



Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés

David Violeau

► To cite this version:

David Violeau. Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements jusqu'à rupture des composites stratifiés. Mécanique [physics.med-ph]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2007. Français. NNT: . tel-00254379

HAL Id: tel-00254379

<https://theses.hal.science/tel-00254379>

Submitted on 13 Feb 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ENSC 2007 n°46

**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par
DAVID VIOLEAU

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN

Domaine :
MÉCANIQUE - GÉNIE MÉCANIQUE - GÉNIE CIVIL

Sujet de la thèse :
**Une stratégie de calcul pour l'analyse à l'échelle "micro" des endommagements
jusqu'à rupture des composites stratifiés**

Thèse soutenue le 29 Juin 2007 à l'ENS de Cachan devant le Jury composé de :

DAVID DUREISSEIX	Professeur Université de Montpellier	Rapporteur
CHRISTIAN HOCHARD	Professeur Université de Marseille	Rapporteur
ALAIN COMBESCURE	Professeur INSA de Lyon	Président
PIERRE LADEVÈZE	Professeur ENS de Cachan	Directeur de thèse
DIDIER GUEDRA DEGEORGES	Ingénieur EADS CCR-IC	Examineur
JEAN-PAUL GRELLIER	Ingénieur DGA	Examineur
JEAN-FRANÇOIS MAIRE	Ingénieur ONERA	Examineur
GILLES LUBINEAU	Maître de conférence ENS de Cachan	Examineur

Laboratoire de Mécanique et Technologie
ENS Cachan/CNRS/Université Paris 6
61, avenue du Président Wilson, F-94235 CACHAN CEDEX (France)

La traditionnelle page des remerciements qui marque vraiment la fin d'une thèse s'offre enfin à moi.

Je tiens à remercier chaleureusement les membres du jury d'avoir participer activement à ma soutenance et particulièrement Messieurs Hochard et Dureisseix pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteurs de mon travail.

Je remercie Pierre Ladevèze de m'avoir fait confiance pour ce travail complexe. Un grand merci également à Gilles pour avoir toujours su donner une réponse à mes questions.

J'ai eu plaisir à cotoyer des gens formidables intellectuellement et humainement au centre de calcul notamment, la liste serait bien évidemment trop longue pour tenir sur cette page et j'oublierai certainement quelqu'un. Une mention spéciale pour Hugo, "génie de la programmation" et François, critique précieux de ma soutenance.

Merci à mes différents voisins de bureau (Germain en salle 211, Alain et Ludo au DGM) pour les différentes réflexions sur l'Avenir...

Les différentes escapades en Italie avec l'équipe composite (Manu, Gilles, Didou, David M) ou les journées AMERICO ont été pour moi une véritable source d'enrichissement "culturel".

Je remercie toutes les personnes pour leur présence ou leurs encouragements lors de ma soutenance. Cette journée ne serait rien sans le grandiose pot vendéen entièrement préparé par ma famille, ma belle famille et Cécile.

Ma dernière pensée ira à Cécile et mes deux filles Manon et Emma qui m'ont permis de relativiser l'importance d'une thèse. Elles sont tout pour moi.

Table des matières

Table des matières	i
Introduction	1
Partie I Une modélisation microscopique hybride	7
1 Les modélisations des composites stratifiés à fibres continues	11
1 Phénoménologie des dégradations des Composites à Matrice Organique . . .	12
1.1 Présentation des stratifiés à fibres continues	12
1.2 Mécanismes de dégradation	13
1.2.1 Mécanismes continus à l'échelle du pli	13
1.2.2 Mécanismes discrets à l'échelle du pli	15
2 La Micromécanique classique des stratifiés	18
2.1 Détermination du champ de contrainte	18
2.2 Evolution des dégradations	20
3 La Méso-mécanique des stratifiés	22
3.1 Modélisation d'un pli élémentaire	23
3.2 Modélisation de l'interface	26
4 Pont méso-micro	29
2 Une modélisation microscopique hybride	31
1 Principes du modèle microscopique	32
2 Modélisation des mécanismes discrets	32
2.1 Surfaces de ruptures minimales	33
2.1.1 Forme des surfaces	33
2.1.2 Choix des dimensions des surfaces	34
2.1.3 Critère de rupture	37
2.2 Variabilité des taux de restitution critiques	40
3 Modélisation des mécanismes diffus	43
3.1 Définition d'un milieu continu	43
Partie II Stratégies de calcul multiéchelle pour la simulation de problèmes complexes	45
3 Stratégies de calcul : Etat de l'art	49
1 Méthodes basées sur l'homogénéisation	50

1.1	Théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques	50
1.2	Extensions de la théorie de l'homogénéisation au non-linéaire	51
2	Méthodes de superposition et d'enrichissement	53
2.1	Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique	53
2.2	Méthode Arlequin	54
2.3	Méthodes multigrilles	55
2.4	Méthodes basées sur la Partition de l'Unité	56
3	Méthodes de décomposition de domaine	57
4	Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps : Rappels théoriques et développements	59
1	Stratégie de calcul monoéchelle	60
1.1	Problématique	60
1.2	Décomposition de domaine - Problème sous-structuré	61
1.3	Comportements d'interface particuliers	63
1.4	Stratégie de résolution itérative	64
1.4.1	Etape linéaire	66
1.4.2	Etape locale	67
1.4.3	Contrôle des itérations	67
2	Stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace	68
2.1	Introduction de l'aspect multiéchelle	68
2.1.1	Séparation des variables en partie macro et micro	68
2.1.2	Admissibilité des quantités macro	69
2.2	Retour sur l'étape linéaire	70
2.2.1	Introduction de l'échelle macroscopique dans la stratégie de résolution	70
2.2.2	Définition du comportement homogénéisé sur Ω_E	72
2.2.3	Algorithmes de résolution	74
3	Développement de la stratégie dans le cadre d'un logiciel	74
3.1	Quelques spécificités de la stratégie pour les milieux tridimensionnels	74
3.1.1	Choix des espaces macro	75
3.1.2	Sous-intégration	80
3.1.3	Directions de recherche	82
3.2	Mise en oeuvre - Exemples d'applications	85
3.2.1	Particularités du logiciel	85
3.2.2	Comparaison monoéchelle - multiéchelle	85
3.2.3	Un premier exemple : Réseau de fibres	89
3.2.4	Un second exemple : Assemblage boulonné	91
Partie III	Stratégie de calcul pour la mise en oeuvre du modèle micro- scopique	93
5	Spécificités liées à l'introduction du modèle microscopique	97
1	Mise en données pour le modèle microscopique	98
1.1	Problématique	98

1.2	Description des interfaces et des sous-structures	98
1.2.1	Pavages incompatibles	98
1.2.2	Génération d'une décomposition de domaine compatible	100
1.3	Données nécessaires au modèle microscopique	103
2	Stratégie de résolution	104
2.1	Algorithmes de résolution	104
2.2	Adaptation de la stratégie multiéchelle	107
2.2.1	Troisième échelle - Echelle super-macro	107
2.2.2	Simplification des problèmes micro	110
3	Détermination numérique des critères de rupture des surfaces	115
3.1	Calcul du taux de restitution	116
3.1.1	Calcul localisé	117
3.1.2	Utilisation d'une formule analytique	120
3.1.3	Réutilisation de résultats	121
3.2	Bilan	122
6	Exemples de simulations	125
1	Exemples de validation : stratifiés croisés	126
1.1	Influence de l'épaisseur	126
1.2	Influence de l'ordre des plis	130
2	Influence de la géométrie : Plaque entaillée $[0_2/90]_s$	131
	Conclusions et Perspectives	137
	Bibliographie	141
Partie IV	Annexes	151
A	Procédure de génération des cellules supermacro	153
1	Création du maillage super macro	153
1.1	Maillage quadtree	153
1.2	Procédure de repérage de la position d'un point par rapport à un contour fermé	154
1.3	Adaptation des cellules au contour exactement	155
2	Génération des cellules pour les différents plis	158
B	Compléments théoriques sur la Troisième échelle	159
1	Retour sur le problème macroscopique	159
1.1	Résolution directe en déplacement	160
1.2	Résolution directe en effort	160
1.2.1	Formulation faible en effort	160
1.2.2	Construction de l'opérateur homogénéisé inverse	162
1.3	Résolution itérative	165
2	Recherche d'une solution approchée	165
2.1	Problème macro approché en déplacement	166

2.2	Construction des opérateurs de projection super-macro en déplacement	168
2.2.1	Approximation de type milieu micropolaire	168
2.2.2	Construction du problème macro approché en effort	171
2.2.3	Construction des opérateurs de projection super-macro en effort	172
2.2.4	Reconstruction des déplacements	177
2.3	Conclusion	179
C	Compléments sur les simplifications des problèmes microscopiques	181
1	Définition de la simplification	181
2	Performances de l'approximation	184
D	Taux de restitution en présence d'interfaces avec contact	185
1	Problème de référence	185
2	Expression du taux de restitution	185

Introduction

Les matériaux composites sont obtenus en assemblant divers constituants élémentaires ayant des comportements macroscopiques différents. Le choix de ces constituants permet d'améliorer les performances du matériau final, de manière à répondre à un besoin spécifique. La caractéristique principale des composites est le fort rapport effort à rupture sur masse ou raideur sur masse. Ils possèdent en outre une bonne tenue en fatigue et à l'environnement (corrosion par exemple). Ces différentes propriétés leur confèrent une longévité accrue. La fabrication d'un composite est souvent réalisée de manière à obtenir un matériau ayant un comportement adapté aux conditions de chargement. Les moyens de fabrication permettent aujourd'hui d'obtenir des formes complexes, ce qui entraîne une réduction du nombre de pièces pour réaliser un composant et limite le nombre de jonctions et perçages sources de concentration de contraintes.

Les composites sont constitués la plupart du temps de fibres et d'une matrice (très souvent une résine). Les fibres (généralement du carbone ou du verre) sont plus raides et plus résistantes que la matrice et permettent de reprendre les efforts appliqués à la structure. La matrice est réalisée en polymère (résine époxy, polyester...), en métal, en céramique ou en carbone. Elle permet non seulement de maintenir les fibres mais aussi de distribuer et transférer les efforts entre les fibres. Le choix de la matrice dépend du domaine d'application auquel est destiné le composite et des performances attendues (résistance aux températures élevées, résistance à la corrosion, coût de revient...). Compte tenu de leurs propriétés très attractives, les matériaux composites sont aujourd'hui très largement utilisés dans de nombreux domaines d'applications aussi bien dans le domaine du transport (aéronautique, aérospatial, maritime, ferroviaire...) que dans le domaine des loisirs et du sport.

Dans l'industrie aéronautique, qui est le domaine de prédilection des stratifiés, les composites sont apparus dans les années 80 sur les structures secondaires des avions telles que la gouverne de direction, l'empennage,.... La première réalisation d'une structure vitale (ou primaire) en matériau composite à fibre de carbone, dont la ruine peut s'avérer désastreuse pour la structure, a vu le jour avec la conception de la poutre ventrale de l'A340-600 d'Airbus. L'utilisation des composites dans l'aéronautique est aujourd'hui indispensable et est un véritable challenge pour les avionneurs. L'A380 d'Airbus comporte aujourd'hui près de 25% en masse de matériaux composites (Figure 1), dont le caisson de voilure qui permet notamment d'obtenir un gain de 1,5 tonnes en masse en comparaison avec des alliages d'aluminium les plus avancés. L'A350 d'Airbus possédera une aile entièrement réalisée en composites, une première pour un avion civil. Boeing annonce que 50% de la structure primaire (incluant fuselage et ailes) du 787 sera réalisée en matériaux composites.

La réduction des coûts de développement reste une des préoccupations principales des industriels. La conception et la réalisation d'une structure en composite nécessitent actuel-

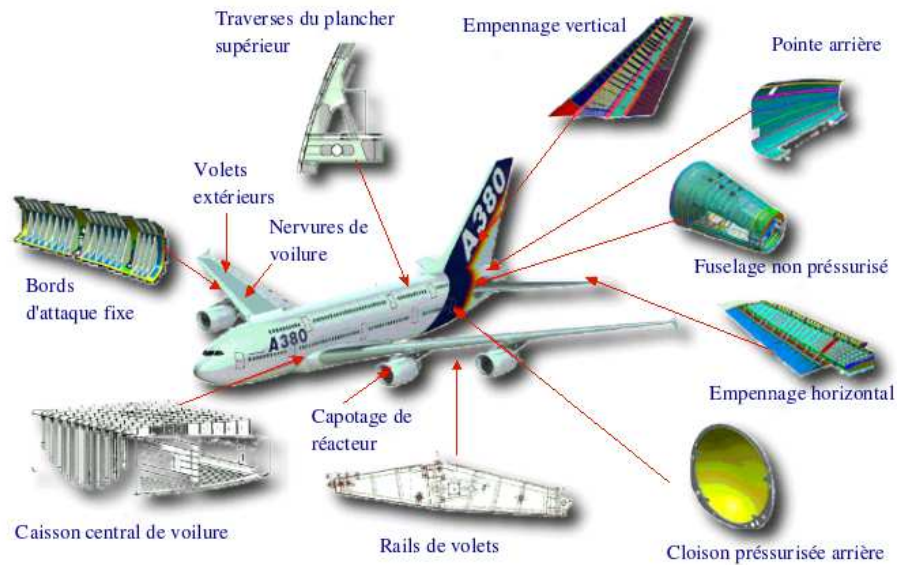


Figure 1: Répartition des composites stratifiés dans l'A380 [source : d'après Airbus]

lement de nombreux (et coûteux) essais allant jusqu'à la rupture de deux avions complets (un essai de rupture statique et de rupture par fatigue). Les ingénieurs travaillent donc beaucoup pour remplacer une partie des essais réels par des essais en simulation numérique, démarche appelée Virtual Testing. Actuellement, la conception d'un avion requiert un très grand nombre d'essais dont 10% sont réalisés sur des échantillons matériaux, 50% sont des tests partiels et les derniers 40% sont effectués sur des composants. Le Virtual Testing devrait permettre d'inverser la répartition des essais en donnant un poids considérable à la connaissance du matériau et en remplaçant une partie des essais structuraux par des simulations. Le Virtual Testing permet de limiter les coûts liés aux essais, mais il s'accompagne nécessairement de travaux de recherche afin de développer des modèles de simulation dans lesquels les organismes de certification puissent avoir réellement confiance. Ce travail fait ainsi partie d'un projet intitulé AMERICO (Analyse MultiEchelle : Recherche Innovante pour les matériaux COMposites), regroupant plusieurs laboratoires de recherche et industriels. Cette action a été financée par la DGA/STTC et coordonnée par l'ONERA Châtillon.

Le travail de thèse s'inscrit dans le cadre du Virtual Testing. Seule une famille de composites sera étudiée dans ce travail : les composites stratifiés à fibres longues ou continues très répandus en aéronautique. On les retrouve sur des structures vitales de l'A380 telle que le caisson central de voilure, l'empennage horizontal, le caisson de dérive mais aussi sur des structures secondaires telles que les capotages de moteur, le caisson arrière non pressurisé ou bien encore les traverses de plancher supérieur (cf. Figure 1). Ces matériaux ont fait l'objet de très nombreux travaux de recherche depuis une trentaine d'années afin de comprendre leur comportement et réaliser des simulations. Les mécanismes de dégradation de ces composites sont donc aujourd'hui très bien connus. Cependant, la simulation des stratifiés jusqu'à rupture reste un challenge majeur et nécessite de nouvelles études aussi bien en terme de modélisation qu'en terme d'outils de calcul.

Deux grandes familles de modélisations des dégradations dans les stratifiés peuvent être distinguées. D'une part, les approches micromécaniques reposent sur une phénoménologie microscopique clairement identifiée et permettent d'analyser précisément les dommages. Ces approches apportent une compréhension forte des mécanismes de dégradations mais ne permettent pas de réaliser de véritables calculs de structures et sont très souvent limitées à des géométries (périodicité, bidimensionnel) ou séquences d'empilement simples. Les approches mésomécaniques, quant à elles, modélisent les dégradations par des variables d'endommagement continues traduisant les chutes de raideur dues à l'apparition de dégradations. L'approche développée au laboratoire depuis une vingtaine d'année (dénommée mésomodèle d'endommagement (Ladevèze, 1986; Ladevèze & LeDantec, 1992; Allix & Ladevèze, 1992)) introduit deux variables d'endommagement dans chaque pli et permet ainsi de reproduire les dégradations observables en traction ou en cisaillement. Cette approche permet alors de mener des calculs sur des structures complètes et est actuellement utilisé dans certains codes de calcul principalement en dynamique. L'interprétation des dégradations n'est cependant pas aussi aisée que pour la micromécanique. Récemment, les travaux de Ladevèze, Lubineau (Ladevèze & Lubineau, 2002; Ladevèze & Lubineau, 2003a,b,c; Lubineau & Ladevèze, 2005) et Ladevèze, Lubineau, Marsal (Ladevèze *et al.*, 2006) ont permis de réaliser un pont entre les approches microscopiques et le mésomodèle d'endommagement. Les objectifs de ces travaux étaient doubles : le premier était d'asseoir le mésomodèle d'endommagement sur une phénoménologie microscopique précise et proposer un mésomodèle enrichi ; le second objectif était de pouvoir interpréter les dégradations à l'échelle microscopique à partir de quantités méso.

Les avancées apportées par ce pont micro-méso sont cependant basées sur plusieurs hypothèses inhérentes aux modèles microscopiques retenus et ne sont valables que dans certaines conditions. Un modèle microscopique de calcul semi-discret a donc été proposé (Ladevèze, 2004, 2005; Ladevèze *et al.*, 2006; Lubineau *et al.*, 2006) et permet de prendre en compte tous les modes de dégradations des stratifiés. Le modèle microscopique est hybride et couple à la fois des mécanismes discrets et continus. Très simple d'interprétation et reposant sur peu de quantités matériaux à identifier, le modèle n'est viable que s'il est associé à des moyens de calcul performants. L'utilisation de stratégies de calcul éléments finis conventionnelles pour mettre en œuvre le modèle microscopique nécessite plusieurs milliards de degrés de liberté pour simuler une éprouvette simple. L'objectif principal de ce travail de thèse est donc de développer une stratégie de calcul adéquate afin de mettre en œuvre le modèle microscopique. A cette fin, des simulations sur éprouvettes simples (mais hors de portée des stratégies conventionnelles) seront réalisées de manière à montrer la faisabilité du modèle.

La stratégie utilisée est nécessairement multiéchelle car elle doit permettre de prendre en compte des mécanismes situés aussi bien au niveau de la fibre qu'au niveau du pli ou de la structure. La stratégie multiéchelle avec homogénéisation en espace développée au laboratoire dont les principes sont donnés dans les articles (Ladevèze *et al.*, 2001; Ladevèze & Nouy, 2003) est développée et étendue dans cette thèse pour traiter des problèmes complexes tridimensionnels et incluant de nombreuses surfaces de contact. Des développements spécifiques associés à la réduction du coût de calcul (taille du problème à résoudre

et temps de résolution) ont été menés sur des exemples simples bidimensionnels mais n'ont cependant pas été mis en oeuvre dans le cadre du modèle microscopique. Une attention particulière doit aussi être portée sur la simplification du calcul des taux de restitution selon la zone de la structure considérée lors de la propagation des fissures. Ces différents points ont nécessité la réalisation d'un code de calcul complet écrit en langage C++ permettant de traiter des problèmes complexes non-linéaires bidimensionnels ou tridimensionnels et pouvant inclure les effets de l'environnement (oxydation et fatigue). Ce code s'intègre dans la plateforme logicielle du laboratoire et est actuellement utilisé par plusieurs doctorants.

Ce mémoire est constitué de trois parties distinctes.

La première partie propose de revenir succinctement sur les approches existantes dans la littérature pour la modélisation des dégradations dans les stratifiés et de rappeler et préciser les points essentiels du modèle microscopique. Le premier chapitre présente de manière synthétique le matériau étudié et les mécanismes de dégradation. Une étude bibliographique de la micromécanique et mésomécanique des stratifiés est ensuite proposée. Dans le deuxième chapitre, le modèle microscopique hybride est détaillé. Celui-ci s'appuie sur l'introduction de surfaces de rupture minimales choisies selon diverses considérations conférant ainsi au modèle un aspect discret. Cette caractéristique rend le modèle très robuste vis à vis de la localisation des déformations. Un milieu continu endommageable est introduit pour modéliser les dégradations continues à l'échelle du pli.

La deuxième partie présente différentes stratégies de calcul multiéchelle développées actuellement et susceptibles d'être utilisées pour mettre en oeuvre le modèle microscopique. Le troisième chapitre revient sur quelques approches multiéchelles existant dans la littérature. Le chapitre 4 détaille la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace développée depuis plusieurs années au laboratoire. Celle-ci est mise en oeuvre pour des problèmes tridimensionnels complexes. Basée sur une décomposition de domaine mixte, l'aspect multiéchelle est introduit au niveau des interfaces seulement et conduit à la définition d'un problème macroscopique global sur la structure. Les points clés de la stratégie sont rappelés et plusieurs exemples permettent de montrer les capacités de la stratégie à traiter des problèmes linéaires ou non-linéaires de grande taille. Plusieurs améliorations doivent être apportées à la stratégie de manière à pouvoir prendre en compte un très grand nombre de chemins de fissuration ou un nombre très important de sous-structures identiques.

Les différents points exposés précédemment sont mis en oeuvre dans la troisième partie qui répond en partie à l'objectif fixé pour cette thèse et a pour objet de coupler la stratégie multiéchelle avec le modèle microscopique pour simuler les dégradations dans les stratifiés. Dans le chapitre 5, une attention particulière est portée à la mise en donnée du modèle microscopique dans le cadre de la stratégie multiéchelle. Dans le but de limiter les temps de calcul, le calcul du critère permettant la propagation des fissures nécessite des simplifications importantes présentées dans ce même chapitre. L'algorithme général de résolution du problème d'évolution des dégradations est ensuite détaillé. Tous ces points sont concrétisés dans le dernier chapitre qui présente quelques résultats sur différents stratifiés. La stratégie est validée sur des cas simples de stratifiés croisés très largement étudiés dans la littérature.

Des géométries d'éprouvette plus complexes sont ensuite simulées de manière à mettre en oeuvre les différents modes de dégradation. Des comparaisons qualitatives sont menées à partir d'essais obtenus dans la littérature.

Première partie

**Une modélisation microscopique
hybride**

Dans cette première partie, nous nous intéressons à la modélisation des dégradations dans les composites stratifiés à fibres continues. Les scénarios de dégradations sont clairement identifiés pour ces composites. La complexité des matériaux composites conduit à une grande variété de modes de dégradation. Des critères de résistance macroscopiques permettent de connaître l'apparition des premières dégradations. Les critères de rupture utilisent le tenseur des contraintes en un point donné pour estimer la valeur de fonctions dépendant des contraintes ultimes du matériau que l'on compare à l'unité. Ces démarches sont très largement utilisées pour le dimensionnement des composites compte tenu de leur simplicité de mise en oeuvre. Une présentation détaillée des critères les plus utilisés est notamment réalisée dans (Laurin, 2005; Laurin *et al.*, 2006), un exercice international proposé par (Hinton *et al.*, 2002) (World Wide Failure Exercise) a permis de comparer les différents critères existant aujourd'hui. Ces méthodes ne permettent cependant pas de déterminer l'évolution des dégradations.

Plusieurs familles de modélisations (micromécanique et mésomécanique) ont été proposées depuis plusieurs années afin de prédire l'apparition et l'évolution des dégradations dans les stratifiés à fibres longues jusqu'à rupture finale de la structure. La micromécanique se place dans le cadre de la mécanique de la rupture et propose d'étudier l'initiation et la propagation de surfaces de rupture. Dans la mésomécanique, tous les scénarios d'endommagement sont décrits par l'intermédiaire de variables d'endommagement traduisant la réduction de quantités matériau sous l'effet des dégradations. Récemment, un nouveau modèle microscopique a été introduit et permet de modéliser tous les modes de dégradation rencontrés dans les stratifiés.

- Après une présentation des stratifiés et des modes de dégradations, ces deux familles sont présentées succinctement dans le chapitre 1.
- Le chapitre 2 décrit ensuite les points clés du modèle microscopique hybride proposé dans les articles (Ladevèze, 2004, 2005). Ce modèle couple à la fois une approche discrète et continue.

Les modélisations des composites stratifiés à fibres continues

Sommaire

1	Phénoménologie des dégradations des Composites à Matrice Organique	12
1.1	Présentation des stratifiés à fibres continues	12
1.2	Mécanismes de dégradation	13
2	La Micromécanique classique des stratifiés	18
2.1	Détermination du champ de contrainte	18
2.2	Evolution des dégradations	20
3	La Méso-mécanique des stratifiés	22
3.1	Modélisation d'un pli élémentaire	23
3.2	Modélisation de l'interface	26
4	Pont méso-micro	29

1 Phénoménologie des dégradations des Composites à Matrice Organique

1.1 Présentation des stratifiés à fibres continues

On s'intéresse dans ce travail aux composites stratifiés à matrice polymère et fibres longues ou continues, c'est à dire des fibres pour lesquelles le rapport longueur sur diamètre est très élevé. Un stratifié est composé d'un empilement de plis dits unidirectionnels. Un schéma descriptif de la composition d'un stratifié est proposé Figure 1.1. L'épaisseur d'un pli unidirectionnel est de plusieurs centaines de micromètres et dépend du grammage. Pour diminuer les coûts de production, on utilise aujourd'hui des plis à fort grammage (environ 300 micromètres contre environ 125 auparavant). Chaque pli est obtenu par arrangement de fibres (carbone ou verre le plus souvent) dont le diamètre varie de 3 à 200 micromètres et d'une résine (matrice) répartissant les contraintes entre les fibres. Les matrices polymères sont souvent utilisées pour des raisons de coûts et performances (elles fournissent une bonne adhésion et sont relativement faciles à mettre en forme). L'orientation des fibres définit l'inclinaison du pli par rapport à un axe donné. L'un des avantages des stratifiés est la possibilité d'orienter les fibres selon des directions adaptées aux efforts imposés à la structure. La conception d'une structure stratifiée passe donc par le choix des matériaux, des orientations des fibres et de l'agencement des plis (séquence d'empilement de plis d'inclinaison donnée).

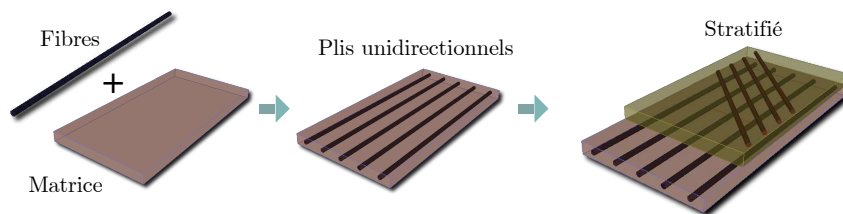


Figure 1.1: Composition d'un composite stratifié

Les stratifiés sont désignés par l'orientation des fibres de chaque pli par rapport à une référence arbitraire (axe $\vec{x}$) correspondant très souvent à la direction du chargement. Un pli à 0° possèdera des fibres orientées selon l'axe $\vec{x}$ tandis qu'un pli à 90° aura des fibres perpendiculaires à cet axe. On indique en indice le nombre de plis adjacents ayant la même orientation (on parle alors de couche). L'indice "s" correspond à un stratifié symétrique pour lequel on ne renseigne que la moitié de l'empilement. Afin de limiter le couplage traction/flexion qui complexifie l'analyse, la plupart des stratifiés sont symétriques. En plus de cette caractéristique, les stratifiés sont équilibrés pour obtenir un comportement orthotrope macroscopiquement. Ainsi, pour chaque orientation θ , le stratifié doit contenir une couche dont la direction des fibres fait un angle $-\theta$ avec l'axe $\vec{x}$. Les stratifiés $[0/90]_s$ sont par construction équilibrés. Enfin, l'ordre des couches a un impact sur les effets de bord principalement, le comportement macroscopique à coeur étant le même quelque soit l'agencement du stratifié. A titre d'exemple, l'empilement $[0/-45/45/90]_s$ donne un comportement identique au stratifié $[0/90/45/-45]_s$ macroscopiquement.

L'exemple de la figure 1.2 montre la moitié d'un stratifié $[0_2 / \pm 45_2 / 90_2]_s$ contenant 2 plis élémentaires à 0° , 2 à 45° , 2 à -45° et 2 à 90° , symétrique par rapport au plan supérieur du pli à 90° .

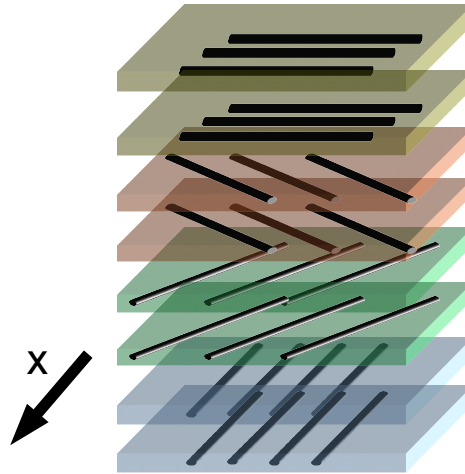


Figure 1.2: Moitié d'un empilement $[0_2 / \pm 45_2 / 90_2]_s$

1.2 Mécanismes de dégradation

Les modes de dégradation des stratifiés à fibres continues sont aujourd'hui clairement identifiés. Différents facteurs influencent le développement et l'ordre d'apparition des dégradations : la séquence d'empilement, le processus de fabrication, la nature de la matrice et des interfaces, l'environnement... Une distinction naturelle est faite selon l'échelle spatiale à laquelle on considère un mécanisme de dégradation. Six mécanismes élémentaires peuvent alors être répertoriés.

1.2.1 Mécanismes continus à l'échelle du pli

L'échelle du pli est prise comme référence pour classer les dégradations d'un stratifié. A cette échelle, les mécanismes décrits dans ce paragraphe se traduisent par des défauts répartis de manière quasi-homogène dans le pli, ne permettant pas d'identifier clairement des faciès de rupture. C'est pourquoi on les regroupe sous le terme de mécanismes continus ou diffus.

■ Décohésions fibres/matrice et microvides dans les plis

Au niveau microscopique élémentaire, des décohésions apparaissent à la jonction entre les constituants (Figure 1.3). Des microvides ou des microfissures dans la matrice peuvent également se développer sous certaines conditions de chargement, notamment dans les zones pauvres en matrice.

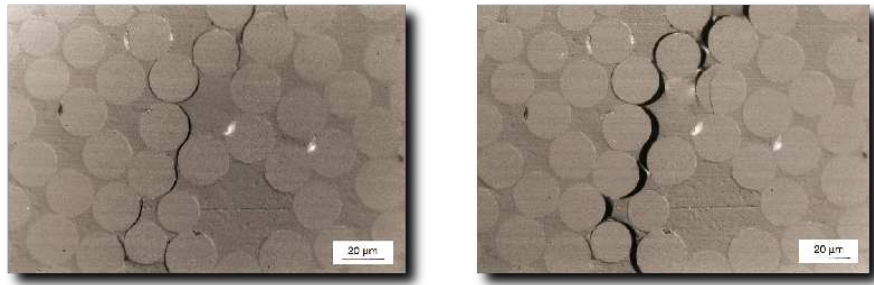


Figure 1.3: Décohésions entre les fibres et la matrice

Ces dégradations sont initiées par des défauts au sein de chaque pli. La répartition des fibres est très souvent aléatoire compte tenu des processus de fabrication. Cette dispersion de fibres crée des zones de concentration de contraintes qui initient les décohésions fibres-matrice ou les microfissures au sein de la matrice (Figure 1.4). De plus, l'interface entre les fibres et la matrice est souvent imparfaite (mauvaise adhésion par exemple) et est très souvent à l'origine de ces décohésions. Ces mécanismes sont désignés sous le terme d'**endommagement diffus**. Ce mécanisme est fondamental dans les stratifiés $[\pm 45]_s$ puisqu'il apparaît avant tout autre mécanisme de façon importante.

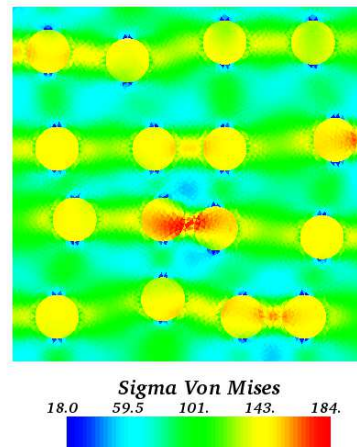


Figure 1.4: Concentration de contraintes pour un échantillon de fibres matrice soumis à des efforts de traction

■ Microvides dans la zone interlaminaire

La zone située entre deux plis est qualifiée de zone interlaminaire et est souvent riche en matrice. Les contraintes dans cette zone peuvent initier des microfissures ou microvides dans la matrice. On parle alors de **délaminage diffus** (Figure 1.5).

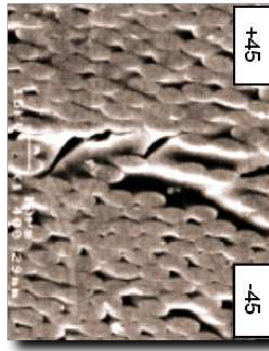


Figure 1.5: Microvides au niveau de la zone interlaminaire

A l'échelle du pli, les mécanismes décrits ci-dessus apparaissent comme des phénomènes quasi continus. Rarement pris en compte dans certaines modélisations, ces mécanismes sont pourtant d'une grande importance lorsque le stratifié est chargé en cisaillement et dans ce cas, ils sont alors les phénomènes qui apparaissent en premier. Les travaux de (Lagattu & Lafarie-Frénot, 2000) ont permis de mettre clairement en évidence ce phénomène.

1.2.2 Mécanismes discrets à l'échelle du pli

Les mécanismes discrets par opposition aux mécanismes continus présentent des surfaces de rupture facilement observables à l'échelle considérée.

■ Microfissuration

Lors d'essais de traction, les décohésions fibres-matrice se rejoignent pour former des fissures traversant toute l'épaisseur d'un pli. Ces fissures se propagent parallèlement aux fibres. Cette caractéristique simplifie considérablement l'étude des stratifiés car la direction de propagation des fissures est fixée par la géométrie et non par le chargement comme on peut l'observer dans d'autres composites tels que les SiC/SiC. Les premiers plis affectés par la microfissuration sont les plis à 90° , c'est à dire ceux dont les fibres sont perpendiculaires par rapport à la direction de chargement. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'on parle aussi de fissuration transverse (Figure 1.6a). Sous chargement de traction, les fissures sont très souvent perpendiculaires par rapport aux plis. Des microfissurations peuvent aussi apparaître dans les plis dont l'inclinaison est la plus grande par rapport à la direction de chargement (Figure 1.6b). De nombreuses observations ont été menées sur des stratifiés croisés pour étudier l'apparition et le développement des fissures transverses pour des chargements statiques ou de fatigue.

Lorsque le chargement croît, le nombre de microfissures augmente et se traduit macroscopiquement par une diminution de la rigidité longitudinale du stratifié (dans la direction du chargement) et une modification des propriétés thermiques. Les microfissures introduisent des chemins à travers lesquels des agents corrosifs peuvent pénétrer à l'inté-

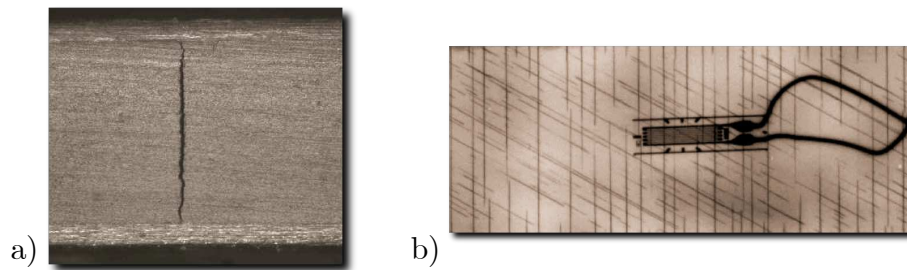


Figure 1.6: Microfissuration : a) coupe d'un stratifié croisé $[0/90_4/0]$, b) vue de dessus d'un stratifié $[0/30_2/90]_s$

rieur du stratifié. Ce phénomène peut devenir catastrophique dans certains cas.

Les stratifiés $[0_m, 90_n]_s$ ont fait l'objet d'un grand nombre d'expérimentations permettant de mettre en évidence la formation des microfissures. A cause des différences entre les coefficients de Poisson des plis à 0° et à 90° , un chargement de traction conduit à des déformations transverses dans les plis à 0° . Si cette déformation est suffisante, une fissure longitudinale peut apparaître dans les plis à 0° parallèlement à la direction de chargement. Ce phénomène peut aussi être observé au niveau de zones à fort gradient. On parle de "splitting". Bien que les fissures longitudinales soient peu observées dans les stratifiés carbone/epoxy, elles peuvent néanmoins apparaître sous des chargements de fatigue.

Les premiers travaux sur l'influence de la structure d'un stratifié ont été menés par Garrett et Bailey sur des stratifiés $[0/90]_s$. On constate que l'épaisseur des couches a des conséquences sur la valeur de la déformation nécessaire pour initier une première microfissure (Garrett & Bailey, 1977). Lorsque les plis à 90° sont épais, les microfissures se forment instantanément et traversent la section du stratifié complètement. Pour des plis fins, des fissures partielles sont initiées au niveau des bords libres et se propagent en fonction du chargement vers le coeur du spécimen. Les microfissures apparaissent pour des niveaux de chargement plus faibles pour les plis épais que pour les plis fins. Outre l'épaisseur des plis, l'agencement des plis influence l'apparition des microfissures. Les auteurs (Bailey & Parvizi, 1981) constatent que la déformation requise pour initier la microfissure dans les $[90_m/0_n]_s$ est beaucoup plus petite que celle obtenue pour des stratifiés $[0_n/90_m]_s$.

La formation de microfissures aboutit fréquemment à un motif quasi périodique (cf. Figure 1.6b), essentiellement dû au caractère aléatoire de la dégradation. Pour une certaine valeur du chargement, les microfissures ne peuvent plus se développer, on atteint un régime de saturation. En effet, l'apparition d'une microfissure entraîne une chute de contrainte. Le niveau atteint ne permet alors plus de créer de nouvelles fissures. C'est le mécanisme de délaminage local, décrit ci-après, qui se développe.

Remarque : Lorsque le taux de fissuration est important pour des plis épais, il est possible d'observer des microfissures non plus perpendiculaires aux interfaces interlaminaires mais faisant un angle de 40 à 60° . Ces microfissures sont généralement issues de fissures perpen-

diculaires ne traversant pas toute l'épaisseur du pli. Ce type de microfissures est rarement observé et n'est généralement pas pris en compte dans les diverses modélisations.

■ Délaminage local

Les microfissures sont stoppées par les plis adjacents au pli fissuré. Au niveau de la pointe de fissure, la singularité des contraintes entraîne le développement de fissures qui se propagent entre deux plis adjacents à partir de la pointe de fissure transverse. On appelle ce phénomène le **délaminage local** (Figure 1.7).

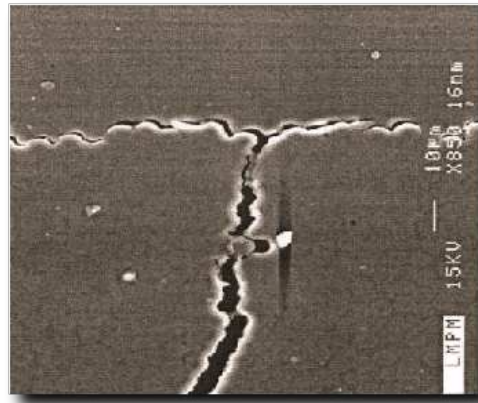


Figure 1.7: Délaminage local en pointe de fissure transverse

Le délaminage local est principalement initié au niveau des bords pour lesquels les contraintes sont plus élevées et ont un effet tridimensionnel.

Les interactions possibles entre la microfissuration et le délaminage local sont bien illustrées pour des stratifiés $[\pm 25/90_n]_s$. Le choix des orientations ± 25 favorise ce délaminage en comparaison avec des stratifiés $[0/90]_s$ où le délaminage n'apparaît que très tardivement. Le délaminage apparaît à l'interface $-25/90$ à partir de la pointe de fissures transverses existantes pour des épaisseurs importantes du pli à 90° . Il part du bord libre et se propage le long des microfissures ou dans la largeur du spécimen. Des observations similaires ont pu être proposées sur des stratifiés $[\pm 45/0/90]_s$ pour lesquels du délaminage est détecté.

■ Délaminage macroscopique

Le délaminage local est suivi rapidement par un délaminage macroscopique (séparation des plis visible à l'échelle de la structure) conduisant très souvent à la ruine de l'empilement. Ce délaminage macroscopique est aussi initié par l'existence de défauts (mauvaise adhérence entre les plis, résidus de film protecteur des plis oubliés lors de l'assemblage...).

■ Rupture de fibres

Compte tenu de l'orthotropie macroscopique du stratifié, les fibres sont chargées différemment dans chaque pli. Même si leur charge à rupture est élevée, certaines fibres sollicitées en traction peuvent rompre de manière brutale. Les ruptures de fibres entraînent en

général la ruine du stratifié. Ce mécanisme peut tout aussi bien être classé dans les mécanismes continus (car il fait intervenir l'échelle de la fibre) ou dans les mécanismes discrets (choix adopté ici) étant donné que le nombre de fibres qui rompt engendre ainsi un faciès de rupture clairement identifiable à l'échelle du pli. On observe d'ailleurs expérimentalement des microchutes de raideurs lors d'un essai de traction sur un pli à 0° provenant de ruptures de fibres et se soldant par une rupture brutale de la structure.

2 La Micromécanique classique des stratifiés

Les méthodes micromécaniques d'étude des dégradations reposent sur la description du champ de contrainte en présence de dégradations et sur le critère d'évolution de ces dégradations. Plusieurs articles de synthèse (Nairn & Hu, 1994; Nairn, 2000b; Berthelot, 2003) proposent une revue des différents développements en micromécanique. Ces modélisations prennent en compte uniquement les mécanismes discrets tels que la microfissuration et le délaminage local.

2.1 Détermination du champ de contrainte

L'analyse d'un stratifié dégradé nécessite la connaissance du champ de contrainte en présence de dommages. Les différentes approches rappelées ici utilisent le fait que la plupart des microfissures traversent de manière quasi instantanée la section du stratifié. L'hypothèse formulée pour l'analyse du champ de contrainte est que l'étude peut être restreinte à une approche bidimensionnelle. Cette hypothèse n'est valable que pour des plis épais sous chargement statique. La plupart des approches ont initialement été développées en supposant que les microfissures n'apparaissent que dans les plis à 90° . L'extension au délaminage local ou à la propagation de microfissures à travers la section a ensuite été proposée par différents auteurs.

L'analyse des stratifiés $[0_m/90_n]_s$ permet de présenter les différentes approches de détermination du champ de contrainte en présence de microfissures. En supposant que les microfissures se répartissent de manière périodique (ou localement périodique), une cellule élémentaire est déterminée et caractérisée par la distance entre deux fissures ($2L$) et l'épaisseur des plis à 0° (t_0) et 90° (t_{90}) (Figure 1.8). On note x la direction de chargement (sens des fibres à 0°), y la direction des fibres à 90° et z la direction orthogonale. D'après les hypothèses formulées, la solution ne dépend pas de y et l'étude est menée dans le plan (x, z) . Le milieu est supposé élastique linéaire. Les microfissures sont libres d'effort et les équations classiques de la mécanique des milieux continus sont utilisées. Compte tenu de la singularité des contraintes en pointe des fissures transverses, la solution exacte du problème ne peut être déterminée, des solutions approchées sont donc considérées.

■ Analyse unidimensionnelle : modèle de type "shear-lag"

Les premiers travaux basés sur une analyse unidimensionnelle de la cellule unitaire sont ceux de Garrett et Bailey (Garrett & Bailey, 1977). De nombreux travaux ont ensuite généralisé leur modèle (Manders *et al.*, 1983; Highsmith & Reifsnider, 1982; Fukunaga *et al.*, 1984)... L'hypothèse principale est que l'étude peut être menée uniquement selon l'axe x . Garrett et Bailey supposent en outre que la contrainte de cisaillement à l'interface entre

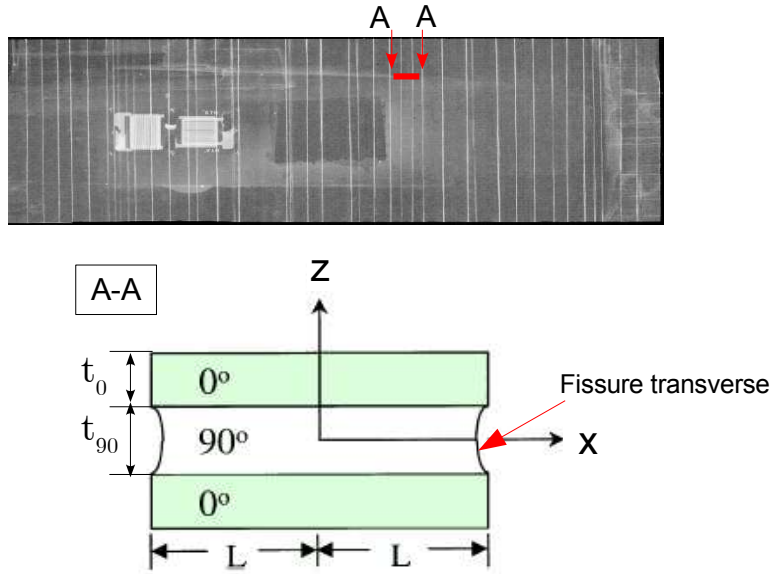


Figure 1.8: Modélisation d'une cellule élémentaire.

deux plis est proportionnelle à la différence des déplacements des plis à 0° et 90° . L'équilibre d'un élément de volume dans le pli à 90° permet de relier la contrainte de cisaillement et la contrainte transverse, puis en utilisant les relations de comportement dans chaque pli et en moyennant les contraintes dans chaque pli, il est possible de déterminer une équation différentielle du second ordre reliant la contrainte σ_{xx}^{90} aux quantités matériaux et géométriques du stratifié.

$$\frac{d^2 \sigma_{xx}^{90}}{dx^2} - \phi \sigma_{xx}^{90} = \omega(P) \quad (1.1)$$

où ϕ est une constante qui dépend des propriétés matériaux et des épaisseurs du stratifié et $\omega(P)$ dépend de ces mêmes données et du chargement.

Les différents modèles unidimensionnels (ou pseudo unidimensionnels selon $x-y$) permettant de prendre en compte les microfissures adjacentes (Manders *et al.*, 1983) ou améliorant le choix de la contrainte de cisaillement (déplacement quadratique dans les plis par exemple (Ogin *et al.*, 1985)) aboutissent à cette même équation.

L'inconvénient de ces modèles unidimensionnels est que la contrainte de cisaillement n'est pas nulle sur les lèvres des microfissures.

■ Analyse bidimensionnelle variationnelle

Hashin fut l'un des premiers à proposer une évaluation du champ de contrainte bidimensionnel (Hashin, 1985). La seule hypothèse supplémentaire est que la contrainte selon l'axe x , σ_{xx} dans chaque pli ne dépend que de x . En utilisant cette hypothèse et les équations du problème, toutes les contraintes sont exprimées en fonction d'une fonction $\psi(x)$ et de ses dérivées. La meilleure fonction ψ est déterminée en minimisant l'énergie complémentaire conduisant à une équation différentielle. Nairn a proposé une extension de cette méthode

pour prendre en compte les contraintes thermiques (Nairn, 1989). Cette technique a été récemment étendue aux stratifiés contenant des fissures transverses dans les plis à 90° et des fissures longitudinales dans les plis à 0° .

L'avantage de l'analyse bidimensionnelle est double. Elle permet de vérifier exactement la nullité des contraintes de cisaillement sur les microfissures et elle permet d'évaluer la contrainte σ_{zz} . Cependant les niveaux et formes des solutions bidimensionnelles et unidimensionnelles sont très proches pour la contrainte de traction transverse σ_{xx} .

■ Analyse tridimensionnelle et Analyse éléments-finis

Plusieurs auteurs ont développé des modèles basés sur une expansion des déplacements ou des contraintes selon des séries pour obtenir une solution 3D sur une cellule élémentaire (Wang *et al.*, 1984; Wang, 1984). Les résultats sont plus précis que ceux obtenus par les différentes analyses présentées. Cependant ces approches nécessitent un temps de calcul très important et excluent de ce fait leur utilisation dans la prédiction de l'évolution des dégradations.

L'analyse par élément fini permet de prendre en compte toute configuration de dégradation dans une cellule élémentaire et permet de valider les différentes approches analytiques ou de suggérer une forme de solution à utiliser dans les modèles analytiques (Nairn & Hu, 1992). Bien que l'approche par éléments finis permette de considérer toute dégradation périodique possible, cette méthode doit être appliquée pour toutes les configurations de dégradations possibles (variations des épaisseurs des plis, variations de la distance entre les fissures...).

Les différentes approches rappelées précédemment ont été étendues pour prendre en compte le délaminage local en pointe de fissure transverse (Nairn & Hu, 1992, 1994).

2.2 Evolution des dégradations

Une fois le champ de contrainte déterminé, il est nécessaire de définir des modèles de développement des dégradations. Plusieurs modèles basés sur une approche en contrainte ou sur la mécanique de la rupture ont été proposés. Pour les approches de type contrainte, l'apparition de nouvelles fissures transverses est contrôlée par la distribution de contraintes de rupture. Ainsi, une nouvelle fissure est créée lorsque la contrainte maximum dans le pli est égale à la résistance en traction du pli unidirectionnel. Les modèles basés sur la mécanique de la rupture déterminent le taux de restitution d'énergie associé à la formation d'une nouvelle fissure et compare la valeur obtenue à un taux de restitution critique.

■ Modèles basés sur les contraintes

(Garrett & Bailey, 1977) supposent que la distribution des contraintes de résistance en traction est constante dans tout le stratifié. Bien que simple à mettre en œuvre, l'utilisation de ce modèle n'est pas en accord avec les observations expérimentales. En mesurant la contrainte nécessaire pour initier la microfissuration pour différents stratifiés, les auteurs (Parvizi *et al.*, 1978) constatent que cette contrainte est dépendante de l'épaisseur des plis,

ce qui contredit l'utilisation d'une résistance en traction uniforme.

Pour palier cette difficulté, plusieurs auteurs proposent d'utiliser une distribution aléatoire de la contrainte à rupture dans le stratifié selon différentes lois de probabilité (Berthelot *et al.*, 1996; Berthelot, 2003). Les paramètres utilisés dans les lois de probabilité sont cependant associés au stratifié étudié et ne sont donc pas intrinsèques au matériau. Une explication plus détaillée des modèles probabilistes sera proposée dans le chapitre 2.

■ Modèles basés sur la mécanique de la rupture

Les faiblesses des modèles basés sur la contrainte à rupture ont conduit Parvizi *et al* (Parvizi *et al.*, 1978) à proposer un critère en énergie. Une nouvelle microfissure est créée lorsque l'énergie libérée par la formation de cette fissure G_m excède une valeur critique G_{mc} appelée taux de restitution d'énergie critique et intrinsèque au matériau. Ce modèle est aujourd'hui utilisé par de nombreux auteurs. La difficulté consiste cependant à déterminer le taux de restitution en utilisant une extension de la mécanique de la rupture associée à l'apparition d'une fissure finie. Hashin appelle cette extension "Mécanique de la rupture discrète". L'énergie potentielle dans la configuration A est déterminée. Une fissure apparaît, menant à la configuration B. La différence entre ces deux énergies potentielles divisée par l'aire de la fissure créée conduit au calcul du taux de restitution (Figure 1.9). Quelle que soit la méthode utilisée pour décrire le champ de contraintes, il est possible d'exprimer le taux de restitution d'énergie en fonction de l'épaisseur des plis, des contraintes dans les plis ainsi que des caractéristiques matériau. L'épaisseur des plis est donc directement introduite dans le critère et permet une meilleure vérification des résultats expérimentaux pour des plis fins. Cependant ce critère ne semble pas convenir pour des plis épais.

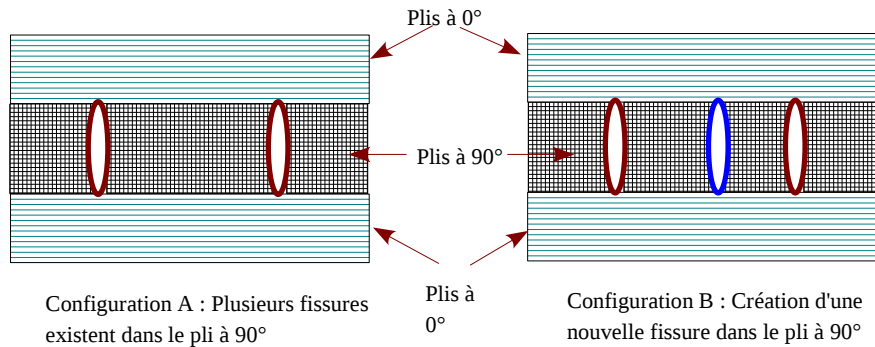


Figure 1.9: Détermination du taux de restitution associé à l'apparition d'une microfissure

Les approches micromécaniques permettent d'analyser très simplement les dégradations, puisque celles-ci sont directement représentées par des surfaces de rupture. La modélisation des dégradations est ici reliée à la phénoménologie microscopique. Cependant, ces approches micromécaniques possèdent plusieurs défauts qui limitent leur utilisation. Il est aujourd'hui impossible de mener un calcul de structure avec la représentation proposée

par la micromécanique. Qui plus est, la majorité des modèles développés sont spécifiques à certaines stratifications particulières ($[0/90]$ la plupart du temps) ou utilisent des hypothèses limitantes (2D, fissures infinies, périodicité...). Ces différentes caractéristiques ne permettent donc pas de mener des calculs pour un stratifié quelconque. Enfin, certains mécanismes ne sont pas pris en compte dans ces modèles. L'endommagement diffus n'est jamais introduit alors que pour des stratifiés $[\pm 45]_s$ par exemple, il est le mécanisme prépondérant.

3 La Méso mécanique des stratifiés

Les approches mésomécaniques s'appuient sur la mécanique continue de l'endommagement pour modéliser les mécanismes de dégradation. Elles introduisent des variables d'endommagement représentant une homogénéisation d'une zone dégradée selon différentes procédures. L'introduction de variables d'endommagement fut initialement proposée par Kachanov ([Kachanov, 1958](#)) et Rabotnov ([Rabotnov, 1968](#)) pour décrire les discontinuités introduites par les dégradations dans les métaux ou les bétons. Les différents modèles existant diffèrent principalement par le nombre de variables d'endommagement pris en compte, leur signification et la complexité des phénomènes modélisés. Le modèle proposé par Talreja ([Talreja, 1985, 1986, 1994](#)) et repris par ([Thionnet & Renard, 1993](#)) introduit une seule variable d'endommagement dans le pli et ne permet alors pas de simuler les dégradations en cisaillement. La variable d'endommagement choisie correspond au déplacement normal d'ouverture des fissures transverses qui affecte la réponse globale de la structure. Allen ([Allen et al., 1987a,b; Allen, 1994, 2001](#)) propose de définir un tenseur d'endommagement obtenu par homogénéisation d'un volume élémentaire représentatif contenant des microfissures puis d'intégrer ce comportement dans une approche classique de théorie des stratifiés.

Une attention particulière est donnée au mésomodèle d'endommagement développé au LMT depuis une vingtaine d'années ([Ladevèze, 1986; Allix & Ladevèze, 1992; Ladevèze & LeDantec, 1992](#)) dont plusieurs principes seront repris dans le micromodèle rappelé au chapitre 2. Ce modèle d'endommagement a initialement été développé pour les stratifiés mais a aussi été étendu aux matériaux tissés ([Hochard et al., 2001; Bordreuil & Hochard, 2004](#)) ou aux matériaux carbone/carbone en quasistatique comme en dynamique. Des essais d'identification ont notamment été menés dans ([Allix et al., 2000](#)) pour les petits chocs sur stratifiés.

Pour les stratifiés, l'échelle intermédiaire à laquelle les phénomènes d'endommagement peuvent être décrits de manière simple est l'échelle du pli. On parle alors d'échelle méso. Le mésomodèle d'endommagement repose sur deux idées principales :

■ La première est que le comportement d'un stratifié peut être décrit par deux constituants élémentaires : les plis et les interfaces (Figure 1.10). Ces mésoconstituants ont leur propre comportement continu indépendant de la structure dans laquelle ils s'insèrent. Des variables d'endommagement sont introduites pour caractériser les chutes de raideur associées aux dégradations.

■ La seconde hypothèse est que l'endommagement est constant dans l'épaisseur de chaque

pli mais peut varier d'un pli à l'autre ou en différents points d'un même pli. L'interface est introduite quant à elle, pour gérer les phénomènes de délaminage, son rôle étant essentiellement limité aux zones de bord.

La modélisation de chacune de ces entités est rappelée ci-dessous.

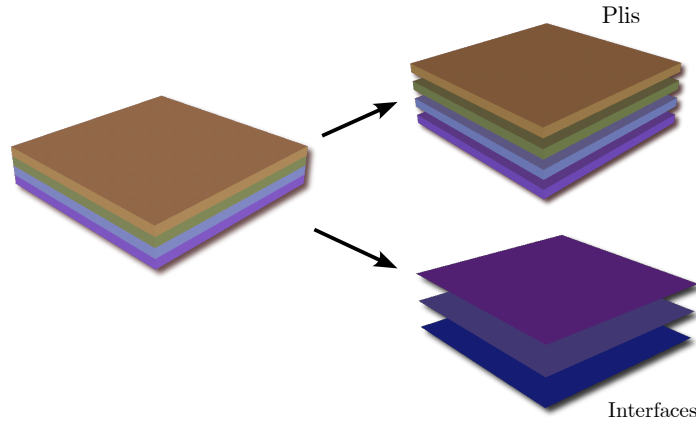


Figure 1.10: Méso-constituants d'un stratifié

3.1 Modélisation d'un pli élémentaire

On utilise la base d'orthotropie du pli pour définir son comportement. On note 1 la direction des fibres, 2 la direction transverse dans le pli et 3 la direction hors-plan. Un calcul d'homogénéisation permet de montrer que seuls certains coefficients matériaux sont affectés par les dégradations d'endommagement diffus ou de fissurations transverses. La version initiale du mésomodèle fut écrite pour le cas de contraintes planes mettant en jeu les modules d'élasticité modifiés par les dommages. L'énergie de déformation s'écrit alors sous la forme :

$$2e_d = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{(1-d_F)E_1^0} + \frac{\phi(\langle -\sigma_{11} \rangle_+)}{E_1^0} - \left(\frac{\nu_{12}}{E_1^0} + \frac{\nu_{21}}{E_2^0} \right) \sigma_{11}\sigma_{22} \\ + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{(1-d')E_2^0} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\sigma_{12}^2}{(1-d)G_{12}^0}$$

où $\langle s \rangle_+$ représente la partie positive de la quantité s et les exposants 0 correspondent aux propriétés matériaux saines.

La variable d'endommagement d' traduit la chute du module de traction transverse E_2^0 et la variable d celle du module de cisaillement G_{12}^0 . La variable d'endommagement d_F est introduite pour modéliser les ruptures de fibres traduites par une chute du module de rigidité longitudinal E_1^0 . Les parties positive et négative des contraintes transverses σ_{22} sont

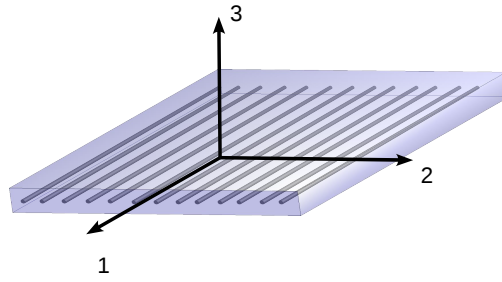


Figure 1.11: Directions d'orthotropie d'un pli unidirectionnel

séparées pour prendre en compte l'aspect unilatéral de la création de microfissures (différence entre ouverture et fermeture des fissures transverses). Une fonction non-linéaire ϕ est introduite pour modéliser le comportement en compression du pli (rupture fragile des fibres en compression).

