



HAL
open science

Problème de maximalité pour les variétés toriques

Alexandre Sine

► **To cite this version:**

Alexandre Sine. Problème de maximalité pour les variétés toriques. Mathématiques [math]. Université d'Angers, 2007. Français. NNT: . tel-00250242

HAL Id: tel-00250242

<https://theses.hal.science/tel-00250242>

Submitted on 11 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Problème de maximalité pour les variétés toriques

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité: mathématiques

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement
le 13 décembre 2007 à 15h00 (Amphi L1)
à l'Université d'Angers

par
Alexandre Sine
devant le jury ci-dessous

Rapporteurs:

BRION MICHEL Directeur de Recherche à l'Université de Grenoble I
MCCRORY CLINT University of Georgia, Athens (USA)

Examineurs:

EVAIN LAURENT Maître de Conférences à l'Université d'Angers
FICHOU GOULWEN Maître de Conférences à l'Université de Rennes I
KURDYKA KRZYSZTOF Professeur à l'Université de Savoie

Directeur de thèse:

PARUSINSKI ADAM Professeur à l'Université d'Angers

LAREMA, U.M.R 6093 associée au CNRS
2 BD Lavoisier, 49045 Angers cedex 01, France

ED 363

Problème de maximalité pour les variétés toriques

Alexandre Sine

Table des matières

1	Variétés toriques	4
2	Faisceaux simpliciaux attachés à un éventail	6
3	(Co-)Homologie de $X_\Delta(\mathbb{R})$ et $X_\Delta(\mathbb{C})$	10
3.1	(Co-)Homologie d'un tore compact	10
3.1.1	Notations	10
3.1.2	Homologie de T_N^c et $T_N^c[2]$	12
3.1.3	Cohomologie de T_N^c et $T_N^c[2]$	15
3.2	Les suites spectrales complexes	19
3.2.1	La suite spectrale complexe en homologie	19
3.2.2	La suite spectrale complexe en cohomologie	22
3.3	Les suites spectrales réelles	24
3.3.1	Description de $H_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$, $H^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$	24
3.3.2	La suite spectrale réelle en homologie	26
3.3.3	La suite spectrale réelle en cohomologie	30
4	Propriétés de la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$	33
4.1	Préliminaires	33
4.2	Propriétés d'additivité	35
4.3	Comportement vis à vis du produit	45
5	Étude des différentielles du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$	48
5.1	Résultats généraux	48
5.1.1	Méthode	48
5.1.2	Un critère global	50
5.1.3	Condition s_{p0} , $p \in \mathbb{N}$, pour le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$	57
5.1.4	Stricte compatibilité de la différentielle ∂_n de $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$	58
5.1.5	Condition $s_{n-1,1}$ pour le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$	61
5.2	Applications	64
5.2.1	Maximalité de X_Δ lorsque $n \leq 4$	64
5.2.2	Cas d'un fermé invariant sous l'action du tore dans une variété torique compacte lisse de dimension 5	65
6	Étude du cas affine simplicial	73
6.1	Étude des termes de $G_{pq}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$	73
6.1.1	Étude du cas affine simplicial en dimension 4	76
6.1.2	Étude du cas affine simplicial en dimension 5	82
6.2	Maximalité de X_δ lorsque $n = 5$	85
6.2.1	Condition s_{42} pour $A_*(X_\delta(\mathbb{R}))$	86
6.2.2	Condition s_{31} pour $A_*(X_\delta(\mathbb{R}))$	90
6.3	Description de $G_{pq}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$ lorsque $n = 3$	100

Introduction

Dans cette thèse, on va s'intéresser à la question suivante:

Est ce que les variétés toriques sont maximales ?

Ici, une variété algébrique complexe $X := X(\mathbb{C})$ définie sur \mathbb{R} est maximale lorsque, pour l'homologie de Borel Moore à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, la somme de ses nombres de Betti coïncide avec la somme correspondante pour sa partie réelle, $X(\mathbb{R})$. Ce qui peut être résumé par l'égalité:

$$\sum_i \dim H_i^{BM}(X(\mathbb{R}), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = \sum_i \dim H_i^{BM}(X(\mathbb{C}), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$$

Dans [Bi] (page 11), les 4 auteurs ont prouvé que ce résultat est vrai jusqu'en dimension 3. Ce résultat a été obtenu en construisant une suite spectrale $G_{pq}^*(X(\mathbb{R}))$ convergeant vers $H_*^{BM}(X(\mathbb{R}), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$, en la comparant à une autre suite spectrale $E_{pq}^*(X(\mathbb{C}))$ convergeant, elle, vers $H_*^{BM}(X(\mathbb{C}), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ et en utilisant l'inégalité de Thom-Smith:

$$\sum_i \dim H_i^{BM}(X(\mathbb{R}), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \leq \sum_i \dim H_i^{BM}(X(\mathbb{C}), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$$

Le point clé étant la dégénérescence à l'ordre 1 de la suite spectrale $G_{pq}^*(X(\mathbb{R}))$ (ie: $G_{pq}^\infty(X(\mathbb{R})) = G_{pq}^1(X(\mathbb{R}))$).

Dans [Ho2], l'auteur a montré que cette suite dégénère à l'ordre 1 lorsque X est une variété torique projective dont le polytope Δ lui étant associé vérifie:

- Δ est réflexif.
- L'éventail normal du polytope dual de Δ est régulier modulo 2.

Dans [Ho], elle a donné un exemple de variété torique de dimension 6 n'étant pas maximal. Cependant, ce contre-exemple fut obtenu de manière purement calculatoire et ne donne pas beaucoup d'indications sur le problème. La question de la dimension 5 reste toutefois ouverte.

On montrera dans ce texte que la réponse est encore affirmative pour les variétés toriques de dimension 4 et les variétés toriques affines simpliciales de dimension 5.

Ce document se décompose en 6 parties.

Les 2 premières parties contiennent des rappels sur les variétés toriques et sur la notion de faisceau simplicial sur un éventail.

La troisième partie est réservée à un résumé des constructions des suites spectrales considérées plus haut. Une construction similaire sera également réalisée en cohomologie à support compact et à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

On donnera dans la quatrième partie quelques propriétés de la suite spectrale $G_{pq}^*(X(\mathbb{R}))$ qui serviront lors de la démonstration des 2 principaux résultats obtenus dans ce texte.

On montrera dans la cinquième partie que certaines différentielles du terme $G_{pq}^1(X(\mathbb{R}))$ sont nulles, ce qui permettra en particulier de prouver que les variétés toriques de dimension 4 sont toutes maximales (corollaire 5.2.3).

Enfin, la dernière partie sera entièrement dédiée à la démonstration du résultat en dimension 5 dans le cas affine simplicial (théorème 6.2.24).

1 Variétés toriques

On va rappeler ici les définitions, les propriétés basiques des variétés toriques et également donner les notations qui seront utilisées par la suite (Cf [Fu], [Oda] pour plus de détails).

Soit $N \simeq \mathbb{Z}^n$ un réseau et $M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z})$ son dual. On notera $N_{\mathbb{R}} = N \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$ (resp. $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) le \mathbb{R} -espace vectoriel associé à N (resp. M).

Un sous ensemble σ de $N_{\mathbb{R}}$ est un cône rationnel si l'on peut trouver $v_1, \dots, v_k \in N$ tels que $\sigma = \{t_1 v_1 + \dots + t_k v_k, t_i \geq 0 \in \mathbb{R}\}$. On écrira alors $\sigma = \text{Pos}(v_1, \dots, v_k)$. La dimension de σ notée $\dim(\sigma)$ est alors la dimension du sous espace vectoriel $\sigma + (-\sigma)$ de $N_{\mathbb{R}}$.

Le sous réseau $[\sigma]$ de N engendré par σ sera défini par:

$$[\sigma] = (\sigma + (-\sigma)) \cap N$$

Tous les cônes considérés par la suite étant rationnels, on parlera simplement de cônes.

Si σ est un cône, on dira que σ est simplicial (resp. régulier) s'il existe $v_1, \dots, v_k \in N$ linéairement indépendants sur \mathbb{R} (resp. faisant partie d'une base de N) tels que $\sigma = \text{Pos}(v_1, \dots, v_k)$.

Le dual σ^\vee de σ est le cône de $M_{\mathbb{R}}$ défini par:

$$\sigma^\vee = \{u \in M_{\mathbb{R}}, \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle : N_{\mathbb{R}} \times M_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ désigne la forme bilinéaire standard.

Remarque 1.0.1 Si σ est un cône de $N_{\mathbb{R}}$ strictement convexe (ie: $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$) de dimension n , alors σ^\vee est un cône strictement convexe de dimension n de $M_{\mathbb{R}}$.

On dira que $\tau \subset \sigma$ est une face de σ (on notera $\tau \leq \sigma$) s'il est possible de trouver $u \in \sigma^\vee$ tel que $\tau = \sigma \cap u^\perp$. Une face d'un cône est encore un cône.

Remarque 1.0.2 Si $\sigma = \text{Pos}(v_1, \dots, v_k)$ est simplicial de dimension k , les $(v_i)_{i=1}^k$ étant donc linéairement indépendants, alors les faces de σ de dimension $p \leq k$, sont exactement les cônes engendrés par les sous-familles de $\{v_1, \dots, v_k\}$ de cardinal p .

Remarque 1.0.3 Si τ est une face de σ , alors $\tau^* = \tau^\perp \cap \sigma^\vee$ est une face de σ^\vee . On a ainsi une bijection entre les faces de σ et de σ^\vee vérifiant:

- Si $\tau \leq \delta \leq \sigma$ alors $\delta^* \leq \tau^* \leq \sigma^\vee$.
- Si $\tau \leq \sigma$, alors $\dim(\tau) + \dim(\tau^*) = \dim(\sigma)$.

En particulier, si $\tau \leq \sigma$, alors $[\tau^*] = [\tau]^\perp$.

Un cône $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ donne naissance à un monoïde de type fini S_σ défini par $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Ainsi $\mathbb{C}[S_\sigma]$ est une \mathbb{C} -algèbre de type fini et la variété torique affine complexe (de dimension n) X_σ associée à σ est donnée par $\text{Spec}(\mathbb{C}[S_\sigma])$.

Un point x de X_σ sera toujours entendu comme un point fermé correspondant à un idéal maximal de $\mathbb{C}[S_\sigma]$. On peut alors le voir comme un morphisme de monoïde $x : S_\sigma \rightarrow \mathbb{C}$, où $\mathbb{C} = \mathbb{C}^* \cup \{0\}$ et on écrira:

$$X_\sigma = \text{Hom}_{mo}(S_\sigma, \mathbb{C})$$

Remarque 1.0.4 Le tore complexe $T_N(\mathbb{C}) = X_{\{0\}} = \text{Spec}(\mathbb{C}[M]) \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ associé au réseau N est un ouvert dense de X_σ et l'action du tore sur lui-même se prolonge en une action sur X_σ .

Les variétés toriques affines constituent les blocs élémentaires utilisés pour construire les variétés toriques générales. De façon analogue, une variété torique est une variété algébrique associée à un objet combinatoire appelé éventail.

Définition 1.0.5 Un éventail Δ de $N_{\mathbb{R}}$ est une collection finie non vide de cônes satisfaisant les 3 conditions suivantes:

- Tous les cônes de Δ sont strictement convexes.
- Toutes les faces d'un cône de Δ sont dans Δ .
- Si σ et σ' sont dans Δ , alors $\sigma \cap \sigma'$ est à la fois une face de σ et de σ' .

Remarque 1.0.6 Si σ est un cône, l'ensemble des faces de σ forme un éventail que l'on notera encore σ par abus de notation.

Étant donné un éventail Δ de $N_{\mathbb{R}}$, on notera pour $p \in \mathbb{N}$:

- $\Delta(p) = \bigcup_{\sigma \in \Delta, \dim(\sigma)=p} \sigma$
- $\Delta(\leq p) = \bigcup_{\sigma \in \Delta, \dim(\sigma) \leq p} \sigma$

$\Delta(\leq p)$ sera appelé le p -squelette de Δ .

On notera par $|\Delta|$ le support de Δ , c'est-à-dire la réunion dans $N_{\mathbb{R}}$ de tous les cônes de Δ . La dimension de Δ sera le maximum des dimensions des cônes de Δ et Δ sera dit régulier (resp simplicial) si tous les cônes de Δ le sont.

On va maintenant expliquer comment la variété torique complexe X_Δ associée à Δ est construite.

Si σ est un cône et τ une face de σ , alors X_τ s'identifie à un ouvert principal de X_σ via l'injection $\mathbb{C}[S_\sigma] \hookrightarrow \mathbb{C}[S_\tau]$. La variété torique X_Δ est obtenu en recollant les variétés affines $(X_\sigma)_{\sigma \in \Delta}$ selon leurs ouverts communs.

Remarque 1.0.7 Le tore complexe $T_N(\mathbb{C})$ est un ouvert dense de X_Δ et ses actions sur chacun des morceaux X_σ se prolongent en une action sur X_Δ .

L'un des intérêts principaux des variétés toriques est l'existence d'un dictionnaire entre les propriétés combinatoires d'un éventail Δ et celles, géométriques, de la variété torique complexe X_Δ qui lui est associée. Par exemple:

- La variété X_Δ est compacte si et seulement si $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$.
- La variété X_Δ est lisse si et seulement si Δ est régulier.
- Il existe une bijection entre les orbites de X_Δ sous l'action de $T_N(\mathbb{C})$ et les cônes de Δ . Si $\sigma \in \Delta(p)$, on notera $\mathcal{O}_\sigma \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-p}$ l'orbite correspondante à σ . De plus, la clôture $\overline{\mathcal{O}_\sigma}$ de \mathcal{O}_σ pour la topologie de Zariski est donnée par:

$$\overline{\mathcal{O}_\sigma} = \bigcup_{\delta \geq \sigma, \delta \in \Delta} \mathcal{O}_\delta$$

- Les ouverts $T_n(\mathbb{C})$ -invariants de X_Δ (pour la topologie de Zariski) correspondent aux sous-éventails de Δ .

Remarque 1.0.8 Pour $p \in \mathbb{N}$, $\Delta(\leq p)$ est un sous-éventail de Δ et l'ouvert correspondant de X_Δ est la réunion des orbites de dimension strictement supérieure à p .

Une variété torique X_Δ est définie sur \mathbb{Z} et peut ainsi être considérée comme une variété algébrique réelle, c'est-à-dire une variété complexe définie sur \mathbb{R} (Cette définition est celle utilisée dans [Bi]).

La partie réelle de X_Δ , notée $X_\Delta(\mathbb{R})$, sera la variété torique réelle associée à Δ . Pour coller avec cette notation, on désignera par $X_\Delta(\mathbb{C})$ les points complexes de X_Δ .

Comme $X_\Delta(\mathbb{C})$, $X_\Delta(\mathbb{R})$ est recouverte par les ouverts affines $X_\sigma(\mathbb{R}) = \text{Hom}_{mo}(S_\sigma, \mathbb{R})$ pour $\sigma \in \Delta$ et $X_\Delta(\mathbb{R})$ peut être obtenue en recollant ensemble les $X_\sigma(\mathbb{R})$ pour $\sigma \in \Delta$.

L'action du tore algébrique réel $T_N(\mathbb{R}) = \text{Spec}(\mathbb{R}[M]) \simeq (\mathbb{R}^*)^n$ sur chaque $X_\sigma(\mathbb{R})$ se prolonge en une action sur $X_\Delta(\mathbb{R})$ et la stratification par les orbites de $X_\Delta(\mathbb{R})$ est similaire à celle de $X_\Delta(\mathbb{C})$. En particulier, il y a une correspondance entre les orbites de $X_\Delta(\mathbb{R})$ et les cônes de Δ , et la clôture de l'orbite $\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{R})$ associée à $\sigma \in \Delta$ (qui est aussi la partie réelle de l'orbite $\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{C})$ de $X_\Delta(\mathbb{C})$) est la réunion des orbites $\mathcal{O}_\gamma(\mathbb{R})$ pour $\gamma \in \Delta, \gamma \geq \sigma$.

2 Faisceaux simpliciaux attachés à un éventail

On va introduire ici les notions de faisceaux et de cofaisceaux simpliciaux sur un éventail. Ces définitions ont été introduites dans [Br] (paragraphe 1.1) et la notation cofaisceau a été empruntée à [Ho2].

Un faisceau simplicial est un objet attaché à un éventail un peu comme un fibré vectoriel est attaché à un espace topologique. Le rôle des ouverts de trivialisations est alors joué par les cônes de l'éventail. Par contre, la dimension des fibres varie d'un cône à un autre.

Ces objets se révéleront particulièrement pratiques dans la section 6.1.

Pour cette partie, on supposera fixé un éventail Δ de $N_{\mathbb{R}}$.

Commençons par définir les notions de faisceaux et cofaisceaux simpliciaux.

Définition 2.0.9 *Un faisceau (resp. cofaisceau) simplicial sur Δ est une collection d'espaces vectoriels sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, $(V_\sigma)_{\sigma \in \Delta}$, et de morphismes $f_{\tau, \sigma} : V_\tau \rightarrow V_\sigma$ (resp. $g_{\sigma, \tau} : V_\sigma \rightarrow V_\tau$) pour $\tau \leq \sigma \in \Delta$ vérifiant:*

- $\forall \sigma \in \Delta$, $f_{\sigma,\sigma}$ (resp. $g_{\sigma,\sigma}$) est l'identité
- Si $\tau \leq \sigma \leq \delta \in \Delta$ alors $f_{\tau,\sigma} \circ f_{\sigma,\delta} = f_{\tau,\delta}$ (resp. $g_{\delta,\sigma} \circ g_{\sigma,\tau} = g_{\delta,\tau}$)

Comme tous les (co-)faisceaux dont on parlera seront des (co-)faisceaux simpliciaux sur des éventails, on omettra par la suite le terme simplicial.

Remarque 2.0.10 Dans [Br], les faisceaux sont des faisceaux d'espaces vectoriels sur \mathbb{R} . Cependant toutes les propriétés de ces derniers que l'on utilisera restent vraies lorsque l'on travaille avec des faisceaux sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ (Voir aussi [Ho2] pour plus de détails).

Donnons quelques exemples de (co-)faisceaux sur Δ .
Soit $V = N \otimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \frac{N}{2N}$.

Étant donné un cône $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$, on désignera par $[\sigma]_2 \subset V$ la réduction modulo 2 du sous-réseau engendré par σ . Explicitement:

$$[\sigma]_2 = [\sigma] \otimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \simeq \frac{[\sigma]}{2[\sigma]}$$

Si on note $p_{\tau,\sigma} : \frac{V}{[\tau]_2} \rightarrow \frac{V}{[\sigma]_2}$ la projection naturelle pour $\tau \leq \sigma \in \Delta$, alors $\mathcal{G}^\Delta = \left(\frac{V}{[\sigma]_2}, p_{\tau,\sigma} \right)_{\tau \leq \sigma \in \Delta}$ est un faisceau sur Δ .

De façon similaire, en notant $i_{\sigma,\tau} : [\sigma]_2^\perp \rightarrow [\tau]_2^\perp$ l'inclusion naturelle pour $\tau \leq \sigma \in \Delta$, on obtient le cofaisceau $\mathcal{F}^\Delta = \left([\sigma]_2^\perp, i_{\tau,\sigma} \right)_{\tau \leq \sigma \in \Delta}$.

Définition 2.0.11 Le faisceau (resp. cofaisceau) constant sur Δ de fibre F noté \mathcal{C}^F , où F est un espace vectoriel sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, est défini par:

- $\mathcal{C}_\sigma^F = F$ pour $\sigma \in \Delta$
- $f_{\tau,\sigma} : F \rightarrow F$ (resp. $g_{\tau,\sigma} : F \rightarrow F$) est l'identité pour $\sigma, \tau \in \Delta$, $\tau \leq \sigma$

Soit \mathcal{G} (resp. \mathcal{F}) un faisceau (resp. cofaisceau) sur Δ . Alors on peut associer à \mathcal{G} (resp. \mathcal{F}) un complexe de chaînes (resp. cochaînes) noté $C_*(\mathcal{G})$ (resp. $C^*(\mathcal{F})$) en posant pour $k \in \{0, \dots, n\}$:

- $C_k(\mathcal{G}) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-k)} \mathcal{G}_\sigma$ (resp. $C^k(\mathcal{F}) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-k)} \mathcal{F}_\sigma$)
- La différentielle $\nu_k : C_k(\mathcal{G}) \rightarrow C_{k-1}(\mathcal{G})$ est définie par la somme directe sur $\tau \in \Delta(n-k)$ des applications:

$$\sum_{\sigma > \tau} f_{\tau,\sigma} : \mathcal{G}_\tau \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-k+1), \sigma > \tau} \mathcal{G}_\sigma$$

La différentielle $\eta_k : C^k(\mathcal{F}) \rightarrow C^{k+1}(\mathcal{F})$ est définie par la somme directe sur $\tau \in \Delta(n-k)$ des applications:

$$\sum_{\tau < \sigma} g_{\sigma,\tau} : \mathcal{F}_\sigma \rightarrow \bigoplus_{\tau \in \Delta(n-k-1), \tau < \sigma} \mathcal{F}_\tau$$

Définition 2.0.12 Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, le groupe d'homologie $H_k(\mathcal{G})$ (resp. le groupe de cohomologie $H^k(\mathcal{F})$) du faisceau \mathcal{G} (resp. du cofaisceau \mathcal{F}) est le groupe d'homologie $H_k(C_*(\mathcal{G}))$ (resp. de cohomologie $H^k(C^*(\mathcal{F}))$) du complexe $C_*(\mathcal{G})$ (resp. $C^*(\mathcal{F})$).

Soit $S \simeq S^{n-1}$ la sphère unité de $N_{\mathbb{R}}$. L'homologie d'un faisceau constant sur Δ ne dépend que de la topologie de l'intersection de $|\Delta|$ avec S comme le montre la proposition suivante:

Proposition 2.0.13 Soit F un espace vectoriel sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. On suppose que $\Delta \neq \{0\}$. Alors pour $k = 0, \dots, n$ on a:

$$H_k(\mathcal{C}^F) \simeq \tilde{H}^{n-k-1}(S \cap |\Delta|, F)$$

où $\tilde{H}^*(S \cap |\Delta|)$ est la cohomologie réduite à coefficients dans F de l'intersection du support de Δ avec la sphère S .

Démonstration:

Voir [Br] (page 4).□

On en déduit immédiatement:

Corollaire 2.0.14

– Si $S \cap |\Delta|$ est contractible alors:

$$\forall p \in \mathbb{N}, H_p(\mathcal{C}^F) = 0$$

– Si $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$, alors $H_0(\mathcal{C}^F) = F$ et

$$\forall p \in \mathbb{N}, p \geq 1, H_p(\mathcal{C}^F) = 0$$

Un morphisme de faisceaux ϕ entre 2 faisceaux $\mathcal{F} = ((V_\sigma)_{\sigma \in \Delta}, (f_{\tau, \sigma})_{\tau \leq \sigma \in \Delta})$ et $\mathcal{F}' = ((V'_\sigma)_{\sigma \in \Delta}, (f'_{\tau, \sigma})_{\tau \leq \sigma \in \Delta})$ sur Δ est une collection d'applications linéaires $(\phi_\sigma : V_\sigma \rightarrow V'_\sigma)_{\sigma \in \Delta}$ telle que pour chaque couple $(\tau, \sigma) \in \Delta^2$ avec $\tau \leq \sigma$, le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} V_\sigma & \xleftarrow{f_{\tau, \sigma}} & V_\tau \\ \phi_\sigma \downarrow & & \downarrow \phi_\tau \\ V'_\sigma & \xleftarrow{f'_{\tau, \sigma}} & V'_\tau \end{array}$$

Remarque 2.0.15 La notion de morphisme de cofaisceaux est duale de celle de morphisme de faisceaux.

Remarque 2.0.16 Soit \mathcal{G} (resp. \mathcal{F}) un faisceau (resp. cofaisceau) sur Δ et $q \in \mathbb{N}$. On peut définir de façon naturelle le faisceau (resp. cofaisceau) $q^{\text{ième}}$ produit extérieur de \mathcal{G} (resp. \mathcal{F}) que l'on notera $\bigwedge^q \mathcal{G}$ (resp. $\bigwedge^q \mathcal{F}$), le cofaisceau $\mathcal{G}^* = \text{Hom}(\mathcal{G}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ dual de \mathcal{G} et le faisceau $\mathcal{F}^* = \text{Hom}(\mathcal{F}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$ dual de \mathcal{F} .

Si l'on reprend les 2 exemples cités précédemment, alors via l'identification $[\sigma]_2^\perp \simeq \text{Hom}(\frac{V}{[\sigma]_2}, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) := (\frac{V}{[\sigma]_2})^*$ pour $\sigma \in \Delta$, $\mathcal{F}^\Delta = (\mathcal{G}^\Delta)^*$.

Comme pour les fibrés vectoriels, une suite exacte courte de faisceaux sur Δ :

$$0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$$

induit une suite exacte longue en homologie:

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(\mathcal{G}'') \rightarrow H_i(\mathcal{G}') \rightarrow H_i(\mathcal{G}) \rightarrow H_i(\mathcal{G}'') \rightarrow H_{i-1}(\mathcal{G}') \rightarrow \dots$$

et de manière identique, si $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ est une suite exacte courte de cofaisceaux sur Δ , alors on obtient la suite exacte longue suivante en cohomologie:

$$\dots \rightarrow H^{i-1}(\mathcal{F}'') \rightarrow H^i(\mathcal{F}') \rightarrow H^i(\mathcal{F}) \rightarrow H^i(\mathcal{F}'') \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{F}') \rightarrow \dots$$

Pour finir, on va déterminer $H_n(\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta)$ pour $q \in \mathbb{N}$.

Définition 2.0.17 *Le rang modulo 2 de Δ (noté $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\Delta)$) est la dimension du sous espace vectoriel de V engendré par les faces de dimension 1 de V . c'est-à-dire:*

$$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\Delta) = \dim \text{Vect}([\tau]_2, \tau \in \Delta(1))$$

La dimension des espaces $H_n(\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta)$ ne dépend que de $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\Delta)$:

Proposition 2.0.18 *Soit $k = \text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\Delta)$ et $1 \leq q \leq n$. Alors:*

- Si $q < k$, $H_n(\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta) = 0$
- Si $q \geq k$, $H_n(\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta) \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^{C_{n-k}^{q-k}}$

Soit $\{\tau_1, \dots, \tau_m\} = \Delta(1)$. Pour $1 \leq i \leq m$, on notera $\rho_i \in N$ le générateur de $[\tau_i]$ contenu dans τ_i et $v_i \in V$ désignera sa classe modulo 2.

On désignera également par $p_i : V \rightarrow \frac{V}{[\tau_i]_2} = \frac{V}{\text{Vect}(v_i)}$ la projection naturelle.

Avec ces notations, la différentielle ν_n^q du complexe $C_*(\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta)$ est donnée par la somme directe sur $i \in \{1, \dots, m\}$ des applications $\bigwedge^q p_i : \bigwedge^q V \rightarrow \bigwedge^q \frac{V}{\text{Vect}(v_i)}$.

Démonstration:

On peut supposer que (v_1, \dots, v_k) est une base de $\text{Vect}(v_i, i = 1 \dots k)$.

Soient $V' = \text{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ et V'' un supplémentaire de V' dans V .

Pour $1 \leq q \leq n$, on a:

$$\ker(\nu_n^q) = \bigcap_{i=1}^n \ker(\bigwedge^q p_i)$$

Or pour $1 \leq i \leq n$, $\ker(\bigwedge^q p_i) = \text{Vect}(v_i) \wedge \bigwedge^{q-1} V$. Ainsi:

$$\ker(\nu_n^q) = \bigcap_{i=1}^n \text{Vect}(v_i) \wedge \bigwedge^{q-1} V$$

On peut distinguer 2 cas:

– Supposons que $k > q$. On peut remarquer que:

$$\ker(\nu_n^q) \subset \bigcap_{i=1}^k \text{Vect}(v_i) \wedge \bigwedge^{q-1} V$$

Or $\bigcap_{i=1}^k \text{Vect}(v_i) \wedge \bigwedge^{q-1} V = \{0\}$ donc ν_n^q est injective et $H_n(\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta) = 0$.

– Si $k \leq q$, il existe un isomorphisme:

$$\bigcap_{i=1}^n \text{Vect}(v_i) \wedge \bigwedge^{q-1} V \simeq v_1 \wedge \dots \wedge v_k \wedge \bigwedge^{q-k} V''$$

Ainsi $\ker(\nu_n^q) \simeq \bigwedge^{n-k} V'' \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^{C_{n-k}^{q-k}}$ et donc:

$$H_n(\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta) \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^{C_{n-k}^{q-k}} \quad \square$$

3 (Co-)Homologie de $X_\Delta(\mathbb{R})$ et $X_\Delta(\mathbb{C})$

A partir de maintenant, sauf mention contraire, la théorie de l'homologie considérée sera toujours l'homologie à support fermé (aussi appelée homologie de Borel Moore) à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ et celle de la cohomologie, la cohomologie à support compact également à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

On va rappeler brièvement la construction des suites spectrales complexes $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ et $E_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$ convergeant respectivement vers l'homologie et la cohomologie de $X_\Delta(\mathbb{C})$ (les détails peuvent se trouver dans [Fi], [Jor] ou [Bi]); puis rappeler la construction de la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ convergeant vers l'homologie de $X_\Delta(\mathbb{R})$ (cf [Bi]) et enfin donner la construction de la suite spectrale $G_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ convergeant vers la cohomologie de $X_\Delta(\mathbb{R})$, cette dernière étant construite en s'inspirant de la méthode développée dans [Bi].

3.1 (Co-)Homologie d'un tore compact

Cette partie contient tous les résultats concernant l'homologie et la cohomologie d'un tore compact qui seront utilisés dans la section suivante pour construire les suites spectrales sur $X_\Delta(\mathbb{R})$ (qui seront appelées suites spectrales réelles) et celles sur $X_\Delta(\mathbb{C})$ (qui seront appelées suites spectrales complexes).

3.1.1 Notations

Dans la première partie, le tore associé au réseau N était le tore algébrique complexe $T_N(\mathbb{C}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{C}^*)$. Maintenant on va considérer le tore compact, que l'on notera $T_N^c = \frac{N_{\mathbb{R}}}{N}$, défini par N . On utilisera la notation multiplicative pour la loi de groupe sur T_N^c .

Tout d'abord, \mathbb{Z} agit naturellement sur T_N^c par:

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{Z} \times T_N^c &\rightarrow T_N^c \\ (k, g) &\mapsto g^k \end{aligned}$$

On notera $T_N^c[2]$ les points de 2-torsion de T_N^c sous cette action et $\{1\}$ désignera l'élément neutre de T_N^c . En général, lorsque T est un tore compact, $T[2]$ désignera l'ensemble des points de 2-torsion de T .

Remarque 3.1.1 L'ensemble des points de 2-torsion de T_N^c , $T_N^c[2]$, s'identifie naturellement à V .

En résumé, on a posé:

- $T_n(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C}^*)^n$ est le tore algébrique complexe défini par N
- $T_n(\mathbb{R}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{R}^*) \simeq (\mathbb{R}^*)^n$ est le tore algébrique réel défini par N
- T_N^c est le tore compact défini par N
- $T_N^c[2]$ est le sous-groupe des points de 2-torsion de T_N^c

et on dispose des décompositions (non canoniques) suivantes:

- $T_n(\mathbb{C}) = T_N^c \times N_{\mathbb{R}}$
- $T_n(\mathbb{R}) = T_N^c[2] \times N_{\mathbb{R}}$

Définition 3.1.2

- * Un sous-ensemble T' de T_N^c est un sous-tore de rang k , $k \in \mathbb{N}$, s'il existe un sous-réseau N' de N de dimension k tel que $T' = i(\frac{N' \otimes \mathbb{R}}{N'})$ où $i : \frac{N' \otimes \mathbb{R}}{N'} \rightarrow \frac{N_{\mathbb{R}}}{N}$ est l'injection naturelle.
- * Un sous-ensemble H de $T[2]$ sera appelé un sous-tore de rang k de $T[2]$ s'il existe un sous-tore T' de rang k de T_N^c tel que $H = T'[2]$.

Remarque 3.1.3 Les sous-tores de rang k de $T_N^c[2]$ correspondent exactement aux sous-espaces vectoriels de dimension k de V .

Soit T' un sous-tore de rang k de T_N^c correspondant au sous-réseau N' de N . On désigne par:

- $[T'] \in H_k(T')$ la classe fondamentale du tore T' (celle-ci est bien définie puisque l'on travaille sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$).
- $i : \frac{N' \otimes \mathbb{R}}{N'} \rightarrow \frac{N_{\mathbb{R}}}{N}$ l'injection naturelle et $H(i)$ l'application induite par i en homologie.

La classe du sous-tore T' dans $H_k(T_N^c)$ encore notée $[T']$ sera donnée par $H(i)([T'])$.

Remarque 3.1.4 Si T' et T'' sont 2 sous-tores de T_N^c vérifiant $T'[2] = T''[2]$ alors $[T'] = [T''] \in H_*(T_N^c)$.

Si $T'[2]$ est un sous-tore de rang k correspondant à un sous-espace vectoriel V' de V , alors la classe de $T'[2]$ (notée $[V']$) dans $H_0(T_N^c[2]) = H_0(V)$ sera simplement donnée par:

$$[V'] = \sum_{v \in V'} [v] \in H_0(V)$$

3.1.2 Homologie de T_N^c et $T_N^c[2]$

On va construire ici une filtration I^* sur $H_0(T_N^c[2])$ et une structure d'algèbre graduée sur $Gr_I^*(H_0(T_N^c[2]))$ de telle sorte que $Gr_I^*(H_0(T_N^c[2])) \simeq H_*(T_N^c)$ comme algèbres graduées. Cette construction est tirée de [Bi].

Commençons par quelques rappels sur l'homologie de T_N^c . Comme T_N^c est un groupe topologique compact, $H_*(T_N^c)$ est munie d'une structure d'algèbre graduée donnée par le produit de Pontryagin.

Il existe un isomorphisme d'algèbres graduées:

$$\bigwedge^* V \xrightarrow{\phi_*} H_*(T_N^c) \quad (1)$$

Ce dernier est construit de la façon suivante:

Soit $v_1 \wedge \dots \wedge v_q \neq 0 \in \bigwedge^q V$. On note H le sous-espace vectoriel de V de rang q engendré par v_1, \dots, v_q et T' un sous-tore de T_N^c tel que $T'[2]$ soit associé à H . Alors:

$$\phi_q(v_1 \wedge \dots \wedge v_q) = [T']$$

Remarque 3.1.5 Soit T' un sous-tore de T_N^c correspondant à un sous-réseau N' de N et $V' = N' \otimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \subset V$. On note:

- $H_*(\pi) : H_*(T_N^c) \rightarrow H_*(\frac{T_N^c}{T'})$ l'application induite en homologie par la projection naturelle $\pi : T \rightarrow \frac{T_N^c}{T'}$
- $p_* : \bigwedge^* V \rightarrow \bigwedge^* \frac{V}{V'}$ l'application induite par la projection naturelle de V sur $\frac{V}{V'}$.

Alors ϕ_* induit le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} H_*(T_N^c) & \xrightarrow{H_*(\pi)} & H_*(\frac{T_N^c}{T'}) \\ \phi_* \downarrow & & \downarrow \phi_* \\ \bigwedge^* V & \xrightarrow{p_*} & \bigwedge^* \frac{V}{V'} \end{array} \quad (2)$$

Intéressons nous à présent à $H_0(T_N^c[2]) = H_*(T_N^c[2])$. On utilisera par la suite l'identification de $T[2] = V$.

A nouveau, il est possible de munir $H_0(V)$ d'une structure d'algèbre (non graduée) via le produit de Pontryagin.

Comme dans ce cas le groupe est très simple, il est possible d'explicitement la structure d'algèbre. La loi produit notée \times est en effet simplement donnée par:

$$\begin{aligned} \times : H_0(V) \times H_0(V) &\rightarrow H_0(V) \\ ([v_1], [v_2]) &\mapsto [v_1 + v_2] \end{aligned}$$

La chaîne $[0] \in H_0(V)$ sera l'élément neutre pour cette loi.

Remarque 3.1.6 Si H est un sous-espace vectoriel de dimension k de V (correspondant à un sous-tore de rang k de $T_N^c[2]$) et (v_1, \dots, v_k) une base de H , alors:

$$[H] = \prod_{i=1}^k ([0] + [v_i])$$

On va maintenant filtrer $H_0(V)$ de telle sorte que le gradué pour cette filtration soit naturellement isomorphe (en tant qu'algèbre graduée) à $H_*(T_N^c)$.

Comme pour $q \in \mathbb{N}^*$, l'espace vectoriel $H_q(T_N^c) \simeq \bigwedge^q V$ est engendré par les classes des sous-tores de rang q de T_N^c , on est conduit à considérer le sous-espace $I^q(H_0(V)) \subset H_0(V)$ défini par:

$$I^q(H_0(V)) = \text{Vect}([H], \dim(H) \geq q)$$

Remarque 3.1.7 Pour $q = 0$, on pose $I^0(H_0(V)) = H_0(V)$. Les sous-espaces $I^*(H_0(V))$ peuvent être définis pour n'importe quel espace vectoriel sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Lorsque celui-ci sera évident, on les notera simplement I^* .

Remarque 3.1.8 Le sous-espace I est le noyau du morphisme d'algèbre:

$$\xi: \begin{array}{ccc} H_0(V) & \rightarrow & \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \\ \sum_{i \in I} \epsilon_i [v_i] & \mapsto & \sum_{i \in I} \epsilon_i \end{array}$$

De ce fait, I est un idéal de $H_0(V)$ et $I^q(H_0(V))$ est la puissance q -ième de cet idéal (cf [Bi] page 8).

On obtient ainsi une filtration décroissante sur $H_0(V)$:

$$I^0 = H_0(V) \supset I^1 \supset \dots \supset I^n \supset \{0\}$$

Si H est un sous-espace vectoriel de dimension q de V , $q \in \mathbb{N}$, on notera $[\overline{H}]$ la classe de la chaîne $[H]$ dans $\frac{I^q}{I^{q+1}} H_0(V)$.

