



Equilibre et cinétique des systèmes d'ondes conservatifs

Sergio Rica

► To cite this version:

Sergio Rica. Equilibre et cinétique des systèmes d'ondes conservatifs. Analyse de données, Statistiques et Probabilités [physics.data-an]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. tel-00222913

HAL Id: tel-00222913

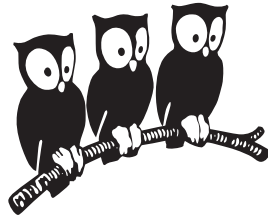
<https://theses.hal.science/tel-00222913>

Submitted on 29 Jan 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire de Physique Statistique
Département de Physique
de l'Ecole Normale Supérieure



Equilibre et cinétique des systèmes d'ondes conservatifs

Thèse d'Habilitation à diriger des recherches
de l'Université Pierre et Marie Curie

présentée par
Sergio Rica

Soutenance le 19 février 2007 devant le jury composé de :

Pierre Coullet	Examineur
Stephan Fauve	Rapporteur
Alan Newell	Rapporteur
Sergey Nazarenko	Examineur
Alberto Verga	Rapporteur
Jean-Bernard Zuber	Examineur

A la memoria de mis padres, Sergio y Susana.

Résumé

Ce mémoire est consacré à la dynamique aux temps longs des systèmes d'ondes Hamiltoniens. Dans une première partie nous identifions l'état d'équilibre comme le minimum de l'énergie libre. La dynamique évolue, alors, en règle générale de telle manière que l'énergie libre soit minimum en respectant les quantités conservées. Ensuite nous décrivons la théorie de la turbulence faible comme approche cinétique à l'équilibre statistique d'un système d'ondes. Nous expliquons comment cette description cinétique conduit le système à l'équilibre. Dans le cadre d'un système quantique de particules indiscernables nous présentons une dérivation nouvelle de l'équation de Boltzmann quantique pour des interactions de coeurs durs. Nous montrons que sous certaines conditions la dynamique future de l'équation de Boltzmann quantique pour des bosons développe une singularité en temps fini comme précurseur de la formation d'un condensat de Bose-Einstein. Nous examinons l'analogue classique de la condensation de Bose-Einstein : la condensation d'ondes à l'aide de l'équation de Schrödinger non linéaire. En effet la théorie de la turbulence faible montre que la dynamique aux temps longs est gouvernée par une équation cinétique à quatre ondes qui suit une singularité en temps fini comme précurseur de la formation d'un condensat d'ondes. Finalement nous obtenons l'équation cinétique à quatre ondes pour la dynamique d'une plaque élastique vibrante.

Table des matières

1	Introduction	9
2	Équilibre statistique	15
2.1	Evolution irréversible vers une onde solitaire dans des systèmes hamiltoniens uni-dimensionnels	15
2.2	Séparation de phases dans l'équation de Schrödinger non linéaire sous critique.	16
2.3	Autres exemples	20
2.3.1	Dynamique de “corsening” dans l'équation de Landau–Lifshitz du magnétisme.	20
2.3.2	Formation des coques gravitationnelles.	22
3	Théorie de turbulence faible	25
3.1	Moments et cumulants	26
3.2	Hiérarchie du type BBGKY pour le cumulants.	29
3.3	Analyse multi-échelle.	30
3.4	Variété résonante et fermeture.	31
3.5	Équations cinétiques pour la turbulence d'ondes.	33
3.6	Spectres de Kolmogorov-Zakharov	35
3.7	Remarque finale	37
4	Sur l'équation de Boltzmann quantique	39
4.1	La hiérarchie BBGKY quantique	41
4.2	Equation cinétique quantique pour des particules discernables . .	42
4.3	Esquisse d'une théorie complète	46
5	Dynamique auto-similaire des équations cinétiques vers la condensation	51
5.1	Équations cinétiques	52
5.1.1	Équation de Boltzmann Quantique (ou de Boltzmann–Nordheim).	52
5.1.2	Approximation locale (ou de Fokker-Planck) de l'équation cinétique de Boltzmann–Nordheim.	55
5.2	Singularité en temps fini de la cinétique	56

5.2.1	Singularité en temps fini dans l'équation de Boltzmann quantique.	56
5.2.2	Singularité en temps finie dans l'approximation locale. . .	60
5.3	Remarques sur le problème $\nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega) = Coll_3[\phi(\omega)]$	62
6	Condensation d'ondes classiques non linéaires	67
6.1	Evidence numérique de condensation d'ondes.	68
6.2	Critère thermodynamique de la condensation d'ondes	71
6.3	Description thermodynamique avec condensat	77
7	Théorie de turbulence faible pour une plaque élastique mince	83
7.1	Théorie statique des plaques élastiques	84
7.2	Théorie de turbulence faible d'une plaque oscillante.	85
7.3	Spectre de Kolmogorov	88
8	Remarques finales	93

Chapitre 1

Introduction

Les mécanismes responsables des processus d’auto-organisation dans les systèmes d’ondes conservatifs et réversibles sont un problème difficile qui a fait l’objet d’un intérêt significatif ces dernières années. Contrairement aux systèmes dissipatifs qui peuvent montrer une évolution irréversible vers un attracteur, un système conservatif Hamiltonien ne peut pas évoluer vers un état ordonné, parce qu’une telle évolution impliquerait une violation du théorème de Liouville, donc une perte d’information statistique pour le système, ce qui violerait sa réversibilité formelle. Néanmoins, un pas important été accompli par V.I. Petviashvili and V.V. Yankov en 1985 et par V.E. Zakharov et collaborateurs en 1988 [1, 2, 3]. Des simulations numériques réalisées dans le cadre de l’équation de Schrödinger non-linéaire *focalisante*, mais non-intégrable, indiquent que le système hamiltonien évoluerait, en règle générale, vers la formation d’une structure localisée à grande échelle (*e.g.* onde solitaire) immergée dans une mer de fluctuations turbulentes de petite échelles. L’onde solitaire joue alors le rôle d’un “attracteur statistique” pour le système hamiltonien, alors que les fluctuations à petite échelle contiennent, en principe, toute l’information nécessaire pour l’inversion temporelle.

De point vue fondamental, la solution onde-solitaire correspond à la solution qui minimise l’énergie (hamiltonien), de sorte que le système approche l’état de plus basse énergie, alors que les fluctuations de petite échelle compensent la différence entre l’énergie initiale (une quantité conservée) et l’énergie de la structure localisée. Remarquablement, si le système hamiltonien est contraint par une intégrale du mouvement supplémentaire (par exemple, le nombre de particules), l’augmentation de l’entropie des fluctuations turbulentes de petite échelle requiert la formation de structures localisées, de telle sorte qu’il est thermodynamiquement avantageux pour le système d’approcher l’état fondamental qui minimise l’énergie [4, 5, 6].

Comme suggéré par Zakharov [2], une description théorique rigoureuse de l’évolution à long terme du système requiert une description thermodynamique du système. Ce n’est que tout récemment que des approches d’équilibre statistique ont été élaborés dans le cadre de la mécanique statistique [5, 6, 7].

D'un autre point de vue, depuis plus de quarante années on a établi que les propriétés statistiques à long terme d'un système d'ondes oscillant de manière aléatoire possèdent une fermeture asymptotique en raison de la nature dispersive des ondes et de l'interaction faiblement non-linéaire entre elles [8, 9, 10, 11]. Cette "théorie de turbulence faible" s'est avérée une méthode puissante pour étudier l'évolution des systèmes dispersifs d'ondes non-linéaires [12, 13]. Il s'ensuit que la dynamique à long terme est régie par une équation cinétique décrivant l'évolution de la distribution des densités spectrales. Cette méthode a été appliquée aux ondes de surface de gravité [9, 11, 14], aux ondes capillaires [15], les ondes de plasma [16], à l'optique non-linéaire [17], et plus récemment aux vibrations de plaque élastiques [18, 19].

L'équation cinétique a des propriétés semblables à l'équation habituelle de Boltzmann pour les gaz dilués, comme la conservation de l'énergie et de l'implusion, ainsi qu'un théorème-H décrivant la relaxation du système vers l'équilibre : la distribution de Rayleigh-Jeans. Outre les solutions d'équilibre (ou thermo-dynamique), Zakharov a montré [16] que des solutions hors-équilibre en loi de puissance existent également, à savoir les solutions Kolmogorov-Zakharov (KZ), ou spectres de KZ, qui décrivent l'échange des quantités conservées (par exemple l'énergie) entre de grandes et petites échelles.

Des mesures expérimentales de spectres de KZ ont été réalisées dans les ondes de surface de l'océan [20] et dans les ondes de surface capillaires [21, 22, 23] et plus récemment dans le cadre général des ondes de surface [24]. Bien que ces mesures soient possibles dans une fenêtre d'au plus deux décades en fréquence (le plus souvent une, voire moins d'une) et ne peuvent pas discriminer de possibles anomalies ou petits écarts entre les exposants d'une cascade directe d'énergie ou d'une cascade inverse de particules (ou "action de l'onde"), elles ne contredisent pas la théorie. Des simulations numériques ont également montré l'existence de spectres de KZ dans les ondes capillaires faiblement turbulentes [25] et plus récemment dans les ondes de gravité [26] et les plaques élastiques [18].

Dans le chapitre 2 nous décrivons la formation d'une structure cohérente à grande échelle, en particulier on montre que la relaxation vers l'équilibre est gouvernée par la recherche du minimum de l'énergie libre, même si l'évolution est hamiltonienne et réversible. Nous ajoutons quelques exemples où la formation d'une structure est observée après l'évolution à long terme d'une dynamique hamiltonienne.

Ensuite, dans le chapitre 3 de ce mémoire nous décrivons la théorie de la turbulence faible, c'est-à-dire l'existence d'une fermeture naturelle pour la dynamique du spectre de l'onde, *i.e.* le cumulant d'ordre deux, pour un système d'ondes dispersives et faiblement nonlinéaires. En particulier nous discutons des propriétés fondamentales comme les lois de conservation, le théorème-H, le domaine de validité de la théorie, ainsi que les conditions d'existence de spectres réguliers (homogénéité spatiale et séparation précise d'échelle temporelle [13]).

Même si les hypothèses de la théorie de la turbulence faible sont très générale, la validité de l'expansion dépend crucialement de l'échelle considérée, alors la théorie peut bien être valide à grande échelle et échouer à certaines échelles plus petites avant que les mécanismes de dissipation puissent agir (par

exemple pour l'écumes des vagues [27]). De manière générale pour un système isolé, il existe toujours une échelle au delà la théorie n'est plus valide (par exemple la théorie cinétique des gaz est valide seulement si les échelles de variation de la fonction de distribution sont plus longues que le temps de collisions). Alors un régime complètement non linéaire s'établit où différents processus entrent en jeu, comme l'apparition de singularités, structures localisées, vortices, structures cohérents, chocs, déferlements, etc. L'état d'équilibre, ou plus précisément stationnaire est dominé par ces événements [28].

La formation d'une structure cohérente est un effet singulier du point de vue de la théorie cinétique de la turbulence faible dans le sens où le spectre devient non-défini. En effet il est lié à l'apparition spontanée d'une distribution singulière ce qui viole la validité de la théorie cinétique. Nous verrons dans la suite de ce mémoire comment ce type de singularité se développe, en quoi elle consiste, et comment on régularise cette singularité.

Nous avons été amené à ce problème après une étude de la formation d'une singularité en temps fini dans l'équation cinétique de Boltzmann quantique. Suivant, donc, un parcours plus chronologique que logique nous essayons de répondre aux questions de la formation de singularités dans l'équation cinétique des ondes et des gaz. Dans le chapitre 4 nous examinons les problèmes liés à la déduction d'une équation de Boltzmann pour un gaz quantique dilué, en particulier à la lumière d'une Note de Jacques Yvon en 1958 sur cette question. Cette équation a été proposée peu après la fondation de la mécanique quantique, cependant elle est rigoureusement dérivée seulement dans la limite dite de Bogoliubov, c'est-à-dire quand le potentiel d'interaction entre particules est intégrable, ou alors, quand la section efficace de diffusion suite à une collision peut être traitée via l'approximation de Born.

Dans le chapitre 5 nous étudions la formation d'un condensat via une singularité autosimilaire en temps fini. En particulier nous conjecturons que près de la singularité le phénomène est dominé par la dynamique d'une équation cinétique à quatre ondes, de plus il s'agit d'une singularité de deuxième espèce, dans le sens de Zel'dovich, et on esquisse des conditions pour déterminer l'exposant qui gouverne la dynamique près de la singularité.

Il semble naturel que comme la dynamique de l'équation de Schrödinger nonlinéaire (NLS) défocalisant (ou Gross-Pitaevskii comme elle est connue dans la communauté des condensats de Bose-Einstein) est régie par une équation cinétique à quatre ondes alors on peut s'attendre à ce que cette équation exhibe un effet de condensation d'ondes "classiques" puisse construire un condensat d'ondes. Brièvement, l'équation cinétique suit une dynamique autosimilaire, comme dans le chapitre 5, cependant près de la singularité l'équation cinétique n'est plus valide. En effet, le moment d'ordre un n'est plus nul, et les corrections aux ordres supérieures deviennent importantes. Dans le chapitre 6 nous décrivons en détail comment ce phénomène se réalise, en particulier il existe un phénomène de condensation d'ondes classiques qui est analogue à la condensation de Bose-Einstein. À deux dimensions spatiales la condensation d'ondes est sensible à la taille du domaine, et la température critique de condensation tends vers zéro à la limite thermodynamique.

Un système d'ondes nonlinéaires privilégiées sont les déformations d'une plaque élastique plane. Les ondes sont dispersives avec une relation balistique entre la fréquence d'oscillation et le nombre d'onde. L'interaction entre les ondes est alors formellement équivalente, du point de vue de la conservation de l'impulsion et de l'énergie lors d'une collision, à celle d'un système de particules classiques. De plus le terme d'interaction dominant est une interaction à quatre ondes. On pourrait ainsi s'attendre à avoir une condensation d'ondes dans une plaque oscillante de taille finie (qui est normalement le cas), cependant cette condensation n'est pas possible comme on le montrera dans ce mémoire.

À la fin, nous ajoutons une copie des articles qui ont directement connexion avec les sujets traités dans ce mémoire :

“Coalescence and Droplets in the subcritical Nonlinear Schrödinger equation”, [Phys. Rev. Lett. **78**, 1215 (1997).] en collaboration avec C. Josserand.

“Dynamical formation of a Bose–Einstein condensate”, [Physica **D 152-153** pp. 779-786 (2001).] en collaboration avec R. Lacaze, P. Lallemand et Y. Pomeau.

“Condensation of classical nonlinear waves”, Phys. Rev. Lett. **95**, 263901 (2005).] en collaboration avec C. Connaughton, C. Josserand, A. Picozzi, et Y. Pomeau.

“Weak Turbulence for a Vibrating Plate : Can One Hear a Kolmogorov Spectrum?”, [Phys. Rev. Lett. **97**, 025503 (2006).] en collaboration avec G. Düring et C. Josserand.

Ce manuscrit est une suite naturelle des recherches entamées il y a quinze ans en collaboration avec Yves Pomeau sur la dynamique de modèles de superfluide et supersolides, la thermodynamique et la cinétique de la condensation de Bose-Einstein. Je suis gré non seulement de son enthousiasme pour ce sujet mais aussi pour tout son savoir qu'il m'a fait partager.

Dans ce parcours ardu, j'ai pu bénéficier de discussions avec mes amis et collaborateurs Christophe Josserand et Antonio Picozzi ainsi que du travail de Gustavo Düring sur les multiples subtilités de la théorie de la turbulence d'ondes.

Je tiens à mentionner aussi mes discussions avec Mokhtar Adda-Bedia, Arezki Boudaoud, Enrique Cerda, Xavier Leyronas et Thomas Witten, qui se sont avérées toujours stimulantes.

Je voudrais remercier les Professeurs Stephan Fauve, Alan Newell et Alberto Verga pour avoir eu la gentillesse d'accepter d'être les rapporteurs, ainsi que Pierre Couillet, Sergey Nazarenko et Jean-Bernard Zuber, membres du jury.

Je remercie Yves Pomeau qui a bien eu la diligence de lire et corriger le manuscrit original. Son travail a assuré une rédaction compréhensible et acceptable. Ainsi j'ai profité des conseils, remarques et corrections de Xavier Leyronas à plusieurs reprises. Enfin, je remercie Stephan Fauve et Alan Newell pour les commentaires et corrections effectuées à la version finale.

Une partie de ce travail a été réalisée au Département de Physique à la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de l'Universidad de Chile. Je tiens à remercier Fundación Andes, Fondecyt y Anillo Act 15.

Finalmente, agradezco la comprensión y compañía de Claudia, Sofía y la “Parisiense” Olivia.

Chapitre 2

Équilibre statistique

Dans ce chapitre nous identifierons un état d'équilibre comme le minimum de l'énergie libre. Alors la dynamique évolue en règle générale de telle manière que l'énergie libre soit minimum en respectant les quantités conservées. Dans les sections suivantes nous passons en revue quelques exemples qui montrent l'évolution irréversible d'une condition initiale douce mais aléatoire vers un "attracteur statistique" gouverné par la condition que l'énergie soit minimale.

2.1 Evolution irréversible vers une onde solitaire dans des systèmes hamiltoniens uni-dimensionnels

Considérons l'équation de Schrödinger avec une non-linéarité arbitraire telle qu'elle respecte les propriétés fondamentales, telles que : la dynamique est hamiltonienne, *i.e.* $i\partial_t\psi = -\delta H/\delta\bar{\psi}$; donc l'énergie H est conservée et la dynamique est réversible : $\psi(x,t) \rightarrow \bar{\psi}(x,-t)$. L'invariance de phase $\psi(x,t) \rightarrow \psi(x,t)e^{i\alpha}$, avec α une constante réelle, donc la masse $N = \int |\psi(x,t)|^2 dx$ est conservée, et l'invariance vis à vis d'un changement de référentiel Galiléen $\psi(x,t) \rightarrow \psi(x-vt,t)e^{i(vx-v^2t/2)}$, et donc le moment linéaire $P = \text{Im} \left(i \int \bar{\psi} \partial_x \psi dx \right)$ est conservé. Soit cette équation de la forme :

$$i\partial_t\psi = -\frac{1}{2}\partial_{xx}\psi - f(|\psi|^2)\psi; \quad (2.1)$$

avec $f(\cdot)$ une fonction réelle. Alors $H = \int \left(\frac{1}{2}|\partial_x\psi|^2 - F(|\psi|^2) \right) dx$, où $f(s) = F'(s)$.

Zakharov *et al.* [2] considèrent les formes $f(|\psi|^2) = |\psi|$ et aussi $f(|\psi|^2) = |\psi|^2 \frac{1+0.1|\psi|^2}{1+0.5|\psi|^2}$. Dans la figure 2.1 on peut voir l'évolution d'une condition initiale plus ou moins uniforme à $\psi(x,t=0) \approx 1$.

Dans la Ref. [5] la fonction $f(|\psi|^2) = |\psi|$ est aussi considérée, une évolution irréversible vers une onde solitaire Fig. 2.2-gauche est aussi observée. De plus l'onde solitaire se trouve être le minimum d'énergie à nombre de particules constant (puis qu'il est conservé). Ce minimum satisfait l'équation :

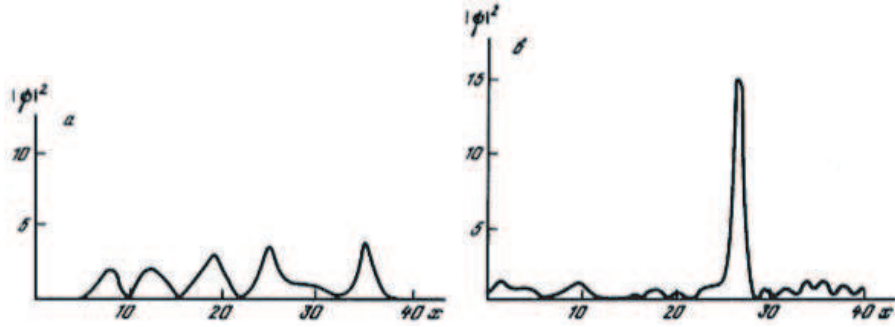


FIG. 2.1 – (D’après [2]) Simulation de (2.1) avec $f(|\psi|^2) = |\psi|^2 \frac{1+0.1|\psi|^2}{1+0.5|\psi|^2}$. À gauche : $t = 52.2$ unités de temps et à droite $t = 203.35$ unités. de temps.

$$\frac{1}{2}\partial_{xx}\psi + f(|\psi|^2)\psi + \mu\psi = 0,$$

où μ est un multiplicateur de Lagrange que doit être fixé par la condition : $N = \int |\psi(x, t)|^2 dx$. Le minimum se trouve naturellement pour un champ $\psi(x)$ avec une phase fixée. Alors pour $\psi(x)$ une fonction réelle, cette équation est complètement intégrable ; en effet

$$\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = \mu\psi^2 + F(\psi^2) + Cte.$$

La constante d’intégration $Cte = 0$ car $\psi \rightarrow 0$ et $\psi_x \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \pm\infty$.

La différence entre l’énergie initiale E_0 et celle que l’on trouve après le processus de minimisation se trouve dans les fluctuations et sa distribution dans les diverses échelles suit la loi d’équipartition. Soit ψ_k la transformée de Fourier de ψ , alors l’énergie par degré de liberté est $k^2|\psi_k|^2$ et $|\psi_k|^2 \sim 1/k^2$.

2.2 Séparation de phases dans l’équation de Schrödinger non linéaire sous critique.

Dans la réf. [4] nous avons étudié la dynamique d’une transition du premier ordre, $F(|\psi|^2) = -\rho_c|\psi|^4 + \frac{1}{3}|\psi|^6$. Notre point de départ était l’équation de Schrödinger non linéaire sous-critique¹

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi - 2\rho_c|\psi|^2\psi + |\psi|^4\psi; \quad (2.2)$$

ρ_c est une constante liée à la densité critique pour la cavitation, c’est à dire la création d’une bulle c’est-à-dire un état tel que $\psi = 0$ localement. Il est utile

¹En général nous parlerons dans contexte de l’hélium superfluide, c’est-à-dire un liquide.

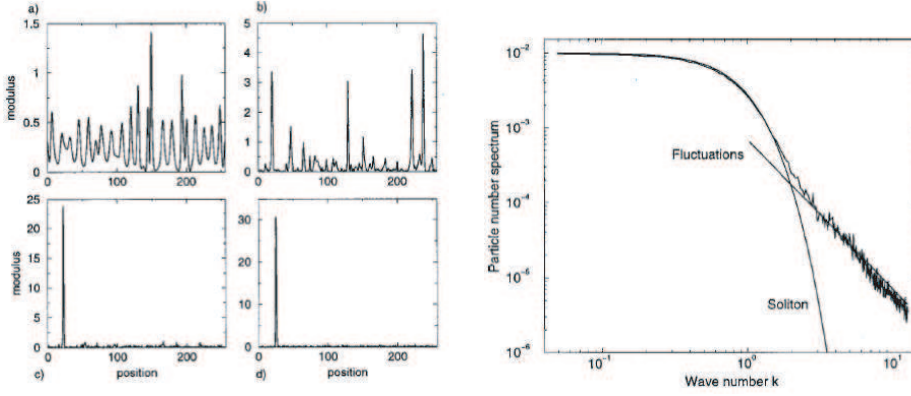


FIG. 2.2 – (D’après [5]) À Gauche : Séquence dans le temps de l’évolution. Noter que l’échelle n’est pas la même entre le temps initial et le temps final. À droite : une comparaison entre le spectre de l’onde solitaire et celui de la fonction d’onde ψ . La droite représente le spectre d’équipartition $1/k^2$.

de définir $\rho = |\psi|^2$ que nous appellerons la “densité locale du liquide” alors, la masse totale ou nombre de particules, $N = \int \rho d^D x$, est conservé, ainsi que l’énergie :

$$H = \int \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \rho_c |\psi|^4 + \frac{1}{3} |\psi|^6 \right) d^D x \quad (2.3)$$

est également conservé par la dynamique de (2.2).

L’invariance de la phase implique que le comportement aux grandes longueurs d’onde du système est décrit par une variable de phase ; il se trouve que la phase de ψ , ϕ suit une équation d’onde :

$$\partial_{tt} \phi = c_s^2 \nabla^2 \phi, \quad \text{avec} \quad c_s = \sqrt{\rho(\rho - \rho_c)}.$$

Les variation de densité sont la variable conjuguée à la phase. On peut définir une pression, soit en partant de l’énergie (2.3), soit en partant de la vitesse de propagation des ondes car, $\frac{dp}{d\rho} = \rho(\rho - \rho_c)$, *i.e.*

$$p(\rho) = \rho^2 \left(\frac{\rho}{3} - \frac{\rho_c}{2} \right).$$

La pression s’anule pour $\rho = \frac{3\rho_c}{2}$ et elle devient négative pour $\rho < \frac{3\rho_c}{2}$. la cavitation, cependant, apparaît lorsque $c^2 < 0$, *i.e.* $\rho < \rho_c$.

Nous avons observé deux comportements différents : la coalescence et la formation des gouttelettes. Dans les processus de coalescence, la taille linéaire typique des domaines évolue comme une puissance dans le temps ; et la fonction de corrélation de la densité suit une dynamique auto-similaire avec la loi d’échelle habituelle. Pour différentes conditions initiales, nous observons la nucléation et

la dynamique des état localisés stables. Ces deux résultats peuvent être comparés à la cavitation de l'hélium quatre superfluide ou pour la filamentation dans un système optique non-linéaire ou pour les condensats de Bose-Einstein.

À une dimension spatiale on peut trouver facilement la solution qui minimise l'énergie :

$$\rho(x) = \frac{3\rho_c}{2} \frac{1 - a^2}{2a \cosh^2(\sqrt{2\mu}x) + 1 - a}; \quad (2.4)$$

avec

$$a = \sqrt{1 - \frac{4\mu}{3\rho_c^2}}.$$

Le paramètre sans dimensions a caractérise complètement la solution. Nous reproduisons dans la Fig. 2.3 différents solitons pour différentes valeurs de a .

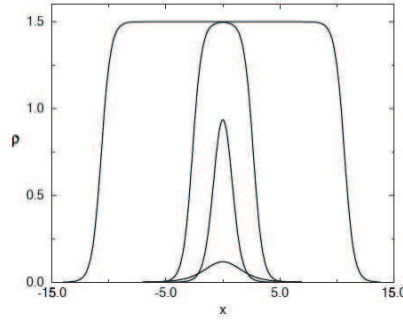


FIG. 2.3 – Forme de la solution type onde solitaire pour différentes valeurs du nombre de particules N , à partir des grands fronts jusqu'aux plus petits, N prend les valeurs : 32, 8, 2, 1/2. L'unité spatiale est $s = \rho_c x$ et ρ_c est choisi comme échelle de densité.

Après avoir imposé le nombre total de particules égal à : $N = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx$, on trouve :

$$\mu = \frac{3\rho_c^2}{4} \tanh^2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} N \right); \quad (2.5)$$

alors, N est directement lié au paramètre a par $a = 1 / \cosh \left(\sqrt{2/3} N \right)$.

Dans la limite thermodynamique ($N \rightarrow \infty$) a tend vers 0, *i.e.* $\mu \rightarrow \frac{3\rho_c^2}{4}$, et le soliton tend vers la forme d'un front $\rho = 0$ (à $x \rightarrow -\infty$) jusqu'à $\rho = 3/2\rho_c$ pour une région intermédiaire (arbitrairement grande qui dépend linéairement de N) proche de $x = 0$, et à nouveau $\rho = 0$ pour $x \rightarrow \infty$. La valeur $\rho = 3/2\rho_c$ est telle que l'équilibre de pressions est établi $p(\rho = 0) = p(\rho = 3/2\rho_c) = 0$. Une situation similaire apparaît à deux dimensions d'espace, cependant des solutions intégrables analytiquement n'existent pas.

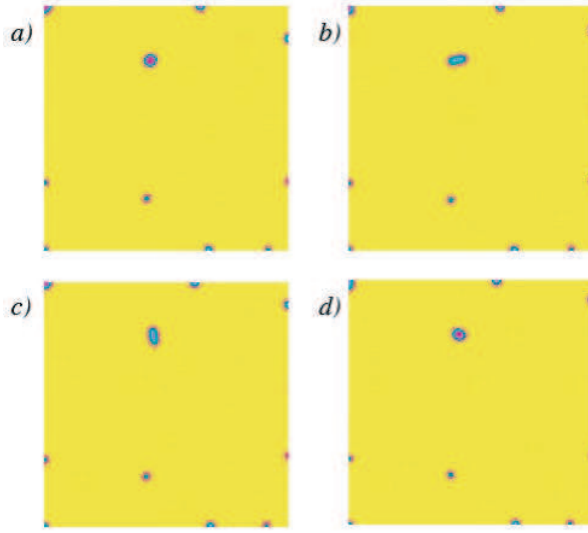


FIG. 2.4 – Séquence temporelle d’un état dominé par une goutte oscillatoire de a) à d). Nous avons employé une méthode en différence-finie Crank-Nicholson/Gauss-Seidel avec une grille de $dx = 1.0$ dans a boîte de 256^2 avec des conditions aux bords de Neuman.

Si la densité locale ρ est plus petite que ρ_c , une instabilité à grand longueur d’onde se développe parce que c^2 est négatif. Des perturbations linéaires de la densité : $\rho + \delta\rho_k e^{ik \cdot x + \sigma_k t}$, avec

$$\sigma_k = \sqrt{\rho(\rho_c - \rho)k^2/2 - k^4/4}$$

sont instables pour toute perturbation de longueur d’onde telle que : $k < \sqrt{2\rho(\rho_c - \rho)}$. Dans ce cas-ci, ($\rho \leq \rho_c$) nous obtenons numériquement aux temps courts une modulation cellulaire d’une taille $\ell \approx 1/\sqrt{2\rho(\rho_c - \rho)}$, voir 2.5-a. La matière est ejectée d’un domaine à d’autres voisins. Ensuite la séparation de phase est établie avec des domaines de densités bien définies soit $\rho \approx \frac{3}{2}\rho_c$ où $\rho \approx 0$ menant à une coalescence et une évolution lente-irréversible vers une structure à grande échelle comme observé dans la “transition de Coarsening”, voir figure 2.5.

La taille typique des structures évolue comme $\ell(t) \sim t^{1/2}$ à deux dimensions ; d’ailleurs, les simulations numériques montrent que le facteur de structure $S(k, t) = \langle |\psi_k(t)|^2 \rangle$, évolue comme

$$S(k, t) = \ell(t)^D \mathcal{S}_D(\ell(t)k).$$

où $\mathcal{S}_D(\cdot)$ est une fonction universelle [4].

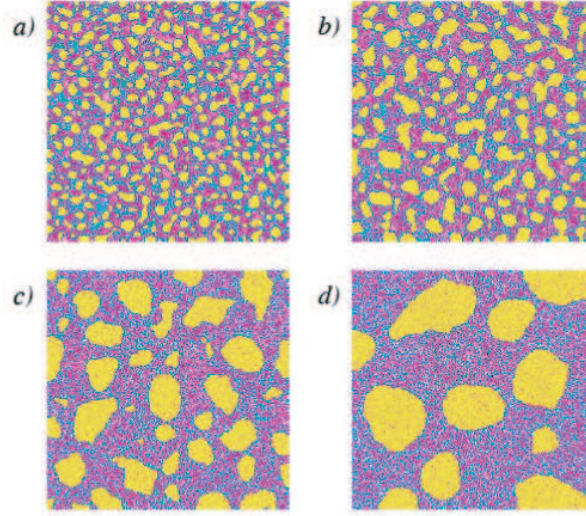


FIG. 2.5 – À Gauche : Séquence dans le temps de la coalescence des “bulles”. L’échelle représente la phase vapeur $\psi = 0$ en orange (ou gris clair en impression noir et blanc) et le “liquide” en violet (gris foncé). Les images sont prises : a) à $t = 36.2$; b) $t = 61.1$; c) $t = 203.35$; et d) $t = 634.7$ unités de temps de NLS. Le nombre de bulles diminue avec le temps suivant la loi $\sim t^{-1}$, comme d’habitude dans les phénomènes de coalescence.

2.3 Autres exemples

Dans ces sections nous décrivons brièvement deux systèmes (dont un avec des interactions à long porté) où la dynamique à long terme évolue vers une structure coherent.

2.3.1 Dynamique de “corsening” dans l’équation de Landau–Lifshitz du magétisme.

L’équation de Landau-Lifshitz pour un vecteur unitaire qui peut tourner dans la sphère unitaire à trois dimensions spatiales est l’équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{S} \times (\nabla^2 \mathbf{S} + S_z \hat{e}_z). \quad (2.6)$$

Cette équation suit une dynamique hamiltonienne

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{S} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}}$$

avec

$$H = \frac{1}{2} \int ((\nabla S_x)^2 + (\nabla S_y)^2 + (\nabla S_z)^2 + (S_z)^2) d\mathbf{x}$$

et préserve l'unitarité : $\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = 1$ ainsi que l'aimantation initiale $\mathcal{M} = \int S_z d^D \mathbf{x}$.

Pour une situation où $S_z \approx 1$ (ou $S_z \approx -1$) S_x et S_y suivent, si on défini $\psi = S_x + iS_y$, l'équation de NLS focalisante. Comme montré par Rumpf et Newell [6] une instabilité modulationnelle se développe comme dans la section précédente. Notons que S_x et S_y restent bornés car le vecteur $\mathbf{S}$ est unitaire.

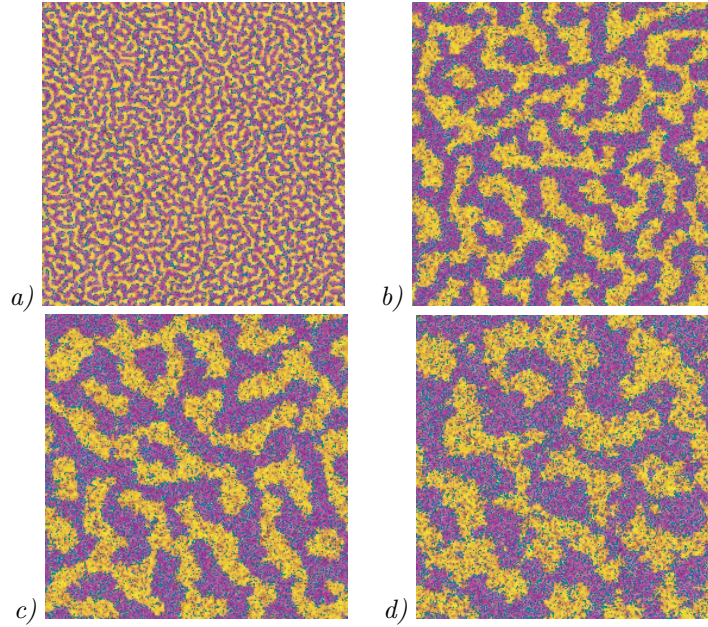


FIG. 2.6 – Séquence dans le temps de la coalescence des domaines magnétiques. L'aimantation initiale par unité de surface est $\mathcal{M} = 0$. L'échelle représente la phase $S_z = -1$ en orange (ou gris clair en impression noir et blanc) et le $S_z = 1$ en violet (gris foncé). Les images sont prises à : a) $t = 100$; b) $t = 20000$; c) $t = 50000$; et d) $t = 150000$ unités de temps.

Cette instabilité développe rapidement une séparation de domaines qui suit une dynamique très lente dans le temps du type “coarsening”. En guise d'exemple dans la figure 2.6 l'aimantation initiale est nulle et dans ce cas on observe la séparation des domaines dans une structure labirintique qui change son échelle dans le temps de manière auto-similaire. Si l'aimantation est proche de l'unité le système engendre rapidement des bulles magnétiques qui coalescent dans le temps. L'évolution est très similaire à celle de la section précédente, sauf que les états $S_z = 1$ et $S_z = -1$ sont complètement symétriques et les lois

d'échelle ne sont pas universelles car l'exposant critique par la croissance de domaines dépend explicitement de l'aimantation initiale.

Rumpf et Newell [6] ont aussi montré que dans les zones où $S_z \approx \pm 1$ l'équilibre statistique est atteint, la distribution d'équilibre étant donnée par la distribution de Jeans ; de plus lorsque l'énergie initiale diminue le système suit une transition du type ferromagnétique, et il existe une énergie critique analogue à une température de Curie.

La condition initiale est $S_z = S_0$ avec $-1 \leq S_0 \leq 1$, $S_x = \sqrt{1 - S_0^2} \cos \varphi$ et $S_y = \sqrt{1 - S_0^2} \sin \varphi$ avec φ une variable aléatoirement distribué dans $[-\pi, \pi]$.

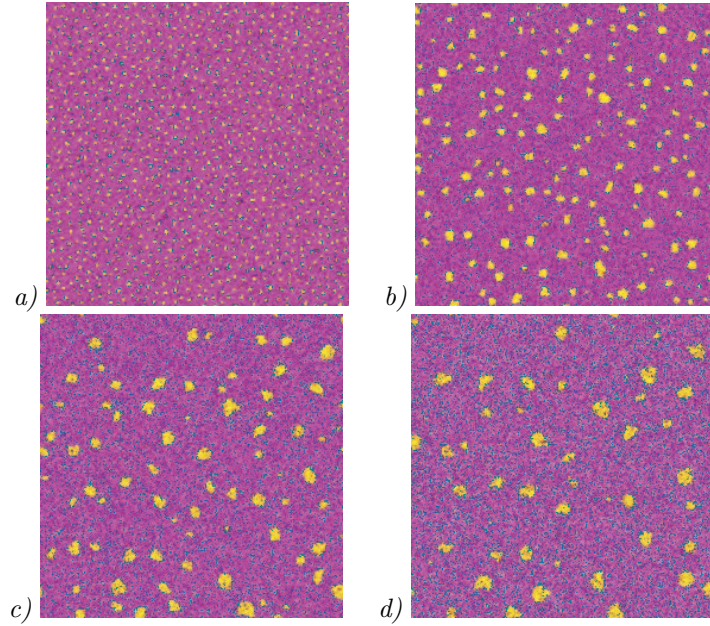


FIG. 2.7 – Séquence dans le temps de la coalescence des domaines magnétiques. L'aimantation initiale par unité de surface est $\mathcal{M} = 0.75$. Même échelle que la figure précédente. Les images sont prises : a) $t = 100$; b) $t = 50000$; c) $t = 100000$; et d) $t = 150000$ unités de temps.

2.3.2 Formation des coques gravitationnelles.

À la différence des exemples antérieurs cet exemple considère des interactions à longue portée comme c'est le cas des forces gravitationnelles. Un problème important en astrophysique est lié à la dynamique aux temps longs d'un ensemble de particules massives en interaction gravitationnelle. Même si à cause des forces à longue portée il n'existe pas de résultat formel pour l'équilibre thermodynamique, des simulations numériques montrent que parfois il existe une

dynamique vers un état type attracteur statistique. Ce-ci est le cas lorsque des structures en formes de coquilles se forment².

Soit une grande masse M au repos au centre du système de coordonnées, et N masses m telles que $m \ll M$ et $mN \ll M$ de telle façon que la masse au centre reste au repos. L'énergie du système est alors

$$H = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m \mathbf{v}_n^2 - GMm \sum_{n=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r}_n|} - Gm^2 \sum_{l < n}^N \frac{1}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_n|}.$$

Soit une condition initiale où toutes les particules se dirigent vers la masse centrale avec un paramètre d'impact petit et distribué de manière telle que le moment angulaire initial soit nul (voir Figure 2.8-a).

Suivant les principes de minimum d'énergie, on extrémise l'énergie à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange pour assurer la conservation du moment angulaire

$$\mathbf{L} = m \sum_{n=1}^N \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n.$$

Le terme d'interaction entre les masses $-Gm^2 \sum_{l < n}^N \frac{1}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_n|}$ est négligé car il est de l'ordre de $G(mN)^2/R$ alors que les autres sont de l'ordre de $GM(mN)/R$. Si ces termes sont absents les N masses sont complètement découplées les une des autres. Cependant même si l'interaction entre les différentes particules est négligeable, c'est cette interaction qui assure la non-intégrabilité et le mélange futur. On minimise donc

$$F = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} m \mathbf{v}_n^2 - GMm \sum_{n=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r}_n|} - \boldsymbol{\lambda} \cdot \sum_{n=1}^N m \mathbf{r}_n \times \mathbf{v}_n, \quad (2.7)$$

par rapport aux coordonnées $\mathbf{r}_n$ et vitesses $\mathbf{v}_n$. Dans (2.7) $\boldsymbol{\lambda}$ sont les multiplicateurs de Lagrange qui assurent la conservation du moment angulaire,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}_n} = \frac{GMm}{|\mathbf{r}_n|^3} \mathbf{r}_n + m \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{v}_n = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}_n} = m \mathbf{v}_n - m \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}_n = 0, \quad (2.9)$$

d'où l'on obtient

$$\frac{GM}{|\mathbf{r}_n|^3} \mathbf{r}_n = -\boldsymbol{\lambda} \times (\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}_n) = |\boldsymbol{\lambda}|^2 \mathbf{r}_n,$$

où la dernière égalité résulte de $\boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{r}_n = 0$. Alors

$$\frac{GM}{|\mathbf{r}_n|^3} = \lambda^2.$$

²Je remercie Andrés Meza de l'Université du Chili qui m'a communiqué un tel phénomène.

Toutes les particules orbitent à une même distance R du centre, de plus λ est la fréquence angulaire de rotation à cause de la troisième loi de Kepler. Le plan de rotation de la n -ième particule $\hat{z}_n$ reste arbitraire, cependant il doit satisfaire à

$$\mathbf{L} = m\sqrt{GMR} \sum_{n=1}^N \hat{z}_n \approx 0.$$

On comprend donc que lorsque $N \rightarrow \infty$, la distribution des plans doit se faire uniformément sur la sphère unitaire.

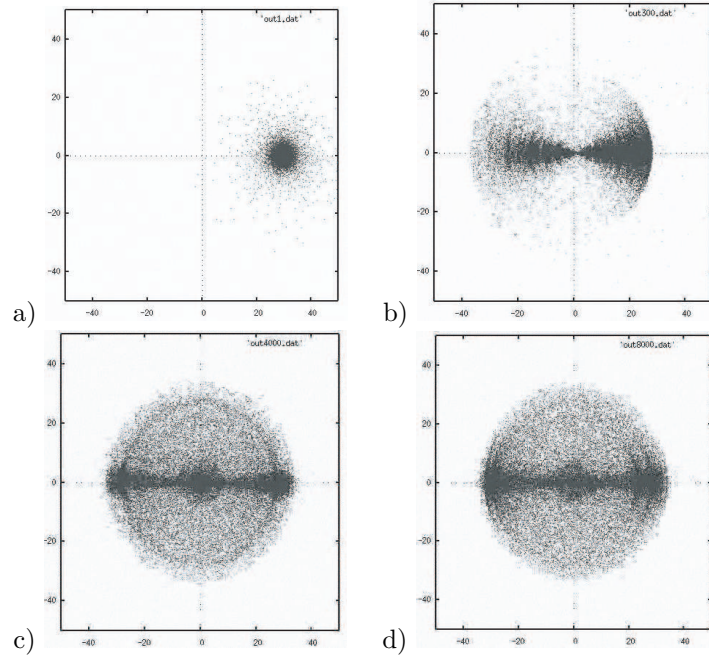


FIG. 2.8 – (Gentillesse d'Andrés Meza, Université du Chili.) Séquence dans le temps de la formation d'une coque gravitationnelle de matière. Les images sont prises : a) $t = 0$; b) $t = 300$; c) $t = 3000$; et d) $t = 8000$ unités de temps.

Chapitre 3

Théorie de turbulence faible

La dynamique à long terme des ondes dispersives aléatoires dans un système possèdent une fermeture asymptotique naturelle quand il y a des interactions non-linéaires faibles entre les ondes [8, 9, 10, 11] (pour plus de détails voir les références plus récentes [12, 13]). Il en résulte que la dynamique à long terme est régie par une équation cinétique, semblable à l'équation habituelle de Boltzmann pour un gaz dilué mais sans “*Stosszahlansatz*”, pour la distribution des densités spectrales. Cette équation cinétique tient compte de l'interaction entre les modes à cause “d'une résonance interne”. Si la relation de dispersion des ondes est quadratique dans le nombre d'onde alors les mathématiques derrière cette condition de résonance sont formellement identiques à la conservation de l'énergie et de l'impulsion dans un gaz classique ou quantique.

D'ailleurs, la dynamique de l'équation cinétique conserve l'énergie cinétique et le moment linéaire, de plus un théorème–H fournit l'équilibre caractérisé par une distribution du type Rayleigh-Jeans. Par conséquent, un système isolé évolue d'un état initial aléatoire à une situation d'équilibre statistique comme le fait un gaz de particules. Considérons un oscillateur non-linéaire qui suit une dynamique Hamiltonienne dans l'espace de Fourier, caractérisée par l'amplitude de Fourier de l'onde : $A_{\mathbf{k}}(t)$ et la variable canonique conjugué : $A_{\mathbf{k}}^*(t)$. La relation de dispersion est $\omega_{\mathbf{k}}$ et on suppose que dans le système original existe un petit paramètre ϵ qui mesure le rapport relative entre chaque term nonlinéaire.

La forme général pour la dynamique de $A_{\mathbf{k}}(t)$ est

$$\begin{aligned} \frac{dA_{\mathbf{k}}^s}{dt} = & -is\omega_{s\mathbf{k}}A_{\mathbf{k}}^s + \epsilon \sum_{s_1 s_2} \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{ss_1 s_2} A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} A_{\mathbf{k}_2}^{s_2} \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d^D \mathbf{k}_{12} + \quad (3.1) \\ & + \epsilon^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{ss_1 s_2 s_3} A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} A_{\mathbf{k}_2}^{s_2} A_{\mathbf{k}_3}^{s_3} \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d^D \mathbf{k}_{123} + \mathcal{O}(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Les matrices $L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{ss_1 s_2}$, $L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{ss_1 s_2 s_3}$ dépendent explicitement du détail du système original et elles possèdent en général diverses symmetries.