Compte tenu du comportement isotrope transverse du pli, une extension simple aux cas de contraintes tridimensionnelles est obtenue par la donnée de l'énergie :

$$\begin{aligned}
 2e_d = & \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{(1-d_F)E_1^0} + \frac{\phi(\langle -\sigma_{11} \rangle_+)}{E_1^0} \\
 & - \left(\frac{\nu_{12}}{E_1^0} + \frac{\nu_{21}}{E_2^0} \right) \sigma_{11}\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_{13}}{E_1^0} + \frac{\nu_{31}}{E_3^0} \right) \sigma_{11}\sigma_{33} - \left(\frac{\nu_{23}}{E_2^0} + \frac{\nu_{32}}{E_3^0} \right) \sigma_{22}\sigma_{33} \\
 & + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{(1-d')E_2^0} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{(1-d')E_3^0} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} \\
 & + \frac{\sigma_{12}^2}{(1-d)G_{12}^0} + \frac{\sigma_{13}^2}{(1-d)G_{13}^0} + \frac{\sigma_{23}^2}{(1-d)G_{23}^0}
 \end{aligned}$$

En écrivant la dissipation mécanique comme une intégrale sur l'épaisseur du pli (de manière à être compatible avec les variables d'endommagement constantes dans l'épaisseur du pli), on définit les forces thermodynamiques associées aux variables d'endommagement.

$$Y_{dF} = \ll \frac{\partial e_d}{\partial d_F} \gg_{|\sigma} \quad (1.2)$$

$$Y_d = \ll \frac{\partial e_d}{\partial d} \gg_{|\sigma} \quad (1.3)$$

$$Y_{d'} = \ll \frac{\partial e_d}{\partial d'} \gg_{|\sigma} \quad (1.4)$$

soit

$$Y_{dF} = \frac{1}{(1-d_F)^2} \ll \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1^0} \gg \quad (1.5)$$

$$Y_d = \frac{1}{(1-d)^2} \ll \frac{\langle \sigma_{12} \rangle_+^2}{G_{12}^0} + \frac{\langle \sigma_{13} \rangle_+^2}{G_{13}^0} + \frac{\langle \sigma_{23} \rangle_+^2}{G_{23}^0} \gg \quad (1.6)$$

$$Y_{d'} = \frac{1}{(1-d')^2} \ll \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} \gg \quad (1.7)$$

où $\ll s \gg = \frac{1}{H} \int_{h=0}^H s dh$ représente la moyenne de s dans l'épaisseur du pli.

La dissipation s'écrit alors : $\omega = Y_{dF} \dot{d}_F + Y_d \dot{d} + Y_{d'} \dot{d}'$.

Les variables d'endommagement sont pilotées par les forces d'endommagement selon des lois d'évolution dépendant de l'histoire. Pour des chargements quasi-statiques, on considère que les variables d'endommagement ne dépendent que des maxima des forces d'endommagement obtenus jusqu'au temps considéré. On introduit des forces d'endommagement effectives $\bar{Y}_{dF}$, $\bar{Y}_d$ et $\bar{Y}_{d'}$ de manière à prendre en compte les couplages entre décohésions fibres-matrice et fissuration transverse.

$$\begin{aligned}\bar{Y}_{dF|t} &= \sup_{\tau \leq t} (Y_{dF|_\tau}, \tau \leq t) \\ \bar{Y}_{d|t} &= \sup_{\tau \leq t} (Y_{d|_\tau} + b Y_{d'|_\tau}, \tau \leq t) \\ \bar{Y}_{d'|t} &= \sup_{\tau \leq t} (Y_{d'|_\tau} + b' Y_{d|_\tau}, \tau \leq t)\end{aligned}$$

Les lois d'évolution sont alors données par :

$$\begin{aligned}d_F &= 0, \text{ si } \bar{Y}_{dF|t} < \bar{Y}_{dFc}, \text{ sinon } d_F = 1 \\ d' &= \frac{\sqrt{\bar{Y}_{d'|t}} - \sqrt{\bar{Y}_{d'0}}}{\sqrt{\bar{Y}_{d'c}}}, \text{ si } d' < 1 \text{ et } d < 1 \text{ et } \bar{Y}_{d'|t} < \bar{Y}_{d's}, \text{ sinon } d' = 1 \\ d &= b d', \text{ si } d < 1 \text{ et } d' < 1, \text{ sinon } d = 1\end{aligned}$$

On introduit pour ces lois un retard et un seuil correspondant à l'apparition de fissures transverses.

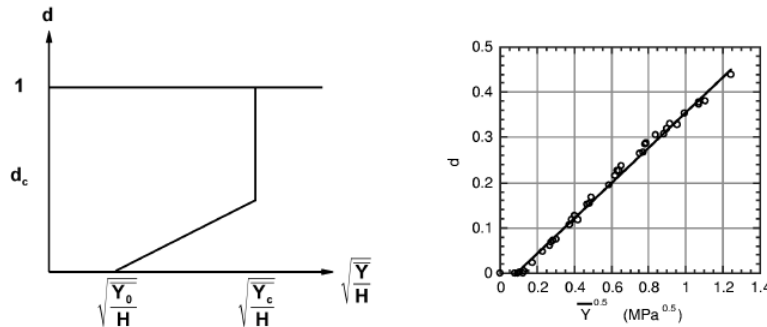


Figure 1.12: Loi d'évolution de l'endommagement d' identifiée sur un stratifié croisé.

Une description des déformations anélastiques peut être ajoutée à ce modèle. Les déformations résiduelles observées expérimentalement sont généralement la conséquence de glissements et frottements au niveau des zones endommagées (fibres / matrice, fermeture de fissures transverses). Un modèle de plasticité permet de prendre en compte ces déformations. Le couplage entre endommagement et plasticité est pris en compte par l'intermédiaire de contraintes et déformations effectives (Ladevèze, 1994). Pour ne pas avoir à considérer

l'endommagement dans la loi d'évolution de la plasticité, une équivalence énergétique entre les variables effectives et variables vraies est proposée. Les contraintes et déformations effectives sont donc définies dans le plan comme suit :

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{1-d} \\ \tilde{\sigma}_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{1-d'} \\ \tilde{\sigma}_{11} &= \sigma_{11} \\ \dot{\tilde{\epsilon}}_{12}^p &= \dot{\tilde{\epsilon}}_{12}(1-d) \\ \dot{\tilde{\epsilon}}_{22}^p &= \dot{\tilde{\epsilon}}_{22}(1-d') \\ \dot{\tilde{\epsilon}}_{11}^p &= 0\end{aligned}$$

Ces variables vérifient :

$$\text{Tr } \tilde{\sigma} \tilde{\epsilon}^p = \text{Tr } \sigma \epsilon^p$$

3.2 Modélisation de l'interface

L'interface est une entité surfacique comprise entre deux plis adjacents qui assure le transfert des efforts et des déplacements entre ces deux plis. L'interface joue un rôle très important dans les zones de bord où les contraintes sont tridimensionnelles et à fort gradient. Les contraintes hors-plan induisent alors une dégradation par délaminage. Plusieurs modèles basés sur des lois cohésives existent dans la littérature et sont utilisés pour modéliser le délaminage (Allix *et al.*, 1995; Corigliano & Mariani, 2001; Allix & Corigliano, 2000; Schellekens & De Borst, 1993; Remmers *et al.*, 2003).

On définit le comportement de l'interface dans la base locale d'orthotropie repérée par la direction 1 bissectrice de l'angle formé par les fibres des plis adjacents, la direction 2 orthogonale dans le plan et la direction 3 normale au plan du stratifié Figure 1.13. On note $[\underline{U}] = \underline{U}^+ - \underline{U}^- = [U_1]\underline{N}_1 + [U_2]\underline{N}_2 + [U_3]\underline{N}_3$ le saut de déplacement dans la base d'orthotropie de l'interface.

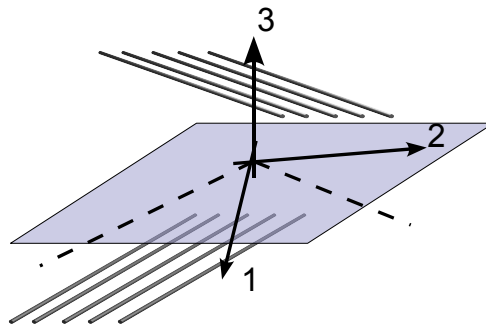


Figure 1.13: Directions d'orthotropie pour une interface entre deux plis

L'énergie de déformation élastique de l'interface non endommagée s'exprime en fonc-

tion de raideurs élastiques k_1^0 , k_2^0 et k_3^0 .

$$e_d = \frac{1}{2} (k_3^0 [U_3]^2 + k_1^0 [U_1]^2 + k_2^0 [U_2]^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{33}^2}{k_3^0} + \frac{\sigma_{31}^2}{k_1^0} + \frac{\sigma_{32}^2}{k_2^0} \right) \quad (1.8)$$

Les raideurs sont déterminées en pratique à partir des modules de la résine divisés par une petite épaisseur e .

Les effets de dégradation de l'interface sont modélisés par trois variables d'endommagement d_1 , d_2 et d_3 associées aux trois modes d'ouverture possibles de l'interface. d_3 modélise le mode d'ouverture de l'interface (mode I), d_1 et d_2 les modes de cisaillement (mode II et III) (cf. Figure 1.14). Le caractère unilatéral de l'endommagement en ouverture est pris en compte en séparant les parties positives et négatives de la contrainte normale σ_{33} . L'énergie de déformation s'écrit alors :

$$e_d = \frac{1}{2} \left(\frac{< \sigma_{33} >_+^2}{(1 - d_3)k_3^0} + \frac{< -\sigma_{33} >_+^2}{k_3^0} + \frac{\sigma_{31}^2}{(1 - d_1)k_1^0} + \frac{\sigma_{32}^2}{(1 - d_2)k_2^0} \right) \quad (1.9)$$

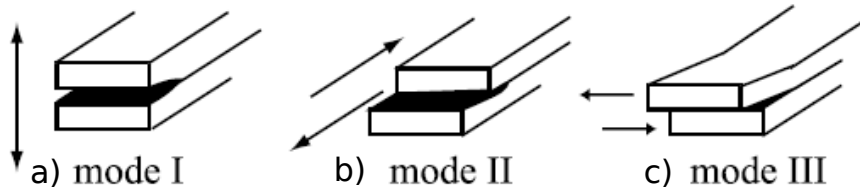


Figure 1.14: Modes de rupture : a) d'ouverture (mode I), b) et c) de cisaillement (modes II et III)

Les forces d'endommagement pilotant les variables d'endommagement sont obtenues à partir de l'écriture de la dissipation et dérivent de l'énergie de déformation :

$$Y_{d_3} = \frac{1}{2} \frac{< \sigma_{33} >_+^2}{(1 - d_3)^2 k_3^0}$$

$$Y_{d_1} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{31}^2}{(1 - d_1)^2 k_1^0}$$

$$Y_{d_2} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_{32}^2}{(1 - d_2)^2 k_2^0}$$

Une loi d'évolution de l'endommagement "isotrope" est adoptée. Les lois sont supposées fortement couplées et gouvernées par une unique force d'endommagement équivalente :

$$\bar{Y} = \sup_{\tau \leq t} ((Y_{d_3})^\alpha + (\gamma_1 Y_{d_1})^\alpha + (\gamma_2 Y_{d_2})^\alpha)^{1/\alpha} \quad (1.10)$$

où γ_1 , γ_2 et α sont des paramètres matériau à identifier.

Etant donné que l'interface a une épaisseur très petite, l'endommagement est supposé se développer selon tous les modes simultanément. Ainsi la loi d'évolution retenue est la

suivante :

$$d = d_1 = d_2 = d_3 = \omega(\bar{Y}) \quad \text{si } d < 1 \quad (1.11)$$

$$d_1 = d_2 = d_3 = 1 \quad \text{sinon} \quad (1.12)$$

avec

$$\omega(\bar{Y}) = \left[\frac{n}{n+1} \frac{<\bar{Y} - Y_0>_+}{Y_c - Y_0} \right]^n$$

La loi d'évolution nécessite ainsi 6 paramètres $\gamma_1, \gamma_2, \alpha, Y_c, Y_0, n$ identifiés expérimentalement sur des essais DCB, ENF et MMF en reliant les forces d'endommagement aux taux de restitution d'énergie (Figure 1.15) (Allix *et al.*, 1998).

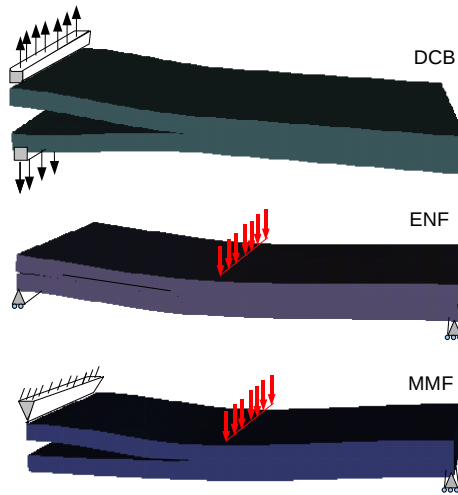


Figure 1.15: Essais DCB, ENF et MMF

Le modèle écrit sous cette forme ne permet pas de palier les difficultés introduites par la localisation des déformations dans un calcul de structure (dépendance au maillage, à l'orientation des éléments ...). Ainsi, des lois d'endommagement avec effet retard (Ladevèze *et al.*, 2000) sont introduites aussi bien pour le pli que pour l'interface. Les lois couplent les taux d'endommagement aux forces d'endommagement en introduisant un temps caractéristique et un taux d'endommagement limite. La localisation est alors traitée en dynamique. Pour les faibles taux d'endommagement le modèle se confond avec le modèle précédemment décrit. Les principes du modèle à effet retard ont été utilisés et adaptés pour les matériaux métalliques dans (Suffis *et al.*, 2003).

L'utilisation du mésomodèle avec endommagement à effet retard permet de réaliser des calculs de structures sur tout type de stratifié (Allix *et al.*, 1998). La figure 1.16 montre par exemple l'évolution du délaminage sur une plaque $[\pm 25]_s$ soumise à une rampe puis un palier de vitesse.

La difficulté principale est l'interprétation des résultats d'un point de vue dégradation. Il n'est pas possible de dissocier les modes de dégradation (fissuration transverse / endom-

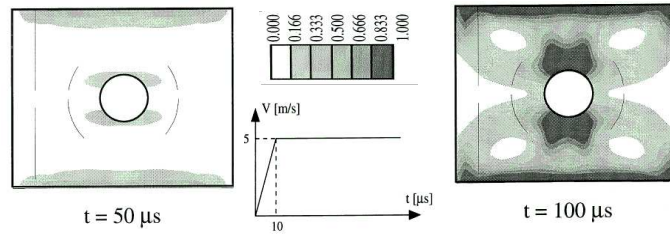


Figure 1.16: Evolution du délaminage dans une plaque trouée $[\pm 25]_s$ simulée par mésomodèle d'endommagement.

magement diffus). Les dommages s'interprètent en terme de chute de raideur et nécessitent une certaine expertise pour analyser les résultats.

4 Pont méso-micro

Les travaux (Ladevèze & Lubineau, 2002; Ladevèze & Lubineau, 2003a,b,c; Lubineau & Ladevèze, 2005) et (Ladevèze *et al.*, 2006) ont permis de réaliser un pont relativement complet entre les deux approches présentées : l'approche micromécanique, qui quantifie la dégradation via des indicateurs physiques (taux de fissuration, taux de délaminage), et l'approche de type mésomodèle, basée sur la théorie de l'endommagement. Le principe de ce pont consiste à réaliser une homogénéisation au moyen d'une équivalence énergétique.

L'énergie potentielle est déterminée pour une cellule élémentaire microfissurée et une cellule homogène endommagée (Figure 1.17). En séparant les variables en partie effective (contraintes et déformations dans l'état sain) et partie résiduelle, l'énergie de déformation du pli endommagé peut s'écrire sous la forme :

$$e_d = \tilde{e}_d - \bar{e}_d$$

où e_d est la densité d'énergie de déformation du pli endommagé, $\tilde{e}_d$ est celle du pli sain sous déformation macroscopique et $\bar{e}_d$ est celle du problème de résidu. Le problème de résidu est un problème linéaire pour lequel les lèvres de la fissure sont soumises à un effort résiduel $-\sigma \underline{N}$ homogène. Le comportement méso est ainsi relié aux principales caractéristiques micro des constituants.

Les premiers travaux (Ladevèze & Lubineau, 2002; Ladevèze & Lubineau, 2003a,b,c; Lubineau & Ladevèze, 2005) ont concerné le comportement du pli sous chargement plan. L'étude des mécanismes de microfissuration transverse et de délaminage local en pointe de fissure transverse a permis de prouver que les variables et les forces thermodynamiques méso associés à l'endommagement sont des quantités homogénéisées quasi-indépendantes de la séquence d'empilement. Dès lors, l'échelle méso peut être proprement définie comme le résultat de l'homogénéisation de l'échelle micro et des opérateurs entre quantités micro et méso ont été définis quel que soit l'état d'endommagement.

Le pont a récemment été enrichi (Ladevèze *et al.*, 2006) en considérant les plis et les interfaces sous chargement hors-plan. A partir de problèmes d'homogénéisation de référence,

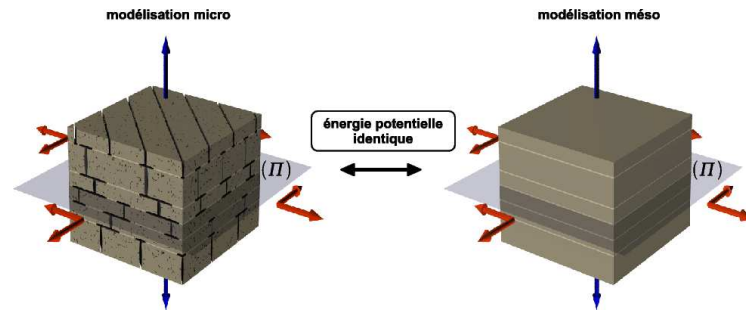


Figure 1.17: Equivalence énergétique entre micro-mécanique et méso-mécanique

des relations fondamentales permettent de relier les quantités micro et méso : la partie plane des déformations méso et la partie hors-plan des contraintes méso peuvent être considérées comme les moyennes des quantités micro correspondantes. Il est alors montré que l'état des mésoconstituants peut être homogénéisé. La résolution de ces problèmes de référence pour un grand nombre de paramètres permet de mettre en évidence le caractère quasi-intrinsèque des endommagements méso homogénéisés. Les relations micro-méso obtenues montrent que l'endommagement de l'interface en mode I ne dépend pas de la fissuration transverse dans les plis adjacents, que les endommagements de l'interface en mode II et III rendent compte des interactions entre les endommagements intra et interlaminaires et que les endommagements hors-plan des plis font intervenir les interactions entre endommagements de plis adjacents. Ces résultats permettent de définir un mésomodèle amélioré.

Bien que permettant de relier les quantités méso aux quantités microscopiques donnant ainsi une interprétation possible des résultats de calculs méso en terme de morphologie de dégradation, le pont méso-micro possède certaines limites inhérentes au modèle microscopique retenu. En effet, le pont suppose que le champ de contrainte est homogène ou que les variations de gradients sont modérées par rapport à la taille des dégradations considérées. Ceci rend impossible l'utilisation de ce modèle dans les zones à forts gradients tels que les zones proches des trous. La morphologie de la dégradation est aussi supposée *a priori*. Les fissures transverses sont localement périodiques, infinies. Le délaminage local est lui aussi périodique et associé à chaque fissure transverse. Ces différentes hypothèses ne permettent pas de définir un modèle générique.

Une modélisation microscopique hybride

Un modèle microscopique a été proposé dans (Ladevèze, 2004, 2005). Ce modèle permet de prendre en compte les différents scénarios de dégradation à la fois continus et discrets. Il couple ainsi les différents avantages des modélisations micro et méso sans pour autant être limité par des hypothèses simplificatrices importantes. La partie discrète du modèle utilise le concept de surfaces de rupture minimales choisies selon des considérations physiques et énergétiques, cet aspect est détaillé dans un premier temps. Le modèle continu basé sur le mésomodèle d'endommagement est clarifié dans un second temps.

Sommaire

1	Principes du modèle microscopique	32
2	Modélisation des mécanismes discrets	32
2.1	Surfaces de ruptures minimales	33
2.2	Variabilité des taux de restitution critiques	40
3	Modélisation des mécanismes diffus	43
3.1	Définition d'un milieu continu	43

1 Principes du modèle microscopique

Le modèle appelé ici permet de rendre compte des différents mécanismes de dégradation. L'hypothèse fondamentale sur laquelle repose le modèle micromécanique hybride est que les mécanismes de dégradation du stratifié sont clairement identifiés. Les mécanismes pris en compte sont séparés en plusieurs groupes selon l'échelle du pli : les mécanismes discrets à cette échelle, pour lesquels des faciès de rupture sont facilement identifiables et quantifiables ; les mécanismes diffus pour lesquels la dégradation est répartie de manière quasi homogène dans le pli et les interfaces interlaminaires. Les mécanismes discrets sont modélisés dans le cadre de la mécanique de la rupture discrète (Hashin, 1985). Les mécanismes diffus sont, quant à eux, décrits par la mécanique continue de l'endommagement. Etant donné que le modèle couple ces deux familles de mécanismes, il peut être qualifié de modèle hybride.

Le point clé du modèle consiste à définir des surfaces de rupture qui quantifient les mécanismes discrets. Le choix des formes et dimensions de ces surfaces est fait selon des considérations physiques (liées aux phénomènes observés expérimentalement) et énergétiques (développement des fissures...). Entre ces surfaces, la matière est supposée homogène et continue. Le comportement du milieu permet de représenter les mécanismes de dégradation continus.

Le modèle microscopique hybride diffère totalement des modèles discrets ou "Discrete Element Methods" développés dans la littérature. En effet, ceux-ci sont principalement basés sur la dynamique moléculaire et les dégradations sont simulées par l'intermédiaire d'un milieu discret ((Wittel *et al.*, 2003; Curtin & Scher, 1990; Ibrahimbegovic & Delaplace, 2003)) ou d'interfaces cohésives (Camasho & Ortiz, 1996). Pour le modèle microscopique, les dégradations sont simulées en résolvant un problème continu dans lequel des surfaces de rupture apparaissent.

2 Modélisation des mécanismes discrets

Le point clé de la modélisation microscopique développée est l'introduction de surfaces de rupture minimales. Ces surfaces quantifient les mécanismes de dégradations discrets : fissuration transverse, délaminage local et rupture de fibre. La rupture de fibre peut être vue comme un phénomène discret ou diffus. On fait le choix de l'inclure dans les mécanismes discrets. Ces surfaces représentent la plus petite dégradation que l'on considère de manière discrète dans le modèle. Les décohésions fibres/matrices ou microfissures de la matrice entre deux fibres ne sont pas incluses dans les mécanismes discrets par exemple. Le modèle microscopique est ainsi très robuste et permet de palier les problèmes de localisation. En effet, les surfaces de rupture choisies selon des considérations micromécaniques introduisent des dimensions caractéristiques qui évitent les différents problèmes liés au maillage. Ces surfaces seront saines puis totalement rompues lorsqu'un critère de rupture précisé dans la suite sera atteint.

Deux points sont abordés dans ce paragraphe : le choix (forme et dimensions) et les critères de rupture de chacune de ces surfaces. Ce type d'approche n'est pas limité qu'au stratifié et peut être envisagé pour d'autres matériaux (SiC/SiC par exemple).

2.1 Surfaces de ruptures minimales

2.1.1 Forme des surfaces

Plusieurs surfaces minimales sont définies. La figure 2.1 montre les géométries employées pour les différents types de surfaces.

■ Les fissures transverses sont quantifiées par des surfaces carrées perpendiculaires au plan moyen du pli et parallèles aux fibres, de dimension l'épaisseur de la couche considérée H . Cette géométrie limite les cas de microfissurations possibles. En effet, il n'est pas possible en utilisant ce type de géométries de modéliser les fissures inclinées pouvant apparaître dans certaines configurations. Cependant, ces microfissures sont principalement observées pour des stratifiés épais à des niveaux de fissuration élevés. L'utilisation de surfaces perpendiculaires est donc satisfaisante pour la majorité des stratifiés rencontrés.

■ Les surfaces modélisant le délaminage local sont des parallélogrammes introduits au niveau de la zone interlaminaire dont l'inclinaison des côtés correspond aux orientations des fibres dans les plis adjacents. Les dimensions de ces surfaces sont $\epsilon H_i \times \epsilon H_s$ où H_i est l'épaisseur du pli inférieur et H_s l'épaisseur du pli supérieur, ϵ un paramètre valant 0.1 à 0.5.

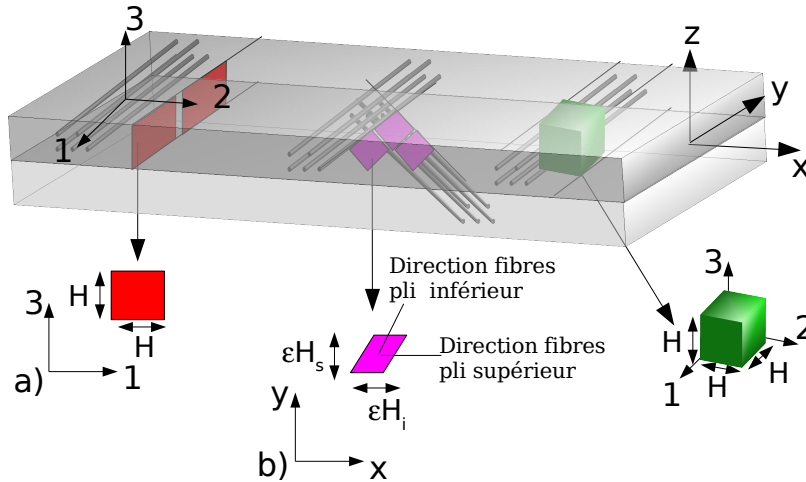


Figure 2.1: Surfaces de rupture minimales : a) fissuration transverse, b) délaminage local

■ La rupture de fibres se fait généralement de manière volumique. C'est pourquoi, on introduit des volumes de côté H dont deux côtés sont perpendiculaires aux fibres des plis pour modéliser la rupture de fibres (cf. 2.2).

Remarque : Ce choix impose une distance minimale entre deux fissures transverses de l'épaisseur du pli. Si on détermine le taux de fissuration correspondant $\rho = H/H = 1$, on obtient un taux largement supérieur aux taux classiquement obtenus. Le choix d'un volume de matière de côté H apparaît donc légitime dans ces conditions.

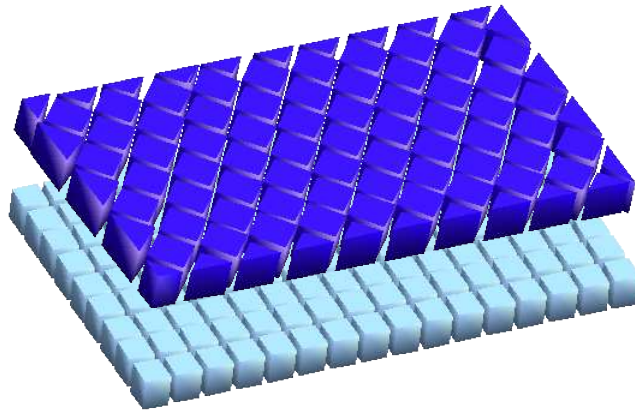


Figure 2.2: Représentation des ruptures de fibres par ces cellules de côté H.

2.1.2 Choix des dimensions des surfaces

Plusieurs dimensions sont choisies de manière arbitraire ; cependant des considérations énergétiques permettent de guider le choix de ces dimensions.

■ Fissuration transverse

La première hypothèse du modèle consiste à supposer que la plus petite fissure transverse simulée traverse toute l'épaisseur d'un pli. Expérimentalement, on constate que les décohésions fibres/matrice aboutissent rapidement à une fissure transverse traversant toute l'épaisseur du pli. (Dvorak & Laws, 1987) étudient l'évolution d'un défaut en forme d'ellipse au centre d'un pli dans le sens longitudinal (le long des fibres, direction 1 d'après les notations du chapitre 1) et dans l'épaisseur du pli (direction 3). En calculant le taux de restitution d'énergie dans les deux sens de propagation, ils constatent que le taux d'énergie dans le sens transverse est bien supérieur à celui déterminé dans le sens longitudinal.

$$G_T \gg G_L$$

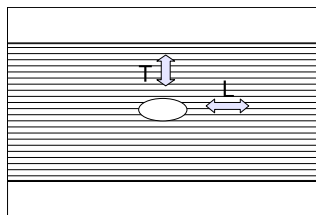


Figure 2.3: Evolution d'un défaut au centre d'un pli dans le sens longitudinal : sens L et dans l'épaisseur du pli : sens T

Par conséquent, un défaut au sein du pli (microvide, décohésion fibre/matrice...) traversera complètement le pli avant de se propager dans le sens des fibres. Ceci n'est plus vrai pour des plis relativement épais (pour lesquels des fissures inclinées peuvent apparaître) mais écartés de la modélisation comme indiqué précédemment. On a donc ici montré que si l'on s'intéresse à la fissuration transverse seule, il est raisonnable de ne considérer que la

propagation (ou initiation) d'une fissure le long des fibres. On suppose donc que la formation d'une fissure se fait de manière instantanée dans l'épaisseur du pli même si en réalité l'apparition d'une fissure se fait de manière graduelle.

La deuxième longueur choisie dans le sens des fibres d'un pli est environ égale à l'épaisseur du pli. Ce choix résulte de l'analyse de la propagation d'une fissure parallèlement aux fibres.

Compte tenu du choix précédent, il est possible d'étudier la propagation d'une fissure transverse soumise à un chargement quelconque au coeur du stratifié. Pour une avancée de fissure donnée, on détermine la différence d'énergie potentielle puis le taux de restitution associé et on trace l'évolution du taux de restitution pour différentes longueurs de fissure. On obtient une courbe dont l'allure est donnée sur la figure 2.4. Dans l'annexe D et en suivant les articles de Nairn (Nairn, 2000a), on montre que le taux de restitution est proportionnel au chargement. Les courbes obtenues pour un chargement thermique pur ou un chargement de déformation longitudinale sont donc simplement proportionnelles.

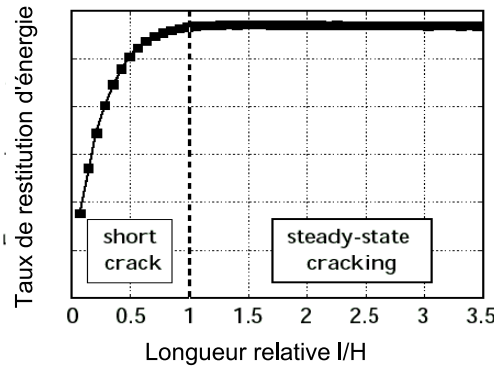


Figure 2.4: Evolution du taux de restitution de l'énergie au coeur d'un stratifié $[0_3/90_3]_s$ en fonction de la longueur d'une fissure transverse.

Quel que soit le pli considéré, on constate que la courbe tend vers une valeur asymptotique qui correspond au taux de restitution déterminé par les approches micromécaniques classiques bidimensionnelles sous l'hypothèse de fissures transverses infinies. On appelle cette zone "steady-state". Pour une longueur de l'ordre de l'épaisseur du pli, la courbe atteint l'état de "steady-state". En dessous de H , la courbe varie en fonction de la longueur de la fissure.

Remarque : La courbe précédente est obtenue par résolution éléments finis. Par avancée virtuelle de fissure, on détermine le taux de restitution. Le maillage est choisi finement dans l'épaisseur de manière à décrire de façon correcte l'ouverture de la fissure.

L'hypothèse retenue dans le modèle microscopique est de discrétiser cette courbe par zones de longueur H pour lesquelles on considère une moyenne du taux de restitution (Figure 2.5).

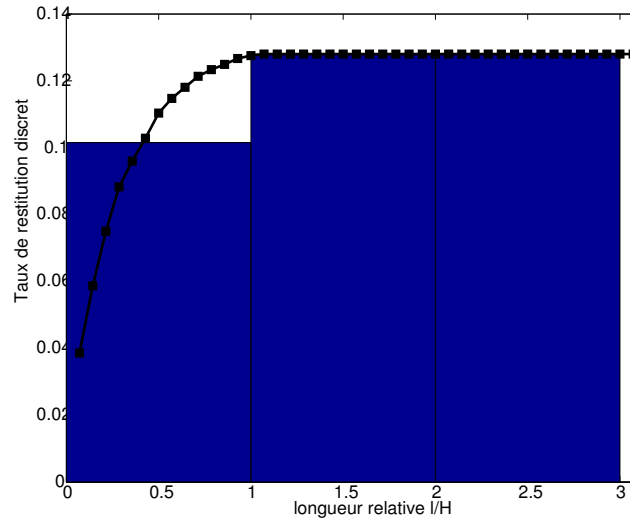


Figure 2.5: Evolution du taux de restitution discret

Le taux de restitution discret ΔG sera donc défini par :

$$\Delta G = \frac{1}{\Delta a} \int_a^{a+\Delta a} G(l) dl$$

où $G(l)$ est le taux de restitution continu, a la longueur de la fissure et $\Delta a = H$ la longueur de la surface rompue.

Remarque : Au niveau du bord, les contraintes tridimensionnelles modifient considérablement la courbe d'évolution du taux de restitution (Figure 2.6). En utilisant la définition précédente, on détermine véritablement le taux de restitution moyen sur une longueur H qui prend alors en compte de manière automatique non seulement l'effet de bord mais aussi l'effet "steady-state" de la propagation d'une fissure. On se reportera au chapitre 5 pour la technique de calcul du taux de restitution discret.

■ Délaminage local

Le taux de restitution d'énergie associé au développement du délaminage local perpendiculairement à une fissure transverse est déterminé par avancée virtuelle pour différents stratifiés (Figure 2.8). Le taux de délaminage local est déterminé par le rapport de l'aire délaminée sur l'épaisseur du pli considéré, tandis que le taux de fissuration ρ est égal au rapport de l'épaisseur du pli sur la distance entre deux fissures transverses successives (Figure 2.7). On constate que le taux de délaminage est quasi indépendant de la taille de la fissure interlaminaire quel que soit l'empilement étudié. De ce fait, la longueur choisie dans le sens de chaque fibre dépend uniquement de la finesse que l'on souhaite atteindre pour décrire le délaminage local. C'est pourquoi on introduit un paramètre ϵ choisi de manière à ne pas alourdir les calculs inutilement. On prendra par exemple des valeurs comprises entre 0.1 et 0.5.

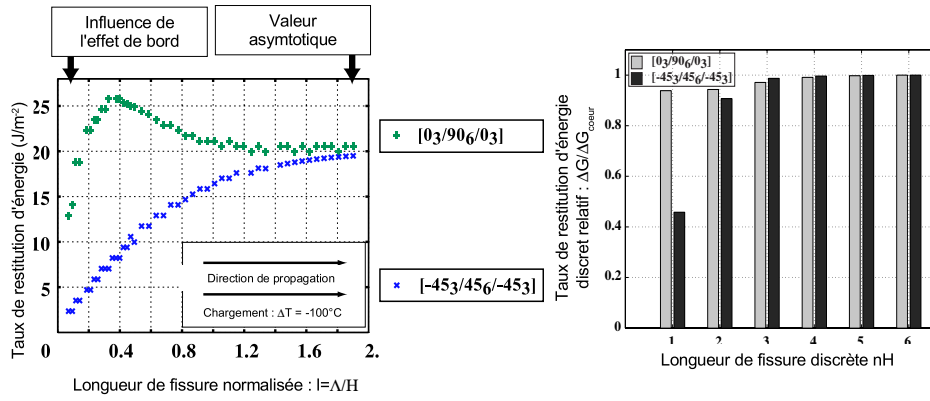


Figure 2.6: Evolution du taux de restitution de l'énergie pour différents stratifiés du bord vers le coeur sous chargement thermique.

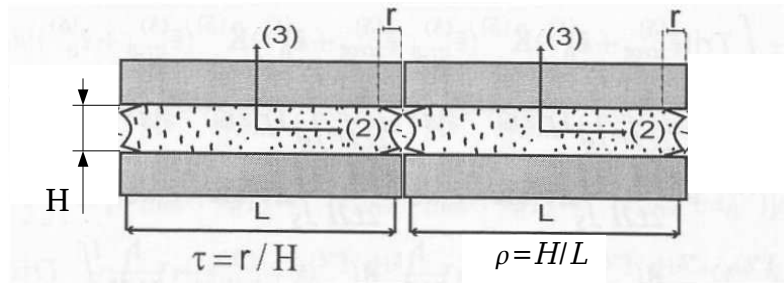


Figure 2.7: Définition du taux de délaminage pour un taux de fissuration donné.

2.1.3 Critère de rupture

Quelle que soit la surface de rupture considérée, celle-ci rompt lorsqu'un critère est atteint. Un critère basé sur le taux de restitution de l'énergie semble plus adéquat qu'un critère en contrainte (cf. rappels sur la Micromécanique des stratifiés). Des valeurs critiques du taux de restitution ΔG_c sont donc introduites et intrinsèques au matériau considéré. Après avoir déterminé le taux de restitution discret ΔG associé à la rupture d'une interface, on définit une force d'endommagement que l'on compare au taux de restitution critique selon des critères donnés. Si le critère est atteint, la surface est rompue et un nouveau calcul est mené sur cette configuration.

■ Surfaces de fissuration transverse

Comme précédemment, on s'intéresse à chacune des surfaces de rupture minimales. D'après l'analyse du taux de restitution discret au coeur d'un stratifié, deux zones ont été identifiées. On définit par conséquent un taux de restitution critique pour chaque zone : ΔG_c^{ini} pour la zone correspondant à l'initiation d'une fissure et ΔG_c^{prop} pour la zone de "steady-state". Chaque taux de restitution critique est identifié selon les modes de rupture. Ainsi, on introduit :

$$\begin{aligned} &\Delta G_c^{I,prop}, \quad \Delta G_c^{II,prop}, \quad \Delta G_c^{III,prop} \\ &\Delta G_c^{I,ini}, \quad \Delta G_c^{II,ini}, \quad \Delta G_c^{III,ini} \end{aligned}$$

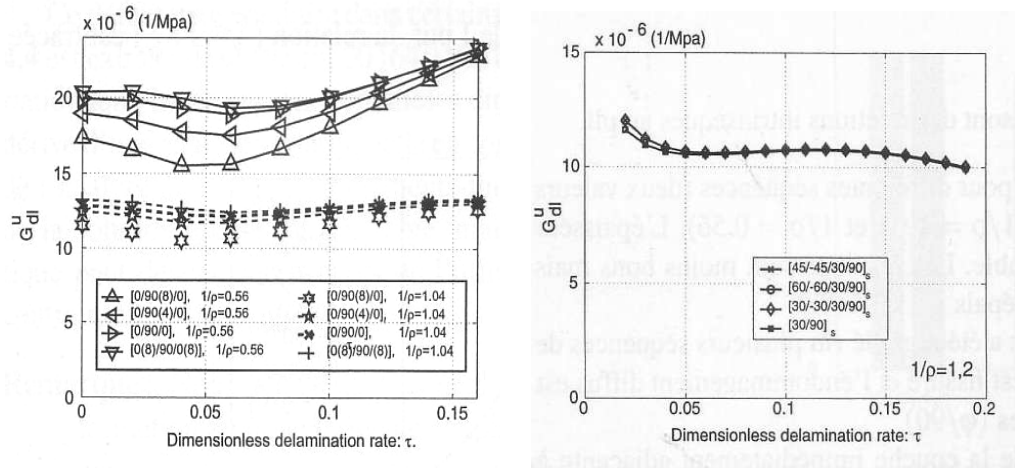


Figure 2.8: Evolution du taux de restitution d'énergie unitaire associé au délaminage local pour différents stratifiés

Remarque : Les valeurs des taux de restitution critiques d'initiation et de propagation sont supposées être différentes car les mécanismes de dégradation conduisant à l'apparition d'une surface initiale ou d'une surface adjacente à une fissure déjà existante sont *a priori* différents. Des travaux d'identification pourront peut être permettre de conclure sur ce point. En pratique, on utilise les mêmes valeurs.

Plusieurs travaux de micromécanique ont montré l'influence de l'épaisseur du pli sur l'apparition de fissures transverses (Garrett & Bailey, 1977; Parvizi *et al.*, 1978; Crossman & Wang, 1982; Boniface *et al.*, 1997). Pour des stratifiés $[0_m/90_n]_s$ le comportement des stratifiés contenant des plis à 90° est différent de celui des stratifiés contenant des plis fins.

On constate que pour des plis épais sous chargement quasi-statique, toutes les fissures traversent la section transverse de l'échantillon dès qu'elles apparaissent, alors qu'elles peuvent être stoppées près des bords pour des plis fins. Ainsi pour des plis épais, la propagation de fissure est instable.

On observe de plus que le critère d'initiation d'une fissure transverse diffère pour les plis épais et les plis fins. Le critère ne dépend pas de l'épaisseur des plis à 90° pour des stratifiés dont l'épaisseur du pli à 90 est supérieure à une épaisseur de transition (critère en contrainte), alors que le critère dépend inversement de l'épaisseur du pli pour des plis fins (critère énergétique). Le niveau de déformation appliqué pour observer une première fissure transverse est plus important pour des plis fins que pour des plis épais. La force d'endommagement adoptée pour la fissuration transverse doit permettre de prendre en compte cette différence entre plis épais et plis fins.

Pour tous les stratifiés, la propagation est toujours pilotée par un critère en taux de restitution d'énergie. Le critère d'initiation doit par contre permettre de prendre en compte les

différences entre plis épais et plis fins. Sachant que le taux de restitution (et par conséquent le taux de restitution discret) est proportionnel à l'épaisseur du pli, il est possible de définir une force d'endommagement telle qu'on obtienne :

- un critère en énergie pour les plis fins : $\Delta G = \Delta G_c^{ini}$
- un critère en contrainte pour les plis épais : $\frac{\alpha \Delta G}{H} = \Delta G_c^{ini}$

En observant les résultats expérimentaux (Figure 2.9), les deux critères doivent coïncider pour une certaine valeur d'épaisseur notée H_c (épaisseur critique). Ainsi la force d'endommagement Φ^{pli} utilisée dans le critère de rupture est donnée par :

- Pour l'initiation : $\Phi^f = \min \left\{ \frac{H_c}{H} \Delta G, \Delta G \right\}$
- Pour la propagation : $\Phi^f = \Delta G$

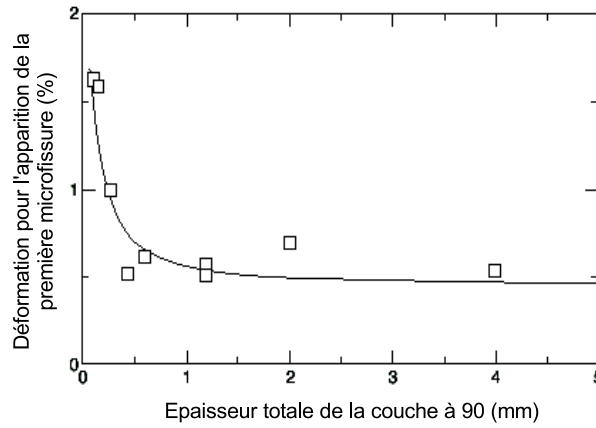


Figure 2.9: Evolution de la déformation nécessaire pour faire apparaître une première fissure transverse dans un stratifié $[0_2/90_n]_s$ en fonction de l'épaisseur du pli à 90

Remarque : La définition d'un critère unique par l'intermédiaire d'une épaisseur critique pourrait se justifier en analysant l'apparition d'une fissure transverse par coalescence de décohésions fibres/matrice et microfissurations matricielles entre fibres (étude de la fissuration dans le sens de propagation T) où on pourrait mettre en évidence une taille caractéristique de regroupements de fibres à partir de laquelle la fissuration est instable dans l'épaisseur du stratifié. Cette étude n'a pas encore aboutie.

Le critère de rupture retenu prend en compte les différents modes de rupture :

$$\left[\left(\frac{\Phi^{f,I}}{\Delta G_c^{I,f}} \right)^\alpha + \left(\frac{\Phi^{f,II}}{\Delta G_c^{II,f}} \right)^\alpha + \left(\frac{\Phi^{f,III}}{\Delta G_c^{III,f}} \right)^\alpha \right]^{1/\alpha} \geq 1$$

En pratique, α est pris égal à 1.

■ Surface de délaminage local

Pour le délaminage local, on utilise simplement le taux de restitution discret pour définir la force d'endommagement. On introduit de manière identique des taux de restitution critiques notés $\Delta G_c^{i,d}$ où i représente les différents modes de rupture. Le critère est alors

donné par :

$$\left[\left(\frac{\Delta G^I}{\Delta G_c^{I,d}} \right)^\alpha + \left(\frac{\Delta G^{II}}{\Delta G_c^{II,d}} \right)^\alpha + \left(\frac{\Delta G^{III}}{\Delta G_c^{III,d}} \right)^\alpha \right]^{1/\alpha} \geq 1$$

■ Rupture de fibres

Pour les ruptures de fibres, on définit un critère volumique. On introduit la valeur moyenne sur le volume élémentaire de l'énergie de traction Y_f^+ , la moyenne de l'énergie de compression Y_f^- et la moyenne de l'énergie de cisaillement Y_d . Le critère est ensuite défini par deux fonctions :

$$l_t(Y_f^+, Y_d) \geq 1$$

$$l_c(Y_f^-, Y_d) \geq 1$$

2.2 Variabilité des taux de restitution critiques

Les critères de rupture définis précédemment nécessitent l'identification de grandeurs matériau que sont les taux de restitution critiques selon les différents modes. Dans le cas d'une répartition parfaite sans défaut des fibres dans la matrice, les valeurs de ces taux de restitution critiques seraient identiques en tout point. Cependant, la répartition aléatoire des fibres conduit à des zones riches en fibres pour lesquelles la création d'une fissure transverse ou l'apparition du délaminage local seront facilitées. Ce type de défaut, réparti de manière uniforme dans le pli, entraîne des variations du taux de restitution critique en fonction de la position. Ces "petits défauts" induisent une faible variation du taux de restitution critique. D'autres défauts plus conséquents (inclusions diverses, région très pauvre en fibres...) entraînent une variation plus importante du taux de restitution critique.

Beaucoup d'articles de la littérature ont étudié cette variabilité des propriétés matériau critiques en fonction de la position dans le pli. (Manders *et al.*, 1983) ou (Fukunaga *et al.*, 1984) proposent de considérer une distribution aléatoire de contrainte à rupture selon une loi de Weibull à deux paramètres déterminés de manière à faire correspondre la fonction de densité de fissuration aux résultats expérimentaux. Les résultats obtenus permettent de décrire de manière satisfaisante l'espacement entre deux fissures transverses. Berthelot *et al* (Berthelot *et al.*, 1996) utilisent une procédure numérique de développement des fissures transverses dans des stratifiés croisés. Une distribution de contrainte à rupture est initialement appliquée au stratifié selon une loi normale modifiée (loi normale dont le domaine de définition est limité). La distribution des contraintes est évaluée selon une analyse de type shear-lag 2D en certains points prédéfinis. Une fissure transverse est créé à l'endroit où la contrainte à rupture est atteinte. La modification de la loi normale est nécessaire pour prendre en compte les défauts initiaux importants dont l'influence est visible pour des faibles taux de fissuration.

(Crossman & Wang, 1982) introduisent deux lois de probabilité normales pour décrire la longueur de défauts initiaux et leur espacement. En déterminant le taux de restitution associé à la propagation du défaut le plus important (par éléments finis par exemple), il est possible de comparer le taux obtenu à une valeur critique pour savoir si le défaut traverse le pli et forme ainsi une fissure transverse. Une autre fissure se formera lorsque le critère sera atteint pour un autre défaut en prenant en compte une réduction du taux de restitution

d'énergie fonction de la distance relative entre ces deux fissures.

L'idée suivie dans le micromodèle est que l'apparition de fissures transverses est un phénomène stochastique mais quasi indépendant de la loi de probabilité (ceci est vrai pour de petits défauts seulement). On considère un stratifié $[0_m/90_n]_s$ et on trace pour une configuration donnée de fissures transverses le taux de restitution en fonction de l'abscisse dans le pli à 90. On constate plusieurs plateaux pour lesquels toutes les fissures potentielles situées dans ces zones sont susceptibles d'être créées (Figure 2.10).

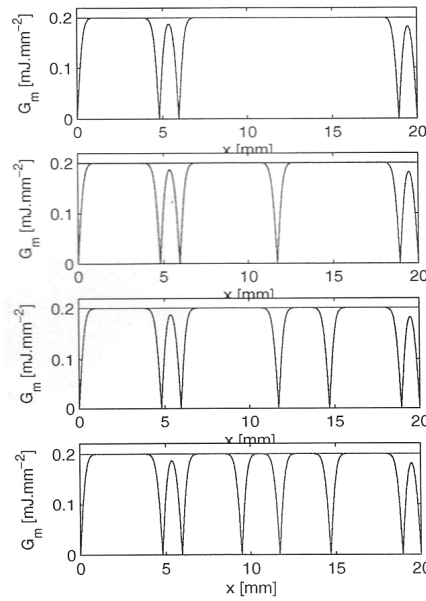


Figure 2.10: Evolution du taux de restitution dans un pli à 90° fissuré.

On compare alors deux procédures de création de fissures. La première consiste à utiliser une loi de probabilité sur les taux de restitution critiques et à créer une nouvelle fissure lorsque le taux de restitution atteint le taux critique. La seconde méthode consiste à considérer une zone à $\pm \Delta\%$ par rapport à la valeur critique du taux de restitution. On sélectionne ensuite toutes les fissures potentielles pour lesquelles le taux de restitution est compris dans cette bande.

$$G_c(1 - \Delta/100) \leq G(x) \leq G_c(1 + \Delta/100)$$

Le taux de restitution n'est évalué qu'en un nombre fini de points pour limiter les calculs. Parmi les points sélectionnés, on tire aléatoirement selon une loi uniforme une abscisse et on crée une nouvelle fissure. Les taux de restitution sont ensuite réévalués et la procédure est poursuivie. On note cette approche, approche stochastique.

Pour comparer les résultats donnés par les différentes méthodes, on trace la contrainte macroscopique transverse du pli à 90 en fonction de la densité de fissuration. La figure 2.12 montre les variations de la contrainte macroscopique lorsque l'on fait varier la largeur

de la bande dans l'approche stochastique. Plusieurs tirages sont réalisés. On remarque que l'influence de cette bande ne joue pas beaucoup sur l'apparition des microfissures.

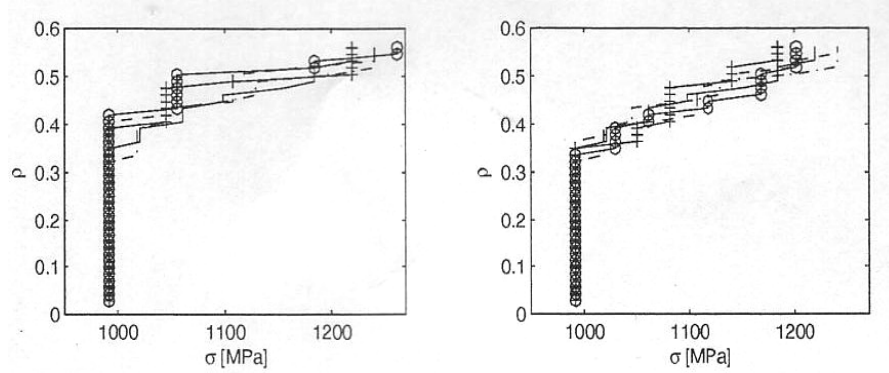


Figure 2.11: Evolution de la contrainte σ_{xx}^{90} en fonction du taux de fissuration pour différentes lois de probabilité. A gauche pour $\Delta = 5\%$, à droite pour $\Delta = 20\%$

En prenant une répartition gaussienne (approche Gauss) et une loi de Weibull avec un faible écart type, on observe que la zone correspondant aux petits défauts est indépendante de la loi utilisée. Pour des taux de fissuration importants, un autre mécanisme (délaminage local) doit être pris en compte. Pour des faibles taux de fissuration, les différences sont essentiellement dues à la présence de défauts importants.

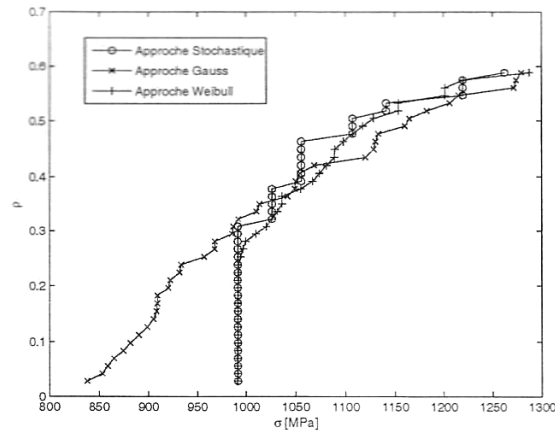


Figure 2.12: Evolution de la contrainte σ_{xx}^{90} en fonction du taux de fissuration pour différentes lois de probabilité.

Cette première étude a ainsi montré que la loi de probabilité utilisée pour décrire la répartition aléatoire des fibres dans la matrice a une très faible influence.

3 Modélisation des mécanismes diffus

3.1 Définition d'un milieu continu

A l'échelle du pli, les mécanismes d'endommagement et délaminage diffus peuvent être considérés comme continus. Le milieu constitutif du stratifié est donc modélisé par un matériau homogène isotrope transverse. Pour modéliser l'endommagement diffus, on introduit des variables d'endommagement et de plasticité.

La forme classique du mésomodèle d'endommagement est utilisée pour définir l'endommagement et la plasticité dans les plis. L'état d'endommagement est décrit par deux variables d'endommagement d' associée à la direction de traction transverse et d associée au cisaillement.

Les lois d'évolution de ces variables d'endommagement sont les mêmes que celles obtenues pour le mésomodèle. Partant de l'énergie de déformation

$$\begin{aligned}
 2e_d = & \frac{\sigma_{11}^2}{E_1^0} \\
 & - \left(\frac{\nu_{12}}{E_1^0} + \frac{\nu_{21}}{E_2^0} \right) \sigma_{11}\sigma_{22} - \left(\frac{\nu_{13}}{E_1^0} + \frac{\nu_{31}}{E_3^0} \right) \sigma_{11}\sigma_{33} - \left(\frac{\nu_{23}}{E_2^0} + \frac{\nu_{32}}{E_3^0} \right) \sigma_{22}\sigma_{33} \\
 & + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{(1-d')E_2^0} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{(1-d')E_3^0} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle -\sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} \\
 & + \frac{\sigma_{12}^2}{(1-d)G_{12}^0} + \frac{\sigma_{13}^2}{(1-d)G_{13}^0} + \frac{\sigma_{23}^2}{(1-d)G_{23}^0}
 \end{aligned}$$

et en écrivant la dissipation mécanique, on obtient les forces d'endommagement :

$$Y_d = \frac{1}{(1-d)^2} \ll \frac{\langle \sigma_{12} \rangle_+^2}{G_{12}^0} + \frac{\langle \sigma_{13} \rangle_+^2}{G_{13}^0} + \frac{\langle \sigma_{23} \rangle_+^2}{G_{23}^0} \gg \quad (2.1)$$

$$Y_{d'} = \frac{1}{(1-d')^2} \ll \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2^0} + \frac{\langle \sigma_{33} \rangle_+^2}{E_3^0} \gg \quad (2.2)$$

où $\ll s \gg = \frac{1}{V} \int_V s d\Omega$ représente la moyenne de s dans le volume de matière.

Les variables d'endommagement sont pilotées par les forces d'endommagement selon des lois d'évolution dépendant de l'histoire. Pour des chargements quasi-statiques, on considère que les variables d'endommagement ne dépendent que des maxima des forces d'endommagement obtenus jusqu'au temps considéré. On introduit des forces d'endommagement effectives $\bar{Y}_d$ et $\bar{Y}_{d'}$ de manière à prendre en compte les couplages entre les modes de dégradations de traction et cisaillement pouvant apparaître dans les décohésions fibres-matrice.

$$\begin{aligned}
 \bar{Y}_{d|t} &= \sup_{\tau \leq t} \left(Y_{d|\tau} + b Y_{d'|\tau}, \tau \leq t \right) \\
 \bar{Y}_{d'|t} &= \sup_{\tau \leq t} \left(Y_{d'|\tau} + b' Y_{d|\tau}, \tau \leq t \right)
 \end{aligned}$$

Les lois d'évolution sont alors données par :

$$d' = \frac{\sqrt{\bar{Y}_{d'_t}} - \sqrt{\bar{Y}_{d'_0}}}{\sqrt{\bar{Y}_{d'_c}}}, \text{ si } d' < 1 \text{ et } d < 1 \text{ sinon } d' = 1$$

$$d = bd', \text{ si } d < 1 \text{ et } d' < 1, \text{ sinon } d = 1$$

Des variables de viscoplasticité peuvent être introduites de la même manière pour prendre en compte les frottements aux interfaces fibres/matrice.

La différence essentielle entre le modèle décrit ici et le mésomodèle est l'absence de valeur limite pour les forces d'endommagement dans les lois d'évolution. En effet, l'avantage du modèle hybride est la possibilité de séparer les mécanismes de dégradation. Ces grandeurs étaient introduites pour prendre en compte l'apparition de fissures transverses. Or, dans le modèle, les fissures transverses apparaissent de manière discrète selon leur propre critère de rupture. De plus, en couplant une vision discrète et continue, on élimine tous les problèmes liés à la localisation des déformations. Lorsque la localisation apparaît dans une zone, une surface va naturellement rompre avant que l'endommagement dans les plis devienne nul.

Deuxième partie

Stratégies de calcul multiéchelle pour la simulation de problèmes complexes

Dans cette seconde partie, nous nous intéressons aux stratégies de calculs permettant de simuler des problèmes complexes tels que ceux rencontrés dans la dégradation d'un stratifié. Les stratégies développées doivent permettre de prendre en compte de fortes non-linéarités (contact et frottement) et de traiter des problèmes à plusieurs millions de degrés de liberté. C'est pourquoi deux chapitres sont proposés :

- *Le chapitre 3 présente diverses stratégies de calcul multiéchelle permettant de traiter des problèmes complexes et de simuler les dégradations dans un milieu.*
- *Le chapitre 4 détaille la stratégie de calcul multiéchelle développée au sein du laboratoire. Cette stratégie est basée sur la décomposition du domaine en sous-structures et en interfaces. Un code 2D/3D a été développé à cet effet en C++ et permet le calcul de problèmes complexes à la fois en terme de géométrie mais aussi de non-linéarités. Quelques exemples montrent les possibilités du logiciel et de la stratégie.*

Stratégies de calcul : Etat de l'art

Ce chapitre dresse un état de l'art non exhaustif des différentes stratégies de calcul développées pour traiter des problèmes de taille importante et nécessitant la connaissance d'informations précises sur des zones spécifiques. Ces stratégies de calcul multiéchelle permettent de réaliser des simulations de problèmes complexes en terme de détails structuraux et matériaux. Ces stratégies sont qualifiées de multiéchelles du fait qu'elles couplent les calculs à des échelles grossières et des échelles fines. Ces approches sont classiquement regroupées en trois catégories : les méthodes dérivant de la théorie de l'homogénéisation classique, les méthodes de superposition et d'enrichissement et les méthodes basées sur des décompositions de domaine. Ce travail bibliographique a déjà été introduit dans plusieurs travaux traitant de l'aspect multiéchelle, seuls les points clés des différentes méthodes sont rappelés ici.

Sommaire

1	Méthodes basées sur l'homogénéisation	50
1.1	Théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques	50
1.2	Extensions de la théorie de l'homogénéisation au non-linéaire	51
2	Méthodes de superposition et d'enrichissement	53
2.1	Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique	53
2.2	Méthode Arlequin	54
2.3	Méthodes multigrilles	55
2.4	Méthodes basées sur la Partition de l'Unité	56
3	Méthodes de décomposition de domaine	57

1 Méthodes basées sur l'homogénéisation

La plupart des approches multiéchelles reposent sur le principe d'homogénéisation. Les premiers travaux ont permis de mettre en place des méthodes d'homogénéisation spatiale en réalisant des études analytiques ou semi-analytiques à l'échelle microscopique. Ces approches ont conduit à définir un comportement macroscopique entre des quantités moyennes « effectives » (Eshelby, 1957; Hashin, 1962; Hill, 1965; Mori & Tanaka, 1973). Cependant, ce comportement macroscopique ne permet pas de remonter aux propriétés locales. Des méthodes plus générales appelées « Unit Cell Methods » et permettant de prendre en compte des mécanismes de plus en plus complexes au niveau microscopique ont ensuite été proposées » (Christman *et al.*, 1989; Tvergaard, 1990; Sluis *et al.*, 1999). Elles permettent d'identifier un modèle macroscopique par des « essais numériques » sur un volume élémentaire représentatif (VER) de la structure et d'obtenir des informations locales sur la solution. Cependant, la définition d'un problème macroscopique reste difficile dans le cas de problèmes à forts gradients ou de problèmes non-linéaires.

1.1 Théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques

La théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques (Sanchez-Palencia, 1974; Duvaut, 1976; Bensoussan *et al.*, 1978; Sanchez-Palencia, 1980), basée sur l'analyse asymptotique, propose une véritable approche multiéchelle mettant en jeu un problème « macro » et un problème « micro » permettant ainsi de remonter aux propriétés locales. Cette théorie est utilisable dans le cas où la structure est constituée d'un motif périodique appelé volume élémentaire représentatif (VER) ou maille élémentaire. L'utilisation de cette théorie a notamment été menée pour l'étude des matériaux composites. Dans ce cas de figure, la solution à l'échelle de la microstructure est quasi-périodique (superposition d'une valeur moyenne quasi-constante par VER et d'une solution microscopique dont la forme se reproduit d'un VER à l'autre) du moins loin des bords de la structure, et d'autant mieux que la structure est grande par rapport à la maille élémentaire ($l \ll L$). On peut alors tenir compte de cette propriété pour découpler les effets aux différentes échelles.