La loi produit \times sur $H_0(V)$ induit une structure d'algèbres graduées sur $Gr_I^*(H_0(V))$ définie sur les générateurs par:

$$\times: \begin{array}{ccc} Gr_I^p(H_0(V)) \times Gr_I^q(H_0(V)) & \rightarrow & Gr_I^{p+q}(H_0(V)) \\ ([\overline{H}], [\overline{H'}]) & \mapsto & [\overline{H + H'}] \end{array}$$

où H (resp H') est un sous-espace vectoriel de V de dimension p (resp q).

Il existe un isomorphisme d'algèbres graduées:

$$\psi_*: \bigwedge^* V \rightarrow Gr_I^*(H_0(V)). \quad (3)$$

On peut expliciter cet isomorphisme. Si on se donne $q \in \mathbb{N}$, $1 \leq q \leq n$, alors ψ_q est défini sur les générateurs par:

$$\psi_q: \begin{array}{ccc} \bigwedge^q V & \rightarrow & Gr_I^q(H_0(V)) \\ v_1 \wedge \dots \wedge v_q & \mapsto & \overline{\prod_{i=1}^q ([0] + [v_i])} \end{array}$$

L'inverse de ψ_q est alors donné par:

$$\psi_q^{-1}: \begin{array}{ccc} Gr_I^q(H_0(V)) & \rightarrow & \bigwedge^q V \\ \overline{[H]} = \overline{\prod_{i=1}^q ([0] + [v_i])} & \mapsto & v_1 \wedge \dots \wedge v_q \end{array}$$

où H est un sous-espace vectoriel de V de dimension q et (v_1, \dots, v_q) est une base de H .

Regardons par exemple ce qui se passe pour $q = 1$.

Soit $v_1, v_2 \in V$. Alors:

$$([0] + [v_1]) + ([0] + [v_2]) = ([0] + [v_1]) \times ([0] + [v_2]) + ([0] + [v_1 + v_2])$$

Ainsi si $\overline{([0] + [v_1])}$ désigne la classe de $([0] + [v_1])$ dans $\frac{I}{I^2}H_0(V)$, $\overline{([0] + [v_2])}$ celle de $([0] + [v_2])$ et $\overline{([0] + [v_1 + v_2])}$ celle de $([0] + [v_1 + v_2])$, alors:

$$\overline{([0] + [v_1])} + \overline{([0] + [v_2])} = \overline{([0] + [v_1 + v_2])}$$

et ainsi:

$$\psi_1(v_1) + \psi_1(v_2) = \psi_1(v_1 + v_2)$$

Remarque 3.1.9 La filtration I^* est compatible avec les applications linéaires. Si F et G sont 2 espaces vectoriels sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, on peut définir comme précédemment la filtrations I_F^* (resp I_G^*) sur $H_0(F)$ (resp $H_0(G)$). Si on se donne $f : F \rightarrow G$ une application linéaire, alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, $f(I_F^q(H_0(F))) \subset I_G^q(H_0(G))$. En particulier, f induit une application $Gr^q f : Gr_{I_F}^q H_0(F) \rightarrow Gr_{I_G}^q H_0(G)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de V . On note:

- $I_{\frac{V}{F}}^*$ la filtration sur $H_0(\frac{V}{F})$ construite comme I^* sur $H_0(V)$
- $p : V \rightarrow \frac{V}{F}$ la projection naturelle
- $Gr^* p : Gr_{I_V}^* H_0(V) \rightarrow Gr_{I_{\frac{V}{F}}}^* H_0(\frac{V}{F})$ l'application induite par p
- $\bigwedge^* p : \bigwedge^* V \rightarrow \bigwedge^* \frac{V}{F}$ l'application induite par p en passant aux puissances extérieures

Alors l'isomorphisme ψ_* fait alors commuter le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} Gr_{I_V}^* H_0(V) & \xrightarrow{\psi_*} & \bigwedge^* V \\ \downarrow Gr^* p & & \downarrow p_* \\ Gr_{I_{\frac{V}{F}}}^* H_0(\frac{V}{F}) & \xrightarrow{\psi_*} & \bigwedge^* \frac{V}{F} \end{array} \quad (4)$$

On obtient alors en utilisant (1), (2), (3) et (4) la proposition suivante:

Proposition 3.1.10 *Il existe un isomorphisme $Gr_I^* H_0(V) \simeq H_*(T_N^c)$.*

De plus, si T' est un sous-tore de T_N^c et que le sous-espace F de V correspond à $T'[2]$, alors il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Gr_I^* H_0(V) & \xrightarrow{\sim} & H_*(T_N^c) \\ Gr^* p \downarrow & & \downarrow H_*(\pi) \\ Gr_{I_F}^* H_0(\frac{V}{F}) & \xrightarrow{\sim} & H_*(\frac{T_N^c}{T'}) \end{array}$$

En résumé, on a obtenu un isomorphisme naturel entre l'homologie d'un tore compact et un gradué de l'homologie de ses points de 2-torsion.

3.1.3 Cohomologie de T_N^c et $T_N^c[2]$

Comme pour $H_0(T_N^c[2])$, on va construire une filtration L_* sur $H^0(T_N^c[2])$ de telle sorte que le gradué $Gr_L^* H^0(T_N^c[2]) = \bigoplus_{q=0}^n \frac{L_q}{L_{q-1}} H^0(T_N^c[2])$ soit naturellement isomorphe à $H^*(T_N^c)$.

$H^*(T_N^c)$ sera munie de la structure d'algèbre donnée par le cup produit.

Tout d'abord, l'isomorphisme ϕ_* (défini en (1)) induit un isomorphisme Φ^* d'algèbres graduées:

$$\text{Hom}(\bigwedge^* V, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = \bigwedge^* V^* \xrightarrow{\Phi^*} \text{Hom}(H_*(T_N^c), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) = H^*(T_N^c) \quad (5)$$

De manière identique, si T' un sous-tore de T_N^c correspondant à un sous-réseau N' de N et $V' = N \otimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ et en notant:

- $H^*(\pi) : H^*(\frac{T_N^c}{T'}) \rightarrow H^*(T_N^c)$ l'application induite en cohomologie par la projection naturelle $\pi : T_N^c \rightarrow \frac{T_N^c}{T'}$
- $p^* : \bigwedge^*(\frac{V}{V'})^* \rightarrow \bigwedge^* V^*$ l'application induite par la projection naturelle de V sur $\frac{V}{V'}$ par dualité

alors le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} H^*(\frac{T_N^c}{T'}) & \xrightarrow{H^*(\pi)} & H^*(T_N^c) \\ \phi_* \downarrow & & \downarrow \phi_* \\ \bigwedge^*(\frac{V}{V'})^* & \xrightarrow{p^*} & \bigwedge^* V^* \end{array} \quad (6)$$

Intéressons-nous ensuite à $H^0(T_N^c[2]) = H^0(V) = (H_0(V))^*$. Pour $v \in V$, on note $\chi^v : H_0(V) \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ l'application définie par:

$$\chi^v([v']) = \begin{cases} 0 & v' \neq v \\ 1 & v' = v \end{cases}$$

Ainsi, $H^0(V) = \bigoplus_{v \in V} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \chi^v$.

On considère la structure d'algèbre sur $H^0(V)$ définie sur les générateurs par:

$$\begin{aligned} \times: \quad H^0(V) \times H^0(V) &\rightarrow H^0(V) \\ (\chi^u, \chi^v) &\mapsto \chi^{u+v} \end{aligned}$$

Il existe alors un isomorphisme d'algèbre ϑ entre $H_0(V)$ et $H^0(V)$ défini sur les générateurs par:

$$\begin{aligned} \vartheta: \quad H_0(V) &\rightarrow H^0(V) \\ [u] &\mapsto \chi^u \end{aligned}$$

La filtration L_* que l'on va considérer sur $H^0(V) = H_0(V)^*$ est la duale de la filtration I^* définie auparavant. Ainsi L_* est donnée par:

$$L_q(H^0(V)) = (I^{q+1}(H_0(V)))^\perp = \{\varphi \in H_0(V), \varphi|_{I^{q+1}} = 0\}$$

et on a:

$$L_{-1} = \{0\} \subset L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_{n-1} \subset L_n = H^0(V)$$

Remarque 3.1.11 Comme la filtration I^* est compatible avec les applications linéaires, la filtration L_* l'est également.

Pour montrer que L_* possède les propriétés souhaitées, on va avoir besoin d'une autre description.

Définition 3.1.12 Soit H un sous-espace vectoriel de dimension k de V . On désignera par $[H]^c$ la classe de $H^0(V)$ définie par:

$$[H]^c = \sum_{v \in H} \chi^v$$

Pour $q \in \mathbb{N}$, on considère les sous-espaces $J^q(H^0(V))$ de $H^0(V)$ définis par:

$$J^q(H^0(V)) = \text{Vect}([H]^c, \dim(H) = q)$$

Remarque 3.1.13 Les sous-espaces $J^*(H_0(V))$ peuvent être définis pour n'importe quel espace vectoriel sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. Lorsque celui-ci sera évident, on les notera simplement J^* .

Remarque 3.1.14 Via l'isomorphisme ϑ , I est envoyé sur J . En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, I^k est envoyé sur J^k et $\dim(I^k) = \dim(J^k)$. On pose également $J^0 = H^0(V)$.

Alors:

Proposition 3.1.15 Pour $0 \leq q \leq n$, on a:

$$L_q(H^0(V)) = J^{n-q}$$

Démonstration:

On peut déjà remarquer que $\dim(L_q(H^0(V))) = \dim(H_0(V)) - \dim(I^{q+1})$.

En utilisant, pour $q \in \mathbb{N}$, l'isomorphisme $\frac{I^q}{I^{q+1}}H_0(V) \simeq \bigwedge^q V$, on obtient par récurrence:

$$\forall q \geq 1, \dim(I^q) = 2^n - \sum_{k=0}^{q-1} C_n^k$$

Comme $\dim(I^q) = \dim(J^q)$, $\forall q \geq 1$ on a ainsi:

$$\dim(L_q(H^0(V))) = \sum_{k=0}^q C_n^k = \sum_{k=n-q}^n C_n^k = 2^n - \sum_{k=0}^{n-q-1} C_n^k = \dim(J^{n-q})$$

Il suffira donc de montrer que J^{n-q} est contenu dans $L_q(H^0(V))$.

Soit $[H]^c = \sum_{v \in H} \chi^v$ la classe d'un sous-espace vectoriel H de V de dimension $n - q$ dans $H^0(V)$ et $[F] = \sum_{w \in F} [w]$ celle d'un sous-espace F de V de dimension $q + 1$. Il faut montrer que $[H]^c$ s'annule sur la classe $[F]$.

$$\begin{aligned} [H]^c([F]) &= \left(\sum_{v \in H} \chi^v \right) \left(\sum_{w \in F} [w] \right) \\ &= \left(\sum_{v \in H \cap F} \chi^v \right) \left(\sum_{w \in F \cap H} [w] \right) \\ &= \sum_{\text{card}(F \cap H)} 1 \end{aligned}$$

Comme $(n - q) + (q + 1) = n + 1$, l'intersection de F et H ne peut être réduite à $\{0\}$. De plus, le nombre de points dans un sous-espace de V est une puissance de 2 et est donc pair. Ainsi:

$$[H]^c([F]) = 0 \quad \square$$

On en déduit immédiatement:

Corollaire 3.1.16 *Pour $0 \leq q \leq n$, on a:*

$$\frac{L_q}{L_{q-1}}(H^0(V)) = \frac{J^{n-q-1}}{J^{n-q}}$$

Il faut encore définir un isomorphisme entre $Gr_L^*(H^0(V))$ et $\bigwedge^* V^*$. Pour cela, on va se servir de la filtration auxiliaire J^* définie par les puissances successives de J .

Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, on peut définir un isomorphisme $\Psi_q : \bigwedge^q V^* \rightarrow \frac{J^{n-q}}{J^{n-q+1}}$ par:

$$\Psi_q: \begin{array}{ccc} \bigwedge^q V^* & \rightarrow & \frac{J^{n-q}}{J^{n-q+1}} \\ u_1 \wedge \dots \wedge u_q & \mapsto & \overline{[H]^c} \end{array}$$

où H est le sous-espace vectoriel de V de dimension $n - q$ défini par $H = \text{Vect}(u_1, \dots, u_q)^\perp \subset V$.

Remarque 3.1.17 Ψ_q est un isomorphisme car d'une part, Ψ_q est surjectif et d'autre part, on a:

$$\dim \frac{J^{n-q}}{J^{n-q+1}} = \dim \frac{I^{n-q}}{I^{n-q+1}} = \dim(\bigwedge^{n-q} V) = \dim(\bigwedge^q V)$$

Regardons par exemple ce qui se passe pour $q = 1$. Soient $u_1, u_2 \in V^*$, $H = u_1^\perp$ et $H' = u_2^\perp$. Alors:

$$\begin{aligned} \Psi_1(u_1) + \Psi_1(u_2) &= \overline{[H]^c + [H']^c} \\ &= \overline{[H]^c + [H']^c + [V]^c} \\ &= \overline{[(u_1 + u_2)^\perp]^c} \\ &= \Psi_1(u_1 + u_2) \end{aligned}$$

En utilisant 3.1.16, on dispose d'un isomorphisme gradué que l'on notera encore Ψ_* :

$$\Psi_* : \bigwedge^* V^* \rightarrow Gr_L^* H^0(V)$$

L'isomorphisme Ψ_* est naturel. Si F est un sous-espace vectoriel de V , on notera:

- $L_{*}^{\frac{V}{F}}$ la filtration sur $H^0(\frac{V}{F})$.
- $p : V \rightarrow \frac{V}{F}$ la projection naturelle.
- $Gr^* p : Gr_{L^{\frac{V}{F}}}^* H^0(\frac{V}{F}) \rightarrow Gr_L^* H^0(V)$ l'application induite par $H^*(p)$.
- $p^* : \bigwedge^* (\frac{V}{F})^* \rightarrow \bigwedge^* V^*$ l'application induite par p par dualité et en passant aux puissances extérieures.

Alors l'isomorphisme Ψ_* fait commuter le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} Gr_L^* H^0(V) & \xleftarrow{\Psi_*} & \bigwedge^* V^* \\ \uparrow Gr^* p & & \uparrow p^* \\ Gr_{L^{\frac{V}{F}}}^* H^0(\frac{V}{F}) & \xleftarrow{\Psi_*} & \bigwedge^* (\frac{V}{F})^* \end{array} \quad (7)$$

Il reste encore à construire une structure d'algèbre graduée sur $Gr_L^* H^0(V)$. Pour cela, on va simplement prendre la structure d'algèbre induite par Ψ_* .

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et H (resp. H') un sous-espace vectoriel de dimension $n - p$ (resp. $n - q$) de V .

On pose:

$$[H]^c \times [H']^c = \begin{cases} [H \cap H']^c & \text{si } H + H' = V \\ 0 & \text{si } H + H' \neq V \end{cases}$$

Ceci définit $\times : Gr_L^p H^0(V) \times Gr_L^q H^0(V) \rightarrow Gr_L^{p+q} H^0(V)$ sur les générateurs. Avec cette loi:

$$\Psi_* : \bigwedge^* V^* \simeq Gr_L^* H^0(V) \quad (8)$$

est un isomorphisme d'algèbres graduées.

Remarque 3.1.18 Cette loi n'est pas celle induite par la structure d'algèbre sur $H^0(V)$ définie précédemment.

On obtient alors en utilisant (5), (6), (7) et (8) la proposition suivante:

Proposition 3.1.19 *Il existe un isomorphisme d'algèbres graduées $Gr_L^* H_0(V) \simeq H^*(T_N^c)$.*

De plus, si T' est un sous-tore de T_N^c et que le sous-espace F de V correspond à $T'[2]$ alors, en notant $\pi : T_N^c \rightarrow \frac{T_N^c}{T'}$ la projection naturelle, il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Gr_L^* H^0(V) & \xrightarrow{\sim} & H^*(T_N^c) \\ Gr^* p \uparrow & & \uparrow H^*(\pi) \\ Gr_{L\mathbb{F}}^* H^0(\frac{V}{\mathbb{F}}) & \xrightarrow{\sim} & H^*(\frac{T_N^c}{T'}) \end{array}$$

3.2 Les suites spectrales complexes

On va rappeler ici les constructions des suites spectrales $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ et $E_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$ convergeant respectivement vers $H_*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ et $H^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$.

3.2.1 La suite spectrale complexe en homologie

On supposera fixé un éventail $\Delta \subset N_{\mathbb{R}}$. Rappelons que V désigne l'espace vectoriel $\frac{N}{2N}$ sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$, et que $[\sigma]_2 = \frac{(\sigma+(-\sigma)) \cap N}{2((\sigma+(-\sigma)) \cap N)} \subset V$ est le sous-espace vectoriel de V engendré par σ , pour $\sigma \in \Delta$.

Pour $\sigma \in \Delta(n-p)$, $0 \leq p \leq n$, \mathcal{O}_σ est l'orbite du point $x_\sigma \in \text{Hom}_{mo}(S_\sigma, \mathbb{C})$ défini par:

$$x_\sigma(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } -m \in S_\sigma \\ 0 & \text{si } -m \notin S_\sigma \end{cases}$$

On peut remarquer que $x_\sigma \in X_\Delta(\mathbb{R}) \subset X_\Delta(\mathbb{C})$.

Le sous-groupe d'isotropie de x_σ est le sous-tore algébrique $T_{[\sigma]}(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-p}$ associé au sous-réseau $[\sigma]$ de N . On a donc:

$$\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{C}) \simeq \frac{T_N(\mathbb{C})}{T_{[\sigma]}(\mathbb{C})} \simeq T_\sigma(\mathbb{C})$$

où $T_\sigma(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{C}^*)^{n-p}$ est le tore algébrique associé au réseau quotient $\frac{N}{[\sigma]}$.

Pour respecter les notations utilisées dans la partie précédente, on notera $T_\sigma^c \simeq (S^1)^{n-p}$ le tore compact associé à $\frac{N}{[\sigma]}$. On a alors la décomposition suivante:

$$\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{C}) = T_\sigma(\mathbb{C}) = T_\sigma^c \times \left(\frac{N}{[\sigma]} \otimes \mathbb{R} \right) \simeq T_\sigma^c \times \mathbb{R}^p$$

Comme $H_*(\mathbb{R}^p)$ est donnée par:

$$H_k(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = p \\ 0 & \text{si } k \neq p \end{cases}$$

la formule de Künneth permet d'obtenir pour tout $q \in \mathbb{N}$ un isomorphisme:

$$H_{p+q}(\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{C})) \simeq H_q(T_\sigma^c) \quad (9)$$

Pour $0 \leq p \leq n$, on pose:

$$X_p(\mathbb{C}) = \bigcup_{\sigma \in \Delta(n-p)} \overline{\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{C})}$$

$X_p(\mathbb{C})$ est ainsi la réunion des orbites de $X_\Delta(\mathbb{C})$ dont les dimensions sont inférieures ou égales à p .

Les fermés $(X_p(\mathbb{C}))_{p=0}^n$ de $X_\Delta(\mathbb{C})$ définissent la stratification:

$$\emptyset \subset X_0(\mathbb{C}) \subset X_1(\mathbb{C}) \subset \dots \subset X_n(\mathbb{C}) = X_\Delta(\mathbb{C})$$

dont les strates ouvertes $X_p^\circ(\mathbb{C}) = X_p(\mathbb{C}) - X_{p-1}(\mathbb{C})$ sont les réunions disjointes des orbites de dimension p de $X_\Delta(\mathbb{C})$.

Cette filtration donne naissance à une suite spectrale

$$E_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{C})) = H_{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{C})) \Rightarrow H_{p+q}(X_\Delta(\mathbb{C}))$$

convergeant vers $H_*(X_\Delta(\mathbb{C}))$.

Par la suite, pour $l \in \mathbb{N}$, les différentielles du terme $E_{pq}^l(X_\Delta(\mathbb{C}))$ seront notées $d_{pq}^l : E_{pq}^l(X_\Delta(\mathbb{C})) \rightarrow E_{p-l, q+l-1}^l(X_\Delta(\mathbb{C}))$.

La figure 1 donne la forme de la suite spectrale $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ lorsque $n = 3$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On a:

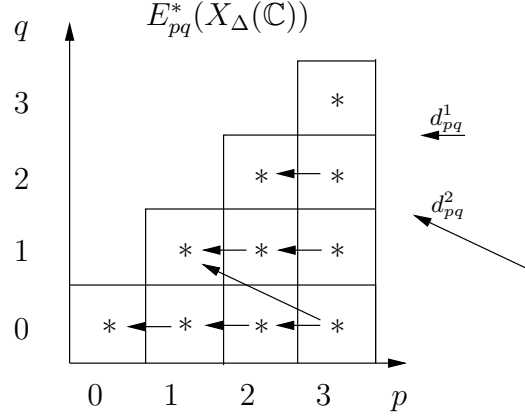
$$H_{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} H_{p+q}(\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{C}))$$

En utilisant (9), on obtient:

$$H_{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} H_q(T_\sigma^c) \quad (10)$$

La combinaison de (1) et (10) donne alors:

FIG. 1 – $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ pour une variété torique de dimension 3



$$H_{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} \bigwedge^q \frac{V}{[\sigma]_2} \quad (11)$$

D'après [Jor] (page 44), sous l'identification (11), pour $p, q \in \mathbb{N}$, la différentielle $d_{pq}^1 : E_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{C})) \rightarrow E_{p-1,q}^1(X_\Delta(\mathbb{C}))$ est la somme directe sur $\tau \in \Delta(n-p)$ des applications:

$$\sum_{\sigma > \tau} p_{\tau,\sigma} : \mathcal{G}_\tau \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Delta(k+1), \sigma > \tau} \mathcal{G}_\sigma$$

où $p_{\tau,\sigma} : \frac{V}{[\tau]_2} \rightarrow \frac{V}{[\sigma]_2}$ est la projection naturelle.

On peut remarquer que pour $q \in \mathbb{N}$ fixé, le complexe $(E_{*,q}^1, d_{*,q}^1)$ correspondant à la ligne d'indice q de $E_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{C}))$ est exactement le complexe de chaînes associé au faisceau $\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta$ sur Δ défini dans la section 2.

Ainsi, on a:

$$E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) \simeq H_p(\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta)$$

Par conséquent, si $\Delta \neq \{0\}$, en notant S la sphère unité de $N_\mathbb{R}$, on obtient d'après 2.0.13 et pour $q = 0$ la proposition suivante:

Proposition 3.2.1 *Pour $p = 0, \dots, n$:*

$$E_{p0}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) \simeq \tilde{H}^{n-p-1}(S \cap |\Delta|, \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$$

où $\tilde{H}^*(S \cap |\Delta|)$ est la cohomologie réduite à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ de l'intersection du support de Δ avec la sphère S .

En particulier:

- Si $|\Delta| \cap S$ est contractible alors $E_{p0}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) = 0 \forall p \in \mathbb{N}$
- Si $|\Delta| = N_\mathbb{R}$, alors $E_{00}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ et $E_{p0}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) = 0 \forall p \geq 1$

Toujours d'après la section 2, on peut voir en utilisant la proposition 2.0.18 que les termes de la dernière colonne de $E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C}))$ ne dépendent que du rang modulo 2 de Δ (cf. définition 2.0.17).

Proposition 3.2.2 *Si $k = \text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\Delta)$, alors pour $0 \leq q \leq n$, on a :*

- $E_{nq}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) = 0$ si $q < k$
- $E_{nq}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^{C_{n-k}^{q-k}}$ si $q \geq k$

Remarque 3.2.3 On ne sait pas en général dire si la suite spectrale $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ dégénère à l'ordre 2. On verra dans la section 3.3.2 que cette dégénérescence est garantie lorsque la suite spectrale réelle sur $X_\Delta(\mathbb{R})$, dont la construction sera rappelée dans la partie suivante, dégénère à l'ordre 1.

3.2.2 La suite spectrale complexe en cohomologie

La construction de cette suite spectrale est essentiellement duale de celle de $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ mais pour des raisons de lisibilité est exposée dans une section différente.

Pour $\sigma \in \Delta(n-p)$, $0 \leq p \leq n$, l'orbite \mathcal{O}_σ se décompose comme précédemment sous la forme $\mathcal{O}_\sigma \simeq T_\sigma^c \times \mathbb{R}^p$
Comme $H^*(\mathbb{R}^p)$ est donnée par :

$$H^k(\mathbb{R}^p) = \begin{cases} \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & \text{si } k = p \\ 0 & \text{si } k \neq p \end{cases}$$

la formule de Künneth permet d'obtenir pour tout $q \in \mathbb{N}$ un isomorphisme :

$$H^{p+q}(\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{C})) \simeq H^q(T_\sigma^c) \tag{12}$$

On considère à nouveau la filtration de X par les orbites :

$$\emptyset \subset X_0(\mathbb{C}) \subset X_1(\mathbb{C}) \subset \dots \subset X_n(\mathbb{C}) = X_\Delta(\mathbb{C})$$

et cette dernière donne naissance à une suite spectrale :

$$E_1^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C})) = H^{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{C})) \implies H^{p+q}(X_\Delta(\mathbb{C}))$$

convergeant vers $H^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$.

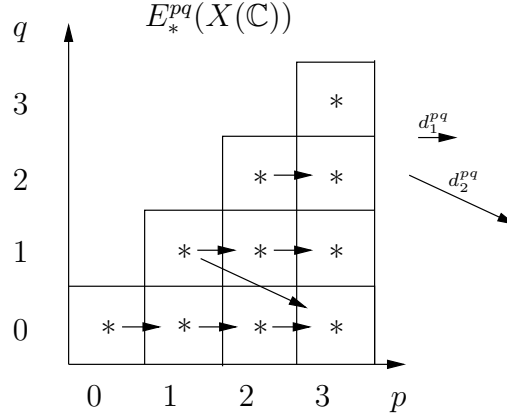
Par la suite, pour $l \in \mathbb{N}$, les différentielles du terme $E_l^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$ seront notées $d_l^{pq} : E_l^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C})) \rightarrow E_l^{p+l, q-l+1}(X_\Delta(\mathbb{C}))$.

La figure 2 donne la forme de la suite spectrale $E_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$ lorsque $n = 3$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$H^{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} H^{p+q}(\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{C}))$$

FIG. 2 – $E_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$ pour une variété torique de dimension 3



En utilisant (12), on obtient:

$$H^{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} H^q(T_\sigma^c) \quad (13)$$

Finalement, la combinaison de de (5) et (13) donne alors:

$$H^{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{C})) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} \bigwedge^q \left(\frac{V}{[\sigma]_2} \right)^* = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} \bigwedge^q [\sigma]_2^\perp \quad (14)$$

Dans [Jor] (page 60), l'auteur montre que sous l'identification (14), la différentielle $d_1^{pq} : E_1^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C})) \rightarrow E_1^{p-1,q}(X_\Delta(\mathbb{C}))$ est la somme directe sur $\tau \in \Delta(n-p)$ des applications:

$$\sum_{\tau < \sigma} p_{\sigma,\tau}^* : \left(\frac{V}{[\sigma]_2} \right)^* \rightarrow \bigoplus_{\tau \in \Delta(n-k-1), \tau < \sigma} \left(\frac{V}{[\tau]_2} \right)^*$$

Si on utilise l'isomorphisme $\left(\frac{V}{[\sigma]_2} \right)^* \simeq [\sigma]_2^\perp$ alors d_1^{pq} est aussi donnée par la somme directe sur $\tau \in \Delta(n-p)$ des applications:

$$\sum_{\tau < \sigma} i_{\sigma,\tau} : [\sigma]_2^\perp \rightarrow \bigoplus_{\tau \in \Delta(n-k-1), \tau < \sigma} [\tau]_2^\perp$$

où $i_{\sigma,\tau} : [\sigma]_2^\perp \rightarrow [\tau]_2^\perp$ est l'injection naturelle pour $\tau \leq \sigma \in \Delta$.

Pour $q \in \mathbb{N}$ fixé, le complexe $(E_1^{*,q}(X_\Delta(\mathbb{C})), d_1^{*,q})$ correspondant à la ligne d'indice q de $E_1^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$ est le complexe de cochaînes associé au faisceau $\bigwedge^q \mathcal{F}^\Delta$ sur Δ défini dans la section 2.

Comme $\mathcal{F}^\Delta = (\mathcal{G}^\Delta)^*$, on doit avoir:

$$H^p(\mathcal{F}^\Delta) = \text{Hom}(H_p(\mathcal{G}^\Delta), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$$

Ainsi:

Proposition 3.2.4 *Pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:*

$$E_2^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C})) \simeq (E_{pq}^2 X_\Delta(\mathbb{C}))^*$$

On se contentera pour cette raison d'étudier le terme $E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C}))$ par la suite.

Définition 3.2.5 *Un cône σ de $N_{\mathbb{R}}$ sera dit régulier modulo 2 si il existe $\rho_1, \dots, \rho_k \in N$ tels que:*

- $\sigma = \text{Pos}(\rho_1, \dots, \rho_k)$
- La famille (v_1, \dots, v_k) de V est libre où pour $i = 1 \dots k$, v_i désigne la classe du vecteur ρ_i dans $V = N \otimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

Un éventail sera régulier modulo 2 si chacun de ses cônes l'est.

Dans le cas où $X_\Delta(\mathbb{C})$ est compact, on peut citer le résultat suivant se trouvant dans [Br] (pages 4 et 5) et dans [Ho2].

Théorème 3.2.6 *On suppose que $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$ et que Δ est régulier modulo 2. Alors:*

$$E_2^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C})) \simeq (E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C})))^* = 0 \text{ pour } p \neq q$$

On en dérive facilement:

Corollaire 3.2.7 *On suppose que $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$ et que Δ est régulier modulo 2. Alors les suites spectrales $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ et $E_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$ dégénèrent toutes les deux à l'ordre 2 (ie: $E_{pq}^\infty(X_\Delta(\mathbb{C})) = E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C}))$ et $E_\infty^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C})) = E_2^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$).*

Remarque 3.2.8 Si l'on remplace l'hypothèse "régulier modulo 2" par "régulier" (auquel cas $X_\Delta(\mathbb{C})$ est lisse), alors on a en plus $E_{pp}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) \simeq E_{n-p, n-p}^2(X_\Delta(\mathbb{C}))$ en utilisant la dualité de Poincaré.

Dans la partie suivante, on va s'intéresser à l'homologie de la variété algébrique réelle $X_\Delta(\mathbb{R})$.

3.3 Les suites spectrales réelles

Les suites spectrales seront construites en utilisant les filtrations définies dans la section 3.1.

3.3.1 Description de $H_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$, $H^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$

Reprenons la filtration par les orbites utilisée pour obtenir $E_{pq}^* X_\Delta(\mathbb{C})$ et $E_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$ mais cette fois en nous restreignant à la partie réelle de X_Δ . On considère donc pour $p \in \mathbb{N}$:

$$X_p(\mathbb{R}) = \bigcup_{\sigma \in \Delta(n-p)} \overline{\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{R})}$$

et on obtient une filtration de $X_\Delta(\mathbb{R})$:

$$\emptyset \subset X_0(\mathbb{R}) \subset X_1(\mathbb{R}) \subset \dots \subset X_n(\mathbb{R}) = X_\Delta(\mathbb{R})$$

ayant pour strates ouvertes:

$$X_p^\circ(\mathbb{R}) = X_p(\mathbb{R}) - X_{p-1}(\mathbb{R})$$

Comme dans le cas complexe, cette filtration donne naissance aux 2 suites spectrales $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et $E_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$:

$$E_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R})) = H_{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{R})) \Rightarrow H_{p+q}(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

$$E_1^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})) = H^{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{R})) \Rightarrow H^{p+q}(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

La première convergeant vers $H_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et la deuxième vers $H^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$.

Soit $\sigma \in \Delta(n-p)$. $\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{R})$ est l'orbite de x_σ sous l'action de $T_N(\mathbb{R})$ et le sous-groupe d'isotropie de x_σ est le sous-tore algébrique $T_{[\sigma]}(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^*)^{n-p}$ associé au sous-réseau $[\sigma]$ de N . On a donc:

$$\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{R}) \simeq \frac{T_N(\mathbb{R})}{T_{[\sigma]}(\mathbb{R})} \simeq T_\sigma(\mathbb{R})$$

où $T_\sigma(\mathbb{C}) \simeq (\mathbb{R}^*)^p$ est le tore algébrique réel associé au réseau quotient $\frac{N}{[\sigma]}$.

Comme $T_\sigma(\mathbb{R}) \simeq T_\sigma^c[2] \times \mathbb{R}^p$, on obtient:

$$\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{R}) \simeq T_\sigma^c[2] \times \mathbb{R}^p$$

Cette décomposition donne avec la formule de Künneth:

$$H_{p+q}(\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{R})) = \begin{cases} H_0(T_\sigma^c[2]) = H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right) & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 0 \end{cases} \quad (15)$$

$$H^{p+q}(\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{R})) = \begin{cases} H^0(T_\sigma^c[2]) = H^0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right) = (H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right))^* & \text{si } q = 0 \\ 0 & \text{si } q > 0 \end{cases} \quad (16)$$

Comme pour $p, q \in \mathbb{N}$, $H_{p+q}(X_p^\circ(\mathbb{R})) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} H_{p+q}(\mathcal{O}_\sigma(\mathbb{R}))$, on doit avoir pour $p \in \mathbb{N}$ en utilisant (15) et (16):

$$\begin{aligned} - E_{p0}^1(X_\Delta(\mathbb{R})) &= \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right) \text{ et } E_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R})) = 0 \text{ pour } q > 0 \\ - E_1^{p0}(X_\Delta(\mathbb{R})) &= \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} H^0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right) \text{ et } E_1^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})) = 0 \text{ pour } q > 0 \end{aligned}$$

En particulier les deux suites spectrales $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et $E_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégènèrent à l'ordre 1.

On notera $(A_*(X_\Delta(\mathbb{C})), \partial_*)$ (resp $(A^*(X_\Delta(\mathbb{C})), \partial^*)$) le complexe $(E_{*0}^1(X_\Delta(\mathbb{R})), d_{*0}^1)$ (resp $(E_1^{*0}(X_\Delta(\mathbb{R})), d_1^{*0})$) donné par la ligne d'indice $q = 0$ de $E_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ (resp $E_1^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$).

D'après ce qui précède, on doit avoir:

- $H_*(A(X_\Delta(\mathbb{R}))) = H_*(X_\Delta(\mathbb{R})).$
- $H^*(A(X_\Delta(\mathbb{R}))) = H^*(X_\Delta(\mathbb{R})).$

Remarque 3.3.1 Les complexes $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et $A^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ étant duaux, $H^*(X_\Delta(\mathbb{R})) = \text{Hom}(H_*(X_\Delta(\mathbb{R})), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$.

Pour $\tau \leq \sigma \in \Delta$, on pose:

- $A_\sigma = H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right)$
- $A^\sigma = H^0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right)$
- $\pi_{\tau,\sigma} : A_\tau \rightarrow A_\sigma$ l'application induite en homologie par la projection naturelle
- $p_{\tau,\sigma} : \frac{V}{[\tau]_2} \rightarrow \frac{V}{[\sigma]_2}$

Si l'on veut parler de (co-)faisceaux, alors $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ (resp $A^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$) est le complexe de chaînes (resp cochaînes) associé au faisceau (resp cofaisceau) $A_\sigma, \pi_{\tau,\sigma})_{\tau \leq \sigma \in \Delta}$ (resp $(A^\sigma, \pi_{\tau,\sigma}^*)_{\tau \leq \sigma \in \Delta}$).

Remarque 3.3.2 Le complexe $A_*(X)$ provient du complexe cellulaire résultant d'une décomposition en quadrants de $X_\Delta(\mathbb{R})$; chaque orbite $\mathcal{O}_\sigma \simeq \mathbb{R}^p$ de dimension p pouvant se décomposer 2^p quadrants.

La figure 3 représente une décomposition en quadrants de la variété \mathbb{R}^2 . Celle ci comportant une cellule de dimension 0, 4 cellules de dimension 1 et 4 cellules de dimension 2.

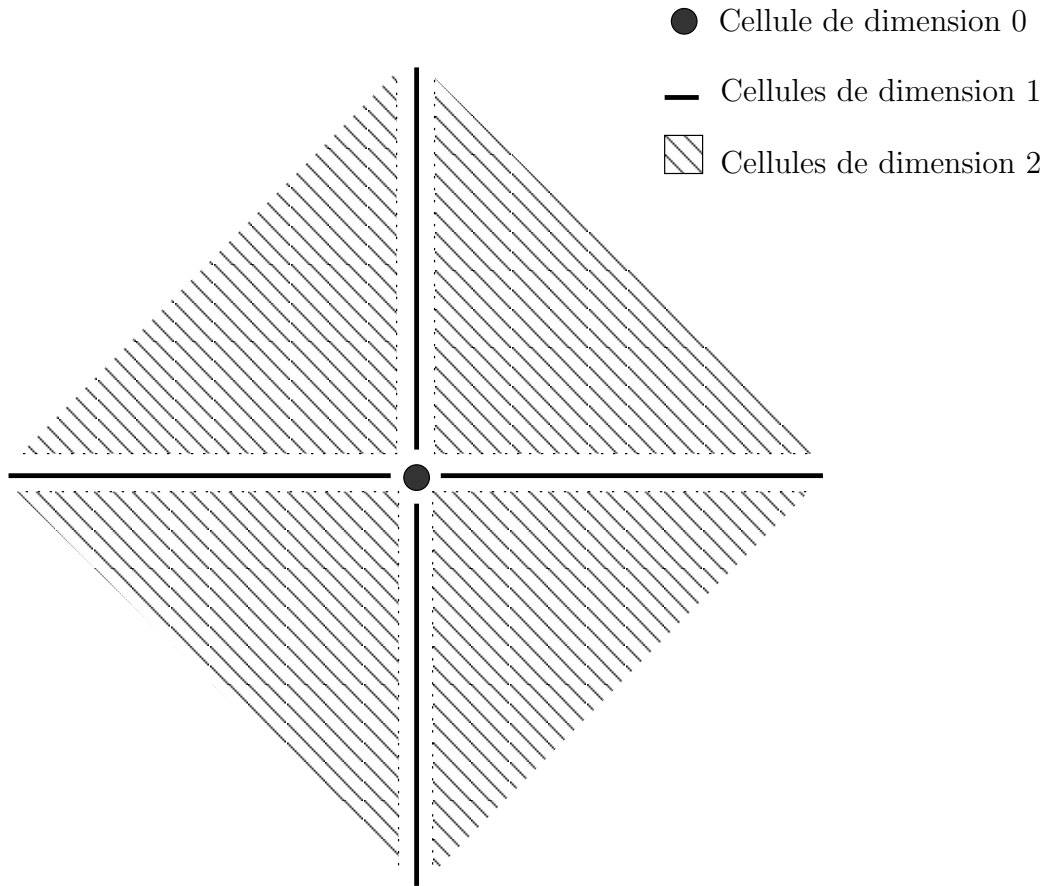
3.3.2 La suite spectrale réelle en homologie

La construction de la suite spectrale convergeant vers $H_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est tirée de [Bi]. En fait tout le travail a déjà été effectué dans la section 3.1 où la filtration sur l'homologie des points de 2-torsion d'un tore compact a été définie.

