



HAL
open science

Analyse fractale d'une famille de fonctions aléatoires: les fonctions de bosses

Yann Demichel

► **To cite this version:**

Yann Demichel. Analyse fractale d'une famille de fonctions aléatoires: les fonctions de bosses. Mathématiques [math]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2006. Français. NNT : 2006CLF21696 . tel-00250060

HAL Id: tel-00250060

<https://theses.hal.science/tel-00250060>

Submitted on 8 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : D.U. 1696

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL

U.F.R. Sciences et Technologies

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES FONDAMENTALES N° 505

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité : Mathématiques Pures

Par **DEMICHEL Yann**

D.E.A. Mathématiques

ANALYSE FRACTALE D'UNE FAMILLE DE FONCTIONS ALÉATOIRES : LES FONCTIONS DE BOSSES

Soutenue publiquement le 24 novembre 2006, devant la commission d'examen.

Président : J. Peyrière, Université Orsay-Paris Sud

Directeur : C. Tricot, Université Blaise Pascal

Co-directeur : J. Lévy Véhel, École Centrale de Nantes-INRIA

Rapporteurs :

C. Sabot, Université Lyon I

M. Dekking, Université de Delft

Examineurs :

K. Falconer, Université St Andrews

Y. Heurteaux, Université Blaise Pascal

Remerciements

C'est en assistant à un cours d'introduction aux objets fractals, lors de ma première année d'études universitaires, que j'ai rencontré Claude Tricot.

J'ai apprécié tant le contenu mathématique que la manière dont il était abordé. Deux aspects m'ont particulièrement frappé : tout d'abord, et malgré la difficulté de certaines notions, qu'il est possible d'appréhender les mathématiques de manière simple ; ensuite, qu'il faut toujours garder à l'esprit les liens qui existent entre des problèmes théoriques et des questions d'ordre pratique, liées à une finalité concrète.

C'est pour moi un immense plaisir qu'il ait accepté, quelques années après, de diriger mes recherches et j'ai essayé, à la fois dans ma démarche scientifique et dans la rédaction de ce rapport de thèse, d'être fidèle aux deux idées précédentes.

Je lui suis enfin très reconnaissant de m'avoir permis d'apprendre une certaine rigueur dans mon travail tout en me laissant une totale liberté de pensée.

Je tiens ensuite à remercier Jacques Lévy Véhel pour m'avoir également fait confiance en acceptant de co-diriger mes recherches. Ses différents points de vue sur mes travaux, ses conseils et ses suggestions m'ont été d'une grande aide. Il a aussi grandement contribué à me faire découvrir le «métier» de chercheur.

Je souhaite remercier vivement Jacques Peyrière pour son accueil et ses remarques relatives à mes recherches. Je suis d'autant plus honoré qu'il ait accepté de présider mon jury de thèse.

Je suis extrêmement flatté de l'intérêt que Kenneth Falconer a porté à mon travail. Je tiens une nouvelle fois à le remercier pour ses idées concernant les questions relatives à la dimension de Hausdorff et les conseils qu'il m'a donné. Je suis très heureux de le compter parmi les membres de mon jury.

Je remercie Yanick Heurteaux pour ses suggestions et pour les questions qu'il m'a posé, aiguillant ainsi certaines recherches. Je suis ravi qu'il participe également à mon jury.

Je veux remercier Michel Dekking et Christophe Sabot qui ont accepté de lire ce rapport de recherches, d'apprécier à travers lui mon travail de thèse et d'en avoir rendu compte. J'espère avoir trouvé suffisamment de clarté dans mon propos pour rendre leur tâche plus agréable.

Je remercie toute l'équipe du laboratoire de mathématiques de l'Université Blaise Pascal ainsi que les différents services administratifs qui ont facilité mon travail.

Je remercie mes parents qui m'ont toujours fait confiance dans le choix de mes études et qui m'ont permis de les mener à leur terme.

Je remercie Alex qui partage mon intérêt pour les mathématiques.

Enfin, je remercie particulièrement Angélique pour qui il n'a pas toujours été facile de vivre au quotidien ses trois dernières années.

Résumé

Nous étudions les séries aléatoires définies sur \mathbb{R}^D par

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/D} G(n^{1/D}(t - X_n)) ,$$

où $\alpha > 0$, G est une «bosse élémentaire» et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi. Nous commençons par discuter l'existence de séries plus générales, appelées fonctions de bosses, en soulignant le rôle de chacun des paramètres. C'est dans ce cadre que sont établies des conditions suffisantes d'intégrabilité, d'existence et de continuité.

Nous poursuivons l'étude de la régularité presque sûre des trajectoires du modèle standard et déterminons en particulier un exposant de Hölder uniforme. Nous nous intéressons alors naturellement aux dimensions fractales de son graphe Γ_F . Pour cela, nous développons des outils d'analyse généraux permettant de traiter les fonctions uniformément höldériennes. Nous énonçons des résultats concernant l'estimation des dimensions de boîte et de régularisation, et, plus généralement, d'une large classe d'indices dimensionnels, certains liés à l'analyse multifractale. Nous calculons ensuite la dimension de Hausdorff de Γ_F .

La seconde partie de notre thèse est consacrée à l'application des fonctions de bosses à la modélisation de profils rugueux. On met en évidence de nouvelles propriétés théoriques, notamment à l'aide des fonctions de structure. Celles-ci donnent naissance à des diagrammes logarithmiques, les courbes de structure, qui permettent d'analyser un signal en tenant compte des contraintes expérimentales. Elles sont utilisées pour l'identification d'une fonction de bosses et l'estimation de ses paramètres. Nous proposons pour cela de nombreuses méthodes en construisant des estimateurs adaptés.

Il est alors possible de modéliser un signal donné par une fonction de bosses. Les courbes de structure servent encore à l'élaboration de critères de conformité. Des exemples de données théoriques et expérimentales illustrent notre propos.

Mots-clés : séries aléatoires, fonctions de bosses, exposant de Hölder, indices dimensionnels, dimension de boîte, dimension de régularisation, dimension de Hausdorff, fonctions de structure, courbes de structure, estimations, identification, modélisation, surfaces rugueuses.

Abstract

We study random series defined on \mathbb{R}^D as

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/D} G(n^{1/D}(t - X_n)) ,$$

with $\alpha > 0$, G an elementary bump or pulse and $(X_n)_{n \geq 1}$ a sequence of independent random variables. First we discuss existence of more general series, named sums of pulses, emphasizing the meaning of each parameter. Sufficient conditions of existence, continuity and integrability are stated here.

We proceed with the study of path regularity and we determine a uniform Hölder exponent for F . We are naturally interested in fractal dimensions of the graph Γ_F . To this end we develop some general analysis tools suitable for Hölder continuous functions. We obtain results allowing us to estimate box-dimension, regularization dimension, and a large class of dimensional indices. Some of them are linked to multifractal analysis. We also calculate Hausdorff dimension of Γ_F .

We devote the second part of our work to applications of sums of pulses, especially to model rough surfaces. We show off new theoretic properties using structure functions. They give log-log plots that also take experimental constraints into consideration. They are used to identify a sum of pulses and estimate his parameters. We propose many methods building suitable estimators.

Then it is possible to model any given signal using sums of pulses. Structure curves are used again as adequation criterion. We give several examples of theoretic and experimental data.

Key-words : random series, sums of pulses, Hölder exponent, dimensional indices, box-dimension, regularization dimension, Hausdorff dimension, structure functions, structure curves, estimation, identification, models, rough surfaces.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
<hr/>	
Introduction	1
Chapitre 1. Fonctions de bosses : généralités	13
1.1. Préliminaires	13
1.2. Bosses élémentaires	14
1.3. Fonctions de bosses	18
1.4. Remarques générales	21
1.5. Intégrabilité	26
1.6. Existence et continuité	28
1.7. Exemple fondamental	34
1.8. Remarque	36
Chapitre 2. Fonctions de bosses : régularité	39
2.1. Accroissements et régularité globale	39
2.2. Analyse par ondelettes	47
2.3. Exposant critique	52
2.4. Correction logarithmique	55
2.5. Régularité locale	56
Chapitre 3. Indices dimensionnels	59
3.1. Introduction	59
3.2. Normes d'opérateurs	60
3.3. Dimension de boîte	64
3.4. Fonction de structure	66
3.5. Dimension de régularisation	69
3.6. Ondelettes	72
3.7. Exemple des fonctions de bosses	74
Chapitre 4. Dimension de Hausdorff	89
4.1. Généralités	89
4.2. Fonctions de bosses	91

Chapitre 5. Fonctions et courbes de structure	101
5.1. Fonctions de structure	101
5.2. Courbes de structure	102
5.3. Spectre de structure	104
5.4. Cas des séries aléatoires	105
5.5. Fonctions de Weierstrass	107
Chapitre 6. Fonctions de bosses : courbes de structure	115
6.1. Fonctions de structure d'ordre 1	115
6.2. Analyse du diagramme logarithmique	121
6.3. Fonctions de structure d'ordre 2	130
6.4. Paramètres optionnels	132
6.5. Exemple	136
Chapitre 7. Fonctions de bosses : estimation des paramètres	139
7.1. Préliminaires	139
7.2. Estimation des paramètres auxiliaires	143
7.3. Estimation des paramètres de base	151
7.4. Estimation des paramètres optionnels	169
7.5. Remarque	171
7.6. Algorithme de base	172
7.7. Exemples	175
Chapitre 8. Modélisation par une fonction de bosses	185
8.1. Modélisation d'un signal	185
8.2. Fonctions de Weierstrass	190
8.3. Midpoint Displacement Process	198
8.4. Mouvement brownien	203
8.5. Exemple de données expérimentales	209
Annexe : familles de bosses élémentaires	215
Conclusion et perspectives	223
<hr/>	
Table des figures	227
Liste des tableaux	231
Bibliographie	233
Index des notations	237

Introduction

Depuis plus d'un siècle, physiciens et mathématiciens ont proposé et étudié quantité de fonctions aux propriétés variées, sensées rendre compte de tels ou tels phénomènes, aussi bien expérimentaux que théoriques.

En 1827, le botaniste anglais R. Brown observa le mouvement, qualifié depuis de brownien, de particules de pollen en suspension dans un liquide. A cause des chocs incessants entre ces particules et les molécules du liquide, ce mouvement était en apparence très irrégulier et totalement imprévisible. En 1905, A. Einstein étudia ses propriétés physiques en suggérant qu'il était aléatoire, continu, avec des accroissements indépendants et de loi normale. Parallèlement, L. Bachelier s'intéressait à ses aspects mathématiques et proposait des applications en analyse financière. Il faudra encore attendre 20 ans pour que N. Wiener définisse le mouvement brownien dans un cadre mathématique cohérent, mais il était déjà d'un intérêt théorique et pratique indéniable.

En réponse à une interrogation mathématique, K. Weierstrass exhiba en 1875 une fonction continue mais nulle part dérivable (voir [40, 16]). De 1903 avec T. Takagi, à 1966 avec K. Kiesswetter, de nombreux autres exemples allaient être proposés. Ces fonctions, plus ou moins simples à construire, se ressemblent en ce sens qu'elles s'écrivent comme des séries, continues mais non dérivables.

Qu'ils soient aléatoires ou déterministes, tous ces modèles ont en commun le comportement hautement irrégulier de leurs accroissements. Il confère à leur graphe une géométrie particulière qui conduit aujourd'hui à les répertorier dans la famille des objets «fractals». La notion de fractalité a été élaborée et utilisée depuis 1980 pour étudier bon nombre de phénomènes naturels. Ainsi, 200 ans après l'exemple de Brown, les fonctions irrégulières séduisent toujours les scientifiques, leur offrant des modèles bien adaptés à la représentation de signaux comme l'évolution du prix d'un actif boursier ou la surface rugueuse d'un matériau plastique.

Un signal irrégulier est difficile à analyser et à reproduire fidèlement. On cherche à en extraire des informations claires qui permettent de le décrire, d'établir des comparaisons avec d'autres, voire de mettre en évidence certaines lois physiques. Il existe des méthodes qui transforment le signal pour en reconstituer un autre possédant les mêmes caractéristiques, comme la transformation de Fourier ou en ondelettes. Mais elles ne fournissent pas de paramètre qui puisse caractériser le signal d'origine.

Les paramètres caractéristiques doivent correspondre à un modèle, c'est-à-dire un signal théorique censé s'adapter au signal expérimental et dont les propriétés sont connues à l'avance. Il n'est cependant pas facile de relier un objet purement mathématique à un signal quelconque. Un bon modèle doit rester assez simple à

mettre en oeuvre tant sur le plan théorique qu'au niveau des simulations concrètes. Il doit en même temps présenter les mêmes caractéristiques que le signal d'origine, à commencer, à première vue, par lui ressembler. Sans être réellement identiques, on peut admettre que deux profils extraits d'une même surface ont des propriétés statistiques semblables et sont représentés par le même modèle. Ces considérations pratiques font préférer des modèles aléatoires.

Il y a deux manières de définir une fonction aléatoire. La première consiste en une définition implicite à l'aide d'un certain nombre de conditions qui doivent être satisfaites. C'est ainsi qu'est naturellement construit le mouvement brownien. Cette méthode permet de prescrire des propriétés, comme la continuité, que le modèle doit absolument posséder. La difficulté est toutefois de démontrer qu'une telle fonction existe, et réside donc dans le choix des conditions initiales. Une fois cette question réglée, on dispose en général de renseignements précis, comme la loi des accroissements, leur indépendance, qui permettent de bien connaître le signal. Un dernier problème, d'ordre pratique, est de simuler la fonction à partir de propriétés abstraites. Aujourd'hui encore, de nouvelles méthodes pour produire concrètement un mouvement brownien sont étudiées.

La seconde façon de procéder est de décrire la fonction au moyen d'une formule mathématique claire. Nous l'avons dit, les séries sont particulièrement appropriées. Il revient au même de disposer d'une règle de construction effective. Les systèmes de fonctions itérés (IFS) permettent par exemple de construire des graphes de fonctions continues de façon simple. Toutefois, les modèles obtenus de cette façon héritent de propriétés inhérentes à l'algorithme de construction, comme l'auto-affinité. De nombreuses fonctions relèvent des deux types précédents. La fonction de Kiesswetter est originellement définie par une série dont le terme général est relativement complexe (voir [13]) mais sa construction *via* un IFS est très simple.

C'est également le cas de la fonction de Takagi-Knopp. Elle est au départ construite de la façon suivante (voir [22, 35]). On considère le signal de base Φ , périodique, donné sur $[0, 1]$ par

$$\Phi(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ 2 - 2t & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

et on définit la fonction

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \Phi(2^n t), \quad (\alpha \in]0, 1[). \quad (1)$$

On obtient une série normalement convergente, continue, mais nulle part dérivable. Plus précisément, on peut démontrer (voir [38]) que ses accroissements vérifient en tout point $t \in [0, 1]$:

$$\sup\{|K(x) - K(y)| : x, y \in [t - h, t + h]\} \simeq h^\alpha. \quad (2)$$

Typiquement, le graphe de K est fractal (voir FIG. 1) et l'estimation précédente entraîne que sa dimension de boîte vaut $2 - \alpha$.

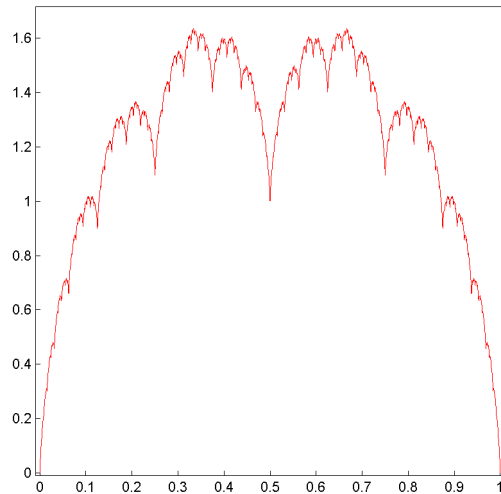


FIG. 1. Fonction de Takagi-Knopp de paramètre $\alpha = 0.75$.

D'un point de vue théorique, on comprend donc bien cette fonction, somme toute assez simple. Mais expérimentalement, il est impossible de la retenir comme un bon modèle. Son graphe, malgré ses irrégularités, présente une structure très ordonnée, totalement différente de celles qu'on peut observer dans la nature.

Cette structure géométrique sous-jacente peut être mise en évidence à l'aide des autres méthodes de construction de K . Par exemple, K satisfait à l'équation fonctionnelle

$$K(t) = \Phi(t) + 2^{-\alpha}K(2t),$$

de sorte que son graphe est invariant par un système de transformations affines et peut être obtenu par un IFS.

Elle est également liée au procédé appelé *Midpoint Displacement Algorithm* (voir [30]) permettant de construire itérativement une fonction $X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Une fois posé $X(0) = X(1) = 0$, on définit X de proche en proche sur les nombres dyadiques par

$$X(k2^{-n}) = \frac{1}{2} (X((k-1)2^{-n}) + X((k+1)2^{-n})) + d_{n,k} \quad (n \geq 1 \text{ et } k \text{ impair}),$$

où $(d_{n,k})$ est une suite de «déplacements verticaux». On connaît ainsi la valeur $X(t)$ pour tous les points $t = k2^{-n}$. Cet ensemble étant dense dans l'intervalle $[0, 1]$, il suffit d'imposer à X d'être continue pour la déterminer totalement. Le choix $d_{n,k} = 2^{-(n-1)\alpha}$ correspond précisément à $X = K$ (voir FIG. 2).

Dans cet algorithme, le «paramètre» variable est la famille $(d_{n,k})$. A chaque possibilité correspond une fonction différente. Pour obtenir des modèles originaux et réalistes, on peut choisir à l'échelle n des déplacements $d_{n,k}$ différents selon la valeur de k . Mieux, ces derniers peuvent être aléatoires. En choisissant pour $d_{n,k}$ des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0, 2^{-n})$, on obtient pour X le *pont brownien*. Wiener utilisait déjà cette méthode et elle est encore employée de nos jours pour sa simplicité de programmation informatique (voir [15]).

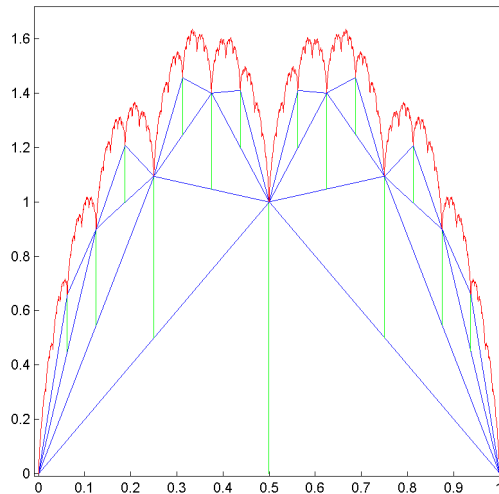


FIG. 2. La fonction de Takagi-Knopp construite à partir du Midpoint Displacement Algorithm ($\alpha = 0.75$) : en bleu l'interpolation linéaire sur les nombres dyadiques de génération n , en vert le déplacement vertical $d_{n,k}$ correspondant.

Les modèles obtenus par ce procédé sont intéressants mais souffrent de défauts théoriques lorsqu'ils s'agit de les utiliser comme modèles. Par exemple, une distribution normale des $(d_{n,k})$ rend le modèle symétrique, ce qui signifie qu'un signal comme le mouvement brownien peut être «retourné» : il sera statistiquement le même. Ceci est faux pour une surface rugueuse quelconque. On remédie à ce problème en choisissant pour $d_{n,k}$ des variables aléatoires non symétriques.

Mais d'autres problèmes subsistent : les accroissements de X sont indépendants et son graphe présente une invariance d'échelle. Une fois de plus, ces propriétés ne sont pas toujours vérifiées en pratique. Ces deux phénomènes sont directement liés à la filtration dyadique : même si $(d_{n,k})$ change, la position de ces déplacements est toujours prédéfinie. Pour briser cette structure rigide, il faut faire intervenir le hasard dans la localisation des déplacements et ne plus utiliser des «points milieux».

Pour cela, revenons à la définition d'origine de K par la formule (1). On ne s'intéresse pas aux amplitudes mais à la fonction Φ qui positionne les déplacements (de hauteur 1) sur chaque point dyadique. La façon la plus naturelle de rendre ces positions aléatoires est de déphaser le signal en définissant

$$K_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \Phi(2^n t + X_n), \quad (3)$$

où $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires, indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$. Cette nouvelle fonction conserve les propriétés de K , mais son graphe ressemble d'avantage à un profil rugueux (voir FIG. 3 à gauche). On constate toutefois une périodicité, résultant de celle de Φ , qui, en pratique, n'est pas toujours justifiée. En fait, le hasard ne joue pas un rôle suffisant, ne modifiant pas la nature de Φ . Il faut modifier le signal en profondeur.

Pour chaque $n \geq 0$, la fonction $\Phi(2^n t)$ est un peigne en dents de scie, formé d'exactly 2^n dents triangulaires. Le procédé de randomisation précédent consiste simplement à décaler chaque peigne dans son ensemble. Une manière plus fine d'opérer est de décaler chacune de leurs dents. Pour cela, on commence par extraire de Φ un motif élémentaire –la dent– en l'espèce la fonction

$$g(t) = \max\{1 - |t|, 0\}.$$

On réécrit ensuite K en mettant en évidence g pour obtenir

$$K(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \sum_{k=0}^{2^n-1} g(2^{n+1}(t - x_{n,k})), \quad (4)$$

avec $x_{n,k} = (2k+1)/2^{n+1}$. Pour tout $n \geq 0$, chaque point dyadique de génération n et de rang impair est le centre d'une dent, de sorte qu'elles se juxtaposent parfaitement. Nous allons casser cette structure régulière. L'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $[0, 1]$ et le remplit de façon uniforme. Pour mélanger aléatoirement toutes les dents, tout en restant fidèle à la série d'origine, on définit donc

$$K_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n\alpha} \sum_{k=0}^{2^n-1} g(2^{n+1}(t - X_{n,k})), \quad (5)$$

où $(X_{n,k})_{n,k \geq 0}$ est une famille de variables aléatoires, indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$. Pour la fonction K_1 , on avait à chaque échelle une variable aléatoire de position, alors que pour K_2 , on en a 2^n . Cette dernière fonction est en ce sens beaucoup plus aléatoire. Une conséquence est que son graphe est plus proche d'un profil rugueux quelconque (voir FIG. 3 à droite). La fonction K_2 soulève toutefois certains problèmes. Il n'est pas évident qu'elle conserve presque sûrement les propriétés de K , comme l'estimation des accroissements et la valeur de la dimension de son graphe. Son existence n'est d'ailleurs plus assurée, la convergence normale de la série (5) n'étant plus *a priori* garantie.

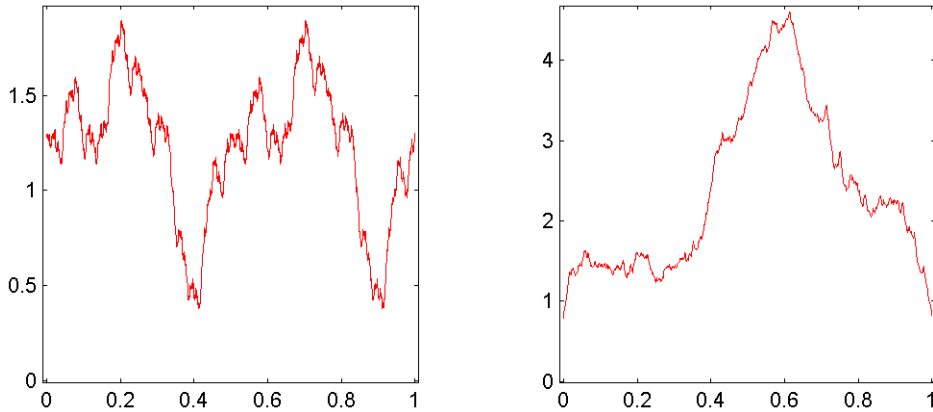


FIG. 3. La fonction de Takagi-Knopp partiellement aléatoire (à gauche) et totalement aléatoire (à droite), avec $\alpha = 0.75$.

Définissons deux suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ par tranche, de la façon suivante :

$$\forall p \geq 0 \quad \begin{cases} a_{2^p} = \cdots = a_{2^{p+1}-1} = 2^{-p\alpha} \\ b_{2^p} = \cdots = b_{2^{p+1}-1} = 2^{p+1} \end{cases}$$

et considérons la fonction

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n g(b_n(t - X_n)) , \quad (6)$$

où $(X_n)_{n \geq 1}$ est encore une suite de variables aléatoires, indépendantes et uniformément distribuées sur l'intervalle $[0, 1]$. Il est clair que F et K_2 existent simultanément et définissent la même fonction.

Plus généralement, on peut s'intéresser aux séries définies par l'équation (6) pour des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ quelconques, des variables $(X_n)_{n \geq 1}$ distribuées selon une loi ν donnée, et g un motif de base également quelconque. Ces fonctions aléatoires offrent l'avantage d'être immédiates à construire. On se donne une fonction g élémentaire de support $[-1, 1]$. On obtient F en sommant une infinité de copies de g dilatées, translatées aléatoirement et renormalisées. Ce procédé nous fait naturellement penser à des choses connues, comme les ondelettes. La formule (6) n'est d'ailleurs pas entièrement nouvelle.

En liaison avec les processus de Lévy α -stables, B.B. Mandelbrot s'est intéressé aux fonctions aléatoires définies sur \mathbb{R} par une série du type (6) (voir [25, 26]). Il considère toutefois des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ aléatoires, et le motif de base g peut être assez complexe. De nombreux développements ont été faits autour de ces processus aléatoires (voir [2, 5]). Les questions de stationnarité et de dépendance des accroissements, d'auto-affinité (la loi de (a_n, b_n, X_n) assurant l'auto-affinité est connue, elle est liée à la mesure de Lévy), ont été particulièrement abordées, tout comme le lien avec le mouvement brownien fractionnaire (voir [6, 7]).

Pour étudier une surface rugueuse, on peut en analyser différentes coupes qui seront modélisées par des graphes de fonctions à une variable. Mais, pour des raisons et théoriques et pratiques, on ne peut pas toujours procéder ainsi. Il est indispensable de disposer de modèles en dimension supérieure à 1. Pour construire une fonction $f : t = (t_1, \dots, t_D) \in \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$, on peut la définir effectivement à partir de chacune des variables t_1, \dots, t_D , ou bien directement, comme une fonction d'«une» variable t . Quoiqu'il en soit, il n'est pas si simple de définir de telles applications. Une méthode consiste à généraliser des modèles à une variable. Certaines tentatives, par exemple à partir de la fonction de Weierstrass (voir [1]), ne se sont pas montrées très concluantes. Le mouvement brownien est plus simple à étendre à \mathbb{R}^D , mais il est en pratique difficile à simuler. Une solution possible est d'utiliser le *Midpoint Displacement Algorithm*. Ce procédé se généralise par exemple à \mathbb{R}^2 en considérant les milieux de carrés au lieu de segments (voir [30]). Sous différentes variantes, il a été utilisé avec succès pour modéliser des montagnes.

L'essentiel de notre travail consiste à étudier un modèle aléatoire multidimensionnel, les *fonctions de bosses*, dont la construction est directement inspirée des idées précédentes. A partir d'un motif g simple, on définit sur \mathbb{R}^D une série F à l'aide de la formule (6). C'est le premier avantage de notre modèle : sa simplicité de construction en dimension quelconque. Notre objectif est double. En premier lieu, un modèle est avant tout un objet théorique qu'il convient d'analyser comme tel. Les premiers chapitres sont consacrés à cette étude.

On commence par définir les *bosses élémentaires* en dimension 1 (DÉF. 1.2.1), c'est-à-dire le constituant de base du modèle. Ces fonctions très simples se généralisent immédiatement à \mathbb{R}^D et permettent de construire directement le modèle multidimensionnel (DÉF. 1.3.1). La première chose à faire est alors de s'assurer de l'existence de la fonction F obtenue : c'est le théorème principal du premier chapitre (THM. 1.6.4). Nous montrerons que, si les bosses sont correctement centrées sur un compact A , et si les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n^{-1})_{n \geq 1}$ décroissent raisonnablement, alors F est presque sûrement définie en tout point de A . La continuité de F est prouvée à cette occasion. Avant cela, nous discuterons le rôle des différents paramètres et nous donnerons des conditions d'intégrabilité. Ces résultats seront énoncés dans un cadre très général. L'étude précise des trajectoires de ces processus est plus délicate de sorte que nous n'étudierons que certains modèles particuliers. Ces derniers, qualifiés de standards, sont quantitativement analogues aux fonctions de Takagi-Knopp et de Weierstrass. Ces analogies suggéreront une partie de l'analyse fractale qui suivra.

Une fois prouvée l'existence de F , la première étape d'une telle analyse est l'étude de la régularité presque sûre des trajectoires. Celle-ci peut être appréhendée de diverses façons, mais dans tous les cas, les accroissements $F(t+h) - F(t)$ occupent un rôle central. D'un point de vue purement stochastique, ils ne possèdent pas de propriétés techniquement agréables comme la stationnarité ou l'indépendance. Ils ne sont d'ailleurs en général pas non plus centrés. Il est toutefois possible de les étudier avec suffisamment de précision pour évaluer la vitesse avec laquelle ils tendent vers 0 lorsque $\|h\|$ tend vers 0. Il est très difficile d'obtenir une estimation semblable à (2). On cherche en premier lieu un contrôle moins précis du type

$$|F(t+h) - F(t)| \preceq \|h\|^H . \quad (7)$$

Nous montrerons, directement puis à l'aide des ondelettes, que sous certaines hypothèses, F vérifie (7) pour des valeurs de H dépendant des différents paramètres de la série, notamment de la régularité de son terme général (THM. 2.1.7). Nous terminerons en introduisant une notion de régularité critique et la nécessité d'une étude locale.

La théorie de la dimension est naturellement liée aux objets fractals. Etant donnée une fonction continue $f : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$, différents ensembles compacts peuvent être étudiés : les images directes $f(A)$, les images réciproques $f^{-1}(B)$, en particulier les lignes de niveau $f^{-1}(\{b\})$, et, surtout, le graphe de f . C'est ce dernier que nous allons étudier. Il faut parler non pas d'une, mais de plusieurs dimensions fractales. La première envisagée est en général la dimension de boîte. Elle est la plus simple à calculer, notamment pour le graphe d'une fonction. Celles vérifiant (7) sont dites

uniformément höldériennes. On obtient alors immédiatement une majoration de la dimension de boîte de leur graphe (voir [14]). La question de la minoration est plus délicate. En fait, nous développerons dans ce troisième chapitre des techniques générales permettant d'étudier une large gamme d'indices dimensionnels définis par la norme de certains opérateurs. Les fonctions de structure (DÉF. 3.4.1) sont un outil classique de l'analyse fractale et multifractale. Nous montrerons qu'il est possible de les définir relativement à différents opérateurs et, surtout, nous en donnerons une version discrète (DÉF. 3.3.1). L'étude de cette dernière est nettement plus simple et permet d'obtenir, pour des fonctions vérifiant (7), de bons encadrements des indices associés (THM. 3.2.4). La spécialisation des opérateurs permettra alors d'obtenir des encadrements de la dimension de boîte du graphe de f (PROP. 3.3.3) et de sa dimension de régularisation (COR. 3.5.2). Les ondelettes interviendront de nouveau et permettront de prouver que, sous certaines conditions, les deux dimensions précédentes coïncident (PROP. 3.6.2). Cette proposition fait intervenir les indices particuliers associés aux fonctions de structure. Ils seront étudiés plus spécifiquement et nous montrerons leurs liens avec l'analyse multifractale et la fonction τ . Tous les résultats précédents étant vrais pour les fonctions vérifiant (7), il sera tout naturel de les appliquer à notre modèle fondamental. Ainsi, nous déterminerons la dimension de boîte et de régularisation du graphe d'une fonction de bosses (PROP. 3.7.12 et 3.7.13, COR. 3.7.15). Pour cela, nous étudierons les fonctions de structure (discrètes) de F et les indices associés.

Le chapitre suivant est plus spécifique aux fonctions de bosses. Il s'intéresse à une autre dimension fractale, la dimension de Hausdorff $\dim_{\mathbb{H}}(\Gamma_F)$ du graphe de F . On en obtient une majoration grâce à la dimension de boîte calculée précédemment. L'égalité est naturellement conjecturée, mais il est relativement difficile de la prouver. Il faut obtenir une minoration. Pour cela, un outil efficace est le «critère de l'énergie finie». Il consiste à construire une mesure portée par le graphe de F d'énergie finie. Cette méthode est utilisée avec succès pour les fonctions de Weierstrass aléatoires (voir [18]). Ici, le terme général de la série F ne permet pas d'utiliser directement les mêmes arguments. Il est toutefois possible, comme l'a montré Kenneth Falconer, d'adapter ces idées (voir [11]). Ainsi, nous donnerons une minoration de $\dim_{\mathbb{H}}(\Gamma_F)$ pour une large classe de fonctions de bosses (THM. 4.2.7). La démonstration peut être adaptée pour traiter plus généralement les séries aléatoires souffrant du même défaut que F .

Ces quatre premiers chapitres nous fournissent les principales propriétés théoriques et fractales de notre modèle. L'objectif de la seconde moitié de notre thèse est de prouver que les fonctions de bosses ne sont pas seulement intéressantes comme objet formel, mais qu'elles sont aussi efficaces sur le plan applicatif. L'utilisation expérimentale de fonctions mathématiques n'est pas sans soulever des problèmes. Lorsqu'elles sont obtenues de façon itérative, par des passages à la limite (séries, IFS, etc), ces fonctions ne sont pas parfaitement retranscrites. On ne dispose que d'une approximation légèrement déformée de la réalité. Ainsi, un modèle sera obtenu en pratique à partir d'une fonction de bosses en considérant une somme partielle de la série définissant F . Il faut tenir compte de ce fait, et étudier à partir de maintenant de telles sommes finies.

Le chapitre 5 est une transition idéale entre théorie et pratique. Nous considérons à nouveau les fonctions de structure. Nous allons les utiliser d'une autre façon, en commençant par modifier leur définition (DÉF. 5.1.1). Nous construisons à partir d'elles des objets fondamentaux pour l'étude d'un signal : les courbes de q -structure d'ordre $i \in \{1, 2\}$. En pratique, en plus des problèmes mentionnés précédemment, il faut se souvenir qu'un signal est toujours discrétisé. Un avantage des courbes de structure est qu'elles sont définies par rapport à une telle discrétisation et qu'elles restent pertinentes sur le plan théorique. Après les avoir définies, nous expliquons comment utiliser concrètement ces courbes. De tels diagrammes logarithmiques ont déjà été utilisés dans l'étude expérimentale des signaux, par exemple pour estimer la dimension fractale de leur graphe. Nous nous intéressons plus particulièrement aux cas des séries aléatoires. Nous décrivons la façon d'en déterminer les courbes de 2-structure en espérance. Nous concluons ce chapitre en traitant l'exemple des fonctions de Weierstrass aléatoires pour lesquelles il est possible de déterminer explicitement les courbes de structure. Leur analyse met au jour des comportements caractéristiques que nous retrouvons pour les fonctions de bosses.

Précisément, le chapitre suivant a pour but de calculer les fonctions de structure «déterministes» d'une fonction de bosses, et d'analyser les courbes correspondantes. Il est nécessaire de se restreindre à certaines lois ν à densité pour le centrage des bosses aléatoires. Relativement à ces courbes, nous mettons en évidence différentes propriétés : biais systématique de la pente en 0, transitions remarquables, existence d'un palier constant. Elles servent en particulier à l'estimation des paramètres de F .

Nous l'avons dit, nous souhaitons proposer les fonctions de bosses comme modèle, notamment de profils rugueux. Etant donné un tel signal expérimental, une fois décidée une modélisation par fonctions de bosses, deux problèmes se posent.

Tout d'abord, il faut être en mesure de déterminer concrètement un modèle, c'est-à-dire d'identifier la fonction de bosse. Plus généralement, il s'agit pour cela d'être en mesure d'estimer les paramètres d'une fonction de bosses donnée. Ces derniers sont nombreux et variés, certains sont purement numériques (exposant α), d'autres complexes (loi de probabilité ν , fonction g). Nous introduisons de plus des paramètres auxiliaires que nous cherchons à estimer en premier. Toutes les estimations doivent pouvoir être faites à partir de n'importe quel signal discrétisé. Le but n'est toutefois pas de réaliser une étude statistique stricte en construisant de «vrais» estimateurs. Nous donnons un ensemble de formules et de procédés permettant d'obtenir de bonnes valeurs approchées des différents paramètres. Pour cela, nous exploitons l'ensemble des résultats établis dans les chapitres précédents. Les propriétés d'intégration permettent de déterminer la loi ν (§ 7.3.1), l'exposant α est interprété en terme de dimension (§ 7.3.3), etc. Les courbes de structure étudiées préalablement sont largement mises à profit pour estimer certains paramètres auxiliaires. Nous proposons à cette occasion des modèles de courbes de structure qui s'appuient sur leurs caractéristiques fondamentales (§ 7.2.2). Pour d'autres, il faut développer des techniques *ad hoc*. Un problème difficile est la détermination du motif de base g . Cette fonction détermine la morphologie interne du modèle, son rôle est capital. Nous proposons des modèles paramétriques pour lesquels g est supposée

appartenir à une famille donnée de bosses élémentaires (§ 7.3.4). L'aboutissement de ce chapitre est une procédure algorithmique générale d'estimation de la totalité des paramètres d'une fonction de bosses standard (section 7.6). Nous ne saurions terminer ce chapitre sans exemples concrets. Ainsi, étant donnée une fonction de bosses inconnue, est-on effectivement capable d'en retrouver les paramètres avec une erreur acceptable ? En fait, de nombreux tests ont été réalisés pour chaque estimateurs. Nous ne pouvons ici tous les décrire. Nous nous contentons de donner les résultats pour certains. Par contre, nous proposons trois exemples significatifs pour illustrer l'estimation globale.

Le second problème consiste à évaluer la légitimité du modèle obtenu. Nous n'avons encore rien dit sur la façon d'apprécier la qualité des estimations précédentes. Lorsqu'on modélise des fonctions de bosses, on peut simplement comparer les différents paramètres exacts avec ceux estimés. Nous le ferons, mais ceci ne sera bien sûr plus possible lorsqu'on étudie des signaux quelconques. Aussi, nous utilisons dès lors un autre critère. L'adéquation d'un modèle à la réalité doit se faire selon des critères spécifiés à l'avance. La qualité d'un modèle est donc une notion toute relative. Tout en restant significatif, un bon critère ne doit pas être trop drastique au risque de rejeter des modèles intéressants. Nous utilisons une fois de plus les courbes de structure (voir section 5.3 et § 8.1.4). Des fonctions identiques ont des courbes identiques. Notre règle sera la suivante : nous comparons les courbes de q -structure d'ordre i du modèle et de l'original pour différentes valeurs de q . Les signaux sont déclarés indiscernables lorsque l'analyse des courbes révèle suffisamment de points communs significatifs. Ces derniers, comme les valeurs de q , sont laissés au choix de l'expérimentateur. Ils peuvent être dictés par le type d'erreur que l'on veut contrôler, ou par les renseignements que l'on souhaite obtenir du signal à partir de son modèle. Finalement, les différents exemples montrent que les estimateurs sont relativement performants.

Fort de ces résultats optimistes, nous terminons notre thèse en discutant la modélisation effective d'un signal donné quelconque par une fonction de bosses. En pratique, un tel signal ne peut pas être modélisé directement. Nous décrivons une façon de le traiter préalablement. Ceci étant fait, nous pouvons en déterminer un modèle. La procédure du chapitre précédent est la clé de voûte de cette recherche. Nous l'utilisons en fait sous une forme simplifiée. Les premiers signaux que nous étudions sont bien connus, nous les avons précisément rencontrés au fil de cette introduction : fonctions de Weierstrass (section 8.2), fonctions construites grâce au *Midpoint Displacement Algorithm* (section 8.3) et mouvement brownien (section 8.4). Ces signaux restent malgré tout encore théoriques. Indépendamment de toute procédure, nous proposons d'ailleurs une modélisation *a priori* fondée sur des constatations théoriques. Les résultats obtenus sont de bonne qualité. Les fonctions de bosses permettent de reproduire ces signaux, elles sont un modèle très acceptable. Nous confrontons donc enfin notre modèle à la réalité en étudiant un signal concret, obtenu à partir de données expérimentales (section 8.5). Nous expliquons les problèmes rencontrés et envisageons diverses solutions. Sans être parfaits, les résultats sont prometteurs.

Nous regroupons en annexe différents résultats, tous très techniques et donnés pour la plupart sans démonstration, relatifs aux différentes bosses élémentaires que nous utilisons tout au long des huit chapitres. Le lecteur est également invité à se référer à un index de notations, générales ou spécifiques, les plus utilisées.

Enfin, nous présentons en guise de conclusion les prolongements possibles de notre travail et différents thèmes de recherches futures qu'ils suggèrent.

CHAPITRE 1

Fonctions de bosses : généralités

1.1. Préliminaires

Dans toute la suite on se place dans \mathbb{R}^D ($D \geq 1$) et on note $\{e_1, \dots, e_D\}$ sa base canonique d'espace vectoriel réel de dimension finie D . Il est muni de sa topologie usuelle, induite par une norme $\|\cdot\|$ quelconque. Nous choisissons par commodité la norme du maximum :

$$\forall t = (t_1, \dots, t_D) \quad \|t\| = \max\{|t_i| : i \in \{1, \dots, D\}\}.$$

Lorsque $D = 1$, cette norme est simplement la valeur absolue liée à l'ordre naturel sur \mathbb{R} par : $|x| = \max\{-x, x\}$. La partie entière d'un réel x est définie comme le nombre entier

$$[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}.$$

Enfin, la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ sera munie de sa topologie d'espace métrique.

Etant donné un espace mesuré (E, \mathcal{B}, μ) , un ensemble mesurable N est dit négligeable lorsque $\mu(N) = 0$. La tribu \mathcal{B} sera supposée complétée, et l'expression «presque partout» fera, comme il est d'usage, référence à une propriété vraie à un ensemble négligeable près. Lorsque E est un espace métrique, \mathcal{B} sera la tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$: elle est engendrée par la classe des ouverts de E . Un borélien est un ensemble $B \in \mathcal{B}(E)$. La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}^D, \mathcal{B}(\mathbb{R}^D))$ est notée λ_D ou plus simplement λ s'il n'y a pas de risque de confusion. Le volume d'un ensemble mesurable A est par définition $\lambda(A)$. Un pavé de \mathbb{R}^D est un produit de D intervalles compacts. Par exemple, la boule fermée de centre $t \in \mathbb{R}^D$ de rayon $\varepsilon > 0$ pour $\|\cdot\|$ est le pavé

$$B(t, \varepsilon) = \prod_{i=1}^D [t_i - \varepsilon, t_i + \varepsilon].$$

C'est un borélien de volume $(2\varepsilon)^D$. La boule unité est le cube $B(0, 1) = [-1, 1]^D$.

RÈGLES DE COMPARAISON

Dans la suite, nous travaillerons continuellement avec des quantités $Q(\varepsilon)$ qui convergent vers 0 si ε tend vers 0 : par exemple le volume de $B(t, \varepsilon)$. Il va très vite être nécessaire d'évaluer la vitesse de convergence vers 0 de telles fonctions, et de les comparer.

Soient $Q_1, Q_2 :]0, 1] \rightarrow]0, 1]$ deux fonctions telles que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_2(\varepsilon) = 0.$$

Nous utiliserons les règles usuelles suivantes :

- $Q_1 \preceq Q_2$ signifie que le quotient Q_1/Q_2 est borné supérieurement,
- $Q_1 \succcurlyeq Q_2$ signifie que le quotient Q_1/Q_2 est minoré par une constante strictement positive,
- $Q_1 \simeq Q_2$ signifie que les deux propriétés précédentes sont satisfaites. Dans ce cas, il existe des constantes $C_i > 0$ telles que $C_2 \leq Q_1(\varepsilon)/Q_2(\varepsilon) \leq C_1$.

Toutes ces propriétés s'entendent au voisinage de 0. Par exemple le volume de $B(t, \varepsilon)$ est équivalent à ε^D . Avec des modifications *ad hoc*, ces règles s'utiliseront aussi au voisinage de $+\infty$, pour les suites de nombres réels, etc.

Lorsqu'on dispose d'une seule fonction, il est important pour étudier son comportement, de pouvoir la comparer à des fonctions de référence. Il faut donc disposer d'une échelle de comparaison. Par définition, une échelle de comparaison est une famille de fonctions telle que deux éléments quelconques soient toujours comparables. L'exemple le plus simple et le plus utilisé est la famille des fonctions puissance $\{x \mapsto x^H : H > 0\}$. Comparer deux éléments de cette famille revient à comparer leur exposant. On dispose aussi d'un moyen simple pour classer une fonction Q dans cette échelle. On dira par extension que Q a l'ordre de croissance H si et seulement si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log Q(\varepsilon)}{\log \varepsilon} = H.$$

Par exemple le volume $Q(\varepsilon)$ de $B(t, \varepsilon)$ a l'ordre de croissance D . Enfin, en considérant des exposants négatifs, cette famille permet de comparer des fonctions aux voisinages de $+\infty$.

1.2. Bosses élémentaires

Nous allons maintenant définir les «bosses» qui sont à la base de notre modèle, c'est-à-dire l'analogie de la dent pour la fonction de Takagi-Knopp.

DÉFINITION 1.2.1. On appelle *bosse élémentaire* toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les cinq conditions suivantes :

- g a pour support $[-1, 1]$,
- g est paire,
- g est décroissante sur \mathbb{R}^+ ,
- g est positive,
- $g(0) = 1$.

Rappelons que le support de g est l'ensemble fermé défini par

$$\text{Supp}(g) = \text{adh} \{t \in \mathbb{R} : g(t) \neq 0\},$$

où *adh* désigne l'adhérence d'une partie de \mathbb{R} .

Une bosse élémentaire est entièrement définie par sa donnée sur $[0, 1]$. Dans la suite, il sera sous-entendu que g est obtenue par parité à partir de l'expression donnée. Ces fonctions sont très simples, nous n'imposons au départ aucune propriété supplémentaire. On dispose ainsi d'une très grande diversité de fonctions. Voici quelques exemples simples (voir FIG. 1.1).

PREMIERS EXEMPLES

1) La fonction indicatrice d'une partie B de \mathbb{R}^D est notée $\mathbb{1}_B$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^D \quad \mathbb{1}_B(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction indicatrice $g = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ est donc l'exemple le plus simple de bosse élémentaire. Elle n'est pas continue.

2) La bosse triangle $g(t) = 1 - |t|$: elle n'est dérivable ni au sommet ($t = 0$) ni aux bornes de son support ($|t| = 1$) mais elle admet des dérivées à droite et à gauche bornées.

3) La bosse demi-cercle $g(t) = \sqrt{1 - t^2}$: elle est dérivable au sommet mais admet des tangentes verticales en $t = \pm 1$.

4) La bosse $g(t) = \cos^2(\pi t/2)$: elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

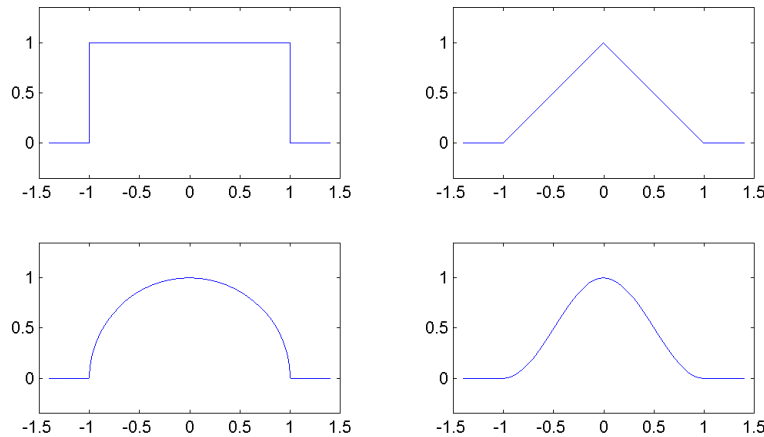


FIG. 1.1. Exemples de bosses élémentaires.

D'autres propriétés peuvent être demandées : convexité, symétrie ($g = g^{-1}$ sur $[0, 1]$), etc. La richesse de la classe de ces fonctions conduira à des modèles variés. Les familles de bosses élémentaires que nous utiliserons sont présentées avec leurs caractéristiques en annexe. Leurs propriétés immédiates découlent de leur définition. Par exemple, toute bosse élémentaire g est continue sur \mathbb{R} , sauf sur un ensemble au plus dénombrable de points ; dérivable presque partout ; intégrable sur \mathbb{R} avec $\int_0^1 g(t)dt$ appartenant à $[0, 1]$, etc.

On a également des résultats structurels. Par exemple, la famille des bosses élémentaires est stable par multiplication et par combinaisons linéaires convexes. On peut alors facilement construire, à partir de bosses simples, de nouvelles bosses plus complexes. On peut d'ailleurs imaginer de nombreux procédés de fabrication. Nous allons en décrire un particulier .

On se donne une suite décroissante $(t_n)_{n \geq 0}$ avec $t_0 = 1$, $t_n \rightarrow 0$; une suite croissante $(c_n)_{n \geq 0}$ avec $c_0 = 0$, $c_n \rightarrow 1$; et enfin une suite $(g_n)_{n \geq 1}$ de bosses élémentaires. Le principe est de recalibrer g_n pour la «tracer» dans le rectangle $[t_n, t_{n-1}] \times [c_{n-1}, c_n]$. On pose pour cela

$$\forall t \in [0, 1] \quad h_n(t) = (c_n - c_{n-1}) g_n \left(\frac{t - t_n}{t_{n-1} - t_n} \right) + c_{n-1}.$$

On définit alors la bosse élémentaire g par $g(0) = 1$ et

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \mathbb{I}_{]t_n, t_{n-1}]}(t). \quad (1.1)$$

Notons que les suites $(t_n)_{n \geq 0}$ et $(c_n)_{n \geq 0}$ peuvent être stationnaires : dans ce cas la somme ci-dessus est finie.

Si une bosse élémentaire est toujours relativement régulière, on peut avoir des cas extrêmes, comme le montrent les exemples suivants.

EXEMPLES SPÉCIFIQUES

1) On considère la fonction h définie par

$$h(t) = \begin{cases} \exp(-1/t) & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle est indéfiniment dérivable et plate en 0. On obtient une bosse de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} en considérant la fonction $g(t) = e^2 h(1+t)h(1-t)$.

2) On se donne une suite strictement décroissante $(\delta_n)_{n \geq 0}$ de réels telle que $\delta_0 = 1$ et $\delta_n \rightarrow 0$. On considère l'ensemble de Cantor K_δ associé. Il s'agit de l'ensemble compact, parfait, de mesure nulle :

$$K_\delta = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n,$$

où K_n est construit par récurrence de la façon suivante. On pose $K_0 = [0, 1]$. Pour $n \geq 0$, l'ensemble K_n est la réunion de 2^n intervalles compacts disjoints de longueur $2^{-n}\delta_n$. On ôte un intervalle au centre de chacun d'eux de sorte que les 2^{n+1} segments restants aient pour longueur $2^{-(n+1)}\delta_{n+1}$. Alors K_{n+1} est la réunion de ces 2^{n+1} segments. On obtient $K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_\delta$ et $\lambda(K_n) = \delta_n$.

On définit sur $[0, 1]$ la fonction g_n affine par morceaux :

$$g_n(t) = \frac{1}{\delta_n} \int_0^{1-t} \mathbb{I}_{K_n}(x) dx.$$

On obtient une fonction décroissante, constante sur chaque intervalle du complémentaire de K_n vérifiant $g_n(0) = 1$ et $g_n(1) = 0$. La fonction g_n est une bosse élémentaire

et on prouve facilement que $(g_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers une fonction g_δ qui est encore une bosse élémentaire continue. Par construction $g'_\delta = 0$ presque partout puisque $g'_\delta(t) = 0$ pour tout $t \notin K_\delta$. Pour $\delta_n = (2/3)^n$, K_δ est l'ensemble triadique de Cantor et g_δ est souvent appelée «escalier du diable» (voir FIG. 1.2).

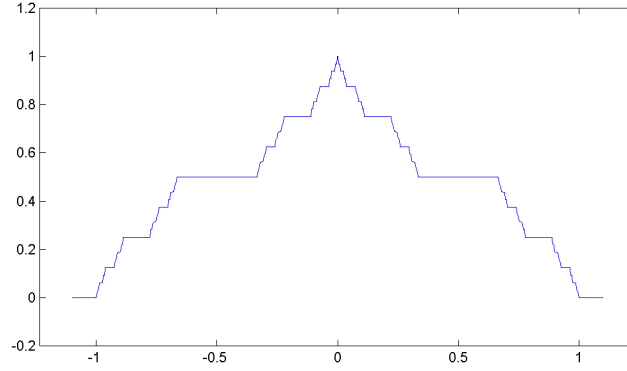


FIG. 1.2. La bosse élémentaire «Escalier du diable».

3) On obtient des bosses aux discontinuités $(t_n)_{n \geq 1}$ prescrites en utilisant la méthode de construction présentée avant ces exemples. On choisit $g_n = \mathbb{1}_{[-1,1]}$ pour tout $n \geq 1$. On obtient la fonction

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathbb{1}_{]t_n, t_{n-1}]}(t).$$

Elle est constante par morceaux et discontinue en chaque t_n .

L'un des points faibles des modèles existants, nous l'avons signalé, est d'être originellement construits dans \mathbb{R} , leur extension à plusieurs variables étant alors délicate. Nous n'aurons pas ce problème, les bosses élémentaires se généralisant immédiatement à \mathbb{R}^D . Si plusieurs façons de procéder existent, la plus naturelle est de partir des bosses construites en une variable.

DÉFINITION 1.2.2. On appelle *bosse élémentaire à $D \geq 1$ variables* toute fonction $G : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^D \quad G(t) = g(\|t\|_G),$$

où g est une bosse élémentaire au sens de la définition 1.2.1 et $\|\cdot\|_G$ une norme sur \mathbb{R}^D dont la boule unité $B_G(0, 1)$ est contenue dans $[-1, 1]^D$.

La géométrie d'une telle bosse est donc régie par deux «paramètres», une fonction g et une norme $\|\cdot\|_G$, chacun intervenant de façon concrète, notamment dans sa régularité (voir FIG. 1.3). La norme peut être choisie par exemple parmi la famille classique suivante :

$$\forall t = (t_1, \dots, t_D) \quad \|t\|_p = \left(\sum_{i=1}^D |t_i|^p \right)^{1/p}.$$

EXEMPLES

- 1) Choisissons d'abord pour g la bosse triangle.
 - Pour $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_1$, on obtient une pyramide à base carrée.
 - Pour $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_2$, on obtient un demi-cône à base circulaire.
- 2) Choisissons ensuite pour g la bosse demi-cercle.
 - Pour $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_1$, on obtient un dôme à base carrée.
 - Pour $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_2$, on obtient une demi-sphère.

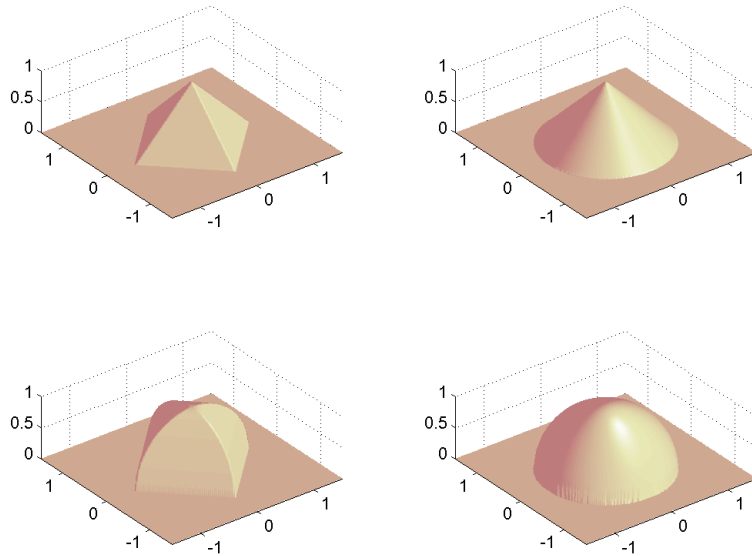


FIG. 1.3. Exemples de bosses élémentaires à deux variables.

La seule hypothèse faite sur $\|\cdot\|_G$ assure que les propriétés de G se déduisent de celles de la bosse g dont elle est issue. Par exemple

$$\text{Supp}(G) = \{t \in \mathbb{R}^D : \|t\|_G \in \text{Supp}(g)\} = B_G(0, 1).$$

Par suite :

$$\forall t \in \mathbb{R}^D \quad 0 \leq G(t) \leq \mathbb{1}_{[-1,1]^D}(t).$$

La généralisation à \mathbb{R}^D est donc particulièrement simple. Les combinaisons des fonctions g et des normes $\|\cdot\|_G$ garantissent de nombreux modèles différents. On peut toutefois définir des bosses élémentaires plus complexes en utilisant des fonctions $\|\cdot\|_G$ plus générales. Un exemple simple est de choisir $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_p$ pour $p \in]0, 1[$. Dans ce cas ce n'est plus une norme sur \mathbb{R}^D mais la bosse G correspondante est encore acceptable : tous les résultats que nous établirons seront encore vrais. Il faut aussi noter que les bosses élémentaires obtenues sont isotropes : la valeur de $G(t)$ ne dépend que du rayon $\|t\|_G$. Cette hypothèse géométrique pourrait ne pas être justifiée en pratique. A des fins de modélisation, il est possible de considérer des bosses asymétriques.

1.3. Fonctions de bosses

Nous pouvons maintenant définir les fonctions que nous étudierons. En fait, nous nous limiterons à un modèle simple qui sera suffisant pour les applications. Toutefois, de nombreuses variantes et généralisations sont possibles. Nous en mentionnerons quelques unes en conclusion.

L'idée de départ est simple. On dispose d'une famille de bosses élémentaires dilatées et renormalisées. A grossièrement parler, on les «jette» au hasard sur \mathbb{R}^D puis on les ajoute. On s'interroge alors sur les propriétés mathématiques de l'objet résultant de ce procédé sommatoire.

Avant de répondre à cette question, il faut formaliser proprement les idées précédentes et commencer par définir un cadre probabiliste. On fixe dans la suite un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, \mathcal{F} étant supposée complète. On appellera *variable aléatoire* toute application $X : \Omega \rightarrow E$ telle que

$$\forall B \in \mathcal{B}(E) \quad (X \in B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F},$$

E désignant un espace métrique, généralement \mathbb{R}^D ou $\overline{\mathbb{R}}$. La loi de X est la mesure image de \mathbb{P} par X , notée \mathbb{P}_X , et définie par :

$$\forall B \in \mathcal{B}(E) \quad \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B).$$

Enfin, l'espérance de X est notée $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_E x d\mathbb{P}_X(x).$$

Les autres définitions et résultats usuels de la théorie de la mesure sont supposés connus. Nous préciserons certains faits si nécessaire.

Etant donné un pavé non vide $A \subset \mathbb{R}^D$, on appellera *processus stochastique* toute application $f : \Omega \times A \rightarrow E$ telle que

- Pour tout $t \in A$, $f(\cdot, t)$ est une variable aléatoire,
- Pour tout $\omega \in \Omega$, $f(\omega, \cdot)$ est une fonction, appelée *trajectoire* de f ,
- f est mesurable pour la tribu produit $\mathcal{F} \times \mathcal{B}(A)$.

L'étude des processus stochastiques soulève certaines difficultés théoriques, nécessitant des précautions supplémentaires (comme la dernière condition technique ci-dessus). Nous ne les détaillerons pas (voir [27, 31]), et elles n'interviendront pas réellement dans la suite. En fait, un processus stochastique peut être vu plus simplement comme une famille d'applications paramétrées par un paramètre aléatoire : à chaque $\omega \in \Omega$, on associe la fonction $f : t \in A \mapsto f(\omega, t)$. C'est ce point de vue qui est adopté ici. On parlera ainsi de *fonction aléatoire* pour désigner f , en omettant l'écriture de ω .

Ces précisions faites, nous pouvons donner la définition très générale suivante :

DÉFINITION 1.3.1. Etant données deux suites de réels strictement positifs $(a_n)_{n \geq 1}$ strictement décroissante vers 0, et $(b_n)_{n \geq 1}$ strictement croissante vers $+\infty$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ν , et G une bosse

élémentaire, on appelle *fonction de bosses* la fonction F définie sur \mathbb{R}^D par :

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G(b_n(t - X_n)) . \quad (1.2)$$

Les fonctions de bosses se présentent donc sous la forme de séries aléatoires. Le terme général est obtenu en choisissant une bosse élémentaire G dont le support et la hauteur sont respectivement dilatés d'un facteur $1/b_n$ et a_n . Ces quantités tendent vers 0 : les bosses sont de moins en moins larges et hautes. Enfin, leur centre est choisi aléatoirement dans \mathbb{R}^D . Visualisons pour $D = 1$ la construction de F associée aux paramètres $a_n = n^{-0.8}$, $b_n = n$, avec G la bosse triangle et ν la probabilité uniforme sur $[-1, 2]$. La figure 1.4 montre le graphe de F obtenue après la somme des 100 premières bosses $a_n G(b_n(t - X_n))$.

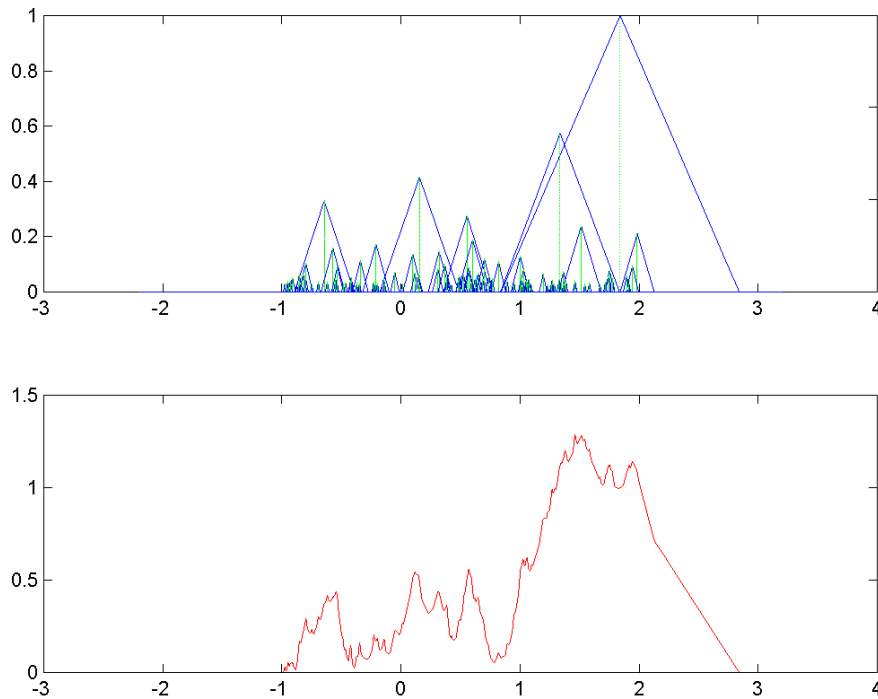


FIG. 1.4. Graphe d'une fonction de bosses dans \mathbb{R} après la somme des 100 premières bosses de forme triangulaire et centrées uniformément dans $[-1, 2]$ (de bas en haut).

Nous allons donner dans ce chapitre les premières propriétés des fonctions de bosses. Nous n'avons encore rien dit sur la validité de la formule (1.2). Ainsi écrite, il est clair que F est une fonction aléatoire, *a priori* à valeurs dans $[0, +\infty]$. Il est entendu que F n'aura de l'intérêt que si elle est à valeurs finies, c'est-à-dire lorsque la série (1.2) converge.

De nombreuses fonctions sont définies comme des séries aléatoires qui convergent partout, presque partout, presque sûrement, etc. (voir [21]). Pour les fonctions de Takagi-Knopp par exemple, quelque soit l'aléa ω , la série (3) converge normalement,

et la question de l'existence est réglée. Ceci est assez rare pour une fonction aléatoire quelconque, qui, en général, n'est bien définie qu'à un ensemble négligeable près. Ainsi nous cherchons des conditions suffisantes assurant l'existence, c'est-à-dire ici la finitude presque sûre des trajectoires de F . Il s'agit donc d'étudier les cas où F est bornée. Rappelons qu'une fonction $f : A \subset \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée si $\|f\|_\infty < \infty$ où

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| : t \in A\}.$$

Le procédé sommatoire consistant à empiler des bosses jetées au hasard, il semble clair que cela ne va pas dépendre de la forme de G mais seulement de la hauteur a_n des bosses et du nombre de bosses tombant les unes sur les autres. Ce dernier nombre dépend à la fois de la largeur b_n des bosses et de la distribution ν de leur centre. Dans la suite, nous nous intéresserons à F pour $t \in A$, où A est un pavé. Toute fonction définie et continue sur un compact étant bornée, nous étudierons dans le même temps la continuité de F .

1.4. Remarques générales

L'objectif des premiers chapitres est de répondre aux deux questions suivantes :

1. *Etant donné un pavé A , quelles conditions doivent vérifier les différents paramètres pour que F existe sur A , et quelles sont alors ses propriétés ?*
2. *Etant donnés deux pavés A et B , lorsque F existe, possède-t'elle les mêmes propriétés sur A et sur B ?*

Pour simplifier, nous supposons que pour toute bosse G on a $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|$. Mais l'équivalence des normes en dimension finie et l'hypothèse $B_G(0, 1) \subset B(0, 1)$ assurent que les résultats que nous énoncerons sont vrais sans autre restriction sur $\|\cdot\|_G$. Cette section est consacrée à des remarques générales résultant de la définition des fonctions de bosses. Elles nous guideront dans le choix des bonnes hypothèses à émettre pour avoir un modèle intéressant tant sur le plan théorique qu'appliqué.

La première condition d'existence est immédiate : si la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est sommable, alors la série (1.2) converge normalement. Elle définit donc sûrement une fonction qui est continue lorsque la bosse G l'est.

Dans ce cas, le hasard n'intervient pas, ce qui peut sembler frustrant. De plus, la fonction obtenue risque d'être relativement régulière et d'un intérêt limité (voir FIG. 1.5). En fait, on peut espérer que le positionnement aléatoire des bosses permette d'utiliser des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ qui décroissent lentement. Nous allons donc commencer par étudier la distribution des bosses.

Dans la suite, A est un pavé non vide de \mathbb{R}^D . Pour $\varepsilon > 0$ on note $A(\varepsilon)$ le ε -voisinage de Minkowski de A . C'est le pavé contenant A défini comme

$$A(\varepsilon) = \{t \in \mathbb{R}^D : \text{dist}(t, A) \leq \varepsilon\},$$

la distance étant celle subordonnée à $\|\cdot\|$:

$$\text{dist}(t, A) = \inf\{\|t - s\| : s \in A\}.$$

1.4.1. Distribution des bosses

La loi commune ν des centres des bosses va jouer un rôle fondamental, puisqu'elle va contrôler tant l'existence de F que sa régularité. Intuitivement, pour que F soit bornée, il est nécessaire que les bosses soient bien réparties, au sens où elles ne s'accumulent pas sur certains points.

Pour $a \in A$ notons δ_a la mesure de Dirac au point a : c'est la probabilité sur \mathbb{R}^D définie par

$$\forall B \subset \mathbb{R}^D \quad \delta_a(B) = \mathbb{1}_B(a).$$

Si $\nu = \delta_a$ alors toutes les bosses ont le même centre et

$$\|F\|_\infty = F(a) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

L'existence de F est alors équivalente à la convergence normale de la série (1.2). Dans ce cas, F est bien définie quelque soit la suite $(b_n)_{n \geq 1}$. Elle a l'allure d'une bosse, en particulier pour $a = 0$ et $\sum_{n \geq 1} a_n = 1$, F est exactement une bosse élémentaire (voir FIG. 1.5).

Plus généralement, si ν est une combinaison linéaire finie (ou dénombrable) de telles mesures, alors on oblige une infinité de bosses à s'empiler sur certains points et F n'est pas définie en ces points si $\sum a_n$ diverge. La première condition d'existence de F , à savoir :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

peut donc être nécessaire.

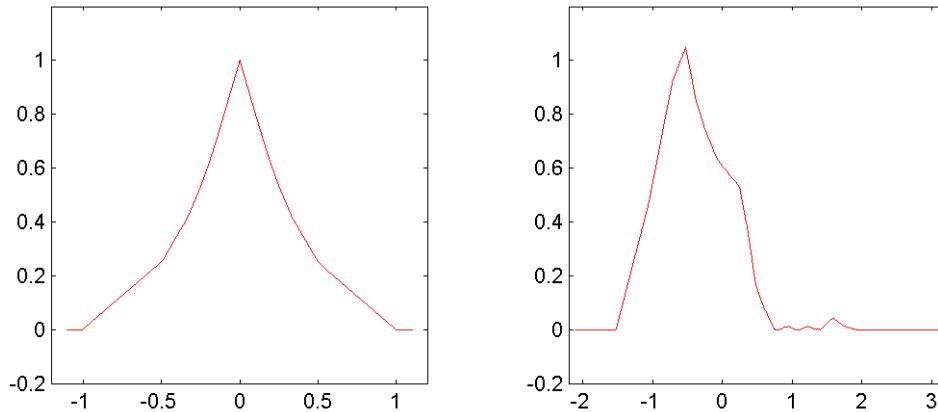


FIG. 1.5. Graphes de deux fonctions de bosses très régulières : $\nu = \delta_0$ et $a_n = 2^{-n}$ (à gauche) ; $\nu = \mathcal{U}([-1, 2])$ et $a_n = n^{-2}$ (à droite).

Pour se passer de cette hypothèse, il faut chercher des conditions sur ν qui permettent de contrôler les possibilités d'empilements des bosses les unes sur les autres.

On dit que ν est portée par un ensemble $B \in \mathcal{B}$ si

$$\nu(B^c) = 0 \quad (B^c \text{ désignant le complémentaire de } B).$$

On a alors

- $\nu(B) = \|\nu\| = \nu(\mathbb{R}^D) = 1$,
- $\forall A \in \mathcal{B} \quad \nu(A) = \nu(A \cap B)$.

En particulier, le support de ν , noté $\text{Supp}(\nu)$, est le plus petit ensemble fermé F portant ν . Cet ensemble va contenir les centres des bosses. Si ν est telle que $\nu(B) = 0$ pour $B \subset A$, alors F sera nulle sur B (sauf éventuellement aux «bords») puisqu'aucune bosse n'est centrée dans B . C'est justement une accumulation de bosses (à supports étroits) qui donnera son irrégularité à F . Ainsi, il est naturel d'imposer à ν deux conditions, apparemment contradictoires, pour contrôler ces phénomènes. Nous allons définir des quantités permettant d'évaluer la qualité de ν aux sens précédents, c'est-à-dire la probabilité de trouver une bosse dans un pavé de volume donné.

DÉFINITION 1.4.1. Soit ν une mesure borélienne sur \mathbb{R}^D et $A \subset \mathbb{R}^D$ un pavé non vide et non réduit à un point. Considérons, pour $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} \rho_A^+(\varepsilon) &= \sup\{\nu(I) : I \text{ pavé de volume } \varepsilon \text{ inclus dans } A\}, \\ \rho_A^-(\varepsilon) &= \inf\{\nu(I) : I \text{ pavé de volume } \varepsilon \text{ inclus dans } A\}. \end{aligned}$$

Alors ν est dite

- *régulière supérieurement* sur A si $\rho_A^+(\varepsilon) \preceq \varepsilon$,
- *régulière inférieurement* sur A si $\rho_A^-(\varepsilon) \succeq \varepsilon$,
- *régulière* sur A si elle vérifie simultanément les deux conditions précédentes.

Dans ce dernier cas, il existe alors des constantes $C_1, C_2 > 0$, ne dépendant que de ν et de A , et telles que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$C_1 \varepsilon \leq \rho_A^-(\varepsilon) \leq \rho_A^+(\varepsilon) \leq C_2 \varepsilon.$$

EXEMPLES

1) Pour $x \in \mathbb{R}^D$, la mesure de Dirac δ_x vérifie

$$\rho_A^+(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et $\rho_A^-(\varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit. Elle n'est donc pas régulière.

2) Si $A \cap \text{Supp}(\nu) = \emptyset$ alors $\nu(I) = 0$ pour tout $I \subset A$. Ainsi ν est régulière supérieurement mais pas inférieurement.

3) Soit $\nu = \mathcal{U}(A)$ la loi uniforme sur A . Alors

$$\rho_A^+(\varepsilon) = \rho_A^-(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\lambda(A)}.$$

On a donc un cas «parfait» de mesure régulière.

4) Plus généralement supposons que ν admet une densité θ par rapport à la mesure de Lebesgue. Par définition,

$$\forall I \subset \mathbb{R}^D \quad \nu(I) = \int_I \theta(t) dt.$$

Ainsi, il suffit qu'existent $C_1, C_2 > 0$ vérifiant :

$$\forall t \in A \quad C_1 \leq \theta(t) \leq C_2 ,$$

pour que ν soit régulière sur A .

Le fait pour une mesure d'être régulière n'est donc pas exceptionnel. Parmi les mesures de probabilités usuelles, beaucoup de mesures absolument continues ont cette propriété.

1.4.2. Support et recouvrement associé

Avant de voir si F existe on peut essayer d'en déterminer le support. En effet, les bosses $t \mapsto G(b_n(t - X_n))$ ont un support compact, en l'espèce le pavé aléatoire

$$I_n = B(X_n, 1/b_n) ,$$

dont le volume $2^D b_n^{-D}$ tend vers 0. On a $F(t) \neq 0$ si et seulement si t appartient à au moins un ensemble I_n , de sorte que le support de F est

$$\text{Supp}(F) = \text{adh} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right) .$$

Si les bosses sont toutes centrées dans A (c'est-à-dire $\nu(A) = 1$) la détermination du support de F est donc liée à un problème de recouvrement aléatoire de A (voir [21, 34]). Il est naturel d'imposer $A \subset \text{Supp}(F)$. Il suffit que le premier support soit assez grand ($b_1 \gg \lambda(A)$). Pour obtenir une fonction suffisamment irrégulière il faut même que chaque point de A soit recouvert par une infinité d'ensembles I_n . En effet si t n'est recouvert que par un nombre fini de bosses, alors F aura au voisinage de t la régularité minimale de ces bosses.

Plaçons-nous par exemple dans \mathbb{R} et supposons ν uniforme sur $A = [0, 1]$. Soit R l'ensemble des points $t \in [0, 1]$ recouverts par un nombre fini (éventuellement nul) d'intervalles I_n . Soit E le complémentaire de R . Alors si n est suffisamment grand

$$\mathbb{P}(t \in I_n) = 2/b_n$$

et le lemme de Borel-Cantelli entraîne que

- E est sûrement de mesure nulle si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-1} < \infty$,
- R est presque sûrement de mesure nulle si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^{-1} = \infty$.

Ainsi, la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ ne doit pas croître trop rapidement, sinon les intervalles I_n ont tendance à ne pas s'intercepter, créant ainsi des zones isolées sans accumulation. Par exemple avec $A = [-1, 1]$ et $b_n = 2^n$ on peut théoriquement avoir un recouvrement de A sans aucune accumulation au sens où les bosses $G(b_n(t - X_n))$ se juxtaposent parfaitement (voir FIG. 1.6). En effet, l'événement

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1] \quad \text{et} \quad \lambda(I_m \cap I_n) = 0 \quad \text{si} \quad m \neq n \right)$$

n'est pas impossible, il est obtenu par exemple avec la réalisation ω telle que

$$\forall n \geq 1 \quad X_n(\omega) = 1 - 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n .$$

Notons que dans ce cas la série (1.2) converge uniformément (car $(a_n)_{n \geq 1}$ décroît) mais pas normalement si $\sum a_n = \infty$. Bien sûr l'événement précédent est de probabilité nulle dès que ν est continue. On peut voir qu'en se rapprochant de 1 le graphe de F présente des pics dus à la décroissance de la longueur de I_n . De façon générale, on obtient toujours une fonction dégénérée avec un graphe en forme de «peigne» (voir FIG. 1.6). La fonction F est nulle sur de nombreux sous-intervalles (à cause des points non recouverts), régulière sur d'autres (au voisinage des points recouverts un nombre fini de fois) et présente des pics (correspondant aux centres des bosses). La même situation se produit avec des mesures de Dirac.

Dans un même temps, si la suite $(b_n)_{n \geq 1}$ croît trop lentement les intervalles I_n vont se chevaucher davantage. On risque de devoir compenser ce phénomène par une décroissance rapide des amplitudes $(a_n)_{n \geq 1}$ et de retrouver ainsi l'hypothèse de convergence normale.

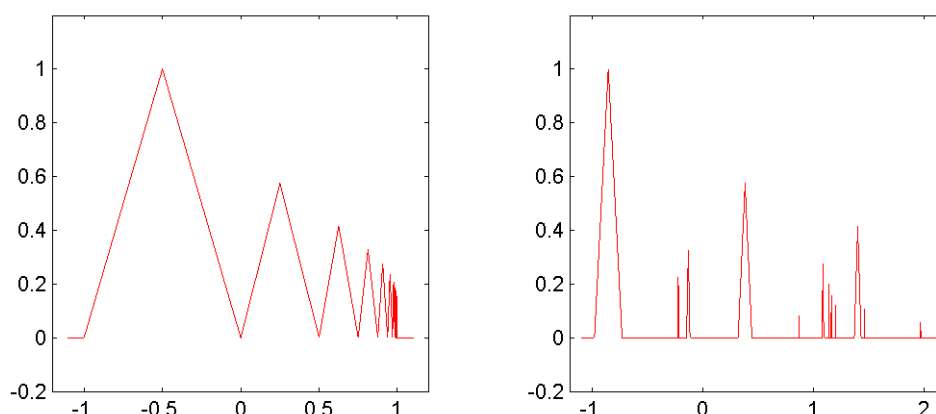


FIG. 1.6. Graphe d'une fonction de bosses sans accumulation de bosses élémentaires (à gauche) et d'une fonction de bosses en «peigne» (à droite).

1.4.3. Problèmes aux bords

En étudiant F sur A nous allons faire des hypothèses sur les centres des bosses. Mais lorsque X_n est proche de la frontière de A , la bosse correspondante n'est pas totalement incluse dans A ou dans son complémentaire (voir FIG. 1.4). Les bosses dont le centre est à l'extérieur de A peuvent déborder sur A et doivent être prises en compte. Pour contrôler ces effets de bords, nous allons demander des conditions à l'extérieur de A .

EXEMPLES

1) L'hypothèse $\nu(A) = 0$ n'assure pas $F \equiv 0$ sur A . Pour tenir compte du débordement maximal des premières bosses nous considérerons $A(1/b_1)$: pour tout $t \in A$ et tout $n \geq 1$, la boule $B(t, 1/b_n)$ est toute entière incluse dans $A(1/b_1)$. Ainsi $\nu(A(1/b_1)) = 0$ entraîne F nulle sur A .

2) Si ν est uniforme sur A on s'attend à ce que chaque point t ait la même probabilité de «voir arriver» une bosse de rang n donné. Cette probabilité vaut exactement

$$\mathbb{P}(X_n \in B(t, 1/b_n)) = \frac{\lambda(B(t, 1/b_n) \cap A)}{\lambda(A)}.$$

Si t est trop près du bord de A ou si n est petit, la boule $B(t, 1/b_n)$ n'est pas incluse dans A et la probabilité précédente dépend de t .

Notons qu'un autre procédé serait possible dans le cas réel. Si A est un intervalle on peut supprimer les effets de bord en identifiant A à un cercle.

1.5. Intégrabilité

Nous avons déjà obtenu des hypothèses sur les paramètres des fonctions de bosses. L'objectif de cette section est de formuler des conditions qui assurent l'existence et qui permettent *a priori* au modèle d'être intéressant du point de vue fractal. Si F est définie et continue sur A elle est intégrable et la variable aléatoire $F(t)$ est d'espérance finie pour tout t . On va donner dans cette section des critères d'existence obtenus en intégrant les bosses

$$Y_n(t) = G(b_n(t - X_n)).$$

On peut adopter deux points de vue :

– à ω fixé Y_n est une fonction de t . C'est une bosse dilatée centrée en $X_n(\omega)$ de support $B(X_n(\omega), 1/b_n)$.

– à t fixé $Y_n(t)$ est une variable aléatoire. C'est une bosse dilatée centrée en t .

On cherche à intégrer F par rapport à λ puis par rapport à \mathbb{P} . Ces deux problèmes vont faire intervenir une hypothèse commune, mais ils ne sont pas équivalents. Commençons par traiter le cas des bosses élémentaires.

LEMME 1.5.1. *Soit $n \geq 1$. Pour tout $p > 0$:*

i) Y_n^p est sûrement intégrable sur \mathbb{R}^D , son intégrale n'est pas aléatoire et

$$\int_{\mathbb{R}^D} Y_n(t)^p dt = \frac{1}{b_n^D} \int_{B(0,1)^D} G(t)^p dt.$$

ii) Pour tout $t \in \mathbb{R}^D$, $Y_n(t)$ admet des moments de tout ordre et

$$\mathbb{E}(Y_n(t)^p) \leq \nu(B(t, 1/b_n)).$$

Démonstration. i) Un simple changement de variable donne

$$\int_{\mathbb{R}^D} Y_n(t)^p dt = \int_{\mathbb{R}^D} G(b_n(t - X_n))^p dt = \frac{1}{b_n^D} \int_{\mathbb{R}^D} G(u)^p du = \frac{1}{b_n^D} \int_{B(0,1)^D} G(u)^p du.$$

ii) Puisque $\|G^p\|_\infty = 1$:

$$\mathbb{E}(Y_n(t)^p) = \int_{\Omega} G(b_n(t - X_n))^p d\mathbb{P} = \int_{B(t, 1/b_n)} G(b_n(t - x))^p d\nu(x) \leq \nu(B(t, 1/b_n)),$$

d'où le résultat. \square

Le résultat suivant précise le point *ii*) du lemme précédent dans un cas particulier où ν est régulière et admet une densité.

LEMME 1.5.2. *On suppose que ν admet une densité θ par rapport à la mesure de Lebesgue et qu'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$\forall t \in A(1/b_1) \quad C_1 \leq \theta(t) \leq C_2.$$

Alors pour tout $p > 0$ et tout $t \in A$: $\mathbb{E}(Y_n(t)^p) \simeq b_n^{-D}$, cette estimation étant uniforme en n et t .

Démonstration. Une fois encore un changement de variable donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n(t)^p) &= \int_{\Omega} G(b_n(t - X_n))^p d\mathbb{P} = \int_{B(t, 1/b_n)} G(b_n(t - x))^p \theta(x) dx \\ &= \frac{1}{b_n^D} \int_{B(0, 1)} G(u)^p \theta(t - u/b_n) du. \end{aligned}$$

Or $t \in A$ et $u \in B(0, 1)$ entraînent $t - u/b_n \in A(1/b_1)$. Par suite

$$C_1 b_n^{-D} \int_{B(0, 1)} G(u)^p du \leq \mathbb{E}(Y_n(t)^p) \leq C_2 b_n^{-D} \int_{B(0, 1)} G(u)^p du,$$

d'où le résultat, les constantes ci-dessus ne dépendant que de G , θ et p . \square

Voici le premier résultat positif d'existence :

PROPOSITION 1.5.3. *On suppose que la série $\sum a_n b_n^{-D}$ converge. Alors, pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, F est une fonction finie presque partout, intégrable, la valeur de son intégrale ne dépendant pas de ν .*

Démonstration. Fixons ω dans Ω . Il suffit de prouver que la série $\sum \int |a_n Y_n|$ converge. Le lemme 1.5.1 entraîne

$$\int_{\mathbb{R}^D} |a_n Y_n(t)| dt \leq a_n b_n^{-D},$$

terme général d'une série convergente par hypothèse. Par suite F est définie presque partout, intégrable et $\int_{\mathbb{R}^D} F(t) dt = \sum_n a_n \int Y_n$ est déterministe puisque $\int Y_n dt$ l'est. \square

Nous ne pouvons nous contenter de ce résultat. La fonction F peut être infinie sur un ensemble grand. Nous voulons à présent échanger les rôles de ω et t , c'est-à-dire fixer t et intégrer par rapport à ν . La seule hypothèse de la proposition 1.5.3 n'est pas suffisante. La régularité de ν va intervenir.

PROPOSITION 1.5.4. *On suppose que la série $\sum a_n b_n^{-D}$ converge et que ν est régulière supérieurement sur $A(1/b_1)$. Alors, pour tout $t \in A$ fixé, $F(t)$ est une variable aléatoire finie presque sûrement et intégrable.*

Démonstration. Fixons t dans A . Il suffit cette fois de prouver que la série $\sum \mathbb{E} |a_n Y_n(t)|$ converge. D'après le lemme 1.5.1 :

$$\mathbb{E} |a_n Y_n(t)| \leq a_n \nu(B(t, 1/b_n)).$$

Par hypothèse

$$\nu(B(t, 1/b_n)) \leq \rho_{A(1/b_1)}^+(2^D b_n^{-D}) \leq b_n^{-D}.$$

Donc

$$\mathbb{E} |a_n Y_n(t)| \asymp a_n b_n^{-D},$$

qui est, toujours par hypothèse, le terme général d'une série convergente. \square

Nous avons donc affiné les hypothèses à prendre sur les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. En particulier, une condition commune est

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^{-D} < \infty. \quad (1.3)$$

Cette condition est intéressante car elle met en jeu la décroissance conjointe des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n^{-1})_{n \geq 1}$ et le fait qu'elles vont effectivement pouvoir se compenser. Puisque $0 < b_n^{-1} \leq b_1^{-1}$, la convergence normale de (1.2) entraîne (1.3). Cette dernière hypothèse est bien plus souple. Notons que même si l'intégrale de F n'est pas aléatoire, la régularité de ν intervient.

