

[36] Ici "cisaillement pur" signifie $\overline{\overline{\text{grad}}}\,\overrightarrow{V} = \begin{bmatrix} 0 & S \\ S & 0 \end{bmatrix}_{(x,r)}$

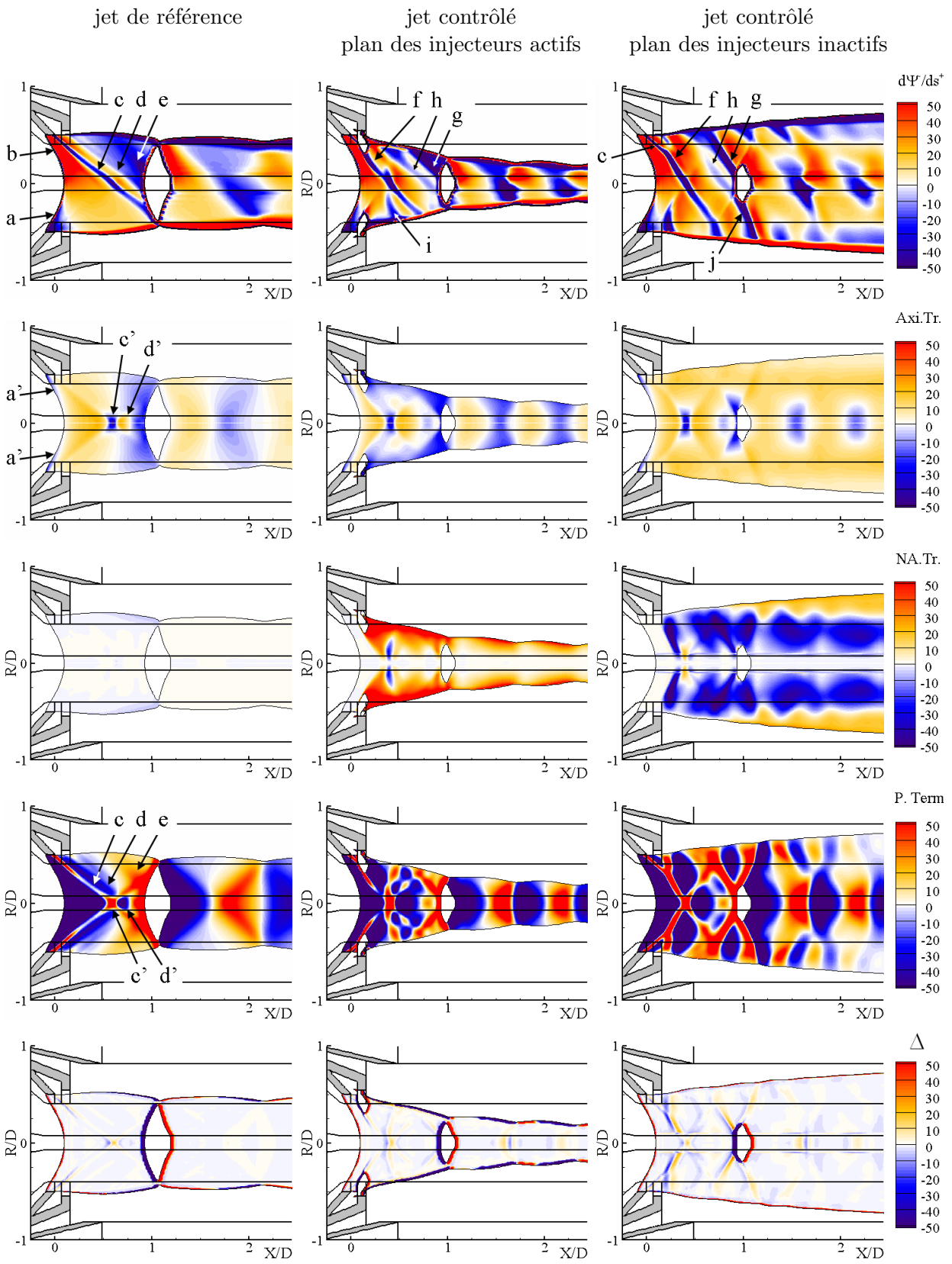


FIG. 3.43 – Cartographie des termes de l'équation (3.151) dans les plans de symétrie des jets à NPR=3.1 sans et avec contrôle.

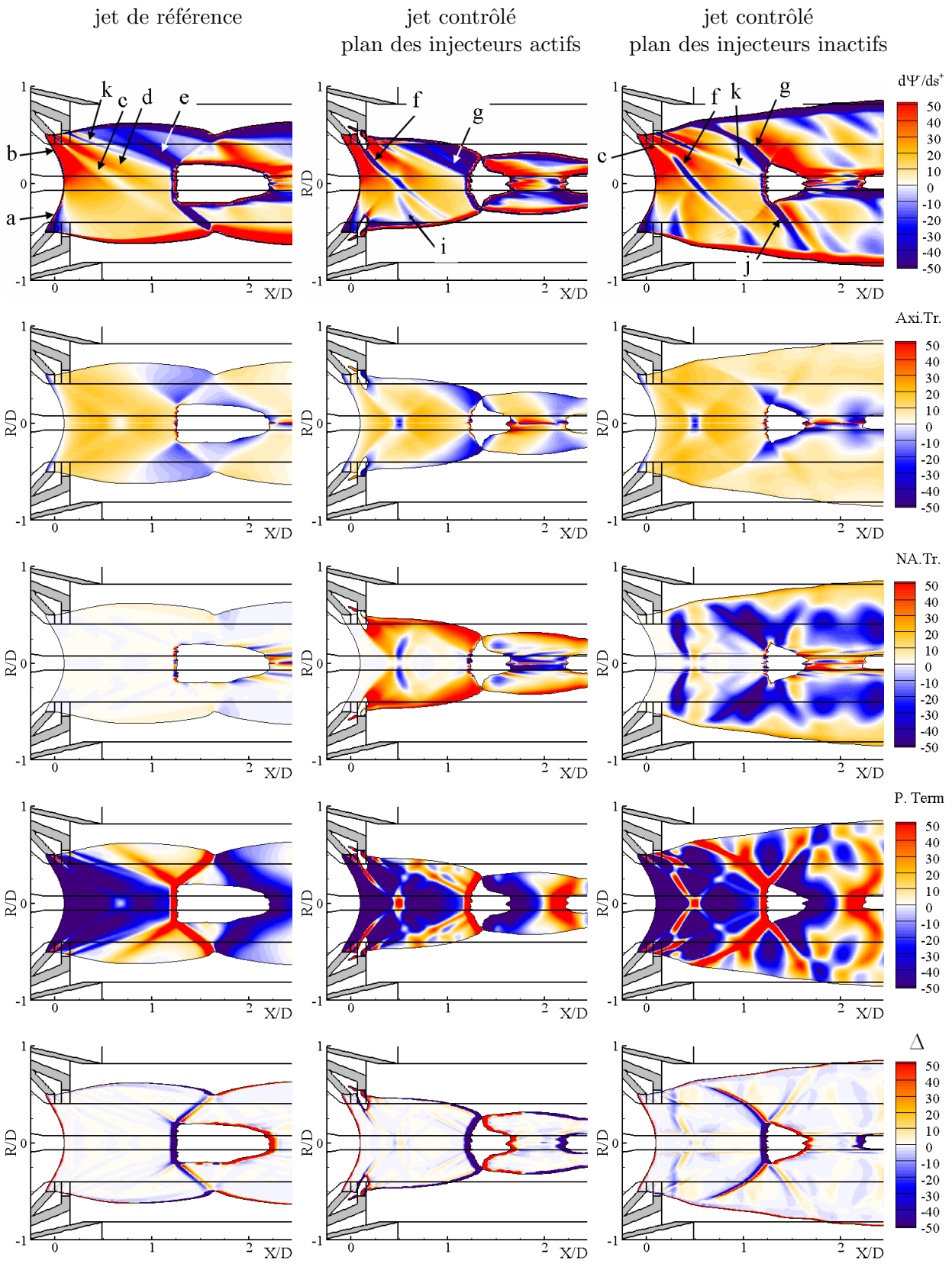


FIG. 3.44 – Cartographie des termes de l'équation (3.151) dans les plans de symétrie des jets à NPR=5.0 sans et avec contrôle.

3.4.4 Analyse des ondes dans les plans de symétrie des jets de référence

Avant de commencer, une information essentielle doit être mentionnée. Comme le jet principal est supersonique, les perturbations générées sur sa frontière se propagent vers l'intérieur, le long des surfaces caractéristiques ou dans les plans de symétrie, le long des lignes de Mach. En écoulement plan, les faisceaux d'ondes initialement convergents (ou divergents) sur la frontière le restent tout au long de leur propagation avec une amplitude $\Delta^{\mp}\varphi$ ou $\Delta^{\mp}\mathcal{P}$ constante. Cette propriété n'est plus vraie dans un plan de symétrie (notamment en écoulement axisymétrique) lorsque le terme D de débit transverse n'est pas nul. Toutefois, dans les quatre calculs présentés ici, les lignes caractéristiques ont été tracées sur le champ de $\frac{\partial\psi^-}{\partial s^+}$ et on a vérifié que, dans le champ proche, les zones $\frac{\partial\psi^-}{\partial s^+} > 0$ ou les zones $\frac{\partial\psi^-}{\partial s^+} < 0$ correspondent à des zones délimitées par les lignes de Mach d'une des deux familles montante ou descendante. Dans la discussion qui suit, nous supposons donc que les perturbations imposées à la surface du jet déterminent initialement et ultérieurement la nature des ondes émises vers l'intérieur du jet bien que ce ne soit pas un résultat général.

Dans le jet à NPR=3.1, figures 3.42 et 3.43, on distingue nettement le choc en lentille caractéristique des jets soniques faiblement sous-détendus. En partant du col, l'écoulement traverse la ligne sonique puis la ligne des cols (on distingue la région (a') Axi.Tr. $\sim \varphi < 0$ entre les deux) et on constate le même phénomène que ce qui a été montré en écoulement plan (section 3.3.2.1) : les faisceaux d'ondes émis par la ligne sonique sont des faisceaux convergents (voir (a) indiqué figures 3.43 et 3.44) qui se réfléchissent d'abord en faisceau d'ondes divergentes (b) sur la paroi concave du col[37] (d'après l'équation (3.70)) puis en faisceau d'ondes convergentes (c) sur le méplat final de la tuyère. La détente initiale du jet sous-détendu commence sur les parois du col (b), est momentanément interrompue par le méplat (c) et se poursuit sur l'arête finale du convergent ainsi que le long de la surface de cisaillement initiale (d). Le croisement des ondes convergentes issues du méplat se croisent sur l'axe du jet (c') et cumulent leurs effets : convergence de l'écoulement vers l'axe (zone Axi.Tr. $\sim \varphi < 0$) et compression (P.Term$\sim \frac{\partial p}{\partial s} > 0$). L'effet axisymétrique de concentration des ondes sur l'axe (cf. section 3.3.2.3) peut faire focaliser les faisceaux convergents en un choc oblique devenant droit sur l'axe et y occasionner une perte de pression totale (assez inattendue a priori). C'est ce qui arrive dans les calculs ZDES (cf. strioscopies (f) et(i) de la figure 2.25).
Le champ de pression extérieure a été représenté figure 3.45. L'impact (i.e. ralentissement) de l'écoulement extérieur sur le jet ainsi que la diffusion de la forte pression totale de l'extérieur vers l'écoulement de ventilation conduit à un gradient de pression statique positif le long de la frontière du jet tendant à faire converger les ondes qui s'y réfléchissent. Dans les calculs, le modèle de turbulence a une grande influence sur la topologie de la zone de recirculation en aval du canal de ventilation, peut donc modifier ce gradient de pression et renforcer la convergence des ondes réfléchies. Ainsi, on a observé dans le jet faiblement sous-détendu à NPR=3.1 que la forme convexe du choc en lentille peut dévier sous l'effet de l'écoulement extérieur vers une forme angulaire similaire à un disque de Mach sans choc incident. Dans le jet fortement sous-détendu (NPR=5.0), figure 3.44, on identifie bien la structure à disque de Mach classique mais le choc incident n'est pas clairement visible. En fait, il n'est pas possible de dire si l'apparition du point triple est provoquée par les ondes convergentes situées immédiatement en aval du dernier faisceau de détente (k) ou par le faisceau convergent (e) provoqué par le gradient de pression extérieur et qui focalise tardivement. Par ailleurs, on peut remarquer que l'expansion radiale du jet est si large que la couche de mélange vient en contact avec les injecteurs inactivés. Ceci provoque l'émission d'un faisceau d'ondes convergentes se propageant vers l'intérieur du jet de la même manière qu'avec le méplat de la tuyère convergente.

[37] Le col de la maquette a un rayon de courbure de 3mm suivi d'un méplat horizontal de 2.8mm.

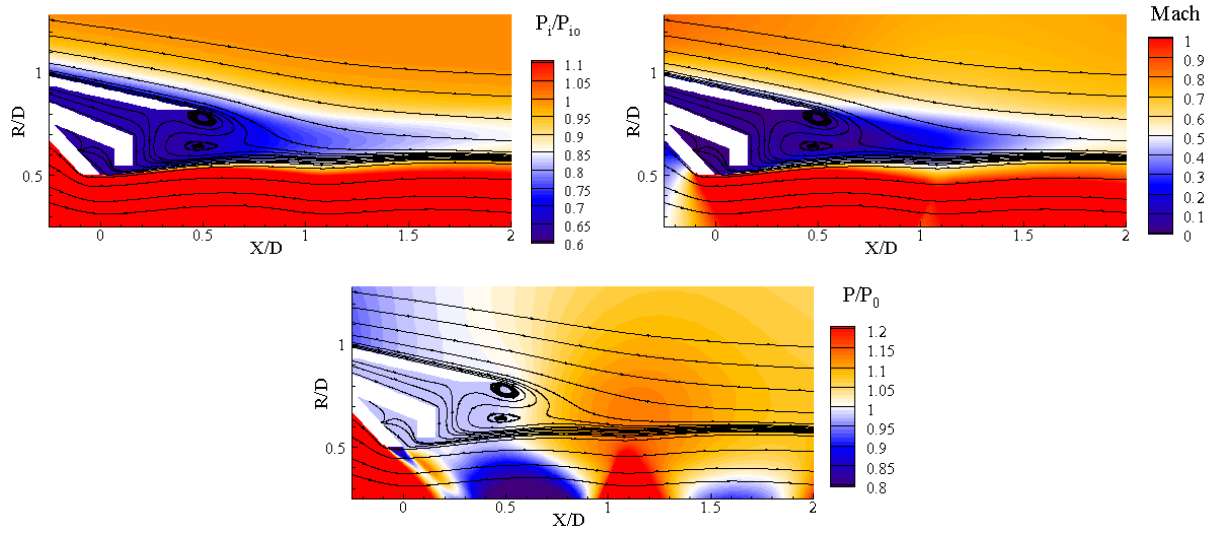


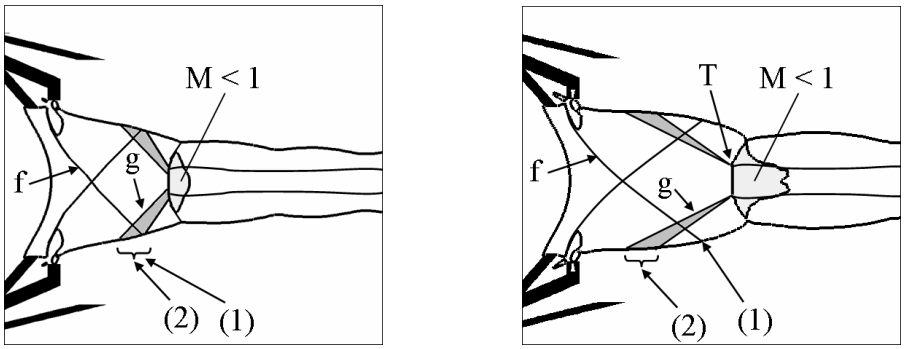
FIG. 3.45 – Contours de la pression totale, du nombre de Mach et de la pression statique dans le jet de référence à NPR = 3.1.

3.4.5 Analyse des ondes dans les plans de symétrie des jets contrôlés

Lorsque les 4 injections sont activées dans le jet faiblement sous-détendu, la structure des ondes change radicalement et le choc en lentille laisse place à une "forme de choc en diamant" pentagonale (cf. strioscopies (b,d,e) de la figure 2.25). Chaque injection radiale pénétrant dans le jet primaire y génère un choc droit devenant oblique (f) et qui se courbe dans la direction des ondes de Mach en raison de l'aspect fini de la perturbation. On peut voir que ce choc (f) se propage latéralement dans le plan des injecteurs inactifs et y intercepte le faisceau d'ondes de compression (c) issues de la lèvre. Dans la région d'impact de l'onde (f) avec la frontière du jet, un faisceau d'ondes convergentes de compression (g) est émis et focalise juste au niveau d'un choc droit en donnant une structure semblable à une réflexion de Mach. L'écoulement en aval du choc réfléchi est localement subsonique dans le plan des injecteurs actifs mais se réamorce vite par convergence des lignes de courant (non tracées). Ce choc réfléchi est beaucoup plus visible dans le plan des injecteurs inactifs. Ce sont les ondes de compression (f) et (g) et le choc fort ($\sim$ disque de Mach) qui forment la "structure en diamant". Celle-ci est en outre schématisée figure 3.46(a). Dans le jet contrôlé à NPR=5.0, figure 3.46(b), on identifie les mêmes ondes (f) et (g) mais la détente plus forte modifie leurs positions respectives et montre que la naissance de l'onde de compression (g) est décorrélée de l'onde (f) (de toute manière, la réflexion d'une onde convergente sur une ligne de glissement ne peut être à l'origine de la convergence du faisceau réfléchi[38]).

Afin d'identifier les facteurs faisant converger le faisceau d'ondes (g) qui focalise par la suite, les termes de l'équation de réflexion (3.151) ont été calculés, à partir des résultats des simulations, au pied des ondes C^+ dans le plan des injecteurs actifs et dans le plan des injecteurs inactifs (voir flèches figures 3.42(b,c)). Les valeurs ont été prises en dehors de la couche de mélange afin de respecter les hypothèses d'homentropie et d'iso-énergie. Les valeurs locales de tous les termes ont été reportés dans le tableau 3.2. On peut vérifier que la somme des termes du membre de droite de l'équation (3.151) égale le terme du membre de gauche à 2% près ce qui valide a posteriori les hypothèses.

[38]Un faisceau d'ondes convergentes ne peut se réfléchir sur une ligne de glissement en un faisceau d'ondes convergentes que si le débit transverse sortant ou/et le gradient de pression positif $\partial p/\partial s$ est/sont suffisamment fort(s).



(a) jet contrôlé à NPR=3.1 (b) jet contrôlé à NPR=5.0

FIG. 3.46 – Schéma des ondes de compression dans les jets contrôlés.

Plans de symétrie	$\frac{\partial \psi^+}{\partial s^-}$	$\frac{\partial \psi^-}{\partial s^+}$	$(-2D_{axi})$	$(-2D_{na})$	$\frac{\gamma+1}{\gamma}\frac{1}{Mp}\frac{\partial p}{\partial s}$
plan des injecteurs actifs	78	-4	-13	51	43
plan des injecteurs inactifs	56	26	11	-12	30

TAB. 3.2 – Valeurs locales des termes de l'équation (3.151) au pied des ondes C^+ réfléchies sur la couche inférieure du jet contrôlé à NPR=3.1 (voir flèches, figure 3.42).

Dans le plan des injecteurs actifs (1ère première ligne du tableau 3.2(b)), on peut voir que la convergence des lignes de courant ($D_{axi} > 0$) provoquée par le jet de contrôle entraîne un transfert de masse du plan des injecteurs actifs vers celui des injecteurs inactifs ($D_{na} < 0$). Le débit-masse résultant quitte le plan de symétrie ($D = D_{axi} + D_{na} < 0$). En comparant $-2(D_{axi} + D_{na})$ et le terme de gradient de pression imposé sur la surface du jet par l'écoulement externe ($\partial p/\partial s$), on voit que ces deux termes sont équivalents et sont les facteurs prédominants de la convergence du faisceau d'ondes C^+. Le faisceau incident d'ondes C^- convergentes ne contribue pas significativement à faire diverger les ondes réfléchies dans ce plan.

Dans le plan des injecteurs inactifs (2ème ligne du tableau 3.2(b)), le débit de masse provenant du plan des injecteurs actifs ($D_{na} > 0$) est pratiquement compensé par la divergence des lignes de courant dans le plan de symétrie ($D_{axi} < 0$). Ainsi, dans ce plan, la convergence des C^+ est uniquement due à la réflexion du faisceaux incident d'ondes C^- divergentes renforcée par le gradient de pression extérieur ($\partial p/\partial s$).

Par ailleurs, on peut noter la présence d'ondes de compression de moindre intensité (i) et (h), figure 3.43, non visibles dans les strioscopies des calculs RANS mais bien présents dans celles des calculs ZDES (cf. figures 2.25(g,h,j,k)). Leurs origines n'a pas été étudiée mais elles sont probablement liées en partie au débit de masse transverse.

Dans cette section, nous nous sommes restreint à l'étude des ondes dans la partie initiale du jet où les phénomènes visqueux sont confinés dans des régions très limitées de l'espace. A partir de $X/D \approx 1$, les effets visqueux (et turbulents) ne peuvent être négligés et doivent être intégrés dans l'analyse. L'explication de la réduction de la pseudo-période des oscillations de pression et leur atténuation dans le jet contrôlé est donc très complexe et n'est pas abordée ici. En revanche, on peut faire le rapprochement avec les résultats de Tam *et al.* et Choi & Lele [248, 39]. Globalement, en adoptant une vision moyennée en azimut, le contrôle a pour effet d'épaissir la couche de mélange en augmentant l'intensité de la turbulence (ceci est détaillé dans le chapitre 5) et ainsi de réduire la longueur du cône potentiel. L'accroissement de l'activité

turbulente peut être perçue comme une augmentation de la viscosité turbulente si l'on se place dans l'hypothèse de Boussinesq. Or les études précédentes montrent qu'une augmentation de la viscosité turbulente se traduit directement par un amortissement des ondes de pression et indirectement par une réduction de leur pseudo-période, ce que l'on observe dans les jets soumis aux injections radiales. Du point de vue non-visqueux, la contraction du jet dans les plans des injecteurs actifs augmente la fréquence des réflexions d'ondes et contribue à la réduction de leur pseudo-période.

3.5 Discussion du mélange par interaction des chocs internes

Après avoir étudié les mécanismes qui permettent aux injections radiales de modifier la structure des chocs internes, cette section a pour but d'évaluer si cette modification peut contribuer à augmenter le mélange du jet. Nous avons vu précédemment que des perturbations appliquées à la périphérie du jet peuvent y engendrer plusieurs chocs à l'intérieur. L'interaction de ces chocs peut donner naissance à des couches de cisaillement et donc produire de la turbulence au coeur du jet. La question est de savoir si le cisaillement ainsi généré par un processus purement compressible est suffisamment puissant pour alimenter un mouvement turbulent. Le taux de production turbulente (modélisée avec l'hypothèse de Boussinesq) associée à la partie déviatrice $\overline{\overline{S}}^D$ du tenseur des déformations (i.e. le tenseur des cisaillements) $P^D = \overline{\overline{\tau}}^D : \overline{\overline{S}}^D = 2\mu_T \overline{\overline{S}}^D : \overline{\overline{S}}^D$ a été représenté dans les plans de symétrie du jet de référence et du jet contrôlé, figure 3.47. On constate que le cisaillement produit par les chocs internes n'est pas suffisamment fort pour créer une production de turbulence significative à l'intérieur du jet. Le même constat a été fait sur le jet plus fortement sous-détendu (NPR=5.0). L'hypothétique "mélangeur à choc" basé sur l'interaction des chocs créés à l'intérieur du jet n'existe donc pas, ici.

3.6 Conclusion sur la structure des ondes internes

Ce chapitre consacré à l'étude des ondes de Mach et des chocs se propageant à l'intérieur du jet supersonique montre que c'est un sujet très complexe.

L'analyse des ondes de pression supersoniques est formalisée par la théorie des caractéristiques. En écoulement plan, les équations de compatibilité sont intégrables indépendamment du chemin parcouru dans l'espace le long des ondes concernées. Cette propriété permet de déduire un lien direct entre l'organisation des ondes et le comportement de l'écoulement. La relative simplicité des équations planes permet de lier le lieu de focalisation des ondes et la manière dont elles coalescent pour former des chocs à la forme de la paroi sur laquelle elles s'appuient. A la place de la paroi, ces ondes peuvent s'appuyer sur une ligne de glissement et dans ce cas c'est le gradient de pression le long de cette ligne qui détermine la formation du choc. Lorsqu'un choc impacte une paroi, il se réfléchit suivant l'une des six topologies possibles uniquement en fonction du nombre de Mach amont et de la déviation qu'il impose (du moins avant l'interaction avec la paroi). Toutes ces notions permettent de décrire assez précisément les différentes structures des jets supersoniques plans sur-détendus et sous-détendus. L'origine des chocs non prouvée dans les jets sous-détendus est discutée dans ce chapitre ainsi que la stricte périodicité des cellules de détente/compression qui est souvent abusivement admise en fluide parfait. Il est montré qu'une vitesse d'éjection sonique rend l'analyse plus difficile et l'influence de la forme de la ligne sonique est mise en évidence.

Dès que l'écoulement n'est plus plan, beaucoup de propriétés habituellement utilisées pour les écoulements plans ne sont plus valables. En particulier, les écoulements axisymétriques sont

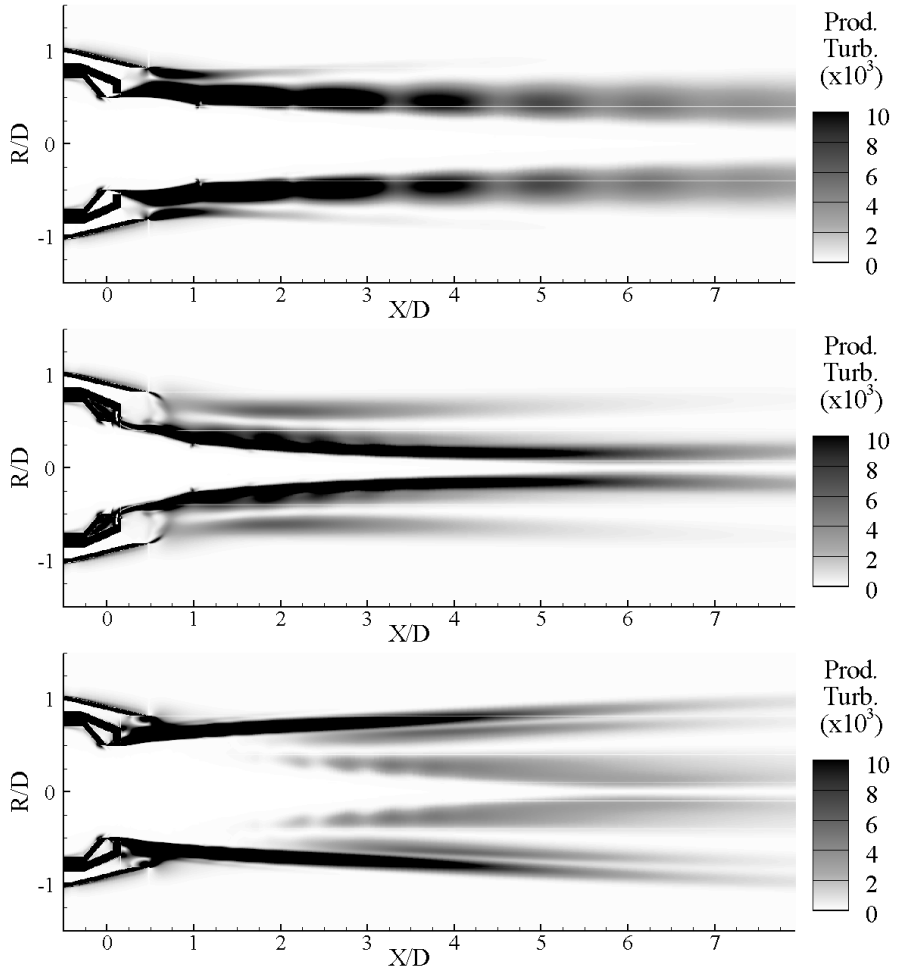


FIG. 3.47 – Production de turbulence P^D adimensionnée dans les jets à NPR=3.1 sans et avec contrôle (P^D est adimensionnée par $\mu(a^*/D)^2$, a^* vitesse au col, D son diamètre).

gouvernés par des équations ne différant des équations planes que par un terme source. Celui-ci rend l'intégration des équations de compatibilité dépendante de la géométrie de l'écoulement et empêche d'en tirer des enseignements aussi généraux qu'en écoulement plan. Aussi, différentes particularités des écoulements axisymétriques ont été identifiées et illustrées sur des cas simples. Ces derniers permettent de mieux comprendre les structures des ondes et des chocs dans les jets soniques axisymétriques sous-détendus et leurs différences avec celles de leur homologues plans. La structure à disque de Mach apparaissant dans les jets fortement sous-détendus est analysée plus en détail : on montre ainsi numériquement que ce type d'écoulement peut produire "naturellement" les conditions d'existence d'une réflexion de Mach inverse. Par ailleurs, il est démontré que l'écoulement extérieur a, par le biais du gradient de pression imposé sur la frontière du jet, une influence considérable sur l'organisation des ondes internes et les schémas de choc qui en résultent. La diffusion visqueuse provoque directement l'amortissement des ondes de pression et indirectement la réduction de leur pseudo-longueur d'onde par son action sur le champ moyen, en particulier sur l'épaisseur de la couche de mélange et la longueur du cône potentiel.

L'ensemble des calculs réalisés permet de dire que le choc en lentille observé dans le jet MARCO de référence à NPR = 3.1 est typique des jets soniques faiblement sous-détendus. L'examen des réseaux de lignes caractéristiques montre qu'il se distingue de la topologie classique du disque de Mach par l'absence de choc d'interception en amont. De plus, le choc en

lentille n'est ni dû à une hétérogénéité de l'écoulement en sortie de tuyère ni à la géométrie axisymétrique. Bien que les effets de la viscosité et de l'écoulement extérieur ont une influence certaine sur l'organisation des ondes internes, il est probable que l'origine de la lentille de choc se situe dans le comportement non-linéaire de l'écoulement transsonique.

Afin de comprendre comment les injections radiales modifient sa structure compressible, la théorie plane développée précédemment est étendue aux plans de symétrie en général. Le lien entre les faisceaux d'ondes d'une part et le gradient longitudinal de pression, la courbure des lignes de courant et le débit transverse au plan de symétrie est établi analytiquement. Ces relations permettent de formaliser la manière dont se réfléchissent les ondes sur la frontière du jet dans les plans de symétrie et donnent ainsi des arguments pour comprendre comment se forment les chocs dans le jet. Le raisonnement pourrait être complètement bouclé au niveau théorique si l'on savait exprimer l'évolution du taux de convergence des ondes lors de leur propagation[39], ce qui n'a pas été fait dans le cadre de cette étude.

Enfin, l'évaluation du cisaillement produit par la modification de la structure des chocs internes au jet montre que celui-ci n'est pas suffisamment élevé pour pouvoir générer un mouvement turbulent. L'effet du contrôle sur la structure compressible du jet supersonique faiblement sous-détendu (NPR=3.1) voire fortement sous-détendu (NPR=5.0) n'a donc aucune conséquence sur son mélange, ce qui invalide l'hypothèse de "mélangeur à chocs". Il est possible que le cisaillement produit par l'interaction des chocs devienne significatif lorsque le jet devient très sous-détendu (NPR>10) mais ce régime n'est en pratique jamais atteint sur les propulseurs d'avions.

[39] Plus précisément, avec les notations utilisées dans ce chapitre, il faudrait exprimer $\frac{\partial^2 \psi^-}{\partial s^{+2}}$ et $\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial s^{-2}}$ ou $\frac{\partial^2 \psi^-}{\partial x^{+2}}$ et $\frac{\partial^2 \psi^+}{\partial x^{-2}}$.

Chapitre 4

Analyse du brassage tourbillonnaire : aspect stationnaire

4.1 Objectif du chapitre

Le chapitre précédent a invalidé l'hypothèse d'un mélangeur à choc agissant sur le champ moyen du jet. Comme l'avaient avancé les études précédentes [219], l'augmentation du mélange d'un jet supersonique faiblement sous-détendu soumis à des perturbations azimutales est donc, du point de vue moyen, uniquement causée par l'action des tourbillons qu'elles génèrent. L'objectif de ce chapitre est d'approfondir nos connaissances des mécanismes tourbillonnaires moyens d'augmentation du mélange.

L'analyse du champ moyen s'appuie dans ce chapitre sur les champs aérodynamiques fournis par les calculs RANS. Tout d'abord, l'action globale de quatre injections sur le jet primaire est mise en évidence. Ensuite, devant l'importance de l'interaction des jets secondaires avec l'écoulement primaire, une revue des travaux effectués sur les jets en écoulement transverse est présentée et permet de décrire plus précisément la formation des structures tourbillonnaires générées par les injections. Une étude paramétrique est alors effectuée pour deux raisons. D'une part, elle permet de dégager des orientations pour la conception d'un dispositif d'augmentation du mélange par injections radiales plus efficace. D'autre part, les variations de certains paramètres soulignent les aspects essentiels du processus de mélange. Afin d'évaluer les efficacités respectives des différentes configurations testées et pour mieux décrire le processus de mélange, une réflexion sur la définition du mélange et sur sa quantification est menée et débouche sur la proposition de plusieurs critères d'estimation du mélange. Les considérations "opérationnelles" bien que non prioritaires dans cette étude ne sont pas oubliées, grâce à un critère d'estimation thermique et au calcul de la perte de poussée du système propulsif.

4.2 Description de la déformation externe du jet contrôlé

4.2.1 Vue tridimensionnelle de la distorsion provoquée par l'injection radiale

La figure 4.1 présente une vue globale de l'action de 4 injections radiales sur la surface du jet matérialisée ici par la surface $M = 1$. Celle-ci a été obtenue à partir du champ RANS. Dans le jet de référence (en bas de la figure 4.1), on peut remarquer, que la forme quasi-axisymétrique du jet présente des pincements et des renflements qui correspondent respectivement aux réflexions d'ondes de compression et de détente. Quand le contrôle est activé (en haut de la figure 4.1), on observe une déformation spectaculaire de cette surface sous l'action de la quantité de mouvement introduite au niveau des injecteurs. Cette action persiste loin en aval grâce aux tourbillons longitudinaux caractéristiques du champ lointain des jets transverses [129, 83].

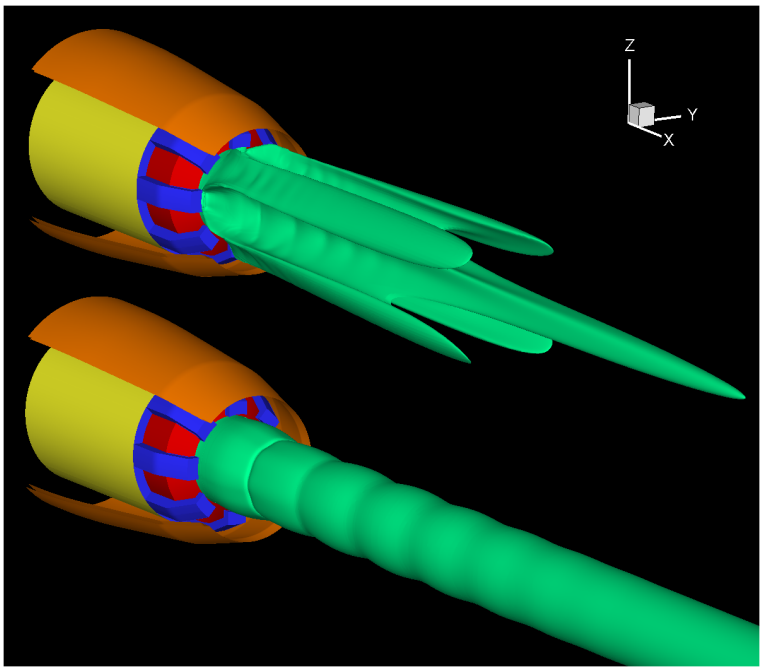


FIG. 4.1 – Effet de 4 injections radiales sur la surface du jet (Surface Mach=1) (jet de référence en bas, jet contrôlé en haut).

4.2.2 Evolution des tourbillons longitudinaux

La vorticité longitudinale (adimensionnée par $2a^*/D$, a^* la vitesse au col et D son diamètre) dans plusieurs sections transverses est représentée figure 4.2 avec les lignes $p_i/p_{i0} = 1.05$. Les injecteurs soufflent dans les directions verticale et horizontale. Cette figure met en évidence le mécanisme d'induction des tourbillons déjà décrit par Zaman [269, 270] pour des jets perturbés par des tabs solides. Le scénario est le suivant. Un couple de tourbillons contra-rotatifs (ou CVP pour "counter-rotating vortex pair") est généré par chaque jet secondaire [129, 83] et migre vers l'axe du jet sous l'action de la vitesse auto-induite (flèches convergentes, fig. 4.2(X/D=0.5)). Lorsque les CVP se rapprochent les uns des autres, leur vitesse induite mutuelle devient assez forte pour séparer les couples de tourbillons initiaux. Les tourbillons adjacents de chaque paire de couple forment alors de nouveaux CVP qui s'éloignent de l'axe du jet selon les directions médianes initiales (flèches en diagonale, figure 4.2(X/D=5.0)).

La figure 4.3 illustre l'effet de ce contrôle dans les plans de symétrie longitudinaux. Dans le

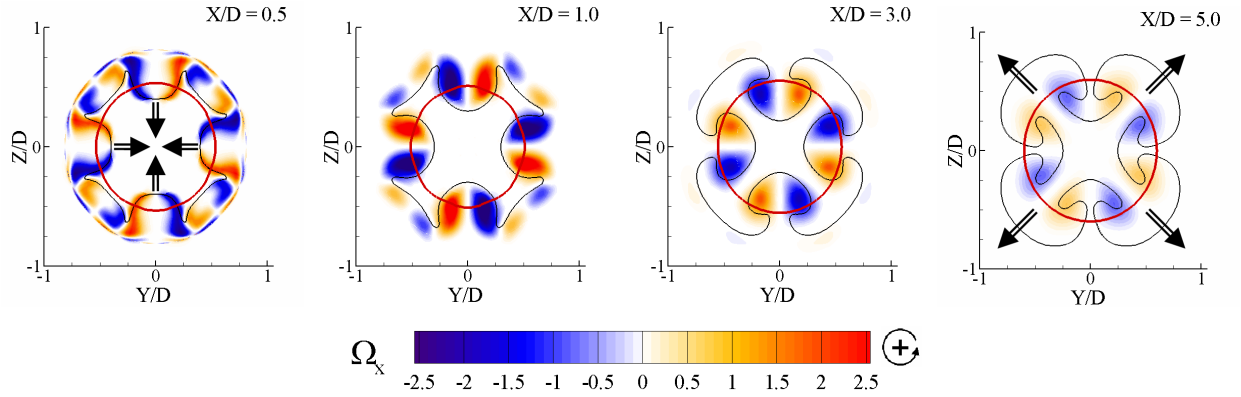


FIG. 4.2 – Contours de vorticité adimensionnée Ω_x, ligne $p_i/p_{i0} = 1.05$ jet controlé (ligne fine noire), ligne $p_i/p_{i0} = 1.05$ jet de référence (ligne épaisse rouge).

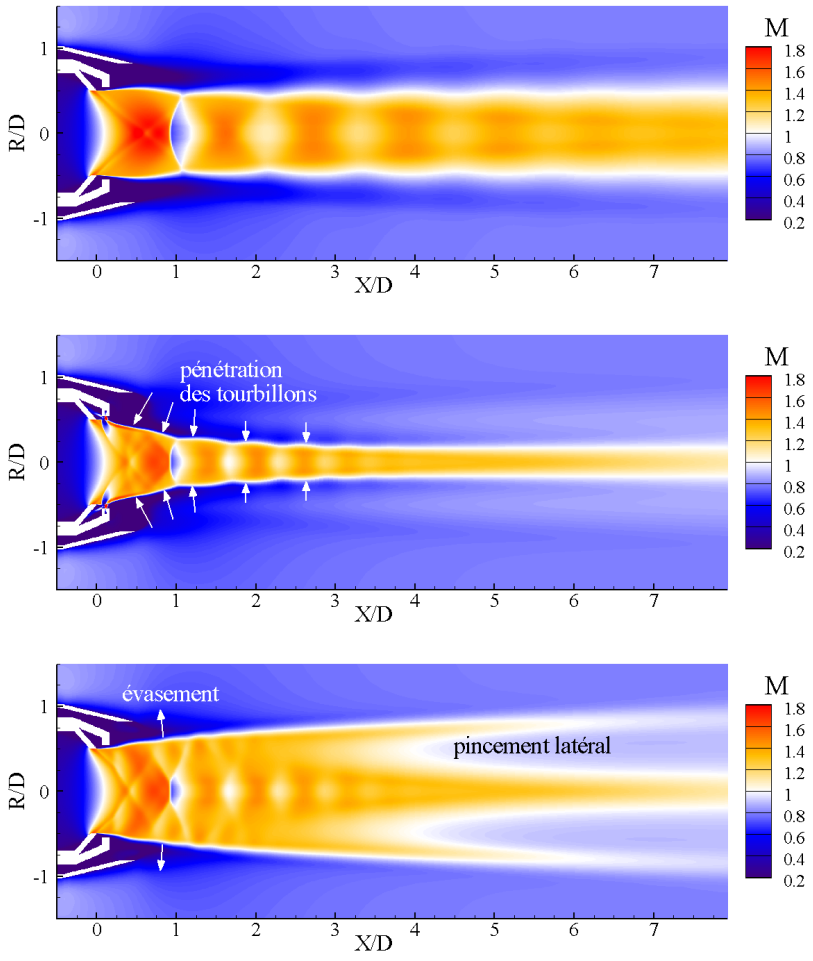


FIG. 4.3 – Comparison of the Mach number contours (Simulations NPR=3.1) (Reference jet in the upper side, controlled jet in the middle and in the bottom side).

plan des injecteurs actifs, on remarque le pincement du jet causé par la pénétration des doublets générés au niveau des injections (voir figure 4.2 $X/D = 0.5$ à 3.0). Dans le plan des injecteurs inactifs, on observe tout d'abord l'évasement du jet provoqué par le débit transverse provenant

des plans d'injection. Ensuite, à partir de $X/D \approx 3$ ou 4, le jet est pincé par les côtés du plan par les doublets issus du ré-accouplement des tourbillons longitudinaux (voir la phase de divergence, figure 4.2 $X/D = 5.0$). A partir de la même position $X/D \approx 3$ ou 4, on constate que le jet cesse d'ailleurs d'être pincé dans le plan des injecteurs actifs, l'excés de vitesse contenue dans l'épaisseur $2R/D = 0.36$ du jet dans ce plan étant alors diffusé par la turbulence.

4.3 Analyse des tourbillons engendrés par les jets radiaux

La description de l'écoulement du jet primaire soumis à des injections secondaires qui vient d'être faite a clairement montré que la génération d'une paire de tourbillons contra-rotatifs par chaque jet radial est un processus primordial pour augmenter le mélange. Le but de cette section est d'analyser comment ces structures tourbillonnaires sont engendrées par un jet soufflant perpendiculairement dans un écoulement transverse. On trouve peu de données sur le problème de l'interaction d'un jet et d'une couche de mélange. L'essentiel de la littérature disponible traite le cas des jets émis à travers une plaque plane dans un écoulement transverse. Les rares articles traitant le cas d'un jet impactant une couche de mélange détaillent plus particulièrement les aspects instationnaires et turbulents. Dans cette section nous ne considérons que les aspects moyens du jet contrôlé, c'est pourquoi nous reviendrons sur cette littérature plus tard (dans le chapitre 5). La revue bibliographique commence naturellement par le cas subsonique pour limiter les effets de compressibilité et les repousser à la revue du cas supersonique. La génération des tourbillons est ensuite détaillée dans la configuration du jet primaire soumis à quatre injections secondaires radiales.

4.3.1 Phénoménologie tourbillonnaire d'un jet transverse débouchant d'une paroi

4.3.1.1 Jet subsonique dans un écoulement transverse subsonique

Lorsqu'un jet subsonique débouche d'une paroi dans un écoulement transverse, il se forme 4 types de structures tourbillonnaires distinctes (voir figure 4.4) : le tourbillon de couche-limite, les tourbillons de la couche de mélange du jet, les tourbillons de sillage, et une paire de tourbillons contra-rotatifs (ou CVP pour "counter-rotating vortex pair").

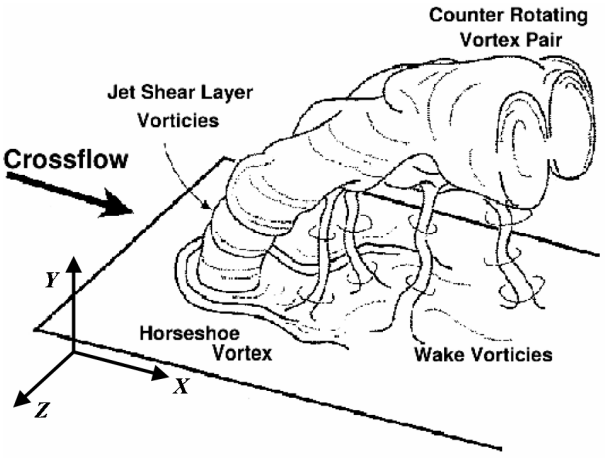


FIG. 4.4 – Les 4 types de structure tourbillonnaire engendrée par un jet subsonique en écoulement transverse subsonique (schéma de Fric et Roshko [90]).

Le tourbillon de couche-limite dit "en fer à cheval" est dû à l'enroulement des lignes de vorticité de la couche-limite extérieure autour du jet qui est alors vu par l'écoulement principal comme un obstacle à contourner par les côtés. C'est le cisaillement dû à l'obstacle équivalent au jet qui réoriente la vorticité de la couche limite. Formellement, ceci s'explique de manière séduisante en se plaçant dans le repère intrinsèque lié au champ de vitesse (voir le paragraphe ci-dessous). La viscosité est à l'origine de la vorticité transverse ω_n par adhérence de l'écoulement extérieur sur la paroi, mais c'est un processus purement non-visqueux et stationnaire qui, par la courbure $1/R_s$ des tubes de courant autour du jet, réoriente une partie de ω_n dans le sens longitudinal. Ces tourbillons étant plongés dans la couche-limite, ils sont très vite dissipés en aval par la viscosité. Le gradient de pression localisé au voisinage du point d'arrêt amont des lignes de courant entraîne en pratique le décollement de la couche-limite[1].

A propos de l'origine non-visqueuse de la vorticité secondaire :
Lakshminarayana et al. [141] ont écrit l'équation de la vorticité $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{rot}\overrightarrow{V}$ en coordonnées intrinsèques (s, n, b) afin d'expliquer le développement de sa composante longitudinale ω_s dans des écoulements de complexités variées. En particulier, en écoulement compressible non-visqueux, ils montrent que :

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\omega_s}{\rho V}\right) = \frac{2\omega_n}{\rho V R_s} \tag{4.1}$$

où R_s est le rayon de giration local de la ligne de courant ($\frac{1}{R_s} = \frac{\partial \overrightarrow{s}}{\partial s}.\overrightarrow{n}$). Si l'on note A la section de passage d'un tube de courant élémentaire, et $\Gamma_s = A\omega_s$ la circulation sur son contour, la conservation du flux de masse $\rho V A$ (hypothèse d'écoulement stationnaire) permet d'écrire (4.1) sous la forme :

$$\frac{\partial \Gamma_s}{\partial s} = \frac{2A\omega_n}{R_s} \tag{4.2}$$

L'équation (4.2) décrit un mécanisme non-visqueux de production de circulation longitudinale Γ_s à partir explicitement de la vorticité normale ω_n et implicitement de la vorticité binormale ω_b ayant provoqué la courbure[2]. Ce mécanisme n'est pas simplement une ré-orientation de la vorticité ω_n. En effet, il est possible de conserver la composante ω_n constante tout en produisant de la vorticité longitudinale ω_s par effet de courbure (i.e. ajout de ω_b). Le mécanisme de ré-orientation de la vorticité est aussi contenu dans l'équation (4.2), mais pas à travers le terme de couplage $\frac{2A\omega_n}{R_s}$. En effet, si le tube de courant est un tube de vorticité, alors $\omega_n = 0$ et on retrouve la conservation de la circulation $\frac{\partial \Gamma}{\partial s} = 0$ (cas particulier stationnaire du théorème de Kelvin) entre deux sections du tube de courant d'orientations différentes.
Un écoulement ayant généré de la vorticité normale ω_n par adhérence sur une paroi, ou par friction avec du fluide plus lent, génère donc de manière non-visqueuse de la vorticité longitudinale lorsqu'il change de direction dans le plan (s, n). Ce phénomène se produit notamment dans les conduites coudées où il fait apparaître les "cellules de recirculation de Dean" (cf. ouvrage de Guyon et al. [101]). On retrouve aussi ce phénomène dans le fond du virage d'une rivière où il déplace les sédiments de la berge externe vers la berge interne, comme si le phénomène tendait à remettre le cours d'eau dans le droit chemin.

[1] Près du bord amont de l'orifice, la topologie détaillée de l'écoulement est plus complexe, voir les travaux de Krothapalli *et al.* [139] ou ceux de Kelso et Smits [134], mais nous avons décrit ici l'essentiel du phénomène moyen.

[2] En effet, la courbure du tube de courant $1/R_s$ est causée à la fois par le taux de rotation binormal $\Omega_b = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n}\right)$ et par le cisaillement dans le plan (s, n) $S_{sn} = \frac{1}{2}\left(\frac{V}{R_s} + \frac{\partial V}{\partial n}\right)$.

Les tourbillons de la couche de mélange et **les tourbillons de sillage** ont eux une existence purement instationnaire puisqu'ils résultent de l'instabilité non-visqueuse de l'interface entre l'écoulement du jet initialement suivant Y et l'écoulement transverse suivant X. Comme le suggèrent Fric et Roshko [90], les tourbillons de sillages ne sont pas dus au décollement des lignes de courant extérieures sur le cylindre fluide que constitue la partie initiale du jet. Ces lignes de vorticité verticale ω_y apparaissent sous l'effet de l'aspiration de la vorticité transverse ω_z contenue dans la couche-limite pariétale. Cette aspiration est induite par les CVP qui commencent à se former. Lorsque le jet est décalé de la paroi par l'intermédiaire d'une cheminée, ces tourbillons sont connectés aux tourbillons de von Karman lachés par le cylindre [79].

En champ lointain, **la paire de tourbillons contra-rotatifs (CVP)** est la structure dominante du jet dans l'écoulement transverse [129, 83]. De plus, la CVP persiste loin en aval de la même manière que le sillage d'une aile en incidence [75, 27, 131, 121]. Elle reflète l'action de la quantité de mouvement verticale appliquée continûment par l'injection sur l'écoulement transverse. La CVP est donc visible dans le champ moyen dès que le jet commence à se courber [8]. A l'aide d'injection de colorant, Kelso *et al.* [133] indiquent que ces deux tourbillons se forment par déformation de la couche de cisaillement dès le début du jet.

Smith et Mungal [236] montrent que la formation de la CVP dans la région proche de l'injection est responsable d'un accroissement significatif du mélange du jet avec l'écoulement transverse comparé à un jet débouchant dans un fluide au repos. Ils y mesurent en effet une décroissance de la concentration d'un scalaire passif en $s^{-1.3}$ alors qu'elle n'est qu'en s^{-1} pour un jet turbulent isolé (s étant l'abscisse curviligne le long du jet). En revanche, lorsque la formation des tourbillons est achevée, le mélange du jet avec le fluide extérieur se poursuit mais de manière bien moins intense avec une décroissance de concentration en $s^{-0.67}$. Ainsi, Smith et Mungal [236] définissent la région proche du jet comme étant la zone de formation des CVP associée à une forte augmentation du mélange et la région lointaine comme la zone de déclin de la paire de tourbillons pleinement développés où le mélange est réduit.

L'allure de cet écoulement dépend principalement du rapport de la quantité de mouvement injectée sur celle de l'écoulement transverse :

$$R = \sqrt{\frac{\rho_j V_j^2}{\rho_\infty V_\infty^2}} \tag{4.3}$$

où les indices j et ∞ désignent respectivement les propriétés du jet et celles de l'écoulement transverse. R est aussi appelé "rapport des vitesses effectives" [160] et dégénère en $r = V_j/V_\infty$ pour les écoulements à densité uniforme.

Ce paramètre étant introduit, Smith et Mungal [236] positionnent la limite entre les régions proche et lointaine du jet à $s/(R^2.d) = 0.3$ ou $x/(R^2.d) = 0.2$. Le tableau 4.1 regroupe quelques lois de similitude décrivant la trajectoire des jets en écoulement transverse avec leur domaine d'établissement. Strictement, la trajectoire moyenne d'un jet continu est l'ensemble des lignes de courant issues de l'orifice d'injection et intégrées sur le champ moyenné en temps. Cependant, une telle trajectoire n'est pas aisément accessible expérimentalement. C'est pourquoi, dans la littérature, on trouve plutôt des "trajectoires conventionnelles" basées sur le maximum de concentration d'un scalaire passif ou le maximum de vitesse dans chaque section $x =$ constante. En général, les points de vitesse maximale "pénètrent" plus loin que ceux correspondant à la concentration maximale. Par ailleurs, Moussa *et al.* [175] suggèrent de définir la trajectoire de la surface du jet à partir des points de vorticité maximale car ils constatent qu'elle se confond mieux avec une ligne de vorticité. De toutes ces corrélations, il se dégage une loi de pénétration

$y(x)$ en puissance $\approx 1/3$. Broadwell et Breidenthal [27] retrouvent analytiquement cette tendance dans le champ lointain en assimilant le jet à deux tourbillons contrarotatifs longitudinaux concentrés, ayant un mouvement bidimensionnel dans le plan normal à l'écoulement. L'évolution des deux tourbillons dans cette section se déplaçant avec l'écoulement transverse à la vitesse V_∞ est alors régie par leur vitesse induite (loi de Biot et Savart), sachant que l'impulsion du doublet introduite par l'injection se conserve dans le mouvement. Enfin, ils arrivent à la loi en $y \sim x^{1/3}$ en supposant que l'écoulement en champ lointain n'a pas de mémoire et que la distance entre les tourbillons se cale sur la hauteur y du doublet. Cette similitude permet en outre de montrer que les trajectoires de différents jets sont confondues lorsque l'on adimensionne les longueurs par $R.d$. L'analyse de Broadwell et Breidenthal [27] se justifie d'autant mieux que l'écoulement est turbulent.

L'importance des effets visqueux est mesurée soit par le nombre de Reynolds externe $\mathrm{Re}_\infty = V_\infty d/\nu$ (d le diamètre de l'injection) soit par le nombre de Reynolds du jet $\mathrm{Re}_j = R.\mathrm{Re}_\infty$. La trajectoire du jet semble être indépendante du nombre de Reynolds lorsque celui-ci est grand [27, 236, 226]. Shan et Dimotakis [226] montrent que l'intimité du mélange (en clair la distribution de scalaire passif) reste dépendante du nombre de Reynolds jusqu'à $\mathrm{Re}_j \approx 2 \times 10^4$ mais suppose son indépendance pour des Reynolds plus élevés (corrélativement au papier de Dimotakis [70]). Karagozian [131] insiste sur l'importance de la viscosité (moléculaire et turbulente) et son effet d'entraînement sur l'évolution de la paire de tourbillons dans le champ lointain. En particulier, la viscosité totale est essentielle à l'évolution de l'écartement du doublet b et à celle de la circulation de chaque tourbillon Γ (s'il n'y avait pas d'effet visqueux au sens large, la paire de tourbillon conserverait une circulation et un écartement constants, et aurait donc une trajectoire rectiligne $y \sim x$ en champ lointain). Toutefois, pour des nombres de Reynolds supérieurs à 10^3, Karagozian remarque que l'augmentation du nombre de Reynolds n'a plus d'effet significatif.

4.3.1.2 Origine de la paire de tourbillons contra-rotatifs

De nombreuses études ont tenté d'expliquer les mécanismes de formation des CVP (voir notamment la revue de Margason [160] résumant les travaux antérieurs à 1993), mais aucun scénario n'a fait l'unanimité jusqu'à aujourd'hui. Cependant, tout le monde s'accorde pour dire que les CVP résultent de la réorientation de la vorticité contenu dans la couche de cisaillement du jet avec l'écoulement extérieur. Guidées par les moyens d'investigations expérimentaux et numériques de leurs temps, les auteurs ont adopté différentes approches. D'une part, on peut distinguer les scénarios basés sur l'analyse du champ moyen et ceux basés sur l'observation de l'évolution temporelle des structures tourbillonnaires. D'autre part, si l'on assimile le jet à une tube de courant de repère intrinsèque ($\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b}$) la vorticité contenue dans la couche de cisaillement initiale peut être décomposée en une vorticité axiale $\overrightarrow{\omega_s}$ verticale ($\overrightarrow{y}$) due au contournement du jet par le fluide extérieur dans le plan (X,Z) (voir figures 4.4 ou 4.5) et une vorticité azimutale $\overrightarrow{\omega_{nb}} = \overrightarrow{\omega_{xz}}$ contenue dans le plan (X,Z) due à la vitesse verticale du jet $V_j\,\overrightarrow{y}$. De plus, il n'y a pas de consensus sur l'origine de la déflexion du jet (force visqueuse ou force de pression).

Limités par la puissance de calcul, les premiers modèles de jet circulaire en écoulement transverse furent construits sur des considérations à la fois théoriques et empiriques du champ moyen. Ainsi, Chang [32], Margason [161] ou Adler [5] ont d'abord proposé une explication quasi-2D de la déformation du jet et de la formation de la CVP. Ils supposent que l'on peut assimiler la surface du jet à une nappe de vorticité dont la forme peut être décrite en ne considérant que la composante axiale du rotationnel ω_s dans les sections perpendiculaires à la trajectoire du jet (cf. figure 4.5 à gauche[3]). La conservation de la vorticité ω_s et sa convection induite dans le plan

[3]Le schéma de gauche est construit à partir des calculs quasi-2D de Muppidi [177] et représente la vitesse

Auteurs	Domaine d'établissement	Expression de la trajectoire
Patrick [190]	$6 \leq R \leq 50$	$\frac{y}{d} = R^{0,85} \left(\frac{x}{d}\right)^{0,38}$
Pratte & Baines [200]	$5 \leq R \leq 35$	$\frac{y}{R.d} = 2,05 \left(\frac{x}{R.d}\right)^{0,28}$
Kamotani [129]	$3,87 \leq R \leq 7,75$	$\frac{y}{d} = 0,89R^{0,94} \left(\frac{x}{d}\right)^{0,36}$
Chassaing *et al.* [35]	$2,37 \leq R \leq 6,35$	$\frac{y}{d} = \left(2,351 + \frac{4}{R}\right)^{-0,148} R \left(\frac{x}{d}\right)^{0,36}$
Fearn & Weston [83]	$3 \leq R \leq 10$	centre des tourbillons : $\frac{y}{d} = 0,3473R^{1,127} \left(\frac{x}{d}\right)^{0,4291}$
		maximum de vitesse : $\frac{y}{d} = 0,9772R^{0,9113} \left(\frac{x}{d}\right)^{0,3346}$
Broadwell & Breidenthal [27]	$0,03 \leq R \leq 0,57$	$\frac{y}{R.d} \propto \left(\frac{x}{R.d}\right)^{1/3}$
Karagozian [131]	$4 \leq R \leq 8$	$\frac{y}{d} = 0,527R^{1,178} \left(\frac{x}{d}\right)^{0,314}$
Margason [160]	$2 \leq R \leq 10$	$\frac{y}{d} = 4R^2 \left(\frac{x}{d}\right)^{1/3}$
Yuan & Street [267]	$2 \leq R \leq 3,3$	$\frac{y}{R.d} = A \left(\frac{x}{R.d}\right)^{0,28}$ avec $1,2 \leq A \leq 1,4$
Smith & Mungal [236]	$5 \leq R \leq 25$	$\frac{y}{R.d} = 1,5 \left(\frac{x}{R.d}\right)^{0,27}$
Hasselbrink & Mungal [103, 104]	région proche ($\frac{x}{R.d} << 1$)	$\frac{y}{R.d} = \left(\frac{2}{c_{ej}} \frac{x}{R.d}\right)^{1/2}$, $c_{ej} = 0,32$
	région lointaine ($\frac{x}{R.d} >> 1$)	$\frac{y}{R.d} = \left(\frac{3}{c_{ew}} \frac{x}{R.d}\right)^{1/3}$, $\left(\frac{3}{c_{ew}}\right)^{1/3} = 1,6$
Camussi *et al.* [30]	$Re_j \simeq 100$, $R \leq 2,5$	$\frac{y}{d} \simeq (1,05R + 0,5). \left(\frac{x}{d}\right)^{0,39}$
	$R > 2,5$	$\frac{y}{d} \simeq (3,66R - 6,7). \left(\frac{x}{d}\right)^{0,39}$
Su & Mungal [245]	max. de concentration	$\frac{y}{R.d} = 1,92 \left(\frac{x}{R.d}\right)^{0,342}$
	max. de vitesse	$\frac{y}{R.d} = 1,36 \left(\frac{x}{R.d}\right)^{0,402}$
Muppidi & Mahesh [176]	$1,5 \leq R \leq 5,7$	$\frac{y}{R.d} \simeq 1,85 \left(\frac{x}{R.d}\right)^{0,33} \left(\frac{h}{d}\right)^{0,15}$
	$0,44 \leq \delta/d \leq 6,4$	où $\frac{h}{d} = \left(\frac{3}{4}\pi C_m R^2 \frac{\delta^2 d_j^2}{d^4}\right)^{1/3}$ quand $h \leq \delta$
		et $\frac{h}{d} = \frac{2}{3}\frac{\delta}{d} + \frac{\pi}{4} C_m R^2 \frac{d_j^2}{d^2}$ quand $h \geq \delta$
		$C_m = 0,05$, définition de d_j : voir texte

TAB. 4.1 – Fonctions de corrélation de la trajectoire d'un jet transverse subsonique dans un écoulement subsonique [57].

de la section reproduit bien qualitativement la forme de haricot (ou de rein,"kidney" en anglais) observée expérimentalement par Kamotani et Greber [129] ou Fearn et Weston [83]. Le modèle de Karagozian [131] construit sur l'évolution bidimensionnelle de deux tourbillons contrarotatifs évalue d'ailleurs leur circulation initiale uniquement sur la vorticité ω_y de contournement avant de la faire évoluer en champ lointain vers la circulation imposée par l'équilibre de la force d'injection (comme l'avait précédemment fait Durando [75]). Cette vision 2D montre clairement que la section du jet n'a ni besoin de force de pression longitudinale (les lignes de courant extérieures étant symétriques par rapport à $(0, Z)$) ni besoin de force de viscosité pour se mouvoir dans le sens de l'écoulement, ce mouvement étant uniquement induit par la vorticité de contournement ω_y. Toutefois, Coelho et Hunt [44] soulignent que la vorticité sur la surface de discontinuité des vitesses est à la fois axiale et azimutale, cette dernière étant prépondérante dans les jets forts. S'appuyant sur un raisonnement mathématique valable au voisinage immédiat de l'orifice et pour des jets forts ($y \to 0$ et $r \to \infty$), ils montrent qu'en considérant les deux composantes, le modèle de jet 3D non-visqueux se déforme initialement de manière symétrique (par rapport à l'axe (O, Z), O le centre de l'orifice circulaire) et n'est pas défléchi. Leur explication est que l'écoulement extérieur perturbe la vitesse dans l'orifice et y courbent les anneaux de vorticité, ce qui réoriente la vorticité azimutale contenue dans les anneaux et compense ainsi la convection de

normale à la section.

la vorticité axiale ω_s prévue par la théorie quasi-2D. Ils en concluent que la déflexion du jet est entièrement provoquée par une force longitudinale due à l'entraînement visqueux. L'explication quasi-2D est pourtant ressortie dans un papier récent de Muppidi [177] (cf. figure 4.5, gauche).

D'autres auteurs défendent le scénario selon lequel les CVP se formeraient par étirement de la vorticité longitudinale ω_x des bords latéraux du jet (cf. figure 4.5 à droite), du moins pour les jets forts (i.e. $r > 4$). Parmi eux, Sykes *et al.* [246] ont analysé le champ moyen résultant d'une simulation de type RANS d'un jet circulaire. Ces auteurs montrent très clairement que sur un champ turbulent moyen (modélisé), les lignes de vorticité sont radicalement différentes des anneaux matériels convectés dans le champ de vitesse moyen à partir du bord de l'orifice. Tout d'abord, les lignes de vorticité lachées au niveau de l'orifice sont d'autant moins confondues avec son contour que r est petit (typiquement en dessous de $r \leq 4$). D'autre part, les deux types de ligne suivent des évolutions opposées : les contours matériels se replient sur eux-mêmes autour de la direction Z, alors que les lignes de vorticité restent essentiellement horizontales, leurs bords situés en aval étant légèrement soulevés (voir 4.5 à droite). La comparaison entre la convection des lignes matérielles et le tracé des lignes de vorticité, valable pour r grand, indique que les effets visqueux sont très importants dans leurs écoulements (modélisés par une approche RANS)[4]. Les auteurs montrent en effet que la diffusion visqueuse domine le terme de basculement dans l'équation de transport de la vorticité. Selon eux, les anneaux de vorticité initialement créés par les jets forts ($r > 4$) sont donc principalement étirés par les effets visqueux et donnent loin en aval, dans un plan de coupe, l'apparence d'une paire de tourbillons longitudinaux. En revanche, pour les jets peu puissants ($r \leq 4$), la composante de vorticité verticale à la source est importante et ce raisonnement n'est plus valable. L'analyse de Jacquin [121] corrobore ce point de vue. Selon lui, les tourbillons de sillage (la CVP) sont l'extension des anneaux de vorticité émanant de l'injecteur, la transition de la vorticité initiale du jet vers la vorticité dans le sillage n'étant pas due à un mécanisme de réorientation mais à sa convection et son étirement par l'entraînement turbulent.

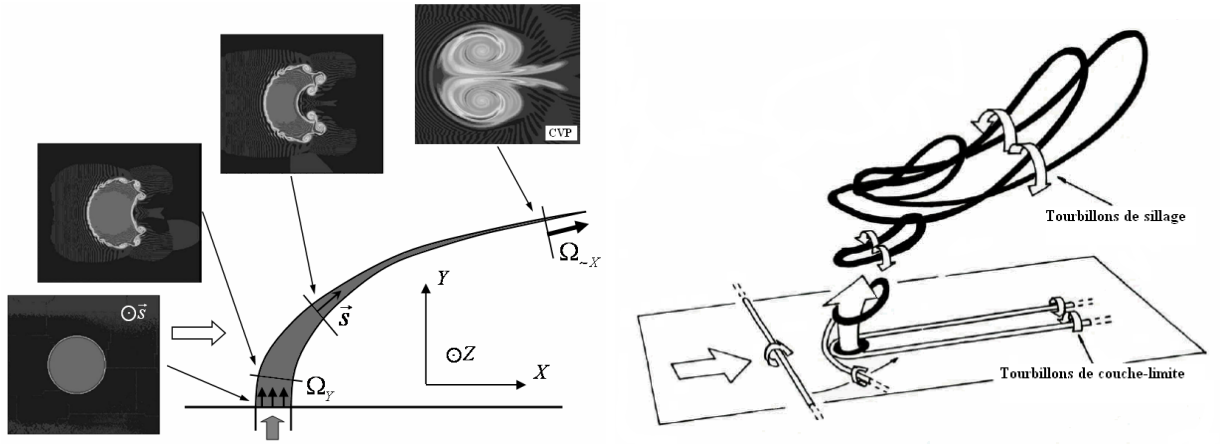


FIG. 4.5 – Deux scénarios de formation des CVP dans le champ moyen : la vorticité longitudinale (schéma adapté de [177]) à gauche et la vorticité transversale [91] à droite (relativement au sens d'écoulement du jet).

[4]La différence entre un écoulement de fluide parfait et celui gouverné par les équations RANS est le terme visqueux. Dans un fluide parfait, le théorème d'Helmoltz dit qu'une ligne tourbillon est convectée comme une ligne matérielle. Si ce n'est plus le cas dans un fluide visqueux, la cause est nécessairement de nature visqueuse.

Si l'on ignore les effets visqueux, l'existence de la vorticité $\omega_x = \omega_n$ localisée sur les bords latéraux du jet, assimilé à un tube de courant de repère intrinsèque ($\overrightarrow{s}$, $\overrightarrow{n}$, $\overrightarrow{b}$), permet d'envisager la production de circulation longitudinale Γ par le mécanisme de courbure décrit par l'équation 4.2. Le rayon de courbure R_s du jet joue donc un rôle important dans la phase d'établissement de la CVP. En s'appuyant sur les travaux de Wooler [264], Nunn [180] suggère que la variation longitudinale de l'impulsion Γb est déterminée par le flux incident $\rho_\infty V_\infty$ et par la force de pression agissant normalement au jet (de manière analogue à la théorie de Prandtl pour une aile en incidence), cette dernière étant équilibrée par la force centrifuge associée à la courbure du jet. Cette proposition permet d'établir une relation (locale en s) entre les quantités représentatives du jet en tant que tube de courant $(A, R_s, V_j)(s)$ et les caractéristiques du doublet $(\Gamma, b)(s)$:

$$\frac{1}{V_\infty d^2}\frac{d(\Gamma b)}{ds} = \frac{\rho_j V_j^2}{\rho_\infty V_\infty^2}\frac{A}{d^2}\frac{1}{R_s} \tag{4.4}$$

Afin de déterminer complètement l'évolution du jet, il faut néanmoins séparer les évolutions respectives de la circulation $\Gamma(s)$ et de l'écartement du doublet $b(s)$, ce que font Wooler [264] et Nunn [180] à l'aide de relations empiriques. Quelques fonctions de corrélation de la circulation issues de ce type de littérature ont été regroupées dans le tableau 4.2.

Auteurs	Domaine de validité	Expression de la circulation
Broadwell & Breidenthal [27]	$0,03 \leq R \leq 0,57$	$\frac{\Gamma}{2U_\infty.d} \propto R^{4/3}\left(\frac{x}{d}\right)^{-1/3}$
Nunn [180]	$4 \leq R \leq 10$ et $s < s_M$	$\frac{\Gamma}{\Gamma_M} = \left(\frac{s}{s_M}\right)^{-1/3}[1 + \ln\left(\frac{s}{s_M}\right)^{1/3}]$
	$4 \leq R \leq 10$ et $s > s_M$	$\frac{\Gamma}{\Gamma_M} = \left(\frac{s}{s_M}\right)^{-0.85}$
	où $s_M = 0.13dR^{2.37}$	$\frac{\Gamma_M}{U_\infty d} = 0.63R^{1.457}\left(\frac{s_M}{R.d}\right)^{-1/3}$
Karagozian [131]	$4 \leq R \leq 8$	$\frac{\Gamma}{2U_\infty.d} = 0,469.R^{1,631}\left(\frac{x}{d}\right)^{-0,38}$
Hasselbrink & Mungal [103]		$\frac{\Gamma}{U_j d} = \frac{\pi}{2,56}\left(\frac{\rho_j}{\rho_\infty}\right)^{1/2}\left(\frac{x}{Rd}\right)^{-1/3}$

TAB. 4.2 – Fonctions de corrélation de la circulation.

Grâce à l'accroissement de la puissance de calcul et à l'amélioration des moyens de mesure expérimentaux, les travaux parus depuis la fin des années 90 ont plus été orientés vers l'observation du champ instantané et l'analyse de l'évolution temporelle des structures tourbillonnaires. Toutefois, les nombres de Reynolds étudiés sont faibles et ne dépassent pas $Re = V_\infty d/\nu \approx 5000$ [133, 178]. La littérature est là encore divisée en deux courants. D'un côté, Kelso *et al.* [133], Cortelezzi et Karagozian [50], Marzouk et Ghoniem [162] misent sur la déformation d'anneaux tourbillonnaires initialement formés au tout début de la couche de cisaillement du jet près de la zone d'injection (leur scénario ne s'applique que pour des jets forts). Selon ces auteurs, chaque anneau tourbillonnaire nouvellement formé se plie en deux suivant la direction Z, son bord aval se dressant verticalement sous l'effet de la vitesse induite par la structure précédente et son bord amont se relevant pour rester perpendiculaire à la trajectoire du jet. La vorticité axiale (suivant $\overrightarrow{s}$) moyenne dans le temps résulte alors de l'intégration de la vorticité des bords latéraux, alors que les contributions transverses (suivant Z) des bords amont et aval sont opposées et s'annulent (vorticité ω_z positive en rouge et négative en bleu, figure 4.6 à gauche). Leurs calculs montrent en outre que le jet peut bien être défléchi sans qu'aucune force de viscosité n'intervienne contrairement à ce que prétendaient Coelho et Hunt [44]. D'un autre côté, Lim *et al.* [153], New *et al.* [178] ou Yuan *et al.* [268] n'observent pas d'anneaux tourbillonnaires. Yuan *et al.* ayant

réalisé une simulation LES de jet rond, distinguent trois catégories de structures tourbillonnaires : les “hanging vortices” (difficilement visibles sur les figures de Yuan *et al.* [268]) formés sur les bords latéraux du jet et dont certains sont quasi-stationnaires, les “spanwise rollers” sur les bords amont et aval du jet, et des “vertical streaks” formés par étirement des “spanwise rollers”. Ils supposent que ce sont les “hanging vortices” qui en éclatant sous l’effet d’un gradient de pression, donnent par la suite naissance à la paire de tourbillons contra-rotatifs. Cet éclatement tourbillonnaire (“vortex breakdown”) a été observé expérimentalement par Kelso *et al.* [133] et numériquement par Marzouk *et al.* [164] peu après la réorientation longitudinale de la vorticité contenue dans la couche de cisaillement du jet et donnent naissance à un ensemble très enchevêtré de petites structures tourbillonnaires. Cette éclatement est soupçonné par Kelso *et al.* [133] d’être responsable des capacités d’augmentation du mélange du jet transverse. Néanmoins, Marzouk *et al.* [164] révèlent au moyen d’un filtrage spatial la persistance de deux régions symétriques en rotations longitudinales contra-rotatives. Lim *et al.* [153] montrent qu’au lieu des anneaux de vorticité (“vortex rings”), il existe des boucles tourbillonnaire (“vortex loops”) non fermées (voir figure 4.6 à droite). Selon eux, les CVP qui se forment dès la base du jet empêchent le développement des anneaux tourbillonnaires et rendent indépendants les développements des “spanwise rollers” en amont et en aval du jet. D’après ce scénario, les CVP sont les pattes situées en aval de ces boucles tourbillonnaires. Les auteurs identifient les “hanging vortices” aux prolongements des “spanwise rollers” amont avant leur fusion dans les CVP, et les “vertical streaks” avec les pattes aval des boucles tourbillonnaires.

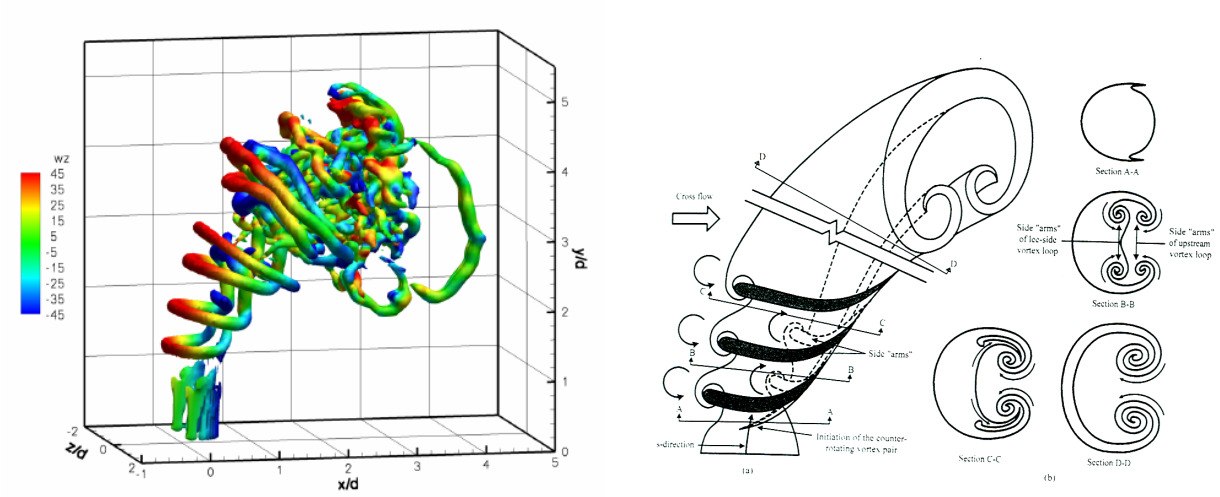


FIG. 4.6 – Deux scénarios de formation temporelle des CVP : à partir d’anneaux tourbillonnaires [163] à gauche et à partir de boucles tourbillonnaires [153] à droite.

Pour finir, une autre vision de la distribution de vorticité est proposée ici pour tenter de se représenter le problème de la génération de la CVP de manière plus globale. Elle est schématisée sur la figure 4.7. Considérons un volume de contrôle entourant la moitié du jet défléchi par l’écoulement venant de la gauche. Ce volume de contrôle est délimité par le plan horizontal P_1, le plan de symétrie vertical P_2 et une section transverse P_3 dans le champ lointain du jet. Soit on prend P_1 au dessus de la couche-limite de la paroi, soit on confond P_1 avec la paroi dotée de la condition de glissement. Le volume de contrôle est fermé par une surface latérale S_l sur laquelle on suppose soit que la vorticité est négligeable soit qu’elle est tangente[5]. Le flux de

[5]La condition que le flux de vorticité soit nul à travers S_l est peut être trop forte pour certains régimes. Par exemple, Eiff et Keffer [79] suggèrent que les tourbillons de sillage qui peuvent apparaître pour certains régimes pourraient contribuer aux CVP.

vorticité sortant de ce volume de contrôle est nul ($\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}V) = 0$), à chaque instant ou dans le champ moyen, c'est pourquoi on peut identifier les différentes contributions de flux entrants à la circulation Γ_{CVP} du tourbillon de la CVP isolé dans le demi-plan P_3 (flux sortant) :

$$\Gamma_{\mathrm{CVP}} = \overbrace{\underbrace{\overrightarrow{A}_3.\overrightarrow{\omega}_3}_{>0}}^{CVP} = \overbrace{\underbrace{-\overrightarrow{A}_1.\overrightarrow{\omega}_1}_{>0}}^{LV} \overbrace{\underbrace{-\overrightarrow{A}_{2U}.\overrightarrow{\omega}_{2U}}_{>0}}^{LEV} \overbrace{\underbrace{-\overrightarrow{A}_{2D}.\overrightarrow{\omega}_{2D}}_{<0}}^{LSV} \tag{4.5}$$

où $\overrightarrow{A}_i$ sont les vecteurs surfaces sortants. Le flux à travers le plan P_1 isole la circulation due au contournement du jet par le fluide extérieur $-\overrightarrow{A}_1\overrightarrow{\omega}_1$ qui alimente la circulation de la CVP (> 0)[6]. Dans le plan P_2, on intègre la contribution de la couche de mélange du jet. On peut y distinguer la contribution positive $(-\overrightarrow{A}_{2U}.\overrightarrow{\omega}_{2U}) > 0$ de la couche amont (formée des structures tourbillonnaires "windward" ou "leading-egde vortices", LEV) et la contribution négative $(-\overrightarrow{A}_{2D}.\overrightarrow{\omega}_{2D}) < 0$ de la couche aval (formée des structures tourbillonnaires "lee-side vortices", LSV). Les importances respectives de ces deux contributions dépendent du rapport des vitesses R et du nombre de Reynolds Re_∞ [30, 116], ainsi que de la forme de l'orifice [105, 178]. Pour illustrer ce dernier point de vue, prenons les résultats de Camussi *et al.* [30], bien qu'ils soient à un nombre de Reynolds très bas (≈ 100). Ces auteurs mettent en évidence l'existence de deux régimes d'écoulement distincts selon la valeur de R, $R = 3$ étant la valeur de transition. A faible rapport de vitesse $R < 3$, les tourbillons transverses aval, ou "lee-side vortices" qui correspondent à des structures de type sillage ("wake-like vortices") dominent. En revanche, pour des vitesses de jet plus élevées $R > 3$, ce sont les tourbillons transverses amont, ou "windward vortices" correspondant à des structures de type jet ("jet-like vortices") qui dominent. Selon le rapport de vitesse[7], on voit bien que la contribution négative $(-\overrightarrow{A}_{2D}.\overrightarrow{\omega}_{2D}) < 0$ (pour $R < 3$) ou la contribution positive $(-\overrightarrow{A}_{2U}.\overrightarrow{\omega}_{2U}) > 0$ (pour $R > 3$) détermine l'apport du plan P_2 à la circulation de CVP. Milanovic et Zaman [170] ont aussi observé ces deux régimes, avec une transition à $R \approx 2$, pour des écoulements à un nombre de Reynolds plus grand $\mathrm{Re}_\infty = 10^4$.

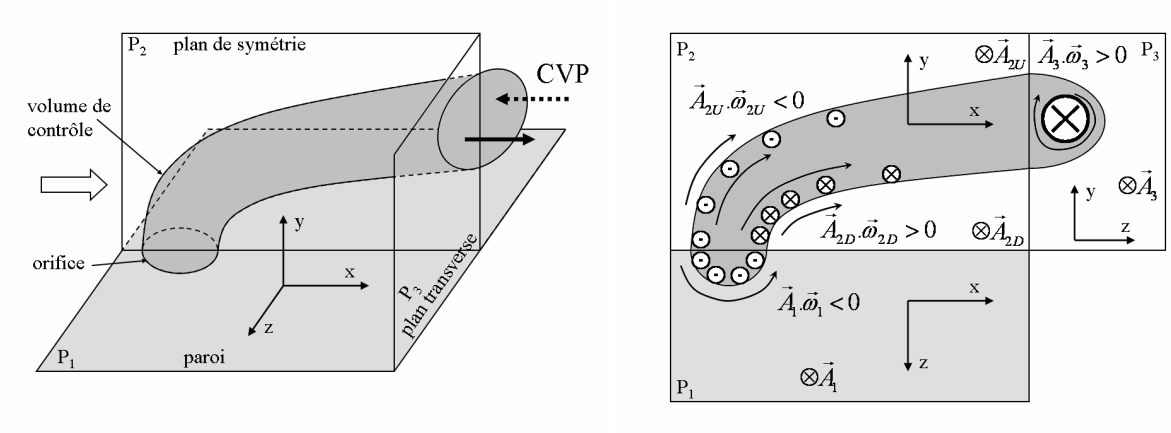


FIG. 4.7 – Bilan de vorticité sur un volume de contrôle entourant le jet en écoulement transverse.

Haven et Kurosaka [105] et New *et al.* [178] ont décrit la structure toubillonnaire et notamment le développement des CVP dans des jets issus d'orifices d'allongements variés pour des

[6]Ceci justifie le choix du plan P_1. En effet, dans le cas où on confondrait P_1 avec la paroi adhérente, cette circulation serait redistribuée dans la couche-limite et contribuerait au flux de vorticité à travers S_l.

[7]Selon Camussi *et al.* , ces deux régimes sont en fait dus à un effet de Reynolds, mais ça ne change rien à l'idée que l'on veut indiquer ici.

nombres de Reynolds maximaux respectifs de 2900 et 5100. Ces auteurs présentent plusieurs scénarios de dynamique tourbillonnaire suivant l'allongement. En bref, on peut considérer que les portions latérales de la couche de mélange du jet produisent des paires de tourbillons contra-rotatifs stationnaires nourrissant les CVP (car de même sens de rotation) et que le bord amont de la couche de mélange peut développer des doublets contra-rotatifs de sens opposés. Les jets initialement allongés dans le sens de l'écoulement favorisent la formation du premier type de structures et se soulèvent d'autant mieux de la paroi. Au contraire, les jets initialement plus allongés transversalement à l'écoulement (suivant Z) restent plus collés à la paroi et sont donc plus intéressants pour des applications de refroidissement par "film-cooling". Cet exemple souligne encore l'effet de la contribution ($\overrightarrow{A}_{2U}.\overrightarrow{\omega}_{2U}$) du bord amont sur le développement de la CVP.

Par ailleurs, Peterson et Plesniak [195] ont étudié l'influence des conditions précédant l'injection. Ils observent qu'un conduit d'alimentation orienté dans le même sens que l'écoulement extérieur (resp. dans le sens opposé) produit un couple de tourbillons contra-rotatifs tournant dans le même sens (resp. dans le sens opposé) que la CVP. Consécutivement, l'alimentation co-courant ("co-flow") permet d'obtenir une trajectoire plus profonde et un évasement latéral du jet plus restreint qu'une alimentation normale ou encore plus qu'une alimentation en contre-courant ("counter-flow"). Ce phénomène s'explique aisément par le mécanisme de courbure du tube de courant décrit par l'équation (4.2).

Milanovic et Zaman [170] ont aussi regardé l'effet d'un angle de tangage ("pitch angle", d'axe Z) dans le sens de l'écoulement transverse et d'un angle de lacet ("yaw angle", d'axe Y). Sans surprise, le jet pénètre plus lorsque le jet est redressé orthogonalement à l'écoulement. Lorsqu'on donne au jet une composante latérale (suivant Z), en mettant du lacet à un jet déjà incliné en tangage, celui-ci s'évase plus. Enfin, le taux de décroissance de la vorticité axiale est significativement diminué par l'angle de lacet alors qu'il semble indépendant de l'angle de tangage.

Pour résumer, à l'heure actuelle, le problème de la formation des CVP n'est toujours pas résolu. Il n'existe pas d'explication générale valable dans tous les régimes de fonctionnement du jet sur la façon dont se forment les CVP et comment est alimentée leur circulation. L'existence de la CVP étant essentiellement stationnaire, elle doit pouvoir s'expliquer par des mécanismes agissant sur le champ moyen. L'équation (4.2) décrit les mécanismes 3D non-visqueux de génération de la circulation longitudinale : la réorientation et la création de vorticité provoquée par la courbure du jet. Les phénomènes visqueux ne sont toutefois pas négligeables et sont même essentiels à l'épuisement de la CVP en champ lointain. De plus, les expériences réalisées à faibles nombres de Reynolds montrent que la dynamique instationnaire de la vorticité est très complexe mais organisée, ce qui indique que l'action de la turbulence aux grands nombres de Reynolds n'est pas juste un effet de diffusion assimilable à l'hypothèse de Boussinesq. L'anisotropie très forte de la turbulence mesurée dans ces écoulements [6, 170, 226] soutient cette hypothèse et joue probablement un rôle important dans la création des CVP. Ceci est d'autant plus souligné que les noyaux des tourbillons coïncident avec les zones de forte intensité turbulente [170]. Toutefois, du point de vue applicatif, de nombreux travaux de la littérature permettent déjà d'orienter la conception des injections afin d'obtenir soit une forte pénétration et l'augmentation du mélange soit un jet plus proche de la paroi comme dans les applications où l'on cherche à réaliser une protection thermique des matériaux.