On va maintenant construire une filtration \tilde{I}_* sur $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ de telle sorte que le terme $\tilde{G}_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ de la suite spectrale $\tilde{G}_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ définie par \tilde{I}_* soit isomorphe (en changeant les indices) au terme $E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C}))$.

Pour chaque $\sigma \in \Delta$, on peut définir comme on l'a fait dans la section 3.1.2 une filtration I_σ^* décroissante sur A_σ .

FIG. 3 – Une décomposition en quadrants de \mathbb{R}^2



On obtient ainsi une filtration I^* sur le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ compatible avec les différentielles ∂_* en posant:

$$I^q(A_p(X)) = \sum_{\sigma \in \Delta(n-p)} I_\sigma^q(A_\sigma)$$

et on peut alors définir une filtration croissante \tilde{I}_* sur $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ en posant pour $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq 0$:

$$\tilde{I}_p(A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))) = I^{-p}(A_*(X_\Delta(\mathbb{R})))$$

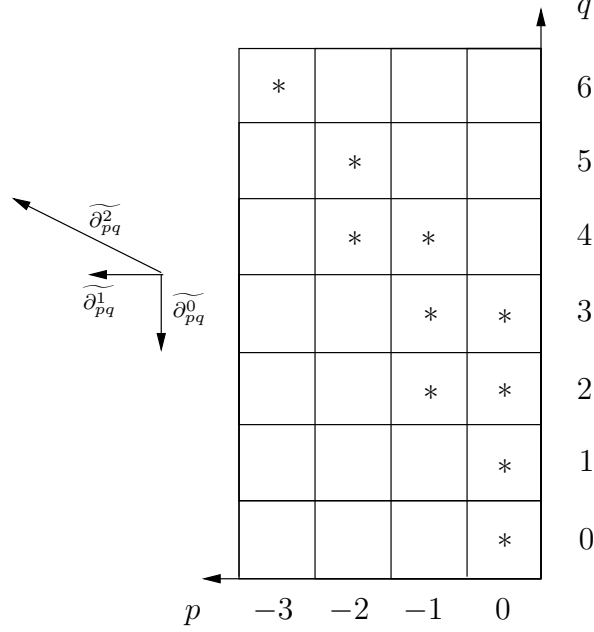
On obtient ainsi une suite spectrale:

$$\widetilde{G}_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-(p+q))} \frac{I^{-p}}{I^{-(p+1)}} A_\sigma \Rightarrow H_{p+q}(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

dont les différentielles seront notées $\widetilde{\partial}_{pq}^*$.

Remarque 3.3.3 La suite $\widetilde{G}_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est concentrée dans le second quadrant. La figure 4 donne la forme de $\widetilde{G}_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ lorsque $n = 3$.

FIG. 4 – Le terme $\widetilde{G}_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ lorsque $n = 3$



Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a:

$$\widetilde{G}_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-(p+q))} Gr_I^{-p} A_\sigma$$

En utilisant (3), on obtient un isomorphisme d'espaces vectoriels:

$$\widetilde{G}_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-(p+q))} \bigwedge^p \frac{V}{[\sigma]_2} \simeq E_{p+q,-p}^1(X_\Delta(\mathbb{C}))$$

De plus, d'après (4), la différentielle $\widetilde{\partial}_{pq}^0$ s'identifie alors sous cet isomorphisme à la somme directe sur $\tau \in \Delta(n - (p + q))$ des applications:

$$\sum_{\sigma > \tau} \bigwedge^p p_{\tau,\sigma} : \bigwedge^p \frac{V}{[\tau]_2} \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-(p+q)+1), \sigma > \tau} \bigwedge^p \frac{V}{[\sigma]_2}$$

Ainsi il existe un diagramme commutatif:

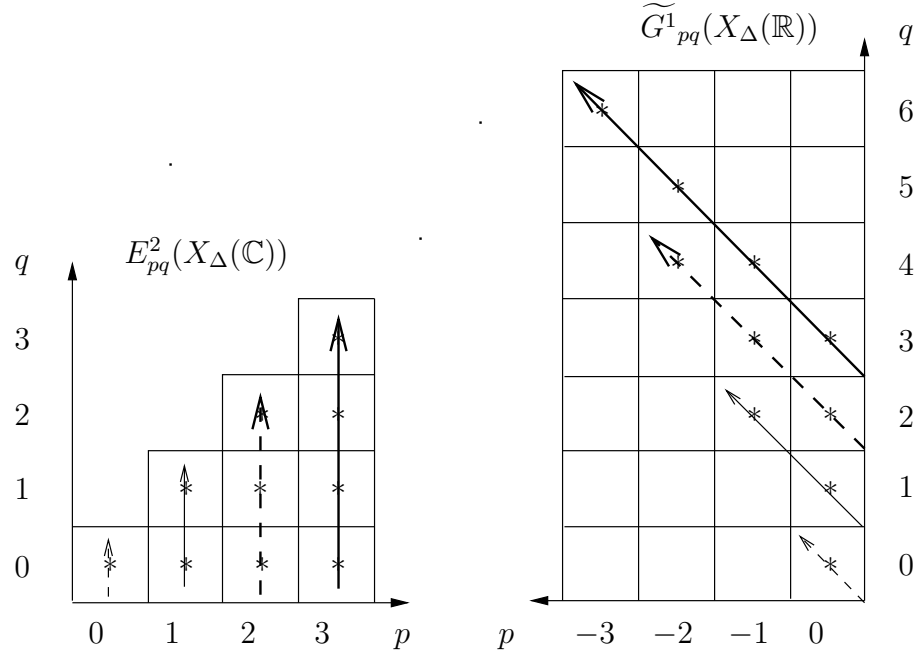
$$\begin{array}{ccc} E_{p+q,-p}^1(X_\Delta(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{G}_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) \\ \downarrow d_{p+q,-p}^1 & & \downarrow \widetilde{\partial}_{pq}^0 \\ E_{p+q-1,-p}^1(X_\Delta(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{G}_{p,q-1}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) \end{array}$$

et donc:

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}, E_{p+q,-p}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) \simeq \widetilde{G}_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

On a ainsi une identification entre les diagonales de $\widetilde{G}_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et les lignes de $E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C}))$. La figure 5 montre cette dernière pour $n = 3$.

FIG. 5 – Identification de $\widetilde{G}_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et $E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C}))$ lorsque $n = 3$ (les flèches donnent le sens de lecture)



Pour toute la suite, on considérera le réarrangement $G_{pq}^*(X)$ de la suite spectrale $\widetilde{G}_{pq}^*(X)$ revenant à poser:

$$G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R})) = \widetilde{G}_{-q,p+q}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

Si l'on utilise cette notation, la différentielle $\widetilde{\partial}_{pq}^*$ devient:

$$\partial_{pq}^* : G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow G_{p-(*)+1,q+*}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

La figure 6 donne la forme de la suite $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dans le cas où $n = 3$.

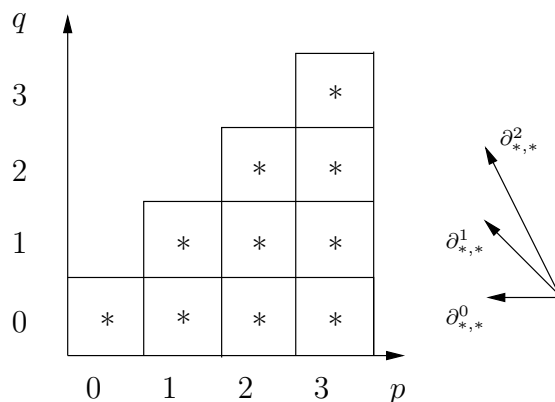
Avec cette définition, on a simplement:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R})) \simeq E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C}))$$

et les différentielles ∂_{**}^1 et d_{**}^1 se correspondent sous cet isomorphisme.

Bien que cette écriture n'apparaisse pas très naturelle pour la suite spectrale réelle, elle s'avèrera plus pratique au niveau des indices pour étudier les problèmes de dégénérescence.

FIG. 6 – $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ pour $n = 3$



On note $b_*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ (resp $b_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$) les nombres de Betti de $X_\Delta(\mathbb{C})$ (resp $X_\Delta(\mathbb{R})$). ie: pour $p \in \mathbb{N}$, $b_p(X_\Delta(\mathbb{C})) = \dim H_p(X_\Delta(\mathbb{C}))$ (resp $b_p(X_\Delta(\mathbb{R})) = \dim H_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$).

D'après l'inégalité de Thom-Smith, on a:

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} b_i(X_\Delta(\mathbb{R})) \leq \sum_{p \in \mathbb{N}} b_i(X_\Delta(\mathbb{C}))$$

On obtient ainsi:

Corollaire 3.3.4 *Si la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1 (ie: $G_{pq}^\infty(X_\Delta(\mathbb{R})) = G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$), alors la suite spectrale $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ dégénère à l'ordre 2 et l'on a:*

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} b_i(X_\Delta(\mathbb{R})) = \sum_{p \in \mathbb{N}} b_i(X_\Delta(\mathbb{C}))$$

Remarque 3.3.5 Si la suite spectrale $G_{pq}^*(X)$ dégénère à l'ordre 1, il est possible de lire les nombres de Betti $b_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et $b_*(X_\Delta(\mathbb{C}))$ sur le terme $G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R})) \simeq E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C}))$. En effet, dans ce cas:

- $b_p(X_\Delta(\mathbb{R})) = \sum_{q \in \mathbb{N}} \dim(G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))), 0 \leq p \leq n$
 - $b_k(X_\Delta(\mathbb{C})) = \sum_{p+q=k} \dim(G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))), 0 \leq k \leq 2n$
- (cf figure 7 lorsque $n = 3$).

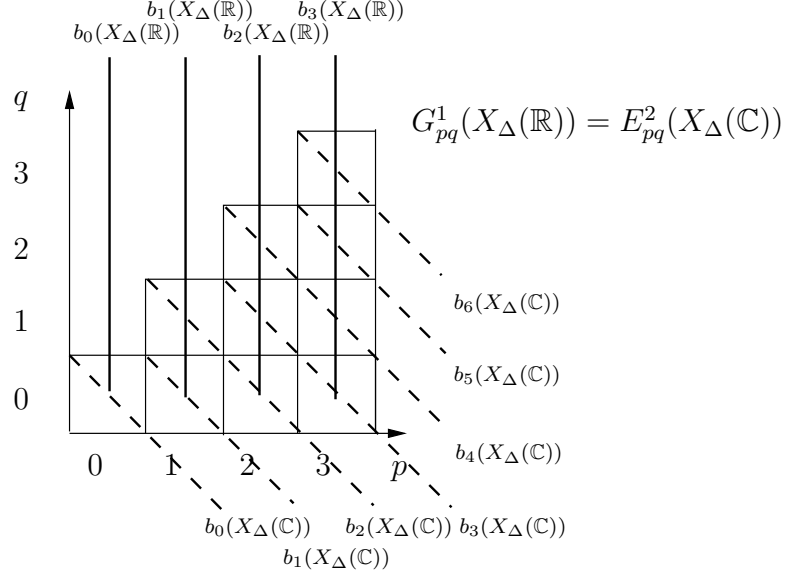
3.3.3 La suite spectrale réelle en cohomologie

Regardons maintenant ce qui se passe en cohomologie.

Pour chaque $\sigma \in \Delta$, on peut définir comme on l'a fait dans la section 3.1.3 une filtration L_*^σ croissante sur A^σ .

On peut alors obtenir une filtration croissante L_* sur le complexe $A^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ compatible avec les différentielles ∂^* en posant:

FIG. 7 – Lecture des nombres de Betti lorsque $n = 3$



$$L_q(A_p(X)) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} L_q^\sigma(A^\sigma)$$

Finalement, on peut définir une filtration décroissante \tilde{L}^* sur $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ en posant pour $p \in \mathbb{Z}$, $p \leq 0$:

$$\tilde{L}^p(A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))) = L_{-p}(A_*(X_\Delta(\mathbb{R})))$$

Avec cette filtration, on obtient la suite spectrale $\widetilde{G}_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$:

$$\widetilde{G}_0^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-(p+q))} \frac{L^{-p}}{L^{-p-1}} A^\sigma \Rightarrow H_{p+q}(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

Les différentielles de cette suite spectrale seront notées $\widetilde{\partial}_*^{pq}$.

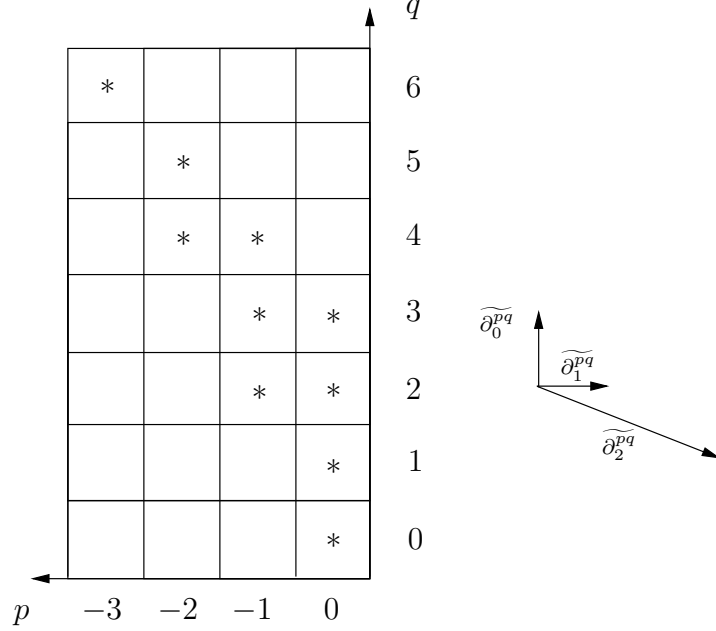
Remarque 3.3.6 Comme $\widetilde{G}_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$, la suite $\widetilde{G}_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est concentrée dans le second quadrant. La figure 8 montre la forme de $\widetilde{G}_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ lorsque $n = 3$.

Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a:

$$\widetilde{G}_0^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-(p+q))} Gr_L^{-p} A^\sigma$$

En utilisant (8), on obtient un isomorphisme d'espaces vectoriels:

FIG. 8 – Le terme $\widetilde{G}_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ lorsque $n = 3$



$$\widetilde{G}_0^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})) \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-(p+q))} \bigwedge^p \left(\frac{V}{[\sigma]_2} \right)^* \simeq E_2^{p+q, -p}(X_\Delta(\mathbb{C}))$$

De plus, d'après (7), la différentielle $\widetilde{\partial}_0^{pq}$ s'identifie alors sous cet isomorphisme à la somme directe sur $\tau \in \Delta(n - (p + q))$ des applications:

$$\sum_{\sigma > \tau} \bigwedge^p (p_{\tau, \sigma})^* : \bigwedge^p \left(\frac{V}{[\tau]_2} \right)^* \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-(p+q)+1), \sigma > \tau} \bigwedge^p \left(\frac{V}{[\sigma]_2} \right)^*$$

Ainsi il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} E_1^{p+q, -p}(X_\Delta(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{G}_0^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})) \\ \downarrow d_1^{p+q, -p} & & \downarrow \widetilde{\partial}_0^{pq} \\ E_1^{p+q+1, -p}(X_\Delta(\mathbb{C})) & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{G}_0^{p, q+1}(X_\Delta(\mathbb{R})) \end{array}$$

et donc:

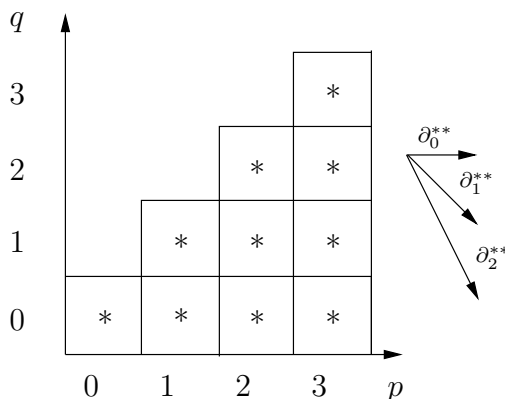
$$\forall p, q \in \mathbb{Z}, E_2^{p+q, -p}(X_\Delta(\mathbb{C})) \simeq \widetilde{G}_1^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

Comme en homologie, on considérera par la suite le réarrangement $G_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ de la suite spectrale $\widetilde{G}_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ revenant à poser:

$$G_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})) = \widetilde{G}_*^{-q, p+q}(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

Si l'on utilise cette notation, la différentielle $\widetilde{\partial}_*^{pq}$ devient $\partial_*^{pq} : G_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow G_*^{p-(*)+1, q+*}(X_\Delta(\mathbb{R}))$. La figure 9 donne la forme de la suite $G_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dans le cas où $n = 3$.

FIG. 9 – $G_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ pour $n = 3$



Avec cette définition, on a simplement:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, G_1^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})) \simeq E_2^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$$

et les différentielles ∂_1^{**} et d_1^{**} se correspondent sous cet isomorphisme.

Pour résumer la situation, on a construit 4 suites spectrales $E_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{C}))$, $E_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C}))$, $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et $G_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ vérifiant pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:

$$E_{pq}^2(X_\Delta(\mathbb{C})) \simeq \text{Hom}(E_2^{pq}(X_\Delta(\mathbb{C})), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \simeq \text{Hom}(G_1^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R})), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}) \simeq G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

Ainsi, comme $H_*(A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))) \simeq \text{Hom}(H^*(A^*(X_\Delta(\mathbb{R}))), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$, on a:

Corollaire 3.3.7 *La suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1 si et seulement si la suite spectrale $G_*^{pq}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1.*

4 Propriétés de la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$

4.1 Préliminaires

Soient $N' \simeq \mathbb{Z}^d$ un autre réseau et Δ' un éventail de $N'_\mathbb{R} = N' \otimes \mathbb{R}$.

Définition 4.1.1 *Un morphisme d'éventails $\Phi : (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ est un morphisme $\Phi : N \rightarrow N'$ tel que son extension $\Phi_\mathbb{R} : N_\mathbb{R} \rightarrow N'_\mathbb{R}$ vérifie la propriété suivante:*

$$\forall \sigma \in \Delta, \exists \sigma' \in \Delta', \Phi_{\mathbb{R}}(\sigma) \subset \sigma'$$

Si Φ est un morphisme d'éventails, alors Φ induit des morphismes équivariants:

- $\varphi_{\mathbb{R}} : X_{\Delta}(\mathbb{R}) \rightarrow X_{\Delta'}(\mathbb{R})$
- $\varphi_{\mathbb{C}} : X_{\Delta}(\mathbb{C}) \rightarrow X_{\Delta'}(\mathbb{C})$

On dira que Φ est propre si $\Phi^{-1}(|\Delta'|) = |\Delta|$.

Remarque 4.1.2 $\varphi_{\mathbb{R}}$ et $\varphi_{\mathbb{C}}$ sont propres si et seulement si Φ l'est (cf [Fu]).

Comme dans la partie précédente, on notera pour $p \in \mathbb{N}$ et pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} :

$$X_p(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in \Delta(n-p)} \overline{\mathcal{O}_{\sigma}(\mathbb{K})}$$

$$X'_p(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in \Delta'(n-p)} \overline{\mathcal{O}_{\sigma}(\mathbb{K})}$$

Si $\Phi : (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ est un morphisme propre d'éventails, alors pour $p \in \mathbb{N}$, $\varphi_{\mathbb{K}}(X_p(\mathbb{K})) \subset X'_p(\mathbb{K})$. Ainsi Φ induit des morphismes de complexes:

$$\varphi_* : E_{*0}^1(X_{\Delta}(\mathbb{R})) = A_*(X_{\Delta}(\mathbb{R})) \rightarrow E_{*0}^1(X_{\Delta'}(\mathbb{R})) = A_*(X_{\Delta'}(\mathbb{R}))$$

$$\varphi^* : E_1^{*0}(X_{\Delta'}(\mathbb{R})) = A^*(X_{\Delta'}(\mathbb{R})) \rightarrow E_1^{*0}(X_{\Delta}(\mathbb{R})) = A^*(X_{\Delta}(\mathbb{R}))$$

dans le cas réel et dans le cas complexe:

$$\Phi_{**}^* : E_{**}^*(X_{\Delta}(\mathbb{C})) \rightarrow E_{**}^*(X_{\Delta'}(\mathbb{C}))$$

$$\Phi_*^{**} : E_*^{**}(X_{\Delta'}(\mathbb{C})) \rightarrow E_*^{**}(X_{\Delta}(\mathbb{C}))$$

On va s'intéresser par la suite au cas réel.

φ_* est compatible avec les filtrations \tilde{I} sur $A_*(X_{\Delta}(\mathbb{R}))$ et \tilde{I}' sur $A_*(X_{\Delta'}(\mathbb{R}))$ définies dans la partie précédente. Ainsi φ_* induit des morphismes de complexes:

$$\varphi_{**}^* : G_{**}^*(X_{\Delta}(\mathbb{R})) \rightarrow G_{**}^*(X_{\Delta'}(\mathbb{R}))$$

De même, φ^* induit des morphismes de complexes:

$$\varphi_*^{**} : G_*^{**}(X_{\Delta'}(\mathbb{R})) \rightarrow G_*^{**}(X_{\Delta}(\mathbb{R}))$$

Comme on s'intéressera principalement aux propriétés de $X_{\Delta}(\mathbb{R})$, on se contentera pour alléger les notations, sauf mention contraire, d'écrire $X := X_{\Delta}(\mathbb{R})$.

4.2 Propriétés d'additivité

Soit $Y \subset X$ une sous-variété fermée invariante sous l'action du tore $T_N(\mathbb{R})$.

On note Δ^{X-Y} le sous-éventail de $\Delta := \Delta^X$ correspondant à l'ouvert $X - Y$ de X et on pose $\Delta^Y = \Delta^X - \Delta^{X-Y}$. Ainsi, avec ces notations, $Y = \bigcup_{\sigma \in \Delta^Y} \mathcal{O}_\sigma$.

Remarque 4.2.1 Lorsque Z est une quelconque réunion d'orbites sous l'action du tore d'une variété torique réelle, il est possible de définir comme on l'a fait précédemment la suite spectrale $G_{pq}^*(Z)$.

On notera également ∂_*^X (resp. ∂_*^{X-Y} , ∂_*^Y) les différentielles du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ (resp. $A_*(X - Y)$, $A_*(Y)$).

Remarque 4.2.2 Il existe une décomposition naturelle:

$$A_*(X) = A_*(Y) \oplus A_*(X - Y)$$

Finalement, on pose:

$$\begin{aligned} - \quad i_*^Y: \quad & A_*(Y) \rightarrow A_*(X) \\ & x \mapsto (x, 0) \\ - \quad i_*^{X-Y}: \quad & A_*(X - Y) \rightarrow A_*(X) \\ & y \mapsto (0, y) \\ - \quad r_*^Y: \quad & A_*(X) \rightarrow A_*(Y) \\ & (x, y) \mapsto x \\ - \quad r_*^{X-Y}: \quad & A_*(X) \rightarrow A_*(X - Y) \\ & (x, y) \mapsto y \end{aligned}$$

Remarque 4.2.3 Pour $c \in A_*(X)$, on notera plus simplement:

$$\begin{aligned} - \quad r_*^{X-Y}(c) &= c|_{X-Y} \\ - \quad r_*^Y(c) &= c|_Y \end{aligned}$$

On va s'intéresser ici aux relations entre les complexes $A_*(X)$, $A_*(Y)$ et $A_*(X - Y)$.

La décomposition $A_*(X) = A_*(Y) \oplus A_*(X - Y)$ est compatible avec la filtration I^* . Ainsi pour $q \in \mathbb{N}$, on a:

$$\frac{I^q}{I^{q+1}} A_*(X) = \frac{I^q}{I^{q+1}} A_*(Y) \oplus \frac{I^q}{I^{q+1}} A_*(X - Y)$$

Par contre, cette décomposition n'est pas compatible avec les différentielles ∂_*^X , ∂_*^Y et ∂_*^{X-Y} .

En effet, la différentielle ∂_*^X est donnée par le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} A_*(X) & \xrightarrow{\sim} & A_*(Y) & \oplus & A_*(X - Y) \\ \downarrow \partial_*^X & & \downarrow \partial_{* - 1}^Y & \swarrow ((\partial_*^X)|_{X-Y})|_Y & \downarrow \partial_{* - 1}^{X-Y} \\ A_{* - 1}(X) & \xrightarrow{\sim} & A_{* - 1}(Y) & \oplus & A_{* - 1}(X - Y) \end{array}$$

et si $c \in A_*(X - Y)$, en général, $(\partial_*^X(0, c))|_Y \neq 0$.

Proposition 4.2.4 *Pour chaque $q \in \mathbb{N}$, il existe une suite exacte longue:*

$$\dots \rightarrow G_{*,q}^1(Y) \rightarrow G_{*,q}^1(X) \rightarrow G_{*,q}^1(X-Y) \rightarrow G_{*-1,q}^1(Y) \rightarrow \dots$$

Démonstration:

Ces suites exactes longues sont induites par les suites exactes courtes:

$$\frac{I^q}{I^{q+1}}A_*(X) = \frac{I^q}{I^{q+1}}A_*(Y) \oplus \frac{I^q}{I^{q+1}}A_*(X-Y)$$

De plus, soit $q \in \mathbb{N}$ et $c \in I^q(A_*(X-Y))$ telle que $\partial_*^{X-Y}(c) \in I^{q+1}(A_*(X-Y))$. Alors le connectant $g_* : G_{*,q}^1(X-Y) \rightarrow G_{*-1,q}^1(Y)$ est donné par $g_*([\bar{c}]) = [\bar{c}|_{X-Y}]$ où \bar{c} est la classe de c dans $\frac{I^q}{I^{q+1}}A_*(X-Y)$ et $[\bar{c}]$ la classe du cycle \bar{c} dans $G_{*,q}^1(X-Y)$. \square

Soit $T_*(X, Y)$ le complexe total associé à l'injection $A_*(Y) \hookrightarrow A_*(X)$. Ce dernier est défini par:

$$\begin{aligned} - & \text{ Pour } p \in \mathbb{N}, T_p(X, Y) = A_{p-1}(Y) \oplus A_p(X) \\ - & \partial_p^{X,Y} : T_p(X, Y) \rightarrow T_{p-1}(X, Y) \\ & (y, x) \mapsto (\partial_p^Y(y), \partial_p^X(x) + i_{p-1}^Y(y)) \end{aligned}$$

Les filtrations I^* sur $A_*(Y)$ et $A_*(X)$ induisent une filtration, encore notée I^* , sur $T_*(X, Y)$.

Définition 4.2.5 *Soient (C_*, F^*) et (D_*, G^*) 2 complexes de chaînes filtrés et $f_* : C_* \rightarrow D_*$ un morphisme de complexes compatible avec les filtrations F^* et G^* . Alors f_* est un quasi-isomorphisme filtré si le gradué de f_* , $Gr^*(f_*) : Gr_F^*C \rightarrow Gr_G^*D$, est un quasi-isomorphisme (cf [De] (page 8)).*

Proposition 4.2.6 *Il existe un quasi-isomorphisme filtré:*

$$\phi_* : A_*(X-Y) \hookrightarrow T_*(X, Y)$$

Démonstration:

Il s'agit de montrer que pour tout $q \in \mathbb{N}$, les complexes $\frac{I^q}{I^{q+1}}A_*(X-Y)$ et $\frac{I^q}{I^{q+1}}T_*(X, Y)$ sont quasi-isomorphes.

Soient:

- $h_* : T_*(X, Y) \rightarrow A_*(X-Y)$ définie par:

$$h_p(y, x) = x|_{X-Y}$$

- $f_* : A_*(X-Y) \rightarrow T_*(X, Y)$ définie par:

$$f_p(z) = ((\partial_p^X(i_p^{X-Y}(z)))|_Y, i_p^{X-Y}(z))$$

Remarque 4.2.7 Les morphismes de complexes f_* et h_* sont compatibles avec les filtrations I^* .

On a $h_* \circ f_* = id$. Il faut encore montrer:

Lemme 4.2.8 *Le morphisme $f_* \circ h_*$ est homotope à l'identité.*

Démonstration:

On considère $\varphi_* : T_*(X, Y) \rightarrow T_{*+1}(X, Y)$ définie par:

$$\varphi_p(y, x) = (x|_Y, 0)$$

Montrons que l'on a:

$$\varphi_{*-1} \circ \partial_*^{X,Y} + \partial_{*+1}^{X,Y} \circ \varphi_* = f_* \circ h_* + id$$

Soit $(y, x) \in T_*(X, Y)$. On a:

$$\begin{aligned} \varphi_{*-1} \circ \partial_*^{X,Y}(y, x) &= \varphi_{*-1}(\partial_{*-1}^Y(y), \partial_*^X(x) + y) \\ &= ((\partial_*^X(x) + y)|_Y, 0) \\ &= ((\partial_*^X(x))|_Y + y, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{*+1}^{X,Y} \circ \varphi_*(y, x) &= \partial_{*+1}^{X,Y}(x|_Y, 0) \\ &= (\partial_*^Y(x|_Y), x|_Y) \end{aligned}$$

Et donc:

$$\begin{aligned} \varphi_{*-1} \circ \partial_*^{X,Y}(y, x) + \partial_{*+1}^{X,Y} \circ \varphi_*(y, x) &= ((\partial_*^X(x))|_Y + y, 0) + (\partial_*^Y(x|_Y), x|_Y) \\ &= ((\partial_*^X(x|_{X-Y}))|_Y + y, x|_Y) \end{aligned}$$

De l'autre côté, on a:

$$\begin{aligned} (f_* \circ h_* + id)(y, x) &= f_*(x|_Y, 0) + (y, x) \\ &= ((\partial_*^X(x|_{X-Y}))|_Y, x|_{X-Y}) + (y, x) \\ &= ((\partial_*^X(x|_{X-Y}))|_Y + y, x|_Y) \end{aligned}$$

Ainsi $f_* \circ h_*$ est homotope à l'identité. \square

Pour finir, il suffit de voir que toutes les applications précédentes passent au quotient et fournissent les équivalences d'homotopie désirées \square .

Soit $\pi : \tilde{X} \mapsto X$ l'éclatement de X de centre Y . On notera E le diviseur exceptionnel et $\pi_* : A_*(\tilde{X}) \rightarrow A_*(X)$ le morphisme de complexes induit par π .

On va maintenant regarder quelles sont les relations entre $A_*(X)$, $A_*(Y)$, $A_*(\tilde{X})$ et $A_*(E)$.

Remarque 4.2.9 Comme $\pi|_{\tilde{X}-E} : \tilde{X} - E \simeq X - Y$ est un isomorphisme, $(\pi|_{\tilde{X}-E})_* : A_*(\tilde{X} - E) \simeq A_*(X - Y)$ est un isomorphisme de complexes de chaînes.

Pour simplifier l'écriture, on notera, pour $x \in A_*(X - Y)$:

$$((\pi|_{\tilde{X}-E})_*)^{-1}(x) = \tilde{x}$$

Soit $B_*(X, Y)$ le complexe total associé au diagramme:

$$\begin{array}{ccc} A_*(\tilde{X}) & \xleftarrow{i_*^E} & A_*(E) \\ & & \downarrow \pi_* \\ & & A_*(Y) \end{array}$$

Ce complexe est défini par:

$$- B_p(X, Y) = A_{p-1}(E) \oplus A_p(\tilde{X}) \oplus A_p(Y) \text{ pour } p \in \mathbb{N}$$

$$\begin{array}{l} - \partial_p^{X,Y} : B_p(X, Y) \rightarrow B_{p-1}(X, Y) \\ (z, \tilde{x}, y) \mapsto (\partial_{p-1}^E(z), \partial_p^{\tilde{X}}(\tilde{x}) + z, \partial_p^Y(y) + \pi_{p-1}(z)) \end{array}$$

Les filtrations I^* sur $A_*(\tilde{X})$, $A_*(E)$ et $A_*(Y)$ induisent une filtration, que l'on notera encore I^* , sur $B_*(X, Y)$.

Proposition 4.2.10 *Il existe un quasi-isomorphisme filtré:*

$$\phi_* : A_*(X) \mapsto B_*(X, Y)$$

Démonstration:

Comme pour la proposition 4.2.6, il va s'agir de montrer que pour chaque $q \in \mathbb{N}$, les complexes $\frac{I^q}{I^{q+1}}A_*(X)$ et $\frac{I^q}{I^{q+1}}B_*(X, Y)$ sont quasi-isomorphes.

Soient:

$$- h_* : B_*(X, Y) \rightarrow A_*(X) \text{ définie par:}$$

$$h_p(z, \tilde{x}, y) = \pi_p(\tilde{x}) + y$$

$$- f_* : A_*(X) \rightarrow B_*(X, Y) \text{ définie par:}$$

$$f_p(x) = ((\partial_p^{\tilde{X}}(\widetilde{x|_{X-Y}}))|_E, \widetilde{x|_{X-Y}}, x|_Y)$$

Lemme 4.2.11 *f_* et h_* sont des morphismes de complexes compatibles avec les filtrations I^* .*

On a $h_* \circ f_* = id$. Il faut ainsi montrer:

Lemme 4.2.12 *$f_* \circ h_*$ est homotope à l'identité.*

Démonstration:

On considère $\varphi_* : B_*(X, Y) \rightarrow B_{*+1}(X, Y)$ définie par:

$$\varphi_p(z, \tilde{x}, y) = (\tilde{x}|_E, 0, 0)$$

Montrons que l'on a:

$$\varphi_{*+1} \circ \partial_*^{X,Y} + \partial_{*+1}^{X,Y} \circ \varphi_* = f_* \circ h_* + id$$

Soit $(z, \tilde{x}, y) \in B_*(X, Y)$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi_{*-1} \circ \partial_*^{X,Y}(z, \tilde{x}, y) &= \varphi_{*-1}(\partial_{*-1}^E(z), \partial_*^{\tilde{X}}(\tilde{x}) + z, \partial_p^Y(y) + \pi_{*-1}(z)) \\ &= ((\partial_*^{\tilde{X}}(\tilde{x}) + z)|_E, 0, 0) \\ &= ((\partial_*^{\tilde{X}}(\tilde{x}))|_E + z, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{*+1}^{X,Y} \circ \varphi_*(z, \tilde{x}, y) &= \partial_{*+1}^{X,Y}(\tilde{x}|_E, 0, 0) \\ &= (\partial_*^{\tilde{X}}(\tilde{x}|_E), \tilde{x}|_E, \pi_*(\tilde{x}|_E)) \end{aligned}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} (\varphi_{*-1} \circ \partial_*^{X,Y} + \partial_{*+1}^{X,Y} \circ \varphi_*)(z, \tilde{x}, y) &= ((\partial_*^{\tilde{X}}(\tilde{x}))|_E + z + \partial_*^{\tilde{X}}(\tilde{x}|_E), \tilde{x}|_E, \pi_*(\tilde{x}|_E)) \\ &= ((\partial_*^{\tilde{X}}(\tilde{x}|_{\tilde{X}-E}))|_E + z, \tilde{x}|_E, \pi_*(\tilde{x}|_E)) \end{aligned}$$

De l'autre côté, on a :

$$\begin{aligned} (f_* \circ h_* + id)(z, \tilde{x}, y) &= f_*(\pi_*(\tilde{x}) + y) + (z, \tilde{x}, y) \\ &= (\partial_*^{\tilde{X}}(\widetilde{(\pi_*(\tilde{x})|_{X-Y})})|_E, (\pi_*(\tilde{x})|_{X-Y}), (\pi_*(\tilde{x})|_Y + y) + (z, \tilde{x}, y)) \\ &= ((\partial_*^{\tilde{X}}(\tilde{x}|_{\tilde{X}-E}))|_E + z, \tilde{x}|_{\tilde{X}-E} + \tilde{x}, (\pi_*(\tilde{x})|_Y)) \\ &= ((\partial_*^{\tilde{X}}(\tilde{x}|_{\tilde{X}-E}))|_E + z, \tilde{x}|_E, \pi_*(\tilde{x}|_E)) \end{aligned}$$

Ainsi $f_* \circ h_*$ est homotope à l'identité. \square

Pour finir, il suffit de voir que toutes les applications précédentes passent aux quotient et fournissent les équivalences d'homotopie désirées \square .

Remarque 4.2.13 Lorsque Z est une variété algébrique réelle, le complexe des chaînes singulières $C_*(Z)$ pour l'homologie de Borel Moore à coefficients dans $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ est naturellement munie d'une filtration W^* appelée filtration par poids (cf [Az] et [Mc] pour la construction de cette dernière).

D'après [Mc], il existe un quasi-isomorphisme filtré entre les complexes filtrés $(A_*(X), I^*)$ et $(C_*(X), W^*)$ (avec un décalage). Les propositions 4.2.6 et 4.2.10 font partie des clés permettant d'obtenir ce résultat.