En guise d'exemple, pour les ondes capillaires $\omega_{\mathbf{k}} \sim k^{3/2}$ et le terme quadratique, soit le premier ordre en ϵ est suffisant, on dit alors que l'interaction

à trois ondes domine la dynamique lente. Pour l'équation de Schrödinger non-linéaire (NLS) $\omega_k \sim k^2$ et il n'existe pas de terme quadratique et la matrice L du terme cubique est bien plus simple (voir plus loin, chapitre 6), la dynamique est gouvernée par l'interaction à quatre ondes. Pour les ondes de gravité $\omega_k \sim k^{1/2}$, l'interaction à trois ondes n'est pas resonante, il faut donc, aller à l'ordre suivant et comme dans NLS c'est l'interaction à quatre ondes qui domine la dynamique. Pour la derivation des équations cinétiques, l'article de revue récent d'A. Newell, S. Nazarenko et L. Biven [13] est la référence pour les calculs et détails complémentaires.

Comme dans [13], nous définissons $A_{\mathbf{k}}^s$ avec les deux choix possibles $s = +, -$ correspondant à la direction de propagation, telle que $A_{\mathbf{k}}^+ \equiv A_{\mathbf{k}}$ alors que $A_{\mathbf{k}}^- \equiv A_{-\mathbf{k}}^*$ (Notons que $A_{-\mathbf{k}}^- = A_{\mathbf{k}}^{s*}$).

3.1 Moments et cumulants

Si $\phi^s(\mathbf{x})$ est le champ dans l'espace physique alors le moment d'ordre N est donné par

$$M_N^{s_1, \dots, s_N}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_N) = \langle \phi^{s_1}(\mathbf{x}) \phi^{s_2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) \dots \phi^{s_N}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_N) \rangle$$

où $\langle \dots \rangle$ signifie la moyenne d'ensemble. L'homogénéité spatiale¹ impose que le moment d'ordre N ne dépend pas du choix de l'origine $\mathbf{x}$. Les moments dans l'espace physique son directement liés au moment dans l'espace de Fourier, en effet, soit

$$\phi^s(\mathbf{x}, t) = \int A_{\mathbf{k}}^s(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^D \mathbf{k}, \quad (3.2)$$

alors

$$M_N^{s_1, \dots, s_N} = \int e^{i(\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_N) \cdot \mathbf{x}} \langle A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} \dots A_{\mathbf{k}_N}^{s_N} \rangle e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x}_N)} d^D \mathbf{k}_1 \dots d^D \mathbf{k}_N.$$

En accord avec l'homogénéité spatiale le moment $\langle A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} \dots A_{\mathbf{k}_N}^{s_N} \rangle$ doit imposer $\mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_N = 0$, ce qui fait apparaître des termes du type δ de Dirac, voir plus bas.

On remarque, que les moment ne sont pas des quantités pertinentes car ils ne s'annulent pas lorsque les variables $|\mathbf{x}_2| \rightarrow \infty, |\mathbf{x}_3| \rightarrow \infty, \dots |\mathbf{x}_N| \rightarrow \infty$ de manière indépendante (la transformée de Fourier possèdent des singularités).

Au contraire des moments les cumulants dans l'espace physique décroissent à l'infini. Les cumulants dans l'espace physique notés par R 's

$$R^{(N)s_1, \dots, s_N}(\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_N) = \{ \phi^{s_1}(\mathbf{x}) \phi^{s_2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) \dots \phi^{s_N}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_N) \}$$

sont reliés quant à eux aux moments M 's :

¹Par homogénéité spatiale nous voulons dire : si $\phi^s(\mathbf{x})$ est le champ initial alors le moment $M_N^{s_1, \dots, s_N} = \langle \phi^{s_1}(\mathbf{x}) \phi^{s_2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) \dots \phi^{s_N}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_N) \rangle$ ne dépend pas du choix de l'origine $\mathbf{x}$. Notons que même si à l'instant initial elle est valide, cette hypothèse pourrait être brisée par la dynamique future [13].

$$\begin{aligned}
M_1^s &= \langle \phi^s(\mathbf{x}) \rangle = \{\phi^s(\mathbf{x})\} = R^{(1)s}, \\
M_2^{s_1, s_2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) &= \langle \phi^{s_1}(\mathbf{x}) \phi^{s_2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) \rangle = \{\phi^{s_1}(\mathbf{x}) \phi^{s_2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2)\} + \{\phi^s(\mathbf{x})\} \{\phi^{s_2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2)\} \\
&= R^{(2)s_1 s_2}(\mathbf{x}_2) + R^{(1)s_1} R^{(1)s_2}, \\
M_3^{s_1, s_2, s_3}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) &= \langle \phi^{s_1}(\mathbf{x}) \phi^{s_2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_2) \phi^{s_3}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_3) \rangle = R^{(3)s_1 s_2 s_3}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) + \\
&+ R^{(1)s_1} R^{(2)s_2 s_3}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) + R^{(1)s_2} R^{(2)s_1 s_3}(\mathbf{x}_3) + R^{(1)s_3} R^{(2)s_1 s_2}(\mathbf{x}_2) + \\
&+ R^{(1)s_1} R^{(1)s_2} R^{(1)s_3}, \\
M_4^{s_1, s_2, s_3, s_4}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) &= R^{(4)s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + R^{(1)s_1} R^{(3)s_2 s_3 s_4}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2) + \\
&+ \mathcal{P}_{234} R^{(1)s_2} R^{(3)s_1 s_3 s_4}(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4) + \mathcal{P}_{234} R^{(2)s_1 s_2}(\mathbf{x}_2) R^{(2)s_3, s_4}(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3) + \\
&+ R^{(1)s_1} \mathcal{P}_{234} R^{(1)s_2} R^{(2)s_3 s_4}(\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3) + \mathcal{P}_{234} R^{(1)s_2} R^{(1)s_3} R^{(2)s_1 s_4}(\mathbf{x}_4) + \\
&+ R^{(1)s_1} R^{(1)s_2} R^{(1)s_3} R^{(1)s_4},
\end{aligned}$$

etcætera.

Finalement on notera par Q s les transformées de Fourier des cumulants R s par :

$$R^{(N)s_1 \dots s_N}(\mathbf{x}_2 \dots \mathbf{x}_N) = \int Q^{(N)s_1 \dots s_N}(\mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_N) e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2 + \mathbf{k}_N \cdot \mathbf{x}_N)} d^D \mathbf{k}_2 \dots d^D \mathbf{k}_N.$$

À partir de (3.1) on peut écrire des équations intégrales directement pour les moments $\langle A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} \dots A_{\mathbf{k}_N}^{s_N} \rangle$. Cependant, avant de faire cela on établira une relation entre les moments et les cumulants dans l'espace de Fourier. Considérons la transformée inverse de Fourier de (3.2) :

$$A_{\mathbf{k}}^s(t) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int \phi^s(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^D \mathbf{x}, \quad (3.3)$$

alors

$$\begin{aligned}
\langle A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^D} \int M_1^s e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^D \mathbf{x} = M_1^s(t) \delta^{(D)}(\mathbf{k}) = Q^{(1)s}(t) \delta^{(D)}(\mathbf{k}) \\
\langle A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} A_{\mathbf{k}_2}^{s_2} \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^{2D}} \int M_2^{s_1, s_2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) e^{-i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{k}_2 \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}_2))} d^D \mathbf{x} d^D \mathbf{x}_2 = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^D} \int (R^{(2)s_1 s_2}(\mathbf{x}_2) + R^{(1)s_1} R^{(1)s_2}) e^{-i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x}_2} d^D \mathbf{x}_2 \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \\
&= Q^{(2)s_1 s_2}(\mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) + Q^{(1)s_1}(t) Q^{(1)s_2}(t) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_2), \\
\langle A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} A_{\mathbf{k}_2}^{s_2} A_{\mathbf{k}_3}^{s_3} \rangle &= Q^{(3)s_1 s_2 s_3}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \\
&+ \mathcal{P}_{123} Q^{(1)s_1}(t) Q^{(2)s_1 s_3}(\mathbf{k}_3) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_3) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) + \\
&+ Q^{(1)s_1}(t) Q^{(1)s_2}(t) Q^{(1)s_3}(t) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_3), \\
\langle A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} A_{\mathbf{k}_2}^{s_2} A_{\mathbf{k}_3}^{s_3} A_{\mathbf{k}_4}^{s_4} \rangle &= Q^{(4)s_1 s_2 s_3 s_4}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \\
&+ \mathcal{P}_{1234} Q^{(1)s_1}(t) Q^{(3)s_2 s_3 s_4}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \\
&+ \mathcal{P}_{234} Q^{(2)s_1 s_2}(\mathbf{k}_2) Q^{(2)s_3 s_4}(\mathbf{k}_4) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \\
&+ \mathcal{P}_{123} Q^{(1)s_2} Q^{(1)s_3} Q^{(2)s_1 s_4}(\mathbf{k}_4) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_3) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_4) + \\
&+ \mathcal{P}_{234} Q^{(1)s_1} Q^{(1)s_2} Q^{(2)s_3 s_4}(\mathbf{k}_4) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \\
&+ Q^{(1)s_1}(t) Q^{(1)s_2}(t) Q^{(1)s_3}(t) Q^{(1)s_4}(t) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_3) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_4)
\end{aligned}$$

etcætera.

Il est important souligner que :

$$Q^{(2)s_1 s_2}(\mathbf{k}) = Q^{(2)s_2 s_1}(-\mathbf{k}).$$

Habituellement, le cumulante d'ordre 1 : $Q_1(t)$ est considéré nul car il représente la moyenne du champ classique. Cependant il existe des situations, comme le cas de la condensation d'ondes (chapitre 6), où le champ aléatoire n'est pas de moyenne nulle. Néanmoins, dans la suite on considérera que $Q_1 = 0$. Le cumulante d'ordre 2

$$Q_2^{-ss}(\mathbf{k}) = n(s\mathbf{k}) \equiv n_{s\mathbf{k}} \quad (3.4)$$

est appelé le spectre de l'onde [10].

3.2 Hiérarchie du type BBGKY pour le cumulants.

La prochaine étape consiste à écrire une hiérarchie infinie d'équations integro-differentielles non linéaires ($\mathcal{P}_{1'2'}$ signifie l'échange des $(s'_1 s'_2)$ et $(\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2)$) :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} Q^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) &= i(s'_1 \omega_{\mathbf{k}'_1} + s'_2 \omega_{\mathbf{k}'_2}) Q^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) + \\
&+ \epsilon \mathcal{P}_{1'2'} \sum_{s_1, s_2} \int L_{\mathbf{k}'_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s'_2 s_1 s_2} Q^{(3)s'_1 s_1 s_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) d^D \mathbf{k}_{12} + \\
&+ \epsilon^2 \mathcal{P}_{1'2'} \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{k}'_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{s'_2 s_1 s_2 s_3} Q^{(4)s'_1 s_1 s_2 s_3}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta_{123,1'} d^D \mathbf{k}_{123} + \\
&+ \epsilon^2 \mathcal{P}_{1'2'} \sum_{s_1 s_2 s_3} \int L_{\mathbf{k}'_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{s'_2 s_1 s_2 s_3} \mathcal{P}_{123} Q^{(2)s'_1 s_1}(-\mathbf{k}'_1) Q^{(2)s_2 s_3}(\mathbf{k}_3) \delta_{11',0} \delta_{23,0} d^D \mathbf{k}_{123}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Dans cette équation, on a $\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 = 0$, on a de plus noté : $\delta_{123,1'} = \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}'_1)$ et $\delta_{23,0} = \delta^{(D)}(\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3)$. Des équations similaires peuvent être obtenues pour les cumulants supérieures² :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} Q^{(3)s'_1 s'_2 s'_3}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3) &= i(s'_1 \omega_{\mathbf{k}'_1} + s'_2 \omega_{\mathbf{k}'_2} + s'_3 \omega_{\mathbf{k}'_3}) Q^{(3)s'_1 s'_2 s'_3}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3) + \\
&+ \epsilon \mathcal{P}_{1'2'3'} \sum_{s_1, s_2} \int L_{\mathbf{k}'_3 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s'_3 s_1 s_2} Q^{(4)s'_1 s'_2 s_1 s_2}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) d^D \mathbf{k}_{12} + \\
&+ 2\epsilon \mathcal{P}_{1'2'3'} \sum_{s_1, s_2} L_{\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2}^{s'_3 s_1 s_2} Q^{(2)s_1 s'_1}(\mathbf{k}'_1) Q^{(2)s_2 s'_2}(\mathbf{k}'_2) + \\
&+ \epsilon^2 \mathcal{P}_{1'2'3'} \sum_{s_1, s_2, s_3} \int L_{\mathbf{k}'_3 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3}^{s'_3 s_1 s_2 s_3} Q^{(5)s'_1 s'_2 s_1 s_2 s_3}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \delta_{123,1'2'} d^D \mathbf{k}_{123} + \\
&+ \epsilon^2 (\text{termes}) (Q^{(3)} Q^{(2)}),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

etcætera. Ici nous avons aussi que $\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 + \mathbf{k}'_3 = 0$. La structure de la hiérarchie est similaire à toute ordre : une dépendance à tout ordre d'une oscillation rapide (premières termes de membre de droite des équations (3.5) et (3.6)), et que le nombre d'intégrales à faire diminuent pour les termes qui contiennent un grand nombre de cumulants de bas degré.

Le problème consiste, désormais, à trouver une fermeture à cette hiérarchie infinie d'équations. Litvak [8] et Hasselmann [9] ont supposé des statistiques quasi-Gaussiennes pour fermer cette hiérarchie. Cependant, même si elle est valide à l'instant initial, cette hypothèse pourrait être brisée par la dynamique future. Plus tard Benney et Saffman [10] ont montré un résultat remarquable : les équations cinétiques que nous obtiendrons dans la suite suivante sont asymptotiquement valides, indépendamment des conditions initiales et de si la statistique est Gaussienne ou non, lorsque le petit paramètre $\epsilon \rightarrow 0$.

²On a supposé des symétries pour L et que L s'annule à $k = 0$ [13].

3.3 Analyse multi-échelle.

La stratégie de solution consiste à réaliser une analyse perturbative dans les Q s :

$$Q^{(N)} = Q_0^{(N)} + \epsilon Q_1^{(N)} + \epsilon^2 Q_2^{(N)} + \dots \quad (3.7)$$

et dans le temps (analyse multi-échelle) pour tenir compte des différentes échelles temporelles :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt_0} + \epsilon \frac{d}{dt_1} + \epsilon^2 \frac{d}{dt_2} + \dots$$

L'ordre zéro pour tous les cumulants donne

$$\frac{d}{dt_0} Q_0^{(N)s_1 \dots s_N}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_N) = i(s_1 \omega_{\mathbf{k}_1} + \dots + s_N \omega_{\mathbf{k}_N}) Q_0^{(N)s_1 \dots s_N}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_N).$$

Les cumulants oscillent rapidement dans le temps :

$$Q_0^{(N)s_1 \dots s_N}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_N) = e^{i(s_1 \omega_{\mathbf{k}_1} + \dots + s_N \omega_{\mathbf{k}_N})t_0} q_0^{(N)s_1 \dots s_N}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_N, t_1, t_2 \dots). \quad (3.8)$$

Au premier ordre il en résulte un système infini d'oscillateurs découplés. Nous avons à l'ordre ϵ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_0} Q_1^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) &= i(s'_1 \omega_{\mathbf{k}'_1} + s'_2 \omega_{\mathbf{k}'_2}) Q_1^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) - \frac{d}{dt_1} Q_0^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) + \\ &+ \mathcal{P}_{1'2'} \sum_{s_1, s_2} \int L_{\mathbf{k}'_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s'_2 s_1 s_2} Q_0^{(3)s'_1 s_1 s_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) d^D \mathbf{k}_{12}, \\ \frac{d}{dt_0} Q_1^{(3)s'_1 s'_2 s'_3}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3) &= i(s'_1 \omega_{\mathbf{k}'_1} + s'_2 \omega_{\mathbf{k}'_2} + s'_3 \omega_{\mathbf{k}'_3}) Q_1^{(3)s'_1 s'_2 s'_3}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3) - \frac{d}{dt_1} Q_0^{(3)s'_1 s'_2 s'_3}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3) + \\ &+ \mathcal{P}_{1'2'3'} \sum_{s_1, s_2} \int L_{\mathbf{k}'_3 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s'_3 s_1 s_2} Q_0^{(4)s'_1 s'_2 s_1 s_2}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) d^D \mathbf{k}_{12} + \\ &+ 2\mathcal{P}_{1'2'3'} \sum_{s_1, s_2} L_{\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^{s'_3 s_1 s_2} Q_0^{(2)s_1 s'_1}(\mathbf{k}'_1) Q_0^{(2)s_2 s'_2}(\mathbf{k}'_2). \end{aligned}$$

On peut intégrer directement par rapport à t_0 car les $Q_0^{(N)}$ sont oscillatoires (3.8). Soit

$$Q_1^{(N)s_1 \dots s_N}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_N) = e^{i(s_1 \omega_{\mathbf{k}_1} + \dots + s_N \omega_{\mathbf{k}_N})t_0} q_1^{(N)s_1 \dots s_N}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_N, t_0, t_1, t_2 \dots),$$

alors (on note désormais $\omega_i = \omega_{\mathbf{k}_i}$)

$$q_1^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) = -t_0 \frac{d}{dt_1} q_0^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) + \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & + \mathcal{P}_{1'2'} \sum_{s_1, s_2} \int L_{\mathbf{k}'_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s'_2 s_1 s_2} q_0^{(3)s'_1 s_1 s_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \Delta_{t_0}(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 - s'_2 \omega'_2) \times \\ & \times \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) d^D \mathbf{k}_{12} \\ q_1^{(3)s'_1 s'_2 s'_3}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3) & = -t_0 \frac{d}{dt_1} q_0^{(3)s'_1 s'_2 s'_3}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}'_3) + \quad (3.10) \\ & + \mathcal{P}_{1'2'3'} \sum_{s_1, s_2} \int L_{\mathbf{k}'_3 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s'_3 s_1 s_2} q_0^{(4)s'_1 s'_2 s_1 s_2}(\mathbf{k}'_2, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \Delta_{t_0}(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 - s'_3 \omega'_3) \times \\ & \times \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) d^D \mathbf{k}_{12} + \\ & + 2\mathcal{P}_{1'2'3'} \sum_{s_1, s_2} L_{\mathbf{k}'_3 - \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}'_2}^{s'_3 s_1 s_2} q_0^{(2)s_1 s'_1}(\mathbf{k}'_1) q_0^{(2)s_2 s'_2}(\mathbf{k}'_2) \Delta_{t_0}(s_1 \omega'_1 + s_2 \omega'_2 - s'_3 \omega'_3), \end{aligned}$$

etcætera. Encore une fois, dans (3.9) $\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 = 0$ et dans (3.10) $\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 + \mathbf{k}'_3 = 0$. Ici

$$\Delta_t(x) = \int_0^t e^{ix\tau} d\tau = \frac{e^{ixt} - 1}{ix}.$$

Dans la limite $t \rightarrow \infty$ la distribution $\Delta_t(x)$ est très oscillatoire mais reste bornée. Elle a de plus la propriété :

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int f(x) \frac{e^{itx} - 1}{ix} dx = \pi \operatorname{sgn}(t) f(0) + i \oint \frac{f(x)}{x} dx, \quad (3.11)$$

où $\operatorname{sgn}(t) = t/|t|$ et f correspond à la valeur partie principale de Cauchy de l'intégrale.

3.4 Variété résonante et fermeture.

Plus précisément on a besoin de l'expression asymptotique de l'intégrale de la forme :

$$I = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \int f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \Delta_t(s_1 \omega_{\mathbf{k}_1} + s_2 \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}}) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d^D \mathbf{k}_{12}$$

le terme dominant de l'intégrale est pour $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2)$ dans la variété résonante définie par :

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k} = 0 \quad \& \quad s_1 \omega_{\mathbf{k}_1} + s_2 \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}} = 0.$$

Cependant la valeur limite en dépend si $s_1 \omega_{\mathbf{k}_1} + s_2 \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}}$ s'anulle de manière simple ou double (résonance simple pour le premier cas, résonance double ou dégénéré pour le deuxième). Dans le cas d'une résonance simple, qui est le cas pour les systèmes non dispersifs, nous avons

$$I = \int f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \left[\pi \operatorname{sgn}(t) \delta(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 - s \omega) + iP \left(\frac{1}{s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 - \omega} \right) \right] \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}) d^D \mathbf{k}_{12}.$$

La perturbation $q_1^{(N)}$ doit rester bornée ce qui est le cas du second terme dans (3.9) et dans le second et troisième terme de (3.10). Cependant le premier croît linéairement en t_0 . Alors on impose que $\frac{d}{dt_1} q_0^{(N)} = 0$, c-à-d, $q_0^{(N)} = q_0^{(N)s_1 \dots s_N}(\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \dots, \mathbf{k}_N, t_2)$.

À l'ordre 2 nous avons³ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt_0} q_2^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) &= -\frac{d}{dt_2} q_0^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) - \frac{d}{dt_1} q_1^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) + \mathcal{P}_{1'2'} \sum_{s_1, s_2} \int L_{\mathbf{k}'_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s'_2 s_1 s_2} \times \\ &\times q_1^{(3)s'_1 s_1 s_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{i(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 - s'_2 \omega'_2)t_0} \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) d^D \mathbf{k}_{12} \end{aligned}$$

Ici on a $\frac{d}{dt_1} q_1^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) = 0$ car $q_1^{(2)}$ dépend explicitement de t_0 et des cumulants à ordre zero $q_0^{(N)}$. En intégrant, on trouve

$$\begin{aligned} q_2^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) &= -t_0 \frac{d}{dt_2} q_0^{(2)s'_1 s'_2}(\mathbf{k}'_2) + \\ &+ \mathcal{P}_{1'2'} \sum_{s_1, s_2} \int L_{\mathbf{k}'_2 \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2}^{s'_2 s_1 s_2} \left[\int_0^{t_0} q_1^{(3)s'_1 s_1 s_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{i(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 - s'_2 \omega'_2)\tau} d\tau \right] \times \\ &\times \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1) d^D \mathbf{k}_{12} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Le terme dominant pour la dynamique de $q_1^{(3)}$ dans (3.10), lorsque $t \rightarrow \infty$ est⁴ :

$$q_1^{(3)s'_1 s_1 s_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = 2\mathcal{P}_{1'12} \sum_{s_4, s_5} L_{\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}'_1 - \mathbf{k}_1}^{s_2 s_4 s_5} q_0^{(2)s_4 s'_1}(\mathbf{k}'_1) q_0^{(2)s_5 s_1}(\mathbf{k}_1) \Delta_{t_0}(s_4 \omega'_1 + s_5 \omega_1 - s_2 \omega_2).$$

Dans l'intégrale :

$$\int_0^t q_1^{(3)s'_1 s_1 s_2}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) e^{i(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 - s'_2 \omega'_2)\tau} d\tau$$

on reconnaît l'existence d'un terme résonant qui croît linéairement dans le temps, en effet

$$\int_0^t \Delta_{t_0}(s_4 \omega'_1 + s_5 \omega_1 - s_2 \omega_2) e^{i(s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 - s'_2 \omega'_2)t_0} dt_0$$

³On rétiendrais ici seulement les termes qui proviennent de l'interaction à trois ondes.

⁴Le terme en $q_1^{(4)}$ ne croît pas avec le temps, donc il n'est pas résonant. En général, même si le cumulants d'ordre N dépend des cumulants d'ordre supérieur à N , il est régénéré seulement par des produits de cumulants d'ordre inférieur à N .

n'est pas rapidement oscillant si l'argument de l'exponentielle ajouté à celui de $\Delta_t(\cdot)$ est nul⁵ : $s_4\omega'_1 + s_5\omega_1 + s_1\omega_1 - s'_2\omega'_2$, c'est à-dire pour $s_5 = -s_1$ et $s_4 = s'_2$ (car rappelons nous que dans (3.12) $\mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2 = 0$).

L'élimination des termes résonants dans (3.12) donne la dynamique finale pour le cumulatif d'ordre deux (voir l'équation cinétique (3.13)).

Cette analyse multi-échelle fournit une fermeture asymptotique lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, *c.-à-d.* pour les temps longs, naturelle pour les moments plus élevés. Les oscillations rapides régénèrent les cumulants d'ordre élevé en terme des cumulatif d'ordre inférieur grâce aux résonances. C'est la résonance qui permet le transfert d'énergie entre les modes aux temps longs. Nous soulignerons, encore une fois, qu'il n'est pas nécessaire aucune supposition sur la statistique des moments ou cumulants, les seules restrictions à la validité de la théorie sont :

Validité asymptotique : limite $\epsilon \rightarrow 0$.

Existence de l'homogénéité spatiale.

Résonances sont simples sur la variété résonante.

Cette dérivation ne s'applique pas aux systèmes linéairement dispersifs, comme les ondes sonores. Cependant, dans la propagation acoustique les vecteurs d'onde très co-linéaires réalisent un effet diffractif entre eux et une fermeture est possible [29]. De même dans les ondes d'Alfvén il est possible obtenir une fermeture [30].

3.5 Équations cinétiques pour la turbulence d'ondes.

Pour l'interaction à trois ondes on trouve à la fin une équation cinétique⁶ :

$$\begin{aligned} \partial_t n_{s\mathbf{k}}(t) &= 4\pi s \sum_{s_1, s_2} \int |L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{ss_1s_2}|^2 n_{s_1\mathbf{k}_1} n_{s_2\mathbf{k}_2} n_{s\mathbf{k}} \left(\frac{s}{n_{s\mathbf{k}}} + \frac{s_1}{n_{s_1\mathbf{k}_1}} + \frac{s_2}{n_{s_2\mathbf{k}_2}} \right) \\ &\times \delta^{(1)}(s\omega_{\mathbf{k}} + s_1\omega_{\mathbf{k}_1} + s_2\omega_{\mathbf{k}_2}) \delta^{(D)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) d^D \mathbf{k}_{12} \end{aligned} \quad (3.13)$$

et une renormalization de la fréquence

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{\mathbf{k}} &= \omega_{\mathbf{k}} + 4\epsilon^2 \sum_{s_1, s_2} \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{ss_1s_2} L_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}-\mathbf{k}_2}^{s_1s-s_2} n_{\mathbf{k}_2} \delta^{(D)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \\ &\times \left(P \frac{1}{s_1\omega_{\mathbf{k}_1} + s_2\omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}}} - i\pi \delta^{(1)}(s_1\omega_{\mathbf{k}_1} + s_2\omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}}) \right) d^D \mathbf{k}_1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

où P signifie que l'on considère la partie principale de Cauchy de l'intégrale.

⁵Notons que si : $\Delta_t[x, y] = \int_0^t e^{iy\tau} \frac{e^{ix\tau} - 1}{ix} d\tau$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \int f(x) \Delta_t[x, -x] dx \sim t \left(\pi \operatorname{sgn}(t) f(0) + i f \frac{f(x)}{x} dx \right)$.

⁶Ici nous avons utilisé des propriétés de symétrie des L 's, pour plus de détails voir [13].

Pour les interactions à quatre ondes, l'équation cinétique plus générale est (ici on considère le cas simplifié où $L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{ss_1s_2} = 0$) :

$$\begin{aligned} \partial_t n_{s\mathbf{k}}(t) &= 4\pi s \sum_{s_1, s_2, s_3} \int |L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{ss_1s_2s_3}|^2 n_{s_1\mathbf{k}_1} n_{s_2\mathbf{k}_2} n_{s_3\mathbf{k}_3} n_{s\mathbf{k}} \left(\frac{s}{n_{s\mathbf{k}}} + \frac{s_1}{n_{s_1\mathbf{k}_1}} + \frac{s_2}{n_{s_2\mathbf{k}_2}} + \frac{s_3}{n_{s_3\mathbf{k}_3}} \right) \\ &\times \delta^{(1)}(s\omega_k + s_1\omega_{k_1} + s_2\omega_{k_2} + s_3\omega_{k_3}) \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d^D \mathbf{k}_{123} \end{aligned} \quad (3.15)$$

et pour la correction de la fréquence :

$$\tilde{\omega}_k = \omega_k - 3i\epsilon^2 \sum_{s_2} \int L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_2-\mathbf{k}_2\mathbf{k}}^{ss_2-s_2s} n_{\mathbf{k}_2} d^D \mathbf{k}_2. \quad (3.16)$$

Parmi les quatre termes de la somme dans l'équation (3.13) un d'entre eux s'anule directement car la condition de résonance $\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}$ se vérifie seulement dans un ensemble de mesure nulle. *Idem* pour (3.15) et la résonance $\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3}$.

Comme l'équation habituelle de Boltzmann, l'énergie cinétique

$$E = \int \omega_k n_{\mathbf{k}}(t) d^D \mathbf{k}$$

et l'impulsion linéaire

$$\mathbf{P} = \int \mathbf{k} n_{\mathbf{k}}(t) d^D \mathbf{k}$$

sont “formellement” ⁷ conservées par l'évolution (3.13) et (3.15) . De plus ces équations cinétiques satisfont à un Théorème-H :⁸

$$\text{soit } S = \int d^D \mathbf{k} \ln n_{\mathbf{k}} \quad \text{alors} \quad \partial_t S \geq 0.$$

La solution d'équilibre (flux nul) annule exactement $Coll[n_k^{eq}]$ et est donnée par la distribution dite de Rayleigh-Jeans

$$n_{\mathbf{k}}^{eq} = \frac{T}{\omega_k - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k}}. \quad (3.17)$$

Sous certaines conditions et à cause des symétries on simplifie l'équation cinétique (3.15) en :

⁷ “Formellement” signifie ici que la preuve exige la convergence de n'importe quelle intégrale simple dans l'échange de l'ordre d'intégration par le théorème du Fubini [13].

⁸ L'entropie de non équilibre définie donne toujours une expression divergente, cependant on pourrait définir

$$S = \int d^D \mathbf{k} \ln (n_{\mathbf{k}}/n_{\mathbf{k}}^{eq})$$

laquelle est au moins nulle pour la distribution d'équilibre (3.17). Le taux de production d'entropie :

$$\mathcal{R} = \int d^D \mathbf{k} \frac{\partial_t n_{\mathbf{k}}}{n_{\mathbf{k}}}$$

donne des expressions finies [34].

$$\begin{aligned}
\partial_t n_{\mathbf{k}}(t) &= \epsilon^4 \int |T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} n_{\mathbf{k}} \left(\frac{1}{n_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{n_{\mathbf{k}_1}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_2}} - \frac{1}{n_{\mathbf{k}_3}} \right) \\
&\times \delta^{(1)}(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_3}) \delta^{(D)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d^D \mathbf{k}_{123}
\end{aligned} \tag{3.18}$$

cette équation décrit le comportement irréversible des ondes aléatoires dans l'équation de Schrödinger non-linéaire ($|T|^2 = 1$) et aussi pour le cas des ondes de surface due à la gravité. Ce dernier cas est un peu plus subtil car l'interaction à trois ondes ne donne pas une intégrale de collision car la condition de résonance n'est pas satisfaite, après la bonne détermination des termes résonants⁹ Zakharov et Filonenko [14] et Newell [11] ont abouti à l'équation (3.18) avec $|T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2$ qui se comporte comme $|T_{\lambda\mathbf{k},\lambda\mathbf{k}_1,\lambda\mathbf{k}_2,\lambda\mathbf{k}_3}|^2 = \lambda^6 |T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2$.

3.6 Spectres de Kolmogorov-Zakharov

Mis à part la conservation de l'énergie cinétique et du moment linéaire, l'évolution (3.18) préserve l'action de l'onde

$$\mathcal{N} = \int n_{\mathbf{k}}(t) d^D \mathbf{k}.$$

Dans ce cas, la solution d'équilibre est

$$n_{\mathbf{k}}^{eq} = \frac{T}{\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \mu}. \tag{3.19}$$

Tant (3.17) que (3.19) sont des solutions formelles seulement, parce qu'ils ne donnent une expression convergente ni pour l'énergie ni pour la masse. Cette divergence n'est pas physique et l'équation cinétique nécessite un amortissement pour le régime ultra-violet. Bien que l'évolution future n'est pas assuré d'être régulier, voir chapitre 6, le seul état d'équilibre dans un système isolé est la distribution de Rayleigh-Jeans.

Comme déjà remarqué, l'équation (3.18) possède des solutions exactes de non-équilibre découvertes par une suite d'astuces par Zakharov. Explicitement si

$$\omega_{\mathbf{k}} \sim k^\alpha \quad \text{et} \quad |T_{\lambda\mathbf{k},\lambda\mathbf{k}_1,\lambda\mathbf{k}_2,\lambda\mathbf{k}_3}|^2 = \lambda^\beta |T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2, \tag{3.20}$$

⁹La matrice $|T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2$ est un peu plus compliquée que celle où $L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2}^{ss_1s_2} = 0$, en effet il faut prendre

$$\tilde{L}_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{ss_1s_2s_3} = L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{ss_1s_2s_3} - \frac{2i}{3} P \sum_{s_4} \frac{L_{\mathbf{k}\mathbf{k}_4\mathbf{k}_1}^{s-s_4s_1} L_{\mathbf{k}_4\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}^{-s_4s_2s_3}}{s_2\omega_{\mathbf{k}_2} + s_3\omega_{\mathbf{k}_3} + s_4\omega_{\mathbf{k}_4}},$$

avec $\mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$, et P signifie toutes les permutations possibles de 1, 2 et 3. Finalement, notons que si $\omega_{\mathbf{k}} \sim k^\alpha$ avec $\alpha < 1$, alors les interactions à quatre ondes de la forme $\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} + \omega_{\mathbf{k}_3}$ ne sont pas résonantes.

alors

$$n_k^J = C \frac{J^{1/3}}{k^{(\beta-\alpha)/3+D}} \quad (3.21)$$

$$n_k^P = C \frac{P^{1/3}}{k^{\beta/3+D}} \quad (3.22)$$

où J est le flux de “l’action de l’onde” et P le flux d’énergie dans l’espace de Fourier. Pour NLS à D dimensions d’espace $\beta = 0$ et $\alpha = 2$ alors

$$n_k^J = C \frac{J^{1/3}}{k^{D-2/3}} \quad (3.23)$$

$$n_k^P = C \frac{P^{1/3}}{k^D}. \quad (3.24)$$

Bien que les solutions de Zakharov, (*e.g.* (3.21) et (3.22), où bien (3.23) et (3.24)) sont des solutions exactes d’un système isolé, elles devraient être interprétées seulement dans le cadre d’un système non isolé. Par exemple quand il existe un forçage externe qui assure un flux d’énergie ou de “particules” (action de l’onde) d’une échelle à une autre, ou bien si une condition de frontière dans l’espace des nombres d’ondes k nous permet un tel flux. Comme dit plus haut, pour un système isolé le seul état d’équilibre est la solution de Rayleigh-Jeans.

Il faut souligner, cependant, que l’importance de solutions à flux finies ne se situe pas dans leur comportement en loi de puissance, par exemple comme dans (3.21) et (3.22), où bien (3.23) et (3.24), mais dans le fait qu’il existe des solutions stationnaires des équations cinétiques que assurent le tranfert des quantités conservées, comme l’énergie, d’une échelle à l’autre. La forme explicite en loi de puissance dépend de l’existence des homogénéités précises de la relation de dispersion et de la matrice d’interaction T , comme souligné plus haut (3.20). En général le comportement de la relation de dispersion, ainsi que celle des matrices d’interactions non linéaires, changent avec l’échelle, mais l’énergie, par exemple, est transportée de l’échelle d’injection jusqu’à celle où elle est absorbée.

Finalement, la théorie de la turbulence faible est valide s’il existe une séparation des échelles temporelles, alors le temps de collision (ou temps non-linéaire) définie comme $\frac{1}{t_{coll}} \approx \frac{\partial n_k}{\partial t}$ doit être beaucoup plus grand que les périodes caractéristiques d’oscillations linéaires, c’est-à-dire $t_{coll}\omega_k \gg 1$. Naturellement cette inégalité dépend du nombre k et restreint la fenêtre (dans l’espace des k) de validité de la théorie¹⁰. On définit

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_{coll}} &= \int |T_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} \delta^{(1)}(\omega_k + \omega_{k_1} - \omega_{k_2} - \omega_{k_3}) \\ &\times \delta^{(D)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d^D \mathbf{k}_{123}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

¹⁰Il est intéressant de noter que les conditions obtenues pour t_{coll} sont équivalentes à la condition que l’expansion (3.7) soit bien ordonnée. Dans ces estimations nous supposons, comme en général par tout dans le texte, que les spectres font converger l’intégrale de collision, ce qui n’est pas toujours garantie.

alors pour une distribution $n_{\mathbf{k}}$ donnée, le temps de collision dépend de l'échelle, en guise d'exemple, si on considère la distribution d'équilibre (3.19) avec μ et $\mathbf{v}$ nuls nous avons : $t_{coll}(k)\omega_k = \frac{k^{4\alpha-2D-\beta}}{T^2}$ alors $k \gg T^{\frac{2}{4\alpha-2D-\beta}}$.

Si nous avons une cascade d'énergie (3.22) nous obtenons $t_{coll}(k)\omega_k = \frac{k^{2\alpha-\beta/3}}{P^{2/3}}$ alors $k \gg P^{\frac{2}{6\alpha-\beta}}$, d'un autre côté pour la cascade inverse $t_{coll}(k)\omega_k = \frac{k^{(4\alpha-\beta)/3}}{J^{2/3}}$ alors $k \gg J^{\frac{2}{4\alpha-\beta}}$. Dans le cas de NLS $\beta = 0$ et $\alpha = 2$ alors $k \gg T^{\frac{1}{4-D}}$ pour l'équilibre à dimension D et nous avons aussi $k \gg P^{\frac{1}{6}}$ et $k \gg J^{\frac{1}{4}}$ pour la réalisation d'une cascade d'énergie ou d'une cascade inverse de l'action de l'onde. Toutes ces conditions peut être satisfaites, en pratique, si on choisie une température ou des flux adaptés.

3.7 Remarque finale

Une grande ressemblance existe entre les parcours de la thermodynamique et de la théorie cinétique des gaz classiques et les constatations sur l'existence d'un "attracteur statistique", dans le sens que la dynamique évolue irréversiblement vers un minimum d'énergie soumis à des conditions à cause des lois de conservations, et la théorie cinétique de turbulence faible. En effet les variations d'entropie autour de l'équilibre¹¹ :

$$\begin{aligned}\delta S &= S[n_{\mathbf{k}}^{eq} + \delta n_{\mathbf{k}}] - S[n_{\mathbf{k}}^{eq}] = \int \frac{\delta n_{\mathbf{k}}}{n_{\mathbf{k}}^{eq}} = \\ &= \int \frac{\omega_k - \mathbf{v} \cdot \mathbf{k} - \mu}{T} \delta n_{\mathbf{k}} = \\ &= \frac{1}{T} (\delta E - \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{P} - \mu \delta N),\end{aligned}$$

satisfait la première et deuxième loi de la thermodynamique. L'énergie libre $E - \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - \mu N$ est stationnaire quand l'entropie atteint son maximum.

¹¹Je remercie Antonio Picozzi pour cet argument.

Chapitre 4

Sur l'équation de Boltzmann quantique

1

L'application directe des concepts de la physique statistique à des situations physiques concrètes est souvent rendue difficile par l'absence de petit paramètre dans ces situations et l'impossibilité qui en résulte de calculs explicites conduisant à des résultats quantitatifs. Il est donc important de pouvoir analyser en profondeur des cas où un tel petit paramètre existe et qui correspondent à des systèmes existant au laboratoire.

On pense bien sûr à la théorie cinétique de Boltzmann qui décrit de façon précise la dynamique d'un gaz classique dilué, le petit paramètre étant la probabilité pour une particule d'être impliqué dans une collision à un moment donné. Si cette théorie décrit parfaitement les gaz classiques, l'obtention récente de la condensation de Bose-Einstein dans des vapeurs atomiques donne l'espoir de comparer les prédictions d'une théorie cinétique quantique cohérente avec des résultats expérimentaux. Ce chapitre fait le point sur cette question théorique, en particulier à la lumière d'une Note d'Yvon en 1958 [35]. Pour établir son équation cinétique, Boltzmann avait utilisé des arguments probabilistes dont la subtilité en fit une source majeure, sinon inépuisable, de controverses. Peu après l'apparition de la mécanique quantique, Nordheim en 1928 [36] et Uehling et Uhlenbeck en 1933 [37] proposent une équation cinétique quantique dont les solutions d'équilibre sont les distributions de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein suivant la statistique des particules. Cette équation cinétique décrit la dynamique de fonctions qui doivent être interprétées comme les transformées de Wigner de la matrice densité à un corps [38], l'équivalent quantique des fonctions de distributions classiques à un corps. Or on sait bien que ces transformées de Wigner ne doivent pas être interprétées comme des distributions de probabilité. Si elles sont bien réelles, leur signe est arbitraire, ce qui rend suspecte l'équation

¹Dans ce chapitre on reproduit une Note non publiée en collaboration avec Yves Pomeau en 1997.

de Nordheim et d'Uehling-Uhlenbeck. De plus, comme nous allons le voir, cette équation ne tient pas bien compte de certains effets quantiques d'échange lors des collisions. En fait il existe une autre voie pour déduire l'équation de Boltzmann qui considère celle-ci comme une solution cohérente de la hiérarchie BBGKY dans la limite des faibles densités, et c'est cette voie que nous allons suivre, en analysant une Note d'Yvon [35] sur la question.

La hiérarchie BBGKY décrit l'évolution couplée des fonctions de distribution à une, deux, trois, ... particules, et suit de l'équation de Liouville pour la fonction densité totale. Comme l'a montré Bogoliubov [39], l'analyse de cette hiérarchie permet de trouver l'équation de Boltzmann en contrôlant les approximations : faibles densités, collisions binaires, etc. Cette méthode donne aussi une recette pour inclure des effets de gaz denses et/ou des collisions impliquant plus de deux particules en poussant l'approximation aux ordres supérieurs. Ce formalisme canonique de l'équation de Liouville doit permettre une généralisation à la mécanique quantique : en suivant la méthode de Bogoliubov on peut imaginer trouver une équation de Boltzmann quantique. Dans cette ligne de pensée Yvon obtient une telle équation de Boltzmann quantique. Cependant, il ne s'agit que d'un calcul formel et selon l'auteur *“La présente déduction n'est qu'une esquisse. Seules des approximations plus poussées permettraient d'aller au fond du problème”*. En particulier, Yvon ne donne pas de résultat concret comparable à l'équation de Boltzmann classique. Il n'en va pas de même des travaux un peu postérieurs de Sáenz [40], Mori et Ross [41], Snider [42] et Waldmann [43] qui retrouvent l'équation de Boltzmann dans le cas quantique à partir de la hiérarchie BBGKY. Cependant ces derniers auteurs ne font pas la même hypothèse qu'Yvon pour les corrélations avant collision (ce que nous appelons plus loin la factorisation de Dirac). Ils supposent pratiquement des particules discernables, ce qui interdit de considérer l'interférence des fonctions d'onde des particules hors collisions, un effet important à basse température et que nous allons justement examiner. L'approche systématique de Bogoliubov devrait aussi pouvoir mener à une théorie cinétique correcte en présence de condensat de Bose-Einstein, ce qui ne semble pas avoir encore été fait ou même tenté, et pose des difficultés considérables (*cf. infra*). Dans cette revue, nous déduirons pratiquement une équation cinétique explicite des résultats d'Yvon et, supposant d'abord les particules discernables, nous montrerons que cette équation cinétique quantique n'est autre que l'équation de Boltzmann originale. Comme déjà remarqué par Yvon, cette équation n'est pas en accord avec l'équation de Nordheim et d'Uehling-Uhlenbeck. Cette dernière équation a été établie par un calcul formel qu'on peut trouver dans la littérature [44, 45], mais seulement avec l'hypothèse d'une interaction faible, *i.e.* si $V(r)$ est le potentiel d'interaction entre particules alors $n^{1/3} \left(\frac{m}{\hbar} \int V(r) d^D r \right) \ll 1$, qui est assez différent des conditions d'application d'une théorie de type Boltzmann où l'interaction est forte et de courte portée.

L'équation d'Yvon ne décrit donc pas la relaxation vers l'équilibre, de Bose-Einstein pour les bosons ou de Fermi-Dirac pour les fermions pour une raison que nous discuterons plus loin. En revanche, nous montrerons qu'elle présente une propriété remarquable, qui a son origine dans la factorisation de Di-

rac (et qui est donc absente dans [40, 41, 42, 43]) : pour des fermions l'opérateur de collision disparaît aux basses températures, ce qui s'explique par des effets quantiques, qui ne sont pas pris en compte ni par les auteurs déjà cités.

Nous allons présenter d'abord la hiérarchie BBGKY quantique. Nous discuterons ensuite la factorisation de Dirac des états asymptotiques et montrerons comment la construction de l'état de diffusion usuel conduit à une forme explicite de l'équation de Boltzmann. Nous nous plaçons donc dans une limite de faible densité, au sens dynamique, c'est à dire que nous supposons que si f est la longueur de diffusion (qui décrit complètement les interactions binaires aux basses températures considérées) alors nf^3 est petit, n densité numérique des particules supposées identiques. En revanche, nous ne supposons pas que la distance entre particules, $n^{-1/3}$ soit petite devant la longueur de de Broglie, ce qui fait que les effets d'échange sont *a priori* d'ordre unité. Nous nous restreindrons au cas où la température est assez élevée pour qu'il n'y ait pas de condensation de Bose-Einstein.