1.6. Existence et continuité

Nous allons maintenant répondre à la première question : à quelles conditions F existe-t-elle en tant que fonction, c'est-à-dire est elle presque sûrement finie partout sur A ? Les précédentes hypothèses ne suffisent pas à obtenir un tel résultat. Nous l'avons dit, le point clé est d'évaluer l'empilement des bosses élémentaires. L'idée heuristique est la suivante : si on considère la somme S_N de N bosses Y_n , chacune ayant pour hauteur 1, on a *a priori* $\|S_N\|_{\infty} \in [1, N]$. Mais étant donné le positionnement aléatoire de chaque bosse, la probabilité que $\|S_N\|_{\infty}$ soit égale à N doit être petite. Pour exploiter cette idée, on va grouper les termes de la série (1.2) par paquets, puis contrôler la hauteur de la pile correspondant à chaque paquet. Lorsque celle-ci sera suffisamment petite, on pourra établir la convergence normale de la nouvelle série obtenue, ce qui sera suffisant puisque F est positive.

PRÉLIMINAIRES

Nous commençons par donner les idées directrices à partir du cas particulier suivant. On se place dans \mathbb{R} avec $b_n = n$ et on étudie $F(t)$ pour $t \in [0, 1]$. Pour $k \geq 0$, un intervalle dyadique de génération k s'écrit $I_{k,i} = [i2^{-k}, (i+1)2^{-k}[$ avec $i \in \mathbb{Z}$.

On considère un paquet dyadique :

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n G(n(t - X_n)).$$

Chaque bosse d'un tel paquet a un support de longueur inférieure à $3 \cdot 2^{-k}$ qui est donc recouvert par au plus 3 intervalles $I_{k,i}$ consécutifs. Puisque $\|G\|_{\infty} = 1$ et que $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, on peut ainsi écrire

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} a_n G(n(t - X_n)) \leq a_{2^k} \sum_{\eta=-1}^1 \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \mathbb{1}_{I_k(X_n + \eta 2^{-k})}(t),$$

où $I_k(x)$ désigne l'unique intervalle dyadique d'ordre k contenant $x \in \mathbb{R}$. Tout revient donc à étudier la borne supérieure de la fonction aléatoire

$$Z_{k,\eta}(t) = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \mathbb{1}_{I_k(X_n + \eta 2^{-k})}(t)$$

pour chaque $\eta \in \{0, -1, 1\}$ fixé. Mais cette fonction est constante sur chaque intervalle $I_{k,i}$ de sorte que

$$\|Z_{k,\eta}\|_\infty = \max\{Z_{k,\eta}(i2^{-k}) : i = 0, \dots, 2^k - 1\}.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$:

$$t \in I_k(X_n + \eta 2^{-k}) \iff X_n \in I_k(t - \eta 2^{-k}),$$

donc $\mathbb{1}_{I_k(X_n + \eta 2^{-k})}(i2^{-k})$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p_{k,i-\eta} = \mathbb{P}(X_n \in I_{k,i-\eta})$. Les X_n ayant même loi, $p_{k,i-\eta}$ ne dépend pas de n , et par indépendance, $Z_{k,\eta}(i2^{-k})$ est donc une variable binomiale $\mathcal{B}(2^k, p_{k,i-\eta})$. Finalement, $\|Z_{k,\eta}\|_\infty$ est le maximum de 2^k variables de ce type.

Les résultats suivants ont pour but d'évaluer un tel maximum. Le premier est rappelé sans démonstration (voir [9]) :

LEMME 1.6.1. *Soit $a, b \geq 0$ et $M \geq 1$. Alors, pour tout $k \in \{1, \dots, M-1\}$:*

$$\sum_{i=0}^k \binom{M}{i} a^i b^{M-i} = (M-k) \binom{M}{k} \int_a^{a+b} t^k (a+b-t)^{M-k-1} dt.$$

On peut déduire de cette identité un résultat technique par ailleurs intéressant en lui-même :

LEMME 1.6.2. *Soit V une variable aléatoire de loi binomiale $\mathcal{B}(M, P)$ avec $M \geq 1$ et $P \in]0, 1]$. Alors*

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(V \geq k) \leq \binom{M}{k} P^k \leq \frac{(MP)^k}{k!}.$$

Démonstration. Les inégalités étant triviales pour $k = 0$ et $k > M$, on suppose $1 \leq k \leq M$. La variable V est à valeurs entières, donc on peut écrire

$$\mathbb{P}(V \geq k) = 1 - \mathbb{P}(V < k) = 1 - \mathbb{P}(V \leq k-1).$$

On a ensuite, par définition :

$$\mathbb{P}(V \leq k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{M}{i} P^i (1-P)^{M-i}.$$

On applique alors le lemme précédent avec $a = P$ et $b = 1 - P$:

$$\mathbb{P}(V \leq k-1) = (M-k+1) \binom{M}{k-1} \int_P^1 t^{k-1} (1-t)^{M-k} dt.$$

On applique maintenant le lemme précédent avec $a = 0$ et $b = 1$:

$$(M-k+1) \binom{M}{k-1} \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^{M-k} dt = 1.$$

On obtient donc

$$\mathbb{P}(V \geq k) = (M - k + 1) \binom{M}{k-1} \int_0^P t^{k-1} (1-t)^{M-k} dt.$$

On majore par 1 le terme $(1-t)^{M-k}$ dans l'intégrale, ce qui fournit

$$\mathbb{P}(V \geq k) \leq (M - k + 1) \binom{M}{k-1} \int_0^P t^{k-1} dt = (M - k + 1) \binom{M}{k-1} \frac{P^k}{k}.$$

On a enfin

$$(M - k + 1) \binom{M}{k-1} \frac{1}{k} = \frac{(M - k + 1) M!}{(M - k + 1)! (k - 1)! k} = \frac{M!}{(M - k)! k!} = \binom{M}{k},$$

ce qui prouve l'inégalité centrale :

$$\mathbb{P}(V \geq k) \leq \binom{M}{k} P^k.$$

Pour terminer, il reste à établir la majoration de droite. Or :

$$\begin{aligned} \binom{M}{k} &= \frac{M!}{(M-k)! k!} = \frac{M \times (M-1) \times \cdots \times (M-k+1)}{k!} \\ &\leq \frac{\overbrace{M \times M \times \cdots \times M}^{k \text{ termes}}}{k!} = \frac{M^k}{k!}. \end{aligned}$$

L'inégalité cherchée en découle. \square

Il est alors possible de démontrer une majoration plus fine concernant les variables binomiales

PROPOSITION 1.6.3. *Soient $(n_k)_{k \geq 0}$ et $(m_k)_{k \geq 0}$ deux suites de nombres entiers non nuls. Pour tout $k \geq 0$ et tout $i \in \{1, \dots, n_k\}$, soit $V_{k,i}$ une variable aléatoire binomiale $\mathcal{B}(m_k, p_{k,i})$ avec $p_{k,i} \in [0, 1]$. On note $p_k = \max_i \{p_{k,i}\}$.*

On suppose qu'il existe une suite $(v_k)_{k \geq 0}$ de nombres entiers telle que

$$\sum_{k=0}^{\infty} n_k \frac{(m_k p_k)^{v_k}}{v_k!} < \infty. \quad (1.4)$$

Alors, presque sûrement, il existe $K \geq 1$ tel que

$$\forall k \geq K \quad \max \{V_{k,i} : i \in \{1, \dots, n_k\}\} \leq v_k.$$

Démonstration. Avec le lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_i \{V_{k,i}\} \geq v_k\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n_k} (V_{k,i} \geq v_k)\right) \leq \sum_{i=1}^{n_k} \mathbb{P}(V_{k,i} \geq v_k) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_k} \frac{(m_k p_{k,i})^{v_k}}{v_k!} \leq n_k \frac{(m_k p_k)^{v_k}}{v_k!}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

On conclut, compte tenu de l'hypothèse, grâce au lemme de Borel-Cantelli. \square

En appliquant ce résultat avec $n_k = m_k = 2^k$, on obtiendra une majoration de $\|Z_{k,\eta}\|_\infty$ dès lors qu'on saura trouver une suite $(v_k)_{k \geq 0}$ vérifiant (1.4). Pour cela, il faut contrôler la quantité

$$p_k = \max\{\mathbb{P}(X_n \in I_{k,i-\eta}) : i \in \{0, \dots, 2^k - 1\}\}.$$

Tous les intervalles dyadiques $I_{k,i-\eta}$ ont pour volume 2^{-k} qui tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$. La suite $(p_k)_{k \geq 1}$ est donc directement liée à l'indicateur $\rho_{[-1,2]}^+$ dont elle peut être vue comme une version discrète. C'est ici qu'interviendra la régularité de ν . Ensuite, selon l'ordre de grandeur de v_k , on obtiendra une condition sur la vitesse de décroissance des amplitudes $(a_n)_{n \geq 1}$.

UN RÉSULTAT GÉNÉRAL

Il est possible de reprendre les arguments précédents pour traiter le cas général. Nous allons démontrer le théorème d'existence suivant :

THÉORÈME 1.6.4. *Soient $A \subset \mathbb{R}^D$ un pavé non vide et F une fonction de bosses. On suppose que*

- i) ν est régulière supérieurement sur $A(1 + b_1^{-1})$.
- ii) La série

$$\sum n a_{p^{nD}} \max\{1, (p^n b_{p^{nD}}^{-1})^D\}$$

converge pour un certain entier $p \geq 2$.

Alors F est presque sûrement définie sur A . Elle est de plus continue si la fonction G est continue.

Démonstration. Sans perdre en généralité, on suppose $A = [0, 1]^D$. On fixe $p \geq 2$ donné par ii).

- a) Pour $k \geq 0$, un cube p -adique de génération k est de la forme

$$\prod_{i=1}^D [k_i p^{-k}, (k_i + 1) p^{-k}[, (k_1, \dots, k_D) \in \mathbb{Z}^D.$$

Il est de volume p^{-kD} , il faut donc exactement $n_k = p^{kD}$ cubes de ce type pour recouvrir A . Soit $t = (t_1, \dots, t_D) \in \mathbb{R}^D$ et $s_i = p^{-k} \lfloor p^k t_i \rfloor$. Alors $\prod [s_i, s_i + p^{-k}[$ est l'unique cube p -adique de génération k qui contient t . Pour tout $\eta \in \mathbb{Z}^D$ considérons les cubes translatés

$$C(t, k, \eta) = \prod_{i=1}^D [s_i + \eta_i p^{-k}, s_i + (\eta_i + 1) p^{-k}[.$$

Soit E_k le plus petit ensemble des $\eta \in \mathbb{Z}^D$ tels que

$$B(t, b_{p^{kD}}^{-1}) \subset \bigcup_{\eta \in E_k} C(t, k, \eta).$$

Il est indépendant du point t et $\text{Card}(E_k) \simeq \max\{1, (p^k b_{p^{kD}}^{-1})^D\}$.

- b) Notons $N_k = \sum_{i=0}^k n_i$ et $N_{-1} = 0$. Fixons $\eta \in \mathbb{Z}^D$ et soit $k \geq 0$. Considérons

$$Z_{k,\eta}^{(1)}(t) = \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} \mathbb{I}_{C(X_n, k, \eta)}(t).$$

La fonction ainsi obtenue est constante sur chacun des n_k cubes p -adiques de génération k de sorte que $\sup_A Z_{k,\eta}^{(1)}$ est le maximum de n_k variables aléatoires indépendantes de loi binomiale $\mathcal{B}(n_k, P_{\eta,k,j})$ avec

$$P_{\eta,k,j} = \mathbb{P}(X_n \in C(c_j, k, \eta')) ,$$

c_j parcourant l'ensemble $\{0, \dots, p^k - 1\}^D$ et $\eta' \in E_k$. On a $C(c_j, k, \eta') \subset A(1 + b_1^{-1})$ car $B(c_j, b_p^{-1}) \subset A(b_1^{-1})$, donc avec l'hypothèse i) :

$$\mathbb{P}(X_n \in C(c_j, k, \eta')) \leq \rho_{A(1+b_1^{-1})}^+(p^{-kD}) \leq rp^{-kD}$$

pour une constante $r > 0$. Cette majoration est encore vraie pour $\max_j \{P_{\eta,k,j}\}$. Ainsi, la majoration (1.5) fournie, avec $m_k = n_k = p^{kD}$ et $v_k = k$:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in A} Z_{k,\eta}^{(1)}(t) \geq k\right) \leq \frac{(rp^D)^k}{k!} .$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\exists \eta \in E_k \text{ tel que } \sup_{t \in A} Z_{k,\eta}^{(1)}(t) \geq k\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\eta \in E_k} \left(\sup_{t \in A} Z_{k,\eta}^{(1)}(t) \geq k\right)\right) \\ &= \sum_{\eta \in E_k} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in A} Z_{k,\eta}^{(1)}(t) \geq k\right) \\ &\leq \text{Card}(E_k) \frac{(rp^D)^k}{k!} . \end{aligned}$$

La suite $(b_n^{-1})_{n \geq 1}$ étant bornée, la série $\sum \text{Card}(E_k) \frac{(rp^D)^k}{k!}$ est toujours convergente, de sorte que d'après le lemme de Borel-Cantelli, il existe presque sûrement $K \geq 1$ tel que

$$k \geq K \implies \forall \eta \in E_k \quad \sup_{t \in A} Z_{k,\eta}^{(1)}(t) \leq k .$$

c) Soit maintenant la fonction aléatoire

$$Z_k^{(2)}(t) = \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} G(b_n(t - X_n)) .$$

Soit $n > N_k$. Pour $k \geq 1$, $N_{k-1} \geq p^{kD}$ et $B(X_n, b_p^{-1}) \subset \bigcup_{\eta \in E_k} C(X_n, k, \eta)$, donc

$$G(b_n(t - X_n)) \leq \mathbb{1}_{B(X_n, b_n^{-1})}(t) \leq \mathbb{1}_{B(X_n, b_p^{-1})}(t) \leq \sum_{\eta \in E_k} \mathbb{1}_{C(X_n, k, \eta)}(t) .$$

Par conséquent $Z_k^{(2)}(t) \leq \sum_{\eta \in E_k} Z_{k,\eta}^{(1)}(t)$ et donc, d'après b) :

$$k \geq K \implies \sup_{t \in A} Z_k^{(2)}(t) \leq k \text{Card}(E_k) \leq k \max\{1, (p^k b_p^{-1})^D\} .$$

d) Soit finalement la fonction

$$Z_k^{(3)}(t) = \sum_{n=N_{k-1}+1}^{N_k} a_n G(b_n(t - X_n)) .$$

Puisque $Z_k^{(3)}(t) \leq a_{N_{k-1}} Z_k^{(2)}(t) \leq a_{p^{kD}} Z_k^{(2)}(t)$, nous avons

$$k \geq K \implies \sup_{t \in A} Z_k^{(3)}(t) \leq k a_{p^{kD}} \max\{1, (p^k b_{p^{kD}}^{-1})^D\}.$$

D'après l'hypothèse *ii*) cette série converge, ce qui entraîne la convergence normale de la série $\sum Z_k^{(3)}$. Puisque $Z_k^{(3)} \geq 0$ cela assure l'existence de F sur A avec

$$F(t) = \sum_{k \geq 0} Z_k^{(3)}(t).$$

Enfin, si G est continue, les $Z_k^{(3)}$ le sont aussi et F également. \square

Sous les hypothèses de ce théorème, les propositions 1.5.3 et 1.5.4 s'appliquent. En effet, les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n^{-1})_{n \geq 1}$ convergent vers 0 en décroissant donc le critère de condensation de Cauchy donne

$$\sum a_n b_n^{-D} \text{ converge} \iff \sum p^{nD} a_{p^{nD}} b_{p^{nD}}^{-D} \text{ converge}.$$

Or la convergence de la série de droite est entraînée par celle de

$$\sum n a_{p^{nD}} \max\{1, (p^n b_{p^{nD}}^{-1})^D\}.$$

Enfin, si ρ^+ vérifie $\rho^+(h) \leq h$ sur $A(1 + b_1^{-1})$, il le vérifie *a fortiori* sur n'importe lequel de ses sous-ensembles, en particulier sur $A(b_1^{-1})$. On voit ainsi que les hypothèses du théorème 1.6.4 sont plus restrictives que celles assurant l'existence presque partout.

Ce théorème est intéressant lorsque $\nu(A) > 0$. Nous avons déjà mentionné le cas où aucune bosse ne tombait dans A . La «pire» situation est $\nu(A) = 1$. Dans ce cas toutes les bosses sont centrées dans A et l'accumulation ponctuelle est maximale. C'est ici qu'intervient l'hypothèse *i*).

Pour contrôler toutes les bosses on suppose une régularité sur un pavé plus large que A . On peut légèrement assouplir cette contrainte. Soit $\eta > 0$ quelconque. On écrit

$$F(t) = \sum_{n=1}^N a_n G(b_n(t - X_n)) + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n G(b_n(t - X_n)),$$

où $N \geq 1$ est choisi tel que

$$\frac{1}{b_{N+1}} < \eta \leq \frac{1}{b_N}.$$

La première somme est finie : c'est une fonction simple à étudier. Dans \mathbb{R} par exemple elle est affine par morceaux si g est la bosse triangle. La seconde fonction est une série qu'on peut traiter, exactement comme une fonction de bosses, avec le théorème 1.6.4. La première bosse a pour support la boule I_{N+1} de rayon b_{N+1}^{-1} . Toutes les bosses ont alors un débordement plus petit que η de sorte qu'il suffit que ν soit régulière supérieurement sur $A(1 + \eta)$. Dans la suite, pour ne pas avoir à faire cette manipulation et étudier deux fonctions à chaque fois, nous ferons des hypothèses de régularité optimales. Mais la plupart des résultats se généralisent de la façon précédente.

1.7. Exemple fondamental

Nous donnons un exemple fondamental de fonctions de bosses. Il s'agit du modèle que nous étudierons en détail dans la suite. Il est suffisamment pertinent sur le plan théorique pour illustrer les différentes propriétés des fonctions de bosses. De nombreuses démonstrations pourront s'adapter aux modèles plus complexes. Enfin, sur le plan pratique, il est suffisamment riche pour modéliser quantité de situations expérimentales.

Par définition, les fonctions de bosses *standards* sont telles que :

- $a_n = n^{-\alpha/D}$, $\alpha \in]0, 1]$,
- $b_n = n^{\beta/D}$, $\beta \in]0, 1]$,

Pour ce modèle, les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n^{-1})_{n \geq 1}$ décroissent de manière auto-affine :

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{\log a_n}{\log b_n^{-1}} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Cette propriété est aussi vérifiée par les fonctions de Knopp et de Weierstrass. Qualitativement, la décroissance des amplitudes est identique (voir FIG. 1.7). Il suffit d'écrire ces dernières fonctions sous la forme (6) (voir page 6) en redéfinissant les suites par paquets.

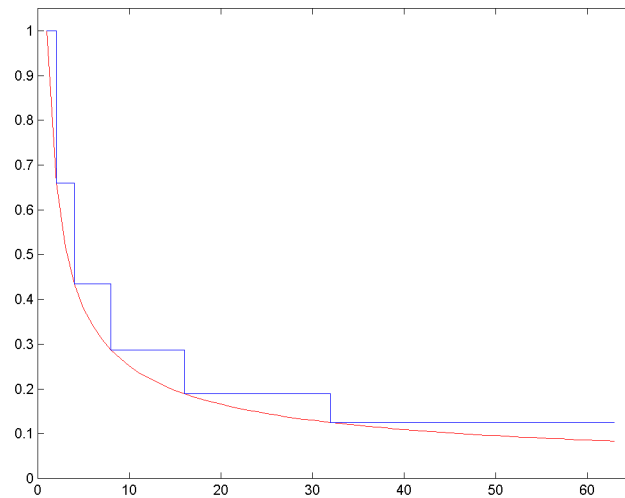


FIG. 1.7. Comparaison de la décroissance des amplitudes d'une fonction de Takagi-Knopp (en bleu) et d'une fonction de bosses standard (en rouge).

Intuitivement, elles doivent donc partager des propriétés analogues en ce qui concerne la régularité trajectorielle. Avant d'étudier cette question, justifions l'existence de ces fonctions de bosses. On obtient, pour tout entier $p \geq 2$:

$$n a_p n^D \max\{1, (p^n b_p^{-1})^D\} = n p^{-n(\alpha + D(\beta - 1))},$$

qui est le terme général d'une série convergente si et seulement si

$$\alpha + D(\beta - 1) > 0.$$

L'hypothèse *i*) du théorème 1.6.4 est alors satisfaite. Si $\beta = 1$ elle se réduit à $\alpha > 0$. Si $\alpha > 1$ on est dans le cas d'une convergence normale, mais on est autorisé à considérer $\alpha \in]0, 1]$. En fait, nous n'envisagerons que ce cas avec $\beta = 1$. Certains résultats pourraient toutefois être généralisés. On étudie ces séries sur un pavé non vide $A \subset \mathbb{R}^D$ avec ν régulière sur certains voisinages de A . On a donc

$$\forall t \in A \quad F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/D} G(n^{\beta/D}(t - X_n)) , \quad (1.6)$$

en particulier si $D = 1$ et $\beta = 1$:

$$\forall t \in A \quad F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} g(n(t - X_n)) . \quad (1.7)$$

De nombreux choix sont possibles pour la loi ν . Il faut garder à l'esprit l'exemple le plus simple et le plus pertinent d'une loi uniforme.

La géométrie de la bosse va intervenir concrètement dans la suite. Pour simplifier les énoncés, nous avons supposé que toutes les bosses sont issues d'une même bosse élémentaire. Ce choix est aussi dicté par les applications, mais ce caractère homogène n'est pas restrictif. Certains résultats restent vrais avec des hypothèses plus souples.

Notons déjà en vue des applications que d'une part la forme de la bosse G et la distribution ν influencent considérablement l'allure du graphe de F , d'autre part que ce sont les premières bosses à support large qui lui donnent sa «silhouette» (la première bosse est de hauteur 1 et a un support de volume 2^D). Les bosses de rang n très grand donnent, elles, toute sa rugosité au profil. Ces phénomènes sont nettement visibles sur la figure 1.8 (*resp.* 1.9) où est tracée en dimension 1 (*resp.* 2) la fonction de bosses standard F . Ici g est la bosse triangle, $\|\cdot\|_G = \|\cdot\|_1$, $\nu = \mathcal{U}([-1, 2]^D)$, $\alpha = 0.8$ et $\beta = 1$.

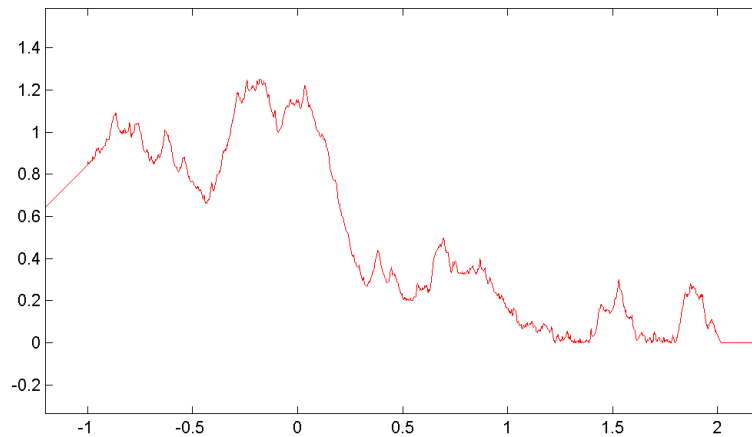


FIG. 1.8. Graphe d'une fonction de bosses standard dans \mathbb{R} .

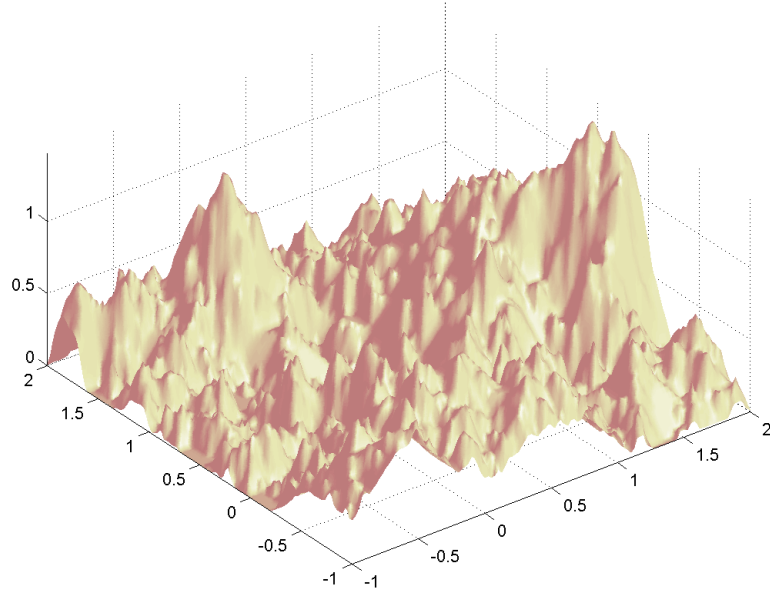


FIG. 1.9. Graphe d'une fonction de bosses standard dans \mathbb{R}^2 .

1.8. Remarque

Une fois fixé un pavé A , la condition de régularité de ν du théorème 1.6.4 n'est pas très contraignante. Elle permet essentiellement de traiter les lois à densité. Toutefois, on peut se demander s'il n'est pas possible de considérer des mesures beaucoup plus irrégulières. Nous avons vu que si ν est une masse de Dirac, la convergence normale de la série (1.2) est nécessaire. Mais que peut-on dire de mesures «intermédiaires» ?

A titre d'exemple, considérons le cas réel avec $A = [0, 1]$, ν portée par A et F la fonction de bosses standard définie par (1.7).

L'indicateur ρ_A^+ permet de contrôler à toute échelle $\varepsilon > 0$ la mesure d'un intervalle de longueur ε situé n'importe où dans A . Si on reprend les résultats préliminaires de la page 28, on voit qu'il suffit de connaître la suite $(p_k)_{k \geq 0}$ définie par

$$p_k = \max\{\nu(I_{k,i}) : i \in \{0, \dots, 2^k - 1\}\}. \quad (1.8)$$

On contrôle donc la mesure des intervalles pour les échelles discrètes et à chaque fois pour un nombre fini de positions bien déterminées. On a donc besoin de moins d'information que celle apportée par ρ_A^+ , ce qui permet d'envisager d'autres mesures.

Considérons par exemple la mesure de Besicovitch μ_p de paramètre $p \in [0, 1]$. Elle est définie à l'aide de la filtration dyadique de la manière suivante. On pose $\mu_p([0, 1]) = 1$. Pour tout $k \geq 0$, chaque intervalle dyadique $I_{k,i}$ se décompose en 2 sous-intervalles (disjoints) mitoyens $I_{k+1,j}$, $I_{k+1,j+1}$. On pose alors

$$\mu_p(I_{k+1,j}) = p\mu_p(I_{k,i}) \quad \text{et} \quad \mu_p(I_{k+1,j+1}) = (1-p)\mu_p(I_{k,i}).$$

Par exemple $[0, 1] = I_{0,0} = I_{1,0} \cup I_{1,1}$ donc $\mu_p([0, 1/2]) = p$ et $\mu_p([1/2, 1]) = 1-p$. On construit ainsi par récurrence μ_p sur tous les intervalles dyadiques de $[0, 1]$ ce qui la détermine complètement.

Notons les cas extrêmes :

- Pour $p = 0$ (*resp.* $p = 1$), μ_p est la mesure de Dirac au point 1 (*resp.* 0) : elle est la plus irrégulière.
- Pour $p = 1/2$, μ_p est la mesure uniforme sur $[0, 1]$: elle est la plus régulière.

On peut montrer que $\text{Supp}(\mu_p) = [0, 1]$ mais qu'elle est portée par un ensemble $E_p \subset [0, 1]$ de volume nul si $p \neq 1/2$. On dit qu'elle est singulière par rapport à λ . Dans ce cas, la mesure μ_p n'est pas régulière supérieurement sur A de sorte qu'on ne peut pas utiliser le théorème 1.6.4.

Supposons $p \in]0, 1[$ et notons $m = \max\{p, 1 - p\} \in]0, 1[$. Il est facile d'estimer p_k pour la mesure μ_p . Par construction :

$$\forall k \geq 0 \quad p_k \leq m^k. \quad (1.9)$$

Pour une mesure régulière supérieurement sur $[0, 1]$, et toujours pour la fonction de bosses standard (1.7), nous avons en fait montré que la hauteur d'un paquet de N bosses élémentaires consécutives est de l'ordre de $\log(N)$. Cela laisse une marge assez importante, c'est-à-dire qu'on peut choisir pour la série (1.4) une suite v_k qui croît plus vite que k . Plus précisément, en reprenant les arguments de la section 1.6 on voit que F est bien définie s'il existe une suite de nombres entiers $(v_k)_{k \geq 0}$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{(2m)^{kv_k}}{v_k!} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} v_k < \infty. \quad (1.10)$$

On montre que pour tout $\lambda > \log_2(2m)$, la suite $v_k = [2^{\lambda k}]$ est telle que la première série converge. On obtient le résultat d'existence suivant :

PROPOSITION 1.8.1. *La fonction de bosses standard F définie sur $[0, 1]$ par*

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} g(n(t - X_n)),$$

où la loi commune des X_n est la mesure de Besicovitch μ_p , existe partout presque sûrement si et seulement si $\alpha > \alpha(p) = 1 + \log_2(\max\{p, 1 - p\})$.

Cela montre bien que plus la mesure est irrégulière, plus on a de restriction sur α . Ainsi, dans le pire cas des mesures de Dirac, on a $\alpha(0) = \alpha(1) = 1$ de sorte que la convergence doit être normale. Au contraire, dans le meilleur cas de la loi uniforme, on a $\alpha(1/2) = 0$ et on retrouve le résultat du théorème 1.6.4.

On voit donc qu'il est possible de considérer des mesures ν assez irrégulières pour distribuer les bosses élémentaires. L'intérêt est alors que cette irrégularité peut se transmettre à F . Le chapitre suivant a précisément pour objectif d'étudier la régularité de F . Toutefois, nous nous restreindrons à des mesures régulières qui sont techniquement plus simples à manipuler. En pratique d'ailleurs, on choisit plutôt des mesures à densité.

CHAPITRE 2

Fonctions de bosses : régularité

2.1. Accroissements et régularité globale

Soit A un pavé non vide et $f : A \subset \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Par définition, on a en tout point $t \in A$:

$$|f(t+h) - f(t)| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \|h\| \rightarrow 0.$$

Ceci est la régularité minimale que nous imposons à f . Pour affiner notre connaissance de f nous allons quantifier cette régularité et déterminer une régularité maximale. La notion de régularité est toute relative : on dispose de différents critères pour «mesurer» la régularité d'une fonction. Le choix le plus simple et le plus usuel est d'améliorer la relation précédente en évaluant la vitesse à laquelle l'accroissement standard $f(t+h) - f(t)$ tend vers 0. Nous utilisons les règles et l'échelle de comparaison du § 1.1. Il faut encore choisir de s'intéresser à f au niveau ponctuel, local ou global. C'est ce dernier que nous allons étudier ici.

Étant donnée l'échelle de référence, il est utile d'introduire la

DÉFINITION 2.1.1. On dit que f est *höldérienne* d'exposant $H \in]0, 1]$ au point $s \in A$ s'il existe une constante $C_H(s) > 0$ telle que pour tout $t \in A$:

$$|f(t) - f(s)| \leq C_H(s) \|t - s\|^H . \quad (2.1)$$

Si $C_H(s)$ peut être choisie indépendamment de s , f est dite *uniformément höldérienne* sur A .

On désigne par $\Lambda_H(A)$ l'ensemble de ces fonctions :

$$f \in \Lambda_H(A) \iff \sup \left\{ \frac{|f(t) - f(s)|}{\|t - s\|^H} : s \neq t, s, t \in A \right\} < \infty . \quad (2.2)$$

On obtient ainsi une échelle de régularité au sens où :

$$0 < H_1 < H_2 \leq 1 \implies \Lambda_{H_2}(A) \subset \Lambda_{H_1}(A) . \quad (2.3)$$

En particulier, f est lipschitzienne sur A si elle appartient à $\Lambda_1(A)$. Ces fonctions sont les plus régulières. Pour $D = 1$, elles sont absolument continues, dérivables presque partout avec $f' \in L^\infty(A)$.

EXEMPLES

1) Pour $\alpha > 0$, les bosses élémentaires g_α définies par

$$g_\alpha(t) = (1 - t^\alpha)^{1/\alpha}$$

sont dérivables sauf aux bornes de leur support. On a facilement $g_\alpha \in \Lambda_H(\mathbb{R})$ avec $H = \min\{\alpha, 1/\alpha\}$.

2) A partir des fonctions précédentes on construit des bosses élémentaires plus complexes. On considère une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de réels supérieurs à 1 et on construit la bosse g *via* la formule (1.1) page 16 en choisissant $g_n = g_{\alpha_n}$. On obtient une fonction g continue sur \mathbb{R} et dont l'exposant de Hölder au point t_{n-1} vaut $1/\alpha_n$. Soit alors

$$H = \inf\{1/\alpha_n : n \geq 1\}.$$

Si $H > 0$ alors $g \in \Lambda_H(\mathbb{R})$. On obtient une pathologie en choisissant par exemple $\alpha_n = n$. On a une régularité höldérienne sur chaque sous-intervalle $A \subset]0, 1]$ mais pas sur $[0, 1]$. En effet, l'ordre de régularité tend vers $H = 0$ lorsqu'on se rapproche de l'origine. Le problème a lieu en 0 car c'est le point d'accumulation des suites $(c_n)_{n \geq 0}$ et $(t_n)_{n \geq 0}$. Avec cette construction on peut obtenir un tel comportement aux bornes du support.

3) On reprend l'exemple spécifique 2) page 16. Soit $H \in]0, 1[$. On choisit r tel que $r^H = 2$. Puisque $r > 2$, on peut considérer la bosse élémentaire g_δ obtenue à partir de la suite

$$\delta_n = (2/r)^n.$$

Alors $H = \log 2 / \log r$ et $g_\delta \in \Lambda_H(\mathbb{R})$.

Considérons les fonctions de bosses F définies page 35 par (1.7). On cherche les $H \in]0, 1]$ tels que l'inégalité (2.1) soit vraie presque sûrement. Puisque F se présente comme une série, on peut essayer de travailler directement sur l'accroissement : en utilisant l'inégalité triangulaire il suffit de trouver des majorations de l'accroissement du terme général. Cette méthode simple est utilisée pour les fonctions de Weierstrass (voir [14, 38, 18]). On montre ainsi que presque sûrement W est uniformément höldérienne d'exposant α . Cependant, la convergence normale de ces séries autorise une étude directe. Cela ne va pas toujours être possible pour F . Il faut utiliser des résultats probabilistes à l'instar du mouvement brownien (voir [14]). Nous ne pourrions pas utiliser directement le lemme classique de Kolmogorov (voir [31, 29]). Nous devons revenir à une démonstration directe consistant à majorer la probabilité

$$\mathbb{P}(|F(t+h) - F(t)| > \|h\|^H)$$

pour tout $t, t+h \in A$.

Comme pour son existence, la régularité de F va d'abord être contrôlée par le couple de suites $(a_n, b_n)_{n \geq 1}$, c'est-à-dire les exposants α, β . Au chapitre précédent, nous avons noté certains parallèles entre ces suites et celles qui leurs correspondent dans les fonctions de Weierstrass. Pour $\alpha < 1$, cela suggère un comportement analogue : l'existence d'un exposant de Hölder et sa valeur attendue. En cas de convergence normale ($\alpha > 1$), F sera régulière sur un «large» sous-ensemble de A . De

même, si le recouvrement aléatoire associé à F ne recouvre pas entièrement A , F sera constante au voisinage des points non recouverts. Ainsi, la régularité de ν intervient également.

On considère à partir de maintenant une fonction de bosses standard avec $\beta = 1$:

$$\forall t \in A \quad F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/D} G(n^{1/D}(t - X_n)) \quad (2.4)$$

où, par définition, $\alpha \in]0, 1]$. On suppose satisfaite l'hypothèse :

H_1 : ν est régulière supérieurement sur $A(2)$,

de sorte que F existe. On se propose alors de déterminer son exposant de Hölder uniforme presque sûr. Le terme général des fonctions de Knopp ou de Weierstrass est toujours très régulier. Il est clair que la régularité de F va dépendre de celle de G . Il paraît peu probable qu'on puisse obtenir une somme F plus régulière que son terme général. On introduit donc, et on suppose vérifiée, l'hypothèse :

H_2 : G est uniformément höldérienne sur \mathbb{R}^D d'exposant γ .

Une telle propriété ne dépend pas des normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_G$ choisies et il est équivalent de supposer que la bosse initiale g appartient à $\Lambda_\gamma(\mathbb{R})$. La fonction G étant en particulier continue, il en va de même pour F . On note

$$d = \min\{\alpha, \gamma\} \in]0, 1].$$

Pour simplifier, on suppose $A = [0, 1]^D$ mais les résultats suivants sont vrais pour un pavé A quelconque, les constantes exhibées dépendant alors bien sûr de A .

On note dans la suite, pour $n \geq 1$, $C, p > 0$, $\varepsilon > 0$, $t \in [0, 1]^D$ et $h \in \mathbb{R}^D$:

$$\begin{aligned} u_n(\varepsilon, C) &= \min\{n^{1/D}\varepsilon, C\}, \\ Y_n(t) &= G(n^{1/D}(t - X_n)), \\ Z_n(t, h) &= Y_n(t+h) - Y_n(t), \end{aligned}$$

et

$$U_p(t, h) = |F(t+h) - F(t)|^p = \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/D} Z_n(t, h) \right|^p.$$

On commence par étudier les accroissements élémentaires de F , c'est-à-dire les variables aléatoires $Z_n(t, h)$. On cherche en particulier des majorations et des minoration presque sûres, sinon en moyenne. L'idée essentielle est de faire intervenir les supports des bosses mises en jeu.

LEMME 2.1.1. *Pour tout $n \geq 1$, tout $t, t+h \in [0, 1]^D$:*

$$|Z_n(t, h)| \leq u_n(\|h\|, 1)^\gamma T_n,$$

où $(T_n)_{n \geq 1}$ est une suite de variables de Bernoulli de paramètre $\mathbb{E}(T_n) \leq 1/n$.
Par suite, pour tout $p > 0$:

$$\mathbb{E} |Z_n(t, h)|^p \leq \frac{1}{n} \cdot u_n(\|h\|, 1)^{\gamma p},$$

l'estimation ne dépendant que de p et G .

Démonstration. Notons $B_n(t, h) = B(t, n^{-1/D}) \cup B(t + h, n^{-1/D})$ et considérons la variable aléatoire

$$T_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n \in B_n(t, h) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a toujours $B_n(t, h) \subset A(2) = [-2, 3]^D$ et donc d'après l'hypothèse H_1 :

$$\nu(B_n(t, h)) \preccurlyeq \frac{1}{n}.$$

Ainsi T_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{E}(T_n) \preccurlyeq 1/n$.

a) Etant donné le support de G , si $X_n \notin B_n(t, h)$ alors $Z_n(t, h) = 0$.

b) Puisque $\|G\|_\infty = 1$ on a toujours $|Z_n(t, h)| \leq 2$. Puisque G est höldérienne :

$$|Z_n(t, h)| \leq C_\gamma (n^{-1/D} \|h\|)^\gamma.$$

c) Par conséquent, si $C = \max\{2, C_\gamma\}$, nous avons :

$$|Z_n(t, h)| \leq C u_n(\|h\|, 1)^\gamma T_n,$$

d'où le résultat vu que $C > 0$ ne dépend que de g . \square

Nous pouvons à présent étudier l'accroissement total de F . Le résultat technique suivant sera d'un usage fréquent :

LEMME 2.1.2. *Avec les notations précédentes, pour tout $k \geq 1$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-k\alpha/D} u_n(\varepsilon, C)^{k\gamma} \preccurlyeq \begin{cases} \varepsilon^{kd} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \varepsilon^{k\alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Démonstration. Notons $h(\varepsilon)$ la somme précédente. Soit $\varepsilon \in]0, C]$ et $N \geq 1$ tel que $C(N+1)^{-1/D} < \varepsilon \leq CN^{-1/D}$. On a

$$h(\varepsilon) = \varepsilon^{k\gamma} \sum_{n=1}^N n^{-1+k(\gamma-\alpha)/D} + C^{k\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-1-k\alpha/D}.$$

Puisque $k \geq 1$, la série de droite converge et

$$C^{k\gamma} \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-1-k\alpha/D} \preccurlyeq N^{-k\alpha/D} \preccurlyeq \varepsilon^{k\alpha}.$$

La somme de gauche s'évalue selon le signe de $\gamma - \alpha$:

$$\varepsilon^{k\gamma} \sum_{n=1}^N n^{-1+k(\gamma-\alpha)/D} \preccurlyeq \begin{cases} \varepsilon^{k\alpha} & \text{si } \alpha < \gamma \\ \varepsilon^{k\gamma} |\ln \varepsilon| & \text{si } \alpha = \gamma \\ \varepsilon^{k\gamma} & \text{si } \alpha > \gamma \end{cases}$$

D'où le résultat dans les différents cas de figure. \square

L'accroissement $U_1(t, h)$ tend vers 0 presque sûrement puisque F est continue. Nous allons mesurer à quelle vitesse en évaluant la probabilité qu'il soit «grand». En utilisant l'inégalité triangulaire et le lemme 2.1.1 on a :

$$\forall t, t+h \in [0, 1]^D \quad |F(t+h) - F(t)| \leq C_2 U(\|h\|),$$

où, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$U(\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/D} u_n(\varepsilon, 1)^\gamma T_n. \quad (2.5)$$

Le point essentiel est de contrôler la distribution de $U(\varepsilon)$ en utilisant sa transformée de Laplace.

LEMME 2.1.3. *Soit $(T_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{E}(T_n) \leq C/n$, $C > 0$. Pour $\varepsilon > 0$, soit $U(\varepsilon)$ la série (2.5). Alors presque sûrement cette série converge, et il existe $C_1 > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$:*

$$\forall u > 0 \quad \mathbb{E}(\exp(u U(\varepsilon))) \leq \begin{cases} \exp(C_1 \exp(u \varepsilon^d)) & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \exp(C_1 |\ln \varepsilon| \exp(u \varepsilon^\alpha)) & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$. Remarquons que $U(\varepsilon)$ est positive et que

$$\mathbb{E}(n^{-\alpha/D} u_n(\varepsilon, 1) T_n) \leq n^{-1-(\alpha/D)} \quad (n \rightarrow \infty).$$

Puisque par hypothèse $\alpha/D + 1 > 1$, la variable $U(\varepsilon)$ est presque sûrement finie et intégrable. Soit $p_n = \mathbb{E}(T_n)$, $v_n(\varepsilon) = n^{-\alpha/D} u_n(\varepsilon, 1)^\gamma$ et $\mathcal{L}(u) = \mathbb{E}(\exp(u U(\varepsilon)))$. Par indépendance des T_n :

$$\mathcal{L}(u) = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\exp(u v_n(\varepsilon) T_n)).$$

En outre, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(u v_n(\varepsilon) T_n)) &= (1 - p_n) + p_n e^{u v_n(\varepsilon)} = p_n (e^{u v_n(\varepsilon)} - 1) + 1 \\ &\leq \exp(p_n (e^{u v_n(\varepsilon)} - 1)) = \exp\left(p_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k v_n(\varepsilon)^k}{k!}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\ln(\mathcal{L}(u)) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} v_n(\varepsilon)^k \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} v_n(\varepsilon)^k.$$

D'après le lemme 2.1.2, il existe $C' > 0$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} v_n(\varepsilon)^k \leq \begin{cases} C' \varepsilon^{k d} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ C' \varepsilon^{k \alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Par suite

$$\ln(\mathcal{L}(u)) \leq \begin{cases} C C' \exp(u \varepsilon^d) & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ C C' \exp(u \varepsilon^\alpha) |\ln \varepsilon| & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

D'où le résultat avec $C_1 = C C'$. \square

PROPOSITION 2.1.4. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $t, t+h \in [0, 1]^D$ et $\|h\| < h_0$:

$$\mathbb{P}(|F(t+h) - F(t)| \geq \varepsilon) \leq \exp(b(\|h\|, \varepsilon))$$

avec

$$b(\|h\|, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{C_2} \varepsilon \|h\|^{-d} (1 - \ln(\frac{1}{C_1 C_2} \varepsilon \|h\|^{-d})) & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \frac{1}{C_2} \varepsilon \|h\|^{-d} (1 - \ln(\frac{1}{C_1 C_2} \frac{\varepsilon \|h\|^{-d}}{|\ln \|h\||})) & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Démonstration. On utilise l'inégalité de Markov suivante, valide pour toute variable $X \geq 0$ et tout $u, \lambda > 0$:

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{uX})}{e^{u\lambda}},$$

pour obtenir avec le lemme précédent, et pour tout $u > 0$:

$$\mathbb{P}(C_2 U(\|h\|) \geq \varepsilon) \leq \begin{cases} \exp(C_1 \exp(u \|h\|^d) - \frac{1}{C_2} u \varepsilon) & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \exp(C_1 |\ln \|h\|| \exp(u \|h\|^\alpha) - \frac{1}{C_2} u \varepsilon) & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

On note $a(u, \|h\|, \varepsilon)$ le membre de droite de cette inégalité. Il est facile de montrer que a admet un minimum par rapport à u valant précisément $\exp(b(\|h\|, \varepsilon))$ avec $b(\|h\|, \varepsilon)$ énoncé dans la proposition. \square

Nous pouvons alors démontrer le résultat suivant. C'est une estimation essentielle bien connue des probabilistes.

COROLLAIRE 2.1.5. Pour tout $\eta \in]0, d[$ et tout $p > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $t, t+h \in [0, 1]^D$, $\|h\| < h_0$:

$$\mathbb{P}(|F(t+h) - F(t)| \geq \|h\|^\eta) \leq \|h\|^p.$$

Démonstration. On applique la proposition 2.1.4 avec $\varepsilon = \|h\|^\eta$:

$$\mathbb{P}(|F(t+h) - F(t)| \geq \|h\|^\eta) \leq \exp(b(\|h\|))$$

avec

$$b(\|h\|) = \begin{cases} \frac{1}{C_2} \|h\|^{\eta-d} (1 - \ln(\frac{1}{C_1 C_2} \|h\|^{\eta-d})) & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \frac{1}{C_2} \|h\|^{\eta-d} (1 - \ln(\frac{1}{C_1 C_2} \frac{\|h\|^{\eta-d}}{|\ln \|h\||})) & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Puisque $\eta - d < 0$, lorsque $\|h\| \rightarrow 0$ on a, dans les deux cas :

$$b(\|h\|) \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad b(\|h\|)/\ln \|h\| \rightarrow +\infty.$$

Donc si $p > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que

$$\|h\| < h_0 \implies b(\|h\|) \leq p \ln \|h\|.$$

Or, pour de tels $\|h\|$, nous avons $\exp(b(\|h\|)) \leq \|h\|^p$. \square

Nous allons maintenant rappeler comment majorer l'accroissement de F sur l'ensemble des nombres dyadiques. C'est l'occasion d'introduire différents sous-ensembles que nous utiliserons régulièrement par la suite. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$:

$$D_\varepsilon = \{(k_1 \varepsilon, \dots, k_D \varepsilon) : k_i \in \mathbb{N}, 0 \leq k_i \leq 1/\varepsilon\}$$

est un ensemble fini de $[0, 1]^D$ de cardinal $m_\varepsilon = (1 + [1/\varepsilon])^D \simeq \varepsilon^{-D}$. Si $D = 1$ alors

$$D_\varepsilon = \{k\varepsilon : k \in \{0, \dots, [1/\varepsilon]\}\}.$$

En particulier pour $\varepsilon = 2^{-N}$:

$$D_\varepsilon = \{k2^{-N} : k \in \{0, \dots, 2^N\}\}$$

est l'ensemble usuel des nombres dyadiques de génération N . On introduit ensuite un ensemble de paires issues de chaque point de D_ε :

$$D_\varepsilon^* = \{(s, t) \in D_\varepsilon \times D_\varepsilon : t = s + \varepsilon e_i \text{ pour un certain } i \in \{1, \dots, D\}\}.$$

C'est encore un ensemble fini de cardinal $n_\varepsilon \simeq \varepsilon^{-D}$ (on peut montrer que

$$n_\varepsilon = D! \sum_{k=1}^D \frac{[1/\varepsilon]^k}{(k-1)!} \quad).$$

Si $D = 1$ alors $n_\varepsilon = [1/\varepsilon] = m_\varepsilon - 1$ et D_ε^* est l'ensemble des paires

$$D_\varepsilon^* = \{(k\varepsilon, (k+1)\varepsilon) : 0 \leq k < [1/\varepsilon]\},$$

en particulier pour $\varepsilon = 2^{-N}$:

$$D_\varepsilon^* = \{(k2^{-N}, (k+1)2^{-N}) : 0 \leq k < 2^N\}.$$

Soit

$$E_\varepsilon^* = \{(s, t) \in D_\varepsilon \times D_\varepsilon : \|t - s\| = \varepsilon\}.$$

On a $D_\varepsilon^* \subset E_\varepsilon^*$ avec encore $\text{Card}(E_\varepsilon^*) \simeq \varepsilon^{-D}$. Soit enfin

$$Z_\varepsilon^* = \sup\{|F(s) - F(t)| : (s, t) \in E_\varepsilon^*\}.$$

Notons pour terminer que toutes ces quantités sont relatives à $[0, 1]^D$ mais qu'elles se transposent facilement à n'importe quel pavé A . On note dans la suite \mathbb{D} l'ensemble des nombres dyadiques de $[0, 1]^D$:

$$\mathbb{D} = \bigcup_{N \geq 1} D_{2^{-N}}.$$

LEMME 2.1.6. *Pour tout $m \geq 0$ et tout $s, t \in \mathbb{D}$:*

$$\|t - s\| \leq 2^{-m} \quad \implies \quad |F(t) - F(s)| \leq 2 \sum_{n=m}^{\infty} Z_{2^{-n}}^*.$$

Démonstration. Soient $s, t \in \mathbb{D}$: $s = (s_1, \dots, s_D)$ et $t = (t_1, \dots, t_D)$. Du développement dyadique des réels, on déduit que, pour tout $i \in \{1, \dots, D\}$:

$$s_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_i^{(k)}}{2^k}, \quad t_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_i^{(k)}}{2^k}, \quad \text{avec } u_i^{(k)} \text{ et } v_i^{(k)} \text{ éléments de } \{0, 1\},$$

ces séries étant en fait des sommes finies puisque $s, t \in \mathbb{D}$. Considérons, pour tout $n \geq 1$, les sommes partielles :

$$s_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{u_i^{(k)}}{2^k} = \frac{[2^n s_i]}{2^n} \quad \text{et} \quad t_i^{(n)} = \sum_{k=1}^n \frac{v_i^{(k)}}{2^k} = \frac{[2^n t_i]}{2^n},$$

et les éléments de $D_{2^{-n}}$ correspondant :

$$s^{(n)} = (s_1^{(n)}, \dots, s_D^{(n)}) \quad \text{et} \quad t^{(n)} = (t_1^{(n)}, \dots, t_D^{(n)}).$$

a) Soit $n \geq 1$. Pour tout $i \in \{1, \dots, D\}$:

$$s_i^{(n+1)} - s_i^{(n)} = \frac{u_i^{(n+1)}}{2^{n+1}}.$$

Ainsi

$$\|s^{(n+1)} - s^{(n)}\| = 2^{-(n+1)} \sup\{\varepsilon_i\} \quad \text{avec } \varepsilon_i = u_i^{(n+1)} \in \{0, 1\}.$$

Donc soit $s^{(n+1)} = s^{(n)}$, soit $(s^{(n)}, s^{(n+1)}) \in E_{2^{-(n+1)}}^*$. Dans tous les cas

$$|F(s^{(n+1)}) - F(s^{(n)})| \leq Z_{2^{-(n+1)}}^*$$

et la même inégalité vaut pour t .

b) Soit $m \geq 0$ tel que $\|t - s\| \leq 2^{-m}$. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, D\}$, $|t_i - s_i| \leq 2^{-m}$, ou encore $|(2^m t_i) - (2^m s_i)| \leq 1$. Donc $|[2^m t_i] - [2^m s_i]| \in \{0, 1\}$. On en déduit que

$$\|t^{(m)} - s^{(m)}\| \in \{0, 2^{-m}\}.$$

Ainsi, une nouvelle fois, soit $s^{(m)} = t^{(m)}$, soit $(s^{(m)}, t^{(m)}) \in E_{2^{-m}}^*$, et dans tous les cas

$$|F(t^{(m)}) - F(s^{(m)})| \leq Z_{2^{-m}}^*.$$

c) Puisque $s, t \in \mathbb{D}$, les suites $s^{(n)}$ et $t^{(n)}$ sont stationnaires respectivement à s et à t . Il existe donc toujours $M > m$ tel que $s^{(M)} = s$ et $t^{(M)} = t$. Par suite, on peut écrire par télescopie :

$$\begin{aligned} F(t) - F(s) &= F(t^{(M)}) - F(s^{(M)}) \\ &= \sum_{n=m}^{M-1} (F(t^{(n+1)}) - F(t^{(n)})) + (F(t^{(m)}) - F(s^{(m)})) + \sum_{n=m}^{M-1} (F(s^{(n)}) - F(s^{(n+1)})). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire, et compte tenu des points a) et b) :

$$|F(t) - F(s)| \leq 2 \sum_{n=m}^{M-1} Z_{2^{-n}}^* \leq 2 \sum_{n=m}^{\infty} Z_{2^{-n}}^*,$$

qui est la majoration annoncée. \square

On peut enfin établir le second théorème fondamental qui fournit la régularité presque sûre des trajectoires de F :

THÉORÈME 2.1.7. *On suppose vraies les hypothèses H_1 et H_2 . Soit $d = \min\{\alpha, \gamma\}$ comme précédemment, et soit $\eta \in]0, d[$. Alors presque sûrement, F est uniformément höldérienne sur A d'exposant η : il existe une constante $C_\eta > 0$, non aléatoire, ne dépendant que de η , telle que*

$$\forall s, t \in A \quad |F(t) - F(s)| \leq C_\eta \|t - s\|^\eta.$$

Démonstration. On peut supposer $A = [0, 1]^D$. Fixons $\eta > d$ et $p > D$. Soit $(s, t) \in E_\varepsilon^*$. D'après le corollaire 2.1.5

$$\mathbb{P}(|F(t) - F(s)| \geq \varepsilon^\eta) \leq \varepsilon^p.$$

Par suite

$$\mathbb{P}(Z_\varepsilon^* \geq \varepsilon^\eta) \leq \varepsilon^{p-D}.$$

Prenons ε de la forme 2^{-n} . Puisque la série $\sum 2^{-n(p-D)}$ converge, le lemme de Borel-Cantelli entraîne que, presque sûrement, il existe $N \geq 1$ tel que :

$$n \geq N \implies Z_{2^{-n}}^* \leq 2^{-n\eta}.$$

Soit alors $s, t \in \mathbb{D}$ et $m \geq N$ tel que $2^{-(m+1)} \leq \|t - s\| \leq 2^{-m}$. Avec le lemme 2.1.6 il vient :

$$|F(t) - F(s)| \leq 2 \sum_{n=m}^{\infty} Z_{2^{-n}}^* \leq 2 \frac{2^{-m\eta}}{1 - 2^{-\eta}} \leq \frac{2^{\eta+1}}{1 - 2^{-\eta}} \|t - s\|^{\eta}.$$

La densité de \mathbb{D} dans $[0, 1]^D$ et la continuité de F permettent de conclure. \square

Le résultat précédent est très précis. En particulier il affirme qu'on peut choisir une constante C_{η} (liée à l'exposant de Hölder η) déterministe. On en déduit par exemple que

$$\forall \eta < d \quad \forall p > 0 \quad \mathbb{E} |F(t+h) - F(t)|^p \preceq \|h\|^{p\eta}.$$

Malgré tout, nous n'avons mis en évidence qu'une régularité «limite» au sens où on peut aller jusqu'à $d = \min\{\alpha, \gamma\}$ exclu. Avant d'aller plus loin nous allons montrer comment retrouver le résultat précédent par une autre technique.

2.2. Analyse par ondelettes

Les ondelettes sont un outil puissant pour étudier la régularité globale et locale des fonctions (voir [28, 20]). On peut se demander s'il est possible de les utiliser ici. En fait, elles ne permettent pas de simplifier les démonstrations, au contraire. Nous allons déterminer la régularité höldérienne uniforme de F mais les estimations nécessaires seront délicates à obtenir. Nous présentons cette méthode instructive (nous retrouverons des problèmes semblables au chapitre 3) en nous limitant toutefois, pour simplifier, au cas réel ($D = 1$).

Rappelons brièvement le contexte mathématique. On se donne une ondelette Ψ qu'on choisit paire et à support $[-1, 1]$. Elle est suffisamment oscillante, d'intégrale nulle, et on peut supposer $\Psi \geq 0$ sur $[0, 1/2]$ et $\Psi \leq 0$ sur $[1/2, 1]$. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on considère l'ondelette centrée en x et dilatée par ε :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Psi_{\varepsilon, x}(t) = \Psi\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right).$$

On définit alors les coefficients d'ondelettes de f par

$$C(\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} f(t) \Psi_{\varepsilon, x}(t) dt.$$

Avant d'en voir les applications, nous allons étudier ces coefficients, pour une fonction de bosses, de manière générale. Notre démarche est en tout point semblable à celle employée pour la méthode directe. Nous allons étudier la variable aléatoire $C(\varepsilon, x)$ de la même façon que $U_1(x, \varepsilon)$. Ces deux quantités sont évidemment liées : x est un paramètre de position et ε d'échelle. Le parallèle sera visible tant dans les résultats qui suivent que dans leurs démonstrations. Nous développerons cette analogie dans le chapitre 3.

On étudie ici les fonctions de bosses F définies par la formule (1.7). On a donc :

$$C(\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} F(t) \Psi_{\varepsilon, x}(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} c_n(\varepsilon, x) ,$$

avec

$$c_n(\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} g(n(t - X_n)) \Psi_{\varepsilon, x}(t) dt .$$

Ces dernières variables vont jouer le rôle de l'accroissement élémentaire $Z_n(x, \varepsilon)$. On commence ainsi à chercher une inégalité analogue à celle du lemme 2.1.1. Les hypothèses sur F sont celles de la section précédente. La régularité de ν explique que les estimations qui vont suivre ne feront pas intervenir le paramètre de position x .

Dans la suite, on suppose fixés $\varepsilon \in]0, 1]$, $x \in [0, 1]$, et on note, pour $t > 0$:

$$u(t) = \min \{t^\gamma, 1/t\} .$$

PROPOSITION 2.2.1. *On a, pour tout $n \geq 1$:*

$$|c_n(\varepsilon, x)| \preceq u(n\varepsilon) T_n(\varepsilon) ,$$

où $(T_n(\varepsilon))_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernouilli de paramètre $\mathbb{E}(T_n(\varepsilon)) \preceq (\varepsilon + 1/n)$.

Démonstration. La preuve reprend les idées de celle du lemme 2.1.1 : lorsque l'intersection des supports de g et Ψ n'est pas vide, quelle est la meilleure majoration du produit $|g(n(t - X_n)) \Psi_{\varepsilon, x}(t)|$?

Notons $B_n(t, \varepsilon, x) = B(t, n^{-1}) \cup B(x, \varepsilon)$ et considérons la variable aléatoire

$$T_n(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n \in B_n(t, \varepsilon, x) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a toujours $B_n(t, \varepsilon, x) \subset [-2, 3] = A(2)$ et donc d'après l'hypothèse H_1 :

$$\nu(B_n(t, \varepsilon, x)) \preceq \frac{1}{n} + \varepsilon .$$

Ainsi $T_n(\varepsilon)$ suit une loi de Bernouilli de paramètre $\mathbb{E}(T_n(\varepsilon)) \preceq \varepsilon + 1/n$.

a) Etants donnés le support de g et Ψ , si $X_n \notin B_n(t, \varepsilon, x)$ alors $c_n(\varepsilon, x) = 0$.

Supposons maintenant que les deux supports s'interceptent. Pour obtenir une majoration efficace il faut voir qui de g ou de Ψ l'emporte sur l'intervalle $R = B(t, n^{-1}) \cap B(x, \varepsilon)$. Cela dépend donc de l'importance relative de $B(t, n^{-1})$ et $B(x, \varepsilon)$ dans R .

b) On a tout d'abord

$$|g(n(t - X_n)) \Psi_{\varepsilon, x}(t)| \leq \|g\|_{\infty} \|\Psi\|_{\infty} \mathbf{1}_R(t) ,$$

donc

$$\begin{aligned} |c_n(\varepsilon, x)| &\preceq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_R(t) dt \preceq \frac{1}{\varepsilon} \lambda(R) \\ &\preceq \frac{1}{\varepsilon} \min\{\lambda(B(t, n^{-1})), \lambda(B(x, \varepsilon))\} \preceq \frac{2}{\varepsilon} \min\{n^{-1}, \varepsilon\} . \end{aligned}$$

C'est dire qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$|c_n(\varepsilon, x)| \leq C_1 \min\{(n\varepsilon)^{-1}, 1\}.$$

Cette estimation va donc être bonne pour n grand. En effet dans ce cas R va souvent être réduit à $B(t, n^{-1})$. Sur cet intervalle de longueur $2/n$ le caractère oscillant de l'ondelette ne va pas se ressentir. Mais si n est petit, R va être proche de $B(x, \varepsilon)$ sur lequel l'ondelette change de signe. Le fait ici de ne pas en tenir compte en majorant $|\Psi|$ par $\|\Psi\|_\infty$ conduit à une majoration trop large.

c) On a successivement :

$$\begin{aligned} c_n(\varepsilon, x) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} g(n(t - X_n)) \Psi\left(\frac{1}{\varepsilon}(t - x)\right) dt = \int_{-1}^1 g(n(\varepsilon u + x - X_n)) \Psi(u) du \\ &= 2 \left(\int_0^{1/2} g(n(\varepsilon u + x - X_n)) \Psi(u) du + \int_{1/2}^1 g(n(\varepsilon u + x - X_n)) \Psi(u) du \right) \\ &= 2 \left(\int_0^{1/2} g(n(\varepsilon v + x - X_n)) \Psi(v) dv + \int_0^{1/2} g(n(\varepsilon(1 - v) + x - X_n)) \Psi(1 - v) dv \right) \\ &= 2 \int_0^{1/2} \left(g(n(\varepsilon v + x - X_n)) |\Psi(v)| - g(n(\varepsilon(1 - v) + x - X_n)) |\Psi(1 - v)| \right) dv. \end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned} c_n(\varepsilon, x) &= 2 \int_0^{1/2} (g(n(\varepsilon v + x - X_n)) - g(n(\varepsilon(1 - v) + x - X_n))) |\Psi(v)| dv \\ &\quad + 2 \int_0^{1/2} g(n(\varepsilon(1 - v) + x - X_n)) (|\Psi(v)| - |\Psi(1 - v)|) dv. \end{aligned}$$

Maintenant, par choix de Ψ on a :

$$\int_0^{1/2} |\Psi(v)| dv = \int_{1/2}^1 |\Psi(v)| dv = \int_0^{1/2} |\Psi(1 - v)| dv.$$

On peut donc soustraire la quantité

$$\int_0^{1/2} g(n(x - X_n)) (|\Psi(v)| - |\Psi(1 - v)|) dv = 0$$

à la seconde intégrale, pour obtenir :

$$\begin{aligned} c_n(\varepsilon, x) &= 2 \int_0^{1/2} (g(n(\varepsilon v + x - X_n)) - g(n(\varepsilon(1 - v) + x - X_n))) |\Psi(v)| dv \\ &\quad + 2 \int_0^{1/2} (g(n(\varepsilon(1 - v) + x - X_n)) - g(n(x - X_n))) (|\Psi(v)| - |\Psi(1 - v)|) dv. \end{aligned}$$

Vu que $g \in \Lambda_\gamma(\mathbb{R})$ et que $\|g\|_\infty = 1$, on a d'une part

$$|g(n(\varepsilon v + x - X_n)) - g(n(\varepsilon(1 - v) + x - X_n))| \leq \min\{(n\varepsilon |2v - 1|)^\gamma, 2\},$$

et, d'autre part :

$$|g(n(\varepsilon(1 - v) + x - X_n)) - g(n(x - X_n))| \leq \min\{(n\varepsilon |1 - v|)^\gamma, 2\}.$$

En intégrant ces inégalités, on déduit l'existence d'une constante $C_2 > 0$, ne dépendant que de g et Ψ , telle que :

$$|c_n(\varepsilon, x)| \leq C_2 \min\{(n\varepsilon)^\gamma, 1\}.$$

d) Il ne reste plus qu'à regrouper les majorations obtenues. Avec $C = \max\{C_1, C_2\}$, on déduit des points précédents que

$$|c_n(\varepsilon, x)| \leq C \min\{(n\varepsilon)^{-1}, (n\varepsilon)^\gamma, 1\} T_n(\varepsilon),$$

d'où le résultat, puisque $\min\{t^{-1}, t^\gamma, 1\} = \min\{t^{-1}, t^\gamma\}$. \square

LEMME 2.2.2. *Pour tout $k \geq 1$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-k\alpha} \left(\varepsilon + \frac{1}{n} \right) u(n\varepsilon)^k \asymp \begin{cases} \varepsilon^{kd} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \varepsilon^{k\alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Démonstration. Notons $h(\varepsilon)$ la somme précédente. Soit $N \geq 1$ tel que $(N+1)^{-1} < \varepsilon \leq N^{-1}$. On a

$$h(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{k\gamma} \sum_{n=1}^N n^{-1+k(\gamma-\alpha)} + \varepsilon^{1-k} \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-k(\alpha+1)}.$$

Puisque $k \geq 1$, la série de droite converge et

$$\varepsilon^{1-k} \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{-k(\alpha+1)} \asymp \varepsilon^{1-k} N^{-k(\alpha+1)+1} \asymp \varepsilon^{1-k} \varepsilon^{k(\alpha+1)-1} = \varepsilon^{k\alpha}.$$

La somme de gauche s'évalue selon le signe de $\gamma - \alpha$:

$$\varepsilon^{k\gamma} \sum_{n=1}^N n^{-1+k(\gamma-\alpha)} \asymp \begin{cases} \varepsilon^{k\alpha} & \text{si } \alpha < \gamma \\ \varepsilon^{k\gamma} |\ln \varepsilon| & \text{si } \alpha = \gamma \\ \varepsilon^{k\gamma} & \text{si } \alpha > \gamma \end{cases}$$

d'où le résultat dans les différents cas de figure. \square

COROLLAIRE 2.2.3. *Il existe $C_1 > 0$ telle que pour tout $u > 0$:*

$$\mathbb{E}(\exp(u|C(\varepsilon, x)|)) \leq \begin{cases} \exp(C_1 \exp(u\varepsilon^d)) & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \exp(C_1 |\ln \varepsilon| \exp(u\varepsilon^\alpha)) & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Démonstration. Les réels ε et x étant toujours fixés, soit $u > 0$. Notons $p_n = \mathbb{E}(T_n(\varepsilon))$, $v_n = n^{-\alpha} u(n\varepsilon)$ et $\mathcal{L}(u) = \mathbb{E}(\exp(u|C(\varepsilon, x)|))$. On a immédiatement

$$\mathcal{L}(u) \leq \mathbb{E} \left(\exp \left(u \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} |c_n(\varepsilon, x)| \right) \right) = \mathbb{E} \left(\prod_{n=1}^{\infty} \exp(u n^{-\alpha} |c_n(\varepsilon, x)|) \right).$$

En utilisant alors la proposition 2.2.1 et l'indépendance des $T_n(\varepsilon)$, on obtient :

$$\mathcal{L}(u) \asymp \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(\exp(u v_n T_n(\varepsilon))).$$

Pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(uv_n T_n(\varepsilon))) &= (1 - p_n) + p_n e^{uv_n} = p_n(e^{uv_n} - 1) + 1 \\ &\leq \exp(p_n(e^{uv_n} - 1)) = \exp\left(p_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k v_n^k}{k!}\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\ln(\mathcal{L}(u)) \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \varepsilon\right) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} v_n^k \leq C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \varepsilon\right) v_n^k.$$

D'après le lemme 2.2.2, il existe $C' > 0$ telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \varepsilon\right) v_n^k \leq \begin{cases} C' \varepsilon^{kd} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ C' \varepsilon^{k\alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Par suite

$$\ln(\mathcal{L}(u)) \leq \begin{cases} C C' \exp(u\varepsilon^d) & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ C C' \exp(u\varepsilon^\alpha) |\ln \varepsilon| & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

d'où le résultat avec $C_1 = C C'$. \square

On peut alors contrôler la décroissance des coefficients $|C(\varepsilon, x)|$ de la même manière qu'on a évalué celle de l'accroissement $|F(x + \varepsilon) - F(x)|$.

PROPOSITION 2.2.4. *Il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $h > 0$:*

$$\mathbb{P}(|C(\varepsilon, x)| \geq h) \leq \exp(b(\varepsilon, h)),$$

avec

$$b(\varepsilon, h) = \begin{cases} \frac{1}{C_2} h \varepsilon^{-d} (1 - \ln(\frac{1}{C_1 C_2} h \varepsilon^{-d})) & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \frac{1}{C_2} h \varepsilon^{-d} (1 - \ln(\frac{1}{C_1 C_2} \frac{h \varepsilon^{-d}}{|\ln \varepsilon|})) & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Etant donné la majoration fournie par le corollaire précédent, la démonstration est analogue à celle de la proposition 2.1.4 en prenant garde aux rôles de ε et h . On prouve de même le

COROLLAIRE 2.2.5. *Pour tout $\eta \in]0, d[$ et tout $p > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$ et tout $x \in [0, 1]$:*

$$\mathbb{P}(|C(\varepsilon, x)| \geq \varepsilon^\eta) \leq \varepsilon^p.$$

Rappelons maintenant comment estimer l'exposant de Hölder d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ à l'aide des nombres $C(\varepsilon, x)$. On peut considérer les coefficients discrets :

$$\forall j, k \in \mathbb{Z} \quad c_{k,j}(f) = C(2^{-j}, k2^{-j}) = 2^j \int_{\mathbb{R}} f(t) \Psi(2^j t - k) dt.$$

La régularité globale de f est alors naturellement liée à la décroissance des coefficients $c_{k,j}(f)$ (voir [28, 20]) :

THÉORÈME 2.2.6. *Pour $H \in]0, 1[$, on a l'équivalence*

$$f \in \Lambda_H(\mathbb{R}) \iff \forall j, k \in \mathbb{Z} \quad c_{k,j}(f) \lesssim 2^{-jH}.$$

Pour étudier f sur $[0, 1]$ on remplace f par $f \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}$. Cela revient à ne considérer que certains couples (k, j) . En effet, f est alors nulle en dehors de $[0, 1]$, et l'ondelette translatée-dilatée $\Psi(2^j t - k)$ a pour support l'intervalle $[(k-1)2^{-j}, (k+1)2^{-j}]$. Ainsi $c_{k,j}(f) = 0$ pour $(k+1)2^{-j} \leq 0$ ou $(k-1)2^{-j} \geq 1$. On doit donc en fait majorer $c_{k,j}(f)$ pour les entiers k, j tels que

$$j \geq 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq k \leq 2^j.$$

De plus, il suffit que la majoration du théorème 2.2.6 ait lieu pour tout j suffisamment grand. Dans ces conditions, nous allons établir pour les fonctions de bosses, le

THÉORÈME 2.2.7. *Soit $\eta \in]0, d[$. On a presque sûrement :*

$$\exists j_0 \geq 0 \quad \forall j \geq 0 \quad \forall k \in \{0, \dots, 2^j\} \quad |c_{k,j}(F)| \leq 2^{-j\eta}.$$

Par suite, F est presque sûrement uniformément höldérienne d'exposant η .

Démonstration. Fixons $\eta \in]0, d[$ et considérons pour $j, k \geq 0$ les événements

$$E(k, j) = (|c_{k,j}(F)| \geq 2^{-j\eta}) \quad \text{et} \quad E(j) = \bigcup_{k=0}^{2^j} E(k, j).$$

On déduit du corollaire 2.2.5 que, pour tout j assez grand :

$$\mathbb{P}(E(k, j)) = \mathbb{P}(|C(2^{-j}, k2^{-j})| \geq 2^{-j\eta}) \leq 2^{-2^j}.$$

Par suite

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(E(j)) \leq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-2^j} < \infty,$$

et donc, d'après le lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement, à partir d'un certain rang j_0 , l'événement $E(j)$ ne se produit pas. C'est précisément la conclusion du théorème 2.2.7. \square

Remarquons que, comme la méthode directe, l'analyse par ondelettes ne nous permet pas d'aller plus loin dans les exposants de Hölder de F . En particulier on ne peut pas affirmer que F appartient presque sûrement à $\Lambda_\alpha(A)$. On a envie de dire que α est en ce sens un exposant «limite». La section suivante formalise la situation.

2.3. Exposant critique

Revenons au cas général de la fonction f . L'inclusion (2.3) conduit naturellement à introduire un exposant critique de régularité globale de f sur A :

$$\alpha_g(f, A) = \sup\{H \in]0, 1] : f \in \Lambda_H(A)\}. \quad (2.6)$$

Peut-on calculer cet exposant pour F ? Le théorème 2.1.7 fourni déjà $\alpha_g(F, A) \geq \alpha$. Se pose alors la question de l'égalité, c'est-à-dire de la valeur exacte de $\alpha_g(F, A)$. Il est généralement plus difficile d'obtenir une majoration de $\alpha_g(F, A)$. Nous allons fournir une réponse dans un cas simple. Le cas général découlera du calcul de la dimension de boîte du graphe de F que nous ferons au prochain chapitre.

On commence par rappeler un résultat liant aux coefficients de Fourier de f son appartenance aux ensembles Λ_H .

LEMME 2.3.1. *Soit f une fonction continue et périodique sur \mathbb{R} . On note $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. Alors*

$$f \in \Lambda_H(\mathbb{R}) \implies \forall q > \frac{2}{2H+1} \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k|^q < \infty .$$

On déduit de ce lemme un critère de non appartenance à Λ_H qui va pouvoir s'appliquer ici .

PROPOSITION 2.3.2. *Supposons $D = 1$, $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et choisissons pour ν la loi uniforme sur $[-1, 2]$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, F n'appartient pas presque sûrement à $\Lambda_{\alpha+\varepsilon}([0, 1])$.*

Démonstration.

a) Pour $A = [0, 1]$, les hypothèses H_1 et H_2 sont vérifiées avec $\gamma = 1$ (donc $d = \alpha$). La série F existe, elle est continue, intégrable, et à support compact inclus dans $[-2, 3]$ avec $F(-2) = F(3) = 0$. On prolonge naturellement F sur \mathbb{R} par périodicité en une fonction encore notée F et il suffit d'établir la proposition pour cette nouvelle fonction. Ses coefficients de Fourier sont donnés, pour $k \in \mathbb{Z}^*$, par

$$\gamma_k = \frac{1}{5} \int_{-2}^3 F(t) \exp\left(-\frac{2i\pi kt}{5}\right) dt = \frac{1}{5} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-2}^3 g(n(t - X_n)) \exp\left(-\frac{2i\pi kt}{5}\right) dt .$$

Compte tenu du support de g , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 g(n(t - X_n)) \exp\left(-\frac{2i\pi kt}{5}\right) dt &= \int_{X_n-1/n}^{X_n+1/n} g(n(t - X_n)) \exp\left(-\frac{2i\pi kt}{5}\right) dt \\ &= \frac{1}{n} \int_{-1}^1 g(x) \exp\left(-\frac{2i\pi k}{5} \left(\frac{x}{n} + X_n\right)\right) dx \\ &= \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{2i\pi k X_n}{5}\right) \int_{-1}^1 g(x) \exp\left(-\frac{2i\pi k x}{5n}\right) dx . \end{aligned}$$

En outre, puisque g est paire :

$$\int_{-1}^0 g(x) \exp\left(-\frac{2i\pi k x}{5n}\right) dx = \int_0^1 g(x) \exp\left(\frac{2i\pi k x}{5n}\right) dx .$$

Donc

$$\int_{-1}^1 g(x) \exp\left(-\frac{2i\pi k x}{5n}\right) dx = 2 \int_0^1 g(x) \cos\left(\frac{2\pi k x}{5n}\right) dx = \frac{5n}{\pi k} \int_0^1 |g'(x)| \sin\left(\frac{2\pi k x}{5n}\right) dx .$$

Finalement

$$\gamma_k = \frac{1}{k\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-\alpha} \int_0^1 |g'(x)| \sin\left(\frac{2\pi k x}{5n}\right) dx \right) \exp\left(-\frac{2i\pi k X_n}{5}\right) .$$

On remarque que $\gamma_{-k} = \overline{\gamma_k}$ et donc que $|\gamma_{-k}| = |\gamma_k|$. Dans la suite, on suppose $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Notons ici

$$c_{k,n} = n^{-\alpha} \int_0^1 |g'(x)| \sin\left(\frac{2\pi k x}{5n}\right) dx .$$

En utilisant le point a) il vient :

$$\begin{aligned} |\gamma_k|^2 &= \gamma_k \overline{\gamma_k} = \frac{1}{k^2 \pi^2} \sum_{n,m} c_{k,n} c_{k,m} \exp\left(-\frac{2i\pi k}{5}(X_n - X_m)\right) \\ &= \frac{1}{k^2 \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n}^2 + \frac{1}{k^2 \pi^2} \sum_{n \neq m} c_{k,n} c_{k,m} \exp\left(-\frac{2i\pi k}{5}(X_n - X_m)\right). \end{aligned}$$

c) D'après la formule de la moyenne, il existe $x_{k,n} \in]0, 1[$ tel que

$$c_{k,n} = n^{-\alpha} |g'(x_{k,n})| \int_0^1 \sin\left(\frac{2\pi k x}{5n}\right) dx = n^{-\alpha} |g'(x_{k,n})| \left(\frac{5n}{2\pi k} (1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{5n}\right))\right).$$

Ainsi, on a toujours $c_{k,n} \geq 0$. Ensuite, pour tout $t \in [0, \pi/2]$ on a $\sin(t) \geq 2t/\pi$, donc pour tout $n \geq k$:

$$c_{k,n} \geq \frac{4}{5} \frac{k}{n^{\alpha+1}} \int_0^1 |g'(x)| x dx.$$

d) Pour $n \neq m$, les variables X_n et X_m sont indépendantes, de sorte que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{2i\pi k}{5}(X_n - X_m)\right)\right) &= \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{2i\pi k}{5}X_n\right)\right) \mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{2i\pi k}{5}X_m\right)\right) \\ &= \frac{25}{18} \frac{1}{k^2} (1 - \cos\left(\frac{6\pi k}{5}\right)) \geq 0. \end{aligned}$$

Donc, en utilisant de plus le point c), on a :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n \neq m} c_{k,n} c_{k,m} \exp\left(-\frac{2i\pi k}{5}(X_n - X_m)\right)\right) \geq 0.$$

On en déduit l'existence d'un ensemble mesurable Ω_0 tel que $\mathbb{P}(\Omega_0) > 0$ et

$$\forall \omega \in \Omega_0 \quad \sum_{n \neq m} c_{k,n} c_{k,m} \exp\left(-\frac{2i\pi k}{5}(X_n - X_m)\right) \geq 0$$

e) En utilisant le point d), on déduit du point b) que, pour tout $\omega \in \Omega_0$:

$$|\gamma_k|^2 \geq \frac{1}{k^2 \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_{k,n}^2 \geq \frac{1}{k^2 \pi^2} \sum_{n=k}^{\infty} c_{k,n}^2.$$

D'après la minoration fournie par le point c), on a, pour tout $\omega \in \Omega_0$:

$$|\gamma_k|^2 \geq \frac{1}{k^2 \pi^2} \sum_{n=k}^{\infty} c_{k,n}^2 \gtrsim \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha+2}} \gtrsim \frac{1}{k^{2\alpha+1}}.$$

Soit encore, pour tout $p \geq 1$:

$$|\gamma_k|^{2p} \gtrsim \frac{1}{k^{(2\alpha+1)p}},$$

qui est le terme général d'une série divergente pour $p \leq \frac{1}{2\alpha+1}$.

f) Soit $\varepsilon > 0$. On peut toujours trouver $q = 2p$ tel que

$$\frac{2}{2(\alpha + \varepsilon) + 1} < q \leq \frac{2}{2\alpha + 1}.$$

L'inégalité de droite implique, compte tenu du point e) :

$$\forall \omega \in \Omega_0 \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\gamma_k|^q = \infty .$$

On vient donc de démontrer la divergence de cette série sur un ensemble de \mathbb{P} -mesure non nulle. Ainsi, d'après le lemme 2.3.1, la fonction de bosses F ne peut pas appartenir presque-sûrement à $\Lambda_{\alpha+\varepsilon}([0, 1])$. \square

Par suite, dans les hypothèses de la proposition précédente, on a $\alpha_g(F, [0, 1]) = \alpha$.

2.4. Correction logarithmique

On pourrait être déçu du fait que, même avec une fonction de départ g très régulière, F n'appartienne pas presque sûrement à $\Lambda_\alpha(A)$, c'est-à-dire que l'exposant critique $\alpha_g(F, A)$ ne soit pas atteint. En fait, de nombreux processus se comportent de cette façon. On peut généralement espérer un meilleur résultat à une «erreur» près (voir aussi le lien avec les ondelettes [28, 20]). Cela consiste à préciser l'ordre de grandeur de l'accroissement de f en affinant l'échelle de référence. On choisit pour cette dernière la famille $\{x \mapsto x^H |\log x|^K : H, K > 0\}$.

COROLLAIRE 2.4.1. *Pour tout $p > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $t, t+h \in [0, 1]^D$ et tout $\|h\| < h_0$:*

$$\mathbb{P}(|F(t+h) - F(t)| \geq \|h\|^d |\log \|h\||) \leq \|h\|^p .$$

Démonstration. On utilise la proposition 2.1.4 avec $\varepsilon = \|h\|^d |\log \|h\||$:

$$\mathbb{P}(|F(t+h) - F(t)| \geq \|h\|^d |\log \|h\||) \leq \exp(b(\|h\|)) ,$$

avec

$$b(\|h\|) = \begin{cases} \frac{1}{C_2} |\log \|h\|| (1 - \ln(\frac{1}{C_1 C_2} |\log \|h\||)) & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \frac{1}{C_2} |\log \|h\|| (1 - \ln(\frac{1}{C_1 C_2} \frac{|\log \|h\||}{|\ln \|h\||})) & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Lorsque $\|h\| \rightarrow 0$ on a, dans les deux cas :

$$b(\|h\|) \rightarrow -\infty \quad \text{et} \quad b(\|h\|)/\ln \|h\| \rightarrow +\infty$$

Donc si $p > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que

$$\|h\| < h_0 \implies b(\|h\|) \leq p \ln \|h\| .$$

Or pour de tels $\|h\|$ nous avons $\exp(b(\|h\|)) \leq \|h\|^p$. \square

THÉORÈME 2.4.2. *Il existe une constante déterministe $C > 0$ telle que, presque sûrement, pour tout $\|h\|$ assez petite :*

$$\forall t, t+h \in [0, 1]^D \quad |F(t+h) - F(t)| \leq C \|h\|^d |\log \|h\|| .$$

Démonstration. Fixons $p > D$. Soit $(s, t) \in E_\varepsilon^*$. D'après le corollaire précédent :

$$\mathbb{P}(|F(t) - F(s)| \geq \varepsilon^d |\log \varepsilon|) \leq \varepsilon^p .$$

Par suite

$$\mathbb{P}(Z_\varepsilon^* \geq \varepsilon^d |\log \varepsilon|) \preceq \varepsilon^{p-D} .$$

Prenons ε de la forme 2^{-n} . Puisque la série $\sum 2^{-n(p-D)}$ converge, le lemme de Borel-Cantelli entraîne que presque sûrement il existe $N \geq 1$ tel que

$$n \geq N \implies Z_{2^{-n}}^* \leq 2^{-nd} |\log 2^{-n}|.$$

Soit alors $s, t \in \mathbb{D}$ et $m \geq N$ tel que $2^{-(m+1)} \leq \|t - s\| \leq 2^{-m}$. Avec le lemme 2.1.6 il vient :

$$|F(t) - F(s)| \leq 2 \sum_{n=m}^{\infty} Z_{2^{-n}}^* \leq 2(\log 2) \sum_{n=m}^{\infty} n2^{-nd} \leq 2 \frac{m 2^{-md}}{1 - 2^{-d}}.$$

Ainsi

$$|F(t) - F(s)| \leq \frac{2^{d+1} \log 2}{1 - 2^{-d}} \|t - s\|^m |\log \|t - s\||.$$

La densité de \mathbb{D} dans $[0, 1]^D$ et la continuité de F permettent de conclure. \square

2.5. Régularité locale

On ne peut pas toujours appliquer le théorème 2.1.7. L'hypothèse H_2 impose une régularité uniforme à g qui est plus forte que la simple continuité. C'est le cas de la bosse construite dans l'exemple 2 page 40 lorsque $\alpha = 0$. Pour un exemple plus simple encore, on peut choisir pour g la bosse indicatrice $\mathbb{1}_{[-1,1]}$ pour laquelle F n'est pas à trajectoires continues. Il faut alors abandonner le point de vue global et définir d'autres notions pour analyser plus finement l'irrégularité de F (voir [23]). Le point clé est toujours l'étude des accroissements de f .