En particulier, si $W_{pq}^*(X)$ désigne la suite spectrale associée à la filtration W^* et convergeant vers $H_*(X)$, alors pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, il existe des isomorphismes compatibles avec les différentielles :

$$W_{pq}^2(X) \simeq G_{p+q,q}^1(X)$$

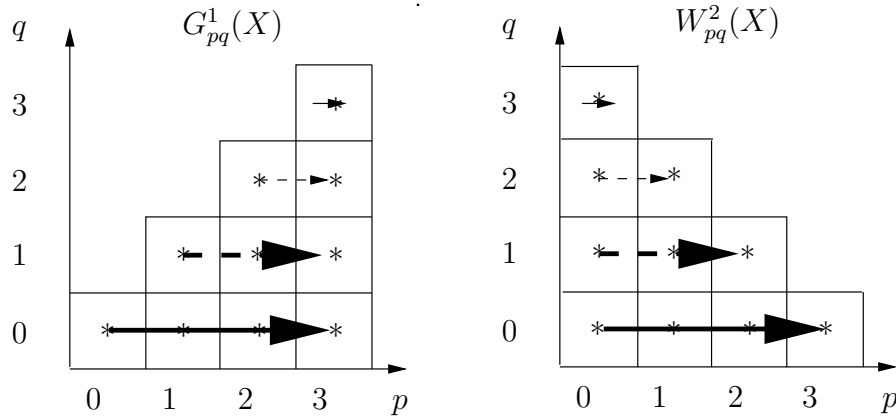
Par exemple si $n = 3$, la figure 10 montre comment se fait l'identification entre $W_{pq}^2(X)$ et $G_{pq}^1(X)$.

On va maintenant s'intéresser à la filtration induite par I^* sur $H_*(X)$.

Rappelons que cette dernière, que l'on notera encore I^* , est définie par :

$$I^q H_*(X) = Im(H_*(I^q(A_*(X))) \rightarrow H_*(A_*(X)))$$

FIG. 10 – Identification entre $W_{pq}^2(X)$ et $G_{pq}^1(X)$ (les flèches indiquent quelles lignes sont identifiées et dans quel sens)



Définition 4.2.14 Soient (C_*, F^*) et (D_*, G^*) 2 complexes de chaînes filtrés (avec des filtrations décroissantes) et $f_* : C_* \rightarrow D_*$ un morphisme de complexes compatible avec les filtrations F^* et G^* . Alors f_* est strictement compatible avec les filtrations F^* et G^* si on a pour $q \in \mathbb{Z}$:

$$f_*(F^q(C_*)) = f_*(C_*) \cap G^q(D_*)$$

Remarque 4.2.15 Le morphisme f_* est strictement compatible si et seulement si on a:

$$\forall q \in \mathbb{N}, \forall c \in F^q(C_*), f_*(c) \in G^{q+1}(D_*), \exists d \in F^{q+1}(C_*), f_*(c) = f_*(d)$$

Proposition 4.2.16 Les 3 assertions suivantes sont équivalentes:

- La suite spectrale $G_{pq}^*(X)$ dégénère à l'ordre 1.
- Les différentielles ∂_* du complexe $A_*(X)$ sont strictement compatibles avec la filtration I^* .
- Pour $p, q \in \mathbb{N}$, il existe des isomorphismes naturels:

$$\varphi_{pq} : H_p(Gr_I^q A_*(X)) \simeq Gr_I^q H_p(A_*(X))$$

Démonstration:

cf [De] (page 15).□

Reprenons le cas où Y est une sous-variété fermée invariante de X . On a une suite exacte longue en homologie:

$$\dots \rightarrow H_*(Y) \xrightarrow{i_*} H_*(X) \xrightarrow{r_*} H_*(X - Y) \xrightarrow{g_*} H_{*-1}(Y) \rightarrow \dots$$

où:

- $i_*([y]) = [(0, y)]$ pour $[y] \in H_*(Y)$
- $r_*([x]) = [x|_{X-Y}]$ pour $[x] \in H_*(X)$
- $g_*([z]) = [(\partial^X(0, z))|_Y]$ pour $[z] \in H_*(X - Y)$

Proposition 4.2.17

- * Si $G_{pq}^1(X) = G_{pq}^\infty(X)$ alors g_* est strictement compatible avec la filtration I^* .
- * Si $G_{pq}^1(Y) = G_{pq}^\infty(Y)$ alors r_* est strictement compatible avec la filtration I^* .
- * Si $G_{pq}^1(X - Y) = G_{pq}^\infty(X - Y)$ alors i_* est strictement compatible avec la filtration I^* .

Démonstration:

- * Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $[z] \in I^q(H_p(X - Y))$ tel que $g_p([z]) = [y] \in I^{q+1}(H_{p-1}(Y))$.

On peut supposer que:

- $z \in I^q(A_p(X - Y))$
- $y \in I^{q+1}(A_{p-1}(Y))$

Il existe $\gamma \in A_p(Y)$ tel que $(\partial_p^X(0, z))|_Y = y + \partial_p^Y(\gamma)$. Alors:

$$\begin{aligned} \partial_p^X(\gamma, z) &= (\partial_p^Y(\gamma) + (\partial_p^X(0, z))|_Y, \partial_p^{X-Y}(z)) \\ &= (y, 0) \end{aligned}$$

Ainsi $\partial_p^X(\gamma, z) \in I^{q+1}(A_{p-1}(X))$. Comme ∂_p^X est strictement compatible avec la filtration I^* , il existe $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in I^{q+1}(A_p(X))$ tel que $\partial_p(\mu) = \partial_p(\gamma, z)$.

Ainsi:

$$\begin{cases} \partial_p^Y(\mu_1) + (\partial_p^X(0, \mu_2))|_Y &= \partial_p^Y(\gamma) + (\partial_p^X(0, z))|_Y \\ \partial_p^{X-Y}(\mu_2) &= 0 \end{cases}$$

Alors dans $H_{p-1}(Y)$:

$$[(\partial_p^X(0, \mu_2))|_Y] = [y + (\partial_p^X(0, z))|_Y] = [y]$$

Donc $g_p([\mu_2]) = [y]$ et $[\mu_2] \in I^{q+1}(H_p(X - Y))$.

- * Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $[x] \in I^q(H_p(X))$ tel que $r_p([x]) = [z] \in I^{q+1}(H_p(X - Y))$.

On peut supposer que:

- $x = (x_1, x_2) \in I^q(A_p(X))$
- $z \in I^{q+1}(A_p(Y))$

Il existe $\gamma \in A_{p+1}(X - Y)$ tel que $x_2 = z + \partial_{p+1}^{X-Y}(\gamma)$. Alors:

$$[x] = [(x_1, x_2) + \partial_{p+1}^X(0, \gamma)] = [(x_1 + (\partial_{p+1}^X(0, \gamma))|_Y, x_2 + \partial_{p+1}^{X-Y}(\gamma))] = [(x_1 + (\partial_{p+1}^X(0, \gamma))|_Y, z)]$$

x est un cycle donc:

$$\partial_p^Y(x_1) + \partial_p^Y((\partial_{p+1}^X(0, \gamma))|_Y) + (\partial_p^X(0, z))|_Y = 0$$

En particulier, $\partial_p^Y(x_1) + \partial_p^Y((\partial_{p+1}^X(0, \gamma))|_Y) = (\partial_p^X(0, z))|_Y$ donc $\partial_p^Y(x_1) + \partial_p^Y((\partial_{p+1}^X(0, \gamma))|_Y) \in I^{q+1}(A_{p-1}(Y))$.

Comme ∂_p^Y est strictement compatible avec la filtration I^* , il existe $\alpha \in I^{q+1}(A_p(Y))$ tel que $\partial_p^Y(\alpha) = \partial_p^Y(x_1 + (\partial_{p+1}^X(0, \gamma))|_Y)$. Ainsi:

- $(\alpha, z) \in I^{q+1}(A_p(X))$
- $\partial_p(\alpha, z) = 0$
- $r_p([\alpha, z]) = [z] \in H_p(X - Y)$.

* Soit $p, q \in \mathbb{N}$ et $[y] \in I^q(H_p(Y))$ tel que $i_p([y]) = [x] \in I^{q+1}(H_p(X))$.

On peut supposer que:

- $y \in I^q(A_p(Y))$
- $x = (x_1, x_2) \in I^{q+1}(A_p(X))$

Il existe $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in A_{p+1}(X)$ tel que $(y, 0) = (x_1, x_2) + \partial_{p+1}^X(\gamma)$. Alors:

- $y = x_1 + \partial_{p+1}^Y(\gamma_1) + (\partial_{p+1}^X(0, \gamma_2))|_Y$
- $x_2 + \partial_{p+1}^{X-Y}(\gamma_2) = 0$

En particulier, $\partial_{p+1}^{X-Y}(\gamma_2) \in I^{q+1}(A_p(X - Y))$.

Comme ∂_p^{X-Y} est strictement compatible avec la filtration I^* , il existe $\alpha \in I^{q+1}(A_{p+1}(Y))$ tel que $\partial_{p+1}^{X-Y}(\gamma_2) = \partial_{p+1}^{X-Y}(\alpha)$.

On a alors dans $H_p(X)$:

$$\begin{aligned} [x] &= [x + \partial_{p+1}^X(0, \alpha)] \\ &= [x_1 + (\partial_{p+1}^X(0, \alpha))|_Y, \partial_{p+1}^{X-Y}(\gamma_2) + \partial_{p+1}^{X-Y}(\alpha)] \\ &= [x_1 + (\partial_{p+1}^X(0, \alpha))|_Y, 0] \end{aligned}$$

Maintenant, $x_1 + (\partial_{p+1}^X(0, \alpha))|_Y \in I^{q+1}(A_p(Y))$ donc:

$$i_p([x_1 + (\partial_{p+1}^X(0, \alpha))|_Y]) = [x] \quad \square$$

Corollaire 4.2.18 *Supposons que $G_{pq}^1(X) = G_{pq}^\infty(X)$, $G_{pq}^1(Y) = G_{pq}^\infty(Y)$ et que $i_* : H_*(Y) \rightarrow H_*(X)$ soit strictement compatible avec la filtration I^* . Alors $G_{pq}^1(X - Y) = G_{pq}^\infty(X - Y)$.*

Démonstration:

Dans cette situation, d'après 4.2.17, g_* , r_* et i_* sont toutes les 3 strictement compatibles avec la filtration I^* . Ainsi la suite exacte longue:

$$\dots \rightarrow H_*(Y) \xrightarrow{i_*} H_*(X) \xrightarrow{r_*} H_*(X - Y) \xrightarrow{g_*} H_{*-1}(Y) \rightarrow \dots$$

induit la suite exacte longue:

$$\dots \rightarrow Gr^* H_*(Y) \xrightarrow{Gr^* i_*} Gr^* H_*(X) \xrightarrow{Gr^* r_*} Gr^* H_*(X - Y) \xrightarrow{Gr^* g_*} Gr^* H_{*-1}(Y) \rightarrow \dots$$

Comme $G_{pq}^1(Y) = G_{pq}^\infty(Y)$, il existe pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ un isomorphisme naturel $\psi_{pq} : Gr^q H_p(Y) \simeq H_p Gr^q(H_*(Y)) = G_{pq}^1(Y)$. De même, il existe un isomorphisme $\phi_{pq} : Gr^q H_p(X) \simeq H_p Gr^q(H_*(X)) = G_{pq}^1(X)$.

Par conséquent, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, il existe un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes et les flèches verticales sont des isomorphismes:

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdots & \longrightarrow & Gr^q H_p(Y) & \longrightarrow & Gr^q H_p(X) & \longrightarrow & Gr^q H_p(X - Y) & \longrightarrow & Gr^q H_{p-1}(Y) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_p Gr^q H_*(Y) & \longrightarrow & H_p Gr^q H_*(X) & \longrightarrow & H_p Gr^q H_*(X - Y) & \longrightarrow & H_{p-1} Gr^q H_*(Y) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Il est ainsi possible de construire à l'aide de ce diagramme un isomorphisme $Gr^q H_p(X - Y) \simeq H_p Gr^q(H_*(X - Y)) = G_{pq}^1(X - Y)$. Par conséquent, la suite spectrale $G_{pq}^l(X - Y)$ dégénère à l'ordre 1. \square

La proposition 4.2.17 peut être reformulée dans un contexte plus général. Soit (A_*, ∂_*^A, F^*) , (B_*, ∂_*^B, G^*) 2 complexes de chaînes filtrés d'espaces vectoriels sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ où F^* et G^* sont des filtrations décroissantes et soit $f_* : A_* \rightarrow B_*$ un morphisme compatible avec les filtrations F^* et G^* .

On peut former le complexe total, $T_* = Tot^f(A_*, B_*)$ associé à f en posant $T_* = A_{*-1} \oplus B_*$ et dont la différentielle $\partial_*^T : T_* \rightarrow T_{*-1}$ est donnée par:

$$\begin{aligned}
\partial_*^T : \quad A_{*-1} \oplus B_* & \rightarrow A_{*-2} \oplus B_{*-1} \\
(a, b) & \mapsto (\partial_{*-1}^A(a), f_{*-1}(a) + \partial_*^B(b))
\end{aligned}$$

Ce complexe est alors muni de la filtration L^* induite par F^* et G^* (ie: $L^q T_* = F^q A_{*-1} \oplus G^q B_*$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$).

On désignera encore par F^* (resp G^* , L^*) la filtration induite sur $H_*(A)$ (resp $H_*(B)$, $H_*(T)$).

On note:

$$\begin{array}{l}
- \quad r_* : \quad H_*(B) \rightarrow H_*(T) \\
\quad \quad [b] \mapsto [(0, b)] \\
- \quad g_* : \quad H_*(T) \rightarrow H_{*-1}(A) \\
\quad \quad [(a, b)] \mapsto [a]
\end{array}$$

Il existe alors une suite exacte longue:

$$\cdots \rightarrow H_*(A) \xrightarrow{H_*f} H_*(B) \xrightarrow{r_*} H_*(T) \xrightarrow{g_*} H_{*-1}(A) \rightarrow \cdots$$

Proposition 4.2.19

- * Si ∂_*^B est strictement compatible avec la filtration G^* , alors g_* est strictement compatible avec les filtrations L^* et F^* .
- * Si ∂_*^A est strictement compatible avec la filtration F^* , alors r_* est strictement compatible avec les filtrations G^* et L^* .
- * Si ∂_*^T est strictement compatible avec la filtration L^* , alors H_*f est strictement compatible avec les filtration F^* et G^* .

Démonstration:

La preuve de cette proposition est essentiellement la même que celle de 4.2.17.

- * Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ et $[(a, b)] \in L^q(H_p(T))$ tel que $g_p([(a, b)]) = [a] \in F^{q+1}(H_{p-1}(A))$.
On peut supposer que (a, b) appartient à $L^q(T_p)$.
Tout d'abord, il existe $\alpha \in F^{q+1}A_{p-1}$ et $\gamma \in A_p$ tels que:

$$a = \alpha + \partial_p^A(\gamma)$$

En particulier, on a:

$$f_{p-1}(a) = f_{p-1}(\alpha) + \partial_p^B(f_{p-1}(\gamma))$$

Ensuite, (a, b) est un cycle donc:

- $\partial_{p-1}^A(a) = 0$
- $\partial_p^B(b) + f_{p-1}(a) = 0$

Ainsi:

$$\partial_p^B(b + f_{p-1}(\gamma)) = f_{p-1}(\alpha)$$

Comme $\alpha \in F^{q+1}A_{p-1}$, $f_{p-1}(\alpha) \in G^{q+1}B_{p-1}$. Par hypothèse, ∂_p^B est strictement compatible avec la filtration G^* donc il existe $\beta \in G^{q+1}B_p$ tel que:

$$\partial_p^B(\beta) = \partial_p^B(b + f_{p-1}(\gamma))$$

Alors (α, β) est un cycle de T_p et $(\alpha, \beta) \in L^{q+1}T_p$. De plus, $g_p([(a, b)]) = [a]$.

- * Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ et $[x] \in G^q(H_p(B))$ tel que $r_p([x]) = [(0, x)] \in L^{q+1}(H_p(T))$.
Alors, il existe $(\alpha_1, \alpha_2) \in L^{q+1}T_p$ et $(\beta_1, \beta_2) \in T_{p+1}$ tels que:

$$(0, x) = (\alpha_1, \alpha_2) + \partial_{p+1}^T(\beta_1, \beta_2)$$

Ainsi:

- $\alpha_1 + \partial_p^A(\beta_1) = 0$
- $x = \alpha_2 + \partial_{p+1}^B(\beta_2) + f_p(\beta_1) = 0$

Comme $\partial_p^A(\beta_1) = \alpha_1 \in F^{q+1}A_{p-1}$ et que ∂_p^A est strictement compatible avec la filtration F^* , il existe $\gamma_1 \in F^{q+1}A_p$ tel que:

$$\partial_p^A\beta_1 = \partial_p^A\gamma_1$$

Alors $[(0, x)] = [(0, \alpha_2 + f_p(\gamma_1))]$ et $[x] = r_p([(0, \alpha_2 + f_p(\gamma_1))])$

- * Soit $p, q \in \mathbb{Z}$ et $[a] \in F^q(H_p(A))$ tel que $H_p f([a]) \in G^{q+1}(H_p(B))$.
Ainsi, il existe $\alpha \in G^{q+1}B_p$ et $\beta \in B_{p+1}$ tels que:

$$H_p f([a]) = \alpha + \partial_{p+1}^B(\beta)$$

$\partial_{p+1}^T(a, \beta) = (0, \alpha) \in L^{q+1}T_p$. Comme ∂_{p+1}^T est strictement compatible avec la filtration L^* , il existe $(\gamma_1, \gamma_2) \in L^{q+1}T_p$ tel que:

$$\partial_{p+1}^T(a, \beta) = \partial_{p+1}^T(\gamma_1, \gamma_2)$$

On a donc:

- $\partial_p^A(\gamma_1) = 0$
- $\partial_{p+1}^B(\gamma_2) + f_p(\gamma_1) = \alpha = \partial_{p+1}^B(\beta) + f_p(a)$

Par conséquent:

$$f_p(\gamma_1) = f_p(a) + \partial_{p+1}^B(\beta) + \partial_{p+1}^B(\gamma_2)$$

Et:

$$H_p f([\gamma_1]) = H_p f([a]) \quad \square$$

4.3 Comportement vis à vis du produit

On va montrer ici que le terme $G_{pq}^1(X \times Y)$ de la suite spectrale $G_{pq}^*(X \times Y)$, lorsque X et Y sont deux variétés toriques réelles, s'exprime simplement en fonction des termes $G_{pq}^1(X)$ et $G_{pq}^1(Y)$ des suites spectrales $G_{pq}^*(X)$ et $G_{pq}^*(Y)$ associées à X et Y . En particulier, on verra que si $G_{pq}^*(X)$ et $G_{pq}^*(Y)$ dégénèrent toutes les deux à l'ordre 1, alors $G_{pq}^*(X \times Y)$ dégénère aussi à l'ordre 1.

Pour $0 \leq p \leq q \leq n$, on désignera par $g_{pq}(X)$ (resp $g_{pq}(Y)$) la dimension de $G_{pq}^1(X)$ (resp $G_{pq}^1(Y)$).

Définition 4.3.1 Soit X une variété torique réelle de dimension n .

On définit le polynôme $P_X^{poids} \in \mathbb{Z}[x, y]$ par:

$$P_X^{poids}(x, y) = \sum_{0 \leq p \leq q \leq n} g_{pq}(X) x^p y^q$$

Proposition 4.3.2 Soit X, Y 2 variétés toriques réelles. Alors:

$$P_{X \times Y}^{poids}(x, y) = P_X^{poids}(x, y) \times P_Y^{poids}(x, y)$$

Démonstration:

On note $\Delta^X \subset N_{\mathbb{R}}^X$ (resp $\Delta^Y \subset N_{\mathbb{R}}^Y$) l'éventail associé à X (resp Y). L'éventail associé à la variété $X \times Y$ est ainsi $\Delta^X \times \Delta^Y \subset N_{\mathbb{R}}^X \times N_{\mathbb{R}}^Y$.

On notera également:

- $V^X = N^X \otimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$
- $V^Y = N^Y \otimes \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$

Soient $\sigma \in \Delta^X$ et $\sigma' \in \Delta^Y$. On a un isomorphisme:

$$H_0\left(\frac{V^X \times V^Y}{[\sigma]_2 \times [\sigma']_2}\right) \simeq H_0\left(\frac{V^X}{[\sigma]_2}\right) \otimes H_0\left(\frac{V^Y}{[\sigma']_2}\right)$$

Ce que l'on peut réécrire en reprenant les notations usuelles sous la forme:

$$A_{\sigma \times \sigma'} \simeq A_{\sigma} \otimes A_{\sigma'}$$

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient:

$$A_n(X \times Y) \simeq \bigoplus_{p+q=n} A_p(X) \otimes A_q(Y)$$

On considère le bicomplexe K_{pq} défini par:

- $K_{pq} = A_p(X) \otimes A_q(Y)$
- Les différentielles de K_{**} sont données par le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} A_{p-1}(X) \otimes A_q(Y) & \xleftarrow{\partial_p^X \otimes id} & A_p(X) \otimes A_q(Y) \\ id \otimes \partial_q^Y \downarrow & & \downarrow id \otimes \partial_q^Y \\ A_{p-1}(X) \otimes A_{q-1}(Y) & \xleftarrow{\partial_p^X \otimes id} & A_p(X) \otimes A_{q-1}(Y) \end{array}$$

On notera $(A(X) \star A(Y))_*$ le complexe total associé au bicomplexe K_{**} . Sa différentielle sera notée $\partial_*^{X \star Y}$.

On a alors un diagramme commutatif pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} A_n(X \times Y) & \xrightarrow{\sim} & (A(X) \star A(Y))_n \\ \partial_n^{X \times Y} \downarrow & & \downarrow \partial_n^{X \star Y} \\ A_{n-1}(X \times Y) & \xrightarrow{\sim} & (A(X) \star A(Y))_{n-1} \end{array}$$

Remarque 4.3.3 On retrouve en particulier la formule de Künneth:

$$H_k(X \times Y) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H_p(X) \otimes H_q(Y)$$

Ce qui donne pour les nombres de Betti:

$$b_k(X \times Y) = \sum_{p+q=k} b_p(X) \times b_q(Y)$$

Regardons maintenant comment se comporte la filtration I_* via l'isomorphisme défini précédemment.

Remarque 4.3.4 Pour $\sigma \in \Delta^X$ et $\sigma' \in \Delta^Y$, on a:

- $\frac{I}{I^2} A_{\sigma \times \sigma'} \simeq \frac{V^X \times V^Y}{[\sigma]_2 \times [\sigma']_2} \simeq \frac{V^X}{[\sigma]_2} \oplus \frac{V^Y}{[\sigma']_2}$.
- $\frac{I}{I^2} A_\sigma \simeq \frac{V^X}{[\sigma]_2}$.
- $\frac{I}{I^2} A_{\sigma'} \simeq \frac{V^Y}{[\sigma']_2}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme:

$$\frac{I^k}{I^{k+1}} A_{\sigma \times \sigma'} \simeq \bigwedge^k \frac{I}{I^2} A_{\sigma \times \sigma'}$$

Et que:

$$\bigwedge^k \frac{I}{I^2} A_\sigma \oplus \frac{I}{I^2} A_{\sigma'} \simeq \bigoplus_{r+s=k} \bigwedge^r \frac{I}{I^2} A_\sigma \otimes \bigwedge^s \frac{I}{I^2} A_{\sigma'}$$

On doit avoir:

$$\frac{I^k}{I^{k+1}} A_{\sigma \times \sigma'} \simeq \bigoplus_{r+s=k} \frac{I^r}{I^{r+1}} A_\sigma \otimes \frac{I^s}{I^{s+1}} A_{\sigma'}$$

Ainsi, on obtient l'isomorphisme suivant:

$$\frac{I^k}{I^{k+1}} A_n(X \times Y) \simeq \bigoplus_{r+s=k} \bigoplus_{p+q=n} \frac{I^r}{I^{r+1}} A_p(X) \otimes \frac{I^s}{I^{s+1}} A_q(Y)$$

Remarque 4.3.5 Si $k = 0$, on a:

$$\frac{A_n(X \times Y)}{I} \simeq \bigoplus_{p+q=n} \frac{A_p(X)}{I} \otimes \frac{A_q(Y)}{I}$$

On en déduit alors pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ l'égalité suivante:

$$g_{pq}(X \times Y) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q g_{ij}(X) g_{p-i, q-j}(Y)$$

Ce qui entraîne:

$$F_{X \times Y}^{poids}(x, y) = F_X^{poids}(x, y) \times F_Y^{poids}(x, y) \quad \square$$

Corollaire 4.3.6 *Supposons que les suites spectrales $G_{pq}^*(X)$ et $G_{pq}^*(Y)$ associées à X et Y dégénèrent toutes les deux à l'ordre 1, alors la suite spectrale $G_{pq}^*(X \times Y)$ dégénère également à l'ordre 1.*

Démonstration:

Comme $G_{pq}^*(X)$ et $G_{pq}^*(Y)$ dégénèrent toutes les deux à l'ordre 1, on a pour $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} - b_q(X) &= \sum_q g_{pq}^1(X) \\ - b_q(Y) &= \sum_q g_{pq}^1(Y) \end{aligned}$$

On sait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_k(X \times Y) = \sum_{p+q=k} b_p(X) \times b_q(Y)$. On peut également calculer les termes $g_{**}^1(X \times Y)$ en utilisant la proposition 4.3.2. En comparant les résultats obtenus, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$b_k(X \times Y) = \sum_{q \in \mathbb{N}} g_{kq}^1(X \times Y)$$

Ainsi la suite spectrale $G_{pq}^*(X \times Y)$ dégénère également à l'ordre 1. \square

Corollaire 4.3.7 *Soit X une variété torique réelle de dimension n et soit $p_0 \in \mathbb{N}$ tels que $G_{pq}^1(X) = 0$ pour tout $p \leq p_0$ et $q \in \mathbb{N}$.*

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, la variété torique $X \times (\mathbb{R}^)^k$ vérifie:*

$$G_{pq}^1(X \times (\mathbb{R}^*)^k) = 0, \quad \forall p \leq p_0 + k, \forall q \in \mathbb{N}$$

5 Étude des différentielles du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$

Ceci constitue la partie centrale de ce texte. On va montrer ici que les variétés toriques de dimension 4 sont maximales. On verra également que ce résultat est vrai en dimension 5 dans le cas particulier des variétés toriques affines simpliciales. Il semble bon de mentionner que ceci est faux en général en dimension 6 (un contre exemple se trouve dans [Ho] pour cette dimension). Par contre, on ne sait pas encore si en dimension 6 les variétés toriques affines simpliciales sont maximales.

5.1 Résultats généraux

5.1.1 Méthode

En général, pour montrer que la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1, on utilisera le procédé suivant:

Définition 5.1.1 *On dira que le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ satisfait la propriété s_{pq} pour $0 \leq p, q \leq n$ si la différentielle ∂_p vérifie:*

$$\forall c \in I^q(A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))), \partial_p(c) \in I^{q+1}A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R})), \exists d \in I^{q+1}A_p(X_\Delta(\mathbb{R})), \partial_p(c) = \partial_p(d)$$

Pour montrer que $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ satisfait la condition s_{pq} , on utilisera la proposition suivante:

Proposition 5.1.2 *Pour $0 \leq p, q \leq n$, les 2 conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ satisfait la condition s_{pq} .*

(2) *Pour toute classe $\bar{c} \in G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) = \frac{I^q}{I^{q+1}}A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telle que $\partial^0 pq(\bar{c}) = 0$, il est possible de trouver $c' \in I^q A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ vérifiant $\partial_p(c') = 0$ et $\bar{c} = \bar{c}' \in G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R}))$.*

Démonstration:

* Supposons que $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ satisfait la condition s_{pq} et soit $\bar{c} \in G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telle que $\partial^0 pq(\bar{c}) = 0$. Alors $\partial_p(c) \in I^{q+1}(A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R})))$ et ainsi, il existe $d \in I^{q+1}(A_p(X_\Delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_p(c) = \partial_p(d)$. Alors si $c' = c + d$, $\partial_p(c') = 0$ et $\bar{c} = \bar{c}' \in G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R}))$.

* Réciproquement, supposons que pour toute classe $\bar{c} \in G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telle que $\partial^0 pq(\bar{c}) = 0$, il est possible de trouver $c' \in I^q A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ vérifiant $\partial_p(c') = 0$ et $\bar{c} = \bar{c}' \in G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Soit $c \in I^q(A_p(X_\Delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_p(c) \in I^{q+1}A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Alors $\partial_{pq}^0(\bar{c}) = 0$ et ainsi, il existe $c' \in I^q A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telle que $\partial_p(c') = 0$ et $\bar{c} = \bar{c}'$. Alors il existe $d \in I^{q+1}A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telle que $c = c' + d$ et ainsi $\partial_p(c) = \partial_p(d)$. \square

Remarque 5.1.3 Si le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ satisfait la condition s_{pq} , alors la différentielle ∂_{pq}^1 de $G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est nulle. Mais la réciproque est fautive puisque

$\partial_{pq}^1 = 0$ si et seulement si pour toute chaîne $c \in I^q(A_p(X_\Delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_p(c) \in I^{q+1}A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$, il existe $d \in I^{q+1}A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et $e \in I^{q+2}A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telles que:

$$\partial_p(c) = \partial_p(d) + e$$

Proposition 5.1.4 *Pour $p \in \mathbb{N}$, les 3 conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) *Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé et pour tout $q \in \mathbb{N}$, le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ vérifie la condition s_{pq} .*
- (2) *La différentielle ∂_p du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est strictement compatible avec la filtration I^* .*
- (3) *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour tout $l \in \mathbb{N}$, toutes les différentielles $\partial_{pq}^l : G_{pq}^l(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow G_{p-1, q+l}^l(X_\Delta(\mathbb{R}))$ du terme $G_{pq}^l(X_\Delta(\mathbb{R}))$ sont nulles.*

Démonstration:

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé.

- (1) \Rightarrow (2) Supposons que le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ vérifie la condition s_{pq} pour tout $q \in \mathbb{N}$. On va montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\forall c \in I^q(A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))), \partial_p(c) \in I^{q+r}A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R})), \exists d \in I^{q+r}A_p(X_\Delta(\mathbb{R})), \partial_p(c) = \partial_p(d)$$

On procède par récurrence sur r . Si $r = 1$, ceci revient à dire que la condition s_{pq} est vérifiée. Soit $c \in I^q(A_p(X_\Delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_p(c) \in I^{q+r+1}A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Alors en particulier, $\partial_p(c) \in I^{q+r}A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et donc il existe $d' \in I^{q+r}A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ tel que $\partial_p(c) = \partial_p(d')$. Comme $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ satisfait la condition $s_{p, q+r}$, il existe $d \in I^{q+r+1}(A_p(X_\Delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_p(d) = \partial_p(d')$ et d convient.

- (2) \Rightarrow (3) Supposons que la différentielle ∂_p du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ soit strictement compatible avec la filtration I^* .

Soit $r \geq 1$, $q \in \mathbb{N}$ et $[c] \in G_{pq}^r(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Alors $c \in I^qA_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et $\partial_p(c) \in I^{q+r}A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Comme ∂_p est strictement compatible avec la filtration I^* , il existe $d \in I^{q+r}A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ vérifiant $\partial_p(d) = \partial_p(c)$ et donc $\partial_{pq}^r([c]) = [0]$.

- (3) \Rightarrow (1) Supposons que pour tout $(q, l) \in \mathbb{N}^2$, toutes les différentielles $\partial_{pq}^l : G_{pq}^l(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow G_{p-1, q+l}^l(X_\Delta(\mathbb{R}))$ soient nulles.

Soit $q \in \mathbb{N}$ et $c \in I^qA_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ vérifiant $\partial_p(c) \in I^{q+1}A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Comme toutes les différentielles ∂_{pq}^l sont nulles pour $l \geq 1$, il existe $c' \in I^qA_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ vérifiant:

- $\partial_p(c') = 0$
- $\bar{c} = \bar{c}' \in G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R}))$ où \bar{c} et \bar{c}' désignent les classes respectives de c et c' dans $G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R}))$.

Ainsi, d'après 5.1.2, $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ satisfait la condition s_{pq} . \square

Remarque 5.1.5 Si ∂_p et ∂_{p+1} sont strictement compatibles avec la filtration I^* , alors:

$$H_p(X_\Delta(\mathbb{R})) \simeq \bigoplus_{q \in \mathbb{N}} G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

Corollaire 5.1.6 *Si toutes les différentielles du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ sont strictement compatibles avec la filtration I^* , alors la suite spectrale $G_{pq}^l(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1 ($G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R})) = G_{pq}^\infty(X_\Delta(\mathbb{R}))$).*

Pour pouvoir appliquer la proposition 5.1.4 et le corollaire 5.1.6, on aura besoin de bien comprendre la relation entre différentielles de $G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et celles du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, rappelons que pour $p \in \mathbb{N}$:

- $A_p(X_\Delta(\mathbb{R})) = \bigoplus_{\sigma \in \Delta_{n-p}} H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right)$
- la différentielle $\partial_p : A_p(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est donnée par la somme directe sur $\tau \in \Delta(n-p)$ des applications:

$$\sum_{\sigma > \tau, \dim(\sigma) = n-p+1} \pi_{\tau, \sigma} : H_0\left(\frac{V}{[\tau]_2}\right) \rightarrow \bigoplus_{\sigma > \tau, \dim(\sigma) = n-p+1} H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right)$$

où $\pi_{\tau, \sigma} : H_0\left(\frac{V}{[\tau]_2}\right) \rightarrow H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right)$ est l'application induite par la projection naturelle $p_{\tau, \sigma} : \frac{V}{[\tau]_2} \rightarrow \frac{V}{[\sigma]_2}$

et que pour $p, q \in \mathbb{N}$, la différentielle $\partial_{pq}^0 : G_{pq}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) = \frac{I^q}{I^{q+1}} A_p(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow G_{p-1, q}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) = \frac{I^q}{I^{q+1}} A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est donnée par la somme directe sur $\tau \in \Delta(n-p)$ des applications:

$$\sum_{\sigma > \tau, \dim(\sigma) = n-p+1} p_{\tau, \sigma} : \frac{V}{[\tau]_2} \rightarrow \bigoplus_{\sigma > \tau, \dim(\sigma) = n-p+1} \frac{V}{[\sigma]_2}$$

5.1.2 Un critère global

Soit $q \in \mathbb{N}$ et $\sigma \in \Delta(k)$.

En général, lorsque l'on fixe une base $e = (e_i)_{i=1 \dots n-k}$ de $\frac{V}{[\sigma]_2}$, alors cela définit des applications $s_\sigma^q : \frac{I^q}{I^{q+1}} A_\sigma \rightarrow I^q(A_\sigma)$, $0 \leq q \leq n$, de la manière suivante:

Si $w \in \bigwedge^q \frac{V}{[\sigma]_2} \simeq \frac{I^q}{I^{q+1}} A_\sigma$, on peut décomposer w sous la forme:

$$w = \sum_{I \subset \{1 \dots n-k\}, \text{card}(I)=q} \epsilon_I e_I$$

où $I \subset \{1 \dots n-k\}$, $\text{Card}(I) = q$ et $e_I = \bigwedge_{i \in I} e_i$.

Si $[e_I]$ désigne la classe fondamentale du sous-espace de dimension q de V engendré par les vecteurs e_i , $i \in I$ dans V (ie: $[e_I] = \sum_{v \in \text{Vect}(e_i, i \in I)} [v]$), alors on pose:

$$s_\sigma^q(w) = \sum_{I \subset \{1 \dots n-k\}, \text{card}(I)=q} \epsilon_I [e_I]$$

Remarque 5.1.7 L'application s_σ^q est une section de la projection $f_\sigma^q : I^q(A_\sigma) \rightarrow \frac{I^q}{I^{q+1}} A_\sigma$ ($f_\sigma^q \circ s_\sigma^q = id$). Par contre, $s_\sigma^q \circ f_\sigma^q \neq id$. Pour le voir, on peut prendre par exemple $\sigma = \{0\}$, $q = 2$ et $n = 3$. Soit $(e_i)_{i=1 \dots 3}$ une base de V , $s_{\{0\}}^2 : \frac{I^2}{I^3} H_0(V) \rightarrow I^2 H_0(V)$ l'application définie par cette base et $f_{\{0\}}^2 : I^2 H_0(V) \rightarrow \frac{I^2}{I^3} H_0(V)$ la projection. Si $c = ([0] + [e_1 + e_2])([0] + [e_3])$ alors:

$$\begin{aligned} s_{\{0\}}^2 \circ f_{\{0\}}^2(c) &= s_{\{0\}}^2((e_1 + e_2) \wedge e_3) \\ &= s_{\{0\}}^2(e_1 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_3) \\ &= ([0] + [e_1])([0] + [e_3]) + ([0] + [e_2])([0] + [e_3]) \\ &\neq c \end{aligned}$$

Remarque 5.1.8 Lorsque $q = 1$, il est possible de définir une telle application sans fixer au préalable une base de V .

En effet, si $v \in \frac{V}{[\sigma]_2} \simeq \frac{I}{I^2} A_\sigma$, il suffit de poser $s_\sigma^1(v) = [0] + [v]$.