4.3.1.3 Jet transverse supersonique en écoulement transverse supersonique

Lorsqu'un jet rond débouche d'une paroi dans un écoulement transverse supersonique, il est localement perçu comme un corps emoussé [272, 114] dont la forme peut être assimilée à un quart de sphère prolongé par un demi-cylindre. En égalant la force de traînée $D = \frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 C_D \pi R_b^2/2$ au gain de quantité de mouvement du fluide injecté $\dot{m}_i V_\infty$, Hsia [114] (inspiré des travaux de Zukoski et Spaid [272]) exprime le rayon de l'obstacle équivalent par :

$$R_b = \left(\frac{4\dot{m}_i}{\pi C_D \rho_\infty V_\infty^2} \right)^{1/2} \tag{4.6}$$

où $C_D = 0.94$ et $\dot{m}_i$ désignent respectivement le coefficient de traînée du quart de sphère et le débit injecté. En supposant que le jet a pour température totale T_{ij}, une pression totale p_{ij} et un nombre de Mach M_j, le rayon de l'obstacle équivalent est :

$$\frac{R_b}{d} = \left(\frac{C}{C_D} \left(\frac{\gamma_j/R_j \left(M_j^2 / \left(1 + \frac{\gamma_j - 1}{2} M_j^2 \right)^{\frac{\gamma_j+1}{\gamma_j-1}} \right)}{\gamma_\infty/R_\infty \left(M_\infty^2 / \left(1 + \frac{\gamma_\infty - 1}{2} M_\infty^2 \right)^{\frac{\gamma_\infty+1}{\gamma_\infty-1}} \right)} \right) \frac{p_{ij}}{p_{i\infty}} \left(\frac{T_{i\infty}}{T_{ij}} \right)^{1/2} \right)^{1/2} \tag{4.7}$$

où $C = \dot{m}_i/\dot{m}_{i1D}$ est le coefficient de débit de l'injection circulaire. Cette formule néglige les transferts de chaleur entre le jet et l'écoulement incident. Zukoski et Spaid [272] et Hsia [114] vérifient que la formule (4.7) est en bon accord avec des mesures expérimentales effectuées avec une injection sonique $M_j = 1$. En présence du jet transverse, l'écoulement supersonique s'adapte alors violemment en formant un choc fort (ou "bow shock") devant le jet secondaire (voir figure 4.8). Schetz et Billig [222] proposent un modèle plus élaboré faisant l'analogie du jet transverse avec un corps solide cylindrique courbé par une force de traînée. En aval du choc fort, le jet se retrouve dans une région subsonique et il se forme les quatre types de structures tourbillonnaires discutées précédemment pour les écoulements subsoniques. Toutefois, le gradient de pression imposé par le choc amont sur la couche-limite provoque son décollement et fait apparaître un choc en lambda. La zone de recirculation qui en découle s'enroule autour du jet sous la forme d'un tourbillon en fer à cheval (ou "horseshoe vortex", les anglophones disent aussi "necklace vortex" pour la forme en collier). A la paroi, la zone en amont du choc est en sur-pression par rapport à la pression à l'infini alors que la zone en aval est en sous-pression. La résultante positive est appelée "force d'interaction" et vient s'ajouter à la force de poussée du jet. Cette force d'interaction est notamment utilisée dans le "pilotage en force" des engins supersoniques et a motivé un grand nombre d'études antérieures à 1995 [160].

Par ailleurs, si le jet est supersonique, il comporte nécessairement un choc interne. En effet, la pression étant supérieure en amont qu'en aval de l'injection, soit le jet est sur-détendu par rapport à la pression amont, ce qui provoque un choc d'adaptation locale du bord amont, soit le jet est très sous-détendu (ce qui en pratique est souvent le cas pour éviter les chocs internes à la tuyère ou son désamorçage) et des chocs se forment par réflexion des ondes de détente issus des lèvres de la tuyère sur les surfaces de cisaillement du jet soumises à des gradients de pression très forts (cf. chapitre 3). Si le jet est fortement sous-détendu, un choc droit semblable à un disque de Mach apparaît, sinon les chocs se croisent de manière régulière.

Le paramètre prépondérant du jet supersonique dans un écoulement transverse est encore d'après la littérature le rapport R et il n'est jamais fait référence au nombre de Reynolds car celui-ci est en pratique très élevé, $\mathrm{Re} \gg 10^4$, et n'a donc plus d'influence sur le jet corrélativement

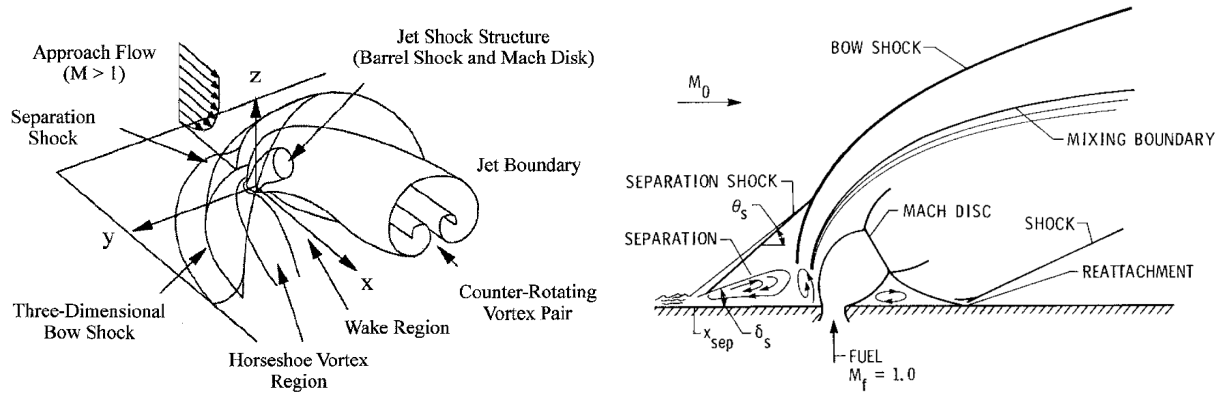


FIG. 4.8 – Jet supersonique en écoulement transverse supersonique (image 3D de Lee et Mitani [147] et image plane de Rogers [214]).

à ce qui a été dit sur les configurations subsoniques. Toutefois, dans la littérature traitant des régimes supersoniques, le rapport des quantités de mouvement J est plus souvent utilisé :

$$J = R^2 = \frac{\gamma_j p_j M_j^2}{\gamma_\infty p_\infty M_\infty^2} \tag{4.8}$$

Il est intéressant de noter que la pression dynamique $\gamma p M^2/2$ à pression génératrice fixée est maximale pour $M = \sqrt{2}$. A l'aide du paramètre J, des auteurs ont fourni des fonctions de corrélation sur les trajectoires du jet, quelques unes ont été reportées dans le tableau 4.3. De nombreux modèles analytiques ont été construits sur des raisonnements mélant la théorie (théorie des gaz monodimensionnelle et bilans de masse, de forces et d'énergie) à des corrélations empiriques, les principaux articles étant ceux de Schetz et Billig [222, 223, 14]. Nous ne détaillerons pas ces modèles. Pour résumer leur principe, la zone d'interaction du point de vue de l'écoulement extérieur est calculée en remplaçant le jet par un obstacle solide équivalent et le jet est calculé en deux étapes. Tout d'abord, la phase de pénétration qui se termine par le choc droit (la configuration où les chocs de focalisation se croisent n'étant pas traitée analytiquement) est déterminée par des corrélations empiriques sur la position du disque de Mach (voir tableau 4.4)[8]. En résumé, Schetz et Billig [222] exploitent les corrélations sur la hauteur de pénétration des jets libres et y remplacent la pression statique extérieure par une pression effective ("effective back pressure" p_{eb}). Ensuite, un modèle de jet semblable à ceux élaborés dans le cas subsonique est initialisé avec les conditions en aval du disque de Mach et un grand nombre d'hypothèses. Bien que leur modélisation soit très simplifiée, Schetz et Billig [222] mettent en évidence une caractéristique essentielle des jets supersoniques sous-détendus en écoulement transverse : un fort taux de sous-détente initial p_j^*/p_{eb} permet d'atteindre une hauteur de pénétration du disque de Mach élevée. Par contre la perte d'énergie mécanique qui s'en suit à travers le choc interne provoque une trajectoire d'autant plus aplatie dans la seconde phase. Par ailleurs, Heister et Karagozian [106] proposent un modèle analytique/numérique conçu pour les jets transverses "presque adaptés" et négligent le choc interne. En outre, l'état de la couche-limite pariétale et l'étalement de la zone décollée en amont du jet ont une influence non-négligeable comme le soulignent Schetz et Billig [222]. Sur les jets 2D (fentes très allongées dans le sens transverse Z), la taille de cette zone décollée est du même ordre que la hauteur de pénétration, c'est pourquoi nous ne les considérons pas ici.

[8]Habituellement, la hauteur du disque de Mach est appelée "hauteur de pénétration" à ne pas confondre avec la profondeur de pénétration du jet qui, elle, n'est pas limitée en aval. Toutefois, lorsque le choc interne est intense la pénétration qui suit dans la région d'observation est parfois négligée [223].

auteurs	loi de trajectoire	domaine d'établissement
Abramovich *et al.* [2]	$\frac{y}{d^*} = J^m \left(\frac{x}{d}\right)^n$ avec $m = 0.39$ et $n = 0.39$ ou $m = 0.43$ et $n = 1/3$	$M_\infty < 1$, $d^* = d_{M=1}$
Schetz et Billig [222]	$\frac{y}{d} = J^{0.43} \left(\frac{x}{d}\right)^{0.43}$	$p_j \approx p_{eb}$, $M_\infty \ll 1$ et $M_\infty = 4$
Povinelli *et al.* [198]	$\frac{y}{d} = 1.92 J^{0.350} \left(\frac{M_\infty}{M_j}\right)^{0.094} \left(\frac{x}{d} + 0.5\right)^{0.277}$	$M_\infty = 2.0$ $2. \geq J \geq 11.$
Bowersox *et al.* [22]	$\frac{y}{d} = 2.1 J^{0.25} \left(\frac{x}{d}\right)^{0.32}$	$M_\infty = 5.0$ $0.08 \geq J \geq 1.73$

TAB. 4.3 – Différentes fonctions décrivant la trajectoire du jet supersonique en écoulement transverse supersonique (section circulaire).

auteurs	hauteur de pénétration	position horizontale
Crist *et al.* [52]	$\frac{y_d}{d} = 0.65 \left(\frac{p_{ij}}{p_\infty}\right)^{1/2}$	$x_d = 0$ (jet libre)
Billig *et al.* [14]	$\frac{y_d}{d} = M_{j0}^{1/4} \left(\frac{p_j^*}{p_\infty}\right)^{1/2}$	$x_d = 0$ (jet libre)
Billig *et al.* [14]	$\frac{y_d}{d} = M_{j0}^{1/4} \left(\frac{p_j^*}{p_{eb}}\right)^{1/2}$ avec $p_{eb} = 0.8 p'_{i\infty}$ [223] avec $p_{eb} = \frac{2}{3} p'_{i\infty}$ [14]	(jet transverse) $x_d = y_d$ $\frac{x_d}{y_d} = 1.25 \left(1 - \exp(-\frac{M_\infty}{M_{j0}})\right)$
Cohen *et al.* [45]	$\frac{y_d}{d} = 1.05 J^{1/2}$	$x_d = 0$ (jet transverse)

TAB. 4.4 – Corrélations sur la position (x_d, y_d) du disque de Mach dans le jet transverse.

Concernant l'influence des conditions géométriques d'injection, Foster et Engblom [87] ont calculé les jets sortant de dix orifices d'allongement compris entre 1 : 8 (appelé "latitudinal slot") et 8 : 1 (aligné suivant X). Conformément aux résultats subsoniques de Haven et Kurosaka [105] et New *et al.* [178], les fentes longitudinales provoquent une pénétration plus profonde et un mélange amplifié. Les fentes en forme de diamant ("diamond orifices") [22], losanges dont le grand axe est aligné suivant l'écoulement extérieur, semblent intéresser les concepteurs de chambre de combustion supersonique puisque ces injections permettent de pénétrer plus en profondeur tout en diminuant les pertes de pression totale induites par le choc amont. Des jets elliptiques alignés avec l'écoulement transverse ont aussi été testés par Gruber *et al.* [98] mais dans leur cas, les jets elliptiques pénètrent moins loin que les jets circulaires (tant que l'injection n'a aucun angle de tangage, de lacet ou de roulis). Gruber *et al.* remarquent cependant que leur jet elliptique est soumis au phénomène d'"axis-switching" [269] ce qui explique l'effet opposé de l'allongement de l'orifice. Cet exemple montre que l'écoulement secondaire en amont de l'orifice peut aussi avoir des effets très importants en écoulement supersonique. Tomioka *et al.* [251] précisent cependant que l'avantage de l'injection en diamant sur l'injection circulaire n'est perceptible que pour les faibles rapports de pression dynamique J, car aux forts rapports J, le jet en diamant s'étend dans la direction de son petit axe et se rapproche ainsi du jet circulaire.

L'inclinaison en tangage (d'axe Z) de l'injection dans le sens de l'écoulement permet elle-aussi de réduire les pertes de charge dans l'écoulement extérieur. Toutefois, l'effet de l'inclinaison en tangage sur la profondeur de pénétration du jet est plus complexe. En effet, Tomioka *et al.* [251] et McClinton [165] mesurent un accroissement de la pénétration dans le champ lointain lorsque le jet est incliné dans le sens de l'écoulement alors que Gruber *et al.* [98] constatent une tendance inverse dans le champ proche. L'extrapolation des résultats des premiers auteurs dans

le champ proche de l'interaction présente la même contradiction. Tomioka *et al.* [251] expliquent ceci en disant que suivant les conditions de l'écoulement, la pression exercée par l'écoulement extérieur sur le jet varie, détermine sa structure de choc interne et donc les pertes de pression totale. Ces auteurs supposent alors que les pertes par choc de leurs jets sont plus fortes que dans les jets testés par Gruber *et al.* [98] et qu'en les inclinant, le gain sur la perte de pression totale permet à leurs jets de compenser la réorientation de la quantité de mouvement introduite, ce qui n'est pas le cas des jets de Gruber *et al.* [98]. Tomioka *et al.* [251] notent une pénétration maximale pour un angle de tangage de 60 deg. Ils évaluent enfin l'influence de l'angle de lacet sur le jet incliné à 60 deg. Ils observent une augmentation de la pénétration jusqu'à un angle de lacet de 15 deg suivie d'une décroissance rapide au-delà de cette valeur, ce qui est cohérent avec les résultats précédents [87] puisque le jet se ramène alors vers la configuration "latitudinal slot".

Comme pour les configurations subsoniques, toutes les publications consultées traitant du jet supersonique dans un écoulement transverse supersonique soulignent l'importance de la paire de tourbillons contra-rotatifs et de sa formation dans le mécanisme d'augmentation du mélange par rapport à un jet libre. Pour des études plus détaillées sur les structures tourbillonnaires de la couche de mélange des jets transverses supersoniques, consulter les travaux de VanLerberghe *et al.* [255] ou ceux de Huang et Lan [116].

4.3.2 Description des structures tourbillonnaires du jet contrôlé

Après avoir résumé les principales caractéristiques de l'interaction d'un jet et d'un écoulement transverse, nous décrivons maintenant l'écoulement formé par les quatre injections radiales soniques appliquées sur le jet primaire supersonique de la configuration MARCO et plus précisément les structures tourbillonnaires du champ moyen issu des calculs RANS.

4.3.2.1 Interaction d'un jet radial avec le jet primaire

La figure 4.9 présente différentes vues de l'interaction d'un jet radial avec le jet primaire. Dans le plan de symétrie $Z/D = 0$, les contours iso-Mach mettent clairement en évidence le choc fort détaché en amont du jet secondaire ainsi que le choc interne ($\sim$ disque de Mach). En aval du choc fort, l'écoulement comporte une poche subsonique très restreinte. En effet, le jet primaire contraint à passer dans une section très resserrée sous l'action du jet secondaire accélère vite au-delà de la vitesse du son (bien qu'une partie du fluide s'échappe par les côtés du plan de symétrie). De même, sur la surface cylindrique de rayon $R/D = 0.497$ passant juste au dessus du choc interne au jet secondaire, on constate que le jet primaire après avoir subi le choc détaché redevient rapidement supersonique en contournant le jet secondaire.

Des lignes de courant ont été tracées dans le plan de symétrie $Z/D = 0$, figure 4.10. On distingue bien la poche subsonique en blanc. La vue globale (à gauche) met en évidence deux zones de recirculation en amont de l'injection, l'une de même sens de rotation (+) que la vorticité contenue dans la couche de mélange du jet primaire et l'autre de sens opposé (−) située au dessus. Le tourbillon (+) est formé par l'enroulement de la couche de mélange causé par le gradient de pression lors de l'impact avec le jet secondaire, on le note HV pour "horseshoe vortex". Sur la vue rapprochée (à droite), les lignes de courant présentent un point selle S qui sépare localement le plan de symétrie en 4 parties. A gauche de S, une petite partie du jet primaire est refoulée vers le haut dans la cavité formée par le bras de l'injecteur (ouverte sur les côtés) et génère le tourbillon HV. Au dessous de S, la majeure partie du jet primaire passe sous le jet secondaire. A droite de S, le jet secondaire pénètre dans l'écoulement primaire. Enfin, au dessus de S, on distingue une petite recirculation (SV) entraînée dans le sens horaire par le jet secondaire. Malgré la forte ressemblance avec l'image du jet pariétal de la figure 4.8, le fait que, d'une part,

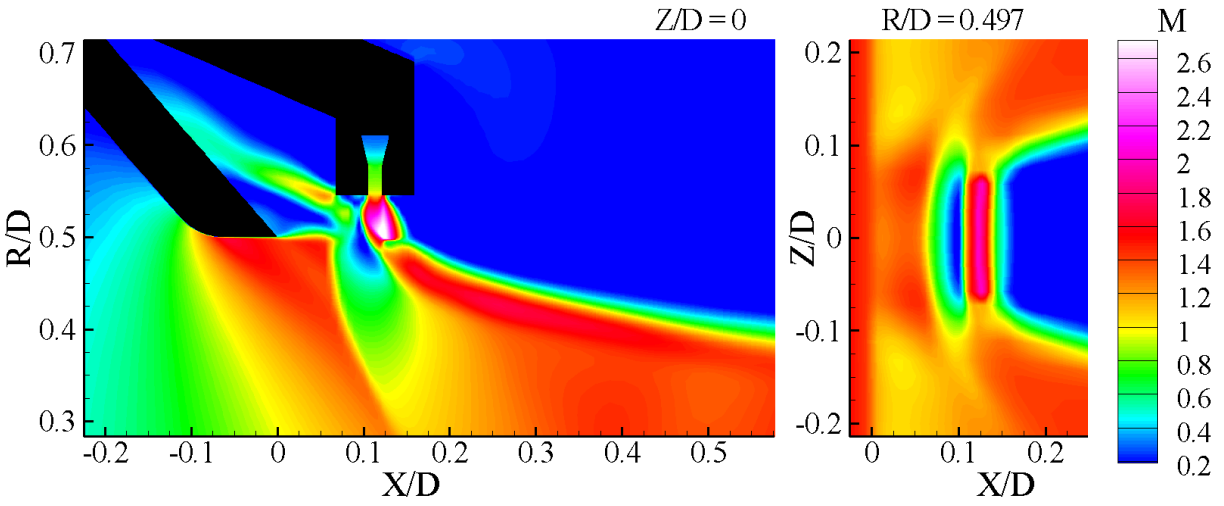


FIG. 4.9 – Interaction d'un jet radial avec le jet primaire : contours iso-Mach dans le plan longitudinal $Z/D = 0$ (à gauche) et sur la surface iso-$R/D = 0.497$ (à droite).

le jet radial soit décalé en retrait par rapport à l'écoulement transverse et que, d'autre part, l'écoulement transverse ne puisse pas s'appuyer sur une paroi rend les corrélations du tableau 4.4 complètement inapplicables dans le cas étudié ici. De plus, les orifices d'injection utilisés ici sont loin d'être circulaires et l'interaction n'est pas bidimensionnelle, même dans le plan de symétrie.

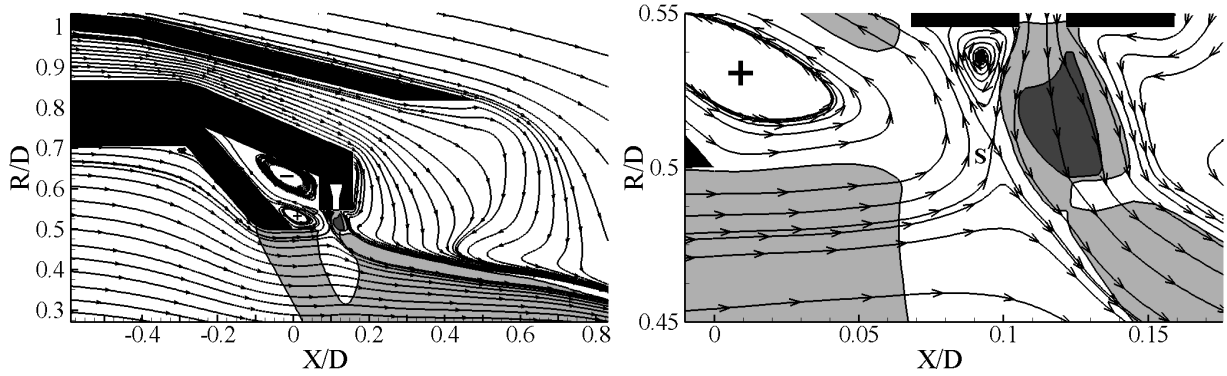


FIG. 4.10 – Interaction d'un jet radial avec le jet primaire : lignes de courant dans le plan $Z/D = 0$ en vue globale (à gauche) et en gros plan (à droite). Les zones en blanc, gris clair et gris foncé sont respectivement les régions $\{M < 1\}$, $\{1 < M < 2\}$ et $\{M > 2\}$.

Le refoulement d'une partie du jet primaire est entièrement dû au gradient de pression provoqué par l'impact contre le jet radial. En effet, au niveau phénoménologique tout est contenu dans le cas d'école du jet plan incompressible non-visqueux impactant une plaque infinie en incidence α (figure 4.11). La pression ambiante étant uniforme à p_0, la force résultante F sur la plaque ainsi que le débit de fluide dévié $\dot{m}_2$ et le débit de fluide refoulé $\dot{m}_3$ s'expriment par :

$$\dot{m}_2 = \dot{m}_1 \frac{1 + \cos\alpha}{2} \tag{4.9}$$

$$\dot{m}_3 = \dot{m}_1 \frac{1 - \cos\alpha}{2} \tag{4.10}$$

$$F = \dot{m}_1 V_1 \sin\alpha \tag{4.11}$$

Ces relations montrent explicitement que dès que l'on exerce une force de pression supérieure à la pression ambiante sur la surface du jet, $\alpha \neq 0$, il existe obligatoirement un point d'arrêt S et une partie du jet est refoulée vers l'amont, $\dot{m}_3 > 0$. Tant que les efforts visqueux sont négligés, le gradient de pression est maximal sur la ligne de courant aboutissant au point d'arrêt S où la pression statique atteint sa valeur maximale, i.e. la pression totale. Cependant cette analyse

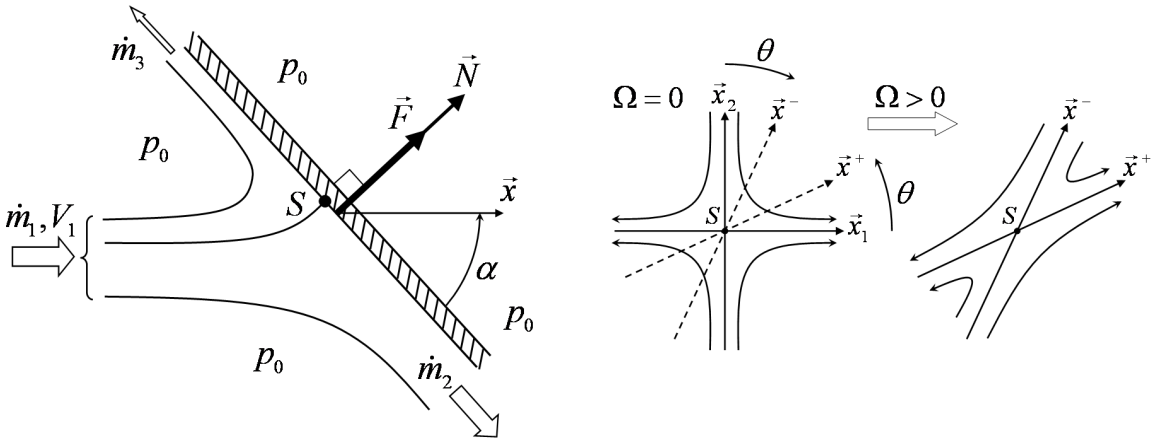


FIG. 4.11 – Schéma du jet non-visqueux incompressible plan impactant une plaque plane infinie à gauche et influence du rotationnel sur la topologie du point selle à droite.

ne tient pas compte des effets d'entraînement visqueux du jet secondaire qui sont à l'origine du tourbillon supérieur (SV). Il est possible de mettre en évidence leur influence en regardant les branches du point selle S. Si le fluide était initialement irrotationnel, l'hypothèse de fluide parfait le ferait rester irrotationnel lors de son évolution et le point d'arrêt serait du point de vue du jet impactant un demi-point selle S à branches orthogonales. Or, on constate, figure 4.10, que ces branches ne sont pas orthogonales, ce qui prouve l'action des effets visqueux. Plus précisément, il est facile de prouver que sur un point hyperbolique S[9] (voir schéma de droite figure 4.11) où on a nécessairement $\Omega < S$ (Ω taux de rotation, S taux de cisaillement), l'angle entre la direction d'étirement $\overrightarrow{x}^+$ et la direction de contraction $\overrightarrow{x}^-$ s'exprime par :

$$\left(\overrightarrow{x}^+, \overrightarrow{x}^-\right) = \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\left[\frac{\Omega/S}{\sqrt{1-(\Omega/S)^2}+1}\right] \tag{4.12}$$

Sur la figure 4.10, on mesure $(\overrightarrow{x}^+, \overrightarrow{x}^-) = 142\,\text{deg}$ ce qui correspond à $\Omega/S = -0.79$. La vorticité qui en fluide parfait est concentrée dans les lignes de glissement est donc fortement diffusée par les effets visqueux moléculaires et turbulents dans tout la région d'interaction et y joue un rôle non négligeable. Ici $\Omega < 0$, c'est la vorticité du jet secondaire qui s'impose au niveau du point selle. Ceci est aussi montré, figure 4.12, par les champs de pression statique (à gauche) et de pression totale (à droite). Sur le champ de pression statique, on distingue deux maxima locaux, le plus élevé situé dans le jet secondaire juste derrière le disque de Mach et le second dans la région d'impact. Toutefois, ce second maximum de pression ne coïncide pas avec le point selle S, comme ce serait le cas en fluide parfait irrotationnel. Le champ de pression totale montre en effet que suite à la diffusion et à la dissipation visqueuse, la ligne de courant aboutissant au point S perd plus de pression totale qu'elle ne gagne de pression statique par compression isentropique.

Par ailleurs, en aval du canal de ventilation (image de gauche, figure 4.10), on peut noter une très forte aspiration des lignes de courant extérieures vers l'axe du jet qui doit probablement provoquer une importante traînée de l'arrière-corps contrôlé. Toutefois, il est nécessaire

[9]On rappelle que l'on se place dans le plan de symétrie. De plus, ces résultats sont valables tant que la dilatation dans le plan n'excède pas $2\sqrt{|S^2-\Omega^2|}$ en valeur absolue pour que le point d'arrêt S reste un point selle.

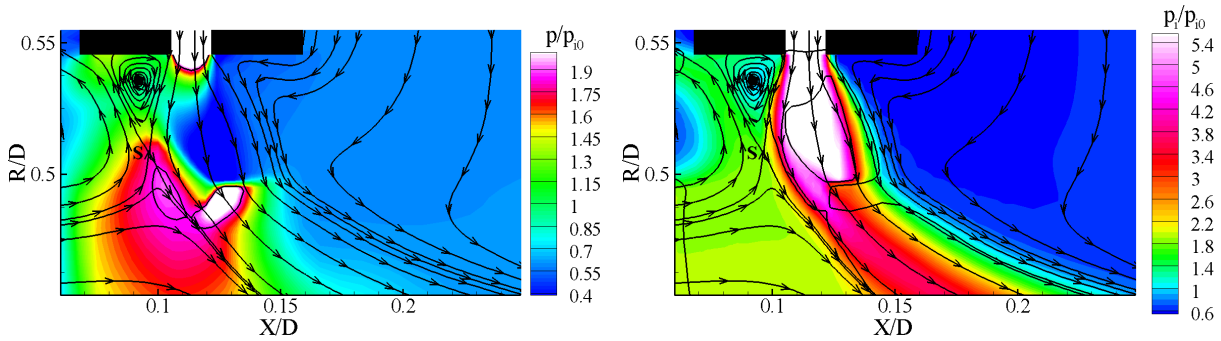


FIG. 4.12 – Contours iso-p et ligne $p/p_{i0} = 1.85$ (à gauche) et contours iso-p_i et ligne $M = 1$ (à droite) dans le plan longitudinal $Z/D = 0$ au voisinage du jet secondaire.

de préciser que l'augmentation de traînée provoquée par l'activation du contrôle sur l'ensemble de l'arrière-corps est modérée par une diminution de cette effet d'aspiration dans les sections d'évasement du jet, voir figure 4.3 ("culot équivalent" moins haut).

4.3.2.2 Formation des tourbillons proche des injections

Après avoir détaillé l'impact du jet primaire contre le jet secondaire (et pas le contraire), on s'intéresse désormais à la formation des tourbillons dans la région de l'injection. La figure 4.13 présente la vorticité longitudinale adimensionnée $\Omega_x = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}.\overrightarrow{X}/(2a^*/D)$ dans quelques coupes transverses depuis le voisinage amont de l'injection ($X/D = 0.05$) jusqu'à l'aval proche de la sortie de l'arrière-corps (située à $X/D = 0.5$). Sur les premières sections, les pseudo lignes de courant (tracées sur le champ 2D (V, W)) ont été ajoutées pour mieux décrire l'écoulement.

En $X/D = 0.05$, on remarque principalement deux paires d'amas de vorticité contra-rotatifs de sens opposés. La paire inférieure correspond au tourbillon HV, noté (+) sur la figure 4.10. Sur la figure 4.10, le tourbillon (+) est précisément un foyer dont le débit sort du plan de symétrie. On peut donc imaginer un tube de courant adjacent au plan de symétrie $Y/D = 0$[10] qui en impactant le jet secondaire le contourne dans le plan (X, Y). Par le mécanisme décrit par l'équation 4.1, la vorticité $\omega_n = \omega_Y$ contenue dans la couche de mélange du jet primaire génère de la vorticité longitudinale $d\omega_s = d\omega_Y$ lors de la déviation initiale du tube[11]. Lorsque le tube de courant ayant contourné le jet secondaire se réoriente dans la direction du jet primaire $\overrightarrow{X}$, cette vorticité longitudinale ω_s (ou plus rigoureusement la circulation Γ_s) est conservée et réorientée dans le sens longitudinal du jet primaire $\omega_s = \omega_X$. Le tourbillon HV est donc semblable au tourbillon de couche-limite ("horseshoe vortex") rencontré dans les injections pariétales. La paire d'amas de vorticité opposée, notée RV (pour "recirculation vorticity") située au dessus du HV, provient du même mécanisme appliqué au tube de courant passant par la zone de recirculation (−) de la figure 4.10. Si l'on suit les pseudo lignes de courant, on constate que seules les lignes passant dans la zone du HV s'enroulent. Ceci signifie uniquement que le cisaillement S_{YZ} dans le plan (Y, Z) est inférieur au taux de rotation Ω_X dans la zone du HV alors qu'il est supérieur dans la zone du RV.

En $X/D = 0.1$ (ce plan est en fait au milieu de l'injection à $X/D = 0.114$), on retrouve les paires d'amas de vorticité HV et RV, mais il vient s'ajouter la vorticité longitudinale ω_X créée sur les parois latérales du jet secondaire et que l'on note LV pour "lateral vorticity". Ensuite,

[10] Alors que jusqu'à présent, le plan de symétrie du jet transverse était $Z = 0$, on considère à présent l'injecteur du haut sur la figure 4.13 dont le plan de symétrie est $Y = 0$.

[11] Rigoureusement, il faudrait aussi évaluer la part des effets visqueux dans la génération de vorticité ω_X.

lorsque s'achève la phase d'injection, les vorticités co-rotatives LV et RV fusionnent pour former la paire de tourbillons contra-rotatifs (CVP) à $X/D = 0.2$. En progressant vers l'aval (voir la section $X/D = 0.4$), la portion supérieure de chaque tourbillon de la CVP (correspondant aux anciens RV) s'accouple avec le tourbillon le plus proche, un HV de sens de rotation opposé[12]. Chaque couple se déplace alors vers la paroi de la tuyère de ventilation. Lorsque ceux-ci sont suffisamment proches de la paroi, l'effet bloquant de la paroi (au sens de la condition de non-pénétration) que l'on peut mieux se représenter à l'aide des distributions images (voir méthode des images hydrodynamiques par ex. dans [142, 10]) induit leur séparation. Du point de vue global, les HV se rapprochent et les tourbillons de chaque CVP aussi. Cependant, ce processus est interrompu par la fin de la paroi en $X/D = 0.5$. Dans cette section, on peut noter que les tourbillons libres ont généré de la vorticité longitudinale dans la couche-limite pariétale. Une partie de cette vorticité est libérée dans l'écoulement, mais elle est très vite diffusée par la viscosité (entre $X/D = 0.6$ et 0.7). Finalement, à $X/D = 1.0$, ne subsistent que la CVP et les HV.

Enfin, il est très intéressant de noter qu'à l'abscisse $X/D = 1.0$, les tourbillons longitudinaux sont entièrement en dehors du jet supersonique. Par conséquent, il n'existe pas d'interaction entre les tourbillons longitudinaux et les chocs internes au jet primaire dans le champ moyen.

4.3.2.3 Caractérisation des tourbillons longitudinaux loin des injections

Approximation de l'écoulement transverse 2D incompressible. Loin des injecteurs, c'est-à-dire à partir de $X/D = 1.0$, on considère que l'écoulement moyen subsonique à l'extérieur du jet supersonique suit une dynamique essentiellement bidimensionnelle dans le plan transverse (Y, Z). Une justification de cette approximation est proposée ici en appliquant les hypothèses de la théorie des corps élancées (énoncée pour un fluide parfait) aux équations de Navier-Stokes 3D. Pour commencer, on définit un petit paramètre $\epsilon \ll 1$. Ensuite, on suppose que l'écoulement extérieur uniforme ayant les conditions de l'infini amont $\left(\rho_0, U_0\overrightarrow{X}, p_0\right)$ subit une perturbation infinitésimale $(\rho, \overrightarrow{v}(u\ v\ w), p)$ vérifiant les ordres de grandeur :

$$\begin{aligned} [\rho] &= \mathcal{O}(\epsilon^2\rho_0) \\ [u] = \mathcal{O}(\epsilon^2 U_0) \quad &\text{et} \quad [v, w] = \mathcal{O}(\epsilon U_0) \\ [p] &= \mathcal{O}(\epsilon^2\rho_0 U_0^2) \\ \left[\frac{\partial .}{\partial x}\right] = \mathcal{O}\left(\frac{[.]}{L}\right) \quad &\text{et} \quad \left[\frac{\partial .}{\partial y}, \frac{\partial .}{\partial z}\right] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\epsilon}\frac{[.]}{L}\right) \end{aligned} \tag{4.13}$$

où L est une dimension caractéristique de l'évolution longitudinale, i.e. de l'ordre du diamètre du col $[L] = \mathcal{O}(D)$. La conservation de la masse se réduit alors à l'ordre dominant $\mathcal{O}\left(\frac{\rho_0 U_0}{L}\right)$ à :

$$\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{4.14}$$

Le bilan de quantité de mouvement fait intervenir les viscosités μ et η dont les valeurs à l'infini amont sont μ_0 et $\eta_0 = -\frac{2}{3}\mu_0$ (hypothèse de Stokes). En faisant le changement de repère galiléen $(X, Y, Z) \to (\tau = X/U_0, Y, Z)$ et avec l'aide de (4.14), les équations de quantité de mouvement

[12] Quand on dit ici que deux tourbillons s'accouplent, on veut rigoureusement dire que la vitesse qu'ils induisent mutuellement l'un sur l'autre est prépondérante par rapport aux vitesses induites par les autres tourbillons, si bien qu'ils semblent se mouvoir ensemble comme un couple de tourbillons isolé.

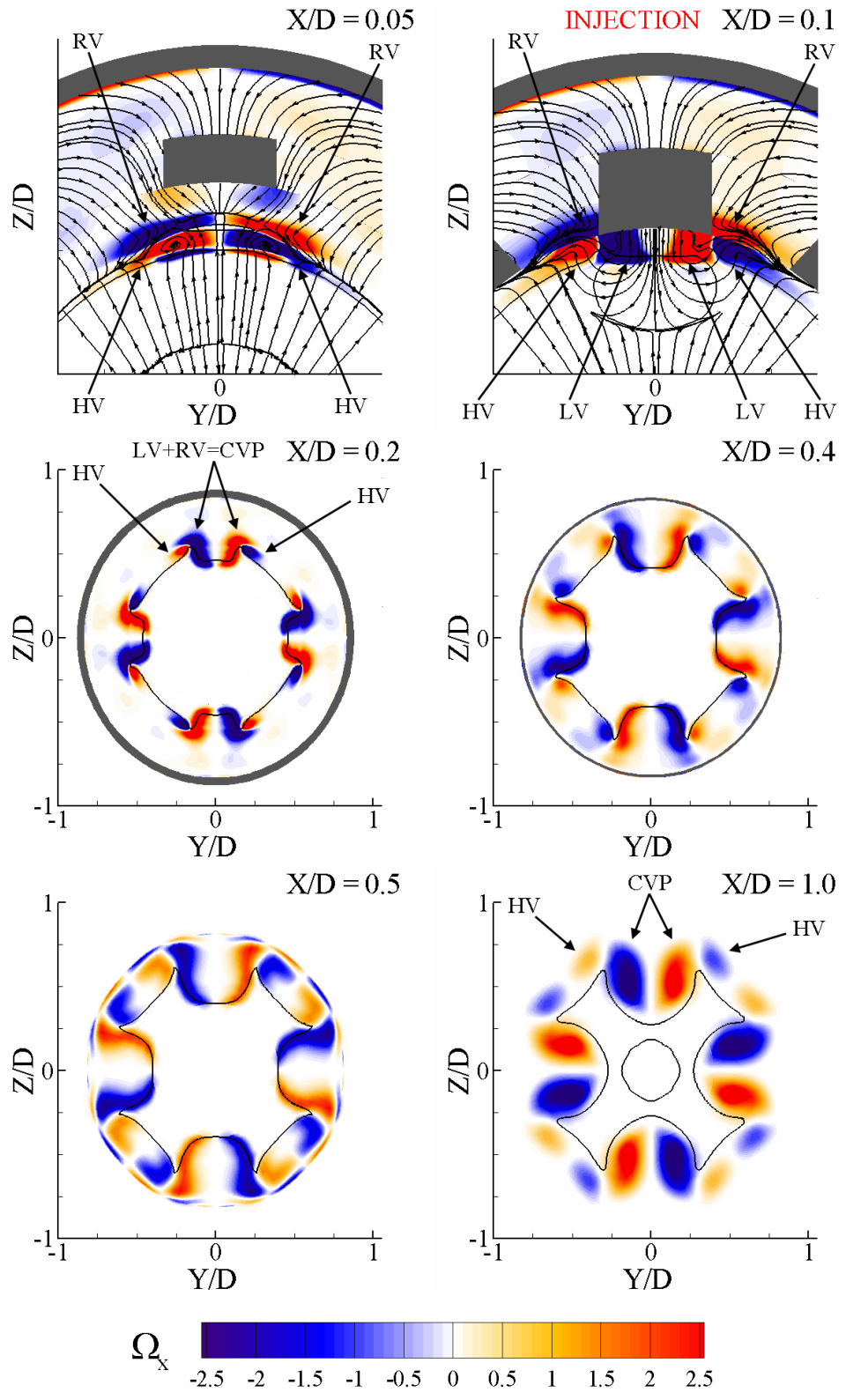


FIG. 4.13 – Contours de vorticité longitudinale adimensionnée Ω_X et ligne sonique et ligne sonique (HV=horseshoe vortex, RV=recirculation vorticity, LV=longitudinal vorticity, CVP=counter-rotating vortex pair).

dans le plan transverse (Y, Z) s'écrivent à l'ordre dominant $\mathcal{O}\left(\epsilon\frac{\rho_0 U_0^2}{L}\right)$:

$$\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial \tau}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \tag{4.15}$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial \tau}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\underbrace{\mu_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}_{T.V.} \tag{4.16}$$

L'équation de quantité de mouvement longitudinale s'écrit à l'ordre dominant $\mathcal{O}\left(\epsilon^2\frac{\rho_0 U_0^2}{L}\right)$:

$$\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{1}{U_0}\frac{\partial p}{\partial t}+\mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{4.17}$$

Comme dans la théorie des corps élancés, on s'aperçoit que les équations de Navier-Stokes compressibles 3D se réduisent dans le plan transverse (Y, Z) aux équations du mouvement bidimensionnel incompressible. L'écoulement extérieur dans le plan transverse évolue donc le long du jet indépendamment de la vitesse axiale $U_0 + u$. Dans (4.15,4.16), l'ordre de grandeur du terme visqueux s'exprime en fonction du nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = \frac{\rho_0 U_0 L}{\mu_0}$: $[T.V.] = \mathcal{O}(\epsilon\mathrm{Re})^{-1}\,\frac{\rho_0 U_0^2}{L}$. En notant $\mathrm{Re} = \mathcal{O}(\epsilon^{\alpha})$, les équations du mouvement transverse tendent asymptotiquement vers les équations d'Euler 2D, si $\alpha > 2$. Au contraire, si $\alpha < 2$, elles dégénèrent en l'équation de Laplace qui est indépendante du temps de convection t (i.e. l'écoulement transverse est figé) ce qui n'est pas envisageable. Dans l'écoulement étudié ici, on a bien $\alpha > 2$.

En toute rigueur, les hypothèses (4.13) ne sont pas satisfaites, d'autant plus que la vitesse longitudinale s'inverse dans l'écoulement de retour situé juste en aval de l'arrière-corps (voir figure 4.10), mais on vérifie dans la suite qu'elles permettent tout de même d'expliquer qualitativement l'évolution des tourbillons longitudinaux et de prévoir les tendances provoquées par une modification des conditions initiales dans le plan (Y, Z) de l'injection. Sous cette hypothèse d'écoulement transverse bidimensionnel et incompressible, on s'appuie dans la suite de l'analyse sur l'équation de transport du rotationnel longitudinal $\omega_x = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}.\overrightarrow{X}$ (avec $\nu_0 = \mu_0/\rho_0$) :

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \tau}+v\frac{\partial \omega_x}{\partial y}+w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}=\nu_0\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2}\right) \tag{4.18}$$

On rappelle que l'équation (4.18) a été établie pour un écoulement laminaire. Tant que l'on adopte l'hypothèse de Boussinesq consistant à assimiler l'action de la turbulence sur le champ moyen à une viscosité turbulente ν_t venant s'ajouter à la viscosité moléculaire ν, l'approximation 2D incompressible s'applique encore et l'équation (4.18) reste valable à condition d'ajouter ν_t à ν. Ce niveau d'approximation est suffisant pour le moment, nous y reviendrons plus tard.

Enfin, les hypothèses (4.13) ne sont pas raisonnablement applicables à l'ensemble du domaine intérieur au jet primaire. Toutefois, ce n'est pas le caractère supersonique qui remet en cause l'approximation des corps élancés adoptée pour l'écoulement extérieur, mais c'est le fait que l'écoulement interne comporte des chocs faisant varier ses propriétés sur de courtes distances longitudinales. Aussi, en acceptant de ne pas décrire la déformation du jet provoquée par les compressions et détentes se propageant à l'intérieur du jet, on se propose de décrire la déformation causée uniquement par les tourbillons longitudinaux, en supposant qu'elle puisse être découplée de celle due aux ondes internes.

Définition des moments de vorticité complexes. Afin de caractériser les distributions de vorticité longitudinale $\omega_x = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}.\overrightarrow{X}$ dans une région $\mathcal{D}$ du plan (Y,Z) situé à l'abscisse X[13], nous allons utiliser les moments de vorticité complexes [128] exprimés au point η_0 définis par :

$$I_m^{\eta_0} = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y,z)(\eta-\eta_0)^m dydz \tag{4.19}$$

avec $I_m^{\eta_0}$ et $\eta = y+iz$ à valeurs complexes ($i^2=-1$).
En particulier, on a :

- le moment de vorticité d'ordre 0 : $I_0 = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y,z)dydz$ (4.20)
- le moment de vorticité d'ordre 1 exprimé au point O : $I_1^O = I_{1y}^O + iI_{1z}^O$ (4.21)

  avec $I_{1y}^O = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y,z)ydydz$ et $I_{1z}^O = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y,z)zdydz$ (4.22)
- le moment de vorticité d'ordre 2 exprimé au point O : $I_2^O = I_{2y}^O + iI_{2z}^O$ (4.23)

  avec $I_{2y}^O = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y,z)(y^2-z^2)dydz$ et $I_{2z}^O = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y,z)2yzdydz$ (4.24)

On définit aussi un moment de vorticité polaire d'ordre 2 exprimé au point O :

$$I_{2r}^{\eta_0} = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y,z)|\eta-\eta_0|^2 dydz \tag{4.25}$$

Variables caractéristiques d'une distribution de vorticité. Le moment d'ordre 0 s'identifie à la circulation de la distribution de vorticité $\Gamma = I_0$. Si celle-ci n'est pas nulle, les moments d'ordres supérieurs permettent de caractériser plus précisément la distribution de vorticité :

- la position du barycentre de vorticité G : $y_G = I_{1y}^O/I_0$ et $z_G = I_{1z}^O/I_0$ (4.26)
- le rayon de dispersion : $a = \sqrt{I_{2r}^G/I_0}$ (4.27)
- l'excentrement : $c = 2\sqrt{\sqrt{(I_{2y}^G)^2+(I_{2z}^G)^2}/I_0}$ (4.28)
- l'orientation : $\theta_E = \frac{1}{2}\arctan\left(I_{2z}^G/I_{2y}^G\right)$ (4.29)

où O est l'origine du système de coordonnées[14]. Ces notions sont représentées figure 4.14 pour des cas simples : un disque de vorticité, une ellipse, et une paire de tourbillons concentrés co-rotatifs. Pour une distribution de vorticité uniforme à l'intérieur d'un cercle de rayon R (i.e. un tourbillon de Rankine), le rayon de dispersion est égal à $a = R/\sqrt{2}$. L'excentrement c et l'orientation θ_E, proviennent de la relation $I_2^G = \frac{I_0 c^2}{4} e^{2i\theta_E}$ démontrée en annexe D. L'excentrement est nul pour une distribution axisymétrique. Pour une distribution de vorticité elliptique uniforme, c est la distance de séparation d'un foyer au centre, $c = F_1F_2/2$, et θ_E est l'orientation du grand axe par rapport à la direction $\overrightarrow{y}$. Il est utile de remarquer que le rayon de dispersion a est une grandeur à considérer avec précaution. En effet, le rapport des rayons de dispersion d'une distribution elliptique uniforme et d'une distribution axisymétrique d'aires et de vorticités égales est une fonction croissante de l'ellipticité $e = c/a_E \in [0,1]$:

$$\frac{a^2(ellipse)}{a^2(disque)} = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{2-e^2}{1-e^2}\right)+1\right] \tag{4.30}$$

[13] Dans ce paragraphe, on se fixe une abscisse X quelconque que nous ne mentionnons plus dans les notations pour plus de lisibilité.
[14] Par définition $I_1^G = 0$.

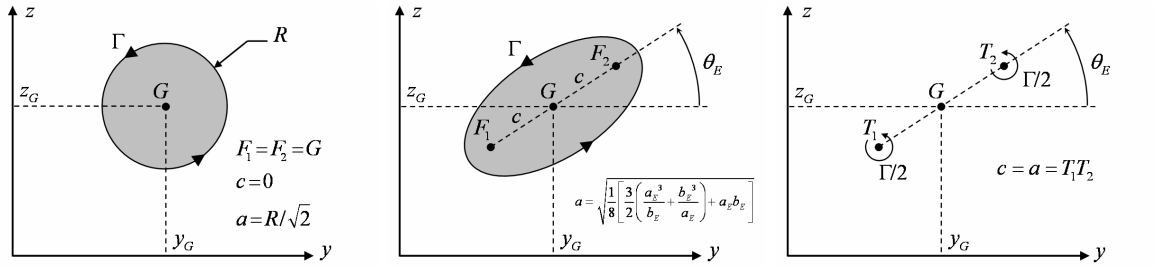


FIG. 4.14 – Exemple de distributions de vorticité et leurs caractéristiques associées (pour l'ellipse, a_E et b_E sont respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe).

En pratique, tous les moments sont calculés en O et on utilise les relations[15] :

$$I_{2y}^G = I_{2y}^O - (y_G^2 - z_G^2)I_0 \tag{4.31}$$

$$I_{2z}^G = I_{2z}^O - 2y_G z_G I_0 \tag{4.32}$$

$$I_{2r}^G = I_{2r}^0 - (y_G^2 + z_G^2)I_0 \tag{4.33}$$

En notant $\mathcal{C}$ le contour fermé entourant le domaine $\mathcal{D}$, on peut montrer (voir annexe D) que les évolutions de la circulation et du moment d'ordre 1 (représenté ici sous forme d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$) sont gouvernés par [16] :

$$\frac{D\Gamma}{D\tau} = \nu \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \omega_x}{\partial n} dl \tag{4.34}$$

$$\frac{D\overrightarrow{I_1^O}}{D\tau} = \underbrace{\nu \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{OM} \frac{\partial \omega_x}{\partial n} dl - \nu \int_{\mathcal{C}} \omega_x \overrightarrow{n} dl}_{termes\ visqueux} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_C \overrightarrow{V} \left(\overrightarrow{V} . \overrightarrow{t} \right) dl}_{non-visqueux} \tag{4.35}$$

où $\overrightarrow{t}$ et $\overrightarrow{n}$ sont respectivement la tangente et la normale sortante du contour fermé $\mathcal{C}$ orienté dans le sens trigonométrique et dl est un élément de longueur curviligne. La relation (4.34) montre que la circulation Γ varie sous l'effet de la diffusion visqueuse de vorticité à travers la frontière $\mathcal{C}$ du domaine $\mathcal{D}$ uniquement. On retrouve le théorème de Kelvin : en l'absence d'effet visqueux, la circulation sur un contour matériel se conserve dans le mouvement. La relation (4.35) montre que l'évolution du moment d'ordre 1 est gouvernée à la fois par des termes visqueux et un terme non-visqueux.

Afin d'illustrer ces notions, considérons un doublet de tourbillons contra-rotatifs formé par le sillage d'une aile en incidence (cf. Saffman [216]). Dans ce cas, le rayon de dispersion a est en général beaucoup plus petit que l'écartement $b = 2y_G$ des tourbillons dans la région lointaine en aval. Le doublet est donc habituellement assimilé à une paire de tourbillons concentrés, comme cela est représenté figure 4.15 (gauche). On isole maintenant le tourbillon droit en prenant pour $\mathcal{D}$ la région grisée $y \geq 0$ du plan. L'hypothèse $a \ll b$ conduit à un flux de vorticité nul (ou négligé) sur l'interface $y = 0$ si bien que la circulation Γ du tourbillon droit se conserve (idem pour le tourbillon gauche). De plus, en plaçant l'origine O sur l'axe de symétrie, la composante transverse du moment d'ordre 1 du tourbillon droit, $I_{1y}^O(y \geq 0)$, se conserve aussi car d'une part pour le terme visqueux $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{y} = 0, \forall M \in \{y = 0\}$ et d'autre part $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{y} = 0$ sur l'axe $y = 0$. Par symétrie, la composante transverse du moment d'ordre 1 de l'ensemble de la distribution

[15] Ces relations sont semblables aux relations d'Huygens pour les moments d'inertie des solides rigides.

[16] Pour (4.35), le débit de fluide à travers $\mathcal{C}$ doit être nul. L'évolution des moments d'ordres supérieurs peut s'obtenir de la même manière, le lecteur pourra par exemple se référer à Saffman [216].

$\{y \leq 0\} \cup \{y \geq 0\}$ est égale au double de celui d'un tourbillon $I_{1y}^O(\mathbb{R}^2) = 2I_{1y}^O(y \geq 0) = \Gamma b$, donc se conserve aussi. En champ lointain, l'écartement b des tourbillons est donc constant. Dans l'approximation de la théorie de la ligne portante de Prandtl (incompressible), si l'on intègre le moment d'ordre 1 transverse I_{1y}^O de la distribution de vorticité correspondante aux lanières tourbillonnaires lachées au niveau de l'aile, on obtient :

$$I_{1y}^O(\mathbb{R}^2) = \Gamma_0 b_0 \int_{-1/2}^{+1/2} f(\xi) d\xi \tag{4.36}$$

où $\xi = y/b_0$ et $\Gamma(y) = \Gamma_0 f(\xi)$ caractérise la répartition de circulation sur l'aile d'envergure b_0 donnée par la théorie de Prandtl. On en déduit d'une part, avec $I_{1y}^O(\mathbb{R}^2) = \Gamma b$, l'expression de l'écartement du doublet b en champ lointain en fonction de l'envergure b_0 et de la loi de charge de l'aile f :

$$b = b_0 \int_{-1/2}^{+1/2} f(\xi) d\xi \tag{4.37}$$

et d'autre part, que le moment d'ordre 1 transverse de l'écoulement dans tout l'aval de l'aile est égal à l'impulsion qu'elle fournit initialement :

$$I_{1y}^O(\mathbb{R}^2) = \frac{\rho_0 V_0 \Gamma_0 b_0 \int_{-1/2}^{+1/2} f(\xi) d\xi}{\rho_0 V_0} = \frac{F_L}{\rho_0 V_0} \tag{4.38}$$

où F_L est la portance de l'aile et ρ_0 et V_0 respectivement la masse volumique et la vitesse de l'écoulement incident.

Lorsque l'écartement b entre les deux tourbillons d'un doublet devient comparable au rayon de dispersion a, comme c'est le cas pour les CVP se trouvant dans le sillage d'un jet en écoulement transverse, le flux de diffusion à travers l'interface $y = 0$ n'est plus nul et fait donc chuter la circulation Γ. Par contre, le moment d'ordre 1 transverse $I_{1y}^O(\mathbb{R}^2) = \Gamma b$ se conserve malgré la viscosité non nulle car $\omega_x = 0$ sur l'axe de symétrie $y = 0$. Par conséquent, la diffusion visqueuse de vorticité augmente l'écartement b de la CVP ; c'est sur ce mécanisme que Karagozian [131] base une bonne partie de son modèle. Dans le cas du sillage d'une aile, pendant la phase initiale d'établissement des deux tourbillons concentrés le flux de diffusion n'est pas nul, c'est pourquoi on n'a pas strictement $\Gamma = \Gamma_0$ en aval.

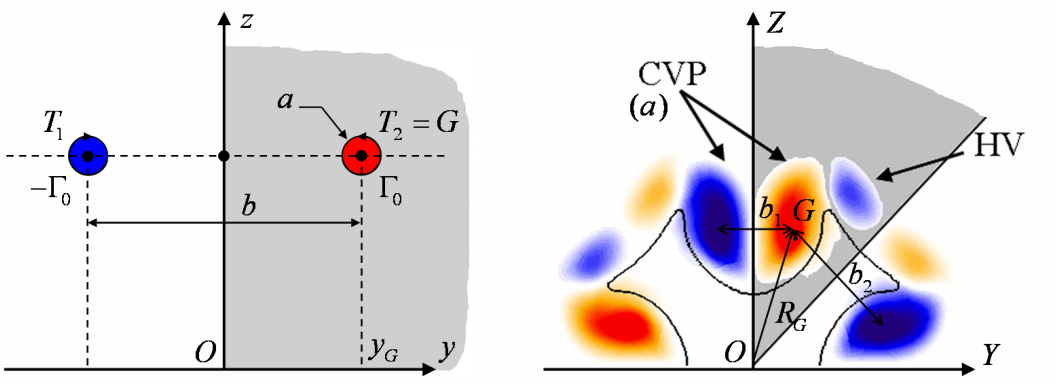


FIG. 4.15 – Domaine d'intégration des moments de vorticité (zone grise) : dans le cas d'un doublet de tourbillons concentrés (à gauche) et dans une coupe du jet contrôlé par 4 injections radiales (à droite).

La composante verticale du moment d'ordre 1 varie, elle, sous l'effet de la diffusion visqueuse et de l'induction non-visqueuse provoquée par le plan de symétrie[17] :

$$\frac{D\overrightarrow{I_1^O}}{D\tau} = \left[\nu\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial\omega_x}{\partial y}zdz - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}w^2dz\right]\overrightarrow{z} \tag{4.39}$$

Dans le cas d'un doublet de tourbillons singuliers, seul subsiste le terme non-visqueux qui est de plus invariant. La vitesse de translation du doublet est donc constante dans le temps.

Application aux distributions de vorticité longitudinale du jet contrôlé par 4 injecteurs. Les relations (4.26) à (4.29) vont maintenant permettre de caractériser plus précisément la distribution du système tourbillonnaire décrit précédemment, figure 4.2. Pour cela, on définit le domaine d'intégration $\mathcal{D}$ comme étant la surface couverte par l'angle $2\pi/(2N)$, où $N = 4$ injecteurs, à partir du plan de symétrie d'un injecteur. $\mathcal{D}$ est représenté par la zone grisée, figure 4.15. Afin de ne capter que le tourbillon de la CVP ($\omega_x > 0$ dans la région grisée), on remplace la vorticité ω_x par sa partie positive $\omega_x^+ = (\omega_x + |\omega_x|)/2$ dans toutes les définitions du paragraphe précédent. Ceci revient à restreindre $\mathcal{D}$ au tourbillon isolé de la CVP. Pour le tourbillon HV, on fait de même avec la partie négative $\omega_x^- = (\omega_x - |\omega_x|)/2$.

Les caractéristiques du tourbillon de la CVP sont tracées sur la figure 4.16. Le mouvement de pénétration-divergence du système tourbillonnaire est clairement mis en évidence par l'évolution de la position radiale $R_G = \sqrt{y_G^2 + z_G^2}$, figure 4.16(a). La comparaison des circulations du tourbillon de la CVP et du HV, figure 4.16(e), permet de négliger raisonnablement l'action du HV par rapport à celle du tourbillon de la CVP. Le seul effet notoire du HV dans la phase initiale est de creuser la tête du lobe induit par les CVP.

La relation (4.39) permet de décrire formellement la trajectoire de chaque tourbillon des CVP dans la zone de mouvement limitée par les plans de symétrie (zone grise, figure 4.15). Dans le cas du doublet isolé présenté ci-dessus, nous avons vu que du point de vue du tourbillon droit, c'était le plan de symétrie $\{y = 0\}$ qui provoquait sa translation dans la direction $\overrightarrow{z}$ uniquement alors que sa position transverse $y_G = b/2$ restait constante. Dans le cas du jet soumis à 4 injecteurs, le problème est réductible à $1/8^{\text{ème}}$ du plan limité par 2 axes de symétrie $(O, \overrightarrow{z})$ (plan des injecteurs actifs) et $(O, \overrightarrow{y} + \overrightarrow{z})$ (plans des injecteurs inactifs). On repère désormais ces deux axes à l'aide de l'angle polaire $\theta = (\overrightarrow{y}, \overrightarrow{e_r})$, respectivement $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/4$. Le tourbillon évolue donc sous les influences opposées des vitesses induites le long des deux axes :

$$\frac{D\overrightarrow{I_1^O}}{D\tau} = \left[\left(\nu\int_0^{+\infty}\frac{\partial\omega_x}{r\partial\theta}rdr - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}u_r^2dr\right)\overrightarrow{e_r}\right]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \tag{4.40}$$

où $[f(\theta)]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} = f(\theta = \pi/2) - f(\theta = \pi/4)$. La formation du doublet étant achevée au niveau de l'injection, la distance b_1 du tourbillon droit au tourbillon gauche du même doublet est plus petite que celle b_2 du tourbillon droit au tourbillon gauche du doublet voisin situé à sa droite (voir figure 4.15 pour la topologie et la figure 4.16(b) pour les valeurs de b_1 et b_2). La vitesse induite est donc initialement dirigée de manière prépondérante suivant la direction $(O, -\overrightarrow{e_r})_{\theta=\pi/2} = (O, -\overrightarrow{z})$ et fait pénétrer la CVP. Au fur et à mesure de la translation des CVP le long de l'axe $(O, -\overrightarrow{z})$, l'écartement b_2 diminue et dans le même temps, b_1 augmente sous l'action de la vitesse induite par l'axe $(O, +\overrightarrow{e_r})_{\theta=\pi/4}$ (voir l'évolution de la position azimutale θ_G et corrélativement celles de b_1 et b_2, figures 4.16(d) et (b)). Si les tourbillons étaient ponctuels, la position telle que

[17] En écoulement non-visqueux, c'est une vision équivalente à la celle des images hydrodynamiques [142, 10].

$b_1 = b_2$ correspondrait à la position radiale minimum $R_{G\,\min}$ des tourbillons où la vitesse est purement orthoradiale (négative si l'on considère le tourbillon isolé, figure 4.15) et à partir de laquelle les nouveaux CVP se forment pour diverger vers l'extérieur. On constate toutefois que les CVP commencent à diverger à partir de $X/D = 3$ alors que la transition $b_1 = b_2$ n'arrive qu'à $X/D = 3.5$. Ceci est probablement dû à la dispersion non-axisymétrique de la vorticité. On observe en effet figures 4.16(c) et (d) que l'excentrement est de l'ordre de $c/D \approx 0.15$ et que la distribution est principalement orientée suivant la direction $\overrightarrow{z}$ ($\theta_E \geq 75\,\text{deg}$). La portion basse de la distribution de vorticité approche donc l'axe $(O, +\overrightarrow{e_r})_{\theta=\pi/4}$ plus tôt que le centre de vorticité et avance la phase de divergence à $X/D = 3$. L'excentrement a aussi probablement un effet sur l'évolution de l'écartement du doublet initial. En effet, si l'on suit l'explication donnée pour décrire la courbe de b_1, figure 4.16(b), on ne retrouve pas la décroissance initiale. La comparaison entre $X/D = 0.$ et 1.5 de toutes les caractéristiques calculées et tracées figure 4.16, semble indiquer que le rapprochement initial des centres de vorticité G vers l'axe $(0, \overrightarrow{z})$ est lié à la rotation de la distribution dans la direction $\sim \overrightarrow{z}$ ($\theta_E \approx 80\,\text{deg}$ figure 4.16(d)) ainsi qu'à la diminution initiale de l'excentrement c (qui passe de $c/D = 0.2$ à 0.15, figure 4.16(c)).

Enfin, la croissance du rayon de dispersion a d'un tourbillon rectiligne infini et isolé est gouvernée par [216] :

$$\frac{Da^2}{D\tau} = 4\nu \tag{4.41}$$

soit

$$a(\tau) = \sqrt{4\nu(\tau - \tau_0) + a_0^2} \tag{4.42}$$

En posant $\tau = X/D \times D/U_0$, on peut faire l'analogie entre l'évolution longitudinale du rayon de dispersion d'un des CVP disposés autour du jet et la croissance du rayon de dispersion d'un tourbillon isolé de viscosité apparente ν_a :

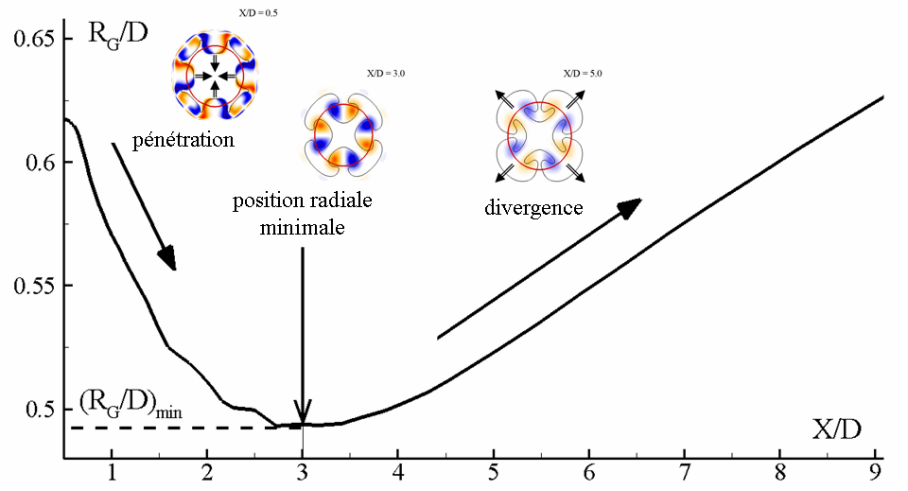
$$a(X/D) = \sqrt{4\nu_a D/U_0(X/D - (X/D)_0) + a_0^2} \tag{4.43}$$

Une courbe d'équation $a(X/D) = \sqrt{4 \times 0.0007 \max(X/D - 0.3, 0) + 0.1^2}$ (non tracée ici) a été superposée à la courbe $a(X/D)$ tracée figure 4.16(c). En prenant pour vitesse de référence $U_0 \approx 270m/s$, cette corrélation correspond approximativement à une viscosité apparente $\nu_a = 10^5\nu$ qui dépasse largement la viscosité turbulente (de l'ordre de 5000ν maximum). La croissance du rayon de dispersion tracé figure 4.14 reflète donc plutôt l'effet de l'étirement de la distribution de vorticité sous l'action du cisaillement (cf. c/D figure 4.14) qui a été signalé précédemment lors de sa définition.

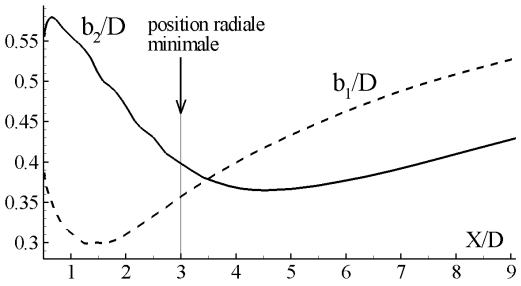
D'autre part, le rapport $a/b = \max(a/b_1, a/b_2)$ varie entre 0.35 et 0.45. D'après la littérature sur les tourbillons [82], les tourbillons des CVP ne sont donc pas assimilables à des tourbillons concentrés et les effets visqueux sont à prendre en compte.

En regardant les courbes de circulation Γ_{CVP} et Γ_{HV}, figure 4.16(e), on observe que les tourbillons HV finissent leur croissance assez tôt, vers $X/D = 0.5$ alors que les CVP atteignent leur circulation maximale plus tard, à environ $X/D = 1$. Une corrélation de la circulation du même type que celles du tableau 4.2 pour les CVP isolées, $\Gamma_{\text{CVP isole}} = 0.3(\max(X/D, 1))^{-1/3}$, a été superposée à la circulation du tourbillon de la CVP, Γ_{CVP}. On constate que la décroissance de la circulation ainsi modélisée, bien qu'en bon accord dans la zone proche, s'amenuise moins rapidement dans le champ lointain. Cette observation soulève trois questions : Est-ce que le

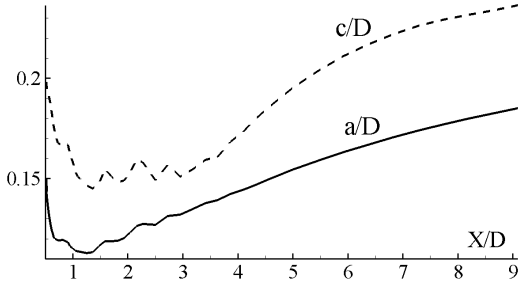
modèle RANS utilisé est capable de reproduire la décroissance de la circulation en $x^{-1/3}$ sur une CVP isolée ? Est-que l'interaction de plusieurs CVP peut expliquer cette décroissance plus forte ? Quelle est l'influence du cisaillement moyen de la couche de mélange sur les tourbillons longitudinaux ? Des éléments de réponse seront apportés au chapitre 5.



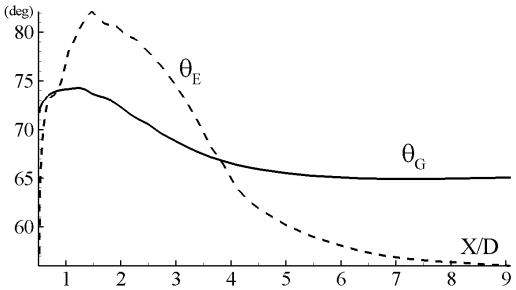
(a) Position radiale des centres de vorticité G des CVP



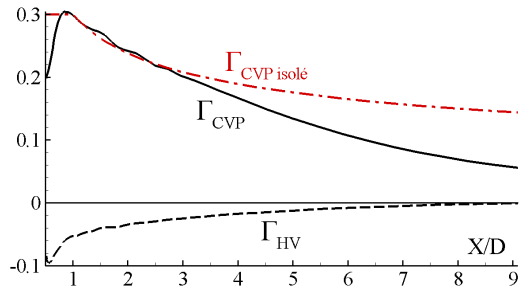
(b) Ecartements des CVP b_1 et b_2



(c) Rayon de dispersion a et excentrement c



(d) Position azimuthale θ_G et orientation θ_E



(e) Circulations des CVP et des HV

FIG. 4.16 – Evolution des caractéristiques des tourbillons CVP (les circulations sont adimensionnées par a^*D).

4.4 Caractérisation du mélange

En vue d'élaborer des critères d'estimation du mélange nécessaires à la réalisation d'une étude paramétrique dans la section suivante, il apparaît indispensable de s'arrêter momentanément pour définir précisément ce que l'on entend par le terme "mélange", du moins dans le cadre du problème étudié ici.

4.4.1 Discussion phénoménologique sur le mélange

Dans le langage courant, le mot "mélange" représente tant l'action de mélanger que le résultat de cette action. Cependant, lorsqu'on parle d'"augmenter le mélange", il s'agit clairement d'accroître l'action de mélanger, et le terme "mélange" désigne alors un processus. Suivant la définition du petit Larousse illustré, "mélanger" signifie associer plusieurs corps, substances diverses ou choses de natures différentes, pour former un tout dans lequel les corps mis ensemble deviennent indistincts, sans toutefois former une combinaison (i.e. toute réaction chimique étant exclue). Les mot-clés de cette définition sont les adjectifs "différents" puis "indistincts" car ils contiennent toutes les notions nécessaires à la définition mathématique du mélange : la différenciation, l'hétérogénéité puis l'homogénéité et, dans le même temps, la perception de l'hétérogénéité. Donner une définition mathématique du mélange revient à préciser chacune de ces notions en termes de mesures ou grandeurs quantifiables.

Avant tout, pour différencier deux corps A et B, il faut nécessairement que l'on ait au préalable choisi une caractéristique ou propriété particulière, défini un ensemble $\mathcal{E}$ des valeurs possibles de cette caractéristique, et associé à chacun de ces corps une variable X à valeurs dans cet ensemble $\mathcal{E}$. Par exemple, on peut différencier deux corps inertes par leurs compositions chimiques ou encore leurs températures. Le choix des variables de caractérisation du mélange est discuté dans la section suivante.
Lorsque l'on parle de mélange d'un fluide continu, on ne compare plus de corps discrets mais de particules élémentaires de fluide positionnées en $P(x, y, z)$ dans l'espace $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^3$. Le domaine matériel $\mathcal{D}$ représente une partie quelconque du fluide considéré. La différenciation des particules se traduit alors sous forme d'hétérogénéité, et l'ensemble des traceurs X associés à chaque particule en P constitue une distribution spatiale :

$$X : \quad \mathcal{D} \in \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathcal{E} = \mathbb{R}^N \tag{4.44}$$

$$P(x, y, z) \quad \longmapsto \quad X(P) \tag{4.45}$$

Ainsi, mélanger un fluide continu signifie réduire son hétérogénéité ou de façon équivalente accroître son homogénéité. On peut définir le degré d'hétérogénéité d'un fluide de masse $\mathcal{M}_\mathcal{D} = \int_\mathcal{D} dm$ occupant le domaine $\mathcal{D}$ vis à vis du traceur X par l'écart-type[18] :

$$\mathcal{I}_X = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{M}_\mathcal{D}} \int_\mathcal{D} ||X(P) - \overline{X}||^2 dm(P)} \tag{4.46}$$

où $||.||$ désigne une norme de $\mathcal{E}$ et $\overline{X}$ désigne la moyenne de X sur $\mathcal{D}$:

$$\overline{X} = \int_\mathcal{D} X(P) dm(P) \tag{4.47}$$

Le degré d'hétérogénéité $\mathcal{I}_X$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Lorsque $\mathcal{I}_X = 0$, la distribution X est homogène, sinon elle est hétérogène. Dans ce cas, $\mathcal{I}_X$ mesure l'écart de la distribution X à l'homogénéité.

[18] Les intégrales sont pondérées par la masse plutôt que par le volume parce que, de manière générale, la masse d'une particule se conserve toujours dans le mouvement, contrairement à son volume.

Pour commencer, nous allons considérer un fluide continu parfait, c'est-à-dire un fluide qui occupe un espace dense dans $\mathbb{R}^3$, où quelque soit l'échelle spatiale l à laquelle on le regarde, on trouve du fluide. Dans ce modèle de fluide parfait, on nie donc la nature discrète du fluide réel à l'échelle microscopique, et donc les phénomènes de diffusion. Un fluide parfait hétérogène évoluant selon les équations d'Euler peut être caractérisé par une distribution $X(t)$ qui est une fonction continue du temps, ainsi que le degré d'hétérogénéité associé $\mathcal{I}_X(t)$. Puisque la définition du mélange exclut toute transformation du fluide (comme une réaction chimique, pour une caractérisation par la composition chimique), X se conserve le long des trajectoires du fluide. Par conséquent, la moyenne de X sur $\mathcal{D}$ et son degré d'hétérogénéité $\mathcal{I}_X$ sont invariants dans le temps. De manière stricte, un fluide parfait initialement hétérogène le reste éternellement.

L'adjectif "indistinct" utilisé dans la définition du mélange ajoute la notion de perception de l'hétérogénéité. Supposons que notre acuité d'observation ait une résolution $l > 0$, c'est-à-dire que seuls les détails d'une taille supérieure à l peuvent être perçus. On peut alors définir la caractéristique X perçue en un point P à l'échelle l par exemple par :

$$X_l(P) = \int_{\mathcal{D}} G_l(PQ).X(Q)dm(Q) \tag{4.48}$$

où G_l est le filtre porte dans l'espace physique de longueur d'onde de coupure l (dans l'espace des longueurs d'ondes, $\hat{G}_l(\lambda) = 1$ si $|\lambda| < l, 0$ sinon)[19]. X_l contient donc exclusivement les composantes de X dont les longueurs d'onde sont supérieures à l. Le degré d'hétérogénéité perçu à l'échelle l est défini par :

$$\mathcal{I}_{X,l} = \sqrt{\frac{1}{\mathcal{M}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} ||X_l(P) - \overline{X}||^2 dm(P)} \tag{4.49}$$

X_l est à valeurs dans $\mathcal{E}$ et $\mathcal{I}_{X,l}$ dans $\mathbb{R}^+$. On peut prolonger X_l pour $l > 0$ à $X_{l=0} = X$. Lorsque $\mathcal{I}_{X,l} = 0$, la distribution X est homogène à l'échelle l, sinon elle est hétérogène à l'échelle l. On peut alors qualifier l'évolution suivie par le fluide de "processus de mélange à l'échelle l", ou "l-mélange", sous la condition que le degré d'hétérogénéité perçu à l'échelle l soit une fonction strictement décroissante du temps. La vitesse de mélange $V_{X,l}(t)$ perçue à l'échelle l est alors définie par :

$$V_{X,l}(t) = -\frac{d\mathcal{I}_{X,l}}{dt}(t) \tag{4.50}$$

On peut toujours définir une "échelle d'hétérogénéité" λ telle que :
$\forall l \geq \lambda$, le milieu est homogène à l'échelle l, et $\forall l < \lambda$, le milieu est hétérogène à l'échelle l.
Enfin, on peut prolonger la notion de "l-mélange" à l'échelle $l = 0$, en disant que la distribution X est homogène (resp. hétérogène) à l'échelle $l = 0$ si $\mathcal{I}_X = 0$ (resp. $\mathcal{I}_X > 0$).

Afin d'illustrer ces définitions, considérons le mélange de deux peintures incompressibles non-miscibles initialement disposées séparément dans un pot cylindrique, figure 4.17(a). Si l'on brasse le tout avec une cuillère en décrivant un mouvement circulaire, on obtient des franches alternées noires et blanches comme schématisées 4.17(b) puis 4.17(c). Bien que les couleurs noires et blanches soient de plus en plus intriquées, on ne peut pas pour le moment parler de mélange. En effet, si l'on caractérise la couleur de la peinture par $X \in [0, 1]$ avec $X = 0$ pour le blanc et $X = 1$ pour le noir, alors $\forall t > 0 : \mathcal{I}_X(t) = 0.5$. Sur les images 4.17(a,b,c), l'échelle de perception est nulle (ou plus précisément la résolution l de l'image est inférieure à celle que peut distinguer

[19] Le niveau de la discussion étant seulement phénoménologique et non quantitatif, on ne s'occupe pas des problèmes aux limites qui se posent pour un domaine borné.

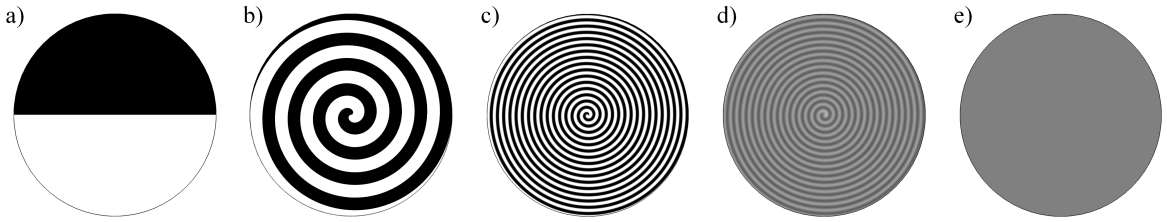


FIG. 4.17 – Mélange de deux peintures non-miscibles dans un pot circulaire et échelles d'observation (distributions de couleur X dans le pot aux instants (a) $t = 0$, (b) $t = \delta t$, (c) $t = \Delta t$, et distributions de couleur perçue X_l aux échelles (d) $l = f/2$ et (e) $l = 2f$, à l'instant $t = \Delta t$).

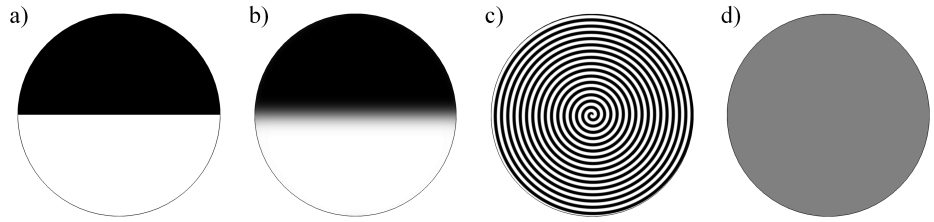


FIG. 4.18 – Effet de la diffusion (b) (resp. (d)) sur la distribution de couleur X initiale (a) (resp. à $t = \Delta t$ (c)).

le lecteur). Notons f la largeur de frange mesurable sur la figure 4.17(c). Les images 4.17(d) et 4.17(e) représentent les champs de couleur perçue X_l définis par (4.48) respectivement aux échelles $l = f/2$ et $l = 2f$, et correspondant à la même distribution X représentée figure 4.17(c). On voit bien, figure 4.17(c), que là où la couleur est soit noire ($X = 1$) soit blanche ($X = 0$), on perçoit à une échelle l non-nulle, figures 4.17(d) et 4.17(e), une couleur X_l grise plus ou moins foncée, i.e. $X_l \in [0, 1]$, donnant une impression de mélange. La notion d'échelle d'observation est donc bien inséparable de la notion de mélange. De plus, sur la figure 4.17(d), les franges sont encore perceptibles, bien que moins nettes que sur la figure 4.17(c), $0 < \mathcal{I}_{X,l} < 0.5$, alors que sur la figure 4.17(e), la peinture semble avoir une couleur grise uniforme $X_l = \overline{X} = 0.5$, $\mathcal{I}_{X,l} = 0$. En fait, $l = 2f$ est égale à l'échelle d'hétérogénéité $\lambda = 2f$. Toute observation à l'échelle $l \geq \lambda$ donne une distribution de couleur perçue homogène à $X_l = 0.5$. Enfin, en comparant les figures 4.17(b) puis 4.17(c), on peut remarquer que le brassage produit par notre cuillère rend les franges f de plus en plus fines. Le mélange par brassage macroscopique se caractérise donc par une échelle d'hétérogénéité $\lambda = 2f$ décroissante dans le temps. L'échelle d'hétérogénéité λ admet une valeur maximale égale à l'échelle de l'hétérogénéité initiale. Pour un fluide parfait, l'échelle d'hétérogénéité λ n'a pas de valeur minimale, même si elle est bornée inférieurement par 0. Lorsque $t \longrightarrow +\infty$, $f \longrightarrow 0^+$ et donc $\lambda \longrightarrow 0^+$, pourtant $\mathcal{I}_X(t) = 0.5$. Autrement dit, le mélange à l'échelle $l = 0$ est impossible en fluide parfait.

A présent, considérons un fluide réel composé d'un nombre très grand de molécules. Les molécules étant indivisibles, le mélange de deux gaz purs est impossible à l'échelle des molécules. En fluide réel, l'échelle d'hétérogénéité λ a donc toujours un sens et possède une valeur minimale supérieure à l'échelle du libre parcours moyen des molécules ξ. De même qu'en fluide parfait, le mélange à l'échelle $l = 0$ n'est pas plus possible en fluide réel. Pourtant, la définition du mélange au sens courant ne précise pas explicitement l'échelle d'observation au niveau de laquelle on doit considérer le mélange. Cette échelle implicite est l'"échelle mésoscopique". L'échelle mésoscopique l_m est l'échelle de raccord entre la vision microscopique, discrète, des gaz et celle macroscopique des milieux continus. D'une part, $l_m \gg \xi$ pour que l'énergie cinétique moyenne

d'agitation des molécules contenues dans une particule de taille l_m de tout fluide à l'équilibre soit stationnaire et constitue, par définition, la température de la particule. Au niveau de cette échelle mésoscopique l_m, tout fluide à l'équilibre est donc homogène, autrement dit $l_m > \lambda$. D'autre part, l_m est suffisamment petite par rapport à l'échelle macroscopique du mouvement pour être considérée comme un infiniment petit de la théorie des milieux continus. L'étude présentée dans ce mémoire est entièrement basée sur le modèle de fluide visqueux conductif gouverné par les équations de Navier-Stokes. C'est un modèle mathématique asymptotique permettant de décrire les macro-évolutions des fluides réels aux échelles l^* dans lequel la limite $l^* \longrightarrow 0^+$ signifie physiquement que $l \longrightarrow l_m^+$. Ainsi, dans le cadre de la théorie des milieux continus, le mélange à l'échelle $l^* = 0$ est possible et il est assuré, au niveau microscopique, par la diffusion (au sens large) qui est non pas décrite explicitement comme les macro-mouvements, mais modélisée (par les lois de Fick, de Fourier, et la loi de comportement des fluides newtoniens). On peut donc distinguer un processus de mélange purement macroscopique par $V_{X,l^*=0} = 0$ d'un processus de mélange faisant intervenir la diffusion (mélange microscopique) où $V_{X,l^*=0} < 0$.

En reprenant l'exemple précédent, on suppose maintenant que les deux peintures sont miscibles. Les distributions de couleur $X_{l=l_m}$, ou $X_{l^*=0} = X$ si l'on admet que l'on se place désormais dans le cadre de la théorie des milieux continus, sont représentées sur la figure 4.18. La ligne séparant initialement les peintures noire et blanche, figure 4.18(a), est traversée par un flux de diffusion moléculaire du bas vers le haut pour la peinture blanche et du haut vers le bas pour le peinture noire. La distribution de couleur au bout d'un temps Δt est représentée figure 4.18(b), elle illustre uniquement le mélange par diffusion à partir de 4.18(a). Alors que la distribution de couleur $X_{l^*=0} = X$ du fluide parfait conserve seulement deux valeurs, 0 (blanc) ou 1 (noir), celle qui résulte de la diffusion prend toutes les valeurs entre 0 et 1 (tous les dégradés de gris).

A partir de la figure 4.18(a), et au bout d'un temps Δt, les fronts de diffusion des peintures blanche et noire (respectivement définies ici par les lignes $X = 1 - \epsilon$ et $X = \epsilon$, avec $\epsilon = 0.5$ par ex.) ont progressé d'une distance $\delta \approx 2f$, voir figure 4.18(b). Comme le front de diffusion moléculaire progresse suivant $\sqrt{t}$ [221], on peut prévoir que leur temps de propagation jusqu'au bord du pot de rayon R prendra $\left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \Delta t \gg \Delta t$. Le mécanisme de diffusion ne peut être accéléré par un moyen mécanique macroscopique. Par contre, la vitesse de mélange à l'échelle $l^* = 0$ peut être amplifiée par un brassage macroscopique à l'échelle du pot $L = 2R$. La figure 4.18(c) montre la distribution de couleur dans un pot brassé par une cuillère au bout du temps Δt lorsque les fluides sont non-miscibles. Lorsque le même mécanisme de diffusion est permis, on constate qu'au bout de la même durée Δt, figure 4.18(d), le fluide est homogénéisé à l'échelle $l^* = 0$. Cet exemple illustre de manière flagrante les deux mécanismes du brassage macroscopique amenant l'écoulement dans les conditions, ou plus précisément les échelles spatiales, où la diffusion a une action significative dans un temps donné. Ces deux mécanismes schématisés figure 4.19 sont l'étirement $(+S) = \frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial t}$ de l'interface de diffusion et la compression $(-S) = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial t}$ de l'épaisseur des fluides à mélanger. L'étirement $(+S)$ et la compression $(-S)$ sont en fait les deux composantes du cisaillement (S) dans les axes principaux de déformation.

En résumé, nous avons souligné que la notion de mélange est indissociable de la notion d'échelle. L'échelle de perception l permet de distinguer le macro-mélange ou brassage macroscopique, du micro-mélange ou mélange par diffusion. Dans le cadre de la théorie des milieux continus, le domaine de perception $l \in [l_m, +\infty]$, où l_m est l'échelle mésoscopique, est transposé dans $l^* \in [0, +\infty]$. Le mélange par diffusion, modélisé dans le cadre de la théorie des milieux continus, agit au niveau des échelles microscopiques $\xi \ll l_m$ et altère donc la distribution $X_{l^*=0} = X$ perçue à l'échelle $l^* = 0$. Le mélange par brassage, explicitement décrit pour $l^* > 0$, agit quant à lui depuis les échelles macrosopiques $l \gg l_m$ jusqu'à l'échelle mésoscopique

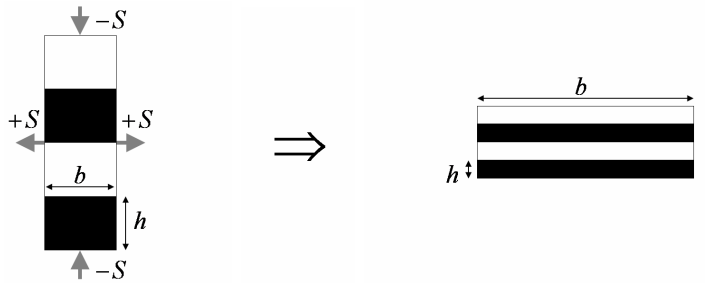


FIG. 4.19 – Décomposition du mécanisme élémentaire du mélange macroscopique : le cisaillement.

$l = l_m$. Dans la théorie des milieux continus, il n'existe pas de mélange à l'échelle $l^* = 0$ sans phénomène de diffusion. Si la diffusion n'est pas active (modèle de fluide parfait), le mélange macroscopique peut toutefois homogénéiser le fluide à une échelle $l > l_m$ ou $l^* > 0$ dans un temps fini. De plus, par cisaillement, le mélange macroscopique étend les interfaces (ou surfaces iso-X) tout en faissant décroître dans le temps l'échelle d'hétérogénéité λ (ou l'épaisseur caractéristique des volumes à $X \approx$ constant). Ainsi, le macro-mélange produit les conditions favorables à l'expression du mélange par diffusion. Localement, en termes de gradients, $\text{grad}X \# \frac{\mathcal{I}_X}{\lambda}$, le mélange par diffusion tend à diminuer les gradients en diminuant l'écart-type $\mathcal{I}_X$ alors que le mélange par brassage tend à augmenter les gradients en diminuant l'échelle d'hétérogénéité λ et déforme ainsi la distribution X de manière à accroître le flux de diffusion proportionnel à $\text{grad}X$.