Considérons à nouveau le cas général. A partir des définitions (2.2) et (2.6) que nous avons utilisées, on peut commencer par construire pour f un exposant de Hölder local. En effet, si on fixe H , on obtient une échelle de régularité en faisant varier A :

$$B \subset A \implies \Lambda_H(A) \subset \Lambda_H(B).$$

On obtient la même implication avec l'exposant critique de régularité globale, ce qui suggère de définir l'exposant de Hölder local de f au point $t \in [0, 1]^D$ comme

$$\alpha_l(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_g(f, [t - \varepsilon, t + \varepsilon]). \quad (2.7)$$

Pour affiner la description de l'irrégularité locale, on fait intervenir un exposant de Hölder ponctuel. Pour cela, on se donne une fonction d'ensemble $\mathcal{A}(f, K)$ définie pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^D$ et on définit l'exposant de Hölder ponctuel de f au point $t \in [0, 1]^D$ par

$$\alpha_p(t) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{A}(f, B(t, \varepsilon))}{\log \varepsilon}. \quad (2.8)$$

La fonction $\mathcal{A}(f, \cdot)$ est choisie d'une part selon l'information que l'on souhaite extraire du signal, d'autre part selon sa facilité d'utilisation. Un bon choix consiste à considérer l'oscillation $\text{osc}(f, B)$ de f sur l'ensemble B (voir chapitre 3). Il permet de faire le lien entre fonctions et mesures. Mais l'oscillation peut être assez difficile à manipuler. Dans le cas réel, une analyse plus simple de f peut être faite en se restreignant aux intervalles compacts et en choisissant $\mathcal{A}(f, [a, b]) = b - a$. On peut encore ne prendre en compte que des intervalles dyadiques et utiliser les ondelettes

en posant $\mathcal{A}(f, [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}]) = |c_{k,j}(f)|$.

On peut alors tenter de calculer les exposants $\alpha_l(t)$ et $\alpha_l(t)$. Toutefois, il est difficile de calculer ces exposants pour chaque point t . Une possibilité est de grouper les points selon la valeur de leur exposant en considérant par exemple les ensembles de niveau

$$E_H = \{t \in [0, 1]^D : \alpha_p(t) = H\}.$$

Ces ensembles sont petits, au sens où généralement $\lambda(E_\alpha) = 0$, et grands, au sens où leur dimension de boîte vaut souvent 1. Pour les évaluer on considère plutôt leur dimension de Hausdorff qui fournit alors le spectre de Hausdorff de f :

$$f_h(H) = \dim_H(E_H). \quad (2.9)$$

Cet objet est le premier pas vers une analyse multifractale : si $f_h(H)$ est positif ou nul pour différentes valeurs de H , f présente des comportements spécifiques sur plusieurs sous-ensembles de $[0, 1]^D$. La fonction précédente reste encore difficile à déterminer tant de façon théorique que numérique. Nous présenterons une manière de procéder dans le chapitre suivant.

CHAPITRE 3

Indices dimensionnels

3.1. Introduction

Une autre façon classique d'évaluer l'irrégularité d'une fonction $f : [0, 1]^D \rightarrow \mathbb{R}$ est d'étudier son graphe

$$\Gamma_f = \{(t, f(t)) : t \in [0, 1]^D\} \subset \mathbb{R}^{D+1}.$$

Nous allons nous intéresser aux indices permettant de caractériser l'irrégularité de Γ_f , souvent appelés «dimensions fractales». Celles-ci sont de deux types : celles qui ressortissent à la théorie de la mesure (dimension de Hausdorff, dimension d'empilement ou de packing) et celles obtenues comme l'ordre de croissance d'une quantité $Q(\varepsilon)$ qui tend vers 0 lorsque ε décroît vers 0 ; quantité obtenue par des procédés de comptage, d'intégration, ou autres. Nous nous intéressons ici à ce deuxième type de dimension. Il faut disposer de règles de comparaison et d'une échelle de référence (au voisinage de 0). Nous conservons les choix du § 1.1. On dispose alors d'un cadre naturel et simple pour étudier les dimensions fractales pouvant s'écrire

$$\dim(\Gamma_f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log Q(\varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (3.1)$$

pour une certaine fonction Q . Cette limite peut ne pas exister, aussi, par souci de généralité, on étend la formule (3.1) aux dimensions nécessitant l'emploi de limites inférieure ou supérieure. La dimension de boîte $\dim_{\mathbb{B}}$ relève de ce type. Notons $N(\varepsilon)$ le nombre minimum de boules de diamètre ε , centrées dans Γ_f et recouvrant Γ_f . Alors :

$$\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(1/N(\varepsilon))}{\log \varepsilon}.$$

En posant $d(\varepsilon) = \varepsilon^{D+1}/Q(\varepsilon)$, on étudie souvent (3.1) sous la forme

$$\dim(\Gamma_f) = D + 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log d(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (3.2)$$

Le choix de d est crucial dans ce type d'analyse. On peut appeler d une «fonction analysante». Certaines de ces fonctions permettent d'analyser n'importe quel compact du plan (par exemple $\varepsilon^{D+1}N(\varepsilon)$) d'autres sont spécifiques aux graphes de fonctions. Leur point commun est qu'elles peuvent souvent s'écrire comme la norme d'un opérateur (construit à partir de f) dans un certain espace $L^p(E, \mathcal{B}, \mu)$ (voir [19, 37]). Nous allons nous intéresser aux dimensions déterminées par de telles fonctions. Après avoir établi des résultats concernant les normes d'opérateurs, nous donnerons des moyens d'obtenir un encadrement des dimensions associées et de certains indices dimensionnels liés également à l'analyse multifractale de f . Nous

traiterons l'exemple de $\dim_{\mathcal{B}}$ et de la dimension de régularisation $\dim_{\mathcal{R}}$, spécifique aux graphes de fonctions continues. Les résultats principaux sont obtenus dans le cas où f est uniformément höldérienne. Les résultats du chapitre précédent nous permettront donc de traiter en détail le cas des fonctions de bosses.

3.2. Normes d'opérateurs

Dans la suite, E désigne un borélien non vide de \mathbb{R}^D (ou de $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D$) muni de sa tribu borélienne \mathcal{B} . On considère une famille $\xi = (\Phi_\varepsilon, \mu_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ où, pour tout $\varepsilon > 0$, Φ_ε est une fonction continue, bornée, définie sur E et à valeurs réelles, et μ_ε une probabilité sur (E, \mathcal{B}) . Dans ces conditions, on définit

$$N_p(\xi, \varepsilon) = \left(\int_E |\Phi_\varepsilon(x)|^p d\mu_\varepsilon(x) \right)^{1/p}. \quad (3.3)$$

et $N_\infty(\xi, \varepsilon) = \sup\{|\Phi_\varepsilon(x)| : x \in E \cap \text{Supp}(\mu_\varepsilon)\}$ où $\text{Supp}(\mu_\varepsilon)$ est le support de μ_ε .

On définit enfin les indices :

$$\bar{\sigma}(\xi, p) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_p(\xi, \varepsilon)}{\log \varepsilon} \quad (3.4)$$

$$\underline{\sigma}(\xi, p) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_p(\xi, \varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (3.5)$$

Il résulte du lemme de Jensen que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, l'application $p \mapsto N_p(\xi, \varepsilon)$ est croissante. On vérifie qu'elle est majorée par $N_\infty(\xi, \varepsilon)$. On supposera que l'application $\varepsilon \mapsto N_p(\xi, \varepsilon)$ est continue et tend vers 0 quand ε tend vers 0. Nous voulons alors évaluer cette vitesse de convergence avec l'échelle habituelle. En ce sens, le résultat suivant est essentiel : il permet, dans certains cas, de préciser la «répartition» des courbes $\varepsilon \mapsto N_p(\xi, \varepsilon)$.

LEMME 3.2.1. *Soient p, H_1 et H_2 des réels strictement positifs tels que*

$$\varepsilon^{H_2} \preceq N_p(\xi, \varepsilon) \leq N_\infty(\xi, \varepsilon) \preceq \varepsilon^{H_1}.$$

Alors pour tout $q > 0$:

$$\varepsilon^{H_1+(H_2-H_1)\max\{1, p/q\}} \preceq N_q(\xi, \varepsilon) \preceq \varepsilon^{H_1}.$$

Démonstration. La majoration de droite est triviale. Pour l'autre, deux cas sont à considérer. Si $q > p$, l'inégalité résulte de la croissance de $p \mapsto N_p(\xi, \varepsilon)$. Si $q \leq p$, alors on écrit

$$\begin{aligned} \varepsilon^{pH_2} \preceq N_p^p(\xi, \varepsilon) &= \int_E |\Phi_\varepsilon(x)|^p d\mu_\varepsilon(x) \leq \int_E N_\infty^{p-q}(\xi, \varepsilon) |\Phi_\varepsilon(x)|^q d\mu_\varepsilon(x) \\ &\leq N_\infty^{p-q}(\xi, \varepsilon) \int_E |\Phi_\varepsilon(x)|^q d\mu_\varepsilon(x) \preceq \varepsilon^{(p-q)H_1} N_q^q(\xi, \varepsilon), \end{aligned}$$

de sorte que $N_q(\xi, \varepsilon) \succeq \varepsilon^{H_1+(H_2-H_1)(p/q)}$. \square

Ce résultat permet de comparer $N_p(\xi, \varepsilon)$ à une puissance de ε . Si $N_p(\xi, \varepsilon) \simeq \varepsilon^H$, on a immédiatement $\underline{\sigma}(\xi, p) = \bar{\sigma}(\xi, p) = H$. Cela dit, la question de l'estimation de ces indices n'est pas triviale. Avec une hypothèse plus faible on a un premier résultat utile :

LEMME 3.2.2. *On suppose qu'il existe $H > 0$ tel que $N_\infty(\xi, \varepsilon) \asymp \varepsilon^H$. Alors*

$$\forall p > 0 \quad \underline{\sigma}(\xi, p) \geq H.$$

Démonstration. Il existe donc $C > 0$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p > 0$:

$$N_p(\xi, \varepsilon) \leq N_\infty(\xi, \varepsilon) \leq C\varepsilon^H.$$

On peut supposer $\log \varepsilon < 0$ de sorte que

$$\frac{\log N_p(\xi, \varepsilon)}{\log \varepsilon} \geq \frac{\log N_\infty(\xi, \varepsilon)}{\log \varepsilon} \geq \frac{\log C}{\log \varepsilon} + H.$$

D'où le résultat en passant à la limite inférieure pour ε tendant vers 0. \square

En général, E est un pavé non vide et μ_ε la loi uniforme sur E . Pour simplifier, on supposera $E = [0, 1]^D$ (ou $E = [0, 1]^D \times [0, 1]^D$), auquel cas μ_ε est simplement la mesure de Lebesgue sur E . Lorsque $\Phi_\varepsilon(x)$ est fonction de deux variables ε et x continues, l'estimation de $N_p(\xi, \varepsilon)$ est souvent délicate. Notre but est d'obtenir un encadrement de $\underline{\sigma}(\xi, p)$ en ne connaissant que des estimations portant sur des versions discrètes de $N_p(\xi, \varepsilon)$. Pour obtenir une majoration, il suffit de se limiter à une suite de valeurs discrètes $(\varepsilon_N)_{N \geq 1}$ tendant vers 0. Cela permet de discrétiser $N_p(\xi, \varepsilon)$ en la variable ε . Une façon de contourner le problème posé par la variable x , est de n'utiliser que des mesures discrètes, pour lesquelles les intégrales (3.3) sont plus simples à calculer. Pour cela, les ensembles D_ε et D_ε^* introduits page 44 vont encore jouer un rôle fondamental. Ils permettent de discrétiser simultanément le paramètre ε et la variable d'intégration x en utilisant différentes grilles du type $u + D_\varepsilon$. Dans le cas réel, le lemme suivant met en avant les deux niveaux de discrétisation :

LEMME 3.2.3. *Soit $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Fixons $N \in \mathbb{N}^*$, $s \geq 1$ et notons $u_M = 2^{(s-1)N+M}$. Alors Φ est intégrable et*

$$\int_0^1 \Phi(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_M} \sum_{i=0}^{[u_M]-1} \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \Phi\left(\frac{k}{2^N} + \frac{i}{2^{sN+M}}\right).$$

Si de plus $\Phi \geq 0$, alors :

$$\int_0^1 \Phi(x) dx \geq \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_M} \sum_{i=0}^{2^M-1} \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \Phi\left(\frac{k}{2^N} + \frac{i}{2^{sN+M}}\right).$$

Démonstration. a) Puisque Φ est continue on va calculer son intégrale à l'aide de sommes de Riemann. Soit $k \in \{0, \dots, 2^N - 1\}$. On considère la subdivision (non régulière) $\{x_i\}_{i=0}^{[u_M]+1}$ de $[k2^{-N}, (k+1)2^{-N}]$ définie par

$$x_i = \begin{cases} \frac{k}{2^N} + \frac{i}{2^{sN+M}} & \text{pour } i = 0, \dots, [u_M] \\ \frac{k+1}{2^N} & \text{pour } i = [u_M] + 1 \end{cases}$$

On a

$$\int_{k/2^N}^{(k+1)/2^N} \Phi(x) dx = \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{[u_M]} (x_{i+1} - x_i) \Phi(x_i),$$

et on vérifie qu'on peut écrire

$$\sum_{i=0}^{[u_M]} (x_{i+1} - x_i) \Phi(x_i) = \frac{1}{2^N} \frac{1}{u_M} \sum_{i=0}^{[u_M]-1} \Phi(x_i) + \frac{1}{2^N} \left(1 - \frac{[u_M]}{u_M}\right) \Phi(x_{[u_M]}).$$

Par suite

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Phi(x) dx &= \sum_{k=0}^{2^N-1} \int_{k/2^N}^{(k+1)/2^N} \Phi(x) dx \\ &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u_M} \sum_{i=0}^{[u_M]-1} \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \Phi(x_i) \right) + \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \left(1 - \frac{[u_M]}{u_M}\right) \Phi(x_{[u_M]}) \right). \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que la seconde limite est nulle. Rappelons que N et s sont fixés. La suite $(u_M)_{M \geq 1}$ est croissante et tend vers $+\infty$ donc $(1 - [u_M]/u_M) \rightarrow 0$. Puisque Φ est bornée on a bien la limite voulue et le résultat.

b) Pour le second point, puisque $s \geq 1$, on a $[u_M] \geq 2^M$. On sépare à ce rang la somme sur i dans la limite en deux parties. La seconde partie se minore par 0 si $\Phi \geq 0$. \square

On suppose ici $E = [0, 1]$ et μ_ε est la mesure de Lebesgue. Pour $u \in E$ et $\varepsilon > 0$, on considère la mesure discrète

$$\lambda_\varepsilon^u = \frac{1}{m_\varepsilon} \sum_{x \in u + D_\varepsilon} \delta_x,$$

où δ_x désigne, rappelons-le, la mesure de Dirac au point x . C'est simplement la probabilité uniforme sur la grille translatée $u + D_\varepsilon$. On note $s_p(u, \varepsilon) = N_p(\xi_u, \varepsilon)$ avec $\xi_u = (\Phi_\varepsilon, \lambda_\varepsilon^u)_{\varepsilon > 0}$. On écrira plus simplement $s_p(\varepsilon)$ lorsque $u = 0$. Au prix d'hypothèses supplémentaires nous allons donner un moyen d'obtenir la majoration contraire à celle du lemme 3.2.2. Ce théorème sera fondamental dans la suite : il suffira de spécialiser la famille ξ pour accéder à différents indices dimensionnels.

THÉORÈME 3.2.4. *On suppose qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in]0, 1]$ tels que $\alpha \geq \beta$ et :*

i) $N_\infty(\xi, \varepsilon) \preceq \varepsilon^\gamma$.

ii) La famille $(\Phi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est équi-höldérienne sur E d'exposant β :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in E \quad |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(y)| \leq C_1 |x - y|^\beta,$$

où $C_1 > 0$ est une constante ne dépendant ni de x et y , ni de ε .

iii) Il existe $p \geq 1$ tel que pour tout $M \in \mathbb{N}$, il existe un entier N_M , tel que

$$\forall i \in \{0, \dots, 2^M - 1\} \quad \forall N \geq N_M \quad s_p(u_i, 2^{-N}) \geq C_2 2^{-N\alpha},$$

avec $u_i = \frac{i}{2^{sN+M}}$, $s = \alpha/\beta$, et $C_2 > 0$ une constante ne dépendant ni de M , ni de i et N .

Alors, pour tout $q > 0$:

$$\gamma \leq \underline{\sigma}(\xi, q) \leq \gamma + (\alpha - \gamma) \max\{1, p/q\} + \frac{\alpha - \beta}{q\beta}.$$

En particulier $\underline{\sigma}(\xi, q) = \gamma$ si $\alpha = \beta = \gamma$.

Démonstration. a) Fixons $i \in \{0, \dots, 2^M - 1\}$. Soit $u \in [u_i, u_{i+1}[$. On va montrer que pour une constante $C_3 > 0$: $s_p(u, 2^{-N}) \geq C_3 2^{-N\alpha}$. En effet, pour $\varepsilon > 0$ et $t \in D_\varepsilon$, l'inégalité triangulaire donne :

$$|\Phi_\varepsilon(u_i + t)| \leq |\Phi_\varepsilon(u_i + t) - \Phi_\varepsilon(u + t)| + |\Phi_\varepsilon(u + t)|$$

et donc avec l'hypothèse ii) :

$$|\Phi_\varepsilon(u_i + t)| \leq C_1 |u - u_i|^\beta + |\Phi_\varepsilon(u + t)| \leq C_1 2^{-(sN+M)\beta} + |\Phi_\varepsilon(u + t)| .$$

Par suite, puisque $p \geq 1$, l'inégalité de Minkowski entraîne :

$$s_p(u_i, \varepsilon) \leq C_1 2^{-(sN+M)\beta} + s_p(u, \varepsilon) .$$

Pour $\varepsilon = 2^{-N}$, l'hypothèse iii) donne

$$s_p(u, 2^{-N}) \geq C_2 2^{-N\alpha} - C_1 2^{-(sN+M)\beta}$$

et par choix de s :

$$C_2 2^{-N\alpha} - C_1 2^{-(sN+M)\beta} = 2^{-N\alpha} (C_2 - C_1 2^{-M\beta}) .$$

Soit donc $C_3(M) = C_2 - C_1 2^{-M\beta}$. On fixe $M_0 \geq 0$ tel que $C_1 2^{-M_0\beta} \leq C_2/2$. On suppose dans la suite $M \geq M_0$, de sorte que le résultat s'obtient avec $C_3 = C_3(M_0)$.

b) Pour tout $u \in E$, l'hypothèse i) entraîne $s_\infty(u, 2^{-N}) \leq 2^{-N\gamma}$ et le point a) fournit $s_p(u, 2^{-N}) \geq 2^{-N\alpha}$. On peut ainsi appliquer le lemme 3.2.1 avec $H_1 = \gamma$ et $H_2 = \alpha$. On obtient en particulier

$$s_q(u, 2^{-N}) \geq 2^{-N(\gamma + (\alpha - \gamma) \max\{1, p/q\})} ,$$

c'est-à-dire $s_q(u, 2^{-N}) \geq C' 2^{-N\theta}$ avec $\theta = \gamma + (\alpha - \gamma) \max\{1, p/q\}$ et $C' > 0$ une certaine constante.

c) Puisque $\alpha \geq \beta$ on a $s \geq 1$ et donc d'après le lemme 3.2.3 :

$$N_q^q(\xi, 2^{-N}) \geq 2^{(1-s)N} \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^M} \sum_{i=0}^{2^M-1} s_q^q(u_i, 2^{-N}) .$$

Mais d'après les points précédents, pour tous les i considérés :

$$s_q^q(u_i, 2^{-N}) \geq C' 2^{-N\theta q} .$$

Par suite $2^{-N(\theta+(s-1)/q)} \leq N_q(\xi, 2^{-N})$ et donc

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\log N_q(\xi, 2^{-N})}{\log 2^{-N}} \leq \gamma + (\alpha - \gamma) \max\{1, p/q\} + \frac{\alpha - \beta}{q\beta} .$$

Par définition des limites inférieures, puisque $N_q(\xi, \varepsilon)$ est continue, on a toujours

$$\underline{\sigma}(\xi, q) \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\log N_q(\xi, 2^{-N})}{\log 2^{-N}} ,$$

ce qui fournit la majoration annoncée. Etant donnée l'hypothèse i), la minoration est donnée par le lemme 3.2.2. \square

3.3. Dimension de boîte

Pour tout ensemble non vide $B \subset [0, 1]^D$ on note $\text{osc}(f, B)$ l'*oscillation* de f sur B :

$$\text{osc}(f, B) = \sup\{|f(t) - f(s)| : s, t \in B\}. \quad (3.6)$$

Nous avons déjà utilisé l'oscillation de f sur le réseau dyadique dans la majoration du lemme 2.1.6 où $Z_\varepsilon^* = \text{osc}(f, E_\varepsilon^*)$. Une autre utilisation consiste à considérer l'oscillation de f sur les boules $B(x, \varepsilon)$ centrées dans $[0, 1]^D$. Nous avons vu que le comportement en 0 de $\varepsilon \mapsto \text{osc}(f, B(x, \varepsilon))$ permet de définir l'exposant $\alpha_p(x)$. Mais il est en général difficile d'évaluer précisément l'oscillation en chaque point, même pour des fonctions de Weierstrass (voir [17]). Il est plus simple de regarder un ensemble de points. Une autre alternative que le recours au spectre de Hausdorff est de considérer la limite (2.8) non pas pour une oscillation en un point mais pour une moyenne des oscillations. Il est en effet *a priori* bien plus simple de travailler avec une telle quantité. On calcule donc la moyenne arithmétique de ces oscillations pour tous les points x . Elle fournit la *variation* de f :

$$V(f, \varepsilon) = \int_{[0, 1]^D} \text{osc}(f, B(x, \varepsilon)) dx. \quad (3.7)$$

Si f est constante sur $[0, 1]^D$ sa variation est nulle pour tout $\varepsilon > 0$. Sinon, $V(f, \varepsilon)$ est une quantité strictement positive qui tend vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. La vitesse de décroissance de $V(f, \varepsilon)$ est encore liée à la régularité, mais à nouveau globale, de f ; précisément à la dimension de boîte de son graphe. On prouve ainsi (voir [12, 14]) que, pour f non constante, $V(f, \varepsilon)$ détermine la dimension de boîte :

$$\dim_{\text{B}}(\Gamma_f) = D + 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log V(f, \varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Par exemple si f est différentiable, $V(f, \varepsilon) \simeq \varepsilon$ et la limite ci-dessus vaut D . Si l'on sait contrôler les accroissements de f on peut donc estimer sa variation. C'est précisément le cas pour les fonctions höldériennes. En terme d'oscillations, f est höldérienne au point t d'exposant H si $\varepsilon^{-H} \text{osc}(f, B(t, \varepsilon))$ est bornée au voisinage de 0. Elle est uniformément höldérienne si pour un certain $\varepsilon_0 > 0$ on a

$$\sup_{t \in [0, 1]^D, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \varepsilon^{-H} \text{osc}(f, B(t, \varepsilon)) < \infty. \quad (3.8)$$

De façon duale, on introduit les définitions suivantes. On dit que f est anti-höldérienne au point t d'exposant H lorsque

$$\inf_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \varepsilon^{-H} \text{osc}(f, B(t, \varepsilon)) > 0,$$

et uniformément anti-höldérienne d'exposant H lorsque

$$\inf_{t \in [0, 1]^D} \sup_{0 < \varepsilon < \varepsilon_0} \varepsilon^{-H} \text{osc}(f, B(t, \varepsilon)) > 0. \quad (3.9)$$

Dans ces conditions, le résultat suivant est classique (voir [14, 38]) :

LEMME 3.3.1. *Si f est non constante et vérifie (3.8) (resp. (3.9)) alors*

$$\dim_{\text{B}}(\Gamma_f) \leq D + 1 - H \quad (\text{resp. } \dim_{\text{B}}(\Gamma_f) \geq D + 1 - H).$$

Ces inégalités sont évidentes compte tenu des définitions et rappels précédents. Elles permettent de calculer exactement $\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f)$ pour des fonctions à la fois uniformément höldériennes et anti-höldériennes d'exposant H . Ces deux conditions ne sont pas contradictoires. Dans \mathbb{R} elles sont ainsi vérifiées par de nombreux signaux classiques comme les fonctions de Takagi-Knopp (voir [38]). En pratique cependant, la condition (3.9) est difficile à vérifier car elle oblige à prendre en considération tous les accroissements de f au voisinage de chaque point. Ainsi le lemme précédent est essentiellement utilisé pour majorer $\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f)$. La question de la minoration est délicate. L'idée est de remplacer le calcul de l'intégrale (3.7) par un calcul de sommes finies. Nous allons utiliser les techniques développées dans la section précédente.

On suppose ici $E = [0, 1]^D \times [0, 1]^D$ et μ_ε est la mesure de Lebesgue. Pour $u \in E$ et $\varepsilon > 0$, on considère alors cette fois la probabilité discrète

$$\lambda_\varepsilon^u = \frac{1}{n_\varepsilon} \sum_{x \in u + D_\varepsilon^*} \delta_x.$$

On choisit pour Φ_ε l'application définie par

$$\forall x = (s, t) \in E \quad \Phi_\varepsilon(x) = f(t) - f(s).$$

Pour $u \in E$ fixé, on note $s_p(u, \varepsilon) = N_p(\xi_u, \varepsilon)$ avec $\xi_u = (\Phi_\varepsilon, \lambda_\varepsilon^u)_{\varepsilon > 0}$. On écrira plus simplement $s_p(\varepsilon)$ lorsque $u = 0$. Cette fonction, simple à définir en dimension quelconque, a un rôle fondamental dans l'analyse de la régularité de f . On donne donc la

DÉFINITION 3.3.1. Pour $q > 0$, on appelle *fonction de q -structure discrète de f* l'application s_q définie par :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad s_q(\varepsilon) = \left(\frac{1}{n_\varepsilon} \sum_{(s,t) \in D_\varepsilon^*} |f(t) - f(s)|^q \right)^{1/q}$$

Le premier fait important est que pour $q = 1$ on obtient toujours une approximation par défaut de la variation.

LEMME 3.3.2. On a $s_1(\varepsilon) \preccurlyeq V(f, \varepsilon)$.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0, 1]$. Pour tout $t \in D_\varepsilon$ soit $J(t) = t + \varepsilon [0, 1]^D$. Le cube $[0, 1]^D$ est recouvert par $m_\varepsilon \simeq \varepsilon^{-D}$ cubes du type $J(t)$. Soit $s \in D_\varepsilon$ et $x \in J(s)$. Tout $t = s + \varepsilon e_i$ appartient à la boule $B(x, \varepsilon)$ de sorte que $|f(t) - f(s)| \leq \text{osc}(f, B(x, \varepsilon))$. Donc

$$\frac{1}{D} \sum_{i=1}^D |f(s + \varepsilon e_i) - f(s)| \leq \varepsilon^{-D} \int_{J(s)} \text{osc}(f, B(x, \varepsilon)) dx.$$

On remarque que

$$s_p(\varepsilon) \preccurlyeq \left(\frac{1}{n_\varepsilon} \sum_{s \in D_\varepsilon} \sum_{i=1}^D |f(s + \varepsilon e_i) - f(s)|^p \right)^{1/p}.$$

Par suite, en sommant sur tous les $s \in D_\varepsilon$ on obtient, pour $p = 1$:

$$s_1(\varepsilon) \asymp \int_{[0,1]^D} \text{osc}(f, B(x, \varepsilon)) dx .$$

Le membre de droite n'est autre que la variation $V(f, \varepsilon)$. \square

La proposition suivante permet d'obtenir un bon encadrement de la dimension de boîte de Γ_f sous des hypothèses assez simples à vérifier en pratique.

PROPOSITION 3.3.3. *On suppose qu'il existe $\alpha, \beta \in]0, 1]$ tels que*

i) f est uniformément höldérienne sur $[0, 1]^D$ d'exposant β .

ii) Il existe $p > 0$ tel que $s_p(2^{-N}) \asymp 2^{-\alpha N}$.

Alors on a l'encadrement

$$D + 1 - (\beta + (\alpha - \beta) \max\{1, p\}) \leq \dim_B(\Gamma_f) \leq D + 1 - \beta .$$

En particulier $\dim_B(\Gamma_f) = D + 1 - \beta$ si $\alpha = \beta$.

Démonstration. L'hypothèse *i)* permet d'appliquer le lemme 3.3.1 : cela fournit la majoration. Le support de λ_ε^0 est D_ε^* , donc l'hypothèse *i)* entraîne $s_\infty(\varepsilon) \asymp \varepsilon^\beta$. L'hypothèse *ii)* implique $s_p(2^{-N}) \asymp 2^{-N\alpha}$. On peut ainsi appliquer le lemme 3.2.1 avec $H_1 = \beta$, $H_2 = \alpha$ et $q = 1$. On obtient en particulier

$$s_1(2^{-N}) \asymp 2^{-N(\beta + (\alpha - \beta) \max\{1, p\})} ,$$

et donc d'après le lemme 3.3.2 : $V(f, 2^{-N}) \asymp 2^{-N(\beta + (\alpha - \beta) \max\{1, p\})}$. Par suite

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log V(f, \varepsilon)}{\log \varepsilon} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\log V(f, 2^{-N})}{\log 2^{-N}} \leq \beta + (\alpha - \beta) \max\{1, p\} .$$

Cela donne la minoration voulue. \square

3.4. Fonction de structure

Nous allons voir maintenant des applications concrètes du théorème (3.2.4) dans le cas réel ($D = 1$). Les premiers indices dimensionnels que nous allons étudier jouent un rôle important en analyse fractale. Ils sont encore liés aux fonctions de structure discrètes que nous venons d'introduire, mais aussi à leur analogue continu. Rappelons donc tout d'abord la

DÉFINITION 3.4.1. Pour $q > 0$, la *fonction de q -structure de f* est l'application S_q définie par :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad S_q(\varepsilon) = \left(\int_0^1 |f(x + \varepsilon) - f(x)|^q dx \right)^{1/q} . \quad (3.10)$$

Ces fonctions sont un outil classique pour l'analyse de régularité d'un signal. Elles sont liées à deux quantités mieux connues en analyse de Fourier : la fonction d'auto-corrélation de f , et son spectre de puissance (voir [14, 36]). Pour de nombreux signaux, le mouvement brownien par exemple, ces applications fournissent des fonctions analysantes et permettent ainsi de calculer la dimension de boîte de leur graphe. Dans une version généralisée, elles fournissent une famille de dimensions

$\Delta^{(\alpha, \beta)}$ (voir [37]). Elles sont également liées aux propriétés multifractales de f et permettent une certaine approche du spectre de Hausdorff (voir [19]).

3.4.1. Indices associés

Le point commun à tout ceci est le comportement de S_q en 0. Avant de voir les applications concrètes, il faut étudier les rapports

$$\sigma(q) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log S_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}. \quad (3.11)$$

Il est possible d'obtenir un encadrement de ces indices en travaillant uniquement sur certaines sommes finies, qui ont d'ailleurs un intérêt propre. Les fonctions de q -structure discrètes de f vont intervenir. En effet, si $D = 1$ on a

$$s_q(2^{-N}) = \left(\frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \left| f\left(\frac{k+1}{2^N}\right) - f\left(\frac{k}{2^N}\right) \right|^q \right)^{1/q}, \quad (3.12)$$

ce qui est visiblement une discrétisation de $S_q(2^{-N})$ (cela justifie d'ailleurs leur dénomination).

PROPOSITION 3.4.1. *On suppose qu'il existe $C > 0$, $p \geq 1$ et $\alpha, \beta \in]0, 1]$ tels que :*

- i) f est uniformément höldérienne sur $[0, 1]$ d'exposant β .*
- ii) Pour tout $M \in \mathbb{N}$ il existe un entier N_M tel que :*

$$\forall i \in \{0, \dots, 2^M - 1\} \quad \forall N \geq N_M$$

$$\frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \left| f\left(\frac{k+1}{2^N} + u_i\right) - f\left(\frac{k}{2^N} + u_i\right) \right|^p \geq C 2^{-Np\alpha},$$

$$\text{où } u_i = \frac{i}{2^{sN+M}} \text{ et } s = \alpha/\beta.$$

Alors, pour tout $q > 0$:

$$\beta \leq \sigma(q) \leq \beta + (\alpha - \beta)(\max\{1, p/q\} + \frac{1}{q\beta}).$$

En particulier $\sigma(q) = \beta$ si $\alpha = \beta$.

Démonstration. On considère $E = [0, 1]$ et pour $\varepsilon > 0$, μ_ε la mesure de Lebesgue sur E et $\Phi_\varepsilon(x) = f(x + \varepsilon) - f(x)$, $x \in E$. Alors $S_q(\varepsilon) = N_q(\xi, \varepsilon)$ et $\sigma(q) = \underline{\sigma}(\xi, q)$. D'après i) :

$$\exists C_1 > 0 \quad \forall x \in E \quad |\Phi_\varepsilon(x)| = |f(x + \varepsilon) - f(x)| \leq C_1 \varepsilon^\beta,$$

donc $N_\infty(\xi, \varepsilon) \asymp \varepsilon^\beta$. On a aussi, par l'inégalité triangulaire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x, y \in E \quad |\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(y)| \leq 2C_1 |x - y|^\beta.$$

Ensuite

$$s_p(u_i, 2^{-N}) = \left(\frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \left| f\left(\frac{k+1}{2^N} + u_i\right) - f\left(\frac{k}{2^N} + u_i\right) \right|^p \right)^{1/p}.$$

Il est enfin clair que nécessairement $\alpha \geq \beta$. On peut donc appliquer le théorème 3.2.4 avec $\gamma = \beta$. \square

Nous allons voir dans la suite différentes façons d'utiliser ces indices.

3.4.2. Retour à la dimension de boîte

On peut tout d'abord revenir au calcul de $\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f)$.

COROLLAIRE 3.4.2. *Sous les hypothèses de la proposition 3.4.1, on a*

$$2 - \beta - (\alpha - \beta)\left(p + \frac{1}{\beta}\right) \leq \dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f) \leq 2 - \beta.$$

Démonstration. La majoration résulte du lemme 3.3.1 puisque f est höldérienne d'exposant β . Pour la minoration, on a $S_1(\varepsilon) \preccurlyeq V(f, \varepsilon)$ et donc $2 - \sigma(1) \leq \dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f)$. On applique alors la proposition 3.4.1 avec $q = 1$. \square

Le résultat précédent est toutefois moins précis que celui fournit par la proposition 3.3.3 et les hypothèses plus restrictives. Si $p \geq 1$ cette dernière donne en effet

$$\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f) \geq 2 - \beta - (\alpha - \beta)p > 2 - \beta - (\alpha - \beta)\left(p + \frac{1}{\beta}\right).$$

En fait, les indices $\sigma(q)$ seront plus efficaces pour calculer une autre dimension, la dimension de régularisation, que nous étudierons à la prochaine section. Avant cela voyons une autre utilisation plus intéressante des indices $\sigma(q)$.

3.4.3. Spectres multifractals

Les indices $\sigma(q)$ ont un lien étroit avec l'analyse multifractale. On étend ici leur définition à tous les réels q . L'idée est de relier ces indices au spectre de Hausdorff de f (voir page 57) à l'aide d'une transformée de Legendre convenable. Ainsi, un argument heuristique conduit à poser (voir [19]) :

$$q\sigma(q) = 1 + \inf\{qH - f_h(H) : H \in \mathbb{R}\}.$$

Sous cette hypothèse, on obtient $f_h(H)$ en inversant la relation précédente, c'est-à-dire en prenant la transformée de Legendre. On obtient alors

$$f_h(H) = 1 + \inf\{q(H - \sigma(q)) : q \in \mathbb{R}\}.$$

On comprend l'intérêt d'une telle méthode. Il est évidemment beaucoup plus facile de déterminer $\sigma(q)$ qui ne nécessite pas de calculs de dimensions de Hausdorff, et qui ne fait intervenir que des moyennes (des intégrales) et non des valeurs ponctuelles. De plus, il est possible d'utiliser les intervalles dyadiques. On définit les fonctions

$$\tau_N(q) = -\frac{1}{N} \log \left(\sum_{k=0}^{2^N-1} \mathcal{A}(f, [k2^{-N}, (k+1)2^{-N}[) \right) \quad \text{puis} \quad \tau(q) = \varliminf_{N \rightarrow \infty} \tau_N(q).$$

On s'attend alors à la relation (voir [23]) :

$$\tau(q) = \inf\{qH - f_h(H) : H \in \mathbb{R}\}. \quad (3.13)$$

Sous cette hypothèse, on obtient alors $f_h(H)$ comme

$$f_h(H) = \inf\{qH - \tau(q) : q \in \mathbb{R}\}.$$

Le problème est que la relation (3.13) n'est pas toujours vraie. L'intérêt de la fonction τ conduit néanmoins à définir un autre spectre pour f , le spectre de Legendre, par la formule

$$f_l(H) = \inf\{qH - \tau(q) : q \in \mathbb{R}\}.$$

La donnée de la fonction τ constitue une «analyse multifractale» de la fonction f analogue aux analyses multifractales de mesures (voir [4]). Une façon de voir le lien entre les deux problèmes est d'associer à la mesure μ la fonction f définie par $f(b) - f(a) = \mu([a, b])$. La fonction f est toujours croissante, donc $\text{osc}(f, [a, b]) = f(b) - f(a)$, de sorte que les deux fonctions d'ensembles $\mathcal{A}(f, [a, b])$ associées donnent les mêmes résultats. On peut alors exprimer τ_N à l'aide des fonctions de structure discrètes :

$$\tau_N(q) = -1 + q \frac{\log(s_q(2^{-N}))}{\log(2^{-N})}. \quad (3.14)$$

Les résultats des sections précédentes permettent de déterminer les indices $\sigma(q)$ et la fonction $\tau(q)$ pour $q > 0$ lorsque f est uniformément höldérienne.

3.5. Dimension de régularisation

La dimension de boîte de Γ_f est obtenue en considérant des recouvrements de Γ_f par des réunions de boules de diamètre de plus en plus petit. On évalue la vitesse avec laquelle ces ensembles tendent vers Γ_f . On peut choisir d'approcher Γ_f par des graphes de fonctions continues plutôt que par une réunion de boules. Pour cela, on considère des versions régulières de f obtenues par convolution avec un noyau très régulier, et qui tendent en un certain sens vers f . Leurs graphes ont une longueur finie : on évalue la vitesse avec laquelle celle-ci tend vers celle de Γ_f . Cette méthode conduit à la dimension de régularisation introduite et étudiée dans [33].

On suppose $D = 1$ et on choisit un noyau K dans la classe de Schwartz qu'on suppose en plus pair et à support $[-1, 1]$. On pose, pour $\varepsilon > 0$:

$$K_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On considère la régularisée $f_\varepsilon = f * K_\varepsilon$ de f par K_ε :

$$f_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) K_\varepsilon(x - t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x - t) K_\varepsilon(t) dt.$$

La *dimension de régularisation* de f s'écrit

$$\dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \mathcal{L}_\varepsilon}{\log \varepsilon},$$

où

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \int_0^1 \sqrt{1 + f'_\varepsilon(x)^2} dx$$

est la longueur du graphe de f_ε . Lorsque f est très irrégulière, la longueur de Γ_f n'est pas finie : nous supposons dorénavant qu'il en est ainsi. On peut alors écrire

$$\dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) = 2 - \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \int_0^1 |\varepsilon f'_\varepsilon(x)| dx}{\log \varepsilon}.$$

On définit pour tout $q > 0$, l'application R_q par :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad R_q(\varepsilon) = \left(\int_0^1 |\varepsilon f'_\varepsilon(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

En un sens, ces fonctions sont à $\dim_{\mathcal{R}}$ ce que sont les fonctions de structure à $\dim_{\mathcal{B}}$. On introduit donc aussi les rapports :

$$\rho(q) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log R_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Il est possible d'estimer ces indices à partir de versions discrètes :

PROPOSITION 3.5.1. *On suppose qu'il existe $C > 0$, $p \geq 1$ et $\alpha, \beta \in]0, 1]$ tels que :*

- i) *f est uniformément höldérienne sur $[0, 1]$ d'exposant β .*
- ii) *Pour tout $M \in \mathbb{N}$ il existe un entier N_M tel que :*

$$\forall i \in \{0, \dots, 2^M - 1\} \quad \forall N \geq N_M$$

$$\frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \left| \frac{1}{2^N} f'_{2^{-N}} \left(\frac{k}{2^N} + u_i \right) \right|^p \geq C 2^{-Np\alpha},$$

$$\text{où } u_i = \frac{i}{2^{sN+M}} \text{ et } s = \alpha/\beta.$$

Alors, pour tout $q > 0$:

$$\beta \leq \rho(q) \leq \beta + (\alpha - \beta)(\max\{1, p/q\} + \frac{1}{q\beta}).$$

En particulier $\rho(q) = \beta$ lorsque $\alpha = \beta$.

Démonstration. Le résultat est analogue à la proposition 3.4.1. Les arguments de la démonstration sont identiques, en cela qu'il suffit de choisir une famille ξ *ad hoc*. On considère $E = [0, 1]$ et pour $\varepsilon > 0$, μ_ε la mesure de Lebesgue sur E et $\Phi_\varepsilon(x) = \varepsilon f'_\varepsilon(x)$ pour $x \in E$. Alors $R_q(\varepsilon) = N_q(\xi, \varepsilon)$ et $\rho(q) = \underline{\sigma}(\xi, q)$.

a) Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in E$. Puisque K' est impaire, on peut écrire

$$f'_\varepsilon(x) = \int_{B(x, \varepsilon)} f(t) K'_\varepsilon(x-t) dt = \int_{B(x, \varepsilon)} (f(t) - f(x)) K'_\varepsilon(x-t) dt.$$

Par suite

$$\begin{aligned} |f'_\varepsilon(x)| &\leq \left(\sup_{t \in B(x, \varepsilon)} |f(t) - f(x)| \right) \int_{B(x, \varepsilon)} |K'_\varepsilon(x-t)| dt \\ &\leq \left(\sup_{t \in B(x, \varepsilon)} |f(t) - f(x)| \right) \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |K'(u)| du \right). \end{aligned}$$

Donc $|\Phi_\varepsilon(x)| \asymp \text{osc}(f, B(x, \varepsilon))$ et l'hypothèse i) entraîne $N_\infty(\xi, \varepsilon) \asymp \varepsilon^\beta$.

b) Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in [0, 1]$. On peut écrire

$$f'_\varepsilon(x) - f'_\varepsilon(y) = \int_{\mathbb{R}} (f(x-t) - f(y-t)) K'_\varepsilon(t) dt.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |f'_\varepsilon(x) - f'_\varepsilon(y)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(y-t)| |K'_\varepsilon(t)| dt \\ &\leq C |x-y|^\beta \int_{\mathbb{R}} |K'_\varepsilon(t)| dt \\ &\leq C |x-y|^\beta \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} |K'(u)| du \right). \end{aligned}$$

On a donc $|\Phi_\varepsilon(x) - \Phi_\varepsilon(y)| \asymp |x-y|^\beta$: la famille $(\Phi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est équi-hölderienne d'exposant β .

c) Enfin

$$s_p(u_i, 2^{-N}) = \left(\frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \left| \frac{1}{2^N} f'_{2^{-N}} \left(\frac{k}{2^N} + u_i \right) \right|^p \right)^{1/p},$$

et il est clair que nécessairement $\alpha \geq \beta$. On peut donc appliquer le théorème 3.2.4 avec $\gamma = \beta$. \square

Puisque $\dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) = 2 - \rho(1)$, la proposition 3.5.1 fournit immédiatement, avec $q = 1$, une estimation de la dimension de régularisation :

COROLLAIRE 3.5.2. *Sous les hypothèses de la proposition 3.5.1, on a*

$$2 - \beta - (\alpha - \beta) \left(p + \frac{1}{\beta} \right) \leq \dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) \leq 2 - \beta.$$

En particulier $\dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) = 2 - \beta$ si $\alpha = \beta$.

Nous avons mis en évidence le parallèle entre les opérateurs $f(x+\varepsilon) - f(x)$ et $\varepsilon f'_\varepsilon(x)$. Ils permettent de définir respectivement $S_q(\varepsilon)$ et $R_q(\varepsilon)$ puis les rapports $\sigma(q)$ et $\rho(q)$. Les propositions 3.4.1 et 3.5.1 sont analogues. Toutefois ce parallèle ne peut être mené plus loin concernant les dimensions associées $\dim_{\mathbb{B}}$ et $\dim_{\mathcal{R}}$. En effet, $\dim_{\mathbb{B}}$ n'est pas définie directement par $\sigma(1)$. En particulier nous n'avons pas d'estimation équivalente à celle de la proposition 3.3.3 pour $\dim_{\mathcal{R}}$. Pour y parvenir, il faut introduire des quantités liées à $\dim_{\mathcal{R}}$ similaires à l'oscillation et à la variation. Pour cela, on pose

$$V_R(f, \varepsilon) = \int_0^1 \left(\sup_{t \in B(x, \varepsilon)} |\varepsilon f'_\varepsilon(t)| \right) dx,$$

et on définit la *dimension supérieure de régularisation* par

$$\text{Dim}_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) = 2 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log V_R(f, \varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

LEMME 3.5.3. *On a : $\dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) \leq \text{Dim}_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) \leq \dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f)$.*

Démonstration. On a toujours $R_1(\varepsilon) \leq V_R(f, \varepsilon)$, ce qui prouve l'inégalité de gauche. Ensuite, on a déjà prouvé que

$$|\varepsilon f'_\varepsilon(t)| \leq C \operatorname{osc}(f, B(t, \varepsilon)).$$

Par suite, f étant continue :

$$\sup_{t \in B(x, \varepsilon)} |\varepsilon f'_\varepsilon(t)| \leq C \sup_{t \in B(x, \varepsilon)} \operatorname{osc}(f, B(t, \varepsilon)) \leq C \operatorname{osc}(f, B(x, 2\varepsilon)).$$

En intégrant cette inégalité on a $V_R(f, \varepsilon) \preccurlyeq V(f, 2\varepsilon)$. L'inégalité de droite en découle. \square

A la manière du lemme 3.3.2 on prouve que $r_1(\varepsilon) \preccurlyeq V_R(f, \varepsilon)$. Ainsi la conclusion de la proposition 3.3.3 reste vraie en remplaçant \dim_B par $\operatorname{Dim}_{\mathcal{R}}$ avec la fonction s_p correspondante.

Nous n'allons pas étudier en détail l'opérateur $\operatorname{Dim}_{\mathcal{R}}$ mais une analyse plus fine est à faire. Par exemple les inégalités du lemme 3.5.3 peuvent-elles être strictes ?

3.6. Ondelettes

Les ondelettes permettent, elles aussi, de construire des indices dimensionnels (voir [19]). Rappelons que pour $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$C(\varepsilon, x) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 f(t) \Psi\left(\frac{t-x}{\varepsilon}\right) dt$$

où Ψ est une ondelette paire à support $[-1, 1]$. On définit encore, pour $q > 0$:

$$Z_q(\varepsilon) = \left(\int_{\mathbb{R}} |C(\varepsilon, x)|^q dx \right)^{1/q} \quad \text{et} \quad \omega(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log Z_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Le calcul de la limite définissant ω nous permet de supposer $\varepsilon < 1/2$ et le support de Ψ entraîne $C(\varepsilon, x) = 0$ si $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap [0, 1] = \emptyset$. On a donc

$$\forall \varepsilon \in]0, 1/2[\quad Z_q(\varepsilon) = \left(\int_{-1/2}^{3/2} |C(\varepsilon, x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

On note alors, pour tout $\varepsilon > 1/2$:

$$\tilde{Z}_q(\varepsilon) = \left(\frac{1}{2} \int_{-1/2}^{3/2} |C(\varepsilon, x)|^q dx \right)^{1/q} = \left(\int_0^1 \left| C\left(\varepsilon, 2x - \frac{1}{2}\right) \right|^q dx \right)^{1/q},$$

et on remarque que l'on a

$$\omega(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \tilde{Z}_q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

Il est bien sûr possible d'étudier les indices ω de la même façon que σ et ρ :

PROPOSITION 3.6.1. *On suppose qu'il existe $C > 0$, $p \geq 1$ et $\alpha, \beta \in]0, 1]$ tels que :*

- i) f est uniformément höldérienne sur $[0, 1]$ d'exposant β .*
- ii) Pour tout $M \in \mathbb{N}$ il existe un entier N_M tel que :*

$$\forall i \in \{0, \dots, 2^M - 1\} \quad \forall N \geq N_M$$

$$\frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \left| C \left(\frac{1}{2^N}, 2 \left(\frac{k}{2^N} + u_i \right) - \frac{1}{2} \right) \right|^p \geq C 2^{-Np\alpha},$$

$$\text{où } u_i = \frac{i}{2^{sN+M}} \text{ et } s = \alpha/\beta.$$

Alors, pour tout $q > 0$:

$$\beta \leq \omega(q) \leq \beta + (\alpha - \beta)(\max\{1, p/q\} + \frac{1}{q\beta}).$$

En particulier $\omega(q) = \beta$ lorsque $\alpha = \beta$.

Démonstration. On considère $E = [0, 1]$ et pour $\varepsilon > 0$, μ_ε la mesure de Lebesgue sur E et $\Phi_\varepsilon(x) = C(\varepsilon, 2x - 1/2)$, $x \in E$. Alors $\tilde{Z}_q(\varepsilon) = N_q(\xi, \varepsilon)$ et $\omega(q) = \underline{\sigma}(\xi, q)$. La démonstration reprend ensuite tous les arguments de la proposition 3.5.1, en remplaçant K' par Ψ . \square

On a toujours l'inégalité

$$1 \leq \dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) \leq \dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f) \leq 2.$$

Pour beaucoup de modèles mathématiques l'inégalité centrale est en fait une égalité. Nous allons décrire une situation générale où ces deux dimensions coïncident et pour cela utiliser les indices σ et ω . On a les faits suivants (voir [19, 33]) :

- (1) Si $q > 1$ et si $\sigma(q) < 1$ alors $\sigma(q) = \omega(q)$.
- (2) Si $0 < \omega(1) < 1$ alors $\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f) = 2 - \omega(1)$.
- (3) $\dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) = \max\{1, 2 - \omega(1)\}$.

Il est clairement possible de relier $\dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f)$ et $\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f)$ à partir des indices $\sigma(q)$ et $\omega(q)$.

PROPOSITION 3.6.2. *Soit $\alpha \in]0, 1[$ tel que*

- i) f est uniformément höldérienne d'exposant β pour tout $\beta < \alpha$.*
- ii) Il existe $p > 1$ tel que $\sigma(p) = \alpha$.*

Alors

$$\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_f) = \dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_f) = 2 - \alpha.$$

Démonstration.

Vus les faits connus, il suffit de montrer que $\omega(1) = \alpha$, c'est-à-dire $\omega(1) = \sigma(p)$. Pour cela on va relier $\omega(1)$ à $\omega(p)$. On conserve les données de la démonstration de la proposition 3.6.1 de sorte que $\tilde{Z}_q(\varepsilon) = N_q(\xi, \varepsilon)$.

Soit $\eta > 0$. Avec $\beta = \alpha - \eta$, l'hypothèse *i)* entraîne $N_\infty(\varepsilon) \leq \varepsilon^{\alpha-\eta}$. L'hypothèse *ii)* donne $\omega(p) = \sigma(p) = \alpha$. Par définition de $\omega(p)$ on a donc, pour tout ε assez petit :

$$N_p(\varepsilon) \asymp \varepsilon^{\alpha+\eta}.$$

On applique le lemme 3.2.1 avec $H_1 = \alpha - \eta$, $H_2 = \alpha + \eta$ et $q = 1$:

$$\varepsilon^{\alpha+(2p-1)\eta} \preceq N_1(\varepsilon) \preceq \varepsilon^{\alpha-\eta}.$$

Par suite

$$\alpha - \eta \leq \omega(1) \leq \alpha + (2p - 1) \eta.$$

Comme ceci est vrai pour tout $\eta > 0$ on a $\omega(1) = \alpha$ et le résultat. \square

Ce théorème est efficace car parmi les indices σ , ρ et ω , le plus maniable reste σ puisqu'il est construit directement à partir des accroissements de f . Or il faut dans tous les cas les évaluer pour déterminer un exposant de Hölder pour f . La proposition 3.4.1 peut permettre d'obtenir $\sigma(p)$.

3.7. Exemple des fonctions de bosses

Nous allons dans cette section appliquer les résultats précédents aux fonctions de bosses standards F définies par (2.4) et (1.7). Le fait que ces fonctions soient aléatoires offre une difficulté supplémentaire.

3.7.1. Fonctions de structure

Pour obtenir des estimations presque sûres de s_q on va d'abord les établir en moyenne puis mesurer la déviation par rapport à cette valeur centrale en estimant la variance. Les calculs sont rendus possible par l'emploi de sommes finies. Pour étudier s_q , il faut connaître des estimations des accroissements de F . Nous avons déjà obtenu des majorations pour l'accroissement élémentaire $Z_n(t, h)$ de F au chapitre précédent. Elles mettaient particulièrement en jeu la régularité supérieure de ν . L'une des difficultés est ici d'obtenir des minorations. Pour cela, nous aurons besoin de la régularité inférieure de ν .

Nous introduisons alors une hypothèse plus forte :

H_3 : ν admet une densité θ telle que

$$\forall t \in A(1) \quad C_1 \leq \theta(t) \leq C_2,$$

avec $C_1, C_2 > 0$ ne dépendant que de ν et A .

Cette hypothèse entraîne H_1 . Un choix simple pour ν est la loi uniforme sur $A(1)$. C'est le cas particulier traité dans [10]. Les calculs sont simplifiés car les variables $Z_n(t, h)$ sont alors centrées. En effet, d'après la preuve du lemme 1.5.1, on a

$$\mathbb{E}(Y_n(t)) = \frac{1}{n 3^D} \int_{B(0,1)} G(u) du$$

qui ne dépend pas du point t .

Nous allons traiter le cas ν quelconque mais les idées sont les mêmes. Les variables aléatoires $(Z_n(t, h))_{n \geq 1}$ ne sont donc pas nécessairement centrées. Il est toutefois indispensable de contrôler leur espérance. C'est possible au prix d'une hypothèse supplémentaire sur ν . On rappelle que pour $\delta \in]0, 1]$, $\Lambda_\delta(A)$ désigne l'ensemble

des fonctions höldériennes sur A d'exposant δ (voir page 39). On introduit alors l'hypothèse

H_4 : ν admet une densité θ appartenant à $\Lambda_\delta(A(1))$ pour un certain δ .

Notons qu'aucune des hypothèses H_1 , H_3 et H_4 n'est redondante. Dans ces conditions, outre le lemme 2.1.1, on a les résultats plus précis suivants :

LEMME 3.7.1. *Sous l'hypothèse H_3 , pour tout $n \geq 1$ et tout $t, t+h \in A$:*

$$\|h\| \geq 2n^{-1/D} \implies \mathbb{E}|Z_n(t, h)|^p \simeq n^{-1},$$

cette estimation ne dépendant que de p et G .

Démonstration. Soit $t \in A$ et $\eta = n^{-1/D}$. Si $\|h\| \geq 2\eta$ alors $B(t, \eta) \cap B(t+h, \eta) = \emptyset$ de sorte que

$$\mathbb{E}|Z_n(t, h)|^p = \mathbb{E}|Y_n(t)|^p + \mathbb{E}|Y_n(t+h)|^p,$$

d'où le résultat d'après le lemme 1.5.2. \square

LEMME 3.7.2. *Sous l'hypothèse H_4 , pour tout $n \geq 1$:*

$$\forall t, t+h \in A \quad |\mathbb{E}(Z_n(t, h))| \preceq \frac{\|h\|^\delta}{n}.$$

Démonstration. On peut écrire

$$\mathbb{E}(Z_n(t, h)) = \frac{1}{n} \int_{B(0,1)} G(u) \left(\theta\left(t+h - \frac{u}{n^{1/D}}\right) - \theta\left(t - \frac{u}{n^{1/D}}\right) \right) du.$$

Par hypothèse, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t, t+h \in A$, $u \in B(0, 1)$, $n \geq 1$ et $h \in \mathbb{R}^D$:

$$-C \|h\|^\delta \leq \left(\theta\left(t+h - \frac{u}{n^{1/D}}\right) - \theta\left(t - \frac{u}{n^{1/D}}\right) \right) \leq C \|h\|^\delta.$$

Cela entraîne

$$-\frac{\|h\|^\delta}{n} \preceq \mathbb{E}(Z_n(t, h)) \preceq \frac{\|h\|^\delta}{n},$$

ce qu'il fallait prouver. \square

On suppose à présent vérifiées les hypothèses H_1 à H_4 et on précise cette dernière en imposant $\delta > \alpha \geq d$, où, rappelons-le : $d = \min\{\alpha, \gamma\}$. Nous travaillons avec U_2 , carré de l'accroissement de F .

PROPOSITION 3.7.3. *Pour tout $t, t+h \in A$:*

$$\|h\|^{2\alpha} \preceq \mathbb{E}(U_2(t, h)) \preceq \begin{cases} \|h\|^{2d} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \|h\|^{2\alpha} |\ln \|h\|| & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Démonstration. a) Par application du lemme 3.7.2 on a :

$$\sum_{i \neq j} (ij)^{-\alpha/D} \mathbb{E}(Z_i(t, h)) \mathbb{E}(Z_j(t, h)) \preceq \|h\|^{2\delta} \sum_{i \neq j} (ij)^{-\alpha/D-1} \preceq \|h\|^{2\delta}$$

$$\sum_{i \neq j} (ij)^{-\alpha/D} \mathbb{E}(Z_i(t, h)) \mathbb{E}(Z_j(t, h)) \asymp - \|h\|^{2\delta} \sum_{i \neq j} (ij)^{-\alpha/D-1} \asymp - \|h\|^{2\delta}$$

puisque la série double converge.

b) Par développement :

$$\mathbb{E}(U_2(t, h)) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha/D} \mathbb{E}(Z_n(t, h)^2) + \sum_{i \neq j} (ij)^{-\alpha/D} \mathbb{E}(Z_i(t, h)) \mathbb{E}(Z_j(t, h)).$$

Donc

$$- \|h\|^{2\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha/D} \mathbb{E}(Z_n(t, h)^2) \asymp \mathbb{E}(U_2(t, h)) \asymp \|h\|^{2\delta} + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha/D} \mathbb{E}(Z_n(t, h)^2).$$

c) Soit un entier N tel que $2(N+1)^{-1/D} < \|h\| \leq 2N^{-1/D}$. En utilisant le lemme 3.7.1, il vient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha/D} \mathbb{E}(Z_n(t, h)^2) \geq \sum_{n=N}^{\infty} n^{-2\alpha/D} \mathbb{E}(Z_n(t, h)^2) \asymp N^{-2\alpha/D} \asymp \|h\|^{2\alpha}.$$

d) D'après le lemme 2.1.1 :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha/D} \mathbb{E}(Z_n(t, h)^2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1-2\alpha/D} u_n(\|h\|, 1)^{2\gamma}.$$

Avec le lemme 2.1.2 nous avons donc :

$$\mathbb{E}(U_2(t, h)) \asymp \begin{cases} \|h\|^{2d} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \|h\|^{2\alpha} |\ln \|h\|| & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

e) Le résultat s'obtient en rassemblant les points précédents et en remarquant que par hypothèse $\|h\|^{2\delta}$ est négligeable devant $\|h\|^{2d}$ et $\|h\|^{2\alpha}$. \square

COROLLAIRE 3.7.4. *Sous les hypothèses précédentes :*

$$\varepsilon^{2\alpha} \asymp \mathbb{E}(s_2^2(\varepsilon)) \asymp \begin{cases} \varepsilon^{2d} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \varepsilon^{2\alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Démonstration. Le résultat est une conséquence directe de la proposition précédente en remarquant que $s_2^2(\varepsilon) \simeq (1/n_\varepsilon) \sum_{i=1}^D \sum_{t \in D_\varepsilon} U_2(t, \varepsilon e_i)$. \square

Les accroissements de F , c'est-à-dire les variables aléatoires $U_1(t, h)$, ne sont en général pas stationnaires et elles sont toujours dépendantes. Cette dépendance va nous obliger à des calculs relativement techniques et pénibles puisqu'il va falloir étudier toutes les covariances. Toutefois, l'éloignement des boules $B_n(t, n^{-1/D})$ et $B_n(t+h, n^{-1/D})$ lorsque n tend vers l'infini, est la raison d'une certaine forme de décorrélation des variables élémentaires $Z_n(t, h)$. Cela nous suffira à obtenir de bonnes majorations des covariances des accroissements.

Nous commençons par deux lemmes techniques généraux pour majorer certaines covariances.

LEMME 3.7.5. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ et $(Y_n)_{n \geq 1}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes et telles que pour tout $i \neq j$, X_i soit indépendante de Y_j . Alors :

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)^2, \left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n\right)^2\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Cov}(X_n^2, Y_n^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{\infty} \mathbb{E}(Y_p) \text{Cov}(X_n^2, Y_n) \\ &+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq n}}^{\infty} \mathbb{E}(X_p) \text{Cov}(X_n, Y_n^2) + 4 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{\infty} \mathbb{E}(X_j Y_j) \text{Cov}(X_i, Y_i) \\ &+ 4 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{\infty} \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(Y_i) \text{Cov}(X_j, Y_j) + 4 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i,j}}^{\infty} \mathbb{E}(X_j) \mathbb{E}(Y_q) \text{Cov}(X_i, Y_i) \\ &+ 4 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{\infty} \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq i,j}}^{\infty} \mathbb{E}(X_i) \mathbb{E}(Y_q) \text{Cov}(X_j, Y_j). \end{aligned}$$

Démonstration. C'est un résultat purement technique : il s'agit de développer la covariance par bilinéarité et d'effectuer les calculs en tenant compte des relations d'orthogonalité entre les variables X_i et Y_j . \square

COROLLAIRE 3.7.6. Dans les conditions du lemme 3.7.5 :

$$\begin{aligned} \text{Cov}\left(\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right)^2, \left(\sum_{n=1}^{\infty} Y_n\right)^2\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^2 Y_n^2) + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n^2 Y_n|\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}Y_n|\right) \\ &+ 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}Y_n|\right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_n^2)\right) + 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n Y_n^2|\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}X_n|\right) \\ &+ 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}X_n|\right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}(Y_n^2)\right) + 4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n Y_n|\right)^2 \\ &+ 16 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_n Y_n|\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}X_n|\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}Y_n|\right) + 12 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}X_n|\right)^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E}Y_n|\right)^2. \end{aligned}$$

Démonstration. On applique le lemme 3.7.5 en utilisant les majorations

$$\mathbb{E}(X_i) \leq |\mathbb{E}(X_i)|, \quad \mathbb{E}(Y_i) \leq |\mathbb{E}(Y_i)|, \quad \text{Cov}(U, V) \leq \mathbb{E}(|UV|) + |\mathbb{E}(U)| |\mathbb{E}(V)|,$$

et le fait que, pour tout $a_i \geq 0$:

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{\infty} a_i a_j \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)^2.$$

Le résultat s'obtient alors par factorisation et regroupement de termes. \square

Pour mesurer la décorrélation des variables $Z_n(t, h)$ et l'éloignement des différents supports mis en jeu, il est utile d'introduire l'indicateur μ suivant :

PROPOSITION 3.7.7. *Soient $\varepsilon > 0$, $n \geq 1$ et s, t, u, v dans A tels que $\|u\| = \|v\| = \varepsilon$. Soit*

$$\mu = \mu(s, t, u, v) = \min\{\|s - t\|, \|s + u - t\|, \|s - t - v\|, \|s + u - t - v\|\}.$$

Pour tout $p, q > 0$:

i) Si $\mu > 2n^{-1/D}$, alors :

$$\mathbb{E}(|Z_n(s, u)|^p |Z_n(t, v)|^q) = 0.$$

ii) Pour tout μ :

$$\mathbb{E}(|Z_n(s, u)|^p |Z_n(t, v)|^q) \preceq \frac{1}{n} u_n(\varepsilon, 1)^{(p+q)\gamma}.$$

Ces estimations sont uniformes en s, t, u et v .

Démonstration. Soit $\eta = n^{-1/D}$, $B_n(s, u) = B(s, \eta) \cup B(s + u, \eta)$ et $B_n(t, v) = B(t, \eta) \cup B(t + v, \eta)$. Puisque $Z_n(s, u) = 0$ en dehors de $B_n(s, u)$, on a $Z_n(s, u)Z_n(t, v) = 0$ en dehors de $B_n(s, u) \cap B_n(t, v)$.

a) Si $\|h\| \geq 2\eta$ alors $B_n(s, u) \cap B_n(t, v) = \emptyset$ d'où le point *i*).

b) Dans le cas général nous utilisons l'inégalité $|Z_n(s, u)| \leq 2$ pour écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Z_n(s, u)|^p |Z_n(t, v)|^q) &\leq 2^{p+q} \mathbb{P}(X_n \in B_n(s, u) \cap B_n(t, v)) \\ &\leq 2^{p+q} \mathbb{P}(X_n \in B_n(s, u)) \\ &\leq 2^{p+q} \nu(B_n(s, u)) \\ &\preceq n^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque G est höldérienne, $|Z_n(s, u)| \leq C_\gamma(\varepsilon/\eta)^\gamma$. Par conséquent on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|Z_n(s, u)|^p |Z_n(t, v)|^q) &\leq C_\gamma^{p+q} (\varepsilon/\eta)^{(p+q)\gamma} \mathbb{P}(X_n \in B_n(s, u)) \\ &\preceq (\varepsilon/\eta)^{(p+q)\gamma} n^{-1}. \end{aligned}$$

Ces deux majorations donnent le point *ii*) et le résultat. \square

PROPOSITION 3.7.8. *Soient $\varepsilon > 0$ et s, t, u, v, μ comme précédemment.*

i) Si $\mu = 0$, alors

$$\text{Cov}(U_2(s, u), U_2(t, v)) \preceq \begin{cases} \varepsilon^{4d} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \varepsilon^{4\alpha} |\ln \varepsilon|^2 & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

ii) Si $0 < \varepsilon \leq \mu$, alors

$$\text{Cov}(U_2(s, u), U_2(t, v)) \preceq \begin{cases} \varepsilon^{2d+2\delta} + \varepsilon^{4\delta} \sum_{p=2}^4 \varepsilon^{p(\gamma-\delta)} \mu^{p(d-\gamma)} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \varepsilon^{4\alpha} (|\ln \varepsilon| + |\ln \mu| + |\ln \mu|^2) & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Démonstration. Notons $X_n = n^{-\alpha/D} Z_n(s, u)$, $Y_n = n^{-\alpha/D} Z_n(t, v)$ et considérons, pour $p, q \geq 0$, la somme $C_{p,q} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} |X_n^p Y_n^q|$.

a) Supposons $p, q > 0$ et commençons par le cas $\mu = 0$. Avec la proposition 3.7.7 puis le lemme 2.1.2 on a :

$$C_{p,q} \preceq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+q)\alpha/D-1} u_n(\varepsilon, 1)^{(p+q)\gamma} \preceq \begin{cases} \varepsilon^{(p+q)d} & \text{si } \gamma \neq \alpha \\ \varepsilon^{(p+q)\alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha \end{cases}$$

Supposons maintenant $\mu > 0$. Soient $\varepsilon \in]0, \mu]$ et N un entier tel que $(N+1)^{-1/D} < \mu \leq N^{-1/D}$. Puisque $u_n(\varepsilon, 1) \leq n^{1/D}\varepsilon$, on a

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{E} |X_n^p Y_n^q| \preceq \varepsilon^{(p+q)\gamma} \sum_{n=1}^N n^{-1+(p+q)(\gamma-\alpha)/D} \preceq \begin{cases} \varepsilon^{(p+q)\gamma} \mu^{(p+q)(\alpha-\gamma)} & \text{si } \gamma > \alpha \\ \varepsilon^{(p+q)\gamma} & \text{si } \gamma < \alpha \\ \varepsilon^{(p+q)\alpha} |\ln \mu| & \text{si } \gamma = \alpha \end{cases}$$

et comme $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} |X_n^p Y_n^q| = 0$, on a dans ce cas

$$C_{p,q} \preceq \begin{cases} \varepsilon^{(p+q)\gamma} \mu^{(p+q)(\alpha-\gamma)} & \text{si } \gamma > \alpha \\ \varepsilon^{(p+q)\gamma} & \text{si } \gamma < \alpha \\ \varepsilon^{(p+q)\alpha} |\ln \mu| & \text{si } \gamma = \alpha \end{cases}$$

Finalement

$$C_{p,q} \preceq \begin{cases} \varepsilon^{(p+q)d} & \text{si } \mu = 0 \text{ et } \gamma \neq \alpha \\ \varepsilon^{(p+q)\alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \mu = 0 \text{ et } \gamma = \alpha \\ \varepsilon^{(p+q)\gamma} \mu^{(p+q)(d-\gamma)} & \text{si } \mu > 0 \text{ et } \gamma \neq \alpha \\ \varepsilon^{(p+q)\alpha} |\ln \mu| & \text{si } \mu > 0 \text{ et } \gamma = \alpha \end{cases}$$

b) En utilisant les lemmes 2.1.1 et 2.1.2, il vient, pour tout $p > 0$:

$$C_{p,0} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} |X_n|^p \preceq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p\alpha/D-1} u_n(\varepsilon, 1)^{p\gamma} \preceq \begin{cases} \varepsilon^{pd} & \text{si } \gamma \neq \alpha \\ \varepsilon^{p\alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha \end{cases}$$

$$C_{0,p} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E} |Y_n|^p \preceq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p\alpha/D-1} u_n(\varepsilon, 1)^{p\gamma} \preceq \begin{cases} \varepsilon^{pd} & \text{si } \gamma \neq \alpha \\ \varepsilon^{p\alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha \end{cases}$$

c) En utilisant le lemme 3.7.2 il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E} X_n| \preceq \|u\|^\delta \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/D-1} \preceq \varepsilon^\delta \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\mathbb{E} Y_n| \preceq \|v\|^\delta \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/D-1} \preceq \varepsilon^\delta.$$

d) Il reste à utiliser le corollaire 3.7.6 et les majorations précédentes dans les quatre cas de figure possibles. \square

Nous pouvons alors établir le résultat essentiel : majorer la variance de $s_2^2(\varepsilon)$ en fonction de ε . Le fait de traiter le cas général oblige à considérer beaucoup de paramètres, pour le moment sans conditions supplémentaires. La majoration obtenue s'en trouve compliquée.

PROPOSITION 3.7.9. *Pour la variance de $s_2^2(\varepsilon)$, on a :*

$$\text{Var}(s_2^2(\varepsilon)) \preceq \begin{cases} \varepsilon^{4\gamma} & \text{si } 0 < \gamma < \alpha \\ \varepsilon^{4\alpha} |\ln \varepsilon|^2 & \text{si } \gamma = \alpha \\ \varepsilon^{3\alpha+\delta} + \varepsilon^{4\alpha+D} + \varepsilon^{2\alpha+2\delta} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha + D/2 \\ \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{4\alpha+D} + \varepsilon^{3\alpha+\delta} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha + D/3 \\ \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{3\alpha+\delta} + \varepsilon^{4\alpha+D} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha + D/4 \\ \varepsilon^{4\alpha+D} + \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{3\alpha+\delta} + \varepsilon^{4\gamma} & \text{si } \alpha < \gamma \text{ et } \gamma \notin E \end{cases}$$

avec $E = \{\alpha + D/p : p = 2, 3, 4\}$.

Démonstration. Puisque $s_2^2(\varepsilon) \simeq (1/n_\varepsilon) \sum_{i=1}^D \sum_{t \in D_\varepsilon} U_2(t, \varepsilon e_i)$, on a :

$$v(\varepsilon) := \text{Var}(s_2^2(\varepsilon)) \preccurlyeq \frac{1}{n_\varepsilon^2} \sum_{i,j=1}^D \sum_{s,t \in D_\varepsilon} \text{Cov}(U_2(s, \varepsilon e_i), U_2(t, \varepsilon e_j)).$$

Découpons cette somme en plusieurs parties. Soit $m_\varepsilon = 1 + [1/\varepsilon]$. Etant donnés i, j dans $\{1, \dots, D\}$ et k tel que $0 \leq k \leq m_\varepsilon$, on considère l'ensemble

$$E(i, j, k) = \{(s, t) : s, t \in D_\varepsilon, \mu(s, t, \varepsilon e_i, \varepsilon e_j) = k\varepsilon\}.$$

On a $\text{Card}(E(i, j, 0)) \simeq \text{Card}(D_\varepsilon) \simeq \varepsilon^{-D}$. Pour $k \geq 1$:

$$\text{Card}\{x \in \mathbb{Z}^D : \mu(0, x, e_i, e_j) = k\} \simeq \text{Card}\{x \in \mathbb{Z}^D : \|x\| = k\} \simeq k^{D-1}$$

et donc

$$\text{Card}(E(i, j, k)) \simeq \text{Card}(D_\varepsilon) k^{D-1} \simeq \varepsilon^{-D} k^{D-1}.$$

Pour tout $k \geq 0$, soit

$$A_k = \frac{1}{n_\varepsilon^2} \sum_{i,j=1}^D \sum \{\text{Cov}(U_2(s, \varepsilon e_i), U_2(t, \varepsilon e_j)) : (s, t) \in E(i, j, k)\}.$$

Si $k = 0$ alors $\mu = 0$ et avec la proposition 3.7.8 :

$$(s, t) \in E(i, j, 0) \implies \text{Cov}(U_2(s, \varepsilon e_i), U_2(t, \varepsilon e_j)) \preccurlyeq \begin{cases} \varepsilon^{4d} & \text{si } \gamma \neq \alpha \\ \varepsilon^{4\alpha} |\ln \varepsilon|^2 & \text{si } \gamma = \alpha \end{cases}$$

Par conséquent, vu que $n_\varepsilon \simeq \varepsilon^{-D}$:

$$A_0 \preccurlyeq \begin{cases} \varepsilon^{4d+D} & \text{si } \gamma \neq \alpha \\ \varepsilon^{4\alpha+D} |\ln \varepsilon|^2 & \text{si } \gamma = \alpha \end{cases}$$

Soit $k \geq 1$ et $(s, t) \in E(i, j, k)$. Puisque $\varepsilon \leq \mu \simeq k\varepsilon$, la proposition 3.7.8 entraîne cette fois

$$\text{Cov}(U_2(s, \varepsilon e_i), U_2(t, \varepsilon e_j)) \preccurlyeq \begin{cases} \varepsilon^{2d+2\delta} + \varepsilon^{4\delta} \sum_{p=2}^4 \varepsilon^{p(d-\delta)} k^{p(d-\gamma)} & \text{si } \alpha \neq \gamma \\ \varepsilon^{4\alpha} (|\ln k\varepsilon|^2 + |\ln \varepsilon| + |\ln k\varepsilon|) & \text{si } \alpha = \gamma \end{cases}$$

Supposons d'abord $\alpha \neq \gamma$. Alors

$$A_k \preccurlyeq \varepsilon^{D+2d+2\delta} k^{D-1} + \varepsilon^{D+4\delta} \sum_{p=2}^4 \varepsilon^{p(d-\delta)} k^{p(d-\gamma)+D-1}.$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{m_\varepsilon} A_k \preccurlyeq \varepsilon^{D+2d+2\delta} \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{D-1} + \varepsilon^{D+4\delta} \sum_{p=2}^4 \varepsilon^{p(d-\delta)} \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{p(d-\gamma)+D-1}.$$

Mais pour tout $p \geq 0$:

$$\sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{p(d-\gamma)+D-1} \preccurlyeq \begin{cases} \varepsilon^{p(\gamma-d)-D} & \text{si } p(d-\gamma) + D \neq 0 \\ |\ln \varepsilon| & \text{si } p(d-\gamma) + D = 0 \end{cases}$$

On obtient donc

$$\sum_{k=1}^{m_\varepsilon} A_k \asymp \begin{cases} \varepsilon^{4\gamma} & \text{si } 0 < \gamma < \alpha \\ \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{3\gamma+\delta} + \varepsilon^{4\gamma} + \varepsilon^{D+2\alpha+2\delta} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha + D/2 \\ \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{2\gamma+2\delta} + \varepsilon^{4\gamma} + \varepsilon^{D+3\alpha+\delta} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha + D/3 \\ \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{2\gamma+2\delta} + \varepsilon^{3\gamma+\delta} + \varepsilon^{D+4\alpha} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha + D/4 \\ \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{2\gamma+2\delta} + \varepsilon^{3\gamma+\delta} + \varepsilon^{4\gamma} & \text{si } \alpha < \gamma \text{ et } \gamma \notin E \end{cases}$$

avec $E = \{\alpha + D/p : p = 2, 3, 4\}$. Supposons enfin $\alpha = \gamma$. Alors

$$\begin{aligned} A_k &\asymp \varepsilon^{4\alpha+D} k^{D-1} ((\ln k\varepsilon)^2 + |\ln \varepsilon| + |\ln k\varepsilon|) \\ &\asymp \varepsilon^{4\alpha+D} k^{D-1} ((\ln k)^2 + 2|\ln \varepsilon| \ln k + |\ln \varepsilon|^2 + 2|\ln \varepsilon| + \ln k). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} A_k &\asymp \varepsilon^{4\alpha+D} \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{D-1} (\ln k)^2 + 2\varepsilon^{4\alpha+D} |\ln \varepsilon| \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{D-1} \ln k \\ &\quad + \varepsilon^{4\alpha+D} |\ln \varepsilon|^2 \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{D-1} + 2\varepsilon^{4\alpha+D} |\ln \varepsilon| \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{D-1} + \varepsilon^{4\alpha+D} \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{D-1} \ln k. \end{aligned}$$

Mais pour tout $p \geq 0$:

$$\sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{D-1} (\ln k)^p \asymp \ln(m_\varepsilon)^p \sum_{k=1}^{m_\varepsilon} k^{D-1} \asymp \ln(m_\varepsilon)^p m_\varepsilon^D \asymp |\ln \varepsilon|^p \varepsilon^{-D}.$$

On obtient donc, pour ce dernier cas :

$$\sum_{k=1}^{m_\varepsilon} A_k \asymp \varepsilon^{4\alpha} |\ln \varepsilon|^2.$$

En conséquence, puisque $v(\varepsilon) \simeq \sum_{k=0}^{m_\varepsilon} A_k$, on a, après quelques majorations simples :

$$v(\varepsilon) \asymp \begin{cases} \varepsilon^{4\gamma} & \text{si } 0 < \gamma < \alpha \\ \varepsilon^{4\alpha} |\ln \varepsilon|^2 & \text{si } \gamma = \alpha \\ \varepsilon^{3\alpha+\delta} + \varepsilon^{4\alpha+D} + \varepsilon^{2\alpha+2\delta} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha + D/2 \\ \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{4\alpha+D} + \varepsilon^{3\alpha+\delta} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha + D/3 \\ \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{3\alpha+\delta} + \varepsilon^{4\alpha+D} |\ln \varepsilon| & \text{si } \gamma = \alpha + D/4 \\ \varepsilon^{4\alpha+D} + \varepsilon^{2\alpha+2\delta} + \varepsilon^{3\alpha+\delta} + \varepsilon^{4\gamma} & \text{si } \alpha < \gamma \text{ et } \gamma \notin E \end{cases}$$

avec $E = \{\alpha + D/p : p = 2, 3, 4\}$. \square

Les majorations se simplifient lorsque $\delta > d$. C'est sous cette hypothèse que nous allons enfin obtenir le comportement asymptotique de $s_2(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ pour une suite $(\varepsilon_N)_{N \geq 1}$.

THÉORÈME 3.7.10. *Sous les hypothèses H_1 à H_4 , et si de plus $\alpha < \min\{\gamma, \delta\}$, alors presque sûrement $s_2(2^{-N}) \simeq 2^{-N\alpha}$.*

Démonstration. Nous avons donc $d = \alpha < \delta$ et d'après le corollaire 3.7.4, il existe deux constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $N \geq 1$

$$c_1 2^{-2N\alpha} \leq \mathbb{E}(s_2^2(2^{-N})) \leq c_2 2^{-2N\alpha}.$$

Pour tout $\lambda > 0$, l'événement $|s_2^2(2^{-N}) - \mathbb{E}(s_2^2(2^{-N}))| \geq \lambda$ est vérifié si

$$s_2^2(2^{-N}) \notin]c_1 2^{-2N\alpha} - \lambda, c_2 2^{-2N\alpha} + \lambda[.$$

Prenons $\lambda = c_1 2^{-2N\alpha-1}$, $c_3 = c_1/2$, $c_4 = c_2 + c_3$ et notons

$$p_N = \mathbb{P} \left(s_2^2(2^{-N}) \notin]c_3 2^{-2N\alpha}, c_4 2^{-2N\alpha}[\right) .$$

On obtient alors

$$p_N \leq \mathbb{P} \left(|s_2^2(2^{-N}) - \mathbb{E}(s_2^2(2^{-N}))| \geq \lambda \right) \leq \frac{\text{Var}(s_2^2(2^{-N}))}{\lambda^2} = 4 c_1^{-2} 2^{4N\alpha} \text{Var}(s_2^2(2^{-N})) .$$

Avec les mêmes notations, on déduit de la proposition 3.7.9 que

$$p_N \preccurlyeq \begin{cases} 2^{-N(\delta-\alpha)} + 2^{-ND} + N 2^{-2N(\delta-\alpha)} & \text{si } \gamma = \alpha + D/2 \\ 2^{-2N(\delta-\alpha)} + 2^{-ND} + N 2^{-N(\delta-\alpha)} & \text{si } \gamma = \alpha + D/3 \\ 2^{-2N(\delta-\alpha)} + 2^{-N(\delta-\alpha)} + N 2^{-ND} & \text{si } \gamma = \alpha + D/4 \\ 2^{-ND} + 2^{-2N(\delta-\alpha)} + 2^{-N(\delta-\alpha)} + 2^{-4N(\gamma-\alpha)} & \text{si } \gamma \notin E \end{cases}$$

Dans tous les cas la série $\sum p_N$ converge puisque par hypothèse $\alpha < \delta$ et $\alpha < \gamma$. Donc d'après le lemme de Borel-Cantelli il existe presque sûrement $N_0 \geq 1$ tel que

$$N \geq N_0 \implies c_3 2^{-2N\alpha} \leq s_2^2(2^{-N}) \leq c_4 2^{-2N\alpha} ,$$

ce qui donne le résultat. \square

Nous aurons besoin du théorème précédent sous une autre forme. C'est l'objet de la proposition suivante. Pour $u = 0$ c'est exactement le théorème précédent. Le cas $u \neq 0$ n'offre pas de difficultés supplémentaires.

PROPOSITION 3.7.11. *Sous les hypothèses du théorème 3.7.10, il existe alors des constantes $C_i > 0$ telles que pour tout $u \in [0, 1]$ et tout $s \geq 1$, il existe un entier $N(u, s)$ tel que presque sûrement*

$$\forall N \geq N(u, s) \quad C_2 2^{-N\alpha} \leq s_2(u 2^{-sN}, 2^{-N}) \leq C_1 2^{-N\alpha} .$$

On sait donc contrôler l'asymptotique de la fonction de 2-structure discrète de F . Puisque cette dernière est uniformément höldérienne, les résultats des sections précédentes vont s'appliquer.

3.7.2. Dimension de boîte

PROPOSITION 3.7.12. *On suppose vérifiées les hypothèses H_1 et H_2 . Alors on a presque sûrement*

$$\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_F) \leq D + 1 - \min\{\alpha, \gamma\} .$$

Démonstration. Le théorème 2.1.7 permet d'appliquer le lemme 3.3.1. Pour tout $\eta < d$ fixé, on a presque sûrement $D + 1 - \eta$. Le résultat s'obtient en considérant une suite $(\eta_k)_{k \geq 1}$. \square

Pour obtenir la valeur exacte de la dimension de boîte (c'est-à-dire une minoration) de Γ_F il faut ajouter une hypothèse et une condition précises. Dans certains cas on ne sait pas la déterminer : lorsque la bosse g est très irrégulière ($\gamma < \alpha$) ou lorsque la distribution ν est très irrégulière ($\delta < \alpha$). Il faut en fait que l'exposant α contrôle toute la régularité de la fonction.

