



**HAL**  
open science

# Méthodes particulières en commande optimale stochastique

Anès Dallagi

► **To cite this version:**

Anès Dallagi. Méthodes particulières en commande optimale stochastique. Mathématiques [math].  
Université Panthéon-Sorbonne - Paris I, 2007. Français. NNT: . tel-00226353

**HAL Id: tel-00226353**

**<https://theses.hal.science/tel-00226353>**

Submitted on 30 Jan 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## THÈSE

présentée pour l'obtention du titre de  
Docteur de l'Université Paris 1, Panthéon-Sorbonne  
Spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Anes DALLAGI

Sujet : *Méthodes particulières  
en commande optimale stochastique*

Soutenance le 29 Janvier 2007 devant le jury composé de :

Rapporteurs :	Teemu Pennanen Jean-Philippe Vial	Helsinki School of Economics HEC Genève
Examineurs :	Joseph Abdou René Aïd Jean-Marc Bonnisseau Pierre Carpentier Jean-Pierre Quadrat	Université Paris I Électricité De France Université Paris I UMA-ENSTA INRIA
Directeur de thèse :	Guy Cohen	ENPC



Cette thèse a été effectuée conjointement au CERMSEM de l'université de Paris I, au CERMICS de l'ENPC, et dans le département OSIRIS d'EDF R&D.





*Invenimus viam aut faciemus.*  
Hannibal Barca



## Table des matières

Remerciements	v
Introduction	vii
Résumé	ix
Extended abstract	xi
Modeling information and problems' typology	xi
Optimality conditions for stochastic optimal control problems	xii
Algebraic interpretation of the information structure	xii
Functional interpretation of the information structure	xii
Conditional expectation approximation	xii
The particle finite element method	xiii
Chaotic algorithm for closed loop problems	xiii
Numerical solutions for stochastic optimal control problems	xiii
Chapitre I. Préliminaires	1
I.1. Modélisation de l'information	1
I.1.1. Représentation algébrique de l'information	1
I.1.2. Mesurabilité	3
I.1.3. Espérance conditionnelle	4
I.2. Optimisation dans l'incertain	4
I.2.1. Écriture du problème	4
I.2.2. Deux manières équivalentes de poser le problème	5
I.3. Typologie des problèmes	6
I.3.1. Problèmes en boucle ouverte	6
I.3.2. Problèmes en boucle fermée	6
I.4. Exemples de problèmes d'optimisation stochastique	7
I.5. Conclusion	10
Chapitre II. Approches variationnelles pour la commande optimale stochastique	11
II.1. Conditions d'optimalité d'un problème d'optimisation stochastique	11
II.2. Problème de commande optimale stochastique	13
II.2.1. Dynamique du système	14
II.2.2. Coût à minimiser	14
II.2.3. Structure d'information	14
II.2.4. Deux points de vue	15
II.2.5. Hypothèses	15
II.3. Dérivation de la fonction coût intégrée	16
II.4. Conditions d'optimalité : première forme	18
II.5. Conditions d'optimalité : deuxième forme	19
II.6. Application au cas markovien	20
II.6.1. Tentative d'écriture de conditions du type KKT	21
II.6.2. Conditions d'optimalité dans un cadre markovien : première forme	21

II.6.3.	Conditions d'optimalité dans un cadre markovien : deuxième forme	23
II.7.	Variantes sur les conditions d'optimalité	24
II.7.1.	Première approche : commande d'un coût initial	24
II.7.2.	Deuxième approche : propagation de la densité de l'état	28
II.7.3.	La programmation dynamique stochastique	30
II.7.4.	Retour à une interprétation par variables aléatoires	31
II.8.	Conclusion	33
Chapitre III.	Estimation de l'espérance conditionnelle	35
III.1.	Motivations	36
III.1.1.	Optimiser d'abord, puis approximer	36
III.1.2.	Approximer d'abord, puis optimiser	36
III.2.	Estimation de densité	37
III.2.1.	Estimation par histogrammes	38
III.2.2.	Estimation naïve	38
III.2.3.	Estimation à noyaux	39
III.2.4.	Estimation des plus proches voisins	39
III.2.5.	Estimation par noyaux variables	40
III.2.6.	Estimation à séries orthogonales	40
III.3.	Caractéristiques asymptotiques de l'estimateur de densité à noyaux	41
III.4.	Estimation de densité conditionnelle	45
III.5.	Estimation d'espérance conditionnelle	46
III.5.1.	Estimation des plus proches voisins	46
III.5.2.	Estimation des plus proches voisins modifiée	47
III.5.3.	Estimation à noyaux	47
III.5.4.	Estimation par éléments finis particuliers	49
III.6.	Conclusion	52
Chapitre IV.	Éléments finis particuliers	55
IV.1.	Présentation de la méthode	56
IV.1.1.	La quantification	56
IV.1.2.	Les éléments finis particuliers	58
IV.1.3.	Liens avec l'estimation de l'espérance conditionnelle	59
IV.2.	Comportement asymptotique pour un problème linéaire quadratique	62
IV.2.1.	Présentation du problème	63
IV.2.2.	Résolution exacte	63
IV.2.3.	Approximation de la contrainte d'information	64
IV.2.4.	Approximation des espérances	65
IV.2.5.	Biais du feedback approximé	65
IV.2.6.	Variance du feedback approximé	66
IV.2.7.	Erreur quadratique moyenne du feedback approximé	67
IV.3.	Résultats de convergence variationnelle et revue de la littérature	68
IV.3.1.	Épi-convergence de problèmes sans contraintes	69
IV.3.2.	Épi/Hypo-convergence des problèmes avec contraintes	74
IV.4.	Conclusion	79
Chapitre V.	Algorithme chaotique en optimisation stochastique	81
V.1.	Brève revue de la littérature	81
V.2.	Principe d'un algorithme de gradient chaotique en boucle fermée	83
V.3.	Résultat de convergence	85
V.4.	Intérêt d'un tel algorithme	91
V.5.	Application numérique de l'algorithme	92

V.6. Vitesse de convergence	94
V.6.1. Théorème de la limite centrale	94
V.6.2. Lien entre nombre de fonctions de base et vitesse de convergence	96
Chapitre VI. Résolution numérique de problèmes de commande optimale stochastique	99
VI.1. Algorithme de la programmation dynamique stochastique en temps discret	100
VI.2. Gradient projeté pour la méthode des éléments finis particuliers	101
VI.2.1. Approximation par éléments finis particuliers	102
VI.2.2. Conditions d'optimalité	102
VI.2.3. Algorithme	103
VI.2.4. Synthèse de feedback	104
VI.3. Interprétation algébrique de la structure d'information	105
VI.3.1. Intégration de l'état adjoint non adapté	105
VI.3.2. Intégration de l'état adjoint adapté	107
VI.4. Interprétation fonctionnelle des variables aléatoires	109
VI.4.1. Espérance conditionnelle de l'état adjoint et espérance du gradient	109
VI.4.2. Espérance de l'état adjoint et espérance du gradient	111
VI.5. Problème test : gestion d'un barrage hydro-électrique	113
VI.5.1. Description du problème	113
VI.5.2. Données numériques et fonctionnelles	115
VI.5.3. Programmation dynamique stochastique : application	116
VI.5.4. Éléments finis particuliers : application	117
VI.5.5. Interprétation particulière des variables aléatoires : application	121
VI.5.6. Interprétation fonctionnelle des variables aléatoires : application	123
VI.6. Conclusion	124
Chapitre VII. Conclusions et Perspectives	143
VII.1. Différentes contributions du mémoire	143
VII.1.1. Modélisation d'un problème d'optimisation stochastique	143
VII.1.2. Résolution d'un problème d'optimisation stochastique	143
VII.1.3. Conditions d'optimalité	144
VII.1.4. La méthode des éléments finis particuliers	144
VII.1.5. Compromis entre deux niveaux d'approximation	144
VII.2. Avancées par rapport aux méthodes existantes	145
VII.3. Perspectives futures	145
Bibliographie	147
Index	151
Annexe A. Convexité et optimisation	153
A.1. Ensembles convexes	153
A.2. Fonctions convexes	154
A.3. Différentiabilité et sous-différentiabilité	155
A.4. Optimisation	156
A.5. Dérivation d'une fonction définie par une contrainte d'égalité	157
Annexe B. Lemmes techniques	159
Annexe C. Quasi-martingales	163





## Remerciements

Mes premiers remerciements vont aux personnes qui m'ont fait le plaisir et l'honneur de faire partie de mon jury de thèse. Je remercie mes professeurs de DEA Joseph Abdou et Jean-Marc Bonnisseau qui m'ont donné le goût et la volonté de me lancer dans la recherche et Jean-Pierre Quadrat dont les travaux dans le domaine de la programmation dynamique stochastique et des algorithmes de gradient stochastique ont largement inspiré certaines parties de ce manuscrit.

C'est aussi avec une grande joie que je compte Teemu Pennanen parmi mon jury de thèse, son expertise et ses idées m'ont aidé à mieux comprendre plusieurs aspects de la discrétisation des problèmes d'optimisation dans l'incertain.

Mes travaux concernant les éléments finis particuliers se sont beaucoup inspirés des idées de Jean-Philippe Vial, c'est donc avec un immense plaisir que je le compte dans ce jury.

J'adresse des remerciements particuliers à René Aïd qui, avec son dynamisme et sa bonne humeur, m'a largement soutenu et encouragé durant ma thèse et bien avant, durant mon stage de DEA.

Il aurait été incongru de soutenir cette thèse sans la présence de Pierre Carpentier dont les idées et la rigueur mathématique m'ont orienté durant toute la durée de ma thèse.

Enfin, c'est vers Guy Cohen que vont mes remerciements les plus chaleureux. D'abord comme étant mon professeur de DEA, ensuite en dirigeant ma thèse, il m'a permis d'approfondir mes connaissances en optimisation. Je le remercie particulièrement pour sa patience et ces nombreux conseils qui ont (et qui vont) orienté mes travaux de recherche.

Je remercie vivement tous les membres de l'équipe optimisation et systèmes à savoir Laetitia Andrieu, Kengy Barty, Pierre Carpentier, Jean-Philippe Chancelier, Guy Cohen, Michel De Lara, Babakar Seck, Cyrille Strugarek et bientôt Pierre Girardeau qui, durant nos réunions hebdomadaires du mardi ont contribué à esquisser, orienter et consolider les différents travaux présentés dans ce manuscrit. Je les remercie chaleureusement pour leur soutien, leur amitié et pour les plongeurs du Gosier.

C'est dans les locaux du CERMICS à l'ENPC que j'ai passé la majeure partie de cette thèse. J'en remercie tous les membres, collègues et amis qui m'ont accompagné durant ces dernières années. Une pensée particulière va à Sylvie, Yosra, Annette et surtout à Antonin que je remercie pour son amitié et son soutien.

Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans le soutien humain, académique et financier, du département OSIRIS de la division recherche et développement d'EDF. Je remercie particulièrement Léonard Bacaud, Xavier Warin, Nadia Oudjane, René Aïd et surtout Jean-Sébastien Roy dont les conseils, remarques et amitié m'ont soutenu et conforté durant mon passage à EDF.

J'adresse un immense *Merci* à Rym, Chams et Ahmed amis indéfectibles et compagnons inconditionnels qui m'ont accompagné dans mes joies et soutenu dans mes moments difficiles.

C'est à ma famille que va tout mon amour et toute mon estime. Je remercie mon grand père Mohamed pour toutes nos vadrouilles sous les oliviers de Borj Hdida et ma grand mère Souad pour son amour et ses bons petits plats. Un grand merci à mes cinq tantes, mon oncle Hsen, mon frère Amine ainsi qu'à l'ensemble des familles Kristou et Dallagi pour tous leurs conseils, sourires et toutes les joies qu'ils m'ont apportées.

À ma mère qui m'a donné tout son amour, qui m'a élevé et si souvent encouragé je dédie cette thèse, fruit de l'éducation qu'elle m'a donnée et de sa volonté acharnée qui m'a permis de choisir, à chaque étape de ma vie, le chemin que je désirais.

Finalement, c'est avec une grande émotion que j'exprime dans ces quelques lignes tout l'amour que je porte à mon père qui aurait souhaité voir ce moment.

## Introduction

*La seule certitude est que rien n'est certain*, c'est ainsi qu'il y a près de 2000 ans Pline l'ancien a exprimé le fait que notre monde est gouverné par une multitude d'aléas et d'incertitudes. Aujourd'hui, plus qu'à toute autre époque, cette maxime est encore valable.

L'économie mondiale est imprégnée par ces indéterminations. Les taux de change, les bouleversements politiques et les prix de l'énergie, constituent autant d'aléas affectant la bonne santé des industries : les sociétés pharmaceutiques doivent contrôler leurs opérations de recherche et développement à la lumière des règlements changeants et des pandémies globales ; les banques doivent choisir leurs portefeuilles de prêt face aux taux d'intérêt imprévisibles et aux aléas de la bourse ; les sociétés pétrolières doivent assigner leurs budgets d'exploration en fonction des nouvelles technologies de forage, des prix du pétrole et des données géopolitiques ; et les producteurs d'électricité sont confrontés aux aléas de la demande, du climat et du marché de l'énergie.

Une manière simple et radicale de traiter ces indéterminations serait de les caractériser en moyenne, ce qui conduit souvent à des décisions erronées voir fatales. Ainsi le statisticien s'est noyé en voulant traverser une rivière qui n'était profonde que de quelques centimètres, mais hélas pour lui cette profondeur n'était exprimée qu'en moyenne alors qu'un trou de plusieurs mètres l'attendait en plein milieu. Loin du caractère humoristique de cet exemple, un problème de fond se présente : comment tenir compte de l'aléa dans un processus de prise de décision ?

Cette interrogation fait l'objet des préoccupations d'un domaine bien particulier des mathématiques : *l'optimisation stochastique*. Ce mémoire s'inscrit alors dans cette perspective et s'attache à apporter quelques réponses aux questions soulevées dans ce domaine d'étude.

Les travaux antérieurs de l'équipe *optimisation et systèmes*<sup>1</sup> et notamment les recherches menées dans le cadre de la thèse de K. Barty [7] se sont intéressées à la résolution numérique des problèmes d'optimisation stochastique. Il a été ainsi montré que la question de la discrétisation numérique des problèmes de commande optimale stochastique peut être décomposée en deux étapes pratiquement indépendantes, mais qu'il faut traiter dans l'ordre suivant :

- (1) l'approximation de la structure d'information qui est passée, dans la thèse de K. Barty [7], par la quantification des observations, conduit à des arbres supportant les variables de commande (ou de décision) du problème ;
- (2) l'approximation de l'espérance du coût qui peut se faire soit par des techniques traditionnelles d'échantillonnage à la Monte-Carlo, soit par un point de vue de quantification des bruits.

Cependant, une difficulté majeure de cette méthode, dite des *chroniques organisées en scénarios arborescents*, vient limiter ses performances par rapport à l'approche *programmation dynamique* traditionnelle. En effet, La structure arborescente présente l'inconvénient d'être dans l'incapacité de fournir directement la solution du problème sous forme de loi de *feedback*, dont l'importance pratique est incontestable.

En outre, dans cette approche, nous sommes confrontés à un dilemme : au début de l'arbre de scénarios, le futur du modèle est riche et les valeurs obtenues sur les différents nœuds de l'arbre sont de bonne qualité (en terme de variance des estimateurs obtenus), mais malheureusement ce

---

<sup>1</sup>System and Optimization Working Group (SOWG) : Laetitia Andrieu, Kengy Barty, Pierre Carpentier, Jean-Philippe Chancelier, Guy Cohen, Anes Dallagi, Michel De Lara, Babakar Seck, Cyrille Strugarek.

nombre de nœuds reste modeste. Il augmente au fur et à mesure que l'on avance dans l'arbre mais simultanément la qualité se dégrade car le futur tend à s'approcher de la situation déterministe. L'idéal serait d'avoir le même nombre de nœuds du début de l'horizon d'optimisation jusqu'à sa fin ; en même temps il faut éviter d'optimiser indépendamment sur chaque chronique et supposer ainsi un futur complètement prédictible dès le début de l'arbre.

Une manière d'éviter cette phase de quantification, sans ignorer pour autant les contraintes d'information, c'est de traduire ces contraintes par recours à l'espérance conditionnelle : en partant de l'écriture des conditions d'optimalité (impliquant un état adjoint rétrograde comme dans les conditions d'optimalité à la *Pontriaguine*), nous pouvons passer à une discrétisation directe des conditions d'optimalité. C'est ce que nous avons appelé *méthodes particulières*.

Le mot *particulaires* est employé ici en référence au caractère aléatoire de la discrétisation du problème. En effet, contrairement aux méthodes dites par programmation dynamique, la discrétisation n'est pas faite a priori sur une grille fixée à l'avance, mais elle est faite par un processus d'échantillonnage à la Monte-Carlo intimement lié aux propriétés stochastiques des variables du problème d'optimisation.

L'originalité des travaux présentés dans ce mémoire réside dans le fait qu'on aborde les problèmes de commande optimale stochastique en temps discret par une approche variationnelle fondamentalement différentes de l'approche programmation dynamique de Bellman. Deux optiques seront, ainsi, adoptées. Une optique où l'on approxime le problème d'optimisation d'abord pour, ensuite, écrire des conditions d'optimalité : c'est la méthode des éléments finis particuliers ; et une optique où l'on écrit des conditions d'optimalité d'abord pour, ensuite, les discrétiser. Dans cette dernière approche nous adopterons deux interprétations différentes de la structure d'information du problème : une interprétation algébrique (mesurabilité, espérance conditionnelle) et une interprétation fonctionnelle.

Ce mémoire est donc rédigé comme suit : un premier chapitre introductif (chapitre I) traitera des problèmes d'optimisation dans l'incertain. Nous commencerons par introduire les outils nécessaires à la définition de nos problèmes, la structure d'information et les différentes écritures possibles d'un problème d'optimisation stochastique. Une typologie de ces problèmes sera présentée. Le deuxième chapitre (chapitre II) traitera des méthodes variationnelles en commande optimale stochastique : nous présenterons deux écritures différentes des conditions d'optimalité d'un problème d'optimisation stochastique avec des contraintes d'information et nous nous attarderons sur le cas markovien où ces mêmes conditions peuvent s'écrire de différentes manières.

Dans les quatre derniers chapitres nous aborderons les problèmes de discrétisation. Nous commencerons (chapitre III) par présenter les différentes méthodes d'estimation de l'espérance conditionnelle, suivies (chapitre IV) par la méthode des éléments finis particuliers : des preuves de convergence et différentes applications numériques seront ainsi détaillées. Le chapitre V traitera d'algorithmes de gradient chaotiques pour la résolution des problèmes d'optimisation stochastique en boucle fermée. Le dernier chapitre (chapitre VI) s'intéressera à l'écriture de différents algorithmes de type variationnel pour la résolution numérique des problèmes de commande optimale stochastique ainsi qu'aux applications numériques s'y rattachant.

## Résumé

Cette thèse, intitulée *Méthodes particulières en commande optimale stochastique* s'intéresse aux problèmes d'optimisation dans l'incertain et à leur résolution. Le terme *particulière* renvoie au fait que nous considérons des méthodes basées sur une approche de type Monte-Carlo, contrairement aux méthodes par programmation dynamique stochastiques qui utilisent une discrétisation faite *a priori*.

La résolution des problèmes d'optimisation stochastique nécessite deux étapes : une étape d'approximation et une étape d'optimisation. Les deux premiers chapitres de ce manuscrit seront consacrés à la partie optimisation. Nous traiterons dans les chapitres qui suivront de l'approximation des problèmes d'optimisation dans l'incertain.

Nous commencerons, dans ce manuscrit, (chapitre I) par présenter les problèmes qui seront abordés ; nous nous attarderons surtout sur la représentation de la structure d'information d'un problème d'optimisation stochastique. Deux principales représentations se dégagent : une représentation algébrique et une représentation fonctionnelle. À partir de la nature de cette structure d'information, nous ferons la typologie des problèmes d'optimisation stochastique : boucle ouverte, boucle fermée, information statique ou information dynamique.

Le deuxième chapitre (chapitre II) traitera des conditions d'optimalité pour les problèmes de commande optimale stochastique : à partir des représentations algébriques ou fonctionnelles de l'information, nous présenterons des conditions d'optimalité du type Karush-Kuhn-Tucker.

Les conditions présentées dans le chapitre II comportent presque invariablement des opérateurs d'espérance conditionnelle. La résolution de ces problèmes impose alors d'approximer ces opérateurs. Nous commencerons dans le chapitre III par motiver notre approche avant de passer à une revue de la littérature des problèmes d'estimation de densité, densité conditionnelle et espérance conditionnelle.

Dans le chapitre IV, nous présentons la méthode des éléments finis particuliers qui consiste en l'approximation de la structure d'information par une restriction du feedback à une classe donnée a priori de fonctions de base. Différents résultats de convergence et d'erreur asymptotique seront donnés.

L'avant dernier chapitre (chapitre V) présentera un algorithme chaotique de gradient pour la résolution de problèmes d'optimisation stochastique en boucle fermée. Un résultat de convergence, de vitesse ainsi qu'une application numérique seront donnés.

Nous nous intéresserons dans le dernier chapitre (chapitre VI) aux aspects numérique de la résolution des problèmes de commande optimale stochastique à partir des différentes méthodes présentés dans les chapitres précédents. Nous présenterons différents algorithmes et heuristiques pour résoudre un problème de gestion de production d'un barrage hydro-électrique.



## Extended abstract

This manuscript deals with stochastic optimization and stochastic optimal control. It presents different contributions, works and results made during my PhD thesis in collaboration with the System and Optimization Working Group<sup>2</sup> and the research and development division at Électricité De France<sup>3</sup>.

When dealing with numerical solution for stochastic optimal control problems, stochastic dynamic programming appears to be the natural framework [17, 18, 19]. Due to the curse of dimensionality and the incompatibility of this approach with decomposition/coordination methods [106, Chapter V] we focused on variational approaches.

Previous SOWG works [7, 8] proved that numerical solution for stochastic optimal control problems can be split into two steps :

- (1) First, quantifying the observation space to discretize the information structure. This step leads to scenario-tree generation,
- (2) Second, approximating the expectation of the cost function using Monte-Carlo techniques on each quantified cell.

This method faces an important difficulty : at the first time stages (tree's roots) we have few Monte-Carlo particles but a small variation of the feedback estimator, on contrary, at the final time stages (tree's leaves), we have a large number of Monte-Carlo particles with a huge variance.

To tackle these difficulties we present some variational approaches, algorithms and heuristics for numerical solution of stochastic optimal control problems. We mainly consider that numerical solution of stochastic optimization problems consists on two issues : *approximation* and *optimization*. These two issues can be computed on different orders leading to two different approaches :

- (1) the O-A approach : optimizing first (computing some optimality conditions), then approximating (using *particle* techniques or random mesh methods),
- (2) the A-O approach : approximating first (the information structure and the expectations), then optimizing (solving a deterministic open-loop problem).

The first chapter will presents the main framework : how do we model the information structure and what typology on stochastic optimization problems it will involve. The second chapter will focus on optimality conditions presenting a *minimum principle* like theorem. Then, we will deal with approximation schemes : first, how do we estimate a conditional expectation, then we will present the particle finite element method and finally a collection of algorithms and heuristics for numerical solution of multistage stochastic programs.

### Modeling information and problems' typology

When dealing with stochastic optimization problems we have to model the information structure. On the literature [115, 7, 106, 38] two main representations of the information structure are available : an *algebraic* interpretation and a *functional* one.

---

<sup>2</sup>SOWG <http://cermics.enpc.fr/equipes/optimisation.html> : Laetitia Andrieu, Kengy Barty, Pierre Carpentier, Jean Philippe Chancelier, Guy Cohen, Anes Dallagi, Michel De Lara, Babakar Seck, Cyrille Strugarek.

<sup>3</sup>EDF R&D <http://www.edf.com/20004i/Homefr/ResearchDevelopment.html>, Optimization Simulation, Risk and Statistic department(OSIRIS)



From this representation of the information structure we can derive two main models for stochastic optimization problems :

- (1) an algebraic one where the control variables are seen as random variables and the information structure as a measurability constraint with respect to the observation.

$$\min_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{E}[j(U, \boldsymbol{\xi})],$$

$$U \preceq Y,$$

- (2) a functional one, where the control variable is a function depending on the observation.

$$\min_{\phi \in \mathcal{H}} \mathbb{E}[j(\phi(Y), \boldsymbol{\xi})].$$

We will give some equivalence results between stochastic optimization and functional optimization problems. A typology of stochastic optimization problems is also given. We will stress the differences between open loop and closed loop problems, and between static information and dynamic information structures. Some examples will also be given.

### Optimality conditions for stochastic optimal control problems

The chapter II presents different variational approaches to stochastic optimal control problems in a discrete time case. We aim to present different formulations and different optimality conditions for such problems.

We will mainly consider two different interpretations of the problem's variables : an algebraic interpretation, where random variables are considered and we solve a stochastic optimization problem, and a functional interpretation where we solve a deterministic functional optimization problem.

**Algebraic interpretation of the information structure.** We consider a multistage stochastic program with an additive cost and a measurability constraint. This interpretation will lead to two different Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions : a non-adapted one and an adapted formulation will be given, the second can be obtained from the first by a projection over the  $\sigma$ -field generated by all the past noises. These conditions are necessary Karush-Kuhn-Tucker conditions.

We will present, under some markovian assumptions, optimality conditions leading to a projection over the  $\sigma$ -field generated by the state variable. We will also present equivalence results between a *past-noise measurability* problem and a *state measurability* one.

**Functional interpretation of the information structure.** The functional interpretation leads us to two dual formulation of the stochastic optimal control problem. The first one deals with controlling an initial cost function under Bellman dynamic constraints. The second one consists on a state measure integration using the Fokker Planck equation.

We present in this framework the stochastic dynamic programming method as a sufficient optimality condition of these dual problems.

The two interpretations leading to infinite dimension optimization problems, approximation schemes have to be applied.

### Conditional expectation approximation

Numerical solution of stochastic optimization problems constrained by a feedback on an observation consists on two main issues : optimization and approximation. These two issues can be computed within two different frameworks : optimizing first then approximating (O-A), or approximating first then optimizing (A-O). Equivalence results between the O-A and the A-O approaches are presented highlighting the necessity of estimation procedures for conditional expectation.

Estimation procedures can be split into two main methods : the kernel methods which are adapted to the Monte-Carlo particles, and the particle finite element methods which consists on an a priori discretization (non adapted to the particles). Furthermore, unlike the kernel estimator, the particle finite element estimator is optimal in the sense that it minimizes a squared error, it is a projection of the conditioned variable over a linear subspace.

In the chapter III, a survey on density, conditional density and conditional expectation estimation is presented. We will deal with non-parametric estimation methods giving different asymptotic results on bandwidth selection. Some numerical examples will illustrate the trade-off between bandwidth and particle number.

### The particle finite element method

In the chapter IV, we consider a stochastic optimization problem represented under its functional form. According to [7], a way to approximate the numerical solution of stochastic optimization problems constrained by a feedback on an observation is first to partition the space of the observation so that the optimal decision becomes a piecewise constant function on this partition, and then to approximate the conditional expectation of the cost function over each cell of the partition by standard Monte Carlo sampling. We present an extension of this method which consist on constraining the feedback to be on a subspace generated by some basis functions : *the particle finite element method*.

On the literature, this method is often denoted by the *linear decision rules* method [56, 49, 104, 110], we call it the *particle finite element* method to highlight the fact that there is two approximation steps :

- (1) approximating the information structure by a finite element functional estimation,
- (2) approximating the expectation by a Monte-Carlo technique.

These two approximation steps lead to an open loop problem which can be solved by standard deterministic optimization techniques.

In this chapter, we first present a trade-off issue between the number of basis functions  $\nu$  and the number of Monte-Carlo particle  $N$ . Then, we prove some variational convergence results using the *epi* and the *epi/hypo*-convergence theory [5, 98, 23].

### Chaotic algorithm for closed loop problems

In this chapter (see chapter V), we consider a stochastic optimization problem represented under its functional form.

A feedback can be considered as an infinite weighted sum of basis functions of an Hilbert space. The particle finite element method consists on estimating this feedback by truncating this sum. One can think about computing this truncated sum *on-line* with a stochastic gradient algorithm.

We present a chaotic stochastic gradient-like algorithm to solve optimization problems with information constraints. A convergence result, a central limit theorem and a numerical application to a stock management problem will be presented.

### Numerical solutions for stochastic optimal control problems

In this chapter (see chapter VI), we consider numerical solution for stochastic optimal control problems in a discrete time case.

First, we present the stochastic dynamic programming method as the reference method. We highlight the fact that this recursive method involves a minimization at each time stage and an *a priori* discretization of the state space.

Second, we present a projected gradient algorithm to solve stochastic optimal control problems approximated with the particle finite element technique (see chapter IV). We stress the fact that we need a posteriori feedback generation in the markovian case.

Then, we present different heuristics deriving from the approximation of the optimality conditions computed during the chapter II :

- (1) We integrate the state and the dual state particles with respect to their dynamics ; then, we approximate the conditional expectation of the gradient by the kernel method,
- (2) We integrate the state particle using its dynamic and the adapted dual state by approximating its dynamic with the kernel method ; then, we approximate the conditional expectation of the gradient by the kernel method,
- (3) We integrate the state and the dual state particles with respect to their dynamics ; we approximate the bellman function using a kernel method ; then we compute an expectation to approximate the gradient using a Monte-Carlo method,
- (4) We integrate the state particle using its dynamic and the adapted state using an expectation approximation ; then we compute the gradient using a Monte-Carlo method.

We use an hydro-electric dam management problem to apply these algorithms and heuristics.

## CHAPITRE I

# Préliminaires

L'optimisation stochastique est un cadre pour modéliser les problèmes d'optimisation qui impliquent l'incertitude. Considérant que des problèmes déterministes d'optimisation sont formulés avec des paramètres connus, les problèmes réels incluent presque invariablement des paramètres inconnus. Quand les paramètres sont connus seulement dans certaines limites, une approche qui aborde de tels problèmes est l'optimisation robuste. Ici le but est de trouver une solution qui reste *bonne* pour tous les paramètres et optimale en un certain sens (nous renvoyons le lecteur aux travaux de El Ghaoui [46], de Ben Tal et Nemerovski [14]).

Les modèles d'optimisation stochastique sont semblables dans le modèle mais tirent profit du fait que des distributions de probabilité régissant les données sont connues ou peuvent être estimées. Le but ici est de trouver une certaine politique qui est faisable pour toutes les (ou presque toutes) occurrences possibles de données et minimise (ou maximise) l'espérance d'une certaine fonction des décisions et des variables aléatoires.

Dans ce chapitre, nous allons commencer par présenter les outils nécessaires pour écrire un problème d'optimisation stochastique, ainsi que les différentes variables et notions qui vont nous servir tout au long de ce mémoire. En particulier la notion d'information, comment l'exprimer et comment la modéliser. Nous donnerons ensuite une typologie des problèmes d'optimisation stochastique.

Nous faisons référence aux travaux antérieurs de l'équipe *SOWG* et nous reprenons notamment les notations adoptées dans [7], [106] et [38].

REMARQUE I.1. Cette introduction à l'optimisation stochastique a été inspirée de <http://stoprog.org/> (Stochastic Programming Community). ♦

### I.1. Modélisation de l'information

En optimisation stochastique la notion d'information apparaît comme primordiale pour la formulation des problèmes de décision dans l'incertain. C'est ainsi que, dans la plupart des problèmes considérés, nous aurons à traiter des contraintes dites d'information. Ces contraintes peuvent être représentées ou modélisées de différentes manières.

**I.1.1. Représentation algébrique de l'information.** Considérons un ensemble  $\Omega$ . Tout élément  $\omega \in \Omega$  est appelé état de la nature ; un de ces états  $\omega_0$ , qui nous est inconnu, gouverne un phénomène. Avoir de l'information sur  $\omega_0$  c'est être capable de localiser cet état particulier de la nature dans  $\Omega$ . Autrement dit, étant donnée une collection  $\mathcal{G}$  de sous-ensembles  $G$  de  $\Omega$ , l'information disponible se traduit par notre capacité à déterminer dans quels sous-ensemble particulier  $G$  se trouve l'état de la nature  $\omega_0$ .

Supposant que nous sachions que  $\omega_0 \in G \subset \Omega$ , deux cas se présentent :

- $G = \Omega$  : aucune information n'est disponible,
- $G = \{\omega_0\}$  : l'information est complètement disponible.

Entre ces deux cas extrêmes, l'information disponible consiste en le fait que nous ne pouvons pas distinguer  $\omega_0$  de tout autre élément de  $G$ . Nous définissons alors l'information disponible comme une collection  $\mathcal{G}$  de sous-ensembles  $G$  de  $\Omega$  appelés événements.

Traditionnellement, et pour des raisons techniques, nous demandons à avoir certaines propriétés sur  $\mathcal{G}$ .

I.1.1.1. *Algèbre.*

DÉFINITION I.2. Une algèbre  $\mathcal{G}$  sur  $\Omega$  est une collection non vide de sous-ensembles de  $\Omega$  stable par passage au complémentaire et par unions finies.  $\blacklozenge$

Cette structure reste assez large et est peu utilisée pour parler de structure d'information. En effet, elle est incompatible avec les structures probabilistes : en probabilité nous avons besoin d'une propriété de  $\sigma$ -additivité et donc de stabilité par unions dénombrables.

I.1.1.2. *Champ de partitions.*

DÉFINITION I.3. Un champ de partitions ( $\pi$ -algèbre ou  $\pi$ -field)  $\mathcal{G}$  sur  $\Omega$  est une collection non vide de sous-ensembles de  $\Omega$  stables par passage au complémentaire et par unions infinies (et donc par intersections infinies).

Nous appellerons champ de partitions *trivial*  $\{\emptyset, \Omega\}$  et champ de partitions *discret*  $2^\Omega$ .  $\blacklozenge$

Cette structure particulière sur  $\mathcal{G}$  nous permet de parler d'information. Nous présenterons dans la suite différentes propriétés liées à cette représentation algébrique de l'information.

DÉFINITION I.4. Le champ de partitions  $\pi(\mathcal{C})$  engendré par une collection  $\mathcal{C}$  de sous-ensembles de  $\Omega$  est le plus petit champ de partitions contenant  $\mathcal{C}$ .  $\blacklozenge$

DÉFINITION I.5. Soit  $\mathcal{G}$  un champ de partitions. Pour tout  $\omega \in \Omega$ , on note  $G_\omega$  l'intersection de tous les ensembles dans  $\mathcal{G}$  contenant  $\omega$ . Les éléments de  $G_\omega$  sont dits non-distinguables de  $\omega$ .  $\blacklozenge$

PROPOSITION I.6. Soit  $\mathcal{G}$  un champ de partitions. Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $G_\omega$  est le plus petit ensemble dans  $\mathcal{G}$  contenant  $\omega$ . La collection  $\{G_\omega, \omega \in \Omega\}$  est une partition de  $\Omega$ , notée  $\text{part}(\mathcal{G})$ .

**Démonstration :** Comme  $\mathcal{G}$  est stable par intersections infinies,  $G_\omega \in \mathcal{G}$  est alors le plus petit ensemble contenant  $\omega$ .

On rappelle qu'un atome de  $\mathcal{G}$  est un ensemble  $G \in \mathcal{G}$  qui vérifie que si  $H \in \mathcal{G}$  et  $H \subset G$  alors  $H = \emptyset$  ou  $H = G$ . Deux atomes distincts sont nécessairement disjoints.

Soit  $H \in \mathcal{G}$  tel que  $H \subset G_\omega$ . Si  $\omega \in H$ , alors  $G_\omega \subset H$  par définition de  $G_\omega$ , alors  $H = G_\omega$ . Si  $\omega \notin H$ , alors  $G_\omega \subset H^c$  par définition de  $G_\omega$ , alors  $H \subset G_\omega \subset H^c$  et  $H = \emptyset$ . Alors,  $G_\omega$  est un atome.

La collection  $\{G_\omega, \omega \in \Omega\}$  est constituée d'ensembles non vides deux par deux disjoints couvrant  $\Omega$  : c'est une partition.  $\blacksquare$

Cette structure est assez restrictive. Certes, les champs de partitions sur un ensemble sont compatibles avec les structures probabilistes que nous aurons à manipuler, mais il n'existe pas beaucoup d'exemples de structures vérifiant la propriété de stabilité par unions infinies. C'est pourquoi les probabilistes préfèrent utiliser une structure plus faible : les  $\sigma$ -algèbres (nous renvoyons le lecteur aux ouvrages de L. Breiman [24], de O. Kallenberg [60] et au livre de S.C. Port [86] pour une introduction générale aux probabilités).

I.1.1.3. *Tribu.*

DÉFINITION I.7. Une tribu ( $\sigma$ -algèbre ou  $\sigma$ -field)  $\mathcal{G}$  sur  $\Omega$  est une collection non vide de sous-ensembles de  $\Omega$  stable par passage au complémentaire et par unions dénombrables (et donc par intersections dénombrables).

On appellera tribu *triviale*  $\{\emptyset, \Omega\}$  et tribu discrète  $2^\Omega$ .  $\blacklozenge$

DÉFINITION I.8. La tribu  $\sigma(\mathcal{C})$  engendrée par une collection  $\mathcal{C}$  de sous-ensembles de  $\Omega$  est la plus petite tribu contenant  $\mathcal{C}$ .  $\blacklozenge$

REMARQUE I.9. Pour toute collection  $\mathcal{C}$  de sous-ensembles de  $\Omega$ , on a que :

$$\sigma(\mathcal{C}) \subset \pi(\mathcal{C}).$$

$\blacklozenge$

Nous utiliserons, pour des raisons techniques, cette structure particulière sur  $\mathcal{G}$  pour parler d'information. Elle permet, en outre, de parler de mesurabilité au sens probabiliste du terme. Nous remarquons aussi que les trois structures précédemment définies sont équivalente dans le cas discret.

**I.1.2. Mesurabilité.** Le point de vue algébrique de l'information reste assez conceptuel et nous avons toujours besoin d'un outil qui nous permettra de dire qu'une application donnée respecte une structure d'information. Cet outil consiste en une relation entre applications ou entre applications et tribus. C'est la relation de mesurabilité.

DÉFINITION I.10. Soient deux ensembles  $\Omega$  et  $\mathbb{Y}$  équipés respectivement avec les champs de partitions  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{H}$ . Pour toute application  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ ,  $f^{-1}(\mathcal{H})$  est un champ de partition sur  $\Omega$  appelé champ engendré par  $f$ , et noté  $\pi(f) \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(\mathcal{H})$ .

L'application  $f$  est dite mesurable par rapport au champ de partitions  $\mathcal{G}$  si  $\pi(f) \subset \mathcal{G}$ , et on note  $f \preceq \mathcal{G}$ .  $\blacklozenge$

DÉFINITION I.11. Soient deux applications  $f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_1$  et  $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_2$ . L'application  $f_1$  est dite mesurable par rapport à  $f_2$  si  $\pi(f_1) \subset \pi(f_2)$  et on note  $f_1 \preceq f_2$ .  $\blacklozenge$

PROPOSITION I.12. Soient deux applications  $f_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_1$  et  $f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_2$ , les affirmations suivantes sont équivalentes et caractérisent le fait que  $f_1 \preceq f_2$  :

- (1)  $f_1 \preceq f_2$ ,
- (2)  $\pi(f_1) \subset \pi(f_2)$ ,
- (3)  $\forall(\omega, \omega') \in \Omega^2, \quad f_2(\omega) = f_2(\omega') \Rightarrow f_1(\omega) = f_1(\omega')$ ,
- (4)  $\exists \phi : \text{im} f_2 \rightarrow \text{im} f_1$ , tel que  $f_1 = \phi \circ f_2$ ,
- (5)  $\text{part}(f_1) \supset \text{part}(f_2)$ , dans le sens où tout élément de  $\text{part}(f_2)$  est inclus dans un élément de  $\text{part}(f_1)$ , ou bien, d'une manière, équivalente tout élément de  $\text{part}(f_1)$  est l'union d'éléments de  $\text{part}(f_2)$ .

**Démonstration :** Voir [8, lemme 5]  $\blacksquare$

REMARQUE I.13. Pour parler de mesurabilité de variables aléatoires nous utiliserons la notion de  $\sigma$ -algèbre. Les définitions de mesurabilité données plus haut resteront valables en remplaçant  $\pi$  par  $\sigma$ . La proposition (I.12) sera remplacée par l'équivalence de ces affirmations :

- (1)  $\mathbf{Y}_1 \preceq \mathbf{Y}_2$ ,
- (2)  $\sigma(\mathbf{Y}_1) \subset \sigma(\mathbf{Y}_2)$ ,
- (3)  $\exists \phi : \text{im} \mathbf{Y}_2 \rightarrow \text{im} \mathbf{Y}_1$ , application mesurable telle que  $\mathbf{Y}_1 = \phi \circ \mathbf{Y}_2$ ,

où  $\mathbf{Y}_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_1$  et  $\mathbf{Y}_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_2$  sont deux variables aléatoires sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .  $\blacklozenge$

**I.1.3. Espérance conditionnelle.** Nous nous intéressons, ici, à l'information apportée par des variables aléatoires. Nous définissons, en outre, l'égalité entre tribus comme une égalité presque sûre par rapport à une mesure de probabilité donnée.

PROPOSITION I.14. *Considérons un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et deux variables aléatoires sur cet espace  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  intégrable et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ . On a alors que :*

$$\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{U} \preceq \sigma(\mathbf{Y}) \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbb{E}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y}], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

PROPOSITION I.15. *Considérons un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  une variable aléatoire intégrable sur cet espace et une sous-tribu  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}$ . On a alors que :*

$$\mathbf{U} \preceq \mathcal{G} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbb{E}[\mathbf{U} \mid \mathcal{G}], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Nous considérerons dans la suite que l'information est représentée par une sous-tribu et que l'information apportée par une variable aléatoire est la tribu engendrée par cette même variable. Nous appellerons contrainte d'information toute contrainte qui s'écrit par le moyen de la relation de mesurabilité entre variables aléatoires ou de mesurabilité d'une variable aléatoire par rapport à une sous-tribu.

Cette contrainte peut alors être traduite en terme d'espérance conditionnelle par l'égalité presque sûre entre une variable aléatoire donnée et sa projection sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires respectant la contrainte de mesurabilité (l'information).

REMARQUE I.16. Dans toute la suite de ce mémoire, sauf mention contraire, nous adopterons les notations suivantes :

- nous noterons par des lettres grasses toutes les variables aléatoires sur l'espace de probabilité d'origine  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Les variables déterministes seront, elles, notées en lettres ordinaires,
- nous noterons la composition d'une fonction  $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$  mesurable par une variable aléatoire  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  par  $F \circ \mathbf{U} = F(\mathbf{U})$ .

◆

## I.2. Optimisation dans l'incertain

**I.2.1. Écriture du problème.** Nous nous donnons un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et nous nous intéressons à la minimisation de l'espérance d'une fonctionnelle coût notée  $j : \mathbb{U} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\mathbb{U}$  est l'espace des commandes et  $\Xi$  l'espace des bruits, par rapport à une commande  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  appartenant à un ensemble admissible  $\mathcal{U}^{\text{ad}} \subset \mathcal{U}$ . On se donne en outre un aléa  $\boldsymbol{\xi} : \Omega \rightarrow \Xi$  variable aléatoire sur cet espace. Le problème type d'optimisation stochastique s'écrit alors :

$$(I.1) \quad \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} J(\mathbf{U}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})].$$

En toute généralité, la commande  $\mathbf{U}$  est recherchée dans un sous-ensemble de l'ensemble des variables aléatoires sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\mathbb{U}$  ( $\mathbf{U} \in \mathcal{U} = \{\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}\}$ ). L'ensemble  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  décrit les contraintes s'appliquant sur la commande. Ces contraintes peuvent être de deux types :

- des contraintes dites ponctuelles ou presque sûres :

$$(I.2) \quad \mathcal{U}^{\text{ps}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{U}(\omega) \in \Gamma(\omega), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}\},$$

où  $\Gamma$  est une multi-application  $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{U}$ ,

- des contraintes dites d'information ou de mesurabilité :

$$(I.3) \quad \mathcal{U}^{\text{mes}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{U} \preceq \mathcal{G}\},$$

où  $\mathcal{G}$  est une sous-tribu. Le plus souvent,  $\mathcal{G}$  est engendrée par une variable aléatoire  $\mathbf{Y} \in \mathcal{Y}$  appelée observation  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ .

L'ensemble admissible s'écrit alors :

$$(I.4) \quad \mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathcal{U}^{\text{ps}} \cap \mathcal{U}^{\text{mes}}.$$

**I.2.2. Deux manières équivalentes de poser le problème.** Nous allons ici montrer l'équivalence entre les problèmes d'optimisation par rapport à une variable aléatoire et les problèmes d'optimisation fonctionnelle.

Reprenons le problème (I.1), et supposons qu'il existe une *fonction* d'observation  $h : \Xi \rightarrow \mathbb{Y}$  tel que nous pouvons écrire la *variable aléatoire* d'observation  $\mathbf{Y}$  comme une *fonction* des bruits :  $\mathbf{Y} = h(\boldsymbol{\xi})$ .

**PROPOSITION I.17.** *Supposons qu'il existe une fonction  $h : \Xi \rightarrow \mathbb{Y}$  et une multi-application  $C : \Xi \rightrightarrows \mathbb{U}$  tels que  $\mathbf{Y} = h(\boldsymbol{\xi})$  et  $\Gamma(\omega) = C(\boldsymbol{\xi}(\omega))$  ( $\Leftrightarrow \Gamma \preceq \boldsymbol{\xi}$ ). Le problème (I.1) est alors équivalent au problème :*

$$(I.5) \quad \min_{\phi \in \Phi^{\text{ad}}} \tilde{J}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(\phi(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})],$$

où  $\Phi^{\text{ad}} = \Phi^{\text{ps}} \cap \Phi^{\text{mes}}$  avec :

$$\Phi^{\text{ps}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi : \Xi \rightarrow \mathbb{U}, \phi(\boldsymbol{\xi}) \in C(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}\},$$

$$\Phi^{\text{mes}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi : \Xi \rightarrow \mathbb{U}, \phi \preceq h\}.$$

**Démonstration :** D'après l'expression (I.3)  $\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y} = h(\boldsymbol{\xi})$  il existe alors une fonction  $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U}$  tel que  $\mathbf{U} = p \circ h(\boldsymbol{\xi})$ ; notons  $\phi = p \circ h$  on a donc  $\phi \preceq h$ . Si  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}^{\text{ps}}$  alors  $\phi \in \Phi^{\text{ps}}$ . En faisant le raisonnement inverse pour l'inclusion inverse nous obtenons l'équivalence des problèmes.  $\blacksquare$

**HYPOTHÈSE I.18.**  $\sigma(h(\boldsymbol{\xi}, u))$  est indépendante de  $u \in \mathbb{U}$ .  $\blacklozenge$

**REMARQUE I.19.** Supposons qu'il existe une fonction  $h : \Xi \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{Y}$  et une multi-application  $C : \Xi \rightrightarrows \mathbb{U}$  tel que  $\mathbf{Y} = h(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{U})$  et  $\Gamma(\omega) = C(\boldsymbol{\xi}(\omega))$ . Pour que nous ayons l'équivalence entre le problème (I.1) et le problème fonctionnel (I.5), il suffit de satisfaire l'hypothèse I.18. Nous verrons par la suite que c'est l'hypothèse de *non effet dual*.

Reprenons l'hypothèse I.18 précédente et supposons en outre qu'il existe une application  $\tilde{h} : \Xi \rightarrow \mathbb{Y}$  tel que  $\sigma(h(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{U})) = \sigma(\tilde{h}(\boldsymbol{\xi}))$ . Alors le problème (I.1) est équivalent au problème (I.6) :

$$(I.6) \quad \min_{\phi \in \Phi^{\text{ad}}} \tilde{J}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(\phi(\tilde{\mathbf{Y}}), \boldsymbol{\xi})],$$

où  $\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{h}(\boldsymbol{\xi})$  et  $\Phi^{\text{ad}} = \Phi^{\text{ps}}$  avec :

$$\Phi^{\text{ps}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U}, \quad \phi(\tilde{\mathbf{Y}}) \in C(\tilde{\mathbf{Y}}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}\}.$$

Toute la structure d'information se trouve ainsi résumée dans l'expression fonctionnelle de la variable aléatoire de commande  $\phi$ . Nous appellerons l'application  $\phi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U}$  tel que  $\mathbf{U} = \phi(\mathbf{Y})$  *feedback*.  $\blacklozenge$

La représentation fonctionnelle (I.6) a l'avantage de mettre plus l'accent sur la dépendance de la commande vis à vis des aléas du problème et va intervenir dans les méthodes de discrétisation fonctionnelles par éléments finis (chapitre IV). La version (I.1) qui utilise la version *variable aléatoire* sera plus utilisée dans les approches variationnelles (chapitre II et chapitre VI).

Nous avons maintenant en notre possession tous les outils et notions nécessaires à la description des différents problèmes d'optimisation stochastique que nous allons traiter dans la suite du mémoire.



### I.3. Typologie des problèmes

**I.3.1. Problèmes en boucle ouverte.** Un problème d'optimisation stochastique est dit en boucle ouverte si la décision  $\mathbf{U}$  est prise indépendamment de toute autre variable aléatoire. Nous nous trouvons alors dans un cas d'absence d'information et les contraintes informationnelles représentées par  $\mathcal{U}^{\text{mes}}$  sont réduites à leur expression la plus simple.

DÉFINITION I.20 (Boucle ouverte). Le problème (I.1) est dit en boucle ouverte si la variable aléatoire  $\mathbf{Y}$  est réduite à une constante engendrant ainsi la tribu triviale, i.e.  $\mathbf{U} \preceq \{\emptyset, \Omega\}$ .  $\blacklozenge$

On peut dire alors que le problème (I.1) est en boucle ouverte si :

$$\mathcal{U}^{\text{mes}} = \{\mathbf{U} \in \mathcal{U}, \quad \exists u \in \mathbb{U}, \quad \mathbf{U}(\omega) = u, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}\}.$$

Ce type de problème a été largement étudié dans la littérature, études qui se sont intéressées à la discrétisation et la résolution numérique ([102], [103]). Ces problèmes peuvent généralement être résolus par des méthodes proches de l'optimisation déterministe ; cependant, la difficulté majeure réside en l'approximation de l'opérateur d'espérance. Les méthodes dites *des chroniques de scénarios* apporte une réponse qui consiste en l'approximation par *Monte-Carlo* des espérances en tirant un nombre suffisant de scénarios.

Une autre approche pour la résolution numérique des problèmes en boucle ouverte consiste en l'approche dite de *gradient stochastique*, il s'agit d'effectuer le calcul de l'espérance *en ligne* simultanément avec les pas d'un algorithme de gradient. Nous faisons ici référence aux travaux [84] et [87] et nous renvoyons le lecteur à la section IV.1 de ce mémoire pour une écriture de l'algorithme de gradient stochastique.

**I.3.2. Problèmes en boucle fermée.** Un problème d'optimisation stochastique est dit en boucle fermée si la contrainte d'information qu'il incorpore n'est pas triviale. C'est à dire qu'il existe une variable aléatoire d'observation telle que la décision  $\mathbf{U}$  ne dépend que de l'observation  $\mathbf{Y}$  (non réduite à une constante).

DÉFINITION I.21 (Boucle fermée). Le problème (I.1) est dit en boucle fermée s'il n'est pas en boucle ouverte (voir définition I.20).  $\blacklozenge$

En toute généralité, nous dirons que (I.1) est en boucle fermée s'il existe une application non constante (dite d'observation)  $h : \Xi \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{Y}$  telle que  $\mathbf{Y} = h(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{U})$  et :

$$\mathcal{U}^{\text{mes}} = \left\{ \mathbf{U} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{U} \preceq \sigma(h(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{U})) \right\}.$$

Dans ce genre de problème, deux cas de figure se présentent : soit l'information apportée par la variable aléatoire d'observation dépend elle-même de la décision prise (structure d'information dynamique), soit elle n'en dépend pas (structure d'information statique).

#### I.3.2.1. Structure d'information statique.

DÉFINITION I.22 (Information statique). Le problème (I.1) est dit en information statique si la tribu engendrée par l'observation  $\mathbf{Y} = h(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{U})$  ne dépend que de  $\boldsymbol{\xi}$  : il existe une application d'observation  $\tilde{h} : \Xi \rightarrow \mathbb{Y}$  tel que  $\sigma(\mathbf{Y}) = \sigma(\tilde{h}(\boldsymbol{\xi}))$ .

$$\mathcal{U}^{\text{mes}} = \left\{ \mathbf{U} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{U} \preceq \sigma(\tilde{h}(\boldsymbol{\xi})) \right\}.$$

$\blacklozenge$

Ce sont principalement les problèmes qui nous intéresseront au fil de ce mémoire. Conceptuellement, ce sont des problèmes d'optimisation fonctionnelle qui ne peuvent pas être traités avec des méthodes classiques d'optimisation déterministe.

REMARQUE I.23 (Non Open Loop Dual Effect (NOLDE)). Un cas particulier de l'information statique est le cas dit d'absence d'effet dual [36]. Il existe, alors, une application d'observation  $\tilde{h} : \Xi \rightarrow \mathbb{Y}$  tel que  $\sigma(\mathbf{Y}) = \sigma(h(\boldsymbol{\xi}, u)) = \sigma(\tilde{h}(\boldsymbol{\xi}))$  pour tout  $u \in \mathbb{U}$ .

$$\mathcal{U}^{\text{mes}} = \left\{ \mathbf{U} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{U} \preceq \sigma(\tilde{h}(\boldsymbol{\xi})) \right\}.$$

◆

Nous expliquerons plus tard le fait que la résolution numérique de tels problèmes fait intervenir deux niveaux d'approximation : l'approximation des espérances, et l'approximation de la structure de l'information.

Plusieurs travaux se sont intéressés à la phase de discrétisation de la structure de l'information. Les méthodes dites *de chroniques arborescentes* ou *d'arbres de scénarios* sont les plus présentes dans la littérature. L'idée est la suivante : à partir d'un nombre fini de scénarios, on les organise en un arbre (un arbre étant la discrétisation naturelle d'une filtration<sup>1</sup>). Cette structure arborescente permet à la fois de traiter la discrétisation de la structure d'information et l'évaluation par Monte-Carlo de l'espérance de la fonction coût. Cependant, ces arbres de scénarios (voir [7]) sont obtenus à partir d'un nombre (nécessairement limité) de chroniques par des techniques de quantification, ce qui occasionne une perte d'information supplémentaire venant s'ajouter à celle déjà occasionnée par l'échantillonnage initial, l'évaluation du coût et la synthèse des feedbacks s'en trouvent inévitablement affectées. Nous renvoyons le lecteur à [7] pour d'amples références sur le sujet.

Nous évoquerons aussi différents travaux qui se sont intéressés à la discrétisation des filtrations tels que [97], et différents travaux sur les topologies sur l'espace des tribus, tel que [76], [22], [61] et [33], et plus récemment les travaux de P. Carpentier, J.P. Chancelier, et de M. De Lara [28, 26].

### I.3.2.2. Structure d'information dynamique.

DÉFINITION I.24 (Information dynamique). Le problème (I.1) est dit en information dynamique ou avec effet dual si l'information apportée par l'observation  $\mathbf{Y}$  dépend de  $\mathbf{U}$ . ◆

Ce sont les cas les plus difficiles où la structure d'information change avec les décisions prises. En ce sens, le terme *effet dual* renvoie au fait que la décision prise agit doublement : et sur l'information disponible et sur la fonction coût. Les travaux antérieurs de l'équipe SOWG se sont intéressés à la caractérisation de ces problèmes [7], [106] et [8]. Historiquement, c'est Witsenhausen qui, le premier, s'est intéressé aux structures d'information dynamiques dans [114] où il expose son contre exemple.

## I.4. Exemples de problèmes d'optimisation stochastique

Les problèmes d'optimisation stochastique se présentent le plus souvent comme des problèmes à plusieurs pas de temps ou à plusieurs niveaux de décisions (où le pas temps  $t$  est remplacé par un agent  $i$  qui prend une décision).

Nous considérons alors un problème d'optimisation linéaire quadratique gaussien (LQG) à deux pas de temps  $t = 1, 2$ .

*Dynamique du système.* Au pas de temps  $t = 0$  l'état du système est représenté par une variable aléatoire scalaire  $\mathbf{X}_0$  connue et constitue ainsi un bruit du système. On applique, alors, une commande  $\mathbf{U}_0$  qui amène le système à un état  $\mathbf{X}_1$ . Au deuxième pas de temps, on applique une commande  $\mathbf{U}_1$  qui amène le système à un état  $\mathbf{X}_2$ . La dynamique du système s'écrit alors :

<sup>1</sup>une filtration est une collection croissante de sous-tribus

$$(I.7) \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}_0,$$

$$(I.8) \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{U}_1.$$

*La fonction coût.* La fonction coût s'écrit comme l'espérance d'une fonction dépendant des commandes et des bruits :

$$(I.9) \quad \mathbb{E}[k^2(\mathbf{U}_0)^2 + (\mathbf{X}_2)^2], \quad k^2 > 0.$$

Le but est donc de ramener l'état final à 0 et seule la première décision est pénalisée dans le coût.

*Problème en boucle ouverte.* Aucune information n'est disponible. Le problème d'optimisation s'écrit alors :

$$(I.10) \quad \begin{aligned} & \min_{\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1} \mathbb{E} \left[ k^2(\mathbf{U}_0)^2 + (\mathbf{X}_2)^2 \right], \\ & \text{sous } \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}_0, \\ & \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{U}_1, \end{aligned}$$

et les solutions optimales sont des variables déterministes  $\mathbf{U}_0^\# = 0$  et  $\mathbf{U}_1^\# = \mathbb{E}[\mathbf{X}_0]$ , le coût optimal étant la variance du bruit  $\mathbf{X}_0$  ( $C^\# = \sigma_{\mathbf{X}_0}^2$ ).

*Problème en information statique.* On fait intervenir ici des variables aléatoires d'observation. Au premier pas de temps, on observe le bruit  $\mathbf{X}_0$ ; au deuxième pas de temps, on se rappelle de ce qu'on a observé au pas de temps précédent et on observe aussi l'état bruité du premier instant. Les équations de sortie ou les observations s'écrivent alors en fonction des états sur deux pas de temps comme suit :

$$(I.11) \quad \mathbf{Y}_0 = \mathbf{X}_0,$$

$$(I.12) \quad \mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1 + \mathbf{V}.$$

Les contraintes de mesurabilité ou les commandes admissibles s'écrivent en fonction des observations sur deux pas de temps comme suit :

$$(I.13) \quad \mathbf{U}_0 \preceq \sigma(\mathbf{Y}_0),$$

$$(I.14) \quad \mathbf{U}_1 \preceq \sigma(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1).$$

Le problème s'écrit alors :

$$(I.15) \quad \begin{aligned} & \min_{\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1} \mathbb{E} \left[ k^2(\mathbf{U}_0)^2 + (\mathbf{X}_2)^2 \right], \\ & \text{sous } \mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}_0, \\ & \quad \mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 - \mathbf{U}_1, \\ & \quad \mathbf{U}_0 \preceq \sigma(\mathbf{X}_0), \\ & \quad \mathbf{U}_1 \preceq \sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 + \mathbf{V}). \end{aligned}$$

Au premier pas de temps, l'observation ne dépend pas de la commande appliquée et de même pour la tribu qu'elle engendre. Au deuxième pas de temps  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}_0 + \mathbf{V}$  dépend de la commande mais pas la tribu  $\sigma(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1)$ . En effet  $\sigma(\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1) = \sigma(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}_0 + \mathbf{V})$  et comme  $\mathbf{U}_0 \preceq \sigma(\mathbf{Y}_0)$  il existe alors une application  $\phi_0$  tel que  $\mathbf{U}_0 = \phi_0(\mathbf{Y}_0) = \phi_0(\mathbf{X}_0)$ . À l'instant  $t = 1$ , le décideur  $\mathbf{U}_1$  ayant les mêmes informations on-line que le décideur  $\mathbf{U}_0$  et les mêmes informations off-line (dynamique, fonction coût, etc.) peut faire les mêmes calculs que le premier décideur, et il peut donc recalculer  $\mathbf{U}_0$  (ou  $\phi_0$ ) même s'il n'a pas reçu cette information. Le deuxième agent aurait alors l'information apportée par le triplet  $(\mathbf{X}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{X}_0 + \mathbf{U}_0 + \mathbf{V})$ ; il

pourrait donc extraire  $V$  de la troisième information en soustrayant  $X_0$  et  $U_0$  qu'il connaît parfaitement. On a alors que  $\sigma(Y_0, Y_1)$  ne dépend pas de la commande.

$$\begin{aligned} V &= Y_1 - X_0 - U_0 \in \sigma(Y_0, Y_1), \\ \Rightarrow \sigma(X_0, V) &\subset \sigma(Y_0, Y_1) \subset \sigma(X_0, V), \\ \Rightarrow \sigma(Y_0, Y_1) &= \sigma(X_0, V). \end{aligned}$$

On est donc en information statique et la solution de ce problème LQG est connue pour donner des commandes linéaires en fonction des observations [114].

*Problème avec effet dual.* On reprend l'exemple précédent sauf que cette fois au deuxième pas de temps la structure d'information *oublie* une partie de l'observation. Les contraintes de mesurabilité ou les commandes admissibles s'écrivent en fonction des observations sur deux pas de temps comme suit :

$$(I.16) \quad U_0 \preceq \sigma(Y_0),$$

$$(I.17) \quad U_1 \preceq \sigma(Y_1).$$

Le problème s'écrit alors :

$$(I.18) \quad \begin{aligned} &\min_{U_0, U_1} \mathbb{E} \left[ k^2 (U_0)^2 + (X_2)^2 \right], \\ \text{sous } &X_1 = X_0 + U_0, \\ &X_2 = X_1 - U_1, \\ &U_0 \preceq \sigma(X_0), \\ &U_1 \preceq \sigma(X_1 + V). \end{aligned}$$

Au premier pas de temps, l'observation ne dépend pas de la commande appliquée et de même pour la tribu qu'elle engendre. Au deuxième pas de temps,  $Y_1 = X_0 + U_0 + V$  dépend de la commande et la tribu engendrée en dépend aussi. Les figures I.1, I.2 et I.3, représentent les lignes de niveaux de l'observation  $Y_1$  dans le plan  $(X_0, V)$  pour différentes valeurs de la commande  $U_0 = \phi_0(X_0)$ . Les lignes de niveaux représentent les  $\sigma$ -algèbres engendrées, nous remarquons alors qu'elles changent en changeant la commande initiale.

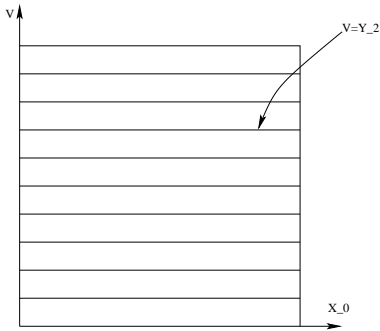


FIG.  
I.1. Lignes  
de niveaux  
de  $Y_1$  pour  
 $\phi_0(x) = -x$

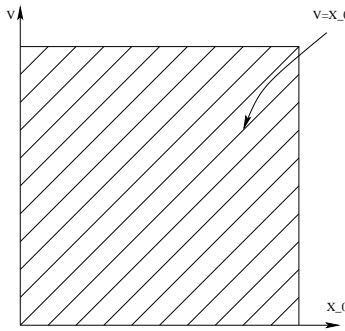


FIG.  
I.2. Lignes  
de niveaux  
de  $Y_1$  pour  
 $\phi_0(x) = -2x$

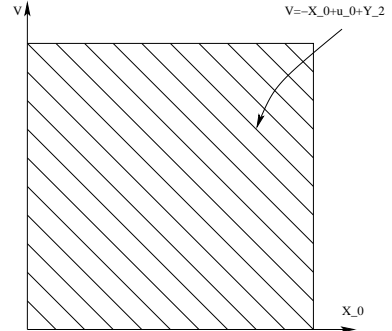


FIG.  
I.3. Lignes  
de niveaux  
de  $Y_1$  pour  
 $\phi_0(x) = u_0$

On est donc en information dynamique. Cet exemple est connu comme *le contre exemple de Witsenhausen* [114]. La solution de ce problème LQG fait l'objet de plusieurs études [72, 62], des commandes fortement non linéaires (même discontinue) meilleures que les meilleures solutions linéaires ont été proposées, ce qui montre que la solution optimale (inconnue à ce jour) n'est

pas linéaire. Les solutions sous-optimales proposées dans la littérature reposent sur le principe du *signaling* : il s'agit d'utiliser les commandes du premier agent (premier pas de temps) pour transmettre le plus d'information possible (avec une perte au niveau de la fonction coût) au deuxième agent pour qu'il prenne la meilleure solution possible sachant ce qui a précédé. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de A. Gattami [50], de J. Levin [66, 65] pour de plus amples détails sur le *signaling*.

Dans la suite du mémoire, nous ne nous intéresserons pas à cette dernière catégorie de problème. Notre attention sera particulièrement concentrée sur les problèmes en information statique.

### I.5. Conclusion

Les problèmes d'optimisation stochastique sont donc des problèmes d'optimisation en dimension infinie que ce soit dans leur interprétation algébrique ou fonctionnelle (minimisation par rapport à des variables aléatoires ou minimisation par rapport à des fonctions). Leur résolution numérique doit donc nécessairement passer par les deux étapes suivantes : une étape d'optimisation (écriture des conditions d'optimalité) et une étape d'approximation (pour passer à un cadre fini compatible avec ce que l'on peut faire avec un ordinateur). Cependant, l'ordre suivant lequel nous allons effectuer ces deux étapes influera sur la solution finale. Le dilemme est posé : optimiser d'abord puis approximer ou approximer d'abord puis optimiser ? La suite du mémoire tentera d'apporter des éléments de réponse à cette question.

Dans le chapitre suivant (chapitre II), nous essayerons de présenter différentes écritures pour les conditions d'optimalité de tels problèmes, avant d'entamer dans les chapitres qui suivront les problèmes d'approximation et de résolution numérique des problèmes d'optimisation stochastique avec structure d'information statique.

## CHAPITRE II

# Approches variationnelles pour la commande optimale stochastique

La théorie du contrôle traite des systèmes dynamiques : l'état du système suit, au cours du temps, une certaine *dynamique* commandée par un décideur afin d'obtenir un certain effet sur la sortie (*output*). En commande optimale, on s'intéresse à ces décisions appelées commandes du système.

Dans la littérature, deux approches principales se dégagent quant à la résolution des problèmes de commande optimale déterministe. Les approches variationnelles par dualité, qui conduisent à des conditions d'optimalité ressemblant à celles rencontrées dans le *principe du minimum de Pontriaguine* [85] et les approches par *programmation dynamique* [12], [13].

En commande optimale stochastique, nous trouvons une large littérature traitant des méthodes de *programmation dynamique stochastique* ([17], [18], [21], etc.). Cette méthode demande certaines hypothèses quant à la structure d'information du problème traité. Elle se trouve, en outre, face à la *malédiction de la dimension* (curse of dimensionality) et est incompatible avec une approche décomposition des grands systèmes [106, chapitre V]. Pour ces raisons, nous nous intéresserons dans ce mémoire aux méthodes dites variationnelles.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux problèmes de commande optimale *stochastique* en temps discret. Le point de vue *optimiser d'abord puis approximer* sera adopté et nous traiterons au cours de ce chapitre l'aspect optimisation. Nous nous attarderons ensuite sur les différentes méthodes de résolution : la *programmation dynamique stochastique* étant la plus connue, le principal apport de ce chapitre sera de présenter différentes nouvelles approches du type variationnel faisant intervenir des conditions d'optimalité du type *Karush-Kuhn-Tucker* des problèmes traités.

### II.1. Conditions d'optimalité d'un problème d'optimisation stochastique

Nous nous intéressons dans cette section à l'écriture de conditions nécessaires d'optimalité d'un problème d'optimisation stochastique. Reprenons, pour cela, le problème type (I.1). Nous nous donnons, ainsi, un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et nous nous intéressons à la minimisation de l'espérance d'une fonctionnelle coût notée  $j : \mathbb{U} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\mathbb{U}$  est l'espace des commandes ( $\dim(\mathbb{U}) < +\infty$ ) et  $\Xi$  l'espace des bruits ( $\dim(\Xi) < +\infty$ ). Cette minimisation est faite par rapport à une commande  $(\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}) \in \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{U})$ , respectant une contrainte d'information modélisée par la mesurabilité par rapport à une variable aléatoire d'observation  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$  et une contrainte d'admissibilité. Nous nous donnons en outre une variable aléatoire (bruit du système)  $\boldsymbol{\xi} : \Omega \rightarrow \Xi$ .

$$(II.1) \quad \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}} J(\mathbf{U}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})],$$

sous  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \cap \mathcal{U}^{\text{mes}}$ ,

où  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  un sous-ensemble convexe fermé de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}^{\text{mes}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}\}$ , le sous-espace vectoriel des variables aléatoires de carré intégrable mesurable par rapport à  $\mathbf{Y}$ .

REMARQUE II.1. Pour s'assurer que le problème est bien défini nous devons nous assurer que la fonction objective est bien défini. Pour cela nous supposons que  $j : \mathbb{U} \times \Xi$  est une intégrande

normale et donc son application épigraphique  $S_j(\xi) = \{(u, \alpha) \in \mathbb{U} \times \mathbb{R}, j(u, \xi) \leq \alpha\}$  est mesurable et à valeurs fermées [98, Définition 14.27 et proposition 14.28]. Nous supposons en outre que  $\xi : \Omega \rightarrow \Xi$  est mesurable. En définissant  $g : \Omega \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$  l'application tel que  $g(\omega, u) = j(u, \xi(\omega))$ , nous avons que son application épigraphique  $S_g(\omega) = S_j(\xi(\omega))$  est mesurable (par compositions de multi-applications mesurables) et à valeurs fermées. C'est donc une intégrande normale. D'après [98, proposition 14.58]  $\mathbb{E}[j(\mathbf{U}, \xi)] = \int_{\Omega} g(\omega, \mathbf{U}(\omega))\mathbb{P}(d\omega)$  est alors bien défini.  $\blacklozenge$

**REMARQUE II.2.**  $\mathcal{U}^{\text{mes}}$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{U}$ . En effet, toute combinaison linéaire de variables aléatoires  $\mathbf{Y}$ -mesurables reste  $\mathbf{Y}$ -mesurable; ainsi que toute limite d'une suite de variables aléatoires  $\mathbf{Y}$ -mesurables l'est aussi. En outre, nous pouvons toujours noter  $\mathcal{U}^{\text{mes}}$  tel que  $\mathcal{U}^{\text{mes}} = L^2(\Omega, \sigma(\mathbf{Y}), \mathbb{P}; \mathbb{U})$ , où  $\sigma(\mathbf{Y})$  est la tribu engendrée par la variable aléatoire  $\mathbf{Y}$ .  $\blacklozenge$

Nous nous proposons d'écrire des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (II.1). Nous faisons référence à [77] et à [54] pour des résultats de conditions d'optimalité pour les problèmes de minimisation d'une fonction intégrale dans un cadre non différentiable. Il s'agit dans cette section de spécifier ces conditions au cas particulier des problèmes du type II.1.

Nous adoptons ici une approche par projection où nous utiliserons une structure particulière sur l'ensemble admissible : nous supposerons que la projection de toute commande  $\mathbf{Y}$ -mesurable sur l'ensemble  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  reste  $\mathbf{Y}$ -mesurable.

**LEMME II.3.** *Sous les hypothèses que  $j(\cdot, \xi)$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{U})$   $\mathbb{P}$ -presque sûrement, que  $j$  est s.c.i. sur  $\mathbb{U} \times \Xi$  (voir la remarque II.1) et que  $(\omega \mapsto j'(\mathbf{U}(\omega), \xi(\omega))) \in \mathcal{U}$ ,  $\forall \mathbf{U} \in \mathcal{U}$ , alors  $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable. De plus nous avons que :*

$$J'(\mathbf{U})(\omega) = j'(\mathbf{U}(\omega), \xi(\omega)), \quad \mathbb{P}\text{-p.s..}$$

**Démonstration :** Commençons par noter que pour tout  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ ,  $J(\mathbf{U}) = \int_{\Omega} j(\mathbf{U}(\omega), \xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega)$ . Soit  $(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \in \mathcal{U}^2$ , nous avons alors que :

$$J(\mathbf{U} + \mathbf{V}) = \int_{\Omega} j(\mathbf{U}(\omega) + \mathbf{V}(\omega), \xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega).$$

Comme  $j(\cdot, \xi)$  est différentiable  $\mathbb{P}$ -presque sûrement, nous avons alors que :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{U} + \mathbf{V}) &= \int_{\Omega} j(\mathbf{U}(\omega) + \mathbf{V}(\omega), \xi(\omega))\mathbb{P}(d\omega), \\ \text{(II.2)} \quad &= \int_{\Omega} \left( j(\mathbf{U}(\omega), \xi(\omega)) + \langle j'(\mathbf{U}(\omega), \xi(\omega)), \mathbf{V}(\omega) \rangle_{\mathbb{U}} + o(\|\mathbf{V}(\omega)\|_{\mathbb{U}}^2) \right) \mathbb{P}(d\omega), \\ &= J(\mathbf{U}) + \langle J'(\mathbf{U}), \mathbf{V} \rangle_{\mathcal{U}} + o(\|\mathbf{V}\|_{\mathcal{U}}^2), \end{aligned}$$

où  $J'(\mathbf{U})(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} j'(\mathbf{U}(\omega), \xi(\omega))$ . D'où  $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable de dérivée  $J'(\mathbf{U})$ .  $\blacksquare$

**PROPOSITION II.4.** *Supposons que  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  est un sous-ensemble convexe fermé. Supposons en outre que  $\Pi_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathcal{U}^{\text{mes}}) \subset \mathcal{U}^{\text{mes}}$ , que  $j(\cdot, \xi)$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{U})$   $\mathbb{P}$ -presque sûrement, que  $j$  est s.c.i. sur  $\mathbb{U} \times \Xi$  (voir la remarque II.1) et que  $(\omega \mapsto j'(\mathbf{U}(\omega), \xi(\omega))) \in \mathcal{U}$ ,  $\forall \mathbf{U} \in \mathcal{U}$ . Si  $\mathbf{U}$  est solution de (II.1) alors :*

$$\mathbb{E}[j'(\mathbf{U}, \xi) \mid \mathbf{Y}] \in -\partial\delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}).$$

**Démonstration :** D'après le lemme II.3 nous avons que  $J$  est différentiable de dérivée  $J'(\mathbf{U}) = j'(\mathbf{U}, \xi)$ . D'après la proposition A.24, si  $\mathbf{U}$  est solution de (II.1), alors :

$$\Pi_{\mathcal{U}^{\text{mes}}}(J'(\mathbf{U})) \in -\partial\delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}),$$

et donc, par la définition de l'espérance conditionnelle<sup>1</sup> nous avons que :  $\mathbb{E}[j'(\mathbf{U}, \xi) \mid \mathbf{Y}] \in -\partial\delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U})$ .  $\blacksquare$

<sup>1</sup>L'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  est la projection de  $\mathbf{U}$  sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires  $\mathbf{Y}$ -mesurables de carré intégrable

La condition d'optimalité donnée dans la proposition II.4 peut se réécrire par le moyen d'une projection sur le sous-ensemble convexe fermé  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  (voir la proposition A.23) :

$$\exists \epsilon > 0, \quad \mathbf{U} = \Pi_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U} - \epsilon \Pi_{\mathcal{U}^{\text{mes}}}(\nabla J(\mathbf{U}))).$$

En pratique, nous pourrions utiliser cette formulation pour résoudre le problème (II.1) en passant par l'écriture d'un algorithme de gradient; s'agissant de variables aléatoires, il serait plus *aisé* d'effectuer l'opération de projection d'une manière ponctuelle ( $\omega$  par  $\omega$ ). Nous donnons pour cela le lemme II.5.

LEMME II.5. *Soit  $\Gamma^{\text{ad}} : \Omega \rightrightarrows \mathbb{U}$ , une multi-application mesurable<sup>2</sup> et à valeurs convexes fermées; alors le sous-ensemble  $\mathcal{U}^{\text{ad}} \subset \mathcal{U}$  défini par :*

$$\mathcal{U}^{\text{ad}} = \{\mathbf{U} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{U}(\omega) \in \Gamma^{\text{ad}}(\omega), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}\},$$

est un convexe fermé de  $\mathcal{U}$  et on a que :

$$(\Pi_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}))(\omega) = \Pi_{\Gamma^{\text{ad}}(\omega)}(\mathbf{U}(\omega)), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

**Démonstration :** Il est évident que si  $\Gamma^{\text{ad}}$  est à valeurs convexes alors  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  est un sous-ensemble convexe de  $\mathcal{U}$ . Par ailleurs, pour toute suite de variables aléatoires convergente dans  $\mathcal{U}$ , nous pouvons extraire une sous-suite presque sûrement convergente (voir [37, section 2.5] et [39, théorème 21]); par la fermeture de  $\Gamma^{\text{ad}}$  nous avons alors celle de  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ .

Par définition de la projection (voir définition A.4), nous pouvons réécrire la projection d'une variable aléatoire  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$  sur le sous-ensemble convexe fermé  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  de la manière suivante :

$$\Pi_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}) = \arg \min_{\mathbf{V} \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \|\mathbf{U} - \mathbf{V}\|_{\mathcal{U}}^2 = \arg \min_{\mathbf{V} \in \mathcal{U}} \|\mathbf{U} - \mathbf{V}\|_{\mathcal{U}}^2 + \delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{V}).$$

Par [98, théorème 14.60] et puisque  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  est défini  $\omega$  par  $\omega$ , nous avons que :

$$\Pi_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U})(\omega) = \arg \min_{v \in \mathbb{U}} \|\mathbf{U}(\omega) - v\|_{\mathbb{U}}^2 + \delta_{\Gamma^{\text{ad}}(\omega)}(v) = \arg \min_{v \in \Gamma^{\text{ad}}(\omega)} \|\mathbf{U}(\omega) - v\|_{\mathbb{U}}^2, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

■

REMARQUE II.6. Pour faire le lien entre la proposition II.4 et le lemme II.5, nous faisons remarquer que si une variable aléatoire  $\mathbf{R} \in \mathcal{U}$  est telle que  $\mathbf{R} \in \partial \delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U})$  alors  $\mathbf{R}(\omega) \in \partial \delta_{\Gamma^{\text{ad}}(\omega)}(\mathbf{U}(\omega))$ ,  $\mathbb{P}\text{-p.s.}$  (pour la preuve de ce résultat, nous utilisons les équivalences de la proposition A.23). ♦

Les conditions d'optimalité, présentées dans cette section, nécessitent une étape d'approximation pour pouvoir être résolues numériquement. Nous présenterons dans le chapitre III différentes manières pour approximer l'opérateur d'espérance conditionnelle qui apparaît dans les conditions données par la proposition II.4.

## II.2. Problème de commande optimale stochastique

Nous nous consacrons, dans la suite de ce chapitre, à la spécification des conditions d'optimalité obtenues dans la section précédente (voir la proposition II.4) au cas de la commande optimale stochastique à temps discret.

Nous considérons un problème de commande optimale stochastique en temps discret,  $T$  désignant notre horizon temporel.

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité,  $\mathcal{F}$  désigne une tribu sur  $\Omega$  et  $\mathbb{P}$  est une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$ .

Nous désignons par  $\mathbb{W} = \mathbb{W}_0 \times \cdots \times \mathbb{W}_T$  ( $\dim(\mathbb{W}) < +\infty$ ), l'espace des bruits. Un élément  $\mathbf{W}$  de  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_0 \times \cdots \times \mathcal{W}_T$  est de la forme  $(\mathbf{W}_0, \cdots, \mathbf{W}_T)$  tel que :

$$(\mathbf{W}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{W}_t) \in \mathcal{W}_t \stackrel{\text{def}}{=} \text{ensemble des variables aléatoires } \mathcal{F}\text{-mesurables à valeurs dans } \mathbb{W}_t.$$

<sup>2</sup>Nous faisons référence aux travaux de R.T. Rockafellar et R.J.-B. Wets pour la définition de la mesurabilité d'une multi-application [98, chapitre 14].



À chaque pas de temps  $t = 0, \dots, T-1$ , le décideur prend une décision (commande)  $\mathbf{U}_t \in \mathcal{U}_t$  sur la base d'informations qui seront précisées plus loin. Nous posons alors  $\mathbb{U} = \mathbb{U}_0 \times \dots \times \mathbb{U}_{T-1}$  ( $\dim(\mathbb{U}) < +\infty$ ), un espace de commande tel que :

$$(\mathbf{U}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{U}_t) \in \mathcal{U}_t \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{U}_t).$$

Nous supposons, en outre, que la commande est soumise à des contraintes d'admissibilité  $\mathbf{U}_t(\omega) \in \mathbf{\Gamma}_t^{\text{ad}}(\omega)$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s.,  $\forall t = 0, \dots, T-1$ , où  $\mathbf{\Gamma}_t^{\text{ad}} : \Omega \rightrightarrows \mathbb{U}_t$  est une multi-application. La contrainte implicite d'admissibilité s'écrit alors :

$$(II.3) \quad \mathbf{U}_t \in \mathcal{U}_t^{\text{ad}}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1,$$

où  $\mathcal{U}_t^{\text{ad}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{U}_t \in \mathcal{U}_t, \mathbf{U}_t(\omega) \in \mathbf{\Gamma}_t^{\text{ad}}(\omega), \mathbb{P}\text{-p.s.}\}$ . Nous posons en outre  $\mathcal{U}^{\text{ad}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_0^{\text{ad}} \times \dots \times \mathcal{U}_{T-1}^{\text{ad}}$ .

REMARQUE II.7. Dans la suite,  $\mathbf{\Gamma}_t^{\text{ad}}$  sera considéré comme un ensemble aléatoire. Cependant, il nous arrivera de faire l'hypothèse que cet ensemble est déterministe (constant pour tout  $\omega \in \Omega$ ), il sera alors noté en lettre non grasse.  $\blacklozenge$

**II.2.1. Dynamique du système.** Soit  $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0 \times \dots \times \mathbb{X}_T$  ( $\dim(\mathbb{X}) < +\infty$ ), un espace d'état. Nous supposons qu'à chaque instant  $t = 0, \dots, T$ , l'état du système est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à valeurs dans  $\mathbb{X}_t$  telle que :

$$(\mathbf{X}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{X}_t) \in \mathcal{X}_t \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{X}_t).$$

Cet état est soumis à une dynamique  $f_t : \mathbb{X}_t \times \mathbb{U}_t \times \mathbb{W}_{t+1} \rightarrow \mathbb{X}_{t+1}$  tel que :

$$(II.4) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{X}_{t+1} &= f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

REMARQUE II.8. Le décalage d'indice dans la dynamique, entre l'état  $\mathbf{X}_t$  et la commande  $\mathbf{U}_t$  d'une part, et le bruit  $\mathbf{W}_{t+1}$  d'autre part, modélise le fait que nous sommes en mode décision-hasard, c'est à dire qu'à chaque pas de temps le décideur choisit une commande avant d'observer le bruit du système.  $\blacklozenge$

**II.2.2. Coût à minimiser.** Nous considérons à chaque pas de temps  $t = 0, \dots, T-1$ , une fonction coût  $L_t : \mathbb{X}_t \times \mathbb{U}_t \times \mathbb{W}_{t+1} \rightarrow \mathbb{R}$  dépendant de l'état à l'instant  $t$ , de la commande au même pas de temps et du bruit à l'instant  $t+1$ . Au dernier pas de temps  $T$  nous considérons une fonction coût final  $K : \mathbb{X}_T \rightarrow \mathbb{R}$  ne dépendant que de l'état du système à cet instant. Le décideur aura donc à choisir ses commandes  $\mathbf{U}_t$  afin de minimiser l'espérance de la somme des coûts pour tous les pas de temps.

$$(II.5) \quad \begin{aligned} \tilde{j}(x, u, w) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{T-1} L_t(x_t, u_t, w_{t+1}) + K(x_T), \\ \tilde{J}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T) \right]. \end{aligned}$$

**II.2.3. Structure d'information.** Soit  $(\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, T}$  une filtration associée au processus  $(\mathbf{W}_t)_{t=0, \dots, T}$ , nous avons alors que  $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}$ . Cette filtration est définie comme étant la sous-tribu engendrée par tous les bruits passés :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t), \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Nous dirons que nous sommes en information complète si, à chaque instant  $t$ , le décideur observe tout le passé des bruits pour choisir sa commande  $\mathbf{U}_t$  qui sera alors mesurable par rapport à la sous-tribu  $\mathcal{F}_t$ . En toute généralité nous noterons  $\mathbf{Y}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_t$ , une variable aléatoire

d'observation où  $\mathbb{Y}_t$  est l'espace d'observation ( $\dim(\mathbb{Y}_t) < +\infty$ ) et tel qu'il existe une fonction d'observation  $h_t : \mathbb{W}_0 \times \cdots \times \mathbb{W}_T \rightarrow \mathbb{Y}_t$  tel que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_t) &\in \mathcal{Y}_t \stackrel{\text{def}}{=} \text{ensemble des variables aléatoires } \mathcal{F}\text{-mesurables à valeurs dans } \mathbb{Y}_t, \\ \mathbf{Y}_t &= h_t(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_T), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{aligned}$$

Nous nous donnons, alors, à chaque instant  $t = 0, \dots, T-1$  la sous-tribu  $\mathcal{G}_t$  telle que  $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathbf{Y}_t)$ , et nous écrivons la contrainte d'information comme suit :

$$(II.6) \quad \mathbf{U}_t \text{ } \mathcal{G}_t\text{-mesurable}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Nous notons pour tout  $t = 0, \dots, T-1$ ,  $\mathcal{U}_t^{\text{mes}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{U}_t \in \mathcal{U}_t, \mathbf{U}_t \text{ } \mathcal{G}_t\text{-mesurable}\}$  et  $\mathcal{U}^{\text{mes}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_0^{\text{mes}} \times \cdots \times \mathcal{U}_{T-1}^{\text{mes}}$ . Il s'agit bien de sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{U}$  (voir la remarque II.2).

**II.2.4. Deux points de vue.** Nous pouvons interpréter le problème de commande optimale sous deux formes différentes :

- considérer la dynamique (II.4) comme une contrainte, la variable aléatoire d'état devenant alors une variable de décision à part entière et il faudra minimiser la fonctionnelle coût  $\tilde{J}(\mathbf{U}, \mathbf{X})$  (II.5) en fonction de l'état et de la commande (une approche par dualité serait alors envisagée),
- remarquer que la variable aléatoire d'état n'est qu'un intermédiaire de calcul ; nous pouvons alors intégrer la dynamique (II.4) à la fonction coût et nous aurons alors à minimiser  $J(\mathbf{U})$  (II.7) en fonction seulement de la commande  $\mathbf{U}$  (une approche par projection sera alors envisagée).

$$(II.7) \quad \begin{aligned} j(u, w) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{T-1} \tilde{L}_t(u_0, \dots, u_t, w_0, \dots, w_{t+1}) + \tilde{K}(u_0, \dots, u_{T-1}, w_0, \dots, w_T), \\ J(\mathbf{U}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} \tilde{L}_t(\mathbf{U}_0, \dots, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_{t+1}) + \tilde{K}(\mathbf{U}_0, \dots, \mathbf{U}_{T-1}, \mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_T) \right]. \end{aligned}$$

Dans la suite, nous utiliserons la deuxième interprétation et nous considérons le problème suivant :

$$(SP) \quad \begin{aligned} \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} & \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T) \right], \\ \text{sous } & \mathbf{X}_0 = \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ & \mathbf{X}_{t+1} = f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ & \mathbf{U}_t \text{ } \mathcal{G}_t\text{-mesurable} \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ & \mathbf{U}_t \in \mathcal{U}_t^{\text{ad}}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

qui est équivalent au problème où on a intégré la dynamique dans la fonction coût :

$$(II.8) \quad \begin{aligned} \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}} & J(\mathbf{U}), \\ \text{sous } & \mathbf{U} \in \mathcal{U}^{\text{ad}} \cap \mathcal{U}^{\text{mes}}. \end{aligned}$$

**II.2.5. Hypothèses.** Nous considérerons dans la suite du chapitre certaines hypothèses sur (SP).

HYPOTHÈSE II.9. Pour tout  $t = 0, \dots, T-1$ ,

- (1)  $\mathcal{U}_t^{\text{ad}}$  est un sous-ensemble convexe fermé de  $\mathcal{U}_t$ ,
- (2)  $\Pi_{\mathcal{U}_t^{\text{ad}}}(\mathcal{U}_t^{\text{mes}}) \subset \mathcal{U}_t^{\text{mes}}$ .

◆

HYPOTHÈSE II.10 (Différentiabilité).

- (1)  $\forall t = 0, \dots, T-1$ , l'application  $L_t(\cdot, \cdot, \mathbf{W}_{t+1})$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{X}_t \times \mathbb{U}_t)$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s.,
- (2)  $\forall t = 0, \dots, T-1$ , l'application  $f_t(\cdot, \cdot, \mathbf{W}_{t+1})$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{X}_t \times \mathbb{U}_t)$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s.,
- (3) l'application  $K(\cdot)$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{X}_T)$ ,
- (4)  $\forall t = 0, \dots, T-1$ , les applications  $L_t, f_t$  sont s.c.i. sur  $\mathbb{X}_t \times \mathbb{U}_t \times \mathbb{W}_{t+1}$  (voir la remarque II.1),
- (5)  $\forall t = 0, \dots, T-1$ , les applications  $(L_t)'_u, (L_t)'_x, (f_t)'_u, (f_t)'_x$  et  $K'$  sont de carré intégrable.

◆

On notera  $(L_t)'_x, (f_t)'_x, (L_t)'_u$  et  $(f_t)'_u$  les Jacobiens respectifs de ces fonctions par rapport à l'état (première composante) et la commande (deuxième composante) et par  $K'$  la dérivée de la fonction coût final  $K$ .

Nous adopterons dans toute la suite du mémoire ce genre de notations : pour une fonction différentiable  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , nous noterons par  $F'$  sa dérivée (représentée par une matrice de taille  $m \times n$ ) et par  $\nabla F \stackrel{\text{def}}{=} F'^\top$  son gradient. Il nous arrivera aussi de confondre  $\nabla F$  (un élément du primal) avec  $F'$  (élément du dual).

HYPOTHÈSE II.11 (Non anticipativité).

- (1)  $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t, \quad \forall t = 0, \dots, T-1$ .
- (2)  $\mathbf{\Gamma}_t^{\text{ad}}$   $\mathcal{G}_t$ -mesurable,  $\forall t = 0, \dots, T-1$ .

◆

REMARQUE II.12.

- (1) L'hypothèse II.9 (1) est vérifiée dès que la multi-application  $\mathbf{\Gamma}_t^{\text{ad}}$  est à valeurs fermées et convexes (voir le lemme II.5).
- (2) L'hypothèse II.11 (1) exprime la causalité du problème : le décideur n'a pas accès aux informations futures mais seulement aux informations passées. Sous cette hypothèse, la variable aléatoire d'observation  $\mathbf{Y}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_t$ , s'écrit en posant une application mesurable  $\tilde{h}_t : \mathbb{W}_0 \times \dots \times \mathbb{W}_t \rightarrow \mathbb{Y}_t$  telle que :

$$\begin{aligned} (\mathbf{Y}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_t) &\in \mathcal{Y}_t, \\ \mathbf{Y}_t &= \tilde{h}_t(\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t). \end{aligned}$$

- (3) L'hypothèse II.11 (2) exprime le fait qu'on ne peut pas soumettre les décisions à une contrainte d'admissibilité si le décideur n'est pas en mesure de la vérifier avec l'information dont il dispose. C'est une hypothèse très proche de celle du *relatively complete recourse* de la communauté *stochastic programming*. Ceci se traduit par le fait que tout ce qui agit sur la variable soumise aux contraintes est mesurable par rapport aux informations dont dispose le décideur au moment d'agir sur cette variable ; le décideur a donc toujours un *recours* c'est-à-dire une possibilité de vérifier les contraintes.

◆

### II.3. Dérivation de la fonction coût intégrée

Nous voulons ici donner les outils nécessaires à la dérivation de la fonction  $J$  en fonction de la dérivée de  $\tilde{J}$ , faisant ainsi le lien entre les deux points de vue présentés dans la section II.2.4. Pour cela, nous commençons par calculer la dérivée de la fonction  $j$  (nous renvoyons le lecteur au théorème A.25 et à la remarque A.26 pour un cadre plus général).

PROPOSITION II.13. *Si les hypothèses II.10 sont vérifiées alors l'application  $j(\cdot, \omega) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{U})$  et*

$$(II.9) \quad \forall u \in \mathbb{U}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ (j)'_{u_t}^\top(u, w) = (L_t)'_{u_t}^\top(x_t, u_t, w_{t+1}) + (f_t)'_{u_t}^\top(x_t, u_t, w_{t+1})\lambda_{t+1},$$

où  $x_{t+1} = f_t(x_t, u_t, w_{t+1})$ ,  $\forall t = 0, \dots, T-1$  et le vecteur  $\lambda$  est choisi tel que :  $\lambda = (\lambda_t)_{t=0, \dots, T} \in \mathbb{X}$  vérifiant

$$(II.10) \quad \lambda_T = K'^\top(x_T), \\ \lambda_t = (L_t)'_x^\top(x_t, u_t, w_{t+1}) + (f_t)'_x^\top(x_t, u_t, w_{t+1})\lambda_{t+1},$$

**Démonstration :** Soit  $\hat{x} : \mathbb{U} \times \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{X}$  la fonction qui à tous vecteurs  $u = (u_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \mathbb{U}$  et  $w = (w_t)_{t=0, \dots, T} \in \mathbb{W}$  associe le vecteur  $\hat{x}(u, w) = x = (x_t)_{t=0, \dots, T} \in \mathbb{X}$  obtenu en intégrant la dynamique :

$$(II.11) \quad x_{t+1} = f_t(x_t, u_t, w_{t+1}),$$

Pour tout  $\lambda = (\lambda_t)_{t=0, \dots, T} \in \mathbb{X}$  nous pouvons écrire  $j(u, w)$  de la manière suivante :

$$(II.12) \quad j(u, w) = \sum_{t=0}^{T-1} L_t(x_t, u_t, w_{t+1}) + \underbrace{\lambda_{t+1}^\top (f_t(x_t, u_t, w_{t+1}) - x_{t+1})}_{=0, \text{ d'après (II.11)}} + K(x_T).$$

Il s'agit maintenant de calculer la dérivée de  $j$  en  $u$ . L'équation (II.12) étant valable pour tout vecteur  $\lambda$ , ce dernier sera alors choisi de façon à éliminer la dérivée  $\hat{x}'$  de  $\hat{x}$  en  $u$ .

Soit  $v \in \mathbb{U}$ , en dérivant (II.12) nous avons alors que :

$$(II.13) \quad \langle j'_u(u, w), v \rangle_{\mathbb{U}} = \sum_{t=0}^{T-1} \left\langle (L_t)'_x(x_t, u_t, w_{t+1}) \hat{x}'_t, v \right\rangle_{\mathbb{U}} + \left\langle (L_t)'_u(x_t, u_t, w_{t+1}), v_t \right\rangle_{\mathbb{U}_t} \\ + \left\langle \lambda_{t+1}^\top \left( (f_t)'_x(x_t, u_t, w_{t+1}) \hat{x}'_t - \hat{x}'_t, v \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} + \left\langle \lambda_{t+1}^\top (f_t)'_u(x_t, u_t, w_{t+1}), v_t \right\rangle_{\mathbb{U}_t} \\ + \langle K'(x_T) \hat{x}'_T, v \rangle_{\mathbb{U}}.$$

En regroupant les termes de dérivée en  $x$  et  $u$  nous avons que :

$$(II.14) \quad \langle j'_u(u, w), v \rangle_{\mathbb{U}} = \sum_{t=0}^{T-1} \left( \left\langle \underbrace{\left( (L_t)'_x(x_t, u_t, w_{t+1}) + \lambda_{t+1}^\top (f_t)'_x(x_t, u_t, w_{t+1}) - \lambda_{t+1}^\top \right)}_{=\lambda_t} \hat{x}'_t, v \right\rangle_{\mathbb{U}} \right) \\ + \sum_{t=0}^{T-1} \left( \left\langle (L_t)'_u(x_t, u_t, w_{t+1}) + \lambda_{t+1}^\top (f_t)'_u(x_t, u_t, w_{t+1}), v_t \right\rangle_{\mathbb{U}_t} \right) \\ + \langle K'(x_T) \hat{x}'_T, v \rangle_{\mathbb{U}}.$$

En choisissant le vecteur  $\lambda$  comme indiqué dans la proposition II.13 nous avons que :

$$(II.15) \quad \langle j'_u(u, w), v \rangle_{\mathbb{U}} = \underbrace{\sum_{t=0}^{T-1} \langle \lambda_t^\top \hat{x}'_t - \lambda_{t+1}^\top \hat{x}'_t, v \rangle_{\mathbb{U}}}_{=\langle \lambda_0^\top \hat{x}'_0, v \rangle} + \langle \lambda_T^\top \hat{x}'_T, v \rangle_{\mathbb{U}} \\ + \sum_{t=0}^{T-1} \left( \left\langle (L_t)'_u(x_t, u_t, w_{t+1}) + \lambda_{t+1}^\top (f_t)'_u(x_t, u_t, w_{t+1}), v_t \right\rangle_{\mathbb{U}_t} \right).$$

À l'instant  $t = 0$  l'état initial est donné a priori et est indépendant de la commande. Nous avons alors que  $\langle \lambda_0^\top \hat{x}'_0, v \rangle = 0$  nous avons finalement que :

$$\langle j'_u(u, w), v \rangle_{\mathbb{U}} = \sum_{t=0}^{T-1} \left( \left\langle (L_t)'_u(x_t, u_t, w_{t+1}) + \lambda_{t+1}^\top (f_t)'_u(x_t, u_t, w_{t+1}), v_t \right\rangle_{\mathbb{U}_t} \right).$$

■

#### II.4. Conditions d'optimalité : première forme

Nous donnons ici des conditions nécessaires d'optimalité du type Karush-Kuhn-Tucker du problème (SP).

**THÉORÈME II.14.** *Soient  $(\mathbf{X}_t)_{t=0,\dots,T} \in \mathcal{X}$  et  $(\mathbf{U}_t)_{t=0,\dots,T-1} \in \mathcal{U}$  deux processus aléatoires solutions de (SP). Supposons en outre que les hypothèses II.9, II.10 et II.11 sont vérifiées. Il existe alors un processus aléatoire  $(\boldsymbol{\lambda}_t)_{t=0,\dots,T} \in \mathcal{X}$  tel que :*

$$(PMS_1) \quad \begin{cases} \mathbf{X}_0 = \mathbf{W}_0, & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{X}_{t+1} = f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}), & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \boldsymbol{\lambda}_t = (L_t)'_x(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_x(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1}, & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \boldsymbol{\lambda}_T = K'^T(\mathbf{X}_T), & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \mid \mathcal{G}_t \right] \in -\partial\delta_{\mathcal{U}_t^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_t), \\ \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \end{cases}$$

**Démonstration :** Commençons par noter que pour tout  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$  et  $\mathbf{W} \in \mathcal{W}$ ,  $J(\mathbf{U}) = \int_{\Omega} j(\mathbf{U}(\omega), \mathbf{W}(\omega))\mathbb{P}(d\omega)$ . D'après la proposition II.4 si  $\mathbf{U}$  est solution de (SP) et donc de (II.8), alors :

$$\Pi_{\mathcal{U}^{\text{mes}}}(\nabla J(\mathbf{U})) \in -\partial\delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}),$$

et donc  $\mathbb{E}[(\nabla j(\mathbf{U}, \mathbf{W}))_t \mid \mathcal{G}_t] \in -\partial\delta_{\mathcal{U}_t^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_t)$  pour tout  $t = 0, \dots, T-1$  (par abus de notations nous confondons  $\nabla J$  - élément du primal - avec sa représentation dans le dual par  $J'$ ).

D'après la proposition II.13 nous avons alors le résultat désiré en remplaçant obtenue par (II.9) et (II.10) (voir la remarque A.20 pour la définition du gradient). ■

Cette version des conditions d'optimalité est dite *version non adaptée* en référence à l'état adjoint  $\boldsymbol{\lambda}$  du système qui n'est pas mesurable par rapport à la filtration naturelle  $(\mathcal{F}_t)$  du problème.

**REMARQUE II.15** (Approche par dualité). Formellement, on peut obtenir les conditions d'optimalité  $PMS_1$  en dérivant un Lagrangien (voir la remarque A.26) :

$$(II.16) \quad \mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \boldsymbol{\lambda}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T) \right] + \sum_{t=0}^{T-1} \mathbb{E} [\langle \boldsymbol{\lambda}_{t+1}, f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) - \mathbf{X}_{t+1} \rangle].$$

Nous dérivons le Lagrangien (II.16) par rapport à l'état adjoint  $\boldsymbol{\lambda}_t$  pour tous les pas de temps, nous obtenons alors la dynamique de l'état (II.4) :

$$(II.17) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{\lambda}_{t+1}} = 0 \quad \implies \quad f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) - \mathbf{X}_{t+1} = 0.$$

En dérivant le Lagrangien (II.16) par rapport à l'état  $\mathbf{X}_t$  pour tous les pas de temps, nous obtenons alors la dynamique de l'état adjoint (II.18) :

$$(II.18) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{X}_t} = 0 \quad \implies \quad \boldsymbol{\lambda}_t = (L_t)'_x(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_x(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1}.$$

Il reste maintenant à dériver (II.16) par rapport à la commande à chaque instant. Nous avons alors que :

$$(II.19) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{U}_t} = (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1}.$$

En projetant cette dernière expression sur le sous-espace vectoriel  $\mathcal{U}_t^{\text{mes}}$  des variables aléatoires  $\mathbf{Y}_t$  mesurables nous retrouvons l'expression de la projection du gradient du problème (SP) comme présentée dans le théorème II.14.  $\blacklozenge$

## II.5. Conditions d'optimalité : deuxième forme

Nous reprenons ici le même problème en essayant de traiter les conditions d'optimalité (PMS<sub>1</sub>) de manière à avoir une dynamique de l'état adjoint adaptée à la filtration naturelle du problème.

Nous donnons ici des conditions nécessaires d'optimalité du type Karush-Kuhn-Tucker du problème (SP) en version adaptée.

**THÉORÈME II.16.** *Soient  $(\mathbf{X}_t)_{t=0,\dots,T} \in \mathcal{X}$  et  $(\mathbf{U}_t)_{t=0,\dots,T-1} \in \mathcal{U}$  deux processus aléatoires solutions de (SP). Supposons en outre que les hypothèses II.9, II.10 et II.11 sont vérifiées. Il existe alors un processus aléatoire  $(\boldsymbol{\Lambda}_t)_{t=0,\dots,T} \in \mathcal{X}$  tel que :*

$$(PMS_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{X}_0 = \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{X}_{t+1} = f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \boldsymbol{\Lambda}_t = \mathbb{E} \left[ (L_t)'_x{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_x{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\Lambda}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \boldsymbol{\Lambda}_T = K'^\top(\mathbf{X}_T), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\Lambda}_{t+1} \mid \mathcal{G}_t \right] \in -\partial\delta_{\mathcal{U}_t^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_t), \\ \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \end{array} \right.$$

**Démonstration :** Nous commençons par remarquer que comme  $\mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+1}$  (Hypothèses II.11) et  $\mathcal{F}_{t+1}$  est engendrée par tous les bruits passés jusqu'à  $t+1$ , nous avons alors l'égalité des deux opérateurs suivants :

$$\mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{G}_t] = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_{t+1}] \mid \mathcal{G}_t \right].$$

Soient  $\mathcal{U}_t^{\mathcal{F}^{\text{mes}}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{U}_t \in \mathcal{U}_t, \mathbf{U}_t, \mathcal{F}_t\text{-mesurable}\}$  et  $\mathcal{U}^{\mathcal{F}^{\text{mes}}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{U}_0^{\mathcal{F}^{\text{mes}}} \times \dots \times \mathcal{U}_{T-1}^{\mathcal{F}^{\text{mes}}}$ . Nous avons alors que  $\Pi_{\mathcal{U}_t^{\text{mes}}} = \Pi_{\mathcal{U}_t^{\text{mes}}} \circ \Pi_{\mathcal{U}_{t+1}^{\mathcal{F}^{\text{mes}}}}$ .

*Gradient.* La dernière condition d'optimalité de (PMS<sub>1</sub>) donnant pour tout  $t = 0, \dots, T-1$  :

$$\underbrace{\Pi_{\mathcal{U}_t^{\text{mes}}}}_{=\Pi_{\mathcal{U}_t^{\text{mes}}} \circ \Pi_{\mathcal{U}_{t+1}^{\mathcal{F}^{\text{mes}}}}} \left( (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \right) \in -\partial\delta_{\mathcal{U}_t^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_t),$$

nous utilisons une projection successive d'abord sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires  $\mathcal{F}_{t+1}$  mesurables, ensuite sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires  $\mathcal{G}_t$  mesurables.

$$\Pi_{\mathcal{U}_t^{\text{mes}}} \circ \Pi_{\mathcal{U}_{t+1}^{\mathcal{F}^{\text{mes}}}} \left( (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \right) \in -\partial\delta_{\mathcal{U}_t^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_t),$$

Comme  $\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t$  et  $\mathbf{W}_{t+1}$  sont  $\mathcal{F}_{t+1}$ -mesurables et par linéarité du projecteur  $\Pi_{\mathcal{U}_{t+1}^{\mathcal{F}^{\text{mes}}}}$ , la condition (II.19) d'orthogonalité du gradient devient :

$$(II.20) \quad \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\Lambda}_{t+1} \mid \mathcal{G}_t \right] \in -\partial\delta_{\mathcal{U}_t^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_t),$$

où :

$$(II.21) \quad \boldsymbol{\Lambda}_{t+1} = \mathbb{E}[\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \mid \mathcal{F}_{t+1}].$$

*Dynamique de l'état adjoint.* Au dernier pas de temps  $T$  nous avons que :

$$\Lambda_T \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\lambda_T | \mathcal{F}_T] = \mathbb{E}\left[K'^\top(\mathbf{X}_T) | \mathcal{F}_T\right] = K'^\top(\mathbf{X}_T) = \lambda_T,$$

nous établissons, alors, par récurrence, et en utilisant les mêmes arguments de la démonstration du théorème II.14, la nouvelle équation adjointe, et nous réécrivons (II.18) comme suit :

$$(II.22) \quad \begin{aligned} \Lambda_T &= K'^\top(\mathbf{X}_T), \\ \Lambda_t &= \mathbb{E}\left[(L_t)'_x(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_x(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\Lambda_{t+1} | \mathcal{F}_t\right] \quad \forall t = 1, \dots, T-1. \end{aligned}$$

■

Il est à noter que, pour cette version adaptée des conditions d'optimalité, le gradient est projeté sur la  $\sigma$ -algèbre  $\mathcal{G}_t$  représentant la structure d'information du problème. Cependant, la variable aléatoire d'état adjoint n'est projeté que sur l'espace (plus grand) défini par la filtration naturelle du problème ( $\mathcal{F}_t$ ).

Les conditions d'optimalité ( $PMS_1$ ) et ( $PMS_2$ ) sont des conditions nécessaires de type Karush-Kuhn-Tucker. Leurs expressions font donc intervenir l'espérance conditionnelle d'un gradient par rapport à la tribu engendrée par la structure d'information du problème ( $SP$ ). C'est donc une projection sur un sous-espace vectoriel dont la dimension est susceptible de varier avec le pas de temps considéré, ce qui pose certains problèmes numériques. Dans la section II.6 nous présenterons une alternative à ces conditions d'optimalité où le sous-espace vectoriel de projection reste de dimension fixe au cours du temps.

En contrôle stochastique en temps continu, nous retrouvons des conditions similaires pour traiter des équations différentielles stochastiques rétrogrades. Nous faisons référence au cours de N. Touzi [111] et au livre de J. Yong et Y. Zhou [117] pour un équivalent du principe du minimum de Pontriaguine pour les EDS rétrogrades. Nous notons en outre que dans ce cadre, la dynamique de l'état adjoint exhibée est une dynamique adaptée à la filtration des bruits mais sans opérateur de projection (espérance conditionnelle). En effet une commande adaptée (*variable d'écart*) est rajoutée pour ramener à chaque instant l'état adjoint sur l'espace vectoriel des variables aléatoires mesurables par rapport à l'observation.

## II.6. Application au cas markovien

Les conditions d'optimalité  $PMS_1$  et  $PMS_2$  font intervenir des projections sur des sous-espaces vectoriels dont la dimension a tendance à augmenter au fil du temps. En effet, si pour tout  $t = 0, \dots, T-1$ ,  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$  alors  $\mathcal{U}_0^{\text{mes}} \subset \mathcal{U}_1^{\text{mes}} \subset \dots \subset \mathcal{U}_{T-1}^{\text{mes}}$ . Ceci peut poser des inconvénients numériques lors de l'étape d'approximation de l'espérance conditionnelle (nous détaillerons ceci lors du chapitre III). En s'inspirant du principe de la programmation dynamique stochastique (existence d'un feedback par rapport à l'état) nous cherchons alors à résoudre le problème suivant :

$$(SP^X) \quad \begin{aligned} \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T) \right], \\ \text{sous } \mathbf{X}_0 = \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{X}_{t+1} = f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \mathbf{U}_t \preceq \mathbf{X}_t, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \mathbf{U}_t \in \mathcal{U}_t^{\text{ad}}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Si nous pouvions, sans perte d'optimalité, remplacer la contrainte d'information  $\mathbf{U}_t$   $\mathcal{F}_t$ -mesurable dans ( $SP$ ) par  $\mathbf{U}_t \preceq \mathbf{X}_t$ , alors nous aurions l'équivalence entre ( $SP$ ) et ( $SP^X$ ) ainsi qu'une contrainte de mesurabilité dont la dimension reste fixe au cours du temps (sous réserve que la dimension de l'espace d'état reste fixe).

Nous nous proposons alors d'adopter les hypothèses suivantes sur le problème  $(SP)$  :

HYPOTHÈSE II.17 (Problème markovien).

- (1) hypothèse de mémoire complète :  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$ ,  $\forall t = 0, \dots, T-1$ ,
- (2) hypothèse de bruits blancs :  $(\mathbf{W}_t)_{t=0, \dots, T}$  sont indépendants,
- (3) hypothèse d'ensemble admissible déterministe :

$$\forall t = 0, \dots, T-1, \quad \exists \Gamma_t^{\text{ad}} \subset \mathbb{U}_t, \quad \mathbf{\Gamma}_t^{\text{ad}}(\omega) = \Gamma_t^{\text{ad}}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.},$$

ceci implique que :  $\mathbf{\Gamma}_t^{\text{ad}}$   $\{\emptyset, \Omega\}$ -mesurable,  $\forall t = 0, \dots, T-1$ .

◆

**II.6.1. Tentative d'écriture de conditions du type KKT.** L'ensemble  $\mathcal{U}_t^{\text{mes}} = \{\mathbf{U}_t \in \mathcal{U}, \mathbf{U}_t \preceq \mathbf{X}_t\}$  est dépendant de la commande (à travers l'état  $\mathbf{X}_t$  et sa dynamique (II.4)). Nous ne pouvons donc pas appliquer les résultats obtenus dans le théorème II.14 en adoptant une démarche par projection (il faudra pour cela dériver une multi-application).

Nous sommes alors incapable d'écrire directement des conditions d'optimalité pour le problème  $(SP^X)$ . Nous cherchons donc à réécrire les conditions d'optimalité du type  $(PMS_1)$  et  $(PMS_2)$  sans passer par la dérivation d'un Lagrangien.

**II.6.2. Conditions d'optimalité dans un cadre markovien : première forme.** Nous présenterons ici une version non adaptée des conditions d'optimalité pour le problème  $(SP^X)$ .

THÉORÈME II.18. *Supposons que :*

- (1) les hypothèses II.9, II.10 et II.17 sont satisfaites,
- (2) il existe un processus aléatoire  $(\mathbf{U}_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \mathcal{U}$  solution de  $(SP)$  et des processus  $(\mathbf{X}_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \mathcal{X}$  et  $(\boldsymbol{\lambda}_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \mathcal{X}$ , vérifiant  $(PMS_1)$ ,
- (3) pour tout  $t = 1, \dots, T-1$  et  $x \in \mathbb{X}_t$ , l'application  $g_t(x, \cdot)$  est continue et il existe  $u \in \mathbb{U}_t$  tel que  $g_t(x, u) \in -\partial\delta_{\Gamma_t^{\text{ad}}}(u)$  où

$$g_t(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u^\top(x, u, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u^\top(x, u, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \right],$$

alors :

- (1)  $\forall t = 0, \dots, T-1, \mathbf{U}_t \preceq \mathbf{X}_t$ ;
- (2)  $\forall t = 0, \dots, T-1, \boldsymbol{\lambda}_{t+1} \preceq (\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{W}_{t+2}, \dots, \mathbf{W}_T)$ ;
- (3)  $\forall t = 0, \dots, T-1$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \mid \mathbf{X}_t \right], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{aligned}$$

**Démonstration :** Remarquons d'abord que l'hypothèse II.17 implique l'hypothèse II.11, on a alors que s'il existe une solution du problème  $(SP)$  qui vérifie les hypothèses II.10 et II.17, elle vérifie les conditions  $(PMS_1)$ , il existe alors des processus  $(\mathbf{X}_t)_{t=0, \dots, T} \in \mathcal{X}$  et  $(\boldsymbol{\lambda}_t)_{t=0, \dots, T} \in \mathcal{X}$  vérifiant ces mêmes conditions d'optimalité  $(PMS_1)$ .

Nous commençons par montrer les deux premiers résultats du théorème. Nous posons pour tout  $t = 0, \dots, T-1$  :

$$\Delta_t \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{X}_t, \quad \exists u \in \mathbb{U}_t, \quad g_t(x, u) \in -\partial\delta_{\Gamma_t^{\text{ad}}}(u)\}.$$

La preuve se fait par récurrence rétrograde sur le temps :



- (1) Pour  $t = T$ ,  $\lambda_T = K'^\top(\mathbf{X}_T) \preceq \mathbf{X}_T$ . De plus  $U_{T-1}$  résout :

$$(II.23) \quad \mathbb{E} \left[ (L_{T-1})'_u{}^\top(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}, \mathbf{W}_T) + (f_{T-1})'_u{}^\top(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}, \mathbf{W}_T) \lambda_T \mid \mathcal{F}_{T-1} \right] \\ \in -\partial \delta_{\mathcal{U}_{T-1}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_{T-1}).$$

Comme  $\lambda_T \preceq \mathbf{X}_T = f_{T-1}(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}, \mathbf{W}_T)$  et comme  $\mathbf{X}_{T-1}$   $\mathcal{F}_{T-1}$ -mesurable,  $\mathbf{U}_{T-1}$   $\mathcal{F}_{T-1}$ -mesurable et que  $\mathbf{W}_T$  est indépendante de  $\mathcal{F}_{T-1}$  (hypothèse de bruits blancs), alors  $\mathbb{E}[g_{T-1}(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}) \mid \mathcal{F}_{T-1}] = g_{T-1}(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1})$  et donc (d'après (PMS<sub>1</sub>))  $g_{T-1}(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}) \in -\partial \delta_{\mathcal{U}_{T-1}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_{T-1})$ , pour  $\epsilon > 0$ , ceci est équivalent (voir la proposition A.23) à dire que :

$$\Pi_{\mathcal{U}_{T-1}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_{T-1} - \epsilon g(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1})) = \mathbf{U}_{T-1}.$$

Soit  $h_{T-1} : \mathbb{X}_{T-1} \times \mathbb{U}_{T-1} \rightarrow \mathbb{U}_{T-1}$  tel que  $\forall (x, u) \in \mathbb{X}_{T-1} \times \mathbb{U}_{T-1}$ ,  $h_{T-1}(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} u - \Pi_{\Gamma_{T-1}^{\text{ad}}}(u - \epsilon g_{T-1}(x, u))$  et soit  $\bar{h}_{T-1} : \mathcal{X}_{T-1} \times \mathcal{U}_{T-1} \rightarrow \mathcal{U}_{T-1}$  tel que  $\forall (\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}) \in \mathcal{X}_{T-1} \times \mathcal{U}_{T-1}$ ,  $\bar{h}_{T-1}(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U}_{T-1} - \Pi_{\mathcal{U}_{T-1}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_{T-1} - \epsilon g_{T-1}(\mathbf{X}_{T-1}, \mathbf{U}_{T-1}))$ . Par hypothèse  $\Delta_{T-1} = \mathbb{X}_{T-1}$ , par l'hypothèse (3) du théorème et l'hypothèse II.10  $h_{T-1}$  est de Carathéodory<sup>3</sup> et par le théorème de sélection mesurable [98, théorème 14.16], il existe  $\hat{u} : \Delta_{T-1} \rightarrow \mathbb{U}_{T-1}$  tel que  $h_{T-1}(x, \hat{u}(x)) = 0$ .

Nous utilisons alors le lemme II.5 pour écrire que  $\bar{h}_{T-1}(\mathbf{X}_{T-1}, \hat{u}(\mathbf{X}_{T-1})) = 0$ . Il existe alors une solution  $U_{T-1}$ , tel que  $U_{T-1} \preceq \mathbf{X}_{T-1}$  (puisque  $U_{T-1} = \hat{u}(\mathbf{X}_{T-1})$ ).

- (2) Supposons que  $U_t \preceq \mathbf{X}_t$  et que  $\lambda_{t+1} \preceq (\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{W}_{t+2}, \dots, \mathbf{W}_T)$ .  
(3) La dynamique de l'état adjoint s'écrit :

$$\lambda_t = (L_t)'_x{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_x{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) \lambda_{t+1}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

D'après les hypothèses de récurrence, nous avons alors que  $\lambda_t \preceq (\mathbf{X}_t, \mathbf{W}_{t+1}, \dots, \mathbf{W}_T)$ .  
 $U_{t-1}$  résout :

$$(II.24) \quad \mathbb{E} \left[ (L_{t-1})'_u{}^\top(\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{U}_{t-1}, \mathbf{W}_t) + (f_{t-1})'_u{}^\top(\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{U}_{t-1}, \mathbf{W}_t) \lambda_t \mid \mathcal{F}_{t-1} \right] \\ \in -\partial \delta_{\mathcal{U}_{t-1}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_{t-1}),$$

comme  $\lambda_t \preceq (\mathbf{X}_t, \mathbf{W}_{t+1}, \dots, \mathbf{W}_T) \preceq (\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{U}_{t-1}, \mathbf{W}_t, \dots, \mathbf{W}_T)$  et comme  $\mathbf{X}_{t-1}$   $\mathcal{F}_{t-1}$ -mesurable,  $\mathbf{U}_{t-1}$   $\mathcal{F}_{t-1}$ -mesurable et que  $\mathbf{W}_t$  est indépendante de  $\mathcal{F}_{t-1}$  (hypothèse de bruits blancs), alors  $g_{t-1}(\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{U}_{t-1}) \in -\partial \delta_{\mathcal{U}_{t-1}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_{t-1})$  en suivant le même principe que (1), il existe une solution  $U_{t-1}$ , tel que  $U_{t-1} \preceq \mathbf{X}_{t-1}$ .

Nous montrons suivant le même principe la dernière égalité du théorème.

$$\mathbb{E} \left[ (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \underbrace{\mathbf{U}_t}_{\preceq \mathbf{X}_t \text{ indépendante de } \mathcal{F}_t}, \underbrace{\mathbf{W}_{t+1}}_{\text{indépendante de } \mathcal{F}_t}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \underbrace{\mathbf{U}_t}_{\preceq \mathbf{X}_t \text{ indépendante de } \mathcal{F}_t}, \underbrace{\mathbf{W}_{t+1}}_{\text{indépendante de } \mathcal{F}_t}) \underbrace{\lambda_{t+1}}_{\text{indépendante de } \mathcal{F}_t} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ = \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) \lambda_{t+1} \mid \mathbf{X}_t \right].$$

■

REMARQUE II.19.

- (1) L'hypothèse (3) dans le théorème II.18 s'inspire du point de vue propagation dynamique, qui à chaque pas de temps et pour toute valeur de  $x \in \mathbb{X}_t$  minimise la fonction de Bellman en fonction de  $u$ . C'est donc *moral* de donner une condition nécessaire d'existence d'un tel minimum.

<sup>3</sup>mesurable en  $x$  et continue en  $u$

- (2) En s'inspirant de l'hypothèse II.11, on pourrait penser à modifier l'hypothèse II.17 en prenant un ensemble admissible  $\Gamma_t^{\text{ad}}$  mesurable par rapport à l'état  $\mathbf{X}_t$  ( $\Gamma_t$   $\sigma(\mathbf{X}_t)$ -mesurable,  $\forall t = 0, \dots, T-1$ ). Cependant, cette hypothèse ne permettra pas l'écriture des conditions d'optimalité ( $PMS_1$ ) et ( $PMS_2$ ). En effet, l'ensemble  $\mathcal{U}^{\text{mes}}$  ainsi défini sera dépendant de la commande, pour une approche par dualité il faudrait donc dériver la multi-application  $\Gamma_t^{\text{ad}}$  par rapport à une variable du problème, ce que l'on ne sait pas faire.

◆

La commande optimale solution du problème ( $SP$ ) (mesurabilité par rapport à tout le passé des bruits) satisfait les contraintes de mesurabilité du problème ( $SP^X$ ) (mesurabilité par rapport à l'état instantané). Les deux problèmes sont donc bien équivalents dans un cadre markovien (égalité des min et arg min).

Les min et l'arg min des problèmes ( $SP$ ) et ( $SP^X$ ) sont égaux. En effet,  $\min(SP) \leq \min(SP^X)$  puisque l'ensemble admissible de l'un est plus grand que l'ensemble admissible de l'autre. Mais, nous avons montré (théorème II.18) que toute solution de ( $SP$ ) est admissible pour ( $SP^X$ ), donc elle est nécessairement optimale pour ( $SP^X$ ).

Nous pouvons alors considérer que les conditions d'optimalité de ( $SP^X$ ) s'écrivent :

$$(PMS_1^X) \quad \begin{cases} \mathbf{X}_0 = \mathbf{W}_0, & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{X}_{t+1} = f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}), & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \boldsymbol{\lambda}_t = (L_t)_x'^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)_x'^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1}, & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \boldsymbol{\lambda}_T = K'^\top(\mathbf{X}_T), & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbb{E} \left[ (L_t)_u'^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)_u'^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \mid \mathbf{X}_t \right] \in -\partial\delta_{\mathcal{U}_t^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_t), \\ \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \end{cases}$$

REMARQUE II.20. Posons  $(\mathbf{G}_t^1)_{t=0, \dots, T-1}$  et  $(\mathbf{G}_t^2)_{t=0, \dots, T-1}$  les deux processus aléatoires vérifiant :

$$\mathbf{G}_t^1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ (L_t)_u'^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)_u'^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \right], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1,$$

$$\mathbf{G}_t^2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ (L_t)_u'^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)_u'^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \mid \mathbf{X}_t \right], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

On est incapable d'obtenir les conditions d'optimalité sous la forme ( $PMS_1^X$ ) directement à partir de la dérivation de la fonction coût intégrée associée au problème ( $SP^X$ ). Une conséquence de cette remarque est que le premier membre de la dernière relation de ( $PMS_1^X$ ) ( $\mathbf{G}^2$ ) représente bien la projection du gradient de la fonction coût  $J$  quand on est à l'optimum, par contre, ailleurs qu'à l'optimum, on n'a pas de raison de penser que c'est bien l'expression correcte de la projection de ce gradient. L'égalité entre les processus  $(\mathbf{G}_t^1)_{t=0, \dots, T-1}$  et  $(\mathbf{G}_t^2)_{t=0, \dots, T-1}$  n'est réalisée qu'à l'optimum.

◆

**II.6.3. Conditions d'optimalité dans un cadre markovien : deuxième forme.** Nous présentons ici une version adaptée des conditions d'optimalité pour le problème ( $SP^X$ ).

THÉORÈME II.21. *Supposons que :*

- (1) les hypothèses II.9, II.10 et II.17 sont satisfaites,
- (2) il existe un processus aléatoire  $(\mathbf{U}_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \mathcal{U}$  solution de ( $SP$ ) et des processus  $(\mathbf{X}_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \mathcal{X}$  et  $(\boldsymbol{\lambda}_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \mathcal{X}$ , vérifiant ( $PMS_2$ ),

- (3) pour tout  $t = 1, \dots, T-1$  et  $x \in \mathbb{X}_t$ , l'application  $g_t(x, \cdot)$  est continue et il existe  $u \in \mathbb{U}_t$  tel que  $g_t(x, u) \in -\partial\delta_{\Gamma_t^{\text{ad}}}(u)$  où

$$g_t(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u{}^\top(x, u, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(x, u, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\Lambda}_{t+1} \right],$$

alors :

- (1)  $\forall t = 0, \dots, T-1, \mathbf{U}_t \preceq \mathbf{X}_t$  ;  
(2)  $\forall t = 0, \dots, T-1, \boldsymbol{\Lambda}_{t+1} \preceq \mathbf{X}_{t+1}$  ;  
(3)  $\forall t = 0, \dots, T-1,$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\Lambda}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\Lambda}_{t+1} \mid \mathbf{X}_t \right], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{aligned}$$

**Démonstration :** La preuve se fait exactement de la même façon que pour la démonstration du théorème II.18 en remarquant que  $\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \preceq (\mathbf{X}_{t+1}, \mathbf{W}_{t+2}, \dots, \mathbf{W}_T)$  et que  $\boldsymbol{\Lambda}_{t+1} = \mathbb{E}[\boldsymbol{\lambda}_{t+1} \mid \mathcal{F}_{t+1}] \preceq \mathbf{X}_{t+1}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$  ■

En partant du principe que les problèmes (*SP*) (mesurabilité par rapport à tout le passé des bruits :  $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t$ ) et (*SP<sup>X</sup>*) (mesurabilité par rapport à l'état instantané) sont équivalents dans un cadre markovien, nous pouvons alors considérer que les conditions d'optimalité de (*SP<sup>X</sup>*) s'écrivent sous leur forme adaptée.

$$(PMS_2^X) \quad \begin{cases} \mathbf{X}_0 = \mathbf{W}_0, & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{X}_{t+1} = f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}), & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \boldsymbol{\Lambda}_t = \mathbb{E} \left[ (L_t)'_x{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_x{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\Lambda}_{t+1} \mid \mathbf{X}_t \right], & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \boldsymbol{\Lambda}_T = K'{}^\top(\mathbf{X}_T), & \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u{}^\top(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1})\boldsymbol{\Lambda}_{t+1} \mid \mathbf{X}_t \right] \in -\partial\delta_{\mathcal{U}_t^{\text{ad}}}(\mathbf{U}_t), \\ \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \end{cases}$$

## II.7. Variantes sur les conditions d'optimalité

Les versions (*PMS<sub>1</sub><sup>X</sup>*) et (*PMS<sub>2</sub><sup>X</sup>*) des conditions d'optimalité du problème (*SP<sup>X</sup>*) n'incluent l'expression exacte d'une projection du gradient qu'à l'optimum. Nous cherchons alors à modifier la formulation de (*SP<sup>X</sup>*) afin de pouvoir écrire des conditions du type Karush-Kuhn-Tucker.

Nous nous plaçons donc dans un cadre markovien (bruits blancs) en supposant que les hypothèses II.10 et II.17 sont vérifiées. L'idée ici est de considérer les variables aléatoires de décision comme des fonctions (feedbacks) et d'occulter (momentanément) leurs caractéristiques probabilistes. Les principales idées qui seront développées dans la suite sont inspirées des travaux de Witsenhausen ([114] et [115]) montrant que tout problème d'optimisation stochastique peut s'écrire comme un problème en information décentralisée en propageant la mesure sous-jacente.

**II.7.1. Première approche : commande d'un coût initial.** Nous voulons exhiber une approche fonctionnelle au problème (*SP<sup>X</sup>*) ; nous nous proposons ici de commander la fonction coût du problème vue comme un coût initial émanant d'une dynamique fonctionnelle rétrograde.

## II.7.1.1. Réécriture du problème de commande optimale.

La contrainte d'information  $\mathbf{U}_t \preceq \mathbf{X}_t$ , se traduit par l'existence à chaque instant  $t = 0, \dots, T-1$  d'une fonction mesurable (appelée feedback)  $\phi_t$  telle que :

$$(II.26) \quad \mathbf{U}_t = \phi_t(\mathbf{X}_t), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Nous supposons que  $\phi_t \in \Phi_t \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\mathbb{X}_t; \mathbb{U}_t)$ , pour tout  $t = 0, \dots, T-1$ , nous posons en outre  $\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_0 \times \dots \times \Phi_{T-1}$ .

Soit  $(\mathbf{X}_t)_{t=0, \dots, T}$  un processus aléatoire suivant la dynamique (II.27).

$$(II.27) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_0 &= \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{X}_{t+1} &= f_t(\mathbf{X}_t, \phi_t(\mathbf{X}_t), \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Notons en outre pour tout  $t = 0, \dots, T$ ,  $\mu_t$  la mesure de probabilité de la variable aléatoire  $\mathbf{W}_t$ .

Le coût  $\tilde{J}(\mathbf{U}, \mathbf{X})$  (II.5) à minimiser s'écrit en fonction de toutes les variables aléatoires de commande et d'état pour tous les pas de temps. En utilisant (II.26), nous modifions cette fonction en définissant la fonction coût suivante :

$$(II.28) \quad \begin{aligned} \bar{J}(\phi, \mathbf{X}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t, \phi_t(\mathbf{X}_t), \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T) \right], \\ &= \tilde{J}(\mathbf{U}, \mathbf{X}). \end{aligned}$$

Étant donné que les variables aléatoires d'état suivent la dynamique (II.27) nous pouvons alors exhiber une dynamique rétrograde portant sur les coûts aux différents pas de temps. Soit  $\Psi_t$  l'espace des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{X}_t$  ( $\Psi_t \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\mathbb{X}_t; \mathbb{R})$ ,  $\forall t = 0, \dots, T$ ) et soit  $\Psi \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_0 \times \dots \times \Psi_T$ .

HYPOTHÈSE II.22. Pour tous les pas de temps  $t = 0, \dots, T-1$ , pour toutes fonctions  $\phi_t \in \Phi_t$  et  $\psi_{t+1} \in \Psi_{t+1}$ , les fonctions suivantes sont de carré intégrable :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\psi_{t+1}(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}))] &\in \Psi_t, \\ \mathbb{E} [L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})] &\in \Psi_t. \end{aligned}$$

◆

Pour tout  $t = 0, \dots, T-1$  et  $\phi_t \in \Phi_t$ , nous définissons  $A_t^{\phi_t} : \Psi_{t+1} \rightarrow \Psi_t$  un opérateur linéaire vérifiant :

$$(II.29) \quad \left( A_t^{\phi_t} \psi_{t+1} \right) (\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{W}_{t+1}} \psi_{t+1}(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), w)) \mu_{t+1}(dw).$$

Sous les hypothèses II.22, nous définissons les fonctions de Bellman  $V_t \in \Psi_t$ ,  $\forall t = 0, \dots, T$  de la manière suivante :

$$(II.30) \quad \begin{aligned} V_T(x) &= K(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}_T, \\ V_t(x) &= \mathbb{E} [L_t(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1})] + \left( A_t^{\phi_t} V_{t+1} \right) (x), \quad \forall x \in \mathbb{X}_t, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

C'est une dynamique linéaire, il est alors facile de voir qu'en intégrant la dynamique (II.30) à la fonction coût, nous aurons que :

$$(II.31) \quad \tilde{J}(\mathbf{U}, \mathbf{X}) = \bar{J}(\phi, \mathbf{X}) = \mathbb{E} [V_0(\mathbf{X}_0)].$$

Nous définissons en outre pour tout  $t = 0, \dots, T-1$ , l'ensemble admissible  $\Phi_t^{\text{ad}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi_t \in \Phi_t, \phi_t(x) \in \Gamma_t^{\text{ad}}, \forall x \in \mathbb{X}_t\}$  et  $\Phi^{\text{ad}} \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_0^{\text{ad}} \times \dots \times \Phi_{T-1}^{\text{ad}}$ .

Nous pouvons alors réécrire le problème (SP<sup>X</sup>) sous la forme d'un problème réparti d'optimisation déterministe (mais fonctionnelle) .

$$\begin{aligned}
& \min_{V \in \Psi, \phi \in \Phi} \mathbb{E}[V_0(\mathbf{X}_0)], \\
(SP_1^*) \quad & \text{sous } V_T(\cdot) = K(\cdot), \\
& V_t(\cdot) = \mathbb{E}[L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})] + \left(A_t^{\phi_t} V_{t+1}\right)(\cdot), \quad \forall t = T-1, \dots, 0, \\
& \phi_t \in \Phi_t^{\text{ad}}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.
\end{aligned}$$

Il s'agit d'un problème d'optimisation fonctionnelle linéaire en  $V$  (mais pas forcément en  $\phi$ ), le caractère stochastique ne subsiste plus qu'à travers la contraction faite par l'espérance sur la variable aléatoire de bruit. Nous faisons alors une hypothèse analogue à l'hypothèse II.9 :

HYPOTHÈSE II.23.  $\Phi^{\text{ad}}$  est un sous-ensemble convexe fermé de  $\Phi$ .  $\blacklozenge$

Supposons en outre que la variable aléatoire  $\mathbf{W}_0$  vérifie l'hypothèse suivante :

HYPOTHÈSE II.24. La variable aléatoire  $\mathbf{W}_0$  est une variable aléatoire à densité  $q_0 \in \Psi_0$ .  $\blacklozenge$

Cette hypothèse implique naturellement que la variable aléatoire d'état  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{W}_0$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s. est une variable aléatoire à densité de carré intégrable. Nous noterons cette densité  $p_0 \stackrel{\text{def}}{=} q_0$ .

Le problème  $(SP_1^*)$  est un problème d'optimisation fonctionnelle incorporant une contrainte de dynamique (II.30) et la contrainte d'admissibilité, la contrainte d'information étant désormais codée dans le fait que nous considérons des feedbacks en l'état  $\phi_t : \mathbb{X}_t \rightarrow \mathbb{U}_t$ . Nous nous proposons de traiter le problème de la même façon que dans la section II.3 : nous calculons le gradient de la fonction coût intégrée à partir de celui de la fonction coût originale et de la dynamique (voir théorème A.25 et remarque A.26).

### II.7.1.2. Conditions nécessaires d'optimalité.

Nous donnons ici des conditions nécessaires d'optimalité du type Karush-Kuhn-Tucker du problème  $(SP_1^*)$ .

THÉORÈME II.25. Soient  $(V_t)_{t=0, \dots, T} \in \Psi$  et  $(\phi_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \Phi$  deux suites de fonctions solutions de  $(SP_1^*)$ , supposons en outre que les hypothèses II.10, II.22, II.23, et II.24 sont vérifiées. Il existe alors une suite de fonctions  $(p_t)_{t=0, \dots, T} \in \Psi$  tel que :

$$(PMS_1^*) \quad \begin{cases} V_T(\cdot) = K(\cdot), \\ V_t(\cdot) = \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) \right], \\ \quad \forall t = T-1, \dots, 0, \\ p_0 = q_0, \\ p_{t+1} = (A_t^{\phi_t})^* p_t, \quad \forall t = 0 \dots T-1, \\ \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + \right. \\ \quad \left. (f_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) V_{t+1}'^\top(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) \right] p_t(\cdot) \in -\partial \delta_{\Phi_t^{\text{ad}}}(\phi_t), \\ \quad \forall t = 0 \dots T-1, \end{cases}$$

où  $(A_t^{\phi_t})^*$  est l'opérateur adjoint de  $(A_t^{\phi_t})$ .

**Démonstration :** Nous suivons le même principe que dans la section II.3. En utilisant le théorème A.25 et la remarque A.26, nous posons un Lagrangien  $\mathcal{L} : \Psi \times \Phi \times \Psi \rightarrow \mathbb{R}$  du problème  $(SP_1^*)^4$  :

$$(II.32) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}(V, \phi, p) &= \langle V_0, p_0 \rangle \\ &+ \sum_{t=0}^{T-1} \left\langle \mathbb{E}[L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})] + \left( A_t^{\phi_t} V_{t+1} \right) (\cdot) - V_t(\cdot), p_t(\cdot) \right\rangle \\ &- \langle K(\cdot) - V_T(\cdot), p_T(\cdot) \rangle. \end{aligned}$$

*Dynamique de l'état.* Nous dérivons le Lagrangien (II.32) par rapport à l'état adjoint  $p_t$  à tous les instants  $t = 0, \dots, T$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_t(\cdot) = \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) \right].$$

Pour  $t = T$  nous avons que  $V_T = K$ . Nous obtenons ainsi la dynamique (II.30) du système.

*Dynamique de l'état adjoint.* Nous dérivons le Lagrangien (II.32) par rapport à l'état  $V_t$  à tous les instants  $t = 0, \dots, T$ . Nous obtenons alors l'équation suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_{t+1} = (A_t^{\phi_t})^* p_t.$$

C'est une dynamique en marche avant sur l'état adjoint qui s'écrit comme  $T + 1$  égalités :

$$(II.33) \quad \begin{aligned} p_0 &= q_0, \\ p_{t+1} &= (A_t^{\phi_t})^* p_t, \quad \forall t = 0 \dots T - 1 \end{aligned}$$

Nous verrons par la suite que la dynamique (II.33) représente l'équation de Fokker-Planck : elle propage la densité de l'état.

*Le gradient.* Il reste maintenant à dériver (II.32) par rapport à la commande  $\phi_t$  à chaque instant. Commençons par remarquer que :

$$\frac{\partial (A_t^{\phi_t}) V_{t+1}}{\partial \phi_t} = \int_{\mathbb{W}_{t+1}} V'_{t+1} \left( f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), w) \right) (f_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), w) \mu_{t+1}(dw),$$

où  $V'_t$  est la dérivée de  $V_t$  ( $V'_t(x)$  est un vecteur ligne de taille  $1 \times \dim(\mathbb{X}_t)$  pour tout  $x \in \mathbb{X}_t$ ). En faisant les hypothèses II.10, nous avons alors que :

$$(II.34) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} = \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) V_{t+1}'^\top \left( f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) \right) \right] p_t(\cdot) \\ \in -\partial \delta_{\Phi_t^{\text{ad}}}(\phi_t).$$

C'est la condition d'orthogonalité du gradient. D'où les conditions d'optimalité du problème. ■

La dernière formule de ces conditions d'optimalité traduit l'orthogonalité d'un gradient et nous retrouvons ainsi des conditions d'optimalité du type KKT pour le problème  $(SP^X)$ .

**PROPOSITION II.26** (Équation de Fokker-Planck). *Sous les hypothèses II.22 et II.24, la dynamique (II.33) propage la densité de l'état  $(\mathbf{X}_t)_{t=0, \dots, T}$  suivant (II.27).*

**Démonstration :** La preuve se fait par récurrence sur le temps :

- (1) pour  $t = 0$ ,  $p_0 = q_0$ , c'est donc bien la densité de  $\mathbf{X}_0$ ,
- (2) supposons que  $\mathbf{X}_t$  est une variable aléatoire à densité  $p_t$ ,
- (3) en utilisant la dynamique (II.27), nous avons que pour tout  $\psi \in \Psi_{t+1}$  :

$$\mathbb{E}[\psi(\mathbf{X}_{t+1})] = \mathbb{E}[\psi(f_t(\mathbf{X}_t, \phi_t(\mathbf{X}_t), \mathbf{W}_{t+1}))],$$

comme  $\mathbf{X}_t$  est une variable aléatoire à densité, alors :

$$\mathbb{E}[\psi(\mathbf{X}_{t+1})] = \int_{\mathbb{X}_t} \underbrace{\int_{\mathbb{W}_{t+1}} \psi(f_t(x, \phi_t(x), w)) \mu_{t+1}(dw)}_{=A_t^{\phi_t} \psi} p_t(x) dx,$$

<sup>4</sup>Nous utilisons le produit scalaire usuel dans  $\Psi_t = L^2(\mathbb{U}_t, \mathbb{R}) \forall t = 0, \dots, T$ ,  $\forall \psi_1, \psi_2 \in \Psi_t$ ,  $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{X}_t} \psi_1(x) \psi_2(x) dx$ .

en utilisant le produit scalaire dans  $\Psi_{t+1}$  nous avons alors que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi(\mathbf{X}_{t+1})] &= \langle A_t^{\phi_t} \psi, p_t \rangle, \\ &= \langle \psi, (A_t^{\phi_t})^* p_t \rangle, \\ &= \int_{\mathbb{X}_{t+1}} \psi(x) \underbrace{(A_t^{\phi_t})^* p_t(x)}_{=p_{t+1}} dx, \\ &= \langle \psi, p_{t+1} \rangle, \end{aligned}$$

nous avons alors que la variable aléatoire  $\mathbf{X}_{t+1}$  est bien une variable aléatoire à densité  $p_{t+1}$  obtenue par la dynamique (II.33). ■

**II.7.2. Deuxième approche : propagation de la densité de l'état.** Nous reprenons les mêmes notations et hypothèses que dans la section II.7.1. D'après la proposition II.26 nous avons que la dynamique (II.27) propage des variables aléatoires à densité tel que  $p_t \in \Psi_t$ ,  $\forall t = 0, \dots, T$ . Ces densités suivent une dynamique en marche avant représentée par la formule (II.33).

Nous pouvons alors réécrire le problème ( $SP^X$ ) comme un problème d'optimisation fonctionnelle :

$$\begin{aligned} (SP_2^*) \quad & \min_{p \in \Psi, \phi \in \Phi} \sum_{t=0}^{T-1} \int_{\mathbb{X}_t} \int_{\mathbb{W}_{t+1}} L_t(x, \phi_t(x), w) p_t(x) dx \mu_{t+1}(dw) + \int_{\mathbb{X}_T} K(x) p_T(x) dx, \\ & \text{sous } p_0 = q_0, \\ & p_{t+1} = (A_t^{\phi_t})^* p_t, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ & \phi_t \in \Phi_t^{\text{ad}}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

Le problème ( $SP_2^*$ ) est un problème d'optimisation fonctionnelle incorporant une contrainte de dynamique (II.33) et une contrainte d'admissibilité, la contrainte d'information étant codée dans le fait que nous considérons des feedbacks en l'état  $\phi_t : \mathbb{X}_t \rightarrow \mathbb{U}_t$ . Nous nous proposons de traiter le problème de la même manière que dans la section II.3, en utilisant la remarque A.26.

### II.7.2.1. Conditions nécessaires d'optimalité.

Nous donnons ici des conditions nécessaires d'optimalité du type Karush-Kuhn-Tucker du problème ( $SP_2^*$ ) :

**THÉORÈME II.27.** *Si  $(p_t)_{t=0, \dots, T} \in \Psi$  et  $(\phi_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \Phi$  sont des solutions de ( $SP_2^*$ ); et si nous supposons en outre que les hypothèses II.10, II.22, II.23 et II.24 sont vérifiées; alors il*

existe une suite de fonctions  $(V_t)_{t=0, \dots, T} \in \Psi$  telles que :

$$(PMS_2^*) \quad \begin{cases} p_0 = q_0, \\ p_{t+1} = (A_t^{\phi_t})^* p_t, \quad \forall t = 0 \dots T-1, \\ V_T(\cdot) = K(\cdot), \\ V_t(\cdot) = \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) \right], \\ \quad \forall t = T-1, \dots, 0, \\ \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + \right. \\ \quad \left. (f_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) V_{t+1}'^\top(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) \right] p_t(\cdot) \in -\partial \delta_{\Phi_t^{\text{ad}}}(\phi_t), \\ \quad \forall t = 0 \dots T-1. \end{cases}$$

**Démonstration :** Nous suivons le même principe que dans la section II.3. En utilisant le théorème A.25 et la remarque A.26, nous pouvons écrire le Lagrangien  $\mathcal{L} : \Psi \times \Phi \times \Psi \rightarrow \mathbb{R}$  du problème  $(SP_2^*)$  en utilisant le produit scalaire dans  $\Psi$  :

$$(II.35) \quad \mathcal{L}(p, \phi, V) = \sum_{t=0}^{T-1} \left\langle \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) \right], p_t \right\rangle + \sum_{t=0}^{T-1} \left\langle V_{t+1}, (A_t^{\phi_t})^* p_t - p_{t+1} \right\rangle.$$

*Dynamique de l'état.* Nous dérivons le Lagrangien (II.35) par rapport à l'état adjoint  $V_t$  à tous les instants  $t = 0, \dots, T-1$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_{t+1}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_{t+1} = (A_t^{\phi_t})^* p_t.$$

Nous obtenons ainsi la dynamique de l'état (II.33) du système.

*Dynamique de l'état adjoint.* Nous dérivons le Lagrangien (II.35) par rapport à l'état  $p_t$  à tous les instants  $t = 0, \dots, T-1$ . Au dernier pas de temps  $t = T$  nous avons que :

$$V_T = K.$$

Pour tous les autres pas de temps  $t = T-1, \dots, 0$  nous obtenons :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad V_t(\cdot) = \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) \right] + \left( A_t^{\phi_t} V_{t+1} \right)(\cdot).$$

C'est une dynamique rétrograde (II.30) sur l'état adjoint.

*Le gradient.* Il reste maintenant à dériver (II.35) par rapport à la commande  $\phi$  à chaque instant. Commençons par remarquer que :

$$\frac{\partial (A_t^{\phi_t}) V_{t+1}}{\partial \phi_t} = \int_{\mathbf{W}_{t+1}} V_{t+1}' \left( f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), w) \right) (f_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), w) \mu_{t+1}(dw).$$

Nous pouvons, alors écrire que :

$$(II.36) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_t} &\in -\partial \delta_{\Phi_t^{\text{ad}}}(\phi_t) \\ \Longrightarrow \quad &\mathbb{E} \left[ (L_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) V_{t+1}'^\top(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) \right] p_t(\cdot) \\ &\in -\partial \delta_{\Phi_t^{\text{ad}}}(\phi_t), \end{aligned}$$

C'est la condition d'orthogonalité du gradient. ■

La dernière égalité correspond donc à la projection d'un gradient. Nous retrouvons ainsi des conditions d'optimalité de type KKT pour le problème  $(SP^X)$ .

Par analogie, nous pouvons interpréter l'état adjoint  $p$  du problème  $(SP_1^*)$  comme l'état du problème  $(SP_2^*)$ , il correspond bien à une densité de l'état (par la proposition II.26). De même, nous faisons correspondre à l'état  $V$  du problème  $(SP_1^*)$  l'état adjoint du problème  $(SP_2^*)$ . C'est



en ce sens que nous parlons de  $(SP_1^*)$  et  $(SP_2^*)$  comme des problèmes duaux ayant les mêmes conditions nécessaires d'optimalité.

**II.7.3. La programmation dynamique stochastique.** La dynamique de l'état du problème  $(SP_1^*)$  est monotone :  $V_{t+1}^1(\cdot) \leq V_{t+1}^2(\cdot) \implies V_t^1(\cdot) \leq V_t^2(\cdot)$ . En outre, la fonction coût à minimiser  $\mathbb{E}[V_0(\mathbf{X}_0)] = \langle V_0, p_0 \rangle$  est monotone pour  $p_0$  une densité de probabilité. Le problème de commande optimale  $(SP_1^*)$  est donc trivial : il suffit de minimiser l'état  $V$  à chaque instant. Nous retrouvons alors les équations de Bellman de la programmation dynamique stochastique (voir les travaux de D. Bertsekas et S. Shreve [18]).

**THÉORÈME II.28.** *Supposons que les hypothèses II.10, II.22 et II.24 sont vérifiées. Soient  $(V_t^\sharp)_{t=0, \dots, T} \in \Psi$  et  $(\phi_t^\sharp)_{t=0, \dots, T-1} \in \Phi$  deux suites de fonctions solutions de  $(PDS)$  :*

$$(PDS) \quad \begin{cases} V_T^\sharp(\cdot) = K(\cdot), \\ V_t^\sharp(\cdot) = \min_{u \in \Gamma_t^{\text{ad}}} \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, u, \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}^\sharp(f_t(\cdot, u, \mathbf{W}_{t+1})) \right], \\ \quad \forall t = T-1, \dots, 0, \\ \phi_t^\sharp(\cdot) \in \arg \min_{u \in \Gamma_t^{\text{ad}}} \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, u, \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}^\sharp(f_t(\cdot, u, \mathbf{W}_{t+1})) \right], \\ \quad \forall t = T-1, \dots, 0, \end{cases}$$

alors elles sont solution de  $(SP_1^*)$ .

**Démonstration :** Soient  $(V_t^\sharp)_{t=0, \dots, T}$  et  $(\phi_t^\sharp)_{t=0, \dots, T-1}$  deux suites de fonctions solutions de  $(PDS)$ . Nous utilisons un résultat de sélections mesurables sous un min (théorème 14.37 de [98]) pour remplacer la minimisation ponctuelle par une minimisation fonctionnelle et donc :

$$(II.37) \quad V_t^\sharp(\cdot) = \min_{\phi_t \in \Phi_t^{\text{ad}}} \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}^\sharp(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) \right], \quad \forall t = 0, \dots, T-1,$$

de plus :

$$(II.38) \quad \phi_t^\sharp(\cdot) \in \arg \min_{\phi_t \in \Phi_t^{\text{ad}}} \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}^\sharp(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) \right], \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Notons  $\vec{\phi}_t = (\phi_l)_{l=t, \dots, T-1}$ ,  $\forall t = 0, \dots, T-1$  et  $V_t^{\vec{\phi}_t}$  la fonction obtenue récursivement par (II.30). Nous avons alors que  $V_t^\sharp = V_t^{\vec{\phi}_t^\sharp}$  où  $\vec{\phi}_t^\sharp = (\phi_l^\sharp)_{l=t, \dots, T-1}$ ,  $\forall t = 0, \dots, T-1$  (la fonction de Bellman à l'instant  $t$  ne dépend que des feedbacks futurs).

En utilisant l'équation (II.37) et (II.38) nous avons que :

$$(II.39) \quad V_0^{\vec{\phi}_0^\sharp}(\cdot) \leq \mathbb{E} \left[ L_0(\cdot, \phi_0(\cdot), \mathbf{W}_1) \right] + \left( A_0^{\phi_0} V_1^{\vec{\phi}_1^\sharp} \right)(\cdot), \quad \forall \phi_0 \in \Phi_0^{\text{ad}},$$

comme  $p_0 \geq 0$  alors nous avons que :

$$(II.40) \quad \begin{aligned} \left\langle V_0^{\vec{\phi}_0^\sharp}, p_0 \right\rangle &\leq \left\langle \underbrace{\mathbb{E} \left[ L_0(\cdot, \phi_0(\cdot), \mathbf{W}_1) \right] + \left( A_0^{\phi_0} V_1^{\vec{\phi}_1^\sharp} \right)(\cdot)}_{=V_0^{\phi_0, \vec{\phi}_1^\sharp}}, p_0 \right\rangle, \quad \forall \phi_0 \in \Phi_0^{\text{ad}}, \\ &\vdots \\ &\leq \left\langle V_0^{\phi_0, \dots, \phi_{T-1}}, p_0 \right\rangle. \end{aligned}$$

Par récurrence nous obtenons alors que :

$$\left\langle V_0^{\vec{\phi}_0^\sharp}, p_0 \right\rangle \leq \left\langle V_0^{\vec{\phi}_0}, p_0 \right\rangle, \quad \forall \vec{\phi}_0 = (\phi_0, \dots, \phi_{T-1}) \in \Phi^{\text{ad}},$$

d'où le résultat que  $\phi$  est solution de  $(SP_1^*)$ . ■

REMARQUE II.29. Le théorème II.28 montre que si nous avons une solution qui vérifie les équations de la programmation dynamique ( $PDS$ ), alors elle est dans l'argmin du problème ( $SP_1^*$ ). Ceci a été garanti par le passage de l'inéquation (II.39) à l'inéquation (II.40). Afin d'obtenir l'implication inverse nous devons garantir l'inégalité (II.40) pour toutes les densités possibles. En pratique, cette hypothèse est généralement invérifiable. Nous nous contenterons dans la suite de supposer que nous sommes dans un cadre où les équations de la programmation dynamique seront nécessairement vérifiées pour la solution optimale.  $\blacklozenge$

**II.7.4. Retour à une interprétation par variables aléatoires.** Les approches décrites dans les sections II.7.1 et II.7.2 utilisent une interprétation fonctionnelle des variables du problème (commande, état, état adjoint). Cependant, dans les premières versions des conditions d'optimalité ( $PMS_1$ ) et ( $PMS_2$ ) les variables du problèmes sont considérées comme des variables aléatoires. Dans cette section nous nous attachons à faire le lien entre les deux interprétations (fonctionnelle v.s. variables aléatoires).

Dans le point de vue des conditions d'optimalité ( $PMS_1^*$ ) et de ( $PMS_2^*$ ), nous propageons la dynamique rétrograde des fonctions de Bellman  $V$  (vues respectivement comme état et état adjoint) mais nous n'utilisons effectivement dans le calcul du gradient que la dérivée de ces fonctions. Nous pouvons alors essayer d'établir une dynamique directement sur les dérivées des fonctions de Bellman  $V'$ .

Commençons par dériver la dynamique de l'état du problème ( $SP_1^*$ ) (correspondant à la dynamique de l'état adjoint du problème ( $SP_2^*$ )), sous réserve de satisfaction des hypothèses II.10 et que le feedback optimal  $\phi_t$  soit  $\mathcal{C}^1$ ,  $\forall t = 0, \dots, T-1$ . L'équation II.30 donne alors :

$$(II.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} V'_T(x) = K'(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}_T \\ V'_t(x) = \mathbb{E} \left[ (L_t)'_x(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1}) + (L_t)'_u(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1}) \phi'_t(x) \right. \\ \quad \left. + V'_{t+1}(f_t(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1})) \left( (f_t)'_x(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1}) + (f_t)'_u(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1}) \phi'_t(x) \right) \right], \\ \quad \forall x \in \mathbb{X}_t, \quad \forall t = T-1, \dots, 0, \\ V'_t(x) = \mathbb{E} \left[ (L_t)'_x(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1}) + V'_{t+1}(f_t(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1})) (f_t)'_x(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1}) \right] \\ \quad + \mathbb{E} \left[ \underbrace{\left( (L_t)'_u(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1}) + V'_{t+1}(f_t(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1})) (f_t)'_u(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1})) \right)}_{\text{formant un angle aigu avec le gradient (II.34) du problème (SP}_1^*)} \phi'_t(x) \right], \\ \quad \forall x \in \mathbb{X}_t, \quad \forall t = T-1, \dots, 0. \end{array} \right.$$

Si on identifiait la variable aléatoire  $\mathbf{A}_t$  avec  $V'^\top(\mathbf{X}_t)$  et la commande  $\mathbf{U}_t$  avec  $\phi_t(\mathbf{X}_t)$ , nous pourrions faire le parallèle entre les équations (II.41) et les conditions d'optimalité ( $PMS_2^X$ ); le terme formant un angle aigu avec le gradient (II.34) semble être *en trop* surtout qu'il incorpore la dérivée du feedback optimal. Nous nous attachons alors à avoir une version des conditions d'optimalité qui évite le calcul de cette dérivée de la commande.