Comme le suggèrent les figures 4.17 et 4.18[20], le tourbillon est une brique élémentaire du mélange des fluides. Plus précisément, toute variation de rotationnel au sein d'un écoulement induit du cisaillement et provoque donc un mélange macroscopique. La turbulence, basée sur l'intrication d'une multitude de structures rotationnelles d'échelles variées, est un processus de mélange macroscopique agissant à chaque instant au niveau d'une large gamme d'échelles, depuis la macro-échelle du mouvement jusqu'à l'échelle de Kolmogorov η. L'analyse des échelles de la turbulence [249] montrent en fait que $\eta/\xi \sim \text{Re}^{1/4}/M \gg 1$ en aérodynamique classique (où Re et M sont respectivement le nombre de Reynolds et le nombre de Mach). Le mélange turbulent conduit ainsi, par le biais d'une cascade d'échelles de brassage, une hétérogénéité d'échelle macroscopique L jusqu'à une échelle η où le mélange par diffusion devient efficace pour aboutir à une homogénéité d'échelle $l^* = 0$. L'objectif des systèmes mélangeurs conçus par l'ingénieur est d'exploiter au mieux les capacités du mélange turbulent (aux échelles $l > l_m$) pour accélérer l'homogénéisation du fluide (implicitement à l'échelle $l^* = 0$).

4.4.2 Discussion sur les variables de caractérisation du mélange

La température n'est pas forcément une bonne quantité pour estimer le mélange d'un fluide. En effet, la température d'un fluide peut varier par détente-compression ou par conduction de la chaleur. La conduction de la chaleur est due à la diffusion de l'énergie d'agitation moléculaire, c'est donc un processus de mélange microsopique de l'énergie interne. Par contre, les effets thermiques dus aux compressions et détentes se produisent en fluide parfait, i.e. hors de tout phénomène diffusif (à l'échelle $l = l_m$). C'est parce que l'on ne peut distinguer ces deux sources de variation à l'aide du champ de température uniquement, que ce dernier n'est pas, de manière générale, un bon candidat pour caractériser le mélange. On postule donc qu'une variable X peut caractériser le mélange, sous les hypothèses des milieux continus, si en dehors de tout proces-

[20]Le champ de vitesse conduisant la distribution fig.4.17(a) à fig.4.17(b) puis fig.4.17(c) est du type $\overrightarrow{V} = u_\theta(r)\overrightarrow{e_\theta}$ en coordonnées cylindriques (r, θ) avec $u_\theta(r) = Ar + B/r$, i.e. rotation solide + tourbillon singulier.

sus de mélange microscopique, elle constitue un traceur passif de chaque particule. Autrement dit, les variables X pouvant caractériser le mélange sont les invariants du mouvement du fluide parfait : la composition chimique et la température totale T_i (ou d'arrêt isentropique)[21]. Si on suppose que l'écoulement ne comporte pas de choc (ou que les chocs sont suffisamment faibles), la pression d'arrêt p_i (et donc la masse volumique d'arrêt ρ_i) se conserve (ou chute peu) et peut être considérée comme un traceur passif[22]. Dans un régime incompressible où les vitesses sont négligeables devant la célérité du son, $T_i \approx T$, de sorte que la température est alors un bon traceur pour caractériser le mélange thermique (microscopique + macroscopique). Ce n'est plus du tout le cas lorsqu'on veut étudier le mélange d'un jet propulsif en régime supersonique.

4.4.3 Paramètres de similitude

On peut distinguer un mélange microscopique fondé sur les mécanismes à l'échelle des molécules et un mélange macroscopique basé sur la non-uniformité cinématique du fluide. Si l'on caractérise le mélange de l'énergie cinétique, le nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = V.L/\nu$ permet de caractériser l'importance du mécanisme macroscopique par rapport au mécanisme microscopique. En effet, un écoulement à faible Re homogénéise son champ de vitesse principalement par diffusion visqueuse, alors qu'un écoulement pleinement turbulent l'homogénéise principalement par brassage macroscopique. Le mélange d'un scalaire passif est principalement produit par le mécanisme macroscopique ou par le mécanisme microscopique suivant la valeur du paramètre (Re.Sc), où $\mathrm{Sc} = \nu/D_m$ est le nombre de Schmidt, rapport de la diffusivité de quantité de mouvement ν sur la diffusivité moléculaire D_m. Le mécanisme d'homogénéisation thermique d'un fluide non-réactif est lui désigné par le paramètre (Re.Pr), où $\mathrm{Pr} = \nu/\chi$ est le nombre de Prandtl, rapport de la diffusivité de quantité de mouvement ν sur la diffusivité thermique χ. Enfin, on peut évaluer le mélange dans un fluide réactif exothermique en mesurant la température [70], dans ce cas, il faut regarder le paramètre $(1/\mathrm{Da} = Re.[\nu/(L^2/t_{ch})])$, où $\mathrm{Da} = L/(U.t_{ch})$ est le nombre de Damkhöler, rapport du temps caractéristique de la convection L/U sur celui de la réaction chimique t_{ch}.

Ainsi, on voit que, dans tous les cas, le nombre de Reynolds est un paramètre clé du processus de mélange qui détermine la part du mécanisme macroscopique. Dimotakis [70] assimile le régime de turbulence pleinement développée au régime de mélange turbulent. En raisonnant sur l'existence du régime inertiel introduit par Richardson [212] et repris par Kolmogorov, Dimotakis a montré qu'une condition nécessaire de transition vers la turbulent pleinement développée est que le nombre de Reynolds basé sur les grosses échelles L soit supérieur à $Re_D = U.L/\nu \simeq 1-2\times10^4$. Dimotakis montre que ce nombre de Reynolds $Re_D \simeq 1-2\times10^4$ se retrouve dans de très diverses géométries d'écoulement et présente donc un certain caractère universel.

Selon les termes introduits dans la section 4.4.1, on peut donc dire que si les mécanismes macroscopiques sont prépondérants (i.e. $(\mathrm{Re}.\chi) \gg 1$ avec χ=Sc, Pr ou $\nu/(L^2/t_{ch})$) alors :

- pour $Re > Re_D$, les échelles l du mélange turbulent macroscopique descendent au niveau des échelles affectées par le mélange microscopique, i.e. l'échelle de Kolmogorov η ;
- pour $Re < Re_D$, les échelles l du mélange turbulent macroscopique n'atteignent pas le niveau des échelles où agit le mélange microscopique.

[21] T_i n'est un invariant du mouvement qu'en écoulement stationnaire (la distribution X peut bien-sûr évoluer dans le temps alors que le mouvement est stationnaire).

[22] Là encore en écoulement stationnaire.

Sur la figure 4.20, des images de jets liquides, pour lesquels le nombre de Schmidt Sc est bien plus grand que pour les jets gazeux, illustrent très clairement ces deux régimes. Dans les cas où $Re < Re_D$, on distingue des parcelles de fluide extérieur (en noir) au milieu du jet. Dans les cas où $Re > Re_D$, le fluide du jet dilué remplit totalement le coeur de la région turbulente.

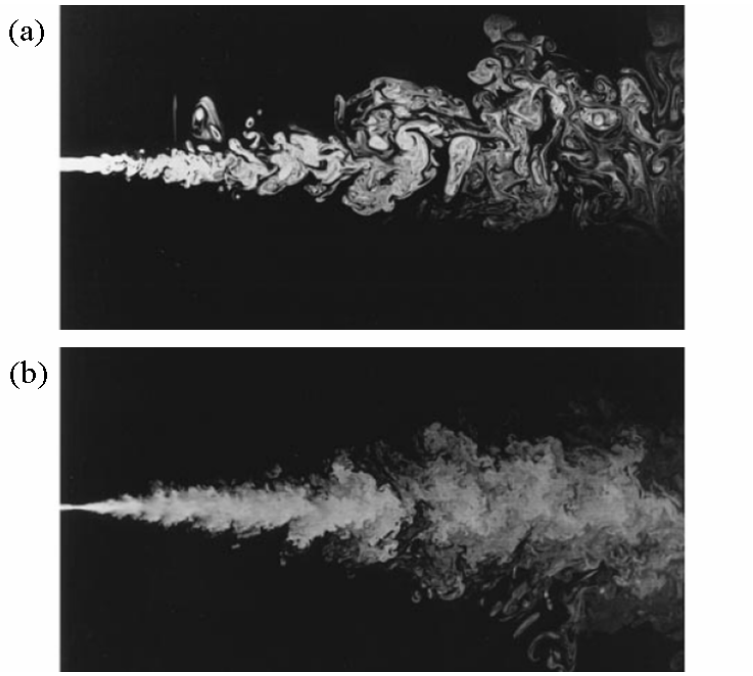


FIG. 4.20 – Concentration de liquide dans le plan de symétrie d'un jet rond (a) à $Re_j \approx 2.5 \times 10^3$ $(0 < X/D < 35)$, (b) $Re_j \approx 10^4$ $(0 < X/D < 200)$ [71]. Jet = liquide blanc, fluide ambient = liquide noir. [31].

Dans notre cas, le nombre de Reynolds basé sur le diamètre du col et la vitesse d'adaptation du jet est $\mathrm{Re} = \frac{407 \times 44.10^{-3}}{1.5 \times 10^{-5}} \approx 1.2 \times 10^6 \gg Re_D = 2 \times 10^4$. La turbulence est donc complètement développée et le mélange turbulent s'effectue des échelles macroscopiques $D/2$ jusqu'aux échelles du mélange microscopique. Cette information est très importante pour caractériser le mélange du jet contrôlé car elle signifie que même si l'on pouvait faire une DNS de notre écoulement, on ne pourrait distinguer le mélange turbulent macroscopique du mélange microscopique.

4.4.4 Sur l'utilisation des variables (T_i, p_i) pour caractériser le mélange

On revient ici sur la pertinence d'une utilisation des conditions génératrices pour caractériser le mélange. En l'absence d'un scalaire passif dans l'écoulement étudié, la température d'arrêt isentropique T_i et la pression d'arrêt isentropique p_i sont les seules variables disponibles pour caractériser le mélange stationnaire (cf. section 4.4.2). Toutefois, il est bon de s'attarder un moment sur les mécanismes précis qui font évoluer respectivement T_i et p_i.

Pour commencer, prenons l'équation d'évolution de la température génératrice (cf. cours de mécanique des fluides, par ex. [156]) dans un écoulement laminaire :

$$\rho c_p \frac{DT_i}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial p}{\partial t}}_{inst.} + \underbrace{\mathrm{div}\left(\overline{\overline{\tau}}.\overrightarrow{V}\right)}_{diff.\ meca.} + \underbrace{\overrightarrow{f}.\overrightarrow{V}}_{prod.\ meca.} + \underbrace{\mathrm{div}\left(\overrightarrow{-q}\right)}_{diff.\ thermique} + \underbrace{r}_{prod.\ thermique} \tag{4.51}$$

En l'absence de source de chaleur ou de force volumique (termes de production mécanique et thermique nuls) et en régime stationnaire, la température d'arrêt isentropique évolue donc dans un tube de courant uniquement sous l'effet des diffusions visqueuse et thermique agissant à sa surface. T_i évolue seulement sous l'action des mélanges microscopiques. Si l'on considère maintenant un écoulement turbulent, une équation semblable à (4.51) peut être obtenue en reprenant les équations du mouvement et le formalisme de la moyenne de Reynolds. Cependant les termes de fluctuation supplémentaires apparaissant dans cette nouvelle équation sont très complexes à analyser, c'est pourquoi nous nous contenterons ici de reprendre l'hypothèse de Boussinesq. Autrement dit, dans (4.51), on remplace la viscosité ν par $\nu + \nu_t$ et la conductivité λ par $\lambda + \lambda_t$ dans les lois de comportement respectives du tenseur des efforts visqueux $\overline{\overline{\tau}}$ et du flux de chaleur $\overrightarrow{q}$. Avec cette approximation, la température totale moyenne T_i évolue en régime établi turbulent uniquement sous l'action des mélanges microscopiques et macroscopiques à la surface du tube de courant. T_i est donc bien une variable de caractérisation du mélange.

Maintenant, occupons nous de l'évolution de la pression d'arrêt isentropique. On peut montrer (voir démonstration en annexe D.6) que celle-ci vérifie :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p_i}\frac{Dp_i}{Dt} &= \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{terme instationnaire} \\
&+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho H_i}\left[\operatorname{div}\left(\overline{\overline{\tau}}.\overrightarrow{V}\right)+\overrightarrow{f}.\overrightarrow{V}-\frac{\gamma-1}{2}M^2\left(r-\operatorname{div}\overrightarrow{q}\right)\right] \quad \text{diffusion + production} \\
&-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho H_i}\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\overline{\overline{\tau}}\colon\overline{\overline{S}}\right] \quad \text{dissipation}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Toujours sous l'hypothèse de Boussinesq, en l'absence de source de chaleur ou de force volumique (termes de production mécanique et thermique nuls) et en régime stationnaire, la pression d'arrêt isentropique p_i évolue donc dans un tube de courant sous l'effet des diffusions visqueuse et thermique agissant à sa surface mais aussi sous l'effet de la dissipation de l'énergie mécanique. Au niveau phénoménologique, le mélange moléculaire microscopique ou le mélange turbulent macroscopique ne correspondent globalement qu'à un processus de diffusion. D'autre part, la dissipation est indissociable de l'action de diffusion de la quantité de mouvement (par le biais du tenseur des efforts visqueux). La pression totale est donc non seulement un indicateur du résultat du mélange mais évalue en plus la dissipation consécutive à l'action du mélange mécanique.

Dans l'étude présentée ici, comme le jet a la même température totale que l'extérieur, il n'est pas possible d'appliquer des critères de mélange basés sur la T_i. Ceux-ci seront donc définis à partir de la pression d'arrêt malgré la remarque précédente. Il est nécessaire d'ajouter que de tels critères ne sont plus applicables dans les jets fortement non-adaptés car les chocs internes provoquent des pertes de pression génératrice non-négligeables par rapport à celles provoquées par les couches de mélange. Dans ce cas, seule la T_i reste insensible à ces phénomènes. L'analyse du mélange de p_i reste légitime ici car le jet n'est que modérément sous-détendu.

4.5 Etude paramétrique du mélangeur par injections radiales

4.5.1 Paramétrisation de l'injection

De manière générale, l'écoulement d'un jet primaire soumis à des injections secondaires dépend d'un grand nombre de paramètres. Avant de réaliser une étude paramétrique, il est donc indispensable de choisir un certain nombre d'hypothèses afin de limiter le champ des paramètres. Dans l'étude présentée ici, les conditions du jet primaire sont fixées et nous supposons que l'action prédominante des injections radiales est l'introduction de quantité de mouvement. Ainsi, au premier ordre, les conditions de soufflage de chaque injecteur sont décrites par 3 variables d'état indépendantes (par exemple, les variables primaires en sortie, ρ_3, V_3, p_3)[23] et 2 paramètres géométriques (par exemple, l'ouverture longitudinale de l'orifice d'injection Δx et la dimension latérale $R\Delta\theta$). Le choix de ces paramètres est arbitraire[24]. Nous choisissons de prendre successivement :

- 2 variables d'état caractérisant les conditions génératrices (p_{i3}, T_{i3}) ;
- 1 variable d'état, le nombre de Mach M_3, pour établir l'état du fluide en sortie ;
- 1 paramètre géométrique, l'aire de l'orifice d'injection $A_3 = R\Delta\theta\Delta x$ qui détermine le débit de masse injecté ;
- 1 paramètre géométrique, l'allongement transverse de l'orifice d'injection $\Lambda = R\Delta\theta/\Delta x$ qui caractérise la forme de l'orifice.

Comme discuté dans la section 4.3.1, il existe un paramètre pertinent pour caractériser la pénétration du jet. Néanmoins, le choix de ce paramètre a évolué pour s'adapter à la complexité de l'écoulement [160] :

- V_3/V_1 pour les écoulements à densité uniforme ;
- $R_3 = \sqrt{(\rho_3 V_3^2/\rho_1 V_1^2)}$ pour les écoulements hétérogènes, subsoniques ou supersoniques ;
- p_{i3}/p_{i1} parfois utilisé en régime supersonique.

Nous avons vu que c'est le "rapport des vitesses effectives" R_3 qui est le plus communément utilisé pour dimensionner la trajectoire du jet (cf. tableaux 4.1 et 4.3). Dans les cas considérés ici, si l'on choisit les conditions d'adaptation des jets primaire et secondaires à la pression extérieure p_0, les rapport des vitesses effectives sont $R_3 = 1.16|1.49|1.81$ respectivement pour les cas où SPR $= 1.4|2.8|5.6$. Les cas que nous étudions sont donc dans la limite inférieure des corrélations sur les trajectoires relevées dans la littérature [201]. Cependant, ce paramètre R_3 ne représente que la quantité de mouvement initialement introduite $\rho_3 V_3^2$ et ne prend pas en compte l'accélération consécutive à la surpression $p_3 > p_0$ qui caractérise les jets sous-détendus. Ainsi, R_3 n'établit pas à lui seul une relation générale de similitude [176, 116]. Puisque la force appliquée par l'injection sur l'écoulement transverse est une notion importante, un paramètre unificateur pourrait être le rapport de la dynalpie relative $D_3 = \rho_3 V_3^2 + p_3 - p_1$ de l'injection sur celle de l'écoulement transverse $D_3 = \rho_1 V_1^2$, où p_1 est une pression statique caractéristique de l'écoulement incident, celui-ci n'étant pas uniforme [160, 222, 106]. Davis [63] qui a expérimenté l'influence de deux jets radiaux sur un jet primaire, a choisi de construire un "rapport de vitesses équivalentes" sur la dynalpie et a alors montré une bonne corrélation entre différents régimes d'injection. Ainsi, nous choisissons d'utiliser la dynalpie comme une mesure unique de la force d'injection, même si l'examen d'anciens travaux focalisés sur l'injection supersonique

[23] L'indice "3" correspond aux injections secondaires.

[24] A_3 est le paramètre géométrique prépondérant ; $\Lambda = R\Delta\theta/\Delta x$ est le paramètre le plus simple permettant de rendre compte du caractère 2D de la surface d'injection.

[272, 222, 14] suggèrent la nécessité d'un paramètre supplémentaire, comme le rapport de pression du jet secondaire p_3/p_1, pour prendre en compte l'influence des chocs internes aux jets fortement non-adaptés [25]. Pour compléter l'ensemble des paramètres de contrôle, on choisit de ne traiter que des dispositifs constitués de N injecteurs identiques uniformément répartis en azimut. Plus précisément, N désigne le nombre d'injecteurs actifs. Ainsi, on dispose d'un ensemble de paramètres de contrôle $(p_{i3}, T_{i3}, M_3, A_3, \Lambda, N)$ et un ensemble de paramètres globaux tels que $(Q_3, D_3, M_3, A_3, \Lambda, N)$. Q_3 est le débit de masse total délivré par le dispositif de contrôle. Il s'écrit :

$$Q_3 = N \times \delta(\gamma, r) \frac{p_{i3} A_3}{\sqrt{T_{i3}}} \frac{1}{\Sigma(M_3)} \tag{4.53}$$

où $\delta(\gamma, r)$ est fonction de γ et de r, et $\Sigma(M_3)$ est le rapport de la section sortie A_3 de chaque injecteur sur sa section sonique. La dynalpie relative $D_3 = \rho_3 V_3^2 + p_3 - p_1$ caractérise l'action locale de chaque injecteur sur le jet principal :

$$D_3 = p_{i3}\left(1 + \gamma M_3^2\right)\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_3^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}} - p_1 \tag{4.54}$$

4.5.2 Cas simulés

Dans cette étude, tous les injecteurs testés sont soniques, $M_3 = 1$. Le débit de masse total Q_3 dépend donc seulement de N, p_{i3}, T_{i3}, A_3, et la dynalpie est entièrement déterminée par p_{i3}, ou de manière équivalente par le rapport de quantités de mouvement R_3^2 ou par le rapport de pression des jets secondaires p_3/p_1. Par ailleurs, l'aire de chaque injecteur est maintenue constante, donc l'aire totale d'injection $N \times A_3$ ne dépend que du nombre d'injecteurs N. Pour résumer, les 4 paramètres de contrôle restants sont $(p_{i3}, T_{i3}, \Lambda, N)$ et les paramètres globaux sont (Q_3, D_3, Λ, N).

L'ensemble des configurations testées dans cette étude paramétrique est résumé dans le tableau 4.6. Les variations paramétriques testées sont résumées dans le tableau 4.5. L'influence d'une variation de chaque paramètre de contrôle dans $(p_{i3}, T_{i3}, \Lambda, N)$ est évaluée en gardant les autres paramètres constants, excepté pour l'effet du nombre d'injecteur N où (T_{i3}, Λ) restent inchangés et où le débit total Q_3 est conservé en modifiant la pression génératrice p_{i3}.

Effets testés	paramètres constants	paramètres variants	configurations comparées
pression totale p_{i3}	T_{i3}, Λ, N	p_{i3}, Q_3, D_3	F0,F1,F2
nombre d'injecteurs N	Q_3, T_{i3}, Λ	p_{i3}, D_3, N	F0,F1,F3,F4
allongement Λ	Q_3, p_{i3}, T_{i3}, N	Λ	F0,F1,F5,F6,F7
température totale T_{i3}	p_{i3}, Λ, N	Q_3	(primaire froid) F0,F1,F8,F9
température totale T_{i3}	p_{i3}, Λ, N	Q_3	(primaire chaud) C0,C1,C2

TAB. 4.5 – Récapitulatif des effets testés et des configurations correspondantes.

[25] Comme la pression en amont de l'injection transverse est supérieure à celle en aval, le jet secondaire ne peut être strictement adapté partout. On entend donc ici par injection fortement non-adaptée, une injection ayant une pression statique en sortie très différente de celle de l'écoulement incident sans injection.

Nom de la config.	jet primaire		injections secondaires						Cas exp.
	NPR	T_{i1} (K)	SPR	T_{i3} (K)	Q_3/Q_1 (%)	N	A_3/A_r	Λ	
F0	3.1	300.	jet froid de référence pour NPR=3.1						oui
F1			2.8	300.	3.7	4	1.	10.	oui
F2			1.4	300.	2.0	4	1.	10.	oui
F3			1.4	300.	3.7	8	1.	10.	oui
F4			5.6	300.	3.7	2	1.	10.	non
F5			2.8	300.	3.7	4	1.	2.5	non
F6			2.8	300.	3.7	4	1.	1.0	non
F7			2.8	300.	3.7	4	1.	0.5	non
F8			2.8	600.	2.6	4	1.	10.	non
F9			2.8	1200.	1.9	4	1.	10.	non
C0	3.1	1100.	jet chaud de référence pour NPR=3.1						non
C1			2.8	300.	7.1	4	1.	10.	non
C2			2.8	1100.	3.5	4	1.	10.	non

TAB. 4.6 – Récapitulatif des configurations MARCO simulées (NPR=p_{i1}/p_{i0} et SPR=p_{i3}/p_{i1}).

4.5.3 Critères d'estimation du mélange

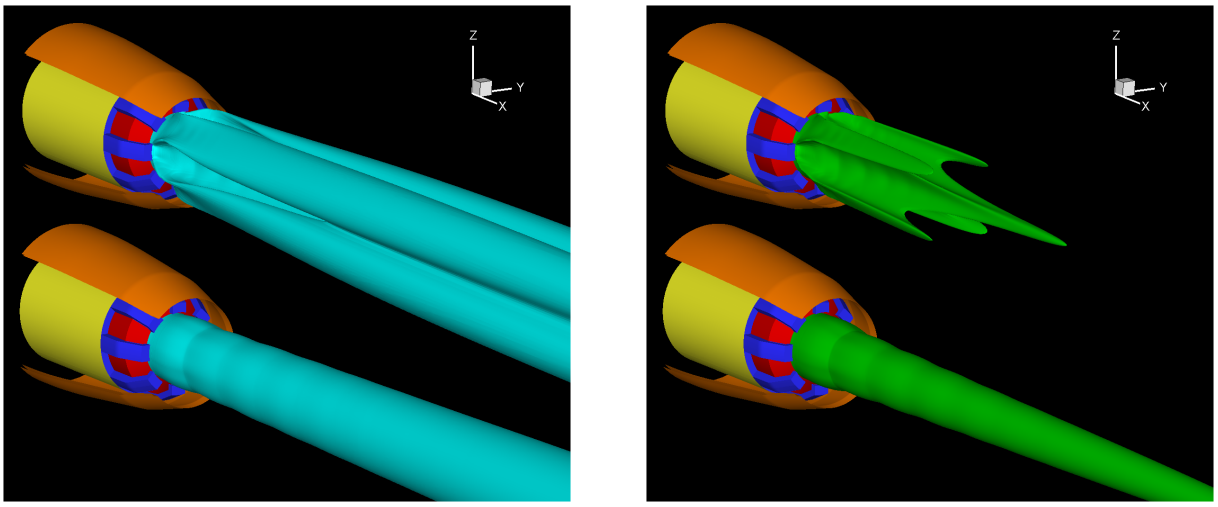
Comme l'ont montré les résultats décrits précédemment, le processus de mélange dans le jet contrôlé par des injections radiales est complexe et sa nature tridimensionnelle[26] doit être prise en compte pour évaluer les capacités réelles de ce type de dispositif de mélange. Dans cette partie, plusieurs critères d'estimation du mélange, locaux ou intégraux, sont proposés afin de quantifier différents aspects du jet manipulé. Ces critères ont été appliqués aux cas décrits dans le tableau 4.6. Seules les valeurs du cas F1 auparavant testé en soufflerie sont commentées dans cette section pour démontrer l'action du contrôle. L'influence de variations des conditions d'injection sera discutée dans la section 4.5.4 suivante.

4.5.3.1 Critères locaux

Le diamètre de jet équivalent $D_{eq}(X/D)$ est défini pour chaque position longitudinale X/D en intégrant la section transverse $A(X/D)$ dans laquelle la pression d'arrêt isentropique est légèrement supérieure à celle de l'écoulement externe, $p_{i\ ext} = ((1-\epsilon).p_{i0}+\epsilon.p_{i1})$. On choisit la valeur $\epsilon = 5\%$. La figure 4.21 représente la surface $p_i = p_{i\ ext}$ et la figure 4.2 montre les contours $p_i = p_{i\ ext}$ entourant la surface $A(X/D)$ que l'on vient de définir, dans le jet contrôlé (ligne noire) ainsi dans le jet de référence (ligne rouge). D_{eq} est le diamètre d'un disque de même aire : $D_{eq}(X/D) = \sqrt{4A(X/D)/\pi}$, cf. figure 4.22(a). L'évolution longitudinale du diamètre de jet équivalent $D_{eq}(X/D)$ donne une estimation de l'évasement du jet, ou plus précisément du fluide ayant un flux de quantité de mouvement élevé. Celle-ci est tracée pour différentes géométries d'injections, figures 4.24(a) et 4.24(b). On y voit clairement que le contrôle à 4 injecteurs d'allongement $\Lambda = 10.$ (cas F1) provoque un accroissement significatif du diamètre équivalent et donc accélère l'évasement du jet.

La pression d'arrêt moyenne $< p_i/p_{i0} > (X/D)$ intégrée sur la surface $A(X/D)$ définie ci-dessus pour chaque abscisse X/D permet d'estimer la dilution de l'énergie cinétique avec

[26] L'adjectif "tridimensionnel" ne s'oppose pas à l'approximation 2D effectuée précédemment mais à l'évaluation du mélange basée uniquement sur les sondages axiaux que l'on rencontre parfois.



(a) **Surface externe du jet** (b) **Surface du noyau**

FIG. 4.21 – Effet de 4 injections radiales sur la surface externe et sur le noyau du jet (Jet contrôlé, cas F1, en haut et jet de réference F0 en bas).

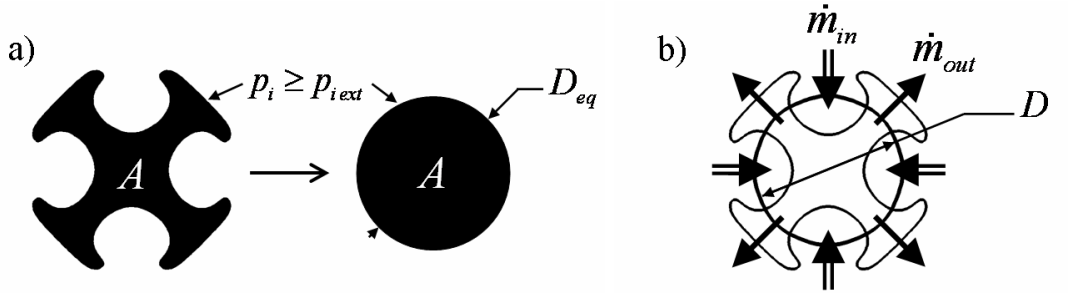


FIG. 4.22 – Illustration des définitions des critères locaux : (a) diamètre équivalent D_{eq}, (b) débit transverse entrant $\dot{m}_{in}$ et débit transverse sortant $\dot{m}_{out}$.

l'écoulement environnant plus lent. Les figures 4.24(c) et 4.24(d) montrent l'évolution de cette quantité le long du jet. Lorsque le processus de mélange est achevé, $< p_i/p_{i0} >$ tend vers 1 car la surface initiale du jet finie se dilue dans un espace d'extension infinie $< p_i/p_{i0} >= 1$. L'homogénéisation provoquée par le mélange est d'autant plus rapide que $< p_i/p_{i0} >$ décroît vers 1 rapidement. On constate que le contrôle F1(N=4,$\Lambda = 10.$) accentue la chute de pression totale moyenne, la valeur asymptotique $< p_i/p_{i0} >= 1$ étant effectivement approchée beaucoup plus tôt que dans le jet de référence.

Les variations des critères locaux D_{eq} et $< p_i/p_{i0} >$ peuvent être reliées en considérant le tube de courant issu de la lèvre de la tuyère primaire représenté sur la figure 4.23. Au fur et à mesure que $< p_i/p_{i0} >$ décroît, la tendance globale du flux surfacique de masse longitudinal est décroissante, et en raison de la conservation de la masse, la section du tube de courant matérialisant le jet a tendance à s'étendre. Le flux de masse surfacique moyen $< \rho V >$ dans une section du tube de courant dépend notamment à la fois de $< p_i >$ et de la pression statique moyenne $< p >$. Cette dernière oscille dans un jet sous-détendu autour de la pression statique extérieure p_0 (cf. chapitre 3) si bien que l'on peut considérer le comportement du flux de masse $< \rho V >$ dans les sections où $< p >= p_0$. On note alors D_{tdc} le diamètre équivalent du tube de courant. A l'infini aval, $X/D \longrightarrow \infty$, l'écoulement s'homogénéise dans le plan transverse et on a

$p_i \longrightarrow p_{i0}$, $p \longrightarrow p_0$ donc $M \longrightarrow M_0$. On rappelle ici que la température génératrice initiale du jet est égale à celle de l'écoulement extérieure $T_{i1} = T_{i0}$. En supposant que les pertes de T_i par cisaillement (cf. équation (4.51)) sont négligeables, la limite $M \longrightarrow M_0$ se traduit sur la vitesse par $V \longrightarrow V_0$, sur la masse volumique par $\rho \longrightarrow \rho_0$ et donc sur le flux surfacique de masse par $\rho V \rightarrow \rho_0 V_0$ (l'indice 0 indique les conditions à l'infini amont de l'écoulement extérieur). Finalement, à l'infini aval, $D_{tdc} \longrightarrow \sqrt{\frac{\rho_1^* V_1^*}{\rho_0 V_0}} D > D$ (la notation $.^*_1$ représente les conditions soniques initiales du jet)[27].

Dans un soucis de simplification, on considère le jet axisymétrique équivalent de mêmes sections transverses que le jet réel et on adopte un système de coordonnées cylindriques. Du fait de la diffusion de la p_i, aucune ligne iso-p_i ne permet de repérer la position du tube de courant, autrement dit $D_{eq} \neq D_{tdc}$. Plus précisément, dans la région observée, le cercle de diamètre D_{eq} ne cesse de s'étendre (cf. annexe D.7). Ainsi, à travers la surface latérale d'un tube de courant, il n'y a aucun débit masse, alors qu'à travers la surface iso-$p_i = p_{i\,ext}$, le débit masse n'est pas nul. Si on définit l'épaisseur $E = (D_{eq} - D_{tdc})/2 \geq 0$, l'accroissement de E le long du jet est représentatif du flux de masse extérieure entraînée par les effets visqueux (moléculaire et turbulent) et entrant exclusivement par la surface $p_i = p_{i\,ext}$.

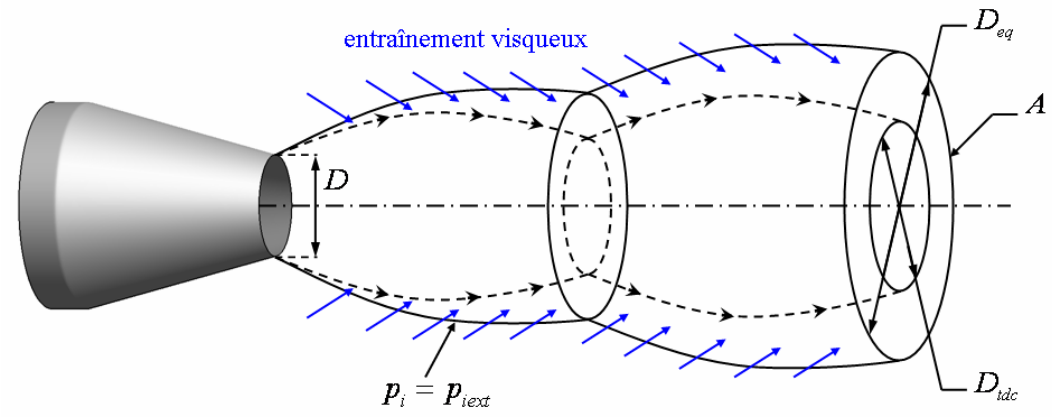


FIG. 4.23 – Schéma du tube de courant matérialisant le jet et de la surface iso-$p_i = p_{i\,ext}$.

En résumé, le diamètre équivalent $D_{eq} = D_{tdc} + 2E$ croît sous l'action de deux phénomènes consécutifs à la diffusion de p_i que l'on peut distinguer artificiellement[28]. Tout d'abord, la diffusion de p_i tend à uniformiser la p_i à l'intérieur du tube vers la valeur asymptotique p_{i0}, ce qui, en raison de la conservation de la masse dans le tube de courant, conduit à une augmentation de la section de passage de la valeur $D_{tdc} = D$ à $D_{tdc} = \sqrt{\frac{\rho_1^* V_1^*}{\rho_0 V_0}} D > D$. Ajouté à cela, l'effet d'entraînement du fluide extérieur accroît l'épaisseur de la région de fluide compris entre les diamètres D_{tdc} et D_{eq} par la surface iso-$p_i = p_{i\,ext}$ (dans la phase croissante de D_{eq}).

Débits de masse transverses $\dot{m}_{in}(X/D)$ et $\dot{m}_{out}(X/D)$. Afin d'évaluer l'entraînement transverse macroscopique, dû à la fois à la vitesse induite par les tourbillons et à l'entraînement turbulent, considérons un cylindre s'appuyant sur le col circulaire de la tuyère (diamètre D) et d'axe $(O, \overrightarrow{X})$. En intégrant le flux de masse entrant ($\rho u_r < 0$) sur le contour circulaire à chaque position longitudinale X/D, on obtient le débit masse injecté dans le jet par unité de

[27] Pour simplifier la formulation, on suppose ici que la ligne sonique est plane, ce qui ne change rien aux conclusions.

[28] Cette distinction est tout aussi artificielle que de considérer le tube de courant sur le champ moyen, puisque à chaque instant, cette surface est traversée par le flux de masse turbulent.

longueur longitudinale, $-\dot{m}_{in}(X/D) < 0$, cf. figure 4.22(b). De la même manière, en intégrant le flux de masse sortant ($\rho u_r > 0$), on obtient le débit de masse éjecté vers l'extérieur du jet, $\dot{m}_{out}(X/D) > 0$. Ces quantités divisées par le débit de sortie du jet sont représentées figures 4.24(e) et 4.24(f). Concernant le jet de référence, comme l'écoulement est axisymétrique, soit le débit entrant $\dot{m}_{in}(X/D)$ soit le débit sortant $\dot{m}_{out}(X/D)$ est nul dans chaque section X/D. Ceci n'est plus le cas dans les jets contrôlés, comme le montre explicitement la section schématisée figure 4.22(b). Contrairement aux critères précédents, les débits transverses caractérisent les conditions préliminaires au mélange. En effet, les mouvements macroscopiques de fluide entrant et sortant induits par les tourbillons longitudinaux étirent la surface de transfert et alimente les gradients de l'écoulement. Suite à la discussion sur la phénoménologie du mélange (cf. section 4.4.1), le débit entrant dans le cylindre de diamètre D agit comme un macro-mélangeur à l'échelle d'observation $l = D$ du jet puisqu'il tend à ramener la pression totale moyenne $< p_i >$ à l'intérieur du cylindre vers celle de l'écoulement environnant p_{i0}. Ainsi, pour améliorer le mélange, il est essentiel d'augmenter les débits transverses. De plus, la méthode de calcul RANS étant par construction une modélisation fonctionnelle [217], elle est plutôt destinée à reproduire le champ moyen que les mécanismes turbulents plus fins. Ceci justifie l'utilisation d'un critère construit sur des transferts macroscopiques de fluide, même si l'influence de l'entraînement turbulent sur la dynamique des CVP a été démontrée [131, 121, 262]. Les débits transverses calculés pour le cas F1(N=4,Λ = 10.) montrent bien que d'une part, les tourbillons longitudinaux provoquent à la fois l'injection de fluide extérieur dans le jet primaire et l'éjection de fluide du jet vers l'extérieur, et d'autre part que ces débits transverses dépassent largement le débit transverse dû aux oscillations de pression internes au jet primaire. De plus, on constate que le débit sortant est beaucoup plus élevé que le débit entrant dans la zone des injections radiales ce qui signifie que le mouvement longitudinal du jet est redistribué radialement vers l'extérieur. Par contre, à partir de $X/D \approx 1.0$, les débits transverses entrants et sortants tendent à s'équilibrer, ce qui supporte l'hypothèse d'un brassage bidimensionnel établi des tourbillons longitudinaux dans le champ lointain.

4.5.3.2 Critères intégraux

Les critères qui viennent d'être définis sont locaux à chaque section transverse du jet et permettent de suivre la progression du processus de mélange vers l'aval. Afin de pouvoir comparer plus directement les dispositifs de contrôle, on établit dans cette section des critères intégraux représentatifs de l'augmentation du mélange sur l'ensemble du jet inclus dans le domaine d'observation qui s'étend de X/D=0 à X/D=9.

Volume du jet. Le tableau 4.7 fournit ces grandeurs intégrées de $X/D = 0$ à 9. Dans cette plage d'abscisses, le "volume du jet" est défini comme le volume de fluide tel que $p_i \geq p_{i\,ext} = ((1-\epsilon).p_{i0} + \epsilon.p_{i1})$, p_{i0} et p_{i1} étant respectivement la pression totale extérieure et la pression totale initiale du jet et $\epsilon = 5\%$. Ce volume est représenté figure 4.21(a) dans le cas contrôlé F1 pour lequel on mesure un accroissement de 63% du volume du jet. Ce critère représente globalement l'expansion du jet de la même manière que D_{eq} le fait localement.

Aire du jet. L'aire de la surface externe au volume du jet, c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $p_i = p_{i\,ext} = ((1-\epsilon).p_{i0} + \epsilon.p_{i1})$ avec $\epsilon = 5\%$, est nommée "aire du jet" dans le tableau 4.7. Cette surface est visible figure 4.21(a) pour le jet contrôlé à 4 injecteurs (cas F1). Toutes les valeurs tabulées sont relatives à l'aire du jet de référence. La surface externe du jet situe approximativement le lieu où la couche de cisaillement commence à transférer la quantité de mouvement du jet vers l'extérieur. L'activation du contrôle (cas F1) étire cette surface d'échange à une valeur plus de deux fois supérieure à celle du jet de référence.

Facteur de forme. Dans le but d'estimer la déformation de la frontière du jet, on déduit tout d'abord une section de jet moyenne $\overline{A}$ et une longueur de contour moyenne $\overline{L}$ en divisant respectivement le volume du jet et l'aire du jet par la longueur de sondage $9D$. Ensuite, on définit un "facteur de forme" $SF = \overline{L}^2/(4\pi\overline{A})$. Sa valeur minimum $SF = 1$ est obtenue pour un jet de section circulaire. Pour un contour fractal, $SF = \infty$. Ainsi, le facteur de forme SF quantifie l'étirement de la surface d'échange dû uniquement au changement de forme du jet axisymétrique[29]. Par exemple, on voit, tableau 4.7, que l'injection radiale (cas F1) permet de tripler la surface d'échange à iso-volume de jet.

Pression totale moyenne. Le tableau 4.7 donne aussi la pression totale moyennée dans le volume du jet. Ceci fournit une estimation intégrale des capacités de diffusion des dispositifs mélangeurs. Toutes les quantités reportées dans le tableau 4.7 sont adimensionnées par les valeurs correspondantes du jet de référence. Ainsi, pour le jet contrôlé, on note une diminution de la pression totale d'environ 20% par rapport au jet non-contrôlé.

Volume du noyau. La présence de chocs à l'intérieur du jet ne permet pas de caractériser le volume du cône potentiel par un domaine où $p_i \geq p_{i\,ext} = ((1-\epsilon).p_{i0} + \epsilon.p_{i1})$ avec $\epsilon = 95\%$ qui serait la contrepartie du volume du jet défini plus haut. On peut toutefois remarquer qu'une telle définition serait tout à fait appropriée pour un jet subsonique. A la place, on définit le "noyau du jet" par l'ensemble des points tels que $p_i \geq p_{i\,core} = (p_{i0} + p_{i1})/2$. Ce domaine s'étend grossièrement de l'axe du jet à la moitié intérieure de la couche de mélange. La figure 4.21(b) montre le noyau du jet contrôlé par 4 injecteurs (cas 3F). Le volume du noyau quantifie l'extension spatiale des hauts niveaux d'énergie mécanique contenue dans le jet. Un dispositif mélangeur doit diffuser et dissiper l'énergie cinétique initiale du jet et donc diminuer le volume du noyau. C'est ce que l'on observe pour le dispositif à 4 injecteurs (cas F1) qui réduit le volume du noyau de moitié.

Les débits transverses globaux $\dot{M}_{in}$ et $\dot{M}_{out}$ sont obtenus par intégration des débits transverses locaux de $X/D = 0$ à 9. Les valeurs écrites dans le tableau 4.7 ont été soustraites par les débits transverses correspondant du jet de référence puis adimensionnées par le débit de sortie du jet.

En résumé, les objectifs des dispositifs de contrôle en terme de critères de mélange intégraux sont : par rapport au jet de référence, le dispositif doit diminuer l'extension spatiale de la forte énergie mécanique contenue initialement dans le jet, c'est-à-dire minimiser le volume du noyau en accélérant la diffusion de cette énergie qui se traduit par une augmentation du volume du jet et une diminution de la pression totale moyenne. Ce résultat est obtenu en multipliant les transferts turbulents par une extension de la surface du jet et une amplification des débits transverses. De plus, le facteur de forme caractérisant la surface d'échange par rapport au volume à diluer doit être maximisé. Toutes ces caractéristiques ont été observées lorsque 4 injecteurs radiaux (configuration F1) sont activés, ce qui justifie les capacités d'hyper-mélangeur attribuées à cette technologie de contrôle. Dans la partie suivante, des variations sur les conditions d'injection sont évaluées au moyen des critères de mélange auxquels sont ajoutés deux critères supplémentaires décrits ci-dessous.

[29]En termes mécaniques, on peut dire que le facteur de forme mesure le résultat du cisaillement (partie déviatrice) du tenseur des déformations dans le plan (Y,Z) indépendamment de la dilatation (partie sphérique).

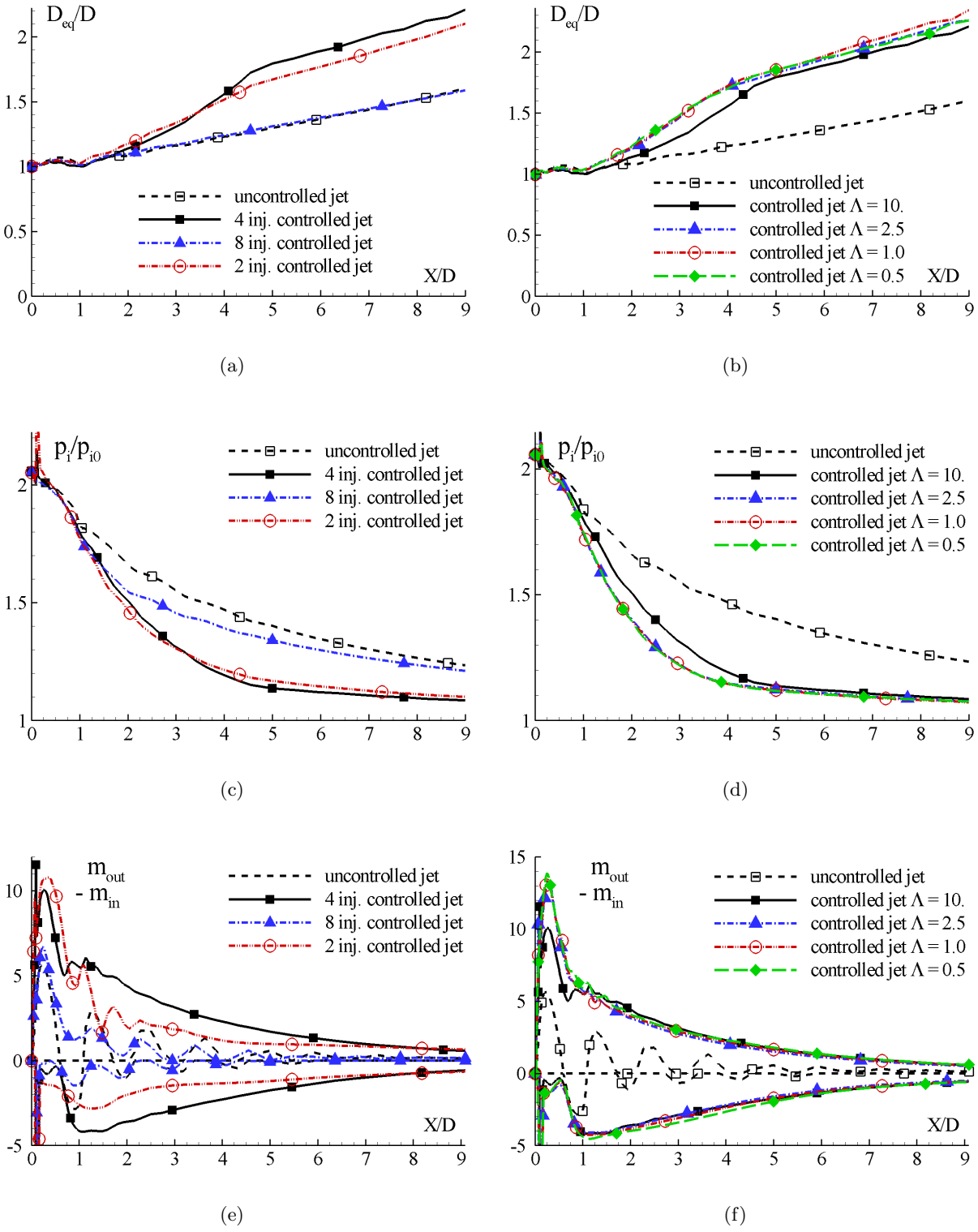


FIG. 4.24 – Effet du nombre d'injecteurs actifs (colonne de gauche) et de leur allongement (colonne de droite) sur (a,b) le diamètre de jet équivalent, (c,d) la pression totale moyenne, (e,f) les débits transverses.

Case number	F0	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9	C0	C1	C2
X_c/D	1.	0.54	0.73	0.95	0.14	0.43	0.45	0.43	0.56	0.56	1.	0.63	0.63
core volume	1.	0.49	0.73	0.80	0.45	0.40	0.40	0.39	0.48	0.49	1.	0.51	0.51
jet volume	1.	1.63	1.21	0.92	1.50	1.78	1.83	1.80	1.63	1.62	1.	1.30	1.28
jet area	1.	2.31	1.49	1.21	1.75	2.26	2.37	2.35	2.34	2.41	1.	2.13	2.07
shape factor	1.	3.23	1.81	1.56	2.02	2.85	3.02	3.04	3.32	3.54	1.	3.46	3.31
mean P_i	1.	0.82	0.91	0.96	0.84	0.80	0.79	0.79	0.82	0.82	1.	0.85	0.85
$\dot{M}_{in}$	0.	1.00	0.23	0.10	0.66	0.97	1.04	1.11	0.97	0.96	0.	0.56	0.50
$\dot{M}_{out}$	0.	1.15	0.30	0.13	0.81	1.13	1.19	1.26	1.13	1.13	0.	0.60	0.54
$\Delta T(\%)$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0.	-1.8	12.3
TL (%)	0.	3.05	0.22	0.66	1.87	3.20	3.33	3.59	2.96	2.75	0.	2.17	2.30

TAB. 4.7 – Critères intégraux d'évaluation du mélange (quantités adimensionnées par les cas de référence F0 et C0 respectivement pour les jets froids et chauds).

4.5.3.3 Critères supplémentaires

Critère thermique. Concernant les jets chauds, l'effet du contrôle sur le champ de température est évalué par la quantité $\tau = T^4 - T_0^4$ intégrée sur le volume extérieur qui est visible en visée latérale par rapport à l'arrière-corps, autrement dit sans le volume de fluide contenue à l'intérieur de la tuyère secondaire. T_0 est la température extérieure à l'infini amont et l'exposant 4 est inspiré de la loi de rayonnement de Stefan. On définit le critère thermique par $\Delta T = (\tau - \tau(\text{ref}))/\tau(\text{ref})$ où τ est calculé dans le jet considéré and $\tau(\text{ref})$ est la valeur du jet de référence (cas 11). Si $\Delta T < 0$, la variation de température du jet contribuera à réduire la signature thermique. Le critère thermique ΔT n'a pas été calculé pour les jets froids ($T_{i1} = T_{i0}$) puisque la température statique dans le jet est alors plus faible qu'à l'extérieur.

Perte de poussée. Les poussées nettes[30] F_T ont été calculées en intégrant le flux de dynalpie relative ($\rho u^2 + p - p_0$) sur la section de sortie de l'arrière-corps (voir figure 4.25). La perte de poussée est alors définie par $\text{TL} = (F_T(\text{ref}) - F_T)/F_T(\text{ref})$. Par ailleurs, on a constaté que les variations de pression appliquée sur la paroi externe de l'arrière-corps ("traînée aérodynamique externe" sur le schéma) ne modifient pas significativement l'estimation de la poussée, c'est pourquoi elles n'ont pas été prises en compte, $F_T = F_1$. De plus, les forces de viscosité ont été négligées pour l'évaluation de la poussée nette.

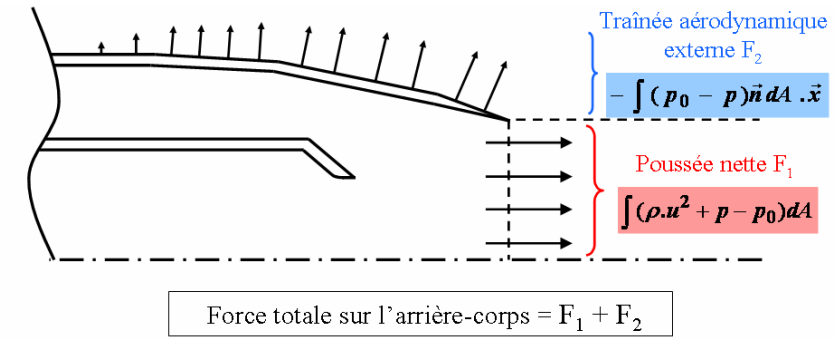


FIG. 4.25 – Schéma des forces de poussée calculées.

[30] La poussée nette est la force axiale qui s'exercerait sur la maquette si la pression statique externe était constante égale à p_0.

4.5.4 Influence des paramètres d'injection sur le mélange du jet

4.5.4.1 Effet de la pression totale des injections

La comparaison des cas F1 et F2 (cf. tableau 4.6) illustre l'effet d'une variation de la pression génératrice p_{i3}. Comme prévu, tous les critères de mélange montrent que le mélange est diminué lorsque p_{i3} est réduite. La dynamique tourbillonnaire bidimensionnelle discutée dans la section 4.3.2.3 dépend uniquement des paramètres $(N, b_0 = R\Delta\theta, \Gamma_{\mathrm{CVP}})$. Lorsque l'on passe du cas F1 à F2, seule la pression génératrice p_{i3} est diminuée donc seule la circulation résultante des CVP est réduite. C'est bien ce que l'on observe sur la courbe des circulations, figure 4.26. On note au passage que le rapport des circulations maximales $\Gamma_{\max}(F2)/\Gamma_{\max}(F1)$ est du même ordre que le rapport des pressions d'injection $\mathrm{SPR}(F2)/\mathrm{SPR}(F1) \approx 1/2$. Dans l'approximation 2D, l'évolution longitudinale des tourbillons longitudinaux est assimilable à une progression dans le temps. En adimensionnant le temps t par $b_0^2/\Gamma_{\mathrm{CVP}}$, $t^* = t/(b_0^2/\Gamma_{\mathrm{CVP}})$, on voit bien que les systèmes tourbillonnaires des deux cas F1 et F2 devraient suivre la même trajectoire, la position radiale minimale étant atteinte à $t^*_{\min} = t_{\min}\Gamma_{\mathrm{CVP}}/b_0^2$. On devrait donc avoir :

$$\begin{aligned} &\frac{t_{\min}(F2)\Gamma(F2)}{b_0^2} = \frac{t_{\min}(F1)\Gamma(F1)}{b_0^2} \text{ et } \Gamma(F2) \leq \Gamma(F1) \\ &\Rightarrow t_{\min}(F2) \geq t_{\min}(F1) \end{aligned} \tag{4.55}$$

et les tourbillons longitudinaux devraient atteindre la position minimale $R_{G\,\min}/D$ plus tard (i.e. $X_{min}/D = t_{\min}U_0/D$ plus loin) dans le cas F2 que dans le cas F1. Or on constate sur graphe $R_G/D(X/D)$, figure 4.26, que la position radiale minimale est plus grande dans le cas F2 et qu'elle arrive plus tôt. La dynamique 2D non-visqueuse est donc dans ce cas clairement insuffisante pour décrire quantitativement la déformation du jet. La courbe du rayon équivalent déduit du diamètre équivalent du jet de référence F0, D_{eq}/D, a été ajoutée sur ce graphe. La comparaison de ces courbes permet de supposer que dans le cas F2, la circulation des CVP étant initialement faible, elle s'épuise vite par effet visqueux et devient incapable de prolonger la phase de pénétration. On peut supposer que les CVP s'appuyant sur la surface du jet (par le biais de la vitesse induite) sont alors essentiellement repoussés par son évasement.

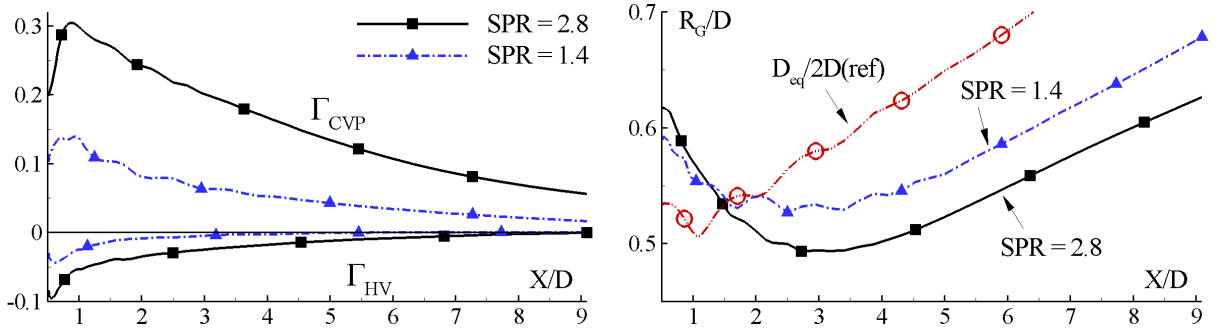
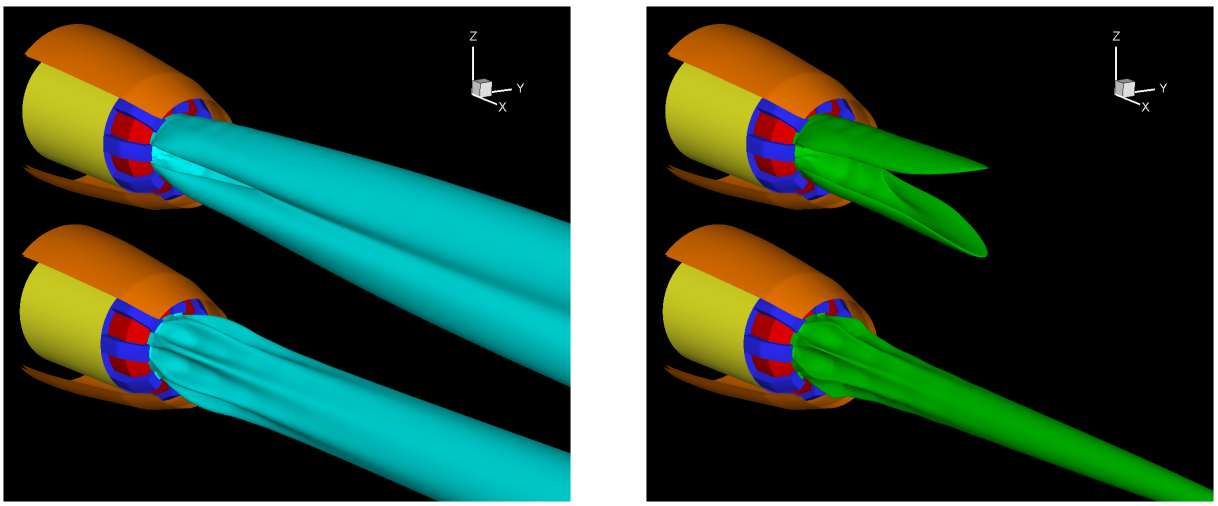


FIG. 4.26 – Effet de la pression totale d'injection SPR=p_{i3}/p_{i1} sur la circulation Γ et la position R_G des tourbillons longitudinaux.

4.5.4.2 Effet du nombre d'injections N

L'effet du nombre d'injecteurs actifs N est discuté en comparant les cas F1, F3 et F4 (cf. tableau 4.6). La déformation du noyau ($p_i = p_{i\,core}$) de ces jets est visible sur les figures 4.21(b) et 4.27(b). Dans les trois cas, on peut noter que l'injection a une forte influence sur le champ moyen en zone proche. De plus, les distortions provoquées par 2 ou 4 injecteurs actifs se prolongent loin en aval, alors que l'action de 8 injecteurs actifs semble s'atténuer rapidement le long du jet. Ces résultats RANS proviennent de la diffusion turbulente des tourbillons longitudinaux : dans les sections transverses figure 4.2 et 4.28, on voit en effet que la vorticité persiste plus longtemps avec 2 ou 4 injecteurs qu'avec 8 injecteurs.



(a) **Surface externe du jet** (b) **Surface du noyau**

FIG. 4.27 – Effet de 2 (en haut) et 8 (en bas) injections radiales sur la surface externe et sur le noyau du jet.

Ce phénomène est aussi visible sur les figures 4.24(a) et 4.24(c). Si l'on considère la décroissance de la pression totale moyenne sur la figure 4.24(c), on peut remarquer que le dispositif à 8 injecteurs est comparable aux deux autres jusqu'à approximativement $X/D = 2$, puis devient progressivement inactif puisqu'il tend à donner la même évolution de $< p_i/p_{i0} >$ que le jet non-contrôlé. Ceci est encore plus frappant lorsque l'on regarde l'expansion du jet, figure 4.24(a) : le diamètre équivalent du jet contrôlé par 8 injecteurs suit la même croissance que le jet de référence. Pour le contrôle à 2 injecteurs, on peut distinguer deux régimes de croissance du diamètre équivalent, un premier rapide et un second plus lent, comme dans le cas à 4 injecteurs. On note toutefois que la rupture de pente est plus prononcée dans le cas à 4 injecteurs. La transition se produit à environ $X/D = 4.5$, c'est-à-dire bien après la transition à $X/D = 3.0$ entre la phase de pénétration et la phase de divergence des tourbillons longitudinaux.

Sur la base des critères globaux rassemblés dans le tableau 4.7, on peut dire que le jet manipulé par 2 injecteurs possède un noyau plus restreint que celui à 4 injecteurs en raison d'une pénétration plus profonde des jets secondaires (voir vues 3D et sections transverses). Ceci s'explique par le fait que les tourbillons de 2 CVP interagissent plus tard que les tourbillons de 4 CVP. En effet, plus il y a de doublets ayant un écartement fixé b_1 répartis sur la périphérie du jet, plus l'écartement inter-doublet b_2 est réduit, et la transition entre les phases de pénétration et de divergence se produisant pour $b_2 \approx b_1$ a donc lieu à un rayon $R_{G\,\min}$ d'autant plus grand. La

configuration à 2 injecteurs est celle qui retarde le plus cette transition (au sens de la progression radiale). En effet, la position radiale minimale atteinte par les tourbillons est de $R_{G\,\min}/D = 0.32$ alors qu'elle n'est que de $R_{G\,\min}/D = 0.49$ avec 4 injecteurs (voir figure 4.29). A l'opposé, dans la configuration à 8 injecteurs, la distance inter-doublet b_2 est initialement plus courte que l'écartement b_1 du doublet créé au niveau de chaque injection, si bien que la phase de pénétration est inexistante et que les tourbillons forment immédiatement les nouveaux couples pour effectuer la phase d'éclatement.

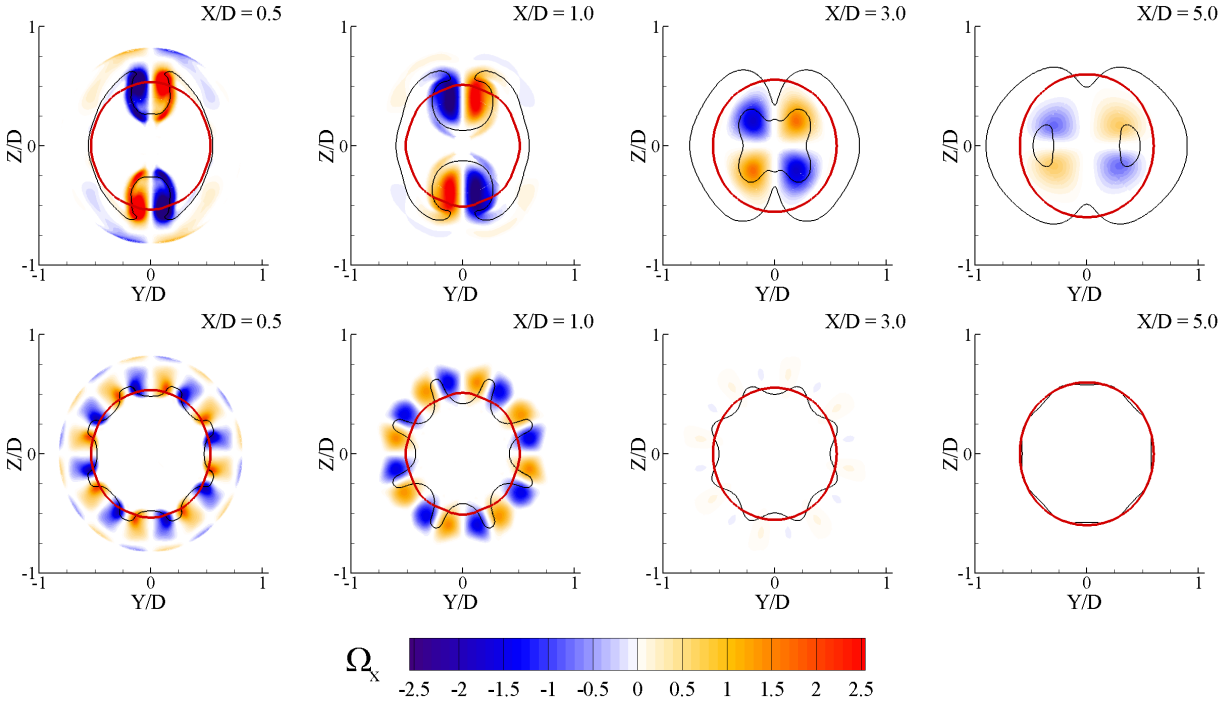


FIG. 4.28 – Contours de vorticité longitudinale adimensionnée pour les cas à 2 (en haut) et 8 injecteurs (en bas). Ligne $p_i/p_{i0} = 1.05$ jet controlé (ligne fine noire), ligne $p_i/p_{i0} = 1.05$ jet de référence (ligne épaisse rouge).

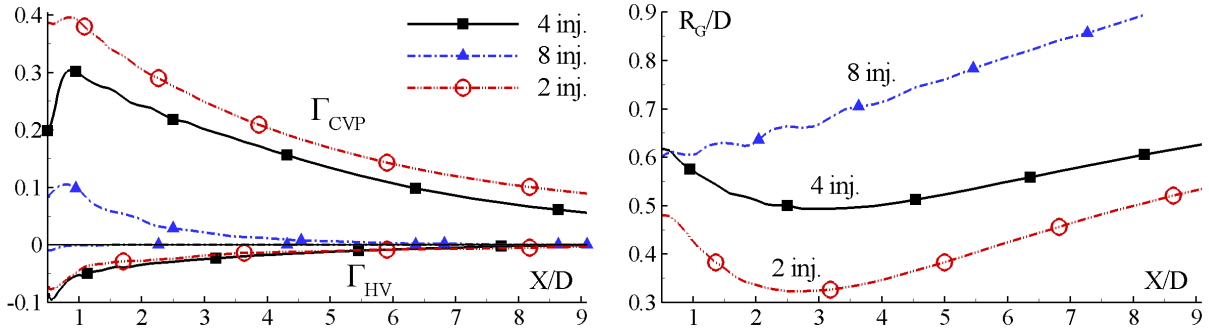


FIG. 4.29 – Effet du nombre d'injecteurs N sur la circulation Γ et la position R_G des tourbillons longitudinaux.

Ajouté à cela, on rappelle que comme le débit d'injection $Q_3 \sim Np_{i3}$ est conservé entre les trois configurations F4(N=2), F1(N=4) et F3(N=8), la pression totale d'injection p_{i3} est à chaque fois divisée par 2, et la circulation des CVP est réduite en conséquence. La circulation des CVP tracée figure 4.29 corrobore cette assertion, même si la circulation maximale ne s'étage

pas dans les mêmes proportions que le rapport des pressions d'injection. Ces courbes montrent qualitativement la plus faible circulation initiale du dispositif à 8 injecteurs par rapport aux deux autres ainsi que son épuisement plus rapide. Ceci explique que la phase de divergence de la configuration F3(N=8) ne soit pas très spectaculaire, les tourbillons étant rapidement transportés par l'évasement du jet (voir la similitude entre D_{eq}/D, figure 4.24(a), et R_G/D, figure 4.29), comme dans le cas F2(faible p_{i3}) discuté plus haut. Enfin, pour revenir au cas à deux injecteurs (F4), on voit que les tourbillons sont assez puissants pour qu'un raisonnement essentiellement non-visqueux s'applique à la comparaison des cas (F1,N=4,SPR=2.8) et (F4,N=2,SPR=5.6) : avec $\Gamma(F4) \geq \Gamma(F1)$, on voit bien que la transition dans le cas F4 arrive avant celle du cas F1 $X_{\min}(F4) \leq X_{\min}(F1)$, cf. figure 4.29.
Dans le tableau 4.7, une longueur de cône potentiel X_c est définie comme l'abscisse où la pression totale sur l'axe commence à chuter, c'est-à-dire où la couche de mélange extérieure atteint l'axe du jet. De nombreuses études e.g. [219, 11] évaluent souvent l'efficacité d'un dispositif de mélange par un sondage de la pression totale sur l'axe du jet (ou d'une quantité apparentée comme la pression Pitot, la pression statique, le nombre de Mach ou la vitesse). Cela a été fait dans l'expérience exploitée ici. Cependant, ce critère n'est pas approprié pour caractériser l'augmentation du mélange d'un jet fortement déformé comme c'est le cas de la configuration à 2 injecteurs (cas F4), voir haut de la figure 4.27. En effet, comme l'ont souligné des études antérieures sur des tuyères munies de tabs [24, 219], dans cette configuration, le jet primaire est séparé en deux portions persistantes à forte énergie, voir les deux lobes à haute p_i figure 4.27(b), alors que la longueur X_c/D est réduite de manière spectaculaire en comparaison aux autres cas (cf. tableau 4.7).

De plus, le tableau 4.7 montre que même si les débits de masse transverses (entrants ou sortants) sont plus élevés au début du jet contrôlé par 2 injecteurs, voir figure 4.24(c), les débits intégraux sont plus forts avec le dispositif à 4 injecteurs. Ceci indique qu'un système de doublets distribués transfère plus de fluide latéralement qu'un système concentré, bien que l'exemple de la configuration à 8 injecteurs montre que à la fois l'avancée du point de transition (pénétration-divergence) et la diffusion limitent le nombre de tourbillons sur la périphérie du jet.

Pour résumer, le dispositif à 8 injecteurs (cas F3) est le moins efficace, pour ne pas dire inefficace ; celui à 4 injecteurs (cas F1) est le plus efficace, celui à 2 injecteurs (cas F4) menant à des performances proches. Cependant, la perte de poussée causée par le contrôle sur 2 injecteurs (TL=1.87%) est réduite de 40% par rapport à celle obtenue avec 4 injecteurs (TL=3.05%).

4.5.4.3 Effet de l'allongement des injections

Les cas F1, F5, F6, F7 permettent d'étudier l'influence de l'allongement $\Lambda = R\Delta\theta/\Delta x$ des orifices d'injection, où Δx et $R\Delta\theta$ sont respectivement les dimensions longitudinale et transverse de chaque orifice. Tous les critères locaux et intégraux s'accordent sur le fait que plus l'allongement est réduit, plus le mélange est amplifié : pénétration plus rapide et plus profonde (figure 4.24(b)) et volume du noyau, tableau 4.7), mélange plus rapide de la pression totale (graphe 4.24(d)), volume du jet et pression totale moyenne, tableau 4.7), débits transverses initiaux et intégrés plus forts (figure 4.24(f) et tableau 4.7).

Pour comprendre l'effet de l'allongement des injections sur le processus d'hyper-mélange du point de vue du champ moyen, on doit avant tout savoir comme il affecte la pénétration de chaque injection radiale. En ce qui concerne les jets dans un écoulement transverse, des études expérimentales [105, 251, 121] ont montré que la CVP créée par les injections à faibles allongements pénètrent plus en profondeur que celles à grand allongement. Pour expliquer comment

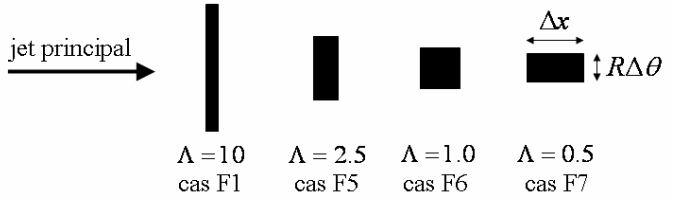


FIG. 4.30 – Les différents allongements d'orifice d'injection testés.

les propriétés de la CVP sont influencées par l'allongement, il est nécessaire de savoir comment la CVP est générée. Nous avons vu que cette question n'est pas résolue à l'heure actuelle (cf. section 4.3.1). Le challenge est d'expliquer comment la vorticité intégrée dans la couche de cisaillement très fortement déformée est orientée ou générée en progressant de l'orifice d'injection vers l'aval. De plus, les forts effets de compressibilité isentropiques et non-isentropiques (chocs) rendent le problème encore plus complexe. Son analyse poussée dépasse largement le cadre de cette étude.

En revanche, on peut remarquer que la loi gouvernant l'évolution de la vorticité est incluse dans le bilan de quantité de mouvement. Celle-ci est partiellement résolue dans les simulations RANS où la turbulence est modélisée. Ceci explique pourquoi les CVP peuvent être reproduits par des calculs de type RANS [246] et pourquoi l'influence de l'allongement a pu être restituée par ces méthodes [87]. Toutefois, les simulations RANS ont du mal à fournir des résultats quantitatifs à cause de la modélisation de la turbulence. Afin d'indiquer comment les conditions d'injection peuvent affecter les propriétés consécutives de la CVP, nous allons faire l'analogie entre la force D_3A_3 appliquée par chaque injection radiale sur le jet primaire et la force de portance L exercée sur une aile immergée dans le même écoulement et dont la corde et l'envergure sont respectivement $c = \Delta x$ et $b_0 = R\Delta\theta$, voir figure 4.31.

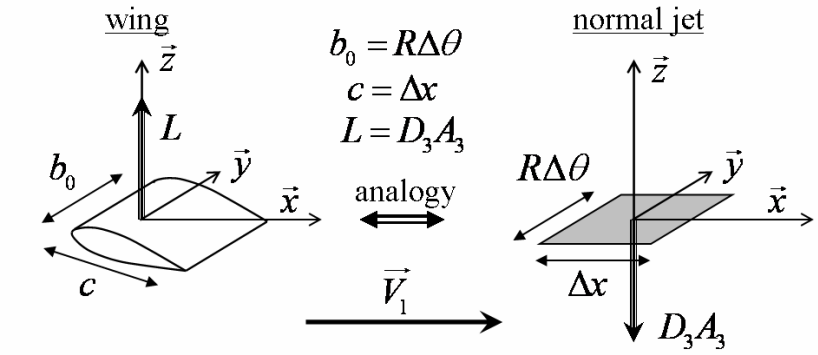


FIG. 4.31 – Analogie de la force appliquée par un jet sur l'écoulement transverse et la force de portance d'une aile équivalente.

Si Γ_0 est la circulation maximale autour de l'aile équivalente, on peut supposer que la distribution de circulation s'écrit $\Gamma(y) = \Gamma_0.f(y/b_0)$ avec $f(0) = 1$ et $f(\pm 1/2) = 0$. Si l'on néglige les effets visqueux, Γ_0 est aussi la circulation de chacun des deux tourbillons de sillage formé par l'enroulement de la nappe tourbillonnaire en aval de l'aile. Si ρ_1 et V_1 représentent respectivement la masse volumique et la vitesse de l'écoulement incident sur l'aile équivalente, alors L vérifie [10] :

$$L = \rho_1 V_1 \int_{-b_0/2}^{+b_0/2} \Gamma(y)dy = \rho_1 V_1 K \Gamma_0 b_0 \tag{4.56}$$

avec $K = \int_{-1/2}^{+1/2} f(\xi)d\xi$. Par exemple, pour une aile elliptique ou en d'autre termes pour une vitesse induite constante sur l'aile équivalente, on a $K = \pi/4$. En égalant D_3A_3 avec L, on obtient une expression adimensionnée de la circulation de la CVP :

$$\frac{\Gamma_0}{V_1 b_0} = \frac{1}{K}\frac{D_3}{\rho_1 V_1^2}\frac{1}{\Lambda} \tag{4.57}$$

En supposant que chaque jet radial est isolé, l'impulsion introduite initialement par chaque injecteur est conservée en aval et l'écartement de la CVP résultante est donc $b = K.b_0$. Chaque tourbillon alors considéré comme 2D et concentré induit une vitesse $V_i = \Gamma_0/(2\pi b)$ sur l'autre tourbillon. Sous ces hypothèses, la vitesse de pénétration de chaque doublet est

$$\frac{V_i}{V_1} = \frac{1}{2\pi K^2}\frac{D_3}{\rho_1 V_1^2}\frac{1}{\Lambda} \tag{4.58}$$

Cette expression indique que réduire l'allongement Λ, en gardant tous les autres paramètres constants, augmente la vitesse de pénétration et donc aussi les gradients de vitesse. Ceci constitue un modèle phénoménologique très simplifié qui ne prend notamment pas en compte l'intrication des CVP avec la couche de cisaillement. Ce modèle suggère juste quelle peut être l'influence des conditions d'injection sur le potentiel de pénétration (car on a négligé les pertes visqueuses) du régime assimilé comme 2D.

Toujours en raisonnant simplement, on peut schématiser l'effet de l'allongement de l'actionneur (au sens de "quelque chose qui produit une force sur l'écoulement") sur les caractéristiques circulation-écartement de la CVP en aval par les dessins de la figure 4.32. Tout d'abord, on considère un actionneur élémentaire d'allongement $\Lambda_e = b_e/c_e \approx 1$ (dessin de gauche) provoquant une CVP de circulation Γ et d'écartement b. En combinant plusieurs actionneurs élémentaires, on peut construire un actionneur à grand allongement (dessin du milieu) et un actionneur à faible allongement (à droite). En admettant que l'on peut appliquer le principe de superposition[31], on comprend immédiatement (voir figure 4.32) que la superposition de k actionneurs dans la direction transversale cumule les écartements $b \to kb$ sans changer la circulation Γ en aval, alors que la superposition de k actionneurs dans la direction transversale cumule les circulations $\Gamma \to k\Gamma$ sans changer l'écartement b en aval. Bien que la linéarité du processus de formation des CVP est fortement contestable, on constate que cette schématisation simple donne les bonnes tendances. Autrement dit, à impulsion fixée $I_1 = \Gamma b$, un grand allongement favorise b alors qu'un faible allongement favorise Γ.

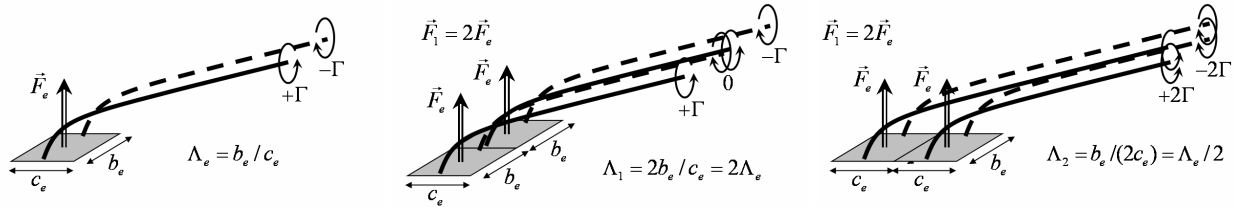


FIG. 4.32 – Schématisation de l'effet de l'allongement sur la ciculation et l'écartement du doublet en aval.

Les mécanismes essentiels du processus d'augmentation du mélange dans le "régime 2D" sont les phases de pénétration et de divergence. On retrouve naturellement ces phases dans

[31] Plus précisément, cela revient à supposer que les caractéristiques de la CVP sont des fonctions linéaires des conditions d'injection.

les sections transverses des cas F5, F6 et F7. La vorticité longitudinale adimensionnée $\Omega_x = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{V}.\overrightarrow{X}/(2a^*/D)$ (a^* vitesse au col du primaire, D son diamètre) est tracée figure 4.33 dans certaines sections des cas extrêmes testés : F1($\Lambda = 10.$) et F7($\Lambda = 0.5$). Les caractéristiques des tourbillons longitudinaux sont tracées figure 4.34. On vérifie que pour les actionneurs à faible allongement, la circulation Γ_{CVP}, figure 4.34(a), est plus élevée et que l'évolution de la position radiale R_G, figure 4.34(b) indique une vitesse de pénétration plus rapide. De plus, on constate que les doublets générés à partir des injecteurs à faible allongement pénètrent plus profondément (voir R_G figure 4.34(b)) grâce à un écartement b_1 plus étroit (cf. figure 4.34(c)). En outre, il est intéressant de noter, figure 4.34(a), que pour les 4 allongements testés, le maximum de la circulation marquant la fin de la formation des tourbillons est atteint à la même abscisse $X/D \approx 1$.

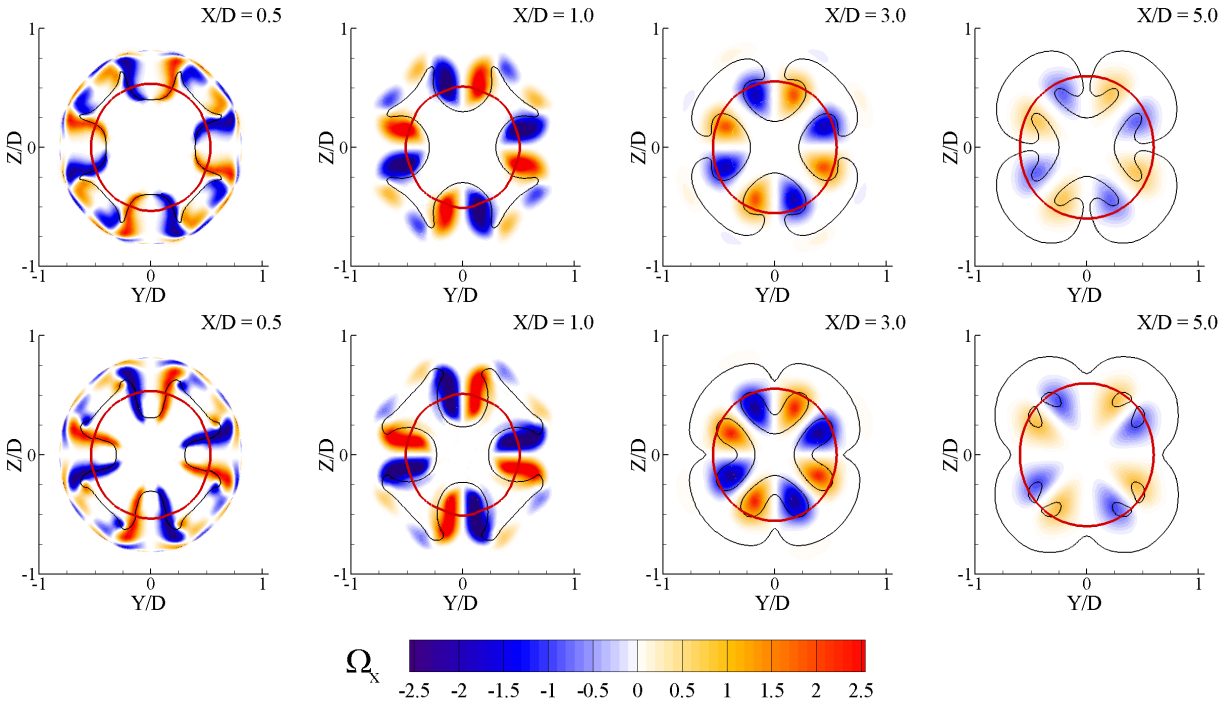
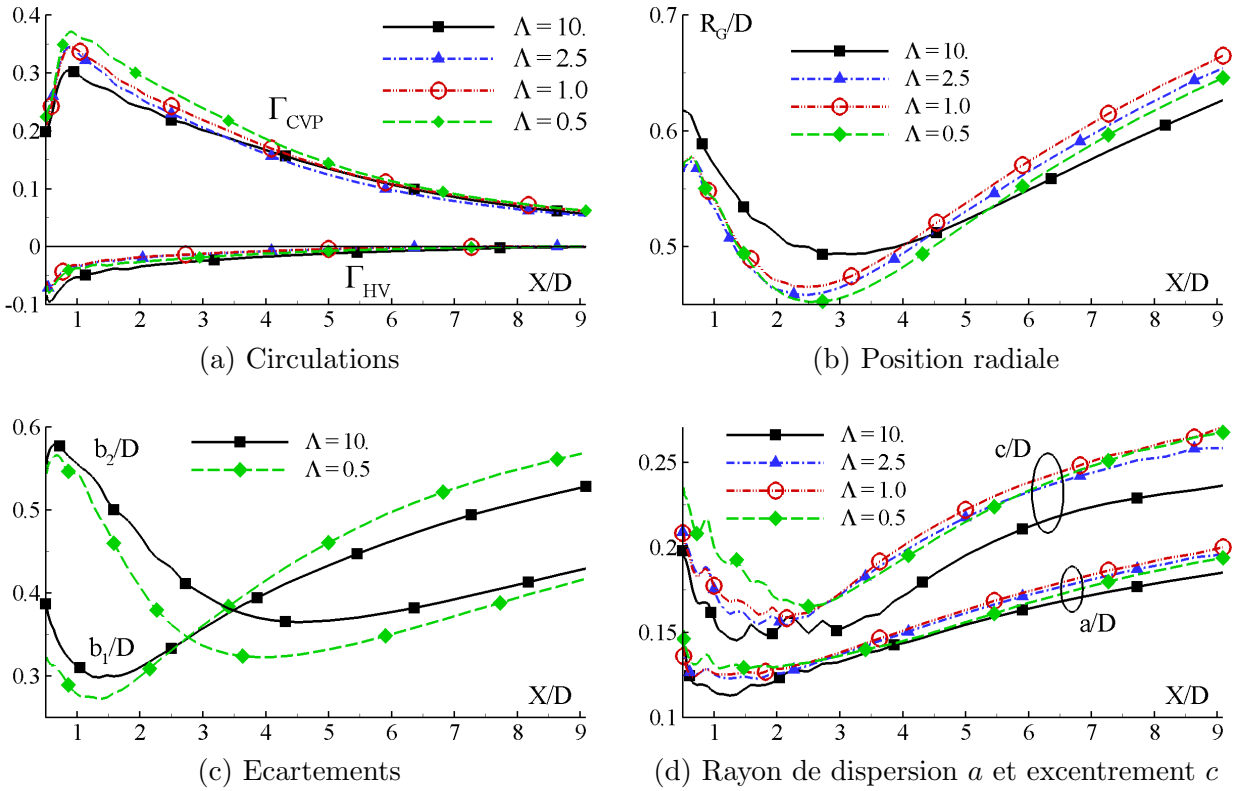


FIG. 4.33 – Contours de vorticité longitudinale adimensionnée pour les allongements $\Lambda = 10.$ (en haut) et $\Lambda = 0.5$ (en bas). Ligne $p_i/p_{i0} = 1.05$ jet controlé (ligne fine noire), ligne $p_i/p_{i0} = 1.05$ jet de référence (ligne épaisse rouge).

Cependant, l'observation des critères de mélange (cf. figures 4.24(b),4.24(d),4.24(f)) révèle que le bénéfice apporté par une réduction de l'allongement arrive à saturation vers $\Lambda = 1$. On peut supposer que pour les faibles allongements, le rapport a/b devenant assez élevé, la diffusion entre les tourbillons amortit le potentiel de pénétration des jets radiaux. De plus, la réduction de l'allongement des injecteurs diminue la section de passage du fluide extérieur entre les lobes (voir figure 4.33, à X/D=3.0).

Par ailleurs, on constate que, dans tous les cas testés à température d'injection froide fixée, toute variation des conditions d'injections qui améliore le mélange du jet détériore la capacité propulsive de l'arrière-corps.



(a) Circulations (b) Position radiale

(c) Ecartements (d) Rayon de dispersion a et excentrement c

FIG. 4.34 – Effet de l'allongement sur les caractéristiques des CVP.