L'idée consiste alors à introduire deux variables (une par échelle) pour décrire la solution : une variable de position macroscopique $\underline{X}$ à l'échelle de la structure (L) et une variable de position microscopique $\underline{y}$ à l'intérieur du VER dont l'amplitude varie dans un intervalle de largeur l . En notant le rapport d'échelles $\varepsilon = \frac{l}{L}$, on définit une variable $\underline{Y} = \frac{\underline{y}}{\varepsilon}$ (*zoom*) dont l'amplitude de variation est comparable à celle de la variable $\underline{X}$. Toutes les variables du problème sont écrites en fonction de $\underline{X}$ et $\underline{y}$. On suppose alors que ces variables sont $\underline{Y}$ -périodiques par rapport à $\underline{y}$. Les grandeurs sont alors recherchées sous la forme d'un développement asymptotique en ε . Ainsi la solution en déplacement du problème s'écrit :

$$\underline{u}(\underline{X}, \underline{y}) = \underline{u}_0(\underline{X}, \underline{y}) + \varepsilon \underline{u}_1(\underline{X}, \underline{y}) + \varepsilon^2 \underline{u}_2(\underline{X}, \underline{y}) + \dots$$

Ce développement est d'autant plus judicieux que ε est petit. La deuxième étape consiste à introduire les développements asymptotiques dans les différentes équations du problème (équilibre, relation de comportement, équations cinématiques), puis à séparer les termes selon les puissances du paramètre ε qui apparaissent. Les méthodes d'homogénéisation du premier ordre tronquent le développement à l'ordre 1 dans les équations d'équilibre

et permettent ainsi de déterminer le champ macroscopique $\underline{u}_0$ et le champ microscopique $\underline{u}_1$. On peut alors écrire une succession de problèmes aux différents ordres en ε :

Problème à l'ordre ε^{-1} : $\text{div}_Y(\mathbf{K}\varepsilon_Y(\underline{u}_0)) = 0$. Ce problème permet de montrer que $\underline{u}_0$ est indépendant de $\underline{y}$: $\underline{u}_0(\underline{M}) = \underline{u}_0(\underline{X})$. On notera $\varepsilon_0 = \varepsilon_x(\underline{u}_0)$.

Problème à l'ordre ε^0 : $\text{div}_Y(\mathbf{K}\varepsilon_Y(\underline{u}_1)) = -\text{div}_Y(\mathbf{K}\varepsilon_0)$. Ce problème est écrit sur un VER ω où $\underline{X}$ est fixé et ε_0 est supposé connu et uniforme sur ω . Ce problème revient simplement à rechercher une solution périodique fonction de $\underline{Y}$ pour toutes les déformations macroscopiques ε_0 . On construit alors un opérateur de localisation $\mathbf{H}(\underline{y})$ d'ordre 4 reliant la déformation locale à la déformation macroscopique ε_0 .

$$\varepsilon_Y(\underline{u}_1) = \mathbf{H}\varepsilon_0$$

Problème à l'ordre ε^1 : Pour les développements à l'ordre 1, on ne résout généralement pas ce problème, seule la condition d'existence du problème est exploitée et conduit à la définition du problème macroscopique portant sur des quantités moyennées sur le VER ω .

$$\int_{\omega} \text{div}_X(\underline{\sigma}_0) + \underline{f}_d \, d\omega = 0$$

En notant, $\langle \cdot \rangle_{\omega} = \int_{\omega} \cdot \, d\omega$, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{div}_X \underline{\sigma}^M + \langle \underline{f}_d \rangle_{\omega} &= 0 \\ \underline{\sigma}^M = \langle \underline{\sigma}^m \rangle_{\omega} &= \langle \mathbf{K} + \mathbf{KH} \rangle_{\omega} \langle \varepsilon_0 \rangle_{\omega} \\ \text{avec } \langle \varepsilon_0 \rangle_{\omega} &= \varepsilon_0 = \varepsilon^M \end{aligned}$$

Le comportement homogénéisé macroscopique s'écrit : $\mathbf{K}^M = \langle \mathbf{K} + \mathbf{KH} \rangle_{\omega}$.

Cette approche constitue une véritable stratégie de calcul à deux échelles. Elle met en place un problème à l'échelle macroscopique et permet de remonter aux propriétés locales de la solution par l'intermédiaire d'un opérateur de localisation. Cependant, l'approche repose sur deux hypothèses fortes : la périodicité et un rapport d'échelle très grand (ε petit). L'hypothèse de périodicité ne permet pas d'homogénéiser le matériau près des bords ou des zones à forts gradients où cette hypothèse n'est plus vérifiée. Des traitements spécifiques des zones de bord ont été proposés dans (Auriel *et al.*, 1982; Dumontet, 1986; Lecuyer *et al.*, 1987).

1.2 Extensions de la théorie de l'homogénéisation au non-linéaire

Des extensions de la théorie classique de l'homogénéisation des milieux périodiques ont été proposées pour des problèmes non-linéaires. Certaines approches s'appuient sur le développement asymptotique de toutes les variables du problème : déformations anélastiques (Devries *et al.*, 1989), variables d'endommagement (Fish *et al.*, 1997). D'autres méthodes proposent de réaliser un calcul microscopique non-linéaire (généralement sur une cellule élémentaire) de manière à définir le comportement macroscopique. Les problèmes microscopiques peuvent être résolus par une technique éléments finis standard (Smit *et al.*,

1998; Feyel & Chaboche, 2000) ou par d'autres techniques telles que la « Voronoï Cell Finite Element Method » (Ghosh *et al.*, 1995). La résolution du problème macroscopique est généralement réalisée par une méthode éléments finis classique et la loi de comportement macroscopique est obtenue en chaque point d'intérêt par la résolution des problèmes microscopiques. Dans ce paragraphe, deux extensions représentatives sont présentées.

★ **Méthode Éléments Finis à deux niveaux : FE^2**

Les premiers travaux précurseurs de cette approche sont dus à Renard (Renard, 1990). Ils portent sur la modélisation des dégradations dans les matériaux composites. La décroissance des différents modules d'élasticité du comportement macroscopique de la structure est pilotée par la modélisation microscopique d'une cellule. L'état d'endommagement en un point d'intégration du maillage macroscopique dépend de l'endommagement microscopique, dû à la décohésion fibre-matrice par exemple, au sein de chaque cellule. Les travaux de Chaboche et Feyel (Feyel & Chaboche, 2000) présentent une vision étendue de cette méthode. Cette méthode est notamment utilisée pour les CMO dans (Carrère *et al.*, 2003).

La méthode FE^2 part d'une discrétisation éléments finis de la structure sur laquelle se base le problème macroscopique. A chaque point d'intégration de ce maillage grossier est associé le comportement d'une cellule de base du matériau représentatif de la microstructure. Connaissant le tenseur des déformations macroscopiques ε_0 , l'opération de localisation consiste à appliquer des conditions de périodicité au VER tel que :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \varepsilon_0 \underline{x} + \underline{v}(\underline{x}) \quad (3.1)$$

$\underline{v}$ étant la composante périodique de $\underline{u}$.

Le problème microscopique permet de déterminer le champ de déformation et de contrainte sur le VER à partir des conditions de périodicité et de la relation de comportement non-linéaire microscopique. Ce problème est résolu par une méthode de type Newton-Raphson. Une fois la solution obtenue, une étape d'homogénéisation consistant à moyenner le champ de contrainte sur le VER permet de remonter à la contrainte macroscopique $\Sigma = \langle \sigma \rangle$. Connaissant la contrainte macroscopique, celle-ci est introduite dans l'algorithme de Newton-Raphson du problème macro. Pour utiliser la matrice tangente réactualisée à chaque itération, une méthode de perturbation permet d'obtenir une approximation de cet opérateur lorsque la convergence du problème non-linéaire sur le VER est atteinte.

Les calculs microscopiques sont indépendants et peuvent être résolus en parallèle. Il est possible, sur le principe, d'ajouter un niveau supplémentaire et de répéter le processus pour chaque point d'intégration de chaque cellule « micro » donnant lieu ainsi à une méthode FE^3 . Cette technique, certes performante, présente les mêmes limitations que la théorie de l'homogénéisation classique : elle reste pertinente uniquement lorsque les échelles sont bien séparées.

★ **Milieux continus généralisés au niveau macroscopique**

Dans le cas où les échelles ne peuvent plus être séparées, une amélioration consiste à utiliser des milieux continus généralisés de type Cosserat ou second gradient au niveau macroscopique (Cosserat & Cosserat, 1909; Zhu *et al.*, 1997; Forest & Sab, 1998; Sluis *et al.*, 1998; Kouznetsova *et al.*, 2002; Feyel, 2003). Cette cinématique macroscopique enrichie, pour

laquelle un champ de rotation vient s'ajouter au champ de déplacement classique, permet alors de mieux prendre en compte au niveau macroscopique de forts gradients tels que les bandes de cisaillement ou les singularités.

Généralement difficile à construire, le comportement du milieu continu généralisé est, dans la stratégie proposée par (Kouznetsova *et al.*, 2002), déterminé de façon automatique. Un milieu du second gradient est considéré au niveau macroscopique. Cette fois-ci, le déplacement sur une cellule élémentaire fait intervenir deux tenseurs macroscopiques ($\mathbb{E}^M$ tenseur d'ordre 2 constant et $\mathbb{G}^M$ tenseur d'ordre 3) tels que :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \varepsilon^M \underline{x} + \underline{v}(\underline{x}) = \mathbb{E}^M \cdot \underline{x} + \frac{1}{2} \mathbb{G}^M : (\underline{x} \otimes \underline{x}) + \underline{u}^m(\underline{x})$$

La condition de périodicité est à nouveau utilisée. La stratégie de résolution est identique à celle du premier ordre (FE^2). Par homogénéisation (moyenne sur la cellule), deux contraintes macroscopiques sont extraites de la solution du problème microscopique en utilisant la relation :

$$\underline{\sigma}(\underline{x}) = \underline{\sigma}^M(\underline{x}) + \underline{\sigma}^m(\underline{x}) = \underline{\Sigma}^M + \mathbb{Q}^M \cdot \underline{x} + \underline{\sigma}^m(\underline{x})$$

avec $\underline{\Sigma}^M$ tenseur du second ordre et $\mathbb{Q}^M$ tenseur du troisième ordre.

Ces différentes stratégies ne fournissent donc pas une forme « close » de la loi de comportement macroscopique mais déduisent une relation entre les quantités duales macroscopiques en chaque point d'intérêt de la structure en résolvant des problèmes à l'échelle microscopique. Elles ne nécessitent donc pas d'hypothèse *a priori* sur le modèle macroscopique qui est déterminé de façon automatique. L'enrichissement de la cinématique macroscopique peut permettre de prendre en compte des gradients de déformation et traiter ainsi plus aisément des problèmes où la séparation des échelles « macro » et « micro » n'est plus aussi évidente que dans le cas des structures périodiques. Elle permet aussi de palier les problèmes de localisation des déformations.

2 Méthodes de superposition et d'enrichissement

Les approches décrites précédemment et basées sur des techniques d'homogénéisation permettent d'opérer un passage de l'échelle « micro » à l'échelle « macro » en définissant un problème macroscopique issu d'analyses à l'échelle microscopique. Les approches étudiées dans cette partie adoptent un point de vue différent et cherchent plutôt à superposer à la solution d'un problème macroscopique un enrichissement microscopique dans des zones d'intérêt.

2.1 Méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique

Introduite par Oden et Zohdi (Zohdi *et al.*, 1996; Oden & Zohdi, 1997; Oden *et al.*, 1999), la méthode de Projection de Dirichlet Hiérarchique (HDPM) consiste à résoudre un problème homogénéisé macroscopique, sur un maillage régulier dont un élément correspond à une cellule représentative du matériau considéré. Le comportement homogénéisé

est déterminé par une technique d'homogénéisation quelconque (par exemple la théorie de l'homogénéisation des milieux périodiques est suffisante). Un estimateur de sensibilité construit sur la solution macroscopique permet de localiser les zones du maillage macroscopique nécessitant une ré-analyse. Une correction microscopique est alors déterminée dans ces zones en résolvant sur les cellules concernées des problèmes locaux prenant en compte la microstructure pour des conditions aux limites homogènes de type Dirichlet. La solution corrigée est ensuite le prolongement des contributions locales sur la structure complète. Un estimateur d'erreur *a posteriori* permet alors de déterminer la qualité de la solution corrigée. Si le critère d'erreur n'est pas satisfait, l'opérateur homogénéisé est amélioré pour certaines cellules et on résout à nouveau le problème micro-macro. On peut aussi modifier le maillage macroscopique dans certaines zones si l'erreur n'est toujours pas satisfaisante.

Cette approche est en lien direct avec les méthodes adaptatives : un premier calcul macroscopique étant proposé, un estimateur de qualité *a posteriori*, construit à partir de la solution macroscopique, permet de détecter les zones les plus erronées. Si, dans les démarches adaptatives, diminuer l'erreur consiste à raffiner le maillage dans ces zones, dans l'approche proposée par Zohdi et Oden, cela consiste à adapter non pas la taille de maille mais plutôt l'échelle de modélisation du matériau, ce qui constitue toute la force de l'approche. Cependant, la théorie de l'homogénéisation étant classiquement utilisée pour définir l'opérateur macroscopique $\mathbf{K}^M$, on est confronté à la même difficulté de séparation des échelles.

2.2 Méthode Arlequin

La méthode Arlequin, introduite par Ben Dhia ([Ben Dhia, 1998](#); [Ben Dhia & Rateau, 2001](#)) permet de superposer à un problème macroscopique une analyse plus fine dans des régions d'intérêt pouvant se recouper ou non. Cette approche permet alors de faire dialoguer des modèles différents tant au niveau de la discrétisation que de la nature des équations qui les régissent. La méthode Arlequin propose de raccorder les modèles dans le volume des zones de jonction au moyen de formulations faibles. Ainsi, dans ces zones, la superposition des modèles est gérée par l'introduction de fonctions de pondération dans le principe des puissances virtuelles utilisé pour l'écriture de la formulation globale.

On considère un problème où deux modèles sont superposés sur une région notée $S = \Omega_1 \cap \Omega_2$ et régis par les équations de l'élastostaticité classique. Le premier modèle est associé au domaine Ω_1 et le second au domaine Ω_2 . La méthode consiste à chercher une solution dans chacun des domaines notée respectivement $\underline{u}_1$ et $\underline{u}_2$. Si les deux modèles sont identiques, les solutions mécaniques dans la zone de superposition doivent être égales.

Le deuxième point de la méthode revient à distribuer l'énergie entre les modèles dans la zone de recouvrement. Chacun des travaux virtuels des modèles est pondéré dans cette zone par des fonctions dites de pondération (scalaires) qui forment une partition de l'unité sur l'ensemble du domaine. Les paramètres scalaires de pondération α_i ($i = 1, 2$) sont des champs scalaires tels que $\alpha_i \in [0, 1]$ dans S et $\alpha_i = 1$ dans $\Omega_i \setminus S$. Un champ de force fictive λ est introduit pour recoller les modèles dans cette zone.

Le problème revient donc à :

Trouver $\underline{u}_1 \in \mathcal{U}_1$, $\underline{u}_2 \in \mathcal{U}_2$ et $\lambda \in \mathcal{M}$ tels que :

$$\forall \underline{v}_1 \in \mathcal{U}_1, \quad \underline{v}_2 \in \mathcal{U}_2, \quad \mu \in \mathcal{M}$$

$$a(\underline{u}_1, \underline{v}_1) + a(\underline{u}_2, \underline{v}_2) + c(\lambda, \underline{v}_1 - \underline{v}_2) + c(\mu, \underline{u}_1 - \underline{u}_2) = b(\underline{v}_1) + b(\underline{v}_2)$$

$$\text{où } a(\underline{u}_1, \underline{v}_1) = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \text{Tr}(\varepsilon(\underline{u}_1) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{v}_1)) \, d\Omega,$$

$$a(\underline{u}_2, \underline{v}_2) = \int_{\Omega_2} \alpha_2 \text{Tr}(\varepsilon(\underline{u}_2) \mathbf{K} \varepsilon(\underline{v}_2)) \, d\Omega,$$

$$b(\underline{v}_1) = \int_{\Omega_1} \alpha_1 \underline{f}_v \underline{v}_1 \, d\Omega,$$

$$b(\underline{v}_2) = \int_{\Omega_2} \alpha_2 \underline{f}_v \underline{v}_2 \, d\Omega,$$

L'opérateur $c()$ représente le couplage entre les deux modèles. La définition de cet opérateur de couplage reste le point délicat de la stratégie et la qualité du raccord dans la zone de jonction dépend du choix de l'espace dans lequel est recherché le multiplicateur (appelé espace médiateur $\mathcal{M}$). L'opérateur le plus adapté pour coupler des formulations avec des paramètres scalaires est défini comme un produit scalaire dans l'espace H^1 et fait intervenir non seulement la différence entre les déplacements mais aussi entre les déformations.

La solution est ensuite recherchée sous la forme :

$$\underline{u} = \begin{cases} \underline{u}_1 & \text{sur } \Omega_1 \setminus S \\ \underline{u}_2 & \text{sur } \Omega_2 \setminus S \\ \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 & \text{sur } S \end{cases}$$

La méthode Arlequin propose une approche originale permettant de superposer dans une même zone des états mécaniques issus de modélisations pouvant être très différentes. Elle permet non seulement de réaliser des jonctions entre modèles (couplage de modèles volumiques et surfaciques par exemple) mais aussi d'effectuer des zooms structuraux pour lesquels un modèle fin est superposé à un modèle grossier (introduction de défauts localisés notamment). Les difficultés principales de mise en oeuvre résident dans le choix de l'espace d'approximation du multiplicateur de Lagrange permettant de recoller en volume les deux modèles dans leur zone de jonction. Un autre point délicat est l'intégration numérique dans le volume du produit scalaire de couplage lorsque les discrétisations des deux domaines superposés sont différentes.

2.3 Méthodes multigrilles

La performance des stratégies de résolution itérative pour des problèmes linéaires de grande taille repose sur le fait que ces méthodes captent rapidement les grandes longueurs de variation mais ont des difficultés à capter les petites variations. L'idée des méthodes multigrilles initiées par (Southwell, 1935) et (Fedorenko, 1964) consiste à transporter le calcul sur une hiérarchie de grilles plus grossières que celle initiale, et à y saisir rapidement, via les méthodes de relaxation, toutes les composantes fréquentielles de la solution discrète.

La méthode 2-grilles met en place une stratégie constituée de cycles en V entre une grille grossière et une grille fine emboîtée pour résoudre le système $\mathbf{K}_m q_m = f_m$. Dans un premier temps, plusieurs itérations sont réalisées sur la grille fine de manière à lisser la solution en diminuant les hautes fréquences contenues dans l'erreur. Le résidu $r_m^{(i)} = f_m - \mathbf{K}_m q_m^{(i)}$

obtenu est alors restreint à la grille grossière par un opérateur de restriction $\mathbf{R} : r_M^{(i)} = \mathbf{R}r_m^{(i)}$. On résout ensuite le problème de résidu $\mathbf{K}_M e_M^{(i)} = r_M^{(i)}$ associé au maillage grossier où $\mathbf{K}_M$ est l'opérateur $\mathbf{K}_m$ restreint à la grille grossière. Un opérateur de prolongement permet enfin de passer de la grille grossière à la grille fine en ajoutant une correction à la solution $q_m^{(i)}$.

Pour des systèmes symétriques définis positifs, le nombre de V-cycles nécessaires pour atteindre une précision relative donnée est indépendant du nombre N d'inconnues, de sorte que le coût global de la résolution correspond à seulement $O(N)$ évaluations de résidus sur la grille fine. Les approches multigrilles permettent d'accélérer fortement la convergence des méthodes itératives classiques. Une attention particulière doit cependant être portée au choix des opérateurs de restriction et prolongement.

2.4 Méthodes basées sur la Partition de l'Unité

La méthode de la partition de l'unité (Melenk & Babuska, 1996) permet d'enrichir de manière simple les espaces d'approximation construits par la méthode des éléments finis, en y ajoutant des fonctions spéciales, de nature *a priori* quelconque. Ces fonctions notées $\psi_j(\underline{x})$ sont pondérées par les fonctions de forme $\varphi_i(\underline{x})$ (souvent de type éléments finis) formant une partition de l'unité sur chaque élément : $\sum_{i \in \mathbf{I}} \varphi_i(\underline{x}) = 1$. Le déplacement solution s'écrit alors de la manière suivante :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathbf{I}} \underline{u}_i \varphi_i(\underline{x}) + \sum_{i \in \mathbf{I}} \sum_{j \in \mathbf{J}_i} a_j^{(i)} \psi_j(\underline{x}) \varphi_i(\underline{x})$$

où $\mathbf{I}$ représente une partition sans recouvrement de la structure et les $a_j^{(i)}$ sont des coefficients constants inconnus du problème. Cette approximation est capable de reproduire n'importe quelle fonction.

■ GFEM, XFEM

La méthode des éléments finis généralisés GFEM (Strouboulis *et al.*, 2000) et la méthode des éléments finis étendus XFEM (Moës *et al.*, 1999) combinent une approche éléments finis standard (FEM) avec la méthode de partition de l'unité. L'espace d'approximation FEM est enrichi par des fonctions spéciales provenant d'une certaine connaissance du problème que l'on cherche à traiter.

La méthode des éléments finis étendus utilise le cadre de la partition de l'unité pour introduire diverses discontinuités dans un modèle éléments finis sans avoir à en modifier le maillage. Ces discontinuités peuvent être des discontinuités du champ de déplacement provenant de la présence d'une fissure traversant le maillage ou des discontinuités sur les dérivées normales du champ de déplacement modélisant les sauts de déformation localisés à l'interface entre plusieurs matériaux. Pour décrire géométriquement les surfaces de discontinuités, la XFEM s'appuie sur la technique des Level-Sets qui consiste à représenter une surface (suffisamment régulière) par l'interpolation éléments finis de la fonction distance signée à cette surface.

Les fonctions spéciales introduites sont de plusieurs types selon les zones considérées. Des fonctions de Heaviside permettent de représenter un champ de déplacement discontinu, la solution analytique en pointe de fissure est également utilisée. Le XFEM a été étendue récemment en dynamique par (Réthoré *et al.*, 2004).

La méthode des éléments finis généralisés GFEM propose d'introduire des fonctions spéciales permettant de rendre compte du comportement local d'une zone donnée. Une série de problèmes élémentaires, appelés "handbooks" est résolue numériquement à l'échelle fine et permet de traiter des problèmes contenant de nombreux détails structuraux.

La principale difficulté dans ces approches est l'intégration numérique des fonctions supplémentaires ajoutées qui nécessite un redécoupage des éléments contenus dans la zone d'intérêt.

3 Méthodes de décomposition de domaine

Les méthodes présentées précédemment permettent de réaliser une analyse fine dans certaines zones d'intérêt et se situent dans le cadre d'approches de type locale-globale. Les méthodes exposées dans ce paragraphe permettent de mener des calculs à l'échelle fine sur tout le domaine en décomposant la structure en sous-domaines. La condensation sur les interfaces de chaque problème par sous-domaine conduit à un problème d'interfaces (posé sur l'ensemble des interfaces uniquement) de taille plus petite.

Les méthodes de décomposition de domaine dites sans recouvrement peuvent être classées en trois familles selon la manière de résoudre le problème d'interfaces : les approches primales (*Balancing Domain Decomposition Method* (Mandel, 1993), les approches duales (*Finite Element Tearing and Interconnecting* (FETI) (Farhat & Roux, 1991)) et les approches mixtes (méthodes basées sur un algorithme de type Lagrangien augmenté (Glowinski & Le Tallec, 1990) ou LATIN (Ladevèze, 1999)). La méthode de résolution de ce problème est, en général, basée sur un algorithme itératif. Les méthodes sont qualifiées de multiéchelles car pour propager une information sur toute la structure, il est nécessaire de mettre en place un problème grossier issu de la vérification partielle des conditions de continuité entre les sous-domaines. On précise succinctement les points clés des approches primales et duales, l'approche mixte sera détaillée dans le chapitre suivant.

L'approche primale considère le champ de déplacement *a priori* continu entre les sous-domaines et recherche, par une méthode itérative de type gradient conjugué préconditionné, la continuité du champ d'inter-efforts à l'interface.

La méthode duale consiste à introduire le champ d'inter-efforts *a priori* continu entre les sous-domaines, noté λ , afin d'obtenir la continuité des déplacements à convergence. Pour que les problèmes locaux par sous-domaine soient bien posés, le champ d'effort doit vérifier la contrainte d'équilibre des sous-domaines vis-à-vis des chargements extérieurs. Une technique itérative de résolution est alors utilisée. Il s'agit d'une méthode itérative de type gradient conjugué projeté où la projection est associée à la contrainte d'équilibre des sous-domaines. Cette phase de projection peut alors être considérée comme un problème ma-

croscopique grossier garantissant à chaque itération la continuité des modes rigides des sous-domaines au niveau des interfaces. Ce problème global fait de la méthode FETI une stratégie de calcul à deux échelles. Cependant, le problème macroscopique est relativement pauvre puisqu'il est simplement associé aux modes rigides qui sont des modes à énergie nulle. Ainsi, il peut paraître plus juste de considérer que l'approche FETI, dans sa version originale, est une approche à deux échelles en déplacement mais monoéchelle en effort. Pour palier ce problème, la méthode FETI2 (Farhat *et al.*, 1996) apporte une amélioration consistant à vérifier des contraintes supplémentaires sur le déplacement, telles que la continuité en moyenne sur les interfaces. La phase de projection du gradient devient alors un problème macroscopique enrichi. Ces premiers travaux ont ainsi donné lieu à une version plus aboutie appelée FETI-DP (*Dual-primal FETI method*) (Farhat *et al.*, 2001).

Les méthodes de décomposition de domaines permettent d'atteindre des performances remarquables moyennant le choix d'un préconditionneur adéquat pour l'algorithme itératif de résolution. Ce choix dépend essentiellement de la nature du problème traité ce qui enlève un peu à ces méthodes leur côté généraliste. Un choix classique consiste à prendre les préconditionneurs « lumped » ou Dirichlet. Pour le traitement des structures hétérogènes, on pourra se référer aux travaux de Rixen et Farhat (Rixen & Farhat, 1999). Enfin, la construction de problèmes grossiers définis sur les espaces de Krylov des opérateurs d'interface (Gosselet & Rey, 2002) apporte un moyen très intéressant de propager une information pertinente dans le cadre de la multirésolution.

Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps : Rappels théoriques et développements

Dans ce chapitre, la stratégie de calcul retenue est présentée en détail. Elle s'appuie très largement sur la méthode de décomposition de domaine mixte (stratégie monoéchelle) présentée dans le cadre de la stratégie non-incrémentale LATIN ([Ladevèze, 1986, 1999](#)). L'extensibilité numérique est assurée par l'introduction d'une échelle macro et d'un problème homogénéisé. Cette stratégie permet non seulement de traiter des problèmes de grande taille mais aussi de simuler des comportements non-linéaires pour les domaines et pour les interfaces entre ces domaines. Un logiciel dédié écrit en C++ a été développé pour permettre le calcul de structures de taille importante de manière efficace.

Sommaire

1	Stratégie de calcul monoéchelle	60
1.1	Problématique	60
1.2	Décomposition de domaine - Problème sous-structuré	61
1.3	Comportements d'interface particuliers	63
1.4	Stratégie de résolution itérative	64
2	Stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace	68
2.1	Introduction de l'aspect multiéchelle	68
2.2	Retour sur l'étape linéaire	70
3	Développement de la stratégie dans le cadre d'un logiciel	74
3.1	Quelques spécificités de la stratégie pour les milieux tridimensionnels	74
3.2	Mise en oeuvre - Exemples d'applications	85

1 Stratégie de calcul monoéchelle

1.1 Problématique

La stratégie monoéchelle a été implantée dans le logiciel COFAST par Champaney et a fait l'objet de plusieurs travaux. L'extension multiéchelle de la méthode est apparue avec les travaux de (Ladevèze & Dureisseix, 2000; Ladevèze *et al.*, 2001) dans le cadre de la statique linéaire. Les travaux de (Ladevèze & Nouy, 2002; Ladevèze & Nouy, 2003) ont apporté de nombreuses avancées non-seulement dans la manière de traiter l'aspect multiéchelle à la fois en espace et en temps mais aussi dans l'amélioration de plusieurs points clés de la stratégie. Récemment les travaux de (Guidault *et al.*, 2004) ont permis de coupler la stratégie de calcul multiéchelle à la XFEM pour le traitement de macrofissures dans une structure. Les principes de la stratégie micro/macro ont été repris pour le traitement des systèmes de tenségrité par (Nineb *et al.*, 2005) dans la perspective d'une extension aux milieux granulaires.

Le problème traité est celui d'un milieu continu soumis à un chargement statique sur sa frontière notée $\partial\Omega_F$ ainsi qu'à un chargement volumique provenant d'efforts répartis ou d'un champ thermique sur le domaine Ω . Le comportement volumique de la structure peut être non-linéaire (endommagement, plasticité) et certaines zones représentent des fissures susceptibles de se fermer et nécessitant une modélisation de type contact avec frottement (Figure 4.1). Des déplacements sont imposés sur la zone $\partial\Omega_U$. Le cadre d'étude est celui des petites perturbations.

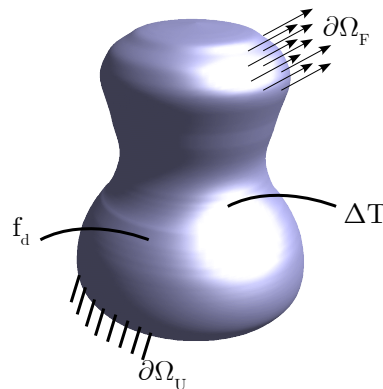


Figure 4.1: Problème de référence

Comme précisé précédemment, la stratégie multiéchelle avec homogénéisation en espace est une extension de la stratégie monoéchelle par l'introduction d'une échelle macroscopique. C'est pourquoi, nous présentons en détail la stratégie monoéchelle dans un premier temps puis nous ajouterons l'aspect multiéchelle à la méthode de base dans le cadre de la thermoélasticité en statique. L'approche a été mise en oeuvre en statique et quasistatique. La théorie ne sera cependant pas rappelée dans le cadre quasistatique, seuls quelques exemples illustreront les potentialités de l'approche. Les différents points évoqués dans cette partie ont tous fait l'objet d'une implantation et validation dans un code écrit en C++ dont les spécificités seront présentées dans ce chapitre.

1.2 Décomposition de domaine - Problème sous-structuré

La stratégie de décomposition de domaine mixte repose sur deux points clés.

■ Le premier point clé consiste à décomposer le domaine en sous-structures et en interfaces. Chaque constituant est considéré comme une entité à part entière avec ses propres relations de comportement et équations. Ce point diffère des approches traditionnelles primale et duale où l'interface ne possède pas de comportement mais est utilisée pour faire transiter les déplacements ou les efforts entre les sous-structures.

■ Le second point est la résolution du problème de manière itérative en utilisant des directions de recherche mixtes reliant les efforts et les déplacements.

Le domaine est donc scindé en sous-structures, entités volumiques, et en interfaces, entités surfaciques entre les sous-structures (Figure 4.2). Chaque constituant possède un comportement. Les sous-structures vérifieront par exemple une relation de comportement thermoélastique isotrope ou orthotrope. Les interfaces seront parfaites, avec contact et frottement ou extérieures à la structure. Les zones de bord à efforts, déplacements, symétries imposés sont donc considérées comme des interfaces du problème. Une des particularités de cette décomposition est la possibilité d'adapter le découpage à la géométrie du problème. Dans le cas d'assemblage, chaque pièce peut être modélisée par une sous-structure et les zones intermédiaires par des interfaces avec contact par exemple. Cependant, la stratégie n'est aucunement restreinte à des géométries particulières de sous-structures et des logiciels de découpage automatique (cf. Metis) peuvent fournir une décomposition satisfaisante.

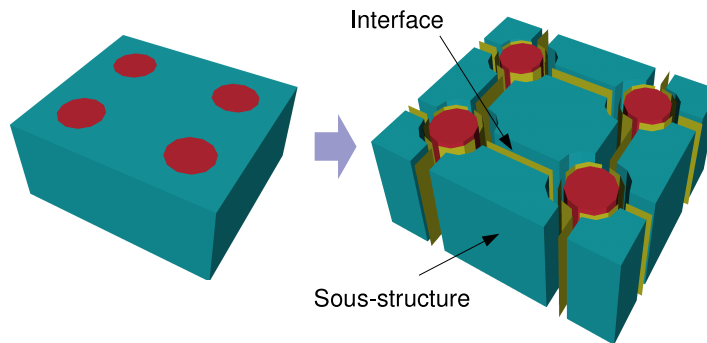


Figure 4.2: Décomposition de domaine en sous-structures et en interfaces

L'ensemble des sous-structures définit la structure complète notée $\mathbf{E}$. Le domaine occupé par une sous-structure $E \in \mathbf{E}$ est noté Ω_E . Cette sous-structure est soumise à l'action des interfaces voisines sur sa frontière $\partial\Omega_E$. Chaque interface $\Gamma_{EE'}$ exerce à la fois une distribution d'effort $\underline{F}_E$ et de déplacement $\underline{W}_E$ sur la sous-structure E . Une interface assure le transfert des efforts et déplacements entre deux sous-structures E et E' par l'intermédiaire du comportement de l'interface (Figure 4.3). L'introduction des distributions de déplacements et d'efforts d'interface confère à la stratégie son caractère mixte.

On note σ_E et $\underline{u}_E$ les contraintes et déplacements de la sous-structure E appartenant respectivement aux espaces $\mathcal{S}_E$ et $\mathcal{U}_E$.

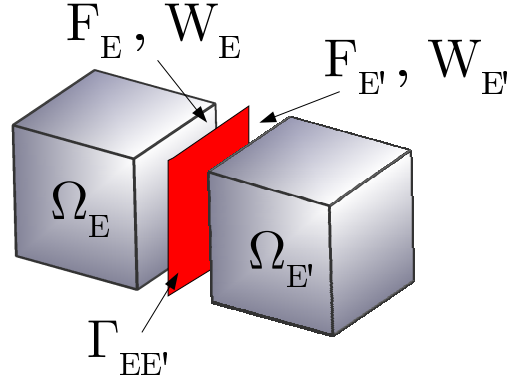


Figure 4.3: Echange de distribution d'efforts et de déplacements entre sous-structures

Les déplacements $\underline{W}$ et les efforts $\underline{F}$ sur une interface $\Gamma_{EE'}$ sont recherchés respectivement dans les espaces $\mathcal{W}_{EE'}$ et $\mathcal{F}_{EE'}$. Ces espaces sont pris de façon à être compatibles avec la forme bilinéaire travail :

$$(\underline{F}, \underline{W}) \mapsto \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} dS \quad (4.1)$$

et la proposition (1) :

Proposition 1 Les espaces $\mathcal{W}_{EE'}$ et $\mathcal{F}_{EE'}$ sont tels que la forme bilinéaire travail soit non dégénérée, c'est-à-dire :

$$\left\{ \underline{F} \in \mathcal{F}_{EE'}, \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{W} \in \mathcal{W}_{EE'} \right\} = \{0\}$$

$$\left\{ \underline{W} \in \mathcal{W}_{EE'}, \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{F} \in \mathcal{F}_{EE'} \right\} = \{0\}$$

On note $\mathcal{F}_E$ et $\mathcal{W}_E$ les espaces dans lesquels sont recherchés $\underline{F}_E$ (répartition d'efforts exercés sur tous les bords de la sous-structure E) et $\underline{W}_E$ (déplacements exercés sur tous les bords de la sous-structure E).

Le problème sous-structuré s'exprime de la façon suivante :

Problème 1 Trouver $\mathbf{s} = \{\mathbf{s}_E\}_{E \in \mathbf{E}}$ avec $\mathbf{s}_E = (\underline{u}_E, \underline{W}_E, \underline{\sigma}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_E = \{\mathcal{U}_E, \mathcal{W}_E, \mathcal{S}_E, \mathcal{F}_E\}$ qui vérifie les équations :

- Admissibilité statique des sous-structures :
Trouver $(\underline{\sigma}_E, \underline{F}_E) \in \mathcal{S}_E \times \mathcal{F}_{EE'}$ tel que

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{E_0}, \int_{\partial\Omega_E} \text{Tr}(\underline{\sigma}_E \varepsilon(\underline{u}^*)) d\Omega = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{u}^* d\Gamma \quad (4.2)$$

– *Admissibilité cinématique des sous-structures :*

Trouver $(\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_{EE'}$ tel que

$$\underline{\varepsilon}_E = \underline{\varepsilon}(\underline{u}_E) \quad (4.3)$$

$$\underline{u}_E|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_E \quad (4.4)$$

– *Relation de comportement des sous-structures :*

$$\underline{\sigma}_E = \mathbf{K}(\underline{\varepsilon}_E - \underline{\alpha}\Delta T) \quad (4.5)$$

– *Equation d'équilibre des interfaces :*

$$\forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'}, \quad \underline{F}_{EE'} + \underline{F}_{E'E} = 0 \quad (4.6)$$

– *Relation de comportement des interfaces :*

$$\forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'}, \quad R(\underline{W}_{EE'}, \underline{F}_{EE'}, \underline{W}_{E'E}, \underline{F}_{E'E}) = 0 \quad (4.7)$$

Remarque : L'équation (4.3) peut être écrite sous forme faible :

$$\forall (\underline{\sigma}^*, \underline{F}^*) \in \mathcal{S}_{E_0} \times \mathcal{F}_{E_0}, \text{ vrfiant 4.2 avec } \underline{f}_d = 0, \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\underline{\sigma}^* \underline{\varepsilon}_E) d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}^* \cdot \underline{W}_E d\Gamma \quad (4.8)$$

De la même manière l'équation (4.4) doit être considérée sous forme faible

$$\forall \underline{F}^* \in \mathcal{F}_E, \quad \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}^* \cdot (\underline{u}_E - \underline{W}_E) d\Gamma = 0 \quad (4.9)$$

1.3 Comportements d'interface particuliers

Différents comportements d'interfaces peuvent être introduits pour modéliser la liaison entre deux sous-structures E et E' .

Sur les bords, la sous-structure E' est fictive, les relations de comportement et équations d'équilibre d'interface sont simplifiées :

■ Interface à effort imposé

$$\underline{F}_{EE'} = \underline{F}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F \quad (4.10)$$

■ Interface à déplacement imposé

$$\underline{W}_{EE'} = \underline{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_E \cap \partial\Omega_u \quad (4.11)$$

■ Interface de type symétrie ou déplacement normal imposé

On note $\underline{n}_E$ la normale extérieure à la sous-structure E et à l'interface $\Gamma_{EE'}$, $\mathbf{P}_t()$ l'opérateur permettant d'extraire la partie tangentielle des quantités d'interface.

$$\underline{W}_{EE'} \cdot \underline{n}_E = u_d \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_E \cap \partial\Omega_u \quad (4.12)$$

$$\mathbf{P}_t(\underline{F}_{EE'}) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_E \cap \partial\Omega_u \quad (4.13)$$

A l'intérieur de la structure, plusieurs comportements sont considérés, la relation d'équilibre des interfaces étant toujours vraie.

■ Interface parfaite

Les interfaces parfaites transmettent les efforts et déplacements entre les sous-structures.

$$\underline{F}_{EE'} + \underline{F}_{E'E} = 0 \quad \text{Equilibre} \quad (4.14)$$

$$\underline{W}_{EE'} - \underline{W}_{E'E} = 0 \quad \text{Comportement} \quad (4.15)$$

■ Interface de type contact avec frottement

Les interfaces de contact avec frottement ont un comportement différent selon la normale et la tangente à l'interface. La loi de Coulomb écrite en déplacement et valable pour des sollicitations monotones est utilisée. On note f le coefficient de frottement.

– Equilibre :

$$\underline{F}_{EE'} + \underline{F}_{E'E} = 0$$

– Contact :

$$\begin{aligned} \underline{n}_E \cdot (\underline{W}_{E'E} - \underline{W}_{EE'}) &\geq 0 \text{ et } \underline{n}_E \cdot \underline{F}_{EE'} \leq 0 && \text{(non-pénétration) ,} \\ (\underline{n}_E \cdot (\underline{W}_{E'E} - \underline{W}_{EE'}))(\underline{n}_E \cdot \underline{F}_{EE'}) &= 0 && \text{(complémentarité) ,} \end{aligned}$$

– Frottement :

$$\begin{aligned} \text{si } \|\mathbf{P}_t(\underline{F}_{EE'})\| &< f|\underline{n}_E \cdot \underline{F}_{EE'}|, \text{ alors } \mathbf{P}_t(\underline{W}_{E'E} - \underline{W}_{EE'}) = 0 && \text{(adhérence)} \\ \text{si } \|\mathbf{P}_t(\underline{F}_{EE'})\| &= f|\underline{n}_E \cdot \underline{F}_{EE'}|, \text{ alors} \\ \mathbf{P}_t(\underline{W}_{E'E} - \underline{W}_{EE'}) \wedge \mathbf{P}_t(\underline{F}_{EE'}) &= 0 \text{ et } \mathbf{P}_t(\underline{W}_{E'E} - \underline{W}_{EE'}) \cdot \mathbf{P}_t(\underline{F}_{EE'}) \geq 0 && \text{(glissement)} \end{aligned}$$

D'autres interfaces de type contact avec jeu ou ayant un comportement non-linéaire (interfaces cohésives par exemple) ont été introduites sans aucune difficulté particulière étant donné que le comportement de l'interface est local.

1.4 Stratégie de résolution itérative

La stratégie rappelée ici fait partie d'une méthode de résolution itérative non-incrémentale, la LATIN, dont l'origine date des années 80 ([Ladevèze, 1985](#)) et qui est détaillée dans ([Ladevèze, 1999](#)). Cette méthode permet de construire des approximations successives de la solution sur tout le domaine espace-temps et est bien adaptée aux problèmes d'évolution non-linéaires. Elle repose sur trois points. Seuls les deux premiers points sont utilisés dans le cadre de la statique.

■ Le premier point consiste à séparer les équations du problème sous-structuré (1) en deux groupes selon les difficultés. Un groupe est constitué des équations linéaires (souvent globales), l'autre groupe inclut les équations locales (très souvent non-linéaires). Cette manière de structurer le problème est extensible à de nombreux problèmes comme par exemple les problèmes de couplages entre formulations et a déjà été étendue dans ([Néron *et al.*, 2003](#)) pour la simulation de la poroélasticité couplée.

Ainsi, on place dans le groupe d'équations linéaires (noté $\mathbf{A}_d$) :

- les relations d'équilibre des sous-structures (4.2)
- les équations cinématiques des sous-structures (4.8), (4.9)

Le groupe des équations locales (noté Γ) inclut :

- le comportement non-linéaire des sous-structures
- le comportement et l'équilibre des interfaces

Remarque : Dans le cadre d'un comportement linéaire, la relation de comportement des sous-structures est directement introduite dans le groupe A_d pour simplifier la résolution.

■ Le deuxième point concerne la stratégie de résolution elle-même. On recherche successivement une solution dans les deux groupes d'équations. La stratégie est itérative et nécessite la définition de directions de recherche qui conditionnent la convergence de la méthode. On note s_n la solution pour une itération n donnée vérifiant les équations du groupe A_d . On pose $\hat{s}_{n+\frac{1}{2}} = \hat{s}$ la solution vérifiant les équations du groupe Γ pendant l'itération $n + 1$ et s_{n+1} la solution du groupe A_d à l'itération $n + 1$. La figure 4.4 représente le schéma d'une itération de la méthode qui comporte une **étape locale** et une **étape linéaire**.

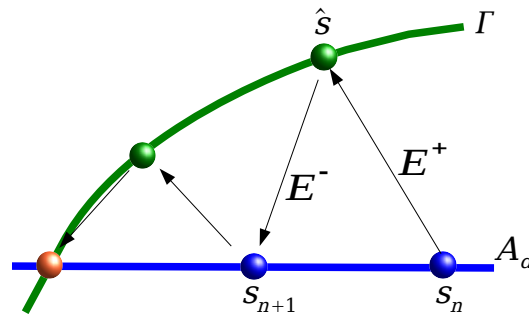


Figure 4.4: Schéma d'une itération de la méthode LATIN

Pour les interfaces, les directions de recherche couplent les efforts et les déplacements. Le choix de ces directions est discuté au paragraphe 3 de ce chapitre. Pour les sous-structures, le choix d'une direction de recherche est similaire à celui effectué pour les résolutions de type Newton-Raphson (tangent, sécant, mixte ...). Dans le cadre linéaire, aucune direction n'est bien évidemment nécessaire.

Remarque : La résolution du problème sous-structuré diffère des méthodes de décomposition de domaines classiques non seulement par la mixité des relations aux interfaces mais aussi par le traitement des non-linéarités et justifie le lien avec la méthode LATIN. En effet, classiquement, c'est le problème linéarisé qui est traité par une méthode de décomposition de domaine, alors qu'ici on ne linéarise que les problèmes par sous-structures. Les approches sont similaires dans le cas d'un seul sous-domaine.

1.4.1 Etape linéaire

L'étape linéaire consiste à construire une solution $s_{n+1} \in \mathbf{A}_d$ connaissant $\hat{s} \in \Gamma$. Une direction de recherche $\mathbf{E}^-$ relie les quantités $(s_{n+1} - \hat{s})$. Ainsi, chaque interface $\Gamma_{EE'}$, avec $E \in \mathbf{E}$ et $E' \neq E \in \mathbf{E}$, s_{n+1} doit vérifier :

$$\begin{cases} \left(\underline{F}_{EE'} - \widehat{\underline{F}}_{EE'} \right) + k^- \left(\underline{W}_{EE'} - \widehat{\underline{W}}_{EE'} \right) = 0, & \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \\ \left(\underline{F}_{E'E} - \widehat{\underline{F}}_{E'E} \right) + k^- \left(\underline{W}_{E'E} - \widehat{\underline{W}}_{E'E} \right) = 0, & \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \end{cases}$$

où les indices $n+1$ et $n+\frac{1}{2}$ ont été omis pour simplifier les écritures. k^- est un opérateur défini positif de l'approche. Les directions de recherche sont ensuite écrites par sous-structures, expression strictement équivalente aux relations précédentes.

$$\forall \underline{W}_E^* \in \mathcal{W}_E, \quad \int_{\partial\Omega_E} \left\{ \left(\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E \right) + k^- \left(\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E \right) \right\} \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = 0 \quad (4.16)$$

On définit ainsi le problème associé à la sous-structure Ω_E comme suit :

Problème 2 Trouver $\mathbf{s}_E = (\underline{u}_E, \underline{W}_E, \boldsymbol{\sigma}_E, \underline{F}_E) \in \mathbf{S}_E$ qui vérifie :

- les relations d'admissibilité statique et cinématique des sous-structures (4.2), (4.9), (4.8)
- la direction de recherche (4.16).

La direction de recherche (4.16) étant locale à la frontière $\partial\Omega_E$, chaque problème est indépendant d'une sous-structure à l'autre. En introduisant la relation de comportement linéaire de la sous-structure E et en combinant les équations, on obtient le problème à résoudre à l'étape linéaire

Problème 3 Trouver $(\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E$ qui vérifient :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_{E_0} \times \mathcal{W}_{E_0}, \\ \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E) \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = \\ \int_{\Omega_E} \left(\underline{f}_{d|\Omega_E} \cdot \underline{u}_E^* + \text{Tr} (\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha} \Delta T) \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_E^*)) \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{\underline{F}}_E + k^- \widehat{\underline{W}}_E) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma \end{aligned}$$

Ce problème est résolu par éléments finis en effectuant un maillage des sous-structures et en utilisant une interpolation adéquate. Le choix des espaces d'approximations des déplacements $\mathcal{W}_{EE'}$ et des efforts $\mathcal{F}_{EE'}$ d'interface doit être fait avec soin. Une explication détaillée du choix de ces interpolations est proposée dans le paragraphe 3.2 de ce chapitre.

1.4.2 Etape locale

L'étape locale consiste à construire une solution $\hat{s} \in \Gamma$ connaissant $s_n \in \mathbf{A}_d$. ($\hat{s} - s_n$) doit suivre la direction de recherche $\mathbf{E}^+$. Compte tenu de la définition du groupe d'équation Γ , l'étape locale ne met en jeu que des quantités d'interface. Ainsi, pour chaque interface $\Gamma_{EE'}$, $\hat{s}$ doit vérifier :

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\underline{F}}_{EE'} - \underline{F}_{EE'} \right) - k^+ \left(\widehat{\underline{W}}_{EE'} - \underline{W}_{EE'} \right) &= 0, \quad \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \\ \left(\widehat{\underline{F}}_{E'E} - \underline{F}_{E'E} \right) - k^+ \left(\widehat{\underline{W}}_{E'E} - \underline{W}_{E'E} \right) &= 0, \quad \forall \underline{M} \in \Gamma_{EE'} \end{aligned}$$

où k^+ est un opérateur défini positif de l'approche choisie tel que $k^+ = k^- = k$. Les indices $n + 1/2$ et n ont été omis pour alléger les notations. On remarquera que cette étape locale ne pose aucune difficulté. **Les problèmes à résoudre sont locaux en variables d'espace** et conduisent donc à un degré de parallélisme optimal. La combinaison des directions de montée, des relations de comportement et des relations d'équilibre des interfaces permet de définir explicitement les équations résolues à l'étape locale (Ladevèze, 1999).

1.4.3 Contrôle des itérations

Lorsque les interfaces représentent des liaisons parfaites, des conditions aux limites ou des interfaces de contact unilatéral sans frottement, alors la stratégie de calcul multiéchelle vérifie les hypothèses usuelles de la méthode LATIN (Ladevèze, 1999). Si les directions de recherche sont telles que $k^+ = k^- = k > 0$ alors la convergence de l'algorithme est assurée.

Un indicateur d'erreur sert à contrôler la convergence et à stopper les itérations lorsqu'un niveau d'erreur donné est atteint. A convergence, la solution vérifie les équations du groupe Γ et du groupe $\mathbf{A}_d$, aussi l'indicateur d'erreur est construit entre les quantités s_{n+1} et $\hat{s}$ à chaque itération. Une erreur basée sur les directions de recherche est introduite de la façon suivante :

$$\eta^2 = \frac{\sum_{E \in \mathbf{E}} [\|\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} + \|\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E\|_{\partial\Omega_E}^{F,k}]}{\sum_{E \in \mathbf{E}} [\|\underline{W}_E\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} + \|\widehat{\underline{W}}_E\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} + \|\underline{F}_E\|_{\partial\Omega_E}^{F,k} + \|\widehat{\underline{F}}_E\|_{\partial\Omega_E}^{F,k}]} \quad (4.17)$$

où $\|\underline{W}\|_{\partial\Omega_E}^{W,k} = \int_{\partial\Omega_E} k \underline{W} \cdot \underline{W} d\Gamma$ et $\|\underline{F}\|_{\partial\Omega_E}^{F,k} = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F} \cdot k^{-1} \underline{F} d\Gamma$.

Pour assurer la convergence de la stratégie pour un grand nombre de comportements, on modifie l'étape linéaire en incluant une phase de relaxation (Ladevèze, 1999). On note $\tilde{s}_{n+1}$ la solution obtenue à l'étape $n + 1$, on définit ensuite la nouvelle solution relaxée $s_{n+1} \in \mathbf{A}_d$, par la relation :

$$s_{n+1} = \mu \tilde{s}_{n+1} + (1 - \mu) s_n$$

où le paramètre de relaxation μ est choisi en pratique égal à 0.8.

Remarque : L'indicateur d'erreur peut s'avérer mauvais sous certaines conditions de chargement ou pour certaines géométries particulières. Le niveau atteint peut être très faible

sans pour autant être proche de la solution étant donné qu'on utilise les directions de recherche. Une véritable erreur basée sur la non-vérification des relations de comportement par les quantités s_{n+1} apporterait une confiance plus grande au niveau d'erreur. Simple à définir pour les interfaces parfaites ou les interfaces extérieures, cette erreur est plus difficile à introduire pour les interfaces de type contact avec frottement. En pratique, une valeur de l'indicateur d'erreur d'au moins $1e^{-4}$ en 3D est nécessaire pour obtenir des résultats précis, principalement dans les zones de contact.

2 Stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace

2.1 Introduction de l'aspect multiéchelle

La méthode de décomposition de domaine mixte présentée précédemment permet de traiter des problèmes de grande taille contenant plusieurs non-linéarités (contact avec frottement par exemple). Cependant, aucun problème global n'est défini pour assurer l'extensibilité numérique de la méthode. L'information provenant d'une interface à chargement imposé est transmise de sous-structure en sous-structure à chaque itération. Il faut par conséquent un grand nombre d'itérations pour converger vers la solution du problème si le nombre de sous-structures est important. L'ajout d'un problème global par l'intermédiaire d'une échelle macroscopique permet de palier le défaut de la stratégie monoéchelle. Le problème macroscopique peut être interprété comme un problème global ayant pour objet de fournir un bon préconditionneur pour la stratégie itérative mais aussi comme une technique d'homogénéisation de sous-structures hétérogènes (d'où l'appellation problème macroscopique).

L'aspect multiéchelle requiert la définition de quantités macro et micro ainsi qu'un moyen de passage entre l'échelle micro et l'échelle macro. Ce choix effectué, le fait d'imposer aux quantités macro de vérifier des contraintes d'admissibilité conduit à la mise en place d'un problème macroscopique.

2.1.1 Séparation des variables en partie macro et micro

La séparation micro-macro est effectuée uniquement sur les quantités d'interfaces, ce qui diffère des procédures d'homogénéisation classique. On pourrait cependant définir un comportement macroscopique sur les sous-structures (contraintes et déformations macroscopiques) à partir des quantités macroscopiques d'interfaces en utilisant des techniques similaires à celles employées pour les milieux de Cosserat (Forest & Sab, 1998).

Sur une interface $\Gamma_{EE'}$ entre deux sous-structures E et E' , les déplacements macro et les efforts macro sont choisis dans des espaces de dimension finie respectivement $\mathcal{F}_{EE'}^M$ et $\mathcal{W}_{EE'}^M$, avant toute discrétisation de l'interface. Ces espaces sont compatibles avec la forme bilinéaire travail (4.1) et la proposition suivante :

Proposition 2

$$\left\{ \underline{F}^M \in \mathcal{F}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^{M*} d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M \right\} = \{0\}$$

$$\left\{ \underline{W}^M \in \mathcal{W}_{EE'}^M, \quad \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^{M*} \cdot \underline{W}^M d\Gamma = 0, \quad \forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}_{EE'}^M \right\} = \{0\}$$

Cette proposition impose que les espaces $\mathcal{F}_{EE'}^M$ et $\mathcal{W}_{EE'}^M$ aient la même dimension. Dans l'approche micro-macro, la définition des quantités macro est faite de manière à avoir un sens physique : ce sont des moyennes en espace des déplacements et des efforts d'interface. Plus précisément, elles sont introduites comme les meilleures approximations au sens de la forme bilinéaire travail (4.1) sur l'interface. La proposition (2) permet alors de les définir par les expressions suivantes :

Définition 1 Les parties macro $(\underline{W}^M, \underline{F}^M) \in \mathcal{W}_{EE'}^M \times \mathcal{F}_{EE'}^M$ de $(\underline{W}, \underline{F}) \in \mathcal{W}_{EE'} \times \mathcal{F}_{EE'}$ sont définies par :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^{M*} \cdot (\underline{W}^M - \underline{W}) d\Gamma &= 0, \quad \forall \underline{F}^{M*} \in \mathcal{F}_{EE'}^M \\ \int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{F}^M - \underline{F}) \cdot \underline{W}^{M*} d\Gamma &= 0, \quad \forall \underline{W}^{M*} \in \mathcal{W}_{EE'}^M \end{aligned}$$

Définition 2 Les efforts et déplacements micro sont alors simplement donnés par :

$$\underline{F}^m = \underline{F} - \underline{F}^M \quad \text{et} \quad \underline{W}^m = \underline{W} - \underline{W}^M$$

Les définitions des quantités macro (définition (1)) et micro (définition (2)) conduisent alors à la relation de découplage des travaux micro et macro d'interface qui s'écrit :

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} d\Gamma = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^M \cdot \underline{W}^M d\Gamma + \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F}^m \cdot \underline{W}^m d\Gamma \quad (4.18)$$

On adoptera les mêmes notations pour les espaces macro et les espaces micro que celles définies pour les espaces $\mathcal{W}$ et $\mathcal{F}$. Ainsi, $\mathcal{F}_E^M = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{F}_{EE'}^M$ et $\mathcal{W}_E^M = \prod_{E' \in \mathbf{V}_E} \mathcal{W}_{EE'}^M$. On étend également ces définitions à l'ensemble des sous-structures en définissant les espaces $\mathcal{F}^M$ et $\mathcal{W}^M$.

2.1.2 Admissibilité des quantités macro

L'introduction de nouvelles inconnues (parties micro et macro) nécessite l'ajout d'un problème supplémentaire qui porte sur l'admissibilité des inconnues macro. On choisit d'imposer la continuité des efforts macro à toutes les étapes de la résolution (l'équilibre des interfaces est alors toujours vérifié). Ce choix judicieux est valable quel que soit le type d'interface. En effet, pour des interfaces parfaites, de contact,... les efforts sont toujours équilibrés. Dans le cas d'interfaces parfaites, il est possible d'imposer aussi la continuité

des déplacements macro, ce qui accélère fortement la convergence mais n'est valable que pour ce type d'interface.

Les efforts macro sont donc recherchés dans l'espace $\mathcal{F}_{\text{ad}}^M$ défini par :

$$\mathcal{F}_{\text{ad}}^M = \{ \underline{F}^M \in \mathcal{F}^M \mid \forall E \in \mathbf{E}, \forall E' \in \mathbf{V}_E, \underline{F}_{EE'}^M + \underline{F}_{E'E}^M = 0 \}$$

Cette définition inclut les conditions aux limites en effort pour lesquelles les efforts macro sont égaux à la partie macro des efforts donnés.

2.2 Retour sur l'étape linéaire

La séparation micro-macro n'est réalisée qu'au niveau de l'étape linéaire. L'introduction d'un multiplicateur de Lagrange permet d'alléger les notations et de proposer ainsi une formulation très proche de la formulation monoéchelle.

2.2.1 Introduction de l'échelle macroscopique dans la stratégie de résolution

La prise en compte de l'admissibilité de $\underline{F}^M$ ($\underline{F}^M \in \mathcal{F}_{\text{ad}}^M$) couple les équations (4.16). La direction de descente $\mathbf{E}^-$ doit donc être écrite de manière globale pour être compatible avec la contrainte d'admissibilité imposée aux efforts macro. On définit donc la direction de descente sous la forme :

$$\forall \underline{F}_E^* \in \mathcal{F}^m \cup \mathcal{F}_{\text{ad}}^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \{ k^{-1} (\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) \} \cdot \underline{F}_E^* \, d\Gamma = 0$$

Pour obtenir des problèmes linéaires restreints à chaque sous-structure et couplés uniquement par le problème macro, (Ladevèze & Nouy, 2002) proposent d'introduire un multiplicateur pour prendre en compte l'admissibilité des efforts macro. Cette écriture permet de séparer les problèmes linéaires et rend leur écriture plus simple mais ne change pas le caractère global de la direction de recherche.

On définit l'espace $\mathcal{W}_{\text{ad},0}^M$ des déplacements macro continus aux interfaces et nuls sur $\partial_1\Omega$ (Ladevèze & Nouy, 2003). On obtient alors les relations suivantes exprimant l'admissibilité des efforts macro et la direction de recherche globale :

$$\forall \underline{F}_E^* \in \mathcal{F}, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \{ k^{-1} (\underline{F}_E - \widehat{\underline{F}}_E) + (\underline{W}_E - \widehat{\underline{W}}_E) \} \cdot \underline{F}_E^* \, d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widehat{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{F}_E^* \, d\Gamma \quad (4.19)$$

$$\forall \widetilde{\underline{W}}_{E'}^{M*} \in \mathcal{W}_{\text{ad},0}^M, \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_E \, d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d \, d\Gamma \quad (4.20)$$

Les directions de recherche peuvent ainsi être utilisées dans les problèmes par sous-structures. Par opposition au problème macro défini sur les interfaces et ne portant que sur les quantités macro, on appelle problèmes micro les problèmes définis pour les sous-structures.

Les problèmes à résoudre à l'étape linéaire sont alors donnés par :

- Problème micro pour toute sous-structure $E \in \mathbf{E}$

Trouver $(\underline{u}_E, \underline{W}_E) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E$ qui vérifient :

$$\begin{aligned} & \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_{E_0} \times \mathcal{W}_{E_0}, \\ & \int_{\Omega_E} \text{Tr}(\mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_E) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_E \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = \\ & \int_{\Omega_E} \left(\underline{f}_d|_{\Omega_E} \cdot \underline{u}_E^* + \text{Tr}(\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha} \Delta T) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) \right) d\Omega + \\ & \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{\underline{F}}_E + k^- \widehat{\underline{W}}_E) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma + \int_{\partial\Omega_E} k^- \widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma \end{aligned} \quad (4.21)$$

- Problème macro

Trouver $\underline{F}_E \in \mathcal{F}$ qui vérifie :

$$\forall \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_E d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (4.22)$$

Le problème microscopique est un problème linéaire. $\mathbf{K}$ et k^- étant définis positifs, le problème micro 4.21 admet une et une seule solution. D'après le principe de superposition, la solution de ce problème microscopique peut être décomposée en deux parties :

- $\underline{u}_{E1}$ solution du problème micro (dénommé **problème micro 1**) dont le second membre

est entièrement connu au début de l'étape linéaire :

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (\underline{u}_{E1}, \underline{W}_{E1}) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \text{ qui vérifient :} \\
 & \quad \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_{E0} \times \mathcal{W}_{E0}, \\
 & \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_{E1}) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_{E1} \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = \\
 & \quad \int_{\Omega_E} \left(\underline{f}_{d|\Omega_E} \cdot \underline{u}_E^* + \text{Tr} (\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha} \Delta T) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{\underline{F}}_E + k^- \widehat{\underline{W}}_E) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma
 \end{aligned}$$

- $\underline{u}_{E2}$ solution du problème micro (dénommé **problème micro 2**) dont le second membre n'est pas connu.