4.1 La hiérarchie BBGKY quantique

Dans cette section nous rappelons le formalisme de la hiérarchie BBGKY pour le cas quantique, ce qui nous donne l'occasion de définir diverses quantités utiles pour la suite. La matrice densité ρ obéit à l'équation de Liouville-von Neumann ($[A, B] = AB - BA$) :

$$i\hbar\partial_t\rho = [H, \rho].$$

Ici H est l'opérateur :

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j} V(|x_i - x_j|),$$

$V(|x_i - x_j|)$ étant le potentiel d'interaction de portée nettement plus courte que la longueur d'onde de de Broglie et que la distance entre particules. En représentation de coordonnées, cette matrice densité s'écrit $\rho(x_1, \dots, x_N; x'_1, \dots, x'_N; t)$, d'où l'équation de Liouville-von Neumann pour N particules identiques de masse m , $2\pi\hbar$ étant la constante de Planck

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\rho(x_1, \dots, x_N; x'_1, \dots, x'_N; t) = \\ - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N (\nabla_i^2 - \nabla_{i'}^2) \rho + \sum_{i<j} (V(|x_i - x_j|) - V(|x'_i - x'_j|)) \rho \end{aligned} \quad (4.1)$$

ici ∇_i^2 ($\nabla_{i'}^2$) est le Laplacien à trois dimensions par rapport à x_i (x'_i). On en déduit les premières équations de la hiérarchie pour les matrices réduites. Pour la matrice densité à une particule :

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t R_1(x_1; x'_1; t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla_1^2 - \nabla_{1'}^2) R_1 + \\ &+ (N-1) \int d^3x_2 (V(|x_1 - x_2|) - V(|x'_1 - x_2|)) R_2(x_1, x_2; x'_1, x_2; t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pour celle à deux particules :

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2; t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla_1^2 + \nabla_2^2 - \nabla_{1'}^2 - \nabla_{2'}^2)R_2 + \\ &+ (V(|x_1 - x_2|) - V(|x'_1 - x'_2|))R_2 + \mathcal{O}(R_3), \end{aligned} \quad (4.3)$$

etcætera. Cette matrice densité à une particule R_1 s'obtient en “traçant” dans R_2 la seconde particule : $R_1(x_1; x'_1; t) = \int d^3x_2 R_2(x_1, x_2; x'_1, x_2; t)$, la matrice densité à deux particules R_2 s'obtient en “traçant” dans R_3 la troisième particule : $R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2; t) = \int d^3x_3 R_3(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x_3; t)$, *etc.*, finalement la matrice densité à $(N - 1)$ particules s'obtient en traçant la matrice densité complète sur seulement une particule. La trace de R_1 vaut 1 avec notre choix de normalisation. Chaque matrice densité (sauf celle à une particule) doit être symétrique ou antisymétrique par permutation entre indices de particules identiques suivant qu'il s'agit de bosons ou de fermions. Pour la matrice densité à deux particules nous avons par exemple (+ pour des bosons et – pour des fermions)

$$\begin{aligned} R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= \pm R_2(x_1, x_2; x'_2, x'_1) \\ &= \pm R_2(x_2, x_1; x'_1, x'_2). \end{aligned}$$

La transformée de Wigner de la matrice densité à une particule est reliée à $R_1(x_1; x'_1)$ par la formule [38] :

$$R_1(x_1; x'_1) = \int d^3q e^{iq \cdot (x_1 - x'_1)} w_q \left(\frac{x_1 + x'_1}{2} \right). \quad (4.4)$$

En raison de l'hermiticité des matrices densités ($R_1(x_1; x'_1) = R_1^*(x'_1; x_1)$ où * indique la conjugaison complexe) l'amplitude de Wigner w_q est réelle, mais pas nécessairement positive, ce qui, comme déjà indiqué, rend suspecte toute manipulation basée explicitement ou implicitement sur la supposition que w_q est la “probabilité” qu'une particule ou une quasiparticule possède l'impulsion $\hbar q$, en contradiction manifeste avec la possibilité pour w_q de prendre des valeurs négatives.

4.2 Equation cinétique quantique pour des particules discernables

Yvon néglige les effets liés à la matrice densité à trois particules dans (4.3), une approximation que nous examinerons plus loin (et qui devient incorrecte à basse température quand existent des corrélations sur des distances de l'ordre de la longueur de de Broglie). Comme lui, nous supposerons aussi qu'à partir des conditions asymptotiques, loin du domaine d'interaction et pour des particules entrant dans ce domaine, R_2 a atteint un état stationnaire, ce qui implique que R_1 qui spécifie la condition asymptotique “incidente” pour toutes les matrices densité change plus lentement que la durée typique d'une collision.

Cette hypothèse “adiabatique” est vraie pour un gaz “dilué” (classique ou quantique), parce que les collisions sont suffisamment rares pour que R_1 change à un taux très lent devant à la durée d’une collision.

Utilisant l’équation (4.3) dans le cas quasi stationnaire, on transforme l’intégrale de collision dans (4.2) en :

$$i\hbar\mathcal{C}oll \equiv -\frac{\hbar^2}{2m}(N-1) \int d^3x_2 d^3x'_2 \delta^{(3)}(x_2-x'_2) (\nabla_1^2 + \nabla_2^2 - \nabla_{1'}^2 - \nabla_{2'}^2) R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2). \quad (4.5)$$

L’équation (4.3) pour R_2 représente la dynamique de deux particules interagissant. Supposant qu’il n’y a pas d’états liés, les seules solutions sont celles de diffusion qui sont déterminées comme suit : soit une fonction d’onde à deux particules incidentes : $\psi(x_1, x_2) = \xi(x_1 + x_2)e^{ik \cdot (x_1 - x_2)}$, où $\xi(x_1 + x_2)$ tient compte du paquet d’onde centre de masse. La fonction d’onde totale de diffusion s’écrit :

$$\psi_{scatter}(x_1, x_2) = \xi(x_1 + x_2) \left(e^{ik \cdot (x_1 - x_2)} + \frac{f_k(\theta)}{|x_1 - x_2|} e^{i|k||x_1 - x_2|} \right). \quad (4.6)$$

Toute l’information du potentiel d’interaction V est contenue dans l’amplitude de diffusion $f_k(\theta)$, où θ est l’angle entre le vecteur d’onde incident k et la ligne d’action $(x_1 - x_2)$, cette formule est valable pour $|x_1 - x_2|$ supérieur à la portée des interactions. Il est licite d’utiliser cette limite de diffusion, parce que l’intégrale de collision (4.5) se réduit elle-même à des contributions de surface pour de grandes valeurs de $|x_1 - x_2|$ et $|x'_1 - x'_2|$, termes de surface déterminés précisément par la forme asymptotique de diffusion.

Pour clore le système, Yvon retient comme “*Stosszahlansatz*” quantique la factorization :

$$R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = R_1(x_1; x'_1)R_1(x_2; x'_2) \pm R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x'_1), \quad (4.7)$$

suivant une formule due à Dirac [46], et qui satisfait la symétrie d’échange. Comme nous allons le voir, cette factorisation de Dirac conduit à un résultat final différent des références [40, 41, 42, 43] : ne retenant que le premier terme de cette décomposition ils ne tiennent donc pas compte d’effets d’échange entre particules identiques. A basse température, négliger cet échange conduit à des conclusions erronées : pour des fermions on ne trouve plus que les interactions disparaissent par interférence dans la voie s . Nous allons commencer par déduire la contribution à l’opérateur de collision provenant du premier terme de la décomposition de Dirac, soit le seul qui existerait pour des particules discernables, le *Stosszahlansatz* prenant alors la forme $R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = R_1(x_1; x'_1)R_1(x_2; x'_2)$, nous ne considérerons ici que le premier terme du membre de droite de (4.7). Comme nous le montrons plus loin, le résultat final est le même pour le second terme. Ceci est remarquable : grâce à cette factorisation de Dirac (4.7) et pour les basses énergies nous multiplions le terme de collision de Boltzmann par deux pour des bosons, et l’annulons pour des fermions. Ceci s’interprète de la façon suivante : si la collision concerne deux fermions identiques il n’y a pas de diffusion dans l’état s qui est pair et donc symétrique dans la permutation des

deux particules impliquées. En revanche les interférences entre particules identiques renforcent l'amplitude de diffusion dans la voie s pour des bosons. Si ces effets quantiques ne sont pas pris en compte correctement si l'on ne retient que le premier terme de la décomposition de Dirac, ils ne le sont pas davantage dans l'approche probabiliste d'Uehling-Uhlenbeck qui ne trouvent pas non plus cette disparition des effets des collisions binaires pour des fermions à basse température. Physiquement l'approximation consistant à ne retenir que le premier terme de la décomposition de Dirac pour R_2 implique une température suffisamment élevée pour négliger les effets d'échange, ce qui implique qu'avant une interaction il n'y a pas eu d'échange, donc que la distance entre particules est bien supérieure à la longueur d'onde de de Broglie, soit une température T telle que $k_B T \gg \frac{\hbar^2}{2m} n^{2/3}$, n densité numérique, k_B constante de Boltzmann ².

Le premier terme dans la décomposition de Dirac (4.7) s'écrit en représentation de Wigner :

$$R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2) = \int d^3 q' d^3 q'' e^{iq' \cdot (x_1 - x'_1) + iq'' \cdot (x_2 - x'_2)} w_{q'} \left(\frac{x_1 + x'_1}{2} \right) w_{q''} \left(\frac{x_2 + x'_2}{2} \right). \quad (4.8)$$

Dans la suite nous négligerons les effets possibles d'inhomogénéités spatiales, soit toute dépendance explicite dans les coordonnées du "centre du paquet d'onde" $\left(\frac{x_{1/2} + x'_{1/2}}{2} \right)$.

Si l'on introduit (4.8) directement dans l'intégrale de collision (4.5) nous obtenons exactement zéro, ayant perdu les effets des interactions qui doivent être pris en compte à travers des amplitudes de diffusion. Appliquant la règle correcte pour la fonction d'onde de diffusion (4.6) on obtient la bonne forme pour R_2 , incluant l'effet des interactions à courte portée via une fonction d'onde de la forme (4.8).

$$\begin{aligned} R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= \int d^3 q' d^3 q'' w_{q'} w_{q''} e^{i(q' + q'') \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x'_1 + x'_2}{2} \right)} \times \\ &\times \left[e^{-i\Delta q \cdot (x'_1 - x'_2)} + \frac{f_{\Delta q}^*}{|x'_1 - x'_2|} e^{-i|\Delta q||x'_1 - x'_2|} \right] \times \\ &\times \left[e^{i\Delta q \cdot (x_1 - x_2)} + \frac{f_{\Delta q}}{|x_1 - x_2|} e^{i|\Delta q||x_1 - x_2|} \right]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Où $\Delta q \equiv (q' - q'')/2$.

Quand on introduit (4.9) dans le terme de collision (4.5) plusieurs simplifications apparaissent :

- i) le préfacteur exponentiel $e^{i(q' + q'') \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x'_1 + x'_2}{2} \right)}$ dans (4.9) commute avec $(\nabla_1^2 + \nabla_2^2 - \nabla_{1'}^2 - \nabla_{2'}^2)$.
- ii) Le terme non diffusif, qui est indépendant de $f_{\Delta q}$, dans le produit de (4.9) s'annule.

²Il existe trois longueurs dans ce problème : la longueur de diffusion f , la longueur de de Broglie : $\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2k_B T m}}$ et la distance moyenne entre particules $d = \frac{1}{n^{1/3}}$.

iii) Si l'on écrit $\nabla_1^2 + \nabla_2^2 = \frac{1}{2}\nabla_{\frac{x_1+x_2}{2}}^2 + 2\nabla_{x_1-x_2}^2$ le premier Laplacien dans la coordonnée du centre de masse n'agit pas sur les termes de diffusion, et on peut le laisser de côté.

iv) L'unique contribution non nulle vient de $\nabla_{x_1-x_2}^2(1/|x_1-x_2|) \equiv -4\pi\delta^{(3)}(x_1-x_2)$.

D'où finalement,

$$\begin{aligned} i\hbar\mathcal{C}oll &= -\frac{\hbar^2}{m}(N-1)4\pi \int d^3q' d^3q'' w_{q'} w_{q''} \times \\ &\times \left((f_{\Delta q} - f_{\Delta q}^*) e^{iq' \cdot \xi} - |f_{\Delta q}|^2 \frac{e^{i\frac{q'+q''}{2} \cdot \xi}}{|\xi|} \left[e^{i|\Delta q||\xi|} - e^{-i|\Delta q||\xi|} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

ici $\xi = x_1 - x'_1$. Prenant la transformée de Wigner inverse de l'équation (4.2) mais avec le terme de collision (4.10), nous obtenons (là $x = (x_1 + x'_1)/2$)

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t w_q(x; t) &= -i\frac{\hbar^2}{m}q \cdot \nabla_x w_q - \frac{\hbar^2}{m}(N-1)4\pi \int d^3q' d^3q'' w_{q'} w_{q''} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\xi e^{-iq \cdot \xi} \times \\ &\times \left((f_{\Delta q} - f_{\Delta q}^*) e^{iq' \cdot \xi} - |f_{\Delta q}|^2 \frac{e^{i\frac{q'+q''}{2} \cdot \xi}}{|\xi|} \left[e^{i|\Delta q||\xi|} - e^{-i|\Delta q||\xi|} \right] \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

La première intégrale sur ξ donne $\delta^{(3)}(q - q')$ alors qu'apparaît dans le second terme une intégrale du type

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\xi \frac{1}{\xi} e^{ik \cdot \xi} \left[e^{i|\Delta q||\xi|} - e^{-i|\Delta q||\xi|} \right] = \frac{-i}{2\pi|k|} \left(\delta^{(1)}(|k| + |\Delta q|) - \delta^{(1)}(|k| - |\Delta q|) \right)$$

où $|k| = \left| -q + \frac{q+q'}{2} \right|$, le premier $\delta^{(1)}$ ne contribue pas car son argument ne s'annule jamais.

Un point crucial pour la suite est la relation suivante, satisfaite par l'amplitude de diffusion et qui résulte de l'unitarité de la diffusion élastique à deux corps : $f_{\Delta q}$:

$$f_{\Delta q} - f_{\Delta q}^* = 2i|\Delta q||f_{\Delta q}|^2 = i|q' - q''||f_{\Delta q}|^2,$$

une égalité dont se déduit ce que l'on appelle le *théorème optique* en théorie de la diffusion.

Rassemblant tous ces résultats, on obtient pour le terme de collision :

$$i\hbar\mathcal{C}oll = -i\hbar\frac{\hbar}{m}(N-1) \int d^3q' d^3q'' |f_{\Delta q}|^2 w_{q'} w_{q''} \left(|q - q''|4\pi\delta^{(3)}(q - q') - \frac{2}{k}\delta^{(1)}(|k| - |\Delta q|) \right). \quad (4.12)$$

Une fois substitué dans (4.11) ceci donne exactement le terme de collision de Boltzmann, la partie de "pertes" (le premier terme à l'intérieur de la parenthèse) a l'écriture usuelle de l'opérateur de collision de Boltzmann [47], alors que le terme de "gain" nécessite quelques transformations supplémentaires pour être mis dans la forme usuelle.

En effet, dans l'équation de Boltzmann les indices des fonctions de Wigner dans le terme de “gain” ne sont pas les mêmes que ceux du terme de “perte”. Pour corriger ce problème d'écriture nous ajoutons une variable “ q ” supplémentaire avec une fonction δ de Dirac qui impose la conservation de l'impulsion totale dans la collision. Donc nous considérons l'expression

$$\int d^3\tilde{q}d^3q'd^3q''\delta^{(3)}(q+\tilde{q}-q'-q'')\frac{2}{k}\delta^{(1)}(|k|-|\Delta q|)|f_{\Delta q}|^2w_{q'}w_{q''},$$

soit une réécriture du terme de gain. Maintenant on peut récrire $\delta^{(1)}(|k|-|\Delta q|) = 2\delta^{(1)}(|q-\tilde{q}|-|q'-q''|)$ qui impose la conservation des modules des vitesses relatives lors d'une collision élastique. Il reste à intégrer par rapport à q' et q'' , ce qui se fait à l'aide du changement de variables $u = q' - q''$ et $v = (q' + q'')$. Le Hessien donne un facteur $\frac{1}{8}$, l'intégrale sur v se fait directement mais dans l'intégrale comportant l'élément différentiel $d^3u = d\Omega u^2 du$ on ne peut intégrer que sur le module u , on a donc $(\Delta\tilde{q} = |q - \tilde{q}|/2)$

$$\int d^3\tilde{q}d\Omega|q-\tilde{q}||f_{\Delta\tilde{q}}|^2w_{q'}w_{q''}.$$

Ce qui est bien une écriture possible classique pour le terme de gain de l'opérateur de collision de Boltzmann.

4.3 Esquisse d'une théorie complète

Pour $N \gg 1$ on définit la quantité réelle $Nw_q(x; t)$ comme la “densité numérique”³ et nous avons vu, en explicitant le calcul d'Yvon, que pour un gaz de particules quantiques discernables cette quantité suit exactement l'équation de Boltzmann classique [47]. Une calcul très similaire montre que l'autre terme de la factorisation de Dirac de $R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2)$, soit $R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x'_1)$ donne aussi l'opérateur de collisions de Boltzmann classique mais apres le changement $\Delta q \rightarrow -\Delta q$. On peut se rendre compte facilement de ceci à partir de la fonction d'onde de dispersion (4.6) quand on change la particule 1 et 2. Finalement, il faut noter que l'amplitude de diffusion $|f_{\Delta q}|^2$ dans l'opérateur de collision (4.12) prend la valeur $|f_{\Delta q}|^2 + |f_{-\Delta q}|^2$ pour des bosons et $|f_{\Delta q}|^2 - |f_{-\Delta q}|^2$ pour des fermions, qui est bien, dans la limite classique, la section efficace différentielle de diffusion $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ce qui complète le terme de collisions dans l'équation de Boltzmann.

Ceci montre que si l'on veut tenir compte des effets statistiques devant conduire à une équation cinétique quantique complète qui aurait comme solutions d'équilibre les distributions de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac, on doit inclure des effets qui ne sont pas pris en compte dans [35, 40, 41, 42, 43], soit des corrélations quantiques décrites par les matrices densités à trois particules. Cet effet, typiquement quantique, n'est pas représenté par la factorisation de Dirac.

Négliger les effets à trois particules s'avère une problème bien plus subtil en physique quantique que classique : même si les collisions sont binaires, des

³Comme on l'a déjà dit, les w_q ne sont pas necessairement positifs .

corrélations à plusieurs corps sont créées par échange. En effet, et contrairement au cas classique, une collision entre deux particules va créer une corrélation qui ne se limitera pas à la portée des forces, mais, en raison des effets d'échange, cette corrélation va s'étendre à toutes les particules situées à des distances de l'ordre de la longueur de de Broglie. Ainsi, les deux particules d'indice 1 et 2 qui contribuent au terme de collision peuvent être corrélées avant la collision par échange si l'une des deux, 1 par exemple a rencontré auparavant, à une distance de l'ordre de la longueur de de Broglie une troisième particule, d'indice 3 qui va affecter la particule 2, en raison de la symétrisation (pour des bosons, antisymétrisation pour des fermions) de la fonction d'onde entre cette particule 1 et les particules émergent de la collision 2, 3.

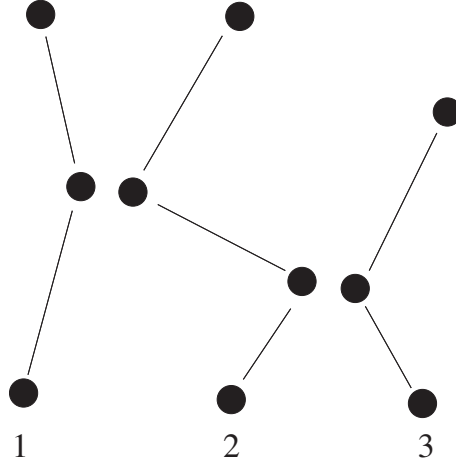


FIG. 4.1 – Esquisse classique d'une collision en présence d'une troisième particule. Il faut noter qu'en remplaçant 1 par 2 et vice versa nous obtenons une collision dont il faut aussi tenir compte.

Nous proposons dans ce qui suit une méthode de calcul qui tient compte de cet effet. Comme l'a montré le calcul explicitant l'opérateur de collision d'Yvon, l'effet des collisions sur la matrice densité consiste à remplacer les ondes planes apparaissant dans la décomposition de Wigner par des fonctions représentant les états de diffusion. Avant la collision 2, 3, la matrice densité à trois corps se factorise en six termes, suivant une décomposition qui, comme celle de Dirac pour les deux corps, consiste à ajouter les termes nécessaires pour satisfaire à la symétrie d'échange. Alors la décomposition de Dirac pour R_3 s'écrit :

$$\begin{aligned}
 R_3(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3) = & (R_1(x_1; x'_1)R_1(x_2; x'_2) \pm R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x'_1)) R_1(x_3; x'_3) + \\
 & + (R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x'_3) \pm R_1(x_1; x'_3)R_1(x_2; x'_2)) R_1(x_3; x'_1) + \\
 & + (R_1(x_1; x'_3)R_1(x_2; x'_1) \pm R_1(x_1; x'_1)R_1(x_2; x'_3)) R_1(x_3; x'_2).
 \end{aligned}$$

Imaginons maintenant tenir compte de l'effet des interactions entre 1, 3 et 2, 3. On cherche la modification de R_2 induite par les interactions (*i.e.* collision proprement dite et échange) avec une troisième particule avant la collision 1, 2. En l'absence de corrélation 1, 2 il n'y a pas de contribution à l'opérateur de collision. D'autre part, nous ne cherchons que les contributions d'ordre le plus bas à cet opérateur de collision dans la limite des basses densités, soit d'ordre f^2 . Comme un des f provient obligatoirement de l'interaction 1, 2, on se limite aux perturbations à R_3 d'ordre f et dues aux interactions 1, 3 et 2, 3. Une autre simplification provient de ce qu'il faut prendre la trace sur 3 pour déduire de R_3 une contribution à R_2 , c'est à dire :

$$\begin{aligned} R_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= (R_1(x_1; x'_1)R_1(x_2; x'_2) \pm R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x'_1)) + \\ &+ \int d^3x_3 d^3x'_3 \delta(x_3 - x'_3) (R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x'_3) \pm R_1(x_1; x'_3)R_1(x_2; x'_2)) R_1(x_3; x'_1) + \\ &+ \int d^3x_3 d^3x'_3 \delta(x_3 - x'_3) (R_1(x_1; x'_3)R_1(x_2; x'_1) \pm R_1(x_1; x'_1)R_1(x_2; x'_3)) R_1(x_3; x'_2). \end{aligned}$$

Le premier terme est déjà présent dans (4.7) donc les corrections d'échange viennent des quatre autres termes.

Prenons par exemple le terme $R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x'_3)R_1(x_3; x'_1)$ en transformée de Wigner :

$$R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x'_3)R_1(x_3; x'_1) = \int d^3q' d^3q'' d^3q''' e^{iq' \cdot (x_1 - x'_2) + iq'' \cdot (x_2 - x'_3) + iq''' \cdot (x_3 - x'_1)} w_{q'} w_{q''} w_{q'''} . \quad (4.13)$$

La collision 2, 3 va ajouter deux termes d'ordre f , dont la somme vaut :

$$\begin{aligned} R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x'_3)R_1(x_3; x'_1) &= \int d^3q' d^3q'' d^3q''' w_{q'} w_{q''} w_{q'''} e^{i(q' \cdot x_1 - q''' \cdot x'_1)} \times \\ &e^{\frac{i}{2}(q'' + q''') \cdot (x_2 + x_3)} e^{-\frac{i}{2}(q' + q'') \cdot (x'_2 + x'_3)} \times \\ &\left[e^{-\frac{i}{2}(q' - q'') \cdot (x'_2 - x'_3)} + \frac{f_{q' - q''}^*}{|x'_2 - x'_3|} e^{-\frac{i}{2}|q' - q''| |x'_2 - x'_3|} \right] \times \\ &\left[e^{\frac{i}{2}(q'' - q''') \cdot (x_2 - x_3)} + \frac{f_{q'' - q'''}^*}{|x_2 - x_3|} e^{\frac{i}{2}|q'' - q'''| |x_2 - x_3|} \right]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

La contribution à R_2 (à l'ordre f) provenant de ce terme est obtenue une fois prise la trace sur 3, ce qui donne après intégration sur $x_3 = x'_3$:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= \int dx_3 R_1(x_1; x'_2)R_1(x_2; x_3)R_1(x_3; x'_1) = \\ &\int d^3q' d^3q'' d^3q''' w_{q'} w_{q''} w_{q'''} e^{i(q' \cdot x_1 + q'' \cdot x_2 - q''' \cdot x'_1 - (q' + q'' - q''') \cdot x'_2)} f_{q' - q''}^* \Delta_- (|2q''' - (q' + q'')|, |q' - q''|) \\ &\int d^3q' d^3q'' d^3q''' w_{q'} w_{q''} w_{q'''} e^{i(q' \cdot x_1 + (q''' + q'' - q') \cdot x_2 - q'' \cdot x'_1 - q''' \cdot x'_2)} f_{q'' - q'''}^* \Delta_+ (|2q' - (q'' + q''')|, |q'' - q'''|) \end{aligned} \quad (4.15)$$

où

$$\Delta_s(k, q) = \int d^3\xi \frac{e^{i\xi \cdot k}}{|\xi|} e^{is|q||\xi|} = -\frac{2\pi}{|k|} \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{iR(|k| - s|q|)} - 1}{(|k| - s|q|)} + \frac{e^{iR(|k| + s|q|)} - 1}{(|k| + s|q|)} \right)$$

Cette dernière limite doit être comprise dans le sens des distributions comme dans (3.11) :

Alors :

$$\Delta_s(k, q) = -\frac{2\pi^2 i}{|k|} (\delta(|k| + s|q|) - \delta(|k| - s|q|)) + \frac{2\pi}{|k|} \left(P\left(\frac{1}{|k| - s|q|}\right) + P\left(\frac{1}{|k| + s|q|}\right) \right).$$

Cette contribution de $\tilde{R}_2$ de (4.15) doit être insérée dans l'opérateur de collision comme on l'a fait pour la décomposition de Dirac de R_2 . Après remplacement des ondes planes $e^{i(q' \cdot x_1 + q'' \cdot x_2)}$ et $e^{-i(q''' \cdot x'_1 + (q' + q'' - q''') \cdot x'_2)}$ du premier terme de (4.15) par les états de diffusion, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= \int d^3 q' d^3 q'' d^3 q''' w_{q'} w_{q''} w_{q'''} f_{q' - q''}^* \Delta_- (|2q''' - (q' + q'')|, |q' - q''|) \times \\ &\times e^{i(q' + q'') \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{x'_1 + x'_2}{2}\right)} \left[e^{\frac{i}{2}(q' - q'') \cdot (x_1 - x_2)} + \frac{f_{q' - q''}}{|x_1 - x_2|} e^{\frac{i}{2}|q' - q''||x_1 - x_2|} \right] \times \\ &\times \left[e^{-\frac{i}{2}(2q''' - (q' + q'')) \cdot (x'_1 - x'_2)} + \frac{f_{2q''' - (q' + q'')}}{|x'_1 - x'_2|} e^{\frac{i}{2}|2q''' - (q' + q'')||x'_1 - x'_2|} \right]. \quad (4.16) \end{aligned}$$

De ce développement seulement nous intéresse le terme qui donne $f_{q' - q''}^* f_{q' - q''}$, car les autres termes doivent s'annuler à la fin, c'est à dire :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_2(x_1, x_2; x'_1, x'_2) &= \\ &\int d^3 q' d^3 q'' d^3 q''' w_{q'} w_{q''} w_{q'''} |f_{q' - q''}|^2 \Delta_- (|2q''' - (q' + q'')|, |q' - q''|) \times \\ &e^{i(q' + q'') \cdot \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)} e^{-i(q''' \cdot x'_1 + (q' + q'' - q''') \cdot x'_2)} \frac{1}{|x_1 - x_2|} e^{i\frac{1}{2}|q' - q''||x_1 - x_2|}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Il ne reste plus alors qu'à faire agir le résultat sur la partie cinétique de l'opérateur d'énergie cinétique dans (4.5) puis à tracer sur 2 pour obtenir la contribution à l'opérateur de collision et finalement prendre la transformée de Wigner inverse. Les étapes de ce calcul nécessitent des méthodes voisines de celles que nous avons utilisées pour analyser l'équation (4.12). Finalement, on note que la particule x_3 peut être n'importe laquelle parmi $x_3, x_4, \dots, x_N$ alors un pré-facteur $(N - 2)$ apparaît en dans le terme de collision :

$$\begin{aligned} i\hbar \tilde{C}_{oll} &= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m} (N - 1)(N - 2) \int d^3 q' d^3 q'' w_{q'} w_{q''} w_{q'''} |f_{q' - q''}|^2 \Delta_- (|2q''' - (q' + q'')|, |q' - q''|) \\ &= -i\hbar \frac{\hbar}{2m} (N - 1)(N - 2) \int w_{q'} w_{q''} w_{q'''} \frac{|f_{q' - q''}|^2}{|q' - q''|} \delta^{(1)}(|2q''' - (q' + q'')|/2) d^3 q' d^3 q'' \quad (4.18) \end{aligned}$$

La dernière expression est juste la moitié exacte d'un des termes pertinent de l'équation de Boltzmann quantique. En effet le terme (4.13) génère deux contributions de la forme (4.18) alors les quatre termes génèrent huit termes possibles

au total. De plus il faut considérer les interactions entre la particule 3 et la 1 au lieu de 2. En conclusion on a 16 termes à calculer qui donnent les diverses contributions. Ces 16 termes s'ajoutent de telle façon que la contribution en intégrale de partie principale de Cauchy s'annule lorsque tous les termes sont inclus.

En rassemblant toutes les contributions de ce type à R_2 on trouve l'opérateur de collision :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}oll &= (N-1) \int W_{q,q';q'',q'''} (w_{q''} w_{q'''} - w_q w_{q'}) d^3 q' d^3 q'' d^3 q''' \\ &\pm (N-1)(N-2) \int W_{q,q';q'',q'''} (w_{q'} w_{q''} w_{q'''} + w_q w_{q''} w_{q'''} - w_q w_{q'} w_{q''} - w_q w_{q'} w_{q'''}) d^3 q' d^3 q'' d^3 q''' \end{aligned}$$

là on a définie

$$W_{q,q';q'',q'''} = \frac{\hbar}{m} |q-q'| (|f_{q-q'}|^2 \pm |f_{q'-q}|^2) \delta^{(3)}(q+q'-q''-q''') \delta^{(1)}(|q-q'| - |q''-q'''|)$$

D'après la relation de de Broglie $v = \frac{\hbar q}{m}$ et si on définit les fonctions des distributions comme $N w_q$, on retrouve l'équation obtenue par Nordheim et Uehling et Uhlenbeck *circa* les années 30.

Chapitre 5

Dynamique auto-similaire des équations cinétiques vers la condensation

La découverte de la Condensation de Bose–Einstein en vapeur atomique ouvre une manière d’examiner des prévisions de la physique statistique quantique d’équilibre et de non-équilibre. Comme la formation d’un condensat de Bose–Einstein est un processus dynamique, il existe un espoir de comparer les prévisions de la théorie cinétique quantique à des résultats expérimentaux.

Dans ce chapitre, nous décrivons le scénario pour la formation d’un condensat de Bose–Einstein à l’aide de l’équation de Boltzmann–Nordheim pour des particules de Bose agissant l’une sur l’autre avec une dispersion uniforme. Nous présentons également une approximation locale de cette équation de Boltzmann quantique qui préserve plusieurs des propriétés de l’intégrale de collision originale, comme les quantités conservées, l’existence d’un théorème-H qui conduit le système à l’équilibre, une distribution à l’équilibre de type de Bose–Einstein, la positivité des solutions si on commence par une condition initiale positive, les flux stationnaires, etc.

Le scénario pour la formation d’un condensat consiste en la disparition d’une solution lisse au delà d’une certaine valeur critique de densité (par exemple) à une température donnée. Ce scénario consiste en l’existence d’une singularité en temps fini de la fonction de distribution. L’idée que les singularités en temps fini des solutions des équations cinétiques peuvent expliquer la condensation de Bose-Einstein semble être due à Zel’dovich et à Levich en 1969 [48], et a été appliquée à l’équation de Kompaneets [49].

5.1 Équations cinétiques

5.1.1 Équation de Boltzmann Quantique (ou de Boltzmann–Nordheim).

Peu après la conception finale de la théorie quantique non-relativiste, Nordheim [36] a proposé une équation de type Boltzmann comme théorie cinétique quantique pour un gaz de Bosons et Fermions, décrivant en particulier la relaxation à l'équilibre. Cette équation cinétique décrit la dynamique de la distribution de moment qui est également la transformée de Wigner de la matrice densité à une particule (4.4)¹. L'équation de Boltzmann Quantique (ou de Boltzmann–Nordheim) est :

$$\begin{aligned} \partial_t w_{\mathbf{p}_1}(t) &= \text{Coll}[w] \equiv \int d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{p}_3 d^3\mathbf{p}_4 W_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4} \\ &\times (w_{\mathbf{p}_3} w_{\mathbf{p}_4} (1 + w_{\mathbf{p}_1}) (1 + w_{\mathbf{p}_2}) - w_{\mathbf{p}_1} w_{\mathbf{p}_2} (1 + w_{\mathbf{p}_3}) (1 + w_{\mathbf{p}_4})) \end{aligned} \quad (5.1)$$

où $w_{\mathbf{p}}(t)$ peut être vu comme une distribution de probabilité pour le moment². D'ailleurs

$$W_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4} = \frac{1}{m\hbar^3} (|f_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}|^2 + |f_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}|^2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4) \delta^{(1)}(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2)$$

donne l'écriture originale de Boltzmann une fois que les intégrales sur $\mathbf{p}_3$ et $\mathbf{p}_4$ sont faites, f étant la longueur de dispersion, m la masse atomique et $2\pi\hbar$ la constante de Planck. La distribution de Wigner est normalisée par :

$$\frac{1}{\hbar^3} \int d^3\mathbf{p} w_{\mathbf{p}}(t) = n \equiv N/V,$$

où N est le nombre total de particules et V le volume.

L'équation cinétique de Boltzmann–Nordheim pour une distribution homogène dans l'espace est considérablement simplifiée pour des distributions isotropes. On définit comme nouvelle variable l'énergie cinétique $\epsilon_p = \frac{|\mathbf{p}|^2}{2}$, $n_\epsilon = \frac{1}{4\pi} \int w_{\mathbf{p}}(t) d\Omega_{\mathbf{p}}$ la moyenne sur les angles et,

$$S_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4} = \frac{1}{m\hbar^3} \int d\Omega_{p_1} d\Omega_{p_2} d\Omega_{p_3} d\Omega_{p_4} (|f_{\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2}|^2 + |f_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}|^2) \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4).$$

L'équation cinétique quantique de Boltzmann–Nordheim prend la forme plutôt simple [12, 50] :

$$\begin{aligned} \partial_t n_{\epsilon_1}(t) &= \text{Coll}[n_{\epsilon_1}] \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \int_D d\epsilon_3 d\epsilon_4 S_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4} \\ &\times (n_{\epsilon_3} n_{\epsilon_4} (1 + n_{\epsilon_1}) ((1 + n_{\epsilon_2}) - n_{\epsilon_1} n_{\epsilon_2} (1 + n_{\epsilon_3}) (1 + n_{\epsilon_4})), \end{aligned} \quad (5.2)$$

¹La normalisation dans la suite est différente de celle utilisée dans le chapitre précédent 4.

²Noter que la fonction de Wigner est réelle mais pas nécessairement une quantité positive, cependant si $w_{\mathbf{p}}(t=0) > 0$, cependant l'équation de Boltzmann–Nordheim préserve cette positivité à toute autre temps (au moins pour des bosons). Pour les fermions, cette probabilité devrait rester entre 0 et 1 pour éviter clairement des ennuis mathématiques.

où $\epsilon_2 = \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_1$ doit être positif, donc on intègre dans un domain D avec $\epsilon_3 + \epsilon_4 > \epsilon_1$, voir Fig. 5.1.

Pour finir, pour des dispersions d'onde- s , *c.-a.-d.*, $f = cte$, dominante à basse énergie le régime où la condensation Bose-Einstein se produit, alors le taux de transition dans l'espace d'énergie, se simplifie en ³ :

$$S_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4} = \min \{ \sqrt{\epsilon_1}, \sqrt{\epsilon_2}, \sqrt{\epsilon_3}, \sqrt{\epsilon_4} \},$$

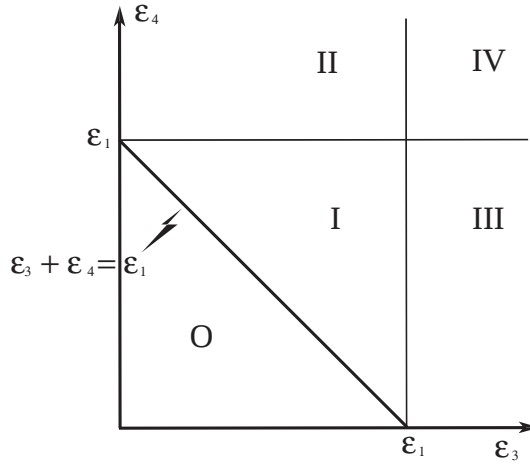


FIG. 5.1 – Domaine d'intégration $D = I \cup II \cup III \cup IV$ de l'équation cinétique (5.2).

Comme déjà dit, l'évolution vers des temps positifs satisfait la conservation de la masse (ou nombre de particules, *i.e.* l'intégrale $\int_0^\infty n_\epsilon \sqrt{\epsilon} d\epsilon$) et de l'énergie (l'intégrale $\int_0^\infty n_\epsilon \epsilon \sqrt{\epsilon} d\epsilon$), ainsi qu'à un théorème-H pour l'entropie :

$$\mathcal{S} = \int_0^\infty [(1 + n_\epsilon) \log(1 + n_\epsilon) - n_\epsilon \log n_\epsilon] \sqrt{\epsilon} d\epsilon \quad (5.3)$$

qui montre que les solutions de (5.2) relaxent vers

$$n_\epsilon^{eq} = 1 / (e^{(\epsilon - \mu)/T} - 1)$$

(T est la temperature absolue en unités d'énergie) contraint par la conservation du nombre de particules et de l'énergie.

Soit l'état initial (A et γ sont liés au nombre initial de particules et à

³Nous prendrons $\hbar = m = f^2 = 1$ dans toute l'analyse.

l'énergie)⁴

$$n_\epsilon(t=0) = A \left(1 + \gamma\epsilon + \frac{(\gamma\epsilon)^2}{2} \right) e^{-\gamma\epsilon}, \quad (5.4)$$

la relaxation conserve $\int_0^\infty n_\epsilon \sqrt{\epsilon} d\epsilon$ et $\int_0^\infty \epsilon n_\epsilon \sqrt{\epsilon} d\epsilon$. Ceci donne une relation entre A et le potentiel chimique sans dimension μ/T :

$$A = \frac{216 (\zeta_{3/2}(e^{\mu/T}))^{5/2}}{175\sqrt{5} (\zeta_{5/2}(e^{\mu/T}))^{3/2}}. \quad (5.5)$$

À des faibles densités (petits A) μ est négatif comme dans un gaz classique idéal. À mesure que A augmente μ augmente aussi, jusqu'à une valeur critique pour $\mu = 0$ et indépendante de γ : $A_c = \frac{216(\zeta_{3/2}(1))^{5/2}}{175\sqrt{5}(\zeta_{5/2}(1))^{3/2}} = 3.91868\dots$ Si $A > A_c$, il est impossible de satisfaire (5.5) et la transition prévue par Einstein en 1924 [51] se produit.

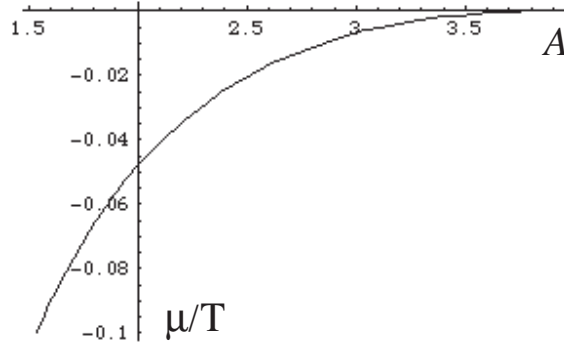


FIG. 5.2 – L'amplitude de l'état initial A en fonction de μ/T . L'asymptotique pour $\mu \rightarrow 0^-$ atteint la valeur critique $A_c = 3.91868\dots$

La question maintenant est : soit $n_\epsilon(t=0)$, *e.g.* la forme ci-dessus (5.4), un état initial lisse (de non-équilibre) pour (5.2), comment est l'évolution dans le temps de $n_\epsilon(t)$? En particulier que se passe-t-il toutes les fois que A est plus grand que l'amplitude critique A_c ? Dans la section 5.2.1 nous décrivons la singularité en temps fini de l'équation (5.2) au moyen d'une solution autosimilaire de l'équation cinétique.

⁴La sensibilité aux conditions initiales n'a pas encore été étudiée, cependant il est fort probable que le scénario est bien robuste, si la condition initiale est telle que le potentiel chimique s'annule pour une température finie.

5.1.2 Approximation locale (ou de Fokker-Planck) de l'équation cinétique de Boltzmann–Nordheim.

Une approximation locale de l'équation Boltzmann–Nordheim (5.2) peut être obtenue de la même manière que l'équation cinétique de Landau pour les particules rapides. Le coeur de l'approximation est l'hypothèse que la contribution principale à l'intégrale de collision du côté droit de (5.2) vient du voisinage de l'intersection des quatre domaines : I, II, III et IV dans la figure 5.1, *c.-a.-d* de la région $\epsilon_1 \approx \epsilon_2 \approx \epsilon_3 \approx \epsilon_4$. D'après l'approche de la Réf. [17] on multiplie le membre droit de (5.2) par $\sqrt{\epsilon_1}\xi(\epsilon_1)$, où $\xi(\epsilon_1)$ est une fonction d'essai, arbitraire et qui satisfait des conditions aux bords appropriées et on intègre sur $\epsilon_1 > 0$. Échangeant l'ordre de l'intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^\infty \text{Coll}[n]\xi(\epsilon_1)\sqrt{\epsilon_1}d\epsilon_1 = \frac{1}{4} \int_0^\infty S_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4} \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) \times \\ &\times (n_{\epsilon_3}n_{\epsilon_4}(1+n_{\epsilon_1})(1+n_{\epsilon_2}) - n_{\epsilon_1}n_{\epsilon_2}(1+n_{\epsilon_3})(1+n_{\epsilon_4})) \times \\ &\times (\xi(\epsilon_1) + \xi(\epsilon_2) - \xi(\epsilon_3) - \xi(\epsilon_4)) d\epsilon_1 d\epsilon_2 d\epsilon_3 d\epsilon_4. \end{aligned}$$

Avec le changement de variable : $\epsilon_i = \epsilon_1(1+q_i)$ (for $i = 2, 3, 4$) et en développant les deux parenthèses au deuxième ordre en ϵ_1 on trouve

$$\begin{aligned} I &\approx \frac{1}{16} \int_0^\infty S_{\epsilon_1, \epsilon_1(1+q_2); \epsilon_1(1+q_3), \epsilon_1(1+q_4)} (q_2^2 - q_3^2 - q_4^2)^2 \times \\ &\times \left(n_{\epsilon_1}^4 \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_1^2} \left(\frac{1}{n_{\epsilon_1}} \right) - n_{\epsilon_1}^2 \frac{\partial^2 \log(n_{\epsilon_1})}{\partial \epsilon_1^2} \right) \frac{\partial^2 \xi(\epsilon_1)}{\partial \epsilon_1^2} \times \\ &\times \epsilon_1^7 \delta(\epsilon_1(q_2 - q_3 - q_4)) d\epsilon_1 dq_2 dq_3 dq_4. \end{aligned}$$

À cause de la propriété de similitude $S_{\lambda\epsilon_1, \lambda\epsilon_2; \lambda\epsilon_3, \lambda\epsilon_4} = \sqrt{\lambda} S_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4}$ et après prolongement des intégrales des q_i 's sur leur axe réel, on trouve

$$I \approx S_0 \int_0^\infty \epsilon_1^{13/2} \left(n_{\epsilon_1}^4 \frac{\partial^2}{\partial \epsilon_1^2} \left(\frac{1}{n_{\epsilon_1}} \right) - n_{\epsilon_1}^2 \frac{\partial^2 \log(n_{\epsilon_1})}{\partial \epsilon_1^2} \right) \frac{\partial^2 \xi(\epsilon_1)}{\partial \epsilon_1^2} d\epsilon_1$$

où

$$S_0 = \frac{1}{16} \int_{-\infty}^\infty S_{1, (1+q_2); (1+q_3), (1+q_4)} (q_2^2 - q_3^2 - q_4^2)^2 \delta(q_2 - q_3 - q_4) dq_2 dq_3 dq_4.$$

En conclusion, intégrant deux fois par partie et supposant que les limites disparaissent et parce que la fonction $\xi(\epsilon_1)$ d'essai est arbitraire, on constate que l'intégrale de collision peut être approximée par le membre droit de :

$$\partial_t n_\epsilon(t) = \frac{S_0}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left[\epsilon^{13/2} \left(n_\epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left(\frac{1}{n_\epsilon} \right) - n_\epsilon^2 \frac{\partial^2 \log n_\epsilon}{\partial \epsilon^2} \right) \right]. \quad (5.6)$$

Cette approximation préserve la conservation de la masse totale $N = \int_0^\infty n_\epsilon \sqrt{\epsilon} d\epsilon$ et de l'énergie cinétique $E = \int_0^\infty \epsilon n_\epsilon \sqrt{\epsilon} d\epsilon$, si les conditions de

frontière pour l'équation (5.6) sont :

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[\epsilon^{13/2} \left(n_\epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left(\frac{1}{n_\epsilon} \right) - n_\epsilon^2 \frac{\partial^2 \log n_\epsilon}{\partial \epsilon^2} \right) \right] = 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow \infty \quad (5.7)$$

$$\epsilon^{13/2} \left(n_\epsilon^4 \frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2} \left(\frac{1}{n_\epsilon} \right) - n_\epsilon^2 \frac{\partial^2 \log n_\epsilon}{\partial \epsilon^2} \right) = 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \epsilon \rightarrow \infty. \quad (5.8)$$

D'ailleurs, l'entropie (5.3) augmente également sans interruption jusqu'à sa valeur d'équilibre, si les conditions aux bords de flux nul (5.7) et (5.8) sont satisfaites. Cet équilibre est atteint quand

$$n_\epsilon = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{T}} - 1}$$

comme dans l'équation originale de Boltzmann quantique (5.2).

Les mêmes conclusions et questions que dans la section 5.1.1 surgissent ici pour l'équation (5.6) avec les conditions de frontière (5.7) et (5.8) : si (5.4) est la condition initiale⁵, et si $A < A_c = 3.91868\dots$ (atteint indépendamment de la valeur de γ), alors les solutions de l'équation (5.6) tend vers la solution d'équilibre (5.5) mais si $A > A_c$ ceci ne peut pas se produire.