4.5.4.4 Effet de la température totale d'injection

L'influence d'une variation de la température totale d'injection T_{i3} est évaluée à l'aide des cas F1, F8, F9 de 300K à 1200K. Comme tous les autres paramètres sont maintenus constants, le débit de masse alimentant le dispositif de contrôle est divisé d'un facteur $\sqrt{2}$ à 2 respectivement sur les configurations F8(600K) et F9(1200K) par rapport au cas F1(300K). D'un point de vue "fluide parfait", les conditions génératrices (p_i,T_i) sont conservées sur chaque ligne de courant du jet primaire et des jets secondaires. Comme à la fois la pression statique extérieure p_0 et les pressions génératrices p_{i1} et p_{i3} sont inchangées, le champ du nombre de Mach est aussi strictement inchangé. Une augmentation de la température d'injection T_{i3} par un facteur τ provoquera donc uniquement une ré-évaluation de la vitesse par un facteur $\sqrt{\tau}$ dans les tubes de courant issus des injecteurs. A partir de là, l'introduction de la notion de frottement et conduction turbulents change très probablement cette vision idéale de l'écoulement et rend les choses beaucoup plus complexes. Néanmoins, un accroissement de la diffusion turbulente mécanique et thermique peut raisonnablement être attendu puisque les gradients de vitesse et de température sont accentués entre les jets primaire et secondaires. Pourtant, tous les critères de mélange basés soit sur la pression totale soit sur les débits transverses (cf. tableau 4.7 cas F8 et F9) sont quasiment insensibles à la modification de température d'injection. Ce résultat étonnant permet de supposer que, dans ces résultats de simulation RANS, l'effet prépondérant des actionneurs sur le jet primaire est un effet de dynalpie et que l'influence de la viscosité (même turbulente au sens RANS) entre les jets secondaires et le jet primaire est négligeable. On voit clairement qu'à pression totale d'injection fixée, on obtient un mélange donné (relatif à la distribution de p_i et aux débits transverses) indépendant de la température d'injection. Du point de vue du jet primaire, la distribution de quantité de mouvement contrôlée par les injecteurs secondaires est diffusée et dissipée par les effets visqueux turbulents qui là ne sont évidemment pas négligeables.

En outre, on peut noter que l'augmentation de T_{i3} réduit légèrement les pertes de poussée.

Pour résumer, un accroissement de la température des jets secondaires, même s'il ne produit pas l'augmentation du mélange attendue par effets visqueux, permet au moins de conserver les capacités d'augmentation du mélange (estimé sur la pression totale) des injections froides provoquée par la dynalpie introduite tout en réduisant le débit-masse de contrôle ainsi que les pertes de poussée.

A la lumière de ce dernier résultat, nous pouvons conjecturer un moyen original de réduire la température du jet primaire à l'aide de jets secondaires chauds. Cette méthode serait en effet efficace à condition que l'augmentation du mélange du jet primaire chaud avec l'air froid ambiant soit assez importante pour compenser l'apport de chaleur des injections secondaires. Cette proposition est évaluée dans le paragraphe suivant.

4.5.4.5 Mélange de jets chauds

Afin d'évaluer les capacités de refroidissement du dispositif à 4 injecteurs précédemment testé avec un jet froid (cas F1), la température totale du primaire est élevée à $T_{i1} = 1100K$ (cas C0). Cette augmentation de température s'accompagne d'un réduction de 26% du cône potentiel du jet de référence, en accord avec l'accélération du mélange des jets chauds déjà signalée par des études antérieures [146, 60]. Deux températures ont été choisie pour le fluide injecté : $T_{i3} = 300K$ (cas C1) et $T_{i3} = 1200K$ (cas C2). Dans les deux cas, les critères de mélange ont été calculés, cf. tableau 4.7. En ce qui concerne les critères basés sur la pression totale et sur les débits transverses, l'efficacité du dispositif mélangeur précédemment observée pour un jet primaire froid est encore obtenue pour un jet chaud. Du point de vue de ces critères, il n'y a aucune différence entre les injections froides et chaudes, comme cela a été établi en jet primaire froid (cas F0, F1, F9). Le critère ΔT est maintenant utilisé pour vérifier l'hypothèse formulée à la fin du paragraphe précédent. Dans le cas de l'injection froide (C1), on mesure un refroidissement modeste du jet $\Delta T = -1.8\%$. Au contraire, le cas de l'injection chaude (C2) présente une augmentation du critère de température plus significative de $\Delta T = +12.3\%$. Les réactions différentes des champs de p_i et de T_i pourraient faire douter de la représentativité des critères choisis par rapport au mélange. La figure 4.35 montre que les champs de p_i et T_i avec injections froides et chaudes dans la section $X/D = 5.0$ sont en accord avec les indications des critères : les iso-*pi* sont quasiment confondues pour les deux températures de contrôle alors que les iso-T_i du contrôle chaud présentent des poches à température plus élevée dans les lobes du jet primaire ainsi qu'une région centrale plus chaude. Le mélange de l'énergie mécanique (représentée par la p_i) est donc différent du mélange de l'énergie thermique (représentée par la T_i) dans les calculs RANS exploités ici.

Un jet contrôlé par injections chaudes (C2) pourrait donc émettre un rayonnement plus intense que celui émis par le jet de référence (C0), ce qui est à l'opposé du résultat espéré. De plus, la pression totale d'injection étant constante, le débit masse froid injecté est $\sqrt{1200/300} = 2$ fois plus important que le débit chaud. Cette remarque est plutôt pessimiste pour la réduction de la signature infra-rouge puisqu'elle signifie qu'une réduction thermique ne pourrait être obtenue qu'au prix d'un très fort débit secondaire. Cependant, cette conclusion doit être considérée avec précaution car les capacités de la méthode RANS utilisée ici à prédire le champ thermique est fortement contestable. Ajouté à cela, l'estimation des propriétés radiatives d'un tel écoulement est une tâche extrêmement complexe, faisant intervenir entre autres les concentrations et les émissivités respectives des différentes espèces contenues dans les gaz d'éjection qui sont en plus le siège de combustions résiduelles [20]. De telles considérations dépassent largement le cadre de cette étude.

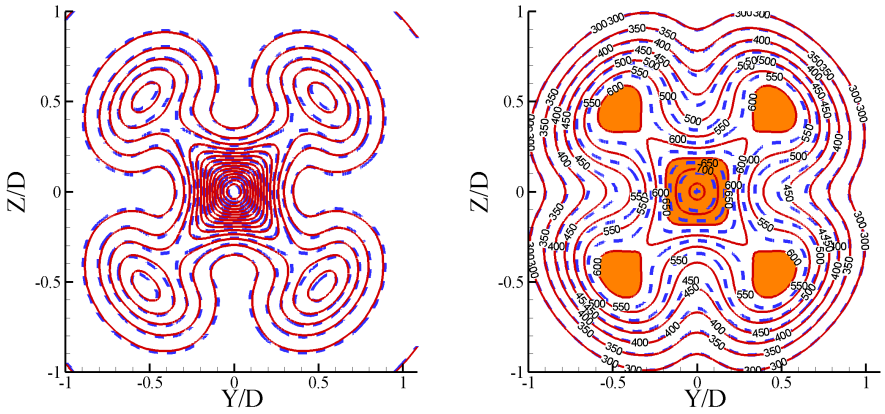


FIG. 4.35 – Lignes iso-p_i/p_{i0} (à gauche) et iso-T_i (à droite) à travers la section $X/D = 5.0$ du jet chaud contrôlé par injections froides (cas C1, traits pointillés) et par les injections chaudes (cas C2, traits continus).

En admettant que le mélange estimé par les critères basés sur la p_i et sur les débits transverses est aussi représentatif du mélange thermique (celui-ci étant alors supposé sous-estimé dans nos calculs), le contrôle par injections chaudes pourrait être aussi efficace qu'un contrôle froid, pour un débit injecté plus faible. Le flux froid serait probablement prélevé au niveau d'un étage compresseur. Une autre solution est peut-être envisageable : un flux chaud pourrait être prélevé dans la tuyère convergente. Ainsi, le contrôle par injections chaudes n'introduirait pas de chaleur supplémentaire par rapport au jet de référence. Pour une masse de fluide donnée, le prélèvement de gaz chauds est certainement plus pénalisant pour les capacités propulsives qu'un prélèvement de gaz froids moins énergétiques. Toutefois, les calculs indiquent qu'à p_{i3} fixée, on peut atteindre les mêmes capacités d'augmentation du mélange avec un débit secondaire chaud plus faible. Ce raisonnement indique qu'il pourrait exister une solution par prélèvement de flux chaud dans la tuyère plus efficace que le prélèvement de flux froid dans le compresseur. La vérification de cette hypothèse requiert un examen global du système propulsif qui est du ressort de l'industriel.

4.6 Conclusion sur l'aspect stationnaire du brassage tourbillonnaire

Dans ce chapitre construit autour des résultats des simulations RANS, le rôle des tourbillons longitudinaux dans la déformation du jet auparavant mis en évidence dans le cas de jets soumis à des tabs solides [271] ou des injections secondaires [63, 47] est identifié dans la configuration MARCO contrôlée. Ces tourbillons longitudinaux sont générés sous forme de paires contrarotative (les CVP) en aval de chaque injection transverse.

Une analyse bibliographique de leurs mécanismes de formation révèle qu'il n'existe pas de scénario universel. En particulier, l'origine des CVP dépend grandement du rapport des quantités de mouvement R^2. L'organisation de la vorticité dans le champ proche est tridimensionnel et très complexe. Même si une analyse détaillée de l'injection transverse dépasse le cadre de cette étude, on montre que des mécanismes bien déterminés régissent l'évolution de la vorticité moyenne. De plus, une vision "intégrale" est proposée pour dégager les origines prépondérantes des CVP en fonction des différents régimes d'écoulement. A côté des aspects phénoménologiques, la littérature indique des tendances assez nettes concernant l'influence du rapport R, de l'allongement de l'orifice d'injection ainsi que de la direction de soufflage sur l'évolution du jet et

notamment sa pénétration. En outre, l'apparition des chocs dans le régime supersonique rend des tendances assez imprévisibles sans test expérimental ou calcul numérique.

Juste en aval de l'arrière-corps MARCO, deux types de structures tourbillonnaires significatives peuvent être distinguées : les CVP et les HV. Leurs mécanismes de formation sont décrits dans le chapitre. A partir de $X/D \approx 3$, seuls les CVP persistent et continuent à déformer la surface du jet. Une remarque importante est à retenir : les tourbillons longitudinaux sont situés dans la région externe subsonique, ils n'interagissent donc pas avec les chocs internes au jet et aucun mécanisme d'augmentation du mélange par effet barocline d'un tourbillon passant à travers un choc n'est possible (on ne parle ici que du champ moyen). Loin de la zone d'injection, l'écoulement périphérique présente de faibles variations longitudinales par rapport aux variations transverses. Aussi les hypothèses des corps élancés sont employées pour le décrire. Il en ressort que malgré l'emploi de fortes hypothèses, l'évolution longitudinale des tourbillons peut être réduite à l'évolution de l'écoulement transverse considéré comme bidimensionnel et incompressible. La distribution de vorticité est décrite quantitativement à l'aide des moments de vorticité. En particulier, on rappelle que l'évolution de la circulation des tourbillons dépend uniquement de la viscosité (moléculaire ou turbulente avec l'hypothèse de Boussinesq). Leur mouvement dans le plan transversal est déduit d'une équation du moment d'ordre 1 généralisant celle de Saffman [216] et permet de retrouver le scénario décrit par Zaman [271]. Schématiquement il se résume ainsi : le long des plans de symétrie à travers les injecteurs actifs, les tourbillons pénètrent vers l'axe du jet jusqu'à ce qu'ils deviennent équirépartis sur un cercle centré sur l'axe et repartent vers l'extérieur le long des plans de symétrie entre les injecteurs actifs. Le mouvement de pénétration initial favorise l'injection de fluide extérieur dans le jet et la phase de divergence étire le jet vers l'extérieur.

Afin de quantifier l'effet du contrôle sur le mélange du jet, une réflexion a été menée pour caractériser précisément la notion de processus de mélange. Ainsi, il apparaît que la notion d'échelle de perception est primordiale. L'augmentation du mélange dans le jet contrôlé par injections radiales est actionnée par un processus de brassage macroscopique à l'échelle du diamètre du jet D qui est enchaînée via la cascade turbulente par une série de mélanges macroscopiques à échelles de plus en plus petites vers les échelles du mélange par diffusion. Toutefois en RANS, l'ensemble de la chaîne turbulente est modélisé par un processus de diffusion. Dans le champ lointain, les tourbillons longitudinaux sont les moteurs d'un mélange macroscopique bidimensionnel par le biais du cisaillement qu'ils induisent dans les plans transverses. A partir de ces réflexions, des critères de mélanges locaux et intégraux sont proposés sur la base des champs de pression d'arrêt isentropique et du flux de masse.

Enfin, grâce à ces critères d'évaluation, une étude paramétrique a été conduite pour dégager les tendances à adopter lors de la conception des injections. On peut en conclure que : la pression génératrice doit être maximisée, un allongement faible (≈ 1 voire inférieur) est à favoriser ainsi qu'un faible nombre d'injecteur actifs (entre 2 et 4 équirépartis en azimut pour conserver une force résultante dans l'axe du jet de référence[32]). Bien que cela n'ait pas été mis en évidence dans les calculs présentés ici, des travaux expérimentaux antérieurs montrent qu'une forte pression génératrice d'injection conduit à des pertes importantes de dynalpie par chocs internes et laissent ainsi penser qu'il pourrait toutefois exister un SPR optimal. Par ailleurs, à température d'injection fixée, on constate que toute augmentation du mélange s'accompagne dans la même mesure d'une perte de poussée de l'arrière-corps. Selon les simulations RANS réalisées, un accroissement de la température d'injection permet d'augmenter le mélange du point de vue des

[32]Des calculs par la méthode des singularités (non présentés ici) montrent que toute asymétrie même dans la position initiale des tourbillons fait très rapidement bifurquer la forme du jet.

critères basés sur la pression totale tout en diminuant à la fois le débit injecté et les pertes de poussée. Bien que ce soit assez surprenant, les résultats de cette étude suggèrent que la signature infrarouge pourrait être éventuellement réduite en prélevant des gaz chauds pour alimenter le dispositif de contrôle. Seule une étude globale du système propulsif peut appuyer ou réfuter cette hypothèse.

Chapitre 5

Analyse du brassage tourbillonnaire : aspect instationnaire

5.1 Objectif du chapitre

Dans le chapitre précédent, la formation et l'évolution longitudinale des tourbillons longitudinaux moyens ont été étudiées à partir des champs aérodynamiques fournis par des simulations RANS. Ces tourbillons longitudinaux sont les moteurs du processus de mélange par injection radiale. Une fois formés par des mécanismes complètement tridimensionnels dans la région très proche de l'injection, ils suivent une évolution quasi-bidimensionnelle le long du jet primaire. Cette évolution dépend fortement du champ fluctuant. La comparaison des champs RANS aux mesures expérimentales, chapitre 2, a mis en évidence la faiblesse de l'approche RANS (du moins avec le modèle SARC utilisé ici) à reproduire à la fois la forte diffusion turbulente de la quantité de mouvement et la propagation des ondes de pression à l'intérieur du jet. Ceci suggère que l'action de la turbulence sur le champ moyen n'est pas réductible à un processus de diffusion turbulente simulé par la méthode RANS mais regroupe un ensemble de mécanismes plus complexes que nous résumons ici sous le terme d'"aspect instationnaire". L'approche ZDES calculant explicitement la dynamique des grosses échelles de la turbulence a, quant à elle, montré sa capacité à reproduire ces deux caractéristiques essentielles du champ moyen. Les fluctuations résolues par ZDES sont donc supposées être représentatives de l'écoulement réel et vont être analysées dans ce dernier chapitre pour comprendre leur influence sur l'évolution quasi-bidimensionnelle des tourbillons longitudinaux.

Le chapitre est décomposé en quatre parties. Tout d'abord, l'influence de la dynamique instationnaire sur le champ moyen est évaluée en comparant les champs ZDES et RANS/SARC et l'effet d'une sur-diffusion turbulente est estimée grâce aux résultats RANS/SA. Ensuite, l'évolution des tourbillons longitudinaux est analysée en détail du point de vue moyen puis du point de vue instantané. Il ressort que la dynamique instationnaire produit une dégénérescence rapide du système tourbillonnaire conduisant à un champ aérodynamique semblable à celui produit par une sur-diffusion turbulente. Le lien entre la dégénérescence des tourbillons et le champ turbulent est établi analytiquement et vérifié à l'aide du champ fluctuant fourni par la ZDES. Dans un troisième temps, on revient sur le mode de pénétration des injections radiales supposé quasi-stationnaire depuis le début de cette étude. On montre en effet que conformément à l'étude antérieure de Davis [63], il existe deux régimes de pénétration et que le scénario général de l'augmentation du mélange basé sur les tourbillons longitudinaux doit être révisé. Enfin, l'activité et le résultat de l'augmentation du mélange provoquée par le système à quatre injecteurs radiaux sont évalués à partir des champs ZDES. Dans tout ce chapitre, les résultats ZDES exploités sont ceux de la ZDES2 utilisant Δ_ω.

5.2 Effet de la dynamique instationnaire sur le champ moyen

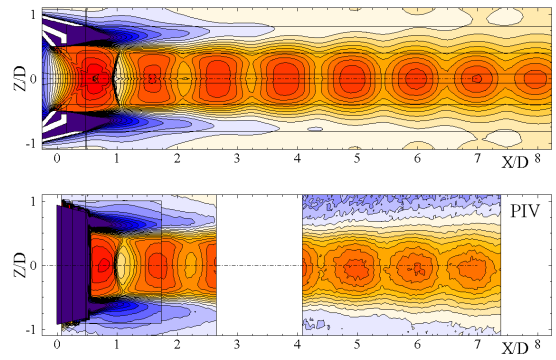
5.2.1 Comparaison des champs moyens ZDES et RANS/SARC

La comparaison des champs moyens obtenus par ZDES et RANS/SARC avec les mesures expérimentales est rappelée de manière synthétique, figure 5.1, pour le jet de référence et pour le jet contrôlé par 4 injecteurs. Les différences essentielles sont :

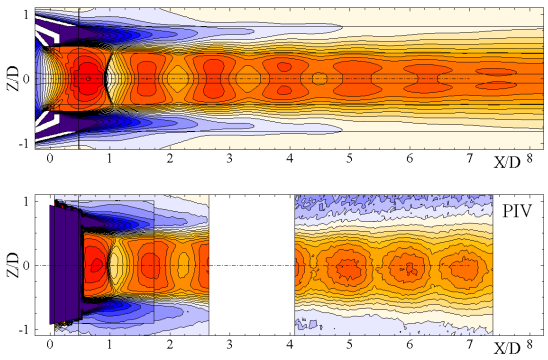
- Les champs très proches ($X/D < 1.5$) de la ZDES et du RANS/SARC sont quasiment identiques, tant du point de vue qualitatif que quantitatif : même structure de choc en lentille pour le jet de référence (fig. 5.1(a) et 5.1(b)), mêmes profils de vitesse longitudinale (fig. 5.1(c) et 5.1(d)) et mêmes évolutions de la pression statique axiale (fig. 5.1(e) et 5.1(f)) dans les jets sans et avec contrôle.
- Les champs plus lointains ($X/D > 1.5$) exhibent les mêmes tendances : dans le jet de référence, propagation des cellules de détente/compression (fig. 5.1(a) et 5.1(b)) et diffusion de la couche de mélange turbulente (fig. 5.1(c) et 5.1(d)) ; dans le jet contrôlé, pincement et évasement du jet respectivement dans les plans des injecteurs actifs et dans les plans des injecteurs inactifs (fig. 5.1(c) et 5.1(d)), réduction de la période et amortissement des oscillations de pression statique sur l'axe (fig. 5.1(e) et 5.1(f)).
- Mais les champs lointains ($X/D > 1.5$) de la ZDES et du RANS/SARC présentent des différences significatives[1] : dans le jet de référence, les cellules de détente/compression sont très vite diffusées par les calculs RANS alors qu'elles sont assez bien conservées avec la ZDES (fig. 5.1(a) et 5.1(b)) ce qui se traduit sur l'axe du jet par un fort amortissement des oscillations de pression statique. Pourtant la chute de pression totale sur l'axe (fig. 5.1(e) et 5.1(f)) indique que la couche de mélange de la ZDES atteint l'axe du jet à $X/D \approx 2.$ et se développe donc beaucoup plus vite. Dans le jet contrôlé, ces tendances apparemment contradictoires sont encore plus visibles. Les gradients radiaux de vitesse longitudinale sont notamment beaucoup plus forts dans le champ RANS/SARC malgré un cône potentiel (fig. 5.1(e) et 5.1(f)) plus de deux fois plus long qu'en ZDES.

En résumé, le calcul explicite des fluctuations à grande échelle de la turbulence en ZDES permet de restituer à la fois la propagation des ondes de pression dans le jet de référence (fig. 5.1(a)) et une diffusion turbulente en accord avec les mesures effectuées sur le jet contrôlé (profils de vitesse axiale fig. 5.1(c), chute de pression totale sur l'axe fig. 5.1(e)). Par rapport aux résultats ZDES, le calcul RANS/SARC diffuse de manière excessive les oscillations de pression internes au jet (5.1(b)) et sous-estime la diffusion turbulente de quantité de mouvement (voir pression totale 5.1(f)). Tam *et al.* [248] ont montré (cf. chapitre 3) que les oscillations de pression internes à un jet non-adapté sont d'autant plus amorties que la viscosité turbulente est grande. D'autre part, plus la viscosité turbulente est grande, plus la longueur du cône potentiel est réduite. Les deux variations du RANS/SARC par rapport à la ZDES2 sont donc contradictoires. Cette constatation permet de supposer que l'hypothèse de Boussinesq, ou du moins le modèle SARC utilisé dans cette étude, est ici trop simple pour pouvoir reproduire l'action du champ fluctuant sur le champ moyen. L'interaction forte entre les ondes de pression supersoniques internes au jet non-adapté et le champ turbulent rend probablement l'emploi de l'hypothèse de Boussinesq contestable.

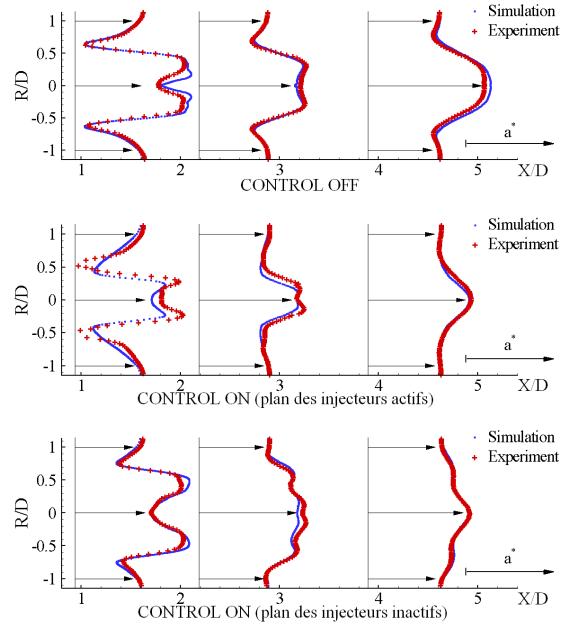
[1] On note aussi que dans le jet de référence, les cellules de survitesse, i.e. de détente, (fig. 5.1(a) et 5.1(b)) sont plus arrondies dans le calcul ZDES, celles du calcul RANS/SARC présentant un défaut de vitesse au voisinage de l'axe. La visualisation des champs de pression génératrice montre que ceci est entièrement dû à un choc en lentille légèrement plus fort sur l'axe du jet RANS/SARC. Bien que le résultat soit facilement visible, il ne constitue pas une différence essentielle du point de vue du mélange turbulent du jet entre les deux simulations.



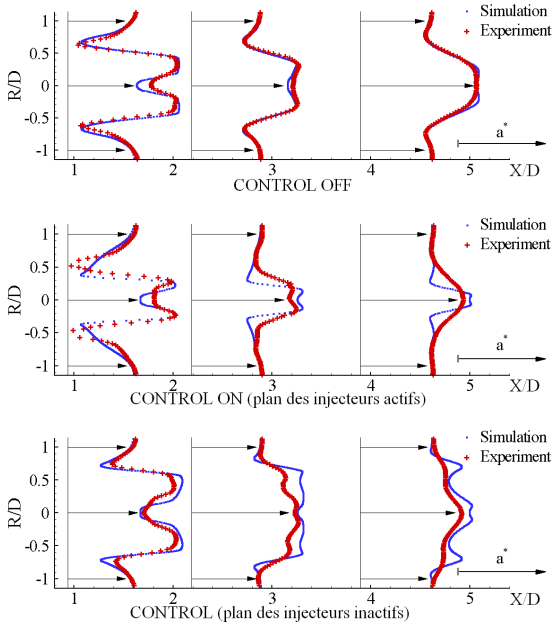
(a) Vitesse longitudinale u, ZDES2



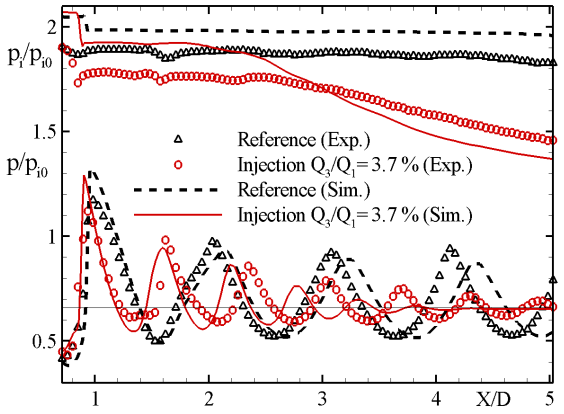
(b) Vitesse longitudinale u, SARC



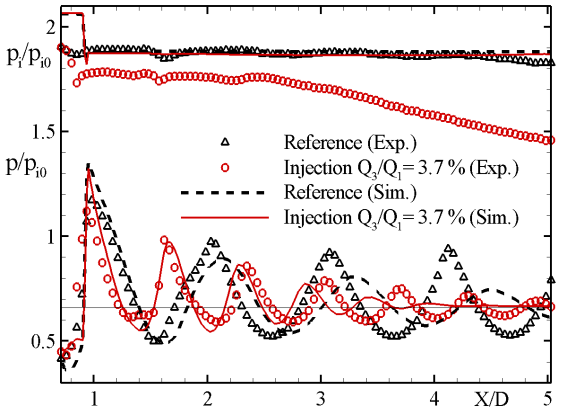
(c) Profils de vitesse u, ZDES2



(d) Profils de vitesse u, SARC



(e) pressions axiales, ZDES2



(f) pressions axiales, SARC

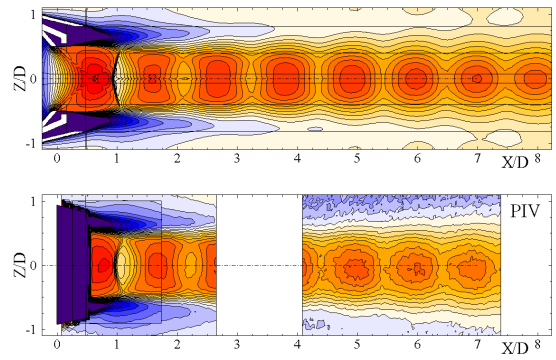
FIG. 5.1 – ZDES2 (a,c,e,g) et RANS/SARC (b,d,f,h) : (a,b) champ de vitesse axiale ; profils de vitesse axiale : (c,d) case F0, (e,f) cas F1, plan des inecteurs actifs, (g,h) case 3, plan des injecteurs inactifs ; (i,j) pressions totales et statiques (cas F0 et F1).

5.2.2 Effet d'une sur-diffusion turbulente

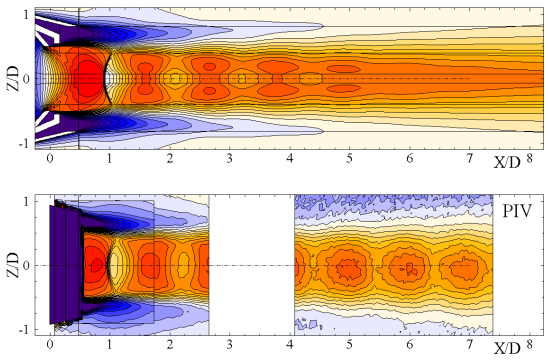
Afin d'évaluer l'effet de la diffusion modélisée par l'approche RANS, nous reprenons ici les résultats de la simulation RANS/SA. Celle-ci n'utilise pas la correction de rotation du modèle de Spalart-Allmaras et produit donc une viscosité turbulente plus grande que le calcul RANS/SARC avec correction. L'ensemble des résultats RANS/SA est comparé aux résultats ZDES, figure 5.2. Si l'on ne regarde que les profils de vitesse longitudinale (fig. 5.2(c) et 5.2(d)), on constate que la sur-diffusion du modèle RANS/SA entraîne une diminution des gradients transverses et permet ainsi de reproduire plus fidèlement l'évasement de la couche de mélange. Corrélativement, la chute de pression totale sur l'axe (fig. 5.2(f)) semble indiquer que la diffusion de la quantité de mouvement du coeur du jet vers l'extérieur est mieux estimée qu'avec la correction de rotation. Cependant, avant de conclure, il est indispensable d'examiner la propagation des ondes de pression supersoniques du jet de référence sous-détendu. En effet, on constate que l'amortissement des cellules de détente/compression déjà notée en RANS/SARC est amplifié en RANS/SA à cause de la sur-diffusion provoquée par la viscosité turbulente. Cette tendance est en accord avec le résultat de Tam *et al.* [248] et corrobore la contradiction soulignée précédemment.

La figure 5.3 montre l'allure de la surface du jet assimilée à la surface sonique fournie par les simulations ZDES, RANS/SARC et RANS/SA. La surface moyenne du jet ZDES sans contrôle est caractérisée par des pincements et renflements alternés consécutifs à la réflexion des ondes de compression et détente internes. Celles-ci sont plus prononcées et se poursuivent plus loin en aval que dans les calculs RANS/SARC ou RANS/SA. Cette observation est en accord avec la comparaison des pressions axiales effectuées plus haut, figures 5.1(e), 5.1(f) et 5.2(f). Lorsque le contrôle est activé, la surface sonique est très fortement déformée, creusée dans le sillage des injecteurs actifs et évasée dans les plans des injecteurs inactifs. Toutefois, la ZDES2 prévoit une surface sonique beaucoup plus courte que le RANS/SARC en raison de son cône potentiel plus petit ($X/D \approx 2.$ contre $X/D \approx 5.$). De plus, les lobes formés par l'éjection latérale du jet sont deux fois plus courts et n'ont plus vraiment une forme de champignon comme dans les coupes transverses du jet RANS/SARC. Grâce à la sur-diffusion turbulente, la surface sonique fournie par le calcul RANS/SA est étonnamment proche de celle du calcul ZDES2, mais la trace des ondes de pression internes y est beaucoup moins marquée.

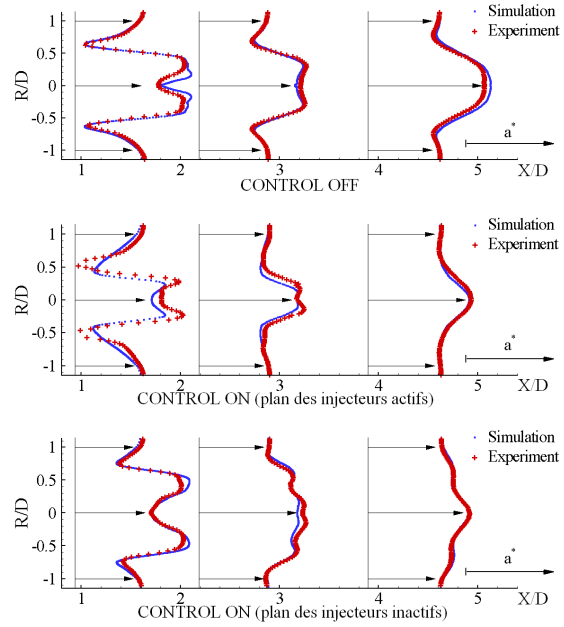
Nous avons indiqué au chapitre précédent que les tourbillons contra-rotatifs générées par chaque injection radiale sont les moteurs du processus de mélange. Ils se forment par des mécanismes 3D puis évoluent selon une dynamique essentiellement 2D. Il convient donc de les examiner soigneusement. La figure 5.5 présente l'évolution de la composante longitudinale du rotationnel adimensionné ($\Omega_x = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{V}.\overrightarrow{X}/(2a^*/D)$) dans différentes coupes transverses le long des jets contrôlés obtenus par ZDES2 (moyennée en temps), RANS/SA et RANS/SARC. La forme des jets est matérialisée par la ligne $p_i/p_{i0} = 1.05$ en trait fin noir pour le jet contrôlé et trait épais rouge pour le jet de référence. Les contours des jets de référence ne se distinguent pas radicalement entre eux. Par contre, les contours des jets contrôlés ZDES et RANS/SA sont très semblables et se distinguent clairement des résultats donnés par le calcul RANS/SARC. Peu après les injections, à $X/D = 0.5$, les formes des jets simulés par les 3 méthodes sont encore assez similaires. En progressant vers l'aval, on constate en $X/D = 1.0$ que les régions du jet RANS/SARC étirées sous l'action de la vitesse induite par les tourbillons longitudinaux ne sont plus visibles dans les jets ZDES ou RANS/SA. Ces derniers présentent des lobes nettement plus arrondis. Plus loin, à $X/D = 3.0$ et $X/D = 5.0$, les lobes en forme de champignon du jet RANS/SARC deviennent même inexistants dans les jets ZDES et RANS/SA.



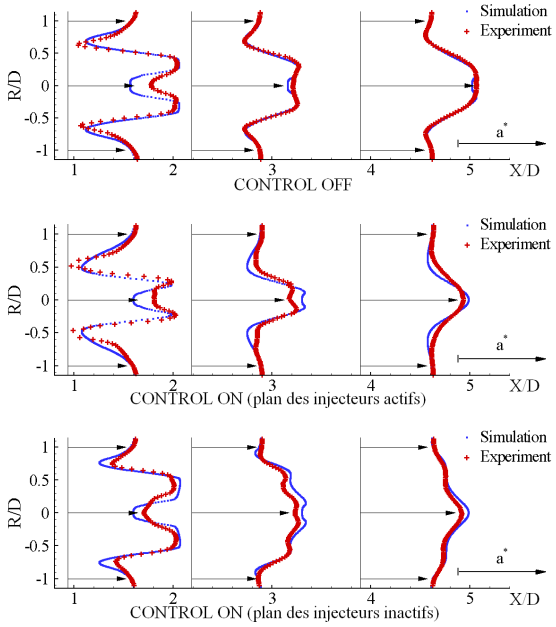
(a) Vitesse longitudinale u, ZDES2



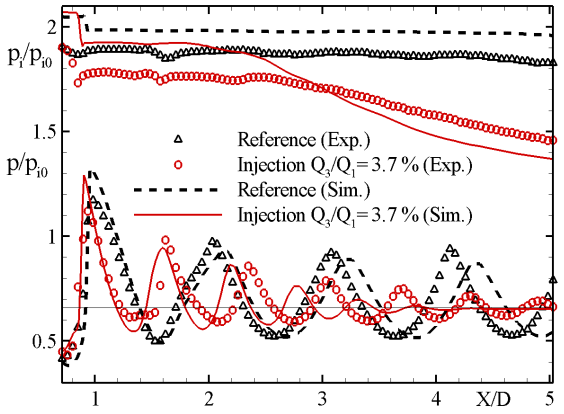
(b) Vitesse longitudinale u, SA



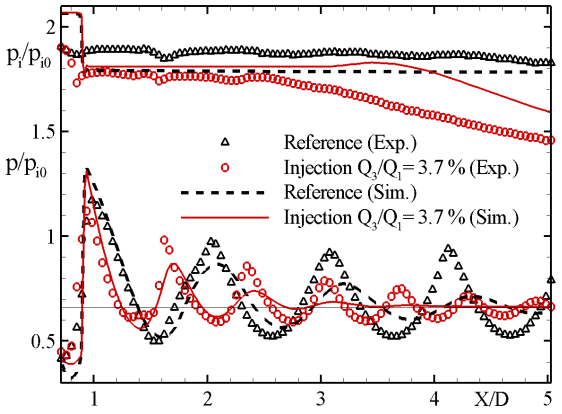
(c) Profils de vitesse u, ZDES2



(d) Profils de vitesse u, SA

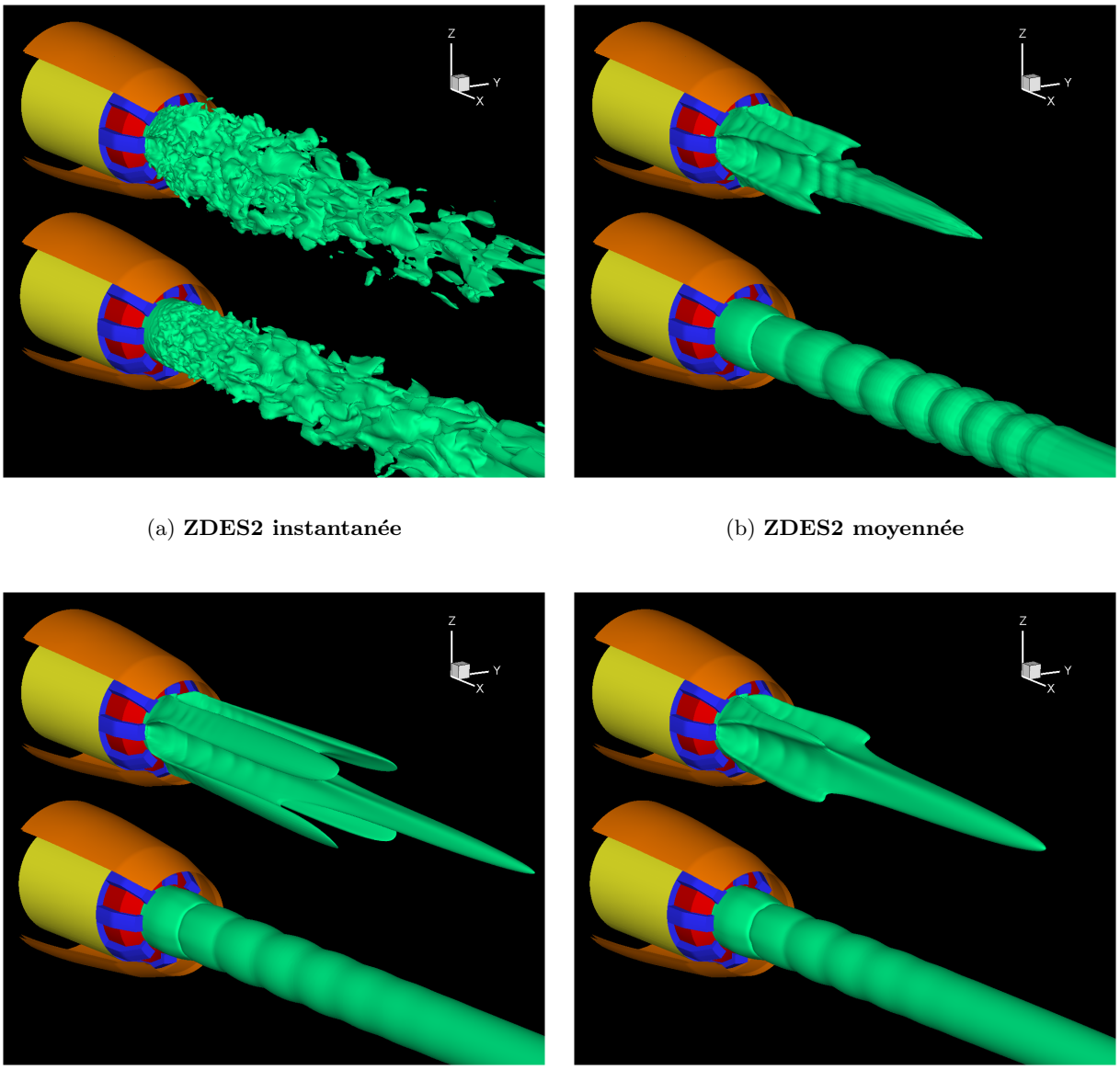


(e) pressions axiales, ZDES2



(f) pressions axiales, SA

FIG. 5.2 – ZDES2 (a,c,e,g) et RANS/SA (b,d,f,h) : (a,b) champ de vitesse axiale ; profils de vitesse axiale : (c,d) case F0, (e,f) cas F1, plan des inecteurs actifs, (g,h) case 3, plan des injecteurs inactifs ; (i,j) pressions totales et statiques (cas F0 et F1).



(a) **ZDES2 instantanée** (b) **ZDES2 moyennée**

(c) **RANS/SARC** (d) **RANS/SA**

FIG. 5.3 – Effet de 4 injections radiales sur la surface du jet (surface Mach=1, jet de référence F0 en bas, jet contrôlé F1 en haut).

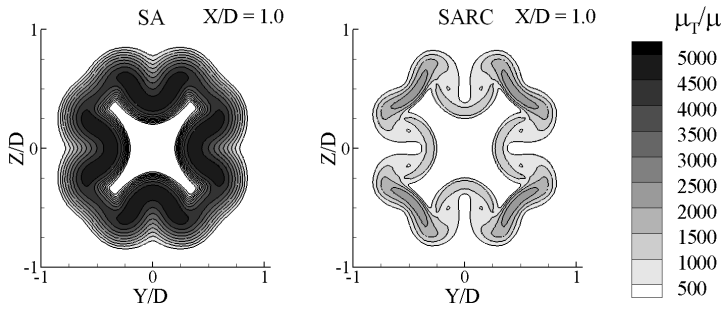


FIG. 5.4 – Viscosités turbulentes adimensionnées μ_t/μ à $X/D = 1$ dans les calculs SA et SARC.

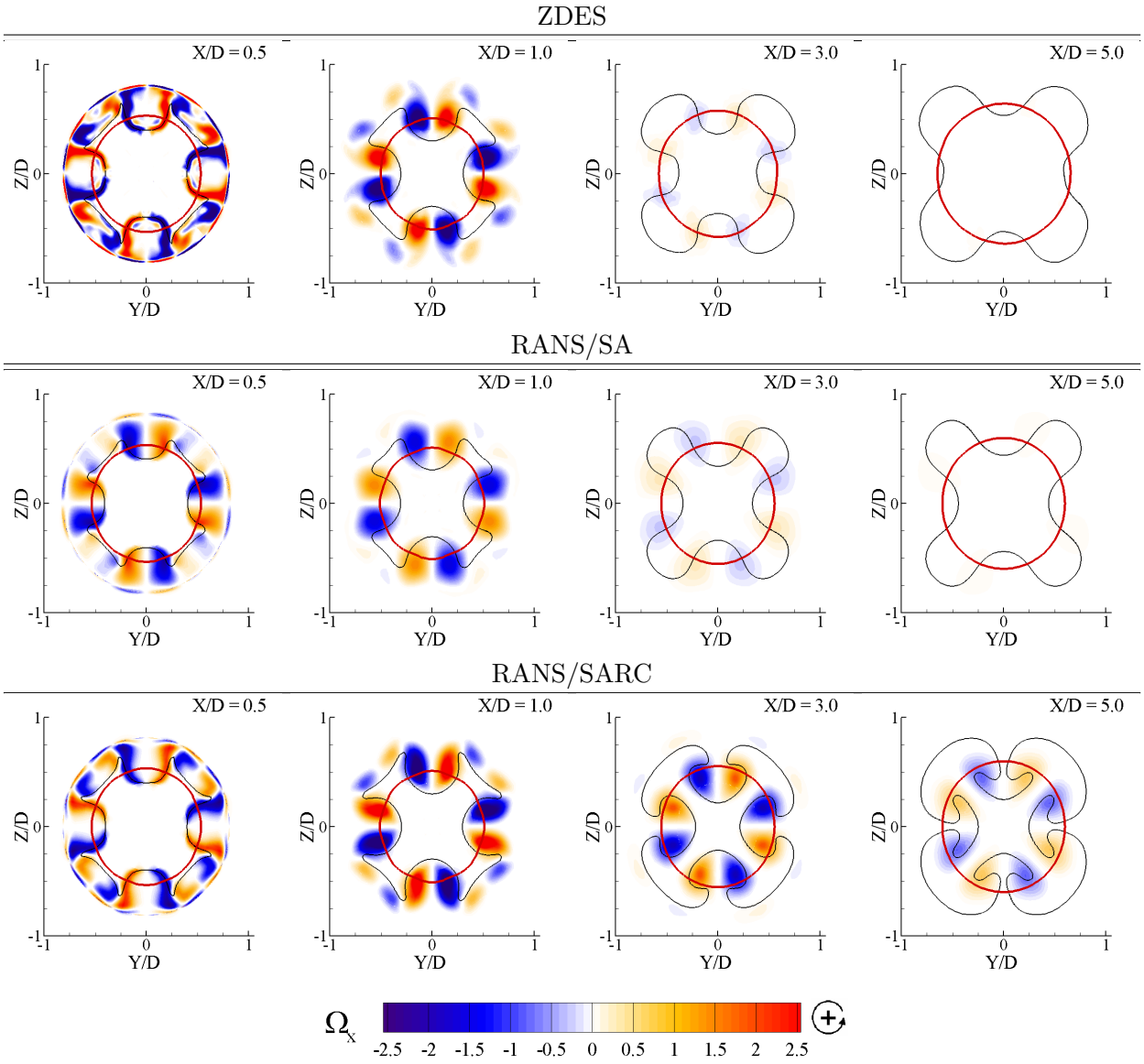


FIG. 5.5 – Contours de vorticité adimensionnée Ω_x, ligne $p_i/p_{i0} = 1.05$ jet controlé (ligne fine noire), ligne $p_i/p_{i0} = 1.05$ jet de référence (ligne épaisse rouge) dans les champs produits par ZDES moyennée en temps (haut), RANS/SA (milieu) et RANS/SARC (bas).

Par rapport au jet RANS/SARC, le jet RANS/SA est par construction soumis à une diffusion turbulente modélisée plus intense par le biais de la viscosité turbulente (cf. figure 5.4). On constate que cette sur-diffusion est apparemment suffisante pour reproduire la forme du jet explicitement résolu (ZDES). Si l'on regarde maintenant les distributions de vorticité à $X/D = 3.0$ et $X/D = 5.0$, on voit que les calculs ZDES et RANS/SA donnent des résultats très proches caractérisés par des niveaux de vorticité bien plus faibles que ceux du calcul RANS/SARC. Au contraire, à $X/D = 0.5$ et $X/D = 1.0$, on observe que les distributions de vorticité rapprochent plutôt les calculs ZDES et RANS/SARC : les paquets de vorticité (CVP et HV) sont plus concentrés et possèdent des valeurs extrémales plus fortes que dans le champ RANS/SA.

A ce niveau de l'analyse, nous pouvons affirmer les éléments suivants :

- Parmi les trois calculs ZDES, RANS/SARC, RANS/SA, le seul capable de reproduire quantitativement, de manière satisfaisante les deux caractéristiques essentielles de l'écoulement, à savoir la propagation des ondes et la diffusion turbulente, est la ZDES. Les champs fournis par la ZDES vont donc servir de référence à l'analyse.
- Les calculs RANS, SA ou SARC, sont incapables de reproduire quantitativement ces deux phénomènes et montrent même des tendances opposées par rapport à l'expérience ou la ZDES : sur-atténuation des ondes de pression et sous-diffusion turbulente.
- La simulation RANS/SARC utilise la correction de rotation du modèle de Spalart-Allmaras. L'emploi de cette correction a été largement justifié par les travaux traitant de tourbillons d'ogives ou d'ailes delta [174] car elle permet de limiter une production turbulente excessive dans les tourbillons isolés. Dans la configuration étudiée ici, on constate néanmoins que les tourbillons longitudinaux sont trop peu diffusés.
- La diffusion turbulente excessive du calcul RANS/SA par rapport au calcul RANS/SARC permet de réduire fortement le niveau de vorticité dans le champ lointain. Toutefois, cette sur-diffusion provoque, de manière prévisible (cf. Tam *et al.* [248]), une atténuation trop forte des ondes de pression dans le jet de référence. De plus, les distributions de vorticité initiales produites par le RANS/SA ne sont pas en accord avec les résultats de la ZDES. Ces deux arguments indiquent clairement que la désactivation de la correction de rotation n'est pas du tout justifiée.

Pour résumer, le champ RANS/SARC sous-estime la dégénérescence des tourbillons longitudinaux formés à la surface du jet par le dispositif de contrôle. Une sur-diffusion modélisée par une formulation standard de l'hypothèse de Boussinesq permet d'accélérer cette dégénérescence pour retrouver les valeurs correctes du rotationnel dans le champ lointain ($X/D \geq 3$) mais sa validité physique est démentie par l'observation complète du champ aérodynamique. L'analyse du système tourbillonnaire doit donc être poursuivie.

5.3 Dynamique des tourbillons longitudinaux

5.3.1 Evolution moyenne des tourbillons longitudinaux

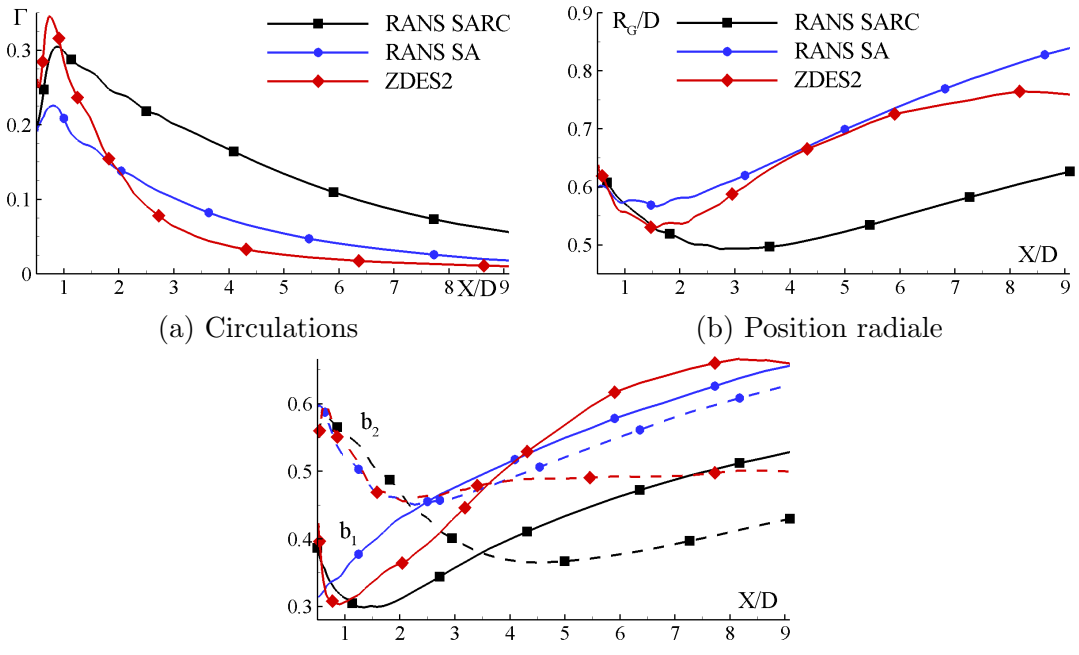
Afin de discuter plus précisément de l'évolution du système tourbillonnaire, la circulation et la position radiale des CVP (voir section 4.3.2.3) sont tracées sur la figure 5.6 pour les champs ZDES, RANS/SA et RANS/SARC[2][3].
Par rapport aux calculs RANS, la simulation ZDES prévoit une circulation maximale en fin de formation des CVP plus grande ainsi qu'une décroissance plus forte. Jusqu'à $X/D \approx 1.0$, la circulation donnée par la ZDES croît initialement selon une pente proche de celle prévue par le calcul RANS/SARC. La simulation RANS/SA sous-estime la circulation jusqu'à $X/D \approx 2.0$. A partir de là, c'est le calcul RANS/SA qui fournit une circulation plus proche de celle de la ZDES, même si la pente demeure plus faible jusqu'à $X/D \approx 3.2$. Ce constat est conforme aux commen-

[2]Les caractéristiques des 8 tourbillons sont identiques dans les champs RANS. Ces caractéristiques variant légèrement d'un tourbillon à un autre dans le champ ZDES moyenné sur $900.T_c = 120ms$, elles ont été moyennées sur les 8 tourbillons.

[3]Plus une section transverse est située loin en aval, plus l'échelle de temps caractéristique de la turbulence est grande et plus le temps nécessaire pour converger vers le champ moyen est long. L'examen du champ moyen calculé permet de dire que concernant les variables prépondérantes, i.e. la vitesse axiale ou la pression totale, le champ calculé peut être considéré comme convergé jusqu'à $X/D = 9.0$. Par contre pour les variables d'ordre inférieur comme v ou w et la vorticité axiale qui s'en déduit, on considére que le champ moyen n'est atteint que pour $X/D < 7.0$.

taires de la figure 5.5. Cependant, le très bon accord des coupes transverse ZDES et RANS/SA pour $X/D > 2$ n'est pas dû à une forte diffusion des tourbillons longitudinaux lors de leur évolution quasi-2D comme on pouvait le supposer auparavant. En effet, la pente de décroissance de la circulation en RANS/SA n'est pas plus forte que celle obtenue en RANS/SARC. La faible puissance des tourbillons RANS/SA à partir de $X/D = 2$ résulte plutôt de leur faible intensité en fin de formation à $X/D \approx 1.0$.

En ce qui concerne les trajectoires des CVP, on reconnaît les phases de pénétration et de divergence du système tourbillonnaire pour les trois simulations. Dans l'ordre, les tourbillons RANS/SA, ZDES et RANS/SARC pénètrent plus longtemps et plus profondément dans le coeur du jet primaire. En l'absence d'effet visqueux et si les CVP étaient ponctuels, la transition de la phase de pénétration à la phase de divergence se produirait lorsque les huits tourbillons sont équirépartis, i.e. pour $b_1 = b_2$. Ceci se vérifie à peu près dans le champ RANS/SARC, l'écart entre la position $X/D \approx 3.0$ du rayon R_G minimum avec le lieu $X/D \approx 3.5$ où $b_1 = b_2$ étant supposé être dû à l'extension spatiale des CVP. De plus, toujours selon ces deux hypothèses, la profondeur de pénétration est indépendante de la valeur de la circulation. En effet, comme les seuls paramètres initiaux sont le rayon R_0 du cercle sur lequel les CVP sont équirépartis, les écarts entre tourbillons b_{10} et b_{20} et leur circulation Γ, la seule échelle de temps du problème est liée à Γ, par ex. R_0^2/Γ. Le rayon minimum $(R_G)_{\min}$ atteint par les tourbillons est donc uniquement fonction de R_0, b_{10} et b_{20}. Si maintenant, on introduit la notion de viscosité ν, la circulation peut alors jouer sur la valeur de $(R_G)_{\min}$ à travers le paramètre sans dimension Γ/ν. Pour les calculs RANS/SA ou ZDES, l'écart entre les positions où $R_G = (R_G)_{\min}$ et où $b_1 = b_2$ devient vraiment important (respectivement $X/D \approx 1.5$ et $X/D \approx 2.5$ pour le RANS/SA et $X/D \approx 1.5$ et $X/D \approx 3.7$ pour la ZDES) et les phénomènes visqueux et turbulents sont les seuls éléments pouvant expliquer cette différence dans le cadre bidimensionnel formulé ici.



(a) Circulations

(b) Position radiale

(c) Ecartements b_1 et b_2

FIG. 5.6 – Evolution de la circulation (adimensionnée par a^*D) et de la position des tourbillons CVP selon les méthodes de simulation.

5.3.2 Dégénerescence turbulente des tourbillons

Dans cette section, on propose une analyse de l'effet des fluctuations turbulentes sur l'évolution longitudinale de la circulation des CVP. Nous avons vu précédemment que le calcul explicite de la turbulence à grande échelle permettait de reproduire la dégénérescence rapide des tourbillons longitudinaux. Notre but est ici de lier le taux de décroissance de la circulation des CVP aux fluctuations turbulentes.

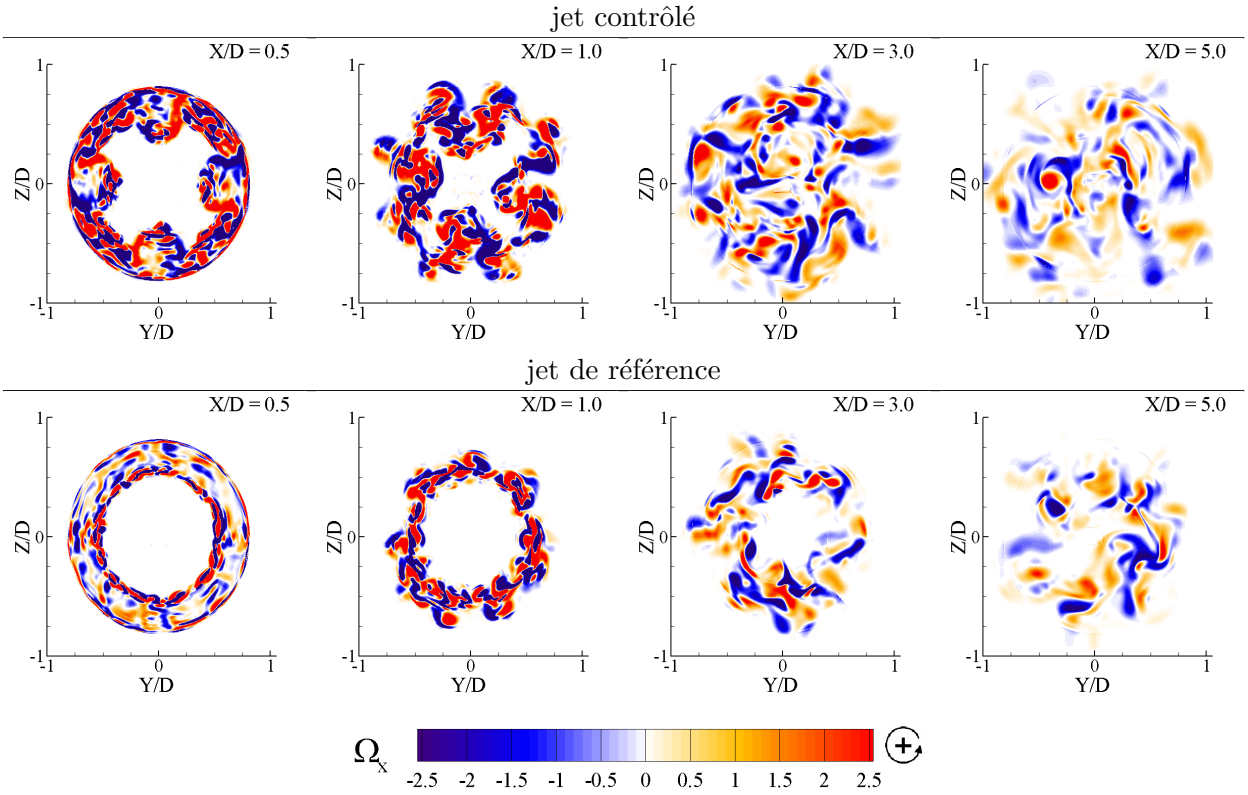


FIG. 5.7 – Contours de vorticité adimensionnée Ω_x dans le jet contrôlé (haut) et dans le jet de référence (bas) donnés par la ZDES2.

Observation de la vorticité longitudinale instantanée. La figure 5.7 présente la vorticité axiale instantanée dans les jets avec contrôle (en haut) et sans contrôle (en bas) produits par la ZDES. Les niveaux de vorticité sont identiques à ceux de la figure 5.5. Sur les deux premières images, à $X/D = 0.5$ et $X/D = 1.0$, on distingue le contour du jet entourant une zone irrotationnelle : c'est la région potentielle. Ces contours sont encore similaires à ceux déjà observés sur le champ moyen, figure 5.5. On peut remarquer que l'enchevêtrement des ondes de Mach visibles sur les strioscopies numériques ($X/D = 0.5$ et $X/D = 1.0$, figure E.10 annexe E) ne provoque aucune vorticité significative dans le coeur du jet. En progressant vers l'aval, l'épaississement de la couche de mélange turbulente brouille complètement la vision moyenne des coupes transverses (voir $X/D = 3.0$ et 5.0). La couche de mélange turbulente fortement déformée et étirée par le dispositif de contrôle atteint l'axe entre $X/D = 2.0$ et 3.0 ce qui correspond à la fin de la zone potentielle repérée par la chute de pression totale sur l'axe, figure 5.1(e). En revanche, dans le cas du jet de référence, le cône potentiel se poursuit au-delà de $X/D = 5.0$. D'autre part, on constate que l'activation du contrôle provoque un épaississement de la couche de mélange ainsi qu'une dispersion radiale des tourbillons longitudinaux et un évasement du jet plus importants.

Si l'on regarde maintenant les niveaux de vorticité, on s'aperçoit que les fluctuations sont du même ordre de grandeur que les valeurs moyennes. Cela justifie une analyse plus précise de l'action du champ turbulent sur l'évolution des tourbillons longitudinaux du champ moyen.

Approximation 2D incompressible de l'écoulement turbulent. Dans la section 4.3.2.3, nous avons vu que dans un écoulement ayant une direction $\overrightarrow{X}$ privilégiée et vérifiant les hypothèses des corps élancés (4.13), l'évolution transverse (Y, Z) est découplée de l'évolution longitudinale (suivant $\overrightarrow{X}$) et vérifie les équations du mouvement 2D incompressible dans ce plan (Y, Z). Jusqu'à ce niveau de l'étude, l'action de la turbulence sur le champ moyen était assimilée à une action de diffusion visqueuse par le biais de l'hypothèse de Boussinesq. Nous revenons dans ce paragraphe sur l'action de la turbulence en l'exprimant à l'aide des grandeurs fluctuantes.

En appliquant la même démarche que dans la section 4.3.2.3 aux équations turbulentes incompressibles formulées avec la moyenne de Reynolds et en supposant que les amplitudes des composantes de la vitesse fluctuante $\overrightarrow{v'}(u'\ v'\ w')$ sont au plus de l'ordre de la vitesse de perturbation transverse :

$$(\max|u'|, \max|v'|, \max|w'|) = \mathcal{O}(\epsilon U_0) \tag{5.1}$$

on obtient les équations du mouvement moyen d'une perturbation infinitésimale $(\rho, \overrightarrow{v}(u\ v\ w), p)$ autour de l'état de référence $\left(\rho_0, U_0\overrightarrow{X}, p_0\right)$ sous l'effet des tensions turbulentes.

En négligeant les termes dont l'ordre de grandeur est strictement inférieur à $\mathcal{O}\left(\epsilon^2 \frac{\rho_0 U_0^2}{L}\right)$, l'équation de quantité de mouvement longitudinale s'écrit :

$$\rho_0\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{1}{U_0}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(p + \rho_0\overline{u'^2}\right) - \rho_0\left(\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right) + \mu_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{5.2}$$

De même en négligeant les termes dont l'ordre de grandeur est strictement inférieur à $\mathcal{O}\left(\epsilon \frac{\rho_0 U_0^2}{L}\right)$, les équations du mouvement transverse s'écrivent :

$$\rho_0\left(\frac{\partial v}{\partial \tau} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) - \rho_0\left(\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right) \tag{5.3}$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial w}{\partial \tau} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \underbrace{\mu_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}_{T.V.} - \underbrace{\rho_0\left(\frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right)}_{T.T.} \tag{5.4}$$

Comme pour le cas laminaire décrit dans la section 4.3.2.3, l'écoulement turbulent respectant les hypothèses (4.13) et (5.1) est régi par des équations semblables aux équations bidimensionnelles dans le plan transverse (y,z) mais qui comportent en plus un terme turbulent (T.T.).

Par ailleurs, les ordres de grandeur (5.1) impliquent que la vorticité axiale fluctuante ω'_x peut être du même ordre de grandeur que la vorticité axiale moyenne ω_x, ce qui est conforme aux figures 5.5 et 5.7. Sous les hypothèses (4.13) et en négligeant les termes du champ moyen dont l'ordre de grandeur est inférieur à $\mathcal{O}\left(\frac{U_0^2}{L^2}\right)$, le rotationnel longitudinal $\omega_x = \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{v}.\overrightarrow{X}$ est gouverné par l'équation quasi-2D dans le plan (y,z) :

$$\frac{D\omega_x}{D\tau} = \nu\Delta\omega_x + \overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overline{\overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{\omega'}}\right).\overrightarrow{X} \tag{5.5}$$

où ω_x, $\overrightarrow{v'}$ et $\overrightarrow{\omega'} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{v'}$ désignent respectivement le rotationnel longitudinal moyen, la vitesse fluctuante et le rotationnel fluctuant, $\frac{D.}{D\tau} = \frac{\partial.}{\partial\tau} + v\frac{\partial.}{\partial y} + w\frac{\partial.}{\partial z}$ est la dérivée particulaire dans le plan (Y, Z) avec τ le temps de convection à la vitesse de référence U_0 (voir section 4.3.2.3) et $\Delta = \frac{\partial^2.}{\partial y^2} + \frac{\partial^2.}{\partial z^2}$.

Evolution de la circulation en écoulement turbulent. En intégrant (5.5) sur une surface matérielle $\mathcal{D}$ du plan transverse (Y,Z), on obtient de la même manière que pour le cas laminaire (cf. annexe D.2) l'évolution de la circulation le long de son contour $\mathcal{C}$:

$$\frac{D\Gamma}{D\tau} = \nu\int_{\mathcal{C}} \frac{\partial\omega_x}{\partial n}dl + \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \overline{\overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{\omega'}}.\overrightarrow{t}\,dl}_{terme\ turbulent} \tag{5.6}$$

où $\overrightarrow{t}$ est le vecteur tangentiel du contour orienté direct $\mathcal{C}$.

Par rapport à la loi laminaire (4.34), l'équation (5.6) comporte un terme turbulent agissant le long de la frontière $\mathcal{C}$. Dans le chapitre précédent 4, ce terme a été approché avec l'hypothèse de la viscosité turbulente ν_t par :

$$\int_{\mathcal{C}} \overline{\overrightarrow{v'} \wedge \overrightarrow{\omega'}}.\overrightarrow{t}\,dl = \nu_t\int_{\mathcal{C}} \frac{\partial\omega_x}{\partial n}dl \tag{5.7}$$

Nous allons maintenant essayer de préciser l'action de ce terme turbulent. Dans le cas d'un doublet symétrique de tourbillons contra-rotatifs, comme schématisé figure 4.15 (à gauche), la circulation du tourbillon droit suit la loi :

$$\frac{D\Gamma}{D\tau} = -\nu\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial\omega_x}{\partial y}dz \underbrace{- \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\overline{u'\omega'_y} - \overline{v'\omega'_x}\right)dz}_{terme\ turbulent} \tag{5.8}$$

On peut montrer que le terme turbulent se réduit à l'ordre dominant au flux turbulent de vorticité longitudinale fluctuante. D'autre part, on démontre (cf. Annexe D.4) qu'avec l'hypothèse de turbulence incompressible $\mathrm{div}\,\overrightarrow{v'} = 0$, l'intégrande (de l'opposé) du terme turbulent peut être reformulée à l'aide des tensions de Reynolds :

$$\overline{u'\omega'_y} - \overline{v'\omega'_x} = \frac{\partial k}{\partial z} - \left(\frac{\partial\overline{w'u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{w'v'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{w'w'}}{\partial z}\right) \tag{5.9}$$

où k est l'énergie cinétique turbulente :

$$k = \frac{1}{2}\left(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}\right) \tag{5.10}$$

En supposant que la turbulence est nulle à une distance infinie du doublet ($k\,(\pm\infty) = 0$), l'intégrale de (5.9) de $z = -\infty$ à $z = +\infty$ se réduit à :

$$\text{T.T.} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\overline{u'\omega'_y} - \overline{v'\omega'_x}\right)dz \tag{5.11}$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial\left(-\overline{w'u'}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(-\overline{w'v'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(-\overline{w'w'}\right)}{\partial z}\right)dz \tag{5.12}$$

qui est la force massique suivant $(-\overrightarrow{z})$ produite par les tensions de Reynolds massiques $\left(-\overrightarrow{\overrightarrow{v'} \otimes \overrightarrow{v'}}\right)$ le long de la frontière $(y = 0)$. Intuitivement, on sent bien en effet qu'une force dans le même sens que l'orientation du contour $\mathcal{C}$ tend à faire croître la circulation de $\mathcal{D}$. Le terme $\frac{\partial k}{\partial z}$ peut être interprété (au coefficient 2/3 près provenant probablement du mélange 2D de l'écoulement de base et du mélange 3D des fluctuations turbulentes[4]) comme la force massique suivant $(-\overrightarrow{z})$ de la partie sphérique du tenseur de Reynolds $\overrightarrow{\text{grad}}\left(-\frac{2}{3}k\right).(-\overrightarrow{z}) = \frac{2}{3}\frac{\partial k}{\partial z}$.

L'équation (5.6) est maintenant appliquée au tourbillon longitudinal créé dans le jet propulsif par l'injection radiale et isolé figure 4.15 (schéma de droite). On obtient une formule analogue à celle du doublet, sauf qu'il y a désormais deux plans frontières repérés en coordonnées cylindriques (X, r, θ) par $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/4$:

$$\begin{aligned}\frac{D\Gamma}{D\tau} &= \left[\nu\int_0^{+\infty}\frac{\partial\omega_x}{r\partial\theta}dr - \int_0^{+\infty} -\left(\overline{u'\omega'_\theta} - \overline{u'_\theta\omega'_x}\right)dr\right]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \\ &= \left[\nu\int_0^{+\infty}\frac{\partial\omega_x}{r\partial\theta}dr - \int_0^{+\infty}\left(\frac{\partial k}{\partial r} - \left(\frac{\partial\overline{u'_r u'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{u'_r u'_\theta}}{r\partial\theta} + \frac{\partial\overline{u'_r u'_r}}{\partial r}\right)\right)dr\right]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \qquad (5.13)\end{aligned}$$

où $[f(\theta)]_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} = f(\theta = \pi/2) - f(\theta = \pi/4)$.

Dans les trois simulations, ZDES, RANS/SA ou RANS/SARC, le terme visqueux (moléculaire) est inférieur de 3 à 4 ordres de grandeur au terme turbulent qu'il soit modélisé dans les simulations RANS ou explicitement calculé en ZDES. Dans la simulation ZDES, le terme turbulent modélisé est inférieur de 3 ordres de grandeur au terme turbulent résolu. Le terme turbulent résultant (-T.T.) et la vitesse de décroissance de la circulation $(-d\Gamma/d\tau)$ sont tracés en fonction de la position axiale pour les trois simulations, figure 5.8. On constate que pour chaque calcul, les allures des courbes 5.8(a) et 5.8(b) sont semblables pour $X/D > 1.5$, mais qu'elles sont franchement différentes pour $X/D < 1.5$. La croissance de la circulation jusqu'à $X/D \approx 1$ (cf. figure 5.6) indique que le processus tridimensionnel de génération de la vorticité longitudinale se prolonge assez loin en aval de l'injection à environ 15 diamètres hydrauliques d'injection[5]. Jusqu'à $X/D \approx 1$, le raisonnement basé sur l'hypothèse des corps élancés n'est donc pas applicable. Ensuite, le raisonnement développé ci-dessus n'a pour seule ambition que de caractériser l'évolution longitudinale d'une perturbation (v, w) dans les plans (y, z) autour d'un écoulement de base de vitesse $\overrightarrow{V} = U_0\overrightarrow{X}$. Comme le montre la figure 5.9(a), le champ de vitesse est très loin d'être uniforme, notamment suivant X. Sur la figure 5.9(b) ont été tracées quelques valeurs de la vitesse longitudinale $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{X} = U$ au coeur des tourbillons longitudinaux repérés ici par le maximum de vorticité axiale ω_x dans chaque section transverse (y, z). Pour $X/D < 1.0$, le champ de vitesse étant très hétérogène et la distribution de vorticité ω_x étant très étirée, la région centrale des tourbillons est convectée à des vitesses allant de 120 à $290m/s$. On constate que la vitesse U ne peut être considérée comme constante et égale à la vitesse de référence $U_0 = 270m/s$ qu'à partir de $X/D \approx 2.$. Dans la région où elle peut être appliquée, $X/D \geq 2.$, on vérifie donc que la théorie des corps élancés permet de bien reproduire la dégénérescence des tourbillons longitudinaux uniquement sous l'action du champ turbulent.

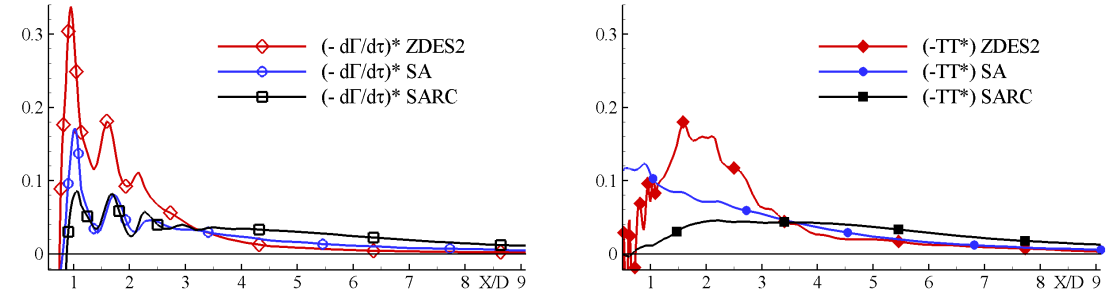
A l'issue du processus de formation 3D, la circulation prévue par la ZDES est élevée ($\Gamma_{\max} \approx 0.35$, figure 5.6). Ensuite, le fort terme turbulent (fig. 5.8(b)) la fait chuter très rapidement. Dans le cas

[4]Si la théorie était complètement 2D, i.e. $u' = 0$, $k = \frac{1}{2}\left(\overline{v'v'} + \overline{w'w'}\right)$, le terme turbulent s'identifierait à la force massique suivant $(-\overrightarrow{z})$ produite par la partie déviatrice des tensions de Reynolds le long de la frontière $(y = 0)$.

[5]Le diamètre hydraulique de la section d'injection A_3 est défini par $\sqrt{4A_3/\pi}$.

RANS/SARC, les tourbillons possèdent en $X/D \approx 1.$ une circulation presque aussi élevée qu'en ZDES et la conserve de manière excessive à cause de la faible diffusion turbulente modélisée. Dans le cas RANS/SA, la circulation atteint un maximum plus faible ($\Gamma_{max} \approx 0.22$) en fin de formation à cause d'une forte diffusion turbulente modélisée initiale et bien que celle-ci soit plus modérée par la suite (pour $X/D > 1.5$), le faible niveau de circulation au début de la phase de dégénérescence lui permet d'être relativement proche de celle prévue par la ZDES comparativement au calcul RANS/SARC.

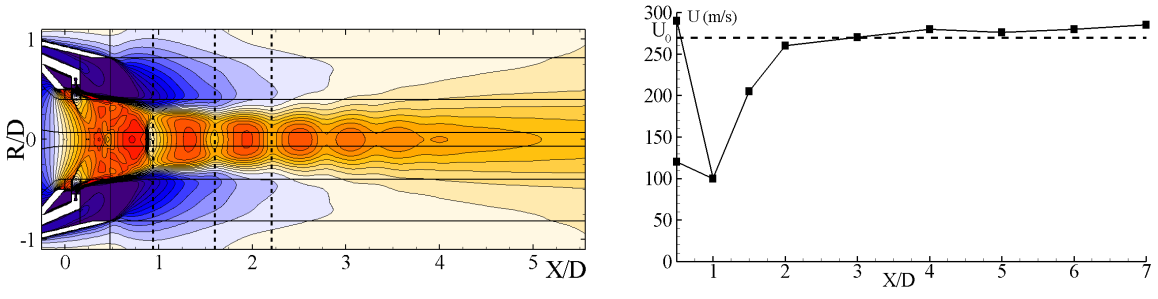
En ce qui concerne les termes turbulents calculés séparément sur les plans interfaces $\theta = \pi/2$ et $\theta = \pi/4$, on relève que pour $X/D > 2.$, la contribution du terme turbulent sur le plan des injecteurs actifs est toujours supérieure à celle du terme turbulent sur le plan des injecteurs inactifs dans les calculs RANS/SA et RANS/SARC. Par contre, dans le calcul ZDES, les deux contributions sont comparables. Les fluctuations turbulentes calculées par la ZDES sont donc probablement plus intenses près du plan des injecteurs inactifs comparativement à celles prévue par les simulations RANS (cf. figure 5.5).



(a) Vitesse de décroissance de la circulation (b) Terme turbulent

FIG. 5.8 – Comparaison du terme turbulent à la vitesse de décroissance de la circulation des CVP (termes adimensionnés par D,U_0).

Ajoutés à ces tendances globales, les pics de décroissance de la circulation à $X/D = 0.9|1.6|2.2$ pour la ZDES coïncident avec les impacts des ondes de compression sur la frontière du jet dans le plan des injecteurs actifs (cf. lignes pointillées, figure 5.9). Il en est de même pour les résultats RANS. Ceci s'explique par le fait que les tourbillons longitudinaux subsoniques étant disposés sur la surface du jet ondulée par les réflexions des ondes internes sont soumis à des compressions et des détentes respectivement dans les creux et les bosses. Dans les creux, la pression étant



(a) (b)

FIG. 5.9 – Contours de vitesse longitudinale dans le plan d'injection du jet contrôlé (a) et évolution de la vitesse longitudinale au coeur des tourbillons longitudinaux (b).

plus forte, la section de passage du tube tourbillon, qui est aussi (approximativement) un tube de courant, s'élargit (la vitesse y étant subsonique) et diminue le rapport de l'écartement b_1 ou b_2 des paires de tourbillons sur le rayon de dispersion a. Si l'on raisonne sur l'action de la turbulence avec l'hypothèse de viscosité turbulente (5.7), l'accroissement du rayon de dispersion a augmente la diffusion de la circulation $\sim \nu_t\Gamma/a^3$ sur l'interface $\theta = \pi/2$ ou $\theta = \pi/4$ et explique l'accélération de sa décroissance. Ceci se vérifie bien avec les calculs RANS. Dans le cas de la ZDES où les fluctuations aux grandes échelles sont résolues, l'accroissement du rayon de dispersion se traduit par un rapprochement des niveaux moyens de vorticité de part et d'autre de l'interface qui pourrait être à l'origine de l'augmentation du niveau des fluctuations turbulentes à l'interface. On vérifie sur le graphe de TT(X/D), figure 5.8(b), que le terme turbulent de l'équation (5.13) présente en effet des pics, bien que moins marqués que sur le graphe 5.8(a), manifestant une amplification locale du terme de dégénérescence turbulente (-TT) de la circulation. Les divergences entre 5.8(a) et 5.8(b) à partir de $X/D \approx 1.5$ sont attribuées aux effets compressibles qui ne sont pas pris en compte dans l'analyse proposée ici.

Afin d'estimer la compressibilité de la turbulence, le nombre de Mach turbulent a été calculé dans tout l'écoulement. Dans les cas étudiés ici, les régions où le nombre de Mach turbulent est maximal coïncident avec les régions où l'énergie cinétique turbulente est maximale. Les valeurs relevées respectivement dans le jet de référence et le jet contrôlé sont :

$$\max\left(M_T = \frac{\sqrt{2k}}{a}\right) = 0.45 \text{ et } 0.6 \tag{5.14}$$

On ne peut donc pas affirmer que la compressibilité a un effet négligeable sur l'action de la turbulence dans l'évolution des tourbillons longitudinaux et ses effets restent à explorer.

Un mot sur la trajectoire des tourbillons. Dans la section 5.3.1, nous avons indiqué par une simple analyse dimensionnelle que les effets visqueux et turbulents peuvent avoir une action sur le mouvement des tourbillons longitudinaux. Afin de préciser cette action, il est nécessaire d'écrire l'équation d'évolution de la position du centre de vorticité $\overrightarrow{OG}$ à partir de celles du moment d'ordre 1 $\overrightarrow{I_1^O} = \Gamma\overrightarrow{OG}$ et de la circulation Γ. Ceci n'a pas été fait dans le cadre de ce travail. Toutefois, l'équation du moment d'ordre 1 développée en annexe (D.5) permet de distinguer l'action purement non-visqueuse de celles de la viscosité et du champ fluctuant. Lorsque la circulation devient assez faible, typiquement après $X/D \approx 2$, la vitesse induite par la distribution de vorticité sur les plans $\theta = \pi/4$ et $\theta = \pi/2$ diminue et rend probablement le terme non-visqueux beaucoup moins important devant les autres termes. Cette analyse doit néanmoins être poursuivie pour pouvoir en dire davantage.

5.4 Existence de deux régimes de pénétration : régime intermittent et régime quasi-stationnaire

Deux rapports de pression d'injection SPR $= p_{i3}/p_{i1}$ ont été testés lors de cette étude. Un scénario d'augmentation du mélange a été proposé suite à l'examen du jet contrôlé par l'injection forte à SPR = 2.8. Dans cette partie, nous nous attardons sur l'injection plus faible à SPR = 1.4. Tout d'abord, il a été remarqué au chapitre 2 que la pression totale mesurée sur l'axe du jet pendant l'expérience oscille spatialement en X (cf. figure 2.5(a)). Bien que ce phénomène n'ait pas pu être reproduit par les simulations, une analyse théorique est effectuée dans la première section. Dans la deuxième section, l'analyse de la pénétration des jets secondaires au cours du temps montre que celle-ci présente deux régimes bien distincts suivant la valeur du SPR.

5.4.1 Oscillations de pression totale moyenne sur l'axe en injection faible

La pression totale mesurée sur l'axe du jet contrôlé par les injections à SPR=1.4 est tracée figure 5.10. Le but de l'analyse présentée dans cette section est d'expliquer à l'aide de considérations de nature stationnaire tant les portions où la pression totale croît que celles où elle décroît. On suppose pour commencer que le jet possède bien un axe de symétrie central et que le sondage a bien été effectué sur cette axe.

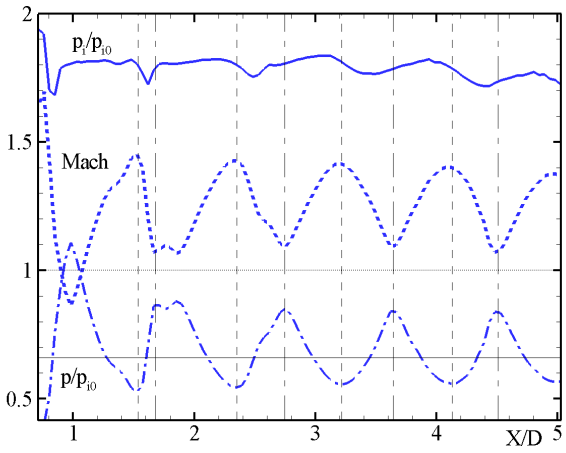


FIG. 5.10 – Sondage axial de la pression totale, de la pression statique et du nombre de Mach dans le jet contrôlé par l'injection à SPR=1.4.

Nous avons vu au chapitre 3 que la contrainte géométrique d'axisymétrie entraîne une concentration des ondes de compression convergeant vers l'axe qui peuvent focaliser en un choc et former un disque de Mach [215]. Lorsque le jet est soumis à quatre injections radiales, le schéma de ses ondes internes est modifié. Pour le fort débit d'injection (SPR=2.8), des ondes de compression focalisent et donnent naissance sur l'axe à un structure semblable à un disque de Mach dans les plans de symétrie des injecteurs. L'hypothèse formulée ici est que pour le faible débit d'injection (SPR=1.4), l'organisation des ondes du jet de référence n'est pas autant perturbée que sous l'action des injections fortes (SPR=2.8) si bien que les ondes de compression focalisent moins rapidement et forment un disque de Mach très localisé au voisinage de l'axe de symétrie. Un tube de courant s'appuie alors sur le contour (non-circulaire) du disque de Mach et sépare le jet en une zone centrale à faible entropie d'une zone périphérique à plus forte entropie. Ce tube central est supposé de faible extension radiale. Au passage du disque de Mach, la pression totale sur l'axe chute brusquement comme on le voit en $X/D \approx 0.9$, figure 5.10. Reste à expliquer pourquoi elle remonte par la suite. En vertu du "Triple-shock Entropy Theorem" [107], la pression totale sur l'axe est inférieure à celle de l'écoulement périphérique. Pour une pression statique donnée sur l'interface entre ces deux régions du jet, le nombre de Mach et la vitesse sont donc plus petites et la température est plus grande dans le tube de courant central. Ce sont alors les diffusions de quantité de mouvement et de chaleur qui agissent et expliquent la remontée de p_i sur l'axe. Nous allons l'écrire de manière plus formelle.

L'équation (4.52) donne l'évolution de la pression d'arrêt isentropique dans le cas général. Regardons comment cette équation dégénère sur l'axe de symétrie du jet. L'écoulement est stationnaire et il n'y a ni force de volume $\overrightarrow{f}$ ni source volumique de chaleur Q. Le flux de chaleur peut être exprimé au moyen de la loi de Fourier $\overrightarrow{q} = -\lambda.\overrightarrow{\text{grad}}T$. En supposant que les variations transverses

sont prépondérantes (hypothèse de tube mince), $\partial/\partial y \sim \partial/\partial z \gg \partial/\partial x$, on obtient :

$$\frac{u}{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial x} = \frac{\gamma\,\chi}{2\,(\gamma-1)}\frac{u^2}{H_i}\left[P_r\frac{1}{u^2}\Delta_{yz}u^2 - \frac{1}{T}\Delta_{yz}T\right]$$

où $\Delta_{yz}T = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$. La viscosité dynamique μ ainsi que la conductivité thermique λ ont été considérées comme constantes. Ces coefficients ont de plus été regroupés dans le nombre de Prandtl $P_r = \frac{\mu c_p}{\lambda}$ et la diffusivité thermique $\chi = \frac{\lambda}{\rho c_p}$. On rappelle aussi que $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ et $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{z})$ sont des plans de symétrie, ce qui implique que u est une fonction paire de y et z. De ce fait, le terme de dissipation $\overline{\overline{\tau}}\colon\overline{\overline{S}} \sim (\partial u/\partial y)^2 + (\partial u/\partial z)^2$ s'annule sur l'axe. De plus, l'allure globale constante de la p_i, figure 5.10, permet de dire que la couche de mélange turbulente externe du jet n'a pas encore atteint l'axe du jet à $X/D = 5$, ce qui justifie l'hypothèse d'écoulement laminaire au voisinage de l'axe dans la zone sondée. Sous ces approximations, on peut remarquer que la pression d'arrêt croît par le travail des forces de frottement ($\sim \Delta_{yz}u^2 > 0$ puisque la vitesse est plus faible derrière le choc sur l'axe) ainsi que par diffusion de l'énergie thermique ($\sim \Delta_{yz}T < 0$ car la température est plus élevée derrière le choc sur l'axe).

Ce raisonnement pour expliquer l'oscillation de la p_i axiale est satisfaisant et pourrait s'appliquer à un jet axisymétrique présentant un disque de Mach de taille très réduite. Toutefois, il ne permet pas de comprendre totalement l'allure des courbes de la figure 5.10. En effet, on remarque que le nombre de Mach ne devient subsonique qu'après la chute de p_i en $X/D \approx 0.9$, i.e. là où pourrait être positionné le disque de Mach. De plus, le raisonnement précédent permet d'expliquer les portions de p_i croissante mais ne justifie pas l'existence des zones de décroissance progressive autour de $X/D = 2.4|3.2|4.1$. L'existence de chocs successifs sur l'axe devrait être accompagnée d'une chute de p_i brutale et d'une zone subsonique immédiatement en aval, ce qui n'est pas le cas.

Les conditions de sondages sont aussi à remettre en cause. L'arrière-corps étant maintenu au centre de la veine d'essai par un dard, le sillage du mât dissymétrise légèrement le jet et dévie son axe de symétrie (qui n'en est donc strictement plus un). Ainsi, la sonde peut avoir mesuré des points alignés sur la périphérie du tube à faible entropie bombé et resserré periodiquement sous l'action des ondes de détente/compression. Nous arrêtons là cette analyse basée sur des considérations stationnaires pour maintenant regarder comment évolue le champ aérodynamique dans le temps.

5.4.2 Régimes de pénétration des injections fortes et des injections faibles

Le calcul RANS (SARC) du jet contrôlé par 4 injecteurs à SPR=2.8 effectué en pas de temps local (CFL imposé =10) converge vers un état stationnaire. Le calcul du jet contrôlé par 4 injecteurs à SPR=1.4 réalisé dans les mêmes conditions ne converge pas strictement vers un état stationnaire. Toutefois, comme l'écoulement produit au cours des itérations par la méthode RANS ne présente que de faibles fluctuations seulement visibles dans le champ de pression totale sur l'axe du jet, le champ aérodynamique a été moyenné pour avoir un premier aperçu de l'effet d'une variation de pression d'injection sur le jet primaire (cf. chapitre 4). Nous revenons ici sur cette condition d'injection particulière.