THÉORÈME II.30. Soient  $(V_t)_{t=0, \dots, T} \in \Psi$  et  $(\phi_t)_{t=0, \dots, T-1} \in \Phi$  deux suites de fonctions solutions uniques de ( $SP_1^*$ ) vérifiant ( $PDS$ ) tel que  $\phi_t \in \mathcal{C}^1(\mathbb{X}_t; \mathbb{U}_t)$ ,  $\forall t = 0, \dots, T-1$ , supposons en outre que les hypothèses II.10, II.22, II.23 et II.24 sont vérifiées. Il existe alors une suite de

densités  $(p_t)_{t=0,\dots,T} \in \Psi$  tel que :

$$(PMS^{**}) \quad \begin{cases} p_0 = q_0, & p_{t+1} = (A_t^{\phi_t})^* p_t, & \forall t = 0 \dots T-1, \\ V'_T(\cdot) = K'(\cdot), \\ V'_t(\cdot) = \mathbb{E} \left[ (L_t)'_x(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + V'_{t+1}(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) (f_t)'_x(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) \right], \\ \forall t = T-1, \dots, 0, \\ \mathbb{E} \left[ (L_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + \right. \\ \left. V'_{t+1}(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) (f_t)'_u(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) \right] p_t(\cdot) \in -\partial \delta_{\Phi_t^{\text{ad}}}(\phi_t), \\ \forall t = 0 \dots T-1. \end{cases}$$

**Démonstration :** Soient  $(V_t)_{t=0,\dots,T}$  et  $(\phi_t)_{t=0,\dots,T-1}$  deux suites de fonctions solutions de  $(SP_1^*)$  vérifiant  $(PDS)$ . Posons :

$$l_t : \mathbb{X}_t \times \mathbb{U}_t \rightarrow \mathbb{R}, \\ (x, u) \mapsto \mathbb{E} \left[ L_t(x, u, \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}(f_t(x, u, \mathbf{W}_{t+1})) \right],$$

d'après le théorème II.28, nous avons que  $V_t(x) = \min_{u \in \Gamma_t} l_t(x, u)$ . Sous l'hypothèse d'unicité de l'arg min, la fonction  $V_t$  est différentiable et nous pouvons écrire que  $V'_t(x) = (l_t)'_u(x, u^\sharp)$ , où  $u^\sharp$  réalise le minimum unique de  $l_t$  en la deuxième composante (voir le théorème de Danskin [16]). Comme  $(\phi_t)_{t=0,\dots,T-1}$  est la solution unique de  $(SP_1^*)$ , nous avons alors que  $V'_t(x) = (l_t)'_u(x, \phi_t(x))$ ,  $\forall t = 0, \dots, T-1$ . D'où le résultat que :

$$(II.42) \quad V'_t(\cdot) = \mathbb{E} \left[ (L_t)'_x(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) + V'_{t+1}(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) (f_t)'_x(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) \right], \\ \forall t = T-1, \dots, 0,$$

en faisant correspondre les dynamiques de la dérivée de la fonction de Bellman entre les conditions d'optimalité (II.41) et l'équation (II.42) nous avons alors que :

$$\mathbb{E} \left[ \left( (L_t)'_u(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1}) + V'_{t+1}(f_t(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1})) (f_t)'_u(x, \phi_t(x), \mathbf{W}_{t+1}) \right) \phi'_t(x) \right] = 0, \\ \forall x \in \mathbb{X}_t, \quad \forall t = T-1, \dots, 0.$$

Cette dernière équation peut être interprétée de la façon suivante (voir le théorème de Danskin [16]) : si le feedback optimal est à l'intérieur de l'ensemble des contraintes alors le gradient est nul, sinon le gradient est orthogonal à l'ensemble des contraintes alors que la dérivée du feedback est tangente à cet ensemble (car la solution *glisse* le long de la frontière de cet ensemble en cas de perturbation du problème) : donc les deux vecteurs sont orthogonaux et leur produit scalaire est nul. ■

L'avantage de ce résultat est qu'au moins à l'optimum,  $\phi'_t$  n'intervient plus, en particulier dans le calcul du gradient. Cependant, d'une part ce résultat a été établi sous une hypothèse d'unicité de l'arg min, d'autre part, si on se sert des conditions  $(PMS^{**})$  pour calculer  $V'_t$  avec des  $\phi_t$  non optimaux (ceux que l'on rencontre au cours d'un algorithme itératif d'optimisation), alors l'expression des conditions  $(PMS^{**})$  ne fournit pas l'expression correcte d'un gradient. Les mêmes considérations s'appliquent à l'utilisation des équations  $(PMS_1^X)$  et  $(PMS_2^X)$  pour évaluer le gradient en dehors de l'optimum.

Nous sommes maintenant capable de refaire le lien entre les conditions d'optimalité émanant des interprétations algébriques avec les conditions d'optimalité fonctionnelles.

**THÉORÈME II.31.** Soient  $(V_t)_{t=0,\dots,T} \in \Psi$  et  $(\phi_t)_{t=0,\dots,T-1} \in \Phi$  deux suites de fonctions et  $(p)_{t=0,\dots,T} \in \Psi$  une suite de densités vérifiant  $(PMS^{**})$ . Posons  $(\mathbf{X}_t)_{t=0,\dots,T}$  le processus aléatoire dont la densité à chaque instant est donnée par  $p_0 =$

$q_0$ ,  $p_{t+1} = (A_t^{\phi_t})^* p_t$ ,  $\forall t = 0 \cdots T - 1$ ,  $(\mathbf{U}_t)_{t=0, \dots, T-1}$  le processus aléatoire vérifiant  $\mathbf{U}_t = \phi_t(\mathbf{X}_t)$ ,  $\forall t = 0 \cdots T - 1$  et posons finalement  $(\mathbf{\Lambda}_t)_{t=0, \dots, T}$  le processus aléatoire vérifiant  $\mathbf{\Lambda}_t = V_t'^{\top}(\mathbf{X}_t)$ ,  $\forall t = 0 \cdots T$ .

Ces trois processus vérifient alors les conditions d'optimalité ( $PMS_2^X$ ).

**Démonstration :** Il suffit de remplacer la définition de ces processus dans ( $PMS^{**}$ ) ■

## II.8. Conclusion

Au cours de ce chapitre, nous nous sommes attaché à présenter différentes approches variationnelles à un problème de commande optimale stochastique en temps discret. Le but était à chaque fois de présenter des conditions d'optimalités du problème considéré.

Nous avons considéré pour cela deux interprétations différentes des variables du problème : une interprétation dite algébrique où nous considérons un problème d'optimisation sur un ensemble de variables aléatoires, et une interprétation fonctionnelle où le problème traité est interprété comme un problème d'optimisation fonctionnelle.

Les versions algébriques des conditions d'optimalité se déclinent sous deux formes différentes : une forme dite non adaptée ( $PMS_1$ ) et une forme adaptée ( $PMS_2$ ), l'une étant obtenue à partir de l'autre par projection sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires mesurables par rapport à la filtration des bruits du problème.

Les hypothèses de problème markovien permettent la réécriture de ces conditions avec un conditionnement effectué par rapport à la  $\sigma$ -algèbre engendrée par une variable aléatoire de dimension fixe ( $\mathbf{X}_t$ ), ce qui est un avantage au niveau numérique. Cependant, on ne sait pas obtenir directement les conditions d'optimalité ( $PMS_1^X$ ) et ( $PMS_2^X$ ) en partant d'une formulation sous contrainte de  $\mathbf{X}_t$ -mesurabilité, en formant un Lagrangien et en le dérivant par rapport à toutes les variables. En effet, cela nous conduirait à dériver des multi-applications par rapport à leur argument, ce que nous ne savons pas faire en toute généralité. Donc, nous ne savons obtenir ces conditions d'optimalité qu'en partant des conditions ( $PMS_1$ ) et ( $PMS_2$ ) et en les spécialisant au cas markovien. Une conséquence est que le terme orthogonal aux contraintes ne peut pas s'interpréter comme un gradient ailleurs qu'à l'optimum.

Une façon de tenter de répondre à cette difficulté est de reformuler le problème de façon fonctionnelle. Nous cherchons donc maintenant la commande comme un feedback  $\phi_t : \mathbb{X}_t \rightarrow \mathbb{U}_t$ . Et nous pouvons alors écrire des conditions du type Karush-Kuhn-Tucker des problèmes ( $SP_1^*$ ) et ( $SP_2^*$ ) (( $PMS_1^*$ ) et ( $PMS_2^*$ )).

Cependant, l'apparition de la dérivée du feedback  $\phi_t'$  dans ces conditions nous pose des problèmes théoriques (sous quelles hypothèses le feedback optimal sera  $\mathcal{C}^1$ ?) et pratiques (le plus souvent le feedback optimal n'est pas dérivable, voire continu!). Le résultat du théorème II.30 nous permet alors d'exhiber des conditions d'optimalité qui ne font pas intervenir la dérivée du feedback mais la dynamique de la dérivée de la fonction de Bellman (qui a une interprétation pratique : coût marginal).

Les différentes approches suivies au cours de ce chapitre, ainsi que les différentes conditions d'optimalité nous ont permis de traduire la structure d'information du système. Cependant, nous restons toujours dans le cadre d'espaces de dimensions infinies, l'application numérique directe de ces approches n'est donc pas possible sans effectuer au préalable une discrétisation des variables aléatoires (dans le cadre d'une interprétation algébrique) ou des fonctions (dans le cadre de l'interprétation fonctionnelle). Dans les prochains chapitres, nous nous intéresserons alors à différents aspects de cette discrétisation.



## Estimation de l'espérance conditionnelle

Les problèmes d'optimisation stochastique sont des problèmes d'optimisation en dimension infinie. Outre la phase d'optimisation, une phase d'approximation est nécessaire pour leur résolution numérique. Dans un problème type d'optimisation stochastique (I.1), il s'agit d'approximer à la fois l'opérateur d'espérance dans la fonction coût à minimiser ainsi que la contrainte d'information.

Pour répondre à cette problématique d'approximation, plusieurs travaux ont été inspirés de l'approche *Monte-Carlo*. L'approche par *chroniques organisées en scénarios arborescents* a ainsi été développée. Nous nous référerons surtout aux divers travaux du groupe SOWG sur ce sujet, à savoir principalement la thèse de K. Barty [7], nous renvoyons aussi le lecteur aux travaux de G. Ch. Pflug [81], de W. Romisch [52] et de J. Dupacova [44].

Cette approche permet d'effectuer simultanément l'approximation de l'espérance de la fonction coût ainsi que la contrainte d'information qui est supposée être prise en compte par la structure arborescente des scénarios. Cependant, une difficulté majeure de cette méthode vient limiter ses performances par rapport à l'approche *programmation dynamique* traditionnelle. En effet, l'approche par *chroniques organisées en scénarios arborescents* est dans l'incapacité de fournir directement la solution du problème sous forme de loi de *feedback*.

La question de la synthèse de *feedback* a posteriori à partir des résultats obtenus par l'approche *scénarios arborescents* a été au cœur de plusieurs travaux entrepris au SOWG. Dans cette approche, nous sommes confronté à un dilemme : au début de l'arbre de scénarios, le futur du modèle est riche et les valeurs obtenues sur les différents nœuds de l'arbre sont de bonne qualité, mais malheureusement ce nombre de nœuds reste modeste (le nombre de nœuds à chaque instant étant le nombre de points dont on dispose pour inférer une loi de commande en feedback à cet instant). Il augmente au fur et à mesure que nous avançons dans l'arbre mais simultanément la qualité se dégrade car le futur tend à s'approcher de la situation déterministe. L'idéal serait d'avoir le même nombre de nœuds du début de l'horizon d'optimisation jusqu'à sa fin ; en même temps il faut éviter d'optimiser indépendamment sur chaque chronique et supposer ainsi un futur déterministe dès le début de l'arbre.

Une approche, basée sur des méthodes de maillage (*mesh methods*), a été développée par M. Brodie et P. Glasserman pour essayer de remédier à ce problème [25]. L'idée est d'étendre l'information disponible à un nœud particulier de l'arbre à tous les nœuds voisins ; un poids est alors donné à chaque nœud et une moyenne pondérée est faite. Cette moyenne peut être vue comme l'approximation de l'espérance conditionnelle en ce nœud particulier de l'arbre sachant les trajectoires passées.

Nous essayons, dans ce présent mémoire, de reprendre cette idée générique et d'apporter une alternative aux techniques de discrétisation par arbres de scénarios. La procédure proposée est la suivante : une collection de scénarios est générée et il s'agit de considérer cette collection comme le support discret de la loi de probabilité des variables impliquées dans le problème de départ. C'est l'approche *particulière* : en partant de l'écriture des conditions d'optimalité (décrites dans le chapitre II) et de formules d'estimation d'espérance conditionnelle, nous pouvons éviter la phase de quantification des chroniques et passer à une discrétisation directe des conditions d'optimalité.

Dans ce chapitre, nous nous proposons de présenter cette procédure de résolution numérique d'un problème d'optimisation stochastique motivant ainsi le recours à des estimateurs de

l'espérance conditionnelle. Nous ferons, ensuite le point sur les différentes méthodes numériques permettant de traiter ces espérances et espérances conditionnelles, soit au niveau de la fonction objective et des contraintes, soit au niveau des conditions d'optimalité. Pour cela, nous présenterons un éventail de méthodes d'approximation fonctionnelle d'une densité de probabilité et d'une densité conditionnelle. Nous nous intéresserons, dans la dernière section, à l'approximation de l'opérateur d'espérance conditionnelle dans un cas univarié et dans le cas le plus général multivarié.

### III.1. Motivations

Reprenons le problème type d'optimisation stochastique (I.1). Nous nous donnons ainsi un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  et nous nous intéressons à la minimisation de l'espérance d'une fonctionnelle coût notée  $j : \mathbb{U} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\mathbb{U}$  est l'espace des commandes et  $\Xi$  l'espace des bruits. Cette minimisation est faite par rapport à une commande  $(\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}) \in \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{U})$ , respectant une contrainte d'information modélisée par la mesurabilité par rapport à une variable aléatoire d'observation  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$  et une contrainte d'admissibilité :

$$(III.1) \quad \begin{aligned} \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}} J(\mathbf{U}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})], \\ \text{sous } \mathbf{U} &\in \mathcal{U}^{\text{ad}} \cap \mathcal{U}^{\text{mes}}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  un sous-ensemble convexe fermé de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{U}^{\text{mes}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}\}$ , un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{U}$  tel que  $\Pi_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathcal{U}^{\text{mes}}) \subset \mathcal{U}^{\text{mes}}$ .

Le problème (III.1) est un problème d'optimisation en dimension infinie. Une étape d'approximation est alors nécessaire. Deux possibilités se présentent : optimiser d'abord, puis approximer ou approximer d'abord, puis optimiser.

**III.1.1. Optimiser d'abord, puis approximer.** Nous avons vu dans le chapitre II (proposition II.4) que si  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$  est une solution de III.1 alors elle vérifie l'équation suivante :

$$\mathbb{E}[\nabla_{\mathbf{u}} j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi}) \mid \mathbf{Y}] \in -\partial \delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}),$$

Pour résoudre le problème (III.1) il reste alors à approximer cette espérance conditionnelle. En posant  $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot \mid \cdot] : \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  l'opérateur d'espérance conditionnelle approximé, il nous reste donc à effectuer une étape d'approximation et résoudre :

$$\widehat{\mathbb{E}}[\nabla_{\mathbf{u}} j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi}) \mid \mathbf{Y}] \in -\partial \delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}).$$

**III.1.2. Approximer d'abord, puis optimiser.** Nous cherchons, ici, à approximer la contrainte de mesurabilité dans (III.1) ( $\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbb{E}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y}]$ ). En posant  $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot \mid \cdot] : \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  l'opérateur d'espérance conditionnelle approximé, il s'agit de résoudre :

$$(III.2) \quad \begin{aligned} \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{U}} J(\mathbf{U}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})], \\ \text{sous } \mathbf{U} &= \widehat{\mathbb{E}}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y}], \\ &\mathbf{U} \in \mathcal{U}^{\text{ad}}. \end{aligned}$$

En supposons que  $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot \mid \cdot]$  est un opérateur linéaire auto-adjoint vérifiant  $\Pi_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\widehat{\mathcal{U}}^{\text{mes}}) \subset \widehat{\mathcal{U}}^{\text{mes}}$  où

$$\widehat{\mathcal{U}}^{\text{mes}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{U} \in \mathcal{U}, \mathbf{U} = \widehat{\mathbb{E}}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y}]\} \subset \mathcal{U}^{\text{mes}},$$

on montre, exactement de la même manière que dans la proposition II.4, que si  $\mathbf{U}$  est solution de (III.2) alors :

$$\widehat{\mathbb{E}}[\nabla_{\mathbf{u}} j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi}) \mid \mathbf{Y}] \in -\partial \delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(\mathbf{U}).$$

Il est alors évident que sous ces hypothèses sur l'opérateur d'approximation de l'espérance conditionnelle, nous avons l'équivalence entre l'approche approximer la contrainte d'information d'abord puis optimiser (A-O) et celle optimiser d'abord ensuite approximer les conditions d'optimalité (O-A).

REMARQUE III.1 (Décomposition d'un estimateur de l'espérance conditionnelle). Généralement l'opérateur d'approximation  $\widehat{\mathbb{E}}$  se décompose en deux opérateurs :  $\widehat{\mathbb{E}} = R \circ Q$ .

- $Q : \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{U}^N \times \mathbb{Y}^N$  c'est un opérateur de quantification ou d'échantillonnage (*sampling* en Anglais) associant aux variables aléatoires  $N$  particules obtenues par un tirage de type Monte-Carlo,
- $R : \mathbb{U}^N \times \mathbb{Y}^N \rightarrow \mathcal{U}$  un opérateur d'interpolation-régression qui utilise les particules tirées pour générer une nouvelle variable aléatoire.

Dans la suite nous appellerons estimateur de l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  sachant  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$  à partir de particules  $(\mathbf{U}^i, \mathbf{Y}^i)_{i=1, \dots, N}$ , une fonction  $\widehat{r} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U}$  tel que :

$$\widehat{r} \circ \mathbf{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \widehat{r}(\mathbf{Y}) = \widehat{\mathbb{E}}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y}] = R \circ Q(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = R((\mathbf{U}^i)_{i=1, \dots, N}, (\mathbf{Y}^i)_{i=1, \dots, N}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

◆

REMARQUE III.2. L'approximation de l'espérance conditionnelle peut, elle même, être vue comme un problème de résolution numérique d'un problème d'optimisation stochastique. En effet l'opérateur d'espérance conditionnelle peut être vu comme un projecteur sur l'ensemble des variables aléatoires mesurables par rapport au conditionnement :

$$\mathbb{E}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y}] = \arg \min_{\mathbf{V} \preceq \mathbf{Y}} \|\mathbf{U} - \mathbf{V}\|_{\mathcal{U}}^2.$$

Estimer un opérateur d'espérance conditionnelle est alors équivalent à résoudre numériquement un problème d'optimisation stochastique. ◆

La question qui se pose maintenant est : comment évaluer cet opérateur approximé de l'espérance conditionnelle? Afin d'apporter des éléments de réponse à cette question, nous présenterons une brève revue de la littérature. Nous commencerons par les méthodes d'estimation de densité et de densité conditionnelle qui ont inspiré les estimateurs d'espérance conditionnelle. Loin d'être exhaustif, cet inventaire traitera uniquement des méthodes d'estimation dites non-paramétriques.

### III.2. Estimation de densité

DÉFINITION III.3 (variable aléatoire à densité). Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ , une variable aléatoire. On dit que  $\mathbf{X}$  est une variable aléatoire à densité s'il existe une application  $p : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  (appelée densité de  $\mathbf{X}$ ), tel que pour toute fonction continue bornée  $\psi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  nous avons que :

$$\mathbb{E}[\psi(\mathbf{X})] = \int_{\mathbb{X}} \psi(x)p(x)dx.$$

◆

Les méthodes d'estimation de densité sont largement traitées dans la littérature. Nous faisons surtout référence aux travaux de B.W. Silverman [105] faisant l'inventaire des différentes méthodes et donnant les principaux résultats asymptotiques pour différents estimateurs. D'une manière plus générale, l'estimation d'une densité peut être vue comme une estimation fonctionnelle. Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de Prakasa Rao [88] offrant un traitement plutôt approfondi sur le sujet de l'estimation fonctionnelle non-paramétrique.

Dans cette section, nous posons  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité.  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$  une variable aléatoire à densité  $p$  inconnue et à valeurs scalaires ( $\mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}$ ). Un tirage de particules de la variable aléatoire  $\mathbf{X}$  est une collection de  $N$  réalisations de cette même variable aléatoire. Nous notons la collection de ces particules :  $\{\mathbf{X}^i, \quad i = 1, \dots, N\}$ . Nous cherchons alors à estimer la densité de probabilité inconnue de  $\mathbf{X}$ .



**III.2.1. Estimation par histogrammes.** La plus simple des estimations non-paramétriques de densité est l'*estimation à histogrammes*. Bien que pas très souvent utilisée en pratique, elle est largement reprise dans tous les ouvrages faisant l'inventaire des dites méthodes.

Nous notons  $\mathbb{I}$  la fonction indicatrice d'ensemble ( $\mathbb{I}_A(x) = 0$  si  $x \notin A$ ,  $\mathbb{I}_A(x) = 1$  si  $x \in A$ ) et par  $\lfloor x \rfloor$  la partie entière d'un réel  $x$ .

Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à densité inconnue  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et soient  $\{\mathbf{X}^i, i = 1, \dots, N\}$ ,  $N$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de  $\mathbf{X}$ .

Étant données une origine  $t \in \mathbb{R}$  et une largeur de fenêtre  $h \in \mathbb{R}_+$  les fenêtres de l'estimateur à histogrammes sont données par :  $[t+mh, t+(m+1)h[$ , pour tous les entiers  $m \in \mathbb{Z}$ . L'estimateur s'écrit alors :

$$(III.3) \quad \widehat{\mathbf{p}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{Nh} (\text{nombre de particules } \mathbf{X}^i \text{ dans la même fenêtre que } x).$$

Plus formellement, nous pouvons donner cette définition pour l'estimateur à histogrammes pour la densité de probabilité d'une variable aléatoire  $\mathbf{X}$ .

**DÉFINITION III.4 (Estimateur à histogrammes).** Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à densité inconnue  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et soient  $\{\mathbf{X}^i, i = 1, \dots, N\}$   $N$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de  $\mathbf{X}$ . Étant donnés deux paramètres  $(h, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ , l'estimateur à histogramme de  $p$  en un point  $x \in \mathbb{R}$  est donné par :

$$\widehat{\mathbf{p}}(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{\{x \in \mathbb{R}, \lfloor \frac{x-t}{h} \rfloor = \lfloor \frac{\mathbf{X}^i-t}{h} \rfloor\}}(x).$$

◆

La grille donnant naissance à ces fenêtres peut être à pas fixes ou variables. Cette définition peut alors être étendue en faisant varier la largeur de fenêtre  $h$  :

$$(III.4) \quad \widehat{\mathbf{p}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \frac{(\text{nombre de particules } \mathbf{X}^i \text{ dans la même fenêtre que } x)}{(\text{largeur de la fenêtre contenant } x)}.$$

**III.2.2. Estimation naïve.** Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à densité inconnue  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et soient  $\{\mathbf{X}^i, i = 1, \dots, N\}$ ,  $N$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de  $\mathbf{X}$ .

À partir de la définition de la densité de probabilité d'une variable aléatoire  $\mathbf{X}$  de densité  $p$  nous pouvons écrire que :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b, \quad \mathbb{P}(a < \mathbf{X} < b) = \int_a^b p(x) dx,$$

et donc :

$$p(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \mathbb{P}(x-h < \mathbf{X} < x+h).$$

Pour tout scalaire positif  $h$ , nous pouvons naïvement estimer la probabilité d'être dans l'intervalle  $]x-h, x+h[$  par la fraction de nombre de particules se trouvant dans ce même intervalle. Un estimateur naturel  $\widehat{\mathbf{p}}$  de la densité  $p$  peut être donné par :

$$(III.5) \quad \widehat{\mathbf{p}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2Nh} (\text{nombre de particules } \mathbf{X}^i \text{ dans } ]x-h, x+h[).$$

Pour mieux exprimer cet estimateur nous définissons une fonction *noyau* de la manière suivante :

$$\mathcal{K}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{I}_{\{|x| < 1\}}(x)}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous en déduisons cette définition de l'estimateur naïf d'une densité.

**DÉFINITION III.5** (Estimateur naïf). Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à densité inconnue  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et soient  $\{\mathbf{X}^i, i = 1, \dots, N\}$   $N$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de  $\mathbf{X}$ . Étant donné un paramètre  $h \in \mathbb{R}_+$ , l'estimateur naïf de  $p$  en un point  $x \in \mathbb{R}$  est donné par :

$$\widehat{p}(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}^i - x}{h}\right),$$

où :  $\mathcal{K}(x) = \frac{\mathbb{I}_{\{|x| < 1\}}(x)}{2}$ . ◆

Cette définition nous permet de faire le parallèle entre l'estimateur naïf et l'estimateur à histogrammes. En effet l'expression de la définition III.4 et celle de la définition III.5 sont très proches sauf que les fenêtres de l'estimateur naïf sont centrées sur les particules tirées alors que celles de l'estimateur à histogrammes sont données a priori. De plus, dans le premier cas, une particule ne sert qu'une et une seule fois dans l'estimation de la densité en un point ; dans le second cas, la même particule peut servir dans l'estimation de la densité en plusieurs points.

L'expression de la définition III.5 nous permet de généraliser l'expression d'un estimateur non-paramétrique de la densité d'une variable aléatoire. Nous verrons par la suite que la plupart des estimateurs s'inscrivent sous cette formulation.

**III.2.3. Estimation à noyaux.** Les estimateurs à histogrammes et estimateurs naïfs renvoient à une expression approximée de la densité qui n'est pas continue. L'estimateur à noyaux (Kernel Density Estimator) peut alors être vu comme un lissage de ces deux derniers estimateurs. L'idée de cette technique est d'étendre l'influence de chaque particule de l'échantillon à une zone environnante en plaçant un noyau centré en chacune de ces particules.

Nous remplaçons la fonction indicatrice dans la définition III.5 de l'estimateur naïf par un noyau  $\mathcal{K}$  continu qui satisfait :  $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(x) dx = 1$ . Le plus souvent  $\mathcal{K}$  sera pris comme une densité symétrique de probabilité.

**DÉFINITION III.6** (Estimateur à noyaux (KDE)). Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à densité inconnue  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et soient  $\{\mathbf{X}^i, i = 1, \dots, N\}$ ,  $N$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de  $\mathbf{X}$ . Étant donné un paramètre  $h \in \mathbb{R}_+$ , l'estimateur à noyaux de  $p$  en un point  $x \in \mathbb{R}$  (Kernel Density Estimator) est donné par :

$$\widehat{p}(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}^i - x}{h}\right).$$
◆

Le paramètre  $h$  est le paramètre de largeur de fenêtre. Si  $h$  tend vers 0 (figure III.1) l'estimateur tend vers une somme de fonctions Dirac et chaque particule contribue indifféremment à l'estimation ; inversement, plus  $h$  est grand, plus l'estimation est floue (figure III.3) et toutes les particules contribuent simultanément à l'estimation. Un choix optimal de la largeur de fenêtre  $h$  doit alors être fait pour que les particules contribuent avec des poids différents à l'estimation (voir la section III.3).

**III.2.4. Estimation des plus proches voisins.** L'estimateur des plus proches voisins ( $k$ -Nearest Neighbour) représente une tentative d'adapter le degré de lissage à la densité locale des données. Ce degré de lissage est contrôlé par un entier  $k \in \mathbb{N}$ , choisi très petit par rapport à la taille  $N$  de l'échantillon. En posant  $d(x, y) = |x - y|$  la distance entre deux points  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$ , nous notons pour tout réel  $x \in \mathbb{R}$  les distances aux particules  $\{\mathbf{X}^i, i = 1, \dots, N\}$  rangées dans l'ordre croissant :

$$d_1(x) \leq d_2(x) \leq \dots \leq d_N(x).$$

DÉFINITION III.7 (Estimateur des plus proches voisins (k-NN)). L'estimateur au  $k$ -ième plus proche voisin de la densité de probabilité de  $\mathbf{X}$  en un point  $x \in \mathbb{R}$  s'écrit :

$$\widehat{p}(x) = \frac{k}{2Nd_k(x)}.$$

◆

Pour comprendre cette définition, nous supposons que la densité de probabilité de  $\mathbf{X}$  en un point  $x$  est  $p(x)$ . Pour un échantillon de taille  $N$ , nous nous attendons à ce que  $2Nhp(x)$  particules se trouvent dans l'intervalle  $]x-h, x+h[$  (voir la section III.2.2 traitant de l'estimateur naïf). D'un autre côté, par définition de l'estimateur des  $k$ -plus proches voisins, nous avons que exactement  $k$  particules se trouvent dans l'intervalle  $]x-d_k(x), x+d_k(x)[$ , une approximation de la densité en  $x$  peut alors être obtenue par :

$$k = 2Nd_k(x)\widehat{p}(x).$$

Contrairement à l'estimateur naïf qui est contrôlé par la taille de la fenêtre, l'estimateur des  $k$ -plus proches voisins est contrôlé par le nombre de particules dans chaque fenêtre dont la taille est automatiquement ajustée. Comme dans la section III.2.2, l'estimateur des  $k$ -plus proches voisins peut s'écrire :

$$\widehat{p}(x) = \frac{1}{Nd_k(x)} \sum_{i=1}^N \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}^i - x}{d_k(x)}\right),$$

où :  $\mathcal{K}(x) = \frac{\mathbb{I}_{\{|x|<1\}}(x)}{2}$ .

**III.2.5. Estimation par noyaux variables.** En reprenant les idées de l'estimateur à noyaux, nous pouvons considérer une généralisation de l'estimateur des  $k$ -plus proches voisins.

Nous remplaçons la fonction indicatrice dans la formule de l'estimateur naïf (III.2.4) par un *noyau*  $\mathcal{K}$  lisse qui satisfait :  $\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(x)dx = 1$ . Le plus souvent  $\mathcal{K}$  sera pris comme une densité symétrique de probabilité.

DÉFINITION III.8 (Estimateur à noyaux variables). Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  à densité inconnue  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et soient  $\{\mathbf{X}^i, i = 1, \dots, N\}$ ,  $N$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de  $\mathbf{X}$ . Étant donné deux paramètres  $(k, h) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+$ , l'estimateur à noyaux variables de  $p$  en un point  $x \in \mathbb{R}$  est donné par :

$$\widehat{p}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{hd_{i,k}} \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}^i - x}{hd_{i,k}}\right),$$

où  $d_{i,k}$  est la distance de la particule  $\mathbf{X}^i$  à son  $k$ -ième plus proche voisin. ◆

**III.2.6. Estimation à séries orthogonales.** C'est un cas particulier des estimateurs à ondelettes, assez utilisées en traitement de signal. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage de B.W. Silverman [105], à l'ouvrage de S. Mallat [68], aux articles de M. Vannucci [112] [113], de O. Renaud [89] et de I. Daubechies [35] qui traitent de l'estimation de densité par la méthodes des *ondelettes*. Nous nous contenterons ici de présenter un cas particulier de ces estimateurs à ondelettes : l'estimation par séries de Fourier.

L'idée ici est de considérer la densité à estimer comme une fonction d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  ( $p \in \mathcal{H}$ ) et d'approximer cet espace à l'aide d'une famille connue de fonctions de cet espace.

DÉFINITION III.9 (Famille orthonormée de fonctions). Une famille  $\{\phi_k\}_{k \in I}$  d'éléments d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est dite *orthonormée* si  $\langle \phi_k, \phi_l \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{k,l}$ ,  $\forall k, l \in I$ , où  $\delta_{k,l} = 1$  si  $k = l$  et  $\delta_{k,l} = 0$  si  $k \neq l$  (symbole de Kronecker). ◆

Soit  $\{\phi_k\}_{k \in I}$ , une famille orthonormée de fonctions. Chaque élément  $h \in \mathcal{H}$  peut être estimé par  $h_V$  de la façon suivante :

$$h_V = \sum_{k \in I} \alpha_k \phi_k,$$

où  $\alpha_k = \langle h, \phi_k \rangle_{\mathcal{H}}$  est appelé coefficient de Fourier associé à l'élément de base  $\phi_k$ . Si  $V$  est le sous-espace engendré par  $(\phi_k)_{k \in I}$ , alors  $h_V$  est la projection de  $h$  sur  $V$ , notée  $h_V = P_V h$ . C'est le meilleur estimateur de  $h$  dans  $V$  dans le sens où  $\|h - h_V\|_H \leq \|h - \sum_{k \in I} \theta_k \phi_k\|_H$ , pour tout vecteur de coefficients  $\theta$ .

Supposons que  $p$  est une densité de probabilité sur  $[0, 1]$  que nous voulons estimer. L'idée est d'estimer  $p$  en estimant les coefficients de son développement de Fourier.

Soit  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , une famille orthonormée de fonctions de base. La fonction  $p$  peut alors être représentée comme une série de Fourier  $\sum_{k=0}^{+\infty} p_k \phi_k$ , avec :

$$(III.6) \quad p_k = \int_0^1 p(x) \phi_k(x) dx.$$

Soit, maintenant,  $\mathbf{X}$  une variable aléatoire de densité  $p$ . L'équation (III.6) peut alors s'écrire :

$$p_k = \mathbb{E}[\phi_k(\mathbf{X})].$$

Un estimateur naturel non biaisé de  $p_k$  basé sur des échantillons  $\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^N$  de  $p$  s'écrit :

$$\hat{p}_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_k(\mathbf{X}^i).$$

Cependant, la somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{p}_k \phi_k$  ne sera pas un bon estimateur de  $p$  mais convergera vers une somme de fonctions de Dirac aux points  $\mathbf{X}^i$ . En effet, soit la fonction  $\omega$  suivante :

$$(III.7) \quad \omega(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(x - \mathbf{X}^i),$$

où  $\delta$  est la fonction de Dirac. Pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , nous avons que :

$$\hat{p}_k = \int_0^1 \omega(x) \phi_k(x) dx.$$

Les fonctions  $\hat{p}_k$  représentent bien les coefficients de Fourier de la fonction  $\omega$ .

Comme nous ne pouvons pas estimer un nombre infini de paramètres avec un nombre fini de particules, pour obtenir un *bon* estimateur de  $p$ , il est nécessaire de lisser la fonction  $\omega$  en appliquant un filtre passe-bas à la série  $(\hat{p}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ . La manière la plus simple est de tronquer la somme  $\sum_{k=0}^{+\infty} \hat{p}_k \phi_k$ . Nous choisissons alors un entier  $\nu \in \mathbb{N}$  et nous définissons l'estimateur  $\hat{p}$  par :

$$(III.8) \quad \hat{p}(x) = \sum_{k=0}^{\nu} \hat{p}_k \phi_k(x).$$

Ce type d'estimation peut être généralisé à toute famille libre de fonctions. Cependant, même s'il garantit la régularité de l'estimateur, il ne garantit pas le fait qu'il soit une densité de probabilité (positif d'intégrale unitaire). Un choix convenable des propriétés de la famille de fonctions de bases doit alors être fait.

### III.3. Caractéristiques asymptotiques de l'estimateur de densité à noyaux

Nous nous proposons de caractériser l'erreur engendrée par un estimateur  $\hat{p}$  d'une densité de probabilité  $p$  par l'erreur quadratique moyenne (Mean Squared Error, MSE) et l'erreur quadratique moyenne intégrée (Integrated Mean Squared Error, IMSE).

DÉFINITION III.10 (Erreur quadratique moyenne). Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ , une variable aléatoire à densité  $p : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et soit  $\hat{p} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , un estimateur de cette densité nous définissons l'erreur quadratique moyenne en tout point  $x \in \mathbb{X}$  par :

$$\text{MSE}_x(\hat{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ (\hat{p}(x) - p(x))^2 \right].$$

◆

DÉFINITION III.11 (Erreur quadratique moyenne intégrée). Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{X}$ , une variable aléatoire à densité  $p : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , et soit  $\hat{p} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , un estimateur de cette densité nous définissons l'erreur quadratique moyenne intégrée par :

$$\text{IMSE}(\hat{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{X}} \mathbb{E} \left[ (\hat{p}(x) - p(x))^2 \right] dx.$$

◆

Il s'agit dans cette section de calculer l'erreur quadratique moyenne et l'erreur quadratique moyenne intégrée de l'estimateur à noyaux d'une densité et d'identifier le choix optimal de largeur de fenêtre à utiliser.

Nous nous intéressons ici au cas où  $\mathbb{X} = \mathbb{R}^d$ . En reprenant les mêmes idées que précédemment, nous réécrivons l'estimateur à noyaux d'une densité.

DÉFINITION III.12. Soient  $\mathbf{X}^1, \dots, \mathbf{X}^N \in \mathbb{R}^d$ ,  $N$  réalisations i.i.d. d'une variable aléatoire  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^d$  à densité  $p$ . Étant donné un paramètre de largeur de fenêtre  $h \in \mathbb{R}_+$ , l'estimateur à convolution de noyaux de  $p$  en  $x$  s'écrit :

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{Nh^d} \sum_{i=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{x - \mathbf{X}^i}{h} \right)$$

où  $\mathcal{K} : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  est un noyau pair d'intégrale unitaire.

◆

Le théorème qui suit donne les valeurs optimales de la largeur de fenêtre  $h$  et de l'IMSE.

THÉORÈME III.13. Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , une variable aléatoire à densité inconnue  $p$  continue à dérivée seconde de carré intégrable et dérivée troisième bornée. Soient  $(\mathbf{X}^i)_{i=1, \dots, N}$ , un échantillon de  $N$  particules i.i.d. de  $\mathbf{X}$  et  $h \in \mathbb{R}_+$ , un paramètre de largeur de fenêtre. Nous notons  $\hat{p}$  un estimateur de convolution de noyaux de  $p$ . Le choix asymptotique optimal de largeur de fenêtre  $h$ , pour  $N \rightarrow +\infty$ , est donné par :

$$(III.9) \quad h^* = \left( \frac{d \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t)^2 dt}{N \int_{\mathbb{R}^d} (\text{Tr} (\nabla^2 p(x) \int_{\mathbb{R}^d} t t^\top \mathcal{K}(t) dt))^2 dx} \right)^{\frac{1}{d+4}} = \mathcal{O} \left( N^{-\frac{1}{d+4}} \right),$$

$$(III.10) \quad \text{IMSE}^* = \mathcal{O} \left( N^{-\frac{4}{d+4}} \right),$$

où  $\text{Tr}$  désigne l'opérateur trace d'une matrice et  $\nabla^2$  désigne le Hessien d'une fonction.

**Démonstration :** Nous commencerons par donner la moyenne de l'estimateur. Nous avons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{p}(x)] &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{Nh^d} \sum_{i=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{x - \mathbf{X}^i}{h} \right) \right], \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{h^d} \mathcal{K} \left( \frac{x - \mathbf{X}}{h} \right) \right], \\ &= \frac{1}{h^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K} \left( \frac{x - y}{h} \right) p(y) dy, \\ &= \frac{1}{h^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K} \left( \frac{y - x}{h} \right) p(y) dy, \end{aligned}$$

en faisant le changement de variable suivant :

$$t = \frac{y - x}{h},$$

nous trouvons :

$$\mathbb{E}[\widehat{\boldsymbol{p}}(x)] = \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t) p(x + ht) dt.$$

Nous avons en outre pour  $h \rightarrow 0$  qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  tel que<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} p(x + ht) &= p(x) + ht^\top \nabla p(x) + \frac{1}{2} h^2 t^\top \nabla^2 p(x) t + \frac{1}{6} h^3 D^{(3)} p(x_0)(t, t, t), \\ &= p(x) + ht^\top \nabla p(x) + \frac{1}{2} h^2 \text{Tr}(\nabla^2 p(x) t t^\top) + \frac{1}{6} h^3 D^{(3)} p(x_0)(t, t, t); \end{aligned}$$

la moyenne de l'estimateur s'écrit alors :

$$\mathbb{E}[\widehat{\boldsymbol{p}}(x)] = p(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t) dt}_{=1} + h (\nabla p(x))^\top \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} t \mathcal{K}(t) dt}_{=0} + \frac{1}{2} h^2 \text{Tr} \left( \nabla^2 p(x) \int_{\mathbb{R}^d} t t^\top \mathcal{K}(t) dt \right) + o(h^2),$$

et le biais :

$$\begin{aligned} \text{biais}_h(x) &= \mathbb{E}[\widehat{\boldsymbol{p}}(x) - p(x)], \\ &= \frac{1}{2} h^2 \text{Tr} \left( \nabla^2 p(x) \int_{\mathbb{R}^d} t t^\top \mathcal{K}(t) dt \right) + o(h^2), \\ &= \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Pour la variance de l'estimateur, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{var}_h(x) &= \text{var} \left[ \frac{1}{Nh^d} \sum_{i=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{x - \mathbf{X}^i}{h} \right) \right], \\ &= \frac{1}{N} \text{var} \left[ \frac{1}{h^d} \mathcal{K} \left( \frac{x - \mathbf{X}}{h} \right) \right], \\ &= \frac{1}{N} \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{h^d} \mathcal{K} \left( \frac{x - \mathbf{X}}{h} \right) \right)^2 \right] - \frac{1}{N} \left( \mathbb{E} \left[ \frac{1}{h^d} \mathcal{K} \left( \frac{x - \mathbf{X}}{h} \right) \right] \right)^2, \\ &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h^{2d}} \left( \mathcal{K} \left( \frac{x - y}{h} \right) \right)^2 p(y) dy - \frac{1}{N} (\mathbb{E}[\widehat{\boldsymbol{p}}(x)])^2, \\ &= \frac{1}{Nh^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t)^2 p(x + ht) dt - \frac{1}{N} (\mathbb{E}[\widehat{\boldsymbol{p}}(x)])^2. \end{aligned}$$

Pour  $N \rightarrow +\infty$ , nous avons que :

$$\text{var}_h(x) = \frac{p(x)}{Nh^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t)^2 dt + o\left(\frac{1}{Nh^d}\right).$$

Calculons maintenant l'erreur quadratique moyenne intégrée, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{IMSE} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( (\text{biais}_h(x))^2 + \text{var}_h(x) \right) dx, \\ &= \frac{h^4}{4} \int_{\mathbb{R}^d} \left( \text{Tr} \left( \nabla^2 p(x) \int_{\mathbb{R}^d} t t^\top \mathcal{K}(t) dt \right) \right)^2 dx + o(h^2) + \frac{1}{Nh^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t)^2 dt + o\left(\frac{1}{Nh^d}\right). \end{aligned}$$

Pour trouver l'estimateur optimal, nous minimisons l'erreur quadratique moyenne intégrée par rapport à la largeur de fenêtre  $h$ . La dérivée de l'IMSE s'écrit alors :

$$\frac{\partial \text{IMSE}}{\partial h} \simeq h^3 \int_{\mathbb{R}^d} \left( \text{Tr} \left( \nabla^2 p(x) \int_{\mathbb{R}^d} t t^\top \mathcal{K}(t) dt \right) \right)^2 dx - \frac{d}{Nh^{d+1}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{K}(t)^2 dt,$$

la fonction étant bien convexe en  $h$ , en écrivant que cette dérivée est nulle en  $h^*$ , nous trouvons le résultat voulu. ■

<sup>1</sup>On note par  $D^{(n)} f(x)(h_1, \dots, h_n)$  la dérivée  $n$ -ième de  $f$  dans les directions  $h$

Nous avons ainsi montré que les estimateurs à noyaux d'une densité sont sensibles à la dimension de l'espace sous-jacent. En effet l'erreur quadratique moyenne optimale de ces estimateurs est croissante en fonction de la dimension  $d$  de l'espace  $\mathbb{X}$ .

EXEMPLE III.14 (Estimation de densité par noyaux ( $\dim(\mathbb{X}) = 1$ )). Soit  $\mathbf{X}$ , une variable aléatoire à valeurs scalaires suivant une loi normale de moyenne nulle et d'écart type  $\sigma_{\mathbf{X}} = 1$ . La densité de probabilité de  $\mathbf{X}$  est notée  $p$  et s'écrit :

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2}.$$

Soient  $\{\mathbf{X}^i, i = 1, \dots, N\}$ ,  $N = 100$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) de  $\mathbf{X}$ . Étant donné un paramètre  $h \in \mathbb{R}_+$  et un noyau  $\mathcal{K}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{x^2}{2}$ , l'estimateur à noyaux de  $p$  en un point  $x \in \mathbb{R}$  est donné par :

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \mathcal{K}\left(\frac{\mathbf{X}^i - x}{h}\right).$$

Les figures III.1, III.2 et III.3 représentent l'estimation de cette densité  $p$  par  $\hat{p}$  pour différentes valeurs possibles de la largeur de fenêtre  $h$ .

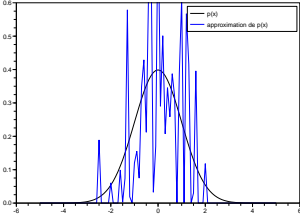


FIG. III.1.  
Estimation  
de densité à  
noyaux pour  
 $h = 0.01$  et  
 $\dim(\mathbb{Y}) = 1$

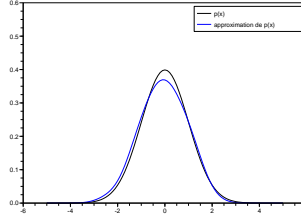


FIG. III.2.  
Estimation  
de densité à  
noyaux pour  
 $h = 0.5$  et  
 $\dim(\mathbb{Y}) = 1$

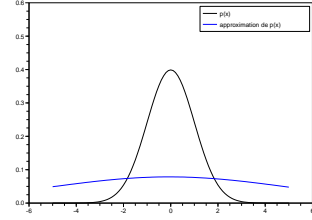


FIG. III.3.  
Estimation  
de densité à  
noyaux pour  
 $h = 5$  et  
 $\dim(\mathbb{Y}) = 1$

Nous remarquons ainsi qu'une largeur de fenêtre trop petite conduit à l'apparition de singularités (voir figure III.1). Cependant, une fenêtre trop large (voir figure III.3) conduit à un grand biais. Un choix optimal de la largeur de fenêtre en fonction du nombre de particules tirées est alors à faire (voir figure III.2).  $\blacklozenge$

REMARQUE III.15. Des résultats similaires existent pour les estimateurs à histogrammes [105]. Le fait que les particules ne servent qu'une seule fois (et pas pour l'estimation de plusieurs valeurs de la densité) se traduit par une dégradation de l'IMSE par rapport aux estimateurs à noyaux.

Soit  $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , une variable aléatoire à densité inconnue  $p$ . Soit  $(\mathbf{X}^i)_{i=1, \dots, N}$ , un échantillon de  $N$  particules i.i.d. de  $\mathbf{X}$  et  $\hat{p}$  un estimateur à histogrammes de  $p$  :

$$\hat{p}(x) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N \mathbb{I}_{\{\lfloor \frac{x-t}{h} \rfloor = \lfloor \frac{\mathbf{X}^i - t}{h} \rfloor\}}(x).$$

Le choix asymptotique optimal pour  $h$  est donné par :

$$(III.11) \quad h^* = \left( \frac{6}{R(p')} \right)^{\frac{1}{3}} N^{-\frac{1}{3}},$$

$$(III.12) \quad \text{IMSE}^* = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{3}} R(p')^{\frac{1}{3}} N^{-\frac{2}{3}}.$$

◆

### III.4. Estimation de densité conditionnelle

DÉFINITION III.16 (Densité conditionnelle). Soient  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ , deux variables aléatoires. Supposons qu'il existe une fonction  $g(\cdot | \cdot) : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ , telle que pour toute fonction continue bornée  $\psi : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$  nous avons que :

$$\mathbb{E}[\psi(\mathbf{U}) | \mathbf{Y} = y] = \int_{\mathbb{U}} \psi(u)g(u | y)du,$$

alors  $g$  est appelée densité conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$ .

◆

REMARQUE III.17. Si  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$  sont deux variables aléatoires de densité de couple  $f : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$  alors :

$$g(u | y) = \frac{f(u, y)}{\int_{\mathbb{U}} f(u, y)du},$$

est la densité conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$ ,  $p(y) = \int_{\mathbb{U}} f(u, y)du$  étant la densité marginale du conditionnement  $\mathbf{Y}$ .

◆

Plusieurs estimateurs de densité conditionnelle, inspirés des estimateurs de densité, sont présents dans la littérature. Dans cette section, nous présenterons l'estimateur à noyaux de densité conditionnelle. Nous nous inspirerons des travaux de M. Rosenblatt [99], de M. Robinson [91] et de Wolfgang Hardle [51] qui apportent les notions et fondements de la théorie de la régression non-paramétrique par la méthode des noyaux. Nous présenterons, en outre, différents résultats asymptotiques tirés des articles de Rob J. Hyndman [58] et [57] ainsi que de l'ouvrage de Sidney C. Port [86].

Soit  $(\mathbf{U}^i, \mathbf{Y}^i)_{i=1, \dots, N}$  un échantillon de  $N$  particules, réalisations i.i.d. d'un couple de variables aléatoires  $(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  avec  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_u}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_y}$ . La densité du couple est notée  $f(\cdot, \cdot)$ ,  $p(y) = \int_{\mathbb{U}} f(u, y)du$  étant la densité marginale de la variable aléatoire  $\mathbf{Y}$  et  $g(\cdot | \cdot)$  la densité de probabilité conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$ . Nous cherchons à estimer cette densité conditionnelle.

DÉFINITION III.18 (Nadaraya-Watson en multivarié). Soient  $(\mathbf{U}^1, \mathbf{Y}^1), \dots, (\mathbf{U}^N, \mathbf{Y}^N)$ ,  $N$  réalisations i.i.d. de deux variables aléatoires  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_u}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_y}$  à densité de couple  $f$ , et soit  $p$ , la densité marginale de  $\mathbf{Y}$ . L'estimateur de Nadaraya-Watson de la densité conditionnelle  $g$  de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  s'écrit :

$$\hat{g}(u | y) = \frac{\hat{f}(u, y)}{\hat{p}(y)} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h^{d_u+d_y}} \mathcal{K}\left(\frac{u-\mathbf{U}^i}{h}, \frac{y-\mathbf{Y}^i}{h}\right)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{h^{d_y}} \mathcal{L}\left(\frac{y-\mathbf{Y}^i}{h}\right)},$$

où  $\mathcal{K} : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathcal{L} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux noyaux pairs d'intégrales unitaires, tel que  $\mathcal{L}(y) = \int \mathcal{K}(u, y)du$ , et  $h \in \mathbb{R}_+$  le paramètre de largeur de fenêtre.

◆

Il s'agit maintenant de choisir le paramètre de largeur de fenêtre de façon à minimiser une erreur quadratique moyenne de cet estimateur. Nous faisons pour cela référence aux résultats de Rob J. Hyndman [58].

THÉORÈME III.19. *Le choix asymptotique optimal de largeur de fenêtre  $h$ , pour  $N \rightarrow +\infty$  de l'estimateur de Nadaraya-Watson est donné par :*

$$h^* = \left(\frac{B}{2A}\right)^{\frac{1}{d_u+d_y+4}} N^{-\frac{1}{d_u+d_y+4}} = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{1}{d_u+d_y+4}}\right).$$



L'erreur quadratique moyenne optimale induite s'écrit alors :

$$\text{IMSE}^* = \mathcal{O}\left(N^{-\frac{4}{d_u+d_y+4}}\right),$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \int_{\mathbb{R}^{d_u}} \int_{\mathbb{R}^{d_y}} \frac{1}{2p(y)} \left( \text{Tr}(\nabla_{uu}f(u, y)\mathcal{K}_{2,0}) + 2\text{Tr}(\nabla_{uy}f(u, y)\mathcal{K}_{1,1}) \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr}(\nabla_{yy}f(u, y)\mathcal{K}_{0,2}) - g(u | y)\text{Tr}(\nabla p(y)\mathcal{L}_2) \right) dudy \\ B &= \int_{\mathbb{R}^{d_u}} \int_{\mathbb{R}^{d_y}} \frac{f(u, y)}{p(y)^2} \left( \int_{\mathbb{R}^{d_u}} \int_{\mathbb{R}^{d_y}} K^2(u, y) dudy \right) dudy. \end{aligned}$$

**Démonstration :** La preuve se fait exactement de la même manière que celle du théorème III.13 en utilisant [86, Proposition 31.18]. Nous renvoyons le lecteur à [58] pour les détails. ■

### III.5. Estimation d'espérance conditionnelle

Nous nous intéressons dans cette section à l'estimation de l'espérance conditionnelle. Nous nous donnons deux variables aléatoires  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$  sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et nous nous proposons d'estimer l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$ . Cette espérance conditionnelle peut être vue comme une fonction  $r : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U}$  telle que :

$$r(y) = \mathbb{E}[\mathbf{U} | \mathbf{Y} = y].$$

Différents types d'estimateurs de la fonction  $r$ , ainsi définie, peuvent être trouvés dans la littérature. Nous nous contenterons ici d'en présenter les trois principaux : l'estimateur des plus proches voisins, l'estimateur des plus proches voisins modifié et l'estimateur à noyaux. Pour ce dernier, nous présenterons quelques résultats asymptotiques. Nous proposerons, aussi, un estimateur de l'espérance conditionnelle inspiré par la méthode des éléments finis.

**III.5.1. Estimation des plus proches voisins.** L'estimateur des plus proches voisins s'inspire de l'estimateur des plus proches voisins d'une densité (voir définition III.7). Il est défini de la façon suivante.

**DÉFINITION III.20** (Estimateur des plus proches voisins). Soient  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , deux variables aléatoires scalaires. Soient  $(\mathbf{U}^1, \mathbf{Y}^1), \dots, (\mathbf{U}^N, \mathbf{Y}^N)$ ,  $N$  réalisations i.i.d. du couple  $(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . L'estimateur des  $k$ -plus proches voisins de l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  en un point  $y$  s'écrit :

$$\hat{r}(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi_{i,k}(y) \mathbf{U}^i = \frac{1}{k} \sum_{i \in J(y)} \mathbf{U}^i,$$

avec :

$$\pi_{i,k}(y) = \begin{cases} \frac{N}{k} & \text{si } i \in J(y), \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$J(y) = \{i \text{ tel que } \mathbf{Y}^i \text{ est l'un des } k \text{ plus proches voisins de } y\}.$$

◆

**III.5.2. Estimation des plus proches voisins modifiée.** L'estimateur des plus proches voisins modifié s'inspire de l'estimateur à noyaux modifié d'une densité (voir définition III.8). Il est défini de la façon suivante :

DÉFINITION III.21 (Estimateur des plus proches voisins modifié). Soient  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , deux variables aléatoires scalaires. Soient  $(\mathbf{U}^1, \mathbf{Y}^1), \dots, (\mathbf{U}^N, \mathbf{Y}^N)$ ,  $N$  réalisations i.i.d. du couple  $(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . L'estimateur des  $k$ -plus proches voisins modifié de l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  en un point  $y$  s'écrit :

$$\hat{r}(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi_{i,k}(y) \mathbf{U}^i,$$

avec :

$$\pi_{i,k}(y) = \frac{\mathcal{K}\left(\frac{y-\mathbf{Y}^i}{d_k(y)}\right)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{K}\left(\frac{y-\mathbf{Y}^i}{d_k(y)}\right)},$$

où  $d_k(y)$  est la distance de  $y$  à sa  $k$ -ième plus proche particule et  $\mathcal{K}$  un noyau.  $\blacklozenge$

REMARQUE III.22. En prenant un noyau tel que  $K(y) = \frac{1}{2} \mathbb{I}_{|y| \leq 1}(y)$ . L'estimateur des plus proches voisins de l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  peut alors s'écrire comme l'estimateur des plus proches voisins modifié.  $\blacklozenge$

**III.5.3. Estimation à noyaux.** Soient  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ , deux variables aléatoires scalaires de densité de couple  $f : \mathbb{U} \times \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$  et soit  $p : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , la densité marginale de  $\mathbf{Y}$ .

Nous cherchons à estimer l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$ . Nous avons que :

$$(III.13) \quad r(y) = \mathbb{E}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y} = y] = \frac{\int_{\mathbb{U}} u f(u, y) du}{p(y)}.$$

Il s'agit alors d'estimer à la fois le numérateur et le dénominateur par la méthode des noyaux pour l'estimation de densité (voir définition III.6).

D'une manière équivalente, l'estimateur à noyaux de l'espérance conditionnelle peut être vu comme résultant de deux étapes d'approximation. La première où nous estimons la densité conditionnelle  $g$  de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  par la méthode des noyaux (voir définition III.18) et la deuxième où nous approximations l'intégrale dans la formule (III.13) par un Monte-Carlo.

DÉFINITION III.23 (Estimateur à noyaux (KCEE)). Soient  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ , deux variables aléatoires. Soient  $(\mathbf{U}^1, \mathbf{Y}^1), \dots, (\mathbf{U}^N, \mathbf{Y}^N)$ ,  $N$  réalisations i.i.d. du couple  $(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . L'estimateur à noyaux de l'espérance conditionnelle (Kernel Conditional Expectation Estimator, KCEE) de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  en un point  $y$  s'écrit :

$$\hat{r}(y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \pi_i(y) \mathbf{U}^i,$$

avec :

$$\pi_i(y) = \frac{\mathcal{K}\left(\frac{y-\mathbf{Y}^i}{h}\right)}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{K}\left(\frac{y-\mathbf{Y}^i}{h}\right)},$$

où  $h \in \mathbb{R}_+$  est la largeur de fenêtre considérée, et  $\mathcal{K}$  un noyau (pair d'intégrale unitaire).  $\blacklozenge$

Il s'agit maintenant de choisir le paramètre  $h$  de largeur de fenêtre d'une manière optimale : en minimisant une erreur quadratique moyenne.

Soit  $(\mathbf{U}^i, \mathbf{Y}^i)_{i=1, \dots, N}$ , un échantillon de  $N$  particules, réalisations i.i.d. d'un couple de variable aléatoires  $(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  avec  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_u}$  et  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_y}$ . La densité du couple est noté  $f(\cdot, \cdot)$ ,  $p(y) = \int_{\mathbb{U}} f(u, y) du$  étant la densité marginale de la variable aléatoire  $\mathbf{Y}$ . Nous cherchons à estimer l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$ . Nous faisons pour cela référence à [99]

THÉORÈME III.24. *Le choix asymptotique optimal de largeur de fenêtre  $h$ , pour  $N \rightarrow +\infty$ , de l'estimateur à noyaux de l'espérance conditionnelle est donné par :*

$$h^* = \left( \frac{B}{4A} \right)^{\frac{1}{d_y+4}} N^{-\frac{1}{d_y+4}} = \mathcal{O} \left( N^{-\frac{1}{d_y+4}} \right).$$

L'erreur quadratique moyenne optimale induite s'écrit alors :

$$\text{IMSE}^* = \mathcal{O} \left( N^{-\frac{4}{d_y+4}} \right),$$

avec :

$$A = \int_{\mathbb{Y}} \left( \frac{1}{2p(y)} \mathcal{K}_2 \left( \text{Tr}(\nabla^2(rp)(y)) - r(y)\text{Tr}(\nabla^2 p(y)) \right) \right) dy,$$

$$B = \int_{\mathbb{Y}} \left( \frac{\mathbb{E}[U^2 | \mathbf{Y} = y]}{p(y)} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}^2(y) dy \right) dy,$$

où :  $\mathcal{K}_a = \int_{\mathbb{Y}} \|u\|^a \mathcal{K}(u) du$ ,  $\nabla^2(rp)$  et  $\nabla^2 p$  sont les Hessiennes respectives des fonctions  $r(y)p(y)$  et de  $p(y)$ .

**Démonstration :** La preuve se fait exactement de la même manière que celle du théorème III.13 en utilisant [86, Proposition 31.18]. Nous renvoyons le lecteur à [99] pour plus de détails. ■

Nous remarquons bien que contrairement à l'estimation de la densité conditionnelle, la qualité de l'estimation de l'espérance conditionnelle dépend de la dimension du conditionnement  $\mathbf{Y}$  ( $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^{d_y}$ ) et non de la dimension du couple  $(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  ( $\mathbb{Y} \times \mathbb{U} = \mathbb{R}^{d_y+d_u}$ ).

EXEMPLE III.25 (Estimation de densité conditionnelle par noyaux  $\dim(\mathbb{Y}) = 2$ ). Soient  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{Z}$  et  $\mathbf{W}$ , trois variables aléatoires indépendantes à valeurs scalaires suivant des lois normales de moyennes nulles et d'écart types respectifs  $\sigma_{\mathbf{Y}} = 1$ ,  $\sigma_{\mathbf{Z}} = 1$  et  $\sigma_{\mathbf{W}} = 0.25$ . Soit  $\mathbf{U}$ , la variable aléatoire définie comme  $\mathbf{U} = 2\mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}\mathbf{Y} + 2\mathbf{Z}^2 + \mathbf{W}$ . L'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{Z}$  s'écrit alors :

$$r(y, z) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\mathbf{U} | \mathbf{Y} = y, \mathbf{Z} = z] = \mathbb{E}[2\mathbf{Y}^2 + \mathbf{Z}\mathbf{Y} + 2\mathbf{Z}^2 + \mathbf{W} | \mathbf{Y} = y, \mathbf{Z} = z] = 2y^2 + zy + 2z^2.$$

Soient  $\{(\mathbf{U}^i, \mathbf{Y}^i, \mathbf{Z}^i), i = 1, \dots, N\}$ ,  $N = 100$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) du triplet  $(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ . Étant donné un paramètre  $h \in \mathbb{R}_+$  et un noyau  $\mathcal{K}(y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^2} \exp -\frac{y^2+z^2}{2}$ , l'estimateur à noyau de  $r$  en un point  $y \in \mathbb{R}$  est donné par :

$$\hat{r}(y, z) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{y-\mathbf{Y}^i}{h}, \frac{z-\mathbf{Z}^i}{h} \right) \mathbf{U}^i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{y-\mathbf{Y}^i}{h}, \frac{z-\mathbf{Z}^i}{h} \right)}$$

Les figures III.4, III.5 et III.6 représentent l'estimation de cette espérance conditionnelle  $r$  par  $\hat{r}$  pour différentes valeurs possibles de la largeur de fenêtre  $h$ . La surface pleine représente l'estimateur et la surface transparente représente la vraie espérance conditionnelle.

Nous remarquons ainsi qu'une largeur de fenêtre trop petite conduit à l'apparition de singularités (voir figure III.4). Cependant, une largeur trop grande (voir figure III.6) conduit à un biais important. Il s'agit alors de faire un compromis entre un biais augmentant avec la largeur de fenêtre et la variance de l'estimateur à noyaux augmentant pour  $h \rightarrow 0$ . Un choix optimal de la largeur de fenêtre en fonction du nombre de particules tirées est alors à faire (voir figure III.5). ♦

Y.P. Mack dans [67] fait l'inventaire des méthodes d'estimation d'espérance conditionnelle et en présente un tableau comparatif.

Nous présentons ainsi les résultats concernant trois estimateurs de l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_u}$  sachant  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d_y}$  :

- l'estimateur à noyaux (KCEE),
- l'estimateur des plus proches voisins (K-NN),

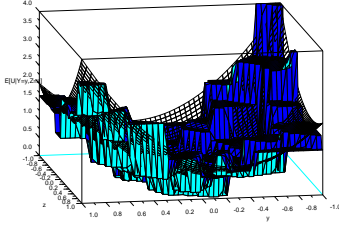


FIG. III.4.  
Estimation à  
noyaux pour  
 $h = 0.02$  et  
 $\dim(\mathbb{Y}) = 2$

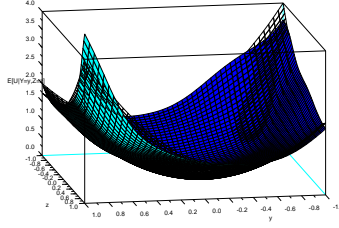


FIG. III.5.  
Estimation à  
noyaux pour  
 $h = 0.3$  et  
 $\dim(\mathbb{Y}) = 2$

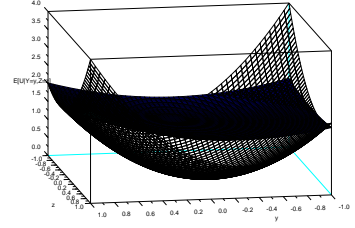


FIG. III.6.  
Estimation à  
noyaux pour  
 $h = 1$  et  
 $\dim(\mathbb{Y}) = 2$

– l'estimateur des plus proches voisins modifié (K-NN\*).

Nous noterons :  $R(\mathcal{K}) = \int_{\mathbb{R}^{d_Y}} \mathcal{K}(y)^2 dy$ ,  $c = \frac{\pi^{\frac{d_Y}{2}}}{\Gamma(\frac{d_Y+2}{2})}$  le volume de la boule unité de  $\mathbb{R}^{d_Y}$  ( $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ ) et  $Q(f)(y) = \sum_{\alpha, \beta} \int v_\alpha v_\beta D_\alpha D_\beta p(y) \mathcal{K}(v) dv$ . Le terme  $v_\alpha$  est la  $\alpha^{\text{ième}}$  composante du vecteur  $v$  et  $D_\alpha$  est l'opérateur de dérivation par rapport à la  $\alpha^{\text{ième}}$  composante.

	Biais	Variance	IMSE*
KCEE	$\frac{Q(rg)(y) - r(y)Q(p)(y)}{2p(y)} h^2 + o(h^2)$	$\frac{\mathbb{E}[U^2   \mathbf{Y}=y]}{p(y) N h^{d_Y}} R(\mathcal{K}) + o\left(\frac{1}{N h^{d_Y}}\right)$	$\mathcal{O}(N^{-\frac{4}{d_Y+4}})$
K-NN	$\frac{Q(rp)(y) - r(y)Q(p)(y)}{6p(y)(cp(y))^{\frac{2}{d_Y}}} \left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{2}{d_Y}} + o\left(\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{2}{d_Y}}\right)$	$\frac{\mathbb{E}[U^2   \mathbf{Y}=y]}{k} R(\mathcal{K}) + o\left(\frac{1}{k}\right)$	$\mathcal{O}(N^{-\frac{4}{d_Y+4}})$
K-NN*	$\frac{Q(rp)(y) - r(y)Q(p)(y)}{2p(y)(cp(y))^{\frac{2}{d_Y}}} \left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{2}{d_Y}} + o\left(\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{2}{d_Y}}\right)$	$\frac{c \mathbb{E}[U^2   \mathbf{Y}=y]}{k} R(\mathcal{K}) + o\left(\frac{1}{k}\right)$	$\mathcal{O}(N^{-\frac{4}{d_Y+4}})$

**III.5.4. Estimation par éléments finis particuliers.** Soient  $(U : \Omega \rightarrow \mathbb{U}) \in \mathcal{U}$  et  $(Y : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}) \in \mathcal{Y}$ , deux variables aléatoires. Nous cherchons à estimer l'espérance conditionnelle de  $U$  sachant  $Y$ .

Comme nous avons vu au début de ce chapitre (voir remarque III.2), l'espérance conditionnelle de  $U$  sachant  $Y$  peut être vue comme la projection de la variable aléatoire  $U \in \mathcal{U} = L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{U})$  sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires  $Y$ -mesurables.

$$(III.14) \quad \mathbb{E}[U | Y] = \arg \min_{Z \preceq Y} \|Z - U\|_{\mathcal{U}}^2 = \arg \min_{Z \preceq Y} \mathbb{E} \left[ \|Z - U\|_{\mathbb{U}}^2 \right].$$

L'estimation de l'espérance conditionnelle consiste, alors, à résoudre numériquement ce problème, nous nous proposons de le faire par la méthode des éléments finis particuliers. Cette méthode consiste en l'approximation de la contrainte de mesurabilité  $Z \preceq Y$  en utilisant la remarque I.13. Il existe, donc, une application mesurable  $\phi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U}$ , appelée feedback, tel que  $Z = \phi(Y)$ . En supposons que  $\phi$  appartient à un espace de Hilbert ( $\phi \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{Y}, \mathbb{B}(\mathbb{Y}), \mathbb{P}_Y; \mathbb{U})$  où  $\mathbb{P}_Y$  est la mesure de probabilité de  $Y$  et  $\mathbb{B}(\mathbb{Y})$  l'ensemble des Boréliens de  $\mathbb{Y}$ ),<sup>2</sup> nous pouvons alors décomposer cet espace en une base dénombrable. La méthode des éléments finis particuliers consiste en un choix a priori d'une base de fonctions de l'espace  $\mathcal{H}$  (nous notons cette base  $(\phi_i : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U})_{i \in \mathbb{N}}$ ) et d'un nombre  $\nu \in \mathbb{N}$  de fonctions de cette base. Nous approximons ainsi l'espace des feedbacks  $\mathcal{H}$  par un sous-espace vectoriel  $\mathcal{H}^\nu$  engendré par la famille des  $\nu$  fonctions de cette base :

$$(III.15) \quad \mathcal{H}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \phi \in \mathcal{H}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^\nu, \quad \phi = \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i \alpha_i \right\}.$$

<sup>2</sup> $\mathcal{H}$  est muni du produit scalaire  $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{Y}} \langle \phi_1(y), \phi_2(y) \rangle_{\mathbb{U}} \mathbb{P}_Y(dy)$

Une deuxième étape d'approximation est nécessaire : approximation de l'espérance de la fonction coût. Une méthode de type Monte-Carlo peut alors être envisagée. Soient  $(\mathbf{U}^k, \mathbf{Y}^k)_{k=1, \dots, N}$ ,  $N$  réalisations i.i.d du couple de variables aléatoires  $(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . Il s'agit maintenant de transformer le problème (III.14) en approximant l'espérance dans la fonction coût ainsi que la contrainte de mesurabilité.

Nous pouvons alors donner une définition de l'estimateur de l'espérance conditionnelle par la méthode des éléments finis particulières.

**DÉFINITION III.26** (Estimateur par éléments finis particulières (PFEE)). L'estimateur par éléments finis particulières de l'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  (Particle Finite Element Estimator, PFEE) s'écrit :

$$\mathbb{E}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y}] \simeq \sum_{i=1}^{\nu} \hat{\alpha}_i^* \phi_i(\mathbf{Y}),$$

avec  $\hat{\alpha}^* \in \mathbb{R}^{\nu}$  vérifiant :

$$\hat{\alpha}^* = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^{\nu}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \left\| \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i(\mathbf{Y}^k) \alpha_i - \mathbf{U}^k \right\|_{\mathbb{U}}^2 \right].$$

◆

Cette appellation d'éléments finis particulières revient au fait que nous procédons en deux étapes d'approximation : l'approximation de l'espace des variables aléatoires mesurables par rapport au conditionnement  $\mathbf{Y}$  (ceci se fait par éléments finis) et l'approximation des quadratures par des techniques de type Monte-Carlo (tirages de particules).

Dans la littérature, F.A. Longstaff et E.S. Schwartz [63] utilisent le même principe pour la valorisation d'options américaines : en fixant une base dénombrable de fonctions, ils estiment la valeur future d'une option en approximant son espérance conditionnelle par rapport aux observations passées. Cette même idée est aussi reprise par D. Bertsekas [19] qui approxime la fonction de Bellman par sa décomposition sur une base de fonctions fixée a priori.

Dans le chapitre IV, nous revenons plus en détail sur la méthode des éléments finis particulières pour l'approximation des problèmes d'optimisation stochastique dont l'espérance conditionnelle est un cas particulier (III.14).

**REMARQUE III.27.**  $\mathbb{U}$  étant un espace vectoriel de dimension fini ( $\mathbb{U} = \mathbb{R}^{d_u}$ ) nous pouvons décomposer l'espace  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{Y}, \mathbb{B}(\mathbb{Y}), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}; \mathbb{U})$  en un produit d'espaces de Hilbert :

$$\mathcal{H} = \times_{l=1}^{d_u} L^2(\mathbb{Y}, \mathbb{B}(\mathbb{Y}), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}; \mathbb{R})$$

Nous pouvons alors approximer l'espace  $\mathcal{H}$  par des fonctions de bases scalaires modulées par des vecteurs de  $\mathbb{R}^{d_u}$  :

$$\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \phi \in \mathcal{H}, \quad \exists \alpha \in \left( \mathbb{R}^{d_u} \right)^{\nu}, \quad \phi = \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i \alpha_i \right\},$$

où  $(\phi_i : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R})_{i \in \mathbb{N}}$  est une base de  $L^2(\mathbb{Y}, \mathbb{B}(\mathbb{Y}), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}; \mathbb{R})$ .

En pratique nous utiliserons cette décomposition terme à terme de l'espérance conditionnelle. En notant  $\mathbf{U}^{(l)}$  la  $l$ -ième composante de  $\mathbf{U}$  ( $\mathbf{U}(\omega) = \left( \mathbf{U}^{(1)}(\omega), \dots, \mathbf{U}^{(d_u)}(\omega) \right)$ ), nous avons que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y}] &= \left( \mathbb{E}[\mathbf{U}^{(1)} \mid \mathbf{Y}], \dots, \mathbb{E}[\mathbf{U}^{(d_u)} \mid \mathbf{Y}] \right), \\ &\simeq \left( \sum_{i=1}^{\nu} \hat{\alpha}_i^{(1)} \phi_i, \dots, \sum_{i=1}^{\nu} \hat{\alpha}_i^{(d_u)} \phi_i \right). \end{aligned}$$

◆

REMARQUE III.28. On pourrait croire que plus on prend de fonctions de base, meilleur est le résultat, mais il faut tenir compte par ailleurs du nombre de particules utilisées pour faire les évaluations. Nous nous trouvons alors face à un compromis à faire entre nombre de fonctions de bases affectant le biais de l'estimateur et le nombre de particules affectant sa variance.

Nous montrerons dans le chapitre suivant (chapitre IV) que dans certains cas nous pouvons donner des résultats asymptotiques du choix optimal du nombre de fonctions de base en fonction du nombre de particules (qui ne dépend que de la dimension du conditionnement  $\mathbf{Y}$  et non de la dimension de la variable conditionnée  $\mathbf{U}$ ) :

$$\nu^* = N^{\frac{1}{d_{\mathbf{Y}}+2}}, \quad \text{IMSE}^* = N^{-\frac{2}{d_{\mathbf{Y}}+2}}.$$

◆

EXEMPLE III.29 (Estimation de l'espérance conditionnelle par éléments finis  $\dim(\mathbb{Y}) = 1$ ). Soient  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{W}$ , deux variables aléatoires indépendantes à valeurs scalaires suivant des lois normales de moyennes nulles et d'écart types respectifs  $\sigma_{\mathbf{Y}} = 1$  et  $\sigma_{\mathbf{W}} = 0.25$ . Soit  $\mathbf{U}$ , la variable aléatoire définie par  $\mathbf{U} = 2\mathbf{Y}^2 + \mathbf{W}$ . L'espérance conditionnelle de  $\mathbf{U}$  sachant  $\mathbf{Y}$  s'écrit alors :

$$r(y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\mathbf{U} \mid \mathbf{Y} = y] = \mathbb{E}[2\mathbf{Y}^2 + \mathbf{W} \mid \mathbf{Y} = y] = 2y^2 + \mathbb{E}[\mathbf{W}] = 2y^2.$$

Soient  $\{(\mathbf{U}^k, \mathbf{Y}^k), k = 1, \dots, N\}$ ,  $N = 100$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) du couple  $(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . Étant donné une grille fixe de  $[-1, 1]$  constitué de  $\nu$  intervalles réguliers, nous définissons  $\nu + 2$  fonctions de base tel que :

$$\begin{cases} \phi_0(y) = \mathbb{I}_{]-\infty, -1]}(y), & \forall y \in \mathbb{Y}, \\ \phi_i(y) = \mathbb{I}_{]-1+2\frac{i-1}{m}, -1+2\frac{i}{m}}(y), & \forall y \in \mathbb{Y}, \quad \forall i = 1, \dots, \nu, \\ \phi_{\nu+1}(y) = \mathbb{I}_{]1, +\infty]}(y), & \forall y \in \mathbb{Y}. \end{cases}$$

Les figures III.7, III.8 et III.9 représentent l'estimation de cette espérance conditionnelle  $r$  par  $\hat{r}$  pour différentes valeurs possibles du nombre de fonctions de base.

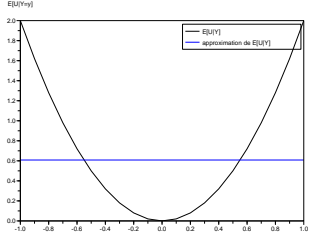


FIG. III.7.  
Estimation  
par éléments  
finis pour  
 $\nu = 1$  et  
 $\dim(\mathbb{Y}) = 1$

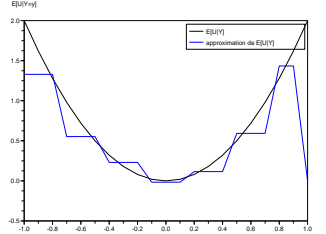


FIG. III.8.  
Estimation  
par éléments  
finis pour  
 $\nu = 7$  et  
 $\dim(\mathbb{Y}) = 1$

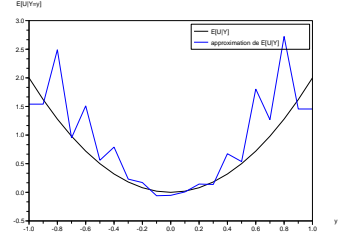


FIG. III.9.  
Estimation  
par éléments  
finis pour  
 $\nu = 10$  et  
 $\dim(\mathbb{Y}) = 1$

Nous remarquons ainsi qu'un faible nombre de fonctions de base conduit à un biais important de l'estimateur de l'espérance conditionnelle (voir figure III.7). Cependant, un nombre trop élevé (voir figure III.9) conduit à des singularités. Un choix optimal du nombre de fonctions de base en fonction du nombre de particules tirées est alors à faire (voir figure III.8). Nous reviendrons sur ce sujet dans le chapitre IV.