5.2 Singularité en temps fini de la cinétique

5.2.1 Singularité en temps fini dans l'équation de Boltzmann quantique.

Si $A > A_c$, nous nous attendons à une condensation à moment nul (ou énergie nulle dans le cas isotrope que nous étudions), à savoir l'occurrence spontanée d'une singularité dans les solutions de (5.2) pour $\epsilon = 0$ (une singularité menant à une solution du type $n_\epsilon = \frac{n_0}{\sqrt{\epsilon}} \delta(\epsilon) + \varphi_\epsilon$, avec φ_ϵ une fonction lisse⁶) un phénomène intéressant par lui-même. Par conséquent nous attendons que juste avant la singularité le nombre d'occupation (*c.-à-d.* la distribution d'énergie n_ϵ , un nombre sans dimension en mécanique quantique) à petites énergies devient très grand, $n_\epsilon \gg 1$, ce qui nous permet négliger les termes quadratiques dans l'équation (5.2). Ceci donne une équation cinétique à quatre ondes (3.18) sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_t n_{\epsilon_1}(t) &= Coll_3[n] \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \int_D d\epsilon_3 d\epsilon_4 S_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4} \times \\ &\times (n_{\epsilon_3} n_{\epsilon_4} n_{\epsilon_1} + n_{\epsilon_3} n_{\epsilon_4} n_{\epsilon_2} - n_{\epsilon_1} n_{\epsilon_2} n_{\epsilon_3} - n_{\epsilon_1} n_{\epsilon_2} n_{\epsilon_4}). \end{aligned} \quad (5.9)$$

avec $\epsilon_2 = \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_1$ et le domaine D est défini par la condition $\epsilon_3 + \epsilon_4 > \epsilon_1$, voir Fig. 5.1.

⁵Noter que l'état initial (5.4) est choisie d'une manière $\frac{dn_\epsilon}{d\epsilon} = \frac{d^2 n_\epsilon}{d\epsilon^2} = 0$ à $\epsilon = 0$, afin de satisfaire les conditions de frontière (5.7) et (5.8).

⁶La fonction singulière $\delta(\epsilon)$ est telle que $\int_0^\infty g(\epsilon) \delta(\epsilon) d\epsilon = g(0)$, pour toute fonction $g(\epsilon)$ lisse.

La solution d'équilibre : $n_\epsilon = \frac{T}{\epsilon - \mu}$ de cette équation résulte de la maximisation de l'entropie $\mathcal{S} = \int_0^\infty \log(n_\epsilon(t)) \sqrt{\epsilon} d\epsilon$. Comme déjà dit, c'est une solution formelle seulement, parce qu'elle ne donne pas des expressions convergentes pour l'énergie et la masse totale⁷. Mis à part de la solution d'équilibre, Zakharov a trouvé deux autres solutions stationnaires [12, 16]

$$n_\epsilon = P^{1/3} \epsilon^{-3/2}, \quad \text{and} \quad n_\epsilon = J^{1/3} \epsilon^{-7/6}. \quad (5.10)$$

Ici P et J sont le flux d'énergie et de masse (ou de particules) respectivement dans l'espace des énergies ϵ . Ces solutions peuvent être obtenues par une analyse à la Kolmogorov, pour des flux constants P et J , mais comme montré par Zakharov [12, 16], elles annulent exactement l'intégrale de collision dans (5.9). Cependant, il ne semble pas possible d'employer ce genre de solution pour le problème actuel parce que nous nous attendons à ce que l'effondrement soit un processus dynamique, de sorte que les solutions stationnaires peuvent aider au mieux à comprendre qualitativement le transfert de la masse et d'énergie à travers le spectre. En particulier, comme montré plus tard, l'exposant trouvé pour l'autosimilarité ne suit pas de simples argument dimensionnels (dans la terminologie de Zel'dovich ceci est une autosimilarité de deuxième espèce).

Nous remarquons que l'équation (5.2) admet une solution dynamique autosimilaire laquelle tend à accumuler des particules à énergie nulle (bien qu'au moment de la singularité il n'y ait aucune masse empilée à énergie nulle). Cherchons une solution autosimilaire de la forme :

$$n_\epsilon(t) = \frac{1}{\tau(t)^\nu} \phi\left(\frac{\epsilon}{\tau(t)}\right) \quad (5.11)$$

où $\tau(t)$ s'anule lorsque $t \rightarrow t_*$ et $\nu > 0$. Naturellement, ce genre de singularité n'a aucun sens en dehors du domaine de validité de l'équation de Boltzmann quantique, soit pour des échelles de temps de l'ordre ou plus court que le temps de collision : t_{coll} , *c.-à-d.* (5.11) est valide pour $|t_* - t|/t_{coll} \gg 1$ seulement⁸. Si l'on introduit (5.11) dans (5.9) et si on l'impose la séparation des variables purement temporelle, $\tau(t)$, et des variables re-échellés, $\omega = \frac{\epsilon}{\tau(t)}$, on trouve :

$$\frac{Coll_3[\phi(\omega)]}{(\nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega))} = -\tau(t)^{2\nu-3} \frac{d\tau(t)}{dt} \equiv 1. \quad (5.12)$$

Pour $\nu > 1$ nous avons⁹

$$\tau(t) = (2(\nu - 1)(t_* - t))^{\frac{1}{2(\nu-1)}}. \quad (5.13)$$

⁷Généralement, ce genre de divergence au grand moment ou grande énergie est non pertinent pour la présente analyse, parce que l'approximation cubique de l'opérateur de collision devient invalide de sorte que la solution de puissance pour n_ϵ se raccorde avec des solutions "à grandes énergies" qui prennent soin de la convergence des intégrales pour la masse et l'énergie.

⁸Ici t_{coll} est définie de la même manière que dans (3.25).

⁹Pour $\nu = 1$ on a que $\tau(t)$ décroît vers zéro en temps infini comme $\tau(t) \sim e^{-t}$.

De plus $\phi(\omega)$ satisfait une equation intégrro-différentielle

$$\begin{aligned} \nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega) &= \text{Coll}_3[\phi(\omega)] \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_D d\omega_3 d\omega_4 S_{\omega, \omega_2; \omega_3, \omega_4} \\ &\times \phi_{\omega} \phi_{\omega_2} \phi_{\omega_3} \phi_{\omega_4} \left(\frac{1}{\phi_{\omega}} + \frac{1}{\phi_{\omega_2}} - \frac{1}{\phi_{\omega_3}} - \frac{1}{\phi_{\omega_4}} \right) \end{aligned} \quad (5.14)$$

avec les conditions aux bords (ici on a choisit une normalisation arbitraire pour ϕ)

$$\phi(\omega) \rightarrow \phi_0 \quad \text{as } \omega \rightarrow 0 \quad (5.15)$$

$$\phi(\omega) \rightarrow \frac{1}{\omega^{\nu}} \quad \text{as } \omega \rightarrow \infty \quad (5.16)$$

Notons que le comportement de $\phi(\omega)$ pour ω grand est tel que lorsque $\tau(t) \rightarrow 0$, la fonction $n_{\epsilon}(t)$, comme donné dans (5.11) ne dépend pas du temps quand $\epsilon \gg \tau(t)$. L'équation intégrro-différentielle non-linéaire (5.14) et les conditions de frontière (5.15) et (5.16) définissent un type de problème aux valeurs propres non-linéaire. Ici ϕ_0 et $\nu > 1$ sont les seuls paramètres non définis restant à déterminer.

Plusieurs solutions de la forme de (5.11) ont été considérées pour la première fois dans la Réf [52]. En effet, Svistunov montre un groupe de solutions autosimilaires possibles avec $\nu = 3/2$, $\nu = 5/2$, $\nu = 7/6$ et, finalement, une solution avec un exposant ζ qui “*apparemment, . . . ne peut pas être déterminé à partir de considérations générales*”, sans indiquer précisément à quoi il fait allusion. Svistunov, dans la Réf. [52], comme dans un article plus tard [53], a considéré que la valeur appropriée pour ν est $\nu = 7/6$. Plus tard, Semikoz et Tkachev [54] ont identifié une différence significative entre l'exposant de Kolmogorov-Zakharov $7/6 \approx 1.167$ (voir (5.10)) et leur valeur numérique observée $\nu \approx 1.24$. Une résolution numérique élevée est exigée pour un résultat de cette sorte, donc il est imaginable que Svistunov et collaborateurs [52, 53] aient considéré l'exposant $7/6$ comme correct. Comme suggéré dans [55] l'exposant ν est une valeur propre non-linéaire de (5.14) qui permet de satisfaire les conditions de frontière (5.15) et (5.16), ce qui fait une similitude de deuxième espèce. En améliorant le numérique de [54] nous avons obtenu, en Réf. [55], un spectre de loi de puissance $\phi(\omega) \sim 1/\omega^{\nu}$ avec $\nu \approx 1.234$ (voir Fig. 5.3).

Mise à part l'évidence numérique directe des Réfs. [54, 55], aucune idée physique ou mathématique ne semble donner simplement la valeur exacte de l'exposant ν , cependant diverses bornes peuvent être trouvées. Nous avons déjà vu que $\nu > 1$, et il est facile de montrer que $\nu < 3/2$. En effet, toute la masse à l'intérieur de la crête ou pic ne peut pas diverger¹⁰ (à $\epsilon = 0$). Par conséquent, soit $\epsilon_*(t) = \epsilon_* \tau(t)$ l'énergie “étirée” du pic (ϵ_* une constante), puis :

¹⁰Ce qui est équivalent à dire que le système a une capacité finie à absorber de particules. Par ailleurs une dynamique auto-similaire de ce type à été remarquée dans le cas d'ondes d'Alfvén, mais lorsque le spectre s'étale vers l'infinie [30]. Il semble que lorsque la capacité est finie le système suit des comportements autosimilaires de deuxième espèce [34].

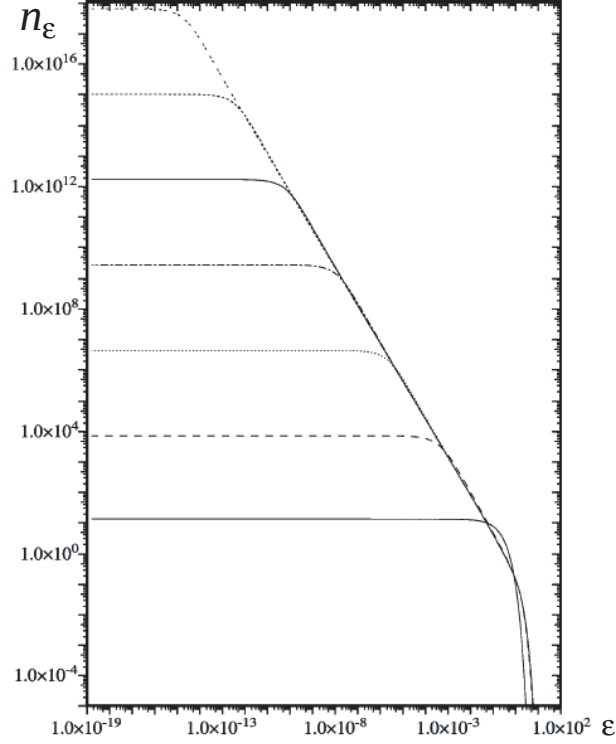


FIG. 5.3 – L'évolution autosimilaire, d'après [55], de la fonction de distribution $n_\epsilon(t)$ (entre deux courbes successives, $n_{\epsilon=0}(t)$ a augmenté d'un facteur 5). Les différentes courbes dans le temps montrent une évolution autosimilaire claire. On voit la construction d'une loi de puissance d'exposant -1.234 des grandes aux petites énergies, ainsi qu'un comportement en $\epsilon^{-\nu}$ indépendant du temps de la solution dans une région qui augmente vers ϵ petit quand le temps s'approche du temps d'explosion.

$$N_{\text{pic}} = \int_0^{\epsilon_*(t)} \tau(t)^{-\nu} \phi\left(\frac{\epsilon}{\tau(t)}\right) \sqrt{\epsilon} d\epsilon = \tau(t)^{(3/2-\nu)} \int_0^{\epsilon_*} \phi(\omega) \sqrt{\omega} d\omega. \quad (5.17)$$

L'intégrale du côté droit étant un nombre pur, on a $\nu < 3/2$. D'un point de vue physique on prévoit que $\nu > 7/6$ aussi, parce que pour $\nu < 7/6$ le flux des particules

$$J_{\text{pic}} = \int_0^{\epsilon_*(t)} \text{Coll}_3[n_{\epsilon_1}] \sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 = \tau(t)^{(7/2-3\nu)} \int_0^{\epsilon_*} \text{Coll}_3[\phi(\omega_1)] \sqrt{\omega_1} d\omega_1$$

s'annule lorsque $t \rightarrow t_*$ (ou $\tau(t) \rightarrow 0$), mais pour $\nu > 7/6$ il diverge en permettant d'alimenter la singularité à $\epsilon = 0$.

Une autre quantité physique significative est l'entropie du pic

$$\mathcal{S}_{\text{pic}} = \int_0^{\epsilon_*(t)} \log[n_{\epsilon_1}] \sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 = \tau(t)^{3/2} \int_0^{\epsilon_*} (\log[\phi(\omega_1)] - \nu \log \tau(t)) \sqrt{\omega_1} d\omega_1.$$

Elle s'annule lorsque $t \rightarrow t_*$ (ou $\tau(t) \rightarrow 0$) ainsi le taux de production d'entropie au pic, qui est une quantité mieux définie car elle donne des résultats convergents :

$$\mathcal{R}_{\text{pic}} = \int_0^{\epsilon_*(t)} \frac{\text{Coll}_3[n_{\epsilon_1}]}{n_{\epsilon_1}} \sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 = \tau(t)^{-2\nu+7/2} \int_0^{\epsilon_*} \frac{\text{Coll}_3[\phi_{\omega_1}]}{\phi_{\omega_1}} \sqrt{\omega_1} d\omega_1$$

aussi s'annule quand $t \rightarrow t_*$ (ou $\tau(t) \rightarrow 0$) car $\nu < 7/4$. En conclusion, les bornes pour ν sont :

$$7/6 < \nu < 3/2. \quad (5.18)$$

Il semble difficile d'obtenir plus d'informations au sujet des solutions de (5.14). En effet, il n'y a pas de preuve qu'il y a une seule valeur propre ν de (5.14) avec (5.15) et (5.16). Il est possible qu'il existe un ensemble discret de ν , ou fini ou dénombrable, ou un ensemble continu ou même plus curieusement un ensemble de Cantor. Dans le cas de valeurs propres non-linéaires ν multiples, la dynamique pourrait choisir la valeur observée unique $\nu = 1.234 \dots$, comme il se produit dans le problème bien connu de Kolmogorov, Petroskii, et Piskunov par exemple. Nous présenterons quelques remarques pertinentes pour ce problème dans la section 5.3.

5.2.2 Singularité en temps finie dans l'approximation locale.

Nous espérons que l'approximation locale (5.6) ou de type de Fokker-Planck de l'équation de Boltzmann-Nordheim fournit de l'information sur les singularités en temps fini de la distribution $n_\epsilon(t)$. Nous avons réalisé une simulation numérique de l'équation (5.6) avec les conditions de frontière (5.7) et (5.8).

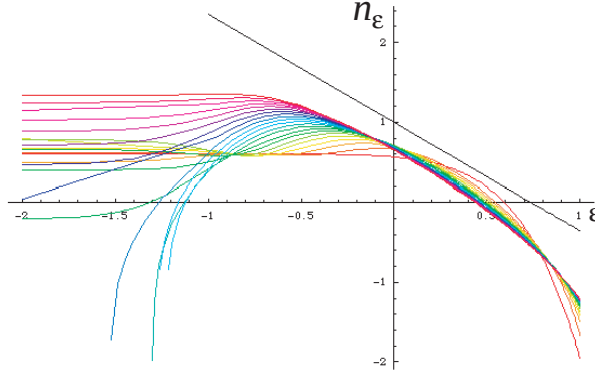


FIG. 5.4 – Tracé en log-log de l'évolution de $n(\epsilon, t)$ en fonction de ϵ à différents instants pour $A = 4 > A_c = 3.918\dots$. Avec un ensemble d'instructions simples sur Mathematica, on observe une loi de puissance naissante. La ligne droite représente la pente -1.35 comme référence.

Comme prévu pour $A > A_c$, une accumulation de matière apparaît aux basses énergies indiquant une possible singularité en temps fini (voir figure 5.4).

Recherchant une solution autosimilaire du même type que (5.11) et gardant seulement la limite cubique sur n_ϵ parce que cela constitue la principale contribution pour n_ϵ grand, on obtient une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre :

$$\nu\phi(\omega) + \omega \frac{d\phi}{d\omega} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{d^2}{d\omega^2} \left[\omega^{13/2} \phi^4 \frac{d^2}{d\omega^2} \left(\frac{1}{\phi} \right) \right]. \quad (5.19)$$

Comme dans la section précédente $\phi(\omega) \rightarrow \omega^{-\nu}$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$ et $\phi(\omega) \rightarrow \phi_0$ quand $\omega \rightarrow 0$, les conditions de frontière restantes devraient éviter des divergences dans les deux limites. Une caractéristique importante de la partie cubique de l'approximation locale (5.6), est qu'elle a le même spectre de Kolmogorov–Zakharov (5.10) que l'équation Boltzmann–Nordheim. D'ailleurs le côté droit de l'équation (5.19) agit d'une manière semblable à l'intégrale de collision du côté droit de (5.14) sur des distributions en loi de puissance. En fait, l'action du côté droit de (5.6) sur une solution $n_\omega \sim \omega^{-s}$ donne

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{d^2}{d\omega^2} \left[\omega^{13/2} n_\omega^4 \frac{d^2}{d\omega^2} \left(\frac{1}{n_\omega} \right) \right] = 9s(s-1)(s-7/6)(s-3/2)\omega^{-3s+2}.$$

Par conséquent $s = 0$, $s = 1$, $s = 7/6$ et $s = 3/2$ font annuler le membre de droite de (5.19) avec les mêmes exposants que pour Boltzmann–Nordheim. L'analyse asymptotique de l'équation (5.19) lorsque $\omega \rightarrow \infty$ mène à une série

de Laurent :

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\omega^\nu} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\nu) \omega^{2n(1-\nu)} \right). \quad (5.20)$$

Cette serie asymptotique (qui semble divergente, car le terme général croît plus vite que $n!$) peut être poussée, en principe, jusqu'à n'importe quel ordre. Les deux premiers coefficients sont :

$$\begin{aligned} a_1(\nu) &= -\frac{3}{8}\nu(3-2\nu)(-7+6\nu) \\ a_2(\nu) &= -\frac{3}{128}\nu(-3+2\nu)(2+3\nu)(-7+6\nu)(-13+10\nu)(-11+10\nu). \end{aligned}$$

Cependant cette asymptotique semble inutile à cause de la singularité en $\omega = 0$.

L'asymptotique proche de $\omega = 0$ suggère de rechercher une solution de la forme

$$\phi(\omega) = \phi_0 + \delta\phi(\omega).$$

Cependant, la structure de l'opérateur différentiel du quatrième ordre du membre de droite de (5.19) mène aux corrections exponentiellement petites $\delta\phi(\omega) \sim e^{-1/\omega^{3/2}}$ qui ne peuvent pas équilibrer le membre de gauche $\nu\phi_0$. Nous verrons dans la prochaine section que cette difficulté n'apparaît pas pour le problème intégral-différentiel (5.14).

Puisqu'il ne semble pas possible de trouver une solution de l'équation de similitude (5.19) avec les conditions de frontière imposées, la singularité pourrait être de la forme

$$n_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon_0(t)^\alpha} \bar{\phi} \left(\frac{\epsilon - \epsilon_0(t)}{\epsilon_0(t)^\beta} \right)$$

avec $\alpha > 0$, et $\beta > 1$. La fonction $\epsilon_0(t)$ satisfait une équation auxiliaire. Ce exemple montre la sensibilité du scénario de singularité auto-similaire aux détails de l'équation de l'évolution. En fait, l'approximation locale (5.6) de l'équation de Boltzmann-Nordheim partage beaucoup de propriétés (lois de conservation, graduation, etc.) de cette dernière, mais le scénario pour l'explosion est complètement différent.

5.3 Remarques sur le problème $\nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega) = \text{Coll}_3[\phi(\omega)]$.

Dans cette section nous présenterons quelques observations sur le problème aux valeurs propres de l'équation (5.14). Comme c'était le cas du modèle local, on peut construire ordre par ordre une série de Laurent de la forme (5.20) pour ω grand. Intégrant formellement l'équation (5.14), on la transforme dans l'équation intégrale :

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\omega^\nu} - \frac{1}{\omega^\nu} \int_{\omega}^{\infty} \omega_1^{\nu-1} \text{Coll}_3[\phi(\omega_1)] d\omega_1. \quad (5.21)$$

5.3. REMARQUES SUR LE PROBLÈME $\nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega) = \text{COLL}_3[\phi(\omega)]$. 63

Si on introduit $\phi(\omega) = 1/\omega^\nu$ dans le côté droit, on obtient le prochain ordre dans le développement de Laurent à grand ω , et ainsi de suite. On trouve :

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\omega^\nu} - \frac{C_\nu}{2(\nu-1)\omega^{3\nu-2}} - \frac{C_\nu D_\nu}{8(\nu-1)^2} \frac{1}{\omega^{5\nu-4}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\omega^{7\nu-6}}\right) \quad (5.22)$$

La fonction C_ν est définie par l'action de l'intégrale de collision sur une loi de puissance $\text{Coll}_3[\omega^{-\nu}] \equiv C_\nu \omega^{-3\nu+2}$, c'est-à-dire [12]

$$C_\nu = \int_I x^{-\nu} y^{-\nu} z^{\frac{1}{2}-\nu} (1+z^\nu - x^\nu - y^\nu) \left(1 + z^{3\nu-7/2} - x^{3\nu-7/2} - y^{3\nu-7/2}\right) dx dy,$$

où $z = x + y - 1$ et l'intégrale est faite dans la région I (avec $\epsilon_1 \equiv 1$) de la figure 5.1. Bien que la convergence de différentes intégrales soit pour $\nu < 5/4$, des annulations rendent le résultat convergent dans un domaine de ν plus grand. Le résultat est tracé dans la figure 5.5. Comme C_ν , la fonction D_ν est l'ordre suivant et il peut être exprimé en termes d'intégrales qui, par souci de simplicité, ne sont pas écrites explicitement ici.¹¹

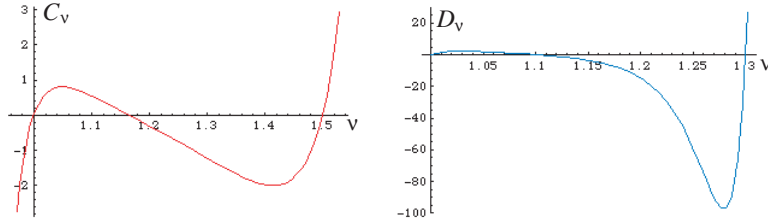


FIG. 5.5 – Gauche : Évaluation numérique du préfacteur de collision C_ν comme fonction de ν . On voit clairement ce coefficient s'annule pour $\nu = 1$ (la distribution de Rayleigh-Jeans), $\nu = 7/6$ (la cascade inverse de l'action de l'onde) et $\nu = 3/2$ (la cascade d'énergie). Droite : Évaluation numérique de D_ν en fonction de ν . D_ν s'annule pour $\nu = 11/10$ et $\nu = 13/10$.

La convergence des intégrales C_ν indique qu'on a, dans un certain sens, localité des interactions dans l'espace d'énergie : l'interaction est la plupart du temps entre particules avec des énergies semblables. Cette propriété a été employée dans le développement (5.22). D'ailleurs, l'approximation locale de l'intégrale de collision par l'opérateur différentiel, comme dans la section 5.1.2, est justifiée par la localité de l'intégrale de collision. D'autre part, la fonction C_ν joue un rôle important dans diverses quantités physiques pertinentes. En fait le flux de la matière est :

$$J = \int_0^\omega \text{Coll}_3[n_\omega] \sqrt{\omega} d\omega = \frac{C_\nu}{3(7/6 - \nu)} \omega^{3(7/6 - \nu)},$$

¹¹On note que D_ν s'annule pour $\nu = 11/10$ et $\nu = 13/10$, en tant qu'approximation locale (voir le $a_2(\nu)$ dans la section 5.2.2).

le flux d'énergie

$$P = \int_{\omega}^{\infty} \text{Coll}_3[n_{\omega}] \omega \sqrt{\omega} d\omega = \frac{C_{\nu}}{3(3/2 - \nu)} \omega^{3(3/2 - \nu)},$$

et le taux de production entropie :

$$\mathcal{R} = \int_0^{\omega} \frac{\text{Coll}_3[n_{\omega}]}{n_{\omega}} \sqrt{\omega} d\omega = \frac{C_{\nu}}{2(7/4 - \nu)} \omega^{2(7/4 - \nu)}.$$

Ces quantités sont tracées dans la figure 5.6. Comme il est bien connu dans la littérature [3, 12], les limites $\nu \rightarrow 7/6$ pour le flux de la matière J et $\nu \rightarrow 3/2$ pour le flux d'énergie P sont bien définies par l'intermédiaire de la règle de l'Hôpital. Bien que, dans la réf. [34], il a été noté que parce que $\nu \in [7/6, 3/2]$ le spectre $1/\omega^{\nu}$ de loi de puissance a une production négative d'entropie R , en accord avec l'idée qualitative qu'un condensat est en train de se construire. Jusqu'à maintenant aucune obtention de l'exposant ν basée sur la forme de la fonction C_{ν} , n'a été réussie.

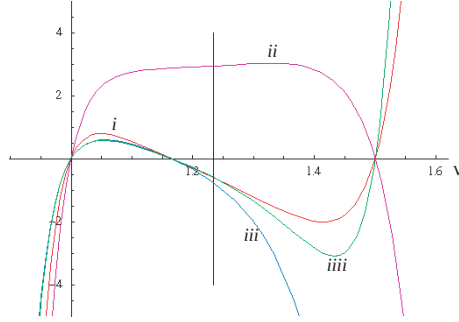


FIG. 5.6 – Tracé de la fonction C_{ν} (i), le pré-facteur du flux de matière $\frac{C_{\nu}}{3(7/6 - \nu)}$ (ii), le pré-facteur du flux d'énergie $\frac{C_{\nu}}{3(3/2 - \nu)}$ (iii), le taux de production d'entropie $\frac{C_{\nu}}{2(7/4 - \nu)}$ (iiii). La ligne verticale marque la position de la valeur propre non-linéaire montrée par dynamique $\nu = 1.234 \dots$ indiquant que rien d'exceptionnel ne se produit pour cette valeur.

Puisque C_{ν} disparaît pour $\nu = 7/6$ et aussi pour $\nu = 3/2$ on voit pourquoi il est impossible d'obtenir $\nu = 7/6$ ou $3/2$ comme il devrait suivre de (5.10), parce que la correction à l'ordre suivant (5.22) disparaît puisque C_{ν} est zéro pour les deux cas, et le développement de Laurent à grand ω s'arrête là.

La solution (5.22) est déjà singulière à $\omega = 0$, bien que nous voulions étudier une solution telle que $\phi(\omega = 0) = \phi_0$ soit fini et positif. On peut prévoir de pousser le développement de Laurent afin de capturer de mieux en mieux le comportement en $\omega = 0$. Cependant, la convergence des intégrales impliquées

5.3. REMARQUES SUR LE PROBLÈME $\nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega) = \text{COLL}_3[\phi(\omega)]$. 65

n'est pas assurée du tout, la localité des interactions disparaît probablement à partir d'un certain ordre.

Le développement asymptotique près de $\omega = 0$ nécessite $\phi(\omega) \approx \phi_0 + \delta\phi$, donc, on doit avoir

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Coll}_3[\phi(\omega)] \rightarrow \nu\phi_0.$$

La limite $\omega \rightarrow 0$ de l'intégrale de collision (5.14) exige que les régions *II* et *III* du domaine d'intégration dans 5.1 se rétrécissent sur les axes respectifs, donnant une contribution de l'ordre de ω , la région *I* se rétrécit dans l'origine donnant une contribution à l'ordre suivant : ω^2 , tandis que la région *IV* devient pour toutes les valeurs positives de ω_3 and ω_4 . Finalement, lorsque apparaît ϕ_{ω_2} on développe $\omega_2 = \omega_3 + \omega_4 - \omega$ dans ω . On trouve finalement :

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \text{Coll}_3[\phi_\omega] &= \phi_\omega \int_0^\infty (\phi_{\omega_3} \phi_{\omega_4} - \phi_{\omega_3} \phi_{\omega_3+\omega_4} - \phi_{\omega_4} \phi_{\omega_3+\omega_4}) d\omega_3 d\omega_4 + \\ &+ \int_0^\infty \phi_{\omega_3} \phi_{\omega_4} \phi_{\omega_3+\omega_4} d\omega_3 d\omega_4 + \frac{2}{3} \omega (\phi_\omega - \phi_0) \int_0^\infty \phi_{\omega_4}^2 d\omega_4 + \\ &+ \omega \int_0^\infty (\phi_\omega (\phi_{\omega_3} + \phi_{\omega_4}) - \phi_{\omega_3} \phi_{\omega_4}) \phi'_{\omega_3+\omega_4} d\omega_3 d\omega_4 + \mathcal{O}(\omega^2). \end{aligned}$$

Enfin, à l'ordre zero en ω on a la condition :

$$\nu\phi_0 = \int_0^\infty [\phi_0 \phi_{\omega_3} \phi_{\omega_4} + (\phi_{\omega_3} \phi_{\omega_4} - \phi_0 \phi_{\omega_3} - \phi_0 \phi_{\omega_4}) \phi_{\omega_3+\omega_4}] d\omega_3 d\omega_4. \quad (5.23)$$

Cette condition peut être vue comme une équation pour ϕ_0 en fonction de ν . En effet une fonction d'essai simple peut nous fournir une approximation pour les intégrales dans (5.23). Il y a besoin d'une deuxième relation pour fixer ν . Cette condition est aussi une expression intégrale : si on multiplie par $\sqrt{\omega}$ et on intègre l'équation (5.14) pour tout ω positif on trouve que le membre de droite s'annule, alors :

$$\int_0^\infty (\nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega)) \sqrt{\omega} d\omega = 0. \quad (5.24)$$

On remarque que cette intégrale converge à cause du comportement à l'infini (5.22)¹². De plus l'intégrand $(\nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega))$ doit changer de signe.

Pour une estimation simple de ces deux conditions on construit une fonction d'essai. Soit cette fonction d'essai :

$$\bar{\phi}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{\omega^\nu} - \frac{C_\nu}{2(\nu-1)\omega^{3\nu-2}} & \text{pour } \omega > \Omega; \\ \phi_0 & \text{pour } \omega < \Omega. \end{cases} \quad (5.25)$$

¹²Formellement on a aussi que

$$\int_0^\infty \omega (\nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega)) \sqrt{\omega} d\omega = 0,$$

et

$$\int_0^\infty \frac{1}{\phi(\omega)} (\nu\phi(\omega) + \omega\phi'(\omega)) \sqrt{\omega} d\omega \geq 0.$$

Cependant la première intégrale converge seulement si $\nu > 3/2$ et le deuxième si $\nu > 7/4$, donc ces deux intégrales ne convergent pas pour $7/6 < \nu < 3/2$.

qui dépend de trois paramètres : ν , ϕ_0 et Ω . Alors, les conditions (5.23), (5.24) et continuité de $\bar{\phi}(\omega)$ en $\omega = \Omega$ fixent en principe chacun de ces trois paramètres.

On peut d'abord imposer la continuité de $\bar{\phi}(\omega)$ en $\omega = \Omega$ et puis la condition (5.24) pour déterminer que :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}\nu\phi_0 &= \frac{2C_\nu}{(6\nu-7)\Omega^{2-3\nu}} \\ \Omega &= \left(\frac{C_\nu(2\nu-3)(3\nu-2)}{2\nu(\nu-1)(6\nu-7)} \right)^{\frac{1}{2(\nu-1)}} \end{aligned} \quad (5.26)$$

On peut réaliser finalement les intégrales du membre de droite de (5.23) et tracer une autre condition pour $\phi_0(\nu)$. Les points d'intersection correspondent aux valeurs propres ν recherchées. Comme on le voit dans la figure 5.7, il existe une unique intersection pour $\nu = 1.2$ qui est proche de la valeur connue $\nu = 1.234$

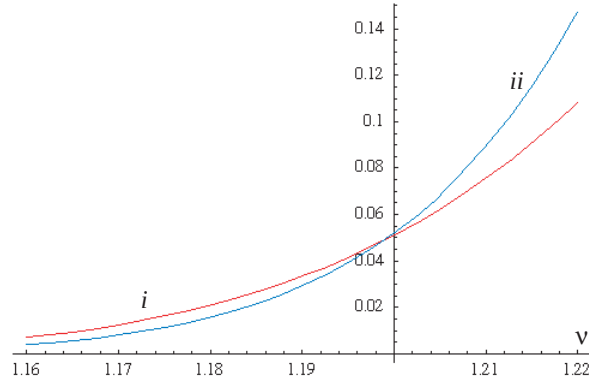


FIG. 5.7 – Tracé de ϕ_0 comme une fonction de ν , la courbe *i*) suit de la condition (5.26) alors que le trait *ii*) suit la condition (5.23), le point d'intersection est pour $\nu = 1.1989\dots$.

Bien que les deux conditions intégrales (5.23) et (5.24) donnent une valeur proche pour une fonction d'essai de la forme décrite, cette méthode ne donne pas un mécanisme de contrôle plus précis comme le serait une inégalité variationnelle. Ces résultats doivent être considérés seulement comme une esquisse.

Chapitre 6

Condensation d'ondes classiques non linéaires

Dans ce chapitre nous considérons le régime defocalisant de l'équation de NLS ou de Gross-Pitaevskii, qui est connue pour être également appropriée pour la description des gaz de bosons à interaction faible à basse température.

Comme exposé indépendamment par Pomeau [32] et par Dyachenko *et al.* [17] en 1992, ce régime d'interaction est caractérisé par une évolution irréversible du système vers une solution homogène avec des fluctuations turbulentes de petite amplitude. Ce scénario corrobore la règle générale, discutée au-par-avant (section 2), parce que la solution homogène réalise le minimum d'énergie (hamiltonienne) dans le cas defocalisant. En conséquence, l'équation de NLS montrerait un genre de processus de condensation, un mécanisme qui a été confirmé tout récemment dans le contexte des simulations numériques intensives de l'équation (projetée) de NLS qui ont été effectuées à 3D dans la référence [31].

Notre but est de fournir une description thermodynamique à l'aide de la théorie cinétique de ce processus de condensation *classique*. L'équation NLS à trois dimensions d'espace montre un véritable processus de condensation dont les propriétés thermodynamiques sont analogues à celle de la condensation de Bose-Einstein, malgré le fait que la condensation des bosons est en soit un effet quantique. Notre analyse est basée sur une théorie cinétique de l'équation NLS dans laquelle nous introduisons une coupure à haute fréquence pour éviter une catastrophe ultra-violette inhérente à la nature classique d'une équation d'ondes (paradoxe de Rayleigh-Jeans).

Bien que nous présentions notre théorie dans le cas particulier de l'équation de NLS, notre analyse est générale et peut facilement être appliquée à d'autres systèmes d'ondes non-linéaires, qui rend notre travail également approprié pour divers systèmes. En effet, même s'il n'existe pas une description à la Zakharov en turbulence forte, de récents travaux numériques de M.E. Brachet et collaborateurs [57] montrent un mécanisme similaire. De même à deux dimensions d'espace l'apparition et la persistance des structures localisées à grande échelle

au milieu de fluctuations à échelle réduite est un comportement commun de beaucoup de fluides turbulents, des plasmas ou des systèmes optiques [33].

6.1 Evidence numérique de condensation d'ondes.

Nous remettons en cause ici l'équilibre statistique d'un système d'ondes classiques. Les comportements asymptotiques à petites (*i.e.* $k \rightarrow \infty$) et grandes échelles ($k \rightarrow 0$) sont d'intérêt particulier. Les petites échelles sont toujours atteintes dans la description continue de l'équation de NLS. Comme toute théorie de champs classique une description statistique pose des problèmes à cause de la catastrophe ultraviolette ou divergence de Rayleigh-Jeans : une quantité finie d'énergie tente de se répartir sur un nombre infini de modes. On a alors suggéré [17, 32] que la dynamique évoluerait vers la formation d'une structure à grande échelle contenant une fraction des particules plus une mer de fluctuations à échelle réduite. Le système suivrait ainsi une dynamique lente irréversible où les fluctuations atteindraient des échelles de plus en plus petites. Brièvement, la structure à grand échelle minimise l'Hamiltonien tandis que l'énergie en excès envahit les échelles plus petites, avec une contribution négligeable au nombre de particules (voir le principe générale dans le chapitre 2).

Considérons l'équation de Schrödinger non-linéaire défocalisante (NLS) à D dimensions spatiales pour la fonction d'onde complexe, *i.e.* un champ classique, ψ :

$$i\partial_t\psi = -\Delta\psi + |\psi|^2\psi \quad (6.1)$$

où Δ représente l'opérateur de Laplace à dimension D . La dynamique conserve le nombre total de particules

$$N = \int |\psi|^2 d^D \mathbf{x},$$

l'énergie

$$H = \int \left[|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 \right] d^D \mathbf{x}$$

et le moment linéaire

$$\mathbf{P} = \text{Im} \int \psi^* \nabla \psi d^D \mathbf{x}.$$

Nous examinons la dynamique de formation du condensat commençant par une condition initiale aléatoirement distribuée aux grandes longueurs d'ondes. Soit $A_{\mathbf{k}}$ la transformée de Fourier de ψ définie par

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Puis, soit l'état initial

$$A_{\mathbf{k}}(0) = A e^{-\frac{k^2}{\sigma^2}} e^{i\theta_{\mathbf{k}}} \quad (6.2)$$

avec A l'amplitude, σ la largeur gaussienne et $\theta_{\mathbf{k}}$ est une phase aléatoire distribuée uniformément en $[0, 2\pi[$. De tels états initiaux correspondent dans l'espace réel à une fonction d'onde modulée à une longueur typique de l'ordre de $1/\sigma$. Comme on a vu dans la section 3 l'évolution à long terme est régie par une équation cinétique pour de l'interaction de quatre ondes (3.18) pour le spectre $n_{\mathbf{k}}$.

Comme déjà dit l'équation cinétique (3.18) possède les mêmes propriétés que l'équation de Boltzmann habituelle, la masse $N = \int n_{\mathbf{k}}(t) d^D \mathbf{k}$, le moment $\mathbf{P} = \int \mathbf{k} n_{\mathbf{k}}(t) d^D \mathbf{k}$ et l'énergie cinétique $E = \int k^2 n_{\mathbf{k}}(t) d^D \mathbf{k}$ sont conservés par l'évolution (3.18). Cette équation cinétique satisfait aussi au Théorème-H : $\partial_t S > 0$ pour $S = \int d^D \mathbf{k} \ln n_{\mathbf{k}}$.

La solution d'équilibre (zéro-flux) annule exactement $Coll[n_{\mathbf{k}}^{eq}]$ et est donnée par la distribution de Rayleigh-Jeans (3.19) avec $\omega_{\mathbf{k}} = k^2$ qui est une solution formelle seulement. Ici nous ajouterons seulement la coupure ultra-violette k_c afin d'obtenir des résultats finis. Cette coupure k_c arrive naturellement en raison du nombre fini de modes des simulations numériques.

Le fait que l'équation cinétique (5.9) décrive l'évolution à long terme de la distribution spectrale, alors la question suivante se pose : l'équation cinétique cubique pure montrant une singularité en temps fini comme précurseur d'une condensation, pouvons nous avoir une condensation d'ondes dans l'équation de NLS ?

D'après les Refs. [31, 58, 59, 60, 61] l'équation NLS ou de Gross-Pitaevskii montre un genre de processus de condensation, ce qui a été exactement confirmé par des simulations numériques de (6.1) à trois dimensions d'espace. Dans la réf. [60] nous avons obtenu une description thermodynamique de ce mécanisme de condensation dont les propriétés thermodynamiques sont analogues à celles de la condensation de Bose-Einstein dans un gaz quantique.

Notre analyse est basée sur une théorie cinétique de l'équation NLS dans laquelle nous introduisons une coupure à haute fréquence pour éviter une catastrophe ultra-violette (paradoxe de Rayleigh-Jeans). Ceci nous permet de préciser le rôle essentiel que joue le nombre de modes dans la formation dynamique du condensat, de sorte qu'une définition cohérente de la température du système puisse être donnée clairement. D'ailleurs, notre théorie indique que dans le cas de l'équation de NLS à deux dimensions spatiales on ne trouve pas de processus de condensation dans la limite thermodynamique, en raison d'une divergence infrarouge des quantités thermodynamiques d'équilibre, en analogie complète avec un gaz de Bose idéal et uniforme à 2D. Dans la figure 6.1, on voit que la condensation dépend du nombre de modes utilisés dans les simulations indiquant que la limite thermodynamique ne peut pas être réalisée dans la limite de résolution infinie. Ce résultat signifie que le système évolue vers un état d'équilibre (entropie maximale) *sans produire une structure cohérente qui réduit au minimum l'énergie* (hamiltonienne), contrairement à la règle générale discutée dans la section 2.

Un autre point important est que la coupure ultra-violette de nombre d'onde (k_c) définit une énergie critique E_c , de sorte que si l'énergie initiale est supérieure à cette énergie critique aucune condensation n'est observée. Plus

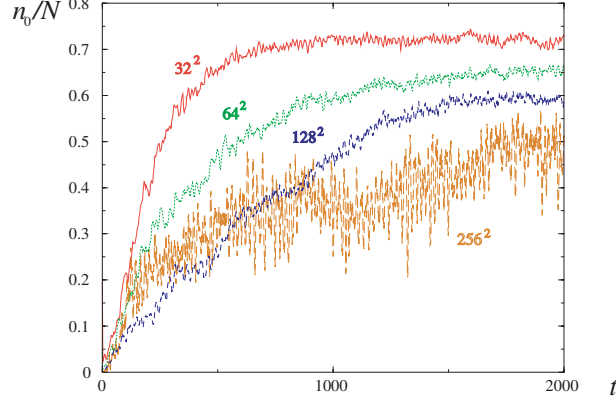


FIG. 6.1 – Fraction condensée en fonction du temps pour différentes tailles du système. On voit que lorsque la taille du système est augmentée la fraction condensée moyenne diminue. La resolution spatiale est $dx = 1$ et $k_c = \pi$.

précisément, si l'énergie cinétique initiale est E et N la normalisation de la fonction d'onde, alors si $E < E_c \sim k_c^2 N$ la condensation apparaît. Une conséquence importante est qu'on n'obtient jamais une condensation d'ondes pour une vraie équation aux dérivées partielles, *i.e.* si $k_c \rightarrow \infty$. Par conséquent, on voit que la coupure ultraviolette joue un rôle important. Dans un système d'ondes classiques cette coupure est fournie par un mécanisme dissipatif, cependant, comme il est bien connu depuis plus d'un siècle, un système conservatif pur d'ondes exige la physique quantique pour éviter la catastrophe ultra-violette.

L'étude de la formation dynamique d'un condensat dans le cadre de l'équation NLS est proche du scénario suivant : le spectre de l'onde $n_{\mathbf{k}}$, défini par l'intermédiaire du moment au deuxième ordre de la transformée de Fourier de la fonction d'onde complexe $\langle \psi_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}'}^* \rangle = n_{\mathbf{k}} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$, suit l'équation cubique de Boltzmann¹ (5.9), alors, si $E < E_c$, nous prévoyons la condensation au nombre d'onde nul, ce qui se produit par l'occurrence spontanée d'une singularité dans le spectre de l'onde pour $\mathbf{k} = 0$. Par conséquent une solution autosimilaire de la forme (5.11) décrit l'accumulation de particules au nombre d'onde zéro $\mathbf{k} = 0$ [52, 54, 55].

L'évidence de cette sorte de singularité (5.11) avec $\nu = 1.234$ dans NLS n'est pas encore réalisée d'une manière satisfaisante. L'obstacle principal est qu'essentiellement on a besoin d'un grand nombre de modes pour obtenir une bonne résolution. C'est faisable dans le cadre de l'équation (5.9) parce que, c'est une équation pour un champ à une dimension donc on peut avoir facilement 10^9 points, mais nous ne pouvons pas nous attendre bientôt à une simulation de l'équation de NLS où Gross-Pitaevskii avec 10^{27} modes.

¹Ici nous supposons l'isotropie dans l'espace du nombre d'onde : $n_{\mathbf{k}} = n_{|\mathbf{k}|}$.

Néanmoins, ce scénario correspond à l'équation de Boltzmann dont la détermination omet les échelles à court terme, ainsi la singularité en temps-fini est naturellement régularisée dans des simulations directes d'équation de Gross-Pitaevskii. L'état initial pour les simulations numériques considère une superposition aléatoire d'ondes. Naturellement ce champ initial possède un grand nombre de zéros ou de noeuds de la fonction d'onde complexe avec une distribution spatiale qui dépend probablement du spectre initial. Ces zéros sont, dans un certain sens, des "vortex linéaires"² du champ et leur existence ne brise pas la validité de la théorie de la turbulence faible. Cependant, à mesure que la fraction du condensat augmente plusieurs zéros s'annihilent, mais certains d'entre eux persistent et deviennent des "vortex non-linéaires", et à cette étape la description cinétique n'est plus valide (sauf localement, c.-à.-d. loin des coeurs des vortex). Un état dominé par les vortex a été observé à 3D [58] et 2D [61]. Finalement aux temps longs ces vortex s'annihilent et le système évolue laissant une zone libre de défauts avec un condensat plus ou moins uniforme (voir la figure 6.2).

6.2 Critère thermodynamique de la condensation d'ondes

La condensation a lieu par analogie avec la transition de Bose-Einstein pour les gaz quantiques. Si l'intégrale du nombre de particules ne diverge pas à $k = 0$: ce qui se produit si $D > 2$ comme on peut le voir du comportement

$$N/V = \int_{\epsilon}^{k_c} k^{D-1} \frac{T}{k^2} dk \sim \epsilon^{D-2} + \text{terme fini}$$

lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Pour $D \leq 2$, μ ne disparaît jamais pour une énergie finie, prouvant que la distribution d'équilibre décrit le système au moins pour des grands nombres d'onde. Pour un état initial sphériquement symétrique le moment initial disparaît, de sorte que le terme $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$ est absent dans la distribution d'équilibre (3.19). Comme l'équation de Schrödinger non-linéaire originale, dans le régime cinétique l'équation de Zakharov préserve la masse et l'énergie totales, ainsi à 3D on a

$$\begin{aligned} N/V &= 4\pi \int_0^{k_c} k^2 \frac{T}{k^2 - \mu} dk = 4\pi T k_c \left(1 - \frac{\sqrt{-\mu}}{k_c} \arctan(k_c/\sqrt{-\mu}) \right) \\ E/V &= 4\pi \int_0^{k_c} k^2 \frac{T k^2}{k^2 - \mu} dk = \frac{4\pi T k_c^3}{3} \left(1 + 3 \frac{\mu}{k_c^2} + 3 \left(\frac{-\mu}{k_c^2} \right)^{3/2} \arctan(k_c/\sqrt{-\mu}) \right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

²Lignes de vortex, à trois dimensions, et des points, à deux dimensions, sont des défauts topologiques du champ complexe ψ et sont eux aussi des structures non-linéaires dans le sens que la dispersion linéaire (énergie cinétique) est du même ordre que le terme non-linéaire (l'énergie potentielle).