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (\underline{u}_{E2}, \underline{W}_{E2}) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \text{ qui vérifient :} \\
 & \quad \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_{E0} \times \mathcal{W}_{E0}, \\
 & \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_{E2}) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_{E2} \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = \\
 & \quad \int_{\partial\Omega_E} k^- \widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma
 \end{aligned}$$

En déterminant le déplacement sur les interfaces puis par la direction de recherche les efforts, on en déduit que la solution sur les interfaces entourant une sous-structure est telle que :

$$\underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F(\widetilde{\underline{W}}_E^M) + \underline{F}_{E\,d}^M \quad (4.23)$$

$$\underline{W}_E^M = \mathbf{L}_E^W(\widetilde{\underline{W}}_E^M) + \underline{W}_{E\,d}^M \quad (4.24)$$

où $\underline{F}_{E\,d}^M$ et $\underline{W}_{E\,d}^M$ ne dépendent que des données sur les sous-structures (efforts volumiques $\underline{f}_{d|\Omega_E}$ et champ de contraintes thermiques) et des quantités $\widehat{\mathbf{s}}_E$ aux interfaces. Ces quantités sont déterminées en résolvant le problème micro 1.

Remarque : Les problèmes micro 1 et micro 2 sont indépendants d'une sous-structure à l'autre et peuvent être résolus en parallèle. Seul le problème macro nécessite un assemblage.

2.2.2 Définition du comportement homogénéisé sur Ω_E

$\mathbf{L}_E^F$ (resp. $\mathbf{L}_E^W$) est un opérateur linéaire de $\mathcal{W}_E^M$ dans $\mathcal{F}_E^M$ (resp. de $\mathcal{W}_E^M$ dans $\mathcal{W}_E^M$), symétrique et positif. Ces opérateurs peuvent être considérés comme des opérateurs homo-

générisés sur la sous-structure Ω_E et sont déterminés avant toute résolution itérative.

Pour chaque sous-structure E , on impose successivement des valeurs nulles aux multiplicateurs macro pour toutes les interfaces, excepté pour une composante macro d'une interface donnée. On résout ensuite le problème micro 2 soumis à la distribution de multiplicateurs $\widetilde{W}_E^M$ pour déterminer les déplacements $\underline{W}_E^M$. Par la direction de recherche, on extrait les efforts macro $\underline{F}_E^M$ correspondant. Chaque calcul fournit une colonne des opérateurs homogénéisés. Si n_M est la dimension de l'espace $\mathcal{W}_{EE'}^M$ pour une interface $\Gamma_{EE'}$ et que Ω_E est entourée de n_i interfaces, alors $n_M \times n_i$ calculs micro sont nécessaires pour déterminer ces opérateurs. La Figure 4.5 montre la réponse d'une sous-structure soumise à la rotation d'une interface.

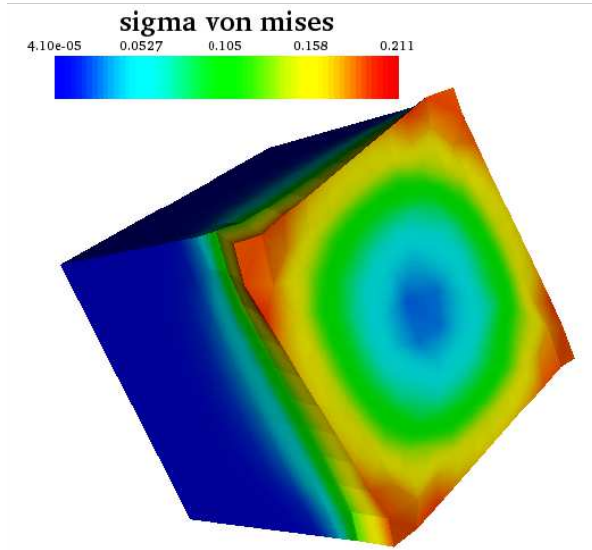


Figure 4.5: Réponse d'une sous-structure à la rotation d'une interface.

Remarque : La technique de construction des opérateurs ressemble à celle utilisée dans les méthodes d'homogénéisation cinématique et statique. Dans ces approches, on impose soit un champ de déformation soit un champ de contrainte macroscopique, on résout le problème sur un VER donné, on en déduit ensuite les contraintes ou déformations résultantes et en extrayant la moyenne, on détermine le comportement macroscopique. La stratégie est différente ici car on travaille uniquement sur les interfaces et l'opérateur engendré est bien plus riche que ceux obtenus par homogénéisation cinématique ou statique. Le comportement homogénéisé contient notamment celui déterminé par homogénéisation classique en choisissant les sollicitations macro adéquates.

La relation $\underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F(\widetilde{W}_E^M) + \underline{F}_E^M_d$ est introduite dans le problème macroscopique 4.22. L'écriture sous forme faible de l'admissibilité statique (4.20) et la relation de compor-

tement homogénéisé aboutissent au problème macro en multiplicateur suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{\widetilde{W}}^M = \{ \underline{\widetilde{W}}_E^M \}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\ \forall \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \left(\mathbf{L}_E^F(\underline{\widetilde{W}}_E^M) + \underline{F}_E^M \right) d\Gamma = \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (4.25) \end{aligned}$$

Ce problème admet une et une seule solution si $mes(\partial\Omega_u) \neq 0$. Il est résolu de manière directe et permet de déterminer les multiplicateurs sur chaque interface. Les multiplicateurs étant connus, le problème micro 2 peut être résolu à son tour pour déterminer les déplacements et efforts d'interface complets.

2.2.3 Algorithmes de résolution

Un résumé de la stratégie est proposé sous forme d'algorithmes à la fois pour la méthode monoéchelle (Algorithme 1) et pour la méthode multiéchelle (Algorithme 2) en précisant les différentes étapes. On note $\mathbb{K}$ la raideur obtenue par assemblage éléments finis, $\mathbf{k}$ est déterminé par assemblage des directions de recherche. On note $[U_i]$ la solution aux problèmes micro 1 ou 2.

Algorithme 1 Stratégie de calcul monoéchelle (// : phase parallélisable)

Initialisation : Assignment de $\widehat{F}$ et $\widehat{W}$ pour les interfaces extérieures

Itérations :

boucle pour $n = 0$ à n_{max} **faire**

1. Étape locale : Calcul de $\widehat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$
// Résolution de problèmes locaux sur les interfaces $\Gamma_{EE'}$,
2. Étape linéaire : Calcul de $s_{n+1} \in \mathbf{A}_d$
// Résolution du problème : $(\mathbb{K} + \mathbf{k})[U_1] = [\widehat{F} + k\widehat{W}]$
// Relaxation
3. Indicateur d'erreur η : **Si** $\eta < \eta_c$ **Sortie**

fin boucle

3 Développement de la stratégie dans le cadre d'un logiciel

3.1 Quelques spécificités de la stratégie pour les milieux tridimensionnels

Différents points doivent être précisés lors de la mise en oeuvre de la stratégie dans le cadre tridimensionnel. Ce paragraphe dresse un bilan des choix effectués lors de la réalisation d'un code multiéchelle 2D/3D.

Algorithme 2 Stratégie de calcul multiéchelle (// : phase parallélisable)**Initialisation :** Assignment de $\hat{F}$ et $\hat{W}$ pour les interfaces extérieures**Itérations :****boucle** pour $n = 0$ à n_{max} **faire**

1. Étape locale : Calcul de $\hat{s}_{n+1/2} \in \Gamma$
 // Résolution de problèmes locaux sur les interfaces $\Gamma_{EE'}$,
2. Étape linéaire : Calcul de $s_{n+1} \in \mathbf{A}_d$
 // Résolution du problème micro 1 : $(\mathbb{K} + \mathbf{k})[U_1] = [\hat{F} + k\hat{W}]$
 // Construction du problème macro : $\hat{F}_{E,d,n+1}^M$ par sous-structure + assemblage
 second membre macro $[\tilde{F}_d]$
 ■ Résolution du problème macro $\mathbb{L}[\tilde{W}] = [\tilde{F}_d]$
 // Résolution du problème micro 2 : $(\mathbb{K} + \mathbf{k})[U_2] = [k\tilde{W}]$
 // Reconstruction des solutions : $[U] = [U_1] + [U_2]$
 // Relaxation
3. Indicateur d'erreur η : **Si** $\eta < \eta_c$ **Sortie**

fin boucle**3.1.1 Choix des espaces macro**

Aucune contrainte n'est *a priori* imposée pour le choix des espaces macro. Cependant, pour assurer l'extensibilité numérique de la stratégie et véritablement définir un problème multiéchelle, la base macroscopique doit pouvoir extraire les résultantes et moments des efforts ainsi que les translations et rotations des déplacements. D'après la propriété de découplage, les parties complémentaires microscopiques sont alors à résultante et moment nuls. Le principe de Saint Venant implique qu'un effort à résultante et moment nuls a un effet localisé. Cette propriété montre ainsi que les parties microscopiques ont un effet local tandis que les quantités macroscopiques possèdent toute l'information globale la plus pertinente.

On introduit une base macroscopique $\mathbf{e}_{EE'}^M = (e_1^M, \dots, e_{n_M}^M)$ de l'espace de dimension finie $\mathcal{F}_{EE'}^M$ des interefforts ou de l'espace $\mathcal{W}_{EE'}^M$ des déplacements. Soit $\Pi_{\Gamma_{EE'}}$ le projecteur macroscopique permettant d'extraire les parties macroscopiques des quantités d'interface. Les efforts et déplacements macro sont alors représentés sur la base macroscopique par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \underline{F}^M &= \Pi_{\Gamma_{EE'}}(\underline{F}) = \sum_{i=1}^{n_M} (\underline{F}, e_i^M) e_i^M = \sum_{i=1}^{n_M} [F^M]_i e_i^M \\
 \underline{W}^M &= \Pi_{\Gamma_{EE'}}(\underline{W}) = \sum_{i=1}^{n_M} (\underline{W}, e_i^M) e_i^M = \sum_{i=1}^{n_M} [W^M]_i e_i^M
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

où $[F^M]_i$ et $[W^M]_i$ représentent les composantes respectives de $\underline{F}^M$ et de $\underline{W}^M$ dans la base macroscopique $\mathbf{e}_{EE'}^M$ obtenues par le produit scalaire $(F, W) = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{F} \cdot \underline{W} d\Gamma$ et n_m est le nombre de fonctions de base.

La base macroscopique permet donc d'extraire les translations et rotations des déplacements d'interface qui est alors considérée comme un corps rigide. L'enrichissement de

la base macroscopique revient d'un point de vue macroscopique à considérer l'interface comme un milieu déformable.

La définition et la construction de la base macroscopique sont détaillées dans les différentes thèses pour le cas d'interfaces bidimensionnelles. Nous présentons dans cette partie la construction dans le cas d'interfaces tridimensionnelles.

Soit $\Gamma_{EE'}$ une interface, $\underline{G}$ son centre de gravité, $\mathbf{I} = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{GM} \otimes \underline{GM} d\Gamma$ la matrice d'inertie secondaire, $(\underline{N}_1, \underline{N}_2, \underline{N}_3)$ la base principale d'inertie de cette interface, ordonnée de manière à ce que les moments principaux d'inertie $I_{i(G, \Gamma_{EE'})}$ par rapport à chacun des axes $\underline{N}_i$ vérifient :

$$I_{1(G, \Gamma_{EE'})} \geq I_{2(G, \Gamma_{EE'})} \geq I_{3(G, \Gamma_{EE'})} \geq 0 \quad (4.27)$$

Remarque : Dans le cas d'une interface plane, le moment d'inertie $I_{3(G, \Gamma_{EE'})}$ est nul. La base principale de cette matrice d'inertie secondaire est la même que celle obtenue pour la matrice d'inertie classique $\mathcal{I}(\underline{x}) = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{GM} \wedge (\underline{x} \wedge \underline{GM}) d\Gamma$ pour laquelle les valeurs propres sont orientées dans le sens opposé et reliées aux moments principaux définis ci-dessus par la relation

$$I_{i(G, \Gamma_{EE'})} = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{GM} \cdot \underline{GM} d\Gamma - \mathcal{I}_{i(G, \Gamma_{EE'})}$$

Les fonctions de base permettant d'extraire les résultantes ou translations sont définies par :

$$\begin{aligned} \underline{e}_1^M &= \underline{N}_1 \\ \underline{e}_2^M &= \underline{N}_2 \\ \underline{e}_3^M &= \underline{N}_3 \end{aligned}$$

Celles assurant l'extraction des moments ou rotations d'une interface sont données par :

$$\begin{aligned} \underline{e}_4^M &= \underline{N}_1 \wedge \underline{GM} \\ \underline{e}_5^M &= \underline{N}_2 \wedge \underline{GM} \\ \underline{e}_6^M &= \underline{N}_3 \wedge \underline{GM} \end{aligned}$$

Ces fonctions sont orthogonales entre elles (grâce à la définition du centre de gravité qui assure que $\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{GM} d\Gamma = \underline{0}$) et doivent être normées.

A titre d'exemple, le moment selon $\underline{N}_3$ est défini par

$$\begin{aligned} M_3 &= \int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{GM} \wedge \underline{F}) \cdot \underline{N}_3 d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{N}_3 \wedge \underline{GM}) \cdot \underline{F} d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{e}_6^M \cdot \underline{F} d\Gamma \end{aligned}$$

Classiquement, on choisit d'ajouter des fonctions de base supplémentaires de manière à extraire la meilleure « partie linéaire » des quantités d'interface (Figure 4.6).

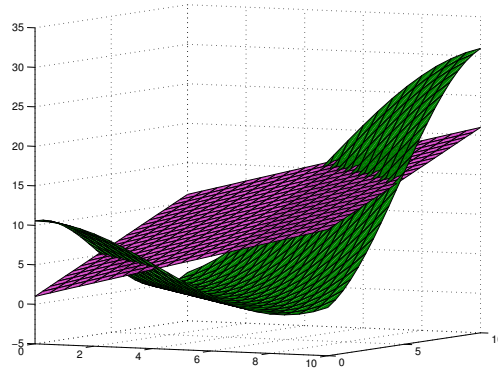


Figure 4.6: Extraction de la partie linéaire pour une interface plane

De manière générale, l'extraction de la meilleure partie linéaire correspond à une déformation homogène de l'interface vue comme un milieu déformable. Le déplacement macro d'une interface sera alors défini par :

$$\underline{W} = \varepsilon(\underline{GM}) + \underline{\Omega}(\underline{GM}) + \underline{V}$$

où $\underline{V}$ est un vecteur constant, ε est un opérateur symétrique et $\underline{\Omega}$ un opérateur antisymétrique. La partie $\underline{\Omega}(\underline{GM}) + \underline{V}$ peut être réécrite sous la forme $\omega \wedge \underline{GM} + \underline{V}$ et correspond aux mouvements de corps rigide de rotation et translation de l'interface définis précédemment.

Cette manière d'écrire le déplacement macro permet de définir pour toute forme d'interface les fonctions supplémentaires correspondant aux déformations homogènes. Ainsi pour une interface linéique, une fonction supplémentaire correspondant à l'allongement de l'interface sera ajoutée, tandis que pour des interfaces planes, trois fonctions représentant respectivement les allongements selon $\underline{N}_1$ et $\underline{N}_2$ et le glissement dans le plan ($\underline{N}_1, \underline{N}_2$) seront nécessaires (Figure 4.7). Dans le cas d'une interface de forme quelconque tridimensionnelle, les fonctions supplémentaires correspondent aux différents termes du tenseur symétrique ε (6 fonctions, cf. Figure 4.8).

Dans le cas d'une interface plane, on pose alors

$$\underline{e}_7^M = \underline{N}_1 (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM}) \quad (4.28)$$

$$\underline{e}_8^M = \underline{N}_2 (\underline{N}_2 \cdot \underline{GM}) \quad (4.29)$$

$$\underline{e}_9^M = \frac{1}{2}(\underline{N}_1 (\underline{N}_2 \cdot \underline{GM}) + \underline{N}_2 (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM})) \quad (4.30)$$

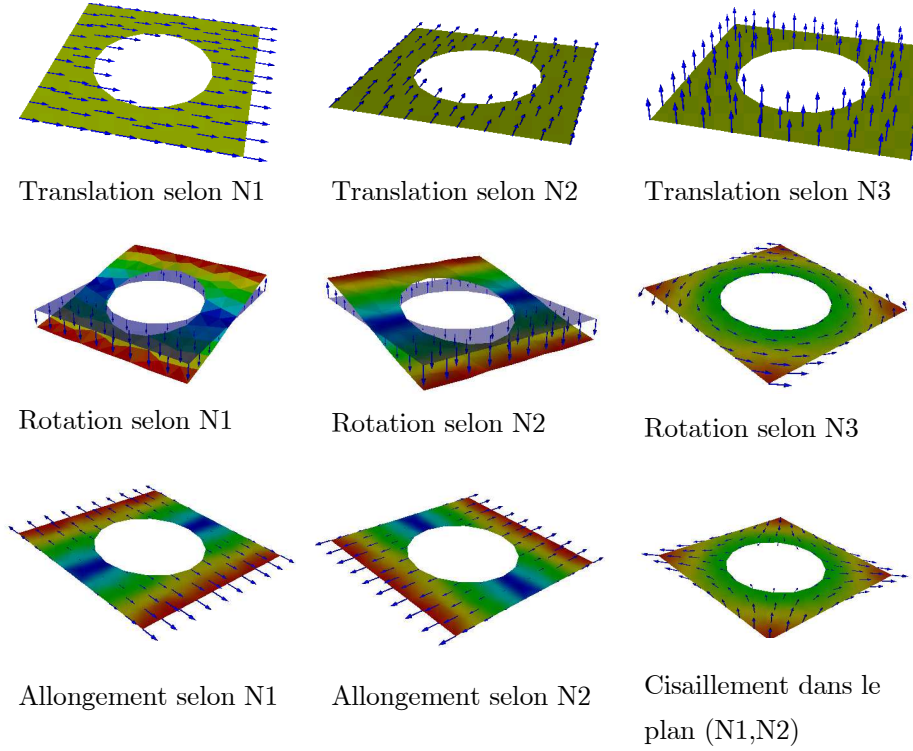


Figure 4.7: Fonctions de base pour une interface plane

Pour des interfaces de forme quelconque, on définit :

$$\underline{e}_7^M = \underline{N}_1 (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM}) \quad (4.31)$$

$$\underline{e}_8^M = \underline{N}_2 (\underline{N}_2 \cdot \underline{GM}) \quad (4.32)$$

$$\underline{e}_9^M = \underline{N}_3 (\underline{N}_3 \cdot \underline{GM}) \quad (4.33)$$

$$\underline{e}_{10}^M = \frac{1}{2}(\underline{N}_1 (\underline{N}_2 \cdot \underline{GM}) + \underline{N}_2 (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM})) \quad (4.34)$$

$$\underline{e}_{11}^M = \frac{1}{2}(\underline{N}_1 (\underline{N}_3 \cdot \underline{GM}) + \underline{N}_3 (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM})) \quad (4.35)$$

$$\underline{e}_{12}^M = \frac{1}{2}(\underline{N}_2 (\underline{N}_3 \cdot \underline{GM}) + \underline{N}_3 (\underline{N}_2 \cdot \underline{GM})) \quad (4.36)$$

Hormis les fonctions correspondant aux cisaillement, les allongements sont orthogonaux aux fonctions précédentes compte tenu de l'orthogonalité de la base principale d'inertie. On orthonormalise les fonctions nécessaires selon le procédé de Gramm-Schmidt.

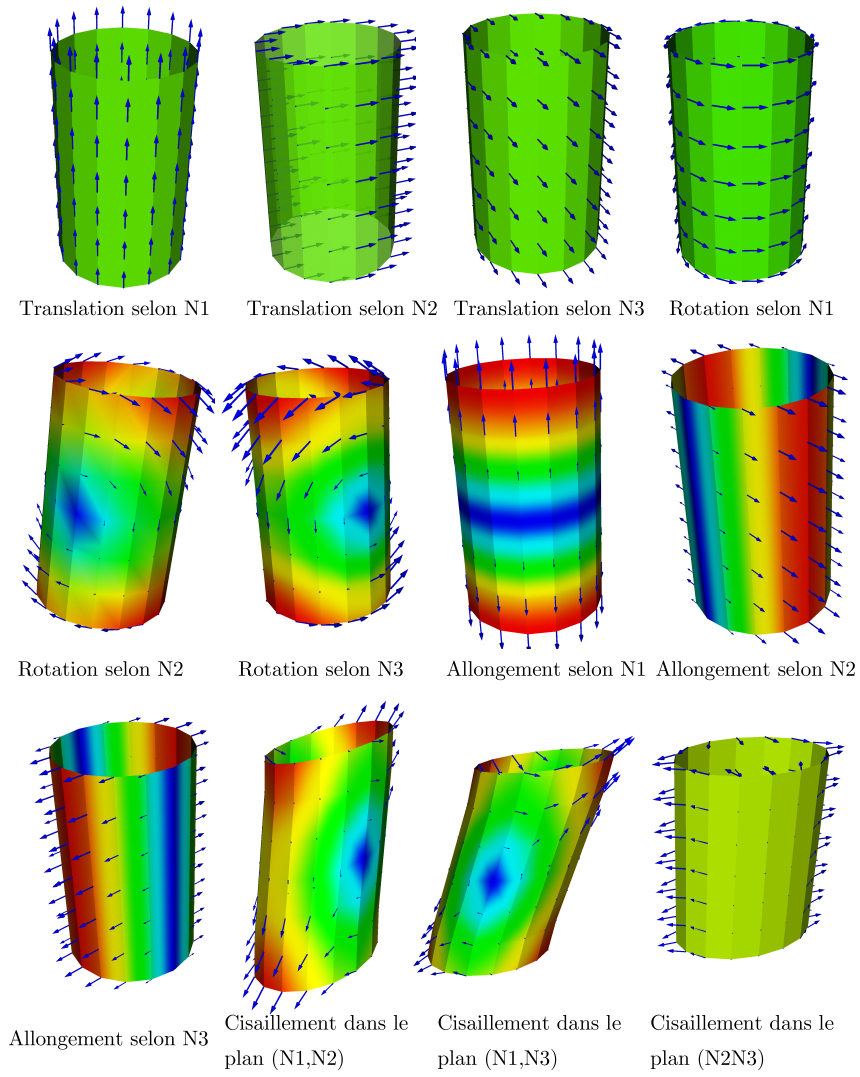


Figure 4.8: Fonctions de base pour une interface cylindrique

Démonstration 1 On se limite à la démonstration de l'orthogonalité d'un vecteur permettant d'extraire un allongement à un vecteur permettant d'extraire une rotation. La démonstration est similaire pour les différents vecteurs.

$$\int_{\Gamma_{EE'}} \underline{e}_7^M \cdot \underline{e}_5^M d\Gamma = \int_{\Gamma_{EE'}} \underline{N}_1 (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM}) \cdot (\underline{N}_2 \wedge \underline{GM})$$

Comme

$$\underline{N}_1 \cdot (\underline{N}_2 \wedge \underline{GM}) = \underline{GM} \cdot (\underline{N}_1 \wedge \underline{N}_2) = \underline{GM} \cdot \underline{N}_3$$

on obtient

$$\int_{\Gamma_{EE'}} (\underline{N}_1 \cdot \underline{GM})(\underline{GM} \cdot \underline{N}_3) d\Gamma = \mathbf{I}(\underline{N}_3) \cdot \underline{N}_1 = 0$$

par orthogonalité des directions principales de $\mathbf{I}$.

Une augmentation du nombre de fonctions de base macro a été étudiée notamment afin d'apporter une extraction quadratique ou cubique ((Ladevèze *et al.*, 2001; Guidault *et al.*, 2004)). Ces différentes améliorations jouent très peu sur la convergence de la solution et ne sont donc pas nécessaires. Cependant, l'utilisation d'une base macro discontinue peut s'avérer très judicieuse dans le cas de fissures traversant une interface (Guidault *et al.*, 2004).

3.1.2 Sous-intégration

Le choix des discrétisations d'interface peut conduire à des instabilités numériques engendrées par des modes à énergie nulle. Ce phénomène a été étudié en détails dans (Ladevèze & Nouy, 2003) et différentes solutions ont été apportées.

La discrétisation des déplacements des sous-structures ne pose pas de difficulté étant donné qu'on utilise une résolution par éléments finis classique. Ceux ci sont interpolés par des fonctions affines (interpolation P1) ou quadratiques (interpolation P2).

La discrétisation des quantités d'interface nécessite une attention particulière. Pour rester dans le cadre mécanique naturel, les efforts $\underline{F}$ doivent appartenir *a priori* à l'espace $H^{-1/2}(\Gamma_{EE'})$. Le non respect de cette condition peut être problématique pour des problèmes hétérogènes (notamment dans le cas de matériau orthotrope). Le choix standard consiste donc à rechercher les efforts et déplacements d'interface dans un espace de degré inférieur à celui des déplacements des sous-structures. Pour une interpolation P1, les efforts seront choisis constants par élément d'interface (leur valeur étant alors définie au centre de gravité de l'élément considéré).

Cependant, ce choix conduit à des anomalies observées en multiéchelle pour des problèmes de contact (Ladevèze *et al.*, 2002). La discrétisation génère des modes dont l'énergie est très mal calculée. Ces différents modes parasites sont amplifiés dans les zones à forts gradients ou pour lesquelles des discontinuités d'efforts sont observées.

Pour des problèmes tridimensionnels, les problèmes sont similaires et ont été observés dans quelques situations. L'exemple significatif concerne l'étude de stratifiés $[0/90]_s$ soumis à un champ de température et à une déformation longitudinale. On peut remarquer que ce type d'oscillations numériques introduit par une mauvaise intégration des quantités d'interfaces est analogue à celui constaté dans l'utilisation d'éléments cohésifs (De Borst, 2003). Le calcul est mené jusqu'à une erreur latin de $8e^{-5}$. La zone interlaminaire est caractéristique du phénomène engendré par la discrétisation ; le calcul d'une contrainte moyenne utilisant les efforts d'interface dans cette zone s'avère alors désastreux. Le stratifié est constitué de 100 sous-structures de côté 0.3mm maillées par des tétraèdres correspondant à un découpage 4x4x4 des côtés. On constate ainsi des oscillations parasites entre les plis à 0 et 90°, ceci quel que soit le nombre d'éléments dans cette zone (Figure 4.9). Les efforts selon l'axe de chargement (correspondant à la contrainte σ_{xz}) devraient être nuls dans cette zone, or on observe des valeurs allant de -130 à 130 Mpa. Pourtant, sur cette

même figure, on constate que la solution en contrainte est correctement évaluée. Le choix d'éléments finis plus élaborés (Prismes ou Hexaèdres) pour les sous-structures améliore la solution mais n'élimine pas complètement ce problème.

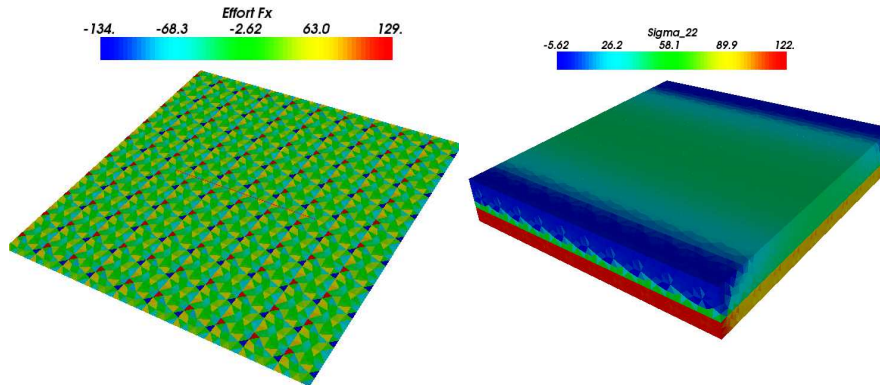


Figure 4.9: Efforts selon l'axe de chargement pour les interfaces interlaminaires

Les solutions adoptées sont de deux types et peuvent être vues comme une sous-intégration de l'interface ou une sur-discrétisation des sous-structures. La surdiscrétisation des sous-structures est soit de type p soit de type h. La méthode-h consiste à découper les éléments de bord des sous-structures de manière à définir sur l'interface une interpolation constante sur plusieurs éléments. La méthode-p quant à elle nécessite d'augmenter le degré d'interpolation des éléments de bord (interpolation de degré P2) en rajoutant des noeuds sur les arêtes de ces éléments.

En 2D, la méthode-h est simple à mettre en oeuvre puisque seuls deux types d'éléments sont utilisables classiquement (Triangles et Quadrilatères). La mise en oeuvre de la technique de découpage nécessite la recherche des éléments de bord et le découpage systématique en plusieurs triangles (Figure 4.10).

En 3D, le choix des éléments est plus important et leur complexité géométrique aussi. La méthode-h n'a été implantée que sur des tétraèdres. La procédure consiste à ajouter des noeuds sur les faces de bord et à construire les nouveaux tétraèdres pour chaque configuration de manière systématique. Le découpage de Prisme ou Hexaèdre requiert l'utilisation de nouveaux éléments de type pyramide par exemple et n'a pas été implanté.

La méthode-p a par contre été développée pour tous les éléments de manière pragmatique. Pour un maillage donné, on modifie tous les éléments de manière à obtenir une interpolation P2 sur toute la sous-structure et non pas seulement sur le bord, afin de simplifier la mise en oeuvre numérique.

L'utilisation de la sur-discrétisation sur les exemples précédents conduit à des résultats satisfaisants au niveau des interfaces. On constate une très nette atténuation des oscillations parasites en utilisant des éléments de type h (Figure 4.12), cependant le niveau sur certains éléments peut toujours s'avérer problématique. Pour des éléments de type p les valeurs observées sont satisfaisantes mais font apparaître les mêmes défauts inhérents aux éléments tétraédriques. La comparaison de la solution complète entre les deux méthodes n'est pas nécessairement pertinente étant donné que le maillage est plus riche à coeur pour

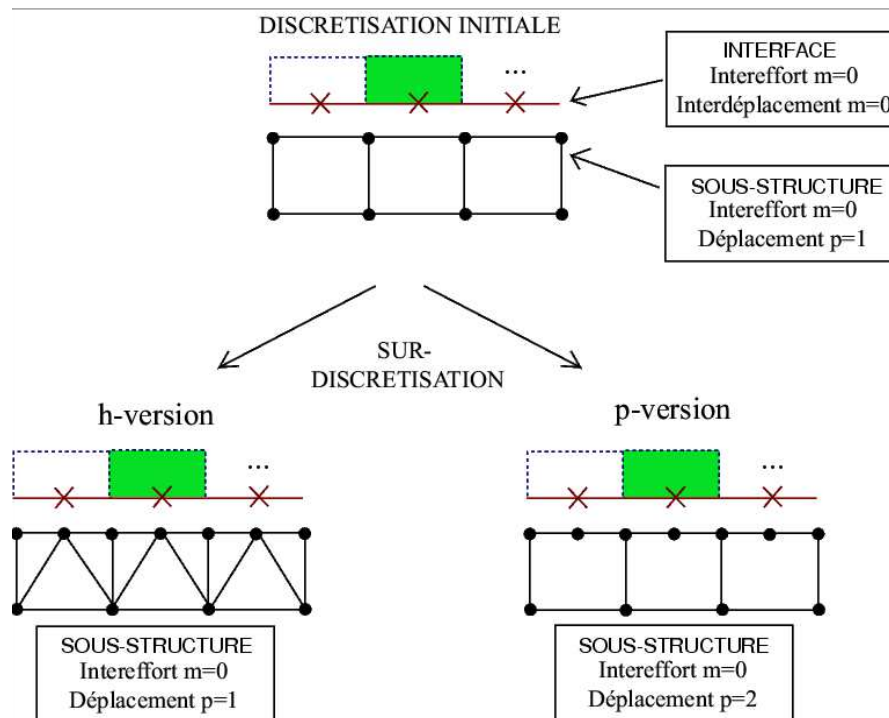


Figure 4.10: Sur-discrétisation en 2D - Méthode-h et méthode-p

la méthode-p. Néanmoins, on constate que pour des tétraèdres, la forme des éléments obtenus après redécoupage (pourtant déterminée de manière à obtenir la meilleure forme possible) entraîne des niveaux de contraintes trop importants dans certaines zones. L'utilisation d'éléments structurés évite de tels problèmes souvent inhérents aux tétraèdres et amplifiés par la sur-discrétisation. La méthode-p a l'avantage de ne pas accentuer la mauvaise qualité des tétraèdres mais est plus coûteuse en temps de calcul avec l'approche proposée.

3.1.3 Directions de recherche

Un point fondamental de la stratégie multiéchelle ou monoéchelle est le choix des directions de recherche. Celui-ci conditionne véritablement la convergence de la méthode. Pour que la méthode converge de façon optimale, chaque sous-structure doit connaître précisément les efforts et déplacements appliqués par les sous-structures voisines. Les interfaces adjacentes doivent alors transmettre tout le comportement du complémentaire à une sous-structure donnée (complément de Schur de la sous-structure E). Pour une méthode monoéchelle, utiliser le complément de Schur revient à résoudre le problème directement. L'utilisation du multiéchelle et de la séparation micro-macro apporte un véritable sens aux directions de recherche et une manière de déterminer une valeur optimale. Ce travail a fait l'objet de mon stage de DEA ([Violeau, 2003](#)). Seuls les points essentiels sont rappelés dans cette partie.

Considérons une sous-structure E et extrayons cette sous-structure de son environne-

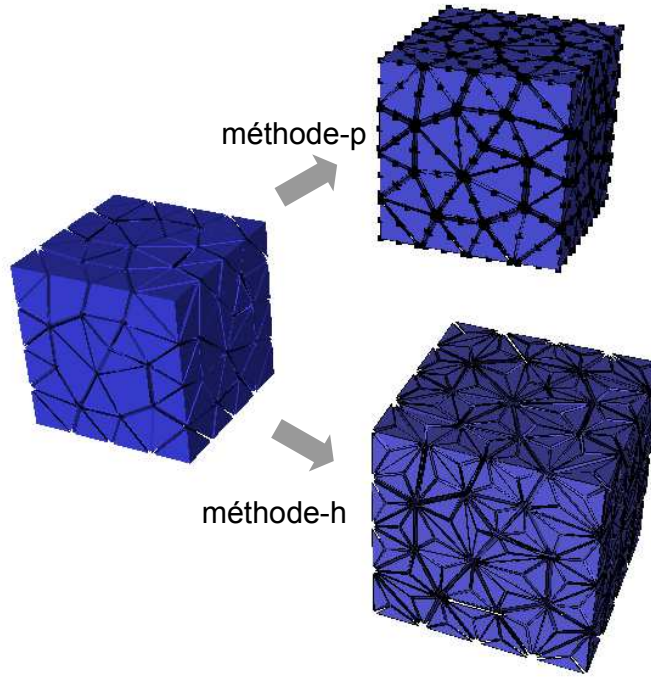


Figure 4.11: Sur-discrétisation en 3D pour des tétraèdres. Méthode-h et méthode-p

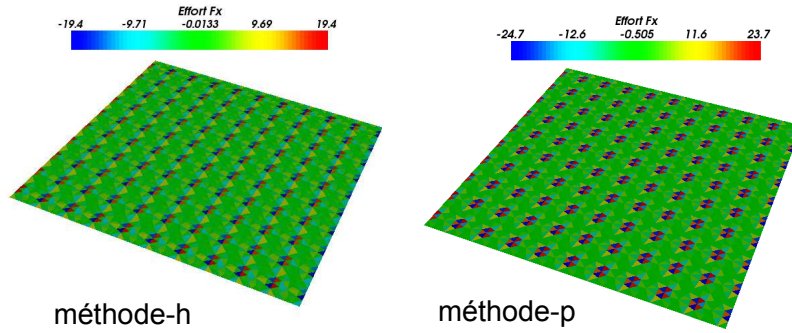


Figure 4.12: Efforts sur l'interface interlaminaire selon l'axe x. Sur-discrétisation de type h ou p

ment noté $\bar{E}$. Soit $\underline{F}_E, \underline{W}_E$ les efforts et déplacements exercés par le complémentaire sur la sous-structure E . L'énergie du complémentaire condensée sur le bord de la sous-structure E peut s'écrire sous la forme :

$$\int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \mathbb{A}^{-1} \underline{F}_E d\Gamma$$

où l'on fait apparaître un opérateur $\mathbb{A}^{-1}$ assimilable à l'opérateur de direction de recherche.

La particularité de la séparation micro-macro est que l'opérateur recherché est unique-

ment micro. En effet, (Loiseau *et al.*, 2002) ont déjà montré qu'il existait une valeur optimale pour assurer une bonne convergence des parties macro (à savoir, pour les interfaces parfaites, la valeur optimale est celle permettant d'assurer la continuité des déplacements macro) mais autour de cette valeur, l'influence de la direction de recherche macro est faible. Ainsi, l'opérateur qui conditionne réellement la convergence est nécessairement microscopique. L'énergie peut donc être réécrite sous la forme :

$$\int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \mathbb{A}_M^{-1} \underline{F}_E^M + \underline{F}_E^m \mathbb{A}_m^{-1} \underline{F}_E^m d\Gamma$$

L'opérateur $\mathbb{A}_m$ ainsi défini est global sur les interfaces entourant une sous-structure. On fait l'hypothèse que celui-ci est diagonal ou que les termes hors-diagonaux sont négligeables.

■ Méthode de détermination de l'opérateur.

L'opérateur ne porte que sur les parties microscopiques. Ceci implique que le chargement correspondant à cet opérateur est microscopique. Par conséquent, la résultante et le moment associés à ce chargement sont nuls (la partie macro inclut ses quantités). D'après le principe de St-Venant, une distribution d'efforts à résultante et moment nuls a un effet localisé. Aussi, pour déterminer l'opérateur, il suffit de calculer la rigidité condensée sur l'interface uniquement d'une zone restreinte avoisinant l'interface considérée.

Au cours du DEA, il a été montré que l'utilisation d'un opérateur global sur l'interface était extrêmement performant mais coûteux non seulement à déterminer mais aussi à utiliser. Une approximation de l'opérateur est réalisée en déterminant une valeur scalaire représentative de celui-ci. Pour ce faire, une valeur propre de cet opérateur est calculée en utilisant une méthode de puissance ou la méthode des sous-espaces. Ces méthodes permettent de ne pas avoir à inverser d'opérateurs. En se donnant un vecteur initial, on résout le problème de complémentaire localisé soumis à la partie microscopique de l'effort sur l'interface et à un effort nul sur les autres bords du complémentaire. On détermine le déplacement qui sert de second vecteur pour l'itération suivante.

En pratique, la détermination d'une direction de recherche par cette technique s'avère souvent difficile et une méthode pratique de détermination des directions de recherche est utilisée principalement lorsque le nombre de sous-structures différentes est important. Le complémentaire dont la taille L est fixée par la dimension de l'interface est considéré comme un milieu homogène avec un module d'Young moyen E obtenu par loi de mélange. La direction de recherche utilisée est ensuite simplement E/L . Pour des interfaces tridimensionnelles, la dimension est le diamètre de la surface. Ce choix de direction suffit largement pour les problèmes de type assemblage. Pour obtenir un calcul quasi exact au niveau des interfaces de bord, on pénalise les interfaces à déplacement imposé, ou uniquement le déplacement normal pour les interfaces de type déplacement normal imposé en multipliant la direction de recherche E/L par un facteur 1000 par exemple. A l'inverse, pour les interfaces à efforts imposés, on divise par 1000 le terme E/L . La convergence est alors nettement améliorée principalement lorsque le nombre de sous-structures est faible.

3.2 Mise en oeuvre - Exemples d'applications

3.2.1 Particularités du logiciel

Un code dédié aux approches monoéchelle et multiéchelle a été développé en C++ autour de la plateforme *Eléments Finis* développée par H. Leclerc ([Leclerc, 2005](#)). Plusieurs outils ont été réalisés en Matlab au préalable mais s'avéraient trop lents et ne permettaient pas de passer des problèmes de grande taille. Le passage en C++ s'est avéré indispensable pour les problèmes traités, principalement lorsque l'on s'intéresse à des exemples tridimensionnels. Le code permet de simuler des problèmes de statique, quasistatique en LATIN ou en incrémental, pour des matériaux isotropes, orthotropes ou endommageables (en cours). Les interfaces peuvent être de type parfaites, contact avec frottement, avec ou sans jeu. L'utilisateur fournit uniquement les maillages des sous-structures dans le cas de problème de type assemblage par exemple. Une génération automatique détaillée dans la troisième partie de ce manuscrit a été mise en oeuvre pour le traitement du modèle microscopique. Les interfaces sont détectées automatiquement aussi bien entre les sous-structures que dans les zones de bord définies par l'utilisateur. Chaque sous-structure est sur-discrétisée et les opérateurs relatifs au calcul multiéchelle sont construits selon les indications décrites précédemment.

Plusieurs exemples sont présentés pour mettre en avant l'avantage du multiéchelle par rapport au monoéchelle ainsi que les possibilités du logiciel.

3.2.2 Comparaison monoéchelle - multiéchelle

On s'intéresse ici à un stratifié $[0_2/90_2]_s$ contenant un trou soumis à une déformation longitudinale et à un champ de température homogène. Les matériaux sont orthotropes, une condition de symétrie permet de ne traiter qu'une partie du stratifié. On s'intéresse à la décomposition de domaine indiquée sur la figure 4.13 contenant 32 sous-structures.

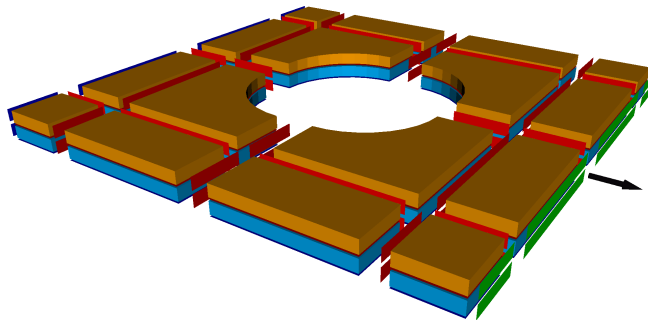


Figure 4.13: Découpage du domaine en sous-structures et interfaces pour une plaque trouée orthotrope

On effectue une simulation en monoéchelle et une en multiéchelle pour les mêmes éléments. On arrête l'algorithme pour une erreur de $8e^{-5}$. Le temps de calcul complet incluant la mise en donnée (calcul des opérateurs homogénéisés en multiéchelle) et les itérations

sont relevés. La figure 4.14 montre qu'il faut environ 5 fois plus d'itérations en mono-échelle qu'en multiéchelle pour obtenir le niveau d'erreur souhaité. Par contre, le temps de calcul n'est pas divisé par 5 car la détermination des opérateurs homogénéisés correspond à réaliser plusieurs itérations monoéchelles. Ainsi, non seulement une itération LATIN multiéchelle coûte deux fois plus chère qu'une itération monoéchelle mais il faut réaliser, avant tout calcul itératif, plusieurs résolutions pour déterminer les opérateurs homogénéisés. Par conséquent, pour des problèmes de statiques contenant des sous-structures différentes, même si le nombre d'itérations est plus faible pour obtenir le même niveau d'erreur en multiéchelle qu'en monoéchelle, le gain en temps de calcul n'est pas significatif. Si un grand nombre de simulations est effectué en changeant le chargement ou le comportement d'interface, ou en faisant du quasistatique, le coût des précalculs d'opérateurs homogénéisés est alors négligeable.

Pour diminuer le temps de résolution en multiéchelle, une amélioration consiste, à partir d'un certain niveau d'erreur, à ne résoudre que le problème micro 1 et se passer du problème macro (on revient à une stratégie monoéchelle). Le multiplicateur de Lagrange utilisé dans le problème macro tend vers 0 à convergence, ainsi en considérant la norme de la solution de ce problème, on introduit un critère permettant de ne résoudre que le problème micro 1. On constate sur les courbes de convergence que les taux obtenus sont confondus avec ceux du multiéchelle complet si le critère utilisé est satisfaisant. Sur l'exemple proposé, le gain en terme de temps de calcul n'est pas véritablement important. Cette méthode a un sens uniquement parce que les directions de recherche retenues ne sont pas optimales et peut s'avérer pénalisante si le critère de passage en monoéchelle est mal choisi.

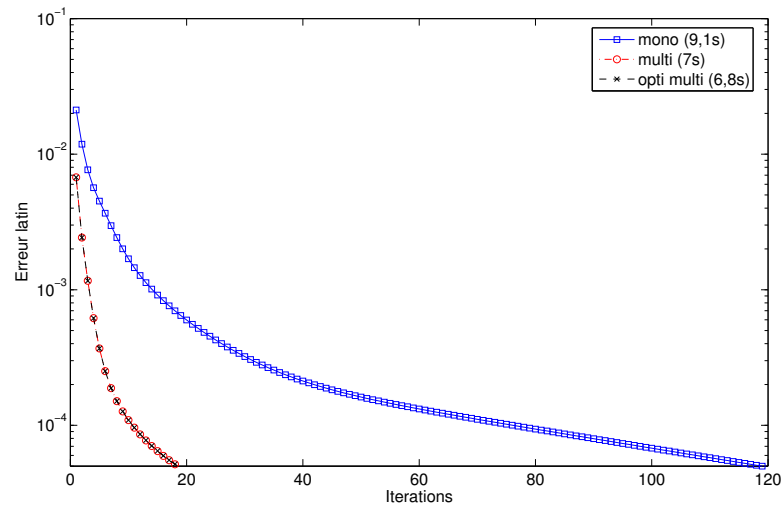


Figure 4.14: Erreur latin : comparaison multiéchelle et monoéchelle

Un exemple plus représentatif de la décomposition de domaine utilisée pour la mise en oeuvre du modèle micro est proposé sur une plaque orthotrope contenant des cellules cubiques de côté 0.3mm (Figure 4.15). Pour ce type de décomposition de domaine, les opérateurs ne sont déterminés que sur quelques sous-structures de référence étant donné

que les géométries sont identiques. Par conséquent, le temps de précalcul est négligeable devant les itérations. La figure 4.16 montre que le nombre d'itérations pour résoudre un problème de plaque orthotrope soumis à une déformation longitudinale donnée est environ 5 fois plus petit en multiéchelle qu'en monoéchelle. On constate alors que le gain en terme de temps de calcul est divisé par deux en multiéchelle. L'apport de l'optimisation (multiéchelle-monoéchelle) permet de gagner à nouveau un facteur non négligeable cette fois-ci (Figure 4.20).

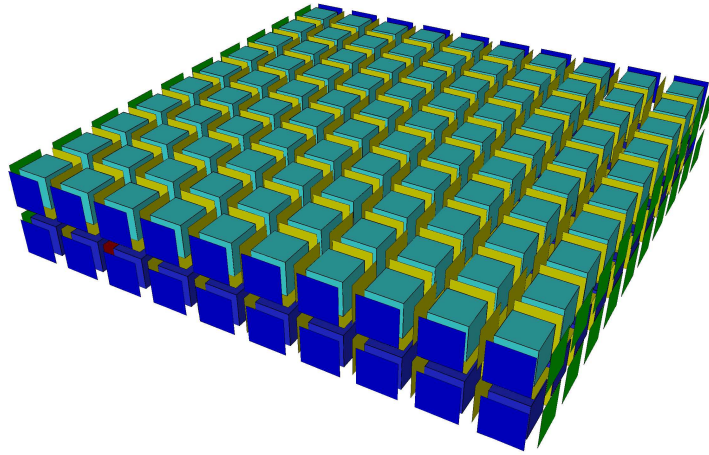
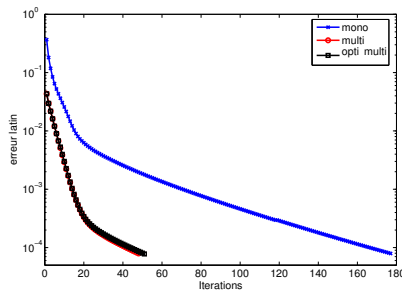
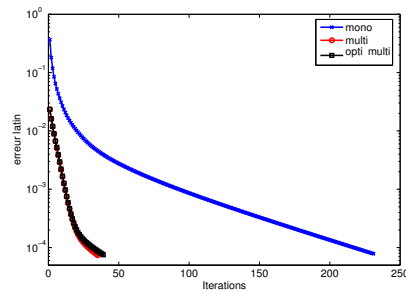


Figure 4.15: Découpage du domaine en sous-structures et interfaces pour une plaque orthotrope



(a) plaque de dimensions 3x3mm

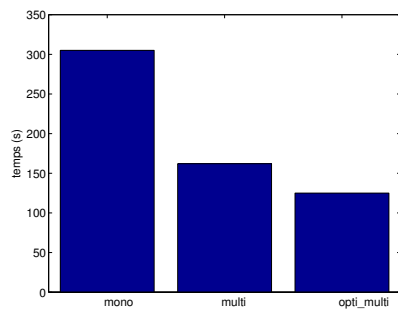


(b) plaque de dimensions 6x3mm

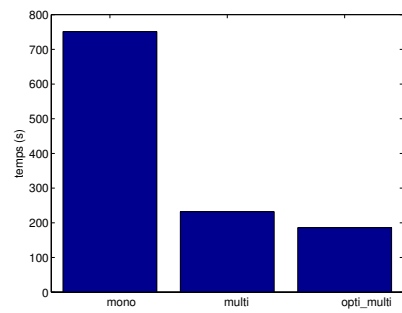
Figure 4.16: Courbes de convergence pour une plaque orthotrope de taille a) 3x3mm, b) 6x3mm

Les taux de convergence sont dégradés en monoéchelle lorsque l'on effectue une simulation sur une plaque de dimensions plus importantes pour des tailles de sous-structures identiques (Figures 4.18 et 4.19). On montre ainsi l'avantage du multiéchelle qui confère à la décomposition de domaine mixte son extensibilité numérique. Les gains en temps de calcul apportés par le multiéchelle augmentent avec le nombre de sous-structures.

Lorsque la structure contient des fissures les résultats vont dans le même sens (cf. Figure



(a) plaque de dimensions 3x3mm



(b) plaque de dimensions 6x3mm

Figure 4.17: Temps de calcul complet pour une plaque orthotrope de taille a) 3x3mm, b) 6x3mm

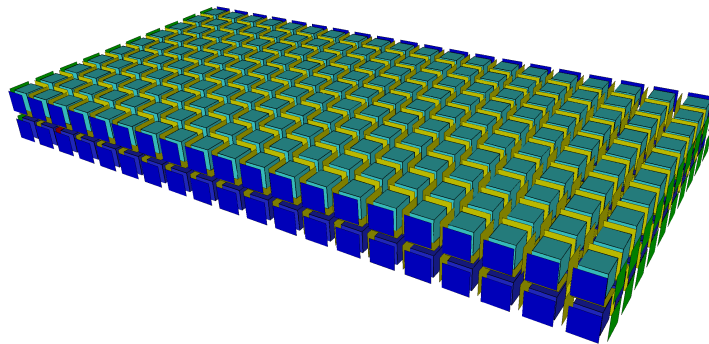


Figure 4.18: Découpage du domaine en sous-structures et interfaces pour une plaque orthotrope

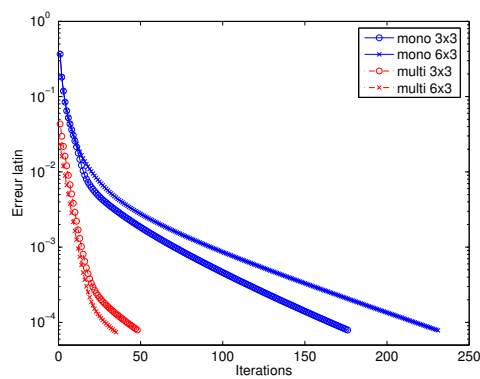


Figure 4.19: Comparaison des taux de convergence pour les deux plaques

4.20).

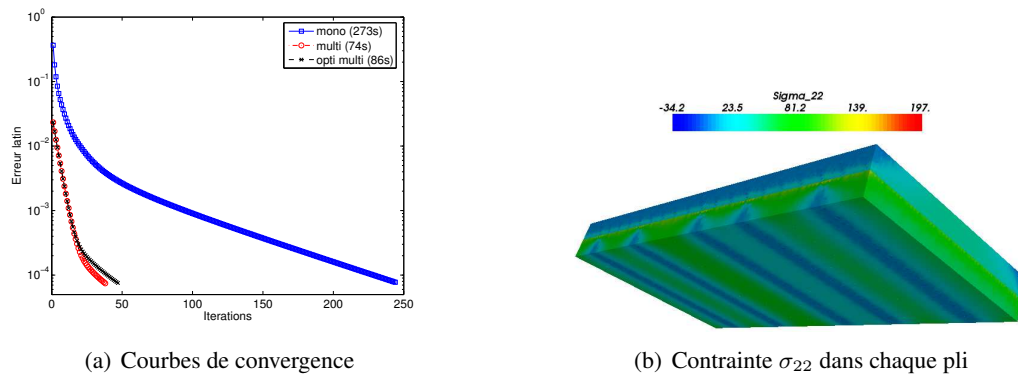


Figure 4.20: Etude d'une plaque $[0/90]_s$ multifissurée

3.2.3 Un premier exemple : Réseau de fibres

L'exemple présenté ici fait partie d'un travail complémentaire en cours sur le modèle microscopique proposé par G. Lubineau. A partir d'une analyse d'image d'une coupe de stratifié, un maillage d'un réseau de fibres dans la matrice est généré en supposant des chemins de fissuration potentiels le long des fibres et entre les fibres voisines. La procédure a été reprise pour utiliser un réseau régulier perturbé par une loi de probabilité uniforme. Le maillage est ensuite créé par le logiciel Gmsh.

Cette étude fait partie d'un projet plus ambitieux visant à relier l'identification des paramètres du mésomodèle (plasticité et endommagement diffus) présenté dans la partie I aux paramètres microscopiques à l'échelle de la fibre (coefficient de frottement principalement). Pour ce faire, on suppose que les chemins de dégradation possibles sont prédéfinis (décohésion fibres/matrice ou microfissuration dans la matrice). L'idée est ensuite de visualiser l'évolution des dégradations de manière discrète et d'observer le comportement d'un échantillon soumis à un chargement donné.

La figure 4.21 montre le découpage de la structure en sous-structures et interfaces. L'exemple bidimensionnel suivant (Figure 4.22) montre l'évolution de la dégradation dans un échantillon soumis à un chargement de traction. On définit un critère par interface et lorsque celui-ci est vérifié, on modifie le comportement des interfaces parfaites en interfaces de contact avec frottement.

Les résultats restent aujourd'hui à être exploités et recalés expérimentalement. Des simulations peuvent aussi être menées sur des échantillons tridimensionnels conduisant à des problèmes de très grande taille. La figure 4.23 montre un calcul de cisaillement statique sur un problème contenant 380 sous-structures soit 200000 degrés de liberté.

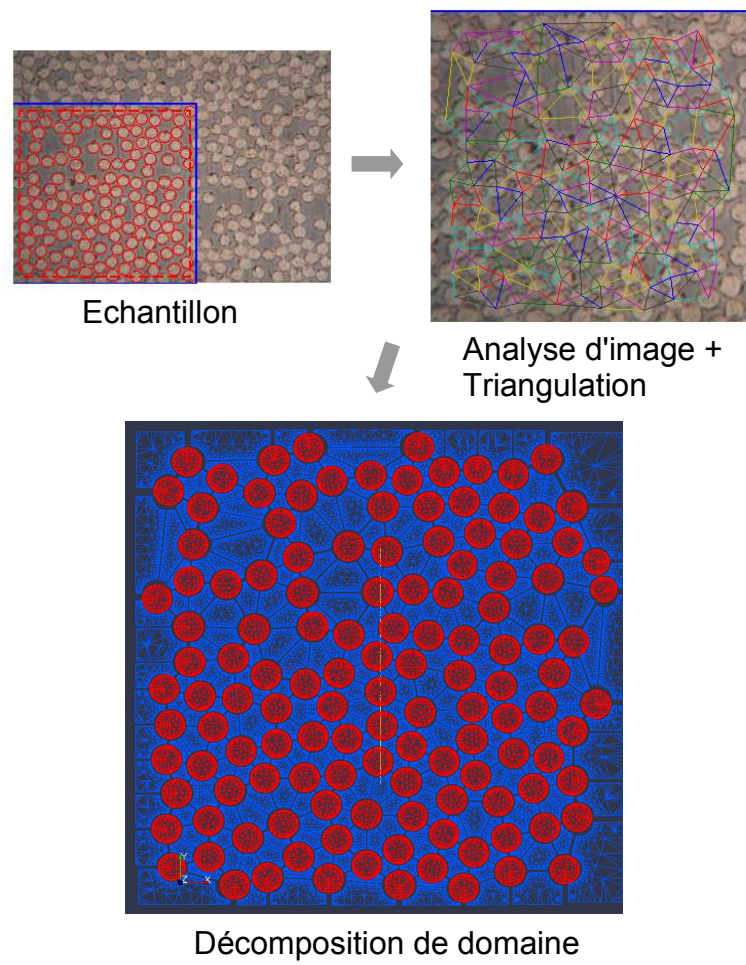


Figure 4.21: Decoupage en sous-structures et interfaces

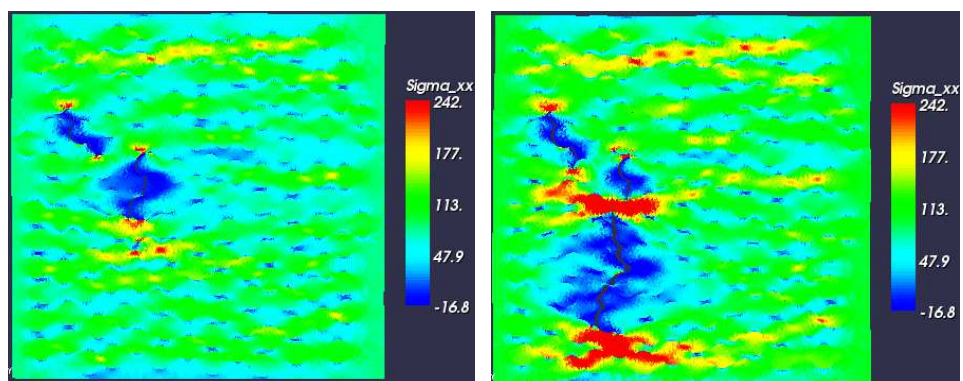


Figure 4.22: Simulation d'un réseau de fibres bidimensionnel sous chargement de traction

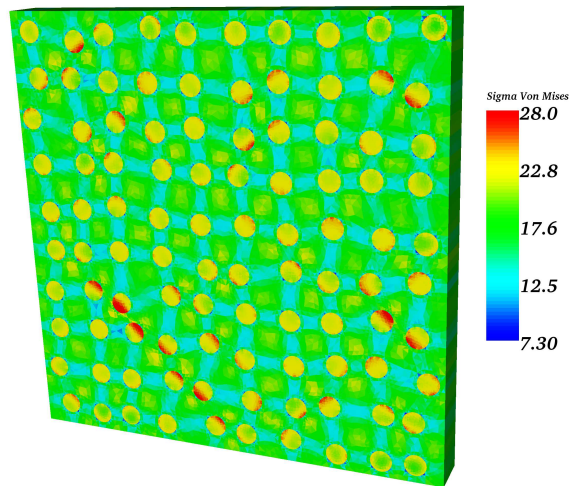


Figure 4.23: Simulation d'un réseau de fibres tridimensionnel sous chargement de cisaillement

3.2.4 Un second exemple : Assemblage boulonné

Le code permet de simuler en multiéchelle des géométries et comportements complexes rencontrés notamment dans les assemblages boulonnés. Des comportements d'interfaces spécifiques tels que des interfaces avec jeu (positif ou négatif) ou permettant de prendre en compte des précontraintes ont été implantés. La structure présentée sur la figure 4.24 contient 10 interfaces de type contact avec frottement avec ou sans jeu, 3 interfaces avec précontrainte et est soumise à un chargement sinusoïdal sur l'extrémité droite et des conditions de symétries sur la partie inférieure, la partie gauche et au niveau des boulons.