Le fait que les fonctions de base sont données a priori permet une certaine liberté quant à l'intuition que l'utilisateur pourrait avoir sur la solution optimale. Une réponse immédiate peut alors être donnée à ce problème d'estimation : *une seule fonction de base est suffisante : c'est*

*la solution.* En effet, dans l'exemple précédent si nous choisissons la fonction  $\phi(y) = 2y^2$  comme l'unique fonction de la base, nous aurions eu immédiatement un biais nul de l'estimateur (reste à tirer suffisamment de particules pour faire diminuer la variance). Cependant, en pratique, le choix a priori d'une famille de fonctions introduit un biais intrinsèque : c'est la distance de la solution exacte au sous-espace vectoriel approximé  $\mathcal{H}^\nu$ . Ce biais ne peut être surmonté qu'en ajoutant des fonctions de bases jusqu'à l'infini ou jusqu'à engendrer un sous-espace contenant la solution.  $\blacklozenge$

### III.6. Conclusion

Nous nous sommes attaché, au cours de ce chapitre, à donner une revue de la littérature sur le sujet de l'estimation fonctionnelle. Loin d'être exhaustif, nous nous sommes surtout intéressé aux méthodes non paramétriques pour l'estimation de densités, densités conditionnelles et espérances conditionnelles.

L'intérêt porté à ces méthodes d'estimation réside dans le fait que nous nous intéresserons dans ce mémoire à l'approximation des problèmes d'optimisation stochastique en présence de contraintes d'information.

Nous avons ainsi commencé par expliquer notre motivation en présentant un résultat d'équivalence entre deux procédures d'approximation de problèmes d'optimisation stochastique. En effet, que nous adoptions une approche A-O ou une approche O-A, nous serons à un point ou à un autre ramené à estimer une espérance conditionnelle.

Le lien évident qui existe entre densité, densité conditionnelle et espérance conditionnelle, nous a conduit, ensuite, à nous intéresser aux méthodes d'estimation de densité qui peuvent être répertoriées dans deux classes principales : l'estimation par histogrammes où le choix du nombre d'intervalles d'estimation est fait a priori indépendamment des particules tirées, et l'estimation par noyaux ou les fenêtres sont choisies en fonctions des tirages de Monte-Carlo effectués.

Pour l'estimation des densités conditionnelles, nous avons présenté différentes variantes de l'approche par noyaux et nous avons donné différents résultats asymptotiques de choix optimal de largeur de fenêtre. L'erreur quadratique de tels estimateurs dépend alors de la dimension du couple de variables aléatoires (v.a. conditionnée / v.a. de conditionnement).

Comme corollaire de ces procédures d'estimation de densité et de densité conditionnelle, l'estimation de l'espérance conditionnelle se décline sous deux formes aux caractéristiques *parallèles*.

- (1) Les estimateurs à noyaux dont l'erreur quadratique moyenne dépend de la dimension de la variable aléatoire de conditionnement (et non de la dimension du couple). Deux paramètres gouvernent les estimateurs ainsi construits : la largeur de fenêtre et le nombre de particules tirées. Il s'agit alors de minimiser une erreur quadratique moyenne qui peut être décomposée en deux éléments :
  - un terme de biais augmentant avec la largeur de fenêtre mais indépendant du nombre de particules,
  - un terme de variance augmentant pour des grandes largeurs de fenêtres et diminuant pour un nombre de particules tendant vers l'infini.

Un compromis doit alors être fait entre la largeur de fenêtre tendant vers zéro et le nombre de particules qui tend vers l'infini, sachant qu'asymptotiquement nous devons tirer une infinité de particules dans chaque fenêtre.

- (2) Contrairement aux méthodes à noyaux dont les fenêtres d'estimation sont adaptées aux particules tirées, la méthode des éléments finis particuliers consiste en un choix a priori du nombre de fonctions, permettant au utilisateur de faire un choix subjectif basé sur sa propre expérience. Deux paramètres gouvernent les estimateurs ainsi construits : le nombre de fonctions de base et le nombre de particules tirées. Il s'agit alors de minimiser une erreur quadratique moyenne qui peut être décomposée en deux éléments :
  - un terme de biais diminuant pour un grand nombre de fonctions de base et indépendant du nombre de particules,

- un terme de variance augmentant avec le nombre de fonctions de base et diminuant pour un nombre de particules tendant vers l'infini.

Un compromis doit alors être fait entre nombre de fonctions de base tendant vers l'infini et le nombre de particules qui tend aussi vers l'infini, sachant qu'asymptotiquement nous devons tirer une infinité de particules dans le support de chaque fonction de base.

La question qui se pose maintenant est : comment implémenter ses différentes méthodes pour résoudre des problèmes d'optimisation stochastique ? Les prochains chapitres apporteront différents éléments de réponse à cette question.





## Éléments finis particuliers

Nous nous intéressons dans ce chapitre à la résolution numérique de problèmes d'optimisation stochastique. Dans le chapitre I nous avons montré que ce type de problèmes peut s'interpréter de deux manières différentes : une interprétation algébrique et une interprétation fonctionnelle. Un résultat d'équivalence entre un problème d'optimisation stochastique et un problème d'optimisation fonctionnelle a été présenté dans le chapitre I (voir proposition I.17), nous nous intéresserons ici à l'approche fonctionnelle.

Les problèmes d'optimisation fonctionnelle sont de dimensions infinies. Quand une solution analytique ne peut pas être trouvée ou ne peut pas être efficacement implémentée, une procédure d'approximation devient nécessaire. Une méthode d'approximation consisterait à rechercher une solution sous-optimale comme combinaison d'un certain nombre de fonctions de base données a priori. L'idée ici est d'approximer l'argument du problème d'optimisation fonctionnelle par une combinaison (linéaire) de fonctions et *espérer* que plus nous prenons de fonctions de base plus nous nous rapprochons de la solution.

Les problèmes d'optimisation stochastique sont des problèmes d'optimisation fonctionnelle particuliers. En effet, outre la phase d'approximation fonctionnelle nécessaire pour satisfaire les contraintes d'information (voir proposition I.12), un autre niveau d'approximation est nécessaire : l'approximation de l'espérance dans la fonction coût. Dans ce chapitre nous présenterons la méthode dite d'*éléments finis particuliers* permettant de réaliser ces deux niveaux d'approximation.

D'autres appellations de la même méthode sont présentes dans la littérature et font référence aux méthodes dites de *Galerkin*, ou de *règles de décisions linéaires*. À notre connaissance, une des premières apparitions de cette méthode dans la littérature remonte à un article de 1955 de C.C. Holt, F. Modigliani et H.A. Simon [56]. Nous renvoyons, en outre, le lecteur aux travaux de S.J. Garstka et R.J.B. Wets [49], de A. Shapiro et A. Nemirovski [104], et ceux de J.P. Vial [108], [109] et [110] pour des travaux plus récents sur ce sujet. Nous retrouvons aussi des méthodes de règles de décisions linéaires pour la valorisation d'options, nous renvoyons ainsi le lecteur aux travaux de J.F. Carriere [27] et de F.A. Longstaff et E.S. Schwartz [63].

Quant au parti pris dans ce mémoire, nous adoptons le choix de cette appellation d'éléments finis particuliers d'une part, pour mettre en évidence le fait que nous procédons en deux niveaux d'approximation (fonctionnelle par *éléments finis* et particulière par *Monte-Carlo*), d'autre part pour éviter la confusion apportée par l'appellation de règles de décisions linéaires suggérant que les feedbacks obtenus sont linéaires alors que, dans notre cas, c'est seulement la combinaison des fonctions de base qui l'est.

La méthode des éléments finis particuliers, peut être vue comme une généralisation des méthodes de quantification pour l'approximation des contraintes de mesurabilité (voir la thèse de K. Barty [7]). En effet, la quantification consiste à considérer des feedbacks constants par morceaux sur des partitions de l'espace d'observation. La méthode des éléments finis particuliers, quant à elle, consiste en une extension à une classe plus large de feedbacks fixée *a priori*.

Nous commencerons, dans ce chapitre, par présenter la méthode des éléments finis particuliers pour l'approximation des problèmes d'optimisation stochastique. Nous ferons le lien avec la quantification et avec le point de vue de l'approximation de l'espérance conditionnelle développé dans le chapitre III.

Nous passerons ensuite à la présentation de quelques résultats de convergence de cette méthode. Pour se faire, nous utiliserons les notions d'épi et d'épi/hypo-convergence pour montrer la convergence variationnelle de problèmes d'optimisation stochastique approximés par éléments finis particuliers.

### IV.1. Présentation de la méthode

Nous nous donnons un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , et nous nous intéressons à la minimisation de l'espérance d'une fonctionnelle coût notée  $j : \mathbb{U} \times \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $\mathbb{U}$  est l'espace des commandes (de dimension finie  $\mathbb{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_u}$ ) et  $\Xi$  l'espace des bruits (de dimension finie  $\Xi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_w}$ ), par rapport à une commande  $(\mathbf{U} : \Omega \rightarrow \mathbb{U}) \in \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{U})$  vérifiant une contrainte de mesurabilité par rapport à une variable aléatoire d'observation  $\mathbf{Y} : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$  où  $\mathbb{Y}$  est l'espace des observations (de dimension finie  $\mathbb{Y} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_y}$ ). On se donne en outre une variable aléatoire  $\boldsymbol{\xi} : \Omega \rightarrow \Xi$ . Le problème type d'optimisation stochastique s'écrit alors :

$$(IV.1) \quad \min_{\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}} J(\mathbf{U}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})].$$

Dans le cas le plus général où la distribution des aléas du problème n'est pas discrète, la résolution numérique du problème (IV.1) nécessite deux niveaux d'approximation :

- l'approximation de la contrainte de mesurabilité :  $\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}$ ,
- l'approximation de la fonction coût  $J : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  par une méthode de type Monte-Carlo.

Nous donnons dans la suite trois différentes manières pour réaliser ces deux niveaux d'approximations : la quantification, la méthode des éléments finis particuliers et l'approximation de l'espérance conditionnelle.

REMARQUE IV.1. Pour garantir l'existence de l'espérance de la fonction coût pour toute commande  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$ , nous ferons, dans toute la suite, l'hypothèse que  $j$  est une intégrande normale convexe (voir [98, Chapitre 14]). pour calculer cette intégrale, Nous conviendrons que  $\infty - \infty = \infty$  : la fonction coût est égale à l'infini quand, à la fois, la partie positive et la partie négative de l'intégrale sont égales à l'infini.  $\blacklozenge$

**IV.1.1. La quantification.** Cette méthode a été largement étudiée dans la thèse de K. Barty [7] et plus récemment dans les travaux de T. Pennanen [78, 79]. Dans ce qui suit, nous présenterons les grandes lignes de cette méthode.

#### IV.1.1.1. Approximation de la contrainte de mesurabilité.

Nous posons  $Q : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  un quantificateur (un projecteur à image finie<sup>1</sup>). Nous définissons une relation d'équivalence sur  $\mathbb{Y}$  à partir de ce quantificateur, telle que :

$$(IV.2) \quad y \stackrel{Q}{\equiv} y' \Leftrightarrow Q(y) = Q(y').$$

La partition de  $\mathbb{Y}$  en  $Q$ -classes d'équivalences est notée  $\mathbb{Y}/Q \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbb{Y}_i)_{i=1, \dots, \nu}\}$ , où  $\nu \stackrel{\text{def}}{=} \text{card}(\text{im}(Q))$ . Cette partition est en bijection avec  $\text{im}(Q)$ .

Nous approximons alors la contrainte  $\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}$  par  $\mathbf{U} \preceq Q \circ \mathbf{Y}$ . D'après la remarque I.13, il existe alors une application mesurable  $\phi : \text{im}(Q) \rightarrow \mathbb{U}$  appelée *feedback*, telle que :

$$\mathbf{U} = \phi \circ Q \circ \mathbf{Y},$$

en notant  $\widehat{\phi} = \phi \circ Q$  nous avons que  $\mathbf{U} = \widehat{\phi} \circ \mathbf{Y}$  est mesurable par rapport à  $\mathbf{Y}$ . De plus  $\widehat{\phi} \preceq Q$ , elle est donc constante par morceaux sur les  $Q$ -classes de  $\mathbb{Y}$ .

<sup>1</sup> $Q$  est un opérateur linéaire idempotent  $Q \circ Q = Q$  tel que  $\text{card}(\text{im}(Q)) < +\infty$

L'approximation d'une contrainte de mesurabilité par la quantification de l'espace des observations consiste alors à écrire le feedback  $\hat{\phi}$  comme une fonction constante par morceaux sur les éléments de la partition de  $\mathbb{Y}$  en  $Q$ -classes :  $\exists \alpha \in \mathbb{R}^\nu$ ,  $\hat{\phi}(y) = \sum_{i=1}^\nu \mathbb{I}_{\mathbb{Y}_i}(y)\alpha_i$ ,  $\forall y \in \mathbb{Y}$ .

Il s'agit maintenant de transformer le problème (IV.1) en un problème d'optimisation en boucle ouverte. Nous écrivons alors le problème approximé suivant :

$$(IV.3) \quad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^\nu} \hat{J}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ j \left( \sum_{i=1}^\nu \mathbb{I}_{\mathbb{Y}_i}(\mathbf{Y})\alpha_i, \boldsymbol{\xi} \right) \right].$$

EXEMPLE IV.2 (Quantificateur). Soit  $\mathbb{Y} = [0, 1] \times [0, 1]$  et soit  $(\mathbb{Y}_i)_{i=1, \dots, 4}$  une partition de  $\mathbb{Y}$  en quatre sous-ensembles distincts. Pour chaque élément de la partition, nous choisissons un représentant  $Y^i \in \mathbb{Y}_i$  un élément de cette partition. La fonction  $Q : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  définie comme suit est un quantificateur de  $\mathbb{Y}$  :

$$Q : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y} \\ y \mapsto \sum_{i=1}^4 Y^i \mathbb{I}_{\mathbb{Y}_i}(y),$$

La figure IV.1 représente la partition de  $\mathbb{Y}$  en  $Q$ -classes d'équivalences en bijection avec  $\text{im}(Q) = \{Y^1, Y^2, Y^3, Y^4\}$ .

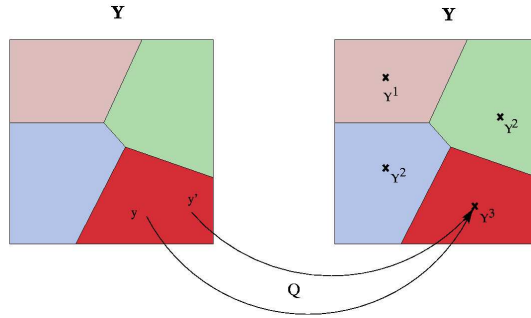


FIG. IV.1. Exemple de quantificateur

◆

#### IV.1.1.2. Approximation de l'espérance de la fonction coût.

Une première étape d'approximation a ainsi été faite : l'approximation de la contrainte d'information ; il reste maintenant à approximer l'espérance de la fonction coût.

Soient  $((\mathbf{Y}^k, \boldsymbol{\xi}^k)_{k=1, \dots, N})$ ,  $N$  réalisations i.i.d du couple de variables aléatoires  $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi})$ . Il s'agit maintenant de transformer le problème (IV.3) en approxinant l'espérance dans la fonction coût. Nous écrivons alors le problème doublement approximé suivant :

$$(IV.4) \quad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^\nu} \hat{J}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N j \left( \sum_{i=1}^\nu \mathbb{I}_{\mathbb{Y}_i}(\mathbf{Y}^k)\alpha_i, \boldsymbol{\xi}^k \right).$$

Le problème (IV.4) obtenu par quantification est un problème décomposé que nous pouvons résoudre numériquement par des méthodes classiques d'optimisation déterministe.

**IV.1.2. Les éléments finis particuliers.** La méthode des éléments finis particuliers peut être vue comme une extension de la méthode par quantification. Il ne s'agit plus de se contenter de combinaisons linéaires de fonctions constantes par morceaux sur des  $Q$ -classes d'équivalences, nous nous autorisons, maintenant, des structures de fonctions plus complexes.

IV.1.2.1. *Approximation de la contrainte de mesurabilité.*

D'après la remarque (I.13), nous cherchons à approximer la contrainte  $\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}$  en approxi- mant l'application mesurable  $\phi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U}$  qui vérifie  $\mathbf{U} = \phi(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s..

Commençons par énoncer un lemme technique nous permettant de déduire certaines caractéristiques du feedback  $\phi$  :

LEMME IV.3. *Supposons que  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$  telle que  $\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}$ , il existe alors une application mesurable  $\phi \in \mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\mathbb{Y}, \mathbb{B}(\mathbb{Y}), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}; \mathbb{U})$  telle que  $\mathbf{U} = \phi(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s..*

**Démonstration :**  $\mathbf{U} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{U})$  donc  $\int_{\Omega} \|\mathbf{U}(\omega)\|_{\mathbb{U}}^2 \mathbb{P}(d\omega) < +\infty$ . Comme  $\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}$ , d'après la remarque I.13, il existe une application mesurable  $\phi : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U}$  appelée feedback, telle que  $\mathbf{U} = \phi(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s., et donc  $\int_{\Omega} \|\phi(\mathbf{Y}(\omega))\|_{\mathbb{U}}^2 \mathbb{P}(d\omega) < +\infty$ . Comme  $\mathbf{Y}$  est une variable aléatoire à mesure  $\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}$ , nous avons alors que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \|\phi(\mathbf{Y}(\omega))\|_{\mathbb{U}}^2 \mathbb{P}(d\omega) &= \mathbb{E} \left[ \|\phi(\mathbf{Y})\|_{\mathbb{U}}^2 \right], \\ &= \int_{\mathbb{Y}} \|\phi(y)\|_{\mathbb{U}}^2 \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(dy), \end{aligned}$$

et donc  $\int_{\mathbb{Y}} \|\phi(y)\|_{\mathbb{U}}^2 \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}(dy) < +\infty$ . D'où le résultat recherché.  $\blacksquare$

Un espace de Hilbert étant décomposable en une base dénombrable, la méthode des éléments finis particuliers consiste en un choix a priori d'une base  $(\phi_i : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U})_{i \in \mathbb{N}}$  de fonctions de l'espace  $\mathcal{H}$  et d'un nombre  $\nu \in \mathbb{N}^*$  de fonctions de cette base. Nous approximations ainsi l'espace des feedbacks  $\mathcal{H}$  par un sous-espace vectoriel engendré par une famille de  $\nu$  fonctions de cette base :

$$(IV.5) \quad \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^{\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \phi \in \mathcal{H}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^{\nu}, \quad \phi = \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i \alpha_i \right\}.$$

Il s'agit maintenant de transformer le problème (IV.1) en un problème d'optimisation en boucle ouverte. Nous écrivons alors le problème approximé suivant :

$$(IV.6) \quad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^{\nu}} \hat{J}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ j \left( \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i(\mathbf{Y}) \alpha_i, \boldsymbol{\xi} \right) \right].$$

Pour simplifier cette écriture nous posons  $\Phi^{\nu} : \mathbb{R}^{\nu} \rightarrow \mathcal{H}$  l'opérateur linéaire d'image  $\text{im}(\Phi^{\nu}) = \mathcal{H}^{\nu}$ , tel que :

$$(IV.7) \quad \begin{aligned} \Phi^{\nu} : \quad \mathbb{R}^{\nu} &\rightarrow \mathcal{H}, \\ \alpha &\mapsto \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i \alpha_i. \end{aligned}$$

Par abus de notations, nous dénoterons par  $\Phi^{\nu}(y)\alpha$  la valeur prise en  $y \in \mathbb{Y}$  de l'image de  $\alpha \in \mathbb{R}^{\nu}$  par l'opérateur linéaire  $\Phi^{\nu}$  :

$$\Phi^{\nu}(y)\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\Phi^{\nu}(\alpha))(y) = \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i(y)\alpha_i.$$

Nous noterons en outre par  $(\Phi^{\nu})^*$  l'opérateur linéaire adjoint de  $\Phi^{\nu}$  par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  de  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{Y}, \mathbb{B}(\mathbb{Y}), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}; \mathbb{U})$ .

Nous approximations la contrainte de mesurabilité par :

$$(IV.8) \quad \mathbf{U} \simeq \Phi^\nu(\mathbf{Y})\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i(\mathbf{Y})\alpha_i.$$

Le problème (IV.6) se réécrit :

$$(IV.9) \quad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^\nu} \hat{J}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(\Phi^\nu(\mathbf{Y})\alpha, \boldsymbol{\xi})].$$

REMARQUE IV.4.

- En toute généralité, et contrairement au problème (IV.3), le problème (IV.9) n'est pas décomposable sauf si les fonctions de bases sont à supports disjoints.
- La quantification est un cas particulier des éléments finis particulières : Il suffit de poser  $\phi_i = \mathbb{I}_{\mathbb{Y}_i}$ ,  $\forall i = 1, \dots, \nu$ .

◆

#### IV.1.2.2. Approximation de l'espérance de la fonction coût.

Il s'agit maintenant, comme dans la section IV.1.1.2, de transformer le problème (IV.6) en approximant l'espérance dans la fonction coût. Nous écrivons alors le problème doublement approximé suivant :

$$(IV.10) \quad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^\nu} \hat{J}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N j(\Phi^\nu(\mathbf{Y}^k)\alpha, \boldsymbol{\xi}^k).$$

Le problème (IV.10), obtenu par éléments finis particulières, est un problème approximé que nous pouvons résoudre numériquement par des méthodes classiques d'optimisation déterministe. La proposition IV.5 nous donne les conditions d'optimalité du problème déterministe (IV.10).

PROPOSITION IV.5 (Condition nécessaire d'optimalité). *En supposant que la fonction  $j(\cdot, \boldsymbol{\xi})$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{U})$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s., et en notant  $\nabla_u j(\cdot, \boldsymbol{\xi})$  sont gradient par rapport à la première composante. Si le vecteur  $\alpha^* \in \mathbb{R}^\nu$  est solution de (IV.10) alors il vérifie :*

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\langle \phi_i(\mathbf{Y}^k), \nabla_u j(\Phi^\nu(\mathbf{Y}^k)\alpha, \boldsymbol{\xi}^k) \right\rangle_{\mathbb{U}} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \nu.$$

**Démonstration :** Le problème (IV.10) étant sans contraintes le résultat est obtenu en écrivant que le gradient de la fonction coût  $\hat{J}$  par rapport au vecteur  $\alpha$  est nul. ■

**IV.1.3. Liens avec l'estimation de l'espérance conditionnelle.** Dans la section précédente, nous avons choisi d'approximer d'abord, puis d'optimiser. Cependant, dans le chapitre III nous avons montré que nous pouvons envisager une approche différente : optimiser d'abord ensuite approximer. En adoptons cette approche, nous nous retrouverons alors avec des conditions d'optimalité faisant apparaître des espérances conditionnelles que nous pouvons estimer par éléments finis particulières (voir la section III.5.4).

Nous utilisons la proposition I.14 et nous cherchons à approximer le fait que  $\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}$  en approximant l'égalité presque sûre  $\mathbf{U} = \mathbb{E}[\mathbf{U} | \mathbf{Y}]$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s..

D'après la proposition II.4, sous certaines hypothèses de différentiabilité et d'intégrabilité, nous avons que si  $\mathbf{U} \in \mathcal{U}$  est solution de (IV.1), alors :

$$(IV.11) \quad \mathbb{E}[\nabla_u j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi}) | \mathbf{Y}] = 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Il s'agit alors d'approximer cette espérance conditionnelle. Cette estimation, peut être faite (voir chapitre III) par la voie de deux méthodes différentes : les éléments finis particuliers et la méthode des noyaux.

#### IV.1.3.1. Estimation par éléments finis particuliers.

Soit  $(\phi_i)_{i=1,\dots,\nu}$ , une famille de  $\nu$  fonctions de  $\mathcal{U}$ , l'espérance conditionnelle de  $\nabla_{\mathbf{u}}j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})$  sachant  $\mathbf{Y}$  est la projection de  $\nabla_{\mathbf{u}}j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})$  sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires  $\sigma(\mathbf{Y})$ -mesurables. Nous pouvons alors approximer l'espérance conditionnelle de  $\nabla_{\mathbf{u}}j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})$  sachant  $\mathbf{Y}$  par la projection de  $\nabla_{\mathbf{u}}j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})$  sur le sous-espace vectoriel engendré par la famille  $(\phi_i)_{i=1,\dots,\nu}$  (il sera noté  $\mathcal{H}^\nu$ ). En adoptant la notation (IV.7), nous avons alors que :

$$(IV.12) \quad (\mathbb{E}[\nabla_{\mathbf{u}}j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi}) \mid \mathbf{Y}] = 0) \approx (\Phi^\nu(\mathbf{Y})\alpha^* = 0),$$

où  $\alpha^*$  est un vecteur  $(\alpha_i^*)_{i=1,\dots,\nu} \in \mathbb{R}^\nu$ , tel que :

$$(IV.13) \quad \alpha^* \in \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^\nu} \mathbb{E} \left[ \|\Phi^\nu(\mathbf{Y})\alpha - \nabla_{\mathbf{u}}j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi})\|_{\mathbb{U}}^2 \right].$$

REMARQUE IV.6. Il est à noter qu'ici, nous n'approximons pas le feedback par éléments finis mais le gradient de la fonction coût.  $\blacklozenge$

Désignons par  $M$  une matrice de taille  $\nu \times \nu$  telle que :

$$(IV.14) \quad \begin{aligned} M_{i,j} &= \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall i, j = 1, \dots, \nu, \\ &= \langle \phi_i(\mathbf{Y}), \phi_j(\mathbf{Y}) \rangle_{\mathcal{U}}, \quad \forall i, j = 1, \dots, \nu, \\ &= \mathbb{E} [\langle \phi_i(\mathbf{Y}), \phi_j(\mathbf{Y}) \rangle_{\mathbb{U}}], \quad \forall i, j = 1, \dots, \nu. \end{aligned}$$

En adoptant la notation (IV.7), nous avons que  $M = (\Phi^\nu)^* \Phi^\nu$  où  $(\Phi^\nu)^*$  est l'opérateur linéaire adjoint de  $\Phi^\nu$ . Nous désignons en outre par  $L$  un vecteur de taille  $\nu \times 1$  tel que

$$(IV.15) \quad L_i = \langle \phi_i(\mathbf{Y}), \nabla_{\mathbf{u}}j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\mathcal{U}} = \mathbb{E} [\langle \phi_i(\mathbf{Y}), \nabla_{\mathbf{u}}j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\mathbb{U}}], \quad \forall i = 1, \dots, \nu.$$

Nous avons donc que si  $\alpha^*$  vérifie (IV.13), alors il vérifie ses conditions d'optimalité :

$$(IV.16) \quad M\alpha^* = L.$$

La résolution des conditions d'optimalité (IV.12) approximées revient alors à trouver les variables aléatoires  $\mathbf{U}$  qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} M\alpha^* = L, \\ \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i(\mathbf{Y})\alpha_i^* = 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{cases}$$

REMARQUE IV.7. Sous l'hypothèse que  $(\phi_i)_{i=1,\dots,\nu}$  est une famille libre de  $\nu$  fonctions de  $L^2(\mathbb{Y}, \mathbb{B}(\mathbb{Y}), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}; \mathbb{U})$ , la matrice  $M$  est inversible et nous pouvons alors écrire que la condition d'optimalité (IV.11) peut s'approximer par :

$$(IV.17) \quad \Phi^\nu(\mathbf{Y})M^{-1}L = 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow \mathbb{E} [\langle \phi_i(\mathbf{Y}), \nabla_{\mathbf{u}}j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi}) \rangle_{\mathbb{U}}] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \nu.$$

Il s'agit alors de chercher les variables aléatoires  $\mathbf{U}$  qui vérifient (IV.17).  $\blacklozenge$

Il s'agit maintenant d'effectuer une deuxième étape d'approximation : l'approximation des espérances dans les expressions de  $M$  et  $L$  (IV.16). Soient  $((\boldsymbol{\xi}^k, \mathbf{Y}^k)_{k=1,\dots,N})$ ,  $N$  réalisations i.i.d du couple  $(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{Y})$ . Nous cherchons alors  $N$  particules de commande  $(\mathbf{U}^k)_{k=1,\dots,N}$ .

Nous approximations  $M$  par  $\widehat{M}$  et  $L$  par  $\widehat{L}$ , telles que :

$$(IV.18) \quad \begin{aligned} \widehat{M}_{i,j} &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\langle \phi_i(\mathbf{Y}^k), \phi_j(\mathbf{Y}^k) \right\rangle_{\mathbb{U}}, \quad \forall i, j = 1, \dots, \nu \\ \widehat{L}_i &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\langle \phi_i(\mathbf{Y}^k), \nabla_{\mathbf{u}} j(\mathbf{U}^k, \boldsymbol{\xi}^k) \right\rangle_{\mathbb{U}}, \quad \forall i = 1, \dots, \nu. \end{aligned}$$

Nous avons donc que  $\widehat{\alpha}^*$  l'approximation de  $\alpha^*$  vérifie :

$$(IV.19) \quad \widehat{M}\widehat{\alpha}^* = \widehat{L}.$$

La condition d'optimalité approximé s'écrit alors :

$$(IV.20) \quad \mathbb{E}[\nabla_{\mathbf{u}} j(\mathbf{U}, \boldsymbol{\xi}) \mid \mathbf{Y}] \simeq \Phi^\nu(\mathbf{Y})\widehat{\alpha}^* = 0,$$

La résolution des conditions d'optimalité revient alors à trouver les particules  $(\mathbf{U}^k)_{k=1, \dots, N}$  qui vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} \widehat{M}\widehat{\alpha}^* = \widehat{L}, \\ \sum_{i=1}^{\nu} \phi_i(\mathbf{Y})\widehat{\alpha}_i^* = 0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{cases}$$

REMARQUE IV.8. Posons  $\mathcal{H}_N \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\mathbb{Y}, \mathbb{B}(\mathbb{Y}), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}^N; \mathbb{U})$ , où  $\mathbb{P}_{\mathbf{Y}}^N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \delta_{\mathbf{Y}^k}$  est la mesure atomique engendrée par les particules  $(\mathbf{Y}^k)_{k=1, \dots, N}$  (c'est une mesure qui est elle même aléatoire et qui change si nous changeons de tirage de Monte-Carlo). Nous avons alors que :

$$(IV.21) \quad \widehat{M}_{i,j} = \langle \phi_i, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_N}, \quad \forall i, j = 1, \dots, \nu.$$

Sous l'hypothèse que  $(\phi_i)_{i=1, \dots, \nu}$  est une famille libre de  $\nu$  fonctions de  $L^2(\mathbb{Y}, \mathbb{B}(\mathbb{Y}), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}}^N; \mathbb{U})$ , nous avons que la matrice  $\widehat{M}$  est inversible et nous pouvons alors écrire que la condition d'optimalité (IV.11) peut s'approximer par :

$$(IV.22) \quad \Phi^\nu(\mathbf{Y})\widehat{M}^{-1}\widehat{L} = 0 \Rightarrow \widehat{L} = 0 \Rightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left\langle \phi_i(\mathbf{Y}^k), \nabla_{\mathbf{u}} j(\mathbf{U}^k, \boldsymbol{\xi}^k) \right\rangle_{\mathbb{U}} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, \nu.$$

Il s'agit alors de trouver les particules  $(\mathbf{U}^k)_{k=1, \dots, N}$  qui vérifient (IV.22).

Nous retrouvons ainsi des conditions d'optimalité proches de la formulation approximer d'abord, puis optimiser (IV.5) en identifiant  $\mathbf{U}^k$  à  $\Phi^\nu(\mathbf{Y}^k)\alpha$ .  $\blacklozenge$

REMARQUE IV.9.

- (1) L'approche A-O où nous avons approximer le problème d'optimisation stochastique par éléments finis particulières et nous avons, ensuite, écrit des conditions d'optimalité du problème approximé, conduit directement à l'expression d'un feedback  $(\Phi^\nu(\cdot)\alpha)$ .
- (2) L'approche O-A où nous avons écrit les conditions d'optimalité du problème d'optimisation stochastique pour ensuite les approximer par éléments finis particulières, ne conduit pas à l'expression d'un feedback mais à un nuage de particule  $(\mathbf{Y}^k, \mathbf{U}^k)_{k=1, \dots, N}$ . Il reste alors une opération de synthèse de feedback (régression ou interpolation) à accomplir.
- (3) Dans le cas où  $\mathbb{U} = \mathbb{R}$  nous pouvons poser  $P$  la matrice de taille  $\nu \times N$  telle que  $P_{i,k} = \phi_i(\mathbf{Y}^k)$ ,  $\forall i = 1, \dots, \nu$ ,  $\forall k = 1, \dots, N$ . Si  $\nu > N$  alors  $P$  est de plus de rang  $N$  et donc la matrice  $M = PP^\top$  est de plus de rang  $N$ , comme elle est carrée de dimension  $\nu \times \nu$  elle est alors non-inversible. Nous pouvons alors conclure qu'une condition nécessaire d'inversibilité de la matrice  $M$  définie dans (IV.21) est que nous ayons plus de particules tirées que de fonctions de base :

$$\nu \leq N.$$





### IV.1.3.2. Estimation par la méthode des noyaux.

Il s'agit d'approximer les conditions nécessaires d'optimalité (IV.11) du problème (IV.1) en estimant l'espérance conditionnelle par la méthode des noyaux (voir la section III.5.3).

Soient  $((\mathbf{Y}^k, \boldsymbol{\xi}^k)_{k=1, \dots, N})$ ,  $N$  réalisations i.i.d du couple de variables aléatoires  $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi})$ , et soit  $\mathcal{K} : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction noyau et  $h \in \mathbb{R}_+$  le paramètre de largeur de fenêtre nous cherchons alors les points  $(\mathbf{U}^k)_{k=1, \dots, N}$  qui vérifient :

$$(IV.23) \quad \frac{\sum_{i=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{\mathbf{Y}^k - \mathbf{Y}^i}{h} \right) \nabla_{\mathbf{U}} j(\mathbf{U}^i, \boldsymbol{\xi}^i)}{\sum_{j=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{\mathbf{Y}^k - \mathbf{Y}^j}{h} \right)} = 0, \quad \forall k = 1, \dots, N.$$

Ce type d'estimation est voisin de l'estimateur par éléments finis particuliers, dans le sens

où si nous posons  $\phi_i(y) = \frac{\mathcal{K} \left( \frac{y - \mathbf{Y}^i}{h} \right)}{\sum_{j=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{y - \mathbf{Y}^j}{h} \right)}$ , nous avons alors l'expression de l'approximation de l'espérance conditionnelle comme combinaison linéaire de  $N$  fonctions de base. Cependant, les coefficients  $\boldsymbol{\alpha}_i = \nabla_{\mathbf{U}} j(\mathbf{U}^i, \boldsymbol{\xi}^i)$ , associés à ces fonctions, ne sont pas obtenus par projection (minimisation d'une erreur quadratique). Une différence fondamentale entre ces deux méthodes réside alors en le fait que dans la méthode des noyaux, nous prenons  $\nu = N$  fonctions de base aléatoires adaptées aux particules tirées et nous minimisons l'erreur quadratique moyenne par rapport au paramètre de largeur de fenêtre  $h$ ; alors que dans la méthode des éléments finis particuliers, nous prenons un nombre  $\nu$  de fonctions de base indépendant du nombre  $N$  des particules de Monte-Carlo tirées, nous pouvons alors effectuer un compromis entre  $\nu$  et  $N$  afin de minimiser une erreur quadratique moyenne.

La méthode des éléments finis particuliers pour l'approximation des problèmes d'optimisation stochastique consiste alors en deux niveaux d'approximations. Le premier niveau est l'approximation de la structure d'information : en utilisant une interprétation fonctionnelle de tels problèmes et en restreignant le feedback à être dans une classe de fonctions fixée a priori, nous transformons le problème en un problème d'optimisation stochastique en boucle ouverte. Le deuxième niveau consiste en une méthode de quadrature pour approximer les espérances, nous avons ainsi envisagé une technique de type Monte-Carlo pour effectuer cette approximation. Nous espérons ainsi qu'en augmentant le nombre de fonctions fixé a priori ainsi que le nombre de particules de Monte-Carlo nous nous rapprocherons du problème réel non approximé. Qu'en est il alors de la convergence de cette méthode ?

## IV.2. Comportement asymptotique pour un problème linéaire quadratique

D'après la thèse de K. Barty [7] (voir aussi la section IV.1.1), une manière de résoudre numériquement un problème d'optimisation stochastique avec des contraintes de structure d'information, consiste en deux étapes différentes à traiter dans l'ordre suivant :

- (1) d'abord un partitionnement de l'espace des observations, prenant ainsi une commande constante par morceaux sur chaque partition,
- (2) ensuite approximer l'espérance de la fonction coût sur chaque partition par une technique d'échantillonnage à la Monte-Carlo.

Soit  $n$  le nombre de particules de Monte-Carlo dans chaque partition de l'espace d'observation, et soit  $m$  le nombre de ces partitions. Le nombre total de particules de Monte-Carlo est

alors  $N = n \times m$  alors que la taille du problème d'optimisation approximé est de l'ordre de  $m$ . Plus le nombre  $m$  de partitions est grand plus la solution approximée s'approche de la solution réelle (le biais décroît avec  $m$ ), cependant, pour un nombre total de particule  $N$  donné, plus le nombre  $m$  de partitions est grand, plus le nombre moyen de particules dans chaque partition est petit ( $n = \lfloor \frac{N}{m} \rfloor$ ) faisant ainsi augmenter la variance de l'estimateur de l'espérance de la fonction coût. Il s'agit alors de faire un compromis entre la taille de l'échantillon de Monte-Carlo et le nombre de partitions.

Nous retrouvons le même genre de compromis lorsqu'il s'agit d'estimer une espérance conditionnelle par la méthode des noyaux. Nous avons ainsi présenté dans le chapitre III quelques résultats asymptotiques quant au choix optimal de la taille de fenêtre en fonction de la taille de l'échantillon.

Dans cette section, nous essayons d'appliquer les mêmes idées à la méthode des éléments finis particuliers pour le choix optimal du nombre de fonctions de base en fonction du nombre de particules tirées. Pour des raisons de simplification des calculs nous allons nous restreindre à un exemple de problème d'optimisation stochastique linéaire-quadratique (l'espérance conditionnelle en est un cas particulier, voir la remarque III.2) et nous considérerons des fonctions de base à supports disjoints. Après avoir présenté le problème et sa résolution numérique exacte, nous lui appliquons les deux niveaux d'approximation de la méthode des éléments finis particuliers : approximation de la structure d'information et approximation des espérance, obtenant ainsi un estimateur du feedback optimal dépendant de ces deux niveaux. Nous nous proposons alors de calculer l'erreur quadratique moyenne de cet estimateur et de la minimiser en fonction des paramètres de l'approximation.

**IV.2.1. Présentation du problème.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $(\xi_1, \xi_2)$  deux variables aléatoires réelles indépendantes uniformément distribuées sur  $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ , de moyenne nulle et de variance  $\frac{1}{3}$ . Soit  $\mathbb{P}_\xi$  la loi uniforme sur  $[-1, 1]$ .

Nous notons  $U$  la variable aléatoire de commande adaptée à l'observation de  $\xi_1$  ( $U \in \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R})$ ,  $U \preceq \xi_1$ ). La variable aléatoire  $\xi_1$  sera considérée comme la variable aléatoire d'état initial, nous noterons  $\mathbf{X} = \xi_1 + U + \xi_2$  la variable aléatoire d'état final.

Nous cherchons alors à minimiser l'espérance de la fonction coût  $j(U, \mathbf{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \epsilon U^2 + \mathbf{X}^2$ . Sous la contrainte de mesurabilité  $U \preceq \xi_1$ .

$$(IV.24) \quad \min_{U \preceq \xi_1} J(U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [\epsilon U^2 + (\xi_1 + U + \xi_2)^2].$$

**IV.2.2. Résolution exacte.** Nous nous proposons de résoudre analytiquement le problème (IV.24).  $J$  étant une fonction quadratique fortement convexe sur  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{R})$ , le problème admet alors une solution unique. Soit  $\bar{U}$  cette solution. Nous utilisons, en outre, un résultat de T. Rockafellar et R.J.B. Wets d'inversion du min et de l'espérance (voir théorème 14.60 de [98] ainsi que [107]). Nous pouvons alors écrire que :

$$\begin{aligned} J(\bar{U}) &= \min_{U \preceq \xi_1} \mathbb{E} [\epsilon U^2 + (\xi_1 + U + \xi_2)^2] = \mathbb{E} \left[ \min_{u \in \mathbb{R}} \mathbb{E} [\epsilon u^2 + (\xi_1 + u + \xi_2)^2 \mid \xi_1] \right], \\ &= \mathbb{E} \left[ \min_{u \in \mathbb{R}} \mathbb{E} \left[ \epsilon u^2 + (\xi_1 + u)^2 + \frac{1}{3} \mid \xi_1 \right] \right], \\ &= \mathbb{E} \left[ \frac{\epsilon}{1 + \epsilon} \xi_1^2 + \frac{1}{3} \right], \\ &= \frac{1}{3} \frac{1 + 2\epsilon}{1 + \epsilon} \approx \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

nous avons en outre l'expression de la commande optimale :

$$(IV.25) \quad \begin{aligned} \bar{U} &= -\frac{\boldsymbol{\xi}_1}{1+\epsilon}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ &= \bar{u}(\boldsymbol{\xi}_1), \quad \bar{u} \in L^2([0, 1], \mathbb{B}([0, 1]), \mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}; \mathbb{R}). \end{aligned}$$

**IV.2.3. Approximation de la contrainte d'information.** Comme nous l'avons déjà présenté dans la section IV.1.2, nous approximations le problème d'optimisation stochastique (IV.24) par éléments finis particuliers. Ceci consiste en deux étapes d'approximation. La première étant l'approximation des contraintes d'information par une méthode de type éléments finis.

Soit un entier naturel non nul  $m \in \mathbb{N}^*$ , et soit  $(x_i)_{i=1, \dots, m+1}$  une discrétisation régulière de l'intervalle  $[-1, 1]$  telle que :

$$-1 = x_1 < \dots < x_{m+1} = 1, \quad x_{i+1} = x_i + \frac{2}{m}, \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Nous choisissons une famille de  $m$  fonctions de base  $(\phi_i)_{i=1, \dots, m}$ , de  $\mathcal{U}$  telles que :

$$\forall i = 1, \dots, m, \quad \phi_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{I}_{[x_i, x_{i+1}[}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}[ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous approximations l'espace vectoriel  $\mathcal{N}_h$  des variables aléatoire de  $\mathcal{U}$  mesurable par rapport à  $\boldsymbol{\xi}_1$  par le sous-espace vectoriel  $\mathcal{N}_h^m \subset \mathcal{N}_h$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_h &\stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbf{U} \in \mathcal{U}, \quad \mathbf{U} \preceq \boldsymbol{\xi}_1 \}, \\ \mathcal{N}_h^m &\stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{U} \in \mathcal{U}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{U} = \sum_{i=1}^m \phi_i(\boldsymbol{\xi}_1) \alpha_i, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \right\}. \end{aligned}$$

Il s'agit alors de résoudre l'approximation du problème (IV.24) par (IV.26) :

$$(IV.26) \quad \min_{\mathbf{U} \in \mathcal{N}_h^m} \mathbb{E}[\epsilon \mathbf{U}^2 + (\boldsymbol{\xi}_1 + \mathbf{U} + \boldsymbol{\xi}_2)^2].$$

Ce qui revient à résoudre le problème en boucle ouverte suivant :

$$(IV.27) \quad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^m} \mathbb{E} \left[ \epsilon \left( \sum_{i=1}^m \phi_i(\boldsymbol{\xi}_1) \alpha_i \right)^2 + \left( \boldsymbol{\xi}_1 + \sum_{i=1}^m \phi_i(\boldsymbol{\xi}_1) \alpha_i + \boldsymbol{\xi}_2 \right)^2 \right].$$

En écrivant que le gradient de la fonction coût est nul à l'optimum, les conditions d'optimalité de (IV.27) s'écrivent :

$$(IV.28) \quad \begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \phi_i(\boldsymbol{\xi}_1) \left( (1+\epsilon) \sum_{i=1}^m \phi_i(\boldsymbol{\xi}_1) \bar{\alpha}_i + \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 \right) \right] = 0, \quad \forall i = 1, \dots, m, \\ \Leftrightarrow &\bar{\alpha}_i = -\frac{\mathbb{E}[\boldsymbol{\xi}_1 \phi_i(\boldsymbol{\xi}_1)]}{(1+\epsilon) \mathbb{E}[\phi_i(\boldsymbol{\xi}_1)^2]} = -\frac{1}{m(1+\epsilon)} - \frac{x_i}{1+\epsilon}, \quad \forall i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

La solution du problème (IV.26) s'écrit alors :

$$(IV.29) \quad \bar{\mathbf{U}}^m = \sum_{i=1}^m \phi_i(\boldsymbol{\xi}_1) \bar{\alpha}_i.$$

**IV.2.4. Approximation des espérances.** Comme dans la section IV.1.2, une deuxième étape d'approximation est nécessaire : les équations (IV.28) et (IV.29) ne permettant pas de calculer directement la commande optimale du problème (elles incorporent des opérateurs d'espérance), il s'agit de les approximer en appliquant une technique d'échantillonnage de type Monte-Carlo. Nous opérons, ici, un échantillonnage stratifié (voir [29]) suivant une partition de l'espace d'arrivé du couple de variable aléatoire  $(\xi_1, \xi_2)$ .

Nous partitionnons le carré  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  en  $m$  partitions  $(\Xi_i)_{i=1, \dots, m}$  suivant la discrétisation  $(x_i)_{i=1, \dots, m+1}$  :

$$\Xi_i = [x_i, x_{i+1}[ \times [-1, 1], \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Pour chaque partition  $\Xi_i$ , nous simulons  $n = \lfloor \frac{N}{m} \rfloor$  réalisations i.i.d. d'un couple de variables aléatoires  $(\xi_{1,i}, \xi_{2,i})$  suivant une loi uniforme sur  $\Xi_i = [x_i, x_{i+1}[ \times [-1, 1]$ . Nous notons, en outre, les  $n$  particules engendrées par :  $(\xi_{1,i}^k, \xi_{2,i}^k)_{k=1, \dots, n}$ . Nous approximos alors l'espérance d'une fonction  $f$  de  $(\xi_1, \xi_2)$  par :

$$\mathbb{E}[f(\xi_1, \xi_2)] \simeq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_{1,i}^k, \xi_{2,i}^k).$$

Finalement, nous approximos le problème (IV.27) par :

$$(IV.30) \quad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^m} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[ \epsilon \left( \sum_{i=1}^m \phi_i(\xi_{1,j}^k) \alpha_i \right)^2 + \left( \xi_{1,j}^k + \sum_{i=1}^m \phi_i(\xi_{1,j}^k) \alpha_i + \xi_{2,j}^k \right)^2 \right].$$

Comme dans la proposition IV.5, en écrivant que le gradient de la fonction coût est nul à l'optimum, les conditions d'optimalité de (IV.30) s'écrivent :

$$(IV.31) \quad \bar{\alpha}_i^{m,n} = - \frac{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \xi_{1,j}^k \phi_i(\xi_{1,j}^k) + \xi_{2,j}^k \phi_i(\xi_{1,j}^k) \right)}{(1 + \epsilon) \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \phi_i(\xi_{1,j}^k)^2}, \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\phi_i(\xi_{1,j}^k) = \phi_i(\xi_{2,j}^k) = \delta_{i,j}} = - \frac{1}{n(1 + \epsilon)} \sum_{k=1}^n (\xi_{1,i}^k + \xi_{2,i}^k), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

La solution du problème doublement approximé s'écrit alors :

$$(IV.32) \quad \bar{U}^{m,n} = \sum_{i=1}^m \phi_i(\xi_1) \bar{\alpha}_i^{m,n}.$$

La méthode de discrétisation qui vient d'être présentée s'apparente à une méthode par quantification (voir la section IV.1.1) qui est un cas particulier de la méthode des éléments finis particuliers.

Nous nous proposons dans la suite de calculer l'erreur quadratique moyenne associée à l'estimateur de la solution optimale du problème (IV.24). Il s'agira ensuite d'exhiber le compromis optimal (au sens de la minimisation de cette erreur) entre le nombre de fonctions de base et le nombre de particules de Monte-Carlo.

**IV.2.5. Biais du feedback approximé.** Pour tous les entiers naturels non nuls  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  nous avons ainsi construit un estimateur du feedback optimal de (IV.24). Nous le notons  $\bar{u}^{m,n} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tel que :

$$(IV.33) \quad \bar{u}^{m,n}(x) = \sum_{i=1}^m \bar{\alpha}_i^{m,n} \phi_i(x), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Calculons l'espérance de cet estimateur par rapport aux particules de Monte-Carlo tirées :

$$(IV.34) \quad \mathbb{E}[\bar{u}^{m,n}(x)] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E}[\bar{\alpha}_i^{m,n}] \phi_i(x).$$

Pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $(\xi_{1,i}^k, \xi_{2,i}^k)_{k=1, \dots, N}$  sont des réalisations i.i.d., nous avons alors que :

$$(IV.35) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{\alpha}_i^{m,n}] &= -\frac{1}{n(1+\epsilon)} \left( \sum_{k=1}^n \left( \underbrace{\mathbb{E}[\xi_{1,i}^k]}_{=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}} + \underbrace{\mathbb{E}[\xi_{2,i}^k]}_{=0} \right) \right), \\ &= -\frac{1}{1+\epsilon} \left( x_i + \frac{1}{m} \right), \end{aligned}$$

et donc nous avons que :

$$(IV.36) \quad \mathbb{E}[\bar{u}^{m,n}(x)] = -\frac{1}{1+\epsilon} \sum_{i=1}^m \left( x_i + \frac{1}{m} \right) \phi_i(x).$$

Le biais ponctuel en un point  $x \in [-1, 1]$  de cet estimateur s'écrit alors :

$$(IV.37) \quad \begin{aligned} \text{biais}^{m,n}(x) &= |\mathbb{E}[\bar{u}^{m,n}(x)] - \bar{u}(x)|, \\ &= \left| -\frac{x}{1+\epsilon} + \frac{1}{1+\epsilon} \sum_{i=1}^m \left( x_i + \frac{1}{m} \right) \phi_i(x) \right|. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors donner l'expression de l'intégrale du biais au carré :

$$(IV.38) \quad \begin{aligned} B^{m,N} &= \int_{-1}^1 \left( \text{biais}^{m, \lfloor \frac{N}{m} \rfloor}(x) \right)^2 dx, \\ &= \frac{2}{3} \frac{1}{m^2(1+\epsilon)^2}. \end{aligned}$$

Nous remarquons que le biais de l'estimateur du feedback optimal est indépendant du nombre de particules tirées et diminue quand nous augmentons le nombre de fonctions de base. Le biais représente alors la distance du sous-espace vectoriel des variables aléatoires mesurables par rapport à l'observation au sous-espace vectoriel approximé. Il traduit la qualité de l'approximation de la structure d'information et ne reflète en aucun cas le deuxième niveau d'approximation (celui des espérances).

**IV.2.6. Variance du feedback approximé.** Pour tous les entiers naturels non nuls  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ , nous notons  $\text{var}^{m,n}(x)$  la variance ponctuelle en un point  $x \in [-1, 1]$  de l'estimateur  $\bar{u}^{m,n}$  du feedback optimal du problème (IV.24) :

$$(IV.39) \quad \text{var}^{m,n}(x) = \mathbb{E} \left[ (\bar{u}^{m,n}(x))^2 \right] - (\mathbb{E}[\bar{u}^{m,n}(x)])^2.$$

Commençons par calculer  $\mathbb{E} \left[ (\bar{u}^{m,n}(x))^2 \right]$  et  $(\mathbb{E}[\bar{u}^{m,n}(x)])^2$ . Puisque les fonctions de base choisies sont à support disjoints, nous avons alors que :

$$\mathbb{E} \left[ (\bar{u}^{m,n}(x))^2 \right] = \sum_{i=1}^m \mathbb{E} \left[ (\bar{\alpha}_i^{m,n})^2 \right] \phi_i(x).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ (\bar{\alpha}_i^{m,n})^2 \right] &= \frac{1}{n^2(1+\epsilon)^2} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^n (\xi_{1,i}^k + \xi_{2,i}^k) \right)^2 \right], \\
&= \frac{1}{n^2(1+\epsilon)^2} \mathbb{E} \left[ \sum_{k=1}^n (\xi_{1,i}^k + \xi_{2,i}^k)^2 + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{k'=k+1}^n (\xi_{1,i}^k + \xi_{2,i}^k)(\xi_{1,i}^{k'} + \xi_{2,i}^{k'}) \right], \\
&= \frac{1}{n^2(1+\epsilon)^2} \sum_{k=1}^n \underbrace{\mathbb{E} \left[ (\xi_{1,i}^k + \xi_{2,i}^k)^2 \right]}_{=\frac{4}{3m^2} + \frac{2}{m}x_i + x_i^2 + \frac{1}{3}} \\
&\quad + 2 \sum_{k=1}^n \sum_{k'=k+1}^n \underbrace{\mathbb{E} \left[ (\xi_{1,i}^k + \xi_{2,i}^k) \right]}_{=x_i + \frac{1}{m}} \underbrace{\mathbb{E} \left[ (\xi_{1,i}^{k'} + \xi_{2,i}^{k'}) \right]}_{=x_i + \frac{1}{m}}, \\
&= \frac{1}{n^2(1+\epsilon)^2} \left( n \left( \frac{4}{3m^2} + \frac{2}{m}x_i + x_i^2 + \frac{1}{3} \right) + 2 \frac{n(n-1)}{2} \left( x_i + \frac{1}{m} \right)^2 \right),
\end{aligned}$$

de plus nous avons que :

$$(\mathbb{E} [\bar{u}^{m,n}(x)])^2 = \frac{1}{(1+\epsilon)^2} \sum_{i=1}^m \left( x_i + \frac{1}{m} \right)^2 \phi_i(x).$$

Nous pouvons alors donner l'expression de l'intégrale de la variance :

$$\begin{aligned}
(IV.40) \quad V^{m,N} &= \int_{-1}^1 \left( \text{var}^{m, \lfloor \frac{N}{m} \rfloor}(x) \right) dx, \\
&= \frac{2}{3} \frac{1+m^2}{Nm(1+\epsilon)^2}.
\end{aligned}$$

Contrairement au Biais  $B^{m,N}$  la variance dépend, à la fois, du nombre de fonctions de base et du nombre de particules tirées. Elle diminue si on augmente le nombre de particules de Monte-Carlo tirées.

Comme le biais  $B^{m,N}$  et la variance  $V^{m,N}$  ont des comportements opposés en fonction du nombre des fonctions de base et du nombre de particules. Nous pouvons penser à chercher le nombre optimal de fonctions selon le nombre de particules tirées afin de minimiser une erreur quadratique moyenne  $\text{IMSE}^{m,N} = B^{m,N} + V^{m,N}$ .

#### IV.2.7. Erreur quadratique moyenne du feedback approximé.

$$\begin{aligned}
(IV.41) \quad \text{IMSE}^{m,N} &= B^{m,N} + V^{m,N}, \\
&= \frac{2}{3} \frac{m^3 + m + N}{m^2 N (1+\epsilon)^2}.
\end{aligned}$$

En minimisant  $\text{IMSE}^{m,N}$  en fonction de  $m$  à  $N$  fixé et en faisant tendre le nombre  $N$  de particules vers l'infini ; Nous obtenons que le choix asymptotique optimal du nombre de fonctions de base est de :

$$(IV.42) \quad m^* = \mathcal{O} \left( N^{\frac{1}{3}} \right), \quad \text{IMSE}^* = \mathcal{O} \left( N^{-\frac{2}{3}} \right).$$

L'estimateur du feedback optimal par la méthode des éléments finis particulières converge (au sens de l'erreur quadratique moyenne) donc vers le vrai feedback optimal quand  $N \rightarrow +\infty$ , quand  $m \rightarrow +\infty$  mais aussi quand  $n = \lfloor \frac{m}{N} \rfloor \rightarrow +\infty$ . Asymptotiquement nous récupérons dans chaque fenêtre  $[x_i, x_i + \frac{2}{m}]$ , de taille  $\frac{2}{m}$ , une infinité de particules. Nous retrouvons ainsi un compromis

semblable à celui présenté dans les méthodes d'approximation d'espérance conditionnelle (voir la section III.5).

Dans le cas des estimateurs à noyaux de l'espérance conditionnelle, nous obtenons une erreur quadratique moyenne de l'ordre de  $N^{-\frac{4}{5}}$  (dans le cas scalaire), alors que dans le cas des éléments finis particuliers avec des fonctions de bases à supports disjoints nous obtenons une erreur quadratique moyenne *moins bonne* de l'ordre  $N^{-\frac{2}{3}}$ . Cette différence suggère alors l'utilisation de fonctions de base à support non-disjoints afin de diminuer l'erreur quadratique engendrée.

### IV.3. Résultats de convergence variationnelle et revue de la littérature

Nous nous intéresserons, dans cette partie, à la résolution numérique de problèmes d'optimisation stochastique avec une contrainte de structure d'information. La représentation (IV.1) du problème est dite une formulation algébrique, en référence au fait qu'elle utilise une interprétation probabiliste de la commande du système ( $U : \Omega \rightarrow \mathbb{U}$ ). Dans le premier chapitre (chapitre I) nous avons vu que nous pouvons donner une interprétation fonctionnelle des problèmes d'optimisation stochastique en considérant la commande comme une fonction des bruits  $u : \Xi \rightarrow \mathbb{U}$ .

Nous reprenons, dans cette section, les notations adoptées dans la section IV.1 où nous avons présenté la méthode des éléments finis particuliers. Nous supposons en outre qu'il existe une *application* mesurable d'observation  $h : \Xi \rightarrow \mathbb{Y}$  telle que nous pouvons écrire la *variable aléatoire* d'observation  $\mathbf{Y}$  comme une *fonction* des bruits :  $\mathbf{Y} = h(\boldsymbol{\xi})$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s..

Notons  $\mathcal{N}_h$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}; \mathbb{U})$  des applications  $\sigma(h)$ -mesurables. En utilisant les arguments du lemme IV.3, nous pouvons écrire que :

$$(IV.43) \quad \mathcal{N}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathcal{N}, \quad u \preceq h\} = \{u \in \mathcal{N}, \quad \exists \phi \in \mathcal{H}, \quad u = \phi \circ h\}.$$

D'après la proposition I.17 nous pouvons écrire le problème (IV.1) de la manière suivante :

$$(SP_h) \quad \min_{u \in \mathcal{N}_h} J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})].$$

Les problèmes du type  $(SP_h)$  et leurs duals ont été étudiés par T. Rockafellar et R.J.B. Wets dans une série de papiers [93, 94, 95, 96]. Le fait que la fonction  $j$  puisse prendre des valeurs infinies nous permet de considérer des contraintes presque sûres avec une pénalisation exacte dans la fonction objectif.

À moins d'avoir une mesure de probabilité  $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}$  atomique, l'ensemble  $\mathcal{N}$  est de dimension infinie. C'est pour cela que dans la plupart des cas, Le problème  $(SP_h)$  ne peut pas être directement résolu. Deux étapes d'approximations sont alors nécessaires : approximation de l'espérance dans la fonction coût, et l'approximation de l'ensemble des contraintes  $\mathcal{N}_h$ .

Il est, alors, naturel de se poser la question de la convergence du problème approximé vers le problème réel. Nous allons essayer d'apporter des éléments de réponse à cette question dans le cadre de la théorie de la *convergence variationnelle des problèmes d'optimisation* en considérant des notions d'*épi-convergence* et d'*épi/hypo-convergence* qui sont largement reconnues comme étant le cadre approprié pour parler de la convergence des problèmes d'optimisation. Pour plus de détails sur la théorie de la convergence variationnelle, nous renvoyons le lecteur aux travaux de H. Attouch [5], de T. Rockafellar et R.J.B. Wets [98, chapitre 7] ou de A. Braides [23].

L'approximation des problèmes en boucle ouverte (voir définition I.20), a donné lieu à plusieurs travaux. Dans ce cas nous n'avons pas à approximer la structure d'information mais seulement la mesure de probabilité  $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}$  par une suite de mesure discrète  $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}^N$  indexées par un entier  $N \in \mathbb{N}$ . Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Birge et Wets [20], Robinson et Wets [92], Dupacova et Wets [45], Lucchetti et Wets [64], Artstein et Wets [3, 4] et Pennanen et Koivu [80].

Dans le cas de la boucle fermée  $Z$ . Artstein [1, 2], H. Kudo [61] et L. Piccini [82] se sont intéressés à l'approximation des structures d'information par l'approximation des  $\sigma$ -algèbres engendrées.

La littérature de l'épi-convergence des problèmes d'optimisations stochastique par l'approximation, à la fois, de la mesure de probabilité et de la structure d'information semble n'être qu'à ses débuts. Nous citerons principalement les travaux de T. Pennanen [78] traitant de l'approximation par des méthodes de quantification et certains travaux de l'équipe SOWG (J.P. Chancelier [28] et P. Carpentier, J.P. Chancelier et M. De Lara [26]) traitant de l'approximation des variables aléatoires de bruit et des  $\sigma$ -algèbres d'observation.

Nous nous intéresserons dans cette section seulement à l'approximation des contraintes d'informations. Étant donné un entier naturel  $\nu \in \mathbb{N}$  nous approximations le sous-espace vectoriel  $\mathcal{N}_h$  (de dimension infini) avec une série de sous-espaces vectoriels  $(\mathcal{N}_h^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  indexés par  $\nu$  de dimensions finis. Nous nous proposons alors de résoudre le problème approximé suivant :

$$(SP_h^\nu) \quad \min_{u \in \mathcal{N}_h^\nu} J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})].$$

L'ensemble  $\mathcal{N}_h^\nu$  sera obtenu par la méthode des éléments finis particulières (voir la section IV.1). Soit alors  $(\phi_i : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U})_{i \in \mathbb{N}}$  une base de  $\mathcal{H}$  et soit  $I(\nu) \in \mathbb{N}$  (où  $I$  est une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ ) un nombre de fonctions de cette base. Nous notons  $\mathcal{H}^\nu$  le sous-espace vectoriel engendré par cette famille de fonctions :

$$\mathcal{H}^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \phi \in \mathcal{H}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^{I(\nu)}, \quad \phi = \sum_{i=1}^{I(\nu)} \phi_i \alpha_i \right\}.$$

Nous pouvons alors approximer le sous-espace  $\mathcal{N}_h$  par  $\mathcal{N}_h^\nu$  tel que :

$$(IV.44) \quad \mathcal{N}_h^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathcal{N}, \quad \exists \phi \in \mathcal{H}^\nu, \quad u = \phi \circ h\}.$$

**IV.3.1. Épi-convergence de problèmes sans contraintes.** Nous nous proposons, ici, d'étudier la convergence de la suite de problèmes  $(SP_h^\nu)$  vers le problème  $(SP_h)$ . Nous présentons un résultat général d'épi-convergence des problèmes d'optimisation stochastique approximations par la méthode des éléments finis particulières, pour ce résultat une hypothèse de continuité de la fonction coût sera nécessaire excluant ainsi toute pénalisation exacte des contraintes presque-sûre éventuelle. Nous envisageons donc ici des problèmes où il n'y a pas de contraintes d'admissibilité presque-sûres, c'est à dire que nous considérerons que la fonction coût  $j : \Xi \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}$  ne prend pas de valeurs infinies.

#### IV.3.1.1. Réécriture du problème.

Nous pouvons écrire des versions équivalentes aux problèmes  $(SP_h)$  et  $(SP_h^\nu)$  en pénalisant à chaque fois la contrainte d'information et la contrainte d'information approximé. Posons alors l'application  $F : \mathcal{N} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  telle que :

$$(IV.45) \quad \begin{aligned} F : \quad \mathcal{N} &\rightarrow ]-\infty, +\infty] \\ u &\mapsto F(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})] + \delta_{\mathcal{N}_h}(u), \end{aligned}$$

où  $\delta_{\mathcal{N}_h}(u) = 0$  si  $u \in \mathcal{N}_h$  et  $\delta_{\mathcal{N}_h}(u) = +\infty$  si  $u \notin \mathcal{N}_h$ . De la même manière, nous posons l'application  $F^\nu : \mathcal{N} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  telle que :

$$(IV.46) \quad \begin{aligned} F^\nu : \quad \mathcal{N} &\rightarrow ]-\infty, +\infty] \\ u &\mapsto F^\nu(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})] + \delta_{\mathcal{N}_h^\nu}(u). \end{aligned}$$



Il s'agira, dans la suite, de donner un résultat de convergence variationnelle de la suite de fonctions  $(F^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  vers la fonction  $F$ . Cette convergence sera donnée au sens de l'épi-convergence.

#### IV.3.1.2. Quelques définitions.

Commençons par donner la définition de la convergence variationnelle d'ensembles. Nous renvoyons le lecteur à [98, chapitre 4] pour une définition dans le cadre de la dimension finie et à [5, section 1.4.1] pour une extension au cadre plus général d'espaces topologiques.

**DÉFINITION IV.10** (Convergence de Painlevé-Kuratowski). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique I-dénombrable<sup>2</sup>, pour toute suite  $(C^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  de sous-ensembles de  $X$  on définit la  $\tau$ -lim inf (notée  $\tau\text{-lim inf}_\nu C^\nu$ ) comme étant l'ensemble des limites des suites dans  $C^\nu$ . On définit aussi la  $\tau$ -lim sup (notée  $\tau\text{-lim sup}_\nu C^\nu$ ) de la suite  $(C^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  comme étant l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites extraites dans  $C^\nu$  :

$$\tau\text{-lim inf}_\nu C^\nu = \left\{ x \in X, \exists (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}, \forall \nu \in \mathbb{N}, x_\nu \in C^\nu, \text{ et } x_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\tau} x \right\},$$

$$\tau\text{-lim sup}_\nu C^\nu = \left\{ x \in X, \exists (\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}, \exists (x_k)_{k \in \mathbb{N}}, \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in C^{\nu_k}, \text{ et } x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\tau} x \right\}.$$

Quand la  $\tau$ -lim sup est égale à  $\tau$ -lim inf nous dirons que  $(C^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  converge au sens de Painlevé-Kuratowski vers  $C$  et nous noterons :

$$C = \tau\text{-lim inf}_\nu C^\nu = \tau\text{-lim sup}_\nu C^\nu \Leftrightarrow C = \text{pk}_\tau\text{-lim}_\nu C^\nu.$$

Quand aucune confusion ne peut être faite sur la topologie  $\tau$  nous notons :  $C = \text{pk}\text{-lim}_\nu C^\nu$   $\blacklozenge$

H. Attouch donne une caractérisation, plus simple à vérifier en pratique, de la convergence de Painlevé-Kuratowski. Nous renvoyons le lecteur à [5, corollaire 1.35].

**PROPOSITION IV.11** (Caractérisation de la convergence de Painlevé Kuratowski). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique I-dénombrable, et soit  $(C^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  une suite de sous-ensembles de  $X$ . Nous avons alors que  $C = \text{pk}_\tau\text{-lim}_\nu C^\nu$  si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in C, \exists (x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}, \text{ tel que } \forall \nu \in \mathbb{N}, x_\nu \in C^\nu, x_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\tau} x, \\ \forall (\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}, \forall (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ tel que } \forall k \in \mathbb{N}, x_k \in C^{\nu_k}, \left( x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{\tau} x \right) \Rightarrow (x \in C). \end{array} \right.$$

L'épi-convergence d'une suite de fonctions sera définie comme la convergence au sens de Painlevé Kuratowski des épi-graphes (voir définition A.12 de l'épi-graphe d'une fonction).

Nous pouvons maintenant donner la définition de l'épi-convergence. Nous renvoyons le lecteur à [98, chapitre 7] pour une définition dans le cadre de la dimension finie et à [5, section 1.2] pour une extension au cadre plus général d'espaces topologiques.

**DÉFINITION IV.12** (Épi-convergence). Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique I-dénombrable, nous dirons qu'une suite de fonctions  $(f^\nu : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{\nu \in \mathbb{N}}$  épi-converge vers une fonction  $f$  notée  $e_\tau\text{-lim}_\nu f^\nu$  si et seulement si :

$$\text{epi}(f) = \text{pk}_\tau\text{-lim}_\nu \text{epi}(f^\nu),$$

nous avons alors que :

$$f = e_\tau\text{-lim}_\nu f^\nu$$

Quand aucune confusion ne peut être faite sur la topologie  $\tau$  nous noterons :  $f = e\text{-lim}_\nu f^\nu$   $\blacklozenge$

<sup>2</sup>Pour tout point  $x \in X$ , il existe une suite  $(U^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  de voisinages ouverts de  $x$  tels que pour tout voisinage  $V$  il existe  $\nu \in \mathbb{N}$  tel que  $V \subset U^\nu$  [5]

H. Attouch donne une caractérisation, plus simple à vérifier en pratique, de l'épi-convergence. Nous renvoyons le lecteur à [5, proposition 1.14].

PROPOSITION IV.13 (Caractérisation de l'épi-convergence). *Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique I-dénombrable, et soit  $(f^\nu : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{\nu \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions. Nous avons alors que  $f = e_\tau\text{-lim}_\nu f^\nu$  si et seulement si  $\forall x \in X$ , les deux affirmations suivantes sont vérifiées :*

$$\begin{cases} \forall x_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\tau} x, & f(x) \leq \liminf_\nu f^\nu(x_\nu), \\ \exists x_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\tau} x, & f(x) \geq \limsup_\nu f^\nu(x_\nu). \end{cases}$$

Ces deux inégalités sont respectivement appelées l'inégalité de la  $\liminf$  et l'inégalité de la  $\limsup$ .

Nous donnons, en outre, deux propriétés importantes de l'épi-convergence et de la convergence au sens de Painlevé-Kuratowski d'ensembles, à savoir l'épi-convergence des fonctions indicatrices (voir [98, proposition 7.4] pour un résultat en dimension finie et [5, proposition 1.4] pour la dimension infinie) et la stabilité de l'épi-convergence par l'addition de fonctions continues (voir [98, exercice 7.8] pour un résultat en dimension finie et [5, théorème 2.15] pour la dimension infinie).

LEMME IV.14 (Épi-convergence des fonctions indicatrices d'ensembles). *Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique I-dénombrable, et soit  $(C^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  une suite de sous-ensemble de  $X$  telle que  $\text{pk}_\tau\text{-lim}_\nu C^\nu = C$ . Nous avons alors que :*

$$e_\tau\text{-lim}_\nu \delta_{C^\nu} = \delta_C.$$

LEMME IV.15 (Stabilité par addition d'une fonction continue). *Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique I-dénombrable,  $(f^\nu : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{\nu \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions telles que  $e_\tau\text{-lim}_\nu f^\nu = f$ . Soit, en outre,  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction continue pour la topologie  $\tau$ . Nous avons alors que :*

$$e_\tau\text{-lim}_\nu (f^\nu + g) = f + g.$$

L'importance de l'épi-convergence dans le domaine de l'optimisation, réside dans le fait que sous des hypothèses appropriées, elle garantit la convergence des  $\arg \min$  d'une suite de problèmes d'optimisation approximés vers l' $\arg \min$  de l'épi-limite de ces mêmes problèmes. Nous énonçons ci-après un résultat garantissant cette convergence des  $\arg \min$  (nous renvoyons le lecteur à [5, section 2.2]).

PROPOSITION IV.16 (Convergence des minimums). *Soit  $(X, \tau)$  un espace topologique I-dénombrable et soit  $(f^\nu : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{\nu \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions telles que  $e_\tau\text{-lim}_\nu f^\nu = f$ . Nous supposons que pour tout  $\nu \in \mathbb{N}$  l' $\arg \min$  de  $f^\nu$  ne part pas à l'infini i.e.  $\exists K \subset X$  un sous-ensemble compact (pour la topologie  $\tau$ ) tel que  $\inf_{x \in X} f^\nu(x) = \inf_{x \in K} f^\nu(x)$ <sup>3</sup>. Nous avons alors que :*

$$\lim_\nu \left( \inf_{x \in X} f^\nu(x) \right) = \min_{x \in X} f(x),$$

de plus si  $(x^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  est une suite telle que  $\lim_\nu f^\nu(x^\nu) = \lim_\nu (\inf_{x \in X} f^\nu(x))$  alors :

$$\left( \lim_\nu x^\nu \right) \in \arg \min_{x \in X} f(x).$$

<sup>3</sup>Ce sont des fonctions dites équi-coercive - voir définition A.15

IV.3.1.3. *Résultats d'épi-convergences.*

Le but, ici, est de montrer l'épi-convergence de la suite de fonctions  $F^\nu$  vers la fonction  $F$  (IV.46). La contrainte de mesurabilité du problème ( $SP_h$ ) (définie par l'ensemble  $\mathcal{N}_h$  (IV.43)) est approximée par éléments finis, nous obtenons alors le problème ( $SP_h^\nu$ ) (dont la contrainte d'information est définie par l'ensemble  $\mathcal{N}_h^\nu$  (IV.44)).

Le premier résultat traitera alors de la convergence au sens de Painlevé Kuratowski de l'ensemble approximé  $\mathcal{N}_h^\nu$  vers l'ensemble  $\mathcal{N}_h$ .

**THÉORÈME IV.17** (Convergence de la structure d'information approximée). *Nous munissons  $\mathcal{N}$  d'une topologie  $\tau$ . Nous avons alors le résultat de convergence au sens de Painlevé Kuratowski suivant :*

$$\mathcal{N}_h = \text{pk}_\tau\text{-}\lim_{\nu} \mathcal{N}_h^\nu.$$

**Démonstration :** Nous utiliserons la proposition IV.11. Nous avons alors deux affirmations à vérifier.

- (1) Soit  $u \in \mathcal{N}_h \Rightarrow u \preceq h \Rightarrow \exists \phi \in \mathcal{H}$  tel que  $u = \phi \circ h$ .  $(\phi_i : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{U})_{i \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathcal{H}$  nous avons alors qu'il existe une suite  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que  $\phi = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \phi_i$ . Soit  $\psi^\nu = \sum_{i=1}^{I(\nu)} \alpha_i \phi_i$ . Comme l'application  $I : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante et que la famille de fonctions est libre dans  $\mathcal{N}$ , nous avons alors que  $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \psi^\nu = \phi$ . Par composition nous avons que  $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ,  $u^\nu \in \mathcal{N}_h^\nu$   $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} u^\nu = u$  où  $u^\nu = \psi^\nu \circ h$ .
- (2) Soit une suite  $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et une suite  $(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k \in \mathcal{N}_h^{\nu_k}$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} u^k = u$ , comme  $u^k \preceq h$  alors  $u \preceq h$ ; de plus  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $u^k \in \mathcal{N}_h^{\nu_k} \Rightarrow \exists (\alpha_i)_{i=1, \dots, I(\nu_k)}$  tel que  $u^k = \left( \sum_{i=1}^{I(\nu_k)} \alpha_i \phi_i \right) \circ h$ . Nous avons alors que  $\sum_{i=1}^{I(\nu_k)} \alpha_i \phi_i \in \mathcal{H}^{\nu_k} \subset \mathcal{H} \Rightarrow u^k \in \mathcal{N}_h \Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} u^k = u \in \mathcal{N}_h$ . ■

Cette convergence au sens de Painlevé-Kuratowski des ensembles admissibles induit l'épi-convergence des fonctions indicatrices d'ensembles. Nous utilisons le lemme IV.14 pour montrer le corollaire suivant :

**COROLLAIRE IV.18** (Épi-convergence des fonctions indicatrices d'ensembles). *Nous munissons  $\mathcal{N}$  d'une topologie  $\tau$ . Nous avons alors le résultat d'épi-convergence suivant :*

$$\delta_{\mathcal{N}_h} = \text{e}_\tau\text{-}\lim_{\nu} \delta_{\mathcal{N}_h^\nu}.$$

**Démonstration :** Directement d'après le lemme IV.14 ■

**REMARQUE IV.19** (Convergence faible/forte). Les résultats du théorème IV.17 et du corollaire IV.18 restent valables indifféremment pour  $\mathcal{N} = L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{U})$  munit de sa topologie faible ou forte. ◆

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'épi-convergence des problèmes ( $SP_h^\nu$ ) vers ( $SP_h$ ) :

**THÉORÈME IV.20** (Épi-convergence de problèmes sans contraintes). *Nous munissons  $\mathcal{N}$  d'une topologie  $\tau$ . Nous supposons en outre que la fonction  $J : \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  telle que  $J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(u(\xi), \xi)]$  est continue pour cette même topologie. Nous avons alors que :*

$$F = \text{e}_\tau\text{-}\lim_{\nu} F^\nu$$

**Démonstration :** La preuve découle immédiatement du corollaire IV.18. En utilisant le lemme IV.15 nous avons que :  $\left( F^\nu \stackrel{\text{def}}{=} J + \delta_{\mathcal{N}_h^\nu} \right)_{\nu \in \mathbb{N}}$  épi-converge vers  $F \stackrel{\text{def}}{=} J + \delta_{\mathcal{N}_h}$ . ■

La continuité de la fonction  $J$ , nécessaire pour avoir le résultat du théorème IV.20, a été étudiée par plusieurs auteurs qui se sont intéressés à la semi-continuité inférieure des fonctions intégrales d'intégrandes normales (nous renvoyons le lecteur à [98, définition 14.27] pour la définition d'une intégrande normale). A.D. Ioffe dans [59] et L.D. Berkovitz [15] se sont intéressés à la semi-continuité forte et faible dans des espaces  $L^p$  de ce type de fonctions.