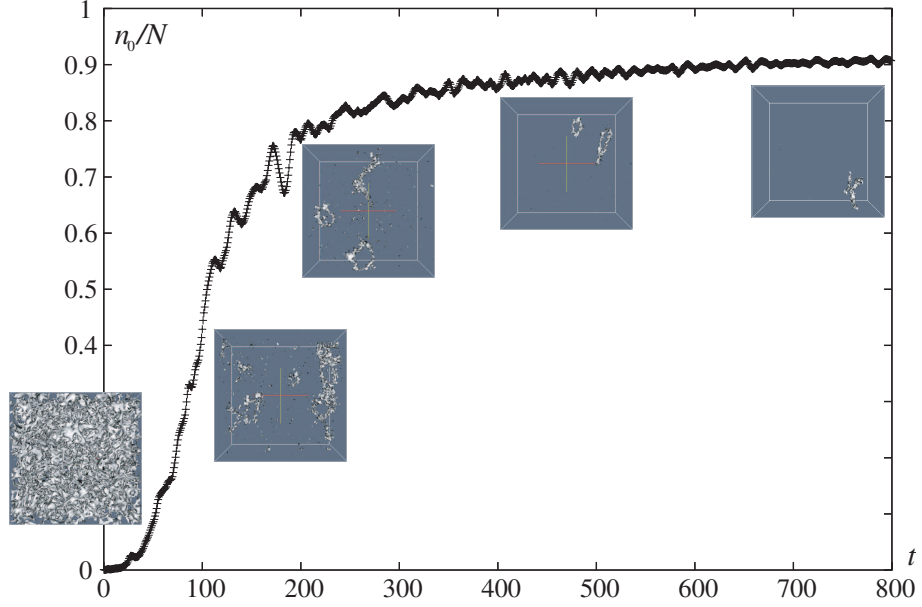


FIG. 6.2 – Évolution de la fraction du condensat n_0/N en fonction du temps t dans une simulation de NLS avec 128^3 modes spectraux et des conditions aux bords périodiques. L'étape finale mène à 90 % d'onde condensée. Les graphiques à 3D insérés dans l'image représentent les iso-surfaces de $|\Psi|^2$ pour une valeur de 0.3 pour les temps suivants (de gauche à droite) $t = 40, 120, 200, 400$ et 800 unités. À l'état initial on voit que le système est dominé par les vortex linéaires ou des noeuds, toutefois pour des temps plus grands que 200 unités l'état vortical domine l'évolution.

Ces équations devraient être comprises de la manière suivante : si on suppose que nous avons une masse et une énergie initiales N & E puis le système est conduit à l'équilibre par l'équation cinétique (3.18) où bien (5.9), à l'équilibre la distribution (3.19) et nous obtenons des équations, (6.3,6.4) pour les paramètres T & μ , ainsi pour une paire donnée (N, E) on obtient une paire (T, μ) par l'intermédiaire de (6.3,6.4).

Comme dans la condensation de Bose-Einstein standard pour un gaz de Bose, le phénomène de condensation se produit si $\mu \rightarrow 0^-$ pour une masse finie (ou le nombre de particules) et énergie finie. Explicitement, d'après (6.3) on obtient $N/V \approx Tk_c \left(1 - \frac{\pi\sqrt{-\mu}}{2k_c} + \dots\right)$ pour $|\mu| \ll k_c^2$, on voit que μ atteint zéro pour un volume spécifique fini V/N (ou T) alors on est en présence du phénomène de condensation d'ondes. Une conclusion semblable résulte de la valeur de l'énergie par particule. L'énergie par particule est une fonction qui diminue lorsque μ s'approche de zéro du côté négatif. Il y a une énergie critique,

dénotée par E_{BE} , telle que si $E = E_{BE}$, le potentiel chimique $\mu = 0$, sa valeur critique est donnée à dimension D par

$$\frac{E_{BE}}{Nk_c^2} = \frac{D-2}{D}. \quad (6.5)$$

Par conséquent, si on diminue l'énergie par particule on refroidira le système et on atteint un seuil fini E_{BE} au-dessous duquel le phénomène de la condensation d'ondes surgit dans le système.

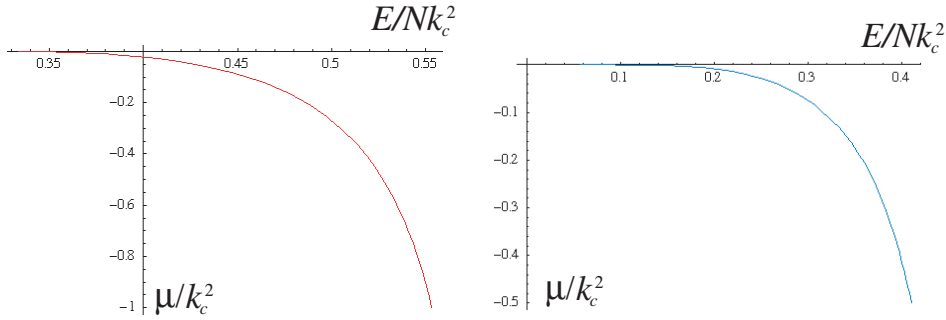


FIG. 6.3 – Tracé du potentiel chimique μ/k_c^2 vs. l'énergie par particule E/Nk_c^2 à partir (6.3) et (6.4). À gauche pour trois dimensions spatiales le seuil est à $1/3$ alors qu'à droite pour deux dimensions le seuil n'existe pas.

La même analyse peut être faite à $2D$. On trouve aisément (S est ici la surface du système)

$$N/S = 2\pi \int_0^{k_c} k \frac{T}{k^2 - \mu} dk = \pi T \log \left(\frac{k_c^2 - \mu}{-\mu} \right) \quad (6.6)$$

$$E/S = 2\pi \int_0^{k_c} k \frac{T k^2}{k^2 - \mu} dk = \pi T \left(k_c^2 + \mu \log \left(\frac{k_c^2 - \mu}{-\mu} \right) \right). \quad (6.7)$$

On a alors $E/N = \mu + k_c^2 / \log(1 - k_c^2/\mu)$, de sorte que la température T , et aussi l'énergie par particule E/N , s'annulent lorsque $\mu \rightarrow 0^-$, de sorte que la condensation n'a plus lieu à $2D$, ce que nous avons confirmé par des simulations numériques directes de l'équation (6.1). Contrairement au cas $3D$ où le champ ψ produit une solution homogène (condensat), à $2D$ ψ reste un champ stochastique à moyenne nulle, dont le spectre évolue vers la distribution d'équilibre (3.19) avec $\mu \neq 0$, c.-à-d., avec une longueur de corrélation finie $\sqrt{-\mu}$.

L'étude de la formation dynamique du condensat a été examinée dans le chapitre 5 par les solutions autosimilaires de la forme (5.11), où ϕ satisfait l'équation intégral-différentielle (5.14), et τ est une fonction dépendant seulement

du temps (5.13)³ de l'équation cinétique (5.1), menant à une singularité en temps fini. Bien que cette singularité soit naturellement régularisée dans dynamique de NLS, elle décrit l'accumulation de particules au nombre d'onde zéro $\mathbf{k} = 0$ [52, 54, 55].

Dans la Réf. [55], il est montré numériquement que le problème non linéaire de valeur propre pour $D = 3$ a une solution pour $\nu \approx 1.234$. Un résultat central est qu'une loi de puissance $1/\epsilon^\nu$ mène à une masse nulle vers le mode zéro, néanmoins cette solution produit un flux infini de masse au mode zéro. Il n'existe aucun résultat semblable dans d'autres dimensions. Bien que nous ne nous attendions pas à une condensation à $D = 2$, il n'y a aucune raison de croire que l'équation de Boltzmann (3.18) n'a pas une singularité en temps fini à $D = 2$. En effet, nous avons besoin que $\nu > 1$ mais nous avons besoin également que le flux de matière s'annule quand $t \rightarrow t_*$, ce qui implique $\nu < 4/3$. Seule une étude détaillée de ce problème répondra à cette question en suspens.

Quand le condensat commence à se former ($t > t_*$), un échange de la masse entre le condensat et la partie non condensée ou incohérente est nécessaire pour atteindre l'équilibre. On a discuté dans les Refs. [32, 17] que cette dynamique peut être décrite à l'aide des équations cinétique avec des interactions à trois ondes (la quatrième onde étant le condensat). Cet aspect a été récemment exprimé avec plus de précision en prolongeant l'équation cinétique (5.1) aux distributions singulières [52, 54, 55], qui change $n_\epsilon \rightarrow n_0 \frac{1}{4\pi\sqrt{\epsilon}} \delta^{(1)}(\epsilon) + \varphi_\epsilon$, où φ_ϵ est la partie régulière de la distribution, de sorte qu'une paire d'équations cinétiques couplées pour l'évolution des composantes condensat et incohérente ont été obtenues [55]. Ces équations décrivent un flux de masse de la composante incohérente vers le condensat, jusqu'à ce que l'équilibre thermique soit atteint, c.-à-d., jusqu'à ce que les termes de collision s'annulent exactement. Ces équations sont :

$$\partial_t n_0(t) = n_0(t) \text{Coll}_2[\varphi], \quad \text{ici} \quad (6.8)$$

$$\text{Coll}_2[\varphi] = \int (\varphi_{\epsilon_3} \varphi_{\epsilon_4} - \varphi_{\epsilon_3+\epsilon_4} (\varphi_{\epsilon_3} + \varphi_{\epsilon_4} + 1)) d\epsilon_3 d\epsilon_4;$$

$$\partial_t \varphi_{\epsilon_1}(t) = \text{Coll}[\varphi] + n_0(t) \tilde{\text{Coll}}_2[\varphi] \quad \text{ici} \quad (6.9)$$

$$\text{Coll}[\varphi] = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int S_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4} (\varphi_{\epsilon_3} \varphi_{\epsilon_4} (1 + \varphi_{\epsilon_1}) (1 + \varphi_{\epsilon_2}) - \varphi_{\epsilon_1} \varphi_{\epsilon_2} (1 + \varphi_{\epsilon_3}) (1 + \varphi_{\epsilon_4})) d\epsilon_3 d\epsilon_4$$

$$\begin{aligned} \tilde{\text{Coll}}_2[\varphi] &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \int (\varphi_{\epsilon_3} \varphi_{\epsilon_4} - \varphi_{\epsilon_1} (\varphi_{\epsilon_3} + \varphi_{\epsilon_4} + 1)) \delta(\epsilon_1 - \epsilon_3 - \epsilon_4) d\epsilon_3 d\epsilon_4 \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\epsilon_1}} \int (\varphi_{\epsilon_4} (\varphi_{\epsilon_1} + \varphi_{\epsilon_2} + 1) - \varphi_{\epsilon_1} \varphi_{\epsilon_2}) \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_4) d\epsilon_3 d\epsilon_4. \end{aligned}$$

On a utilisé la relation $\int_0^\infty S_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4} \sqrt{\epsilon_k} g(\epsilon_k) \delta(\epsilon_k) d\epsilon_k = g(0)$ pour $k = 1, 2, 3 \& 4$.

³Une généralisation cette solution est possible pour $D \neq 3$, qui donne $\tau(t) = \frac{1}{2(D-1-\nu)}(t_* - t)^{\frac{1}{\nu+(1-D)/2}}$, une signature d'une singularité en temps fini à t_* (qui dépend des conditions initiales). Naturellement, on doit avoir $\nu > (D-1)/2$.

6.2. CRITÈRE THERMODYNAMIQUE DE LA CONDENSATION D'ONDES 75

Ces équations couplées conservent la masse et l'énergie et un théorème-H est satisfait⁴.

Ceci se produit pour la distribution d'équilibre $\varphi_k^{eq} = T/k^2$, qui correspond à la distribution (3.19) avec un potentiel chimique nul. Ceci nous permet de supposer légitimement $\mu = 0$ au-dessous du seuil de transition $E \leq E_{BE} = \frac{1}{3}k_c^2 N$. Le nombre de particules condensées n_0 et l'énergie $E \leq E_{BE}$ peuvent être également calculés en écrivant $\mu = 0$ dans la distribution d'équilibre (3.19). On obtient aisément

$$(N - n_0)/V = 4\pi \int_0^{k_c} k^2 \frac{T}{k^2} dk = 4\pi T k_c$$

et $E/V = 4\pi T k_c^3/3$, ce qui donne

$$n_0/N = 1 - E/E_{BE}, \quad (6.10)$$

ou alternativement $n_0/N = 1 - T/T_{BE}$, où $T_{BE} = 3E_{BE}/(4\pi V k_c^3)$. Comme dans la condensation standard de Bose-Einstein, n_0 s'annule à la température critique T_{BE} , et n_0 devient le nombre total de particules lorsque $T \rightarrow 0$. Le comportement linéaire de n_0 versus E dans l'Eq. (6.10) est en accord avec les résultats de simulations numériques (voir la Fig. 6.4), toutefois il faut noter que l'Eq. (6.10) est obtenue pour une distribution continue sphériquement symétrique de $n_{\mathbf{k}}$, alors que dans la simulation numérique l'intégration dans l'espace de Fourier est discrétisée avec une symétrie cubique. L'équation (6.10) devrait être généralisée ainsi par

$$\frac{n_0}{N} = 1 - \frac{E}{N} \frac{\sum_k' 1/(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{\sum_k' 1} \quad (6.11)$$

où $\sum_k'$ signifie une somme discrète pour $-k_c \leq k_x, k_y, k_z \leq k_c$ telle qu'elle exclut l'origine $k_x = k_y = k_z = 0$.

L'équation (6.11) peut être calculée exactement et dépend très faiblement du nombre de modes pour d'assez grandes valeurs. En guise d'exemple, nous avons :

Nb. de modes	$(\sum_k' 1/(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)) / (\sum_k' 1)$	Éq. (6.11) pour $kc = \pi$
64^3	$1.8835/k_c^2$	$n_0 = N - 0.1908E$
128^3	$1.9011/k_c^2$	$n_0 = N - 0.1926E$
256^3	$1.9098/k_c^2$	$n_0 = N - 0.1935E$
∞	$1.9185/k_c^2$	$n_0 = N - 0.1944E$

Les droites données par les équations de la colonne de droite de la Table

⁴La solution d'équilibre est la distribution de Bose avec un potentiel chimique nul, *i.e.* $\varphi_\epsilon = \frac{1}{e^{\epsilon/T} - 1}$.

sont tracées dans la Fig. 6.4 et comparées aux valeurs données par les simulations numériques de (6.1) sans aucun paramètre ajustable et avec les conditions initiales définies par (6.2). Les simulations numériques confirment l'existence du processus de condensation pour des densités suffisantes à énergie réduite [60].

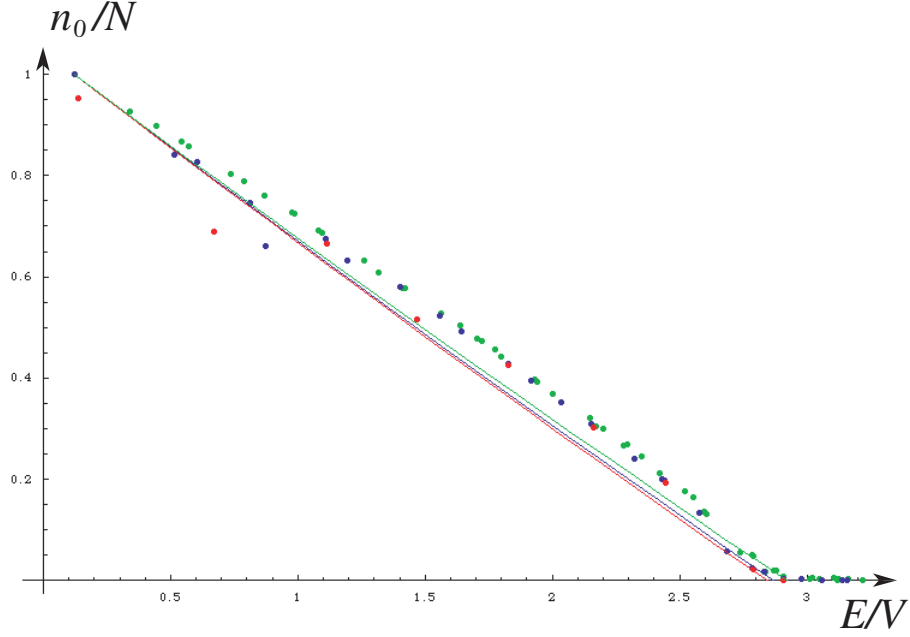


FIG. 6.4 – Fraction du condensat n_0/N en fonction de la densité moyenne d'énergie $\langle H \rangle / V$. Les points se rapportent à des simulations numériques de NLS Eq. (6.1) pour une densité fixe $N/V = 1/2$ et $k_c = \pi$. Les couleurs des points correspondent à 32^3 (vert), 64^3 (bleu) et 128^3 (rouge) modes. Les lignes droites correspondent à l'Eq (6.11) avec 32^3 (vert), 64^3 (bleu) et 128^3 (rouge) modes. La ligne droite (i) [(ii)] correspond à l'Eq continue (6.10).

Nous avons effectué des simulations numériques avec un nombre croissant de modes (16^3 , 32^3 , 64^3 et 128^3), mais avec la même fréquence de coupure ($k_c = \pi$). Ceci signifie que nous avons considéré des systèmes de taille croissante, puisque la discrétisation spatiale de la grille dx est constante (plus précisément $dx = 1$ dans les simulations). Nos résultats numériques indiquent que, toutes les fois que le nombre de modes excède 16^3 , la fraction condensée n_0/N varie faiblement avec le nombre de modes. Ceci signifie que le système a déjà atteint la limite thermodynamique avec seulement 16^3 modes. D'ailleurs, nous avons vérifié que pour un volume total donné V et une densité fixe N/V , le seuil d'énergie pour la condensation, augmente comme la fréquence de coupure, en accord avec la théorie ($E_{BE} \propto k_c^2$).

6.3 Description thermodynamique avec condensat

Bien que la dépendance linéaire (6.11) entre n_0 et E donne une bonne approximation des résultats numériques elle n'est pas complètement satisfaisante, principalement parce que la fraction du condensat a été calculée en tenant compte seulement de la contribution de l'énergie cinétique E à l'énergie totale H . Pour inclure la contribution de l'énergie potentielle (c.-à-d. le terme non-linéaire), nous suivons une approche inspirée par la théorie de Bogoliubov d'un gaz de Bose avec interactions faibles [63], que nous prolongeons au problème des ondes classiques considéré ici. La raison principale d'une telle défaillance de l'équation (6.10) est que nous avons employé seulement la partie cinétique, k^2 , pour l'énergie des modes et on sait qu'une fois que la fraction condensée est différente de zéro, le spectre $\omega_k = k^2$ devient le spectre de Bogoliubov [63] $\omega_B(k) = \sqrt{k^4 + 2n_0 k^2/V}$. Nous commençons à partir de l'énergie totale H de l'onde non-linéaire

$$H = \sum_{\mathbf{k}} k^2 a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2V} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4}, \quad (6.12)$$

où $\delta_{\mathbf{k}}$ est le symbole de Kronecker. Le hamiltonien peut être décomposé en quatre termes, $H = H_0 + H_2 + H_3 + H_4$, selon la façon dont le mode zéro, c.-à-d. $a_0 = a_{\mathbf{k}=0}$, et les modes avec $a_{\mathbf{k} \neq 0}$, entrent dans le développement :

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{1}{2V} (|a_0|^4 + 2|a_0|^2(N - |a_0|^2)) \\ H_2 &= \sum'_{\mathbf{k}} \left[k^2 a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2V} (a_0^2 a_{\mathbf{k}}^* a_{-\mathbf{k}}^* + a_0^{*2} a_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} + 2|a_0|^2 a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}}) \right] \\ H_3 &= \frac{1}{2V} \sum'_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} (2a_0 a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3} + c.c.) \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3} \\ H_4 &= \frac{1}{2V} \sum'_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} a_{\mathbf{k}_1}^* a_{\mathbf{k}_2}^* a_{\mathbf{k}_3} a_{\mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4} \end{aligned}$$

là $\sum'_{\mathbf{k}}$ exclut le mode $\mathbf{k} = 0$. La théorie cinétique de la turbulence faible exige du hamiltonien d'être diagonal dans les termes quadratiques. À cet effet, nous appliquons la transformation du Bogoliubov pour les variables canoniques

$$b_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - v_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}}^*,$$

où la condition $|u_{\mathbf{k}}|^2 - |v_{\mathbf{k}}|^2 = 1$ préserve les relations des crochets de Poisson $\{a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}}^*\} = i$ dans la base des $b_{\mathbf{k}}$'s. Imposant que le terme quadratique H_2 soit diagonal dans cette base, on trouve

$$u_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{1 - L_{\mathbf{k}}^2}} \quad \text{et} \quad v_{\mathbf{k}} = \frac{L_{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 - L_{\mathbf{k}}^2}}$$

avec

$$L_{\mathbf{k}} = \frac{-k^2 - \rho_0 + \omega_B(k)}{\rho_0},$$

et

$$H_2 = \sum_k' \omega_B(k) b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}},$$

là $\rho_0 = n_0/V \equiv |a_0|^2/V$, et

$$\omega_B(k) = \sqrt{k^4 + 2\rho_0 k^2}.$$

C'est la relation de dispersion de Bogoliubov qui prend en compte l'interaction non-linéaire. Soulignons que, dans la base des $b_{\mathbf{k}}$, les équations cinétiques qui décrivent l'évolution du condensat couplé à la composante incohérente de l'onde, sont semblables à celles obtenues dans la réf. [55], mais la relation de dispersion $\omega(k) = k^2$ est remplacée par l'expression $\omega_B(k)$ de Bogoliubov.

La distribution d'équilibre se trouve être $\varphi_k^{eq} = T/\omega_B(k)$, avec $\langle b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^* \rangle = \varphi_k^{eq} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$. En supposant une distribution d'équilibre isotrope ($\langle b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} \rangle = \langle b_{-\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}} \rangle$), la fraction non condensée est liée à $\langle b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} \rangle$ via la transformation Bogoliubov :

$$\langle a_{\mathbf{k}}^* a_{\mathbf{k}} \rangle = \frac{1}{2} (\langle b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} \rangle - \langle b_{-\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}} \rangle) + \frac{k^2 + n_0}{2\omega_B(k)} (\langle b_{\mathbf{k}}^* b_{\mathbf{k}} \rangle + \langle b_{-\mathbf{k}}^* b_{-\mathbf{k}} \rangle).$$

Finalement la fraction non condensée est

$$N - n_0 = \sum_k' \frac{k^2 + \rho_0}{\omega_B(k)} \varphi_k^{eq} = T \sum_k' \frac{k^2 + \rho_0}{\omega_B^2(k)}. \quad (6.13)$$

L'énergie totale moyenne $\langle H \rangle$ en présence de l'interaction non-linéaire a des contributions de H_0 , H_2 et H_4 . Le terme H_4 doit être considéré soigneusement parce qu'il n'est pas d'ordre supérieur à H_0 et H_2 . Après une inspection rapide, on voit que des termes particuliers où chacun des quatre $\mathbf{k}_\alpha$'s ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) sont égaux, et ceux où : $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{k}_\nu$, $\mathbf{k}_\beta = \mathbf{k}_\omega$ et $\mathbf{k}_\alpha = \mathbf{k}_\omega$ avec $\mathbf{k}_\beta = \mathbf{k}_\nu$, contribuent au premier ordre. D'autres termes présentent des corrélations qui sont traitées par l'approximation de phase aléatoire. La somme finale dans H_4 est

$$H_4 = \frac{1}{2V} \left(\sum_\alpha' |a_\alpha|^4 + 2 \left(\sum_\alpha' |a_\alpha|^2 \right) \left(\sum_\beta' |a_\beta|^2 \right) \right).$$

Bien que la somme $\sum_\alpha' |a_\alpha|^4$ soit définitivement négligeable, la deuxième contribution est du même ordre que H_0 .

En prenant la moyenne d'ensemble, nous obtenons

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2V} [N^2 + (N - n_0)^2] + \sum_k' \omega_B(k) \varphi_k^{eq} = E_0 + T \sum_k' 1.$$

La température T peut être substituée de cette expression en employant l'équation (6.13), ce qui donne une relation fermée entre $\langle H \rangle$ et n_0 ,

$$\langle H \rangle = E_0 + \frac{(N - n_0) \sum'_k 1}{\sum'_k [(k^2 + \rho_0)/\omega_B^2(k)]}, \quad (6.14)$$

où $E_0 = \frac{1}{2V} [N^2 + (N - n_0)^2]$. Cette expression s'avère en un accord quantitatif avec les simulations numériques de NLS (6.1) (voir le Fig.6.5).

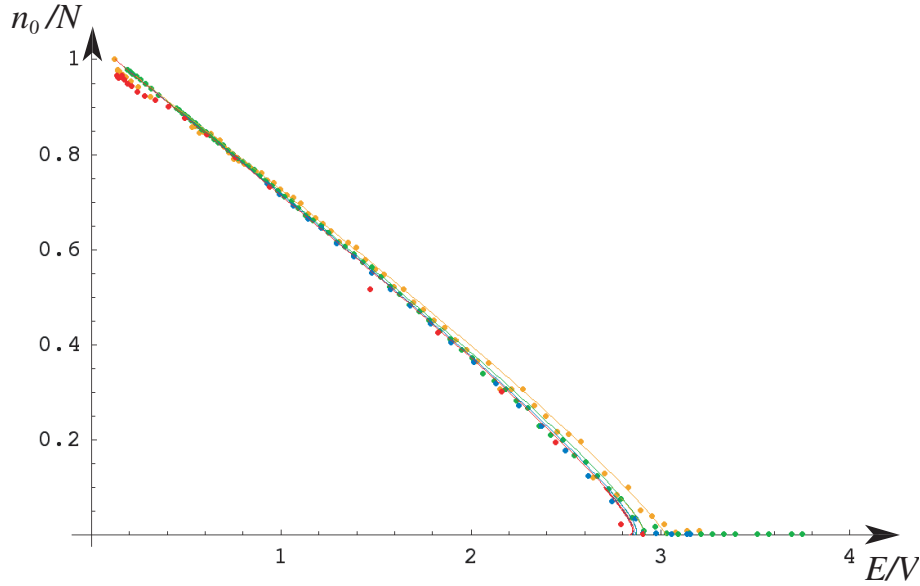


FIG. 6.5 – Fraction du condensat n_0/N versus la densité moyenne d'énergie $\langle H \rangle/V$, où $\langle H \rangle = E + E_0$, E_0 étant l'énergie condensat [voir l'Eq. (6.14)]. Les points se rapportent à des simulations numériques de NLS Eq. (6.1) pour une densité fixe $N/V = 1/2$ et une coupure à $k_c = \pi$. Les différents points correspondent à : 16^3 (orange), 32^3 (vert), 64^3 (bleu) et 128^3 (rouge) modes. Les courbes correspondent à la condensation en présence des interactions non-linéaires [d'Eq. (6.14)] pour le même nombre de modes que les simulations numériques, *i.e.* 16^3 , 32^3 , 64^3 , 128^3 .

L'expression (6.14) montre remarquablement que la présence de l'interaction non-linéaire change la nature de la transition à la condensation, qui devient du premier ordre⁵. Bien que ce comportement sous-critique soit un petit

⁵Une transition du premier ordre pour un gaz de Bose à interaction faibles a été pour la première fois spéculée par Huang, Yang et Luttinger [64] cependant il a été longtemps cru qu'une telle transition discontinue était un objet façonné par l'approximation. Un traitement soigneux de la théorie de Bogoliubov montre qu'une discontinuité dans la transition persiste [65].

effet, voir figure 6.6, les mesures numériques de la dépendance de la fraction du condensat sont en accord quantitatif avec les simulations sans paramètre ajustable [60].

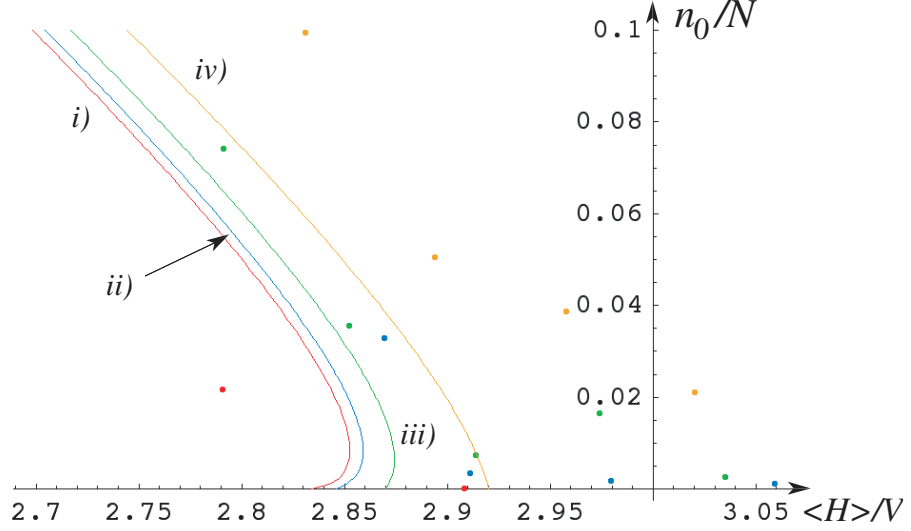


FIG. 6.6 – Détail de la région d'hystérésis. Fraction du condensat n_0/N en fonction de la densité moyenne d'énergie $\langle H \rangle/V$, à partir de l'Eq. (6.14). La densité est fixe $N/V = 1/2$ et $k_c = \pi$). La courbe $i)$ correspond à (6.14) avec 128^3 modes, $ii)$ *Idem.* mais pour 64^3 , $iii)$ *Idem.* mais pour 32^3 , et $iv)$ *Idem.* mais pour 16^3 . Les points se rapportent à des simulations numériques de NLS avec différents nombre de modes, leur couleur (*on-line*) signifie que la simulation a été faite avec le nombre de modes correspondant aux courbes $i-iv$).

Finalement, la formule (6.13) est aussi applicable à deux dimensions d'espace, il est possible de obtenir une courbe de condensation comme on le voit dans la figure suivante :

Cependant, les courbes varient à fur et à mesure la taille du système varie, montrant la non existence de limite thermodynamique. De plus nous voyons que l'hystérésis est bien plus large à 2D qu'à 3D.

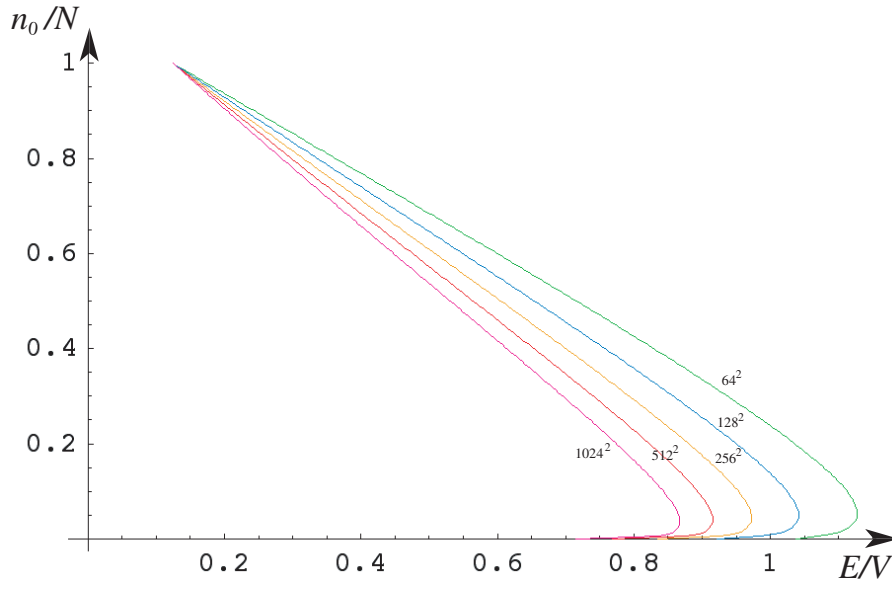


FIG. 6.7 – Fraction du condensat n_0/N en fonction de la densité moyenne d'énergie $\langle H \rangle/V$, où $\langle H \rangle = E + E_0$, à deux dimensions spatiales. La densité est fixée à $N/V = 1/2$ et la coupure ultraviolette à $k_c = \pi$ ($dx = 1$). Les différents points correspondent à : 64^2 (vert), 128^2 (bleu), 256^2 (orange), 512^2 (rouge) et 1024^2 (violet).

Chapitre 7

Théorie de turbulence faible pour une plaque élastique mince

Dans ce chapitre les oscillations d'une plaque ou coque élastique mince sont considérées. Ajoutant de l'inertie à la théorie (statique) des plaques minces on trouve que les ondes dispersives de flexion [66] interagissent par l'intermédiaire des termes non-linéaires qui sont faibles si les déformations de la plaque sont petites. Nous développons ici une théorie de la turbulence faible pour le spectre de l'onde. Essentiellement, les ondes se propagent aléatoirement sur le système et agissent les unes sur les autres par l'intermédiaire d'une résonance interne induite par les non-linéarités faibles. Les mathématiques au delà de cette condition de résonance sont formellement identiques à la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement d'un gaz classique des particules. Dans ce sens, une plaque élastique est formellement équivalente à un gaz à 2D de particules classiques agissant les unes sur les autres avec une section de dispersion non triviale. En effet, un système isolé évolue d'un état initial aléatoire à une situation d'équilibre statistique comme un gaz de particules classiques. En plus de l'équilibre statistique pour les systèmes isolés, la théorie de la turbulence faible prévoit ici une cascade d'énergie d'une source d'énergie (forçage) vers une échelle de dissipation typiquement caractérisée par les déformations plastiques, l'impédance des bords, *etc.* D'ailleurs, alors qu'il y a un manque d'observations directes des prévisions de la turbulence faible, nous exhibons numériquement la relaxation à l'équilibre et la cascade d'énergie avec des spectres d'un Kolmogorov pour la dynamique d'une plaque.

Cette dynamique est illustrée dans 7.1 pour un système dépourvu de dissipation où la déformation de la plaque sont montrées au temps initial et après une longue évolution.

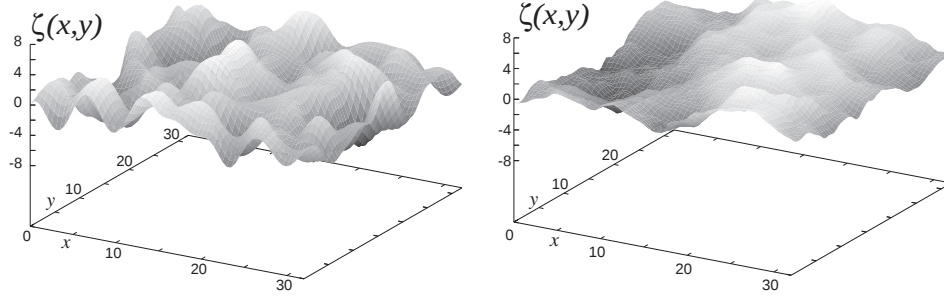


FIG. 7.1 – Agrandissement d'un morceau de la surface $\zeta(x, y)$. L'image à gauche est la condition initiale alors que l'image à droite représente l'évolution après 1200 unités de temps. Le rapport d'aspect est 1 : 1 : 1.

7.1 Théorie statique des plaques élastiques

Les équations d'équilibre d'une plaque mince ont été données par Föppl en 1907 [68, 69] :

$$-\frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}\Delta^2\zeta + \{\zeta, \chi\} = 0; \quad (7.1)$$

$$\frac{1}{E}\Delta^2\chi + \frac{1}{2}\{\zeta, \zeta\} = 0, \quad (7.2)$$

avec

$$\{f, g\} = f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy},$$

$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ est l'opérateur de Laplace, ζ l'amplitude de la déformation, telle que le rayon de courbure de la plaque reste toujours très supérieur à h , son épaisseur. La fonction χ est le potentiel d'Airy dont dérive le tenseur des contraintes. Ce système est écrit en variables lagrangiennes, c'est à dire avec les coordonnées (x, y) dans le plan de la plaque plane non perturbée. Bien que les conditions aux bords mathématiquement les plus simples : périodiques, ou $\zeta = \Delta\zeta = 0$ et $\chi = \Delta\chi = 0$ aux bords, ne sont pas les plus adaptées physiquement, néanmoins nous considérons, ici, ces conditions aux bords périodiques.

Les équations (7.1, 7.2) sont les conditions d'Euler-Lagrange extrémalisant formellement l'énergie :

$$U = h \int \left[\frac{h^2 E}{24(1-\sigma^2)} (\Delta\zeta)^2 - \frac{1}{2E} (\Delta\chi)^2 - \frac{1}{2} \chi \{\zeta, \zeta\} \right] dx dy$$

La fonctionnelle $U[\zeta, \chi]$ n'est pas bornée inférieurement en raison du terme cubique $\chi\{\zeta, \zeta\}$, et ne peut avoir de minimum absolu. Pour éviter cette difficulté, on redéfinit l'énergie élastique comme fonctionnelle de la seule déformation ζ ,

ce qui peut se faire par résolution formelle de l'équation (7.2) pour $\Delta\chi$, ce qui donne :

$$U = Eh \int \left[\frac{h^2}{24(1-\sigma^2)} (\Delta\zeta)^2 + \frac{1}{8} (\Delta^{-1}\{\zeta, \zeta\})^2 \right] dxdy \quad (7.3)$$

Cette formulation a une interprétation géométrique intéressante puisque $\Delta\zeta$ représente la courbure moyenne, *i.e.* $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, et $\{\zeta, \zeta\}$ la courbure gaussienne $\frac{1}{R_1 R_2}$ (R_1 et R_2 sont les rayons maximum et minimum).

7.2 Théorie de turbulence faible d'une plaque oscillante.

Le point de départ est la version dynamique des équations d'une plaque mince

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\}; \quad (7.4)$$

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \chi = - \frac{1}{2} \{\zeta, \zeta\}. \quad (7.5)$$

où ρ est la densité de masse.

Les petites perturbations en ondes planes ($\zeta \sim e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ avec $\mathbf{x} = (x, y)$) d'une plaque plate sont dispersives avec le comportement balistique habituel des ondes de flexion : $\omega_{\mathbf{k}} = hc|\mathbf{k}|^2 = hck^2$ [66, 69]. Où $c = \sqrt{\frac{E}{12(1-\sigma^2)\rho}}$ a la dimension d'une vitesse.

En dépit de la complexité de (7.4) et (7.5) le système présente une structure hamiltonienne qui est plus évidente d'après (7.3) et a un sens mieux défini dans l'espace de Fourier à cause de l'opérateur Δ^{-1} dans (7.3). Si la transformée de Fourier est $\zeta_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int \zeta(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^2 \mathbf{x}$ (avec $\zeta_{\mathbf{k}} = \zeta_{-\mathbf{k}}^*$), on trouve à partir de (7.5) : $\chi_{\mathbf{k}}(t) = -\frac{E}{2|\mathbf{k}|^4} \{\zeta, \zeta\}_{\mathbf{k}}$ où $\{\zeta, \zeta\}_{\mathbf{k}}$ est la transformée de Fourier de $\{\zeta, \zeta\}$. La dynamique devient donc :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 \zeta_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} &= - \frac{Eh^2 k^4}{12(1-\sigma^2)} \zeta_{\mathbf{k}} \\ &+ \int V_{-\mathbf{k}, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \delta^{(2)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) d^2 \mathbf{k}_{2,3,4} \end{aligned}$$

où $d^2 \mathbf{k}_{2,3,4} \equiv d^2 \mathbf{k}_2 d^2 \mathbf{k}_3 d^2 \mathbf{k}_4$ et $V_{12;34} = \frac{E}{2(2\pi)^2} \frac{|\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2|^2 |\mathbf{k}_3 \times \mathbf{k}_4|^2}{|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|^4}$.

La structure hamiltonienne devient évidente, si nous définissons en tant que variables canoniques la déformation $\zeta_{\mathbf{k}}(t)$ et le moment conjugué $p_{\mathbf{k}}(t) = \rho \partial_t \zeta_{\mathbf{k}}(t)$. Le Hamiltonien est alors :

$$\begin{aligned} H[\zeta_{\mathbf{k}}, p_{\mathbf{k}}]/h &= \int \left[\frac{1}{2\rho} |p_{\mathbf{k}}|^2 + \frac{Eh^2 k^4}{24(1-\sigma^2)} |\zeta_{\mathbf{k}}|^2 \right] d^2 \mathbf{k} \\ &+ \frac{1}{4} \int V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) d^2 \mathbf{k}_{1,2,3,4} \end{aligned}$$

La transformation canonique

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathbf{k}} &= \frac{X_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2}}(A_{\mathbf{k}} + A_{-\mathbf{k}}^*) \\ p_{\mathbf{k}} &= -\frac{i}{\sqrt{2}X_{\mathbf{k}}}(A_{\mathbf{k}} - A_{-\mathbf{k}}^*)\end{aligned}\quad (7.7)$$

avec $X_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}\rho}}$ qui à satisfait la condition : $[A_{\mathbf{k}}, A_{\mathbf{k}'}^*] = i\delta^{(2)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$ permet d'écrire le Hamiltonien dans une forme diagonale :

$$H[A_{\mathbf{k}}, A_{\mathbf{k}}^*]/h = \int \omega_{\mathbf{k}} |A_{\mathbf{k}}|^2 d^2\mathbf{k} + \frac{1}{4} \int J_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \sum_{\{s_i\}} A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} A_{\mathbf{k}_2}^{s_2} A_{\mathbf{k}_3}^{s_3} A_{\mathbf{k}_4}^{s_4} \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) d^2\mathbf{k}_{1,2,3,4} \quad (7.8)$$

où $J_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} = \frac{1}{6} X_{\mathbf{k}_1} X_{\mathbf{k}_2} X_{\mathbf{k}_3} X_{\mathbf{k}_4} \mathcal{P}_{234} V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2; \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4}$ avec $\mathcal{P}_{234}$ la somme sur les six permutations possibles des index 2,3 & 4. Comme dans [13], nous définirons $A_{\mathbf{k}}^s$ avec les deux choix possibles $s = +, -$ correspondant à la direction de propagation, tel que $A_{\mathbf{k}}^+ \equiv A_{\mathbf{k}}$ alors que $A_{\mathbf{k}}^- \equiv A_{-\mathbf{k}}^*$ (Notons que $A_{-\mathbf{k}}^s = A_{\mathbf{k}}^{s*}$). Des crochets de Poisson on déduit l'oscillateur non-linéaire :

$$\frac{dA_{\mathbf{k}}^s}{dt} + is\omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}^s = -is \int J_{-\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \sum_{s_1 s_2 s_3} A_{\mathbf{k}_1}^{s_1} A_{\mathbf{k}_2}^{s_2} A_{\mathbf{k}_3}^{s_3} \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}) d^2\mathbf{k}_{123} \quad (7.9)$$

Si le gradient de la déformation est petit, les termes non-linéaires interviennent à l'ordre suivant et cet oscillateur non-linéaire a deux échelles distinctes de temps, l'oscillation rapide $i\omega_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}}$ et la non-linéarité faible. Puis, en suivant l'approche de la théorie de la turbulence faible (voir section 3, chapitre ??), nous obtenons ainsi une équation cinétique de type Boltzmann qui décrit l'échange de l'énergie d'un mode à l'autre en raison des résonances à quatre ondes [18, 19] :

$$\begin{aligned}\frac{dn_{\mathbf{p}_1}}{dt} &= 12\pi \int d^2\mathbf{k}_{123} |J_{\mathbf{p}_1\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} n_{\mathbf{k}_1} n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} n_{\mathbf{p}_1} \\ &\times \left(\frac{1}{n_{\mathbf{p}_1}} + \frac{s_1}{n_{\mathbf{k}_1}} + \frac{s_2}{n_{\mathbf{k}_2}} + \frac{s_3}{n_{\mathbf{k}_3}} \right) \\ &\times \delta(\omega_{\mathbf{p}_1} + s_1\omega_{\mathbf{k}_1} + s_2\omega_{\mathbf{k}_2} + s_3\omega_{\mathbf{k}_3}) \delta(\mathbf{p}_1 + s_1\mathbf{k}_1 + s_2\mathbf{k}_2 + s_3\mathbf{k}_3)\end{aligned}\quad (7.10)$$

Le domaine de validité de cette équation est $t_{coll}(k)\omega_k \gg 1$ avec $t_{coll}(k)$ le temps de collision (définie dans (3.25)), c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\frac{1}{t_{coll}(k)} &= 12\pi \int |J_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}|^2 n_{\mathbf{k}_2} n_{\mathbf{k}_3} \delta(\omega_k + \omega_{\mathbf{k}_1} - \omega_{\mathbf{k}_2} - \omega_{\mathbf{k}_3}) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) d^2\mathbf{k}_{123} \\ &\sim 12\pi |J|^2 k^4 \frac{n_k^2}{\omega_k}\end{aligned}\quad (7.11)$$

et la condition précédente devient

$$t_{coll}(k)\omega_k \sim \frac{\omega_k^2}{12\pi k^4 n_k^2} \sim \frac{1}{n_k^2} \gg 1 \quad (7.12)$$

car J a un degré zero en k , *i.e.* $J \sim 1$.