Simulation URANS. Afin de vérifier la consistence en temps du phénomène instationnaire, un calcul URANS a été réalisé avec un pas de temps de $1\mu s$ et 5 sous-itérations (mêmes réglages que les calculs ZDES). On observe que le phénomène instationnaire balbutiant dans le "calcul RANS" précédent s'exprime alors pleinement : les 4 injections secondaires pénètrent de manière

intermittente et en phase dans le jet primaire avec une forte amplitude de battement (voir strioscopies en annexe E). La pénétration intermittente des jets secondaires provoque une pulsation des ondes de pression qui induisent périodiquement à la fréquence $f_i = 22\text{kHz}$ ($T_i = 45\mu s$) une perte de pression totale sur l'axe du jet primaire à $X/D \approx 0.5$. Le choc situé à $X/D \approx 0.9$ voit alors un écoulement incident dont la pression totale varie dans le temps et génère donc un chapelet de poches à faible pression génératrice transporté le long de l'axe suivant l'équation (4.52). La figure 5.11 illustre la répartition de p_i/p_{i0} dans le plan d'injection pour deux cas extrêmes : à gauche, la pression totale est minimale entre $X/D = 0.5$ et 0.9 et à droite, elle atteint sa valeur maximale. Cette dernière est supérieure à la valeur stationnaire initiale, probablement en raison du terme purement instationnaire $\sim \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t}$ dans l'équation (4.52). On mesure que les paquets de p_i faible situés après le choc ($X/D \approx 0.9$) se déplacent à une vitesse proche de $650m/s$ ce qui correspond plus à l'ordre de grandeur de la vitesse de l'onde de pression avançante $u + a$ qu'à celui de la vitesse de convection $u \approx 350$. Le terme purement instationnaire $\sim \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t}$ corrélé à l'onde de pression avançante n'est donc pas négligeable et une analyse plus approfondie est nécessaire pour pouvoir interpréter précisément l'évolution spatiale et temporelle de la p_i sur l'axe. Nous nous contentons ici de relier le battement en phase des 4 jets secondaires à l'oscillation temporelle de la p_i sur l'axe du jet.

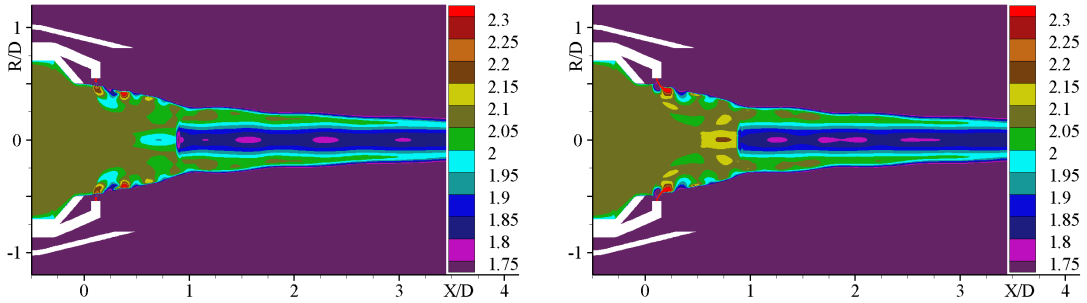
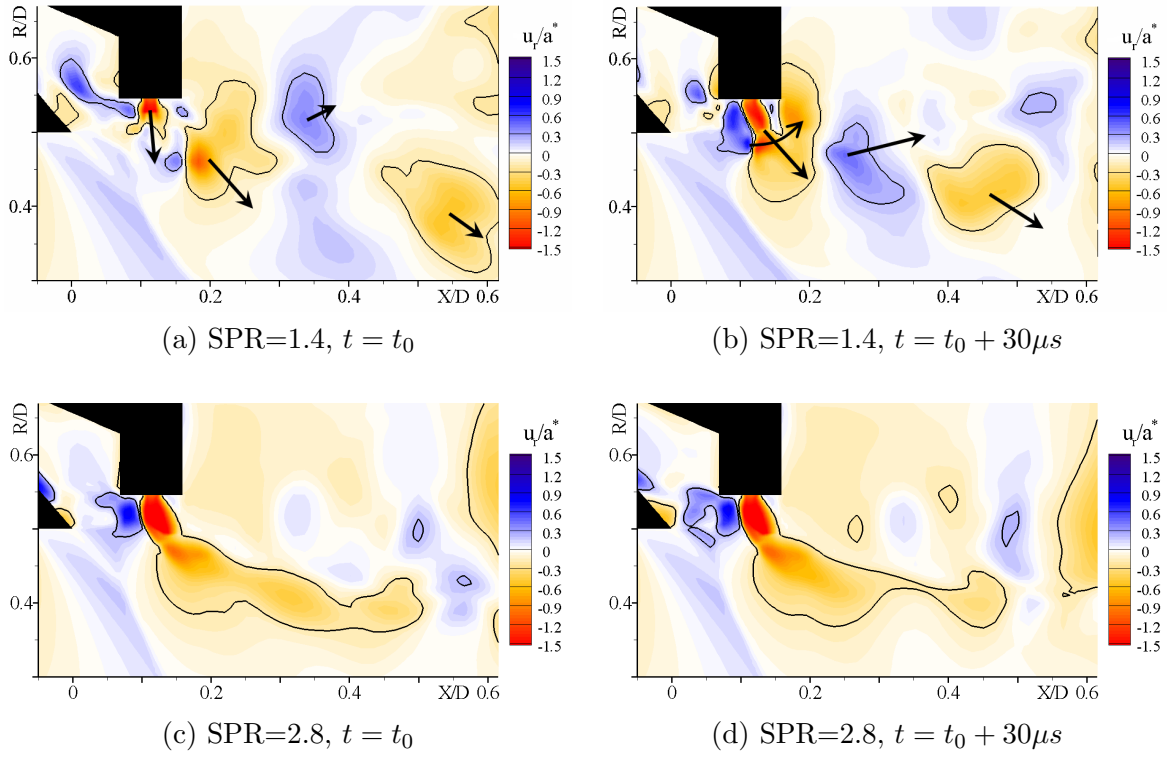


FIG. 5.11 – Champ URANS de pression totale p_i/p_{i0} dans le plan d'injection du jet contrôlé à SPR=1.4 à deux instants caractérisitiques.

Simulation ZDES. Suite à ces résultats, un calcul ZDES a été entrepris avec un pas de temps de $1\mu s$ et 5 sous-itérations. Le régime de pénétration intermittente est de nouveau observé pour l'injection à SPR=1.4 et a une période $T_i \approx 44\mu s$ proche de celle relevée en URANS ($T_i \approx 45\mu s$). La figure 5.12 montre deux vues caractéristiques de la pénétration du jet secondaire prises avec un intervalle de temps identique de $30\mu s$ pour l'injection faible SPR=1.4 et l'injection forte SPR=2.8. Les contours colorés représentent la vitesse radiale u_r adimensionnée par la vitesse au col du primaire a^*. A faible SPR, le jet secondaire, repéré par la zone $u_r < 0$ issue de l'injecteur, part à t_0 d'une position très retirée par rapport au jet primaire, vue 5.12(a), et pénètre progressivement dans celui-ci jusqu'à $t_0+30\mu s$, vue 5.12(b). A ce moment là, la partie du jet secondaire ayant pénétré est balayée par le jet primaire et se détache sous forme d'une poche de fluide convergent vers l'axe $u_r < 0$. La partie du jet secondaire située en dehors du jet primaire n'a plus qu'à reprendre la phase de pénétration en 5.12(a) et un nouveau cycle commence. Ainsi, on observe dans la couche de mélange du jet primaire à une succession de poches $u_r < 0$ entre lesquelles s'intercalent des poches de fluide plus réduites éjectées du jet primaire $u_r > 0$. Dans le cas à fort SPR, vues 5.12(c) et 5.12(d), la portion initiale du jet secondaire pénètre continûment dans le flux primaire. Seule la partie terminale située en dessous de $R/D \approx 0.45$ semblent fluctuer de manière significative bien qu'avec une amplitude moins marquée que dans le cas à faible SPR.



(a) SPR=1.4, $t = t_0$ (b) SPR=1.4, $t = t_0 + 30\mu s$

(c) SPR=2.8, $t = t_0$ (d) SPR=2.8, $t = t_0 + 30\mu s$

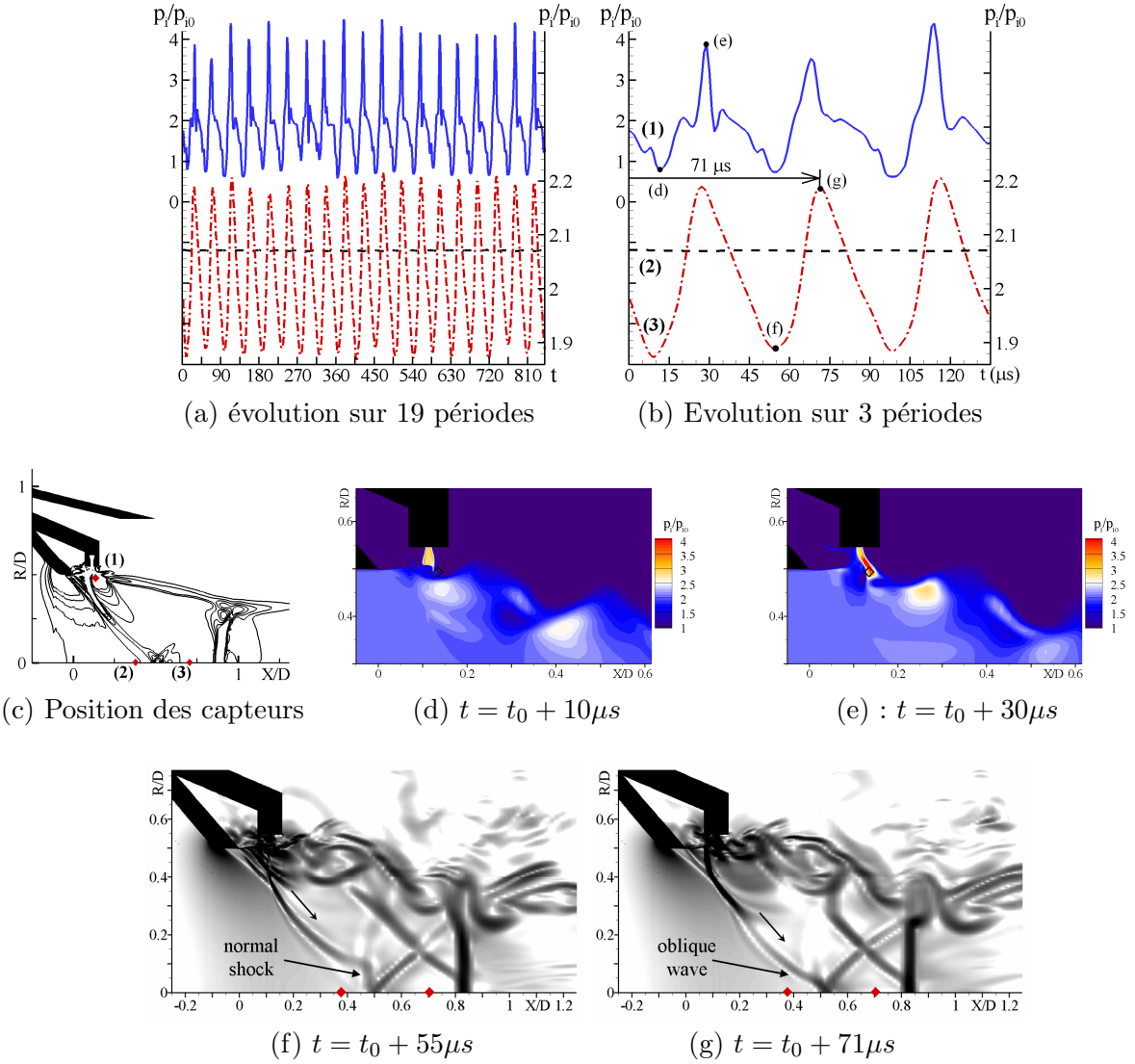
FIG. 5.12 – Deux régimes de pénétration en fonction du SPR : régime intermittent (a-b) et régime quasi-stationnaire (c-d). Les lignes noires correspondent à $u_r/a^* = \pm 0.2$.

La figure 5.12 illustre donc clairement l'existence de deux régimes de pénétration distincts :
- un régime de pénétration intermittente pour un faible rapport de pression d'injection,
- un régime de pénétration quasi-stationnaire pour un fort rapport de pression d'injection.

L'évolution temporelle de la pression génératrice a été tracée, figure 5.13, pour 3 positions particulières du jet contrôlé à SPR=1.4 : (1) au niveau de l'injection, (2) sur l'axe avant l'onde de Mach moyenne issue de la zone d'injection, (3) sur l'axe après cette onde de Mach (cf. figure 5.13(c)). Le temps d'origine $t_0 = 0$ correspond à la position la plus en retrait du jet secondaire conformément à la figure 5.12.

On constate tout d'abord, figure 5.13(a) que les signaux (1) et (3) présentent une périodicité flagrante (les signaux relevés en URANS sont eux strictement périodiques) et que leurs périodes d'oscillation sont identiques $T_i \approx 44\mu s$. Le signal (2) situé en dehors du cône d'influence de la zone d'injection est constant. Ces trois signaux indiquent donc que la pénétration intermittente du jet secondaire est bien à l'origine d'une fluctuation de la pression d'arrêt isentropique sur l'axe. Si l'on regarde de plus près le signal mesuré en (1) au voisinage de l'injection, figure 5.13(b), on s'aperçoit que la pression génératrice continue de décroître alors que le jet secondaire pénètre dans le jet primaire. Ceci s'explique par le fait que le jet secondaire repousse progressivement le flux primaire à forte p_i hors du point de sondage (1). La figure 5.13(d) montre l'allure du champ de p_i/p_{i0} au moment où la p_i est minimale en (1) : celle-ci est proche de la pression génératrice de l'écoulement extérieur $p_i/p_{i0} \approx 1$[6]. Ensuite, le jet secondaire continue à pénétrer dans le jet

[6]Plus précisément, la pression génératrice en (1) résulte de la pression génératrice de la ventilation $p_{i2}/p_{i0} \approx 0.6$



(a) évolution sur 19 périodes (b) Evolution sur 3 périodes

(c) Position des capteurs (d) $t = t_0 + 10\mu s$ (e) : $t = t_0 + 30\mu s$

(f) $t = t_0 + 55\mu s$ (g) $t = t_0 + 71\mu s$

FIG. 5.13 – Evolution temporelle de la pression d'arrêt isentropique en 3 points particuliers du jet contrôlé (SPR=1.4) et zoom sur l'injection (le losange représente la position du capteur).
(La vue (c) positionne les capteurs par rapport aux lignes iso-$||grad\rho||$ du champ moyen)

primaire, mais il est progressivement dévié vers l'aval. A $t = t_0 + 30\mu s$, le jet secondaire passe a travers le point de sondage (1) (cf. figure 5.13(e)) et y fait grimper la pression totale jusqu'à la valeur maximale $p_i/p_{i0} \approx 4$. Cette valeur dépasse largement la pression génératrice maximale injectée de manière stationnaire $p_{i3}/p_{i0} \approx 2.8$ probablement à cause du terme purement instationnaire de l'équation (4.52). On vérifie en effet que la contribution positive du terme $\sim \frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t}$ coïncide bien avec les plages de croissance de la p_i. A partir de là, la partie basse du jet secondaire se détache de sa partie supérieure sous l'action du jet primaire et un nouveau cycle recommence ($t = t_0 + 44\mu s$). A partir de l'instant où le jet secondaire commence la phase de pénétration, à t_0, une onde de pression est émise et se progage dans le cône de Mach moyen issu de la zone d'injection. Cette onde arrive sur l'axe $\approx (D/2)/a^* \approx 70\mu s$ plus tard (voir figure 5.13(g)) et forme une onde oblique (bien que, localement sur l'axe, cette onde doive dégénérer en disque de Mach infinitésimal). A peu près au même instant, la pression totale en (3) atteint sa valeur

et d'une contribution instationnaire.

maximale. Ce résultat est très surprenant. En fait, l'onde instationnaire émise aux alentours de (1) à $t = t_0$ forme, au cours de sa propagation vers l'axe du jet, une onde semblable à un choc droit (voir figure 5.13(f)) peu avant $t = t_0 + 55\mu s$. Cette onde étant mobile, l'écoulement en aval peut rester supersonique dans le repère fixé à la tuyère et permet l'existence d'une onde de choc oblique stationnaire. Comme cette onde est droite, elle induit une perte de pression génératrice maximale, voir le point (f) sur le graphe 5.13(b). En réalité, rien ne prouve que cette onde soit un choc ou une onde isentropique, puisqu'en instationnaire on ne peut se baser uniquement sur la chute de pression totale pour déterminer la nature de l'onde (il faudrait analyser en plus la distribution de température totale, insensible aux chocs mais sensible à $\partial p/\partial t$). Ultérieurement, lorsque l'onde atteint l'axe, le supposé choc droit n'est plus visible (figure 5.13(g)) et la pression totale au point (3) atteint sa valeur maximale à $t = t_0 + 71\mu s$.

Ceci ne constitue qu'une toute première analyse de l'écoulement instationnaire et une étude bien plus approfondie est nécessaire pour comprendre précisément l'évolution spatio-temporelle de la pression totale et en déduire le lien entre la pénétration intermittente du jet secondaire et la fluctuation de pression totale sur l'axe. Enfin, une nouvelle hypothèse peut être formulée pour expliquer les oscillations de pression totale moyenne sur l'axe du jet contrôlé à faible SPR. Même si le mécanisme de sa génération reste à établir, il est maintenant évident que la fluctuation de pression totale produite en $X/D \approx 0.5$ se propage le long de l'axe du jet (cf. figure 5.11). En supposant que cette fluctuation soit de faible amplitude, on peut considérer qu'elle se propage dans le champ moyen du jet contrôlé. Celui-ci n'est pas uniforme puisqu'il contient des cellules de compression-détente. Aussi, il est possible que l'interaction des fluctuations de p_i avec le champ porteur favorise la croissance (resp. décroissance) de p_i dans les cellules lentes (resp. rapides) de manière à ce que celles-ci persistent dans le champ moyenné (cf. figure 5.10) et forme l'oscillation apparemment stationnaire de p_i.

5.4.3 Questions sur l'origine du régime de pénétration intermittente

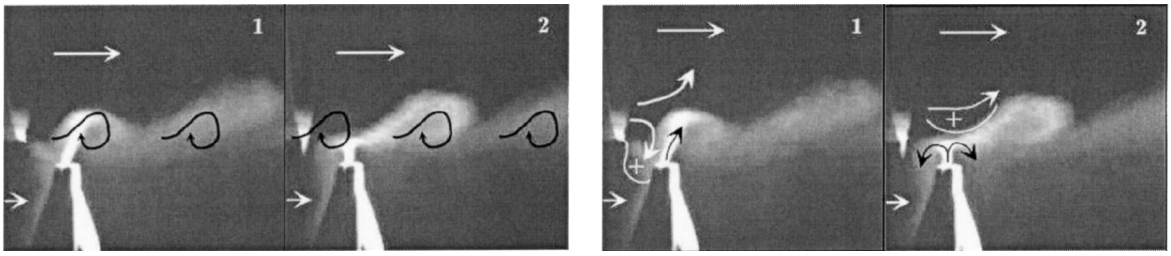
Cette section n'a absolument pas l'ambition d'expliquer l'existence du régime de pénétration intermittente. Ce problème est très complexe et nous nous contenterons ici de poser quelques questions pour faire avancer la réflexion. Selon la littérature consultée, l'existence de deux régimes de fonctionnement bien distincts du contrôle de jet par injections radiales a été découverte par Davis [63]. Celui-ci a montré expérimentalement qu'une faible vitesse d'injection[7] permet d'accroître le mélange turbulent du jet sans en altérer significativement la forme. Il a observé que lorsque la vitesse d'injection devient suffisamment grande, le jet est fortement déformé, de manière similaire à un jet perturbé par des tabs solides [24].

L'intermittence de la pénétration du jet de contrôle a été mise en évidence plus tard par Collin [47, 48]. Celui-ci a analysé l'évolution temporelle du champ aérodynamique au voisinage de l'interaction des deux jets. Il remarque que la fréquence de battement des jets de contrôle est proche de la fréquence des structures de Kelvin-Helmoltz (KH) au droit des injecteurs et propose deux scénarios pour expliquer l'existence du régime intermittent.

Tout d'abord, la dimension Δx de l'orifice d'injection étant petite par rapport à l'épaisseur de la couche de mélange, il suggère que les fluctuations de pression induites par le passage des tourbillons de KH peuvent refouler ou favoriser la pénétration du jet secondaire selon la position de l'allée de tourbillons vis à vis du jet impactant. Ce premier scénario est représenté sur la figure 5.14(a) tirée de [48]. La pénétration intermittente d'un jet impactant une couche de mélange sous un angle de 45 deg a également été constaté par Lardeau *et al.* [144] dans une DNS incom-

[7] Davis [63] quantifie la force du contrôle au moyen d'une vitesse équivalente liée à la dynalpie du jet secondaire.

pressible à faible nombre de Reynolds. Toutefois, il est important de noter que dans ce dernier cas, d'une part, les structures de la couche de mélange ont une cohérence spatiale et temporelle très forte, et que d'autre part, le jet possède une quantité de mouvement normale à la couche de mélange (30%) plus faible. Un tel scénario exprime donc que le jet secondaire est plus passif que acteur vis à vis de la dynamique propre de la couche de mélange. Ce scénario n'est donc applicable que si les structures de la couche de mélange sont suffisamment développées, i.e. que les structures tourbillonnaires formées par enroulement de la couche de mélange possèdent une circulation suffisante pour contrer la quantité de mouvement introduite par l'injection secondaire. En particulier, le premier scénario est d'autant plus contestable que l'injection est forte et qu'elle est proche de la tuyère principale. Aussi, ce premier scénario est rejeté par Collin.



(a) 1er scénario (b) 2ème scénario

FIG. 5.14 – Deux scénarios de pénétration intermittente proposés par Collin [47, 48].

La deuxième hypothèse formulée par Collin est qu'il existerait une "instabilité intrinsèque" au niveau de l'interaction entre le jet de contrôle et la couche de mélange du jet principal. En fait, dans un premier temps, il propose plutôt une description phénoménologique de la pénétration intermittente qu'une explication de son origine : en raison de la déviation de l'écoulement primaire provoquée par l'intrusion du jet secondaire, une zone de sur-pression se développe sur son bord amont (voir figure 5.14(b)(1)) ; lorsque la sur-pression devient suffisamment forte, elle est convectée vers l'aval et stoppe la pénétration du jet secondaire (2). Ensuite, le jet secondaire pénètre de nouveau et le processus commence une nouvelle période (1). On note que les clichés (a-b), figure 5.12, issus des simulations ZDES sont semblables aux photographies (1-2), figure 5.14(b), auparavant réalisées par Collin.

Ajouté à ce deuxième "scénario", Collin propose une explication concernant l'origine de l'intermittence. Lorsque le jet secondaire pénètre de bas en haut, figure 5.14(b)(1), une partie du flux primaire fuit vers le bas. Si l'on considère l'analogie de la plaque plane faite au chapitre 4, ce résultat n'est pas surprenant. Collin justifie l'existence de ce contre-courant vis-à-vis du jet secondaire à l'aide du champ de vitesse verticale moyenne obtenu par LDV. A partir de ce constat, il émet l'hypothèse qu'une instabilité absolue pourrait être portée localement par la surface de cisaillement amont du jet secondaire étant donné que le rapport $R = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1}$ des vitesses verticales maximales qu'il mesure ($V_2 > (-V_1) > 0$) dépasse le rapport critique $R = 1.315$ obtenu sur un écoulement de base à lignes parallèles et à profil de vitesse en tangente hyperbolique (cf. Huerre et Monkewitz [117]). Si l'on considère que la théorie actuelle n'est formellement bien développée que pour évaluer la stabilité d'un écoulement autour d'un champ de base stationnaire vérifiant les équations du mouvement (Euler ou Navier-Stokes), l'hypothèse formulée par Collin est très contestable. En effet, si l'on prend un cliché instantané, tel que représenté figure 5.14(b)(1), ou un écoulement semblable moyenné en phase pour le champ de base, celui-ci est hors équilibre au sens des équations du mouvement stationnaires. L'accélération non-nulle peut être interprétée comme une force d'inertie. Afin de réaliser une analyse de stabilité tra-

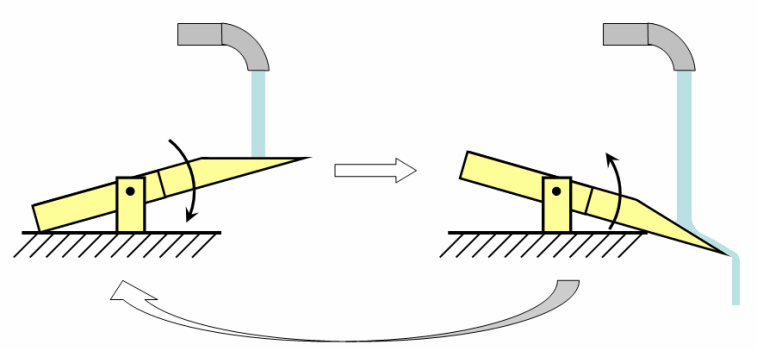


FIG. 5.15 – Schéma du bambou sur pivot rempli par un débit d'eau constant.

ditionnelle, i.e. autour d'un écoulement de base stationnaire, on peut imaginer que cette force soit fixée dans le temps à sa valeur instantanée. Si l'analyse met en évidence une instabilité qui croît plus vite que le temps caractéristique d'existence de la force d'inertie, elle a peut-être une chance de se développer durant l'évolution du système. Toutefois, une analyse de stabilité basée sur les équations du mouvement n'a plus aucun sens si l'on soustrait cette force d'inertie puisque l'écoulement de base ne vérifiera pas les équations du mouvement stationnaires. De même, si l'on prend le champ instationnaire moyenné en temps qui est équilibré par les tensions de Reynolds, on ne peut effectuer une analyse de stabilité basée sur les équations d'Euler ou de Navier-Stokes puisqu'en faisant cela on retire la force de volume représentative de l'activité turbulente ce qui peut déséquilibrer l'écoulement[8]. Si l'on veut faire une analyse de stabilité de l'écoulement, la deuxième question à résoudre est comment déterminer un écoulement de base stationnaire vérifiant les équations du mouvement qui satisfasse les conditions limites (stationnaires) de notre problème et la première question est de savoir si un tel écoulement de base existe. Pour illustrer ce dernier point, prenons l'exemple d'un tube de bambou articulé par une liaison pivot et rempli par un débit d'eau continu, figure 5.15. Au début, le bambou basculé en arrière se remplit progressivement d'eau dans sa partie avant. Lorsque celle-ci est suffisamment lourde, le bambou bascule en avant et vide son eau. La vitesse de vidange du bambou est déterminée par sa géométrie, par son inertie et par le frottement de la liaison pivot. Si le débit d'alimentation est suffisamment faible par rapport au débit de vidange, le bambou vidé de son eau rebascule en arrière. Tant que le débit d'alimentation est maintenu, le processus instationnaire se reproduit périodiquement sous forme d'un battement du bambou et pourtant ce système n'a aucun état d'équilibre[9]. En raison de sa dynamique intrinsèque, le système oscille dans une plage limitée de mouvement sans y posséder d'état d'équilibre. Pour cette raison, on ne peut donc pas dire que le système présente une "instabilité absolue" au sens classique [118]. Un autre exemple de ce phénomène de battement distinct d'un phénomène instable est incarné par le flottement aéroélastique [16]. L'interaction des deux jets à faible SPR présente peut être ce type de dynamique.

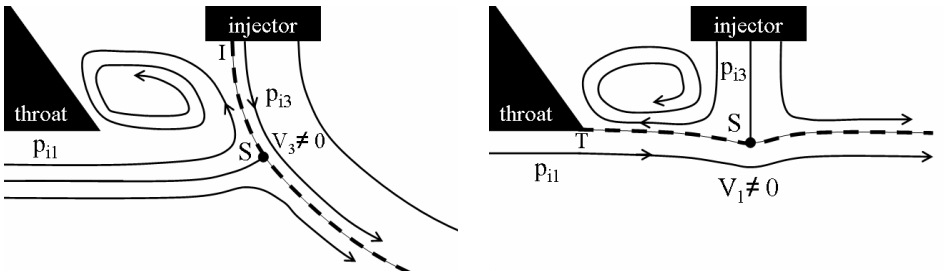
Bien que le scénario 2 proposé par Collin soit ici contesté, on peut essayer d'interpréter son hypothèse d'instabilité absolue (IA) à l'aide d'un schéma des lignes de courant moyennées en temps (puisqu'il justifie la présence de cette IA à l'aide du champ moyen). C'est ce qui est

[8]Ce problème est "esquivé" lorsque l'on analyse la stabilité d'une couche cisaillée à ldc rectilignes parallèles car tout profil $u(y)\overrightarrow{x}$ est solution des équations d'Euler stationnaires.

[9]Bien sûr, si l'on augmente le débit d'alimentation, le bambou va rester basculé en avant à cause de la force d'impact de l'eau. Toutefois, le débit est un paramètre de contrôle du système qui détermine si le système a soit un état d'équilibre soit un mouvement de battement. Il ne doit pas être confondu avec un paramètre de contrôle au sens de la théorie de la stabilité [118], i.e. limitant un domaine de stabilité et un domaine d'instabilité autour d'un état d'équilibre.

présenté figure 5.16. Ce schéma est pour l'instant tracé en considérant que le fluide est parfait donc non-visqueux et éventuellement discontinu. La ligne séparatrice amont du jet secondaire est ainsi une surface de glissement entre les écoulements primaire et secondaire. L'instabilité absolue indiquée par Collin étant de nature non-visqueuse, il n'est a priori pas trop restrictif de se placer en fluide parfait. Comme le signale Collin dans sa thèse [47], le phénomène d'intermittence a aussi été observé lorsque le jet primaire est subsonique, ce qui indique que l'existence de l'intermittence n'est pas conditionnée par la présence des chocs. On peut donc raisonner sur un écoulement incompressible dont la masse volumique est constante et dont la pression génératrice p_i est constante par morceaux : $p_i = p_{i1}$ et $p_i = p_{i3}$ respectivement dans les flux primaire et secondaire.

Il existe alors deux configurations possibles suivant la valeur du rapport SPR $= p_{i3}/p_{i1}$. Si SPR > 1, figure 5.16(a), l'écoulement primaire est stoppé au point S en atteignant la pression statique $p_S = p_{i1}$, alors que sur la ligne de courant voisine appartenant au jet secondaire, la vitesse $V_3 = \sqrt{2(p_{i3} - p_{i1})/\rho}$ ne s'annule pas, ce qui signifie que le jet secondaire pénètre de manière stationnaire dans le jet primaire. Au contraire, si SPR < 1, figure 5.16(b), le jet secondaire est stoppé au point S en atteignant la pression statique $p_S = p_{i2}$, alors que sur la ligne de courant voisine appartenant au flux primaire, la vitesse $V_1 = \sqrt{2(p_{i1} - p_{i3})/\rho}$ ne s'annule pas, ce qui signifie que le jet secondaire ne peut pas pénétrer dans le jet primaire de manière stationnaire. Dans le cas SPR < 1, la pénétration du jet ne peut donc se faire que de manière instationnaire.



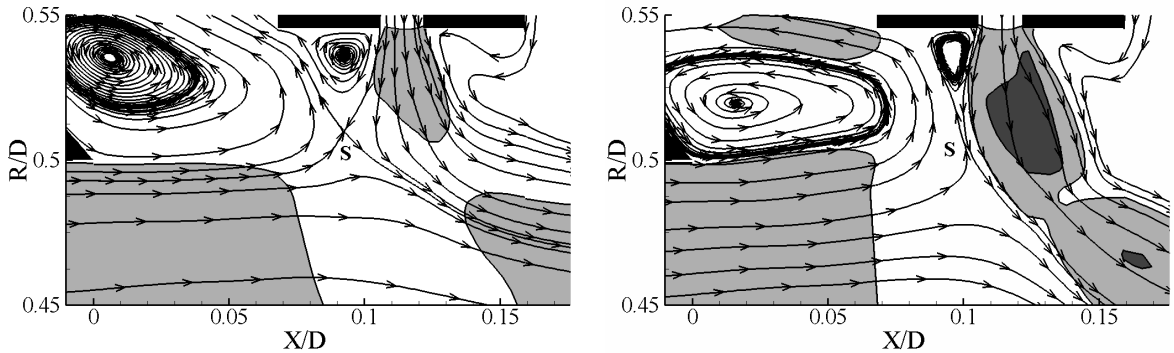
(a) SPR > 1 (b) SPR < 1

FIG. 5.16 – Lignes de courant en fluide parfait dans le plan d'injection en fonction du SPR.

Les schémas 5.16(a) et 5.16(b) montrent que le SPR conditionne l'existence d'une zone cisaillée par des courants contraires, i.e. une zone possible d'instabilité absolue : pour SPR > 1, il s'agit de la portion IS et pour SPR < 1, il s'agit de la portion TS. On note également que les vues schématiques moyennes 5.16(a) et 5.16(b) sont semblables aux clichés instantanés et dessins de Collin, figures 5.14(b)(1) et 5.14(b)(2). Toutefois, mener la discussion de la pénétration du jet secondaire à l'aide de la p_i instantanée est très délicat pour les raisons indiquées dans la section précédente. C'est pourquoi, soit l'analyse doit être fondée sur des variables primitives de l'écoulement (pression, vitesse...) soit la compréhension de l'évolution temporelle de la p_i et son interprétation physique doivent être approfondies. Pour SPR > 1, on peut en outre identifier la zone d'instabilité absolue indiquée par Collin à la branche IS, figure 5.16(a). Pour le régime SPR < 1 où la pénétration du jet secondaire, si elle existe, est nécessairement instationnaire, on constate que cette zone de contre-courants est déplacée sur la branche TS. Le régime de pénétration intermittente désigné ici pourrait donc être déclenché localement par l'instabilité absolue de la couche de mélange sur la branche TS et non plus sur le bord amont du jet secondaire comme supposé par Collin. Sur le schéma 5.16(a) (resp. 5.16(b)), on remarque enfin qu'un

tourbillon se forme par enroulement dans le sens trigonométrique (resp. horaire) d'une partie du flux primaire (resp. secondaire) lorsque SPR > 1 (resp. SPR < 1).

Cependant, les topologies décrites par la figure 5.16 sont impossibles lorsque la viscosité est "activée" et impose au champ de vitesse d'être continu. Dans ce cas, le demi point selle S devient un point selle complet composé de deux branches colinéaires divergentes (1ère direction principale du tenseur des déformations dans le plan) et de deux branches colinéaires convergentes (2ème direction principale). Les lignes de courant ont été tracées, figure 5.17, dans le plan des injections des champs ZDES moyens pour SPR=1.4 et SPR=2.8. On voit que les tourbillons orientés respectivement dans le sens horaire et dans le sens trigonométrique et existant indépendamment pour SPR > 1 et SPR < 1 en fluide parfait sont maintenant présents en même temps quelque soit la valeur du SPR. La surface de cisaillement qui pourrait être soumise à une instabilité absolue selon Collin n'existe pas strictement dans le champ moyen. Dans le cas SPR=2.8 (voir figures 5.17(b) et 5.16(a)), on peut dire de manière imagée que l'introduction de la viscosité force la continuité du champ de vitesse (et donc du champ de p_i) en ouvrant la branche à contre-courants IS pour donner une extension finie (à opposer à infinitésimale) au tourbillon tournant dans le sens horaire. On peut en dire de même avec le tourbillon tournant en sens trigonométrique et la branche TS (figures 5.17(a) et 5.16(b)) si l'on rapproche les cas SPR < 1 non-visqueux et SPR $= 1.4$ visqueux. Il est essentiel de rappeler ici que les calculs ZDES reproduisent des écoulements compressibles comportant des chocs. Dans cette région très hétérogène, les pertes et transferts visqueux de p_i sont intimement confondus avec la perte non-visqueuse par choc ce qui rend impossible toute mesure d'un SPR équivalent pour se ramener au raisonnement incompressible précédent après le choc. De plus, la nature sous-détendue du jet secondaire empêche une détermination sans ambiguïté de l'état du jet secondaire dans la région d'interaction. Par exemple, Collin montre qu'en augmentant le SPR basé sur les pressions de réservoir jusqu'à ≈ 3.3, l'intermittence est encore visible. Toutefois, le jet étant très sous-détendu, il subit un choc fort très violent qui doit drastiquement diminuer la p_i en aval et donc diminuer du même coup le SPR effectif au niveau de l'interaction.



(a) SPR = 1.4 (b) SPR = 2.8

FIG. 5.17 – Lignes de courant dans le plan d'injection en fonction du SPR. Les zones en blanc, gris clair et gris foncé sont respectivement les régions $\{M < 1\}$, $\{1 < M < 2\}$ et $\{M > 2\}$.

Dans le cas SPR = 2.8, figure 5.17(b), la vitesse du jet secondaire est bien plus forte que celle du flux primaire incident si bien que la vorticité répartie le long de la couche de mélange entre ces deux flux a une norme élevée et est orientée dans le sens horaire ($\Omega < 0$). Conformément à la formule (4.12), les branches principales ($\overrightarrow{x}^-$, $\overrightarrow{x}^+$) du point selle S encadrant le tourbillon adjacent au jet secondaire se referment presque totalement. A la limite, lorsque SPR $\gg 1$, la topologie des lignes de courant moyenne se rapproche de celle de la figure 5.16(a). L'instabilité

absolue indiquée par Collin n'est présente que sur la branche IS du schéma-limite 5.16(a) valable pour SPR $\gg 1$. Or, on constate qu'à fort SPR, figure 5.12(c-d), le régime de pénétration intermittente n'existe plus, ce qui invalide l'explication de Collin. De plus, la transposition d'un résultat de stabilité obtenu sur un champ de base 2D ne dépendant que d'une variable d'espace à la topologie de la figure 5.16(a) peut aussi être contestée. A l'inverse lorsque SPR = 1.4, les vitesses du jet secondaire et du flux primaire sont comparables sur leur interface et y induisent une vorticité négligeable. Par conséquent, les branches principales du point selle sont quasiment perpendiculaires et le tourbillon adjacent au jet secondaire est plus étendu.
On remarque aussi que pour SPR = 1.4, ce tourbillon coïncide avec un foyer divergent ce qui signifie qu'il est alimenté par le fluide entrant par les côtés du plan de symétrie, alors que pour SPR = 2.8, le tourbillon est apparemment alimenté par le flux primaire issu du plan de symétrie. A la lumière d'une discussion avec M. Delery, les zones de recirculation comme celles rencontrées derrière les culots peuvent être sujettes à des phénomènes de remplissage et vidange qui les rendent très instationnaires. La différence entre les topologies du tourbillon adjacent au jet secondaire rencontrées à SPR = 1.4 et SPR = 2.8 indique qu'il serait peut être intéressant d'estimer son influence dans le phénomène de pénétration intermittente.

Nous arrêtons là cette série de questions car elle nous mènerait trop loin. Les points à retenir de cette discussion sont les suivants. De toute manière, que la pénétration soit quasi-stationnaire ou intermittente, on arrivera toujours à obtenir un champ moyen dans le temps puisque l'écoulement suit une évolution cyclique. De plus, on note que la turbulence ou les structures cohérentes de la couche de mélange du jet primaire simulées en ZDES ne se sont pas encore développées au niveau de l'injection secondaire ce qui n'empêche pas le phénomène de battement d'exister[10]. Les forces mises en jeu sont donc uniquement les forces de pression et les forces visqueuses (moléculaires). Conformément à l'étude de Lardeau *et al.* [144], l'état turbulent de la couche de mélange a probablement pour seul effet de réduire l'efficacité de son excitation par le jet de contrôle. Un raisonnement stationnaire purement non-visqueux isolant l'effet des forces de pression montre clairement que l'écoulement au niveau de l'interaction des deux jets ne peut se présenter que sous deux formes distinctes et qu'il est uniquement déterminé par le SPR. La prise en compte de la viscosité impose la continuité du champ de vitesse et modifie par conséquent la topologie de l'écoulement. Toutefois, on constate sur le champ moyen calculé en ZDES que là encore, suivant la valeur du SPR, la topologie des lignes de courant possède des caractéristiques bien distinctes sur les points selles et sur les foyers. L'analyse du champ moyen pour discuter de la stabilité de l'interaction des deux jets est néanmoins très discutable ou doit du moins être mieux formalisée, de même qu'une analyse des champs instantanés ou moyennés en phase. Mais avant tout, il est nécessaire de savoir sur quel champ de base stationnaire l'analyse de stabilité doit être conduite, et encore plus en amont, il est indispensable de savoir si un tel écoulement existe ou s'il est possible au contraire que la dynamique de l'interaction entre les deux jets évolue suivant un phénomène de battement sans aucun état d'équilibre. Enfin, les résultats expérimentaux [47, 48] et la discussion menée précédemment permettent de penser qu'une analyse numérique approfondie de la confluence de deux écoulements incompressibles, plans, non parallèles (en particulier perpendiculaires) pourrait être suffisante pour identifier l'origine de l'instationnarité, les phénomènes hors du plan de symétrie et les phénomènes compressibles n'étant pas supposés essentiels à son existence.

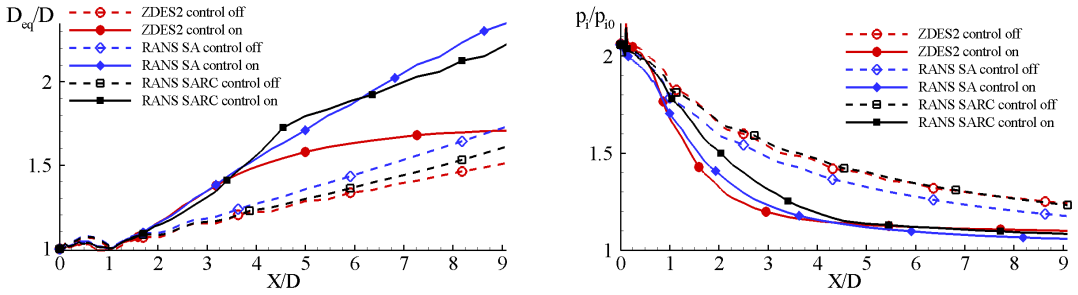
[10] En outre, la pertinence de l'approche URANS pour simuler un phénomène aussi haute fréquence ($\approx$ 20kHz) peut a priori être fortement contestée puisqu'il n'est pas clairement séparé des fréquences de la turbulence. Toutefois, la fréquence exhibée par le calcul URANS étant en accord avec l'expérience de Collin *et al.* [48], ceci montre bien qu'a posteriori l'aspect turbulent de la couche de mélange n'entre pas en jeu.

5.5 Evaluation plus précise de l'augmentation mélange

Dans le chapitre 4, une étude paramétrique a été menée au moyen de calculs RANS pour estimer l'effet de différentes variations du contrôle sur le mélange du jet primaire. Afin d'obtenir une meilleure prévision du champ aérodynamique, des calculs ZDES ont ensuite été effectués avec 4 injecteurs actifs à SPR = 1.4 et SPR = 2.8. Nous avons précédemment montré qu'à ces deux régimes de contrôle correspondent deux réactions bien distinctes du jet primaire. Dans cette partie, la capacité d'augmentation du mélange par 4 injecteurs est tout d'abord évaluée à l'aide de grandeurs moyennes, puis l'activité du mélange est analysée grâce à l'accès aux grandeurs fluctuantes fournies par la ZDES. Enfin les conséquences du régime de pénétration intermittente à faible SPR sur le mélange sont identifiées et quantifiées.

5.5.1 Effet du contrôle sur les grandeurs moyennes

Nous reprenons ici quelques uns des critères d'estimation du mélange définis au chapitre 4 pour les appliquer au jet de référence et au jet contrôlé par 4 injecteurs à SPR = 2.8 simulés par ZDES2, RANS/SA et RANS/SARC. Les évolutions le long de l'axe du jet du diamètre équivalent et de la pression totale moyennée dans les plans transverses sont affichées respectivement figures 5.18(a) et 5.18(b).



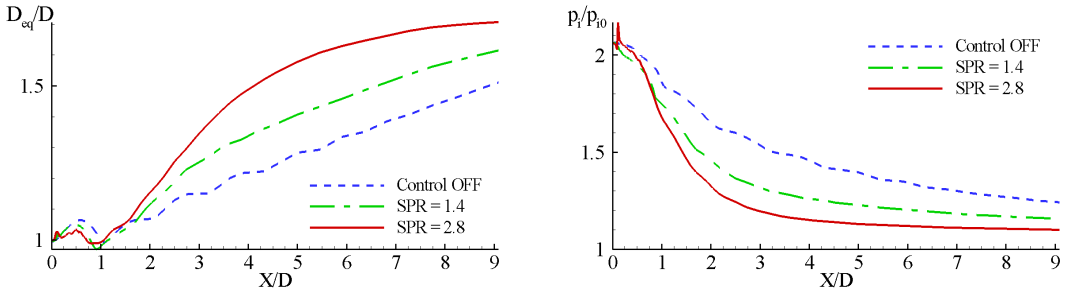
(a) Diamètre équivalent (b) Pression totale moyenne

FIG. 5.18 – Evolution de la pression totale moyenne et du diamètre équivalent selon les différents modèles de simulation.

On constate que lorsque le contrôle est inactif, les simulations RANS/SARC et ZDES donnent des résultats relativement proches tant sur le diamètre équivalent que sur la pression totale moyenne. A cause de la sur-diffusion, le calcul RANS/SA produit un jet plus évasé et sa répartition de pression totale y est plus diluée. Lorsque le contrôle est activé, on note une forte expansion moyenne du jet ainsi qu'une chute spectaculaire de la pression totale moyenne. Les calculs RANS donnent à peu près les mêmes évasements. Dans le calcul ZDES, la croissance du diamètre équivalent est initialement comparable à celle des jets RANS mais s'atténue rapidement à partir de $X/D \approx 3.5$. Cette courbe a une allure similaire à celle des tourbillons longitudinaux, figure 5.6(b). Nous avons remarqué, figure 5.6(a), que la circulation s'écroule brutalement sous l'action de la turbulence (cf. section 5.3.2), les tourbillons longitudinaux moteurs de l'augmentation du mélange s'épuisent donc rapidement en perdant à la fois leur force de déplacement (5.6(b)) et leur capacité de brassage dans les plans transverses (5.18(a)). On observe alors (non montré ici) que lorsque les tourbillons longitudinaux ont quasiment disparu, le jet retrouve progressivement un section axisymétrique (à $X/D = 9$, le jet a encore une forme intermédiaire entre le carré et le cercle). Bien que l'évasement du jet ralentisse dans le calcul

ZDES, les tourbillons longitudinaux y sont plus puissants dans la phase initiale et provoquent une chute plus accentuée de la p_i moyenne que dans les calculs RANS, si bien que celle-ci atteint un niveau asymptotique environ 30% plus tôt. Dans les trois simulations, la longueur du cône potentiel est réduite de moitié même si la simulation RANS/SARC prévoit un cône potentiel deux fois plus long que la ZDES (resp. $X/D \approx 9$ et ≈ 5 pour le jet de référence). En ce qui concerne les critères intégraux, le volume du noyau est réduit de 51, 58 et 69% respectivement en RANS/SARC, RANS/SA et ZDES. Tous les critères montrent donc que la dynamique des grosses échelles turbulentes directement simulée en ZDES provoque une augmentation beaucoup plus intense qu'une simple distorsion du jet liée à une diffusion idéale de Boussinesq (du moins avec le modèle de Spalart-Allmaras). Toutefois, cette meilleure capacité d'hyper-mélange se paye au niveau de la poussée de l'arrière-corps : on mesure une perte de poussée nette de TL = 7.4% en ZDES alors qu'elle n'est estimée qu'à 3.1% et 4.4% en RANS/SARC et RANS/SA.

Regardons maintenant quelle est l'influence de la force du contrôle, via le SPR, sur le mélange du jet primaire. Lorsque les injections sont activées à SPR=1.4 puis à 2.8 dans le jet de référence, le volume du jet augmente de 18% puis de 44%, la p_i moyenne diminue de 11% puis de 17% et le volume du noyau ne représente plus que 44% puis 31% de celui du jet non-contrôlé. Si l'on suit l'évolution du mélange le long de l'axe X, figure 5.19, on constate que plus le SPR est élevé plus l'évasement du jet et le taux de décroissance de la p_i moyenne dans les sections transverses sont amplifiés. Enfin, cette amélioration du mélange se fait sentir dans la perte de poussée nette : on passe de TL = 5.1 à 7.4%. Néanmoins, on peut remarquer que de $X/D = 0$ à $X/D \approx 0.7$, la p_i moyenne décroît plus vite dans le jet contrôlé à SPR=1.4. Ce point est étudié plus en détail dans la suite (section 5.5.3).



(a) Diamètre équivalent (b) Pression totale moyenne

FIG. 5.19 – Evolution du diamètre équivalent et de la pression totale moyenne en fonction du SPR.

5.5.2 Effet du contrôle sur l'activité du mélange

5.5.2.1 Les mécanismes mélangeurs

L'objet de cette section est de mesurer l'influence du contrôle non plus sur le résultat du mélange comme précédemment mais directement sur l'activité du mélange, c'est-à-dire les mécanismes qui mènent à ce résultat. Dans la section 4.4.1, nous avons mis en évidence l'importance du mécanisme d'étirement-compression dans le processus de mélange macroscopique. Un processus de mélange reconnu depuis longtemps comme très efficace est le mélange turbulent. Dans les écoulements turbulents, le rôle de la vorticité est supposé crucial bien que non totalement compris aujourd'hui. La vorticité $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{\text{rot}}V$ ou le taux de rotation $\overrightarrow{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\omega}$ associé à la partie antisymétrique du gradient de la vitesse et le tenseur de cisaillement pur (i.e. la partie

symétrique de la partie déviatrice de $\overrightarrow{\overrightarrow{\text{grad}}\,\overrightarrow{V}}$) sont intimement liés dans le mélange turbulent. Plus précisément, comme l'indiquent la décomposition de Helmholtz (champ de vitesse = champ solénoïdal + champ irrotationnel) et la loi de Biot-Savart, dans un fluide incompressible, seule la partie rotationnelle induit un champ de vitesse et est donc motrice de l'écoulement[11]. Le champ de cisaillement peut être ainsi vu seulement comme un champ résultant des champs de la vorticité libre et de la vorticité attachée. Par contre, comme nous l'avons indiqué dans la section 4.4.1, la vorticité ne mélange pas directement : il ne viendrait à l'idée de personne de mélanger le lait dans sa tasse de café en lui procurant un mouvement de solide rigide (Ω uniforme) ! Par contre, il est tout naturel d'y faire tourner une cuillère pour créer du cisaillement qui est le véritable mécanisme mélangeur macroscopique. En fait, lorsqu'on fait tourner une cuillère dans la tasse à café, on crée une zone rotationnelle entourée par une zone cisaillée[12]. Aussi, si l'on agite la cuillère de manière désordonnée, on crée une multitude de spots rotationnels (en d'autres mots de structures cohérentes) induisant de forts cisaillements et le mélange lait-café en est d'autant plus amplifié. En résumé, le mécanisme moteur essentiel du mouvement est la rotation et celle-ci induit du cisaillement qui est le véritable mécanisme mélangeur macroscopique. On peut dire que le but d'un système mélangeur est de produire une distribution de vorticité dans l'écoulement de manière à maximiser le champ de cisaillement induit. La turbulence est peut être en cela un processus "automatique" d'organisation de l'écoulement qui optimise l'action du cisaillement, ce qui expliquerait pourquoi le mécanicien des fluides n'a pas trouvé mieux pour mélanger. Le lien entre la vorticité et le cisaillement reste à établir et ne sera pas développé ici.

Pour être plus précis, au niveau d'une interface entre deux fluides, le mélangeur macroscopique repose sur la combinaison de l'étirement et de l'amincissement des couches de fluide. Il est donc le plus efficace lorsque le cisaillement a ses deux axes principaux respectivement parallèle et perpendiculaire à la surface de séparation (situation de la figure 4.19). Lorsqu'une couche-mince de cisaillement (simple) est laminaire ($\Omega = S$), ces axes n'ont pas ces directions et la concurrence du rotationnel empêche l'étirement de l'interface. Si cette couche-mince développe une instabilité primaire (l'instabilité de "Kelvin-Helmholtz"), le rotationnel se concentre dans les structures tourbillonnaires co-rotatives et le cisaillement se concentre entre ces dernières. Les axes principaux du cisaillement sont les mêmes que dans le cas laminaire, mais comme le taux de rotation est plus faible entre les structures cohérentes, l'interface bascule dans la direction principale d'étirement et le cisaillement peut s'exprimer pleinement pour mélanger les deux fluides. Ce raisonnement 2D du mélange par les structures primaires de la couche de mélange (les "Kelvin-Helmholtz") se transpose directement au cas 3D pour lequel vient s'ajouter le mélange par les structures secondaires (les "braids")[13]. Dans le cas du jet soumis à quatre injections radiales, les tourbillons longitudinaux générés de manière stationnaire agissent localement selon le même principe. En outre, les quatre paires de tourbillons sont contra-rotatifs et induisent un cisaillement dont les axes principaux sont directement alignés avec l'interface du jet (dans les plans (y,z)) au milieu de chaque paire de tourbillons adjacents. Par un processus stationnaire[14], les tourbillons fabriqués dans le sillage des injections radiales permettent donc un mélange macroscopique à l'échelle du diamètre du jet dans les plans (y,z) qui favorise le mélange global (microscopique+macroscopique). Ajouté à ce processus stationnaire, les mécanismes turbulents produisent une puissante distorsion du champ moyen et mélangent ainsi depuis les échelles macroscopiques jusqu'à l'échelle de diffusion moléculaire.

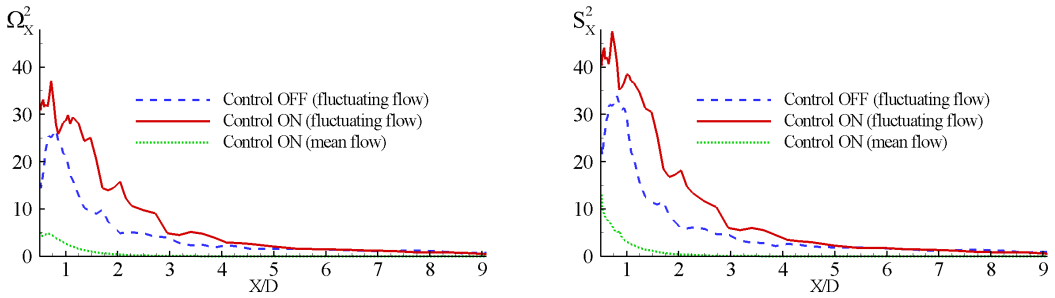
[11] Dans un champ irrotationnel défini sur un domaine $\mathcal{D}$, la vitesse est induite par la vorticité répartie sur les bords extérieurs à $\mathcal{D}$.

[12] Cette vision est un peu plus juste dans un pot de peinture car la plus forte viscosité empêche le développement de la turbulence.

[13] En détail, la dynamique des structures cohérentes au sein de la couche de mélange est plus complexe, mais ce n'est pas le propos de la discussion

[14] En d'autres termes, un processus basé uniquement sur des considérations relatives au mouvement moyen.

Dans cette section, nous profitons de la résolution temporelle des grandes échelles de la couche de mélange turbulente fournie par la ZDES pour évaluer l'augmentation instantanée de la vorticité et du cisaillement provoqués par les injections radiales. Bien que le mélange soit complètement tridimensionnel, nous nous limitons ici à quantifier le brassage dans les plans transverses (y,z). Celui-ci est actionné par le taux de rotation longitudinal Ω_x et le mélange s'effectue à travers le cisaillement $S_x = \sqrt{D_{ij}D_{ij}}/2$ où $D_{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ est la partie déviatrice du tenseur de déformation dans le plan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = (\vec{y}, \vec{z})$. L'évolution de Ω_x^2 et S_x^2 intégrées dans les plans (y,z) du champ fluctuant (champ instantané - champ moyen) du jet de référence et dans les champs moyen et fluctuant du jet contrôlé a été tracée figure 5.20. Evidemment, $\Omega_x = S_x = 0$ dans le champ moyen du jet axisymétrique. Les valeurs affichées ont été adimensionnées par $(a^*/D)^2\pi D^2/4$.



(a) Taux de rotation (b) Taux de cisaillement

FIG. 5.20 – Evolution du mélange dans le plan (y,z).

La première remarque est que dans chaque cas, les courbes de Ω_x et de S_x ont la même allure. Ensuite, on s'aperçoit que le contrôle multiplie la vorticité longitudinale fluctuante et par conséquent le taux de cisaillement dans le plan (y,z). Enfin, dans le cas du jet contrôlé, la vorticité et le cisaillement fluctuants ont des valeurs beaucoup plus grandes que leurs parties moyennes respectives. Le processus de mélange turbulent est donc beaucoup plus actif que le processus stationnaire. De plus, si l'on juge l'action du contrôle à une abscisse donnée par la différence entre les courbes avec et sans contrôle, on constate que l'action sur le champ fluctuant persiste plus longtemps (environ jusqu'à $X/D \approx 5$) que l'action sur le champ moyen. Cette dernière est quasiment inexistante à partir de $X/D \approx 2$ malgré la plus longue persistance des lobes provoqués par les tourbillons longitudinaux. Néanmoins, nous avons déjà remarqué que les tourbillons longitudinaux présentent une dégénérescence rapide sous l'action du champ fluctuant. Nous pouvons donc à présent proposer un nouveau scénario de l'augmentation du mélange provoquée par les injections radiales.

Les injections génèrent dans leur sillage de puissants tourbillons longitudinaux qui véhiculent l'énergie introduite par le contrôle sous forme de circulation. Des simulations numériques (non présentées ici) effectuées avec un programme basé sur la méthode des singularités indiquent que le système tourbillonnaire ainsi produit est extrêmement sensible aux conditions initiales. Sous l'effet de perturbations venant par exemple de l'interaction avec la couche de mélange du jet primaire, le système formé par les tourbillons longitudinaux se désorganise rapidement. L'écoulement résultant de l'activation du contrôle est régi par l'équilibre de deux phénomènes concurrents : d'un côté, l'énergie des tourbillons alimente la production de fluctuations, et d'un autre côté, ce sont les fluctuations qui sont à l'origine de leur déclin.

5.5.2.2 Champs fluctuants des jets sans et avec contrôle

Les champs fluctuants du jet de référence et du jet contrôlé à SPR = 2.8 sont analysés plus précisément dans cette section et vont permettre de vérifier l'hypothèse qui vient d'être formulée. La figure 5.21 présente l'évolution de l'énergie cinétique turbulente $\rho k = \frac{1}{2}\rho\left(\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}\right)$ et des tensions de Reynolds $\rho\overline{u'_i u'_j}$ (en coordonnées cylindriques, voir annexe D.8) intégrées dans les plans transverses et adimensionnées respectivement par $\rho^* a^{*2}\pi D^2/8$ et $\rho^* a^{*2}\pi D^2/4$. Ces grandeurs notées avec un "$*$" sont représentées dans les sections $X/D = 1.0$ du jet sans et avec contrôle, figures 5.22 et 5.23.

Dans le jet de référence, on retrouve les proportions classiques (cf. Pope [197]) entre les tensions normales et croisées à savoir $\overline{u'^2_x} \approx 2\overline{u'^2_r} \approx 2\overline{u'^2_\theta} \approx 4\overline{u'_x u'_r}$. En outre, on vérifie bien la quasi-axisymétrie $\overline{u'_\theta u'_x} \approx \overline{u'_r u'_\theta} \approx 0$. Par ailleurs, l'énergie cinétique et les tensions de Reynolds présentent des pics caractéristiques de l'interaction des ondes de choc ou de compression isentropique avec la couche de mélange (cf. Dash et Wolf [59]).

Que le contrôle soit actif ou non, tous les moments d'ordre 2 sont maximaux aux alentours de $X/D \approx 1$ qui correspond au lieu de confluence de l'écoulement extérieur vers le jet. C'est l'écart de vitesse de part et d'autre de la couche de mélange qui alimente la production de la turbulence en son sein. Jusqu'à $X/D \approx 1$, la couche de mélange se développe sous l'action d'un écart de vitesse constant $\approx 410m/s$, mais à partir de $X/D \approx 1$, cet écart commence à ralentir de $\approx 410m/s$ à $\approx 410 - 260 = 150m/s$, ce qui explique la position des maxima observés. L'activation du contrôle a pour effet de multiplier l'énergie cinétique turbulente et les tensions turbulentes du jet de référence d'un facteur quasiment proportionnel au SPR[15]. Par exemple, si l'on regarde le maximum d'énergie cinétique turbulente, relativement au jet de référence, le contrôle à SPR = 1.4 entraîne une augmentation de 52% et celui à SPR = 2.8 à 101%. La tension normale axiale $\overline{u'^2_x}$ qui est la plus importante dans le jet de référence subit l'accroissement le plus faible de l'ordre de 60% (sur les valeurs maximales) pour SPR = 2.8, alors qu'on mesure un accroissement de 105% et 210% respectivement pour $\overline{u'^2_\theta}$ et $\overline{u'^2_r}$, si bien que cette dernière atteint le niveau de $\overline{u'^2_x}$. Sur les accroissement nets des valeurs maximales, on relève $\Delta\overline{u'^2_x} = 0.025$, $\Delta\overline{u'^2_r} = 0.045$ et $\Delta\overline{u'^2_\theta} = 0.024$, c'est donc l'amplification de la tension radiale qui représente la majeure contribution à l'augmentation de l'énergie cinétique turbulente.

Ajouté à cela, le contrôle crée les cisaillements non-axisymétriques $\overline{u'_\theta u'_x}$ et $\overline{u'_r u'_\theta}$. La production de ces cisaillements turbulents sont plus importants que l'accroissement net du cisaillement axisymétrique $\overline{u'_x u'_r}$: on relève sur les extrema $\Delta\overline{u'_x u'_r} = 0.006$, $\Delta\overline{u'_\theta u'_x} = 0.013$ et $\Delta\overline{u'_r u'_\theta} = 0.010$.

La figure 5.22 montre que l'énergie cinétique turbulente est globalement bien répartie le long de la couche de mélange. Ce constat met en évidence l'accroissement du mélange par un étirement moyen de l'interface du jet avec l'extérieur. De plus, on note un épaississement de la zone turbulente et une amplification des niveaux de fluctuation entre les lobes. L'énergie cinétique turbulente a été intégrée dans les plans longitudinaux indiqués figure 5.22(c), les résultats sont regroupés dans le tableau 5.1. On voit que l'énergie cinétique ne diminue dans aucun de ces plans, ce qui signifie que l'énergie cinétique du jet de référence n'est pas simplement redistribuée par déformation de l'interface du jet. L'accroissement de k^* est maximal dans les plans (c) correspondant aux flancs des lobes induits par les tourbillons moyens longitudinaux.

[15] Cette observation est toutefois à modérer car elle n'est basée que sur deux cas contrôlés.

plan	SPR=1.4	SPR=2.8
(a)	+27%	+52%
(b)	+24%	+81%
(c)	+53%	+121%

TAB. 5.1 – Augmentation de l'énergie cinétique turbulente provoquée par le contrôle dans les plans longitudinaux (a,b,c) par rapport au jet de référence.

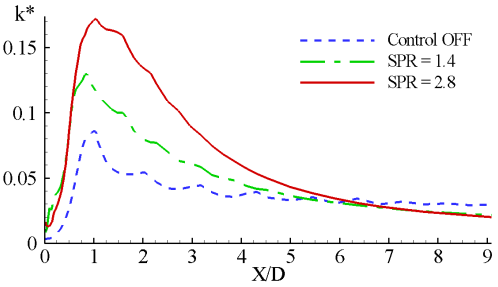
Les différentes vues de la figure 5.23 permettent de localiser précisément les zones d'accroissement des tensions de Reynolds et corrélativement du mélange dans la section $X/D = 1.0$ correspondant au maximum des grandeurs intégrées figure 5.21.

Au niveau des tensions normales (colonne de gauche, figure 5.23), l'aire de la surface couverte par le fluide dont $\overline{u_x^{2*}}$ dépasse le seuil 0.04 a été intégrée à $X/D = 1.0$, dans les jets sans et avec contrôle (SPR = 2.8). Cette procédure a été reproduite pour les deux autres tensions normales et pour d'autres seuils. Les rapports des aires calculées dans le jet avec contrôle sur celles obtenues dans le jet de référence sont reportées dans le tableau 5.2. Ces valeurs mesurent ce que l'on peut observer sur la figure 5.23. Tout d'abord, l'activation du contrôle provoque une diminution de l'étendue des grandes fluctuations axiales, bien que le niveau maximal reste sensiblement constant ($\overline{u_x^{2*}}$(control off) = 0.065 et $\overline{u_x^{2*}}$(control on) = 0.063). L'accroissement global de $\overline{u_x^{2*}}$ constaté figure 5.21(b) provient en fait d'un étalement des fluctuations de niveaux plus bas. Au contraire, les tensions radiales sont celles qui sont les plus amplifiées par le contrôle : augmentation de la valeur maximale $\max \overline{u_r^{2*}}$(control off) = 0.025 de 20% et extension spatiale de la zone fluctuante plus large, surtout aux forts niveaux de fluctuation. Ce dernier point ne peut s'expliquer par un simple étalement des fluctuations radiales du jet de référence, il résulte d'une puissante production turbulente localisée dans le creux formé entre les lobes et sur les têtes de ces lobes. Enfin, les tensions orthoradiales sont globalement dopées mais de manière plus modérée que les tensions radiales : la valeur maximale passe de $\max \overline{u_\theta^{2*}}$(control off) = 0.035 à $\max \overline{u_\theta^{2*}}$(control off) = 0.042 et on constate une plus large distribution tant des niveaux bas que des niveaux élevés.

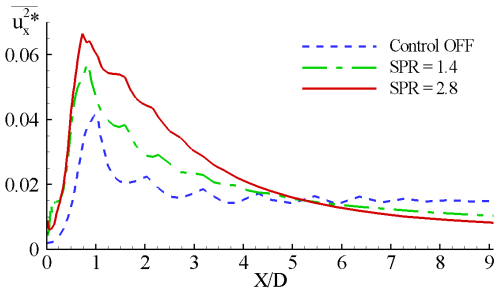
Condition	$\overline{u_x^{2*}} > 0.04$	$\overline{u_r^{2*}} > 0.02$	$\overline{u_\theta^{2*}} > 0.02$	$\overline{u_x^{2*}} > 0.01$	$\overline{u_r^{2*}} > 0.01$	$\overline{u_\theta^{2*}} > 0.01$
$\frac{\text{aire(control on)}}{\text{aire(control off)}}$	0.81	3.95	1.92	1.91	2.18	2.28

TAB. 5.2 – Aires intégrées pour différents niveaux de fluctuations à $X/D = 1.0$.

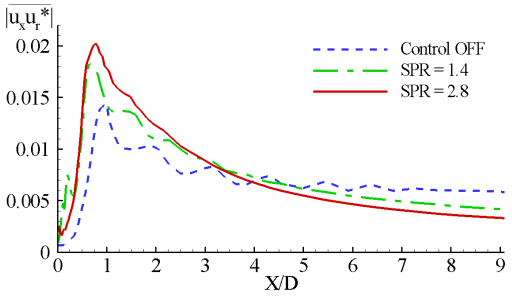
En ce qui concerne les tensions de cisaillement (colonne de droite, figure 5.23), $\overline{u_x u_r^*}$ est très amplifiée corrélativement à $\overline{u_r^{2*}}$: la valeur maximale $\max \overline{u_x u_r^*}$(control off) = 0.022 augmente de 23%, l'étendue spatiale des hauts niveaux est drastiquement agrandie (l'aire occupée par les cisaillements dépassant le seuil 0.02 est multipliée par 3.3), beaucoup plus que celle des bas niveaux (l'aire occuppée par les cisaillements dépassant 0.0025 n'augmente que de 10%). D'autre part, le cisaillement $\overline{u_x u_\theta^*}$ est produit par réorientation de la couche de mélange (qui s'aligne avec $\vec{e}_r$) si bien que sa valeur maximale atteint l'ordre de grandeur de la composante $\overline{u_x u_r^*}$. Enfin, le champ de vitesse induit par les tourbillons longitudinaux moyens dans le plan transverse (y,z) produit le cisaillement $\overline{u_r u_\theta^*}$. Celui-ci est plus modéré que les deux autres, il ne dépasse pas $\max \overline{u_r u_\theta^*} = 0.016$. De plus, aucun des maxima relevés dans les six contours des tensions de Reynolds ne coincide avec la topologie mesurée dans le cas de tourbillons isolés [129, 166, 36, 21]. Aussi, on peut en déduire que l'augmentation des fluctuations turbulentes consécutives à l'activation du contrôle résulte de l'interaction des tourbillons longitudinaux avec



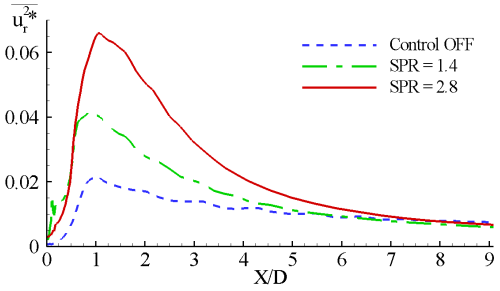
(a) Energie cinétique turbulente



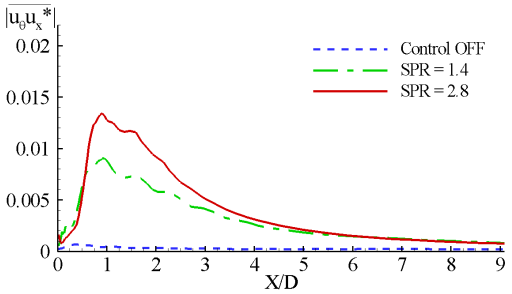
(b) Tension axiale



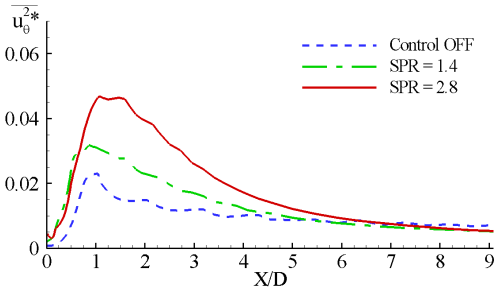
(c) cisaillement dans plan (x, r)



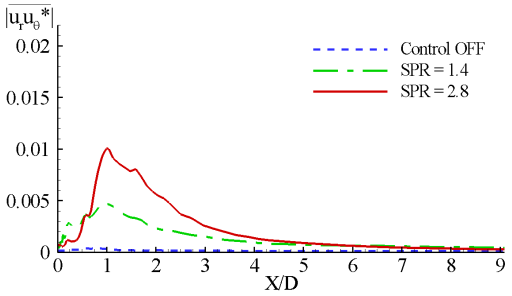
(d) Tension radiale



(e) cisaillement dans plan (θ, x)

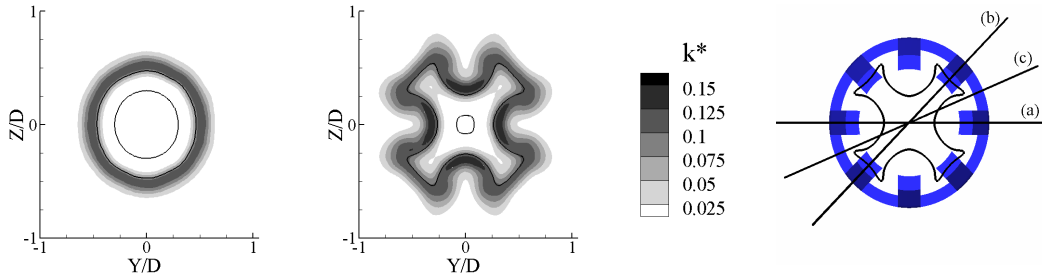


(f) Tension orthoradiale



(g) cisaillement dans plan (r, θ)

FIG. 5.21 – Evolution de l'énergie cinétique turbulente et des tensions de Reynolds en fonction du SPR.



(a) Control OFF (b) Control ON (c) plans longitudinaux

FIG. 5.22 – Energie cinétique turbulente dans le jet de référence et dans le jet contrôlé (SPR=2.8) à X/D=1.0. La ligne noire est la ligne sonique.

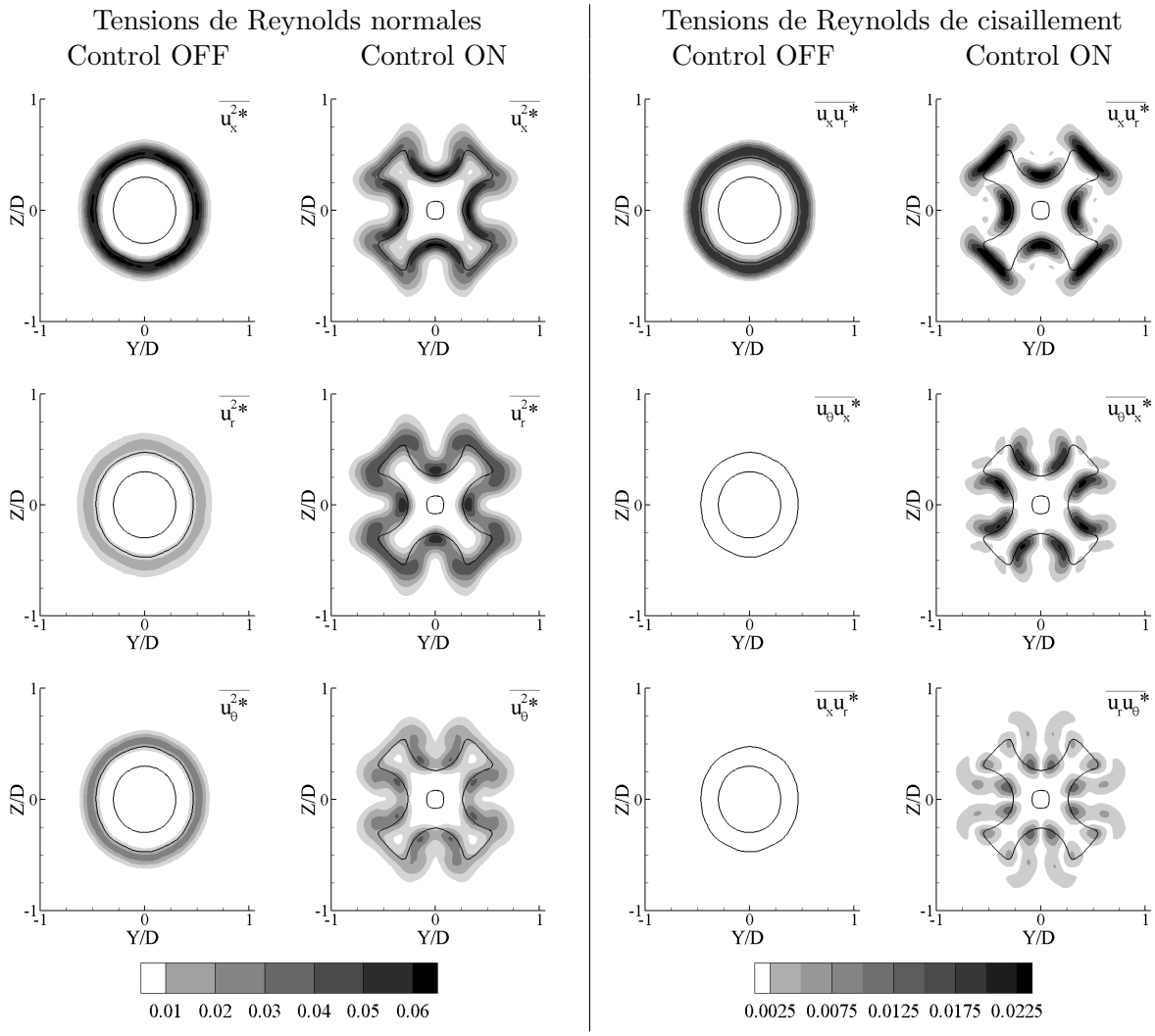
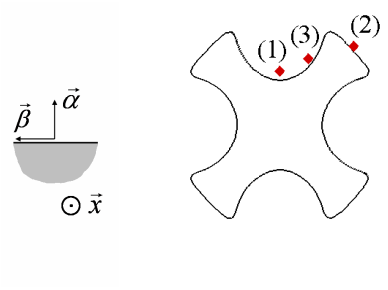


FIG. 5.23 – Tensions de Reynolds dans le jet de référence et dans le jet contrôlé (SPR=2.8) à X/D=1.0. La ligne noire est la ligne sonique.

la couche de mélange du jet et non comme supposé dans la section précédente de la seule bifurcation du système de tourbillons longitudinaux. A posteriori, on pourrait se dire que ce résultat n'est pas surprenant puisque l'énergie alimentant la couche de mélange turbulente et introduite au niveau de la tuyère primaire est bien plus forte que celle alimentant les tourbillons longitudinaux et introduite par les injections radiales, mais ce n'est pas en réalité si évident.

Pour finir, comparons les proportions entre les tensions de Reynolds dans la couche de mélange du jet de référence et dans celle du jet contrôlé. Dans le jet de référence, le point de mesure se situe au lieu commun des extrema. Dans le jet contrôlé, trois points particuliers ont été choisis : (1) dans le creux entre deux lobes, (2) sur la tête d'un lobe, et (3) sur le flanc d'un lobe. Afin de les rendre comparables, les tensions de Reynolds ont été exprimées dans les axes locaux de la couche de mélange $(\vec{x}, \vec{\alpha}, \vec{\beta})$, $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ étant respectivement normal et tangent au contour dans le plan (y, z). Première constatation : les valeurs maximales mesurées à $X/D = 1.0$ ne vérifient pas du tout les proportions obtenues dans une couche de mélange canonique (cf. Pope [197]) contrairement à ce que peuvent laisser penser les grandeurs intégrées, figure 5.21. Ce désaccord peut être attribué à la confluence de l'écoulement extérieur mais cela reste à démontrer. Deuxième constatation : lorsque le contrôle est activé, les proportions entre les tensions de Reynolds varient d'un point à l'autre de la couche de mélange et sont clairement différentes de celles du jet de référence. Cela signifie que l'interaction entre les tourbillons longitudinaux moyens et la couche de mélange est une interaction forte : la couche de mélange n'est simplement pas déformée par le champ de vitesse induite moyenne, sa structure locale change et devient hétérogène. Aux points (1) et (2), la tension normale devient aussi importante que la fluctuation axiale. La tension croisée $\overline{u'_x u'_\alpha}$ augmente relativement à $\overline{u'^2_x}$, surtout sur la tête des lobes (2). Enfin, la composante de cisaillement tangentielle $\overline{u'_x u'_\beta}$ apparaît sur les flancs des lobes (3) sous l'effet de la vitesse induite par le tourbillon longitudinal adjacent.



Points	ref	1	2	3
direction α	r	r	r	θ
direction β	θ	θ	θ	r
$\max \overline{u'^2_x}/a^{*2}$	0.065	0.063	0.041	0.057
$\max \overline{u'^2_\alpha}/\max \overline{u'^2_x}$	0.38	0.92	1.04	0.67
$\max \overline{u'^2_\beta}/\max \overline{u'^2_x}$	0.54	0.39	0.54	0.51
$\max \overline{u'_x u'_\alpha}/\max \overline{u'^2_x}$	0.33	0.43	0.65	0.39
$\max \overline{u'_x u'_\beta}/\max \overline{u'^2_x}$	0	0	0	0.20

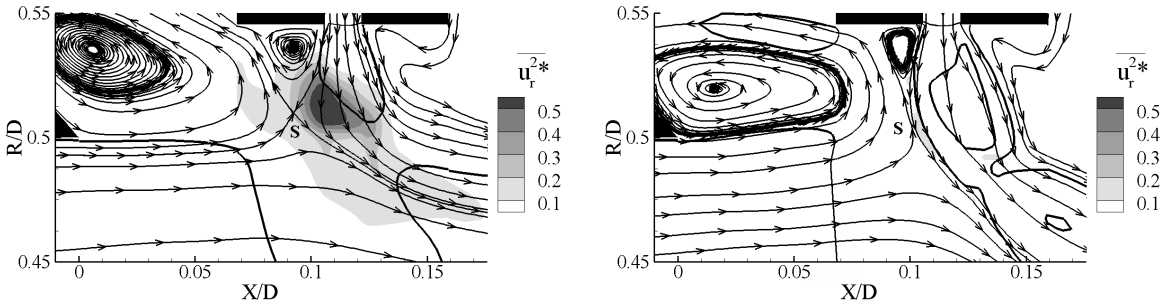
TAB. 5.3 – Proportion des tensions de Reynolds en trois points particuliers.

En résumé, l'analyse de l'activité du mélange à travers les champs de vorticité et de cisaillement instationnaires et les tensions de Reynolds permet de dire que le contrôle par injection radiale augmente le mélange majoritairement par un processus de brassage instationnaire basé sur l'extension du volume de fluide turbulent, l'amplification générale de toutes les composantes fluctuantes et en particulier le très fort accroissement des fluctuations radiales. Plus précisément, les tourbillons longitudinaux générés par les injections radiales modifient en profondeur la structure de la couche de mélange turbulente. Enfin, le processus instationnaire d'augmentation du mélange peut être interprété de la manière suivante.
Les paires de tourbillons contra-rotatifs disposés à la surface du jet véhiculent l'énergie injectée par le contrôle sous la forme d'une rotation axiale persistant relativement loin en aval dans

le champ moyen. Ce système tourbillonnaire est très sensible aux perturbations si bien que sous l'excitation provoquée par la couche de mélange, ce système explose (cf. comparaison vue moyenne/vue instantanée, figure 5.3) et alimente ainsi globalement l'énergie cinétique turbulente, la vorticité et le cisaillement instantanés et le mélange instationnaire (i.e. turbulent). En fait, cette "explosion" n'est pas désordonnée puisqu'elle restructure en moyenne la couche de mélange du jet et suggère une interaction forte entre les tourbillons longitudinaux et la couche de mélange. Les tourbillons longitudinaux décrépissent alors sous l'action des fluctuations qu'ils ont eux-même contribué à produire.

5.5.3 Effet spécifique du contrôle à faible SPR

Nous revenons dans ce dernier paragraphe sur le régime intermittent mis en évidence à SPR = 1.4 pour quantifier son effet sur le mélange du jet primaire. Figure 5.18, nous avions remarqué une perte de pression totale initiale plus marquée à faible SPR. Sur les graphes des tensions de Reynolds, figure 5.21, des pics de fluctuation radiale et axiale sont visibles au voisinage aval très proche de l'injection, entre $X/D = 0.1$ et ≈ 0.4, à SPR = 1.4 et non à SPR = 2.8. Dans les deux premières lignes du tableau 5.1, on peut noter que le contrôle à SPR = 1.4 amplifie plus l'énergie cinétique turbulente dans le plan des injecteurs actifs (a) alors que le contrôle à SPR = 2.8 l'amplifie plus dans le plan des injecteurs inactifs (b). Toutes ces différences entre les régimes à faible et fort SPR sont dues au phénomène de pénétration intermittente. La figure 5.24 montre l'amplitude des fluctuations radiales au niveau de l'interaction d'un jet secondaire avec le jet primaire. A SPR = 1.4, on remarque clairement la zone de pénétration intermittente caractérisée par une fluctuation radiale rms maximale de $\overline{u'^2_r} = 0.8a^*$ et une extension spatiale de l'ordre de l'épaisseur du jet secondaire. A côté, le jet de contrôle à SPR = 2.8 semble stationnaire.

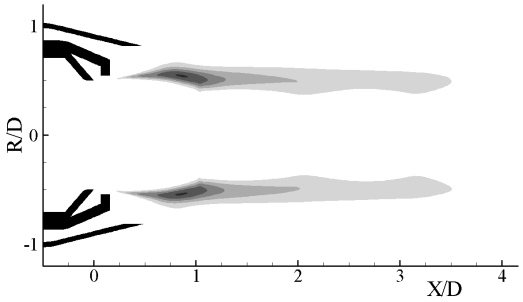


(a) SPR = 1.4 (b) SPR = 2.8

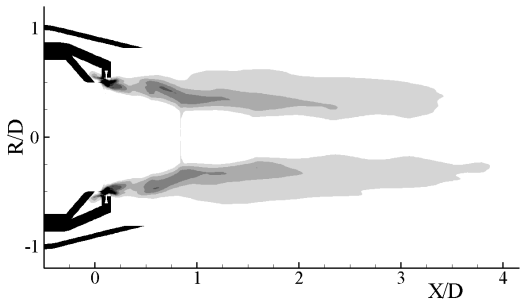
FIG. 5.24 – Lignes de courant et fluctuation radiale dans le plan d'injection en fonction du SPR.

L'énergie cinétique turbulente a été tracée dans les plans longitudinaux (a,b,c) (indiqués figure 5.22(c)) pour le jet de référence et les deux régimes de contrôle, figure 5.25. Dans le jet de référence, la couche de mélange turbulente axisymétrique accroît son épaisseur et ses niveaux de fluctuation jusqu'à environ $X/D = 1$, puis elle rencontre l'écoulement extérieur co-courant à $M_0 = 0.8$ ce qui épuise rapidement les fluctuations initialement générées.

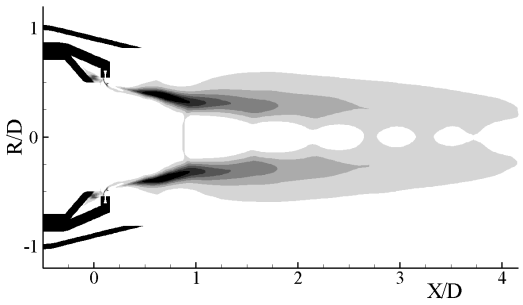
Dans le jet contrôlé à SPR = 2.8, on retrouve le pincement du jet primaire dans le plan des injecteurs actifs et son évasement dans le plan des injecteurs inactifs déjà observés figure 4.3. La figure 5.25 montre en plus l'étalement spectaculaire de la couche de mélange turbulente tridimensionnelle contre les flancs des lobes, fig.5.25(g), mais aussi dans les plans de symétrie, fig.5.25(c) et fig.5.25(e). Dans le plan des injecteurs inactifs, fig.5.25(e), on remarque que la couche turbulente atteint la même distance à l'axe du jet que dans le plan des injecteurs actifs,



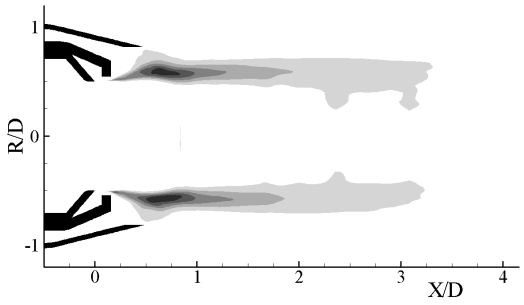
(a) Jet de référence



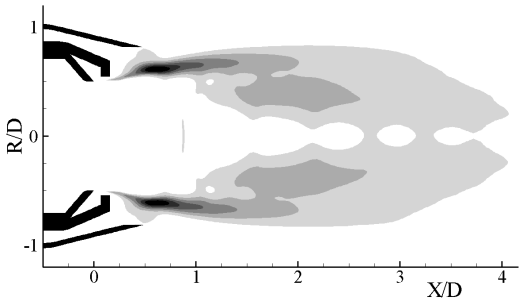
(b) SPR=1.4 : plan des injecteurs actifs



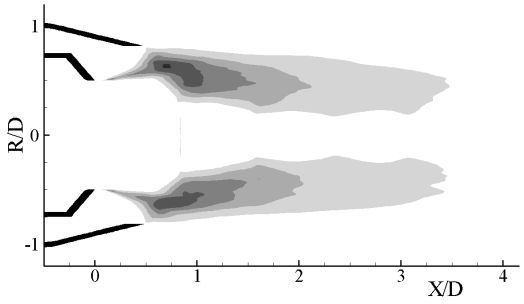
(c) SPR=2.8 : plan des injecteurs actifs



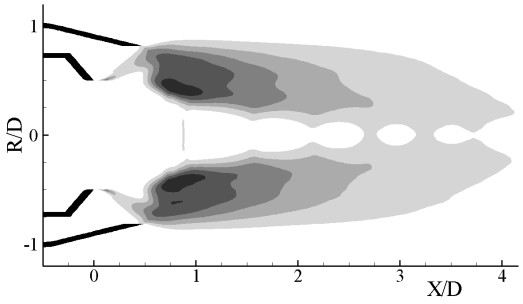
(d) SPR=1.4 : plan des injecteurs inactifs



(e) SPR=2.8 : plan des injecteurs inactifs



(f) SPR=1.4 : plan hors injecteurs



(g) SPR=2.8 : plan hors injecteurs

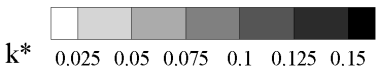


FIG. 5.25 – Energie cinétique turbulente dans les sections longitudinales du jet de référence (a) et des jets contrôlés à SPR = 1.4 (b,d,f) et à SPR = 2.8 (c,e,g).

fig.5.25(c) à partir de $X/D \approx 1.5$. Ceci est dû à la diffusion turbulente provenant latéralement des flancs des lobes, cf. $\overline{u_x^{2*}}$ et $\overline{u_\theta^{2*}}$ figure 5.23.