PROPOSITION 3.7.13. *On suppose vraies les hypothèses H_1 à H_4 et $\alpha < \min\{\gamma, \delta\}$. Alors on a presque sûrement*

$$\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_F) = D + 1 - \alpha.$$

Démonstration. Le théorème 2.1.7 et le théorème 3.7.10 permettent d'appliquer la proposition 3.3.3 pour chaque $\beta \in]0, \alpha]$ fixé et $p = 2$. On a presque sûrement

$$D + 1 + \beta - 2\alpha \leq \dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_F) \leq D + 1 - \beta.$$

Cette double inégalité étant vraie en particulier pour toute valeur rationnelle $\beta < \alpha$ on a bien l'égalité voulue. \square

3.7.3. Spectres multifractals

On se place à partir de maintenant dans \mathbb{R} .

PROPOSITION 3.7.14. *On suppose vraies les hypothèses H_1 à H_4 et $\alpha < \min\{\gamma, \delta\}$. Alors on a presque sûrement, pour tout $q > 0$: $\sigma(q) = \alpha$.*

Démonstration. Fixons $\eta > 0$ et $s = \alpha/(\alpha - \eta)$. Pour tout $u \in [0, 1]$ de la forme $u = i2^{-M}$ on note $N(i, M, s)$ l'entier fourni par la proposition 3.7.11 et

$$N_M = \max\{N(i, M, s) : i = 0, \dots, 2^M - 1\}.$$

On peut dans ces conditions appliquer la proposition 3.4.1 avec $\beta = \alpha - \eta$ et $p = 2$. Pour tout $q > 0$, on a presque sûrement :

$$\alpha - \eta \leq \sigma(q) \leq \alpha + \eta \left(\max\{1, 2/q\} + \frac{1}{2(\alpha - \eta)} - 1 \right).$$

Ceci étant vrai pour tout $\eta > 0$, on a le résultat en considérant une suite de valeurs $(\eta_k)_{k \geq 1}$ tendant vers 0. \square

Les résultats précédents permettent une approche du calcul du spectre de Legendre de F . Sous les hypothèses du théorème 3.7.10, on dispose de $\sigma(q)$ pour $q > 0$. Avec le lemme 3.2.1, il est facile de déduire de ce théorème l'estimation $s_q(2^{-N}) \simeq 2^{-N\alpha}$ pour tout $q > 0$. A partir de (3.14), on en déduit une partie de la fonction τ :

$$\forall q > 0 \quad \tau(q) = -1 + q\alpha.$$

Si cette expression est vraie pour tout $q \in \mathbb{R}$, on obtient alors un spectre trivial :

$$f_l(H) = \inf\{q(H - \alpha) + 1 : q \in \mathbb{R}\} = \begin{cases} 1 & \text{si } H = \alpha \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.7.4. Dimension de régularisation

COROLLAIRE 3.7.15. *On suppose vraies les hypothèses H_1 à H_4 et $\alpha < \min\{\gamma, \delta\}$. Alors on a presque sûrement*

$$\dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_F) = \dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_F) = 2 - \alpha$$

Démonstration. Le théorème 2.1.7 et la proposition 3.7.14 permettent d'appliquer la proposition 3.6.2 avec $p = 2$. \square

On retrouve en particulier le résultat de la proposition 3.7.13. Comme nous l'avons dit, ce résultat nous permet l'économie d'une démonstration directe du calcul de $\dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_F)$. Celui-ci est d'ailleurs souvent plus délicat. S'il est en effet possible d'utiliser le corollaire 3.5.2 pour calculer directement la dimension de régularisation, les calculs nécessaires à la vérification de ses hypothèses sont nettement plus complexes. Ils sont assez proches de ceux effectués pour l'analyse par ondelettes (faire apparaître les accroissements de G) et une fois encore, nous n'allons donner qu'un seul résultat pour souligner ces difficultés. On a

$$F_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} g(n(u - X_n)) K\left(\frac{t-u}{\varepsilon}\right) du,$$

$$F'_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} g(n(u - X_n)) K'\left(\frac{t-u}{\varepsilon}\right) du.$$

Il faut reprendre pas-à-pas le cheminement de l'étude des accroissements. Au lieu de s_q on considère

$$r_q(\varepsilon) = \left(\frac{1}{m_\varepsilon} \sum_{k=0}^{m_\varepsilon-1} |\varepsilon F'_\varepsilon(k\varepsilon)|^q \right)^{1/q}.$$

Il faut ainsi calculer $\mathbb{E}(F'_\varepsilon(t)^2)$ et $\text{Cov}(F'_\varepsilon(s), F'_\varepsilon(t))$. Le rôle des supports de g et K sera crucial. Il faut d'abord étudier $F'_\varepsilon(t)$ et $|F'_\varepsilon(t)|^2$. Pour simplifier, $A = [0, 1]$ et ν est la loi uniforme sur $[-1, 2]$.

LEMME 3.7.16. *Soit $\delta > 0$. Alors :*

$$\forall (\varepsilon, t) \in]0, \delta[\times]\delta, 1 - \delta] \quad \mathbb{E}(F'_\varepsilon(t)) = 0.$$

Démonstration. On a

$$\mathbb{E}(F'_\varepsilon(t)) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}} J(u) du,$$

avec

$$J(u) = \mathbb{E}(g(n(u - X_n))) K'\left(\frac{t-u}{\varepsilon}\right).$$

Vu le support de K on a $J(u) = 0$ pour $u \notin [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$. Supposons donc $u \in [t - \varepsilon, t + \varepsilon]$. On a alors

$$\mathbb{E}(g(n(u - X_n))) = \frac{1}{3n} \int_{n(u-2)}^{n(u+1)} g(v) dv.$$

Par choix de t , δ et ε on a $u \in [0, 1]$ et donc $n(u - 2) \leq -1 < 1 \leq n(u + 1)$. Donc avec le support de g :

$$\int_{n(u-2)}^{n(u+1)} g(v) dv = 2 \int_0^1 g(t) dt.$$

Finalement

$$\int_{\mathbb{R}} J(u) du = (2 \int_0^1 g(t) dt) \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} K' \left(\frac{t-u}{\varepsilon} \right) du = C\varepsilon \int_{-1}^1 K'(v) dv,$$

et cette dernière intégrale est nulle puisque K' est impaire. \square

Dans la suite, on fixe $\delta \in]0, 1[$ et on travaille avec $t \in [\delta, 1 - \delta]$ et $\varepsilon < \delta$. Pour plus de simplicité encore on suppose g lipschitzienne mais le cas général avec g uniformément höldérienne ne pose pas de problèmes supplémentaires.

PROPOSITION 3.7.17. On a $\mathbb{E}(|F'_\varepsilon(t)|^2) \simeq \varepsilon^{2\alpha-2}$.

Démonstration. a) Commençons par la majoration. Avec le lemme précédent, on peut écrire par orthogonalité :

$$\mathbb{E}(|F'_\varepsilon(t)|^2) = \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha} \mathbb{E}(|J_n(u)|^2)$$

avec

$$J_n(u) = \int_{\mathbb{R}} g(n(u - X_n)) K' \left(\frac{t-u}{\varepsilon} \right) du.$$

On va tenir compte de la compacité des supports de g et K mais aussi du fait que K' est impaire. On a successivement

$$\begin{aligned} J_n(u) &= \int_{-\infty}^t g(n(u - X_n)) K' \left(\frac{t-u}{\varepsilon} \right) du + \int_t^{\infty} g(n(u - X_n)) K' \left(\frac{t-u}{\varepsilon} \right) du \\ &= - \int_{-\infty}^t g(n(u - X_n)) K' \left(\frac{u-t}{\varepsilon} \right) du + \int_t^{\infty} g(n(u - X_n)) K' \left(\frac{t-u}{\varepsilon} \right) du \\ &= - \int_t^{\infty} g(n(2t - v - X_n)) K' \left(\frac{t-v}{\varepsilon} \right) dv + \int_t^{\infty} g(n(v - X_n)) K' \left(\frac{t-v}{\varepsilon} \right) dv \\ &= \int_t^{\infty} (g(n(v - X_n)) - g(n(2t - v - X_n))) K' \left(\frac{t-v}{\varepsilon} \right) dv \\ &= \int_t^{t+\varepsilon} (g(n(v - X_n)) - g(n(2t - v - X_n))) K' \left(\frac{t-v}{\varepsilon} \right) dv. \end{aligned}$$

Donc

$$|J_n(u)| \leq \int_t^{t+\varepsilon} |g(n(v - X_n)) - g(n(2t - v - X_n))| \left| K' \left(\frac{t-v}{\varepsilon} \right) \right| dv.$$

Mais g étant bornée par 1 et lipschitzienne, on a :

$$|g(n(v - X_n)) - g(n(2t - v - X_n))| \leq \min\{2, 2n|v - t|\}.$$

Si $v \in [t, t + \varepsilon]$ on a $|v - t| \leq \varepsilon$. Donc

$$|J_n(u)| \leq 2 \min\{1, n\varepsilon\} \int_t^{t+\varepsilon} \left| K' \left(\frac{t-v}{\varepsilon} \right) \right| dv \leq \varepsilon \min\{1, n\varepsilon\}.$$

Enfin, $J_n(u) = 0$ si $X_n \notin [t - \varepsilon - 1/n, t + \varepsilon + 1/n]$. On a donc la majoration presque sûre :

$$J_n(u) \leq \varepsilon \min\{1, n\varepsilon\} T_n$$

où les T_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre équivalent à $\varepsilon + 1/n$. On en déduit

$$\mathbb{E}(|J_n(u)|^2) \leq \varepsilon^2 \min(1, n^2 \varepsilon^2) \left(\varepsilon + \frac{1}{n} \right).$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|F'_\varepsilon(t)|^2) &\leq \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\alpha} \varepsilon^2 \min(1, n^2 \varepsilon^2) \left(\varepsilon + \frac{1}{n} \right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1}^{1/\varepsilon} n^{-2\alpha} \varepsilon^2 n^2 \varepsilon^2 \frac{2}{n} + \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1/\varepsilon}^{\infty} n^{-2\alpha} \varepsilon^2 2\varepsilon \\ &\preceq \sum_{n=1}^{1/\varepsilon} n^{1-2\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=1/\varepsilon}^{\infty} n^{-2\alpha} \preceq \varepsilon^{2\alpha-2}. \end{aligned}$$

b) La minoration est plus délicate. Rappelons que t est fixé. Soit $n \geq 1$. Supposons que les intervalles $B(X_n, 1/n)$ et $B(2t - X_n, 1/n)$ sont disjoints. C'est le cas si $|t - X_n| > 1/n$, qui est un événement de probabilité de l'ordre de $1 - 1/n$. On a alors, en reprenant l'expression de $J_n(u)$ établie au point a) :

$$\begin{aligned} J_n(u) &= \int_t^{t+\varepsilon} (g(n(v - X_n)) - g(n(2t - v - X_n))) K' \left(\frac{t - v}{\varepsilon} \right) dv \\ &= \int_t^{t+\varepsilon} g(n(v - X_n)) K' \left(\frac{t - v}{\varepsilon} \right) dv - \int_t^{t+\varepsilon} g(n(2t - v - X_n)) K' \left(\frac{t - v}{\varepsilon} \right) dv \\ &= \int_t^{t+\varepsilon} g(n(v - X_n)) K' \left(\frac{t - v}{\varepsilon} \right) dv - \int_{t-\varepsilon}^t g(n(u - X_n)) K' \left(\frac{u - t}{\varepsilon} \right) du, \end{aligned}$$

et l'une des intégrales (qui sont positives) est toujours nulle quand l'autre ne l'est pas. Supposons pour fixer les idées que la première est non nulle. Alors

$$\begin{aligned} |J_n(u)| &= \int_t^{t+\varepsilon} g(n(v - X_n)) K' \left(\frac{t - v}{\varepsilon} \right) dv \\ &= \varepsilon \int_0^1 |K'(u)| g \left(n\varepsilon \left(u - \left(\frac{t - X_n}{\varepsilon} \right) \right) \right) dv. \end{aligned}$$

Si de plus $(t - X_n)/\varepsilon$ appartient à $[0, 1]$, ce qui est un événement de probabilité environ ε , alors K' «voit» la bosse g et pour $n\varepsilon \geq 1$:

$$\int_0^1 |K'(u)| g \left(n\varepsilon \left(u - \left(\frac{t - X_n}{\varepsilon} \right) \right) \right) dv \gtrsim \frac{1}{n\varepsilon}.$$

Finalement, on a aussi presque sûrement pour $n\varepsilon \geq 1$:

$$|J_n(u)| \gtrsim \frac{1}{n\varepsilon} T_n,$$

où les T_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre équivalent à ε . On en déduit

$$\mathbb{E}(|J_n(u)|^2) \geq \varepsilon^2 \frac{1}{n^2 \varepsilon^2} \varepsilon = \frac{\varepsilon}{n^2}.$$

Par suite

$$\mathbb{E}(|F'_\varepsilon(t)|^2) \asymp \frac{1}{\varepsilon^4} \sum_{n=1/\varepsilon}^{\infty} n^{-2\alpha} \frac{\varepsilon}{n^2} \asymp \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_{n=1/\varepsilon}^{\infty} n^{-2\alpha-2} \asymp \frac{1}{\varepsilon^3} \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1-2\alpha} \simeq \varepsilon^{2\alpha-2},$$

d'où le résultat. \square

On en déduit le

COROLLAIRE 3.7.18. *On a $\mathbb{E}(r_2^2(\varepsilon)) \simeq \varepsilon^{2\alpha}$.*

Il reste à majorer la variance $\text{Var}(r_2^2(\varepsilon))$ pour prouver que l'équivalence précédente est en fait vraie presque sûrement. Les différentes variables mises en jeu sont à nouveau corrélées. Le calcul des covariances peut se faire avec le même genre d'idées pour les majorations. Ce n'est pas aussi simple que pour la dimension de boîte car il y a un autre support (celui de K) qui interagit avec ceux des différentes bosses.

Dimension de Hausdorff

4.1. Généralités

Le diamètre d'un sous-ensemble non vide $E \subset \mathbb{R}^D$ est défini par

$$\text{diam}(E) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in E\}.$$

Soit A un sous-ensemble non vide de \mathbb{R}^{D+1} . La dimension de Hausdorff de A est construite *via* une classe de mesures obtenues à partir de certains recouvrements de A (voir [32]). Soit $s \geq 0$ et, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{H}_\varepsilon^s(A) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \text{diam}(E_i)^s : A \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \text{ et } \text{diam}(E_i) \leq \varepsilon \right\}.$$

Les familles (E_i) précédentes, pouvant être finies, sont parfois appelées des ε -recouvrements de A . La quantité $\mathcal{H}_\varepsilon^s$ est une fonction décroissante de ε et admet donc une limite, éventuellement infinie, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. La mesure de Hausdorff s -dimensionnelle de A est définie comme

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^s(A).$$

On peut prouver qu'il existe une valeur s_0 telle que $\mathcal{H}^s(A) = 0$ pour $s > s_0$, et $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ pour $s < s_0$. La dimension de Hausdorff de A est définie comme cette valeur de coupure :

$$\dim_{\text{H}}(A) = \inf\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\} = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}.$$

Cette définition est utile pour trouver une majoration de $\dim_{\text{H}}(A)$. On peut majorer $\mathcal{H}^s(A)$ en examinant un ε -recouvrement de A particulier. S'il est tel que $\mathcal{H}^s(A)$ est fini, alors $\dim_{\text{H}}(A) \leq s$. Au contraire, la minoration de $\dim_{\text{H}}(A)$ oblige à considérer tous les ε -recouvrements possibles de A . Pour contourner ce problème, il est nécessaire de reformuler la définition de \dim_{H} . La théorie du potentiel offre un cadre privilégié.

Soit μ une mesure de Radon non nulle, finie et portée par A . Pour tout $s \geq 0$, on définit la s -énergie de μ par rapport au noyau $\|\cdot\|^{-1}$ par

$$I_s(\mu) = \iint_{A^2} \frac{d\mu(x) d\mu(y)}{\|x - y\|^s} \quad (4.1)$$

On peut prouver (voir [14, 21]) que si $s > \dim_{\text{H}}(A)$ alors $I_s(\mu) = \infty$ pour toutes les mesures μ précédentes ; tandis que si $s < \dim_{\text{H}}(A)$, il existe au moins une mesure μ

telle que $I_s(\mu) < \infty$. Ainsi

$$\dim_{\mathbb{H}}(A) = \sup\{s \geq 0 : I_s(\mu) < \infty \text{ pour une mesure } \mu \text{ portée par } A\}.$$

On obtient donc une borne inférieure s pour $\dim_{\mathbb{H}}(A)$ en construisant une mesure μ de s -énergie finie.

Dans le cas du graphe d'une fonction continue $f : [0, 1]^D \rightarrow \mathbb{R}$, on dispose d'une méthode simple pour construire μ . On obtient naturellement une mesure portée par Γ_f en projetant la mesure de Lebesgue λ . Formellement, soit π l'application définie par

$$\begin{aligned} \pi : [0, 1]^D &\rightarrow \mathbb{R}^{D+1} \\ t &\mapsto (t, f(t)) \end{aligned}$$

On considère la mesure μ , image de λ par π . Elle vérifie

$$\forall E \subset \mathbb{R}^{D+1} \quad \mu(E) = \lambda(\{t \in [0, 1]^D \text{ tels que } (t, f(t)) \in E\}).$$

Par commodité, on identifie \mathbb{R}^{D+1} à $\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}$ de façon naturelle. On définit alors la norme «euclidienne» sur \mathbb{R}^{D+1} par

$$\forall x \equiv (t, u) \in \mathbb{R}^{D+1} \quad \|x\|_2 = (\|t\|^2 + |u|^2)^{1/2}.$$

Toutes les normes étant équivalentes, on peut calculer (4.1) avec le noyau $\|\cdot\|_2$. On obtient :

$$I_s(\mu) = \iint_{[0,1]^D \times [0,1]^D} (|f(x) - f(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} dx dy. \quad (4.2)$$

Il suffit d'étudier la convergence de $I_s(\mu)$ lorsque $\|x - y\| \rightarrow 0$. On doit donc évaluer la vitesse à laquelle l'accroissement $|f(x) - f(y)|$ tend vers 0 lorsque $\|x - y\| \rightarrow 0$.

Supposons que f est un processus aléatoire F à trajectoires continues. Pour montrer que l'intégrale (4.2) est finie presque sûrement, il est équivalent de voir que son espérance est finie. En appliquant le théorème de Fubini, il faut encore majorer la quantité

$$\mathbb{E} \left((|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} \right). \quad (4.3)$$

Pour $x, y \in [0, 1]^D$ fixés, notons $Z = F(x) - F(y)$. Si l'on sait majorer la fonction de répartition de $|Z|$:

$$p(r) = \mathbb{P}(|Z| < r) \quad (r > 0), \quad (4.4)$$

on peut généralement en déduire une majoration pour l'intégrale (4.2) (voir [14] pour le mouvement brownien par exemple). Plus particulièrement si la variable aléatoire Z admet une densité f_Z (qui dépend de x, y), on obtient un critère simple de convergence. Supposons f_Z bornée sur \mathbb{R} de sorte qu'existe une constante $C > 0$, indépendante de x, y , telle que

$$\|f_Z\|_{\infty} \leq C \|x - y\|^{-\alpha} \quad (\alpha > 0).$$

On montre alors facilement que

$$\mathbb{E}(I_s(\mu)) < \infty \iff 1 - \alpha - s > -D.$$

Par exemple, on obtient $\dim_H(\Gamma) \geq 2 - \alpha$ lorsque F est un mouvement brownien fractionnaire d'ordre α en dimension 1. Lorsque $F(t) = \sum Y_n(t)$ est une série aléatoire, on a $Z = \sum Z_n$ avec $Z_n = Y_n(x) - Y_n(y)$. Par indépendance des Z_n , si elles admettent une densité f_n , la densité de Z s'obtient comme la convolée infinie $f_Z = f_1 * \dots * f_n * \dots$. Il suffit alors d'étudier f_n pour de bonnes valeurs de n . Cette idée est développée dans [18] pour les fonctions de Weierstrass à phases aléatoires. Malheureusement, il peut arriver que de telles densités ne soient pas faciles à estimer.

4.2. Fonctions de bosses

Pour les fonctions de bosses, le problème vient des bosses à support étroit. Pour les grandes valeurs de n les variables aléatoires Z_n n'ont pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue. On montre facilement que $\mathbb{P}(Z_n = 0) > 0$. Cela rend impossible l'estimation directe de (4.3) et (4.4). L'idée principale est de contourner cette difficulté en conditionnant correctement l'événement ($|Z| < r$).

On s'intéresse ici aux fonctions de bosses standard F définies par

$$\forall t \in [0, 1]^D \quad F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha/D} G(n^{1/D}(t - X_n)) , \quad (4.5)$$

où ν est la loi uniforme sur $[-1, 2]^D$. Nous avons vu qu'alors F est définie et continue sur $A = [0, 1]^D$ et que son support est le cube $[-2, 3]^D$. Dans ces conditions, on peut minorer $\dim_H(\Gamma_F)$ pour une large classe de bosses élémentaires G . La norme $\|\cdot\|_G$ n'a pas d'importance, mais on fait l'hypothèse suivante :

H_5 : g réalise un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme d'un intervalle non dégénéré $I \subset [0, 1]$ sur un intervalle J .

On note alors A_n l'événement ($x \in I_n$) où I_n est le pavé défini par

$$I_n = \{t \in \mathbb{R}^D : \|n^{1/D}(t - X_n)\| \in I\} ,$$

et on conserve les notations précédentes ; en particulier pour $x, y \in [0, 1]^D$ fixés :

$$Z = F(x) - F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$$

avec

$$Z_n = n^{-\alpha/D} (G(n^{1/D}(x - X_n)) - G(n^{1/D}(y - X_n))) .$$

Une fois de plus, il s'agit d'étudier la loi des accroissements Z_n et Z . Les estimations établies aux chapitres précédents ne sont pas suffisantes. Pour en obtenir de plus précises, on ajoutera des informations à l'aide de différents conditionnements. Nous commençons par une succession de résultats intermédiaires.

4.2.1. Préliminaires

Pour tout événement $A \in \mathcal{F}$ de probabilité $\mathbb{P}(A) > 0$ on note \mathbb{P}^A la probabilité conditionnelle sachant A :

$$\forall B \in \mathcal{F} \quad \mathbb{P}^A(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} .$$

Elle est absolument continue par rapport à \mathbb{P} avec pour densité

$$\frac{d\mathbb{P}^A}{d\mathbb{P}} = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{1}_A.$$

Si on note \mathbb{E}^A l'espérance sous \mathbb{P}^A , on a donc, pour toute variable aléatoire X :

$$\mathbb{E}^A(X) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{E}(X \mathbb{1}_A).$$

Nous avons vu que l'existence de densité pour les différents accroissements était un point presque incontournable. Les deux résultats suivants vont dans ce sens.

LEMME 4.2.1. *Soient $x, y \in [0, 1]^D$. Pour tout $p \geq 1$ tel que $\|x - y\| > 2p^{-1/D}$, la variable Z_p admet une densité conditionnelle sachant A_p donnée par*

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad f_p(z) = C \frac{p^{-1+\alpha/D}}{\mathbb{P}(A_p)} (h(p^{\alpha/D} z))^{D-1} |h'(p^{\alpha/D} z)| \mathbb{1}_J(p^{\alpha/D} z),$$

où $h : J \rightarrow I$ est l'inverse de g et $C > 0$ une constante ne dépendant que de D .

Démonstration. Pour toute fonction positive $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\mathbb{E}^{A_p}(\Phi(Z_p)) = \int_{\Omega} \Phi(Z_p) d\mathbb{P}^{A_p} = \frac{1}{\mathbb{P}(A_p)} \int_{\Omega} \Phi(Z_p) \mathbb{1}_{A_p} d\mathbb{P} = \frac{1}{\mathbb{P}(A_p)} \int_{\Omega} \Phi(Z_p) \mathbb{1}_{I_p}(x) d\mathbb{P}.$$

Puisque $\|x - y\| > 2p^{-1/D}$, les points x et y ne peuvent pas simultanément appartenir au support de $t \mapsto G(p^{1/D}(t - X_p))$. Cet ensemble contenant I_p , on a $Z_p = p^{-\alpha/D} G(p^{1/D}(x - X_p))$ pour tout $x \in I_p$. Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{A_p}(\Phi(Z_p)) &= \frac{1}{\mathbb{P}(A_p)} \int_{\Omega} \Phi(p^{-\alpha/D} G(p^{1/D}(x - X_p))) \mathbb{1}_I(\|p^{1/D}(x - X_p)\|) d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(A_p)} \int_{\Omega} \Phi(p^{-\alpha/D} g(\|p^{1/D}(x - X_p)\|)) \mathbb{1}_I(\|p^{1/D}(x - X_p)\|) d\mathbb{P} \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(A_p)} \int_{\mathbb{R}^D} \Phi(p^{-\alpha/D} g(\|p^{1/D}(x - u)\|)) \mathbb{1}_I(\|p^{1/D}(x - u)\|) \theta(u) du \\ &= \frac{p^{-1}}{\mathbb{P}(A_p)} \int_{\mathbb{R}^D} \Phi(p^{-\alpha/D} g(\|v\|)) \mathbb{1}_I(\|v\|) \theta(x - p^{-1/D}v) dv, \end{aligned}$$

où θ est la densité de X_p :

$$\forall u \in \mathbb{R}^D \quad \theta(u) = \frac{1}{3^D} \mathbb{1}_{[-1, 2]^D}(u).$$

On remarque alors que pour tout $x \in [0, 1]^D$ et tout $p \geq 1$:

$$\forall v \in \mathbb{R}^D \quad (\|v\| \in I \implies x - p^{-1/D}v \in [-1, 2]^D).$$

Ainsi

$$\mathbb{E}^{A_p}(\Phi(Z_p)) = \frac{p^{-1}}{3^D \mathbb{P}(A_p)} \int_{\mathbb{R}^D} \Phi(p^{-\alpha/D} g(\|v\|)) \mathbb{1}_I(\|v\|) dv.$$

La formule d'intégration d'une fonction radiale donne

$$\mathbb{E}^{A_p}(\Phi(Z_p)) = \frac{p^{-1}}{3^D \mathbb{P}(A_p)} D v_D \int_{\mathbb{R}^+} \Phi(p^{-\alpha/D} g(r)) \mathbb{1}_I(r) r^{D-1} dr,$$

où $v_D = \lambda(B(0, 1)) = 2^D$. L'hypothèse sur g rend licite le changement de variable défini par $z = p^{-\alpha/D}g(r)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{A_p}(\Phi(Z_p)) &= \frac{D2^D p^{-1+\alpha/D}}{3^D \mathbb{P}(A_p)} \int_{\mathbb{R}} \Phi(z) \mathbb{1}_I(h(p^{\alpha/D}z)) (h(p^{\alpha/D}z))^{D-1} |h'(p^{\alpha/D}z)| dz \\ &= \frac{D2^D p^{-1+\alpha/D}}{3^D \mathbb{P}(A_p)} \int_{\mathbb{R}} \Phi(z) \mathbb{1}_J(p^{\alpha/D}z) (h(p^{\alpha/D}z))^{D-1} |h'(p^{\alpha/D}z)| dz , \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat avec $C = D(2/3)^D$. \square

Nous avons donc une loi conditionnelle à densité pour l'accroissement élémentaire. Pour passer à l'accroissement total, il faut un nouveau conditionnement. On va isoler Z_p dans la somme définissant Z . Pour cela on pose $S_p = \sum_{n \neq p} Z_n$. On a donc $Z = S_p + Z_p$ et on va conditionner Z par S_p .

COROLLAIRE 4.2.2. *Soient $x, y \in [0, 1]^D$. Pour tout $p \geq 1$ tel que $\|x - y\| > 2p^{-1/D}$, la variable Z considérée sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}^{A_p})$ admet une densité conditionnelle sachant S_p donnée par*

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad f_Z^{S_p=s}(z) = f_p(z - s).$$

Démonstration. On cherche la loi du couple (S_p, Z) . Pour tous boréliens A, B on a

$$\mathbb{P}_{(S_p, Z)}^{A_p}(A, B) = \mathbb{P}_{\varphi(S_p, Z_p)}^{A_p}(A, B),$$

où $\varphi(s, z) = (s, s+z)$ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de jacobien 1, d'inverse $\varphi^{-1}(s, z) = (s, z - s)$. Par suite

$$\mathbb{P}_{(S_p, Z)}^{A_p}(A, B) = \mathbb{P}_{(S_p, Z_p)}^{A_p}(A, B - A).$$

Par indépendance de S_p et Z_p on a

$$\mathbb{P}_{(S_p, Z_p)}^{A_p}(A, B - A) = \mathbb{P}_{S_p}^{A_p}(A) \mathbb{P}_{Z_p}^{A_p}(B - A).$$

En utilisant le lemme 4.2.1 il vient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(S_p, Z)}^{A_p}(A, B) &= \left(\int_A d\mathbb{P}_{S_p}^{A_p}(s) \right) \left(\int_{B-A} d\mathbb{P}_{Z_p}^{A_p}(z) \right) \\ &= \int_A \int_{B-A} d\mathbb{P}_{Z_p}^{A_p}(z) d\mathbb{P}_{S_p}^{A_p}(s) \\ &= \int_A \int_{B-A} f_p(z) dz d\mathbb{P}_{S_p}^{A_p}(s) \\ &= \int_A \left(\int_B f_p(z - s) dz \right) d\mathbb{P}_{S_p}^{A_p}(s), \end{aligned}$$

ce qui montre que Z admet une densité conditionnelle sachant S_p donnée par

$$f_Z^{S_p=s}(z) = f_p(z - s),$$

ce qui est la formule annoncée. \square

COROLLAIRE 4.2.3. *Pour tout $x, y \in [0, 1]^D$ tels que $\|x - y\| > 2m^{-1/D}$, tout $n > m$ et tout $r > 0$:*

$$\mathbb{P}((|F(x) - F(y)| < r) \cap (A_m \cup \dots \cup A_n)) \preceq rn^{\alpha/D}.$$

Démonstration. Soit $p \geq m$. Des résultats précédents on déduit :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((|Z| < r) \cap A_p | S_p = s) &= \mathbb{P}((|Z| < r) | A_p | S_p = s) \mathbb{P}(A_p) \\ &= \left(\int_{[-r, r]} f_p(z - s) dz \right) \mathbb{P}(A_p) \\ &\leq C \frac{p^{-1+\alpha/D}}{\mathbb{P}(A_p)} \|h\|_\infty^{D-1} \|h'\|_\infty (2r) \mathbb{P}(A_p) \\ &\preceq rp^{-1+\alpha/D}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\mathbb{P}((|Z| < r) \cap A_p) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}((|Z| < r) \cap A_p | S_p = s) d\mathbb{P}_{S_p}(s) \preceq rp^{-1+\alpha/D}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((|Z| < r) \cap (A_m \cup \dots \cup A_n)) &\preceq \sum_{p=m}^n \mathbb{P}((|Z| < r) \cap A_p) \\ &\preceq \sum_{p=m}^n Crp^{-1+\alpha/D} \preceq rn^{\alpha/D}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

COROLLAIRE 4.2.4. *Soient $1 \leq m < n$ et V l'ensemble aléatoire $V = I_m \cup \dots \cup I_n$. Soient $s > 1$ et $x, y \in [0, 1]^D$ fixés tels que $\|x - y\| > 2m^{-1/D}$. Alors*

$$\mathbb{E}((|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} \mathbf{1}_{(x \in V)}) \preceq \|x - y\|^{1-s} n^{\alpha/D}.$$

Démonstration. On note $h = \|x - y\|$ et, pour $r > 0$:

$$p(r) = \mathbb{P}((|Z| < r) \cap (x \in V)).$$

D'après le corollaire 4.2.3 $p(r) \preceq rn^{\alpha/D}$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{(x \in V)}((|Z|^2 + h^2)^{-s/2}) &= \int_0^{+\infty} (r^2 + h^2)^{-s/2} d(\mathbb{P}^{(x \in V)}(|Z| < r)) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(x \in V)} \int_0^{+\infty} (r^2 + h^2)^{-s/2} dp(r), \end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{E}((|Z|^2 + h^2)^{-s/2} \mathbf{1}_{(x \in V)}) = \int_0^{+\infty} (r^2 + h^2)^{-s/2} dp(r).$$

En intégrant par parties, on a alors facilement :

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} (r^2 + h^2)^{-s/2} dp(r) &\preccurlyeq \int_0^h h^{-s} dp(r) + \int_h^{+\infty} r^{-s} dp(r) \\
&\preccurlyeq h^{-s} p(h) + [r^{-s} p(r)]_{r=h}^{+\infty} + s \int_h^{+\infty} r^{-s-1} p(r) dr \\
&\preccurlyeq h^{-s} p(h) + s \int_h^{+\infty} r^{-s-1} r n^{\alpha/D} dr \\
&\preccurlyeq h^{-s} h n^{\alpha/D} + n^{\alpha/D} [-r^{1-s}]_h^{+\infty} \\
&\preccurlyeq h^{1-s} n^{\alpha/D},
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat. \square

Notre objectif est maintenant de démontrer que pour x, y fixés, l'accroissement $|F(x) - F(y)|$ a une forte probabilité d'être très grand, pour x restant dans un (grand) sous-ensemble aléatoire de $[0, 1]^D$. On considère la suite strictement croissante d'entiers $(m_k)_{k \geq 1}$ définie par $m_k = 2^{k^2}$ et on note

$$V_k = I_{m_k} \cup \dots \cup I_{m_{k+1}-1}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, soit k_ε le plus petit entier positif tel que, pour tout $k \geq k_\varepsilon$:

$$\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{k-1}\right)^2 \leq 1 + \varepsilon,$$

et $h_\varepsilon = 2 m_{k_\varepsilon-1}^{-1/D}$.

COROLLAIRE 4.2.5. *Soient $s > 1$ et $\varepsilon > 0$. Soient $x, y \in [0, 1]^D$ tels que $\|x - y\| < h_\varepsilon$. Soit $k \geq 1$ l'unique entier vérifiant*

$$\frac{2}{m_k^{1/D}} < \|x - y\| \leq \frac{2}{m_{k-1}^{1/D}}.$$

Alors

$$\mathbb{E}((|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} \mathbb{I}_{(x \in V_k)}) \leq C \|x - y\|^{1-s-(1+\varepsilon)\alpha}.$$

Démonstration. Puisque $(m_k)_{k \geq 1}$ est décroissante on a $k \geq k_\varepsilon$ par choix de h_ε . De plus :

$$\begin{aligned}
m_{k+1} &= m_{k-1}^{((k+1)/(k-1))^2} \leq 2^{D((k+1)/(k-1))^2} \|x - y\|^{-D((k+1)/(k-1))^2} \\
&\leq C \|x - y\|^{-D(1+\varepsilon)}
\end{aligned}$$

par choix de k_ε . On applique alors le corollaire 4.2.4 avec $m = m_k$, $n = m_{k+1} - 1$ et $V = V_k$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} \mathbb{I}_{(x \in V_k)}) &\leq C \|x - y\|^{1-s} m_{k+1}^{\alpha/D} \\
&\leq C \|x - y\|^{1-s} (\|x - y\|^{-D(1+\varepsilon)})^{\alpha/D} \\
&\leq C \|x - y\|^{1-s-(1+\varepsilon)\alpha}.
\end{aligned}$$

\square

Nous allons à présent estimer la taille des ensembles V_k :

LEMME 4.2.6. *Il existe une constante $\delta > 0$ telle que pour tout $1 \leq m < n$:*

$$\mathbb{E} \left(\lambda \left([0, 1]^D \setminus \bigcup_{p=m}^n I_p \right) \right) \leq \left(\frac{m}{n} \right)^\delta.$$

Démonstration. Puisque $I_p \subset [-1, 2]^D$ pour tout $p \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(x \in I_p) = 3^{-D} \lambda(I_p) = \frac{3^{-D} \lambda(I)^D}{p} \equiv \frac{C}{p}.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\lambda \left([0, 1]^D \setminus \bigcup_{p=m}^n I_p \right) \right) &= \mathbb{E} \left(\int_{[0, 1]^D} \mathbb{1}_{\{x \notin \bigcup_{p=m}^n I_p\}} d\lambda \right) \\ &= \int_{[0, 1]^D} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{x \notin \bigcup_{p=m}^n I_p\}}) d\lambda = \prod_{p=m}^n \left(1 - \frac{C}{p} \right). \end{aligned}$$

Or

$$\log \prod_{p=m}^n \left(1 - \frac{C}{p} \right) = \sum_{p=m}^n \log \left(1 - \frac{C}{p} \right) \leq - \sum_{p=m}^n \frac{C}{p} \leq -\delta \int_m^n \frac{dt}{t} = \delta \log \left(\frac{m}{n} \right)$$

où $\delta > 0$ est une certaine constante. On conclut facilement. \square

4.2.2. Le théorème principal

Nous pouvons alors énoncer et démontrer le résultat principal de ce chapitre :

THÉORÈME 4.2.7. *Sous l'hypothèse H_5 , la fonction de bosses F définie par (4.5) est telle que presque sûrement*

$$\dim_H(\Gamma_F) \geq D + 1 - \alpha.$$

Démonstration. On fixe $s \in]1, D + 1 - \alpha[$ et $\eta \in]0, 1[$.

a) Soient $\varepsilon > 0$ tel que $(1 + \varepsilon)\alpha < D + 1 - s < D$ et $k_\varepsilon \geq 1$ l'entier associé. Soient $k_0 \geq k_\varepsilon$ et $h_0 = 2/m_{k_0-1}^{1/D}$. On note

$$W = [0, 1]^D \cap \left(\bigcap_{k=k_0}^{\infty} V_k \right)$$

et λ_W la mesure de Lebesgue restreinte à W . Remarquons que par construction $W \subset V_k$ pour tout $k \geq k_0$. On note encore

$$R_k = \{(x, y) \in [0, 1]^D \times [0, 1]^D : 2/m_k^{1/D} < \|x - y\| \leq 2/m_{k-1}^{1/D}\}.$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\iint_{\{x,y \in [0,1]^D, \|x-y\| \leq h_0\}} (|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} d\lambda_W(x) d\lambda_W(y) \right) \\
& \leq \mathbb{E} \left(\iint_{\{x \in W, y \in [0,1]^D, \|x-y\| \leq h_0\}} (|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} dx dy \right) \\
& \leq \mathbb{E} \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \iint_{R_k \cap W \times [0,1]^D} (|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} dx dy \right) \\
& \leq \mathbb{E} \left(\sum_{k=k_0}^{\infty} \iint_{R_k} (|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} \mathbb{1}_{(x \in V_k)} dx dy \right) \\
& \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\iint_{R_k} \mathbb{E}((|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} \mathbb{1}_{(x \in V_k)}) dx dy \right).
\end{aligned}$$

On applique le corollaire 4.2.5 :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left(\iint_{\{x,y \in [0,1]^D, \|x-y\| \leq h_0\}} (|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} d\lambda_W(x) d\lambda_W(y) \right) \\
& \leq C \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\iint_{R_k} \|x - y\|^{1-s-(1+\varepsilon)\alpha} dx dy \right) \\
& \leq C \iint_{\{x,y \in [0,1]^D, \|x-y\| \leq h_0\}} \|x - y\|^{1-s-(1+\varepsilon)\alpha} dx dy.
\end{aligned}$$

Puisque $1 - s - (1 + \varepsilon)\alpha > -D$, l'intégrale précédente converge, donc presque sûrement :

$$\iint_{\{x,y \in [0,1]^D, \|x-y\| \leq h_0\}} (|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} d\lambda_W(x) d\lambda_W(y) < \infty.$$

Puisque l'intégrale précédente est finie sur le domaine d'intégration complémentaire $R_{k_0}^c = \{x, y \in [0, 1]^D : \|x - y\| > h_0\}$, on a presque sûrement :

$$\iint_{[0,1]^D \times [0,1]^D} (|F(x) - F(y)|^2 + \|x - y\|^2)^{-s/2} d\lambda_W(x) d\lambda_W(y) < \infty.$$

Si μ_W désigne la mesure image de λ_W par la projection sur Γ_F , elle est donc de s -énergie finie. Par construction, la mesure μ_W est portée par Γ_F . Donc pour conclure que $\dim_H(\Gamma_F) \geq s$, il reste à justifier que μ_W est positive. Il est équivalent de prouver que λ_W est positive c'est-à-dire que $\lambda(W) > 0$.

b) On a

$$[0, 1]^D \setminus W = \bigcup_{k=k_0}^{\infty} \left([0, 1]^D \setminus \bigcup_{p=m_k}^{m_{k+1}-1} I_p \right).$$

D'après le lemme 4.2.6 on a

$$\mathbb{E}(\lambda([0, 1]^D \setminus W)) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} \left(\frac{m_k}{m_{k+1} - 1} \right)^\delta.$$

Mais pour tout $k \geq 1$:

$$\frac{m_k}{m_{k+1} - 1} = \frac{2^{k^2}}{2^{(k+1)^2} - 1} \leq 2 \cdot 2^{k^2 - (k+1)^2} = 2^{-2k}$$

de sorte que

$$\mathbb{E}(\lambda([0, 1]^D \setminus W)) \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-2k\delta} = \frac{2^{-2k_0\delta}}{1 - 2^{-2\delta}}.$$

Par suite, l'inégalité de Markov entraîne

$$\mathbb{P}(\lambda(W) < 1/2) = \mathbb{P}(\lambda([0, 1]^D \setminus W) \geq 1/2) \leq 2 \frac{2^{-2k_0\delta}}{1 - 2^{-2\delta}}.$$

On choisit alors k_0 suffisamment grand pour que

$$\frac{2^{1-2k_0\delta}}{1 - 2^{-2\delta}} < \eta.$$

On a ainsi $\lambda(W) \geq 1/2$ avec une probabilité supérieure à $1 - \eta$.

c) On déduit des points a) et b) que $\dim_H(\Gamma_F) \geq s$ avec une probabilité au moins égale à $1 - \eta$. Comme $s \in]1, D + 1 - \alpha[$ et $\eta \in]0, 1[$ sont arbitraires, on en déduit finalement, en se limitant à $s \in \mathbb{Q}$, que presque sûrement $\dim_H(\Gamma_F) \geq D + 1 - \alpha$. \square

Puisque la dimension de Hausdorff minore toujours la dimension de boîte on a, en réunissant le théorème précédent et la proposition 3.7.12 (dans le cas particulier ν uniforme) :

COROLLAIRE 4.2.8. *On suppose vraies les hypothèses H_2 et H_5 . Alors la fonction de bosses F définie par (4.5) est telle que presque sûrement*

$$D + 1 - \alpha \leq \dim_H(\Gamma_F) \leq \dim_B(\Gamma_F) \leq D + 1 - \min\{\alpha, \gamma\},$$

ces inégalités étant des égalités lorsque $\gamma \geq \alpha$, notamment lorsque g est lipschitzienne.

4.2.3. Remarques

On peut donc retrouver dans certains cas la valeur exacte de $\dim_B(\Gamma_F)$ et surtout en obtenir une minoration. Nous avons obtenu cette dernière pour des distributions ν plus générales mais au prix d'hypothèses supplémentaires relatives à l'existence d'une densité höldérienne. Le théorème 4.2.7 peut être généralisé dans le cas réel de façon intéressante.

On définit F sur un intervalle non vide $A \subset \mathbb{R}$ et on suppose vraies les hypothèses H_1 , H_5 et H_6 avec

H_6 : ν admet une densité θ régulière inférieurement sur $A(1)$.

Par exemple la loi uniforme sur $A(1)$ vérifie H_1 et H_6 . Nous avons déjà montré qu'alors la fonction de bosses standard associée F est définie et continue sur A . Dans ces conditions le théorème 4.2.7 est encore vrai. En effet, le lemme 4.2.1 se généralise facilement, la densité de Z_p étant alors donnée par

$$f_p(z) = \frac{2p^{\alpha-1}}{\mathbb{P}(A_p)} \theta(x - h(p^\alpha z)/p) |h'(p^\alpha z)| \mathbb{1}_J(p^\alpha z).$$

La régularité supérieure permet de majorer $\|f_p\|_\infty$ dans le corollaire 4.2.3. Enfin, la régularité inférieure permet de minorer $\mathbb{P}(x \in I_p)$ dans le lemme 4.2.6. Le corollaire 4.2.8 se généralise alors naturellement en supposant cette fois vraies les hypothèses H_1 , H_2 , H_5 et H_6 . Notons que H_4 n'est pas requise : à aucun moment la densité θ ne doit avoir une régularité. Il faut simplement qu'elle soit «bien» bornée. Ainsi on obtient une minoration de la dimension de boîte de Γ_F dans un cadre bien plus général.

Les hypothèses pour minorer $\dim_H(\Gamma_F)$ et celles pour majorer (ou minorer) $\dim_B(\Gamma_F)$ sont toutefois dissociables. On peut ainsi obtenir une estimation mais pas l'autre. Donnons des exemples. On se place dans le cas réel où F est définie sur $[0, 1]$ avec pour ν la loi uniforme sur $[-1, 2]$. Les hypothèses de régularité H_1 , H_3 , H_4 et H_6 sont toutes vérifiées.

Prenons pour g la bosse g_δ construite à partir de l'escalier du diable (exemple 3 page 16). Nous avons vu que pour $\delta_n = (2/r)^n$ ($r > 2$) on a $g_\delta \in \Lambda_\gamma(\mathbb{R})$ avec $\gamma = \log 2 / \log r$. La proposition 3.7.12 s'applique :

$$\dim_B(\Gamma_F) \leq 2 - \min\{\alpha, \gamma\}.$$

Puisque θ est lipschitzienne, on obtient de plus l'égalité si $\alpha < \gamma$ et la dimension de boîte est connue. Par contre l'hypothèse H_5 est en défaut. En effet sur n'importe quel intervalle $I \subset [0, 1]$ on a $g' = 0$ presque partout : ce ne peut être un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. Cette bosse n'est pas assez oscillante. Les résultats des chapitres précédents ne sont donc pas inutiles. Rappelons en outre que si l'inégalité $\dim_H \leq \dim_{\mathcal{R}}$ est conjecturée, elle n'est pas établie.

Le contraire est possible. Prenons pour g la bosse pathologique de l'exemple 3 page 40. On a vu qu'on ne pouvait pas majorer $\dim_B(\Gamma_F)$. Par contre H_5 est satisfaite avec $I = [t_1, t_0]$ puisque sur cet intervalle g est égale à la bosse triangle. On peut donc minorer les deux dimensions.

Enfin, les inégalités fournies par le corollaire 4.2.8 peuvent *a priori* être strictes. C'est le cas pour la bosse demi-cercle et $\alpha > 1/2$. On a $\gamma = 1/2$ et H_5 est vraie par exemple sur $I = [1/4, 3/4]$.

Fonctions et courbes de structure

5.1. Fonctions de structure

Au chapitre 3, nous avons défini les fonctions de q -structure discrètes qui permettent d'évaluer certaines dimensions fractales de Γ_f , en dimension $D \geq 1$ quelconque; et continues qui permettent d'étudier les indices σ dans le cas $D = 1$. Nous nous limitons à partir de maintenant à ce cas, ce chapitre et les suivants étant tournés vers les applications en dimension 1. La lettre D ne fera donc plus référence à la dimension de l'espace ambiant.

Les fonctions de structure (continues) de f sont obtenues à partir de la norme de l'opérateur $\Phi_\varepsilon(x) = f(x + \varepsilon) - f(x)$, c'est-à-dire de l'accroissement standard de f . Nous allons ici considérer deux autres types de fonctions de structure, plus maniables, en faisant plutôt intervenir les accroissements symétriques :

- d'ordre 1 : $\Phi_\varepsilon^{(1)}(x) = f(x + \varepsilon) - f(x - \varepsilon)$,
- d'ordre 2 : $\Phi_\varepsilon^{(2)}(x) = f(x + \varepsilon) + f(x - \varepsilon) - 2f(x)$.

Ces derniers accroissements sont très utilisés en analyse de Fourier ou en analyse aléatoire pour renormaliser certains processus stochastiques et obtenir des processus convergents. Ils sont par contre rarement employés dans ce contexte. Ils sont liés à la dérivée seconde de f : l'accroissement d'ordre 1 est nul pour f constante, alors que celui d'ordre 2 est nul pour f affine. Nous verrons leur utilité pour l'étude des fonctions de bosses.

DÉFINITION 5.1.1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $[a, b] \subset [0, 1]$. Pour $q > 0$ et $i \in \{1, 2\}$, la *fonction de q -structure d'ordre i* de f sur $[a, b]$ est définie par

$$\forall \varepsilon > 0 \quad S_{i,q}(\varepsilon) = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b |\Phi_\varepsilon^{(i)}(x)|^q dx \right)^{1/q}. \quad (5.1)$$

On a donc $S_{i,q}(\varepsilon) = N_q(\xi_i, \varepsilon)$ avec $E = [a, b]$, $\Phi_\varepsilon^{(i)}$ comme ci-dessus, et μ_ε la mesure uniforme sur E . La fonction $S_{i,q}$ permet une analyse locale de la régularité de f , dans la fenêtre $[a, b]$. Une notation plus complète serait $S_{i,q,[a,b]}$ mais nous l'éviterons par souci de simplicité.

5.2. Courbes de structure

Pour la plupart des modèles de fonctions f irrégulières, mais relativement homogènes, on s'attend à ce qu'en chaque point t l'accroissement vérifie

$$|f(t + \varepsilon) - f(t)| \simeq \varepsilon^H, \quad (5.2)$$

uniformément en t et h . Dans ce cas, la dimension de boîte de Γ_f vaut $2 - H$ et les indices $\sigma(q)$ sont tous égaux à H (voir chapitre 3 page 67). Si la relation (5.2) est vérifiée par l'accroissement standard, elle l'est aussi par ceux d'ordre 1 et 2. Cela suggère donc d'étudier les indices

$$\sigma_i(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log S_{i,q}(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (5.3)$$

ce qui, étant donné la définition de $S_{i,q}$, peut être fait avec les outils du chapitre 3. Nous avons insisté sur l'avantage théorique qu'offraient les indices dimensionnels s'écrivant sous la forme (3.1) et (3.4). Mais ils se prêtent également bien aux études expérimentales. Ils sont assez simples à estimer. Pour déterminer numériquement

$$H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log Q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}, \quad (5.4)$$

on remarque que la relation $\log Q(\varepsilon) = H \log \varepsilon$ doit être vraie au voisinage de 0, ce qui suggère l'emploi de diagrammes logarithmiques. En pratique, deux techniques sont possibles. On considère une suite décroissante de valeurs $(\varepsilon_k)_{1 \leq k \leq K}$ et on trace les points $(\log \varepsilon_k, \log Q(\varepsilon_k))$. L'observation de l'alignement de ces points fournit une approximation de H . La pente est estimée par régression linéaire ou plus simplement, parfois légitimement, par la corde entre les deux premiers points. Ces diagrammes sont parfois appelés *courbes de rugosité* associées à Q . Nous étudions dans ce chapitre le cas où Q est une fonction de structure et nous présentons maintenant ces diagrammes sous une forme légèrement différente, tenant compte des problèmes expérimentaux.

On fixe une constante $D > 0$ et on étudie $S_{i,q}$ pour $\varepsilon \in [D^{-1}, 1]$. Pour cela, on pose $\eta = \log(D\varepsilon)$ et on considère la fonction de η suivante :

$$\forall \eta \in [0, \log D] \quad T_{i,q}(\eta) = \log S_{i,q}(\varepsilon) = \log S_{i,q}(D^{-1}10^\eta).$$

On appelle *courbe de q -structure d'ordre i* de f le graphe de $\eta \mapsto T_{i,q}(\eta)$.

Cette courbe semble encore théorique mais elle est bien adaptée à une étude expérimentale. Pratiquement, si f est donnée par N_{disc} points de discrétisation équidistants, on choisit $D = N_{disc}$ et on travaille avec une *courbe de q -structure expérimentale* obtenue de la façon suivante. On considère une suite finie de $K \geq 1$ valeurs $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dots, \varepsilon_K$, avec $\varepsilon_k = m_k N_{disc}^{-1}$ et m_k un nombre entier. On pose alors

$$\eta_k = \log m_k = \log(N_{disc} \varepsilon_k)$$

et on forme le graphe des points

$$(\eta_k, T_{i,q}(\eta_k)) \quad (k = 1, \dots, K).$$

Cette méthode a le double avantage de fournir une courbe de structure à partir de n'importe quel signal discrétisé et d'être simple à mettre en œuvre. Généralement,

les ε_k sont choisis en progression arithmétique, autant du moins qu'il est possible compte tenu de la condition m_k entier. Ceci permet d'obtenir des abscisses η_k approximativement équidistantes. Cependant, avec $m_1 = 1$ et $m_2 \geq 2$, il y a toujours entre $\eta_1 = 0$ et η_2 une distance d'au moins $\log 2$.

Les courbes précédentes sont essentiellement étudiées au voisinage de 0. Fixons une valeur $q > 0$ et précisons le contexte. On appelle *penste théorique*, et on note γ_{th} , la dérivée en 0 de la fonction $\eta \mapsto T_{i,q}(\eta)$:

$$\gamma_{th} = \left. \frac{dT_{i,q}}{d\eta} \right|_{\eta=0}. \quad (5.5)$$

En remarquant que $T_{i,q} = q^{-1} \log S_{i,q}^q$, et en revenant à ε , il est encore possible d'écrire

$$\gamma_{th} = \left. \frac{\varepsilon}{q S_{i,q}^q(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} S_{i,q}^q(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=D^{-1}}. \quad (5.6)$$

En pratique, on ne calcule pas cette dérivée. En effet, disposant seulement d'une courbe de structure expérimentale on calcule une valeur approchée de la dérivée en évaluant la pente à l'origine par interpolation linéaire des premiers points du diagramme logarithmique. Généralement, la courbe de structure est effectivement affine au voisinage de 0. C'est du moins le cas de certains modèles théoriques. En pratique cependant, on peut observer un comportement très différent. Ainsi, la courbe de structure peut être strictement concave. Pour ces raisons, on approche donc simplement la dérivée en 0 par la corde entre η_1 et η_2 . On appelle ainsi *penste expérimentale*, notée γ_{ex} , le rapport :

$$\gamma_{ex} = \frac{T_{i,q}(\eta_2) - T_{i,q}(\eta_1)}{\eta_2 - \eta_1}, \quad (5.7)$$

que l'on peut encore écrire

$$\gamma_{ex} = \frac{1}{q} \frac{\log S_{i,q}^q(\varepsilon_2) - \log S_{i,q}^q(\varepsilon_1)}{\log \varepsilon_2 - \log \varepsilon_1}. \quad (5.8)$$

Dans la suite, nous supposons $m_1 = 1$ et $m_2 = 2$, de sorte que

$$\gamma_{ex} = \frac{1}{q \log 2} (\log S_{i,q}^q(2D^{-1}) - \log S_{i,q}^q(D^{-1})). \quad (5.9)$$

Dans ces conditions, il faut se demander en quels sens l'estimation de $\sigma_i(q)$ est valide, en utilisant γ_{th} ou γ_{ex} . En effet, ces dernières dépendent de D qui est toujours fini et peut être relativement petit si on ne dispose que de peu de données expérimentales. D'autres problèmes se posent selon la nature même de f . Si elle s'écrit sous forme de série, ou d'intégrale, on est contraint en pratique de travailler avec des approximations, en l'occurrence des sommes finies. De telles approximations peuvent-elles entraîner des erreurs systématiques dans le calcul de la pente en 0 ? Nous répondrons à ces questions pour les fonctions de Weierstrass et les fonctions de bosses.

Terminons en remarquant que si les courbes de q -structure sont relatives à l'intervalle $[a, b]$, on peut souvent travailler avec un seul intervalle. En effet, nous l'avons dit, les modèles vérifiant (5.2) sont assez homogènes, et on constate que les courbes de structure :

– soit ne dépendent pas de $[a, b]$,
 – soit dépendent de $[a, b]$, mais par exemple pas de la longueur $b - a$, et elles se déduisent alors les unes des autres par des transformations géométriques simples, en l'occurrence des translations.

Il est donc suffisant de se limiter à $[a, b] = [0, 1]$. Toutefois, l'analyse des courbes de structures en fonction de l'intervalle $[a, b]$ peut s'avérer intéressant, notamment pour distinguer des modèles.

5.3. Spectre de structure

A des fins de modélisation, il est nécessaire de disposer de critères permettant d'identifier un signal. Les courbes de structure peuvent jouer ce rôle. Considérer l'égalité de deux courbes de structure ne suffit pas : deux signaux très différents peuvent avoir des courbes de structure voisines. Par contre, il est légitime de penser que ce phénomène ne se produit pas si l'on considère l'ensemble des courbes de structure. Ainsi, on appelle *spectre de structure d'ordre i* l'ensemble de toutes les courbes de q -structures d'ordre i . Un sous-ensemble fini sera appelé une *gamme* du spectre. Chaque gamme peut être vue comme une «empreinte digitale» du signal. De ce point de vue, deux signaux seront déclarés identiques lorsqu'une série d'empreintes concorde.

Nous allons simplement souligner deux faits concernant les spectres de structure. Prenons $[a, b] = [0, 1]$.

5.3.1. Comportement limite : étendue

Le spectre définit une partie $\Sigma_i(D)$ du plan :

$$\Sigma_i(D) = \{(\eta, T_{i,q}(\eta)) : \eta \in [0, \log D] \text{ et } q > 0\} .$$

La géométrie de cet ensemble fournit une indication concernant le signal. On ne connaît généralement pas la répartition exactes des courbes «à l'intérieur» de $\Sigma_i(D)$. On a toutefois la propriété suivante (voir page 60) :

Pour chaque ε fixé, l'application $q \mapsto S_{i,q}(\varepsilon)$ est croissante et on a les limites suivantes :

$$\lim_{q \rightarrow +\infty} S_{i,q}(\varepsilon) = \sup \{ |\Phi_\varepsilon^{(i)}(x)| : x \in [0, 1] \} = S_{i,\infty}(\varepsilon)$$

et

$$\lim_{q \rightarrow 0} S_{i,q}(\varepsilon) = \exp \left(\int_0^1 \ln |\Phi_\varepsilon^{(i)}(x)| dx \right) = S_{i,0}(\varepsilon)$$

lorsque l'intégrale existe.

En passant à $T_{i,q}$, on obtient deux courbes limites : les courbes de structure croissent de l'une à l'autre. On peut dans certains cas décrire plus précisément la répartition des courbes.

5.3.2. Comportement interne : rigidité

Pour de nombreux modèles, on constate expérimentalement que deux courbes de structure données sont approximativement translatées l'une de l'autre. Formellement cela signifie qu'il existe des coefficients $c_{p,q}^{(i)} > 0$ tels que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad S_{i,p}(\varepsilon) = c_{p,q}^{(i)} S_{i,q}(\varepsilon) . \quad (5.10)$$

On a en particulier, pour tout $p, q > 0$:

$$c_{p,q}^{(i)} = 1/c_{q,p}^{(i)} \quad \text{et} \quad c_{p,q}^{(i)} = c_{p,1}^{(i)}/c_{q,1}^{(i)} .$$

Dans ce cas, toutes les courbes de structure ont une pente identique. Les rapports $\sigma_i(q)$ sont tous égaux. Il est possible de montrer que cette condition nécessaire est satisfaite par les fonctions les bosses en reprenant la démarche qui a mené à la proposition 3.7.14. Cette valeur commune fournit la dimension fractale du graphe de f . Théoriquement, cela caractérise en outre un comportement monofractal au sens où toutes les moyennes des accroissements de f sont proportionnelles, et en particulier proportionnelles aux accroissements absolus $S_{i,\infty}$. Cette caractéristique peut encore être discriminante.

Notons pour conclure qu'il faut rester prudent. Nous avons en effet remarqué que seules des courbes de structures expérimentales sont accessibles, et que pour certaines fonctions, elles sont une «déformation» de la réalité. De plus, ces données dépendent en pratique du nombre D de points de discrétisation de f .

5.4. Cas des séries aléatoires

Lorsque f est un processus stochastique, les fonctions $S_{i,q}$, les courbes associées, les pentes, sont également aléatoires. Il est intéressant de disposer de bonnes approximations déterministes de ces quantités. Elles peuvent par exemple servir de références. Il est sans intérêt de considérer la fonction $\mathbb{E}(f(x))$ et de calculer les fonctions de structure associées. En effet, dans la plupart des modèles les accroissements de f sont centrés ou encore $\mathbb{E}(f(x))$ ne dépend pas de x . Les fonctions de structure sont alors nulles. Il est plus judicieux de calculer $S_{i,q}$ puis de considérer son espérance.

Soit donc $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un processus à trajectoires continues. A partir de maintenant, on note $s_{i,q}$ (*resp.* $s_{i,q}^q$) l'espérance de $S_{i,q}$ (*resp.* $S_{i,q}^q$).

Pour chaque $\varepsilon > 0$ le théorème de Fubini s'applique :

$$s_{i,q}^q(\varepsilon) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathbb{E} |\Phi_\varepsilon^{(i)}(x)|^q dx .$$

Le problème est alors de calculer explicitement ces fonctions déterministes.

Dans certains cas, la loi des accroissements de f est connue : il est alors possible de calculer précisément leurs moments. Cela conduit rapidement à l'expression de $s_{i,q}^q$. Par exemple si f est la trajectoire d'un mouvement brownien standard sur \mathbb{R} , on a l'égalité en loi :

$$\forall x \in [0, 1] \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Phi_\varepsilon^{(i)}(x) = \mathcal{N}(0, 2\varepsilon) \quad (i \in \{1, 2\}).$$

On en déduit

$$\mathbb{E} |\Phi_\varepsilon^{(i)}(x)|^{2q} = C\varepsilon^q \quad (C > 0),$$

de sorte que

$$\forall q \geq 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad s_{i,2q}^{2q}(\varepsilon) = C'\varepsilon^q \quad (C' > 0).$$

Les points du diagramme logarithmique sont donc alignés : la courbe de structure est une droite de pente 1/2.

Les calculs précédents sont en règle générale assez exceptionnels, les accroissements n'étant par exemple pas stationnaires. Il est toutefois possible d'obtenir un équivalent en 0 de $s_{i,q}^q$. Lorsque f est aléatoire le cas $q = 2$ est, pour des raisons techniques évidentes, le plus intéressant.

Nous nous intéressons aux processus particuliers définis sur \mathbb{R} par une série du type

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n Y_n(t) , \quad (5.11)$$

où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels positifs et $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus aléatoires «élémentaires» indépendants. Nous allons voir comment obtenir $s_{i,2}^2$ pour de telles fonctions. Pour les applications pratiques, on écrira ces séries sous la forme

$$F(t) = \sum_{n=N}^M a_n Y_n(t) \quad (1 \leq N \leq M \leq \infty) .$$

En pratique, M est un entier fini. On a donc deux discrétisations différentes : celle de la série en une somme finie et celle de la variable t par rapport à une subdivision de $D = N_{disc}$ points. Le comportement de $s_{i,q}$ vis-à-vis de ces approximations est un fait important. Bien qu'ils soient *a priori* sans rapport direct, il pourra être utile de lier ces deux paramètres de sorte que $D \rightarrow \infty$ lorsque $M \rightarrow \infty$. Ainsi peut-on espérer obtenir les valeurs théoriques de la «vraie» fonction F lorsque $M \rightarrow +\infty$.

Commençons par écrire l'expression générale de $s_{i,2}^2$. On fixe $t \in [0, 1]$, $\varepsilon > 0$ et on note

$$V_n(t, \varepsilon) = \begin{cases} Y_n(t + \varepsilon) - Y_n(t - \varepsilon) & \text{si } i = 1 \\ Y_n(t + \varepsilon) + Y_n(t - \varepsilon) - 2Y_n(t) & \text{si } i = 2 \end{cases}$$

l'accroissement symétrique élémentaire, puis

$$v_n(t, \varepsilon) = \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)) \quad \text{et} \quad \tilde{V}_n(t, \varepsilon) = V_n(t, \varepsilon) - v_n(t, \varepsilon) .$$

Dans ces conditions, de simples calculs donnent

$$\begin{aligned} (\Phi_\varepsilon^{(i)}(t))^2 &= \left(\sum_{n=N}^M a_n V_n(t, \varepsilon) \right)^2 = \left(\sum_{n=N}^M a_n (\tilde{V}_n(t, \varepsilon) + v_n(t, \varepsilon)) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{n=N}^M a_n \tilde{V}_n(t, \varepsilon) \right)^2 + 2 \left(\sum_{n=N}^M a_n \tilde{V}_n(t, \varepsilon) \right) \left(\sum_{n=N}^M a_n v_n(t, \varepsilon) \right) + \left(\sum_{n=N}^M a_n v_n(t, \varepsilon) \right)^2 . \end{aligned}$$

Maintenant $(\tilde{V}_n(t, \varepsilon))_{n \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées, donc, en prenant l'espérance de la somme précédente on a :

$$\mathbb{E}(\Phi_\varepsilon^{(i)}(t))^2 = \sum_{n=N}^M a_n^2 \mathbb{E}(\tilde{V}_n(t, \varepsilon)^2) + \left(\sum_{n=N}^M a_n v_n(t, \varepsilon) \right)^2 .$$

On obtient, pour tout $\varepsilon > 0$, l'expression exacte suivante :

$$(b-a) s_{i,2}^2(\varepsilon) = \sum_{n=N}^M a_n^2 \int_a^b \text{Var}(V_n(t, \varepsilon)) dt + \int_a^b \left(\sum_{n=N}^M a_n v_n(t, \varepsilon) \right)^2 dt . \quad (5.12)$$

Notons que le second terme de droite est nul si et seulement si les variables $V_n(t, \varepsilon)$ sont centrées, simplifiant ainsi l'expression de $s_{i,2}^2$.

Nous définissons des pentes déterministes en remplaçant dans leurs expressions aléatoires $S_{i,q}^q$ par $\mathbb{E}(S_{i,q}^q)$. On rappelle que ces pentes dépendent de D et de M , on a ainsi :

$$\gamma_{th}(D, M) = \frac{\varepsilon}{q s_{i,q}^q(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} s_{i,q}^q(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=D^{-1}}$$

$$\gamma_{ex}(D, M) = \frac{1}{q \log 2} (\log s_{i,q}^q(2D^{-1}) - \log s_{i,q}^q(D^{-1})).$$

Une question importante est donc de savoir si les passages à la limite suivants sont vrais :

$$\forall D > 0 \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma.(D, M) = \gamma.(F_M) \quad (5.13)$$

$$\forall M \geq 1 \quad \lim_{D \rightarrow +\infty} \gamma.(D, M) = \gamma.(\lim_{D \rightarrow +\infty} F_M), \quad (5.14)$$

et plus généralement

$$\lim_{D, M \rightarrow +\infty} \gamma.(D, M) = \gamma.(\lim_{D, M \rightarrow +\infty} F). \quad (5.15)$$

Le terme de droite est généralement égal à un paramètre du modèle contrôlant la dimension fractale de Γ_F . Les égalités précédentes sont donc à la base de l'estimation de ce paramètre à partir des données expérimentales.

5.5. Fonctions de Weierstrass

Avant d'étudier avec précision les fonctions de bosses, nous nous intéressons aux fonctions de Weierstrass à phases aléatoires, qui sont de la forme (5.11). L'intérêt est double. Théoriquement, ces fonctions sont proches des fonctions de bosses, de sorte que l'analyse de leurs courbes de structure doit mettre en évidence des faits caractéristiques que l'on retrouvera par la suite. Sur le plan technique, les fonctions trigonométriques vont permettre de mener tous les calculs à terme.

Les fonctions de Weierstrass sont définies comme la série (1), à la différence que le signal de base Φ est le cosinus, et que la structure dyadique sous-jacente est rendue plus générale par l'ajout d'un paramètre a . On a ainsi

$$\forall t \in [0, 1] \quad W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n\alpha} \cos(2\pi a^n t) \quad (5.16)$$

avec $\alpha \in]0, 1]$ et $a > 1$. La version aléatoire usuelle est l'analogue de (3), de sorte qu'on étudie ici la fonction

$$W(t) = \sum_{n=N}^M a^{-n\alpha} \cos(2\pi(a^n t + X_n)),$$

où $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, toutes uniformément distribuées sur $[0, 1]$ et $N \leq M$ deux entiers. On suppose dans la suite $[a, b] = [0, 1]$.

5.5.1. Courbes de structure d'ordre 1

On obtient

$$V_n(t, \varepsilon) = \cos(2\pi(a^n(t + \varepsilon) + X_n)) - \cos(2\pi(a^n(t - \varepsilon) + X_n)).$$

En remarquant que $V_n(t, \varepsilon) = -2 \sin(2\pi(a^n t + X_n)) \sin(2\pi a^n \varepsilon)$ on prouve facilement que ces variables sont centrées puis que

$$\int_0^1 \text{Var}(V_n(t, \varepsilon)) dt = \int_0^1 \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) dt = 2 \sin^2(2\pi a^n \varepsilon).$$

Finalement, on obtient l'expression exacte suivante :

$$\forall \varepsilon \in [0, 1] \quad s_{1,2}^2(\varepsilon) = 2 \sum_{n=N}^M a^{-2n\alpha} \sin^2(2\pi a^n \varepsilon).$$

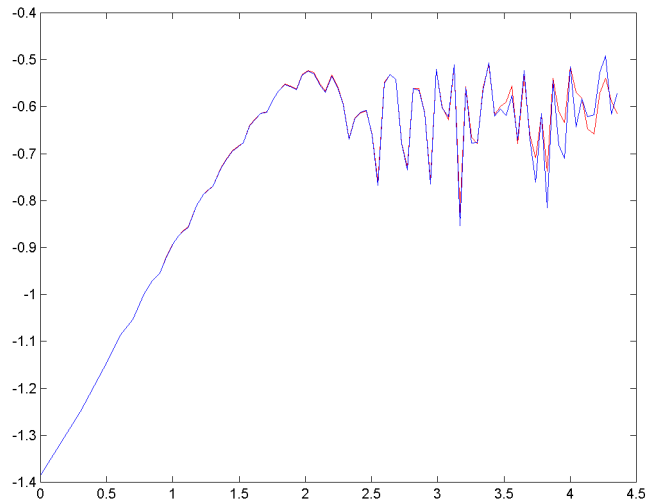


FIG. 5.1. Courbes de 2–structure d'ordre 1 pour une fonction de Weierstrass aléatoire. En rouge : une courbe aléatoire. En bleu : son approximation déterministe.

A titre d'exemple , comparons une courbe de 2–structure d'ordre 1 aléatoire et son approximation déterministe déduite de $s_{1,2}^2$ pour la fonction de Weierstrass de paramètres $N = 8$, $M = 30$, $a = 1.6$ et $\alpha = 0.5$. On choisit $N_{disc} = 25000$ (voir FIG. 5.1). Les deux courbes sont indiscernables pour les petites valeurs de ε . On constate de légères variations pour ε grand. Elles sont essentiellement dues à la périodicité et aux oscillations de la fonction de base (le cosinus).

Il est donc particulièrement intéressant d'étudier l'approximation déterministe $s_{1,2}^2$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Sans en faire une étude exhaustive, nous allons mettre en évidence le comportement des pentes déterministes dans le cas particulier où $D = a^M$. On

obtient :

$$\begin{aligned}\gamma_{th}(D, M) &= \gamma_{th}(M) = \frac{\varepsilon}{2 s_{1,2}^2(\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} s_{1,2}^2(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=a^{-M}} \\ \gamma_{ex}(D, M) &= \gamma_{ex}(M) = \frac{1}{2 \log 2} (\log s_{1,2}^2(2 a^{-M}) - \log s_{1,2}^2(a^{-M})).\end{aligned}$$

Le premier résultat est le suivant :

PROPOSITION 5.5.1. *Quelles que soient les valeurs des paramètres, on a*

- i) $\lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{th}(M) = \alpha$
- ii) $\lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{ex}(M) = \alpha + B(\alpha)$, avec $B(\alpha) > 0$.

Démonstration. Un simple calcul donne tout d'abord

$$\gamma_{th}(M) = \frac{\pi a^{-M} \sum_{n=N}^M a^{n(1-2\alpha)} \sin(4\pi a^{n-M})}{\sum_{n=N}^M a^{-2n\alpha} \sin^2(2\pi a^{n-M})}.$$

Le dénominateur se réécrit

$$\sum_{n=N}^M a^{-2n\alpha} \sin^2(2\pi a^{n-M}) = \frac{a^{-2\alpha M}}{a-1} \sum_{n=N}^M \left(\frac{a^{n+1}}{a^M} - \frac{a^n}{a^M} \right) \left(\frac{a^n}{a^M} \right)^{-1-2\alpha} \sin^2 \left(2\pi \frac{a^n}{a^M} \right).$$

De même, la somme au numérateur est égale à

$$\sum_{n=N}^M a^{n(1-2\alpha)} \sin(4\pi a^{n-M}) = \frac{a^{(1-2\alpha)M}}{a-1} \sum_{n=N}^M \left(\frac{a^{n+1}}{a^M} - \frac{a^n}{a^M} \right) \left(\frac{a^n}{a^M} \right)^{-2\alpha} \sin \left(4\pi \frac{a^n}{a^M} \right).$$

Ainsi

$$\gamma_{th}(M) = \frac{\pi \sum_{n=N}^M \left(\frac{a^{n+1}}{a^M} - \frac{a^n}{a^M} \right) \left(\frac{a^n}{a^M} \right)^{-2\alpha} \sin \left(4\pi \frac{a^n}{a^M} \right)}{\sum_{n=N}^M \left(\frac{a^{n+1}}{a^M} - \frac{a^n}{a^M} \right) \left(\frac{a^n}{a^M} \right)^{-1-2\alpha} \sin^2 \left(2\pi \frac{a^n}{a^M} \right)}.$$

On reconnaît au dénominateur (*resp.* numérateur) une somme de Riemann associée à la subdivision $\{a^{n-M}\}_{n=N}^M$ pour la fonction $x^{-1-2\alpha} \sin^2(2\pi x)$ (*resp.* $x^{-2\alpha} \sin(4\pi x)$).

On obtient ainsi

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{th}(M) = \pi \frac{\int_0^1 x^{-2\alpha} \sin(4\pi x) dx}{\int_0^1 x^{-1-2\alpha} \sin^2(2\pi x) dx}.$$

Une intégration par parties donne

$$\int_0^1 x^{-1-2\alpha} \sin^2(2\pi x) dx = \frac{\pi}{\alpha} \int_0^1 x^{-2\alpha} \sin(4\pi x) dx,$$

et finalement $\lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{th}(M) = \alpha$ ce qui prouve le point *i*). Un raisonnement analogue conduit à

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{ex}(M) = \frac{1}{2 \log 2} \log \left(\frac{\int_0^1 x^{-1-2\alpha} \sin^2(4\pi x) dx}{\int_0^1 x^{-1-2\alpha} \sin^2(2\pi x) dx} \right).$$

Un changement de variable dans l'intégrale du numérateur donne :

$$\int_0^1 x^{-1-2\alpha} \sin^2(4\pi x) dx = 2^{2\alpha} \int_0^2 u^{-1-2\alpha} \sin^2(2\pi u) du,$$

et finalement

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{ex}(M) = \alpha + \frac{1}{2 \log 2} \log \left(1 + \frac{\int_1^2 u^{-1-2\alpha} \sin^2(2\pi u) du}{\int_0^2 u^{-1-2\alpha} \sin^2(2\pi u) du} \right).$$

C'est le résultat annoncé par *ii*). \square

Ainsi l'égalité (5.15) n'est satisfaite qu'avec la pente théorique. Une telle situation semble assez générale. La présence d'un biais paraît inévitable pour la pente expérimentale, ce biais étant toutefois souvent négligeable. Le problème est différent lorsque la pente théorique est elle-même biaisée. Dans ce cas, il ne semble plus légitime d'utiliser en pratique ces pentes.

Notre idée est alors de ne pas s'intéresser uniquement à la pente en 0, mais à d'autres endroits caractéristiques de la courbe de structure. Pour cela, nous allons déterminer une approximation plus simple de $s_{1,2}^2$ en mettant en évidence son comportement pour les petites et les grandes valeurs de ε (N_{disc} est à nouveau quelconque). On peut remplacer $\sin^2(x)$ par la fonction

$$s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq x_0 \\ 1/2 & \text{si } x_0 \leq x \end{cases}$$

où $x_0 = 1/\sqrt{2}$. Cette fonction est continue, équivalente à $\sin^2(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$, et égale à la moyenne de $\sin^2(x)$ pour les grandes valeurs de x . Pour $\varepsilon > 0$, soit N_ε tel que $2\pi a^{N_\varepsilon} \varepsilon = x_0$:

$$\varepsilon = c_0 a^{-N_\varepsilon} \quad \text{avec } c_0 = x_0/2\pi.$$

On suppose $N_\varepsilon \leq M$. Comme $\varepsilon \geq N_{disc}^{-1}$, il suffit pour cela que

$$M \geq \frac{\log(c_0 N_{disc})}{\log a}.$$

En particulier si $N_{disc} = a^M$, cette condition est toujours vérifiée.

Pour obtenir la nouvelle expression de $s_{1,2}^2$, il faut distinguer deux cas :

- $\varepsilon \in [N_{disc}^{-1}, c_0 a^{-N}] \iff N \leq N_\varepsilon \leq M$

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) \approx \begin{cases} 8\pi^2 \frac{c_0^{2(1-\alpha)} \varepsilon^{2\alpha} - a^{2(1-\alpha)N} \varepsilon^2}{a^{2(1-\alpha)} - 1} + \frac{c_0^{-2\alpha} \varepsilon^{2\alpha} - a^{-2\alpha M}}{1 - a^{-2\alpha}} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ 8\pi^2 (N_\varepsilon - N) \varepsilon^{2\alpha} + \frac{c_0^{-2} \varepsilon^2 - a^{-2M}}{1 - a^{-2}} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

- $\varepsilon \in [c_0 a^{-N}, 1] \iff N_\varepsilon \leq N \leq M$

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) \approx \frac{a^{-2N\alpha} - a^{-2M\alpha}}{1 - a^{-2\alpha}}.$$

Cette fonction approchée montre bien, comme nous le souhaitions, la différence de comportement de $s_{1,2}^2(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow 1$. On observe en effet deux régimes simplifiés. Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on vérifie que

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) \approx \varepsilon^{2\alpha},$$

ce qui est bien le comportement théorique de $s_{1,2}^2$ au voisinage de 0. Pour les grandes valeurs de ε , c'est-à-dire à partir de $\varepsilon_0 = c_0 a^{-N}$, cette fonction est constante. On observe ainsi un plateau sur la courbe de structure déterministe approchée à partir de la valeur

$$\eta_0 = \log(N_{disc}\varepsilon_0) = \log(N_{disc}c_0) - N \log a.$$

Pour observer le changement de régime, c'est-à-dire le point de transition obtenu pour $\varepsilon = \varepsilon_0$, il faut et il suffit que $\eta_0 > 0$, c'est-à-dire

$$(c_0 N_{disc})^{1/M} \leq a < (c_0 N_{disc})^{1/N}.$$

Reprenons l'exemple précédent et traçons la nouvelle approximation déterministe obtenue ci-dessus (voir FIG. 5.2). On a

$$(c_0 N_{disc})^{1/M} = 1,3031 \quad \text{et} \quad (c_0 N_{disc})^{1/N} = 2,6987,$$

de sorte que le point de transition η_0 est observable, avec $\eta_0 = 1,8163$. Pour les petites valeurs de ε les courbes sont encore presque identiques. Pour $\varepsilon > \varepsilon_0$, la nouvelle fonction, constante (égale à -0.6035), est une réelle simplification.

Bien sûr remplacer $s_{1,2}^2$ par sa moyenne est une trop grande approximation, surtout qu'elle oscille beaucoup autour de cette valeur. Toutefois la courbe simplifiée conserve suffisamment d'informations concernant le modèle et ses paramètres. Elle permet les mêmes estimations que la courbe déterministe exacte, comme celle de l'exposant α . Remarquons ces différents aspects : croissance, point de cassure, stationnarité, seront des caractéristiques essentielles des fonctions de bosses.

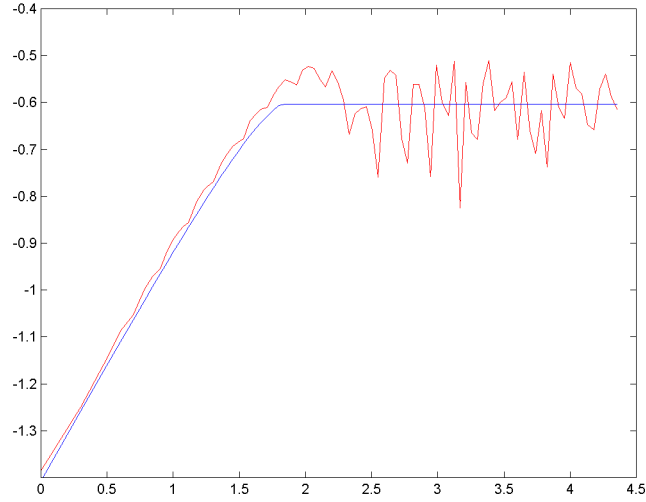


FIG. 5.2. Courbes de 2-structure d'ordre 1 pour une fonction de Weierstrass aléatoire. En rouge : la courbe aléatoire. En bleu : l'approximation déterministe simplifiée.

5.5.2. Courbes de structure d'ordre 2

Une fois de plus, des calculs exacts sont possibles. On a ici

$$V_n(t, \varepsilon) = \cos(2\pi(a^n(t + \varepsilon) + X_n)) + \cos(2\pi(a^n(t - \varepsilon) + X_n)) - 2\cos(2\pi(a^n t + X_n)).$$

En remarquant que $V_n(t, \varepsilon) = -4\cos(2\pi(a^n t + X_n))\sin^2(\pi a^n \varepsilon)$, on prouve facilement que ces variables sont centrées, puis que

$$\int_0^1 \text{Var}(V_n(t, \varepsilon)) dt = \int_0^1 \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) dt = 8\sin^4(\pi a^n \varepsilon).$$

Finalement, on obtient l'expression exacte suivante :

$$\forall \varepsilon \in [0, 1] \quad s_{2,2}^2(\varepsilon) = 8 \sum_{n=N}^M a^{-2n\alpha} \sin^4(\pi a^n \varepsilon).$$

On peut encore obtenir une approximation simple de $s_{2,2}^2(\varepsilon)$ en mettant en évidence son comportement pour les petites et les grandes valeurs de ε . Pour cela, on remplace cette fois $\sin^4(x)$ par la fonction

$$s(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si } 0 \leq x \leq x_0 \\ 3/8 & \text{si } x_0 \leq x \end{cases}$$

où $x_0 = (3/8)^{1/4} \simeq 313/400$. Cette fonction est continue, équivalente à $\sin^4(x)$ lorsque $x \rightarrow 0$, et égale à la moyenne de $\sin^4(x)$ pour les grandes valeurs de x . Pour $\varepsilon > 0$, soit N_ε tel que $\pi a^{N_\varepsilon} \varepsilon = x_0$:

$$\varepsilon = c_0 a^{-N_\varepsilon} \quad \text{avec } c_0 = x_0/\pi.$$

On suppose $N_\varepsilon \leq M$. Comme $\varepsilon \geq N_{disc}^{-1}$, il suffit pour cela que

$$M \geq \frac{\log(c_0 N_{disc})}{\log a}.$$

En particulier si $N_{disc} = a^M$, cette condition est toujours vérifiée. Pour obtenir la nouvelle expression de $s_{2,2}^2(\varepsilon)$, il faut distinguer deux cas :

- $\varepsilon \in [N_{disc}^{-1}, c_0 a^{-N}] \iff N \leq N_\varepsilon \leq M$

$$s_{2,2}^2(\varepsilon) \approx 8\pi^4 \frac{c_0^{4-2\alpha} \varepsilon^{2\alpha} - a^{(4-2\alpha)N} \varepsilon^4}{a^{4-2\alpha} - 1} + 3 \frac{c_0^{-2\alpha} \varepsilon^{2\alpha} - a^{-2\alpha M}}{1 - a^{-2\alpha}}$$

- $\varepsilon \in [c_0 a^{-N}, 1] \iff N_\varepsilon \leq N \leq M$

$$s_{2,2}^2(\varepsilon) \approx 3 \frac{a^{-2N\alpha} - a^{-2M\alpha}}{1 - a^{-2\alpha}}.$$

Cette fonction approchée montre bien, comme nous le souhaitions, la différence de comportement de $s_{2,2}^2(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \rightarrow 0$ et $\varepsilon \rightarrow 1$. On observe en effet deux régimes simplifiés. Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on peut vérifier que

$$s_{2,2}^2(\varepsilon) \approx \varepsilon^{2\alpha},$$

ce qui est bien le comportement théorique de $s_{2,2}^2$ au voisinage de 0. Pour les grandes valeurs de ε , c'est-à-dire à partir de $\varepsilon_0 = c_0 a^{-N}$, cette fonction est constante. On observe à nouveau un plateau sur cette courbe de structure déterministe approchée à partir de la valeur

$$\eta_0 = \log(N_{disc}\varepsilon_0) = \log(N_{disc}c_0) - N \log a.$$

Pour observer le changement de régime, c'est-à-dire le point de transition obtenu pour $\varepsilon = \varepsilon_0$, il faut $\eta_0 > 0$, c'est-à-dire

$$(c_0 N_{disc})^{1/M} \leq a < (c_0 N_{disc})^{1/N}.$$

Finalement les comportements des courbes de structure d'ordre 1 et 2 sont très similaires : cela va aussi se produire pour les fonctions de bosses.