Supposons fixée une base $e = (e_i)_{i=1 \dots n-k}$ de $\frac{V}{[\sigma]_2}$ et soit $s_\sigma^* : Gr_I^* A_\sigma \rightarrow H_0(A_\sigma)$ l'application définie par e . Comme $f_\sigma^* \circ s_\sigma^* = id$, on obtient un isomorphisme d'algèbre:

$$Gr_I^* H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right) \simeq H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right)$$

Soit σ une face de $\gamma \in \Delta$ telle que $\overline{[\gamma]_2} := p_{\sigma, \gamma}([\gamma]_2)$ soit engendré par une partie de la base e . Il existe alors un unique sous-ensemble $I_\gamma \subset \{1 \dots n - p\}$ tel que $\{\overline{e}_i := p_{\sigma, \gamma}(e_i), i \in I_\gamma\}$ soit une base de $\frac{V}{[\gamma]_2}$. Dans cette situation, le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc} Gr_I^* H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right) & \xrightarrow{\sim} & H_0\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right) \\ \wedge^* p_{\sigma, \gamma} \downarrow & & \pi_{\sigma, \gamma} \downarrow \\ Gr_I^* H_0\left(\frac{V}{[\gamma]_2}\right) & \xrightarrow{\sim} & H_0\left(\frac{V}{[\gamma]_2}\right) \end{array}$$

Ainsi, lorsque l'on se trouve dans la situation particulière où il existe une base e de V telle que pour chaque cône σ de Δ , $[\sigma]_2$ est engendré par une partie de la base e , alors on obtient la proposition suivante:

Proposition 5.1.9 *Supposons que l'on puisse trouver une base e de V telle que pour chaque cône σ de Δ , $[\sigma]_2$ est engendré par une partie de la base e , alors la suite spectrale $G_{pq}^1(\Delta)$ associée à Δ dégénère à l'ordre 1.*

Remarque 5.1.10 Cette dernière proposition est cachée dans [Bi] (Plus précisément dans la preuve du théorème 1.2).

Malheureusement, il est très rare de pouvoir trouver de trouver une telle base V . On va voir maintenant que l'on peut encore obtenir ce résultat en réduisant les hypothèses sur la base e .

Ces résultats serviront à montrer que la suite spectrale $G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1 lorsque Δ est l'éventail associé à un cône simplicial de dimension 5.

Définition 5.1.11 *Soit $e = (e_i)_{i=1\dots n}$ une base de V et $p \in \mathbb{N}$. On dira que la base e est adaptée à l'éventail Δ au rang k si pour chaque cône $\sigma \in \Delta(k+1)$, il existe une base v_1, \dots, v_{k+1} de $[\sigma]_2$ vérifiant:*

$$\forall 1 \leq i \leq k+1, \exists I_i \subset \{1, \dots, n\}, \text{Card}(I_i) \leq 2, v_i = \sum_{j \in I_i} e_j$$

Définition 5.1.12 *Soit e une base de V . On dira que la base e est adaptée à l'éventail Δ si pour $0 \leq k \leq n-1$, elle est adaptée à Δ au rang k*

Soit $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de V adaptée à l'éventail Δ au rang $k-1$ et $\sigma \in \Delta(k)$. Il existe ainsi par définition une base $(v_s)_{1 \leq s \leq k}$ de $[\sigma]_2$ vérifiant:

$$\forall 1 \leq s \leq k, \exists I'_s \subset \{1, \dots, n\}, \text{Card}(I'_s) \leq 2, v_s = \sum_{i \in I'_s} e_i$$

On note:

- $p_\sigma : V \rightarrow \frac{V}{[\sigma]_2}$ la projection naturelle
- Pour $1 \leq i \leq n$, on notera $\tilde{e}_i \in \frac{V}{[\sigma]_2}$ la classe du vecteur e_i (ie: $\tilde{e}_i = p_\sigma(e_i)$).

Comme la famille $(\tilde{e}_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre $\frac{V}{[\sigma]_2}$, il existe $J_\sigma \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $(\tilde{e}_j)_{j \in J_\sigma}$ soit une base de $\frac{V}{[\sigma]_2}$.

Pour $1 \leq s \leq k$, on pose :

$$I_s = \begin{cases} I'_s & \text{si } \text{Card}(I'_s) = 2 \\ I'_s \cup \{0\} & \text{si } \text{Card}(I'_s) = 1 \end{cases}$$

On a ainsi associé à chaque vecteur v_s un sous ensemble I_s de $\{0, 1, \dots, n\}$ de cardinal 2.

Remarque 5.1.13 Soit $1 \leq i < j \leq n$.

- Si il existe $s \in \{1, \dots, k\}$ tel que $I_s = \{i, j\}$, alors $\tilde{e}_i = \tilde{e}_j$.
- Si il existe $s \in \{1, \dots, k\}$ tel que $I_s = \{0, i\}$, alors $\tilde{e}_i = 0$.

On considère la relation d'équivalence \mathcal{R} sur $\{0, \dots, n\}$ définie par:

$$\begin{aligned} i\mathcal{R}j &\Leftrightarrow \text{Il existe } p \in \mathbb{N}, i_1, \dots, i_{p-1} \in \{0, \dots, n\} \text{ et} \\ &\quad s_1, \dots, s_p \in \{1, \dots, k\} \text{ tels que:} \\ &\quad I_{s_1} = \{i, i_1\}, I_{s_m, s_{m+1}} = \{i_{m-1}, i_m\} \text{ pour } 2 \leq m \leq p-1 \text{ et } I_{s_p} = \{i_p, j\} \end{aligned}$$

Remarque 5.1.14 Soit $1 \leq i < j \leq n$. Alors:

- $i\mathcal{R}j \Leftrightarrow \tilde{e}_i = \tilde{e}_j$
- $i\mathcal{R}0 \Leftrightarrow \tilde{e}_i = 0$

On notera par la suite $C_1, \dots, C_p \subset \{0, \dots, n\}$ les classes d'équivalence pour cette relation.

L'hypothèse sur l'espace $[\sigma]_2$ qui peut paraître étrange est faite pour obtenir le lemme suivant:

Lemme 5.1.15 Soit $1 \leq i \leq n$ tel que $e_i \notin [\sigma]_2$. Alors il existe un unique $j \in J_\sigma$ tel que $\tilde{e}_i = \tilde{e}_j$

Démonstration:

La famille $(\tilde{e}_j)_{j \in J_\sigma}$ est une base de $\frac{V}{[\sigma]_2}$ donc il existe $(\epsilon_j)_{j \in J_\sigma} \in (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^{n-k}$ tel que

$$\tilde{e}_i = \sum_{j \in J_\sigma} \epsilon_j \tilde{e}_j$$

Ainsi, il existe $(\alpha_s)_{0 \leq s \leq k} \in (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^k$ tel que:

$$e_i = \sum_{j \in J_\sigma} \epsilon_j e_j + \sum_{s=1}^k \alpha_s v_s$$

Supposons que pour tout $j \in J_\sigma$, $\tilde{e}_i \neq \tilde{e}_j$.

Soit C_i la classe d'équivalence pour la relation \mathcal{R} contenant i . Alors pour tout $j \in J_\sigma$, $j \notin C_i$.

Comme e est une base, en regardant la composante C_i , on doit avoir:

$$e_i = \sum_{I_s \subset C_i} \alpha_s v_s$$

Mais alors $e_i \in [\sigma]_2$ ce qui est exclu.

Ainsi, il existe $j \in J_\sigma$ tel que $\tilde{e}_i = \tilde{e}_j$. De plus, comme $(\tilde{e}_j)_{j \in J_\sigma}$ est une base de $\frac{V}{[\sigma]_2}$, j est unique. \square

Remarque 5.1.16 Le lemme implique en particulier que chaque composante de la relation d'équivalence \mathcal{R} , excepté la composante contenant 0, contient un unique $j \in J_\sigma$. Ainsi il y a exactement $n - k + 1$ composantes et toutes les bases de $\frac{V}{[\sigma]_2}$ que l'on peut extraire de la famille $(\tilde{e}_i)_{i=1 \dots n}$ sont identiques.

Remarque 5.1.17 Regardons ce qui peut se passer lorsque les hypothèses du lemme ne sont pas satisfaites.

Par exemple pour $n = 3$, si (e_1, e_2, e_3) est une base de V telle que $[\sigma]_2 = \text{Vect}(e_1 + e_2 + e_3)$, alors $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2)$ est une base de $\frac{V}{[\sigma]_2}$ mais $\tilde{e}_3 = \tilde{e}_1 + \tilde{e}_2$.

Soit $1 \leq q \leq n$.

Pour $i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, n\}$, on notera $e_{i_1} \widetilde{\wedge} \dots \wedge e_{i_q}$ la classe de $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_q}$ dans $\bigwedge^q \frac{V}{[\sigma]_2}$.

On peut formuler une version du lemme 5.1.15 dans le cas où l'on travaille avec des puissances extérieures sous la forme:

Corollaire 5.1.18 Soit $1 \leq q \leq n$ et $i_1, \dots, i_q \in \{1, \dots, n\}$.

Alors soit il existe $j_1, \dots, j_q \in J_\sigma$ tels que $e_{i_1} \widetilde{\wedge} \dots \wedge e_{i_q} = e_{j_1} \widetilde{\wedge} \dots \wedge e_{j_q}$, soit $e_{i_1} \widetilde{\wedge} \dots \wedge e_{i_q} = 0$.

En utilisant 5.1.15 et 5.1.18, on obtient le résultat suivant:

Proposition 5.1.19 Si Δ admet une base adaptée au rang k , alors la différentielle $\partial_{n-k} : A_{n-k}(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow A_{n-k-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est strictement compatible avec la filtration I^* .

Démonstration:

D'après 5.1.4, il suffira de montrer que le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ satisfait la condition s_{pq} pour tout $q \in \mathbb{N}$.

On fixe $q \in \mathbb{N}$. Soit $c = (c_\sigma)_{\sigma \in \Delta(k-1)} \in I^q(A_{n-k}(X_\Delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_{n-k}(c) \in I^{q+1}(A_{n-k-1}(X_\Delta(\mathbb{R})))$.

Pour $\sigma \in \Delta(k)$, on notera $\bar{c}_\sigma \in \bigwedge^q \frac{V}{[\sigma]_2}$ la classe de la chaîne c_σ modulo I^{q+1} et \bar{c} celle de c modulo I^{q+1} .

D'après 5.1.2, pour montrer que la condition s_{pq} est vérifiée, il suffira de montrer qu'il existe $c' \in I^q(A_{n-k}(X_\Delta(\mathbb{R})))$ vérifiant:

- $\partial_{n-k}(c) = 0$
- $\bar{c}' = \bar{c} \in \frac{I^q}{I^{q+1}} A_{n-k-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$

Soit $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base adaptée à Δ au rang k .

On notera pour $\sigma \in \Delta(k) \cup \Delta(k+1)$ et $1 \leq i \leq n$, $\tilde{e}_i^\sigma \in \frac{V}{[\sigma]_2}$ la classe du vecteur e_i .

On choisit, pour chaque $\sigma \in \Delta(k) \cup \Delta(k+1)$, $J_\sigma \in \{1, \dots, n\}$ tel que $(\tilde{e}_i^\sigma)_{i \in J_\sigma}$ soit une base de $\frac{V}{[\sigma]_2}$.

Soit $\sigma \in \Delta(k) \cup \Delta(k+1)$ et $I = \{i_1, \dots, i_q\} \subset J_\sigma$ tel que $\text{Card}(I) = q$. On désignera par \tilde{e}_I^σ l'élément de $\bigwedge^q \frac{V}{[\sigma]_2}$ donné par:

$$\tilde{e}_I^\sigma = \tilde{e}_{i_1}^\sigma \wedge \dots \wedge \tilde{e}_{i_q}^\sigma$$

et $[\tilde{e}_I^\sigma] \in I^q(A_\sigma)$ la chaîne donnée par:

$$[\tilde{e}_I^\sigma] = \prod_{i \in I} ([0] + [\tilde{e}_i^\sigma])$$

$[\tilde{e}_I^\sigma]$ est ainsi la classe fondamentale dans A_σ du sous-espace vectoriel de dimension q engendré par la famille $(\tilde{e}_i^\sigma)_{i \in I}$.

Pour chaque $\sigma \in \Delta(k)$, on décompose \bar{c}_σ dans la base $(\tilde{e}_j)_{j \in J_\sigma}$ sous la forme:

$$\bar{c}_\sigma = \sum_{I \subset J_\sigma, \text{card}(I)=q} \epsilon_I^\sigma \tilde{e}_I^\sigma$$

et on considère la chaîne $c'_\sigma \in I^q(A_\sigma)$ définie par:

$$c'_\sigma = \sum_{I \subset J_\sigma, \text{card}(I)=q} \epsilon_I^\sigma [\tilde{e}_I^\sigma]$$

où $\epsilon_I^\sigma \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \forall I$.

On pose $c' = (c'_\sigma)_{\sigma \in \Delta(k)} \in I^q(A_{n-k}(X_\Delta(\mathbb{R})))$.

Remarque 5.1.20 Si l'on note \bar{c}'_σ la classe de la chaîne c'_σ modulo I^{q+1} , alors $\bar{c}'_\sigma = \bar{c}_\sigma$. En particulier, la classe \bar{c}' de c' modulo I^{q+1} vérifie $\partial_{n-k,q}^0(\bar{c}') = \partial_{n-k,q}^0(\bar{c}) = 0$.

Il faut encore montrer que c' est un cycle de $A_{n-k}(X_\Delta(\mathbb{R}))$.

Soit $\delta \in \Delta(k+1)$. Il s'agit de montrer que c' vérifie:

$$\sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \pi_{\sigma,\delta}(c'_\sigma) = 0$$

Comme $\partial_{n-k,q}^0(\bar{c}') = 0$, on doit avoir:

$$\sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} p_{\sigma,\delta}^q(\bar{c}'_\sigma) = 0$$

D'où:

$$\sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} p_{\sigma,\delta}^q \left(\sum_{I \subset J_\sigma, \text{card}(I)=q} \epsilon_I^\sigma \tilde{e}_I^\sigma \right) = 0$$

Soit $K \subset J_\delta$, $\text{Card}(K) = q$.

Pour chaque $\sigma \in \Delta(k)$, $\sigma \leq \delta$, on pose:

$$I_K^\sigma = \{I \subset J_\sigma, \text{Card}(I) = q, p_{\sigma,\delta}^q(\tilde{e}_I^\sigma) = \tilde{e}_K^\delta\}$$

Remarque 5.1.21 Pour $\sigma \in \Delta(k)$ et $I \subset J_\sigma$, $\text{Card}(I) = q$, il existe d'après 5.1.18 $K \subset J_\delta$, $\text{Card}(K) = q$ tel que $p_{\sigma,\delta}^q(\tilde{e}_I^\sigma) = \tilde{e}_K^\delta$

On doit donc avoir:

$$\sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \sum_{I \subset J_\sigma, \text{card}(I)=q} \epsilon_I^\sigma p_{\sigma,\delta}^q(\tilde{e}_I^\sigma) = \sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \sum_{K \subset J_\delta, \text{card}(K)=q} \sum_{I \in I_K^\sigma} \epsilon_I^\sigma p_{\sigma,\delta}^q(\tilde{e}_I^\sigma) = 0$$

Et donc:

$$\sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \sum_{I \in I_K^\sigma} \epsilon_I^\sigma p_{\sigma,\delta}^q(\tilde{e}_I^\sigma) = 0$$

Ce qui donne:

$$\sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \sum_{I \in I_K^\sigma} \epsilon_I^\sigma = 0 \quad (17)$$

Regardons maintenant ce qui se passe au niveau de c' . On a:

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \pi_{\sigma,\delta}(c'_\sigma) &= \sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \pi_{\sigma,\delta} \left(\sum_{I \subset J_\sigma, \text{card}(I)=q} \epsilon_I^\sigma [\tilde{e}_I^\sigma] \right) \\ &= \sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \sum_{I \subset J_\sigma, \text{card}(I)=q} \epsilon_I^\sigma \pi_{\sigma,\delta}([\tilde{e}_I^\sigma]) \\ &= \sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \sum_{I \subset J_\sigma, \text{card}(I)=q} \epsilon_I^\sigma [p_{\sigma,\delta}^q(\tilde{e}_I^\sigma)] \\ &= \sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \sum_{K \subset J_\delta, \text{card}(K)=q} \sum_{I \in I_K^\sigma} \epsilon_I^\sigma [p_{\sigma,\delta}^q(\tilde{e}_I^\sigma)] \\ &= \sum_{K \subset J_\delta, \text{card}(K)=q} \sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \sum_{I \in I_K^\sigma} \epsilon_I^\sigma [\tilde{e}_K^\delta] \\ &= \sum_{K \subset J_\delta, \text{card}(K)=q} \left(\sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \sum_{I \in I_K^\sigma} \epsilon_I^\sigma \right) [\tilde{e}_K^\delta] \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant (17), on doit avoir:

$$\sum_{\sigma \leq \delta, \sigma \in \Delta(k)} \pi_{\sigma,\delta}(c'_\sigma) = 0$$

Comme ceci est indépendant du cône δ choisi initialement, on obtient finalement:

$$\partial_{n-k}(c') = 0 \quad \square$$

Corollaire 5.1.22 *Supposons qu'il existe une base de V qui soit adaptée à l'éventail Δ au rang k pour $0 \leq k \leq n-1$. Alors la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1.*

Démonstration:

Dans ce cas, toutes les différentielles ∂_* du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ sont strictement compatibles avec la filtration I_* . Donc d'après 5.1.6, la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1. \square

5.1.3 Condition s_{p0} , $p \in \mathbb{N}$, pour le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On va montrer que le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ satisfait la condition s_{p0} . En fait ce résultat est déjà démontré dans [Bi] (remarque 7.4) avec une démonstration un peu différente mais la preuve de ce résultat que l'on va donner ici constitue un exemple simple d'application de la méthode qui sera utilisée par la suite pour montrer que $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ vérifie d'autres conditions s_{pq} .

Remarque 5.1.23 Soit $c = (c_\sigma)_{\sigma \in \Delta(n-p)} \in A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Pour chaque $\sigma \in \Delta(n-p)$, il n'y a que 2 possibilités pour la classe \bar{c}_σ de c_σ dans $\frac{A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))}{I}$:

- Soit $c_\sigma \in I$ et alors $\bar{c}_\sigma = 0$.
- Soit $c_\sigma \notin I$ et alors $\bar{c}_\sigma = \overline{[0_\sigma]}$ où 0_σ est l'élément neutre de $\frac{V}{[\sigma]_2}$ (dans ce cas, $[0_\sigma]$ est l'élément unité de $H_0(\frac{V}{[\sigma]_2})$).

Lemme 5.1.24 *La condition s_{p0} est vérifiée par $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$.*

Démonstration:

Soit $c = (c_\sigma)_{\sigma \in \Delta(n-p)} \in A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$, $c \notin I(A_p(X_\Delta(\mathbb{R})))$ tel que $\partial_p(c) \in I(A_{p-1}(X_\Delta(\mathbb{R})))$.

On note $\bar{c} = (\bar{c}_\sigma)_{\sigma \in \Delta(n-p)}$ la classe de c dans $\frac{A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))}{I}$. D'après la remarque précédente, pour tout $\sigma \in \Delta(n-p)$, $\bar{c}_\sigma = \epsilon_\sigma \overline{[0_\sigma]}$ avec $\epsilon_\sigma \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$.

Soient $\gamma \in \Delta(n-p+1)$, $\sigma \in \Delta(n-p)$ tels que $\gamma > \sigma$. Alors $\pi_{\sigma,\gamma}([0_\sigma]) = [0_\gamma]$ vu que $\pi_{\sigma,\gamma}$ est un morphisme d'anneaux.

Soit $\gamma \in \Delta(n-p+1)$. On considère les applications:

$$- p_\gamma : \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} \frac{A_\sigma(X_\Delta(\mathbb{R}))}{I} \rightarrow \frac{A_\gamma(X_\Delta(\mathbb{R}))}{I} \text{ définie par la somme directe sur } \{\sigma \in \Delta(n-p), \gamma > \sigma\} \text{ des applications } p_{\sigma,\gamma}.$$

$$- \pi_\gamma : \bigoplus_{\sigma \in \Delta(n-p)} A_\sigma(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow A_\gamma(X_\Delta(\mathbb{R})) \text{ définie par la somme directe sur } \{\sigma \in \Delta(n-p), \gamma > \sigma\} \text{ des applications } \pi_{\sigma,\gamma}.$$

Avec ces notations, on a:

- $p_\gamma = (\partial_{p0}^1)|_{\frac{A_\sigma}{I}}$
- $\pi_\gamma = (\partial_p)|_{A_\sigma}$

Soit $c' = (c'_\sigma)_{\sigma \in \Delta(n-p)} \in A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))$ défini par $c'_\sigma = \epsilon_\sigma[0_\sigma]$. Par construction, on a donc $\bar{c} = \bar{c}' \in \frac{A_p(X_\Delta(\mathbb{R}))}{I}$. Comme $\partial_p(c) \in I(A_p(X_\Delta(\mathbb{R})))$, $p_\gamma(\bar{c}) = 0$. En particulier, on doit avoir:

$$\sum_{\sigma \in \Delta(n-p), \sigma > \gamma} \epsilon_\sigma = 0$$

Mais alors on doit aussi avoir:

$$\pi_\gamma(c') = 0$$

En résumé, c' est un cycle et $\bar{c} = \bar{c}'$ donc d'après 5.1.2, s_{p0} est vérifiée. En particulier, ∂_{p0}^1 est nulle. \square

Remarque 5.1.25 La preuve de la proposition 5.1.24 reste valable si l'on remplace $X_\Delta(\mathbb{R})$ par une quelconque réunion d'orbites (sous l'action du tore) d'une variété torique réelle.

Si $Z \subset X_\Delta(\mathbb{R})$ est une réunion d'orbites de $X_\Delta(\mathbb{R})$, alors le complexe $A_*(Z)$ associé à Z satisfait la condition $s_{p,0}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Comme les conditions s_{11} , s_{21} et s_{22} sont trivialement vérifiées du fait de la forme de $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$, on obtient d'après 5.1.4:

Corollaire 5.1.26 *Les différentielles $\partial_1 : A_1(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow A_0(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et $\partial_2 : A_2(X_\Delta(\mathbb{R})) \rightarrow A_1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ sont strictement compatibles avec la filtration I^* .*

Remarque 5.1.27 En particulier, on a:

- $b_0(X_\Delta(\mathbb{R})) = g_{00}(X_\Delta(\mathbb{R}))$
- $b_1(X_\Delta(\mathbb{R})) = g_{10}(X_\Delta(\mathbb{R})) + g_{11}(X_\Delta(\mathbb{R}))$

5.1.4 Stricte compatibilité de la différentielle ∂_n de $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$

D'après la proposition 5.1.4, il suffira, pour $0 \leq q \leq n$, de montrer que la condition s_{nq} est satisfaite par $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Comme s_{n0} est vérifiée d'après 5.1.24, il suffira de le montrer pour $1 \leq q \leq n$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$ fixé.

Proposition 5.1.28 *Soit $c \in I^q A_n(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telle que $\partial_{nq}^0(\bar{c}) = 0$ où \bar{c} désigne la classe de c modulo I^{q+1} . Alors il existe $c' \in I^q A_n(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telle que $\partial_p(c') = 0$ et $\bar{c} = \bar{c}' \in G_{nq}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) = \frac{I^q}{I^{q+1}} A_n(X_\Delta(\mathbb{R}))$.*

Il faut d'abord trouver un moyen naturel de relever un élément de $\frac{I^q}{I^{q+1}} A_n(X_\Delta(\mathbb{R})) \simeq \bigwedge^q V$ en un élément de $I^q A_n(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Rappelons que ceci peut être réalisé à l'aide d'une base e de V au moyen de l'application s_e comme on l'a vu dans la section 5.1.2.

Il faut ensuite s'assurer que la base e que l'on choisi soit bonne. Plus précisément, il faut que l'application s_e vérifie la propriété suivante:

$$\partial_{nq}^0(\bar{c}) = 0 \in \frac{I^q}{I^{q+1}} A_n(X_\Delta(\mathbb{R})) \Rightarrow \partial_n(s_e(\bar{c})) = 0 \in I^q A_n(X_\Delta(\mathbb{R}))$$

On aura besoin pour cela du lemme suivant:

Lemme 5.1.29 *Soit $[H]$ la classe fondamentale d'un hyperplan de V dans $H_0(V)$ et soit V' un sous-espace vectoriel de V .*

On considère l'application $\pi : H_0(V) \rightarrow H_0(\frac{V}{V'})$ induite par la projection naturelle $p : V \rightarrow \frac{V}{V'}$ de V sur V' . Alors:

$$H \cap V' \neq \{0\} \Rightarrow \pi([H]) = 0$$

Démonstration:

Supposons que $H \cap V'$ contienne $v_1 \neq 0$. On peut compléter v_1 en une base (v_1, \dots, v_m) de H où $m = \dim(H)$. Alors on a dans $H_0(V)$:

$$[H] = \prod_{i=1}^m ([0] + [v_i])$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} \pi([H]) &= \prod_{i=1}^m (\pi([0]) + \pi([v_i])) \\ &= \prod_{i=1}^m ([0] + [p(v_i)]) \\ &= ([0] + [0]) \times \prod_{i=2}^m ([0] + [p(v_i)]) \\ &= 0 \quad \square \end{aligned}$$

Toute la difficulté sera donc d'exhiber une telle base.

On pose $\Delta(1) = \bigcup_{i=1}^m \tau_i$ et pour chaque cône τ_i , on notera v_i le générateur de $[\tau_i]_2$. Démontrons à présent la proposition 5.1.28.

Démonstration:

Comme $\partial_n(c) \in I^{q+1}(A_{n-1}(\Delta))$, on doit avoir:

$$\begin{aligned} \partial_{nq}^0 : G_{nq}^0 \simeq \bigwedge^q V &\rightarrow G_{n-1,q}^0 \simeq \bigoplus_{i=1}^r \bigwedge^q \frac{V}{[\tau_i]_2} \\ \bar{c} &\mapsto 0 \end{aligned}$$

On peut supposer que v_1, \dots, v_r est une base de $\text{Vect}(v_i, i = 1, \dots, m)$.

Il y a deux cas:

* Si $r > q$, alors ∂_{nq}^0 est injective. Ainsi $\bar{c} = 0$ et $c \in I^{q+1}$. On peut donc choisir $c' = 0$.

* Si $r \leq q$, on choisit une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de V telle que $e_i = v_i$ pour $i = 1, \dots, r$.

On peut alors écrire \bar{c} dans cette base sous la forme:

$$\bar{c} = \sum_I \epsilon_I e_I$$

Comme $\partial_{nq}^0(\bar{c}) = 0$, chacun des termes e_I doit vérifier:

$$\epsilon_I \neq 0 \Rightarrow \{1, \dots, r\} \subset I$$

Maintenant qu'une base de V est fixée, on dispose de l'application s_e qui lui est associée. On pose $c' = s_e(\bar{c}) \in I^q(A_n(\Delta))$.

Si $\bar{c}' \in G_{nq}^0$ désigne la classe de c' modulo I^{q+1} , on a ainsi:

$$\bar{c} = \bar{c}'$$

Il reste à montrer que $\partial_n(c') = 0$. Or pour $i = 1, \dots, m$ et $I \subset \{1, \dots, m\}$, $\text{Card}(I) = q$, vérifiant $\epsilon_I \neq 0$, le sous-espace $\text{Vect}(e_j, j \in I)$ contient v_i . Ainsi d'après le lemme 5.1.29, on a pour $i = 1, \dots, m$:

$$\begin{aligned} \pi_i: H_0(V) &\rightarrow H_0\left(\frac{V}{[r_i]_2}\right) \\ [e_I] &\mapsto 0 \end{aligned}$$

Alors on a:

$$\begin{aligned} \pi_i(c') &= \pi\left(\sum_I \epsilon_I [e_I]\right) \\ &= \sum_I \epsilon_I \pi_i([e_I]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\partial_n(c') = 0$ et c' convient. \square

Corollaire 5.1.30 *La différentielle ∂_n de $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est strictement compatible avec la filtration I^* . En particulier, on a:*

$$b_n(X_\Delta(\mathbb{R})) = \sum_{q=1}^n \dim(G_{nq}^1)$$

Démonstration:

Le résultat découle directement des propositions 5.1.28, 5.1.2 et 5.1.4. \square

Remarque 5.1.31 Une preuve différente de ce résultat peut être trouvée dans [Ho2] (page 13).

Remarque 5.1.32 Si $Z \subset X_\Delta(\mathbb{R})$ est seulement une quelconque réunion d'orbites (sous l'action du tore) d'une variété torique réelle $X_\Delta(\mathbb{R})$, avec $\dim(Z) = k$, on ne sait pas montrer, en général, que la différentielle ∂_k du complexe $A_*(Z)$ est strictement compatible avec la filtration I^* .

Par exemple si Y est un fermé de dimension k invariant sous l'action du tore d'une variété torique réelle $X_\Delta(\mathbb{R})$, alors le corollaire 5.1.30 ne permet pas de dire que la différentielle ∂_k du complexe $A_*(Y)$ est strictement compatible avec la filtration I^* .

5.1.5 Condition $s_{n-1,1}$ pour le complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$

On utilisera ici à nouveau la proposition 5.1.2 pour montrer que la condition $s_{n-1,1}$ est satisfaite par $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$. Comme précédemment, il faudra ainsi prouver la proposition suivante:

Proposition 5.1.33 *Soit $c \in IA_{n-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telle que $\partial_{n-1,1}^0(\bar{c}) = 0$ où \bar{c} désigne la classe de c modulo I^2 . Alors il existe $c' \in IA_{n-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ telle que $\partial_{n-1}(c') = 0$ et $\bar{c} = \bar{c}' \in G_{n-1,1}^0(X_\Delta(\mathbb{R})) = \frac{I}{I^2}A_{n-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$*

Rappelons que la différentielle à laquelle on s'intéresse est:

$$\partial_{n-1,1}^0 : G_{n-1,1}^0 \simeq \bigoplus_{\tau \in \Delta(1)} \frac{V}{[\tau]_2} \rightarrow G_{n-2,1}^0 \simeq \bigoplus_{\sigma \in \Delta(2)} \frac{V}{[\sigma]_2}$$

Démonstration:

Soit $\Delta(1) = \bigcup_{i=1}^m \tau_i$. Pour $1 \leq i \leq m$, on notera $\rho_i \in N$ le vecteur primitif engendrant le cône τ_i et $v_i \in V = \frac{N}{2N}$ désignera sa classe modulo 2.

Étant donné $\sigma \in \Delta(2)$, il existe $1 \leq i < j \leq m$ tels que σ soit engendré par ρ_i et ρ_j . On pose alors $\sigma = \sigma_{ij}$.

Soit $c \in I(A_{n-1}(X_\Delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_{n-1}(c) \in I^2A_{n-2}(X_\Delta(\mathbb{R}))$. On pose $c = (c_i)_{i=1\dots m}$ et on désigne par $\bar{c}_i \in \frac{V}{[\tau_i]_2}$ la classe de c_i modulo I^2 .

Pour chaque $i = 1 \dots m$, on désigne par s_i l'application définie par:

$$s_i : \begin{array}{ccc} \frac{V}{[\tau_i]_2} & \rightarrow & I(H_0(\frac{V}{[\tau_i]_2})) \\ v & \mapsto & [0] + [v] \end{array}$$

et l'on note $c'_i = s_i(c_i)$.

On obtient ainsi une nouvelle chaîne $c' \in A_{n-1}(X_\Delta(\mathbb{R}))$ qui vérifie:

- $c' \in I(A_{n-1}(X_\Delta(\mathbb{R})))$.
- $\bar{c} = \bar{c}'$ modulo I^2 si (c') désigne la classe de c' modulo I^2 .

Il reste à vérifier que c' vérifie $\partial_{n-1}(c') = 0$.

Soit $b = \partial_{n-1}(c')$. On pose $b = (b_\sigma)_{\sigma \in \Delta(2)}$.

Étant donné $\sigma_{ij} \in \Delta(2)$, on notera:

- $p_{ij} : \frac{V}{[\tau_i]_2} \rightarrow \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}$ la projection naturelle.
 - $\pi_{ij} : H_0(\frac{V}{[\tau_i]_2}) \rightarrow H_0(\frac{V}{[\sigma_{ij}]_2})$ l'application induite par p_{ij} en homologie.
- Soit $\sigma = \sigma_{ij} \in \Delta(2)$. On a:

$$\begin{aligned}
b_{\sigma_{ij}} &= \pi_{ij}(c'_i) + \pi_{ji}(c'_j) \\
&= \pi_{ij}([0] + [\bar{c}_i]) + \pi_{ji}([0] + [\bar{c}_j]) \\
&= [0] + [p_{ij}(\bar{c}_i)] + [0] + [p_{ji}(\bar{c}_j)]
\end{aligned}$$

Comme $\partial_{n-1}(c) \in I^2$, on doit avoir $p_{ij}(\bar{c}_i) + p_{ji}(\bar{c}_j) = 0$ donc $b_{\sigma_{ij}} = 0$ et finalement, on obtient bien $b = 0$. \square

En particulier, on a aussi démontré:

Corollaire 5.1.34 *La différentielle $\partial_{n-1,1}^1$ est nulle.*

On peut se demander pourquoi cette stratégie ne marche pas pour les autres différentielles de la forme ∂_{*1}^1 du terme $G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$.

Pour se convaincre que ce n'est pas le cas, on peut par exemple regarder ce qui se passe pour la différentielle:

$$\partial_{n-2,1}^1 : \bigoplus_{\sigma \in \Delta(2)} \frac{V}{[\sigma]_2} \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in \Delta(3)} \frac{V}{[\gamma]_2}$$

Supposons pour simplifier que Δ soit simplicial.

Soit $\gamma \in \Delta(3)$ et τ_1, τ_2, τ_3 les 3 faces de dimension 1 de γ . Pour $i = 1 \dots 3$ on notera $\rho_i \in N$ le générateur de $[\tau_i]$ contenu dans τ_i et v_i désignera sa classe modulo 2. Pour $i < j \in \{1, 2, 3\}$, on note $\sigma_{ij} := Pos(\rho_i, \rho_j)$ la face de γ engendrée par ρ_i et ρ_j .

Si l'on se restreint au cône γ , la différentielle $\partial_{n-2,2}^1$ est donnée par:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{V}{[\sigma_{12}]_2} & & \\
& \searrow^{p_{12}} & \\
\frac{V}{[\sigma_{13}]_2} & \xrightarrow{p_{13}} & \frac{V}{[\gamma]_2} \\
& \nearrow_{p_{23}} & \\
\frac{V}{[\sigma_{23}]_2} & &
\end{array}$$

où $p_{ij} : \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2} \rightarrow \frac{V}{[\gamma]_2}$ est la projection naturelle pour $i < j \in \{1, 2, 3\}$.

La différentielle ∂_{n-2} du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ est, elle, donnée par:

$$\begin{array}{ccc}
H_0\left(\frac{V}{[\sigma_{12}]_2}\right) & & \\
& \searrow^{\pi_{12}} & \\
H_0\left(\frac{V}{[\sigma_{13}]_2}\right) & \xrightarrow{\pi_{13}} & H_0\left(\frac{V}{[\gamma]_2}\right) \\
& \nearrow_{\pi_{23}} & \\
H_0\left(\frac{V}{[\sigma_{23}]_2}\right) & &
\end{array}$$

où $p_{ij} : H_0\left(\frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}\right) \rightarrow H_0\left(\frac{V}{[\gamma]_2}\right)$ est l'application induite en homologie par p_{ij} pour $i < j \in \{1, 2, 3\}$.

Soit $(v_{12}, v_{13}, v_{23}) \in \bigoplus_{i < j \in \{1, 2, 3\}} \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}$ tel que $\sum_{i < j \in \{1, 2, 3\}} p_{ij}(v_{ij}) = 0$

Soit $(c_{12}, c_{13}, c_{23}) \in \bigoplus_{i < j \in \{1, 2, 3\}} H_0\left(\frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}\right)$, $c_{ij} = [0] + [v_{ij}]$, le relèvement de $(v_{ij})_{i < j \in \{1, 2, 3\}}$ que l'on a utilisé dans la démonstration de la proposition 5.1.33. On pose $\bar{v}_{ij} = p_{ij}(v_{ij})$ pour $i < j \in \{1, 2, 3\}$. On a donc :

$$\bar{v}_{12} + \bar{v}_{13} + \bar{v}_{23} = 0 \in \frac{V}{[\gamma]_2}$$

Si l'on regarde en homologie, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i < j \in \{1, 2, 3\}} \pi_{ij}(c_{ij}) &= \sum_{i < j \in \{1, 2, 3\}} ([0] + [\bar{v}_{ij}]) \\
&= [\text{Vect}(\bar{v}_{ij}, i < j \in \{1, 2, 3\})]
\end{aligned}$$

Ainsi en général, $\sum_{i < j \in \{1, 2, 3\}} \pi_{ij}(c_{ij}) \neq 0$ et c n'est pas un cycle mais la classe fondamentale d'un sous-espace de dimension 2 de $H_0\left(\frac{V}{[\gamma]_2}\right)$ (donc un élément de I^2).

En ce qui concerne les différentielles de la forme ∂_{n-1}^1 , l'obstruction est plus simple. Étant donné un élément $w \in \bigwedge^q V$, il n'existe pas en général de relèvement naturel de w dans $I^q H_0(V)$ (ie: sans faire le choix d'une base de V).

On peut toutefois remarquer qu'un tel relèvement existe pour les éléments purs de $\bigwedge^q V$ (ie: ceux qui peuvent s'écrire sous la forme $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_q$). Si $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_q \in \bigwedge^q V$ est un tel élément, alors on peut lui associer la chaîne $[\text{Vect}(v_1, \dots, v_q)] \in H_0(V)$.

Remarque 5.1.35 Si l'on peut trouver une base de $G_{n-1, *}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ constituée d'éléments purs, alors on peut reprendre la démonstration de la proposition 5.1.33 et

montrer que la condition $s_{n-1,*}$ est vérifiée par $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$. On utilisera cela dans la dernière section.

Remarque 5.1.36 Contrairement aux résultats obtenus dans la section précédente (section 5.1.4), la démonstration de la proposition 5.1.33 reste valide si l'on remplace $X_\Delta(\mathbb{R})$ par une quelconque réunion d'orbites (sous l'action du tore) d'une variété torique réelle.

Si $Z \subset X_\Delta(\mathbb{R})$ est une réunion d'orbites de $X_\Delta(\mathbb{R})$, avec $\dim(Z) = k$, alors le complexe $A_*(Z)$ associé à Z satisfait la condition $s_{k-1,1}$.