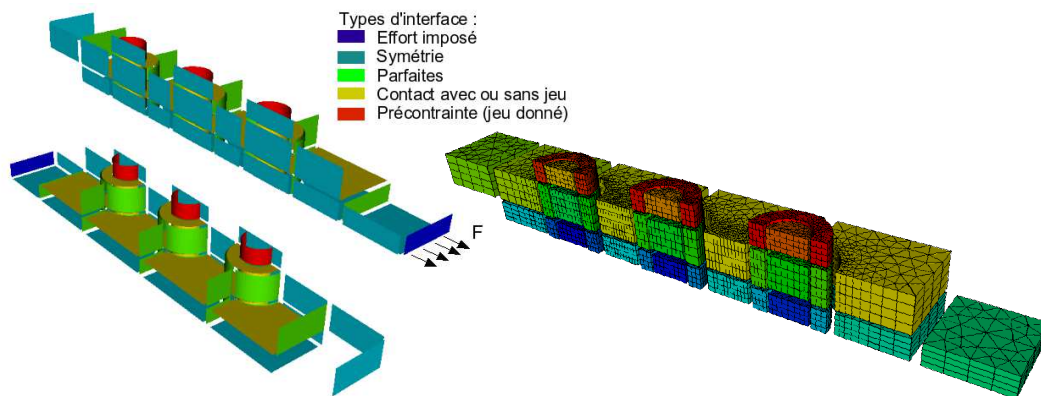


Figure 4.24: Décomposition du domaine en sous-structures et interfaces

Les calculs sont menés en quasistatique et implique l'écriture des directions de re-

cherche en vitesse et non plus en déplacement. Un schéma d'Euler implicite est alors utilisé pour résoudre les problèmes par sous-structures. Le problème macro reste inchangé. La résolution du problème est effectuée de manière incrémentale car la résolution LATIN sans point P3 n'est pas adaptée en quasistatique.

La figure 4.25a) montre l'état de contrainte σ_{xx} dans la structure pour un pas de temps donné. Des calculs annexes permettent notamment d'observer la dissipation cumulée dans les liaisons en contact (Figure 4.25b)).

Remarque : Des améliorations sont actuellement en cours de programmation pour réellement paralléliser le programme développé en C++ en utilisant la librairie MPI (thèse A. Caignot). Les résultats sont déjà très satisfaisants et permettent d'espérer un gain proche du nombre de processeurs utilisés et des calculs d'assemblages à plusieurs millions de degrés de liberté.

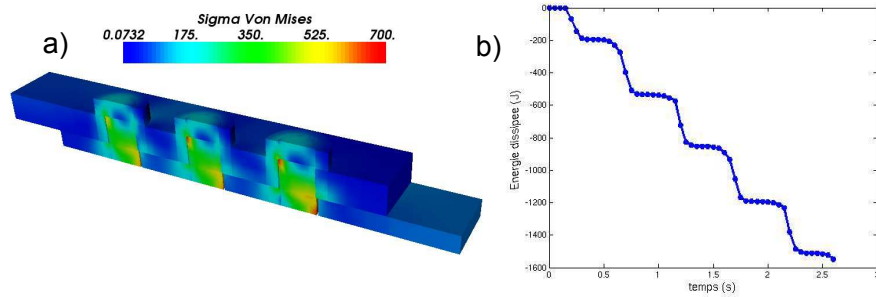


Figure 4.25: a) Contrainte σ_{xx} pour un pas de temps donné, b) Evolution de la dissipation dans les interfaces de type contact avec frottement

Troisième partie

Stratégie de calcul pour la mise en oeuvre du modèle microscopique

Dans cette dernière partie, la stratégie multiéchelle est utilisée au sein du modèle microscopique. La mise en oeuvre de ce couplage est délicate et nécessite plusieurs adaptations principalement en termes de géométrie.

- *Le chapitre 5 décrit la mise en oeuvre du modèle microscopique au sein de la stratégie multiéchelle. Des améliorations de la stratégie sont nécessaires pour le traitement de problèmes contenant un très grand nombre de sous-structures conduisant à plusieurs centaines de millions de degrés de liberté. L'étude du problème d'interface est menée à travers l'introduction d'un problème dit super-macro. Une diminution des coûts de calcul provenant des problèmes sur les sous-structures est également proposée. Une attention particulière est enfin portée sur les méthodes de détermination du critère de rupture.*
- *Le dernier chapitre 6 présente plusieurs résultats de dégradation sur divers stratifiés afin de démontrer les possibilités du modèle microscopique et d'étudier l'influence de la géométrie et de la stratification.*

Spécificités liées à l'introduction du modèle microscopique

Les deux parties précédentes ont permis de préciser à la fois le modèle microscopique employé pour l'étude des dégradations dans les stratifiés et la stratégie de calcul que l'on souhaite utiliser pour simuler ce modèle. Cette partie permet de montrer les simplifications nécessaires pour pouvoir coupler la stratégie de calcul et le modèle microscopique. Un choix est fait quant à la mise en donnée du problème en terme de géométrie.

Plusieurs points sont abordés dans ce chapitre et ont fait l'objet de différentes présentations (Violeau *et al.*, 2007, 2006; Lubineau *et al.*, 2006; Violeau *et al.*, 2005; A. Delaplace, 2005; Ladevèze *et al.*, 2005). Dans un premier temps, la mise en oeuvre du modèle micro dans le cadre de la stratégie multiéchelle est présentée en détail. Cette partie est le point difficile de l'approche, d'un point de vue algorithmique. La stratégie de résolution est ensuite présentée dans le cadre quasistatique. Elle nécessite une adaptation de la stratégie multiéchelle en introduisant notamment une troisième échelle. Une attention particulière est ensuite portée sur l'évaluation des critères de rupture par interface et des solutions limitant le nombre et le coût des calculs sont proposées.

Sommaire

1	Mise en données pour le modèle microscopique	98
1.1	Problématique	98
1.2	Description des interfaces et des sous-structures	98
1.3	Données nécessaires au modèle microscopique	103
2	Stratégie de résolution	104
2.1	Algorithmes de résolution	104
2.2	Adaptation de la stratégie multiéchelle	107
3	Détermination numérique des critères de rupture des surfaces	115
3.1	Calcul du taux de restitution	116
3.2	Bilan	122

1 Mise en données pour le modèle microscopique

1.1 Problématique

La partie discrète du modèle microscopique nécessite l'introduction de surfaces de rupture dont la taille et la forme sont définies, il ne précise pas la manière dont les surfaces sont gérées. Dans le cadre de la thèse, une simplification a été proposée afin de pouvoir appréhender les potentialités du modèle microscopique. Ainsi, pour éviter d'avoir à introduire les surfaces au cours du calcul, on choisit de définir *a priori* les surfaces de rupture de façon à proposer des chemins de dégradation potentiels. Afin d'obtenir un large choix de chemins possibles, un très grand nombre de surfaces doit être considéré. La taille des surfaces, fixée par le modèle micro détaillé dans le chapitre 2, entraîne, pour des structures de faibles dimensions, l'introduction de plusieurs millions de surfaces. Cette méthode ne peut donc être utilisée sur une structure complète mais uniquement dans des zones particulières.

Prenons par exemple le cas d'une plaque de dimensions 10x5cm contenant un trou de diamètre 1cm constituée de n plis d'épaisseur identique égale à 0.15mm. Les surfaces minimales pour la fissuration transverse sont représentées par des carrés de côté égal à l'épaisseur du pli soit 0.15mm. L'introduction de telles dimensions nécessite pour le cas de la plaque trouée près de 165000 surfaces par pli pour la fissuration transverse et environ autant de surfaces entre les plis pour quantifier le délaminage local, soit plus d'un million de surfaces pour un stratifié contenant 4 plis. On constate donc que l'introduction de surfaces de rupture *a priori* possède certes l'avantage de ne pas avoir à introduire de surfaces en cours de calcul mais nécessite cependant une technique de calcul permettant de prendre en compte un nombre très élevé d'inconnues.

La stratégie de calcul multiéchelle introduite dans le chapitre 4 permet de simuler de manière aisée différents comportements non-linéaires d'interfaces ou de sous-structures (endommagement pour les sous-structures, contact avec frottement pour les interfaces...). Cette stratégie couplée aux améliorations proposées dans cette partie et précisées en annexe B permet d'envisager des calculs non-linéaires mettant en jeu plusieurs millions de surfaces de rupture potentielles. Chaque sous-structure étant maillée par éléments finis, de tels calculs nécessitent plusieurs milliards de degrés de liberté. L'objet du paragraphe suivant est de définir une décomposition de domaine adaptée au problème traité, c'est à dire une structure contenant un très grand nombre de surfaces et de cellules pouvant avoir un comportement non-linéaire.

1.2 Description des interfaces et des sous-structures

1.2.1 Pavages incompatibles

Dans le cadre du modèle microscopique hybride, les cellules (dont la forme cubique est choisie pour modéliser les ruptures de fibres) sont constituées d'un matériau orthotrope endommageable. Entre ces cellules, sont définies des surfaces quantifiant les dégradations discrètes de fissuration transverse, délaminage local et qui, une fois rompues, sont le siège de contact avec frottement. Les surfaces sont introduites *a priori* de manière à limiter les difficultés. Pour pouvoir utiliser la stratégie de calcul multiéchelle, il est nécessaire de définir la décomposition du domaine en sous-structures et en interfaces. La difficulté consiste

donc à générer un pavage du domaine de manière à pouvoir inclure les surfaces de rupture parmi les interfaces et les cellules parmi les sous-structures.

Le modèle impose de choisir des cellules cubiques par couche, de côté égal à l'épaisseur de la couche. Entre ces cellules, les surfaces carrées orientées selon la direction des fibres quantifient la fissuration transverse. Pour le délaminage local, il est nécessaire d'introduire des surfaces en forme de parallélogramme dont les côtés sont orientés selon les directions des fibres des plis adjacents. La dimension de ces surfaces peut être inférieure à l'épaisseur d'un pli. Il n'est pas possible de vérifier ces différentes contraintes tout en assurant une compatibilité des sous-structures et interfaces (cf. Figure 5.1), excepté pour les stratifiés croisés $[0/90]$ ou $[\pm 45]$.

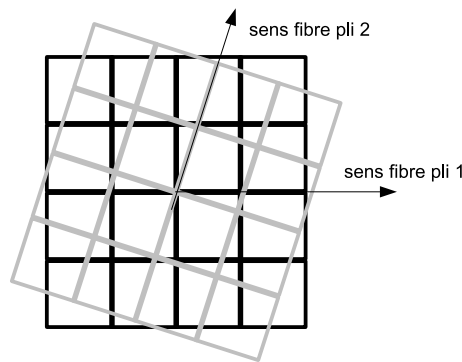


Figure 5.1: Incompatibilité des sous-structures (vue de dessus) : Pour deux plis de même épaisseur, la compatibilité entre les géométries est impossible pour deux orientations quelconques

En effet, cette compatibilité est recherchée pour deux raisons essentielles. La première raison est liée à la stratégie multiéchelle et à la volonté de limiter les données stockées. Pour chaque sous-structure, il est nécessaire de déterminer plusieurs opérateurs : la raideur (assemblée avec les directions de recherche) et l'opérateur homogénéisé dépendant des interfaces définies autour d'une sous-structure. En réalisant des pavages incompatibles entre les plis, le voisinage d'une sous-structure est toujours différent et les opérateurs doivent être construits pour chaque sous-structure. Cette construction est coûteuse en terme de stockage et temps de précalcul, principalement lorsque le nombre de sous-structures est très élevé. On souhaite alors générer une décomposition de domaines contenant peu de sous-structures dont la forme diffère et pour lesquelles la forme des interfaces voisines est similaire, de manière à n'avoir à calculer les opérateurs que sur quelques sous-structures de base.

La seconde raison vient du fait que les maillages incompatibles ne sont pas gérés pour le moment dans la stratégie. Une première approche a été proposée dans les travaux de (Guidault *et al.*, 2004), mais cette technique ne convient pas ici. En effet, dans l'approche proposée, un raccord sur les parties macro seulement est réalisé loin de la zone d'intérêt à l'étape locale de la stratégie. Les parties micro étant à résultante et moment nuls et ayant ainsi un caractère localisé, la zone d'intérêt est bien calculée. Cependant dans notre situation, ce sont principalement les zones incompatibles (interfaces entre plis) qui doivent être calcu-

lées précisément. Une alternative serait d'utiliser des méthodes de projection de maillage de type Mortar dont les performances dans le cadre de la LATIN ont déjà été vérifiées pour des problèmes de couplages de formulation (Néron *et al.*, 2003) mais cette approche n'a pas été mise en oeuvre dans le cadre de la stratégie multiéchelle.

L'incompatibilité entre les sous-structures et les interfaces pose deux problèmes précisés ci-dessous.

- A l'étape locale de la stratégie multiéchelle, les problèmes à résoudre sont locaux et font appel aux quantités des deux côtés d'une interface. La géométrie de cette interface et les relations entre les quantités de part et d'autre de l'interface doivent pouvoir être définies point par point. Actuellement, les maillages étant compatibles, ces relations sont réalisées élément par élément.
- Lors de l'étape linéaire, les problèmes micro sont résolus indépendamment par sous-structure, il n'est donc pas nécessaire de connaître les maillages ou géométries des autres sous-structures. Par contre, le problème macro porte sur les quantités macro des interfaces dont la géométrie doit être spécifiée. Une incompatibilité de géométrie entre les interfaces et les sous-structures nécessite une adaptation du problème macro.

On constate donc que deux difficultés apparaissent : tout d'abord, à l'étape locale où l'on doit gérer l'incompatibilité de maillage, puis pour le problème macro de l'étape linéaire où l'on doit considérer des incompatibilités géométriques d'interfaces. Ces différents points n'ont pas été abordés durant cette thèse et feront très certainement l'objet d'un travail futur.

1.2.2 Génération d'une décomposition de domaine compatible

Toutes ces difficultés conduisent à proposer, comme première approche, une décomposition de domaine compatible (ainsi des maillages de sous-structures compatibles) pour toute la structure en relâchant certaines contraintes. La procédure développée permet de ne simuler que des stratifiés équilibrés contenant trois inclinaisons différentes. On pourra ainsi simuler les stratifiés $[\pm\alpha / \pm\theta]$ ou $[0/90 / \pm\theta]$ où α et θ sont différents de 0° et 90° , ce qui représente la grande majorité des stratifiés utilisés dans l'industrie. Le stratifié peut par contre contenir autant de plis que nécessaire, définis selon ces inclinaisons. Aucune limitation géométrique n'est donc imposée pour un stratifié $[0/90 / \pm 45/90/0]_s$ par exemple. Dans la suite, on confondra sous-structures et cellules compte-tenu de la simplification retenue.

Dans un premier temps, on construit une grille de cellules orientées à 0° ou 90° ou $\pm\alpha$ si aucun pli à 0° ou 90° n'est défini dans le stratifié. La géométrie des cellules est adaptée au contour afin de décrire celui-ci de manière quasi-exacte. La construction de la nappe de cellules est détaillée dans l'annexe A. Les dimensions des cellules Δx et Δy sont choisies comme étant le minimum des épaisseurs des différents plis du stratifié. En notant h_i les épaisseurs des n couches du stratifié

$$\Delta x = \Delta y = \min_{i \in [0..n]} (h_i) = h_{min}$$

On adapte ensuite les dimensions ainsi définies aux orientations du stratifié de manière à ce que les diagonales de ces cellules soient inclinées d'un angle $\pm\theta$.

On constate que cette procédure ne permet pas de simuler les ruptures de fibres pour des plis inclinés à $\theta \neq 45$ car les cellules ne sont alors pas cubiques. En revanche, le pavage des stratifiés $[0/90/\pm 45]$ répond aux contraintes imposées par le modèle microscopique.

Les dimensions introduites sont plus faibles pour les couches d'épaisseur supérieure à h_{min} (épaisseur minimale des couches d'un stratifié). Cependant, chaque couche étant un assemblage de plis élémentaires, il suffit de considérer plusieurs interfaces successives pour définir les surfaces de rupture (cf. Figure 5.2).

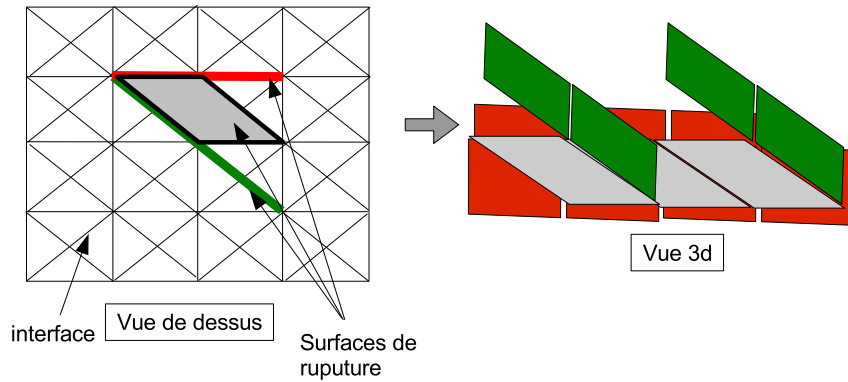


Figure 5.2: Définition des surfaces de rupture parmi les interfaces obtenues lors de la décomposition de domaine.

Cette méthode de génération de cellules a l'avantage de fournir peu de cellules dont la forme et le voisinage diffèrent. La construction des opérateurs est donc très rapide et ne demande que peu de stockage. Cependant le nombre de cellules et interfaces ainsi définies est plus important que celui donné par des domaines incompatibles et les empilements étudiés sont limités. La figure 5.3 montre les surfaces de fissuration transverse dans une structure stratifiée $[0/30/90]_s$.

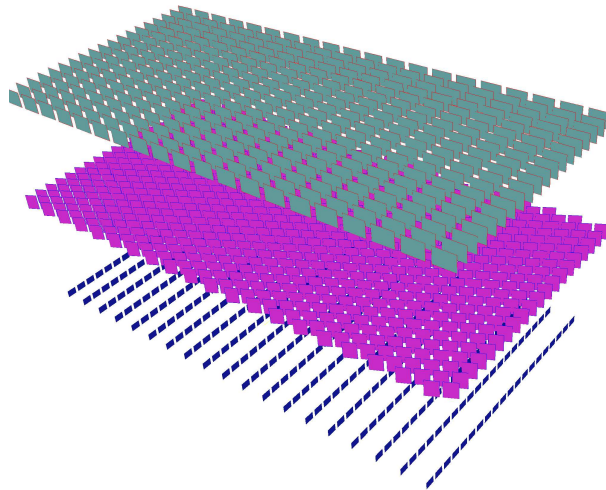


Figure 5.3: Surfaces de fissuration transverse dans un stratifié $[0/30/90]_s$

Cette technique impose donc un très grand nombre de cellules et d'interfaces. L'utilisation des améliorations qui seront présentées dans la suite devient indispensable. Un regroupement des cellules et interfaces en cellules et interfaces dites "super-macro" est réalisé dès la construction du pavage grâce à la méthode de génération de cellules employées (Quadtree) (Figure 5.4). D'une façon analogue, les cellules super-macro des plis orientés à $\pm\theta$ sont obtenues par le découpage selon les diagonales des cellules super-macro nouvellement créées. Le nombre d'opérateurs super-macro à déterminer est alors lui aussi restreint et le coût de stockage limité.

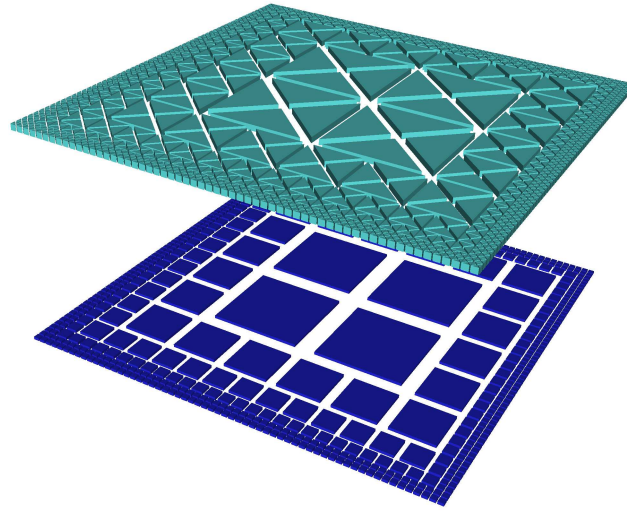


Figure 5.4: Regroupement des cellules en cellules super-macro pour un pli à 0° et 45°

Pour mettre en oeuvre la stratégie multiéchelle, il est nécessaire de déterminer l'opérateur de raideur élément fini, puis construire l'opérateur homogénéisé en résolvant une série de problèmes par sous-structure. Dans la stratégie proposée ici, ces opérateurs ne sont déterminés que pour certaines sous-structures de base représentatives des sous-structures de chaque pli, ayant géométriquement la même forme ainsi que le même voisinage d'interface. Pour les autres sous-structures, les opérateurs ne sont pas calculés, ce sont des pointeurs vers les opérateurs déterminés sur les sous-structures de base. La Figure 5.5 montre le nombre de sous-structures de base et les sous-structures pointées pour chaque entité. On constate que pour un stratifié $[90/30]_s$ contenant 18000 sous-structures, seules 17 sous-structures de base sont nécessaires.

Les mêmes simplifications sont effectuées sur les interfaces ainsi que sur les cellules et interfaces super-macro (création des opérateurs de surdiscrétisation, opérateurs macro... uniquement sur les interfaces de base). La programmation est plus compliquée mais permet d'atteindre des performances remarquables. La création des différents opérateurs est très rapide et le gain en terme de stockage est énorme. Sur une machine mono-processeur contenant 4Go de mémoire, il est possible de mener un seul calcul multiéchelle correspondant à un problème direct de près de 10 millions de degrés de liberté en 10 minutes environ (sans optimisation de code par ailleurs). Excepté ces particularités sur la création des sous-structures et interfaces, l'algorithme de résolution multiéchelle détaillé dans la partie 4 est utilisé tel quel.

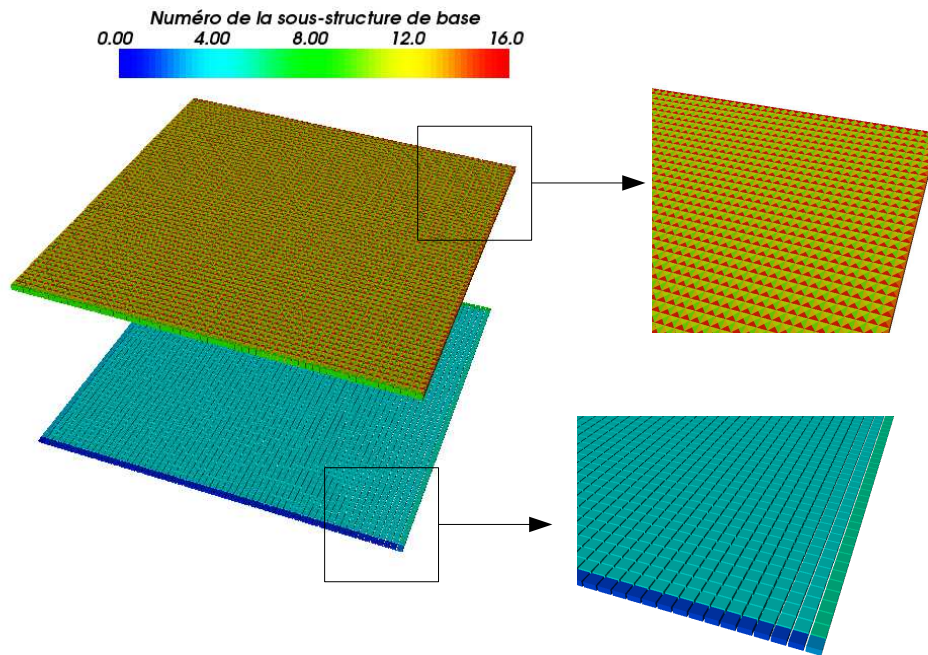


Figure 5.5: Numéros des sous-structures de base pointées sur un stratifié $[90/30]_s$

1.3 Données nécessaires au modèle microscopique

Outre la définition des géométries, plusieurs quantités sont nécessaires pour mettre en oeuvre le modèle microscopique.

■ Différenciation Initiation/Propagation.

Une différence est réalisée entre l'initiation et la propagation d'une fissure transverse lors de la détermination du critère de rupture. Chaque surface doit suivre le critère de rupture d'initiation si aucune surface adjacente n'est déjà rompue et suivre le critère de propagation dans le cas contraire. Il est donc nécessaire de repérer pour chaque surface de rupture potentielle d'un pli, les surfaces adjacentes du même pli, de façon à pouvoir forcer la vérification de l'un ou de l'autre des critères selon le cas. Une procédure rapide, basée sur la recherche des interfaces adjacentes dans le voisinage direct des interfaces, permet de sélectionner les surfaces voisines et contenues dans le même pli.

■ Taux de restitution critique.

Une valeur aléatoire du taux de restitution critique selon les différents modes est assignée aux surfaces de rupture potentielle en suivant une loi aléatoire gaussienne de moyenne et écart type donnés. Une technique similaire à celle indiquée dans le chapitre 2 a aussi été testée en 3D et consiste à repérer les surfaces pour lesquelles le critère est compris dans une bande de $1 \pm \Delta$ (Figure 5.6). Parmi ces interfaces, on rompt une surface choisie selon un tirage uniforme. Les deux approches donnent des résultats similaires comme indiqué lors de la description du modèle microscopique. Seule l'approche par attribution de valeurs aléatoires du taux de restitution critique est utilisée dans la suite.

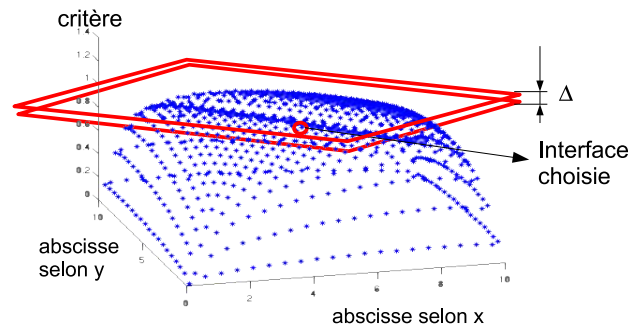


Figure 5.6: Bande permettant de sélectionner les surfaces vérifiant le critère à $\pm\Delta$

2 Stratégie de résolution

Les quantités liées aux sous-structures, interfaces et surfaces de rupture potentielles étant déterminées, l'algorithme de résolution est mis en place. Un chargement quasistatique incrémental est appliqué à la structure. Deux méthodes de résolution sont envisagées dans la suite. La résolution incrémentale retenue nécessite une adaptation compte tenu du nombre de sous-structures et interfaces mises en jeu.

2.1 Algorithmes de résolution

La première méthode consiste à considérer la **dégradation d'une surface comme pas de calcul** d'une résolution incrémentale. Un nouveau calcul complet est mené à chaque fois qu'une surface est rompue, ce qui confère une très grande robustesse au calcul. Il est donc possible de sauver les informations relatives aux dégradations pour tous les calculs et ainsi pouvoir relancer une simulation à partir d'une configuration donnée. L'inconvénient de cette stratégie est qu'il est nécessaire de réaliser un très grand nombre de calculs (autant que de surfaces de rupture potentielles), calculs inutiles lorsqu'une fissure instable se propage par exemple.

L'algorithme de résolution est le suivant :

- Pour un incrément de chargement donné, on effectue un calcul multiéchelle non-linéaire complet pour lequel la structure est le lieu d'un état de dégradation donné (surfaces rompues et surfaces saines spécifiées).
- On détermine le taux de restitution puis le critère pour toutes les surfaces de rupture potentielles selon le type de surface considéré (surface de fissuration transverse en initiation ou propagation, surface de délaminage local).
- Si plusieurs surfaces possèdent un critère supérieur à 1, on sélectionne la surface pour laquelle le critère est le plus élevé. Le comportement de la surface sélectionnée (ou plutôt des interfaces constituant la surface sélectionnée) est modifié. Ces interfaces passent d'un état parfait à un état de type contact avec frottement. Un nouveau calcul complet est réalisé sans modifier le chargement.

- Si aucune interface ne vérifie le critère, on augmente le chargement et on recommence l'algorithme.

L'algorithme suivant résume la stratégie adoptée :

Algorithme 3 Calcul du modèle microscopique en quasi-statique incrémentale

Initialisation : Création de la décomposition de domaine et des opérateurs, allocations des quantités de calcul

Incréments de chargement pt :

boucle pour $pt = 0$ à pt_{max} **faire**

 Modification du chargement

Tant que : Une surface vérifie le critère **faire**

1. Calculs
 - Calcul multiéchelle complet
 - Calcul du taux de restitution par surface
 - Détermination du critère
2. **Si :** Une surface vérifie le critère **Alors**
 Modification du comportement de l'interface

FinSi

Fin Tant que

fin boucle

Remarque : Pour des pas de chargements différents (mais relativement proches) et en prenant une variabilité identique des taux de restitution critique, les profils de dégradation sont identiques, ce qui montre la robustesse de cet algorithme. En effet, une fois la distribution appliquée, la surface possédant le critère le plus élevé (mais supérieur à 1) sera dégradée en premier.

La seconde méthode propose de déterminer pour chaque incrément d'effort l'état de dégradation obtenu en utilisant un algorithme de type LATIN. L'avantage de cette technique est de construire la solution au fur et à mesure sans passer par toutes les configurations de dégradations intermédiaires. On n'utilise pas toutes les potentialités de la stratégie LATIN qui repose sur une décomposition de la solution en une somme de produits de fonctions d'espace par des fonctions temporelles. Par conséquent, il est nécessaire de stocker la solution sur tout l'espace pour tous les piquets de temps définis, ce qui nécessite un coût de stockage très important.

L'idée suivie est de considérer un nouveau type de comportement d'interface dans la stratégie multiéchelle : les interfaces potentiellement dégradables. On réalise le calcul multiéchelle de manière itérative. Pour chaque itération on détermine la solution sur tout l'espace-temps en effectuant une étape linéaire et une étape locale.

L'étape linéaire est la même que celle présentée dans le chapitre 4 mais réalisée pour chaque piquet de temps. Les directions de recherche sont exprimées en vitesse pour pouvoir effectuer un calcul quasi-statique. Seule l'étape locale est modifiée. On la réalise pour tous

les piquets de temps. On détermine tout d'abord le taux de restitution pour chaque piquet de temps à partir des quantités obtenues à l'étape linéaire. On calcule ensuite le critère d'initiation ou de propagation pour les différentes surfaces. On modifie le comportement de toutes les interfaces pour lesquelles le critère est supérieur à 1. Elles deviennent des interfaces de type contact pour tous les piquets de temps suivants. Le comportement des différentes interfaces est stocké pour les différents piquets de temps. A l'itération suivante, on recommence les différentes étapes à partir de l'état des interfaces obtenu pour chaque piquet de temps à l'itération précédente.

L'algorithme 4 résume la procédure LATIN proposée.

Algorithme 4 Calcul du modèle microscopique en quasi-statique LATIN

Initialisation : Création de la décomposition de domaine et des opérateurs, allocations des quantités de calcul

Boucle LATIN :

boucle pour $n = 0$ à n_{max} **faire**

 Etape linéaire multiéchelle pour tous les pas de temps

 Etape locale pour tous les pas de temps

 – Calcul du taux de restitution par surface à partir des valeurs de l'étape linéaire

 – Détermination du critère

 – **Si :** Une surface vérifie le critère **Alors**

 Modification du comportement de l'interface pour tous les pas de temps suivants

 Résolution du comportement de contact avec frottement

Sinon :

 Résolution du comportement parfait

FinSi

fin boucle

L'algorithme LATIN a été codé dans le cadre de problèmes quasi-statiques de type assemblage (cf chapitre 4 pour les exemples) mais n'a pas été mis en oeuvre pour le problème de calcul du modèle microscopique. En effet, les comparaisons effectuées en terme de convergence et temps de calcul n'ont pas été concluantes. Il s'avère que la stratégie LATIN utilisée ici n'est pas correctement définie car sans l'utilisation du point P3 de la stratégie (décomposition radiale de la solution en fonctions de l'espace et du temps), l'inversion des boucles temporelles et itératives n'apporte aucun gain voire dégrade la convergence. On peut expliquer cette mauvaise convergence car il est nécessaire de bien calculer les premiers pas de temps pour que les calculs effectués pour les pas de suivants soient pertinents.

La stratégie incrémentale est donc préférée dans cette première étude mais entraîne par conséquent un temps de calcul théoriquement beaucoup plus important. Cette stratégie est améliorée en utilisant la solution précédente à chaque pas de temps ou nouveau calcul multiéchelle. Le nombre d'itérations alors nécessaire pour atteindre un critère d'erreur de $1e^{-4}$ est de l'ordre de 10 à 20 itérations même en présence de contacts.

Remarque : On pourrait améliorer cette stratégie et limiter le nombre de calculs en faisant rompre plusieurs surfaces pour un même calcul. Pour cela, après estimation du critère pour chaque surface, on déterminerait les surfaces à rompre et parmi ces surfaces, un certain nombre d'interfaces seraient choisies selon un tirage aléatoire uniforme. Il faudrait cepen-

dant prendre en compte une diminution du critère pour les surfaces voisines (provenant du relâchement des contraintes) de manière à ne pas rompre deux surfaces voisines.

2.2 Adaptation de la stratégie multiéchelle

La stratégie multiéchelle permet de traiter des problèmes de type assemblage où les sous-structures sont différentes et les interfaces de forme compliquée. Elle a cependant été introduite à l'origine pour traiter des problèmes d'homogénéisation où plusieurs sous-structures identiques se répètent dans la structure. Cette caractéristique est primordiale pour le couplage de cette stratégie et du modèle microscopique. En effet, les sous-structures introduites sont très petites et similaires en terme de géométries et comportements. Une difficulté apparaît alors : si le nombre de cellules ou d'interfaces est important, des améliorations de la stratégie sont nécessaires car les calculs multiéchelles deviennent trop coûteux voire impossibles.

2.2.1 Troisième échelle - Echelle super-macro

La première amélioration consiste à diminuer la taille du problème macro lorsque le nombre d'interfaces est important. En effet, le problème macro possède un nombre d'inconnues égal au nombre d'interfaces multiplié par le nombre de fonctions de base macro par interface. Dans l'hypothèse où les problèmes traités nécessitent plusieurs millions d'interfaces, le problème macro est difficilement assemblable et factorisable. Pour ne pas alourdir le présent document, l'étude détaillée du problème macro est réalisée en annexe B. Seuls les points clés sont rappelés ici.

Le problème macro est un problème linéaire (cf. annexe B1 pour le rappel des formulations en multiplicateur ou en effort) et peut être résolu par une méthode itérative de type gradient conjugué si la factorisation n'est pas possible (cf. annexe B1.3). Une solution alternative consiste à déterminer une approximation du problème macro en introduisant une troisième échelle dite "super-macro". Les interfaces sont tout d'abord regroupées en cellules super-macro (cf. annexe A pour la construction de ces cellules super-macro). Entre ces cellules super-macro sont définies des interfaces super-macro. On définit ensuite une approximation du problème macro en faisant intervenir des inconnues sur les interfaces super-macro. Ces inconnues peuvent être des déplacements (multiplicateurs) ou des efforts. La difficulté principale est de relier les inconnues sur les interfaces super-macro aux multiplicateurs ou efforts macro sur les interfaces incluses dans les cellules super-macro. Cette difficulté relevée, on aboutit à la définition d'un opérateur d'approximation entre les inconnues super-macro et les inconnues macro. L'introduction de cet opérateur dans la formulation du problème macro permet de définir le problème super-macro (cf. annexe B2.1 pour les formulations en multiplicateur ou effort du problème super-macro). La résolution du problème super-macro se fait ensuite de manière directe. Sa taille est très largement diminuée si les cellules super-macro contiennent de nombreuses interfaces.

Le point clé de cette approximation super-macro repose dans le choix des opérateurs d'approximation. Dans des précédentes thèses, une approximation de type milieu micropolaire a été proposée sur le multiplicateur. A partir d'une cinématique des interfaces définie explicitement, l'opérateur est déterminé.

On propose ici une seconde approche pour la détermination d'un opérateur d'approximation sur les déplacements, similaire à la technique de construction des opérateurs homogénéisés macro (on note cette approche "quasi-exacte"). Ainsi, on résout avant tout calcul le problème macro sur une cellule super-macro soumise successivement à des déplacements super-macro sur son bord. Le détail de la construction et des équations est donné en annexe B2.2.

Une approche en effort a également été étudiée. Pour cette dernière approche, détaillée en annexe B2.2.2, les efforts sur chaque interface sont déterminés de manière récursive à partir des efforts sur les interfaces super-macro.

Les différentes méthodes sont comparées à la résolution exacte du problème macro sur des exemples simples bidimensionnels.

On s'intéresse dans un premier temps à un problème de flexion pure pour lequel les cellules super-macro sont indiquées sur la figure 5.7(a).

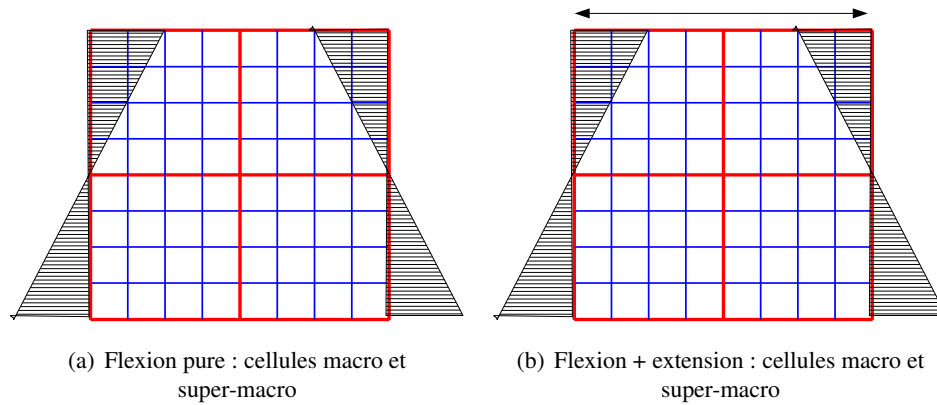


Figure 5.7: Définition des cellules et du chargement

La courbe 5.8 montre la convergence pour les différentes approches. On constate que l'approche en effort est très satisfaisante quelle que soit la forme des cellules. L'approche en déplacement avec l'opérateur quasi-exact est la plus performante.

Dans le cas d'un problème de flexion couplée à une extension sur un des côtés (figure 5.7(b)), l'approche en effort stagne très vite si les cellules super-macro ne sont pas assez fines près des singularités (cf. Figure 5.9). On constate de plus que les contraintes sont mal calculées par cette approche (Figure 5.10). En effet, les efforts ne correspondent pas aux efforts exacts compte tenu de l'approximation effectuée sur les efforts. Pour obtenir une convergence satisfaisante, il faut raffiner les cellules près des singularités pour se placer dans un cadre où l'approche en effort fonctionne bien (efforts affines par morceaux). Pour les approches en déplacement, la solution obtenue tend vers la solution exacte avec un taux de convergence correct.

En présence d'interfaces de type contact qui traversent une cellule super-macro, les taux de convergence sont très mauvais pour chacune des approches. La solution est alors de redécouper les cellules super-macro de manière à obtenir des cellules super-macro de la taille des sous-structures. Cependant, cette technique nécessite de factoriser à nouveau la matrice

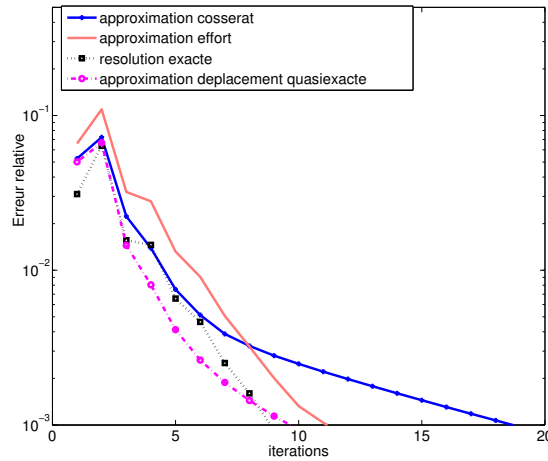


Figure 5.8: Courbes de convergence pour le problème de flexion

super-macro. Des méthodes de perturbation de maillages adaptées au problème super-macro pourraient peut-être permettre d'éviter de réaliser un nombre trop important de nouvelles factorisations puisque les modifications sont locales.

La comparaison des différentes approches n'a pas pu être menée sur des exemples significatifs contenant de très nombreuses cellules macro compte tenu des limitations inhérentes au code développé initialement sous matlab. Cependant, au vu des quelques résultats obtenus et en comparant la simplicité de la programmation de chacune des approches, la résolution de type quasi-exacte a été recodée en C++ et étendue aux problèmes tridimensionnels sans difficulté. Le gain en terme de taille du problème traité est de l'ordre de 10 à 100 compte tenu des tailles de cellules choisies.

En conclusion, on peut lister les avantages et inconvénients de chacune des approches. L'approche sur les multiplicateurs est relativement simple à mettre en oeuvre. La détermination d'un opérateur quasi-exact est plus coûteuse en terme de stockage et de temps de construction (calculs préalables nécessaires). Elle permet d'augmenter raisonnablement la taille des cellules super-macro dans des zones à faible gradient, en conservant un taux de convergence correct. L'avantage de ces approches en multiplicateurs est que l'on converge nécessairement vers la solution (plus ou moins rapidement). En effet à convergence le multiplicateur macro tend vers zéro sur chaque interface, solution incluse dans l'espace approché des multiplicateurs macro. Pour l'approche en effort, les résultats obtenus sont mitigés. D'un point de vue mise en oeuvre, l'approche en effort est beaucoup plus complexe. Elle nécessite la construction d'efforts en équilibre et la reconstruction des multiplicateurs par la relation de comportement homogénéisé inverse qui requiert la détermination de mouvements de corps rigides par sous-structure. On obtient alors une approximation des efforts d'interface. Or, cette approximation doit correspondre au mieux à la solution exacte. C'est pourquoi, cette méthode est bien adaptée dans les zones où les gradients de contraintes ne sont pas élevés.

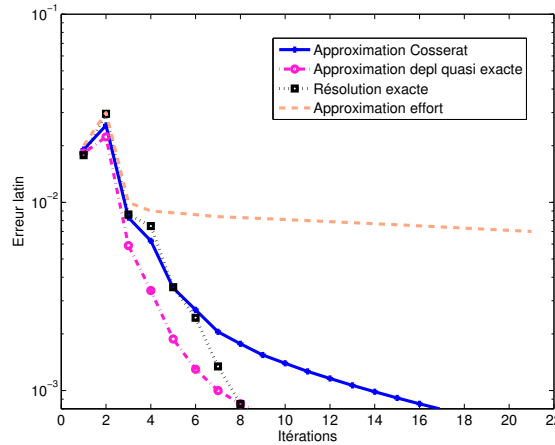


Figure 5.9: Courbes de convergence pour le problème de flexion avec extension

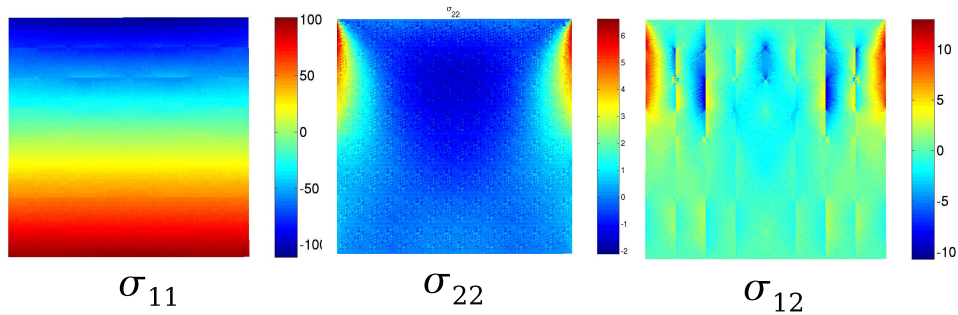


Figure 5.10: Contraintes pour le problème de flexion extension avec l'approche en effort

La mise en oeuvre de la troisième échelle appliquée au modèle microscopique n'a pas encore été testée. Les remarques concernant la solution du problème super-macro en présence d'interfaces de contact montrent qu'il est nécessaire d'effectuer un arrangement des cellules super-macro lorsqu'une fissure se propage dans une cellule super-macro. L'approximation retenue ne permet pas de converger de manière satisfaisante en peu d'itérations. Comme indiqué précédemment, il serait judicieux d'utiliser une technique permettant de ne pas avoir à reconstruire des opérateurs ou modifier le maillage super-macro. Une autre piste plus simple à mettre en oeuvre consisterait à définir une décomposition de domaine des interfaces macro et résoudre le problème macro linéaire par une méthode itérative.

2.2.2 Simplification des problèmes micro

Le paragraphe précédent a permis de montrer une voie possible pour réduire la taille du problème macro et le coût du problème macro en proposant soit une résolution itérative soit une approximation de ce problème. La taille du problème macro est directement conditionnée par le nombre d'interfaces mises en jeu. Un très grand nombre d'interfaces implique nécessairement un très grand nombre de sous-structures (principalement de forme identique). Le deuxième point étudié ici concerne la réduction du nombre de problèmes micro résolus.

En effet, lorsque le nombre de sous-structures est important, la résolution des problèmes micro de l'étape linéaire devient coûteuse en temps de calcul. Même si ces étapes sont parfaitement parallèles, la résolution d'un million de problèmes micro ne peut être réalisée sur un million de processeurs raisonnablement. La simplification proposée n'est possible que si les sous-structures ont des formes identiques et que les gradients de contraintes ne sont pas élevés.

La présence d'un très grand nombre de sous-structures identiques peut se rencontrer dans différents problèmes, notamment celui de milieux périodiques. Le modèle microscopique nécessite lui aussi la construction d'un grand nombre de sous-structures identiques. On part donc de l'hypothèse que le milieu est décrit par un nombre important de sous-structures de forme identique sur tout le domaine (Figure 5.11). L'idée de base consiste à remarquer que dans les zones éloignées des bords ou des dégradations, la solution est identique d'une cellule à l'autre. Ainsi, les problèmes micro sont résolus sur un nombre restreint de sous-structures déterminées à partir du pavage super-macro et la solution est reconstruite sur les autres sous-structures de la cellule super-macro concernée par l'introduction de coefficients multiplicateurs constants par sous-structure. Le temps de calcul est alors réduit notamment pour les problèmes contenant de grandes cellules super-macro.

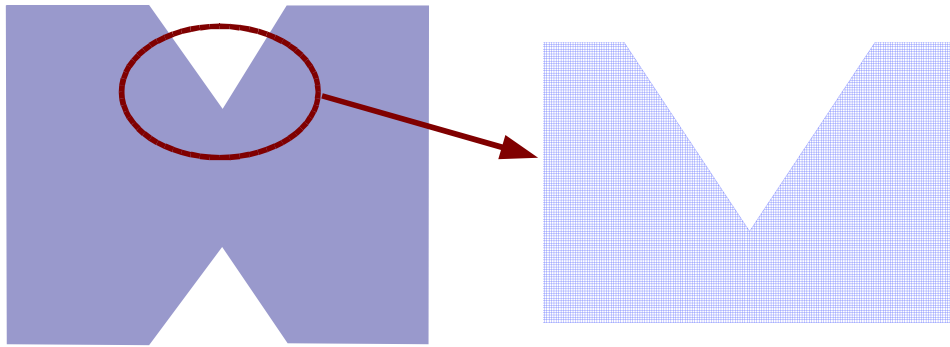


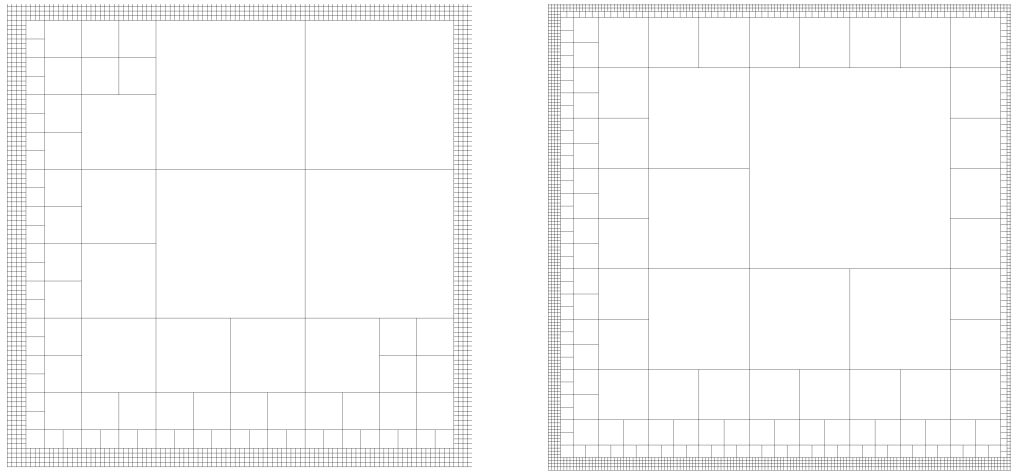
Figure 5.11: Pavage d'une structure entaillée par 540000 sous-structures

L'objectif de ce travail est donc de proposer une simplification tout en restant dans le cadre de la stratégie multiéchelle de manière à réduire considérablement le temps de calcul en limitant les résolutions micro. Ce travail a fait l'objet d'un stage de Master 2 coencadré (Trovalet, 2006). Les détails techniques de la méthode sont rappelés en annexe C. Seuls les résultats, les limites et améliorations possibles sont proposés.

■ Exemples d'applications.

On s'intéresse tout d'abord à une structure rectangulaire soumise à un chargement affine sur deux côtés opposés. La solution exacte est connue et correspond à un déplacement quadratique. On constate que la simplification fournit la solution exacte avec un taux de convergence identique à celui de la résolution exacte, ceci quelle que soit la taille du problème (cf. Figure 5.13).

La figure 5.14 montre que si l'on augmente la taille des cellules super-macro et donc si l'on diminue le nombre de problèmes micro effectivement résolus, la durée du calcul diminue d'environ cinquante pourcent pour une erreur donnée de 10^{-5} . Le gain de temps



(a) configuration a

(b) configuration b

Figure 5.12: Pavage super-macro selon différentes tailles.

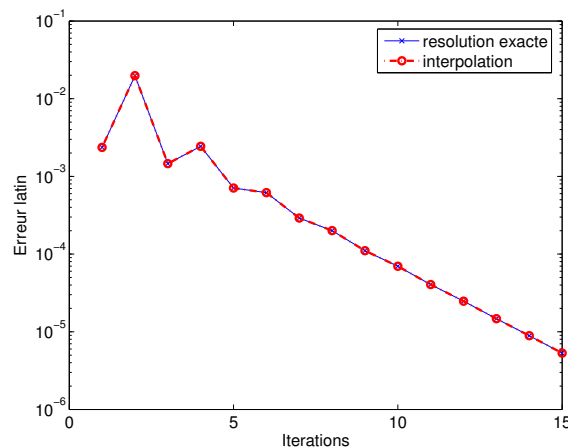
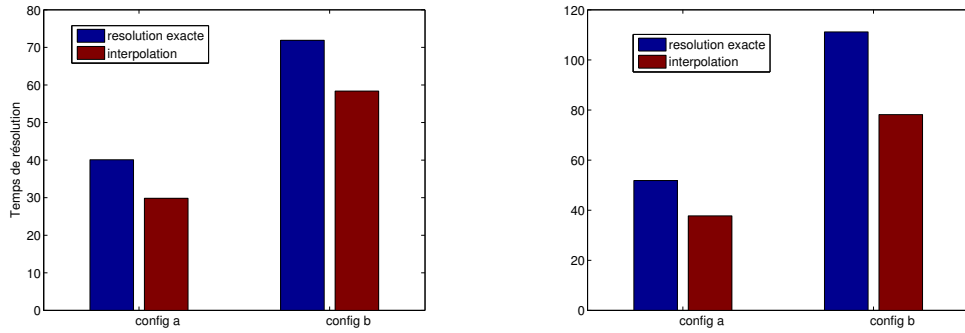


Figure 5.13: Comparaison de la solution avec et sans interpolation sur un problème de flexion : Evolution de l'erreur LATIN en fonction du nombre d'itérations

pourrait être encore amélioré si des simplifications de programmation étaient effectuées.

Lorsque l'on utilise des sous-structures élémentaires contenant un ou plusieurs trous (application aux milieux périodiques par exemple), l'algorithme fournit exactement la solution comme le montre la figure 5.15. Le gain de temps est encore plus important étant donné que le maillage par sous-structure est important.



(a) 130 éléments par sous-structure élémentaire

(b) 280 éléments par sous-structure élémentaire

Figure 5.14: Evolution du temps de résolution en fonction de la taille des cellules super-macro.

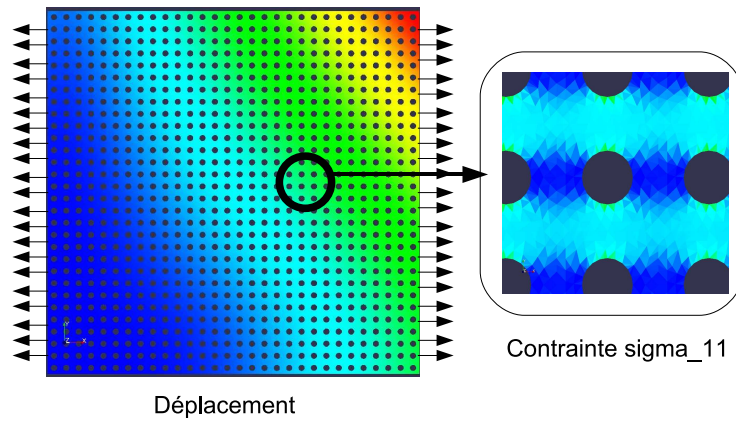


Figure 5.15: Solution interpolée pour une structure périodique soumise à un chargement de traction (zoom sur quelques sous-structures).

■ Défauts de la stratégie et amélioration.

Les exemples précédents montrent des résultats très satisfaisants. Cependant lorsque l'on augmente le nombre de sous-structures par cellule super-macro, des erreurs numériques entraînent des divergences de l'algorithme. On constate notamment que les problèmes apparaissent au niveau de la jonction entre cellules super-macro de tailles différentes (Figure 5.16) et sont causés par le problème macro, lorsque le niveau d'erreur est relativement faible. En effet, l'interpolation proposée fonctionne correctement en monoéchelle mais nécessite en revanche un nombre prohibitif d'itérations pour atteindre le niveau souhaité.

Plusieurs améliorations ont été envisagées. La première consiste à interpoler la solution en prenant en compte les valeurs à la fois sur les cellules de Gauss de la cellule super-macro étudiée et des cellules voisines par une technique de type MLS. Cette méthode n'a pas été programmée.

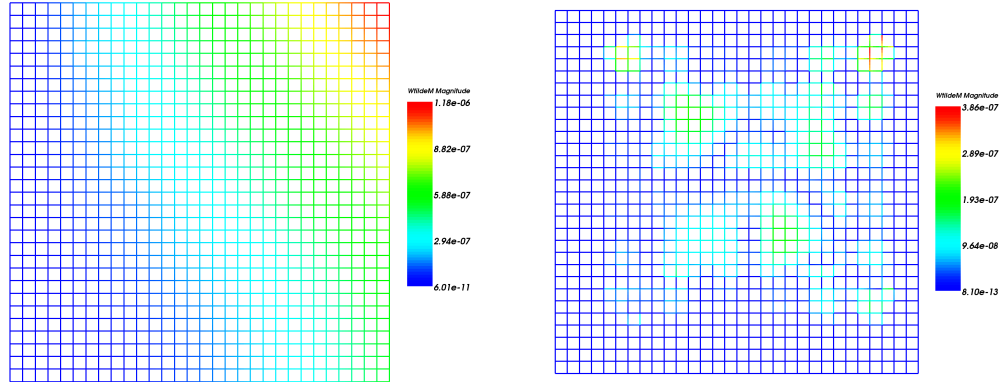


Figure 5.16: *Solution du problème macro $\widetilde{W}^M$ pour un petit nombre d'itérations (gauche), puis quand la solution se met à diverger (droite). Les irrégularités se concentrent au niveau des cellules super-macro.*

La seconde méthode proposée modifie le principe d'une interpolation linéaire ou quadratique et ne suppose pas de forme de cette interpolation. Cette technique est issue du point P3 de la stratégie LATIN qui consiste à rechercher des solutions sous la forme d'une somme de produits de fonctions d'espace par des fonctions temporelles. On propose ici d'appliquer ce type de stratégie sans la partie temporelle. Ceci permet d'améliorer la solution dans les zones à gradient plus important mais n'élimine pas pour autant les problèmes de divergence principalement dus aux incompatibilités numériques d'interpolation entre des cellules voisines super-macro de tailles différentes.

On considère donc une cellule super-macro contenant plusieurs sous-structures E . On détermine comme précédemment la solution sur les cellules de Gauss E_i^g . On cherche ensuite uniquement à reconstruire les déplacements et efforts d'interface autour d'une sous-structure E . Les efforts et déplacements sur les interfaces entourant la sous-structure E seront recherchés pour chaque problème micro sous la forme :

$$\underline{F}_E(\underline{M}) = \sum_{E_i^g \in \mathbb{E}^g} \alpha_i \underline{F}_{E_i^g}(\underline{M})$$

$$\underline{W}_E(\underline{M}) = \sum_{E_i^g \in \mathbb{E}^g} \alpha_i \underline{W}_{E_i^g}(\underline{M})$$

où les coefficients α_i sont inconnus.

On détermine ces coefficients en minimisant une erreur basée sur la non-vérification des directions de recherche. On note $\bar{F}_E = \hat{F}_E$ dans le cas du problème micro 1 et $\bar{F}_E = 0$ dans le cas du problème micro 2 et $\bar{W}_E = \hat{W}$ dans le cas du problème micro 1 et $\bar{W}_E = \widetilde{W}_E^M$ pour le problème micro 2.

La minimisation pour chaque problème micro s'écrit donc sous la forme :

$$\min_{\alpha_i} \left\| \left(\sum_{E_i^g \in \mathbf{E}^g} \alpha_i \underline{F}_{E_i^g} \right) - \bar{F}_E + k \left(\sum_{E_i^g \in \mathbf{E}^g} \alpha_i \underline{W}_{E_i^g} \right) - \bar{W}_E \right\|$$

En utilisant la norme basée sur les directions de recherche, on doit minimiser la fonctionnelle :

$$\min_{\alpha_i} \int_{\partial\Omega_E} \left(\left(\sum_{E_i^g \in \mathbf{E}^g} \alpha_i \underline{F}_{E_i^g} \right) - \bar{F}_E + k \left(\sum_{E_i^g \in \mathbf{E}^g} \alpha_i \underline{W}_{E_i^g} \right) - \bar{W}_E \right) k^{-1} \left(\left(\sum_{E_i^g \in \mathbf{E}^g} \alpha_i \underline{F}_{E_i^g} \right) - \bar{F}_E + k \left(\sum_{E_i^g \in \mathbf{E}^g} \alpha_i \underline{W}_{E_i^g} \right) - \bar{W}_E \right) d\Gamma$$

Si l'on prend 4 cellules de Gauss par cellule super-macro, le problème revient à construire un opérateur 4x4 dont les termes nécessitent une intégration des fonctions calculées sur les cellules de Gauss. Cet opérateur est utilisé ensuite pour chaque sous-structure, seul le second membre faisant intervenir les quantités $\bar{F}_E$ et $\bar{W}_E$ est à calculer pour toutes les sous-structures. La résolution de ce système est très rapide et fournit directement l'approximation des efforts et déplacements d'interface.

Même si cette résolution ne nécessite pas de forme *a priori* de la solution (linéaire ou quadratique), les problèmes de divergence ne disparaissent pas. On peut cependant relativement facilement étendre cette technique en prenant non plus en compte les seules cellules de Gauss par cellule super-macro mais aussi les cellules de Gauss des cellules super-macro attenantes. On réalise ainsi une sorte d'interpolation "diffuse". Le système à résoudre est par contre plus important.

Les différents points abordés ici (problème super-macro et simplification des problèmes micro) nécessitent de plus amples analyses pour être réellement utilisés dans le cadre d'une simulation des dégradations dans les stratifiés en utilisant le modèle microscopique.

3 Détermination numérique des critères de rupture des surfaces

La cinétique des dégradations est liée à l'évaluation d'un critère. Le modèle microscopique définit un critère en taux de restitution par l'expression simplifiée suivante :

$$\gamma \left(\frac{G_I}{G_{cI}} + \frac{G_{II}}{G_{cII}} + \frac{G_{III}}{G_{cIII}} \right) \geq 1 \quad (5.1)$$

où $\gamma = \min \left(\frac{\bar{h}}{h}, 1 \right)$.

Le critère nécessite donc la définition et la détermination des taux de restitution associés à la dégradation des surfaces minimales de rupture. L'évaluation de ces taux de restitution nécessite un temps de calcul très important. On propose alors d'obtenir une approximation des taux de restitution discrets et donc du critère. La pertinence de l'approximation pourra être vérifiée *a posteriori*. La définition du taux de restitution en présence d'interfaces de type contact avec frottement est précisée en annexe D en suivant les articles de (Nairn, 2000a). On propose ici plusieurs méthodes d'évaluation du taux de restitution discret.

3.1 Calcul du taux de restitution

Le taux de restitution discret peut être évalué de manière générale en déterminant la différence d'énergie potentielle entre deux configurations. Ayant obtenu l'énergie potentielle pour une configuration A donnée, un nouveau calcul est mené pour prendre en compte l'apparition d'une surface rompue supplémentaire (configuration B). L'énergie potentielle est alors déterminée pour cette configuration et le taux discret est obtenu par la relation :

$$\Delta G = - \frac{\Pi^B - \Pi^A}{\Delta S} \quad (5.2)$$

où Π^A et Π^B sont les énergies potentielles dans les configurations A et B respectivement et ΔS est l'aire de la surface rompue pour passer de A à B .