L'équation (7.10) conserve "formellement" la quantité de mouvement totale par unité de surface $\mathbf{P} = h \int \mathbf{k} n_{\mathbf{k}}(t) d^2 \mathbf{k}$ et l'énergie cinétique par unité de surface $\mathcal{E} = h \int \omega_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}}(t) d^2 \mathbf{k}$ et elle satisfait au théorème- H : soit $\mathcal{S}(t) = \int \ln(n_{\mathbf{k}}) d^2 \mathbf{k}$ l'entropie de non-équilibre, alors $d\mathcal{S}/dt \leq 0$. Cependant, bien qu'il s'agisse d'une équation cinétique gouvernée par des interactions à quatre ondes (7.10), l'action de l'onde $\mathcal{N} = \int n_{\mathbf{k}}(t) d^2 \mathbf{k}$ n'est pas conservée. L'équation cinétique (7.10) décrit ainsi une évolution irréversible vers la *distribution d'équilibre*, de Rayleigh-Jeans qui donne, quand $\mathbf{P} = \mathbf{0}$:

$$n_{\mathbf{k}}^{eq} = \frac{T}{\omega_{\mathbf{k}}}, \quad (7.13)$$

où T s'appelle, par analogie avec la thermodynamique, la température (avec des unités d'énergie/longueur, soit une force) qui est naturellement liée à l'énergie initiale $\mathcal{E}_0 = h \int \omega_{\mathbf{k}} n_{eq} d^2 \mathbf{k} = hT \int d^2 \mathbf{k}$. La quantité $\int d^2 \mathbf{k}$ est le nombre de degrés de liberté par unité de surface. Par conséquent, chaque degré de liberté possède la même énergie : hT . Naturellement, pour un système infini ce nombre diverge (de même que l'énergie). Ceci est la catastrophe de Rayleigh-Jeans classique et elle est toujours supprimée à une certaine coupure physique qui correspond ici aux processus de dissipation pour des longueurs d'onde plus petites que h . Les simulations numériques sur une grille régulière fournissent également une coupure naturelle $k_c = \pi dx$, avec dx la maille de la grille, ce qui donne $\mathcal{E}_0 = \pi h T k_c^2$ pour une grande plaque.

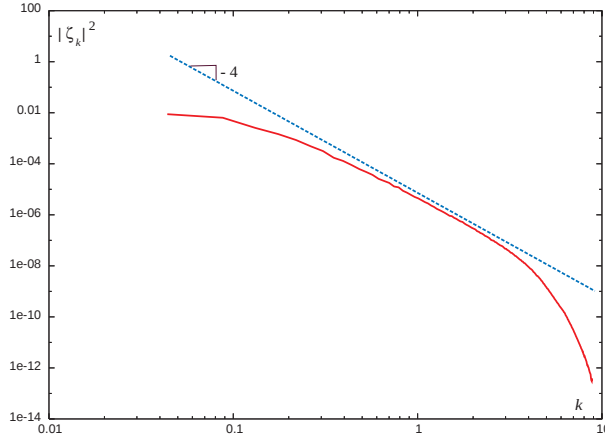


FIG. 7.2 – Simulation numérique d'une plaque carrée avec $h/L = 10^{-3}$ avec 1024^2 modes. Nous traçons le spectre moyen de puissance de la déflexion $\langle |\zeta_k|^2 \rangle$ en fonction du nombre d'onde k après 1200 unités de temps. La ligne représente la loi de Rayleigh-Jeans $1/k^4$.

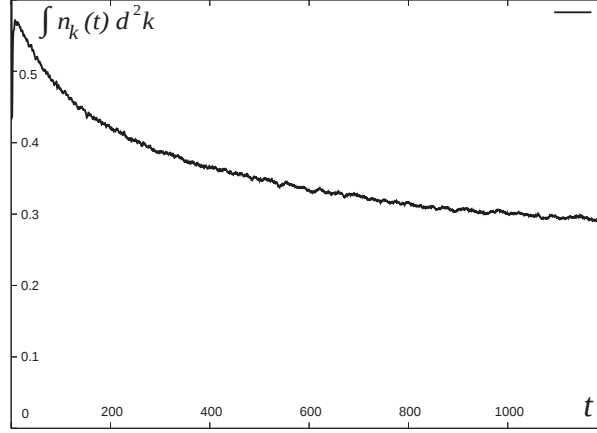


FIG. 7.3 – Evolution de l'action de l'onde $\mathcal{N} = \int n_{\mathbf{k}}(t) d^2k$ dans le temps. On remarque qu'elle n'est pas conservée.

7.3 Spectre de Kolmogorov

En plus de la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans, il existe aussi des solutions stationnaires de (7.10) de non équilibre. Elles ont une importance majeure dans le processus de transfert des quantités conservées, l'énergie en guise d'exemple, entre différentes échelles. Ces solutions peuvent être devinées par analyse dimensionnelle mais, comme il a été montré par Zakharov [16], ce sont les solutions exactes de l'équation cinétique. En dépit de quelques différences avec l'équation cinétique habituelle, la méthode de Zakharov peut être appliquée. En effet, intégrant sur les angles l'amplitude de dispersion $|J_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$, on définit une nouvelle amplitude S qui ne dépend que des modules $k_i = |\mathbf{k}_i|$ et qui peut être écrite comme une fonction des fréquences ω_{k_i} :

$$S_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} = \frac{1}{6} \mathcal{P}_{234} \int \frac{|J_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4}|^2}{|\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3|} d\varphi_4.$$

Recherchant une solution en loi de puissance de la forme $n_k = A\omega_k^{-\alpha}$, on trouve, que les huit termes de l'intégrale de collision du membre de droite de l'équation (7.10) se décomposent en¹

$$3\text{Coll}_{2 \leftrightarrow 2} + \text{Coll}_{3 \leftrightarrow 1}$$

défini comme

¹Notons que de les huit termes seulement sept d'entre eux jouent un rôle car le terme avec $s_1 = s_2 = s_3 = 1$ n'est pas résonante.

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}oll_s &= \frac{3\pi A^3}{2(hc)^3} \int_{\Omega_s} \frac{S_{\omega_k, \omega_1, \omega_2, \omega_3}}{\omega_k^\alpha \omega_1^\alpha \omega_2^\alpha \omega_3^\alpha} (\omega_k^\alpha + s\omega_1^\alpha - \omega_2^\alpha - \omega_3^\alpha) \\
&\times \left(1 + s \left(\frac{\omega_1}{\omega_k} \right)^{3\alpha-2} - \left(\frac{\omega_2}{\omega_k} \right)^{3\alpha-2} - \left(\frac{\omega_3}{\omega_k} \right)^{3\alpha-2} \right) d\omega_2 d\omega_3.
\end{aligned}$$

Pour $\mathcal{C}oll_{2 \leftrightarrow 2}$ on doit prendre $s \equiv 1$ et le domaine d'intégration est sur $\Omega_+ = \{0 \leq \omega_2 \leq \omega_k \text{ \& } \omega_k - \omega_2 \leq \omega_3 \leq \omega_k\}$ avec $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 - \omega_k$, c'est-à-dire le domaine I dans la figure 5.1. Pour $\mathcal{C}oll_{3 \leftrightarrow 1}$ on a $s \equiv -1$ et l'intégrale est sur $\Omega_- = \{0 \leq \omega_2 \leq \omega_k \text{ \& } 0 \leq \omega_3 \leq \omega_k - \omega_2\}$, le domaine O dans la figure 5.1, avec $\omega_1 = \omega_k - \omega_2 - \omega_3$.

Ces termes collisionnels ont l'échelle $\mathcal{C}oll_{2 \leftrightarrow 2} = C_+(\alpha) \omega_k^{1-3\alpha}$ et $\mathcal{C}oll_{3 \leftrightarrow 1} = C_-(\alpha) \omega_k^{1-3\alpha}$. Les coefficients $C_\pm(\alpha)$ sont des fonctions réelles qui dépendent seulement de α .

Même si la forme explicite de la matrice $S_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}$ n'est pas simple, sa valeur peut être bornée dans les deux domaines $\Omega_\pm$, ainsi le terme de collision converge pour des valeurs telles que $\alpha \in (0.5, 1.2)$, ce qui valide la condition de localité. Les deux coefficients s'annulent avec une dégénérescence double pour $\alpha = 1$ montrant que le spectre de Kolmogorov-Zakharov : $n_k^{KZ} \sim \frac{1}{\omega_k} \sim \frac{1}{k^2}$ coïncide avec la solution de Rayleigh-Jeans (7.13). Cela veut dire que le flux d'énergie est nul. Cette double dégénérescence pour $\alpha = 1$ suggère l'existence de corrections logarithmiques, comme dans le cas de l'équation de Schrödinger nonlinéaire à 2D [17]. Comme montré dans Ref. [70] cette correction logarithmique produit un résultat divergent pour NLS. Cependant, dans notre cas, il est possible de montrer que toutes les intégrales sont finies, montrant qu'il existe un flux d'énergie finie². En conclusion on trouve à la fin :

$$n_k^{KZ} = C \frac{hP^{1/3} \rho^{2/3}}{(12(1-\sigma))^{2/3}} \frac{\ln^{1/3}(k_*/k)}{k^2}. \quad (7.14)$$

où C and k_* sont des nombres réels. De plus P est le flux d'énergie imposé dans la cascade d'énergie entre la grande échelle et la petite échelle (il a les dimensions de la masse/temps³). Pour $\alpha = 0$ et $3\alpha - 4 = 0$ le terme collisionnel $\mathcal{C}oll_{2 \leftrightarrow 2}$ s'annule également. Ces solutions sont l'équipartition d'action de l'onde ($\alpha = 0$) et un deuxième spectre de KZ : $n_k \sim 1/k^{4/3}$ correspond à la cascade inverse de l'action de l'onde. Cependant, ce spectre n'annule pas le deuxième terme de collision $\mathcal{C}oll_{3 \leftrightarrow 1}$, en accord avec la non conservation de l'action d'ondes mentionnée ci-dessus.

Une conséquence importante est la non existence ici de cette deuxième cascade inverse $n_k \sim 1/k^{4/3}$, comme on la trouve d'habitude pour les systèmes dominés par des interactions à quatre ondes, comme les ondes de gravité ou même l'équation de Schrödinger non-linéaire.

²La principale différence avec la Réf. [17] est que dans le cas présent la matrice S s'annule sur les lignes $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$, assurant la convergence.

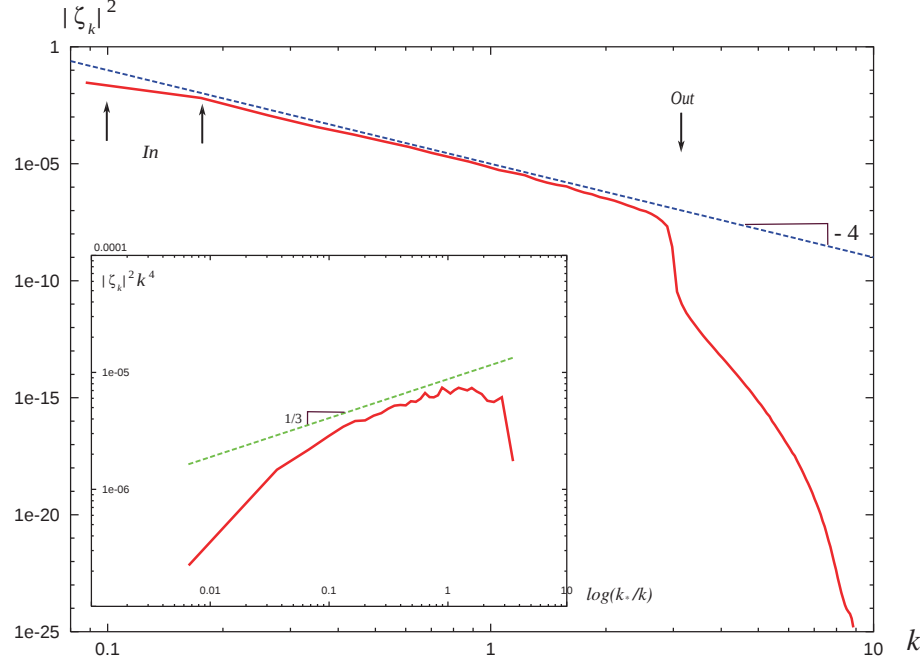


FIG. 7.4 – Moyenne du spectre $\langle |\zeta_k|^2 \rangle$ pour la cascade d'énergie, la ligne trace la loi en puissance $1/k^4$. L'insertion trace $k^4 \langle |\zeta_k|^2 \rangle$ vs. $\log k$ et montre une déviation logarithmique clair.

En conclusion, considérons à nouveau la condition de validité de la théorie cinétique (7.12) : la distribution de Rayleigh-Jeans reste valide pour un domaine de nombre d'onde tel que $t_{coll}(k)\omega_k \sim \frac{k^4}{T^2} \gg 1$, *i.e.* $k \gg \sqrt{T}$, alors que la cascade d'énergie reste valide si $t_{coll}(k)\omega_k \sim \frac{k^4}{(P \ln(k_*/k))^{2/3}} \gg 1$, c'est-à-dire si $\frac{k}{\ln(k_*/k)^{1/6}} \gg P^{1/6}$. Bien que les équations élastiques d'une plaque plate demeurent toujours valides lorsque l'amplitude des déformations deviennent grandes à condition que la courbure moyenne reste plus petite que l'inverse de l'épaisseur de la plaque, *i.e.* $h\Delta\zeta \ll 1$, l'étirement ne peut pas être traité comme une perturbation faible et un phénomène du type “déferlement de vague” est prévu : l'énergie se focalise dans les structures localisées comme des rides [71] ou des surfaces coniques (appelées les d-cônes) [72, 73]. Étonnamment, un régime dominé par des rides développe un spectre de puissance $|\zeta_k|^2 \sim 1/k^4$ semblable au spectre de la turbulence faible obtenue ici. D'une autre part, pour un régime dominé par les d-cônes le spectre prévu devrait suivre $|\zeta_k|^2 \sim 1/k^6$, le spectre de Kolmogorov-Zakharov se croise avec l'espectre de d-cônes pour $\frac{hP^{1/3}\rho^{2/3}}{(12(1-\sigma))^{2/3}} \frac{\ln^{1/3}(k_*/k)}{k^2} \approx \frac{hc\rho}{k^4}$, c'est-à-dire pour $k_{dc}^2 \ln^{1/3}(k_*/k_{dc}) \approx$

$$\frac{(12(1-\sigma))^{2/3} \rho^{1/3}}{c P^{1/3}}, \text{ i.e. } k < k_{dc} \sim P^{-1/6}.$$

Finalment, il est possible d'obtenir une fenêtre de transparence : $P^{1/6} \ll k \ll P^{-1/6}$ où le spectre peut se réaliser et puisque les vibrations des plaques transmettent leur son à l'air, nous prétendons qu'un spectre de Kolmogorov peut être entendu !

Chapitre 8

Remarques finales

En conclusion, nous posons quelques questions qui nous semblent intéressantes et nous y répondons brièvement :

Dans le chapitre 5 :

5-*i*) L'équation (5.14) avec les conditions aux bords (5.15) et (5.16) pour $\nu = 7/6$ a-t-elle une solution ?

5-*ii*) L'équation de Boltzmann pour des particules classiques avec une interaction du type “cœur dur” (c'est à dire l'équation (5.2) sans les termes cubiques) évolue-t-elle vers une singularité en temps finie ?

5-*iii*) Considérons une équation de Boltzmann avec un terme d'interaction général (*i.e.* avec une section efficace non constante dans (5.2)) avec une dépendance du type loi de puissance dans l'impulsion ou l'énergie en dimension D : existe-t-il aussi une singularité en temps finie ?

Dans le chapitre 6 :

6-*i*) Pour les ondes de gravité, on a $\omega_k \sim k^{1/2}$. Le critère “thermodynamique” pour la condensation est alors satisfait en dimension $D = 1$ et $D = 2$. Est-ce que l'équation de Boltzmann pour la dynamique d'ondes de gravité réalise une singularité en temps finie ? Se produit-il un processus de condensation d'ondes ?

6-*ii*) Comme il est bien connu, la condensation de Bose–Einstein n'existe pas dans un espace bidimensionnel infini. D'où la question : l'équation de Boltzmann (5.2) à deux dimensions d'espace évolue-elle vers une singularité en temps finie ?

Dans le chapitre 7 :

7-*i*) Existe-il une condensation d'ondes à grande échelle dans une plaque élastique même s'il n'existe pas de cascade inverse ?

Commentons ces questions générales :

Les trois premières questions ont pour objet de remarquer que bien qu'on puisse deviner une solution autosimilaire de la forme (5.11) et écrire une équation du type de (5.14) avec des conditions aux bords (5.15) et (5.16) pour la variable autosimilaire, ceci ne signifie pas que le problème de valeur propre a une solution. Un problème de valeur propre non-linéaire dépend explicitement des détails du problème. En effet, l'équation (5.19) ne semble pas avoir une solution pour des valeurs de ν positives.

5-*i*) La série de perturbation (5.22) semble mener à la conclusion que l'équation (5.14) avec $\nu = 7/6$ satisfaisant les conditions de frontière (5.15) et (5.16) n'a aucune solution parce que C_ν , D_ν , *etc.* s'annulent. Cependant, un comportement singulier pour grand ω est possible. Par conséquent, $\nu = 7/6$ pourrait être une solution exacte mais très singulière de (5.14).

5- *ii*) Comme montré par Carleman [50], pour une distribution initiale adéquate, les solutions de l'équation Boltzmann classique pour les sphères dures sont bornées pour $t > 0$. Par conséquent, une solution autosimilaire de la forme (5.11) montrant la singularité en temps fini est impossible. Ce résultat peut être prévu d'un point de vue plus physique. Bien que l'équation classique de Boltzmann possède un spectre de Kolmogorov-Zakharov pour le flux de la matière de la forme $n_\epsilon = J^{1/2}\epsilon^{7/4}$, le signe de J est négatif¹. D'ailleurs, on prévoit que la fonction auto-similaire $\phi(\cdot)$ possède une masse infinie au "pic" proche de l'énergie nulle. En effet, l'inégalité (5.18) devient : $7/4 < \nu < 3/2$ ce qui est impossible à satisfaire.

5-*iii*) Soit un système d'ondes avec une relation de dispersion $\epsilon(k) = k^\alpha$, dans un espace de dimension D , et supposons que la section efficace se comporte comme $a^2(\epsilon) \sim 1/\epsilon^{2/\ell}$. Les solutions de Kolmogorov pour le flux de particules deviennent $n_\epsilon = J^{1/3}/\epsilon^{D/2-1/3}$, tandis que pour le flux d'énergie on a $n_\epsilon = P^{1/3}/\epsilon^{D/\alpha-2/3\ell}$. L'inégalité (5.18) devient

$$\frac{D}{\alpha} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3\ell} < \nu < \frac{D}{\alpha}.$$

En principe, aucune objection ne surgit concernant l'existence d'une solution autosimilaire de la forme (5.11). D'ailleurs, le lecteur pourrait vérifier cela : pour les particules classiques à trois dimensions l'inégalité (5.18) donne : $\frac{7}{4} - \frac{1}{\ell} < \nu < \frac{3}{2}$, qui permet des solutions pour $\ell \leq 4$.² Naturellement, ℓ est relié à l'énergie potentiel inter-particule $U(r) \sim \frac{1}{r^\ell}$. Donc des particules interagissant plus faiblement que le potentiel : $U(r) \sim \frac{1}{r^4}$ (dit de Maxwell) pourraient donner lieu à une singularité en temps fini du type (5.11).

¹Les signes des flux de Kolmogorov dépendent de la dérivée de la courbe correspondante C_ν (défini en (5.5)) pour le problème des résonances à quatre-ondes pour l'équation classique de Boltzmann. Dans le cas de l'équation de Boltzmann classique, on s'attend à une solution autosimilaire de la forme

$$n_\epsilon(t) = t^{-\frac{\nu}{2(\nu-1)}} \phi\left(\epsilon/t^{\frac{1}{2(\nu-1)}}\right)$$

qui satisfait aux conditions physiques et mathématiques ci-dessus.

²Le flux de particules vers l'origine a un signe négatif dans l'approximation locale, et un signe inconnu pour l'équation de Boltzmann.

6- *i*) La cascade inverse pour les ondes de gravité est $n_k = J^{1/3}/k^{23/6}$, ce qui veut dire qu'une évolution auto-similaire de la forme (5.11) avec un exposant proche de 23/6 (ou 23/3 en terme de fréquences) n'est pas admissible car on aurait besoin d'une masse infinie pour construire ce condensat. En effet $\int_{k_0} n_k k dk \sim k_0^{-11/6}$ diverge lorsque $k_0 \rightarrow 0$. Plus précisément l'inégalité (5.18) dans ce cas là devient

$$\frac{23}{3} < \nu < 4,$$

qui est impossible à satisfaire.

6- *ii*) Le taux de transition S dans l'équation de Boltzmann (5.9) et/ou (5.14) se comporte comme $S \sim \epsilon^{3D/2-4}$, avec D la dimension de l'espace. Par conséquent le spectre Kolmogorov-Zakharov pour un flux constant J de particules est $n_\epsilon = J^{1/3}/\epsilon^{D/2-1/3}$, alors que pour le flux d'énergie P on a : $n_\epsilon = P^{1/3}/\epsilon^{D/2}$.³ Les valeurs propres non-linéaires possibles ν sont telles que : $D/2 - 1/3 < \nu < D/2$. Il est connu que, dans un espace bidimensionnel infini, le potentiel chimique μ ne s'annule jamais à l'équilibre, donc une condensation de type Bose-Einstein ne se produit donc formellement pas à deux dimensions d'espace. Toutefois nous ne voyons aucune objection à l'existence d'une solution pour le problème aux valeurs propre non-linéaire à deux dimensions. En effet la précédente inégalité borne ν par : $2/3 < \nu < 1$ à 2D. Peut-être une singularité surgit-elle mais l'évolution future ne permet pas d'alimenter le condensat avec des particules ou, peut-être, plus simplement il n'y a aucune singularité en temps fini. Cette question reste ouverte et demanderait davantage de réflexions.

7- *i*) Il semble qu'il n'existe pas de condensation dans une plaque élastique de taille finie (finie veut dire qu'on doit supprimer la divergence infrarouge). Nous en donnons deux raisons. En effet, même s'il s'agit d'une dynamique d'interaction à quatre ondes, les processus de collision de trois ondes à une onde (et vice versa) sont possibles. Il n'existe pas de cascade inverse qui puisse transférer de l'amplitude des ondes à petite échelle vers les grande échelles. Cela n'est pas un grand problème car rien n'empêche le spectre de s'alimenter de la partie à petites échelles. Cependant, le terme nonlinéaire n'admet pas d'interaction lorsqu'une des ondes peut avoir une impulsion ou nombre d'onde nul ($V_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} = 0$ s'il existe un $\mathbf{k}_i = 0$), car le condensat ne peut pas s'alimenter. La raison fondamentale de cela est que pour une plaque vibrante (ou même pour des ondes de surface de gravité), il existe la condition où le déplacement total de la déformation sur toute la surface (ou le centre masse) est nul.

³pour $D = 2$ le spectre d'énergie et la distribution d'équilibre de Rayleigh-Jeans sont les mêmes, impliquant un flux d'énergie nul. Pour plus de détails voir [3].

Bibliographie

- [1] V.I. Petviashvili and V.V. Yan'kov, Rev. of Plasma Phys. **14**, 5 (1985).
- [2] V. E. Zakharov, A.N. Pushkarev, V.F. Shvets and V.V. Yan'kov, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **48**, 79 (1988) [JETP Lett. **48**, 83 (1988)].
- [3] A.I. Dyachenko, V.E. Zakharov, A.N. Pushkarev, V.F. Shvets, V.V. Yan'kov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **96**, 2026 (1989) [JETP Lett. **69**, 1144 (1989)].
- [4] C. Josserand & S. Rica, Phys. Rev. Lett. **78**, 1215 (1997).
- [5] R. Jordan, B. Turkington and C. L. Zirbel, Physica D **137**, 353 (2000); R. Jordan and C. Josserand, Phys. Rev. E **61**, 1527 (2000).
- [6] B. Rumpf and A.C. Newell, Phys. Rev. Lett. **87**, 054102 (2001); Physica D **184**, 162 (2003); B. Rumpf Phys. Rev. E **69**, 016618 (2004).
- [7] K.Ø. Rasmussen, T. Cretegnny, P.G. Kevrekidis, and N. Grønbech-Jensen Phys. Rev. Lett. **84**, 3740 (2000).
- [8] M.M. Litvak, A transport equation for magneto-hydrodynamic waves, Avco. Everett Res. Rep. no 92 (1960).
- [9] K. Hasselmann, J. Fluid Mech. **12** 481 (1962); *Ibid.* **15** 273 (1963).
- [10] D.J. Benney, P.G. Saffman, Proc. Roy. Soc. London **A 289**, 301 (1966).
- [11] A.C. Newell,, Rev. Geophys. **6**, 1 (1968).
- [12] V. E. Zakharov, V. S. L'vov and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I* (Springer, Berlin, 1992);
- [13] A.C. Newell, S. Nazarenko and L. Biven, Physica D **152-153** 520 (2001).
- [14] V.E. Zakharov, N.N. Filonenko, Energy spectrum for stochastic oscillations of the surface of a fluid, Dokl. Akad. Nauk SSSR **170** (6) (1966) 1292–1295 [English transl. in Sov. Math. Dokl.].
- [15] V.E. Zakharov, N.N. Filonenko, Weak turbulence of capillary waves, Zh. Prikl. Mekh. I Tekn. Fiz. (5) (1967) 62–67 [English transl. in J. Appl. Mech. Tech. Phys.].
- [16] V.E. Zakharov, On the spectrum of turbulence in plasma without magnetic field, Zh. Eksper. Teoret. Fiz. 51 (1966) 686–696 [English transl. in Sov. Phys. JETP 24 (1967) 455–459].
- [17] S. Dyachenko, A.C. Newell, A. Pushkarev and V.E. Zakharov, Physica D **57**, 96 (1992).

- [18] G. Düring, C. Josserand, & S. Rica, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 025503 (2006).
- [19] G. Düring, “¿Se puede escuchar un espectro de Kolmogorov?”, Tesis de Magíster Universidad de Chile (2006).
- [20] P.A. Hwang, D.W. Wang, E. J. Walsh, W.B. Krabill, R.N. Swift, *Journal of Physical Oceanography* **30**, 2753–2767 (2000).
- [21] W. Wright, R. Budakian, and S. Putterman, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4528 (1996).
- [22] E. Henry, P. Alstrøm and M. T. Levinsen, *Europhys. Lett.*, **52** (1), pp. 27–32 (2000).
- [23] M. Yu. Brazhnikov, G.V. Kolmakov, A. A. Levchenko, and L. P. Mezhev-Deglin, *JETP Lett.* **74**, 583 (2001); M. Yu. Brazhnikov, G.V. Kolmakov, and A. A. Levchenko, *Sov. Phys. JETP* **95**, 447 (2002); M. Yu. Brazhnikov, G. V. Kolmakov, A. A. Levchenko and L. P. Mezhev-Deglin, *Europhys. Lett.*, **58** (4), pp. 510–516 (2002).
- [24] E. Falcon, C. Laroche et S. Fauve, “Observation of gravity-capillary wave turbulence”, preprint (2006).
- [25] A. N. Pushkarev and V. E. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3320 (1996).
- [26] A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, and V. E. Zakharov, *JETP Lett.* **77**, 477 (2003); A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, and V. E. Zakharov, *JETP Lett.* **77**, 546 (2003). A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich and V. E. Zakharov, *Phys. Rev. Lett.* **92**134501(2004).
- [27] A. C. Newell and V. E. Zakharov *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1149(1992)
- [28] L. Biven, S.V. Nazarenko and A.C. Newell, *Phys. Letters* **280** 28 (2001).
- [29] A. C. Newell and P. J. Aucoin, *J. Fluid Mech.* **49**, 593 (1971); see also V. S. L’vov, Yu. L’vov, A. C. Newell, and V. Zakharov, *Phys. Rev. E* **56** 390 (1997).
- [30] S. Galtier, S.V. Nazarenko, A.C. Newell, A. Pouquet, *J. Plasma Phys.* **63** 447 (2000).
- [31] M. J. Davis, S. A. Morgan and K. Burnett, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160402 (2001); *Phys. Rev. A* **66**, 053618 (2002); M. J. Davis, S. A. Morgan and K. Burnett, *Phys. Rev. A* **66**, 053618 (2002).
- [32] Y. Pomeau, *Physica D* **61**, 227 (1992).
- [33] P. A. Robinson, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 507 (1997).
- [34] C. Connaughton, A. Newell and Y. Pomeau, *Physica D* **184**, 64 (2003).
- [35] J. Yvon, *Comptes Rendus Acad. Sc. Paris*, **t. 246** 2840 (1958).
- [36] L.W. Nordheim, *Proc. R. Soc. London A* **119**, 689 (1928).
- [37] E.A. Uehling and G.E. Uhlenbeck, *Phys. Rev.* **43**, 552 (1933).
- [38] E.P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749 (1960).
- [39] N.N. Bogoliubov, *Journal of Physics* **10**, 265 (1946).
- [40] A.W. Sáenz, *Phys. Rev.* **105**, 546 (1957); **106**, 1371E (1957).

- [41] H. Mori and J. Ross, Phys. Rev. **109**, 1877 (1958).
- [42] R.F. Snider, J. Chem. Phys. **32**, 1051 (1960).
- [43] L. Waldmann, Z. Naturforsch. **A 12**, 660 (1957); Z. Naturforsch. **A 13**, 609 (1958); Z. Naturforsch. **A 15**, 19 (1960).
- [44] L.P. Kadanoff et G.I. Baym, “*Quantum Statistical Mechanics*”, Benjamin (1962).
- [45] A.I. Akhiezer et S.V. Peletminski, “*Methodi Statistichieskoï fisiki*”, Ed. Nauka, Moscou (1977).
- [46] P. A. M. Dirac, Proc. Cambridge Phil. Soc. **27**, 240 (1931).
- [47] L. Boltzmann, Leçons sur la théorie des gaz, Gauthier-Villars, Paris (1902).
- [48] Ya.B. Zel’dovich and E.V. Levich, Sov. Phys. JETP **28**, 1287 (1969).
- [49] A.S. Kompaneets, Sov. Phys. JETP **4**, 730 (1957).
- [50] T. Carleman, Acta Mathematica **60**, 91 (1933).
- [51] A. Einstein, Preussische Akademie der Wissenschaften, Phys-math. Klasse, Sitzungsberichte, **23**, 3 (1925).
- [52] B. Svistunov, J. Moscow Phys. Soc. **1**, 373 (1991).
- [53] Yu. Kagan, B.V. Svistunov, and G.V. Shlyapnikov, JETP **75**, 387 (1992).
- [54] D.V. Semikoz and I.I. Tkachev, Phys. Rev. Lett. **74**, 3093 (1995) and D.V. Semikoz and I.I. Tkachev, Phys. Rev. **D 55**, 489 (1997).
- [55] R. Lacaze, P. Lallemand, Y. Pomeau and S. Rica, Physica **D 152-153**, 779 (2001).
- [56] C. Connaughton and Y. Pomeau, C. R. Physique **5**, 91 (2004).
- [57] C. Cichowlas, P. Bonaiti, F. Debbash, and M. E. Brachet, Phys. Rev. Lett. **95**, 264502 (2005).
- [58] N. G. Berloff and B. V. Svistunov, Phys. Rev. A **66**, 013603 (2002).
- [59] V. E. Zakharov and S.V. Nazarenko, Physica **201 D**, 203 (2005).
- [60] C. Connaughton, C. Josserand, A. Picozzi, Y. Pomeau and S. Rica, Phys. Rev. Lett. **95**, 263901 (2005).
- [61] S.V. Nazarenko and M. Onorato, Physica **219 D**, 1 (2006).
- [62] Y. Pomeau, Nonlinearity **5**, 707 (1992).
- [63] N. N. Bogoliubov, Journal of Physics **11**, 23 (1947).
- [64] K. Huang, C. N. Yang, and J. M. Luttinger, Phys. Rev. **105**, 776 (1957).
- [65] Y. Pomeau and S. Rica, J. Phys. A : Math and Gen. **33** 691 (2000); Y. Pomeau and S. Rica, Europhys. Letters **51**, 20 (2000), S. Rica, Comptes Rendus Physique **5**, 49 (2004).
- [66] Lord Rayleigh, “Theory of Sound”, §217, (Dover, New York 1945).
- [67] J. Wu, J. Wheatley, S. Putterman, and I. Rudnick, Phys. Rev. Lett. **59**, 2744 (1987).

- [68] A. Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 5, Leipzig, 1907, p. 132. and Th. von Kármán, Ency. d. math. Wiss., Bd. IV. 2, II, Leipzig, 1910, §8.
- [69] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, Theory of Elasticity, (Pergamon Press, New York 1959).
- [70] V.M. Malkin, Phys. Rev. Lett. **76**, 4524 (1996).
- [71] T.A. Witten and H. Li, Europhys. Lett. **23**, 51 (1993).
- [72] M. Ben Amar and Y. Pomeau, Proc. Soc. Lond., **A 453**, 729 (1997).
- [73] E. Cerda and L. Mahadevan, Phys. Rev. Lett. **80**, 2358 (1998).

Coalescence and Droplets in the Subcritical Nonlinear Schrödinger Equation

Christophe Josserand and Sergio Rica*

*Laboratoire ASCI, UPR 9029 CNRS, Bâtiment 506, 91405 Orsay Cedex, France
and LPS, URA 1306 CNRS, Ecole Normale Supérieure, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*
(Received 20 May 1996; revised manuscript received 29 October 1996)

We describe here the coalescence and formation of droplets, in a Hamiltonian kinetics of a first order phase transition. In the process of coalescence, the typical linear size of single phase domains grows as a power of time. The density correlation function follows the usual self-similar dynamic scaling. For different initial conditions, we observe the nucleation and dynamics of stable pulses. The stability of such pulses in one dimension is also computed. Both results may be relevant to superfluid He_4 cavitation or for filamentation in nonlinear optics and for the recent evidence of Bose-Einstein condensation in Li_7 . [S0031-9007(97)02409-5]

PACS numbers: 42.65.Sf, 03.40.Kf, 03.75.Fi, 67.40.-w

The well known process of the formation of singularities at finite time in nonlinear wave phenomena (for instance optics) is generically described by the (focusing) nonlinear Schrödinger equation [1]

$$i\partial_t\psi = \nabla^2\psi + |\psi|^2\psi. \quad (1)$$

Here ψ is a complex quantity representing the amplitude of the wave, i.e., the electric field in optics. The nonlinear term represents the action of a refraction index depending on the field intensity. For spatial dimensions equal and higher than two and for a large set of initial conditions the electric field diverges at a finite time.

Experimentally we observe in optics only a kind of filamentation, i.e., two dimensional pulses of very high but finite intensity (see, for instance, [2]). We may imagine that physically the appearance of singularities at finite time and collapsing waves are, in some sense, “fictions,” since for very large electric fields we must include higher orders in the expansion of the nonlinear refraction index. As a consequence, the divergence is stopped, creating stable and intense light pulses. In He_4 superfluidity, those pulses must be regarded as superfluid droplets.

We study the formation of these localized structures when higher order terms are added to Eq. (1). We describe a Hamiltonian system where the energy has two local stable minima. In some sense, by analogy with the bifurcation theory, this can be called a “subcritical” conservative dynamic. The physics observed in the numerics is very analogous to the formation of droplets in a “dynamical” first order phase transition. By dynamical we mean that all the physical processes take place out of equilibrium; moreover, there is no explicit relaxation process: The dynamics are completely reversible (and Hamiltonian).

A purely variational (and nonconservative in the sense of matter) dynamics does not lead to stable droplets because of the minimization of the free energy of the system, which finally is completely filled by the most stable phase. However, stable solitary waves induced

by subcritical nonvariational instabilities were discovered some time ago by Thual and Fauve [5] and studied in detail later [6]. In this case, the nonvariational effects stabilize the solitons.

In this Letter we show that stable solitary waves arise 1D, 2D, and 3D whenever we add a fifth power term to Eq. (1). We show also a mechanism of coalescence between the liquid droplets or gaseous bubbles, leading finally to two stable domains in a finite volume. This process follows a self-similar dynamical scaling. Finally, we argue that the pulses or droplets are stable because of the mechanism of coalescence which transfer (irreversibly) the matter of small droplets (perturbations) to the main drop, in a kind of condensation.

Our starting point is a subcritical nonlinear Schrödinger (SNLS) equation (we use the same notations as in [7] and in general we shall speak in the context of Bose superfluid at $T = 0$ K, that is, a liquid, instead of nonlinear optics)

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla^2\psi - 2\rho_c|\psi|^2\psi + |\psi|^4\psi; \quad (2)$$

ρ_c is a constant. In general the inverse of ρ_c represents the small expansion parameter of the nonlinear terms: For $|\psi|^2 \ll \rho_c$ the cubic term [Eq. (1)] is sufficient to describe the phenomena; however, when $|\psi|^2 \approx \rho_c$, one must add the quintic term. Physically, for superfluid He_4 , ρ_c is related to the critical density for cavitation; that is, when the sound speed vanishes (see later), experimentally this happens for densities of the order of 0.1 g/cm^3 [3]. In optics, the expansion parameter represents an electric field intensity being a characteristic of the material. Typically $\rho_c \approx 10^{22} \text{ V}^2/\text{m}^2$ (the characteristic intensity in atomic scales).

In a similar way, Eq. (2) could be a good model to study the dynamics of the many body system of attractive two particles interaction which is the case of Li_7 [4]. If one neglects the three body interactions, this ultracold gas is unstable as in the case of nonlinear optics; however, it was suggested (see Ref. [13] of [4]) that the external magnetic forces, used to trap the atoms, could stop the

collapse, in an unclear way because the magnetic field varies so slowly in the small region of the collapse. The three particle interaction has to be repulsive in order to regularize singularities; thus our results could be relevant in the recent experiments of Bose-Einstein condensation of Li_7 .

Equation (2) possesses the following invariances: (i) translation, (ii) Galilean invariance, and (iii) global phase change. The total mass or number of particles, $N = \int |\psi|^2 d^D x$, is conserved, as well as the energy:

$$H = \int \left(\frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 - \rho_c |\psi|^4 + \frac{1}{3} |\psi|^6 \right) d^D x. \quad (3)$$

The long wavelength behavior of the system is described by a phase variable, the phase of ψ , which follows a wave equation. The variations of the modulus of ψ are related to the phase fluctuations. It is useful to define $\rho = |\psi|^2$ which we shall call the local “density of the liquid” (“light intensity” in nonlinear optics). The density ρ satisfies a wave equation: $\partial_{tt} \rho = c^2 \nabla^2 \rho$, c being the sound velocity. For a density ρ the sound speed is $c = \sqrt{2\rho(\rho - \rho_c)}$; therefore, it vanishes for $\rho = \rho_c$. If the local density ρ is less than ρ_c , a long wavelength instability develops because locally c^2 becomes negative. The linear density perturbation $\rho + \delta \rho_k e^{ik \cdot x + \sigma_k t}$, with $\sigma_k = \sqrt{k_0^2 k^2 / 2 - k^4 / 4}$ and $k_0^2 = 4\rho(\rho_c - \rho)$, are unstable for all perturbations such that $k < \sqrt{2}k_0$. Starting with an initial uniform density ρ_0 slightly less than ρ_c , the density variations grow exponentially in time, as one can see in Fig. 2(a), creating a cellular modulation with the length scale of the fastest growing mode, i.e., $1/k_0$; see Fig. 1(a). This very short scale modulation expels matter from one domain to another, creating regions with more

stable densities, and leading to a splitting of space into well defined domains with large ($\sim \rho_c$) and small (~ 0) stable densities.

A second intermediary and short stage in the process occurs: The pressure difference between the low density (gas) and the large density (liquid) phases contract the liquid phase, until the liquid density reaches $\frac{3}{2} \rho_c$, the point where pressure equilibrium is established. Finally, one can observe a third step, with slow spatiotemporal dynamics, where the stable droplets and bubbles coalesce: The number of domains diminishes inversely proportional to the time. This process may be seen by the simple kinetic process $B + B \rightarrow B$. Let $n(t)$ be the total number of bubbles B by volume unit; then, if we suppose the diffusion constant independent of the radius of the bubble, the number of bubbles follows the rate equation [8]

$$\frac{dn}{dt} \sim -n^2,$$

i.e., $n \sim t^{-1}$ as we observe in the numerical simulations in two and three spatial dimensions (see Figs. 1 and 2); however, in 1D the number of domains decreases only as $n \sim t^{-1/4}$, lacking a satisfactory explanation.

Indeed, we observe that the typical size of structures grows as $\ell(t) \sim t^{1/2}$ in two spatial dimensions and $\ell(t) \sim t^{1/3}$ in three spatial dimensions [$\ell(t) \sim t^{1/4}$ in 1D] as shown in Fig. 2(b); moreover, numerical simulations show that the structure factor $S(k, t) = \langle |\psi_k(t)|^2 \rangle$ [$\psi_k(t)$ being the Fourier transform of $\psi(x, t)$ and $\langle \cdots \rangle$ the angular average in Fourier space] evolves as

$$S(k, t) = \ell(t)^D S(\ell(t)k),$$

where $S(\cdot)$ is a universal function for large t [9]. Figure 2 plots the function $S(k, t)/\ell(t)^D$ as a function of $\ell(t)k$ for different times in 2D. One can see the convergence to the universal function S for large t , as well as the exponential growth of $S(k, t)$ at a defined scale for small t . In addition, let us notice that S follows the Porod law, i.e., $S(u) \sim u^{-(D+1)}$, at least in 2D, which means that we are dealing with sharp domain walls [9].

This kind of physical process is not the only one possible; it happens for an initial condition such that the initial ratio ρ_0 is close from ρ_c , which is the case of superfluid helium. However, in nonlinear optics the electric field amplitude is usually much less than an atomic one; thus $\rho_0 \ll \rho_c$. This is also the case of condensates of Li_7 since the total number of trapped atoms is very small. In both cases, the fifth power term is negligible in (2) and the focusing instability tends naturally towards singular points in a finite time, until the amplitude of $|\psi|^2$ becomes comparable with ρ_c , at which point the fifth power term “saturates” the focusing instability and leads to the formation of stable droplets as seen in Fig. 3 for a 2D simulation. This kind of situation seems to be the one observed in nonlinear optics.

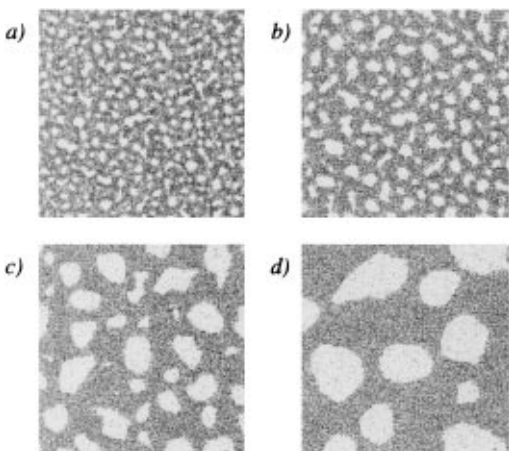


FIG. 1. A time sequence of the coalescence of gas bubbles. The gray scale represents the vapor phase by a light gray and the liquid by a dark gray. The images are taken (a) at $t = 36.2$, (b) $t = 61.1$, (c) $t = 203.35$ and (d) $t = 634.7$ time units. The number of bubbles decreases in time following the law $n \sim t^{-1}$, as usual in coalescence phenomena. We used a Gauss-Seidel Crank-Nicholson finite-difference method in a $(256)^2$ box with Neuman boundary conditions, $dx = 1.0$, $\rho_c = 1.1$, and $\rho_0 = 1$.

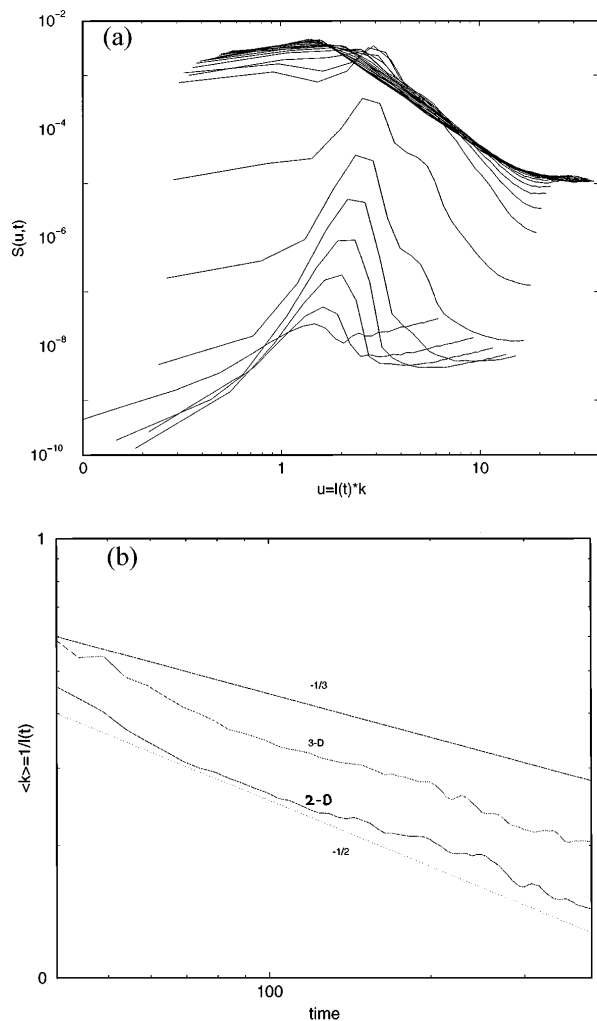


FIG. 2. (a) Log-log plot of $t^{-1}S(k,t)$ vs $t^{1/2}k$ at different equal times intervals, in 2D. The curves at the bottom represent the exponential growth in time of the focusing instability given by the linear equation $\partial_t S(k,t) = \sigma_k S(k,t)$. The nonlinearities saturate this exponential growth, and we can see that these functions reach a universal function, which for large u follow the Porod law in 2D, $S(u) \sim u^{-(D+1)}$, D being the space dimension. (b) For large t , the mean value $\langle k \rangle$, in 2D and 3D has been computed and one can note that the inverse of the characteristic length of our problem follows the scaling law $\langle k \rangle \sim t^{-1/D}$. This means that the number or bubbles in the system is inversely proportional to the time. All these simulations have been done with $\rho_c = 1.1$ and $\rho_0 = 1$.