5.2 Applications

5.2.1 Maximalité de X_Δ lorsque $n \leq 4$

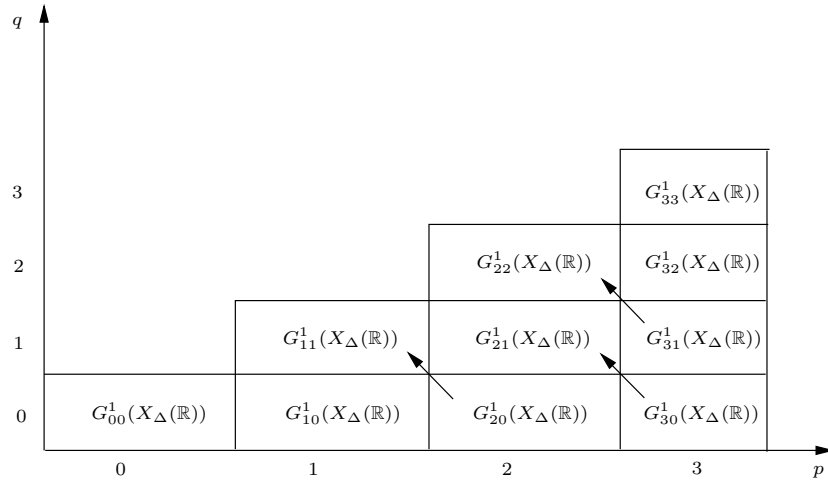
En utilisant les résultats de la section précédente, on peut facilement obtenir:

Théorème 5.2.1 Si $n \leq 4$, la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1.

Démonstration:

Lorsque $n = 3$ (resp $n = 4$), la figure 11 (resp 12) donne la forme du terme $G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$.

FIG. 11 – Le terme $G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et ses différentielles lorsque $n = 3$



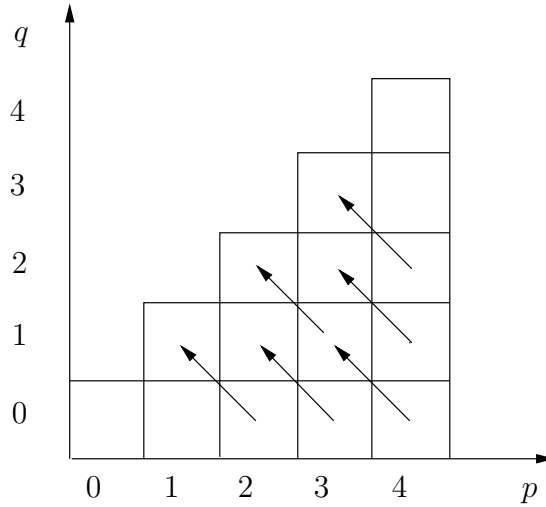
D'après la proposition 5.1.30, la différentielle ∂_n est strictement compatible avec la filtration I^* . De plus, d'après 5.1.26, ∂_1 et ∂_2 le sont également. Ainsi, lorsque $n \leq 3$, d'après 5.1.6, la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1.

Si $n = 4$, d'après 5.1.24, 5.1.33 et enfin 5.1.4, la différentielle ∂_3 est aussi strictement compatible avec la filtration I^* donc d'après 5.1.6, $G_{pq}^*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1.

□

Remarque 5.2.2 Le cas $n = 3$ est déjà démontré dans [Bi].

FIG. 12 – Le terme $G_{pq}^1(X_\Delta(\mathbb{R}))$ et ses différentielles lorsque $n = 4$



En utilisant en plus 3.3.4, on obtient:

Corollaire 5.2.3 *Les variétés toriques de dimension $n \leq 4$ sont maximales.*

Remarque 5.2.4 La démonstration n'est pas valide si l'on remplace $X_\Delta(\mathbb{R})$ par une quelconque réunion d'orbites (sous l'action du tore) Z d'une variété torique réelle, avec $\dim(Z) = 4$.

Cependant, on verra dans la prochaine partie que c'est vrai lorsque Z est une sous-variété torique fermée invariante d'une variété torique compacte, régulière modulo 2 et de dimension 5.

5.2.2 Cas d'un fermé invariant sous l'action du tore dans une variété torique compacte lisse de dimension 5

On suppose ici que:

- $n = 5$
- $|\Delta| = N_{\mathbb{R}}$
- Δ est régulier modulo 2

On va montrer que la suite spectrale $G_{pq}^*(Y)$ associée à une sous-variété fermée invariante Y de dimension 4 de $X_\Delta(\mathbb{R})$ dégénère à l'ordre 1.

Le terme $G_{pq}^1(Y)$ a la même forme que celui d'une variété torique de dimension 4 (cf figure 12). Cependant, Y peut contenir plusieurs orbites de dimension 4 donc la différentielle ∂_4 ne peut pas être traitée comme on l'a fait dans la proposition 5.1.30.

Remarque 5.2.5 Bien que Y soit compacte et que Δ^Y soit régulier modulo 2, on n'a pas en général $G_{pq}^1 = 0$, $p \neq q$ (Voir 3.2.6).

Reprenons les notations utilisées dans la section 4.2.

On pose $\Delta = \Delta^X$ et $X = X_\Delta(\mathbb{R})$. On note $\Delta^Y \subset \Delta^X$ (resp Δ^{X-Y}) le sous-ensemble de l'éventail Δ^X correspondant à Y (resp $(X - Y)$). Les différentielles du complexe $A_*(X)$ (resp $A_*(Y)$, $A_*(X - Y)$) seront notées ∂_*^X (resp ∂_*^Y , ∂_*^{X-Y}) et celles du terme $G_{**}^1(X)$ (resp $G_{**}^1(Y)$, $G_{**}^1(X - Y)$) seront notées $(\partial_{**}^1)^X$ (resp $(\partial_{**}^1)^Y$, $(\partial_{**}^1)^{X-Y}$).

D'après 5.1.24, toutes les conditions s_{p0} sont vérifiées par $A_*(Y)$. D'après la figure 12, il faudra donc encore montrer que $A_*(Y)$ satisfait s_{41} , s_{42} et s_{31} .

On pose:

$$\begin{array}{l} - \quad i_*: \quad A_*(Y) \quad \rightarrow \quad A_*(X) = A_*(Y) \oplus A_*(X - Y) \\ \quad \quad \quad \quad x \quad \mapsto \quad (x, 0) \\ - \quad r_*: \quad A_*(X) \quad \rightarrow \quad A_*(X - Y) \\ \quad \quad \quad \quad x \quad \mapsto \quad x|_{X-Y} \\ - \quad g_*: \quad A_*(X - Y) \quad \rightarrow \quad A_{*-1}(Y) \\ \quad \quad \quad \quad x \quad \mapsto \quad \partial_*^X(0, x)|_Y \end{array}$$

Remarque 5.2.6 Soit $(c_1, c_2) \in A_*(X) = A_*(Y) \oplus A_*(X - Y)$. Alors les 3 différentielles ∂_*^X , ∂_*^Y et ∂_*^{X-Y} sont liées par la relation:

$$\partial^X(c_1, c_2) = (\partial^Y(c_1) + g_*(c_2), \partial_*^{X-Y}(c_2)) \quad (18)$$

Soit $s = \text{Card}(\Delta^X(1))$ et $\Delta(1) = \{\tau_i, i = 1 \dots s\}$. Pour $i = 1 \dots s$, $\rho_i \in N$ désignera le générateur de $[\tau_i]$ contenu dans τ_i et $v_i \in V$ sa classe modulo 2.

Soit $m = \text{Card}(\Delta^Y(1))$. On peut supposer que $\Delta^Y(1) = \{\tau_1, \dots, \tau_m\}$.

Remarque 5.2.7 On peut supposer que $m < s$. En effet, si $m = s$ alors $Y = X - \mathcal{O}_{\{0\}}$. Dans ce cas, pour $i = 0 \dots 4$, $A_i(Y) = A_i(X)$ et $\partial_i^X = \partial_i^Y$. Comme X est compacte et régulière modulo 2, la suite spectrale $G_{pq}^*(X)$ dégénère à l'ordre 1 d'après 3.2.6 et en particulier, toutes les différentielles du complexe $A_*(X)$ sont strictement compatibles avec la filtration I^* . Ainsi celles du complexe $A_*(Y)$ le sont aussi et d'après 5.1.6, la suite spectrale $G_{pq}^*(Y)$ dégénère à l'ordre 1.

Pour $1 \leq i \leq s$, on notera:

- $p_i : V \rightarrow \frac{V}{\text{Vect}(v_i)}$ la projection naturelle.
- $p_i^2 : \bigwedge^2 V \rightarrow \bigwedge^2 \frac{V}{\text{Vect}(v_i)}$ l'application induite par p_i .
- $\pi_i : H_0(V) \rightarrow H_0\left(\frac{V}{\text{Vect}(v_i)}\right)$ l'application induite par π_i en homologie.

En utilisant la proposition 5.1.2, on est ramené à montrer le lemme suivant:

Lemme 5.2.8 Soit $c \in I(A_4(Y))$ telle que $\partial_4^Y(c) \in I^2(A_3(Y))$.

Alors il existe $c' \in I(A_4(Y))$ telle que:

- $\bar{c} = \bar{c}' \in \frac{I}{I^2}(A_4(Y))$
- $\partial_4^Y(c') = 0$

Remarque 5.2.9 Ce résultat découle directement de la proposition 5.1.33 mais la preuve qui suit contient l'essence de l'argument qui sera utilisé pour montrer que les deux conditions s_{31} et s_{42} sont satisfaites par $A_*(Y)$.

Démonstration:

Soit $c = (c_i)_{i=1}^m \in I(A_4(Y))$ telle que $\partial_4^Y(c) \in I^2(A_3(Y))$.

Alors $(c, 0) = i_4(c) = (c_1, \dots, c_m, 0, \dots, 0) \in A_4(X) \simeq A_4(Y) \oplus A_4(X - Y)$ vérifie:

- $(c, 0) \in I(A_4(X))$
- $\partial_4^X(c, 0) \in I^2(A_3(X))$

On désigne par $\overline{(c, 0)} \in G_{4,1}^0(X)$ la classe de la chaîne $(c, 0)$ modulo I^2 et pour $1 \leq i \leq m$ par $\overline{c_i}$ la classe de c_i modulo I^2 .

Comme $|\Delta|$ est propre et régulier modulo 2, $G_{pq}^1(X) = 0$ pour $p \neq q$ d'après 3.2.6. En particulier, $G_{41}^1(X) = 0$ et il existe donc $w \in V \simeq G_{51}^0(X)$ tel que

$$(\partial_{51}^0)^X(w) = \overline{(c, 0)}$$

Ainsi pour $i = m + 1, \dots, s$, le vecteur w doit vérifier:

$$p_i(w) = 0$$

Supposons qu'il existe $m + 1 \leq i < j \leq s$ tels que $v_i \neq v_j$. Comme l'application: $V \xrightarrow{p_i \oplus p_j} \frac{V}{Vect(v_i)} \oplus \frac{V}{Vect(v_j)}$ est injective, on doit avoir $w = 0$. Ainsi $\overline{(c, 0)} = 0$ et $c \in I^2(A_4(Y))$.

On peut donc supposer par la suite que:

- Pour tout $m + 1 \leq i \leq s$, $v_i = v_s$
- $w = v_s$

On pose $b = [0] + [v_s] \in I(A_5(X))$. On a:

- pour $1 \leq i \leq m$, $\pi_i(b) = \overline{c_i} \in \frac{V}{[\tau_i]_2}$ (en particulier, $\overline{\partial_5(b)}|_Y = \overline{c}$).
- Pour $m + 1 \leq i \leq s$, $\pi_i(b) = [0] + [p_i(v_s)] = 0$ (Ainsi $\partial_5^X(b)|_{X-Y} = 0$).

De plus, $\partial_5^X(b)|_Y$ est un cycle de $A_4(Y)$ d'après (18). Donc $c' = \partial_5^X(b)|_Y$ convient. \square

Regardons à présent si la condition s_{42} est satisfaite par $A_*(Y)$. En utilisant la proposition 5.1.2, il suffira de démontrer:

Lemme 5.2.10 Soit $c \in I^2(A_4(Y))$ telle que $\partial_4^Y(c) \in I^3(A_3(Y))$. Alors il existe $c' \in I^3(A_4(Y))$ vérifiant:

- $\overline{c} = \overline{c'} \in \frac{I^2}{I^3}(A_4(Y))$
- $\partial_4^Y(c') = 0$

Démonstration:

Soit $c = (c_i)_{i=1}^m \in I^2(A_4(Y))$ telle que $\partial_4^Y(c) \in I^3(A_3(Y))$.

Alors $(c, 0) = i_4(c) = (c_1, \dots, c_m, 0, \dots, 0) \in A_4(X) \simeq A_4(Y) \oplus A_4(X - Y)$ vérifie:

- $(c, 0) \in I^2(A_4(X))$
- $\partial_4^X(c, 0) \in I^3(A_3(X))$

On désigne par $\overline{(c, 0)} \in G_{4,2}^0(X)$ la classe de la chaîne $(c, 0)$ modulo I^3 et pour $1 \leq i \leq m$ par $\overline{c_i} \in \bigwedge^2 \frac{V}{[\tau_i]_2}$ la classe de c_i modulo I^3 .

Comme Δ est régulier modulo 2 et propre, $G_{pq}^1(X) = 0$ pour $p \neq q$ d'après 3.2.6. En particulier, $G_{42}^1(X) = 0$ et ainsi il existe $w \in \bigwedge^2 V \simeq G_{52}^0(X)$ tel que:

$$(\partial_{52}^0)^X(w) = \overline{(c, 0)}$$

Ainsi pour $i = m + 1, \dots, s$, le vecteur w doit vérifier:

$$p_i^2(w) = 0$$

Supposons qu'il existe $m + 1 \leq i < j < k \leq s$ tels que (v_i, v_j, v_k) soit une famille libre de V

Lemme 5.2.11 *L'application:*

$$\bigwedge^2 V \xrightarrow{p_i^2 \oplus p_j^2 \oplus p_k^2} \bigwedge^2 \frac{V}{\text{Vect}(v_i)} \oplus \bigwedge^2 \frac{V}{\text{Vect}(v_j)} \oplus \bigwedge^2 \frac{V}{\text{Vect}(v_k)}$$

est injective

Démonstration:

On pose $v_i = e_1$, $p_i^2 = p_1^2$, $v_j = e_2$, $p_j^2 = p_2^2$, $v_k = e_3$, $p_k^2 = p_3^2$ et l'on complète la famille (e_1, e_2, e_3) en une base $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ de V . Soit $x \in \bigwedge^2 V$ vérifiant $(p_i^2 \oplus p_j^2 \oplus p_k^2)(x) = 0$. On décompose x sous la forme

$$x = \sum_I \epsilon_I e_I$$

où $I \subset \{1, \dots, 5\}$, $\text{Card}(I) = 2$ et $e_I = \bigwedge_{i \in I} e_i$.

Soit $r \in \{1, 2, 3\}$. Alors:

$$p_r^2(x) = \sum_{I, r \notin I} \epsilon_I p_r^2(e_I) = 0$$

Comme la famille $(e_I, I \subset \{1, \dots, 5\}, \text{Card}(I) = 2, r \notin I)$ est une base de $\bigwedge^2 \frac{V}{\text{Vect}(e_r)}$, on doit avoir:

$$\epsilon_I \neq 0 \Rightarrow r \in I$$

Ainsi pour tout I , $\epsilon_I = 0$ et $x = 0$. \square

Alors, d'après le lemme 5.2.11, $w = 0$ donc $\overline{(c, 0)} = 0$ et $c \in I^3(A_4(Y))$.

On peut donc supposer par la suite que $\dim(\text{Vect}(v_i, m + 1 \leq i \leq s)) \leq 2$. On va regarder ce qui se passe dans le cas où cette dimension vaut 1, puis le cas où celle-ci vaut 2.

* Supposons que $\dim(\text{Vect}(v_i, m+1 \leq i \leq s)) = 1$.

On pose $v_s = e_1$ et on complète e_1 en une base (e_1, \dots, e_5) de V . Comme $p_s^2(w) = 0$, il existe $I \subset \{2, \dots, 5\}$ tel que:

$$w = \sum_{i \in I} e_1 \wedge e_i$$

On considère $b = \sum_{i \in I} ([0] + [e_1])([0] + [e_i]) = \sum_{i \in I} ([0] + [e_1] + [e_i] + [e_1 + e_i]) \in I^2(A_5(X))$. b vérifie alors:

- pour $1 \leq i \leq s$, $\overline{p_i(b)} = \overline{c_i} \in \bigwedge^2 \frac{V}{[\tau_i]_2}$ (c'est à dire que $\partial_{52}^0(\overline{b})|_Y = \overline{c}$).
- Pour $m+1 \leq j \leq s$, on a:

$$\begin{aligned} \pi_j(b) &= \pi_j\left(\sum_{i \in I} ([0] + [e_1])([0] + [e_i])\right) \\ &= \sum_{i \in I} ([0] + [p_j(e_1)])([0] + [p_j(e_i)]) \\ &= \sum_{i \in I} ([0] + [0])([0] + [p_j(e_i)]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

* Supposons que $\dim(\text{Vect}(v_i, m+1 \leq i \leq s)) = 2$. On peut supposer dans ce cas que (v_{s-1}, v_s) est une base de cet espace. Alors nécessairement, $w = v_{s-1} \wedge v_s$. On considère $b = ([0] + [v_{s-1}])([0] + [v_s]) = [0] + [v_{s-1}] + [v_s] + [v_{s-1} + v_s] \in I^2(A_5(X))$ (b est la classe fondamentale du plan engendré par v_s et v_{s-1} dans $H_0(V)$). Alors b vérifie:

- pour $1 \leq i \leq s$, $\overline{p_i(b)} = \overline{c_i}$ (c'est-à-dire, $\partial_{52}^0(\overline{b})|_Y = \overline{c}$).
- Soit $i \in \{m+1, \dots, s\}$. $v_i \in \text{Vect}(v_{s-1}, v_s)$ donc il existe $v'_i \in V$ tel que:

$$\text{Vect}(v_{s-1}, v_s) = \text{Vect}(v_i, v'_i)$$

On a alors:

$$\begin{aligned} \pi_i(b) &= \pi_i\left(\sum_{i \in I} ([0] + [v_{s-1}])([0] + [v_s])\right) \\ &= \pi_i\left(\sum_{i \in I} ([0] + [v_i])([0] + [v'_i])\right) \\ &= \sum_{i \in I} ([0] + [p_i(v_i)])([0] + [p_i(v'_i)]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dans les 2 cas, $\partial_5^X(b)|_Y$ est un cycle de $A_4(Y)$ d'après (18). Donc $c' = \partial_5^X(b)|_Y$ convient. \square

Il reste encore à montrer que s_{31} est vérifiée par $A_*(Y)$. Pour cela, on aura besoin de quelques notations supplémentaires.

Soit $\sigma \in \Delta^X(2)$. il existe ρ_i et ρ_j , $1 \leq i < j \leq s$ tels que $\sigma = \text{Pos}(\rho_i, \rho_j)$. On pose alors $\sigma = \sigma_{ij}$.

Étant donné $\sigma_{ij} \in \Delta^X(2)$, on notera:

- $p_{ij} : \frac{V}{[\tau_i]_2} \rightarrow \frac{V}{\sigma_{ij}}$ la projection naturelle.
- $\pi_{ij} : H_0(\frac{V}{[\tau_i]_2}) \rightarrow H_0(\frac{V}{[\sigma_{ij}]_2})$ l'application induite en homologie par p_{ij} .

Comme précédemment, il suffira de montrer le lemme suivant:

Lemme 5.2.12 *Soit $c \in I(A_3(Y))$ tel que $\partial_3^Y(c) \in I^2(A_2(Y))$. Alors il existe $c' \in I(A_3(Y))$ vérifiant:*

- $\bar{c} = \bar{c}' \in \frac{I}{I^2}(A_4(Y))$
- $\partial_3^Y(c') = 0$

Démonstration:

Soit $c = (c_{ij})_{i < j \in \{1 \dots m\}} \in I(A_3(Y))$ telle que $\partial_3^Y(c) \in I^2(A_2(Y))$.

Alors $(c, 0) = i_3(c) \in A_3(X) \simeq A_3(X) \oplus A_3(X - Y)$ vérifie:

- $(c, 0) \in I(A_3(X))$
- $\partial_3^X(c, 0) \in I^2(A_2(X))$

On désigne par $\overline{(c, 0)} \in G_{31}^0(X)$ la classe de la chaîne $(c, 0)$ modulo I^2 et pour $1 \leq i < j \leq s$ par $\overline{c_{ij}} \in \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}$ la classe de c_{ij} modulo I^2 .

Comme Δ est propre et régulier modulo 2, $G_{pq}^1(X) = 0$ pour $p \neq q$ d'après 3.2.6. En particulier, $G_{31}^1(X) = 0$ et donc il existe $w = (w_1, \dots, w_s) \in \bigoplus_{i=1}^s \frac{V}{[\tau_i]_2} \simeq G_{41}^0(X)$ tel que

$$(\partial_{41}^0)^X(w) = \overline{(c, 0)}$$

Remarque 5.2.13 Si l'on se donne un cône de dimension 2, $\sigma_{ij} \in \Delta^X$ tel que $\sigma_{ij} \notin \Delta^Y$, alors w doit vérifier:

$$p_{ij}(w_i) + p_{ji}(w_j) = 0 \in \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}$$

On considère la chaîne $b = (b_1, \dots, b_s) \in A_4(X)$ définie par $b_i = [0] + [w_i] \in H_0(\frac{V}{[\tau_i]_2})$ pour $i = 1, \dots, s$.

On pose $a = \partial_4^X(b) \in A_3(X)$, $a = (a_{ij})_{1 \leq i < j \leq s}$.

On va montrer que $a|_Y$ est un cycle de $A_3(Y)$.

Soit σ_{ij} un cône de dimension 2 appartenant à Δ^X tel que $\sigma_{ij} \notin \Delta^Y(2)$.

Comme cela a été remarqué précédemment, w doit donc vérifier:

$$p_{ij}(w_i) = p_{ji}(w_j)$$

Mais alors:

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(b_i) + \pi_{ji}(b_j) &= \pi_{ij}([0] + [w_i]) + \pi_{ji}([0] + [w_j]) \\ &= [0] + [p_{ij}(w_i)] + [0] + [p_{ji}(w_j)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\partial_4^X(b)|_{X-Y} = 0$ et $a|_Y$ est un cycle de $A_3(Y)$ d'après (18).

En résumé, $a|_Y$ vérifie:

- $a|_Y$ est un cycle de $A_3(Y)$
- $a|_Y = \bar{c} \in G_{31}^0(Y)$

Donc $c' = a|_Y$ convient. \square

En combinant les propositions 5.2.8, 5.2.10 et 5.2.12, on obtient finalement le théorème suivant:

Théorème 5.2.14 *Soit Y un fermé invariant sous l'action du tore de X . Alors la suite spectrale $G_{pq}^l(Y)$ dégénère à l'ordre 1.*

Démonstration:

D'après 5.1.26, les différentielles ∂_1 et ∂_2 du complexe $A_*(X_\Delta(\mathbb{R}))$ sont strictement compatibles avec la filtration I^* .

Les propositions 5.2.8, 5.2.10 et 5.2.12 montre que le complexe $A_*(Y)$ vérifient les conditions s_{41} , s_{42} et s_{31} . D'après le lemme 5.1.24, les conditions s_{40} et s_{30} sont également satisfaites.

Comme s_{43} , s_{44} , s_{32} et s_{33} sont automatiquement vérifiées du fait de la forme de $G_{pq}^*(Y)$, les différentielles ∂_3 et ∂_4 de $A_*(Y)$ sont donc, d'après 5.1.4, strictement compatibles avec la filtration I^* .

Ainsi, d'après 5.1.6, la suite spectrale $G_{pq}^*(Y)$ dégénère à l'ordre 1. \square

En général, si n est quelconque, on dispose du résultat suivant:

Proposition 5.2.15 *Soit Δ un éventail propre et régulier modulo 2 de $N_{\mathbb{R}}$ et Y une sous variété fermée de $X_\Delta(\mathbb{R})$, invariante sous l'action du tore et vérifiant $\dim(Y) = n - 1$. Alors la différentielle ∂_{n-1}^Y du complexe $A_*(Y)$ est strictement compatible avec la filtration I^* .*

Démonstration:

D'après la proposition 5.1.4, il suffira de montrer que le complexe $A_*(Y)$ satisfait les conditions s_{n-1q} pour tout $q \in \mathbb{N}$.

Soit $1 \leq q \leq n - 2$ fixé et $c = (c_i)_{i=1}^m \in I^q A_{n-1}(Y)$ vérifiant $\partial_{n-1}(c) \in I^{q+1} A_{n-2}(Y)$. Alors $(c, 0) \in A_{n-1}(X)$ vérifie:

- $(c, 0) \in I^q(A_{n-1}(X))$
- $\partial_{n-1}^X(c, 0) \in I^{q+1}(A_{n-2}(X))$

On désigne par $\overline{(c, 0)} \in G_{n-1,q}^0(X)$ la classe de la chaîne $(c, 0)$ modulo I^{q+1} et pour $1 \leq i \leq m$ par $\overline{c_i} \in \bigwedge^q \frac{V}{[\tau_i]_2}$ la classe de c_i modulo I^{q+1} .

Comme Δ est régulier modulo 2 et propre, $G_{pq}^1(X) = 0$ pour $p \neq q$ d'après 3.2.6. En particulier, $G_{n-1q}^1(X) = 0$ et ainsi il existe $w \in \bigwedge^q V \simeq G_{nq}^0(X)$ tel que:

$$(\partial_{n-1q}^0)^X(w) = \overline{(c, 0)}$$

Ainsi pour $i = m + 1, \dots, s$, le vecteur w doit vérifier:

$$\bigwedge^q p_i(w) = 0$$

Supposons qu'il existe $m + 1 \leq i_1 < \dots < i_{q+1} \leq s$ tels que $(v_{i_1}, \dots, v_{i_q})$ soit une famille libre de V .

Lemme 5.2.16 *L'application:*

$$\bigwedge^q V \xrightarrow{\bigoplus_{j=1}^{q+1} \bigwedge^q p_{i_j}} \bigoplus_{j=1}^{q+1} \bigwedge^q \frac{V}{\text{Vect}(v_{i_j})}$$

est injective

Démonstration:

C'est la même que celle du lemme 5.2.11. \square

Alors, d'après le lemme 5.2.16, $w = 0$ donc $\overline{(c, 0)} = 0$ et $c \in I^{q+1}(A_{n-1}(Y))$.

Soit $r = \dim(\text{Vect}(v_i, m + 1 \leq i \leq s))$. On peut supposer que $r \leq q$ et que la famille $(v_{m+1}, \dots, v_{m+r})$ est libre.

Pour $i = 1 \dots r$, on pose $v_{m+i} = e_i$ et l'on complète la famille (e_1, \dots, e_r) en une base $e = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ de V .

On peut décomposer w dans cette base sous la forme:

$$w = \sum_I \epsilon_I e_I$$

Comme $\bigoplus_{i=m+1}^{m+r} \bigwedge^q p_i(w) = 0$, chacun des termes ϵ_I doit vérifier:

$$\epsilon_I \neq 0 \Rightarrow \{1, \dots, r\} \subset I$$

On pose $b = \sum_I \epsilon_I [e_I] \in I^q(A_n(X))$. Alors:

- Pour $1 \leq i \leq m$, $\overline{\pi_i(b)} = \overline{c_i} \in \bigwedge^q \frac{V}{[\pi_i]_2}$ (en particulier, $\overline{\partial_n(b)}|_Y = \overline{c}$).
- Pour $m + 1 \leq i \leq s$, $\pi_i(b) = 0$ d'après 5.1.29 (Ainsi $\partial_n^X(b)|_{X-Y} = 0$).

De plus, $\partial_n^X(b)|_Y$ est un cycle de $A_{n-1}(Y)$ d'après (18).

Donc en résumé, $c' = \partial_n^X(b)|_Y$ vérifie:

- $\overline{c'} = \overline{c} \in G_{n-1,q}^0(Y)$
- $\partial_{n-1}^Y(c') = 0$

donc c' convient et la condition $s_{n-1,q}$ est satisfaite par $A_*(Y)$.

Pour finir, la condition $s_{n-1,n-1}$ est automatiquement vérifiée et le fait que $s_{n-1,0}$ soit satisfaite découle du lemme 5.1.24. \square

En particulier, sous les hypothèses de la proposition 5.2.15, on a :

$$b_{n-1}(Y) = \sum_{q=0}^{n-1} g_{n-1,q}(Y)$$

6 Étude du cas affine simplicial

Dans toute cette partie, δ désignera un cône simplicial de $N_{\mathbb{R}}$ de dimension $n = \dim(N_{\mathbb{R}})$. L'éventail constitué de l'ensemble des faces de δ sera noté Δ . On va montrer que la suite spectrale $G_{pq}^*(X_{\delta}(\mathbb{R}))$ associée à δ dégénère à l'ordre 1 lorsque $n = 5$.

On étudiera dans un premier temps les termes de $G_{pq}^1(X_{\delta}(\mathbb{R}))$ puis on passera à la démonstration du résultat ci-dessus.

6.1 Étude des termes de $G_{pq}^1(X_{\delta}(\mathbb{R}))$

On peut commencer par remarquer en utilisant la proposition 3.2.1 que :

$$G_{p0}^1(X_{\delta}(\mathbb{R})) = \{0\}, \quad \forall p \in \mathbb{N}$$

On va garder les notations de la section 2. Pour $\sigma, \tau \in \Delta$, $\tau \leq \sigma$, on pose :

- $p_{\sigma} : V \rightarrow \frac{V}{[\sigma]_2}$ la projection naturelle
- $i_{\sigma} : [\sigma]_2 \hookrightarrow V$
- $i_{\tau,\sigma} : [\tau]_2 \hookrightarrow [\sigma]_2$
- $p_{\tau,\sigma} : \frac{V}{[\tau]_2} \rightarrow \frac{V}{[\sigma]_2}$ la projection naturelle

Le diagramme qui suit dont les lignes sont exactes est alors commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & [\tau]_2 & \xrightarrow{i_{\tau}} & V & \xrightarrow{p_{\tau}} & \frac{V}{[\tau]_2} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow i_{\tau,\sigma} & & \downarrow id & & \downarrow p_{\tau,\sigma} \\ 0 & \longrightarrow & [\sigma]_2 & \xrightarrow{i_{\sigma}} & V & \xrightarrow{p_{\sigma}} & \frac{V}{[\sigma]_2} \longrightarrow 0 \end{array} \quad (19)$$

Rappelons que le faisceau \mathcal{G}^{Δ} sur Δ est défini par :

$$\mathcal{G}^{\Delta} = \left(\frac{V}{[\sigma]_2}, p_{\tau,\sigma} \right)_{\tau \leq \sigma \in \Delta}$$

On introduit un autre faisceau sur Δ , noté $(\mathcal{G}^{\Delta})^{\vee}$, en posant :

$$(\mathcal{G}^{\Delta})^{\vee} = ([\sigma]_2, i_{\tau,\sigma})_{\tau \leq \sigma \in \Delta}$$

Alors d'après le diagramme (19), on a une suite exacte courte de faisceaux sur Δ :

$$0 \rightarrow (\mathcal{G}^\Delta)^\vee \rightarrow \mathcal{C}^V \rightarrow \mathcal{G}^\Delta \rightarrow 0$$

Et donc une suite exacte longue en homologie:

$$\dots \rightarrow H_{i+1}(\mathcal{G}^\Delta) \rightarrow H_i((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) \rightarrow H_i(\mathcal{C}^V) \rightarrow H_i(\mathcal{G}^\Delta) \rightarrow H_{i-1}((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) \rightarrow \dots$$

Soit $S \simeq S^{n-1}$ la sphère unité de $N_{\mathbb{R}}$. Comme $\delta \cap S$ est contractible, $H_p(\mathcal{C}^F) = \{0\}$, $\forall p \in \mathbb{N}$ d'après 3.2.1. Ainsi:

Proposition 6.1.1 *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a:*

$$H_p(\mathcal{G}^\Delta) \simeq H_{p-1}((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$$

Cette dernière proposition permet de calculer le terme $G_{11}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$ de $G_{**}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$.

Proposition 6.1.2 *On a:*

$$G_{11}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } \sum_{\sigma \in \Delta(n-1)} [\sigma]_2 = V \\ \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} & \text{si } \sum_{\sigma \in \Delta(n-1)} [\sigma]_2 \neq V \end{cases}$$

Démonstration:

Si $\sum_{\sigma \in \Delta(n-1)} [\sigma]_2 = V$, alors la somme directe des applications $i_\sigma : [\sigma]_2 \rightarrow V$ pour σ appartenant à $\Delta(n-1)$ est surjective. De ce fait, $H_0((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$. D'après 6.1.1, on doit donc avoir $H_1(\mathcal{G}^\Delta) = \{0\}$ mais ceci revient exactement à dire que $G_{11}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$.

Si $\sum_{\sigma \in \Delta(n-1)} [\sigma]_2 \not\subseteq V$ alors $\dim(\sum_{\sigma \in \Delta(n-1)} [\sigma]_2) = n-1$.

Comme $H_0((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \frac{V}{\sum_{\sigma \in \Delta(n-1)} [\sigma]_2}$, $H_0((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$ est de dimension 1.

Donc $H_1(\mathcal{G}^\Delta) = G_{11}^1(X_\delta(\mathbb{R})) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$. \square

Soit $\delta^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$ le cône dual de δ . On note Δ^\vee l'éventail associé à δ^\vee . Pour $0 \leq k \leq n$, il existe la correspondance suivante entre Δ et Δ^\vee :

$$\{[\sigma]_2^\perp, \sigma \in \Delta(k)\} = \{[\tau]_2, \tau \in \Delta^\vee(n-k)\}$$

Ainsi, le faisceau $(\mathcal{G}^\Delta)^\vee$ sur Δ est exactement le cofaisceau $(\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^*$ sur Δ^\vee (Ce qui explique la notation) et le cofaisceau $(\mathcal{G}^\Delta)^*$ sur Δ correspond au faisceau $(\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee$ sur Δ^\vee .

Par exemple, lorsque $n = 4$, $C_*(\mathcal{G}^\Delta)$ est le complexe de chaînes:

$$\{0\} \leftarrow \bigoplus_{\gamma \in \Delta(3)} \frac{V}{[\gamma]_2} \leftarrow \bigoplus_{\sigma \in \Delta(2)} \frac{V}{[\sigma]_2} \leftarrow \bigoplus_{\tau \in \Delta(1)} \frac{V}{[\tau]_2} \leftarrow V$$

Et $(C_*(\mathcal{G}^\Delta))^* = C^*((\mathcal{G}^\Delta)^*)$ est le complexe de cochaînes:

$$\{0\} \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in \Delta(3)} \left(\frac{V}{[\gamma]_2}\right)^* \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Delta(2)} \left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right)^* \rightarrow \bigoplus_{\tau \in \Delta(1)} \left(\frac{V}{[\tau]_2}\right)^* \rightarrow V^*$$

Pour chaque cône $\sigma \in \Delta$, on a un isomorphisme naturel:

$$\left(\frac{V}{[\sigma]_2}\right)^* \simeq [\sigma]_2^\perp$$

Via ces isomorphismes, le complexe de cochaînes $(C_*(\mathcal{G}^\Delta))^*$ devient:

$$\{0\} \rightarrow \bigoplus_{\gamma \in \Delta(3)} [\gamma]_2^\perp \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \Delta(2)} [\sigma]_2^\perp \rightarrow \bigoplus_{\tau \in \Delta(1)} [\tau]_2^\perp \rightarrow V^*$$

Pour finir, le complexe de chaînes $C_*((\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee)$ est donné par:

$$V^* \leftarrow \bigoplus_{\tau \in \Delta(1)} [\tau]_2^\perp \leftarrow \bigoplus_{\sigma \in \Delta(2)} [\sigma]_2^\perp \leftarrow \bigoplus_{\gamma \in \Delta(3)} [\gamma]_2^\perp \leftarrow \{0\}$$

En utilisant cette correspondance, on obtient pour $p \in \mathbb{N}$:

$$H_p(\mathcal{G}^\Delta) \simeq (H^p((\mathcal{G}^\Delta)^*))^* = H_{n-p}((\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee) \quad (20)$$

En faisant la même chose pour $\mathcal{G}^{\Delta^\vee}$, on obtient:

$$H_p(\mathcal{G}^{\Delta^\vee}) \simeq (H^p((\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^*))^* = H_{n-p}((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) \quad (21)$$

En degré supérieur, on a également pour $p \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$:

$$H_p(\bigwedge^q \mathcal{G}^\Delta) \simeq H_{n-p}(\bigwedge^q (\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee) \quad (22)$$

et:

$$H_p(\bigwedge^q \mathcal{G}^{\Delta^\vee}) \simeq H_{n-p}(\bigwedge^q (\mathcal{G}^\Delta)^\vee) \quad (23)$$

En utilisant la proposition 6.1.1 et l'égalité 21, on montre le résultat suivant:

Corollaire 6.1.3 *Pour $1 \leq p \leq n$, on a:*

$$G_{p+1,1}^1(X_\delta(\mathbb{R})) \simeq G_{n-p,1}^1(X_{\delta^\vee}(\mathbb{R}))$$

Les formules précédentes permettent en outre de faire apparaître des zéros dans le terme $G_{pq}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$ en petite dimension.

6.1.1 Étude du cas affine simplicial en dimension 4

On suppose dans cette partie que $n = 4$.

Soit $\{\tau_i, 1 \leq i \leq 4\} = \Delta(1)$. Pour $1 \leq i \leq 4$, on notera $\rho_i \in N$ le générateur de $[\tau_i]$ contenu dans τ_i et $v_i \in V$ désignera sa classe modulo 2 dans V .

Soit $\sigma \in \Delta(2)$. Il existe $1 \leq i < j \leq 4$ tels que $\sigma = Pos(\rho_i, \rho_j)$. On pose alors $\sigma = \sigma_{ij}$.

De même, si $\sigma \in \Delta(3)$, il existe $1 \leq i < j < k \leq 4$ tels que $\sigma = Pos(\rho_i, \rho_j, \rho_k)$ et l'on note $\sigma = \sigma_{ijk}$.