Dans le jet contrôlé à SPR = 1.4[16], le pincement et l'évasement sont encore visibles mais moins accentués qu'avec l'injection forte. En particulier, la couche turbulente dans le plan des injecteurs inactifs reste assez fine en raison d'une intensité de la turbulence trop faible de part et d'autre des lobes qui sont par ailleurs moins sculptés (non montrés ici) que sous un fort SPR, figure 5.22. C'est dans la région initiale du jet, entre $X/D = 0.1$ et ≈ 1, que l'on observe la différence majeure entre les deux jets contrôlés. Tout près de l'injection, entre $X/D = 0.1$ et ≈ 0.3, on reconnaît la zone de pénétration intermittente de la figure 5.24. Celle-ci active le développement de la turbulence de manière très puissante puisqu'on y mesure une énergie cinétique $k^* = 0.72$ qui dépasse largement le niveau maximal atteint dans le jet de référence ($\max k^* = 0.13$) mais aussi dans le jet contrôlé par l'injection plus forte à SPR = 2.8 ($\max k^* = 0.21$). Le battement du jet de contrôle est bien, comme supposé précédemment, essentiellement 2D dans le plan longitudinal, voire 1D dans la direction radiale, car les composantes $\overline{u_r^{2*}}$, $\overline{u_x^{2*}}$ et $\overline{u_\theta^{2*}}$ y représentent respectivement 90%, 10%, et $\approx 0\%$ de l'énergie cinétique. Au contraire, c'est en aval de la zone d'injection, entre $X/D \approx 0.5$ et ≈ 1.0, que le jet contrôlé à SPR = 2.8 tout comme le jet de référence atteint son énergie cinétique maximale. Dans le jet à SPR = 1.4, l'énergie cinétique atteint aussi une valeur maximale à $X/D \approx 0.7$ mais il s'agit d'un maximum local d'intensité plus faible ($k^* = 0.10$) qu'au niveau de l'injection et aussi plus faible que les maxima mesurés dans le jet de référence et le jet contrôlé à SPR = 2.8. Néanmoins, dans le plan des injecteurs inactifs, $\max k^*(\text{SPR} = 1.4) = 0.15$ dépasse la valeur maximale du jet de référence. Enfin, on constate que le battement des jets de contrôle n'a guère d'influence au-delà de $X/D \approx 1$ où le champ d'énergie cinétique du jet à SPR = 1.4 présente une allure qualitativement similaire à celui du jet à SPR = 2.8.

On peut supposer que les caractéristiques des injecteurs vis-à-vis de celles du jet primaire confèrent aux injecteurs plus un rôle d'excitateur que d'alimentation de la couche de mélange turbulente. Ainsi, les caractéristiques du flux primaire, du flux de ventilation et de l'écoulement extérieur n'étant pas changées, l'alimentation de la turbulence de la couche de mélange peut être considérée comme figée. A SPR = 2.8, l'injection est quasi-stationnaire et le développement de la turbulence est commandée par la surface déformée du jet et l'interaction forte avec les CVP. A SPR = 1.4, l'injection bat violemment et force ainsi de manière très puissante un développement turbulent précoce de la couche de mélange. En d'autres termes, le forçage créé par la pénétration intermittente provoque un taux d'amplification de la turbulence dépassant le taux d'amplification "naturel" donné par les conditions d'alimentation de la couche de mélange. L'alimentation étant fixée, le taux d'amplification ne peut se maintenir au régime initial forcé par le battement et chute, les fluctuations s'épuisent (cf. $X/D = 0.3 - 0.4$, figure 5.25(b)) et les conditions de développement de la couche de mélange déformée par les tourbillons longitudinaux [17] reprennent la main à partir de $X/D \approx 0.5$.

Par ailleurs, il est intéressant de noter que l'activité turbulente est insignifiante aux endroits où les chocs internes sont les plus forts ce qui confirme l'indépendance de l'augmentation du mélange consécutive à l'activation des injections vis-à-vis de la modification de la structure de choc étudiée au chapitre 3. Toutefois, l'interaction ondes/couche de mélange reste à étudier.

[16] Pour le cas SPR = 1.4, la moyenne en temps des moments d'ordre 2 n'a pas tout à fait convergé en raison d'une durée de simulation 5 fois plus courte que pour le cas SPR = 2.8, mais on peut considérer que l'allure globale du champ moyen est atteinte.

[17] Que le jet de contrôle batte ou non, les CVP sont la signature de la quantité de mouvement transverse introduite donc sont toujours présents dans le champ moyen.

5.6 Conclusion sur l'aspect instationnaire du brassage tourbillonnaire

Dans ce dernier chapitre, les fluctuations turbulentes ont été explicitement prises en compte dans l'analyse à travers le champ fourni par les ZDES du jet de référence (cas F0 dans le tableau 2.6) et du jet contrôlé par 4 injecteurs (cas F1). Les champs moyens ZDES sont comparés aux champs RANS SA et SARC. Le chapitre 2 a mis en évidence deux caractéristiques essentielles du jet sous-détendu turbulent : d'une part, l'évasement de la couche de mélange turbulente s'étendant jusqu'à l'axe en diffusant/dissipant la quantité de mouvement du jet et d'autre part, la propagation d'ondes stationnaires de détente/compression. Dans cette étude, seules les simulations ZDES calculant explicitement les fluctuations des grandes échelles de la turbulence ont été capables de reproduire quantitativement ces deux caractéristiques. Les champs ZDES ont donc été pris comme références de l'analyse. La comparaison du modèle RANS SARC au modèle RANS SA permet de montrer l'effet d'un accroissement global de la viscosité turbulente : en accord avec des travaux théoriques antérieurs [248, 39], on constate que cela provoque une diminution de la longueur du cône potentiel et une réduction de la période et de l'amplitude des oscillations de pression. La comparaison avec l'expérience indique que le modèle de Spalart-Allmaras présente deux tendances contradictoires : il sous-estime la diffusion turbulente et sur-estime l'atténuation des ondes stationnaires. L'atténuation des ondes peut en outre être provoquée par une trop forte dissipation numérique. Dans les simulations présentées dans ce travail, nous ne pouvons affirmer que cette dissipation n'a aucun effet sur l'atténuation des ondes puisque même la ZDES présente ce défaut. En fait, il est probable qu'un maillage plus dense dans la direction longitudinale aurait été souhaitable au prix d'un coût de calcul plus élevé. Toutefois, comme les calculs ZDES et RANS ont été réalisés avec le même schéma numérique et sur le même maillage, l'effet de la modélisation de la turbulence est incontestable et plus important que celui de la numérique (par rapport au schéma et au maillage employés ici). Dans l'approche RANS et dans le cadre des modèles à viscosité turbulente linéaires ("Linear Eddy-Viscosity Models", LEVM), l'effet de la turbulence est simplement simulé par un modèle de diffusion du champ cinématique moyen dont la valeur de la diffusivité ν_t est aussi déduite du champ cinématique moyen. Le modèle de Spalart-Allmaras appartient à cette classe de modèles. Il est probable mais non-prouvé que ce soit toute l'approche LEVM qui soit incapable de reproduire la physique rencontrée dans le jet turbulent sous-détendu. Alors qu'une approche de type LES permet de reproduire les deux caractéristiques du jet, on ne peut dire où se situe le niveau de modélisation minimal requis le long de l'échelle de complexité des simulations de la turbulence, de l'approche Linear EVM à l'approche LES, en passant par les approches "Non-Linear EVM" et "Reynolds-Stress Models" (RSM). Le calcul du jet contrôlé en RANS SA de base plus diffusif qu'avec la correction de rotation permet d'obtenir un champ lointain proche de celui de la ZDES. Toutefois, un examen plus précis montre que malgré sa plus forte diffusivité le modèle RANS SA ne parvient ni à restituer la propagation des ondes ni à reproduire l'évolution des tourbillons longitudinaux. De plus, la désactivation de la correction de rotation n'est pas justifiée à cause de la présence des tourbillons longitudinaux.

L'analyse des tourbillons longitudinaux effectuée au chapitre 4 a été reproduite sur le champ moyen de la ZDES. Qualitativement, les tourbillons calculés en RANS ou en ZDES suivent la même évolution le long du jet. Cependant sur le plan quantitatif, leur taux de dégénérescence est beaucoup plus rapide en ZDES qu'en RANS. Par conséquent, les tourbillons pénètrent initialement dans le jet mais n'ont ensuite plus de force pour l'étirer vers l'extérieur (phase de divergence du système). La dégénérescence des tourbillons est reliée analytiquement aux fluctuations turbulentes. Celles-ci se traduisent par la présence d'un terme proprement turbulent dans l'équation d'évolution de la circulation venant s'ajouter au terme de diffusion visqueuse. L'analyse du

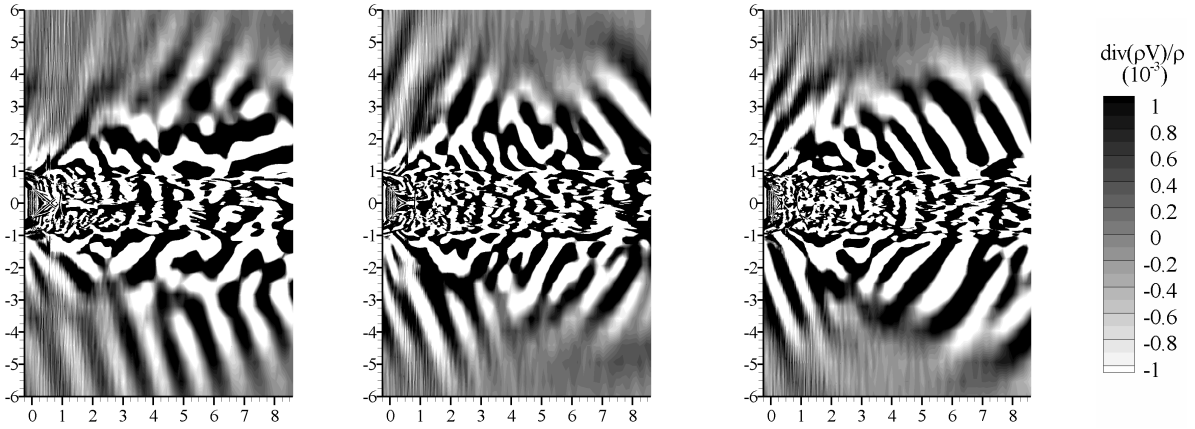
champ ZDES montre que le terme turbulent est beaucoup plus fort que le terme de diffusion turbulente modélisé en RANS (SA ou SARC) ce qui est cohérent avec la rapide dégénérescence observée. Le mécanisme d'alimentation des fluctuations turbulentes reste néanmoins à établir.

Par ailleurs, deux régimes de pénétration ont été identifiés en accord avec l'expérience du jet subsonique de Davis [63] : une pénétration intermittente à SPR = 1.4 (cas F2) et une pénétration quasi-stationnaire à SPR = 2.8 (cas F1). L'origine du régime intermittent n'est pas identifiée mais elle est discutée en détail. Les mécanismes de base sont probablement à trouver en écoulement plan incompressible laminaire. Les effets tridimensionnels, comme celui de l'allongement de l'orifice d'injection, les effets turbulents et les effets compressibles ont incontestablement une influence mais ne sont pas essentiels à l'existence du régime intermittent. En outre, la question de l'origine des oscillations spatiales de pression totale sur l'axe du jet contrôlé à SPR = 1.4 est abordée. Un scénario stationnaire est tout d'abord proposé, mais il est probable que la véritable explication soit basée sur des mécanismes purement instationnaires. La pénétration intermittente provoque sur l'axe une focalisation périodique des ondes donc une perte de pression totale oscillatoire. Les poches à faible pression totale sont ensuite convectées en aval le long de l'axe du jet et interagissent avec les cellules de détente/compression du champ moyen. On ne peut dire a priori si le champ de p_i résultant d'une moyenne en temps est homogène en x et s'il ne l'est pas, c'est peut-être le mécanisme conduisant aux oscillations stationnaires de la p_i axiale.

Le meilleur accord des simulations ZDES avec l'expérience permet de préciser l'évaluation du dispositif de mélange au moyen des critères élaborés au chapitre 4. Ces derniers indiquent que le mélange provoqué par les injections est encore plus puissant que ce que n'avaient prévu les simulations RANS. Le côté néfaste du point de vue applicatif est que cette efficacité dans le mélange s'accompagne d'une perte de poussée plus grande de l'ordre de 7% pour 4 injecteurs à SPR = 2.8. Les simulations ZDES permettent en outre d'accéder directement aux champs instantanés (à l'échelle des grandes structures) et aux grandeurs fluctuantes et ainsi d'analyser l'activité des mécanismes mélangeurs. On peut attribuer aux concentrations de vorticité le rôle de moteur du mélange activant le cisaillement, véritable mécanisme mélangeur macroscopique. La vorticité existe de manière stationnaire dans le champ moyen et de manière fluctuante dans le champ instantané. Bien que le champ turbulent moyen soit diffusé par les fluctuations, l'analyse de l'écoulement permet d'avancer que le mélange s'effectue de manière prépondérante par le brassage instationnaire du champ fluctuant. Dans le régime de pénétration quasi-stationnaire (SPR = 2.8), l'énergie introduite par les injections secondaires est initialement transférée en intégralité au champ moyen (les fluctuations n'étant pas encore développées). Au cours de la formation des CVP, la circulation longitudinale et le niveau des fluctuations turbulentes augmentent ensemble et atteignent leur valeur maximale aux alentours de $X/D \approx 1$. A cette abscisse, le jet a déjà été considérablement creusé par les injections et les tourbillons longitudinaux (vision moyenne) possèdent la puissance maximale pour le déformer. D'autre part, les fluctuations turbulentes responsables du déclin des tourbillons sont aussi à leur puissance maximale et les épuisent avant qu'ils n'aient le temps d'étirer le jet dans la phase de divergence. On peut donc dire que l'énergie des injections est finalement transférée du mouvement moyen vers le mouvement fluctuant qui apparaît comme plus efficace pour accroître globalement le mélange du jet. L'augmentation de l'activité turbulente se traduit par une élévation de l'énergie cinétique turbulente et un étalement du volume de fluide turbulent. Plus précisément, l'activation des injections radiales provoque une redistribution des tensions de Reynolds et restructure donc la couche de mélange en plus de l'étirer. En particulier, on constate une forte croissance des fluctuations radiales dans les creux et sur la tête des lobes. L'amplitude des fluctuations et leurs distributions suggèrent que l'interaction des tourbillons longitudinaux avec la couche de mélange est forte et que l'augmentation du mélange ne peut être interprétée seulement comme un étirement de

la couche de mélange ni comme une explosion du système formé uniquement des tourbillons longitudinaux.

Enfin, on montre que l'excitation provoquées par le battement des jets de contrôle à SPR = 1.4 et l'augmentation du mélange qui en résulte restent très locales (jusqu'à $X/D \approx 0.3$) comme l'avaient souligné Collin *et al.* [48]. De plus, on assiste à une chute de l'activité turbulente directement après la zone d'excitation. A partir de $X/D \approx 1$, les mécanismes de mélange sont essentiellement les mêmes que dans le jet contrôlé à SPR = 2.8, c'est-à-dire gouvernés par l'interaction de la couche de mélange et des tourbillons longitudinaux moyens générés par les injections radiales. Comme ces derniers sont déterminés par la quantité de mouvement introduite, ils véhiculent d'autant plus d'énergie que le SPR est grand et mélangent ainsi d'autant mieux. Comme le mécanisme d'augmentation du mélange basé sur l'injection de quantité de mouvement est globalement plus efficace que le mécanisme de pénétration intermittente (qui accroît localement la turbulence mais la fait chuter par la suite), si l'on veut augmenter le mélange, il faut injecter plus fort. Toutefois, le cas particulier de l'injection faible restructure l'organisation de la couche de mélange turbulente et parvient même à réduire localement le niveau de ses fluctuations. Ceci n'a pas d'utilité pour augmenter le mélange mais est peut être une voie d'investigation intéressante pour la réduction de la signature acoustique.
Afin d'avoir un aperçu des ondes de pression qui se propagent hors du jet turbulent, le taux de variation temporelle de la masse volumique $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\left(\rho \overrightarrow{V}\right)$[18] (adimensionné par a^*/D) a été tracé, figure 5.26, dans un plan longitudinal du jet de référence et dans les plans des injecteurs actifs des jets contrôlés à SPR = 1.4 et SPR = 2.8. Même si ces calculs ne possèdent pas les qualités nécessaires à une réelle étude de propagation acoustique, ils montrent que l'activation du contrôle modifie le champ de pression rayonné à l'extérieur du jet et que celui-ci est sensible au régime imposé par le SPR.



(a) Control OFF (b) Control ON, SPR = 1.4 (c) Control ON, SPR = 2.8

FIG. 5.26 – Taux de variation temporelle de la masse volumique $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$ (dans le plan des injecteurs actifs pour (b) et (c)).

[18] Cette quantité basée sur la conservation de la masse offre l'avantage de donner une information temporelle sur un champ instantané. Il est utile de noter que le champ $\mathrm{div}\overrightarrow{V}$ est souvent tracé pour observer les ondes acoustiques émises par un jet dans un air au repos. Ici il est plus pertinent de tracer $\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\left(\rho \overrightarrow{V}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$ qui représente une quantité purement instationnaire alors que $\mathrm{div}\overrightarrow{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{\rho}\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\rho$ comporte le terme $-\frac{1}{\rho}\overrightarrow{V}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\rho$ qui à l'ordre dominant (avec les hypothèses de l'acoustique) provient du champ moyen non-uniforme (en particulier, il n'est pas nul sur un champ RANS établi !).

CONCLUSION et PERSPECTIVES

Le but de cette thèse était d'améliorer au moyen de calculs numériques notre compréhension des mécanismes mélangeurs agissant dans un jet propulsif supersonique sous-détendu soumis à des injections radiales.
Préliminairement à cette étude numérique, des essais en soufflerie avaient été réalisés par le Département d'Aérodynamique Fondamentale et Expérimentale sur la maquette MARCO représentative d'un arrière-corps d'avion de combat, munie de différents injecteurs radiaux et placée dans des conditions de vol de croisière à basse-altitude. Les mesures révélèrent que sur une telle configuration appliquée, un dispositif constitué de 4 injecteurs soufflant 3.7% du débit primaire permettait de réduire de plus de moitié la longueur du cône potentiel, région la plus pénalisante pour la signature infrarouge. Au niveau de l'écoulement, les jets de contrôle provoquèrent une déformation de grande amplitude de la surface du jet principal similaire à celle observée sur les jets subsoniques ainsi qu'une modification de l'organisation des chocs se produisant à l'intérieur du jet supersonique.
Les simulations numériques ont été entreprises afin de comprendre et évaluer l'influence des mécanismes compressibles (interaction de chocs) et des mécanismes tourbillonnaires sur le mélange provoqué par les injections radiales dans le jet de la configuration MARCO.

Résultats des simulations numériques :

La simulation d'un jet supersonique hors adaptation et à grand nombre de Reynolds pose des difficultés en termes de schéma numérique et de modélisation de la turbulence. Deux niveaux de modélisation de la turbulence ont été adoptés ici, tous deux basés sur le modèle à une équation de transport de Spalart-Allmaras : l'approche RANS déjà bien éprouvée dans l'industrie et une approche DES zonale ou ZDES encore jamais testée sur une configuration appliquée de jet propulsif. Dans le jet libre, les moyens de calcul actuels ne permettent de calculer explicitement que les grandes échelles de la turbulence. Toutefois ces dernières possèdent des dimensions beaucoup trop réduites dans les couches limites attachées pour être résolues et l'on doit pour le moment se contenter d'une modélisation RANS au voisinage des parois de l'arrière-corps. La ZDES est donc aujourd'hui une des méthodes de résolution les plus complètes abordables pour ce type de configuration. L'enjeu était de prouver son applicabilité à l'écoulement de jet cisaillé libre.

Ceci a été réalisé sur le cas expérimental MARCO sans injection transverse. La reproduction de ce cas-test est très délicate car la structure des ondes supersoniques internes au jet dans le champ proche (i.e. $X/D \leq 2$), caractérisée par un choc de forme lenticulaire, est extrêmement sensible à l'évasement et l'orientation de la couche de mélange, elle-même conditionnée par le flux annulaire de ventilation et la confluence de l'écoulement extérieur. Ces deux écoulements périphériques doivent donc être proprement restitués dans la simulation à l'aide de conditions aux limites appropriées et d'une géométrie aussi proche que possible de la maquette. De plus, une attention particulière doit être portée au maillage de l'axe du jet afin de bien reproduire la réflexion des chocs internes.

Dans le champ plus lointain (i.e. $X/D \geq 2$), la couche turbulente s'étend sur une portion non négligeable du diamètre du jet pour l'occuper totalement à partir de $X/D \approx 5$. Dans cette région, le champ turbulent interagit fortement avec les ondes de pression pour donner un schéma de détentes et compressions alternées, avec des cellules de détente quasi-circulaires. Il est important de souligner que le schéma numérique utilisé en ZDES doit être le moins dissipatif possible pour favoriser, lors du calcul en mode LES, le développement de la couche de mélange turbulente et bien décrire par la suite l'évolution du jet complètement turbulent. Ceci est d'autant plus contraignant que le schéma doit conserver une dissipation suffisante sur les chocs.

Après avoir identifié les ingrédients à prendre en compte dans les simulations, les calculs RANS et ZDES se sont montrés capables de reproduire qualitativement la structure des chocs initiale mais seuls les calculs ZDES ont pu restituer les cellules de compression-détente dans la région lointaine. Que ce soit en RANS ou en ZDES, les simulations des jets contrôlés ont été effectuées avec les mêmes réglages que celles du jet de référence.

Les calculs RANS munis d'une correction de rotation (notée SARC) ont d'abord été considérés car le modèle de Spalart-Allmaras original (noté SA) produit une viscosité turbulente excessive dans les tourbillons stationnaires, ces derniers jouant un rôle majeur dans le jet contrôlé. Le calcul RANS/SARC du jet de référence restitue fidèlement la topologie du choc en lentille mais ne parvient pas à reproduire la taille et la forme des cellules de détentes/compressions qui se forment dans le champ lointain. Globalement les calculs RANS/SARC surestiment la longueur du cône potentiel en sous-estimant la diffusion latérale du jet. Toutefois, l'action des injections secondaires sur la surface du jet ainsi que sur la structure des chocs en champ proche est correctement restituée. Comme observé sur les strioscopies longitudinales, le choc en lentille laisse place à une topologie similaire à un disque de Mach. De plus, le cône potentiel est bien réduit d'un facteur proche de 2 lorsque le contrôle fluidique est activé.

La ZDES a été testée avec trois longueurs caractéristiques de maille Δ_{max}, Δ_{vol} et Δ_{ω}. Le calcul réalisé avec Δ_{max}, par ailleurs utilisé dans le modèle DES original (DES97) et dans la DDES, souffre d'une viscosité sous-maille excessive qui limite la croissance des fluctuations turbulentes. Ce test suggère qu'aucune des approches DES97 ou DDES n'aurait permis ici de reproduire les couches cisaillées libres, si ce n'est au prix d'un raffinement très coûteux du maillage.

La version originale de la ZDES basée sur la longueur caractéristique de maille Δ_{vol} arrive à restituer les cellules de détente quasi-circulaires du champ lointain. Les oscillations spatiales de la pression axiale correspondantes possèdent une amplitude et une pseudo-période en bon accord avec l'expérience. Cependant, la ZDES basée sur Δ_{vol} décale la structure des chocs dans la région proche en raison d'un développement tardif des instabilités dans la couche de cisaillement.

Afin de limiter le phénomène de "longitudinally induced modeled-stress depletion", la nouvelle définition Δ_{ω} a été proposée. Celle-ci s'appuie en chaque point et à chaque instant sur la direction du rotationnel instantané de l'écoulement pour déterminer l'échelle de longueur qui agit sur la dissipation de la structure tourbillonnaire locale par le biais de la viscosité sous-maille. L'application de Δ_{ω} dans une couche cisaillée possédant des structures primaires orientées dans la direction en envergure rend ainsi la viscosité sous-maille indépendante de la taille de maille en envergure qui est généralement beaucoup plus grande que les deux autres. Dans la couche de mélange initiale du jet de référence faiblement sous-détendu de la configuration MARCO, les structures primaires sont essentiellement toroïdales et légèrement inclinées en raison du nombre de Mach convectif modéré $M_c \approx 0.6$. Il en résulte que le calcul ZDES réalisé avec Δ_{ω} produit une viscosité sous-maille plus faible qui facilite le développement des instabilités dans la couche

de cisaillement. Le champ moyen se corrèle alors très bien avec les mesures PIV et les sondages Pitot. En particulier, le choc en lentille est correctement reproduit en forme et en position. Dans le champ lointain, le jet est pleinement turbulent et le rotationnel instantané ne possède plus une direction aussi privilégiée qu'au début de la couche de mélange. Le champ moyen est alors similaire à celui de la ZDES originale (avec Δ_{vol}) c'est-à-dire en très bon accord avec les mesures PIV.

Dans le cas du jet contrôlé, la couche de mélange initiale est naturellement perturbée si bien que les simulations ZDES avec Δ_{vol} ou Δ_{ω} donnent sensiblement le même résultat. Comme dans la simulation RANS/SARC, le jet contrôlé est déformé et sa structure interne est modifiée. Toutefois, les simulations ZDES sont quantitativement en bon accord avec l'expérience non seulement dans le champ proche mais aussi dans le champ plus lointain. Les deux ZDES du jet contrôlé anticipent légèrement la fin du cône potentiel mais leur estimation reste proche de la valeur $X/D \approx 2.4$ mesurée.

Comme les champs aérodynamiques obtenus par les simulations RANS-SARC et ZDES(Δ_{ω}) se sont corrélés de manière satisfaisante avec les mesures du champ moyen effectuées sur la maquette MARCO, ils ont été pris comme données de référence pour entreprendre l'analyse physique du mélange.

Résultats de l'analyse physique :

Etant donné qu'il est impossible de comprendre d'emblée tous les mécanismes physiques ayant lieu dans un écoulement aussi complexe qu'un jet sonique sous-détendu contrôlé par des injections radiales, notre démarche a été de nous appuyer sur le fait que tout modèle de simulation est par définition incomplet pour isoler des mécanismes physiques et dégager ceux qui ont un effet prépondérant sur le phénomène étudié.

Dans le processus de mélange qui nous a intéressés, les acteurs principaux sont les tourbillons. Ceux-ci génèrent entre eux du cisaillement qui étire les surfaces d'échange et diminue l'épaisseur des couches de fluides hétérogènes. Ce mélange que nous avons qualifié de "macroscopique" favorise le mélange à l'échelle moléculaire pour finalement conduire à l'homogénéisation du fluide. Concrètement, les structures tourbillonnaires sont des régions localisées de fluide en rotation. Elles peuvent faire partie intégrante d'un champ turbulent moyen stationnaire ou instationnaire et sont aussi les éléments essentiels de tout mouvement turbulent fluctuant.

Lorsqu'un jet sonique sous-détendu est soumis à des injections radiales, la surface externe du jet est déformée sous l'action des tourbillons longitudinaux générés par les jets transverses et la structure des chocs internes change. Contrairement aux tourbillons longitudinaux du champ moyen, la structure des chocs propre au jet contrôlé n'a jamais été étudiée dans la littérature. Pourtant, l'interaction des chocs peut donner naissance à des couches de cisaillement qui sont autant de zones potentielles d'augmentation du mélange turbulent. L'analyse a donc été organisée en trois parties : tout d'abord, on s'est intéressé à la particularité des jets supersoniques, à savoir leurs chocs internes, ensuite, on a abordé le mélange stationnaire actionné par les tourbillons longitudinaux du champ moyen pour finir sur l'étude des mécanismes proprement instationnaires.

L'analyse de la structure compressible moyenne dans la région initiale du jet s'est appuyée sur les résultats des calculs RANS/SARC. En raison de la complexité de la formation des chocs dans les jets, l'analyse a été conduite progressivement en commençant dans les jets plans sans contrôle. L'apparition des chocs dans un écoulement continu ne peut être comprise que par une description précise du comportement des ondes isentropiques. Ceci a été fait grâce à la théorie des caractéristiques qui, en écoulement plan, permet de tirer des conclusions générales sur l'organisation des ondes de Mach et leur manière de focaliser pour former des chocs obliques. Une fois formés, les chocs obliques peuvent se réfléchir suivant différentes topologies sur l'axe de symétrie du jet et déterminent ainsi la structure des chocs internes. Les différentes structures de chocs que l'on peut rencontrer dans un jet supersonique plan en fonction de son taux de détente ont été compilées dans ce mémoire. Les règles qui, à partir du nombre de Mach amont et de l'angle du choc par rapport à l'axe, donnent les topologies d'écoulement possibles, sont locales aux lignes de courant et sont donc applicables en écoulement tridimensionnel. Par contre, le comportement des ondes à l'origine des chocs obliques est fortement influencé par le caractère tridimensionnel. Malheureusement, dès que l'écoulement n'est plus plan, aucune conclusion théorique ne peut être dégagée indépendamment de la géométrie. Dans le cas particulier des écoulements axisymétriques, l'effet de la confluence du fluide vers l'axe de symétrie a été mis en évidence à travers quelques exemples : dans les jets, il favorise essentiellement la focalisation des ondes convergeant vers l'axe ainsi que le raidissement des chocs convergents et provoque un resserrement des trains d'ondes de compression/détente. Par ailleurs, il est démontré analytiquement et numériquement que l'écoulement extérieur a une influence considérable sur l'organisation des ondes internes, il peut favoriser leur focalisation et affecte la structure des chocs internes. Enfin, la diffusion visqueuse provoque directement l'amortissement des ondes de pression et indirectement la réduction de leur pseudo-longueur d'onde via son action sur le champ moyen. Pour les jets soniques faiblement sous-détendus comme le jet de référence à NPR=3.1 de la configuration MARCO, il apparaît une topologie particulière que nous avons baptisé "choc en lentille". La visualisation des ondes de Mach en amont montre que cette structure se distingue du disque de Mach classique. Bien que les effets de l'écoulement extérieur et de la viscosité n'aient pas pu être annulés dans cette étude, son apparition est attribuée au caractère à la fois sonique et faiblement sous-détendu du jet.

Afin de comprendre l'action des injections sur la structure des chocs internes, la théorie des caractéristiques plane a été étendue aux écoulements tridimensionnels comportant des plans de symétrie. Il a ainsi été montré que dans les plans de symétrie, la convergence des ondes se propageant dans un jet depuis la surface de cisaillement vers l'axe peut être provoquée non seulement par la réflexion d'un faisceau d'ondes divergentes et/ou un gradient de pression extérieure positif mais aussi par la divergence du fluide par rapport au plan ou en d'autres termes par du débit de masse sortant du plan de symétrie. Dans le cas du jet contrôlé par 4 injecteurs sur les 8, ceci est appliqué aux plans des injecteurs actifs et aux plans des injecteurs inactifs et permet d'identifier les facteurs de formation des chocs. Les chocs obliques ainsi formés se réfléchissent sur l'axe en faisant apparaître une structure semblable à un disque de Mach. Par rapport au choc en lentille du jet de référence, cette nouvelle topologie produit donc plus de cisaillement au niveau du contour joignant les points triples. Toutefois, l'observation du champ de viscosité turbulente, qui, bien que constituant une modélisation de la turbulence, est corrélée au cisaillement du champ moyen, montre que le cisaillement généré en aval des points triples est négligeable devant celui de la couche de mélange externe et ne peut alimenter de manière significative une hypothétique couche de mélange turbulente interne. L'hypothèse de "mélangeur à choc" stationnaire est donc invalidée pour les jets faiblement sous-détendus. Comme l'avaient supposé les études antérieures, l'activation du mélange dans un jet supersonique perturbé en azimut par des obstacles fluides ou solides est donc bien exclusivement provoquée par des mécanismes tourbillonnaires.

Du point de vue stationnaire, chaque jet secondaire initialement transverse à l'écoulement primaire produit en se courbant une paire de tourbillons longitudinaux contrarotatifs dans le champ moyen. Ces tourbillons sont responsables de la déformation du jet et de la modification de la structure des chocs internes par la vitesse qu'ils induisent dans tout l'espace. L'analyse des mécanismes de brassage stationnaires a été réalisée à l'aide des calculs RANS/SARC. En effet, bien qu'ils ne soient pas capables de prévoir la longueur du cône potentiel, les calculs RANS donnent des premières tendances concernant les effets moyens du contrôle. On constate tout d'abord que les tourbillons longitudinaux sont situés à la périphérie du jet, en dehors de la région supersonique. Ceci prouve qu'il ne peut y avoir d'interaction directe des tourbillons longitudinaux avec les chocs internes du jet dans l'écoulement moyen. Loin de la zone d'injection, i.e. pour $X/D \geq 1$, les variations transverses de l'écoulement dominent les variations longitudinales. En appliquant les hypothèses des corps élancés, l'évolution axiale des tourbillons stationnaires peut être décrite comme l'évolution d'un écoulement transverse bidimensionnel et incompressible. Dans les plans transverses, la distribution de vorticité axiale a été caractérisée par des moments de vorticité. En particulier, l'équation de transport du moment d'ordre 1 généralisant celle écrite par Saffman [216] décrit formellement le mouvement des centres de vorticité : chaque tourbillon longitudinal se déplace principalement sous l'action non-visqueuse des vitesses induites, tout d'abord selon un mouvement de pénétration vers le centre du jet le long du plan d'injection, puis diverge vers l'extérieur le long du plan de symétrie situé entre son plan d'injection et le plan d'injection adjacent. En raison de la périodicité azimutale des injecteurs, la transition entre le mouvement de pénétration et le mouvement de divergence se produit approximativement lorsque les tourbillons sont équi-répartis sur un cercle centré au milieu du jet. Ce mouvement de pénétration/divergence des tourbillons s'ajoute à la déformation du jet provoquée par les vitesses induites pour actionner un mécanisme stationnaire de brassage macroscopique à l'échelle du diamètre du jet : le fluide extérieur est aspiré vers l'intérieur du jet tandis que le jet est étiré vers l'extérieur.

Afin de mieux comprendre ces mécanismes stationnaires et de mieux les exploiter, une étude paramétrique a été effectuée. Pour pouvoir quantifier le mélange obtenu dans les différentes configurations de contrôle, la notion de mélange a été discutée. En particulier, il ressort que la seule manière de quantifier rigoureusement le mélange de plusieurs fluides est d'employer un invariant du mouvement du fluide parfait. La température totale est ainsi une grandeur appropriée pour caractériser le mélange. Toutefois, la température génératrice étant ici constante entre le jet et les écoulements périphériques, elle ne permet pas de les différencier. La pression totale peut, elle aussi, être constante dans un écoulement de fluide parfait à condition que celui-ci ne comporte pas de choc. Comme le taux de détente du jet étudié ici est relativement bas, les chocs y sont faibles ce qui permet de négliger les pertes de pression totale non-visqueuses vis-à-vis de celles d'origine visqueuse. L'emploi de la pression totale pour caractériser le mélange doit néanmoins être considéré avec précaution. En effet, la pression totale varie non seulement sous l'effet de la diffusion de l'énergie cinétique par le biais de la viscosité mais aussi sous l'effet de sa dissipation. Lorsque l'analyse du mélange est réalisée à partir de calculs numériques, la simulation du transport d'un ou de plusieurs scalaires passifs est la manière la plus propre de caractériser le mélange et est à préconiser. Ceci n'a pas pu être fait dans le cadre de ce travail. Des critères d'estimation du mélange basés sur la pression totale ont finalement été proposés et utilisés dans l'étude paramétrique. Celle-ci a permis de dégager des indications pour concevoir un dispositif mélangeur efficace.

Tout d'abord, les conditions de sortie de l'écoulement injecté doivent être ajustées de manière à maximiser, à débit fixé, l'effet de la "force d'injection" sur l'écoulement primaire. Dans cette étude, la "force d'injection" a été contrôlée par l'intermédiaire du rapport des pressions totales $\mathrm{SPR} = p_{i3}/p_{i1}$, mais nous avons noté que cette caractérisation n'était pas suffisante. En effet, la

force exercée initialement par l'injecteur se traduit en aval par l'impulsion de la paire de tourbillons longitudinaux. Ce transfert s'effectue progressivement dans la zone proche de l'injection très tridimensionnelle quand le jet secondaire se courbe. Toutefois, comme le jet secondaire est supersonique, des chocs se forment à l'intérieur et y introduisent une perte de pression totale qui diminue l'impulsion finale des tourbillons. Aussi, la dynalpie initiale du jet secondaire correspond à la "force de l'injection" initiale mais n'est pas suffisante pour représenter son effet global. Au niveau géométrique, chaque injection doit déboucher d'un orifice allongé préférentiellement dans le sens de l'écoulement afin de pénétrer plus profondément au coeur du jet. Dans le même but, le nombre d'injections doit être limité à 4 pour retarder la transition de la phase de pénétration à la phase de divergence. Plus longtemps les tourbillons longitudinaux restent au coeur du jet, plus les vitesses induites y sont rapides pour activer le brassage stationnaire. Enfin, nous avons vu qu'il est important de favoriser une dynalpie d'injection forte tout en limitant le débit prélevé sur le moteur. Dans cette optique, il a été proposé d'employer des injections de fluide chaud plutôt que froid. On rappelle que les injections sont sensées refroidir globalement le jet chaud en augmentant son mélange avec l'air froid extérieur et non en apportant du flux froid puisque leur débit doit être petit relativement au débit primaire. L'estimation du mélange basée sur la pression génératrice à partir des calculs RANS montre que le contrôle par injections chaudes a bien un effet positif. Néanmoins, l'effet sur le champ de température n'est pas très convaincant et nécessite des simulations plus précises des transferts thermiques turbulents pour pouvoir statuer.

L'analyse des calculs RANS a permis d'écarter provisoirement les phénomènes instationnaires pour se focaliser sur les mécanismes de l'écoulement moyen. Pour finir, les phénomènes instationnaires ont été pris en compte en exploitant les calculs ZDES. Le jet de référence ainsi que deux cas contrôlés ont été reproduits par cette approche : un cas d'"injection faible" à SPR=1.4 et un cas d'"injection forte" à SPR=2.8. Comme dans les simulations RANS, le champ moyen des deux jets contrôlés est déformé sous l'action des tourbillons longitudinaux formés en aval des injections. Les simulations ZDES montrent en plus qu'il existe deux régimes de pénétration des jets secondaires dans le jet primaire : un régime de pénétration quasi-stationnaire pour les injections fortes et un régime de pénétration intermittent semblable à celui observé expérimentalement par Collin *et al.* [48] pour les injections faibles. Cette pénétration intermittente est caractérisée par une amplitude de battement radial de l'ordre de plusieurs épaisseurs de jet secondaire et une fréquence élevée de $f = 22kHz$ ou $f/(D/a^*) \approx 0.3$. Par ailleurs, un calcul URANS ayant la même résolution temporelle que la ZDES reproduit le battement avec la même fréquence et montre ainsi que l'existence du phénomène est décorrélée des fluctuations turbulentes.

La simulation des grandes échelles a de plus permis de mesurer précisément l'intensité et l'étalement du mélange turbulent. L'énergie cinétique turbulente locale atteint son niveau maximal dans le jet contrôlé par les injections faibles au niveau de la zone d'interaction où elle est principalement dopée par les fluctuations radiales. Cependant, on constate que l'accroissement du mélange provoqué par le battement des jets secondaires reste très localisé, comme l'avaient remarqué Collin *et al.* . Au contraire, le mélange turbulent provoqué par les tourbillons longitudinaux devient pleinement actif lorsque ces derniers ont fini leur formation, aux environs de $X/D = 1$, et s'étend sur un plus large volume. Globalement, on constate que le mélange actionné par les tourbillons longitudinaux domine le mélange local provoqué par la pénétration intermittente, quand elle a lieu. Or la capacité de mélange du premier mécanisme est directement liée à la force exercée par les injections secondaires sur le jet primaire, c'est pourquoi le contrôle par "injections fortes" est probablement la meilleure stratégie pour accroître le mélange.

L'analyse du mélange actionné par les tourbillons longitudinaux a été poursuivie sur les résultats du jet contrôlé à SPR=2.8. Les simulations instationnaires révèlent que le processus de mélange n'est pas limité au brassage stationnaire mis en évidence sur les simulations RANS mais fait intervenir un processus de dégénérescence rapide des tourbillons longitudinaux. Comparativement aux résultats RANS/SARC, les tourbillons longitudinaux du jet contrôlé persistent beaucoup moins longtemps dans le champ ZDES.
Afin d'estimer l'effet d'une plus grande diffusion turbulente modélisée, des calculs RANS ont été réalisés avec le modèle de Spalart-Allmaras original (SA). A première vue, les résultats RANS/SA sont très proches de ceux de la ZDES et laissent supposer que la diffusion turbulente modélisée en RANS est mieux représentée dans les calculs SA que dans les calculs SARC. De plus, la longueur du cône potentiel du jet contrôlé par 4 injecteurs est mieux estimée avec le modèle SA. Cependant, plusieurs éléments prouvent que la diffusion plus forte du modèle SA n'est pas justifiée du point de vue physique.
Tout d'abord, comme nous l'avons vu précédemment, lorsque la viscosité est augmentée dans un jet axisymétrique sous-détendu, la longueur du cône potentiel diminue et les ondes de compression-détente sont plus vite amorties. C'est bien ce que l'on observe en passant du champ RANS/SARC au champ RANS/SA. Par contre, on constate une tendance opposée en passant du champ RANS/SARC au champ ZDES : la longueur du cône potentiel diminue mais les ondes de compression-détente conservent leur amplitude plus longtemps. Ce résultat permet de dire que la modélisation RANS avec l'hypothèse de viscosité turbulente est insuffisante pour reproduire l'interaction du champ turbulent et des ondes supersoniques.
D'autre part, les travaux antérieurs sur la simulation des tourbillons isolés à l'aide du modèle SA ont montré que la viscosité turbulente modélisée doit y être atténuée. Le faible niveau de turbulence au centre des tourbillons a de plus été justifié par des travaux théoriques antérieurs. Ces résultats permettent de dire que l'accroissement de la viscosité turbulente dans la modélisation RANS/SA par rapport au RANS/SARC n'a pas de fondement physique et ne permet de retrouver le champ lointain du jet que par un artefact numérique.
L'évolution de la circulation de chacun des tourbillons longitudinaux est pilotée par un terme turbulent représentant les transferts de vorticité entre le tourbillon considéré et ceux qui l'entourent. Ce terme a été exprimé d'une part à l'aide de la viscosité turbulente des calculs RANS et d'autre part à l'aide des tensions turbulentes accessibles par traitement statistique des calculs ZDES. On a alors constaté que la valeur du terme turbulent issu du calcul ZDES dépasse largement celles déduites des calculs RANS, SARC ou SA, ce qui est cohérent avec la dégénérescence rapide des tourbillons observée en ZDES.
Comme la turbulence est faible au coeur des tourbillons isolés, on suppose que le fort accroissement des fluctuations turbulentes provient d'un mécanisme de déstabilisation coopératif de l'ensemble des tourbillons longitudinaux. De plus, ces derniers étant plongés dans une couche de cisaillement, on ne peut pas a priori négliger l'interaction de cette vorticité axiale avec le cisaillement et la vorticité de la couche de mélange du jet.

En résumé, l'étude du mélange d'un jet sonique faiblement sous-détendu soumis à des injections radiales a montré que :
- les chocs internes ne sont pas suffisamment puissants pour provoquer un mélange significatif à l'intérieur du jet ;
- le mécanisme de mélange prépondérant est actionné par les tourbillons longitudinaux générés en aval des injections radiales ;
- pour les injections fortes, les injections pénètrent de manière quasi-stationnaire dans le jet primaire ;
- pour les injections faibles, la pénétration est intermittente et provoque un mélange très localisé, négligeable par rapport au mélange causé par les tourbillons longitudinaux ;

- la puissance de mélange est directement corrélée à l'impulsion des paires de tourbillons contra-rotatifs qui dépend elle-même de la force des injections ;
- les tourbillons longitudinaux produisent un brassage stationnaire et un mélange turbulent ;
- le brassage stationnaire est principalement actionné par le mouvement de pénétration-divergence des tourbillons longitudinaux et la vitesse radiale qu'ils induisent vers l'intérieur et l'extérieur du jet ;
- le brassage stationnaire est quasiment interrompu par la rapide dégénérescence des tourbillons longitudinaux, si bien que l'on n'observe principalement que la phase de pénétration ;
- le mélange turbulent est le plus puissant, il est alimenté par le transfert d'énergie cinétique du mouvement moyen des tourbillons longitudinaux vers le champ fluctuant lors du processus de dégénérescence.
- le processus de dégénérescence est supposé provenir d'un mécanisme de déstabilisation coopératif de l'ensemble du système tourbillonnaire.

Perspectives pour la simulation numérique de configurations appliquées :

Les calculs mis au point dans cette étude prouvent que la DES zonale munie de la longueur caractéristique de maille Δ_ω est aujourd'hui capable de prévoir l'écoulement d'un jet propulsif sans et avec contrôle par injections radiales. Toutefois, dans la philosophie originale de la DES introduite par Spalart, l'objectif était de limiter au maximum l'intervention de l'utilisateur en accordant au modèle le contrôle de la commutation du mode RANS au mode LES et inversement. Les problèmes de "transversely induced MSD" dont souffrait la DES97 ont été résolus grâce à l'introduction d'une fonction de retard dans la DDES. A l'origine, la DDES a été basée sur Δ_{max} ce qui, comme nous l'avons montré, l'empêche de traiter des écoulements cisaillés libres dans des configurations appliquées, à moins d'utiliser un raffinement excessif du maillage.
Maintenant, il serait intéressant d'employer conjointement une fonction de retard semblable à celle de la DDES avec la nouvelle longueur caractéristique Δ_ω. Cette stratégie n'affecterait pas le calcul de la couche limite car, bien que Δ_ω soit toujours plus petit que Δ_{max}, la fonction de retard empêcherait la commutation RANS/LES au sein de la couche limite. En revanche, elle pourrait résoudre le problème de "longitudinally induced MSD". Le modèle DDES(Δ_ω) pourrait alors être utilisé en production, i.e. sans procédure empirique, pour traiter des configurations de jet propulsif et rejoindrait ainsi la philosophie originale de la DES. Cependant, des calculs DDES récents [232] réalisés avec Δ_{vol} révèlent que la fonction de retard actuellement implémentée dans la DDES n'est pas suffisamment robuste pour repousser la limite de la zone RANS lorsque la taille caractéristique de maille est diminuée et devrait donc être modifiée.

Par ailleurs, afin d'affiner la simulation du jet propulsif, il serait intéressant de pouvoir calculer explicitement les parties finales des couches limites attachées. Dans cette étude, l'intégralité des couches limites était traitée par un modèle RANS. De cette manière, l'effet de la distribution de quantité de mouvement moyenne des couches cisaillées impactant la surface du jet était simulé et nous avons vu qu'il n'est pas négligeable. L'épaisseur de la couche limite extérieure permet de penser que les structures turbulentes qu'elle contient pourraient avoir une influence sur la couche de mélange du jet. Cependant, dans la configuration MARCO, il est probable que l'écoulement de ventilation et l'écoulement de culot soient les principaux responsables de la déstabilisation de la couche de mélange initiale du jet. Dans une configuration plus lisse de type "avion civil", les fluctuations lâchées par les couches limites sur la couche de mélange du jet pourraient jouer un rôle excitateur déterminant et devraient dans ce cas être explicitement introduites dans la simulation.

Perspectives pour l'analyse physique :

Un jet supersonique perturbé par des injections transverses faisant intervenir des phénomènes compressibles et tourbillonnaires, son étude a naturellement soulevé un grand nombre de questions fondamentales.

Tout d'abord, le comportement des ondes isentropiques se propageant à l'intérieur des jets supersoniques non-adaptés n'est toujours pas complètement compris, même dans les jets canoniques axisymétriques. Le grand écueil à éviter est d'appliquer des raisonnements valables uniquement en écoulement plan. La théorie des caractéristiques étendue ici aux plans de symétrie donne des indications sur la manière dont le débit hors-plan peut influencer la réflexion des ondes sur la ligne de glissement du jet. Ainsi, pour chercher les facteurs d'apparition d'un choc d'interception nécessairement issu d'un faisceau d'ondes convergentes, nous avons identifié les facteurs qui font converger les faisceaux d'ondes réfléchis à la surface du jet. Cependant, contrairement aux écoulements plans, la convergence des faisceaux d'ondes n'est pas fixée à leur lieu d'origine et peut évoluer au cours de leur propagation sous l'effet du débit hors-plan. Afin de comprendre entièrement le comportement des écoulements supersoniques dans les plans de symétrie, il reste donc à exprimer l'équation d'évolution du taux de convergence des ondes de Mach. Par ailleurs, on a prouvé qu'un écoulement extérieur peut provoquer la focalisation des ondes dans un jet franchement supersonique légèrement sous-détendu. Pour confirmer que l'origine de la lentille de choc est bien de nature purement transsonique, il serait intéressant d'éliminer numériquement les effets de l'écoulement extérieur et ceux de la viscosité.
Comme nous l'avons montré, la modification de la structure des chocs n'a pas d'influence sur le mélange interne du jet. Toutefois, mieux maîtriser la structure des chocs internes peut permettre de diminuer directement la signature infrarouge en réduisant les points chauds directement à l'intérieur du jet. En effet, il a été mis en évidence sur un jet axisymétrique comportant initialement un disque de Mach, qu'une modification de la forme finale de la tuyère peut limiter l'expansion du choc fort et de la région à haute température statique située en aval.

Concernant l'augmentation du mélange provoquée par des injections radiales continues, deux axes de recherche devraient être approfondis afin d'en améliorer l'efficacité et pourraient être menés en parallèle. Tout d'abord, notre compréhension du jet isolé dans un écoulement transverse doit être approfondie. Ce problème d'apparence simple est en fait très complexe puisqu'il repose entièrement sur la dynamique tridimensionnelle de la vorticité dans un écoulement libre. Cette dynamique possède en plus des comportements différents suivant le régime de fonctionnement du jet. Consécutivement à l'impulsion introduite par l'injection dans l'écoulement transverse, il apparaît en aval un couple de tourbillons contrarotatifs. Il est crucial pour l'optimisation du mélangeur de pouvoir corréler les conditions de l'injection (variables d'état et géométrie) aux caractéristiques des tourbillons longitudinaux, i.e. essentiellement leurs positions, leur(s) circulation(s) et leur impulsion. Une des questions à résoudre est de savoir quelles sont les grandeurs représentatives de la force exercée par le jet secondaire sur l'écoulement transverse sachant qu'un choc interne se forme dans sa portion la plus courbée. Autrement dit, il s'agit de préciser quantitativement ce que nous avons appelé la "force d'injection".
Les caractéristiques des tourbillons longitudinaux à l'issue de leur formation constituent les données d'entrée du second axe de recherche à savoir comment évolue un système de plusieurs paires de tourbillons contrarotatifs placés longitudinalement à la périphérie d'un jet. En écartant momentanément l'interaction avec la vorticité et le cisaillement de la couche de mélange qu'il conviendrait de traiter par la suite, un premier problème serait d'évaluer si la coopération des tourbillons longitudinaux seuls peut engendrer une déstabilisation rapide du système semblable à la dégénérescence brutale des tourbillons longitudinaux observée dans les calculs ZDES. Ce

problème de stabilité présente la particularité d'avoir un écoulement de base non stationnaire quel que soit le repère adopté. L'approche des perturbations optimales appliquée par Fabre [82] aux sillages d'avion pourrait fournir des éléments de réponse. Néanmoins, le fait que le rayon de dispersion des tourbillons ne soit pas négligeable par rapport à leurs écartements nécessite l'emploi d'une autre méthode. Ensuite, il serait utile d'estimer l'influence de la couche de cisaillement sur l'évolution de ce système tourbillonnaire. En effet, la stratégie de contrôle basée sur des tourbillons longitudinaux semble très robuste vis-à-vis des conditions de vol. A la différence des autres stratégies s'appuyant sur la déstabilisation de la couche de mélange ou du jet, on peut supposer qu'elle est moins sensible aux différences de vitesse du jet et de l'écoulement extérieur. Du point de vue global, le mélange par les tourbillons longitudinaux peut être scindé en un brassage stationnaire et un mélange turbulent dû au transfert de l'énergie cinétique du mouvement moyen vers le mouvement fluctuant. L'optimisation des injections radiales consiste donc probablement à ajuster le niveau de stabilité du système tourbillonnaire afin que celui-ci pénètre suffisamment dans le jet primaire et explose au meilleur moment pour favoriser le mélange. Enfin, le mélange et la pénétration des jets secondaires dans la région initiale, complètement tridimensionnelle, ont été occultés durant cette analyse et méritent pourtant une sérieuse investigation.

Enfin, l'application du dispositif mélangeur sur un aéronef requiert que l'on estime ses "effets secondaires". Au niveau de la propulsion, tous les calculs réalisés dans ce travail s'accordent sur le fait que toute augmentation du mélange se traduit dans la même mesure par une perte de poussée. Par exemple, le calcul ZDES du jet de la configuration MARCO contrôlé par 4 injecteurs prévoit une perte de poussée d'environ 7%. Il serait, en outre, intéressant d'évaluer les effets du contrôle sur le champ acoustique rayonné par le jet.

Pour finir sur une note plus générale, cette étude avait pour ambition de comprendre les mécanismes fondamentaux qui régissent l'écoulement autour d'une configuration appliquée. La grande difficulté de ce genre d'étude est d'identifier parmi l'ensemble des mécanismes physiques présents ceux qui sont essentiels au phénomène étudié puis de les isoler afin de mieux les comprendre. La simulation numérique est pour cela un formidable outil d'investigation. En complément à l'expérience qui permet d'ausculter l'écoulement réel, la simulation numérique permet d'observer le comportement de modèles théoriques et de vérifier qu'il est conforme au phénomène considéré. Les équations fondamentales de la dynamique des fluides classiques incarnées par les équations de Navier-Stokes sont aujourd'hui bien établies avec leurs hypothèses de validité. Les problèmes de modélisation (URANS, LES) concernent la représentation globale de cette dynamique à une certaine échelle de temps ou d'espace. Ils peuvent en outre avoir pour objectifs de minimiser les mécanismes que peut reproduire un modèle afin de se cantonner aux mécanismes essentiels à la représentation d'un phénomène particulier. Le nombre de mécanismes explicitement résolus dans les simulations peut être multiplié grâce à l'augmentation de la puissance de calcul. Toutefois, ces écoulements numériques se rapprochent des écoulements réels dans toute leur complexité. Les simulations plus "complètes" nécessitent en amont un ensemble de plus en plus volumineux de données de plus en plus fines, ce qui renforce leur complémentarité avec les méthodes expérimentales. En aval, l'analyse de leurs résultats demande des outils de post-traitement capables de quantifier la grande quantité des informations disponibles et de les présenter de manière synthétique. Les modèles approchés ont donc non seulement une utilité industrielle grâce à leur rapidité de restitution des résultats numériques, mais ils sont en plus indispensables à une vraie compréhension des écoulements.

Bibliographie

[1] M. Abbett. The Mach disc in underexpanded exhaust plumes. *AIAA J., Vol. 9, No. 3, pp. 512-514*, March, 1971.

[2] G.N. Abramovich. The theory of turbulent jets. *MIT Press, Cambridge, Massachusetts, Chap. 12, Section 4*, 1963.

[3] T.C. Adamson. The structure of the rocket exhaust plume without reaction at various altitudes. *4613-45-T (Contract SD-91), Inst. Sci. Tech., Univ. of Michigan*, June, 1963.

[4] T.C. Adamson and J.A. Nicholls. On the structure of the jets from highly underexpanded nozzles into still air. *J. Aerospace Sci., Vol. 26, pp. 16-24*, January, 1959.

[5] D. Adler and A. Baron. Prediction a three-dimensional circular turbulent jet in crossflow. *AIAA J., Vol. 17, No. 2, pp. 168-174*, February, 1974.

[6] P. Ajersch, J.M. Zhou, S. Ketler, M. Salcudean, and I.S. Gartshore. Multiple jets in a crossflow : Detailed measurements and numerical simulations. *International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition, ASME Paper 95-GT-9, pp. 1-16, Houston, TX*, June 1995.

[7] M.B. Alkislar, A. Krothapalli, I. Choutapalli, and L.M. Lourenco. Structure of supersonic twin jets. *AIAA Journal, Vol. 43, No. 11, pp. 2309-2318*, November, 2005.

[8] J. Andreopoulos. On the structures of jets in cross-flows. *J. Fluid. Mech., Vol. 157, pp. 163-197*, 1985.

[9] D.J. Azevedo. Analytic prediction of shock patterns in a high-speed wedge bounded duct. *PhD thesis, Dept. Mech. and Aero. Eng., State Univ., NY Buffalo*, 1989.

[10] G.K. Batchelor. An introduction to fluid dynamics. *Cambridge University Press, 1st edition*, 1967.

[11] P. Behrouzi and J.J. McGuirk. Effect of tab parameters on near-field jet plume development. *J. of Propulsion and Power, Vol. 22, No. 3, pp. 576-585*, May-June 2006.

[12] V.M. Belovich, M. Samimy, and M.F. Reeder. Dual stream axisymmetric mixing in the presence of axial vorticity. *J. of Propulsion and Power, Vol. 12, No. 1, pp. 178-185*, 1996.

[13] G. Ben-Dor, T. Elperin, Li H., and E. Vasiliev. The influence of the downstream pressure on the shock wave reflection phenomenon in steady flows. *J. Fluid Mech., Vol. 386, pp. 213-232*, 1999.

[14] F.S. Billig, R.C. Orth, and M. Lasky. A unified analysis of gaseous jet penetration. *AIAA J., Vol. 9, No. 6, pp. 1048-1058*, 1971.

[15] S.F. Birch and J.M. Eggers. A critical review of the experimental data for developed turbulent free shear layers. *NASA SP-321 vol. 1*, 1972.

[16] R.L. Bisplinghoff and H. Ashley. Principles of aeroelasticity. *Dover Publications*, 1962.

[17] W. Blumen. Shear-layer instability of an inviscid compressible fluid. *J. Fluid Mech., Vol. 40, pp. 769-781*, 1970.

[18] D.W. Bogdanoff. Compressibility effects in turbulent shear layers. *AIAA J., Vol. 21, No. 6, pp. 926-927*, 1983.

[19] H. Bohr. Almost periodic functions. *Chelsea Publishing Company, New York, 1947; Julius Springer, Berlin, 1933.*

[20] A. Boischot. Onera/dota/mpso. *Private Communication*, 2003.

[21] D.W. Bowersox. Turbulent flow structure characterization of angled injection into a supersonic crossflow. *J. of Spacecraft and Rockets, Vol. 34, No. 2, pp. 205-213*, 1997.

[22] R.D.W. Bowersox, H. Fan, and D. Lee. Sonic injection into a Mach 5.0 freestream through diamond orifices. *J. of Propulsion and Power, Vol. 20, No. 2, pp. 280-287*, March-April, 2004.

[23] J. Bowyer, L. D'Attorre, and H. Yoshihara. The flow field resulting from Mach reflection of a convergent conical shock at the axis of a supersonic axially symmetric jet. *GDA 63-0586, General Dynamics, Astronautics*, 1963.

[24] L.J.S. Bradbury and A.H. Khadem. The distortion of a jet by tabs. *J. Fluid Mech. Vol. 70, pp. 801-813*, 1975.

[25] M. Breuer, N. Jovicic, and K. Mazaev. Comparison of des, rans and les for the separated flow around a flat plate at high incidence. *Int. J. Numerical Methods in Fluids, Vol. 41, pp. 357-388*, 2003.

[26] J. Bridges and M.P. Wernet. Measurements of separate flow nozzles with mixing enhancement features. *NASA/TM-2002-211592*, 2002.

[27] J.E. Broadwell and R.E. Breidenthal. Structure and mixing of a transverse jet in incompressible flow. *J. Fluid. Mech., Vol. 148, pp. 405-412*, 1984.

[28] G.L. Brown and Roshko A. On density effects and large structures in turbulent mixing layers. *J. Fluid Mech., Vol. 64, part 4, pp. 775-816*, 1974.

[29] D.S. Butler. Characteristics in three independant variables. numerical solutions of ordinary and partial differential equations. *Pergamon, Edit. L. Fox, pp. 366-377*, 1962.

[30] R. Camussi, G. Guj, and A. Stella. Experimental study of a jet in a crossflow at very low reynolds number. *J. Fluid Mech., Vol. 454, pp. 113-144*, 2002.

[31] H.J. Catrakis and P.E. Dimotakis. Mixing in turbulent jets : Scalar measures and isosurface geometry. *J. Fluid Mech., Vol. 317, pp. 369-406*, 1996.

[32] H.C. Chang. Aufrollung eines zylindrischen strahles durch querwind. *Doctorial Dissertation, Univ. of Gottingen*, 1942.

[33] L.S. Chang and W.L. Chow. Mach disk from underexpanded axisymmetric nozzle flow. *AIAA J., Vol. 12, No. 8, pp. 1079-1082*, August, 1974.

[34] P. Chassaing, R.A. Antonia, F. Anselmet, L. Joly, and S. Sarkar. Variable density fluid turbulence. *Kluwer Academic Publishers*, June 2002.

[35] P. Chassaing, J. George, A. Claria, and F. Sananes. Physical characteristics of subsonic jets in a cross-stream. *J. Fluid Mech., Vol. 62, part 1, pp. 41-64*, 1974.

[36] C.F. Chenault, P.S. Beran, and R.D.W. Bowersox. Numerical investigation of supersonic injection using a reynolds-stress turbulence model. *AIAA J., Vol. 37, No. 10, pp. 1257-1268*, 1999.

[37] C.F. Chenault and J.D. Dorris. Application of active core exhaust control to eliminate the core thrust reverser on heavy lift aircraft. *Paper (also published in RTO MP-051) presented at RTO AVT Symposium on Active Control Technology for Enhanced Performance Operational Capabilities Land Vehicles and Sea Vehicles, Braunschweig, Germany*, 8-11 May 2000.

[38] C.F. Chenault, J. Dorris III, D. Smith, and V. Kibens. Active core exhaust (ACE) control for reduction of thermal loading. *AIAA Paper 2000-2471, AIAA Fluids 2000 Conference and Exhibit, Denver, CO*, 19-22 June 2000.

[39] M.R. Choi and S.K. Lele. Prediction of shock-cell structure using parabolized stability equations. *AIAA-2001-0744, 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, January 8-11, 2001, Reno, NV.

[40] A. Chpoun, D. Passerel, H. Li, and G. Ben-Dor. Reconsideration of oblique shock wave reflection in steady flows. part 1. experimental investigation. *J. Fluid Mech., Vol. 301, pp. 19-35*, 1995.

[41] S.G. Chuech, M.C. Lai, and G.M. Faeth. Structure of turbulent sonic under-expanded free jets. *AIAA J., Vol. 27, No. 5, pp. 549-559*, May, 1989.

[42] N.T. Clemens and M.G. Mungal. Two- and three-dimensional effects in the supersonic mixing layer. *AIAA J., Vol. 30, No. 4, pp. 973-981*, 1992.

[43] T.J. Coakley. Implicit upwind methods for the compressible navier-stokes equations. *AIAA J., Vol. 23, No. 2, pp. 374-386*, 1983.

[44] S.L.V. Coelho and J.C.R. Hunt. The dynamics of the near field of strong jets in crossflow. *J. Fluid Mech., Vol. 200, pp.95-120*, 1989.

[45] L. Cohen, L.J. Coulter, and Jr Egan, W.J. Penetration and mixing of multiple gas jets subjected to a cross flow. *AIAA J., Vol. 9, No. 4, pp. 718-724*, 1971.

[46] J. Coirier. Mécanique des milieux continus. *Dunod*, 2001.

[47] E. Collin. Etude de l'injection radiale de fluide dans une couche de mélange annulaire supersonique. application à l'augmentation du mélange. *PhD Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, Université de Poitiers, Poitiers, France*, 2001.

[48] E. Collin, S. Barre, and J.-P. Bonnet. Experimental study of a supersonic jet-mixing layer interaction. *Phys. Fluids, Vol. 16, No. 3, pp. 765-778*, 2004.

[49] G.S. Constantinescu and K.D. Squires. Numerical investigations of flow over a sphere in the subcritical an the supercritical regimes. *Phys. of Fluids, Vol. 16, No. 5, pp. 1449-1466*, 2004.

[50] L. Cortelezzi and A.R. Karagozian. On the formation of the counter-rotating vortex pair in transverse jets. *J. Fluid Mech., Vol. 446, pp. 347-373*, 2001.

[51] R. Courant and K.O. Friedrichs. Supersonic flow and shock waves. *Interscience Publishers, Inc., New York*, 1948.

[52] S. Crist, P.M. Sherman, and D.R. Glass. Study of the highly underexpanded sonic jet. *AIAA J., Vol. 4, No. 1, pp. 68-71*, January, 1966.

[53] S.C. Crow and F.H. Champagne. Orderly structure in jet turbulence. *J. Fluid Mech., Vol. 48, pp. 547-591*, 1971.

[54] C.B. Da Silva and O. Métais. Vortex control of bifurcating jets : A numerical study. *Phys. of Fluids, Vol. 14, No. 11, pp. 3798-3819*, 2002.

[55] J. Dacles-Mariani, G.G. Zilliac, J.S. Chow, and P. Bradshaw. Numerical-experimental study of a wingtip vortex in the near field. *AIAA J., Vol. 33, No. 9, pp. 1561-1568*, September, 1995.

[56] I. Danaila and J. Boersma. Mode interaction in a forced homogenous jet at low reynolds numbers. *CTR, Proceedings of the Summer Program 1998, Standford University, Standford*, 1998.

[57] J. Dandois. Contrôle des décollements par jet synthétique. *PhD Thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris VI*, Janvier 2007.

[58] D. Darracq. Etude numérique des interactions choc/choc et choc/couche limite turbulente en régime hypersonique. *PhD Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, Université de Poitiers, Poitiers, France*, 1995.

[59] S.M. Dash and D.E. Wolf. Interactive phenomena in supersonic jet mixing problems, part II : Numerical studies. *AIAA J., Vol. 22, No. 10, pp. 1395-1404*, October, 1984.

[60] S.M. Dash, D.E. Wolf, and J.M. Seiner. Analysis of turbulent underexpanded jets, part I : Parabolized navier-stokes model scipvis. *AIAA J., Vol. 23, No. 4, pp. 505-514*, April, 1984.

[61] E. David. Modélisation des ecoulements compressibles et hypersoniques. *PhD Thesis, INPG, Grenoble, France*, 1993.

[62] W. Davidor and S.S. Penner. Shock standoff distances and Mach-disk diameters in underexpanded sonic jets. *AIAA J., Vol. 9, No. 8, pp. 1651-1653*, August, 1971.

[63] M.R. Davis. Variable control of jet decay. *AIAA J. Vol. 20, No. 5, pp. 606-609*, 1982.

[64] J.W. Deardorff. A numerical study of three-dmensional turbulent channel flow at large reynolds numbers. *J. Fluid Mech., Vol. 41, pp. 453-465*, 1970.

[65] S. Deck. Simulation numérique des charges latérales instationnaires sur des configurations de lanceur. *PhD Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, Université d'Orléans, Orléans, France*, 2002.

[66] S. Deck. Numerical simulation of transonique buffet over a supercritical airfoil. *AIAA J., Vol. 43, No. 7, pp. 1556-1566*, July, 2005.

[67] S. Deck. Zonal detached eddy simulation of the flow around a high-lift configuration. *AIAA J., Vol. 43, No. 11, pp.2372-2384*, November, 2005.

[68] S. Deck, P. Duveau, P. d'Espiney, and P. Guillen. Development and application of spalart allmaras one equation turbulence model to 3D supersonic complex configurations. *Aerospace Science and Technology, Vol. 6, No. 3, pp. 171-183*, 2002.

[69] S. Denis. Contrôle du développement des couches de mélange axisymétriques subsoniques par jets impactant. *PhD Thesis, Université de Poitiers*, 2000.

[70] P.E. Dimotakis. The mixing transition in turbulent flows. *J. Fluid Mech., Vol. 409, pp. 69-98*, 2000.

[71] P.E. Dimotakis, R.C. Myake-Lye, and D.A. Papantoniou. Structure and dynamics of round turbulent jets. *Phys. Fluids, Vol. 26, pp. 3185-3192*, 1983.

[72] J Délery. Aérodynamique interne, tuyères et arrières corps. *Supaéro*, 1998.

[73] S. Dong and H. Meng. Flow past a trapezoidal tab. *J. Fluid Mech., Vol. 510, pp. 219-242*, 2004.

[74] A. Durand. Phénomènes d'hystérésis dans les interférences de choc, en ecoulements stationnaires supersonique et hypersonique. *Thèse de Doctorat de l'Université d'Orléans*, Juillet 2002.

[75] N.A. Durando. Vortices induced in a jet by a subsonic cross flow. *AIAA J., Vol. 9, No. 2, pp. 325-367*, 1971.

[76] D.W. Eastmann and L.P. Radtke. Location of the normal shock wave in the exhaust plume of a jet. *AIAA J., Vol. 1, No. 4, pp. 918-919*, April, 1963.

[77] B. Edney. Anomalous heat transfer and pressure distributions on blunt bodies at hypersonic speeds in the presence of an impinging shock. *FFA report 115*, 1968.

[78] J.M. Eggers. Velocity profile and eddy viscosity distributions downstream of a Mach 2.2 nozzle exhausting to quiescent air. *NASA TN D-3601*, 1966.

[79] O.S. Eiff and J.F. Keffer. On the structures in the near-wake region of an elevated turbulent jet in a crossflow. *J. Fluid Mech., Vol. 333, pp. 161-195*, 1997.

[80] G.S. Elliot and M. Samimy. Compressibility effects in free shear layers. *Phys. Fluids, Vol. 2, No. 7, pp. 1231-1240*, 1990.

[81] G.S. Elliot, M. Samimy, and S.A. Arnette. Study of compressible mixing layers using filtered rayleigh scatering based visualizations. *AIAA J., Vol. 30, No. 10, pp. 2567-2569*, 1992.

[82] D. Fabre. Instabilités et instationnarités dans les tourbillons : Application aux sillages d'avions. *PhD thesis, Université Paris VI*, 2002.

[83] R. Fearn and R.P. Weston. Vorticity associated with a jet in a cross flow. *AIAA J., Vol. 12, No. 12, pp. 1666-1671*, December, 1974.

[84] A. Ferry. Application of the method of characteristics to supersonic rotational flow. *NACA Report No. 841*, 1946.

[85] J.R. Forsythe, K.A. Hoffmann, R.M. Cummings, and K.D. Squires. Detached-eddy simulation with compressibility corrections applied to a supersonic axisymmetric base flow. *J. Fluids Engineering, Vol. 124, No. 4, 911-923*, 2002.

[86] J.R. Forsythe, K.D. Squires, K.E. Wurtzler, and P.R. Spalart. Detached-eddy simulation of the f-15e at high alpha. *J. Aircraft, Vol. 41, No. 2, pp. 193-200*, March-April 2004.

[87] L.E. Foster and W.A. Engblom. Computation of transverse injection into supersonic crossflow with various injector orifice geometries. *AIAA-2004-1199, 42nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, January 5-8, 2004, Reno, Nevada.

[88] J.H. Fox. On the structure of jet plumes. *AIAA J., Vol. 12, No. 1, pp. 105-107*, January, 1974.

[89] J.B. Freund and P. Moin. Jet mixing enhancement by high-amplitude fluidic actuation. *AIAA J. Vol. 38, No. 10, pp. 1863-1870*, October 2000.

[90] T.F. Fric and A. Roshko. Vortical structure in the wake of a transverse jet. *J. Fluid Mech., Vol. 279, pp. 1-47*, 1994.

[91] R. Gaillard, P. Geffroy, L. Jacquin, and G. Losfeld. Etude expérimentale sur les interactions entre un jet supersonique chauffé transversal et un écoulement supersonique externe. *AGARD CP-534, AGARD Meeting on Computational and Experimental Assessment of Jets in Cross Flow, Winchester, UK*, 19-22 April 1993.

[92] C.W. Gear. Algorithm 407-difsub for the solution of ordinary differential equations. *Commun. ACM, Vol. 14, No. 3, pp. 185-190*, 1971.

[93] N.J. Georgiadis, J.I.D. Alexander, and E. Reshokto. Hybrid reynolds-averaged navier-stokes/large-eddy simlations of supersonic turbulent mixing. *AIAA J., Vol. 41, No. 2, pp. 218-229*, February 2003.

[94] N.J. Georgiadis, C.L. Rumsey, D.A. Yoder, and K.B.M.Q. Zaman. Turbulence modeling effects on calculation of lobed nozzle flowfields. *J. of Propulsion and Power, Vol. 22, No. 3, pp. 567-575*, May-June 2006.

[95] P. Germain. Mécanique. *Cours de l'Ecole Polytechnique*, 1987.

[96] S. Ghosal and P.J. Moin. Large eddy simulation in complex geometry. *J. Comp. Phys., Vol. 118, No. 1, pp. 24-37*, 1995.

[97] S.G. Goebel and J.C. Dutton. Experimental study of compressible turbulent mixing layers. *AIAA J., Vol. 29, No. 4, pp. 538-546*, 1991.

[98] M.R. Gruber, A.S Nejad, T.H. Chen, and J.C. Dutton. Mixing and penetration studies of sonic jets in a Mach 2 freestream. *J. of Propulsion and Power, Vol. 11, No. 2, pp. 315-323*, 1995.

[99] Ph. Guillen and M. Dormieux. Design of a 3d multi-domain euler code. *International Seminar of Supercomputing, Boston, USA*, 1989.

[100] E.J. Gutmark, K.C. Schadow, and K.H. Yu. Mixing enhancement in supersonic free shear flows. *Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 27, pp. 375-417*, 1995.

[101] E. Guyon, J-P. Hulin, and L. Petit. Hydrodynamique physique. *EDP Sciences, CNRS Editions*, 2001.

[102] A. Harten. High resolution scheme for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics, Vol. 49, pp. 357-393*, 1983.

[103] E.F. Hasselbrink and M.G. Mungal. Transverse jets and jet flames. part 1. scaling laws for strong transverse jets. *J. Fluid Mech., Vol. 443, pp. 1-25*, 2001.

[104] E.F. Hasselbrink and M.G. Mungal. Transverse jets and jet flames. part 2. velocity and oh field imaging. *J. Fluid Mech., Vol. 443, pp. 27-68*, 2001.

[105] B.A. Haven and M. Kurosaka. Kidney and anti-kidney vortices in crossflow jets. *J. Fluid Mech., Vol. 352, pp. 27-64*, 1997.

[106] S.D. Heister and A.R. Karagozian. Gaseous jet in supersonic crossflow. *AIAA J., Vol. 28, No. 5, pp. 819-827*, May 1990.

[107] Le Roy F. Henderson and R. Menikoff. Triple-shock entropy theorem and its consequences. *J. Fluid Mech., Vol. 366, pp. 179-210*, 1998.

[108] L.F. Henderson and A. Lozzi. Experiments on transition of Mach reflexion. *J. Fluid Mech., Vol. 68, pp. 139-155*, 1975.

[109] M. Holt. Numerical methods in fluid dynamics. *Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag*, 1977.

[110] K. Horiuti. Alignment of eigenvectors for strain rate and subgrid-scale stress tensors. *Direct and Large Eddy Simulation IV, Geurts, Friedriech and Métais Eds, Kluwer, pp. 67-72*, 2001.

[111] H. Hornung. Regular and Mach reflection of shock waves. *Ann. Rev. Fluid Mech., Vol. 18, pp. 33-58*, 1986.

[112] H.G. Hornung, H. Jr. Oertel, and R.J. Sandeman. Transition to Mach reflection of shock waves in steady and pseudo steady flow with and without relaxation. *J. Fluid Mech., Vol. 90, pp. 541-560*, 1979.

[113] H.G. Hornung and M.L. Robinson. Transition from regular to Mach reflection of shock waves. part 2. the steady flow criterion. *J. Fluid Mech., Vol. 123, pp. 155-164*, 1982.

[114] H.T.-S. Hsia. Equivalence of secondary injection to a blunt body in supersonic flow. *AIAA J., Vol. 4, No. 10, pp. 1832-1834*, 1966.

[115] H. Hu, T. Saga, T. Kobayashi, and N. Taniguchi. A study on a lobed jet mixing flow by using stereoscopic particle image velocimetry technique. *Phys. Fluid, Vol. 13, No. 11, pp. 3425-3441*, 2001.

[116] R.F. Huang and J. Lan. Time evolution and mixing characteristics of hydrogen and ethylene transverse jets in supersonic crossflows. *Phys. Fluids, Vol. 17, No. 3*, 2005.

[117] P. Huerre and P.A. Monkewitz. Absolute and convective instabilities in free shear layers. *J. Fluid Mech., Vol. 159, pp. 195*, 1975.

[118] P. Huerre and M. Rossi. Hydrodynamic instabilities in open flows. *Hydrodynamics and Nonlinear Instabilities, Godrèche, C. and Manneville, P. (eds), Cambridge University Press, pp. 81-294*, 1998.

[119] M.K. Ibrahim, R. Kunimura, and Y. Nakamura. Mixing enhancement of compressible jets by using unsteady microjets as actuators. *AIAA J. Vol. 40, No. 4, pp. 681-688*, April 2002.

[120] M.S. Ivanov, G. Ben-Dor, T. Elperin, A.N. Kudryavtsev, and D. Khotyanovsky. Flow-Mach-number-variation-induced hysteresis in steady shock wave reflections. *AIAA Journal, Vol. 9, No. 5, pp. 972-974*, 2001.

[121] L. Jacquin. Phenomenological description and simplified modelling of the vortex wake issuing from a jet in a crossflow. *La Recherche Aérospatiale, 1994, No.2, pp. 117-133*, 1994.

[122] L. Jacquin. Turbulence et tourbillons. *Cours de majeure de mécanique, option : Dynamique des fluides, Ecole Polytechnique*, 2005.

[123] O.P. Jacquotte. Generation, optimization and adaptation of multiblock grids around complex configurations in computational fluid dynamics. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering, Vol. 34, pp. 443-454*, 1992.

[124] A. Jameson and E. Turkel. Implicit schemes and LU decomposition. *Math. Comp., Vol. 37, No. 156, pp. 385-397*, 1981.

[125] A.L. Jaumotte, J.J. Ginoux, P. Carrière, J. Smolderen, M. Barrère, J. Fabri, C. Hirsch, and F. Buckens. Chocs et ondes de choc. *Masson et Cie, Editeurs*, 1971.

[126] J. Jeong and F. Hussain. On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech., Vol. 285, pp. 69-94*, 1995.

[127] J. Jeong, F. Hussain, W. Schoppa, and J. Kim. Coherent structures near the wall in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech. Vol. 332, pp. 185-214*, 1997.

[128] J. Jimenez. Turbulence and vortex dynamics. *Cours de majeure de mécanique, option : Dynamique des fluides, Ecole Polytechnique*, 2003.

[129] Y. Kamotani and I. Greber. Experiments on a turbulent jet in a cross flow. *AIAA J., Vol. 10, No. 11, pp. 1425-1429*, 1972.

[130] A. Kantrowitz. The formation and stability of normal shock waves in channel flows. *NACA Technical Note 1225*, March 1947.

[131] A.R. Karagozian. An analytical model for the vorticity associated with a transverse jet. *AIAA J., Vol. 24, No. 3, pp. 429-436*, 1986.

[132] R. Kawamura. Reflection of a wave at an interface of supersonic flows and wave patterns in a supersonic compound jet. *J. of the Physical Society of Japan, Vol. 7, No. 5, pp. 482-485*, 1952.

[133] R.M. Kelso, T.T. Lim, and A.E. Perry. An experimental study of round jets in cross-flow. *J. Fluid Mech., Vol. 306, pp. 111-144*, 1996.

[134] R.M. Kelso and A.J. Smits. Horseshoe vortex systems resulting from the interaction between a laminar boundary layer and a transverse jet. *Physics of Fluids, Vol. 7, No. 1, pp. 153-158*, January, 1995.

[135] K. Knowles and A.J. Saddington. A review of jet mixing enhancement for aircraft propulsion applications. *Proceedings - Institution of Mechanical Engineers, Part G Journal of Aerospace Engineering, Vol. 220, No. 2, pp. 103-128*, 2006.

[136] A.N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in an incompressible fluid with very large reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol.30, pp. 301-305*, 1941.

[137] B. Koren. A robust upwind discretization method for advection, diffusion and source terms. *C.B. Vreugdenhil and B. Koren, Editors, Numerical Methods for Advection-Diffusion Problems, Volume 45 of Notes on Numerical Fluid Mechanics, pp. 117-138.*, Vieweg, Braunschweig, 1993.

[138] A. Krothapalli, G. Buzyna, and L. Lourenco. Streamwise vortices in an underexpanded axisymmetric jet. *Phys. Fluid, Vol. 3, No. 8, pp. 1848-1851*, 1991.

[139] A. Krothapalli, L. Lourenco, and J.M. Buchlin. Separated flow upstream of a jet in a crossflow. *AIAA J., Vol. 28, pp. 414*, 1990.

[140] R. Ladenburg, C. C. Van Voorhis, and J. Winkler. Interferometric studies of faster than sound phenomena. part ii : Analysis of supersonic air jets. *Physical Review, Vol. 76, No.5, pp. 662-677*, September, 1949.

[141] B. Lakshminaraya and J.H. Horlock. Generalized expression for secondary vorticity using intrinsic co-ordinates. *J. Fluid Mech., Vol. 59, pp.97-115*, 1973.

[142] H. Lamb. Hydrodynamics. *Cambridge University Press, 6th edition*, 1975.

[143] L. Larchevêque. Les of a compressible flow past a deep cavity. *Physics of Fluids, Vol. 15, No. 1, pp.193-210*, 2003.

[144] S. Lardeau, E. Collin, E. Lamballais, and J.-P. Bonnet. Analysis of a jet-mixing layer interaction. *Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol. 24, No. 2, pp. 520-528*, 2003.

[145] J.C. Lau and P.J. Morris. Measurements in subsonic and supersonic free jets using a laser velocimeter. *J. Fluid Mech., Vol. 93, pp. 1-27*, 1979.

[146] J.C. Lau and P.J. Morris. Effects of exit Mach number and temperature on mean-flow and turbulence characteristics in round jets. *J. Fluid Mech., Vol. 105, pp. 193-218*, 1981.

[147] S.H. Lee and T. Mitani. Mixing augmentation of transverse injection in scramjet combustor. *J. Propulsion and Power, Vol. 19, No. 1, pp. 115-124*, 2003.

[148] J.C. Lengrand, J. Allegre, and M. Raffin. Experimental investigation of underexpanded exhaust plumes. *AIAA J., Vol. 14, No. 5, pp. 692-694*, May, 1976.

[149] A. Leonard. Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. *Adv. in Geophys. , Vol. 18, pp. 237-248*, 1974.

[150] M. Lesieur and P. Comte. Turbulence in compressible flows. *AGARD-R-819, pp. 4.1-4.39*, 1997.

[151] H. Li and G. Ben-Dor. Application of the principle of minimum entropy production to shock wave reflections. i. steady flows. *J. Appl. Flows, Vol. 80, No. 4*, August 1996.

[152] D. Liepmann and M. Gharib. The role of streamwise vorticity in the near-field entrainment of round jets. *J. Fluid Mech., Vol. 245, pp. 643-668*, 1992.

[153] T.T. Lim, T.H. New, and S.C. Luo. On the development of large-scale structures of a jet normal to a cross flow. *Phys. Fluids, Vol. 13, No. 3, pp. 770-775*, 2001.

[154] W.T. Lord. On axi-symmetrical gas jets, with application to rocket jet flow fields at high altitudes. *ARC RM 3235*, 1961.

[155] E.S. Love and C.E Grisby. Some studies of axisymmetric free jets exhausting from sonic and supersonic nozzles into still air and into supersonic streams. *NACA RM-L54L31*, May, 1955.

[156] J. Luneau and A. Bonnet. Théories de la dynamique des fluides. *Cépaduès Edition*, 1989.

[157] E. Mach. Uber den verlauf von funkenwellen in der ebene und im raume. *Sitzungsbr Akad Wiss Wien, Vol. 78, pp. 819-838*, 1878.

[158] S.P. Mahulikar, G.A. Rao, S.K. Sane, and A.G. Marathe. Aircraft plume infrared signature in nonafterburning mode. *J. of Thermophysics and Heat Transfer, TN, Vol. 19, No. 3*, July-September 2005.

[159] M. Maidi, M. Lesieur, and O. Métais. Vortex control in large-eddy simulations of compressible round jets. *Phys. of Fluids, Vol. 7, No. 49*, 2006.

[160] R.J. Margason. Fifty years of jet in cross flow research. *AGARD CP-534, AGARD Meeting on Computational and Experimental Assessment of Jets in Cross Flow, Winchester, UK*, 19-22 April 1993.

[161] R.J. Margason. Analytical dscription of a jet-wake cross sections for a jet normal to a subsonic free stream. *NASA Rep. SP-218, pp. 131-139*, 1969.

[162] Y.M. Marzouk and A.F. Ghoniem. Vorticity formulation for an actuated jet in crossflow. *AIAA-2004-96, 42rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 5-8 January 2005, Reno, Nevada.

[163] Y.M. Marzouk and A.F. Ghoniem. Actuating transverse jets via nozzle-edge vortical perturbation. *AIAA-2006-1492, 44rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 9-12 January 2005, Reno, Nevada.

[164] Y.M. Marzouk, A.F. Ghoniem, and D. Wee. Simulations of high reynolds number transverse jets and analysis of the underlying vortical structures. *AIAA-2005-308, 43rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 10-13 January 2005, Reno, Nevada.

[165] C.R. Mc Clinton. The effects of injection angle on the interaction between sonic secondary jets and a supersonic free stream. *NASA TN D-6669*, 1972.

[166] G.J. McCann and R.D.W. Bowersox. Experimental investigation of supersonic gaseous injection into a supersonic freestream. *AIAA J., Vol. 34, No. 2, pp. 317-323*, 1996.

[167] R.E. Meyer. The method of characteristics for problems of compressible flow involving two independent variables, part II : Integration along a Mach line. the radial focusing effect in axially symmetrical flow. *Q. J. Mech. and Appl. Math., Vol. 1, pt. 4, pp. 451-469*, December 1948.

[168] R.E. Meyer. The method of characteristics for problems of compressible flow involving two independent variables, part I : The general theory. *Q. J. Mech. and Appl. Math., Vol. 1, pt. 2, pp. 196-219*, June 1948.