Nous proposons ici d'utiliser une hypothèse du type Lipschitz pour donner un résultat de continuité de  $J$  dans la topologie forte.

LEMME IV.21 (Continuité). *Supposons qu'il existe une application  $b : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b \in L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{R})$  telle que :*

$$\forall (u, v) \in \mathbb{U}^2, \quad |j(u, \xi) - j(v, \xi)| \leq b(\xi) \|u - v\|_{\mathbb{U}},$$

alors  $J : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J(u) = \mathbb{E}[j(u(\xi), \xi)]$  est une fonction continue.

**Démonstration :** Soit  $(u, v) \in \mathcal{N}^2$  nous avons alors que  $\mathbb{P}$ -presque-sûrement :

$$\begin{aligned} & |j(u(\xi), \xi) - j(v(\xi), \xi)| \leq b(\xi) \|u(\xi) - v(\xi)\|_{\mathbb{U}} \\ \Rightarrow |J(u) - J(v)| & \leq \int_{\Xi} b(\xi) \|u(\xi) - v(\xi)\|_{\mathbb{U}} \mathbb{P}_\xi(d\xi), \\ \Rightarrow |J(u) - J(v)| & \leq B \|u - v\|_{\mathcal{N}}, \end{aligned}$$

où  $B = \|b\|_{L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{R})}$ .  $J$  est donc de Lipschitz avec une constante de Lipschitz  $B$ , elle est donc continue. ■

REMARQUE IV.22 (Convergence des minimums). Nous munissons  $\mathcal{N}$  de sa topologie forte. Nous supposons en outre que la fonction  $J : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $J(u) = \mathbb{E}[j(u(\xi), \xi)]$  est continue pour cette même topologie. Si  $\forall \nu \in \mathbb{N}$ ,  $\exists K \subset \mathcal{N}$  un sous-ensemble compact de  $\mathcal{N}$  tel que  $\min_{u \in \mathbb{N}} F^\nu = \min_{u \in K} F^\nu$  alors d'après la proposition IV.16, nous avons que

$$\lim_{\nu} \left( \min_{u \in \mathcal{N}} F^\nu(u) \right) = \min_{u \in \mathcal{N}} F(u),$$

de plus si  $(u^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  est une suite telle que  $\lim_{\nu} F^\nu(u^\nu) = \lim_{\nu} (\inf_{u \in \mathcal{N}} F^\nu(u))$  alors :

$$\left( \lim_{\nu} u^\nu \right) \in \arg \min_{u \in \mathcal{N}} F(u).$$

◆

REMARQUE IV.23 (Épi-convergence des problèmes avec contraintes d'admissibilité). Nous reprenons le problème  $(SP_h)$  et nous considérons que nous avons, en plus des contraintes de mesurabilité, des contraintes presque sûres d'admissibilité. Nous considérons alors le problème suivant :

$$\min_{u \in \mathcal{N}_h \cap \mathcal{C}^{\text{ad}}} J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(u(\xi), \xi)].$$

où l'ensemble  $\mathcal{N}_h$  est défini par (IV.43) et l'ensemble  $\mathcal{C}^{\text{ad}} \subset \mathcal{N}$  est tel que :

$$(IV.47) \quad \mathcal{C}^{\text{ad}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathcal{N}, \quad u(\xi) \in \mathcal{C}^{\text{ad}}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \right\},$$

où  $\mathcal{C}^{\text{ad}} \subset \mathbb{U}$  est un sous-ensemble déterministe.

Si  $\mathcal{N}_h \cap \mathcal{C}^{\text{ad}}$  est un espace de Hilbert (par exemples les fonctions de  $\mathcal{N}_h$  à valeurs dans l'hyper-cube unitaire  $[0, 1]^{d_u}$ ). Alors, nous pouvons choisir la base de fonctions  $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle qu'elle engendre  $\mathcal{N}_h \cap \mathcal{C}^{\text{ad}}$ ; et nous avons donc le même résultat d'épi-convergence (voir le lemme B.4). ◆

**IV.3.2. Épi/Hypo-convergence des problèmes avec contraintes.** Nous considérons ici le problème  $(SP_h)$  auquel nous rajoutons une contrainte linéaire presque sûre. et nous nous proposons d'étudier la convergence variationnelle du Lagrangien du problème ainsi formé.

Soit  $\mathcal{A}$  une application linéaire de  $\mathcal{N}$  dans  $\mathcal{N}^\mathbb{V} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{V})$  où  $\mathbb{U} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_u}$  et  $\mathbb{V} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{d_v}$  telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathcal{N} &\rightarrow \mathcal{N}^\mathbb{V}, \\ u &\mapsto \mathcal{A}u, \end{aligned}$$

où  $(\mathcal{A}u)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} A(\xi)u(\xi)$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s. avec  $A$  une application de  $\Xi$  dans l'espace des opérateurs linéaires de  $\mathbb{U}$  dans  $\mathbb{V}$  ( $A : \Xi \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^{d_u}, \mathbb{R}^{d_v})$ ). Et soit  $b$  une application de  $\Xi$  dans  $\mathbb{R}^{d_v}$  (à chaque  $\xi$  elle associe un vecteur de taille  $d_v$ ). Nous supposons par la suite que  $b \in L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{V})$ . Nous considérons alors le problème suivant :

$$(SP_h(A, b)) \quad \begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{N}} J(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(u(\xi), \xi)], \\ \text{sous } u &\in \mathcal{N}_h, \\ A(\xi)u(\xi) &= b(\xi), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{aligned}$$

Nous traiterons la contrainte presque-sûre par dualité, et nous définissons  $\mathcal{L} : \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\mathbb{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  le Lagrangien du problème  $(SP_h(A, b))$  tel que :

$$(\mathcal{L}) \quad \mathcal{L}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbb{E}[j(u(\xi), \xi)] + \mathbb{E}[\langle v(\xi), A(\xi)u(\xi) - b(\xi) \rangle_{\mathbb{V}}] & \text{si } u \in \mathcal{N}_h \text{ et } v \in \mathcal{N}^\mathbb{V}, \\ +\infty & \text{si } u \notin \mathcal{N}_h, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

#### IV.3.2.1. Approximation primal/dual.

Nous nous intéresserons dans cette section à l'approximation à la fois des variables primales (contraintes d'informations comme dans la section IV.3.1) et des variables duales (contraintes presque-sûres) dans le Lagrangien en approximant l'espace dual  $\mathcal{N}^\mathbb{V}$  (de dimension infinie) avec une série de sous-espaces vectoriels  $(\mathcal{N}^\mathbb{V})^\nu$  indexés par  $\nu$  (de dimensions finies).

Nous définissons alors  $\mathcal{L}^\nu : \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\mathbb{V} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , une approximation du Lagrangien  $(\mathcal{L})$  tel que :

$$(\mathcal{L}^\nu) \quad \mathcal{L}^\nu(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbb{E}[j(u(\xi), \xi)] + \mathbb{E}[\langle v(\xi), A(\xi)u(\xi) - b(\xi) \rangle_{\mathbb{V}}] & \text{si } u \in \mathcal{N}_h^\nu \text{ et } v \in (\mathcal{N}^\mathbb{V})^\nu, \\ +\infty & \text{si } u \notin \mathcal{N}_h^\nu, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les ensembles  $\mathcal{N}_h^\nu$  et  $(\mathcal{N}^\mathbb{V})^\nu$  seront obtenus par la méthode des éléments finis particuliers (voir la section IV.1). Soit alors  $(\psi_i : \Xi \rightarrow \mathbb{V})_{i \in \mathbb{N}}$  une base de  $\mathcal{N}^\mathbb{V}$  et soit  $J(\nu) \in \mathbb{N}$  (où  $J$  est une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ ) un nombre de fonctions de cette base. Nous notons  $(\mathcal{N}^\mathbb{V})^\nu$  le sous-espace vectoriel engendré par cette famille de fonctions :

$$(\mathcal{N}^\mathbb{V})^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ v \in \mathcal{N}^\mathbb{V}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^{J(\nu)}, \quad v = \sum_{i=1}^{J(\nu)} \psi_i \alpha_i \right\}.$$

En prenant la convention que  $+\infty - \infty = -\infty$ , nous pouvons réécrire les Lagrangiens  $(\mathcal{L})$  et  $(\mathcal{L}^\nu)$  en pénalisant les contraintes sur les variables primales et duales :

$$(IV.48) \quad \mathcal{L}(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(u(\xi), \xi)] + \mathbb{E}[\langle v(\xi), A(\xi)u(\xi) - b(\xi) \rangle_{\mathbb{V}}] + \delta_{\mathcal{N}_h}(u) - \delta_{\mathcal{N}^\mathbb{V}}(v).$$

De la même manière, nous réécrivons  $\mathcal{L}^\nu : \mathcal{N} \times \mathcal{N}^\vee \rightarrow [-\infty, +\infty]$  tel que :

$$(IV.49) \quad \mathcal{L}^\nu(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})] + \mathbb{E}[\langle v(\boldsymbol{\xi}), A(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi}) \rangle_{\mathbb{V}}] + \delta_{\mathcal{N}_h^\nu}(u) - \delta_{(\mathcal{N}^\vee)^\nu}(v).$$

Nous nous intéresserons alors à la convergence variationnelle de la suite de Lagrangiens approximatés ( $\mathcal{L}^\nu$ ) vers le Lagrangien ( $\mathcal{L}$ ). Nous sommes alors amené à utiliser l'extension de l'épi-convergence aux problèmes de points selle : c'est l'épi/hypo-convergence (voir [5, section 1.5.2]).

#### IV.3.2.2. Quelques définitions.

Commençons par donner quelques définitions et résultats généraux.

**DÉFINITION IV.24** (Épi/hypo-convergence). Soient  $(X, \tau)$  et  $(Y, \sigma)$  deux espaces topologiques I-dénombrables, et soit  $(f^\nu : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{\nu \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions. Nous dirons que  $f^\nu$  épi/hypo-converge vers  $f$  et nous noterons  $e_\tau/h_\sigma\text{-}\lim_\nu f^\nu = f$  si et seulement si  $\forall (x, y) \in X \times Y$  :

$$\begin{cases} \forall x_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\tau} x, & \exists y_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\sigma} y, & f(x, y) \leq \liminf_\nu f^\nu(x_\nu, y_\nu), \\ \forall y_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\sigma} y, & \exists x_\nu \xrightarrow[\nu \rightarrow +\infty]{\tau} x, & f(x, y) \geq \limsup_\nu f^\nu(x_\nu, y_\nu). \end{cases}$$

Ces deux inégalités sont respectivement appelées l'inégalité de la liminf et l'inégalité de la limsup.  $\blacklozenge$

Nous donnons, en outre, une propriété importante de l'épi/hypo-convergence, à savoir sa stabilité par l'addition de fonctions continues (voir [116, théorème 4]).

**LEMME IV.25** (Stabilité par addition d'une fonction continue). Soient  $(X, \tau)$  et  $(Y, \sigma)$  deux espaces topologiques I-dénombrables,  $(f^\nu : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{\nu \in \mathbb{N}}$  et  $(g^\nu : Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{\nu \in \mathbb{N}}$  deux suites de fonctions telles que  $e_\tau\text{-}\lim_\nu f^\nu = f$  et  $e_\tau\text{-}\lim_\nu g^\nu = g$ . Soit, en outre,  $\Gamma : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  une fonction  $(\tau, \sigma)$ -continue sur  $X \times Y$ . Nous avons alors que :

$$e_\tau/h_\sigma\text{-}\lim_\nu (\Gamma + f^\nu - g^\nu) = \Gamma + f - g.$$

**Démonstration** : Voir le détail de la preuve dans [116, théorème 4].  $\blacksquare$

L'épi-convergence d'une suite de fonctions (sous certaines hypothèses) permet de conclure sur la convergence des min et des arg min (voir la proposition IV.16). De la même façon, l'importance de la théorie de l'épi/hypo-convergence dans le domaine de l'optimisation, réside dans le fait que sous des hypothèses appropriées, elle garantit la convergence des points selle d'une suite de Lagrangiens approximatés vers le point selle de l'épi/hypo-limite de ces mêmes Lagrangiens. Nous énonçons ci-après un résultat garantissant cette convergence des points selle (nous renvoyons le lecteur à [5, théorème 1.48]).

**PROPOSITION IV.26** (Convergence des points selle). Soit  $(X, \tau)$  et  $(Y, \sigma)$  deux espaces topologiques I-dénombrables,  $(f^\nu : X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{\nu \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions telles que  $e_\tau/h_\sigma\text{-}\lim_\nu f^\nu = f$ . Soit  $(x^\nu, y^\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$  une suite de points selle pour  $f^\nu$  :

$$f^\nu(x^\nu, y) \leq f^\nu(x^\nu, y^\nu) \leq f^\nu(x, y^\nu), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Supposons qu'il existe une sous-suite  $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que  $\bar{x} = \tau\text{-}\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{\nu_k}$  et  $\bar{y} = \sigma\text{-}\lim_{k \rightarrow +\infty} y^{\nu_k}$ . Alors  $(\bar{x}, \bar{y})$  est un point selle pour  $f$  :

$$f(\bar{x}, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(x, \bar{y}), \quad \forall \nu \in \mathbb{N}, \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

## IV.3.2.3. Résultats d'épi/hypo-convergences.

Le but ici est de montrer l'épi/hypo-convergence de la suite de fonctions  $\mathcal{L}^\nu$  vers la fonction  $\mathcal{L}$ . Nous utilisons alors la proposition IV.25 pour trouver le résultat recherché :

**THÉORÈME IV.27** (Épi/hypo-convergence). *Nous munissons  $\mathcal{N}$  d'une topologie  $\tau$  et  $\mathcal{N}^\vee$  d'une topologie  $\sigma$ . Nous supposons en outre que la fonction  $J : \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  telle que  $J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})]$  est continue pour la topologie  $\tau$ , alors :*

$$\mathcal{L} = e_\tau / h_\sigma\text{-}\lim_\nu \mathcal{L}^\nu.$$

**Démonstration :** D'après le corollaire IV.18 nous pouvons facilement déduire que  $\delta_{\mathcal{N}_h} = e_\tau\text{-}\lim_\nu \delta_{\mathcal{N}_h^\vee}$  et que  $\delta_{\mathcal{N}^\vee} = e_\sigma\text{-}\lim_\nu \delta_{(\mathcal{N}^\vee)^\vee}$ .

La fonction  $(u, v) \mapsto \mathbb{E}[\langle v(\boldsymbol{\xi}), A(\boldsymbol{\xi})u(\boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi}) \rangle_\vee]$  étant linéaire en  $u$  et en  $v$ , elle est alors continue pour la topologie  $(\tau, \sigma)$  (forte/faible). En lui rajoutant une fonction continue  $J$  elle reste continue. la stabilité par addition d'une fonction continue (voir proposition IV.25) nous donne le résultat final. ■

**REMARQUE IV.28.** Notons que si la proposition IV.26 nous garantit que si une suite de points selle  $(u^\nu, v^\nu)$  des Lagrangiens  $(\mathcal{L}^\nu)$  converge vers un point  $(u, v)$  alors  $(u, v)$  est un point selle de  $(\mathcal{L})$ . Mais rien ne nous permet d'affirmer que toute suite de points selle de  $(\mathcal{L}^\nu)$  converge. L'exemple qui suit vient illustrer cette remarque. ♦

**EXEMPLE IV.29** (Contre exemple pour la convergence des points selle approximatés). Nous présentons ici un contre exemple qui, même s'il ne s'écrit pas comme un problème d'optimisation stochastique, nous permettra de mieux appréhender la difficulté soulevée par la convergence des points selle.

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$(IV.50) \quad \begin{aligned} \min_{x \in H^1[0,1]} & \quad \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t) - 1)^2 dt, \\ \text{sous} & \quad Ax = 0, \end{aligned}$$

où  $H^1[0, 1]$  est l'espace des fonctions de  $L^2([0, 1])$  dérivables (appartenant à  $C^1([0, 1])$ ) et  $A$  un opérateur linéaire de  $H^1[0, 1]$  dans  $L^2([0, 1])$  tel que  $Ax(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$  :

$$(IV.51) \quad \begin{aligned} A : & \quad H^1[0, 1] \rightarrow L^2([0, 1]), \\ & \quad x \mapsto \dot{x} - x. \end{aligned}$$

Soit,  $\mathcal{L} : H^1[0, 1] \times L^2([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$  le Lagrangien de (IV.50) :

$$(IV.52) \quad \mathcal{L}(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x(t) - 1)^2 dt + \int_0^1 y(t) (\dot{x} - x),$$

nous pouvons facilement vérifier que le point  $(\bar{x}, \bar{y}) \in H^1[0, 1] \times L^2([0, 1])$  donné par la formule (IV.53) est un point selle du Lagrangien (IV.52) :

$$(IV.53) \quad (\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \left( 2 \frac{e-1}{e^2-1} e^t, 1 - e^{-t} + \frac{e-1}{e^2-1} (e^{-t} - e^t) \right).$$

Pour tout réel  $t \in [0, 1]$  nous définissons l'opérateur linéaire  $\Phi^\nu(t)$  suivant :

$$\begin{aligned} \Phi^\nu(t) : & \quad \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}, \\ & \quad \alpha \mapsto \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i t^{i-1}. \end{aligned}$$

Cet opérateur linéaire peut être confondu, avec un vecteur ligne d'éléments de  $H^1[0, 1]$ . Nous pouvons alors noter (quand aucune confusion n'est possible)  $\Phi^\nu \in (H^1[0, 1])^\nu$  le vecteur ligne

tel que :

$$\Phi^\nu = (1, t, \dots, t^{\nu-1}).$$

Pour tout réel  $t \in [0, 1]$  nous définissons l'opérateur linéaire  $\Psi^{\mu, \nu}(t)$  suivant :

$$\begin{aligned} \Psi^{\mu, \nu}(t) : \mathbb{R}^\mu &\rightarrow \mathbb{R}^\nu, \\ \beta &\mapsto A\Phi^\nu S\beta. \end{aligned}$$

où  $S$  un opérateur de sélection de taille  $\mu \times \nu$  avec  $\mu \leq \nu$  qui sélectionne les  $\mu$  premier éléments d'un vecteur de taille  $\nu$  :

$$S = (I_{\mu \times \mu} \quad 0_{\mu \times (\nu - \mu)}),$$

où  $I_{\mu \times \mu}$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^\mu$  et  $0_{\mu \times (\nu - \mu)}$  est la matrice nulle de taille  $\mu \times (\nu - \mu)$ . Nous notons (quand aucune confusion n'est possible)  $\Psi^\mu \in (L^2([0, 1]))^\mu$  le vecteur ligne tel que :

$$\Psi^\mu = (-1, 1 - t, \dots, (\mu - 1)t^{\mu-2} - t^{\mu-1}).$$

Nous pouvons, alors, approximer le Lagrangien (IV.52) par  $\mathcal{L}^{\nu, \mu} : \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{R}^\mu \rightarrow \mathbb{R}$  :

$$(IV.54) \quad \mathcal{L}^{\nu, \mu}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\Phi^\nu(t)\alpha - 1)^2 dt - \int_0^1 \Psi^\mu(t)\beta \left( \frac{d\Phi^\nu(t)\alpha}{dt} - \Phi^\nu(t)\alpha \right) dt.$$

Un point  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  qui vérifie les conditions d'optimalités données par (IV.56) est un point selle de (IV.54).

$$(IV.55) \quad \left( \int_0^1 \Phi^{\nu \top} \Phi^\nu dt \right) \alpha - \left( \int_0^1 (A\Phi^\nu)^\top \Psi^\mu dt \right) \beta = \int_0^1 \Phi^{\nu \top} dt,$$

$$(IV.56) \quad \left( \int_0^1 \Psi^{\mu \top} A\Phi^\nu dt \right) \alpha = 0,$$

Posons alors  $(\bar{x}^{\mu, \nu}(t), \bar{y}^{\mu, \nu}(t)) = (\Phi^\nu(t)\bar{\alpha}, \Psi^\mu(t)\bar{\beta})$  et interrogeons nous sur la convergence de  $(\bar{x}^{\mu, \nu}(t), \bar{y}^{\mu, \nu}(t))$  vers  $(\bar{x}, \bar{y})$  point selle du Lagrangien de départ (IV.52)<sup>4</sup>.

Cas où  $\mu = \nu$  : Dans ce cas  $\left( \int_0^1 \Psi^{\mu \top} A\Phi^\nu dt \right)$  est une matrice inversible et l'ensemble des points vérifiant (IV.56) est réduit au singleton  $\bar{\alpha} = 0$  :

$$\bar{x}^{\mu, \nu}(t) = 0, \quad \forall t \in [0, 1], \quad \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

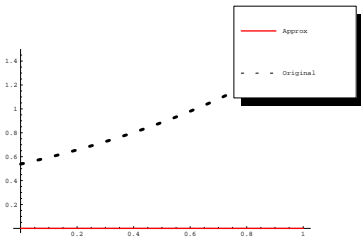


FIG. IV.2.  
Approximation de la solution primale pour  $\nu = \mu = 1$

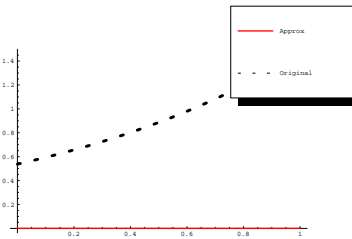


FIG. IV.3.  
Approximation de la solution primale pour  $\nu = \mu = 4$

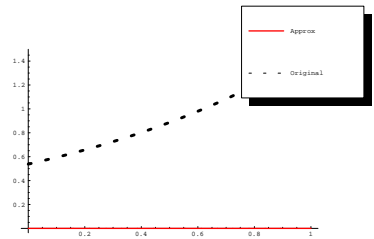


FIG. IV.4.  
Approximation de la solution primale pour  $\nu = \mu = 13$

<sup>4</sup>Les résultats présentés sont des résultats d'un calcul formel et non numérique. Nous avons utiliser pour cela le logiciel *Mathematica* © <http://www.wolfram.com/products/mathematica/index.html>



Cette variable primale est certes convergente (voir les figures IV.2, IV.3 et IV.4), mais ne converge pas vers la solution du problème. D'après la proposition IV.26 si un point selle approximé converge il convergera vers un point selle, nous nous attendons alors à une variable duale approximée qui n'est pas convergente.

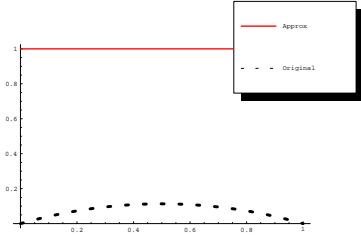


FIG. IV.5.  
Approximation de la solution duale pour  $\nu = \mu = 1$

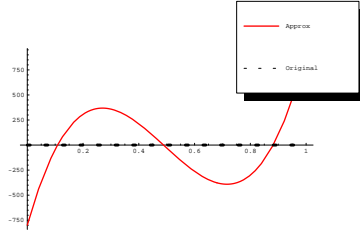


FIG. IV.6.  
Approximation de la solution duale pour  $\nu = \mu = 4$

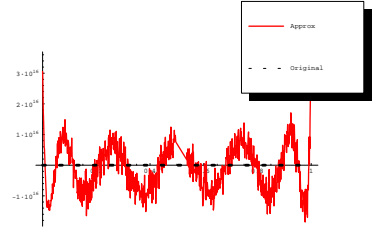


FIG. IV.7.  
Approximation de la solution duale pour  $\nu = \mu = 13$

Les figures IV.5, IV.6 et IV.7 montre que la variable duale approximée n'est, effectivement, pas convergente, en effet c'est une fonction ayant des oscillations de plus en plus importante à fur et à mesure que nous augmentons le nombre de fonctions de base.

Cas où  $\mu = \nu - 1$  : Dans ce cas  $\left(\int_0^1 \Psi^{\mu \top} A \Phi^\nu dt\right)$  est une matrice non inversible de rang  $\mu = \nu - 1$  l'ensemble des points vérifiant (IV.56) est donc un sous-espace vectoriel de dimension  $\nu - \mu = 1$ . L'espace original des contraintes étant aussi de dimension 1 nous obtenons alors des points selle approximés convergeant vers le point selle du problème original (voir Les figures IV.8, IV.9 et IV.10 pour la convergence des variables primales et Les figures IV.11, IV.12 et IV.13 pour la convergence des variables duales)

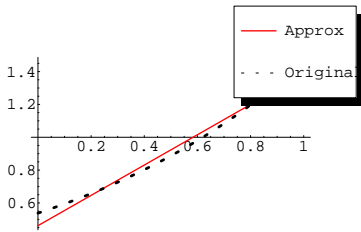


FIG. IV.8.  
Approximation de la solution primale pour  $\nu = 2, \mu = 1$

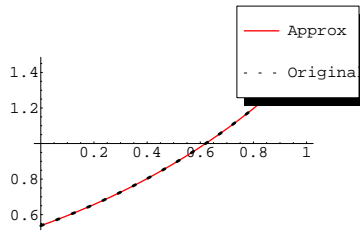


FIG. IV.9.  
Approximation de la solution primale pour  $\nu = 5, \mu = 4$

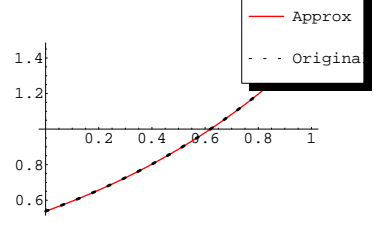


FIG. IV.10.  
Approximation de la solution primale pour  $\nu = 14, \mu = 13$

Cet exemple nous a montré que même si la suite des problèmes approximés admet des points selle, ces derniers ne convergent pas forcément. Un compromis est alors à faire entre le nombre  $\nu$  de fonctions servant à approximer l'espace primal et le nombre  $\mu$  de fonctions servant à approximer l'espace dual. Il semblerait (d'après cet exemple) qu'une condition nécessaire pour la convergence des points celles est que  $\nu > \mu$ . Ceci s'interprète par le fait que le degré de liberté du problème approximé est égal à  $\nu - \mu$  plus cette différence est importante plus nous avons de

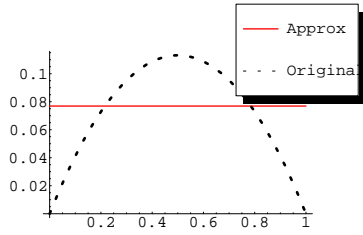


FIG. IV.11.  
Approximation de la solution duale pour  $\nu = 2$ ,  $\mu = 1$

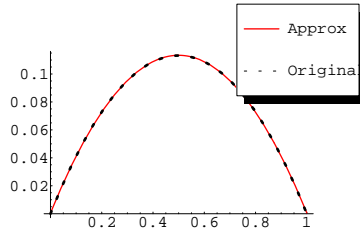


FIG. IV.12.  
Approximation de la solution duale pour  $\nu = 5$ ,  $\mu = 4$

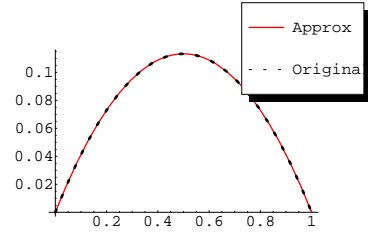


FIG. IV.13.  
Approximation de la solution duale pour  $\nu = 14$ ,  $\mu = 13$

degré de liberté et plus nous nous rapprochant de la solution optimale originale. Il faudra alors que  $\nu \rightarrow \infty$ , que  $\mu \rightarrow \infty$  mais aussi que la différence  $\mu - \nu \rightarrow \infty$  pour bien approximer le point de selle optimal du problème original. Nous retrouvons ainsi le même type de compromis rencontré lors de l'approximation de l'espérance conditionnelle par éléments finis ou par la méthode des noyaux.  $\blacklozenge$

#### IV.4. Conclusion

La méthode des éléments finis particulières est une méthode d'approximation des problèmes d'optimisation stochastique avec des contraintes de structure d'information. Elle peut être vue comme une extension des méthodes dites par quantification comme elle peut être vue comme un cas particulier des méthodes d'estimation de l'espérance conditionnelle.

En abordant le problème avec une interprétation fonctionnelle, nous envisageons deux étapes d'approximation :

- (1) Une première étape consiste en une approximation fonctionnelle du feedback du système. Une famille de fonctions est choisie a priori, et le problème est transformé en un problème d'optimisation stochastique en boucle ouverte. La dimension de ce problème est proportionnelle au nombre de fonctions de base choisies. Plus le nombre de ces fonctions de base est grand plus le biais de l'estimateur du feedback optimal est réduit.
- (2) Une deuxième étape d'approximation consiste en la résolution du problème en boucle ouverte obtenu. Nous utilisons alors une technique de type Monte-Carlo pour approximer les espérances et quadratures du problème. Le nombre des particules de Monte-Carlo tirées doit non seulement croître vers l'infini pour diminuer l'erreur quadratique moyenne, mais il doit aussi croître plus vite que le nombre de fonctions de base.

Nous devons alors faire un compromis entre nombre de fonctions de base (biais) et nombre de particules de Monte-Carlo tirées (variance). Le parallèle avec les méthodes d'estimation de l'espérance conditionnelle est alors automatiquement fait. En effet, pour ces méthodes, nous devons considérer un compromis entre largeur de fenêtre et nombre de particules.



## Algorithme chaotique en optimisation stochastique

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons aux algorithmes de gradient stochastique et à une extension du type *chaotique* à la boucle fermée.

La méthode des éléments finis particulières (comme présentée dans le chapitre IV) nécessite deux niveaux d'approximation que nous avons traités dans l'ordre suivant :

- (1) approximation de la contrainte d'information par une méthode d'éléments finis,
- (2) approximation de l'espérance de la fonction coût par une méthode de type Monte-Carlo.

L'algorithme de gradient stochastique chaotique, qui sera présenté, permettra d'effectuer ces deux étapes simultanément et en ligne avec un algorithme de descente de type gradient stochastique.

### V.1. Brève revue de la littérature

Les algorithmes stochastiques sont des algorithmes permettant la résolution de problèmes d'optimisation stochastique du type (IV.1). Ils ont été introduits pour la première fois par H. Robbins et S. Monro pour la résolution de zéros de fonctions s'écrivant sous la forme d'une espérance [90, 42, 43].

La littérature des algorithmes stochastiques s'est traditionnellement intéressée au cas de la boucle ouverte (voir définition I.20). Il s'agit alors de résoudre les problèmes du type :

$$(V.1) \quad \begin{aligned} \min_{u \in \mathbb{U}} \quad & J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [j(u, \boldsymbol{\xi})], \\ \text{sous} \quad & u \in C^{\text{ad}}, \end{aligned}$$

où  $\mathbb{U}$  est l'espace des commandes et  $C^{\text{ad}} \subset \mathbb{U}$ . Dans ce cadre, plusieurs auteurs se sont intéressés aux algorithmes de gradient stochastique ou de pseudo-gradients. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de B.T. Polyak et Y.Z. Tsytkin [84], de M.B. Nevel'son et R.Z. Has'minskii [75], de Y. Ermoliev, R.J.B. Wets et V. Norkin [48, 47] et de J.P. Quadrat, M. Goursat, A. Hertz et M. Viot [87]. Concernant les aspects de convergence, nous renvoyons le lecteur aux travaux de J.P. Quadrat, M. Goursat, A. Hertz et M. Viot [87], de B.T. Polyak [83], de G. Cohen et J.C. Culioli [32] et de B. Delyon [41, 40]. Nous citons aussi les travaux plus récents de A. Nemirovski [73] et les résultats de complexité de J.Ph. Vial et Y. Nesterov [74].

Ce type d'algorithme consiste en la combinaison d'un algorithme de gradient projeté déterministe [31] avec des idées d'échantillonnage à la Monte-Carlo où, à chaque pas, nous approximations le gradient de la fonction  $J$  par un tirage indépendant.

ALGORITHME V.1 (Algorithme de gradient stochastique).

- **Étape [0]** : Soit  $u^{[0]} \in \mathbb{U}$  la commande initiale de l'algorithme.
- **Étape [k]** : Soit  $\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}$  une variable aléatoire de même loi que  $\boldsymbol{\xi}$  et indépendante de  $(\boldsymbol{\xi}^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{[k]})$ ,

$$\mathbf{u}^{[k+1]} = \Pi_{C^{\text{ad}}} \left( \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \nabla_u j(\mathbf{u}^{[k]}, \boldsymbol{\xi}^{[k+1]}) \right).$$

◆

Dans le cadre de la boucle fermée, nous nous intéressons à la résolution de problèmes du type  $(SP_h)$  (voir chapitre IV) :

$$(V.2) \quad \begin{aligned} \min_{u \in L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{U})} \quad & J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})], \\ \text{sous} \quad & u \preceq h, \\ & u(\boldsymbol{\xi}) \in C^{\text{ad}}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \end{aligned}$$

La littérature concernant les algorithmes stochastiques en boucle fermée s'avère être plus restreinte. Nous faisons, néanmoins, référence aux travaux de P. Révész [100, 101] pour l'étude de la théorie de l'approximation stochastique et aux travaux de J.B. Hiriart-Urruty [53] qui traitent des applications en optimisation convexe.

Plus récemment, les travaux de C. Strugarek, K. Barty, J.S. Roy et P. Girardeau se sont intéressés à l'adaptation des algorithmes de gradient stochastique à la boucle fermée [10, 9, 11]. Il s'agit alors d'approximer le gradient (fonctionnel) par un produit de convolution avec une fonction noyau  $\mathcal{K} : \Xi \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\mathcal{K} \preceq h$ .

ALGORITHME V.2 (Algorithme de gradient stochastique en boucle fermée).

- **Étape [0]** : Soit  $u^{[0]} \in L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{U})$  la commande initiale de l'algorithme.
- **Étape [k]** : Soit  $\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}$  une variable aléatoire de même loi que  $\boldsymbol{\xi}$  et indépendante de  $(\boldsymbol{\xi}^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{[k]})$ ,

$$\mathbf{u}^{[k+1]}(\cdot) = \Pi_{C^{\text{ad}}} \left( \mathbf{u}^{[k]}(\cdot) - \rho^{[k]} \nabla_{u,j}(\mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \boldsymbol{\xi}^{[k+1]}) \mathcal{K} \left( \frac{\boldsymbol{\xi}^{[k+1]} - \cdot}{\epsilon^{[k]}} \right) \right).$$

◆

L'idée fondamentale de cet algorithme est d'écrire le gradient du problème (V.2) en introduisant, artificiellement, une espérance de la manière suivante :

$$(V.3) \quad \nabla J(u)(\cdot) = \nabla_{u,j}(u(\cdot), \cdot) = \mathbb{E} [\nabla_{u,j}(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) \delta_{\boldsymbol{\xi}}(\cdot)],$$

et d'approximer la masse de Dirac en  $\boldsymbol{\xi}$  par une fonction noyau dont la largeur de fenêtre  $\epsilon$  tendra vers 0 pour reconstruire asymptotiquement le Dirac et donc le gradient du problème (voir la figure V.1).

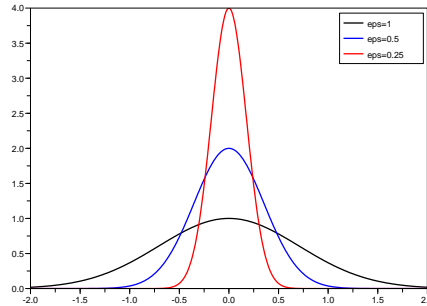


FIG. V.1. Approximation de la masse de Dirac  $\delta_0$  par  $\mathcal{K} \left( \frac{\cdot - 0}{\epsilon} \right)$

$$(V.4) \quad \mathbb{E} [\nabla_{u,j}(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) \delta_{\boldsymbol{\xi}}(\cdot)] \simeq \mathbb{E} \left[ \nabla_{u,j}(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi}) \mathcal{K} \left( \frac{\cdot - \boldsymbol{\xi}}{\epsilon} \right) \right].$$

Il s'agit, dès lors, d'écrire un algorithme de gradient stochastique fonctionnel en approximant l'opérateur espérance du gradient (V.4) au cours des itérations de l'algorithme.

L'algorithme V.2 s'interprète alors comme un algorithme de gradient stochastique *classique* où l'on utilise l'approximation (V.4) du gradient.

Il est intéressant de comparer l'algorithme V.2 de gradient stochastique en boucle fermée à la méthode des éléments finis particulières :

- dans les deux cas, le feedback optimal obtenu résulte de la somme de fonctions qui sont fixées a priori dans le cas des éléments finis particulières mais qui, dans le cadre de l'algorithme V.2, dépendent des tirages aléatoires effectués ;
- dans les deux cas, le feedback n'est pas représenté par une grille mais par des paramètres : dans le cas des éléments finis il s'agit des coefficients  $\alpha \in \mathbb{R}^\nu$  associés aux fonctions de base  $(\phi_i)_{i=1, \dots, \nu}$  ; quant au cas de l'algorithme de gradient stochastique en boucle fermée, il s'agit de la largeur de fenêtre  $\epsilon^{[k]}$ , du tirage  $\xi^{[k+1]}$  et du gradient  $\nabla_{u,j}(\mathbf{u}^{[k]}(\xi^{[k+1]}), \xi^{[k+1]})$  ;
- la méthode des éléments finis particulières fixe a priori un sous-espace vectoriel dans lequel nous allons restreindre notre feedback qui sera dès lors sous-optimal ; de ce fait, un biais a priori sur la solution en résulte, ce qui n'est pas le cas avec le gradient stochastique en boucle fermée ;
- comme tous les algorithmes d'approximation stochastique, l'algorithme de gradient stochastique en boucle fermée ne comporte pas de test d'arrêt, et la convergence n'est assurée que d'une manière asymptotique.

Nous pouvons alors envisager un algorithme où nous effectuerions un mariage entre ces deux approches : c'est *l'algorithme de gradient chaotique en boucle fermée*.

## V.2. Principe d'un algorithme de gradient chaotique en boucle fermée

Dans le même esprit, nous nous proposons de présenter un algorithme de gradient stochastique adapté au cas de la boucle fermée. Nous nous inspirerons de la méthode des éléments finis particulières pour l'approximation des problèmes d'optimisation stochastique.

Nous reprenons les notations de la section IV.1 et nous considérons, pour le moment, un problème d'optimisation stochastique sans contraintes d'admissibilité.

$$(V.5) \quad \min_{\mathbf{U} \preceq \mathbf{Y}} \mathbb{E}[j(\mathbf{U}, \xi)].$$

En supposant que  $\mathbf{U} \in \mathcal{U} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{U})$  et qu'il existe une application mesurable  $h : \Xi \rightarrow \mathbb{Y}$  tel que  $\mathbf{Y} = h(\xi)$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s., nous pouvons réécrire le problème (V.5) (voir lemme IV.3) comme un problème d'optimisation fonctionnelle sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{U})$ , l'ensemble admissible étant le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{N}$  constitué des applications  $h$ -mesurables :  $\mathcal{N}_h \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathcal{N}, \quad u \preceq h\}$  :

$$(V.6) \quad \min_{u \in \mathcal{N}_h} J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[j(u(\xi), \xi)].$$

L'espace vectoriel  $\mathcal{N}_h$  étant un espace de Hilbert, nous nous donnons  $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une base orthonormée de fonctions de cet espace :

$$\forall u \in \mathcal{N}_h, \quad \exists (\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}), \quad u = \sum_{i \in \mathbb{N}} \phi_i \alpha_i.$$

Nous approximons l'espace  $\mathcal{N}_h$  en choisissant a priori un sous-ensemble  $I \subset \mathbb{N}$  tel que  $\text{card}(I) = \nu$ .

$$\mathcal{N}_h^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathcal{N}_h, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^\nu, \quad u = \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i \right\}.$$

Le problème approximé s'écrira :

$$(V.7) \quad \min_{u \in \mathcal{N}_h^\nu} J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})].$$

REMARQUE V.3. Nous avons établi dans le chapitre IV (voir théorème IV.20) l'épi-convergence de la suite de problèmes (V.7) vers le problème (V.6) lorsque  $\nu \rightarrow +\infty$ .  $\blacklozenge$

Le problème approximé (V.7) peut s'écrire d'une manière équivalente :

$$(V.8) \quad \min_{\alpha \in \mathbb{R}^\nu} \widehat{J}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ j \left( \sum_{i \in I} \phi_i(\boldsymbol{\xi}) \alpha_i, \boldsymbol{\xi} \right) \right].$$

Commençons par calculer le gradient de la fonction  $\widehat{J}$ . Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^\nu$  et  $t \in \mathbb{R}$ , nous pouvons alors écrire que :

$$\begin{aligned} \widehat{J}(\alpha + t\beta) &= \mathbb{E} \left[ j \left( \sum_{i \in I} \phi_i(\boldsymbol{\xi}) (\alpha_i + t\beta_i), \boldsymbol{\xi} \right) \right], \\ &= \widehat{J}(\alpha) + \sum_{j \in I} \mathbb{E} \left[ \left\langle \nabla_u j \left( \sum_{i \in I} \phi_i(\boldsymbol{\xi}) \alpha_i, \boldsymbol{\xi} \right), \phi_j(\boldsymbol{\xi}) \right\rangle_{\mathbb{U}} \right] t\beta_j + \mathcal{O}(t^2). \end{aligned}$$

Le gradient de  $\widehat{J}$  sera alors un élément de  $\mathbb{R}^\nu$  tel que :

$$(V.9) \quad \nabla \widehat{J}(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \mathbb{E} \left[ \left\langle \phi_j(\boldsymbol{\xi}), \nabla_u j \left( \sum_{i \in I} \phi_i(\boldsymbol{\xi}) \alpha_i, \boldsymbol{\xi} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \right] \right)_{j \in I}.$$

Un algorithme de gradient pour le problème d'optimisation en dimension infinie (V.8) pourrait s'écrire de la manière suivante :

$$(V.10) \quad \alpha^{[k+1]} = \alpha^{[k]} - \rho^{[k]} \nabla \widehat{J}(\alpha^{[k]}).$$

Pour retrouver un algorithme de gradient pour le problème fonctionnel (V.7), nous considérons que tout élément  $u \in \mathcal{N}_h^\nu$  s'écrit comme une somme pondérée d'éléments de la famille de fonctions  $(\phi_i)_{i \in I}$  de l'espace de Hilbert  $\mathcal{N}_h^\nu$ . Il suffit alors de multiplier chaque composante de (V.10) par la fonction de base correspondante et de faire la somme.

ALGORITHME V.4 (Algorithme de gradient pour (V.7)).

- **Étape [0]** : Soit  $\alpha^{[0]} \in \mathbb{R}^\nu$  la commande initiale de l'algorithme et  $u^{[0]} = \sum_{i \in I} \phi_i \alpha_i^{[0]}$ .
- **Étape [k]** :

$$u^{[k+1]}(\cdot) = u^{[k]}(\cdot) - \rho^{[k]} \sum_{j \in I} p_j \left( \mathbb{E} \left[ \left\langle \phi_j(\boldsymbol{\xi}), \nabla_u j \left( u^{[k]}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \right] \right) \frac{\phi_j(\cdot)}{p_j}.$$

où  $(p_j)_{j \in I}$  est une loi de probabilité sur  $I$  ( $\forall j \in I, p_j > 0$  et  $\sum_{j \in I} p_j = 1$ ).  $\blacklozenge$

Dans l'algorithme V.4, nous avons forcé l'apparition des poids  $p_i$  correspondant à une loi de probabilité sur  $I$ . L'originalité de l'idée développée au cours de ce chapitre réside alors dans le fait que l'algorithme V.4 comporte deux sommes (espérances) ( $\sum_{j \in I} p_j \cdot$  et  $\mathbb{E}[\cdot] = \int_{\Xi} \cdot \mathbb{P}(d\boldsymbol{\xi})$ ). Comme les algorithmes de gradient stochastique (voir l'algorithme V.1), nous pouvons envisager d'approximer ces deux sommes en ligne avec les itérations de l'algorithme. Ceci correspond à deux niveaux d'approximations :

- approximation de l'espérance de la fonction coût en effectuant à chaque itération de l'algorithme un tirage de particules indépendamment des tirages passés,
- approximation de la fonction feedback en choisissant à chaque itération une fonction de base indépendamment des choix passés.

Nous pouvons alors présenter un *algorithme de gradient stochastique de type chaotique* pour résoudre le problème (V.7) :

$$\mathbf{u}^{[k+1]}(\cdot) = \mathbf{u}^{[k]}(\cdot) - \rho^{[k]} \left\langle \phi_{j^{[k+1]}}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \boldsymbol{\xi}^{[k+1]} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \frac{\phi_{j^{[k+1]}}(\cdot)}{p_{j^{[k+1]}}}.$$

L'appellation chaotique vient du fait qu'à chaque itération, nous choisissons une fonction de base parmi les  $(\phi_j)_{j \in I}$  en tirant un entier naturel  $j$  considéré comme une variable aléatoire suivant une loi  $\mathbb{P}_i$  sur  $I$ , fixée a priori. Nous empruntons cette terminologie à J.C. Miellou [71].

### V.3. Résultat de convergence

Maintenant que nous avons mis en évidence l'idée principale d'un tel algorithme, nous pouvons envisager la résolution d'un problème d'optimisation stochastique plus général :

$$(V.11) \quad \min_{u \in \mathcal{N}^{\text{mes}} \cap \mathcal{N}^{\text{ad}}} J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})],$$

où  $\mathcal{N}^{\text{mes}} \subset \mathcal{N}$  est un sous-espace de Hilbert de dimension  $\nu$  et  $\mathcal{N}^{\text{ad}} \subset \mathcal{N}$  est un ensemble admissible convexe fermé.

REMARQUE V.5. Outre les problèmes du type (V.7), cette généralisation nous permettra d'incorporer des problèmes avec des contraintes d'admissibilité presque sûres (en posant  $\mathcal{N}^{\text{ad}} = \{u \in \mathcal{N}, u(\boldsymbol{\xi}) \in C^{\text{ad}} \text{ } \mathbb{P}\text{-p.s.}\}$ ) et des problèmes approximatés par la méthode des éléments finis particuliers (en posant  $\mathcal{N}^{\text{mes}} = \{u \in \mathcal{N}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^{\nu}, u = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i \phi_i\}$ ).  $\blacklozenge$

L'espace  $\mathcal{N}^{\text{mes}}$  étant un espace de Hilbert, nous nous donnons  $(\phi_i)_{i \in I}$  une base de fonctions de cet espace (où  $\text{card}(I) = \dim(\mathcal{N}^{\text{mes}})$ ). Nous déroulons alors l'algorithme suivant :

ALGORITHME V.6 (Algorithme de gradient chaotique en boucle fermée pour (V.11)).

- **Étape [0] :**
  - Soit  $u^{[0]} \in \mathcal{N}^{\text{mes}} \cap \mathcal{N}^{\text{ad}}$  la commande initiale de l'algorithme.
  - Soit  $\mathbb{P}_i \sim (p_i)_{i \in I}$  une loi de probabilité sur  $I \subset \mathbb{N}$ .
- **Étape [k] :**
  - Soit  $j^{[k+1]} \in I$  une variable aléatoire indépendante de  $(j^{[1]}, \dots, j^{[k]})$  de loi  $\mathbb{P}_i$ ,
  - Soit  $\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}$  une variable aléatoire indépendante de  $(\boldsymbol{\xi}^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{[k]})$ , de la loi  $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ .

$$\mathbf{u}^{[k+1]}(\cdot) = \Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}} \left( \mathbf{u}^{[k]}(\cdot) - \rho^{[k]} \left\langle \phi_{j^{[k+1]}}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \boldsymbol{\xi}^{[k+1]} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \frac{\phi_{j^{[k+1]}}(\cdot)}{p_{j^{[k+1]}}} \right),$$

où  $\Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}}$  est la projection sur  $\mathcal{N}^{\text{ad}}$ .  $\blacklozenge$

Nous nous intéresserons dans cette section à étudier la convergence de l'algorithme V.6 au sens de la convergence presque-sûre des fonctions coût et de la convergence faible et forte des solutions. Commençons par énoncer les hypothèses nécessaires pour avoir cette convergence.

Nous reprenons le problème (V.11) nous définissons ainsi sa fonction coût sur  $\mathcal{N}$  par :

$$(V.12) \quad \begin{aligned} J : \mathcal{N} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \\ u &\mapsto \mathbb{E} [j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})]. \end{aligned}$$

Nous présentons, ici, quelques hypothèses et lemmes définissant la structure du problème et de l'algorithme à étudier :

HYPOTHÈSE V.7 (Hypothèses de structure sur  $J$ ). la fonction  $J : \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  définie par (V.12) est convexe, semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{N}$ .  $\blacklozenge$



HYPOTHÈSE V.8 (Hypothèses de coercivité sur  $J$ ). La fonction  $J : \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  définie par (V.12) est coercive sur  $\mathcal{N}$ .  $\blacklozenge$

HYPOTHÈSE V.9 (Hypothèses sur l'ensemble admissible  $\mathcal{N}^{\text{ad}} \cap \mathcal{N}^{\text{mes}}$ ).  $\mathcal{N}^{\text{mes}}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{N}$  de dimension finie et l'ensemble  $\mathcal{N}^{\text{ad}} \subset \mathcal{N}$  est un convexe fermé, tel que :

$$\Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}}(u) \in \mathcal{N}^{\text{mes}}, \quad \forall u \in \mathcal{N}^{\text{mes}}.$$

HYPOTHÈSE V.10 (Hypothèses de dérivabilité sur  $j$ ). La fonction  $j_{\xi} : \mathbb{U} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  définie par :

$$j_{\xi}(u) \stackrel{\text{def}}{=} j(u, \xi), \quad \forall u \in \mathbb{U},$$

est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{U})$   $\mathbb{P}$ -presque-sûrement. De plus :

$$\exists(c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall u \in \mathbb{U}, \quad \|\nabla j_{\xi}(u)\|_{\mathbb{U}} \leq c\|u\|_{\mathbb{U}} + d, \quad \mathbb{P}\text{-p.s..}$$

Nous supposons en outre que  $\nabla j_{\xi}(u) \in \mathcal{N}$ ,  $\forall u \in \mathcal{N}$ .  $\blacklozenge$

LEMME V.11 (Dérivabilité de  $J$ ). *Sous les hypothèses V.7 et V.10, la fonction  $J : \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  définie par (V.12) est différentiable. De plus :*

$$\exists(c, d) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall u \in \mathcal{N}, \quad \|\nabla J(u)\|_{\mathcal{N}} \leq c\|u\|_{\mathcal{N}} + d.$$

**Démonstration :** Soient  $u \in \mathcal{N}$ ,  $v \in \mathcal{N}$ ; sachant que  $j_{\xi}$  est  $\mathcal{C}^1(\mathbb{U})$ , nous avons alors que :

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \mathbb{E}[j(u(\xi) + v(\xi), \xi)], \\ &= J(u) + \mathbb{E}[\langle \nabla_u j(u(\xi), \xi), v(\xi) \rangle_{\mathbb{U}}] + \mathcal{O}(\|v\|_{\mathcal{N}}^2), \end{aligned}$$

nous pouvons alors dire que  $J$  est différentiable et nous écrivons que :

$$\nabla J(u)(\cdot) = \nabla_u j(u(\cdot), \cdot).$$

D'après l'hypothèse V.10, nous avons que :

$$\begin{aligned} \|\nabla J(u)\|_{\mathcal{N}} &= \sqrt{\int_{\Xi} \|\nabla_u j(u(\xi), \xi)\|_{\mathbb{U}}^2 \mathbb{P}_{\xi}(d\xi)}, \\ &\leq \sqrt{\int_{\Xi} (c\|u(\xi)\| + d)^2 \mathbb{P}_{\xi}(d\xi)}, \\ &\leq c\|u\|_{\mathcal{N}} + d. \end{aligned}$$

Nous faisons aussi, quelques hypothèses sur la famille de fonctions de base  $(\phi_i)_{i \in I}$  et la loi de probabilité  $\mathbb{P}_i$  :

HYPOTHÈSE V.12 (Hypothèses de structure sur la base de fonctions).  $(\phi_i)_{i \in I}$  est une famille de fonctions formant une base orthonormée de  $\mathcal{N}^{\text{mes}}$  et  $\mathbb{P}_i \sim (p_i)_{i \in I}$  est une loi de probabilité sur  $I$  telle que :

$$\forall i \in I, p_i > 0,$$

EXEMPLE V.13. Posons  $\mathcal{N}$  l'espace des fonctions de carré intégrable de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la mesure de Lebesgue :  $\mathcal{N} = L^2([0, 1], \mathbb{R})$ .

Soit  $I$  un ensemble d'entiers tel que  $\text{card}(I) = \nu$ , et soit  $\mathbb{P}_i \sim (p_i)_{i \in I}$  la loi de probabilité uniforme sur  $I$ .

$$p_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\nu}, \quad \forall i \in I.$$

Soit  $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une base de fonctions de  $\mathcal{N}$  tel que :

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= 1, \\ \phi_{2r}(x) &= \sqrt{2} \sin(2\pi r x), \quad \forall r \in \mathbb{N}^*, \\ \phi_{2r+1}(x) &= \sqrt{2} \cos(2\pi r x), \quad \forall r \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

La famille de fonctions, ainsi définie, constitue une base orthonormée de  $\mathcal{N}$ . Nous posons alors  $\mathcal{N}^{\text{mes}}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{N}$  tel que :

$$\mathcal{N}^{\text{mes}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathcal{N}, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^\nu, \quad u = \sum_{i \in I} \phi_i \alpha_i \right\}$$

Pour avoir une base de fonctions qui vérifie les hypothèses V.12, il suffit de prendre la famille  $(\phi_i)_{i \in I}$ .  $\blacklozenge$

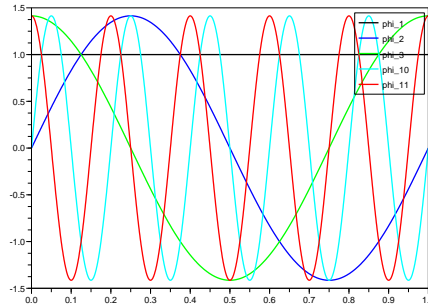


FIG. V.2. Fonctions de base  $\phi_i$  vérifiant les hypothèses V.12

Dans les algorithmes de descente, il est usuel de demander certaines hypothèses sur la suite des pas de l'algorithme.

HYPOTHÈSE V.14 (Hypothèses sur le pas de l'algorithme). La suite  $(\rho^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  est une  $\sigma$ -suite :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \rho^{[k]} \geq 0, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \rho^{[k]} = +\infty, \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \left( \rho^{[k]} \right)^2 < +\infty.$$

$\blacklozenge$

Nous présentons maintenant le résultat principal de convergence de l'algorithme de gradient chaotique V.6. Le lecteur pourra trouver des résultats de convergence similaires dans le cadre du gradient perturbé dans la thèse de C. Strugarek [106].

THÉORÈME V.15 (Convergence de l'algorithme V.6).

- (1) Supposons que  $j : \mathbb{U} \times \Xi \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  vérifie les hypothèses V.7, que  $J : \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  vérifie les hypothèses V.8 et que  $\mathcal{N}^{\text{ad}}$  et  $\mathcal{N}^{\text{mes}}$  vérifient l'hypothèse V.9. Alors, il existe un ensemble  $S \subset \mathcal{N}$  non vide de solutions à (V.11), et l'on notera  $J_S$  la valeur optimale du problème.
- (2) Supposons de plus que les hypothèses V.10 sont vérifiées, que la famille  $(\phi_i)_{i \in I}$  et la loi de probabilité  $\mathbb{P}_i \sim (p_i)_{i \in I}$  vérifient les hypothèses V.12 et que la suite  $(\rho^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  vérifie les hypothèses V.14. Alors la suite  $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  générée par l'algorithme (V.6) est telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(\mathbf{u}^{[k]}) = J_S$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s., et tout point d'accumulation de  $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  dans la topologie faible est un élément de  $S$ .

(3) Si de plus  $J$  est fortement convexe, alors  $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  converge fortement vers l'unique solution de (V.11).

**Démonstration :** La preuve de (1) est immédiate à partir du lemme A.22. La preuve de (2) suit le schéma habituel des preuves de convergence des algorithmes de descente. Nous nous donnerons alors une fonction de Lyapunov et nous utiliserons quelques lemmes techniques utilisés dans les preuves de convergence du gradient stochastique.

Considérons les suites  $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(\boldsymbol{\xi}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathbf{j}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  générées par l'algorithme (V.6). Par construction et en utilisant l'hypothèse V.9, nous avons que  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{u}^{[k]} \in \mathcal{N}^{\text{mes}} \cap \mathcal{N}^{\text{ad}}$  (comme étant la projection sur  $\mathcal{N}^{\text{ad}}$  d'une somme pondérée des fonctions de base  $(\phi_i)_{i \in I}$  engendrant l'espace de Hilbert  $\mathcal{N}^{\text{mes}}$ ).

Nous pouvons écrire la récurrence sur la suite  $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  :

$$(V.13) \quad \begin{aligned} & u^{[0]} \in \mathcal{N}^{\text{mes}} \cap \mathcal{N}^{\text{ad}}, \\ & \mathbf{u}^{[k+1]}(\cdot) = \Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}} \left( \mathbf{u}^{[k]}(\cdot) - \rho^{[k]} \left\langle \phi_{\mathbf{j}^{[k+1]}}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \boldsymbol{\xi}^{[k+1]} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \frac{\phi_{\mathbf{j}^{[k+1]}}(\cdot)}{p_{\mathbf{j}^{[k+1]}}} \right). \end{aligned}$$

Soit  $u^\# \in S \subset \mathcal{N}$  une solution du problème (V.11). Nous posons  $\Lambda : \mathcal{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  la fonction de Lyapunov définie par :

$$\Lambda(u) = \frac{1}{2} \|u - u^\#\|_{\mathcal{N}}^2.$$

Nous considérons l'évolution de la fonction de Lyapunov au long des itérations. Par le théorème de Pythagore nous avons que :

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathbf{u}^{[k+1]}) - \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{[k+1]} - u^\#\|_{\mathcal{N}}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{[k]} - u^\#\|_{\mathcal{N}}^2, \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{[k+1]} - \mathbf{u}^{[k]}\|_{\mathcal{N}}^2 + \left\langle \mathbf{u}^{[k+1]} - \mathbf{u}^{[k]}, \mathbf{u}^{[k]} - u^\# \right\rangle_{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

En utilisant la propriété de contraction de la projection  $\Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}}$  et la récurrence (V.13) sur  $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$ , nous avons que :

$$\|\mathbf{u}^{[k+1]} - \mathbf{u}^{[k]}\|_{\mathcal{N}} \leq \rho^{[k]} \left\| \left\langle \phi_{\mathbf{j}^{[k+1]}}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \boldsymbol{\xi}^{[k+1]} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \frac{\phi_{\mathbf{j}^{[k+1]}}(\cdot)}{p_{\mathbf{j}^{[k+1]}}} \right\|_{\mathcal{N}}.$$

Notons  $\mathbf{f}^{[k]}(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \phi_{\mathbf{j}^{[k+1]}}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \boldsymbol{\xi}^{[k+1]} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \frac{\phi_{\mathbf{j}^{[k+1]}}(\cdot)}{p_{\mathbf{j}^{[k+1]}}}$ . L'ensemble  $\mathcal{N}^{\text{ad}}$  étant un convexe fermé, en utilisant les propriétés de la projection sur un ensemble convexe nous avons que :

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{u}^{[k+1]} - \mathbf{u}^{[k]}, \mathbf{u}^{[k]} - u^\# \right\rangle_{\mathcal{N}} &= \left\langle \Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}} \left( \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbf{f}^{[k]} \right) - \mathbf{u}^{[k]}, \mathbf{u}^{[k]} - u^\# \right\rangle_{\mathcal{N}}, \\ &= \left\langle \Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}} \left( \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbf{f}^{[k]} \right) - \left( \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbf{f}^{[k]} \right), \mathbf{u}^{[k]} - u^\# \right\rangle_{\mathcal{N}} \\ &\quad - \rho^{[k]} \left\langle \mathbf{f}^{[k]}, \mathbf{u}^{[k]} - \bar{u} \right\rangle_{\mathcal{N}}, \\ &= \underbrace{\left\langle \Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}} \left( \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbf{f}^{[k]} \right) - \left( \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbf{f}^{[k]} \right), \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbf{f}^{[k]} - \bar{u} \right\rangle_{\mathcal{N}}}_{\leq 0 \text{ par la propriété de projection}} \\ &\quad + \rho^{[k]} \left\langle \mathbf{f}^{[k]}, \Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}} \left( \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbf{f}^{[k]} \right) - \left( \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbf{f}^{[k]} \right) \right\rangle \\ &\quad - \rho^{[k]} \left\langle \mathbf{f}^{[k]}, \mathbf{u}^{[k]} - \bar{u} \right\rangle, \\ &\leq \left( \rho^{[k]} \right)^2 \|\mathbf{f}^{[k]}\|_{\mathcal{N}}^2 + \rho^{[k]} \underbrace{\left\langle \mathbf{f}^{[k]}, \Pi_{\mathcal{N}^{\text{ad}}} \left( \mathbf{u}^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbf{f}^{[k]} \right) - \mathbf{u}^{[k]} \right\rangle}_{\leq 0 \text{ par la propriété de projection}} \\ &\quad - \rho^{[k]} \left\langle \mathbf{f}^{[k]}, \mathbf{u}^{[k]} - u^\# \right\rangle, \\ &\leq \left( \rho^{[k]} \right)^2 \|\mathbf{f}^{[k]}\|_{\mathcal{N}}^2 - \rho^{[k]} \left\langle \mathbf{f}^{[k]}, \mathbf{u}^{[k]} - u^\# \right\rangle. \end{aligned}$$

En utilisant ces inégalités nous majorons l'évolution de la fonction de Lyapunov :

$$(V.14) \quad \Lambda(\mathbf{u}^{[k+1]}) - \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) \leq \underbrace{\frac{3(\rho^{[k]})^2}{2} \left\| \left\langle \phi_{j^{[k+1]}}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \boldsymbol{\xi}^{[k+1]} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \frac{\phi_{j^{[k+1]}}(\cdot)}{p_{j^{[k+1]}}} \right\|_{\mathcal{N}}^2}_{\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}} - \underbrace{\rho^{[k]} \left\langle \left\langle \phi_{j^{[k+1]}}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \boldsymbol{\xi}^{[k+1]} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \frac{\phi_{j^{[k+1]}}}{p_{j^{[k+1]}}}, \mathbf{u}^{[k]} - \mathbf{u}^{\#} \right\rangle_{\mathcal{N}}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{B}}.$$

Soit  $\mathcal{F}^{[k]} = \sigma(\boldsymbol{\xi}^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{[k]}, j^{[1]}, \dots, j^{[k]})$  la tribu engendrée par tous les tirages passés jusqu'à l'itération  $[k]$ . Les tirages étant indépendants, en appliquant l'espérance conditionnelle sur l'équation (V.14) et en utilisant l'orthonormité des fonctions de base (hypothèses V.12), nous nous proposons de majorer les espérances conditionnelles des deux éléments du terme droit de l'inégalité (V.14).

Commençons par le premier terme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbf{A} \mid \mathcal{F}^{[k]}] &= \frac{3(\rho^{[k]})^2}{2} \sum_{j \in I} p_j \left\| \frac{\phi_j(\cdot)}{p_j} \right\|_{\mathcal{N}}^2 \int_{\Xi} \left\| \left\langle \phi_j(\boldsymbol{\xi}), \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \right\|_{\mathbb{R}}^2 \mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}(d\boldsymbol{\xi}), \\ &\leq \frac{3(\rho^{[k]})^2}{2} \sum_{j \in I} p_j \left\| \frac{\phi_j(\cdot)}{p_j} \right\|_{\mathcal{N}}^2 \int_{\Xi} \|\phi_j(\boldsymbol{\xi})\|_{\mathbb{U}}^2 \mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}(d\boldsymbol{\xi}) \int_{\Xi} \left\| \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \right) \right\|_{\mathbb{U}}^2 \mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}(d\boldsymbol{\xi}), \\ &\leq \frac{3(\rho^{[k]})^2}{2} \underbrace{\sum_{j \in I} \frac{1}{p_j}}_{\leq \frac{\nu}{p_{\min}}} \left\| \nabla J \left( \mathbf{u}^{[k]} \right) \right\|_{\mathcal{N}}^2, \end{aligned}$$

où  $p_{\min} = \min_{j \in I} p_j > 0$ . Pour le deuxième terme, nous considérons que comme  $\nabla J \left( \mathbf{u}^{[k]} \right)$  est un élément de  $\mathcal{N}$ , il peut se décomposer en un terme appartenant à  $\mathcal{N}^{\text{mes}}$  (sur la base des fonctions  $(\phi_i)_{i \in I}$ ) et un terme appartenant à son orthogonal  $(\mathcal{N}^{\text{mes}})^{\perp}$  :

$$\forall \mathbf{u}^{[k]}, \quad \exists \beta^{[k]} \in \mathbb{R}^I, \psi^{[k]} \in (\mathcal{N}^{\text{mes}})^{\perp} \quad \nabla_{\mathbf{u}} j \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \right) = \sum_{i \in I} \beta_i^{[k]} \phi_i(\boldsymbol{\xi}) + \psi^{[k]}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Nous pouvons alors réécrire le deuxième terme tel que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\mathbf{B} \mid \mathcal{F}^{[k]}] &= -\rho^{[k]} \sum_{j \in I} p_j \int_{\Xi} \left\langle \phi_j(\boldsymbol{\xi}), \sum_{i \in I} \beta_i^{[k]} \phi_i(\boldsymbol{\xi}) + \psi^{[k]}(\boldsymbol{\xi}) \right\rangle_{\mathbb{U}} \mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}(d\boldsymbol{\xi}) \left\langle \frac{\phi_j}{p_j}, \mathbf{u}^{[k]} - \mathbf{u}^{\#} \right\rangle_{\mathcal{N}}, \\ &\stackrel{\text{par orthogonalité}}{=} -\rho^{[k]} \sum_{j \in I} p_j \underbrace{\|\phi_j\|_{\mathcal{N}}^2}_{=1} \beta_j^{[k]} \left\langle \frac{\phi_j}{p_j}, \mathbf{u}^{[k]} - \mathbf{u}^{\#} \right\rangle_{\mathcal{N}}, \\ &= -\rho^{[k]} \left\langle \underbrace{\sum_{j \in I} \beta_j^{[k]} \phi_j}_{= \nabla J(\mathbf{u}^{[k]}) - \psi^{[k]}}, \mathbf{u}^{[k]} - \mathbf{u}^{\#} \right\rangle_{\mathcal{N}}, \\ &\stackrel{(\mathbf{u}^{[k]} - \mathbf{u}^{\#}) \in \mathcal{N}^{\text{mes}}, \quad \psi^{[k]} \in (\mathcal{N}^{\text{mes}})^{\perp}}{=} -\rho^{[k]} \left\langle \nabla J(\mathbf{u}^{[k]}), \mathbf{u}^{[k]} - \mathbf{u}^{\#} \right\rangle_{\mathcal{N}}. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement que l'inégalité (V.14) se réécrit :

$$(V.15) \quad \mathbb{E} \left[ \Lambda(\mathbf{u}^{[k+1]}) - \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) \mid \mathcal{F}^{[k]} \right] \leq \frac{3\nu C(\rho^{[k]})^2}{2p_{\min}} \left\| \nabla J(\mathbf{u}^{[k]}) \right\|_{\mathcal{N}}^2 - \rho^{[k]} \left\langle \nabla J(\mathbf{u}^{[k]}), \mathbf{u}^{[k]} - \mathbf{u}^{\#} \right\rangle_{\mathcal{N}}.$$

D'après l'hypothèse V.7 la fonction  $J$  est convexe. Nous pouvons alors écrire que :

$$(V.16) \quad \left\langle \nabla J(\mathbf{u}^{[k]}), \mathbf{u}^{[k]} - \mathbf{u}^{\#} \right\rangle_{\mathcal{N}} \geq J(\mathbf{u}^{[k]}) - J(\mathbf{u}^{\#}), \quad \forall \mathbf{u}^{[k]} \in \mathcal{N}^{\text{mes}} \cap \mathcal{N}^{\text{ad}}$$

D'après le lemme V.11 et les hypothèses V.10 la fonction  $J$  est à gradient linéairement borné. Nous avons donc :

$$(V.17) \quad \begin{aligned} \left\| \nabla J(\mathbf{u}^{[k]}) \right\|_{\mathcal{N}}^2 &\leq \left( c \left\| \mathbf{u}^{[k]} \right\|_{\mathcal{N}} + d \right)^2, \\ &\leq (c^2 + 2cd) \left\| \mathbf{u}^{[k]} \right\|_{\mathcal{N}}^2 + d^2 + 2cd, \\ &\leq_{\left\| \mathbf{u}^{[k]} \right\|_{\mathcal{N}} \leq 1 + \left\| \mathbf{u}^{[k]} \right\|_{\mathcal{N}}} 2(c^2 + 2cd) \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) + c^2 + d^2 + e^2 + 4cd, \\ &\leq_{\left\| \mathbf{u}^\# \right\|_{\mathcal{N}} \stackrel{\text{def}}{=} e} \end{aligned}$$

En combinant (V.15), (V.16) et (V.17) nous obtenons que :

$$(V.18) \quad \mathbb{E} \left[ \Lambda(\mathbf{u}^{[k+1]}) - \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) \mid \mathcal{F}^{[k]} \right] \leq \gamma^{[k]} \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) + \beta^{[k]} + \rho^{[k]} C' (J(u^\#) - J(\mathbf{u}^{[k]})),$$

où  $\gamma^{[k]} = \frac{3\nu(c^2+2cd)C}{p_{\min}}(\rho^{[k]})^2$  et  $\beta^{[k]} = \frac{3\nu(c^2+d^2+e^2+4cd)C(\rho^{[k]})^2}{2p_{\min}}$  sont, par l'hypothèse V.14, des séries sommables. Soit alors  $\lambda^{[k]} = \mathbb{E} [\Lambda(\mathbf{u}^{[k]})]$ . Puisque  $u^\#$  réalise le minimum de  $J$  sur  $\mathcal{N}^{\text{mes}} \cap \mathcal{N}^{\text{ad}}$  et comme  $\mathbf{u}^{[k]} \in \mathcal{N}^{\text{mes}} \cap \mathcal{N}^{\text{ad}}$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , alors :

$$(V.19) \quad \lambda^{[k+1]} - \lambda^{[k]} \leq \gamma^{[k]} \lambda^{[k]} + \beta^{[k]}.$$

D'après le lemme B.1 nous avons alors que la suite  $(\lambda^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée par un réel  $M > 0$ .

Nous montrons maintenant que  $\Lambda(\mathbf{u}^{[k]})$  est une quasi-martingale convergente (voir la définition C.4) :

- par définition,  $(\Lambda(\mathbf{u}^{[k]}))_{k \in \mathbb{N}}$  est adaptée à la filtration  $\mathcal{F}^{[k]}$ ,
- par définition,  $\Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) \geq 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  et donc  $\inf_{k \in \mathbb{N}} \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) > -\infty$ ,
- soit  $C_k \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbb{E} [\Lambda(\mathbf{u}^{[k+1]}) - \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) \mid \mathcal{F}^{[k]}] > 0 \}$ . Il est clair que  $\mathbb{I}_{C_k}$  est  $\mathcal{F}^{[k]}$ -mesurable. En utilisant l'inégalité (V.18), nous obtenons que :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ (\Lambda(\mathbf{u}^{[k+1]}) - \Lambda(\mathbf{u}^{[k]})) \mathbb{I}_{C_k} \right] &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \Lambda(\mathbf{u}^{[k+1]}) - \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) \mid \mathcal{F}^{[k]} \right] \mathbb{I}_{C_k} \right], \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ (\gamma^{[k]} \Lambda(\mathbf{u}^{[k]}) + \beta^{[k]}) \mathbb{I}_{C_k} \right], \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} (\gamma^{[k]} M + \beta^{[k]}), \end{aligned}$$

comme  $(\gamma^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$   $(\beta^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  sont des séries sommables alors :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ (\Lambda(\mathbf{u}^{[k+1]}) - \Lambda(\mathbf{u}^{[k]})) \mathbb{I}_{C_k} \right] < +\infty.$$

Il est également facile de voir que  $\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ (\Lambda(\mathbf{u}^{[k]}))^- \right] < +\infty$  et par conséquent, en utilisant la proposition C.6 nous avons que la suite  $(\Lambda(\mathbf{u}^{[k]}))_{k \in \mathbb{N}}$  est une quasi-martingale qui converge presque-sûrement et est bornée. Nous avons donc que la suite  $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  est presque sûrement bornée.

En prenant l'espérance sur (V.18) nous obtenons que :

$$\rho^{[k]} \mathbb{E} \left[ J(\mathbf{u}^{[k]}) - J(u^\#) \right] \leq \gamma^{[k]} \lambda^{[k]} + \beta^{[k]} + \lambda^{[k]} - \lambda^{[k+1]}.$$

Nous prenons, alors, la somme pour  $k = 1, \dots, n$  nous avons que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \rho^{[k]} \mathbb{E} \left[ J(\mathbf{u}^{[k]}) - J(u^\#) \right] &\leq \lambda^{[1]} - \lambda^{[n+1]} + \sum_{k=1}^n \gamma^{[k]} \lambda^{[k]} + \beta^{[k]} \\ &\leq M + M \sum_{k=1}^n \gamma^{[k]} + \sum_{k=1}^n \beta^{[k]}. \end{aligned}$$

En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  nous obtenons que :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \rho^{[k]} \mathbb{E} \left[ J(\mathbf{u}^{[k]}) - J(u^\#) \right] < +\infty.$$

Par optimalité de  $u^\sharp$  nous avons que c'est une somme de scalaires positifs. En utilisant l'hypothèse V.14 sur les pas de l'algorithme et d'après le lemme B.3 nous avons alors que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} J(\mathbf{u}^{[k]}) = J(u^\sharp), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Par la bornitude presque-sûre de  $(\mathbf{u}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  nous avons l'existence d'une sous-suite  $\mathbb{P}$ -presque-sûrement convergente vers un point d'accumulation  $\hat{u}$  :

$$\exists (k_i)_{i \in \mathbb{N}}, \quad \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbf{u}^{[k_i]}(\boldsymbol{\xi}) = \hat{u}(\boldsymbol{\xi}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

Comme  $J$  est semi-continue inférieurement nous avons alors que :

$$J(\hat{u}) \leq \liminf_{i \rightarrow +\infty} J(\mathbf{u}^{[k_i]}) \leq J(u^\sharp),$$

nous avons donc que  $\hat{u} \in S$ .

Pour la preuve de (3) : comme  $J$  est  $B$ -fortement convexe, nous avons alors que :

$$J(\mathbf{u}^{[k]}) - J(u^\sharp) \geq \underbrace{\langle \nabla J(u^\sharp), \mathbf{u}^{[k]} - u^\sharp \rangle}_{\geq 0, \text{ par optimalité}} + \frac{B}{2} \|\mathbf{u}^{[k]} - u^\sharp\|_{\mathcal{N}}^2.$$

Comme  $\lim_{k \rightarrow +\infty} J(\mathbf{u}^{[k]}) = J(u^\sharp)$  nous avons alors que :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{u}^{[k]} = u^\sharp, \text{ fortement dans } \mathcal{N}.$$

■

#### V.4. Intérêt d'un tel algorithme

L'inconvénient principal de la méthode des éléments finis particulières (comme présentée dans la section IV.1) est que le choix, effectué a priori, d'une famille libre de fonctions, engendre un biais intrinsèque : l'espace vectoriel des feedbacks admissibles approximés se trouve à une certaine distance incompressible de l'espace de départ. Pour réduire cette distance nous sommes obligés de rajouter des fonctions supplémentaires à la famille de fonctions de base et de résoudre une deuxième fois le problème d'optimisation. L'algorithme V.6 considère aussi un choix fait a priori d'une famille de fonctions de base. Cependant, grâce au degré de liberté supplémentaire apporté par le choix d'une loi de probabilité sur la famille de fonctions, nous pouvons favoriser certaines fonctions à d'autres utilisant ainsi l'expertise personnelle de l'utilisateur. Nous pouvons ainsi imaginer qu'un choix judicieux de cette loi de probabilité influera sur la vitesse de convergence de cet algorithme.

Par comparaison, l'algorithme V.2 relie le choix de la base de fonctions aux particules de bruit tirées à chaque itération. Il évite ainsi ce choix a priori d'une loi de probabilité sur les fonctions de base. Cependant, d'un point de vue pratique, il n'est pas capable d'intégrer des informations connues a priori sur le problème. Par contre, dans le cadre de l'algorithme chaotique, si l'utilisateur a une idée sur la forme de la solution, il peut l'intégrer dans la famille de fonctions de base faisant ainsi accélérer la procédure de résolution numérique.

En pratique, il faut augmenter le nombre  $\nu$  de fonctions de base pour recouvrir asymptotiquement un espace de Hilbert de dimension infinie. Cependant, si nous augmentons ce nombre, il faudra augmenter aussi le nombre de tirages (et donc d'itérations de l'algorithme) pour *bien* approximer l'opérateur d'espérance. Comme dans la section IV.2, nous retrouvons le *trade-off* à faire entre biais (diminuant avec le nombre des fonctions de bases) et variance (augmentant avec le nombre de fonctions et diminuant avec le nombre des tirages).

Pour illustrer ce dernier point, nous présenterons dans la suite un exemple numérique où nous ferons différents choix de cardinalité sur l'ensemble d'indices  $I$ .

### V.5. Application numérique de l'algorithme

Nous cherchons à résoudre un problème de gestion de stocks. Il s'agit d'un problème à deux pas de temps.