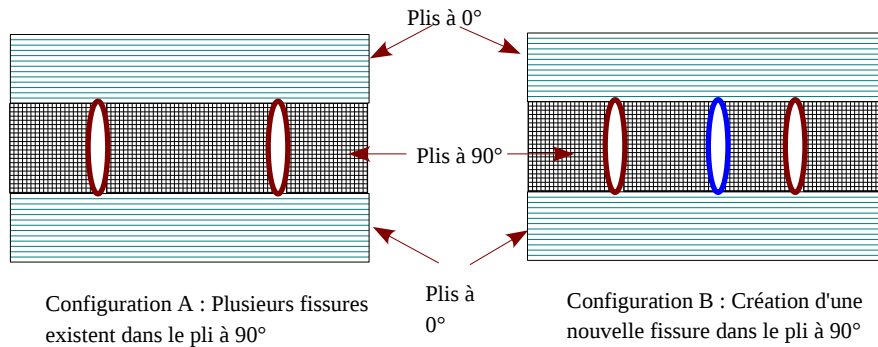


Figure 5.17: Détermination du taux de restitution d'énergie associé à l'apparition d'une microfissure

Cette manière de déterminer le taux de restitution est problématique. En effet, pour chaque surface potentiellement dégradable, il est nécessaire d'évaluer le taux de restitution. Par conséquent, pour obtenir les taux associés à n surfaces, n calculs complets doivent être menés. Compte tenu du coût d'un calcul, une telle technique n'est pas envisageable notamment lorsque le nombre de surfaces est très important. De plus, le taux défini de cette manière est difficilement séparable en trois modes. Ainsi, des alternatives ont été envisagées et mises en oeuvre pour évaluer ce taux de restitution. Le calcul exact n'étant pas possible, une approximation du taux de restitution associé à la rupture de chaque surface est obtenue.

3.1.1 Calcul localisé

La première méthode permet d'obtenir une très bonne approximation du taux de restitution dans toutes les configurations possibles pour chaque mode et ce, quelle que soit la répartition des contraintes.

On considère une surface ΔS saine pour laquelle on souhaite connaître le taux de restitution d'énergie associé à sa rupture. Avant rupture, l'effort sur la surface ΔS est noté $\sigma_s^0 \underline{n}$ et est continu sur cette surface. Après rupture, l'effort est nul. On définit alors le problème complémentaire suivant :

La structure est soumise à un champ de température nul, des efforts nuls sur $\partial\Omega_F$ et déplacements nuls sur $\partial\Omega_u$. On impose sur la surface ΔS , un effort $\underline{F}_s^r = -\sigma_s^0 \underline{n}$. Sur les surfaces déjà rompues, on n'impose aucune condition *a priori*, seules les conditions de contact avec frottement sont introduites.

La superposition de la solution à ce problème complémentaire et la solution initiale donne une très bonne approximation de la solution obtenue pour la rupture d'une surface. On ne peut pas considérer que la solution obtenue soit exacte car le problème peut faire intervenir du contact avec frottement et cette non-linéarité ne permet pas d'affirmer que le champ obtenu est le champ exact. On suppose de plus que l'endommagement n'évolue pas lorsqu'une surface est rompue. Cependant, en résolvant ce problème complémentaire et en déterminant la contrainte associée σ^r , le taux de restitution peut être approché par la formule démontrée en annexe D :

$$G = \frac{1}{\Delta S} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \sigma^r \mathbf{K}^{-1} \sigma^r d\Omega + \int_{S_c} \underline{F}_c^r \underline{u}^0 d\Gamma \right) \quad (5.3)$$

où S_c représente les surfaces déjà rompues sièges de contact avec frottement, $\underline{F}_c^r$ l'effort du problème complémentaire sur ces surfaces et $\underline{u}_0$ le déplacement sur ces surfaces dans la configuration "saine".

En séparant l'effort selon les directions normale et tangentielle à la surface puis en résolvant les problèmes complémentaires associés, on est alors en mesure de déterminer une approximation du taux de restitution selon chaque mode.

Remarque : Ayant obtenu le taux de restitution pour toutes les surfaces potentiellement dégradables et après avoir rompu l'une de ces surfaces pour laquelle le critère est vérifié, un calcul complet non linéaire est réalisé. On peut alors, si nécessaire, vérifier que la valeur obtenue pour le taux de restitution est proche de celle obtenue par différence d'énergie potentielle entre les deux états.

Le calcul de la solution du problème résiduel reste pour l'instant défini sur toute la structure. Cependant, en utilisant le principe de Saint Venant, le problème devient localisé et permet de diminuer drastiquement le coût de calcul. En effet, la contrainte imposée sur la surface ΔS est à résultante et moment nul, car la contrainte avant rupture est continue sur

la surface S . La résultante et le moment sont donnés par :

$$\int_{\Delta S} -\boldsymbol{\sigma}_s^{0+} \underline{n}^+ - \boldsymbol{\sigma}_s^{0-} \underline{n}^- d\Gamma = \underline{0}$$

$$\int_{\Delta S} (-\boldsymbol{\sigma}_s^{0+} \underline{n}^+) \wedge \underline{OM} d\Gamma + (-\boldsymbol{\sigma}_s^{0-} \underline{n}^-) \wedge \underline{OM} d\Gamma = \underline{0}$$

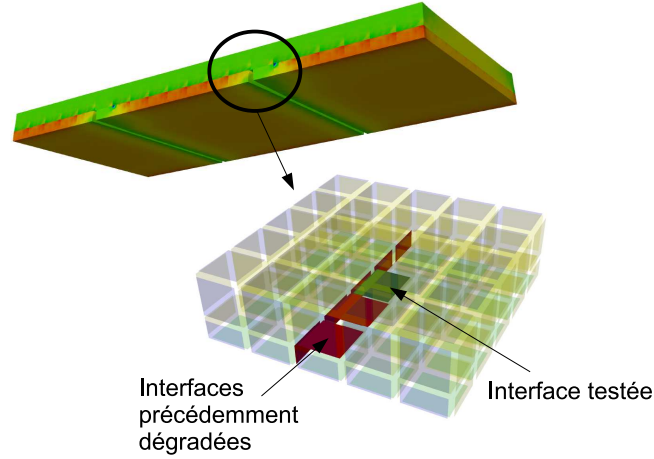


Figure 5.18: Zone localisée

D'après le principe de Saint Venant, un effort à résultante et moment nuls a un effet localisé dans une zone restreinte. Le calcul complémentaire peut donc être mené sur une zone limitée autour de la surface ΔS (cf. Figure 5.18). Des conditions de Neumann sont appliquées sur le bord de cette zone. Le calcul du taux de restitution est alors lui aussi simplifié et la contrainte n'a pas besoin d'être reconstruite sur tout le domaine. La figure 5.19 montre que, pour l'exemple précédent, la contrainte correspondant au problème localisé a bien un effet localisé au voisinage de l'interface considérée.

On note Ω_l la zone localisée autour de ΔS . Sur $\Omega \setminus \Omega_l$ la contrainte est nulle car le chargement donné sur ΔS n'a aucun effet sur cette zone. Par conséquent :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^r \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^r d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega_l} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^r \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^r d\Omega$$

De la même manière les efforts sur les surfaces rompues contenues dans $\Omega \setminus \Omega_l$ sont nuls :

$$\int_{S_c} \underline{F}_c^r \underline{u}^0 d\Gamma = \int_{S_c \in \Omega_l} \underline{F}_c^r \underline{u}^0 d\Gamma$$

Ainsi, pour déterminer le taux de restitution, il suffit de déterminer l'énergie de déformation élastique sur le domaine localisé uniquement et le travail des efforts du problème complémentaire dans le déplacement $\underline{u}^0$ sur les surfaces internes à Ω_l .

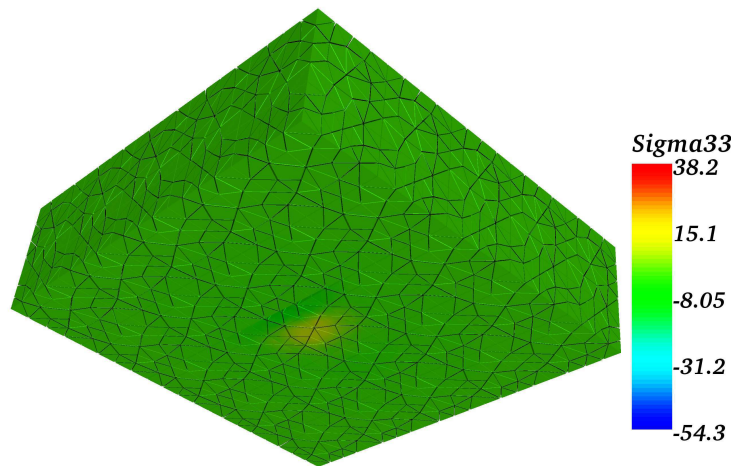


Figure 5.19: Contrainte σ_{33} dans la zone localisée pour un chargement normal à la surface considérée. On observe une variation de contrainte uniquement autour de la surface testée.

Pour mettre en oeuvre les calculs localisés, on détermine avant tout calcul les interfaces contenues dans un voisinage local à chaque surface de dimension $(2R)^3$ où R est le rayon moyen de la surface considérée. On identifie ensuite, parmi ces surfaces, les interfaces de bord pour lesquelles on imposera des conditions aux limites nulles (déplacement ou effort). La zone localisée peut contenir des surfaces déjà dégradées pouvant entrer en contact (avec frottement). Pour prendre en compte les fermetures potentielles de ces surfaces, il est nécessaire d'utiliser une stratégie itérative. La première solution proposée consiste à assembler la raideur de chaque zone locale et ajouter à celle-ci les conditions de contact ou décollement par pénalisation. On factorise cette raideur puis on résout le problème pour les efforts donnés sur la surface testée. On vérifie ensuite que les conditions de contact imposées correspondent au résultat obtenu. Si ce n'est pas le cas, on modifie la raideur en conséquence, on factorise et on résout à nouveau. Cette technique a été testée et, même si les calculs pour obtenir une solution demandent peu d'itérations, la factorisation et l'assemblage de la matrice globale sont trop coûteux en temps de calcul.

L'autre technique proposée consiste à résoudre ce problème local par la stratégie multi-échelle. En effet, tous les opérateurs ont déjà été déterminés précédemment, il ne reste plus qu'à définir le problème macro pour ce calcul localisé (le problème macro est donc de petite taille). Le contact est géré directement au niveau de l'étape locale de la stratégie, sans aucune difficulté. L'inconvénient de cette technique est le nombre d'itérations nécessaires (une vingtaine) pour obtenir un bon niveau d'erreur. La mise en oeuvre de cette méthode est beaucoup moins difficile.

Une attention particulière est donc portée sur le nombre de calculs menés. En effet, pour certaines configurations, les efforts appliqués sont quasiment négligeables dans une

direction par rapport à l'autre (c'est notamment le cas dans les $[0/90]_s$ où seul le mode I est prépondérant). Le calcul multiéchelle s'avère alors inefficace. Pour palier ces difficultés d'ordre numérique, on ne réalise un calcul que lorsque :

$$\frac{|F_i|}{\|\underline{F}\|_\infty} > \varepsilon$$

où $\|\underline{F}\|_\infty$ représente la norme infinie des efforts moyennés sur une surface donnée, et F_i correspond à une composante selon une direction donnée de $\underline{F}$. On limite ainsi les calculs inutiles.

La résolution de ces problèmes localisés reste cependant coûteuse si celle-ci est effectuée pour toutes les surfaces potentiellement dégradables. Plusieurs considérations permettent de limiter le nombre de calculs. On constate que la répartition des contraintes est complexe principalement au niveau des bords du stratifié et autour de surfaces dégradées. L'état de contrainte est par ailleurs généralement plan en dehors de ces zones. La stratégie proposée est donc d'utiliser des simplifications dans ces zones et de mener un calcul localisé uniquement sur le bord et près des surfaces rompues.

3.1.2 Utilisation d'une formule analytique

La simplification proposée est issue des travaux sur le pont entre les échelles micro et méso (Ladevèze & Lubineau, 2003a; Ladevèze *et al.*, 2006). Les hypothèses principales retenues sont la périodicité locale des dégradations et la simplification du champ de contrainte. On fait l'hypothèse de contraintes planes au coeur du stratifié et on suppose que celles-ci sont constantes dans l'épaisseur du stratifié. Sous ces hypothèses, il est possible de déterminer avant tout calcul le taux de restitution en fonction de grandeurs adimensionnées et de la contrainte effective (contrainte moyenne avant toute dégradation).

On pose $\rho = \frac{H}{L}$ le taux de fissuration transverse et $a = \frac{l}{L}$ la position relative de la surface testée. On note L la distance entre deux fissures transverses et l la distance minimale entre la surface considérée et la fissure transverse la plus proche. H est l'épaisseur du pli (figure 5.20).

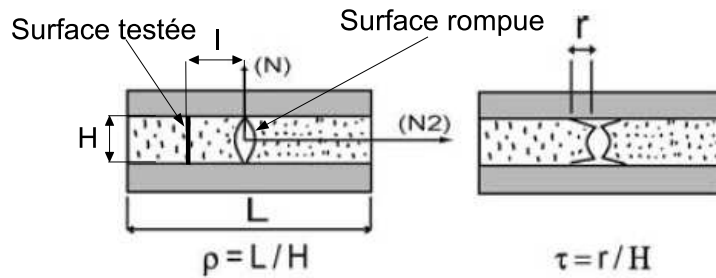


Figure 5.20: Définition des variables adimensionnées

En réalisant sur une cellule périodique plusieurs calculs pour différentes valeurs de ρ et a , on détermine une fonction tabulée $G_u(\rho, a)$ comme indiqué sur la figure 5.21. Le taux de

restitution est alors donné par :

$$\Delta G_I = \frac{H}{2} \sigma_{22}^{eff} G_{uI}(\rho, a) \quad (5.4)$$

$$\Delta G_{II} = \frac{H}{2} \sigma_{12}^{eff} G_{uII}(\rho, a) \quad (5.5)$$

$$\Delta G_{III} = \frac{H}{2} \sigma_{23}^{eff} G_{uIII}(\rho, a) \quad (5.6)$$

$$(5.7)$$

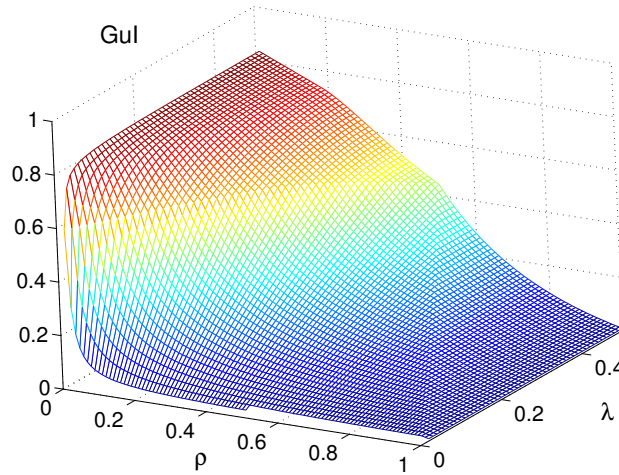


Figure 5.21: Tracé de la fonction G_{uI} en fonction de ρ et a

Remarque : Dans le cadre de la mise en oeuvre du problème micro, la difficulté est d'évaluer les quantités ρ et a . Pour les déterminer, on recherche les fissures les plus proches de la surface testée de manière à obtenir L et l . On ne considère ici que la bande de cellules contenant la surface testée.

On constate que la restriction des calculs localisés aux zones de bord ou déjà dégradées apporte un gain considérable mais n'est pas suffisante pour rendre le coût de calcul satisfaisant.

3.1.3 Réutilisation de résultats

Une amélioration supplémentaire consiste à ne recalculer les taux de restitution que pour les surfaces voisines d'une surface qui vient de rompre (excepté pour le premier calcul pour lequel tous les taux doivent être estimés). Ainsi il est nécessaire de n'effectuer au maximum qu'une centaine de calculs locaux entre deux calculs globaux pour estimer les taux de restitution mis à jour. Pour réduire considérablement le coût des calculs au fur et à mesure que la dégradation augmente, on propose d'utiliser le concept de "handbooks" (Strouboulis *et al.*, 2000).

Quand on analyse les zones locales et les efforts mis en jeu, on constate que beaucoup de configurations sont identiques. En effet, la propagation d'une fissure transverse par exemple conduit à des taux de restitution similaires. De la même manière sur un bord libre, le champ de contrainte est identique pour des surfaces proches. Par conséquent, il est possible de déterminer le taux de restitution associé à la rupture d'une surface et de stocker le résultat pour la configuration considérée. Pour les autres surfaces dont les zones localisées sont similaires, il n'est alors pas nécessaire de recommencer ce calcul. Le taux de restitution est directement obtenu à partir de celui gardé en mémoire.

La stratégie est la suivante :

Pour chaque surface à tester,

- On détermine le voisinage de cette surface, à savoir le type (interface de type contact, parfaite, extérieure) et l'ordre des interfaces l'entourant dans un rayon donné de l'ordre de 2 à 3 fois le diamètre moyen de la surface.
- Parmi les surfaces de référence stockées, on regarde si la surface testée possède un voisinage d'interfaces identique. Si une configuration est identique, on n'effectue pas de nouveaux calculs multiéchelles, mais on estime directement le taux de restitution à partir de celui de la surface de référence conservé. On calcule l'effort moyen selon les directions d'orthotropie de la surface et on détermine le taux de restitution de l'énergie en mode i noté ΔG_t^i par la formule :

$$\Delta G_t^i = \Delta G_r^i * \frac{(\sigma_t \underline{n} \cdot \underline{x}_i)^2}{(\sigma_r \underline{n} \cdot \underline{x}_i)^2}$$

où ΔG_r^i est le taux de restitution en mode i pour la surface de référence, $\sigma_t \underline{n} \cdot \underline{x}_i$ est l'effort normal moyenné sur la surface projeté selon la direction d'orthotropie $\underline{x}_i$ pour la surface testée et $\sigma_r \underline{n} \cdot \underline{x}_i$ l'effort normal moyenné projeté selon la direction d'orthotropie $\underline{x}_i$ pour la surface de référence.

Si aucune configuration n'est identique ou que la valeur des efforts moyens est trop différente, on effectue de nouveaux calculs multiéchelles pour estimer les taux de restitution et on stocke les résultats obtenus pour cette surface (voisinage, efforts moyens et taux de restitution).

La figure 5.22 montre un exemple de configurations identiques permettant de ne pas effectuer de nouveaux calculs.

3.2 Bilan

En conclusion de ce paragraphe, on propose un organigramme récapitulant les méthodes utilisées pour estimer le taux de restitution de l'énergie associé à la dégradation d'une surface. Chaque calcul est indépendant et peut être mené en parallèle ce qui permet de gagner à nouveau sur la rapidité du calcul. Une analyse des avantages et inconvénients de l'approche proposée pour le calcul du taux de restitution est proposée dans le dernier chapitre.

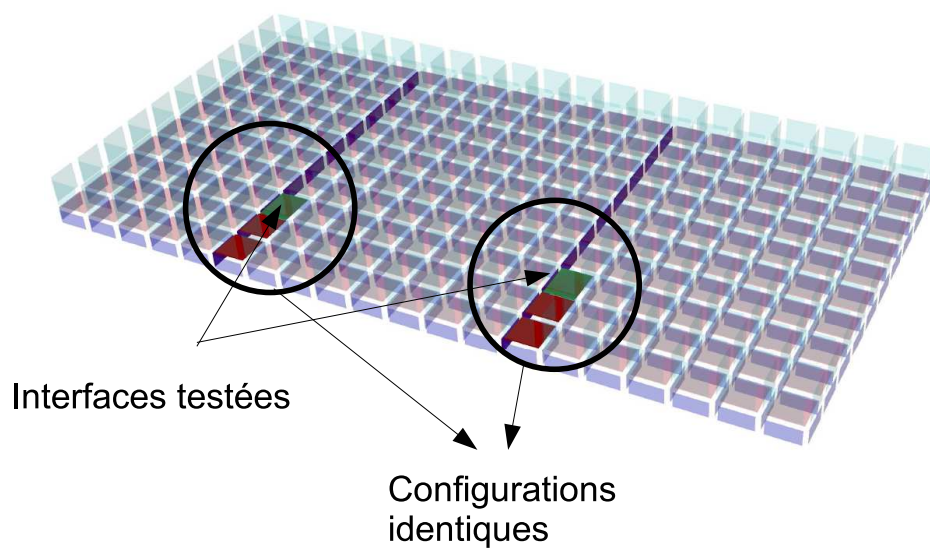


Figure 5.22: Représentation de configurations identiques pour deux surfaces testées.

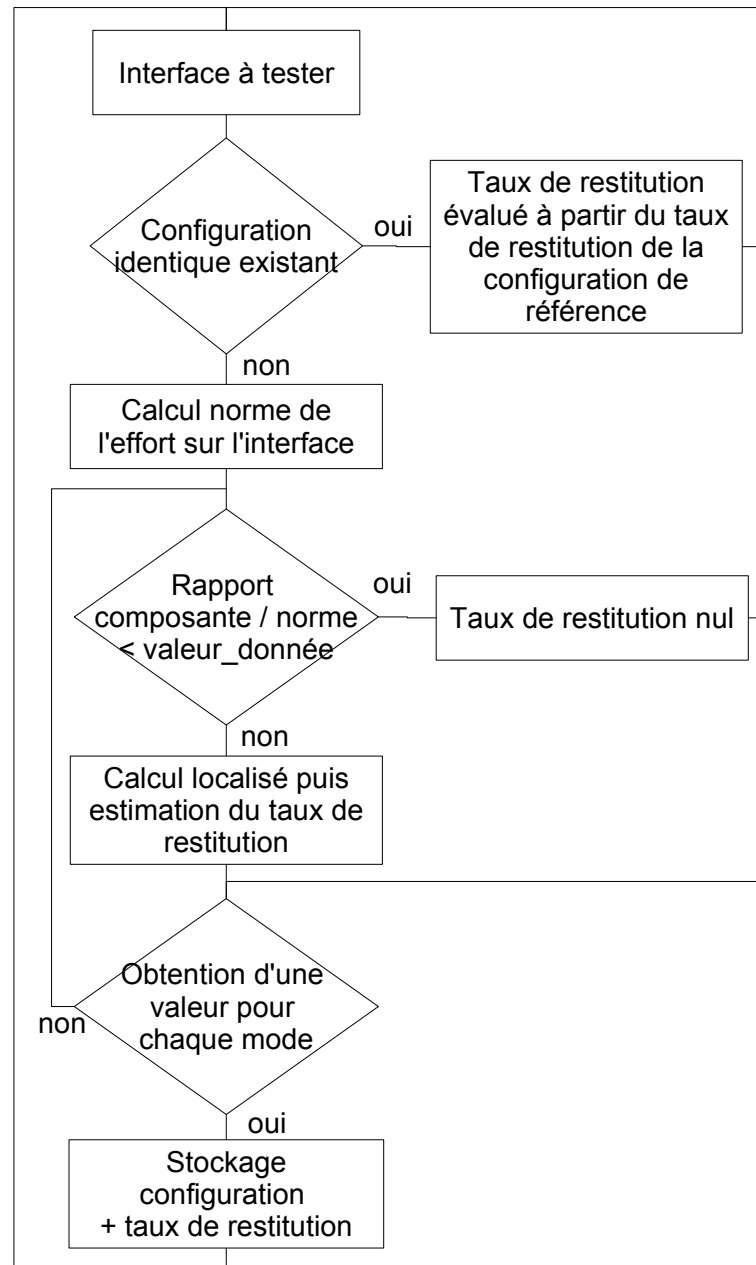


Figure 5.23: Méthode de détermination du taux de restitution approché pour une surface donnée.

Exemples de simulations

Des exemples sont proposés dans cette partie. Ils permettent non seulement d'observer les potentialités du modèle microscopique mais aussi d'obtenir des résultats en accord avec les observations expérimentales. Des valeurs matériaux proches de celles utilisées dans la littérature sont utilisées en l'absence de validations expérimentales.

Sommaire

1	Exemples de validation : stratifiés croisés	126
1.1	Influence de l'épaisseur	126
1.2	Influence de l'ordre des plis	130
2	Influence de la géométrie : Plaque entaillée $[0_2/90]_s$	131

1 Exemples de validation : stratifiés croisés

Ce paragraphe a pour objectif de présenter les différentes caractéristiques de la simulation sur un exemple simple largement étudié dans la littérature aussi bien d'un point de vue expérimental que d'un point de vue modélisation. On s'intéresse donc à des stratifiés $[0_m/90_n]_s$ dont l'épaisseur des plis à 0 et à 90 peut varier. On étudiera aussi l'influence de l'empilement en étudiant un stratifié du type $[90_n/0_m]_s$. Tous les exemples traités sont réalisés sur des stratifiés constitués d'un matériau proche de l'IM7/977. Les coefficients élastiques des plis orthotropes sont rappelés dans le tableau ci-dessous 6.1. Pour prendre en compte les contraintes résiduelles issues du refroidissement du stratifié lors du processus de fabrication, on introduit classiquement un champ de température négatif. Dans tous les exemples, la température est prise égale à -130° .

$E_1(MPa)$	$E_2(MPa)$	$E_3(MPa)$	$G_{12}(MPa)$	$G_{13}(MPa)$	$G_{23}(MPa)$
$157e^3$	8500	8500	5000	5000	3000
ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	α_1	α_2	α_3
0.29	0.29	0.4	$2.3e^{-6}$	$2.3e^{-6}$	$2.3e^{-6}$

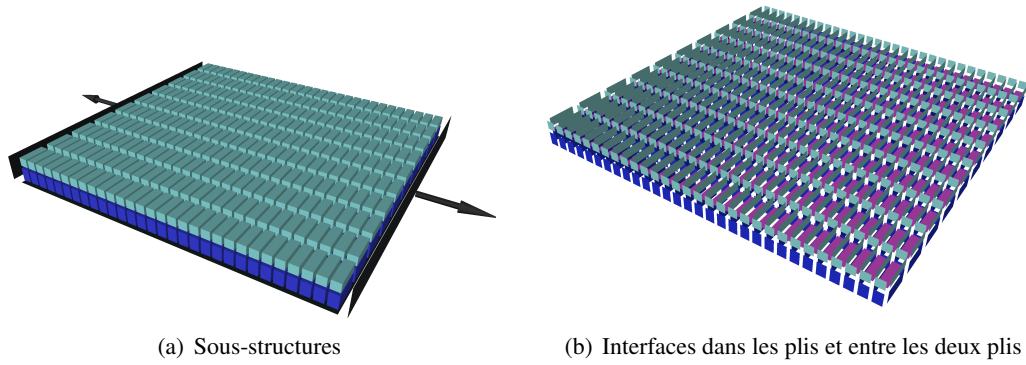
Tableau 6.1: Modules élastiques d'un pli orthotrope IM7/977

1.1 Influence de l'épaisseur

On s'intéresse dans un premier temps à l'influence de l'épaisseur du pli à 90 sur la densité de fissuration. On considère donc un échantillon soumis à un chargement de déformation longitudinale uniaxial croissant. On étudie uniquement la fissuration pour la moitié du stratifié et on impose ainsi une condition de symétrie selon l'axe z . L'épaisseur du pli à 90° vaut successivement $0.15mm$, $0.3mm$, $0.60mm$ et $0.90mm$. Pour conserver un effet de bord similaire entre les simulations, l'épaisseur des plis à 0° est adaptée à celle du pli central. On choisit des cellules rectangulaires dont les tailles sont fonction de l'épaisseur de chaque pli. La figure 6.1 montre les cellules et les interfaces utilisées pour un stratifié $[0_2/90]_s$.

Pour chaque stratifié, on conserve un nombre de sous-structures et d'interfaces identique (nombre de degrés de liberté identique) mais on modifie la taille de la structure étudiée. On génère pour chaque cellule un maillage constitué de tétraèdres redécoupés sur les bords conformément à la sur-discrétisation détaillée dans le chapitre 4. Il est nécessaire d'employer un nombre relativement important d'éléments dans l'épaisseur d'un pli de manière à calculer correctement les taux de restitution d'énergie. Ceci explique le grand nombre d'éléments utilisés pour résoudre ce problème. On utilise ainsi 1200 sous-structures et 4300 interfaces soit 2.300.000 éléments finis pour obtenir une précision satisfaisante dans les calculs de taux de restitution. Les dimensions des plaques sont rappelées dans le tableau 6.2.

Les coefficients nécessaires au modèle microscopique hybride ont été obtenus à partir de résultats expérimentaux (Tableau 6.3). Le taux de restitution critique en mode I a fait l'objet de nombreuses mesures dans la littérature sur le matériau considéré. Toutefois, les valeurs

Figure 6.1: Sous-structures et interfaces utilisées pour l'étude d'un stratifié $[0_2/90]_s$

Stratifié	$[0/90/0]$	$[0_2/90_2/0_2]$	$[0_3/90_3/0_3]$	$[0_6/90_6/0_6]$
Dimensions (mm)	4.5 x 3	9 x 6	13.5 x 9	27 x 18

Tableau 6.2: Dimensions des problèmes traités en fonction de l'épaisseur du pli à 90°

obtenues pour les autres modes sont plus difficiles à identifier. Pour l'interface, on choisit d'utiliser les résultats obtenus sur des essais DCB, ENF et MMF sur différents stratifiés (Alix *et al.*, 1998; Guédra-De Georges, 2006). On peut aussi utiliser les résultats obtenus sur des interfaces 0/0 pour obtenir des valeurs satisfaisantes des taux de restitution critiques du pli, étant donné que cette configuration correspond à peu près au phénomène de fissuration matricielle. Une étude plus avancée concernant l'identification des caractéristiques du modèle est actuellement menée par G. Lubineau. On utilise une loi normale d'écart type 0.002 par rapport aux valeurs moyennes et un coefficient de frottement de 0.9 pour les interfaces de type contact avec frottement. Le dernier paramètre indispensable du modèle est la valeur de l'épaisseur critique. Les résultats de (Parvizi *et al.*, 1978) montrent que pour des stratifiés $[0_m/90_n]_s$, l'épaisseur de transition entre un critère en contrainte et un critère en énergie est d'environ deux fois l'épaisseur d'un pli élémentaire soit $h_c \approx 0.30mm$.

G_I^p	G_{II}^p	G_{III}^p	G_I^i	G_{II}^i	G_{III}^i	$h_c(mm)$
0.128	0.400	0.400	0.128	0.400	0.400	0.3

Tableau 6.3: Caractéristiques matériau du modèle microscopique utilisées dans les simulations (G en N/mm)

On s'intéresse au stratifié $[0_3/90_3/0_3]$. La figure 6.2 montre l'évolution de la fissuration transverse pour deux pas de chargement. On constate que les fissures s'initient sur les bords et se développent de manière instable dans toute la largeur du stratifié. En observant le niveau des critères pour deux surfaces de rupture successivement rompues, on explique l'instabilité des fissures (Figure 6.4). La figure 6.3 montre que le critère diminue autour

des fissures empêchant ainsi la création de nouvelles fissures. Pour des valeurs de déformation importantes, du délaminage local peut apparaître, cependant les simulations n'ont pas été menées sur un temps suffisamment long pour observer ce phénomène. On observe conformément aux expériences que les fissures transverses se répartissent de manière quasi-périodique sur toute la longueur du stratifié. Celles-ci peuvent apparaître aléatoirement d'un côté ou de l'autre du stratifié.

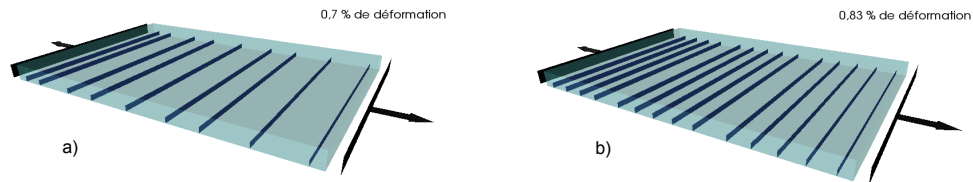


Figure 6.2: Evolution de la fissuration transverse pour deux pas de chargement dans le cas d'un stratifié $[0_3/90_3/0_3]$

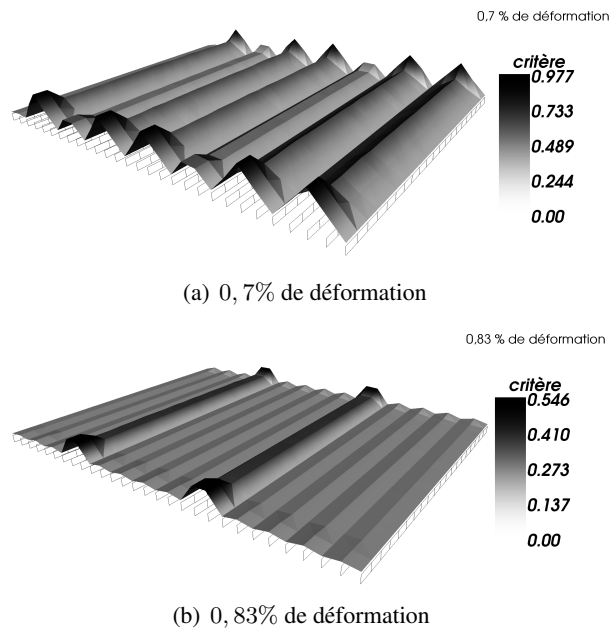


Figure 6.3: Valeur du critère pour deux pas de chargement pour le stratifié $[0_3/90_3/0_3]$

L'utilisation de "handbooks" définies dans le chapitre 5 est ici très bien adaptée. En effet, au départ, quelques calculs locaux sont nécessaires pour obtenir la répartition des taux de restitution dans le stratifié. A chaque fois qu'une fissure apparaît, on réutilise la configuration indiquée sur la figure 6.5 et on évite ainsi des calculs inutiles. Seul le calcul complet est alors coûteux.

Dans le cas d'un stratifié dont le pli à 90° est fin, le profil de fissuration est tout à fait différent (Figures 6.6 et 6.7). Les fissures s'initient toujours au bord et se développent sur le

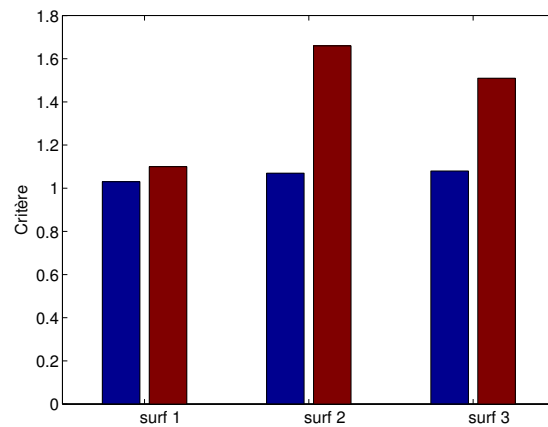


Figure 6.4: Valeur du critère dans le pli à 90° pour trois surfaces successivement rompues dans le cas d'un stratifié $[0/90/0]$ et $[0_3/90_3/0_3]$

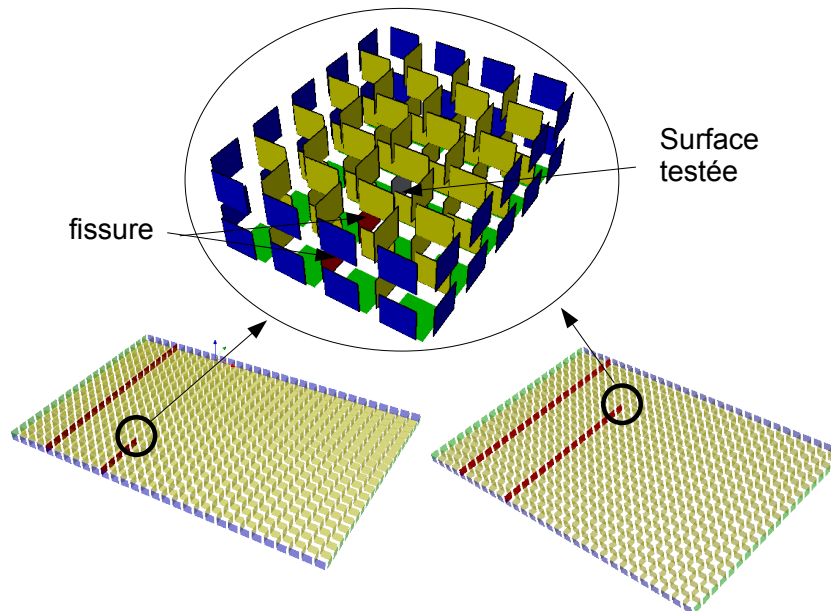


Figure 6.5: Configuration de référence dans le cas de l'avancée d'une fissure transverse d'un stratifié épais.

bord avant de se propager à coeur. La répartition aléatoire du taux de restitution critique fait que les fissures apparaissent aussi bien d'un côté que de l'autre de l'échantillon. L'évolution du critère explique l'arrêt des fissures au niveau du bord.

Le tableau 6.4 indique la valeur de déformation longitudinale nécessaire pour initier une microfissuration pour les différents stratifiés étudiés. On retrouve la courbe expérimentale obtenue par (Parvizi *et al.*, 1978) (Figure 6.8).

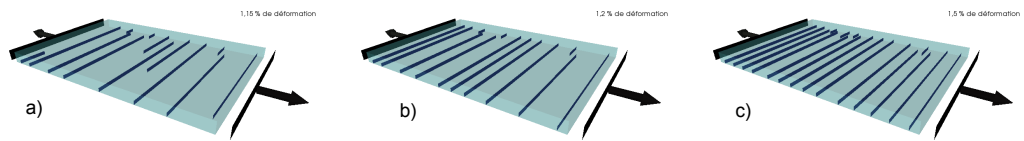


Figure 6.6: Evolution de la fissuration transverse pour trois pas de chargement dans le cas d'un stratifié $[0/90/0]$

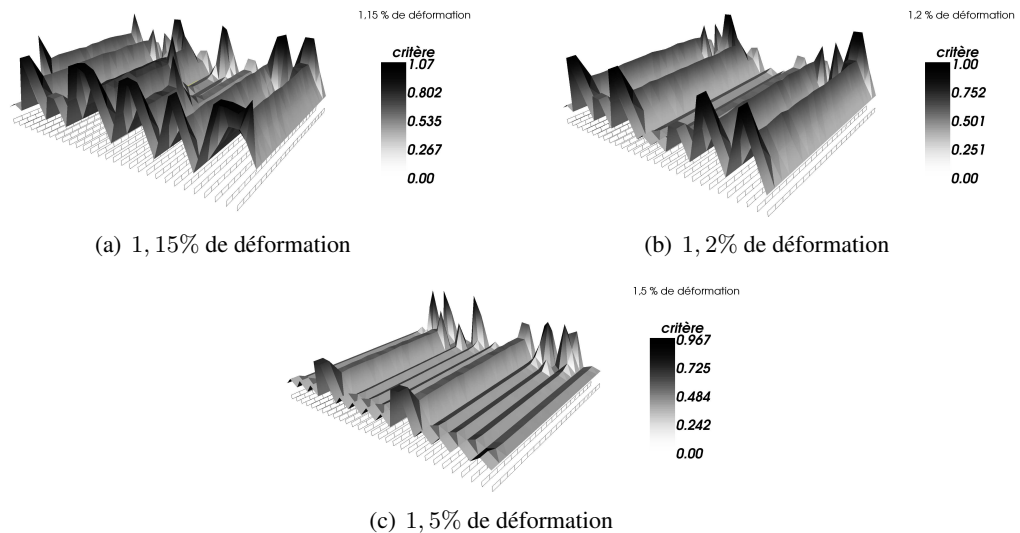


Figure 6.7: Valeur du critère dans le pli à 90° pour trois pas de chargement dans le cas d'un stratifié $[0/90/0]$

Stratifié	$[0/90/0]$	$[0_2/90_2/0_2]$	$[0_3/90_3/0_3]$	$[0_6/90_6/0_6]$
Déformation (%)	1.15	0.95	0.70	0.70

Tableau 6.4: Valeur de la déformation longitudinale pour l'apparition de la première microfissuration

1.2 Influence de l'ordre des plis

Si l'on s'intéresse à un stratifié $[90_2/0_4/90_2]$, on observe que des fissures apparaissent dans les deux plis à 90° de façon aléatoire au niveau des bords (Figure 6.9). Contrairement aux modèles microscopiques où des améliorations de modèle sont nécessaires, il est possible d'obtenir de bons résultats avec le modèle microscopique hybride sans changer aucun paramètre.

Remarque : Le modèle microscopique pourrait être modifié pour les plis de peau pour lesquels une valeur différente de l'épaisseur de transition serait utilisée.

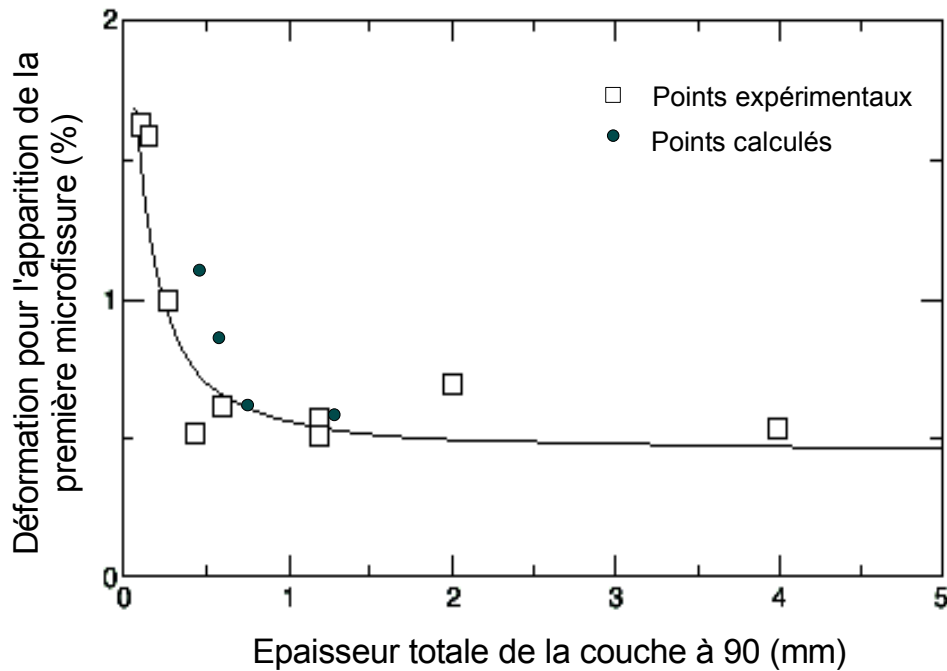


Figure 6.8: Valeur de déformation pour l'apparition de la première fissure transverse en fonction de l'épaisseur du pli à 90° : comparaison expérience / calcul

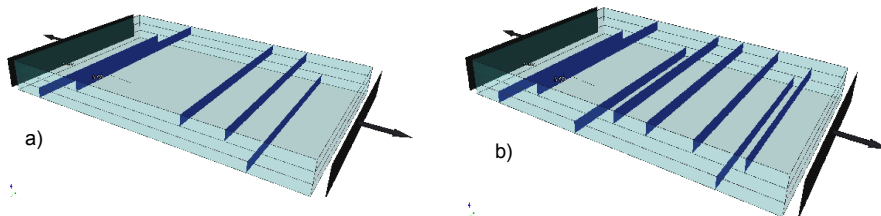
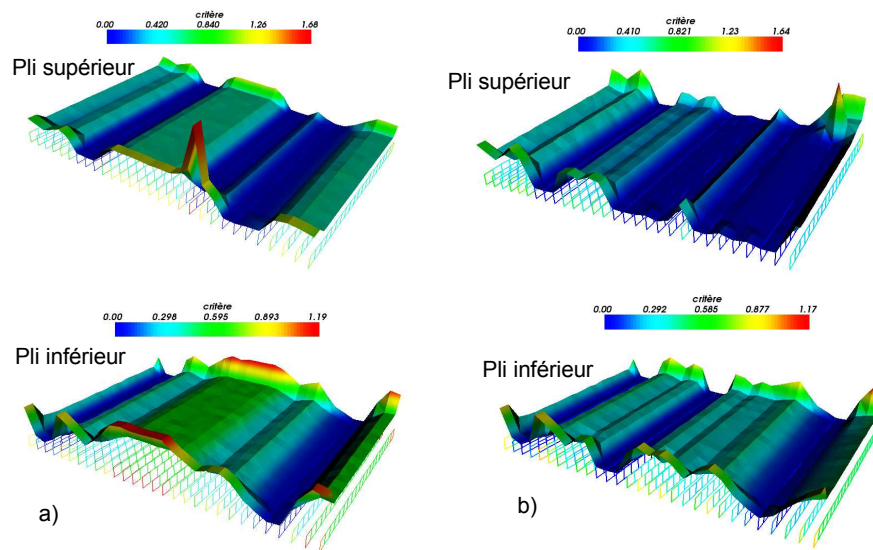
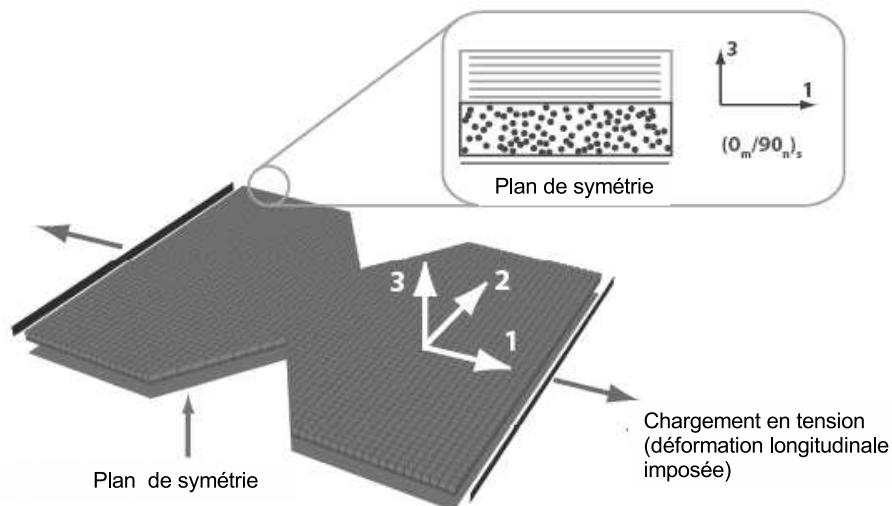


Figure 6.9: Evolution de la microfissuration pour un stratifié $[90_2/0_2]_s$

2 Influence de la géométrie : Plaque entaillée $[0_2/90]_s$

Un effort particulier a été fourni pour pouvoir tester toute sorte de géométrie à partir d'un contour quelconque mettant en oeuvre plusieurs singularités. Un seul exemple est proposé dans ce paragraphe et permet de mettre en évidence l'influence d'accidents de géométrie sur le développement de la microfissuration et du délaminage.

On s'intéresse à un stratifié $[0_2/90]_s$ contenant une bi-entaille. Le chargement ainsi que la définition des cellules sont donnés sur la figure 6.11. Le problème compte environ 5500 sous-structures, 20000 interfaces ce qui correspond à un problème direct de plus de 3.000.000 éléments finis.

Figure 6.10: Evolution du critère pour un stratifié $[90_2/0_2]_s$ Figure 6.11: Définition de la géométrie du stratifié bi-entaillé $[0_2, 90]_s$

Pour ce type de géométrie, les scénarios de dégradation sont complexes. Des expériences menées par (Beaumont, 1994) permettent de comparer qualitativement les résultats numériques aux observations expérimentales. Le matériau utilisé est le même que celui utilisé pour les exemples de stratifiés croisés en l'absence de données sur le matériau utilisé pour les expériences.

Les résultats obtenus par simulation sont tout à fait en accord avec les résultats expérimentaux. Ils permettent d'observer des scénarios de dégradation complexes, impossibles à

obtenir avec d'autres techniques. Le calcul reste cependant coûteux pour les mêmes raisons que précédemment, mais les observations sont plus précises étant donné que la dégradation est localisée. Les niveaux d'efforts évoluent selon le même ordre de grandeur que ceux donnés par (Beaumont, 1994).

On constate dans un premier temps une fissure longitudinale qui se développe dans le pli à 0° en pointe des entailles (Figure 6.12 B). Elle se propage de manière instable et se stabilise ensuite. En augmentant légèrement la déformation appliquée sur l'éprouvette, on constate que la fissuration transverse se développe dans le pli à 90° à partir de la fissure longitudinale de l'extérieur vers l'intérieur de l'éprouvette (Figure 6.12 C). Parallèlement à la propagation de ces fissures transverses, la fissure longitudinale se propage et s'accompagne d'un délaminage entre les plis croisés (Figure 6.12 D). La propagation de ce délaminage fait expérimentalement un angle donné entre les fissures transverses et la fissure longitudinale. On retrouve cette tendance numériquement.

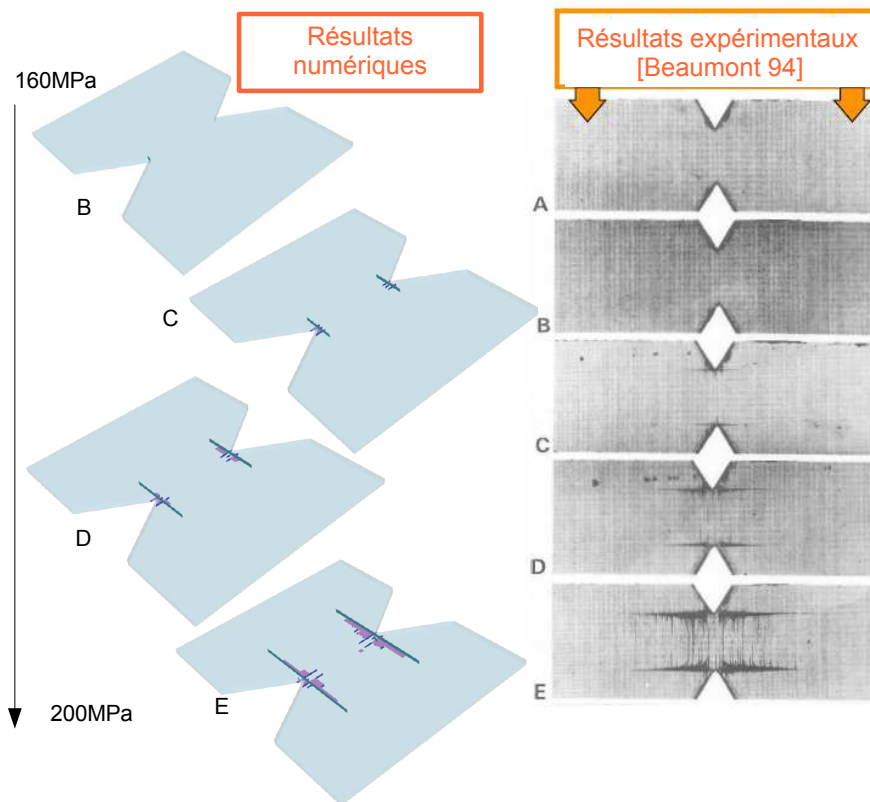


Figure 6.12: Evolution des dégradations pour une plaque bi-entaillée $[0_2, 90]_s$

Une analyse plus fine des critères par surface peut être menée pour observer les zones susceptibles de se dégrader par la suite. La figure 6.13 présente les critères successivement pour le pli à 90° , l'interface entre les plis et le pli à 0° . On observe notamment que le déla-

minage va continuer à se développer en s'étendant le long de la fissure longitudinale puis progressivement vers l'intérieur de la plaque. De la même manière, la fissure longitudinale va croître. C'est uniquement cette dégradation que l'on pourra observer dans le pli à 0° . Par contre dans le pli à 90° , des fissures sont susceptibles d'apparaître, uniquement dans la zone située entre les entailles.

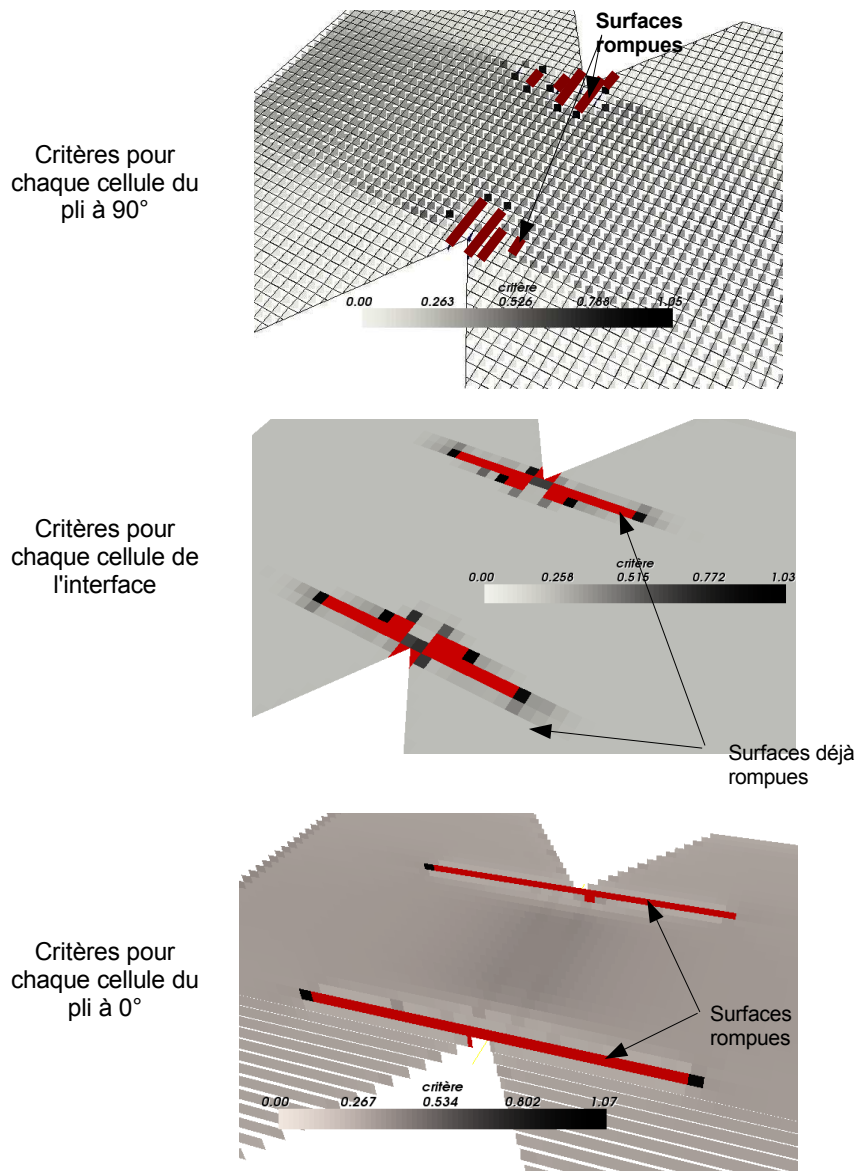


Figure 6.13: Critères pour une configuration donnée dans les plis et à l'interface.

Ces résultats sont très prometteurs et laissent envisager des calculs prédictifs pertinents. Un effort doit cependant être mené pour diminuer drastiquement le temps et le coût de calcul en implantant des techniques de simplification comme celles proposées dans le chapitre

précédent.

Des résultats supplémentaires sur des stratifiés contenant des plis différents de 0° ou 90° ont été réalisés. Ces simulations n'ont pas été menées suffisamment loin pour observer tous les points mis en évidence expérimentalement et ne sont donc pas présentées ici. Les conclusions et remarques sont cependant similaires à celles données précédemment.

Conclusions et Perspectives

Cette thèse a permis de mettre en oeuvre un nouveau modèle microscopique pour la simulation des dégradations dans les composites stratifiés. Le modèle introduit des surfaces de ruptures minimales pour quantifier de manière discrète les mécanismes de fissuration transverse, délaminage local. Un milieu continu entre ces surfaces minimales est utilisé pour modéliser les mécanismes considérés comme continus à l'échelle du pli tels que l'endommagement et le délaminage diffus.

Une première implantation du modèle consiste à introduire *a priori* des surfaces minimales de rupture potentielles. Compte tenu des dimensions mises en jeu, le nombre de surfaces nécessaires est considérable. Le modèle doit donc être couplé à une stratégie de calcul efficace permettant de prendre en compte non seulement le comportement non-linéaire du milieu et des surfaces rompues (contact avec frottement) mais aussi la taille importante des problèmes mis en jeu. Les simulations peuvent ainsi atteindre plusieurs milliards de degrés de liberté, ce qui est hors de portée des stratégies classiques. Une stratégie multiéchelle avec homogénéisation en espace a été développée en 3D et adaptée au calcul du modèle microscopique. Cette méthode basée sur une décomposition de domaine mixte est extensible numériquement et naturellement parallélisable. L'adaptation au modèle microscopique nécessite une amélioration de certains points de la stratégie (diminution de la taille du problème global et limitation du nombre de problèmes microscopiques pour les sous-domaines). Pour rompre, les surfaces de rupture doivent suivre un critère de rupture en taux de restitution d'énergie comme spécifié par le modèle microscopique. L'évaluation de ce taux de restitution selon chaque mode s'avère particulièrement coûteux. Une approximation de ces quantités est réalisée en menant des calculs localisés pour certaines configurations et en utilisant ces configurations pour la détermination sans calcul d'autres taux de restitution. Cette stratégie permet un gain considérable en temps de calcul mais reste le point bloquant de la méthode.

Les résultats obtenus par ce modèle microscopique calculé sont très satisfaisants et inaccessibles par d'autres modèles. En effet, outre les résultats sur éprouvettes croisés proches des observations expérimentales, les patterns de dégradation obtenus sur des stratifications plus complexes ou des géométries variées montrent les capacités du modèle à décrire tous les scénarios macroscopiques possibles ("splitting", délaminage macroscopique) à partir de mécanismes élémentaires. Des simulations supplémentaires sur éprouvettes trouées pourraient être menées et comparées aux résultats expérimentaux de la littérature ([Pierron et al., 2007](#)) mais nécessitent quelques développements supplémentaires (parallélisme notamment) pour que le calcul soit réalisable.

Les perspectives pour ce modèle microscopique sont très nombreuses. Compte tenu de la simplicité du modèle, des améliorations concernant la prise en compte de l'environnement (oxydation, hygrométrie) et du chargement (fatigue) sont tout à fait possible. Les taux de restitution critique de chacune des surfaces prennent alors en compte à la fois l'effet de l'environnement et du chargement par l'introduction de coefficients correcteurs. Une première mise en oeuvre concluante a été réalisée sur un stratifié octogonal soumis à des cycles thermiques sous différents environnements (Lubineau *et al.*, 2006). Les résultats qualitatifs en l'absence de données expérimentales précises permettent d'observer les patterns de fissurations transverses caractéristiques de ce type de chargement et d'environnement (Figures 6.14 et 6.15). La comparaison aux observations réalisées par (Lafarie-Frénot & Ho, 2006) semble tout à fait prometteuse.

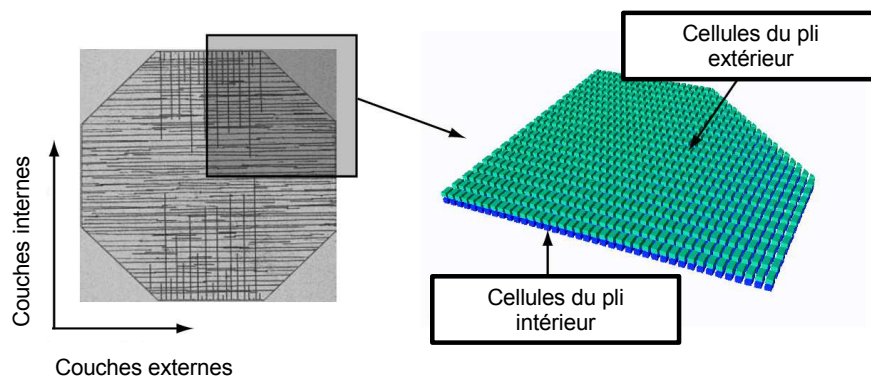


Figure 6.14: Modélisation d'un quart d'octogone $[0_2/90_2]_s$ sous chargement cyclique thermique et atmosphère oxydante (air)

D'un point de vue stratégie de résolution, cette thèse apporte un premier élément de réponse mais de nombreux points restent cependant à approfondir. Tout d'abord, l'endommagement diffus n'a pas été introduit ni les ruptures de fibres (dégradation discrète des volumes élémentaires). L'utilisation d'une variable d'endommagement uniforme par sous-structure et l'introduction d'un comportement non-linéaire endommageable dans l'étape locale de la stratégie multiéchelle peut être proposée comme première approche. Le comportement viscoplastique du matériau fibre/matrice nécessitera aussi une implantation de comportements non-linéaires plus élaborés dans l'étape locale de la stratégie.