Pour terminer, on trace les courbes de structure d'ordre 2 pour l'exemple habituel (voir FIG. 5.3). Une fois de plus la courbe déterministe est indiscernable de la courbe aléatoire pour les petites valeurs de ε . On a

$$(c_0 N_{disc})^{1/M} = 1,3381 \quad \text{et} \quad (c_0 N_{disc})^{1/N} = 2,9808,$$

de sorte que le point de transition η_0 est observable, avec $\eta_0 = 2,1613$. A partir de ce point, l'approximation simplifiée est constante (égale à -0.3649), elle ne tient plus compte des oscillations.

5.5.3. Spectre de structure

Sans faire de démonstration, on peut remarquer graphiquement que les fonctions de Weierstrass satisfont «à peu près» la condition (5.10). On a tracé pour cela la gamme du spectre de structure d'ordre 1 pour $q \in \{0, 1, 2, 4, 10, \infty\}$ et W l'exemple usuel (voir FIG. 5.4). On constate effectivement que les courbes sont presque translatées les unes des autres. La fonction W est monofractale.

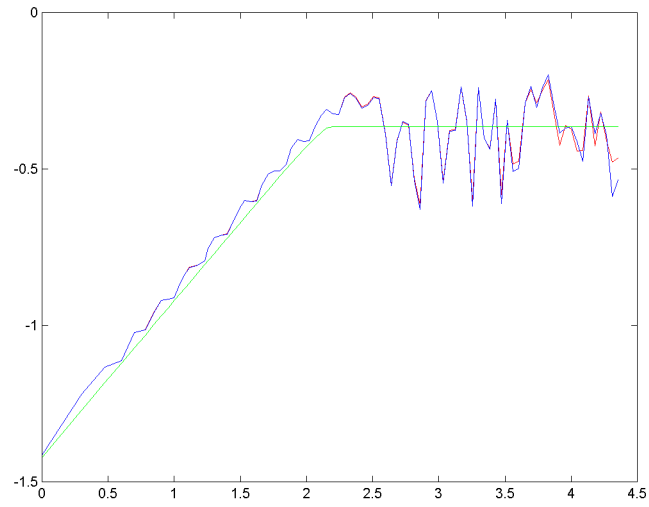


FIG. 5.3. Courbes de 2-structure d'ordre 2 pour une fonction de Weierstrass aléatoire. En rouge : une courbe aléatoire. En bleu : l'approximation déterministe. En vert : l'approximation déterministe simplifiée.

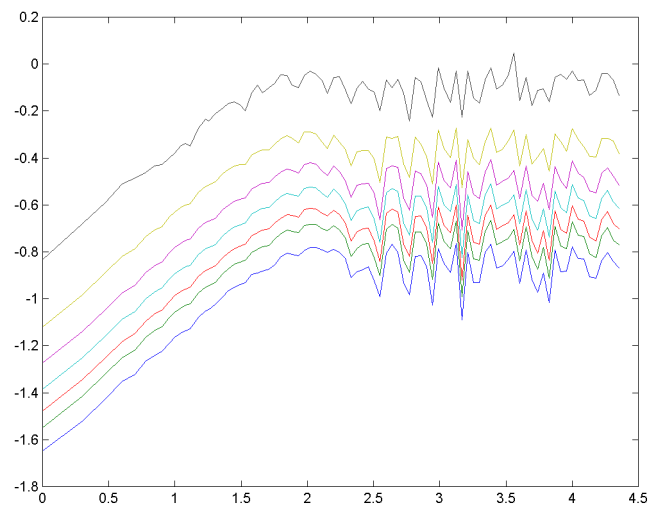


FIG. 5.4. Courbes de q -structure d'ordre 1 d'une fonction de Weierstrass aléatoire pour $q \in \{0, 0.5, 1, 2, 4, 10, \infty\}$ (de bas en haut)

Fonctions de bosses : courbes de structure

6.1. Fonctions de structure d'ordre 1

On consacre ce chapitre aux fonctions de bosses standards d'une variable définies par (1.7) avec $A = [0, 1]$:

$$\forall t \in [0, 1] \quad F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} g(n(t - X_n)).$$

De façon générale on suppose que la distribution commune ν des variables X_n admet une densité θ . On note dans la suite $a_n = n^{-\alpha}$ et $Y_n(t) = g(n(t - X_n))$, de sorte que F est de la forme (5.11). On peut donc reprendre les idées développées au chapitre précédent et en particulier la formule (5.12) page 106.

La détermination de $s_{1,2}^2$ est toutefois beaucoup plus délicate que pour les fonctions de Weierstrass. On pourra donner des résultats précis pour une large classe d'entre elles avec des hypothèses supplémentaires sur ν et g . Les différentes propriétés mises en évidence pour les courbes de structure seront utilisées au chapitre suivant pour l'estimation des différents paramètres de F .

Dans cette section, il faut étudier l'accroissement de g :

$$V_n(t, \varepsilon) = g(n(t + \varepsilon - X_n)) - g(n(t - \varepsilon - X_n)).$$

En général, ces variables ne sont pas centrées, donc d'après (5.12) :

$$(b-a) s_{1,2}^2(\varepsilon) = \sum_{n=N}^M a_n^2 \int_a^b \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) dt - \sum_{n=N}^M a_n^2 \int_a^b (\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)))^2 dt + \int_a^b \left(\sum_{n=N}^M a_n \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)) \right)^2 dt.$$

Il faut calculer $\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon))$ et $\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2)$. Puisque

$$\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)) = \mathbb{E}(Y_n(t + \varepsilon)) - \mathbb{E}(Y_n(t - \varepsilon)),$$

il suffit de calculer $\mathbb{E}(Y_n(t))$. On a facilement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y_n(t)) &= \int_{\mathbb{R}} g(n(t-x)) \theta(x) dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} g(u) \theta\left(t - \frac{u}{n}\right) du \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 g(u) \left(\theta\left(t + \frac{u}{n}\right) + \theta\left(t - \frac{u}{n}\right) \right) du. \end{aligned}$$

Introduisons maintenant la fonction

$$\varphi_{n,\varepsilon}(t) = |g(n(t + \varepsilon)) - g(n(t - \varepsilon))| .$$

Elle est paire, nulle en dehors de $[-\varepsilon - 1/n, \varepsilon + 1/n]$ et $V_n(t, \varepsilon)^2 = \varphi_{n,\varepsilon}^2(t - X_n)$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) &= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{n,\varepsilon}^2(t - u) \theta(u) du = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) \theta(t - v) dv \\ &= \int_{-\varepsilon - 1/n}^{\varepsilon + 1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) \theta(t - v) dv . \end{aligned}$$

Par parité, on a donc

$$\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) = \int_0^{\varepsilon + 1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) (\theta(t + v) + \theta(t - v)) dv .$$

Il est difficile de poursuivre ces calculs pour des densités quelconques. Nous allons nous limiter à une famille particulière, suffisamment riche pour les applications et pour laquelle les calculs sont possibles.

On suppose θ affine et à support $[-1, 2]$:

$$\theta(x) = (Ax + B) \mathbb{I}_{[-1, 2]}(x) \quad , \quad A, B \in \mathbb{R} .$$

Les paramètres A et B sont soumis aux contraintes suivantes :

- $B - A \geq 0$
- $B + 2A \geq 0$
- $B + A/2 = 1/3$.

Dans ces conditions, θ est bien une densité de probabilité et elle est régulière supérieurement (sur \mathbb{R}) et inférieurement sur $[-1, 2]$. Les hypothèses de régularité H_1, H_3, H_4 et H_6 sont toutes vérifiées. Notons aussi que ν est uniforme pour la seule valeur $A = 0$ et qu'alors $B = 1/3$.

Si $n \geq 1$ et $t, u \in [0, 1]$, alors $t + \frac{u}{n}, t - \frac{u}{n} \in [-1, 2]$, donc

$$f\left(t + \frac{u}{n}\right) + f\left(t - \frac{u}{n}\right) = 2At + 2B .$$

Par suite

$$\mathbb{E}(Y_n(t)) = \frac{2At + 2B}{n} \int_0^1 g(u) du$$

et

$$\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)) = \frac{4A}{n} \varepsilon \int_0^1 g(u) du .$$

Maintenant, si $n \geq 1$, $\varepsilon > 0$, $v \in [0, \varepsilon + 1/n]$ et $t \in [a, b] \subset [0, 1]$, alors il est légitime de considérer que $t + v, t - v \in [-1, 2]$ (c'est exact si $n \geq 2$ et $\varepsilon \leq 1/2$). Ainsi $f(t + v) + f(t - v) = 2At + 2B$ et

$$\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) = (2At + 2B) \int_0^{\varepsilon + 1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) dv .$$

Par suite

$$\int_a^b \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) dt = (b-a)(A(a+b) + 2B) \int_0^{\varepsilon+1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) dv.$$

Un simple changement de variable permet d'écrire

$$\int_0^{\varepsilon+1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) dv = \frac{1}{n} \int_{-n\varepsilon}^1 |g(u) - g(u + 2n\varepsilon)|^2 du.$$

On introduit alors la fonction χ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \chi(x) = \int_{-x}^1 |g(u) - g(u + 2x)|^2 du$$

de sorte que

$$\int_a^b \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) dt = (b-a)(A(a+b) + 2B) \frac{\chi(n\varepsilon)}{n}.$$

En regroupant tous les calculs, on arrive finalement à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad s_{1,2}^2(\varepsilon) &= (A(a+b) + 2B) \sum_{n=N}^M \frac{a_n^2}{n} \chi(n\varepsilon) \\ &+ 16A^2\varepsilon^2 \left(\int_0^1 g(u) du \right)^2 \left(\left(\sum_{n=N}^M \frac{a_n}{n} \right)^2 - \sum_{n=N}^M \left(\frac{a_n}{n} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

Cette fonction dépend de l'intervalle $[a, b]$ sauf pour $A = 0$, c'est-à-dire lorsque la distribution est uniforme sur $[-1, 2]$. Dans ce cas la formule précédente est nettement simplifiée, les variables $V_n(t, \varepsilon)$ étant centrées. Dans le cas contraire, $s_{1,2}$ ne dépend que de $a + b$. Dans toute la suite $[a, b] = [0, 1]$.

Finalement, il suffit de déterminer la fonction χ , qui ne dépend que de g . De façon générale, on ne dispose pas de beaucoup de renseignements sur cette fonction. Mentionnons toutefois le résultat suivant :

PROPOSITION 6.1.1. *Pour toute bosse élémentaire g :*

- i) χ est continue, positive et nulle en 0.*
- ii) χ est croissante sur $[0, 1]$ et constante sur $[1, +\infty[$:*

$$\forall x \geq 1 \quad \chi(x) = 2 \int_0^1 g^2(u) du.$$

- iii) Si $g \in \Lambda_\gamma(\mathbb{R})$ avec $\gamma > 1/2$, alors χ est dérivable en 0 et $\chi'(0) = 0$.*

Démonstration. *i)* Ce point est trivial. *ii)* Supposons $x \geq 1$. Alors pour tout u tel que $-x \leq u \leq 1$ on a $1 \leq x \leq u + 2x$. Puisque g a pour support $[-1, 1]$, $g(u + 2x) = 0$, si bien que

$$\chi(x) = \int_{-x}^1 |g(u)|^2 du.$$

Toujours à cause du support de g , comme $-x \leq -1$, il vient successivement

$$\chi(x) = \int_{-1}^1 |g(u)|^2 du = 2 \int_0^1 g^2(u) du$$

puisque g est positive et paire.

iii) Il existe donc $C > 0$ telle que pour tout $x \geq 0$ et tout $u \in [-x, 1]$ on ait $|g(u) - g(u + 2x)| \leq C|2x|^\gamma$. Par suite

$$\left| \frac{\chi(x)}{x} \right| \leq C' x^{2\gamma-1} (1+x).$$

Puisque $2\gamma > 1$, le terme de droite tend vers 0 quand $x \rightarrow 0$. Puisque $\chi(0) = 0$, c'est dire que χ est dérivable en 0 de nombre dérivé nul. \square

Il suffit donc de connaître la fonction χ sur l'intervalle $[0, 1]$. Toutefois il est difficile de la calculer explicitement. En annexe sont regroupées les fonctions χ correspondant aux principales familles de bosses élémentaires. On remarque qu'on obtient en fait des restrictions de χ à de sous-intervalles de $[0, 1]$. Il est possible d'expliciter ceci.

Si g est suffisamment régulière, au sens où il est possible de la développer en série sur une partition en sous-intervalles de $[0, 1]$, nous pourrions certainement en faire autant avec χ . Cela motive l'hypothèse H_S suivante :

On suppose qu'il existe une subdivision $\{e_i\}_{i=0}^K$ de $[0, 1]$ telle que :

- les nœuds e_i ne dépendent que de g
- pour tout $i \in \{0, \dots, K-1\}$ et pour tout $x \in [e_i, e_{i+1}]$,

$$\chi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{i,j} x^j,$$

les réels $\chi_{i,j}$ ne dépendant encore que de g .

Cette hypothèse sera toujours vérifiée avec les bosses élémentaires g que nous utiliserons. Elle est suffisamment générale pour qu'on se limite à ce cas. Remarquons toutefois que g doit être assez régulière, en particulier elle est lipschitzienne. On a ainsi, en vertu de la proposition 6.1.1 : $\chi(0) = \chi'(0) = 0$, donc $\chi_{0,0} = \chi_{0,1} = 0$.

Bien qu'inutile pour la programmation numérique de χ , on peut alors obtenir une expression plus précise de cette fonction. On suppose $N \leq e_1 M$. Cette condition est vérifiée dès que M est assez grand, en particulier dans le cadre théorique $M = \infty$. En pratique cette restriction est peu contraignante, la subdivision $\{e_i\}_{i=0}^K$ se réduisant souvent à quelques points avec e_1 assez grand.

Pour $i \in \{0, \dots, K-1\}$, on note $\chi^{(i)}$ la restriction de χ à l'intervalle $[e_i, e_{i+1}]$ et $\chi^{(K)}$ la restriction de χ à $[1, +\infty[$. Pour obtenir $s_{1,2}^2(\varepsilon)$, on calcule la somme

$$u(\varepsilon) := \sum_{n=N}^M \frac{a_n^2}{n} \chi(n\varepsilon)$$

en distinguant les cas de figure suivants :

- $\varepsilon \in \left[0, \frac{e_1}{M}\right] \iff N \leq M < \frac{e_1}{\varepsilon}$

$$u(\varepsilon) = \sum_{n=N}^M \frac{a_n^2}{n} \chi^{(0)}(n\varepsilon)$$
- $\varepsilon \in \left[\frac{e_k}{M}, \frac{e_{k+1}}{M}\right] \iff N \leq \frac{e_1}{\varepsilon} \leq \dots \leq \frac{e_k}{\varepsilon} \leq M < \frac{e_{k+1}}{\varepsilon}$

$$u(\varepsilon) = \sum_{n=N}^{\frac{e_1}{\varepsilon}} \frac{a_n^2}{n} \chi^{(0)}(n\varepsilon) + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{n=\frac{e_i}{\varepsilon}}^{\frac{e_{i+1}}{\varepsilon}} \frac{a_n^2}{n} \chi^{(i)}(n\varepsilon) + \sum_{n=\frac{e_k}{\varepsilon}}^M \frac{a_n^2}{n} \chi^{(k)}(n\varepsilon)$$
- $\varepsilon \in \left[\frac{1}{M}, \frac{e_1}{N}\right] \iff N \leq \frac{e_1}{\varepsilon} \leq \frac{e_2}{\varepsilon} \leq \dots \leq \frac{1}{\varepsilon} \leq M$

$$u(\varepsilon) = \sum_{n=N}^{\frac{e_1}{\varepsilon}} \frac{a_n^2}{n} \chi^{(0)}(n\varepsilon) + \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{n=\frac{e_i}{\varepsilon}}^{\frac{e_{i+1}}{\varepsilon}} \frac{a_n^2}{n} \chi^{(i)}(n\varepsilon) + \sum_{n=\frac{1}{\varepsilon}}^M \frac{a_n^2}{n} \chi^{(K)}(n\varepsilon)$$
- $\varepsilon \in \left[\frac{e_k}{N}, \frac{e_{k+1}}{N}\right] \iff \frac{e_k}{\varepsilon} \leq N \leq \frac{e_{k+1}}{\varepsilon} \leq \dots \leq \frac{1}{\varepsilon} \leq M$

$$u(\varepsilon) = \sum_{n=N}^{\frac{e_{k+1}}{\varepsilon}} \frac{a_n^2}{n} \chi^{(k)}(n\varepsilon) + \sum_{i=k+1}^{K-1} \sum_{n=\frac{e_i}{\varepsilon}}^{\frac{e_{i+1}}{\varepsilon}} \frac{a_n^2}{n} \chi^{(i)}(n\varepsilon) + \sum_{n=\frac{1}{\varepsilon}}^M \frac{a_n^2}{n} \chi^{(K)}(n\varepsilon)$$
- $\varepsilon \in \left[\frac{e_K}{N}, 1\right] \iff \frac{e_1}{\varepsilon} \leq \dots \leq \frac{1}{\varepsilon} \leq N \leq M$

$$u(\varepsilon) = \sum_{n=N}^M \frac{a_n^2}{n} \chi^{(K)}(n\varepsilon)$$

En remplaçant $\chi^{(i)}$ par son développement en série et en intervertissant les sommations, il reste à calculer des sommes du type $\sum_{n=p}^q a_n^2 n^i$ ($i \geq -1$). On les évalue avec l'approximation

$$\sum_{n=x}^y n^z \approx \int_x^y t^z dt = \frac{y^{z+1} - x^{z+1}}{z+1}$$

valable pour $x, y \in \mathbb{R}^+$ et $z \neq -1$. On peut finalement obtenir une expression théorique de $s_{1,2}^2(\varepsilon)$ beaucoup plus détaillée que (6.1). Nous ne la mentionnons pas par souci d'alléger le texte.

Pour θ quelconque, il est presque impossible de calculer $s_{1,2}^2$ comme précédemment. Nous présentons pour conclure un exemple qui, bien que simple, montre les problèmes qui se posent. On suppose que θ est «exponentielle» et à support $[-1, 2]$:

$$\theta(x) = (Ae^{Bx}) \mathbb{I}_{[-1,2]}(x) \quad , \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Pour que θ existe et satisfasse aux hypothèses de régularité, les paramètres A et B sont soumis aux contraintes suivantes :

- $A > 0$ et $B \neq 0$
- $A(e^{2B} - e^{-B}) = B$.

En procédant comme dans l'exemple précédent on obtient

$$\theta\left(t + \frac{u}{n}\right) + \theta\left(t - \frac{u}{n}\right) = 2A e^{Bt} \cosh\left(\frac{Bu}{n}\right),$$

puis

$$\mathbb{E}(Y_n(t)) = \frac{2A e^{Bt}}{n} \int_0^1 g(u) \cosh\left(\frac{Bu}{n}\right) du,$$

et donc

$$\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)) = \frac{4A e^{Bt}}{n} \sinh(\varepsilon) \int_0^1 g(u) \cosh\left(\frac{Bu}{n}\right) du.$$

On a ensuite $\theta(t+v) + \theta(t-v) = 2A e^{Bt} \cosh(Bv)$ et

$$\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) = 2A e^{Bt} \int_0^{\varepsilon+1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) \cosh(Bv) dv,$$

donc

$$\int_a^b \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) dt = \frac{2A}{B} (e^{bB} - e^{aB}) \int_0^{\varepsilon+1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) \cosh(Bv) dv.$$

Un changement de variable donne

$$\int_0^{\varepsilon+1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) \cosh(Bv) dv = \frac{1}{n} \int_{-n\varepsilon}^1 |g(u) - g(u + 2n\varepsilon)|^2 \cosh\left(B\left(\frac{u}{n} + \varepsilon\right)\right) du.$$

Ainsi, en introduisant les fonctions

$$\forall x \geq 0 \quad \chi_n(x) = \int_{-x}^1 |g(u) - g(u + 2x)|^2 \cosh\left(\frac{B}{n}(u + x)\right) du$$

on obtient

$$\int_0^{\varepsilon+1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) \cosh(Bv) dv = \frac{\chi_n(n\varepsilon)}{n}.$$

Finalement, en notant

$$u_n = \int_0^1 g(u) \cosh\left(\frac{Bu}{n}\right) du,$$

on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2(\varepsilon) &= \frac{2A e^{bB} - e^{aB}}{B} \frac{1}{b-a} \sum_{n=N}^M \frac{a_n^2}{n} \chi_n(n\varepsilon) \\ &\quad + \frac{8A^2 e^{2bB} - e^{2aB}}{B} \frac{1}{b-a} \sinh^2(\varepsilon) \left(\left(\sum_{n=N}^M \frac{u_n}{n^{\alpha+1}} \right)^2 - \sum_{n=N}^M \left(\frac{u_n}{n^{\alpha+1}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

On obtient une expression similaire à (6.1) mais cette fonction semble impossible à calculer explicitement pour g quelconque. La détermination de $\chi_n(x)$ et u_n est très difficile.

6.2. Analyse du diagramme logarithmique

Nous étudions maintenant plus précisément les courbes de 2-structure d'une fonction de bosses. Nous avons rappelé que, classiquement, seules les pentes en 0 de ces courbes retenaient l'attention pour évaluer la dimension fractale du graphe. Notre point de vue est nettement plus large. Nous souhaitons ici mettre en évidence des propriétés caractéristiques justifiant l'utilisation de ces diagrammes logarithmiques comme base pour construire des estimateurs des paramètres et comme critère d'identification d'un modèle. Nous analyserons successivement trois endroits caractéristiques des courbes :

- la pente et l'ordonnée à l'origine, pour $\varepsilon \in [D^{-1}, L]$,
- les transitions dans l'intervalle $[L, L']$,
- la valeur moyenne pour $\varepsilon \in [L', 1]$

où L et L' sont des réels à préciser.

6.2.1. Pente à l'origine

Nous allons ici déterminer les limites (5.13) à (5.15). Les résultats suivants sont vrais dans un cadre plus général mais pour des raisons de simplicité, nous supposons, en plus de l'hypothèse H_S , que ν est la loi uniforme sur $[-1, 2]$. Rappelons que la fonction de 2-structure d'ordre 1 déterministe de F est alors donnée par $s_{1,2}^2(\varepsilon) = (2/3)u(\varepsilon)$, où

$$u(\varepsilon) = \sum_{n=N}^M n^{-2\alpha-1} \chi(n\varepsilon) \quad (6.2)$$

se calcule *via* les formules page 119.

Commençons par fixer $M \geq 1$ et regardons le comportement de $\gamma.(D, M)$ lorsque $D \rightarrow +\infty$. L'hypothèse H_S faite sur χ oblige g à être lipschitzienne donc la série arrêtée F va être relativement régulière de sorte que, lorsque la discrétisation de la variable se fait de plus en plus fine, la pente en 0 de la courbe de structure doit tendre vers 1. Confirmons cette intuition :

PROPOSITION 6.2.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout $M \geq 1$:*

- i) $\lim_{D \rightarrow +\infty} \gamma_{th}(D, M) = 1.$*
- ii) $\lim_{D \rightarrow +\infty} \gamma_{ex}(D, M) = 1.$*

Démonstration. Compte tenu des différentes hypothèses et formules, on calcule (6.2) à l'aide du premier point de la page 119 et comme il est indiqué en bas de cette même page. On obtient, pour tout $\varepsilon \in [0, e_1 M^{-1}]$:

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) = \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_{0,j}}{j-2\alpha} \varepsilon^j (M^{j-2\alpha} - N^{j-2\alpha}).$$

Nous avons déjà remarqué que $\chi_{0,0} = \chi_{0,1} = 0$. On obtient donc

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) = \frac{2}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\chi_{0,j}}{j-2\alpha} \varepsilon^j (M^{j-2\alpha} - N^{j-2\alpha}) \quad (6.3)$$

et

$$\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} s_{1,2}^2(\varepsilon) = \frac{2}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j \chi_{0,j}}{j-2\alpha} \varepsilon^j (M^{j-2\alpha} - N^{j-2\alpha}).$$

i) Supposons D suffisamment grand pour que $M \leq e_1 D$. On peut utiliser les formules précédentes, ce qui donne

$$\gamma_{th}(D, M) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{j \chi_{0,j}}{j-2\alpha} D^{-j} (M^{j-2\alpha} - N^{j-2\alpha})}{\sum_{j=2}^{\infty} \frac{\chi_{0,j}}{j-2\alpha} D^{-j} (M^{j-2\alpha} - N^{j-2\alpha})}.$$

En isolant le premier terme de chaque de somme il vient

$$\gamma_{th}(D, M) = \frac{1}{2} \frac{\frac{2 \chi_{0,2} D^{-2}}{2(1-\alpha)} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{j \chi_{0,j}}{j-2\alpha} D^{-j} (M^{j-2\alpha} - N^{j-2\alpha})}{\frac{\chi_{0,2} D^{-2}}{2(1-\alpha)} + \sum_{j=3}^{\infty} \frac{\chi_{0,j}}{j-2\alpha} D^{-j} (M^{j-2\alpha} - N^{j-2\alpha})}.$$

On factorise numérateur et dénominateur par D^{-2} pour obtenir :

$$\gamma_{th}(D, M) = \frac{1}{2} \frac{\frac{2 \chi_{0,2}}{2(1-\alpha)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+2) \chi_{0,j+2}}{j+2-2\alpha} D^{-j} (M^{j+2-2\alpha} - N^{j+2-2\alpha})}{\frac{\chi_{0,2}}{2(1-\alpha)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_{0,j+2}}{j+2-2\alpha} D^{-j} (M^{j+2-2\alpha} - N^{j+2-2\alpha})}.$$

Ainsi

$$\lim_{D \rightarrow +\infty} \gamma_{th}(D, M) = \frac{1}{2} \frac{\frac{2 \chi_{0,2}}{2(1-\alpha)}}{\frac{\chi_{0,2}}{2(1-\alpha)}} = 1.$$

ii) La pente calculée s'écrit

$$\gamma_{ex}(D, M) = \log \left(\frac{s_{1,2}^2(2D^{-1})}{s_{1,2}^2(D^{-1})} \right) (2 \log 2)^{-1}.$$

On suppose encore D suffisamment grand pour que $2M \leq e_1 D$. On peut de nouveau utiliser les formules précédentes. En procédant comme pour *i)* on obtient

$$\frac{s_{1,2}^2(2D^{-1})}{s_{1,2}^2(D^{-1})} = \frac{\frac{4 \chi_{0,2}}{2(1-\alpha)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2^{j+2} \chi_{0,j+2}}{j+2-2\alpha} D^{-j} (M^{j+2-2\alpha} - N^{j+2-2\alpha})}{\frac{\chi_{0,2}}{2(1-\alpha)} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\chi_{0,j+2}}{j+2-2\alpha} D^{-j} (M^{j+2-2\alpha} - N^{j+2-2\alpha})}.$$

Donc

$$\lim_{D \rightarrow +\infty} \frac{s_{1,2}^2(2D^{-1})}{s_{1,2}^2(D^{-1})} = \frac{\frac{4 \chi_{0,2}}{2(1-\alpha)}}{\frac{\chi_{0,2}}{2(1-\alpha)}} = 4,$$

et finalement

$$\lim_{D \rightarrow +\infty} \gamma_{ex}(D, M) = (\log 4)(2 \log 2)^{-1} = 1.$$

□

Nous abordons maintenant le problème, plus intéressant, de fixer D et de laisser M tendre vers $+\infty$.

PROPOSITION 6.2.2. *Sous les hypothèses précédentes, pour tout $D \geq 1$, les pentes $\gamma_{th}(D, M)$ et $\gamma_{ex}(D, M)$ ne tendent pas vers α lorsque $M \rightarrow +\infty$.*

Démonstration. Nous allons calculer exactement la limite de la pente. On ne traite que le cas $\gamma_{th}(D, M)$. Supposons par commodité $M^{-1} \leq D^{-1} < 2D^{-1} \leq e_1 N^{-1}$. D'après les hypothèses, on peut expliciter $s_{1,2}^2(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \in [M^{-1}, e_1 N^{-1}]$. On calcule à nouveau (6.2) mais cette fois à l'aide de l'expression fournie par le troisième point de la page 119. On vérifie qu'il est possible d'écrire, pour de tels ε :

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) = C_1 \varepsilon^{2\alpha} + N^{-2\alpha} P(N\varepsilon) + \frac{C_2}{\alpha} (\varepsilon^{2\alpha} - M^{-2\alpha}) \quad (6.4)$$

avec $C_1, C_2 > 0$ et P une série entière de valuation $\text{val}(P) \geq 2$. Plus précisément :

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\chi_{i,j}}{j-2\alpha} (e_{i+1}^{j-2\alpha} - e_i^{j-2\alpha}) + \frac{2}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\chi_{0,j}}{j-2\alpha} e_1^{j-2\alpha} \\ C_2 &= \frac{2}{3} \int_0^1 g^2(t) dt \quad , \quad P(x) = -\frac{2}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\chi_{0,j}}{j-2\alpha} x^j. \end{aligned} \quad (6.5)$$

i) On a alors

$$\varepsilon \frac{d}{d\varepsilon} s_{1,2}^2(\varepsilon) = 2\alpha C_1 \varepsilon^{2\alpha} + N^{-2\alpha} \tilde{P}(N\varepsilon) + 2C_2 \varepsilon^{2\alpha}$$

où $\tilde{P}(x) = xP'(x)$ est de même valuation que P puisqu'en particulier $\text{val}(P) \geq 1$. Par suite, et par choix de D :

$$\gamma_{th}(D, M) = \frac{1}{2} \frac{2\alpha C_1 + D^{2\alpha} N^{-2\alpha} \tilde{P}(ND^{-1}) + 2C_2}{C_1 + D^{2\alpha} N^{-2\alpha} P(ND^{-1}) + C_2(1 - D^{2\alpha} M^{-2\alpha})/\alpha}$$

On a $\lim_{M \rightarrow +\infty} (1 - D^{2\alpha} M^{-2\alpha}) = 1$ d'où

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{th}(D, M) = \frac{1}{2} \frac{2\alpha C_1 + D^{2\alpha} N^{-2\alpha} \tilde{P}(ND^{-1}) + 2C_2}{C_1 + D^{2\alpha} N^{-2\alpha} P(ND^{-1}) + C_2/\alpha}$$

□

En pratique il peut être utile de lier M et D , par exemple en imposant $M = D$. Le résultat suivant est d'ailleurs vrai aussi avec $D = kM$, $k \geq 1$.

PROPOSITION 6.2.3. *Avec les notations précédentes :*

$$\begin{aligned} i) \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{th}(M, M) &= \alpha + \frac{C_2}{C_1}. \\ ii) \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{ex}(M, M) &= \alpha + \log \left(1 + \frac{C_2 (1 - 2^{-2\alpha})}{C_1 \alpha} \right) (2 \log 2)^{-1}. \end{aligned}$$

Démonstration. *i)* On peut reprendre le résultat précédent avec $D = M$, on obtient

$$\gamma_{th}(M, M) = \frac{1}{2} \frac{2\alpha C_1 + M^{2\alpha} N^{-2\alpha} \tilde{P}(NM^{-1}) + 2C_2}{C_1 + M^{2\alpha} N^{-2\alpha} P(NM^{-1})}.$$

Étant données les valuations de P et \tilde{P} on a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} M^{2\alpha} N^{-2\alpha} \tilde{P}(NM^{-1}) = \lim_{M \rightarrow +\infty} M^{2\alpha} N^{-2\alpha} P(NM^{-1}) = 0.$$

Donc

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{th}(M, M) = \frac{1}{2} \frac{2\alpha C_1 + 2C_2}{C_1} = \alpha + \frac{C_2}{C_1}.$$

ii) La pente calculée s'écrit

$$\gamma_{ex}(M, M) = \log \left(\frac{s_{1,2}^2(2M^{-1})}{s_{1,2}^2(M^{-1})} \right) (2 \log 2)^{-1}.$$

On a

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2(2M^{-1}) &= M^{-2\alpha} (C_1 2^{2\alpha} + M^{2\alpha} N^{-2\alpha} P(2NM^{-1}) + \frac{C_2}{\alpha} (2^{2\alpha} - 1)) \\ s_{1,2}^2(M^{-1}) &= M^{-2\alpha} (C_1 + M^{2\alpha} N^{-2\alpha} P(NM^{-1})). \end{aligned}$$

Puisque $\text{val}(P) \geq 2$ alors, comme $2\alpha - 2 < 0$,

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{s_{1,2}^2(2M^{-1})}{s_{1,2}^2(M^{-1})} = \frac{C_1 2^{2\alpha} + \frac{C_2}{\alpha} (2^{2\alpha} - 1)}{C_1} = 2^{2\alpha} \left(1 + \frac{C_2(1 - 2^{-2\alpha})}{\alpha C_1} \right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} \gamma_{ex}(M, M) &= \log \left(2^{2\alpha} \left(1 + \frac{C_2(1 - 2^{-2\alpha})}{\alpha C_1} \right) \right) (2 \log 2)^{-1} \\ &= \alpha + \log \left(1 + \frac{C_2(1 - 2^{-2\alpha})}{\alpha C_1} \right) (2 \log 2)^{-1}. \end{aligned}$$

□

On voit ainsi que le comportement de la pente en 0 de la courbe de structure est assez complexe. Sa valeur dépend des discrétisations choisies et de toute façon, il y a un biais systématique : en pratique on n'estime pas α . La pente théorique est toujours supérieure à α puisque les quantités C_1 et C_2 sont toujours positives. Ce n'est pas le seul problème. Les formules précédentes sont valables à la limite. Un calculateur ne fournira pas ces résultats. Même si M est assez grand ($\simeq 10000$), si $\alpha > 1/2$, le terme $M^{2\alpha-2}$ n'est plus réellement négligeable. Notons a_2 le coefficient de x^2 dans $P(x)$. En reprenant les démonstrations précédentes il est facile de montrer que la pente effectivement fournie par un ordinateur est :

$$\gamma_{ex}(M, M) = \alpha + \log \left(\frac{C_1 + a_2 \left(\frac{M}{2N} \right)^{2\alpha-2} + \frac{C_2}{\alpha} (1 - 2^{-2\alpha})}{C_1 + a_2 \left(\frac{M}{N} \right)^{2\alpha-2}} \right) (2 \log 2)^{-1}. \quad (6.6)$$

Notons que pour $N = 1$ et $M = \infty$, l'hypothèse H_S entraîne formellement

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) \simeq \varepsilon^{2\alpha} + P(\varepsilon).$$

Puisque $\text{val}(P) \geq 2$, nous retrouvons le résultat théorique

$$s_{1,2}(\varepsilon) \simeq \varepsilon^\alpha.$$

Nous obtenons ainsi un modèle simple où l'évaluation de la dimension fractale du graphe à partir de la pente en 0 du diagramme logarithmique n'est pas justifiée. En fait, il y a dans tous les cas un biais systématique qui dépend de α . Il est clair que de tels biais ne permettent pas d'exprimer α en fonction des pentes expérimentales. Même si tous les paramètres de F (excepté α) sont connus, la formule 6.6 est peu maniable. On ne peut donc pas obtenir α à partir de la pente en 0 du diagramme logarithmique.

6.2.2. Ordonnée à l'origine

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent. Rappelons que les courbes de q -structure expérimentales sont telles que la première valeur discrète est $\eta_1 = 0$. Il n'y a donc pas à ce niveau de différence avec la valeur théorique $\eta = 0$. Ainsi, l'ordonnée à l'origine de la courbe de q -structure d'ordre i s'écrit

$$\Omega_{i,q} = T_{i,q}(0) = \log S_{i,q}(D^{-1}) = \frac{1}{q} \log S_{i,q}^q(D^{-1}).$$

Pour la version déterministe, on a

$$\omega_{i,q} = \log s_{i,q}(D^{-1}) = \frac{1}{q} \log s_{i,q}^q(D^{-1}).$$

Nous allons étudier rapidement le comportement de $\omega_{1,2}$ en fonction de D et M . On ne recherche pas vraiment une limite théorique remarquable comme pour les pentes (quoique), mais plutôt une expression approchée de la valeur calculée. Notons que ces résultats serviront par la suite à l'estimation des paramètres (cf. chapitre 7).

Les formules et les résultats sont très proches de ceux mis en évidence pour les pentes expérimentales en 0, du fait de la discrétisation de ces dernières par la corde entre les deux premiers points. Il suffit de calculer $s_{1,2}^2(D^{-1})$. Par hypothèses, les formules (6.3) et (6.4) sont valides :

– si $M \leq e_1 D (\leq D)$, alors

$$s_{1,2}^2(D^{-1}) = \frac{2}{3} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\chi_{0,j}}{j-2\alpha} D^{-j} (M^{j-2\alpha} - N^{j-2\alpha}), \quad (6.7)$$

– si $N e_1^{-1} \leq D \leq M$, alors

$$s_{1,2}^2(D^{-1}) = C_1 D^{-2\alpha} + N^{-2\alpha} P(ND^{-1}) + \frac{C_2}{\alpha} (D^{-2\alpha} - M^{-2\alpha}), \quad (6.8)$$

où C_i et P sont définis par (6.5).

Si $D = M$, on a

$$s_{1,2}^2(D^{-1}) \approx M^{-2\alpha} \left(C_1 + a_2 \left(\frac{M}{N} \right)^{2\alpha-2} \right),$$

où a_2 dénote toujours le coefficient de x^2 dans P . Si α est suffisamment petit, on peut négliger le second facteur dans la parenthèse. Cela conduit à

$$\omega_{1,2} \approx -\alpha \log M + \frac{1}{2} \log C_1.$$

Mais dans tous les cas, ces expressions sont difficiles à exploiter.

6.2.3. Crossovers

On suppose ici que θ est affine et que χ satisfait H_S . Nous avons vu qu'alors nous obtenions en fait les restrictions de $s_{1,2}^2$ à la partition de $[0, 1]$ définies par les intervalles $[0, e_1 M^{-1}]$, \dots , $[e_i M^{-1}, e_{i+1} M^{-1}]$, \dots , $[e_K M^{-1}, e_1 N^{-1}]$, \dots , $[e_i N^{-1}, e_{i+1} N^{-1}]$, \dots , $[e_K N^{-1}, 1]$ où

$$0 = e_0 < e_1 < e_i < e_{i+1} < \dots < e_K = 1 ,$$

est une subdivision de $[0, 1]$. Les nœuds e_i induisent donc des changements de comportement pour $s_{1,2}^2$. Ils se traduisent encore par des transitions sur la courbe de structure. De tels points sont appelés *crossovers*. Ils sont de deux types :

- les crossovers *inférieurs* définis par

$$\forall i \in \{1, \dots, K\} \quad \eta_i = \log \left(\frac{e_i D}{M} \right) ,$$

- les crossovers *supérieurs* définis par

$$\forall i \in \{1, \dots, K\} \quad \eta_i = \log \left(\frac{e_i D}{N} \right) .$$

Tous ne sont pas toujours observables. Les crossovers inférieurs (*resp.* supérieurs) sont présents sur le diagramme logarithmique si et seulement si $e_i M^{-1} > D^{-1}$ (*resp.* $e_i N^{-1} > D^{-1}$). La borne M étant *a priori* grande, on ne verra généralement pas les crossovers inférieurs. Toutefois, D étant lui aussi suffisamment grand, puisque $K \geq 1$, deux points particuliers retiennent notre attention, à savoir ceux obtenus pour $e_K = 1$. Nous les appellerons *crossovers fondamentaux*, et noterons :

$$\eta_1^- = \log \left(\frac{D}{M} \right) \quad \eta_1^+ = \log \left(\frac{D}{N} \right) .$$

Le dernier point est particulièrement intéressant : il sera presque toujours observable et il correspond à la transition la plus remarquable sur la courbe de structure. Nous verrons plus en détail son rôle au paragraphe suivant. Remarquons que pour les fonctions de Weierstrass, un tel point de cassure peut être observé sur les courbes de structure déterministes approchées.

Lorsque d'autres crossovers existent, ils correspondent à des changements de comportements de la bosse élémentaire g . Ainsi, lorsque g est développable en série entière sur des intervalles $]x_i, x_{i+1}[\subset]-1, 1[$, les points x_i vont entraîner l'existence de crossovers. Cela peut être très intéressant pour comprendre la géométrie de g , par exemple lorsque x_i traduit un changement de régularité. C'est ce qu'on peut observer avec les bosses trapèze.

6.2.4. Palier

Nous arrivons à un point essentiel dans l'analyse de $S_{1,2}$: son comportement pour les grandes valeurs de ε . Pour la fonction de Weierstrass, nous avons montré qu'il était possible d'approcher $s_{1,2}^2$ par une fonction constante pour $\varepsilon \rightarrow 1$ ce qui se traduisait par un plateau sur la courbe de structure. Pour les fonctions de bosses, cela va également être possible et l'erreur commise sera moindre.

Densité uniforme

On suppose ici $A = 0$ et $B = 1/3$. Quelle que soit g , en particulier sans l'hypothèse H_S , la fonction χ est constante sur $[1, +\infty[$. Cela entraîne l'existence de η_1^+ . On note $t_{i,q}$ l'approximation déterministe de $T_{i,q}$ déduite de $s_{i,q}$:

$$t_{i,q} = \frac{1}{q} \log s_{i,q}^q.$$

PROPOSITION 6.2.4. *La fonction $t_{1,2}$ est constante sur l'intervalle $[\eta_1^+, \eta_{max}]$ et vaut $\pi_{1,2}$, avec $\eta_1^+ = \log(DN^{-1})$, $\eta_{max} = \log(D)$ et*

$$\pi_{1,2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{4}{3} \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \right) \left(\int_0^1 g^2(u) du \right) \right). \quad (6.9)$$

Démonstration. Soit $\eta \in [\eta_1^+, \eta_{max}]$. Alors $\eta = \log(D\varepsilon)$ avec $\varepsilon \in [N^{-1}, 1]$. Pour de tels ε nous avons

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) = \frac{2}{3} \sum_{n=N}^M \frac{\chi^{(K)}(n\varepsilon)}{n^{2\alpha+1}}.$$

Mais pour tout $x \geq 1$

$$\chi^{(K)}(x) = 2 \int_0^1 g^2(u) du,$$

donc, puisque $n\varepsilon \geq 1$:

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) = \frac{4}{3} \left(\int_0^1 g^2(u) du \right) \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \right).$$

D'où le résultat en revenant à $t_{1,2}$. \square

Ainsi, à partir du crossover fondamental la courbe de structure déterministe est horizontale : nous observons un *palier*. Cette propriété caractéristique sera à la base de la construction d'estimateurs pour les paramètres du modèle. Notons que si $N = 1$ le palier n'est pas observable (il est réduit à un point) puisqu'alors $\eta_1^+ = \eta_{max}$.

On peut se demander ce qu'il advient pour $s_{1,q}^q$, q quelconque. Le problème est qu'il est presque impossible de déterminer une approximation déterministe de $s_{1,q}^q$ pour $q > 2$. Toutefois, expérimentalement, les courbes de q -structure paraissent toutes parallèles entre elles. Aussi, heuristiquement, on doit observer un palier pour chacune d'elle. Nous allons préciser ce fait pour $q = 4$.

Par choix de ν , les variables $V_n(t, \varepsilon)$ sont indépendantes et centrées. En procédant de la même manière qu'à la section 6.1, on montre que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad s_{1,4}^4(\varepsilon) = \frac{2}{3} \sum_{n=N}^M \frac{a_n^4}{n} \chi_4(n\varepsilon) + \frac{4}{9} \sum_{\substack{n,m=N \\ n \neq m}}^M \frac{(a_n a_m)^2}{nm} \chi_2(n\varepsilon) \chi_2(m\varepsilon),$$

où, pour $q > 0$:

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \chi_q(x) = \int_{-x}^1 |g(u) - g(u+2x)|^q du.$$

Pour $x \geq 1$, on a toujours

$$\chi_q(x) = 2 \int_0^1 g^q(u) du,$$

ainsi, pour tout $\varepsilon \in [N^{-1}, 1]$:

$$s_{1,4}^4(\varepsilon) = \frac{4}{3} \left(\int_0^1 g^4(u) du \right) \sum_{\substack{n=N \\ n \neq m}}^M \frac{1}{n^{4\alpha+1}} + \frac{16}{9} \left(\int_0^1 g^2(u) du \right)^2 \sum_{\substack{n,m=N \\ n \neq m}}^M \frac{1}{(nm)^{2\alpha+1}}.$$

On écrit alors

$$\sum_{\substack{n,m=N \\ n \neq m}}^M \frac{1}{(nm)^{2\alpha+1}} = \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \right)^2 - \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{4\alpha+2}}$$

pour obtenir une expression définitive de $s_{1,4}^4(\varepsilon)$. On obtient finalement, sur la courbe de 4-structure, un palier sur $[\eta_1^+, \eta_{max}]$ valant

$$\pi_{1,4} = \frac{1}{4} \log s_{1,4}^4(1).$$

Cette valeur est toutefois moins simple que celle trouvée pour $\pi_{1,2}$ et de fait, moins utilisable.

Si on choisit une autre densité ν , le résultat précédent est faux : $s_{1,2}^2(\varepsilon)$ n'est plus constante pour les grandes valeurs de ε . Toutefois, contrairement à la fonction de Weierstrass, on constate toujours de faibles variations. Cela peut nous inciter à considérer, en pratique, que l'on a toujours un palier caractéristique. Pour cette approximation, on va remplacer les fonctions de ε présentes par leur moyenne sur l'intervalle en question. Les paragraphes suivants présentent deux exemples.

Densité affine

On a dans ce cas, pour tout $\varepsilon \in [N^{-1}, 1]$:

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) = (A + 2B) \sum_{n=N}^M \frac{\chi^K(n\varepsilon)}{n^{2\alpha+1}} + 16A^2 \left(\int_0^1 g(u) du \right)^2 \left(\left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right)^2 - \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+2}} \right) \varepsilon^2.$$

On remplace ε^2 par sa valeur moyenne sur $[N^{-1}, 1]$:

$$\frac{1}{1 - N^{-1}} \int_{N^{-1}}^1 \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} \right) \approx \frac{1}{3}.$$

On retient donc l'approximation

$$s_{1,2}^2(\varepsilon) = (2A + 4B) \left(\int_0^1 g^2(u) du \right) \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \right) + \frac{16}{3} A^2 \left(\int_0^1 g(u) du \right)^2 \left(\left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right)^2 - \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+2}} \right)$$

pour obtenir, sur $\eta \in [\eta_1^+, \eta_{max}]$, un palier approché égal à

$$\pi_{1,2} = \frac{1}{2} \log s_{1,2}^2(1).$$

Densité exponentielle

Il faut calculer $s_{1,2}^2(\varepsilon)$: nous ne le faisons que pour ε grand. On peut remarquer que, comme pour la fonction χ , on a des simplifications pour $x \geq 1$:

$$\chi_n(x) = 2 \cosh\left(\frac{Bx}{n}\right) \int_0^1 g(u)^2 \cosh\left(\frac{Bu}{n}\right) du.$$

Supposons $\varepsilon \in [N^{-1}, 1]$. On a alors

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2(\varepsilon) &= \frac{4A}{B} (e^B - 1) \cosh(B\varepsilon) \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \int_0^1 g(u)^2 \cosh\left(\frac{Bu}{n}\right) du \\ &\quad + \frac{8A^2}{B} (e^{2B} - 1) \sinh^2(\varepsilon) \left(\left(\sum_{n=N}^M \frac{u_n}{n^{\alpha+1}} \right)^2 - \sum_{n=N}^M \left(\frac{u_n}{n^{\alpha+1}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

On remplace \cosh et \sinh^2 par leur valeur moyenne sur $[N^{-1}, 1]$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - N^{-1}} \int_{N^{-1}}^1 \cosh(B\varepsilon) d\varepsilon &= \frac{\sinh(B) - \sinh(BN^{-1})}{B(1 - N^{-1})} \approx \frac{\sinh(B)}{B} \\ \frac{1}{1 - N^{-1}} \int_{N^{-1}}^1 \sinh^2(\varepsilon) d\varepsilon &\approx \frac{\sinh(2) - 2}{4}. \end{aligned}$$

Ensuite, si N est assez grand, on approche $\cosh(Bu/n)$ par 1 pour finalement conserver :

$$\begin{aligned} s_{1,2}^2(\varepsilon) &= \frac{4A}{B^2} (e^B - 1) \sinh(B) \left(\int_0^1 g^2(u) du \right) \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \right) \\ &\quad + \frac{2A^2}{B} (e^{2B} - 1) (\sinh(2) - 2) \left(\int_0^1 g(u) du \right)^2 \left(\left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right)^2 - \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+2}} \right). \end{aligned}$$

Pour $\eta \in [\eta_1^+, \eta_{max}]$, on obtient donc le palier $\pi_{1,2}$ correspondant. On notera la similitude avec les densités affines, en particulier l'existence du même crossover fondamental η_1^+ .

Même si ν est affine, on observe un vrai palier uniquement pour ν uniforme. Pour cela, il est en effet nécessaire que l'accroissement de F soit centré. Pour contourner ce problème, on dispose de deux méthodes :

- une méthode douce : modifier la fonction de structure pour travailler avec autre chose que l'accroissement de F ,
- une méthode forte : modifier la définition de F pour obliger ses accroissements à être centrés.

La section suivante présente la première méthode ; la seconde sera vue après.

6.3. Fonctions de structure d'ordre 2

Nous allons donner une formule pour $s_{2,2}^2$ et analyser rapidement la courbe de structure correspondante. Nous verrons que les calculs sont plus difficiles à mener à bien mais qu'un point remarquable justifie l'utilisation de la courbe de 2-structure en pratique. Fort du travail déjà fait, nous nous contenterons de mettre en évidence les points particulièrement importants. Commençons par une formule générale.

6.3.1. Fonction de structure déterministe

Il faut étudier l'accroissement élémentaire d'ordre 2 de g :

$$V_n(t, \varepsilon) = g(n(t + \varepsilon - X_n)) + g(n(t - \varepsilon - X_n)) - 2g(n(t - X_n)).$$

Il faut calculer $\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon))$ et $\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2)$. Nous allons nous limiter au cas usuel où θ est affine et à support $[-1, 2]$. On a alors le fait suivant :

LEMME 6.3.1. *Quelque soient les paramètres A et B , pour tout $n \geq 1$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \in [0, 1]$, les variables $V_n(t, \varepsilon)$ sont centrées.*

Démonstration. On a déjà obtenu

$$\mathbb{E}(Y_n(t)) = \frac{2At + 2B}{n} \int_0^1 g(u) du.$$

On a $\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)) = \mathbb{E}(Y_n(t + \varepsilon)) + \mathbb{E}(Y_n(t - \varepsilon)) - 2\mathbb{E}(Y_n(t))$ ce qui permet de vérifier que $\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)) = 0$. \square

Contrairement à la fonction de structure $s_{1,2}^2$, on a donc une formule toujours simplifiée, même si $A \neq 0$. C'est la méthode douce dont nous parlions. En fait, c'est l'une des raisons majeure qui nous a conduit à introduire et utiliser les fonctions de structure d'ordre 2. On a

$$s_{2,2}^2(\varepsilon) = \sum_{n=N}^M a_n^2 \int_0^1 \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) dt.$$

Il reste donc à calculer $\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2)$. Pour cela introduisons la fonction

$$\varphi_{n,\varepsilon}(t) = |g(n(t + \varepsilon)) + g(n(t - \varepsilon)) - 2g(nt)|.$$

Elle est paire, nulle en dehors de $[-\varepsilon - 1/n, \varepsilon + 1/n]$ et $V_n(t, \varepsilon)^2 = \varphi_{n,\varepsilon}^2(t - X_n)$. On peut procéder exactement comme à la section 6.1. On obtient

$$\mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) = (2At + 2B) \int_0^{\varepsilon+1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) dv$$

et donc

$$\int_a^b \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) dt = (b - a)(A(a + b) + 2B) \int_0^{\varepsilon+1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) dv.$$

Un simple changement de variable permet d'écrire

$$\int_0^{\varepsilon+1/n} \varphi_{n,\varepsilon}^2(v) dv = \frac{1}{n} \int_{-n\varepsilon}^1 |g(u) + g(u + 2n\varepsilon) - 2g(u + n\varepsilon)|^2 du.$$

On introduit alors la fonction $\tilde{\chi}$ définie par

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \tilde{\chi}(x) = \int_{-x}^1 |g(u) + g(u + 2x) - 2g(u + x)|^2 du$$

de sorte que

$$\int_a^b \mathbb{E}(V_n(t, \varepsilon)^2) dt = (b - a)(A(a + b) + 2B) \frac{\tilde{\chi}(n\varepsilon)}{n}.$$

En regroupant tous les calculs, on arrive finalement à l'expression suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad s_{2,2}^2(\varepsilon) = (A(a + b) + 2B) \sum_{n=N}^M \frac{a_n^2}{n} \tilde{\chi}(n\varepsilon). \quad (6.10)$$

Encore une fois, cette fonction dépend de l'intervalle $[a, b]$ sauf pour $A = 0$, c'est-à-dire lorsque la distribution est uniforme sur $[-1, 2]$. Mais dans tous les cas, son expression est très simple (comparer avec (6.1) page 117). Dans toute la suite $[a, b] = [0, 1]$.

Finalement, il suffit de déterminer la fonction $\tilde{\chi}$, qui ne dépend que de g . C'est ici que les calculs explicites deviennent pénibles. S'il est déjà difficile de déterminer la fonction χ , il est presque impossible de le faire pour $\tilde{\chi}$. Mentionnons toutefois le résultat général suivant :

LEMME 6.3.2. *Pour toute bosse élémentaire g , $\tilde{\chi}$ est constante sur $[2, +\infty[$ et*

$$\forall x \geq 2 \quad \tilde{\chi}(x) = 6 \int_0^1 g^2(v) dv.$$

Démonstration. Supposons $x \geq 2$. Alors pour tout u tel que $-x \leq u \leq 1$ on a $1 \leq x \leq u + 2x$. Puisque g a pour support $[-1, 1]$, $g(u + 2x) = 0$ et on obtient successivement, en utilisant cet argument :

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(x) &= \int_{-x}^1 |g(u) - 2g(u + x)|^2 du \\ &= \int_{-x}^{-1} |g(u) - 2g(u + x)|^2 du + \int_{-1}^1 |g(u) - 2g(u + x)|^2 du \\ &= 4 \int_{-x}^{-1} |g(u + x)|^2 du + \int_{-1}^1 |g(u)|^2 du = 6 \int_0^1 g^2(v) dv. \end{aligned}$$

□

Il suffit donc de connaître la fonction $\tilde{\chi}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Sous l'hypothèse H_S , on peut suivre exactement la même démarche pour étudier $s_{2,2}^2$ et $s_{1,2}^2$. Il n'est pas nécessaire de détailler ce point.

6.3.2. Courbe de structure d'ordre 2

La courbe de structure obtenue à partir de $s_{2,2}^2$ possède les mêmes caractéristiques que celle déduite de $s_{1,2}^2$. Précisons les points importants. On suppose toujours que ν admet une densité affine.

6.3.2.1. Pentas et ordonnées à l'origine

Une fois de plus, les pentes $\gamma_{th}(D, M)$ et $\gamma_{ex}(D, M)$ ne tendent pas vers α lorsque $M \rightarrow +\infty$. On peut déterminer leur expression précise sous l'hypothèse H_S , mais elle est encore moins maniable ! De même, les expressions de $\omega_{2,2}$ sont en pratique inutilisables.

6.3.2.2. Crossover fondamental

Des crossovers sont également observables sur le diagramme logarithmique d'ordre 2. En particulier le fait que, quelle que soit g , la fonction $\tilde{\chi}$ soit constante sur $[2, +\infty[$, entraîne l'existence du crossover fondamental η_2^+ . Il correspond à l'abscisse

$$\eta_2^+ = \log \left(\frac{2D}{N} \right).$$

De même, on a le point inférieur

$$\eta_2^- = \log \left(\frac{2D}{M} \right).$$

6.3.2.3. Palier

On démontre de manière analogue à la proposition 6.2.4 le résultat suivant :

PROPOSITION 6.3.3. *La fonction $t_{2,2}$ est constante sur l'intervalle $[\eta_2^+, \eta_{max}]$ et vaut $\pi_{2,2}$, avec $\eta_2^+ = \log(2DN^{-1})$, $\eta_{max} = \log(D)$ et*

$$\pi_{2,2} = \frac{1}{2} \log \left(6(A + 2B) \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \right) \left(\int_0^1 g^2(u) du \right) \right). \quad (6.11)$$

Ainsi, à partir du crossover fondamental la courbe de structure déterministe est horizontale : nous observons à nouveau un palier. Cette propriété caractéristique servira elle aussi à la construction d'estimateurs pour les paramètres du modèle. Cette nouvelle courbe de structure présente ainsi un grand avantage : elle possède un palier même si ν n'est pas uniforme.

Lorsque ν est uniforme, on obtient

$$\pi_{2,2} = \frac{1}{2} \log \left(4 \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \right) \left(\int_0^1 g^2(u) du \right) \right).$$

On a donc la relation

$$\pi_{2,2} - \pi_{1,2} = \frac{\log 3}{2} \quad (6.12)$$

Notons que si $N \leq 2$ le palier n'est pas observable puisqu'alors $\eta_2^+ = \eta_{max}$.

6.4. Paramètres optionnels

Nous l'avons dit, le modèle standard est suffisamment riche pour les applications. On peut toutefois lui reprocher des lacunes. Une particulièrement gênante est la positivité de F . Nous verrons au chapitre 8 comment tenir compte de ce problème. Au delà d'une difficulté technique, on peut penser qu'il est nécessaire de disposer d'un modèle signé. La façon la plus naturelle de modifier en conséquence la série F est de rendre les amplitudes aléatoires. Ceci est en dehors du cadre de cet ouvrage, mais beaucoup des résultats précédents restent vrais avec ce modèle plus général.

Un autre problème de réalisme est l'influence des premières bosses dont le support trop large donne une apparence artificielle au graphe. En tronquant la série à partir de N_0 pour N_0 suffisamment grand on évite ce phénomène. Une autre manière de procéder est de considérer une bosse g de support inclus dans $[-1, 1]$ assez petit.

Ces modifications ne changent pas les résultats théoriques, notamment la dimension fractale du graphe qui est toujours essentiellement contrôlée par α . Elles ont par contre des répercussions sur les diagrammes logarithmiques, notamment sur les paliers, mais il est possible de les contrôler. Explicitons ces modifications sur les courbes de structure. On note toujours F la fonction de bosses usuelle donnée par (1.7) page 35 et \tilde{F} la même fonction, seulement modifiée par l'ajout du paramètre optionnel supplémentaire considéré. Ainsi, dans ce qui suit :

Les quantités tildées (resp. non tildées) sont relatives à la série \tilde{F} (resp. F).

6.4.1. Constante d'ajustement

En pratique, pour des problèmes d'échelle, on doit pouvoir considérer la fonction homothétique $\tilde{F} = C \cdot F$, ($C > 0$). Une telle opération a pour seul effet de translater les courbes de structure de F . En effet, on a immédiatement le résultat général suivant :

LEMME 6.4.1. *Soit $q > 0$. Pour tout $C, C' \in \mathbb{R}$, on a l'égalité suivante entre opérateurs :*

$$S_{i,q}(Cf + C') = |C| S_{i,q}(f) \quad (i \in \{1, 2\}).$$

On peut avec ce lemme passer facilement des courbes de structure de f à sa transformée $C \cdot f + C'$. Cette relation d'homogénéité est encore un avantage des fonctions de structure.

L'approximation déterministe $\tilde{s}_{i,2}^2$ des fonctions de structure s'écrit donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \tilde{s}_{i,2}^2(\varepsilon) = |C|^2 s_{i,2}^2(\varepsilon).$$

En passant au logarithme, on a ainsi

$$\forall \eta > 0 \quad \tilde{t}_{i,2}(\eta) = \frac{1}{2} \log \tilde{s}_{i,2}^2(\varepsilon) = t_{i,2}(\eta) + \log |C| ,$$

de sorte que les courbes associées se déduisent par translation de vecteur $\log |C|$. Ainsi, ni la pente en 0, ni les crossovers ne sont affectés. Les paliers sont toujours présents mais ont une nouvelle valeur $\tilde{\pi}_{i,q}$ donnée par

$$\tilde{\pi}_{i,q} = \pi_{i,q} + \log |C| . \quad (6.13)$$

6.4.2. Réduction du support

Par définition, g a pour support $[-1, 1]$. Si la distribution des X_n a été choisie pour éviter des problèmes de bord, il est facile de voir que le point essentiel est $g(t) = 0$ pour $|t| \geq 1$. Ainsi, les résultats déjà établis demeurent sous l'hypothèse g nulle sur $[1, +\infty[$, sans précision du support. Sous cette condition, comme g est paire et décroissante sur \mathbb{R}^+ , son support est un intervalle compact centré en 0 et inclus dans $[-1, 1]$. On introduit alors un nouveau paramètre $S \in]0, 1]$ défini par

$$\text{Supp}(g) = [-S, S] \subset [-1, 1].$$

On a encore

$$S = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ : g(t) \neq 0\} = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ : g(t) = 0\}.$$

Les courbes de structure sont assez sensibles à ce nouveau paramètre. On suppose dans la suite que ν possède une densité affine et on s'intéresse uniquement à $S_{1,2}$. On note g_S la nouvelle bosse élémentaire. On a ainsi $g_S(t) = g(S^{-1}t)$ et on étudie

$$\tilde{F}(t) = \sum_{n=N}^M n^{-\alpha} g_S(n(t - X_n)).$$

Les crossovers et le palier sont encore présents, mais avec de nouvelles valeurs. Les considérations de support et de parité de la section 6.1 sont toujours vraies. Le seul changement dans ces formules va provenir de χ , où seule g intervient, et de l'intégrale de g^2 . On doit donc déterminer une nouvelle fonction χ_S en posant

$$\forall x \geq 0 \quad \chi_S(x) = \int_{-x}^1 |g_S(u) - g_S(u + 2x)|^2 du.$$

On peut exprimer cette fonction en fonction de $\chi = \chi_1$ (associée à F) :

LEMME 6.4.2. *Pour toute bosse élémentaire g et tout $S \in]0, 1]$:*

$$\forall x \geq 0 \quad \chi_S(x) = S \cdot \chi(S^{-1}x).$$

Démonstration. Soit $x \geq 0$. Puisque $g_S(u) = 0$ pour $u \geq S$, on a :

$$\chi_S(x) = \int_{-x}^S |g_S(u) - g_S(u + 2x)|^2 du = \int_{-x}^S |g(S^{-1}u) - g(S^{-1}(u + 2x))|^2 du.$$

Un simple changement de variable fournit

$$\chi_S(x) = S \int_{-S^{-1}x}^1 |g(v) - g(u + 2S^{-1}x)|^2 du.$$

D'où la relation annoncée d'après la définition de χ . \square

Les propriétés de χ_S se déduisent donc facilement de celles de χ par conjugaison par l'homothétie de rapport S . On a en particulier

$$\forall x \geq S \quad \chi_S(x) = 2S \int_0^1 g^2(u) du.$$

On a de plus

$$\int_0^1 g_S(u) du = \int_0^S g(S^{-1}u) du = S \int_0^1 g(v) dv,$$

ce qui permet d'obtenir l'expression de $\tilde{s}_{1,2}^2$ dans ce cas :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \tilde{s}_{1,2}^2(\varepsilon) = & (A(a+b) + 2B) S \sum_{n=N}^M \frac{a_n^2}{n} \chi(S^{-1}n\varepsilon) \\ & + 16A^2 S^2 \varepsilon^2 \left(\int_0^1 g(u) du \right)^2 \left(\left(\sum_{n=N}^M \frac{a_n}{n} \right)^2 - \sum_{n=N}^M \left(\frac{a_n}{n} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Pour obtenir une expression plus précise de $\tilde{s}_{1,2}^2$ on peut faire l'hypothèse H_S .

On peut préciser la valeur des deux quantités fondamentales $\tilde{\eta}_1^+$ et $\tilde{\pi}_{1,2}$. On suppose que ν est la loi uniforme sur $[-1, 2]$. La démonstration est analogue à celle de la proposition 6.2.4.

PROPOSITION 6.4.3. *La fonction $\tilde{t}_{1,2}$ est constante sur l'intervalle $[\tilde{\eta}_1^+, \eta_{max}]$ et vaut $\tilde{\pi}_{1,2}$, avec $\tilde{\eta}_1^+ = \log(SDN^{-1})$, $\eta_{max} = \log(D)$ et*

$$\tilde{\pi}_{1,2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{4}{3} S \left(\sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{2\alpha+1}} \right) \left(\int_0^1 g^2(u) du \right) \right).$$

En supposant $S > N/D$ le crossover fondamental $\tilde{\eta}_1^+$ est visible : à partir de ce point on observe un palier de hauteur $\tilde{\pi}_{1,2}$. On a :

$$\begin{cases} \tilde{\eta}_1^+ = \eta_1^+ + \log S \\ \tilde{\pi}_{1,2} = \pi_{1,2} + \frac{1}{2} \log S \end{cases}$$

Lorsque S diminue, le crossover $\tilde{\eta}_1^+$ se rapproche de 0, le palier devient alors la partie essentielle de la courbe. Il faut noter l'analogie avec (6.13). En pratique la hauteur du palier ne permet pas de décider des valeurs des paramètres optionnels. Il faut regarder l'abscisse du crossover.

6.4.3. Amplitudes aléatoires

On se donne une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, indépendantes de la suite $(X_n)_{n \geq 1}$, identiquement distribuées selon la loi μ . On considère alors la fonction

$$\tilde{F}(t) = \sum_{n=N}^M A_n n^{-\alpha} g(n(t - X_n))$$

où g a de nouveau pour support $[-1, 1]$. On ne donne pas ici de conditions d'existence d'un tel modèle.

Le cas où $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite constante à été vu au § 6.4.1. De façon générale, on va pouvoir se ramener aux modifications précédentes. On suppose chaque A_n centrée, de variance finie $\sigma^2 = \mathbb{E}(A_n^2) > 0$. On a donc

$$\mathbb{E}(A_n n^{-\alpha} g(n(t - X_n))) = \mathbb{E}(A_n) \mathbb{E}(n^{-\alpha} g(n(t - X_n))) = 0.$$

On a ainsi une façon artificielle d'obtenir une fonction de bosses avec un terme général d'espérance nulle, et ce quelque soit la loi ν . C'est la méthode radicale dont nous parlions (cf. page 129). Cela simplifie le calcul des fonctions de structure. On peut en effet reprendre les calculs faits à la section 6.1. On obtient la nouvelle expression $\tilde{s}_{1,2}^2(\varepsilon)$ dans le cas où ν admet une densité affine :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \tilde{s}_{1,2}^2(\varepsilon) = (A(a+b) + 2B) \sigma^2 \sum_{n=N}^M \frac{a_n^2}{n} \chi(n\varepsilon).$$

On voit donc qu'elle se déduit de celle du modèle standard par une multiplication par σ^2 . Tout se passe donc comme si on avait considéré le modèle ajusté par une

constante étudié au § 6.4.1. Ainsi les crossovers restent inchangés et la palier $\pi_{1,2}$ a pour nouvelle valeur

$$\tilde{\pi}_{1,2} = \pi_{1,2} + \log \sigma^2.$$

Cela rend donc très difficile la détermination conjointe de σ^2 et C .

6.5. Exemple

Pour conclure ce chapitre nous présentons l'exemple de la fonction de bosses standard F associée aux paramètres $N = 100$, $M = 10000$, avec pour g la bosse triangle et pour ν la loi uniforme sur $[-1, 2]$. On choisit $D = N_{disc} = M$.

6.5.1. Fonction χ

La bosse élémentaire g satisfait l'hypothèse H_S . La subdivision $\{e_i\}_{i=0}^K$ est définie par $e_0 = 0$, $e_1 = 1/2$ et $e_2 = 1$. On obtient l'expression suivante pour la fonction χ :

$$\chi(x) = \begin{cases} \chi^{(0)}(x) = 4x^2 - 4x^3 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ \chi^{(1)}(x) = -\frac{2}{3} + 4x - 4x^2 + \frac{4}{3}x^3 & \text{si } x \in [1/2, 1] \\ \chi^{(2)}(x) = \frac{2}{3} & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Les séries entières $\chi^{(i)}$ sont toutes des polynômes.

6.5.2. Courbes de structure

On choisit par exemple $\alpha = 0.8$. On trace la courbe de 2-structure d'ordre 1 et son approximation déterministe (voir FIG. 6.1). Les crossovers sont donnés par

$$\eta_1^- = 0 \quad \text{et} \quad \eta_1^+ = 2.$$

Le premier n'est donc pas observable. Le palier théorique à pour valeur

$$\pi_{1,2} = -1.8765.$$

Comme pour les fonctions de Weierstrass, les courbes sont indiscernables pour les petites valeurs de ε , mais elles le sont aussi pour ε grand. Il n'y a plus de fortes oscillations autour du palier.

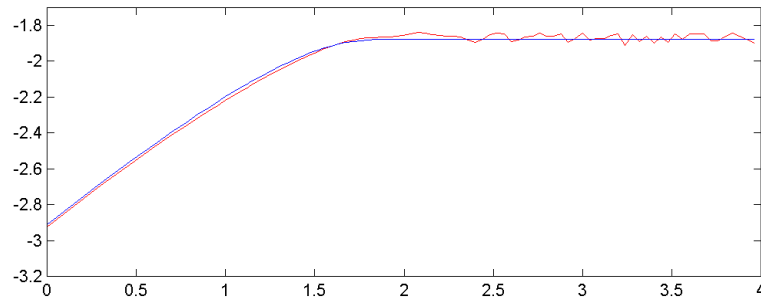


FIG. 6.1. Courbe de 2-structure d'ordre 1 de F . En rouge : une courbe aléatoire. En bleu : l'approximation déterministe.

6.5.3. Pentés estimées

Nous allons maintenant faire varier le paramètre α . L'hypothèse sur N_{disc} permet d'utiliser la proposition 6.2.3 et la formule (6.6). Les pentés sont calculées à l'aide des quantités suivantes :

$$C_2 = \frac{2}{9} \quad , \quad a_2 = \frac{4/3}{\alpha - 1}$$

$$\text{et } C_1 = \frac{2^{2\alpha+1}}{3} \left(-\frac{2/3}{2\alpha} - \frac{2}{1-2\alpha} + \frac{2}{2-2\alpha} - \frac{2/3}{3-2\alpha} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{2/3}{2\alpha} + \frac{4}{1-2\alpha} - \frac{4}{2-2\alpha} + \frac{4/3}{3-2\alpha} \right).$$

On trace d'abord la fonction $\alpha \mapsto \gamma_{th}(\alpha)$ (voir FIG. 6.2). Elle est croissante, convexe, et vérifie $\gamma_{th}(\alpha) \geq \alpha$ avec

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \gamma_{th}(\alpha) = \frac{3}{11 - 6 \ln 2} \approx 0.4385 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow 1} \gamma_{th}(\alpha) = 1.$$

Pour obtenir les pentés effectivement calculées, on trace ensuite la fonction $\alpha \mapsto \gamma_{ex}(\alpha)$ (voir FIG. 6.2). Elle dépend du rapport M/N . Elle est croissante et admet un point d'inflexion pour $\alpha = 1/2$. On voit que la valeur fournie n'est jamais une bonne approximation de α . La valeur minimale est 0.3424, la valeur maximale 0.8624. Pour vérifier la validité de la formule (6.6), on a tracé en vert le graphe de la même fonction obtenue à partir de simulations informatiques. Pour chaque valeur de α , 100 tirages aléatoires sont effectués et on garde la valeur moyenne de la pente en 0 obtenue. Les deux courbes sont presque identiques. La valeur minimale est 0.3313, la valeur maximale 0.8716.

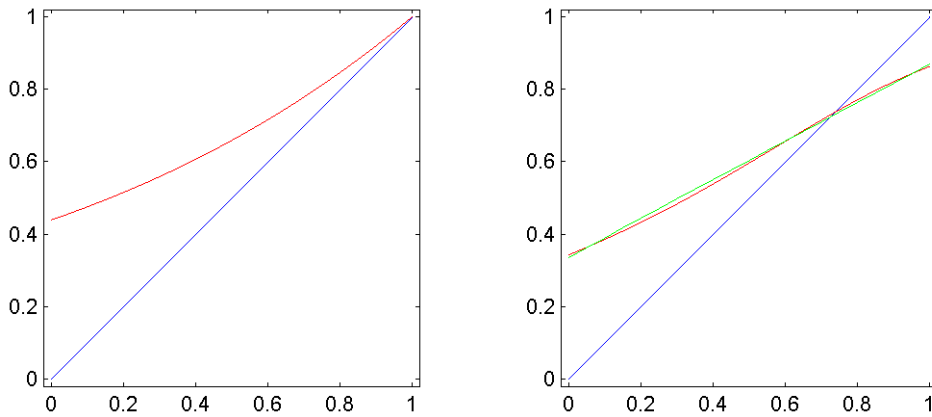


FIG. 6.2. Pentés à l'origine expérimentales théorique γ_{th} (à gauche) et calculée γ_{ex} (à droite) en fonction de α . On a aussi tracé en bleu la première bissectrice.

6.5.4. Spectre de structure

Pour le modèle théorique étudié ici, ($N = 1$ et $M = \infty$), nous pouvons appliquer la proposition 3.7.14 : tous les coefficients de structure $\sigma(q)$ sont égaux au paramètre α . On peut donc s'attendre, à l'instar des fonctions de Weierstrass, à ce que les

fonctions $S_{i,q}$ vérifient la relation (5.10). Pour cela, observons la même gamme du spectre de structure d'ordre 1 pour F (voir FIG. 6.3). Les courbes sont «à peu près» parallèles entre elles.

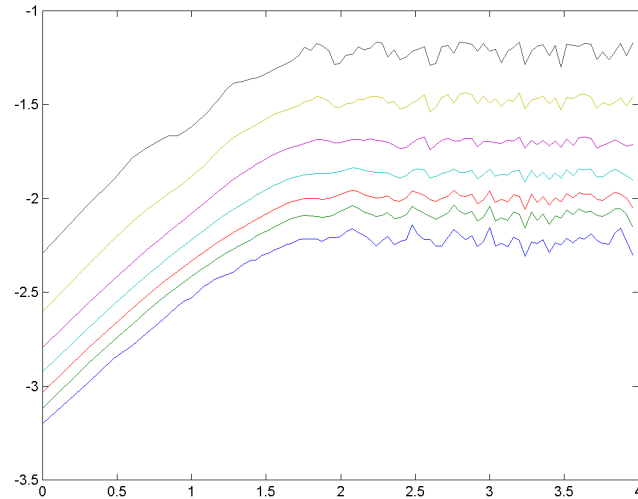


FIG. 6.3. Courbes de q -structure d'ordre 1 de F pour q appartenant à $\{0, 0.5, 1, 2, 4, 10, \infty\}$ (de bas en haut).

Il n'est pas utile de connaître tout le spectre si l'on s'intéresse uniquement à la pente à l'origine ou à l'emplacement des crossovers. Par contre, il existe une suite de valeurs $\pi_{i,q}$ correspondant aux différents paliers obtenus pour les grandes valeurs de η (ou de ε). En effet, la relation (5.10), si elle est vraie, doit être également vérifiée en moyenne. Ainsi, les caractéristiques mises en évidence pour les courbes de 2-structure sont vraies pour toutes les valeurs de q (comme nous l'avions signalé pour $q = 4$).

Fonctions de bosses : estimation des paramètres

7.1. Préliminaires

Nous essayons ici de construire des estimateurs performants sur le plan théorique et surtout faciles à mettre en œuvre pratiquement. Disposant d'un *seul* tirage aléatoire de F , comment estimer N , M , α , g ? Le mot estimateur est à prendre au sens faible. Il n'est pas ici question de réaliser une vraie analyse statistique (biais, consistance, asymptotique,...) mais de mettre en évidence des quantités permettant concrètement d'obtenir des valeurs approchées acceptables des paramètres. Ces quantités pourront être utilisées ultérieurement pour élaborer de vrais estimateurs statistiques. Nous nous limitons aux modèles à densité affine, suffisamment riches pour les applications. Certains résultats peuvent toutefois être généralisés aux modèles à densité de type exponentielle. Les courbes de structure étudiées au chapitre précédent seront un outil essentiel. D'autres propriétés seront mises en évidence. L'accent est déjà mis sur des problèmes pratiques comme la simple programmation de F et la question des discrétisations.

7.1.1. Le modèle

Dans ce chapitre et les suivants, nous allons étudier les fonctions de bosses de la forme

$$F(t) = C \sum_{n=N}^M n^{-\alpha} g_S(n(t - X_n)) \quad (7.1)$$

où g_S est définie page 134, les X_n suivant une loi commune ν qui admet une densité affine supportée par $[-1, 2]$. Ces fonctions seront utilisées comme modèle de signaux, c'est pourquoi on a conservé beaucoup de paramètres. Le modèle est d'autant plus riche qu'il y a de paramètres variables, mais leur estimation en est rendue plus difficile. En fin de compte, on souhaite pouvoir estimer tous les paramètres précédents à partir d'un petit nombre de données expérimentales.

Par choix de ν , les fonctions précédentes ont toutes un support inclus dans $[-2, 3]$. On suppose ainsi donnée une discrétisation de F relativement à une subdivision régulière $\{s_i\}_{i=1}^{5N_{disc}}$ de $[-2, 3]$ et on note $\{t_i\}_{i=1}^{N_{disc}}$ (*resp.* $\{u_i\}_{i=1}^{3N_{disc}}$) la sous-subdivision de $\{s_i\}$ relative à $[0, 1]$ (*resp.* $[-1, 2]$). On a donc N_{disc} points de discrétisation sur $[0, 1]$: on supposera naturellement N_{disc} assez grand.

Dans ces conditions, on pose la question suivante : comment identifier totalement F connaissant uniquement le nuage de points $\{(s_i, F(s_i))\}$?

Nous allons construire des estimateurs des différents paramètres. Pour cela de nombreuses données intermédiaires seront nécessaires.

7.1.2. Problèmes de discrétisation

Il faut commencer par un fait important. La discrétisation de la variable t empêche de voir les bosses $g_S(n(t - X_n))$ si n est grand. En effet, une telle fonction a un support de largeur $2S/n$. Le pas de la subdivision étant N_{disc}^{-1} , lorsque $2S/n < N_{disc}^{-1}$, il est possible que ledit support «tombe» entre deux points consécutifs s_i et s_{i+1} . Dans ce cas, la bosse de rang n est discrétisée par la fonction nulle et n'apparaît pas dans la somme F . Une telle bosse contribue effectivement à F si son centre X_n appartient à un voisinage d'un point $s_i \in [-1, 2]$. Ainsi, si M est grand par rapport à N_{disc} , ou si S est proche de 0, la fonction que l'on implémente est

$$\widehat{F}(t) = C \sum_{n=N}^{[2SN_{disc}]} n^{-\alpha} g_S(n(t - X_n)) + C \sum_{[2SN_{disc}]+1}^M n^{-\alpha} g_S(n(t - X_n)) T_n$$

où les T_n sont des variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre

$$\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{P}(\exists i \in \{1, \dots, 3N_{disc}\} \text{ tel que } X_n \in [u_i - S/n, u_i + S/n]) .$$

On a $\mathbb{E}(T_n) = (2SN_{disc})/n$ de sorte que les termes de la somme de droite vont avoir tendance à être de plus en plus ignorés dans F . On obtient une fonction très différente de l'originale (voir FIG. 7.1).

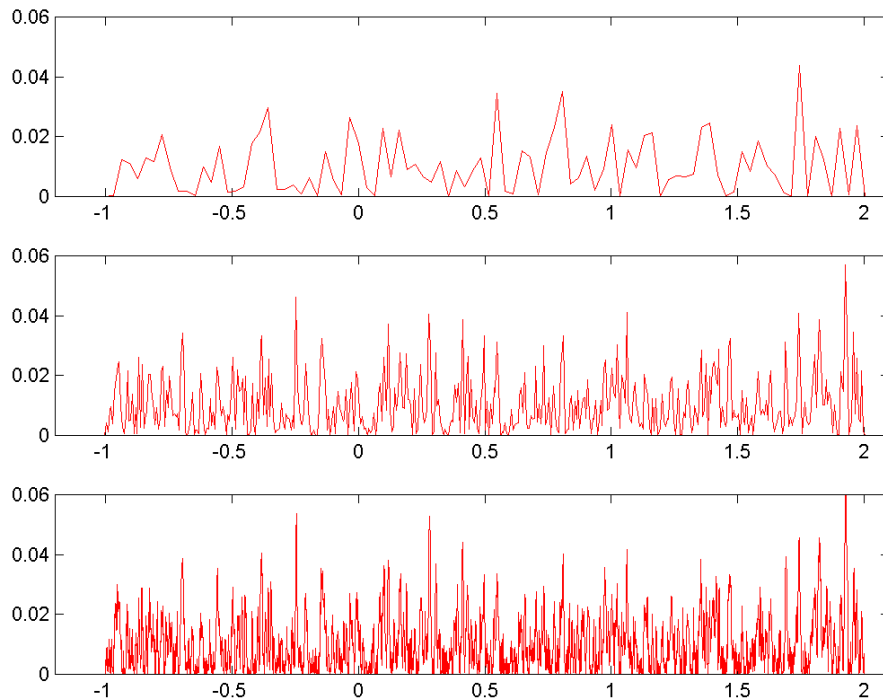


FIG. 7.1. Graphe de la fonction de bosses F avec $N = 100$, $M = 10000$ et $S = 1$, pour différentes subdivisions. $N_{disc} \in \{100, 500, 5000\}$ (de haut en bas).

Ainsi, en pratique, il n'est pas justifié de pouvoir prendre M (*resp.* S) aussi grand (*resp.* petit) que l'on veut. Bien qu'il soit possible de quantifier ces phénomènes, il peut être tout aussi simple de limiter M et S une fois N_{disc} donné. Ce choix pose toutefois un problème dans l'estimation de ces paramètres.

Le nombre N_{disc} est une donnée inflexible du problème dépendant de la méthode d'acquisition des données, par exemple de la précision de l'appareil de mesure. Le signal obtenu est de ce point de vue une déformation du signal théorique. Cela pose aussi des problèmes dans l'évaluation de la dimension fractale du graphe de F . Si N_{disc} est trop petit, le signal discrétisé est trop régulier et sa dimension expérimentale sera proche de 1. Heureusement, certaines quantités restent fiables. On constate pour les fonctions de bosses que la résolution affecte considérablement la localisation des valeurs extrêmes, des pics, mais que la valeur moyenne du signal semble par contre peu sensible à la résolution.

7.1.3. Relations de base

Avant de voir comment estimer les différents paramètres du modèle, nous allons rassembler des relations, pour la plupart vues (ou suggérées) dans les chapitres précédents, reliant les différents paramètres du modèle. Elles permettront de construire les estimateurs. Elles font naturellement intervenir :

– les *moments d'ordre* q de g :

$$\forall q \geq 0 \quad \mu_q = \int_0^1 g^q(t) dt ,$$

pour lesquels on a toujours $0 \leq \mu_q \leq 1$ et $\mu_0 = 1$.

– les *sommes partielles* :

$$\forall p, q \geq 0 \quad \Sigma_{p,q} = \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{p+q\alpha}} ,$$

pour lesquelles on a l'approximation

$$\Sigma_{p,q} \approx \frac{M^{1-p-q\alpha} - N^{1-p-q\alpha}}{1 - p - q\alpha} .$$

Nous avons déjà vu les propriétés d'intégrabilité de F : elle est intégrable sur \mathbb{R} et son intégrale I n'est pas aléatoire. On vérifie qu'elle s'écrit

$$I = \int_{\mathbb{R}} F(t) dt = 2CS \mu_1 \Sigma_{1,1} . \quad (7.2)$$

Les courbes de 2-structure d'ordre 1 et 2 fournissent les quantités suivantes :

– les *crossovers fondamentaux* :

$$\begin{aligned} \eta_1^- &= \log\left(\frac{SN_{disc}}{M}\right) & \text{et} & & \eta_1^+ &= \log\left(\frac{SN_{disc}}{N}\right) , \\ \eta_2^- &= \log\left(\frac{2SN_{disc}}{M}\right) & \text{et} & & \eta_2^+ &= \log\left(\frac{2SN_{disc}}{N}\right) . \end{aligned}$$

– les *paliers* :

$$10^{2\pi_{1,2}} = 2(A + 2B) C^2 S \mu_2 \Sigma_{1,2} + \frac{16}{3} (ACS)^2 \mu_1^2 (\Sigma_{1,1}^2 - \Sigma_{2,2}), \quad (7.3)$$

$$10^{2\pi_{2,2}} = 6(A + 2B) C^2 S \mu_2 \Sigma_{1,2}. \quad (7.4)$$

Rappelons que lorsque ν est uniforme on a :

$$\pi_{2,2} - \pi_{1,2} = \frac{\log 3}{2}.$$

Toujours dans ce cas particulier, on a :

$$10^{4\pi_{1,4}} = \frac{4}{3} C^4 S \mu_4 \Sigma_{1,4} + \frac{16}{3} C^4 S^2 \mu_2^2 (\Sigma_{1,2}^2 - \Sigma_{2,4}).$$

Nous n'avons pas fait d'hypothèses supplémentaires sur les différents paramètres, en particulier nous n'avons pas écarté le cas où certains seraient liés entre eux. Pour diverses raisons, on peut par exemple considérer la classe des fonctions F pour lesquelles $M = 10N$. De telles relations peuvent rendre les équations précédentes triviales ou, au contraire, plus intéressantes en les combinant judicieusement. Il s'agit de préciser les hypothèses sur les paramètres.