- (1) Au premier pas de temps le stock initial est noté  $s \in \mathbb{R}_+$  variable déterministe.
- (2) Au deuxième pas de temps une quantité est consommée à partir du stock constitué à la première période. Cette quantité est prise en fonction d'un prix  $\xi$ , variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$  notée  $\mathbb{P}_\xi$ . La quantité consommée est, alors, représentée par une fonction de  $\xi : u(\xi) \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{P}$ -p.s. tel que  $u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_\xi, \mathbb{R})$ .

Nous considérons, en outre, l'existence d'un stock de réserve  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$ . Le stock au deuxième pas de temps s'écrit alors comme :  $\epsilon + s - u(\xi)$ , et engendre un coût de gestion  $\sqrt{\epsilon + s - u(\xi)}$ . La quantité consommée est valorisée en fonction du prix  $\xi : \xi u(\xi)$ .

Le problème à résoudre est alors un problème d'optimisation stochastique en boucle fermée. La fonction coût s'écrit tel que :

$$\begin{aligned} j & : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ (u, \xi) & \mapsto -\xi u - \sqrt{\epsilon + s - u}. \end{aligned}$$

Il s'agit alors de résoudre le problème suivant :

$$(V.20) \quad \begin{aligned} \min_{u \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P}_\xi, \mathbb{R})} & \quad \mathbb{E} [j(u(\xi), \xi)], \\ \text{sous} & \quad u(\xi) \in [0, s], \quad \mathbb{P}_\xi\text{-p.s.} \end{aligned}$$

Nous pouvons envisager une résolution exacte du problème. Le gradient de  $j$  s'écrit :

$$\nabla_u j(u, \xi) = -\xi + \frac{1}{2\sqrt{\epsilon + s - u}}.$$

En écrivant que le gradient est orthogonal à la contrainte nous pouvons déduire la commande optimale en posant  $[x]_a^b = \min(\max(x, a), b)$ , il vient que :

$$u^\#(\xi) = \left[ s + \epsilon - \frac{1}{4\xi^2} \right]_0^s.$$

Nous supposons que  $\mathcal{N}^{\text{mes}}$  est un sous-espace vectoriel de  $L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{U})$  de dimension  $\nu < +\infty$ . Nous nous donnons  $I \subset \mathbb{N}$  un ensemble d'indices de cardinal  $\nu$  ( $\text{card}(I) = \nu < +\infty$ ) et une famille de fonctions de base  $(\phi_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{N}^{\text{mes}}$ .

Nous pouvons résoudre numériquement le problème (V.20) en approximant l'espace vectoriel  $L^2(\Xi, \mathbb{B}(\Xi), \mathbb{P}_\xi; \mathbb{U})$  par un sous-espace vectoriel engendré par un nombre fini de fonctions de base :  $(\phi_i)_{i \in I}$  et en utilisant un algorithme du type V.6. Il s'agit alors de résoudre le problème suivant :

$$(V.21) \quad \begin{aligned} \min_{u \in \mathcal{N}^{\text{mes}}} & \quad J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [j(u(\xi), \xi)], \\ \text{sous} & \quad u(\xi) \in C^{\text{ad}}, \quad \mathbb{P}_\xi\text{-p.s.}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{N}^{\text{mes}} = \{u \in \mathcal{N}^{\text{mes}}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^\nu, u = \sum_{i \in I} \alpha_i \phi_i\}$  et  $C^{\text{ad}} \stackrel{\text{def}}{=} [0, s]$ .

Pour cet exemple, nous prenons la loi de probabilité uniforme sur  $I$  nous avons alors que  $\forall i \in I, p_i = \frac{1}{\nu}$ . Nous posons, en outre,  $s = 4$ ,  $\epsilon = 0.5$ ,  $\xi_{\min} = 0$  et  $\xi_{\max} = 1$ . La commande initiale sera prise tel que :  $u^{[0]}(\xi) = \frac{s}{2}$ . Les fonctions de base vont être choisies de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) & = 1, \\ \phi_{2r}(\xi) & = \sqrt{2} \sin(2\pi r \xi), \quad \forall r \in \{1, \dots, \frac{\nu-1}{2}\}, \\ \phi_{2r+1}(\xi) & = \sqrt{2} \cos(2\pi r \xi), \quad \forall r \in \{1, \dots, \frac{\nu-1}{2}\}, \end{aligned}$$

Les figures V.3, V.4 et V.5 représentent respectivement le feedback optimal du problème de gestion après  $k_{\max} = 50000$  itérations de l'algorithme V.6 pour différents choix du nombre  $\nu$  de fonctions de bases<sup>1</sup>.

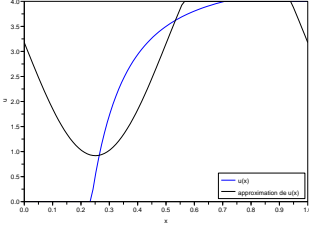


FIG. V.3.  
Feedback  
après 10000  
itérations pour  
 $\nu = 3$

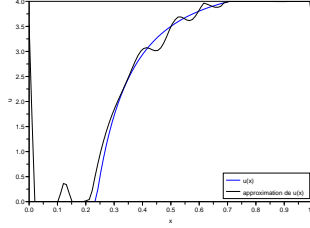


FIG. V.4.  
Feedback  
après 10000  
itérations pour  
 $\nu = 18$

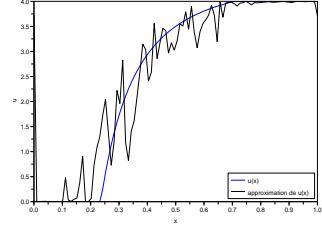


FIG. V.5.  
Feedback  
après 10000  
itérations pour  
 $\nu = 51$

Il est alors clair qu'à nombre d'itérations fixées, le choix d'un nombre restreint de fonctions de base détériore le biais de l'estimateur de la solution (figure V.3) alors que le choix d'un nombre trop grand influe sur la variance (figure V.5). Un équilibre doit alors être fait (figure V.4).

Nous représentons, en outre, l'erreur quadratique moyenne faite sur le feedback (voir les figures V.6, V.7 et V.8) :

$$e_k = \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^1 (u^\#(\xi) - u^{[k]}(\xi))^2 d\xi}, \quad \forall k = 1, \dots, k_{\max}.$$

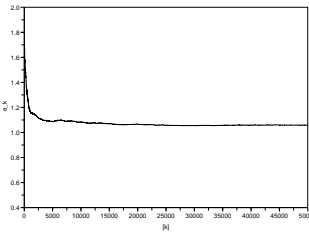


FIG. V.6.  $e_k$   
en fonction des  
itérations pour  
 $\nu = 3$

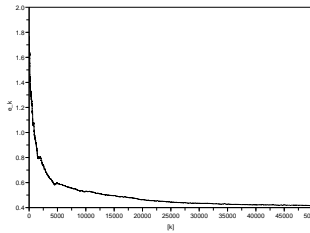


FIG. V.7.  $e_k$   
en fonction des  
itérations pour  
 $\nu = 18$

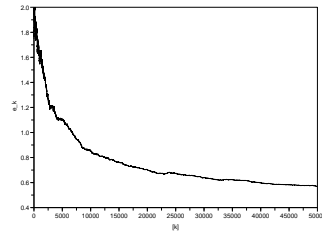


FIG. V.8.  $e_k$   
en fonction des  
itérations pour  
 $\nu = 51$

Nous retrouvons ainsi le même compromis présenté dans le chapitre IV où nous devons optimiser le nombre de fonctions de base en fonction du nombre de tirages de Monte-Carlo. Cependant, dans l'algorithme de gradient stochastique chaotique présenté, ce compromis n'apparaît pas dans le résultat de convergence asymptotique qu'on a donné (on tire virtuellement un nombre infini de particules), il faut pour cela présenter un résultat de vitesse de convergence.

<sup>1</sup>Pour cet exemple, nous supposons que le pas  $\rho^{[k]}$  de l'algorithme V.6 s'écrit  $\rho^{[k]} = \frac{a}{k^\gamma + b}$ . Nous représentons les résultats obtenus après calage des paramètres  $a$  et  $b$ , le paramètre  $\gamma$  étant fixé à  $\gamma = 1$ .



### V.6. Vitesse de convergence

Nous reprenons le problème (V.11) et nous considérons que nous nous trouvons que face à des contraintes de mesurabilité ( $\mathcal{N}^{\text{mes}} = \{u \in \mathcal{N}, \exists \alpha \in \mathbb{R}^\nu, u = \sum_{i=1}^\nu \alpha_i \phi_i\}$ ), les contraintes d'admissibilité étant prises  $\mathcal{N}^{\text{ad}} = \mathcal{N}$ .

$$(V.22) \quad \min_{u \in \mathcal{N}^{\text{mes}}} J(u) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} [j(u(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi})].$$

Nous pouvons alors considérer le problème équivalent (V.8), où on minimise  $\widehat{J} : \mathbb{R}^\nu \rightarrow \mathbb{R}$  en boucle ouverte sur  $\alpha \in \mathbb{R}^\nu$ . L'expression du gradient  $\nabla \widehat{J}(\alpha)$  est donnée par (V.9). Nous pouvons alors écrire un algorithme de gradient sur les coefficients  $\alpha$  des fonctions de base pour le problème (V.8).

ALGORITHME V.16 (Algorithme de gradient pour (V.8)).

- **Étape [0]** : Soit  $\alpha^{[0]} \in \mathbb{R}^\nu$  la commande initiale de l'algorithme.
- **Étape [k]** :

$$(V.23) \quad u^{[k]}(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^\nu \alpha_i^{[k]} \phi_i(\boldsymbol{\xi}),$$

$$(V.24) \quad \alpha_j^{[k+1]} = \alpha_j^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}} \left[ \left\langle \phi_j(\boldsymbol{\xi}), \nabla_{u,j} \left( u^{[k]}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \right],$$

$$(V.25) \quad = \alpha_j^{[k]} - \rho^{[k]} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}, i} \left[ \left\langle \phi_j(\boldsymbol{\xi}), \nabla_{u,j} \left( u^{[k]}(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}} \frac{\delta_{i,j}}{\pi} \right].$$

où  $i$  est une variable aléatoire entière suivant une loi uniforme sur  $I \stackrel{\text{def}}{=} \{1, \dots, \nu\}$  ( $\pi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\nu}$ ) et  $\delta$  est le symbole de Kronecker. ◆

L'algorithme de gradient stochastique chaotique (V.6) pour résoudre V.22 peut alors s'interpréter comme un simple algorithme de gradient stochastique pour résoudre le problème V.8 à partir de l'approximation de l'opérateur d'espérance dans (V.25).

ALGORITHME V.17 (Algorithme de gradient stochastique pour (V.8)).

- **Étape [0]** :
  - Soit  $\alpha^{[0]} \in \mathbb{R}^\nu$  la commande initiale de l'algorithme.
  - Soit  $\mathbb{P}_i$  la loi uniforme sur  $I$ .
- **Étape [k]** :
  - Soit  $j^{[k+1]} \in I$  une variable aléatoire indépendante de  $(j^{[1]}, \dots, j^{[k]})$  de loi  $\mathbb{P}_i$ ,
  - Soit  $\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}$  une variable aléatoire indépendante de  $(\boldsymbol{\xi}^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{[k]})$ , de la loi  $\mathbb{P}_{\boldsymbol{\xi}}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^\nu \alpha_i^{[k]} \phi_i(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \\ \alpha_j^{[k+1]} &= \alpha_j^{[k]} - \rho^{[k]} \underbrace{\frac{1}{\pi} \left\langle \phi_j(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \nabla_{u,j} \left( \mathbf{u}^{[k]}(\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}), \boldsymbol{\xi}^{[k+1]} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}}}_{\stackrel{\text{def}}{=} f_j(\alpha^{[k]}, \boldsymbol{\xi}^{[k+1]}, \mathbf{i}^{[k+1]})} \delta_{i^{[k+1]}, j}. \end{aligned}$$

◆

**V.6.1. Théorème de la limite centrale.** On se propose de donner un résultat de type *théorème de la limite centrale* (TCL) précisant la normalité asymptotique des itérées  $\alpha^{[k]}$  de l'algorithme V.17 de gradient stochastique. Ce résultat sera utilisé pour déduire la vitesse de convergence de l'algorithme V.6 portant sur les feedback  $\mathbf{u}^{[k]}$  dans le cas où  $\mathcal{N}^{\text{ad}} = \mathcal{N}$ . Le

théorème suivant est un cas particulier de celui présenté dans [42, théorème 4.III.5] et [41, théorème 24].

Pour tous les pas  $k \in \mathbb{N}$  de l'algorithme V.17, nous définissons la matrice de covariance conditionnelle  $\Gamma^{[k]}$  de taille  $\nu \times \nu$  par rapport à la filtration  $(\mathcal{F}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  tel que :

$$(V.26) \quad \Gamma_{l,j}^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \left[ f_j(\boldsymbol{\alpha}^{[k]}, \boldsymbol{\xi}^{[k+1]}, \mathbf{i}^{[k+1]}) f_l(\boldsymbol{\alpha}^{[k]}, \boldsymbol{\xi}^{[k+1]}, \mathbf{i}^{[k+1]}) \mid \mathcal{F}^{[k]} \right].$$

Nous définissons en outre les éléments suivants pour  $\alpha^\#$  solution de (V.8) :

$$(V.27) \quad u^\#(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^\# \phi_i(\boldsymbol{\xi}),$$

$$(V.28) \quad \psi_j^\#(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{\text{def}}{=} \left\langle \phi_j(\boldsymbol{\xi}), \nabla_{u^j} \left( u^\#(\boldsymbol{\xi}), \boldsymbol{\xi} \right) \right\rangle_{\mathbb{U}},$$

$$(V.29) \quad \Gamma_{l,j} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_{\mathbf{i}, \boldsymbol{\xi}} \left[ f_j(\alpha^\#, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{i}) f_l(\alpha^\#, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{i}) \right],$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} \pi \delta_{i,j} \delta_{i,l} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}} \left[ \psi_j^\#(\boldsymbol{\xi}) \psi_l^\#(\boldsymbol{\xi}) \right] \frac{1}{\pi^2},$$

$$(V.30) \quad = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \\ \frac{1}{\pi} \mathbb{E}_{\boldsymbol{\xi}} \left[ \left( \psi_j^\#(\boldsymbol{\xi}) \right)^2 \right] & \text{sinon} \end{cases}.$$

HYPOTHÈSE V.18. La suite de variables aléatoires  $(\boldsymbol{\alpha}^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  converge presque sûrement vers  $\alpha^\#$ .  $\blacklozenge$

HYPOTHÈSE V.19. La fonction  $\widehat{\mathcal{J}}$  est deux fois continûment différentiable, et sa matrice Hessienne prise à l'optimum  $H \stackrel{\text{def}}{=} \nabla^2 \widehat{f}(\alpha^\#)$  est définie positive. On notera  $c > 0$  la plus petite valeur propre de  $H$ .  $\blacklozenge$

HYPOTHÈSE V.20. La suite  $(\Gamma^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  des matrices de covariance conditionnelle (V.26) converge presque sûrement vers  $\Gamma$  (V.29).  $\blacklozenge$

HYPOTHÈSE V.21. Il existe  $\delta > 0$ , tel que l'on ait :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \left[ \left\| \nabla \widehat{\mathcal{J}}(\boldsymbol{\alpha}^{[k]}) - f(\boldsymbol{\alpha}^{[k]}, \boldsymbol{\xi}^{[k+1]}, \mathbf{i}^{[k+1]}) \right\|^{2+\delta} \mid \mathcal{F}^{[k]} \right] < +\infty,$$

où  $\mathcal{F}^{[k]} = \sigma(\boldsymbol{\xi}^{[1]}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{[k]}, \mathbf{j}^{[1]}, \dots, \mathbf{j}^{[k]})$ .  $\blacklozenge$

HYPOTHÈSE V.22. La suite  $(\rho^{[k]})_{k \in \mathbb{N}}$  est de la forme  $\rho^{[k]} = \frac{a}{k^\gamma + b}$ , avec  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $\frac{1}{2} < \gamma \leq 1$ . On note :

$$\lambda = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma < 1, \\ \frac{1}{2a} & \text{si } \gamma = 1. \end{cases}$$

HYPOTHÈSE V.23. La matrice  $H - \lambda I$  est définie positive<sup>2</sup>.  $\blacklozenge$

Nous pouvons maintenant donner le résultat de vitesse de convergence de l'algorithme V.17.

THÉORÈME V.24 (TCL pour V.17). *Sous les hypothèses V.18, V.19, V.20, V.21, V.22 et V.23, la suite de variables aléatoires  $\left( \frac{1}{\sqrt{\rho^{[k]}}} (\boldsymbol{\alpha}^{[k]} - \alpha^\#) \right)_{k \in \mathbb{N}}$ , générée par l'algorithme V.17, converge en loi vers une loi normale centrée de matrice de covariance  $\Sigma$  :*

$$\frac{1}{\sqrt{\rho^{[k]}}} (\boldsymbol{\alpha}^{[k]} - \alpha^\#) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

<sup>2</sup>Dans le cas  $\gamma = 1$ , une condition équivalente à cette propriété de positivité est :  $2ac > 1$ .

la matrice de covariance  $\Sigma$  étant solution de l'équation de Lyapunov :

$$(H - \lambda I)\Sigma + \Sigma(H - \lambda I) = \Gamma.$$

**Démonstration :** Nous adoptons les notations suivantes :

$$(V.31) \quad h(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} -\nabla \widehat{J}(\alpha), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^\nu$$

$$(V.32) \quad \mathbf{w}^{[k+1]} \stackrel{\text{def}}{=} \nabla \widehat{J}(\boldsymbol{\alpha}^{[k]}) - f(\boldsymbol{\alpha}^{[k]}, \boldsymbol{\xi}^{[k+1]}, \mathbf{i}^{[k+1]}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

L'algorithme V.17 peut alors s'écrire sous la forme canonique suivante [42] :

$$(V.33) \quad \boldsymbol{\alpha}^{[k+1]} = \boldsymbol{\alpha}^{[k]} - \rho^{[k]} \left( h(\boldsymbol{\alpha}^{[k]}) + \mathbf{w}^{[k+1]} \right).$$

On remarquera d'autre part que si  $\alpha^\# \in \mathbb{R}^\nu$  est solution de (V.8) alors une condition nécessaire d'optimalité s'écrirait :

$$\nabla \widehat{J}(\alpha^\#) = 0 = -h(\alpha^\#),$$

et que  $\boldsymbol{\xi}^{[k+1]}$  est un incrément de Martingale (voir l'annexe C) :  $\mathbb{E}[\mathbf{w}^{[k+1]} \mid \mathcal{F}^{[k]}] = 0$ .

En utilisant [42, Théorème 4.III.5], nous avons alors le résultat recherché  $\blacksquare$

REMARQUE V.25. D'après l'hypothèse V.22 et le théorème V.24 il est clair que le paramètre  $b$  n'a aucune influence asymptotique (il n'agit que d'une manière transitoire dans l'algorithme). Nous déduisons alors que l'algorithme V.17 a la propriété de convergence suivante :

$$k^{\frac{\gamma}{2}}(\boldsymbol{\alpha}^{[k]} - \alpha^\#) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, a\Sigma).$$

Le choix optimal (conduisant à la vitesse de convergence la plus élevée) est donc de  $\gamma = 1$ . On retrouve ainsi la vitesse en  $\frac{1}{\sqrt{k}}$  du théorème de la limite centrale d'un estimateur de Monte-Carlo classique.  $\blacklozenge$

**V.6.2. Lien entre nombre de fonctions de base et vitesse de convergence.** Nous faisons maintenant le lien entre le nombre de fonctions de bases et le nombre d'itérations de l'algorithme V.17 d'une part, et la vitesse de convergence d'autre part.

D'après le théorème V.24, la variance asymptotique de l'estimateur de la solution du problème (V.8) résolu par l'algorithme V.17 est donnée par la matrice de covariance  $\Sigma$  solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$(H - \lambda I)\Sigma + \Sigma(H - \lambda I) = \Gamma.$$

Dans cette équation  $H$  et  $I$  sont indépendantes du nombre  $\nu$  de fonctions de base mais  $\Gamma$  en dépend à travers  $\pi = \frac{1}{\nu}$  (V.30). Nous posons alors  $\widehat{\Gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \pi\Gamma$ , on en déduit que  $\widehat{\Sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \pi\Sigma$  est solution de l'équation de Lyapunov suivante :

$$(H - \lambda I)\widehat{\Sigma} + \widehat{\Sigma}(H - \lambda I) = \widehat{\Gamma}.$$

Nous avons alors que :

$$(V.34) \quad \sqrt{k}(\boldsymbol{\alpha}^{[k]} - \alpha^\#) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{a}{\pi}\widehat{\Sigma}\right),$$

où  $\pi = \frac{1}{\nu}$  et  $\widehat{\Sigma}$  ne dépend du nombre de fonctions de base qu'à travers sa taille  $\nu \times \nu$ .

Dans le cas où la matrice hessienne  $H$  est une matrice diagonale, nous avons que  $H - \lambda I$  l'est aussi, et donc nous avons que la variance asymptotique de  $\sqrt{k}(\boldsymbol{\alpha}^{[k]} - \alpha^\#)$  est proportionnelle à  $\frac{a}{\pi}\mathbb{E}\left[\left(\psi_j^\#(\boldsymbol{\xi})\right)^2\right]$ . En notons  $\sigma^{[k]}$  l'écart type de l'estimateur  $\boldsymbol{\alpha}_j^{[k]}$  nous avons d'après (V.34) que :

$$(V.35) \quad \sigma_j^{[k]} \sim \sqrt{\frac{\nu}{k}} \left\| \left\langle \phi_j(\cdot), \nabla_{u_j}(u^\#(\cdot), \cdot) \right\rangle_{\mathcal{N}} \right\|_{\mathbb{R}}.$$

Il est clair alors que si on multipliait le nombre de fonctions de base par  $n$ , il faudra effectuer  $n$  fois plus d'itérations de l'algorithme V.17 pour avoir une variance équivalente.

Nous retrouvons alors les conclusions des observations expérimentales faite dans l'exemple précédent (voir la section [V.5](#)) ainsi que les mêmes conclusions faites lors de l'estimation de l'espérance conditionnelle (chapitre [III](#)) et de la méthode des éléments finis particuliers (chapitre [IV](#)), à savoir qu'il faut faire un compromis entre deux paramètres : le nombre de fonctions de base d'une part et le nombre de particules de l'autre.



## Résolution numérique de problèmes de commande optimale stochastique

Le dernier chapitre de ce mémoire se veut être une collection de méthodes numériques, d’algorithmes et d’heuristiques pour la résolution de problèmes de commande optimale stochastique en temps discret. Nous nous intéresserons exclusivement aux méthodes dites variationnelles inspirées des résultats théoriques établis dans les chapitres précédents. Nous présenterons, néanmoins, la méthode de programmation dynamique stochastique, comme étant le cadre naturel (pourtant non variationnel) pour la résolution de ce type de problèmes. Cette méthode constituera notre référence à laquelle nous comparerons les différentes heuristiques qui seront présentées. Nous nous placerons alors dans le cadre markovien (information complète et bruits blancs, voir les hypothèses II.17) ; nous supposerons en outre que la commande est contrainte à être dans un sous-ensemble admissible déterministe  $\Gamma_t^{\text{ad}} \subset \mathbb{U}_t$ ,  $\forall t = 0, \dots, T - 1$ .

Nous reprenons le problème de commande optimale stochastique décrit dans le chapitre II ainsi que toutes les notations de la section II.2.

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathbf{X} \in \mathcal{X}, \mathbf{U} \in \mathcal{U}} \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T) \right], \\
 \text{sous } \mathbf{X}_0 = \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\
 \mathbf{X}_{t+1} = f_t(\mathbf{X}_t, \mathbf{U}_t, \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T - 1, \\
 \mathbf{U}_t \preceq \mathbf{Y}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t) \quad \forall t = 0, \dots, T - 1, \\
 \mathbf{U}_t(\omega) \in \Gamma_t^{\text{ad}}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T - 1.
 \end{aligned}
 \tag{VI.1}$$

Dans la section III.1, deux principales approches ont été présentées pour la résolution des problèmes d’optimisation stochastique (dans leur formulation la plus générale) : l’approche A-O (Approximer d’abord, ensuite Optimiser) et l’approche O-A (Optimiser d’abord ensuite Approximer) conduisant toutes les deux à des problèmes d’optimisation que nous pouvons résoudre par des méthodes classiques d’optimisation déterministe. Nous considérerons, dans ce chapitre, une adaptation de ces approches au cas particulier de la commande optimale stochastique (problème d’optimisation stochastique à plusieurs pas de temps).

Après avoir présenté la méthode de résolution numérique de référence (programmation dynamique stochastique), la deuxième partie de ce chapitre traitera de l’approche A-O : nous approximerons le problème de départ par la méthode des éléments finis particuliers (voir le chapitre IV), nous écrivons des conditions nécessaires d’optimalité du problème approximé et nous élaborons un algorithme de gradient déterministe pour la résolution numérique.

La deuxième partie s’intéressera à l’approche O-A : nous utiliserons les résultats du chapitre II où nous avons présenté différentes conditions nécessaires d’optimalité du même problème afin de les approximer et de résoudre numériquement le problème de commande optimale stochastique sous-jacent. Nous ferons, ainsi, la distinction entre interprétation par variable aléatoire (algébrique), et interprétation fonctionnelle des contraintes d’information.

Au cours de ce chapitre, nous illustrerons nos résultats par des applications numériques à un problème de gestion de production d’un barrage hydro-électrique.

REMARQUE VI.1 (Représentation numérique d'une fonction). Au cours de ce chapitre nous aurons à manipuler des fonctions. Numériquement (sur une machine), nous avons besoin d'une représentation discrète de ces fonctions.

Nous considérons alors deux opérations : connaissant une fonction  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$  (sous forme analytique ou sous toute autre forme), on a besoin de manipuler sa trace, c'est-à-dire la collection de ses valeurs sur une grille fixe ou aléatoire (une collection de points définissant la grille et de valeurs de la fonction sur cette grille). On notera par des lettres grasses minuscules une telle grille :

$$\mathbf{x} = (x^i)_{i=1, \dots, n} \in \mathbb{X}^n.$$

Inversement, connaissant une telle trace, on a besoin de reconstruire une fonction évaluable partout. C'est ce que nous appellerons interpolation-régression.

On désigne par  $\mathcal{T} : \mathbb{U}^{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{X}^n \times \mathbb{U}^n$  l'opérateur trace qui à une fonction  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$  associe sa trace  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (x^i, f(x^i))_{i=1, \dots, n}$  sur la grille  $\mathbf{x}$ , et  $\mathcal{R}_{\mathbb{U}} : \mathbb{X}^n \times \mathbb{U}^n \rightarrow \mathbb{U}^{\mathbb{X}}$  l'opérateur d'interpolation ou de régression qui à un nuage de points  $(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = (x^i, u^i)_{i=1, \dots, n}$  associe une fonction  $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{U}$ .  $\blacklozenge$

REMARQUE VI.2. Nous nous donnons, dans, tout le reste de ce chapitre, pour tout  $t = 0, \dots, T$ ,  $(\mathbf{W}_t^k)_{k=1, \dots, N}$ ,  $N$  réalisations indépendantes et identiquement distribuées du processus aléatoire de bruit  $(\mathbf{W}_t)_{t=0, \dots, T}$ . Nous noterons en outre, pour tout  $t = 0, \dots, T$  et tout  $k = 1, \dots, N$ ,  $\mathbf{Y}_t^k \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{W}_0^k, \dots, \mathbf{W}_t^k)$  une réalisation de la variable aléatoire d'observation  $\mathbf{Y}_t$ .  $\blacklozenge$

### VI.1. Algorithme de la programmation dynamique stochastique en temps discret

Une fois dégagée une notion d'état adéquate rendant un problème markovien, la programmation dynamique stochastique s'applique à tout problème de commande optimale stochastique en temps discret. Cet état est matérialisé par le processus  $(\mathbf{X}_t)_{t=0, \dots, T}$  du problème (VI.1) lorsque les bruits  $(\mathbf{W}_t)_{t=0, \dots, T}$  sont *blancs*, c'est-à-dire sont des variables aléatoires indépendantes les unes des autres. Dans le cas contraire, on se ramène au cas markovien en augmentant la dimension de l'état par des variables supplémentaires permettant de rendre compte de la corrélation en temps des bruits  $\mathbf{W}_t$ .

Nous nous sommes placé, dans ce chapitre, dans un cadre markovien ; nous pouvons alors chercher la commande optimale  $(\mathbf{U}_t^{\text{SDP}})_{t=0, \dots, T-1}$  du problème (VI.1) comme un feedback par rapport à l'état (voir théorème II.18) :

$$\mathbf{U}_t^{\text{SDP}} = \phi_t^{\text{SDP}}(\mathbf{X}_t^{\text{SDP}}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1,$$

où  $(\mathbf{X}_t^{\text{SDP}})_{t=0, \dots, T}$  est le processus d'état obtenu en intégrant la dynamique du problème en utilisant le processus de commande optimale  $(\mathbf{U}_t^{\text{SDP}})_{t=0, \dots, T}$ .

La résolution du problème (VI.1) se fait alors en marche rétrograde (*backward*) de  $t = T$  jusqu'à  $t = 0$  en résolvant à chaque instant l'équation de Bellman pour chaque valeur de l'état  $x \in \mathbb{X}_t$ . Nous appliquons alors l'algorithme récursif suivant (voir [17, 18]) :

ALGORITHME VI.3 (SDP - Stochastic Dynamic Programming).

– **Au dernier pas de temps :  $T$  :**

$$V_T(x) \stackrel{\text{def}}{=} K(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}_T,$$

– **De façon rétrograde :  $\forall t = T-1, \dots, 0$**

$$V_t(x) = \min_{u \in \Gamma_t^{\text{ad}}} \mathbb{E} \left[ L_t(x, u, \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}(f_t(x, u, \mathbf{W}_{t+1})) \right], \quad \forall x \in \mathbb{X}_t,$$

$$\phi_t^{\text{SDP}}(x) = \arg \min_{u \in \Gamma_t^{\text{ad}}} \mathbb{E} \left[ L_t(x, u, \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}(f_t(x, u, \mathbf{W}_{t+1})) \right], \quad \forall x \in \mathbb{X}_t$$

$\blacklozenge$

Cet algorithme n'est pas implémentable en l'état ; en effet, il reste à approximer l'opérateur d'espérance et établir une représentation numérique des fonctions.

Pour cela, nous donnons pour tout  $t = 0, \dots, T$ ,  $\mathbf{x}_t \stackrel{\text{def}}{=} (x_t^i)_{i=1, \dots, n_t}$  une grille de  $n_t$  points de discrétisation de l'espace  $\mathbb{X}_t$ .

Nous approximos les espérances dans l'algorithme VI.3 par Monte-Carlo et nous représentons les fonctions par leurs représentations discrètes sur les différentes grilles aux différents pas de temps. Nous notons alors :

$$(VI.2) \quad \begin{aligned} v_t^i &= V_t(x_t^i), \quad \forall i = 1, \dots, n_t, \quad \forall t = 0, \dots, T, \\ u_t^i &= \phi_t^{\text{SDP}}(x_t^i), \quad \forall i = 1, \dots, n_t, \quad \forall t = 0, \dots, T - 1. \end{aligned}$$

Nous appliquons alors l'algorithme récursif approximé suivant :

ALGORITHME VI.4 (SDP discrétisé).

– **Au dernier pas de temps** :  $T$ , nous avons une représentation analytique exacte :

$$v_T^i = V_T(x_T^i), \quad \forall i = 1, \dots, n_T,$$

– **De façon rétrograde** :  $\forall t = T - 1, \dots, 0$ ,

$$\widehat{V}_{t+1} = \mathcal{R}_{\mathbb{R}}(\mathbf{x}_{t+1}, \mathbf{v}_{t+1}),$$

$$v_t^i = \min_{u \in \Gamma_t^{\text{ad}}} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ L_t(x_t^i, u, \mathbf{W}_{t+1}^k) + \widehat{V}_{t+1}(f_t(x_t^i, u, \mathbf{W}_{t+1}^k)) \right], \quad \forall i = 1, \dots, n_t,$$

$$u_t^i = \arg \min_{u \in \Gamma_t^{\text{ad}}} \mathbb{E} \left[ L_t(x_t^i, u, \mathbf{W}_{t+1}^k) + \widehat{V}_{t+1}(f_t(x_t^i, u, \mathbf{W}_{t+1}^k)) \right], \quad \forall i = 1, \dots, n_t,$$

$$\phi_t^{\text{SDP}} = \mathcal{R}_{\mathbb{U}_t}(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad \forall i = 1, \dots, n_t,$$

où pour chaque pas de temps  $\mathbf{x}_t \stackrel{\text{def}}{=} (x_t^i)_{i=1, \dots, n_t}$ ,  $\mathbf{u}_t \stackrel{\text{def}}{=} (u_t^i)_{i=1, \dots, n_t}$  et  $\mathbf{v}_t \stackrel{\text{def}}{=} (v_t^i)_{i=1, \dots, n_t}$  et  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$  et  $\mathcal{R}_{\mathbb{U}_t}$  sont des opérateurs d'interpolation-régression comme définis dans la remarque VI.1.  $\blacklozenge$

REMARQUE VI.5.

- (1) Cette méthode se trouve face à un inconvénient majeur : la malédiction de la dimension (*curse of dimensionality*). En effet, il s'agit de discrétiser *a priori* chaque coordonnée de l'espace d'état  $\mathbb{X}_t$  à chaque pas de temps  $t$  avec une grille *scalair*e et un nombre donné de points de discrétisation, la grille  $\mathbf{x}_t$  s'obtient alors en faisant le produit cartésien des grilles *scalaires* sur toutes les coordonnées de  $\mathbb{X}_t$ . Le nombre d'opérations à traiter à chaque pas de temps augmente donc exponentiellement avec la dimension de l'espace d'état. Nous ne bénéficions donc pas de toute l'information apportée par la dynamique du problème qui peut faire en sorte que la variable aléatoire d'état se concentre dans certaines régions de l'espace et pas dans d'autres.
- (2) Nous faisons en outre remarquer que dans le cadre de la programmation dynamique stochastique, l'opération de minimisation est faite à chaque pas de temps et pas d'une manière globale (résultant des différentes itérations) : l'algorithme de programmation dynamique stochastique n'est pas de nature variationnelle. Ceci rend difficile le fait de lui associer des algorithmes de décomposition et coordination pour la résolution des grands systèmes (voir [106, Chapitre V]).

$\blacklozenge$

## VI.2. Gradient projeté pour la méthode des éléments finis particuliers

Nous reprenons le problème VI.1, et nous nous proposons de l'approximer par la méthode des éléments finis particuliers et d'écrire les conditions d'optimalité correspondantes. Il s'agit alors de spécifier les conditions de la proposition IV.5 au cas de la commande optimale stochastique en temps discret.



**VI.2.1. Approximation par éléments finis particuliers.** D'après le lemme IV.3, nous définissons à chaque instant  $t = 0, \dots, T-1$ , une application mesurable notée  $\psi_t : \mathbb{Y}_t \rightarrow \mathbb{U}_t$  tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t &\preceq \mathbf{Y}_t, \quad \mathbf{U}_t \in \mathcal{U}_t \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{U}_t) \\ &\Leftrightarrow \exists \psi_t \in \mathcal{H}_t \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\mathbb{Y}_t, \mathbb{B}(\mathbb{Y}_t), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_t}; \mathbb{U}_t), \quad \mathbf{U}_t = \psi_t(\mathbf{Y}_t), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Pour tout pas de temps  $t = 0, \dots, T-1$ , nous posons  $(\psi_{t,i})_{i \in \mathbb{N}}$  une base de  $\mathcal{H}_t$ ,  $\nu_t \in \mathbb{N}$  un entier naturel et  $\Psi_t^{\nu_t}$  un opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^{\nu_t}$  dans  $\mathcal{H}_t$  tel que :

$$\begin{aligned} &\Psi_t^{\nu_t} : \mathbb{R}^{\nu_t} \rightarrow \mathcal{H}_t, \\ \text{(VI.3)} \quad &\alpha_t \mapsto \sum_{i=1}^{\nu_t} \alpha_{t,i} \psi_{t,i}. \end{aligned}$$

Par abus de notation, nous noterons :  $(\Psi_t^{\nu_t} \alpha_t)(\mathbf{Y}_t) \stackrel{\text{def}}{=} \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t) \alpha_t$ .

Soit  $\mathcal{H}_t^{\text{ad}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\psi_t \in \mathcal{H}_t, \quad \psi_t(y) \in \Gamma_t^{\text{ad}}, \quad \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_t}\text{-p.s.}\}$ . Nous noterons  $A_t^{\text{ad}}$  l'image réciproque de  $\mathcal{H}_t^{\text{ad}}$  par l'opérateur linéaire  $\Psi_t^{\nu_t}$  :

$$\text{(VI.4)} \quad A_t^{\text{ad}} = (\Psi_t^{\nu_t})^{-1}(\mathcal{H}_t^{\text{ad}}) = \left\{ \alpha_t \in \mathbb{R}^{\nu_t}, \quad \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t) \alpha_t \in \Gamma_t^{\text{ad}}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.} \right\}.$$

REMARQUE VI.6. L'ensemble  $A_t^{\text{ad}}$  peut être très réduit, voir vide, ce qui introduit une perte d'optimalité du problème approximé. En toute généralité il est assez difficile de déterminer l'espace  $A_t^{\text{ad}}$  comme l'image réciproque de  $\Gamma_t^{\text{ad}}$  par un opérateur linéaire. Cependant, dans des cas particuliers, nous pourrions déterminer cet espace (quand  $\Gamma_t^{\text{ad}}$  est un hypercube, voir le lemme B.4). Ce point sera discuté plus loin dans ce chapitre lorsqu'on appliquera la méthode des éléments finis particuliers à un problème de gestion de production (voir la section VI.5.4.2).  $\blacklozenge$

L'approximation de (VI.1) par éléments finis particuliers s'écrit alors comme un problème d'optimisation déterministe (où  $\nu = \sum_{t=0}^{T-1} \nu_t$ ) :

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{X} \in \mathbb{X}^N, \alpha \in \mathbb{R}^\nu} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t^k, \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t^k) \alpha_t, \mathbf{W}_{t+1}^k) + K(\mathbf{X}_T^k) \right], \\ \text{(VI.5)} \quad &\text{sous } \mathbf{X}_0^k = \mathbf{W}_0^k, \quad \forall k = 1, \dots, N, \\ &\mathbf{X}_{t+1}^k = f_t(\mathbf{X}_t^k, \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t^k) \alpha_t, \mathbf{W}_{t+1}^k), \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ &\alpha_t \in A_t^{\text{ad}}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

**VI.2.2. Conditions d'optimalité.** Nous reprenons le même principe que celui qu'on a suivi dans le chapitre IV : après avoir approximé la contrainte d'information par éléments finis et l'espérance de la fonction coût par Monte-Carlo, nous considérons ici les conditions d'optimalité du problème approximé. Nous nous proposons alors de spécifier la proposition IV.5 au cas de la commande optimale stochastique en temps discret. Nous donnons alors des conditions nécessaires d'optimalité du type Karush-Kuhn-Tucker du problème (VI.5).

Il suffit de constituer un Lagrangien et de le dériver. Soit  $\mathcal{L}^{\nu,N} : \mathbb{X}^N \times \mathbb{R}^\nu \times \mathbb{X}^N$  le Lagrangien du problème (VI.5) il s'écrit comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\nu,N}((\mathbf{X}_t^k)_{t=0,\dots,T}, (\alpha_t)_{t=0,\dots,T-1}, (\boldsymbol{\lambda}_t^k)_{t=0,\dots,T}) = \\ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t^k, \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t^k)\alpha_t, \mathbf{W}_{t+1}^k) + K(\mathbf{X}_T^k) + \right. \\ \left. \left\langle \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^k, f_t(\mathbf{X}_t^k, \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t^k)\alpha_t, \mathbf{W}_{t+1}^k) - \mathbf{X}_{t+1}^k \right\rangle_{\mathbb{X}_{t+1}} \right] \end{aligned}$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à  $\boldsymbol{\lambda}_t^k$  pour tout  $t = 0, \dots, T$  et tout  $k = 0, \dots, N$  nous donne une équation en marche avant sur les particules (scénario par scénario) de la variable aléatoire d'état (dynamique de l'état) :

$$\begin{aligned} \text{(VI.6)} \quad \mathbf{X}_0^k &= \mathbf{W}_0^k, \quad \forall k = 1, \dots, N, \\ \mathbf{X}_{t+1}^k &= f_t(\mathbf{X}_t^k, \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t^k)\alpha_t, \mathbf{W}_{t+1}^k), \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à  $\mathbf{X}_t^k$  pour tout  $t = 0, \dots, T$  et tout  $k = 0, \dots, N$ , nous donne une équation rétrograde sur les particules (scénario par scénario) de la variable aléatoire de l'état adjoint (dynamique de l'état adjoint) :

$$\begin{aligned} \text{(VI.7)} \quad \boldsymbol{\lambda}_T^k &= K(\mathbf{X}_T^k), \quad \forall k = 1, \dots, N, \\ \boldsymbol{\lambda}_t^k &= (L_t)'_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_t^k, \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t^k)\alpha_t, \mathbf{W}_{t+1}^k) + (f_t)'_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_t^k, \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t^k)\alpha_t, \mathbf{W}_{t+1}^k)\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^k, \\ &\quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = T-1, \dots, 0. \end{aligned}$$

La dérivée du Lagrangien par rapport à  $\alpha_{t,i}$  pour tout  $i = 0, \dots, \nu_t$  et tout  $t = 0, \dots, T-1$ , nous donne le gradient du problème :

$$\begin{aligned} \text{(VI.8)} \quad G_{t,i}(\alpha) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \psi_{t,i}^\top(\mathbf{Y}_t^k) \left[ (L_t)'_{\alpha}(\mathbf{X}_t^k, \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t^k)\alpha_t, \mathbf{W}_{t+1}^k) + (f_t)'_{\alpha}(\mathbf{X}_t^k, \Psi_t^{\nu_t}(\mathbf{Y}_t^k)\alpha_t, \mathbf{W}_{t+1}^k)\boldsymbol{\lambda}_{t+1}^k \right], \\ &\quad \forall i = 1, \dots, \nu_t, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

À l'optimum, le gradient à l'instant  $t$  (vecteur colonne constitué par l'empilement des  $G_{t,i}(\alpha)$  pour tous les  $i$ ) est noté  $G_t(\alpha)$  et est orthogonal à l'ensemble admissible :

$$\text{(VI.9)} \quad G_t(\alpha) = (G_{t,i}(\alpha))_{i=1,\dots,\nu_t} \in -\partial\delta_{A_t^{\text{ad}}}(\alpha_t), \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Les conditions d'optimalité du problème (VI.5) s'écrivent alors :

$$\text{(VI.10)} \quad \begin{cases} \text{Dynamique de l'état : (VI.6),} \\ \text{Dynamique de l'état adjoint : (VI.7),} \\ \text{Orthogonalité du gradient : (VI.9).} \end{cases}$$

**VI.2.3. Algorithme.** Dans la section précédente (section VI.2.2), nous avons écrit les conditions d'optimalité d'un problème de commande optimale stochastique en temps discret approximé par la méthode des éléments finis particuliers. Nous nous proposons alors d'utiliser les conditions (VI.10) pour écrire un algorithme de gradient projeté pour résoudre le problème (VI.5).

Il s'agit, à chaque itération de l'algorithme, d'intégrer scénario par scénario l'état en suivant la dynamique *forward* et l'état adjoint en suivant une dynamique *backward*. Nous approximations une espérance par Monte-Carlo pour obtenir le gradient du problème.

ALGORITHME VI.7 (PFE - Particle Finite Element).

- **Étape [0]** : soient  $\alpha_t^{[0]} \in \mathbb{R}^{\nu_t}$ ,  $\forall t = 0, \dots, T-1$  les vecteurs de coefficients initiaux,

– **Étape [1]** :

- (1) intégrer la dynamique de l'état (VI.6) à  $\alpha = \alpha^{[l]}$ ,
- (2) intégrer la dynamique de l'état adjoint (VI.7) à  $\alpha = \alpha^{[l]}$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$ ,
- (3) calculer le gradient par (VI.8) et effectuer un pas de gradient projeté (VI.9) à  $\alpha = \alpha^{[l]}$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$  et  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{[l]}$  :

$$\alpha_t^{[l+1]} = \Pi_{A_t^{\text{ad}}} \left( \alpha_t^{[l]} - \rho^{[l]} G_t(\alpha^{[l]}) \right), \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

– **Test d'arrêt.**

– **Étape [ $\infty$ ]** : le feedback optimal s'écrit :

$$\psi_t^{[\infty]} = \sum_{i=1}^{\nu_t} \alpha_{t,i}^{[\infty]} \psi_{t,i}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

◆

La commande optimale du problème (VI.5) s'écrit alors comme une fonction du passé des bruits. Par intégration *forward*, nous obtenons la variable aléatoire d'état optimale et par intégration *backward* nous obtenons la variable aléatoire d'état adjoint optimale. Nous calculons alors les particules engendrées par la variable aléatoire de commande optimale et celles d'état et état adjoint correspondantes à partir de l'algorithme VI.7 :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_t^{\text{PFE},k} &= \psi_t^{[\infty]}(\mathbf{Y}_t^k), \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \quad \forall k = 1, \dots, N, \\ \mathbf{X}_0^{\text{PFE},k} &= \mathbf{W}_0^k, \quad \forall k = 1, \dots, N, \\ \mathbf{X}_{t+1}^{\text{PFE},k} &= f_t \left( \mathbf{X}_t^{\text{PFE},k}, \mathbf{U}_t^{\text{PFE},k}, \mathbf{W}_{t+1}^k \right), \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \boldsymbol{\lambda}_T^{\text{PFE},k} &= K' \left( \mathbf{X}_T^{\text{PFE},k} \right), \quad \forall k = 1, \dots, N, \\ \boldsymbol{\lambda}_t^{\text{PFE},k} &= (L_t)_x^\top \left( \mathbf{X}_t^{\text{PFE},k}, \mathbf{U}_t^{\text{PFE},k}, \mathbf{W}_{t+1}^k \right) + (f_t)_x^\top \left( \mathbf{X}_t^{\text{PFE},k}, \mathbf{U}_t^{\text{PFE},k}, \mathbf{W}_{t+1}^k \right) \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^{\text{PFE},k}, \\ &\quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = T-1, \dots, 0. \end{aligned} \tag{VI.11}$$

**VI.2.4. Synthèse de feedback.** Le problème (VI.1) étant markovien, il existe aussi un feedback optimal par rapport à l'état (voir théorème II.18) noté  $\phi_t \in \mathbb{U}_t^{\mathbb{X}_t}$ , approximé par  $\phi_t^{\text{PFE}} \in \mathbb{U}_t^{\mathbb{X}_t}$ , tel que :

$$\mathbf{U}_t^{\text{PFE}} = \phi_t^{\text{PFE}}(\mathbf{X}_t^{\text{PFE}}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Soit, à chaque pas de temps  $t = 0, \dots, T-1$ ,  $\mathcal{R}_{\mathbb{U}_t}$  un opérateur d'interpolation-régression comme défini dans la remarque VI.1, tel que :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathbb{U}_t} : \mathbb{X}_t^N \times \mathbb{U}_t^N &\rightarrow \mathbb{U}_t^{\mathbb{X}_t}, \\ \left( \mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k \right)_{k=1, \dots, N} &\mapsto (\phi_t : \mathbb{X}_t \rightarrow \mathbb{U}_t). \end{aligned}$$

À chaque instant  $t = 0, \dots, T-1$ , nous notons la grille optimale par :

$$\left( \mathbf{x}_t^{\text{PFE}}, \mathbf{u}_t^{\text{PFE}} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \left( \mathbf{X}_t^{\text{PFE},k}, \mathbf{U}_t^{\text{PFE},k} \right)_{k=1, \dots, N}, \tag{VI.12}$$

et nous synthétisons le feedback par rapport à l'état  $\phi_t^{\text{PFE}} : \mathbb{X}_t \rightarrow \mathbb{U}_t$  en interpolant à chaque instant le nuage de points ainsi construit :

$$\phi_t^{\text{PFE}} = \mathcal{R}_{\mathbb{U}_t} \left( \mathbf{x}_t^{\text{PFE}}, \mathbf{u}_t^{\text{PFE}} \right), \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \tag{VI.13}$$

- REMARQUE VI.8. (1) Contrairement à la programmation dynamique stochastique, la grille (VI.12), permettant de synthétiser le feedback optimal, n'est pas donnée a priori mais elle est aléatoire et dépend de la commande optimale du système. Le feedback optimal ne sera donc pas défini sur tout l'espace d'état, mais seulement sur la partie où se concentrent les particules d'état optimales.
- (2) La minimisation est faite ici d'une manière globale : il s'agit bien d'une méthode variationnelle où la minimisation est faite au cours des différentes itérations de l'algorithme.
- (3) L'inconvénient majeur de cette méthode est que nous choisissons des fonctions de base dépendant de tous les bruits passés ( $\psi_{t,i} : \mathbb{Y}_t \rightarrow \mathbb{U}_t$  où  $\mathbb{Y}_t = \mathbb{W}_0 \times \cdots \times \mathbb{W}_t$ ) ; il faudra alors un nombre conséquent de fonctions pour approximer un espace dont la dimension augmente avec l'horizon temporel. Nous verrons dans les expériences numériques (voir la section VI.5.4) qui suivront comment nous avons contourné (de manière heuristique) ce problème.
- (4) Il est à noter que le feedback sur l'état, synthétisé par (VI.13), doit vérifier la contrainte d'admissibilité : il suffira de choisir l'opérateur d'interpolation-régression tel qu'il incorpore une projection sur l'ensemble admissible  $\Gamma_t^{\text{ad}}$ . Cette remarque sera appliquée dans tous les algorithmes qui suivront. ◆

### VI.3. Interprétation algébrique de la structure d'information

La méthode des éléments finis particuliers décrite dans la section VI.2 a abordé une optique A-O : nous avons approximé le problème en deux étapes (éléments finis et Monte-Carlo), nous avons ensuite écrit des conditions d'optimalité que nous avons résolues par un algorithme de gradient projeté.

Comme dans le chapitre II, nous allons nous intéresser dans cette section à l'optique O-A : nous allons commencer par écrire les conditions d'optimalité, pour nous intéresser ensuite à leurs approximations et à la résolution de ces conditions approximées.

Les deux premières versions des conditions d'optimalité présentées dans le chapitre II (( $PMS_1$ ) et ( $PMS_2$ )) sont des conditions qui font intervenir une projection du gradient du problème sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires mesurables par rapport à l'observation (ici tout le passé des bruits). Cette projection s'exprime sous la forme d'une espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire dont la dimension augmente avec le pas de temps considéré. S'agissant d'approximer cette espérance conditionnelle, plus la dimension du conditionnement est importante plus l'erreur quadratique moyenne générée par l'approximation est grande (voir le théorème III.24). Pour remédier à cet inconvénient, nous avons présenté les conditions d'optimalité ( $PMS_1^X$ ) et ( $PMS_2^X$ ) qui incorporent des espérances conditionnelles par rapport à l'état. Nous nous intéresserons dans la suite à l'approximation de ces dernières conditions.

**VI.3.1. Intégration de l'état adjoint non adapté.** Commençons par la version où l'on considère un état adjoint non-adapté comme une variable aléatoire et un gradient qui s'exprime sous la forme d'une espérance conditionnelle par rapport à l'état.

D'après le théorème II.14 si  $(\mathbf{U}_t)_{t=0,\dots,T-1}$  est solution de (VI.1) alors il existe  $(\mathbf{X}_t)_{t=0,\dots,T}$  et  $(\boldsymbol{\lambda}_t)_{t=0,\dots,T}$  vérifiant ( $PMS_1$ ). Nous vérifions alors une dynamique *forward* sur l'état, une dynamique *backward* sur l'état adjoint non adapté et d'après le théorème II.18 la projection du gradient (sur le sous-espace vectoriel des variables aléatoires mesurables par rapport à tout le passé des bruits) s'écrit, à l'optimum, comme une espérance conditionnelle par rapport à l'état instantané (puisque nous sommes dans un cadre markovien). Nous obtenons ainsi les conditions d'optimalité ( $PMS_1^X$ ) que nous nous proposons d'approximer.

VI.3.1.1. *Approximation.*

Pour tout  $t = 0, \dots, T - 1$ , nous approximations la variable aléatoire de commande par sa représentation sur une grille aléatoire de  $N$  éléments :  $\mathbf{u}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{U}_t^k)_{k=1, \dots, N}$ . Nous propageons alors l'état *en marche avant* scénario par scénario en utilisant sa dynamique, nous obtenons ainsi, à chaque instant, une grille aléatoire de l'espace d'état notée :  $\mathbf{x}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{X}_t^k)_{k=1, \dots, N}$ .

$$(VI.14) \quad \begin{aligned} \mathbf{X}_0^k &= \mathbf{W}_0^k, \quad \forall k = 1, \dots, N, \\ \mathbf{X}_{t+1}^k &= f_t \left( \mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^k \right), \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T - 1. \end{aligned}$$

L'état adjoint est, quant à lui, intégré *en marche rétrograde* en utilisant sa dynamique :

$$(VI.15) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}_T^k &= K' \left( \mathbf{X}_T^k \right), \quad \forall k = 1, \dots, N, \\ \boldsymbol{\lambda}_t^k &= (L_t)'_x \left( \mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^k \right) + (f_t)'_x \left( \mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^k \right) \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^k, \\ &\quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = T - 1, \dots, 0. \end{aligned}$$

Nous nous donnons, à chaque pas de temps  $t = 0, \dots, T - 1$  un noyau  $\mathcal{K}_t : \mathbb{X}_t \rightarrow \mathbb{R}$  et un paramètre de largeur de fenêtre  $h_t \in \mathbb{R}_+$ . Nous approximations alors l'espérance conditionnelle du gradient à l'optimum (comme elle apparaît dans  $PMS_1^X$ ) par une collection de particules  $(\mathbf{G}_t^k)_{k=1, \dots, N}$  en approximations l'espérance conditionnelle par la méthode des noyaux (voir chapitre III).

$$(VI.16) \quad \mathbf{G}_t^k = \frac{\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_t \left( \frac{\mathbf{X}_t^k - \mathbf{X}_t^j}{h_t} \right) \left( (L_t)'_u \left( \mathbf{X}_t^j, \mathbf{U}_t^j, \mathbf{W}_{t+1}^j \right) + (f_t)'_u \left( \mathbf{X}_t^j, \mathbf{U}_t^j, \mathbf{W}_{t+1}^j \right) \boldsymbol{\lambda}_{t+1}^j \right)}{\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_t \left( \frac{\mathbf{X}_t^k - \mathbf{X}_t^j}{h_t} \right)},$$

$$\forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T - 1.$$

REMARQUE VI.9. Nous supposons que le choix de la largeur de fenêtre  $h_t$  à chaque pas de temps  $t = 0, \dots, T - 1$  a été *correctement* effectué en fonction du nombre  $N$  de particules de Monte-Carlo de l'état (voir le théorème III.24). Nous reprendrons, dans la suite de ce chapitre, les mêmes considérations sur le choix de la taille optimale des fenêtres d'approximation.  $\blacklozenge$

VI.3.1.2. *Algorithme.*

Nous pouvons maintenant écrire un algorithme de descente pour résoudre le problème (VI.1). Il s'agit, à chaque itération de l'algorithme, d'intégrer scénario par scénario l'état en suivant la dynamique *forward* et l'état adjoint en suivant une dynamique *backward*. Nous calculons une approximation de la projection du gradient du problème (à l'optimum) comme une estimation d'une espérance conditionnelle par la méthode des noyaux.

ALGORITHME VI.10 (Heuristique H1 : Intégration de l'état adjoint non adapté et d'un gradient particulaire).

- **Étape [0]** : soient  $(\mathbf{u}_t^{[0]})_{t=0, \dots, T-1} = \left( \mathbf{U}_t^{[0], k} \right)_{\substack{t=0, \dots, T-1 \\ k=1, \dots, N}}$   $T \times N$  valeurs de commandes initiales,
- **Étape [1]** :
  - (1) intégrer la dynamique de l'état (VI.14) à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$ ,
  - (2) intégrer la dynamique de l'état adjoint (VI.15) à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$ ,

- (3) calculer le gradient par (VI.16) et effectuer un pas de gradient projeté à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$  et  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{[l]}$  :

$$\mathbf{U}_t^{[l+1],k} = \Pi_{\Gamma_t^{\text{ad}}} \left( \mathbf{U}_t^{[l],k} - \rho^{[l]} \mathbf{G}_t^{[l],k} \right), \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T-1,$$

– **Test d'arrêt.**

– **Étape  $[\infty]$  :**

- (1) construction des grilles :

$$(\mathbf{u}_t^{[\infty]})_{t=0, \dots, T-1} = \left( \mathbf{U}_t^{[\infty],k} \right)_{\substack{t=0, \dots, T-1 \\ k=1, \dots, N}},$$

$$(\mathbf{x}_t^{[\infty]})_{t=0, \dots, T-1} = \left( \mathbf{X}_t^{[\infty],k} \right)_{\substack{t=0, \dots, T-1 \\ k=1, \dots, N}},$$

- (2) synthèse de feedback

$$\phi_t^{\text{H1}}(x) = \mathcal{R}_{\mathbb{U}_t} \left( \mathbf{x}_t^{[\infty]}, \mathbf{u}_t^{[\infty]} \right) (x), \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

◆

REMARQUE VI.11.

- Les conditions d'optimalité ( $\text{PMS}_1^X$ ) n'incorporent l'expression de la projection d'un gradient qu'à l'optimum, ailleurs (au cours des itérations d'un algorithme de gradient projeté), la direction de descente ne sera donc pas égale au gradient. Il en sera de même pour l'algorithme (VI.10) d'approximation. Cependant, si un point d'équilibre est atteint il sera forcément la solution du problème approximé puisqu'à l'optimum le gradient coïncide bien avec la direction approximé qu'on a adopté.
- Pour montrer le théorème II.18 nous avons fait l'hypothèse que le feedback optimal est construit pour toute valeur possible de l'état (hypothèse (3) du même théorème). Cependant, en pratique (pour l'algorithme (VI.10)) nous n'avons à calculer ce feedback que sur la grille aléatoire obtenue par intégration de la dynamique de l'état : si l'état se concentre dans une zone donnée de l'espace nous synthétiserons le feedback uniquement dans cette zone (il est inutile de le faire ailleurs).
- Contrairement à la méthode des éléments finis particulières (algorithme VI.7), nous utilisons dans l'algorithme VI.10 une projection sur un sous-ensemble  $\Gamma_t^{\text{ad}} \subset \mathbb{U}_t$  et non sur un sous-ensemble  $A_t^{\text{ad}} \subset \mathbb{R}^{\nu_t}$  dont la détermination introduit des difficultés insurmontables sauf dans des cas bien particuliers (voir le lemme B.4).

◆

**VI.3.2. Intégration de l'état adjoint adapté.** D'après le théorème II.16, si  $(\mathbf{U}_t)_{t=0, \dots, T-1}$  est solution de (VI.1), alors il existe  $(\mathbf{X}_t)_{t=0, \dots, T}$  et  $(\boldsymbol{\Lambda}_t)_{t=0, \dots, T}$  vérifiant ( $\text{PMS}_2$ ). Nous vérifions alors une dynamique *forward* sur l'état et une dynamique *backward* sur l'état adjoint adapté aux bruits passés. D'après le théorème (II.21), l'état adjoint adapté et la projection du gradient s'écrivent à l'optimum comme des espérances conditionnelles par rapport à l'état instantané. Nous retrouvons ainsi les conditions d'optimalité ( $\text{PMS}_2^X$ ) que nous nous proposons maintenant d'approximer.

#### VI.3.2.1. Approximation.

Pour tout  $t = 0, \dots, T$ , nous approximations la variable aléatoire de commande par sa représentation sur une grille aléatoire de  $N$  éléments :  $\mathbf{u}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{U}_t^k)_{k=1, \dots, N}$ . Nous propageons alors l'état *forward* scénario par scénario en utilisant sa dynamique, nous obtenons ainsi une grille aléatoire  $\mathbf{x}_t$  de l'espace d'état (VI.14).

Nous nous donnons, à chaque pas de temps  $t = 0, \dots, T - 1$  un noyau  $\mathcal{K}_t : \mathbb{X}_t \rightarrow \mathbb{R}$  et un paramètre de largeur de fenêtre  $h_t \in \mathbb{R}_+$ . L'état adjoint adapté (voir  $(PMS_2^X)$ ) est intégré *backward* en utilisant sa dynamique et en approximant l'espérance conditionnelle par la méthode des noyaux (voir chapitre III) :

$$(VI.17) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\Lambda}_T^k &= K' \left( \mathbf{X}_T^k \right), \forall k = 1, \dots, N, \\ \boldsymbol{\Lambda}_t^k &= \frac{\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_t \left( \frac{\mathbf{X}_t^k - \mathbf{X}_t^j}{h_t} \right) \left( (L_t)_x^\top (\mathbf{X}_t^j, \mathbf{U}_t^j, \mathbf{W}_{t+1}^j) + (f_t)_x^\top (\mathbf{X}_t^j, \mathbf{U}_t^j, \mathbf{W}_{t+1}^j) \boldsymbol{\Lambda}_{t+1}^j \right)}{\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_t \left( \frac{\mathbf{X}_t^k - \mathbf{X}_t^j}{h_t} \right)}, \\ \forall k &= 1, \dots, N, \quad \forall t = T - 1, \dots, 0. \end{aligned}$$

La projection du gradient du problème est aussi approximée par la méthode des noyaux. Nous approximations alors le gradient par une collection de particules  $(\mathbf{G}_t^k)_{k=1, \dots, N}$  :

$$(VI.18) \quad \begin{aligned} \mathbf{G}_t^k &= \frac{\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_t \left( \frac{\mathbf{X}_t^k - \mathbf{X}_t^j}{h_t} \right) \left( (L_t)_u^\top (\mathbf{X}_t^j, \mathbf{U}_t^j, \mathbf{W}_{t+1}^j) + (f_t)_u^\top (\mathbf{X}_t^j, \mathbf{U}_t^j, \mathbf{W}_{t+1}^j) \boldsymbol{\Lambda}_{t+1}^j \right)}{\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_t \left( \frac{\mathbf{X}_t^k - \mathbf{X}_t^j}{h_t} \right)}, \\ \forall k &= 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T - 1. \end{aligned}$$

### VI.3.2.2. *Algorithme.*

Nous pouvons maintenant écrire un algorithme de gradient projeté pour résoudre le problème (VI.1). Il s'agit, à chaque itération de l'algorithme, d'intégrer scénario par scénario l'état en suivant la dynamique *forward* et l'état adjoint adapté en suivant une dynamique *backward*. Nous mélangeons les scénarios en approximant, par la méthode des noyaux, les espérances conditionnelles du gradient du problème et de l'état adjoint adapté.

ALGORITHME VI.12 (Heuristique H2 : Intégration de l'état adjoint adapté avec un gradient particulière).

– **Étape [0]** : soient  $(\mathbf{u}_t^{[0]})_{t=0, \dots, T-1} = \left( \mathbf{U}_t^{[0],k} \right)_{t=0, \dots, T-1, k=1, \dots, N}$   $T \times N$  valeurs de commandes initiales,

– **Étape [1]** :

- (1) intégrer la dynamique de l'état (VI.14) à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$ ,
- (2) intégrer la dynamique de l'état adjoint (VI.17) à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$ ,
- (3) calculer le gradient par (VI.18) et effectuer un pas de gradient projeté à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$ ,  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$  et  $\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{\Lambda}^{[l]}$ , :

$$\mathbf{U}_t^{[l+1],k} = \Pi_{\Gamma_t^{\text{ad}}} \left( \mathbf{U}_t^{[l],k} - \rho^{[l]} \mathbf{G}_t^{[l],k} \right), \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T - 1,$$

– **Test d'arrêt.**

– **Étape [ $\infty$ ]** :

- (1) construction des grilles :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t^{[\infty]})_{t=0, \dots, T-1} &= \left( \mathbf{U}_t^{[\infty],k} \right)_{t=0, \dots, T-1, k=1, \dots, N}, \\ (\mathbf{x}_t^{[\infty]})_{t=0, \dots, T-1} &= \left( \mathbf{X}_t^{[\infty],k} \right)_{t=0, \dots, T-1, k=1, \dots, N}, \end{aligned}$$

(2) synthèse de feedback

$$\phi_t^{\text{H2}}(x) = \mathcal{R}_{\mathbf{U}_t} \left( \mathbf{x}_t^{[\infty]}, \mathbf{u}_t^{[\infty]} \right) (x), \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

◆

REMARQUE VI.13.

- (1) Contrairement à l'algorithme VI.10, l'algorithme VI.12 utilise une approximation de la projection de l'état adjoint sur l'espace des variables aléatoires adaptées au passé des bruits.
- (2) Cependant, cette projection n'est pas calculée par rapport à tout le passé des bruits mais par rapport à l'état instantané. L'égalité entre les deux projections n'est réalisée qu'à l'optimum (voir le théorème II.21).

◆

#### VI.4. Interprétation fonctionnelle des variables aléatoires

La direction de descente incorporée dans les algorithmes VI.10 et VI.12 pour résoudre le problème (VI.1) ne correspond à l'expression d'un gradient qu'à l'optimum. C'est à dire que ces algorithmes ne correspondent pas a priori à des algorithmes de gradient projeté.

Dans la section II.7, nous avons montré que le problème (VI.1) pouvait s'écrire sous une forme fonctionnelle :

$$\begin{aligned} & \min_{V, \phi} \langle V_0, p_0 \rangle, \\ & \text{sous } V_T(\cdot) = K(\cdot), \\ \text{(VI.19)} \quad & V_t(\cdot) = \mathbb{E} \left[ L_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1}) \right] + A_t^{\phi_t} V_{t+1}(\cdot), \quad \forall t = T-1, \dots, 0, \\ & \phi_t(x) \in \Gamma_t^{\text{ad}}, \quad \forall x \in \mathbb{X}_t, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

où  $A_t^{\phi_t} V_{t+1}(\cdot) = \mathbb{E} \left[ V_{t+1}(f_t(\cdot, \phi_t(\cdot), \mathbf{W}_{t+1})) \right]$  et  $p_0$  est la densité de probabilité de  $\mathbf{X}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{W}_0$ .

D'après le théorème II.25, nous avons pu donner des conditions nécessaires d'optimalité pour le problème (VI.19) qui s'écrivent sous la forme  $(PMS_1^*)$  et qui font intervenir une dynamique sur les fonctions de Bellman  $(V_t(\cdot))_{t=0, \dots, T}$  et un gradient calculé à partir des dérivées de ces mêmes fonctions. D'un autre côté, le théorème II.31 nous donne l'interprétation de ces fonctions valeurs en terme de variables aléatoires. Nous avons alors qu'à l'optimum  $\boldsymbol{\Lambda}_t = \mathbb{E}[\boldsymbol{\lambda}_t \mid \mathbf{X}_t] = V_t'(\mathbf{X}_t)$ ,  $\forall t = 0, \dots, T$ . Nous utiliserons dans la suite cette écriture de l'état adjoint adapté (comme fonction de l'état) pour construire des heuristiques dans lesquelles nous essayerons de remplacer les approximations de l'espérance conditionnelle par des approximations d'espérance.

**VI.4.1. Espérance conditionnelle de l'état adjoint et espérance du gradient.** Nous considérons ici un algorithme de descente où nous intégrons l'état adjoint non adapté *particule par particule* et approximations son espérance conditionnelle pour trouver la dérivée de la fonction valeur, et nous approximations le gradient par un simple calcul d'espérance.

##### VI.4.1.1. Approximation.

Pour tout  $t = 0, \dots, T$ , nous approximations le feedback  $\phi_t(\cdot)$  par sa représentation sur une grille aléatoire de  $N$  éléments :  $\mathbf{u}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{U}_t^k)_{k=1, \dots, N}$ . Nous propageons alors l'état *forward* scénario par scénario en utilisant sa dynamique, nous obtenons ainsi une grille aléatoire  $\mathbf{x}_t$  de l'espace d'état (VI.14).



L'état adjoint non adapté est intégré *backward* en utilisant sa dynamique (VI.15).

Nous nous donnons, à chaque pas de temps  $t = 0, \dots, T-1$ , un noyau  $\mathcal{K}_t : \mathbb{X}_t \rightarrow \mathbb{R}$  et un paramètre de largeur de fenêtre  $h_t \in \mathbb{R}_+$ . Nous approximons alors la dérivée de la fonction valeur à l'optimum par la méthode des noyaux pour l'approximation de l'espérance conditionnelle ( $\Lambda_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\boldsymbol{\lambda}_t \mid \mathbf{X}_t = x]$ ).

Cette fonction est calculée sur la grille aléatoire  $\mathbf{x}_t, \quad \forall t = 0, \dots, T$ . Nous obtenons alors une collection de valeurs  $\mathbf{v}'_t = (\boldsymbol{\Lambda}_t^k)_{k=1, \dots, N}$ .

$$(VI.20) \quad \boldsymbol{\Lambda}_t^k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_t \left( \frac{\mathbf{x}_t^k - \mathbf{x}_t^j}{h_t} \right) \boldsymbol{\lambda}_t^j}{\sum_{j=1}^N \mathcal{K}_t \left( \frac{\mathbf{x}_t^k - \mathbf{x}_t^j}{h_t} \right)}, \quad \forall x \in \mathbb{X}_t, \quad \forall t = 0, \dots, T.$$

Pour évaluer cette fonction en des points hors de la grille nous appliquons au nuage de points, ainsi constitué, un opérateur d'interpolation-régression tel que :

$$(VI.21) \quad \widehat{\Lambda}_t(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R}_{\mathbb{X}_t}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}'_t)(x), \quad \forall t = 0, \dots, T.$$

Le gradient est alors approximé de la manière suivante :

$$(VI.22) \quad \mathbf{G}_t^k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[ (L_t)'_u(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^j) + (f_t)'_u(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^j) \widehat{\Lambda}_{t+1}^\top(f_t(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^j)) \right],$$

$\forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$

#### VI.4.1.2. Algorithmes.

Nous pouvons maintenant écrire un algorithme de descente pour résoudre le problème (VI.1). Il s'agit, à chaque itération de l'algorithme, d'intégrer scénario par scénario l'état en suivant la dynamique *forward* et l'état adjoint non adapté en suivant une dynamique *backward*. Nous mélangeons les scénarios en approximant la fonction  $\Lambda$  ((VI.20) et (VI.21)) et en calculant une direction de descente suivant la formule (VI.22).

ALGORITHME VI.14 (Heuristique H3 : Espérance conditionnelle de l'état adjoint non adapté et espérance du gradient).

- **Étape [0]** : soient  $(\mathbf{u}_t^{[0]})_{t=0, \dots, T-1} = (\mathbf{U}_t^{[0],k})_{\substack{t=0, \dots, T-1 \\ k=1, \dots, N}}$   $T \times N$  valeurs de commandes initiales,
- **Étape [1]** :

- (1) intégrer la dynamique de l'état (VI.14) à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$ ,
- (2) intégrer la dynamique de l'état adjoint (VI.15) à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$  à  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$ ,
- (3) approximer les fonctions  $\Lambda_t$  par (VI.20) et (VI.21) à  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$ ,  $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}^{[l]}$ ,
- (4) calculer le gradient par (VI.22) et effectuer un pas de gradient projeté à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$  :

$$\mathbf{U}_t^{[l+1],k} = \Pi_{\Gamma_t^{\text{ad}}} \left( \mathbf{U}_t^{[l],k} - \rho^{[l]} \mathbf{G}_t^{[l],k} \right), \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T-1,$$

- **Test d'arrêt.**
- **Étape [ $\infty$ ]** :

(1) construction des grilles :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}_t^{[\infty]})_{t=0, \dots, T-1} &= \left( \mathbf{U}_t^{[\infty], k} \right)_{\substack{t=0, \dots, T-1 \\ k=1, \dots, N}}, \\ (\mathbf{x}_t^{[\infty]})_{t=0, \dots, T-1} &= \left( \mathbf{X}_t^{[\infty], k} \right)_{\substack{t=0, \dots, T-1 \\ k=1, \dots, N}}, \end{aligned}$$

(2) synthèse de feedback

$$\phi_t^{\text{H3}}(x) = \mathcal{R}_{\mathbf{U}_t} \left( \mathbf{x}_t^{[\infty]}, \mathbf{u}_t^{[\infty]} \right) (x), \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

◆

REMARQUE VI.15.

- (1) Il s'agit dans l'expression (VI.22) d'une simple approximation de l'espérance en  $\mathbf{W}_t$  (par Monte-Carlo). L'expression de ce gradient n'inclut donc pas, d'une manière directe, l'approximation d'une espérance conditionnelle. Cependant, le calcul de la fonction  $\hat{\Lambda}$  inclut une interpolation qui peut être vue comme l'estimation d'une espérance conditionnelle.
- (2) L'expression non approximé du gradient donnée par ( $PMS_1^*$ ) incorpore l'expression d'une densité de l'état. Cette densité traduit le fait que nous calculons le gradient là où la densité de l'état n'est pas nulle, ailleurs rien ne sert de calculer le gradient. Dans l'algorithme VI.14 nous ne calculons pas cette densité; cependant, nous intégrons les particules par leurs dynamiques et nous calculons l'expression du gradient (fonctionnel) sur une grille constituée par ces particules. Nous n'explorerons donc jamais les endroits où la densité de l'état est nulle. Nous approximons donc à chaque itération un vecteur faisant un angle aigu avec le gradient réel.
- (3) Contrairement à l'algorithme VI.4 de programmation dynamique stochastique nous n'utilisons pas une grille fixée a priori pour évaluer le feedback mais une grille aléatoire qui varie à chaque itération de l'algorithme de descente en suivant les trajectoires de la commande optimale.

◆

**VI.4.2. Espérance de l'état adjoint et espérance du gradient.** Il s'agit dans cette section de propager un état adjoint fonctionnel. Nous pouvons alors penser à propager la fonction valeur (comme donnée dans ( $PMS_1^*$ )) et ensuite utiliser sa dérivée pour le calcul du gradient. Cependant, numériquement, une opération de dérivation est contraignante. Nous nous proposons alors d'établir une dynamique fonctionnelle directement sur la dérivée de la fonction valeur. Nous utiliserons pour cela les conditions d'optimalité ( $PMS^{**}$ ) qui donnent, d'après le théorème II.30, une dynamique rétrograde sur la dérivée de la fonction valeur. Nous propagerons ainsi une approximation de l'état adjoint par le calcul d'une simple espérance et nous calculerons le gradient de la même manière en approximant une espérance par Monte-Carlo.

#### VI.4.2.1. Approximation.

Pour tout  $t = 0, \dots, T$ , nous approximons le feedback  $\phi_t(\cdot)$  par sa représentation sur une grille aléatoire de  $N$  éléments :  $\mathbf{u}_t \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{U}_t^k)_{k=1, \dots, N}$ . Nous propageons alors l'état *forward* scénario par scénario en utilisant sa dynamique, nous obtenons ainsi une grille aléatoire  $\mathbf{x}_t$  de l'espace d'état (VI.14).

L'approximation, à l'optimum, de la dérivée de la fonction valeur se fait par une intégration *backward* sur la grille aléatoire  $(\mathbf{x}_t)_{t=0, \dots, T}$  afin d'obtenir une grille  $\mathbf{v}'_t = (\mathbf{\Lambda}_t^k)_{k=1, \dots, N}$ .

(VI.23)

$$\begin{aligned}\Lambda_T(\cdot) &= K'(\cdot) = \widehat{\Lambda}_T(\cdot), \\ \Lambda_t^k &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (L_t)'_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^j) + (f_t)'_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^j) \widehat{\Lambda}_{t+1}^{\top} (f_t(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^j)), \\ &\quad \forall t = T-1, \dots, 0, \\ \widehat{\Lambda}_t(x) &= \mathcal{R}_{\mathbb{X}_t}(\mathbf{x}_t, \mathbf{v}'_t)(x), \quad \forall x \in \mathbb{X}_t, \quad \forall t = T-1, \dots, 0.\end{aligned}$$

Le gradient est alors approximé de la manière suivante :

(VI.24)

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_t^k &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[ (L_t)'_{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^j) + (f_t)'_{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^j) \widehat{\Lambda}_{t+1}^{\top} (f_t(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{U}_t^k, \mathbf{W}_{t+1}^j)) \right], \\ \forall k &= 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.\end{aligned}$$

#### VI.4.2.2. *Algorithme.*

Nous pouvons maintenant écrire un algorithme de descente pour résoudre le problème (VI.1). Il s'agit, à chaque itération de l'algorithme, d'intégrer scénario par scénario l'état en suivant la dynamique *forward* et l'état adjoint fonctionnel suivant une dynamique *backward*. Nous calculons un gradient fonctionnel suivant la formule (VI.24) .

ALGORITHME VI.16 (Heuristique H4 : Espérance de l'état adjoint et espérance du gradient).