[169] A. Michalke. A survey on jet instability theory. *Progress in Aerospace Sciences, Vol. 21, pp. 159-199*, 1984.

[170] I.M. Milanovic and K.B.M.Q. Zaman. Fluid dynamics of highly pitched and yawed jets in crossflow. *AIAA J., Vol. 42, No. 5, pp. 874-882*, May, 2004.

[171] S. Mölder, A. Gulamhussein, E. Timofeev, and P. Voinovich. Focusing of conical shocks at the center-line of symmetry. *21st International Symposium on Shock Waves, Great Keppel Island, Australia, July 20-25*, 1997.

[172] P. Molton and L. Jacquin. Etude expérimentale sur le contrôle du jet de la tuyère marco à s3ch. *RT 15/05284 DAFE*, Juin, 2004.

[173] P. Molton, L. Jacquin, N. Chauvet, and S. Deck. Mixing enhancement in under-expanded jet : Part i. *41st AAAF Symposium on Applied Aerodynamics*, 20-22 March 2006, Lyon, France.

[174] S. Morton, J. Forsythe, A. Mitchell, and D. Hajek. Des and rans simulations of delta wing vortical flows. *AIAA Paper 2002-0587*, 2002.

[175] Z.M. Moussa, J.W. Trischka, and S. Eskinazi. Mixing of a round jet with a cross-stream. *J. Fluid Mech., Vol. 80, pp. 49-80*, 1977.

[176] S. Muppidi and K. Mahesh. Study of trajectories of jets in crossflow using direct numerical simulations. *J. Fluid Mech., Vol. 530, pp. 81-100*, 2005.

[177] S. Muppidi and K. Mahesh. Passive scalar mixing in jets in crossflow. *AIAA-2006-1098, 44th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 9-12 January 2006, Reno, Nevada.

[178] T.H. New, T.T. Lim, and S.C. Luo. Elliptic jets in cross-flow. *J. Fluid Mech., Vol. 494, pp. 119-140*, 2003.

[179] J.A. Nicholls and E.K. Dabora. Recent results on standing detonation waves. *Eight Symposium on Combustion, Williams and Wilkins Co., Baltimore, Md., p. 646*, 1962.

[180] R.H. Nunn. Vorticity growth and decay in the jet in crossflow. *AIAA J., Vol. 23, No. 3, pp. 473-475*, March, 1985.

[181] L.V. Ovsiannikov. Gas flow with straight transition line. *NACA TM-1295*, May 1951.

[182] P.L. Owen and C.K. Thornhill. The flow in an axially symmetric supersonic jet from a nearly sonic orifice into a vcuum. *Brit., A.R.C. Technical Report, RM 2616*, 1952.

[183] D.C. Pack. A note on prandtl's formula for the wave-length of a supersonic gas jet. *Q. J. Mech. and Appl. Math., Vol. 3, pp. 173-181*, 1950.

[184] D.C. Pack. On the formation of shock-waves in supersonic gas jets. *Q. J. Mech. and Appl. Math., Vol. 1, part 1, pp. 1-17*, March, 1948.

[185] L. Pack and A. Seifert. Periodic excitation for jet vectoring and enhanced spreading. *J. Aircraft, Vol. 38, No. 3, pp. 486-495*, 2001.

[186] S.I. Pai. On supersonic flow of a two-dimensional jet in uniform stream. *J. Aero. Sci., Vol. 19, No. 1, pp. 61-65*, January, 1952.

[187] D. Papamoschou. Mixing enhancement using axial flow. *AIAA Paper 2000-0093*, 2000.

[188] D. Papamoschou and A. Roshko. The compressible turbulent shear layer : an experimental study. *J. Fluid Mech., Vol. 197, pp. 453-477*, December, 1988.

[189] D.E. Parekh, V. Kibens, A. Glezer, J.M. Wiltse, and D.M. Smith. Innovative jet flow control : Mxing enhancement experiments. *AIAA Paper 96-0308*, 1996.

[190] M.A. Patrick. Experimental investigation of the mixing and penetration of a round turbulent jet injected perpendicularly into a transverse stream. *Transactions of the Institute of Chemical Engineers, Vol. 45, pp. 16-31*, 1967.

[191] J.L. Payne, C.J. Roy, and S.J. Beresh. A comparison of turbulence models for a supersonic jet in transonic crossflow. *AIAA-2001-1048, 39th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 8-11 January 2001, Reno, NV.

[192] M. Péchier. Prévisions numériques de l'effet magnus pour des configurations de munition. *PhD Thesis, Dept. of Mechanical Engineering, Université de Poitiers, Poitiers, France*, Sept. 1999.

[193] M. Péchier, P. Guillen, and R. Caysac. Magnus effect over finned projectiles. *J. Spacecraft and Rockets, Vol. 38, No. 4, pp. 542-549*, 2001.

[194] C.E. Peters and W.J. Phares. The structure of plumes from moderately underexpanded supersonic nozzles. *AIAA 70-229, 8th Aerospace Sciences Meeting, New York*, January, 1970.

[195] S.D. Peterson and M.W. Plesniak. Evolution of jets emanating from short holes into crossflow. *J. Fluid Mech., Vol. 503, pp. 57-91*, 2004.

[196] A.K. Polyboyarinov and N.I. Spirin. The displacement law of central shock in underexpanded jet under the action of obstacle. *J. of Engineering Physics and Thermophysics, Vol. 18, No. 2, p.340*, February, 1970.

[197] S.B. Pope. Turbulent flows. *Cambridge University Press, Cambridge, UK*, 2000.

[198] F.P. Povinelli, L.A. Povinelli, and M. Hersch. Supersonic jet penetration into a Mach 2 airstream. *J. Spacecraft, Vol. 8, No. 8, pp. 988-992*, 1970.

[199] L. Prandt. *Phys. Zeits., Vol. 5, p. 599*, 1904.

[200] B.D. Pratte and W.D. Baines. Profiles of the round turbulent jet in a cross flow. *J. Hydraul. Div., ASCE, Vol. 92, pp. 53-54*, 1967.

[201] C. Priere and L.Y.M. Gicquel. Experimental and numerical studies of dilution systems for low-emission combustors. *AIAA J., Vol. 43, No. 8, pp. 1753-1766*, August, 2005.

[202] M. Puttre. "facing the shoulder-fired threat". *Journal of Electronic Defense*, April 2001.

[203] G. Raman. Flip-flop jet nozzle extended to supersonic flows. *AIAA J., Vol. 31, No. 6, pp. 1028-1035*, 1993.

[204] G. Raman. Coupling of twin supersonic jets of complex geometry. *J. Aircraft, Vol. 36, No. 5, pp. 743-749*, 1999.

[205] G. Raman and E.J. Rice. Instability modes excited by natural screech tones in a supersonic rectangular jet. *Phys. Fluids, Vol. 6, 3999-4008*, 1994.

[206] G. Raman and E.J. Rice. Supersonic jet mixing enhancement using impingement tones from obstacles of various geometries. *AIAA J., Vol. 33, No. 3, pp.*, 1995.

[207] G. Raman, K.B.M.Q. Zaman, and E.J. Rice. Initial turbulence effect on jet evolution with and without tonal excitation. *Phys. Fluids, Vol. 1, No. 7, pp. 1240-1248*, 1989.

[208] G.A. Rao and S.P. Mahulikar. Aircraft powerplant and plume infrared signature modelling and analysis. *AIAA Paper 2005-221, 43rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 10-13 January 2005, Reno, Nevada.

[209] O.H. Rask and E.J. Gutmark. Shock cell modification due to chevrons. *AIAA Paper AIAA-2007-831, 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, January 8-11, 2007.

[210] B. Raverdy. Simulation des grandes echelles de l'ecoulement se développant dans un etage complet de turbine basse pression. *PhD Thesis, Université Pierre et Marie Curie*, 2004.

[211] Rayleigh. *Phil.Mag.(Ser 6), Vol. 32, p. 177*, 1916.

[212] L.F. Richardson. Weather prediction by numerical process. *Cambridge University Press*, 1922.

[213] P.L. Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *Journal of Computational Physics, Vol. 43*, 1981.

[214] R.C. Rogers. Model of transverse fuel injection in supersonic combustors. *AIAA J., Vol. 18, No. 3, pp. 294-301*, March, 1980.

[215] A.I. Rylov. On the impossibility of regular reflection of a steady-state shock wave from the axis of symmetry. *J. of Applied Math. and Mech., Vol. 54, No. 2, pp.200-203*, 1990.

[216] P.G. Saffman. Vortex dynamics. *Cambridge University Press*, 1992.

[217] P. Sagaut. Large eddy simulation for incompressible flows. *Third Edition, Springer, Berlin*, November 2005.

[218] P. Sagaut, S. Deck, and M. Terracol. Multiscale and multiresolution approaches in turbulence. *Imperial College Press*, 2006.

[219] M. Samimy, K.B.M.Q. Zaman, and M.F. Reeder. Effect of tabs on the flow and noise field of an axisymmetric jet. *AIAA J., Vol. 31, No. 4, pp. 609-619*, April 1993.

[220] N.D. Sandham and W.C. Reynolds. Compressible mixing layer : Linear theory and direct simulation. *AIAA J., Vol. 28, No. 4, pp. 618-624*, 1990.

[221] B. Sapoval. Universalités et fractales. *Flammarion*, 1997.

[222] J.A. Schetz and F.S. Billig. Penetration of gaseous jets injected into a supersonic stream. *J. Spacecraft, Vol. 3, No. 11, pp. 1658-1665*, 1966.

[223] J.A. Schetz and F.S. Billig. Structure of highly underexpanded transverse jets in a supersonic stream. *AIAA J., Vol. 5, No. 5, pp. 882-884*, 1967.

[224] W. Schoppa and F. Hussain. Coherent structure generation in near-wall turbulence. *J. Fluid Mech. Vol. 453, pp. 57-108*, 2002.

[225] A. Scotti and C. Meneveau. Generalized smagorinsky model for anisotropic grids. *Phys. Fluids, Vol. 5, No. 9, pp. 2306-2308*, 1993.

[226] J.W. Shan and P.E. Dimotakis. Reynolds-number effects and anisotropy in transverse-jet mixing. *J. Fluid Mech., Vol. 566, pp. 47-96*, 2006.

[227] M.L. Shur, P.R. Spalart, and M.K. Strelets. Noise prediction for increasingly complex jets. part I : Methods and tests. *Int. J. Aeroacoustics, Vol. 4, No.3+4, pp. 213-246*, 2005.

[228] M.L. Shur, P.R. Spalart, and M.K. Strelets. Noise prediction for increasingly complex jets. part II : Applications. *Int. J. Aeroacoustics, Vol. 4, No.3+4, pp. 247-266*, 2005.

[229] M.L. Shur, P.R. Spalart, M.K. Strelets, and A.V. Garbaruk. Further steps in les-based noise prediction for complex jets. *AIAA Paper 2006-485, 44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, 9-12 January 2006, Reno, NV.

[230] M.L. Shur, P.R. Spalart, M.K. Strelets, and A. Travin. Detached-eddy simulation of an airfoil at high angle of attack. *4th Int. Symposium on Engineering Turbulence Modelling and Experiments,W. Rodi and D. Laurence Eds, Elsevier*, May 24-26 1999, Corsica.

[231] R.J. Shyne. A survey of challenges in aerodynamic exhaust nozzle technology for aerospace propulsion applications. *NASA TM-2002-211977*, November 2002.

[232] F. Simon. Simulation numérique hybride RANS/LES de l'aérodynamique des projectiles et application au contrôle des écoulements. *PhD. Thesis, Université de Lille*, 2007.

[233] F. Simon, S. Deck, P. Guillen, and P. Sagaut. Reynolds-averaged navier-stokes/large-eddy simulations of supersonic base flow. *AIAA J., Vol. 44, No. 11*, 2006.

[234] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations. *Monthly Weather Review, Vol. 91, No. 3, pp. 99-164*, March 1963.

[235] L.L. Smith, A.J. Majamaki, I.T. Lam, O. Delabroy, A.R. Karagozian, F.E. Marble, and O.I. Smith. Mixing enhancement in a lobed injector. *Phys. Fluid, Vol. 9, No. 3, pp. 667-678*, 1997.

[236] S.H. Smith and M.G. Mungal. Mixing, structure and scaling of the jet in crossflow. *J. Fluid Mech., Vol. 357, pp. 83-122*, 1998.

[237] P.R. Spalart. Young-person's guide to detached-eddy simulation grids. *NASA/CR-2001-211032*, July 2001.

[238] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one equation turbulence model for aerodynamics flows. *AIAA Paper 92-0439*, 1992.

[239] P.R. Spalart and S.R. Allmaras. A one equation turbulence model for aerodynamics flows. *La Recherche Aérospatiale, No. 1, pp. 5-21*, 1994.

[240] P.R. Spalart, S. Deck, M.L. Shur, K.D. Squires, M.K. Strelets, and A. Travin. A new version of detached-eddy simulation, resistant to ambiguous grid densities. *Theor. Comput. Fluid Dyn., Vol. 20, pp. 181-195*, 2006.

[241] P.R. Spalart, W.H. Jou, M. Strelets, and S.R. Allmaras. Comments on the feasibility of les for wings and on a hybrid RANS/LES approach. *Proceedings of the 1st AFSOR Int. Conf. on DNS/LES, pp. 137-147, Greyden Press*, 1997, Columbus, OH.

[242] Ames Research Staff. Equations, tables, and charts for compressible flow. *NACA Report 1135*, 1953.

[243] M. Strelets. Detached eddy simulation of massively separated flows. *AIAA Paper 01-0879, 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, Nevada*, January 2001.

[244] P.J. Strykowski, A. Krothapalli, and D. Wishart. Enhancement of mixing in high-speed heated jets using a counterflowing nozzle. *AIAA J., Vol. 31, No. 11, pp. 2033-2038*, November 1993.

[245] L.K. Su and M.G. Mungal. Simultaneous measurements of scalar and velocity field evolution in turbulent crossflowing jets. *J. Fluid Mech., Vol. 513, pp. 1-45*, 2004.

[246] R.I. Sykes, W.S. Lewellen, and S.F. Parker. On the vorticity dynamics of a tubulent jet in a crossflow. *J. Fluid. Mech., Vol. 168, pp. 393-413*, 1986.

[247] K. Takayama and G. Ben-Dor. The inverse Mach reflection. *AIAA Journal, Vol. 23, pp. 1853-1859*, December 1985.

[248] C.K.W. Tam, J.A. Jackson, and J.M. Seiner. A multiple-scales model of the shock-cell structure of imperfectly expanded supersonic jets. *J.F.M., Vol. 153, pp. 123-149*, 1985.

[249] H. Tennekes and J.L. Lumley. A first course in turbulence. *The MIT Press, Cambridge, Massachusetts.*, 1972.

[250] T.G. Tillman, R.W. Paterson, and Jr Presz, W.M. Supersonic nozzle mixer ejector. *J. of Propulsion and Power, Vol. 8, No. 2, pp. 513-519*, 1992.

[251] S. Tomioka, L.S. Jacobsen, and J.A. Schetz. Sonic injection from diamond-shaped orifices into a supersonic crossflow. *J. Propulsion and Power, Vol. 19, No. 1, pp. 104-114*, 2003.

[252] H.S. Tsien. The limiting-line in mixed subsonic and supersonic flow of compressible fluids. *NACA TN 961*, 1944.

[253] B. Van Leer. Towards the ultimate conservative scheme II : Monoticity and conservation combined in a second-order scheme. *Journal of Computational Physics, Vol. 14*, 1974.

[254] U. Vandsburger and C. Ding. Self excited wire method for the control of turbulent mixing layers. *AIAA J., Vol. 33, No. 6, pp. 1032-1037*, 1995.

[255] W.M. VanLerberghe, J.G. Santiago, J.C. Dutton, and R.P. Lucht. Mixing of a sonic transverse jet injected into a supersonic flow. *AIAA J., Vol. 38, No. 3, pp. 470-479*, 2000.

[256] G.E. Varney. Infrared signature measurement techniques and simulation methods for aircraft survivability. *AIAA Paper 79-1186, Joint Propulsion Conference, 15th, Las Vegas, NV*, June 18-20, 1979.

[257] H. Viets. Flip-flop jet nozzle. *AIAA J., Vol. 13, No. 10, pp. 1375-1379*, 1975.

[258] A.W. Vreman. Direct and large eddy simulation of the compressible turbulent mixing layer. *PhD Thesis, University of Twente*, 1995.

[259] A.L. Vuillerme, S. Deck, and R. Chevrier. Numerical simulation of the flow inside an s-shaped intake diffuser. *EUCASS, Flight Physics, Moscow*, 5-7 july 2005.

[260] D. Wallace and L.G. Redekopp. Linear instability characteristics of wake-shear layers. *Phys. Fluids, Vol. 4, No. 1, pp. 189-191*, 1992.

[261] C.J. Wang and J.B. Peterson. Spreading of supersonic jets from axially symmetric nozzles. *J. of Jet Propulsion, pp. 321-328*, May, 1958.

[262] C.R. Wang. Application of a turbulence model for jet and cross flow interaction. *AIAA Paper 2000-2655, Fluids 2000*, 19-22 June 2000, Denver, CO.

[263] R.W. Wlezien and V. Kibens. Influence of nozzle asymmetry on supersonic jets. *AIAA J., Vol. 26, No. 1, pp. 27-33*, 1988.

[264] P.T. Wooler. On the flow past a circular jet exhausting at right angles from a flat plate or wing. *J. Royal Aeronautical Society, Vol. 71, No. 175, pp. 216-218*, March, 1967.

[265] H.C. Yee. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications. *J. Comp. Phys., Vol. 68, pp. 151-179*, 1987.

[266] Y. Yoshizawa. Subgrid-scale modeling of compressible turbulent flows. *Phys. Fluids, Vol. 3, pp. 714-716*, 1991.

[267] L.L. Yuan and R.L. Street. Trajectory and entrainment of a round jet in crossflow. *Phys. Fluids, Vol. 10, No. 9, pp. 2323-2335*, 1998.

[268] L.L. Yuan, R.L. Street, and J.H. Ferziger. Large-eddy simulations of a round jet in crossflow. *J. Fluid Mech., Vol. 379, pp. 71-104*, 1999.

[269] K.B.M.Q. Zaman. Axis switching and spreading of an asymmetric jet : The role of coherent structure dynamics. *J. Fluid Mech., Vol. 316, pp. 1-27*, 1996.

[270] K.B.M.Q. Zaman. Spreading characteristics of compressible jets from nozzles of various geometries. *J. Fluid Mech., Vol. 383, pp. 197-228*, 1999.

[271] K.B.M.Q. Zaman, M.F. Reeder, and M. Samimy. Control of an axisymmetric jet using vortex generators. *Phys. Fluids, Vol.6, No.2, pp. 778-793*, February, 1994.

[272] E.E. Zukoski and F.W. Spaid. Secondary injection of gases into a supersonic flow. *AIAA J., Vol. 2, No. 10, pp. 1689-1688*, 1964.

Annexe A

Evolution de la pression totale dans un turboréacteur

L'objet de cette section est d'expliquer comment évolue la pression génératrice à travers le turboréacteur d'un avion pour donner les conditions initiales du jet propulsif. En particulier, elle permet de comprendre pourquoi la pression totale du jet est augmentée lorsqu'on met les gaz alors que la combustion est plus forte. Intéressé par le principe, nous considérons un réacteur simple flux monocorps sans réchauffe dans lequel le compresseur et la turbine fonctionnent sans perte, et on négligera le débit de carburant dans le débit total. De plus, on suppose que le rapport des capacités calorifiques est constant. En reprenant la nomenclature des motoristes (figure A.1), les équations gouvernant les conditions génératrices (T_i, p_i) sont :

- Génération des conditions génératrices par avancement :
  $T_{i0} = T_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)$; $p_{i0} = p_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_0^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
- Pertes par chocs et pertes de charges entre l'infini amont et l'entrée compresseur, en passant par l'entrée d'air : $T_{i2} \simeq T_{i0}$; $p_{i2} = \eta p_{i0}, \eta < 1$.
- Travail fourni $W > 0$ par le compresseur au fluide : $T_{i3} = T_{i2} + W/c_p$; $\frac{p_{i3}}{p_{i2}} = \Pi = \left(\frac{T_{i3}}{T_{i2}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
- Apport de chaleur $Q > 0$ par combustion : $T_{i4} = T_{i3} + Q/c_p$; $\frac{dp_i}{pi} = -\frac{\gamma M^2}{2} \frac{dT_i}{T_i}$
- Travail cédé $(-W) < 0$ par le fluide à la turbine : $T_{i5} = T_{i4} - W/c_p$; $\frac{p_{i5}}{p_{i4}} = \left(\frac{T_{i5}}{T_{i4}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$
- Détente isentropique jusqu'au col de la tuyère : $T_{i8} = T_{i5}$; $p_{i8} = p_{i5}$

En choisissant de tout paramétrer en fonction des grandeurs caractéristiques du vol et du régime moteur, à savoir :

- le rendement de captation ϵ ;
- le rapport de pression (Overall Pressure Ratio) Π du compresseur ;
- le rapport des températures entrée compresseur / entrée turbine T_{i4}/T_{i2} qui caractérise (à Π près) l'apport de chaleur Q

on obtient :

$$\frac{p_{i5}}{p_{i4}} = \left[1 - \left(\frac{T_{i4}}{T_{i2}}\right)^{-1} \left(\Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{A.1}$$

S'il n'y avait pas de combustion, on aurait $T_{i4} = T_{i3}$ soit $\frac{T_{i4}}{T_{i2}} = \frac{T_{i3}}{T_{i2}} = \Pi^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ donc $\frac{pi5}{p_{i4}} = \Pi^{-1}$. Le fait d'apporter de la chaleur entre le compresseur et la turbine fait baisser la pression génératrice (environ de 5%) mais permet à la turbine de fournir au compresseur la totalité du travail dont

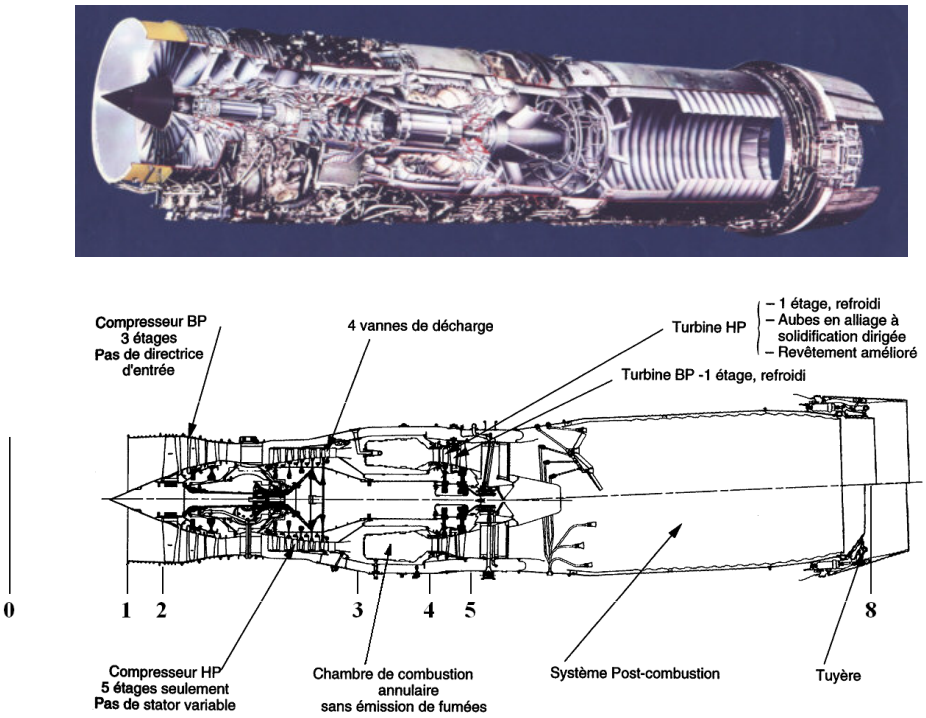


FIG. A.1 – Ecorché du Snecma M-53 et nomenclature simplifiée.

il a besoin pour comprimer l'air d'un rapport Π sans consommer tout cet apport de pression totale : $T_{i4} > T_{i3} \Rightarrow p_{i5}/p_{i4} > \Pi^{-1}$.

Pour résumer et donner quelques ordres de grandeur, le niveau de pression génératrice en entrée de tuyère $p_{ij} = p_{i5}$ obtenu à partir de la pression statique de l'atmosphère p_0 (donc la fabrication du NPR) s'explique par les gains et pertes suivants :

- Vol d'avancement : à $M_0 = 0.8$, $p_{i0}/p_0 \simeq 1.52$ et à $M_0 = 1.4$, $p_{i0}/p_0 \simeq 3.18$
- Captation : à $M_0 = 0.8$, $p_{i2} \simeq p_{i0}$ et à $M_0 = 1.4$, $p_{i2}/p_{i0} \simeq 0.98$
- Compresseur : $p_{i3}/p_{i2} = \Pi \simeq 25$
- Combustion : $p_{i4}/p_{i3} \simeq 0.95$
- Turbine : $p_{i5}/p_{i4} \simeq 0.21 \simeq 4.76^{-1} > \Pi^{-1}$ pour $T_{i4}/T_{i2} = 1500K/290K \simeq 5$

Ce qui fait un total de $p_{i5}/p_0 \simeq 7.6$. Ce rapport est plus élevé qu'en pratique car nous n'avons pas pris en compte, entre autres, les pertes dans le compresseur et la turbine dont les rendements sont approximativement de 85% (un peu plus pour le compresseur que pour la turbine). On voit par ces ordres de grandeur que le NPR dépend essentiellement de 2 paramètres : l'avancement de l'avion (énergie cinétique) caractérisé par le nombre de Mach de vol M_0 et le régime moteur (énergie apportée par turbine = travail net compresseur-turbine + énergie thermique) caractérisé par T_{i4}/T_{i2}. Si on augmente la vitesse d'avancement à $M_0 = 1.4$, $p_{i0}/p_0 \simeq 3.18 > 1.52$. Si on réduit les gaz à $T_{i4}/T_{i2} = 900K/290K \simeq 3$, $p_{i5}/p_{i4} \simeq 0.09 \simeq 11.14^{-1} < 4.76^{-1}$. On peut aussi noter que les avions équipés de turboréacteurs volent couramment à $M_0 = 0.8$, qui provoque déjà une augmentation de p_{i0} à $1.5 * p_0$ à laquelle il faut ajouter la croissance de pression génératrice due au système {turbine à gaz}={compresseur, chambre de combustion, turbine}, ce qui montre que généralement le NPR dépasse la valeur critique 1.893, qui signifie que la tuyère est amorcée. Pour les réacteur à double flux, le NPR du flux secondaire est plus fort que celui du flux primaire car le secondaire est uniquement comprimé par la soufflante et les étages basse pression dont l'énergie est prélevée sur le primaire par des étages de la turbine basse pression.

Annexe B

Méthode Numérique

Les principales caractéristiques du code FLU3M utilisé lors de cette étude sont ici résumées ainsi que l'implémentation de la condition de débit entrant.

B.1 Méthode des volumes finis

Soit Ω un volume arbitraire de frontière S et de normale $\overrightarrow{n}$. La discrétisation des lois de conservation sous forme intégrale assure la conservation des grandeurs de base (masse, quantité de mouvement et énergie). L'intégration du système des lois de conservation (1.38) sur le volume Ω conduit, après utilisation du théorème d'Ostrogradski, à :

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial t} d\Omega + \iint_{S} (\overrightarrow{F}_p - \overrightarrow{F}^d_p) n_p dS = \overrightarrow{0} \tag{B.1}$$

$\overrightarrow{n} = n_p \overrightarrow{x_p}$ étant la normale sortante à S. Le domaine de calcul est maintenant discrétisé en un ensemble structuré de cellules hexaédriques de volume Ω_{ijk} repérées par les indices (i, j, k). On note respectivement $\overrightarrow{F}_{ijk,l}$ et $\overrightarrow{F}^d_{ijk,l}$ les flux d'Euler et les flux diffusifs agissant sur la cellule (i, j, k) par la face l d'aire A_l ($l = 1...6$). L'équation (B.1) s'écrit alors sous forme discrétisée :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Omega_{ijk} \overrightarrow{W}_{ijk}) + \sum_{l=1}^{6} (\overrightarrow{F}_{ijk,l} - \overrightarrow{F}^d_{ijk,l}) A_l = 0 \tag{B.2}$$

On convient à présent d'inclure le produit avec l'aire A_l de la facette l dans la notation $\overrightarrow{F}_{ijk,l}$: $\overrightarrow{F}_{ijk,l} A_l \mapsto \overrightarrow{F}_{ijk,l}$. Idem pour $\overrightarrow{F}^d_{ijk,l}$. Il reste donc à évaluer les flux d'Euler $\overrightarrow{F}_{ijk,l}$ et les flux diffusifs $\overrightarrow{F}^d_{ijk,l}$ pour chaque interface l.

B.2 Discrétisation spatiale

B.2.1 Discrétisation des flux d'Euler

Les flux d'Euler sont traités suivant la méthode de Roe [213]. Celle-ci consiste à approcher le problème de Riemann à l'interface l à partir des états à gauche et à droite de l'interface (les sens étant fixés sur chaque ligne i,j ou k)[1]. Pour chaque interface l, le flux numérique de Roe est défini par (on omet la notation de l'interface l) :

$$\overrightarrow{F}^{\mathrm{ROE}}(\overrightarrow{W}^L, \overrightarrow{W}^R) = \frac{1}{2} \left[\overrightarrow{F}(\overrightarrow{W}^L) + \overrightarrow{F}(\overrightarrow{W}^R) - |A(\overrightarrow{W}^{LR})| \left(\overrightarrow{W}^L - \overrightarrow{W}^R \right) \right] \tag{B.3}$$

[1] Par exemple, l'interface $(i + \frac{1}{2})$ entre les cellules (i, j, k) et $(i + 1, j, k)$.

avec
$$A(\overrightarrow{W}) = \frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial W} \tag{B.4}$$

La différence des flux à l'interface satisfait la relation :

$$\overrightarrow{F}^L - \overrightarrow{F}^R = A(\overrightarrow{W}^{LR}) \left(\overrightarrow{W}^L - \overrightarrow{W}^R \right) \tag{B.5}$$

avec :
$$\begin{array}{c} |A(\overrightarrow{W})| = P|\Delta|P^{-1} \\ |\Delta| = diag(|\lambda_A|) \\ \overrightarrow{W}^{LR} = \frac{\sqrt{\rho^L}\overrightarrow{W}^L + \sqrt{\rho^R}\overrightarrow{W}^R}{\sqrt{\rho^L}+\sqrt{\rho^R}} \end{array} \tag{B.6}$$

La matrice $|\Delta|$ représente la matrice diagonale du module des valeurs propres λ_A de A et $\overrightarrow{W}^{LR}$ désigne la moyenne de Roe des états de part et d'autre de l'interface.

Le flux numérique de Roe peut conduire à des solutions non entropiques (choc de détente). Pour obtenir la solution physique du problème, on utilise la correction de Harten [102] qui consiste à remplacer le module des valeurs propres lorsqu'elles se rapprochent de zéro par une fonction parabolique non nulle comme illustré sur la figure B.1.

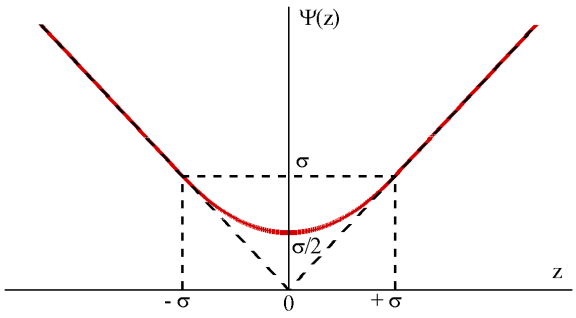


FIG. B.1 – Tracé de la correction du module des valeurs propres par la fonction de Harten.

Le flux de Roe modifié s'exprime alors :

$$\overrightarrow{F}^{\mathrm{ROE}}(\overrightarrow{W}^L, \overrightarrow{W}^R) = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{F}^L + \overrightarrow{F}^R - \Psi(|A(\overrightarrow{W}^{LR})|) \left(\overrightarrow{W}^R - \overrightarrow{W}^L \right) \right] \tag{B.7}$$

où $\Psi(|A|) = P\Psi(|\Delta|)P^{-1}$ avec la fonction Ψ de Harten définie par :

$$\Psi(z) = \begin{cases} \frac{z^2+\sigma^2}{2\sigma} & \text{si} \quad |z| < \sigma \\ |z| & \text{sinon} \end{cases} \tag{B.8}$$

La fonction Ψ s'applique aux valeurs propres de la matrice Jacobienne A tandis que σ désigne le paramètre de correction entropique. Ce dernier est proportionnel à la vitesse maximale des ondes :

$$\sigma = \beta(|u| + |v| + |w| + a) \tag{B.9}$$

où u,v,w sont les composantes de la vitesse et a la célérité du son.

Avec cette formulation, le flux reste toujours dissipatif aux points où la vitesse caractéristique s'annule. Cependant elle introduit un nouveau paramètre β qu'il faut ajuster. Cette dissipation peut nuire à la précision des résultats notamment dans la couche limite dominée par les effets visqueux. C'est pourquoi on introduit parfois une valeur non uniforme de ce paramètre. On prend typiquement $\beta = 10^{-4}$ dans la couche limite et $\beta = 0.1$ en dehors de la couche limite.

Le schéma décentré de Roe avec la correction de Harten est capable de capturer les discontinuités présentes dans un écoulement supersonique sans créer d'oscillations au voisinage de celles-ci. Cependant ce schéma est d'ordre 1 en espace et son extension à l'ordre supérieur est indispensable. La méthode MUSCL [253] ("Monotonic Upstream Schemes for Conservation Laws") est utilisée pour reconstruire les valeurs des variables primitives U de part et d'autre de l'interface. Par exemple, la reconstruction des état à gauche et à droite de l'interface $\left(i+\frac{1}{2}\right)$ s'écrit :

$$U^L_{i+\frac{1}{2}} = U_i + \left[\frac{1-\kappa}{4}\Delta_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1+\kappa}{4}\Delta_{i+\frac{1}{2}}\right] \tag{B.10}$$

$$U^R_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1} - \left[\frac{1+\kappa}{4}\Delta_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1-\kappa}{4}\Delta_{i+\frac{3}{2}}\right] \tag{B.11}$$

où
$$\Delta_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1} - U_i \tag{B.12}$$

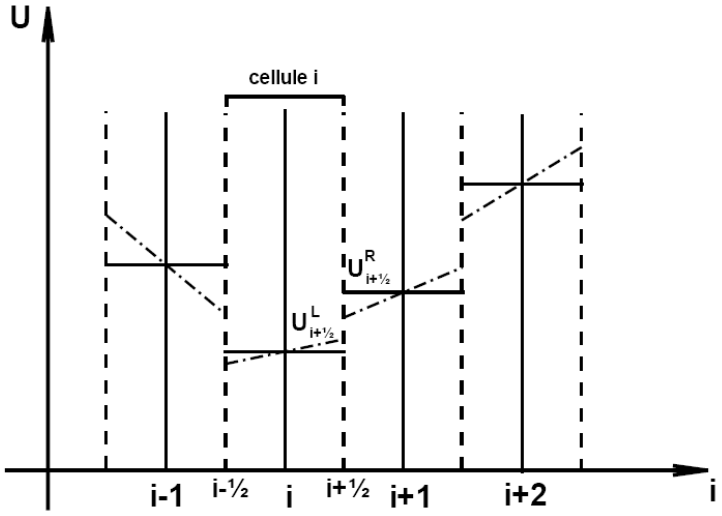


FIG. B.2 – Reconstructions MUSCL d'ordre 1 et 2 [65].

Le choix du paramètre κ permet de piloter la précision du schéma. Ainsi, les valeurs $\kappa = -1; 1; 1/3$ correspondent respectivement à un schéma décentré d'ordre 1, un schéma centré d'ordre 2 et un schéma partiellement décentré d'ordre 3 ("third-order upwind biased").

Toutefois, cette reconstruction peut facilement conduire à des oscillations ("spurious oscillations, wiggles") lorsque l'écoulement présente de forts gradients. Pour éviter l'apparition de ces oscillations, le schéma doit être à "variation totale décroissante" ou TVD ("Total Variation Diminishing" [102]). L'application de ce concept à la reconstruction MUSCL conduit à brider dans (B.10,B.11) les différences de la forme $\Delta_{i+\frac{1}{2}}$ au moyen de limiteurs Γ :

$$U^L_{i+\frac{1}{2}} = U_i + \left[\frac{1-\kappa}{4}\overline{\overline{\Delta}}_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1+\kappa}{4}\overline{\Delta}_{i+\frac{1}{2}}\right] \tag{B.13}$$

$$U^R_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1} - \left[\frac{1+\kappa}{4}\overline{\overline{\Delta}}_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1-\kappa}{4}\overline{\Delta}_{i+\frac{3}{2}}\right] \tag{B.14}$$

$$\overline{\Delta}_{i+\frac{1}{2}} = \Gamma(\Delta_{i-\frac{1}{2}}, \Delta_{i+\frac{1}{2}}) \tag{B.15}$$

$$\overline{\overline{\Delta}}_{i+\frac{1}{2}} = \Gamma(\Delta_{i+\frac{1}{2}}, \Delta_{i+\frac{3}{2}}) \tag{B.16}$$

Dans FLU3M, l'implémentation du limiteur Minmod est associé au schéma centré d'ordre 2 ($\kappa = 1$) ainsi qu'à un limiteur $C(p)$ portant sur la pression :

$$U^L_{i+\frac{1}{2}} = U_i + \tfrac{1}{2}C(p)\text{minmod}\left(\Delta_{i-\frac{1}{2}}, \Delta_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{B.17}$$

$$U^R_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1} - \tfrac{1}{2}C(p)\text{minmod}\left(\Delta_{i+\frac{1}{2}}, \Delta_{i+\frac{3}{2}}\right) \tag{B.18}$$

$$C(p) = \max\left(0, \min\left(\frac{p}{p_{\min}} - 0.5, 1\right)\right) \tag{B.19}$$

$$\text{minmod}(a,b) = \text{sign}(a)\max\left(0, \min(|a|, \text{sign}(a)b\right) \tag{B.20}$$

Les reconstructions à gauche U^L et à droite U^R sont représentées, figure B.3, en fonction respectivement des rapports $r = \frac{\Delta_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta_{i-\frac{1}{2}}}$ et $r = \frac{\Delta_{i+\frac{3}{2}}}{\Delta_{i+\frac{1}{2}}}$. L'allure de la fonction $C(p)$ est aussi tracée sur cette figure : elle ramène la formulation du schéma MUSCL au flux de Roe originel d'ordre 1 lorsque la pression devient trop faible ($p_{\min} = 10^{-6}$). On voit qu'en pratique l'ordre du schéma se situe entre 2 (seulement si $r = 1$) et 1 (si $p < p_{min}$).

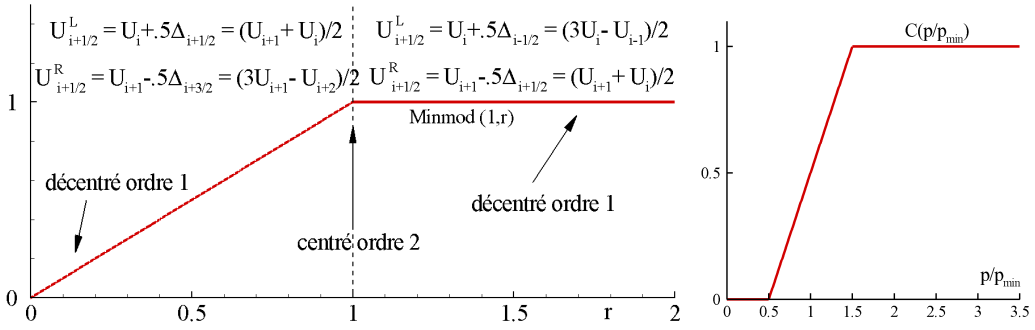


FIG. B.3 – Action du limiteur minmod et de la fonction $C(p)$.

Le schéma de Roe a été étendu à l'ordre 3 ($\kappa = 1/3$ dans (B.10,B.11)) par Ph. Guillen qui l'a doté de la fonction $C(p)$, des fonctions $d_1(\pi)$ et $d_2(\pi)$ dépendant du senseur de Jameson π et du limiteur de Koren $K(a,b)$[2]. Son implémentation est la suivante :

$$U^L_{i+\frac{1}{2}} = U_i + g_i\left[\frac{1-\kappa}{4}\Delta_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1+\kappa}{4}\Delta_{i+\frac{1}{2}}\right] \tag{B.21}$$

[2] $K(a,b)$ ne se situe pas entre le limiteur minmod et superbee car il est adapté au schéma d'ordre 3 et il n'a rien à voir avec le limiteur de Koren TVD du second ordre défini dans [137].

$$U^R_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1} - g_{i+1}\left[\frac{1+\kappa}{4}\Delta_{i+\frac{1}{2}} + \frac{1-\kappa}{4}\Delta_{i+\frac{3}{2}}\right] \tag{B.22}$$

$$g_i = C(p)d_2(\pi)\left[1 - d_1(\pi)\left(1 - K(\Delta_{i-\frac{1}{2}}, \Delta_{i+\frac{1}{2}})\right)\right] \tag{B.23}$$

$$K(a,b) = \frac{3ab+\varepsilon}{2(a-b)^2+3ab+\varepsilon} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = 10^{-32} \tag{B.24}$$

$$\pi = \frac{|p_{i+1}-2p_i+p_i|}{p_{i+1}+2p_i+p_i} \tag{B.25}$$

$$d_1(\pi) = 1 - \min\left(1, \max(0, \frac{\pi-\mathrm{dl}_2}{\mathrm{dl}_1-\mathrm{dl}_2})\right) \quad \text{et} \quad d_2(\pi) = \min\left(1, \max(0, \frac{\pi-\mathrm{dl}_4}{\mathrm{dl}_3-\mathrm{dl}_4})\right) \tag{B.26}$$

$$\text{avec} \quad \mathrm{dl}_1 = 0.05\ ;\ \mathrm{dl}_2 = 0.06\ ;\ \mathrm{dl}_3 = 0.2\ ;\ \mathrm{dl}_4 = 0.3 \tag{B.27}$$

Ces fonctions ont été tracées figure B.4. Si $p < p_{min}$, $C(p) = 0$, la reconstruction MUSCL est annulée , supposons donc que $p > p_{min}$. Lorsque la dérivée seconde de la pression est très faible ($\pi \leq 0.05$), le limiteur K est inhibée et le schéma est d'ordre 3. A l'opposée, lorsque la pente de la pression croît très rapidement comme c'est le cas sur les chocs ($\pi \geq 0.3$), le schéma dégénère en la version originale des flux de Roe à l'ordre 1. Dans le cas intermédiaire ($0.06 \leq \pi \leq 0.2$), le schéma MUSCL d'ordre 3 est progressivement ramené à l'ordre 1 par le limiteur K lorsque les pentes de la pression varient rapidement ($r \ll 1$ ou $r \gg 1$).

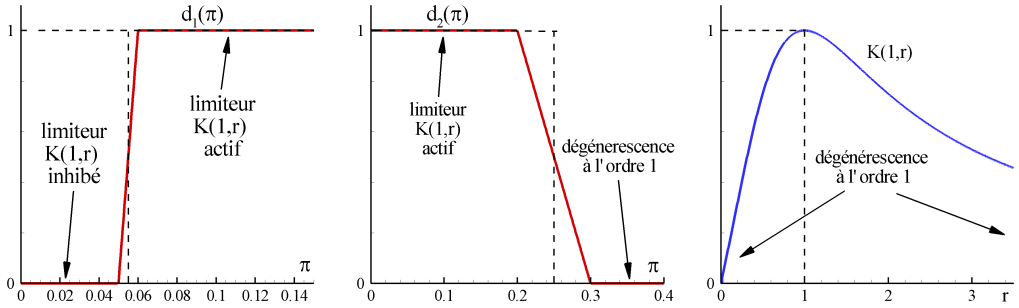


FIG. B.4 – Fonctions $d_1(\pi), d_2(\pi), K(1,r)$.

B.2.2 Discrétisation des flux visqueux

A cause de leur caractère diffusif, les flux visqueux sont discrétisés suivant un schéma centré précis à l'ordre 2 qui s'écrit pour l'interface $(i+1/2)$:

$$\overrightarrow{F}^d_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\overrightarrow{F}^d_i + \overrightarrow{F}^d_{i+1}}{2}$$

Le flux visqueux pour l'interface $(i+1/2)$ est donc la moyenne arithmétique des flux au centre des cellules de part et d'autre de l'interface. Dans les flux visqueux interviennent donc des gradients au centre des cellules. Ces gradients pour une variable ϕ sont évalués à partir du théorème d'Ostrogradski :

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_i \simeq \frac{1}{\Omega_{ijk}}\iiint_\Omega \frac{\partial\phi}{\partial x}d\Omega = \frac{1}{\Omega_{ijk}}\iint_S \phi n dS = \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}} - \phi_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta x} \tag{B.28}$$

où

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\phi_i + \phi_{i+1}}{2}$$

B.3 Intégration temporelle

Les schémas d'intégration temporelle utilisés traditionnellement en LES sont de type explicite afin de s'affranchir de la dissipation d'un schéma en temps implicite. Toutefois, dans le cas de simulations instationnaires où des phénomènes basses fréquences sont présents, le pas de temps imposé par la condition de stabilité d'un schéma explicite est trop petit pour permettre de simuler des écoulements sur des temps longs. Il apparaît alors comme nécessaire d'avoir recours à des schémas d'intégration temporelle implicites inconditionnellement stables. Néanmoins, en particulier dans le cas d'écoulements à faible nombre de Mach, une attention particulière doit être portée à la convergence des résidus lors du processus de sous-itérations de l'algorithme de Newton approché utilisé dans cette thèse.

Le schéma implicite utilisé est le schéma backward Euler du second ordre proposé par Gear [92]. La dérivée à l'instant n du vecteur variable conservative $\overrightarrow{W}$ s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \overrightarrow{W}}{\partial t}\right)^{n}_{ijk} \simeq \frac{\frac{3}{2}(\overrightarrow{W})^{n+1}_{ijk} - 2(\overrightarrow{W})^{n}_{ijk} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{W})^{n-1}_{ijk}}{\Delta t} \tag{B.29}$$

Du fait du caractère implicite recherché, les flux d'Euler et visqueux sont considérés à l'instant $n+1$. En combinant l'équation précédente avec l'équation (B.2), le système à résoudre s'écrit en unidimensionnel sous la forme "delta" comme :

$$\frac{3}{2}\Delta(\overrightarrow{W})^{n+1}_{ijk} - \frac{1}{2}\Delta(\overrightarrow{W})^{n}_{ijk} + \frac{\Delta t}{\Omega_{ijk}}\left(\sum_{l=1}^{6}(\overrightarrow{F} - \overrightarrow{F}^{\nu})_{ijk,l}\right)^{n+1} = 0 \tag{B.30}$$

où $\Delta(\overrightarrow{W})^{n+1}_{ijk} = (\overrightarrow{W})^{n+1}_{ijk} - (\overrightarrow{W})^{n}_{ijk}$. La formulation implicite en temps repose sur une linéarisation des flux numériques à l'interface l du volume Ω_{ijk} :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F}_{ijk,l}\left(\overrightarrow{W}^{n+1}, \overrightarrow{n}^{n+1}\right) &= \overrightarrow{F}_{ijk,l}\left(\overrightarrow{W}^{n}, \overrightarrow{n}^{n+1}\right) + \left(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overrightarrow{W}}\right)_{ijk,l}\left(\overrightarrow{W}^{n}, \overrightarrow{n}^{n+1}\right)\Delta(\overrightarrow{W})^{n+1}_{ijk,l} + \mathrm{O}(\Delta t^2) \\
\overrightarrow{F}^{\nu}_{ijk,l}\left(\overrightarrow{W}^{n+1}, \overrightarrow{n}^{n+1}\right) &= \overrightarrow{F}^{\nu}_{ijk,l}\left(\overrightarrow{W}^{n}, \overrightarrow{n}^{n+1}\right) + \left(\frac{\partial \overrightarrow{F}^{\nu}}{\partial \overrightarrow{W}}\right)_{ijk,l}\left(\overrightarrow{W}^{n}, \overrightarrow{n}^{n+1}\right)\Delta(\overrightarrow{W})^{n+1}_{ijk,l} + \mathrm{O}(\Delta t^2)
\end{aligned} \tag{B.31}$$

où $\Delta(\overrightarrow{W})^{n+1}_{ijk,l}$ est le produit scalaire de $\Delta(\overrightarrow{W})^{n+1}_{ijk}$ par $S_l\,\overrightarrow{n}_l$.
On notera par la suite $\left(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overrightarrow{W}}\right)^{n}_{ijk,l}$ et $\left(\frac{\partial \overrightarrow{F}^{\nu}}{\partial \overrightarrow{W}}\right)^{n}_{ijk,l}$ les matrices jacobiennes précédentes dans la mesure où tous les termes intervenant dans leur construction sont connus, y compris $\overrightarrow{n}^{n+1}$ car le mouvement du maillage est une donnée du problème.
En injectant les relations (B.31) dans l'équation (B.30), on obtient :

$$\frac{3}{2}\Delta\overrightarrow{W}^{n+1}_{ijk} + \frac{\Delta t}{\Omega_{ijk}}\sum_{l=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial \overrightarrow{F}}{\partial \overrightarrow{W}} - \frac{\partial \overrightarrow{F^{\nu}}}{\partial \overrightarrow{W}}\right)^{n}_{ijk,l}\Delta\overrightarrow{W}^{n+1}_{ijk,l}\right] = \frac{1}{2}\Delta\overrightarrow{W}^{n}_{ijk} - \frac{\Delta t}{\Omega_{ijk}}\sum_{l=1}^{6}(\overrightarrow{F} - \overrightarrow{F^{\nu}})^{n}_{ijk,l} \tag{B.32}$$

Le calcul des matrices jacobiennes des flux d'Euler et visqueux est coûteux et conduit à une matrice mal conditionnée qui rend la résolution délicate. C'est pourquoi des expressions approchées des matrices jacobiennes des flux sont utilisées afin de simplifier les calculs (voir la thèse de Péchier [192] pour plus de détails).
- La matrice jacobienne des flux visqueux est simplifiée par la méthode de Coakley [43].
- La matrice jacobienne des flux d'Euler est simplifiée par une approche LCI [265] couplée à un

renforcement de la diagonale selon la méthode de Jameson et Turkel [124].

A cause des diverses simplifications (linéarisation approchée des matrices jacobiennes, factorisation de l'opérateur implicite), il est nécessaire d'incorporer un algorithme de sous-itérations afin de retrouver un ordre 2 en temps. Cet algorithme s'écrit :

$$\begin{array}{l} \frac{3}{2}\Delta\overrightarrow{W}_{ijk}^{n+1,p+1} + \frac{\Delta t}{\Omega_{ijk}}\sum_{l=1}^{6}\left[\left(\frac{\partial\overrightarrow{F}}{\partial\overrightarrow{W}} - \frac{\partial\overrightarrow{F^{\nu}}}{\partial\overrightarrow{W}}\right)_{ijk,l}^{n+1,p}\Delta\overrightarrow{W}_{ijk,l}^{n+1,p+1}\right] \\ = \frac{3}{2}\overrightarrow{W}_{ijk}^{n} - \frac{3}{2}\overrightarrow{W}_{ijk}^{n+1,p} - \frac{1}{2}\Delta\overrightarrow{W}_{ijk}^{n} - \frac{\Delta t}{\Omega_{ijk}}\sum_{l=1}^{6}(\overrightarrow{F} - \overrightarrow{F^{\nu}})_{ijk,l}^{n+1,p} \end{array} \tag{B.33}$$

Le processus converge lorsque $\Delta\overrightarrow{W}^{n+1,p+1} \to 0$ et alors on a $\overrightarrow{W}^{n+1} = \overrightarrow{W}^{n+1,p+1} \simeq \overrightarrow{W}^{n+1,p}$. En réinjectant cette égalité dans l'équation (B.33), on retrouve l'expression (B.32). La résolution de l'équation (B.33) est effectuée au moyen d'une factorisation LU présentée ci-dessous.

Pour simplifier la présentation, notons $\mathcal{J}$ la différentielle du bilan des flux convectifs et diffusifs et $\mathcal{R}$ le résidu explicite. Le système (B.33) peut alors s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{3}{2}\frac{\Omega}{\Delta t}I + \mathcal{J}\right)\Delta W^{n+1} = -\mathcal{R} \tag{B.34}$$

Notons maintenant $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{U}$ les parties strictement inférieure, diagonale et supérieure de la matrice implicite globale (voir [192] pour leurs expressions). Le système (B.34) s'écrit alors :

$$(\mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U})\Delta W^{n+1} = -\mathcal{R} \tag{B.35}$$

La résolution du système (B.35) est approchée en introduisant une décomposition incomplète du type Gauss-Seidel symétrique :

$$\mathcal{L} + \mathcal{D} + \mathcal{U} \simeq (\mathcal{L} + \mathcal{D})\mathcal{D}^{-1}(\mathcal{D} + \mathcal{U}) \tag{B.36}$$

La résolution du système (B.36) à la sous-itération p s'effectue en trois étapes :

$$\begin{array}{c} (\mathcal{L} + \mathcal{D})\Delta W^{*} = -\mathcal{R} \\ \mathcal{D}^{-1}\Delta W^{**} = \Delta W^{*} \\ (\mathcal{U} + \mathcal{D})\Delta W^{n,p+1} = \Delta W^{**} \end{array} \tag{B.37}$$

La deuxième étape est une simple multiplication par une matrice diagonale qu'on peut écrire $\Delta W^{**} = \mathcal{D}\Delta W^{*}$. L'avantage de la méthode LU est qu'elle est facilement vectorisable par balayage sur des plans "$i + j + k = constante$". En pratique, plutôt que de fixer un seuil de convergence pour arrêter le processus de sous-itérations, on préfère fixer le nombre de sous-itérations pour éviter un calcul trop long dû parfois à une vitesse de convergence trop lente. L'ordre de grandeur des résidus est alors vérifié *a-posteriori*. Généralement, entre 4 et 8 sous-itérations sont nécessaires pour obtenir au moins un ordre de grandeur de réduction des résidus qui sont calculés par la norme L_2 :

$$R(\overrightarrow{W})^{n+1,p} = \left[\frac{1}{n_i \times n_j \times n_k}\sum_{i,j,k}\left(\frac{\frac{3}{2}\overrightarrow{W}_{ijk}^{n} - \frac{3}{2}\overrightarrow{W}_{ijk}^{n+1,p} + \frac{1}{2}\Delta\overrightarrow{W}_{ijk}^{n}}{\Delta t} - \frac{1}{\Omega_{ijk}}\sum_{l=1}^{6}(\overrightarrow{F} - \overrightarrow{F}^{\nu})_{ijk,l}^{n+1,p}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{B.38}$$

où n_i, n_j, n_k sont les nombres de mailles dans chaque direction.

B.4 Conditions limites : imposition du débit

Comme le code FLU3M repose sur une formulation de type “cell-centered”, toutes les conditions aux limites sont traitées en imposant les flux à l'interface. Les travaux sur les conditions aux limites n'ont concerné que l'imposition d'un débit subsonique entrant. Celle-ci est détaillée ici, le lecteur étant invité à consulter les références [58, 192, 65] pour le traitement des conditions aux limites déjà existantes dans FLU3M.

L'objectif de la condition de débit subsonique entrant (nommée “esd” dans le code) est d'imposer un débit Q de fluide entrant à la vitesse subsonique par un ensemble de faces frontières du domaine de calcul, en spécifiant :

1) soit la température génératrice T_i et le débit total Q,

2) soit les conditions génératrices T_i, p_i et l'aire A_c du col sonique (fictif dans la simulation).

Lors des essais expérimentaux, le débit des écoulements aérodynamiques est généralement fixé au moyen d'un col (réel) amorcé de section A_c grâce à la relation :

$$Q = \delta(\gamma)\frac{p_i A_c}{\sqrt{c_p T_i}} \quad \text{avec} \quad \delta(\gamma) = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma-1}}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{B.39}$$

où T_i, p_i caractérise l'état du réservoir d'air comprimé. Le choix (2) permet alors d'imposer directement les paramètres expérimentaux.

Lorsque l'utilisateur sélectionne le choix (2), l'utilisation de la formule (B.39) permet de se ramener aux données du choix (1) : T_i et Q.

A partir du débit total Q, on se ramène au débit de masse surfacique uniforme à imposer $q = (\rho\overrightarrow{V}.\overrightarrow{N}) = Q/A_E$ sur la surface d'entrée de normale $\overrightarrow{n}$ et d'aire A_E. Celle-ci est calculée en sommant les aires A_i de toutes les cellules qui la composent, ces dernières étant calculées par (voir figure B.5(a)) :

$$\begin{aligned} A_i = \text{Aire}_{ABCD} &= \text{Aire}_1 + \text{Aire}_2 \\ &= \|\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}\| + \|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| \end{aligned} \tag{B.40}$$

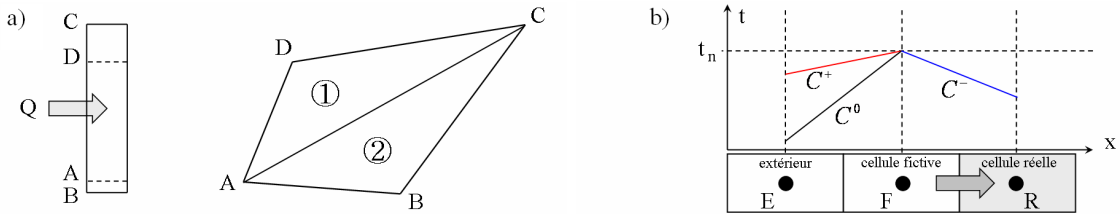


FIG. B.5 – Schéma d'une cellule sur laquelle la face ABCD est soumise à la condition de débit subsonique entrant (a) et lignes caractéristiques en écoulement monodimensionnel (b).

Finalement, la routine de condition de débit n'a plus qu'à imposer la température génératrice T_i et le débit de masse surfacique q sur chaque face-frontière . Pour cela, on suppose que l'écoulement entre perpendiculairement à la face de la cellule et raisonne sur l'écoulement monodimensionnel dans la direction $\overrightarrow{n}$ notée $\overrightarrow{x}$ dans la suite. De plus, les effets visqueux sont négligés. Sous ces

hypothèses, l'écoulement déterminé par (ρ, u, p) est régi par les équations d'Euler 1D :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{B.41}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho\frac{\partial p}{\partial x}} = 0 \tag{B.42}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \tag{B.43}$$

où ρ,u,p,S sont respectivement la masse volumique, la vitesse, la pression et l'entropie massique. Ce système différentiel est hyperbolique et nous allons en écrire les relations caractéristiques. La conservation de l'entropie (B.43) permet d'écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial p}\Big)_{S=\text{cste}} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{B.44}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x}\right) \tag{B.45}$$

"a" étant la vitesse du son ; pour un gaz parfait $a^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma r T$. La relation (B.44) qui n'est autre que la relation de compatibilité sur la trajectoire C^0 : $\frac{dx}{dt} = u$ permet de réécrire le système (B.41,B.42) sous la forme :

$$\frac{1}{\rho a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + u\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{B.46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{B.47}$$

En faisant les combinaisons (B.47)$\mp a$(B.46), on obtient les relations de compatibilité :

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u-a)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{1}{\rho a}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u-a)\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0 \tag{B.48}$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + (u+a)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{1}{\rho a}\left[\frac{\partial p}{\partial t} + (u+a)\frac{\partial p}{\partial x}\right] = 0 \tag{B.49}$$

Puis, en notant :

$$d^-. = \left[\frac{\partial .}{\partial t} + (u-a)\frac{\partial .}{\partial x}\right] dt \tag{B.50}$$

$$d^+. = \left[\frac{\partial .}{\partial t} + (u+a)\frac{\partial .}{\partial x}\right] dt \tag{B.51}$$

les différentielles le long des lignes caractéristiques respectives :

$$(C^-): \quad \frac{dx}{dt} = (u-a) \tag{B.52}$$

$$(C^+): \quad \frac{dx}{dt} = (u+a) \tag{B.53}$$

on obtient les relations de compatibilité sous la forme :

$$\text{sur } (C^-): \quad d^-u - \frac{1}{\rho a}d^-p = 0 \tag{B.54}$$

$$\text{sur } (C^+): \quad d^+u + \frac{1}{\rho a}d^+p = 0 \tag{B.55}$$

Le code étant formulé en "cell-centered", la condition aux limites est imposée via les flux à l'interface entre la cellule réelle (R) (calculée) et une cellule fictive (F). La condition aux limites se réduit donc à la détermination de l'état (ρ_f, u_f, p_f) dans la cellule fictive. L'état de la cellule fictive (F) est lié en amont à l'état extérieur (E) que l'on peut spécifier arbitrairement et en aval à celui de la cellule réelle (R) par les équations d'Euler (B.41,B.42,B.43). Celles-ci peuvent s'écrire sous les formes différentielles (B.54,B.55,B.44) respectivement associée aux lignes caractéristiques $(C^-), (C^+), (C^0)$ (cf. figure B.5(b)) pour suivre le sens de propagation des informations. Ainsi, pour un écoulement subsonique entrant dans le domaine de calcul, on a[3] :

- $u > 0$ qui signifie que l'information propagée par (C^0), S, est imposée de (E) vers (F),
- $u - a < 0$ qui signifie que l'information propagée par (C^-) suivant la relation (B.54), est imposée de (R) vers (F),
- $u + a > 0$ qui signifie que l'information propagée par (C^+) suivant la relation (B.55), est imposée de (E) vers (F).

On ne peut donc imposer, via l'état extérieur (E), que 2 variables sur les 3 caractérisant l'écoulement en (F) en remplaçant les équations de compatibilité (B.44) et (B.55) relatives à la propagation de l'information de (E) vers (F). D'autre part, on est obligé de conserver la relation (B.54) traduisant l'influence subsonique de l'aval (R). En pratique, dans la routine " esd", les variables (u_f, p_f, T_f) sont déterminées à l'aide des relations :

- la conservation de la température totale de (E) vers (F) : $$T_f + \frac{u_f^2}{2c_p} = T_i \ , \qquad \text{(B.56)}$$
- l'imposition du débit surfacique de (E) vers (F) : $$(\rho_f u_f =)\frac{p_f u_f}{r T_f} = q \ , \qquad \text{(B.57)}$$
- la propagation de l'information de (R) vers (F) : $$(u_f - u_r) = \frac{1}{(\rho a)_r}(p_f - p_r). \qquad \text{(B.58)}$$

La détermination de la vitesse u_r se réduit à trouver la racine positive du polynôme d'ordre 2 :

$$A u_f^2 + B u_f + C = 0 \qquad \text{(B.59)}$$
$$\text{avec} \qquad A = \tfrac{rq}{2c_p} + (\rho a)_r \ ; \ B = p_r - (\rho a)_r u_r \ ; \ C = -rqT_i$$

d'où en notant $\Delta = B^2 - 4AC$:

$$u_f = \tfrac{-B+\sqrt{\Delta}}{2A}$$
$$T_f = T_i - \tfrac{u_f^2}{2c_p}$$
$$p_f = \tfrac{rT_f q}{u_f}$$

On en déduit les variables conservatives (on se replace dans le système cartésien du maillage global $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$) :

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}_f = \begin{pmatrix} \frac{p_f}{rT_f} \\ \rho_f u_f \overrightarrow{n}.\overrightarrow{x} \\ \rho_f u_f \overrightarrow{n}.\overrightarrow{y} \\ \rho_f u_f \overrightarrow{n}.\overrightarrow{z} \\ \frac{p_f}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho_f u_f^2 \end{pmatrix}$$

[3]Dans le cas où l'entropie S est invariante dans le temps, l'information propagée par C^- (resp. C^+) est simplement l'invariant de Riemann $\int \left(du - \frac{1}{\rho a}dp\right) = u - \frac{2}{\gamma-1}a$ $\left(\text{resp. } \int \left(du + \frac{1}{\rho a}dp\right) = u + \frac{2}{\gamma-1}a\right)$ (en gaz parfait).

puis les flux d'Euler :

$$\overrightarrow{F_f}.A_i\overrightarrow{n} = A_i \begin{pmatrix} \rho_f u_f \\ (\rho u)_f u_f + p_f \overrightarrow{n}.\overrightarrow{x} \\ (\rho v)_f u_f + p_f \overrightarrow{n}.\overrightarrow{y} \\ (\rho w)_f u_f + p_f \overrightarrow{n}.\overrightarrow{z} \\ ((\rho E)_f + p_f)u_f \end{pmatrix}$$

Il est important de noter que dans la relation de compatibilité (B.58) associée à (C^-), les conditions (u_r, p_r) utilisées pour calculer l'état en (R) au temps t_n devraient rigoureusement être prises au temps antérieur $t_n - \frac{\Delta x}{u-a}$ conformément au graphe (x,t) de la figure B.5(b). Dans la routine "esd", ces conditions sont simplement prises à l'itération précédente $t_n - \Delta t$.

Pour finir, comme la viscosité turbulente $\tilde{\nu}$ est convectée de l'extérieur (E) vers (F), son flux en (F) est donc simplement $A_i \tilde{\nu} u_f$.

Restrictions : comme la condition de débit est formulée en négligeant les effets visqueux et en supposant que le débit de masse surfacique est uniforme, elle ne peut être rigoureusement utilisée contre une paroi adhérente parallèle à l'écoulement. En pratique, la routine est toutefois suffisamment robuste pour que le calcul s'effectue bien avec les bonnes conditions spécifiées par l'utilisateur et l'écoulement n'a présenté aucune pathologie dans les tests effectués sur plaque plane avec le modèle de Spalart-Allmaras. Dans les calculs RANS de la configuration MARCO, la condition de débit a été imposée sur toute la section annulaire d'entrée du canal de ventilation, alors que dans les calculs ZDES, elle n'a été appliquée que sur les 4 trous représentatifs de la maquette, décalés des parois inférieure et supérieure. Dans ces deux cas, il a été vérifié que les conditions d'entrées sont bien satisfaites tout au long des calculs.

Annexe C

Compléments sur la structure des ondes internes

C.1 Equations des lignes de courant et des lignes de Mach dans une détente centrée de Prandtl-Meyer

Les équations paramétriques des lignes de Mach (3.73,3.74) et des lignes de courant (3.75,3.74) dans une détente centrée de Prandtl-Meyer sont démontrées ici.

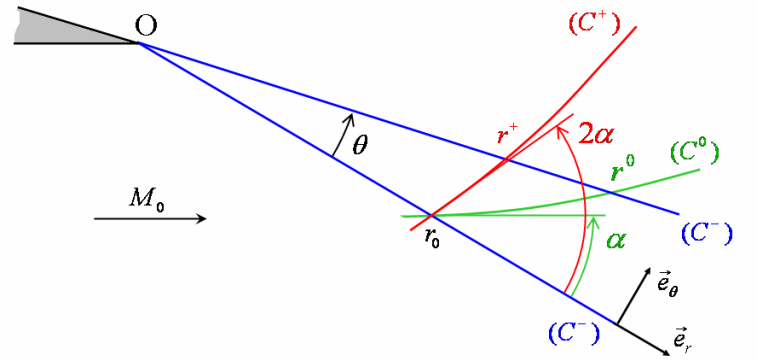


FIG. C.1 – Schéma des lignes caractéristiques C^0, C^-, C^+ dans une détente centrée de Prandtl-Meyer.

Considérons la détente centrée en O déviant l'écoulement $(M_0, \varphi_0 = 0)$ vers le haut par l'intermédiaire des ondes simples descendantes (C^-) comme représentée sur la figure C.1. Il est alors naturel de se placer dans le système de coordonnées polaires (r, θ) de centre O puisque les (C^-) y sont les rayons $\theta = \Psi^- = cst$. On note (r^+, θ^+) (resp. (r^0, θ^0)) les coordonnées de la (C^+) (resp. (C^0)) passant par (r_0, θ_0) où r_0 est arbitraire et où l'angle de la première (C^-) du faisceau de détente est choisi comme origine des azimuts $\theta_0 = 0$. D'après le schéma C.1, il vient :

$$C^+ \quad : \quad \frac{dr^+}{r^+ d\theta^+} = \text{cotan}(2\alpha) \tag{C.1}$$

$$C^0 \quad : \quad \frac{dr^0}{r^0 d\theta^0} = \text{cotan}(\alpha) \tag{C.2}$$

Occupons-nous pour commencer de la (C^+). Comme l'écoulement est iso-énergétique et homentropique, l'équation de compatibilité des ondes montantes $(d^+\varphi = d^+\nu)$ permet de lier

bijectivement θ à $\alpha = \text{asin}(1/M)$ (on rappelle que $\nu(\alpha)$ est exprimée par (3.33)) :

$$\begin{aligned} d^+\theta^+ = d^+\Psi^- = d^+\varphi - d^+\alpha = d^+\nu - d^+\alpha = \left(\frac{d\nu}{d\alpha} - 1\right) d^+\alpha \\ = -\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{1}{1+\frac{2}{\gamma-1}\sin^2\alpha} d^+\alpha \end{aligned} \tag{C.3}$$

ce qui permet de réécrire (C.1) sous une forme paramétrée par α :

$$C^+ : \quad \frac{dr^+}{r^+ d\alpha} = -\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}\frac{1}{1+\frac{2}{\gamma-1}\sin^2\alpha} \tag{C.4}$$

$$\theta^+(\alpha) = \varphi_0 + [\nu(\alpha) - \nu(\alpha_0)] - \alpha \tag{C.5}$$

En choisissant de passer au paramétrage par $M = \arcsin(1/M)$, (C.4) et (C.5) deviennent :

$$C^+ : \qquad \frac{dr^+}{r^+ dM} = \frac{\gamma+1}{4}\left(1 - \frac{1}{M^2-1}\right)\frac{M}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2} \tag{C.6}$$

$$\theta^+(M) = \varphi_0 + [\nu(M) - \nu(M_0)] - \arcsin(1/M) \tag{C.7}$$

L'équation (C.6) se décompose en éléments simples et s'intègre en :

$$\ln\left(\frac{r^+(M)}{r^0}\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{2\gamma}{\gamma-1}\ln\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right) - \ln\left(M^2-1\right)\right] + \text{cste} \tag{C.8}$$

Les équations (C.8) et (C.7) définissent finalement le paramétrage (3.73,3.74) de la (C^+) passant par $(r_0, \theta_0 = 0)$:

$$\begin{aligned} r^+(M) &= r_0\frac{f^+(M)}{f^+(M_0)} \quad \text{avec} \quad f^+(M) = \frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{\frac{\gamma}{2(\gamma-1)}}}{(M^2-1)^{1/4}} \\ \theta^+(M) &= \varphi_0 + [\nu(M) - \nu(M_0)] - \arcsin(1/M) \end{aligned}$$

On peut suivre exactement la même démarche pour l'équation de la (C^0) passant par $(r_0, \theta_0 = 0)$, les calculs sont mêmes plus simples. Toutefois, il existe une manière astucieuse d'y arriver plus vite : il suffit de se rappeler que d'une part, le débit-masse entre deux lignes de courant est constant en régime stationnaire et que d'autre part, le débit-masse Q traversant une portion A_1A_2 d'une ligne caractéristique, disons C^-, est :

$$Q = \int_{A_1}^{A_2} \rho(s)a(s)ds^- \tag{C.9}$$

Dans le cas particulier de la figure C.1 pour le débit-masse passant entre O et la ligne de courant (C^0) passant par $(r_0, \theta_0 = 0)$, (C.9) se simplifie en :

$$Q = \rho_0 a_0 r_0 = \rho(\theta)a(\theta)r^0(\theta) \tag{C.10}$$

En indiçant par i les conditions génératrices, on a :

$$\frac{r^0}{r_0} = \frac{\rho a}{\rho_0 a_0} = \frac{\rho/\rho_i}{\rho_0/\rho_i}\left(\frac{T/T_i}{T_0/T_i}\right)^{1/2} \tag{C.11}$$

et les relations isentropiques (3.37) et (3.39) permettent alors d'arriver directement à :

$$\frac{r^0(M)}{r_0} = \left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_0^2}\right)^{\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \tag{C.12}$$

et $\theta^0(M)$ s'exprime évidemment comme (C.7).

C.2 Polaires de chocs et de compression isentropique

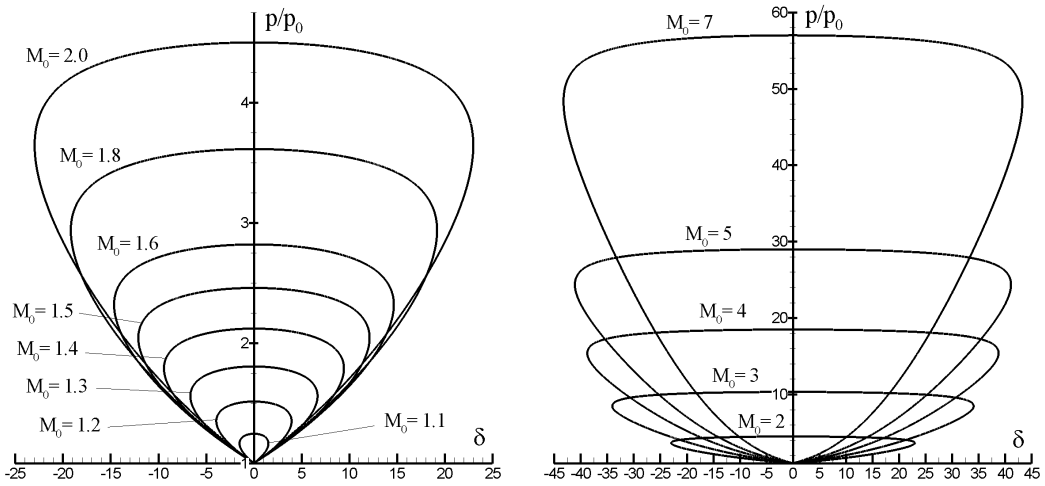


FIG. C.2 – Polaires de chocs pour différents nombres de Mach incident M_0.

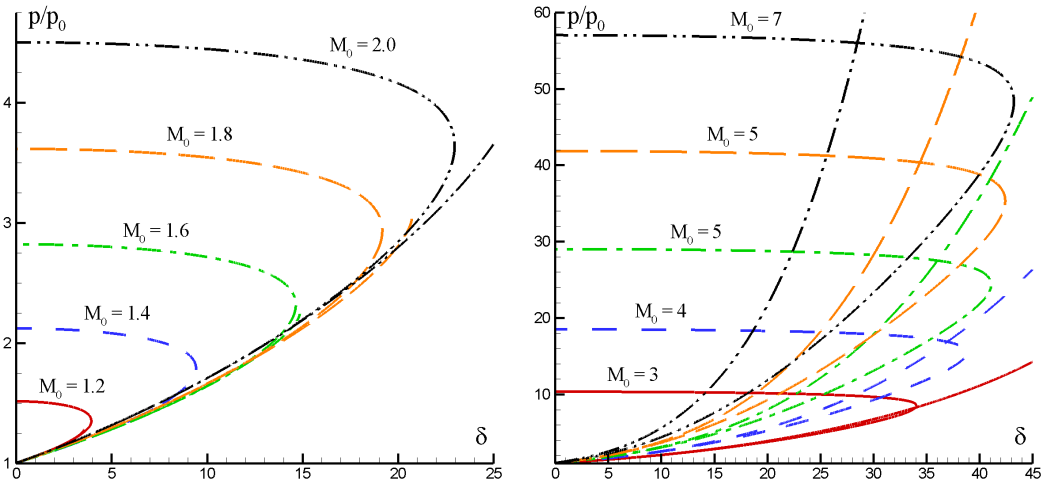


FIG. C.3 – Comparaison des polaires de chocs et des polaires de compression isentropique pour différents nombres de Mach incident M_0.

C.3 Enveloppe des ondes focalisant sur une rampe de compression

Dans cette annexe, les équations utilisées lors de la discussion sur la focalisation des ondes de Mach et la création d'ondes de choc (section 3.2.2.3) sont démontrées.

Tout d'abord, nous allons démontrer l'équation (3.79,3.80,3.81) de l'enveloppe (E) des ondes simples sur une rampe de compression quelconque, dont on connaît a priori la position, la pente $\phi(s)$ et la courbure $R(s)$ en tout point P repéré par l'abscisse curviligne s (cf. figure C.4).

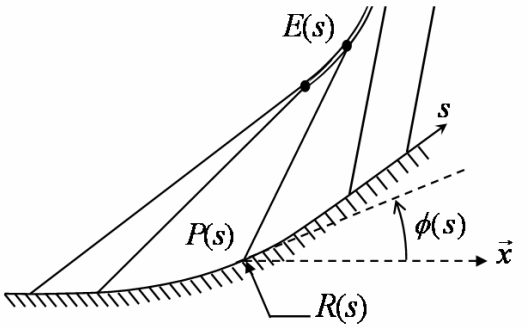


FIG. C.4 – Schéma de la paramétrisation de la rampe de compression.

Le calcul est effectué en deux temps. D'abord, considérons que le rayon de courbure R_0 est constant. Une telle situation est représentée figure C.5. La rampe de compression commence au point A. A gauche de la caractéristique montante C^+ issu de A, l'écoulement est uniforme au nombre de Mach M_0. Supposons pour commencer qu'il n'apparaît aucun choc lors du croisement des C^+. Dans ce cas l'ensemble de la zone de dépendance de la paroi est à ondes simples. Le point P est un point quelconque de la paroi où la direction de la vitesse est notée $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{x}) = \varphi$ et l'angle de Mach $\alpha = \arcsin(1/M)$. L'intersection de la droite caractéristique montante issue de P croise la C^+ issue de A en I. L'angle φ est lié bijectivement à α grâce à la relation de compatibilité sur la C^- arrivant sur P :

$$\varphi + \nu(\alpha) = \nu(\alpha_0) \tag{C.13}$$

où $\nu(\alpha)$ est l'angle de Prandtl-Meyer défini par (3.33). La distance AI est notée $f(\alpha), \alpha \neq \alpha_0$. On fixe l'origine des coordonnées en A. En utilisant les relations géométriques :

$$\begin{cases} x_P = R_0 \sin\varphi \\ y_P = R_0(1-\cos\varphi) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_I = f(\alpha)\cos\alpha_0 \\ y_I = f(\alpha)\sin\alpha_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad y_I - y_P = (x_I - x_P)\tan(\varphi+\alpha)$$

on obtient :

$$f(\alpha) = R_0 \frac{1-\cos\varphi - \sin\varphi\tan(\varphi+\alpha)}{\sin\alpha_0 - \cos\alpha_0\tan(\varphi+\alpha)} \tag{C.14}$$

En faisant des développements limités de (C.13) et (C.14) par rapport à α autour de $\alpha = \alpha_0$, on obtient (on prolonge au passage f par continuité en α_0) :

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0} f(\alpha) = f(\alpha_0) = R_0 \frac{2}{\gamma+1}\frac{\sin\alpha_0}{1+\tan^2\alpha_0} \tag{C.15}$$

que l'on peut réécrire sous la forme :

$$f(\alpha_0) = R_0 \frac{2}{\gamma+1}\frac{M_0^2-1}{M_0^3} \tag{C.16}$$

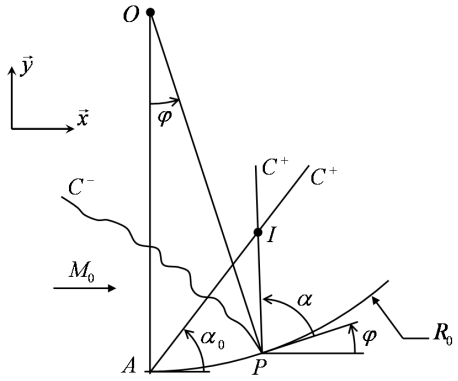


FIG. C.5 – Schéma de l'intersection de deux ondes réfléchies sur une paroi convexe (R_0).

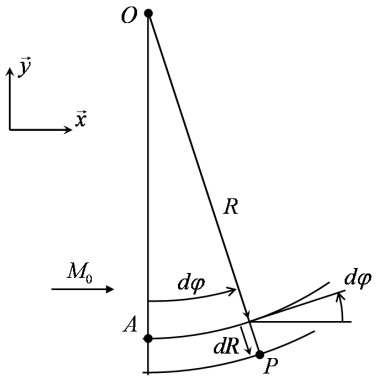


FIG. C.6 – Schéma de l'effet d'une variation du rayon de courbure R.

Maintenant, supposons que le rayon de courbure R ne soit plus constant, voir figure C.6. Au voisinage de A, on peut faire un développement limité en φ (comme précédemment) mais aussi en R :

$$\begin{cases} x_P = Rd\varphi + O(d\varphi^a dR^b) \\ y_P = -dR + O(d\varphi^a dR^b) \end{cases} \quad \text{avec} \quad a+b=2 \tag{C.17}$$

Avec les nouvelles coordonnées de P et en notant que $ds = Rd\varphi$ (s abscisse curviligne le long de la paroi) le raisonnement précédent conduit à :

$$f(\alpha_0) = R\frac{2}{\gamma+1}\frac{\sin\alpha_0 + \frac{dR}{ds}\cos\alpha_0}{1+\tan^2\alpha_0} \tag{C.18}$$

où R et $\frac{dR}{ds}$ sont respectivement le rayon de courbure et sa dérivée le long de la paroi en A. L'équation C.18 s'exprime aussi sous la forme :

$$f(\alpha_0) = R_0\frac{2}{\gamma+1}\frac{M_0^2-1}{M_0^3}\left(1+\frac{dR}{ds}\sqrt{M_0^2-1}\right) \tag{C.19}$$

Comme M_0, R et dR/ds sont arbitraires, (C.13) et (C.19) définissent les équations de l'enveloppe (E) des ondes simples réfléchies sur la rampe (3.79,3.80,3.81).

A présent, supposons que le rayon de courbure soit constant R_0 et cherchons le nombre de Mach M_R de l'onde simple sur laquelle l'enveloppe (E) présente un point de rebroussement R (voir figure 3.10), autrement dit on va démontrer la relation (3.76). Pour cela, on doit calculer la variation de la longueur AI suivant la direction de la C^+ initiale lorsque l'on déplace vers l'aval le point P situé sur la paroi. On choisit cette fois de le paramétrer par le nombre de Mach M. Cette variation notée dAI lorsque le nombre de Mach passe de M à $M+dM$ se décompose en une variation due au déplacement du point I sur l'onde simple à $M+dM$, i.e. df, et en une variation notée dl due au déplacement de cette onde à $M+dM$ par rapport à la première onde à M. En dérivant (C.16) par rapport à M, on obtient :

$$df = R\frac{2}{\gamma+1}\frac{3-M^2}{M^4}dM \tag{C.20}$$

Puis, en regardant la figure C.7 et avec la relation (3.32), il vient immédiatement :

$$\begin{cases} dl = ds\cos\alpha = \frac{\sqrt{M^2-1}}{M}ds \\ ds = R\sin d\varphi \approx Rd\varphi \\ d\varphi = -d\nu = -\frac{\sqrt{M^2-1}}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{1}{M}dM \end{cases} \quad \text{d'où} \quad dl = -R\frac{M^2-1}{M^2}\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}dM \tag{C.21}$$

A partir des relations (C.20) et (C.21), le déplacement de I dans la direction de C^+ lorsqu'on

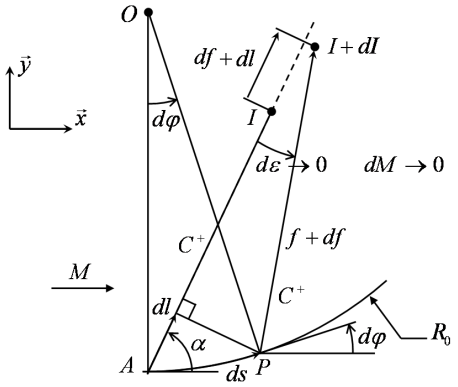


FIG. C.7 – Schéma du déplacement du point I d'intersection des ondes montantes.

passe de l'onde simple à M à l'onde simple à $M + dM$ est donc :

$$df + dl = R\frac{-\gamma M^4 + 2(\gamma-1)M^2 + 3}{\frac{\gamma+1}{2}M^4\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)}dM \tag{C.22}$$

qui s'annule lorsque

$$M = M_R = \sqrt{\frac{(\gamma-1)+\sqrt{\gamma^2+\gamma+1}}{\gamma}} \tag{C.23}$$

qui correspond au point de rebroussement de l'enveloppe (E).

C.4 Réflexion d'un choc sur une paroi rectiligne : légende

Les définitions des lignes séparatrices tracées dans les diagrammes 3.13 et 3.15 sont données ici afin que le lecteur comprenne comment les différentes zones d'existence des topologies de choc schématisées figure 3.13 ont été trouvées.

Afin d'alléger le tableau, les notations suivantes ont été utilisées : dans le plan (p, φ), la polaire des chocs incidents possibles à partir de l'écoulement amont $(M_0, \varphi_0 = 0)$ est notée PI, sa partie droite ($\varphi > 0$), PID, sa partie gauche ($\varphi < 0$), PIG, et sa partie haute ($p/p_0 > p/p_0(\delta_{max})$), PIH. La polaire des chocs réfléchis possibles à partir de l'écoulement $(M_1, \varphi_1 = \delta)$ en aval du choc incident est notée PR, sa partie droite ($\varphi > \delta$), PRD, et sa partie gauche ($\varphi < \delta$), PDG. L'écoulement résultant de l'interaction du choc incident et de la paroi, représentée par l'axe Δ_0 : $\varphi = 0$, est déterminé par les intersections de PR avec PI et Δ_0. La forme (pilotée par M_1) ainsi que l'origine $(p_1, \varphi_1 = \delta)$ de PR dans le plan (p, φ) sont fonctions de (M_0, δ). Les intersections de PR avec PI et Δ_0, et ainsi l'écoulement résultant, dépendent donc uniquement de (M_0, δ). Le tableau (C.1) définit les lignes du plan (M_0, δ) qui délimitent des zones caractéristiques des positions de PR, PI et Δ_0.

Ligne	Description des zones séparées du plan (M_0, δ)
L1 ——	Ligne $\delta(M_0)$ telle que $M_1 = 1$. Au dessus de la courbe, $M_1 < 1$, aucun choc réfléchi n'est possible
L2 ——	Ligne de détachement : au dessus de la courbe, PR n'a pas d'intersection avec l'axe $\varphi = 0$, aucune réflexion de choc régulière n'est possible
L3 - - - -	A gauche de la courbe, PRD est entièrement à gauche de PID (seulement pour $M_0 \geq 1.25$)
L4 — · —	A gauche de la courbe, PRG est entièrement en dessous de PIH (seulement pour $M_0 \geq 1.48$)
L5 —·—·—	A gauche de la courbe L5 et à droite de L4, PRD est entièrement à droite de PID
L6	Ligne du critère de Von Neumann : en-dessous de la courbe, l'intersection basse de PRG avec l'axe $\varphi = 0$ est en-dessous du $max(p/p_0)$ de PI (seulement pour $1.48 \leq M_0 \leq 2.20$)
L7 - - - -	En-dessous de la courbe, l'intersection haute de PRG avec l'axe $\varphi = 0$ est au-dessus du $max(p/p_0)$ de PI (seulement pour $M_0 \geq 2.20$)

TAB. C.1 – Définition des lignes du plan (p, φ) caractérisant les positions de PR par rapport à PI et Δ_0.