7.1.4. Les différents paramètres

Il y a beaucoup de paramètres dans notre modèle. On peut chercher d'autres relations que les précédentes et espérer obtenir un système permettant de déterminer, au moins numériquement, tous les paramètres. Malheureusement de tels systèmes sont difficiles à résoudre et l'incertitude des résultats est relativement importante. Pour une plus grande fiabilité et une plus grande simplicité, il va falloir estimer certains paramètres directement puis en déduire d'autres *via* les équations précédentes. Pour cela on distingue trois sortes de paramètres :

– les *paramètres auxiliaires* : ils dépendent indirectement de F et vont pouvoir être estimés facilement, en début de procédure, à partir des données discrètes. Les équations précédentes nous donnent par exemple les moments de g , l'intégrale I de F , les crossovers, etc.

– les *paramètres de base* : ils définissent concrètement F . Il s'agit de ν , N , M , α et g . On va les estimer à partir des paramètres auxiliaires.

– les *paramètres optionnels* : ils généralisent le modèle standard sans en changer les propriétés théoriques. Il s'agit ici de C et S . Leur rôle est important pour les applications mais ils rendent les estimations délicates. Pour des problèmes d'échelle, nous serons obligés de tenir compte de C , mais il ne sera pas gênant de choisir S égal à 1.

La situation est bien sûr différente selon que certains paramètres ou non sont connus ou fixés. De façon générale, on obtiendra des estimateurs intrinsèques, pour le cas où aucun paramètre n'est connu, et des estimateurs indirects, supposant certaines quantités connues ou préalablement estimées. Les estimateurs directs sont les plus complexes à construire. On va utiliser les paramètres auxiliaires. Il faudra que ces derniers soient facilement estimables, avec peu d'erreur, et qu'individuellement ils ne dépendent que d'un petit nombre de paramètres de base. Ce sont eux qu'on estime en premier.

7.2. Estimation des paramètres auxiliaires

7.2.1. Intégrale de F

Pour des densités à support $[-1, 2]$, F est nulle en dehors de $[-2, 3]$ donc

$$I = \int_{\mathbb{R}} F(t) dt = \int_{-2}^3 F(t) dt.$$

Il est alors facile d'obtenir un bon estimateur de I en utilisant simplement la moyenne arithmétique des valeurs de F . On pose ainsi :

$$\hat{I} = \frac{1}{N_{disc}} \sum_{i=1}^{5N_{disc}} F(s_i). \quad (7.5)$$

En fait, le support de F est généralement bien plus petit que $[-2, 3]$. Notamment lorsque N est assez grand, il coïncide avec l'intervalle contenant les centres des bosses, à savoir $[-1, 2]$. Aussi, ne commet-on pas beaucoup d'erreur en considérant que $I = \int_{-1}^2 F(t) dt$ et en posant

$$\hat{I} = \frac{1}{N_{disc}} \sum_{i=1}^{3N_{disc}} F(u_i).$$

EXEMPLE

On considère la fonction de bosses standard F de paramètres $N = 50$, $M = 5000$, $\alpha = 0.5$, $\nu = \mathcal{U}([-1, 2])$, $C = S = 1$ avec g la bosse triangle. La valeur exacte de l'intégrale de F est $I = 0.2560$.

Pour évaluer la qualité de l'approximation, on réalise 100 tirages aléatoires indépendants pour différentes valeurs de N_{disc} . Pour chacune d'elles, on calcule la moyenne des valeurs estimées et l'écart-type (voir TAB. 7.1). L'estimation de ce paramètre est très sûre. L'une des raisons est que I n'est pas aléatoire.

TAB. 7.1. Estimation de l'intégrale I d'une fonction de bosses.

N_{disc}	Valeur estimée \hat{I} sur $[-1, 2]$	
	Moyenne	Ecart-type
50	0.2623	0.0255
500	0.2556	0.0019
5000	0.2560	0.00029264

7.2.2. Courbes de structure

Les principales données se déduisent des courbes de structure aléatoires. Il n'est pas possible en pratique d'obtenir la courbe déterministe $\eta \mapsto t_{i,2}(\eta)$. À partir des données expérimentales, on cherche une courbe théorique approchée à partir de laquelle il est possible d'estimer facilement les crossovers fondamentaux et les paliers. Les crossovers inférieurs ne sont pas suffisamment caractérisables pour être estimés. Au contraire, les crossovers supérieurs sont tels qu'à partir de cette abscisse, la courbe de structure devient en moyenne plate. C'est cette propriété que nous allons exploiter.

De façon générale soit, dans le plan rapporté à son repère canonique, un nuage de points $\{M_i = (x_i, y_i) : i = 1, \dots, K\}$ avec $0 = x_1 < x_i < x_K = \eta_{max}$, ($K \geq 3$). On veut ajuster ces points à une courbe présentant les caractéristiques fondamentales d'une courbe de structure d'une fonctions de bosses : concavité, croissance, puis stationnarité.

Pour illustrer les différentes méthodes d'ajustement, nous considérons deux nuages de points (voir FIG. 7.2) :

– un nuage *expérimental* (tracé en trait continu rouge) : c'est une courbe de structure aléatoire de la fonction de bosses standard de paramètres $N = 50$, $M = 5000$, $\alpha = 0.5$, $\nu = \mathcal{U}([-1, 2])$, $C = S = 1$ et g la bosse triangle.

– un nuage *parfait* (tracé en trait continu bleu) : c'est simplement la courbe de structure déterministe de la même fonction de bosses.

Ces nuages comportent chacun 5000 points. On tracera en trait discontinu les courbes ajustées.

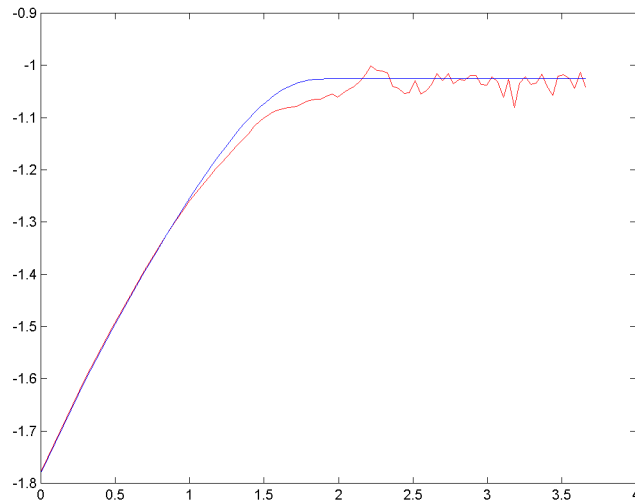


FIG. 7.2. Courbes expérimentale (en rouge) et parfaite (en bleu) à ajuster à une courbe de structure d'une fonction de bosses.

7.2.2.1. Ajustement affine

Une méthode simple consiste à chercher une fonction d'ajustement h affine par morceaux du type :

$$h(\eta) = (p^* \eta + q^*) \mathbb{I}_{[0, \eta^*]}(\eta) + \pi^* \mathbb{I}_{[\eta^*, \eta_{max}]}(\eta).$$

On met ainsi en évidence les deux régimes linéaires : une partie strictement croissante puis une partie plate. Avec ce modèle le palier est π^* et le crossover η^* : il s'agit essentiellement d'estimer ces deux paramètres. En effet, p^* et q^* sont déterminés par la continuité de h au point η^* et la condition $h(x_1) = y_1$, ce qui donne :

$$p^* = \frac{\pi^* - y_1}{\eta^*} \quad \text{et} \quad q^* = y_1.$$

Il est possible de construire un bon estimateur de π^* . On obtient en effet un tel estimateur $\hat{\pi}$ en calculant simplement la moyenne arithmétique d'un nombre quelconque N^* de valeurs y_i pour $y_i \in [\eta^*, \eta_{max}]$:

$$\hat{\pi} = \frac{1}{N^*} \sum_{i=K-N^*+1}^K y_i .$$

En pratique on prendra des valeurs assez grandes pour y_i afin de s'assurer qu'elles sont bien supérieures à la valeur (inconnue) de η^* . Il faut donc que N^* soit modéré.

L'estimation du point de rupture η^* est plus délicate. Nous proposons différentes méthodes pour en construire un estimateur $\hat{\eta}$. Dans les méthodes de base, on choisit pour $\hat{\eta}$ l'abscisse d'un point $M^* = (x_c, y_c)$ du nuage.

Méthodes géométriques.

La forme particulière de la courbe d'ajustement permet d'en caractériser les paramètres par des propriétés géométriques simples. On dira qu'un nuage est idéal s'il est effectivement composé de deux parties affines comme ci-dessus.

1. Angle minimal. Si le nuage de points est idéal, alors les points M_1, \dots, M^* d'une part, et les points M^*, \dots, M_K d'autre part, sont alignés. Ainsi, dans le triangle $M_1 M^* M_K$, le sommet M^* est le seul point M_i tel que l'angle $(M_1 M_i M_K)$ soit minimal. De façon générale on calcule donc tous ces angles et on conserve l'abscisse x_c du point M^* réalisant le minimum. Si plusieurs abscisses sont possibles, on décide de choisir pour $\hat{\eta}$ la plus petite.

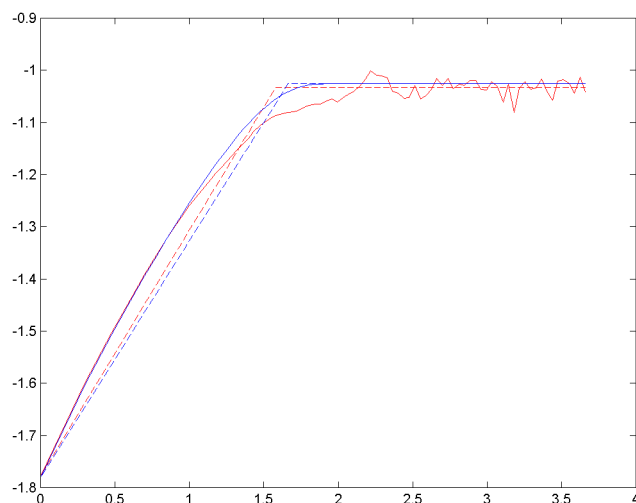


FIG. 7.3. Ajustement par la méthode de l'angle minimal.

2. Ecart minimal au palier. On utilise l'estimation de π^* . On cherche les points M_i les plus proches de la valeur estimée $\hat{\pi}$, c'est-à-dire tels que l'écart $|y_i - \hat{\pi}|$ soit minimal. On conserve alors l'abscisse x_i et on choisit pour $\hat{\eta}$ la plus petite d'entre elles.

3. Premier instant de chute. On utilise encore la valeur $\hat{\pi}$. Il existe toujours un unique indice $i_0 \in \{1, \dots, K - 1\}$ tel que :

$$y_1 < y_2 < \dots < y_{i_0} < \hat{\pi} \leq y_{i_0+1}.$$

On obtient alors deux estimateurs selon qu'on considère le point inférieur ou supérieur : dans le premier cas $\hat{\eta} = x_{i_0}$, dans le second $\hat{\eta} = x_{i_0+1}$. En théorie, l'ordonnée correspondant à l'abscisse η^* doit être π^* . Cette condition n'est jamais vérifiée dans le premier cas, de sorte qu'on commet toujours une erreur, même avec un nuage idéal. Le second estimateur est donc *a priori* meilleur, du moins plus légitime. En fait, cette méthode est en pratique imprécise à cause d'un fait heuristique : la bosse pré-crossover. Expérimentalement, on constate le phénomène suivant : juste avant le crossover théorique, la courbe de structure croît, puis décroît à partir d'une valeur supérieure à celle du palier, pour ensuite osciller très faiblement autour de sa valeur moyenne π^* . Visuellement on voit donc une petite bosse juste avant le crossover. On peut adapter la méthode du point de chute à cette constatation : à partir du point de chute supérieur y_{i_0+1} , on conserve le premier point dont l'ordonnée est inférieure ou égale à π^* .

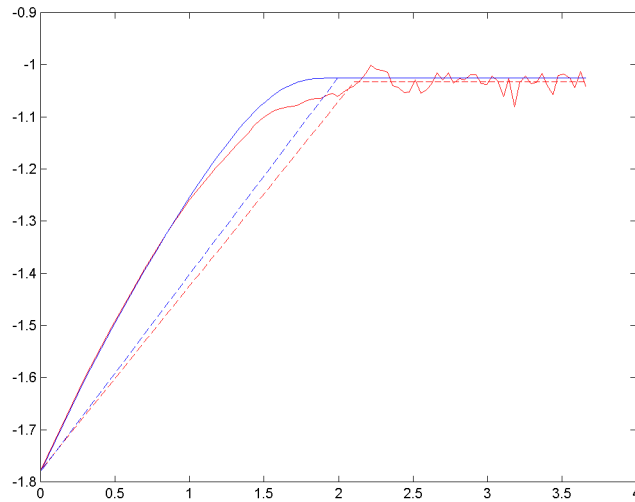


FIG. 7.4. Ajustement par la méthode du point de chute inférieur.

Pour améliorer l'estimation, on peut décider de ne pas se limiter aux points du nuage c'est-à-dire chercher une abscisse \hat{x} qui ne correspond pas à un x_i . Ainsi, on peut adapter la méthode précédente en procédant par exemple à une interpolation linéaire entre les points y_{i_0} et y_{i_0+1} . On a également la méthode suivante :

4. Pente à l'origine. Si on considère encore que le nuage de points est idéal alors le point M^* est caractérisé comme l'intersection de deux droites. On décide toujours que la seconde droite (horizontale) a pour équation $y = \hat{\pi}$ puis on approche la

première par interpolation linéaire entre les premiers points M_1, \dots, M_p du nuage. On calcule alors les coordonnées (\hat{x}, \hat{y}) du point d'intersection de ces deux droites et on conserve $\hat{\eta} = \hat{x}$. Notons qu'on a toujours $\hat{y} = \hat{\pi}$. Dans ce cas là, on peut décider de choisir comme estimateurs de p^* et q^* les paramètres d'ajustement de la droite des moindres carrés au lieu d'utiliser les équations (5.5) et (5.9).

Mise à part la méthode de l'angle minimal, ces techniques reposent sur l'estimation préalable de π^* , et du choix arbitraire de N^* . S'il est guidé par le nombre de points dont on dispose, il faut aussi avoir une idée *a priori* de la valeur de η^* . Expérimentalement, on constate qu'il est raisonnable d'utiliser 10% du nombre total de points du nuage pour calculer π^* .

Notons enfin qu'en pratique, la précision du nuage de points peut permettre une estimation «à vue» de M^* . Cette méthode rustique fournit finalement d'assez bons résultats.

Méthodes analytiques.

On peut aussi caractériser les différents paramètres du modèle à l'aide de propriétés analytiques simples de h . Nous en présentons une.

5. Dérivée nulle. Le point η^* est caractérisé par

$$\eta^* = \inf\{\eta \in [0, \eta_{max}] : h'_d(\eta) = 0\}.$$

Expérimentalement, on approche la dérivée à droite au point x_i par

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (i = 1, \dots, K - 1),$$

ce qui conduit à chercher les points M_i pour lesquels y'_i est minimale. On garde pour $\hat{\eta}$ la plus petite abscisse de ces points.

La courbe n'est pas de classe \mathcal{C}^1 mais si on veut toutefois parler de sa courbure, celle-ci est toujours nulle, puisque $h'' = 0$. Nous allons retrouver cette idée au paragraphe suivant. Terminons en remarquant que la meilleure estimation du crossover ne correspond pas nécessairement au meilleur ajustement visuel. Or c'est l'abscisse du crossover qui nous intéresse essentiellement. En pratique, les meilleures estimations sont obtenues avec les méthodes 1 et 3 (voir FIG. 7.3 et FIG. 7.4).

Remarquons que dans tous les cas les courbes ajustées sont presque indiscernables. Cela est dû à deux faits : d'une part la courbe déterministe est toujours une très bonne approximation des courbes aléatoires, d'autre part le modèle affine est très simple et n'utilise que peu d'informations.

7.2.2.2. Ajustement logistique

L'ajustement précédent a le double avantage d'être simple et de fournir, par construction, des estimateurs des crossovers et des paliers. Il reste relativement rudimentaire car fondé uniquement sur deux régimes linéaires. De plus, la fonction

obtenue n'est pas dérivable au point de cassure η^* . On peut donc chercher un ajustement par une fonction ayant les propriétés précédentes, mais étant plus régulière. On cherche un modèle simple : nous proposons une fonction de type *logistique*. On considère la fonction

$$h(\eta) = \frac{C_1}{1 + C_2 \exp(-\lambda \eta)} + C_3.$$

avec $C_i \in \mathbb{R}^*$ et $\lambda > 0$. Pour déterminer la valeur des paramètres, nous n'allons pas utiliser la méthode des moindres carrés, mais imposer les conditions suivantes :

1. *La fonction est concave exactement sur $[0, \eta_{max}]$.* Il est équivalent de dire que 0 est un point d'inflexion pour h . On doit donc avoir

$$h''(0) = \frac{C_1 C_2 \lambda^2 (C_2 - 1)}{(1 + C_2)^3} = 0,$$

ce qui donne $C_2 = 1$.

2. *La pente en 0 du nuage de points est égale à celle du graphe de h .* Cela donne la relation

$$h'(0) = \frac{C_1 C_2 \lambda}{(1 + C_2)^2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

En notant p^* le terme de droite ci-dessus, et avec la condition $C_2 = 1$, on obtient donc $C_1 \lambda = 4p^*$.

3. *Les courbes ont le même point initial.* On a donc

$$h(0) = \frac{C_1}{1 + C_2} + C_3 = \frac{C_1}{2} + C_3 = y_1.$$

4. *La courbe est presque plate pour les grandes valeurs de η , et égale à la valeur du palier π^* .* En fait la courbe possède une asymptote horizontale d'équation $y = C_1 + C_3$ et tend rapidement vers cette droite. Mais si on impose $C_1 + C_3 = \pi^*$ l'ajustement n'est pas suffisamment précis. Il est plus juste d'imposer $h(\eta^*) = \pi^*$ pour un certain η^* à partir duquel la courbe doit s'aplatir. Pratiquement, on commence par calculer π^* comme on l'a fait précédemment :

$$\pi^* = \frac{1}{N^*} \sum_{i=K-N^*+1}^K y_i,$$

puis on choisit $\eta^* = x_{K-N^*+1} = x^*$. Avec $C_2 = 1$, on obtient l'équation

$$\frac{C_1}{1 + \exp(-\lambda x^*)} + C_3 = \pi^*.$$

Notons que cela dépend encore du choix de N^* .

En combinant ces équations on obtient la procédure d'ajustement suivante :

- Fixer $N^* \in \{1, \dots, N_{disc}\}$ et calculer x^* , π^* et p^* ,
- Calculer λ en résolvant l'équation :

$$\frac{4p^*}{\lambda(1 + \exp(-\lambda x^*))} + y_1 - \frac{2p^*}{\lambda} - \pi^* = 0,$$

- Calculer $C_1 = 4p^*/\lambda$ puis $C_3 = y_1 - C_1/2$.

On obtient ainsi un modèle simple et de très bonne qualité pour une large famille de courbes de structure : fonctions de bosses (voir FIG. 7.5) mais aussi fonctions de Weierstrass (voir FIG. 7.6). Pour cette dernière on a repris l'exemple page 108 et on a tracé (en vert) la courbe déterministe simplifiée. On constate comme pour le modèle affine, que les courbes ajustées sont indiscernables. Dans cet ajustement, on oublie encore les oscillations autour du palier pour les grandes valeurs de ε .

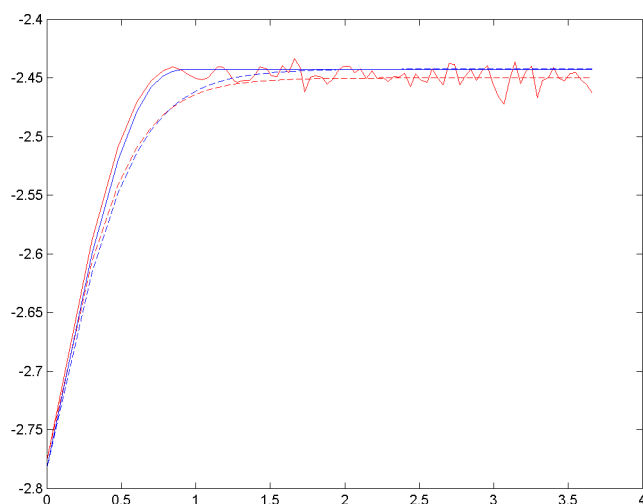


FIG. 7.5. Ajustement logistique pour une fonction de bosses.

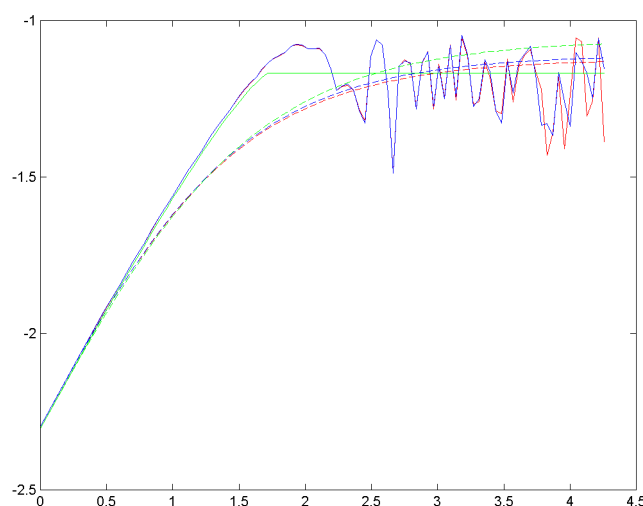


FIG. 7.6. Ajustement logistique pour une fonction de Weierstrass.

La détermination de cette courbe d'ajustement ne fait pas intervenir explicitement le point de cassure entre les deux régimes moyens. On peut donc se demander s'il est possible d'estimer le crossover à partir de cette courbe. En fait c'est difficile. Une façon de procéder est de dire qu'en ce point la courbure est maximale. On peut calculer explicitement la courbure et déterminer numériquement un tel point. Les

résultats ne sont pas très satisfaisants : la courbe d'ajustement reste trop simple et ne contient pas toute l'information. La courbure est en effet imposée par les conditions 1 à 4. Pour développer cette idée, il faudrait utiliser une fonction h plus complexe.

7.2.2.3. Application

On applique ces méthodes aux nuages de points $\{(\eta_i, t_{j,2}(\eta_i))\}$: on obtient les estimateurs $\hat{\pi}_{j,2}$ et $\hat{\eta}_j^+$. On se doute que l'estimation de η_j^+ va être fragile. Si d'autres crossovers existent, ils se prêteront mal à des estimations. C'est malheureusement le cas pour η_j^- . Ils correspondent à des transitions moins remarquables, pratiquement imperceptibles sur une courbe de structure aléatoire.

À titre d'exemple, on considère toujours la fonction de bosses standard F de paramètres $N = 50$, $M = 5000$, $\alpha = 0.5$, $\nu = \mathcal{U}([-1, 2])$, $C = S = 1$ avec g la bosse triangle. On réalise 100 tirages aléatoires indépendants pour différentes valeurs de N_{disc} et on estime les paramètres :

- $\pi_{1,2}$ et $\pi_{2,2}$: leurs valeurs théoriques sont -1.0256 et -0.7870 (voir TAB. 7.2). Les résultats sont très bons. En moyenne, les paliers sont correctement estimés, avec un écart-type très faible.

- η_1^+ : sa valeur théorique dépend du nombre de points de discrétisation. On utilise les méthodes 1 et 3 (voir TAB. 7.3). Dans tous les cas les estimations ne sont pas très bonnes. L'écart-type est en outre très grand pour la méthode 3. Il faudra limiter l'emploi de ces estimateurs et donc ne pas trop recourir aux crossovers.

TAB. 7.2. Estimation des paliers $\pi_{j,2}$ d'une fonction de bosses.

N_{disc}	Palier $\pi_{1,2}$		Palier $\pi_{2,2}$	
	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t
50	-1.0265	0.0175	-0.7916	0.0155
500	-1.0288	0.0173	-0.7895	0.0136
5000	-1.0310	0.0164	-0.7891	0.0201

TAB. 7.3. Estimation du crossover η_1^+ d'une fonction de bosses.

N_{disc}	Valeur exacte	Méthode 1		Méthode 3	
		Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t
50	1	1.3455	0.0289	0.4404	0.4954
500	1.699	1.6183	0.0855	1.1360	0.2589
5000	2.301	1.7065	0.0580	1.6511	0.1684

Rappelons les cas extrêmes. Si $N = SN_{disc}$ (*resp.* $N = 2SN_{disc}$) la courbe de structure est réduite à un palier puisque $\eta_1^+ = 0$ (*resp.* $\eta_2^+ = 0$). Au contraire, si $N = S$ (*resp.* $N = 2S$) le palier n'est pas observable, il est dégénéré en un point puisque $\eta_1^+ = \eta_{max}$ (*resp.* $\eta_2^+ = \eta_{max}$). Pour que les méthodes d'estimation précédentes soient valides, il faut donc N et S assez grands.

7.3. Estimation des paramètres de base

7.3.1. Estimation de ν

Nous nous sommes limités au cas où ν admet la densité

$$\theta(t) = \frac{d\nu}{dt} = (At + B)\mathbb{1}_{[-1,2]}(t).$$

On veut déterminer les paramètres A et B . Le problème peut sembler difficile. En fait, nous allons proposer une procédure simple et efficace d'estimation. Pour déterminer ν , il faut voir comment elle influence concrètement le graphe de F . Nous avons déjà remarqué quelques faits à la section 1.4. De manière plus précise, c'est elle qui donne une forme directrice à la courbe de F , une tendance, observable en moyenne. En effet, le nombre de bosses tombant au voisinage d'un point $t \in \mathbb{R}$ est précisément contrôlé par la densité de ν en ce point. On a facilement le

LEMME 7.3.1. *Supposons ν affine. Alors la fonction $t \mapsto \mathbb{E}(F(t))$ est bien définie et est également affine :*

$$\forall t \in [0, 1] \quad \mathbb{E}(F(t)) = 2CS\mu_1\Sigma_{1,1}(At + B).$$

Pour estimer A et B , on remarque alors que

$$2CS\mu_1\Sigma_{1,1} = I$$

est une quantité que l'on sait estimer (cf. §7.2.1). Ensuite, puisque $\mathbb{E}(F(t))$ est une tendance linéaire moyenne, nous proposons d'évaluer $\mathbb{E}(F(t))$ par la droite de régression des moindres carrés pour les points $\{(t_i, F(t_i))\}$. Si cette droite a pour équation $y = at + b$ on a donc

$$\hat{A} = \frac{a}{I} \quad \text{et} \quad \hat{B} = \frac{b}{I}. \quad (7.6)$$

Cette estimation ne fait intervenir qu'un seul paramètre auxiliaire. Elle est en pratique précise car l'erreur sur a, b et I est très faible. A titre d'exemple, on considère à nouveau la fonction de bosses standard F de paramètres $N = 50, M = 5000, \alpha = 0.5, C = S = 1$, avec g la bosse triangle et $\nu = \mathcal{U}([-1, 2])$. La densité de ν est affine avec $(A, B) = (0, 1/3)$. On réalise 100 tirages aléatoires indépendants pour différentes valeurs de N_{disc} . L'estimation conjointe des deux paramètres est effectivement très bonne (voir TAB. 7.4).

TAB. 7.4. Estimation des paramètres de la densité affine de la loi ν d'une fonction de bosses.

N_{disc}	Estimation de A		Estimation de B	
	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t
50	-0.0001	0.0538	0.3334	0.0269
500	0.0004	0.0237	0.3331	0.0119
5000	0.0005	0.0245	0.3331	0.0123

Le cas particulier ν uniforme est intéressant à bien des points. Par exemple la valeur moyenne de F vaut alors

$$\overline{F} = \frac{I}{3} = \mathbb{E}(F(t)) \quad (t \text{ arbitraire}).$$

On a donc une confusion entre moyenne analytique et moyenne probabiliste. Remarquons également que dans ce cas la fonction de bosses F n'a pas de dérive.

Si le phénomène à modéliser montre une croissance dans le temps de type non linéaire (par exemple exponentielle), c'est justement en choisissant ν que l'on pourra en tenir compte (voir un exemple page 211). Il est possible de généraliser ce qui précède. Pour une loi ν quelconque à support $[-1, 2]$, on procède toujours à un ajustement des points $\{(t_i, F(t_i))\}$, ce qui donne l'allure de la distribution. On la compare à l'allure théorique fournie par la fonction $t \mapsto \mathbb{E}(F(t))$. Cette dernière est liée directement à ν . Dans le cas où ν est définie par des paramètres, il suffit qu'on puisse les exprimer facilement à partir de cette dernière fonction. C'est par exemple le cas pour ν exponentielle. On prouve le

LEMME 7.3.2. *Supposons ν exponentielle. Alors la fonction $t \mapsto \mathbb{E}(F(t))$ est bien définie et si N est assez grand, on a l'approximation suivante :*

$$\forall t \in [0, 1] \quad \mathbb{E}(F(t)) \approx 2CS \mu_1 \Sigma_{1,1}(A e^{Bt}).$$

Pour estimer A et B , on écrit

$$\ln \mathbb{E}(F(t)) = \ln(A) + Bt.$$

Dans ce cas, on évalue $t \mapsto \ln \mathbb{E}(F(t))$ par la droite de régression des moindres carrés pour les points $\{(t_i, \ln F(t_i))\}$. Si cette droite a pour équation $y = at + b$ on a donc

$$\hat{A} = \frac{\exp b}{\hat{I}} \quad \text{et} \quad \hat{B} = a.$$

S'il est donc possible d'estimer avec précision les paramètres de ν , nous supposerons en pratique que ν est uniforme sur $[-1, 2]$. D'une part cela évitera une estimation et ces erreurs, d'autre part les relations de base seront grandement simplifiées. Il est de toute façon théoriquement possible de se ramener à un tel modèle.

7.3.2. Estimation des bornes

7.3.2.1. Borne inférieure

Dans le cas général, pour estimer N , nous utilisons les crossovers fondamentaux. Selon la courbe de structure utilisée, on obtient les deux estimateurs suivants :

$$\hat{N} = SN_{disc} 10^{-\eta_1^+}, \quad (7.7)$$

$$\hat{N} = 2SN_{disc} 10^{-\eta_2^+}. \quad (7.8)$$

Le paramètre N_{disc} est une donnée du problème, la valeur de S sera également supposée connue. Le crossover η_i^+ aura été préalablement estimé si besoin est. Cette estimation ne dépend ni de la constante C , ni de α , ni de g . Toutefois, à cause de l'erreur commise dans l'approximation des crossovers, elle est assez mauvaise. Il faut trouver une autre manière de procéder.

On propose un estimateur plus heuristique, valable dans le cas ν uniforme, qui fournit de très bons résultats. L'idée est de retrouver la première bosse, celle de rang n , dans le graphe de F . Celle-ci a le support le plus large, valant $l^+ = 2S/N$. Sa hauteur, égale à $N^{-\alpha}$, est aussi la plus grande. Nous avons vu que cette bosse influence l'allure générale de la courbe de F . Considérons le maximum de F :

$$\|F\|_{\infty} = F(t_0) = \sup\{F(t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Il définit implicitement une suite de bosses $(Y_{n_k})_{k \geq 0}$ par la condition $Y_{n_k}(t_0) \neq 0$. Il s'agit de toutes les bosses empilées sur le point réalisant l'optimum. Parmi ces bosses, il est légitime de penser que les premières bosses sont présentes. En effet les bosses de rang élevé ont une hauteur négligeable devant celle des premières. On cherche alors à retrouver la bosse Y_{n_0} dans le signal et à estimer la largeur l_{n_0} de son support. On admettra que c'est une bonne approximation de l^+ . Pour cela, on considère le point

$$F(s_m) = \max\{F(s_i) : i = 1, \dots, 5N_{disc}\}.$$

On prend ce point comme le sommet de la bosse principale de la pile correspondant au maximum. Pour obtenir la base de cette bosse, on considère qu'elle est triangulaire. La discrétisation de la variable d'une part, le fait que les supports soient étroits d'autre part, justifient cette approximation : quelque soit la forme de la bosse, on la voit comme la bosse triangle. Ensuite on va interpoler linéairement le signal avant et après ce point pour obtenir les côtés de la bosse. Pour la partie antérieure, la fonction doit être croissante : la pente du signal est positive. On garde donc les points $\{F(s_i)\}_{i=j}^m$ vérifiant

$$\begin{cases} F(s_j) < F(s_{j+1}) < \dots < F(s_{m-1}) < F(s_m) \\ F(s_{j-1}) > F(s_j) \end{cases}$$

La méthode des moindres carrés donne la droite d'ajustement $s \mapsto a_1s + b_1$. De même, pour la partie postérieure, la fonction doit être décroissante : la pente du signal est négative. On garde donc les points $\{F(s_i)\}_{i=m}^k$ vérifiant

$$\begin{cases} F(s_m) > F(s_{m+1}) > \dots > F(s_{k-1}) > F(s_k) \\ F(s_k) < F(s_{k+1}) \end{cases}$$

La méthode des moindres carrés donne la droite d'ajustement $s \mapsto a_2s + b_2$. L'intersection respective de ces droites avec l'axe des abscisses définit le support $[c_1, c_2]$, avec $c_i = -b_i/a_i$. On admet donc que

$$l^+ = \frac{2S}{N} = c_2 - c_1. \quad (7.9)$$

Supposant toujours S connu, on obtient enfin l'estimateur

$$\hat{N} = \frac{2S}{c_2 - c_1}. \quad (7.10)$$

On peut penser commettre des erreurs inévitables. D'abord la méthode d'approximation de la bosse initiale Y_{n_0} est rudimentaire, ensuite cette bosse n'est en général pas la bosse Y_N . Toutefois, la première erreur est compensée par le fait qu'on utilise la largeur du support et non toute la bosse. Pour la seconde, il est clair qu'avec une très grande probabilité n_0 doit toujours être petit, donc proche de N , sans quoi

$F(s_m)$ ne serait pas très grand. On a par exemple $n_0 = N + 2, N + 4, \dots$, de sorte que l'erreur reste faible. Notons toutefois que l'estimation du maximum de F est, elle, moins sûre. Ces estimateurs sont sensibles au nombre de points de discrétisation. Le choix de la distribution uniforme réduit cette erreur et fait de plus que la plupart des maxima locaux donnent, par la méthode d'estimation précédente, des supports de largeur proche. On pourra cependant utiliser cet estimateur même si ν n'est pas uniforme. Les erreurs restent faibles. En pratique, les résultats sont bien plus fiables que ceux obtenus par l'estimation des crossovers. Enfin, puisque nous travaillons avec le support de la bosse initiale estimée, les paramètres C, M, α, g , ne jouent aucun rôle.

A titre d'exemple, on considère à nouveau la fonction de bosses standard F de paramètres $M = 5000, \alpha = 0.5, C = S = 1$, avec g la bosse triangle et $\nu = \mathcal{U}([-1, 2])$. On réalise 100 tirages aléatoires indépendants pour différentes valeurs de N et N_{disc} (voir TAB. 7.5). On calcule N de trois façons différentes : on utilise la formule (7.10) en estimant le crossover η_1^+ estimé avec les méthodes 1 et 3 ; ensuite, on cherche graphiquement la «bosse maximale». Les nombres en gras indiquent la meilleure estimation. L'utilisation des crossovers donne de mauvais résultats :

– avec la méthode 1 : l'écart-type est faible mais les valeurs estimées très éloignées des vraies valeurs.

– avec la méthode 3 : les valeurs estimées sont meilleures mais l'écart-type est très important.

Finalement, on retient le troisième estimateur, qui est un bon compromis entre les deux lacunes précédentes. Notons que les valeurs de \hat{N} sont parfois peu fiables. Expérimentalement, on obtient de bons résultats pour $N_{disc} \approx 10N$.

7.3.2.2. Borne supérieure

Nous l'avons dit, il est nécessaire de lier M, S et N_{disc} . Pour réellement voir toutes les bosses on supposera $M \leq 2SN_{disc}$. Le rôle de M est fondamental : il contrôle la présence des bosses à support étroit, celles qui donnent sa rugosité au profil. On peut procéder comme pour N en utilisant le crossover inférieur η_1^- . Si $M \leq N_{disc}$, on obtient l'estimateur

$$\widehat{M} = SN_{disc} 10^{-\widehat{\eta}_1^-}.$$

Nous avons proposé une méthode alternative pour la borne N . Pour M nous n'avons pas le choix. Nous n'avons que déplacé le problème : on ne sait pas comment obtenir un estimateur de η_1^- !

Une manière simple est de fixer $M = N_{disc}, M = 2N_{disc}$ ou encore $M = [kN_{disc}]$, $k \in [1, 2]$, éventuellement obtenu aléatoirement. Malgré des résultats honnêtes, ces choix radicaux paraissent peu justifiés.

On peut essayer de procéder comme pour N , en cherchant à estimer la quantité

$$l^- = \frac{2S}{M}, \quad (7.11)$$

c'est-à-dire la largeur du plus petit support d'une bosse élémentaire. Cette dernière correspond à celle de hauteur minimale, ce qui la rend beaucoup plus difficile à localiser dans le graphe du signal. De plus, nous avons vu qu'on était limité par le pas de la discrétisation.

TAB. 7.5. Estimation de la borne inférieure N d'une fonction de bosses pour quatre valeurs de N différentes ($N = 1, 50, 500, 2000$, de haut en bas).

N_{disc}	Avec η_1^+ (méth. 1)		Avec η_1^+ (méth. 3)		Avec l^+	
	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t
50	2.7	2.6268	11.1	2.9231	2.1	1.1972
500	6.8	9.199	8.4	3.6878	5.7	2.3594
5000	44.7	38.149	8.9	4.629	19.3	4.8774

N_{disc}	Avec η_1^+ (méth. 1)		Avec η_1^+ (méth. 3)		Avec l^+	
	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t
50	7	0.4714	10.6	16.1946	8.5	4.9272
500	22.5	1.7159	300.4	184.7005	45.1	17.4512
5000	109	22.8570	212.8	84.2177	101.4	28.0325

N_{disc}	Avec η_1^+ (méth. 1)		Avec η_1^+ (méth. 3)		Avec l^+	
	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t
50	6.5	2.0138	15.6	20.6085	8.1	4.2282
500	23.1	0.7379	100.7	174.3566	102.7	21.1715
5000	73.8	3.6148	3215	1350.2	503.2	100.032

N_{disc}	Avec η_1^+ (méth. 1)		Avec η_1^+ (méth. 3)		Avec l^+	
	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t	Moy.	Ec.-t
50	5.8	2.6583	18.3	18.5296	12.7	3.7431
500	23	0.8165	355.9	187.0101	122.5	39.4243
5000	71	0	1017.3	1656	1086.4	144.5

Nous allons finalement proposer un estimateur direct assez performant obtenu à partir de l'idée suivante : compter les changements de signe des pentes du signal. En effet, pour une bosse élémentaire donnée g quelconque, on note un changement de pente, au sens où g est croissante puis décroissante. On peut ainsi penser que chaque passage d'une pente positive à une pente négative correspond à une bosse de F . On forme donc la suite des différences

$$d_i = F(s_{i+1}) - F(s_i) \quad (i = 1, \dots, 5N_{disc} - 1)$$

et on définit c_i par

$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } d_i < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a par construction

$$c_{i+1} - c_i = \begin{cases} 1 & \text{si on passe d'une pente positive à une pente négative} \\ -1 & \text{si on passe d'une pente négative à une pente positive} \\ 0 & \text{si la pente garde le même signe} \end{cases}$$

On admet alors que le nombre T de bosses tombées est approximativement égal au nombre de changements de signe de la pente de F , c'est-à-dire :

$$\widehat{T} = \sum |c_{i+1} - c_i|. \quad (7.12)$$

Ce nombre total de bosses valant $M - N + 1$, on obtient l'estimateur de M :

$$\widehat{M} = N - 1 + \sum |c_{i+1} - c_i| \quad (7.13)$$

Cette estimation suppose connue la borne N qui, le cas échéant, aura été estimée préalablement. L'estimation de T est fiable, l'erreur principale vient de l'estimation de N . L'avantage de cet estimateur est qu'il ne tient pas compte des autres paramètres de base (ce qui est théoriquement cohérent).

À titre d'exemple, on considère à nouveau la fonction de bosses standard F de paramètres $\alpha = 0.8$, $C = S = 1$, avec g la bosse triangle et $\nu = \mathcal{U}([-1, 2])$. On réalise 100 tirages aléatoires indépendants pour différentes valeurs de N , M et N_{disc} . On estime le paramètre $T = M - N + 1$. Les résultats sont relativement bons (voir TAB. 7.6). Les nombres en gras indiquent les estimations correctes.

TAB. 7.6. Estimation du nombre total de bosses T d'une fonction de bosses pour différentes valeurs de N , M et N_{disc} .

N	M	T	Estimation de T					
			$N_{disc} = 500$		$N_{disc} = 2000$		$N_{disc} = 10000$	
			Moy.	Ec.-t.	Moy.	Ec.-t.	Moy.	Ec.-t.
1	10	10	12.60	1.9551	12.60	1.9551	12.60	1.9551
1	50	50	49.00	5.3125	54.20	6.6966	55.20	6.0882
100	600	501	282.90	7.3401	561.40	18.4343	666.70	26.8661
100	1500	1401	296.90	11.1699	842.60	15.9457	1531.70	34.2963
2000	5000	3001	281.70	17.8702	1131.50	13.5503	3730.30	43.1098
500	5000	4501	327.50	8.6185	1242.70	12.4548	3704.80	58.8780

7.3.2.3. Estimation conjointe

Supposons C , α et g donnés. Avec l'approximation

$$\Sigma_{1,1} = (N^{-\alpha} - M^{-\alpha})/\alpha$$

dans l'équation (7.2), on obtient le système

$$\begin{cases} -N + M & = T - 1 \\ N^{-\alpha} - M^{-\alpha} & = \frac{\alpha I}{2SC\mu_1} \end{cases}$$

Sa résolution fournit simultanément les valeurs de \widehat{N} et \widehat{M} .

Pour terminer ce paragraphe, signalons que tous les estimateurs précédents sont théoriques. En pratique, il faut s'assurer que \widehat{N} et \widehat{M} sont entiers, en prenant par exemple comme valeur estimée l'entier non nul le plus proche.

7.3.3. Estimation de α

C'est un paramètre fondamental car c'est un «vrai» paramètre théorique de F contrairement aux bornes qui valent $N = 1$ et $M = \infty$. Nous avons démontré que le paramètre α est lié à la dimension fractale de F . Précisément, on suppose ici que g est lipschitzienne et que ν est suffisamment régulière, de sorte que α est l'exposant de Hölder uniforme de F et que

$$\dim_B(\Gamma_F) = 2 - \alpha = \dim_{\mathcal{R}}(\Gamma_F).$$

Le problème de l'estimation de α est donc un problème d'estimation de dimension fractale. Pour le résoudre, de nombreuses techniques ont été développées. Elles sont en rapport direct avec le chapitre 3 et sont utilisables pour notre modèle.

On suppose que la dimension considérée est déterminée par une fonction Q de la façon suivante :

$$\dim(\Gamma_f) = D + 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log Q(\varepsilon)}{\log \varepsilon},$$

cette limite pouvant être inférieure ou supérieure (cf. section 3.1). On a par exemple

- $Q(\varepsilon) = V(f, \varepsilon)$ pour la dimension de boîte,
- $Q(\varepsilon) = \varepsilon \int_0^1 \sqrt{1 + f'_\varepsilon(x)^2} dx$ pour la dimension de régularisation ($D = 1$).

Dans notre situation, on a théoriquement

$$\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log Q(\varepsilon)}{\log \varepsilon}.$$

En pratique, on utilise les courbes de rugosité associées à Q . Nous les avons introduites lorsque Q était une fonction de structure (cf. section 5.2). Dans notre cas, nous estimons donc α par la pente en 0 des diagrammes logarithmiques. Si plusieurs choix sont possibles pour Q , la qualité de l'alignement, donc de l'estimation, en dépend énormément. L'exemple classique des fonctions de structure $S_{i,q}(\varepsilon)$ n'est pas ici adapté (cf. § 6.2.1 page 125).

Nous présentons deux méthodes plus sûres relevant des idées précédentes. Elles offrent l'avantage de travailler directement à partir du signal discrétisé et donc ne nécessitent pas la connaissance préalable d'autres paramètres. Rappelons à ce propos un problème lié au signal discrétisé : N_{disc} ne doit pas être trop petit de façon à ne

pas surestimer α . Mais, plus spécialement pour les fonctions de bosses, M doit être assez grand puisque ce sont les bosses de rang élevé qui donnent son irrégularité au signal. La qualité asymptotique des estimateurs est fortement liée à ces problèmes. On choisira pour les tests numériques la fonction de bosses F de paramètres $N = 50$, $M = 5000$, $C = S = 1$, avec g la bosse triangle et ν la loi uniforme sur $[-1, 2]$. On suppose $M = N_{disc}$.

7.3.3.1. Variations quadratiques

On utilise ici la dimension de boîte. On exploite à nouveau les fonctions de structure mais de façon discrète. Pour $N \geq 1$ on pose

$$V_0^2(N) = \frac{1}{2^N} \sum_{k=0}^{2^N-1} \left| F\left(\frac{k+1}{2^N}\right) - F\left(\frac{k}{2^N}\right) \right|^2,$$

$$V_1^2(N) = \frac{1}{2^N - 1} \sum_{k=1}^{2^N-1} \left| F\left(\frac{k+1}{2^N}\right) - F\left(\frac{k-1}{2^N}\right) \right|^2,$$

$$V_2^2(N) = \frac{1}{2^N - 1} \sum_{k=1}^{2^N-1} \left| F\left(\frac{k+1}{2^N}\right) + F\left(\frac{k-1}{2^N}\right) - 2F\left(\frac{k}{2^N}\right) \right|^2.$$

On a $V_0^2(N) = s_2^2(2^{-N})$ et donc presque sûrement (cf. théorème 3.7.10) :

$$V_0^2(N) \simeq 2^{-2\alpha N}.$$

Plus généralement, on peut prouver que $V_j(N) \simeq 2^{-\alpha N}$. En pratique on ne dispose pas nécessairement d'une discrétisation en points dyadiques mais il est toujours possible de définir

$$\widehat{V}_0^2(N_{disc}) = \frac{1}{N_{disc} - 1} \sum_{i=1}^{N_{disc}-1} |F(t_{i+1}) - F(t_i)|^2, \quad (7.14)$$

$$\widehat{V}_1^2(N_{disc}) = \frac{1}{N_{disc} - 2} \sum_{i=2}^{N_{disc}-1} |F(t_{i+1}) - F(t_{i-1})|^2, \quad (7.15)$$

$$\widehat{V}_2^2(N_{disc}) = \frac{1}{N_{disc} - 2} \sum_{i=2}^{N_{disc}-1} |F(t_{i+1}) + F(t_{i-1}) - 2F(t_i)|^2, \quad (7.16)$$

et de considérer les quantités

$$\widehat{\alpha}_j = \frac{-\log \widehat{V}_j(N_{disc})}{\log(N_{disc})} \quad (j \in \{0, 1, 2\}). \quad (7.17)$$

Avec une subdivision régulière, l'emploi de ces estimateurs reste légitime et fournit de très bons résultats (voir TAB. 7.7). On a aussi tracé les graphes de $\alpha \mapsto \widehat{\alpha}_i$ (voir FIG. 7.7) : comparer avec la figure 6.2.

Notons qu'il est possible de construire à partir des quantités (7.14) (*resp.* (7.16)) de meilleurs estimateurs de l'exposant de Hurst pour les fonctions de Weierstrass (*resp.* le mouvement brownien fractionnaire), voir par exemple [3] (*resp.* [8]).

TAB. 7.7. Estimation de l'exposant α d'une fonction de bosses par la méthode des variations quadratiques.

Valeur exacte α	Valeurs estimées		
	$\hat{\alpha}_0$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$
0.1	0.17948	0.12860	0.15114
0.2	0.27199	0.21853	0.24762
0.3	0.36514	0.30984	0.34394
0.4	0.45036	0.39251	0.43401
0.5	0.54155	0.48186	0.52912
0.6	0.62853	0.56549	0.62460
0.7	0.70864	0.64147	0.71757
0.8	0.79005	0.72102	0.80639
0.9	0.86811	0.79624	0.89848

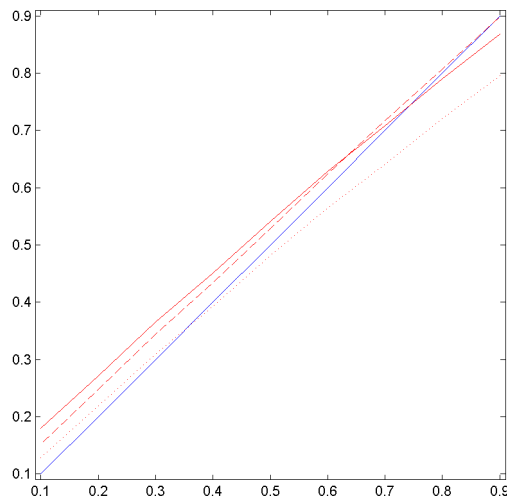


FIG. 7.7. Estimation de l'exposant α d'une fonction de bosses par la méthode des variations quadratiques : $\hat{\alpha}_0$ (trait plein), $\hat{\alpha}_1$ (trait pointillé) et $\hat{\alpha}_2$ (trait discontinu).

7.3.3.2. Longueur du graphe

On utilise maintenant la dimension de régularisation. On choisit de régulariser F à l'aide du noyau gaussien :

$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)$$

Pour $\varepsilon > 0$ on a :

$$F_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int_0^1 F(t) \exp\left(-\frac{(t-x)^2}{2\varepsilon^2}\right) dt,$$

$$F'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^3 \sqrt{2\pi}} \int_0^1 F(t)(t-x) \exp\left(-\frac{(t-x)^2}{2\varepsilon^2}\right) dt.$$

Expérimentalement, on discrétise ces relations à partir de $\{u_i\}$:

$$F_\varepsilon(u_i) = \frac{N_{disc}^{-1}}{\varepsilon \sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_{disc}} F(u_j) \exp\left(-\frac{(u_j - u_i)^2}{2\varepsilon^2}\right),$$

$$F'_\varepsilon(u_i) = \frac{N_{disc}^{-1}}{\varepsilon^3 \sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{N_{disc}} F(u_j)(u_j - u_i) \exp\left(-\frac{(u_j - u_i)^2}{2\varepsilon^2}\right).$$

On obtient deux formules pour la longueur approchée du graphe de F_ε :

$$\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon(N_{disc}) = \sum_{i=1}^{N_{disc}-1} \sqrt{(F_\varepsilon(u_{i+1}) - F_\varepsilon(u_i))^2 + (u_{i+1} - u_i)^2} \quad (7.18)$$

$$\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon(N_{disc}) = \frac{1}{N_{disc}} \sum_{i=1}^{N_{disc}} \sqrt{1 + F'_\varepsilon(u_i)^2} \quad (7.19)$$

La première formule utilise une discrétisation de la dérivée de F_ε au point u_i par la pente en ce point. La seconde formule utilise l'expression théorique de la dérivée. En pratique la différence est imperceptible. Les résultats sont bons surtout pour les grandes valeurs de α (voir TAB. 7.8). A causes des phénomènes de discrétisation, on a tendance à surestimer la dimension fractale du graphe. On a utilisé $\varepsilon = N_{disc}^{-1}$.

TAB. 7.8. Estimation de l'exposant α d'une fonction de bosses par la méthode de régularisation.

Valeur exacte α	Valeurs estimées	
	$\widehat{\alpha}$ via (7.18)	$\widehat{\alpha}$ via (7.19)
0.1	0.27917	0.27612
0.2	0.36288	0.36031
0.3	0.45309	0.45062
0.4	0.53215	0.52936
0.5	0.61900	0.61669
0.6	0.69900	0.69404
0.7	0.76488	0.76339
0.8	0.83827	0.83669
0.9	0.89868	0.89765

7.3.3.3. *Utilisation des autres paramètres*

Si on connaît certains paramètres du modèle, on peut estimer α simplement avec nos outils. Donnons un exemple. On suppose connus les paramètres optionnels C et S , et la bosse élémentaire g . Les moments μ_i sont donc également connus et nous avons estimé I , N et $\pi_{i,2}$. Nous obtenons alors un estimateur de α en utilisant les équations (7.2), (7.3) et (7.4).

Utilisons la relation (7.2) en faisant encore l'approximation

$$\Sigma_{1,1} \approx (N^{-\alpha} - M^{-\alpha})/\alpha,$$

et supposons $M^{-\alpha}$ négligeable. On obtient alors

$$\log \alpha + \alpha \log N = \log \left(\frac{2CS\mu_1}{I} \right). \quad (7.20)$$

Utilisons ensuite la relation (7.3) et supposons pour simplifier que ν est la distribution uniforme. En procédant par approximation et en négligeant $M^{-2\alpha}$, on obtient

$$\log \alpha + 2\alpha \log N = \log \left(\frac{2\mu_2 C^2 S}{3} \right) - 2\pi_{1,2}. \quad (7.21)$$

Dans le cas ν affine quelconque, la relation (7.4) donne

$$\log \alpha + 2\alpha \log N = \log (3C^2S(A+2B)\mu_2) - 2\pi_{2,2}.$$

Dans tous les cas une valeur approchée de α est donnée par l'unique zéro sur $]0, 1[$ d'une fonction du type

$$x \mapsto \log x - (ax + b)$$

dont la détermination est un problème relativement simple. Dans tous les cas les résultats sont très bons. Si tous les autres paramètres sont connus, il n'y a presque aucune erreur (voir TAB. 7.9).

TAB. 7.9. Estimation de l'exposant α d'une fonction de bosses lorsque les autres paramètres sont connus.

Valeur exacte α	Valeurs estimées	
	$\hat{\alpha}$ via (7.20)	$\hat{\alpha}$ via (7.21)
0.1	0.19002	0.13047
0.2	0.26093	0.21325
0.3	0.34053	0.30528
0.4	0.42649	0.40167
0.5	0.51697	0.49999
0.6	0.61056	0.59915
0.7	0.70625	0.69865
0.8	0.80334	0.79830
0.9	0.90136	0.89801

7.3.4. Estimation de g

Il s'agit d'un problème plus délicat : estimer une fonction. Nous allons traiter un cas particulier et présenter le cas général. Là encore, l'estimation sera de bonne qualité si on connaît bien certains paramètres.

7.3.4.1. Modèles paramétriques

Il s'agit du cas où g est supposée appartenir à une famille donnée $\mathcal{F} = (g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de bosses élémentaires. Le problème est alors simplifié : déterminer le paramètre λ . Pour ce faire, l'idée est de déterminer λ *via* certaines quantités le caractérisant complètement et se prêtant bien à une estimation.

Le *modèle paramétrique* correspondant est la donnée du couple (\mathcal{F}, φ) où φ est une fonction définie sur \mathcal{F} (ou sur Λ). Le point crucial est le choix par avance d'un tel modèle. Celui-ci va concrètement dépendre de la modélisation à effectuer. Toutefois, il faut tenir compte de certains faits théoriques.

Tout d'abord la seule contrainte imposée à φ est que ses valeurs soient estimables à partir d'un signal discrétisé, et qu'elle soit un *critère d'identification* c'est-à-dire qu'elle soit bijective, d'inverse facilement calculable. Cela suppose que \mathcal{F} soit constituée de fonctions assez simples au risque de ne pas être très riche. Supposons par exemple que $\varphi = \mu_i$. En toute généralité, $\hat{\varphi}$ est un nombre de l'intervalle $]0, 1[$. Aussi, il est *a priori* nécessaire que $\varphi(\mathcal{F}) =]0, 1[$. Au contraire cela oblige \mathcal{F} à contenir beaucoup d'éléments, par exemple Λ ne doit pas être dénombrable.

Il faut de plus tenir compte de toute la dépendance entre λ et g . Il semble évident que λ va régir d'autres propriétés de g : convexité, exposant de Hölder, etc. C'est dire que la détermination de g par le critère φ induit des propriétés supplémentaires à g qui ne sont pas toujours justifiées. Il est parfois utile de choisir une famille \mathcal{F} neutre vis-à-vis de telle ou telle propriété, par exemple constituée uniquement de fonctions lipschitziennes.

Nous allons présenter quelques modèles (\mathcal{F}, φ) possibles. On utilise encore les équations (7.2) à (7.4) qui font intervenir les premiers moments de g ; on choisit donc $\varphi = \mu_i$. On a, indépendamment de ν :

$$\hat{\mu}_1 = \frac{I}{2CS\Sigma_{1,1}}. \quad (7.22)$$

Si on suppose ν affine (avec $A \neq 0$), on a :

$$\hat{\mu}_1 = \left(\frac{3 \cdot 10^{2\pi_{1,2}} - 10^{2\pi_{2,2}}}{16(ACS)^2(\Sigma_{1,1}^2 - \Sigma_{2,2})} \right)^{1/2}, \quad (7.23)$$

puis :

$$\hat{\mu}_2 = \frac{3 \cdot 10^{2\pi_{1,2}} - 4(AI)^2 \left(1 - \frac{\Sigma_{2,2}}{\Sigma_{1,1}^2}\right)}{6(A + 2B)C^2S\Sigma_{1,2}} \quad (7.24)$$

et

$$\hat{\mu}_2 = \frac{10^{2\pi_{2,2}}}{6(A + 2B)C^2S\Sigma_{1,2}}. \quad (7.25)$$

Il est possible d'estimer I, A, B, N, M et α ; de sorte que si C et S sont donnés, les membres de droite sont estimables. On obtient alors des estimateurs des moments. Pour avoir un modèle paramétrique, il faut encore trouver des familles $(g_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ adaptées à l'identification d'une bosse par son moment μ_i . De nombreuses classes sont possibles, donnons quelques exemples. On utilise certains résultats démontrés en annexe.

Bosses puissance.

Il s'agit des fonctions $g_{\alpha,\beta}$ définies pour $\alpha, \beta > 0$ par

$$\forall t \in [0, 1] \quad g_{\alpha,\beta}(t) = (1 - t^\alpha)^\beta.$$

On s'intéresse aux sous-familles suivantes, les bosses puissance

- de première espèce : ce sont les fonctions $g_{\alpha,1}$, $\alpha > 0$
- de seconde espèce : ce sont les fonctions $g_{1,\alpha}$, $\alpha > 0$.

PROPOSITION 7.3.3. *L'application μ_1 est une bijection de \mathcal{F} sur $]0, 1[$ dans chacun des cas suivants :*

i) $\mathcal{F} = \{g_{\alpha,1} : \alpha > 0\}$ et alors μ_1^{-1} est définie par l'équivalence

$$\mu_1^{-1}(x) = g_{\alpha,1} \iff \alpha = \frac{x}{1-x}.$$

ii) $\mathcal{F} = \{g_{1,\alpha} : \alpha > 0\}$ et alors μ_1^{-1} est définie par l'équivalence

$$\mu_1^{-1}(x) = g_{1,\alpha} \iff \alpha = \frac{1-x}{x}.$$

PROPOSITION 7.3.4. *L'application μ_2 est une bijection de \mathcal{F} sur $]0, 1[$ dans chacun des cas suivants :*

i) $\mathcal{F} = \{g_{\alpha,1} : \alpha > 0\}$ et alors μ_2^{-1} est définie par l'équivalence

$$\mu_2^{-1}(x) = g_{\alpha,1} \iff \alpha = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{8}{x}} - 3}.$$

ii) $\mathcal{F} = \{g_{1,\alpha} : \alpha > 0\}$ et alors μ_2^{-1} est définie par l'équivalence

$$\mu_2^{-1}(x) = g_{1,\alpha} \iff \alpha = \frac{1-x}{2x}.$$

Il résulte de ces propositions que ni μ_1 , ni μ_2 ne sont bijectives sur la famille de toutes les bosses puissance. Par exemple

$$\mu_1(g_{2,1}) = \mu_1(g_{1,1/2}) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \mu_2(g_{2,1}) = \mu_2(g_{1,7/16}) = \frac{8}{15}.$$

On peut toutefois «mélanger» les deux premiers types de bosses en considérant la famille $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ où

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \{g_{p,1} : p \in \mathbb{N}^*\} & : & \text{bosses polynôme de première espèce,} \\ \mathcal{F}_2 &= \{g_{1,p} : p \in \mathbb{N}^*\} & : & \text{bosses polynôme de seconde espèce.} \end{aligned}$$

On a alors les résultats suivants :

COROLLAIRE 7.3.5. *L'application μ_1 est une bijection de \mathcal{F} dans $]0, 1[$ et on a de plus la discrimination suivante :*

$$i) \mu_1^{-1}(x) \in \mathcal{F}_1 \iff x \in [1/2, 1[\\ \text{et dans ce cas } \mu_1^{-1}(x) = g_{p,1} \text{ avec } p = x(1-x)^{-1}.$$

$$ii) \mu_1^{-1}(x) \in \mathcal{F}_2 \iff x \in]0, 1/2] \\ \text{et dans ce cas } \mu_1^{-1}(x) = g_{1,p} \text{ avec } p = (1-x)x^{-1}.$$

$$iii) x = 1/2 \iff \mu_1^{-1}(x) \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \iff \mu_1^{-1}(x) = g_{1,1}.$$

Démonstration. En fait tout est contenu dans la proposition 7.3.3. Il suffit d'établir les deux faits suivants :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \mu_1(g_{p,1}) \geq 1/2 \quad \text{avec égalité si et seulement si } p = 1, \\ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \mu_1(g_{1,p}) \leq 1/2 \quad \text{avec égalité si et seulement si } p = 1,$$

ce qui est facile. \square

COROLLAIRE 7.3.6. *L'application μ_2 est une bijection de \mathcal{F} dans $]0, 1[$ et nous avons de plus la discrimination suivante :*

$$i) \mu_2^{-1}(x) \in \mathcal{F}_1 \iff x \in [1/3, 1[\\ \text{et dans ce cas } \mu_2^{-1}(x) = g_{p,1} \text{ avec } p = 2 \left(\sqrt{1 + \frac{8}{x}} - 3 \right)^{-1}.$$

$$ii) \mu_2^{-1}(x) \in \mathcal{F}_2 \iff x \in]0, 1/3] \\ \text{et dans ce cas } \mu_2^{-1}(x) = g_{1,p} \text{ avec } p = (1-x)(2x)^{-1}.$$

$$iii) x = 1/3 \iff \mu_2^{-1}(x) \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \iff \mu_2^{-1}(x) = g_{1,1}.$$

Démonstration. C'est analogue au corollaire précédent. Il suffit d'établir les deux faits suivants :

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \mu_2(g_{p,1}) \geq 1/3 \quad \text{avec égalité si et seulement si } p = 1, \\ \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \mu_2(g_{1,p}) \leq 1/3 \quad \text{avec égalité si et seulement si } p = 1,$$

ce qui est là encore facile. \square

Le choix d'une telle famille est délicat car il n'offre qu'un ensemble dénombrable de moments. Toutefois les bosses g sont simples et nous disposons de formules exactes pour la courbe de structure déterministe. De plus c'est une famille homogène au sens où toutes les bosses sont des polynômes. Nous utiliserons les bosses puissance comme prototypes de bosses régulières. On pourra se limiter aux polynômes.

Bosses trapèze.

On renvoie à l'annexe page 220 pour leur définition. On s'intéresse aux sous-familles suivantes, les bosses trapèze

- de première espèce : ce sont les fonctions $g_{\alpha,1}$,
- de seconde espèce : ce sont les fonctions $g_{\alpha,\alpha}$.

PROPOSITION 7.3.7. Soit $\mathcal{F} = \{g_{\alpha,1} : \alpha \in]0, 1[\}$. Alors

i) L'application μ_1 est une bijection de \mathcal{F} sur $]1/2, 1[$ et μ_1^{-1} est définie par l'équivalence

$$\mu_1^{-1}(x) = g_{\alpha,1} \iff \alpha = 2x - 1.$$

ii) L'application μ_2 est une bijection de \mathcal{F} sur $]1/3, 1[$ et μ_2^{-1} est définie par l'équivalence

$$\mu_2^{-1}(x) = g_{\alpha,1} \iff \alpha = \frac{3x - 1}{2}.$$

PROPOSITION 7.3.8. Soit $\mathcal{F} = \{g_{\alpha,\alpha} : \alpha \in]0, 1[\}$. Alors

i) L'application μ_1 est une bijection de \mathcal{F} sur $]0, 1[$ et μ_1^{-1} est définie par l'équivalence

$$\mu_1^{-1}(x) = g_{\alpha,\alpha} \iff \alpha = x.$$

ii) L'application μ_2 est une bijection de \mathcal{F} sur $]0, 1[$ et μ_2^{-1} est définie par l'équivalence

$$\mu_2^{-1}(x) = g_{\alpha,\alpha} \iff \alpha = \frac{-1 + \sqrt{1 + 24x}}{4}.$$

L'utilisation des bosses trapèze de seconde espèce est donc possible. Elles sont très proches des bosses puissance $g_{\alpha,\alpha^{-1}}$. Nous utiliserons cette famille comme prototype de bosses non dérivables. Toutefois on ne dispose pas de formules détaillées pour les fonctions de structure déterministes.

Le choix de la fonction déterminante est imposé par les équations dont on dispose. Ce choix impose également la famille de référence. Ainsi, on se prive d'une large classe de bosses élémentaires et donc sûrement de la «vraie» bosse g . C'est l'une des limites de la méthode.

Un autre problème vient, en pratique, de devoir estimer g en fin de procédure. On a en effet besoin des autres paramètres dans les équations (7.2) à (7.4). Toutes les erreurs vont se répercuter dans cette estimation. Or celle-ci est très sensible. Une faible variation de μ_i donne un écart grand pour le paramètre λ . C'est le cas pour la famille des bosses puissance. Une solution est de se limiter aux polynômes : expérimentalement, le fait d'arrondir le paramètre à la valeur entière la plus proche gomme artificiellement ces fluctuations.

7.3.4.2. Cas général

En pratique, l'utilisation des modèles paramétriques n'est pas restrictive. Toutefois, on peut se demander s'il est possible de trouver g sans aucune hypothèse préalable à son sujet. Les moments d'ordre 1 et 2 ne suffisent pas à caractériser une bosse élémentaire quelconque. Mais la donnée de tous les moments est suffisante pour une large classe d'entre elles.

LEMME 7.3.9. Soit g une bosse élémentaire réalisant un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Alors g est entièrement déterminée par la suite de ses moments.

Démonstration. Soient g_1 et g_2 deux bosses élémentaires satisfaisant à l'hypothèse du lemme. Soient $(a_q)_{q \geq 0}$ et $(b_q)_{q \geq 0}$ les suites de leurs moments. Supposons que pour tout $q \geq 1$: $a_q = b_q$. Il suffit de montrer que pour tout $t \in [0, 1]$: $g_1(t) = g_2(t)$. Par

hypothèse, a_q et b_q peuvent s'écrire à l'aide des changements de variable définis par g_1 et g_2 comme

$$\begin{aligned} a_q &= \int_0^1 g_1(t)^q dt = \int_0^1 u^q (g_1^{-1}(u))' du, \\ b_q &= \int_0^1 g_2(t)^q dt = \int_0^1 u^q (g_2^{-1}(u))' du. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall q \geq 1 \quad \int_0^1 u^q (g_1^{-1}(u) - g_2^{-1}(u))' du = 0.$$

La fonction $(g_1^{-1} - g_2^{-1})'$ étant continue, il résulte du théorème des moments qu'elle est identiquement nulle. On en déduit $g_1^{-1} = g_2^{-1}$ puisque $g_1^{-1}(1) = g_2^{-1}(1) = 0$, et finalement $g_1 = g_2$. \square

En outre, il est possible de reconstruire concrètement une bosse à partir de ses moments :

THÉORÈME 7.3.10. *Soit g une bosse élémentaire réalisant un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Alors*

$$\forall t \in [0, 1] \quad g^{-1}(t) = 1 - \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(\frac{1 - e^{-itx}}{ix} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(ix)^q \mu_q}{q!} \right) dx.$$

Démonstration. Soit g satisfaisant l'hypothèse du théorème et \tilde{g} la fonction définie par :

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(1-t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit enfin U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $X = \tilde{g}(U)$.

On commence par établir le

LEMME. *X est une variable aléatoire positive, majorée par 1, qui ne charge pas les points, et qui admet des moments de tout ordre donnés par $\mathbb{E}(X^q) = \mu_q$. De plus, sa fonction de répartition F_X est définie par*

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \tilde{g}^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Le fait que g soit une bosse élémentaire assure que X est une variable aléatoire, à valeurs dans $[0, 1]$. Bornée, elle admet des moments de tout ordre donnés par

$$\mathbb{E}(X^q) = \int_{\Omega} (g(1-U))^q d\mathbb{P} = \int_0^1 (g(1-t))^q dt = \mu_q.$$

Ensuite, il est clair que

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$$

Soit $t \in [0, 1]$. Par construction, \tilde{g} est croissante sur $[0, 1]$. L'hypothèse faite sur g assure de plus qu'elle est bijective sur $[0, 1]$. On a alors

$$\mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(\tilde{g}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq \tilde{g}^{-1}(t)) = \tilde{g}^{-1}(t).$$

Nous obtenons ainsi l'expression voulue pour F_X . Enfin, cette dernière étant continue, X ne charge pas les points.

L'idée est maintenant d'obtenir une nouvelle expression de F_X faisant intervenir la suite $(\mu_q)_{q \geq 0}$. Nous utilisons pour cela la formule d'inversion suivante :

THÉORÈME (formules de Perron-Stieltjès). *Soit μ une mesure sur \mathbb{R} , bornée, et Φ sa transformée de Fourier. Pour tous réels $a < b$ on a :*

$$i) \mu\{a\} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T e^{-iax} \Phi(x) dx.$$

$$ii) \frac{1}{2}(\mu\{a\} + \mu\{b\}) + \mu(]a, b[) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-iax} - e^{-ibx}}{ix} \Phi(x) dx.$$

En appliquant ce théorème avec pour mesure μ la loi de X (qui ne charge pas les points) nous avons, pour $a = 0$ et $b = t \in [0, 1]$:

$$F_X(t) - F_X(0) = \mu([0, t]) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1 - e^{-itx}}{ix} \Phi(x) dx.$$

Maintenant, Φ n'est autre que la fonction caractéristique de X . Des propriétés de cette dernière, nous déduisons que Φ se développe en série entière sur \mathbb{R} selon

$$\Phi(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(iX)^q}{q!} x^q = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(ix)^q \mu_q}{q!}.$$

Puisque $F_X(0) = 0$, on a finalement établi que

$$\forall t \in [0, 1] \quad \tilde{g}^{-1}(t) = F_X(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(\frac{1 - e^{-itx}}{ix} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(ix)^q \mu_q}{q!} \right) dx.$$

Il reste à remarquer que

$$\forall t \in [0, 1] \quad \tilde{g}^{-1}(t) = 1 - g^{-1}(t)$$

pour que la démonstration soit complète. \square

Il est possible d'établir une telle formule de reconstruction sous des hypothèses plus faibles, en faisant intervenir le pseudo-inverse de g . Toutefois cette méthode n'est guère utilisable car d'une part il semble très difficile d'estimer μ_q pour de nombreuses valeurs de $q \geq 3$, d'autre part la formule se prête mal à la programmation informatique (série et intégrale généralisée). On peut toutefois utiliser ce résultat dans un cas particulier.

On suppose que ν est la loi uniforme sur $[-1, 2]$ et que le seul paramètre inconnu est la bosse g . Nous donnons ici une méthode permettant de calculer de proche en proche tous les termes μ_q . Elle est fondée sur le lemme suivant :

LEMME 7.3.11. *Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $q \geq 0$ on a*

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{E}(Y_n^q(t)) = \begin{cases} 1 & \text{si } q = 0 \\ \frac{2}{3} \frac{1}{n^{1+q\alpha}} \mu_q & \text{sinon} \end{cases}$$

où $Y_n(t) = n^{-\alpha}g(n(t - X_n))$.

En utilisant l'identité multinomiale et le fait que les variables $(Y_n(t))_{n \geq 1}$ sont indépendantes, on obtient, pour tout t et tout q :

$$\mathbb{E}(F(t)^q) = \sum_{\substack{q_N + \dots + q_M = q \\ q_i \in \mathbb{N}}} \frac{q!}{q_N! \dots q_M!} \mathbb{E}(Y_N^{q_N}(t)) \dots \mathbb{E}(Y_M^{q_M}(t)).$$

On a ainsi une expression de la forme

$$\mathbb{E}(F(t)^q) = P_q(\mu_1, \dots, \mu_q).$$

où P_q est un polynôme à q indéterminées, de degré total q et dont les coefficients sont par hypothèse connus. Le choix de ν rend $\mathbb{E}(F(t)^q)$ indépendant du point t et permet de construire un estimateur de cette quantité. On effectue l'approximation

$$\frac{1}{N_{disc}} \sum_{i=1}^{N_{disc}} F(t_i)^q \approx P_q(\mu_1, \dots, \mu_q),$$

le terme de gauche étant immédiat à calculer. Finalement, il est possible d'estimer successivement μ_1, μ_2 , etc. Cette méthode a ses limites. Elle est difficile à utiliser du fait d'une part de la complexité des polynômes P_q (en particulier elle est quasi inutilisable pour estimer tous les paramètres (N, M, α)), d'autre part de la nécessité de procéder pas à pas (les erreurs d'approximations étant commises en chaîne). Notons pour terminer que, pour les premières valeurs de q , on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(F(t)) &= \mu_1 \left(\frac{2}{3} \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{1+\alpha}} \right), \\ \mathbb{E}(F(t)^2) &= \mu_2 \left(\frac{2}{3} \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{1+2\alpha}} \right) + \mu_1^2 \left(\frac{4}{9} \sum_{\substack{n,m=N \\ n \neq m}}^M \frac{1}{(nm)^{1+\alpha}} \right), \end{aligned}$$

et $\mathbb{E}(F(t)^3) =$

$$\mu_3 \left(\frac{2}{3} \sum_{n=N}^M \frac{1}{n^{1+3\alpha}} \right) + \mu_1 \mu_2 \left(\frac{4}{9} \sum_{\substack{n,m=N \\ n \neq m}}^M \frac{1}{n^{1+2\alpha} m^{1+\alpha}} \right) + \mu_1^3 \left(\frac{8}{27} \sum_{\substack{n,m,l=N \\ n \neq m \neq l}}^M \frac{1}{(nml)^{1+\alpha}} \right).$$

7.3.4.3. Remarque

Dans tous les cas, deux bosses g différentes donnent des modèles différents, et il est théoriquement possible de le détecter. On peut par exemple construire deux familles très proches à partir des bosses puissance et trapèze (cf. annexe). Dans ce cas là, la différence de régularité se traduit par des crossovers différents. Mais en pratique il semble utopique de croire qu'on puisse faire cette distinction. Il est plus raisonnable de se limiter à un dictionnaire de référence comme les bosses polynômes.

Elles offrent une palette suffisamment riche pour la modélisation. Par exemple si g est la bosse trigonométrique $g(t) = \cos(\pi t/2)$, il est légitime de l'approcher par la bosse polynôme $g(t) = 1 - t^2$. Elles sont presque identiques, il est impossible de les distinguer expérimentalement.

7.4. Estimation des paramètres optionnels

Le facteur de réduction du support est clairement lié aux bornes N et M . Son estimation est très difficile et on peut supposer $S = 1$ en pratique. Le coefficient d'ajustement C est lui très important. L'idée est de ne l'estimer qu'en fin de procédure et donc de ne pas s'en servir avant. Il n'intervient ni pour estimer les paramètres auxiliaires, ni pour ν , N , M et α ; mais seulement pour estimer g . C'est donc cette estimation qu'il faut pouvoir faire sans connaître la valeur de C .

7.4.1. Estimer g

Pour estimer g sans connaître C , on peut simplement éliminer C entre les équations (7.2), (7.3) et (7.4).

En calculant (7.3)/(7.2)² on a

$$\frac{10^{2\pi_{1,2}}}{I^2} = \frac{(A+2B)}{2S} \frac{\mu_2}{\mu_1^2} \left(\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}^2} \right) + \frac{4}{3} A^2 \left(\frac{\Sigma_{1,1}^2 - \Sigma_{2,2}}{\Sigma_{1,2}} \right). \quad (7.26)$$

Cette relation reste complexe. En calculant (7.4)/(7.2)² on a

$$\frac{10^{2\pi_{2,2}}}{I^2} = \frac{3(A+2B)}{2S} \frac{\mu_2}{\mu_1^2} \left(\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}^2} \right). \quad (7.27)$$

En calculant (7.3)/(7.4) on obtient

$$10^{2(\pi_{1,2} - \pi_{2,2})} = \frac{1}{3} + \frac{8}{9} \left(\frac{A^2 S}{A+2B} \right) \left(\frac{\Sigma_{1,1}^2 - \Sigma_{2,2}}{\Sigma_{1,2}} \right) \frac{\mu_2}{\mu_1^2}. \quad (7.28)$$

Cette relation n'a d'intérêt que pour $A \neq 0$, c'est-à-dire si ν n'est pas uniforme. Sinon, on utilise (7.26) qui se simplifie en :

$$10^{2\pi_{1,2}} = \frac{I^2}{3S} \left(\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}^2} \right) \frac{\mu_2}{\mu_1^2}. \quad (7.29)$$

Remarquons que

$$\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}^2} \approx \frac{\alpha}{2} \frac{N^{-2\alpha} - M^{-2\alpha}}{(N^{-\alpha} - M^{-\alpha})^2}.$$

En supposant M suffisamment grand pour négliger $M^{-\alpha}$, on a donc l'approximation

$$\frac{\Sigma_{1,2}}{\Sigma_{1,1}^2} \approx \frac{\alpha}{2},$$

qui fournit

$$10^{2\pi_{1,2}} = \frac{\alpha I^2}{6S} \frac{\mu_2}{\mu_1^2}. \quad (7.30)$$

Cette expression offre l'avantage de ne plus dépendre des bornes N et M . Même si on commet une erreur, elle est souvent moindre que celle commise sur l'estimation des bornes, ce qui peut justifier l'emploi de cette approximation. Notons par ailleurs

que si g est connue, cela fournit un nouvel estimateur de α .

Quoiqu'il en soit, dans tous les cas on peut toujours estimer le quotient $\varphi = \mu_2/\mu_1^2$. Pour obtenir des modèles paramétriques utilisant cette fonction déterminante, il faut encore trouver de bonnes familles de bosses élémentaires. Bien que φ soit plus complexe, il est possible d'utiliser les familles déjà présentées.

Pour les bosses puissance $g_{\alpha,\beta}$, on a la

PROPOSITION 7.4.1. *L'application μ_2/μ_1^2 est une bijection de \mathcal{F} sur \mathcal{M} dans chacun des cas suivants :*

i) $\mathcal{F} = \{g_{\alpha,1} : \alpha > 0\}$, $\mathcal{M} =]1, 2[$ et alors $(\mu_2/\mu_1^2)^{-1}$ est définie par l'équivalence

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1^2}\right)^{-1}(x) = g_{\alpha,1} \iff \alpha = \frac{2-x}{2(x-1)}.$$

ii) $\mathcal{F} = \{g_{1,\alpha} : \alpha > 0\}$, $\mathcal{M} =]1, +\infty[$ et alors $(\mu_2/\mu_1^2)^{-1}$ est définie par l'équivalence

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1^2}\right)^{-1}(x) = g_{1,\alpha} \iff \alpha = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}.$$

Pour les bosses trapèze $g_{\alpha,\beta}$, on a la

PROPOSITION 7.4.2. *L'application μ_2/μ_1^2 est une bijection de \mathcal{F} sur \mathcal{M} dans chacun des cas suivants :*

i) $\mathcal{F} = \{g_{\alpha,1} : \alpha \in]0, 1[\}$, $\mathcal{M} =]1, 4/3[$ et alors $(\mu_2/\mu_1^2)^{-1}$ est définie par l'équivalence

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1^2}\right)^{-1}(x) = g_{\alpha,1} \iff \alpha = \frac{\sqrt{4-3x}}{2 - \sqrt{4-3x}}.$$

ii) $\mathcal{F} = \{g_{\alpha,\alpha} : \alpha \in]0, 1[\}$, $\mathcal{M} =]1, +\infty[$ et alors $(\mu_2/\mu_1^2)^{-1}$ est définie par l'équivalence

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1^2}\right)^{-1}(x) = g_{1,\alpha} \iff \alpha = \frac{1}{3x-2}.$$

Il est donc possible d'utiliser des modèles paramétriques pour estimer g sans faire intervenir C . L'inégalité de Jensen donne $\varphi \geq 1$. Puisqu'en toute généralité $\varphi \in [1, +\infty[$, il est plus judicieux d'utiliser les bosses puissance (*resp.* trapèze) de seconde espèce. En pratique un problème essentiel consiste en l'estimation de φ . En effet, $\hat{\varphi}$ étant une valeur approchée, la condition $\hat{\varphi} \geq 1$ n'est pas toujours vérifiée de sorte qu'il n'est pas possible de déterminer g . Dans ce cas on pourra choisir arbitrairement $\varphi = 1$.

7.4.2. Estimer C

Finalement, le dernier paramètre à estimer est la constante C . Nous proposons différentes façons de procéder. Elles sont de deux sortes :

1. *Les méthodes directes.* On utilise toujours les équations fondamentales (7.2) à (7.4). On obtient les estimateurs suivants :

$$\widehat{C} = \frac{I}{2S\mu_1\Sigma_{1,1}}, \quad (7.31)$$

$$\widehat{C} = \left(\frac{3 \cdot 10^{2\pi_{1,2}} - 4(AI)^2(1 - \Sigma_{2,2}/\Sigma_{1,1}^2)}{6(A + 2B)S\mu_2\Sigma_{1,2}} \right)^{1/2}, \quad (7.32)$$

$$\widehat{C} = \left(\frac{10^{2\pi_{2,2}}}{6(A + 2B)S\mu_2\Sigma_{1,2}} \right)^{1/2}, \quad (7.33)$$

et enfin, si $A \neq 0$:

$$\widehat{C} = \left(\frac{3 \cdot 10^{2\pi_{1,2}} - 10^{2\pi_{2,2}}}{16(AS\mu_1)^2(\Sigma_{1,1}^2 - \Sigma_{2,2})} \right)^{1/2}. \quad (7.34)$$

Ces estimateurs ont l'inconvénient de dépendre de tous les autres paramètres estimés. Les erreurs d'approximation se répercutent dans le calcul C .

2. *Les méthodes indirectes.* L'idée est la suivante : tous les paramètres excepté C ont été estimés, et sans faire intervenir la vraie valeur de C . Donc la fonction intermédiaire \widetilde{F} , obtenue avant le calcul de C , est égale à la fonction finale estimée \widehat{F} , à une constante multiplicative près. On peut alors obtenir C en se calant sur des valeurs de F . On considère la fonction \widetilde{F} obtenue avec les paramètres estimés et $C = 1$: on a le nuage de points $\widetilde{F}(s_i)$. On choisit alors par exemple C de sorte que

a) les *valeurs moyennes* coïncident :

$$\widehat{C} = \frac{\frac{1}{5N_{disc}} \sum_{i=1}^{5N_{disc}} F(s_i)}{\frac{1}{5N_{disc}} \sum_{i=1}^{5N_{disc}} \widetilde{F}(s_i)} = \frac{\sum_{i=1}^{5N_{disc}} F(s_i)}{\sum_{i=1}^{5N_{disc}} \widetilde{F}(s_i)}. \quad (7.35)$$

b) les *valeurs maximales* coïncident :

$$\widehat{C} = \frac{\max\{F(s_i) : i = 1, \dots, 5N_{disc}\}}{\max\{\widetilde{F}(s_i) : i = 1, \dots, 5N_{disc}\}}. \quad (7.36)$$

c) l'un des *paliers* coïncide :

$$\widehat{C} = 10^{\pi_{j,2} - \widetilde{\pi}_{j,2}}. \quad (7.37)$$

On peut penser à d'autres calages : pentes des courbes de structure, ordonnées à l'origine, etc. Ces méthodes donnent de très bons résultats.