– **Étape [0]** : soient  $(\mathbf{u}_t^{[0]})_{t=0, \dots, T-1} = \left( \mathbf{U}_t^{[0],k} \right)_{\substack{t=0, \dots, T-1 \\ k=1, \dots, N}} T \times N$  valeurs de commandes initiales,

– **Étape [l]** :

- (1) intégrer la dynamique de l'état (VI.14) à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$ ,
- (2) intégrer la dynamique de l'état adjoint fonctionnel (VI.23) à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$  à  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$ ,
- (3) calculer le gradient par (VI.24) et effectuer un pas de gradient projeté à  $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{[l]}$  et  $\mathbf{X} = \mathbf{X}^{[l]}$  :

$$\mathbf{U}_t^{[l+1],k} = \Pi_{\Gamma_t^{\text{ad}}} \left( \mathbf{U}_t^{[l],k} - \rho^{[l]} \mathbf{G}_t^{[l],k} \right), \quad \forall k = 1, \dots, N, \quad \forall t = 0, \dots, T-1,$$

– **Test d'arrêt.**

– **Étape [ $\infty$ ]** :

- (1) construction des grilles :

$$(\mathbf{u}_t^{[\infty]})_{t=0, \dots, T-1} = \left( \mathbf{U}_t^{[\infty],k} \right)_{\substack{t=0, \dots, T-1 \\ k=1, \dots, N}},$$

$$(\mathbf{x}_t^{[\infty]})_{t=0, \dots, T-1} = \left( \mathbf{X}_t^{[\infty],k} \right)_{\substack{t=0, \dots, T-1 \\ k=1, \dots, N}},$$

- (2) synthèse de feedback

$$\phi_t^{\text{H4}}(x) = \mathcal{R}_{\mathbf{U}_t} \left( \mathbf{x}_t^{[\infty]}, \mathbf{u}_t^{[\infty]} \right) (x), \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

◆

REMARQUE VI.17.

- (1) Comme dans la remarque VI.15 l'expression du gradient (VI.24) n'incorpore qu'une simple approximation par Monte-Carlo d'une espérance. Cependant, l'approximation de l'espérance conditionnelle est *cachée* par les interpolations-régressions effectués dans les équations (VI.23).
- (2) D'une manière générale l'expression de la dérivée de la fonction de Bellman (donnée par (II.41)) incorpore des termes de dérivée du feedback qui disparaissent à l'optimum (voir le théorème II.30) ce qui pose des problèmes d'ordre numérique et théorique. C'est pour cela que nous utilisons les conditions d'optimalité (*PMS\*\**) qui incluent l'expression de la dérivée de la fonction de Bellman à l'optimum. Au cours des itérations de l'algorithme (hors de l'optimum) nous n'approximons donc pas l'expression exacte de cette dérivée.
- (3) Cette situation est sans doute (sur le plan numérique) la plus proche de celle qu'on rencontre aussi dans la programmation dynamique. La principale différence vient du fait que le min n'est pas effectué dans la propagation de l'équation *backward* (cas de la programmation dynamique) mais est effectué de façon itérative dans la boucle la plus extérieure de l'algorithme de *pseudo-gradient*.

◆

### VI.5. Problème test : gestion d'un barrage hydro-électrique

Nous considérons un modèle de barrage hydro-électrique dont nous voulons gérer la production. Nous modéliserons le problème sous la forme d'un problème de commande optimale stochastique à temps discret et nous nous proposons de le résoudre numériquement en utilisant les différentes heuristiques présentées plus haut.

**VI.5.1. Description du problème.** Le problème est posé en temps discret sur 24 heures avec des pas de temps d'une heure. L'indice  $t = 0, \dots, T$  (avec  $T = 24$ ) désigne, alors, les points de discrétisation en temps, sachant que  $t = 24$  correspond à la même heure que  $t = 0$ , mais 24 heures plus tard.

Nous considérons un barrage hydro-électrique dont le volume d'eau en stock à l'instant  $t = 0, \dots, T$  est une variable aléatoire noté  $\mathbf{X}_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{X}_t)$  (nous considérons un espace d'état  $\mathbb{X}_t = \mathbb{R}$ ,  $\forall t = 0, \dots, T - 1$ ). Ce stock constitue l'état du système. Il est soumis à des contraintes de bord : une quantité de stock de réserve notée  $\underline{x}$  est fixée, et nous notons  $\bar{x}$  le volume maximal d'eau contenu dans le barrage :

$$(VI.25) \quad \underline{x} \leq \mathbf{X}_t \leq \bar{x}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T.$$

Les apports d'eau dans le barrage pendant l'heure  $t$  ( $t = 1, \dots, T$ ) sont désignés par  $\mathbf{A}_t$  (variable aléatoire à valeurs scalaires). Il s'agit d'un processus stochastique dont les caractéristiques seront exposées plus loin. Le volume d'eau effectivement turbiné pendant la même heure  $t$  est désigné par  $\mathbf{E}_{t-1}$  (variable aléatoire à valeurs scalaires). Ce décalage d'indice est dû au fait que la décision de turbinage a été prise à l'instant  $t - 1$  avant d'observer les apports en eau ; nous sommes, alors, dans une optique de *décision-hasard*. Ce volume d'eau turbiné résulte de la commande  $\mathbf{U}_{t-1} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}; \mathbb{U}_{t-1})$  (nous considérons un espace de commande  $\mathbb{U}_t = \mathbb{R}$ ,  $\forall t = 0, \dots, T - 1$ ), cette commande est le volume turbiné *désiré* : si c'est possible,  $\mathbf{E}_t = \mathbf{U}_t$ . L'égalité est impossible si le volume d'eau résultant dans le réservoir tendrait à passer au dessous de  $\underline{x}$ . On a donc :

$$(VI.26) \quad \mathbf{E}_t = \min(\mathbf{U}_t, \mathbf{X}_t + \mathbf{A}_{t+1} - \underline{x}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T - 1.$$

Par ailleurs, lorsque le réservoir atteint son niveau maximal  $\bar{x}$ , il déborde (l'eau ainsi déversée ne produit pas d'électricité). Nous pouvons donc donner la dynamique de l'état  $\mathbf{X}$  du système :

$$(VI.27) \quad \mathbf{X}_{t+1} = \min(\mathbf{X}_t - \mathbf{E}_t + \mathbf{A}_{t+1}, \bar{x}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad t = 0, \dots, T - 1,$$

Nous sommes, en outre, confronté à des contraintes d'admissibilité déterministes ; la commande  $\mathbf{U}_t$  est soumise à des contraintes de borne :

$$(VI.28) \quad \underline{u} \leq \mathbf{U}_t \leq \bar{u}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Au volume d'eau  $\mathbf{E}_t$  effectivement turbiné est associée une production d'électricité  $\mathbf{P}_t = g(\mathbf{X}_t, \mathbf{E}_t)$  (pouvant dépendre de la hauteur d'eau dans le barrage, et donc du volume  $\mathbf{X}_t$ ). Cette production est destinée à répondre à chaque instant à une certaine demande à la période suivante qui sera notée  $\mathbf{D}_{t+1}$  : c'est un autre processus stochastique que l'on décrira plus loin. Si  $\mathbf{P}_t \geq \mathbf{D}_{t+1}$ , l'excès de production est revendu. Si  $\mathbf{P}_t \leq \mathbf{D}_{t+1}$ , le déficit de production doit être compensé par d'autres moyens (achat sur les marchés de l'électricité) ou bien il conduit à de la défaillance. Tout ceci se traduit par un coût  $c_t(\mathbf{D}_{t+1} - \mathbf{P}_t)$  où  $c_t$  est une fonction croissante et convexe. On précisera plus loin son expression.

Nous notons par  $(\mathbf{W}_t)_{t=0, \dots, T-1}$  le processus aléatoire de bruit tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0 &= \mathbf{A}_0 = \mathbf{X}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{W}_t &= (\mathbf{A}_t, \mathbf{D}_t), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Si nous supposons que les bruits sont observés directement, mais de façon causale, nous devons avoir que la commande est mesurable par rapport à tous les bruits passés. La structure d'information choisie correspond donc à une optique décision-hasard : la décision  $\mathbf{U}_t$  sur le turbiné désiré est prise d'abord, l'apport d'eau  $\mathbf{A}_{t+1}$  et la demande  $\mathbf{D}_{t+1}$  interviennent dans le même intervalle et ne sont observés qu'en suite, ce qui résulte finalement dans le turbiné  $\mathbf{E}_t$  et le coût à minimiser.

Finalement, on peut résumer le problème de la façon suivante, en introduisant une rémunération du stock final  $\mathbf{X}_T$  sous la forme d'une fonction convexe  $K(\mathbf{X}_T)$ , et en supposant la condition initiale  $\mathbf{X}_0$  donnée comme une variable aléatoire de loi connue :

$$(SP_{\text{barrage}}) \quad \begin{aligned} \min \quad & \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} c_t(\mathbf{D}_{t+1} - g(\mathbf{X}_t, \mathbf{E}_t)) + K(\mathbf{X}_T) \right] \\ & \text{sous les contraintes (VI.26), (VI.27), (VI.28),} \\ & \mathbf{U}_t \preceq (\mathbf{W}_0, \dots, \mathbf{W}_t), \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Ce problème s'écrit alors comme un problème de commande optimale stochastique en temps discret de la forme (VI.1). Pour cela, nous adopterons les notations suivantes :

–  $L_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction coût instantané tel que :

$$\begin{aligned} L_t &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ ((x, u, (a, d)) &\mapsto c_t(d - g(x, \min(u, x + a - \underline{x}))), \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

–  $f_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la dynamique du système tel que :

$$\begin{aligned} f_t &: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \\ ((x, u, (a, d)) &\mapsto \min(x - \min(u, x + a - \underline{x}) + a, \bar{x}), \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \end{aligned}$$

–  $\Gamma_t^{\text{ad}}$  l'ensemble admissible pour la commande à chaque instant  $t = 0, \dots, T-1$  tel que :

$$\Gamma_t^{\text{ad}} = [\underline{u}, \bar{u}], \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Avec ces notations le problème  $(SP_{\text{barrage}})$  s'écrit comme un problème de commande optimale du type (VI.1).

**VI.5.2. Données numériques et fonctionnelles.** La demande en électricité et les apports en eau sont des bruits blancs dont les trajectoires respectives suivent deux lois discrètes stationnaires centrées autour de trajectoires moyennes non stationnaires. Chacune de ces lois discrètes est constituée, à chaque instant  $t = 1, \dots, T = 24$ , de  $N_w = 11$  atomes (ce qui fait un total de  $11^{24}$  trajectoires possibles). Nous noterons, respectivement,  $d$  et  $a$  les trajectoires moyennes de la demande et des apports.

$$d = (0.40, 0.30, 0.25, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.90, 1.00, 0.80, \\ 0.70, 0.70, 0.80, 0.70, 0.60, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 1.00, \\ 0.90, 0.80, 0.70, 0.50).$$

$$a = (0.25, 0.50, 0.80, 0.90, 0.20, 0.30, 0.70, 0.50, 0.90, 0.40, \\ 0.70, 0.80, 0.70, 1.00, 0.70, 0.30, 0.40, 0.60, 0.80, 0.70, \\ 0.60, 0.80, 0.90, 1.00).$$

L'état initial, quant à lui,  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}_0$  suit une loi uniforme sur  $[\underline{x}, \bar{x}] \stackrel{\text{def}}{=} [0, 2]$ .

Nous simulons par Monte-Carlo un échantillon de  $N = 200$  particules de l'état initial ainsi que  $N$  trajectoires de demande et d'apports. Nous représentons dans les figures VI.1 et VI.2 les différentes trajectoires tirées par Monte-Carlo de  $(\mathbf{A}_t)_{t=1, \dots, T}$  et  $(\mathbf{D}_t)_{t=1, \dots, T}$ . Nous noterons les différentes trajectoires tirées de la manière suivante :

$$(\mathbf{X}_0^k, \mathbf{A}_1^k, \mathbf{D}_1^k, \dots, \mathbf{A}_T^k, \mathbf{D}_T^k)_{k=1, \dots, N}.$$

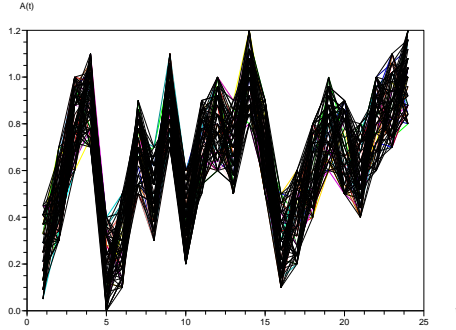


FIG. VI.1. Les apports en eau  $\mathbf{A}_t$

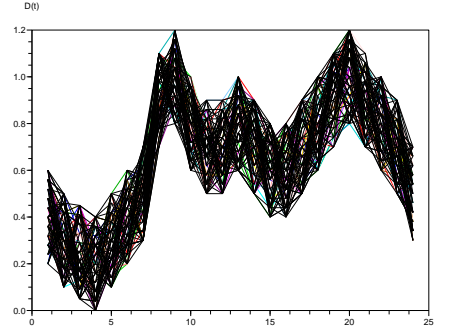


FIG. VI.2. La demande en électricité  $\mathbf{D}_t$

La commande est soumise à des contraintes de borne à chaque instant :  $[\underline{u}, \bar{u}] \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1]$ .

La fonction  $g$  donne la conversion entre le turbiné  $\mathbf{E}$  et la production électrique  $\mathbf{P}$  lorsque le barrage est au niveau  $\mathbf{X}$ . Pour représenter l'effet de hauteur de chute, on supposera une variation linéaire entre 0,5 et 1 par rapport à  $\mathbf{X}$  lorsque  $\mathbf{X}$  passe du niveau bas  $\underline{x}$  au niveau haut  $\bar{x}$ . On adopte donc l'expression :

$$(VI.29) \quad \mathbf{P}_t = g(\mathbf{X}_t, \mathbf{E}_t) = \mathbf{E}_t \frac{\mathbf{X}_t + \bar{x} - 2\underline{x}}{2(\bar{x} - \underline{x})}, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T.$$

Le coût instantané est modulé en temps par le tarif  $\tau$  donné par le vecteur

$$\tau = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, \\ 3, 3, 3, 2, 2, 2).$$

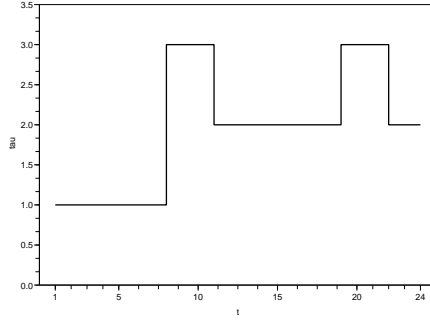


FIG. VI.3. Le prix de l'électricité  $\tau_t$

La fonction  $c_t$  est le produit de ce vecteur par une fonction de type exponentielle qui vaut 0 en 0 et qui est de pente 1 au point 0. On a finalement :

$$(VI.30) \quad c_t(y) = \tau_{t+1}(e^y - 1).$$

Le coût marginal d'une défaillance augmente donc très vite du côté positif, tandis que le gain marginal tend vite vers zéro pour un grand excès de production par rapport à la demande (côté  $y < 0$ ).

Le coût final est nul pour  $x = \bar{x}$  et il croît si l'état final n'atteint pas la valeur maximale  $\bar{x}$  (incitation à remplir le stock en fin de jeu) :

$$(VI.31) \quad K(x) = 12(x - \bar{x})^2.$$

**VI.5.3. Programmation dynamique stochastique : application.** Nous nous proposons d'appliquer l'algorithme VI.4 pour la résolution par programmation dynamique stochastique du problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ).

Nous nous donnons alors une grille fixe constituée de  $n = 200$  points de l'espace d'état  $[x, \bar{x}] \stackrel{\text{def}}{=} [0, 2]$  tel que :

$$x_i = x + \frac{i - 1}{n - 1}(\bar{x} - x), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Les opérateurs  $\mathcal{R}_{\mathbb{R}}$  et  $\mathcal{R}_{\mathbb{U}_t}$  seront choisis comme des opérateurs d'interpolation linéaire : pour calculer la valeur d'une fonction hors de la grille, nous moyennons les deux valeurs les plus proches encadrant ce point.

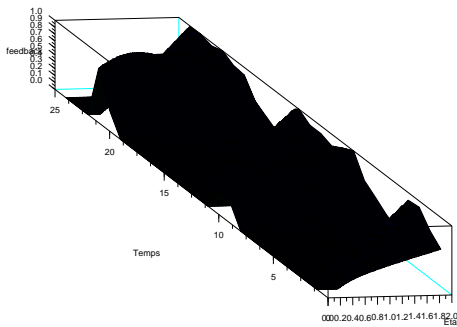


FIG. VI.4. Le feedback optimal  $\phi_t^{\text{SDP}}$

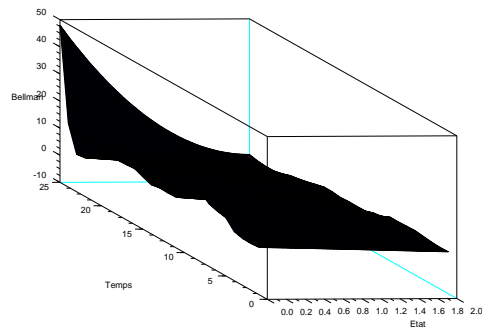


FIG. VI.5. La fonction de Bellman  $\hat{V}_t$

La figure VI.4 représente le feedback  $\phi_t^{\text{SDP}}$  à chaque instant  $t = 0, \dots, T-1$ , en chaque point  $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$  obtenu par l'algorithme VI.4 de programmation dynamique stochastique. La figure VI.5 représente la fonction de Bellman  $\widehat{V}_t$  à chaque instant  $t = 0, \dots, T$ , en chaque point  $x \in [\underline{x}, \bar{x}]$ .

Le coût optimal ainsi obtenu est de :

$$(VI.32) \quad c^{\text{SDP}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\widehat{V}_0(\mathbf{X}_0)] = \frac{1}{2} \int_0^2 \widehat{V}_0(x) dx = 6,48.$$

Nous utiliserons ces résultats comme référence à laquelle nous comparerons les résultats obtenues par les heuristiques précédemment décrites.

**VI.5.4. Éléments finis particuliers : application.** Nous nous proposons d'appliquer l'algorithme VI.7 de gradient projeté pour les éléments finis particuliers à la résolution numérique du problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ) décrit dans la section VI.5. Il s'agit alors de considérer des feedbacks par rapport au passé des bruits, de les approximer par éléments finis pour écrire ensuite des conditions d'optimalité du type KKT.

LEMME VI.18. *Si  $(\mathbf{U}_t)_{t=0, \dots, T-1}$  est solution de ( $SP_{\text{barrage}}$ ) et si nous sommes dans un cadre markovien (hypothèses II.17) alors :*

$$\mathbf{U}_t \preceq (\mathbf{X}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_t), \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

**Démonstration :**

- (1) Nous savons déjà, d'après le théorème II.18, que si  $(\mathbf{U}_t)_{t=0, \dots, T-1}$  est solution de ( $SP_{\text{barrage}}$ ) et que nous sommes dans un cadre markovien, alors la commande optimale est mesurable par rapport à l'état optimal :  $\mathbf{U}_t \preceq \mathbf{X}_t$ ,  $\forall t = 0, \dots, T-1$ .
- (2) L'expression (VI.27) de la dynamique de l'état ne dépendant que des apports en eau (et non de la demande en électricité), nous pouvons alors affirmer (par un raisonnement par récurrence) que l'état optimal est mesurable par rapports aux apports passés :  $\mathbf{X}_t \preceq (\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_t)$ . Comme  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}_0$  et d'après (1), nous avons le résultat recherché. ■

Étant donné que nous sommes dans un cadre markovien, d'après le lemme VI.18 nous pouvons, sans perte d'optimalité, considérer des feedbacks par rapports aux apports passés. Nous noterons dans la suite de cette section pour tous les pas de temps  $t = 0, \dots, T-1$ ,  $\mathbf{Y}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_t$  une variable aléatoire à l'instant  $t$  telle que :

$$(VI.33) \quad \begin{aligned} \mathbf{Y}_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}_0, \\ \mathbf{Y}_t &\stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{X}_0, \mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_t), \quad \forall t = 1, \dots, T. \end{aligned}$$

Pour résoudre le problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ) par la méthode des éléments finis particuliers, nous sommes confronté à trois problèmes :

- la non différentiabilité de la fonction coût et de la dynamique; elle est induite par la présence des opérateurs min,
- le choix des fonctions de bases afin de simplifier la détermination de l'ensemble admissible  $A^{\text{ad}}$ ,
- la dimension croissante de l'espace des observations  $\mathbb{Y}_t$ .



VI.5.4.1. *Traitement de la non différentiabilité.*

Les équations de la commande (VI.26) et de la dynamique (VI.27) sont approximées par un lissage de l'opérateur min. Nous introduisons un paramètre de lissage  $c$  (qui sera pris égal à  $0,01$ ) :

$$(VI.34) \quad \min(x, y) \simeq m(x, y) = \begin{cases} y & \text{si } y \leq x - c, \\ \frac{x+y}{2} - \frac{(x-y)^2}{4c} - \frac{c}{4} & \text{si } x - c \leq y \leq x + c, \\ x & \text{si } y \geq x + c, \end{cases}$$

VI.5.4.2. *Choix des fonctions de base.*

Le problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ) possède des contraintes de bornes :

$$\mathbf{U}_t(\omega) \in \Gamma_t^{\text{ad}} = [\underline{u}, \bar{u}] = [0, 1], \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Nous choisissons les fonctions de bases de sorte que les contraintes du problème approximé (VI.5) admettent aussi des contraintes de borne (voir le lemme B.4) :

$$\alpha_t \in A_t^{\text{ad}} = [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]^{\nu_t}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

Soient  $m$  fonctions de base dites primaires et notées  $(\theta_i)_{i=1, \dots, m}$  telles que  $\theta_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ . Nous choisissons ces fonctions de telle sorte à ce qu'elles vérifient les propriétés suivantes :

- $\forall i = 1, \dots, m, \quad \theta_i(\cdot) \in [0, 1]$ ,
- $\sum_{i=1}^m \theta_i(\cdot) \leq 1$
- $\exists m$  points  $(y_j)_{j=1, \dots, m}$  tel que  $\theta_i(y_j) = \delta_{i,j}$ <sup>1</sup>

Nous choisissons, pour nos traitements numériques, la base *primaire* présentée dans la figure VI.6 et qui vérifie les conditions précédemment citées.

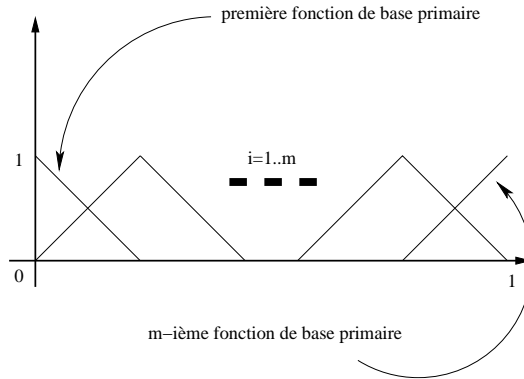


FIG. VI.6. Fonctions de base primaires

À chaque instant  $t = 0, \dots, T-1$ , nous choisissons des fonctions de base sur l'espace d'observation  $\mathbb{Y}_t$  de dimension  $d_t$ . Pour construire des fonctions de base sur un espace de dimension  $d_t$ , nous utiliserons des produits croisés de  $m_t$  fonctions de base primaires :

$$(VI.35) \quad \forall I = (i_1, \dots, i_{d_t}) \in \{1, \dots, m_t\}^{d_t}, \quad \psi_I(y) = \prod_{k=1}^{d_t} \theta_{i_k}(y^{(k)}),$$

<sup>1</sup> $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  et 1 sinon.

où  $y^{(k)}$  est le  $k$ -ième composante du vecteur  $y \in \mathbb{R}^{d_t}$ . Nous construisons ainsi  $\nu_t = m_t^{d_t}$  fonctions de base vérifiant les hypothèses du lemme B.4 :

$$\begin{aligned} & - \forall i = 1, \dots, m_t, \quad \theta_i(\cdot) \in [0, 1] \text{ alors } \forall I = (i_1, \dots, i_{d_t}) \in \{1, \dots, m_t\}^{d_t}, \psi_I(\cdot) \in [0, 1], \\ & - \sum_I \psi_I(y) = \sum_I \prod_{k=1}^{d_t} \theta_{i_k}(y^{(k)}) = \sum_{i_1=1}^{m_t} \dots \sum_{i_{m_t}=1}^{m_t} \theta_{i_1}(y^{(1)}) \dots \theta_{i_{m_t}}(y^{(m_t)}) = \\ & \quad (\sum_{i_1=1}^{m_t} \theta_{i_1}(y^{(1)})) \dots (\sum_{i_{m_t}=1}^{m_t} \theta_{i_{m_t}}(y^{(m_t)})) = 1, \\ & - \text{notons } x_j \in \mathbb{R}^{m_t} \text{ tel que } x_j^{(k)} = y_j^{(k)} \text{ si } j = k \text{ et } 0 \text{ sinon, alors } \psi_I(x_j) = \prod_{k=1}^{d_t} \theta_{i_k}(y_j^{(i_k)}) = \\ & \quad \prod_{k=1}^{d_t} \delta_{i_k, j}. \end{aligned}$$

D'après le lemme B.4 nous avons alors que la contrainte d'admissibilité du problème approximé (VI.5) s'écrit :

$$\alpha_t \in A_t^{\text{ad}} = [\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]^{\nu_t} \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1]^{\nu_t}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.$$

#### VI.5.4.3. Traitement de la dimension de l'observation.

Pour le problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ), la variable d'observation à chaque pas de temps peut être notée comme une variable aléatoire  $\mathbf{Y}_t : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}_t$  (VI.33) où la dimension de  $\mathbb{Y}_t$  ( $\dim(\mathbb{Y}_t) = \mathbb{R}^{t+1}$ ) augmente à chaque pas de temps (voir le lemme VI.18).

Pour la méthode des éléments finis particulières, nous devons choisir, à chaque pas de temps  $t = 0, \dots, T-1$ , une famille de fonctions de base :  $(\psi_{t,i})_{i=1, \dots, \nu_t}$  tel que  $\psi_{t,i} \in \mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\mathbb{Y}_t, \mathbb{B}(\mathbb{Y}_t), \mathbb{P}_{\mathbf{Y}_t}; \mathbb{U}_t)$ . Or plus la dimension de l'espace  $\mathbb{Y}_t$  est grande, plus il nous faut de fonctions de base pour *bien* approximer l'espace  $\mathcal{H}$ .

Si  $m$  fonctions primaires sont choisies, à chaque pas de temps,  $\nu_t = m^{t+1}$  fonctions de base doivent être prises en compte. Le problème en boucle ouverte approximé par éléments finis aura alors pour dimension :

$$\nu = \sum_{t=0}^{T-1} \nu_t = \sum_{t=0}^{T-1} m^{t+1} = \frac{m(m^T - 1)}{m - 1}.$$

Pour réduire cette dimension, nous introduisons un paramètre de *mémoire du système* :  $\hat{T} \leq T$ . La variable aléatoire d'observation sera alors réduite aux  $\hat{T}$  dernières observations du système :

$$\begin{aligned} & \mathbf{Y}_0 = \mathbf{X}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \text{(VI.36)} \quad & \mathbf{Y}_t \simeq (\mathbf{X}_0, \mathbf{A}_1 \dots, \mathbf{A}_t), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 1, \dots, \hat{T} - 1, \\ & \mathbf{Y}_t \simeq (\mathbf{A}_{t-\hat{T}+1}, \dots, \mathbf{A}_t), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = \hat{T}, \dots, T-1. \end{aligned}$$

À chaque pas de temps  $t = 0, \dots, \hat{T} - 1$ , nous aurons à traiter  $\nu_t = m^{t+1}$  fonctions de base et pour chaque pas de temps  $t = \hat{T}, \dots, T-1$  nous aurons à traiter  $\nu_t = m^{\hat{T}}$  fonctions de base. Le problème en boucle ouverte approximé par éléments finis aura alors pour dimension :

$$\nu = \sum_{t=0}^{T-1} \nu_t = \sum_{t=0}^{\hat{T}-1} m^{t+1} + \sum_{t=\hat{T}}^{T-1} m^{\hat{T}} = \frac{m(m^{\hat{T}} - 1)}{m - 1} + m^{\hat{T}}(T - \hat{T}).$$

#### VI.5.4.4. Résultats numériques.

Nous appliquons l'algorithme VI.7 au problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ), en approximant la variable aléatoire d'observation par le choix d'un paramètre de mémoire  $\hat{T}$  (VI.36) et en choisissant les fonctions de base comme expliqué précédemment (VI.35).

La figure VI.7 représente la variation du coût optimal calculé par l'algorithme VI.7 pour différentes valeurs du paramètre de mémoire  $\hat{T}$  et du nombre  $m$  de fonctions de base primaires.

$$(VI.37) \quad c^{\text{PFE}} = \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t^{\text{PFE}}, \mathbf{U}_t^{\text{PFE}}, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T^{\text{PFE}}) \right].$$

REMARQUE VI.19. Ce coût optimal est calculé à partir de la *vraie espérance* en utilisant l'équation *backward* de la programmation dynamique et non pas à partir des 200 particules tirées au départ :

$$\begin{aligned} V_T(x) &= K(x), \\ V_t(x) &= \mathbb{E} \left[ L_t(x, \mathbf{U}_t^{\text{PFE}}, \mathbf{W}_{t+1}) + V_{t+1}(f_t(x, \mathbf{U}_t^{\text{PFE}}, \mathbf{W}_{t+1})) \right], \quad \forall x \in \mathbb{X}_t, \\ c^{\text{PFE}} &= \mathbb{E} \left[ V_0(\mathbf{X}_0^{\text{PFE}}) \right] = \frac{1}{2} \int_0^2 V_0(x) dx. \end{aligned}$$

◆

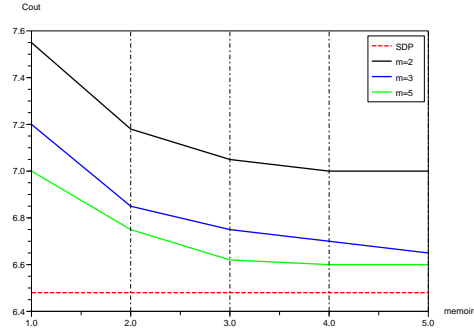


FIG. VI.7. Coût optimal pour  $m = 2, 3, 5$

Nous remarquons que les courbes représentant les variations du coût optimal  $c^{\text{PFE}}$  (VI.37) en fonction du paramètre de mémoire  $\hat{T}$  décroissent vers le coût optimal obtenu par programmation dynamique stochastique  $c^{\text{SDP}}$  (VI.32).

Plus le paramètre de mémoire augmente, plus nous nous rappelons du passé du système et plus nous nous rapprochons de la *vraie observation*. Cependant, un biais subsiste, dû au choix, fait a priori, des fonctions de base qui nous met à une certaine distance de la solution par programmation dynamique. Pour faire diminuer ce biais nous ne pouvons que faire augmenter le nombre de fonctions de base primaires.

Pour  $\hat{T} = 4$  et  $m = 5$ , nous représentons les trajectoires optimales de l'état (figure VI.9), de la commande (figure VI.8) et de l'état adjoint (figure VI.10) obtenues à partir de l'algorithme VI.7 et décrites par les formules (VI.11).

Nous remarquons que les trajectoires de l'état se concentrent dans certaines régions de l'espace. De ce point de vue, la programmation dynamique stochastique qui utilise une discrétisation a priori de tout l'espace d'état effectue des traitements inutiles en calculant le feedback là où les particules d'état ne vont jamais. Nous pouvons alors réfléchir à des méthodes permettant une discrétisation *dynamique* qui dépend de la commande et qui ne s'intéresse qu'aux régions *significatives* de l'espace d'état.

Pour les mêmes valeurs des paramètres  $\hat{T} = 4$  et  $m = 5$ , les figures VI.11, VI.12 et VI.13 représentent les nuages de points optimaux  $(\mathbf{X}_t^{\text{EFP},k}, \mathbf{U}_t^{\text{EFP},k})_{k=1,\dots,N}$  pour différents pas de

temps ( $t = 0, 13, 24$ ). Nous avons représenté sur les mêmes figures les courbes du feedback optimal par rapport à l'état obtenues par programmation dynamique (VI.4)  $\phi_t^{\text{SDP}}$ .

Nous considérons l'opérateur de régression  $\mathcal{R}$  inspiré de la méthode d'approximation de l'espérance conditionnelle par noyaux pour approximer le feedback sur l'état et le comparer ainsi au feedback obtenue par programmation dynamique :

$$\begin{aligned}\phi_t^{\text{PFE}}(x) &= \mathcal{R} \left( (\mathbf{X}_t^k)_{k=1, \dots, N}, (U_t^k)_{k=1, \dots, N} \right) (x), \\ &= \frac{\sum_{k=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{\mathbf{X}_t^k - x}{h} \right) U_t^k}{\sum_{k=1}^N \mathcal{K} \left( \frac{\mathbf{X}_t^k - x}{h} \right)}.\end{aligned}$$

Nous représentons ainsi sur les mêmes figures, le feedback sur l'état obtenu par interpolation-régression à partir de l'algorithme (VI.7)  $\phi_t^{\text{EFP}}$ .

Au-dessous des courbes de feedbacks sont représentés les histogrammes approximant la répartition des particules d'état  $\mathbf{X}_t^k$ . Nous remarquons bien que la variable aléatoire d'état se concentre dans une partie de l'espace. Faire des estimations de la loi de feedback en dehors de ces régions est alors impossible, mais on peut considérer que c'est pratiquement inutile car une commande optimale du système ne doit pas conduire la variable d'état à se trouver dans les régions ignorées par les particules.

Ces résultats obtenus par l'algorithme VI.7 sont assez voisins de ceux obtenus par programmation dynamique stochastique. En effet, le nuage de points obtenu par éléments finis particuliers est centré sur les feedbacks obtenus par programmation dynamique.

REMARQUE VI.20.

- (1) En approximant par un paramètre de mémoire l'information disponible à chaque instant, nous avons introduit un paramètre d'erreur supplémentaire. Nous pouvons alors penser à utiliser directement un feedback en l'état (réduisant ainsi la dimension de l'espace d'observation). Cependant, appliquer directement la méthode des éléments finis particuliers avec des feedbacks par rapport à l'état introduira des non convexités supplémentaires au problème.
- (2) Les méthodes basées sur des scénarios arborescents (voir [7]) permettent d'approximer à la fois l'espérance de la fonction coût et la structure d'information et ce, en quantifiant les bruits du système et en les représentant sur un arbre. Cependant ces méthodes souffrent d'un inconvénient majeur : au début de l'arbre il n'y a que très peu de particules (calculer avec une grande précision) alors qu'à la fin de l'arbre, il n'y a plus de futur possible ce qui fait augmenter considérablement la dispersion du nuage de points (nous avons représenté sur les figures VI.47, VI.48 et VI.49 les nuages de points état/commande)<sup>2</sup>. De ce point de vue, les résultats obtenus par l'algorithme variationnel VI.7 et représentés par les figures VI.11, VI.12 et VI.13 sont nettement meilleurs que ceux obtenus par les techniques arborescentes.

◆

### VI.5.5. Interprétation particulière des variables aléatoires : application.

#### VI.5.5.1. Intégration de l'état adjoint non adapté.

Nous nous proposons d'appliquer l'algorithme de descente VI.10 à la résolution numérique du problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ) décrit dans la section VI.5.

Nous posons  $U_t^{\text{H1}} = \phi_t^{\text{H1}}(\mathbf{X}_t^{\text{H1}})$  la commande optimale produite par l'algorithme de descente (VI.10) tel que :

<sup>2</sup>Ces résultats ont été obtenus par l'application d'une méthode de quantification des bruits appliquée au même problème de barrage (voir [7]).

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_0^{\text{H1}} &= \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{U}_t^{\text{H1}} &= \phi_t^{\text{H1}}(\mathbf{X}_t^{\text{H1}}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \mathbf{X}_{t+1}^{\text{H1}} &= f_t(\mathbf{X}_t^{\text{H1}}, \mathbf{U}_t^{\text{H1}}, \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.\end{aligned}$$

Le coût optimal généré par cet algorithme est évalué à :

$$c^{\text{H1}} = \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t^{\text{H1}}, \mathbf{U}_t^{\text{H1}}, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T^{\text{H1}}) \right] = 6,90.$$

Pour  $N = 200$  nous représentons les trajectoires optimales de l'état (figure VI.15), de la commande (figure VI.14) et de l'état adjoint (figure VI.16) obtenues à partir de l'algorithme VI.10.

Nous représentons de la même manière que dans la section VI.5.4.4 les feedbacks optimaux à différents pas de temps (les figures VI.17, VI.18 et VI.19).

REMARQUE VI.21.

- (1) La grille utilisée à chaque itération de l'algorithme VI.10 est adaptée à la commande. Elle évolue au cours du temps en suivant la dynamique du système et au cours des différentes itérations de l'algorithme en suivant la mise à jour des particules de commande. Elle couvre, donc, automatiquement les régions de l'espace d'état qui nous intéressent.
- (2) Nous utilisons pour cet algorithme la version non adapté des variables aléatoire d'état adjoint ce qui induit une certaine dispersion des trajectoires (figure VI.16).

◆

#### VI.5.5.2. Intégration de l'état adjoint adapté.

Nous nous proposons d'appliquer l'algorithme VI.12 de descente à la résolution numérique du problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ) décrit dans la section VI.5.

Nous posons  $\mathbf{U}_t^{\text{H2}} = \phi_t^{\text{H2}}(\mathbf{X}_t^{\text{H2}})$  la commande optimale produite par l'algorithme de descente (VI.12) tel que :

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_0^{\text{H2}} &= \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{U}_t^{\text{H2}} &= \phi_t^{\text{H2}}(\mathbf{X}_t^{\text{H2}}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \mathbf{X}_{t+1}^{\text{H2}} &= f_t(\mathbf{X}_t^{\text{H2}}, \mathbf{U}_t^{\text{H2}}, \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1.\end{aligned}$$

Le coût optimal généré par cet algorithme est évalué à :

$$c^{\text{H2}} = \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t^{\text{H2}}, \mathbf{U}_t^{\text{H2}}, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T^{\text{H2}}) \right] = 6,60.$$

Nous représentons, comme dans les sections précédentes, les trajectoires optimales de l'état (figure VI.21), de la commande (figure VI.20) et de l'état adjoint (figure VI.22) obtenues à partir de l'algorithme VI.12.

Nous représentons de la même manière les feedbacks optimaux à différents pas de temps (les figures VI.23, VI.24 et VI.25).

REMARQUE VI.22.

- (1) Contrairement à l'algorithme (VI.10) (voir la figure VI.16), nous remarquons une concentration des trajectoires de l'état adjoint (voir la figure VI.22). En effet, comme nous l'avons souligné dans le théorème II.18, l'état adjoint  $(\boldsymbol{\lambda}_t)_{t=0, \dots, T}$  est mesurable

par rapport à tous le futur des bruits, il est donc non adapté (non mesurable par rapport à l'état instantané), alors que l'état adjoint adapté  $(\mathbf{\Lambda}_t)_{t=0,\dots,T}$  profite d'une opération d'espérance conditionnelle permettant le lissage de ses trajectoires.

- (2) Pour l'algorithme VI.10, nous avons utilisé toutes les trajectoires pour calculer la valeur du gradient en un point particulier, par contre l'état adjoint non adapté était intégré scénario par scénario sans aucune opération de mélange. Il semblerait alors que l'opération de mélange supplémentaire effectuée au cours de l'algorithme VI.12 pour calculer l'état adjoint adapté en un point en utilisant tous les scénarios améliore les résultats en diminuant la dispersion des nuages de points optimaux.
- (3) Nous avons représenté sur les figures VI.26, VI.27 et VI.28 à différents instants les nuages de points état/état adjoint adapté  $(\mathbf{X}_t^k, \mathbf{\Lambda}_t^k)$ , leur interpolation  $\widehat{\Lambda}_t^{H2}$  ainsi que la dérivée  $\widehat{V}_t'$  de la fonction valeur obtenue par l'algorithme VI.4 de programmation dynamique stochastique. Nous confirmons ainsi les résultats du théorème II.31, selon lesquels l'état adjoint adapté optimal  $\mathbf{\Lambda}_t$  est égal à la valeur prise par la dérivée de la fonction de Bellman à l'état optimal  $V_t'(\mathbf{X}_t)$ . En effet, les nuages de points ainsi construits se rapproches des courbes de  $\widehat{V}_t'$ .

◆

### VI.5.6. Interprétation fonctionnelle des variables aléatoires : application.

#### VI.5.6.1. Espérance conditionnelle de l'état adjoint et espérance du gradient.

Nous nous proposons d'appliquer l'algorithme VI.14 de gradient projeté à la résolution numérique du problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ) décrit dans la section VI.5.

Nous posons  $\mathbf{U}_t^{\text{H3}} = \phi_t^{\text{H3}}(\mathbf{X}_t^{\text{H3}})$  la commande optimale produite par l'algorithme de gradient projeté (VI.14) :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0^{\text{H3}} &= \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{U}_t^{\text{H3}} &= \phi_t^{\text{H3}}(\mathbf{X}_t^{\text{H3}}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \mathbf{X}_{t+1}^{\text{H3}} &= f_t(\mathbf{X}_t^{\text{H3}}, \mathbf{U}_t^{\text{H3}}, \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Le coût optimal généré par cet algorithme s'évalue à :

$$c^{\text{H3}} = \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t^{\text{H3}}, \mathbf{U}_t^{\text{H3}}, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T^{\text{H3}}) \right] = 6,53.$$

Nous représentons les trajectoires optimales de l'état (figure VI.30), de la commande (figure VI.29) et de l'état adjoint (figure VI.31) obtenues à partir de l'algorithme VI.14.

Nous représentons aussi les feedbacks optimaux à différents pas de temps (les figures VI.32, VI.33 et VI.34).

#### REMARQUE VI.23.

- (1) Comme nous l'avons souligné dans le chapitre III, l'estimation d'une espérance conditionnelle par la méthode des noyaux engendre une erreur quadratique moyenne de l'ordre de  $N^{-\frac{4}{5}}$  (pour un conditionnement scalaire). Au cours de l'algorithme VI.14 nous n'approximons plus l'espérance conditionnelle du gradient mais nous approximons une espérance d'un gradient fonctionnel (introduisant une erreur quadratique moyenne de l'ordre de  $N^{-1}$ ) ce qui améliore sensiblement les résultats numériques.
- (2) Cependant, les opérations d'espérance conditionnelle n'ont pas disparu, mais ils sont cachées dans le fait que nous effectuons des interpolations-régressions pour passer des représentations fonctionnelles aux représentations particulières.

- (3) Nous avons représenté sur les figures VI.35, VI.36 et VI.37 à différents instants les nuages de points état/état adjoint adapté  $(\mathbf{X}_t^k, \widehat{\Lambda}_t^{H3}(\mathbf{X}_t^k))$ , les résultats ne sont pas aussi *bons* que ceux obtenus par l'algorithme VI.12; en effet, l'approximation de la dérivé de la fonction de Bellman  $\widehat{V}_t'$  est obtenu en intégrant scénario par scénario un état adjoint non adapté et en calculant a posteriori une espérance conditionnelle et non pas en calculant à chaque pas de temps une espérance conditionnelle. L'accumulation des opérateurs d'espérance conditionnelle semble améliorer les résultats en lissant les nuages de points.

◆

### VI.5.6.2. Espérance de l'état adjoint et espérance du gradient.

Nous nous proposons d'appliquer l'algorithme VI.16 de gradient projeté à la résolution numérique du problème ( $SP_{\text{barrage}}$ ) décrit dans la section VI.5.

Nous posons  $\mathbf{U}_t^{\text{H4}} = \phi_t^{\text{H4}}(\mathbf{X}_t^{\text{H4}})$  la commande optimale produite par l'algorithme de gradient projeté (VI.16) :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0^{\text{H4}} &= \mathbf{W}_0, \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \\ \mathbf{U}_t^{\text{H4}} &= \phi_t^{\text{H4}}(\mathbf{X}_t^{\text{H4}}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1, \\ \mathbf{X}_{t+1}^{\text{H4}} &= f_t(\mathbf{X}_t^{\text{H4}}, \mathbf{U}_t^{\text{H4}}, \mathbf{W}_{t+1}), \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}, \quad \forall t = 0, \dots, T-1. \end{aligned}$$

Le coût optimal généré par cet algorithme s'évalue à :

$$c^{\text{H4}} = \mathbb{E} \left[ \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\mathbf{X}_t^{\text{H4}}, \mathbf{U}_t^{\text{H4}}, \mathbf{W}_{t+1}) + K(\mathbf{X}_T^{\text{H4}}) \right] = 6,51.$$

Nous représentons comme dans les sections précédentes les trajectoires optimales de l'état (figure VI.39), de la commande (figure VI.38) et de l'état adjoint (figure VI.40) obtenues à partir de l'algorithme VI.14 ainsi que les feedbacks optimaux à différents pas de temps (les figures VI.41, VI.42 et VI.43).

#### REMARQUE VI.24.

- (1) Nous avons représenté sur les figures VI.44, VI.45 et VI.46 à différents instants les nuages de points état/état adjoint adapté  $(\mathbf{X}_t^k, \widehat{\Lambda}_t^{\text{H4}}(\mathbf{X}_t^k))$ , les résultats sont plus satisfaisants que ceux obtenus par les précédents algorithmes. En effet l'état adjoint adapté est calculer ici en utilisant une simple espérance, les espérance conditionnelles étant cachées dans les interpolations effectuées.
- (2) C'est la situation la plus proche de la programmation dynamique stochastique avec l'avantage que l'opération de minimisation est faite au cours des itérations (et non à chaque itération) permettant ainsi d'utiliser des grilles aléatoires adaptées à la répartition de la variable aléatoire d'état.

◆

## VI.6. Conclusion

Nous nous sommes intéressé, dans ce chapitre, à la résolution numérique de problèmes de commande optimale stochastique en temps discret.

Deux optiques de résolution peuvent être suivies : une approche A-O où nous avons utilisé une technique d'éléments finis particuliers, et une optique O-A où nous avons utilisé les différentes interprétations et versions des conditions d'optimalité établies dans le chapitre II.

Nous nous sommes trouvé face à deux choix possibles.

- Considérer une structure d’information modélisée par la mesurabilité par rapport à tout le passé du bruit. Nous pouvons alors construire un algorithme de gradient projeté pour la résolution du problème. Cependant, la dimension croissante de l’espace d’observation crée un inconvénient numérique majeur.
- Considérer une structure d’information modélisée par la mesurabilité par rapport à l’état instantané. Nous construisons alors un algorithme de descente dont la direction de descente ne représente pas un gradient d’un problème approximé.

Il est à noter que la première approche reste possible indépendamment de toute hypothèse sur la structure d’information, alors que la deuxième n’est possible que si l’on considère des problèmes markoviens où il n’y a pas de perte d’optimalité à remplacer une contrainte de mesurabilité par rapport à tout le passé des bruits par une mesurabilité par rapport à l’état instantané.

Les algorithmes et heuristiques qui ont été proposés présentent un avantage majeur, par comparaison à la programmation dynamique stochastique. En effet, ils incorporent une discrétisation adaptative de l’espace d’état permettant ainsi d’utiliser la totalité des points de discrétisation dans les régions où se concentre les particules d’état et donc où la mesure de probabilité de l’état instantané n’est pas nulle.

La principale contribution apportée par ces différentes heuristiques réside dans le fait que nous utilisons le même nombre de particules pour tous les pas de temps garantissant ainsi une dispersion *constante* des particules du début jusqu’à la fin de l’horizon. Ceci présente un avantage majeur par rapport aux méthodes de quantification des bruits par arbres de scénarios. En effet ces dernières sont caractérisées par une augmentation de la dispersion des particules au cours des pas de temps :

- (1) au début de l’arbre nous avons un nombre réduit de particule avec une faible dispersion (voir les figures de feedback [VI.47](#) et de coût marginal [VI.50](#)),
- (2) à la fin de l’arbre nous avons un grand nombre de points avec une énorme variance (voir les figures de feedback [VI.49](#) et de coût marginal [VI.52](#)).

Nous avons, ainsi, appliqué ces différentes méthodes à un problème de gestion de production d’un barrage hydro-électrique. Nous pouvons alors conclure que les interprétations fonctionnelles du gradient et de l’état adjoint, utilisées dans l’algorithme [VI.16](#), donnent les résultats les plus performants en donnant le coût optimal le plus proche du coût optimal donné par la programmation dynamique stochastique et les feedbacks optimaux qui collent à ceux de la programmation dynamique.

Les travaux futurs s’intéresseront à l’application de ces algorithmes et de ces résultats numériques aux grands systèmes, en faisant augmenter la dimension de l’espace d’état. Il faudra alors comparer l’application directe de ces heuristiques avec une utilisation d’algorithmes de décomposition-coordination et avec la programmation dynamique stochastique.



Heuristique	<i>SDP</i>	<i>EFP</i>	<i>H1</i>	<i>H2</i>	<i>H3</i>	<i>H4</i>
Propagation de l'état	×	scénario par scénario	scénario par scénario	scénario par scénario	scénario par scénario	scénario par scénario
Propagation de l'état adjoint	×	scénario par scénario	non adapté, scénario par scénario	adapté, espérance conditionnelle	non adapté, scénario par scénario	fonctionnel par espérance
Calcul du gradient	×	espérance	espérance conditionnelle	espérance conditionnelle	fonctionnel par espérance	fonctionnel par espérance
Grille sur l'espace d'état	a priori	×	adaptative	adaptative	adaptative	adaptative
Coût optimal	6.48	6.61	6.90	6.60	6.53	6.51

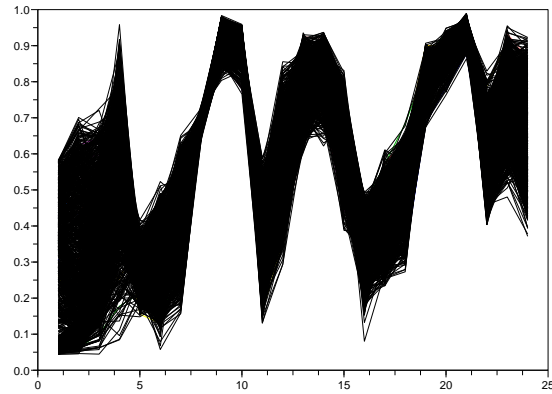


FIG. VI.8. Trajectoires de la commande optimale  $U_t^{\text{EFP},k}$

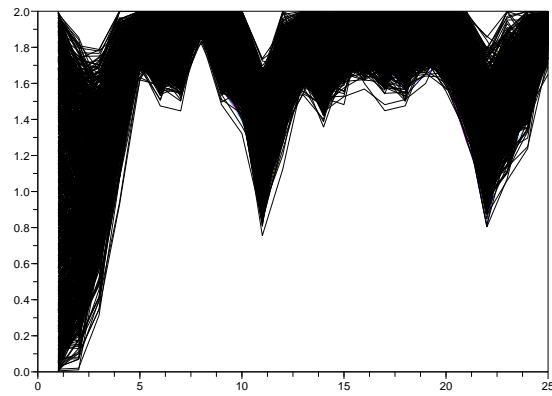


FIG. VI.9. Trajectoires de l'état optimal  $X_t^{\text{EFP},k}$

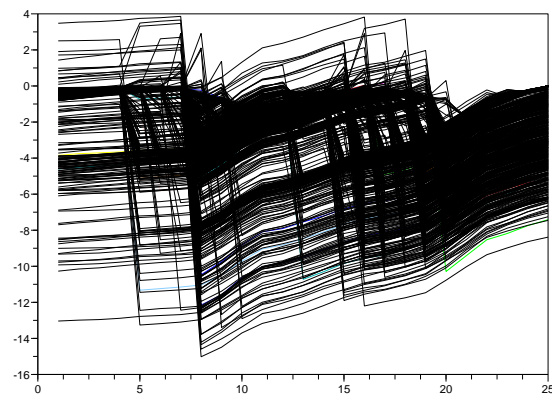


FIG. VI.10. Trajectoires de l'état adjoint optimal  $\lambda_t^{\text{EFP},k}$

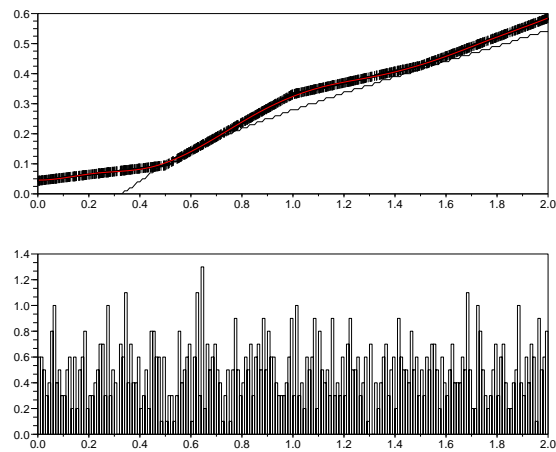


FIG. VI.11. Feedback optimal pour  $t = 0 : \phi_0^{\text{PFE}}$

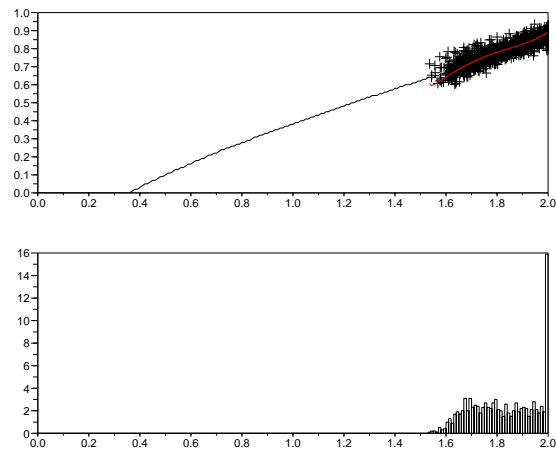


FIG. VI.12. Feedback optimal pour  $t = 12 : \phi_{12}^{\text{PFE}}$

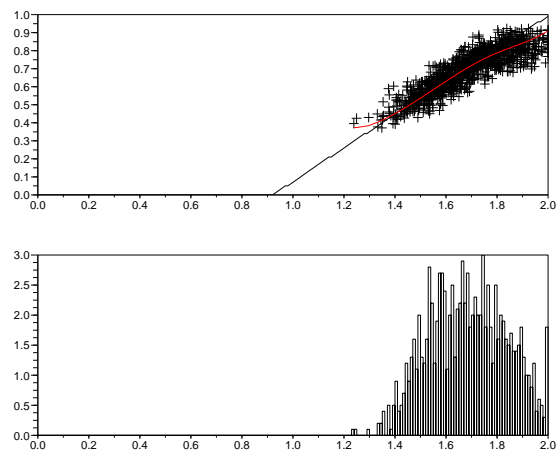


FIG. VI.13. Feedback optimal pour  $t = 23 : \phi_{23}^{\text{PFE}}$

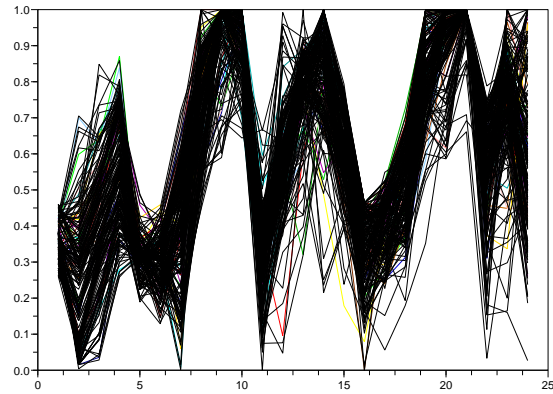


FIG. VI.14. Trajectoires de la commande optimale  $U_t^{H1,k}$

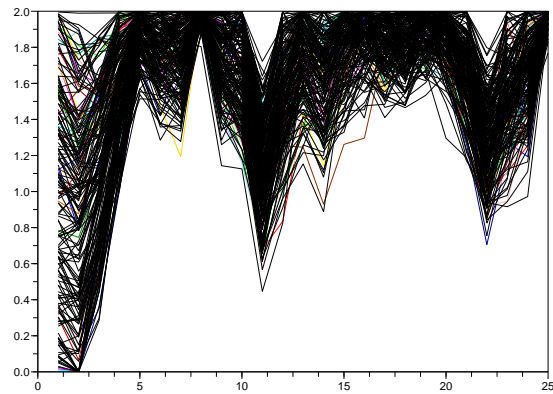


FIG. VI.15. Trajectoires de l'état optimal  $X_t^{H1,k}$

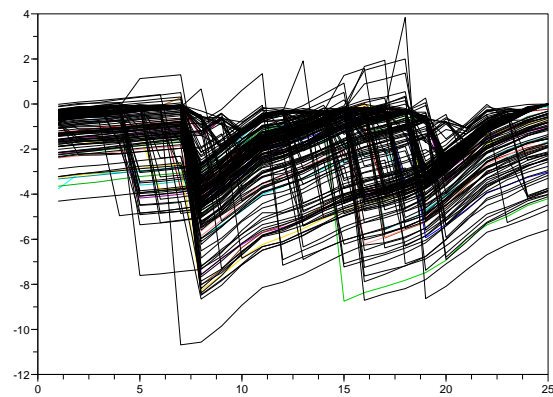


FIG. VI.16. Trajectoires de l'état adjoint optimal  $\lambda_t^{H1,k}$

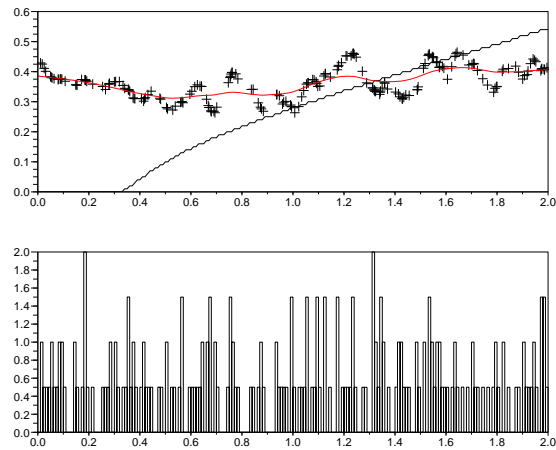


FIG. VI.17. Feedback optimal pour  $t = 0 : \phi_0^{\text{H1}}$

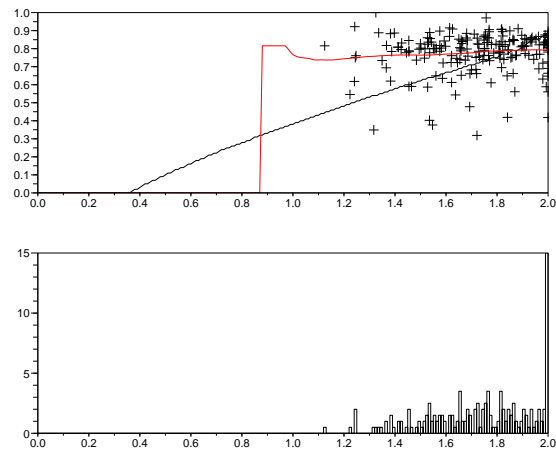


FIG. VI.18. Feedback optimal pour  $t = 12 : \phi_{12}^{\text{H1}}$

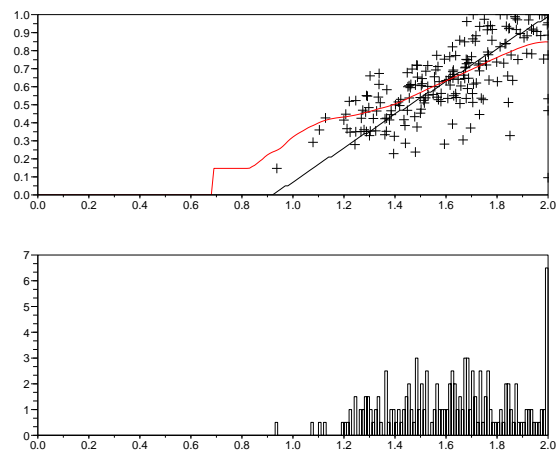


FIG. VI.19. Feedback optimal pour  $t = 23 : \phi_{23}^{\text{H1}}$

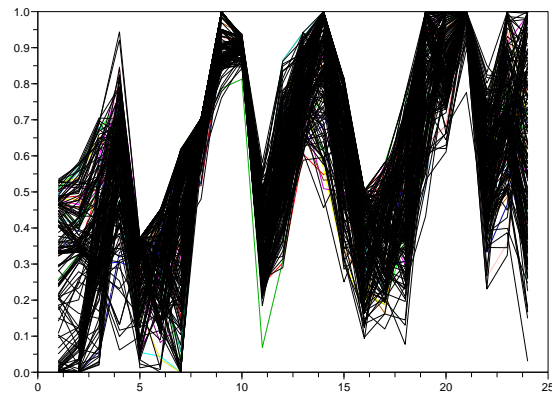


FIG. VI.20. Trajectoires de la commande optimale  $U_t^{H2,k}$

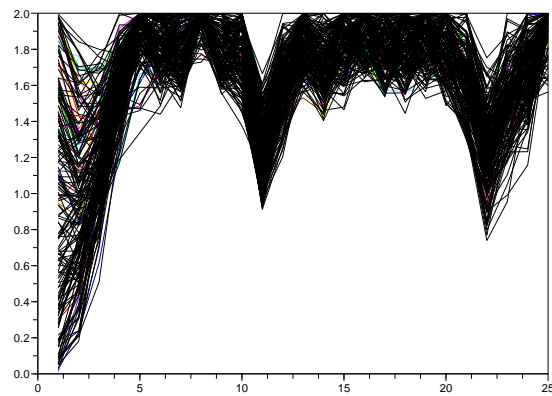


FIG. VI.21. Trajectoires de l'état optimal  $X_t^{H2,k}$

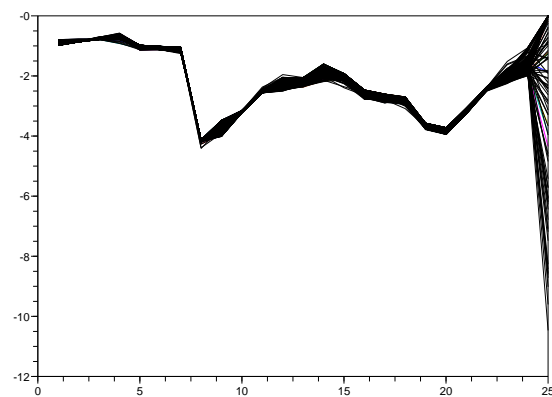


FIG. VI.22. Trajectoires de l'état adjoint optimal  $\Lambda_t^{H2,k}$

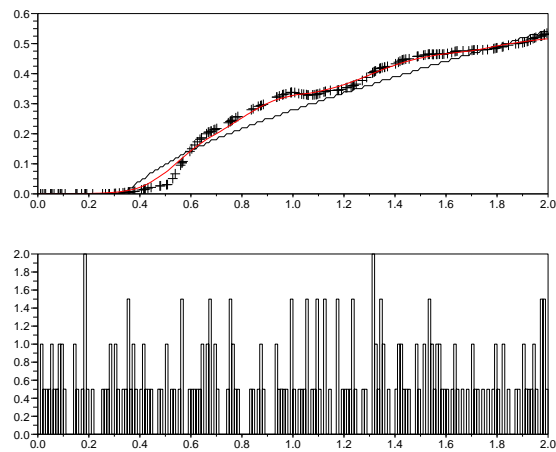


FIG. VI.23. Feedback optimal pour  $t = 0 : \phi_0^{H^2}$

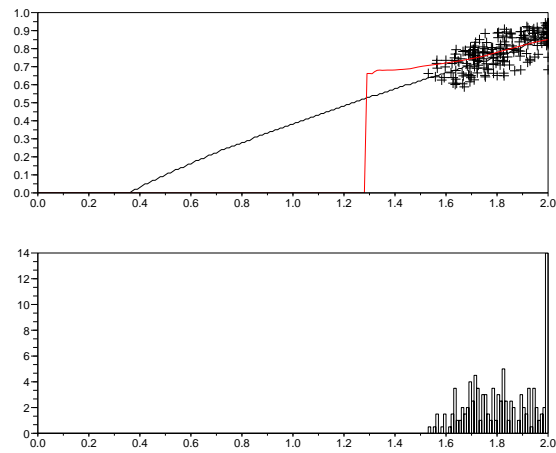


FIG. VI.24. Feedback optimal pour  $t = 12 : \phi_{12}^{H^2}$

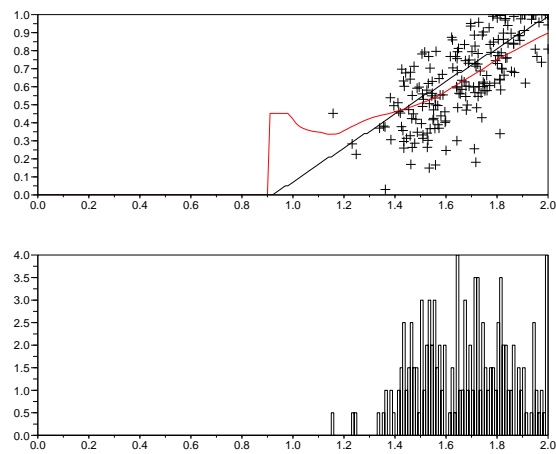


FIG. VI.25. Feedback optimal pour  $t = 23 : \phi_{23}^{H^2}$

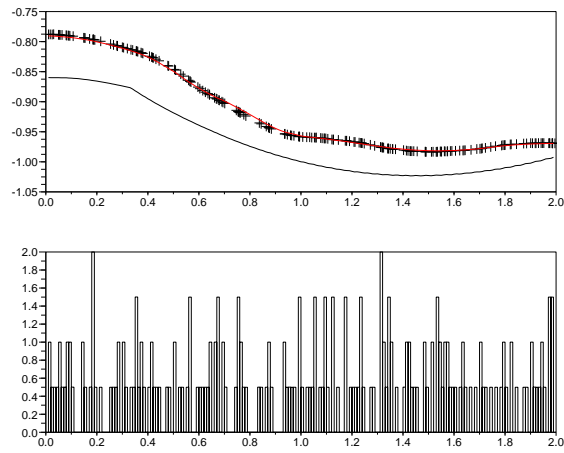


FIG. VI.26. État adjoint adapté optimal pour  $t = 0$  :  $\hat{\Lambda}_0^{H^2}$

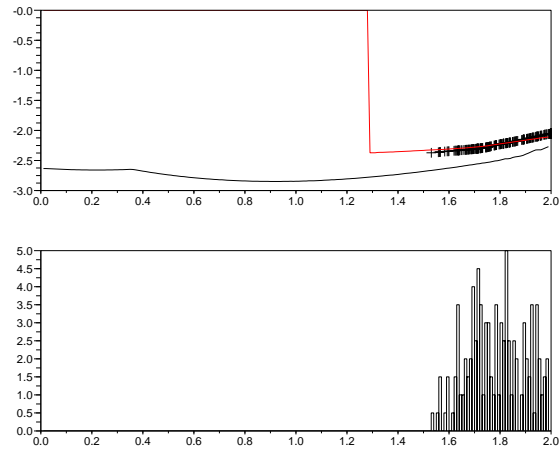


FIG. VI.27. État adjoint adapté optimal pour  $t = 12$  :  $\hat{\Lambda}_{12}^{H^2}$

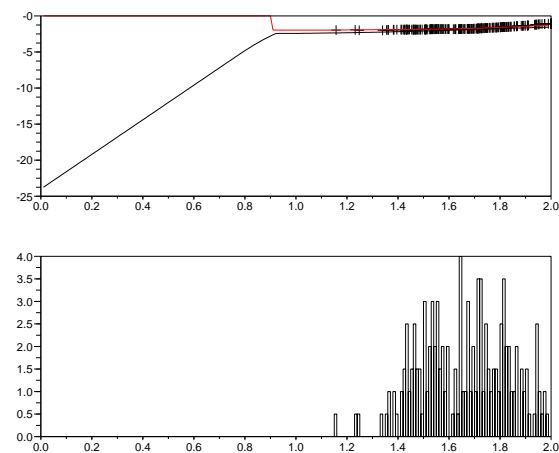


FIG. VI.28. État adjoint adapté optimal pour  $t = 23$  :  $\hat{\Lambda}_{23}^{H^2}$



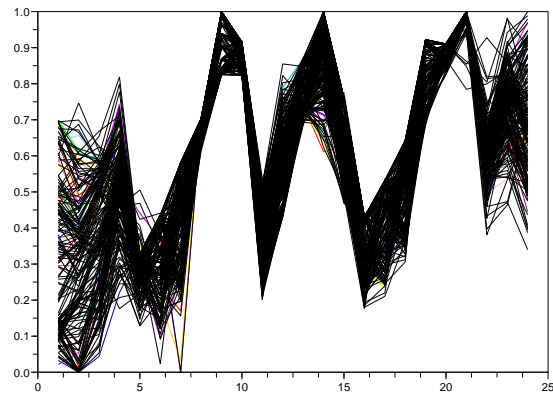


FIG. VI.29. Trajectoires de la commande optimale  $U_t^{H3,k}$

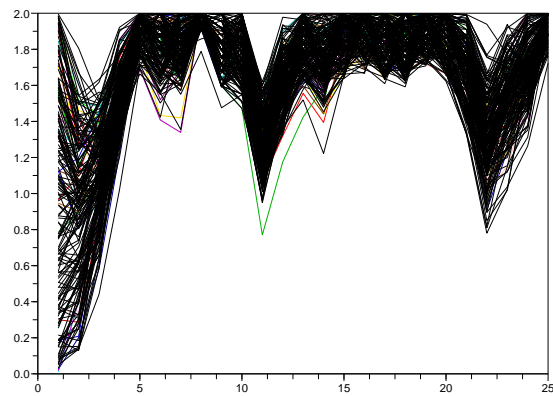


FIG. VI.30. Trajectoires de l'état optimal  $X_t^{H3,k}$

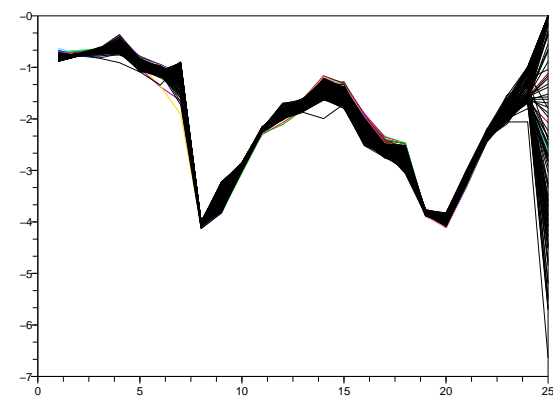


FIG. VI.31. Trajectoires de l'état adjoint optimal  $\Lambda_t^{H3,k}$

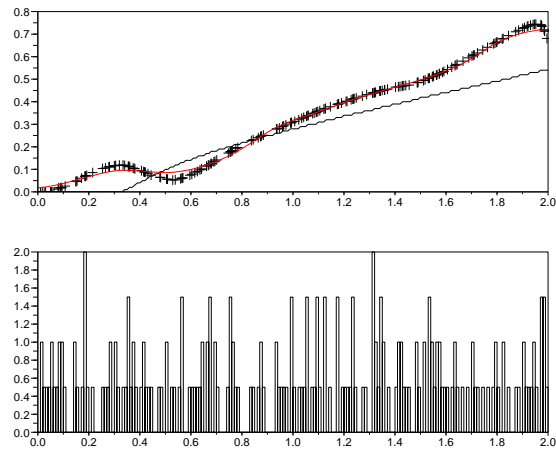


FIG. VI.32. Feedback optimal pour  
 $t = 0 : \phi_0^{H3}$

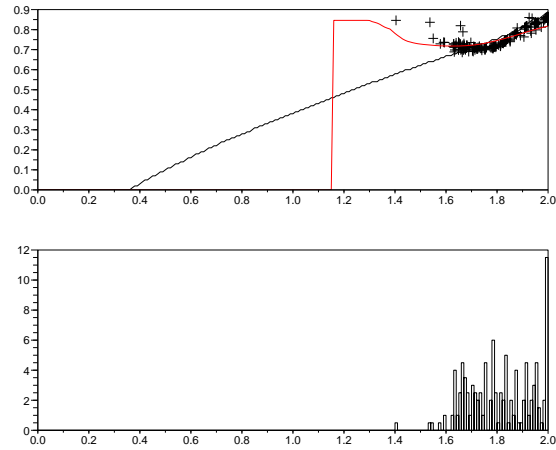


FIG. VI.33. Feedback optimal pour  
 $t = 12 : \phi_{12}^{H3}$

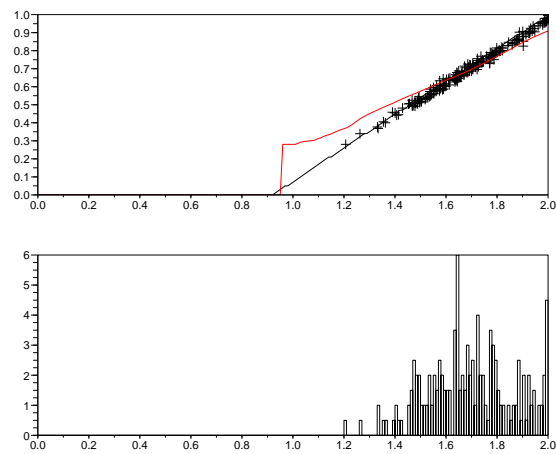


FIG. VI.34. Feedback optimal pour  
 $t = 23 : \phi_{23}^{H3}$

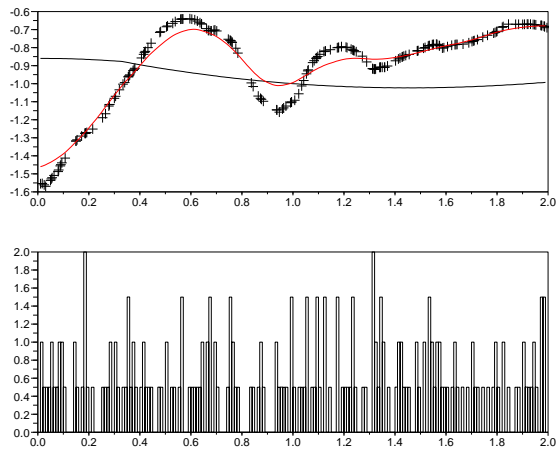


FIG. VI.35. État adjoint adapté optimal pour  $t = 0 : \hat{\Lambda}_0^{H^3}$

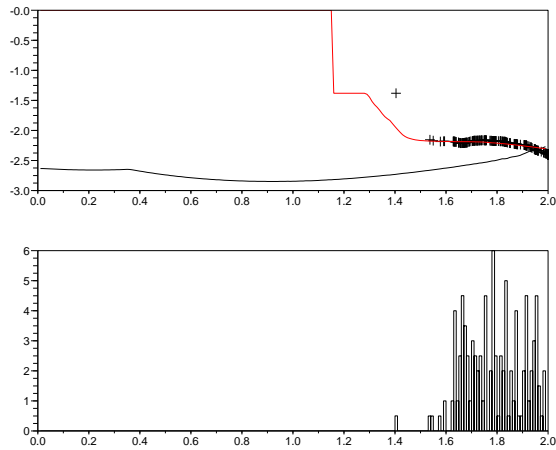


FIG. VI.36. État adjoint adapté optimal pour  $t = 12 : \hat{\Lambda}_{12}^{H^3}$

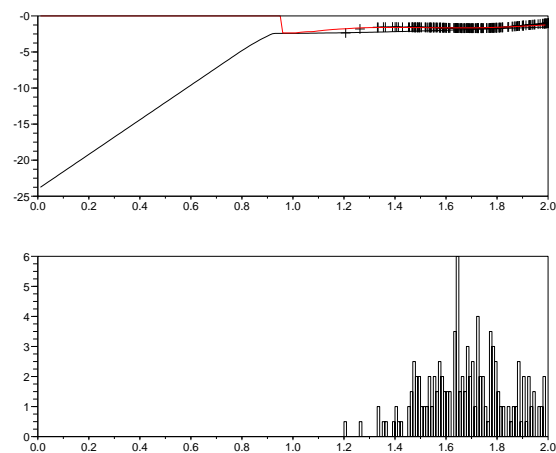


FIG. VI.37. État adjoint adapté optimal pour  $t = 23 : \hat{\Lambda}_{23}^{H^3}$

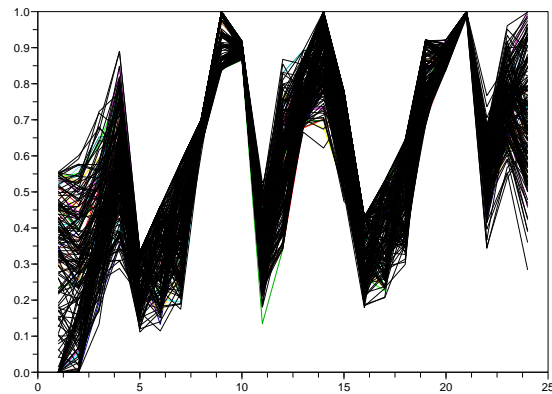


FIG. VI.38. Trajectoires de la commande optimale  $U_t^{H4,k}$

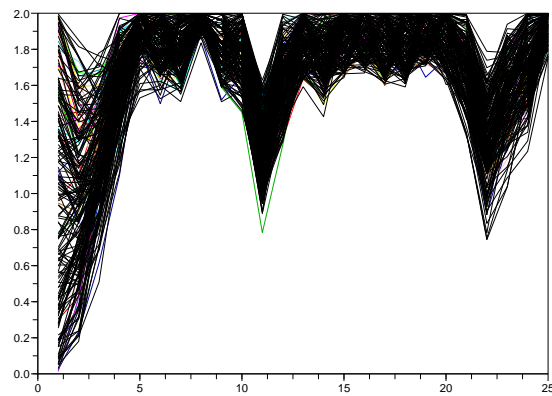


FIG. VI.39. Trajectoires de l'état optimal  $X_t^{H4,k}$

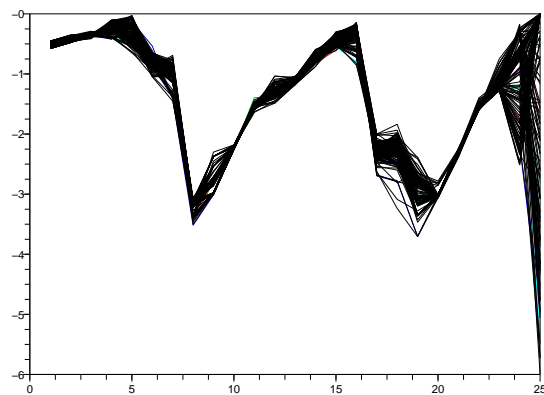


FIG. VI.40. Trajectoires de l'état adjoint optimal  $\hat{\Lambda}_t(X_t^{H4,k})$