On notera ν_* les différentielles du complexe $C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$ et ν_*^2 celles du complexe $\bigwedge^2 C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$.

Lemme 6.1.4 *Soit (v_1, v_2, v_3) une famille libre de V et $v_4 \in Vect(v_1, v_2, v_3)$. Alors il existe $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i < j$, tels que (v_i, v_j, v_4) soit une famille libre de V .*

Démonstration:

Comme $v_4 \in Vect(v_1, v_2, v_3)$, il n'y a que 3 possibilités pour v_4 :

- Soit $v_4 \in \{v_1, v_2, v_3\}$. On peut supposer par exemple que $v_4 = v_1$. Dans ce cas, (v_2, v_3, v_4) est libre.
- Soit $v_4 \in \{v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_2 + v_3\}$. On peut supposer par exemple que $v_4 = v_1 + v_2$. Dans ce cas, (v_2, v_3, v_4) et (v_1, v_3, v_4) sont libres.
- Soit $v_4 = v_1 + v_2 + v_3$. Dans ce cas, (v_1, v_2, v_4) , (v_2, v_3, v_4) et (v_1, v_3, v_4) sont toutes les 3 des familles libres.

Ainsi, dans tous les cas, il existe $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i < j$ tels que (v_i, v_j, v_4) soit une famille libre de V . \square

Lemme 6.1.5 *Supposons que $Rang_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) \geq 3$. Alors δ possède au moins 2 faces de dimension 3 régulières modulo 2 et chaque face de dimension 1 de δ est incluse dans une face de dimension 3 régulière modulo 2.*

Démonstration:

Si $Rang_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 3$, alors $\dim(Vect(v_1, v_2, v_3, v_4)) = 3$. On peut supposer que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de V et que v_4 appartient à $Vect(v_1, v_2, v_3)$.

D'après le lemme 6.1.4, il existe $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i < j$, tels que (v_i, v_j, v_4) soit une famille libre de V . Alors les faces σ_{123} et σ_{ij4} de δ sont régulières modulo 2 et chaque face de δ de dimension 1 est incluse dans une de ces 2 faces. \square

Lemme 6.1.6 *Soit $1 \leq i < j < k \leq 4$ et $\sigma_{ijk} \in \Delta$ une face de dimension 3 de δ régulière modulo 2. On note $\Sigma_{ijk} \subset \Delta$ l'éventail associé à σ_{ijk} . Alors le sous complexe $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{ijk}})^\vee)$ de $C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$ est acyclique.*

Démonstration:

Soit $1 \leq i < j < k \leq 4$. Si $\sigma_{ijk} \in \Delta(3)$ est régulière modulo 2, alors (v_i, v_j, v_k) est une base de $[\sigma_{ijk}]_2$ et le complexe $(C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{ijk}})^\vee), \nu_*^{ijk})$ correspond explicitement à:

$$Vect(v_i, v_j, v_k) \xleftarrow{\nu_1^{ijk}} Vect(v_i, v_j) \oplus Vect(v_i, v_k) \oplus Vect(v_j, v_k)$$

$$\xleftarrow{\nu_2^{ijk}} \text{Vect}(v_i) \oplus \text{Vect}(v_j) \oplus \text{Vect}(v_k) \xleftarrow{\nu_3^{ijk}} \{0\}$$

Supposons pour alléger les notations que $\sigma_{ijk} = \sigma_{123}$.

* Comme $C_3((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$, $H_3(C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)) = \{0\}$

* Soit $c = (c_1, c_2, c_3) \in \text{Vect}(v_1) \oplus \text{Vect}(v_2) \oplus \text{Vect}(v_3)$ vérifiant $\nu_2^{123}(c) = 0$.

Il existe $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}^3$ tel que $c_i = \epsilon_i v_i$ pour $1 \leq i \leq 3$. Comme $\nu_2^{123}(c_1, c_2, c_3) = 0$, on doit avoir:

- $\epsilon_1 v_1 + \epsilon_2 v_2 = 0 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$
- $\epsilon_1 v_1 + \epsilon_3 v_3 = 0 \in \text{Vect}(v_1, v_3)$
- $\epsilon_2 v_2 + \epsilon_3 v_3 = 0 \in \text{Vect}(v_2, v_3)$

Comme (v_1, v_2) est libre, on doit avoir $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$. De même, (v_1, v_3) est libre donc $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0$. Finalement, $c = 0$ et ν_2^{123} est injective. Ainsi $H_2(C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)) = \{0\}$.

* Soit $c = (c_{12}, c_{13}, c_{23}) \in \text{Vect}(v_1, v_2) \oplus \text{Vect}(v_1, v_3) \oplus \text{Vect}(v_2, v_3)$ vérifiant $\nu_2^{123}(c) = 0$. Il existe:

- $(\epsilon_1, \epsilon_2) \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}^2$ tel que $c_{12} = \epsilon_1 v_1 + \epsilon_2 v_2$.
- $(\epsilon'_1, \epsilon'_3) \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}^2$ tel que $c_{13} = \epsilon'_1 v_1 + \epsilon'_3 v_3$.
- $(\epsilon''_2, \epsilon''_3) \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}^2$ tel que $c_{23} = \epsilon''_2 v_2 + \epsilon''_3 v_3$.

Comme $\nu_2^{123}(c) = 0$, on doit avoir:

$$(\epsilon_1 + \epsilon'_1)v_1 + (\epsilon_2 + \epsilon''_2)v_2 + (\epsilon'_3 + \epsilon''_3)v_3 = 0$$

De plus, (v_1, v_2, v_3) est libre donc on a:

- $\epsilon_1 + \epsilon'_1 = 0$ d'où $\epsilon_1 = \epsilon'_1$
- $\epsilon_2 + \epsilon''_2 = 0$ d'où $\epsilon_2 = \epsilon''_2$
- $\epsilon'_3 + \epsilon''_3 = 0$ d'où $\epsilon'_3 = \epsilon''_3$

Ainsi $c = \nu_2^{123}(\epsilon_1 v_1, \epsilon_2 v_2, \epsilon'_3 v_3)$ et $H_1(C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)) = \{0\}$.

* Pour finir, ν_1^{123} est surjective donc $H_0(C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)) = \{0\}$. \square

On peut à présent démontrer:

Proposition 6.1.7 *Supposons que $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) \geq 3$. Alors:*

$$H_4((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_3((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_2((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$$

$$H_4(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_3(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_2(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$$

Démonstration:

On peut supposer que σ_{123} est régulière modulo 2. D'après le lemme 6.1.5, il existe $r, s \in \{1, 2, 3\}$, $r < s$, tels que σ_{rs4} soit régulière modulo 2.

- On va utiliser le lemme 6.1.6 pour chacune de ces 2 faces.

La figure 13 représente les 3 complexes $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{123}})^\vee)$, $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{124}})^\vee)$ et $C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$.

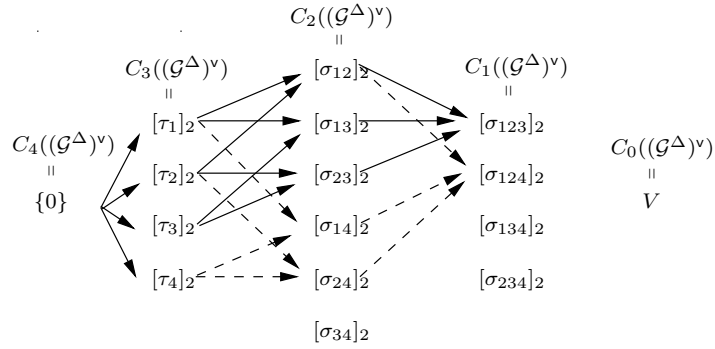
* Comme $C_4((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$, on a $H_4((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$.

* Ensuite soit $c = (c_1, \dots, c_4) \in C_3((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$ tel que $\nu_3(c) = 0$.

Le lemme 6.1.6 montre que dans ce cas, on doit avoir $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ d'une part et $c_r = c_s = c_4 = 0$ d'autre part. Donc $c = 0$ et $H_3((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$.

* Soit $c = (c_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4} \in C_2((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$ tel que $\nu_2(c) = 0$.

FIG. 13 – Les sous-complexes $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{123}})^\vee)$ et $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{124}})^\vee)$



→ sont les flèches correspondantes au sous-complexe $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{123}})^\vee)$

- → sont les flèches correspondantes au sous-complexe $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{124}})^\vee)$

D'après le lemme 6.1.6, les complexes $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{123}})^\vee)$ et $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{rs4}})^\vee)$ sont acycliques. Ainsi il existe $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ tels que:

$$c_{ij} = \epsilon_i v_i + \epsilon_j v_j \text{ pour } 0 \leq i < j \leq 3$$

et il existe également $\epsilon'_r, \epsilon'_s, \epsilon'_4 \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ tels que:

$$c_{ij} = \epsilon_i v_i + \epsilon_j v_j \text{ pour } i < j \in \{1, 2, 4\}$$

De plus, les triplets $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ et $(\epsilon'_r, \epsilon'_s, \epsilon'_4)$ sont uniques. Ainsi on doit avoir $\epsilon_r = \epsilon'_r$ et $\epsilon_s = \epsilon'_s$.

Si l'on pose $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon'_4) \in (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^4 \simeq \bigoplus_{i=1}^4 [\tau_i]_2$ alors:

$$\forall 1 \leq i < j \leq 4, (i, j) \neq (3, 4), c_{ij} = \epsilon_i v_i + \epsilon_j v_j$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $c_{34} = \epsilon_3 v_3 + \epsilon_4 v_4$.

Comme $\nu_2(c) = 0$, on doit avoir en particulier:

$$c_{13} + c_{14} + c_{34} = 0$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
c_{34} &= c_{13} + c_{14} \\
&= \epsilon_1 v_1 + \epsilon_3 v_3 + \epsilon_1 v_1 + \epsilon_4 v_4 \\
&= \epsilon_3 v_3 + \epsilon_4 v_4
\end{aligned}$$

Donc finalement, $\nu_1(\epsilon) = c$ et $H_2((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$.

- Intéressons-nous maintenant au faisceau $\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee$.

Comme $C_4(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = C_3(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$, il suffira de montrer que ν_2^2 est injective.

Remarque 6.1.8 Soit (w_1, w_2, w_3) une famille libre de V . Alors l'application f définie par:

$$\begin{aligned}
f: \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 3} \bigwedge^2 \text{Vect}(w_i, w_j) &\rightarrow \bigwedge^2 \text{Vect}(w_1, w_2, w_3) \\
(x_{12}, x_{13}, x_{23}) &\mapsto x_{12} + x_{13} + x_{23}
\end{aligned}$$

est injective.

Soit $c = (c_{ij})_{1 \leq i < j \leq 4} \in C_2(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 4} \bigwedge^2[\sigma_{ij}]_2$ tel que $\nu_2^2(c) = 0$.

Comme les faces σ_{123} et σ_{rs4} sont régulières modulo 2, on doit avoir d'après la remarque ci dessus $c_{ij} = 0$ pour $i < j \in \{1, 2, 3\}$ et $i < j \in \{r, s, 4\}$. Ainsi, si $\{t\} = \{1, 2, 3\} - \{r, s\}$, seul c_{t4} pourrait être non nul. En regardant la face σ_{rt4} , on doit avoir:

$$c_{rt} + c_{r4} + c_{t4} = 0$$

Comme $\{r, t\} \subset \{1, 2, 3\}$, $c_{rt} = 0$. De plus, $c_{r4} = 0$ donc $c_{t4} = 0$.

Finalement, $c = 0$ donc ν_2^2 est injective et par conséquent, $H_2(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$. \square

En utilisant les propositions 6.1.7, 6.1.1 et 3.2.2, on obtient le résultat suivant:

Corollaire 6.1.9 Si $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) \geq 3$, alors:

$$G_{31}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{41}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{42}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$$

Si $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^\vee) \geq 3$, alors:

$$G_{11}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{21}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{22}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$$

Démonstration:

* Si $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) \geq 3$, alors d'après la proposition 6.1.7, $H_4((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_3((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_2((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$. Ainsi d'après la proposition 6.1.1, $H_3((\mathcal{G}^\Delta)) = H_2((\mathcal{G}^\Delta)) = \{0\}$ donc $G_{31}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{41}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$. Ensuite, d'après 3.2.2, $G_{42}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$.

* Si $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^\vee) \geq 3$ alors, d'après la proposition 6.1.7, on a:

$$H_4((\mathcal{G}^{(\Delta^\vee)})^\vee) = H_3((\mathcal{G}^{(\Delta^\vee)})^\vee) = H_2((\mathcal{G}^{(\Delta^\vee)})^\vee) = \{0\}$$

En utilisant l'égalité (20), on obtient alors:

$$H_0(\mathcal{G}^\Delta) = H_1(\mathcal{G}^\Delta) = H_2(\mathcal{G}^\Delta) = \{0\}$$

Par conséquent, $G_{11}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{21}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$.

Toujours d'après la proposition 6.1.7, on a également:

$$H_4(\bigwedge^2(\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee) = H_3(\bigwedge^2(\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee) = H_2(\bigwedge^2(\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee) = \{0\}$$

En utilisant l'égalité (22), on obtient $G_{22}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$. \square

Remarque 6.1.10 En utilisant les résultats obtenus précédemment, on a également $G_{11}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$ si $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^\vee) \geq 2$ d'après 6.1.2.

On peut résumer les résultats obtenus lorsque $n = 4$ sur la figure 14 (les chiffres représentent les dimensions des termes de $G_{**}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$).

FIG. 14 – Résumé de la situation lorsque $n = 4$

<p>$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 1$</p>	<p>$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 2$</p>	<p>$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 3$</p>
<p>$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^v) = 1$</p>	<p>$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^v) = 2$</p>	<p>$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^v) = 3$</p>

6.1.2 Étude du cas affine simplicial en dimension 5

Supposons à présent que $n = 5$. On va reprendre les notations précédentes.

Soit $\{\tau_i, 1 \leq i \leq 5\} = \Delta(1)$. Pour $1 \leq i \leq 4$, on notera $\rho_i \in N$ le générateur de $[\tau_i]$ contenu dans τ_i et $v_i \in V$ désignera sa classe modulo 2 dans V . Soit $\sigma \in \Delta(2)$. Il existe $1 \leq i < j \leq 5$ tels que $\sigma = Pos(\rho_i, \rho_j)$. On pose alors $\sigma = \sigma_{ij}$. De même, si $\sigma \in \Delta(3)$, il existe $1 \leq i < j < k \leq 5$ tels que $\sigma = Pos(\rho_i, \rho_j, \rho_k)$ et l'on note $\sigma = \sigma_{ijk}$.

On notera encore ν_* les différentielle du complexe $C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$ et ν_*^2 celles du complexe $\bigwedge^2 C_*((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$.

En utilisant les techniques développées dans le cas où $N_{\mathbb{R}}$ est de dimension 4, on peut obtenir un résultat similaire au corollaire 6.1.9:

Proposition 6.1.11 *Lorsque $n = 5$, on dispose des 2 résultats suivants:*

* Si $Rang_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) \geq 3$ alors:

$$G_{51}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{41}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{52}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$$

* Si $Rang_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^\vee) \geq 3$ alors:

$$G_{11}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{21}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{22}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$$

Commençons par démontrer la proposition suivante:

Proposition 6.1.12 *Si $Rang_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) \geq 3$, alors:*

$$H_5((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_4((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_3((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$$

$$H_5(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_4(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_3(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$$

Lemme 6.1.13 *Si $Rang_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) \geq 3$, alors δ possède au moins 3 faces de dimension 3 régulières modulo 2. De plus, chacune des faces de dimension 1 de δ est incluse dans une face de dimension 3 régulière modulo 2.*

Démonstration:

Comme $Rang_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 3$, on peut supposer que (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de V et que $\{v_4, v_5\} \subset Vect(v_1, v_2, v_3)$.

D'après le lemme 6.1.4, il est possible de trouver $i_4, j_4 \in \{1, 2, 3\}$, $i_4 < j_4$, tels que (v_{i_4}, v_{j_4}, v_4) soit libre et $i_5, j_5 \in \{1, 2, 3\}$, $i_5 < j_5$, tels que (v_{i_5}, v_{j_5}, v_5) soit libre.

Ainsi les faces σ_{123} , $\sigma_{i_4, j_4, 4}$ et $\sigma_{i_5, j_5, 5}$ sont différentes, elles sont régulières modulo 2 et chaque face de dimension 1 de δ est incluse dans une de ces 3 faces. \square

Démontrons à présent la proposition 6.1.12.

Démonstration:

Comme $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 3$, on peut supposer que (v_1, v_2, v_3) soit une famille libre de V et que $\{v_4, v_5\} \subset \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$.

D'après le lemme 6.1.13, il existe, $r, s \in \{1, 2, 3\}$, $r < s$, et $p, q \in \{1, 2, 3\}$, $p < q$, tels que σ_{rs4} et σ_{pq5} soient toutes les deux des faces régulières modulo 2.

* Intéressons-nous d'abord au faisceau $(\mathcal{G}^\Delta)^\vee$.

- Comme $C_5((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$, $H_5((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$.
- Soit $c = (c_1, \dots, c_5) \in C_4((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$ tel que $\nu_4(c) = 0$.
Le lemme 6.1.6 montre que dans ce cas, on doit avoir $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_r = c_s = c_4 = 0$ et $c_p = c_q = c_5 = 0$. Ainsi, $c = 0$ et $H_4((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$.
- Soit $c = (c_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in C_3((\mathcal{G}^\Delta)^\vee)$ tel que $\nu_3(c) = 0$.
Toujours d'après le lemme 6.1.6, $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{123}})^\vee)$, $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{rs4}})^\vee)$ et $C_*((\mathcal{G}^{\Sigma_{pq5}})^\vee)$ sont acycliques. Ainsi il existe:
 - $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ tels que

$$c_{ij} = \epsilon_i v_i + \epsilon_j v_j \text{ pour } 0 \leq i < j \leq 3$$

- $\epsilon'_r, \epsilon'_s, \epsilon'_4 \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ tels que

$$c_{ij} = \epsilon'_i v_i + \epsilon'_j v_j \text{ pour } i < j \in \{r, s, 4\}$$

- $\epsilon''_p, \epsilon''_q, \epsilon''_5 \in \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ tels que

$$c_{ij} = \epsilon''_i v_i + \epsilon''_j v_j \text{ pour } i < j \in \{p, q, 5\}$$

Comme chacun des triplets est unique, on doit avoir:

- $\epsilon_1 = \epsilon'_r$ si $r = 1$ et $\epsilon_1 = \epsilon''_p$ si $p = 1$.
- $\epsilon_2 = \epsilon'_r$ si $r = 2$ ou $\epsilon_2 = \epsilon'_s$ si $s = 2$ et $\epsilon_2 = \epsilon''_p$ si $p = 2$ ou $\epsilon_2 = \epsilon''_q$ si $q = 2$.
- $\epsilon_3 = \epsilon'_s$ si $s = 3$ et $\epsilon_3 = \epsilon''_3$ si $q = 3$.

Soient $t_1 = \{1, 2, 3\} - \{r, s\}$ et $t_2 = \{1, 2, 3\} - \{p, q\}$.

Si l'on pose $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon'_4, \epsilon''_5) \in (\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})^5 \simeq \bigoplus_{i=1}^5 [\tau_i]_2$ alors:

$$\forall 1 \leq i < j \leq 5, (i, j) \notin \{(t_1, 4), (t_2, 5), (4, 5)\}, c_{ij} = \epsilon_i v_i + \epsilon_j v_j$$

Regardons ce qui se passe dans $[\sigma_{i,t_1,4}]_2$ où $i \neq t_1 \in \{1, 2, 3\}$. Comme $\nu_3(c) = 0$, on doit avoir:

$$c_{i,t_1} + c_{i4} + c_{t_1,4} = 0$$

Ainsi, $c_{t_1,4} = \epsilon_{t_1} v_{t_1} + \epsilon_4 v_4$.

Ensuite, on peut regarder $[\sigma_{j,t_2,5}]_2$ où $j \neq t_2 \in \{1, 2, 3\}$. Comme $\nu_3(c) = 0$, on doit avoir:

$$c_{j,t_2} + c_{j5} + c_{t_2,5} = 0$$

Ainsi, $c_{t_2,5} = \epsilon_{t_2}v_{t_2} + \epsilon_5v_5$.

Finalement, avec $[\sigma_{145}]_2$, on obtient de même $c_{45} = \epsilon_4v_4 + \epsilon_5v_5$.

En résumé, $\nu_3(\epsilon) = c$ et $H_3((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$. \square

* Il reste encore à montrer la deuxième partie de la proposition.

Il suffira de montrer que ν_2^2 est injective.

Soit $c = (c_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in C_2(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 5} \bigwedge^2[\sigma_{ij}]_2$ tel que $\nu_2^2(c) = 0$.

Comme σ_{123} , σ_{rs4} , σ_{pq5} sont régulières modulo 2, $c_{ij} = 0$ pour $i < j \in \{1, 2, 3\}$, $c_{ij} = 0$ pour $i < j \in \{r, s, 4\}$ et $c_{ij} = 0$ pour $i < j \in \{p, q, 5\}$.

Soit $t_1 = \{1, 2, 3\} - \{r, s\}$ et $t_2 = \{1, 2, 3\} - \{p, q\}$.

– On regarde la face σ_{rt_14} . On a :

$$c_{r4} + c_{t_14} + c_{rt_1} = 0$$

Comme $c_{r4} = c_{rt_1} = 0$ ($\{r, t_1\} \subset \{1, 2, 3\}$), $c_{t_14} = 0$.

– On regarde la face σ_{pt_25} . On a

$$c_{p5} + c_{t_25} + c_{pt_2} = 0$$

Comme $c_{p5} = c_{pt_2} = 0$ ($\{p, t_2\} \subset \{1, 2, 3\}$), $c_{t_25} = 0$.

Pour finir, seul le terme c_{45} pourrait à ce stade être non nul. Si l'on regarde la face σ_{145} , alors $c_{14} + c_{15} + c_{45} = 0$ et donc $c_{45} = 0$.

Finalement, $c = 0$ donc ν_2^2 est injective et $H_2(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$. \square

On peut maintenant démontrer la proposition 6.1.11.

Démonstration:

* Lorsque $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) \geq 3$, $H_5((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_4((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_3((\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$ d'après la proposition 6.1.12. Ainsi d'après la proposition 6.1.1, on doit avoir $H_5((\mathcal{G}^\Delta)) = H_4((\mathcal{G}^\Delta)) = \{0\}$. Ainsi:

$$G_{51}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{41}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$$

Ensuite, en utilisant la proposition 3.2.2, on obtient

$$G_{52}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$$

* En remplaçant δ par δ^\vee et en utilisant la proposition 6.1.12, on obtient:

$$H_5((\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee) = H_4((\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee) = H_3((\mathcal{G}^{\Delta^\vee})^\vee) = \{0\}$$

En utilisant l'égalité (20), on obtient alors:

$$H_0(\mathcal{G}^\Delta) = H_1(\mathcal{G}^\Delta) = H_2(\mathcal{G}^\Delta) = \{0\}$$

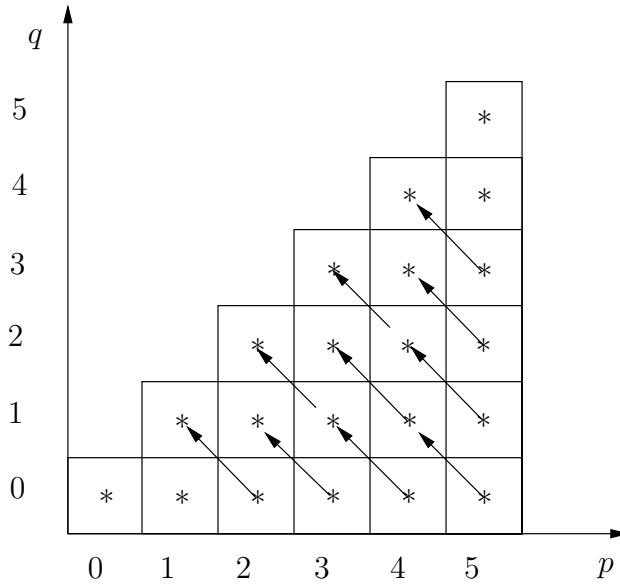
Par conséquent, $G_{11}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = G_{21}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$.

Toujours d'après 6.1.12, $H_5(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_4(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = H_3(\bigwedge^2(\mathcal{G}^\Delta)^\vee) = \{0\}$. Alors en utilisant l'égalité (22), on a $G_{22}^1(X_\delta(\mathbb{R})) = \{0\}$. \square

6.2 Maximalité de X_δ lorsque $n = 5$

On va montrer dans cette partie que la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1 lorsque $n = 5$. La figure 15 donne la forme et les différentielles du terme $G_{pq}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$ de $G_{pq}^*(X_\delta(\mathbb{R}))$.

FIG. 15 – Le terme $G_{pq}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$ et ses différentielles



D'après 5.1.6, il suffira de montrer que toutes les différentielles de $A_*(X_\delta(\mathbb{R}))$ sont strictement compatibles avec la filtration I^* . On sait déjà que les différentielles ∂_1, ∂_2 et ∂_5 le sont (grâce à 5.1.26 et 5.1.30); ainsi il ne restera plus qu'à vérifier que ∂_3 et ∂_4 le sont également.

En utilisant 5.1.4, 5.1.24 et 5.1.33, il suffira pour cela de prouver que le complexe $A_*(X_\delta(\mathbb{R}))$ satisfait les conditions s_{42} et s_{31} .

Le traitement de la condition s_{42} se fera en utilisant des techniques similaires à celles utilisées dans la section 5.1.5 et sera assez direct alors qu'il faudra faire une étude de cas pour s_{31} .

Soit $\Delta(1) = \{\tau_i, i = 1 \dots 5\}$. Pour chaque $1 \leq i \leq 5$, on notera $\rho_i \in N$ le générateur de $[\tau_i]$ contenu dans τ_i et $v_i \in V$ désignera sa classe modulo 2.

Si $\sigma \in \Delta(2)$, il existe ρ_i et $\rho_j, 1 \leq i < j \leq s$ tels que $\sigma = Pos(\rho_i, \rho_j)$. On pose alors $\sigma = \sigma_{ij}$.

Étant donné $\sigma_{ij} \in \Delta(2)$, on notera:

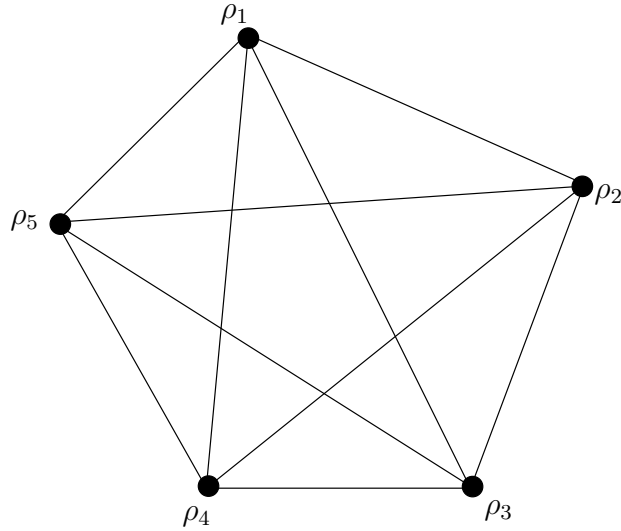
- $p_{ij} : \frac{V}{[\tau_i]_2} \rightarrow \frac{V}{\sigma_{ij}}$ la projection naturelle.
- $p_{ij}^2 : \bigwedge^2 \frac{V}{[\tau_i]_2} \rightarrow \bigwedge^2 \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}$ l'application induite par p_{ij} en passant aux formes extérieures de degré 2.
- $\pi_{ij} : H_0\left(\frac{V}{[\tau_i]_2}\right) \rightarrow H_0\left(\frac{V}{\sigma_{ij}}\right)$ l'application induite en homologie par p_{ij} .

De même, si $\gamma \in \Delta(3)$, il existe ρ_i, ρ_j et $\rho_k, 1 \leq i < j \leq s$ tels que $\sigma = Pos(\rho_i, \rho_j, \rho_k)$ et on pose alors $\gamma = \gamma_{ijk}$.

6.2.1 Condition s_{42} pour $A_*(X_\delta(\mathbb{R}))$

On peut représenter le 2-squelette de $\Delta, \Delta(\leq 2)$, par la figure 16 (en projetant δ sur un sous-espace de dimension 3 générique et en effectuant une représentation projective).

FIG. 16 – Représentation de $\Delta_{\leq 2}$



Remarque 6.2.1 La propriété de ce 2-squelette qui va nous servir est la suivante: Il existe $i \in \{1, \dots, 5\}$ tel que pour tout $j \neq i \in \{1, \dots, 5\}$, le cône σ_{ij} soit dans $\Delta(2)$. Pour un cône quelconque (ie: non simplicial) de dimension 5, cette propriété est fausse.

Pour utiliser la proposition 5.1.2, il faudra démontrer le lemme suivant:

Lemme 6.2.2 Soit $c \in I^2(A_4(X_\delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_4(c) \in I^3(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$. Alors il existe $c' \in I^2(A_4(X_\delta(\mathbb{R})))$ vérifiant:

- $\bar{c} = \bar{c}' \in \frac{I^2}{I^3} A_4(X_\delta(\mathbb{R}))$
- $\partial_4(c') = 0$

Démonstration:

Soit $c = (c_1, \dots, c_5) \in I^2(A_4(X_\delta(\mathbb{R})))$ une telle chaîne, $c_i \in H_0\left(\frac{V}{[\tau_i]_2}\right)$.

Pour $i = 1 \dots 5$ on notera $\bar{c}_i \in \bigwedge^2 \frac{V}{[\tau_i]_2}$ la classe de c_i modulo I^3 . Ainsi $\bar{c} = (\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_5)$ si \bar{c} désigne la classe de c modulo I^3 .

On va travailler dans un premier temps modulo I^3 . Pour $i \in \{1, \dots, 5\}$, \bar{c}_i est un élément de $\bigwedge^2 \frac{V}{[\tau_i]_2}$. On va modifier la classe \bar{c} par un bord de façon à ce que \bar{c}_i , ainsi transformé, soit un élément pur de $\bigwedge^2 \frac{V}{[\tau_i]_2}$.

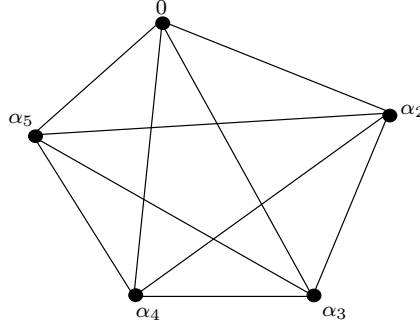
Soit $p_1^2 : \bigwedge^2 V \rightarrow \bigwedge^2 \frac{V}{[\tau_1]_2}$ la projection naturelle. Il existe $w \in \bigwedge^2 V$ tel que $p_1^2(w) = \bar{c}_1$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_5) \in \bigoplus_{i=1}^5 \bigwedge^2 \frac{V}{[\tau_i]_2}$ défini par:

$$\alpha = \partial_{52}^0(w) + \bar{c}$$

La figure 17 indique la forme de α sur le 2-squelette de Δ .

FIG. 17 – L'élément α



Comme $\partial_4(c) \in I^3(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$, on a:

$$\partial_{42}^0(\bar{c}) = 0 \in G_{32}^0$$

Ainsi $\partial_{42}^0(\alpha) = 0$. En particulier, on doit avoir pour $2 \leq i \leq 5$:

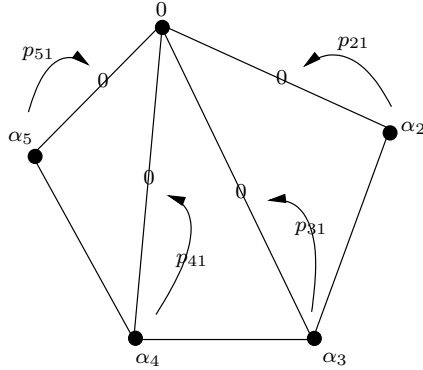
$$p_{i1}^2(\alpha_i) = 0$$

La figure 18 représente la projection de α .

Pour $1 \leq i \leq 5$ on définit $v_{1i} \in [\sigma_{1i}]_2$ par:

- $v_{1i} = v_i$ si σ_{1i} est régulier modulo 2. (ie si $[\sigma_{1i}]_2 = \text{Vect}(v_1, v_i)$).

FIG. 18 – Projection de α



- v_{1i} est choisi dans $[\sigma_{1i}]_2$ de telle sorte que $v_{1i} \neq v_1$ si $v_1 = v_i$.

Ainsi $[\sigma_{1i}]_2 = \text{Vect}(v_1, v_{1i})$ dans les 2 cas.

Regardons quel est le noyau de:

$$p_{i,1}^2 : \bigwedge^2 \frac{V}{[\tau_i]_2} = \bigwedge^2 \frac{V}{\text{Vect}(v_{1i})} \rightarrow \bigwedge^2 \frac{V}{[\sigma_{1i}]_2} = \bigwedge^2 \frac{V}{\text{Vect}(v_1, v_{1i})}$$

Il y a 2 cas:

- Si $v_i = v_{1i}$ (ie: $v_1 \neq v_i$) et si $\overline{v_1}$ désigne la classe du vecteur v_1 dans $\frac{V}{\text{Vect}(v_i)}$, alors:

$$\ker(p_{i,1}^2) = \{\overline{v_1} \wedge u, u \in \frac{V}{\text{Vect}(v_i)}\}$$

- Si $v_i \neq v_{1i}$ (ie: $v_i = v_1$) et si $\overline{v_{i1}}$ désigne la classe du vecteur v_{i1} dans $\frac{V}{\text{Vect}(v_i)}$, alors:

$$\ker(p_{i,1}^2) = \{\overline{v_{i1}} \wedge u, u \in \frac{V}{\text{Vect}(v_i)}\}$$

Comme $\alpha_i \in \ker(p_{i,1}^2)$ pour $i = 2, \dots, 5$, il existe dans les 2 cas $u_i \in \frac{V}{\text{Vect}(v_i)}$ tel que:

$$\alpha_i = \begin{cases} \overline{v_1} \wedge u_i & \text{si } v_i \neq v_1 \\ \overline{v_{i1}} \wedge u_i & \text{si } v_i = v_1 \end{cases}$$

Pour $i = 1, \dots, 5$, on définit $b_i \in H_0(\frac{V}{[\tau_i]_2})$ par:

$$b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ ([0] + \overline{v_1})([0] + [u_i]) & \text{si } v_i \neq v_1 \\ ([0] + \overline{v_{i1}})([0] + [u_i]) & \text{si } v_i = v_1 \end{cases}$$

Ainsi $b = (b_1, \dots, b_5) \in A_4(X_\delta(\mathbb{R}))$ vérifie:

- $b \in I^2(A_4(X_\delta(\mathbb{R})))$
- $\bar{b} = \alpha$ si \bar{b} désigne la classe de b dans $\frac{I^2}{I^3}A_4(X_\delta(\mathbb{R}))$

Lemme 6.2.3 $b \in A_4(X_\delta(\mathbb{R}))$ est un cycle de $A_*(X_\delta(\mathbb{R}))$.

Démonstration:

Soit $1 \leq i \leq 5$. Montrons dans un premier temps que $\pi_{i1}(b_i) = 0$.

b_i est la classe fondamentale du plan $\text{Vect}(\overline{v_1}, u_i)$ si $v_1 \neq v_i$ ou du plan $\text{Vect}(\overline{v_{i1}}, u_i)$ si $v_1 = v_i$. Ce plan sera noté par la suite P_i .

Dans les 2 cas, le lemme 5.1.29 montre que $\pi_{i1}(P_i) = 0$.

Il reste à voir que pour $i < j \in \{2, \dots, 5\}$, b vérifie:

$$\pi_{ij}(b_i) + \pi_{ji}(b_j) = 0 \in H_0\left(\frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}\right)$$

Soit $2 \leq i < j \leq 5$. Comme $\partial_{42}^0(\alpha) = 0$, on doit avoir:

$$p_{ij}(\alpha_i) + p_{ji}(\alpha_j) = 0 \Leftrightarrow p_{ij}(\alpha_i) = p_{ji}(\alpha_j) \in \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}$$

Remarque 6.2.4 Soit E un espace vectoriel sur $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ et $(x, y, z, t) \in E^4$ vérifiant $x \wedge y \neq 0$. Alors:

$$x \wedge y = z \wedge t \in \bigwedge^2 E \Leftrightarrow \text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(z, t)$$

D'après la remarque ci dessus, on doit ainsi avoir:

$$p_{ij}(P_i) = p_{ji}(P_j)$$

Mais alors si $[P_i]$ (resp $[P_j]$) désigne la classe fondamentale du plan P_i (resp P_j), on doit avoir:

$$\pi_{ij}([P_i]) = \pi_{ji}([P_j])$$

Comme $b_i = [P_i]$ (resp $b_j = [P_j]$), Cela revient à dire:

$$\pi_{ij}(b_i) = \pi_{ji}(b_j) \Leftrightarrow \pi_{ij}(b_i) + \pi_{ji}(b_j) = 0$$

Donc $\partial_4(b) = 0$. \square

On choisit ensuite $a \in I^2(A_5(X_\delta(\mathbb{R})))$ de telle sorte que la classe \bar{a} de a modulo I^3 soit w et l'on pose:

$$c' = \partial_5(a) + b$$

c' vérifie ainsi:

- $c' \in I^2(A_4(X_\delta(\mathbb{R})))$
- $\bar{c}' = \bar{c}$ si \bar{c}' désigne la classe de c' modulo I^3
- c' est un cycle de $A_4(X_\delta(\mathbb{R}))$.

Donc c' convient. \square

En utilisant 5.1.4, on obtient:

Corollaire 6.2.5 *La différentielle ∂_4 est strictement compatible avec la filtration I^* .*

6.2.2 Condition s_{31} pour $A_*(X_\delta(\mathbb{R}))$

Pour montrer que cette condition est vérifiée, on va procéder différemment. On va dans un premier temps éliminer un certain nombre de cas dans lesquels on peut utiliser les arguments habituels et ensuite montrer que dans les cas qui resteront, on pourra toujours trouver des bases adaptées à l'éventail Δ au rang 2 et ainsi pouvoir appliquer la proposition 5.1.19.