C.5 Jet supersonique plan entouré d'un écoulement subsonique

La solution analytique du jet supersonique plan entouré d'un écoulement subsonique est ici développée autour de l'écoulement de base constitué d'une atmosphère en mouvement $\overrightarrow{V} = U_0 \overrightarrow{x}$ à la pression p_0 et d'un jet uniforme de vitesse $\overrightarrow{V} = U_j \overrightarrow{x}$ et de pression p_0 (forcément). Le plan (x, y) est adimensionné par le rayon de la tuyère. L'écoulement calculé est la réponse de l'écoulement de base à une faible perturbation de la pression d'éjection $(p_e - p_0) \ll p_0$ qui se traduit à pression génératrice constante par une perturbation de vitesse $(U_e - U_j) \ll U_j$. $(\rho_j + \rho_1, U_j \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v_1}, p_0 + p_1)$ est la solution perturbée du jet et $(\rho_0 + \rho_2, U_0 \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v_2}, p_0 + p_2)$ celle de l'écoulement extérieur[1]. En notant ε un petit paramètre $(\varepsilon \to 0)$, l'hypothèse des petites perturbations[2] s'écrit :

$$\rho_1/\rho_j = \mathcal{O}(\varepsilon) \; ; \; u_1/U_j = \mathcal{O}(\varepsilon) \; ; \; v_1/U_j = \mathcal{O}(\varepsilon) \; ; \; p_1/\rho_j U_j^2 = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{C.24}$$

$$\rho_2/\rho_0 = \mathcal{O}(\varepsilon) \; ; \; u_2/U_0 = \mathcal{O}(\varepsilon) \; ; \; v_2/U_0 = \mathcal{O}(\varepsilon) \; ; \; p_2/\rho_0 U_0^2 = \mathcal{O}(\varepsilon) \tag{C.25}$$

l'écoulement extérieur et le jet sont alors isentropiques à l'ordre 3 près et on a en particulier :

$$p_1 = -2\rho_j U_j u_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \rho_j U_j^2) \qquad \text{et} \qquad p_2 = -2\rho_0 U_0 u_2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2 \rho_0 U_0^2)$$

$$\varphi_1 = (U_j \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{x}) = v_1/U_j + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 = (U_0 \overrightarrow{x} + \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{x}) = v_2/U_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

La théorie linéarisée consiste à résoudre seulement les perturbations d'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$. Ainsi, la perturbation de vitesse de chaque écoulement peut s'exprimer sous la forme d'un potentiel (adimensionné) :

$$\text{pour le jet :} \qquad \overrightarrow{v_1} = U_j \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_1 \tag{C.26}$$

$$\text{pour l'extérieur :} \; \overrightarrow{v_2} = U_0 \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_2 \tag{C.27}$$

et les équations d'Euler se ramènent alors à l'équation du potentiel linéarisé :

$$(1 - M_j^2) \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad (1 - M_0^2) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 0 \tag{C.28}$$

[1] La perturbation de vitesse $\overrightarrow{v_i}$ a pour composantes (u_i, v_i) dans la base $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.

[2] Pour les détails de la théorie linéarisée, le lecteur est invité à consulter [156], par exemple.

Cette équation va être résolue sur la moitié supérieure ($y \geq 0$) étant donnée la symétrie du problème. On se restreint ici au cas où le jet est supersonique $M_j > 1$ et où l'écoulement extérieur est subsonique $M_0 < 1$. Les conditions aux limites à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ sont donc :

Entrée du jet $x = 0$:

$$u_1(0,y) = U_j \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(0,y) = U_e - U_j \tag{C.29}$$

$$\text{et} \quad v_1(0,y) = U_j \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(0,y) = 0 \tag{C.30}$$

Symétrie sur l'axe du jet $y = 0$:

$$v_1(x,0) = U_j \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x,0) = 0 \tag{C.31}$$

Compatibilité des pressions à l'interface $y = 1$:

$$\rho_j U_j u_1(x,1) = \rho_0 U_0 u_2(x,1) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x,1) = \frac{\gamma_0 M_0^2}{\gamma_j M_j^2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x,1) \tag{C.32}$$

Compatibilité des déviations à l'interface $y = 1$:

$$\varphi_1(x,1) = \varphi_2(x,1) \quad \text{soit} \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x,1) = \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x,1) \tag{C.33}$$

Atténuation de la perturbation de l'écoulement subsonique pour $y \to \infty$:

$$u_2 = U_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad v_2 = U_0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \longrightarrow 0 \tag{C.34}$$

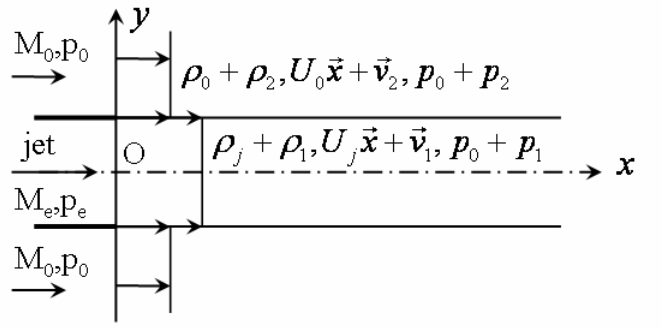


FIG. C.8 – Schéma du problème.

On pose $\beta_j = \sqrt{M_j^2 - 1}$ et $\beta_0 = \sqrt{1 - M_0^2}$.

En effectuant la séparation des variables x et y dans Φ_1 et Φ_2, l'équation (C.28) munie des conditions limites (C.31) et (C.34) admet les solutions particulières :

$$\Phi_1(x,y) = \cos(\beta_j k y)\,[A\cos(kx) + B\sin(kx)] \tag{C.35}$$

$$\Phi_2(x,y) = e^{-\beta_0 k y}\,[C\cos(kx) + D\sin(kx)] \tag{C.36}$$

où k, A, B, C, D sont des réels quelconques pour le moment. La compatibilité des deux écoulements (C.32) et (C.33) fournit l'équation des valeurs propres admissibles :

$$\operatorname{cotan}(\beta_j k) = \frac{\gamma_0 M_0^2}{\gamma_j M_j^2} \frac{\beta_j}{\beta_0} \tag{C.37}$$

d'où les valeurs propres $k_N, N \in \mathbb{N}$:

$$k_N = \frac{(2N+1)\pi}{2\beta_j} - \xi \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{1}{\beta_j} \tan^{-1}\left(\frac{\gamma_0 M_0^2}{\beta_0} \frac{\beta_j}{\gamma_j M_j^2}\right) \tag{C.38}$$

La solution générale Φ_1 de (C.28) avec les conditions limites (C.31,C.32,C.33,C.34) s'écrit sous la forme :

$$\Phi_1(x,y) = \sum_{N=0}^{\infty} \cos(\beta_j k_N y) \left[A_N \cos(k_N x) + B_N \sin(k_N x)\right] \tag{C.39}$$

avec k_N vérifiant (C.38) et A_N et B_N des réels quelconques.

L'application de la condition d'entrée (C.30) impose $A_N = 0, \forall N \in \mathbb{N}$.
Enfin, dans la limite d'un écoulement extérieur à très faible vitesse $M_0 \to 0$ (i.e. $\xi \to 0$), on peut supposer que l'ordre de grandeur de $M_0 \ll 1$ est $M_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^p)$ avec $p > 0$ et la série (C.39) dégénère alors, à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ dans l'intervalle $[-2+2]$, en la série de Fourier :

$$\frac{u_1(0,y)}{U_j} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(0,y) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(2N+1)\pi}{2\beta_j} B_N(\xi \to 0) \cos\left(\frac{(2N+1)\pi}{2} y\right) \tag{C.40}$$

Le profil de vitesse rectiligne en entrée (C.29) peut alors être imposé à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ en identifiant la série de Fourier (C.40) avec la distribution périodique en y de longueur d'onde 4 :

$$\frac{u_1(0,y)}{U_j} = \begin{cases} -2 \le y \le -1 : & -(U_e - U_j)/U_j \\ y = -1 : & 0 \\ -1 \le y \le +1 : & +(U_e - U_j)/U_j \\ y = +1 : & 0 \\ +1 \le y \le +2 : & -(U_e - U_j)/U_j \end{cases} \tag{C.41}$$

Le potentiel de la perturbation des vitesses dans le jet s'écrit finalement dans la limite des petits nombres de Mach extérieurs $M_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^p) \ll 1$ $(p \ge 1)$[3] :

$$\Phi_1(x,y) = 8\beta_j \frac{U_e - U_j}{U_j} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{\pi^2 (2N+1)^2} \cos(\beta_j k_N y) \sin(k_N x) \tag{C.42}$$

En particulier, lorsque le fluide extérieur est au repos $M_0 = 0$, $\xi = 0$ et on retrouve la solution de Prandtl [199] et Pack [183] :

$$\Phi_1(x,y) = 8\beta_j \frac{U_e - U_j}{U_j} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{\pi^2 (2N+1)^2} \cos\left(\frac{(2N+1)\pi}{2} y\right) \sin\left(\frac{(2N+1)\pi}{2\beta_j} x\right) \tag{C.43}$$

pour laquelle la pression sur l'axe $p_1(x,0) = -2\rho_j U_j u_1(x,0)$ (relative à p_j) et l'angle de la frontière $\varphi_1(x,1) = v_1/U_j(x,1)$ sont à l'ordre 1 des fonctions en créneaux.

Dans le cas général, lorsque $M_0 \neq 0$, le rapport de deux valeurs propres quelconques n'est plus un nombre rationnel et la somme C.42 n'est donc plus périodique.

La pression p_1 dans un jet à $M_j = 1.4$ sous-détendu ainsi que la forme de sa frontière sont représentées figure 3.34 pour M_0 allant de 0.0 à 0.4 et sont commentées dans la section 3.3.4.2. Les sommes u_1 et v_1 ont été caclulées sur les 1000 premiers termes. La pression $p_1(x,y) =$

[3] On ne peut étendre cette théorie à des nombres de Mach M_0 finis (par opposition à infinitésimaux) car la série (C.39) n'est pas strictement périodique [186, 19] et ne peut être identifiée à (C.41) sur $(x,y) \in 0 \times \mathbb{R}$. La perturbation créée par l'écoulement extérieur $M_0 = \mathcal{O}(\varepsilon^p), p \ge 1$, sur la condition initiale du jet est de l'ordre de $\beta_j \xi y = \mathcal{O}(\varepsilon^{2p} y)$ et peut donc être négligée à l'ordre $\mathcal{O}(\varepsilon)$ si $y = \mathcal{O}(1)$. Par contre, cette perturbation s'accumule dans le développement longitudinal du jet et devient significative lorsque $\xi x/\beta_j = \mathcal{O}(\varepsilon)$, i.e. lorsque $x/\beta_j = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1})$.

$-2\rho_j U_j u_1(x,y)$ a été ensuite calculée sur une grille de 1001×251 points uniformément répartis sur 4 périodes du jet, i.e. pour $(x/R, y/R) \in [0, 16\beta_j] \times [0, 1]$. La forme de sa frontière a été obtenue par intégration de $\varphi_1(x, 1)$ le long des 4 périodes et calculée sur 4001 points. Il est intéressant de noter qu'il suffit d'un très petit nombre d'"harmoniques" pour obtenir une bonne approximation de la solution : pour $M_0 = 0.4$, les 16 premiers termes constituent 99% de la déformation obtenue avec 1000 termes.

C.6 Corrélations sur le jet turbulent utilisées dans le modèle de Tam *et al.*

Les corrélations expérimentales du jet turbulent adapté utilisées par Tam *et al.* [248] pour déterminer le champ de base de leur modèle multi-échelle sont rappelées ici. Dans un jet turbulent, on peut distinguer 3 zones (cf. figure C.9) : une région initiale contenant le cône potentiel de rayon $r_c(x)$ entouré d'une couche de mélange annulaire autosimilaire dont l'épaisseur $2b(x)$ croît linéairement, une zone lointaine de jet turbulent complètement développé auto-similaire dont le rayon croît linéairement et une zone de transition joignant la zone de confluence de la couche de mélange initiale à la zone lointaine.

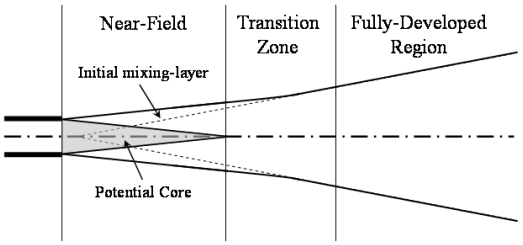


FIG. C.9 – Schéma d'un jet turbulent adapté.

A partir de nombreuses mesures expérimentales, il a été trouvé que la vitesse longitudinale dans les 3 zones peut s'exprimer simplement sous la forme :

$$u_j(x,r) = \begin{cases} u_c(x), \ r \leq r_c(x) \\ \\ u_c(x) \exp\left[-\ln(2) \left(\frac{r - r_c(x)}{b(x)} \right)^2 \right], \ r > r_c(x) \end{cases} \tag{C.44}$$

L'expression de la vitesse sur l'axe du jet u_c est fournie par Lau *et al.* [145, 146] :

$$\frac{u_c(x)}{u_c(0)} = 1 - \exp\left[\alpha \left(1 - \frac{x}{x_c} \right)^{-1} \right] \tag{C.45}$$

et les valeurs de α et x_c sont déterminées par les corrélations d'Eggers [78] :

$$\frac{x_c}{D} = 4.2 + 1.1 M_j^2 + f\left(\frac{T_j}{T_0} \right) \tag{C.46}$$

$$\text{avec} \quad f\left(\frac{T_j}{T_0} \right) = \begin{cases} 1.1 \left(1 - \frac{T_j}{T_0} \right) \quad \text{pour} \ \ \frac{T_j}{T_0} \leq 1 \\ \\ \exp\left[-3.2 \left(\frac{T_j}{T_0} - 1 \right) \right] - 1 \quad \text{pour} \ \ \frac{T_j}{T_0} > 1 \end{cases} \tag{C.47}$$

où T_j et T_0 sont les températures respectives du jet et de l'extérieur.

Enfin, la masse volumique ρ_j est déduite de la vitesse longitudinale u_j par la relation de Crocco :

$$\rho_j/\rho_j(0,0) = \left[\frac{\gamma-1}{2}\frac{u_j}{u_c(0)}(1-\frac{u_j}{u_c(0)})M_j^2 + \frac{u_j}{u_c(0)} + \frac{T_0}{T_j}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_j^2\right)(1-\frac{u_j}{u_c(0)})\right]^{-1} \quad \text{(C.48)}$$

Annexe D

Compléments à l'analyse du brassage tourbillonnaire

D.1 Définitions de l'excentrement et de l'orientation d'une distribution de vorticité

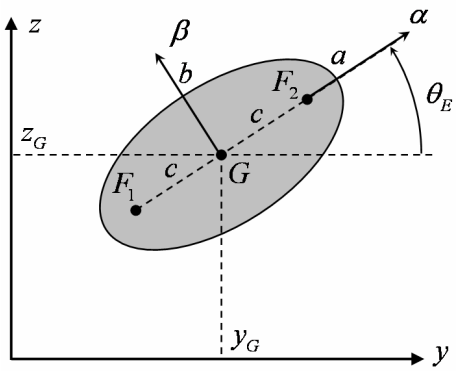


FIG. D.1 – Schéma de la distribution elliptique de vorticité.

Les définitions de l'excentrement (néologisme) et de l'orientation respectivement :

$$c = 2\sqrt{\sqrt{(I_{2y}^G)^2 + (I_{2z}^G)^2}/I_0} \tag{D.1}$$

$$\theta_E = \tfrac{1}{2}\text{atan}\left(I_{2z}^G/I_{2y}^G\right) \tag{D.2}$$

proviennent de la relation sur le moment d'ordre 2 complexe ($i^2 = -1$) :

$$I_2^G = \tfrac{I_0 c^2}{4} e^{2i\theta_E} \tag{D.3}$$

La relation (D.3) provient de l'expression du moment d'ordre 2 d'une distribution de vorticité elliptique uniforme de distance entre les deux foyer F_1 et F_2 égale à $2c$, de demi-grand axe a, de demi-petit axe b et telle que $(\overrightarrow{F_1F_2}, \overrightarrow{y}) = \theta_E$ dans le plan (y, z). En effet, la définition du moment d'ordre 2 complexe est (4.23) :

$$I_2^0 = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y,z)(y+iz)^2 dydz \tag{4.23}$$

qui exprimée au barycentre de vorticité G s'écrit :

$$I_2^G = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y-y_G, z-z_G)\left[(y-y_G)+i(z-z_G)\right]^2 dydz \tag{D.4}$$

sachant que la distribution de vorticité est définie par :

$$\omega(y,z) = \begin{cases} \omega_0 & \text{si } (y,z) \text{ est dans l'ellipse} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{D.5}$$

Si on note (α, β) le système de coordonnées orthogonales liées aux axes de l'ellipse (voir figure D.1) d'origine G le barycentre de la vorticité uniforme et le centre de l'ellipse, on a par rotation d'angle θ_E autour de G :

$$(y - y_G) + i(z - z_G) = e^{i\theta_E}\left[\alpha + i\beta\right] \tag{D.6}$$

d'où il vient par changement de variables d'intégration $(y - y_G, z - z_G) \mapsto (\alpha, \beta)$ dans (D.4) :

$$\begin{aligned} I_2^G &= \omega_0 e^{2i\theta_E} \iint_{\mathcal{D}} (\alpha + i\beta)^2 \, d\alpha d\beta \\ &= \omega_0 e^{2i\theta_E} \int_{\alpha=-a}^{\alpha=+a} \int_{\beta=-\beta_m(\alpha)}^{\beta=+\beta_m(\alpha)} \left[(\alpha^2 - \beta^2) + 2i\alpha\beta\right] d\beta d\alpha \\ &= 2\omega_0 e^{2i\theta_E} \int_{\alpha=-a}^{\alpha=+a} \left[\alpha^2 \beta_m(\alpha) - \frac{\beta_m^3(\alpha)}{3}\right] d\alpha \end{aligned}$$

avec $\beta_m(\alpha) = b\left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2}\right)^{1/2}$.

En faisant les changements de variable $\alpha \mapsto t = \alpha/a$ puis $t \mapsto \theta = \sin(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} I_2^G &= 4\omega_0 ab e^{2i\theta_E} \left[\left(a^2 + \frac{b^2}{3}\right) \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta - \frac{b^2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\right] d\theta \\ &= 4\omega_0 ab e^{2i\theta_E} \frac{\pi}{16}\left(a^2 - b^2\right) \end{aligned}$$

Sachant que le moment d'ordre 0 (la circulation) s'exprime simplement par :

$$I_0 = \iint_{\mathcal{D}} \omega_x(y,z) dy dz = \pi ab\omega_0 \tag{D.7}$$

et que $c^2 = a^2 - b^2$, on arrive finalement à la relation (D.3).

D.2 Equation d'évolution du moment d'ordre 0 en écoulement laminaire

On démontre ici l'équation (4.34)[1] :

$$\frac{D\Gamma}{D\tau} = \nu \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \omega_x}{\partial n} dl$$

Pour cela, on se place dans le plan (y,z) et on reprend l'équation de transport du rotationnel (4.18) :

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_x}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2}\right)$$

[1] Pour les relations différentielles, voir le cours de mécanique des milieux continus [46]

que l'on peut ré-écrire sous forme intrinsèque :

$$\frac{D\omega_x}{D\tau} = \nu \text{ div } \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, \omega_x\right)$$

où $\frac{D\omega_x}{D\tau} = \frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + v\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w\frac{\partial \omega_x}{\partial z}$ représente la dérivée particulaire dans le plan (y, z). Soit $\mathcal{D}$ le domaine matériel du plan (y, z) sur le bord $\mathcal{C}$ duquel on intègre la circulation Γ ou, ce qui est équivalent, au travers duquel on intègre le flux de vorticité ω_x. Comme l'écoulement est incompressible dans le plan, l'aire du domaine $\mathcal{D}$ est invariante dans le mouvement et on a alors :

$$\begin{aligned}
\frac{D\Gamma}{D\tau} &= \frac{D}{D\tau}\iint_{\mathcal{D}} \omega_x dydz \\
&= \iint_{\mathcal{D}} \frac{D\omega_x}{D\tau} dydz \\
&= \iint_{\mathcal{D}} \nu \text{ div } \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, \omega_x\right) dydz \\
&= \nu \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{\text{grad}}\, \omega_x . \overrightarrow{n} dl \\
&= \nu \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial \omega_x}{\partial n} dl
\end{aligned}$$

avec $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal extérieur au contour $\mathcal{C}$.

D.3 Equation d'évolution du moment d'ordre 1 en écoulement laminaire

On démontre ici l'équation (4.35)[2] :

$$\frac{D\overrightarrow{I_1^O}}{D\tau} = \nu \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{OM} \frac{\partial \omega_x}{\partial n} dl - \nu \int_{\mathcal{C}} \omega_x \overrightarrow{n} dl + \frac{1}{2}\int_C \overrightarrow{V}\left(\overrightarrow{V} . \overrightarrow{t}\right) dl$$

où $\mathcal{C}$ est un contour fermé s'appuyant sur une ligne de courant et orienté dans le sens trigonométrique par le vecteur normé tangent $\overrightarrow{t}$. Pour cela, on procède de la même manière que pour le moment d'ordre 0 et avec les mêmes hypothèses on a :

$$\begin{aligned}
\frac{D\overrightarrow{I_1^O}}{D\tau} &= \frac{D}{D\tau}\iint_{\mathcal{D}} \omega_x \overrightarrow{OM} dydz \\
&= \iint_{\mathcal{D}} \frac{D}{D\tau}\left(\omega_x \overrightarrow{OM}\right) dydz \\
&= \iint_{\mathcal{D}} \frac{D\omega_x}{D\tau}\overrightarrow{OM} dydz + \iint_{\mathcal{D}} \omega_x \frac{D\overrightarrow{OM}}{D\tau} dydz \\
&= \nu \iint_{\mathcal{D}} \text{div } \left(\overrightarrow{\text{grad}}\, \omega_x\right) \overrightarrow{OM} dydz + \iint_{\mathcal{D}} \omega_x \overrightarrow{V} dydz
\end{aligned}$$

[2]Pour les relations différentielles, voir le cours de mécanique des milieux continus [46]

On va traiter les deux termes du second membre séparément. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{OM}\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_x\right)dydz &= \iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\mathrm{div}}\left(\overrightarrow{OM}\otimes\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_x\right)dydz - \iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\overrightarrow{\mathrm{grad}}}\,\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_x dydz \\ &= \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{OM}\otimes\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_x.\overrightarrow{n}dl - \iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\omega_x dydz \\ &= \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{OM}\frac{\partial\omega_x}{\partial n}dl - \int_{\mathcal{C}} \omega_x\overrightarrow{n}dl\end{aligned}$$

Et d'autre part, on a :

$$\begin{aligned}\iint_D \omega_x\overrightarrow{V}dydz &= \iint_D \left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\left\{\begin{array}{c} v \\ w\end{array}\right\}_{yz} dydz \\ &= \iint_D \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial(vw)}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial(v^2)}{\partial z} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial(w^2)}{\partial y} - \frac{\partial(vw)}{\partial y} + v\frac{\partial w}{\partial z}\end{array}\right\}_{yz} dydz\end{aligned}$$

qui, à l'aide de la conservation de la masse (écoulement 2D incompressible) :

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\iint_D \omega_x\overrightarrow{V}dydz &= \frac{1}{2}\iint_D \left\{\begin{array}{c} 2\frac{\partial(vw)}{\partial y} + 2w\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial(v^2)}{\partial z} \\ \frac{\partial(w^2)}{\partial y} - 2\frac{\partial(vw)}{\partial y} - 2v\frac{\partial v}{\partial y}\end{array}\right\}_{yz} dydz \\ &= \frac{1}{2}\iint_D \left\{\begin{array}{c} 2\frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(w^2)}{\partial z} - \frac{\partial(v^2)}{\partial z} \\ \frac{\partial(w^2)}{\partial y} - 2\frac{\partial(vw)}{\partial y} - \frac{\partial(v^2)}{\partial y}\end{array}\right\}_{yz} dydz \\ &= \frac{1}{2}\iint_D \left\{\begin{array}{c} \frac{\partial(2vw)}{\partial y} - \frac{\partial\left(v^2-w^2\right)}{\partial z} \\ \frac{\partial\left(w^2-v^2\right)}{\partial y} - \frac{\partial(2vw)}{\partial z}\end{array}\right\}_{yz} dydz \\ &= \frac{1}{2}\int_C \left\{\begin{array}{c} \left(v^2-w^2\right)dy + (2vw)\,dz \\ (2vw)\,dy - \left(v^2-w^2\right)dz\end{array}\right\}_{yz} \\ &= \frac{1}{2}\int_C \underbrace{\left[\begin{array}{cc} \left(v^2-w^2\right) & 2vw \\ 2vw & -\left(v^2-w^2\right)\end{array}\right]_{yz}}_{\overline{\overline{A}}} \underbrace{\left\{\begin{array}{c} dy \\ dz\end{array}\right\}_{yz}}_{\overrightarrow{t}\,dl}\end{aligned}$$

$\overline{\overline{A}}$ étant un tenseur symétrique diagonalisable en diag $\left(+V^2,-V^2\right)$, avec $V^2=\left(v^2+w^2\right)$ dans la base intrinsèque aux lignes de courant $(\overrightarrow{s},\overrightarrow{s_\perp})$, on arrive à :

$$\iint_D \omega_x\overrightarrow{V}dydz = \frac{1}{2}\int_C V^2\overrightarrow{s}\left(\overrightarrow{s}.\overrightarrow{dl}\right) - \frac{1}{2}\int_C V^2\overrightarrow{s_\perp}\left(\overrightarrow{s_\perp}.\overrightarrow{dl}\right)$$

En particulier, si le débit de fluide traversant le contour $\mathcal{C}$ est nul ou si $\mathcal{C}$ s'appuie sur une ligne de courant, on a :

$$\begin{aligned}\iint_D \omega_x\overrightarrow{V}dydz &= \frac{1}{2}\int_C \overrightarrow{V}\left(\overrightarrow{V}.\overrightarrow{dl}\right) \\ &= \frac{1}{2}\int_C \left[\overrightarrow{V}\otimes\overrightarrow{V}\right].\overrightarrow{dl}\end{aligned}$$

D.4 Equation d'évolution de la circulation en champ fluctuant

On démontre ici l'équation (5.9)

$$\overline{u'\omega'_y} - \overline{v'\omega'_x} = \frac{\partial k}{\partial z} - \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right)$$

En développant les composantes du rotationnel, on obtient :

$$\begin{aligned}
\overline{u'\omega'_y} - \overline{v'\omega'_x} &= \overline{u' \left(\frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} \right) - v' \left(\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} \right)} \\
&= \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'u'}{\partial z} + \frac{\partial v'v'}{\partial z} \right) - \left(u' \frac{\partial w'}{\partial x} + v' \frac{\partial w'}{\partial y} \right)} \\
&= \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'u'}{\partial z} + \frac{\partial v'v'}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial u'w'}{\partial x} - w' \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'w'}{\partial y} - w' \frac{\partial v'}{\partial y} \right)} \\
&= \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'u'}{\partial z} + \frac{\partial v'v'}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial u'w'}{\partial x} + \frac{\partial v'w'}{\partial y} \right) + w' \left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right)}
\end{aligned}$$

Dans l'hypothèse où le champ fluctuant 3D est incompressible, on a :

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

d'où il vient finalement :

$$\begin{aligned}
\overline{u'\omega'_y} - \overline{v'\omega'_x} &= \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'u'}{\partial z} + \frac{\partial v'v'}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial u'w'}{\partial x} + \frac{\partial v'w'}{\partial y} \right) - w' \frac{\partial w'}{\partial z}} \\
&= \overline{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'u'}{\partial z} + \frac{\partial v'v'}{\partial z} - \frac{\partial w'w'}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial u'w'}{\partial x} + \frac{\partial v'w'}{\partial y} \right)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial k}{\partial z} - \left(\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

D.5 Equation d'évolution du moment d'ordre 1 en champ fluctuant

L'équation (5.5) s'écrit sous forme développée :

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} + v \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + w \frac{\partial \omega_x}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{u'\omega'_y} - \overline{v'\omega'_x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{u'\omega'_z} - \overline{w'\omega'_x} \right) \quad \text{(D.8)}$$

En notant

$$\overrightarrow{T} = \left(\overline{u'\omega'_y} - \overline{v'\omega'_x} \right) \overrightarrow{y} + \left(\overline{u'\omega'_z} - \overline{w'\omega'_x} \right) \overrightarrow{z} \quad \text{(D.9)}$$

On peut ré-écrire (D.8) sous forme intrinsèque (les opérateurs différentiels sont 2D dans (y,z)) :

$$\frac{D\omega_x}{D\tau} = \text{div} \left(\nu \, \overrightarrow{\text{grad}} \, \omega_x \right) + \text{div} \left(\overrightarrow{T} \right) \quad \text{(D.10)}$$

ce qui permet d'écrire, en supposant que $\mathcal{C}$ s'appuie sur une ligne de courant :

$$\frac{D\overrightarrow{I_1^O}}{D\tau} = \underbrace{\nu \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{OM} \frac{\partial \omega_x}{\partial n} dl - \nu \int_{\mathcal{C}} \omega_x \overrightarrow{n} dl}_{terme\ visqueux} + \underbrace{\int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{OM} \left(\overrightarrow{T} . \overrightarrow{n} \right) dl - \iint_{\mathcal{D}} \overrightarrow{T} dydz}_{terme\ turbulent} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_C \overrightarrow{V} \left(\overrightarrow{V} . \overrightarrow{t} \right) dl}_{terme\ non-visqueux}$$

D.6 Equation d'évolution de la pression d'arrêt isentropique

On donne ici la démonstration de l'équation de transport de la pression d'arrêt isentropique (4.52). La pression d'arrêt isentropique p_i (resp. la température d'arrêt isentropique T_i) est définie de manière locale et instantanée pour toute particule élémentaire de fluide d'état $(\rho, \overrightarrow{V}, p)$ à $(\overrightarrow{X}, t)$ comme étant la pression statique (resp. la température statique) de cette particule si on la ralentissait jusqu'au repos ($V = 0$) par un processus isentropique et stationnaire en négligeant les forces de volume et les sources/puits de chaleur.

Tout d'abord, l'équation d'état de l'entropie S :

$$c_p dT = T dS + \tfrac{1}{\rho} dp \tag{D.11}$$

permet lier la variation de l'entropie au cours du mouvement aux variations des conditions d'arrêt isentropique (le mouvement n'est pas isentropique mais le passage de (p, T) à (p_i, T_i) l'est) :

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{c_p}{T}\frac{DT}{Dt} - \frac{r}{p}\frac{Dp}{Dt} = \frac{c_p}{T_i}\frac{DT_i}{Dt} - \frac{r}{p_i}\frac{Dp_i}{Dt} \tag{D.12}$$

Par ailleurs, l'évolution de l'entropie s'obtient à partir de l'équation de l'énergie interne (avec $de = Tds - p\, d(1/\rho)$) :

$$\rho T \frac{DS}{Dt} = \underbrace{r - \operatorname{div}\overrightarrow{q}}_{echange} + \underbrace{\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{S}}}_{creation} \tag{D.13}$$

En éliminant S entre (D.13) et (D.12), on obtient :

$$\overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{S}} + r - \operatorname{div}\overrightarrow{q} = \rho c_p \frac{T}{T_i}\frac{DT_i}{Dt} - \frac{p}{p_i}\frac{Dp_i}{Dt} \tag{D.14}$$

En combinant (D.14) à l'équation de transport de la température d'arrêt (4.51), qui n'est autre que l'équation de l'enthalpie totale $H_i = c_p T + \frac{1}{2}V^2$ dans laquelle on a supposée c_p constant :

$$\rho c_p \tfrac{DT_i}{Dt} = \tfrac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\overline{\overline{\tau}}.\overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{f}.\overrightarrow{V} + \operatorname{div}\left(\overrightarrow{-q}\right) + r \tag{D.15}$$

on obtient :

$$\tfrac{p}{p_i}\tfrac{Dp_i}{Dt} = \tfrac{T}{T_i}\left[\tfrac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\overline{\overline{\tau}}.\overrightarrow{V}\right) + \overrightarrow{f}.\overrightarrow{V}\right] - \left(1 - \tfrac{T}{T_i}\right)\left[r - \operatorname{div}\overrightarrow{q}\right] - \overline{\overline{\tau}} : \overline{\overline{S}} \tag{D.16}$$

L'équation (D.15) permet en outre de déduire T_i de $T = \frac{p}{\rho r}$ et $M = V/\sqrt{\gamma p/\rho}$:

$$\frac{T}{T_i} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{-1} \tag{D.17}$$

D'autre part, (D.11) permet de déduire p_i de T_i : $\frac{p}{p_i} = \left(\frac{T}{T_i}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ d'où

$$\frac{p}{p_i} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \tag{D.18}$$

L'utilisation des relations (D.17) et (D.18) permet de réécrire (D.16) sous la forme (4.52) présentée dans le chapitre 4 :

$$\begin{aligned}\frac{1}{p_i}\frac{Dp_i}{Dt} &= \left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-1}\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial t} \\ &+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho H_i}\left[\mathrm{div}\left(\overline{\overline{\tau}}.\overrightarrow{V}\right)+\overrightarrow{f}.\overrightarrow{V}-\frac{\gamma-1}{2}M^2\left(r-\mathrm{div}\,\overrightarrow{q}\right)\right] \\ &-\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\rho H_i}\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\overline{\overline{\tau}}:\overline{\overline{S}}\right]\end{aligned}$$

D.7 Quelques précisions sur l'expansion de la pression génératrice dans les sections transverses du jet

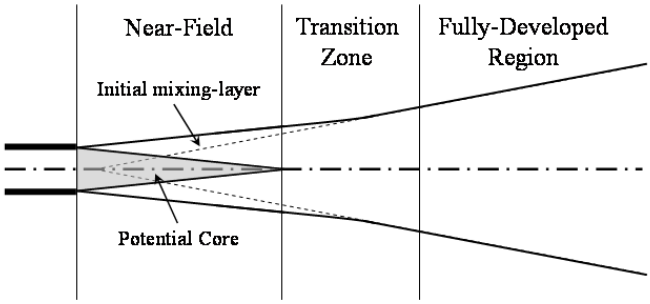


FIG. D.2 – Schéma des différentes régions d'un jet.

Dans cette section, on discute de la manière dont évolue la distribution de pression génératrice dans le plan transverse au jet représenté figure D.2 lorsqu'on se déplace de la tuyère vers l'aval. L'objectif étant d'exhiber qualitativement les phénomènes importants, nous nous basons sur un modèle ultra-simplifié mais tout de même assez démonstratif.

On considère tout d'abord une grandeur scalaire ϕ uniquement soumise à une diffusion de coefficient ν constant. Ensuite, on suppose que l'évolution longitudinale de ce scalaire dans les sections transverses d'un jet d'axe $\overrightarrow{x}$ de vitesse moyenne U_0 peut être qualitativement décrite en faisant l'analogie avec la diffusion de ce scalaire dans un champ de vitesse uniforme $U_0\overrightarrow{x}$[3]. Après changement de repère $x \mapsto \tau = x/U_0$, la distribution $\phi(y,z,\tau)$ vérifie l'équation de diffusion classique :

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tau} = \nu\Delta\phi \tag{D.19}$$

Conformément aux régions du jet schématisé figure D.2, nous allons distinguer deux situations modèles.

Dans la région proche de la tuyère, on peut réduire le problème à celui d'une couche de mélange

[3]En fait, ce modèle se situe à un degré d'approximation supérieur à celui des écoulements en couches minces (couches limites) où la convection transverse $v\frac{\partial\phi}{\partial y}+w\frac{\partial\phi}{\partial z}$ liée aux variations longitudinales de vitesse axiale $\frac{\partial u}{\partial x}$ via la conservation de la masse est en plus prise en compte.

plane de direction transverse $\overrightarrow{y}$ située à $y = 0$ dans un espace non-borné. L'équation de diffusion (D.19) s'exprime comme :

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial \tau} = \nu \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial y^2} \tag{D.20}$$

La condition initiale peut s'écrire au voisinage de la lèvre du haut :

$$\phi_p(y,0) = \begin{cases} \phi_c & \text{si } y \leq 0\,; \\ 0 & \text{si } y > 0. \end{cases} \tag{D.21}$$

La solution de (D.20,D.21) est :

$$\phi_p(y,\tau) = \frac{\phi_c}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{y}{2\sqrt{\nu\tau}}\right)\right] \tag{D.22}$$

avec

$$\operatorname{erf}(\eta) = \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \textstyle\int_0^\eta \exp(-s^2) ds \tag{D.23}$$

en particulier

$$\operatorname{erf}(\eta \to -\infty) = -1 \tag{D.24}$$

$$\operatorname{erf}(\eta = 0) = 0 \tag{D.25}$$

$$\operatorname{erf}(\eta \to +\infty) = 1 \tag{D.26}$$

Le scalaire ϕ passe continûment de la valeur ϕ_c pour $y \to -\infty$ à la valeur $\phi_c/2$ sur la ligne médiane de la couche de mélange $y = 0$ puis s'annule pour $y \to +\infty$. En notant erf^{-1} l'application réciproque de la fonction erf et ϕ_0 une valeur particulière de ϕ entre 0 et ϕ_c, la position explicite du contour $\phi(y,t) = \phi_0$ s'écrit :

$$y_0(t) = 2\sqrt{\nu t}\, \operatorname{erf}^{-1}\left(1 - 2\frac{\phi_0}{\phi_c}\right) \tag{D.27}$$

On retrouve le résultat bien connu $y_0(\tau) \sim \sqrt{\nu\tau}$. Dans le demi-plan des faibles valeurs de ϕ ($\phi < \phi_c/2$), i.e. dans la région initiale à l'extérieur du jet ($y > 0$), y_0 est donc monotone strictement croissante.

Par la suite, la couche de mélange axisymétrique se referme sur l'axe limitant ainsi le cône potentiel. Après une zone de transition, l'écoulement atteint le régime de jet établi auto-similaire dans la région lointaine. Dans cette région, (D.19) s'exprime en coordonnées polaires (r,θ)[4] :

$$\frac{\partial \phi_r}{\partial \tau} = \nu \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right) \tag{D.28}$$

En prenant une distribution initiale gaussienne :

$$\phi_r(r,0) = \phi_j \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu\tau_0}\right) \tag{D.29}$$

où ϕ_j est la valeur initiale maximale (au centre $r = 0$) et τ_0 ajuste l'écart-type initial. La solution de (D.28,D.29) est :

$$\phi_r(r,\tau) = \frac{\phi_j}{\frac{\tau}{\tau_0}+1} \exp\left(\frac{-r^2}{4\nu\tau_0\left(\frac{\tau}{\tau_0}+1\right)}\right) \tag{D.30}$$

[4]On aurait pu rester en écoulement plan pour la démonstration, mais en pratique, il existe plus de jets ronds que de jets plans.

Quelques profils sont tracés figure D.3 pour $\phi_j = 1$ et $4\nu\tau_0 = 1$. Ce qui nous intéresse, c'est de suivre l'évolution d'un contour $\phi = \phi_0$ constant. En considérant que le jet contienne un colorant de concentration $\phi_r(r,0) > 0$ en début de région lointaine et que l'extérieur n'en contienne pas $\phi(r \to \infty) = 0$, on peut remarquer que contrairement au cas de la couche de mélange où le colorant est fourni en permanence par le demi-plan $y < 0$, le cas du jet complètement établi ne présente pas d'autre approvisionnement de colorant le long du jet que celui fourni initialement. Aussi, le colorant se diffuse dans l'espace et sa valeur maximale $\phi_{max}(\tau) = \phi_j \left(\frac{\tau}{\tau_0} + 1\right)^{-1}$ diminue au cours du temps. Le contour $\phi = \phi_0$ n'existe donc à l'instant τ que s'il est compris entre 0 et $\phi_{max}(\tau)$. Autrement dit, le contour $\phi = \phi_0$ n'existe plus à partir de $\tau_f = \tau_0 \left(\frac{\phi_j}{\phi_0} - 1\right)$. Le rayon du contour $\phi(r,\tau) = \phi_0$ pour $\tau \leq \tau_f$ est :

$$r_0(\tau) = \sqrt{4\nu\tau_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0} + 1\right) \ln\left(\frac{\phi_j/\phi_0}{\frac{\tau}{\tau_0} + 1}\right)} \tag{D.31}$$

le mouvement du contour $r_0(\tau)$ dépend donc du rapport ϕ_0/ϕ_j :
- si $\phi_0/\phi_j < e^{-1}$ alors le contour s'éloigne de l'axe jusqu'à $\tau = \tau_0 \left(\frac{\phi_j/\phi_0}{e} - 1\right)$ et converge vers l'axe par la suite.
- si $\phi_0/\phi_j > e^{-1} \approx 0.37$ alors le contour converge tout de suite vers l'axe ;

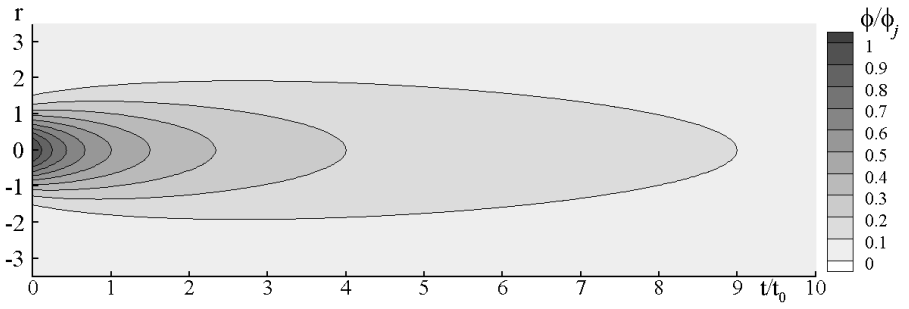


FIG. D.3 – Contour iso-ϕ dans la zone lointaine.

Bien que ce ne soit pas prouvé ici, si le coefficient de diffusion n'est pas constant (mais quand même positif !), comme c'est le cas lorsqu'on adopte l'hypothèse de viscosité turbulente, on peut penser que ces résultats sont toujours valables du point de vue qualitatif.

Ces résultats concernent la distribution d'un scalaire ϕ uniformément convecté par le fluide et uniquement soumis à de la diffusion. Dans un écoulement stationnaire, la pression génératrice est en plus soumise à de la dissipation qui contribue toujours à la diminuer (cf. équation (4.52)). Cela ne change donc pas qualitativement la conclusion : dans un jet, les contours de p_i proches de la p_i extérieure divergent initialement de l'axe mais à partir d'une certaine abscisse située dans la région de jet établi (zone lointaine) convergent de nouveau vers l'axe jusqu'à leur disparition complète.

Dans l'étude du jet MARCO, la zone d'observation de l'écoulement ne dépasse pas la région initiale dans laquelle les contours $p_i = p_{i0} + \varepsilon$ divergent. Ce résultat est important pour la signification des critères de mélange définis dans la section 4.5.

D.8 Passage en coordonnées cylindriques

Ici, on rappelle simplement les formules de passage des vecteurs et des matrices depuis la base cartésienne $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ vers la base cylindrique $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ obtenue par rotation d'axe $\overrightarrow{x}$ et d'angle $(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{e_r}) = (\overrightarrow{z}, \overrightarrow{e_\theta}) = \theta$.

$$\left\{ \begin{array}{c} U_x \\ U_r \\ U_\theta \end{array} \right\}_{(x,r,\theta)} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right]^T . \left\{ \begin{array}{c} U_x \\ U_y \\ U_z \end{array} \right\}_{(x,y,z)} \tag{D.32}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} U_x = U_x \\ U_r = U_y \cos\theta + U_z \sin\theta \\ U_\theta = -U_y \sin\theta + U_z \cos\theta \end{array} \right. \tag{D.33}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} A_{xx} & A_{xr} & A_{\theta x} \\ A_{xr} & A_{rr} & A_{r\theta} \\ A_{\theta x} & A_{r\theta} & A_{\theta\theta} \end{array} \right]_{(x,r,\theta)} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right]^T . \left\{ \begin{array}{ccc} A_{xx} & A_{xy} & A_{zx} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{yz} & A_{zz} \end{array} \right\} . \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{array} \right]_{(x,y,z)} \tag{D.34}$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{xx} = A_{xx} \\ A_{xr} = A_{xy} \cos\theta + A_{zx} \sin\theta \\ A_{\theta x} = -A_{xy} \sin\theta + A_{zx} \cos\theta \\ A_{rr} = \frac{A_{yy}+A_{zz}}{2} + \frac{A_{yy}-A_{zz}}{2} \cos 2\theta + A_{yz} \sin 2\theta \\ A_{\theta\theta} = \frac{A_{yy}+A_{zz}}{2} - \frac{A_{yy}-A_{zz}}{2} \cos 2\theta - A_{yz} \sin 2\theta \\ A_{r\theta} = -\frac{A_{yy}-A_{zz}}{2} \sin 2\theta + A_{yz} \cos 2\theta \end{array} \right. \tag{D.35}$$

En raison de la linéarité des opérateurs de Reynolds, les composantes du tenseur de Reynolds (ou les corrélations d'ordre 2 basées sur un opérateur de Reynolds $< . >$) vérifient les mêmes relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} < u'_x u'_x > = < u'_x u'_x > \\ < u'_x u'_r > = < u'_x u'_y > \cos\theta + < u'_z u'_x > \sin\theta \\ < u'_\theta u'_x > = - < u'_x u'_y > \sin\theta + < u'_z u'_x > \cos\theta \\ < u'_r u'_r > = \frac{<u'_y u'_y> + <u'_z u'_z>}{2} + \frac{<u'_y u'_y> - <u'_z u'_z>}{2} \cos 2\theta + < u'_y u'_z > \sin 2\theta \\ < u'_\theta u'_\theta > = \frac{<u'_y u'_y> + <u'_z u'_z>}{2} - \frac{<u'_y u'_y> - <u'_z u'_z>}{2} \cos 2\theta - < u'_y u'_z > \sin 2\theta \\ < u'_r u'_\theta > = -\frac{<u'_y u'_y> - <u'_z u'_z>}{2} \sin 2\theta + < u'_y u'_z > \cos 2\theta \end{array} \right. \tag{D.36}$$

Rappel : la symétrie de révolution autour de $(O, \overrightarrow{x})$ signifie seulement que $A_{\theta x} = A_{r\theta} = 0$ mais pas que $A_{\theta\theta} = 0$.

Annexe E

Clichés instantanés des jets sans et avec contrôle

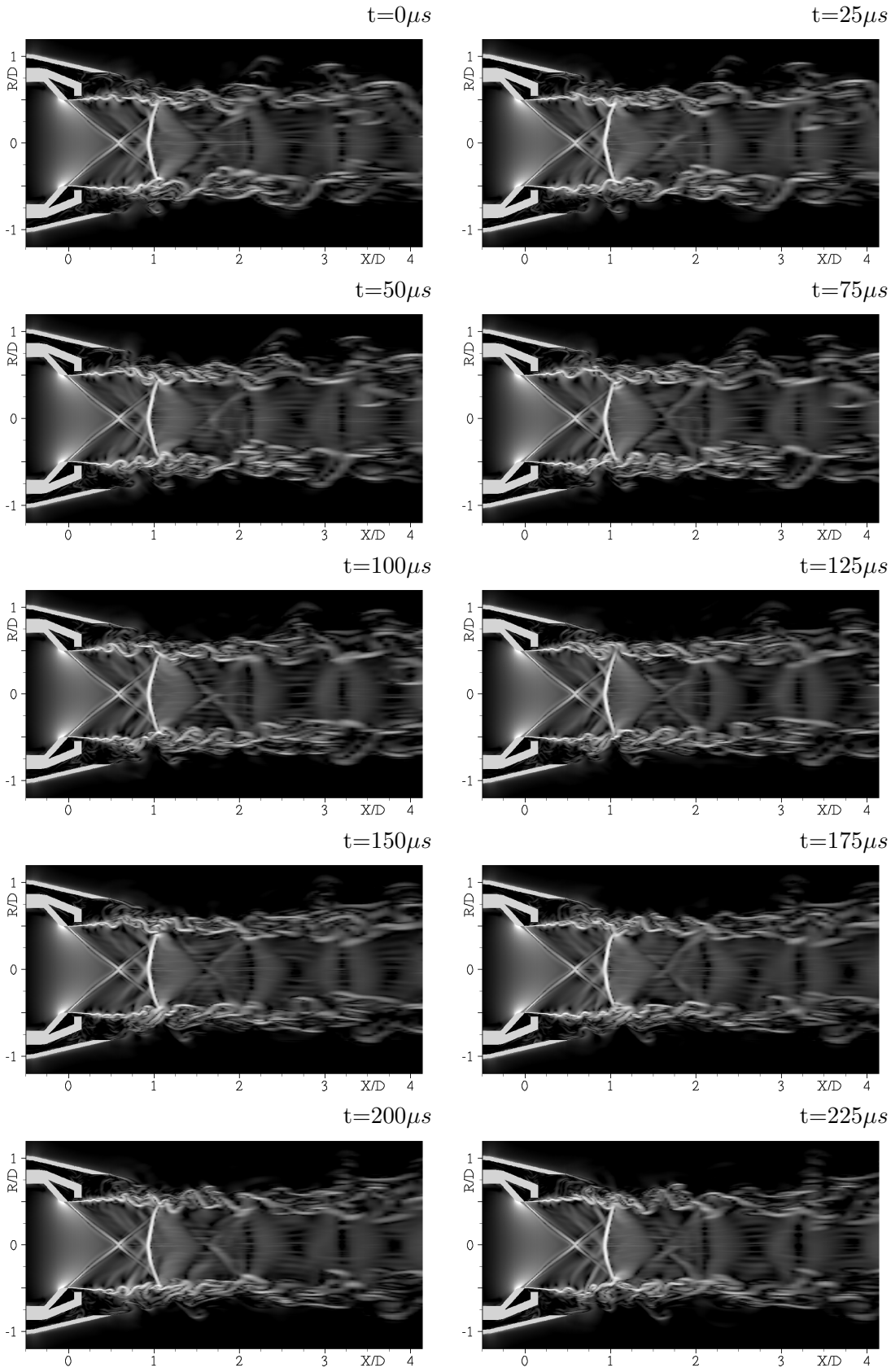


FIG. E.1 – Evolution temporelle du jet de référence à NPR=3.1 (cas F0).

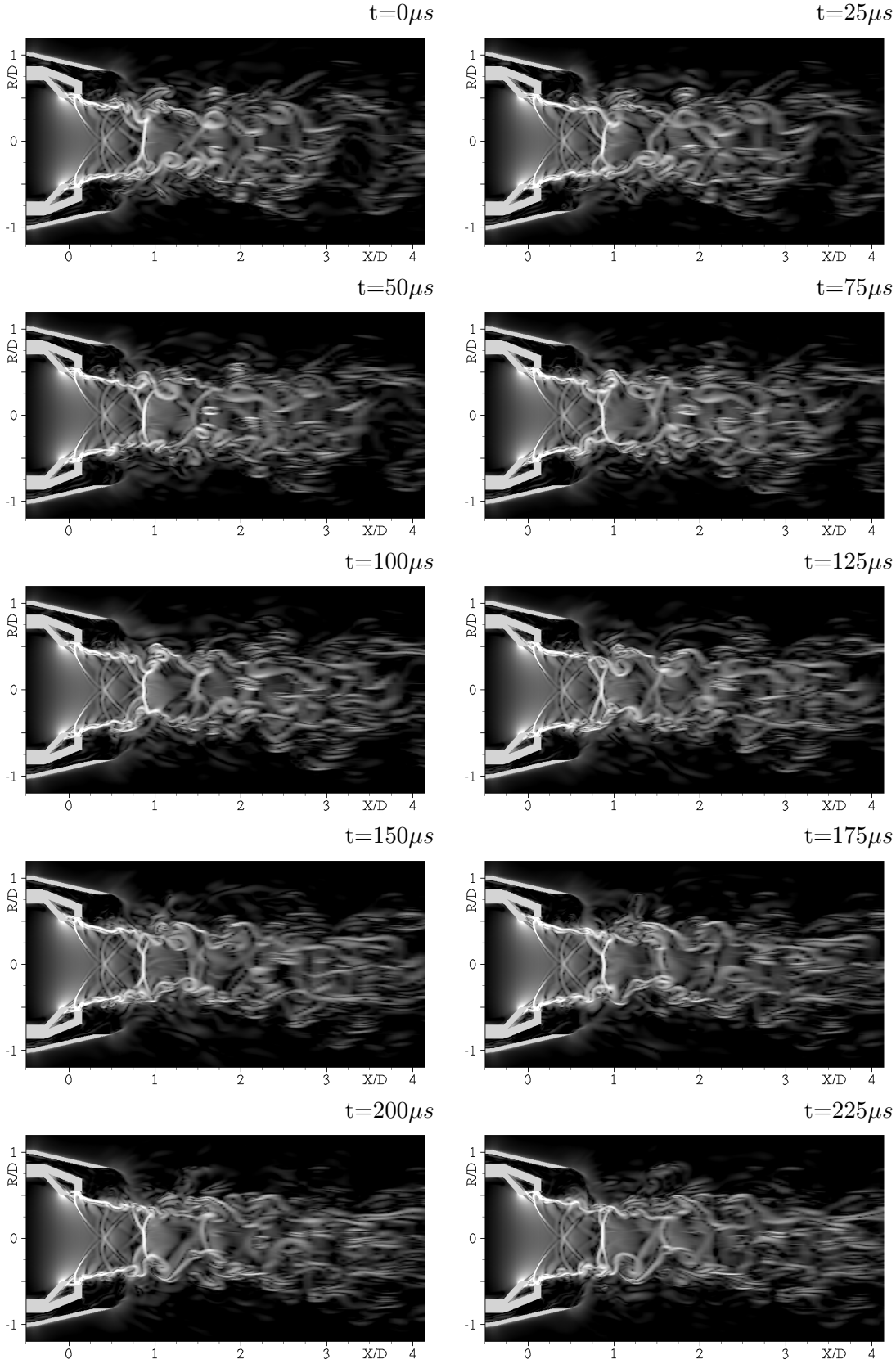


FIG. E.2 – Evolution temporelle du jet contrôlé à SPR=2.8 (F1), plan des injecteurs actifs.

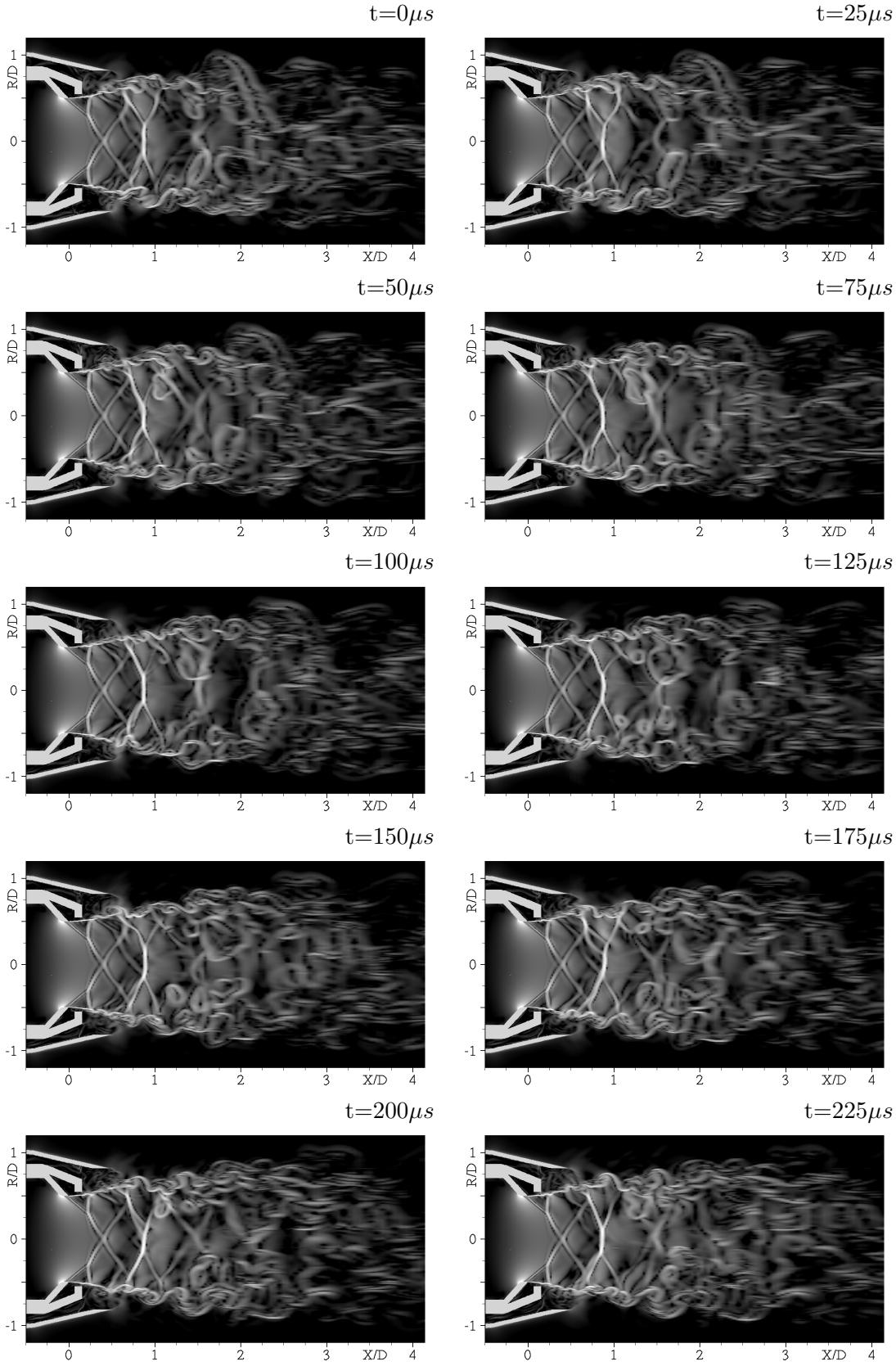


FIG. E.3 – Evolution temporelle du jet contrôlé à SPR=2.8 (F1), plan des injecteurs non-actifs, grand pas de temps.

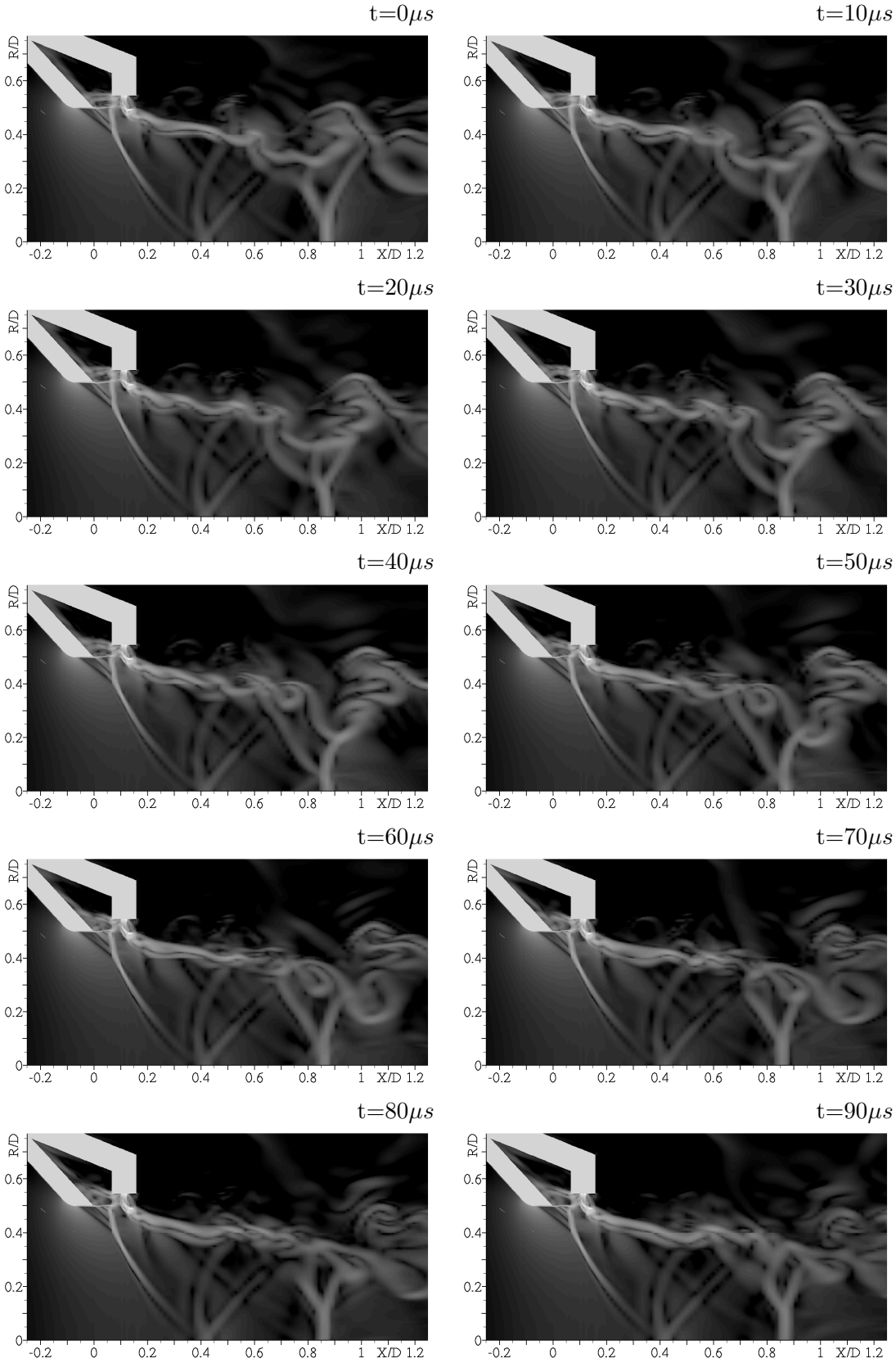


FIG. E.4 – Evolution temporelle du jet contrôlé à SPR=2.8 (F1), plan des injecteurs actifs, vue rapprochée, petit pas de temps. Phase d'excitation de t=10 à 40μs et phase d'apaisement de t=40μs à 90μs.

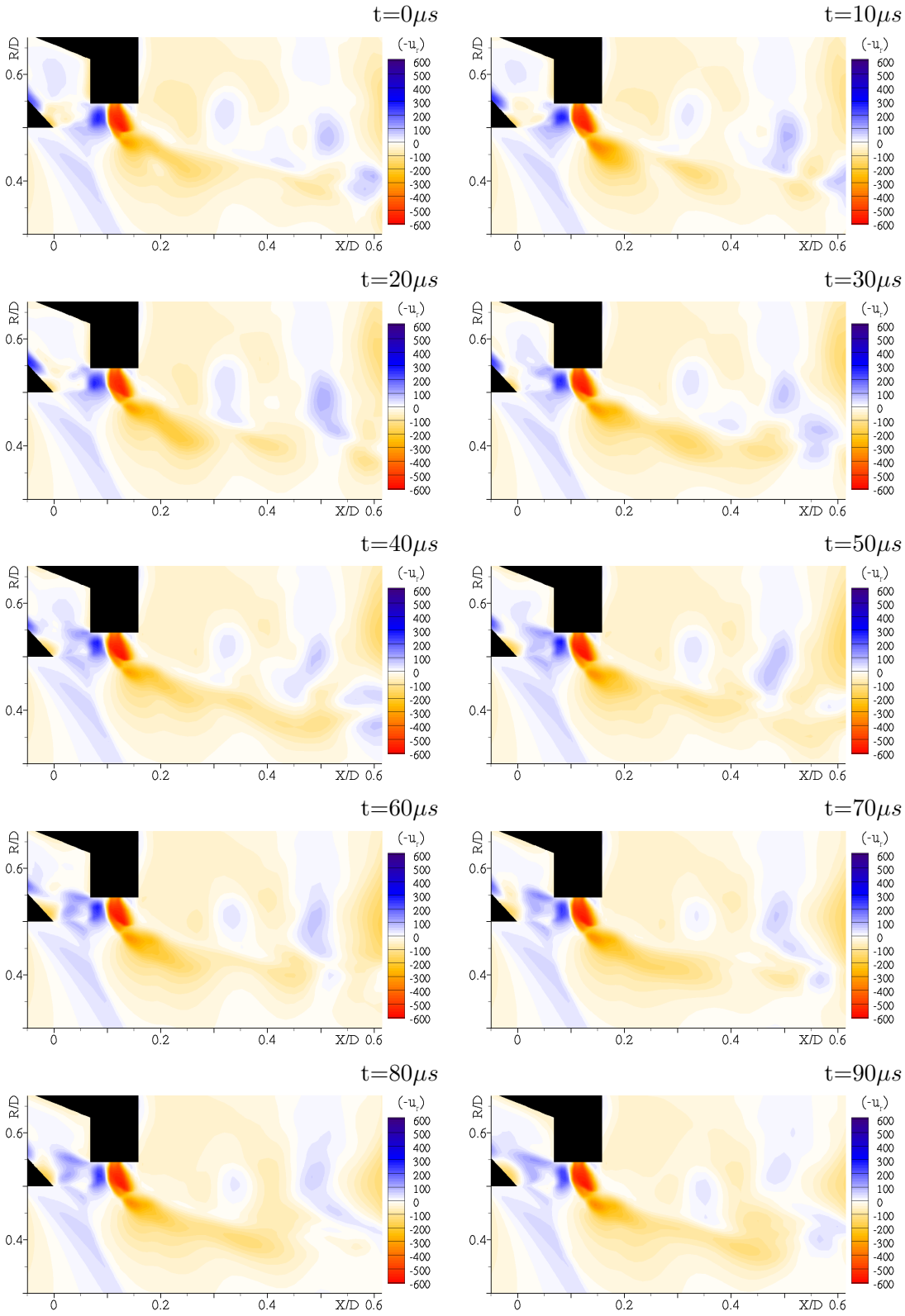


FIG. E.5 – Evolution temporelle du jet contrôlé à SPR=2.8 (F1), plan des injecteurs actifs, vue rapprochée, vitesse verticale (en m/s), petit pas de temps. Phase d'excitation de t=10 à 40μs et phase d'apaisement de t=40μs à 90μs.

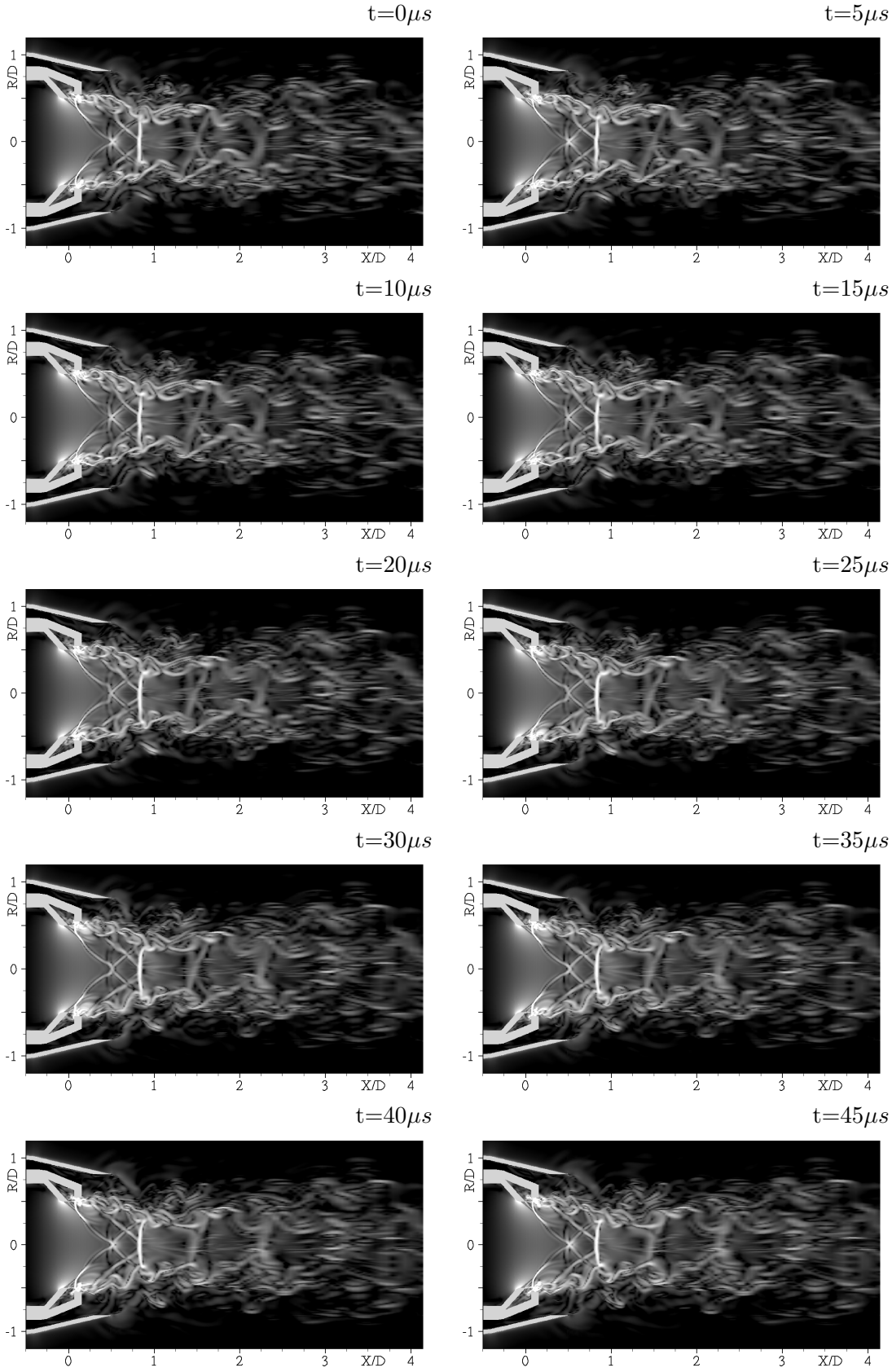


FIG. E.6 – Evolution temporelle du jet contrôlé à SPR=1.4 (F2), plan des injecteurs actifs.

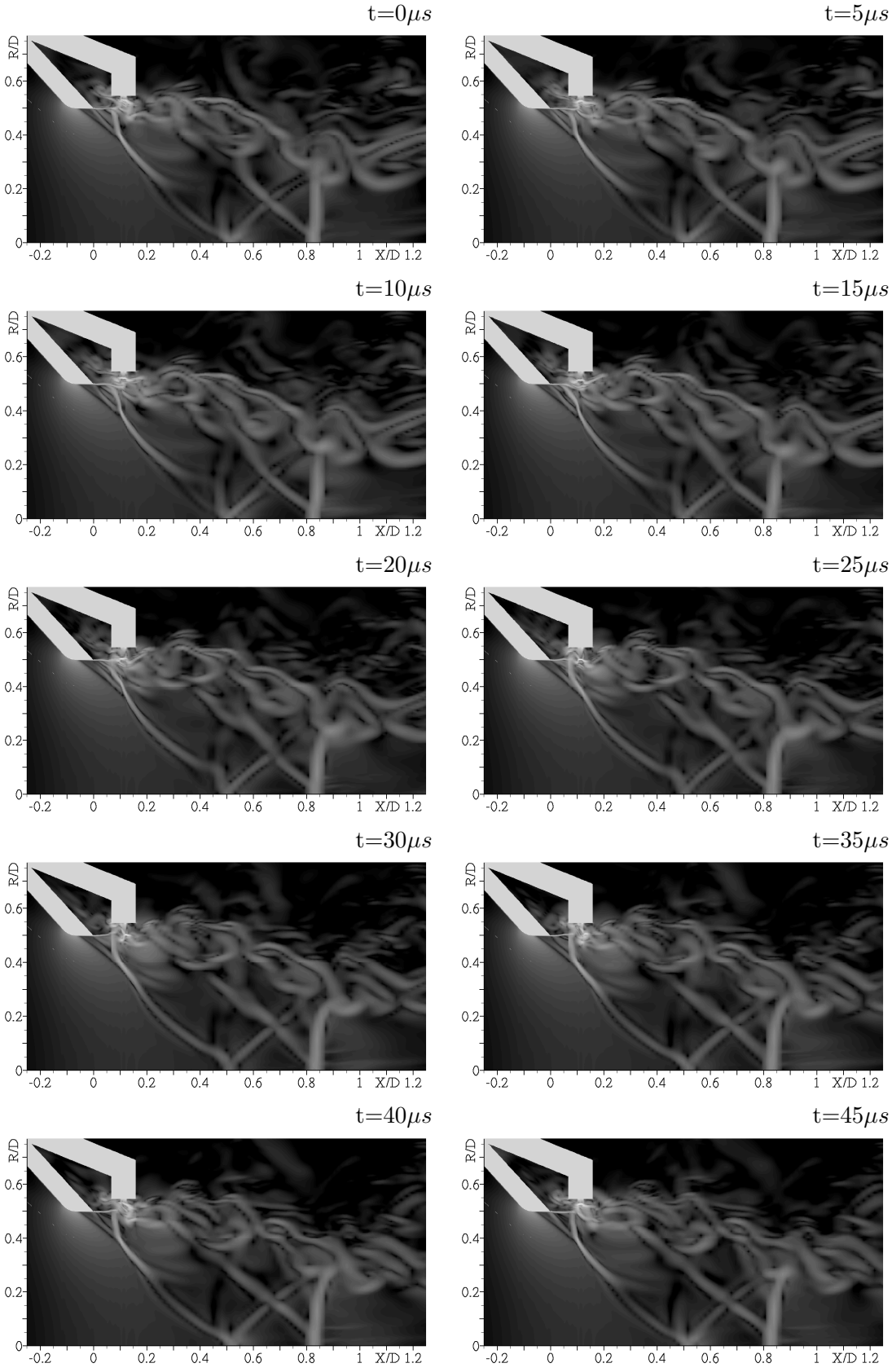


FIG. E.7 – Evolution temporelle du jet contrôlé à SPR=1.4 (F2), plan des injecteurs actifs, vue rapprochée.

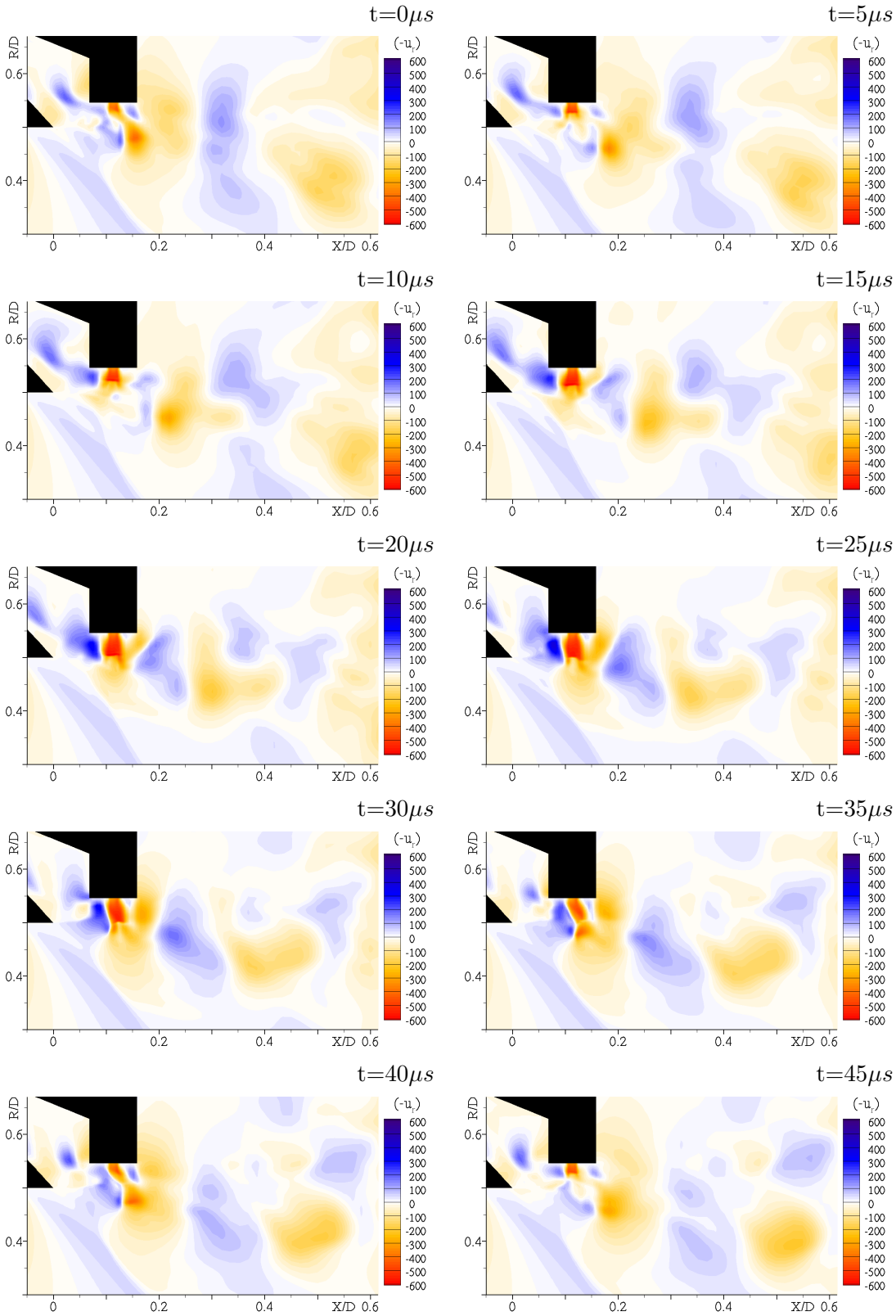


FIG. E.8 – Evolution temporelle du jet contrôlé à SPR=1.4 (F2), plan des injecteurs actifs, vue rapprochée, vitesse verticale (en m/s).

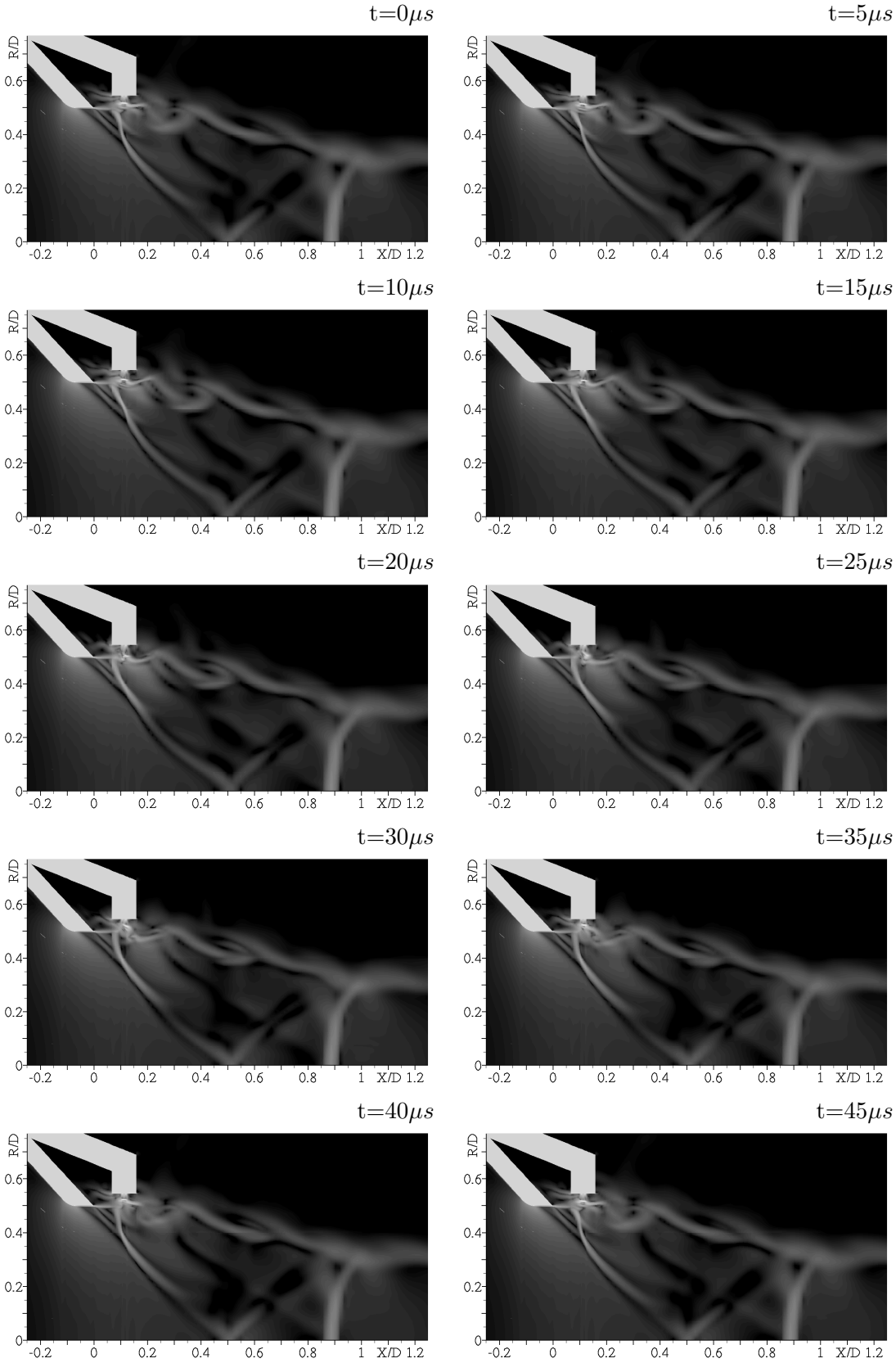


FIG. E.9 – Evolution temporelle du jet contrôlé à SPR=1.4 (F2), plan des injecteurs actifs, vue rapprochée, vitesse verticale (en m/s). Calcul URANS.

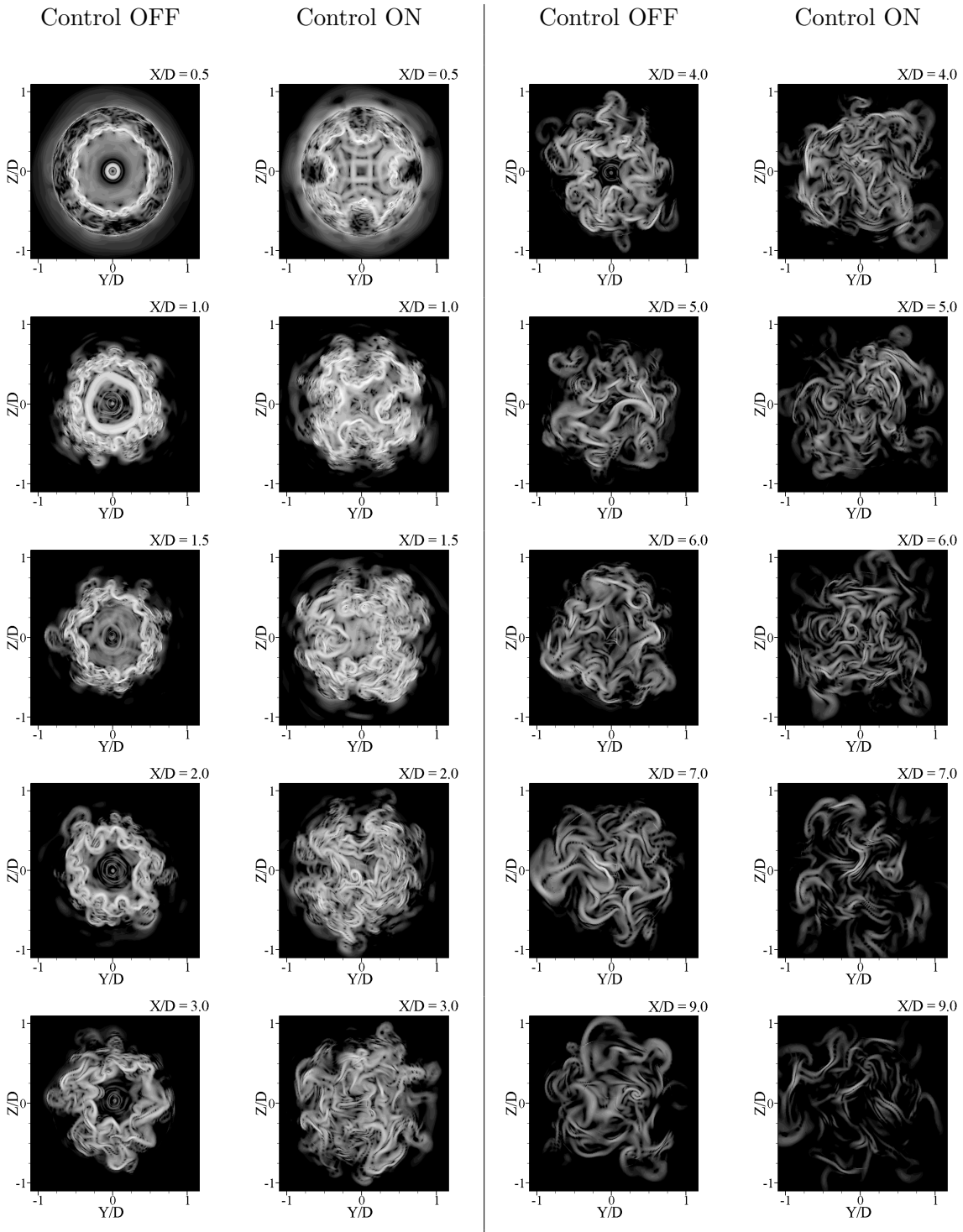


FIG. E.10 – Evolution longitudinale des coupes transverses du jet de référence et du jet contrôlé à SPR=2.8 (F2).

RESUME :

A cause de sa température élevée, le jet propulsif d'un avion de combat est une source de rayonnement infrarouge qui rend l'appareil très vulnérable. Ce rayonnement peut toutefois être réduit en accélérant le mélange du jet avec l'atmosphère. Cette thèse est consacrée à la simulation numérique d'un jet propulsif réaliste contrôlé par des injections radiales et à l'analyse physique des mécanismes d'augmentation de son mélange. Deux types de simulations, RANS et ZDES, ont été réalisés sur la base du modèle de Spalart-Allmaras. Dans le modèle ZDES, une nouvelle longueur caractéristique de maille est formulée et améliore sensiblement la prévision de la région initiale du jet. Globalement, les simulations ZDES restituent fidèlement le champ moyen du jet supersonique sans et avec contrôle, aussi bien les cellules de détente/compression que la diffusion turbulente. L'analyse physique est dédiée à la compréhension d'une part des mécanismes compressibles concentrées au coeur du jet et d'autre part des mécanismes tourbillonnaires périphériques ainsi qu'à l'évaluation de leurs rôles respectifs dans l'augmentation du mélange. Il en ressort que l'augmentation du mélange est exclusivement due aux mécanismes tourbillonnaires. Une étude paramétrique fournit des indications pour concevoir un mélangeur efficace. L'analyse des tourbillons focalisée sur le régime lointain quasi-bidimensionnel souligne leur dynamique moyenne et fait apparaître l'action des fluctuations turbulentes sur leur taux de dégénérescence. Enfin, deux régimes de contrôle sont identifiés et associés aux pénétrations respectivement quasi-stationnaire et intermittente des jets secondaires.

MOTS CLES : Modélisation de la turbulence, Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes, Detached-Eddy Simulation, jet supersonique, tuyère, arrière-corps, contrôle, mélange.

ABSTRACT :

Because of its high temperature, a propulsive jet is a source of infrared radiation which makes combat aircraft vulnerable. However, radiation can be alleviated by an enhancement of the mixing between the jet and the ambient air. This thesis is dedicated to the numerical simulation of a real-life propulsive jet controlled by radial injections and to the physical investigation of the mixing enhancement mechanisms. As for the simulations, RANS and ZDES based upon the Spalart-Allmaras model are used. In the ZDES model, a new mesh cutoff size is proposed and is shown to improve the prediction of the jet near-field. On the whole, the results provided by ZDES are in fair agreement with the mean flow fields of the supersonic jets without and with control, as well for the expansion/compression cells as for the turbulent diffusion. The physical analysis deals with both the compressible and the vortical mechanisms. It is proved that mixing enhancement is only due to the action of vortices. A parametric study gives some information to design an efficient mixer. The analysis of the vortices is focused on the quasi-bidimensional regime of the far-field. Their mean longitudinal evolution is highlighted and the action of the turbulent fluctuations on their decay rate is shown. Finally, two control regimes are identified and respectively associated to a quasi-steady penetration and to an intermittent penetration of the secondary jets.

KEY WORDS : Turbulence modeling, Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes, Detached-Eddy Simulation, supersonic jet, nozzle, after-body, flow control, mixing.