7.5. Remarque

Dans de nombreux cas particuliers, il est possible de construire d'autres estimateurs. En effet, certaines familles de bosses élémentaires jouissent de propriétés spéciales permettant d'obtenir à partir des relations précédentes des équations plus intéressantes. On présente ici une telle propriété. L'idée est la suivante : si μ_q dépend

de g , il peut être possible de trouver une relation de dépendance entre certains moments, soit $\mathcal{M}(\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_n}) = 0$, vérifiée par chaque bosse de la famille. On peut alors éliminer le paramètre codant la bosse en combinant certaines équations. A titre d'exemple, on introduit les coefficients suivants :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}^* \quad k_{i,j} = \frac{\mu_i}{\mu_j}.$$

En supposant ν uniforme, on obtient

$$\frac{I}{10^{2\pi_{1,2}}} = \frac{3}{2C} \frac{\mu_1 \Sigma_{1,1}}{\mu_2 \Sigma_{1,2}}.$$

Si on peut encore négliger $M^{-\alpha}$ on a

$$\frac{\Sigma_{1,1}}{\Sigma_{1,2}} \approx 2N^\alpha,$$

et donc

$$k_{1,2} = \frac{CI}{3} 10^{-2\pi_{1,2}} N^{-\alpha}.$$

Si les bosses sont choisies dans une famille \mathcal{F} telle que $k_{1,2}$ est une constante ne dépendant que de \mathcal{F} et connue à l'avance, alors on peut estimer N , α , ou encore la constante optionnelle C . On a ainsi

$$\widehat{C} = \frac{3k_{1,2}}{I} 10^{2\pi_{1,2}} N^\alpha.$$

On obtient des formules analogues, légèrement plus complexes, si on peut seulement négliger $M^{-2\alpha}$. Notons que le paramètre S n'intervient pas. Nous donnons en l'annexe (voir page 221) l'exemple d'une famille de bosses ayant une telle propriété. Bien sûr l'estimation de g ne saurait utiliser la fonction $\varphi = k_{1,2}$.

7.6. Algorithme de base

Nous avons donné au fur et à mesure de leur construction des exemples d'estimations de la plupart des paramètres. Bien sûr tout dépend des données connues. Pour terminer ce chapitre, nous anticipons le chapitre suivant en donnant une procédure d'estimation globale de tous les paramètres d'une fonction de bosses. De nombreuses variantes sont possibles selon l'ordre des estimations et le choix des méthodes. Celles-ci ont toutes été détaillées précédemment, on renverra le lecteur aux équations correspondantes.

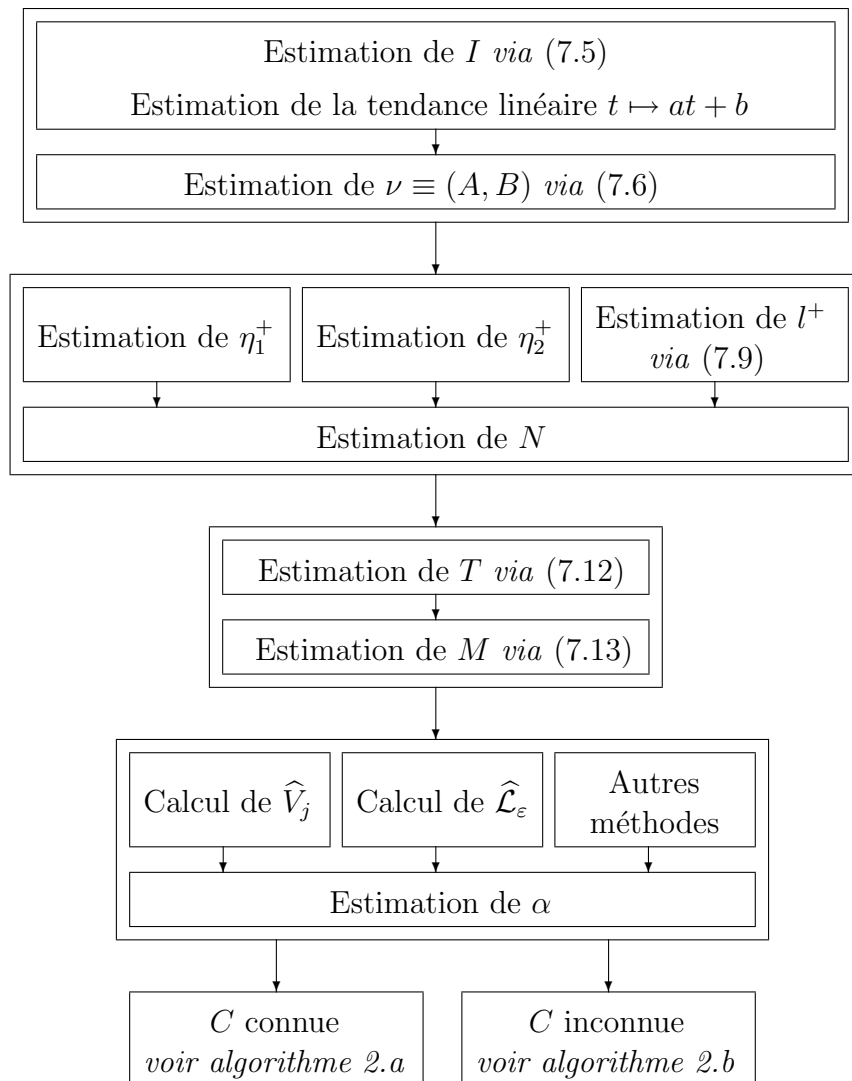
On suppose que la densité de ν est affine et que S vaut 1.

La procédure suivante permet d'estimer tous les paramètres du modèle. Elle est facilement adaptable aux cas où certains paramètres seraient connus. Les principales étapes sont, dans l'ordre :

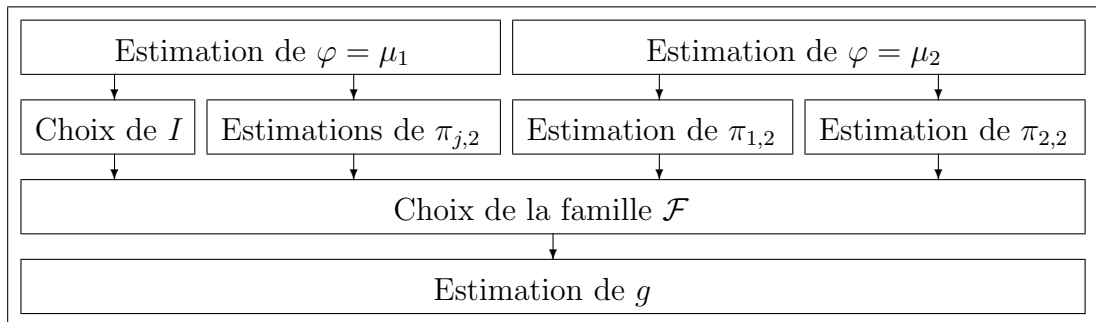
1. Estimer ν par ses paramètres A et B .
2. Estimer la borne inférieure N .
3. Estimer la borne supérieure M .
4. Estimer l'exposant α .
5. Estimer la bosse élémentaire g .
6. Estimer le cas échéant la constante C .

L'algorithme suivant détaille les étapes précédentes en indiquant les estimateurs à calculer selon les choix de l'utilisateur. Il est important de distinguer si C est connue ou non car la procédure est très différente selon les cas. C'est pourquoi il se décompose en deux parties : une partie 1. commune ; une partie 2. spécifique où la méthode d'estimation de g est ou non imposée (2.a ou 2.b).

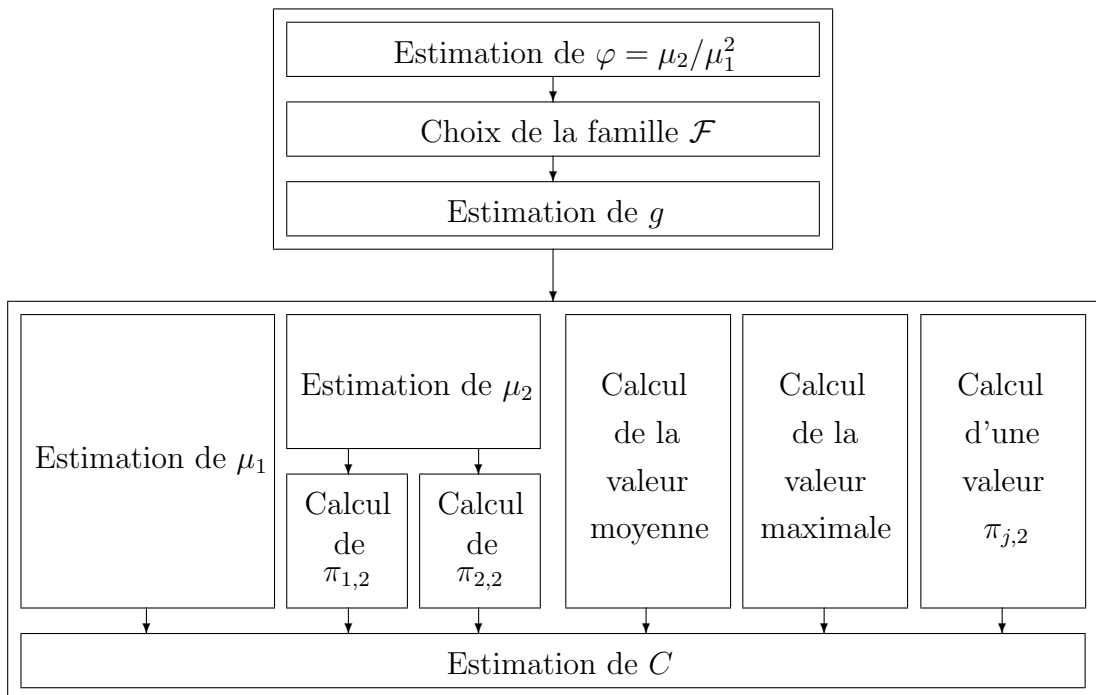
Algorithme partie 1.



Algorithme partie 2.a. : C est connue.



Algorithme partie 2.b. : C est inconnue.



Soulignons un point concernant l'estimation finale de C . Tous les paramètres ont été estimés, tous avec une certaine erreur. La constante C , estimée par calage, va «gommer» toutes ces erreurs. On obtiendra ainsi des signaux indiscernables visuellement, et globalement identiques.

Dans toutes les procédures d'estimation il faut ajouter des *tests de plausibilité*. En effet, les valeurs estimées peuvent être théoriquement aberrantes. Dans ces cas, elles sont inutilisables. On choisit alors arbitrairement des valeurs par défaut. Donnons un exemple. Si l'estimation de μ_1 fournit $\hat{\mu}_1 > 1$, on ne peut pas inverser ce moment pour retrouver une bosse élémentaire g . Dans ce cas, nous prenons par défaut la bosse triangle. Nous ne précisons ni l'ensemble des tests ni le choix des paramètres par défaut.

7.7. Exemples

Nous présentons trois exemples mettant en évidence l'influence des bornes N et M , et de la bosse élémentaire g . Pour chacun d'eux, on se donne une fonction de bosses inconnue F_i définie sur $[-1, 2]$ par la série (7.1) avec $C = S = 1$ et ν la loi uniforme sur $[-1, 2]$. On estime tous les paramètres du modèle, en commençant par les paramètres auxiliaires. La procédure d'estimation est la même dans les trois cas. Nous avons choisi les estimateurs qui donnent expérimentalement les meilleurs résultats. Ils sont utilisés dans l'algorithme du chapitre 8, page 189. On obtient ainsi une fonction modèle \hat{F}_i qui doit être relativement proche de l'original. Pour chaque exemple, on trace les graphes (aléatoires) des deux fonctions et surtout les spectres de structure d'ordre 1 et 2. La gamme choisie est $\{0.1, 0.5, 1, 2, 4, 10\}$. L'analyse de concordance de ces courbes conduira à déclarer les signaux indiscernables ou non. Rappelons que N_{disc} est le nombre de points de discrétisation de $[0, 1]$ (cf. page 139).

7.7.1. Exemple 1

Commençons par un exemple simple où N n'est pas trop petit et M reste modéré :

$$F_1(t) = \sum_{n=100}^{1000} n^{-0.6} g_1(n(t - X_n)),$$

avec pour g_1 la bosse triangle. On implémente F_1 avec $N_{disc} = 2000$ (voir FIG. 7.8). Les paramètres auxiliaires sont tous estimés avec une erreur très acceptable (voir TAB. 7.10). Ainsi, les paramètres principaux sont très proches des valeurs exactes (voir TAB. 7.11). Il n'y a pas d'erreur sur la bosse g , et l'écart pour α et ν est très faible. La seule différence provient des bornes approchées par excès. Le calibrage par \hat{C} permet de compenser ces effets. Notons que \hat{C} est peu différent de 1 ce qui montre que la compensation n'est toutefois pas très importante. L'analyse des spectres de structure confirme clairement ces impressions. Rappelons que le calage est fait sur *un seul* palier. On voit ici que tous les paliers sont à la même hauteur, ce qui signifie que les coefficients de rigidité $c_{p,q}^{(i)} > 0$ définis par (5.10) sont les mêmes. Leur validité est confirmée par le fait que pour toutes les courbes il n'y a pas d'erreur sur l'ordonnée à l'origine. Globalement, les signaux ont des spectres identiques. Finalement, la

comparaison des empreintes de F_1 et \widehat{F}_1 est significative. Les deux signaux peuvent être déclarés indiscernables.

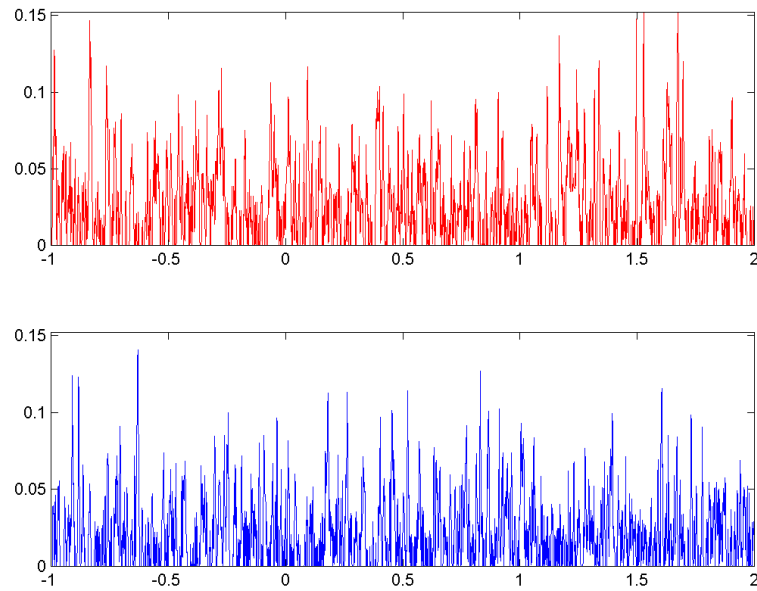


FIG. 7.8. Modélisation d'une fonction de bosses F_1 . En haut le signal d'origine, en bas le signal modélisé \widehat{F}_1 .

TAB. 7.10. Estimation de l'ensemble des paramètres auxiliaires de la fonction de bosses F_1 .

	Valeurs exactes	Valeurs estimées
I	0.0791	0.0791
(a, b)	(0,0.0264)	(0.0038,0.0245)
T	901	1076
η_1^+	1.3010	1.1761
$\pi_{1,2}$	-1.4284	-1.4404
η_2^+	1.6021	1.6128
$\pi_{2,2}$	-1.1899	-1.2008
μ_1	0.5	0.5
μ_2	1/3	1/3

TAB. 7.11. Estimation de l'ensemble des paramètres de base de la fonction de bosses F_1 .

	Valeurs exactes	Valeurs estimées
N	100	130
M	1000	1205
α	0.6	0.6128
$\nu \equiv (A, B)$	(0,1/3)	(0.0479,0.3094)
$g(t)$	$1 - t$	$1 - t$
C	1	1.1303

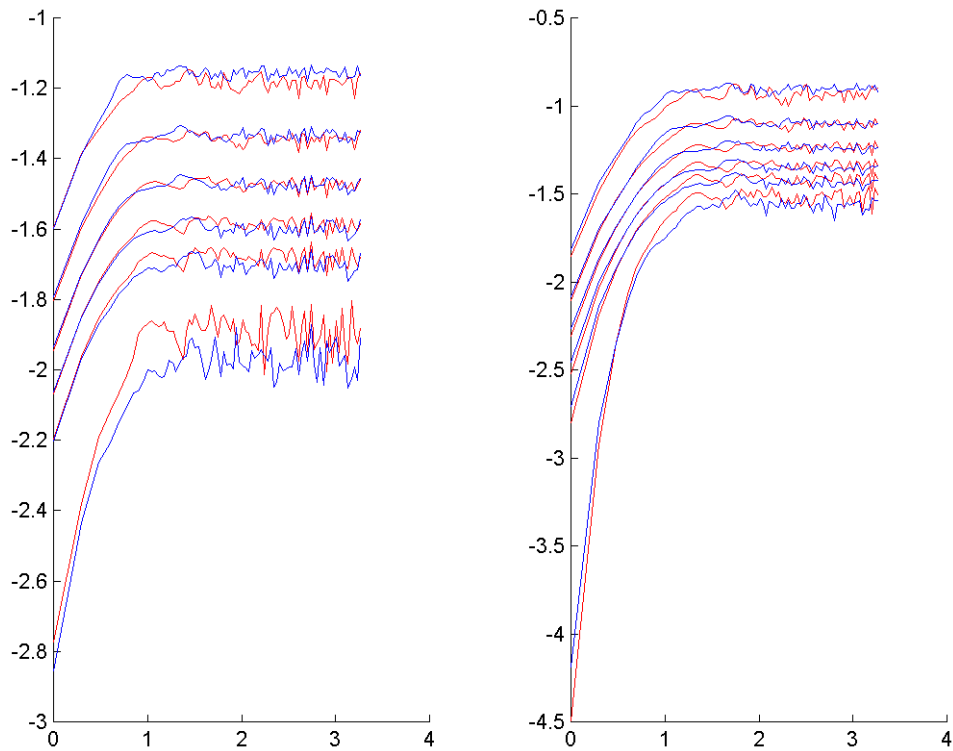


FIG. 7.9. Comparaison des spectres de structure de F_1 (en rouge) et de \widehat{F}_1 (en bleu), d'ordre 1 (à gauche) et d'ordre 2 (à droite), pour la gamme $\{0.1, 0.5, 1, 2, 4, 10\}$.

7.7.2. Exemple 2

Nous n'avons pas donné de tests concernant l'estimation de la bosse g . Nous allons le faire dans cet exemple et le suivant. On considère ici la fonction :

$$F_2(t) = \sum_{n=100}^{1000} n^{-0.6} g_2(n(t - X_n)).$$

La seule différence avec F_1 est dans le choix de la bosse élémentaire : ici, g_2 est la bosse trigonométrique de paramètre 1. On implémente encore F_2 avec $N_{disc} = 2000$ (voir FIG. 7.10). Remarquons qu'il est impossible de différencier les graphes de F_1 et F_2 à cette échelle. Ceci est dû au fait que N est grand. Lorsque $N = 1$, on voit nettement les premières bosses et donc la géométrie de g . Pour $n \gg 1$, il faut regarder les graphes à des échelles plus petites pour noter des différences.

Comme pour l'exemple 1, les paramètres auxiliaires sont tous estimés avec une erreur très acceptable (voir TAB. 7.12). Ainsi, les paramètres principaux sont encore très proches des valeurs exactes (voir TAB. 7.13). Il n'y a presque aucune erreur pour α et ν . Une différence importante réside encore dans l'approximation des bornes N et M . Concernant l'estimation de la bosse, la procédure utilise un modèle paramétrique avec $\varphi = \mu_2/\mu_1^2$ et une famille \mathcal{F} au choix de l'utilisateur. Un test nous donne les familles possibles selon la valeur estimée $\hat{\varphi}$. Nous avons choisi ici les bosses puissance de type I. La bosse est estimée par $\hat{g}_2(t) = 1 - t^{1.5392}$. Pour que l'estimation de α à partir de la dimension fractale du graphe de F soit valide, il faut que l'exposant de Hölder de g soit plus grand que α . Ce n'est pas le cas pour g_2 et $\hat{\alpha}$. On peut lui préférer une bosse polynôme en choisissant l'exposant entier le plus proche. Cela donne plutôt l'estimation $\hat{g}_2(t) = 1 - t^2$ qui est très bonne.

Le calibrage par \hat{C} compense les différentes erreurs. L'analyse des spectres de structure est analogue à celle de l'exemple précédent. Les courbes d'ordre 1 sont identiques. On ne constate des différences que pour $q \rightarrow \infty$. Le spectre d'ordre 2 révèle plus les erreurs d'estimation (borne M et bosse g) au niveau des petites valeurs de η . Pentes et ordonnées en 0 ne sont plus les mêmes. Par contre, tous les paliers sont à la même hauteur.

En résumé, on a de légères erreurs (\hat{C} est plus éloigné de 1 que dans l'exemple précédent) mais les nombreux points de concordance des empreintes suffisent à déclarer les signaux de même nature.

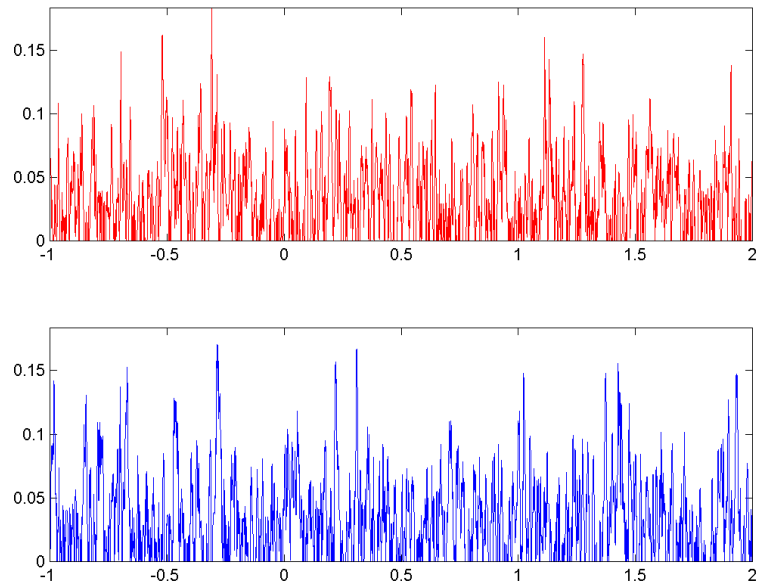


FIG. 7.10. Modélisation d'une fonction de bosses F_2 . En haut le signal d'origine, en bas le signal modélisé \widehat{F}_2 .

TAB. 7.12. Estimation de l'ensemble des paramètres auxiliaires de la fonction de bosses F_2 .

	Valeurs exactes	Valeurs estimées
I	0.1007	0.1006
(a, b)	(0,0.0336)	(0.0018,0.0326)
T	901	1021
η_1^+	1.3010	0.9542
$\pi_{1,2}$	-1.3404	-1.3134
η_2^+	1.6021	1.2304
$\pi_{2,2}$	-1.1018	-1.0845
μ_1	$2/\pi \approx 0.6366$	0.6062
μ_2	0.5	0.4575

TAB. 7.13. Estimation de l'ensemble des paramètres de base de la fonction de bosses F_2 .

	Valeurs exactes	Valeurs estimées
N	100	142
M	1000	1162
α	0.6	0.6061
$\nu \equiv (A, B)$	(0,1/3)	(0.0177,0.3245)
$g(t)$	$\cos(\pi t/2)$	$1 - t^p$ avec $p = 1.5392$
C	1	1.4036

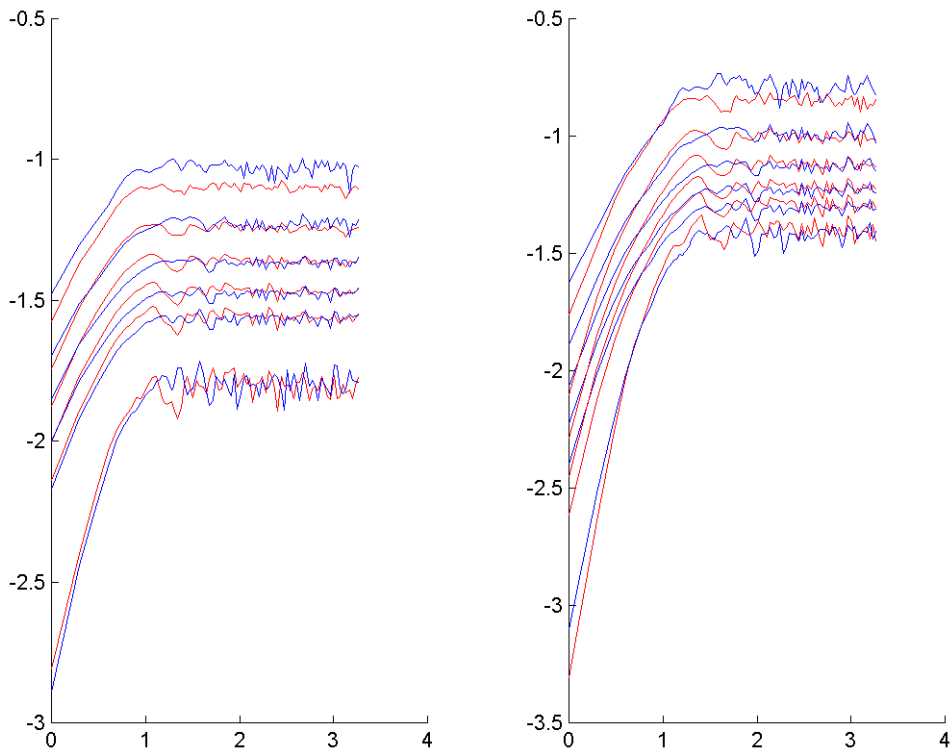


FIG. 7.11. Comparaison des spectres de structure de F_2 (en rouge) et de \widehat{F}_2 (en bleu), d'ordre 1 (à gauche) et d'ordre 2 (à droite), pour la gamme $\{0.1, 0.5, 1, 2, 4, 10\}$.

7.7.3. Exemple 3

Pour terminer ces exemples, on s'intéresse à

$$F_3(t) = \sum_{n=1000}^{10000} n^{-0.8} g_3(n(t - X_n)),$$

On a donc une fonction avec beaucoup de bosses, toutes à support très étroit. Pour observer le signal, on l'implémente avec $N_{disc} = 20000$ (voir FIG. 7.12). Le paramètre α a changé et nous faisons encore varier g . On a choisi pour g_3 la bosse polynôme de type II et de paramètre 3.

Tous les paramètres auxiliaires sont estimés avec une erreur très faible (voir TAB. 7.14) mis à part T . On s'attend donc à des erreurs sur les bornes de la série. On constate effectivement une mauvaise approximation de M . On a trop de bosses à support étroit, donc un modèle plus irrégulier. Cela explique ainsi l'approximation par défaut de α . Pour l'estimation de g , nous avons le choix parmi les familles suivantes : les bosses puissance de type II, les bosses polynômes, les bosses trapèze de type II. Toutes ces familles donnent une bosse \hat{g}_3 très proche de l'originale. En choisissant un polynôme, il n'y a pas d'erreur.

L'analyse des spectres de structure confirme ces observations. Les courbes ont des pentes et des ordonnées en 0 différentes. Cela est d'autant plus marqué pour les valeurs limites de q . Expérimentalement, ce comportement est typique d'une erreur commise sur M et α .

Toutefois, tous les paliers sont estimés avec bonne précision et concordent. L'analyse des courbes permet une nouvelle fois de déclarer les signaux de même type, mais avec une marge d'erreur plus grande. On voit ici les limites des estimations.

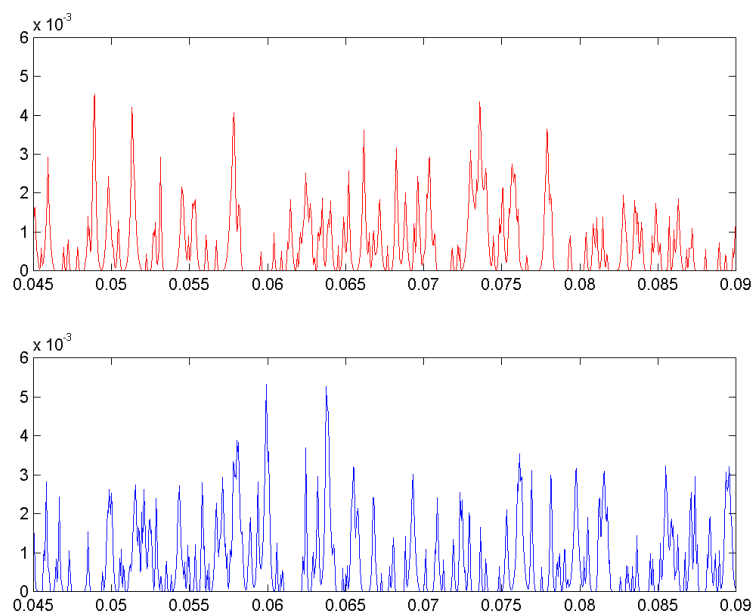


FIG. 7.12. Modélisation d'une fonction de bosses F_3 . En haut le signal d'origine, en bas le signal modélisé \hat{F}_3 .

TAB. 7.14. Estimation de l'ensemble des paramètres auxiliaires de la fonction de bosses F_3 .

	Valeurs exactes	Valeurs estimées
I	0.0021	0.0021
(a, b)	$(0, 6.9828 \cdot 10^{-4})$	$(2.4608 \cdot 10^{-5}, 6.8590 \cdot 10^{-4})$
T	9001	12665
η_1^+	1.3010	1.7160
$\pi_{1,2}$	-2.8675	-2.8605
η_2^+	1.6021	1.5051
$\pi_{2,2}$	-2.6289	-2.6220
μ_1	0.25	0.25
μ_2	0.1429	0.1429

TAB. 7.15. Estimation de l'ensemble des paramètres de base de la fonction de bosses F_3 .

	Valeurs exactes	Valeurs estimées
N	1000	1478
M	10000	14142
α	0.8	0.7164
$\nu \equiv (A, B)$	$(0, 1/3)$	$(0.0177, 0.3275)$
$g(t)$	$(1 - t)^3$	$(1 - t)^3$
C	1	0.7071

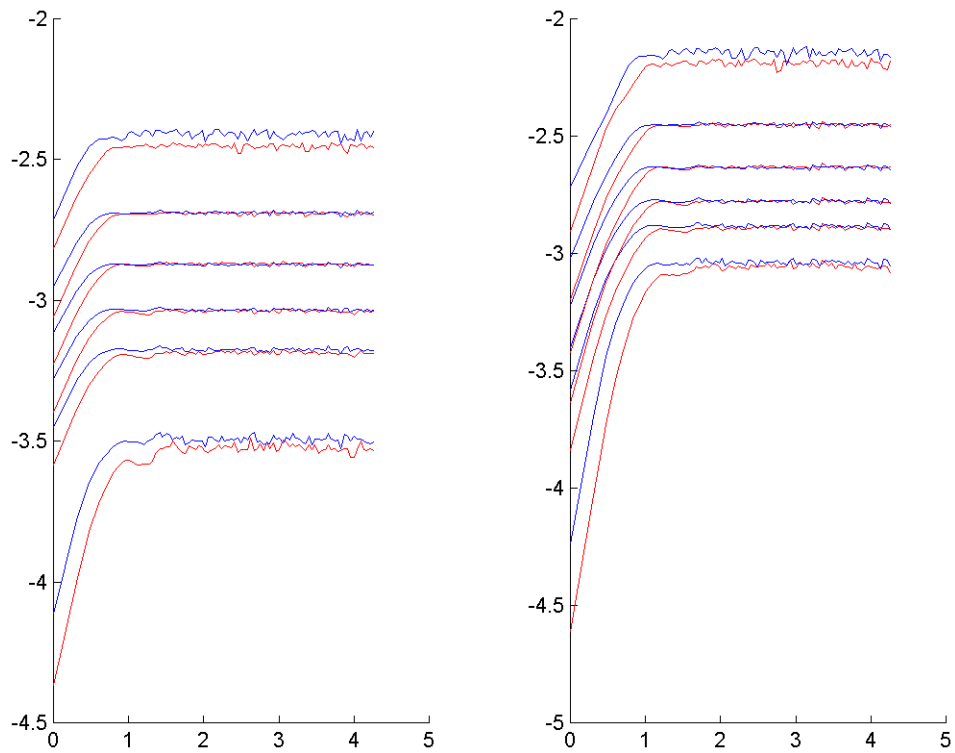


FIG. 7.13. Comparaison des spectres de structure de F_3 (en rouge) et de \widehat{F}_3 (en bleu), d'ordre 1 (à gauche) et d'ordre 2 (à droite), pour la gamme $\{0.1, 0.5, 1, 2, 4, 10\}$.

Modélisation par une fonction de bosses

8.1. Modélisation d'un signal

Nous avons vu que les estimateurs et l'algorithme proposés sont relativement efficaces pour retrouver les paramètres d'une fonction de bosses inconnue, l'identification étant validée par la concordance des courbes de structure. Nous allons maintenant tester ces méthodes sur des signaux inconnus, qui ne sont plus des fonctions de bosses. On peut espérer des modélisations de bonnes qualité.

On dispose d'un signal d'origine $\{(s_i, y(s_i))\}$ discrétisé relativement à une subdivision régulière $\{s_i\}_{i=1}^{3N_{disc}}$ d'un intervalle $[a, b]$. On supposera $[a, b]$ contenu dans le support du signal théorique. On cherche une fonction de bosses standard F qui modélise au mieux le signal, les critères d'identification étant les spectres de structure.

8.1.1. Du signal brut au signal net

De façon générale, le signal y ne présente pas les caractéristiques d'une fonction de bosses et la modélisation directe n'est pas possible. Par exemple, une fonction de bosses est toujours positive. Il s'agit donc avant toute chose de *formater* le signal d'origine de sorte à le rendre modélisable. De telles précautions sont à prendre dans tous les problèmes de modélisation. Différentes méthodes sont possibles, nous proposons une procédure de base et une seconde moins naturelle.

FORMATAGE STANDARD

Cette méthode offre l'avantage de ne pas transformer le signal d'origine en un signal radicalement différent. Il sera également facile de retrouver le signal de départ.

Etape 1.

On choisit une loi ν à support $[-1, 2]$. On peut alors considérer que le support de F est l'intervalle $[-1, 2]$, c'est-à-dire celui où tombent les centres des bosses. On ne tient donc pas compte des éventuels cas de débordements. On redimensionne $\{(s_i, y(s_i))\}$ avec le changement de variable affine croissant

$$t = \frac{3}{b-a}s + \frac{2a+b}{a-b}, \quad s \in [a, b].$$

On a donc un nouveau signal $\{(t_i, y^{(1)}(t_i))\}$ avec

$$t_i \in [-1, 2] \quad \text{et} \quad y^{(1)}(t_i) = y\left(\frac{b-a}{3}t_i + \frac{2a+b}{3}\right).$$

Le nombre de points de discrétisation reste bien sûr inchangé.

Etape 2.

Un signal a toujours une dérive, c'est-à-dire une déviation par rapport à sa valeur moyenne. Nous allons imposer au signal d'avoir une dérive nulle. Cela permet de supposer que ν est la loi uniforme sur $[-1, 2]$, simplifiant ainsi les estimateurs construits au chapitre précédents. On suppose que la dérive du signal d'origine est linéaire. Elle est alors donnée par la droite de régression des moindres carrés de $y^{(1)}(t_i)$ en t_i puisque cette dernière passe toujours par le point moyen du nuage, égal à la valeur moyenne du signal discrétisé. En notant $d = pt + q$ cette droite, on obtient un nouveau signal sans dérive $\{(t_i, y^{(2)}(t_i))\}$ avec

$$t_i \in [-1, 2] \quad \text{et} \quad y^{(2)}(t_i) = y^{(1)}(t_i) - pt_i.$$

Etape 3.

Il faut enfin s'assurer que le signal à traiter ne comprend pas de valeurs négatives. On considère donc le nouveau signal positif $\{(t_i, y^{(3)}(t_i))\}$:

$$t_i \in [-1, 2] \quad \text{et} \quad y^{(3)}(t_i) = y^{(2)}(t_i) - \min_i \{y^{(2)}(t_i)\}.$$

Finalement, on pose $z(t_i) = y^{(3)}(t_i)$ et on décide de modéliser le *signal net* $\{(t_i, z(t_i))\}$. On notera $z_i = z(t_i)$.

FORMATAGE NON STANDARD

Pour un signal y quelconque, il est malgré tout possible qu'on ne puisse pas le modéliser par une fonction de bosses, même une fois formaté. C'est le cas si y présente des caractéristiques fondamentales très différentes d'une fonction de bosses, par exemple d'auto-affinité ou de périodicité. Ce problème se produira pour le mouvement brownien et les fonctions de Weierstrass. Pour remédier à cela, il faudrait considérer les fonctions de bosses à amplitudes aléatoires. On peut malgré tout obtenir de bons résultats en adaptant la procédure de formatage standard. Ainsi, à l'étape 3, pour positiver le signal, on considère plutôt la fonction :

$$t_i \in [-1, 2] \quad \text{et} \quad y^{(3)}(t_i) = \left| y^{(2)}(t_i) - \overline{y^{(2)}} \right|$$

où $\overline{y^{(2)}}$ désigne la moyenne des valeurs de $y^{(2)}$. Nous parlerons dans la suite de formatage non standard pour désigner cette procédure. Remarquons qu'elle modifie davantage le signal d'origine.

8.1.2. Modélisation du signal net

On cherche une fonction de bosse standard

$$F(t) = C \sum_{n=N}^M n^{-\alpha} g(n(t - X_n)) \quad (8.1)$$

fournissant un signal $\{(t_i, F(t_i))\}$ retenu pour modéliser le signal net. On pose encore $F_i = F(t_i)$. Rappelons que $(X_n)_{n \geq 1}$ est un échantillon de la loi uniforme sur $[-1, 2]$.

La constante C va servir à ajuster la fonction de bosses au signal net en terme d'échelle. Nous allons l'estimer par calage. Généralement, on décide de calibrer les signaux en utilisant leurs valeurs maximale, minimale ou moyenne. Le choix des valeurs extrémales pose toutefois des problèmes. Théoriquement ou statistiquement, leur loi est difficile à déterminer avec exactitude. C'est également le cas du point de vue numérique. Cette double volatilité leur fait préférer l'emploi de la valeur moyenne. Une meilleure méthode encore est de caler C sur la valeur d'un des deux paliers $\pi_{j,2}$. Nous procéderons de cette manière.

8.1.2.1. Modélisation théorique

Une analyse préalable du signal d'origine y peut révéler des similitudes importantes avec les fonctions de bosses. On peut par exemple extraire de y un motif de base jouant le rôle d'une bosse élémentaire, déterminer la dimension de boîte du graphe qui fournira l'exposant α , etc. L'idée est de pouvoir ainsi déterminer théoriquement certains paramètres de F dont l'estimation ne sera plus à faire. Typiquement, lorsque y peut s'écrire comme une série, on peut espérer reconstituer F avec un minimum d'estimations. Ce sera le cas pour les fonctions de Weierstrass. Nous estimerons alors seulement la constante C , toujours par calage sur le palier $\pi_{1,2}$, pour des raisons d'échelles. Même dans cette situation, il est nécessaire de formater le signal.

8.1.2.2. Modélisation expérimentale

La méthode précédente n'est guère utilisable en pratique. Elle suppose en effet de connaître assez bien le signal de départ. Lorsqu'on considère un signal arbitraire fourni par des données expérimentales, on ne peut pas déterminer *a priori* les paramètres de F . La modélisation du signal net consiste alors à considérer que ce signal est effectivement une fonction de bosses F et à en estimer ses paramètres, comme nous l'avons fait au chapitre 7. On reprend donc l'algorithme de la section 7.6 en simplifiant certaines étapes (ν est connue et supposée uniforme) et en imposant les méthodes d'estimations intermédiaires (en particulier on ne recourt pas aux crossovers). On obtient la procédure page 189.

Notons que la constante C est obtenue par calage sur la valeur d'un palier $\pi_{j,2}$. On peut penser que l'adéquation avec la courbe de 2-structure d'ordre j est pour ainsi dire forcée, tout comme celle de l'ensemble du spectre si les courbes sont translatées. Son utilisation reste légitime puisque le fait d'imposer des paliers de même niveau n'influence pas le reste des courbes (pentes à l'origine, courbure, etc). On dispose de plus du second spectre.

Enfin, le formatage standard n'affecte pas les propriétés fondamentales des courbes de structure du signal d'origine, ne faisant intervenir que des homothéties et des translations.

8.1.3. Modélisation du signal brut

On dispose maintenant d'un modèle $\{(t_i, F_i)\}$ pour le signal net $\{(t_i, z_i)\}$. Précisons rapidement comment obtenir le modèle du signal d'origine. Pour simplifier, on ne traite que le cas du formatage standard. On reprend les étapes de la procédure correspondante en appliquant les transformations inverses au signal modèle :

1. On ajoute un signe au signal, on obtient $\{(t_i, F^{(1)}(t_i))\}$ avec

$$t_i \in [-1, 2] \quad \text{et} \quad F^{(1)}(t_i) = F_i + \min_i \{y^{(2)}(t_i)\}.$$

2. On ajoute la dérive, on obtient $\{(t_i, F^{(2)}(t_i))\}$ avec

$$t_i \in [-1, 2] \quad \text{et} \quad F^{(2)}(t_i) = F^{(1)}(t_i) + p t_i.$$

3. On redimensionne le signal, on obtient $\{(s_i, F^{(3)}(s_i))\}$ avec

$$s_i \in [a, b] \quad \text{et} \quad F^{(3)}(s_i) = F^{(2)}\left(\frac{3}{b-a} s_i + \frac{2a+b}{a-b}\right).$$

On veillera donc à conserver les paramètres intermédiaires de formatage.

On note $\hat{y}(s_i) = F^{(3)}(s_i)$. Finalement la modélisation du signal d'origine par les fonctions de bosses est le signal $\{(s_i, \hat{y}(s_i))\}$. Dans les exemples que nous allons traiter, nous nous contenterons de modéliser le signal net, c'est-à-dire de déterminer la fonction de bosses F fournissant $\{(t_i, F_i)\}$.

8.1.4. Critères de conformité

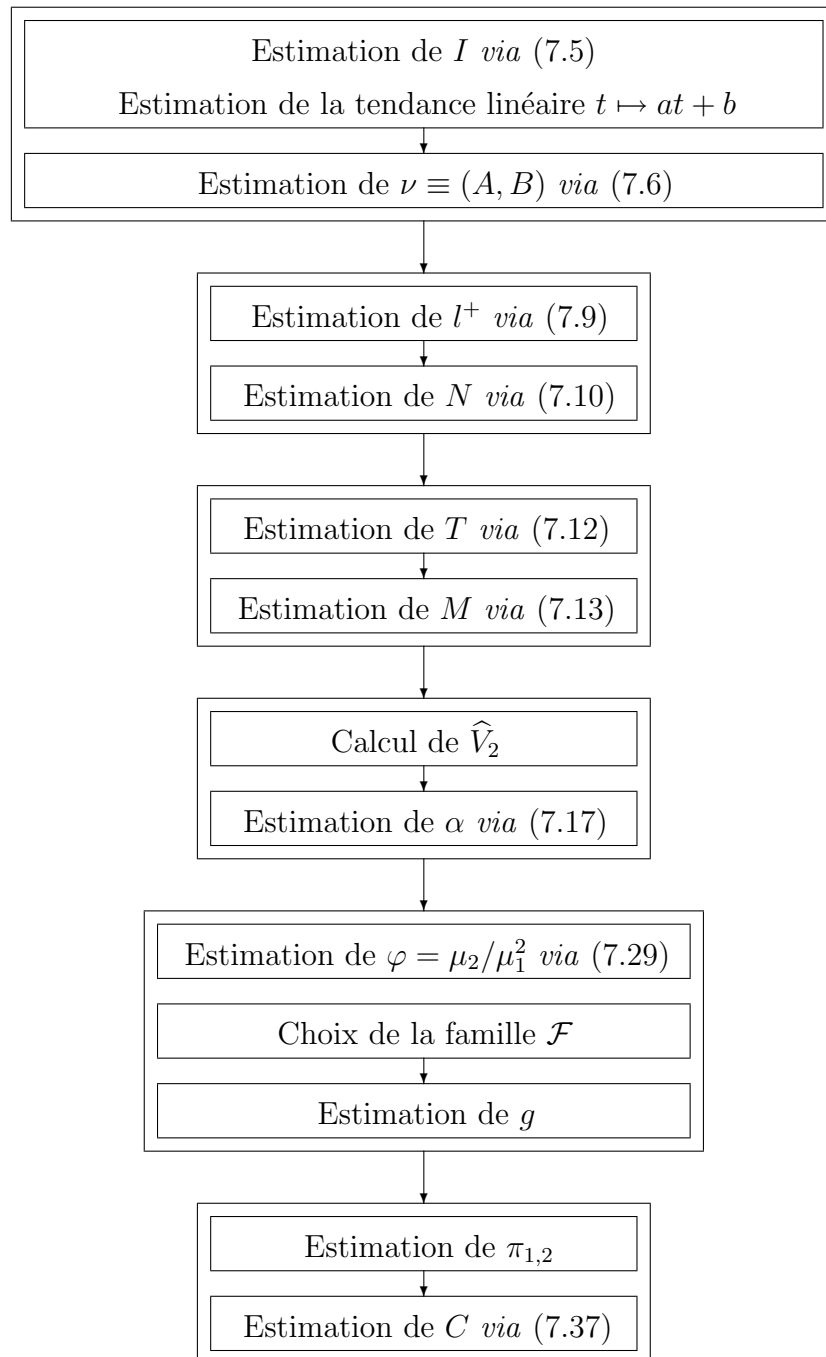
Il est nécessaire de disposer d'un certain nombre de critères pour juger la qualité de la modélisation, c'est-à-dire la ressemblance entre le signal d'origine et le signal modèle. Un bon critère est une quantité simple, facile à calculer à partir de données expérimentales, fournissant en fin de procédure une règle de décision : acceptation ou rejet du modèle. Il doit bien sûr être significatif sur le plan théorique.

Nous choisissons comme critère l'adéquation des spectres de structure pour une certaine gamme d'exposants de q -structure. Les valeurs $q \in \{0.2, 0.5, 1, 2, 4, 10\}$ sont assez représentatives. On examinera en particulier les points suivants : ordonnées à l'origine, pentes à l'origine, courbures, emplacements des crossovers.

Ces critères sont fiables. On pourra se rendre compte que chaque fois qu'il y a des erreurs d'adéquation entre les courbes de structure des deux signaux, on observe des différences sur leurs graphes. En ce sens, les spectres de structure permettent de quantifier une telle appréciation qualitative. Il serait possible de définir formellement, sous forme d'écarts, une mesure de l'erreur entre les différentes courbes de structure des deux fonctions.

Un fait heuristique intéressant est que les erreurs visibles sur les courbes renseignent sur le type d'erreur faite dans la modélisation. Ainsi on constate que des courbes translatées traduisent une mauvaise estimation de la borne supérieure M ; que des pentes différentes traduisent une erreur sur la détermination de α . D'autre part certaines erreurs se voient sur les courbes obtenues pour q assez grand, d'autres sur celles obtenues pour q assez petit. Des erreurs numériques empêchent d'obtenir des courbes fiables pour des valeurs extrêmes de q . Ainsi, en pratique, même si on choisit une gamme particulière selon le type d'erreur que l'on souhaite détecter, il faut s'assurer qu'elle soit contenue dans $[q_{min}, q_{max}]$ avec $q_{min} = 0.1$ et $q_{max} = 10$. On conseille de toujours considérer $q = 2$ puisque la courbe de structure correspondante est à la base de l'estimation des paramètres. Il n'est pas non plus judicieux de prendre une gamme d'exposant trop étendue. En pratique, on considérera que dans une gamme donnée, les signaux sont indiscernables si un pourcentage raisonnable de courbes coïncident.

Procédure d'estimation de l'ensemble des différents paramètres de la fonction de bosses modèle pour la modélisation d'un signal formaté.



8.2. Fonctions de Weierstrass

La fonction de Takagi-Knopp nous a servi à introduire les fonctions de bosses. Celles-ci présente une structure simple qui permet de réinterpréter de nombreux modèles classiques en termes de bosses élémentaires. Parmi eux, nous avons étudié les fonctions de Weierstrass et remarqué de nombreuses ressemblances au niveau des courbes de structure. C'est donc naturellement le premier signal théorique que nous allons tenter de modéliser à l'aide de fonctions de bosses. Le signal d'origine est donc

$$y(t) = \sum_{n=N}^M a^{-n\alpha} \cos(2\pi(a^n t + X_n)) \quad (8.2)$$

où $\alpha \in]0, 1]$, $a > 1$ et $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et toutes uniformément distribuées sur $[0, 1]$.

8.2.1. Modélisation théorique

Avant d'utiliser l'algorithme général pour obtenir un modèle expérimental, nous allons chercher théoriquement des valeurs acceptables pour les paramètres du modèle. En effet, lorsque le signal peut s'écrire sous la forme (5.11) il semble possible d'estimer les paramètres par une simple comparaison directe entre les deux séries. Pour cela, nous utilisons les courbes de structure et la formulation même de y . Il faut être prudent avec cette dernière et veiller à ce que y soit bien écrit à l'aide de bosses élémentaires. Pour la fonction de Weierstrass, il faut ainsi procéder comme pour la fonction de Knopp en extrayant le motif de base de Φ (voir page 5). Pour simplifier certaines écritures, on suppose ici $a \in \mathbb{N}$. Il s'agit de découper le cosinus en section. Mais il y a une différence essentielle : Φ n'est pas positive.

Considérons, toujours pour alléger, le modèle déterministe. Il y a deux manières de réécrire (5.16) selon le motif choisi. La première consiste à ne garder du cosinus qu'un seul «lobe». On considère donc la bosse élémentaire $g_1(t) = \cos(\pi t/2) \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$ et on peut écrire, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n\alpha} \sum_{k=0}^{2a^n} (-1)^k g_1\left(4a^n \left(t - \frac{k}{2a^n}\right)\right). \quad (8.3)$$

Pour la seconde, on s'autorise une bosse élémentaire négative en considérant $g_2(t) = \cos(\pi t/2) \mathbb{1}_{[-2,2]}(t)$. On a alors, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$W(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{-n\alpha} \sum_{k=0}^{a^n} g_2(2a^n(t - ka^{-n})). \quad (8.4)$$

Voyons maintenant comment établir des tables de correspondances entre les différents paramètres de y et F .

Paramètres de base

Quelque soit la présentation de W , sa bosse de base est construite à partir du cosinus. On choisit donc naturellement la bosse élémentaire trigonométrique de paramètre 1. Elle est lipschitzienne, donc l'exposant α contrôle la dimension fractale du graphe de F . On sait en outre (voir [18]) qu'il en est de même pour W . Ainsi,

ces deux paramètres doivent être égaux. Enfin, il est légitime de penser que ν doit également être uniforme. Cela donne le tableau 8.1.

TAB. 8.1. Correspondance entre les paramètres de base d'une fonction de Weierstrass et d'une fonction de bosses.

	F. de Weierstrass (8.2)	F. de bosses (8.1)
α	α	α
$g(t)$	« cos »	$\cos(\pi t/2)$
ν	$\mathcal{U}([0, 1])$	$\mathcal{U}([-1, 2])$

Paramètres auxiliaires

On utilise ici l'expression de W sous la forme (8.3). Elle permet de distinguer les premières bosses à support large, et les dernières bosses à support étroits. Chaque bosse du paquet de rang k à une largeur égale à $1/2a^n$. Le support le plus (*resp.* le moins) large à donc pour volume $1/2a^N$ (*resp.* $1/2a^M$). Il est aussi possible de calculer le nombre total T de bosses accumulées dans la série. Il faut juste faire attention au point suivant : dans le paquet de bosses correspondant au cosinus sectionné, le premier terme ($k = 0$) donne en fait seulement une «demi-bosse», et le dernier terme ($k = 2a^n$) également. Cela est dû au fait que t appartienne à $[0, 1]$. On compte donc une bosse de trop. Une autre façon de calculer T est d'utiliser la largeur des bosses du paquet de rang k . Puisqu'elle vaut $1/2a^n$, il faut en juxtaposer exactement $2a^n$ pour recouvrir $[0, 1]$. Finalement, on a donc

$$T = \sum_{n=N}^M \left(\left(\sum_{k=0}^{2a^n} 1 \right) - 1 \right) = 2 \cdot \frac{a^{M+1} - a^N}{a - 1}.$$

On obtient ici le tableau 8.2.

TAB. 8.2. Correspondance entre les paramètres auxiliaires d'une fonction de Weierstrass et d'une fonction de bosses.

	F. de Weierstrass (8.2)	F. de bosses (8.1)
l^+	$1/2a^N$	$2/N$
l^-	$1/2a^M$	$2/M$
T	$2(a^{M+1} - a^N)/(a - 1)$	$M - N + 1$

Si on choisit d'utiliser la formule (8.4), la bosse de base a un support deux fois plus large. Il faut ainsi diviser T par 2, et multiplier l^- et l^+ par 2. Cependant, cette écriture rend W moins proche des fonctions de bosses et les résultats sont de moins bonne qualité.

Courbes de structure

Nous sommes déjà en mesure de déterminer tous les paramètres. Pour affiner nos résultats, nous allons analyser les courbes de 2-structure de W et F . La grande partie du travail a été faite. Ce sont en effet les phénomènes observés sur les courbes

déterministes approchées pour W qui nous ont guidé dans l'étude des fonctions de bosses. Dans les deux cas, nous avons mis en évidence l'existence de transitions remarquables (les crossovers) et de paliers caractéristiques. On calcule ces derniers pour F à partir des formules (6.9) et (6.11) en tenant compte des valeurs fournies par le tableau 8.1 et en simplifiant la somme $\Sigma_{1,2}$. Pour W , on utilise l'approximation déterministe simplifiée, tous les calculs étant faits à la section 5.5. On obtient enfin le tableau 8.3

TAB. 8.3. Correspondance entre les courbes de structure d'une fonction de Weierstrass et d'une fonction de bosses.

	F. de Weierstrass (8.2)	F. de bosses (8.1)
η_1^+	$\log\left(\frac{N_{disc}}{2\sqrt{2}\pi a^N}\right)$	$\log\left(\frac{N_{disc}}{N}\right)$
η_2^+	$\log\left(\frac{313 N_{disc}}{400 \pi a^N}\right)$	$\log\left(\frac{2 N_{disc}}{N}\right)$
$\pi_{1,2}$	$\frac{1}{2} \log\left(\frac{a^{-2N\alpha} - a^{-2M\alpha}}{1 - a^{-2\alpha}}\right)$	$\frac{1}{2} \log\left(\frac{\frac{1}{3} N^{-2\alpha} - M^{-2\alpha}}{\alpha}\right)$
$\pi_{2,2}$	$\frac{1}{2} \log\left(3 \cdot \frac{a^{-2N\alpha} - a^{-2M\alpha}}{1 - a^{-2\alpha}}\right)$	$\frac{1}{2} \log\left(\frac{N^{-2\alpha} - M^{-2\alpha}}{\alpha}\right)$

Outre ces formules très similaires, les courbes de structure de W et F présentent des caractères communs. Nous avons d'abord constaté expérimentalement qu'elles vérifiaient les contraintes (5.10). Ensuite, on peut remarquer que les paliers $\pi_{i,2}$ sont liés par la même relation :

$$\pi_{2,2} - \pi_{1,2} = \frac{\log 3}{2}.$$

Cela confirme en particulier le choix de ν . Pour les autres paramètres, on a deux choix possibles :

(a) Avec le tableau 8.1, on est alors conduit à estimer les bornes du modèle par

$$\widehat{N} = 4a^N \quad \text{et} \quad \widehat{M} = 4a^M,$$

(b) Avec le tableau 8.2, on est alors conduit à estimer la borne inférieure par

$$\widehat{N} = 2\pi\sqrt{2}a^N \quad \text{ou} \quad \widehat{N} = \frac{800\pi}{313}a^N.$$

Dans ces deux cas, on choisit un coefficient λ pour définir $\widehat{N} = \lambda a^N$, et on utilise T pour obtenir \widehat{M} :

$$\widehat{M} = \left(\frac{2}{a-1}\right)(a^{M+1} - a^N) + \lambda a^N - 1.$$

On voit déjà les limites de ces considérations : il n'y a pas une correspondance parfaite entre tous les paramètres. N'oublions pas que la constante C calibrera les signaux en tradant les courbes de structure. On ne tient donc pas réellement compte des paliers. Par contre, cela ne modifiera pas l'emplacement des crossovers.

Exemples

En guise d'application, on choisit les paramètres suivants pour W : $N = 5$, $M = 15$, $\alpha = 0.6$ et $a = 1.6$. On fixe $N_{disc} = 10000$. Pour modéliser W , on dispose des deux choix de paramètres (a) et (b) précédents. Les différentes données numériques sont consignées dans le tableau 8.4.

TAB. 8.4. Paramètres de modélisation théorique d'une fonction de Weierstrass par une fonction de bosses.

	F. de Weierstrass	F. de bosses (a)	F. de bosses (b)
N	5	42	90
M	15	4612	6203
α	0.6	0.6	0.6
$g(t)$	$\cos(\pi t/2)$	$\cos(\pi t/2)$	$\cos(\pi t/2)$
ν	$\mathcal{U}([0, 1])$	$\mathcal{U}([-1, 2])$	$\mathcal{U}([-1, 2])$
T	6114	4571	6114
l^+	0.04768	0.04762	0.00222
l^-	0.00043	0.00043	0.00032
η_1^+	2.0307	2.3767	2.0457
η_2^+	2.3757	2.6778	2.3468

On réalise deux modélisations théoriques. Pour chacune d'elles on trace la fonction y d'origine formatée (en rouge), son modèle théorique F (en bleu), et les spectres de structure correspondant (d'ordre 1 à gauche, d'ordre 2 à droite), pour la même gamme $\{0.2, 0.5, 1, 2, 4, 10\}$.

Pour le premier test, on modélise vraiment le signal original y , avec tous ces caractères propres, en choisissant un formatage standard. On choisit le jeu de paramètres (a). Il n'y donc *a priori* pas d'erreur sur les supports des bosses élémentaires, mais on utilise moins de bosses et les crossovers doivent être légèrement décalés. Le signal modèle correspond assez bien à l'original (voir FIG. 8.1). L'analyse de concordance par les spectres de structure confirme ces résultats (voir FIG. 8.2). Les courbes sont assez proches pour les petites valeurs de η . Ordonnées à l'origine et paliers se décalent pour $q \rightarrow 0$. Les pentes restent pour la plupart identiques. La valeur estimée de C est 5.0860.

On peut considérer que les fonctions de Weierstrass sont correctement modélisées par les fonctions de bosses. Une différence théorique est la composante périodique toujours présente dans la structure de W , donc dans son graphe, et qui n'existe pas pour une fonction de bosses. Cette périodicité du cosinus se traduit en terme de bosses élémentaires par le fait que pour une largeur donnée, il y a plusieurs bosses dont le support a cette largeur. Il n'y en a toujours qu'une pour une fonction de bosses.

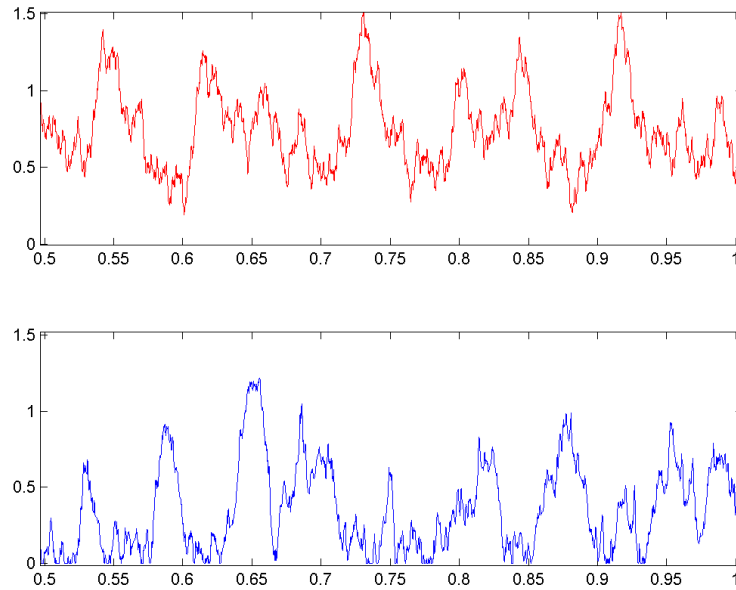


FIG. 8.1. Modélisation théorique d'une fonction de Weierstrass (en haut) par une fonction de bosses (en bas). Formatage standard et jeu de paramètres (a).

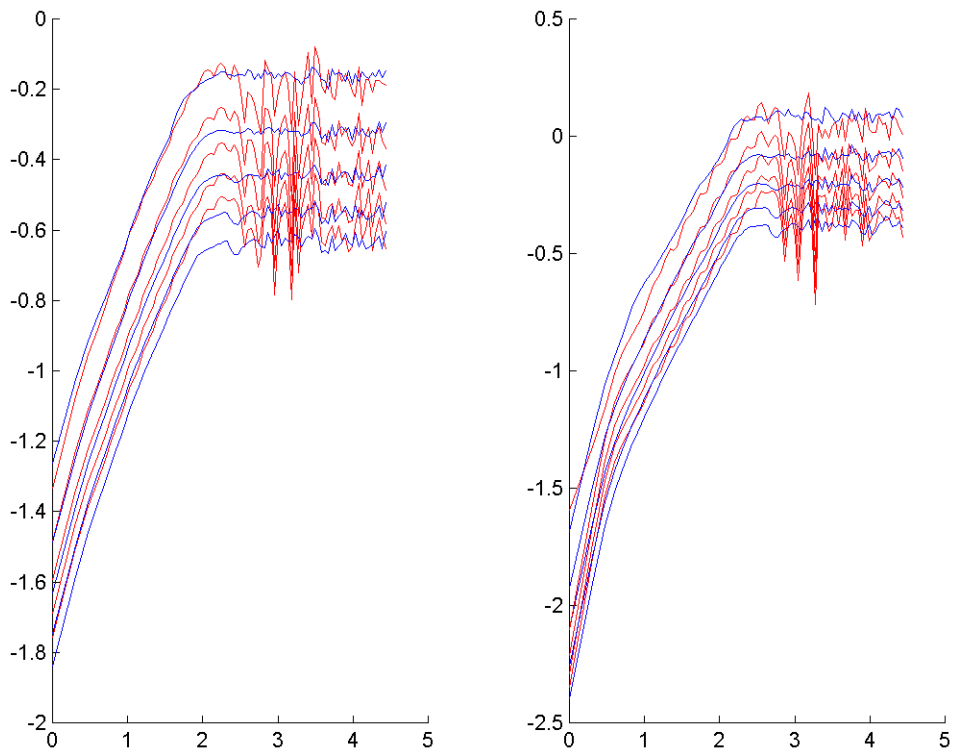


FIG. 8.2. Comparaison des spectres de structure d'une fonction de Weierstrass (en rouge) et de son modèle théorique, une fonction de bosses (en bleu). Formatage standard et jeu de paramètres (a).

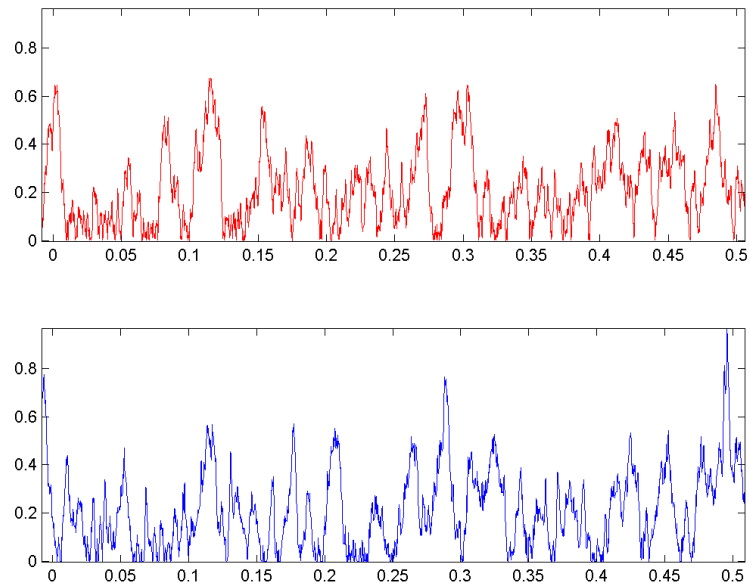


FIG. 8.3. Modélisation théorique d'une fonction de Weierstrass (en haut) par une fonction de bosses (en bas). Formatage non standard et jeu de paramètres (b).

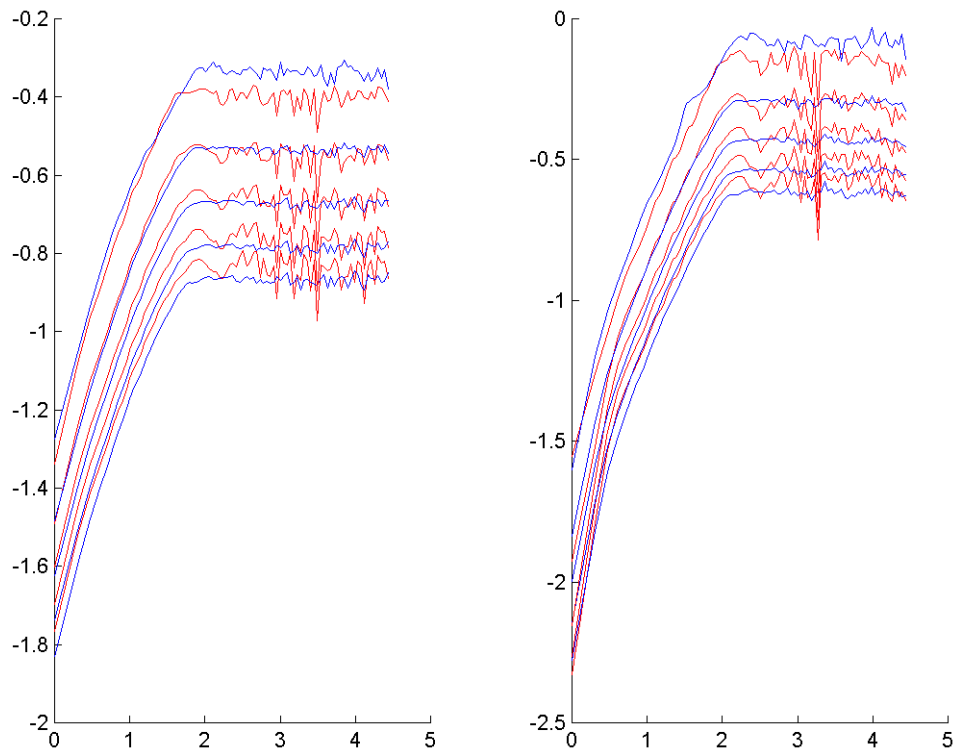


FIG. 8.4. Comparaison des spectres de structure d'une fonction de Weierstrass (en rouge) et de son modèle théorique, une fonction de bosses (en bleu). Formatage non standard et jeu de paramètres (b).

Pour le second test, on effectue la modélisation du signal en utilisant un formatage non standard. On choisit cette fois le jeu de paramètres (b). Le signal d'origine est plus fortement modifié, tant dans la périodicité que dans la façon de le positiver. Une conséquence est visible sur les spectres de structure (voir FIG. 8.4) au niveau du palier : on a moins d'oscillations, comme pour les fonctions de bosses. Du point de vue du modèle obtenu (voir FIG. 8.3), on a les mêmes conclusions que pour le formatage standard. Le signal formaté est correctement modélisé. Les spectres de structure traduisent une grande fiabilité en montrant peu de différences. On notera en particulier que les courbes de structure d'ordre 1 peuvent être considérées indiscernables pour $q \in \{1, 2\}$.

8.2.2. Modélisation expérimentale

Nous allons maintenant déterminer expérimentalement l'ensemble des paramètres de F . Afin de comparer avec les résultats précédents, on traite le même exemple. La fonction W est définie par $N = 5$, $M = 15$, $\alpha = 0.6$ et $a = 1.6$. On fixe encore $N_{disc} = 10000$. On ne réalise qu'une seule modélisation, la plus significative, en formatant W avec la méthode standard (voir FIG. 8.5). Les différentes données numériques sont consignées dans le tableau 8.5.

TAB. 8.5. Estimation des paramètres d'une fonction de bosses modélisant une fonction de Weierstrass.

	Valeurs estimées
N	51
M	4808
α	0.4206
$g(t)$	$1 - t$
C	2.6388

Les résultats sont très proches de ceux obtenus théoriquement avec les paramètres (a) en ce qui concerne les bornes N et M . On constate deux différences majeures. Tout d'abord, la bosse élémentaire g est estimée par la fonction triangle. Cette dernière est moins régulière au sommet que les bosses $\cos(\pi t/2)$ ou $1 - t^2$. Ensuite, l'exposant α est sous-estimé. La fonction F est donc moins régulière que l'originale. Ces différences sont essentiellement visibles sur les courbes de structure pour les valeurs de η proches de 0 (voir FIG. 8.6). Visuellement, la ressemblance du modèle au signal original reste acceptable (voir FIG. 8.5). Notons que pour $q \rightarrow 0$, les courbes de q -structure d'ordre 2 ne sont pas fiables pour les petites valeurs de η .

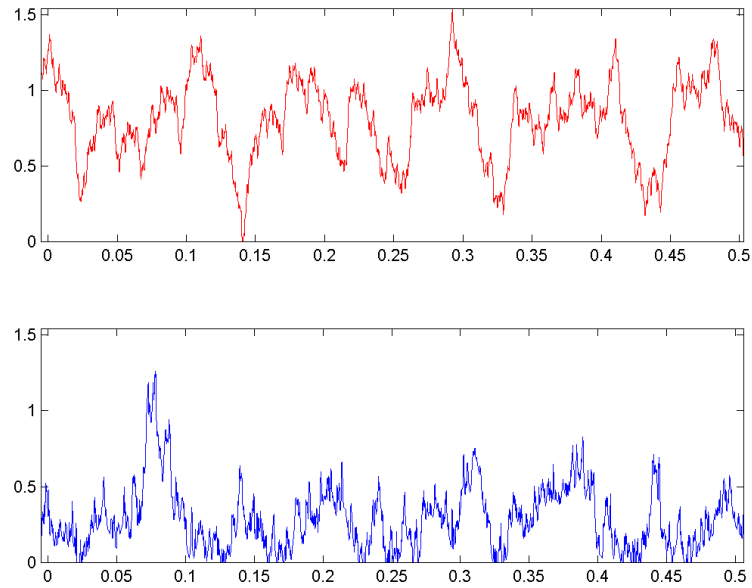


FIG. 8.5. Modélisation expérimentale d'une fonction de Weierstrass (en haut) par une fonction de bosses (en bas). Formatage standard.

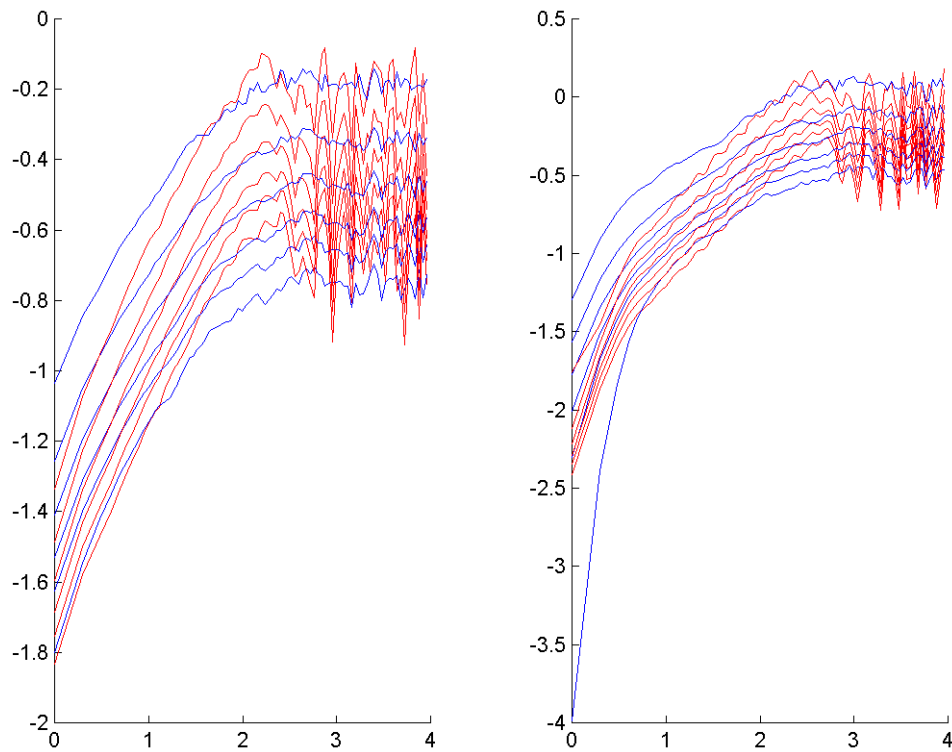


FIG. 8.6. Comparaison des spectres de structure d'une fonction de Weierstrass (en rouge) et de son modèle expérimental, une fonction de bosses (en bleu). Formatage standard.

8.3. Midpoint Displacement Process

Nous avons rappelé dans l'introduction le principe du Midpoint Displacement Algorithm. De façon générale, on appelle *MPD Process* toute fonction f obtenue par cette méthode. Elle peut s'écrire sous la forme

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} D_{n,k} g(2^n(t - x_{n,k})) \quad (8.5)$$

avec $x_{n,k} = (2k - 1)2^{-n}$ et g la bosse triangle.

Parmi les nombreux choix possibles, nous allons chercher à modéliser un signal proche du mouvement brownien en choisissant pour $D_{n,k}$ des variables aléatoires indépendantes de loi normale $\mathcal{N}(0, 2^{-n})$. On a donc pour signal d'origine

$$y(t) = \sum_{n=N}^M 2^{-n\alpha} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} A_{n,k} g(2^n(t - x_{n,k})) \quad (8.6)$$

avec $\alpha = 1/2$ et $A_{n,k}$ des variables gaussiennes centrées-réduites indépendantes. Comme pour une fonction de Takagi-Knopp ou de Weierstrass, on a qualitativement les mêmes suites qu'une fonction de bosses standard. La seule différence provient de l'aléatoire qui porte sur l'amplitude des bosses et non leur position.

8.3.1. Modélisation théorique

Il semble déjà possible d'obtenir des paramètres de modélisation théoriques en suivant exactement la même démarche que pour les fonctions de Weierstrass. Nous n'avons pas étudié les courbes de structure de f , nous ne disposons donc pas d'informations sur l'existence d'éventuels crossovers ou paliers.

Deux paramètres de base sont immédiatement accessibles. Par construction de M , on doit utiliser la bosse triangle $g(t) = 1 - t$. Ensuite, le pont brownien a encore une régularité höldérienne égale à 0.5, vu qu'il ne diffère d'un mouvement brownien que par une fonction linéaire; ainsi, $\alpha = 0.5$. L'aléatoire dans f ne réside pas dans le centrage des bosses, mais dans leur amplitude. Pour la loi ν , il s'agit de justifier qu'on peut choisir la loi $\mathcal{U}([-1, 2])$. En effet, chaque paquet de rang n consiste en 2^{n-1} bosses distribuées sur les points dyadiques impairs de génération n . Lorsque $n \rightarrow \infty$, ils tendent à remplir de façon dense et uniforme l'intervalle $[0, 1]$. En éliminant les effets de bords, également inexistantes pour f , le choix pour ν semble correct.

Pour une fonction de Weierstrass, les variables aléatoires servent à déphaser le signal élémentaire, de la même façon que pour une fonction de bosses. Nous l'avons dit, ce n'est plus le cas pour f . Cela va rendre plus délicate l'estimation des bornes. On calcule encore facilement l^- , l^+ et T . Cela donne, par identification, deux possibilités :

$$\widehat{N} = 2^N, \widehat{M} = 2^M \quad \text{ou} \quad \widehat{N} = 2^N, \widehat{M} = 2^M + 2^{N-1} - 1.$$

On obtient la même chose lorsque $N = 1$. La différence est peu importante car en général 2^N est négligeable devant 2^M . Toutefois, on s'aperçoit rapidement que l'estimation de \widehat{M} est fautive. Cela tient précisément au fait que nous avons ici une amplitude aléatoire $A_{n,p}$ attachée à chaque bosse élémentaire. Dans un paquet de rang n , il faut tenir compte des bosses dont l'amplitude est voisine de 0, et également

des compensations dues aux signes (une bosse est positive avec une probabilité égale à $1/2$). On peut estimer heuristiquement avoir deux fois trop de bosses dans la somme définissant F . Nous retenons donc plutôt

$$\widehat{N} = 2^N \quad \text{et} \quad \widehat{M} = 2^{M-1}.$$

On a toujours $\widehat{N} \geq 2$, et donc les paliers seront visibles sur les spectres de structure.

Pour vérifier nos résultats, on modélise f avec les paramètres fournis par le tableau 8.6 pour $N_{disc} = 2000$ points de discrétisation. On choisit un formatage standard.

TAB. 8.6. Paramètres de modélisation théorique d'un MPD Process par une fonction de bosses.

	MPD Process	F. de bosses
N	4	16
M	10	512
α	0.5	0.5
$g(t)$	$1 - t$	$1 - t$
ν	$\{(2k - 1)2^{-n}\}$	$\mathcal{U}([-1, 2])$

A première vue, la comparaison immédiate du modèle avec l'original n'est pas très satisfaisante (voir FIG. 8.7). L'analyse des spectres de structure confirme cette impression mais avec une légère nuance. Bien sûr, il paraît difficile de valider le modèle, mais il ne semble pas si éloigné du signal de départ qu'on pouvait le penser. L'emplacement des crossovers et la hauteur des paliers sont assez bien estimés. Les pentes en 0 sont également correctes. La seule différence d'importance est la valeur des ordonnées à l'origine.

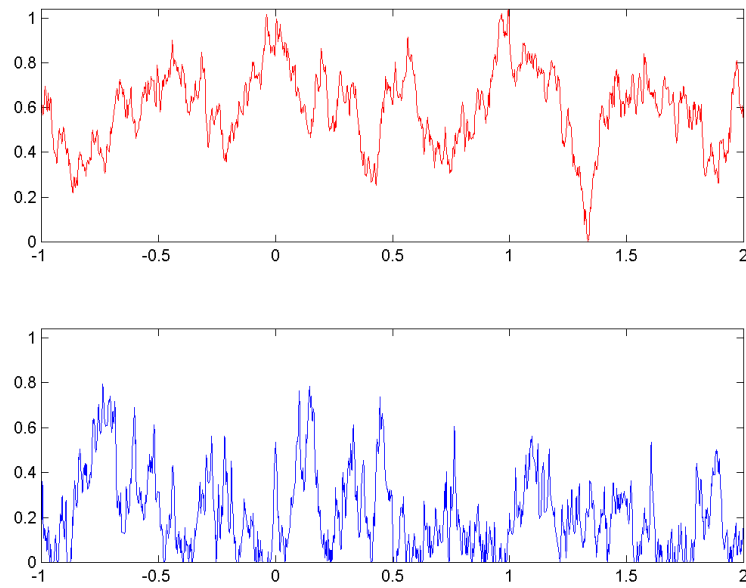


FIG. 8.7. Modélisation théorique d'un MPD Process (en haut) par une fonction de bosses (en bas). Formatage standard avec $N_{disc} = 2000$.

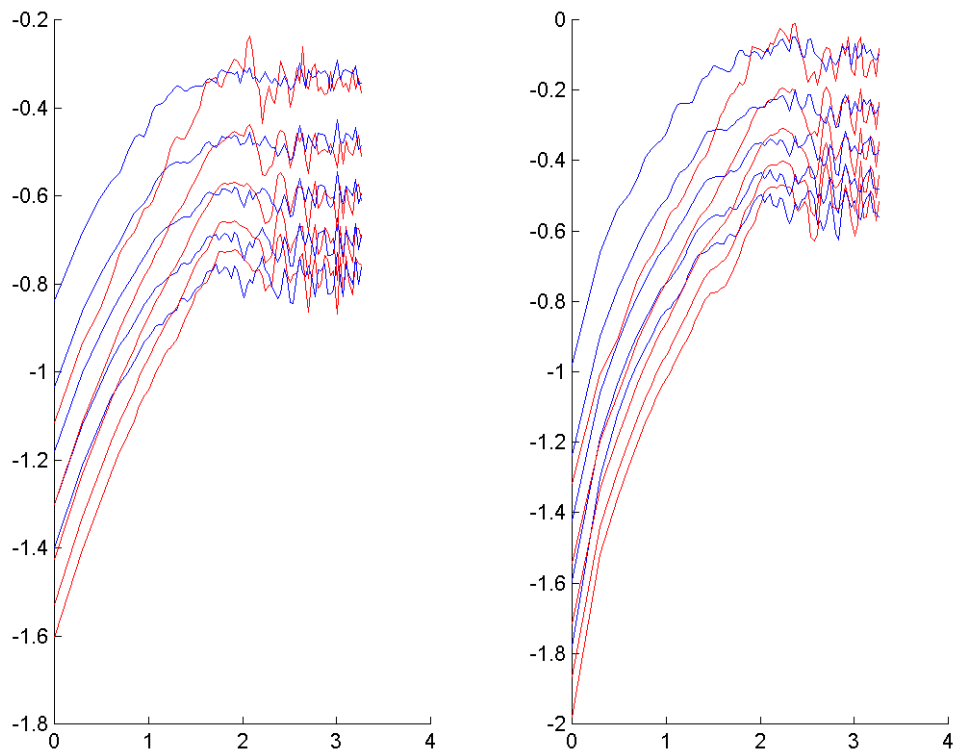


FIG. 8.8. Comparaison des spectres de structure d'un MPD Process (en rouge) modélisé de façon théorique par une fonction de bosses (en bleu). Formatage standard avec $N_{disc} = 2000$.

8.3.2. Modélisation expérimentale

Nous cherchons maintenant un modèle expérimental F pour le même processus f , avec, toujours, $N_{disc} = 2000$ points de discrétisation et un formatage standard. Les paramètres estimés sont donnés par le tableau 8.7. La constante C est obtenue par calage sur le palier et vaut 0.8356.

TAB. 8.7. Paramètres de modélisation expérimentale d'un MPD Process par une fonction de bosses.

	MPD Process	F. de bosses
N	4	12
M	10	548
α	0.5	0.5091
$g(t)$	$1 - t$	$1 - t$
ν	$\{(2k - 1)2^{-n}\}$	$\mathcal{U}([-1, 2])$

La constante C est voisine de 1, ce qui signifie que les compensations par calage n'ont pas été importantes. Cela présage une estimation de bonne qualité. En fait, comme le montre le tableau ci-dessus, tous les paramètres estimés sont très peu différents des paramètres théoriques. L'estimation des bornes est conforme aux valeurs attendues, de même que la bosse g . Ce qui est surtout remarquable, c'est l'estimation quasi parfaite de α . Nous l'avons dit, il s'agit d'un paramètre fondamental car il détermine la dimension fractale du graphe. Nous n'avions pas réussi à l'estimer correctement pour les fonctions de Weierstrass.

On s'attend donc aux mêmes conclusions que pour la modélisation théorique. Sans être excellent, le modèle présente une certaine ressemblance avec le signal original (voir FIG. 8.9). Les courbes de structure (voir FIG. 8.10) sont preuves d'une bonne estimation. Pour le spectre d'ordre 1 d'abord, on ne distingue presque aucune erreur concernant l'ordonnée à l'origine.

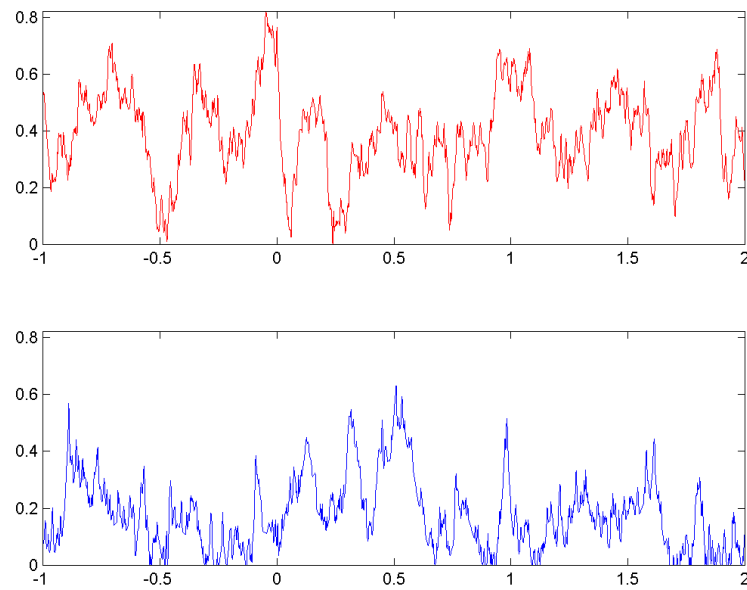


FIG. 8.9. Modélisation expérimentale d'un MPD Process (en haut) par une fonction de bosses (en bas). Formatage 1 avec $N_{disc} = 2000$.