Pour réduire le coût du calcul, qui est aujourd'hui encore le point limitant, deux points devront être éclaircis. Le premier concerne la troisième échelle. L'étude menée n'est pas satisfaisante pour une utilisation dans le cadre du modèle microscopique. Il est indispensable que ce calcul macro ne soit pas le point pénalisant en terme de mémoire et de temps de résolution. Dans le prolongement de ce travail, une réflexion sur l'intégration du point P3 de la stratégie LATIN devra être menée pour limiter le nombre de calculs. Une première idée a été proposée pour la simplification des problèmes microscopiques mais n'est pas réellement fiable dans son implantation actuelle. Pour palier la plupart de ces difficultés, la non définition *a priori* des surfaces de rupture aurait l'avantage de simplifier non seulement la mise

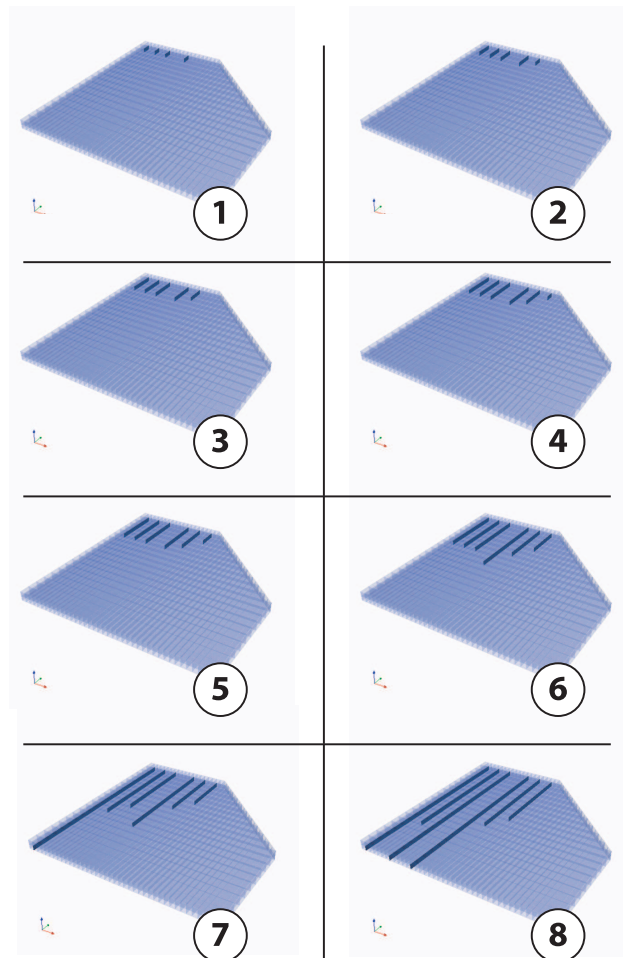


Figure 6.15: Evolution de la fissuration transverse dans le pli à 90°

en données du problème mais aussi sa résolution. Un calcul méso complet permettrait de déterminer les zones pour lesquelles le modèle micro est nécessaire puis une technique *ad hoc* permettrait d'introduire les surfaces de rupture potentielles. Ce type d'approche devrait réduire considérablement le coût de calcul et étendre les simulations à de réelles structures industrielles.

Bibliographie

- A. Delaplace, D. Violeau, F. B. (2005). Modèles micro ou méso probabilistes. Dans *Journée du Club des Affiliés : Les approches stochastiques et la modélisation des méconnaissances au LMT-Cachan*.
- Allen, D. (1994). Damage evolution in laminates. Dans Talreja, R. (Ed.), *Damage Mechanics of Composite Materials* (R.B. Pipes ed.), volume 9 of *Composite Materials Series*, (pp. 79–116)., Amsterdam. Elsevier Science.
- Allen, D. (2001). Homogenization principles and their application to continuum damage mechanics. *Composites Science and Technology*, 61(15), 2223–2230.
- Allen, D., Harris, C., and Groves, S. (1987a). A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage - part i : Theoretical development. *International Journal of Solids and Structures*, 23(9), 1301–1318.
- Allen, D., Harris, C., and Groves, S. (1987b). A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage - part ii : application to matrix cracking in laminated composites. *International Journal of Solids and Structures*, 23(9), 1319–1338.
- Allix, O. and Corigliano, A. (2000). Some aspects of interlaminar degradation in composites. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185(2-4), 203–224.
- Allix, O., Guédra-De Georges, D., Guinard, S., and Vinet, A. (2000). Analyse de la tenue aux petits chocs des stratifiés composites par la mécanique de l'endommagement. *Mécanique et Industrie*, 1.
- Allix, O. and Ladevèze, P. (1992). Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, 22, 235–242.
- Allix, O., Ladevèze, P., and Corigliano, A. (1995). Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 31, 61–74.
- Allix, O., Lévêque, D., and Perret, L. (1998). Identification and forecast of delamination in composite laminates by an interlaminar interface model. *Composites Science and Technology*, 58(5), 671–678.
- Auriel, G., Boubal, G., and Ladevèze, P. (1982). Sur une méthode de calcul des effets locaux. *Comptes Rendus des Troisièmes Journées Nationales sur le Composites, JNC3*, 279–288.
- Bailey, J. and Parvizi, A. (1981). On fibre debonding effects and the mechanisms of transverse-ply failure in cross-ply laminates of glass fiber/thermoset composites. *Journal of Material Science*, 16, 649–659.

- Beaumont, P. (1994). Damage accumulation. Dans Talreja, R. (Ed.), *Damage Mechanics of Composite Materials* (R.B. Pipes ed.), volume 9 of *Composite Materials Series*, (pp. 139–185), Amsterdam. Elsevier Science.
- Ben Dhia, H. (1998). Multiscale mechanical problems : the arlequin method. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 326, 899–904.
- Ben Dhia, H. and Rateau, G. (2001). Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences*, 332, 649–654.
- Bensoussan, A., Lions, J.-L., and Papanicolaou, G. (1978). *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. North-Holland Pub.
- Berthelot, J. (2003). Transverse cracking and delamination in cross-ply glass-fiber and carbon-fiber reinforced plastic laminates : Static and fatigue loading. *Applied Mechanics Reviews*, 56(1), 111–147.
- Berthelot, J., Leblond, P., El Mahi, A., and Le Corre, J.-F. (1996). Transverse cracking of cross-ply laminates : Part 1. analysis. *Composites Part A*, 27A(4), 989–1001.
- Boniface, L., Smith, P., Bader, M., and Rezaifard, A. (1997). Transverse ply cracking in cross-ply cfrp laminates - initiation or propagation controlled ? *Journal of Composite Materials*, 34(11), 1080–1112.
- Bordreuil, C. and Hochard, C. (2004). Finite element computation of woven ply laminated composite structures up to rupture. *Applied Composite Materials*, 3, 127–143.
- Camasho, G. and Ortiz, M. (1996). Computational modelling of impact damage in brittle materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33, 2899–2938.
- Carrère, N., Schieffer, A., and Maire, J.-F. (2003). Apport de l'analyse multiéchelle pour le calcul de structures cmo. Dans *JNC 13*, Strasbourg.
- Christman, T., Needleman, A., and Suresh, S. (1989). An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites. *Acta Metallurgica*, 37(11), 3029–3050.
- Corigliano, A. and Mariani, S. (2001). Simulation of damage in composites by means of interface models : parameter identification. *Composites Science and Technology*, 61, 2299–2315.
- Cosserat, E. and Cosserat, F. (1909). *Théorie des milieux déformables*. Hermann et fils (Paris).
- Crossman, F. and Wang, A. (1982). The dependence of transverse cracking and delamination on ply thickness in graphite/epoxy laminates. Dans Reifsnider, K. (Ed.), *Damage in composite materials*, (pp. 118–139). ASTM-STP 775.
- Curtin, W. and Scher, H. (1990). Brittle fracture in disordered materials : a spring network model. *Journal of Materials Research*, 5(3), 535–553.

- De Borst, R. (2003). Numerical aspects of cohesive-zone models. *Engineering Fracture Mechanics*, 78(14), 1743–1757.
- Devries, F., Dumontet, H., Duvaut, G., and Léné, F. (1989). Homogenization and damage for composite structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 27, 285–298.
- Dumontet, H. (1986). Study of a boundary layer problem in elastic composite. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 20, 265–286.
- Duvaut, G. (1976). Matériaux élastiques composites à structure périodique, homogénéisation. Dans *Proceedings of the IUTAM Congress, Delft*.
- Dvorak, G. and Laws, N. (1987). Analysis of progressive matrix cracking in composite laminates. part 2 : First ply failure. *Journal of Composite Materials*, 21, 309–329.
- Eshelby, J. (1957). The determination of the field of an ellipsoidal inclusion and related problems. Dans *Proceedings of the Royal Society of London*, volume 241 of A, (pp. 376–396).
- Farhat, C., Lesoinne, M., Le Tallec, P., Pierson, K., and Rixen, D. (2001). FETI-DP : A dual-primal unified FETI method - part i : A faster alternative to the two-level FETI method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50, 1523–1544.
- Farhat, C., Pierson, K., and Lesoinne, M. (1996). A simple an unified framework for accelerating the convergence of iterative substructuring methods with lagrange multipliers : Applications to the design of new feti coarse problems. Technical Report CU-CAS-96-26, Center for Aerospace Structures, CU.
- Farhat, C. and Roux, F.-X. (1991). A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32, 1205–1227.
- Fedorenko, R. (1964). The speed of convergence of one iterative process. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 4, 227–235.
- Feyel, F. (2003). A multilevel finite element method (FE^2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 3233–3244.
- Feyel, F. and Chaboche, J.-L. (2000). FE^2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fiber sic/ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183, 309–330.
- Fish, J., Sheck, K., Pandheeradi, M., and Shepard, M. (1997). Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization : theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148, 53–73.
- Forest, S. and Sab, K. (1998). Cosserat overall modeling of heterogeneous materials. *Mechanics Research Communications*, 25(4), 449–454.

- Fukunaga, H., Chou, T.-W., Peters, P., and Schulte, K. (1984). Probabilistic failure strength analyses of graphite/epoxy cross-ply laminates. *Journal of Material Science*, 18, 339–356.
- Garrett, K. and Bailey, J. (1977). Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester. *Journal of Material Science*, 12, 157–168.
- Ghosh, S., Lee, K., and Moorthy, S. (1995). Multiple scale analysis of heterogeneous elastic structures using homogenisation theory and voronoï cell finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 32(1), 27–62.
- Glowinski, R. and Le Tallec, P. (1990). Augmented lagrangian interpretation of the nonoverlapping schwartz alternating method. Dans *Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*, (pp. 224–231). Philadelphia, SIAM.
- Gosselet, P. and Rey, C. (2002). On a selective reuse of krylov subspaces in newton-krylov approaches for nonlinear elasticity. Dans *Domain decomposition methods in science and engineering*, (pp. 419–426).
- Guédra-De Georges, D. (2006). Recent advances to assess mono- and multi-delaminations behaviour of aerospace composites. *Composites Science and Technology*, 66, 796–806.
- Guidault, P.-A., Allix, O., Champaney, L., and Navarro, J.-P. (2004). A micro-macro approach for crack propagation. (soumis pour publication dans Computers and Structures).
- Hashin, Z. (1962). The elastic moduli of heterogeneous materials. *ASME Journal for Applied Mechanics*, 29, 143–150.
- Hashin, Z. (1985). Analysis of cracked laminates : a variational approach. *Mechanics of Materials*, 4, 121–136.
- Highsmith, A. and Reifsnider, K. (1982). Stiffness reduction in composite laminates, 103–117.
- Hill, R. (1965). A self-consistent mechanics of composites materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13, 213–222.
- Hinton, M., Kaddour, A., and Soden, P. (2002). A comparison of the predictive capabilities of current failure theories for composite laminates, judged against experimental evidence. *Composites Science and Technology*, 62, 1725–1797.
- Hochard, C., Aubourg, P.-A., and Charles, J.-P. (2001). Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric cfrp laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61, 221–230.
- Ibrahimbegovic, A. and Delaplace, A. (2003). Microscale and mesoscale discrete models for dynamic fracture of structures built of brittle material. *Computers and Structures*, 81, 1255–1265.

- Kachanov, L. (1958). On creep rupture time. Dans *Proc. Acad. Sci.*, number 8 in Div. Eng. Sci., (pp. 26–31), USSR.
- Kouznetsova, V., Geers, M., and Brekelmans, W. (2002). Multi-scale constitutive modeling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54, 1235–1260.
- Ladevèze, P. (1985). Sur une famille d’algorithmes en mécanique des structures. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences, Série II b*, 300(2), 41–44.
- Ladevèze, P. (1986). Sur la mécanique de l’endommagement des composites. Dans C.Bathias and D.Menkès (Eds.), *Comptes-rendus des JNC5*, (pp. 667–683), Paris. Plurais Publication. in French.
- Ladevèze, P. (1994). Inelastic strains and damage. Dans Taljera, R. (Ed.), *Damage Mechanics of Composite Materials*, (pp. 117–136). Elsevier.
- Ladevèze, P. (1999). *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*. Berlin : Springer Verlag.
- Ladevèze, P. (2004). Multiscale modelling and computational strategies for composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60, 233–253.
- Ladevèze, P. (2005). Multiscale computational damage modelling of laminate composites. Dans Sadowski, T. (Ed.), *Multiscale modelling of damage and fracture processes in composite materials*, CISM courses, (pp. 171–212). Springer-Verlag.
- Ladevèze, P., Allix, O., Deü, J.-F., and Lévêque, D. (2000). A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(1-2), 105–122.
- Ladevèze, P. and Dureisseix, D. (2000). A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, 1, 18–28.
- Ladevèze, P. and LeDantec, E. (1992). Damage modeling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3), 257–267.
- Ladevèze, P., Loiseau, O., and Dureisseix, D. (2001). A micro-macro and parallel computational strategy for highly heterogeneous structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52, 121–138.
- Ladevèze, P. and Lubineau, G. (2002). An enhanced mesomodel for laminates based on micromechanics. *Composites Science and Technology*, 62(4), 533–541.
- Ladevèze, P. and Lubineau, G. (2003a). On a damage mesomodel for laminates : micromechanics basis and improvement. *Mechanics of Materials*, 35(8), 763–775.
- Ladevèze, P. and Lubineau, G. (2003b). Pont entre les "micro" et "méso" mécaniques des composites stratifiés. *Comptes-Rendus Mécanique*, 331, 537–544.

- Ladevèze, P. and Lubineau, G. (2003c). Science and technology of the fatigue response of fibre-reinforced plastics. Dans Harris, B. (Ed.), *Fatigue in Composites*, A computational meso-damage model for life prediction for laminates. Woodhead Publishing / CRC Press.
- Ladevèze, P., Lubineau, G., and Marsal, D. (2006). Towards a bridge between the micro- and mesomechanics of delamination for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 66(6), 698–712.
- Ladevèze, P., Lubineau, G., and Violeau, D. (2006). A computational damage micromodel of laminated composites. *International Journal of Fracture*, 137(1-4), 139–150.
- Ladevèze, P., Lubineau, G., Violeau, D., and Marsal, D. (2005). A computational damage micromodel for laminate composites - keynote lecture. Dans *IUTAM Symposium on Multiscale Modelling of Damage and Fracture Processes in Composite Materials*.
- Ladevèze, P. and Nouy, A. (2002). Une stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation en espace et en temps. *Comptes-Rendus Mécanique*, 330, 683–689.
- Ladevèze, P. and Nouy, A. (2003). On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 3061–3087.
- Ladevèze, P., Nouy, A., and Loiseau, O. (2002). A multiscale computational approach for contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 4869–4891.
- Lafarie-Frénot, M. C. and Ho, N. (2006). Influence of free edge intra-laminar stresses on damage process of cfrp laminates under thermal cycling conditions. *Composites Science and Technology*, 66(10), 1354–1365.
- Lagattu, F. and Lafarie-Frénot, M. (2000). Variation of PEEK matrix crystallinity in APC-2 composite subjected to large shearing deformations. *Composites Science and Technology*, 60(4), 605–612.
- Laurin, F. (2005). *Analyse multiéchelle des mécanismes de rupture et de la tenue structurale des composites à matrice organique*. Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté - Onera Châtillon.
- Laurin, F., Carrère, N., and Maire, J.-F. (2006). Multiscale progressive failure approach for strength analysis of high gradient composite structures. Dans *12th European Conference on Composite Materials (ECCM12)*, Biarritz.
- Leclerc, H. (2005). Outils d'assistance au développement d'applications d'analyse numérique et de mécanique. Dans *Séminaire du LMT Cachan*.
- Lecuyer, F., Engrand, D., and Dumontet, H. (1987). Comparaison de méthodes de couche limite pour l'analyse des effets de bords dans les matériaux composites. *Annales des Composites*, 1, 51–64.

- Loiseau, O., Ladevèze, P., and Dureisseix, D. (2002). Sur une stratégie de calcul multi-échelle pour l'analyse des structures composites. discrétisation et performances. *Revue Européenne des Eléments Finis*, 11, 349–362.
- Lubineau, G. and Ladevèze, P. (2005). Towards a micromechanics-based damage mesomodel for cfrp laminates under thermomechanical cyclic loading. *Science and Engineering of Composite Materials*, 12(1/2.), 71–82.
- Lubineau, G., Ladevèze, P., and Violeau, D. (2006). Durability of cfrp laminates under thermomechanical loading : A micro-meso damage model. *Composites Science and Technology*, 66(7-8), 983–992.
- Lubineau, G., Ladevèze, P., Violeau, D., and Leclerc, H. (2006). A multiscale computational strategy for laminated structures analysis. Dans *7th World Congress on Computational Mechanics*.
- Mandel, J. (1993). Balancing domain decomposition. *Communication in Applied Numerical Methods*, 9, 233–241.
- Manders, P., Chou, T.-W., Jones, F., and Rock, J. (1983). Statistical analysis of multiple fracture in 0°/90°/0° glass fibre/epoxy resin laminates. *Journal of Material Science*, 18, 2876–2889.
- Melenk, J. and Babuska, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139, 289–314.
- Moës, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, 131–150.
- Mori, T. and Tanaka, K. (1973). Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21, 571–574.
- Nairn, J. (1989). The strain energy release rate of composite microcracking : a variational approach. *Journal of Composite Materials*, 23, 1106–1129.
- Nairn, J. (2000a). Exact and variational theorems for fracture mechanics of composites with residual stresses, traction-loaded cracks, and imperfect interfaces. *International Journal of Fracture*, 105, 243–271.
- Nairn, J. (2000b). Matrix microcracking in composites. Dans Taljara-Manson (Ed.), *Polymer Matrix Composites, Comprehensive Composite Materials*, Ch.13, (pp. 403–432). Elsevier Science.
- Nairn, J. and Hu, S. (1992). The initiation and growth of delaminations induced by matrix microcracks in laminated composites. *International Journal of Fracture*, 57, 1–24.
- Nairn, J. and Hu, S. (1994). Matrix microcracking. Dans Taljara, R. (Ed.), *Damage Mechanics of Composite Materials*, (pp. 187–243). Elsevier.

- Néron, D., Ladevèze, P., Dureisseix, D., and Schrefler, B. A. (2003). A computational strategy for multiphysics problems involving multiscale aspects. Dans Owen, D., Oñate, E., and Suárez, B. (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Computational Plasticity*, (pp. 128). CIMNE, Barcelona, Spain.
- Nineb, S., Alart, P., and Dureisseix, D. (2005). Approche multiéchelle des systèmes de tenségrité. Dans Lavoisier (Ed.), *Actes du Septième Colloque National en Calcul des Structures, Giens, France*, volume 1, (pp. 81–86). Hermès Science.
- Oden, J., Vemaganti, K., and Moës, N. (1999). Hierarchical modelling of heterogeneous solids. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 172, 2–25.
- Oden, J. and Zohdi, T. (1997). Analysis and adaptative modelling of highly heterogeneous structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148, 367–392.
- Ogin, S., Smith, P., and Beaumont, P. (1985). A stress intensity stiffness reduction during the fatigue of a (0/90)_s gfrp laminate. *Composites Science and Technology*, 24, 47–59.
- Parvizi, A., Garrett, K., and Bailey, J. (1978). Constrained cracking in glass fiber-reinforced epoxy cross-ply laminates. *Journal of Material Science*, 13, 195–201.
- Pierron, F., Green, B., Wisnom, M. R., and Hallett, S. R. (2007). Full-field assessment of the damage process of laminated composite open-hole tensile specimens. part ii : experimental results. *Composites : Part A*. Accepted.
- Rabotnov, Y. (1968). Creep rupture. Dans Springer, B. (Ed.), *Proc. XII. Int. Congr. on Applied Mechanics*, Stanford.
- Remmers, J., Wells, G., and De Borst, R. (2003). A solid-like shell element allowing for arbitrary delaminations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(13), 2013–2040.
- Renard, J. (1990). Modélisation de la dégradation d’une pièce composite par une simulation numérique à deux échelles. *La Recherche Aérospatiale*, 1, 57–66.
- Rixen, D. and Farhat, C. (1999). A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44, 489–516.
- Réthoré, J., Gravouil, A., and Combescure, A. (2004). A stable numerical scheme for the finite element simulation of dynamic crack propagation with remeshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(42-44), 4493–4510.
- Sanchez-Palencia, E. (1974). Comportement local et macroscopique d’un type de milieux physiques hétérogènes. *International Journal for Engineering Science*, 12, 231–251.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). Non homogeneous media and vibration theory. Dans *Lecture Note in Physics*, volume 127. Springer Verlag.
- Schellekens, J. and De Borst, R. (1993). A non-linear finite element approach for the analysis of mode i-free edge delamination in composites. *International Journal of Solids and Structures*, 30(14), 1239–1253.

- Sluis, O. V. D., Schreurs, P., and Meijer, H. (1999). Effective properties of a viscoplastic constitutive model obtained by homogenization. *31*, 743–759.
- Sluis, O. V. D., Vosbeek, P., Schreurs, P., and Meijer, H. (1998). Homogenization of heterogeneous polymers. *International Journal of Solids and Structures*, *36*, 3193–3214.
- Smit, R., Brekelmans, W., and Meijer, H. (1998). Prediction of the mechanical behaviour of non-linear heterogeneous systems by multi-level finite element modelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *155*, 181–192.
- Southwell, R. (1935). Stress calculation in frameworks by the method of systematic relaxation of constraints. Dans *Proceedings of The Royal Society of Edinburg, Section A*, volume 151, (pp. 56–95). Philadelphia, SIAM.
- Strouboulis, T., Babuska, I., and Copps, K. (2000). The design and analysis of the generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, *181*, 43–69.
- Suffis, A., Lubrecht, T., and Combescure, A. (2003). Damage model with delay effect : Analytical and numerical studies of the evolution of the characteristic damage length. *International Journal of Solids and Structures*, *40*(13-14), 3463–3476.
- Talreja, R. (1985). Transverse cracking and stiffness reduction in composite laminates. *Journal of Composite Materials*, *19*, 355–375.
- Talreja, R. (1986). Stiffness properties of composite laminates with matrix cracking and interior delamination. *Engineering of Fracture Mechanics*, *25*(5-6), 751–762.
- Talreja, R. (1994). Damage characterization by internal variables. Dans Talreja, R. (Ed.), *Damage Mechanics of Composite Materials* (R.B. Pipes ed.), volume 9 of *Composite Materials Series*, (pp. 53–78), Amsterdam. Elsevier Science.
- Thionnet, A. and Renard, J. (1993). Meso-macro approach to transverse cracking in laminated composites using talreja's model. *Composites Engineering*, *3*(9), 851–871.
- Trovalet, M. (2006). Amélioration d'une stratégie de calcul multiéchelle de décomposition de domaine mixte, basée sur la stratégie latin. Dans *Mémoire de Master 2 DEA TACS, LMT-Cachan*.
- Tvergaard, V. (1990). Analysis of tensile properties for a whisker-reinforced metal-matrix composite. *Acta Metallurgica*, *38*(2), 185–194.
- Violeau, D. (2003). Sur une amélioration de la stratégie de calcul multiéchelle avec homogénéisation. Mémoire du DEA TACS, LMT-Cachan.
- Violeau, D., Ladevèze, P., and Lubineau, G. (2005). Stratégie de calcul à 3 échelles pour la simulation des structures composites stratifiées. Dans *17e Congrès français de mécanique*.
- Violeau, D., Ladevèze, P., and Lubineau, G. (2006). Micromodel based computations for laminated composites. Dans *8th International Conference on Computational Structures Technology*.

- Viroleau, D., Ladevèze, P., and Lubineau, G. (2007). Micromodel based computations for laminated composites. (soumis pour publication dans *Computers and Structures*).
- Wang, A. (1984). Fracture mechanics of sublaminate cracks in composite materials. *Composites Technology Review*, 6, 45–62.
- Wang, A., Choi, P., and Lei, S. (1984). A stochastic model for the growth of matrix cracks in composite materials. *Journal of Composite Materials*, 18, 239–254.
- Wittel, F., Kun, F., Kröplin, B.-H., and Herrmann, H. (2003). A study of transverse ply cracking using a discrete element method. *Computational Materials Science*, 28, 608–619.
- Zhu, H., Zhib, H., and Aifantis, E. (1997). Strain gradients and continuum modeling of size effect in metal matrix composites. *Acta Mechanica*, 121, 165–176.
- Zohdi, T., Oden, J., and Rodin, G. (1996). Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 138, 273–298.

Quatrième partie

Annexes

Procédure de génération des cellules supermacro

Le point délicat de la stratégie utilisée est la mise en donnée, compte tenu du nombre de cellules mises en jeu et des géométries que l'on souhaite étudier (trou, entaille, empilements variés...) Il est alors nécessaire de définir une procédure de création des sous-structures ou des cellules super-macro efficace. On présente dans cette annexe la technique retenue pour générer un maillage structuré de rectangles (cellules super-macro) qui respecte un contour donné.

1 Création du maillage super macro

1.1 Maillage quadtree

La zone à mailler est constituée d'un contour extérieur et d'un ou plusieurs contours intérieurs. La séparation de ces différents contours permet de simplifier la création des cellules en ayant à gérer peu de cas différents. Les contours sont constitués de segments de droite repérés par leurs points extrémité rangés par ordre croissant et d'arcs de cercle définis par les points extrémité et le centre (on se restreint par mesure de simplicité aux arcs de cercle définis dans un même quadrans seulement).

La procédure de création du maillage structuré est basée sur les techniques de maillage Quadtree ou Octree. On découpe successivement un rectangle initial contenant entièrement le contour en 4 rectangles et on vérifie que chaque point des rectangles nouvellement créés est strictement contenu dans le contour. Plusieurs cas sont ensuite considérés (Figure A.1) :

- Si un des 4 points définissant chaque rectangle est strictement à l'intérieur et les autres en dehors (ou sur le contour) on continue de découper ce même rectangle.
- Si les 4 points sont en dehors on stoppe la procédure de découpage du rectangle concerné.
- Si les 4 points sont strictement à l'intérieur, la procédure s'arrête pour ce rectangle.

Par construction, on a alors des cellules raffinées sur le bord et grossières à l'intérieur. On peut aussi demander à vérifier différents critères comme par exemple une taille maximale de cellule intérieure à ne pas dépasser (pour éviter d'avoir des cellules trop importantes), un découpage fin des cellules situées à une certaine distance du contour, ou un découpage fin pour une zone donnée...

Dans tous les cas la procédure s'arrête quand la taille minimale des cellules est atteinte (taille des sous-structures élémentaires définie selon x et y).

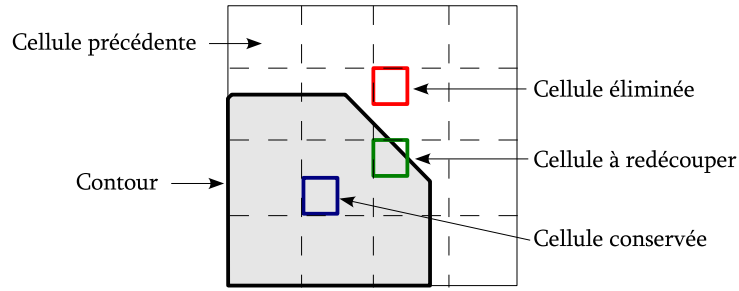


Figure A.1: Découpage des cellules pour la définition d'un pavage structuré

La séparation en contour extérieur et intérieur permet de n'avoir à traiter qu'une seule procédure, à savoir, repérer si un point est à l'intérieur strict ou à l'extérieur d'un contour donné.

1.2 Procédure de repérage de la position d'un point par rapport à un contour fermé

■ La première étape consiste à savoir si le point est directement sur le contour ou non. On détaille la procédure pour des segments sachant que celle-ci est exactement identique aux équations près pour les arcs de cercle.

On projette donc le point M perpendiculairement sur la droite support d'un segment [AB] constituant le contour. Le projeté est noté H et on détermine les distances AH et BH. Si la distance MH est inférieure à un epsilon donné (pour palier les erreurs numériques) et que les longueurs AH et BH sont inférieures à la longueur AB toujours à epsilon près, le point est considéré sur le segment et donc sur le contour. La procédure s'arrête donc pour le contour considéré et on stocke l'indication d'appartenance au contour pour ne pas avoir à effectuer les opérations de repérage pour les segments suivants.

La position du projeté de H est donnée par :

$$x_H = \frac{b_2 * (x_B - x_A) - b_1 * (y_B - y_A)}{det}$$

$$y_H = \frac{b_1(x_B - x_A) + b_2 * (y_B - y_A)}{det}$$

avec

$$det = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

$$b_1 = (x_B - x_A)y_A - x_A(y_B - y_A)$$

$$b_2 = x(x_B - x_A) + y(y_B - y_A)$$

■ Si le point n'est pas sur le contour (à epsilon près), on passe à la deuxième étape consistant à déterminer si le point est strictement à l'intérieur ou strictement à l'extérieur. Pour

ce faire, on regarde les intersections entre une droite parallèle à l'axe y passant par le point M considéré et les segments constituant le contour. Si le nombre d'intersections à droite du point M est pair, le point est nécessairement hors du contour, sinon il est à l'intérieur. Il faut cependant ne pas considérer les intersections potentielles avec des segments horizontaux et ne prendre en considération que les segments inclinés ou verticaux (Figure A.2).

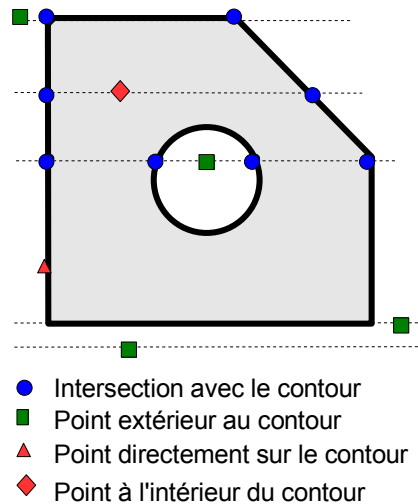


Figure A.2: Cas possibles d'appartenance d'un point à un contour

1.3 Adaptation des cellules au contour exactement

La procédure de génération de maillage structuré permet de créer des cellules rectangulaires adaptées aussi bien que possible au contour. Cependant, dans de nombreux cas, il n'est pas raisonnable d'utiliser de telles géométries de cellules (par ailleurs elles mêmes maillées) car les angles droits entraînent nécessairement de fortes concentrations de contraintes qui n'existent pas en réalité. Ainsi une procédure d'adaptation des cellules de bord a été proposée. Elle permet de garder le maillage structuré tout en adaptant le pavage au contour (Figure A.3).

Lors de la création des cellules, le résultat du test d'appartenance de chaque point à l'intérieur du contour a été stocké. Ainsi, on ne s'intéresse qu'aux cellules ayant au moins un point en dehors strictement (les points au voisinage immédiat du contour sont maintenant considérés comme étant à l'intérieur du contour). Le but de la procédure est de définir une nouvelle forme de cellule à partir des sommets de la cellule rectangulaire initiale (création de nouveaux sommets). Pour chaque cellule, on parcourt successivement tous ses sommets. Pour chaque sommet A , on note B le sommet suivant dans la liste des sommets. La figure A.4 détaille la procédure pour une cellule de bord et permet de mettre en évidence quelques possibilités de construction. Chaque point possède une indication d'appartenance ou non au contour. Si les deux points sont en dehors du contour fermé (figure A.4 cas 3), on passe au sommet suivant sans rien stocker. Si les deux points sont à l'intérieur, on ajoute le point A à

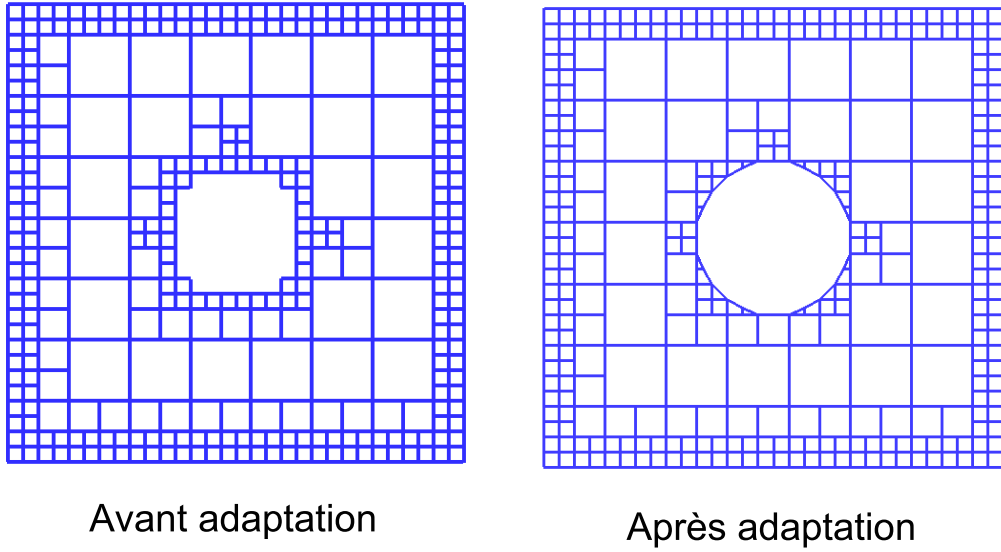


Figure A.3: Pavage avant et après adaptation

la nouvelle liste de sommets (figure A.4 cas 1). Par contre si un des deux points seulement est à l'extérieur, on effectue une opération particulière (figure A.4 cas 2 et 4).

Soit M le point d'intersection du segment $[AB]$ avec le contour (on suppose qu'il n'y a qu'une intersection, sinon la taille de la cellule est trop grande pour décrire le contour exactement). On définit une longueur minimale $l_{min} = \frac{AB}{n}$ où n est un entier. Les distances AM et BM seront comparées à l_{min} de manière à éliminer des cellules dont la forme serait trop écrasée, ceci afin d'éviter des problèmes de maillage éléments finis par la suite sur ces cellules. Ainsi deux cas sont à considérer :

- Si le point A est à l'extérieur du contour et que la distance $BM \leq l_{min}$, on n'ajoute aucun point à la liste des nouveaux sommets. Par contre pour toutes les autres distances, on ajoute seulement le point M à la liste des nouveaux sommets (figure A.4 cas 4). Cependant pour permettre une génération correcte des maillages éléments finis par la suite, si la distance $AM \leq l_{min}$, on impose que le point M soit donné par $\vec{AM} = \frac{1}{n} \vec{AB}$.
- Si le point A est intérieur au contour, on ajoute nécessairement ce point à la liste. Si ensuite la distance $AM \leq l_{min}$, on n'ajoute aucun point supplémentaire ; sinon on ajoute en prime le point M dans les autres cas avec comme pour le cas précédent une adaptation lorsque $BM \leq l_{min}$, on choisit $\vec{AM} = \frac{n-1}{n} \vec{AB}$ (figure A.4 cas 2).

Cette procédure est donc fiable pour la plupart des exemples traités et fonctionne idéalement pour n'importe quel type de cellules (quelque soit le nombre de sommets).

L'intersection d'un segment avec une entité du contour (exemple segment) est faite de la façon suivante.

Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ les deux sommets consécutifs, $C1(x_{c1}, y_{c1})$ et $C2(x_{c2}, y_{c2})$ les extrémités d'un segment de contour. On teste tout d'abord si les deux droites supports

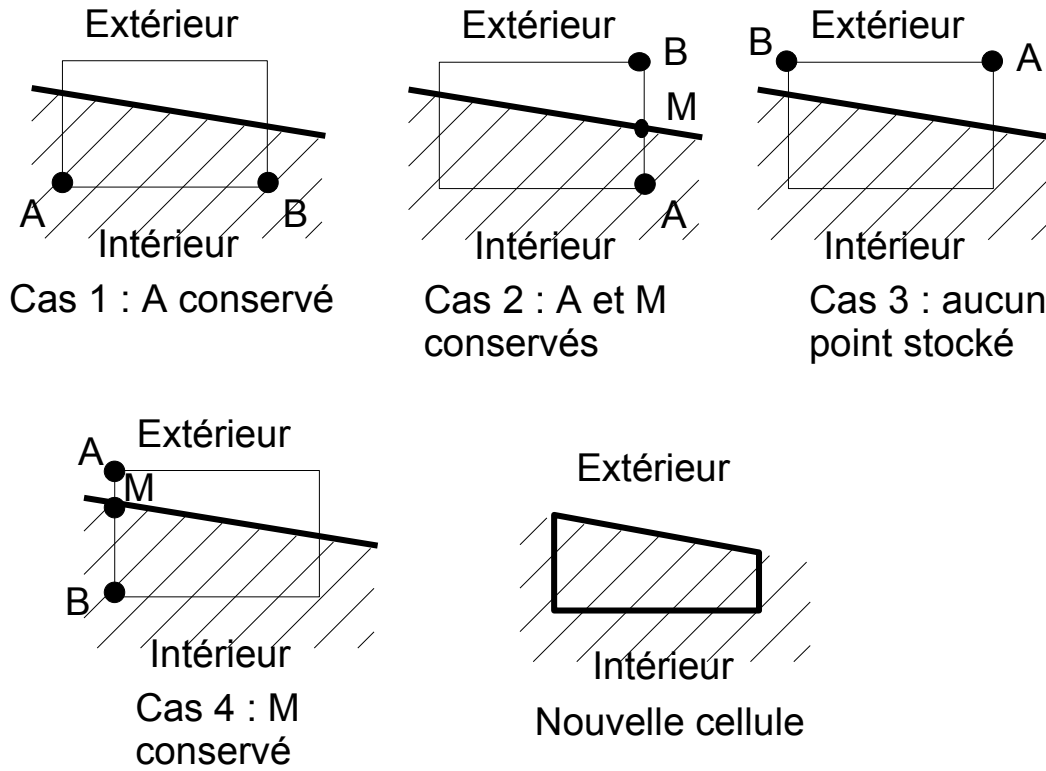


Figure A.4: Exemple d'adaptation de cellule au contour

des segments sont colinéaires en calculant le produit vectoriel correspondant. Si tel est le cas, il n'y a aucune intersection et l'on renvoie l'indication de non intersection. Si les deux droites ne sont pas colinéaires, elles se coupent en un point $M(x, y)$. Soit $\underline{n}(x_n, y_n)$ la normale à la droite support de $[C1C2]$ et $\underline{m}(x_m, y_m)$ la normale à la droite support de $[AB]$. L'intersection est déterminée en résolvant le système :

$$\vec{AM} \cdot \underline{m} = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{CM} \cdot \underline{n} = 0 \quad (\text{A.2})$$

On obtient alors l'intersection :

$$x = \frac{(y_A - y_{c1}) * m_y n_y + m_x n_y x_A - n_x m_y x_{c1}}{m_x n_y - m_y n_x} \quad (\text{A.3})$$

$$y = \frac{(x_A - x_{c1}) * m_x n_x + m_y n_x y_A - n_y m_x y_{c1}}{m_y n_x - m_x n_y} \quad (\text{A.4})$$

2 Génération des cellules pour les différents plis

La procédure quadtree permet de générer des cellules rectangulaires permettant de décrire des empilements $[0/90]$. L'ajout d'orientations supplémentaires (notées γ) entraîne deux difficultés. La première est que le maillage doit être structuré pour cette orientation (cellules rectangulaires orientées selon γ). La seconde difficulté provient du fait que le pavage doit être compatible avec les autres pavages obtenus précédemment. En effet l'incompatibilité des cellules pourrait certes être envisageable mais nécessiterait le traitement de maillages incompatibles aussi bien au niveau micro qu'au niveau macro, ce qui fera certainement l'objet d'un travail futur. Nous nous sommes donc restreint aux cas particuliers de stratifiés $[0, 90, \pm\gamma]$ qui couvrent un nombre déjà important de cas possibles.

Le pavage des plis orientés à $\pm\gamma$ est réalisé à partir du pavage quadtree initial. En effet, lorsque le stratifié contient des orientations à 0° ou 90° et des orientations à γ° , les cellules doivent être compatibles numériquement, c'est à dire que les sommets doivent coïncider dans toutes les configurations. Le choix retenu est donc de découper les cellules rectangulaires initiales en 4 cellules triangulaires reliant les sommets au centre de gravité. En jouant sur la forme de la cellule rectangulaire, on peut générer des orientations variées telles que $45^\circ, 65^\circ \dots$. Le découpage du pavage est exécuté après l'adaptation des cellules et nécessite un traitement spécial des cellules de bords adaptées au contour.

Compléments théoriques sur la Troisième échelle

Cette annexe apporte les éléments nécessaires à la compréhension et l'implantation d'une troisième échelle pour résoudre le problème macro quand la taille de celui-ci est trop importante. Plusieurs approches ont été testées et implémentées dans le code prototype sous Matlab. Le problème macroscopique de l'étape linéaire peut devenir gigantesque si le nombre d'interfaces est important. Pour traiter ce problème, une solution consiste à le résoudre de manière approchée. Les sous-structures et interfaces sont regroupées en cellules super-macro. Entre les cellules super-macro sont définies des interfaces super-macro sur lesquelles on cherche à déterminer les efforts et les déplacements. L'approximation du problème macro nécessite la connaissance d'opérateurs permettant d'exprimer les inconnues (effort et multiplicateur) sur les interfaces en fonction des inconnues sur les interfaces super-macro. L'objectif de ce complément est d'une part de préciser les formulations exactes et approchées en déplacement (multiplicateur) et en effort mais aussi de proposer plusieurs constructions d'opérateurs reliant quantités macro et super-macro.

1 Retour sur le problème macroscopique

Le problème macroscopique est un problème linéaire constitué des équations suivantes :

- Des équations d'admissibilité cinématique portant sur la continuité des multiplicateurs macro :

$$\begin{aligned}\forall \Gamma_{EE'}, \underline{\widetilde{W}}_{EE'}^M &= \underline{\widetilde{W}}_{E'E}^M \\ \forall \Gamma \in \partial\Omega_u, \underline{\widetilde{W}}^M &= 0\end{aligned}$$

- Des équations d'admissibilité statique traduisant la continuité des efforts macro :

$$\begin{aligned}\forall \Gamma_{EE'}, \underline{F}_{EE'}^M + \underline{F}_{E'E}^M &= 0 \\ \forall \Gamma \in \partial\Omega_F, \underline{F}^M &= \Pi_\Gamma(\underline{F}_d)\end{aligned}$$

où Π_Γ est l'opérateur de projection macroscopique sur Γ

- Une relation de comportement entre les efforts macro et les multiplicateurs macro, la relation de comportement homogénéisé :

$$\underline{F}_E^M = \mathbf{L}_E^F(\underline{\widetilde{W}}_E^M) + \underline{F}_{E,d}^M \quad (\text{B.1})$$

La différence par rapport à un problème de mécanique des milieux continus est que le problème macro est un problème discret par définition (il porte sur des quantités finies que sont les inconnues macro par interface). Le problème ainsi défini peut être résolu en utilisant une formulation variationnelle en déplacement ou une formulation en effort. La résolution de ces deux problèmes donne la solution exacte du problème macro. Nous présentons dans la suite la résolution de chaque formulation en précisant la construction des différents opérateurs.

1.1 Résolution directe en déplacement

Les équations statiques sont affaiblies et donnent la formulation suivante :

$$\forall \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_E^M d\Gamma = \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (\text{B.2})$$

En introduisant le comportement homogénéisé, on aboutit au problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{\widetilde{W}}^M = \{ \underline{\widetilde{W}}_E^M \}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\ \forall \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \left(\mathbf{L}_E^F(\underline{\widetilde{W}}_E^M) + \underline{F}_{E,d}^M \right) d\Gamma = \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

La construction de l'opérateur homogénéisé a déjà été détaillée dans le chapitre 4 au paragraphe 2. Connaissant l'opérateur homogénéisé pour chaque sous-structure, on somme les différentes contributions pour déterminer l'opérateur macroscopique global $\mathbb{L}^F$. Cet opérateur est assemblé et factorisé avant tout calcul. Pour chaque itération, il suffit simplement d'assembler le second membre macro et résoudre le système matriciel :

$$\mathbb{L}^F[\underline{\widetilde{W}}] = [\underline{F}_d]$$

Le taille du problème macroscopique est égale au nombre d'interfaces multiplié par le nombre d'inconnues macroscopiques (en 3D par exemple, pour 100000 interfaces à 9 inconnues macro, on obtient une matrice 900000x900000 à factoriser). Mise à part la taille importante du problème, la résolution ne pose pas de difficulté particulière.

1.2 Résolution directe en effort

1.2.1 Formulation faible en effort

La formulation en effort est obtenue à partir des équations d'admissibilité cinématique écrites sous forme faible. Ces équations traduisent la continuité du multiplicateur macroscopique et sa nullité sur les interfaces à déplacements imposés. Les efforts macroscopiques

recherchés vérifient non seulement la contrainte de continuité mais ils doivent aussi équilibrer les sous-structures.

Avant utilisation de la direction de recherche, le problème microscopique par sous-structure s'écrit sous la forme :

$$\forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{E_0}, \int_{\partial\Omega_E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_E \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^*)) d\Omega = \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{u}^* d\Gamma \quad (\text{B.4})$$

On note $\mathcal{R}_E$ l'espace des mouvements de corps rigides infinitésimaux pour une sous-structure E tels que :

$$\mathcal{R}_E = \{\underline{u}_s \in \mathcal{U}_E, \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_s) = 0\}$$

Le problème microscopique possède une solution si :

$$\forall \underline{u}_s^* \in \mathcal{R}_E, \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_s^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E \cdot \underline{u}_s^* d\Gamma = 0 \quad (\text{B.5})$$

On note $\underline{W}_{Es}$ la trace d'un mouvement de corps rigide $\underline{u}_s \in \mathcal{R}_E$ sur le bord $\partial\Omega_E$ de la sous-structure E . On pose :

$$\mathcal{W}_E^R = \left\{ \underline{W}_{Es} \text{ tel qu'il existe } \underline{u}_s \in \mathcal{U}_E \text{ vérifiant } \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}_s) = 0 \text{ et } \underline{u}_s|_{\partial\Omega_E} = \underline{W}_{Es} \right\}$$

Le choix de la base macroscopique implique que la trace des mouvements de corps rigide infinitésimaux appartient à l'espace macro en déplacement. La propriété suivante découle donc du choix de l'espace macro : $\mathcal{W}_E^R \subset \mathcal{W}_E$

D'après la propriété de découplage, on obtient la condition que doivent vérifier les efforts macro pour que le problème microscopique ait une solution :

$$\forall \underline{u}_s \in \mathcal{R}_E, \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_s d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{u}_s d\Gamma = 0 \quad (\text{B.6})$$

On pose $\mathcal{F}_{Ead}^M$ l'espace des efforts macro équilibrant les efforts volumiques appliqués sur une sous-structure (cf. équation B.6). On note $\mathcal{F}_{ad}^M$ l'espace contenant les efforts vérifiant l'admissibilité des efforts (équation B.2) et l'équilibre des sous-structures (équation B.6).

Le problème macroscopique en effort est donc le suivant :

$$\forall \underline{F}_E^{M*} \in \mathcal{F}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{F}_E^{M*} d\Gamma = 0 \quad (\text{B.7})$$

Pour résoudre ce problème, il est nécessaire de déterminer l'opérateur homogénéisé inverse reliant les multiplicateurs macro $\widetilde{\underline{W}}_E^M$ aux efforts macro $\underline{F}_E^M$. Or, l'opérateur homogénéisé défini précédemment n'est défini qu'à un mouvement de corps rigide près et n'est donc pas inversible dans l'espace $\mathcal{W}_E$ complet (cf. thèse de A. Nouy 2003 pour la

démonstration de l'inversibilité de l'opérateur). L'opérateur $\mathbf{L}_E^F$ a son image dans l'espace $\mathcal{F}_{E,ad}^M$. Il est inversible de l'espace quotient $\mathcal{W}_E^M = \mathcal{W}_E^M \setminus \mathcal{W}_E^R$ dans $\mathcal{F}_{E,ad}^M$. On peut ainsi construire une inverse généralisée et écrire la relation liant les multiplicateurs aux efforts sous la forme :

$$\widetilde{W}_E^M = \mathbf{L}_E^+(F_E^M - F_{E,d}^M) \quad (\text{B.8})$$

Le problème macroscopique formulé en effort s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } \underline{F}_E^M \in \mathcal{F}_{ad}^M \text{ tels que} \\ & \forall \underline{F}_E^{M*} \in \mathcal{F}_{ad,0}^M \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \mathbf{L}_E^+(\underline{F}_E^M - \underline{F}_{E,d}^M) \cdot \underline{F}_E^{M*} d\Gamma = 0 d\Gamma \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Pour prendre en compte la contrainte d'équilibre des efforts macro, on introduit des mouvements de corps rigide conduisant au problème :

Trouver $\underline{F}_E^M$ vérifiant l'équation B.2 tels que :

$$\forall \underline{F}_E^{M*} \in \mathcal{F}_0^M \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} (\mathbf{L}_E^+(\underline{F}_E^M - \underline{F}_{E,d}^M) + \underline{W}_{Es}) \cdot \underline{F}_E^{M*} d\Gamma = 0 d\Gamma \quad (\text{B.10})$$

$$\forall \underline{u}_s^* \in \mathcal{R}_E, \int_{\Omega_E} \underline{f}_d \cdot \underline{u}_s^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{W}_{Es}^* d\Gamma = 0 \quad (\text{B.11})$$

Les mouvements de corps rigide sont exprimés en fonction d'un nombre fini d'inconnues (3 en 2D, 6 en 3D) :

$$\underline{u}_{sE} = r_E(\underline{M})\alpha_E$$

Le problème macroscopique est alors assemblé et mène à la résolution du système suivant

$$\begin{pmatrix} L & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_d^F \\ W_d^f \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

où F sont les composantes des efforts macroscopiques inconnus, α sont les inconnues correspondant aux modes de corps rigide, L est obtenu par assemblage des opérateurs homogénéisés inverses, W_d^F provient de la contribution des efforts macro du problème micro 1 et W_d^f est issu des efforts volumiques.

On reconstruit le multiplicateur macro nul sur $\partial\Omega_u$ et continu sur les interfaces intérieures en utilisant la relation :

$$\widetilde{W}_E^M = \mathbf{L}_E^+(\underline{F}_E^M - \underline{F}_{E,d}^M) + \underline{W}_{Es}$$

1.2.2 Construction de l'opérateur homogénéisé inverse

Pour déterminer une inverse généralisée, plusieurs méthodes peuvent être adoptées. La première idée consiste à bloquer les modes de corps rigides d'une interface constituant le bord $\partial\Omega_E$. Pour cela il suffit d'éliminer les lignes et colonnes de l'opérateur homogénéisé

correspondant aux ddls macro de translations et rotations pour une interface. On inverse l'opérateur ainsi obtenu et on reconstruit l'opérateur en mettant à 1 les ddls bloqués (Figure B.1).

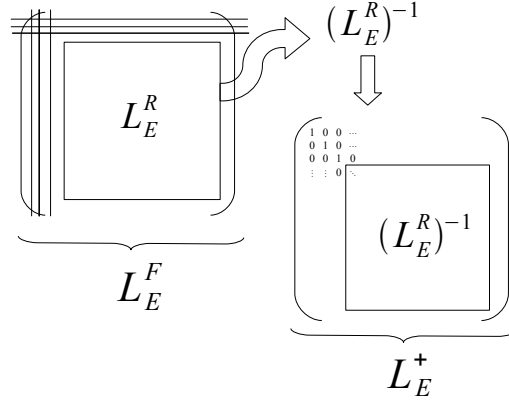


Figure B.1: Méthode d'inversion de l'opérateur homogénéisé

L'autre méthode utilise le problème micro pour lequel on impose successivement les composantes macro des efforts. On utilise donc le problème suivant :

Trouver $\underline{u}_E \in \mathcal{U}_E$ tel que

$$\forall \underline{u}_E^* \in \mathcal{U}_{E,0} \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_E) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma$$

Avec $\underline{F}_E^M = -k^- (\underline{W}_E^M - \widetilde{\underline{W}}_E^M)$

Ce problème admet une solution si les efforts sont en équilibre. Le déplacement $\underline{u}_E$ solution est alors défini à un mouvement de solide rigide près. Pour déterminer l'opérateur homogénéisé, on impose successivement une composante macro de l'effort non nulle sur une interface de $\partial\Omega_E$ uniquement, les autres effort étant pris nuls par ailleurs. On constate donc que les efforts ne sont alors pas en équilibre. Cependant, pour résoudre ce problème numériquement, on élimine les modes de corps rigides en bloquant plusieurs degrés de liberté. Le problème alors résolu est plus général que le précédent et peut être exprimé de façon différente.

On recherche un champ de déplacement dont la partie mouvement de corps rigide extraite de ce déplacement est nulle. Soit $\mathcal{U}_E^R = \{\underline{u} \in \mathcal{U}_E / \underline{u}_s = 0\}$ où $\underline{u}_s$ est la partie mouvement de corps rigide de $\underline{u}$. Le problème est donc de :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_E^R$ tel que

$$\forall (\underline{u}_E^*) \in \mathcal{U}_{E,0}^R, \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_E) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) d\Omega = \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma$$

Cette contrainte imposée pour résoudre le problème permet d'équilibrer les efforts macro quelle que soit leur valeur. On introduit pour ce faire le multiplicateur $\underline{f}$ permettant d'extraire les mouvements de corps rigide à partir de $\underline{u}$.

$$\forall \underline{f}^* \int_{\Omega_E} \underline{u} \cdot \underline{f}^* d\Omega = 0$$

Par exemple, pour un problème bidimensionnel, $\underline{f}$ fait intervenir trois inconnues :

$$f_x \vec{x}, f_y \vec{y}, f_z G\vec{M} \wedge \vec{z}$$

Le problème s'écrit alors :

Trouver $\underline{u} \in \mathcal{U}_E$, $\underline{f}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \underline{u}^* \in \mathcal{U}_{E,0} \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_E) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) d\Omega + \int_{\Omega_E} \underline{u}_E^* \cdot \underline{f} d\Omega &= \int_{\partial\Omega_E} \underline{F}_E^M \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma \\ \forall \underline{f}^* \int_{\Omega_E} \underline{u}_E \cdot \underline{f}^* d\Omega &= 0 \end{aligned}$$

Les efforts macro sont donc équilibrés avec les multiplicateurs $\underline{f}$. Ainsi, pour calculer l'opérateur L_E^+ , il suffit de bloquer les modes de corps rigides toujours de la même manière et d'imposer sur chaque coté de la cellule les fonctions de base macro en efforts.

L'opérateur homogénéisé obtenu par les deux méthodes peut être amélioré en définissant un opérateur représentant une déformation pure autour du centre de gravité de la sous-structure E . Pour cela, on élimine du multiplicateur $\widetilde{W}_E^M$ obtenu par l'opérateur précédemment défini, le mouvement de corps rigide correspondant.

L'opérateur permettant d'extraire la partie mouvement de corps rigide pour des déplacements macro donnés sur le bord $\partial\Omega_E$ est déterminé de la manière suivante :

On recherche les composantes des mouvements rigides α_E (3 en 2D et 6 en 3D) qui minimisent la distance entre $\widetilde{W}_E^M$ donné sur $\partial\Omega_E$ et le mouvement correspondant $\underline{W}_{Es} = r_E(\underline{M})\alpha_E$.

$$\min_{\alpha_E} \int_{\partial\Omega_E} \left(r_E(\underline{M})\alpha_E - \widetilde{W}_E^M \right)^2 d\Gamma$$

On obtient alors le système suivant après discrétisation des opérateurs :

$$\mathbf{R}_E^T M \mathbf{R}_E \alpha_E = \mathbf{R}_E^T M \widetilde{W}_E^M$$

ce qui définit l'opérateur permettant d'extraire les modes de corps rigides correspondant à un déplacement donné sur le bord $\partial\Omega_E$.

$$\mathbf{R}_{iE} = (\mathbf{R}_E^T M \mathbf{R}_E)^{(-1)} \mathbf{R}_E^T$$

Ainsi, l'inverse généralisée retenue sera définie par :

$$\mathbf{L}_{E,opt}^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{R}_{iE}) \mathbf{L}_E^+$$

Les différentes inverses donnent exactement la même solution du problème macro formulé en effort. L'utilisation de l'un ou de l'autre de ces opérateurs homogénéisés inverses a une importance lors de la recherche d'une approximation des efforts.

1.3 Résolution itérative

Le problème macro est un problème linéaire portant sur un nombre fini d'inconnues (effort ou déplacement macro d'interface). Si le nombre d'interfaces est important, la taille de ce problème devient considérable. Une résolution directe devient alors très coûteuse voire impossible. En effet, l'exemple d'un problème tridimensionnel contenant 10 millions d'interfaces soit 90 millions d'inconnues montre que chaque ligne compte environ 50 à 100 termes, ce qui représente un stockage d'environ 50x90 millions de réels (double) et nécessite près de 4 Go de mémoire vive pour l'assemblage. Une telle solution peut encore être envisagée sur certaines machines. Cependant une factorisation de Cholesky optimisée (utilisant un stockage sparse et une renumérotation adaptée à ce type de stockage (cf. symamd)) nécessite environ une à 2 fois plus de termes et ne peut donc pas être réalisée sur une telle machine. Ces chiffres montrent ainsi que la factorisation d'un tel système n'est pas envisageable sur des architectures conventionnelles comportant 4 à 8 Go de mémoire vive.

L'utilisation d'une méthode itérative telle que le gradient conjugué nécessite le choix d'un bon préconditionneur. Une résolution du problème macro par décomposition de domaine peut être envisagée. Une solution élégante proposée par A. Nouy est de résoudre le problème macro par la méthode multiéchelle présentée dans le chapitre 4. Cette stratégie consiste à définir des sous-domaines constitués de sous-structures et interfaces (cellules super-macro) et les interfaces super-macro entre ces sous-domaines. La résolution est ensuite identique à la méthode originale. L'algorithme ainsi défini est performant et dépend très peu du problème super-macro traité. L'avantage de cette méthode est la construction systématique du problème global (super-macro). Très peu d'itérations sont nécessaires pour faire converger le problème macroscopique (deux ou trois en pratique).

2 Recherche d'une solution approchée

Une alternative à une résolution itérative consiste à déterminer une approximation du problème macro par une méthode directe. Cette approximation peut être formulée en effort ou déplacement à partir des formulations variationnelles correspondantes décrites précédemment. Dans la thèse d'O. Loiseau 2001, une approximation du déplacement par une cinématique de type milieu micropolaire ou milieu de Cosserat est introduite. Celle-ci est reprise dans la thèse de A. Nouy 2003 sur le multiplicateur macro. Une nouvelle approche basée sur une homogénéisation du problème macro est introduite dans ce travail pour l'approximation du multiplicateur. L'approximation des efforts macro est aussi étudiée dans cette partie. Les performances des différentes méthodes sont comparées succinctement sur des exemples simples bidimensionnels.

2.1 Problème macro approché en déplacement

Le problème macro en déplacement est défini comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{\widetilde{W}}^M = \{\underline{\widetilde{W}}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\ \forall \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \left(\mathbf{L}_E^F(\underline{\widetilde{W}}_E^M) + \underline{F}_{E,d}^M \right) d\Gamma = \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

L'idée suivie ici est de déterminer une approximation de $\underline{\widetilde{W}}^M$ notée $\underline{\widetilde{W}}_h^M$ qui vérifie au mieux la formulation variationnelle :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{\widetilde{W}}_h^M = \{\underline{\widetilde{W}}_{E,h}^M\}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\ \forall \underline{\widetilde{W}}_{E,h}^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \underline{\widetilde{W}}_{E,h}^{M*} \cdot \left(\mathbf{L}_E^F(\underline{\widetilde{W}}_{E,h}^M) + \underline{F}_{E,d}^M \right) d\Gamma = \\ \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \underline{\widetilde{W}}_{E,h}^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (\text{B.14}) \end{aligned}$$

Les différentes techniques de construction d'un espace d'approximation se basent toutes sur la définition de super-cellules ou cellules super-macro ω et de super-interfaces ou interfaces super-macro $\Gamma_{\omega\omega'}$ entre les cellules super-macro ω et ω' . Les sous-structures et interfaces (appelées macro) sont regroupées en cellules super-macro et interfaces super-macro (cf. figure B.2) par une procédure de découpage automatique permettant de décrire exactement le contour et opérant un raffinement automatique près des bords de la structure étudiée. La procédure de découpage utilisant le principe de génération de maillage quadtree est détaillée en annexe A.

Le multiplicateur approché $\underline{\widetilde{W}}_h^M$ est construit à partir des déplacements affines sur les interfaces super-macro $\underline{\widetilde{W}}_{\omega\omega'}^{SM}$ entourant une cellule super-macro par la relation.

$$\underline{\widetilde{W}}_E^M = \mathbb{P}_{\partial\Omega_E}^{\partial\omega}(\underline{\widetilde{W}}_\omega^{SM})$$

où $\mathbb{P}_{\partial\Omega_E}^{\partial\omega}$ est un opérateur permettant de déterminer les multiplicateurs macro sur les interfaces voisines d'une sous-structure E .