Commençons donc par éliminer quelques cas.

Soit $\sigma \in \Delta(3)$, il existe $i < j < k \in \{1, \dots, 5\}$ tels que $\sigma = Pos(\rho_i, \rho_j, \rho_k)$ et on pose $\sigma = \sigma_{ijk}$.

Pour $1 \leq i < j < k \leq 5$, on notera:

- $p_{ijk} : \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2} \rightarrow \frac{V}{[\sigma_{ijk}]_2}$ la projection naturelle.
- $\pi_{ijk} : H_0\left(\frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}\right) \rightarrow H_0\left(\frac{V}{[\sigma_{ijk}]_2}\right)$ l'application induite par p_{ijk} en homologie.

Le premier cas que l'on va éliminer est le cas où il existe $1 \leq i < j < k \leq 5$ tels que:

$$[\sigma_{ij}]_2 + [\sigma_{ik}]_2 + [\sigma_{jk}]_2 = [\sigma_{ijk}]_2$$

Proposition 6.2.6 *Supposons qu'il existe $1 \leq i < j < k \leq 5$ tels que:*

$$[\sigma_{ij}]_2 + [\sigma_{ik}]_2 + [\sigma_{jk}]_2 = [\sigma_{ijk}]_2$$

Alors s_{31} est vérifiée.

Pour montrer ce résultat, il suffira comme toujours, en utilisant la proposition 5.1.2, de montrer le lemme suivant:

Lemme 6.2.7 *On se place dans les hypothèses de la proposition 6.2.6. Soit $c \in I(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_3(c) \in I^2(A_4(X_\delta(\mathbb{R})))$. Alors il existe $c' \in I(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$ vérifiant:*

- $\bar{c} = \bar{c}' \in \frac{I}{I^2}A_3(X_\delta(\mathbb{R}))$
- $\partial_3(c') = 0$

Démonstration:

Soit $c = (c_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in I(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_3(c) \in I^2(A_4(X_\delta(\mathbb{R})))$.

Pour $1 \leq i < j \leq 5$, on notera $\overline{c_{ij}} \in \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}$ la classe de la chaîne c_{ij} modulo I^2 et $\bar{c} = (\overline{c_{ij}})_{i < j}$ celle de c .

Comme $\partial_3(c) \in I^2(A_2(X_\delta(\mathbb{R})))$, \bar{c} vérifie:

$$\partial_{31}^0(\bar{c}) = 0 \in G_{21}^0(X_\delta(\mathbb{R})) = \bigoplus_{1 \leq i < j < k \leq 5} \frac{V}{[\sigma_{ijk}]_2}$$

Ainsi si on fixe un cône $\sigma_{ijk} \in \Delta(3)$ alors \bar{c} vérifie:

$$p_{ijk}(\overline{c_{ij}}) + p_{ikj}(\overline{c_{ik}}) + p_{jki}(\overline{c_{jk}}) = 0$$

On peut supposer que

$$[\sigma_{12}]_2 + [\sigma_{13}]_2 + [\sigma_{23}]_2 = [\sigma_{123}]_2$$

Lemme 6.2.8 *Il existe $w = (w_1, w_2, w_3) \in \bigoplus_{i=1}^3 \frac{V}{[\tau_i]_2}$ tel que:*

- $p_{12}(w_1) + p_{21}(w_2) = \overline{c_{12}}$
- $p_{13}(w_1) + p_{31}(w_3) = \overline{c_{13}}$
- $p_{23}(w_2) + p_{32}(w_3) = \overline{c_{23}}$

Démonstration:

On rappelle que $[\sigma_{123}]$ est le sous-réseau de N engendré par σ_{123} , ie:

$$[\sigma_{123}] = (\sigma_{123} + -\sigma_{123}) \cap N$$

Soit U (resp U') la variété torique réelle définie par σ_{123} vu comme cône dans $N_{\mathbb{R}}$ (resp $[\sigma_{123}] \otimes \mathbb{R}$). Alors U et U' sont liées par la relation:

$$U \simeq U' \times T_{\frac{N}{[\sigma_{123}]}}(\mathbb{R})$$

où $T_{\frac{N}{[\sigma_{123}]}}(\mathbb{R}) \simeq (\mathbb{R}^*)^2$ est un tore algébrique réel de dimension 2.

Remarque 6.2.9 Le lemme 6.2.7 sera démontré si l'on prouve que le terme $G_{pq}^1(U)$ de la suite spectrale associée à U vérifie $G_{31}^1(U) = 0$.

On va se servir de la structure de produit de U pour arriver au résultat énoncé dans la remarque ci dessus.

La variété torique U' est affine simpliciale et de dimension 3. Comme $[\sigma_{12}]_2 + [\sigma_{13}]_2 + [\sigma_{23}]_2 = [\sigma_{123}]_2$, on a d'après 6.1.2 et 3.2.1:

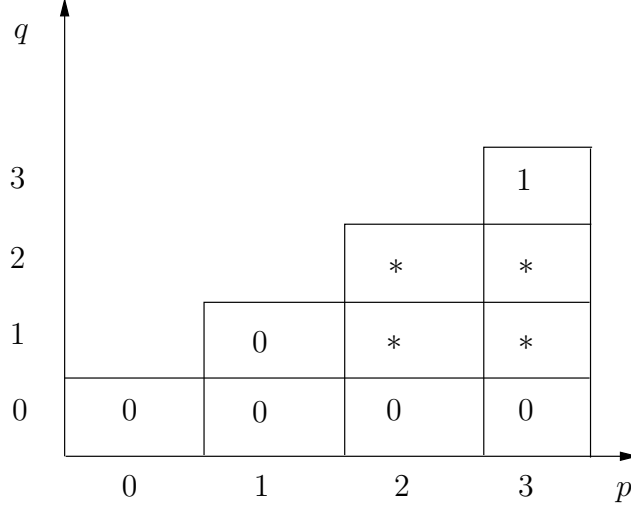
$$G_{pq}^1(U') = 0 \text{ pour } p \leq 1$$

La figure 19 donne la forme du terme $G_{pq}^1(U')$ de la suite spectrale $G_{pq}^*(U')$.

Mais alors d'après 4.3.7, le terme $G_{pq}^1(U)$ de la suite spectrale associée à U vérifie:

$$G_{pq}^1(U) = 0 \text{ pour } p \leq 3 \quad \square$$

FIG. 19 – Le terme $G_{pq}^1(U')$



Soit $(w_1, w_2, w_3) \in \bigoplus_{i=1}^3 \frac{V}{[\tau_i]_2}$ le triplet donné par le lemme 6.2.8.

On choisit également $w_4 \in \frac{V}{[\tau_4]_2}$ tel que $p_{45}(w_4) = \bar{c}_{45}$ et on définit $w \in \bigoplus_{i=1}^5 \frac{V}{[\tau_i]_2}$ par:

$$w = (w_1, w_2, w_3, w_4, 0)$$

Soit $\alpha = (\alpha_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 5} \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2} \simeq \frac{I}{I^2}(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$ défini par:

$$\alpha = \partial_{41}^0(w) + \bar{c}$$

Alors α vérifie:

$$\alpha_{12} = 0, \alpha_{13} = 0, \alpha_{23} = 0, \alpha_{45} = 0$$

La figure 20 donne la forme du terme α sur le diagramme représentant le 2-squelette de δ .

Remarque 6.2.10 α vérifie en particulier la propriété suivante:

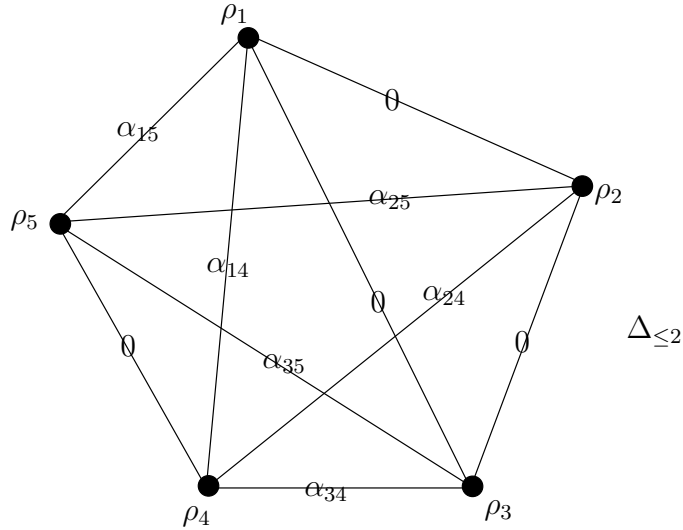
$$\forall 1 \leq i < j < k \leq 5, \exists m_1, m_2 \in \{i, j, k\}, \alpha_{m_1, m_2} = 0$$

Soit $b = (b_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in I(A_3(X))$ définie par:

$$b_{ij} = [0] + [\alpha_{ij}], \text{ pour } 1 \leq i < j \leq 5$$

Lemme 6.2.11 b est un cycle de $A_3(X_\delta(\mathbb{R}))$.

FIG. 20 – α sur le 2-squelette de δ



Démonstration:

Il s'agit de montrer que pour tout triplet (i, j, k) où $1 \leq i < j < k \leq 5$, b vérifie:

$$\pi_{ijk}(b_{ij}) + \pi_{ikj}(b_{ik}) + \pi_{jki}(b_{jk}) = 0 \in H_0\left(\frac{V}{[\sigma_{ijk}]_2}\right)$$

On se fixe un triplet (i, j, k) , $1 \leq i < j < k \leq 5$. Comme $\partial_3(c) \in I^2(A_2(X_\delta(\mathbb{R})))$, c est un cycle modulo I^2 , c'est à dire que $\partial_{31}^0(\bar{c}) = 0$. Ainsi α vérifie:

$$\partial_{31}^0(\alpha) = 0$$

Ce qui signifie que l'on a:

$$p_{ijk}(\alpha_{ij}) + p_{ikj}(\alpha_{ik}) + p_{jki}(\alpha_{jk}) = 0 \in \frac{V}{[\sigma_{ijk}]_2}$$

On peut supposer que $\alpha_{jk} = 0$ (cf remarque ci dessus) et donc que $b_{jk} = 0$. Ainsi:

$$p_{ijk}(\alpha_{ij}) = p_{ikj}(\alpha_{ik})$$

Maintenant, on a:

$$\begin{aligned} \pi_{ijk}(b_{ij}) + \pi_{ikj}(b_{ik}) + \pi_{jki}(b_{jk}) &= \pi_{ijk}(b_{ij}) + \pi_{ikj}(b_{ik}) \\ &= ([0] + [p_{ijk}(\alpha_{ij})]) + ([0] + [p_{ikj}(\alpha_{ik})]) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc b est un cycle de $A_3(X_\delta(\mathbb{R}))$. \square

Pour finir, soit $a \in I(A_4(X_\delta(\mathbb{R})))$ telle que la classe \bar{a} de a modulo I^2 vérifie:

$$\bar{a} = w$$

On pose $c' = \partial_4(a) + b$. Alors c' vérifie:

- $c' \in I(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$
- La classe \bar{c}' de c' modulo I^2 vérifie:

$$\bar{c}' = \bar{c}$$

- $\partial_3(c') = 0$

Donc c' convient. \square

On pourra ainsi supposer par la suite que:

$$\forall 1 \leq i < j < k \leq 5, [\sigma_{ij}]_2 = [\sigma_{ik}]_2 = [\sigma_{jk}]_2$$

Mais alors:

$$\forall 1 \leq i < j \leq 5, 1 \leq k < l \leq 5, [\sigma_{ij}]_2 = [\sigma_{kl}]_2$$

Remarque 6.2.12 En particulier, $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) \leq 2$.

On peut éliminer un autre cas:

Proposition 6.2.13 *Supposons que:*

$$\dim\left(\sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} [\sigma_{ijk}]_2\right) < 5$$

Alors la condition s_{31} est vérifiée.

Pour démontrer cette proposition, il suffira grâce à la proposition 5.1.2 de prouver le lemme suivant:

Lemme 6.2.14 *On se place dans les hypothèses de la proposition 6.2.13. Soit $c \in I(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_3(c) \in I^2(A_2(X_\delta(\mathbb{R})))$. Alors il existe $c' \in I(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$ vérifiant:*

- $\bar{c} = \bar{c}' \in \frac{I}{I^2}A_3(X_\delta(\mathbb{R}))$
- $\partial_3(c') = 0$

Remarque 6.2.15 Pour étudier la différentielle ∂_{31}^1 , on peut remplacer $X_\delta(\mathbb{R})$ par la variété $(X_\delta(\mathbb{R}))_{\leq 3}$ associée au 3-squelette $\Delta(\leq 3)$ de Δ (on peut ignorer toutes les orbites de $X_\delta(\mathbb{R})$ dont les dimensions sont strictement inférieures à 2).

Démonstration:

D'après la remarque ci dessus, on peut supposer que $\Delta = \Delta_{\leq 3}$.
 Soit $V = V' \oplus V''$ la décomposition en somme directe de V donnée par:

$$V' = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} [\sigma_{ijk}]_2 \subset V$$

où V'' est un supplémentaire quelconque de V' .

Soit $\sigma \in \Delta$. Alors il existe un isomorphisme induit par la décomposition précédente:

$$\frac{V}{[\sigma]_2} \simeq \frac{V'}{[\sigma]_2} \oplus V''$$

On considère les faisceaux \mathcal{G} , \mathcal{G}' et \mathcal{G}'' sur Δ définis par:

- * $\mathcal{G} = \mathcal{G}^\Delta = \left(\frac{V}{[\sigma]_2}, p_{\tau, \sigma} \right)_{\tau \leq \sigma \in \Delta}$.
- * $\mathcal{G}' = \left(\frac{V'}{[\sigma]_2}, p'_{\tau, \sigma} \right)_{\tau \leq \sigma \in \Delta}$ où $p'_{\tau, \sigma} : \frac{V'}{[\tau]_2} \rightarrow \frac{V'}{[\sigma]_2}$ est la projection naturelle si $\tau \leq \sigma \in \Delta$.
- * $\mathcal{G}'' = (V'', id_{V''})_{\tau \leq \sigma \in \Delta}$ (\mathcal{G}'' est le faisceau constant sur Δ de fibre V'').

Ainsi on a une suite exacte courte de faisceaux sur Δ :

$$0 \rightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'' \rightarrow 0$$

On note:

- $\nu_i : C_i(\mathcal{G}) \rightarrow C_{i-1}(\mathcal{G})$ la différentielle du complexe de chaînes $C_*(\mathcal{G})$ associé au faisceau \mathcal{G}
- $\nu'_i : C_i(\mathcal{G}') \rightarrow C_{i-1}(\mathcal{G}')$ la différentielle du complexe de chaînes $C_*(\mathcal{G}')$ associé au faisceau \mathcal{G}'
- $\nu''_i : C_i(\mathcal{G}'') \rightarrow C_{i-1}(\mathcal{G}'')$ la différentielle du complexe de chaînes $C_*(\mathcal{G}'')$ associé au faisceau \mathcal{G}''

Remarque 6.2.16 Comme cela a déjà été noté, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $G_{p,1}^0(X_\delta(\mathbb{R})) = C_p(\mathcal{G})$ et $\partial_{p1}^1 = \nu_p$.

Lemme 6.2.17 *Le faisceau \mathcal{G}'' vérifie $H_3(\mathcal{G}'') = 0$.*

Démonstration:

On peut le voir à la main.

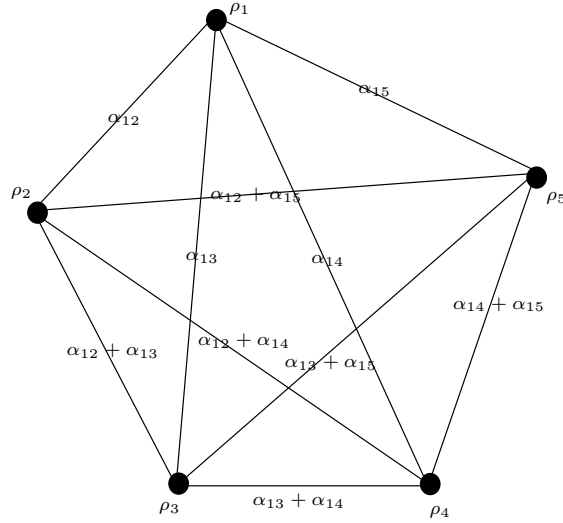
Soit $\alpha = (\alpha_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in C_3(\mathcal{G}'')$ tel que $\nu''_3(\alpha) = 0$ et $i \leq i < j < k \leq 5$. Alors on doit avoir:

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ik} + \alpha_{jk} = 0 \Leftrightarrow \alpha_{jk} = \alpha_{ij} + \alpha_{ik}$$

Ainsi α a nécessairement la forme donnée par la figure 21.

Soit $w = (0, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{14}, \alpha_{15}) \in C_4(\mathcal{G}'') = \bigoplus_{i=1}^5 \frac{V''}{[\tau_i]_2}$. Alors $\nu''_4(w) = \alpha$. \square

FIG. 21 – Forme de α



Soit $c = (c_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in I(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$ telle que $\partial_3(c) \in I^2(A_2(X_\delta(\mathbb{R})))$. Pour $1 \leq i < j \leq 5$, on note $\overline{c_{ij}} \in \frac{V}{[\sigma_{ij}]_2}$ la classe de c_{ij} modulo I^2 et $\overline{c} = (\overline{c_{ij}}) \in G_{31}^0(X_\delta(\mathbb{R}))$ celle de c .

Pour $1 \leq i < j \leq 5$, on décompose $\overline{c_{ij}}$ en:

$$\overline{c_{ij}} = \alpha'_{ij} + \alpha''_{ij}$$

où $\alpha'_{ij} \in \frac{V'}{[\sigma_{ij}]_2}$ et $\alpha''_{ij} \in V''$.

On pose:

- $\alpha' = (\alpha'_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in C_3(\mathcal{G}')$
- $\alpha'' = (\alpha''_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in C_3(\mathcal{G}'')$

Comme $\partial_3(c) \in I^2(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$, on a:

$$\partial_{31}^0(\overline{c}) = 0 \Leftrightarrow \nu_3(\overline{c}) = 0$$

Ainsi:

- $\nu'_3(\alpha') = 0$
- $\nu''_3(\alpha'') = 0$

D'après 6.2.17, $H_3(\mathcal{G}'') = 0$ donc il existe $w = (w_1, \dots, w_5) \in C_4(\mathcal{G}'') = \bigoplus_{i=1}^5 \frac{V''}{[\tau_i]_2}$ tel que $\nu_4(w) = \alpha''$. On choisit $a \in I(A_4(X_\delta(\mathbb{R})))$ tel que la classe \overline{a} de a modulo I^2 vérifie

$$\overline{a} = w$$

et on pose $b'' = \partial_4(a)$.

Pour $1 \leq i < j \leq 5$, on pose $b'_{ij} = [0] + [\alpha'_{ij}] \in H_0(\frac{V'}{[\sigma_{ij}]_2})$ et on note $b' = (b'_{ij})_{1 \leq i < j \leq 5} \in I(A_3(X_\delta(\mathbb{R})))$ la chaîne ainsi obtenue.

Finalement, on pose $b = b' + b'' \in A_3(X_\delta(\mathbb{R}))$. Alors la classe $\bar{b} \in G_{31}^0(X_\delta(\mathbb{R}))$ de b modulo I^2 vérifie:

$$\bar{b} = \bar{c}$$

Lemme 6.2.18 b est un cycle de $A_3(X)$

Démonstration:

Comme b'' est un bord, il suffit de voir que $\partial_3(b') = 0$.

Il y a 2 cas: soit $\dim(V'') = 1$ soit $\dim(V'') = 2$.

* Si $\dim(V'') = 2$, alors comme $\frac{V''}{[\sigma_{ijk}]_2} = 0$ et on doit avoir

$$\forall 1 \leq i < j < k \leq 5, p_{ijk}(\alpha_{ij}) = 0$$

et donc:

$$\forall 1 \leq i < j < k \leq 5, \pi_{ijk}(b_{ij}) = [0] + [p_{ijk}(\alpha_{ij})] = 0$$

Ainsi $\partial_3(b') = 0$.

* Si $\dim V'' = 1$, alors $\dim(\frac{V''}{[\sigma_{ijk}]_2}) = 1$.

Comme $\nu'_3(\alpha') = 0$, on doit avoir:

$$\forall 1 \leq i < j < k \leq 5, \exists (i_1, i_2) \in \{i, j, k\}^2, p_{i_1 i_2 i_3}(\alpha_{i_1 i_2}) = 0 \text{ où } \{i_3\} = \{i, j, k\} - \{i_1, i_2\}$$

Soit $1 \leq i < j < k \leq 5$. on peut supposer que $p_{jki}(\alpha_{jk}) = 0$. Alors $p_{ijk}(\alpha_{ij}) = p_{ikj}(\alpha_{ik})$ et on a:

$$\begin{aligned} \pi_{ijk}(b_{ij}) + \pi_{ikj}(b_{ik}) + \pi_{jki}(b_{jk}) &= [0] + [p_{ijk}(\alpha_{ij})] + [0] + [p_{ikj}(\alpha_{ik})] + [0] + [p_{jki}(\alpha_{jk})] \\ &= [0] + [p_{ijk}(\alpha_{ij})] + [0] + [p_{ikj}(\alpha_{ik})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\partial_3(b') = 0$. \square

En résumé, b vérifie:

$$- \bar{b} = \bar{c}$$

$$- \partial_3(b) = 0$$

Donc $c' = b$ convient. \square

Ainsi on peut supposer par la suite que Δ vérifie:

$$V = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} [\sigma_{ijk}]_2$$

On va ensuite s'intéresser au cône dual δ^\vee ce qui permettra d'éliminer un dernier cas. On notera Δ^\vee l'éventail constitué des faces de δ^\vee .

Proposition 6.2.19 *Si $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^\vee) \geq 3$ alors la condition s_{31} est satisfaite.*

Démonstration:

Il suffit d'utiliser les proposition 6.1.11 et 5.1.4. \square

En résumé, d'après 6.2.6, 6.2.13 et 6.2.19, on peut supposer que le cône δ vérifie:

- $V = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 5} [\sigma_{ijk}]_2$
- $\forall 1 \leq i < j \leq 5, 1 \leq k < l \leq 5, [\sigma_{ij}]_2 = [\sigma_{kl}]_2$
- $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^\vee) \leq 2$

Dans ce cas, le cône δ^\vee vérifie les trois conditions suivantes:

- (1) $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^\vee) \leq 2$
- (2) $\bigcap_{\sigma \in \Delta^\vee(2)} [\sigma]_2 = \{0\}$
- (3) $\forall (\sigma, \sigma') \in (\Delta^\vee(3))^2, [\sigma]_2 = [\sigma']_2$

Remarque 6.2.20 les 2 premières conditions donnent en particulier:

$$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^\vee) = 2$$

On va maintenant regarder plus précisément ce que ces conditions impliquent pour la combinatoire de l'éventail Δ^\vee .

On pose $\Delta^\vee(1) = \{\tau_i^*, i = 1, \dots, 5\}$. Pour $i = 1, \dots, 5$ on notera $\mu_i \in M$ le générateur du sous-réseau $[\tau_i^*]$ contenu dans τ_i^* et $u_i \in V^*$ désignera sa classe modulo 2.

En reprenant les notations utilisées pour δ , on notera également:

- $\sigma_{ij} = \text{Pos}(\mu_i, \mu_j) \in \Delta^\vee(2)$ pour $1 \leq i < j \leq 5$
- $\sigma_{ijk} = \text{Pos}(\mu_i, \mu_j, \mu_k) \in \Delta^\vee(3)$ pour $1 \leq i < j < k \leq 5$

Comme $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta^\vee) = 2$, on peut supposer que (u_1, u_2) est une base de $\text{Vect}(u_i, i = 1 \dots 5)$. Soit $w, \xi, \eta \in V^*$ tels que:

- $[\sigma_{123}]_2 = \text{Vect}(u_1, u_2, w)$
- (u_1, u_2, w, ξ, η) est une base de V^*

On note $(u_1^*, u_2^*, w^*, \xi^*, \eta^*)$ la base de V duale de celle-ci.

Lemme 6.2.21 *Supposons que $\text{Card}(i, u_i = u_1 + u_2) \leq 1$. Alors $(u_1^*, u_2^*, w^*, \xi^*, \eta^*)$ est une base adaptée à δ au rang 2.*

Démonstration:

Soit $\sigma \in \Delta^\vee(2)$, $\sigma = \sigma_{ij}$ avec $1 \leq i < j \leq 5$.

Comme $\text{Card}(i, u_i = u_1 + u_2) \leq 1$, soit $u_i \neq u_1 + u_2$, soit $u_j \neq u_1 + u_2$. Ainsi si $u_i = u_j$, on doit avoir $u_i = u_1$ ou $u_i = u_2$.

Si $u_i \neq u_j$, alors $[\sigma_{ij}]_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et donc:

$$[\sigma_{ij}]_2^\perp = \text{Vect}(w^*, \xi^*, \eta^*)$$

Si $u_i = u_j$, on peut supposer que $u_i = u_1$ (Le cas où $u_i = u_2$ est symétrique). On a alors 3 cas:

– Soit $u_2 \in [\sigma_{ij}]_2$. Alors $[\sigma_{ij}]_2 = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et donc:

$$[\sigma_{ij}]_2^\perp = \text{Vect}(w^*, \xi^*, \eta^*)$$

– Soit $w \in [\sigma_{ij}]_2$. Alors $[\sigma_{ij}]_2 = \text{Vect}(u_1, w)$ et donc:

$$[\sigma_{ij}]_2^\perp = \text{Vect}(u_2^*, \xi^*, \eta^*)$$

– Soit $u_2 + w \in [\sigma_{ij}]_2$. Alors $[\sigma_{ij}]_2 = \text{Vect}(u_1, u_2 + w)$ et donc:

$$[\sigma_{ij}]_2^\perp = \text{Vect}(u_2^* + w^*, \xi^*, \eta^*)$$

Comme $\{[\sigma]_2, \sigma \in \Delta(3)\} = \{[\sigma]_2^\perp, \sigma \in \Delta^\vee(2)\}$, le résultat est démontré. \square

Ainsi d'après 5.1.19, la différentielle $\partial_3 : A_3(X_\delta(\mathbb{R})) \rightarrow A_2(X_\delta(\mathbb{R}))$ est strictement compatible avec la filtration I^* .

Remarque 6.2.22 Les hypothèses du lemme sont faites pour écarter la situation où l'on a à la fois:

– $u_i = u_j = u_1 + u_2$

– $u_1 + w \in [\sigma_{ij}]_2$ (Ce qui est équivalent à dire que $u_2 + w$ est dans $[\sigma_{ij}]_2$)

Dans ce cas, $[\sigma_{ij}]_2 = \text{Vect}(u_1 + u_2, u_1 + w)$ et $[\sigma_{ij}]_2^\perp = \text{Vect}(u_1^* + u_2^* + w^*, \xi^*, \eta^*)$.

Remarque 6.2.23 Si $\text{Card}(i, u_i = u_1 + u_2) = 3$ alors $u_1 + u_2 \in \bigcap_{\sigma \in \Delta^\vee(2)} [\sigma]_2$ donc ce cas de figure est à exclure (on avait supposé que $\bigcap_{\sigma \in \Delta^\vee(2)} [\sigma]_2 = \{0\}$).

Si $\text{Card}(i, u_i = u_1 + u_2) = 2$, on peut supposer, quitte à réordonner, que:

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (u_1, u_2, u_1 + u_2, u_1 + u_2, u_1) \text{ ou } (u_1, u_2, u_1 + u_2, u_1 + u_2, u_2)$$

Comme les 2 possibilités sont symétriques, on pourra supposer que:

$$(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (u_1, u_2, u_1 + u_2, u_1 + u_2, u_1)$$

Mais alors si on permute u_2 et $u_1 + u_2$, on se retrouve dans les hypothèses du lemme 6.2.21.

Finalement on a démontré:

Théorème 6.2.24 $G_{pq}^*(X_\delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1 si δ est un cône simplicial de dimension 5.

6.3 Description de $G_{pq}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$ lorsque $n = 3$

Dans cette dernière partie, on va déterminer entièrement le terme $G_{pq}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$ dans le cas où $n = 3$. On verra qu'il n'est possible d'obtenir que 5 cas différents.

Soit δ un cône simplicial de $N_{\mathbb{R}}$ de dimension 3. Comme précédemment, on notera Δ l'éventail constitué des faces de δ .

On pose $\Delta(1) = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$. Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, on note $\rho_i \in N$ le générateur de $[\tau_i]$ contenu dans τ_i et $v_i \in V$ sa classe modulo 2.

Pour $\sigma \in \Delta(2)$, il existe $i < j \in \{1, 2, 3\}$ tels que $\sigma = Pos(\rho_i, \rho_j)$; σ sera alors noté σ_{ij} .

FIG. 22 – Le cône δ

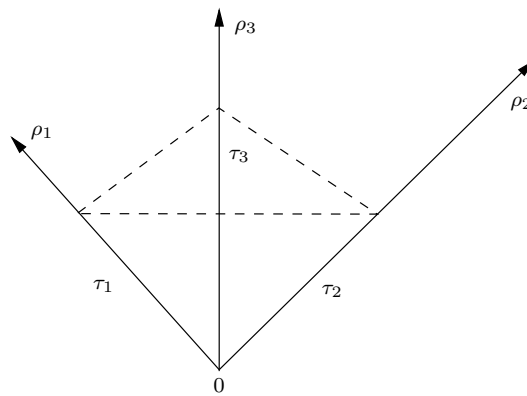
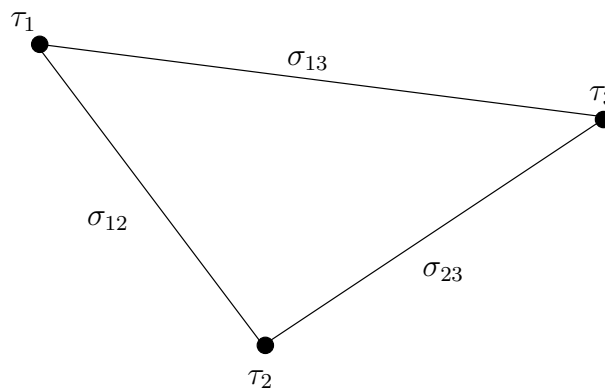
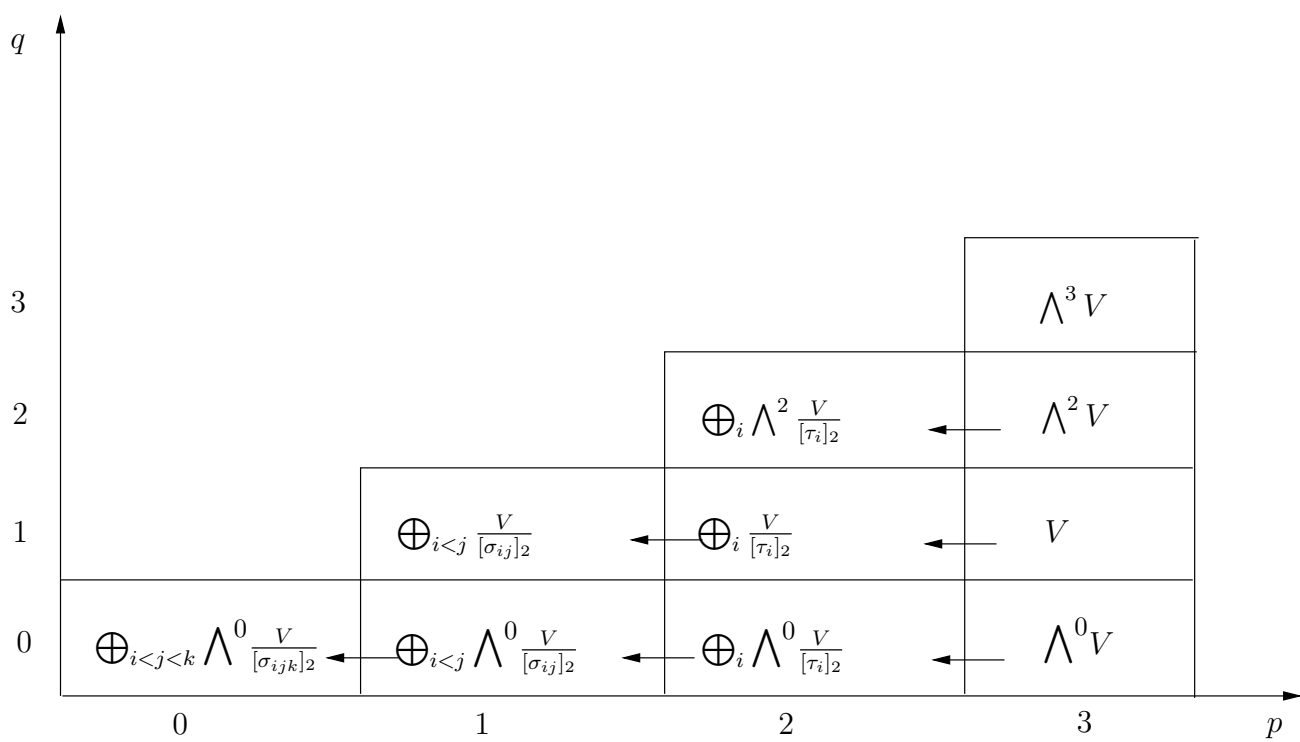


FIG. 23 – Représentation projective de δ



Le terme $G_{pq}^0(X_\delta(\mathbb{R}))$ est donné par la figure 24.

FIG. 24 – Le terme $G_{pq}^0(X_\delta(\mathbb{R}))$ et ses différentielles



Par exemple explicitement, la ligne de $G_{pq}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$ correspondante à $q = 1$ est donnée par l'homologie du complexe:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & V & & V \\
 & & \overline{[\sigma_{12}]_2} & \longleftarrow & \overline{[\tau_1]_2} \\
 & & \swarrow & & \searrow \\
 & V & & & V \\
 & \overline{[\sigma_{13}]_2} & & & \overline{[\tau_2]_2} \\
 & & \swarrow & & \searrow \\
 & V & & & V \\
 & \overline{[\sigma_{23}]_2} & \longleftarrow & & \overline{[\tau_3]_2}
 \end{array}$$

Il est facile de calculer les groupes d'homologie des complexes définis par chacune des ligne de $G_{pq}^0(X_\delta(\mathbb{R}))$ et on obtient alors le tableau 25.

Comme on l'a vu dans la section 5.2.1, la suite spectrale $G_{pq}^*(X_\delta(\mathbb{R}))$ dégénère à l'ordre 1. Ainsi la classification précédente donne exactement les nombres de Betti des variétés toriques affines simpliciales de dimension 3. Pour résumer, si $B_\delta \in \mathbb{N}^4$ est le quadruplet contenant les nombres de Betti de $X_\delta(\mathbb{R})$, on obtient:

- Si $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 1$,
 - * si $\forall (i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$, $[\sigma_{ij}]_2 = [\sigma_{ik}]_2$, alors $B_\delta = (0, 1, 4, 4)$
 - * si il existe $(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$ tel que $[\sigma_{ij}]_2 \neq [\sigma_{ik}]_2$, alors $B_\delta = (0, 0, 3, 4)$
- Si $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 2$:
 - * si $\forall (i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$, $[\sigma_{ij}]_2 = [\sigma_{ik}]_2$, alors $B_\delta = (0, 1, 2, 2)$
 - * si il existe $(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3$ tel que $[\sigma_{ij}]_2 \neq [\sigma_{ik}]_2$, alors $B_\delta = (0, 0, 1, 2)$
- Si $\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 3$ alors $B_\delta = (0, 0, 0, 1)$.

FIG. 25 – Les 5 possibilités pour $G_{pq}^1(X_\delta(\mathbb{R}))$

	$\exists(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3, [\sigma_{ij}]_2 \neq [\sigma_{ik}]_2$	$\forall(i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3, [\sigma_{ij}]_2 = [\sigma_{ik}]_2$
$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 1$		
$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 2$		
$\text{Rang}_{\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}}(\delta) = 3$		

Bibliographie

- [Az] **F.Guillén, V.Navarro Aznar**, *Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses*, Publ. IHES (2002).
- [Bi] **F.Bihan, C.McCrory, M.Franz, J.van Hamel**, *Is every toric variety an M -variety ?*, Manuscripta Math 120 (2006), 217-232.
- [Br] **M.Brion**, *The structure of the polytope algebra*, Tôhoku Math. J. 49 (1997), 1-32.
- [Bre] **G.E.Bredon**, *Topology and geometry*, Springer Verlag (1993).
- [Da] **V.I.Danilov**, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys 33 (2) (1978), 97-154.
- [De] **P.Deligne**, *Théorie de Hodge, II*, Actes du Congrès international des mathématiciens, Nice (1970).
- [Fi] **S.Fischli**, *On toric varieties*, Ph.D.thesis, Universität Bern (1992).
- [Fu] **W.Fulton**, *Introduction to toric varieties*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1993).
- [Ho] **V.Hower**, *A counterexample to the maximality of toric varieties*, arXiv:alg-geom/0611925 (2006).
- [Ho2] **V.Hower**, *Hodge spaces of real toric varieties*, arXiv:alg-geom/0705.0516 (2007).
- [Jor] **A.Jordan**, *Homology and cohomology of toric varieties*, Ph.D thesis, Universität Konstanz, Konstanzer schriften in Mathematik und Informatik 57 (1998).
- [Oda] **T.Oda**, *Convex bodies and algebraic geometry*, Springer-Verlag, New York (1988).
- [Ma] **S.McLane**, *Homology*, Springer-Verlag (1963).
- [Mc] **C.McCrory, A.Parusiński**, *Weight filtration for real algebraic varieties*, A paraître.
- [Mc2] **C.McCrory, A.Parusiński**, *Virtual Betti numbers of real algebraic varieties*, Comptes Rendus Acad.Sci.Paris, Ser.I, 336 (2003), 763-768.