Because of the slow coalescence or condensation of the small droplets, the final state is a unique solitary droplet. The long term evolution, with Dirichlet boundary conditions on ψ , makes the droplets disappear on the boundaries leading to a single droplet at the center of the box, presumably the structure of the ground state of the system. The excess energy transforms into vibrations of the droplet and small scale oscillations. We note that the central pulse has an internal excited mode of oscillation (the second angular harmonic), which persists as far as we could follow in numerical simulations. The

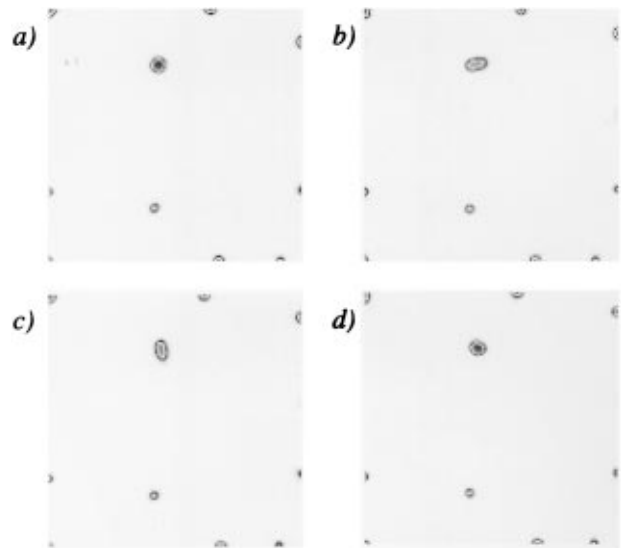


FIG. 3. A temporal sequence of a state dominated by oscillatory droplets as we see from (a) through (d).

frequency is given by the classical formula of Rayleigh for capillary oscillations [10] $\omega^2 = 6\alpha/\rho r_0^3$, α being the surface energy (per unit of mass) which we will discuss later and r_0 the radius of the droplet.

The first step to understand this two dimensional pulse is through the one dimensional case. We seek a solution of (2) of the form $R(x)e^{i\mu t}$, with $R(\pm x) \rightarrow 0$, for $x \rightarrow \infty$:

$$-\frac{1}{2}R_{xx} - 2\rho_c R^3 + R^5 + \mu R = 0.$$

We obtain the known soliton solution of [11]:

$$R^2(x) = \frac{3\rho_c}{2} \frac{1 - a^2}{2a \cosh^2(\sqrt{2\mu}x) + 1 - a}, \quad (4)$$

where $a = \sqrt{1 - 4\mu/3\rho_c^2}$. The dimensionless parameter a characterizes completely the solitons.

By imposing that the total number of particles is equal to $N = \int_{-\infty}^{\infty} dx R^2(x)$, we get $\mu = (3\rho_c^2/4) \tanh^2 \sqrt{2/3N}$; thus, N is directly related to a by $a = 1/\cosh(\sqrt{2/3N})$.

In the thermodynamic limit ($N \rightarrow \infty$) a goes to 0, i.e., $\mu \rightarrow 3\rho_c^2/4$, and the soliton tends to a front from $\rho = 0$ (at $x \rightarrow -\infty$) to $\rho = \frac{3}{2}\rho_c$ for a intermediate band (arbitrary large depending linearly on N) near $x = 0$, and then again $\rho = 0$ for $x \rightarrow \infty$. This value $\rho = \frac{3}{2}\rho_c$ is such that the equilibrium pressure is established, i.e., $p(\rho = 0) = p(\rho = \frac{3}{2}\rho_c) = 0$ [7], as we have explained for the coarsening process.

Let us come back to the surface energy between the liquid and the vapor in 2D. We can estimate this when the number of particles is large, i.e., $\mu \approx 3\rho_c^2/4$. We consider a one dimensional pulse between $\rho(x = -\infty, y, z) = 0$ and $\rho(x = 0, y, z) = \frac{3}{2}\rho_c$; thus, the surface energy is given by integration along x of the energy (3) (in fact at equilibrium we need the free energy

$H + \mu N)$

$$\alpha = \int_{-\infty}^0 dx \left(\frac{1}{2} R_x^2 - \rho_c R^4 + \frac{1}{3} R^6 + \mu R^2 \right) \\ \equiv \int_{-\infty}^0 dx R_x^2 = \frac{9\rho_c^2}{16\sqrt{6}}.$$

The soliton solution (4) is stable towards fluctuations in the x direction, as we shall now prove. We introduce a perturbation of the soliton solution (4): $\psi(x, t) = [R(x) + \delta\psi(x)e^{\sigma t}]e^{i\mu t}$ into Eq. (2). For small $\delta\psi$ we get the eigenvalue problem

$$\sigma \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ \delta\psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{L}_1 \\ -\mathcal{L}_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ \delta\psi_2 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

with $\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{2}\partial_{xx} - 2\rho_c R^2(x) + R^4(x) + \mu$ and $\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{2}\partial_{xx} - 2\rho_c R^2(x) + R^4(x) + \mu - 4[\rho_c R^2(x) - R^4(x)]$, two Hermitian operators.

As a consequence of the symmetries of the solution (4) of Eq. (2) the null space has at least dimension four [the three mentioned above plus a continuous symmetry of the solution (4) by the arbitrary choice of the initial total number of particles, which lead to an extra Goldstone mode].

The eigenvalues follow directly from the spectra of $i\sqrt{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}$. We compute numerically the spectra getting four neutral modes with an eigenvalue equal to zero, and two continuous imaginary branches with a well defined frequency gap equal to μ . There is no eigenvalue with a real part for any set of parameter; thus, the soliton solution (4) is stable. However, transverse perturbations depending on the y and z coordinates are unstable. If we make $\delta\psi(x) \rightarrow \delta\psi(x)e^{iqy}$, the only change in the eigenvalue problem (5) is μ going to $\mu + q^2/2$. Thus, for the continuum part of the spectrum there is always a positive gap; however, the four neutral modes split in such a way that two of them develop a long wavelength instability in q . The growth rate increases as the wave number of the perturbation increases until a maximum, then the rate decreases to zero for a given wave number. Consequently, a transverse one dimensional soliton breaks down in 2D into droplets with a more or less well defined size.

Actually, the analytical stability of two dimensional droplets is more difficult because we do not know the shape of the soliton solution (probably, we may compute this solution only numerically). However, numerically, we can say that droplets are stable only as long as our numerical simulation ran (few thousand time units). Furthermore, the two dimensional pulses are unstable

against perturbations in the third dimension, as is usual in the Rayleigh instability of a column of liquid in classical fluid dynamics [10], leading to stable 3D droplets.

Finally, it may be suggested that droplets in two dimensions are, furthermore, unstable against a small perturbation far from the main pulse, because of the focusing instability: The small perturbation tends to increase since the fifth power term is negligible; thus, one may imagine a final state made of many different droplets with a principal one. However, because of the coarsening process, these perturbations are evaporated, increasing the amount of matter in the main one. Another—more interesting—situation will be an array or crystal of droplets, and this situation is unstable for the same reason.

The authors thank Yves Pomeau for discussing different problems dealing with this Letter. We are also grateful to V. Hakim, H. Lambaré, M. San Miguel, and R. Zeitak for numerous suggestions. The numerical simulations have been done on the CM5 of the CNCPST at the Institut de Physique du Globe de Paris.

*Permanent address: INLN, UMR 129 CNRS-UNSA, 1361 Route des Lucioles, 06560 Valbonne, France

- [1] A. C. Newell and J. V. Moloney, *Nonlinear Optics* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1992).
- [2] S. A. Akhmanov, R. V. Khoklov, and A. P. Sukhorukov, *Self-Focusing and Self-Modulation of Laser Beams*, edited by F. T. Arecchi and E. O. Schulz-Dubois, Laser Handbook Vol. 2 (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1972).
- [3] H. Lambaré (private communication); S. Balibar, C. Guthmann, H. Lambaré, P. Roche, E. Rolley, and H. J. Marris, *J. Low Temp. Phys.* **101**, 271 (1995).
- [4] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollet, and R. G. Hulet, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1687 (1995).
- [5] O. Thual and S. Fauve, *J. Phys. (Paris)* **49**, 1829 (1988).
- [6] S. Fauve and O. Thual, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 282 (1990); P. C. Hohenberg and W. van Saarloos, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 749 (1990); V. Hakim and Y. Pomeau, *Eur. J. Mech. B* **10**, 137 (1991).
- [7] C. Josserand, Y. Pomeau, and S. Rica, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3150 (1995).
- [8] E. D. Siggia, *Phys. Rev. A* **20**, 595 (1979).
- [9] A. J. Bray, *Physica (Amsterdam)* **194A**, 41 (1993).
- [10] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon, Oxford, 1987).
- [11] A. S. Kovalev and A. M. Kosevich, *Sov. J. Low Temp. Phys.* **2**, 449 (1976); V. G. Kartavenko, *Sov. J. Nucl. Phys.* **40**, 240 (1984).



ELSEVIER

Physica D 152–153 (2001) 779–786

PHYSICA D

www.elsevier.com/locate/physd

Dynamical formation of a Bose–Einstein condensate

Robert Lacaze^{a,b}, Pierre Lallemand^a, Yves Pomeau^a, Sergio Rica^{c,*}^a *Laboratoire ASCI, UPR 9029 CNRS, Bâtiment 506, 91405 Orsay Cedex, France*^b *SPhT, CEA Saclay, 91191 Gif sur Yvette Cedex, France*^c *Laboratoire de Physique Statistique de l'Ecole Normale Supérieure, Associé au CNRS, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*

Abstract

We explain how a condensate forms in finite time by a selfsimilar blow-up of the solution of the relevant quantum Boltzmann kinetic equation for a dilute quantum Bose gas. The condensate, once it is there, keeps exchanging mass with the rest of the distribution until equilibrium is reached, as described by a version of the kinetic equation that includes the existence of this condensate. © 2001 Published by Elsevier Science B.V.

Keywords: Bose–Einstein condensation; Kinetic equations

1. Introduction and quantum Boltzmann equation

Soon after the final conception of non-relativistic quantum theory, Nordheim [1] proposed a Boltzmann like quantum kinetic theory for bosons and fermions, describing in particular relaxation to equilibrium. This kinetic equation describes the dynamics of the momentum distribution that is also the Wigner transform of the one-particle density matrix. Below, we address the question of the formation of a singular equilibrium distribution as a solution of the Boltzmann–Nordheim (BN for short later on) equation after a finite time. We explain how, if the initial number density exceeds a critical threshold, some solutions of the kinetic equation may blow-up at a finite time t_* (depending on the initial conditions). This time t_* is the incipient time for the BE condensate (BE stands for Bose–Einstein). In the case of the BN equation for bosons, it seems obvious that the piling up of particles near zero momentum is a manifestation of the BE condensation. However, the connection

is not that obvious, since the collapse at zero momentum is a dynamical process, without any direct link with the physics behind the BE condensation.

Once the condensate is formed, its mass can still evolve by exchange with the thermal background, until the global equilibrium BE distribution is reached for the given conditions of mass and energy. The growth of a singular part in the momentum distribution is an indication that a condensate is formed, in some sense. However, this cannot mean that phase correlations with an infinite range set in after a finite time. This would imply the unphysical assumption that for an infinite system the “information” (of phase) propagates at infinite speed. We discuss in Section 4 this question of phase coherence at large distances, and the way it appears dynamically.

A collapse of the distribution density has been studied before in the context of a nonlinear Fokker–Planck or Kompaneets equation [2]. Although, it shares some features of the present problem, there are some important differences. In particular, the Kompaneets equation does not preserve energy, because it describes the evolution to equilibrium of a Bose gas with a

* Corresponding author.

constant temperature background. However, it shows nicely transfer of mass through the energy spectrum as we shall present here. Similar ideas were developed in the context of BN equation by Levich and Yakhot [3,11] and Kagan and collaborators [4] but with conclusions different from ours.

The question of the incipient phase singularity has been investigated numerically by Semikoz and Tkachev [5] and our results agree with this work. Below, we address a new question, however, the way the mass of the condensate grows after the collapse time (here “condensate” just means the singular piece of the momentum distribution, related in a rather subtle way to the large scale coherence of the condensate in the true sense, see Section 4). This law of growth is probably the most relevant information, as it can likely be related to physical observations. It rests upon a detailed understanding of the analytical structure of the finite time singularity that is based upon the observation that the exponent is a nonlinear eigenvalue of the similarity equation for collapse. The application of the BN equation to this problem meets the following difficulty (a second one shall be discussed in Section 3): as the formation of the condensate is predicted to occur through a solution with a finite time singularity, the rate of evolution of this solution diverges like the inverse of the time remaining until the singularity, which makes the kinetic theory invalid when this time scale becomes shorter than the period associated with free particle motion by the Planck–Einstein correspondence. Because of the low density assumption, this breaking of the validity of the kinetic theory occurs at a late stage of the blow-up process if $f n^{1/3} \ll 1$ as we show at the end of Section 2.

The BN kinetic equation for a homogeneous distribution in space (we shall discuss briefly non-homogeneous condensation at the end) reads for bosons

$$\begin{aligned} \partial_t w_{p_1}(t) &= \text{Coll}[w] \\ &\equiv \int d^3 p_2 d^3 p_3 d^3 p_4 W_{p_1, p_2; p_3, p_4} \\ &\quad \times (w_{p_3} w_{p_4} (1 + w_{p_1})(1 + w_{p_2}) \\ &\quad - w_{p_1} w_{p_2} (1 + w_{p_3})(1 + w_{p_4})), \end{aligned} \quad (1)$$

where $w_p(t)$ can be seen as the probability distribution for the momentum,¹ m is the atomic mass, $2\pi\hbar$ the Planck’s constant. Moreover,

$$\begin{aligned} W_{p_1, p_2; p_3, p_4} &= \frac{1}{m\hbar^3} (|f_{p_1-p_2}|^2 + |f_{p_2-p_1}|^2) \\ &\quad \times \delta^{(3)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ &\quad \times \delta^{(1)}(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2) \end{aligned}$$

gives back the Boltzmann original writing once the integrals over p_3 and p_4 are carried out, f being the scattering length taken as constant for the low momentum s -wave scattering. The Wigner distribution is normalized by $(1/\hbar^3) \int d^3 p w_p(t) = n \equiv N/V$, N is the total number of particles and V the volume of the enclosure. We shall take $\hbar = m = 1$ throughout the analysis.

An H-theorem shows that solutions of (1) relax to

$$w_p^{\text{eq}} = \frac{1}{e^{(p^2/2 - \mu)/T} - 1}$$

(T is the absolute temperature in energy units) constrained by the conservation of the number of particles and of the energy. Take the initial condition $w_p(t = 0) = A e^{-p^2/\gamma}$. The relaxation to equilibrium preserves $\int_0^\infty p^\alpha w_p p^2 dp$ with $\alpha = 0$ and 2 which yields a relation between A and the dimensionless chemical potential μ/T :

$$A = (\zeta_{3/2}(e^{\mu/T}))^{5/2} (\zeta_{5/2}(e^{\mu/T}))^{-3/2} \quad (2)$$

with $\zeta_s(z) = \sum_{n=1}^\infty (z^n/n^s)$, incomplete Riemann ζ -function.

At low densities (small A) μ is negative as in an ideal classical gas. As A increases μ increases too, until a critical value: $A_c = \zeta_{3/2}(1)^{5/2}/\zeta_{5/2}(1)^{3/2} = 7.0992\dots$, where μ vanishes. However, if $A > A_c$, it is not possible to satisfy (2) with μ negative, and the transition predicted by Einstein in 1924 [6] occurs. We have computed the relation between the chemical potential obtained from the numerical solution of (1) at very late times and the initial amplitude A in order to

¹ Note that the Wigner functions are real but not necessarily positive, however, if $w_p(t = 0) > 0$, then the BN equation keeps it positive at any further time (at least for bosons). For fermions, this probability would have to stay between 0 and 1 to keep clear of mathematical troubles.

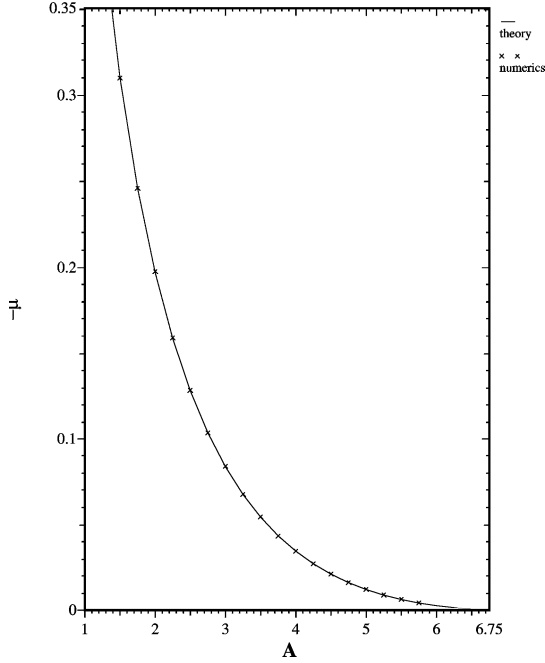


Fig. 1. The equilibrium chemical potential μ as a function of the initial amplitude A . The crosses represent the numerical values obtained from the evolution of the BN equation, while the continuous line traces the theoretical curve (2).

test our numerical code for solving (1), which worked very well as we see in Fig. 1.

The question now is: let $w_p(t=0)$ (e.g. the above form) be a smooth initial (non-equilibrium) condition for (1), what is the further evolution of $w_p(t)$? In particular, whenever A is larger than the critical amplitude A_c . We shall explain first how to describe the finite time singularity by means of a selfsimilar solution of the full kinetic equation.²

2. Dynamics before collapse

If $A > A_c$, we expect condensation to zero momentum, that is the spontaneous occurrence of a singularity in the solutions of (1) for $p = 0$, a singularity leading to a solution of the type $w_p =$

² We investigated numerically this question and found results in complete agreement with the selfsimilar solution described below. We plan to report the details of these numerical investigations (methods and results) in a future extended publication.

$n_0 \delta^{(3)}(p) + \varphi_p$, φ_p is a smooth function, an interesting phenomena on its own. Therefore we expect that just before the singularity the occupation number of small momenta becomes very large, $w_p \gg 1$, which allows to neglect, for that purpose, the quadratic term in Eq. (1) with respect to the cubic one, a remark that has been already made in this context [3,4,11], but with different conclusions from ours as we said. This yields a simpler “degenerate” form of the kinetic equation. (This kinetic equation has been thoroughly studied in the context of nonlinear wave interaction and “weak-turbulence”. For a review and references, see [7]. However, the time dependent selfsimilar solution exposed in the present note does not seem to have been considered before.)³ Let $\epsilon = \frac{1}{2}p^2$, and $\tilde{W}_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4} = (f^2/m\hbar^3) \min\{\sqrt{\epsilon_1}, \sqrt{\epsilon_2}, \sqrt{\epsilon_3}, \sqrt{\epsilon_4}\}$:

$$\begin{aligned} \partial_t w_{\epsilon_1}(t) &= \text{Coll}_3[w] \\ &\equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1}} \int_D d\epsilon_3 d\epsilon_4 \tilde{W}_{\epsilon_1, \epsilon_2; \epsilon_3, \epsilon_4} (w_{\epsilon_3} w_{\epsilon_4} w_{\epsilon_1} \\ &\quad + w_{\epsilon_3} w_{\epsilon_4} w_{\epsilon_2} - w_{\epsilon_1} w_{\epsilon_2} w_{\epsilon_3} \\ &\quad - w_{\epsilon_1} w_{\epsilon_2} w_{\epsilon_4}). \end{aligned} \quad (3)$$

Since $\epsilon_2 = \epsilon_3 + \epsilon_4 - \epsilon_1$ must be positive, one integrates in a domain D such as $\epsilon_3 + \epsilon_4 > \epsilon_1$. The equilibrium solution of this equation follows from the maximization of entropy and is $w_\epsilon = T/(\epsilon - \mu)$. This is a formal solution only, because it does not yield a converging expression for the energy nor even for the total mass.⁴ For finite total mass and energy this solution should be a function spreading forever in momentum space [8], a spreading stopped in the full BN equation by the quadratic terms in $\text{Coll}[w]$. Zakharov has found two other stationary solutions

$$w_\epsilon = Q^{1/3} \epsilon^{-3/2}, \quad w_\epsilon = J^{1/3} \epsilon^{-7/6}. \quad (4)$$

³ As shown by Zakharov [12], and by Carleman before [13] for an isotropic momentum dependence of the distribution function one may integrate both sides of (1) in solid angles, this allows one to write the simpler form (3) for w_ϵ , which is better for the numerics.

⁴ Generally speaking, this kind of divergence at “large momentum/energy” is irrelevant for the present analysis, because for this momentum, the cubic approximation to the collision operator is not valid anymore, so that the power solution for w_ϵ merge with solutions “at large” (actually non-small) energies that take care of the convergence of the integrals for mass and energy.

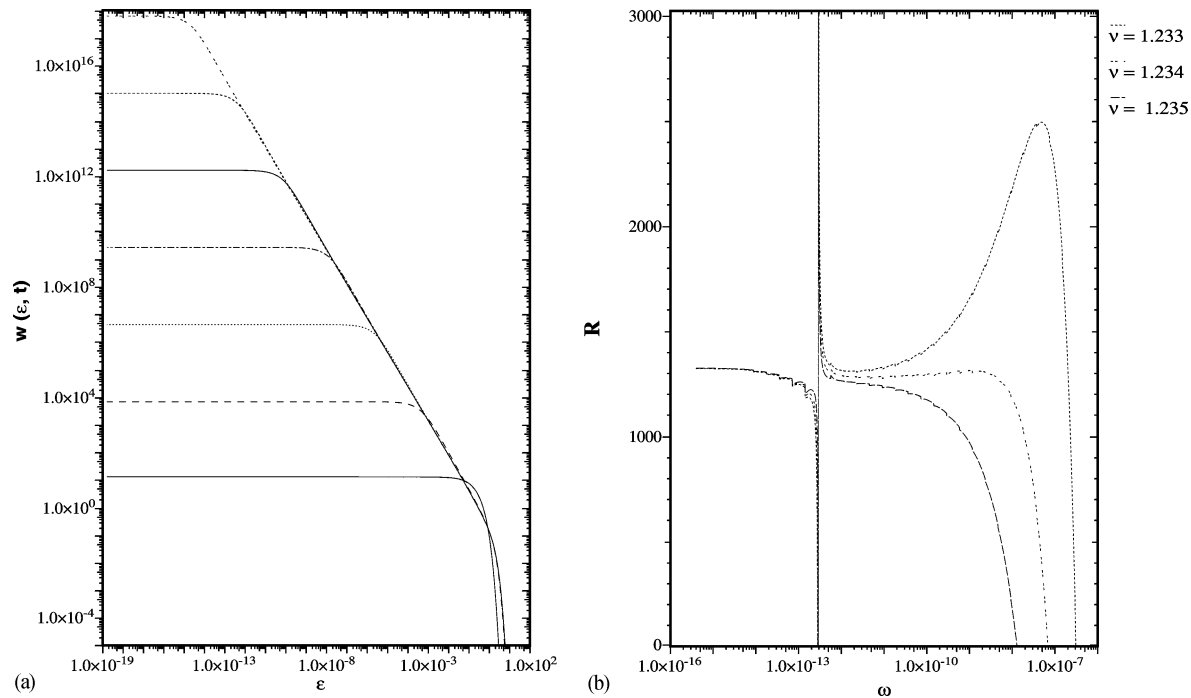


Fig. 2. (a) The distribution function $w(\epsilon, t)$ (at times chosen for successive increase of $w(0, t)$ by a factor 5). The different time plots show a clear selfsimilar evolution. One sees the build-up of the power law distribution $\epsilon^{-1.234}$ from the large energies to the small ones. (b) The ratio between the right- and left-hand side of Eq. (6). One sees that the best agreement is for $\nu = 1.234$. The existence of a plateau proves that one has the right “nonlinear eigenmode” and the right “nonlinear eigenvalue” ν .

Here $Q(J)$ is the energy/(mass) flux in momentum space per unit time. Those solutions are derived by a Kolmogorov-like analysis, for Q and J constant. It does not seem possible, however, to use this kind of Kolmogorov-like solution for the present problem, because we expect the collapse to be a dynamical process, so that stationary solutions can help at best to understand qualitatively the transfer of mass and energy through the spectrum. In particular, as shown later on, the actual exponents for the selfsimilar solution do not follow from simple scaling estimate.

We remark that because of its structure (in particular because the right-hand side of (3) is cubic homogeneous in w_ϵ), Eq. (3) admits a selfsimilar dynamical solution which accumulates particles at zero momentum. The selfsimilar solution has the form ($\tau = t_* - t$):

$$w_\epsilon(t) = \beta^{-1/2} \tau^{-\alpha} \phi(\epsilon \tau^{-\beta}) \quad (5)$$

as $t \rightarrow t_*$, $\alpha, \beta > 0$. Putting (5) into (3) and imposing that the left- and right-hand sides are of the

same order as $\tau \rightarrow 0$, one gets that $\beta = \alpha - \frac{1}{2}$, the integro-differential equation for ϕ becomes

$$-(\nu + \omega \partial_\omega) \phi(\omega) = \text{Coll}_3[\phi(\omega)], \quad (6)$$

where $\omega = \epsilon \tau^{-\beta}$ and $\nu = \alpha/\beta$ is the only remaining free parameter. As shown below, this parameter is a nonlinear eigenvalue of (6) allowing to satisfy the boundary conditions $\phi(0)$ finite yet to be determined and $\phi(\omega) \approx \omega^{-\nu}$ as $\omega \rightarrow \infty$ with a convenient choice of normalization for ϕ .

We observed in our numerics that such a power law spectrum $\phi(\omega) \sim 1/\omega^\nu$ was established (for large numerical values of ω) without mean flux of mass or energy on the energy scale. The “observed” (see Fig. 2) value is roughly $\nu \approx 1.234(1)$ which differs significantly from $\frac{7}{6}$ and $\frac{3}{2}$ that would follow from the scaling properties of the solutions at constant mass or energy flux.

Besides a direct numerical attack (see Fig. 2a), it seems difficult to get much analytical information concerning solution(s) of (6). We shall nevertheless present some remarks relevant to this problem. One may construct order by order a Laurent expansion of $\phi(\omega)$ for large ω , beginning as $1/\omega^\nu$ and then putting this first term into Coll₃. The beginning of this expansion reads

$$\phi(\omega) = \frac{1}{\omega^\nu} - \frac{C(\nu)}{2(\nu-1)\omega^{3\nu-2}} + O\left(\frac{1}{\omega^{5\nu-4}}\right) \quad (7)$$

with $C(\nu)$ defined by the action of the collision operator Coll₃ on a power law distribution Coll₃ $[\omega^{-\nu}] \equiv C(\nu)\omega^{-3\nu+2}$. The function $C(\nu)$ is positive for $\nu \in [1, \frac{7}{6}]$, negative for $\nu \in [\frac{7}{6}, \frac{3}{2}]$ and positive again for $\nu > \frac{3}{2}$. One sees now why it is not possible to get $\nu = \frac{7}{6}$ nor $\frac{3}{2}$ as it should follow from (4), because the next order and any higher order correction vanishes since $C(\nu)$ is zero for both cases, and the Laurent expansion at large ω stops there.

Therefore, this kind of solution (7) is already singular at $\omega = 0$, although we want to study evolution of a solution remaining finite at $\epsilon = 0$ at any time less than t_* , which implies $\phi(\omega = 0)$ finite. One may expect to push the Laurent expansion in order to capture better and better the behavior near $\omega = 0$. As we said, the resulting series will diverge almost always when approaching $\omega = 0$ which is a singular point, because near $\omega = 0$ it is possible to expand the solution of (6) in the form $\phi = a(\nu)\omega^{-7/6} + \dots$, the entire function $a(\nu)$ being completely determined by the outer matching (this defines the asymptotic behavior of the solution). The condition $a(\nu) = 0$ fixes ν .

Supposing that the integral equation (6) has a smooth solution that satisfies all the right boundary conditions, it describes a collapsing solution of the original kinetic equation. The distribution function at the peak scales like $w(\epsilon = 0) \sim \tau^{-\alpha}$; the energy-stretching of the peak: $\epsilon_0 \sim \tau^\beta$; the flux of particles: $j_0 \sim \tau^{-\gamma}$; the flux of energy: $Q \sim \tau^\delta$; and the density of particle at the peak (that is with an energy less than ϵ_0): $n_0 \sim \tau^\xi$. All these exponents can be deduced from ν by simple algebraic manipulations.

In the following table, we compare the theoretical values from the formula (second row) together with

$\nu = 1.234$, and the direct numerical values:

Exponent	Relation with ν	For $\nu = 1.234$	Numerics
α	$\nu/2(\nu-1)$	2.637	2.639
β	$1/2(\nu-1)$	2.137	2.139
γ	$3(\nu - \frac{7}{6})/2(\nu-1)$	0.4316	0.4317
δ	$3(\frac{3}{2} - \nu)/2(\nu-1)$	1.705	1.707
ξ	$(\frac{3}{2} - \nu)/2(\nu-1)$	0.568	0.571

The numerical solution of (3) is in excellent agreement with this scenario, in particular with the exponents for the scaling laws for the collapse concerning their relation to ν . On the other hand, one can check that the numerical selfsimilar distribution, once written as in (5) yields a function ϕ that satisfies numerically Eq. (6) (see Fig. 2b).

The collapse time t_* depends on the initial conditions. Therefore one expects a dependence of t_* on the threshold to A_c when two and three body collisions are included (in the case of only three body collisions term as in (3) one has always a singularity in a time $t_* \sim A^{-2}$). Numerically, we have found $t_* \sim |A - A_c|^{-\eta}$ with $\eta = 0.4$. This time t_* is about the time when quadratic and cubic terms become of the same order in the full BN equation.

Notice that the flux of particles towards the origin diverges as t goes to t_* , whereas the number of particles in the condensate remains zero.⁵ This means that the true formation of a condensate starts just after t_* . We shall explain next what is predicted by the kinetic equation after the condensate is formed. Finally, we note that the exponent ν must be larger than $\frac{7}{6}$ because one needs to have an infinite flux of particles through the peak in order to ensure the finite time singularity. In the usual (non-quantum) Boltzmann equation this is not possible: the power law solution with a constant flux of matter is $w_\epsilon = (J/f^2)^{1/2}\epsilon^{-7/4}$ and possess an infinite mass at the peak at $\epsilon = 0$. Therefore the usual Boltzmann equation for hard spheres does not present

⁵ This flux of particles is practically across an energy surface that shrinks like τ^β , therefore there is no contradiction: the flux diverges, but it accumulates mostly outside of the origin, since it is across a non-constant barrier on the energy scale.

a finite time singularity. However, when the two particle interaction decreases at large distances like $\sim 1/r^l$ one has an explicit dependence of the scattering amplitude on the relative velocity of collisions. There are reasons to believe that for $l < 4$, the usual Boltzmann equation could present a finite time collapse as the one described here, because the collision frequency diverges at small speed.

Ending this section let us discuss the breaking of the validity of the kinetic theory near the blow-up. Let τ be the time left until blow-up ($\tau_{\text{blow-up}} = 0$), n be the total number density, and f the scattering length. The mean free flight time for the core of the energy spectrum is $t_{\text{mfp}} = (1/nf^2)(m/\epsilon_{\text{Th}})^{1/2}$, where $\epsilon_{\text{Th}} \sim p^2/2m$ is the average kinetic energy per particle (a constant). Assuming this energy to be of the order of magnitude of the one at the BE transition, one has $t_{\text{mfp}} = m/\hbar n^{4/3} f^2$. The BN kinetic theory applies if the typical evolution time until blow-up, τ , is still much larger than $\hbar/\epsilon_0(\tau)$, where $\epsilon_0(\tau)$ is the average energy of particles taking part in this blow-up ($\epsilon_0(\tau) \rightarrow 0$ as $\tau \rightarrow 0$). We have shown in this section that $\epsilon_0(\tau) \sim \epsilon_{\text{Th}}(\tau/t_{\text{mfp}})^\beta$ ($\beta > 0$). Therefore, the BN kinetic theory applies for $\tau > \tau_{\text{cr}}$ with $\tau_{\text{cr}} = \hbar/\epsilon_0(\tau_{\text{cr}})$. From the estimates given above, the inequality $\tau_{\text{cr}} \ll t_{\text{mfp}}$ is equivalent to $f n^{1/3} \ll 1$, precisely the condition for a dilute gas. Therefore, in this dilute gas limit, the BN kinetic theory remains physically sound in the time interval $[t_{\text{mfp}}, \tau_{\text{cr}}]$ before blow-up.

3. Dynamics after collapse

At the singularity time, if our scenario of selfsimilar collapse holds, as seems to be confirmed by our numerical studies, the system is not yet at equilibrium, and some exchange of mass between the condensate and the rest is necessary to reach full equilibrium, because the mass inside the singularity is still zero at $t = t_*$. It happens that this exchange of mass can be described by extending the full kinetic equation to singular distributions, something that does not seem to have been noticed before to the best of our knowledge. As $w(\epsilon = 0)$ and the flux of matter diverge at $t = t_*$, let us consider the following ansatz for times larger

than t_* : the distribution function behaves as

$$w_p(t) = n_0(t)\delta^{(3)}(p) + \varphi_p,$$

φ_p smooth function, and $n_0(t_*) = 0$. Now, the collision integral in (3) splits as $\text{Coll}[w_p] = j_0(t)\delta^{(3)}(p) + \tilde{\text{Coll}}[\varphi_p]$, where $j_0[\varphi] = \int_{S(0^+)} \sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 \text{Coll}[w_{\epsilon_1}] = -\int_0^\infty \sqrt{\epsilon_1} d\epsilon_1 \tilde{\text{Coll}}[\varphi_{\epsilon_1}]$, and $\tilde{\text{Coll}}[\varphi]$ is for the exact BN collision term of (1). This special form says that there is a macroscopic flux of particles towards the zero momentum, which is directly related to a $j_0^{1/3} \epsilon^{-7/6}$ term as the dominant behavior of φ_ϵ near $\epsilon = 0$. This exchange term (between particles in the condensate and excited states) has not been considered previously. Putting this ansatz into (1) one gets, after splitting the terms with non-zero integral in a small sphere around $p_1 = 0$:

$$\begin{aligned} \partial_t n_0(t) &= j_0 + n_0(t) \text{Coll}_2[\varphi], \quad \text{where} \\ \text{Coll}_2[\varphi] &= \int_{2,3,4} \delta_{2;3,4}(\varphi_{p_3}\varphi_{p_4} - \varphi_{p_2}(\varphi_{p_3} + \varphi_{p_4} + 1)), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \varphi_{p_1}(t) &= \tilde{\text{Coll}}[\varphi] + n_0(t) \tilde{\text{Coll}}_2[\varphi], \quad \text{where} \\ \tilde{\text{Coll}}_2[\varphi] &= \int_{3,4} \delta_{1;3,4}(\varphi_{p_3}\varphi_{p_4} - \varphi_{p_1}(\varphi_{p_3} + \varphi_{p_4} + 1)) \\ &\quad + 2 \int_{2,4} \delta_{1,2;4}(\varphi_{p_4}(\varphi_{p_1} + \varphi_{p_2} + 1) \\ &\quad - \varphi_{p_1}\varphi_{p_2}). \end{aligned} \quad (9)$$

We used the notations $\int_{2,3} = \int d^3 p_2 d^3 p_3$, and $\delta_{2;3,4} = W_{0,p_2;p_3,p_4} \delta^{(3)}(p_2 - p_3 - p_4) \delta^{(1)}(p_2^2 - p_3^2 - p_4^2)$, and so forth. These coupled equations conserve mass and energy and a H-theorem applies.⁶ For very short times, that is $|t - t_*| \ll t_B$ (see below for the definition of t_B), it is possible to calculate a selfsimilar solution of the form: $n_0 = K(-\tau)^\sigma$, together with the same kind of expression for φ as before. The exponent $\sigma = (\frac{3}{2} - \nu)/2(\nu - 1)$, while α and β remain

⁶ The coupled set (8) and (9) relax as $t \rightarrow \infty$, to the equilibrium solution found by Einstein [6]:

$$\varphi_p^{\text{eq}} = \frac{1}{e^{p^2/2T} - 1},$$

and n_0 fixed by mass conservation. Notice, however, that interactions modify this picture (see below).

the same as before. For times just after t_* , one expects that the function φ_ϵ will be very close to the function before the collapse “far” from zero energy, since it changes infinitely fast near the origin only. Therefore, by continuity this imposes that φ and ϕ behave in the same way for large ω , and this implies that the coefficient ν is the same as before. The constant K and $a(\nu)$ (which is no longer zero) are fixed by a complicated set of integro-differential equations following directly from the most singular terms in (8) and (9).

The short time selfsimilar behavior merges at later time with a relaxation behavior tending to equilibrium. The full system (8) and (9) describes the relaxation towards a constant value of the density of condensate n_0 , while the flux j_0 and different collisional terms vanish leading to an equilibrium distribution for φ_ϵ , which is the Bose factor with zero chemical potential.

Ending this section, we notice that the BN equation is not uniformly valid in its original form after the formation of a condensate, since the appearance of such a structure changes the energy spectrum at low momenta, as shown by Bogoliubov [9], although the kinetic equation assumes that, besides collisions, the particles have a purely ballistic spectrum. For a dilute gas (where the quantum kinetic equation is valid) the BN equation applies for most particles, since the Bogoliubov renormalization of the energy concerns a narrow energy domain. This would change the late stages of the condensation only and would apply anyway to the range of energies $\epsilon \ll \epsilon(\tau_{\text{cr}})$, where τ_{cr} has been defined before. It turns out that the typical Bogoliubov time scale: $t_B = m/\hbar f n_0$ appears at a later stage because it is much longer than the mean free path t_{mfp} if $n^{4/3} f \gg n_0$, which is possible for a dilute gas $f n^{1/3} \ll 1$ as long as $n_0 \ll n$.

4. Collapse and build-up of long range correlations

As explained before, the collapse, as it results from the singular solution of the BN kinetic equation, cannot give the full physical picture. This is because the quantum kinetic theory, as representing the true many body dynamics, relies upon the assumption that the

time scale for the evolution of w_p is much longer than the time scale set by the Planck period of the motion of a free particle. In the collapse phenomenon, this assumption becomes clearly untrue at some stage, since the typical time scale for the evolution of w_p is of order τ , the time until the collapse, and so becomes as short as wanted, although the Planck period associated to particles of low momentum becomes infinitely large when this momentum tends to zero. This puts a constraint on the time when the kinetic theory loses meaning close to the collapse time. Therefore, the standard kinetic approach fails at time scales of order or shorter than τ_{cr} with $\tau_{\text{cr}} \sim \hbar/\epsilon_0(\tau_{\text{cr}})$ that is to be combined with the estimate $\epsilon_0(\tau) \sim \epsilon_{\text{Th}}(\tau/t_{\text{mfp}})^\beta$, β is positive, to yield

$$\tau_{\text{cr}} \sim t_{\text{mfp}}(f^2 n^{2/3})^{1/(\beta+1)}.$$

For times far closer to the collapse time than τ_{cr} , it becomes inconsistent to use the kinetic theory in its standard form to describe what happens in the selfsimilar core of the distribution. In this range of times, as well as later on, the growth of the coherence length can be described by using arguments borrowed from Pomeau [10]. The starting point is to assume that there is a certain mass density in the condensate, approximately uniform in space, but with a random phase without long range order. Moreover, this can be represented by the dynamics of a classical field, since the occupation number at small momenta is very large. This phase relaxes, at least after some transient according to the equations of fluid mechanics derived for long wave perturbations, namely the Bernoulli equations for a compressible fluid. The energy is transferred to small scales now by a steepening of the gradient of the phase at random places, which yields finally a typical time scale. Accordingly, the phase of the “condensate” becomes uniform on space scales $L(t)$ growing with time like $L(t) \sim (\hbar t/m)^{1/2}$.

Consider now what happens at times much later than the blow-up time. Because the law of growth of the coherence length $L(t)$ is independent upon the density, one expects that this length represents at time t the coherence length scale for the phase, $t = 0$ being the time of the singularity, after which the long range correlations begin to build up. Near the blow up time

the situation is probably more complicated, although one can devise a simple estimate for the phase coherence length that should be of order of the de Broglie wavelength associated to the Planck period τ_{cr} .

5. Comments and conclusions

We propose a scenario for the formation of a condensate of BE particles obeying the BN kinetic equation. This scenario consists in a blow-up of the distribution function at zero momentum. However, the total mass density of this singularity is zero at the time of the singularity, so that one needs to feed this “condensate” in order to reach equilibrium at later times. This is a very important point, because we show that the kinetic equation predicts an exchange of mass between the condensate and the rest of the system when the gas is out of equilibrium. Finally, if there is spatial dependence one needs to add a $((p_1/m) \cdot \nabla_r w_{p_1} - (\nabla U/m) \cdot \nabla_{p_1} w_{p_1})$ term to the left-hand side of (1). This leads to a spatial localization of the finite time singularity of the type $r \sim \tau^{1+\beta/2}$, $p_1/m \cdot \nabla_r w_{p_1}$ being the most singular term if the potential energy grows faster than $U(r) \sim r^{4/(2+\beta)} \approx r^{0.97}$. Another remark is of interest: the connection between the finite singularity at zero

momentum of the solution of the BN equation is not so directly related to the existence of a condensate in the equilibrium theory. Actually, it is more like a property of the dynamical equation itself. In particular, the power law for the distribution close to zero momenta is not the inverse ω typical of the Bose factor. Therefore one expects that at some later time, after the collapse this power law will switch from the $\omega^{-7/6}$ typical of the kinetic regime to the ω^{-1} typical of the equilibrium regime.

References

- [1] L.W. Nordheim, Proc. R. Soc. London A 119 (1928) 689.
- [2] R.E. Caflisch, C.D. Levermore, Phys. Fluids 29 (1986) 748.
- [3] E. Levich, V. Yakhot, Phys. Rev. B 15 (1977) 243.
- [4] Yu.M. Kagan, B.V. Svistunov, G.V. Shlyapnikov, Sov. Phys. JETP 74 (1992) 279.
- [5] D.V. Semikoz, I.I. Tkachev, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 3093.
- [6] A. Einstein, Preussische akademie der wissenschaften, Phys-math. Klasse, Sitzungsberichte 23 (1925) 3.
- [7] A.M. Balk, V.E. Zakharov, Am. Math. Soc. Trans. 182 (2) (1998) 31.
- [8] Y. Pomeau, Nonlinearity 5 (1992) 707.
- [9] N.N. Bogoliubov, J. Phys. 11 (1947) 23.
- [10] Y. Pomeau, Phys. Scripta 67 (1996) 141.
- [11] E. Levich, V. Yakhot, J. Phys. A 11 (1978) 2237.
- [12] V.E. Zakharov, Sov. Phys. JETP 24 (1967) 455.
- [13] T. Carleman, Acta Math. 60 (1933) 91.

Condensation of Classical Nonlinear Waves

Colm Connaughton,¹ Christophe Josserand,² Antonio Picozzi,³ Yves Pomeau,¹ and Sergio Rica^{4,1}

¹*Laboratoire de Physique Statistique, ENS-CNRS, 24 rue Lhomond, 75005 Paris, France*

²*Laboratoire de Modélisation en Mécanique, CNRS UMR 7607, 75005 Paris, France*

³*Laboratoire de Physique de l'Université de Bourgogne, CNRS UMR 5027, Dijon, France*

⁴*Departamento de Física, Universidad de Chile, Blanco Encalada 2008, Santiago, Chile*

(Received 13 February 2005; published 22 December 2005)

We study the formation of a large-scale coherent structure (a condensate) in classical wave equations by considering the defocusing nonlinear Schrödinger equation as a representative model. We formulate a thermodynamic description of the classical condensation process by using a wave turbulence theory with ultraviolet cutoff. In three dimensions the equilibrium state undergoes a phase transition for sufficiently low energy density, while no transition occurs in two dimensions, in complete analogy with standard Bose-Einstein condensation in quantum systems. On the basis of a modified wave turbulence theory, we show that the nonlinear interaction makes the transition to condensation subcritical. The theory is in quantitative agreement with the numerical integration of the nonlinear Schrödinger equation.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.95.263901](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.263901)

PACS numbers: 42.65.Sf, 05.45.-a, 47.27.-i

The problem of self-organization in conservative systems has generated much interest in recent years. For infinite dimensional Hamiltonian systems like *classical* wave fields, the relationship between formal reversibility and actual dynamics can be rather complex. In integrable systems, such as the 1D nonlinear Schrödinger (NLS) equation, the dynamics is essentially periodic in time, reflecting the underlying regular phase-space structure of nested tori. This recurrent behavior is broken in nonintegrable systems, where the dynamics is in general governed by an irreversible process of diffusion in phase space [1]. In this respect, an important insight was obtained from numerical simulations of *solitons* in the focusing, nonintegrable NLS equation [2]. These studies revealed that the nonlinear wave would generally evolve to a state containing a large-scale coherent localized structure, i.e., solitary-wave, immersed in a sea of small-scale turbulent fluctuations. The solitary wave is a “statistical attractor” for the system, while the fluctuations contain, in principle, all information necessary for time reversal. Importantly, the solitary-wave solution minimizes the energy (Hamiltonian), so the system actually relaxes towards the state of lowest energy [2]. Only recently has a statistical description of this self-organization been developed [3,4]. Remarkably, when such systems are constrained by an additional invariant (e.g., the mass), the increase in entropy of small-scale turbulent fluctuations *requires* the formation of coherent structures to “store” this invariant [4], so that it is thermodynamically advantageous for the system to approach the ground state which minimizes the energy [2].

We consider here the *defocusing* regime of the NLS dynamics, which is also relevant to the description of thermal Bose gases [5–7]. This regime would be characterized by an irreversible evolution of the system to a homogenous plane-wave [8–11], which can be described by weak-turbulence theory [12]. This evolution is consis-

tent with the scenario discussed above [2–4], because a plane wave minimizes the energy (Hamiltonian) in the defocusing case. Thus the NLS equation should exhibit a condensation process, a feature that has recently been confirmed in the context of thermal Bose fields using 3D numerical simulations of the NLS equation [6,7].

In this Letter we formulate a thermodynamic description of this condensation process. We show that the 3D NLS equation exhibits a *subcritical* condensation process. Its thermodynamic properties are analogous to those of Bose-Einstein condensation in quantum systems, despite the fact that this wave system is completely *classical*. We use a kinetic theory of the NLS equation in our analysis. We introduce a frequency cutoff to regularize the ultraviolet catastrophe inherent to ensembles of classical waves (Rayleigh-Jeans paradox). We find that in 2D the NLS equation does not undergo condensation in the thermodynamic limit, in complete analogy with a uniform, ideal Bose gas. The significance of this result is that the system irreversibly evolves to a state of equilibrium (maximum entropy) *without generating a coherent structure minimizing the Hamiltonian*. This contrasts with the general rule outlined in [2–4,11].

Given the universality of the NLS equation in nonlinear science, this condensation process could stimulate interesting new experiments in various branches of physics. Nonlinear optics is a natural context where classical wave condensation may be observed and studied experimentally. Moreover, the formal reversibility of the condensation process could be demonstrated by means of an optical phase-conjugation experiment. Additionally, wave condensation could be relevant to hydrodynamic surface waves [13], given recent progress on measurements of Zakharov’s spectra.