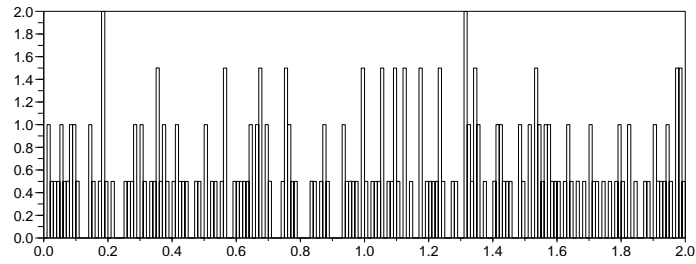
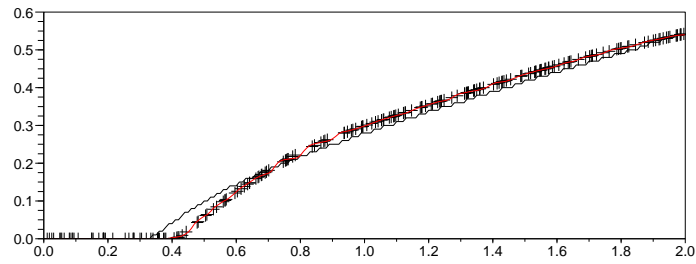


FIG. VI.41. Feedback optimal pour  $t = 0 : \phi_0^{H^4}$

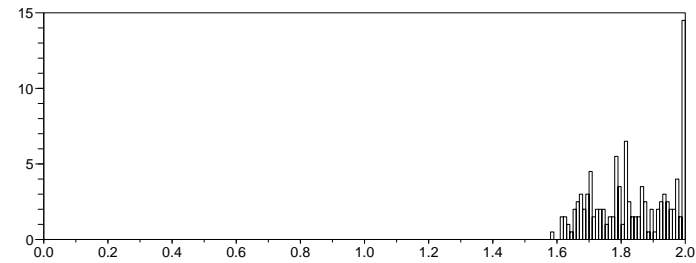
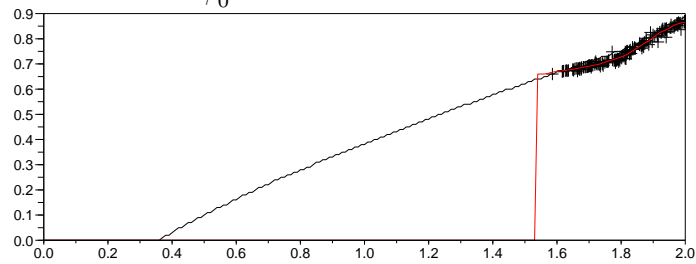


FIG. VI.42. Feedback optimal pour  $t = 12 : \phi_{12}^{H^4}$

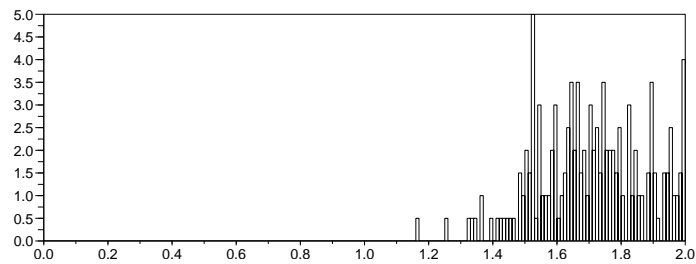
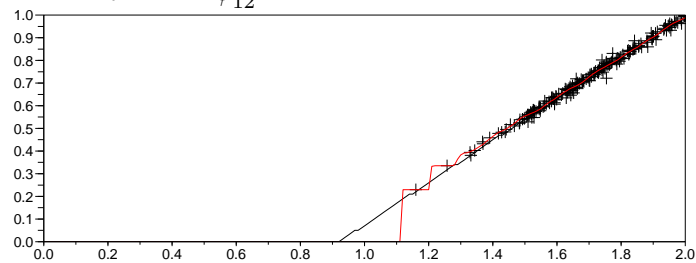


FIG. VI.43. Feedback optimal pour  $t = 23 : \phi_{23}^{H^4}$

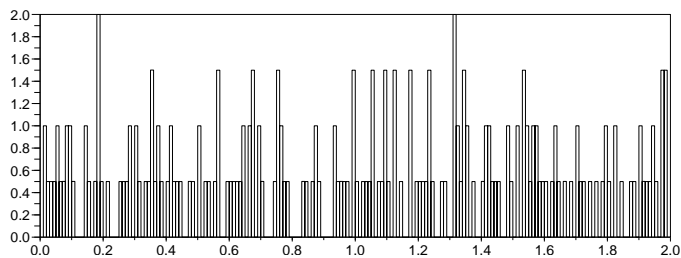
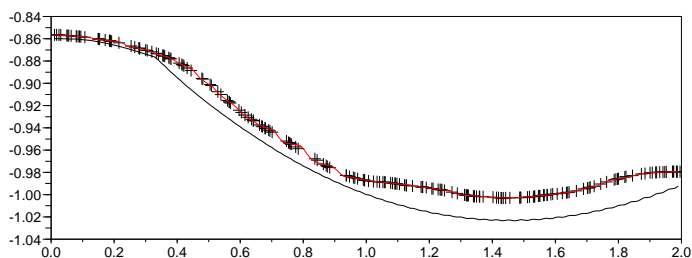


FIG. VI.44. État adjoint adapté optimal pour  $t = 0 : \hat{\Lambda}_0^{H^4}$

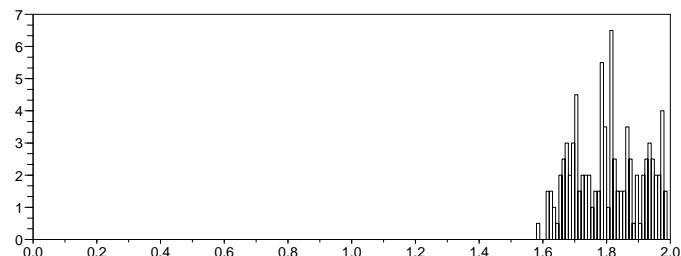
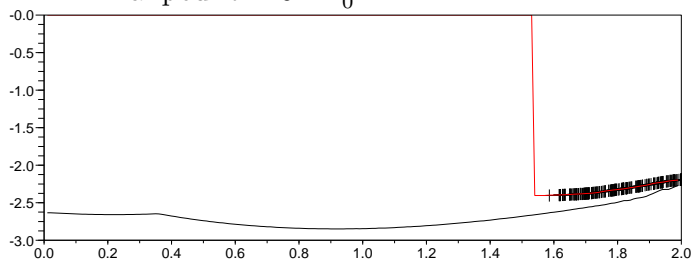


FIG. VI.45. État adjoint adapté optimal pour  $t = 12 : \hat{\Lambda}_{12}^{H^4}$

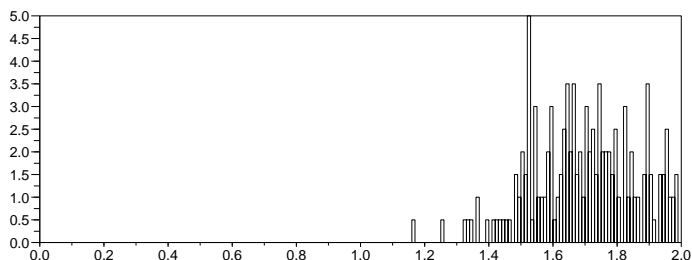
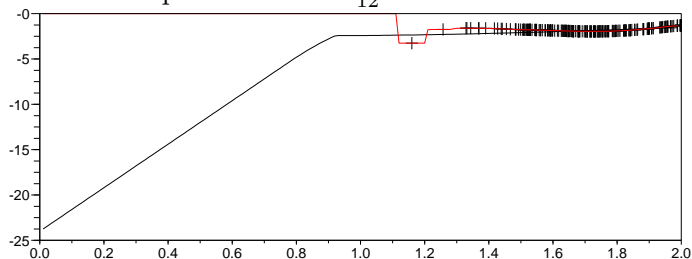


FIG. VI.46. État adjoint adapté optimal pour  $t = 23 : \hat{\Lambda}_{23}^{H^4}$

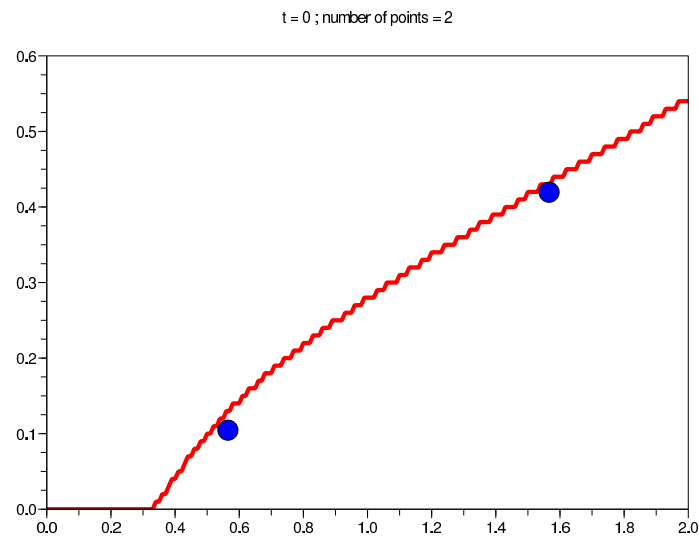


FIG. VI.47. Feedback optimal pour  $t = 0$  obtenu par scénarios arborescents  
t = 12 ; number of points = 200

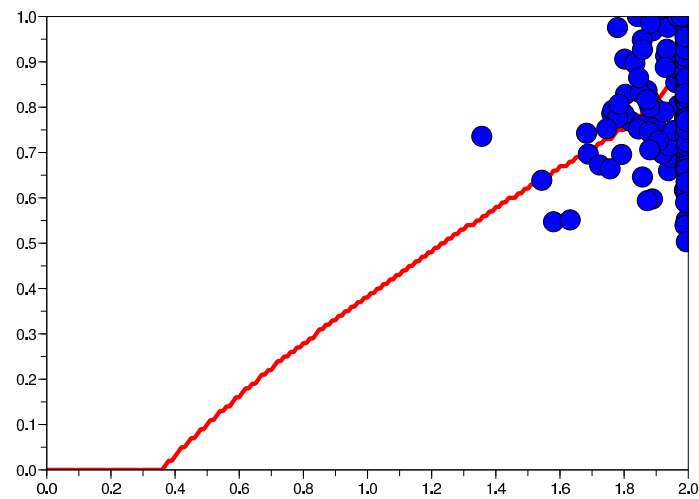


FIG. VI.48. Feedback optimal pour  $t = 12$  obtenu par scénarios arborescents  
t = 23 ; number of points = 200

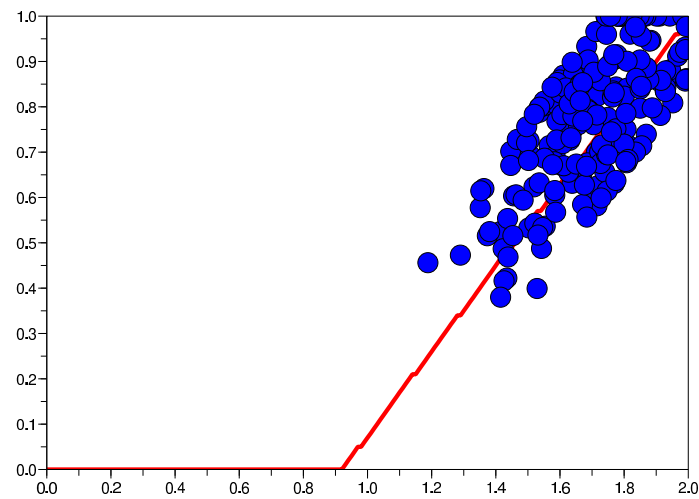


FIG. VI.49. Feedback optimal pour  $t = 23$  obtenu par scénarios arborescents

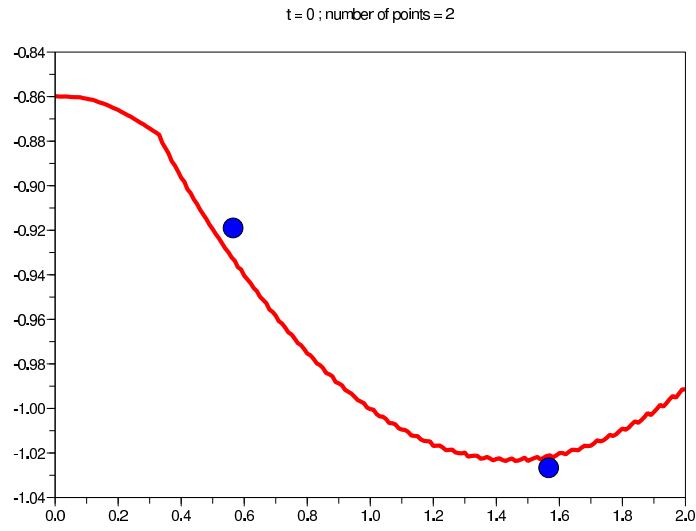


FIG. VI.50. État adjoint adapté optimal pour  $t = 0$  obtenu par scénarios arborescents

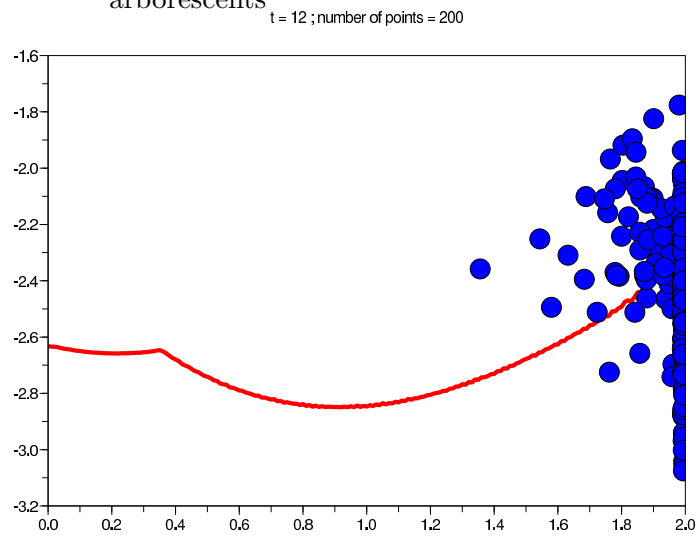


FIG. VI.51. État adjoint adapté optimal pour  $t = 12$  obtenu par scénarios arborescents

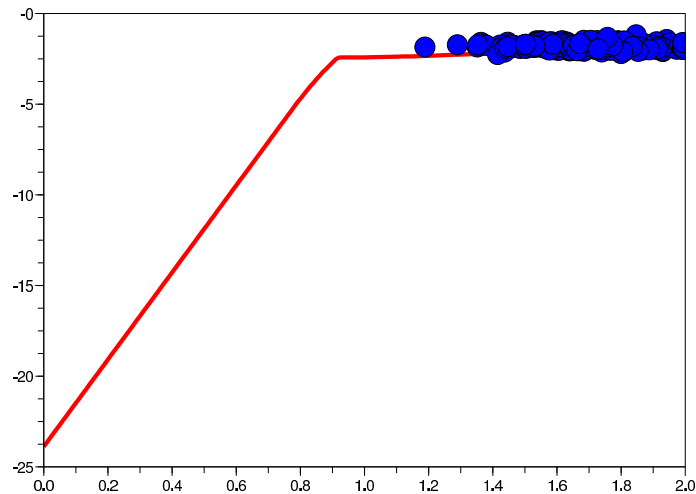


FIG. VI.52. État adjoint adapté optimal pour  $t = 23$  obtenu par scénarios arborescents





## Conclusions et Perspectives

### VII.1. Différentes contributions du mémoire

Ce mémoire s'est situé directement dans la continuité des travaux menés au sein de l'équipe *SOWG* sous l'impulsion des problématiques posées par le département *OSIRIS* d'*EDF R&D*. Nous nous sommes ainsi attaché à étudier différents aspects de l'optimisation stochastique.

Notre intérêt s'est particulièrement porté sur les méthodes variationnelles de résolution des problèmes de commande optimale stochastique en temps discret en vue d'apporter des alternatives viables à la programmation dynamique stochastique.

**VII.1.1. Modélisation d'un problème d'optimisation stochastique.** D'une manière générale un problème d'optimisation stochastique consiste en la minimisation de l'espérance d'une fonction coût sous une contrainte d'information. Nous avons développé dans le chapitre I deux interprétations différentes de la structure d'information d'un problème donné :

- une interprétation algébrique où la structure d'information est représentée par le biais d'une relation de *mesurabilité* entre deux variables aléatoires ou entre une variable aléatoire et une  $\sigma$ -algèbre,
- une interprétation fonctionnelle où la structure d'information est représentée par une *fonction père* qui définit explicitement l'interdépendance entre les différentes variables du problème.

Ces deux interprétations conduisent à deux modélisations équivalentes d'un problème d'optimisation stochastique. L'interprétation algébrique conduit à des problèmes d'optimisation par rapport à des variables aléatoires. Quant à l'interprétation fonctionnelle, elle conduit à des problèmes d'optimisation fonctionnelle.

Les principales contributions du chapitre I consistent, d'une part, à montrer l'équivalence entre interprétation algébrique et interprétation fonctionnelle, et d'autre part, à faire la typologie des problèmes d'optimisation stochastique ; plus précisément, nous avons souligné la différence entre les problèmes en information statique (que nous avons abordé tout au long de ce mémoire) et les problèmes en information dynamique (problème de Witsenhausen [114] et effet dual [8]).

**VII.1.2. Résolution d'un problème d'optimisation stochastique.** La résolution numérique d'un problème d'optimisation stochastique (qu'il soit modélisé sous sa forme algébrique ou fonctionnelle) nécessite deux étapes distinctes :

- une étape d'optimisation qui consiste en l'écriture de conditions d'optimalité ou d'un algorithme d'optimisation,
- une étape d'approximation qui consiste en deux niveaux séparés : approximation de l'espérance de la fonction coût et l'approximation de la structure d'information.

Nous avons vu au début du chapitre III que ces deux étapes peuvent être abordées dans des ordres différents. Nous pouvons ainsi dégager deux approches de résolution différentes :

- L'approche *optimiser d'abord, ensuite approximer* (O-A) qui conduit à l'approximation d'opérateurs d'espérance conditionnelle,
- L'approche *approximer d'abord, ensuite optimiser* (A-O) qui conduit à la méthode des éléments finis particuliers.

Cependant, ces deux approches peuvent être combinées en une seule. Nous avons développé, en ce sens (voir chapitre V), un algorithme de gradient chaotique en boucle fermée où nous

approximons à la fois la structure d'information et l'espérance de la fonction coût *en ligne* avec un algorithme de descente du type gradient.

**VII.1.3. Conditions d'optimalité.** Nous avons adopté dans le chapitre II l'approche O-A en ne traitant que la partie *optimisation*. À partir des deux différentes représentations de la structure d'information, nous avons présenté des conditions d'optimalité à la *Karush-Kuhn-Tucker* pour un problème de commande optimale stochastique en temps discret.

Dans le cadre d'une interprétation algébrique des contraintes d'informations nous avons présenté deux versions des conditions d'optimalité. Ces deux versions consistent en :

- une propagation en marche-avant d'un état en suivant une dynamique *forward*,
- une propagation en marche-arrière d'un état adjoint en suivant une dynamique *backward*,
- l'écriture d'un gradient.

La principale différence entre les deux versions réside dans le fait que dans l'une nous considérons un état adjoint non adapté à la filtration sous-jacente du problème, alors que dans l'autre nous considérons un état adjoint adapté à la filtration engendrée par les bruits du système.

Dans le cadre d'une interprétation fonctionnelle des contraintes d'informations nous avons présenté deux versions duales du problème de commande optimale stochastique en question.

- la première version consiste en la propagation *forward* de la mesure de probabilité de l'état suivant l'équation de *Fokker planck*,
- la deuxième version consiste en la commande d'un coût initial sous la contrainte d'une dynamique *backward* sur la fonction de *Bellman* du problème.

L'étape *approximation* associée à ces différentes formes des conditions d'optimalité a été développé dans le chapitre VI en s'inspirant des différentes méthodes d'approximation de l'espérance conditionnelle abordées dans le chapitre III. Nous avons ainsi conclu que (numériquement) nous avons intérêt à expliciter fonctionnellement la structure d'information du problème afin de diminuer l'erreur faite lors de la synthèse des feedbacks.

La principale contribution des chapitres II et VI était de présenter différentes alternatives à la programmation dynamique stochastique. Nous avons ainsi mis en avant l'avantage des méthodes variationnelles incorporant une discrétisation adaptative de l'espace d'état par rapport à une discrétisation faite a priori.

**VII.1.4. La méthode des éléments finis particuliers.** Nous avons présenté dans le chapitre IV la méthode des éléments finis particuliers pour la résolution des problèmes d'optimisation stochastique (qu'on aurait pu appelé aussi *méthode de Galerkin particulière*). Il s'agit dans cette méthode d'adopter une interprétation fonctionnelle de la structure d'information et de poursuivre une approche A-O.

En écrivant le problème d'optimisation stochastique sous une forme fonctionnelle nous approximons la commande du problème par une méthode d'éléments finis le transformant en un problème d'optimisation stochastique en *boucle ouverte*. Un deuxième niveau d'approximation est alors nécessaire : l'approximation de l'espérance de la fonction coût qui se fait par une méthode particulière du type Monte-Carlo.

Outre les différents résultats de convergence variationnelle qui ont été présentés, nous avons mis l'accent sur l'avantage qu'offrait cette méthode quant à l'utilisation de l'expertise de l'utilisateur : avoir une idée a priori sur la forme fonctionnelle du feedback peut considérablement améliorer la convergence de cette méthode vers la solution exacte du problème.

**VII.1.5. Compromis entre deux niveaux d'approximation.** La résolution des problèmes d'optimisation stochastique doit passer par deux niveaux d'approximation : l'approximation de la structure d'information et l'approximation de l'espérance de la fonction coût. Nous avons mis en évidence, au fil de ce mémoire, le fait que ces deux niveaux ne doivent pas être traités d'une manière indépendante, et un lien très fort les unis conditionnant la performance des estimateurs obtenus.

Ce compromis se traduit par l'équilibre qu'il faut trouver entre *biais* et *variance* pour minimiser l'*erreur quadratique moyenne* de l'estimateur de la commande optimale du problème.

Un choix fait a priori d'une approximation de la structure d'information (par quantification ou par éléments finis particuliers) conduit à un biais sur l'estimateur de la commande optimale ; tandis que la combinaison des deux niveaux d'approximations influence la variance du même estimateur (voir les sections IV.2 et V.5). Nous retrouvons le même genre de compromis lors de l'estimation par la méthode des noyaux de l'espérance conditionnelle (voir le chapitre III).

## VII.2. Avancées par rapport aux méthodes existantes

Traditionnellement, deux méthodes sont utilisées pour la résolution de problèmes de commande optimale stochastique : la programmation dynamique stochastique et les méthodes par scénarios arborescents. La principale contribution de ce mémoire est de présenter des alternatives permettant de se libérer des inconvénients générés par ces deux méthodes.

La programmation dynamique stochastique est confrontée à la *malédiction de la dimension* due à la discrétisation faite a priori de l'espace d'état. Les méthodes proposées au cours de ce mémoire considèrent des discrétisations adaptatives permettant de ne s'intéresser qu'aux régions *significative* de l'espace d'état : si la dynamique du système fait en sorte que les particules d'état se concentrent dans une région de l'espace, les calculs ne sont faits que dans ces régions.

Une méthode *classique* pour la résolution des problèmes de commande optimale stochastique consiste en la représentation des bruits du système sous une forme arborescente approximant ainsi à la fois la structure d'information et l'espérance de la fonction coût. Ces méthodes présentent un inconvénient majeur :

- au début de l'arbre (racines de l'arbre de scénarios) le processus d'optimisation génère un nombre très réduit de particules et l'estimateur de la commande optimale présente une faible variance (voir la figure VI.47),
- à la fin de l'arbre (feuilles de l'arbre de scénarios) le processus d'optimisation génère un nombre important de particules. Cependant, le futur étant désormais déterministe, l'estimateur de la commande optimale constitué avec ces particules présente une variance assez grande (voir la figure VI.49).

Les méthodes présentées au cours de ce mémoire (voir les applications numériques du chapitre VI) présentent des alternatives aux méthodes des scénarios arborescents qui contournent ces difficultés : nous avons désormais le même nombre de points du début jusqu'à la fin de l'horizon temporel (voir les figures VI.41, VI.42 et VI.43) garantissant ainsi une dispersion équivalente du nuage de points pour tous les pas de temps.

## VII.3. Perspectives futures

Ce mémoire offre différentes possibilités d'extensions et voies de réflexions en vue de futurs travaux. Nous exposons, ici, quelques possibilités.

- Le développement de méthodes variationnelles pour la résolution des problèmes de commande optimale stochastique (voir chapitre II) a été initialement motivé par la perspective d'avoir une alternative à la programmation dynamique qui nous permettra de développer des algorithmes de *décomposition-coordination* en vue de résoudre des *grands systèmes*. Les prochains travaux devront ainsi s'intéresser à l'application des différents algorithmes et heuristiques, présentés dans ce mémoire, au cadre des grands systèmes ainsi qu'à leur couplage avec des algorithmes de décomposition-coordination.
- Développer les résultats de vitesse de convergence pour l'algorithme de gradient chaotique en boucle fermée présenté au chapitre V et présenter des résultats de convergence pour les différentes heuristiques présentées dans le chapitre VI.
- Étendre les résultats de convergence variationnelle établis pour la méthode des éléments finis particuliers (voir chapitre IV) au cas avec contraintes.

- Formaliser et expliquer les raisons fondamentales conduisant à des erreurs quadratiques différentes pour les estimateur des commandes optimales obtenus par la méthode des éléments finis particuliers (voir chapitre IV) ou par estimation de l'espérance conditionnelle (voir chapitre III).
- Développer une méthode d'éléments finis particuliers dynamiques. Ceci consisterait à fixer un nombre de fonctions de bases, effectuer une étape d'optimisation et rajouter la solution approximée obtenue à la base de fonctions préalablement choisie, et itérer suivant le même principe.
- Tester les méthodes, algorithmes et heuristiques proposés sur des exemples réels et comparer les résultats aux solutions utilisées par les praticiens.
- S'intéresser à la complexité de ces algorithmes et heuristiques et quantifié l'avantage apporté par rapport aux méthodes existante. et comment cette complexité évolue, dans le cadre non markovien, en fonction du nombre de pas de temps.

## Bibliographie

1. Z. Artstein, *Sensitivity to  $\sigma$ -fields of information in stochastic allocation*, Stochastic Stochastics Rep. (1991), no. 36, 41–63.
2. ———, *Compact convergence of sigma-fields and relaxed conditional expectation*, Probab. Theory Relat. Fields **120** (2001), 369–394.
3. Z. Artstein and R.J.-B Wets, *Stability results for stochastic programs and sensors, allowing for discontinuous objective functions*, SIAM J. Optim. **3** (1994), no. 4, 537–550.
4. ———, *Consistency of minimizers and the SLLN for stochastic programs*, J. Convex. Anal **1-2** (1995), no. 2, 1–17.
5. H. Attouch, *Variational convergence for functions and operators*, Pitman publishing, 1984.
6. V Barbu and Th. Precupanu, *Convexity and optimization in Banach spaces*, Reidel, 1986.
7. K. Barty, *Contributions à la discrétisation des contraintes de mesurabilité pour les problèmes d’optimisation stochastique*, Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
8. K. Barty, P. Carpentier, J.-P. Chancelier, G. Cohen, M. De Lara, and T. Guillaud, *Dual effect free stochastic controls*, Annals of Operations Research **142** (2006), no. 1, 41–62.
9. K. Barty, J.-S. Roy, and C. Strugarek, *A perturbed gradient algorithm in Hilbert spaces*, <http://www.optimization-online.org>, 2005.
10. ———, *A stochastic gradient type algorithm for closed loop problems*, submitted, available on-line at <http://dohost.rz.hu-berlin.de/speps/>, 2005.
11. ———, *Temporal difference learning with kernels for pricing american-style options*, [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2005/05/1133.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2005/05/1133.html), 2005.
12. R. Bellman, *Dynamic programming*, Princeton University Press, New Jersey, 1957.
13. R. Bellman and S.E. Dreyfus, *Functional approximations and dynamic programming*, Math tables and other aides to computation **13** (1959), 247–251.
14. A. Ben-Tal and A. Nemirovski, *Robust convex optimization*, Math. Oper. Res. **23** (1998), 769–805.
15. L.D. Berkovitz, *Lower semicontinuity of integral functionals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 51–57.
16. P. Bernhard, *Variations sur un theme de Danskin avec une coda sur un theme de Von Neuman*, Rapport de recherche RR-1238, INRIA, 1990, <http://www.inria.fr/rrrt/rr-1238.html>.
17. D.P. Bertsekas, *Dynamic programming and stochastic control*, Acad. Press, 1976.
18. D.P. Bertsekas and S.E. Shreve, *Stochastic optimal control : the discrete-time case*, Athena Scientific, Belmont, 1996.
19. D.P. Bertsekas and J.N. Tsitsiklis, *Neuro-Dynamic Programming*, Athena Scientific, Belmont, 1996.
20. J.R. Birge and R.J.-B. Wets, *Designing approximation schemes for stochastic optimization problems in particular for stochastic programs with recourse*, Math. Prog. Stud. (1986), no. 27, 54–102.
21. J.F. Bonnans and P. Rouchon, *Commande et optimisation de systèmes dynamiques*, Édition École Polytechnique, 2005.
22. E.S. Boylan, *Equiconvergence of martingales*, The Annals of Mathematical Statistics **42** (1971), no. 2, 552–559.
23. A. Braides,  *$\Gamma$ -convergence for beginners*, Oxford lecture series in mathematics and its applications, 2002.
24. L. Breinman, *Probability*, SIAM - SOCIETY FOR INDUSTRIAL AND APPLIED MATHEMATICS, 1992.
25. P. Brodie, M. Glasserman, *A stochastic mesh method for pricing high dimensional american options*, The journal of computational finance **7** (2004), no. 4, xxx.
26. P. Carpentier, J.P. Chancelier, M Delara, and SOWG., *Approximations of stochastic optimization problems subject to measurability constraints*, Preprint CERMICS <http://cermics.enpc.fr/reports> (2006), xxx.

27. J. F. Carriere, *Valuation of the early-exercise price for derivative securities using simulations and splines*, Insurance : Mathematics and Economics **19** (1996), 19–30.
28. J.P. Chancelier and SOWG., *Epi-convergence of stochastic optimization problems involving both random variables and measurability constraints approximations*, Preprint CERMICS <http://cermics.enpc.fr/reports> (2006), xxx.
29. W.C. Cochran, *Sampling techniques*, series in probability and mathematical statistics, Wiley, 1977.
30. G. Cohen, *Décomposition et coordination en optimisation déterministe différentiable et non-différentiable*, Thèse de doctorat d'État, Université de Paris IX Dauphine, 1984.
31. ———, *Convexité et optimisation*, Cours ENPC, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2000.
32. G. Cohen and J.-C. Culioli, *Decomposition Coordination Algorithms for Stochastic Optimization*, SIAM J. Control Optimization **28** (1990), no. 6, 1372–1403.
33. K.D. Cotter, *Similarity of information and behavior with a pointwise convergence topology*, J. Math. Econ. **15** (1986), no. 15, 25–38.
34. J.-C. Culioli, *Algorithmes de décomposition/coordination en optimisation stochastique*, Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 1987.
35. I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, Communication on Pure and Applied Mathematics (1988), xxx.
36. M. De Lara and C. Strugarek, *A theorem on dual effect free stochastic scalar state space systems*, submitted to Ann. Oper. Res., 2004.
37. J. Delacroix, *Probabilités approfondies*, Cours master de mathématique, Université Pierre et Marie Curie, 2005-2006.
38. M. Delara, *Defining information*, Note de travail SOWG, 2005.
39. C. Dellacherie and P.A. Meyer, *Probabilité et potentiel*, vol. Chapitres 1 à 4, Hermann, 1945.
40. B. Delyon, *General results on the convergence of stochastic algorithms*, IEEE Trans. Autom. Control **41** (1996), no. 9, 1245–1255.
41. ———, *Stochastic approximation with decreasing gain : Convergence and asymptotic theory*, Université de Rennes, 2000.
42. M. Dufflo, *Algorithmes stochastiques*, Springer, 1996.
43. ———, *Random iterative models*, Springer Verlag, Berlin, 1997.
44. J. Dupačová, N. Gröwe-Kuska, and W. Römisch, *Scenario reduction in stochastic programming. An approach using probability metrics*, Math. Program. **95** (2003), no. 3, 493–511.
45. J. Dupačová and R.J.-B. Wets, *Asymptotic behavior of statistical estimators and of optimal solutions of stochastic optimization problems*, Ann. Stat. **16** (1988), no. 4, 1517–1549.
46. L. El-Ghaoui, F. Oustry, and H. Lebret, *Robust solutions to uncertain semidefinite programs*, SIAM J. Optim. **9** (1998), 33–52.
47. Y. Ermoliev, V. Norikin, and R.J.-B. Wets, *The minimization of semicontinuous functions : Mollifier subgradients*, SIAM J. Control Optimization **33** (1995), no. 1, 149–167.
48. Y. Ermoliev and R.J.-B. Wets (eds.), *Numerical techniques for stochastic optimization problems*, Springer, Berlin, 1988.
49. S.J. Garstka and R.J.B. Wets, *On decision rules stochastic programming*, Mathematical Programming **7** (1974), 117–173.
50. Ather Gattami, *Distributed stochastic control : A team theoretic approach*, Proceedings of the 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS), Kyoto, Japan, July 2006.
51. W. Hardle and O. Linton, *Encyclopedia of statistical science*, vol. 10, ch. Nonparametric regression, Wiley, 1995.
52. H. Heitsch and W. Römisch, *Scenario reduction algorithms in stochastic programming*, Comput. Optim. Appl. (2003), no. 24, 187–206.
53. J.-B. Hiriart-Urruty, *Algorithmes de résolution d'équations et d'inéquations variationnelles*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete **33** (1975), 167–186.
54. ———, *Extension of lipschitz integrands and minimization of nonconvex integral functionals : Applications to the optimal recourse problem in discrete time*, Probability and mathematical statistics **3** (1982), no. 1, 19–36.
55. J.-B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal, *Convex Analysis and Minimization Algorithms*, Springer Verlag, Berlin, 1996.

56. C.C. Holt, F. Modigliani, and H.A. Simon, *A linear decision rule for production and employment scheduling*, Manage. Sci. **2** (1955), no. 1, xxx.
57. R.J. Hyndman and D.M. Bashtannyk, *Bandwith selection for kernel conditional density estimation*, Computational statistics and data analysis (2001), no. 36, 62–87.
58. R.J. Hyndman, D.M. Bashtannyk, and G.K. Grunwald, *Estimating and visualizing conditional densities*, J. Computational and Graphical Statistics (1996), no. 5, 315–336.
59. A.D. Ioffe, *On lower semicontinuity of integral functionals*, SIAM J. Cont. Opt. **15** (1977), no. 4, 521–538.
60. O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, 2nd ed. ed., Probability and its applications, Springer, 2002.
61. H. Kudo, *A note on the strong convergence of  $\sigma$ -algebras*, Ann. Probab. **2** (1974), 76–83.
62. J.T. Lee, E. Lau, and Y.C. Ho, *The witsenhausen counterexample : A hierarchical search approach for nonconvex optimization problems*, IEEE Transactions on Automatic Control **46** (2001), no. 3, 382–397.
63. F. A. Longstaff and E. S. Schwartz, *Valuing american options by simulation : A simple least squares approach*, Rev. Financial Studies **14** (2001), no. 1, 113–147.
64. R. Lucchetti and R.J.-B. Wets, *Convergence of minima of integral functionals, with applications to optimal control and stochastic optimization*, Statist. decisions **1** (1993), no. 11, 69–84.
65. J. Lévine, *Principe d’optimalité et principe de séparation en contrôle stochastique à information incomplète non classique*, C.R. Acad. Sci. Paris **I** (1981), no. 292, 877–880.
66. ———, *Sur quelques structures d’information intervenant en jeux, dans les problèmes d’équipe ou de contrôle et en filtrage*, Thèse d’état, Université Paris-Dauphine, 1984.
67. Y.P. Mack, *Local properties of  $k$ -NN regression estimates*, SIAM J. Alg. Disc. Meth. **2** (1981), no. 13, xxx.
68. S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelette*, Les éditions de l’Ecole Polytechnique, 2000.
69. M. Mataoui, *Contributions à la décomposition et à l’agrégation des problèmes variationnels*, Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 1990.
70. M. Métivier, *Semimartingales*, De Gruyter, Berlin, 1982.
71. J.C. Miellou, *Algorithmes de relaxation chaotique à retards*, RAIRO R1 (1975).
72. S. Mitter and A. Sahai, *Information and control : Witsenhausen revisited*, Tech. report, M.I.T, LIDS Laboratory, 1998.
73. A. Nemirovski, *Effcient methods in convex programming*, 1994, <http://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs>.
74. Y. Nesterov and J.-Ph Vial, *Confidence level solutions for stochastic programming*, Stochastic Programming E-Print Series (2000), <http://edoc.huberlin.de/browsing/speps>.
75. M.B. Nevel’son and R.Z. Has’minskii, *Stochastic approximation and recursive estimation*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1973.
76. J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul de probabilité*, Masson, 1970.
77. J.V. Outrata and W. Römisich, *On optimality conditions for some nonsmooth optimization problems over  $L^p$  spaces*, Journal of Optimization Theory and Applications **126** (2005), no. 2, 411–438.
78. T. Pennanen, *Epi-convergent discretizations of multistage stochastic programs*, Mathematics of Operations Research **30** (2005), 245–256.
79. ———, *Epi-convergent discretization of stochastic programs via integration quadratures*, To appear (xxx), xxx, <http://hkkk.fi/~pennanen>.
80. T. Pennanen and M. Koivu, *Epi-convergent discretization of stochastic programs via integration quadratures*, Numerische mathematik (2003), xxx.
81. G.Ch. Pflug, *Scenario tree generation for multiperiod financial optimization by optimal discretization*, Math. Program. **89** (2001), no. 2, 251–271.
82. L. Piccinini, *Convergence of nonmonotone sub- $\sigma$ -fields and convergence of associated subspaces  $L^p(\mathcal{B}_n)$  ( $p \in [1, +\infty]$ )*, Preprint du Departement de Mathematiques de Montpellier, Journal of Mathematical Analysis and Applications **225** (1998), no. 1, 73–90.
83. B.T. Polyak, *Convergence and convergence rate of iterative stochastic algorithms*, Avtomatika i telemekhanika (1976), no. 12, 83–94.
84. B.T. Polyak and Y.Z. Tsympkin, *Pseudogradient adaptation and training algorithms*, Autom. Remote Control **12** (1973), 83–94.
85. L.S. Pontryaguine, V.G. Boltayanskii, R.V. Gamkrelidze, and E.F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, Wiley, 1962.



86. S.C. Port, *Theoretical probability for applications*, Wiley-Interscience Publication, 1994.
87. J.-P. Quadrat, M. Goursat, Hertz A., and Viot M., *Méthodes de gradient stochastique pour l'optimisation des investissements dans un réseau électrique*, EDF, Bulletin de la direction des études et de la recherche (1981), 1933–1967.
88. P. Rao, *Nonparametric functional estimation*, New York : Academic Press, 1983.
89. O Renaud, *Density estimation with wavelets : variability, invariance, and discriminant power*, Thèse de doctorat, École Polytechnique Fédérale de Lauzane, 1999.
90. H. Robbins and S. Monro, *A stochastic approximation method*, Annals of Mathematical Statistics **22** (1951), 400–407.
91. M. Robinson, X. Chen, and O. Linton, *The estimation of conditional densities*, EM/01/415 STICERD Econometrics Discussion paper.
92. S.M. Robinson and R.J.-B. Wets, *Stability in two-stage stochastic programming*, SIAM J. Control Optim. **6** (1987), no. 25, 1409–1416.
93. R.T. Rockafellar and R.J.-B. Wets, *Continuous versus measurable recourse in  $n$ -stage stochastic programming*, J. Math. Anal. Appl. (1974), no. 48, 836–859.
94. ———, *Nonanticipativity and  $\mathcal{L}^1$ -martingales in stochastic optimization problems*, Math. Prog. Stu. (1976), no. 6, 170–187.
95. ———, *Measures as lagrange multipliers in multistage stochastic programming*, L. Math. Ana. App. (1977), no. 60, 301–313.
96. ———, *The optimal recourse problem in discrete time :  $L^1$ -multipliers for inequality constraints*, SIAM J. Control Optim. **1** (1978), no. 16, 16–36.
97. ———, *Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty*, Math. Oper. Res. **16** (1991), no. 1, 119–147.
98. ———, *Variational analysis*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1998.
99. M. Rosenblatt, *multivariate analysis ii*, P.R. Shnaiah, ed., 1969.
100. P. Révész, *Robbins monro procedure in a hilbert space and its application in the theory of learning processes I.*, Studia Sci. Math. Hungar **8** (1973), 391–398.
101. ———, *Robbins monro procedure in a hilbert space II.*, Studia Sci. Math. Hungar **8** (1973), no. 1, 469–472.
102. A. Shapiro and T. Homem-de Mello, *On the rate of convergence of optimal solutions of Monte Carlo approximations of stochastic programs*, SIAM J. Optim. **11** (2000), no. 1, 70–86.
103. A. Shapiro and A.J. Kleywegt, *The sample average approximation method for stochastic discrete optimization*, SIAM J. Optim. **12** (2001), no. 1, 479–502.
104. A. Shapiro and A. Nemirovski, *On complexity of stochastic programming problems*, e-print in optimization online.
105. B.W. Silverman, *Density estimation for statistics and data analysis*, Chapman & Hall/CRC, 1998.
106. C. Strugarek, *Approches variationnelles et autres contributions en optimisation stochastique*, Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2006.
107. ———, *Interchange of minimization and integration with measurability constraints.*, Preprint CERMICS (2006), xxx.
108. J. Thénié and J.P. Vial, *Programmation stochastique avec règles de décision linéaires*, 10th International Conference on Stochastic Programming, Tucson, AZ, USA, 9-15 Octobre 2004.
109. ———, *Programmation stochastique avec règles de décision linéaires*, Présentation dans ROADEF'05, Tours, France, 14-16 Février 2005.
110. ———, *Step decision rules for multistage stochastic programming : a heuristic approach*, [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2006/08/1440.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2006/08/1440.html), 2006.
111. N. Touzi, *Backward stochastic differential equations and stochastic control*, 2006, Cours EDF R&D <http://cermics.enpc.fr/cohen-g/coursEDF/>.
112. M. Vannucci, *Nonparametric density estimation using wavelets*, Tech. report, Duke University, 1995.
113. ———, *Preventing the dirac disaster : wavelet based density estimation*, Tech. report, Duke University, 1995.
114. H.S. Witsenhausen, *A counterexample in stochastic optimal control*, SIAM Journal of Control **2** (1968), no. 6, 149–160.
115. ———, *On information structures, feedback and causality*, SIAM Journal of Control **9** (1971), no. 2, xxx.
116. S.E. Wright, *Consistency of primal-dual approximations for convex optimal control problems*, SIAM J. Cont. Opt. **33** (1995), no. 5, 1489–1509.
117. J. Yong and X.Y. Zhou, *Stochastic controls : Hamiltonian systems and HJB equations*, Springer-Verlag, New York, 1999.

## Index

- algorithme
  - décomposition/coordination, 101
  - gradient, 81
    - chaotique, 81, 83
    - déterministe, 81
    - projeté, 81
    - stochastique, 81
    - stochastique en boucle fermé, 82
  - programmation dynamique, 100
- arbres de scénarios, 7, 35
- biais, 43, 52, 65
- commande optimale
  - déterministe, 11
  - stochastique, 11, 13, 21, 33
- conditions d'optimalité, 10, 11, 18, 19, 21, 23, 24, 35, 37, 59
- convergence forte, 85
- convergence de Painlevé-Kuratowski, 70
- convergence faible, 85
- convergence variationnelle, 68
- effet dual, 6, 9
- erreur quadratique moyenne, 43, 67, 93
- espérance conditionnelle
  - approximation, 37
- espérance conditionnelle, 4, 20, 55
  - approximation, 35, 36, 46
  - noyaux, 47
  - plus proches voisins, 46
- estimation de densité, 37, 47, 52
  - conditionnelle, 37, 45
    - multivarié, 45
    - noyaux, 48
  - noyaux, 44
  - ondelettes, 40
- interpolation, 100, 101, 110, 116
- Karush-Kuhn-Tucker, 11, 18, 24, 33
- Lyapunov, 88, 89
- martingale, 90
- optimisation
  - en boucle fermée, 6
  - en boucle ouverte, 6, 8
  - fonctionnelle, 5, 26, 28, 55
  - robuste, 1
  - stochastique, 1, 7, 10, 11, 24, 35–37, 55, 81
- particulaire, 35, 55
- points selle, 75
- principe du minimum de Pontriaguine, 20
- principe du minimum de Pontriaguine, 11
- programmation dynamique, 11, 20, 30, 35
- quantification, 56, 79
- régression, 100, 101, 110
- structure d'information, 2, 3, 5, 11, 14, 20, 33
  - dynamique, 7
  - statique, 6, 8
- synthèse de feedback, 104
- variance, 43, 52, 53, 66
- éléments finis particuliers, 49, 55, 58, 60, 69, 79
- épi-convergence, 69, 70, 72
- épi/hypo-convergence, 74–76



## Convexité et optimisation

Nous donnons, ici, quelques résultats généraux de la théorie de l'optimisation convexe. Nous renvoyons le lecteur aux thèses de C. Strugarek [106], J.C. Culioli [34], de M. Mataoui [69] et de G. Cohen [30].

On considère un espace de Hilbert réel  $\mathcal{U}$ , de dimension quelconque identifié à son dual  $\mathcal{U}^*$  et muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Les topologies forte et faible sont des topologies canoniques associées respectivement à la norme  $\|\cdot\| \stackrel{\text{def}}{=} \langle \cdot, \cdot \rangle^{\frac{1}{2}}$  et au produit scalaire.

On définit la fonction coût par la donnée d'une fonctionnelle  $J$  sur  $\mathcal{U}$  à valeurs réelles et les contraintes par la donnée d'une partie convexe fermée  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  de  $\mathcal{U}$  et on pose le problème d'optimisation sous contraintes implicites :

$$(A.1) \quad \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} J(u).$$

### A.1. Ensembles convexes

DÉFINITION A.1 (Ensemble convexe). Soit  $\mathcal{U}$  un espace de Hilbert muni de son produit scalaire. Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ .

(i)  $\mathcal{V}$  est convexe si et seulement si

$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}, \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 \in \mathcal{V}.$$

(ii)  $\mathcal{V}$  est strictement convexe si et seulement si

$$\forall v_1, v_2 \in \mathcal{V}, \quad \forall \alpha \in ]0, 1[, \quad \alpha v_1 + (1 - \alpha)v_2 \in \text{int}(\mathcal{V}).$$

◆

On définit maintenant la projection sur un sous-espace vectoriel fermé.

PROPOSITION A.2. Soit  $\mathcal{U}$  un espace de Hilbert muni de son produit scalaire. Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  un sous-espace vectoriel fermé. Pour tout  $u \in \mathcal{U}$ , le problème  $\min_{v \in \mathcal{V}} \frac{1}{2} \|u - v\|_{\mathcal{U}}^2$  est bien défini, et il existe un unique minimiseur noté  $\Pi_{\mathcal{V}}(u)$ , et appelé la projection de  $u$  sur  $\mathcal{V}$ .

L'opérateur  $\Pi_{\mathcal{V}}$  défini ci-dessus possède de plus quelques propriétés intéressantes :

PROPOSITION A.3. Soit  $\mathcal{U}$  un espace de Hilbert muni de son produit scalaire. Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  un sous-espace vectoriel fermé. L'opérateur de projection sur  $\mathcal{V}$  noté  $\Pi_{\mathcal{V}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$  est linéaire et autoadjoint.

On définit maintenant la projection sur un convexe fermé.

PROPOSITION A.4. Soit  $\mathcal{U}$  un espace de Hilbert muni de son produit scalaire. Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  un sous-ensemble convexe fermé. Pour tout  $u \in \mathcal{U}$ , le problème  $\min_{v \in \mathcal{V}} \frac{1}{2} \|u - v\|_{\mathcal{U}}^2$  est bien défini, et il existe un unique minimiseur noté  $\Pi_{\mathcal{V}}(u)$ , et appelé la projection de  $u$  sur  $\mathcal{V}$ .

**Démonstration :** [55], Section III.3. ■

On a alors les propriétés suivantes :

PROPOSITION A.5. Soit  $\mathcal{U}$  un espace de Hilbert muni de son produit scalaire. Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$  un sous-ensemble convexe fermé.

(i) Soit  $u \in \mathcal{U}$ .  $v_u \in \mathcal{V}$  est la projection  $\Pi_{\mathcal{V}}(u)$  si et seulement si

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad \langle u - v_u, v - v_u \rangle_{\mathcal{U}} \leq 0.$$

(ii) Pour tous  $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ , on a :

$$\|\Pi_{\mathcal{V}}(u_1) - \Pi_{\mathcal{V}}(u_2)\|_{\mathcal{U}}^2 \leq \langle \Pi_{\mathcal{V}}(u_1) - \Pi_{\mathcal{V}}(u_2), u_1 - u_2 \rangle_{\mathcal{U}},$$

ce qui implique que  $\Pi_{\mathcal{V}}$  est monotone et lipschitzienne.

LEMME A.6 (Sous-espace vectoriel). Soit  $\mathcal{V}_1$  un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}_2$  un convexe fermé de  $\mathcal{U}$ . On note alors  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$  qui est un convexe fermé. Si de plus  $\Pi_{\mathcal{V}_2}(\mathcal{V}_1) \subset \mathcal{V}_1$ , alors les opérateurs de projection vérifient la règle de composition suivante :

$$\Pi_{\mathcal{V}} = \Pi_{\mathcal{V}_2} \circ \Pi_{\mathcal{V}_1}.$$

**Démonstration :** On utilise pour ce faire la caractérisation (i) de la projection dans la proposition A.5. Soit  $u \in \mathcal{U}$ , et  $v \in \mathcal{V}$ . On a déjà que  $\Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)) \in \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ . De plus :

$$\begin{aligned} \langle u - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)), v - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)) \rangle_{\mathcal{U}} &= \langle u - \Pi_{\mathcal{V}_1}(u), v - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)) \rangle_{\mathcal{U}} \\ &\quad + \langle \Pi_{\mathcal{V}_1}(u) - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)), v - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)) \rangle_{\mathcal{U}}, \\ \text{(A.2)} \qquad \qquad \qquad &\leq \langle u - \Pi_{\mathcal{V}_1}(u), v - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)) \rangle_{\mathcal{U}}, \end{aligned}$$

car par la caractérisation (i) de la proposition A.5 appliquée à la projection de  $\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)$  sur  $\mathcal{V}_2$ , le second terme de la somme du membre de droite est négatif, du fait que  $v \in \mathcal{V}_2$ . En revenant à l'équation (A.2), on obtient, de par la linéarité et le caractère auto-adjoint de  $\Pi_{\mathcal{V}_1}$  et le fait que  $v \in \mathcal{V}_1$ , et  $\Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)) \in \mathcal{V}_1$  :

$$\begin{aligned} \langle u - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)), v - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)) \rangle_{\mathcal{U}} &\leq \langle u - \Pi_{\mathcal{V}_1}(u), \Pi_{\mathcal{V}_1}(v - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u))) \rangle_{\mathcal{U}}, \\ &= \langle \Pi_{\mathcal{V}_1}(u - \Pi_{\mathcal{V}_1}(u)), v - \Pi_{\mathcal{V}_2}(\Pi_{\mathcal{V}_1}(u)) \rangle_{\mathcal{U}} \text{ car } \Pi_{\mathcal{V}_1} \text{ est autoadjoint,} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui achève de caractériser la projection sur  $\mathcal{V}$ . ■

## A.2. Fonctions convexes

Afin de donner les conditions d'existence d'une solution pour le problème (A.1), on fait le rappel des définitions et des résultats suivants :

DÉFINITION A.7 (Convexité). On dit qu'une fonctionnelle  $J$  est convexe si pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$  :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}^2, \quad J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v). \quad \blacklozenge$$

DÉFINITION A.8 (Stricte convexité). On dit qu'une fonctionnelle  $J$  est strictement convexe si pour tout  $0 < \alpha < 1$  :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}^2, \quad u \neq v, \quad J(\alpha u + (1 - \alpha)v) < \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v). \quad \blacklozenge$$

DÉFINITION A.9 (Forte convexité). On dit qu'une fonctionnelle  $J$  est fortement convexe de constante  $a > 0$  si pour tout  $0 \leq \alpha \leq 1$  :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{U}^2, \quad J(\alpha u + (1 - \alpha)v) \leq \alpha J(u) + (1 - \alpha)J(v) - a\alpha(1 - \alpha) \frac{\|u - v\|^2}{2}. \quad \blacklozenge$$

DÉFINITION A.10 (Fonction propre). On dit que la fonctionnelle  $J$  est propre si son domaine (ensemble des  $u$  pour lesquels  $J(u) < +\infty$ ) est non vide et si  $J$  n'est nulle part égale à  $-\infty$ . ◆

DÉFINITION A.11 (Fonction s.c.i.). On dit que la fonctionnelle  $J$  est semi-continue inférieurement (s.c.i.) si :

$$\forall u \in \mathcal{U}, \quad J(u) \leq \liminf_{v \rightarrow u} J(v).$$

◆

DÉFINITION A.12 (Épi-graphe). Soit  $J$  une fonctionnelle. On appelle épigraphe de  $J$  le sous-ensemble :

$$\text{epi}(J) \stackrel{\text{def}}{=} \{(u, \alpha) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}, \quad \alpha \geq J(u)\}.$$

◆

DÉFINITION A.13 (Section inférieure). Soit  $J$  une fonctionnelle, les ensembles :

$$S(J, \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathcal{U}, \quad J(u) \leq \alpha\},$$

sont appelés sections inférieures de  $J$ .

◆

LEMME A.14 (M. Mataoui [69]). Si  $J$  est une fonctionnelle, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $J$  est s.c.i.,
- (ii)  $\text{epi}(J)$  est fermé,
- (iii)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad S(J, \alpha)$  est fermé.

DÉFINITION A.15 (Fonction coercive). On dit que la fonctionnelle  $J$  est coercive sur  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  si  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  est borné ou si :

$$\lim_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}, \|u\| \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty$$

◆

### A.3. Différentiabilité et sous-différentiabilité

DÉFINITION A.16 (Dérivée directionnelle). Soient  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  deux espaces de Hilbert et  $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ . On appelle dérivée directionnelle de  $J$  au point  $u \in \mathcal{U}$  et dans la direction  $d \in \mathcal{U}$ , notée  $DJ(u; d)$ , la limite suivante :

$$DJ(u; d) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(u + \epsilon d) - J(u)}{\epsilon}.$$

◆

DÉFINITION A.17 (Dérivée de Gâteaux). Soient  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  deux espaces de Hilbert et  $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ . Si  $J$  admet en  $u \in \mathcal{U}$  des dérivées directionnelles pour toutes les directions  $d \in \mathcal{U}$  et si  $DJ(u; d)$  est une fonction linéaire continue de  $d$ , c'est-à-dire qu'il existe un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$  telle que  $DJ(u; d) = A(d)$  pour tout  $d \in \mathcal{U}$ , alors la fonction  $J$  est dite différentiable au sens de Gâteaux au point  $u$ ; l'opérateur  $A$ , noté  $J'(u)$ , est appelé dérivée de Gâteaux de  $J$  au point  $u$ . Si une telle dérivée existe en tout point où  $J$  est définie, on dira que  $J$  est différentiable au sens de Gâteaux.

◆

DÉFINITION A.18 (Dérivée de Fréchet). Soient  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  deux espaces de Hilbert la fonction  $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$  admet au point  $u \in \mathcal{U}$  une dérivée de Fréchet s'il existe un opérateur linéaire continu, noté  $J'(u) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ , tel que :

$$\lim_{\|d\| \rightarrow 0} \frac{J(u + d) - J(u) + J'(u)(d)}{\|d\|} = 0,$$

et ce pour tout  $d \in \mathcal{U}$  tendant vers 0.

◆

REMARQUE A.19. Toute fonction Fréchet différentiable est Gâteaux différentiable.

◆

REMARQUE A.20. Nous noterons par abus de Langage,  $\nabla J(u) = J'^{\top}(u)$  le gradient de  $J$  en  $u \in \mathcal{U}$ .  $\blacklozenge$

DÉFINITION A.21 (Sous-gradient, sous-différentiel). Soient  $\mathcal{U}$  et un espace de Hilbert la fonction et  $J : \mathcal{U} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . On appelle sous-gradient de  $J$  en  $u \in \mathcal{U}$  ( $J(u) < +\infty$ ) tout vecteur  $r \in \mathcal{U}$  tel que :

$$J(v) - J(u) \geq \langle r, v - u \rangle, \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

L'ensemble de ces vecteurs est appelé sous-différentiel de  $J$  en  $u$  et est noté  $\partial J(u)$ .  $\blacklozenge$

#### A.4. Optimisation

LEMME A.22 (Existence de solution). *Si  $J$  convexe, s.c.i. et coercive sur  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$ , si  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  est convexe fermé, alors le problème (A.1) admet au moins une solution. Si  $J$  est strictement convexe, alors ce minimum est unique.*

**Démonstration :** Voir [6]  $\blacksquare$

PROPOSITION A.23 (Conditions nécessaires d'optimalité). *Supposons que  $\mathcal{U}^{\text{ad}}$  est convexe fermé et que  $J$  est Gâteaux différentiable. Si  $u^{\sharp}$  est solution de (A.1) alors elle vérifie les équivalences suivantes :*

$$(A.3) \quad \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}, \quad \langle J'(u^{\sharp}), u - u^{\sharp} \rangle \geq 0,$$

$$(A.4) \quad J'(u^{\sharp}) \in -\partial\delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(u^{\sharp}),$$

$$(A.5) \quad \exists \epsilon > 0, \quad u^{\sharp} = \Pi_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(u^{\sharp} - \epsilon \nabla J(u^{\sharp})).$$

**Démonstration :** Si  $u^{\sharp}$  est solution de (A.1) alors :

$$\forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}, \quad \langle J'(u^{\sharp}), u - u^{\sharp} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{J(u^{\sharp} + \epsilon(u - u^{\sharp})) - J(u^{\sharp})}{\epsilon} \geq 0.$$

d'où la condition (A.3) est vérifiée.

Supposons maintenant que la condition (A.3) est vérifiée, alors :

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}, \quad \langle -J'(u^{\sharp}), u - u^{\sharp} \rangle &\leq 0 = \delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(u) - \delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(u^{\sharp}), \\ \forall u \notin \mathcal{U}^{\text{ad}}, \quad \langle -J'(u^{\sharp}), u - u^{\sharp} \rangle &\leq \delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(u) - \delta_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(u^{\sharp}) = +\infty, \end{aligned}$$

par définition du sous-différentiel (voir la définition A.21) la condition (A.4) est vérifiée.

De plus, d'après la définition de la projection (voir proposition A.4), nous avons les équivalences suivantes (pour un  $\epsilon > 0$  donné) :

$$\begin{aligned} u^{\sharp} = \Pi_{\mathcal{U}^{\text{ad}}}(u^{\sharp} - \epsilon \nabla J(u^{\sharp})) &\Leftrightarrow u^{\sharp} = \arg \min_{u \in \mathcal{U}^{\text{ad}}} \|u - u^{\sharp} - \epsilon \nabla J(u^{\sharp})\|^2, \\ &\Leftrightarrow \langle \epsilon J'(u^{\sharp}), u - u^{\sharp} \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

et donc (A.5) est équivalente à (A.3).  $\blacksquare$

PROPOSITION A.24. *Supposons que  $\mathcal{U}^{\text{ad}} = \mathcal{U}^{\text{cv}} \cap \mathcal{U}^{\text{ev}}$ , où  $\mathcal{U}^{\text{cv}}$  est un convexe fermé et  $\mathcal{U}^{\text{ev}}$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{U}$ . Supposons en outre que  $\Pi_{\mathcal{U}^{\text{cv}}}(\mathcal{U}^{\text{ev}}) \subset \mathcal{U}^{\text{ev}}$  et que  $J$  est Gâteaux différentiable. Si  $u^{\sharp}$  est solution de (A.1) alors :*

$$\Pi_{\mathcal{U}^{\text{ev}}}(J'(u^{\sharp})) \in -\partial\delta_{\mathcal{U}^{\text{cv}}}(u^{\sharp}).$$

**Démonstration :** D'après la proposition A.23, si  $u^{\sharp} \in \mathcal{U}$  est solution de (II.8) alors :

$$\forall \epsilon \geq 0, \quad u^{\sharp} = \Pi_{\mathcal{U}^{\text{cv}} \cap \mathcal{U}^{\text{ev}}}(u^{\sharp} - \epsilon \nabla J(u^{\sharp})),$$

$\mathcal{U}^{\text{ev}}$  étant un espace vectoriel, nous pouvons décomposer cette projection. D'après le lemme A.6, nous avons que :

$$\forall \epsilon \geq 0, \quad u^{\sharp} = \Pi_{\mathcal{U}^{\text{cv}}}(u^{\sharp} - \epsilon \Pi_{\mathcal{U}^{\text{ev}}}(\nabla J(u^{\sharp}))),$$

et donc  $\Pi_{\mathcal{U}^{\text{ev}}}(J((u^\#)) \in -\partial\delta_{\mathcal{U}^{\text{ev}}}(u^\#)$ . ■

### A.5. Dérivation d'une fonction définie par une contrainte d'égalité

**THÉORÈME A.25.** Soient  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{X}$  deux espaces de Hilbert. Soit  $f : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  une fonction différentiable (nous noterons par  $f'_x$  et  $f'_u$  ses dérivées, respectivement par rapport à la première et seconde composante).

Supposons que pour tout  $u \in \mathcal{U}$  il existe une unique application différentiable  $\hat{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  (nous noterons  $\hat{x}'$  sa dérivée) tel que  $f(\hat{x}(u), u) = 0$ .

Soit, en outre  $\tilde{J} : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  une application différentiable à valeurs réelles (nous noterons par  $\tilde{J}'_x$  et  $\tilde{J}'_u$  ses dérivées, respectivement par rapport à la première et seconde composante).

Nous nous proposons de calculer le gradient d'une fonction  $J : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $J(u) = \tilde{J}(\hat{x}(u), u)$ .

Sous les hypothèses précédentes nous avons que :

$$(A.6) \quad J'(u) = \frac{\partial}{\partial u} \left( \tilde{J}(x, u) + \lambda^\top f(x, u) \right) \Big|_{x=\hat{x}(u)},$$

où  $\lambda \in \mathcal{X}$  vérifie :

$$(A.7) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \tilde{J}(x, u) + \lambda^\top f(x, u) \right) = 0.$$

**Démonstration :** Nous avons que :

$$(A.8) \quad f(\hat{x}(u), u) = 0 \Rightarrow f'_x \delta \hat{x} + f'_u \delta u = 0,$$

et donc :

$$\begin{aligned} \delta J &= \tilde{J}'_x \delta \hat{x} + \tilde{J}'_u \delta u, \\ &= \tilde{J}'_x \delta \hat{x} + \tilde{J}'_u \delta u + \lambda^\top \left( \underbrace{f'_x \delta \hat{x} + f'_u \delta u}_{=0 \text{ par (A.8)}} \right), \quad \forall \lambda \in \mathcal{X}, \\ &= \left( \underbrace{\tilde{J}'_x + \lambda^\top f'_x}_{=0 \text{ par (A.7)}} \right) \delta \hat{x} + \left( \tilde{J}'_u + \lambda^\top f'_u \right) \delta u, \quad \forall \lambda \in \mathcal{X}, \\ &= \left( \tilde{J}'_u + \lambda^\top f'_u \right) \delta u. \end{aligned}$$

■

**REMARQUE A.26** (Une recette de cuisine...). Soit  $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction appelée *Lagrangien* tel que :

$$\mathcal{L}(x, u, \lambda) = \tilde{J}(x, u) + \lambda^\top f(x, u).$$

Sous les hypothèses du théorème A.25 nous avons que pour tout  $u \in \mathcal{U}$ ,  $J'(u) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(x, u, \lambda)$  où  $x$  vérifie  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x, u, \lambda) = 0$  et  $\lambda$  vérifie  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, u, \lambda) = 0$ . ♦

**Démonstration :** Il suffit d'appliquer le théorème A.25 et de remplacer les expressions des dérivées du Lagrangien. ■





## ANNEXE B

### Lemmes techniques

Nous donnons ici trois lemmes techniques utiles dans la preuve de convergence de l'algorithme de gradient chaotique pour la boucle fermée. Ces Lemmes et leurs preuves respectives sont tirés des thèses de G. Cohen [30] et de C. Strugarek [106].

LEMME B.1. *Soit  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs. Soit  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  deux suites de réels positifs telles que  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k < +\infty$  et  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \beta_k < +\infty$ . Si de plus on a :*

$$\forall k \in \mathbb{N}, x_{k+1} - x_k \leq \alpha_k x_k + \beta_k,$$

alors la suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée.

**Démonstration :** En sommant l'hypothèse entre 0 et  $n$ , on obtient :

$$x_{n+1} \leq x_0 + \sum_{k=0}^n \beta_k + \sum_{k=0}^n \alpha_k x_k.$$

Dès lors, en définissant  $m_k = \max_{0 \leq l \leq k} x_l$ , on a par positivité la même inégalité avec la suite  $m$  :

$$m_{n+1} \leq x_0 + \sum_{k=0}^n \beta_k + \sum_{k=0}^n \alpha_k m_k.$$

Nous allons montrer que  $(m_n)$  est bornée. Soit  $1 > \epsilon > 0$ . Par l'hypothèse de sommabilité sur les suites  $\alpha, \beta$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$ ,  $\sum_{k=n_0}^n \alpha_k < \epsilon$ . On réécrit donc l'inégalité précédente en coupant les sommes, pour tout  $n \geq n_0$  :

$$\begin{aligned} m_{n+1} &\leq x_0 + \sum_{k=0}^n \beta_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} \alpha_k m_k + \sum_{k=n_0}^n \alpha_k m_k, \\ &\leq x_0 + \sum_{k=0}^n \beta_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} \alpha_k m_k + m_{n+1} \sum_{k=n_0}^n \alpha_k, \\ &\leq \frac{x_0 + \sum_{k=0}^n \beta_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} \alpha_k m_k}{1 - \epsilon}, \\ &\leq \frac{x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k + \sum_{k=0}^{n_0-1} \alpha_k m_k}{1 - \epsilon}, \end{aligned}$$

du fait de la positivité de la suite  $(\beta_k)$ , ce qui montre que la suite  $(m_n)$  est bornée. ■

LEMME B.2. *Soit  $J$  une application d'un espace de Hilbert  $H$  dans  $\mathbb{R}$ , lipschitzienne de module  $L$ . Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $H$  et  $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de réels positifs tels que :*

- (i)  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \epsilon_k = +\infty$ ,
- (ii)  $\exists \mu \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{N}} \epsilon_k |J(u_k) - \mu| < +\infty$ ,
- (iii)  $\exists \delta > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \|u_{k+1} - u_k\| \leq \delta \epsilon_k$ .

Alors  $(J(u_k))_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mu$ .

**Démonstration :** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , définissons le sous-ensemble  $N_\alpha$  de  $\mathbb{N}$  tel que :

$$N_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} : |J(u_k) - \mu| \leq \alpha\}.$$

On notera alors  $N_\alpha^c$  le complémentaire de  $N_\alpha$  dans  $\mathbb{N}$ . Les hypothèses (i – ii) impliquent que  $N_\alpha$  n'est pas fini.

En appliquant l'hypothèse (ii), on a :

$$+\infty > \sum_{k \in \mathbb{N}} \epsilon_k |J(u_k) - \mu| \geq \sum_{k \in N_\alpha^c} \epsilon_k |J(u_k) - \mu| \geq \alpha \sum_{k \in N_\alpha^c} \epsilon_k.$$

Cela prouve que pour tout  $\beta > 0$ , il existe un  $n_\beta \in \mathbb{N}$  tel que  $\sum_{k \in N_\alpha^c, k \geq n_\beta} \epsilon_l \leq \beta$ .

Soit alors  $\epsilon > 0$ . Prenons  $\alpha = \epsilon/2$  et  $\beta = \epsilon/(2L\delta)$ , avec  $L$  le module de Lipschitz de  $J$ . Pour tout  $k \geq n_\beta$ , on a deux possibilités :

- Si  $k \in N_\alpha$ , alors  $|J(u_k) - \mu| \leq \alpha < \epsilon$ .
- Si  $k \in N_\alpha^c$ , soit  $m$  le plus petit élément de  $N_\alpha$  tel que  $m \geq k$  (on sait qu'il existe car  $N_\alpha$  n'est pas fini). On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} |J(u_k) - \mu| &\leq |J(u_k) - J(u_m)| + |J(u_m) - \mu| \leq L\|u_k - u_m\| + \alpha, \\ &\leq L\delta \left( \sum_{l=k}^{m-1} \epsilon_l \right) + \alpha \leq L\delta \left( \sum_{l \in N_\alpha^c, l \geq n_\beta} \epsilon_l \right) + \alpha \leq \epsilon. \end{aligned}$$

■

**LEMME B.3.** *Soit  $J$  une application d'un espace de Hilbert  $H$  dans  $\mathbb{R}$ , et soit  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité muni d'une filtration  $(\mathcal{F}^k)$ . Soit  $(u_k)$  une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $H$  telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u_k$  est  $\mathcal{F}_k$ -mesurable, et soit  $(\gamma_k)$  une suite de réels positifs telles que :*

- (i)  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \gamma_k = +\infty$ ,
- (ii)  $\exists \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \gamma_k (J(u_k) - \mu) < +\infty$ , et  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $J(u_k) - \mu \geq 0$ , p.s.
- (iii)  $\exists \delta > 0$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $J(u_k) - \mathbb{E}[J(u_{k+1})|\mathcal{F}_k] \leq \delta\gamma_k$ , p.s.

Alors  $(J(u_k))$  converge presque sûrement vers  $\mu$ .

**Démonstration :** Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , définissons le sous-ensemble  $N_\alpha$  de  $\mathbb{N}$  tel que :

$$N_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{k \in \mathbb{N} : J(u_k) - \mu \leq \alpha, \text{ p.s.}\}.$$

On notera alors  $N_\alpha^c$  le complémentaire de  $N_\alpha$  dans  $\mathbb{N}$ . Les Hypothèses (i – ii) impliquent que  $N_\alpha$  n'est pas fini.

Selon l'hypothèse (ii), il vient :

$$+\infty > \sum_{k \in \mathbb{N}} \gamma_k (J(u_k) - \mu) \geq \sum_{k \in N_\alpha^c} \gamma_k (J(u_k) - \mu) \geq \alpha \sum_{k \in N_\alpha^c} \gamma_k.$$

Cela prouve que pour tout  $\beta > 0$ , il existe un  $n_\beta \in \mathbb{N}$  tel que  $\sum_{k \in N_\alpha^c, k \geq n_\beta} \gamma_l \leq \beta$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Prenons  $\alpha = \epsilon/2$  et  $\beta = \epsilon/(2\delta)$ . Pour tout  $k \geq n_\beta$ , on a deux possibilités :

- Si  $k \in N_\alpha$ , alors  $J(u_k) - \mu \leq \alpha < \epsilon$ .
- Si  $k \in N_\alpha^c$ , soit  $m$  le plus petit éléments de  $N_\alpha$  tel que  $m \geq k$  (on sait qu'il existe car  $N_\alpha$  n'est pas fini). On peut dès lors écrire :

$$\begin{aligned} J(u_k) - \mu &= J(u_k) - \mathbb{E}[J(u_m)|\mathcal{F}_k] + \mathbb{E}[J(u_m)|\mathcal{F}_k] - \mu \\ &= \mathbb{E}\left[ \sum_{l=k}^{m-1} J(u_l) - \mathbb{E}[J(u_{l+1})|\mathcal{F}_l] \middle| \mathcal{F}_k \right] + \mathbb{E}[J(u_m)|\mathcal{F}_k] - \mu, \\ &\leq \delta \left( \sum_{l=k}^{m-1} \gamma_l \right) + \alpha \leq \delta \left( \sum_{l \in N_\alpha^c, l \geq n_\beta} \gamma_l \right) + \alpha \leq \epsilon. \end{aligned}$$

■

**LEMME B.4.** *Soit  $(\phi_i)_{i=1, \dots, m}$  une famille libre de fonctions de  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ , soit  $\Phi$  l'opérateur linéaire de  $\mathbb{R}^m$  dans  $L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  tel que  $\Phi\alpha = \sum_{i=1}^m \alpha_i \phi_i$ , et soit  $\mathcal{U}^{\text{ad}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R}), \phi(x) \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}\}$ . Si*

- $\forall i = 1, \dots, m, \quad \phi_i \in \mathcal{U}^{\text{ad}},$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \leq 1$
- $\exists m \text{ points } (x_j)_{j=1, \dots, m} \text{ tel que } \phi_i(x_j) = \delta_{i,j}$ <sup>1</sup>

alors  $\Phi^{-1}(\mathcal{U}^{\text{ad}}) = A^{\text{ad}} \stackrel{\text{def}}{=} [0, 1]^m.$

**Démonstration :** Soit  $\alpha \in A^{\text{ad}},$  alors pour tout  $x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=1}^m \phi_i(x)\alpha_i \geq 0,$  et  $\sum_{i=1}^m \phi_i(x)\alpha_i \leq \max_i(\alpha_i \sum_{i=1}^m \phi_i(x)) \leq \max_i(\alpha_i) \leq 1,$  alors  $\alpha \in \Phi^{-1}(\mathcal{U}^{\text{ad}}).$

Soit  $\alpha \in \Phi^{-1}(\mathcal{U}^{\text{ad}}),$  alors  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \sum_{i=1}^m \phi_i(x)\alpha_i \leq 1,$  pour  $x = x_j$  nous avons que  $0 \leq \alpha_j \leq 1.$  Alors  $\alpha \in A^{\text{ad}}.$  ■

---

<sup>1</sup> $\delta_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$  1 sinon.



## ANNEXE C

### Quasi-martingales

Nous nous donnons un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  muni d'une filtration  $(\mathcal{F}_k)$ . Nous donnerons, ici, quelques définitions et résultats tirés des travaux de M. Métivier [70].

Soit  $X = (X_k)_{k \in \mathbb{N}}$  un processus stochastique à valeurs réelles adapté à  $(\mathcal{F}_k)$ . Nous supposons dans toute la suite de cet annexe que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{E}[|X_k|] < +\infty$ .

**DÉFINITION C.1 (Contenu).** On appelle contenu du processus stochastique  $X$  l'application  $\lambda_X(k, F)$  définie pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $F \in \mathcal{F}_k$  par :

$$\lambda_X(k, F) = \mathbb{E}[(X_{k+1} - X_k)\mathbb{I}_F].$$

◆

**DÉFINITION C.2 (Sur-/sous-martingale).** Le processus  $X$  est une sur- (respectivement sous-) martingale si et seulement si :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall F \in \mathcal{F}_k, \quad \lambda_X(k, F) \leq 0 \text{ resp. } \geq 0.$$

Si  $X$  est à la fois sur- et sous-martingale, alors c'est une martingale.

◆

**DÉFINITION C.3 (Variation du contenu).** La variation du contenu de  $X$  en  $k \in \mathbb{N}$  notée  $|\lambda_X|(k)$  est définie par :

$$|\lambda_X|(k) = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k]|].$$

La variation totale du contenu, notée  $|\lambda_X|$  est alors définie par la somme possiblement divergente suivante :

$$|\lambda_X| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |\lambda_X|(k).$$

◆

**DÉFINITION C.4 (Quasi-martingale).** Le processus  $X$  est une quasi-martingale si et seulement si sa variation totale du contenu est finie, i.e.

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k]|] < +\infty.$$

Il est donc clair qu'une martingale est une quasi-martingale.

◆

**PROPOSITION C.5 (Métivier [70]).** Posons pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $G_k = \{\omega \in \Omega, \quad \mathbb{E}[X_{k+1} - X_k \mid \mathcal{F}_k](\omega) > 0\}$ . Si  $X$  vérifie les deux conditions :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[(X_{k+1} - X_k)\mathbb{I}_{G_k}] &< +\infty, \\ \inf_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_k] &> -\infty, \end{aligned}$$

alors c'est une quasi-martingale.

**PROPOSITION C.6 (Métivier [70]).** Supposons que  $X$  soit une quasi-martingale et vérifie la condition suivante :

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[X_k^-] < +\infty, \quad \text{avec } x^- = -\min(0, x),$$

alors  $(X_k)$  converge presque-sûrement vers une variable aléatoire intégrable  $X_\infty$ , et l'on a :

$$\mathbb{E}[|X_\infty|] \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[|X_k|].$$