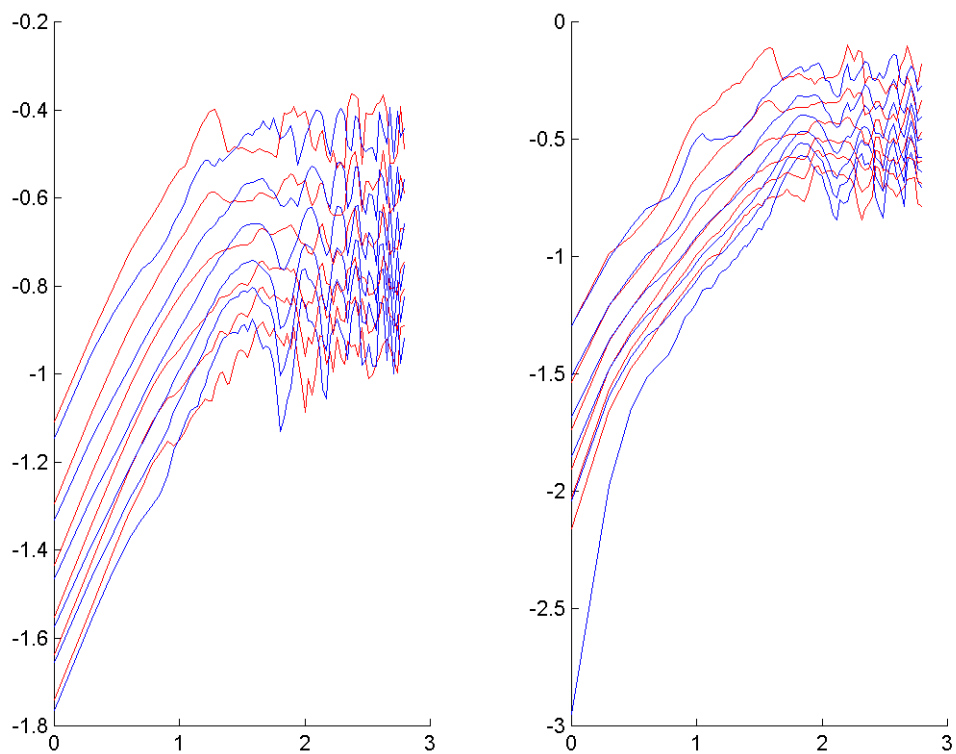


FIG. 8.10. Comparaison des spectres de structure d'un MPD Process (en rouge) modélisé de façon expérimentale par une fonction de bosses (en bleu). Formatage 1 avec $N_{disc} = 2000$.

Les pentes en 0 sont toutes très bien estimées. Les courbes correspondent aussi au niveau des paliers, à partir du crossover estimé $\eta_1^+ = 2.2218$. Avant ce point, on a une zone qui ressemble à un palier, avec des oscillations importantes. On peut faire les mêmes commentaires pour le spectre d'ordre 2. Remarquons toutefois que, comme pour les fonctions de Weierstrass, les courbes ont des pentes et des ordonnées en 0 différentes pour $q \rightarrow 0$. Certaines causes de tels phénomènes sont toutefois indépendantes des signaux étudiés : imprécision des courbes due à l'écart de $\log 2$ entre les deux premiers points η_1 et η_2 ; erreurs numériques inhérentes à la programmation des courbes pour les valeurs extrêmes de q .

Pour terminer, signalons que d'autres simulations ont donné des résultats en tout point similaires : les bornes N et M , et l'exposant α sont toujours estimés fidèlement. Enfin, avec le formatage modifié, on obtient des signaux plus proches visuellement, avec des spectres analogues aux précédents. Ainsi, malgré certaines différences visuelles, l'analyse des spectres rend acceptable l'utilisation d'une fonction de bosses pour modéliser un MPD Process.

8.4. Mouvement brownien

8.4.1. Modélisation théorique

Nous essayons maintenant de modéliser un mouvement brownien standard $B(t)$ restreint à $[0, 1]$. Il peut être défini sans faire appel aux séries aléatoires. Il semble alors plus délicat de calculer *a priori* les paramètres de F . Toutefois, certaines observations peuvent nous guider. D'abord, la régularité höldérienne de B est connue : elle implique $\alpha = 0.5$. Nous avons calculé l'expression des fonctions de structure déterministes de B (voir page 105). Le spectre de structure correspondant se réduit à des droites parallèles entre elles. Théoriquement, il n'y a pas de palier. Pour F , cela signifie que les crossovers η_i^+ ne sont pas observables. Pour qu'ils coïncident avec le dernier point η_{max} , il faut $N = 1$ ou $N = 2$. Ensuite, on constate expérimentalement une très grande irrégularité, et ce à toutes les échelles. On s'attend à pareil comportement pour F . Pour cela, il faut des bosses à support arbitrairement petit, c'est-à-dire $M = \infty$. Compte tenu des problèmes de discrétisation, on choisit donc la plus grande valeur plausible, à savoir $M = 2N_{disc}$. Enfin, la forme de la bosse de base et la distribution des bosses sont choisies par défaut (voir TAB. 8.8).

TAB. 8.8. Paramètres de modélisation théorique d'un mouvement brownien standard par une fonction de bosses.

N	M	α	$g(t)$	ν
1	$2 N_{disc}$	0.5	$1 - t$	$\mathcal{U}([0, 1])$

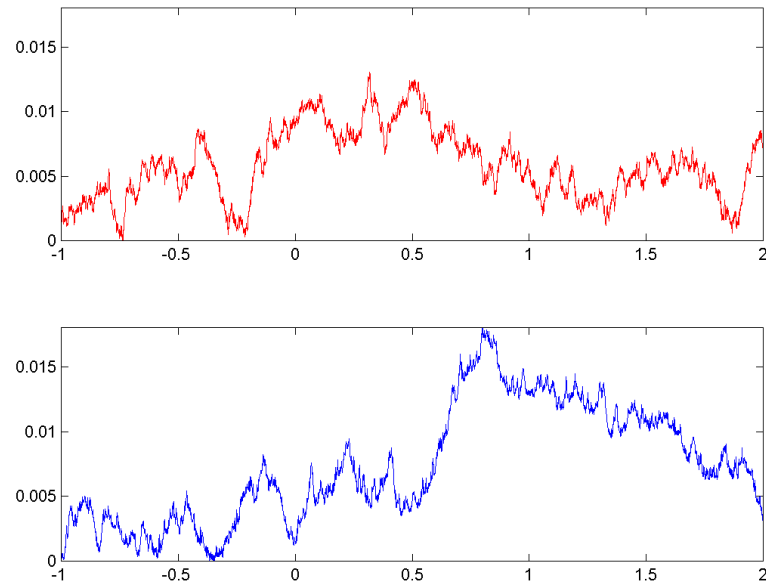


FIG. 8.11. Modélisation théorique d'un mouvement brownien standard (en haut) par une fonction de bosses (en bas). Formatage standard avec $N_{disc} = 5000$.

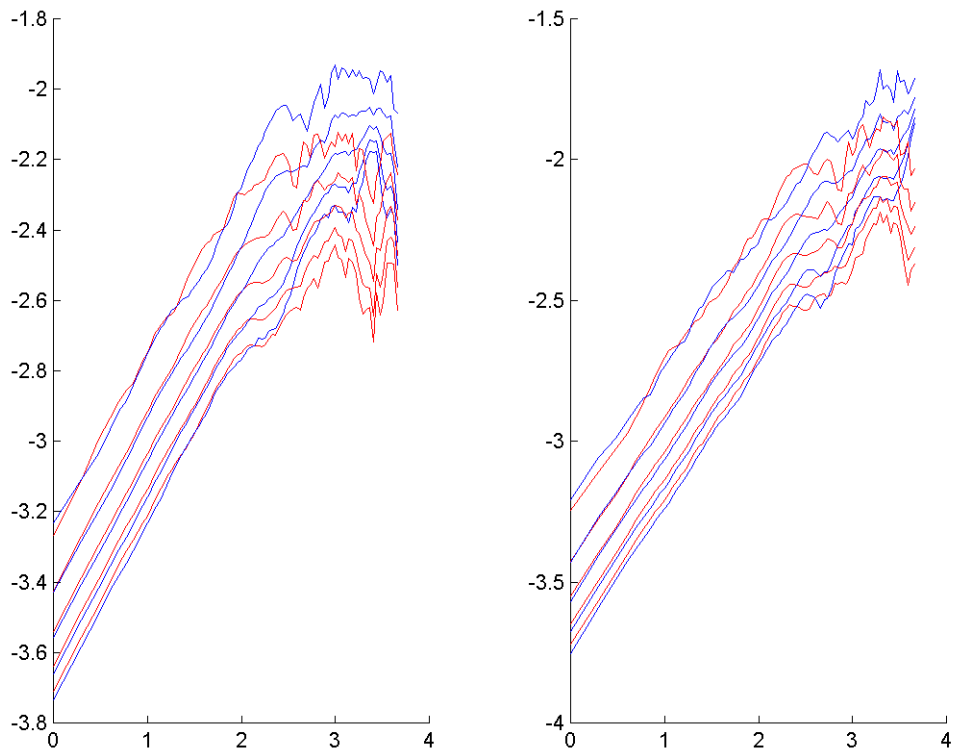


FIG. 8.12. Comparaison des spectres de structure d'un mouvement brownien standard (en rouge) modélisé de façon théorique par une fonction de bosses (en bleu). Formatage standard avec $N_{disc} = 5000$.

Pour conserver toutes les propriétés de B , on utilise pour la première simulation un formatage standard. Le point initial n'est donc plus 0. Le calcul de C par calage sur un palier n'a plus réellement de sens. C'est l'occasion d'utiliser une autre méthode. On choisit un calage sur l'ordonnée à l'origine de la courbe de 2-structure d'ordre 1.

On trace la fonction B d'origine ainsi formatée et son modèle théorique F , pour $N_{disc} = 5000$ (voir FIG. 8.11). Plus que les exemples précédents, l'impression visuelle immédiate est très bonne. Les deux signaux semblent être du même type et posséder les mêmes caractéristiques.

Pour le confirmer, on analyse les spectres de structure d'ordre 1 et 2, pour la gamme $\{0.2, 0.5, 1, 2, 4, 10\}$ (voir FIG. 8.12). Les résultats sont remarquables. Pour $\eta < \eta_0 \approx 3$ (*resp.* $\eta < \eta_0 \approx 3.2$), les courbes d'ordre 1 (*resp.* d'ordre 2) correspondent presque parfaitement. Les pentes sont les mêmes, le biais est apparemment négligeable. De plus, l'adéquation à une seule origine a manifestement induit celles de toutes les autres. Cela signifie que les deux modèles vérifient les relations (5.10) et que les coefficients de translations $c_{p,q}^{(i)}$ sont identiques. Autour du point d'abscisse η_0 , on constate de légères fluctuations. En fait, ce point correspond à un changement de transition factice dû au calcul de courbes expérimentales. Ensuite, pour les grandes valeurs de η , malgré de plus grandes oscillations, les courbes sont à nouveau très proches. On peut conclure que les fonctions de bosses modélisent correctement un mouvement brownien.

On peut aussi formater B avec la méthode non standard. Le signal n'a toutefois plus toutes les caractéristiques d'un mouvement brownien. On a choisi les mêmes paramètres excepté pour la borne inférieure, ici $N = 2$. Les deux signaux sont tracés avec moins de points, $N_{disc} = 1000$. Visuellement, les deux signaux semblent toujours de même nature (voir FIG. 8.13). Avec ce formatage, B a plus l'aspect d'une fonction de bosses. L'analyse des courbes de structure (voir FIG. 8.14) confirme ces remarques. On observe les mêmes phénomènes que précédemment avec une seule nuance. Sur le spectre d'ordre 1, surtout, on remarque un palier plus marqué. Le choix $N = 2$ était donc justifié. Ici encore, la modélisation théorique est donc de bonne qualité.

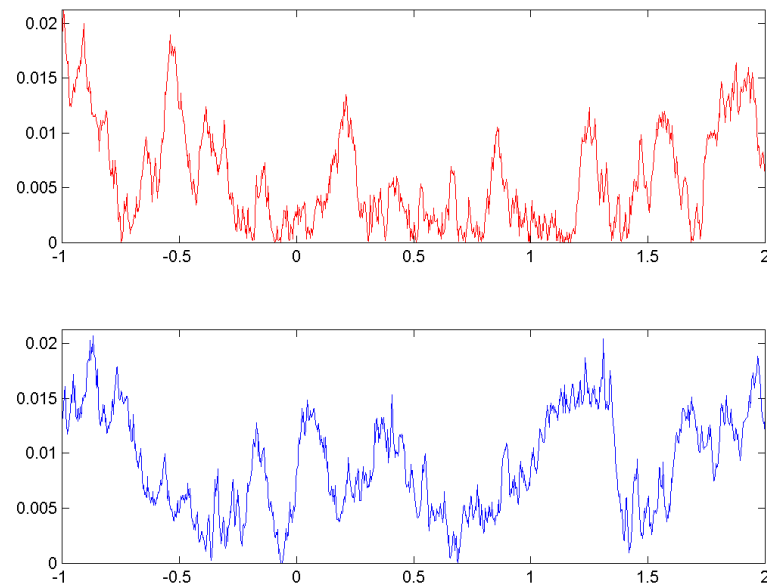


FIG. 8.13. Modélisation théorique d'un mouvement brownien standard (en haut) par une fonction de bosses (en bas). Formatage non standard avec $N_{disc} = 1000$.

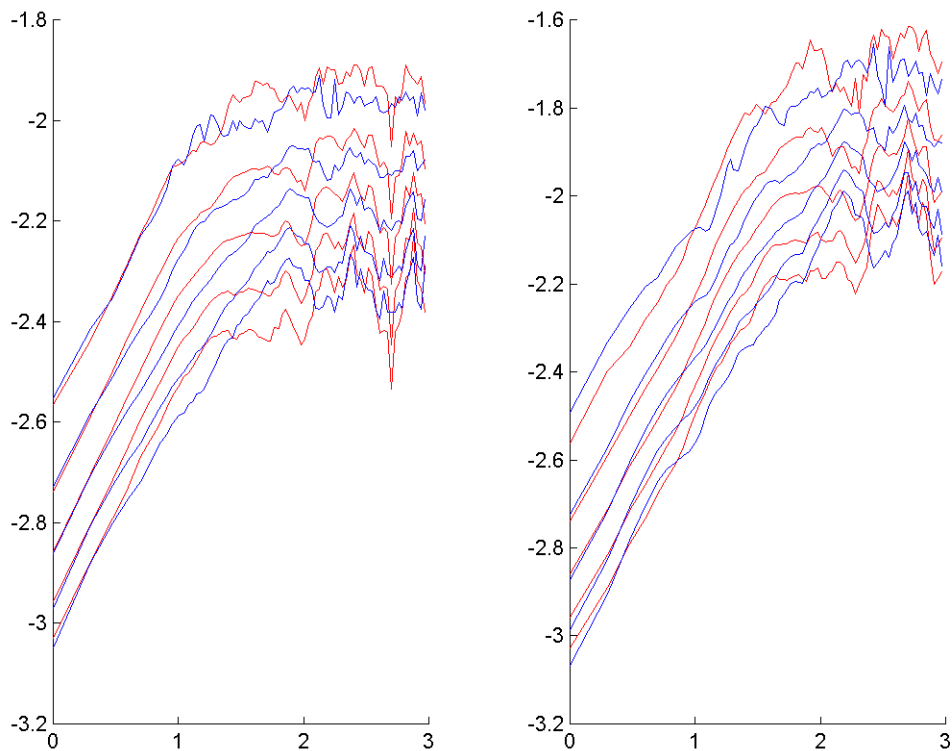


FIG. 8.14. Comparaison des spectres de structure d'un mouvement brownien standard (en rouge) modélisé de façon théorique par une fonction de bosses (en bleu). Formatage non standard avec $N_{disc} = 1000$.

8.4.2. Modélisation expérimentale

Nous allons voir que la modélisation expérimentale donne elle aussi de bons résultats et fournit des valeurs acceptables pour les paramètres du modèle F . La figure 8.15 montre un modèle expérimental déterminé avec $N_{disc} = 2000$ et après un formatage standard. Une fois encore, les deux signaux se « ressemblent » assez bien. Les paramètres estimés sont collectés dans le tableau 8.9.

TAB. 8.9. Paramètres de modélisation expérimentale d'un mouvement brownien standard par une fonction de bosses ($N_{disc} = 2000$).

N	M	α	$g(t)$	C
6	991	0.5272	$1 - t$	0.7922

Par rapport à la modélisation théorique, l'examen des spectres révèle de plus grandes différences. Celles-ci ne traduisent pas pour autant un mauvais choix de modèle. Elles sont essentiellement dues au plus petit nombre de points de discrétisation et à la sous-estimation de M . Cette erreur se fait d'autant plus ressentir que théoriquement $M = \infty$. Le modèle est constitué de moins de bosses. Cela dit, les différentes courbes de structure ne sont pas trop éloignées les unes des autres. Malgré quelques décalages, les pentes sont semblables (du moins pour le spectre d'ordre 1) ce que confirme la bonne estimation de l'exposant α . Enfin, pour les grandes valeurs de η , on ne constate pas réellement de palier significatif mais plutôt de fortes oscillations, de même nature que pour le signal d'origine. Ceci reste cohérent puisqu'on sait en fait qu'un tel palier n'existe pas ! Finalement, on peut accepter la modélisation par cette fonction de bosses.

Notons qu'un formatage non standard a donné les mêmes résultats.

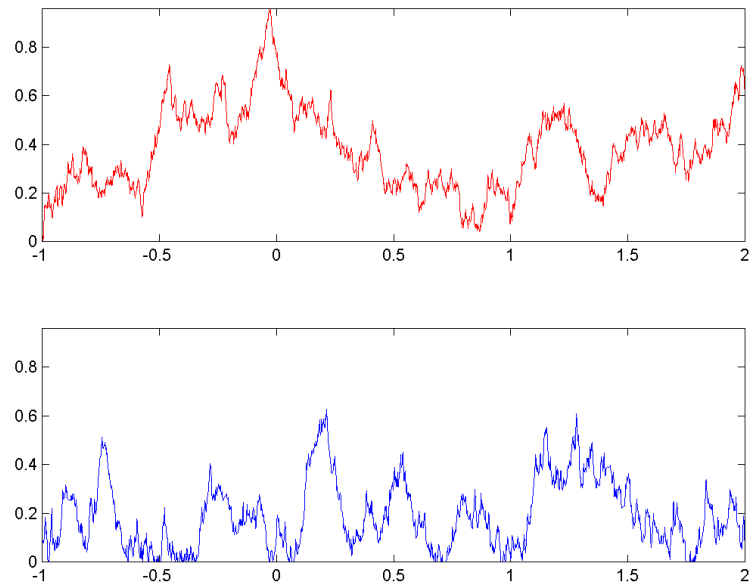


FIG. 8.15. Modélisation expérimentale d'un mouvement brownien standard (en haut) par une fonction de bosses (en bas). Formatage standard avec $N_{disc} = 2000$.

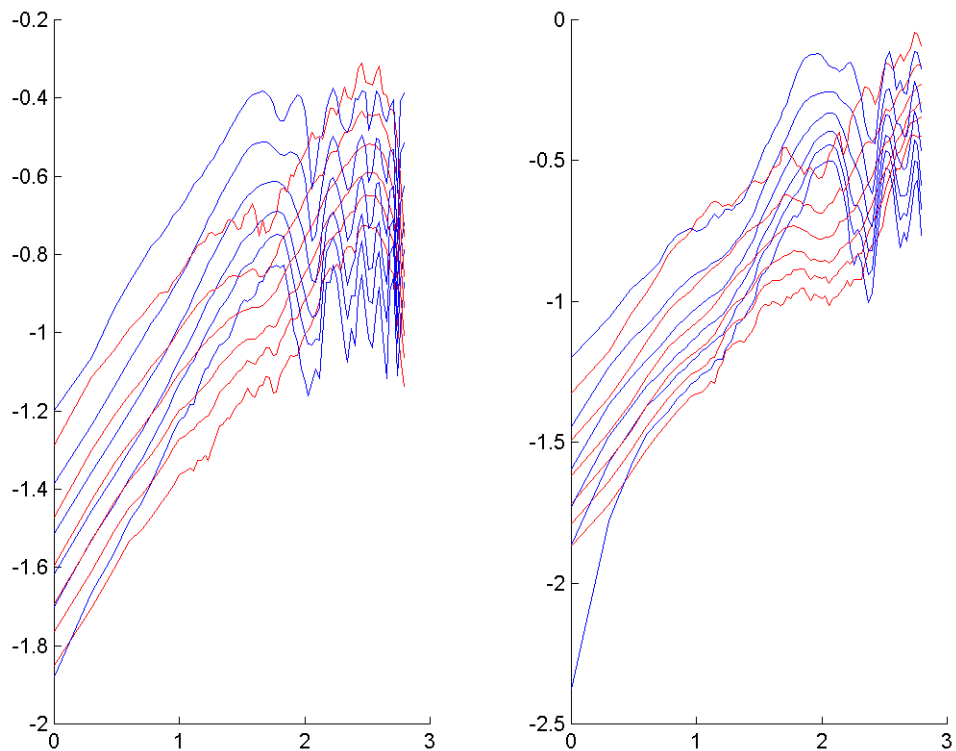


FIG. 8.16. Comparaison des spectres de structure d'un mouvement brownien standard (en rouge) modélisé de façon expérimentale par une fonction de bosses (en bleu). Formatage standard avec $N_{disc} = 2000$.

8.5. Exemple de données expérimentales

Les fonctions de bosses nous ont permis, dans les sections précédentes, de reproduire certains signaux théoriques classiques, utilisés en pratique pour modéliser des surfaces rugueuses, l'évolution du prix d'un actif financier, etc. On peut donc espérer modéliser directement ces phénomènes, à partir de données expérimentales, par des fonctions de bosses. C'est d'ailleurs là l'enjeu important du point de vue applicatif. Concrètement, nous sommes confrontés à de nombreux problèmes, certains étant inhérents au type même de données. Il est possible que celles-ci ne puissent pas être simulées à l'aide d'une fonction de bosses. Les spectres de structure permettent de détecter simplement ce problème.

Pour terminer ce chapitre, nous allons présenter un exemple particulier (voir [39]). On étudie des profils laser d'échantillons de surface de route. On a effectué 12501 mesures, distantes chacune de 10 μm . On obtient le signal *pr6* donné par la figure 8.17.

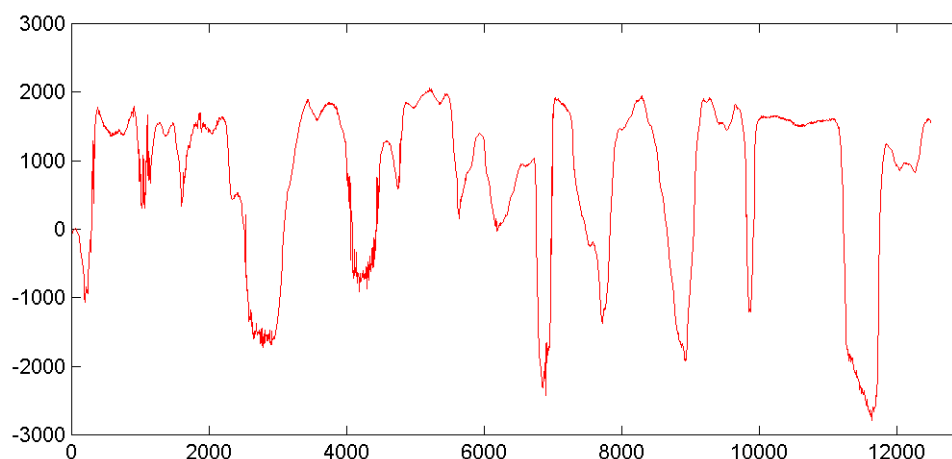
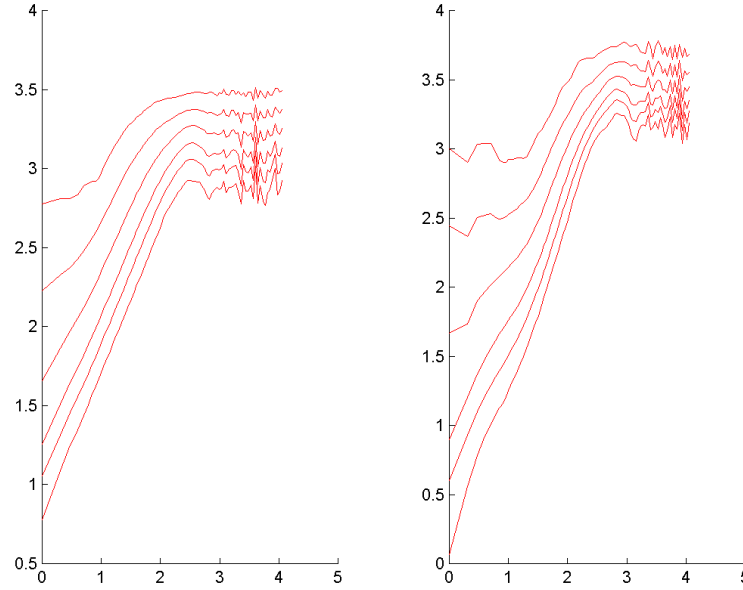


FIG. 8.17. Profil laser *pr6* d'un échantillon de surface de route (12501 mesures espacées de 10 microns).

On ne dispose pas d'information préalable sur ce signal mais à première vue, il ne ressemble pas au graphe d'une fonction de bosses. Pour avoir une idée plus précise de la morphologie du signal, on trace son spectre de structure (voir FIG. 8.18). Les différentes courbes ne sont pas translatées les unes des autres ce qui est toujours le cas pour les fonctions de bosses qui nous servent de modèles. La modélisation du signal par une fonction de bosses paraît donc peu justifiée. Effectivement, si on détermine expérimentalement un modèle, celui-ci n'est pas satisfaisant. Cela ne veut pas dire pour autant que les fonctions de bosses sont inutiles. Diverses stratégies peuvent être développées pour remédier à ces problèmes.

FIG. 8.18. Spectres de structure du profil *pr6*.

8.5.1. Analyse globale

On veut toujours étudier l'ensemble du signal. Le fait est que le modèle dont on dispose est trop simple. On pense alors à l'améliorer, comme nous l'avons déjà mentionné, en considérant le paramètre S , des amplitudes aléatoires, des lois ν plus complexes. Cependant de nombreux signaux présentent des aspects très proches de ceux d'une fonction de bosses, suggérant peu de changements. Une idée simple est de considérer différentes fonctions de bosses $\{F_k\}_{k=1}^K$ et de former la somme $F = F_1 + \dots + F_K$. On obtient ainsi une classe de modèles beaucoup plus riche.

C'est la solution proposée dans [39] pour modéliser des profils de route. En considérant la somme de deux fonctions de bosses, on obtient un modèle dont le spectre de structure est en adéquation avec celui du signal d'origine.

Ces modèles font intervenir un plus grand nombre de paramètres. Leur estimation est plus délicate. L'étude des courbes de structure est, par exemple, plus complexe.

8.5.2. Analyse locale

Une autre réponse repose sur l'idée simple suivante : si le signal présente des caractères proches de ceux d'une fonction de bosses, c'est qu'il a localement une structure comparable. On cherche donc à modéliser, comme on l'a fait jusqu'à présent, certaines parties seulement du signal.

L'idée la plus immédiate consiste à découper le signal en tranches verticales et à modéliser chaque section. Mathématiquement parlant, on étudie les restrictions d'une fonction à certains intervalles sur lesquelles elle est supposée pouvoir s'écrire comme une fonctions de bosses. Physiquement, on oublie le comportement du signal en dehors de ces domaines choisis.

Exemples

Pour illustrer notre propos, on reprend le profil *pr6* en sélectionnant deux plages de données. On effectue un formatage standard mais sans enlever la dérive.

On analyse d'abord la restriction de *pr6* à l'intervalle $[0.215, 0.235]$. On obtient le signal *pr6a* (voir le graphe de la figure 8.19). Ce nouveau signal ressemble davantage à celui d'une fonction de bosses, ce que confirme ses spectres de structure (voir FIG. 8.20) qui montrent des courbes parallèles entre elles.

La fonction de bosses fournie par la modélisation expérimentale de *pr6a* ne semble pas être un excellent modèle. Certains paramètres sont estimés avec une erreur assez grande, due par exemple au petit nombre de points de discrétisations. On peut toutefois ajuster ces paramètres «à la main». On obtient alors la fonction modèle

$$F(t) = 323.3037 \sum_{N=5}^{210} n^{-0.6} g(n(t - X_n))$$

où g est la bosse demi-cercle $g(t) = (1 - t^2)^{1/2}$ et $\nu = \mathcal{U}([-1, 2])$. Les résultats sont finalement assez satisfaisants (voir FIG. 8.19 et FIG. 8.20). Le modèle ressemble à l'original et les courbes de structure, sans être en parfaite adéquation, sont assez proches. Les spectres d'ordre 1 sont les plus coïncidents. L'examen des spectres ne permet pas de certifier que les signaux sont du même type, mais il peut, selon le degré d'exigence, suffire à valider le modèle.

On analyse maintenant la restriction de *pr6* à l'intervalle $[0.3360, 0.3520]$. On obtient le signal *pr6b* (voir le graphe de la figure 8.21). Les courbes de structure (voir 8.22) sont à nouveau approximativement translatées les unes des autres. Elles n'interdisent pas l'emploi des fonctions de bosses. Le signal ressemble d'ailleurs à celui d'une fonction de bosses, mais il possède toutefois une dérive importante indiquant que la loi uniforme n'est pas un bon choix pour ν . C'est d'autant plus l'occasion d'utiliser une fonction de bosses avec une loi de type exponentiel plutôt qu'une loi uniforme. On détermine encore les paramètres «à la main» pour obtenir le modèle

$$F(t) = 1.3098 \cdot 10^3 \sum_{N=10}^{1000} n^{-0.8} g(n(t - X_n))$$

où g est la bosse trigonométrique $g(t) = \cos(\pi t/2)$ et ν est de type exponentiel avec $B = 1.4$ (voir page 119). Les résultats sont là encore satisfaisants (voir FIG. 8.21 et FIG. 8.22). La différence est visible sur la partie gauche du signal : il n'y a manifestement pas assez de bosses. Cette mauvaise valeur de M se traduit par des différences au niveau des courbes de structure pour les petites valeurs de η , notamment dans la valeur des pentes.

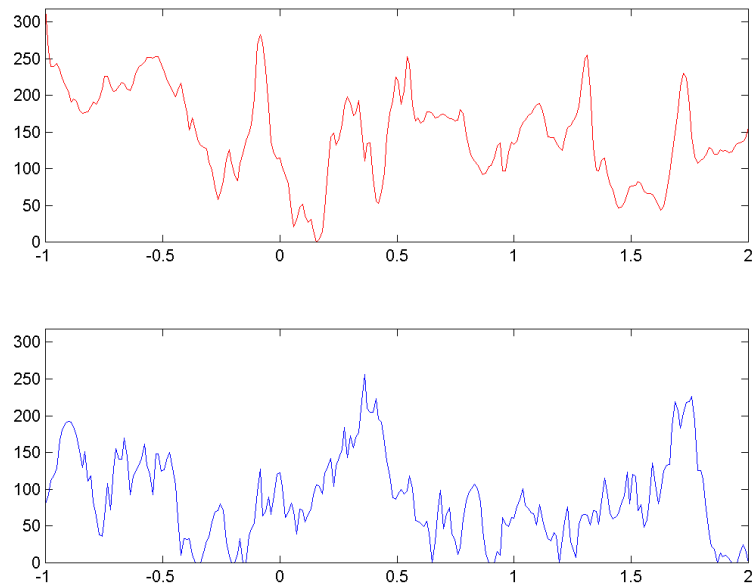


FIG. 8.19. Profil laser *pr6a* (en rouge) et son modèle (en bleu).

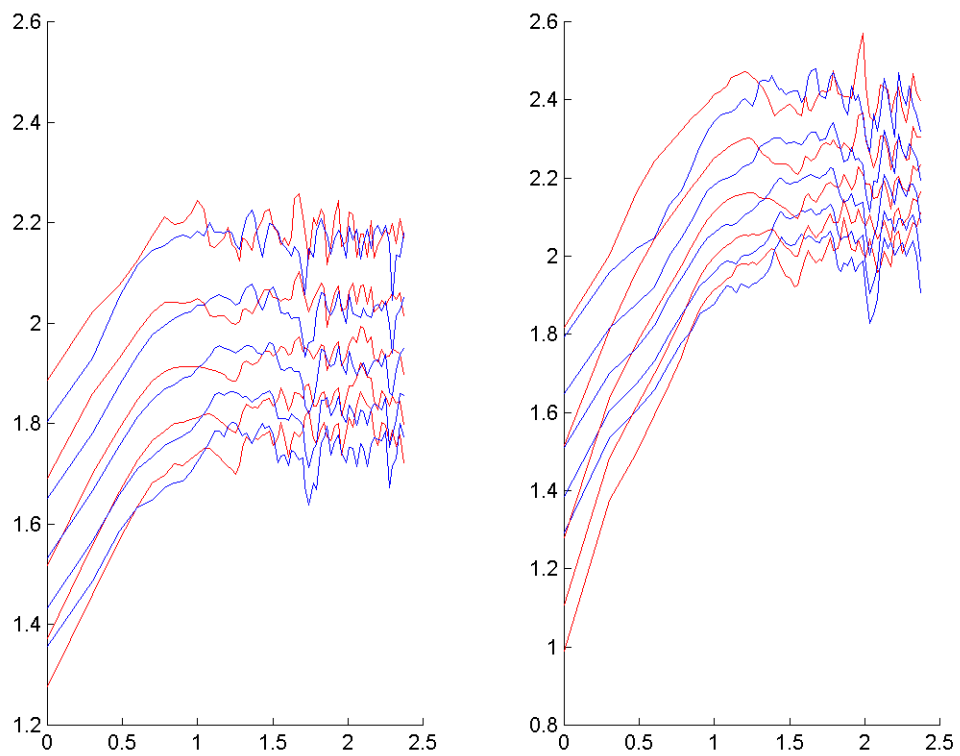
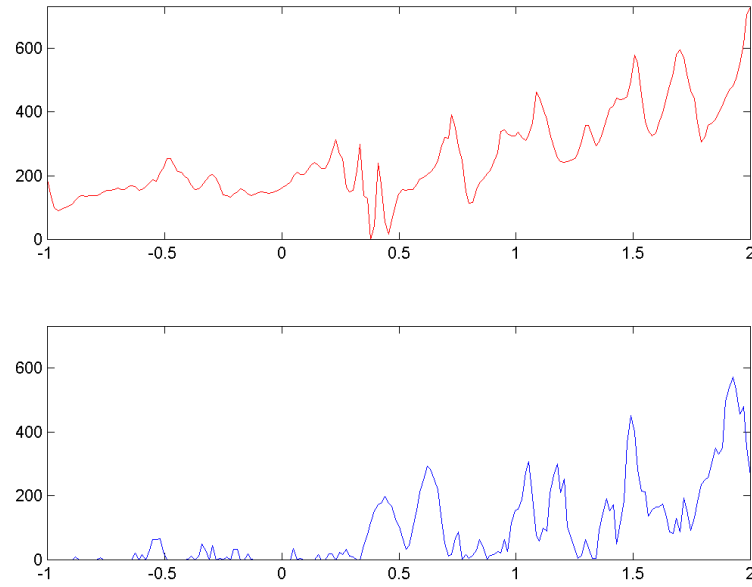
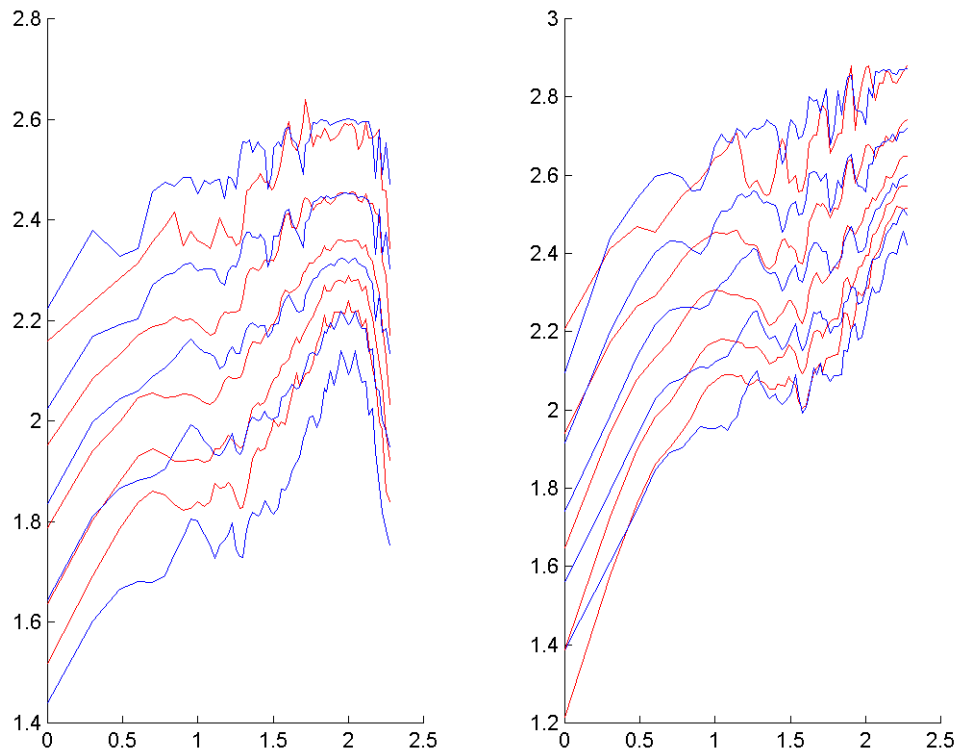


FIG. 8.20. Comparaison des spectres de structure de *pr6a* (en rouge) et de son modèle (en bleu).

FIG. 8.21. Profil laser *pr6b* et son modèle.FIG. 8.22. Comparaison des spectres de structure de *pr6b* et de son modèle.

La partie droite est elle bien retranscrite tant dans l'aspect que dans la tendance croissante. On déduit de l'analyse des spectres les mêmes conclusions que pour l'exemple précédent. On constate des différences notables pour les petites et grandes valeurs de η , ce qui ne permet pas d'affirmer que les signaux sont de la même origine. Mais les courbes des deux spectres ont une allure générale assez proche. Typiquement, le modèle présente certains caractères du signal original. Il doit être possible d'affiner le choix des paramètres pour obtenir un modèle acceptable.

Si la méthode que nous venons d'utiliser est une solution possible, elle n'est pas sans soulever certaines difficultés. La première réside dans la sélection des plages de données à traiter, c'est-à-dire les restrictions du signal. On peut tracer les spectres de structure et conserver les données tant que les différentes courbes restent parallèles. Mais ce n'est pas suffisant. Il faut développer une méthode de découpage plus élaborée. Ensuite, la modélisation est fastidieuse. Il faut déterminer un modèle pour chaque section. Le risque est alors d'en avoir un très grand nombre. Dans cet optique, si on a trop sectionné le signal, les sections (et par suite leurs modèles) auront d'autant moins de signification qu'elles contiendront peu de données. On doit aussi considérer des problèmes théoriques. La modélisation successive de chaque section suppose que les plages de données sont indépendantes les unes des autres. Cela n'est pas toujours vrai, et de toute façon, il est en pratique très difficile de le vérifier. Les raccordements de chacun des modèles élémentaires sont eux aussi difficiles à contrôler. Finalement, cette méthode est intéressante pour une étude locale bien déterminée.

On peut envisager d'autres solutions. Pour terminer, nous allons décrire une façon de procéder originale. Plutôt que de découper le signal verticalement, à partir de la variable, on pratique une coupe horizontale au niveau des valeurs de la fonction.

On suppose cette dernière positive. Formellement, on fixe une hauteur de coupe $c > 0$ et on étudie la nouvelle fonction y_c définie par

$$y_c(t) = \max\{y(t), c\} - c.$$

L'intervalle de définition est le même, mais on conserve uniquement la partie supérieure du signal en oubliant les valeurs de y inférieures à c .

Deux raisons motivent cette démarche. D'un point de vue physique, ce nouveau signal peut avoir une signification concrète. Si on modélise une surface et qu'on étudie l'adhérence d'un certain liquide, on s'intéresse aux premiers points de contact, puis aux suivants, et ainsi de suite, en faisant décroître c . On peut imaginer que seule une certaine couche de la surface interagisse avec le liquide. Notons qu'avec ce procédé, le nouveau signal conserve l'irrégularité du signal d'origine à toutes les échelles. Ensuite, lorsqu'on trace le graphe d'une fonction de bosses de la forme (8.1) avec N assez grand, on observe des zones peu ou pas du tout recouvertes. Géométriquement, le profil obtenu est assez proche d'un signal coupé y_c . Sans donner ici d'exemples de telles modélisations, cette méthode semble être une alternative intéressante et une façon originale de faire intervenir les fonctions de bosses dans la description d'un signal.

Annexe : familles de bosses élémentaires

Préliminaires

Ici sont regroupées les principales familles de bosses élémentaires g utilisées dans les chapitres précédents. Nous donnons leur définition, leurs principales propriétés, puis nous déterminons pour chacune d'elles :

– les moments d'ordre q :

$$\forall q \geq 0 \quad \mu_q = \int_0^1 g^q(t) dt,$$

– la fonction χ associée :

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \chi(x) = \int_{-x}^1 |g(u) - g(u + 2x)|^2 du$$

Les calculs pour obtenir cette dernière sont assez longs et très techniques. Ils ne figurent pas ici.

On rappelle la définition des fonctions d'Euler. Leurs propriétés sont bien connues. Nous les utiliserons pour calculer les moments des bosses élémentaires usuelles.

DÉFINITION. On appelle

i) première fonction d'Euler la fonction B définie par

$$\forall x, y > 0 \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt.$$

ii) seconde fonction d'Euler la fonction Γ définie par

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

LEMME (A). On a

i) Pour tout $a, b > 0$:

$$\int_0^1 (1-t^a)^b dt = \frac{b}{ab+1} \frac{\Gamma(b) \Gamma(a^{-1})}{\Gamma(b+a^{-1})}.$$

ii) Pour tout $a > 0$:

$$\int_0^1 \cos^a\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((a+1)/2)}{\Gamma(a/2)}.$$

Démonstration. *i)* Le changement de variable défini par $u = t^a$ donne

$$\int_0^1 (1 - t^a)^b dt = a^{-1} \int_0^1 (1 - u)^b u^{\frac{1-a}{a}} du = a^{-1} B(b + 1, a^{-1}).$$

Or

$$B(b + 1, a^{-1}) = \frac{\Gamma(b + 1) \Gamma(a^{-1})}{\Gamma(b + 1 + a^{-1})} = \frac{b \Gamma(b) \Gamma(a^{-1})}{(b + a^{-1}) \Gamma(b + a^{-1})},$$

d'où la première formule.

ii) On a

$$\int_0^1 \cos^a\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^a t dt = \frac{1}{\pi} B\left(\frac{a + 1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Avec

$$B\left(\frac{a + 1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma((a + 1)/2) \Gamma(1/2)}{\Gamma(1 + (a/2))} = \frac{\Gamma((a + 1)/2) \sqrt{\pi}}{(a/2) \Gamma(a/2)},$$

d'où la seconde formule. \square

La bosse indicatrice

Il s'agit de la bosse la plus simple définie par $g = \mathbb{1}_{[-1,1]}$. Notons que le processus F n'est alors pas à trajectoires continues. Il est clair que cette bosse est la seule vérifiant

$$\forall q \geq 0 \quad \mu_q = 1.$$

On a facilement :

$$\chi(x) = \begin{cases} 2x & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

Les bosses puissance

Il s'agit des fonctions $g_{\alpha,\beta}$ définies pour $\alpha, \beta > 0$ par

$$\forall t \in [0, 1] \quad g_{\alpha,\beta}(t) = (1 - t^\alpha)^\beta.$$

Le calcul des moments de $g_{\alpha,\beta}$ découle du lemme 8.5.2 :

$$\forall q > 0 \quad \mu_q(g_{\alpha,\beta}) = \frac{q\beta}{q\alpha\beta + 1} \frac{\Gamma(q\beta) \Gamma(\alpha^{-1})}{\Gamma(q\beta + \alpha^{-1})}.$$

L'expression de μ_q n'est pas simple. En fait cette famille est constituée de bosses trop complexes. Il est également impossible d'obtenir l'expression exacte des fonctions χ associées. Il est nécessaire de se limiter à certaines sous-familles.

Les bosses polynomiales

Une classe importante de bosses est celle constituée de polynômes. S'il existe clairement des bosses polynômes de degré quelconque, nous nous restreignons à deux familles, obtenues avec les fonctions puissance.

Bosses polynomiales de première espèce

Ce sont les fonctions $g_p = g_{p,1}$ définies pour $p \in \mathbb{N}^*$ par

$$\forall t \in [0, 1] \quad g_p(t) = 1 - t^p.$$

Pour $p = 1$ on obtient la bosse triangle et on a

$$g_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \mathbb{I}_{[-1,1]}.$$

Pour les moments de g_p , nous avons :

LEMME. Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:

$$\mu_q(g_p) = \frac{q! p^q}{(1+p)(1+2p) \cdots (1+qp)}.$$

Démonstration. D'après le lemme (A), on a

$$\mu_q = \frac{q}{pq+1} \frac{\Gamma(q) \Gamma(1/p)}{\Gamma(q+1/p)}.$$

Avec $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ on obtient la relation de récurrence

$$\mu_{q+1} = \frac{p(q+1)}{p(q+1)+1} \mu_q.$$

Par suite

$$\mu_q = \prod_{k=1}^q \frac{pk}{pk+1} = p^q q! \prod_{k=1}^q \frac{1}{pk+1},$$

d'où la formule annoncée. \square

Après quelques calculs, on obtient l'expression de la fonction χ :

- pour $x \in [0, 1/2]$:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 2x - \frac{2}{p+1} + \frac{2}{2p+1} - 2(-1)^p x^{2p+1} \sum_{k=0}^p \frac{(-2)^k \binom{p}{k}}{2p+1-k} \\ &\quad - 2 \sum_{k=0}^p \frac{\binom{p}{k} (2x)^k (1-x)^{2p+1-k}}{2p+1-k} + \frac{2(1-2x)^{p+1}}{p+1}. \end{aligned}$$

- pour $x \in [1/2, 1]$:

$$\begin{aligned} \chi(x) &= 2x - \frac{2}{p+1} + \frac{2}{2p+1} - 2(-1)^p x^{2p+1} \sum_{k=0}^p \frac{(-2)^k \binom{p}{k}}{2p+1-k} \\ &\quad - 2(-1)^p \sum_{k=0}^p \frac{\binom{p}{k} (2x)^k (1-x)^{2p+1-k}}{2p+1-k} - \frac{2(2x-1)^{p+1}}{p+1}. \end{aligned}$$

- pour $x \geq 1$:

$$\chi(x) = 2\left(1 - \frac{2}{p+1} + \frac{1}{2p+1}\right).$$

Remarquons que si p est pair, les deux premiers cas se réduisent à un seul (noter le facteur $(-1)^p$).

Bosses polynomiales de seconde espèce

Ce sont les fonctions $g_p = g_{1,p}$ définies pour $p \in \mathbb{N}^*$ par

$$\forall t \in [0, 1] \quad g_p(t) = (1-t)^p.$$

Pour $p = 1$ on obtient encore la bosse triangle et on a

$$g_p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

Pour les moments de g_p , on a immédiatement le :

LEMME. *Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$:*

$$\mu_q(g_p) = \frac{1}{qp+1}.$$

Après quelques calculs, on obtient l'expression de la fonction χ :

- pour $x \in [0, 1/2]$:

$$\begin{aligned} \chi(x) = & \frac{2}{2p+1} - 2 \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k \binom{p}{k}}{2k+1} (1-x)^{2(p-k)} x^{2k+1} \\ & - 2(-1)^p \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k \binom{p}{k}}{2k+1} x^{2(p-k)} ((1-x)^{2k+1} - x^{2k+1}). \end{aligned}$$

- pour $x \in [1/2, 1]$:

$$\chi(x) = \frac{2}{2p+1} - 2(1-x)^{2p+1} \sum_{k=0}^p \frac{(-1)^k \binom{p}{k}}{2k+1}.$$

- pour $x \geq 1$:

$$\chi(x) = \frac{2}{2p+1}.$$

Les bosses trigonométriques

Il s'agit de la famille de bosses $(g_\alpha)_{\alpha>0}$ définies par :

$$\forall t \in [0, 1] \quad g_\alpha(t) = \cos^\alpha \left(\frac{\pi t}{2} \right).$$

Le calcul des moments de g_α découle toujours du lemme (A) :

$$\forall q > 0 \quad \mu_q(g_\alpha) = \frac{2}{q\alpha\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma((q\alpha+1)/2)}{\Gamma(q\alpha/2)}.$$

On peut expliciter cette formule lorsque $\alpha \in \mathbb{N}^*$:

LEMME. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:*

$$\mu_q(g_n) = \begin{cases} \frac{(qn)!}{2^{qn}} \left(\left(\frac{qn}{2} \right)! \right)^{-2} & \text{si } qn \text{ est pair.} \\ \frac{1}{\pi} \frac{2^{qn}}{(qn)!} \left(\left(\frac{qn-1}{2} \right)! \right)^2 & \text{si } qn \text{ est impair.} \end{cases}$$

Démonstration. On a

$$\mu_q(g_n) = \int_0^1 \cos^{qn}\left(\frac{\pi t}{2}\right) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{qn}(t) dt = \frac{2}{\pi} I(qn),$$

où $I(m)$ est l'intégrale de Wallis

$$I(m) = \int_0^{\pi/2} \cos^m(t) dt = \begin{cases} \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} & \text{si } m = 2p \text{ est pair.} \\ \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} & \text{si } m = 2p+1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Le résultat en découle. \square

Le calcul de la fonction χ est délicat. Nous nous limitons à deux cas simples.

Cas $\alpha = 1$

Cette bosse nous permettra la comparaison avec les fonctions de Weierstrass et avec la bosse polynomiale $g_{2,1}$.

Pour les premiers moments de g_1 on a :

$$\mu_1 = \frac{2}{\pi}, \quad \mu_2 = \frac{1}{2}, \quad \mu_3 = \frac{4}{3\pi}, \quad \mu_4 = \frac{3}{8}.$$

Pour la fonction χ , on utilise la relation

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad |g(u) - g(v)| = 2 \left| \sin\left(\frac{\pi}{4}(u+v)\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}(u-v)\right) \right|$$

pour obtenir

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 - (1-x) \cos(\pi x) - \frac{\sin(\pi x)}{\pi} & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 1 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

Cas $\alpha = 2$

Nous avons ici l'exemple d'une bosse élémentaire plus régulière puisque de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Pour les premiers moments de g_2 on a :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}, \quad \mu_2 = \frac{3}{8}, \quad \mu_3 = \frac{5}{16}, \quad \mu_4 = \frac{35}{128}.$$

Pour la fonction χ , on utilise cette fois la relation

$$\forall u, v \in \mathbb{R} \quad |g(u) - g(v)| = \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}(u+v)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}(u-v)\right) \right|.$$

On obtient

$$\chi(x) = \begin{cases} \frac{1+2x}{4} - \frac{3 \sin(2\pi x)}{8\pi} + \frac{(x-1) \cos(2\pi x)}{4} & \text{pour } x \in [0, 1] \\ 3/4 & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

Les bosses trapèze

Nous terminons en présentant l'exemple de bosses élémentaires non développables en série entière sur $[0, 1]$ mais seulement sur des sous-intervalles. Elles sont définies par deux paramètres, ce qui en fait une famille particulièrement riche.

Pour $(\alpha, \beta) \in]0, 1[\times]0, 1]$, on considère les bosses $g_{\alpha, \beta}$ définies sur $[0, 1]$ par :

$$g_{\alpha, \beta}(t) = \begin{cases} \left(\frac{\beta-1}{\alpha}\right)t + 1 & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ \left(\frac{\beta}{\alpha-1}\right)(t-1) & \text{si } t \in [\alpha, 1] \end{cases}$$

Par abus de langage, de telles bosses sont appelées *bosses trapèze de noeud* (α, β) . Elles sont finalement assez simples puisque affines sur $[0, \alpha]$ et $[\alpha, 1]$. Notons que pour $\alpha + \beta = 1$ on obtient encore la bosse triangle, en particulier il n'y a pas bijectivité entre les bosses et le paramètre (α, β) de la famille. C'est toutefois le seul cas de non injectivité :

$$g_{\alpha, \beta} = g_{\alpha', \beta'} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = \alpha' + \beta' = 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = \alpha' \quad \text{et} \quad \beta = \beta' \end{cases}$$

Pour les moments de $g_{\alpha, \beta}$ on a :

LEMME. Pour tout $q > 0$:

$$\mu_q(g_{\alpha, \beta}) = \frac{\beta^q}{q+1} + \frac{\alpha(1-\beta^q)}{(q+1)(1-\beta)}.$$

On a par exemple

$$\mu_1(g_{\alpha, \beta}) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{et} \quad \mu_2(g_{\alpha, \beta}) = \frac{\alpha + \alpha\beta + \beta^2}{3}.$$

Selon la valeur du paramètre, $g_{\alpha, \beta}$ possède des propriétés spécifiques. Par exemple, elle est convexe si et seulement si $\alpha + \beta \leq 1$; inversible si et seulement si $\beta \neq 1$ et dans ce cas $g_{\alpha, \beta}^{-1} = g_{\beta, \alpha}$ est encore une bosse trapèze; etc.

La famille des bosses trapèze est, à l'instar des bosses puissance, trop riche. Il est intéressant de travailler avec certaines sous-familles, par exemple les bosses trapèze :

– de *première espèce*, pour lesquelles $\beta = 1$: $g_{\alpha, \beta}$ vaut alors 1 sur $[0, \alpha]$ et $g_{\alpha, \beta} \xrightarrow[\alpha \rightarrow 1]{} \mathbb{1}_{[-1, 1]}$, elle est toujours concave.

– de *seconde espèce*, pour lesquelles $\beta = \alpha$: $g_{\alpha, \beta}$ est alors égale à son inverse. La bosse $g_{\alpha, \alpha}$ est une version polygonale simplifiée de la bosse puissance $g_{a, a-1}$ pour $a = -\log 2 / \log \alpha$. Elles ont la même convexité, sont involutives, etc (voir FIG. 8.23).

La détermination de χ dans le cas général est pénible. Elle est légèrement simplifiée pour les bosses de première espèce. Nous donnons l'exemple de la bosse de noeud $(1/2, 1)$, encore définie par :

$$g(t) = \min\{1, \max\{0, 2 - 2|t|\}\}.$$

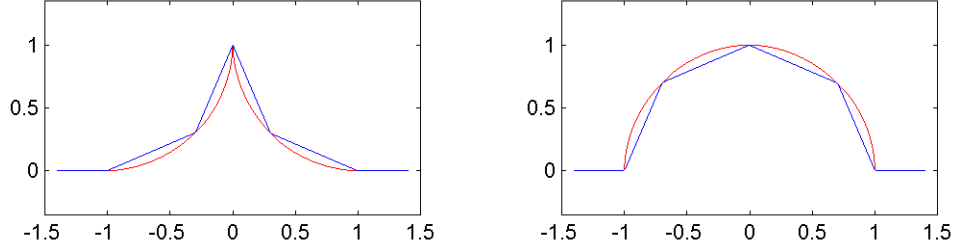


FIG. 8.23. Comparaison des bosses élémentaires trapèze $g_{\alpha,\alpha}$ (en bleu) et puissance $g_{a,a-1}$ avec $a = -\log 2 / \log \alpha$ (en rouge) pour $\alpha \in \{0.3, 0.7\}$ (de gauche à droite).

On obtient :

- pour $x \in [0, 1/4]$: $\chi(x) = -\frac{32}{3}x^3 + 8x^2$,
- pour $x \in [1/4, 1/2]$: $\chi(x) = 2x - \frac{1}{6}$,
- pour $x \in [1/2, 3/4]$: $\chi(x) = -\frac{2}{3}(2x-1)^3 + 2x - \frac{1}{6}$,
- pour $x \in [3/4, 1]$: $\chi(x) = \frac{4}{3} - \frac{16}{3}(1-x)^3$,
- pour $x \geq 1$: $\chi(x) = \frac{4}{3}$.

On voit que la présence d'un noeud au point d'abscisse $1/2$ empêche g d'être développable en série sur $[0, 1]$: elle l'est sur $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$. Cela entraîne l'existence de crossovers.

Nous terminons en construisant une famille de bosses élémentaires $(g_a)_{a \in A}$ à coefficient $k_{i,j}$ constant (voir page 172). Soient $k \in]0, 1[$ fixé et $A =]0, k[$. On considère, pour tout $a \in A$, la bosse g_a définie comme la bosse trapèze de noeud

$$(\alpha, \beta) = \left(\frac{a(k-a)}{1+a-k}, a \right).$$

Dans ces conditions :

LEMME. *La fonction g_a est une bosse élémentaire vérifiant*

$$\forall a \in A \quad k_{2,1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{2}{3}k.$$

Démonstration. Dans toute la suite $a \in A$ et $q = a(k-a)(1+a-k)^{-1}$.

a) Justifions que g_a est une bosse élémentaire. Il suffit de montrer que $q \in]0, 1[$. On a $0 < a < k < 1$ donc $0 < k-a < 1$ et $q > 0$. Ensuite $q < 1$ équivaut à la positivité sur $]0, k[$ de $a^2 + (1-k)a + (1-k)$: c'est clair.

b) En utilisant le lemme 8.5.2 il vient

$$\mu_1(g_a) = \frac{1}{2} \left(\frac{a(k-a) + a(1+a-k)}{1+a-k} \right) = \frac{1}{2} \frac{a}{1+a-k}$$

et

$$\mu_2(g_a) = \frac{1}{3} \left(\frac{a(k-a) + a^2(k-a) + a^2(1+a-k)}{1+a-k} \right) = \frac{1}{3} \frac{ak}{1+a-k}.$$

Ainsi

$$\frac{\mu_2(g_a)}{\mu_1(g_a)} = \frac{2}{3} k.$$

□

La famille obtenue a toutefois l'inconvénient de ne pas contenir une grande variété de bosses. Par exemple, elles sont toutes convexes, et lorsque $k \rightarrow 1$, la famille tend à se réduire à la bosse triangle. Par exemple pour $k = 3/4$, l'abscisse du noeud varie entre 0 et $1/4$, pour une ordonnée allant de 0 à $3/4$ (voir FIG. 8.24). On a alors $k_{2,1} = 1/2$.

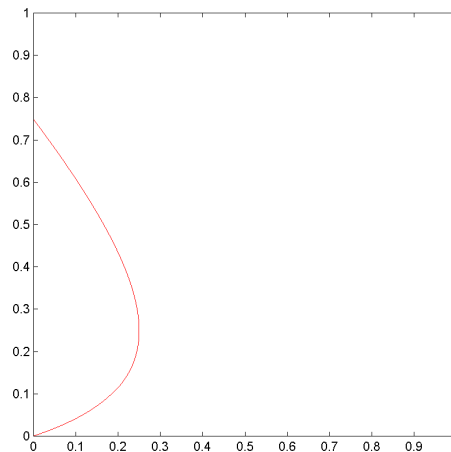


FIG. 8.24. Paramètres admissibles pour une famille de bosses trapèze à coefficient $k_{2,1}$ constant.

Conclusion et perspectives

L'objectif de notre thèse était de présenter une large famille de séries aléatoires, d'en faire une étude théorique puis de montrer qu'elles peuvent être utilisées à des fins de modélisation. Nous avons répondu aux principales questions liées à ces deux aspects, en s'efforçant d'établir des résultats valides dans un cadre suffisamment général. Mais nous avons aussi souligné ponctuellement les cas particuliers nécessitant des études complémentaires. Nous nous proposons pour conclure de revenir rapidement sur certains d'entre eux et de définir quelques lignes directrices de travaux futurs.

Nous avons essentiellement étudié les fonctions bosses standards données par la série (2.4). Au prix de quelques hypothèses supplémentaires, nous avons pu déterminer leur régularité, et calculer différentes dimensions fractales de leur graphe. Il est naturel d'étendre ces résultats à des modèles plus généraux, en premier lieu aux séries définies par (1.6), avec $\beta \in]0, 1]$. On s'attend en effet à ce que les démonstrations s'adaptent bien à ces modèles-ci. En fait, nous n'avons rien dit à ce sujet, mais on peut effectivement généraliser certains résultats. Sous les mêmes hypothèses de régularité pour ν et g , en supposant de plus $\alpha < \beta$, on peut prouver les faits (presque sûrs) suivants :

- (1) F est uniformément höldérienne d'exposant η pour tout $\eta < H_1$ avec

$$H_1 = \frac{\alpha + D(\beta - 1)}{\beta} .$$

- (2) Par suite, $\dim_{\mathbb{B}}(\Gamma_F) \leq D + 1 - H_1$.

- (3) On a $\dim_{\mathbb{H}}(\Gamma_F) \geq D + 1 - H_2$ avec

$$H_2 = \frac{\alpha - D(\beta - 1)}{\beta} .$$

Les démonstrations correspondantes données dans le cas $\beta = 1$ se généralisent assez bien. Toutefois, on obtient encore des cas non traités, et des estimations non prouvées. La généralisation à d'autres suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$ semblent donc délicate. Il n'y a pas de problèmes pour des suites équivalentes, ce qui correspond à une constante d'ajustement C pour $(a_n)_{n \geq 1}$ et à une bosse initiale de support dilaté pour $(b_n)_{n \geq 1}$ (le fait que le support d'une bosse élémentaire g soit exactement $[-1, 1]$ n'est pas nécessaire théoriquement, c'est une simple convention ; le point crucial est qu'il soit compact). Pourtant, tant d'un point de vue théorique que pour les applications, il peut être intéressant de pouvoir varier ces suites. Nous l'avons dit, on peut reprocher au modèle sa positivité. Pour y remédier, on peut modifier la série (1.2) en remplaçant simplement a_n par $(-1)^n a_n$. Une façon moins brutale d'agir est

d'utiliser une suite dense dans $[-1, 1]$, par exemple $\cos(2\pi nS)$ avec $S \notin \mathbb{Q}$. Ces séries alternées existent sous les hypothèses du théorème 1.6.4 puisque les suites ajoutées sont bornées. Pour d'autres, on peut être amené à établir des théorèmes d'existence plus généraux.

Nous avons ainsi vu à la fin du premier chapitre qu'il était possible de considérer une loi ν pour le centrage des bosses très irrégulière, et même multifractale. Peut-on encore déterminer la régularité des trajectoires de F et les dimensions fractales de son graphe ?

Le théorème d'existence correspondant a montré que le point essentiel est la répartition des centres X_n des bosses dans les intervalles dyadiques. On peut alors se demander si, plus radicalement, on pourrait ne plus faire réellement intervenir le hasard pour revenir à des modèles déterministes. Plus précisément, peut-on choisir pour $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite équirépartie, ou seulement dense dans $[0, 1]$? Il semble que F soit encore bien définie et que beaucoup de propriétés restent vraies. Toutefois, ce n'est pas sans poser de problèmes techniques. Par exemple, sans aléatoire, la méthode utilisée pour minorer la dimension de Hausdorff du graphe paraît inefficace.

Le point de vue contraire consiste lui à ajouter de l'aléatoire en considérant des variables aléatoires pour les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. Les modèles obtenus sont plus proches de ceux étudiés par Mandelbrot et il faut les étudier d'avantage comme processus stochastiques qu'en tant que fonctions paramétrées par un paramètre aléatoire. Un compromis simple est de n'ajouter que des amplitudes aléatoires en considérant

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n G(b_n(t - X_n)) A_n .$$

Cette généralisation est intéressante pour les applications à la modélisation. Ces modèles sont plus proches du mouvement brownien et du MPD Process. La situation la plus simple est celle où les variables A_n ont une loi commune μ . Mais même dans ce cas il faut s'assurer que F existe. Il est clair que les amplitudes aléatoires ne doivent pas avoir une trop forte probabilité d'être arbitrairement grandes. En fait, le théorème 1.6.4 reste vrai en remplaçant l'hypothèse *ii*) par :

ii)' La série $\sum n a_p n^D \max\{1, (p^n b_p^{-1})^D\} A_n^*$ converge pour un entier $p \geq 2$ avec

$$A_n^* = \sup\{|A_k| : p^{nD} \leq k < p^{(n+1)D}\} .$$

Un exemple intéressant et particulièrement simple consiste à choisir des signes aléatoires, c'est-à-dire une suite de variables indépendantes $(A_n)_{n \geq 1}$ de même loi μ avec :

$$\mu(\{-1\}) = 1 - p \quad , \quad \mu(\{1\}) = p \quad (p \in]0, 1[) .$$

De façon générale, pour obtenir cette condition, il suffit de montrer que A_n^* ne peut pas être très grand. C'est le cas dès que les A_n ont la même loi μ et sont bornées presque sûrement. Avec μ uniforme sur $[-1, 1]$ on obtient une manière de signer le processus moins brutale que la précédente. Les profils obtenus sont plus réalistes. On peut choisir des variables non bornées, pourvu que la queue de leur distribution

soit suffisamment fine. Par exemple si μ est la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\mu([x, +\infty[) \leq \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Donc

$$\mathbb{P}(A_n^* \geq n) \leq \sum_{k=p^{nD}}^{p^{(n+1)D}-1} \mathbb{P}(A_k \geq n) \leq \frac{p^{nD}}{n} \exp\left(-\frac{n^2}{2}\right).$$

On obtient le terme général d'une série convergente de sorte que d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a presque sûrement :

$$\forall n \geq N \quad A_n^* \leq n.$$

Cette majoration permet d'obtenir facilement l'existence de F dans le cas où les paramètres sont ceux du modèle standard .

Ensuite, l'autre paramètre sur lequel on peut jouer est la bosse élémentaire g . Un problème intéressant est de voir s'il est possible d'omettre l'hypothèse de compacité de son support. En choisissant des fonctions raisonnables, à décroissance très rapide en $\pm\infty$ comme $x \mapsto \exp(-x^\gamma)$, obtient-on encore des modèles aux propriétés fractales analogues ?

Sans aller jusque là, de nombreuses questions restent sans réponses pour des bosses élémentaires pathologiques. Le calcul de la dimension de Hausdorff n'est pas fait pour l'escalier du diable, ni celui de la dimension de boîte pour des bosses très irrégulières.

D'ailleurs, la question de la régularité n'est que partiellement réglée, même pour les fonctions de bosses standards. On n'obtient des réponses que dans le seul cas où toute l'irrégularité du modèle est contrôlée par l'exposant α (et β), c'est-à-dire par le couple amplitudes-volumes des supports. Lorsque la bosse g prédomine, il est conjecturé que la régularité (maximale) de F est exactement celle de g . Mais la dimension de boîte demeure indéterminée dans un tel cas. Les mêmes problèmes se posent lorsque la loi ν contrôle aussi l'irrégularité des trajectoires. C'est le cas pour des lois à densité irrégulières ou pour la mesure de Besicovitch.

La multifractalité de cette dernière peut se transmettre à la série. Le principal thème de recherche à venir est précisément l'analyse multifractale complète de F et la détermination exacte des différents spectres. Avant d'étudier les généralisations et les cas particuliers que nous exhibons ici, il faut revenir au modèle standard (2.4). Même sous cette forme, il sont relativement proches des processus de Lévy pour lesquels les spectres sont connus. Certains résultats sont conjecturés et devraient être prouvés, dans un premier temps au moins pour le cas $g = \mathbb{1}_{[-1,1]}$.

Un intérêt est d'obtenir une famille générique de processus aléatoires multifractals additifs. Parmi de tels modèles proposés, un peut faire le lien entre les fonctions de bosses discontinues et les processus de Lévy (voir [24]). Il suggère d'utiliser une classe de bosses élémentaires g discontinues : des rampes élémentaires. Elles sont définies en une variable de la façon suivante : g a toujours pour support $[-1, 1]$, elle est croissante et continue sur \mathbb{R}^+ et positive avec $g(-1) = 0$ et $g(1) = 2$. Ces

fonctions présentent donc un unique saut au point 1. On peut alors considérer les fonctions de bosses associées données par la série (1.7). On obtient des processus de sauts dont l'existence peut encore être obtenue grâce au théorème 1.6.4.

Il est possible de prendre en compte ces généralisations pour l'étude expérimentale des fonctions de bosses. En particulier, les méthodes de calculs des fonctions de structure discrètes sont directement utilisables pour d'autres choix de suites $(a_n)_{n \geq 1}$ et $(b_n)_{n \geq 1}$. Nous avons aussi souligné l'influence d'amplitudes aléatoires. Pour le modèle standard, nous avons montré comment obtenir des valeurs approchées de ses paramètres, ce qui permet une identification des fonctions de bosses et la modélisation d'un signal quelconque. Une vraie étude statistique reste à mener. Nos résultats permettent de construire facilement différents estimateurs. Il s'agira alors de préciser leurs propriétés statistiques : efficacité, consistance, biais asymptotique. Nous avons aussi souligné la nécessité d'adapter d'avantage le modèle à la réalité en considérant par exemple des sommes de fonctions de bosses. Pour ces modèles composés, l'estimation des paramètres est à reprendre entièrement. Enfin, nous n'avons pas abordé la modélisation de surfaces, c'est-à-dire l'étude expérimentale en dimension 2. Là encore, il faudra traiter la question de l'estimation préalable des paramètres. Le champ d'application est donc important : on peut toutefois se demander quels types de données se prêtent bien à une modélisation par fonctions de bosses.

Table des figures

1	Fonction de Takagi-Knopp.	3
2	Fonction de Takagi-Knopp et MPD Algorithm.	4
3	Fonctions de Takagi-Knopp aléatoires.	5
1.1	Exemples de bosses élémentaires à une variable.	15
1.2	La bosse élémentaire «Escalier du diable».	17
1.3	Exemples de bosses élémentaires à deux variables.	18
1.4	Somme partielle d'une fonction de bosses dans \mathbb{R} .	20
1.5	Graphes de fonctions de bosses très régulières.	22
1.6	Graphes de fonctions de bosses aléatoires dégénérées.	25
1.7	Comparaison de la décroissance des amplitudes d'une fonction de Takagi-Knopp et d'une fonction de bosses standard.	34
1.8	Graphe d'une fonction de bosses standard dans \mathbb{R} .	35
1.9	Graphe d'une fonction de bosses standard dans \mathbb{R}^2 .	36
5.1	Courbes de 2–structure aléatoire et déterministe d'ordre 1 pour une fonction de Weierstrass aléatoire.	108
5.2	Courbes de 2–structure aléatoire et simplifiée d'ordre 1 pour une fonction de Weierstrass aléatoire.	112
5.3	Courbes de 2–structure aléatoire et déterministes d'ordre 2 pour une fonction de Weierstrass aléatoire.	114
5.4	Spectre de structure d'ordre 1 pour une fonction de Weierstrass aléatoire.	114
6.1	Courbes de 2–structure aléatoire et déterministe d'ordre 1 d'une fonction de bosses.	136
6.2	Courbe de structure d'une fonction de bosses : pentes à l'origine expérimentales	137
6.3	Spectre de structure d'ordre 1 pour une fonction de bosses	138
7.1	Graphe d'une fonction de bosses avec différentes subdivisions.	140
7.2	Courbes à ajuster à la courbe de structure d'une fonction de bosses.	144
7.3	Ajustement à une courbe de structure par la méthode de l'angle minimal.	145

7.4	Ajustement à une courbe de structure par la méthode du point de chute inférieur.	146
7.5	Ajustement logistique d'une courbe de structure pour une fonction de bosses.	149
7.6	Ajustement logistique d'une courbe de structure pour une fonction de Weierstrass.	149
7.7	Estimation de l'exposant α d'une fonction de bosses par la méthode des variations quadratiques.	159
7.8	Modélisation d'une fonction de bosses F_1 .	176
7.9	Spectres de structure de F_1 et \widehat{F}_1 .	177
7.10	Modélisation d'une fonction de bosses F_2 .	179
7.11	Spectres de structure de F_2 et \widehat{F}_2 .	180
7.12	Modélisation d'une fonction de bosses F_3 .	181
7.13	Spectres de structure de F_3 et \widehat{F}_3 .	183
8.1	Modélisation théorique d'une fonction de Weierstrass par une fonction de bosses (1).	194
8.2	Comparaison des spectres de structure d'une fonction de Weierstrass et de son modèle théorique, une fonction de bosses (1).	194
8.3	Modélisation théorique d'une fonction de Weierstrass par une fonction de bosses (2).	195
8.4	Comparaison des spectres de structure d'une fonction de Weierstrass et de son modèle théorique, une fonction de bosses (2).	195
8.5	Modélisation expérimentale d'une fonction de Weierstrass par une fonction de bosses.	197
8.6	Comparaison des spectres de structure d'une fonction de Weierstrass et de son modèle expérimental, une fonction de bosses.	197
8.7	Modélisation théorique d'un MPD Process par une fonction de bosses.	200
8.8	Comparaison des spectres de structure d'un MPD Process modélisé de façon théorique par une fonction de bosses.	200
8.9	Modélisation expérimentale d'un MPD Process par une fonction de bosses.	202
8.10	Comparaison des spectres de structure d'un MPD Process modélisé de façon expérimentale par une fonction de bosses.	202
8.11	Modélisation théorique d'un mouvement brownien standard par une fonction de bosses (1).	204

8.12	Comparaison des spectres de structure d'un mouvement brownien standard modélisé de façon théorique par une fonction de bosses (1).	204
8.13	Modélisation théorique d'un mouvement brownien standard par une fonction de bosses (2).	206
8.14	Comparaison des spectres de structure d'un mouvement brownien standard modélisé de façon théorique par une fonction de bosses (2).	206
8.15	Modélisation expérimentale d'un mouvement brownien standard par une fonction de bosses.	208
8.16	Comparaison des spectres de structure d'un mouvement brownien standard modélisé de façon expérimentale par une fonction de bosses.	208
8.17	Profil laser d'un échantillon de surface de route.	209
8.18	Spectres de structure d'un profil laser d'un échantillon de surface de route.	210
8.19	Profil laser <i>pr6a</i> et son modèle.	212
8.20	Comparaison des spectres de structure de <i>pr6a</i> et de son modèle.	212
8.21	Profil laser <i>pr6b</i> et son modèle.	213
8.22	Comparaison des spectres de structure de <i>pr6b</i> et de son modèle.	213
8.23	Comparaison de bosses élémentaires puissance et trapèze.	221
8.24	Paramètres admissibles pour une famille de bosses trapèze à coefficient $k_{2,1}$ constant.	222

Liste des tableaux

7.1	Estimation de l'intégrale I d'une fonction de bosses.	143
7.2	Estimation des paliers $\pi_{j,2}$ d'une fonction de bosses.	150
7.3	Estimation du crossover η_1^+ d'une fonction de bosses.	150
7.4	Estimation de la loi ν d'une fonction de bosses.	151
7.5	Estimation de la borne inférieure N d'une fonction de bosses.	155
7.6	Estimation du nombre total de bosses T d'une fonction de bosses.	156
7.7	Estimation de l'exposant α d'une fonction de bosses par la méthode des variations quadratiques.	159
7.8	Estimation de l'exposant α d'une fonction de bosses par la méthode de régularisation.	160
7.9	Estimation de l'exposant α d'une fonction de bosses lorsque les autres paramètres sont connus.	161
7.10	Estimation des paramètres auxiliaires de F_1 .	176
7.11	Estimation des paramètres de base de F_1 .	177
7.12	Estimation des paramètres auxiliaires de F_2 .	179
7.13	Estimation des paramètres de base de F_2 .	180
7.14	Estimation des paramètres auxiliaires de F_3 .	182
7.15	Estimation des paramètres de base de F_3 .	182
8.1	Correspondance entre les paramètres de base d'une fonction de Weierstrass et d'une fonction de bosses.	191
8.2	Correspondance entre les paramètres auxiliaires d'une fonction de Weierstrass et d'une fonction de bosses.	191
8.3	Correspondance entre les courbes de structure d'une fonction de Weierstrass et d'une fonction de bosses.	192
8.4	Paramètres de modélisation théorique d'une fonction de Weierstrass par une fonction de bosses.	193
8.5	Estimation des paramètres d'une fonction de bosses modélisant une fonction de Weierstrass.	196
8.6	Paramètres de modélisation théorique d'un MPD Process par une fonction de bosses.	199
8.7	Paramètres de modélisation expérimentale d'un MPD Process par une fonction de bosses.	201

8.8	Paramètres de modélisation théorique d'un mouvement brownien standard par une fonction de bosses.	203
8.9	Paramètres de modélisation expérimentale d'un mouvement brownien standard par une fonction de bosses.	207

Bibliographie

- [1] A. AUSLOOS et D.H. BERMAN. Multivariate Weierstrass-Mandelbrot function. In *Proc. Roy. Soc. Lond.*, volume A 400, pages 331–350, 1985.
- [2] J. BARRAL et B.B. MANDELBROT. Multifractal products of cylindrical pulses. *Prob. Th. Rel. Fields*, pages 409–430, 2002.
- [3] A. BENASSI et J. ISTAS. Processus autosimilaires. In *Lois d'échelle, fractales et ondelettes* (P. ABRY, P. GONÇALVÈS, J. LÉVY VÉHEL (dir.)), volume 2, pages 101–127. Hermès Science, 2002.
- [4] G. BROWN, G. MICHON et J. PEYRIÈRE. On the Multifractal Analysis of Measures. *J. Stat. Physics*, 66 :775–790, 1992.
- [5] R. CIOCZEK-GEORGES, B.B. MANDELBROT, G. SAMORODNITSKY et M.S. TAQQU. Stable fractal sums of pulses : the cylindrical case. *Bernoulli*, 1 :201–216, 1995.
- [6] R. CIOCZEK-GEORGES et B.B. MANDELBROT. A Class of Micropulses and Antipersistent Fractional Brownian Motion. *Stoch. Proc. Appl.*, 60 :1–18, 1995.
- [7] R. CIOCZEK-GEORGES et B.B. MANDELBROT. Alternative Micropulses and Fractional Brownian Motion. *Stoch. Proc. Appl.*, 64 :143–152, 1996.
- [8] S. COHEN. Champs localement autosimilaires. In *Lois d'échelle, fractales et ondelettes* (P. ABRY, P. GONÇALVÈS, J. LÉVY VÉHEL (dir.)), volume 1, pages 107–139. Hermès Science, 2002.
- [9] L. COMTET. *Analyse combinatoire, tome I*. Presses Univ. de France, 1970.
- [10] Y. DEMICHEL et C. TRICOT. Analysis of the Fractal Sums of Pulses. In *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2006. (à paraître).
- [11] Y. DEMICHEL et K.J. FALCONER. The Hausdorff dimension of Pulse Sum Graphs. In *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 2007. (à paraître).
- [12] B. DUBUC et C. TRICOT. Variation d'une fonction et dimension de son graphe. In *C.R. Acad. Sci. Paris*, volume 306, pages 531–533, 1988.
- [13] G.A. EDGAR. *Classics on Fractals*. (Studies in nonlinearity, R.L. DEVANEY (éd.)). ABP Westview Press, 2004.
- [14] K.J. FALCONER. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. J. Wiley and Sons, 2003. (2nde édition).
- [15] A. FOURNIER, D. FUSSEL et L. CARPENTER. Computer rendering of stochastic models. *Comm. de l'ACM*, 25 :371–384, 1982.
- [16] G.H. HARDY. Weierstrass's non-differentiable function. In *Trans. Amer. Math. Soc.*, volume 17, pages 301–325, 1916.

- [17] Y. HEURTEAUX. Weierstrass functions with random phases. In *Trans. Amer. Math. Soc.*, volume 355, pages 3065–3077, 2003.
- [18] B.R. HUNT. The Hausdorff dimension of graphs of Weierstrass functions. In *Proc. Amer. Math. Soc.*, volume 126, pages 791–800, 1998.
- [19] S. JAFFARD. Multifractal formalism for functions (part. I et II). *SIAM J. Math. Anal.*, 24 :944–970, 1997.
- [20] S. JAFFARD. Méthodes d'ondelettes pour l'analyse multifractale de fonctions. In *Lois d'échelle, fractales et ondelettes* (P. ABRY, P. GONÇALVÈS, J. LÉVY VÉHEL (dir.)), volume 1, pages 71–102. Hermès Science, 2002.
- [21] J.P. KAHANE. *Some random series of functions*. Camb. Univ. Press, 1985. (2nde édition).
- [22] K. KNOPP. Ein Einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen. *Math. Zeits*, 2 :1–26, 1918. (voir E.W. HOBSON, *The theory of functions of a real variable*, 3^{ème} édition, Camb. Univ. Press, 1927).
- [23] J. LÉVY VÉHEL et C. TRICOT. Analyse fractale et multifractale en traitement des signaux. In *Lois d'échelle, fractales et ondelettes* (P. ABRY, P. GONÇALVÈS, J. LÉVY VÉHEL (dir.)), volume 1, pages 19–70. Hermès Science, 2002.
- [24] J. LÉVY VÉHEL et J. BARRAL. Multifractal Analysis of a Class of Additive Processes with Correlated Non-Stationary Increments. *Elec. Journ. of Prob.*, 9 :508–543, 2004.
- [25] B.B. MANDELBROT. Introduction to Fractal Sums of Pulses. In *Lévy Processes and Related Phenomena in Physics*, Lectures Notes In Physics 450, pages 110–123. Springer, 1995.
- [26] B.B. MANDELBROT. Fractal sums of pulses and a practical challenge to the distinction between local and global dependence. In *Lévy Processes and Related Phenomena in Physics*, Lectures Notes In Physics 621, pages 118–135. Springer, 2003.
- [27] M. MÉTIVIER. *Notions fondamentales de la théorie des probabilités*. Dunod, Paris, 1972.
- [28] Y. MEYER. *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 1990.
- [29] C. NANOPOULOS et P. NOBÉLIS. Régularité et propriétés limites de fonctions aléatoires. Lectures Notes In Mathematics 649, pages 567–690. Springer, 1995.
- [30] H.O. PEITGEN et D. SAUPE (dir.). *The Science of Fractal Images*. Springer, 1988.
- [31] D. REVUZ et M. YOR. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer, 1994.
- [32] C.A. ROGERS. *Hausdorff Measures*. Camb. Univ. Press, 1998. (2nde édition).
- [33] F. ROUEFF et J. LÉVY VÉHEL. A regularization approach to fractional dimension estimation. In *Fractals'98, Malte*, 1998.
- [34] L.A. SHEPP. Covering the circle with random arcs. *Israël J. Math.*, pages 328–345, 1972.

- [35] T. TAGAKI. A simple example of continuous function without derivative. In *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, volume 1, pages 176–177, 1903. (voir The collected papers of Teiji Takagi, Iwanami Shoten Pub., Tokyo, 1973).
- [36] C. TRICOT. Dimension fractale et spectre. *J. de chimie physique*, 3 :379–384, 1988.
- [37] C. TRICOT. Function norms and fractal dimension. *SIAM J. Math. Anal.*, 28 :189–212, 1997.
- [38] C. TRICOT. *Courbes et dimension fractale*. Springer, 1999. (2nde édition augmentée).
- [39] C. TRICOT. A model for rough surfaces. *Composites Sciences and Technology*, 63 :1089–1096, 2003.
- [40] K. WEIERSTRASS. On continuous functions of a real argument that do not have a well-defined differential quotient. *Mathematische werke, band II Mayer and Müller, Berlin*, pages 71–74, 1895. Translated by B. Sawhill.

Index des notations

- $A(\varepsilon)$, ε -voisinage de A , 21
 $B(t, \varepsilon)$, 13
 χ , 117
 η_1^-, η_1^+ , 126, 141
 η_2^-, η_2^+ , 132, 141
 D_ε , grille de pas ε , 44
 D_ε^* , 45
 $\text{diam}(A)$, diamètre de l'ensemble A , 89
 dim_B , dimension de boîte, 59
 dim_H , dimension de Hausdorff, 89
 dim_R , dimension de régularisation, 69
 δ_a , mesure de Dirac en a , 22
 $\{e_1, \dots, e_D\}$, base canonique de \mathbb{R}^D , 13
 E_ε^* , 45
 g , bosse élémentaire, 14
 γ_{ex} , 103
 Γ_f , graphe de la fonction f , 59
 γ_{th} , 103
 g_S , bosse élémentaire, 134
 H_1 , hypothèse de régularité sur ν , 41
 H_2 , hypothèse de régularité sur g , 41
 H_3 , régularité de la densité de ν , 74
 H_4 , régularité de la densité de ν , 74
 H_5 , hypothèse de régularité de g , 91
 H_6 , hypothèse de régularité sur ν , 98
 $\preccurlyeq \succcurlyeq \simeq$, relations de comparaison, 14
 $\mathbb{1}_A$, fonction indicatrice de A , 15
 $\Lambda_H(A)$, ensemble des fonctions höldériennes
d'exposant H sur A , 39
 l^+ , 153
 μ_q , moment d'ordre q de g , 141
 $\|\cdot\|$, norme du maximum sur \mathbb{R}^D , 13
 $N_p(\xi, \varepsilon)$, 60
 $\|\cdot\|_\infty$, 21
 $\pi_{1,2}$, 127, 142
 $\pi_{2,2}$, 132, 142
 $[\cdot]$, partie entière, 13
 $\Psi_{\varepsilon,x}$, ondelettes, 47
 $\rho_A^-(\varepsilon), \rho_A^+(\varepsilon)$, 23
 $\underline{\sigma}(\xi, p)$, 60
 $\Sigma_{p,q}$, 141
 $S_{i,q}$, fonction de q -structure d'ordre i ,
101
 $s_{i,q}, s_{i,q}^q$, 105
 s_q , fonction de q -structure discrète, 65
 $\text{Supp}(\cdot)$, support d'une fonction, d'une
mesure, 14, 23
 $T_{i,q}$, 102
 $\mathcal{U}(A)$, mesure uniforme sur A , 23