We consider the normalized defocusing NLS equation in D spatial dimensions for the complex function ψ :

$$i\partial_t\psi = -\Delta\psi + |\psi|^2\psi, \quad (1)$$

where Δ is the D dimensional Laplacian. This equation describes the evolution of defocusing interacting waves through the cubic nonlinear term. The dynamics conserves the mass (particle number) $N = \int |\psi|^2 d^D x$, and the total energy $H = \int (|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4) d^D x$.

We address the dynamical formation of the condensate starting from a nonequilibrium stochastic initial condition for the wave ψ , which we take to be of zero mean and statistically homogeneous. In spite of the formal reversibility of the NLS equation, the nonlinear wave ψ is expected to exhibit an *irreversible* evolution towards thermal equilibrium, as a result of an effective diffusion process in phase space. The salient properties of this evolution may be described by weak-turbulence theory. For most purposes this is equivalent to the random phase approximation (assumption of quasi-Gaussian statistics) [12]. This approximation breaks the time reversal symmetry of the NLS equation, which allows one to derive an irreversible kinetic equation for the averaged wave spectrum [12] [here $\langle a_{k_1} a_{k_2}^* \rangle = n_{k_1} \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)$, a_k being the Fourier transform of ψ defined by $a_k(t) = \int \psi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^D x$]:

$$\begin{aligned} \partial_t n_{k_1}(t) = & \int d^D k_2 d^D k_3 d^D k_4 W_{k_1, k_2, k_3, k_4} (n_{k_3} n_{k_4} n_{k_1} \\ & + n_{k_3} n_{k_4} n_{k_2} - n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} - n_{k_1} n_{k_2} n_{k_4}), \end{aligned} \quad (2)$$

where the collision term $\text{Coll}[n_k]$ [right-hand side of Eq. (2)] provides a kinetic description of the four-wave interaction, with $W_{k_1, k_2, k_3, k_4} = \frac{4\pi}{(2\pi)^D} \delta^{(D)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4) \delta^{(1)}(k_1^2 + k_2^2 - k_3^2 - k_4^2)$ [12]. Like Boltzmann's equation, Eq. (2) conserves the mass, $N = V \int n_k(t) d^D k$, and the kinetic energy, $E = V \int k^2 n_k(t) d^D k$. V is the system volume in $D = 3$ and the area in $D = 2$. It has an H theorem for entropy growth $dS/dt \geq 0$, where $S(t) = \int \ln(n_k) d^D k$ is the nonequilibrium entropy. The kinetic Eq. (2) then describes an irreversible evolution of the wave spectrum towards the Rayleigh-Jeans *equilibrium* distribution [12]:

$$n_k^{\text{eq}} = \frac{T}{k^2 - \mu}, \quad (3)$$

where T and μ (≤ 0) are, by analogy with thermodynamics, the temperature and the chemical potential, respectively. The spectrum (3) is Lorentzian and the characteristic correlation length of the wave ψ is $\lambda_c \propto 1/\sqrt{-\mu}$.

The distribution (3) realizes the maximum of the entropy $S[n_k]$ and vanishes exactly the collision term, $\text{Coll}[n_k^{\text{eq}}] = 0$. However, it is important to note that Eq. (3) is only a *formal* solution, because it does not lead to converging expressions for the energy E and the mass N in the short-wavelength limit $k \rightarrow \infty$. To regularize this unphysical divergence, we introduce an ultraviolet cutoff k_c ; i.e., we assume $n_k(t) = 0$ for $k > k_c$. Note that this cutoff arises

naturally in numerical simulations through the spatial discretization of the NLS equation, and manifests itself in real physical systems through viscosity or diffusion effects at the microscopic scale [12].

To begin let us analyze the equilibrium distribution (3) in 3D. From energy and mass conservation one gets

$$\frac{N}{V} = 4\pi T k_c \left[1 - \frac{\sqrt{-\mu}}{k_c} \arctan\left(\frac{k_c}{\sqrt{-\mu}}\right) \right], \quad (4)$$

$$\frac{E}{V} = \frac{4\pi T k_c^3}{3} \left[1 + 3\frac{\mu}{k_c^2} + 3\left(\frac{-\mu}{k_c^2}\right)^{3/2} \arctan\left(\frac{k_c}{\sqrt{-\mu}}\right) \right]. \quad (5)$$

These equations are interpreted as follows. The initial nonequilibrium state of the field ψ has mass N and energy E . The wave spectrum then relaxes to the equilibrium distribution (3), whose temperature T and chemical potential μ are determined by Eqs. (4) and (5). A given pair (N, E) then determines a unique pair (T, μ) . Equation (4) reveals that μ tends to zero, i.e., λ_c diverges to infinity, for a nonvanishing temperature T (keeping N/V constant), or a finite density N/V (keeping T constant). By analogy with the Bose-Einstein transition in quantum systems, this reveals the existence of a condensation process. The same conclusion follows from analyzing the energy per particle E/N . There exists a nonvanishing critical energy per particle $E_{\text{tr}}/N = k_c^2/3$ such that $\mu = 0$. Dividing (5) by (4), one gets $(E - E_{\text{tr}})/(N k_c^2) = \pi\sqrt{-\mu}/(6k_c) + \mathcal{O}(-\mu/k_c^2)$. Decreasing the energy per particle effectively cools the system, and one reaches a finite threshold E_{tr} , below which condensation occurs.

A similar analysis in 2D readily gives $N/V = \pi T \ln(1 - k_c^2/\mu)$ and $E/N = \mu + k_c^2/\ln(1 - k_c^2/\mu)$. In this case μ reaches 0: (i) for a vanishing temperature T (N/V constant), (ii) for a diverging density N/V (T constant), (iii) for a vanishing energy per particle E/N . It follows that condensation no longer takes place in 2D, a feature that has been confirmed by numerical simulations of the NLS Eq. (1).

The dynamical formation of the condensate has been studied by means of self-similar solutions of the kinetic Eq. (2), leading to a finite time singularity for some time t_* [14,15]. This solution describes explicitly particle cumulation to zero wave number $\mathbf{k} = \mathbf{0}$. When the condensate begins to form ($t > t_*$), an exchange of mass between the condensate and the incoherent wave component is necessary to reach equilibrium. It was argued in Refs. [8,10,11] that this dynamics may be described by a kinetic three-wave interaction. More precisely, by extending the kinetic Eq. (2) to singular distributions $n_k(t) = n_0(t)\delta^{(3)}(\mathbf{k}) + \phi_k(t)$ [14,15], one gets a pair of coupled kinetic equations for the evolution of the condensate (n_0) and the incoherent wave component (ϕ_k) [15]. These equations describe a flux of mass from the incoherent component to the condensate, until equilibrium is reached, i.e., the collision terms vanish. This occurs for the equilibrium distribution

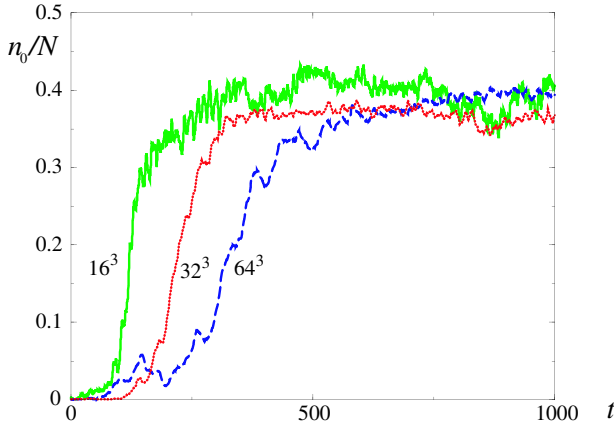


FIG. 1 (color online). Numerical simulations of the NLS Eq. (1) showing the temporal evolution of condensed particles n_0/N in 3D: independently of the number of computational modes, n_0/N tends to converge for long interaction times ($\langle H \rangle/V = 2$, $N/V = 1/2$, and $k_c = \pi/dx$ where $dx = 1$ refers to the spatial discretization of the NLS equation).

$\phi_k^{\text{eq}} = T/k^2$, which actually corresponds to the distribution (3) with zero chemical potential. This allows us to legitimately assume $\mu = 0$ below the transition threshold $E \leq E_{\text{tr}}$. Note that $\mu = 0$ is also justified by the fact that the mass of the incoherent wave component is not conserved, due to its interaction with the condensate, which plays the role of a reservoir of particles.

The number of condensed particles n_0 and the energy E ($\leq E_{\text{tr}}$) may then be calculated by setting $\mu = 0$ in the equilibrium distribution (3). One readily obtains $(N - n_0)/V = 4\pi T k_c$ and $E/V = 4\pi T k_c^3/3$, which gives

$$n_0/N = 1 - E/E_{\text{tr}}, \quad (6)$$

or $n_0/N = 1 - T/T_{\text{tr}}$, where $T_{\text{tr}} = 3E_{\text{tr}}/(4\pi V k_c^3)$. As in standard Bose-Einstein condensation, n_0 vanishes at the critical temperature T_{tr} , and n_0 becomes the total number of particles as T tends to zero. The linear behavior of n_0 vs E in Eq. (6) is consistent with the numerical simulations (see Fig. 2). However, note that Eq. (6) is derived for a spherically symmetric continuous distribution of n_k , while the numerical integration is implicitly discretized. Equation (6) should thus be replaced by

$$\frac{n_0}{N} = 1 - \frac{E}{N} \frac{\sum_k' 1/(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)}{\sum_k 1}, \quad (7)$$

where $\sum_k'$ denotes a discrete sum for $-k_c \leq k_x, k_y, k_z \leq k_c$ that excludes the origin $k_x = k_y = k_z = 0$.

This distribution is plotted in Fig. 2 and compared with the numerical simulations of Eq. (1). The simulations started from a nonequilibrium distribution $\psi(\mathbf{x}, t=0) = \sum_k a_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})$, where the phases of the complex amplitudes a_k are distributed randomly [6–8]. They confirm the existence of the condensation process for sufficiently low

energy densities [6]. We performed simulations with different numbers of computational modes (8^3 , 16^3 , 32^3 , 64^3 , and 128^3). Our numerical results reveal that once the number of modes exceeds 16^3 , it only weakly affects the condensate fraction n_0/N (Fig. 1). This means that the system has reached some thermodynamic limit with only 16^3 modes.

The linear dependence (7) between n_0 and E gives a poor approximation of the numerical results, mainly because the condensate fraction has been calculated by taking into account only the linear (kinetic) contribution E to the total energy of the wave H . To include the nonlinear (interaction) contribution, we adapt the Bogoliubov expansion procedure of a weakly interacting Bose gas [16] to the classical wave problem considered here. Note that, within the dimensionless units adopted in Eq. (1), the standard criterion of applicability of Bogoliubov's theory [17] reads $(N/V)^{1/2}/(8\pi)^{3/2} \ll 1$. We start from the total energy H of the nonlinear wave $H = \sum_k k^2 a_k^* a_k + \frac{1}{2V} \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1}^* \times a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4} \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4}$, where δ_k is the Kronecker delta symbol. The Hamiltonian may be decomposed into four terms, $H = H_0 + H_2 + H_3 + H_4$, depending on how the zero mode, $a_0 = a_{k=0}$, and nonzero modes, $a_{k \neq 0}$, enter the expansion: $H_0 = \frac{1}{2V} [|a_0|^4 + 2|a_0|^2(N - |a_0|^2)]$, $H_2 = \sum_k [(k^2 + \frac{|a_0|^2}{V}) a_k^* a_k + \frac{1}{2V} (a_0^2 a_k^* a_{-k} + \text{c.c.})]$, $H_3 = \frac{1}{2V} \times \sum_{k_1, k_2, k_3} (2a_0 a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} + \text{c.c.}) \delta_{k_1+k_2-k_3}$, $H_4 = \frac{1}{2V} \times \sum_{k_1, k_2, k_3, k_4} a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3} a_{k_4} \times \delta_{k_1+k_2-k_3-k_4}$, where $\sum_k'$ excludes the $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ mode. The kinetic equation requires the Hamiltonian to be diagonal in quadratic terms. To this end, we apply the Bogoliubov's transformation for the canonical variables $b_k = u_k a_k - v_k a_{-k}^*$, with the condition

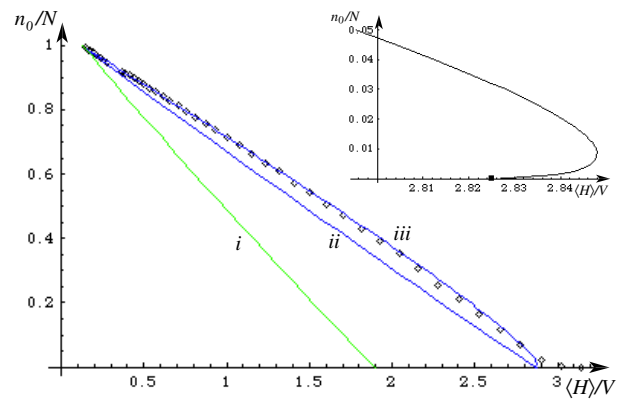


FIG. 2 (color online). Condensate fraction n_0/N vs total energy density $\langle H \rangle/V$, where $\langle H \rangle = E + E_0$, E_0 being the condensate energy [see Eq. (9)]. Points ($\diamond$) refer to numerical simulations of the NLS Eq. (1) with 64^3 modes ($N/V = 1/2$). The straight line (i) [(ii)] corresponds to the continuous Eq. (6) [discretized Eq. (7)] approximation. Curve (iii) refers to condensation in the presence of nonlinear interactions [from Eq. (9)], which makes the transition to condensation subcritical, as illustrated in the inset (with 1024^3 modes). Each point ($\diamond$) corresponds to an average over 10^3 time units.

$|u_k|^2 - |v_k|^2 = 1$ that preserves the Poisson's bracket relation $\{a_k, a_k^*\} = i$ in the b_k 's basis. Imposing that the quadratic term H_2 is diagonal in this basis, we find $u_k = 1/\sqrt{1 - L_k^2}$ and $v_k = L_k/\sqrt{1 - L_k^2}$ with $L_k = [-k^2 - \rho_0 + \omega_B(k)]/\rho_0$ and $H_2 = \sum_k' \omega_B(k) b_k^* b_k$, where $\rho_0 = n_0/V \equiv |a_0|^2/V$, and $\omega_B(k) = \sqrt{k^4 + 2\rho_0 k^2}$ is the Bogoliubov's dispersion relation that takes into account the nonlinear interaction.

Let us emphasize that the kinetic equations describing the coupled evolution of the condensate (n_0) and the incoherent wave component (φ_k), are similar to those derived in Ref. [15], but the dispersion relation $\omega(k) = k^2$ is replaced by the Bogoliubov's expression $\omega_B(k)$. The equilibrium distribution turns out to be $\varphi_k^{\text{eq}} = T/\omega_B(k)$, with $\langle b_k b_{k'}^* \rangle = \varphi_k^{\text{eq}} \delta(k - k')$. In the b_k 's basis, the uncondensed mass then reads

$$N - n_0 = \sum_k' \frac{k^2 + \rho_0}{\omega_B(k)} \varphi_k^{\text{eq}} = T \sum_k' \frac{k^2 + \rho_0}{\omega_B^2(k)}. \quad (8)$$

The total averaged energy $\langle H \rangle$ has contributions from H_0 , H_2 , and H_4 : $\langle H \rangle = E_0 + \sum_k' \omega_B(k) \varphi_k^{\text{eq}} = E_0 + T \sum_k' 1$, where $E_0 = \frac{1}{2V} [N^2 + (N - n_0)^2]$ is the energy of the condensate. The temperature T may be substituted from this expression by using Eq. (8), which gives a closed relation between $\langle H \rangle$ and n_0 ,

$$\langle H \rangle = E_0 + \frac{(N - n_0) \sum_k' 1}{\sum_k' [(k^2 + \rho_0)/\omega_B^2(k)]}. \quad (9)$$

This expression is in quantitative agreement with the numerical simulations of the NLS Eq. (1), without any adjustable parameter (see Fig. 2). Expression (9) remarkably reveals that the nonlinear interaction changes the nature of the transition to condensation, which becomes of the first order. This subcritical behavior is a small effect that has not been clearly identified in our numerical simulations.

In summary, by considering the defocusing NLS equation as a model, we showed that a classical nonlinear wave exhibits a subcritical condensation process in 3D, while no transition occurs in 2D. Numerical simulations of the NLS equation with stochastic initial conditions are found in quantitative agreement with the equilibrium distribution of the kinetic equation derived from the NLS equation. In spite of the formal reversibility of the NLS equation, the condensation process manifests itself through an irreversible evolution of the field towards a homogeneous plane wave (condensate) with small-scale fluctuations superimposed (uncondensed particles), which store the information necessary for time reversal. Our study is thus conceptually different from that reported in Ref. [9], in which the forced

and dissipative (nonconservative) NLS equation is considered. We formulate a thermodynamic description of the condensation process, whose properties are analogous to those of standard Bose-Einstein condensation in quantum systems. However, caution should be exercised when drawing conclusions about condensation in real bosonic systems, because the NLS equation describes only highly occupied modes satisfying $n_k \gg 1$, so that it cannot describe any transfer of mass between scarcely occupied (high-energy) modes and the condensate [5–7,12,15].

C. J., A. P., and S. R. thank FONDECYT 1020359 and 7050143.

-
- [1] R. Z. Sagdeev, D. A. Usikov, and G. M. Zaslavsky, *Nonlinear Physics* (Harwood Publishing, Chur, Switzerland, 1988).
 - [2] V. E. Zakharov *et al.*, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **48**, 79 (1988) [JETP Lett. **48**, 83 (1988)]; S. Dyachenko *et al.*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **96**, 2026 (1989) [Sov. Phys. JETP **69**, 1144 (1989)].
 - [3] R. Jordan, B. Turkington, and C. L. Zirbel, Physica (Amsterdam) **137D**, 353 (2000); R. Jordan and C. Josserand, Phys. Rev. E **61**, 1527 (2000).
 - [4] B. Rumpf and A. C. Newell, Phys. Rev. Lett. **87**, 054102 (2001); Physica (Amsterdam) **184D**, 162 (2003).
 - [5] Yu. Kagan and B. V. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **79**, 3331 (1997); M. J. Davis, R. J. Ballagh, and K. Burnett, J. Phys. B **34**, 4487 (2001).
 - [6] M. J. Davis, S. A. Morgan, and K. Burnett, Phys. Rev. Lett. **87**, 160402 (2001); Phys. Rev. A **66**, 053618 (2002).
 - [7] N. G. Berloff and B. V. Svistunov, Phys. Rev. A **66**, 013603 (2002).
 - [8] S. Dyachenko, A. C. Newell, A. Pushkarev, and V. E. Zakharov, Physica (Amsterdam) **57D**, 96 (1992).
 - [9] A. Dyachenko and G. Falkovich, Phys. Rev. E **54**, 5095 (1996).
 - [10] V. E. Zakharov and S. V. Nazarenko, Physica (Amsterdam) **201D**, 203 (2005).
 - [11] Y. Pomeau, Physica (Amsterdam) **61D**, 227 (1992).
 - [12] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I* (Springer, Berlin, 1992); A. C. Newell, S. Nazarenko, and L. Biven, Physica (Amsterdam) **152D**, 520 (2001).
 - [13] See, e.g., E. Henry, P. Alstrom, and M. T. Levinsen, Europhys. Lett. **52**, 27 (2000).
 - [14] B. V. Svistunov, J. Mosc. Phys. Soc. **1**, 373 (1991); D. V. Semikoz and I. I. Tkachev, Phys. Rev. Lett. **74**, 3093 (1995); Phys. Rev. D **55**, 489 (1997).
 - [15] R. Lacaze *et al.*, Physica (Amsterdam) **152D**, 779 (2001); C. Connaughton and Y. Pomeau, C.R. Physique **5**, 91 (2004).
 - [16] N. N. Bogoliubov, J. Phys. **11**, 23 (1947).
 - [17] K. Huang, *Statistical Mechanics* (Wiley, New York, 1963).

Weak Turbulence for a Vibrating Plate: Can One Hear a Kolmogorov Spectrum?

Gustavo Düring,¹ Christophe Josserand,² and Sergio Rica^{1,3}

¹*Departamento de Física, Universidad de Chile, Blanco Encalada 2008, Santiago, Chile*

²*Laboratoire de Modélisation en Mécanique, CNRS UMR 7607, Case 162, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France*

³*LPS-ENS, CNRS UMR 8550, 24 Rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France*

(Received 24 December 2005; published 14 July 2006)

We study the long-time evolution of waves of a thin elastic plate in the limit of small deformation so that modes of oscillations interact weakly. According to the theory of weak turbulence (successfully applied in the past to plasma, optics, and hydrodynamic waves), this nonlinear wave system evolves at long times with a slow transfer of energy from one mode to another. We derive a kinetic equation for the spectral transfer in terms of the second order moment. We show that such a theory describes the approach to an equilibrium wave spectrum and represents also an energy cascade, often called the Kolmogorov-Zakharov spectrum. We perform numerical simulations that confirm this scenario.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.025503](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.025503)

PACS numbers: 62.30.+d, 05.45.-a, 46.40.-f

Introduction.—For more than 40 years it has been established that long-time statistical properties of a random fluctuating wave system possess a natural asymptotic closure because of the dispersive nature of the waves and of the weakly nonlinear interaction between them [1,2]. This “weak turbulence theory” has been shown to be a powerful method for studying the evolution of nonlinear dispersive wave systems [3,4]. It follows that the long-time dynamics is driven by a kinetic equation for the distribution of spectral densities. This method has been applied to surface gravity waves [1,5], capillary waves [6], plasma waves [7], and nonlinear optics [8] for instance. The actual kinetic equation has nonequilibrium properties similar to the usual Boltzmann equation for dilute gases, conserving energy and momentum, and it exhibits an H theorem driving the system to equilibrium, characterized by the Rayleigh-Jeans distribution. Most important, besides the elementary equilibrium (or thermodynamic) solution, Zakharov has shown [7] that power-law nonequilibrium solutions also arise, namely, the Kolmogorov-Zakharov (KZ) solutions or KZ spectra, which describe the exchange of conserved quantities (e.g., energy) between large and small length scales.

Experimental evidence of KZ spectra have been found in the ocean surface [9] and in capillary surface waves [10–12]. Numerical simulations have also shown the existence of KZ spectra in weak turbulent capillary waves [13] and, more recently, in gravity waves [14].

In this Letter an oscillating thin elastic plate is considered [15]. Adding inertia to the well known (static) theory of thin plates, one finds the existence of ballistic dispersive waves [16]. They interact via the nonlinear terms that are weak if the plate deformations are small. Understanding the interaction between these waves is thus crucial to describe acoustical properties of the plates. In fact, nonlinear solitary waves have been observed on the surface of a cylindrical shell that show balance between nonlinear effects and dispersion [17]. However, we develop here the first weak turbulence theory for the surface deflection on

plate dynamics. We find that the bending waves travel randomly through the system and interact resonantly between each other via the weak nonlinearities. The mathematics behind the resonant condition is formally identical to the conservation of energy and momentum in a classical gas. In this sense an elastic plate is formally equivalent to a 2D gas of classical particles interacting with a nontrivial scattering cross section. An isolated system evolves from a random initial condition to a situation of statistical equilibrium as a gas of particles does. In addition to statistical equilibrium for isolated systems, the weak turbulence theory predicts here an energy cascade from a source of energy (a driving forcing) to a dissipation scale typical of irreversible processes.

More precisely, we have in mind an elastic thin plate under an external low frequency (few times the slowest plate mode) random forcing. Typically the gravest mode for a 10×10 cm² free bounded steel sheet of 0.1 mm thick is about 50 Hz and is a bit higher for a clamped sheet. Internal resonance among modes buildup an energy cascade from the injection scale to small scales where it is ultimately dissipated mostly because of the boundaries, the air entrainment, viscoelastic flows, or heat transfer. A genuine cascade should setup if dissipation occurs at small scales only. One needs to be careful concerning the heat transfer since the damping coefficient does not depend on the oscillation frequency there. However, heat loss is a weak effect and can be in general neglected (see section 30 in Ref. [18]): indeed, for the above example, the heat loss time scale is about 15 times smaller than the slowest oscillation at room temperature. As in fluids, viscosity in solids acts only at small scale. Finally, in a real experiment the boundaries play an important role because of the finite value of the experimental setup impedance. Such a damping coefficient grows linearly with wave number and is probably the most relevant source of dissipation. Therefore, it seems possible that energy cascades from the scale of the plate to the dissipation scale.

Moreover, while there is often a lack of direct observations of weak turbulence predictions, we exhibit numerically relaxation to equilibrium and energy cascade for the plate dynamics, confirming the scenario presented above. The plate dynamics is illustrated in Fig. 1 for an isolated system where the plate deformations are shown at initial time and after a long evolution.

Theory.—The starting point is the dynamical version of the Föppl–von Kármán equations [18] for the plate deformation $\zeta(x, y, t)$ and the stress function $\chi(x, y, t)$:

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)} \Delta^2 \zeta + \{\zeta, \chi\}; \quad (1)$$

$$\frac{1}{E} \Delta^2 \chi = -\frac{1}{2} \{\zeta, \zeta\}, \quad (2)$$

where h is the thickness of the elastic sheet. The material has a mass density ρ , a Young's modulus E , and a Poisson ratio σ . $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ is the usual Laplacian and the bracket $\{\cdot, \cdot\}$ is defined by $\{f, g\} \equiv f_{xx}g_{yy} + f_{yy}g_{xx} - 2f_{xy}g_{xy}$, which is an exact divergence, so Eq. (1) preserves the momentum of the center of mass, namely $\frac{1}{2\pi} \int \zeta(x, y, t) dx dy = 0$. The first term on the right-hand side of (1) represents the bending while the second one $\{\zeta, \chi\}$, together with Eq. (2), represents the stretching [19].

Despite the complexity of Eqs. (1) and (2) the system presents a Hamiltonian structure that is straightforward in Fourier space. Defining the Fourier transforms as $\zeta_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int \zeta(x, t) e^{ik \cdot x} d^2x$ (with $\zeta_k = \zeta_{-k}^*$), then one gets from Eq. (2): $\chi_k(t) = -\frac{E}{2|k|^4} \{\zeta, \zeta\}_k$, where $\{\zeta, \zeta\}_k$ is the Fourier transform of $\{\zeta, \zeta\}$. The final equation is a nonlinear oscillator with the usual ballistic dispersion relation of bending waves $\omega_k = hc|k|^2 = hck^2$ [$c = \sqrt{E/12(1-\sigma^2)\rho}$ has the dimension of a velocity] [16,18]:

$$\rho \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial t^2} = -\frac{Eh^2 k^4}{12(1-\sigma^2)} \zeta_k - \int V_{-k, k_2, k_3, k_4} \zeta_{k_2} \zeta_{k_3} \zeta_{k_4} \delta^{(2)}(k - k_2 - k_3 - k_4) d^2k_{2,3,4},$$

where $V_{12;34} = \frac{E}{2(2\pi)^2} \frac{|k_1 \times k_2|^2 |k_3 \times k_4|^2}{|k_1 + k_2|^4}$ and $d^2k_{2,3,4} \equiv d^2k_2 d^2k_3 d^2k_4$. The Hamiltonian structure becomes evident if we define as canonical variables the deformation $\zeta_k(t)$ and the momentum $p_k(t) = \rho \partial_t \zeta_k(t)$. Finally, the canonical transformation $\zeta_k = \frac{X_k}{\sqrt{2}} (A_k + A_{-k}^*)$ and $p_k =$

$-\frac{i}{\sqrt{2}X_k} (A_k - A_{-k}^*)$ with $X_k = \frac{1}{\sqrt{\omega_k \rho}}$ allows us to write the wave equation in a diagonalized form: $\frac{dA_k}{dt} + i\omega_k A_k = iN_3(A_k)$, where $N_3(\cdot)$ is the cubic nonlinear term.

Weak turbulence theory.—This nonlinear oscillator has two distinct time scales, the rapid oscillation $i\omega_k A_k$ and the weak nonlinearity: $iN_3(A_k)$. Then, following the approach of [4], one changes $A_k = a_k(t) e^{-i\omega_k t}$ which removes the rapid linear oscillating term:

$$\frac{da_k^s}{dt} = -is \sum_{s_1 s_2 s_3} \int J_{-k k_1 k_2 k_3} e^{it(s\omega_k - s_1\omega_{k_1} - s_2\omega_{k_2} - s_3\omega_{k_3})} \times a_{k_1}^{s_1} a_{k_2}^{s_2} a_{k_3}^{s_3} \delta^{(2)}(k_1 + k_2 + k_3 - k) d^2k_{123}, \quad (3)$$

where we define a_k^s with the two possible choices $s = +$ or $-$ relative to the propagation direction, such that $a_k^+ \equiv a_k$ while $a_k^- \equiv a_{-k}^*$. The interaction term reads: $J_{k_1, k_2, k_3, k_4} = \frac{1}{6} X_{k_1} X_{k_2} X_{k_3} X_{k_4} \mathcal{P}_{234} V_{k_1, k_2, k_3, k_4}$, where $\mathcal{P}_{234}$ is the sum over the six possible permutations between 2, 3, and 4. The next step consists of writing a hierarchy of linear equations for the averaged moments: $\langle a_{k_1}^{s_1} a_{k_2}^{s_2} \rangle$, $\langle a_{k_1}^{s_1} a_{k_2}^{s_2} a_{k_3}^{s_3} \rangle$, etc. A multiscale analysis provides a natural asymptotic closure for higher moments: the fast oscillations drive the system close to Gaussian statistics and higher moments are written in terms of the second order moment: $\langle a_{k_1} a_{k_2}^* \rangle = n_{k_1} \delta^{(2)}(k_1 + k_2)$, where n_k is called the wave spectrum.

The wave spectrum thus satisfies a Boltzmann-type kinetic equation describing a slow exchange of energy from one mode to another through four waves resonance:

$$\frac{dn_{p_1}}{dt} = 12\pi \int |J_{p_1 k_1 k_2 k_3}|^2 \sum_{s_1 s_2 s_3} n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} n_{p_1} \left(\frac{1}{n_{p_1}} + \frac{s_1}{n_{k_1}} + \frac{s_2}{n_{k_2}} + \frac{s_3}{n_{k_3}} \right) \delta(\omega_{p_1} + s_1\omega_{k_1} + s_2\omega_{k_2} + s_3\omega_{k_3}) \times \delta^{(2)}(p_1 + s_1k_1 + s_2k_2 + s_3k_3) d^2k_{123}. \quad (4)$$

As for the usual Boltzmann equation, Eq. (4) conserves “formally” [20] the total momentum per unit area $\mathbf{P} = h \int \mathbf{k} n_k(t) d^2k$ and the kinetic energy per unit area $\mathcal{E} = h \int \omega_k n_k(t) d^2k$, and exhibits an H theorem: let $\mathcal{S}(t) = \int \ln(n_k) d^2k$ be the nonequilibrium entropy, then $d\mathcal{S}/dt \geq 0$, for increasing time. However, despite the four waves interaction type kinetic Eq. (4), the “wave action” $\mathcal{N} = \int n_k(t) d^2k$ is not conserved. The kinetic Eq. (4) describes thus an irreversible evolution of the wave spectrum towards the Rayleigh-Jeans *equilibrium* distribution which reads, when $\mathbf{P} = 0$:

$$n_k^{\text{eq}} = T/\omega_k; \quad (5)$$

here T is called, by analogy with thermodynamics, the “temperature” (with units of energy/length, i.e., a force), which is naturally related to the initial energy by $\mathcal{E}_0 = h \int \omega_k n_{\text{eq}} d^2k = hT \int d^2k$. The quantity $\int d^2k$ is the number of degrees of freedom per unit surface. Therefore each degree of freedom takes the same energy: hT . Naturally,

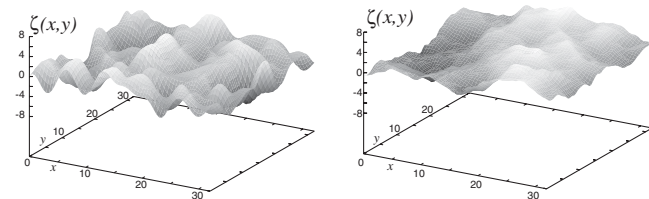


FIG. 1. Zoom over a portion of the surface plate deflection $\zeta(x, y)$. The left-hand image is the initial condition while the right-hand one represents a long-time evolution of the plate.

for an infinite system this number diverges (as well as the energy). This classical Rayleigh-Jeans catastrophe is always suppressed due to some physical cutoff discussed above. Numerical simulations on regular grid provide also a natural cutoff $k_c = \pi/dx$, where dx is the mesh size, which gives $\mathcal{E}_0 = \pi h T k_c^2$ for a large plate.

Kolmogorov spectrum.—In addition, isotropic nonequilibrium distribution solutions can arise [7]. They have a major importance in the nonequilibrium process for the energy transfer between different scales. These solutions can be guessed via a dimensional analysis argument but they are, in fact, exact solutions of the kinetic equation. Despite some differences with the usual kinetics equation, the Zakharov method can be applied here. Assuming an isotropic spectrum $n_k \equiv n_{|k|}$ and integrating over the angles the scattering amplitude $|J_{k_1 k_2 k_3 k_4}|^2 \delta^{(2)}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$, the new scattering amplitude depends only on the modulus $k_i = |\mathbf{k}_i|$, and it can be written as a function of the frequencies ω_k : $S_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4} = \frac{1}{6} \mathcal{P}_{234} \int \frac{|J_{k_1 k_2 k_3 k_4}|^2}{|k_2 \times k_3|} d\varphi_4$. Since the degree of homogeneity of $|J|^2$ in k is zero, S scales as $1/k^2 \sim 1/\omega_k$.

Looking for a power-law solution $n_k = A \omega_k^{-\alpha}$, the eight terms of the collisional integral in the right-hand side of (4) decompose into $3\text{Coll}_{2 \leftrightarrow 2} + \text{Coll}_{3 \leftrightarrow 1}$, defined by

$$\text{Coll}_s = \frac{3\pi A^3}{2(hc)^3} \int_{\Omega_s} \frac{S_{\omega_k, \omega_1, \omega_2, \omega_3}}{\omega_k^\alpha \omega_1^\alpha \omega_2^\alpha \omega_3^\alpha} (\omega_k^\alpha + s\omega_1^\alpha - \omega_2^\alpha - \omega_3^\alpha) \times \left[1 + s \left(\frac{\omega_1}{\omega_k} \right)^\beta - \left(\frac{\omega_2}{\omega_k} \right)^\beta - \left(\frac{\omega_3}{\omega_k} \right)^\beta \right] d\omega_2 d\omega_3.$$

Here $\beta = 3\alpha - 2$. For $\text{Coll}_{2 \leftrightarrow 2}$ one has that $s \equiv 1$ and the integration domain is over $\Omega_+ = \{0 \leq \omega_2 \leq \omega_k, \omega_k - \omega_2 \leq \omega_3 \leq \omega_k\}$ and $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 - \omega_k$, while for $\text{Coll}_{3 \leftrightarrow 1}$ one has that $s \equiv -1$ and the integration is over $\Omega_- = \{0 \leq \omega_2 \leq \omega_k, 0 \leq \omega_3 \leq \omega_k - \omega_2\}$, with $\omega_1 = \omega_k - \omega_2 - \omega_3$. The collisional terms scale as $\text{Coll}_{2 \leftrightarrow 2} = C_+(\alpha) \omega_k^{1-3\alpha}$ and $\text{Coll}_{3 \leftrightarrow 1} = C_-(\alpha) \omega_k^{1-3\alpha}$. The coefficients $C_\pm(\alpha)$ are pure real functions depending only on α . Although, the explicit form of the scattering matrix $S_{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4}$ is not simple, its value can be bounded in both domains $\Omega_\pm$ and the collision term converges for suitable values of $\alpha \in (0.5, 1.2)$ validating the locality condition. Both coefficients vanish with double degeneracy at $\alpha = 1$ indicating that the KZ spectrum: $n_k^{\text{KZ}} \sim \frac{1}{\omega_k} \sim \frac{1}{k^2}$ coincides with the Rayleigh-Jeans solution, Eq. (5). It means, in fact, that the energy flux is zero. The double degeneracy at $\alpha = 1$ reveals the existence of a logarithmic correction, similarly to the case of the nonlinear Schrödinger equation (NLS) in two dimensions [8]. As stated in Ref. [21] the logarithmic correction produces a divergent result for NLS. In our case, it is possible to show that all integrals are finite, indicating a finite energy flux [22]. Thus one has

$$n_k^{\text{KZ}} = C \frac{h P^{1/3} \rho^{2/3}}{[12(1 - \sigma^2)]^{2/3}} \frac{\ln^{1/3}(k_*/k)}{k^2}, \quad (6)$$

where P is the energy flux. C and k_* are real numbers.

For $\alpha = 0$ and $3\alpha - 2 = 0$ the collisional part $\text{Coll}_{2 \leftrightarrow 2}$ also vanishes. This solution corresponds to the wave action equipartition ($\alpha = 0$) with a second KZ spectrum $n_k \sim 1/\omega_k^{2/3}$ related to wave action inverse cascade. However, this spectrum does not vanish the second part of the collision term $\text{Coll}_{3 \leftrightarrow 1}$, in agreement with the nonconservation of the wave action mentioned above. In conclusion there exist only a single cascade: the energy cascade (6).

Numerical simulation.—Numerical simulations of the full nonlinear system of Eqs. (1) and (2) are first performed to validate the formation of the equilibrium spectrum Eq. (5). In all the presented results $c = 1$ and $h = 1/2$ so that the linear plate size is the only parameter of the numerics. We have implemented a pseudospectral scheme using FFT routines [23], with periodic boundary conditions: the linear part of the dynamics is calculated exactly in Fourier space: $\zeta_k(t + \Delta t) = \zeta_k(t) \cos(\omega_k \Delta t) + \frac{\dot{\zeta}_k(t)}{\omega_k} \times \sin(\omega_k \Delta t)$. The nonlinear terms in (1) and (2) are first computed in real space and the integration in time is then performed in Fourier space using an Adams-Bashford scheme. It interpolates the nonlinear term of (1) as a polynomial function of time (of order one in the present calculations). Energy is conserved within a 1/100 relative error. As initial conditions, we have taken: $\zeta_k = \zeta_0 e^{-k^2/k_0^2} e^{i\varphi_k}$ with φ_k a random phase, and a zero velocity field $\dot{\zeta}_k = 0$. As time evolves, the random waves oscillate with a disorganized behavior, as shown in Fig. 1. After a long time the system builds up an equilibrium distribution in agreement with the Rayleigh-Jeans $n_k \sim T/k^2$ spectrum. That is, for the plate deflection $\langle |\zeta_k|^2 \rangle = X_k^2 n_k = \frac{n_k}{\rho \omega_k} = \frac{T}{\rho h^2 c^2 k^4}$ as shown in Fig. 2.

Nonequilibrium distributions can also be observed numerically. One requires to input energy and pump wave action at low wave numbers ($k < k_{\text{in}}$) and to dissipate energy at large ones ($k > k_{\text{out}}$) defining a window of transparency $k_{\text{in}} < k < k_{\text{out}}$. This artifact is implemented by adding a term $(F_k - \gamma_k \dot{\zeta}_k)$ to the plate Eq. (1). Following [14] the forcing term F_k is a nonzero random force for $k < k_{\text{in}}$, and γ_k is a fictitious linear damping for short length scales. Figure 3 shows a good agreement with the predicted KZ spectrum Eq. (6) with an exponent for the logarithmic correction 1/3 (inset of Fig. 3).

Conclusions.—We have successfully applied weak turbulence theory for the new case of elastic thin plates. The results allow for an analogy between an important property of fluid dynamics and the mechanics of elastic plates. Numerical simulations exhibit both the convergence towards statistical equilibrium for a free system and an energy cascade when forcing and dissipation are introduced, as predicted by the weak turbulence analysis. An important consequence is the nonexistence of an inverse

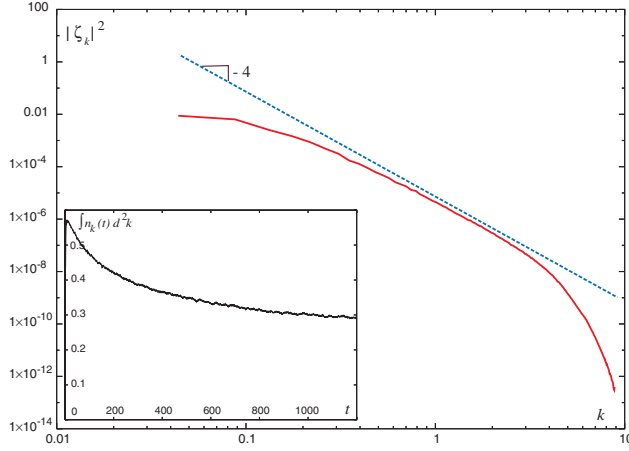


FIG. 2 (color online). Numerical simulation for a 512 square plate using 1024^2 modes with a mesh size $dx = 1/2$. The initial condition is with $k_0 = 1$ and $\zeta_0 = 0.02$. We plot the power spectrum of the mean deflection $\langle |\zeta_k|^2 \rangle$ versus wave number k after 1200 time units. The line plots the Rayleigh-Jeans power law $7 \times 10^{-6}/k^4$ which gives $T \approx 2 \times 10^{-6}$ in agreement with the equipartition of the initial energy. The inset plots the evolution of the wave action with time.

cascade $n_k \sim 1/k^{4/3}$, as usually found for four wave interaction systems such as gravity waves or NLS. The results presented here suggest also a new experimental way of studying weak turbulence through the analysis of the waves produced by the plate oscillations [24].

For large deformations the elastic plate equations are still valid, but stretching cannot be longer treated as a weak perturbation and a “wave breaking” phenomenon is expected: energy focuses into localized structures as ridges [25] and conical surfaces (named d-cones) [26]. Amazingly, a regime dominated by ridges shows a power spectrum $|\zeta_k|^2 \sim 1/k^4$ similar to the weak turbulence spectrum derived here. On the other hand for d-cone-dominated

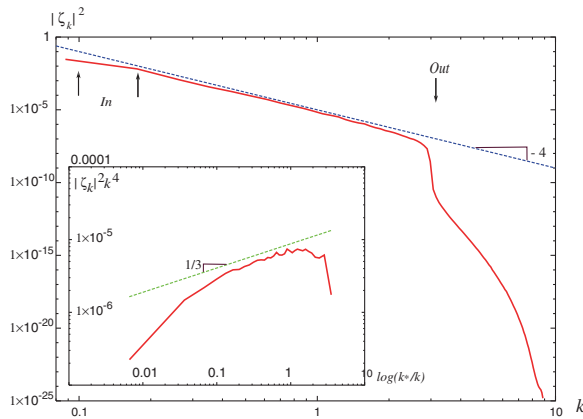


FIG. 3 (color online). Average power spectrum $\langle |\zeta_k|^2 \rangle$ for the energy cascade. The injection scale is $k_{in} \in (0.1, 0.25)$ while the dissipation is at $k_{out} = 3$. The line plots the power law $1/k^4$. Inset plots $k^4 \langle |\zeta_k|^2 \rangle$ vs $\log(k_*/k)$ in logarithmic scale with $k_* = k_{out}$. The straight line corresponds to $z = 1/3$.

regimes, as seemingly observed in [27], the expected spectrum should follow $|\zeta_k|^2 \sim 1/k^6$.

The authors are grateful to E. Cerda for attracting our attention to this problem, A. C. Newell for suggesting the title, and A. Boudaoud, E. Hamm, and L. Mahadevan for the communication of their experimental results prior to publication. This work was supported by FONDECYT and Anillo de Investigación Act. 15.

- [1] K. Hasselmann, J. Fluid Mech. **12**, 481 (1962); **15**, 273 (1963).
- [2] D. J. Benney and P. G. Saffman, Proc. R. Soc. A **289**, 301 (1966).
- [3] V. E. Zakharov, V. S. L'vov, and G. Falkovich, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I* (Springer, Berlin, 1992).
- [4] A. Newell, S. Nazarenko, and L. Biven, Physica D (Amsterdam) **152–153**, 520 (2001).
- [5] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, Dokl. Akad. Nauk SSSR **170**, 1292 (1966).
- [6] V. E. Zakharov and N. N. Filonenko, Zh. Tekh. Fiz. **5**, 62 (1967).
- [7] V. E. Zakharov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **51**, 686 (1966).
- [8] S. Dyachenko *et al.*, Physica D (Amsterdam) **57**, 96 (1992).
- [9] P. A. Hwang *et al.*, J. Phys. Oceanogr. **30**, 2753 (2000).
- [10] W. Wright, R. Budakian, and S. Putterman, Phys. Rev. Lett. **76**, 4528 (1996).
- [11] E. Henry, P. Alstrøm, and M. T. Levinsen, Europhys. Lett. **52**, 27 (2000).
- [12] M. Brazhnikov, *et al.*, Europhys. Lett. **58**, 510 (2002).
- [13] A. N. Pushkarev and V. E. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **76**, 3320 (1996).
- [14] A. I. Dyachenko, A. O. Korotkevich, and V. E. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **92**, 134501 (2004).
- [15] Similar calculations could be done for an elastic shell or for a plate under a homogeneous external tension.
- [16] Lord Rayleigh, *Theory of Sound* (Dover, New York, 1945), Sec. 217.
- [17] J. Wu *et al.*, Phys. Rev. Lett. **59**, 2744 (1987).
- [18] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity* (Pergamon, New York, 1959).
- [19] Static versions of Eqs. (1) and (2) are valid also for large deformation, the only limitation of the model is that $h|\Delta\zeta|$ is small because of the elastic limit.
- [20] “Formally” means here that the proof requires convergence of any simple integral to the exchange of integration order by the Fubini theorem [4].
- [21] V. M. Malkin, Phys. Rev. Lett. **76**, 4524 (1996).
- [22] The main difference with Ref. [8] arises because in the present case the scattering matrix vanishes on the lines $\omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 0$, ensuring convergence.
- [23] FFTW: www.fftw.org.
- [24] A. Boudaoud and E. Hamm (private communication).
- [25] T. A. Witten and H. Li, Europhys. Lett. **23**, 51 (1993).
- [26] M. Ben Amar and Y. Pomeau, Proc. R. Soc. A **453**, 729 (1997); E. Cerda and L. Mahadevan, Phys. Rev. Lett. **80**, 2358 (1998).
- [27] L. Mahadevan (private communication).