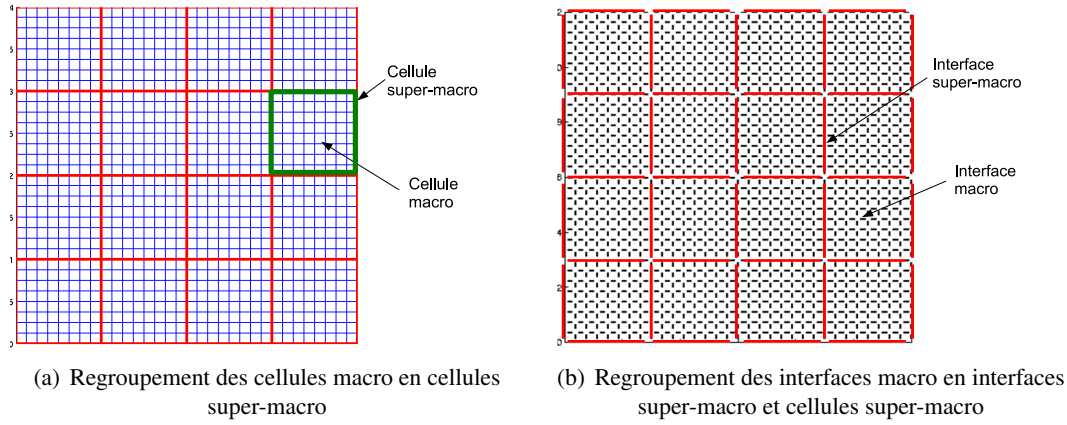


Figure B.2: Regroupement des sous-structures et interfaces en cellules et interfaces super-macro

Le problème macro approché devient alors :

$$\begin{aligned}
 \text{Trouver } \widetilde{W}^{SM} = \{\widetilde{W}_\omega^{SM}\}_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\
 \forall \widetilde{W}_\omega^{SM*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{E \in \omega} \int_{\partial \Omega_E} \mathbb{P}_{\partial \Omega_E}^{\partial \omega}(\widetilde{W}_\omega^{SM*}) \cdot \left(\mathbf{L}_E^F(\mathbb{P}_{\partial \Omega_E}^{\partial \omega}(\widetilde{W}_\omega^{SM})) + \underline{F}_{E,d}^M \right) d\Gamma = \\
 \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{E \in \omega} \int_{\partial \Omega_E \cap \partial \Omega_F} \mathbb{P}_{\partial \Omega_E}^{\partial \omega}(\widetilde{W}_\omega^{SM*}) \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (\text{B.15})
 \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned}
 \text{Trouver } \widetilde{W}^{SM} = \{\widetilde{W}_\omega^{SM}\}_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\
 \forall \widetilde{W}_\omega^{SM*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{\omega \in \Omega} \int_{\partial \omega} \widetilde{W}_\omega^{SM*} \cdot \left(\mathbf{L}_\omega^F(\widetilde{W}_\omega^{SM}) + \underline{F}_{\omega,d}^M \right) d\Gamma = \\
 \sum_{\omega \in \Omega} \int_{\partial \omega \cap \partial \Omega_F} \mathbb{P}_{\partial \Omega_E}^{\partial \omega}(\widetilde{W}_\omega^{SM*}) \cdot \underline{F}_d d\Gamma \quad (\text{B.16})
 \end{aligned}$$

Ce problème ne pose pas de difficulté et permet après assemblage et résolution d'obtenir l'approximation de $\widetilde{W}^{SM}$ sur chaque interface super-macro. Les déplacements $\widetilde{W}_E^M$ sont ensuite déterminés par l'opérateur d'approximation sur chaque interface et introduits dans les problèmes micro.

2.2 Construction des opérateurs de projection super-macro en déplacement

2.2.1 Approximation de type milieu micropolaire

Dans la thèse de O. Loiseau 2001, le déplacement des interfaces est obtenu de manière explicite en fonction des déplacements de l'interface super-macro. On considère une cellule ω entourée d'interfaces super-macro. Soit Γ_{pq}^{SM} l'interface associée au côté joignant les extrémités p et q de la cellule super-macro. La cinématique de la cellule est alors donnée par la cinématique de l'interface Γ_{pq}^{SM} (cf. figure 2.2.1). Un autre choix serait de considérer une cinématique gouvernée par les noeuds de la cellule super-macro. Ce dernier choix ne fournit pas un super-élément "convergeant", c'est à dire qui tend vers une cellule macro lorsqu'on diminue sa taille.

Soit ϕ_1^p, ϕ_2^p les fonctions de forme éléments finis associées au noeuds p et q et $\underline{N}_1^{pq}, \underline{N}_2^{pq}$ la base principale d'inertie de l'interface Γ_{pq}^{SM} . Les déplacements de l'interface super macro sont alors donnés par les quatre fonctions suivantes :

$(\phi_1^p + \phi_1^q)\underline{N}_1^{pq}$	translation selon $\underline{N}_1^{pq}$
$(\phi_2^p + \phi_2^q)\underline{N}_2^{pq}$	translation selon $\underline{N}_2^{pq}$
$(\phi_2^p - \phi_2^q)\underline{N}_2^{pq}$	rotation
$(\phi_1^p - \phi_1^q)\underline{N}_1^{pq}$	allongement

Les fonctions ainsi définies sont évaluées sur les interfaces macro constituant la cellule super macro, en pondérant la valeur obtenue par un coefficient $|\underline{N}_2^{pq} \cdot \underline{N}_2|$, $\underline{N}_2$ étant la normale à une interface $\Gamma_{EE'}$ et $\underline{N}_2^{pq}$ la normale à l'interface super-macro Γ_{pq}^{SM} . Ce terme permet de séparer les influences selon la direction des faces et de traiter aussi bien des cellules quadrangulaires que des cellules super-macro quelconques. La projection macro de la distribution obtenue sur une interface $\Gamma_{EE'}$ est ensuite déterminée en séparant les différentes contributions. Ainsi, le déplacement macro d'une interface $\Gamma_{EE'}$ obtenu par la cinématique d'une interface super-macro Γ_{pq}^{SM} est donné par :

$$\widetilde{W}_{EE'}^M = \sum_{i=1}^{nM} \Lambda_{i, \Gamma_{EE'}}^{\Gamma_{pq}^{SM}} \widetilde{W}^{SM, pq}$$

Six fonctions de base sont introduites comme suit :

$$\Lambda_{1, \Gamma_{EE'}}^{\Gamma_{pq}^{SM}} = |\underline{N}_2^{pq} \cdot \underline{N}_2| \begin{bmatrix} (e_1, (\phi_1^p + \phi_1^q)\underline{N}_1^{pq}) \\ (e_2, (\phi_1^p + \phi_1^q)\underline{N}_1^{pq}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{2, \Gamma_{EE'}}^{\Gamma_{pq}^{SM}} = |\underline{N}_2^{pq} \cdot \underline{N}_2| \begin{bmatrix} (e_1, (\phi_2^p + \phi_2^q)\underline{N}_2^{pq}) \\ (e_2, (\phi_2^p + \phi_2^q)\underline{N}_2^{pq}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

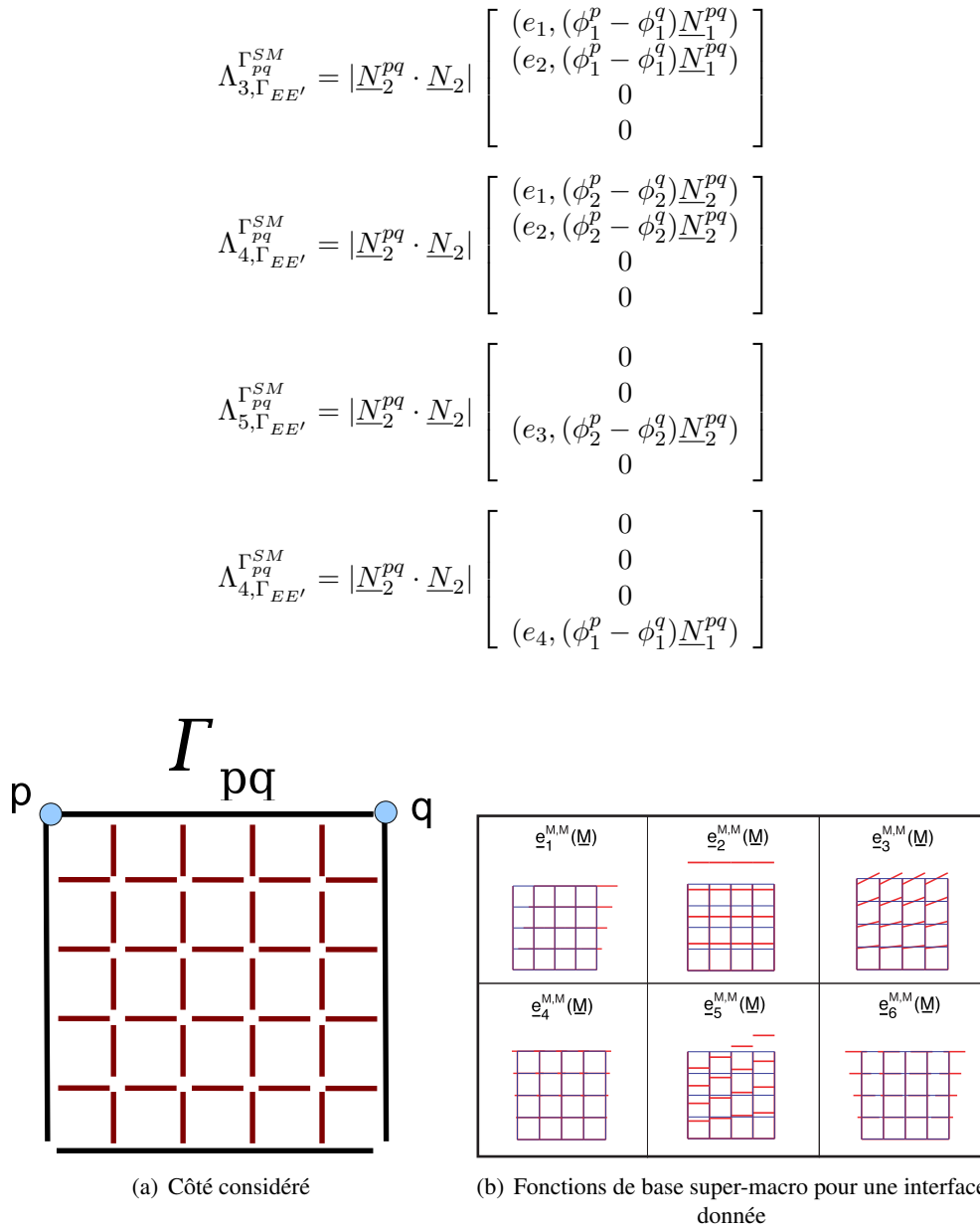


Figure B.3: Approximation de type "Cosserat" - Géométrie et fonctions de base super-macro

Pour que l'élément ainsi défini soit convergent (et que les fonctions de base ainsi définies coïncident avec les fonctions de base macro lorsque une cellule super-macro correspond à une sous-structure), il suffit de ne pas considérer les 2 dernières fonctions de base. Un autre choix, ne nécessitant que quatre fonctions de base, serait de simplement projeter la distribution issue des 4 fonctions définies précédemment sur la base macro, sans séparer les contributions. La version utilisant 6 fonctions de base est plus riche d'un point de vue cinématique mais complique la mise en oeuvre en dissociant les cellules super-macro. Cette

approche a été implémentée en 2d et sera appelée dans la suite "approche de type Cosserat" pour les différentes comparaisons proposées.

■ Approximation quasi-exacte.

La méthode suivante permet de fournir une meilleure approximation des déplacements en utilisant le comportement des sous-structures contenues dans une cellule super-macro. La construction de l'opérateur d'approximation est relativement simple à mettre en oeuvre mais est plus coûteuse que l'approche précédente. L'approximation ainsi définie correspond à une homogénéisation du problème macro sur la cellule super-macro.

Pour chaque interface super-macro, on détermine le centre de gravité et la base principale de la même manière que pour les interfaces macro. On utilise pour cela les maillages des interfaces élémentaires contenues dans l'interface super-macro. On construit ensuite un projecteur super-macro par interface super-macro permettant d'extraire la partie affine de la répartition macro sur les interfaces incluses dans l'interface super-macro considérée. On note $P_{\Gamma_{EE'}}^{\Gamma_{\omega\omega'}}$ le projecteur super macro qui associe un déplacement macro sur une interface $\Gamma_{EE'}$ de $\Gamma_{\omega\omega'}$ à un déplacement super-macro sur cette interface $\Gamma_{\omega\omega'}$.

On résout ensuite une succession de problèmes sur la cellule super-macro :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{\widetilde{W}}^M &= \{\underline{\widetilde{W}}_E^M\}_{E \in \omega} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\ \forall \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} &\in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \omega} \int_{\partial\Omega_E} \underline{\widetilde{W}}_E^{M*} \cdot \left(\mathbf{L}_E^F(\underline{\widetilde{W}}_E^M) \right) d\Gamma = 0 \\ \forall \Gamma_{EE'} &\in \partial\omega, \quad \underline{\widetilde{W}}_E^M = P_{\Gamma_{EE'}}^{\Gamma_{\omega\omega'}}(\underline{\widetilde{W}}_\omega^{SM}) \quad \text{avec } \underline{\widetilde{W}}_\omega^{SM} \text{ donné} \quad (\text{B.17}) \end{aligned}$$

Pour chaque problème, une seule composante super-macro est non nulle pour les différentes interfaces. Ce problème est résolu de la même manière que le problème macro standard et permet de déterminer la distribution macro $\underline{\widetilde{W}}_E^M$. La figure B.4 montre la répartition des déplacements macro sur les interfaces en fonction d'une composante super-macro donnée non nulle (translation).

On construit ainsi un opérateur de dimension $(nM * nbInterSM), (n * nbInter)$ où nM est le nombre de fonction de base super-macro par interface super-macro, $nbInterSM$ est le nombre d'interfaces super-macro entourant la cellule ω , n le nombre de fonction de base macro par interface et $nbInter$ le nombre d'interfaces incluses dans la cellule ω .

L'approximation obtenue est proche de celle déterminée par l'approche de type Cosserat mais semble plus efficace sur les exemples effectués car elle prend en compte le comportement de chaque sous-structure.

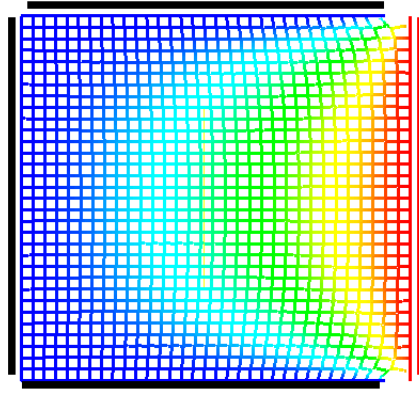


Figure B.4: Représentation des déplacements macro par interface en fonction d'une translation imposée sur une interface super- macro

2.2.2 Construction du problème macro approché en effort

Comme pour l'approche en déplacement, on cherche à déterminer une distribution approchée $\underline{F}_{E,h}$. Le problème macro approché exprimé en effort s'écrit sous la forme :

Trouver $\underline{F}_h^M \in \mathcal{F}_{ad}^M$ tels que

Trouver $\underline{F}_h^M \in \mathcal{F}_{ad}^M$ tel que :

$$\forall \underline{F}_{E,h}^{M*} \in \mathcal{F}_{ad,0}^M \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \mathbf{L}_E^+(\underline{F}_{E,h}^M - \underline{F}_{E,d}^M) \cdot \underline{F}_{E,h}^{M*} d\Gamma = 0 \quad (\text{B.18})$$

Les efforts approchés sont déterminés à partir de la valeurs d'efforts sur les interfaces super-macro. On introduit l'opérateur d'approximation super-macro tel que, sur une interface $\Gamma_{EE'}$, l'effort approché s'exprime en fonction des efforts super-macro sur l'interface $\Gamma_{\omega\omega'}$:

$$\underline{F}_{E,h}^M = \mathbb{P}_{\partial\Omega_E}^{\partial\omega}(\underline{F}_\omega^{SM})$$

L'opérateur d'approximation doit permettre de générer des efforts équilibrant chaque cellule E à partir d'une distribution super-macro, équilibrant elle-même la cellule super-macro. En introduisant cet opérateur dans le problème approché, celui-ci peut être reformulé de la façon suivante :

Trouver $\underline{F}^{SM} = \{\underline{F}_\omega^{SM}\}_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{F}_{ad,0}^M$ qui vérifie :

$$\forall \underline{F}_\omega^{SM*} \in \mathcal{F}_{ad,0}^M, \sum_{\omega \in \Omega} \sum_{E \in \omega} \int_{\partial\Omega_E} \mathbb{P}_{\partial\Omega_E}^{\partial\omega}(\underline{F}_\omega^{SM*}) \cdot \left(\mathbf{L}_E^+(\mathbb{P}_{\partial\Omega_E}^{\partial\omega}(\underline{F}_\omega^{SM}) - \underline{F}_{E,d}^M) \right) d\Gamma = 0 \quad (\text{B.19})$$

Soit

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{F}^{SM} = \{ \underline{F}_\omega^{SM} \}_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{F}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\ \forall \underline{F}_\omega^{SM*} \in \mathcal{F}_{ad,0}^M, \sum_{\omega \in \Omega} \int_{\partial\omega} \underline{F}_\omega^{SM*} \cdot \left(\mathbf{L}_\omega^F(\underline{F}_\omega^{SM}) - \underline{W}_{\omega,d}^{SM} \right) d\Gamma = 0 \quad (\text{B.20}) \end{aligned}$$

On introduit des multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte l'admissibilité des efforts super-macro qui doivent équilibrer les cellules super-macro.

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \underline{F}^{SM} = \{ \underline{F}_\omega^{SM} \}_{\omega \in \Omega} \in \mathcal{F}_0^M \text{ qui vérifie :} \\ \forall \underline{F}_\omega^{SM*} \in \mathcal{F}_0^M, \sum_{\omega \in \Omega} \int_{\partial\omega} \underline{F}_\omega^{SM*} \cdot \left(\mathbf{L}_\omega^F(\underline{F}_\omega^{SM}) - \underline{W}_{\omega,d}^{SM} - \underline{W}_{\omega,s}^{SM} \right) d\Gamma = 0 \\ \forall \underline{W}_{\omega,s}^{SM*} \in \mathcal{R}_E, \int_{\partial\omega} \underline{F}_\omega^{SM} \cdot \underline{W}_{\omega,s}^{SM*} d\Gamma = 0 \quad (\text{B.21}) \end{aligned}$$

Ce problème est ensuite résolu de manière identique au problème macro écrit en effort. Toute la difficulté réside dans la construction d'un projecteur super-macro adéquat.

2.2.3 Construction des opérateurs de projection super-macro en effort

La détermination d'efforts en équilibre ou de contrainte statiquement admissible est beaucoup plus compliquée que celle des déplacements. En effet, les efforts doivent équilibrer chaque cellule ; une simple interpolation ne peut donc pas être utilisée. Ce problème est récurrent dans les techniques de recherche de champs statiquement admissibles (dans le cadre de l'erreur en relation de comportement par exemple). La méthode proposée dans ce paragraphe s'inspire de ces techniques.

On considère donc une cellule super-macro rectangulaire 2D constituée de $nx * ny$ cellules macro rectangulaires notées E_i . La cellule super macro comporte donc $nx * (ny + 1) + ny * (nx + 1)$ interfaces macro. On cherche à déterminer les 4 inconnues d'effort macro par interfaces, ce qui correspond à un total de $8 * nx * ny + 4 * (nx + ny)$ inconnues. Plusieurs inconnues peuvent être éliminées sur les bords des cellules super-macro où les efforts macro recherchés sur une interface sont la restriction de la distribution affine super-macro. Le problème ne compte plus que $8 * nx * ny + 2 * (nx + ny)$ inconnues. Les efforts à l'intérieur de la cellule super-macro sont continus et doivent équilibrer les cellules macro. On dispose donc de $3 * (nx * ny - 1)$ conditions (correspondant à l'équilibre des cellules). Le problème ainsi défini est sous-contraint. Pour résoudre, il est donc nécessaire d'ajouter des contraintes supplémentaires de manière à déterminer une bonne approximation.

■ La première méthode suivie est analytique et ne nécessite que peu d'opérations. Pour cela, on utilise une procédure récursive pour construire successivement les répartitions d'efforts

sur chaque interface.

On considère initialement une cellule super macro ω découpée en 4 cellules. La répartition affine est donnée sur les bords extérieurs de la cellule super-macro. On note $\partial\omega_i$ les 4 cotés et E_i les 4 cellules contenues dans ω . On recherche ensuite une distribution d'efforts affines par interface. Sur les cotés $\partial\omega_i$ la distribution est égale à la restriction de l'effort affine super-macro sur l'interface considérée (Figure B.5). Le problème est donc de déterminer les efforts sur les quatre interfaces intérieures restantes notées Γ_i (soit 4*4 inconnues). Ces efforts doivent équilibrer les cellules E_i . On dispose donc de 9 équations pour 16 inconnues.

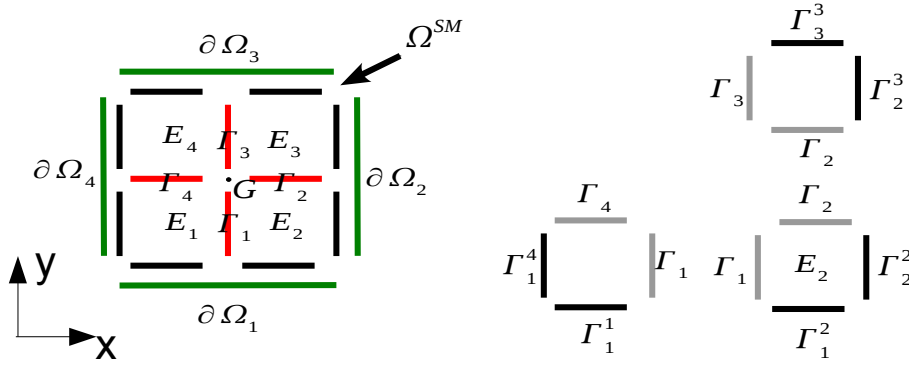


Figure B.5: Définition des interfaces et cellules pour le problème de recherche d'efforts

La première étape de la procédure consiste à déterminer une prédiction des efforts sur chaque interface à partir de la distribution d'efforts super-macro sur $\partial\omega_i$. On considère à nouveau les fonctions éléments finis définies en chaque noeud de la cellule super-macro. On introduit les fonctions suivantes à partir des noeuds p et q :

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_1^{\Gamma^{pq}} &= (\phi_1^p + \phi_1^q) \underline{N}_1^{pq} \\ \underline{\psi}_2^{\Gamma^{pq}} &= (\phi_2^p + \phi_2^q) \underline{N}_2^{pq} \\ \underline{\psi}_3^{\Gamma^{pq}} &= (\phi_2^p - \phi_2^q) \underline{N}_2^{pq} \\ \underline{\psi}_4^{\Gamma^{pq}} &= (\phi_1^p - \phi_1^q) \underline{N}_1^{pq}\end{aligned}$$

La prédiction sur une interface Γ_i sera alors donnée par la somme des fonctions éléments finis sur chaque côté :

$$\underline{P}_i = \sum_{j=1}^4 (\underline{N}_2 \cdot \underline{N}_{\partial\omega_i}) \underline{\psi}_i^{\partial\omega_j}$$

Le coefficient $(\underline{N}_2 \cdot \underline{N}_{\partial\omega_i})$ permet de prendre en compte le signe des efforts super-macro. Cette prédiction fournit une répartition d'effort exacte dans le cas d'efforts super-macro

affines correspondant à une contrainte affine dans $\partial\omega$. Cette prédiction étant définie, une correction doit être apportée à chaque effort pour respecter l'équilibre des cellules.

On note $\underline{F}_i$ l'effort sur l'interface Γ_i . $\underline{F}_i$ se décompose en une prédiction $\underline{P}_i$ et une correction $\underline{Q}_i$.

$$\underline{F}_i = \underline{P}_i + \underline{Q}_i$$

Pour limiter le nombre d'inconnues, la correction ne fait intervenir que trois composantes à déterminer. L'étape suivante permet de construire analytiquement la correction $\underline{Q}_i$, en travaillant sur les résultantes et moments associés aux répartitions d'efforts sur chaque interface.

On pose R_x^i, R_y^i les résultantes et M_G^i le moment au centre de gravité G de la cellule super-macro associés à la distribution $\underline{Q}_i$ sur l'interface Γ_i . On note $\Gamma_i^j = \partial\omega_i \subset E_j$ l'interface extérieure de $\partial\omega_i$ en lien avec la cellule E_j (voir Figure B.5). On appelle alors $\tilde{R}_x^{\Gamma_i^j}$, $\tilde{R}_y^{\Gamma_i^j}$ et $\tilde{M}_G^{\Gamma_i^j}$ les résultantes et moment en G associés à la distribution d'effort sur cette interface. De la même manière $\tilde{R}_x^{\Gamma_i}$, $\tilde{R}_y^{\Gamma_i}$ et $\tilde{M}_G^{\Gamma_i}$ représentent les résultantes et moment en G associé à la distribution $\underline{P}_i$ sur Γ_i . Les résultantes et moment exprimés en G centre de gravité de la cellule super-macro sur une interface sont ainsi définis par $R_x^i + \tilde{R}_x^{\Gamma_i}$, $R_y^i + \tilde{R}_y^{\Gamma_i}$, $M_G^i + \tilde{M}_G^{\Gamma_i}$ pour une interface Γ_i et par $\tilde{R}_x^{\Gamma_i^j}$, $\tilde{R}_y^{\Gamma_i^j}$, $\tilde{M}_G^{\Gamma_i^j}$ pour une interface de bord Γ_i^j . Toute la difficulté consiste à déterminer les résultantes et moments inconnus (R_x^i, R_y^i, M_G^i) en fonction des quantités connues ($\tilde{R}_x^{\Gamma_i^j}, \tilde{R}_y^{\Gamma_i^j}, \tilde{M}_G^{\Gamma_i^j}$ sur Γ_i^j et $\tilde{R}_x^{\Gamma_i}, \tilde{R}_y^{\Gamma_i}, \tilde{M}_G^{\Gamma_i}$ sur Γ_i).

On introduit donc trois fonctionnelles à minimiser de manière à obtenir une distribution $\underline{F}_i$ proche de la prédiction $\underline{P}_i$ de manière globale. Pour cela, on minimise la somme des différences entre $\underline{F}_i$ et $\underline{P}_i$ c'est à dire $\underline{F}_i - \underline{P}_i = \underline{Q}_i$ en termes de résultantes et moment. Le problème est donc de :

Déterminer les résultantes et moments R_x^i, R_y^i, M_G^i tels que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^4 (R_x^i)^2 &\text{ soit minimale} \\ \sum_{i=1}^4 (R_y^i)^2 &\text{ soit minimale} \\ \sum_{i=1}^4 (M_G^i)^2 &\text{ soit minimale} \end{aligned}$$

Ces minimisations sont réalisées sous les contraintes d'équilibre des cellules et se traduisent

par 3*3 équations sur les résultantes et moments globaux.

Equilibre cellule E_1

$$\begin{aligned}\tilde{R}_x^{\Gamma_1^4} + \tilde{R}_x^{\Gamma_1^1} - \tilde{R}_x^{\Gamma_1} - R_x^1 - \tilde{R}_x^{\Gamma_4} - R_x^4 &= 0 \\ \tilde{R}_y^{\Gamma_1^4} + \tilde{R}_y^{\Gamma_1^1} - \tilde{R}_y^{\Gamma_1} - R_y^1 - \tilde{R}_y^{\Gamma_4} - R_y^4 &= 0 \\ \tilde{M}_G^{\Gamma_1^4} + \tilde{M}_G^{\Gamma_1^1} - \tilde{M}_G^{\Gamma_1} - M_G^1 - \tilde{M}_G^{\Gamma_4} - M_G^4 &= 0\end{aligned}$$

Equilibre cellule E_2

$$\begin{aligned}\tilde{R}_x^{\Gamma_1^2} + \tilde{R}_x^{\Gamma_2^2} - \tilde{R}_x^{\Gamma_2} - R_x^2 + \tilde{R}_x^{\Gamma_1} + R_x^1 &= 0 \\ \tilde{R}_y^{\Gamma_1^2} + \tilde{R}_y^{\Gamma_2^2} - \tilde{R}_y^{\Gamma_2} - R_y^2 + \tilde{R}_y^{\Gamma_1} + R_y^1 &= 0 \\ \tilde{M}_G^{\Gamma_1^2} + \tilde{M}_G^{\Gamma_2^2} - \tilde{M}_G^{\Gamma_2} - M_G^2 + \tilde{M}_G^{\Gamma_1} + M_G^1 &= 0\end{aligned}$$

Equilibre cellule E_3

$$\begin{aligned}\tilde{R}_x^{\Gamma_2^3} + \tilde{R}_x^{\Gamma_3^3} + \tilde{R}_x^{\Gamma_2} + R_x^2 + \tilde{R}_x^{\Gamma_3} + R_x^3 &= 0 \\ \tilde{R}_y^{\Gamma_2^3} + \tilde{R}_y^{\Gamma_3^3} + \tilde{R}_y^{\Gamma_2} - R_y^2 + \tilde{R}_y^{\Gamma_3} + R_y^3 &= 0 \\ \tilde{M}_G^{\Gamma_2^3} + \tilde{M}_G^{\Gamma_3^3} + \tilde{M}_G^{\Gamma_2} + M_G^2 + \tilde{M}_G^{\Gamma_3} + M_G^3 &= 0\end{aligned}$$

La minimisation de chaque fonctionnelle permet de déterminer explicitement chacune des résultantes et moments sur chaque interface puis de remonter à la distribution d'effort sur ces interfaces.

On constate que les équations d'équilibre pour une cellule sont identiques en résultante et moment, de même que la forme des trois fonctionnelles à minimiser. C'est pourquoi dans la suite, on s'intéresse à la résolution explicite d'une seule minimisation (celle sur R_x). Les trois contraintes portant sur les résultantes selon x permettent d'exprimer les trois inconnues R_x^4 , R_x^3 et R_x^2 en fonction des R_x^1 et des données.

$$\begin{aligned}R_x^2 &= R_x^1 + \tilde{R}_x^{\Gamma_1^2} + \tilde{R}_x^{\Gamma_2^2} - \tilde{R}_x^{\Gamma_2} + \tilde{R}_x^{\Gamma_1} \\ R_x^3 &= -(R_x^1 + \tilde{R}_x^{\Gamma_2^3} + \tilde{R}_x^{\Gamma_3^3} + \tilde{R}_x^{\Gamma_2} + \tilde{R}_x^{\Gamma_1^2} + \tilde{R}_x^{\Gamma_2^2} - \tilde{R}_x^{\Gamma_2} + \tilde{R}_x^{\Gamma_1} + \tilde{R}_x^{\Gamma_3}) \\ R_x^4 &= -R_x^1 + \tilde{R}_x^{\Gamma_1^4} + \tilde{R}_x^{\Gamma_1^1} - \tilde{R}_x^{\Gamma_1} - \tilde{R}_x^{\Gamma_4}\end{aligned}$$

Soit en condensant les écritures :

$$\begin{aligned}R_x^2 &= R_x^1 + R_d^2 \\ R_x^3 &= -(R_x^1 + R_d^3) \\ R_x^4 &= -R_x^1 + R_d^4\end{aligned}$$

La fonctionnelle devient alors :

$$\sum_{i=1}^4 (R_x^i)^2 = (R_x^1)^2 + (R_x^1 + R_d^2)^2 + (R_x^1 + R_d^3)^2 + (-R_x^1 + R_d^4)^2$$

En dérivant par rapport à R_x^i , on obtient l'expression suivante :

$$R_x^1 = -\frac{1}{2}(R_d^2 + R_d^3 + R_d^4)$$

On obtient donc explicitement l'expression des différentes résultantes et moments exprimés en G en fonction des résultantes et moments déjà connus.

$$\begin{aligned} R_x^1 &= -\frac{1}{2}(R_d^2 + R_d^3 + R_d^4) \\ R_x^2 &= \frac{1}{2}(R_d^2 - R_d^3 - R_d^4) \\ R_x^3 &= \frac{1}{2}(R_d^2 - R_d^3 + R_d^4) \\ R_x^4 &= \frac{1}{2}(R_d^2 + R_d^3 + 3R_d^4) \end{aligned}$$

Une fois connus les résultantes et moments associés aux corrections, la distribution d'effort est obtenue en posant

$$\underline{P}_i = (a\phi_1(s) + b\phi_2(s))\underline{N}_2 + \frac{c}{mes(\Gamma_i)}\underline{N}_1$$

où a, b, c sont inconnues et $\underline{N}_1, \underline{N}_2$ représentent respectivement la tangente et normale à l'interface Γ_i . Les fonctions ϕ_1 et ϕ_2 sont judicieusement choisies de façon à ce que les inconnues s'interprètent directement comme les résultantes et moment en G centre de gravité de la cellule super-macro. On impose donc que ϕ_1 et ϕ_2 soient affines et vérifient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} \phi_1(s) ds &= 1 \\ \int_{\Gamma_i} \phi_2(s) ds &= 0 \\ \int_{\Gamma_i} \phi_1(s) s ds &= 0 \\ \int_{\Gamma_i} \phi_2(s) s ds &= 1 \end{aligned}$$

avec $s = \underline{GM} \cdot \underline{N}_1$

Une fois les différentes distributions d'efforts obtenues, on effectue le même procédé pour chaque cellule comprise dans la cellule super-macro. Chaque cellule est à nouveau divisée en 4 et le procédé de minimisation et prédiction est poursuivi, jusqu'à atteindre la taille minimale des cellules super-macro (taille des cellules macro élémentaires) (cf. Figure B.6).

L'algorithme suivant 5 permet de faire un bilan de la procédure suivie pour construire des efforts en équilibre .

On peut montrer que dans le cas de chargements super-macro pour lesquels il serait possible de construire une contrainte affine, la procédure permet d'obtenir la solution exacte. Cependant, dans le cas d'un chargement affine selon la tangente aux interfaces super-macro équilibrant la cellule super-macro, la distribution obtenue n'est pas uniformément répartie. Ceci est un inconvénient de la procédure récursive.

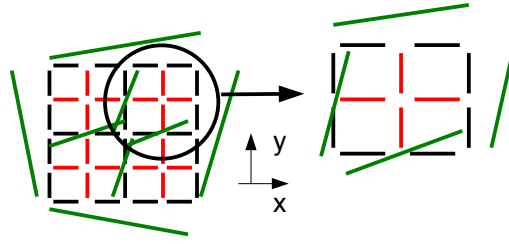


Figure B.6: Procédure récursive de construction des efforts

Algorithme 5 Construction d'efforts en équilibre**Initialisation :** Découpage d'une cellule super-macro en 4**Tant que :** Taille macro non atteinte **faire**

1. Construction d'une prédiction P sur chaque interface
2. Ecriture des résultantes et moments au centre de gravité de la cellule initiale
3. Construction d'une correction Q sur chaque interface intérieure
 - Calcul des résultantes et moments sur ces interfaces par minimisation de 3 fonctionnelles
 - Détermination de la distribution sur chaque interface
4. Découpage de chaque cellule en 4

Fin Tant que

Pour améliorer la construction analytique des efforts, il est possible d'abandonner la procédure récursive au profit d'une minimisation globale sur la cellule super-macro. On perd ainsi l'avantage d'une détermination explicite. La résolution entraîne un coût de calcul plus important correspondant à la résolution du système. Le principe de construction est le même que celui détaillé précédemment.

Remarque : On a choisi de minimiser 3 fonctionnelles par mesure de simplicité. Théoriquement, il serait plus correct de définir une norme permettant de minimiser une unique fonctionnelle étant donné que les contraintes sur les moments couplent à la fois les moments et les résultantes. La recherche d'une telle fonctionnelle n'a pas été menée.

2.2.4 Reconstruction des déplacements

Non seulement la construction des efforts est plus difficile que celle des déplacements, mais une difficulté supplémentaire apparaît lorsque l'on souhaite reconstruire le multiplicateur $\widetilde{W}_E^M$ à partir de la distribution ainsi obtenue. En effet, le problème super-macro étant résolu, les distributions affines super-macro sont connues et par l'opérateur d'approximation, il est possible de remonter aux efforts sur chaque interface. Cependant, la relation de comportement homogénéisée inverse ne définit les multiplicateurs macro qu'à un mouvement de corps rigide près. Il reste donc à déterminer ces mouvements de corps rigides.

Une nouvelle procédure est donc définie de manière à reconstruire des multiplicateurs

continus dans la cellule super-macro en déterminant les mouvements de corps rigides adéquats. On pose $\widetilde{W}_\omega^{SM} = \mathbf{L}_\omega^F(\underline{F}_\omega^{SM}) - \underline{W}_{\omega,d}^{SM} + \underline{W}_{\omega,s}^{SM}$ le déplacement généralisé associé au problème super-macro. En prenant un effort super-macro test nul sur toutes les interfaces sauf une, on montre que $\widetilde{W}_\omega^{SM}$ est continu sur chaque interface super-macro.

On va donc chercher à déterminer une distribution de multiplicateurs macro continue et pour lesquels la projection sur une interface super-macro soit égale à $\widetilde{W}_\omega^{SM}$.

Remarque : L'ajout d'un mouvement de corps rigide à chaque cellule élémentaire ne modifie pas le travail super-macro.

On cherche donc $\widetilde{W}_E^M$ sous la forme $\widetilde{W}_E^M = \mathbf{L}_E^F(\underline{F}_{E,h}^M - \underline{F}_{E,d}^M) + \underline{W}_{E,s} = \underline{W}_{E,d} + r_E(\underline{M})\alpha_E$ où α_E représentant les mouvements de corps rigide est indéterminé, $\underline{W}_{E,d}$ est un déplacement connu à ce stade.

La solution du problème doit vérifier :

- La continuité sur les interfaces intérieures soit $\forall \Gamma_{EE'} \in \omega$,

$$\underline{W}_{E,d} + r_E(\underline{M})\alpha_E = \underline{W}_{E',d} + r_{E'}(\underline{M})\alpha_{E'}$$

- La partie affine extraite des déplacements sur le bord $\Gamma_{\omega\omega'}$ est égale à $\widetilde{W}_\omega^{SM}$, soit en utilisant le projecteur $P_{\Gamma_{\omega\omega'}}^{MM}$ permettant d'extraire la partie affine d'une distribution macro donnée sur une interface super macro

$$P_{\Gamma_{\omega\omega'}}^{MM}(\widetilde{W}_{\Gamma_{\omega\omega'}}^M) = \widetilde{W}_\omega^{SM}$$

On dispose à ce stade de $3 * n_{cel}$ inconnues (n_{cel} nombre de cellules) et $4 * n_i + 4 * n_I$ équations (n_i est le nombre d'interfaces intérieures et n_I est le nombre d'interfaces super macro du bord $\partial\omega$). Le problème est sur-déterminé (trop d'équations par rapport au nombre d'inconnues). On cherche alors une solution approchée au sens des moindres carrés.

Trouver α_E tel que

$$\sum_{\Gamma_{EE'}} (\underline{W}_{E,d} + r_E(\underline{M} \in \Gamma_{EE'})\alpha_E - \underline{W}_{E',d} - r_{E'}(\underline{M} \in \Gamma_{EE'})\alpha_{E'})^2$$

soit minimale

sous les contraintes : $\forall \Gamma_{\omega\omega'} \in \partial\omega$

$$P_{\Gamma_{\omega\omega'}}^{MM}(\widetilde{W}_{\Gamma_{\omega\omega'}}^M) - \widetilde{W}_\omega^{SM} = 0$$

La minimisation de cette fonctionnelle conduit au système :

$$\sum_{\Gamma_{EE'}} (R_{E|\Gamma_{EE'}} \delta\alpha_E - R_{E'|\Gamma_{EE'}} \delta\alpha_{E'})^T (W_{dE} - W_{dE'} + R_{E|\Gamma_{EE'}} \alpha_E - R_{E'|\Gamma_{EE'}} \alpha_{E'}) = 0$$

Une autre technique, envisageable dans tous les cas mais plus coûteuse, est de minimiser une fonctionnelle faisant intervenir d'une part les déplacements pour les interfaces intérieures et le déplacement sur le bord issu de la relation de comportement et d'autre part un déplacement inconnu dont la partie super macro coïncide avec les déplacements généralisés donnés.

2.3 Conclusion

On constate que la résolution en effort super-macro est complexe et pose des difficultés théoriques et pratiques nettement plus difficiles que les approches en multiplicateur. Au vu des quelques simulations effectuées, les résultats sont médiocres et nécessiteraient une analyse plus fine de la stratégie de construction employée. La résolution en déplacement est plus performante et pose moins de difficulté de développement. Elle reste pour l'instant la voie retenue pour l'application au modèle microscopique.

Compléments sur les simplifications des problèmes microscopiques

Outre les difficultés engendrées par le problème macroscopique, le nombre de problèmes micro à résoudre peut entraîner un surcoût de calcul inutile. L'idée suivie est de prendre en compte la taille et le nombre des sous-structures pour supprimer des calculs quasiment identiques. On se place ici au niveau de l'étape linéaire et on propose une première technique permettant de ne pas effectuer les résolutions de tous les problèmes micro.

1 Définition de la simplification

L'étape linéaire consiste à résoudre successivement les trois problèmes suivants :

1. Problème micro 1

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } (\underline{u}_{E1}, \underline{W}_{E1}) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \text{ qui vérifient :} \\
 & \quad \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_{E0} \times \mathcal{W}_{E0}, \\
 & \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_{E1}) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_{E1} \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = \\
 & \quad \int_{\Omega_E} \left(\underline{f}_d|_{\Omega_E} \cdot \underline{u}_E^* + \text{Tr} (\mathbf{K}(\alpha \Delta T) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) \right) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} (\widehat{\underline{F}}_E + k^- \widehat{\underline{W}}_E) \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma
 \end{aligned}$$

2. Problème macro

$$\begin{aligned}
 & \text{Trouver } \widetilde{\underline{W}}^M = \{\widetilde{\underline{W}}_E^M\}_{E \in \mathbf{E}} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M \text{ qui vérifie :} \\
 & \quad \forall \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \in \mathcal{W}_{ad,0}^M, \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \left(\mathbf{L}_E^F(\widetilde{\underline{W}}_E^M) + \underline{F}_E^M \right) d\Gamma = \\
 & \quad \sum_{E \in \mathbf{E}} \int_{\partial\Omega_E \cap \partial\Omega_F} \widetilde{\underline{W}}_E^{M*} \cdot \underline{F}_d d\Gamma
 \end{aligned}$$

3. Problème micro 2

$$\begin{aligned}
& \text{Trouver } (\underline{u}_{E2}, \underline{W}_{E2}) \in \mathcal{U}_E \times \mathcal{W}_E \text{ qui vérifient :} \\
& \quad \forall (\underline{u}_E^*, \underline{W}_E^*) \in \mathcal{U}_{E0} \times \mathcal{W}_{E0}, \\
& \quad \int_{\Omega_E} \text{Tr} (\mathbf{K} \varepsilon(\underline{u}_{E2}) \varepsilon(\underline{u}_E^*)) d\Omega + \int_{\partial\Omega_E} k^- \underline{W}_{E2} \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma = \\
& \quad \int_{\partial\Omega_E} k^- \widetilde{\underline{W}}_E^M \cdot \underline{W}_E^* d\Gamma
\end{aligned}$$

L'idée suivie part du constat que, compte tenu des tailles des sous-structures, la solution des problèmes micro varie très peu d'une sous-structure à l'autre principalement dans les zones à faibles gradients. Afin de réduire le coût de calcul, l'amélioration consiste à ne calculer la solution que sur quelques sous-structures et utiliser le résultat obtenu pour reconstruire la solution sur le reste des sous-structures. En effet, dans les zones à faibles gradients, les sous-structures ne sont introduites que pour obtenir un grand nombre de chemins de fissuration. Introduire autant de sous-structures n'est pas nécessaire lorsqu'aucune fissure n'est apparue dans cette zone.

La première étape consiste à déterminer les sous-structures sur lesquelles les calculs micro vont être effectués. Pour cela on utilise le pavage super-macro qui raffine automatiquement les zones proches des bords (zones *a priori* à fort gradient). Ainsi dans les zones éloignées des bords, des regroupements peuvent mettre en jeu plusieurs dizaines de milliers de sous-structures (Figure C.1).

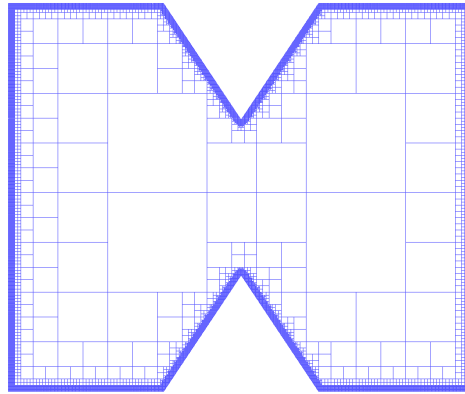


Figure C.1: Regroupement des sous-structures en cellule super-macro. Sur les bords, une cellule super-macro coïncide avec une cellule macro.

Sur chaque cellule super-macro, on détermine des sous-structures nommées "cellules de Gauss" et notées $E_i^g \in \mathbf{E}^g$ pour lesquelles les problèmes micro seront résolus de manière

traditionnelle (Figure C.2). Ces cellules sont choisies près des points de Gauss de la cellule super-macro de manière à bien calculer le travail introduit dans le problème macro.

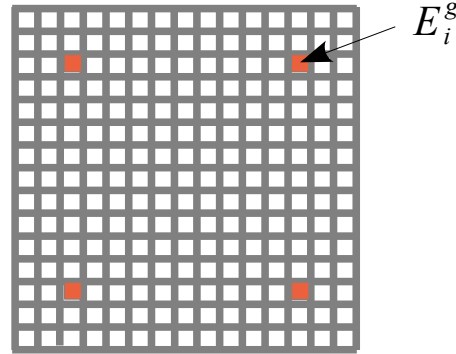


Figure C.2: Détermination des cellules de Gauss à l'intérieur d'une cellule super-macro.

La difficulté est ensuite de reconstruire la solution sur les autres sous-structures. Dans un premier temps, une technique similaire à celle des éléments finis est utilisée pour interpoler la solution sur chaque sous-structure. On associe donc à chaque cellule E_i^g une fonction de forme $\Phi_{E_i^g}(E)$. Cette fonction vaut 1 sur toute la sous-structure E_i^g et 0 sur les autres cellules de Gauss $E_j^g, j \neq i$. La fonction ainsi définie est discontinue entre chaque sous-structure et constante par sous-structure (Figure C.3).

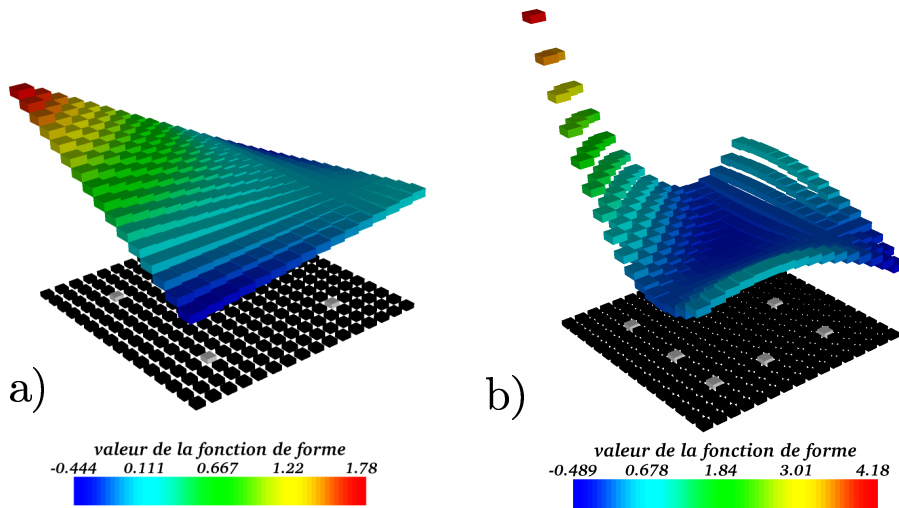


Figure C.3: Fonctions de forme utilisées pour l'interpolation dans une cellule super-macro.
a) Fonction linéaire, b) Fonction quadratique

On note $\underline{u}_{E_i^g}$ la solution du problème micro 1 ou 2 sur une cellule de Gauss. La solution sur une cellule quelconque sera donc simplement recherchée sous la forme :

$$\underline{u}_E(\underline{M}) = \sum_{E_i^g \in \mathbf{E}^g} \Phi_{E_i^g}(E) \underline{u}_{E_i^g}(\underline{M})$$

$\Phi_{E_i^g}(E)$ est évalué au centre de gravité de la sous-structure E et est constante sur la sous-structure. Deux types d'interpolations ont été testées (interpolation linéaire nécessitant 4 cellules de Gauss et interpolation quadratique nécessitant 8 cellules de Gauss).

Remarque : Si, sur une cellule super-macro la solution varie linéairement, alors le résultat obtenu avec une interpolation linéaire sera exact, quelle que soit la forme de la solution micro par sous-structure. En particulier dans le cas d'une solution périodique, les gradients d'une sous-structure à l'autre sont récupérés par l'interpolation tandis que les variations microscopiques se retrouvent dans les solutions micro $\underline{u}_{E_i^g}(\underline{M})$. Ainsi l'utilisation de l'interpolation dans des zones où l'évolution macroscopique de la solution est linéaire ou quadratique est tout à fait appropriée.

L'intégration de l'approximation dans la stratégie multiéchelle nécessite d'interpoler à la fois la solution sur les sous-structures mais aussi les efforts reconstruits par la direction de recherche. Ainsi, les efforts et déplacements sur les interfaces entourant une sous-structure E seront déterminés pour chaque problème micro sous la forme :

$$\underline{F}_E(\underline{M}) = \sum_{E_i^g \in \mathbf{E}^g} \Phi_{E_i^g}(E) \underline{F}_{E_i^g}(\underline{M})$$

$$\underline{W}_E(\underline{M}) = \sum_{E_i^g \in \mathbf{E}^g} \Phi_{E_i^g}(E) \underline{W}_{E_i^g}(\underline{M})$$

Cette interpolation de toutes les quantités est nécessaire pour éviter des divergences de l'algorithme de résolution.

2 Performances de l'approximation

L'interpolation définie précédemment a été mise en oeuvre dans le logiciel écrit en C++. Les fonctions quadratiques et linéaires ont été testées. Il apparaît que la forme quadratique permet d'obtenir une solution satisfaisante dans de nombreuses situations contrairement à l'approximation linéaire. Des exemples simples sont présentés pour mettre en évidence les performances de l'approximation aussi bien en terme de convergence vers une solution approchée qu'en terme de temps de calcul. Une extension très simple, obtenue par extrusion de cellules 2D, permet de simuler des structures 3D.

Taux de restitution en présence d'interfaces avec contact

Cette annexe apporte des précisions sur la manière de définir le taux de restitution d'énergie en présence d'interfaces avec contact. Elle explique notamment l'intérêt d'introduire un problème résiduel.

1 Problème de référence

On considère une structure stratifiée Ω soumise à un champ de température ΔT et un chargement appliqué sur la surface extérieure $\partial\Omega$. On note $\partial\Omega_u$ le bord soumis à des déplacements imposés et $\partial\Omega_F$ la zone soumise à des efforts imposés. Les équations associées à ce problème sont rappelées :

$$\sigma n = \underline{F}_d \text{ sur } \partial\Omega_F \quad (\text{D.1})$$

$$\underline{u} = \underline{u}_d \text{ sur } \partial\Omega_u \quad (\text{D.2})$$

$$\sigma = \mathbb{K}(\varepsilon - \alpha \Delta T) \quad (\text{D.3})$$

$$\text{div}(\sigma) = 0 \quad (\text{D.4})$$

$$\varepsilon = \varepsilon(\underline{u}) \quad (\text{D.5})$$

On suppose que plusieurs fissures existent à l'intérieur de la structure (ces surfaces représentent le délaminage local, la fissuration transverse ou les ruptures de fibres). On note S_c l'ensemble de ces surfaces. Ces surfaces peuvent être en contact avec frottement. Les efforts sur ces surfaces sont nécessairement continus. On note $\underline{F}_c$ la valeur des efforts sur les surfaces S_c .

$$\sigma n = \underline{F}_c \quad \text{sur } S_c \quad (\text{D.6})$$

Les efforts $\underline{F}_c$ sont considérés comme connus afin d'introduire un problème linéaire défini par les équations [D.5](#) et [D.6](#). Lorsque la dégradation évolue, la zone S_c augmente et le taux de restitution peut être déterminé.

2 Expression du taux de restitution

Le taux de restitution d'énergie est défini comme suit :

$$G = -\frac{d\Pi}{dS} = -\frac{d(U - W)}{dS}$$

où Π est l'énergie potentielle, W le travail des efforts extérieurs, U l'énergie interne élastique et dS un incrément de dégradation qui se traduit par l'apparition d'une nouvelle surface de rupture.

L'énergie élastique du problème défini ci-dessus est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\alpha} \Delta T) d\Omega \quad (\text{D.7})$$

L'expression du travail est la suivante :

$$W = \int_{S_c} \underline{F}_c \cdot \underline{u} d\Gamma + \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d \cdot \underline{u} d\Gamma \quad (\text{D.8})$$

En suivant les articles de (Nairn, 2000a), une écriture permettant de simplifier le calcul du taux de restitution peut être obtenue en considérant un problème résiduel ou complémentaire.

On note $\underline{u}^0, \boldsymbol{\sigma}^0$ la solution du problème initial D.5. Sur S_c^0 les efforts sont tels que :

$$\boldsymbol{\sigma}^0 \underline{n} = \underline{F}_c^0$$

On considère ensuite le problème pour lequel la zone dégradée uniquement a évolué. La solution dans cette configuration est donnée par les champs $\underline{u}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. Sur la nouvelle surface S_c , l'effort normal est tel que :

$$\boldsymbol{\sigma} \underline{n} = \underline{F}_c$$

Le problème final ainsi défini peut être vu comme la superposition de la solution du problème initial et d'un problème complémentaire (Figure D.1). Pour ce problème, le domaine Ω est soumis à un champ de température nul ainsi qu'à des conditions aux limites nulles sur les bords $\partial\Omega_F$ et $\partial\Omega_u$. On note $\underline{u}^r$ et $\boldsymbol{\sigma}^r$ la solution de ce problème complémentaire. Cette solution est telle que sur S_c

$$\boldsymbol{\sigma}^r \underline{n} = \underline{F}_c - \underline{F}_c^0$$

Ainsi en sommant la solution initiale et la solution complémentaire, on obtient rigoureusement la solution $\underline{u}, \boldsymbol{\sigma}$ qui vérifie les équations du problème final.

$$\underline{u} = \underline{u}^0 + \underline{u}^r \quad (\text{D.9})$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^r \quad (\text{D.10})$$

Le problème complémentaire est donc défini par :

$$\boldsymbol{\sigma}^r \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_F \quad (\text{D.11})$$

$$\underline{u}^r = 0 \text{ sur } \partial\Omega_u \quad (\text{D.12})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \mathbb{K} \boldsymbol{\varepsilon}^r \quad (\text{D.13})$$

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}^r) = 0 \quad (\text{D.14})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^r) \quad (\text{D.15})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^r \underline{n} = \underline{F}_c - \underline{F}_c^0 \text{ sur } S_c \quad (\text{D.16})$$

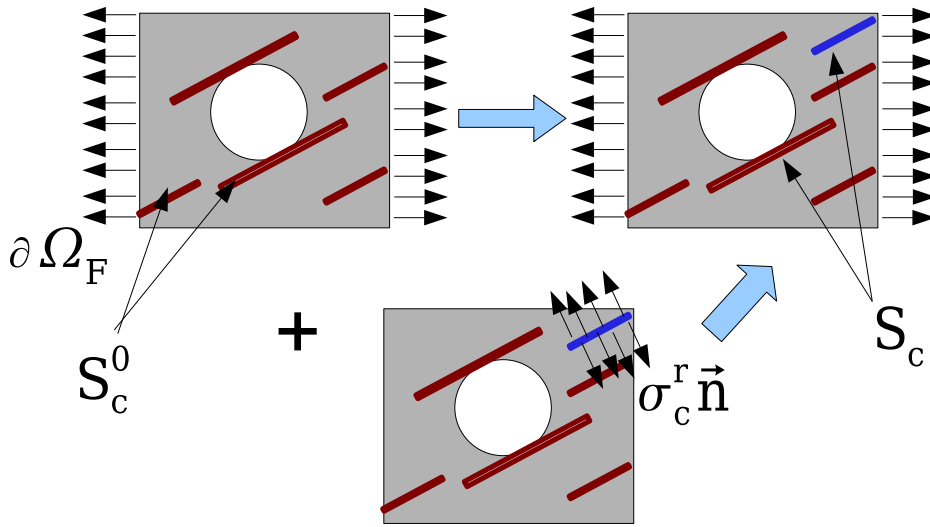


Figure D.1: Superposition du problème initial et du problème résiduel

L'énergie de déformation dans la configuration finale est alors donnée par la relation

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma} \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^r) \mathbf{K}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^r) d\Omega \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^0 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^r \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^0 d\Omega + \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^r d\Omega
 \end{aligned}$$

Certains termes obtenus sont ensuite exprimés en fonction des efforts sur les bords du domaine. En utilisant la relation de comportement du problème complémentaire et en considérant $\underline{u}^r$ comme champ virtuel pour le problème initial, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^r d\Omega &= \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^0 \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^r) d\Omega \\
 &= \int_{\partial\Omega_F} \boldsymbol{\sigma}^0 \underline{n} \underline{u}^r d\Gamma + \int_{S_c} \boldsymbol{\sigma}^0 \underline{n} \underline{u}^r d\Gamma \\
 &= \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d \underline{u}^r d\Gamma + \int_{S_c} \underline{F}_c^0 \underline{u}^r d\Gamma
 \end{aligned}$$

De la même manière, en considérant $\underline{u}^r$ comme champ virtuel pour le problème com-

plémentaire, on obtient la relation :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^r \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^r d\Omega &= \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^r \boldsymbol{\varepsilon}(\underline{u}^r) d\Omega \\ &= \int_{S_c} \underline{F}_c^r \underline{u}^r d\Gamma \end{aligned}$$

En utilisant ces différentes expressions et celle du travail [D.8](#), l'énergie potentielle est donnée par l'expression :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^0 d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d \underline{u}^0 d\Gamma - \int_{S_c} \underline{F}_c^0 \underline{u}^0 d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{S_c} \underline{F}_c^r \underline{u}^r d\Gamma - \int_{S_c} \underline{F}_c^r \underline{u}^0 d\Gamma \quad (\text{D.17})$$

$$\Pi = \Pi^0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^r \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^r d\Omega - \int_{S_c} \underline{F}_c^r \underline{u}^0 d\Gamma \quad (\text{D.18})$$

où

$$\Pi^0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^0 \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^0 d\Omega - \int_{\partial\Omega_F} \underline{F}_d \underline{u}^0 d\Gamma - \int_{S_c} \underline{F}_c^0 \underline{u}^0 d\Gamma$$

est l'énergie potentielle dans la configuration initiale.

Le taux de restitution est alors simplement défini par :

$$G = \frac{d}{dS} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^r \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^r d\Omega + \int_{S_c} \underline{F}_c^r \underline{u}^0 d\Gamma \right) \quad (\text{D.19})$$

Cette formule est valable dans le cas où l'avancée de la dégradation est infinitésimale. Il est possible de définir un taux de restitution discret valable pour une avancée finie de la surface S_c .

$$G = \frac{1}{\Delta S} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}^r \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^r d\Omega + \int_{S_c} \underline{F}_c^r \underline{u}^0 d\Gamma \right) \quad (\text{D.20})$$

Cette expression est vraie pour un champ de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^r$ statiquement admissible. Connaissant une contrainte approchée $\boldsymbol{\sigma}_a^r$ statiquement admissible et un déplacement approché $\underline{u}_a^r$ cinématiquement admissible, il est possible de déterminer un encadrement du taux de restitution discret.

$$- \frac{\Delta \Pi_a}{\Delta S} \leq \Delta G \leq \frac{\Delta \Gamma_a}{\Delta S} \quad (\text{D.21})$$

où

$$\begin{aligned} \Delta \Pi_a &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\varepsilon}_a^r \mathbf{K} \boldsymbol{\varepsilon}_a^r d\Omega - \int_{S_c} (\underline{F}_c - \underline{F}_c^0) \underline{u}^0 d\Gamma - \int_{S_c} (\underline{F}_c - \underline{F}_c^0) \underline{u}_a^r d\Gamma \\ \Delta \Gamma_a &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr } \boldsymbol{\sigma}_a^r \mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_a^r d\Omega + \int_{S_c} \underline{F}_{ca}^r \underline{u}^0 d\Gamma \end{aligned}$$